Étude du couplage dynamique de composants du bâtiment par synthèse modale

Isabelle Blanc

▶ **To cite this version:**

Isabelle Blanc. Étude du couplage dynamique de composants du bâtiment par synthèse modale. Energie électrique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1991. Français. NNT : 1991ENMP0280 . pastel-00654308

HAL Id: pastel-00654308
https://pastel.hal.science/pastel-00654308

Submitted on 21 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

L'ECOLE DES MINES DE PARIS

pour l'obtention du diplôme de
Doctorat en Energétique

Etude du couplage dynamique de composants du bâtiment par synthèse modale

Par Isabelle Blanc Sommereux

Soutenue le 19 Décembre 1991 devant le jury composé de:

MM.	***P.Reboux***	*Président*
	G.Achard	*Rapporteur*
	A.Neveu	*Rapporteur*
	G.Lefebvre	*Examinateur*
	JL.Plazy	*Examinateur*
	P.Wouters	*Examinateur*

Remerciements

En cette fin de travail de recherche, mes remerciements vont:

à Mr Paul Reboux, Professeur à l'Ecole des Mines de Paris, qui a accepté de présider mon jury de thèse.

à Mr Gilbert Achard, Professeur à l'Université de Savoie à Chambéry, pour l'intérêt qu'il a manisfesté pour ce travail de recherche en acceptant d'en être le rapporteur.

à Mr Jean Louis Plazy pour sa participation au jury de thèse ainsi qu' à l'Agence Française pour la Maîtrise de l'Energie pour avoir participé financièrement à ces recherches.

à Mr Peter Wouters, coordinateur du groupe de recherche européen PASSYS, pour son intérêt aux travaux dans le domaine de l'analyse modale et pour sa participation au jury de thèse.

à Mr Alain Neveu, Maître de Conférence à l'Ecole des Mines, pour son soutien scientifique communiqué avec enthousiasme et qui a accepté d'assurer la fonction de rapporteur.

à Mr Gilles Lefebvre, responsable du groupe GISE, pour m'avoir, dès le DEA, conseillée et judicieusement guidée au cours de cette thèse.

à Mr Jérome Adnot, Professeur à l'Ecole des Mines de Paris et Directeur Adjoint du Centre d'Energétique Paris, pour m'avoir procuré le cadre de travail pour mener à bien cette thèse.

à Mr Bernard Flament pour son soutien amical prodigué en de multiples occasions.

à l'équipe du Centre d'Energétique et bien sûr à celle de l'ACMIP qui ont contribué à l'excellente convivialité des contacts entre chercheurs.

et enfin à Emmanuel Blanc qui m'a continuellement soutenue et encouragée dans l'accomplissement de cette thèse.

Résumés

L'objet de ce travail de recherche consiste à développer une méthode d'analyse et d'interprétation permettant de prévoir, sans simulation, l'effet du couplage de zones et de composants passifs sur le comportement d'un bâtiment.

Cette méthode d'analyse du couplage des zones repose sur la synthèse modale. La technique de raccordement des modèles est basée sur le recouvrement d'une partie commune aux zones couplées. Cette analyse, à partir de cas simples de bâtiments, a permis d'identifier trois types de couplage dynamique: rapide, lent et glissant. L'analyse du couplage a également rendu possible la formulation de règles concernant la réduction des modèles locaux.

L'association de la synthèse modale et de la réduction des modèles de zones conduit à une bonne reconstitution du comportement d'un bâtiment multizone. La validation de cette approche a été conclue par la simulation du comportement thermique de bâtiments basée sur des modèles synthétisés réduits.

The aim of this research is to develop a method to analyse without any simulation, the coupling effect of zones and passive components on the building behaviour.

This zone coupling analysis relies on the modal synthesis. The coupling technique is based on the overlapping of a common area for the coupled zones. This analysis, performed on simple cases of buildings, has allowed to identify three types of dynamic coupling: fast, slow and sliding. The coupling analysis has also enabled the formulation of rules concerning the reduction of local models.

This association of the modal synthesis technique and the reduction of modal models has led to a good representation of the behaviour for multizone buildings. The validation of this method has been concluded by performing simulations with reduced models obtained with the modal synthesis technique.

MOTS CLES

SYNTHESE MODALE - COUPLAGE - BATIMENT MULTIZONE - REDUCTION - SIMULATION SIMPLIFIEE

Table des matières

1 Introduction **15**

2 Quels outils de conception pour le bâtiment et les composants solaires ? 17
2.1 La conception architecturale et ses contraintes 17
2.1.1 La contrainte énergétique dans le processus de conception 18
2.1.2 Architecture climatique et Architecture solaire passive 20
2.1.3 Les Vitrages 22
2.1.4 L'inertie 26
2.1.5 Les composants solaires passifs 26
2.1.6 Conclusion 28
2.2 Les outils de conception 29
2.2.1 Outils d'évaluation 29
2.2.2 Outils Guides 30
2.2.3 Les Outils de Conception simplifiés 31
2.2.4 Conclusion 34

3 Typologie de raccordements de modèles **35**
3.1 Le raccordement de modèles 35
3.1.1 Modèle mathématique 35
3.1.2 Comment décomposer ? 36
3.1.3 Comment raccorder? 36
3.2 Type de couplage 37
3.2.1 Couplage bord à bord 37
3.2.2 Couplage par recouvrement 39
3.2.3 Couplage avec pliage 41
3.3 Conditions aux limites 42

4 Synthèse modale: outil d'analyse du couplage des composants d'un bâtiment 45
4.1 Rappels sur l'analyse modale dans le cadre de la thermique du bâtiment . . 46
4.1.1 Hypothèses et terminologie 46
4.1.2 Construction de la base modale à partir du champ de températures . 50
4.1.3 Modèle modal discrétisé 53
4.1.4 Equations modales pour des modèles couplés 54
4.1.5 Intérêt de la base modale 55
4.2 Principe de la synthèse modale 56
4.2.1 Juxtaposition 57
4.2.2 Connexion 57

4.2.3 Assemblage 60
4.2.4 Reconstitution de la forme modale du modèle de synthèse 61

5 Synthèse modale dans le cas du couplage par recouvrement 63
5.1 Juxtaposition de modèles 63
5.2 Connexion 65
5.3 Connexion: conditions aux limites locales de 1ère espèce 69
5.4 Assemblage des modèles 72
5.4.1 Equivalence du modèle de synthèse et du modèle modal global . . . 72
5.4.2 Diagonalisation de la matrice $N^{-1}F$ 76
5.4.3 Reconstitution du modèle modal d'un bâtiment à partir des modèles modaux de zones 77
5.5 Confrontation d'un modèle obtenu par synthèse modale avec un modèle modal global correspondant 79
5.5.1 Analyse modale et réduction des modèles locaux de zones 81
5.5.2 Modèle modal issu de la synthèse 85
5.6 Conclusion 89

6 Mise en oeuvre de la synthèse modale comme outil d'analyse du couplage des composants 91
6.1 Quelques cas de base 91
6.1.1 Cas du "couplage dynamique fort", 1 seule couche de béton pour la paroi mitoyenne 91
6.1.2 Cas bizone, mur mitoyen constitué de 3 couches dont 1 isolante . . . 116
6.1.3 Couplage entre une zone à forte inertie et une zone à faible inertie . 129
6.1.4 Bâtiment bizone dont les murs sont identiques 138
6.1.5 Conclusions 146
6.2 Exemple d'analyse du couplage de zones sur un bâtiment bizone 147
6.2.1 Analyse du couplage 148
6.2.2 Réduction du modèle de synthèse 160
6.3 Conclusion 167

7 Simulation et Validation 169
7.1 Simulation modale 169
7.2 Simulation avec un modèle de synthèse réduit 170

8 Conclusions 175

A Unicité de la solution pour l'équation de la chaleur 177
A.1 Hypothèses 177
A.2 Problème 178
A.3 Résolution 178
A.3.1 Principe du maximum 179
A.3.2 Unicité de la solution. 180

B Orthogonalisation de vecteurs propres par la méthode de Gram-Schmidt 183

C Diagonalisation de la matrice $N^{-1}F$ **185**
C.1 Diagonalisation de la matrice NF^{-1} 185
C.2 Eléments propres de $N^{-1}F$ 186
C.3 Relation entre X vecteurs propres de synthèse et $\mathcal{X}$ vecteurs propres globaux 186
C.4 Identification des matrices $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$ 186

D Le Logiciel COMFIE **189**
D.1 Principe du couplage de zones avec COMFIE 189
D.1.1 Les températures équivalentes comme sollicitations de couplage . . . 189
D.1.2 Le simulateur dans COMFIE 191

E Intégration de l'équation d'état modale **195**
E.1 Forme intégrale générale 195
E.2 Discrétisation temporelle des sollicitations 196

F Spectre de réponse à une sollicitation indicielle **197**

G Equivalence du modèle de synthèse et du modèle modal global **201**
G.1 Equivalence de la méthode de synthèse (sans réduction des modèles) avec l'approche modale directe. 201
G.1.1 Détermination des coefficients de décomposition 204
G.2 Relation entre les états globaux $\mathcal{X}$ et les états locaux X 206

Nomenclature

Indices	se référant à:
e	sollicitation sur les frontières extérieures
k	modèle modal local
c	frontière où est appliquée la sollicitation de couplage
r	frontière de raccordement
A	modèle assemblé
i	mode
d	partie décomposable d'un mode
r	partie résiduelle d'un mode

Exposants	se référant à:
g	régime glissant du champ de température
d	régime dynamique du champ de température

Conventions

$\tilde{}$: les variables ou fonctions relatives au modèle global sont surlignées par un $\tilde{}$.

Index

assemblage, 57

coefficients de décomposition, 62
composant solaire passif, 21
connexion, 57
couplage, 35
    bord à bord, 37
    pliage, 41
    recouvrement, 39

frontière, 36

inertie, 26
interface, 36

juxtaposition, 57

raccordement, 35
régime
    dynamique, 51
    permanent glissant, 51, 54

spectre de réponse indicielle, 197

termes de raccordement, 78

zone, 35

Chapitre 1

Introduction

Le contexte économique a rendu indispensable, depuis plusieurs années, des progrès dans l'analyse énergétique du comportement des bâtiments; on dispose pour ce faire d'un éventail assez large de programmes de simulation des évolutions thermiques. Le choix est plus limité en ce qui concerne les outils de conception. En effet, la simulation est un outil qui ne peut finalement intervenir qu'assez tard dans le processus de conception, et qui permet plutôt de valider des choix que d'aider à les faire. Il existe en fait un manque d'outils qui soient à la fois simples, modulaires, adaptables au contexte et évolutifs. C'est notamment dans le cadre de l'architecture dite "climatique" que le besoin se fait le plus sentir. L'architecture climatique, en s'adaptant à son environnement et en visant des critères de confort thermique et d'économies d'énergies, doit tirer judicieusement partie de l'énergie solaire, au moyen de techniques "passives". L'utilisation optimale de l'énergie solaire dans le bâtiment consiste à capter cette énergie, à la stocker et à la restituer au moment propice au moyen du bâtiment lui même ou au moyen de composants. Pour étudier cette utilisation optimale de l'énergie solaire dans le bâtiment, une représentation multizone se révèle indispensable pour rendre compte de phénomènes tels que l'ensoleillement inégal des zones, l'échange interzone ou le comportement thermique particulier de certaines zones tels les composants solaires passifs. Certains composants passifs sont des éléments courants présents dans tout bâtiment: la fenêtre, le mur. D'autres sont surajoutés explicitement: les vérandas ou les murs capteurs par exemple. L'effet des premiers est analysé dans le cadre du comportement global du bâtiment, monozone ou multizone. L'analyse multizone peut être utilisée, moyennant certaines précautions, pour étudier l'influence des seconds, en les représentant de façon approchée comme une zone supplémentaire.

L'objet de ce travail de recherche consiste à développer une méthode d'analyse et d'interprétation permettant de prévoir, sans simulation, l'effet du couplage de zones et de composants passifs sur le comportement d'un bâtiment. Cette méthode d'analyse du couplage de zones et de composants passifs repose sur la méthode de la synthèse modale. La technique de raccordement des zones étudiée dans cette thèse est basée sur le principe du couplage par recouvrement des zones couplées.

Chapitre 2

Quels outils de conception pour le bâtiment et les composants solaires ?

Parmi les contraintes auxquelles est soumise la conception architecturale, la contrainte énergétique ne peut pas être négligée et doit être intégrée très tôt dans le processus de conception. Pour ce faire, l'architecte et l'ingénieur thermicien doivent non seulement accroître leur coopération mais également disposer d'outils leur permettant d'évaluer les performances thermiques des bâtiments au cours de l'évolution du projet afin de guider les choix de conception qui sont faits.

2.1 La conception architecturale et ses contraintes

La conception architecturale est un processus complexe car soumis à un grand nombre de contraintes d'environnement: techniques, économiques, culturelles, temporelles, normatives, géographiques,... [Adolphe][1], [Dehausse][2].

- Ces contraintes **techniques** sont d'ordre :
  - mécanique
  - acoustique
  - olfactif
  - visuel
  - énergétique
- Les contraintes **économiques** couvrent les coûts d'investissement, d'exploitation, de maintenance.
- Les contraintes **temporelles** sont des contraintes fortes car elles concernent la durée de la conception et du chantier.

[1] Adolphe, L., 1991, *L'aide à la décision technique dans la conception architecturale: Application à l'Energétique du bâtiment,* Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris.

[2], Dehausse, R., 1988, *Energétique des bâtiments Tomes 1 et 2. Situation, Besoins,* Ouvrage coordonné par R. Dehausse, Pyc Edition.

- Les contraintes **culturelles** sont liées à un contexte social (usage du bâtiment) et au mode de vie de ses occupants.
- Les contraintes **normatives** régissent :
  - l'urbanisme
  - la salubrité
  - la protection incendie
  - l'isolation phonique
  - la stabilité des ouvrages
  - les performances énergétiques (DTU, règles THK, THB, THC)
  - l'aération des logements ...
- Les contraintes du **site** sont liés à :
  - l'environnement (type de zone : urbaine, rurale,...)
  - le climat (ensoleillement, température, humidité, vents ...)
  - les pratiques locales (habitudes architecturales).

Le projet architectural vise un rôle de synthèse parmi ces contraintes diverses et variées.

La gestion de ces contraintes repose sur une information volumineuse et quelques fois contradictoire.

Le problème de conception relève donc d'une approche **multicritère** et la solution mérite le plus souvent l'appelation de "compromis" plutôt que celle de solution optimale. L'Architecte est souvent le seul à statuer, pour les projets de moyenne voire de grande échelle, sur ces choix fondamentaux. Il est certain, vue la complexité du problème, que le concepteur aura tendance à privilégier certains aspects. Tout naturellement se pose la question de la place de la contrainte énergétique dans le processus de conception.

2.1.1 La contrainte énergétique dans le processus de conception

La contrainte énergétique du bâtiment est importante dans le processus de conception car les besoins de chauffage et la qualité du confort des ambiances sont directement liés à la prise en compte de cette contrainte.

L'énergétique intéragit largement avec d'autres composantes de la conception tels que l'éclairage et l'acoustique.

Elle est par ailleurs étroitement liée à son site.

Jean Robert Mazaud et Catherine Parant [Energétique][3] retracent l'empreinte du contexte énergétique dans l'histoire de l'urbanisme et de l'architecture. Trois grandes périodes sont proposées:

1. Une période prémoderne jusqu'à la fin du XIXème siècle. Cette période peut être qualifiée par le terme ADEQUATION car elle vise à l'équilibre entre besoin et réponse (architecturale) au sein d'un microsystème. L'architecture vernaculaire est un exemple d'architecture qui a souvent su rationnellement proposer des solutions efficaces pour assurer un certain niveau de confort avec par exemple:

[3] op. cit.

- des bâtiments compacts protégés au nord par des annexes pour limiter les déperditions de chaleur.
- des ouvertures principales orientées au sud et des petites ouvertures au nord.
- des plantations persistantes pour atténuer les vents dominants et des arbres à feuilles caduques pour apporter l'ombrage en été sans empêcher l'apport du soleil d'hiver.
- etc

2. Une période moderne jusqu'aux années 70 caractérisée par l'abondance du charbon et des produits pétroliers. Cette période correspond à une ABSENCE de prise de conscience de la contrainte énergétique.

3. La période actuelle, ponctuée de crises pétrolières (1973, 1979, 1990), générant une crise des ressources. Parallèlement il s'effectue une prise de conscience de l'accumulation des gaz et fumées émis par l'ensemble des activités humaines. Le secteur du bâtiment est l'un des premiers concernés car il est le plus fort consommateur d'énergie en France: 43% du total avec 76 millions de tonnes d'équivalent pétrole en 1989.

   La mise en place du début de la réglementation thermique des habitations en France en 1974 a annoncé la prise de conscience au niveau national de la maîtrise de l'Energie dans le secteur de l'habitat.

   Le Coefficient "B" en 1982 a fait suite au coefficient "G" (calcul des déperditions thermiques) en introduisant la notion de gains internes et solaires. Puis c'est au tour du coefficient "C" de compléter le calcul des besoins réglementaires par la prise en compte du rendement des installations et des équipements pour quantifier les consommations. Dans ce contexte réglementaire, le projet architectural ne peut négliger la dimension énergétique.

   Mais est-ce parler d'architecture que de parler de Tonne Equivalent Pétrole? Ne pourrait-on poser simplement la question de "l'utilité de la maîtrise des facteurs énergétiques en Architecture ?" comme le soulignent très justement Jean Robert Mazaud et Catherine Parant.

   C'est la notion d'INTERACTION qui exprimerait le mieux le nouveau rapport Architecture - Energie, à l'heure actuelle. Il est important de déceler les différentes étapes du processus de conception de l'Architecte au cours desquelles la contrainte énergétique doit figurer pour être prise en compte correctement.

L'European Passive Solar Handbook [Achard,Gicquel][4] propose une schématisation du processus de conception en 6 étapes :

1. Plan Masse : plan, forme, accès, intégration au site.
2. Organisation des volumes intérieurs et du plan : taille des espaces.
3. Traitement des façades : distribution et taille des fenêtres, aspect esthétique.
4. Choix constructifs : structure porteuse, remplissage.

[4] Achard, P., et R., Gicquel, 1986, *European Passive Solar Handbook: preliminary edition, Basic principles and concepts for passive solar architecture*, CEC, DG XII, Luxembourg.

5. Finitions et matériaux ne participant pas à la structure (menuiseries, isolation, fermetures, ...)

6. Equipements (chauffage, eau chaude sanitaire, éclairage ...).

Avant que l'urgence de la maîtrise de l'énergie ne soit reconnue, la contrainte énergétique était généralement reléguée en dernière étape du processus de conception, c'est-à-dire à l'étape du choix des équipements.

Or comme le remarque Luc Adolphe[5] "les phases amonts de conception ont une importance hégémonique sur les grands choix architecturaux et techniques". En effet, c'est dans les premières étapes de conception que se font les choix topologiques et géométriques, les choix d'insertion dans le site et d'orientation, le choix des formes et des espaces ainsi que les choix constructifs au niveau du gros-oeuvre.

Et c'est précisément au cours de ces premières étapes de conception que se précisent le niveau des performances énergétiques du futur bâtiment.

C'est ainsi que l'architecture climatique est plus que jamais d'actualité car elle est basée sur le principe même de l'interaction bâtiment et climat local.

2.1.2 Architecture climatique et Architecture solaire passive

Qu'est-ce que l'architecture climatique (ou bioclimatique)? Il semblerait que l'usage de ce terme soit ignoré par les dictionnaires (le Petit Robert et le Larousse).

Il faut alors la dénicher selon Pierre Diaz Pedregal dans Archi de soleil (Parenthèse, 1978, p.42) où Patrick Bardou et Varoujan Arzoumanian définissent le Bioclimatisme comme étant le "Principe de conception architecturale visant à utiliser, au moyen de l'architecture elle-même, les éléments favorables au climat en vue de la satisfaction des exigences du confort thermique".

Les variables climatiques intervenant dans les problèmes énergétiques de l'habitat sont essentiellement la température extérieure, le rayonnement solaire et l'humidité puis à un degré moindre le rayonnement infrarouge de l'atmosphère et le vent.

L'architecture climatique, en utilisant les éléments du climat (ensoleillement hivernal et ventilation estivale), et en se protégeant de ses effets néfastes (excès de soleil d'été, vents dominants hivernaux ...) s'apparente, sous nos climats, à l'architecture dite "solaire passive".

N'importe quel bâtiment peut être conçu de manière à profiter du soleil pour le chauffage et à l'exclure pour empêcher l'échauffement excessif grâce à une conception architecturale adaptée. Ce sont ces principes qui définissent l'"architecture solaire passive".

Elle repose sur plusieurs concepts de base [Le Paige et al][6]. En période hivernale (de chauffage) ces concepts sont les suivants :

- **Capter** l'énergie solaire.

  L'énergie solaire peut être captée grâce à des matériaux transparents tels que le verre ou même les isolants transparents. Il s'agit du principe de l'effet de serre : le verre est transparent au rayonnement solaire de courte longueur d'onde qui est finalement absorbé par les parois. La chaleur est ensuite réémise par rayonnement infrarouge

[5] op. cit.

[6] Le Paige, M., Gratia, E., de Herde, A., 1986, *Guide d'aide à la conception bioclimatique Architecture et Climat.* CRA, Université Catholique de Louvain, Belgique.

de grande longueur d'onde mais ne peut traverser le vitrage car celui-ci est opaque au rayonnement de longueur d'onde supérieur à 2.5 microns. Le rayonnement solaire est donc piégé, entraînant l'élévation de la température intérieure du bâtiment.

- **Stocker** cette chaleur :

  Le phénomène de stockage du rayonnement solaire est possible grâce à l'inertie du bâtiment qui permet l'utilisation déphasée des gains solaires à des moments propices.

- **Distribuer** la chaleur dans la totalité de l'espace habité en bénéficiant de la convection naturelle (thermocirculation d'air) et du rayonnement infrarouge grande longueur d'onde.

- **Conserver** grâce à une isolation thermique suffisante et à une bonne compacité du bâtiment qui limite les surfaces d'échange avec l'extérieur.

En période estivale les concepts de l'architecture solaire passive visent à diminuer les apports calorifiques par une **protection** efficace contre le rayonnement solaire (stores et volets par exemple), par un **déphasage** des apports solaires grâce à l'inertie et par la **dissipation** de la chaleur par une ventilation adaptée.

Un exemple frappant de ventilation estivale réussie emprunté à l'urbanisme, est celui du vieux Nice [Petitcollot][7]:

> Le vieux Nice bénéficie d'un micro climat local généré par l'urbanisme même de la ville. La particularité de ce quartier réside dans le caractère stable et tempéré de son milieu climatique. L'étroitesse des rues empêche tout rayonnement solaire durable sur les parois des immeubles, les étages supérieurs étant protégés par d'importants débords de toiture. Mais ce qui constitue son confort thermique exceptionnel par rapport à d'autres quartiers de Nice, c'est le courant d'air naturel traversant les ruelles et les immeubles selon une orientation bien précise des ruelles. Les points d'eau environnants le quartier : la mer d'un côté, la rivière de l'autre, constituent les sources froides de cette circulation d'air créant ainsi une brise légère à travers le vieux Nice.

L'Architecture climatique ou l'architecture solaire passive plus précisément, repose donc sur une conception architecturale qui favorise essentiellement l'ensoleillement hivernal, voire printanier selon les climats, ainsi que la mobilisation de l'inertie du bâtiment. Il s'agit donc de caractéristiques intrinsèques au bâtiment qui font l'objet de décisions très précoces dans le processus de conception de l'architecte.

Les caractéristiques des matériaux des parois conditionnent le niveau d'inertie du bâtiment et la proportion de vitrages sud est déterminante pour le captage de l'énergie solaire. Le choix des vitrages, leur dimensionnement, leur orientation d'une part, et d'autre part l'inertie du bâtiment, sont donc des caractéristiques essentielles de l'habitat solaire passif. Elles sont également à la base de tout composant solaire passif (mur Trombe, vérandas, ...). Avant d'aborder les composants solaires passifs, les caractéristiques des vitrages et de l'inertie ainsi que leur modélisation sont maintenant détaillées.

[7] Petitcollot, C., 1991, *Le vieux Nice, un exemple remarquable de climatisation urbaine*, Séminaire Architecture (Bio)climatique, AFME 4/5 Juillet 1991.

2.1.3 Les Vitrages

La transparence du verre lui confère une place essentielle dans l'habitat. La première fenêtre connue est située à Pompeï et il faudra attendre 2000 ans pour passer de la simple paroi au double vitrage [Maillard][8].

Les fonctions des parois vitrées sont celles de la transparence (passage de la lumière, éclairage, visibilité), de l'isolation (thermique, accoustique, pluie, neige, vent, insectes, ...) de la résistance mécanique (chocs, vent).

Les exigences à l'heure actuelle concernant le verre sont telles que le verre au même titre qu'une paroi opaque doit être isolant (du point de vue thermique, accoustique ...) tout en conservant sa fonction essentielle de transparence.

Caractéristiques thermiques du verre

Le rayonnement solaire qui atteint la terre est composé d'ultra-violet (UV), d'infra-rouge (IR) et de rayonnement visible. Les longueurs d'onde du rayonnement solaire sont comprises entre 0.25 et 4 microns.

Le graphique sur la figure 2.1 donne la distribution spectrale du rayonnement solaire direct sur une surface normale au rayonnement.

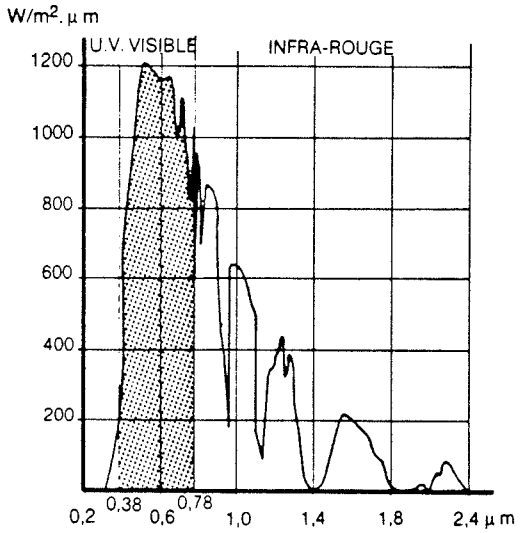


Figure 2.1: Distribution spectrale du rayonnement solaire direct sur une surface normale au rayonnement, courbe de Parry Moon

La quantité d'énergie transportée par un rayonnement est fonction de sa longueur d'onde. Ce graphique nous indique la répartition énergétique du rayonnement solaire direct qui est sensiblement de :

[8] Maillard, R., 1991, *Les évolutions des vitrages* Les rendez-vous du CSTB: Le Bâtiment à l'âge du verre.

- 1% pour l'ultraviolet
- 53% pour le visible
- 46% pour l'infra-rouge.

Un matériau recevant un rayonnement d'une certaine longueur d'onde peut se comporter de trois façons différentes :

- Il peut réfléchir le rayonnement : la longueur d'onde du rayonnement ne sera généralement pas modifiée.
- Il peut transmettre le rayonnement : la longueur restera aussi la même, et dans ces deux cas, le matériau restera à la même température.
- Par contre s'il absorbe le rayonnement, sa température augmentera et deviendra supérieure à celle de l'environnement : il y aura par ailleurs émission d'un rayonnement dont la ditribution spectrale dépendra de la température du matériau.

Dans le cas général, ces phénomènes interviennent simultanément et les quantités de rayonnement réfléchi, transmis, absorbé et émis sont déterminées par des facteurs optiques :

- le facteur de réflexion (ρ) dépend seulement de la surface recevant le rayonnement incident.
- le facteur de transmission (τ) dépend lui du matériau, de sa structure, et bien sûr de l'épaisseur traversée.
- le facteur d'absorption (α) comme le facteur d'émission (ε) appelé aussi émissivité sont aussi des propriétés de surface.

Ces facteurs sont liés par certaines relations, pour une même longueur d'onde :

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \tag{2.1}$$

$$\alpha = \varepsilon \tag{2.2}$$

Mais ces relations ne sont vraies en toute rigueur que si les facteurs optiques sont complètement identifiés. Un facteur optique est complètement identifié quand on a défini à la fois la géométrie du rayonnement et son domaine spectral.

On distingue trois domaines spectraux sur lesquels on définit les facteurs optiques suivants:

- le facteur optique peut être intégré sur le domaine spectral visible (ou "lumineux" : entre 0.38 et 0.78 μm)
- le facteur optique peut être intégré sur le domaine solaire (entre 0.35 et 2.1 μ m)
- le facteur optique peut être intégré sur le domaine thermique (infra-rouge) qui correspond à la gamme 5 à 50 μm. (Ce domaine est celui de l'émission d'un corps noir porté à une température de 20°C).

Facteur solaire

Le facteur solaire d'un vitrage est le rapport entre l'énergie totale entrant dans le local à travers ce vitrage et l'énergie solaire incidente. Cette énergie totale est la somme de l'énergie solaire entrant par transmission directe et de l'énergie cédée par le vitrage à l'ambiance intérieure à la suite de son échauffement par absorption énergétique. Cette répartition du rayonnement solaire est repris sur la Figure 2.2.

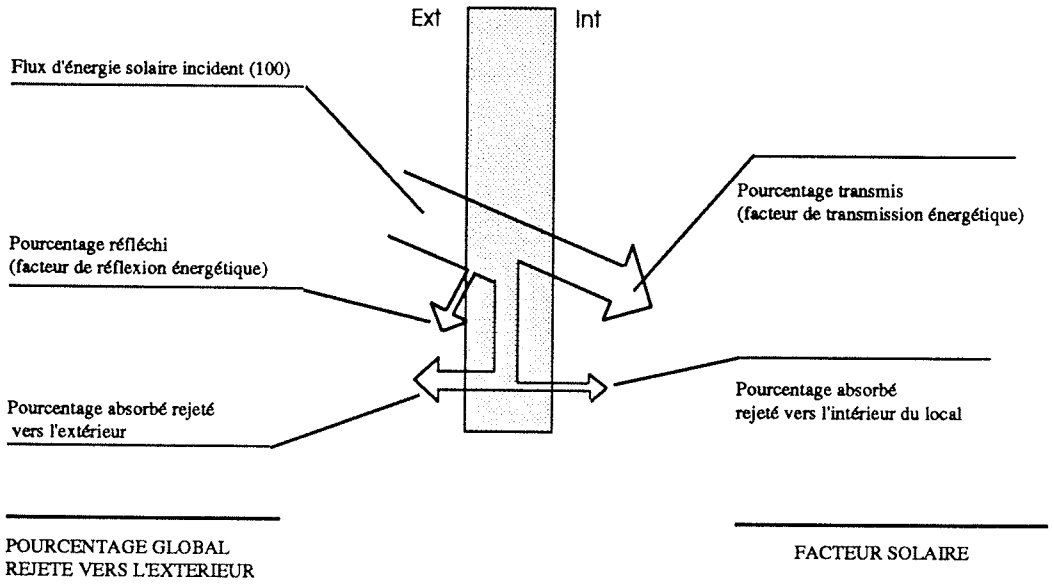


Figure 2.2: Répartition du rayonnement solaire incident sur un vitrage

Les facteurs optiques sur le domaine solaire dépendent de l'angle d'incidence du rayonnement solaire. On distingue deux termes pour le rayonnement solaire: le rayonnement direct et le rayonnement diffus. Le facteur de transmission d'un vitrage, τ est fonction de l'angle d'incidence du rayonnement direct. Cet angle d'incidence varie en fonction de l'heure de la journée et également au cours de l'année. Les courbes donnant le facteur de transmission en fonction de l'angle d'incidence varient selon le type de vitrage (voir figure 2.3).

Le rayonnement solaire diffus est souvent considéré comme un rayonnement isotropre et le facteur de transmission correspondant à ce type de rayonnement n'est pas spéculaire. En intégrant le facteur de transmission direct entre 0^0 et 90^0, on obtient un facteur de transmission diffuse indépendant de l'angle d'incidence.

Le rayonnement transmis est ensuite souvent considéré comme isotrope (réparti uniformément dans toutes les directions).

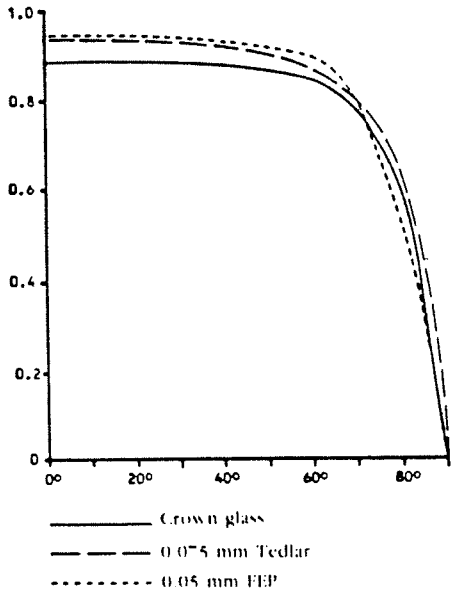


Figure 2.3: Facteur de transmission solaire en fonction de l'angle d'incidence, [Achard, Gicquel]

Types de vitrage

De nombreux types de vitrage existent :

- simple, double vitrage
- vitrage peu émissif
- vitrage réfléchissant
- vitrage isolant (deux glaces qui enferment une lame d'air déshydraté)

Le choix d'un vitrage doit correspondre à un usage adapté au climat car leurs caractéristiques thermiques et optiques sont sensiblement différentes. Le vitrage réfléchissant par exemple sera indiqué pour atténuer les surchauffes estivales mais d'autre part il aura l'inconvénient d'atténuer également l'ensoleillement hivernal. Le vitrage est destiné à devenir le matériau du futur pour le bâtiment en raison d'importantes innovations qui se profilent à l'horizon de l'an 2000 [Buffat,Lerbet][9], avec par exemple:

- l'électrochromisme: Une tension électrique appliquée à ces vitrages, active un phénomène de transfert d'ions ce qui a pour conséquence de modifier l'opacité ou la transparence du matériau.
- les cristaux liquides: Une tension électrique appliquée à ces vitrages, modifie l'orientation de leurs molécules entrainant, de même, l'opacité ou la transparence du matériau.

[9] Buffat, B., Lerbet, F., 1991, *Les vitrages électrochromes* La Recherche, Avril 1991, vol 22, 434-442.

2.1.4 L'inertie

L'inertie thermique est une notion fondamentale dans la conception architecturale dite climatique car c'est elle qui assure en grande partie le confort de tels habitats, l'architecture climatique étant avant tout celle du confort.

Selon [Le Paige et al][10], "L'inertie thermique est une notion qui recouvre à la fois l'accumulation de chaleur et la restitution de celle-ci avec un déphasage en fonction des caractéristiques physiques dimensionnelles et d'environnement de la paroi de stockage". Une grande inertie thermique permet par exemple la récupération de la chaleur du jour afin de la restituer la nuit.

L'inertie permet d'atténuer les surchauffes et grâce à la restitution déphasée des gains solaires de diminuer les besoins de chauffage. L'inertie est d'ailleurs un paramètre clé de toute technique visant à limiter les surchauffes.

Ce qui importe lorsqu'il s'agit de confort d'un habitat ce n'est pas la valeur moyenne de la température intérieure mais bien les valeurs extrêmes.

Par contre augmenter la masse thermique au delà d'un certain seuil ne conduit pas à une augmentation significative des performances thermiques. Des résultats de performances thermiques de bâtiments existants, [CEE,1991][11], confirment cette limitation. Elle a également été mise en évidence par [Lefebvre,1987][12] au cours de l'élaboration de la corrélation H2E[13] qui relie les besoins de chauffage à l'inertie du bâtiment.

L'inertie est une notion difficile à quantifier[14] et l'analyse modale, comme nous le verrons plus loin dans le texte, est un outil précieux pour évaluer l'inertie des bâtiments et de ses zones (Chapitre 4.1).

Ayant détaillé les éléments caractéristiques essentiels des composants solaires passifs, c'est-à-dire le verre et l'inertie, ceux-ci sont maintenant abordés.

2.1.5 Les composants solaires passifs

Un composant solaire passif est un élément architectural qui contribue à caractériser un bâtiment comme étant solaire passif. Bien qu'il soit un peu difficile de découper un bâtiment en composants, on peut néanmoins distinguer deux types principaux de composants: les composants à gain direct et ceux à gain indirect. Cette distinction repose sur l'association ou non d'inertie au composant lui même.

- **Gain direct**

  L'exemple le plus courant de gain direct est celui des vitrages dont l'orientation est correctement choisie (à savoir l'orientation sud pour l'hémisphère nord). L'inertie des pièces vitrées assure la fonction du stockage de l'énergie captée par les vitrages (voir figure 2.4).

---

[10] op. cit.

[11] CEE, 1991, *Architectures solaires en Europe, Commission des Communautés Européennes*, Edisud, France.

[12] Lefebvre, G., 1987, *Analyse et réduction modales d'un modèle de comportement thermique de bâtiment*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI.

[13] Habitat Econome en Energie

[14] L'inertie n'est pas observable, seuls ses effets le sont

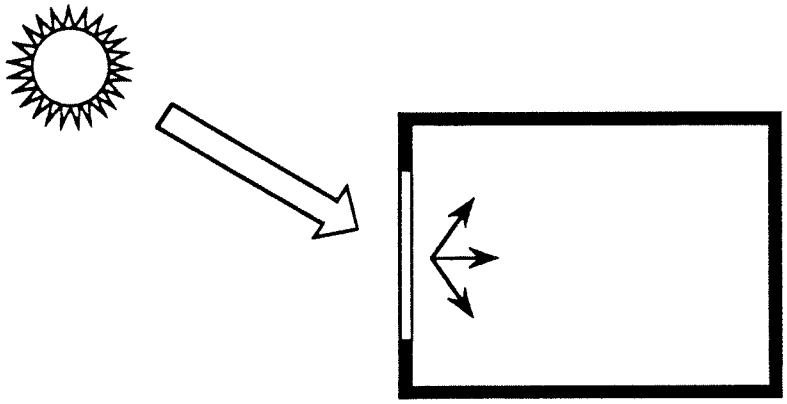


Figure 2.4: Gain direct

- **Gain indirect**

  Le rayonnement solaire est stocké dans ces composants avant d'être restitué au bâtiment lui même par conduction, rayonnement infrarouge et/ou convection naturelle. Les murs Trombe, les murs capteurs, les vérandas, sont les exemples les plus courants de composants solaires passifs à gains indirects.

  – Le mur Trombe est constitué d'un mur, dont la capacité calorifique est importante pour favoriser le stockage, placé derrière un matériau capable de capter le rayonnement solaire. Ce matériau peut être un vitrage ou encore un isolant transparent (figure 2.5).

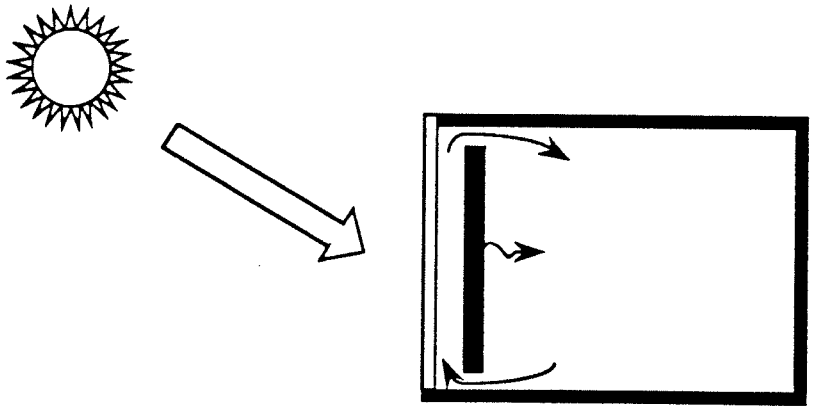


Figure 2.5: Gain indirect: le mur Trombe

  – Le principe de la véranda est similaire à celui du mur Trombe. L'espace entre le(s) vitrage(s) et le mur stockeur est assimilable à une zone habitable. Le sol de la véranda participe alors aussi au stockage de l'énergie solaire (figure 2.6).

    Les vérandas ou serres bénéficient d'une large diffusion aussi bien dans le cadre de constructions neuves que dans le cadre de réhabilitation de bâtiments: par exemple, près des trois quarts des opérations décrites dans Project Monitor[15] en bénéficient. Les économies d'énergie engendrées par l'intégration ou l'ajout

[15] Project Monitor est un projet financé par la CEE sur des opérations passives. Les performances de 49 bâtiments européens sont publiés sous forme de brochures

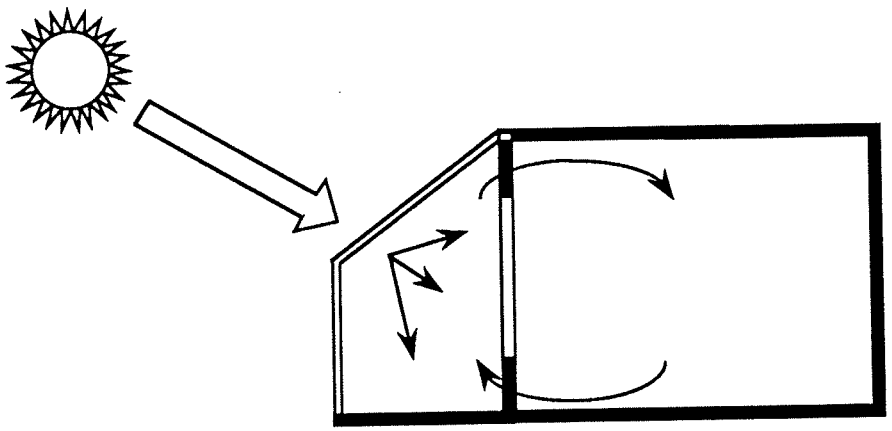


Figure 2.6: Gain indirect: la véranda

d'une véranda à un bâtiment d'habitation ou aux bâtiments de type tertiaire, sont liées à trois phénomènes:

* L'effet tampon (diminutions des déperditions à travers la paroi séparant le bâtiment de la véranda).
* Le bénéfice de l'effet de serre (échauffement de l'air de la serre) restitué par conduction vers les pièces chauffées adjacentes.
* Le préchauffage de l'air neuf transitant par la serre.

La véranda est le lieu privilégié de l'effet de serre: l'énergie solaire entrant dans un local à travers un vitrage est absorbée par les parois intérieures (sol et mur mitoyen) qui, s'échauffant, réémettent des rayonnements calorifiques situés principalement dans le lointain infrarouge (rayonnement grande longueur d'onde > 5 μm). Les vitrages, mêmes clairs, sont pratiquement opaques à de tels rayonnement, l'énergie solaire par les vitrages se trouve donc piégée dans la zone qui a tendance à s'échauffer.

2.1.6 Conclusion

Parmi les obstacles recensés dans un rapport de recherche [Steemers][16] de la CEE, et qui empêchent actuellement l'adoption à grande échelle de l'énergie solaire passive, trois sont à noter:

- **l'ignorance** : les architectes, concepteurs, constructeurs et clients ignorent souvent les avantages de l'énergie solaire passive et les principes de cette conception.

- **l'absence de demande** : les prescripteurs des constructions, les acquéreurs et les utilisateurs n'exigent généralement pas des constructions permettant des économies d'énergie.

- **l'indisponibilité des matériaux** : les matériaux nécessaires à l'énergie solaire passive peuvent parfois être plus difficiles à trouver que ceux nécessaires aux systèmes conventionnels (par exemple les isolants transparents).

[16] Steemers, T., 1989-1990, *Rapport de Recherche CCE DG XII, EUR 13094 EEC.*

Le premier obstacle doit retenir toute notre attention car il implique un effort important dans la diffusion des connaissances sur les principes de l'architecture climatique.

Cette diffusion des connaissances sur les principes de l'architecture climatique ne peut s'effectuer à l'heure actuelle que par des guides de conception destinés aux architectes et aux ingénieurs ou mieux encore par des outils de conception informatisés et accessibles à un grand nombre de professionnels. La panoplie des outils de conception disponibles à l'heure actuelle est maintenant abordée.

2.2 Les outils de conception

Mettre à la disposition d'architectes des outils leur permettant d'intégrer et d'améliorer la performance thermique des projets nécessite des outils intervenant dès la phase de l'esquisse. En effet, comme mentionné précédemment, c'est à ce stade que sont prises des décisions fondamentales quant à la performance thermique et au confort du futur bâtiment.

2.2.1 Outils d'évaluation

De nombreux **outils d'évaluation** des performances thermiques pour le bâtiment existent. Ils peuvent être classés selon le degré de complexité de la méthode employée :

- méthodes détaillées : Il s'agit de simulations reposant sur des discrétisations spatiales comme les différences finies ou de décomposition temporelle comme les facteurs de réponse ou fréquentielle comme les méthodes harmoniques.
- méthodes simplifiées : Ces méthodes visent à réduire le temps de calcul et à proposer des sorties synthétiques (besoins de chauffage mensuels ou annuels, indice de confort) facilitant l'analyse du comportement thermique du bâtiment.

Ces méthodes simplifiées sont en fait le plus souvent dénommées **outils de conception** car leur rapidité d'éxécution devrait leur permettre d'être utilisées dès la phase d'esquisse d'un projet. Elles nécessitent peu de paramètres d'entrée, ces paramètres étant encore peu détaillés. Outils de conception et outils d'évaluation sont clairement distingués par [Balcomb][17] qui classe ces outils selon deux types :

- les outils d'évaluation
- les outils "guides"

Les outils d'évaluation sont ceux qui permettent d'estimer les performances thermiques d'un projet déjà bien spécifié. Une modélisation fine de celui-ci est possible et une description détaillée de l'**utilisation** conventionnelle du bâtiment (scénario d'occupation, scénario de ventilation, etc...) peut être fixée. Une représentation horaire des données météorologiques est généralement associée à de tels outils. ESP , DOE2, TRNSYS, TAS, etc... sont des exemples de ce type d'outils.

[17], Balcomb, D., 1986, *Design tools for passive solar applications*, Proceedings of the 1986 Annual Meeting ASES, Boulder Colorado.

Des procédures de validation de ces codes se sont révélées nécessaires et ont été élaborées au sein d'équipes internationales [PASSYS, AIE[18]] pour déterminer la pertinence des algorithmes employés et pour préciser leurs limites de validité.

Il s'agit d'outils développés par des équipes de recherches et généralement utilisés par un cercle restreint d'experts. Il ne peuvent prétendre s'intégrer tels quels à la démarche de conception de l'architecte qui a besoin d'outils orientant ses choix de conception. Ce sont les outils "guides".

2.2.2 Outils Guides

Les outils guides sont des outils qui, avant toute prise de décision concernant la conception, proposent et recommandent des règles de base simples à mettre en oeuvre. Les plus courantes sont les règles de l'art dont quelques exemples sont maintenant donnés:

- D. Balcomb propose deux règles simples:
  - respecter le ratio, surface de vitrage / surface de parois internes d' 1/6 de façon à favoriser l'effet d'inertie.
  - peindre les murs de couleur claire pour favoriser une distribution harmonieuse du rayonnement énergétique dans les espaces intérieurs entre les différentes parois.
- Les diagrammes solaires sont d'autres outils guides : ils donnent la position du soleil (altitude et azimuth) selon l'heure de la journée et pour différentes saisons. Les masques proches ou lointains du futur bâtiment sont reportés pour évaluer le pourcentage d'ombre portée.
- Un autre outil guide est celui utilisé au sein du concours architectural européen: "Working in the City". Cet outil de conception, "LT Method" [CEE,1988][19](the Lighting and Thermal value of glazing) a été développé pour permettre aux architectes de comparer diverses options.

  Parmi les décisions de l'architecte, celle du choix de la forme du bâtiment (orientation, section, profondeur, etc...) et celle du choix des façades (surface et disposition des vitrages) sont parmi les premières considérées. Il était souhaitable que l'impact énergétique de ces décisions soit connu de l'architecte dans le cadre de ce concours. Cet outil se présente sous la forme de 5 séries (pour 5 zones climatiques européennes) de 8 graphes chacune.

  Ces graphes donnent les besoins de chauffage en fonction de l'orientation des façades. Un modèle mathématique simple a été utilisé pour évaluer les besoins de chauffage annuels par m^2 de surface au sol en fonction des conditions climatiques de la zone, de l'orientation du bâtiment et du type de vitrage (simple ou double).

Ces outils guides présentent l'intérêt majeur d'être utilisés au moment des prises de décisions initiales concernant le futur bâtiment et même parfois avant, ce qui n'est pas le cas des outils d'évaluation.

La figure 2.7 schématise le niveau d'intervention de ces deux types d'outils.

[18] Agence Internationale de l'Energie

[19] CEE, 1988, *Travailler en Ville, Conditions du concours et procédure, Concours d'idées architecturales des communautés européennes.*

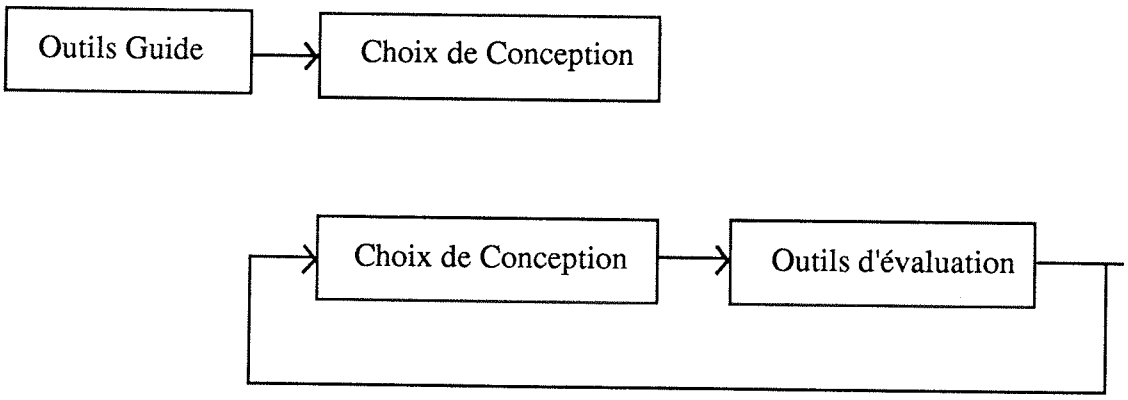


Figure 2.7: Outil guide et outil d'évaluation

2.2.3 Les Outils de Conception simplifiés

Des méthodes simplifiées dénommées "outils de conception simplifiés" font l'objet de recherche au sein de groupes européens [PASSYS] et internationaux [ISOLDE] pour proposer au concepteur des outils plus simples et faciles d'utilisation [20] mais néanmoins suffisamment précis et souples pour s'adapter à la diversité architecturale et climatique.

On peut distinguer deux types d'outils de conception simplifiés : ceux qui reposent sur des techniques de corrélations et ceux qui utilisent des simulations simplifiées.

Les corrélations

De nombreuses méthodes basées sur des corrélations ont été développées au cours des 10 dernières années (Méthode SLR, Inutilisabilité [Monsen et al.][21] [Blanc-Sommereux][22], méthode 5000, CASAMO, méthode H2E, etc ...). Une des corrélations la plus récente est celle développée dans le cadre du projet européen PASSYS. Le projet PASSYS a choisi de construire un outil d'aide à la conception basé sur une méthode de corrélation. L'évaluation des besoins de chauffage mensuels par cette corrélation est établie à partir de paramètres caractéristiques du bâtiment, du site et du climat. La recherche de ces paramètres caractéristiques doit reposer sur une méthodologie bien précise de façon à ne conserver que les paramètres les plus influents. En s'appuyant sur la représentation modale des phénomènes thermiques, G. Lefebvre[23] a permis d'identifier les 2 paramètres statiques et dynamiques principaux qui influent sur les besoins énergétiques des bâtiments. Le premier est le GLR (Gain Load Ratio) qui est la fraction maximale des besoins déperditifs de base sur les

[20] par rapport aux outils d'évaluation reposant sur des méthodes détaillées

[21] Monsen, W. A., Klein, S. A., Beckman, W. A., 1982, *The un-utilisability design method for collector storage walls*, Solar Energy, 29, $n^0$5.

[22], Blanc Sommereux, I., 1985, *A design method for passive sunspace systems*, Master of Science, Université du Wisconsin, USA.

[23] op. cit.

apports de chaleur autres que ceux provenant du système de chauffage (apports solaires et internes). Le second est celui correspondant à l'inertie. L'inertie d'un bâtiment est représentée par la première constante de temps.

La corrélation développée au sein du groupe de recherche PASSYS, repose également sur ces deux paramètres et la recherche des coefficients de la corrélation a été effectuée sur un ensemble de climats types européens.

Néanmoins la contrainte majeure d'une corrélation subsiste : elle réside dans la limitation du domaine de validité stricte.

Les simulations simplifiées

Le principe des simulations simplifiées est totalement différent de celui des corrélations; il est proche de celui des méthodes détaillées.

Pourquoi les simulations simplifiées peuvent-elles prétendre alors être des outils de conception ? Si l'outil employé est suffisemment rapide, il peut interagir sur les choix de conception (voir figure 2.7). Un outil de conception doit être rapide et les simplifications apportées à la simulation sur les trois points suivants, lui permettent d'atteindre cet objectif:

- utilisation de données météorologiques condensées et synthétiques, "Short Reference Years" [Lund][24] par exemple, ou représentation stochastique de ces données.
- réduction de l'ordre du modèle
- sorties synthétiques permettant une analyse immédiate de la performance du bâtiment (par exemple histogrammes de températures).

Parmi les nombreux projets d'outils de conception basés sur la simulation simplifiée, on peut remarquer ISOLDE [Morck][25], le projet développé dans le cadre de l'Agence Internationale de l'Energie. Ce projet concerne le développement d'un outil de conception intégrant une base de connaissance solaire passive. L'une des conclusions de ce projet en cours de développement concerne précisément l'intégration d'une simulation simplifiée car cette méthode allie à la souplesse et à la rapidité, des possibilités d'études de sensibilité précises pouvant être éventuellement générées automatiquement grâce à une programmation orientée objet. Ce projet vise à intégrer la performance énergétique (chauffage, refroidissement) et l'éclairage naturel d'un bâtiment au cours des différentes étapes de conception. Trois niveaux d'aide à la conception ont été identifiées :

- Des conseils généraux avant toute décision (on retrouve ici la notion d'"outil guide").
- une analyse rapide (à l'aide d'une méthode du type corrélation) au niveau de l'esquisse assortie de conseils.
- une évaluation des performances reposant sur des simulations rapides permettant ainsi automatiquement des propositions de modifications fiables, car prenant en compte totalement la spécificité du projet traité et son environnement climatique.

[24] Lund, H., 1985, *Short Reference Years and Test Reference Years for E.E.C. contrat ESF-029-DK.*

[25] Morck, 1991, *IEA Task XI: Integrated Knowledge Based Solar Design Tool (Isolde)*, Proceedings of the 1991 ISES Conference Denver Colarado.

La réduction dans les simulations simplifiées La réduction de l'ordre du modèle est la phase essentielle de la simulation simplifiée car c'est elle qui permet la rapidité de la simulation tout en préservant sa précision.

Cette réduction de modèles peut être de deux types :

- Simplifications d'hypothèses physiques comme :
  - le calcul simplifié des facteurs de forme (au "prorata des surfaces")
  - l'utilisation combinée de coefficients convectifs et radiatifs
  - la non prise en compte des ponts thermiques.
  - etc
- Réductions du modèle mathématique lui-même avec, par exemple:
  - un maillage simplifié pour la méthode des différences finies
  - une réduction modale pour la représentation du champ des températures dans la base modale
  - etc

Le second type de réduction présente l'intérêt d'une réduction adaptée à chaque modèle traité.

Un exemple de simulation simplifiée: COMFIE

De nombreux travaux de recherche, effectués au Centre d'Energétique de l'Ecole des Mines sur la technique modale, ont montré l'intérêt de la représentation modale; elle offre des possibilités intéressantes en matière de réduction de modèles.

Des études sur la réduction modale des modèles de bâtiments ont été entrepris et ont permis d'établir quelques règles [Lefebvre,1987][26] qui ont d'ailleurs aboutit à l'élaboration d'un outil de conception pour les bâtiments multizones [Blanc-Sommereux, Peuportier][27]: le logiciel COMFIE.

Un algorithme du couplage de modèles modaux de zones est à l'origine de cet outil de conception [Blanc-Sommereux][28]. Chaque modèle de zone est représenté sous sa forme modale sur laquelle est effectuée une réduction à l'ordre 3. Le couplage de ces modèles modaux réduits de zone permet alors la simulation du bâtiment multizone. (la description de l'algorithme du couplage est donnée en annexe D). Cette méthode de couplage de modèles modaux réduits s'est révélée performante et fiable ce qui a amené à poursuivre des recherches (dont fait l'objet cette thèse) dans le domaine du couplage de zones selon une nouvelle méthode: celle de la synthèse modale.

---

[26] Lefebvre, G., 1987, *Analyse et réduction modales d'un modèle de comportement thermique de bâtiment*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI.

[27] Blanc-Sommereux, I., Peuportier, B., 1991 *A bioclimatic design aid based on multizone simulation* ISES Denver Colorado.

[28], Blanc-Sommereux, I., 1987, *Simulation de bâtiments multizones par couplage de modeles modaux reduits*, DEA Université Paris VI.

2.2.4 Conclusion

La simulation simplifiée est certainement l'un des outils les plus adaptés pour une aide à la conception thermique des bâtiments intégrée à la démarche de conception. Ces simulations simplifiées nécessitent des techniques performantes de réduction de modèles. La prise en compte des bâtiments multizones s'avère nécessaire dès qu'il s'agit d'optimiser leur performance thermique, et indispensables dès que l'on aborde le domaine des bâtiments tertiaires.

L'objet de ce travail de recherche consiste à développer une méthode d'analyse et d'interprétation permettant de prévoir l'effet du couplage de zones et de composants passsifs sur le comportement d'un bâtiment.

Cette analyse permettra alors de formuler des règles concernant non seulement la bonne prise en compte des paramètres nécessaires au couplage des zones pour reconstituer le comportement d'un bâtiment multizone, mais également la réduction de modèles de zones en vue d'une simulation rapide et précise.

Chapitre 3

Typologie de raccordements de modèles

La technique de raccordement des zones, étudiée dans cette thèse, étant basée sur le principe du couplage par recouvrement des zones, les notions de couplage et de raccordement de modèles sont abordées dans ce chapitre. Une distinction est à noter entre ces deux notions: si l'on se réfère à des entités physiques, il s'agira de **couplage** *de modèles; si l'on se réfère à la modélisation mathématique de ces modèles il s'agira alors du* **raccordement** *de modèles mathématiques.*

3.1 Le raccordement de modèles

3.1.1 Modèle mathématique

Un modèle de bâtiment est une construction formelle déduite d'une théorie et qui s'énonce à l'aide d'une formulation mathématique. Dans le cadre de ce travail, la formulation mathématique repose sur la représentation du champ de températures dans la base modale (voir section 4.1). Cette théorie a évidemment été construite de manière à ce que les modèles de bâtiment produisent des résultats cohérents avec la réalité du comportement thermique des bâtiments [Neveu,1984][1]. De par sa structure géométrique et par la nature des phénomènes dont il est le siège[2], l'objet bâtiment est perçu comme complexe. Le souci d'analyse de son comportement thermique au sein d'entités le constituant et appelées **zones**, a conduit à le diviser en composants élémentaires. Un modèle d'un objet vu comme un assemblage de composants est appelé **système**. Un système est un assemblage de sous-systèmes, modèles de composants qui peuvent à leur tour être divisés. Comme pour tout modèle, il n'existe pas de décomposition systémique de référence d'un objet réel. La décomposition d'un système est faite en fonction de plusieurs critères (voir rapport [SYMBOL][3]) qui sont maintenant énumérés:

1. objectif de modélisation (ex: rôle d'une zone dans un bâtiment ...)

[1] Neveu, A., 1984, *Etude d'un code de calcul d'évolution thermique d'une enveloppe de bâtiment*, Thèse de 3ème cycle de l'Univ. P. et M. Curie, Paris VI.

[2] c'est à dire associant les phénomènes de conduction, convection et rayonnement

[3] Blanc-Sommereux, I., Caplain, G., Ebert, R., Flament, B., Lefebvre, G., Neveu, A. and Peuportier, B., 1989, Rap[port AFME/ARMINES 1988/1989 projet SYMBOL.

2. intuition ou connaissance a priori des systèmes, influents ou pas, de phénomènes dominants ou accessoires;
3. objets-phénomènes similaires dont la structure a déja été analysée;
4. profondeur de décomposition acceptable (nombre de sous-systèmes élémentaires)

Ces critères ont été formulés d'une façon générale. Des exemples de systèmes se rapportant au bâtiment vont maintenant être donnés pour illustrer chacun de ces critères:

1. Dans le cadre de l'étude de l'ajout d'une véranda à un bâtiment, cette véranda constituera évidemment un composant particulier du bâtiment à étudier.
2. Pour un bâtiment orienté Sud/Nord, celui-ci sera divisé en zone sud et zone nord car nous savons a priori que ces zones auront des comportements très distincts.
3. Des bibliothèques de composants du bâtiment devront être disponibles pour faciliter la constitution de systèmes complexes.
4. Le niveau d'une couche de paroi comme sous-système élémentaire est souvent d'un niveau trop détaillé en ce qui concerne le comportement thermique d'un bâtiment, la paroi voire la pièce pourront être retenues comme niveau élémentaire.

3.1.2 Comment décomposer ?

Découper un système en sous-sytèmes nécessite d'écrire les conditions nécessaires que doivent respecter les modèles séparés pour qu'ils représentent le comportement des composants dans l'objet composé. Les comportements des composants sont couplés; les **interfaces** sont les lieux (éventuellement abstraits) où sont décrits les conditions de raccordement. Les **frontières** naturelles sont les lieux où sont décrites les conditions aux limites. Afin que la décomposition tende vers une structuration pertinente du système, les interfaces sont choisies de façon à respecter les critères suivants:

- Les conditions de couplage s'expriment simplement.
- Les sous-systèmes qui en résultent sont quasi-isolés.
- Les sous-systèmes sont des modèles simples ou facilement décomposables.
- L'observation des phénomènes étudiés en est facilitée.
- Les sous-systèmes terminaux sont modélisables.

3.1.3 Comment raccorder?

Le raccordement est défini par l'ensemble des conditions que doivent respecter les modèles de comportement des sous-systèmes pour que le comportement qu'ils décrivent soit celui des composants dans l'objet couplé.

Deux objets-phénomènes différents peuvent en effet être complètement, ou pour partie, topologiquement superposés. On n'aura cependant jamais à raccorder deux modèles

décrivant le même phénomène en un même lieu. Si les deux modèles concernent le même espace, c'est qu'ils représentent deux phénomènes différents. Dans ce cas, le lieu de raccordement n'a pas de réalité matérielle[4]. Si les deux modèles représentent le même phénomène, les objets sont différents, mais là encore, l'interface n'a pas nécessairement une traduction topologique nette. C'est le cas de la superposition d'une zone topologique commune aux deux modèles raccordés.

3.2 Type de couplage

Plusieurs types de couplage peuvent être distingués. Une typologie de raccordement de modèles par paire est maintenant proposée (ces différents types de couplage sont représentés sur la figure 3.1):

- couplage bord à bord (interface unique)($n^0 1$)
- couplage par recouvrement d'une partie commune($n^0 2$)
- couplage par recouvrement avec élimination de la partie commune dans l'un des deux modèles ou même dans les deux ($n^0 3$)

On peut également combiner plusieurs types de couplage: ainsi on peut envisager un raccordement de modèles par recouvrement d'une partie sur laquelle on aurait "plié" une partie non nécessairement commune aux deux modèles. (cas $n^0 4$). Ce type de raccordement par recouvrement pourrait même être étendu à un "double pliage" (cas $n^0 5$).

3.2.1 Couplage bord à bord

Le principe du couplage bord à bord consiste à raccorder, dans le cas de deux modèles, une frontière naturelle de l'un des modèles avec une frontière naturelle de l'autre modèle. Un exemple très simple de couplage bord à bord, toujours dans le cadre du bâtiment, est celui de deux couches de matériaux contiguës et constituant ainsi une paroi bicouche.

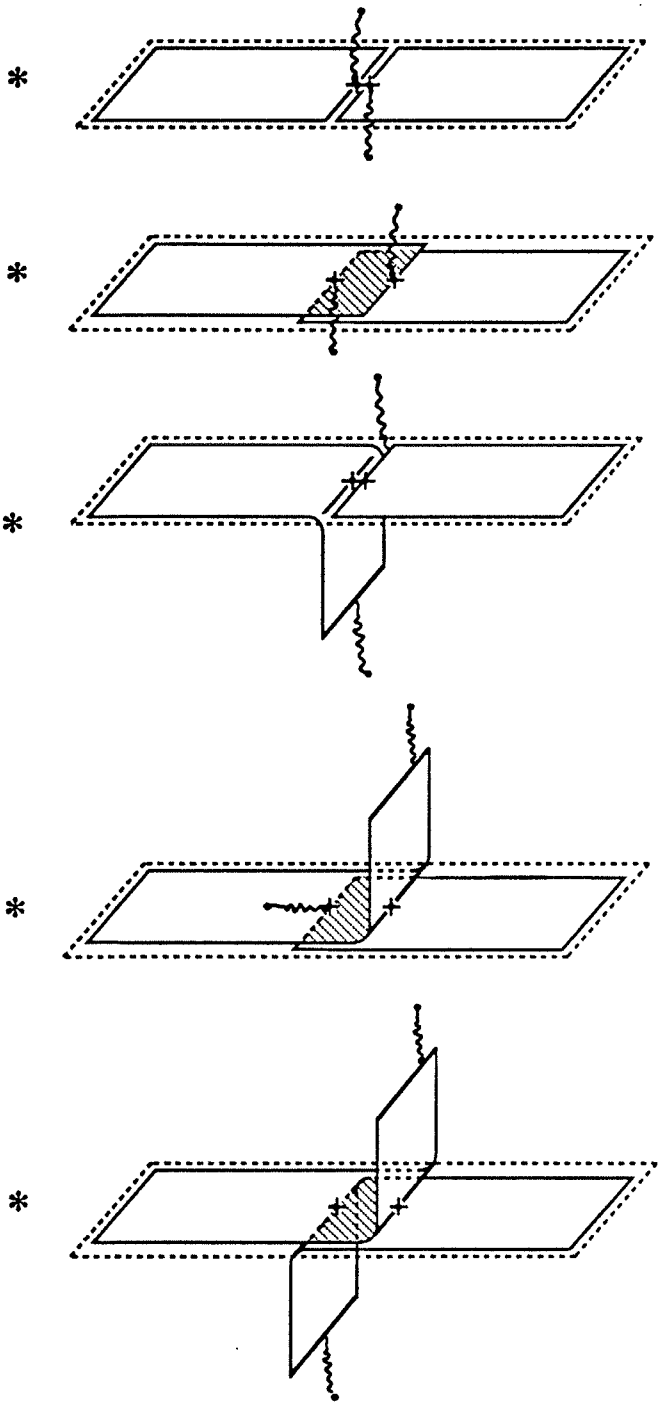
Dans le cas du couplage bord à bord et de l'exemple de la paroi bicouche, les conditions physiques correspondant à ce type de couplage sont:

- L'égalité géométrique des frontières de couplage.

Si l'on considère le transfert thermique comme étant conductif et unidirectionnel, les conditions mathématiques correspondant à ce type de raccordement sont, pour un contact thermiquement parfait:

- l'égalité du champ de températures au niveau des frontières de couplage de chaque couche.
- la non accumulation des flux sur cette même interface.

[4] exemple du rayonnement dans une enceinte superposé aux phénomènes convectifs



* contact bord à bord
N° 1

* recouvrement
N° 2

* contact sur plis
N° 3

* recouvrement avec plis
N° 4

* recouvrement avec double plis
N° 5

Figure 3.1: Typologie de raccordement de modèles (par paires)

La figure 3.2 représente l'exemple du couplage bord à bord de deux couches de matériaux. Pour ce type de couplage, il faut remarquer que les deux frontières des modèles locaux où s'expriment les conditions aux limites coïncident avec les deux frontières de raccordement (ce sont donc des frontières dites "naturelles").

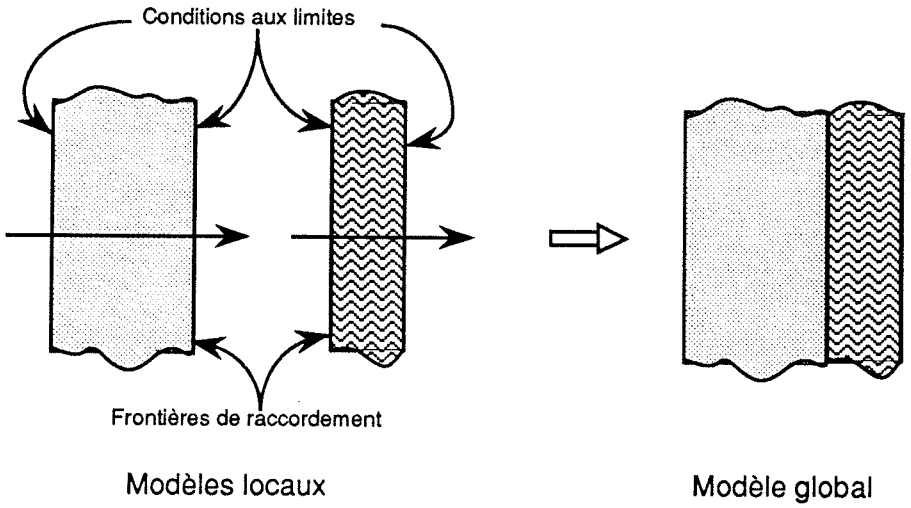


Figure 3.2: Couplage bord à bord de deux couches

Ce type de couplage a été abordé par [Chen][5] et approfondi par B.Flament [SYMBOL][6] dans le cadre de la synthèse modale.

3.2.2 Couplage par recouvrement

Le couplage par recouvrement d'une partie commune peut s'avérer très utile dans certaines applications. L'un des domaines privilégiés de ce type de couplage concerne la modélisation de bâtiments multizones. En effet un bâtiment multizone est vu comme l'assemblage de zones. Ces zones peuvent avoir été définies et leurs modèles peuvent être stockés dans une bibliothèque. Il est évident que les modèles de zones décriront complètement la zone y compris le ou les éventuels murs communs qui constituent ainsi la liaison avec d'autres zones pour former un bâtiment multizone. Le couplage par recouvrement d'une partie commune permettra alors d'utiliser les modèles de zones existants sans les modifier et de les coupler en considérant le mur commun comme partie de recouvrement. Un exemple de bâtiment bizone faisant l'objet de ce type de couplage est donné sur la Figure 3.3. Les deux zones sont raccordées en recouvrant le mur commun aux deux espaces. Le mur est évidemment décrit à l'identique dans les deux modèles de zones.

[5] Chen, M. 1989, *Nouvelle solution modale pour les parois des bâtiments.* Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris.

[6] op. cit

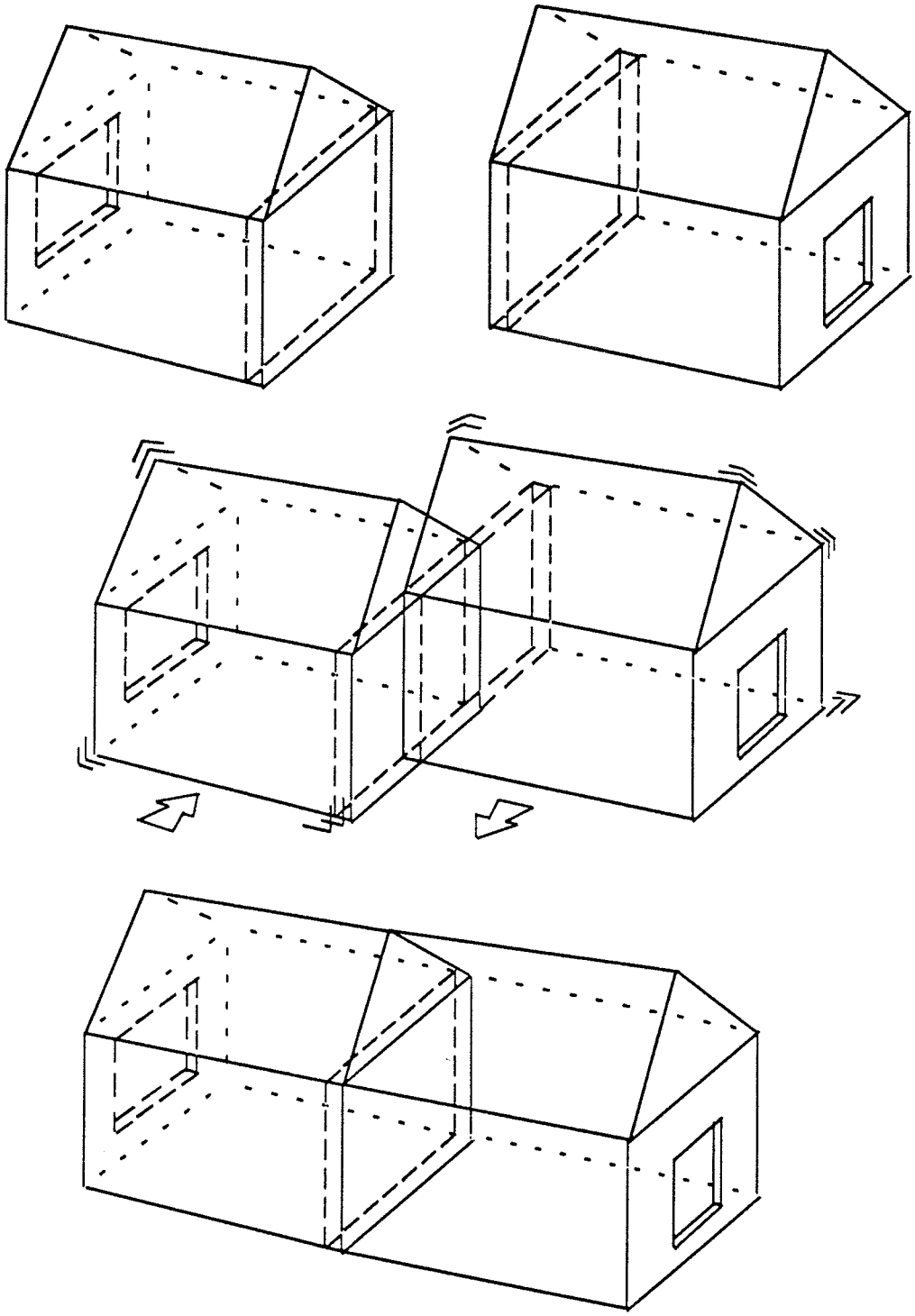


Figure 3.3: Constitution d'un bâtiment bizone à partir de deux zones

Dans le cas du couplage par recouvrement, les conditions physiques nécessaires sont:

- L'identité géométrique des frontières de la partie commune.
- L'identité des champs de température.

Les conditions mathématiques du raccordement des frontières sont les suivantes:

- Les températures des deux modèles sont identiques sur les frontières de la partie commune de recouvrement.

La figure 3.4 reprend l'exemple du couplage de deux couches de matériaux mais cette fois dans le cas du couplage par recouvrement.

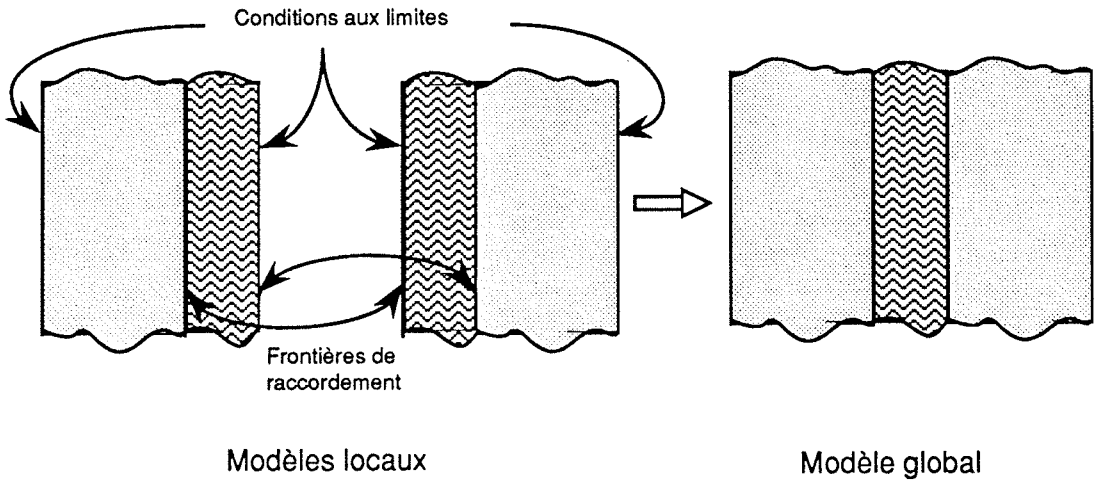


Figure 3.4: Couplage par recouvrement de deux couches

Pour exprimer correctement[7] ce type de couplage pour le cas des deux couches, quatre frontières de raccordement sont nécessaires (deux par modèles). Les frontières de raccordement délimitent la partie commune aux deux modèles. Sur la figure deux frontières de raccordement sur les quatre coïncident avec les frontières sur lesquelles sont appliquées les conditions aux limites. On a donc deux frontières "naturelles" et deux frontières dites "internes". Ceci n'est pas obligatoire pour traiter ce genre de couplage: les quatres frontières de raccordement peuvent être indépendantes de celles où sont appliquées les conditions aux limites. Le couplage par pliage est basée sur une telle représentation.

3.2.3 Couplage avec pliage

Le "pliage" consiste, comme le couplage par recouvrement, à faire apparaître une frontière ("interne") sur laquelle ne sont pas exprimées les conditions aux limites du modèle physique.

[7] La justification mathématique de ce type de couplage est abordée au chapitre 5

Le couplage par "pliage" est un couplage bord à bord de modèles mettant en contact des frontières internes sur lesquelles un pliage a été effectué. Ce pliage élimine en fait une partie de l'un des modèles couplés voire même des deux. L'élimination d'une partie d'un modèle peut s'avérer intéressante si cette partie éliminée n'existe pas dans le modèle global. Ce sous domaine "plié" peut ainsi être considéré comme une partie virtuelle influençant peu le modèle de l'ensemble. En toute rigueur cette partie éliminée ne devrait pas influencer l'ensemble; on verra cependant que la réduction du modèle local dépend de cette partie non utilisée. La figure 3.5 reprend l'exemple du couplage des deux couches dans le cas du couplage par pliage. Le modèle global obtenu est le même que celui de l'exemple bord à bord. Par contre la partie numérotée 2 sur la figure a été "pliée".

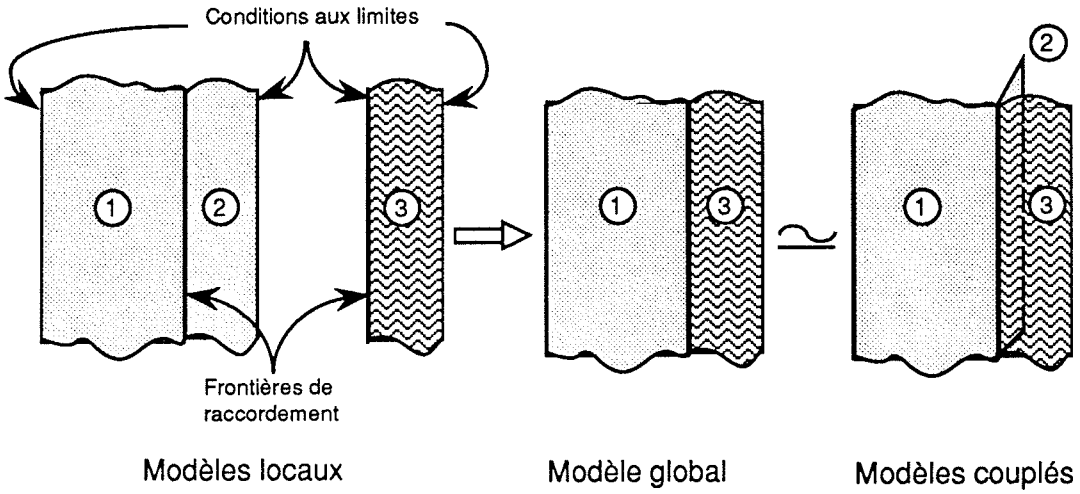


Figure 3.5: Couplage par pliage de deux couches

Pour pouvoir réaliser ce type de couplage, il faut prévoir au niveau de la frontière interne où aura lieu le couplage par pliage toutes les variables de sorties nécessaires. Il faut également pouvoir y appliquer une sollicitation.

Des combinaisons des différents types de couplage sont également possibles:

- couplage par recouvrement avec pliage (cas $n^0 4$ sur la figure 3.1).
- couplage par recouvrement avec double pliage (cas $n^0 5$ sur la figure 3.1). Dans ce cas les deux modèles font l'objet d'un pliage.

3.3 Conditions aux limites

Chaque sous-système est soumis à des conditions aux limites sur ses frontières naturelles. Ces conditions aux limites sont la traduction mathématique des conditions physiques

réelles. Elles sont répertoriées en trois types[Sacadurra][8]:

- condition de 1ère espèce dite de Dirichlet. Cette condition aux limites est celle où la température est imposée sur la frontière du modèle. La température T_p est une fonction donnée du point M_p sur la frontière et/ou du temps:

$$T_p = f(M_p, t) \tag{3.1}$$

- condition de 2ème espèce dite de Neuman. Cette condition aux limites est celle où le flux est imposé sur la frontière du modèle. La densité de flux thermique est une fonction donnée du point sur la frontière et/ou du temps.

$$\phi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{M_p} = f(M_p, t) \tag{3.2}$$

  0ù $\dfrac{\partial T}{\partial n}$ désigne la dérivée normale de T calculée à la frontière. Si la frontière est thermiquement isolée, le flux est nul en tout point de sa surface (adiabacité).

- condition de 3ème espèce dite de Fourier. Il s'agit en fait d'une condition mixte. La densité de flux traversant la surface à la frontière est proportionnelle à la différence de température entre la paroi et le milieu environnant, fluide:

$$\phi = h(T_p - T_\infty) \tag{3.3}$$

  h est une constante positive appelée coefficient d'échange superficiel et T_∞ désigne la température du fluide loin de la paroi dite température de référence. C'est la condition courante de transfert de chaleur par convection dite loi de Newton. En utilisant la loi de Fourier, cette condition s'écrit:

$$-\lambda \left[\frac{\partial T}{\partial n}\right]_{M_p} = h(T_p - T_\infty) \tag{3.4}$$

  ou encore

$$T_p + \alpha \left[\frac{\partial T}{\partial n}\right]_{M_p} = f(M_p, t) \tag{3.5}$$

  avec $\alpha = \dfrac{\lambda}{h}$

  Un modèle soumis à une condition de 3ème espèce comme sur la Figure 3.6, qui représente une condition de 3ème espèce appliquée à une zone, est en fait **équivalent** à un modèle soumis à une condition de 1ère espèce si les frontières du modèle sont modifiées comme sur la Figure 3.7. Ce second modèle inclut alors l'échange convectif et sa nouvelle frontière est soumise à des conditions de 1ère espèce. Tout modèle soumis à des conditions aux limites de 3ème espèce peut ainsi se ramener à un modèle soumis à des conditions aux limites de 1ère espèce si le transfert convectif est inclut dans le modèle.

  Le couplage de zones et de composants du bâtiment étudié dans cette thèse est un couplage de type recouvrement où les frontières de raccordement des modèles de

[8] Sacadurra, 1980, *Initiation aux transferts thermiques*, Technique et Documentation, Paris.

zones sont soumises à des conditions de 1ère espèce comme sur la figure 3.7, c'est à dire en incluant les échanges convectifs. Dans le cas de ce couplage, une sollicitation peut également être appliquée à l'intérieur de la partie commune (par exemple le flux solaire transmis et absorbé sur la paroi commune des deux zones couplées). Ce type de sollicitation interne à la partie commune doit être correctement traité pour que le modèle soumis à une condition de 3ème espèce et à une sollicitation interne à la zone commune soit équivalent à un modèle soumis à une condition de 1 ère espèce. Ce cas est précisément celui de la modélisation des zones dans le logiciel COMFIE qui est traité dans l'annexe D.

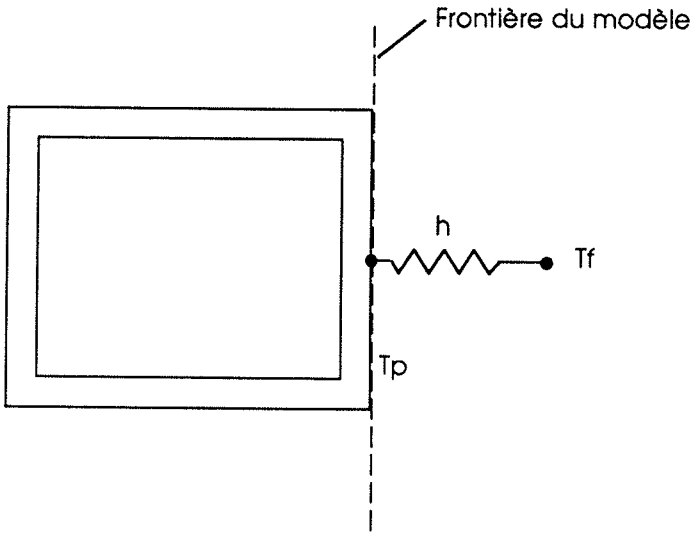


Figure 3.6: zone soumise à des conditions de 3ème espèce

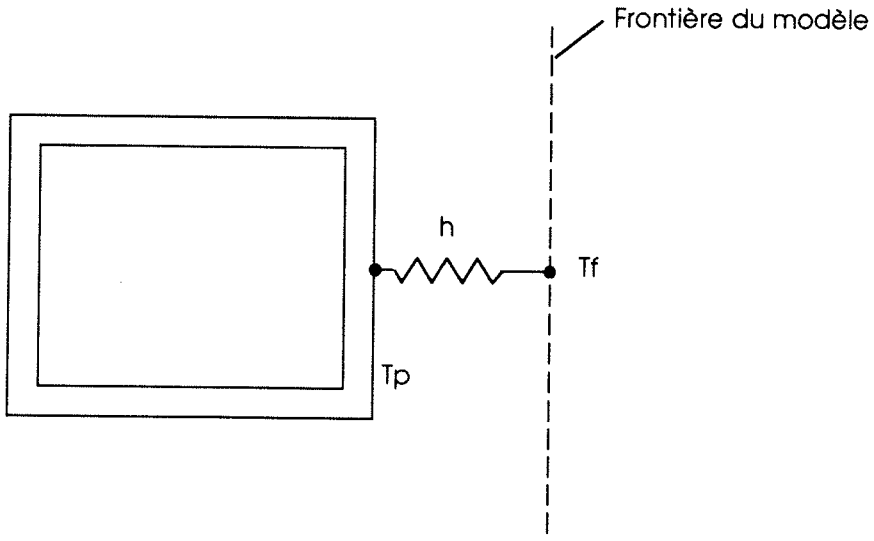


Figure 3.7: zone soumise à des conditions de 1ère espèce

Chapitre 4

Synthèse modale: outil d'analyse du couplage des composants d'un bâtiment

La synthèse modale est une technique qui s'appuie sur une représentation modale des phénomènes thermiques de bâtiments. De nombreux travaux de recherche effectués au Centre d'Energétique de l'Ecole des Mines de Paris sur la technique modale, traditionnellement appliquée au domaine de la mécanique, ont ainsi permis de mettre au point des applications dans le domaine de la thermique du bâtiment. Le grand intérêt de la représentation modale réside dans la possibilité de réduction des modèles. L'efficacité de cette réduction modale est évidemment recherchée pour résoudre rapidement et avec précision des problèmes de thermique pour des bâtiments complexes. L'analyse modale de bâtiments multizones complexes limite néanmoins cette analyse à un niveau global. La synthèse modale offre de nouvelles perspectives pour une analyse modale au niveau des sous-ensembles élémentaires car elle permet la constitution de modèle thermique complexe à partir du couplage de modèles modaux de sous-systèmes. Cette construction modulaire de modèles modaux se révèle particulièrement adaptée à l'étude du couplage de zones et de composants de bâtiments. La technique de raccordement des zones et des composants solaires passifs étudiée dans cette thèse, repose sur le principe du couplage par recouvrement. La mise en oeuvre de la synthèse modale dans le cadre des bâtiments multizones à l'aide du couplage par recouvrement se déroule selon les étapes suivantes:

- *Création des modèles modaux de zones (à l'aide du logiciel COMFIE) (l'intérêt de l'analyse modale dans le cadre de la thermique du bâtiment est abordée dans la Section 4.1).*

- *étape de synthèse modale proprement dite: génération du modèle de bâtiment multizone "synthétisé" (La Section 4.2 pose le principe général de la synthèse modale et le chapitre 5 traite la synthèse modale avec couplage par recouvrement).*

- *Confrontation du modèle issu de la synthèse modale avec un modèle modal global. (Section 5.5)*

4.1 Rappels sur l'analyse modale dans le cadre de la thermique du bâtiment

Depuis quelques années, la méthode modale a bouleversé la modélisation des phénomènes thermiques appliquée au domaine du bâtiment. Cette méthode, initiée par [Bacot][1], résoud le problème thermique en décomposant le champ des températures sur la base modale.

Avant l'utilisation de la méthode modale, la résolution de problèmes thermiques complexes[2] s'effectuait à l'aide de méthodes numériques reposant sur des discrétisations spatiales et temporelles des variables[3]. Ces méthodes permettent de simuler le comportement dynamique des systèmes thermiques complexes de grande taille (modélisation de bâtiment possédant quelques dizaines de zones) [Carter,1990][4]. Néanmoins, bien que fidèles dans la représentation de la réalité, elles ne permettent pas **l'analyse** du comportement thermique.

La résolution analytique du problème de conduction de la chaleur par la méthode de séparation des variables [Özisik][5] annonçait déja les principes de la méthode modale: le champ des températures dans un solide se décompose en une somme de champs élémentaires (ou modes propres) dont la signification physique est réelle. Ces champs élémentaires avaient d'ailleurs été pressentis par [Fourier][6] comme étant des propriétés intrinsèques au solide étudié.

La méthode modale est bien connue en mécanique car la réalité physique des modes vibratoires d'un solide est directement observable [Bourquin][7].

Le principe de la méthode modale repose donc sur une décomposition du terme dynamique du champ des températures en une combinaison linéaire de modes propres[8]. Ces modes étant des propriétés intrinsèques du bâtiment, l'analyse de son comportement thermique est alors possible.

4.1.1 Hypothèses et terminologie

On considère un système thermique $\mathcal{D}$ constitué de Q sous systèmes $\mathcal{D}_k$ (solides ou fluides)(figure 4.1).

L'ensemble des points intérieurs à un sous-domaine $\mathcal{D}_k$ est noté $\mathcal{D}_k^0$. Chaque sous domaine est séparé du milieu extérieur $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ par une frontière Γ_{ke}.

Dans chacun de ces sous-domaines, les propriétés thermophysiques et mécaniques (tenseur des conductivités, coefficients de transfert, chaleur massique, masse volumique, champ de vitesse,...) sont stationnaires (invariables dans le temps) et indépendantes

[1] Bacot, P., 1984, *Analyse Modale des Systèmes thermique*, Thèse de Docteur Ingénieur, Université Paris VI.

[2] C'est à dire associant les trois phénomènes de thermique qui sont la conduction, la convection et le rayonnement.

[3] méthode des différences finies par exemple

[4] Carter, C., 1990, *Computational methods for passive solar simulation* Solar Energy Vol 45, No. 6, 379-384.

[5] Özisik, M.N., 1980, *Heat conduction*, J.Whiley, New York.

[6] Fourier, J. *Oeuvres complètes I:252, (in Bachelard, G., Etude sur l'évolution d'un problème de physique: la propagation thermique dans les solides., " L'histoire des sciences. Textes et études", 2ème éd., PARIS Vrin, 1973.)*

[7] Bourquin, F., 1990, *Analysis and comparison of several component mode synthesis on one-dimensionnal domains*, Numer. Math. 58, 11-34 (1990).

[8] fonctions d'espace orthogonales

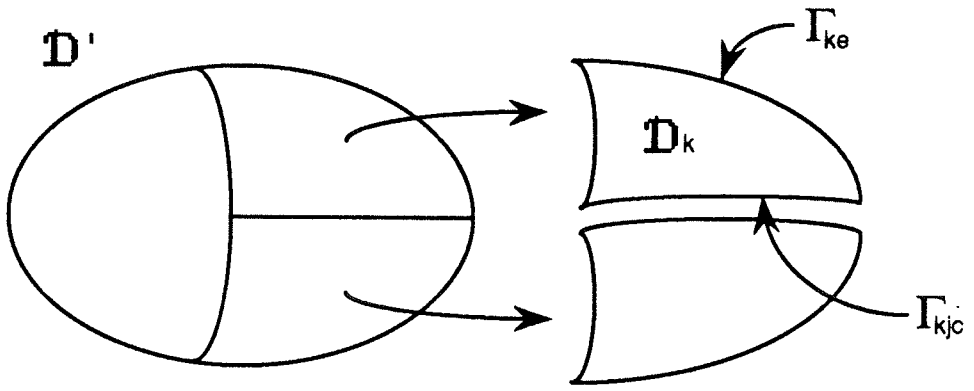


Figure 4.1: Notations choisies

de la température.

En ce qui concerne les sous-domaines fluides en particulier, la stationnarité du champ de vitesse implique que les problèmes thermiques et mécaniques soient découplés. Nous supposons de plus que les fluides sont newtoniens, incompressibles et non dilatables. Si deux fluides différents sont en contact direct, nous supposons qu'ils ne se mélangent pas et que par conséquent, la vitesse relative est tangente à l'interface.

Enfin, nous supposons connu l'état thermique de l'environnement $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ en tout point et à tout instant.

Chaque sous domaine $\mathcal{D}_k$ peut être en contact avec N_{kc} autres sous domaines, on associe donc à chaque $\mathcal{D}_k$, N_{kc} interfaces de couplage. On note alors Γ_{kjc}, la jième interface de couplage du composant k.

Les sollicitations

Les sollicitations agissant sur un composant $\mathcal{D}_k$ sont différenciées suivant qu'elles s'appliquent sur l'interface Γ_{ke} le séparant du domaine $\mathcal{D}'$ [9] ou sur une interface de couplage Γ_{kjc}. Dans le premier cas, les sollicitations sont dites extérieures et notées $U_{ke}(M,t)$, dans le deuxième cas, les sollicitations sont dites de couplage, sont inconnues et on note $U_{kjc}(t)$, celle agissant sur Γ_{kjc}.

Enfin, nous faisons l'hypothèse que le champ de température ainsi que les flux sont uniformes sur chacune des interfaces de couplage. Cette hypothèse forte semble raisonnable pour le couplage de zones ou de parois. Elle fait l'objet d'études dans le cas de

[9] Les interfaces de couplage de certains systèmes thermiques tels que les bâtiments, peuvent être soumises à des sollicitations extérieures connues (flux solaires...).

de problèmes fortement multidimensionnels comme la modélisation des ponts thermiques ([Flament,Neveu][10]).

Les échanges thermiques

L'état thermique d'un système est parfaitement déterminé si l'on connaît le champ complet des températures. Ces températures sont le résultat de mécanismes d'échanges et d'accumulation de chaleur que l'on classe habituellement en 3 catégories: conduction, convection et rayonnement. Les bâtiments étant des systèmes thermiques particuliers, ils ont des spécificités qui autorisent des simplifications systématiques au niveau de la prise en compte de ces trois types d'échanges.

La Conduction

Soit $T_k(M,T)$ le champ spatio-temporel de la température pour le modèle k. La conduction dans les solides est décrite par la loi de Fourier qui relie le gradient des températures en un point d'un solide à la densité de flux thermique en ce même point:

$$\phi_{cd}(M,t) = -K_k(M)\nabla T_k(M,t) \tag{4.1}$$

où $K_k(M)$ est le tenseur des conductivités thermiques au point M. En raison des températures des matériaux d'un bâtiment, la conductivité thermique de ces matériaux sera considérée comme constante.

La Convection

Les transferts thermiques par convection seront modélisés par des équations linéaires à coefficients constants. La température de l'air des ambiances sera supposée uniforme. La densité de flux thermique convectif reliant un point de la frontière d'un solide (dans le cas précis des bâtiments, il s'agira d'une paroi) à la température de l'air de l'ambiance s'exprimera par:

$$\phi_{cv} = h_c^k(T_{S_i} - T_k) \tag{4.2}$$

avec:
T_{S_i} température de la surface S_i
T_k température de l'air de l'ambiance k

Le Rayonnement

Le rayonnement thermique repose sur un mode de transfert de la chaleur à distance. Ce phénomène complexe sera pris en compte sous une forme linéarisée. Le flux radiatif absorbé par un élément de matière dM en provenance d'un élément dM', distinct de dM, s'exprime par:

$$\partial\phi_r(M,t) = r(M,M')T(M',t)dM'dM \tag{4.3}$$

[10] Flament, B., Neveu, A., 1991, *Traitement des grands systèmes linéaires par synthèse modale*, Journée Soc. Fran. Therm. du 5 juin 91, Modélisation des champs thermiques: techniques innovantes et récents développements.

Dans le cas des échanges radiatifs dans une zone k d'un bâtiment constituée de N surfaces isothermes grises et diffusantes en émission et en réflexion, le flux net gagné par une surface S_i s'écrit:

$$\phi_r^i = S_i \sum_{j=1}^{N} \mathcal{F}_{ij}(\sigma T_{S_j}^4 - \sigma T_{S_i}^4) \tag{4.4}$$

$\mathcal{F}_{ij}$ étant le facteur de transfert radiatif[11] de la surface S_i à la surface S_j.

Lorsque les températures des surfaces varient autour d'une valeur T_o sans trop s'en écarter, le flux ϕ_r^k peut être approché par une expression linéaire de la forme:

$$\phi_r^i = S_i \sum_{j=1}^{N} \mathcal{F}'_{ij}(T_{S_j} - T_{S_i}) \tag{4.5}$$

avec:

$$\mathcal{F}'_{ij} = 4\sigma T_o^3 \mathcal{F}_{ij}$$

Les échanges radiatifs sont des échanges réciproques.(La relation de réciprocité des coefficients de transferts est décrite dans [Khoury][12].)

L'opérateur spatial de la chaleur $\mathcal{L}$: hypothèses et terminologie

En utilisant l'équation de conservation de l'énergie et en intégrant sur le volume du domaine, le modèle local k, soumis aux trois types d'échanges détaillés précédemment, peut être décrit par les relations suivantes:

- équation d'évolution :

$$\begin{array}{l} \forall M \in \mathcal{D}_k^0 \quad k = 1, \ldots, Q \\ \nabla[K_k \nabla T_k(M,t)] - \vec{u_k}(M)\nabla T_k(M,t) + \\ \int_{\mathcal{D}_k} r(M,M')T(M',t)dM' + U_k^i(M,t) = C_k \dfrac{\partial T_k(M,t)}{\partial t} \\ \qquad \text{avec:} \\ \vec{u_k}(M) = C_k(M)\,\vec{v_k}(M) \text{terme de transport} \\ \int_{\mathcal{D}_k} r(M,M')T(M',t)dM' \text{densité de flux radiatif} \\ U_k^i(M,t) \text{ sources internes} \end{array} \tag{4.6}$$

- conditions aux limites :

$$\begin{array}{l} \forall M \in \Gamma_{kjc} \quad k = 1, \ldots, Q \quad j = 1, \ldots, N_{kc} \\ -K_k \nabla T_k(M,t).\vec{n}_{kjc} - \sigma_{kjc} T_k(M,t) = U_{kjc}(t) \\ \forall M \in \Gamma_{ke} \quad k = 1, \ldots, Q \\ -K_k \nabla T_k(M,t).\vec{n}_{ke} - \sigma_{ke} T_k(M,t) = U_{ke}(t) \end{array} \tag{4.7}$$

Remarques :

[11] Ce facteur de transfert radiatif $\mathcal{F}_{ij}$ porte également le nom de *facteur de forme gris* entre la surface S_i et la surface S_j. Contrairement aux facteurs de forme (noirs) qui sont purement géométriques, $\mathcal{F}_{ij}$ dépend des propriétés radiatives des matériaux.

[12] El Khoury, K., 1989, *Formulation modale de problèmes de diffusion thermique avec transport.* Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris.

- Des valeurs particulières de σ_{kjc} et σ_{ke} permettent d'obtenir des conditions de Neuman ($\sigma_{kjc} = 0$, la sollicitation U_{kjc} est alors égale à un flux), ou des conditions de Dirichlet ($\sigma_{kjc} \to \infty$, le rapport de la sollicitation U_{kjc} au coefficient σ_{kjc} tend alors vers une température).
- Dans un souci de simplification, les sollicitations appliquées aux frontières extérieures et celles appliquées aux interfaces de couplage seront regroupées. Cette simplification ne modifie en rien le formalisme développé ci-après. Les relations relatives aux conditions aux limites peuvent être notées plus globalement par l'intermédiaire d'un opérateur de conditions aux limites $\mathcal{B}_k$; L'équation 4.7 devient:

$$\mathcal{B}_k\left(T_k(M,t)\right) = U_k(t)$$

Le formalisme analytique développé [Khoury][13] pour la méthode modale en thermique linéaire a permis de mettre en évidence un opérateur spatial de la chaleur (noté $\mathcal{L}$) pour les transferts couplés. Cet opérateur de la chaleur est très utile de par sa capacité à décrire simultanément les phénomènes de conduction, convection et rayonnement[14]. Il s'exprime de la manière suivante:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D}^0, \quad & \mathcal{L}_k[T_k(M,t)] + U_k^i(M,t) = C_k(M)\frac{\partial T_k(M,t)}{\partial t} \\ M \in \Gamma_{kjc}, \quad & \mathcal{B}_k[T_k(M,t)] = U_k(M,t) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Le terme $U_k^i(M,t)$ représentant les sources internes sera nul dans la suite par souci de clarté de l'écriture mathématique. Cette hypothèse ne change en rien les développements qui suivent.

Le modèle de chaque composant décrit par les relations précédentes est un modèle où les échanges sont réciproques. Les échanges non réciproques[15] peuvent également être pris en compte dans le cadre de l'analyse modale en traitant le problème adjoint [Khoury][16]- (résolution du problème complexe). Ce dernier cas, échanges non réciproques, ne sera pas traité dans le cadre de cette thèse. On peut néanmoins remarquer que les échanges dans le bâtiment non réciproques ne donnent rarement naissance à des modes complexes dominants.

4.1.2 Construction de la base modale à partir du champ de températures

Le champ de températures

Le principe de résolution de l'équation différentielle du type de l'équation 4.8 consiste à rechercher les solutions particulières du problème homogène (on annule toutes les sollicitations appliquées au domaine). Le champ de température peut alors être décrit comme la

[13] El Khoury, K., 1989, *Formulation modale de problèmes de diffusion thermique avec transport.* Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris.

[14] Les éléments de construction et les démonstrations des propriétés de l'opérateur de la chaleur $\mathcal{L}$ sont développés dans la référence notée ci dessus

[15] renouvellement d'air non réciproque par exemple

[16] El Khoury, K., 1989, *Formulation modale de problèmes de diffusion thermique avec transport.* Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris.

superposition d'un régime "glissant" et d'un régime "dynamique", solution du problème homogène.

$$T_k(M,t) = T_k^g(M,t) + T_k^d(M,t) \quad \forall M \in \mathcal{D}_k \tag{4.9}$$

avec :

- $T_k^g(M,t)$: défini comme le terme **glissant** du champ de température est solution du système:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D}_k^0, \quad \mathcal{L}_k[T_k^g(M,t)] &= 0 \\ M \in \Gamma_k, \quad \mathcal{B}_k[T_k^g(M,t)] &= U_k(M,t) \end{aligned} \tag{4.10}$$

L'expression du champ de température glissant peut se mettre sous une forme intégrale:

$$T_k^g(M,t) = \int_{\Gamma_k} S_k(M,M')\, U_k(M',t)\, dM' \tag{4.11}$$

où la fonction de Green S_k est un champ de température qui vérifie pour tous les points M' de $\mathcal{D}_k$ les équations du système 4.10 dans lesquelles on substitue à la sollicitation $U_k(M,t)$ la distribution de Dirac δ M'(M).

Les fonctions de Green vérifient ainsi:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k[S_k(M,M')] &= 0 \quad \forall M \in \mathcal{D}_k^0 \\ -K_k \nabla S_k(M,M').\vec{n}_k &- \sigma_k S_k(M,M') = \delta_{\Gamma_k}(M') \quad \forall M \in \Gamma_k \\ \delta_{\Gamma_k}(M') &= 0 \quad si \quad M' \notin \Gamma_k \\ \delta_{\Gamma_k}(M') &= 1 \quad si \quad M' \in \Gamma_k \end{aligned}$$

En tenant compte de l'uniformité des températures et des flux sur les interfaces, en posant $S_k(M) = \int_{\Gamma_k} S_k(M,M')\, dM'$, l'expression 4.11 s'écrit:

$$T_k^g(M,t) = S_k(M)\, U_k(t) \tag{4.12}$$

- $T_k^d(M,t)$: terme **dynamique** du champ de température. Ce terme dynamique correspond à la réponse libre du système et vérifie:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D}_k^0 \quad \mathcal{L}_k[T_d(M,t)] - C_k(M)\frac{\partial T_g(M,t)}{\partial t} &= C_k(M)\frac{\partial T_d(M,t)}{\partial t} \\ M \in \Gamma_{kc} \qquad \mathcal{B}_k[T_d(M,t)] &= 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ce champ est donc, à chaque instant t, décomposable sur la famille des fonctions propres car il vérifie des conditions aux limites homogènes. On voit ainsi l'intérêt de la séparation du régime variable en régimes glissant et dynamique: elle élimine en réalité le problème du reste éventuellement non décomposable du champ thermique lors de sa projection sur la famille des fonctions propres [Sicard][17], ce reste étant contenu dans le terme glissant.

[17] Sicard, 1984, *Analyse modale appliquée à la thermique* Thèse de docteur Ingénieur, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris VI.

La base modale

La résolution du problème homogène se ramène à la recherche des éléments propres du système. On va exprimer le terme dynamique du champ de température sous la forme du produit scalaire de la variable temps et de la variable espace. Ce champ de température vérifiant une condition limite homogène est décomposable sur la base des fonctions propres de l'opérateur de la chaleur :

$$T_k^d(M,t) = \sum_{l=1}^{n_k} X_{kl}(t).V_{kl}(M) \tag{4.14}$$

On qualifie les coefficients de la décomposition X_{kl} d'états d'excitations des modes propres V_{kl} ou tout simplement de **variables d'état.**

Les éléments propres du modèle local k, sont déterminés à partir du problème aux valeurs propres pour l'opérateur de la chaleur[18]:

- problème aux valeurs propres :

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{D}_k^0 \quad \mathcal{L}_k[V_{kl}(M)] &= \lambda_{kl}\, C_k\, V_{kl}(M) \\ \forall M \in \Gamma_{kjc} \quad \mathcal{B}_k\,(V_{kl}(M)) &= 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

avec :

  - $V_{kl}(M)$: $l^{ème}$ fonction propre de l'opérateur spatial de la chaleur $\mathcal{L}_k$
  - λ_{kl} : $l^{ème}$ valeur propre de l'opérateur spatial de la chaleur $\mathcal{L}_k$

- équation d'état du modèle local k obtenu en remplaçant dans l'équation 4.13 l'expression du terme dynamique (équation 4.14):

$$\mathcal{L}_k[\sum_{l=1}^{n_k} X_{kl}(t).V_{kl}(M)] - C_k(M)\frac{\partial T_g(M,t)}{\partial t} = \sum_{l=1}^{n_k} \dot{X}_{kl}(t).V_{kl}(M)C_k(M) \tag{4.16}$$

$$\sum_{l=1}^{n_k} X_{kl}(t)\mathcal{L}_k[V_{kl}(M)] - C_k(M)\frac{\partial T_g(M,t)}{\partial t} = \sum_{l=1}^{n_k} \dot{X}_{kl}(t).V_{kl}(M)C_k(M) \tag{4.17}$$

D'après l'équation 4.15, on obtient:

$$\sum_{l=1}^{n_k} X_{kl}(t)\lambda_{kl}C_k.V_{kl}(M) - C_k(M)\frac{\partial T_g(M,t)}{\partial t} = \sum_{l=1}^{n_k} \dot{X}_{kl}(t).V_{kl}(M)C_k(M) \tag{4.18}$$

En faisant le produit scalaire par V_{jl}[19], on a:

$$X_{kl}(t)\lambda_{kl} - C_k(M)\frac{\partial T_g(M,t)}{\partial t} = \dot{X}_{kl}(t) \tag{4.19}$$

[18] L'opérateur $(\mathcal{L})$ associé à des conditions aux limites mixtes représentées par $(\mathcal{B})$, possède un spectre discret (infini mais dénombrable) de valeurs propres. Les fonctions propres qui leur sont associés forment une base pour les fonctions appartenant au domaine de définition de l'opérateur.

[19] Le produit scalaire pour les vecteurs propres orthogonaux est le suivant: $< V_{kl}, C(M)V_{kj} >= \delta_{lj}$

On obtient finalement **l'équation d'état modale:**

$$\begin{aligned} \dot{X}_{kl}(t) &= \lambda_{kl}.X_{kl}(t) \\ &\quad - \dot{U}_k(t).\int_{\mathcal{D}_k^0} S_k(M)\, V_{kl}(M)\, C_k(M)\, dM \end{aligned} \tag{4.20}$$

L'équation d'état modale vérifiée par chaque état d'excitation ne fait intervenir que cet état.

4.1.3 Modèle modal discrétisé

Les résultats exposés ci dessus sont valables pour une formulation continue. En pratique le problème est résolu sous forme discrète et la représentation modale des phénomènes thermiques pour le bâtiment s'effectue par un changement de base à partir de la représentation du champ des températures. La méthode des différences finies a été utilisée comme modèle numérique discret détaillé pour permettre la modélisation du champ complet des températures. Avant d'aborder la construction de la base modale, la modélisation du champ thermique par la méthode des différences finies est brièvement abordée.

Le champ thermique modélisé par la méthode des différences finies

La méthode des différences finies repose sur la discrétisation spatiale du champ des températures. Le champ des températures est alors modélisé par une fonction en ces noeuds de discrétisation. Le bâtiment est décomposé en mailles sur lesquelles un bilan thermique est établi.

Le champ de température discrétisé est représenté sous la forme suivante:

$$C\dot{T} = AT + EU \tag{4.21}$$

avec:

- T le champ discrétisé des températures.
- C matrice diagonale constituée des n capacités calorifiques des mailles de la discrétisation ou des masses de fluide.
- A matrice d'échange au sein de la structure. Matrice carrée symétrique définie négative.
- E matrice rectangulaire caractérisant les effets des sollicitations sur la structure.
- U matrice colonne réunissant l'ensemble des sollicitations.

Ce modèle est approché et sa précision est liée à la finesse de la discrétisation et à la position des noeuds du maillage.

Le régime permanent glissant Un système atteint un régime permanent au bout d'un certain temps si les sollicitations sont constantes. Lorsque les sollicitations sont variables, on définit un régime permanent glissant comme étant l'état que le système aurait en régime permanent si les sollicitations étaient constantes et de valeur égale à celle des sollicitations variables au moment t.

Dans le cas du régime permanent, l'équation 4.21 peut s'exprimer sous la forme:

$$T = S_T U \tag{4.22}$$

avec: $S_T = -A^{-1}E$

On effectue le changement de variable suivant:

$$T^0 = T - S_T U \tag{4.23}$$

d'où

$$T = T^0 + S_T U \tag{4.24}$$

En remplaçant dans l'équation 4.21, on obtient:

$$C\dot{T}^o = AT^o - CS_T\dot{U} \tag{4.25}$$

Passage à la base modale discrétisée

Le passage à la base modale discrétisée s'effectue par la transformation du champ dynamique des températures, T^o, en vecteur d'état, X, par la relation suivante (analogue à l'équation 4.14):

$$T^0 = PX \tag{4.26}$$

où P est la matrice de passage formée des vecteurs propres colonnes.

Dans la base propre formée des vecteurs propres normés par rapport à C, l'équation 4.25 (pour le problème homogène) peut se formuler sous la forme suivante (analogue à l'équation 4.20):

$$\dot{X} = FX + B\dot{U} \tag{4.27}$$

avec:
$F = P^{-1}C^{-1}AP$, matrice diagonale des valeurs propres
$B = P^{-1}A^{-1}E$

4.1.4 Equations modales pour des modèles couplés

Dans le cas du couplage des zones, l'équation d'état du modèle local k peut également se mettre sous la forme suivante en distinguant les sollicitations extérieures et celles de couplage:

$$\dot{X}_k = F_k X_k + B_{kc}\dot{U}_{kc} + B_k \dot{U}_{ke} \tag{4.28}$$

avec :

- U_{kc} : sollicitation agissant sur la frontière où s'applique la condition aux limites.

- U_{ke} : sollicitations extérieures.

Les sorties du modèle local k sont données par:

$$\begin{aligned} Y_{kr} &= H_{kr}\, X_k + G_{krc}\, U_{kc} + G_{kr}\, U_{ke} \\ Y_k &= H_k\, X_k + G_{kc}\, U_{kc} + G_k\, U_{ke} \end{aligned} \tag{4.29}$$

avec :

- Y_{kr} : sorties sur la frontière de raccordement.
- Y_k : sorties sur autres frontières.

Le champ de température du modèle local k est donné par:

$$T_k = P_k\, X_k + S_{kc}\, U_{kc} + S_k\, U_{ke} \tag{4.30}$$

P est la matrice de passage formée des vecteurs propres colonnes. La formulation donnée par l'équation 4.30 est valable aussi bien en continue qu'en discret. Sauf indication particulière, les résultats présentés sont valables dans les deux cas.

4.1.5 Intérêt de la base modale

L'intérêt de la représentation dans la base modale réside dans la possibilité très vaste et performante de réduction des modèles. Des recherches dans le domaine de la réduction modale [Lefebvre,1987][20] ont montrés que la réponse dynamique d'un bâtiment aux diverses sollicitations pouvaient être représentée par quelques modes[21]. Les modes propres d'un bâtiment sont des entités caractéristiques de celui-ci. Ils sont totalement indépendants des sollicitations et ne sont que la traduction de la structure du système et de ses conditions aux limites. Les modes propres sont assimilables à des thermogrammes topologiques. Une visualisation graphique est ainsi possible et rend leur interprétation plus aisée. L'analyse des modes et de leur influence sur la réponse dynamique d'un bâtiment à diverses sollicitations telles le flux solaire, la température extérieure, le flux de chauffage permet de distinguer les modes dominants. On peut justifier mathématiquement que l'inertie thermique qui détermine le comportement dynamique d'un bâtiment est complètement caractérisée par ses éléments propres. Ces fondements mathématiques démontrent avec rigueur que la forme modale est la représentation interne la plus pertinente pour décrire l'inertie thermique [Lefebvre,1989][22]. La mise en évidence de la dominance modale de quelques modes sur la réponse dynamique des bâtiments et plus particulièrement du premier mode[23] a conduit à une caractérisation approchée de l'inertie. Cette caractérisation de l'inertie, issue directement du formalisme modal, s'avère très utile car elle permet d'estimer de façon très simple le comportement dynamique d'un bâtiment. En effet, le mode dominant a approximativement la forme du champ de température d'un régime permanent où la température intérieure est maintenue supérieure à la température extérieure grâce à un flux de chaleur

[20] Lefebvre, G., 1987, *Analyse et réduction modales d'un modèle de comportement thermique de bâtiment*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI.

[21] Un niveau de précision acceptable est préservé avec des modèles modaux d'ordre inférieur à 10

[22] Lefebvre, G., 1989, *Caractérisation de l'inertie thermique d'un bâtiment par analyse modale*, Rev. Gén. Therm. Fr., n0 332-333, Aout Septembre 1989.

[23] celui associé à la plus grande constante de temps

convectif. On peut ainsi calculer facilement une valeur approchée de la constante de temps principale selon la formule suivante:

$$\tau = E/GV \tag{4.31}$$

- E représente l' énergie totale stockée dans chacune des parois constituant le bâtiment.
- GV est le flux thermique représentant les déperditions auxquelles est soumis le bâtiment

Cette formulation (Equation 4.31) a été intégrée ainsi dans des méthodes simplifiées basées sur des corrélations qui fournissent une estimation des besoins de chauffage mensuels [Passys][24],-[European passive solar handbook][25].

4.2 Principe de la synthèse modale

La complexité et la taille des modèles modaux représentant des bâtiments multizones entraînent la manipulation de matrices dont les dimensions sont importantes notamment pour la recherche des éléments propres (phase de diagonalisation). Par ailleurs en constatant qu'un grand système est composé d'éléments simples contribuants au comportement de l'ensemble, des recherches se sont orientées vers l'application de la synthèse modale dans le domaine du bâtiment [Neveu,1988][26]. En effet la synthèse modale permet la reconstitution de la forme modale d'un modèle complexe à partir des modèles modaux de ses sous systèmes. L'intérêt de la synthèse modale réside également dans la possibilité de coupler des modèles modaux soumis au préalable à une réduction. L'enchaînement des trois phases suivantes:

- *analyse modale des sous-systèmes et réduction locale*
- *assemblage des sous-systèmes et résolution du problème aux valeurs propres associé au modèle de synthèse*
- *calcul de la reconstitution de la forme modale approchée du système couplé et réduction globale*

associe les techniques de réduction modale et le processus de synthèse modale et offre ainsi un outil performant pour l'étude du couplage de composants d'un bâtiment. Le nombre restreint de paramètres descriptifs et significatifs peut fournir des indications extrêmement riches sans devoir faire explicitement des simulations. Le formalisme général de la synthèse modale a été établi dans [SYMBOL][27] par B.Flament pour le couplage bord à bord. La construction du modèle de synthèse, par couplage direct des différents composants du système, avec un seul niveau d'emboîtement, y est détaillée. Une démarche plus modulaire et plus systématique, consiste à coupler des modèles deux à deux jusqu'à ce que tous les

[24] PASSYS, à paraitre, *Rapport final*

[25], à paraitre *Basic principles and concepts for passive solar architecture.*

[26] Neveu, A., 1988, *Condensation du problème aux valeurs propres d'un système thermique complexe par synthèse modale de ses composants*, Note interne, Centre d'Energétique, Ecole des Mines de Paris.

[27] Blanc-Sommereux, I., Caplain, G., Ebert, R., Flament, B., Lefebvre, G., Neveu, A. and Peuportier, B., 1989, Rap[port AFME/ARMINES 1988/1989 projet SYMBOL.

composants constitutifs du système soient pris en compte. Cette démarche correspond à la méthode de synthèse modale par couplage par paire avec plusieurs niveaux d'emboîtement. Les principales étapes et conclusions du couplage par paire, sont maintenant brièvement rappelées. Ce couplage par paire dans le cas du raccordement par recouvrement est approfondie au chapitre 5 ("La synthèse modale dans le cas du couplage par recouvrement").

La détermination du modèle de synthèse nécessite trois étapes principales qui sont :

- *La juxtaposition* : consistant à rassembler les équations d'état des différents modèles locaux.
- *La connexion* : consistant à déterminer de manière formelle les sollicitations de couplage inconnues.
- *L'assemblage* : permettant de "recoller" les modèles entre eux, en utilisant les équations d'état locales et l'équation de connexion.

Les phases de juxtaposition et d'assemblage sont indépendantes du type de couplage des modèles locaux. Par contre la phase de connexion dépend du type des conditions de raccordement. Ces conditions de raccordement sont des conditions physiques qui expriment le couplage des composants. Le couplage par paire est maintenant décrit au niveau le plus élémentaire de cette structure arborescente: le couplage de deux modèles modaux locaux.

4.2.1 Juxtaposition

La juxtaposition permet de regrouper deux modèles locaux découplés sous une seule équation matricielle. Cette phase de juxtaposition des modèles est indépendante du type de couplage. Elle regroupe dans un même système matriciel, des équations d'état indépendantes du type de l'équation 4.28 , ce qui permet une manipulation mathématique globale plus aisée. L'équation d'état peut ainsi s'écrire sous la forme :

$$\dot{X} = F\,X + B_c\,\dot{U}_c + B\dot{U}_e \tag{4.32}$$

Ce modèle s'exprime en fonction des sollicitations de couplage U_c. La phase suivante de la méthode permettra la détermination de ces sollicitations.

Les sorties des modèles locaux sont également juxtaposées:

$$Y = H\,X + G_c\,U_c + G\,U_e \tag{4.33}$$

$$T = P\,X + S_c\,U_c + S_e\,U_e \tag{4.34}$$

4.2.2 Connexion

Le modèle global constitué de la juxtaposition des deux modèles locaux découplés est totalement déterminé si les sollicitations de couplage, U_c, sont connues. Mais lorsque l'on assemble les modèles, seules les sollicitations U_e sont extérieures au système. Les sollicitations U_c, internes au système global liées aux interfaces, sont des variables intermédiaires et la connexion des modèles modaux locaux consiste à exprimer ces sollicitations intermédiaires

en fonction des vecteurs d'états locaux et des sollicitations extérieures au modèle global reconstitué. Plusieurs types de raccordement de modèles sont possibles. Dans le Chapitre 3 une typologie de raccordements de modèles est proposée. Suivant le type de raccordement (bord à bord, ou par recouvrement), les conditions physiques correspondantes diffèrent et par conséquent l'expression des sollicitations de couplage est de nature différente. Pour illustrer cette phase de connexion, le cas du couplage bord à bord est maintenant présenté. Le couplage par recouvrement est traité au chapitre 5.

Connexion pour le couplage bord à bord

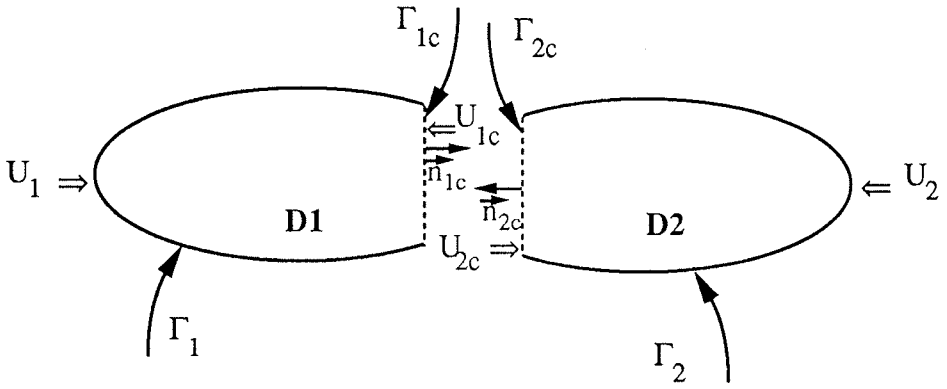


Figure 4.2: Modèles locaux découplés (couplage bord à bord)

Pour le couplage bord à bord, on considère comme conditions de raccordement une condition de contact thermique parfait entre les deux frontières sur lesquelles se raccordent les deux modèles.

Les expressions mathématiques correspondant à ce type de raccordement sont d'une part, l'égalité du champ de température au niveau de l'interface de couplage de chaque composant, d'autre part la non accumulation du flux sur cette même interface. Les équations décrivant ces deux conditions sont respectivement :

$$T_1(t) = T_2(t) \quad M \in \Gamma_{kc}, k = 1,2 \tag{4.35}$$

$$K_1 \nabla T_1(t) \vec{n}_{1c} + K_2 \nabla T_2(t) \vec{n}_{2c} = 0 \quad \forall M \in \Gamma_{kc}, \ k = 1,2 \tag{4.36}$$

ou encore:

$$\phi_{1c} + \phi_{2c} = 0 \tag{4.37}$$

Pour terminer la description du raccordement des modèles il faut définir une condition géométrique. Cette condition correspond au fait que les interfaces de couplage des composants sont confondues, soit $\Gamma_{1c} = \Gamma_{2c}$.

Les équations 4.35 et 4.36 peuvent également s'exprimer sous la forme:

$$Y_{1r} + I_1 Y_{2r} = 0 \tag{4.38}$$

- Y_{1r} vecteur des sorties sur les frontières de raccordement de la zone 1

$$Y_{1r} = \begin{bmatrix} T_1 \\ \phi_{1c} \end{bmatrix}$$

- Y_{2r} vecteur des sorties sur les frontières de raccordement de la zone 2

$$Y_{2r} = \begin{bmatrix} T_2 \\ \phi_{2c} \end{bmatrix}$$

- $I_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Les sorties des modèles locaux sur les frontières de raccordement s'expriment de la façon suivante:

$$\begin{aligned} Y_{1r} &= H_{1r}\, X_1 + G_{1rc}\, U_{1c} + G_{1r}\, U_{1e} \\ Y_{2r} &= H_{2r}\, X_2 + G_{2rc}\, U_{2c} + G_{2r}\, U_{2e} \end{aligned} \tag{4.39}$$

U_{1c} et U_{2c}, les sollicitations de couplage peuvent être soient des températures soient des flux suivant le type de conditions aux limites choisi pour les modèles locaux. Par exemple dans le cas où le modèle 1 est limité par des conditions de première espèce, l'équation 4.39 s'exprime sous la forme:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ \phi_{1c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots 0 \dots \\ \dots - K_1 \nabla V_{1l}.\vec{n}_{1c} \dots \end{bmatrix} X_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ K_1 \nabla S_{1c}.\vec{n}_{1c} \end{bmatrix} U_{1c} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots - K_1 \nabla S_{1ep}.\vec{n}_{1c} \dots \end{bmatrix} U_{1e} \tag{4.40}$$

Dans le cas général de conditions aux limites quelconques, on obtient en remplaçant les champs de températures et les flux sur les frontières de raccordement des deux modèles (Y_{1r} et Y_{2r} dans l'équation de raccordement (Equation 4.38)):

$$[G_{rc}]\, U_c = [H_r]\, X + [G_r]\, U_e \tag{4.41}$$

Les matrices $[H_r]$ et $[G_r]$, sont des hypermatrices ou matrices blocs, définies respectivement à partir des matrices H_{kr} et G_{kr}, (k=1,2):

$$\begin{aligned} [G_{rc}] &= [[G_{1rc}]\ [\, I_1.G_{2rc}\,]] \\ [H_r] &= [[-H_{1r}]\ [\, -I_1.H_{2r}\,]] \\ [G_r] &= [[-G_{1r}]\ [\, -I_1.G_{2r}\,]] \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$[G_{rc}] = \begin{bmatrix} S_{1c} & -S_{2c} \\ K_1 \nabla S_{1c}.\vec{n}_{1c} & K_2 \nabla S_{2c}.\vec{n}_{2c} \end{bmatrix}$$

et

$$[H_r] = \begin{bmatrix} \dots - V_{1l} \dots & \dots V_{2l} \dots \\ \dots - K_1 \nabla V_{1l}.\vec{n}_{1c} \dots & \dots - K_2 \nabla V_{2l}.\vec{n}_{2c} \dots \end{bmatrix}$$

$$[G_r] = \begin{bmatrix} \dots - S_{1ep} \dots & \dots S_{2ep} \dots \\ \dots - K_1 \nabla S_{1ep}.\vec{n}_{1c} \dots & \dots - K_2 \nabla S_{2ep}.\vec{n}_{2c} \dots \end{bmatrix}$$

l est l'indice de l'ordre du modèle et p celui des sollicitations extérieures.

L'expression des sollicitations de couplage peut donc se mettre sous la forme:

$$U_c = [G_{rc}]^{-1} [H_r] X + [G_{rc}]^{-1} [G_r] U_e \tag{4.43}$$

L'opération d'inversion de G_{rc} est la transcription mathématique du couplage physique des éléments.

Les sollicitations de couplage inconnues (U_{1c} et U_{2c}) peuvent également se mettre sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} U_{1c}(t) &= \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{nk} \theta_{1kl} X_{kl}(t) + \Omega_{1c}(t) \\ U_{2c}(t) &= \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{nk} \theta_{2kl} X_{kl}(t) + \Omega_{2c}(t) \end{aligned}$$

avec : $M \in \Gamma_{kc}$

$$\theta_{1kl} = \frac{1}{D} \left(-S_{2c} K_k \nabla V_{kl}.\vec{n}_{kc} + K_2 \nabla S_{2c}.\vec{n}_{2c} (-1)^k V_{kl} \right)$$

$$\theta_{2kl} = \frac{1}{D} \left(-S_{1c} K_k \nabla V_{kl}.\vec{n}_{kc} + K_1 \nabla S_{1c}.\vec{n}_{1c} (-1)^{k+1} V_{kl} \right)$$

$\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$ correspondent aux termes de sollicitations

Remarques: Dans le cas où il n'y a pas de réduction des modèles, la somme sur l de 1 à n_k est étendue jusqu'à l'infini.

4.2.3 Assemblage

De même que pour la phase de juxtaposition des modèles, la phase d'assemblage des modèles est identique pour les différents types de couplage car elle ne dépend pas de la nature du couplage. Ayant exprimé les sollicitations de couplage U_c en fonction des sollicitations extérieures et des états internes locaux, on peut procéder à l'assemblage des modèles en reprenant l'équation d'état juxtaposée 4.32 et en remplaçant U_c par l'expression des sollicitations de couplage (Equation 4.43). On obtient alors, un modèle assemblé de la forme:

$$\begin{aligned} [N]\dot{X} &= [F]X + [B_A]\dot{U}_e \\ Y &= [H_A]X + [G_A]U_e \\ T &= [P_A]X + [S_A]U_e \end{aligned} \tag{4.44}$$

avec :

$$\begin{aligned}
[N] &= [I] - [B_c][G_{rc}]^{-1}[H_r] \\
[B_A] &= [B_c][G_{rc}]^{-1}[G_r] + [B_e] \\
[H_A] &= [G_c][G_{rc}]^{-1}[H_r] + [H] \\
[G_A] &= [G_c][G_{rc}]^{-1}[G_r] + [G] \\
[S_A] &= [S_c][G_{rc}]^{-1}[G_r] + [S_e] \\
[P_A] &= [S_c][G_{rc}]^{-1}[H_r] + [P]
\end{aligned}$$

Ce modèle assemblé (encore appelé modèle de synthèse) est strictement identique quelquesoit le type de couplage. Néanmoins, la composition de la matrice N a une expression particulière qui dépend du type de couplage. Le modèle assemblé décrit par le système 4.44 n'a pas une forme modale (ceci est dû à la présence de la matrice N qui est non diagonale). Par contre, il est possible de reconstituer la forme modale du modèle de synthèse.

4.2.4 Reconstitution de la forme modale du modèle de synthèse

La forme modale du modèle de synthèse, obtenue après la phase d'assemblage, peut être reconstituée. Ce modèle modal reconstitué est, dans sa forme non réduite, équivalent au modèle modal global. Le modèle modal global est celui qui est obtenu directement par la méthode modale sans étape de couplage de modèles locaux. Cette équivalence est démontrée dans l'annexe G. Les matrices relatives au modèle modal **reconstitué** seront notées $\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{X}$, etc... Les relations permettant de passer du modèle de synthèse assemblé au modèle modal reconstitué sont maintenant données.

On peut remarquer que les trois relations précédentes (4.44) sont fonction des états des composants locaux juxtaposés X. Or ces derniers sont reliés aux états du modèle modal $\mathcal{X}$ par la relation (voir Annexe G):

$$X = [p]\,\mathcal{X} \tag{4.45}$$

avec : $[p]$: vecteurs propres de $[N]^{-1}[F]$.

La combinaison de la relation 4.45 avec les équations 4.44 permet d'écrire ces dernières sous la forme du **modèle modal** reconstitué:

$$\dot{\mathcal{X}} = [\mathcal{F}]\mathcal{X} + [\mathcal{B}]\dot{U}_e \tag{4.46}$$

$$Y = \mathcal{Y} = [\mathcal{H}]\mathcal{X} + [\mathcal{S}]U_e \tag{4.47}$$

$$T = \mathcal{T} = [\mathcal{P}]\mathcal{X} + [\mathcal{S}_P]U_e \tag{4.48}$$

avec :

- $\mathcal{F}$: matrice diagonale des valeurs propres z_i du modèle modal,
- $\mathcal{B} = [p]^{-1}[N]^{-1}\ [B_A]$
- $\mathcal{H} = [H_A]\ [p]$
- $\mathcal{S} = [G_A]$
- $\mathcal{S}_P = [S_A]$

Les valeurs propres z_i de $N^{-1}F$ (modèle assemblé) sont identiques à celles du modèle modal global. Les vecteurs propres du modèle modal $\mathcal{P}$ s'expriment en fonction des vecteurs propres p_i de $N^{-1}F$ (appelés également coefficients de décomposition) et de la juxtaposition des vecteurs propres des modèles locaux (P) suivant la relation:

$$\mathcal{P} = (P + [S_c][G_{rc}]^{-1}[H_r]) \quad [p] \tag{4.49}$$

Chapitre 5

Synthèse modale dans le cas du couplage par recouvrement

Une typologie de raccordement de modèles a été présentée (Chapitre 3) et les principes généraux de la synthèse modale ont été rappelés (Chapitre 4). Dans le cadre du couplage par recouvrement (couplage adapté au raccordement de zones et de composants), les trois phases de la synthèse modale, pour le cas du couplage par paire, sont maintenant détaillées:

- *la juxtaposition*
- *la connexion*
- *l'assemblage*

Ce chapitre traitant du couplage de modèles de zones va reprendre ces trois points et présenter l'étude de l'équivalence du modèle de synthèse et du modèle global ainsi que l'étude de la décomposition des fonctions propres globales sur les fonctions propres locales dans le cadre du couplage par recouvrement.

Les notions de modes locaux et globaux sont introduites et l'équivalence du modèle de synthèse obtenu avec une représentation modale directe est démontrée.

Les performances de la synthèse modale associée à la réduction des modèles locaux seront illustrées par l'exemple d'un bâtiment bizone.

5.1 Juxtaposition de modèles

La construction d'un modèle de synthèse, dans le cas du raccordement de deux modèles s'effectue en suivant la méthodologie décrite dans le chapitre 4.2 (juxtaposition, connexion et assemblage). Par contre, ce type de couplage présente la particularité de distinguer **deux** frontières pour le raccordement de chaque modèle. Il s'effectue en forçant l'égalité des températures exprimées par deux modèles distincts en deux lieux qui délimitent une partie commune. Les deux lieux, que nous appellerons frontières de raccordement, ne sont pas a priori, l'endroit où s'expriment les conditions aux limites des modèles. Le volume dont les frontières sont précisement celles des frontières de raccordement correspond à la zone de recouvrement des deux modèles couplés.

Nous allons tout d'abord juxtaposer deux modèles terminaux. Tout modèle terminal k peut être décrit par les relations suivantes :

$$\dot{X}_k = F_k X_k + B_{kc} \dot{U}_{kc} + B_k \dot{U}_{ke} \tag{5.1}$$

$$Y_k = H_k X_k + G_{kc} U_{kc} + G_k U_{ke} \tag{5.2}$$

avec :

- U_{kc} : sollicitation de couplage du composant k à l'endroit où s'applique la condition aux limites.
- U_{ke} : sollicitations extérieures. du composant k.
- Y_k : sorties .

Nous ne traiterons, dans ce qui suit, que le couplage par paire. Ainsi, la juxtaposition de deux modèles, au premier niveau d'emboîtement, peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{X} = F X + B_c \dot{U}_c + B_e \dot{U}_e \tag{5.3}$$

$$Y = H X + G_c U_c + G U_e \tag{5.4}$$

$$T = P X + S_c U_c + S_e U_e \tag{5.5}$$

avec :

- $$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}$$
- U_e vecteur des sollicitations extérieures

$$U_e = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

La sollicitation U_1 est appliquée sur la frontière Γ_1, la sollicitation U_2 est appliquée sur la frontière Γ_2.

- U_c vecteur des sollicitations de couplage sur les frontières où sont appliquées les conditions aux limites.

$$[U_c] = \begin{bmatrix} U_{1c} \\ U_{2c} \end{bmatrix}$$

La sollicitation U_{1c} est appliquée au modèle 1 sur la frontière Γ_{1c}. La sollicitation U_{2c} est appliquée au modèle 2 sur la frontière Γ_{2c}.

$$[H] = \begin{pmatrix} [H_1] & 0 \\ 0 & [H_2] \end{pmatrix}$$

$$[G_c] = \begin{pmatrix} [G_{1c}] & 0 \\ 0 & [G_{2c}] \end{pmatrix}$$

$$[G] = \begin{pmatrix} [G_1] & 0 \\ 0 & [G_2] \end{pmatrix}$$

Cette première phase de juxtaposition est identique quelque soit le type de couplage car elle ne dépend pas de la façon dont les modèles sont connectés. Par contre la phase de couplage est différente car elle dépend de la matrice des sollicitations de couplage U_c. Le paragraphe suivant traite de la connexion et de la détermination de ces variables de couplage, sans préciser pour le moment, le type de conditions aux limites qui s'appliquent aux modèles à connecter.

5.2 Connexion

Ce couplage diffère du couplage bord à bord (section 4.2.2) par la présence d'une partie commune aux deux modèles. Les frontières de ce domaine commun Γ_a et Γ_b correspondent aux interfaces de couplage (figure 5.1).

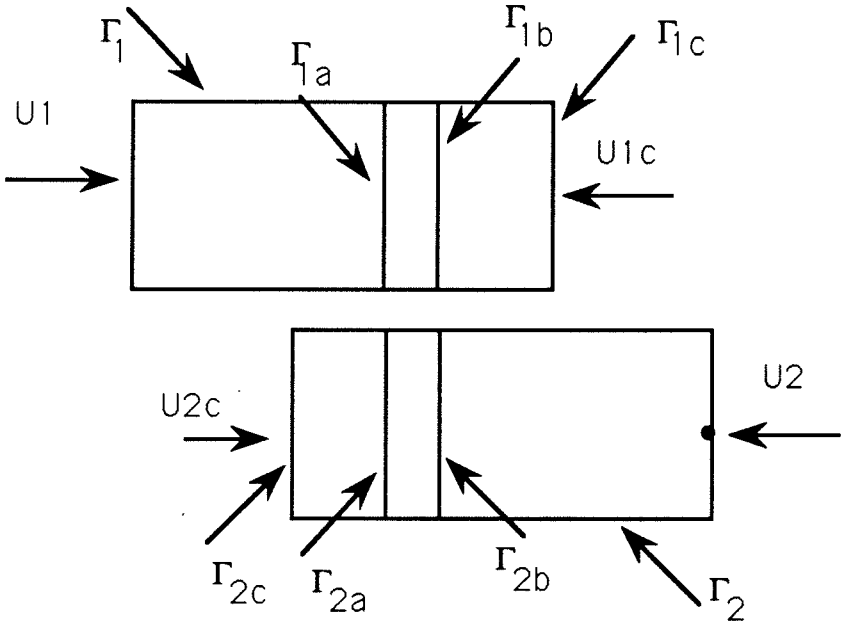


Figure 5.1: Modèles locaux découplés (couplage par recouvrement)

L'égalité des températures des modèles 1 et 2 sur les frontières Γ_{1a} et Γ_{2a} d'une part, et Γ_{1b} et Γ_{2b} d'autre part, sont des conditions nécessaires de raccordement qui permettent d'exprimer les sollicitations de couplages inconnues U_{1c} et U_{2c} en fonction des états

locaux et des sollicitations extérieures. Il faut alors montrer que cette condition est suffisante pour assurer le raccordement correct des deux modèles, autrement dit l'égalité des champs thermiques obtenus avec les deux modèles en chaque point de la partie commune. Nous allons voir que ceci est vrai sous certaines conditions. Alors que, par la suite nous supposerons le résultat raisonnablement vrai dans un cas plus général, la démonstration est effectuée avec les hypothèse simplificatrices suivantes:

- h1 : $\mathcal{L}(T) = \nabla(K(M)\nabla(T)) \quad \forall M \in D_1 \cap D_2$

  L'opérateur de la chaleur est limité aux phénomènes conductifs. (Nous nous trouvons dans un cas de transferts thermiques symétriques).

- h2 : La condition initiale dans le domaine commun est unique. Elle s'exprime dans chacun des deux modèles par: $T_1(M,0) = T_2(M,0) = T^0(M) \quad \forall M \in D_1 \cap D_2$

- h3 : $D_1 \cap D_2 = V$

  Les caractéristiques thermophysiques et géométriques de la partie commune sont traduites dans chacun des deux modèles de façon à ce qu'elle représente bien le même milieu dans ces modèles. Les interfaces de couplage sont donc confondues deux à deux : $\Gamma_{1a} = \Gamma_{2a} = \Gamma_a$ et $\Gamma_{1b} = \Gamma_{2b} = \Gamma_b$

- h4 : $\mathcal{L}_k(T) = \mathcal{L}(T) \quad \forall M \in D_1 \cap D_2 \quad k = 1,2$

  L' opérateur de la chaleur s'exprime de la même façon dans le modèle 1 ou dans le modèle 2

- h5 : Les seules sollicitations externes sont, U_1 et U_2, sur les interfaces Γ_1 et Γ_2, et sont des fonctions connues et arbitraires du temps.

- h6 : Pour simplifier les calculs, les températures et les flux sont uniformes sur chacune des interfaces de raccordement Γ_a et Γ_b.

Montrons qu'imposer l'égalité des températures aux interfaces de couplage assure un raccordement correct, c'est à dire l'unicité du champ de température dans la partie commune aux deux modèles ($V = D_1 \cap D_2$).

Démonstration :
Pour démontrer l'égalité des champs de température $T_1(M,t)$ et $T_2(M,t)$ dans le domaine commun V, nous formons le champ différence T(M,t)= $T_1(M,t) - T_2(M,t)$ dans ce domaine V. On applique l'opérateur de la chaleur à ce champ différence:

$$\forall M \in D_1 \cap D_2 \quad \mathcal{L}(T(M,t)) = C(M)\frac{\delta T(M,t)}{\delta t} \quad \forall t \in [0,+\infty] \qquad (5.6)$$

avec la condition initiale:
$T(M,0) = T_1(M,0) - T_2(M,0) = 0$ puisque

d'après l'hypothèse h2: $T_1(M,0) = T_2(M,0)$

De même d'après les équations de raccordement que nous avons imposées:

$$T(M,t) = 0 \quad \forall M \in \Gamma_{kj} \quad j = a,b \quad \forall t$$

D'après le principe du maximum et du minimum [Godounov][1] (principe contenu dans l'annexe A donnant la démonstration de l'unicité de la solution pour l'équation de la chaleur dans un domaine dont les frontières sont soumises à des conditions aux limites de Dirichlet) le champ différence T(M,t) possède une solution unique qui prend ses valeurs extrêmes sur la frontière spatio-temporelle où il est défini. min T(M,t)< $T(M,t)$ < Max T(M,t). Or sur cette frontière le champ est nul. min T(M,t)= Max T(M,t)=0

On obtient donc: T(M,t)=0 $\forall M \in D_1 \cap D_2 \quad \forall t.$

Ce qui prouve l'identité des champs de température : $T_1(M,t) = T_2(M,t)$

Notons que la condition d'égalité des températures imposée par le couplage ne présume en rien le type de conditions aux limites imposées sur les frontières des modèles découplés (voir page 42). Les conditions de raccordement peuvent être traduites par l'expression des sollicitations de couplage U_{1c} et U_{2c}. Sachant que le champ des températures s'exprime en fonction du vecteur d'état correspondant et des sollicitations sous la forme suivante, dans chacun des modèles:

$$\forall M \in D_1 \quad \forall t, \quad T_1(M,t) = \sum_{l=1}^{n_1} X_{1l}(t)\, V_{1l}(M) + S_{1b}(M)\, U_{1c}(t) + S_1(M)\, U_1(t) \quad (5.7)$$

$$\forall M \in D_2 \quad \forall t, \quad T_2(M,t) = \sum_{l=1}^{n_2} X_{2l}(t)\, V_{2l}(M) + S_{2a}(M)\, U_{2c}(t) + S_2(M)\, U_2(t) \quad (5.8)$$

Les expressions des sollicitations de couplage U_{1c} et U_{2c} sont obtenues[2] en imposant que les températures des deux modèles sont identiques sur les frontières Γ_a et Γ_b de V

$$\forall M \in \Gamma_a \quad (T_1(M,t) = T_{1a}(t)) = (T_2(M,t) = T_{2a}(t)) \quad (5.9)$$

$$\forall M \in \Gamma_b \quad (T_1(M,t) = T_{1b}(t)) = (T_2(M,t) = T_{2b}(t)) \quad (5.10)$$

Les équations 5.9 et 5.10 peuvent également s'exprimer sous la forme:

$$Y_{1r} + I_1 Y_{2r} = 0 \quad (5.11)$$

avec

- Y_{1r} vecteur des sorties sur les frontières de raccordement pour le modèle 1(températures sur les deux frontières)

$$Y_{1r} = \begin{bmatrix} T_{1a} \\ T_{1b} \end{bmatrix}$$

[1] Godounov, 1973, *Equations de la physique mathématique.* Mir.

[2] on retrouve ici une démarche tout à fait similaire à celle qui a été développée pour le couplage bord à bord à la page 58

- Y_{2r} vecteur des sorties sur les frontières de raccordement pour le modèle 2(températures sur les deux frontières)

$$Y_{2r} = \begin{bmatrix} T_{2a} \\ T_{2b} \end{bmatrix}$$

- $I_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Les sorties des modèles locaux sur les frontières de raccordement s'expriment de la façon suivante:

$$\begin{aligned} Y_{1r} &= H_{1r}\, X_1 + G_{1rc}\, U_{1c} + G_{1r}\, U_{1e} \\ Y_{2r} &= H_{2r}\, X_2 + G_{2rc}\, U_{2c} + G_{2r}\, U_{2e} \end{aligned} \tag{5.12}$$

En remplaçant les champs de températures sur les frontières de raccordement des deux modèles (Y_{1r} et Y_{2r} dans l'équation de raccordement (Equation 5.11))

on obtient alors le système linéaire suivant :

$$[G_{rc}] \begin{bmatrix} U_{1c} \\ U_{2c} \end{bmatrix} = [H_r] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + [G_r] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

équation dite de connexion que l'on note:

$$[G_{rc}]\, U_c = [H_r]\, X + [G_r]\, U_e \tag{5.14}$$

La résolution de ce système 5.13 nécessite l'inversion d'une matrice (2x2) (dans le cas du couplage de 2 zones), notée G_{rc}, définie par :

$$[G_{rc}] = \begin{bmatrix} S_{1c}(Ma) & -S_{2c}(Ma) \\ S_{1c}(Mb) & -S_{2c}(Mb) \end{bmatrix}$$

Dans l'expression $S_{1c}(Ma)$, l'indice 1 se rapporte au modèle 1, l'indice c se rapporte à la sollicitation sur la frontière Γ_{1c} et l'indice a se rapporte à la sortie observée sur la frontière Γ_{1a}.

Les matrices $[H_r]$ et $[G_c]$, sont des hypermatrices ou matrices blocs, définies respectivement à partir des matrices H_{kr} et G_{kr}, (k=1,2).

ou encore:

$$\begin{aligned} [H_r] &= [[-H_{1r}]\ [-I_1.H_{2r}\ ]] \\ [G_r] &= [[-G_{1r}]\ [-I_1.G_{2r}\ ]] \end{aligned} \tag{5.15}$$

avec :

$$[I_1] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[G_r] = \begin{bmatrix} -S_1(M_a) & S_2(M_a) \\ -S_1(M_b) & S_2(M_b) \end{bmatrix}$$

$$[H_r] = \begin{bmatrix} \ldots - V_{1l}(M_a) \ldots & \ldots V_{2l}(M_a) \\ \ldots - V_{1l}(M_b) \ldots & \ldots V_{2l}(M_b) \end{bmatrix}$$

Remarques: Les matrices $[I_1]$ et $[G_{rc}]$ dépendent du type de couplage (bord à bord ou recouvrement). L'inversion de la matrice $[G_{rc}]$, nécessaire pour l'étape suivante, est la transcription mathématique du couplage physique des modèles.

On obtient alors l'expression des sollicitations de couplage en fonction des états locaux et des sollicitations externes:

$$\begin{bmatrix} U_{1c} \\ U_{2c} \end{bmatrix} = [G_{rc}]^{-1}[H_r] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + [G_{rc}]^{-1}[G_r] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

Ces sollicitations de couplage peuvent encore se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} U_{1c}(t) &= \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{n_k} \theta_{1kl}\, X_{kl}(t) + \Omega_1'(t) \\ U_{2c}(t) &= \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{n_k} \theta_{2kl}\, X_{kl}(t) + \Omega_2'(t) \end{aligned} \tag{5.17}$$

avec :

$$\begin{aligned} \theta_{1kl} &= \frac{1}{D} \left(-S_{2c}(Mb)\,(-1)^k V_{kl}(M_a) + S_{2c}(Ma)\,(-1)^k\, V_{kl}(M_b)\right) \\ \theta_{2kl} &= \frac{1}{D} \left(-S_{1c}(Mb)\,(-1)^k V_{kl}(M_a) + S_{1c}(Ma)\,(-1)^k\, V_{kl}(M_b)\right) \end{aligned} \tag{5.18}$$

D $= -S_{1b}(Ma)S_{2a}(Mb) + S_{1b}(Mb)S_{2a}(Ma)$

$\Omega_1'(t)$ et $\Omega_2'(t)$ correspondent aux termes de sollicitations

On remarque bien que les expressions des sollicitations de couplages sont formellement indépendantes du type de conditions aux limites des modèles locaux au niveau des interfaces de couplage. Ces conditions limites sont implicitement contenues dans les éléments propres des modèles locaux et dans les champs statiques unitaires.

Suivant le type de conditions aux limites locales choisies, les sollicitations de couplage auront une expression particulière.

5.3 Connexion: conditions aux limites locales de 1ère espèce

La mise en oeuvre de la synthèse modale pour les bâtiments multizones à l'aide du couplage par recouvrement a été effectuée à partir de modèles modaux de zones générés par le logiciel m2m[3]. Le couplage par recouvrement repose sur l'égalité des températures sur les frontières du domaine commun aux deux modèles. Pour pouvoir appliquer le formalisme décrit précédemment, les températures des zones sont utilisées pour le raccordement.

Un exemple de bâtiment bizone (représenté sur la Figure 5.2) est maintenant traité.

Les frontières du mur mitoyen sont soumises à des conditions aux limites de 3 ème espèce.

[3] m2m a été développé par G.Lefebvre au sein de GISE afin de pouvoir construire des modèles globaux de bâtiments multizones, de les réduire et d'en simuler le comportement dynamique

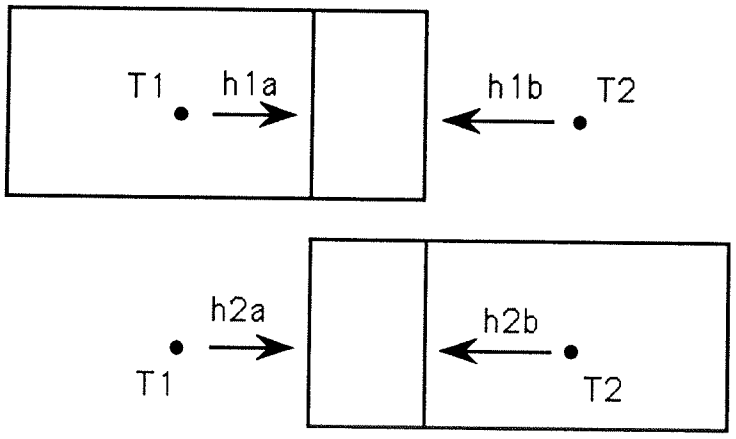


Figure 5.2: Modèles locaux

Le bilan au noeud sur la frontière du mur mitoyen pour la zone 1 donne le flux net absorbé par la face intérieure du mur commun.

$$\phi_{1a} = h_{1a}(T_1 - T_{1Ma}) \tag{5.19}$$

avec:

- T_1 température de la zone 1
- T_{1Ma} température de surface du mur

La zone de recouvrement en fait ne se limite pas au seul mur mitoyen, mais inclut également les échanges superficiels. Cette partie commune (en pointillé sur la Figure 5.3) est soumise à des conditions aux limites de 1 ère espèce (voir page 42) et est équivalente au mur mitoyen soumis à des conditions de 3ème espèce (Cette équivalence est décrite dans la section 3.3)[4].

Les frontières de cette partie commune étant soumises à des conditions de Dirichlet, l'unicité du champ de température est assurée (Démonstration dans l'annexe A).

Il s'agit d'un raccordement par recouvrement où frontière de raccordement et lieu d'expression de la condition aux limites où la température est imposée sont confondues (conditions aux limites de 1ère espèce). Sollicitations de couplage et températures sur les frontières de raccordement sont égales. Ainsi:

- $T_{1b}(t) = U_{1c}(t)$
- $T_{2a}(t) = U_{2c}(t)$

Dans ce cas (conditions aux limites de type 1ère espèce):

- $S_{2c}(Ma) = S_{2a}(Ma) = 1 \ et \ S_2(Ma) = 0$
- $S_{1c}(Mb) = S_{1b}(Mb) = 1 \ et \ S_1(Mb) = 0$

[4] Il faut bien sûr, pour assurer l'équivalence, que les conditions d'égalité des échanges superficiels soient respectées: $h_{1a} = h_{2a}$ et $h_{1b} = h_{2b}$

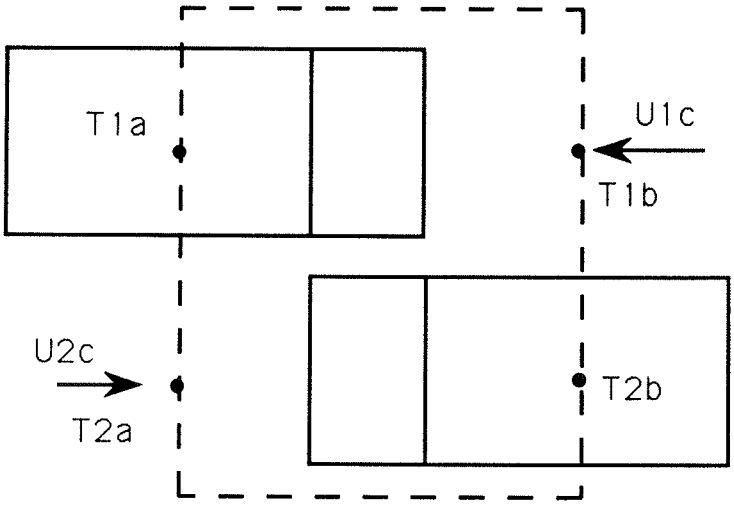


Figure 5.3: Zone de recouvrement d'un bizone

La matrice G_{rc} prend alors la forme suivante :

$$[G_{rc}] = \begin{bmatrix} S_{1b}(Ma) & -1 \\ 1 & -S_{2a}(Mb) \end{bmatrix}$$

et la matrice G_r:

$$[G_r] = \begin{bmatrix} -S_1(Ma) & 0 \\ 0 & S_2(Mb) \end{bmatrix}$$

Et les sollicitations de couplage peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} U_{1c}(t) &= \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{n_k} \theta_{1kl}\, X_{kl}(t) + \Omega_1(t) \\ U_{2c}(t) &= \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{n_k} \theta_{2kl}\, X_{kl}(t) + \Omega_2(t) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \theta_{1kl} &= \frac{1}{D}\ (-S_{2a}(Mb)\, V_{1l}(M_a).(k-2) + V_{2l}(M_b).(k-1)) \\ \theta_{2kl} &= \frac{1}{D}\ (-V_{1l}(M_b).(k-2) + S_{1b}(Ma)\, V_{2l}(M_a).(k-1)) \end{aligned}$$

et D $= 1 - S_{1b}(Ma)S_{2a}(Mb)$
qui tient compte que: $V_{2l}(M_a) = 0$ et que $V_{1l}(M_b) = 0$

Remarques: Les conditions nécessaires et suffisantes au couplage des modèles pour ce type de raccordement (par recouvrement) sont donc l'égalité des températures sur chacune des deux frontières délimitant le domaine de recouvrement.

L'unicité de la solution pour l'équation de la chaleur dans un domaine dont les frontières sont soumises à des conditions aux limites de Dirichlet a permis de démontrer

qu'imposer l'égalité des températures équivalentes aux interfaces de couplage assure un raccordement correct des modèles couplés par recouvrement.

Ces résultats reposent sur l'hypothèse que les modèles modaux locaux n'ont subi aucune réduction. Si l'on désire effectuer une réduction des modèles locaux alors on ne peut plus affirmer que l'on a unicité du champ de température dans la zone de recouvrement. En effet ces réductions de modèles affectent l'hypothèse stricte d'égalité de l'opérateur de la chaleur dans les deux domaines. Du point de vue mathématique, une étude plus appronfondie serait à mener sur le procédé alterné de Schwarz basé sur la minimisation de l'erreur entre les solutions données par les deux systèmes [Dautray][5].

5.4 Assemblage des modèles

De même que pour la phase de juxtaposition des modèles, la phase d'assemblage des modèles est identique pour les trois types de raccordement car elle ne dépend pas du type de couplage. Ayant exprimé les sollicitations de couplage en fonction des sollicitations extérieures et des états internes locaux (Equation 5.14), on peut procéder à l'assemblage des modèles. En remplaçant U_c dans l'équation d'état et dans l'équation donnant les sorties du modèle assemblé (5.5), on obtient alors:

$$\begin{aligned} N\,\dot{X} &= F\,X + B_A\,\dot{U}_e \\ Y &= H_A\,X + G_A\,U_e \\ T &= P_A\,X + S_A\,U_e \end{aligned} \tag{5.20}$$

avec:

$$N = I - B_c[G_{rc}]^{-1}[H_r] \tag{5.21}$$

$$B_A = [B_c][G_{rc}]^{-1}[G_r] + [B_e] \tag{5.22}$$

$$P_A = [S_c][G_{rc}]^{-1}[H_r] + [P] \tag{5.23}$$

$$S_A = [S_c][G_{rc}]^{-1}[G_r] + [S_e] \tag{5.24}$$

Il faut noter que pour ce modèle assemblé, les sorties du champ de température sont juxtaposées et donc le champ dans la partie commune est décrite deux fois. Ce modèle assemblé (encore appelé modèle de synthèse) est strictement le même quelque soit le type de couplage, par contre la composition de la matrice N est différente. Le modèle assemblé décrit par l'équation 5.20 n'a pas une forme modale (ceci est dû à la présence de la matrice N). Il faut montrer que ce modèle assemblé est équivalent au modèle global. Cette équivalence a été démontrée dans [SYMBOL][6] dans le cadre du couplage bord à bord (voir Annexe G). Nous allons reprendre les points essentiels de la démonstration pour la configuration avec recouvrement.

5.4.1 Equivalence du modèle de synthèse et du modèle modal global

Au modèle de synthèse obtenu après la phase d'assemblage (Equations 5.20), correspond un problème aux valeurs propres du type :

[5] Dautray, R. et J.L. Lions., 1984, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Collection CEA Masson, Tome 1, 601-610.

[6] Blanc-Sommereux, I., Caplain, G., Ebert, R., Flament, B., Lefebvre, G., Neveu, A. and Peuportier, B., 1989, Rap[port AFME/ARMINES 1988/1989 projet SYMBOL.

$$z_i \, N \, p_i \; = \; F \, p_i \tag{5.25}$$

avec :

- z_i : i ème valeur propre de $N^{-1}F$,
- p_i : i ème vecteur propre de $N^{-1}F$

On rappelle que le modèle modal global (ou modèle global) est le modèle obtenu par une approche modale directe, les modes le caractérisant sont appelés modes globaux. On peut montrer qu'il existe une équivalence entre le modèle de synthèse et le modèle modal global. La démarche retenue pour établir l'équivalence du modèle de synthèse (Equation 5.25) et du modèle modal global consiste à relier les fonctions propres globales aux caractéristiques des modèles locaux. En remplaçant les fonctions globales par ces nouvelles expressions on montre que l'on peut retrouver une formulation du problème aux valeurs propres global identique à celle donné par la relation 5.25. Le principe de cette démonstration est maintenant rapidement abordé. Elle est détaillée dans l'annexe G.

La convention suivante a été adoptée: toutes les variables ou fonctions relatives au modèle global sont surlignées par un ˜.

On exprime ainsi les fonctions propres du modèle modal global $\tilde{V}_{ki}(M)$ comme la superposition d'une fonction $\tilde{\mathcal{V}}^d_{ki}(M)$ vérifiant une condition aux limites homogène sur chaque interface de couplage locales, et d'une fonction "statique" résiduelle $\tilde{\mathcal{V}}^r_{ki}(M)$ vérifiant des conditions aux limites inhomogènes sur les interfaces de couplage. Soit:

$$\tilde{V}_{ki}(M) \; = \; \tilde{\mathcal{V}}^d_{ki}(M) \; + \; \tilde{\mathcal{V}}^r_{ki}(M) \tag{5.26}$$

avec:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_k(\tilde{\mathcal{V}}^d_{ki}(M)) \; = \; 0 \\ \mathcal{L}_k(\tilde{\mathcal{V}}^d_{ki}(M)) \; = \; \tilde{z}_k \, C_k \, (\tilde{\mathcal{V}}^d_{ki}(M) \; + \; \tilde{\mathcal{V}}^r_{ki}(M)) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{B}_k(\tilde{\mathcal{V}}^r_{ki}(M)) \; = \; \tilde{U}_{kji} \quad j \; = \; a \ldots b \\ \mathcal{L}_k(\tilde{\mathcal{V}}^r_{ki}(M)) \; = \; 0 \end{cases}$$

k est l'indice identifiant le composant, i est l'indice donnant l'ordre du mode.

Le premier terme vérifiant des conditions aux limites homogènes sur les interfaces locales est décomposable sur les bases locales. L'équation 5.26 peut se reformuler de la façon suivante:

$$\tilde{V}_{ki}(M) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{p}_{kli} \, V_{kl}(M) + \sum_{j=1}^{N_k} S_{kj}(M) \, \tilde{U}_{kji} \tag{5.27}$$

Chaque fonction propre globale peut se décomposer pour une partie sur l'ensemble des fonctions propres locales et pour une autre part sur les liens statiques entre les modèles couplés. Les $\tilde{U}_{kji}$ s'apparentent en fait à des sollicitations de couplage qu'il nous faut déterminer.

Ces fonctions propres globales sont représentées sur la figure 5.4 sous forme graphique pour les deux types de couplage.

- couplage bord à bord
  A l'interface de couplage (point b sur la figure) les conditions de raccordement sont telles (égalité des températures, conservation des flux) qu'il y a continuité du champ de température en ce point.

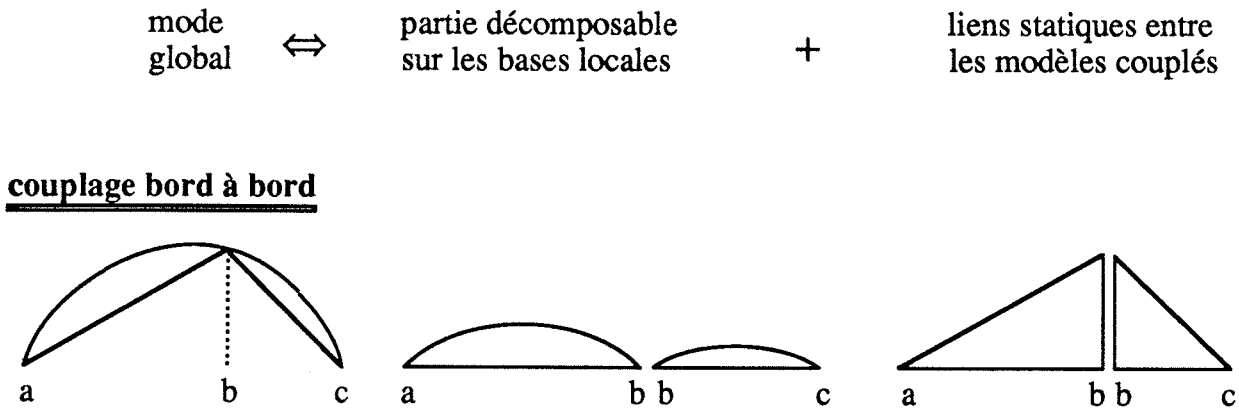


Figure 5.4: Décomposition des modes globaux sur les bases locales, exemple pour le 1^{er} mode global

- couplage par recouvrement
  Dans le domaine commun (entre les points a et b de la figure) il y a unicité du champ de température mais par contre deux décompositions des modes globaux sont possibles dans la zone de recouvrement. Le mode global se décompose indifféremment sur la base locale du modèle 1 dans le domaine commun ou sur la base locale du modèle 2.

Ainsi on peut écrire que dans le domaine de recouvrement et uniquement dans ce domaine, deux décompositions sont possibles pour les fonctions propres globales:

$$\forall M \in V \ \tilde{\mathcal{V}}_{1i}(M) \ = \ \tilde{\mathcal{V}}_{2i}(M) \ = \ \tilde{\mathcal{V}}_{(12)i} \tag{5.28}$$

$\tilde{\mathcal{V}}_{(12)i}$ représente le ième mode propre global dans le domaine commun aux composants 1 et 2 et:

$$\forall M \in V \ \left\{ \begin{array}{lcl} \tilde{\mathcal{V}}_{(12)i}(M) & = & \tilde{\mathcal{V}}^d_{1i}(M) \ + \ \tilde{\mathcal{V}}^r_{1i}(M) \\ \tilde{\mathcal{V}}_{(12)i}(M) & = & \tilde{\mathcal{V}}^d_{2i}(M) \ + \ \tilde{\mathcal{V}}^r_{2i}(M) \end{array} \right. \tag{5.29}$$

Les conditions d'égalité des températures aux interfaces de couplage sont des conditions nécessaires et suffisantes pour rendre compte de l'unicité du champ de température dans la partie commune aux deux modèles (voir démonstration précédente page 66). Il en résulte que les conditions de raccordement pour le couplage par recouvrement peuvent s'exprimer uniquement aux interfaces de couplage. Ainsi:

$$\begin{array}{llcl} \forall M \in \Gamma_b & \tilde{\mathcal{V}}_{1i}(Mb) & = & \tilde{\mathcal{V}}_{2i}(Mb) \\ \forall M \in \Gamma_a & \tilde{\mathcal{V}}_{1i}(Ma) & = & \tilde{\mathcal{V}}_{2i}(Ma) \end{array} \tag{5.30}$$

En utilisant ces conditions de raccordement pour les fonctions propres globales (Equations 5.30) et la définition des fonctions propres globales (5.27), on peut exprimer formellement la sollicitation de couplage relative à la j ième interface du composant k:

$$\tilde{U}_{kji} \ = \ \sum_{l=1}^{\infty} \theta_{kjl} \, \tilde{p}_{kli} \tag{5.31}$$

qui s'apparente à l'équation 5.17 dans laquelle les sollicitations extérieures au système global sont nulles (puisqu'il s'agit des modes propres globaux). L'expression des θ_{kjl} est strictement la même que celle donnée par l'équation 5.18. En remplaçant l'expression des sollicitations (Equation 5.31) dans l'équation 5.27 donnant les fonctions propres globales, on obtient:

$$\tilde{\mathcal{V}}_{ki}(M) \ = \ \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{p}_{kli} V_{kl}(M) \ + \ \sum_{j=a}^{b} \sum_{l=1}^{\infty} S_{kj}(M) \theta_{kjl} \, \tilde{p}_{kli} \tag{5.32}$$

Les coefficients de décomposition $\tilde{p}_{ki}$ des fonctions propres globales sur les bases locales restent à déterminer. Leur détermination est identique à celle exposée pour le couplage bord à bord (voir Annexe G). On retrouve le même résultat à savoir qu'ils ne sont rien d'autre que les vecteurs propres de $N^{-1}F$. De même que pour le couplage "bord à bord", le problème aux valeurs propres relatif au modèle global est équivalent à celui du modèle de synthèse. L'équivalence du modèle de synthèse non réduit avec un

modèle modal démontrée par une approche directe est ainsi démontrée pour le couplage avec recouvrement.

5.4.2 Diagonalisation de la matrice $N^{-1}F$

La recherche des coefficients de décomposition p_i consiste à résoudre le problème aux valeurs propres suivant:

$$p_i \, z_i \; = \; N^{-1}F \, p_i \tag{5.33}$$

avec :

- z_i : i ème valeur propre de $N^{-1}F$,
- p_i : i ème vecteur propre à droite de $N^{-1}F$

Dans le cas du couplage par recouvrement, il s'avère que la matrice $N^{-1}F$ n'est pas symétrique. Alors que les valeurs propres d'une matrice symétrique sont toujours réelles, celles d'une matrice non symétrique peuvent être complexes. Par contre dans le cas de systèmes thermiques réciproques (cas des bâtiments traités) elles doivent être réelles. Un algorithme de diagonalisation pour matrice non symétrique a été utilisé et les valeurs propres z_i correspondantes ainsi obtenues sont effectivement réelles. Les vecteurs propres p_i doivent être normés avec ceux issus du problème à gauche. Le problème à gauche correspondant à l'équation 5.33 est le suivant:

$$z_i \, q_i \; = \; q_i \, N^{-1}F \tag{5.34}$$

avec :

- z_i : i ème valeur propre de $N^{-1}F$,
- q_i : i ème vecteur propre à gauche de $N^{-1}F$

D'après les propriétés générales des matrices [Durand][7]:

$$\begin{array}{rcl} q_i p_j \; = \; \delta_{ij} & avec & \delta_{ij} \; = \; 1 \quad si \quad i = j \\ & et & \delta_{ij} \; = \; 0 \quad si \quad i \neq j \end{array} \tag{5.35}$$

Si $N^{-1}F$ était symétrique, la relation 5.35 de bi-orthogonalité serait automatiquement vérifiée car dans ce cas $q_i = {}^T p_i$. Cette relation permet de normer les vecteurs p_i par rapport aux q_i.

Pour des raisons numériques, la recherche des coefficients de décomposition s'est effectuée par la diagonalisation de la matrice NF^{-1}. Cet intermédiaire de calcul évite ainsi l'inversion de la matrice N non symétrique. Des précisions sur la diagonalisation de la matrice $N^{-1}F$ sont données dans l'annexe C. Le problème à droite est alors le suivant:

$$p'_i \, z'_i \; = \; NF^{-1} \, p'_i \tag{5.36}$$

avec :

- z'_i : i ème valeur propre de NF^{-1},

[7] Durand, E., 1961, *Solutions numériques des équations algébriques*, Tome II, Masson.

- p'_i : i ème vecteur propre à droite de NF^{-1}

Le problème à gauche est alors:

$$z'_i\, q'_i \;=\; q'_i\, NF^{-1} \tag{5.37}$$

avec :

- z'_i : i ème valeur propre de NF^{-1},
- q'_i : i ème vecteur propre à gauche de NF^{-1}

On peut passer très facilement des valeurs et vecteurs propres de NF^{-1} à ceux de $N^{-1}F$ par les relations suivantes:

$$p = F^{-1}p' \tag{5.38}$$

$$q = q'N \tag{5.39}$$

$$z = z'^{-1} \tag{5.40}$$

Cas des valeurs propres multiples Les bâtiments ont assez fréquemment des parois de même composition. Les modèles modaux de zones dont les parois sont en partie identiques possèdent des valeurs propres multiples [Sicard][8]. A ces valeurs propres multiples correspondent des sous espaces propres de dimension égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre. On cherche alors une base de ce sous espace en calculant des vecteurs propres distincts que l'on désire orthogonaux. Or dans le cas de la diagonalisation de la matrice $N^{-1}F$ non symétrique, on doit faire appel deux fois à la procédure de diagonalisation (une fois pour le problème à droite et une seconde fois pour le problème à gauche). Les vecteurs propres q_i (du problème à gauche) permettent de vérifier l'orthogonalité des vecteurs propres p_i (du problème à droite étudié) par la relation 5.35. Or en cas de valeurs propres multiples, la relation 5.35 n'est pas vérifiée pour les vecteurs propres correspondant à ces valeurs propres multiples, car l'algorithme utilisé ne les orthogonalise pas. On fait alors appel à la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser ces vecteurs propres (voir Annexe B).

5.4.3 Reconstitution du modèle modal d'un bâtiment à partir des modèles modaux de zones

Le modèle modal global d'un bâtiment s'exprime sous la forme suivante, à partir du modèle assemblé (Equations 5.20):

$$\begin{array}{rcl} \dot{\mathcal{X}} &=& [\mathcal{F}]\mathcal{X} + [\mathcal{B}]\dot{U}_e \\ \mathcal{Y} &=& [\mathcal{H}]\mathcal{X} + [\mathcal{S}]U_e \\ T &=& [\mathcal{P}]\mathcal{X} + [\mathcal{S}_P]U_e \end{array} \tag{5.41}$$

avec:

[8] Sicard, 1984, *Analyse modale appliquée à la thermique* Thèse de docteur Ingénieur, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris VI.

- $\mathcal{P}$: champ des vecteurs propres "globaux", $\mathcal{P} = P_A[p]$
- $\mathcal{X}$: vecteurs des états globaux, $\mathcal{X} = [z][q]X$ (Annexe F)
- $\mathcal{F}$: matrice des valeurs propres globales
- $\mathcal{B} = [z][z][q]F^{-1}\mathcal{B}_A$ (voir Annexe B pour le calcul numérique de $\mathcal{B}$)
- $\mathcal{H} = H_A[p]$
- $\mathcal{S} = G_A$
- $\mathcal{S}_P = S_A$

Les fonctions propres globales décrites par l'équation 5.32 se décomposent sur les fonctions propres locales (P) complétées par une partie statique (ou termes statiques de raccordement). Les coefficients de décomposition p_i sur les bases propres locales sont les vecteurs propres de la matrice $N^{-1}F$ (voir page 76). L'équation 5.32 peut s'exprimer sous la forme matricielle suivante (d'après l'équation 5.23):

$$\mathcal{P} = (P + [S_c][G_{rc}]^{-1}[H_r])[p] \tag{5.42}$$

Expression du champ de température global Le champ de température global T peut se mettre sous la forme:

$$T = [\mathcal{P}]\mathcal{X} + ([S_c][G_{rc}]^{-1}[G_r] + [S_e])U_e \tag{5.43}$$

- T : vecteur dont la i ème composante correspond au champ de température du domaine $\mathcal{D}$ (il faut souligner qu'une partie du champ des températures du premier modèle est présente deux fois avec une partie du champ de température du second modèle ce qui correspond à la zone de recouvrement).
- $\mathcal{P}$: matrice des vecteurs propres globaux
- $\mathcal{X}$: vecteur des états globaux
- S_c : matrice des champs statiques relatifs aux sollicitations de couplage
- U_e: vecteur des sollicitations extérieures
- S_e: matrice des champs statiques relatifs aux sollicitations extérieures

5.5 Confrontation d'un modèle obtenu par synthèse modale avec un modèle modal global correspondant

Le principe de la synthèse modale dans le cas du couplage par recouvrement de modèles qui vient d'être exposé, a été implanté du point de vue pratique et informatique selon les principes suivants:

- La mise en oeuvre de la synthèse modale pour les bâtiments multizones à l'aide du couplage par recouvrement s'est effectuée à partir des modèles modaux de zones générés par le logiciel m2m. Avec ces modèles modaux de zones, qui respectent un format commun défini au sein du groupe SYMBOL, le modèle de synthèse modale est élaboré selon les conditions de connexion propres au couplage par recouvrement (Chapitre 5). Le développement de la synthèse modale s'est effectué au sein du projet SYMBOL avec le langage ADA sur stations de travail.

- Ce modèle est alors confronté avec un modèle modal obtenu directement, sans étape de synthèse modale, à l'aide du modèle m2m.

L'intérêt de la synthèse modale est liée à sa capacité à générer un modèle à partir de modèles locaux qui peuvent avoir été réduits. En effet, si la réduction des sous modèles modaux est pertinente, le modèle de synthèse reconstitue fidèlement le comportement de ce même modèle modal non soumis à une réduction.

L'illustration des performances de la synthèse modale associée à la réduction modale des modèles locaux, est maintenant effectuée avec l'exemple d'un bâtiment bizone. Ce premier exemple est traité rapidement pour montrer les possibilités de la méthode. Des exemples détaillés font l'objet du chapitre 6. La configuration du bâtiment est donné sur la figure 5.5. Les trois étapes suivantes ont été appliquées sur cet exemple:

1. Une analyse modale et une réduction modale de chaque zone est tout d'abord effectuée avant l'étape proprement dite de synthèse modale. On choisit les modes dominants par analyse du modèle au travers des spectres de réponse indicielle.

2. Les modèles modaux étant réduits (à l'ordre 5 pour chaque zone), ils sont couplés par synthèse modale.

3. Le modèle modal issu des phases de réduction et de synthèse modale est ensuite confronté au modèle modal global, dit modèle de référence.

Ces trois étapes sont schématisées sur la figure 5.6. Chaque zone est construite sur la base d'une discrétisation à 27 noeuds ce qui donne 27 modes après la diagonalisation. Le modèle global lui n'a que 49 modes puisque le mur commun n'est compté alors qu'une fois.

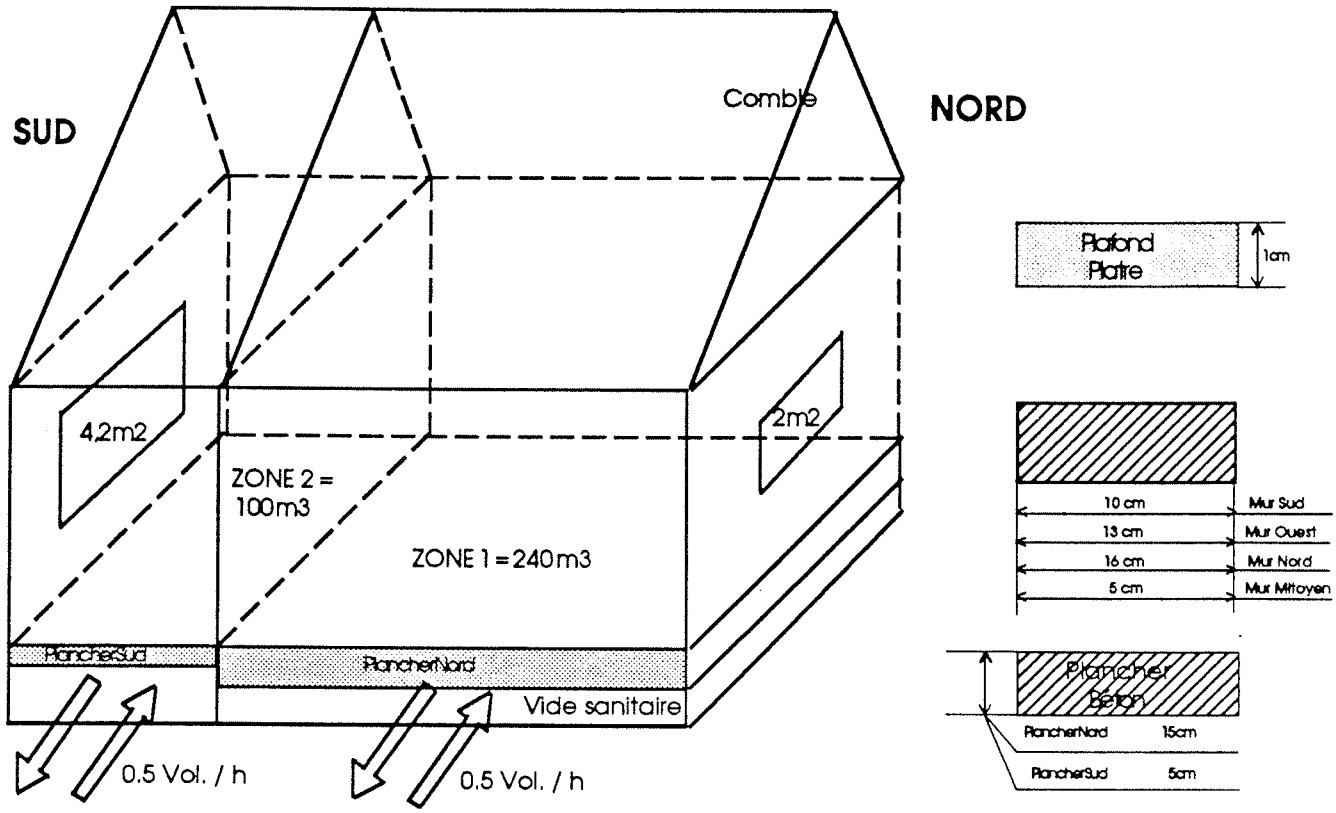


Figure 5.5: Bâtiment bizone

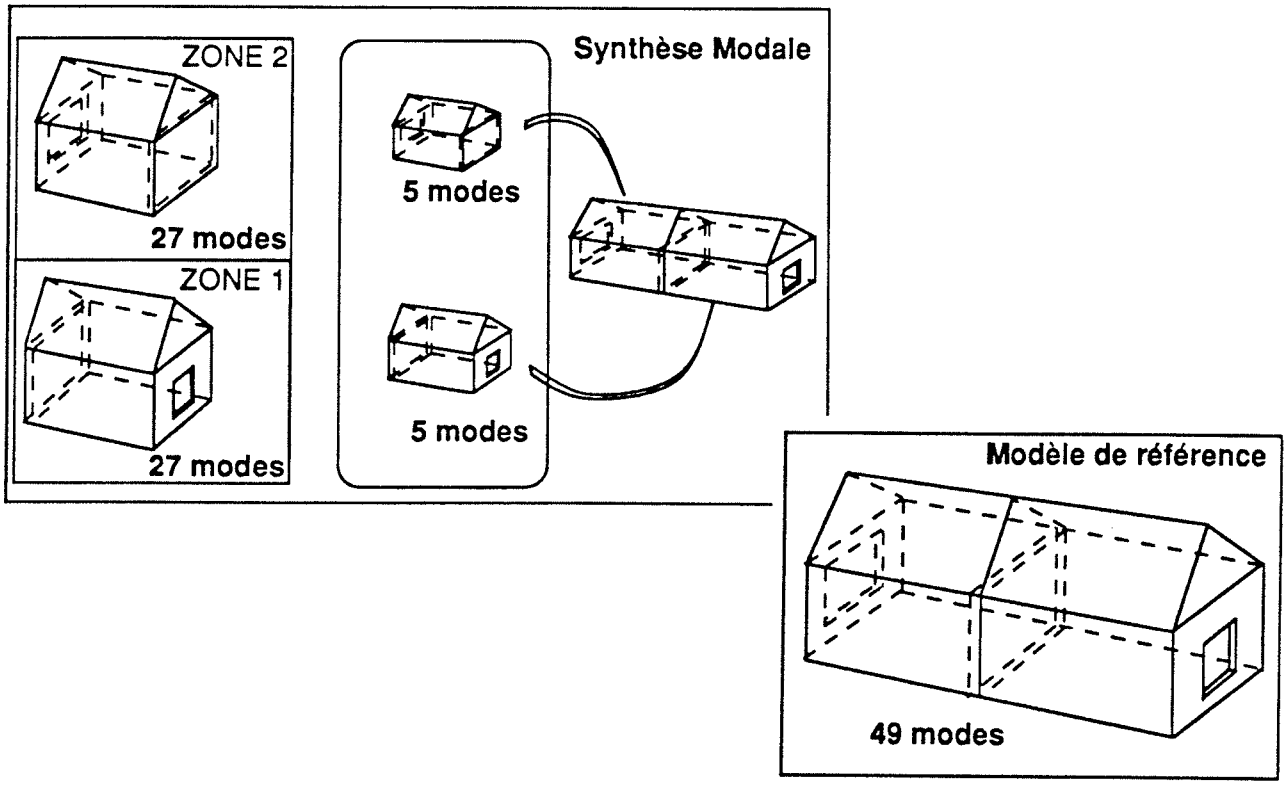


Figure 5.6: Etapes de l'exemple

5.5.1 Analyse modale et réduction des modèles locaux de zones

Parmi les outils développés pour mettre en évidence les modes dominants, le spectre de réponse indicielle est celui qui permet le mieux de les repérer pour des couples sollicitations/sorties. La définition de ces spectres de réponse indicielle est donnée dans l'annexe F. On pourra également pour plus de détails sur les spectres, modes et analyse modale se reporter aux thèses [Bacot], [Sicard], [Salgon], [Lefebvre]. La réponse de la température d'air pour chaque zone à un échelon de température extérieure est donné sur la figure 5.7.

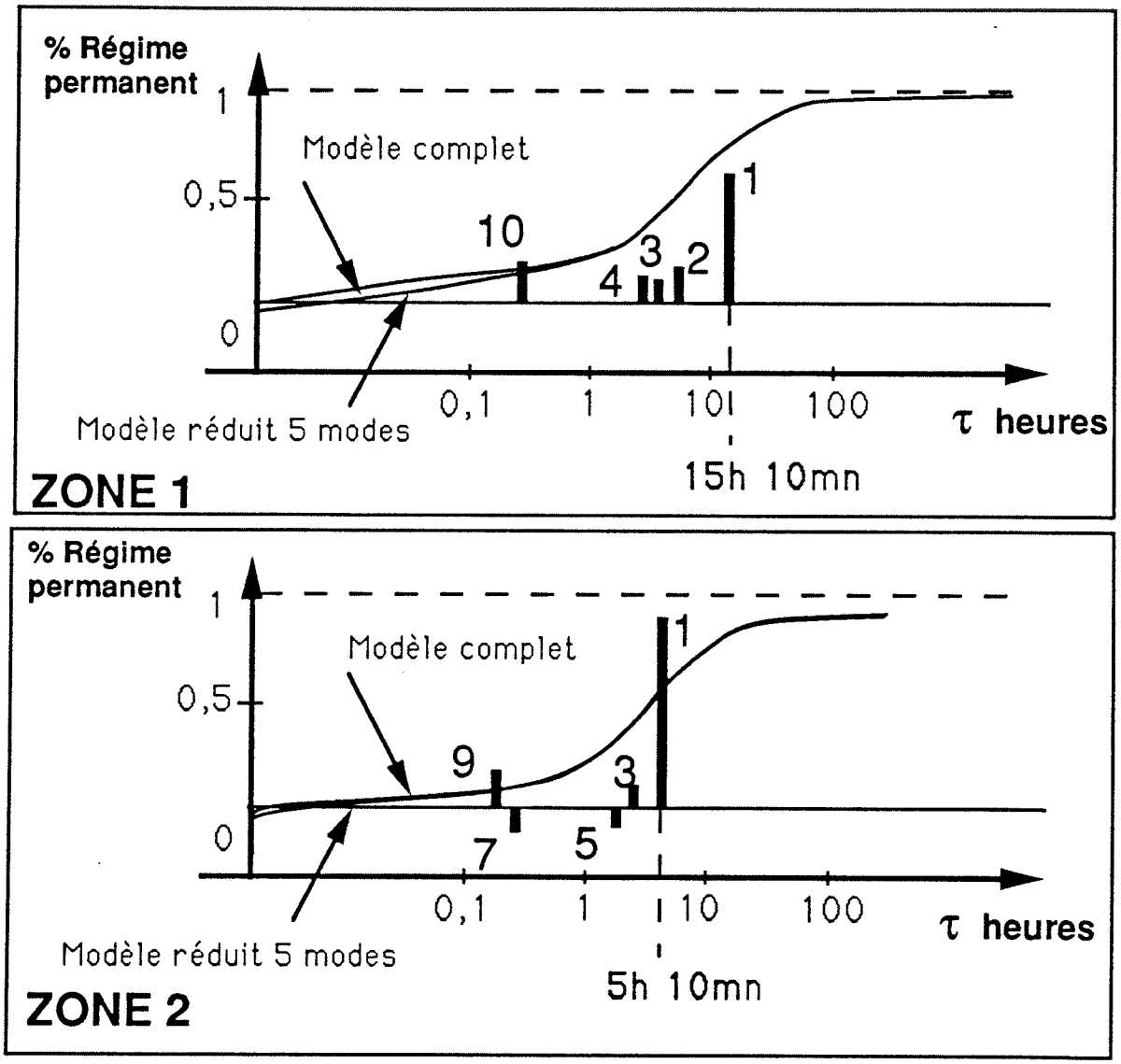


Figure 5.7: Spectres de réponse pour chaque zone à la température extérieure

A l'aide de ces spectres, 5 modes sont identifiés dominants pour la zone 1: les modes 1, 2, 3, 4 et 10. Quant à la zone 2, 5 modes également ont été identifiés comme dominants: les modes 1, 3, 5, 7 et 9. Ces modèles locaux de zone ont donc été réduits chacun à l'ordre 5[9]. On peut constater que la réponse à l'échelon de température extérieure correspondant aux modèles réduits est très proche de celle correspondant au modèle complet.

Dans la figure 5.8 les modes 1, 2, 3 et 10 de la zone 1 sont représentés.

La méthode modale décompose le terme dynamique du champ de température sur un ensemble de fonctions **d'espace**[10] orthogonales ou modes propres. Les modes propres sont représentés, sur la base d'une discrétisation sur un maillage d'espace, par des vecteurs propres associés à des constantes de temps, inverses des valeurs propres. Les modes propres sont assimilables à des thermogrammes topologiques. Pour chaque mode figurent sa constante de temps et son numéro, les modes étant classés par ordre de constante de temps décroissante. Un vecteur propre est défini à un facteur multiplicatif près: afin d'en améliorer l'observation, leur norme du sup[11] est ramenée à 1.

Chaque mode est représenté dans toutes les parois d'une zone ainsi que sur l'air de cette zone. La représentation du mode à l'endroit du noeud qui représente l'air de la zone est concrétisée par la ligne verticale de gauche sur la figure 5.8. La longueur de ce trait est égale à la valeur du mode sur le noeud de l'air. La correspondance entre les murs de la zone 1 et les numéros affectés pour les modes sur la figure 5.8 est donnée sur le tableau 5.1. Le coté droit de la représentation des modes pour toutes les parois est le coté extérieur, le coté gauche est celui de l'intérieur. L'abscisse de la représentation du mode pour chaque mur correspond à leur épaisseur. On remarque bien les différentes épaisseurs des murs sur la figure 5.8 correspondant à la description du bâtiment.

1	mur est
2	mur ouest
3	mur nord
4	plafond
5	sol
6	mur mitoyen

Table 5.1: Murs représentés sur la figure des modes de la zone 1

Le premier mode est associé à une constante de temps de 15h 10mn. C'est la composante la plus lente du champ des températures. Ce mode présente une forme proche de celle du champ des températures en régime permanent. La signification des autres modes sera détaillé au cours du chapitre 6.

[9] ces modèles de zones non réduits sont à l'origine d'ordre 27 en raison d'un maillage effectué avec 27 noeuds

[10] La base modale repose sur la séparation spatiale et temporelle du champ de température: $T(M,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(t)V_i(M)$ avec $V_i(M)$ fonction de l'espace et $X_i(t)$ fonction du temps.

[11] La norme du sup d'un vecteur est la valeur de sa composante de plus grande valeur absolue

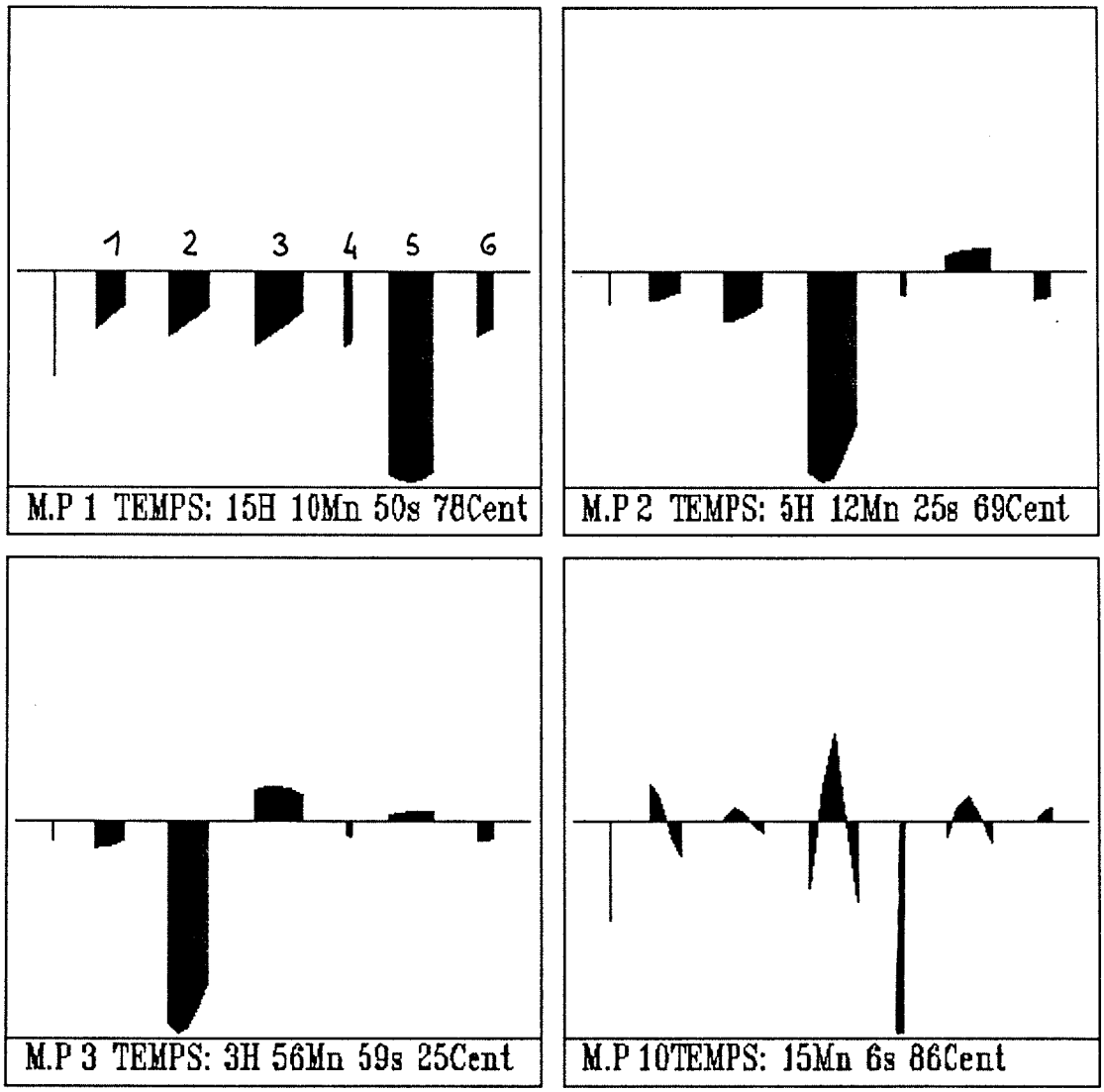


Figure 5.8: Modèle modal pour la zone 1, modes 1, 2, 3 et 10

Les modes 1, 2, 5, et 7 de la zone 2 sont donnés sur la Figure 5.9.

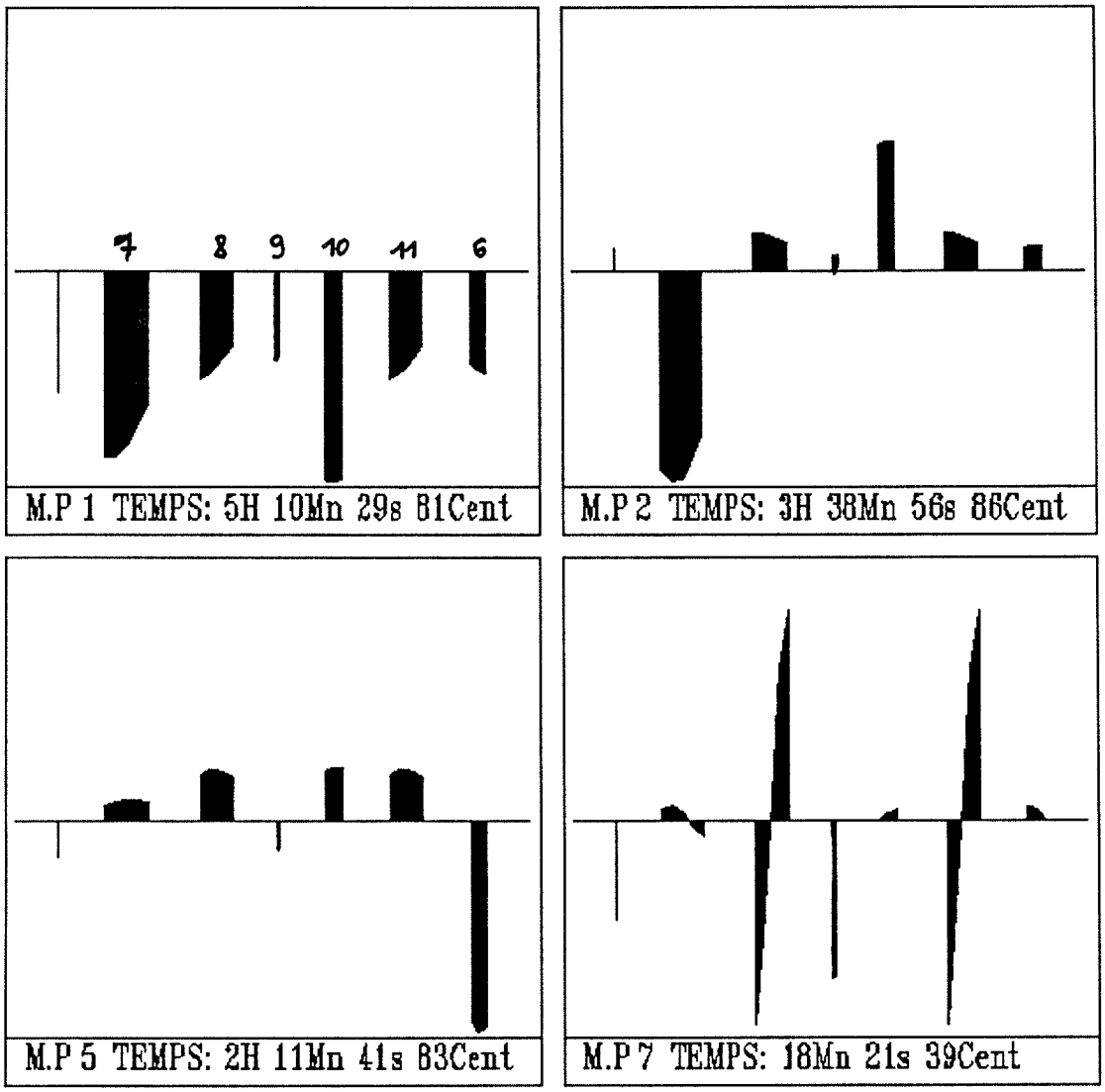


Figure 5.9: Modèle modal pour la zone 2, modes 1, 2, 5, 7

7	mur ouest
8	mur est
9	plafond
10	sol
11	mur sud
6	mur mitoyen

Table 5.2: Murs représentés sur la figure des modes de la zone 2

5.5.2 Modèle modal issu de la synthèse

La méthode de la synthèse modale est appliquée maintenant sur ces modèles locaux réduits de zones pour créer un modèle modal de bâtiment bizone selon le principe décrit dans les chapitres précédents. Ce modèle issu de la synthèse modale doit être comparé au modèle modal global du bâtiment bizone non réduit. Les spectres de réponse indicielle de ces deux modèles vont servir de base à cette comparaison. Le spectre de la réponse de la température de la zone 1 à un échelon de température extérieure pour chaque modèle est donnée sur la figure 5.10.

On constate tout de suite que la réponse est très proche pour les deux modèles. On remarque également que les temps caractéristiques dominants sont quasi identiques pour les deux modèles.

Modèle global complet		Modèle de synthèse réduit	
mode 1	15h 28mn	mode 1	15h 28mn
mode 2	5h 27mn	mode 2	5h 26mn
mode 17	15mn 7s	mode 9	15mn 6s

Table 5.3: Comparaison des constantes de temps du modèle de synthèse et du modèle global

La représentation des modes est également très proches (voir figures 5.11 et 5.12)[12]. Le modèle de synthèse est d'ordre 10 (5 modes pour chaque modèle local) et l'ordre du modèle modal global est de 49. Le modèle de synthèse permet donc de restituer le comportement du bâtiment bizone avec néanmoins un ordre 5 fois plus faible. Bien entendu la figure 5.10 montre aussi très bien que ces deux modèles peuvent être réduits à l'ordre 3 (modes 1, 2 et 17 pour le modèle global; modes 1, 2, et 9 pour le modèle de synthèse). Ce premier exemple illustre bien la très bonne performance de la synthèse modale.

[12] on ne s'attardera pas aux petites différences de présentation qui seront expliquées dans le prochain chapitre

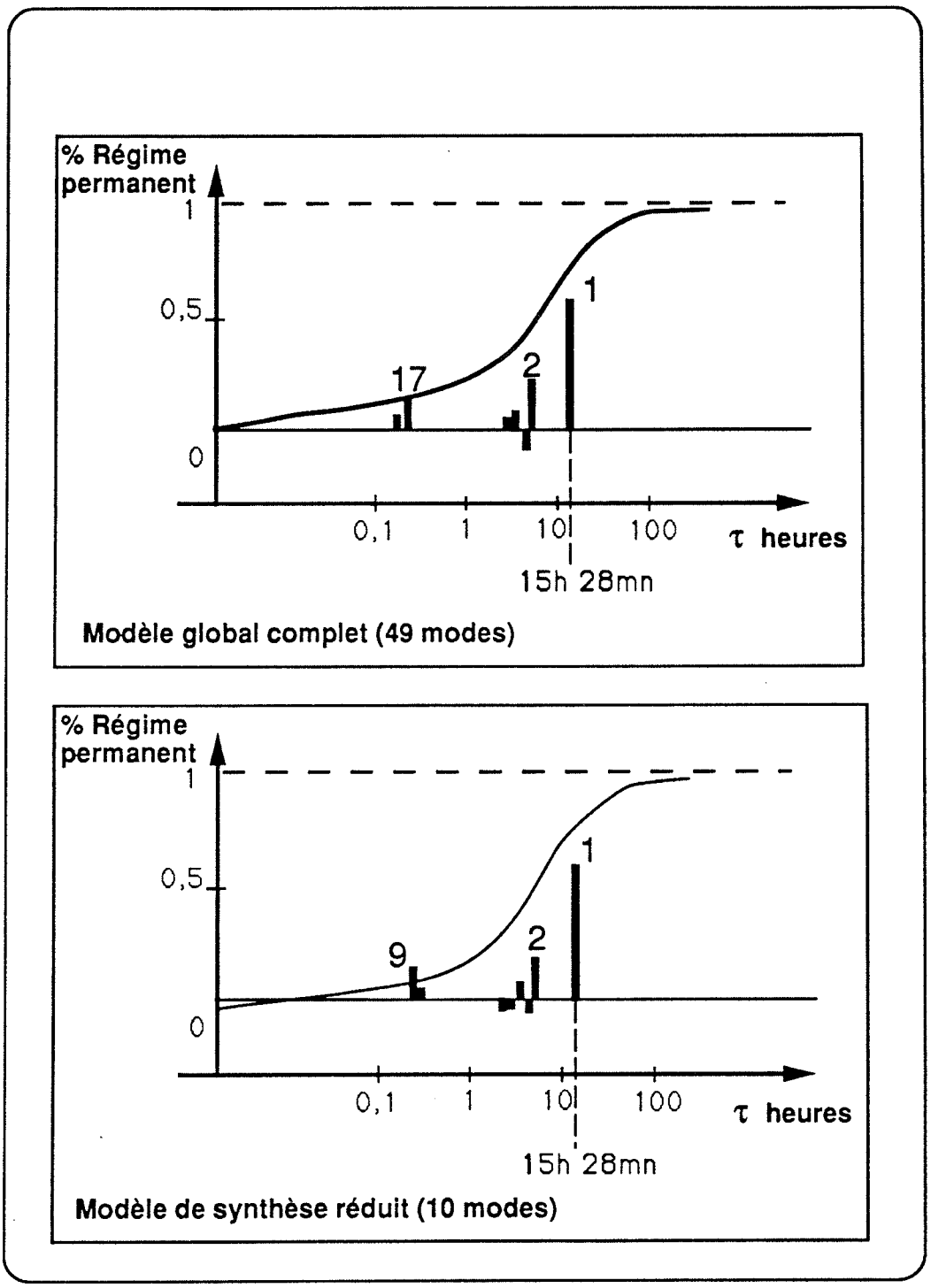


Figure 5.10: Spectres de réponse pour la température de la zone 1 à la température extérieure

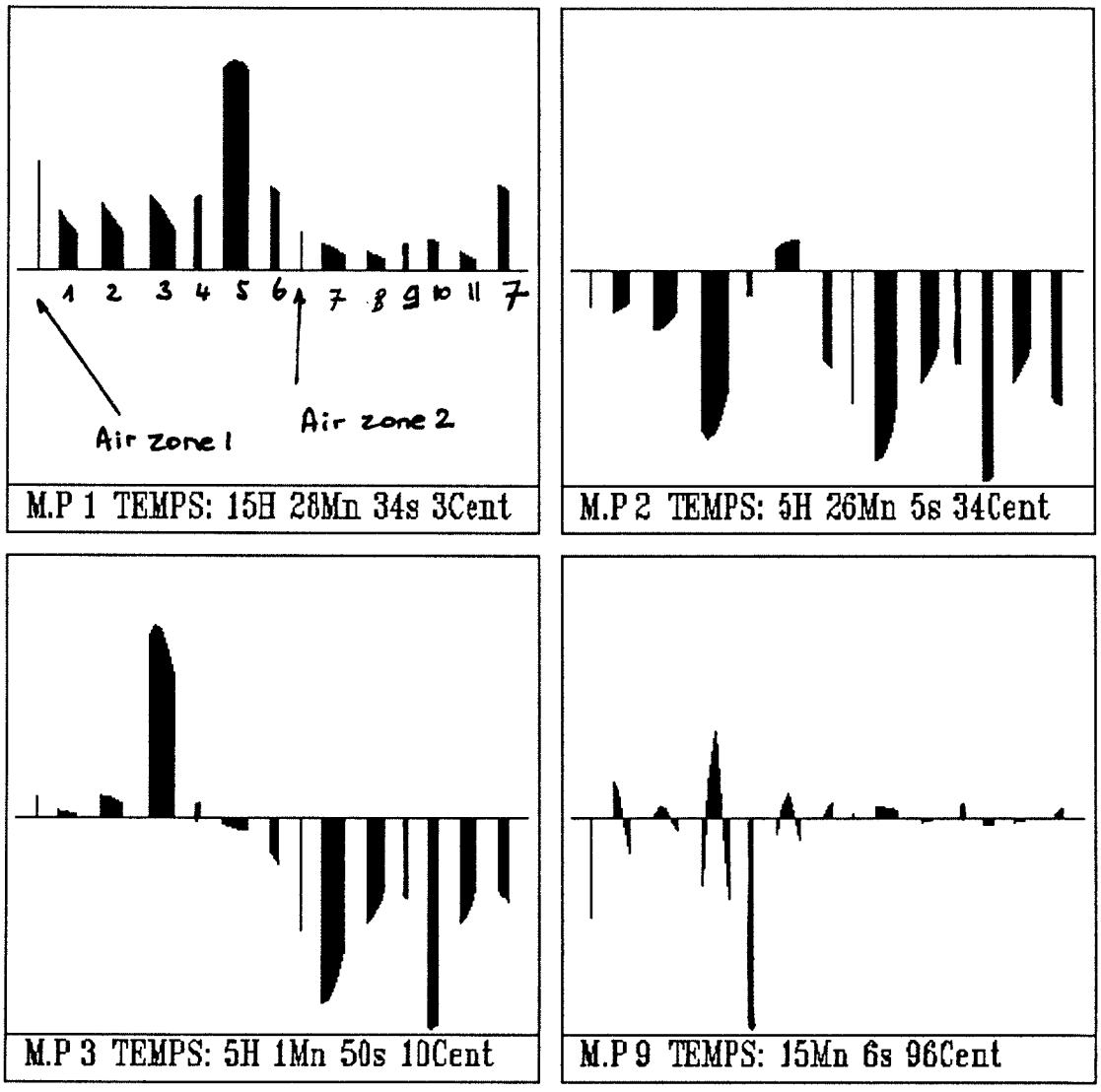


Figure 5.11: Modes issus de la synthèse modale

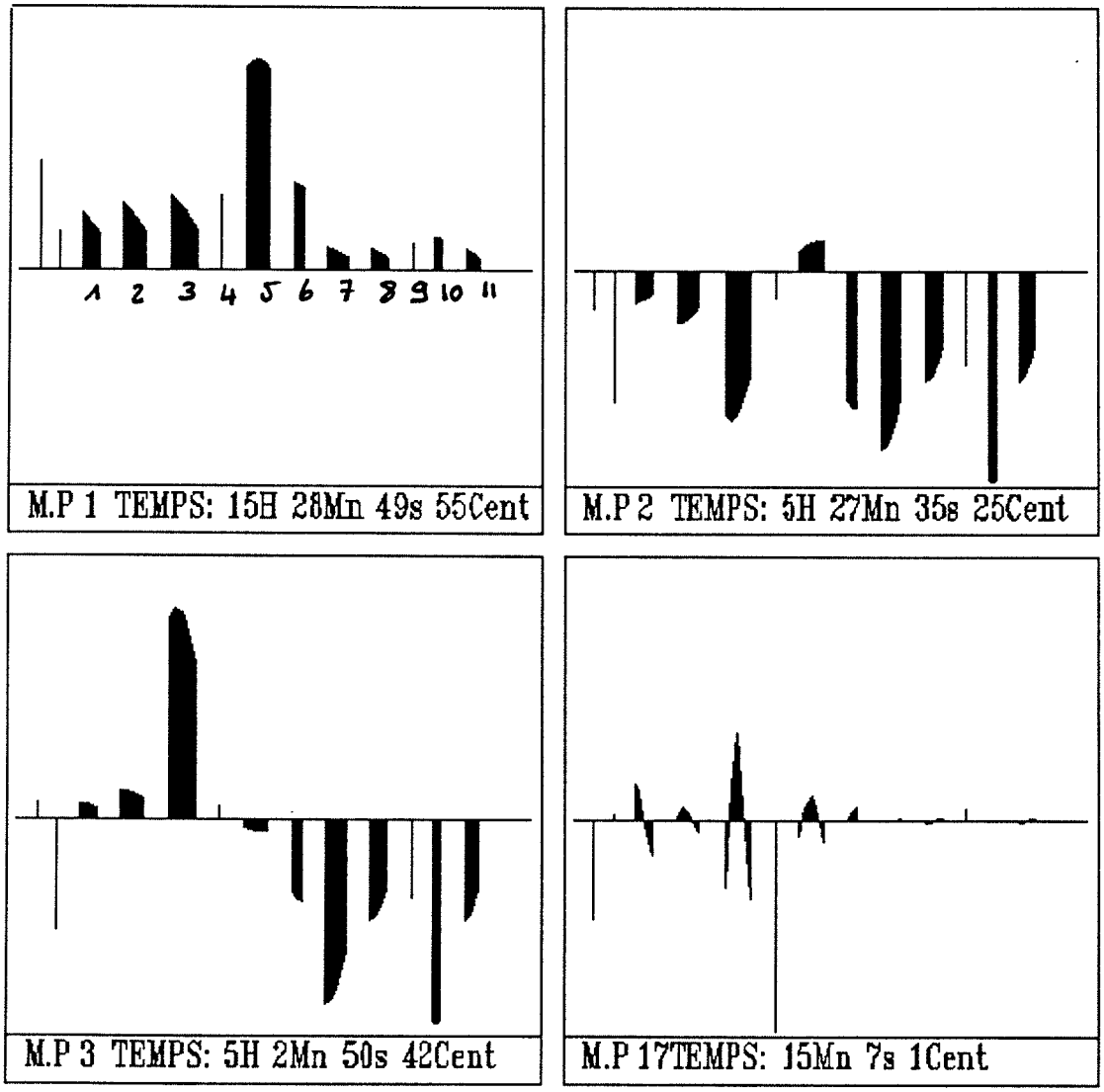


Figure 5.12: Modes du modèle modal global

5.6 Conclusion

La mise en oeuvre de la synthèse modale pour les principaux types de raccordement (raccordement bord à bord et raccordement par chevauchement d'un domaine commun) s'est révélée être strictement identique sur le plan formel. En effet les phases de juxtaposition et d'assemblage de deux modèles ne dépendent pas de la nature de leur connexion. La phase de connexion est par contre, elle, propre au type de couplage traité. Nous avons montré que l'équation obtenue a une forme indépendante du type de la connexion. Ce sont les éléments propres et les champs statiques qui la contiennent implicitement.

L'intérêt de la synthèse modale repose sur le découpage d'un modèle complexe en sous-ensembles qui peuvent faire l'objet d'une analyse modale suivie d'une réduction modale. Cette réduction des modèles dans le cadre du couplage bord à bord ne présente pas de problèmes majeurs dans le sens où les modèles modaux locaux étant totalement indépendants, leurs réductions respectives n'interférent pas entre elles pour la représentation des champs de température. Par contre pour le couplage avec recouvrement les modèles locaux ne sont pas indépendants en raison du domaine commun. D'après ce qui précède il a été montré que le modèle modal global peut se décomposer sur l'un ou l'autre modèle modal local dans la zone commune. Cette double représentation dans la partie commune pose un problème physique. Par contre du point de vue mathématique, rien n'empêche de coupler par recouvrement deux modèles ayant une partie commune, cette partie commune étant différente dans chacun des modèles locaux. La réduction opérée sur les modes locaux avant synthèse pose également le problème de deux représentations différentes.

Le couplage avec pliage de l'un ou l'autre modèle, encore à l'état de recherche actuellement, repose sur la technique du raccordement bord à bord. Par contre le "pliage" d'une zone pourrait s'avérer intéressante dans ce processus de réduction modale avant la phase de synthèse modale. En effet la dominance de certains modes pourrait être mise en valeur sur un domaine plus restreint que sur le domaine initial.

Cette phase de réduction modale des modèles locaux doit reposer sur des critères pertinents, c'est à dire, permettant de conserver l'essentiel du comportement thermique de chaque zone ainsi que celui lié à leur couplage. Le chapitre suivant développe cette étude et cette analyse du couplage de zones sur des configurations élémentaires qui permettront de dégager des règles de base. Ces règles de base concernant la réduction des modèles locaux pourront ensuite être appliquées à des configurations complexes, domaine privilégié d'application de la synthèse modale.

Chapitre 6

Mise en oeuvre de la synthèse modale comme outil d'analyse du couplage des composants

6.1 Quelques cas de base

L'étude du couplage de composants du bâtiment à l'aide de la synthèse modale sur des configurations élémentaires va permettre de dégager des règles de base pour l'analyse. Ces règles permettront ensuite de décomposer le comportement de bâtiment complexes en une combinaison de comportements caractéristiques simples. Nous verrons que cette tâche est beaucoup plus facile à réaliser dans l'espace des modes (où les règles s'expriment facilement) que dans l'espace des températures. Quatre cas sont traités:

- Couplage dynamique fort entre deux zones à inertie équivalente
- Couplage dynamique faible entre deux zones
- Couplage entre une zone à forte inertie et une zone à faible inertie
- Présence de plusieurs parois identiques

6.1.1 Cas du "couplage dynamique fort", 1 seule couche de béton pour la paroi mitoyenne

Ce premier exemple traité est volontairement élémentaire de façon à mettre en évidence le couplage des zones. Le bâtiment est composé de deux zones constituées chacunes de deux murs uniquement: le premier mur sépare respectivement chaque zone de l'extérieur, le second étant le mur mitoyen. Ce mur est constitué d'une seule couche de béton. Une couche de béton non isolée et assez mince a été choisie intuitivement pour mettre en évidence un couplage dynamique fort. Les caractéristiques de ce bâtiment sont données dans le tableau 6.1 et sur la figure 6.1. Le maillage a été effectué avec 20 noeuds par couche.

Mur sud	10 cm	béton	20 noeuds	25.8 m2
Mur mitoyen	5 cm	béton	20 noeuds	30 m2
Mur nord	16 cm	béton	20 noeuds	28 m2

Table 6.1: Caractéristiques de l'exemple, couplage fort

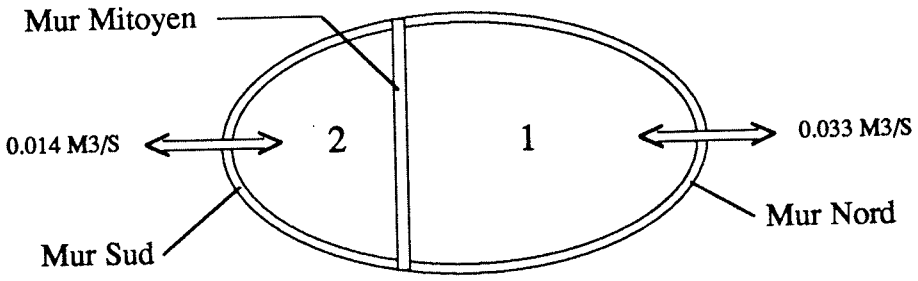


Figure 6.1: bizone, couplage dynamique fort

Analyse modale des modèles locaux

Avant l'étape de synthèse modale, l'analyse modale de chaque modèle de zone pris de manière isolée est nécessaire. Chaque zone a été maillée avec 41 noeuds ce qui correspond à 41 modes dont les premières constantes de temps associées sont données dans le tableau 6.2:

	Zone 1	Zone 2
mode 1	6h 51mn	4h 16mn
mode 2	2h 34mn	2h 19mn
mode 3	40mn 54s	17mn 37s
mode 4	13mn 14s	5mn 40mn
...etc ...		

Table 6.2: Constantes de temps des deux zones

Les spectres de réponse indicielle de la température de la zone 1 et de la zone 2 à un échelon de température extérieure sont maintenant analysés pour mettre en évidence les modes dominants. (La définition des spectres de réponse indicielle est donnée dans l'annexe F). Il faut rappeler que pour analyser correctement les spectres et les modes dominants correspondants, il faut orienter les modes de façon à ce que la valeur du mode sur le noeud de l'air soit dans le même sens que la hauteur de raie sur le spectre.

1. Le spectre de la figure 6.2 donne la réponse indicielle de la température de la zone 1 à un échelon de température extérieure.

   Les quatre premiers modes sont dominants et leur représentation est donnée sur la figure 6.3.

   - Cette réponse est sensible à une échelle de temps faible en raison du mode 4 dont la constante de temps est de l'ordre de 13mn. Il est intéressant de noter la forme du mode 4. Ce mode est principalement localisé sur la raie de l'air et reflète les évolutions rapides de la température de la zone (particulièrement

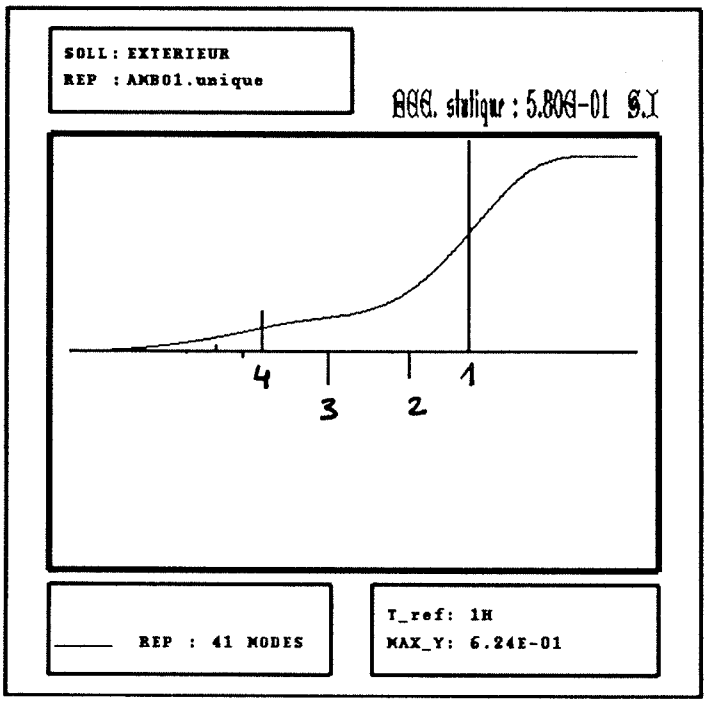


Figure 6.2: Spectre de la réponse de la zone 1 à la température extérieure

l'effet du renouvellement d'air sur la température de la zone 1). On observe également une très légère inversion pour le mur mitoyen.

- Les modes 2 et 3 associés à des raies négatives ont un effet de retard sur la réponse. Ils correspondent au transit de la sollicitation à travers le mur extérieur (mode 2) qui s'échauffe d'abord en surface extérieure (mode 3).
- Le mode le plus important est le premier. C'est la composante la plus lente du champ dynamique de température. La forme du premier mode ressemble à celle du champ de température en régime permanent. Les autres modes ont une importance moindre.

2. Le spectre donnant la réponse de la température de la zone 1 à un échelon de température de la zone adjacente au mur mitoyen (Figure 6.4) met en évidence 4 modes dominants: les modes 1, 2 , 5 et 7. La contribution de ces deux derniers modes donne globalement un retard à la réponse[1]. Ce retard est lié à la propagation de la sollicitation à travers le mur mitoyen. Ce phénomène de propagation se traduit par l'échauffement de la couche superficielle du mur mitoyen (coté extérieur, c'est à dire du coté de la zone adjacente) et est effectivement bien visible sur le mode 7 (figure 6.5). Cependant le mode 7, seul, ne suffit pas à reconstituer la réponse de la zone 1 à cette sollicitation: la raie sur l'air de la zone 1 doit également être retardée. Ce retard sur la raie de l'air est effectué par le mode 5 (figure 6.5).

   Pour ce type de sollicitation, la perturbation traverse d'abord le mur mitoyen avant

[1] On peut déja remarquer que ce retard correspond à une échelle de temps faible (quelques minutes)

d'atteindre la zone d'air[2] puis enfin échauffe le mur d'enveloppe extérieure. Pour traduire cette évolution, le champ de température dans le mur mitoyen doit être favorisé au détriment de celui du mur extérieur. C'est ce qui explique la dominance du deuxième mode. En effet celui ci présente une forte dissymétrie entre les murs mitoyen et extérieur (nord) (Figure 6.3).

Jusqu'à présent le modèle modal était représenté sous forme d'un terme dynamique et d'un terme représentant le régime glissant. Seul le terme dynamique est décomposé sur la base modale ce qui permet d'éviter les problèmes de non décomposabilité de certains champs de températures. Par contre pour l'analyse modale qui est effectuée par la suite, il est plus simple de considérer directement la contribution de chaque mode pour le champ de température obtenu en réponse à une excitation. Cette décomposition additive de la contribution des modes revient implicitement à supposer les régimes décomposables, ce qui est toujours vrai dans les cas discrétisés en espace. L'annexe F détaille ces deux approches: la décomposition additive et la décomposition soustractive de la contribution des modes. La figure 6.6 retrace la constitution du champ de température dans le mur mitoyen quelques instants après l'application de la sollicitation sur la face externe du mur mitoyen à l'aide précisement de ces 4 modes. Cette superposition des modes, sous forme additive, montre bien l'importance des modes 5 et 7 aux faibles instants. On a tracé pour les modes 1, 2, 5 et 7 leur contribution au régime variable à l'instant $t = \tau_7$.

[2] car il n'y a pas de renouvellement d'air donc il n'existe pas d'effet aussi rapide que pour la sollicitation en température extérieure

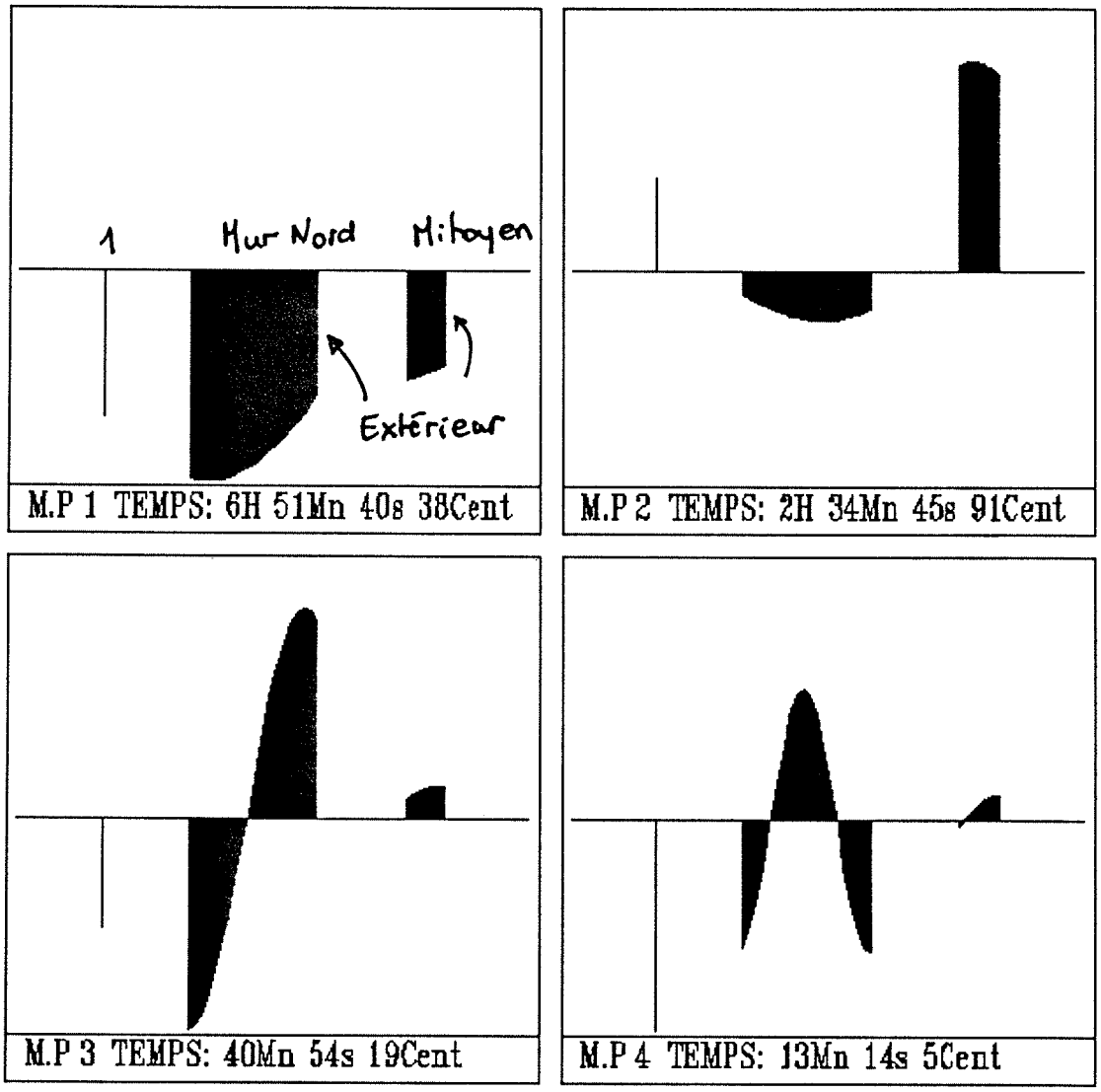


Figure 6.3: Modes de la zone 1 (1 à 4)

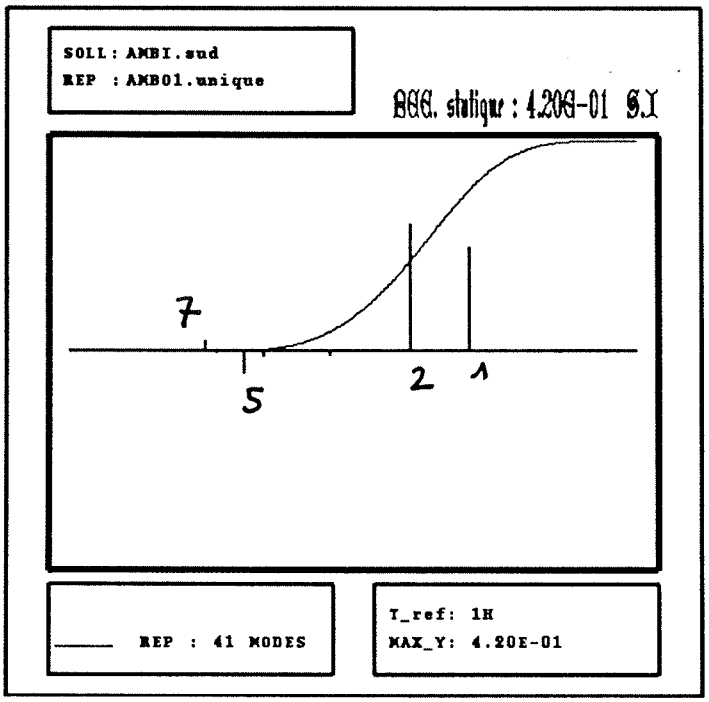


Figure 6.4: Spectre de la réponse de la zone 1 à un échelon de température de la zone adjacente

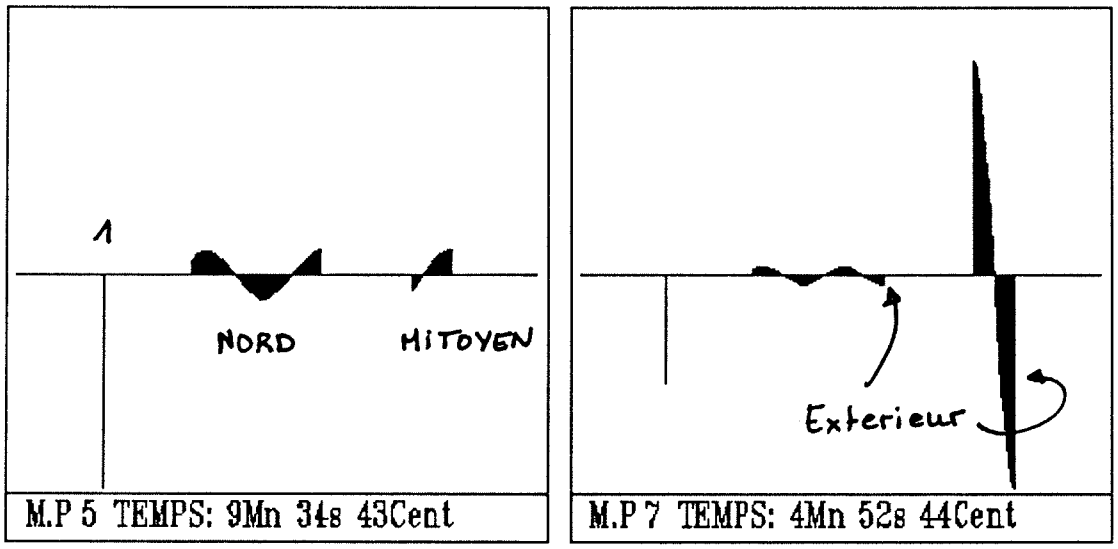


Figure 6.5: Modes de la zone 1 (5 à 7)

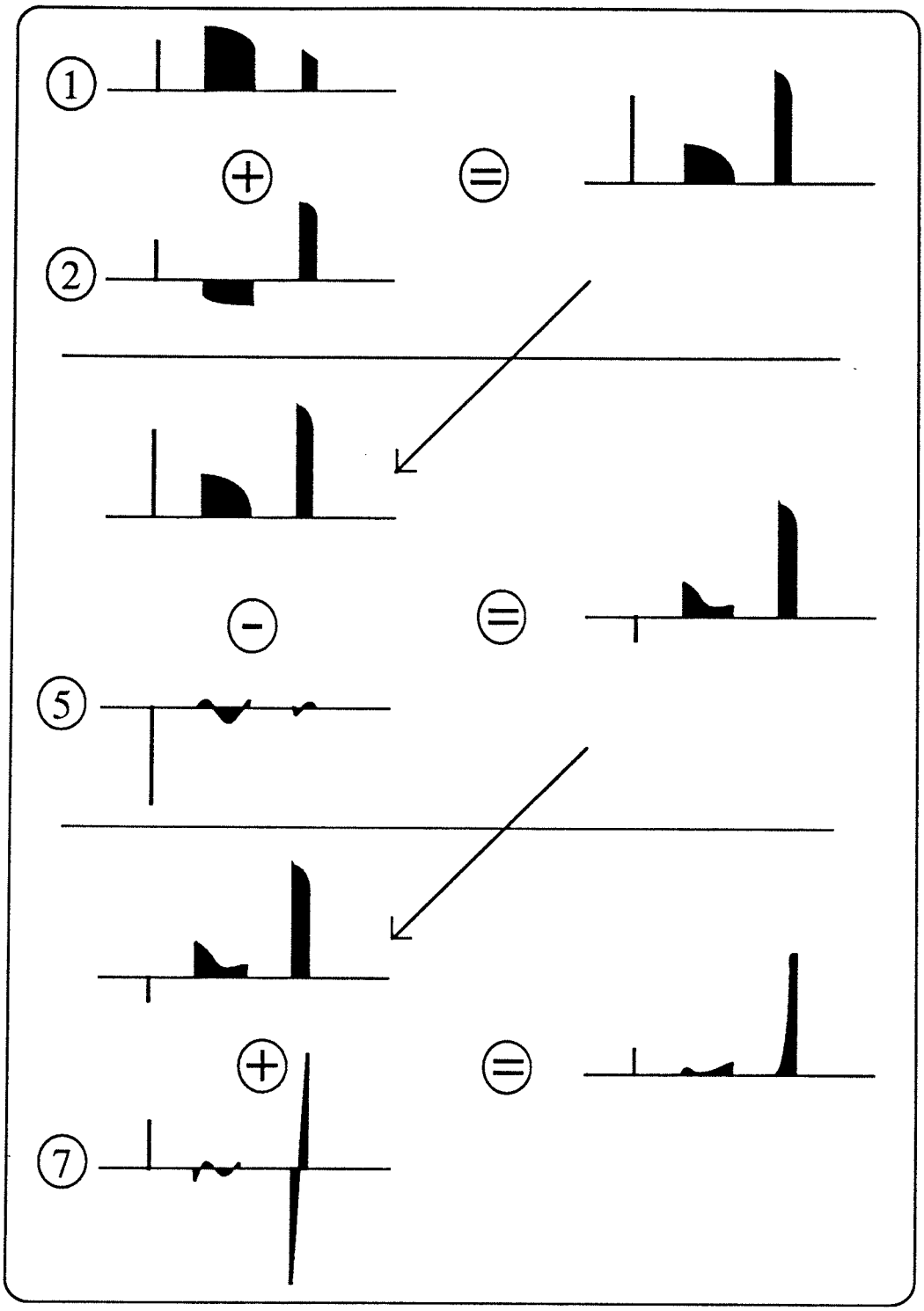


Figure 6.6: Décomposition "additive" du champ de température dans la zone 1 aux faibles instants à l'aide des modes 1, 2, 5 et 7

L'analyse des spectres pour la zone 2 n'est pas présentée car elle est très proche de celle correspondant à la zone 1 , les deux zones ayant une constitution très proche (inertie équivalente) et le mur mitoyen étant symétrique. Les figures 6.7 donnent néanmoins les modes de la zone 2 car ils seront nécessaires par la suite, pour l'analyse de la constitution du modèle de synthèse. On observe d'ailleurs une représentation comparable des modes des deux zones mis à part pour le mode 4. Il faut tout d'abord noter sur cette figure que le coté extérieur de la représentation des modes pour le mur mitoyen est à gauche et non à droite comme pour la zone 1. Le mode 4 combine à lui seul les effets attribués aux modes 5 et 7 de la zone 1: inversion du mode pour le mur mitoyen **et** représentation dominante du mode sur l'air de la zone 2 orientée dans le sens opposé au coté externe du mur mitoyen où la sollicitation est appliquée.

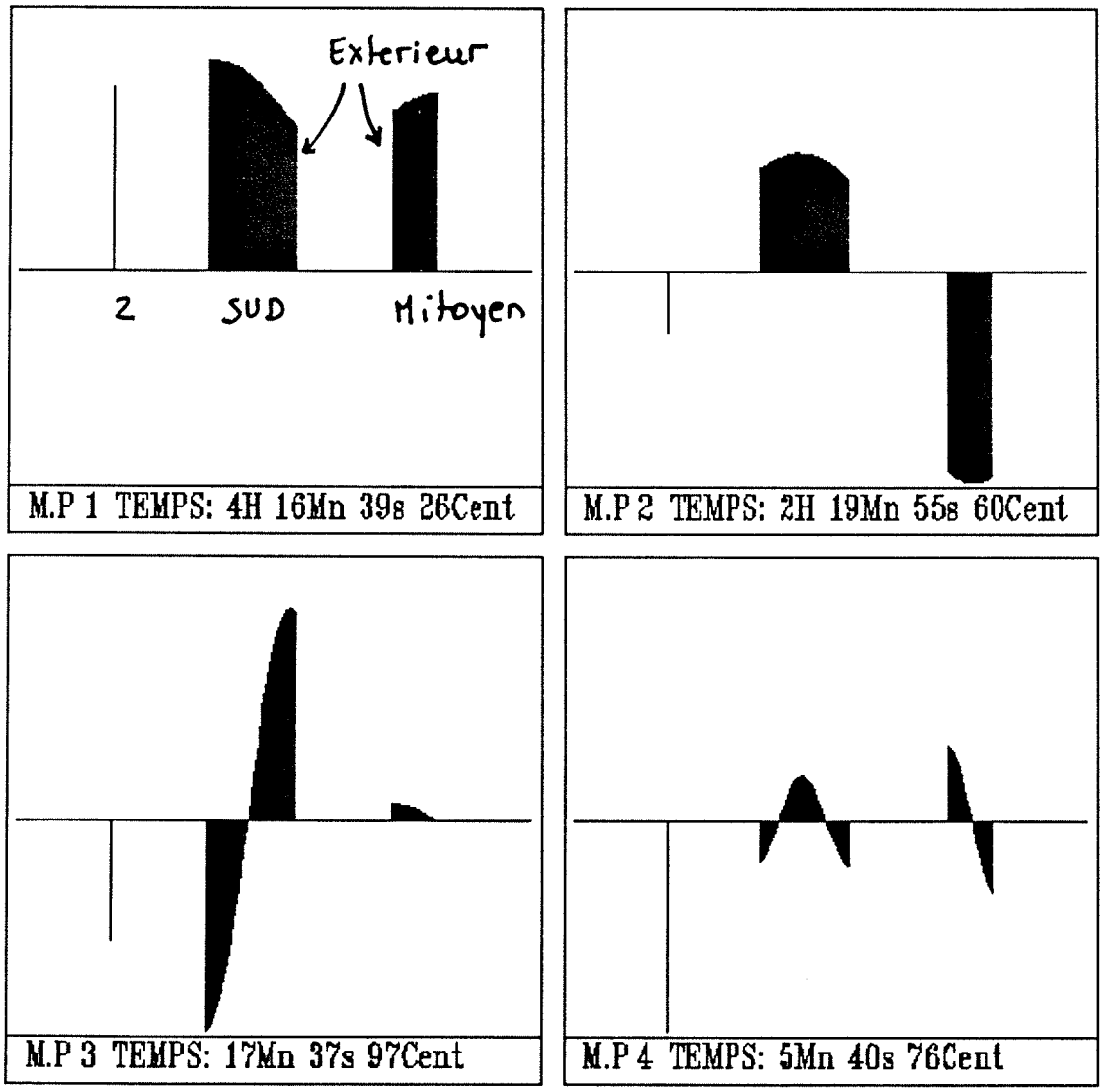


Figure 6.7: Modes de la zone 2

Synthèse modale

Nous cherchons à mettre en évidence des règles d'analyse qui seront utiles aussi bien pour comprendre le couplage entre zones que pour réduire les modèles, les deux étant en fait très liés. Ainsi donc dans ce qui va suivre, la synthèse modale est effectuée sans réduction des modèles modaux locaux. Le modèle de synthèse a été obtenu selon la procédure décrite au chapitre 5 dans le cas du couplage par recouvrement. Les modes du modèle issu de la synthèse sont représentés sur la figure 6.8 (modes 1 à 4). Le mur mitoyen est représenté deux fois car ce mur appartient aux deux modèles locaux et le modèle de synthèse a été obtenu en juxtaposant et en couplant les modèles de zones sans retrancher dans l'un ou l'autre, le mur mitoyen. La partie gauche (mur nord, mur mitoyen) correspond à la zone 1, la partie droite (mur sud, mur mitoyen) correspond à la zone 2. Les premières constantes de temps associées aux 82 modes (41^3 pour chaque zone) sont données sur le tableau 6.3:

mode 1	8h 51mn
mode 2	4h 30mn
mode 3	2h 42mn
mode 4	1h 59mn
mode 5	40mn 57s
mode 6	17mn 38s
mode 7	13mn 14s
mode 8	9mn 37s
mode 9	5mn 55s
mode 10	5mn 35s

Table 6.3: Constantes de temps associées aux modes de synthèse

Il est à noter que les valeurs des constantes de temps du modèle modal de synthèse s'intercalent en majorité entre celles des modèles modaux pour chaque zone, exceptée pour la première et la quatrième (voir figure 6.10).

Ce résultat est à rapprocher de ceux de [Chen][4] pour le couplage de deux parois planes et ceux de [Neirac][5] pour le couplage convectif de plusieurs murs sur le volume d'air. Cependant dans notre cas, le couplage par recouvrement interdit d'appliquer la même démonstration de cette propriété. On remarque également que le premier mode du modèle de synthèse a une constante de temps (8h 51mn) supérieure à l'une ou l'autre première constante de temps des modèles locaux (6h51mn et 4h16mn). Quant au quatrième mode, il possède une signification particulière (explicitée page 111) qui explique qu'il contrarie cette règle.

Pour analyser les modes globaux de synthèse nous utilisons la formulation suivante: les vecteurs propres du modèle de synthèse, $\mathcal{P}$, ont été construits selon l'équation 6.1, comme la somme de deux termes:

$$\mathcal{P} = (P + [S_c][G_{rc}]^{-1}[H_r])[p] \tag{6.1}$$

[3] 2 parois par zone composée de 20 noeuds chacune plus le noeud de l'air

[4] Chen, M. 1989, *Nouvelle solution modale pour les parois des bâtiments.* Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris.

[5] Neirac, F.P., 1989, *Approche thermique et expérimentale des modèles réduits de comportement thermique de bâtiments*, Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

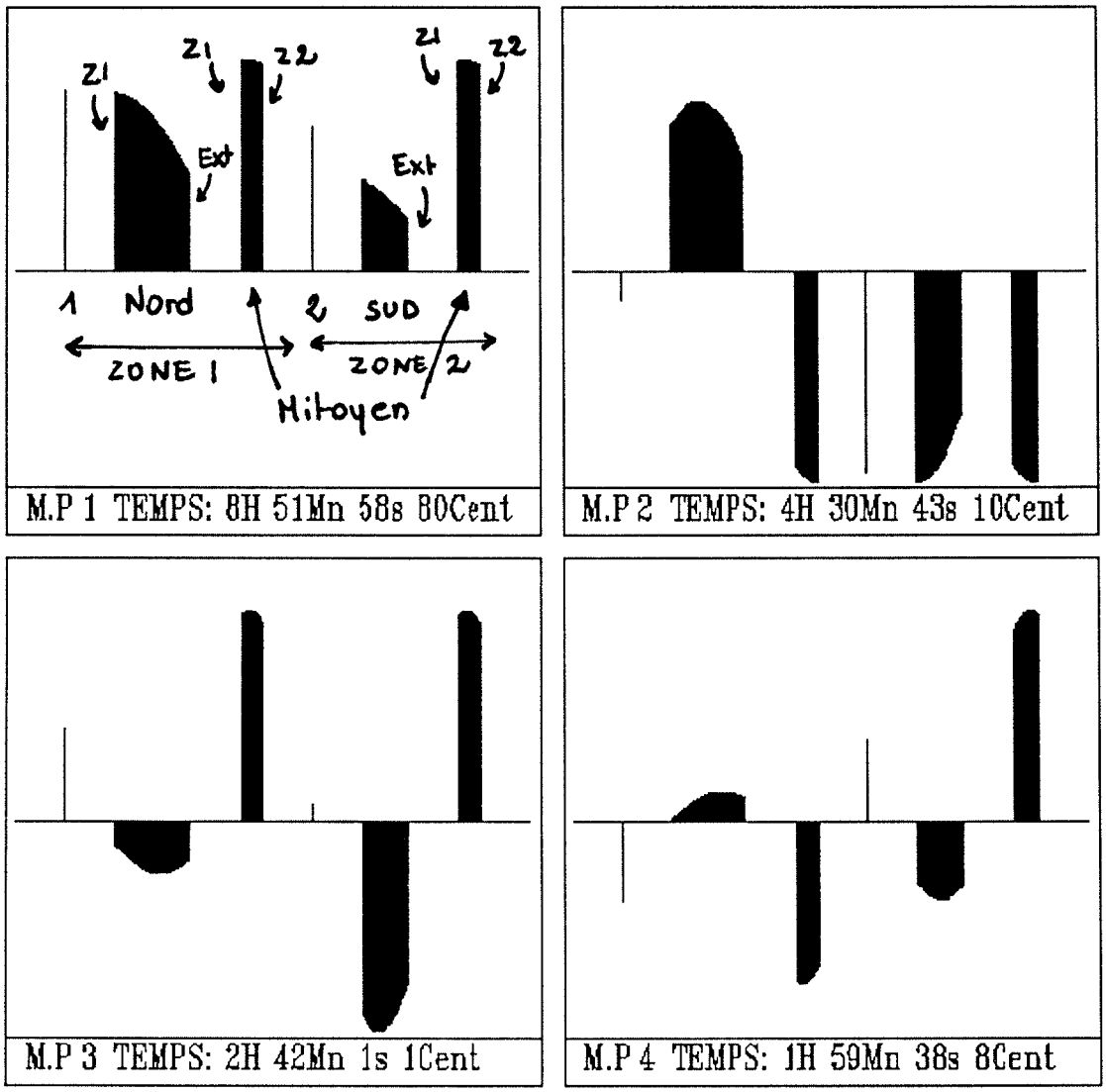


Figure 6.8: Modes de synthèse (1 à 4)

- Le premier terme est constitué des vecteurs propres locaux juxtaposés P multipliés par les coefficients de décomposition[6], p. Ce premier terme est représenté sur la figure 6.9, pour les modes 1 à 4. Ce terme sera noté terme dynamique.

  L'examen des coefficients de décomposition, p, est intéressant car il va permettre de détailler la constitution du premier terme des vecteurs propres de synthèse à partir des vecteurs propres locaux P. A chaque mode de synthèse correspond $(p_1 + p_2)$ coefficients de décomposition. Les p_1 coefficients de décomposition correspondent aux n_1 modes du modèle 1. Les p_2 coefficients de décomposition correspondent aux n_2 modes du modèle 2.

[6] Les coefficients de décomposition sont les vecteurs propres de $N^{-1}F$

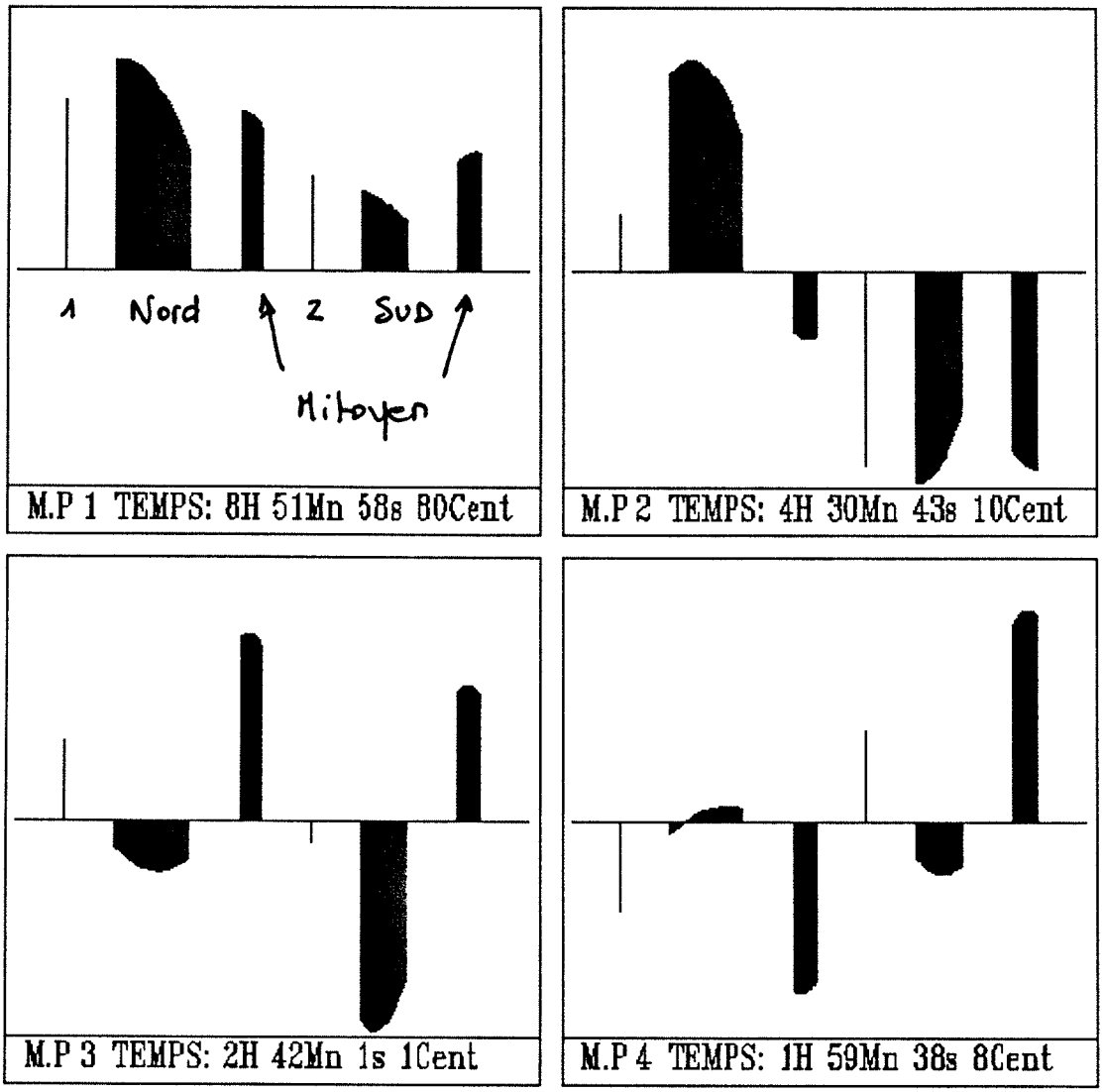


Figure 6.9: Terme dynamique des modes de synthèse (1 à 4)

Prenons par exemple la décomposition sur les modes locaux du premier terme dynamique qui correspond au graphe en haut à gauche sur la figure 6.9. Parmi les coefficients de décomposition correspondant à ce premier mode, le coefficient affecté au premier mode de la zone 1 et celui affecté au premier mode de la zone 2 sont dominants (Tableau 6.4).

En effet, en ajoutant la forme du mode 1 pour la zone 1 (figure 6.3) et celle du mode 1 pour la zone 2 (figure 6.7), on reconstitue le graphe de la figure 6.11 qui est très proche de celui de la figure 6.9. Ce premier exemple est vérifié dans la plupart des cas à savoir que le premier mode global d'un bâtiment bizone est généralement constitué des deux premiers modes de chaque zone.

On remarque également que cette représentation du terme dynamique, $P[p]$ (figure 6.9), est très proche de celle des modes de synthèse (Figures 6.8). Des différences sont néanmoins à noter, par exemple pour le:

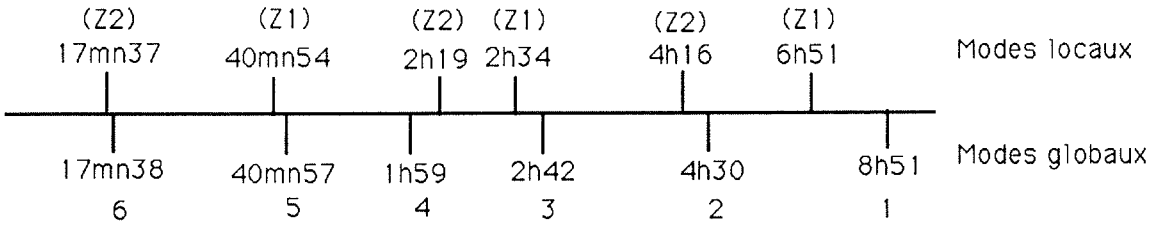


Figure 6.10: Ordre des constantes de temps globales et locales

Zone 1	Mode local 1	19710.
	Mode local 2	2864.
	Mode local 3	19.
	Mode local 4	2.
	Mode local 5	3.
Zone 2	Mode local 1	7924.
	Mode local 2	2448.
	Mode local 3	3.
	Mode local 4	3.
	Mode local 5	2..

Table 6.4: Coefficients de décomposition

- **Mode 1**
  particulièrement pour le mur commun et la raie de l'air de la zone 2.
- **Mode 2**
  sur la représentation du mur mitoyen coté zone 1 (à gauche) et du noeud de l'air de la zone 1 (le sens de la raie de l'air est opposé).
- **Mode 3**
  Sur la représentation du mur commun coté zone 2 (partie droite) et du noeud de l'air de la zone 2 (le sens de la raie sur l'air est également opposé).

- Le second terme est constitué des "termes de raccordement"instantanés: le champ statique S_c multiplié par le terme, $[G_{rc}]^{-1}[H_r][p]$. Les quatre premiers modes de raccordement sont représentés sur la figure 6.12. On remarque la représentation dominante des modes de raccordement pour le mur mitoyen. Il faut noter également les raies de l'air pour ces modes de raccordement: ces raies compensent exactement les hauteurs manquantes observées pour le terme dynamique. Ceci est normal en raison de la définition des modes de synthèse (Equation 6.1). Par contre la répartition entre les deux termes de décomposition de ces modes de synthèse doit donner des indications sur le type de couplage des modèles. L'inversion de la matrice $[G_{rc}]$ avait été identifié comme représentative du couplage (voir page 60 au chapitre 4). Le rôle de ces termes de raccordement consiste à assurer la compatibilité en température sur l'interface de couplage des modèles locaux. Lorsque ces modes agissent sur la

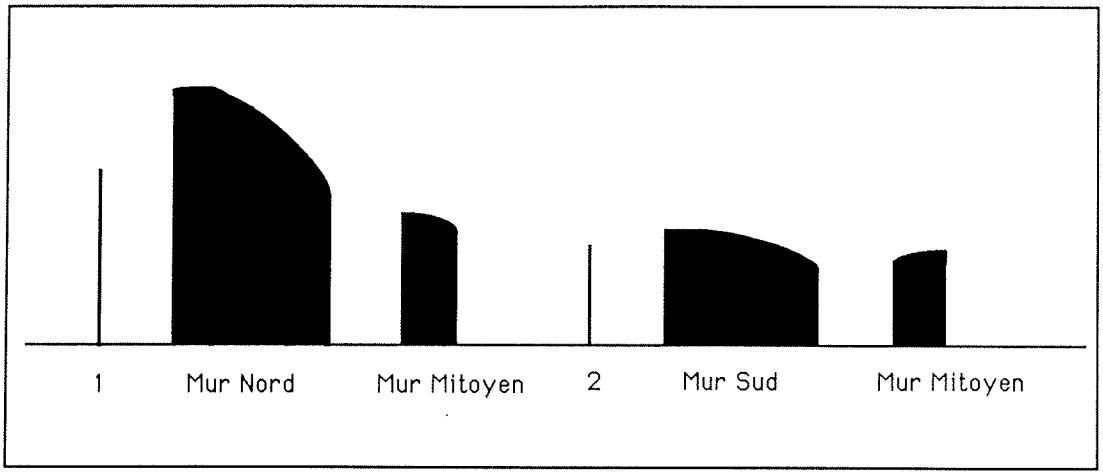


Figure 6.11: Reconstitution du premier terme dynamique à partir uniquement des deux premiers modes locaux

valeur du mode pour l'air des zones à coupler, il s'agit d'un effet de raccordement fort. Prenons par exemple le mode 2 de synthèse: les valeurs du mode sur l'air des deux zones sont orientées dans le même sens avec une dominance pour celle de la zone 2. Or le terme dynamique pour le mode 2 fait apparaitre une opposition entre ces deux raies sur l'air, opposition caractéristique d'un couplage faible entre les deux zones. Le terme de raccordement associé au mode 2 permet de compenser cette opposition: ce terme de raccordement contribue donc bien au fort couplage des deux zones. L'étude des spectres de réponse indicielle va maintenant nous permettre de confirmer et d'affiner cette analyse du couplage des zones, en particulier le caractère rapide ou lent.

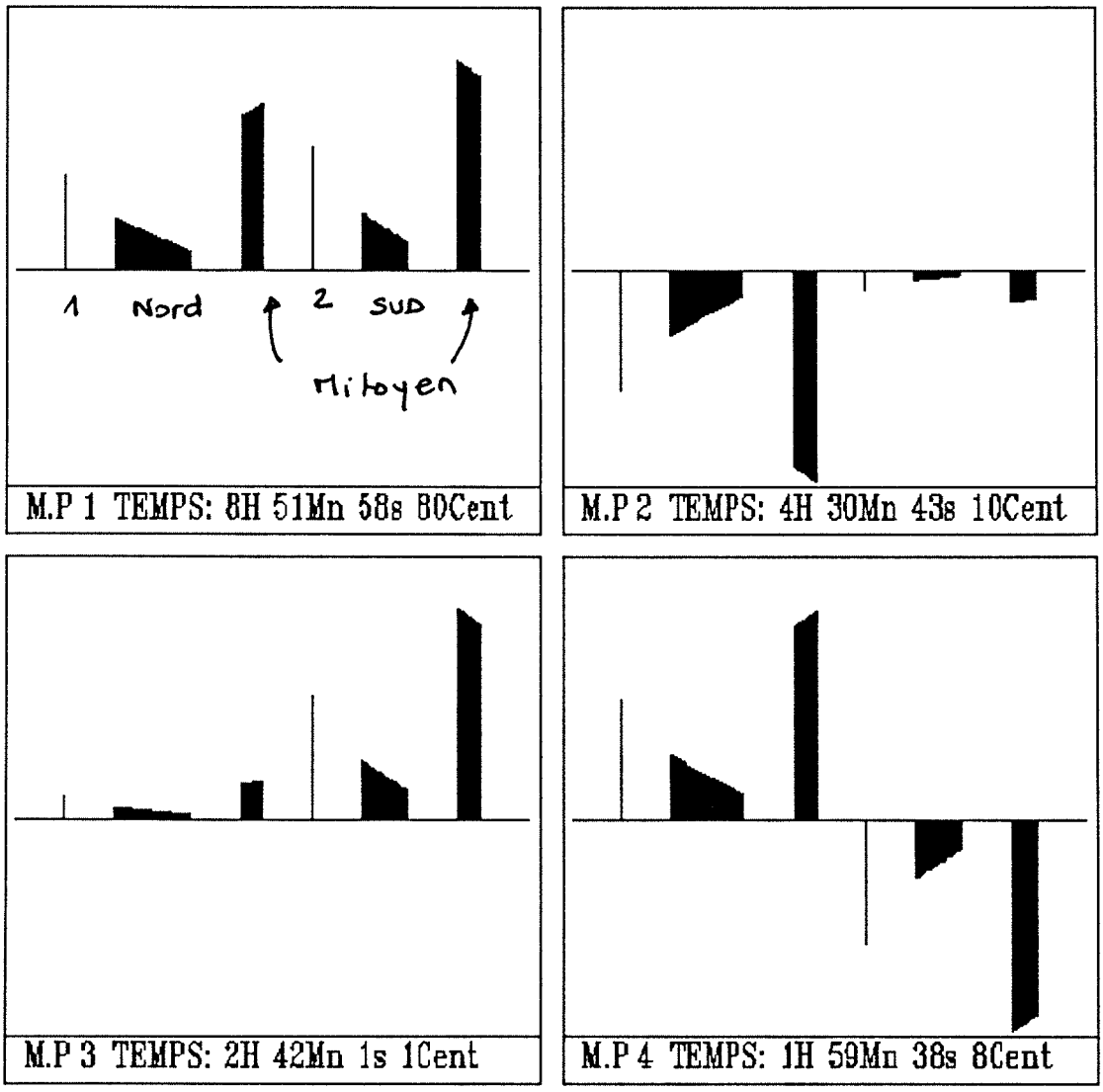


Figure 6.12: Termes de raccordement (1 à 4)

Etude des spectres de réponse indicielle

L'étude des spectres de réponse du modèle de synthèse va permettre de mettre en évidence les modes dominants. Le spectre donnant la réponse de la zone sud (2) à la température extérieure (Figure 6.13) révèle la nette dominance du mode 1, suivi des modes 2, 6 (raie négative) et 10.

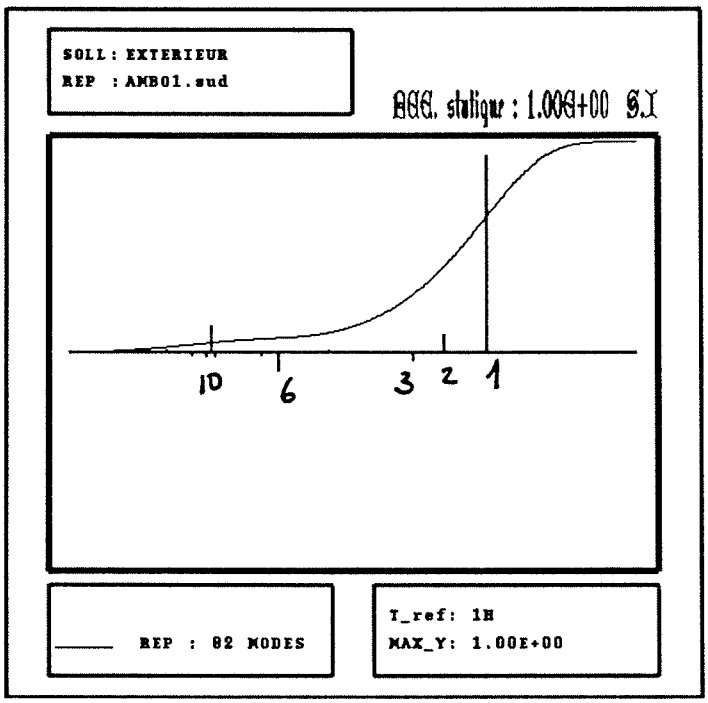


Figure 6.13: Spectre de la réponse de la zone 2 à la température extérieure pour le modèle de synthèse

L'étude de la forme de ces modes confirme, grâce à la valeur prise par le mode dans l'air de la zone[7], ces résultats:

- Mode 1, 8h 51mn (figure 6.8): La sollicitation est extérieure. Elle excite donc simultanément les zones 1 et 2. Les deux raies sur l'air ont une importance équivalente et ce mode est représenté dans toutes les parois du bâtiment.
- Mode 2, 4h 30 mn (figure 6.8): La raie de l'air pour la zone 2 est dominante par rapport à celle de la zone 1. (Il s'agit bien de la réponse de la température de la zone 2).
- Mode 6, 17mn 38s (figure 6.14): Ce mode est associé à un effet retard dans la réponse (raie négative sur le spectre). Sa représentation dans le mur sud reflète ce retard, la sollicitation extérieure devant traverser ce mur avant d'échauffer la zone. On note également une très légère amorce d'inversion dans le mur mitoyen.

[7] cette valeur est également appelée plus simplement raie de l'air qui n'est pas à confondre avec les raies des spectres

- Mode 10, 5mn 35s (figure 6.15): Le mode est pratiquement uniquement représenté par la raie de l'air de la zone 2. Ce mode est caractéristique de l'action rapide mais limitée de la sollicitation extérieure via le renouvellement d'air. La forme du mur mitoyen est également caractéristique d'un retard.

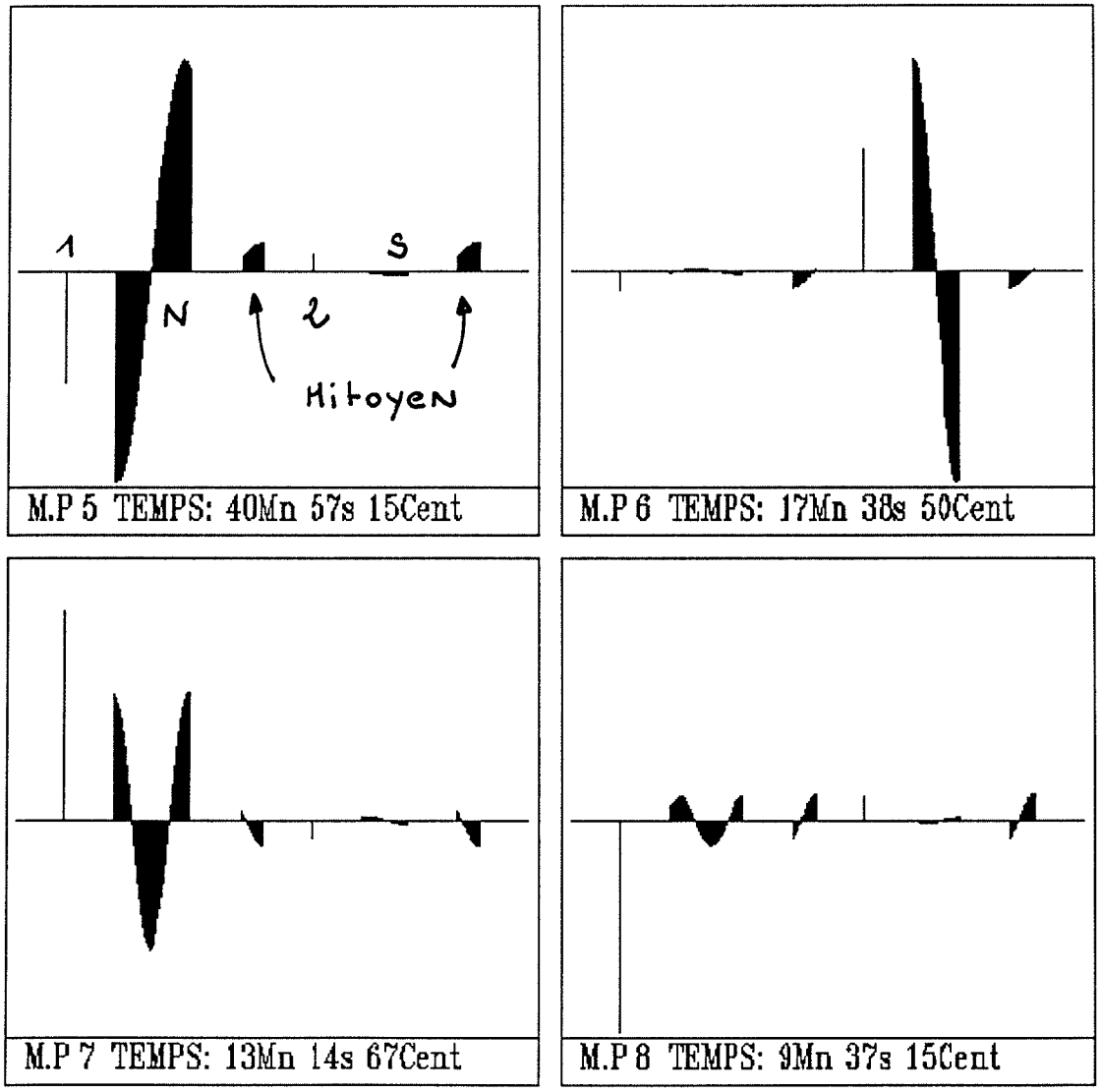


Figure 6.14: Modes de synthèse (5 à 8)

L'analyse de la forme des modes confirme donc les résultats de la réponse indicielle. On peut maintenant se livrer à l'exercice inverse c'est à dire imaginer grâce à l'étude de la forme des modes, lesquels seront mobilisés pour une réponse à un échelon. Considérons par exemple la réponse de la zone 1 à la sollicitation de la température extérieure:

- Mode 1, 8h 51mn (figure 6.8): Ce mode est choisi en raison de sa représentation dans toutes les parois du bâtiment. Ce mode est d'ailleurs proche du régime permanent. Il sera représentatif du champ en fin d'évolution.

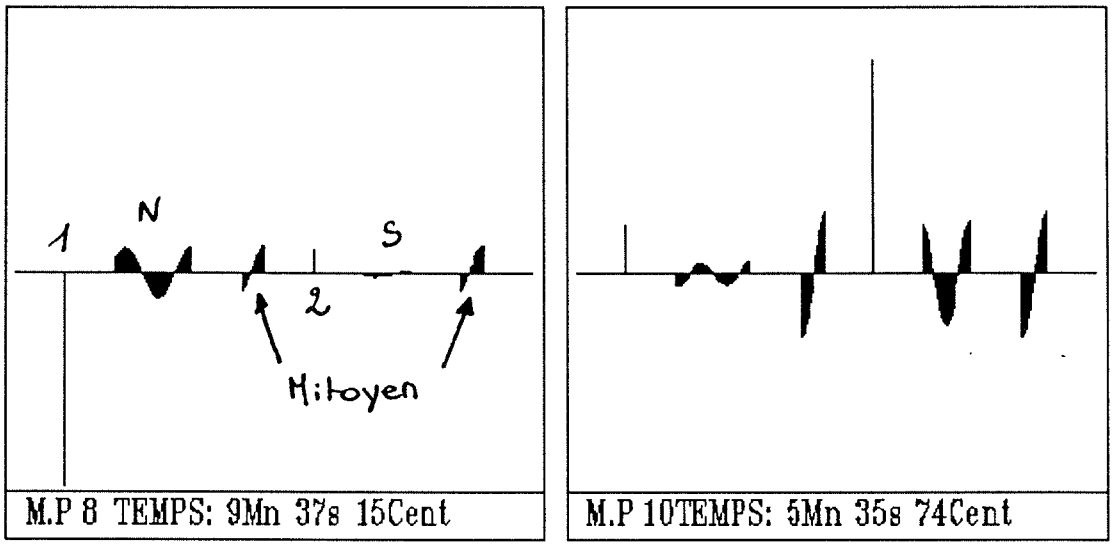


Figure 6.15: Modes de synthèse (8 et 10)

- Mode 3, 2h 42mn (figure 6.8): L'importance du mode sur la raie de l'air de la zone 1 par rapport à celle de la zone 2 permet de l'identifier comme mode dominant pour la réponse de la température de la zone 1.
- Mode 5, 40mn 57s (figure 6.14): On note pour ce mode une inversion de la représentation modale pour le mur extérieur associé à une raie dominante pour la zone 1. Il sera représentatif d'un retard, la sollicitation devant traverser le mur avant d'atteindre l'air. Ce mode joue le même rôle que le mode 6 pour la réponse de la zone 2 à la température extérieure.
- Mode 7, 13mn 14s (figure 6.14): Egalement une représentation dominante pour la raie de la zone 1.

On peut maintenant confirmer cette analyse en observant le spectre correspondant sur la figure 6.16.

On analyse maintenant les spectres de la réponse d'une zone par rapport à la sollicitation en échelon de puissance de l'autre zone. Ils sont identiques en raison du théorème de réciprocité [Khoury][8]. Ces spectres sont caractéristiques du couplage entre zones. 4 modes sont identifiés comme dominants sur le spectre de la réponse de la zone 1 à une sollicitation de flux sur la zone 2 (figure 6.17), appelé encore **spectre de couplage**:

- Mode 1, 8h 51mn (figure 6.8):On retrouve l'influence dominante du premier mode.
- Mode 2, 4h 30mn (figure 6.8): La représentation du mur extérieur nord de la zone 1 est opposée à celle des autres murs. Cette dissymétrie permet de favoriser une évolution du champ de température plus rapide dans les murs de la zone 2 et particulièrement dans le mur mitoyen que le mur extérieur de la zone 1. Ce mode

[8] El Khoury, K., 1989, *Formulation modale de problèmes de diffusion thermique avec transport.* Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris.

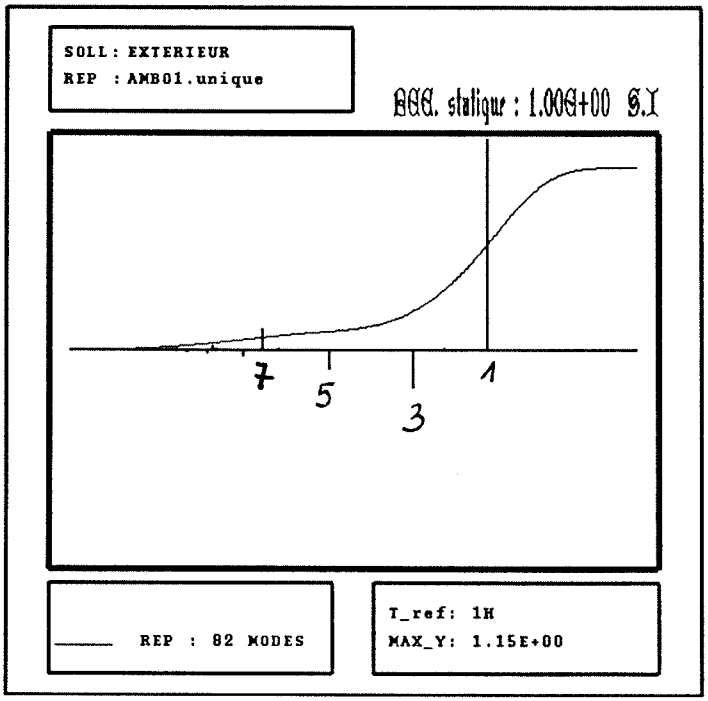


Figure 6.16: Spectre de la réponse de la zone 1 à la température extérieure pour le modèle de synthèse

favorise l'échauffement simultané des deux zones comme on peut le constater dans sa représentation sur la figure 6.8: les valeurs du mode sur l'air des deux zones sont dans le même sens. Le couplage des deux zones est bien identifié dans ce mode 2. La décomposition du mode 2 sur le terme dynamique et le terme de raccordement (page103) avait permis d'identifier l'importance du mode 2 de raccordement pour ce mode de synthèse.

- Mode 8, 9mn 37s (figure 6.14): La valeur du mode sur l'air pour la zone 1 est cette fois dominante. Ce mode présente la particularité d'une opposition entre les valeurs du mode prises par l'air des deux zones. On note également une inversion du mode dans sa représentation pour le mur mitoyen. Ce mode est donc caractéristique du couplage des deux zones à travers le mur mitoyen. Nous y reviendrons.

- Mode 10, 5mn 13s (figure 6.15): Les deux valeurs du champ propre sur l'air sont toutes deux positives avec une forte dominance pour celle de la zone 2. La forme du mode dans le mur mitoyen est très caractéristique d'un retard: Ce mode permet de reconstituer l'échauffement superficiel coté zone 2 du mur mitoyen sans pour autant provoquer la montée en température du mur mitoyen du coté de la zone 1 (signe opposé des températures de surface du mur mitoyen coté zone 1 et de la température d'air de la zone 1).

La contribution de ces deux derniers modes correspond globalement à un effet retard aux faibles instants sur la réponse d'une zone par rapport à l'autre. Le phénomène

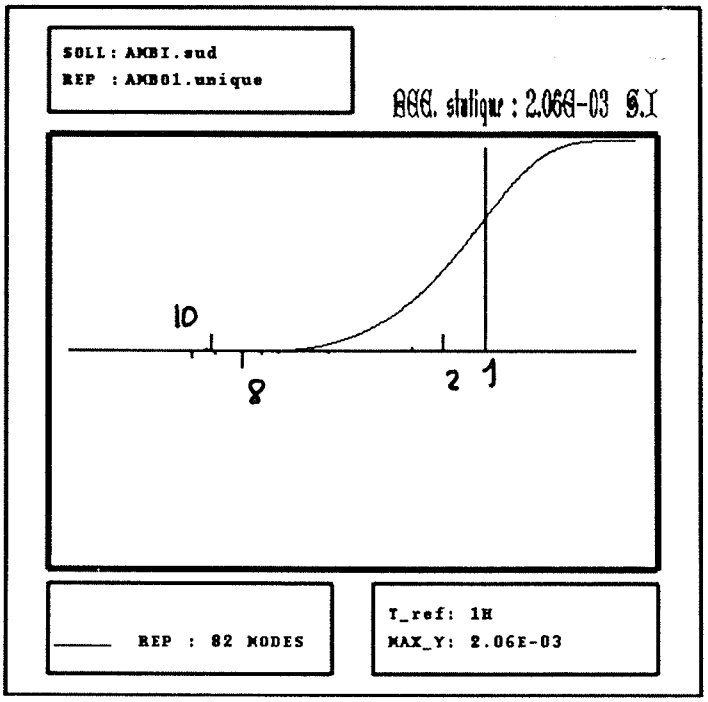


Figure 6.17: Spectre de la réponse de la zone 1 à un échelon de puissance de la zone 2 pour le modèle de synthèse

de propagation de la sollicitation à travers le mur mitoyen se traduit par l'échauffement de sa couche superficielle (visible sur le mode 10). Cependant ce mode simule un échauffement simultané de l'air des deux zones, ce qui ne correspond pas à la réalité. C'est le mode 8 qui permet de reproduire la dissymétrie de comportement de l'air des zones grâce à la forme opposée des raies sur l'air des deux zones. Le mode 2 (4h 30mn) a par contre un effet de couplage visible entre les deux zones sur le spectre de couplage: la raie associée à ce mode est positive et contribue visiblement à la réponse de la zone 1 soumise à un échelon de puissance de la zone 2.

Décomposition du terme dynamique

Grâce aux coefficients de décomposition, p, on va pouvoir analyser encore plus finement ces 2 derniers modes de synthèse (8 et 10). Les informations ainsi extraites, seront utiles pour la définition d'un processus de réduction. La décomposition des modes 8 et 10 de synthèse à partir des modes locaux est donnée symboliquement sur le tableau 6.5.

Modes globaux	Modes locaux zone 1	Coef. décomp.	Modes locaux zone 2	Coef. décomp.
Mode 8	mode 5	567.	mode 1	1019.
(9mn 37s)	mode 2	118.	mode 2	850.
Mode 10	mode 2	613.	mode 4	360.
(5mn 13s)	mode 1	494.	mode 1	137.
	mode 7	190.	mode 2	112.

Table 6.5: Décomposition des modes de synthèse à partir des modes locaux

- Le mode 8 est constitué principalement du mode 5 ainsi que du mode 2 pour la zone 1 et des modes 1 et 2 pour la zone 2. On observe pour le mode 5 (figure 6.5) de la zone 1 une représentation très proche de celle du mode 8 de synthèse. Les temps caractéristiques sont très proches (9mn 34s pour le mode 5 de la zone 1 et 9mn 37s pour le mode 8 de synthèse) et on retrouve effectivement pour le mode 8, l'effet dominant sur la raie de la zone 1 identifié pour le mode local 5 de la zone 1 (page 93).

- Le mode 10 est constitué principalement des modes 1, 2 et 7 pour la zone 1 et particulièrement du mode 4 ainsi que des modes 1, 2 pour la zone 2. On observe une représentation très proche entre le mode 4 (5mn 40s figure 6.7) de la zone 2 et le mode 7 (4mn 52s figure 6.5) de la zone 1 d'une part, et le mode 10 de synthèse d'autre part (5mn 35s). Ces modes locaux sont caractéristiques de l'échauffement des couches superficielles du mur mitoyen, phénomène que l'on retrouve bien dans le mode 10 de synthèse.

Le mur mitoyen est caractéristique du couplage des deux zones. Les modes 8 et 10 de synthèse ont été identifiés comme intervenant de manière couplée pour reconstituer l'effet retard du mur mitoyen sur la réponse d'une zone à l'autre. La décomposition de ces modes sur les modes locaux met en évidence les modes 5 et 7 de la zone 1 et le mode 4 de la zone 2. Or ces modes locaux sont précisément caractéristiques d'un retard de propagation à de faibles échelles de temps à travers le mur mitoyen. Cette analyse de la décomposition des modes du modèle de synthèse est très riche car si elle se confirme au cours des exemples suivants, des règles plus générales, quant à la réduction des modèles locaux de zones, pourront être établies pour reconstituer le modèle multizone en tenant compte du couplage des zones.

Comparaison avec le modèle modal global

Le modèle modal global est le modèle obtenu par une approche modale directe sans étape de couplage et de synthèse. La discrétisation de ce modèle est rigoureusement identique à celle des modèles locaux. Par contre le nombre de modes est de 62[9] car le mur mitoyen n'y est représenté qu'une fois. Ceux-ci sont représentés sur les figures 6.18 et 6.19. Les constantes de temps associées sont données sur le tableau suivant:

Modèle global		Modèle de synthèse	
mode 1	8h 51mn	8h 51mn	mode 1
mode 2	4h 30mn	4h 30mn	mode 2
mode 3	2h 42mn	2h 42mn	mode 3
		1h 59mn	mode 4
mode 4	40mn 57s	40mn 57s	mode 5
mode 5	17mn 38	17mn 38s	mode 6
mode 6	13mn 14s	13mn 14s	mode 7
mode 7	9mn 37s	9mn 37s	mode 8
mode 8	5mn 55s	5mn 55s	mode 9
mode 9	5mn 35s	5mn 35s	mode 10
mode 10	5mn 62s	5mn 62s	mode 11
		4mn 58s	mode 12
mode 11	3mn 53s	3mn 53s	mode 13
...etc ...			

Table 6.6: Constantes de temps du modèle global et du modèle de synthèse

On constate à première vue que les temps caractéristiques sont identiques pour les deux modèles. La synthèse modale n'introduit pas de biais sur les éléments propres dès l'instant où on ne pratique pas de réduction sur les bases locales. Dans ce cas la précision numérique est excellente. Toutefois une analyse plus attentive montre que certains temps caractéristiques de synthèse ne sont pas présents dans le spectre des valeurs propres du modèle global direct. Ainsi la synthèse modale dans le cas du couplage par recouvrement, donne une base de modes propres incluant la base des modes globaux directs, mais contenant aussi des éléments supplémentaires.

Prenons l'exemple du mode 4 de synthèse (1h 59mn). identifié comme mode supplémentaire dont le temps caractéristique est de 1h 59mn. Alors que la double représentation du mur mitoyen pour les modes de synthèse est toujours identique (voir figure 6.8), on observe dans les autres modes que la représentation du mur commun pour ce mode y est différente, selon qu'on considère son appartenance à la zone 1, ou à la zone 2. Quelque soient les sollicitations en flux, les modes et les constantes de temps sont identiques. Ces modes supplémentaires sont nécessaires pour tenir compte des cas où des conditions d'excitation différentes seraient appliquées au mur mitoyen suivant qu'on le considère dans le modèle d'une zone ou d'une autre. Bien que cela n'ait physiquement pas de sens, le modèle mathématique dans lequel on pourrait effectivement prévoir une source de chaleur dans une seule des deux représentations du mur commun doit en tenir compte. Comme le modèle de synthèse a été construit en respectant les hypothèses qui garantissent l'unicité de la solution dans le mur commun, ces modes supplémentaires seront toujours non excitables.

[9] 3 parois composées de 20 noeuds chacune plus les deux noeuds de l'air

Ceci signifie que leur état modal est toujours nul. En effet dans les spectres 6.13, 6.16 et 6.17, ces modes ne sont jamais intervenus.

Il est intéressant maintenant d'étudier les modes correspondants au mur mitoyen pris isolément[10](Figure 6.20). On s'aperçoit que précisement les deux premières constantes de temps associées aux modes du mur mitoyen (1h 59mn et 4mn 58s, pour les deux premiers) correspondent pratiquement aux deux premiers modes de synthèse supplémentaires (1h49mn et 4mn 31s). Cette observation montre bien que ces modes supplémentaires sont spécifiquement liés au mur mitoyen et à sa double représentation.

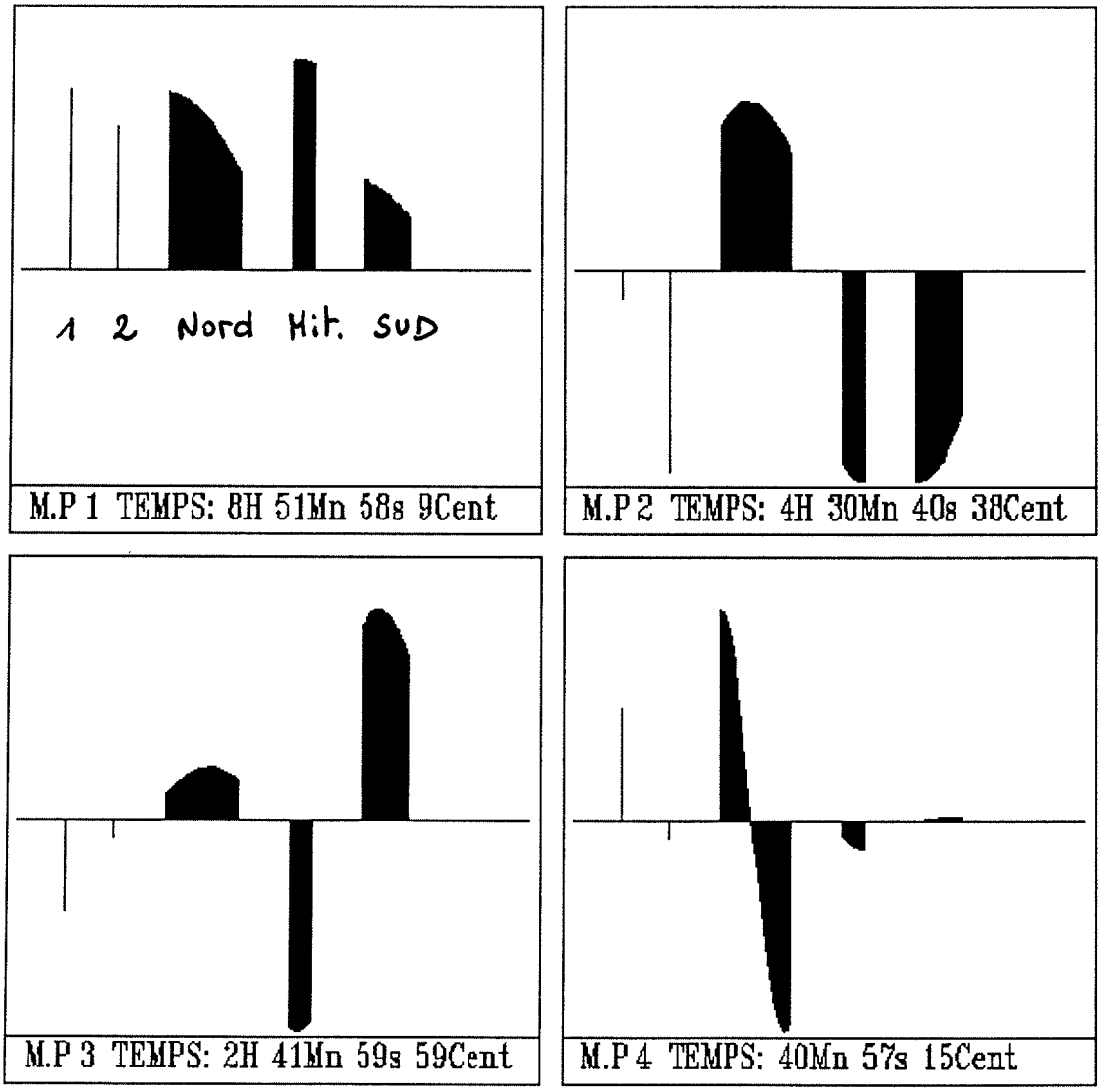


Figure 6.18: Modes du modèle global (1 à 4)

[10]Le calcul des modes d'un mur seul a été effectué avec le logiciel MURANA [Oulefki]

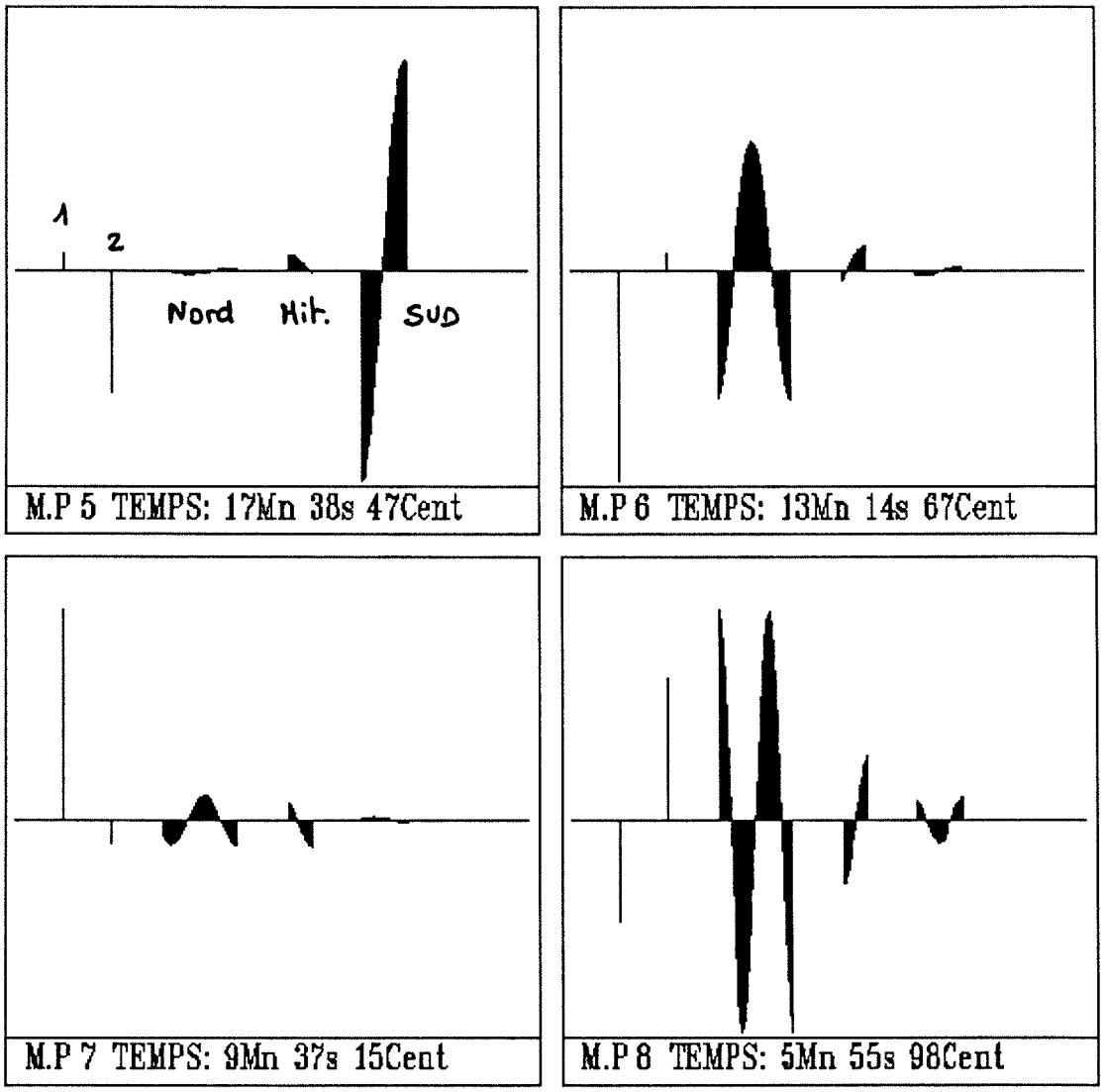


Figure 6.19: Modes du modèle global (5 à 8)

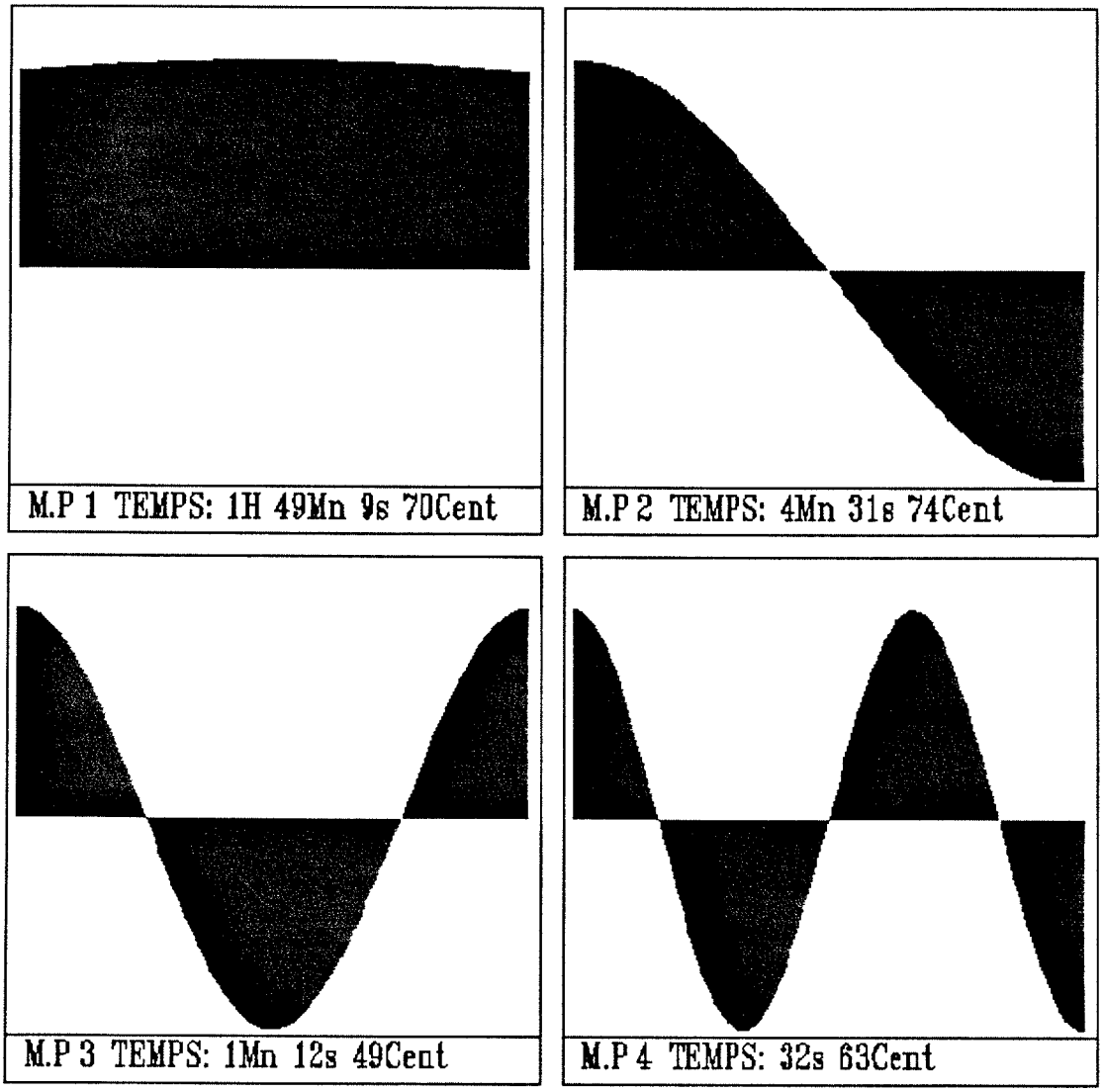


Figure 6.20: Modes du mur mitoyen

Conclusions

Ce premier exemple permet de distinguer trois remarques:

1. La construction d'un modèle de synthèse avec un couplage par recouvrement d'une zone commune, génère une base modale plus large que la base modale du modèle modal global correspondant. Ces modes supplémentaires sont spécifiquement liés à cette partie commune et à sa double représentation. Ils sont aisément repérables car leur représentation dans le mur mitoyen n'est pas identique contrairement à tous les autres modes.

2. Le choix de la paroi de béton pour mur mitoyen avait été fait dans l'optique d'identifier un couplage dynamique fort (faible résistance thermique). L'étude du spectre de couplage a révélé en fait qu'il s'agissait également d'un couplage dynamique rapide (le mode 2 participant essentiellement à ce couplage rapide). L'étude de la décomposition des modes de synthèse en termes dynamiques et en termes de raccordement, a révélé alors dans ce cas, l'importance des modes de raccordement sur la constitution des modes de synthèse. Ces modes de raccordement ne se limitent pas au mur mitoyen mais interviennent également sur la valeur du mode pour l'air des zones. L'étude de ces termes de raccordement permettra par la suite d'identifier le type de couplage dynamique: rapide ou lent.

3. La décomposition du terme dynamique sur les bases locales s'est révélée très riche comme outil potentiel pour établir des règles quant à la réduction de ses bases locales. En effet dans cet exemple un nombre limité de modes locaux seraient à conserver pour restituer le comportement du modèle global avec le modèle de synthèse. Cette décomposition du terme dynamique des modes globaux sur les modes locaux permettra, au cours des exemples traités, l'interprétation du "potentiel de réduction" de chaque modèle modal de zone pour reconstituer le modèle modal global.

6.1.2 Cas bizone, mur mitoyen constitué de 3 couches dont 1 isolante

Ce deuxième cas est identique au précédent mis à part la constitution du mur mitoyen constitué de 3 couches (Tableau 6.7). Un isolant sépare cette fois les deux zones. Intuitivement, on peut penser que le couplage entre les zones sera moins net que dans l'exemple précédent.

Mur sud	10 cm	béton	15 noeuds	25.8 m2
Mur mitoyen	5 cm	béton	10 noeuds	30 m2
	3 cm	isolant	5 noeuds	
	5 cm	béton	10 noeuds	
Mur nord	16 cm	béton	15 noeuds	28 m2

Table 6.7: Caractéristiques de l'exemple, découplage

Comparaison du modèle de synthèse et du modèle modal global

Les modes issus de la phase de synthèse sont donnés sur les figures 6.21, 6.22, 6.25. Ceux du modèle global sont donnés sur les figures 6.23 et 6.24. Cette configuration est légérement plus inerte (le premier mode de synthèse a maintenant une constante de temps de 13h 5mn et non de 8h 51mn comme dans l'exemple précédent).

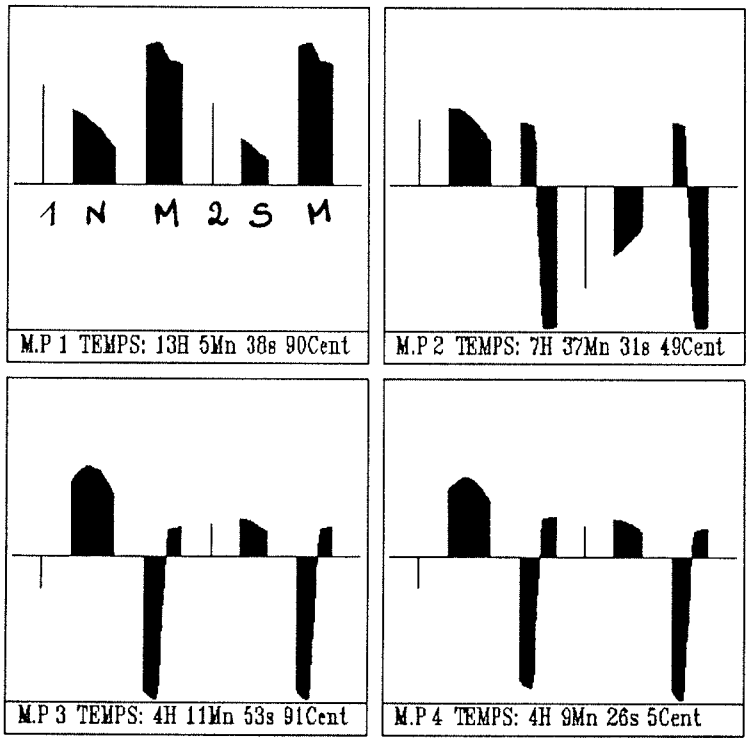


Figure 6.21: Modes de synthèse (1 à 4)

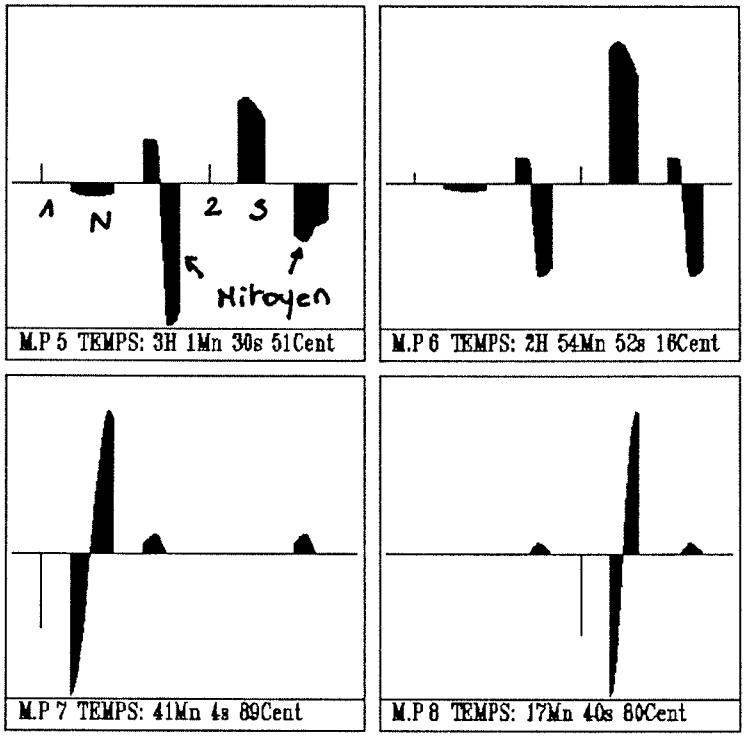


Figure 6.22: Modes de synthèse (5 à 8)

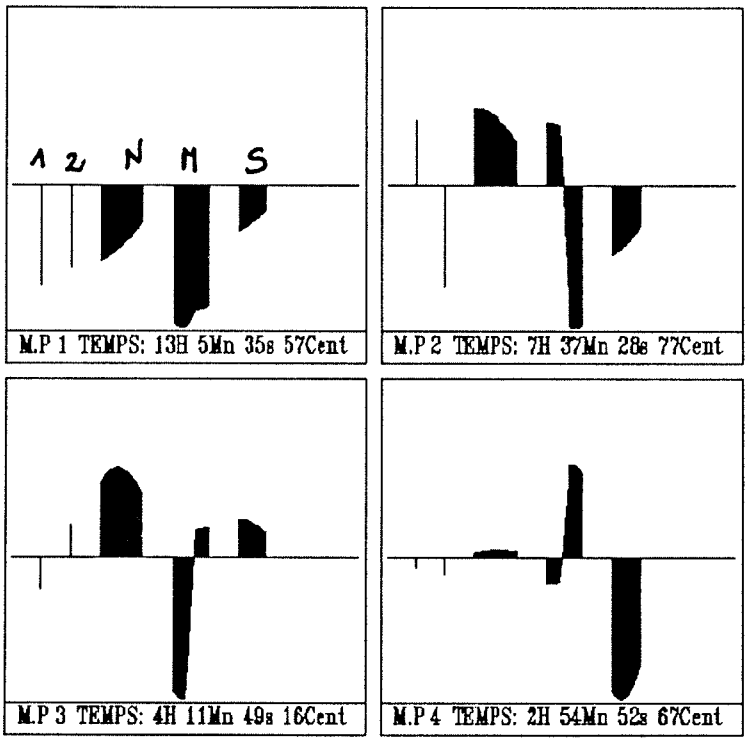


Figure 6.23: Modes du modèle modal global (1 à 4)

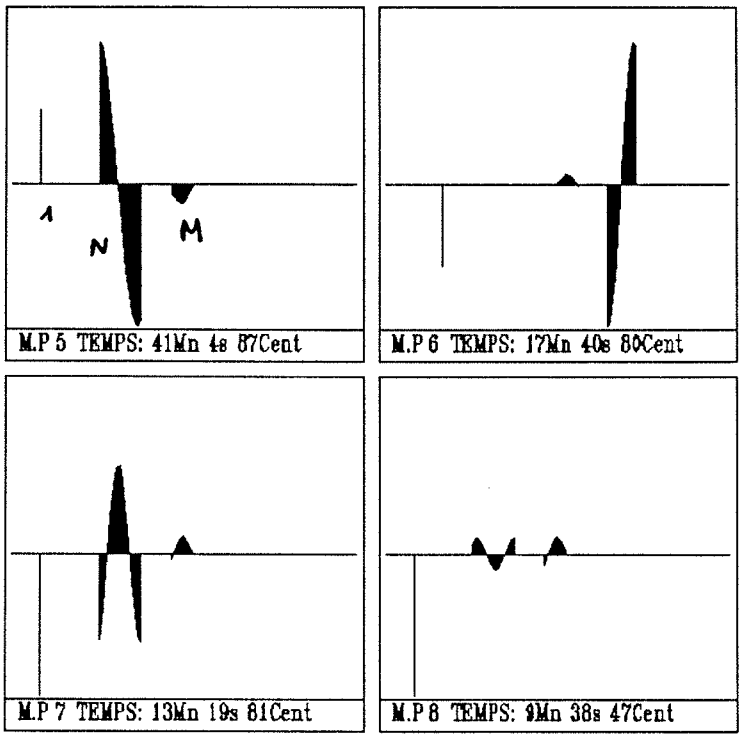


Figure 6.24: Modes du modèle modal global (5 à 8)

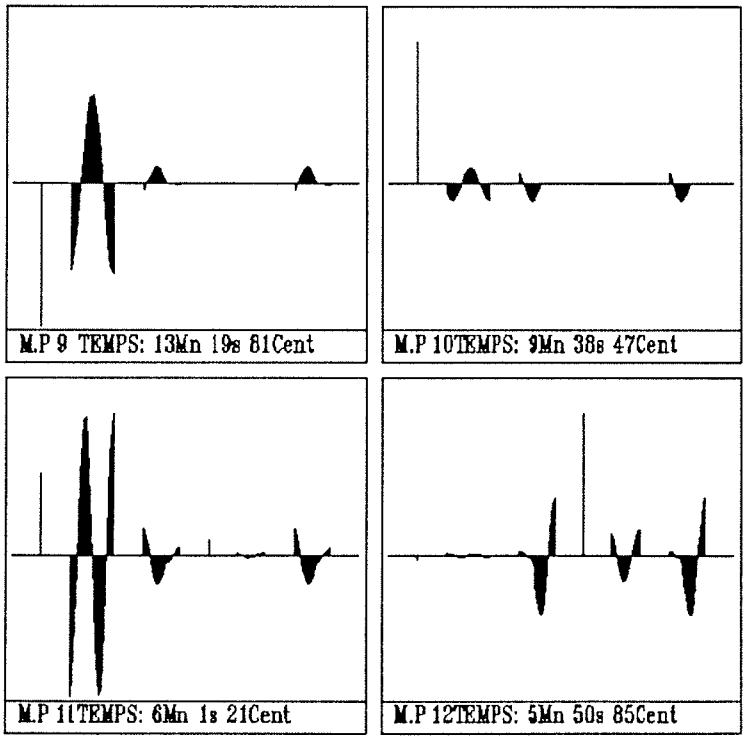


Figure 6.25: Modes de synthèse (9 à 12)

- Le nombres de modes issus du modèle de synthèse (82) est à nouveau supérieur à celui du modèle modal global (57). Ceci est lié à la double représentation du mur mitoyen dans le modèle de synthèse comme mentionné au cours de l'exemple précédent.

Modes de synthèse		Modes du modèle global	
mode 1	13 h 5 mn	13 h 5 mn	mode 1
mode 2	7 h 37 mn	7 h 37 mn	mode 2
mode 3	4 h 11 mn	4 h 11 mn	mode 3
mode 4	4 h 9 mn		
mode 5	3 h 1 mn		
mode 6	2 h 54 mn	2 h 54 mn	mode 4
mode 7	41 mn 4s	41 mn 4s	mode 5
mode 8	17 mn 40s	17 mn 40s	mode 6
mode 9	13 mn 19s	13 mn 19s	mode 7
mode 10	9 mn 38s	9 mn 38s	mode 8
mode 11	6 mn 1s	6 mn 1s	mode 9
mode 12	5 mn 50s	5 mn 50s	mode 10
...			

Sur ce tableau, on remarque que les modes 4 et 5 de synthèse s'intercalent par rapport aux modes du modèle modal global. On retrouve le même phénomène que pour l'exemple précédent à savoir qu'il s'agit de modes inexcitables pouvant prendre en compte des conditions d'excitation différentes pour le mur commun aux deux zones. La représentation du mur mitoyen est effectivement différente pour ces deux modes de synthèse. L'étude des modes correspondants au mur mitoyen (figure 6.26) confirme l'analyse issue du cas précédent: Les deux premières constantes de temps associées aux modes du mur mitoyen, pris seul, (4h 9mn et 3h 1mn) correspondent bien aux deux premières constantes de temps des modes de synthèse identifiés comme supplémentaires (4h 9mn et 3h 1mn). Ces modes supplémentaires sont donc bien caractéristiques du mur mitoyen et sont liés à une double représentation du mur dans le modèle de synthèse.

Etude de la décomposition des vecteurs propres de synthèse

Comme dans l'exemple précédent, on va pouvoir étudier le couplage des zones à l'aide de la décomposition dynamique/statique des modes de synthèse. On rapelle que les vecteurs propres du modèle de synthèse, $\mathcal{P}$, se décomposent sous la forme de deux termes:

$$\mathcal{P} = (P + [S_c][G_{rc}]^{-1}[H_r])[p] \tag{6.2}$$

Le terme dynamique qui correspond aux vecteurs propres locaux juxtaposés multipliés par les coefficients de décomposition est représenté sur la figure 6.27.

Pour reconstituer les vecteurs propres globaux il faut ajouter la partie correspondant aux termes de raccordement (figure 6.28). La représentation graphique de ce premier terme dynamique est très proche des modes globaux. La seule différence concerne le mur mitoyen alors que pour l'exemple du "couplage dynamique fort/rapide" des différences existaient également pour les raies de l'air. Les termes de raccordement étant essentiellement représentés pour le mur mitoyen, il n'existe pas de raccordement pour les

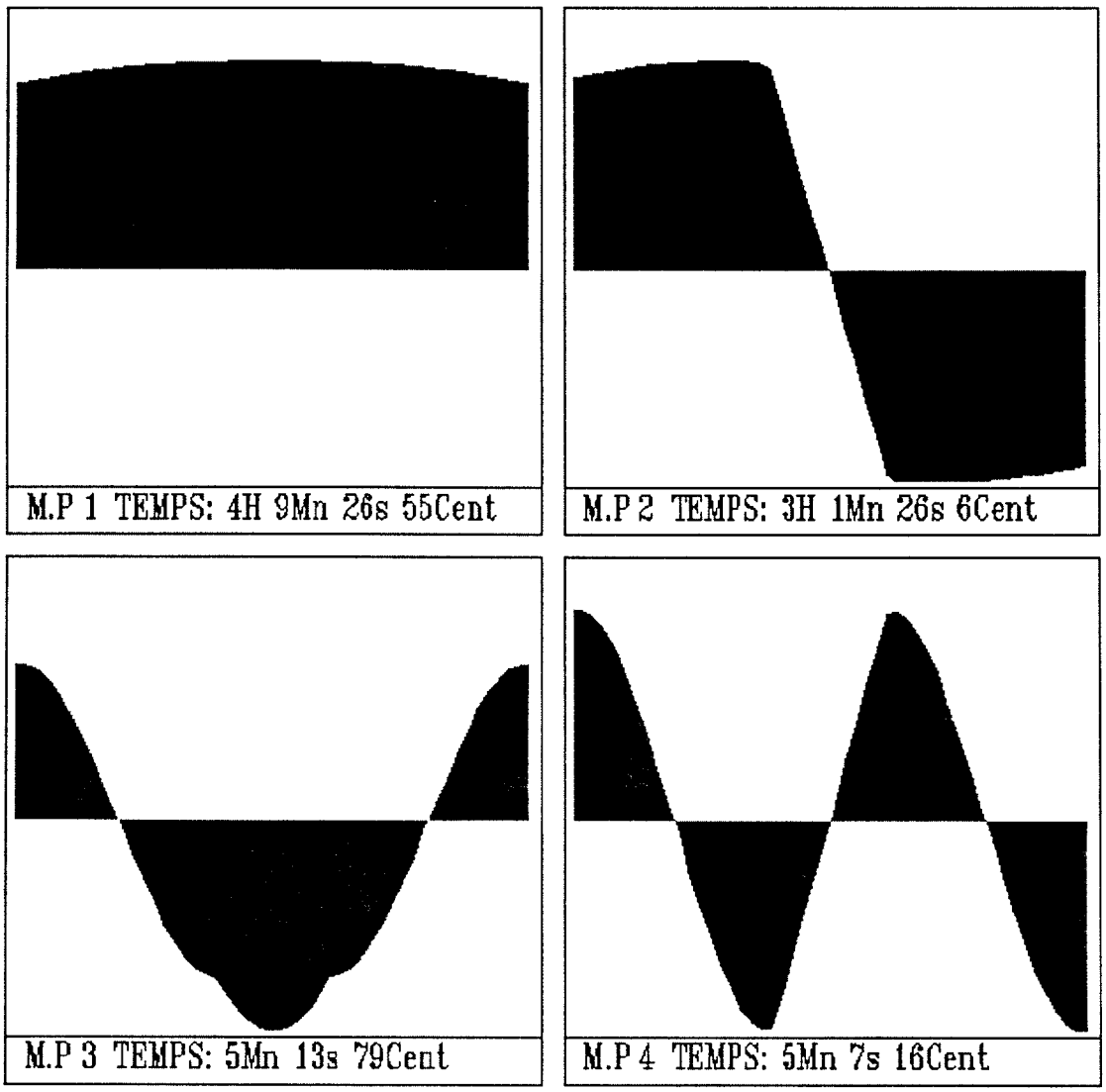


Figure 6.26: Modes du mur mitoyen

valeurs des modes dans l'air de chaque zone. Le terme dynamique des modes de synthèse, composé de la juxtaposition des modes locaux, reconstitue bien seul les modes de synthèse pour l'air et les parois du bâtiment, autres que celle du mur mitoyen, sans tenir compte des termes de raccordement. Cette absence des termes de raccordement dans la constitution des modes de synthèse, mis à part pour le mur mitoyen, est l'indice d'un couplage faible, voire d'un couplage inexistant entre les deux zones. Cette analyse devra être confirmée par l'étude des spectres pour que cette règle puisse être généralisée.

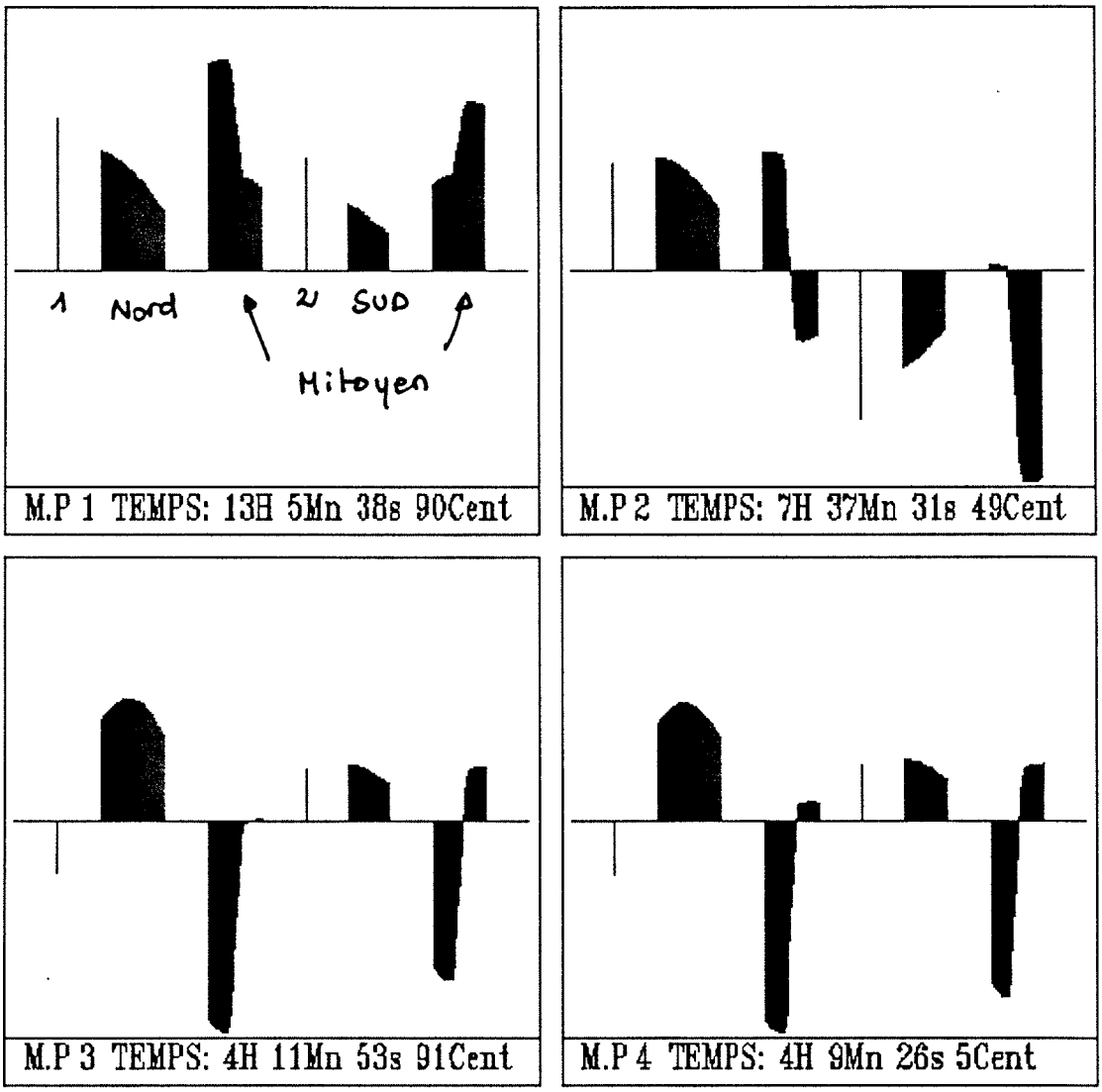


Figure 6.27: Terme dynamique des modes de synthèse (1 à 4)

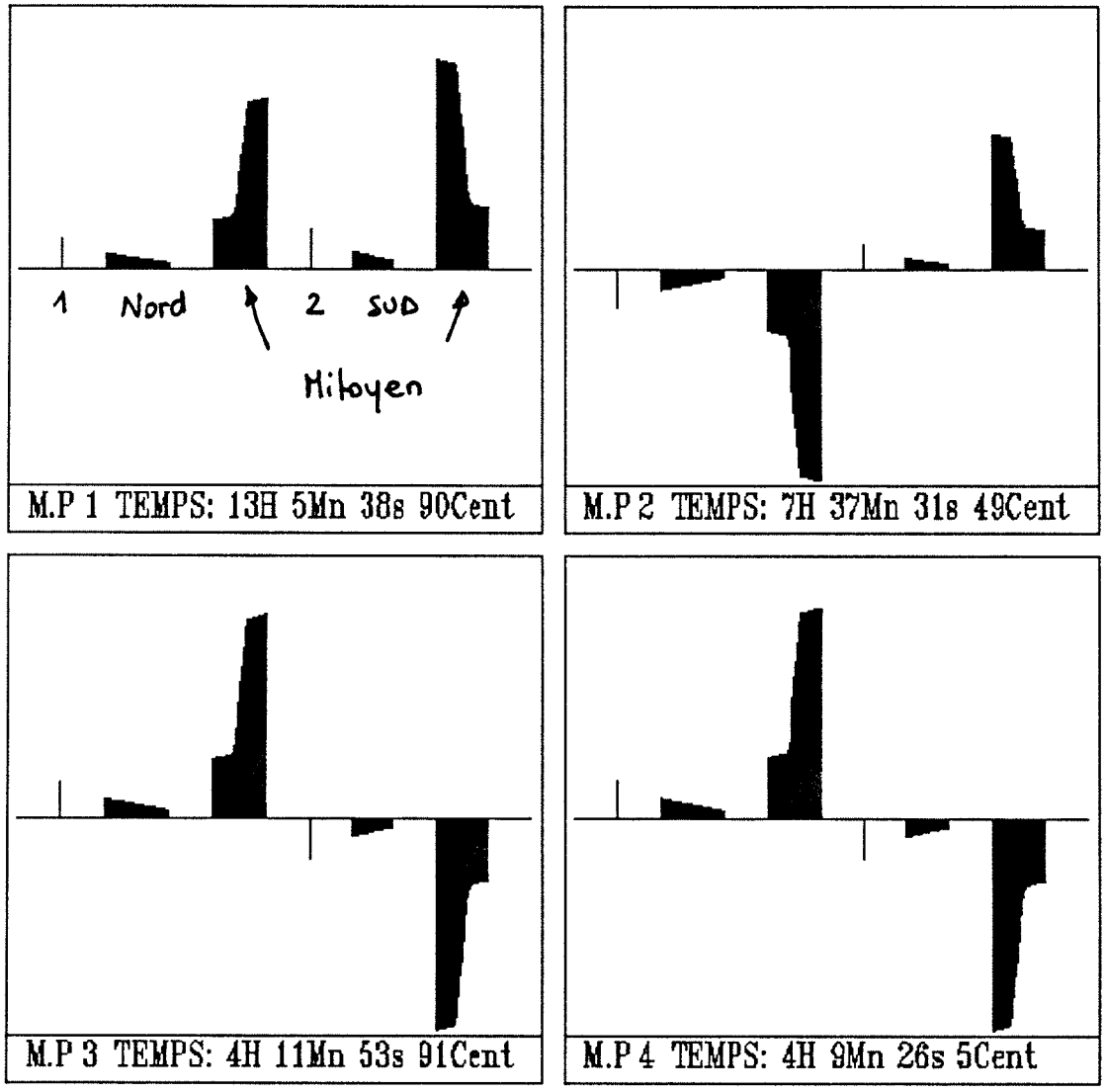


Figure 6.28: Modes de raccordement (1 à 4)

Etude des spectres de réponse indicielle

1. Le spectre de réponse de la zone 1 à un échelon de la température extérieure pour le modèle de synthèse est donné sur la figure 6.29. Ce spectre est à comparer avec celui du cas précédent (figure 6.16). On remarque que, bien qu'il ne s'agisse pas des mêmes modes dominants (modes 1, 3, 5 et 7 pour le cas du couplage dynamique fort; modes 1, 3, 7 et 9 pour le cas du couplage dynamique faible), leur constantes de temps associées sont du même ordre de grandeur. Le même phénomène est observable pour la réponse de la zone 2 à un échelon de la température extérieure. On peut en conclure que ce type de mur mitoyen influence peu la réponse d'une zone à une sollicitation extérieure.

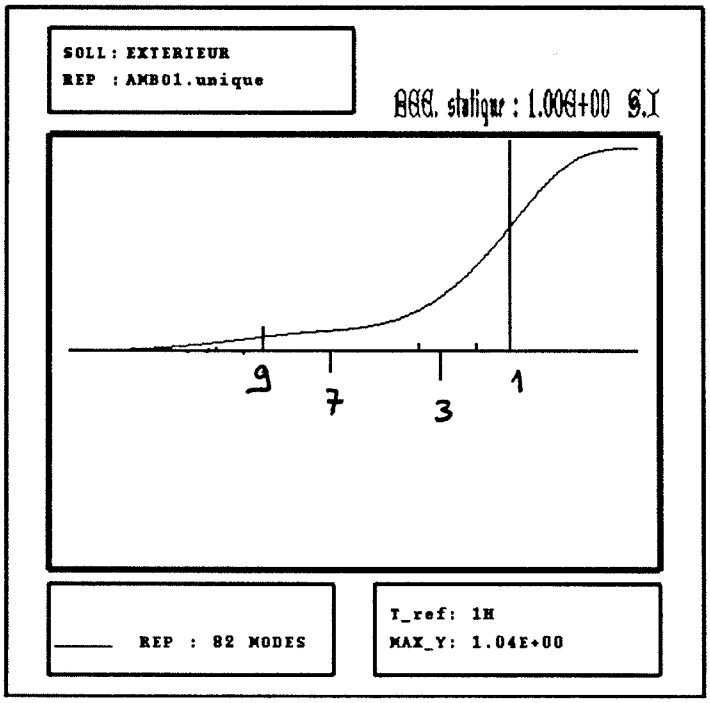


Figure 6.29: Spectre de la réponse de la zone 1 à la température extérieure pour le modèle de synthèse

2. Le spectre de réponse de la zone 1 à un échelon de puissance dans la zone 2 (ou inversement d'après le théorème de réciprocité) pour le modèle de synthèse est donné sur la figure 6.30. Ce spectre dit de "couplage" est à comparer avec celui du cas précédent (figure 6.17).

   Des différences sont à noter cette fois: dans le cas d'un mur mitoyen isolant (couplage dynamique faible) toute dominance de modes correspondant à de faibles échelles de temps a disparu. Ce spectre est donc très caractéristique de la faiblesse d'un couplage dynamique car il s'agit d'un couplage dynamique **lent** . Cette analyse confirme bien celle issue de l'étude de la forme des termes de raccordement: Les modes de synthèse sont essentiellement constitués à partir des modes locaux, les termes de raccordement n'intervenant pas pour les valeurs sur l'air des zones.

   Sur ce spectre trois modes sont dominants: il s'agit des modes 1, 2 et 3.

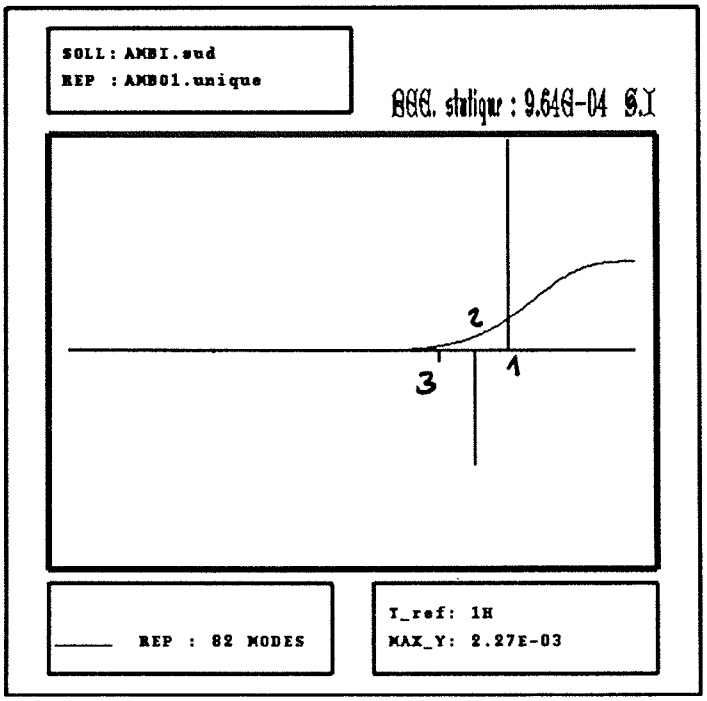


Figure 6.30: Spectre de la réponse de la zone 1 à un échelon de puissance de la zone 2 pour le modèle de synthèse

- Mode 1, 13h 5mn (figure 6.21): On retrouve l'influence dominante du premier mode.
- Mode 2, 7h 37mn (figure 6.21): Ce mode introduit un fort retard dans la réponse: ce mode 2 a d'ailleurs une représentation opposée entre le mur nord de la zone 1 et le mur sud de la zone 2 (Figure 6.21). Ce qu' il faut remarquer c'est l'opposition des valeurs du mode sur l'air des deux zones. Cette opposition qui n'existait pas pour le mode 2 de l'exemple précédent, est très caractéristique du découplage des deux zones. La forme du mode 2 explique bien la lenteur de la réponse pour ce spectre de couplage.
- Mode 3, 4h 11mn (figure 6.21): Ce mode intervient également mais dans une faible proportion.

Il est intéressant maintenant d'étudier la constitution du terme dynamique de ces 3 premiers modes de synthèse à partir des modes locaux car cette étude permettra d'extraire les principes pour la réduction des modèles locaux.

Etude de la décomposition du terme dynamique

En étudiant la valeur des coefficients de décomposition affecté à chaque mode local, on peut déterminer les modes locaux principaux dans la reconstitution de la partie dynamique des 3 premiers modes globaux. (voir Tableau 6.8).

	Modes locaux	
Modes globaux	Zone 1	Zone 2
Mode 1	mode 1	mode 1
	mode 2	mode 2
	mode 3	mode 3
Mode 2	mode 1	mode 1
	mode 2	mode 2
	mode 3	mode 3
Mode 3	mode 2	mode 2

Table 6.8: Décomposition des modes globaux à partir des modes locaux

L'étude des 3 premiers modes pour chaque zone (Figures 6.31 et 6.32) est intéressante car elle confirme l'analyse issue de l'exemple précédent:

- On retrouve la dominance du premier mode de chaque zone pour la constitution du premier mode global.
- Les modes 2 de chaque zone ont une représentation opposée pour les deux murs. Leur combinaison constitue la partie dynamique du 3 ème mode de synthèse (figure 6.23) qui conserve cette dissymétrie entre les murs extérieurs et le mur commun.
- Les modes 3 de chaque zone présentent la caractéristique d'une inversion dans le mur mitoyen. Le mode 3 de la zone 1 a une constante de temps de 3h 17mn, celui de la zone 2 a une constante de temps de 2h 52mn. Il est à noter que le 2 ème mode du mur mitoyen pris seul (figure 6.28) a également une constante de temps du même ordre (3h 11mn) et il présente la même inversion caractéristique de la propagation d'une excitation à travers ce mur. Cette inversion du mur mitoyen apparaissait également dans les modes locaux sélectionnés au cours de l'exemple précédent (mode 7 de la zone 1 et mode 4 de la zone 2). Ainsi le mode 3 de synthèse est caractéristique du mur mitoyen, celui justement par où se fait le couplage. Il a un rôle analogue à l'ensemble modes 8 et 10 de l'exemple précédent. La différence essentielle est qu'ici le temps caractéristique associé au mode 3 est de 4 heures alors que les modes 8 et 10 de l'exemple précédent étaient associés à des constantes de temps de l'ordre d'une dizaine de minutes. Cette fois le couplage est lent.

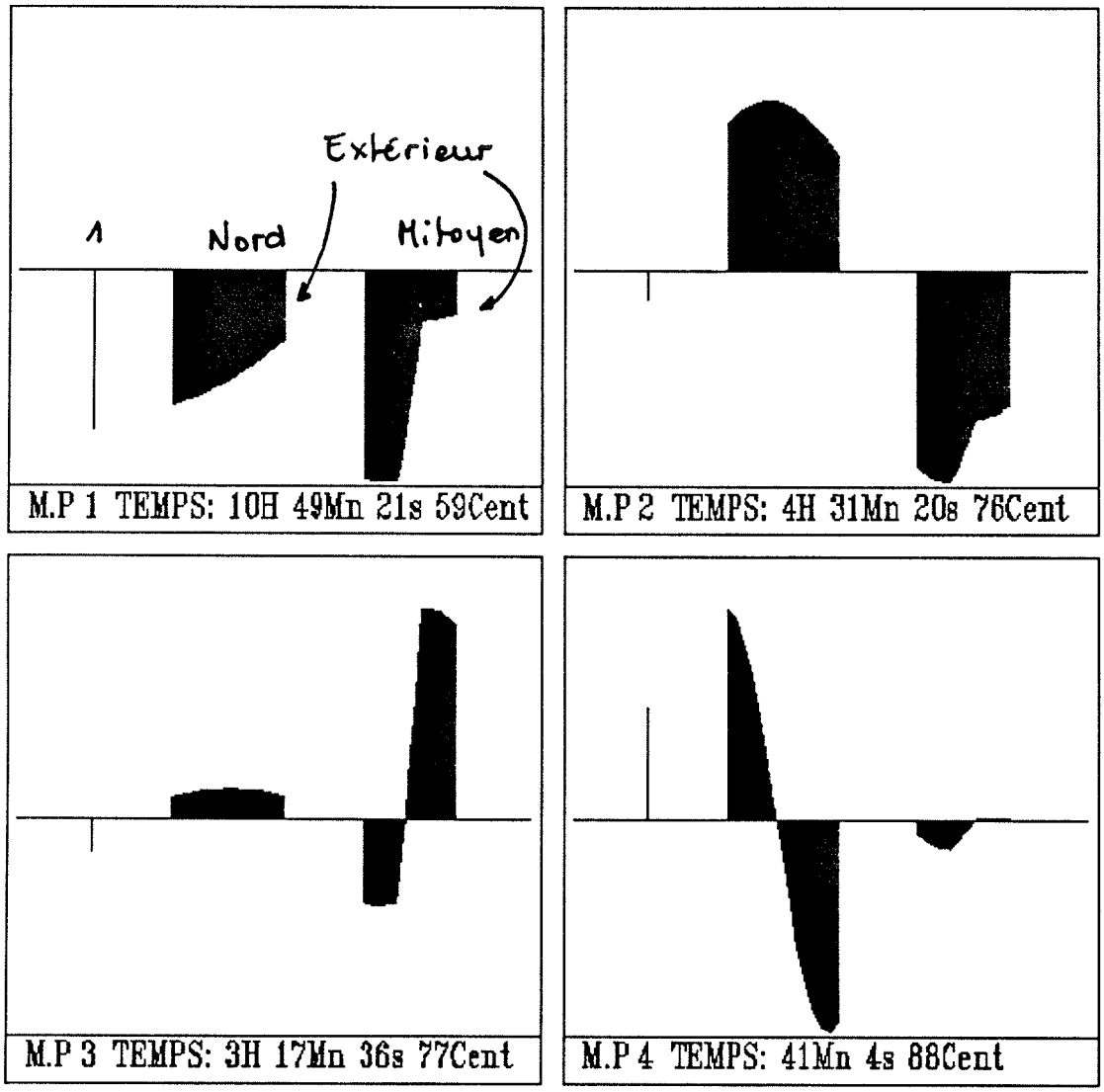


Figure 6.31: Modes de la zone 1 (1 à 4)

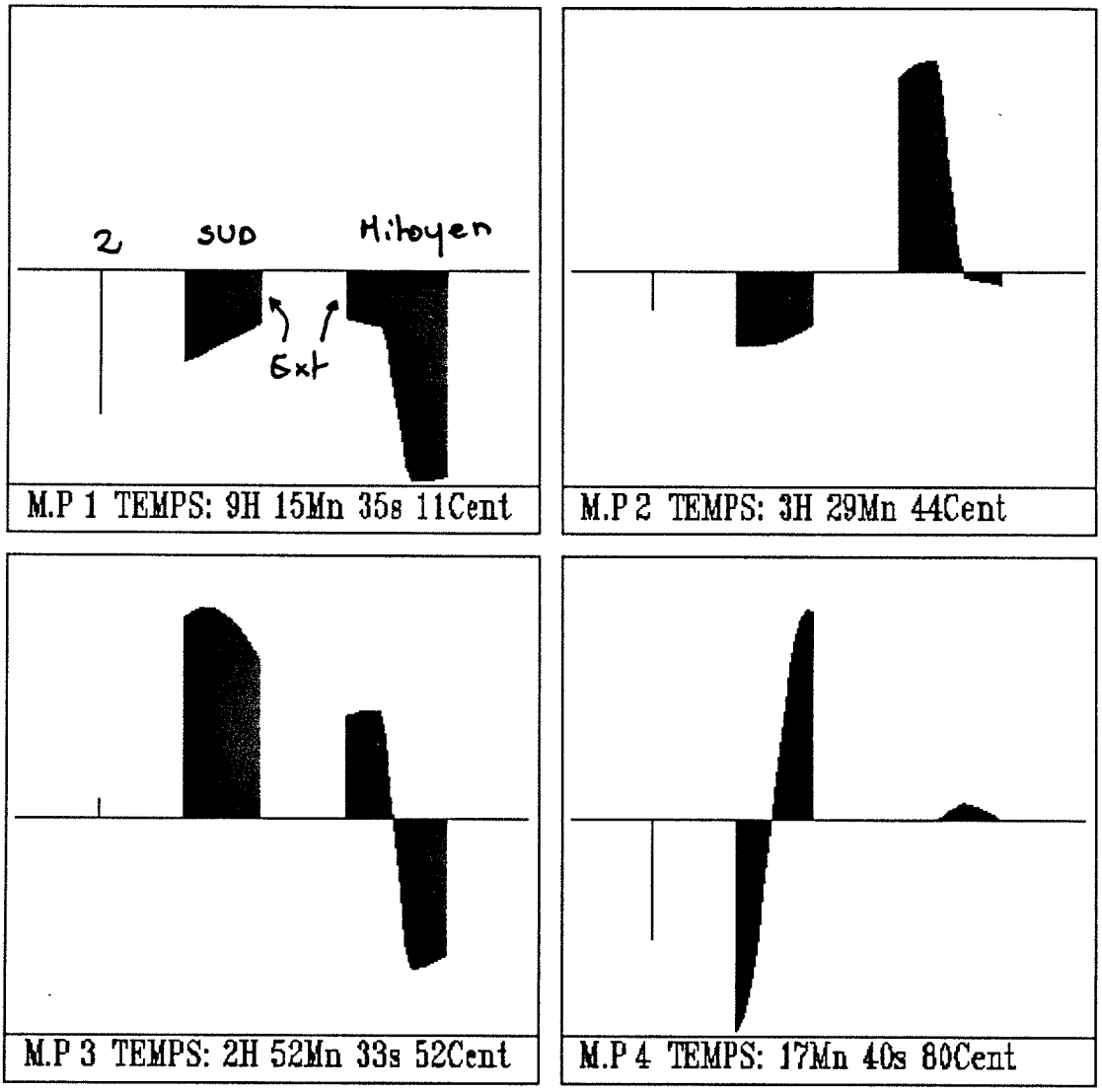


Figure 6.32: Modes de la zone 2 (1 à 4)

Conclusions

Les conclusions de l'exemple précédent sont confirmées:

1. La qualification du type de couplage est possible en s'appuyant sur l'étude de l'importance respective du terme dynamique et du terme statique des modes de synthèse et des localisations géométriques de ces modes. L'étude du spectre de couplage a permis d'identifier clairement un couplage dynamique **lent** pour cet exemple. L'absence dans la représentation des termes de raccordements de l'air des zones et des murs autre que le mur mitoyen peut constituer une règle qui permette d'identifier ce type de couplage lent.

2. Etablissement de règles de réduction des bases locales

   Grâce à l'étude de la décomposition du terme dynamique des modes de synthèse sur les modes locaux, deux règles semblent être confirmées. Il faut conserver en sus du premier mode local:

   (a) des modes locaux présentant une dissymétrie entre les murs extérieurs et le mur mitoyen. Il s'agit ici des modes 2 de chaque zone.

   (b) tout mode faisant intervenir un déséquilibre entre les faces du mur mitoyen ce qui permet de reconstituer les champs dans les premiers instants de la perturbation à travers cette paroi. (Les modes 3 de chaque zone pour cet exemple).

6.1.3 Couplage entre une zone à forte inertie et une zone à faible inertie

Ce troisième cas est basé sur l'étude du couplage entre une zone à forte inertie (zone 1, isolation extérieure) et une zone à faible inertie (zone 2, une seule couche de béton). Le mur mitoyen étant isolé, on peut s'attendre au même type de couplage que pour l'exemple précédent: un couplage dynamique faible et lent. Le tableau 6.9 donne les caractéristiques de cet exemple.

Mur sud	5 cm	béton	15 noeuds	25.80 m2
Mur mitoyen	10 cm	béton	15 noeuds	30 m2
	3 cm	isolant	5 noeuds	
Mur nord	3 cm	isolant	5 noeuds	28 m2
	16 cm	béton	15 noeuds	

Table 6.9: Caractéristiques de l'exemple, Couplage entre une zone à forte inertie et une zone à faible inertie

Les huit premiers modes obtenus après synthèse modale sont donnés sur les figures 6.33 et 6.34. On peut dès maintenant noter la valeur de la première constante de temps qui est de 45 heures et qui correspond à un bâtiment déja beaucoup plus inerte que les précédents (et plus réaliste).

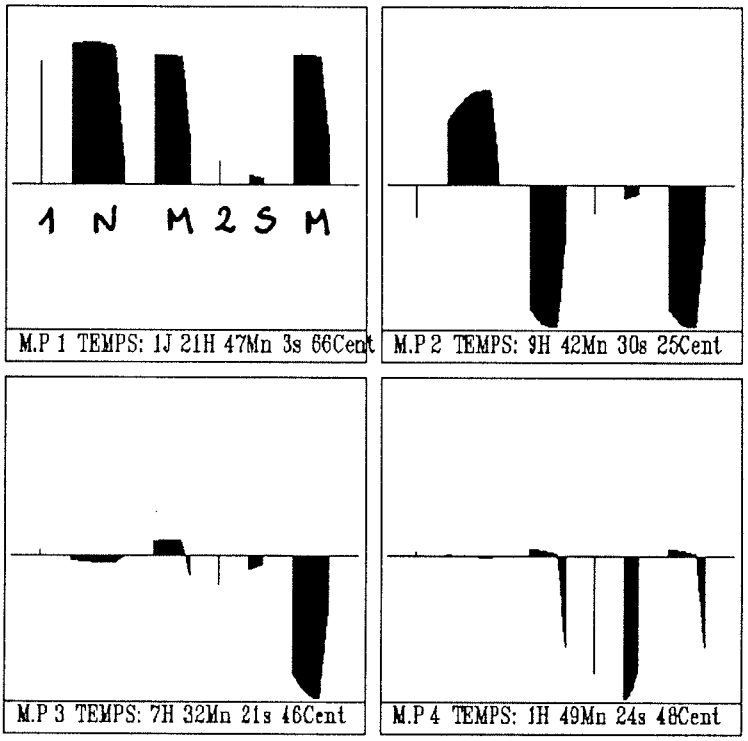


Figure 6.33: Modes de synthèse (1 à 4)

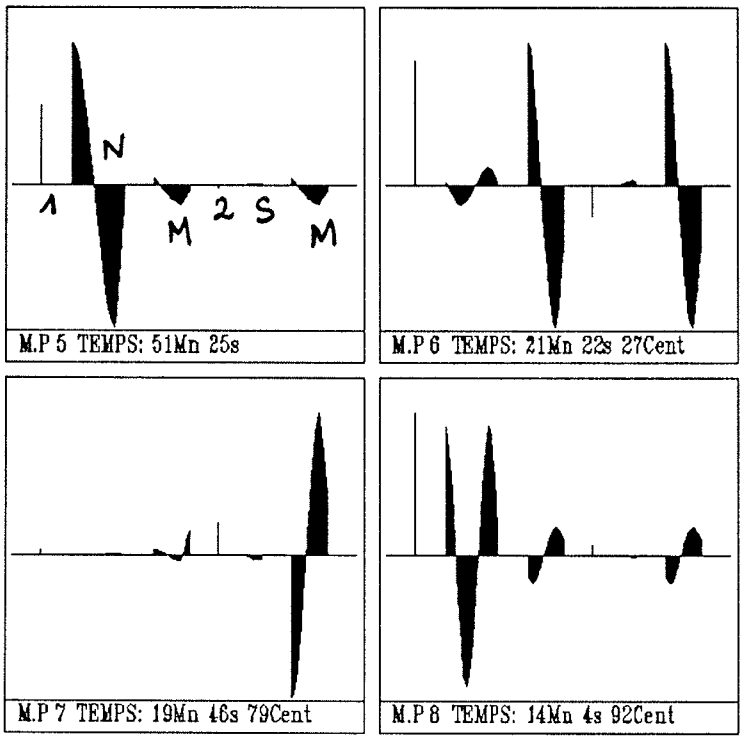


Figure 6.34: Modes de synthèse (5 à 8)

Etude des spectres de réponse indicielle

Les spectres de réponse à la température extérieure pour chaque zone sont intéressants à comparer car les zones, contrairement aux cas précédents, sont de nature très différente (zone inerte et zone à faible inertie).

1. Le spectre de la figure 6.35 donne la réponse de la zone 1 (zone inerte) à la température extérieure. Ce spectre montre la dominance très marquée du premier mode. Le premier mode étant assez proche du régime permanent, il est logique qu'il soit dominant dans le cas d'une zone inerte. Ce premier mode est d'ailleurs très faiblement représenté pour le mur extérieur de la zone 2. Il n'est donc pas nécessaire de faire intervenir beaucoup de modes supplémentaires pour compenser le champ de température du coté de la zone 2. C'est ainsi que l'on note une faible raie associée au mode 9. Ce mode 9 est représenté sur la figure 6.36. Ce mode présente la particularité d'être représenté essentiellement sur la raie de l'air de la zone concernée (zone 1). On remarque également une inversion pour le mur commun. Cette remarque confirme l'analyse formulée dans les exemples précédents sur l'importance d'un tel mode. L'examen des coefficients de décomposition pour le mode 9 montrent que son terme dynamique est constitué principalement du mode 6 de la zone 1 et dans une moindre mesure du mode 1 de la zone 1 et des modes 1 et 3 de la zone 2. Ce mode 6 de la zone 1 a une constante de temps de 9mn 24s qui est très proche de celle du mode 9 global (9mn 25s). Sa forme est également similaire à celle du mode 9.

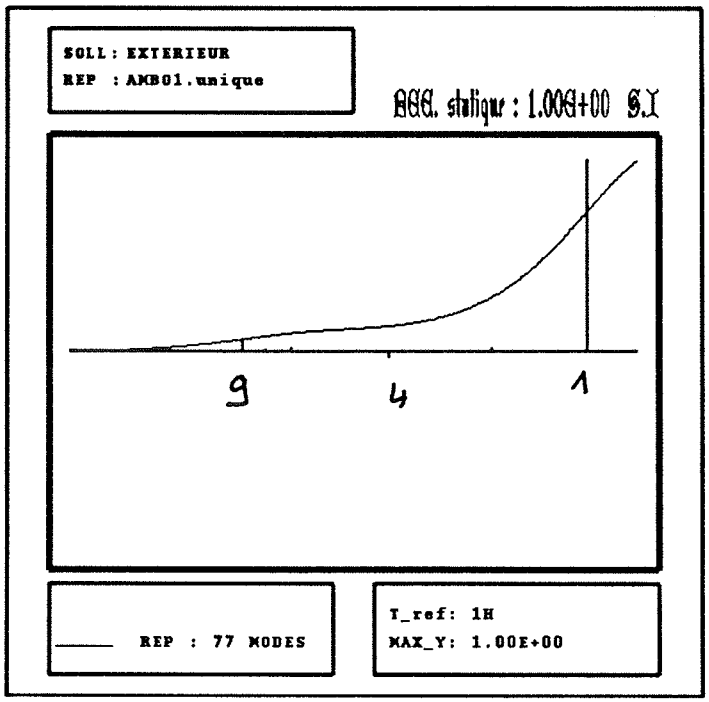


Figure 6.35: Spectre de la réponse de la zone 1 à la température extérieure pour le modèle de synthèse

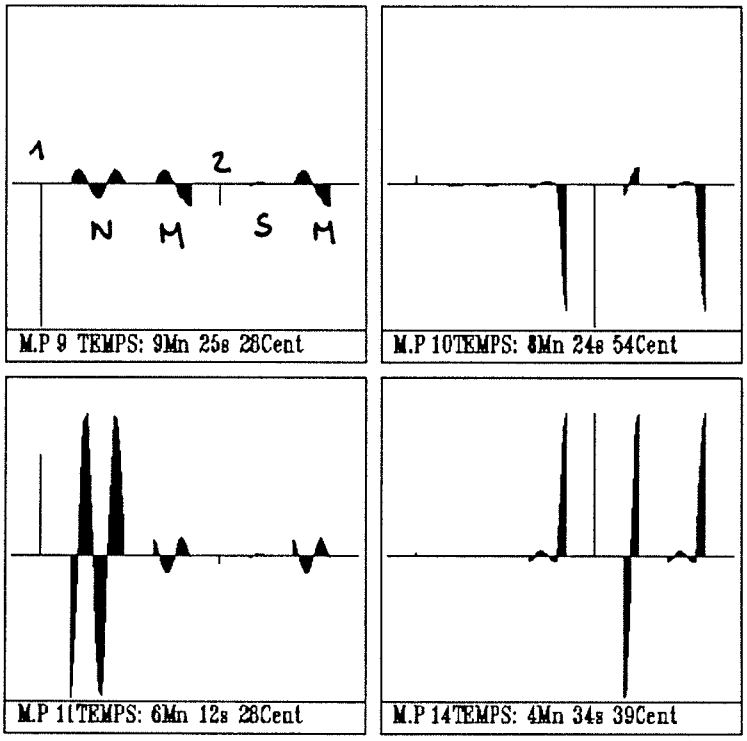


Figure 6.36: Modes de synthèse (9 à 14)

2. Le spectre de la figure 6.37 donne la réponse de la zone 2 (zone peu inerte) à la température extérieure. Ce spectre montre cette fois ci une dominance marquée du mode 4 puis dans des proportions plus faibles des modes 1, 10 et 14. Cette réponse est caractéristique d'une courbe en palier. La montée rapide de la température de la zone 2 est générée par le mode 4. Ce mode 4 (figure 6.33) présente une dominance marquée pour la raie sur l'air et le mur extérieur de la zone 2. L'examen des coefficients de décomposition pour le mode 4 (1h 49mn) montrent que son terme dynamique est constitué principalement du mode 2 pour la zone 2 (1h 49mn) et dans une moindre mesure du mode 1 de la zone 2 et des modes 1 et 2 pour la zone 1. Ce mode 2 de la zone 2 présente une dissymétrie entre le mur extérieur et le mur mitoyen. Le mur mitoyen présente également une inversion.

   La zone 2 étant moins inerte que la zone 1, sa réaction est donc plus rapide. Le second tronçon de la courbe est caractéristique de l'évolution "glissante" de la zone 2 pendant que la zone 1 évolue dynamiquement avec un temps caractéristique plus long (45 heures). On remarque également une inversion pour le mur mitoyen pour le mode 4 qui est caractéristique de la propagation de la sollicitation à travers ce mur. Les modes 10 et 14 ont des raies opposées sur le spectre. Ces modes sont donnés sur la figure 6.36. Ils sont essentiellement représentés dans la raie de l'air de la zone 2 et pour les couches superficielles (coté intérieur) des murs de cette zone.

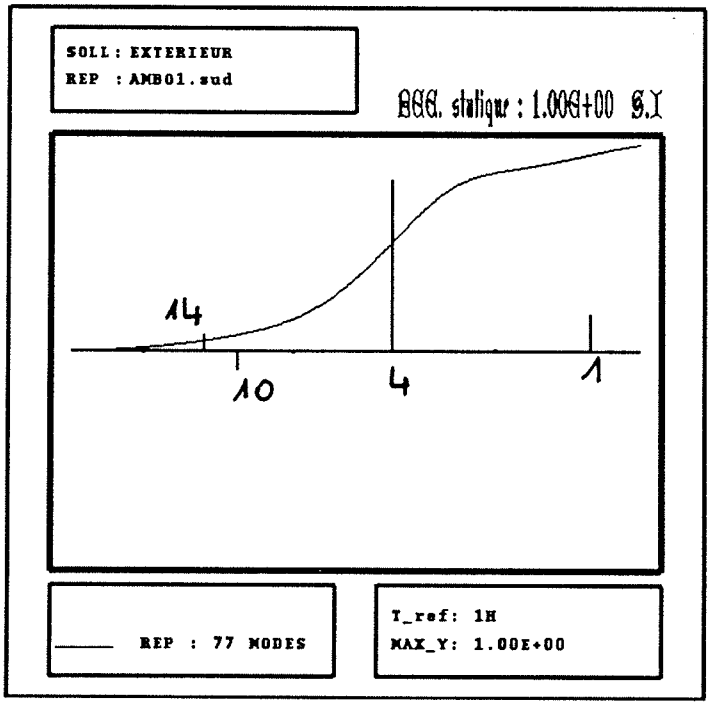


Figure 6.37: Spectre de la réponse de la zone 2 à la température extérieure pour le modèle de synthèse

3. Pour mieux comprendre la différence de comportement entre ces deux zones, nous allons maintenant analyser les spectres de réponse de la température de chaque zone à un échelon de puissance injecté sur l'air de la même zone. Le spectre de la figure 6.38 est celui correspondant à la zone 1. Deux modes sont dominants: le premier et le mode 9. La représentation du mode 9, essentiellement sur la raie de l'air de la zone 1, explique son importance pour ce spectre. Le mode 1 concerne principalement les murs de cette zone. La zone étant assez inerte (isolation extérieure) la réponse à une sollicitation de chauffage est assez lente, le mur extérieur et le mur mitoyen devant s'échauffer (d'où l'importance dominante du mode 1).

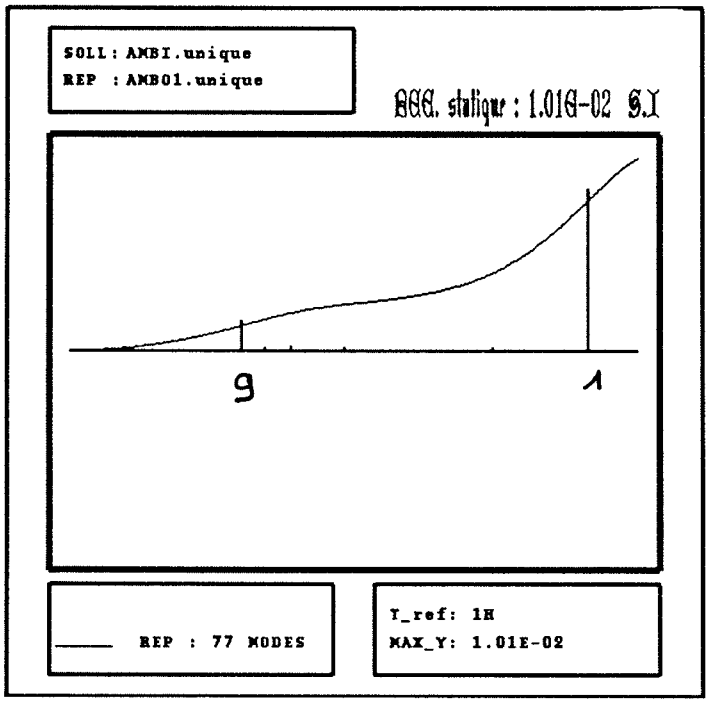


Figure 6.38: Spectre de la réponse de la zone 1 à un échelon de puissance dans la zone 1 pour le modèle de synthèse

4. Le spectre de la figure 6.39, correspondant à la zone 2 est nettement différent de celui de la zone 1: le mode dominant est le mode 10 dont la constante de temps est faible, 8mn 24s. Les deux autres modes sont le mode 4 puis, pour une faible part, le mode 1. Ce spectre est caractéristique d'une zone à faible inertie, réagissant très rapidement à une sollicitation de flux de chauffage. Le mode 10 est essentiellement représenté sur la raie de l'air de la zone 2. Le mode 4 est le mode correspondant à l'évolution du champ de température dans le mur extérieur de la zone 2. Ces deux spectres sont très caractéristiques:

   - Celui de la zone 1 est caractéristique d'une zone assez inerte avec une évolution lente

- Celui de la zone 2 est caractéristique d'une zone peu inerte avec une évolution rapide dès les premiers instants.
- Ce qui est de plus remarquable c'est que pratiquement le spectre associé à une zone ne fait intervenir que des modes localisés dans cette zone. Le couplage semble a priori faible. C'est ce que nous allons approfondir en analysant le spectre de couplage

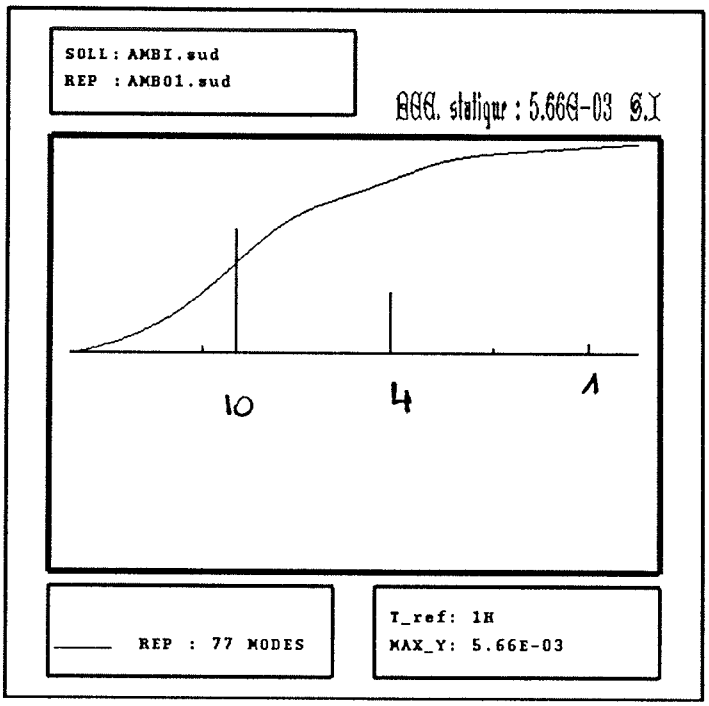


Figure 6.39: Spectre de la réponse de la zone 2 à un échelon de puissance dans la zone 2 pour le modèle de synthèse

5. Nous terminons donc l'étude de ces spectres par celle du **spectre de couplage.**La figure 6.40 donne la réponse de la zone 2 (zone peu inerte) à un échelon de puissance appliqué dans la zone 1. On retrouve l'influence dominante du mode 1, suivi du mode 2, puis de raies négatives correspondant aux modes 4 et 6, et enfin de deux raies opposées dont les effets s'annulent en raison de leur constante de temps associées très proches: il s'agit des modes 9 et 10.

   L'allure de ce spectre s'apparente plus à celui du premier exemple (couplage dynamique rapide) qu'à celui du second exemple (couplage dynamique lent). Il s'agirait donc d'un couplage rapide contrairement à l'intuition du départ. Néanmoins la réponse statique pour ce spectre de couplage est quatre fois plus faible que celle pour le spectre de la réponse de la zone 1 à un échelon de puissance dans la zone 1, et 7 fois plus faible pour celui correspondant à la zone 2. Il s'agit donc d'un couplage **faible**. Cette caractéristique prédomine par rapport à la rapidité ou non du couplage.

Le mode 2 (9h 42mn) est intéressant à examiner (figure 6.33). Les valeurs de ce mode sur l'air de ces deux zones sont dans le même sens, ce qui explique que le mode 2 contribue au couplage des deux zones, les deux zones évoluant dans le même sens.

Les modes 4 et 6 sont responsables dans la réponse d'un retard. Le mode 4 est essentiellement représenté pour le mur sud. Cette zone étant très peu inerte il est probable que le mode 4 est nécessaire pour éviter une évolution trop rapide du champ de température dans cette zone par rapport à l'autre zone plus inerte. Le mode 6 est facile à interpréter car il présente une inversion pour le mur mitoyen qui est très caractéristique d'un retard de la propagation de la sollicitation à travers ce mur mitoyen.

Nous avons déja analysé le mode 9 (voir page 130) comme étant le mode rapide (essentiellement sur la raie de l'air de la zone 1) faisant apparaître une inversion dans le mur mitoyen et donc caractéristique de la propagation d'une sollicitation à travers ce mur. Le mode 10 (figure 6.36) a été identifié comme dominant pour la réponse de la zone 2 à un échelon de puissance appliqué à cette même zone. Le terme dynamique du mode 10 est constitué principalement du mode 4 de la zone 1. Ce mode local 4 présente une inversion dans le mur mitoyen associé à une raie importante sur l'air de la zone 2. On retrouve dans le spectre de couplage, parmi les modes dominants, les modes 9 et 10 qui intervenaient également dans les spectres de réponse des zones à un échelon de puissance.

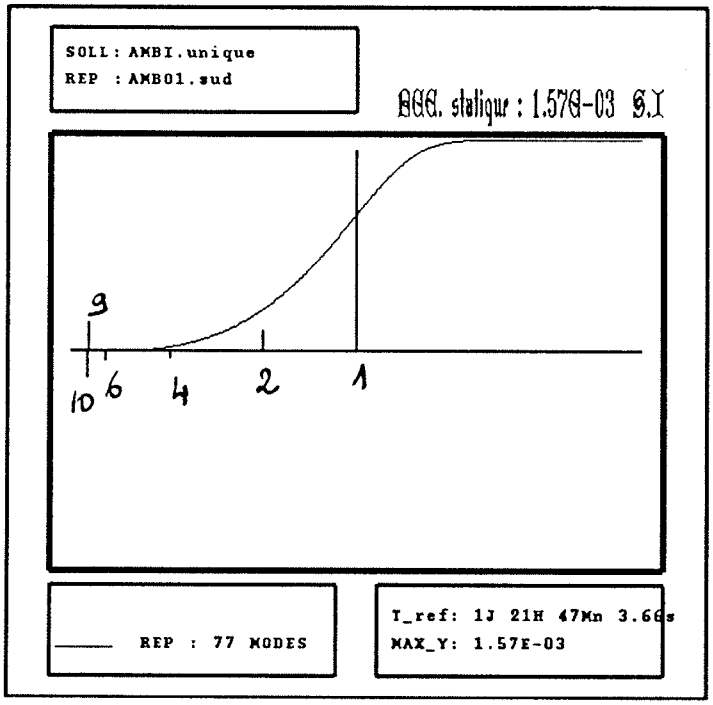


Figure 6.40: Spectre de la réponse de la zone 2 à un échelon de puissance dans la zone 1 pour le modèle de synthèse

Etude de la décomposition des vecteurs propres de synthèse

Il faut maintenant vérifier si l'étude de la décomposition des vecteurs propres de synthèse sur les termes dynamiques et les termes de raccordement confirme le couplage dynamique comme étant rapide.

- Prenons le cas du mode 1. Ce mode a été identifié comme dominant pour le spectre de couplage et pour celui de la réponse de la zone 1 à la température extérieure. Ce mode de synthèse est constitué pour la zone 1 essentiellement du terme dynamique (figure 6.41) et pour la zone 2 du terme de raccordement (figure 6.42). Cette représentation permet en fait de qualifier ce couplage de **glissant** . En effet le champ des températures en fin d'évolution pour les deux zones est régit par la dynamique de la zone inerte (longue à réagir) et par l'évolution glissante de la zone 2 (par rapport à la zone 1). Cette différence de comportement des deux zones peut donc très bien s'analyser à partir de la décomposition des modes de synthèse en terme dynamique et en terme de raccordement. (ce dernier étant homogène à une combinaison de champs glissants locaux).

- Le mode 4 a été identifié comme dominant pour la réponse de la zone 2 à un échelon de température extérieure. Il est également très intéressant de noter la forme du terme dynamique du mode 4 (figure 6.41) et celle du terme de raccordement (figure 6.42). Le terme dynamique du mode 4 de synthèse est constitué des modes 1 et 2 de la zone 1 et des modes 1 et 2 de la zone 2. Or la partie correspondant à la zone 1 est inexistante dans le mode global de synthèse (figure 6.33). En effet la représentation du terme de raccordement du mode 4 annule le terme dynamique correspondant à la zone 1. Il s'agit dans ce cas d'une compensation statique qui annule l'effet dynamique de la zone 1 qui est très inerte. En effet l'évolution rapide de la zone 2, qui est peu inerte, ne peut être régit par la dynamique de la zone 1, mais uniquement par celle de la zone 2. Le terme de raccordement annule donc tout effet dynamique de la zone 1 pour ce mode 4, mode dominant dans la réponse de la zone 2 à la température extérieure.

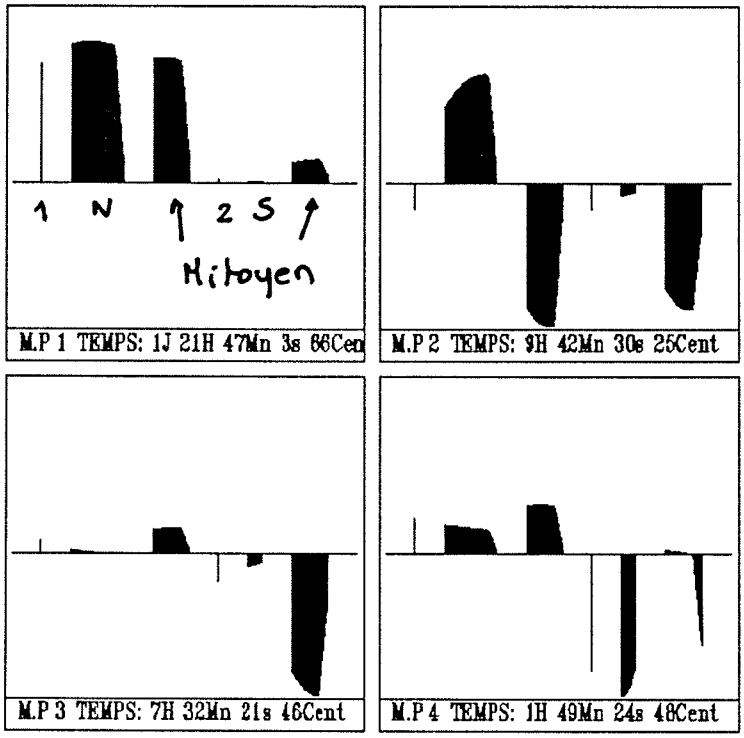


Figure 6.41: Terme dynamique des modes de synthèse (1 à 4)

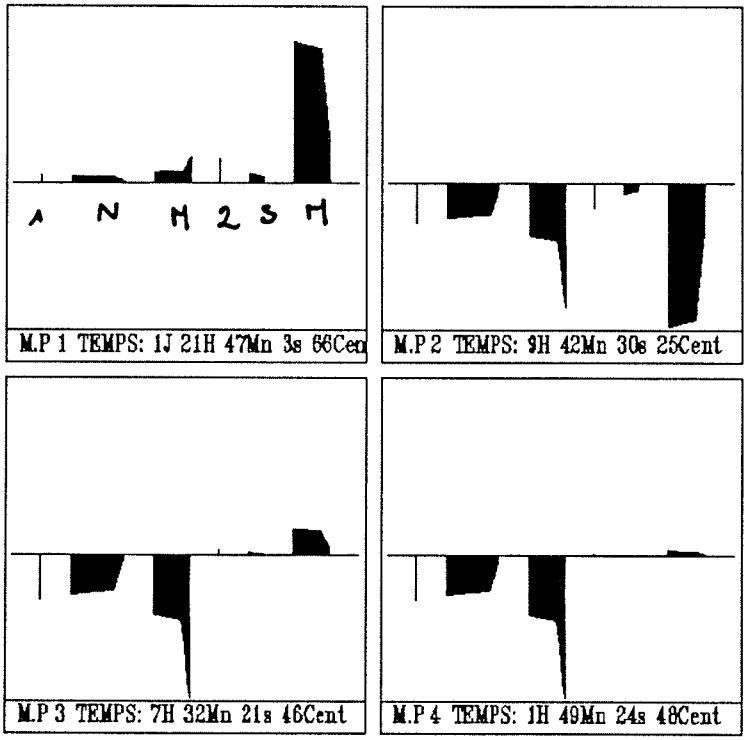


Figure 6.42: Modes de raccordement (1 à 4)

Conclusions

- **Type de couplage**: Cet exemple est celui d'un couplage d'une zone inerte avec une moins inerte. Le couplage a pu être identifié grâce aux spectres de réponse indicielle: il a été qualifié de **dynamique glissant.** En effet ce couplage glissant a bien pu être identifié dans la représentation géométrique des termes de raccordement.
  - Le mode 1 de synthèse se décompose sur la partie dynamique de la zone inerte et pratiquement uniquement sur le terme de raccordement (homogène à un champ glissant nous le rappelons) de la zone peu inerte. Cette décomposition est donc très différente d'un couplage entre deux zones d'inertie comparable.
  - Le mode de synthèse représentatif de la dynamique rapide de la zone peu inerte (mode 4) est uniquement représenté pour cette zone, le terme de raccordement annulant tout effet dynamique de la zone inerte.
- **Réduction des bases locales** Les règles énoncées lors de l'exemple précédent sont également vérifiées. Il faut donc conserver en sus du premier mode local pour chaque zone:
  1. tout mode local présentant une dissymétrie entre les murs extérieurs et le mur mitoyen. (mode 2 pour chaque zone)
  2. tout mode faisant intervenir un déséquilibre entre les faces du mur mitoyen ce qui permet de reconstituer les champs dans les premiers instants de la perturbation à travers cette paroi. (Le mode 6 de la zone 1 et le mode 4 de la zone 2)

6.1.4 Bâtiment bizone dont les murs sont identiques

Trois types de couplage ont été présentés et le cas d'un bâtiment d'apparence un peu plus complexe est maintenant traité: il s'agit d'un bâtiment bizone dont chaque zone est constituée de trois murs identiques en sus du mur commun. La configuration de cet exemple est donné sur le tableau 6.10. Cet exemple s'apparente au premier cas traité, à savoir qu'il s'agit d'un mur mitoyen non isolé (couplage dynamique fort) et les deux zones ont un comportement relativement semblable car elles sont assez proches dans leur constitution.

Zone 2	Mur sud	10 cm	béton	10 noeuds	30 m2
	Mur est	10 cm	béton	10 noeuds	30 m2
	Mur ouest	10 cm	béton	10 noeuds	30 m2
	Mur mitoyen	5 cm	béton	10 noeuds	30 m2
Zone 1	Mur nord	16 cm	béton	10 noeuds	30 m2
	Mur est	16 cm	béton	10 noeuds	30 m2
	Mur ouest	16 cm	béton	10 noeuds	30 m2
	Mur mitoyen	5 cm	béton	10 noeuds	30 m2

Table 6.10: Caractéristiques de l'exemple, murs identiques

Etude des spectres

Le spectre de la réponse de la zone 1 à la température extérieure (figure 6.43) met en évidence la dominance des modes 1, 7, 9, 15 et 22.

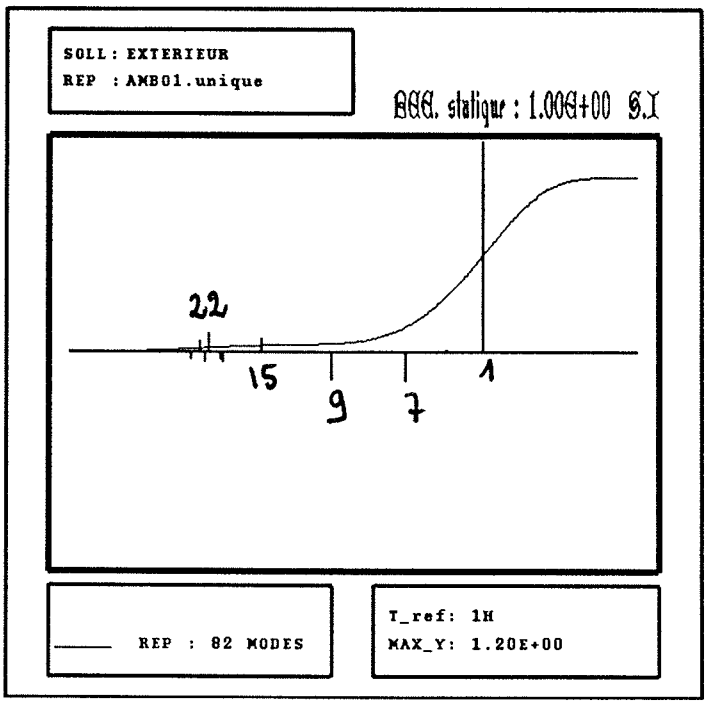


Figure 6.43: Spectre de la réponse de la zone 1 à la température extérieure pour le modèle de synthèse

Contrairement aux cas traités précédemment, des modes dont l'ordre est supérieur à 10 interviennent (modes 15 et 22). Ces modes de synthèse sont donnés sur les figures 6.44, 6.45, 6.46, 6.47, 6.48 et 6.49.

L'étude des valeurs prises par les modes dans les volumes d'air des deux zones va permettre de comprendre pourquoi certains modes sont à négliger et ainsi pourquoi l'ordre des modes dominants est élevé. On s'aperçoit en effet que la valeur prise par les modes 2, 3, 5, 6, 10, 11 etc... sur l'air des deux zones sont nulles. De plus ces modes présentent la particularité d'être regroupés par groupe de trois modes dont les constantes de temps sont quasi identiques. Par exemple, les modes 2 et 3 ont une constante de temps de 4h 50mn suivi du mode 4 dont la constante de temps est de 4h 38mn. La représentation du champ propre 4 est identique dans toutes les parois de chaque zone. Ce groupe de trois modes (2, 3 et 4) correspond au fait qu'il y a trois murs identiques par zone.

Dans le cas de N murs identiques, [Neirac][11] a démontré qu'il existait des groupes de N-1 modes multiples inobservables dans les volumes d'air[12]. Les modes 2 et 3 sont donc des modes multiples[13]. Les modes multiples servent à différencier le comportement des bâtiments en réponse à des excitations différentes sur des murs identiques (par exemple des flux solaires à orientation différente). Ces flux solaires n'ont pas été inclus dans les modèles et ces modes ne peuvent donc pas être excités. Par ailleurs, s'ils sont excités par

[11] Neirac, F.P., 1989, *Approche thermique et expérimentale des modèles réduits de comportement thermique de bâtiments*, Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

[12] Les modes multiples sont les modes possédant rigoureusement les mêmes valeurs propres

[13] L'orthogonalisation des vecteurs propres multiples par la méthode de Gram-Schmidt a été nécessaire au cours de la diagonalisation de la matrice $N^{-1}F$ (Annexe B) afin de conserver la forme modale classique

des sollicitations solaires différenciées, leur contribution est inobservable dans la réponse de l'air des zones. En effet la valeur de ces modes multiples dans les volumes d'air est rigoureusement nulle[14] Sur le premier groupe de trois modes, seul le mode 4 est observable, les deux autres ayant une représentation quelconque pour les murs. On observe le même phénomène pour les modes 5, 6 (inobservables) et 7. A ces modes inobservables, s'ajoutent les modes inexcitables liés à la double représentation du mur mitoyen. Les modes 8 (1h 59mn) et 25 (5mn 68s) sont les deux premiers modes supplémentaires de synthèse. Le tableau 6.11 récapitule la liste des modes de synthèse.

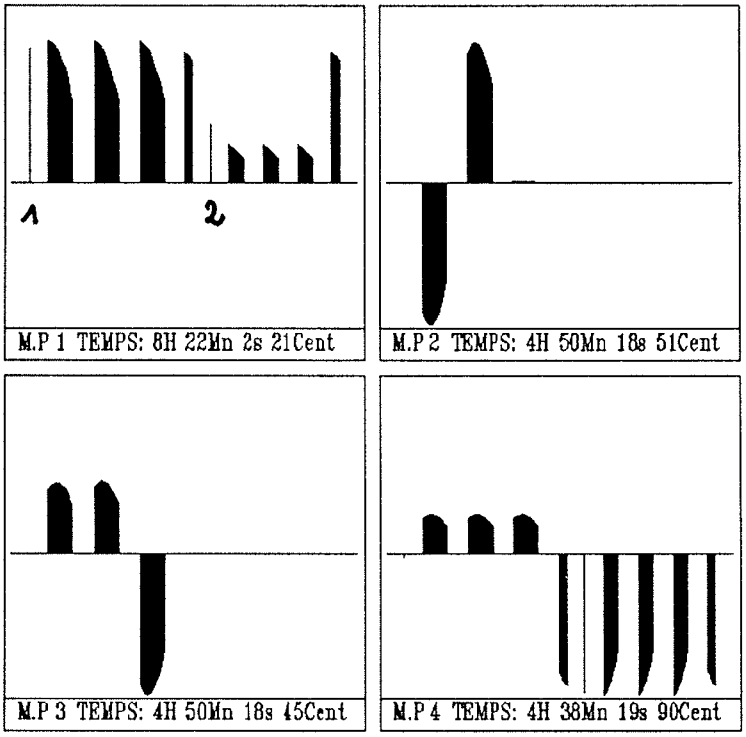


Figure 6.44: Modes de synthèse (1 à 4)

[14] Le rayonnement entre les parois a été négligé: dans le cas contraire la non observabilité stricte n'est plus vérifi'ee.

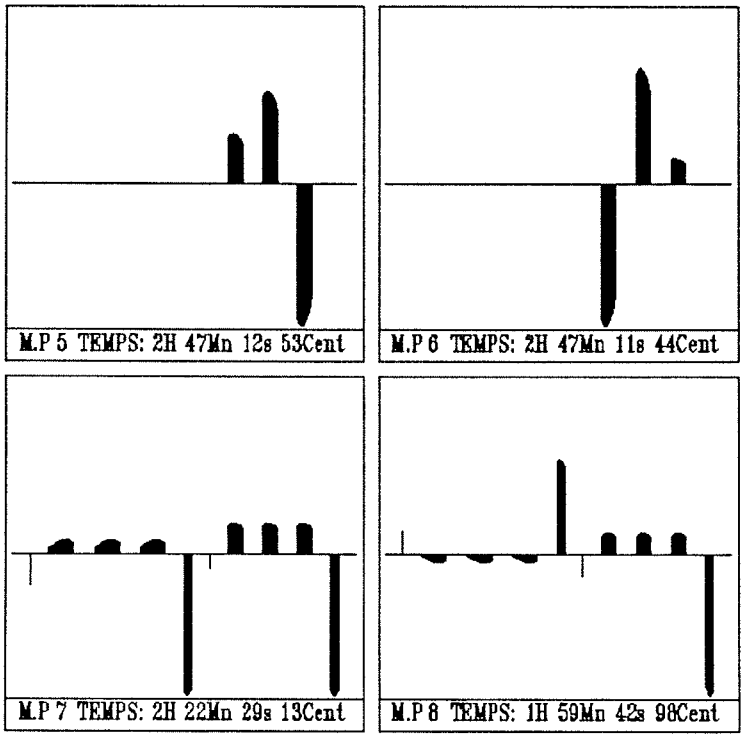


Figure 6.45: Modes de synthèse (5 à 8)

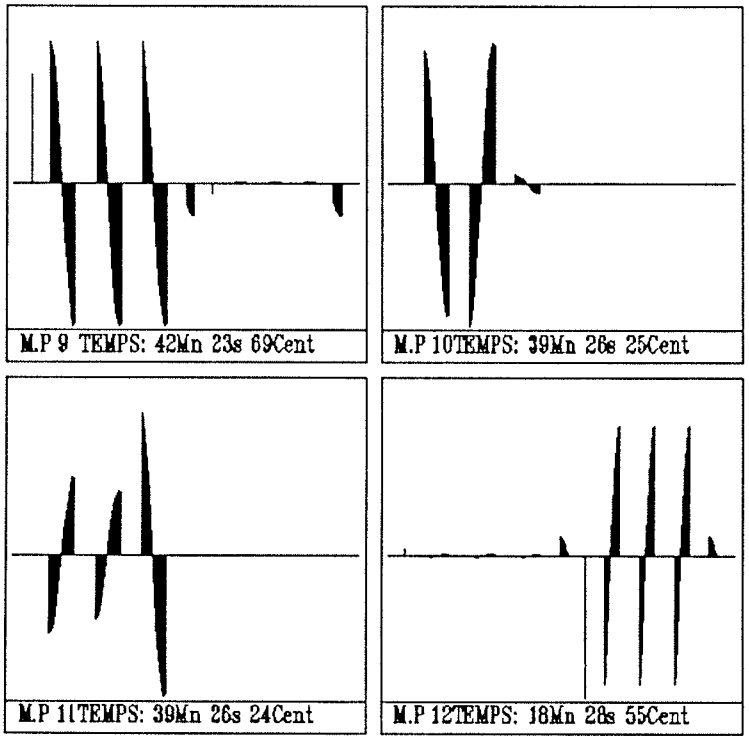


Figure 6.46: Modes de synthèse (9 à 12)

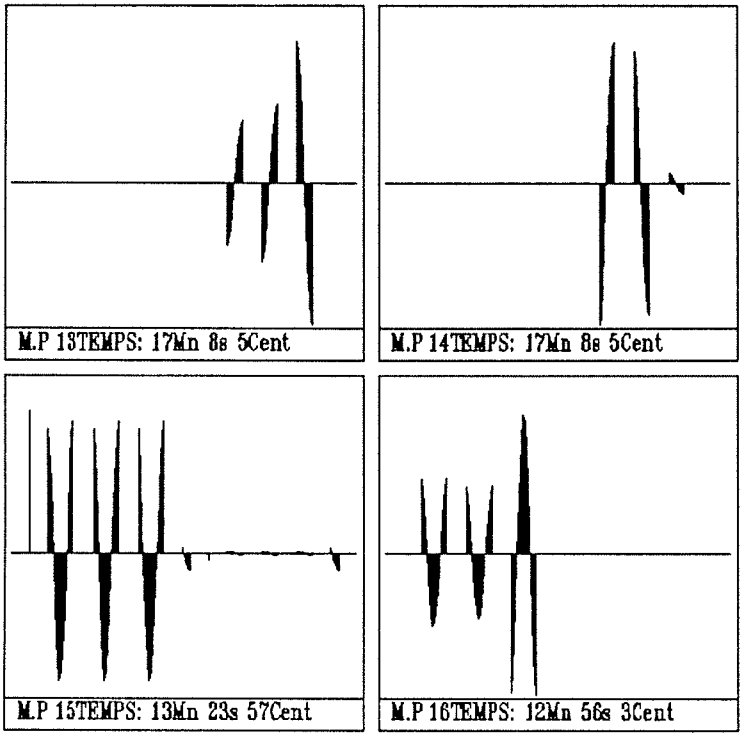


Figure 6.47: Modes de synthèse (13 à 16)

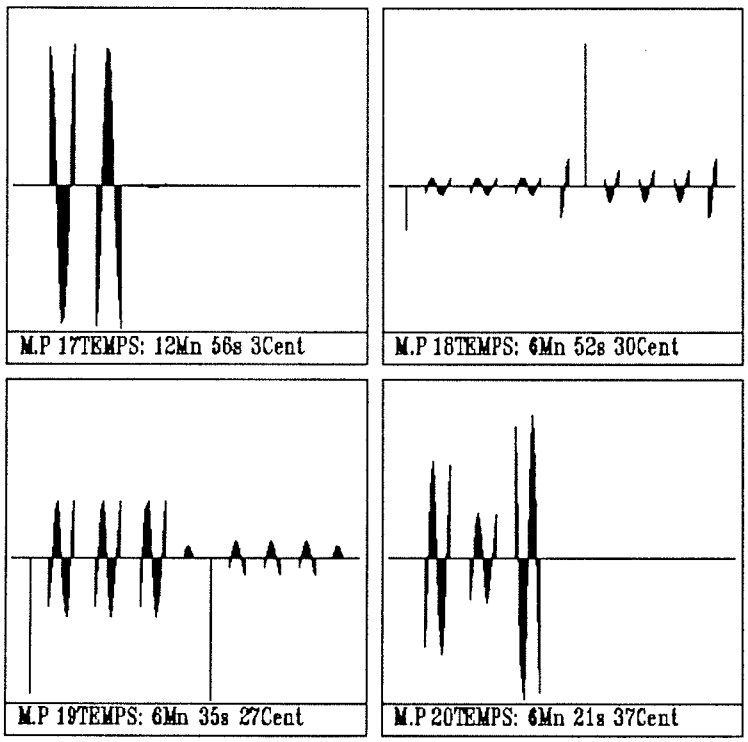


Figure 6.48: Modes de synthèse (17 à 20)

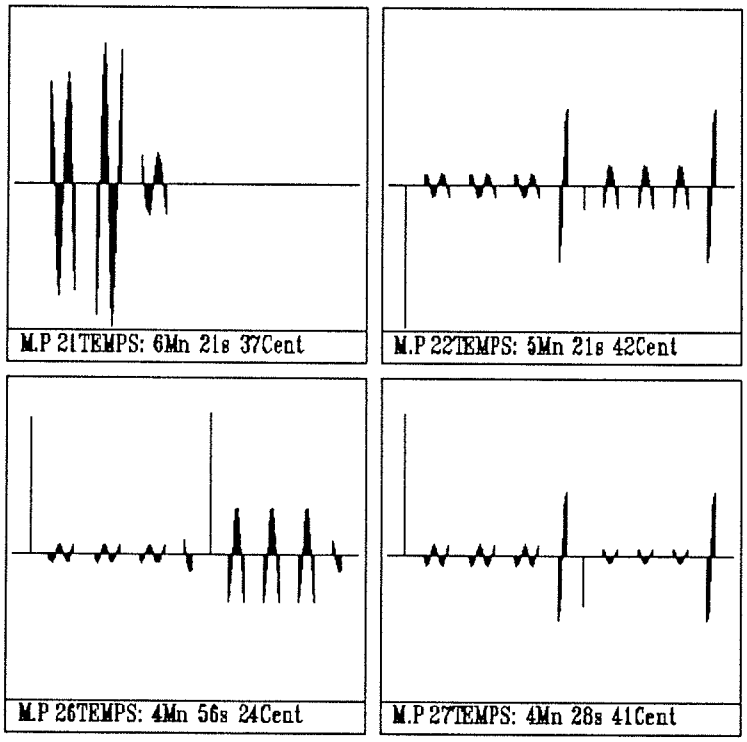


Figure 6.49: Modes de synthèse (21 à 27)

mode 1	8h 22mn	
mode 2	4h 50mn	mode inobservable
mode 3	4h 50mn	mode inobservable
mode 4	4h 38mn	
mode 5	2h 47mn	mode inobservable
mode 6	2h 47mn	mode inobservable
mode 7	2h 22mn	
mode 8	1h 59mn	mode supplémentaire
mode 9	42mn 23s	
mode 10	39mn 26s	mode inobservable
mode 11	39mn 26s	mode inobservable
mode 12	18mn 28s	
mode 13	17mn 8s	mode inobservable
mode 14	17mn 8s	mode inobservable
mode 15	13mn 23s	
mode 16	12mn 56s	mode inobservable
mode 17	12mn 56s	mode inobservable
mode 18	6mn 52s	
mode 19	6mn 35s	
mode 20	6mn 21s	mode inobservable
mode 21	6mn 21s	mode inobservable
mode 22	5mn 21s	
mode 23	5mn 14s	mode inobservable
mode 24	5mn 14s	mode inobservable
mode 25	5mn 68s	mode supplémentaire
mode 26	4mn 56s	
mode 27	4mn 28s	
...		

Table 6.11: Modes de synthèse

Spectre de couplage

Le spectre de réponse de la zone 1 à un échelon de puissance dans la zone 2 (figure 6.50) met en évidence les modes 1, 4 et 7 comme dominants pour les grandes constantes de temps. On note également un ensemble de raies (modes 18, 19, 26 et 27) dont les effets s'annulent mutuellement.

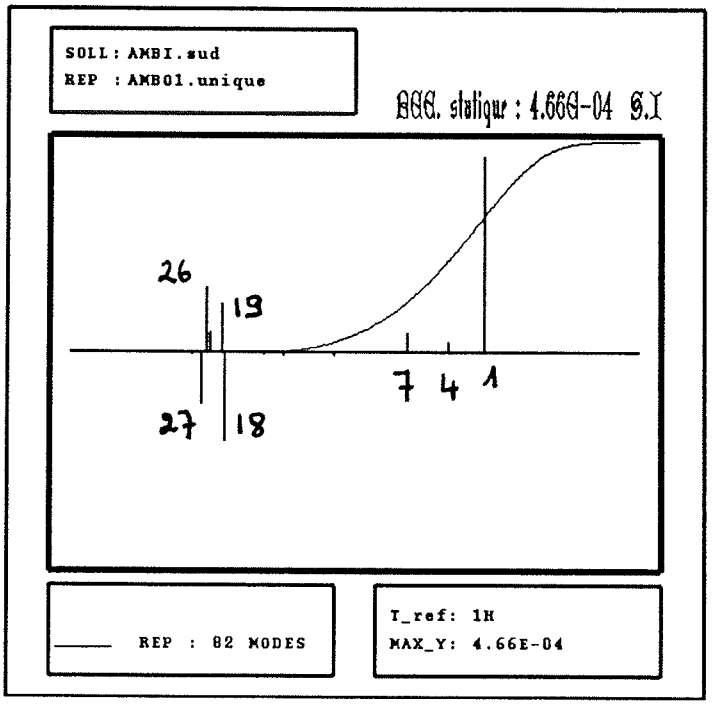


Figure 6.50: Spectre de la réponse de la zone 1 à un échelon de puissance dans la zone 2 pour le modèle de synthèse

On retrouve dans les formes des modes 4 et 7 les oppositions entre les murs extérieurs et le mur de connection identifiées comme étant un critère de sélection des modes. Le deuxième critère est également confirmé par l'étude du second groupe de modes: 18, 19, 26 et 27. Ces modes ont une représentation dominante sur les raies de l'air assortie d'une représentation pour le mur mitoyen caractéristique de la propagation d'une sollicitation à travers ce mur (inversion pour les modes 18,26 et 27). Les modes dits inobservables sur l'air et les modes supplémentaires n'apparaissent évidemment pas sur ce spectre.

Conclusions

Cet exemple est du même type que le premier identifié comme un couplage dynamique fort. Il diffère principalement par le plus grand nombre des parois dans chaque zone. Ces parois étant identiques, le modèle modal comprend des modes multiples inobservables. Les règles de réduction des bases locales s'appliquent également dans ce cas. Il suffit de négliger tous modes multiples inobservables.

6.1.5 Conclusions

L'étude du couplage de composants du bâtiment à l'aide de la synthèse modale sur des configurations élémentaires a permis de dégager des règles de base pour l'analyse:

- L'outil pour l'analyse du couplage repose sur l'étude de la décomposition des modes de synthèse en terme dynamique et statique. On peut ainsi distinguer différents types de couplage: des couplages dynamiques forts/rapides, faibles/lents et/ou glissants.
- La décomposition du terme dynamique des modes de synthèse sur les bases locales s'est révélée très riche comme outil potentiel pour établir des règles quant à la réduction de ses bases locales.

L'étude d'un bâtiment plus complexe est maintenant abordée et son analyse reposera sur la base de ces critères pour vérifier leur pertinence.

6.2 Exemple d'analyse du couplage de zones sur un bâtiment bizone

L'étude du couplage d'un bâtiment bizone plus complexe que les cas de base précédents est maintenant abordée. Ce bâtiment est constitué d'une zone nord assez inerte (isolation extérieure) et d'une zone sud plus petite et très largement vitrée (60 % de sa surface sud). Le mur mitoyen est constitué d'une couche de béton de 5 cm pour favoriser les échanges dynamiques entre les deux zones. Un échange d'air réciproque existe entre les deux zones. La description du bâtiment est donnée sur la figure 6.51

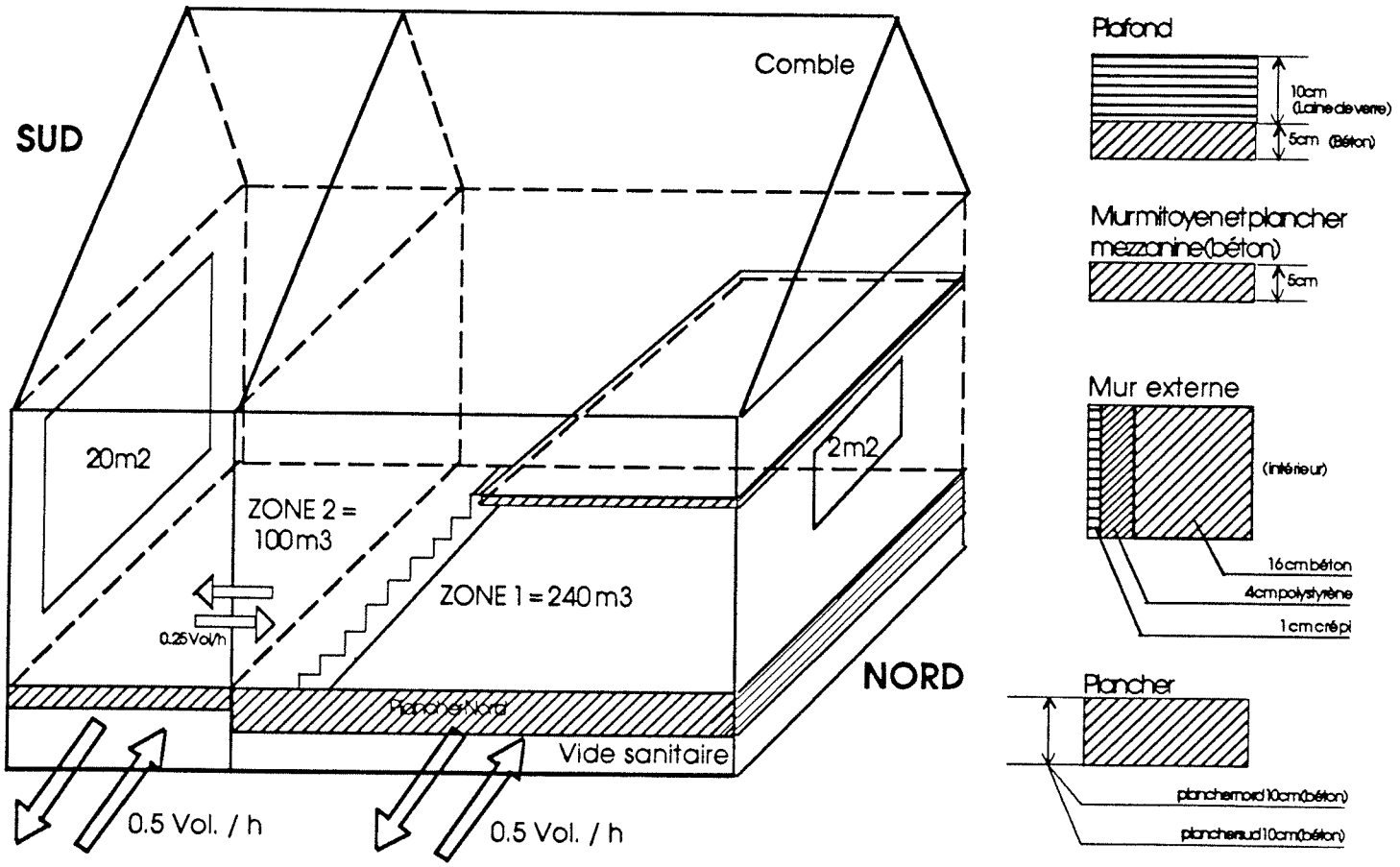


Figure 6.51: Bâtiment bizone

6.2.1 Analyse du couplage

Avant d'étudier le modèle de synthèse, nous allons étudier le modèle modal global du bâtiment. Le spectre de couplage du modèle modal global permet d'analyser le type de couplage. Ce spectre est donné sur la figure 6.52.

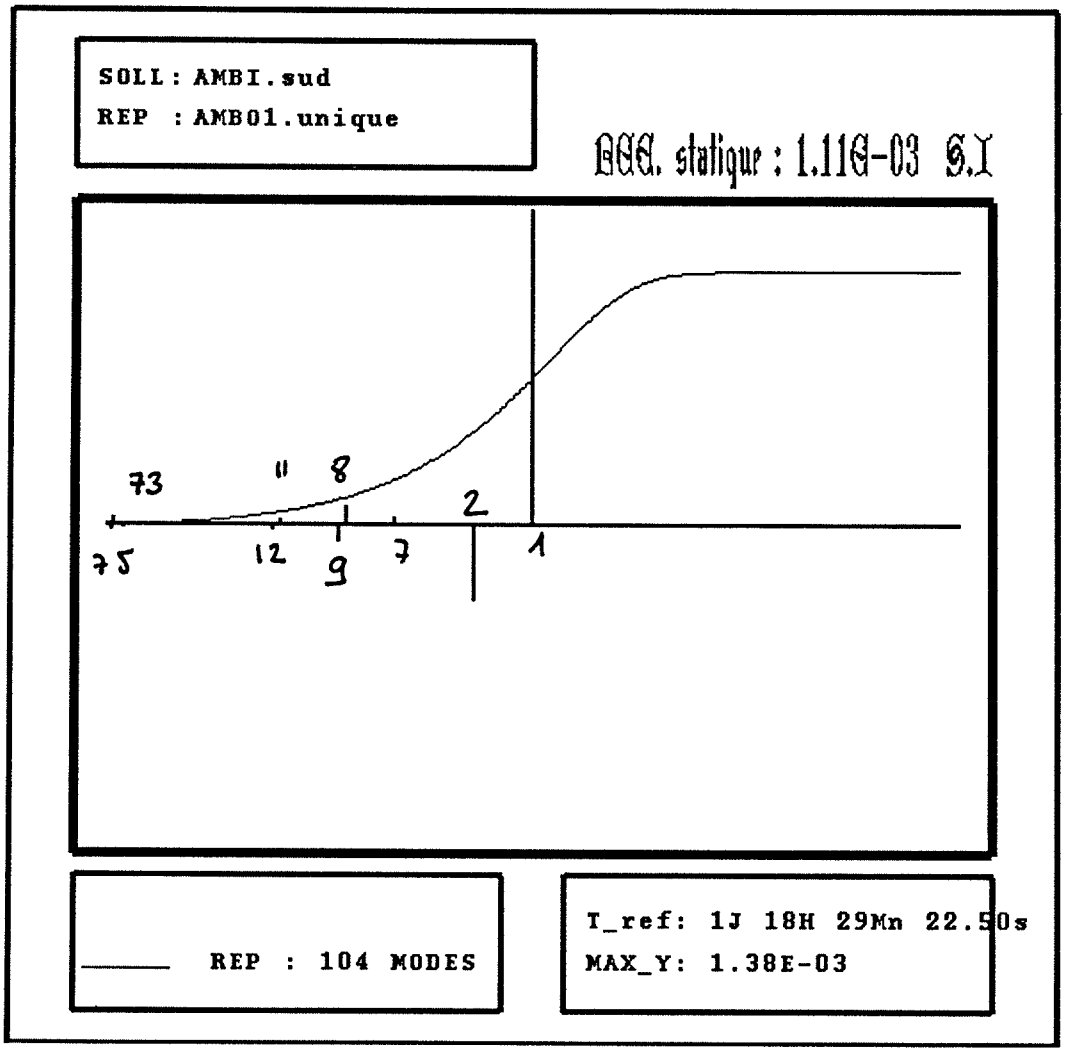


Figure 6.52: Spectre de la réponse de la température de la zone 1 à un échelon de puissance de la zone 2 pour le modèle modal global

Contrairement aux cas de base traités précédemment, la réponse pour le spectre de couplage fait intervenir un plus grand nombre de modes. On peut en identifier 9: les modes 1, 2, 7, 8, 9, 11,12, 73 et 75. Ils sont regroupés par groupe de deux: les modes 9 et 8, les modes 11 et 12, les modes 73 et 75. Ces groupes de deux modes ont la particularité d'avoir des constantes de temps proches et des raies de signe opposé. Les modes 1 et 2 sont nettement dominants. Ces 9 modes sont représentés sur les figures 6.53, 6.54 et 6.55.

Pour faciliter la lecture de ces modes, les parois ont été numérotées comme indiqué sur le tableau 6.12. Les fines raies de gauche correspondent aux valeurs des modes sur l'air des zones 1 et 2.

zone nord (1)	1	mur nord
	2	mur est
	3	mur ouest
	4	plafond
	5	plancher
	6	plancher mezzanine
	7	mur mitoyen
zone sud (2)	8	mur sud
	9	mur est
	10	mur ouest
	11	plafond
	12	plancher

Table 6.12: Numérotation des murs du modèle global

- Les modes 2, 9 et 12 provoquent un effet de retard sur la réponse. Ce retard s'explique par la représentation de ces modes pour l'air des 2 zones: les valeurs sur l'air des deux zones pour ces modes sont opposées. Ils sont donc caractéristiques d'un comportement opposé entre les deux zones. Le mode 2 est plus lent. Il présente une opposition totale entre les deux zones. En raison de la dominance de la raie correspondant au mode 2 sur le spectre de couplage, ce couplage peut être qualifié de lent.

- On observe pour le mode 9, en sus d'une opposition entre les raies de l'air des deux zones, une inversion pour le mur mitoyen qui est caractéristique du retard de la propagation de la sollicitation à travers le mur mitoyen.

- Les modes 73 et 75 sont essentiellememt représentés sur l'air de chaque zone: ils sont représentatifs du renouvellement d'air. Leur influence est négligeable sur la réponse.

Il est maintenant intéressant d'étudier la décomposition des modes sur le terme dynamique et les termes de raccordement pour vérifier si la décomposition des modes de synthèse permet d'identifier correctement ce couplage. L'étude de cette décomposition est possible à partir des modes de synthèse.

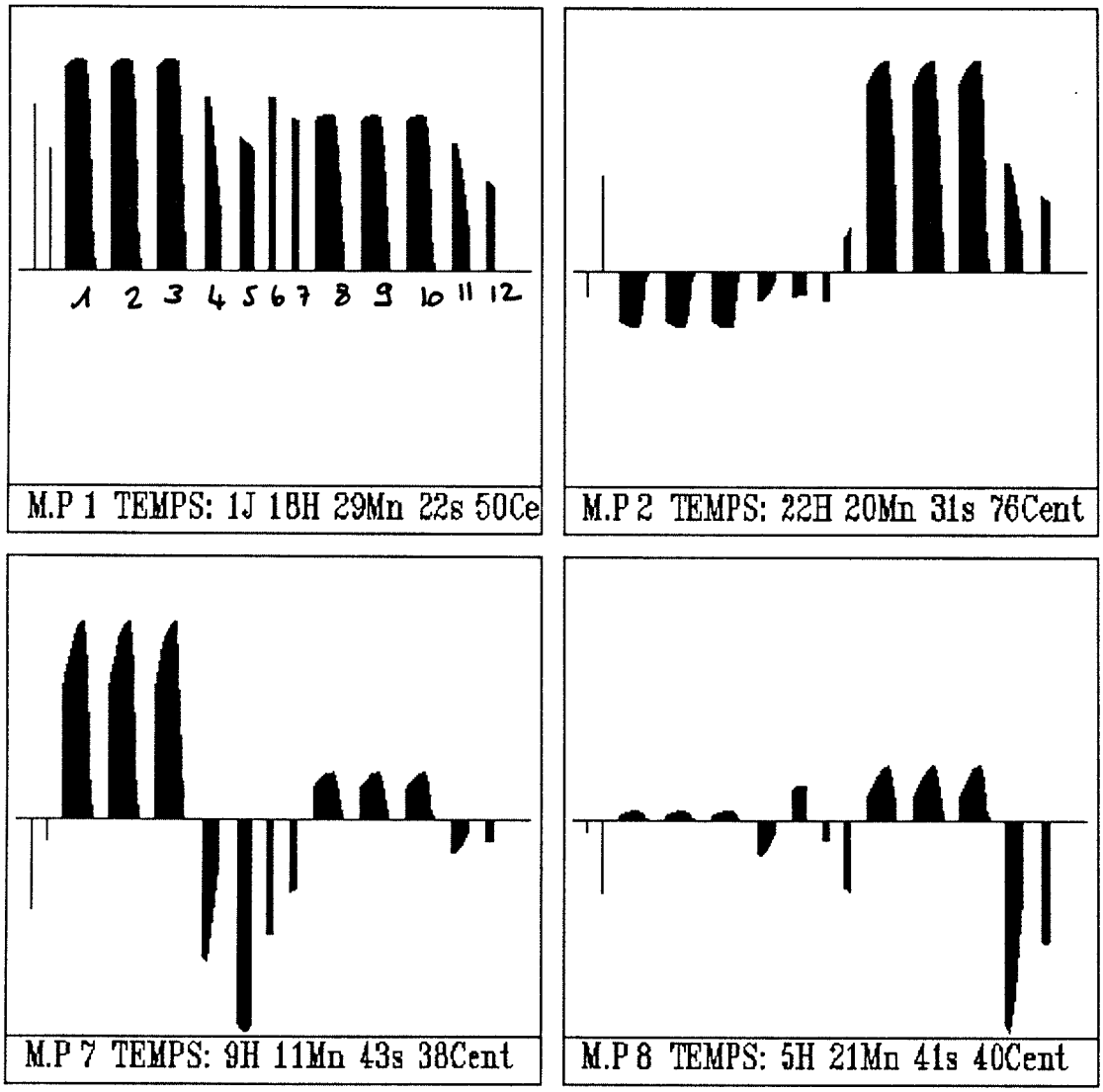


Figure 6.53: Modes globaux: modes 1, 2, 7 et 8

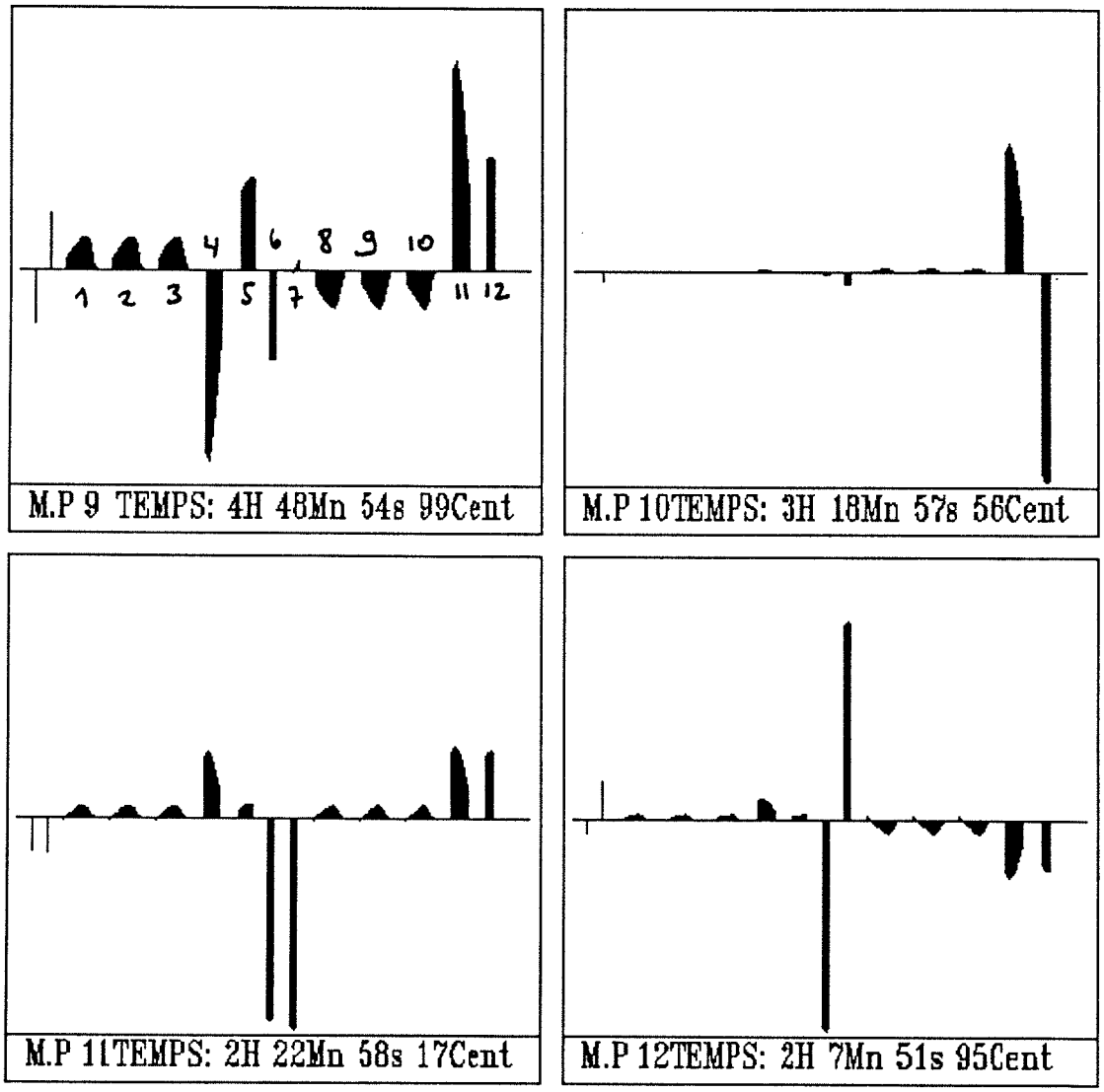


Figure 6.54: Modes globaux: modes 9, 10, 11 et 12

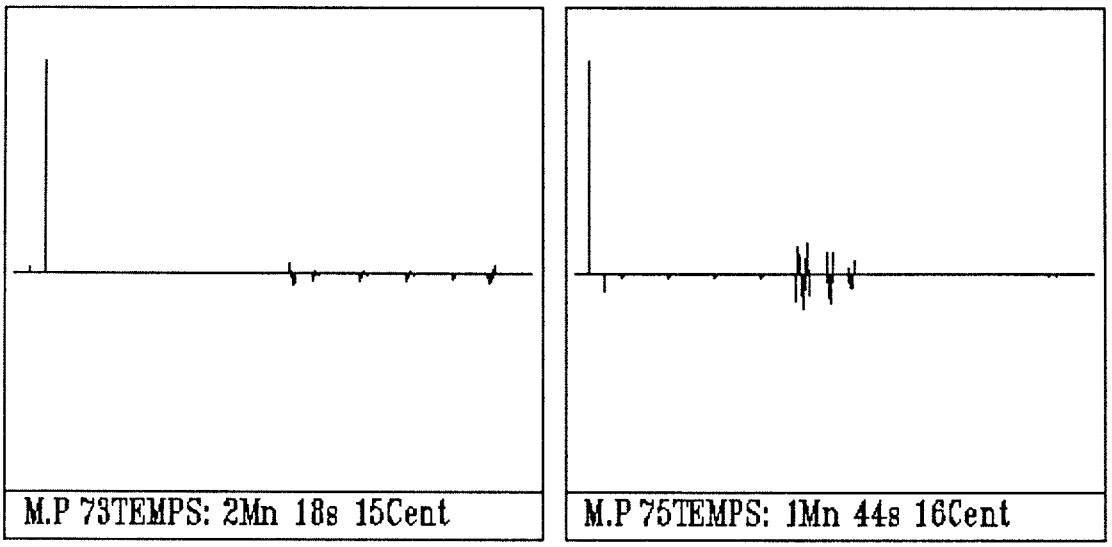


Figure 6.55: Modes globaux: modes 73 et 75

Décomposition des modes de synthèse

Les construction des modes de synthèse va nous permettre d'étudier leur décomposition en terme dynamique et en terme de raccordement. Le maillage des modèles des zones est légèrement plus faible que celui du modèle modal[15]. Néanmoins les valeurs des constantes de temps sont très proches. Ces modes sont donnés sur la figure 6.56 et 6.57. On retrouve bien sûr les mêmes modes que ceux du modèle global car aucune réduction n'a été encore effectuée. On rappelle que la représentation géométrique pour les modes de synthèse diffère par la double représentation du mur mitoyen (mur n^0 7). La seconde représentation du mur mitoyen a été reportée en dernier pour faciliter la comparaison entre les deux modèles.

[15] 87 noeuds pour les deux zones contre 104 noeuds pour le modèle global

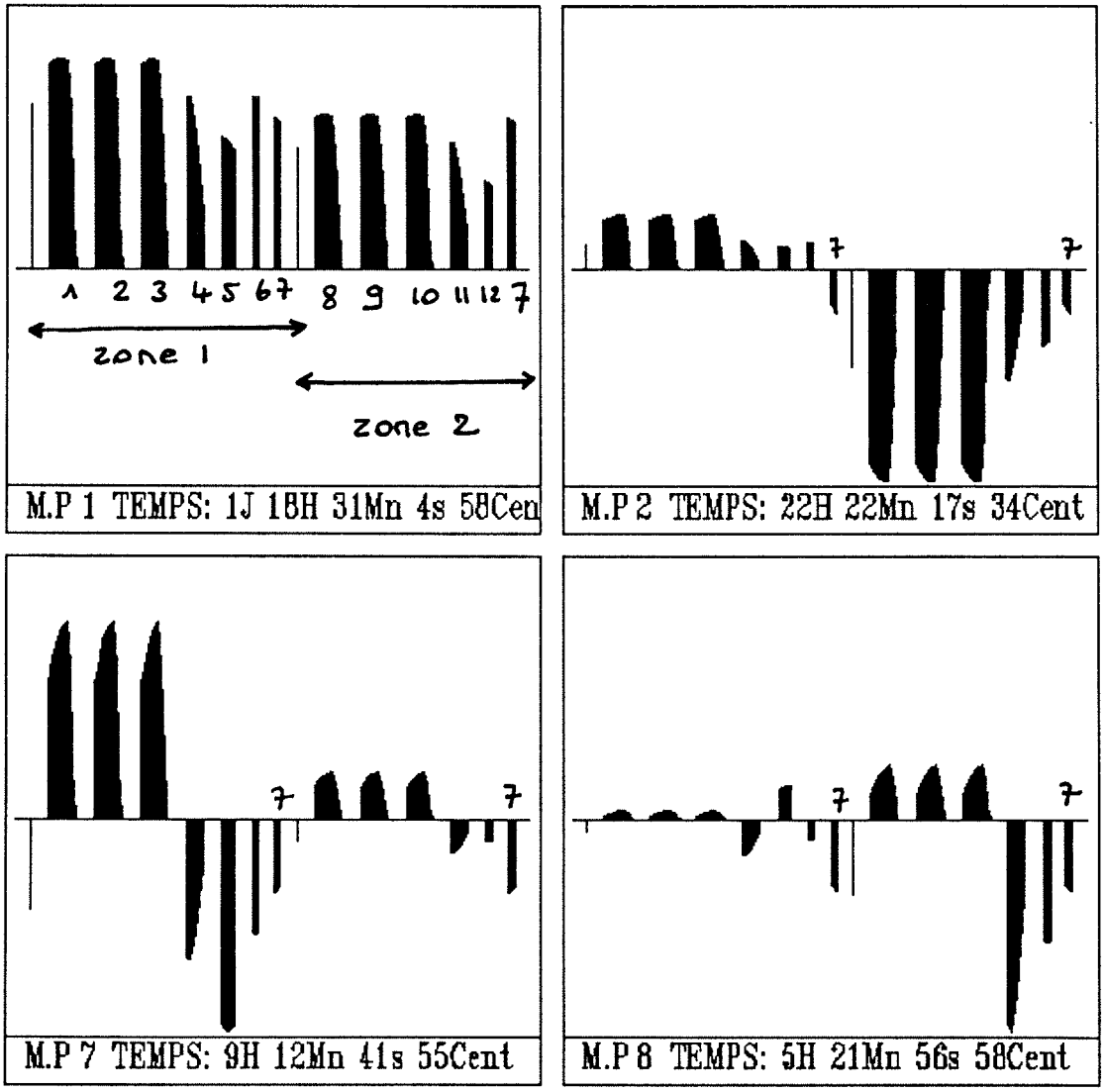


Figure 6.56: Modes de synthèse: modes 1, 2, 7 et 8

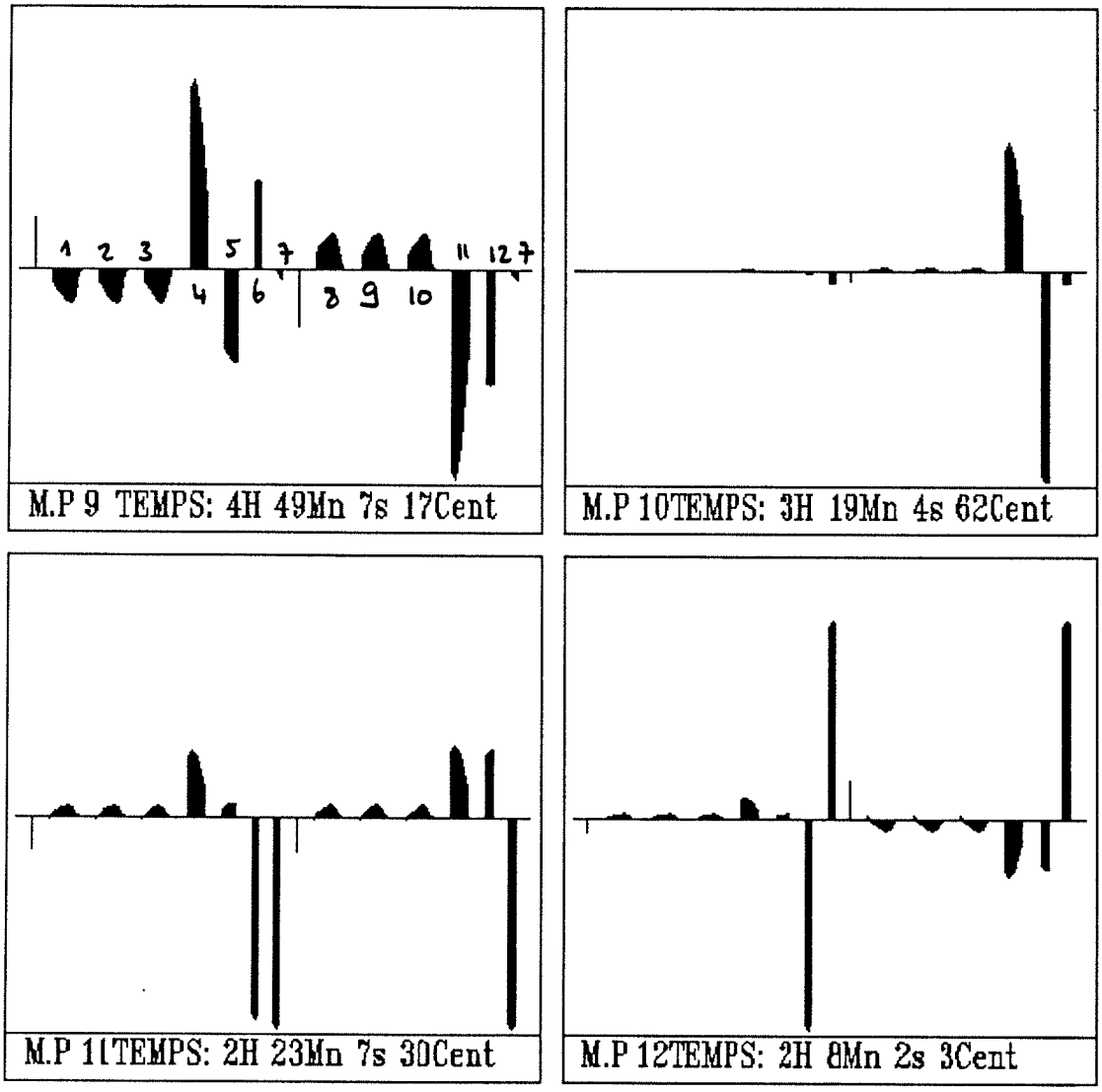


Figure 6.57: Modes de synthèse: modes 9, 10, 11 et 12

Les termes de raccordement sont donnés sur les figures 6.58 et 6.60. Le terme dynamique est donné sur les figures 6.59 et 6.61. Deux rôles caractéristiques de ces termes de raccordement avaient été dégagés au cours des exemples précédents:

- raccordement "glissant" d'une zone par rapport à l'autre lorsqu'elles présentent des différences de comportement marquées. Le cas n^0 3: couplage d'une zone inerte à une zone peu inerte, illustre bien le rôle caractéristique du terme de raccordement dans un couplage glissant. Le champ des températures en fin d'évolution pour l'exemple de ces deux zones a été identifié comme régit par la dynamique de la zone inerte (terme dynamique essentiellement représenté sur cette zone) et par l'évolution glissante de la zone peu inerte par rapport à l'autre (terme de raccordement essentiellement représenté pour la zone peu inerte).

- Lorsque le terme de raccordement contribue de façon importante à la reconstitution des valeurs de l'air des zones pour les modes de synthèse, il contribue alors au couplage dynamique des zones.

Bien que le comportement de ce bâtiment bizone soit moins caractéristique que les exemples de base précédents, car plus complexe et donc plus proche de la réalité, on retrouve bien une combinaison de ces comportements caractéristiques simples.

- Prenons par exemple le premier mode de synthèse: le terme dynamique suffit à lui tout seul pour le reconstituer dans la partie correspondant à la zone 1. Par contre pour les murs de la zone 2, il doit être complété par le terme de raccordement glissant de la zone 2 par rapport à la zone 1. La hauteur relative du mur commun et des autres murs de la zone 2 dans le terme dynamique n'est pas correct; elle doit donc être corrigée par le terme de raccordement. En effet la zone 2 est bien moins inerte que la zone 1 comme nous le constaterons plus tard en étudiant les modes locaux pour chaque zone (La première constante de temps de la zone 1 égale 35 heures, celle de la zone 2 vaut 23 heures). Cette décomposition nous permet de qualifier ce couplage de glissant (contribution forte des termes de raccordement aux modes de synthèse).

- Prenons maintenant le mode 8. Ce mode a été identifié sur le spectre de couplage comme participant au couplage des deux zones. Les valeurs sur l'air de ce mode sont toutes deux orientées dans le même sens. Or ces valeurs sont opposées pour le terme dynamique. C'est le terme de raccordement qui rétablit la valeur correcte du couplage de ces deux zones. Il s'agit ici d'un raccordement rapide des deux zones. On ne retrouvait pas ce phénomène pour le mode 2 de synthèse: la forme de son terme dynamique est très proche du mode de synthèse, et en particulier l'opposition des valeurs sur les noeuds d'air des deux zones est présente. Cette opposition est caractéristique d'un couplage lent car ce mode a une constante de temps associée de 22 heures. Le terme de raccordement n'intervient pas et n'a pas d'influence ici sur le comportement couplé des deux zones.

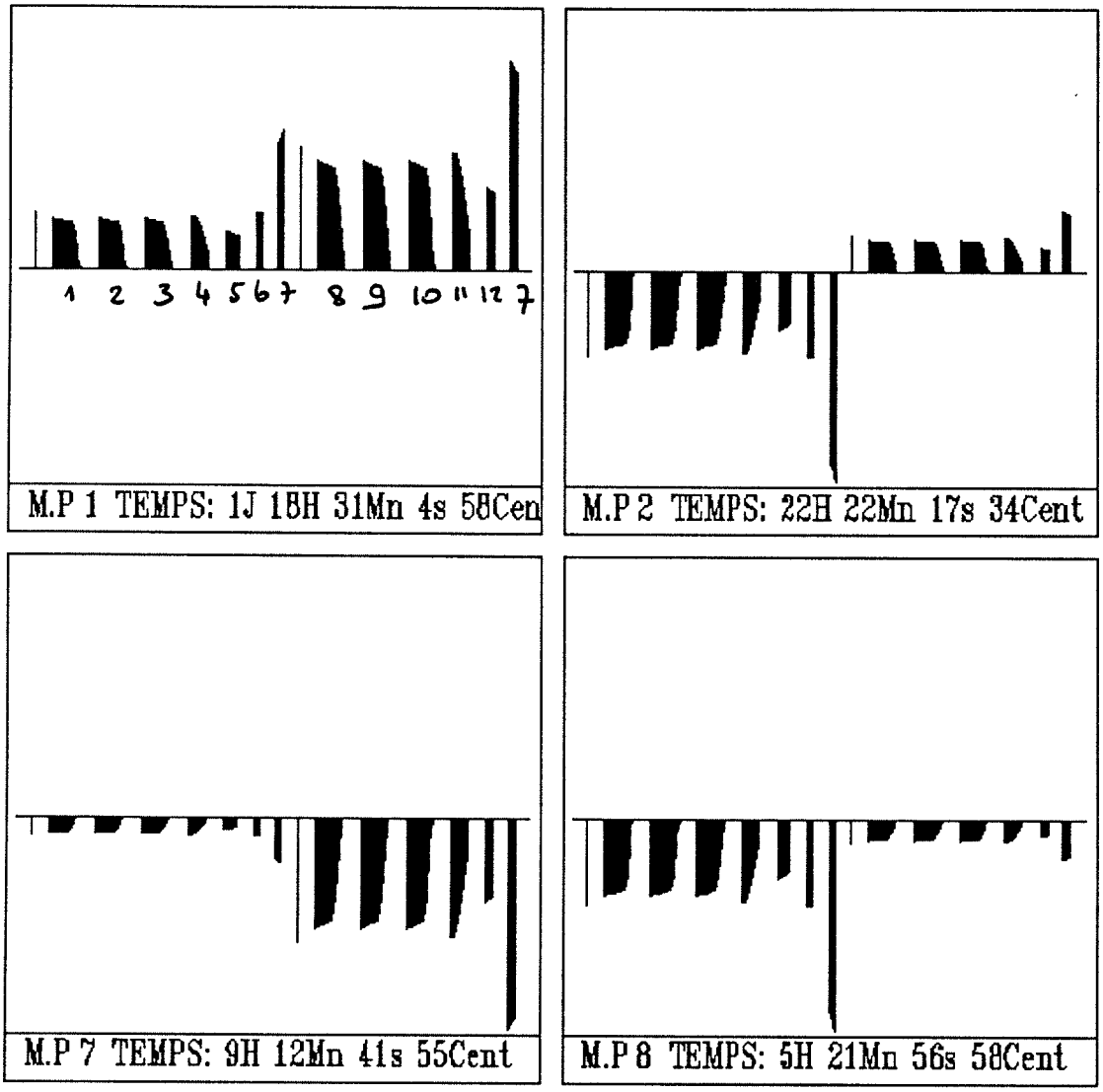


Figure 6.58: Termes de raccordement: modes 1, 2, 7 et 8

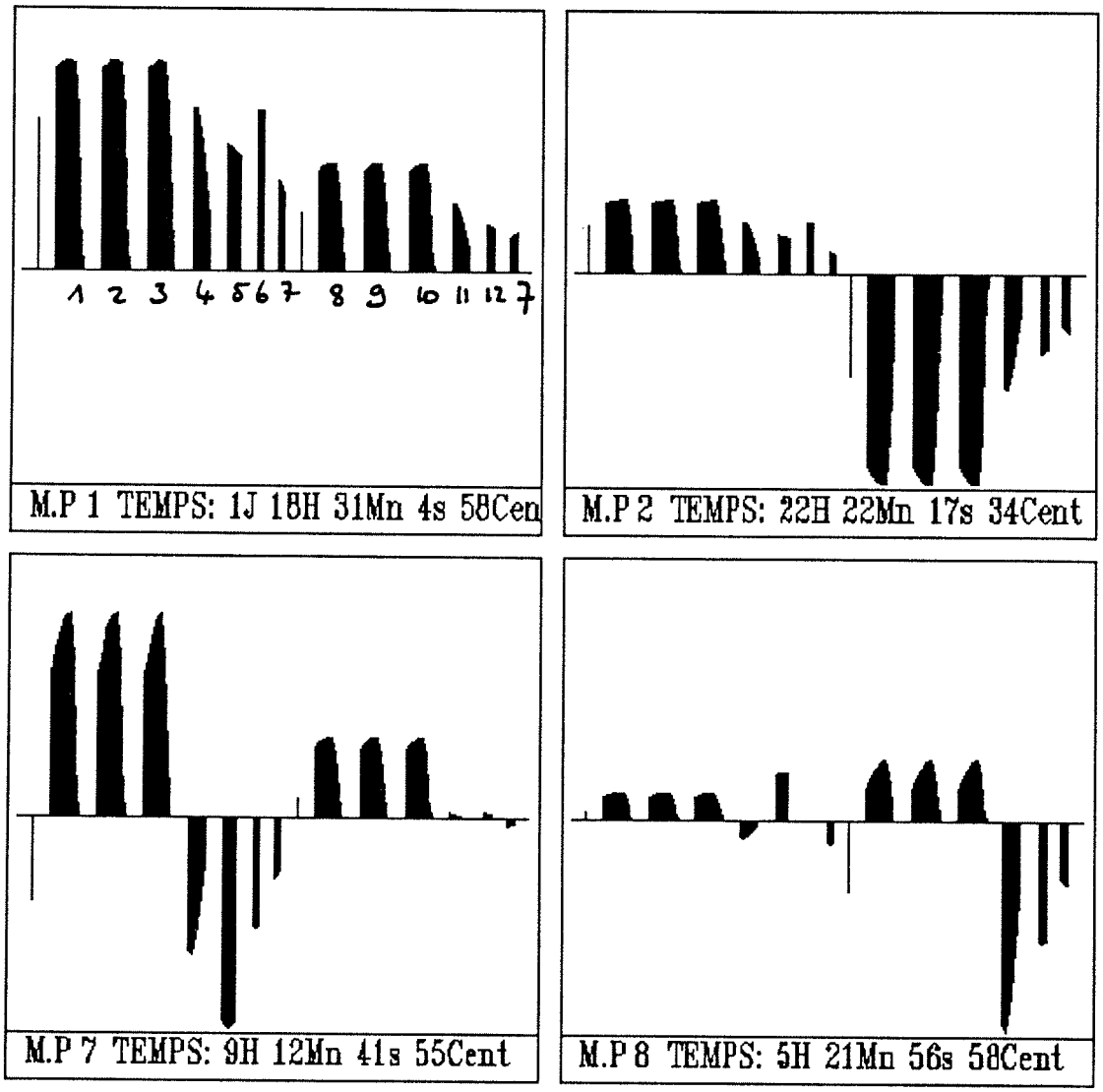


Figure 6.59: Terme dynamique: modes 1, 2, 7 et 8

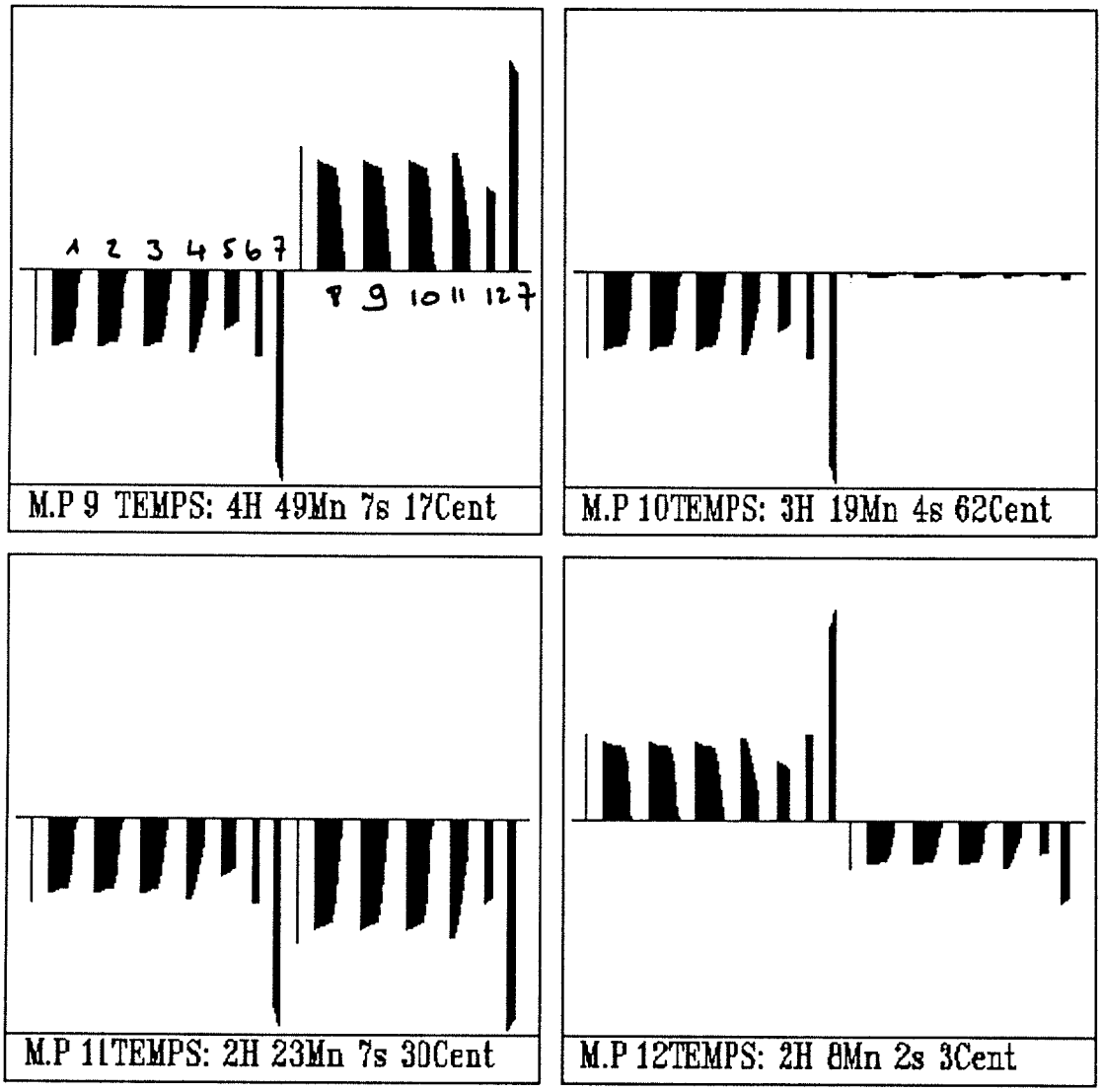


Figure 6.60: Termes de raccordement: modes 9, 10, 11 et 12

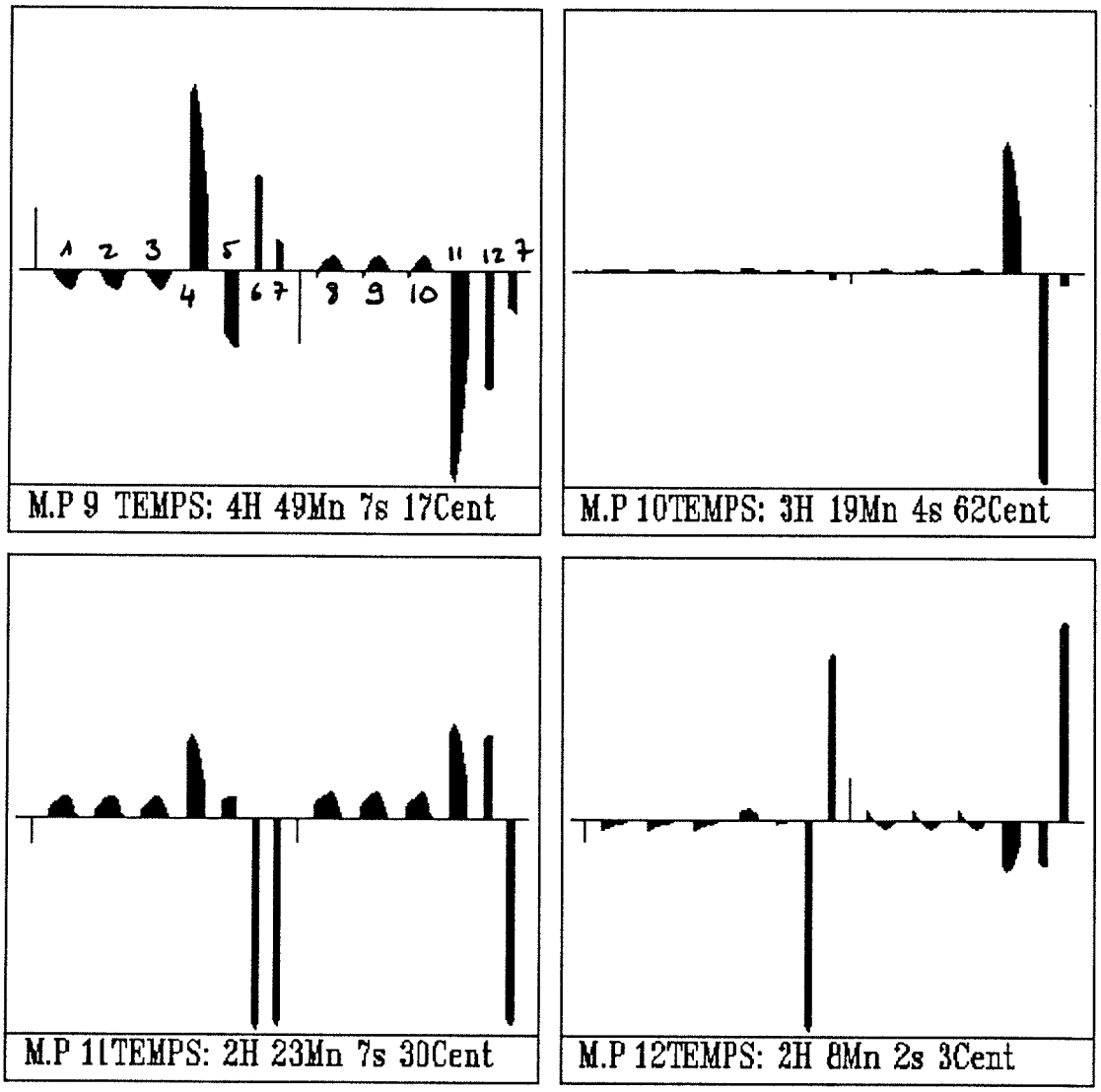


Figure 6.61: Terme dynamique: modes 9, 10, 11 et 12

Conclusion

Ce couplage est plus difficile à qualifier que les précédents car ce bâtiment a un comportement bien moins marqué. On peut néanmoins le qualifier de **glissant** car le terme de raccordement permet de rétablir le déséquilibre du comportement rapide de la zone 2 par rapport à la zone 1. Ceci est possible par une évolution glissante de la zone rapide représentée par le terme de raccordement pendant l'évolution dynamique de la zone plus lente (cas du mode 1).

Ce couplage dynamique est plutot **lent** car le mode 2 dont la dominance est assez marquée sur le spectre de couplage présente une inversion pour ses valeurs sur l'air des deux zones et une constante de temps associée de plus de 20 heures. Le terme de raccordement n'intervient pas pour le mode 2 pour empêcher cette opposition du comportement entre les deux zones.

6.2.2 Réduction du modèle de synthèse

L'étude des modes locaux basée sur les règles issues des exemples simples va nous permettre de réduire l'ordre des modèles et de reconstituer un modèle de synthèse réduit. Le spectre de couplage est le spectre qui permet d'identifier les modes dominants.

Le spectre de la réponse de la température de la zone 1 à un échelon de température appliqué sur le mur mitoyen du coté de la zone 2 est donné sur la figure 6.62

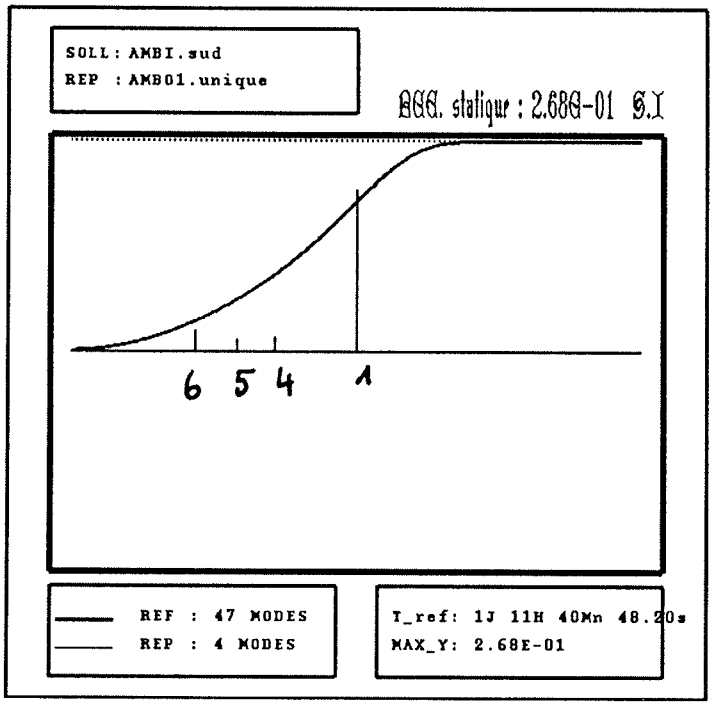


Figure 6.62: Spectre de la réponse de la température de la zone 1 à un échelon de température de la zone 2

Les modes dominants, modes 1, 4, 5 et 6, de la zone 1 sont donnés sur la figure 6.63

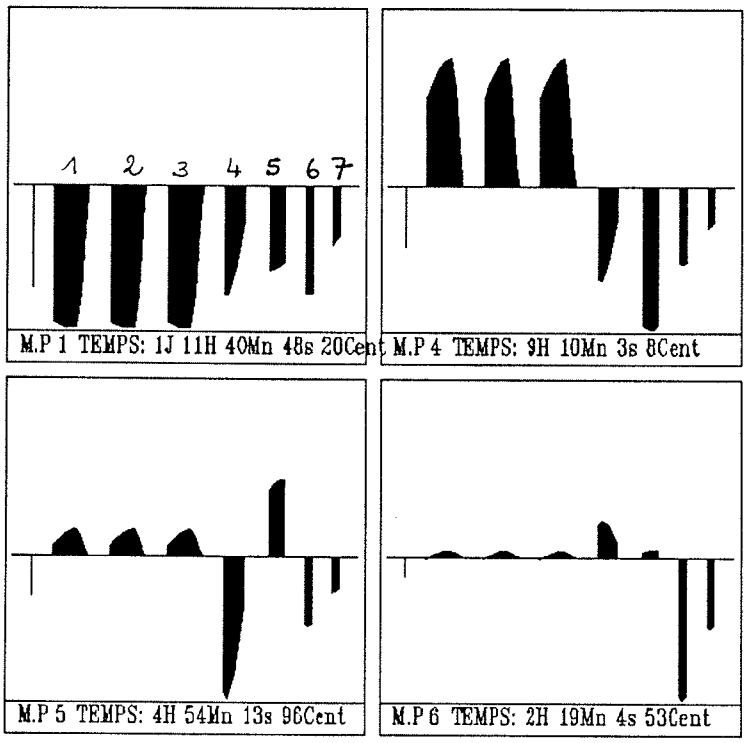


Figure 6.63: Modes de la zone 1

La règle de réduction des modèles locaux issue des exemples simples permettaient de sélectionner en sus du premier mode, les modes locaux présentant une dissymétrie entre murs extérieurs et mur mitoyen. Cette représentation géométrique est bien celle du mode 6. Les modes 4 et 5 sont également influents: le mode 4 permet de rendre compte de l'évolution du champ de température plus rapide dans le sol, plafond, mur interne et mitoyen. Le mode 5, quant à lui rend compte de l'évolution plus rapide du plafond et des murs internes.

Par contre les modes faisant intervenir un déséquilibre entre les faces du mur mitoyen sont d'un ordre trop faible (constante de temps de quelques minutes) pour avoir une influence sur la réponse. Ils n'apparaissent même pas sur le spectre: ils ne sont donc pas conservés.

On garde donc les modes 1, 4, 5 et 6. Cette réduction affecte très peu la réponse sur le spectre: les courbes correspondants au modèle d'ordre 47 et à celui d'ordre 4 sont très proches. Elles sont non discernables à l'échelle de la figure et cela malgré la dilatation logarithmique de l'axe temporel.

Le spectre de la réponse de la température de la zone 2 à un échelon de température de la zone 1, est donné sur la figure 6.64

Les mêmes règles de réduction s'appliquent pour la zone 2. le mode 5 n'est pas influent pour ce spectre de couplage car sa représentation pour le mur mitoyen est quasi nulle. Les modes dominants correspondants à la zone 2 sont donnés sur la figure 6.65. Cette réduction à 3 modes n'affecte quasiment pas la réponse sur le spectre: les courbes correspondants au modèle d'ordre 42 et à celui d'ordre 3 sont également très proches.

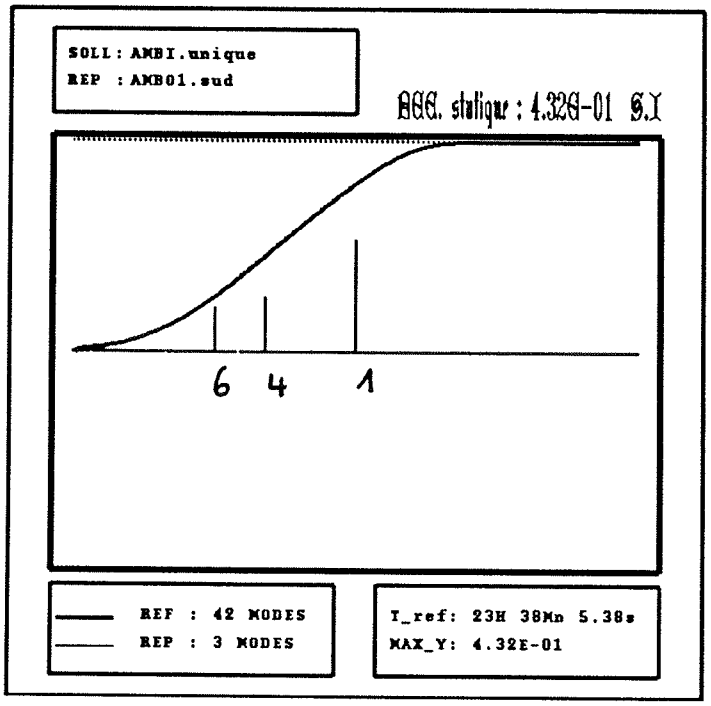


Figure 6.64: Spectre de la réponse de la zone 2 à un échelon de puissance de la zone 1

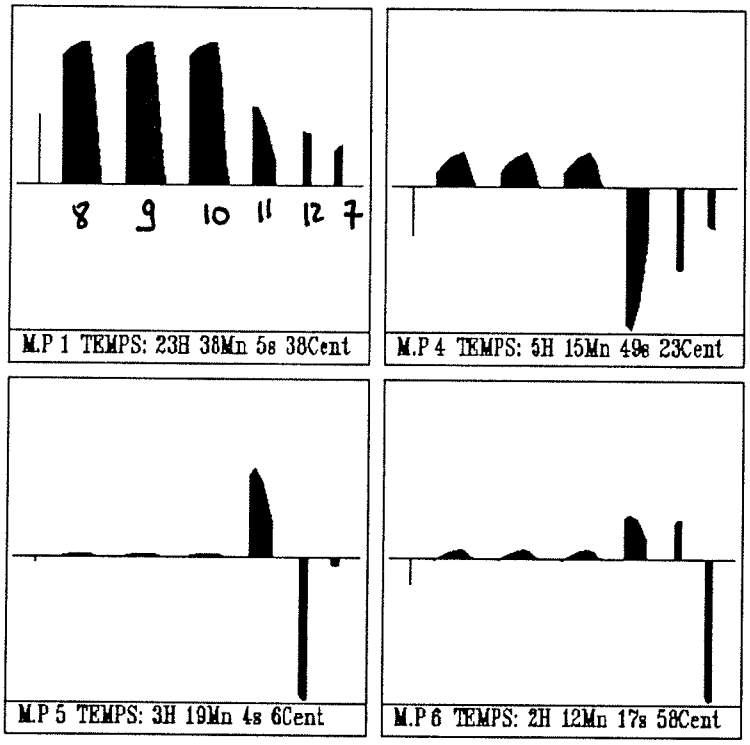


Figure 6.65: Modes de la zone 2

Modèle de synthèse réduit

Les modèles locaux étant réduits, on peut générer le modèle de synthèse et le comparer avec le modèle modal global. Cette comparaison peut être effectuée de deux manières:

1. Comparaison des spectres de réponse indicielle: cette comparaison est toutefois limitée à un couple sortie/sollicitation à la fois.
2. Comparaison du comportement thermique global du bâtiment avec une simulation. Cette situation permet d'observer les effets de compensation entre les modes excités par les différentes sollicitations. Cette seconde comparaison, qui donne de bons résultats, sera présentée au chapitre 7 traitant de la validation et de la simulation.

La première comparaison est illustrée sur le spectre de couplage (figure 6.66).

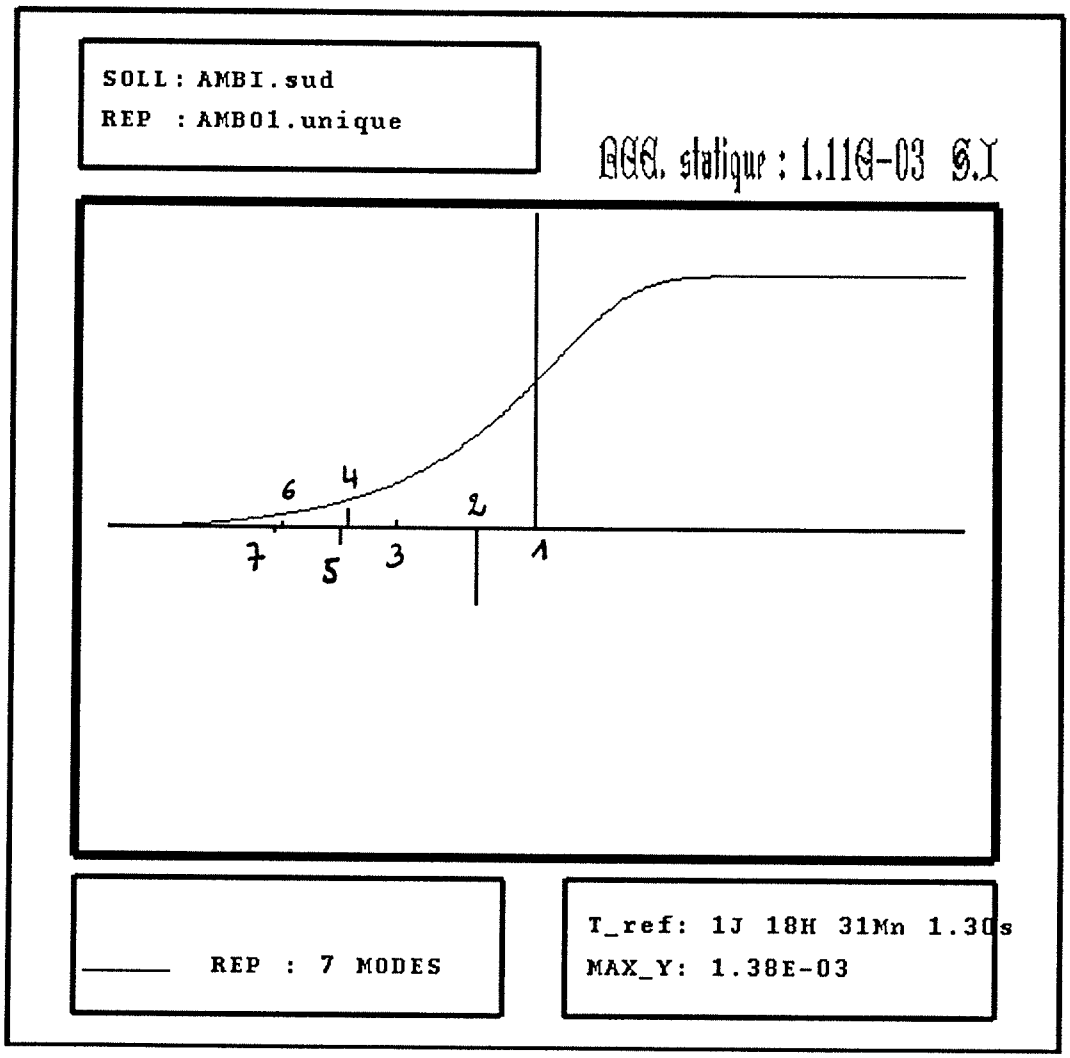


Figure 6.66: Spectre de la réponse de la température de la zone 1 à un échelon de puissance de la zone 2 pour le modèle de synthèse réduit

Ce spectre montre une réponse pour le modèle de synthèse réduit quasi identique à celle du modèle global (figure 6.52). Il est toutefois intéressant de représenter la courbe

de l'erreur entre les deux modèles (modèle global et modèle de synthèse réduit). Sur la figure 6.67, on peut ainsi identifier que l'erreur se stabilise autour d'une valeur de l'ordre de 1.210^{-7}, ce qui correspond au dix millième de la valeur de la réponse. Cette erreur est évidemment négligeable. La courbe de l'erreur en fonction du temps reflète bien la troncature effectuée sur le modèle de synthèse qui consistait à éliminer les modes aux faibles constantes de temps: cette erreur est légèrement plus importante aux faibles temps.

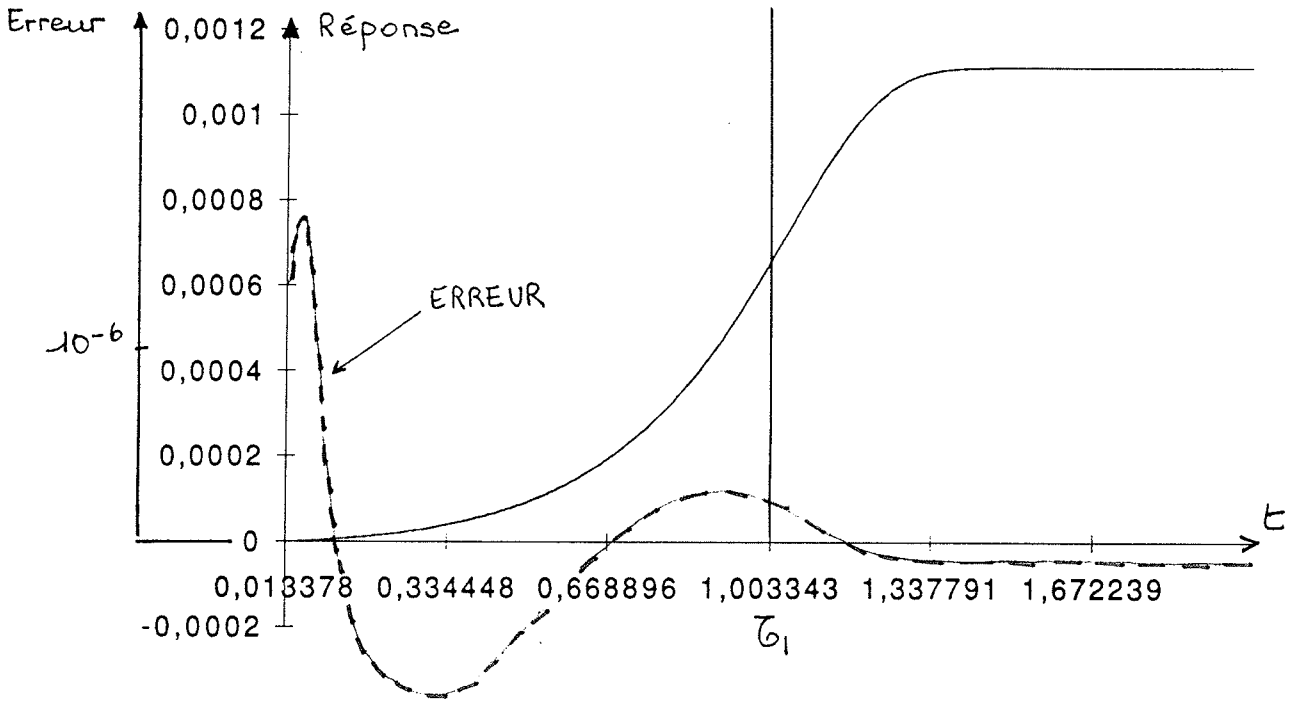


Figure 6.67: Courbe de l'erreur entre la réponse de la température de la zone 1 à un échelon de puissance de la zone 2 pour le modèle de synthèse réduit et celle correspondant au modèle modal global

Les 7 modes du modèle de synthèse réduit sont donnés sur les figures 6.68 et 6.69. Le modèle de synthèse est d'ordre 7 car il a été constitué avec le modèle de la zone 1 d'ordre 4 et le modèle de la zone 2 d'ordre 3. La réduction des modèles locaux se révèle judicieuse car elle permet de reconstituer un modèle modal d'ordre 7 avec une précision équivalente au modèle modal global non réduit d'ordre 104 (soit un facteur 15 entre les deux modèles). On notera que seul le 7ème mode est mal reconstitué. Il est peut être le résultat d'une sorte d'agrégation ou de correction qui s'opère lors de la synthèse afin que le modèle de synthèse d'ordre 7 présente des performances proches de celles du modèle global (104 modes).

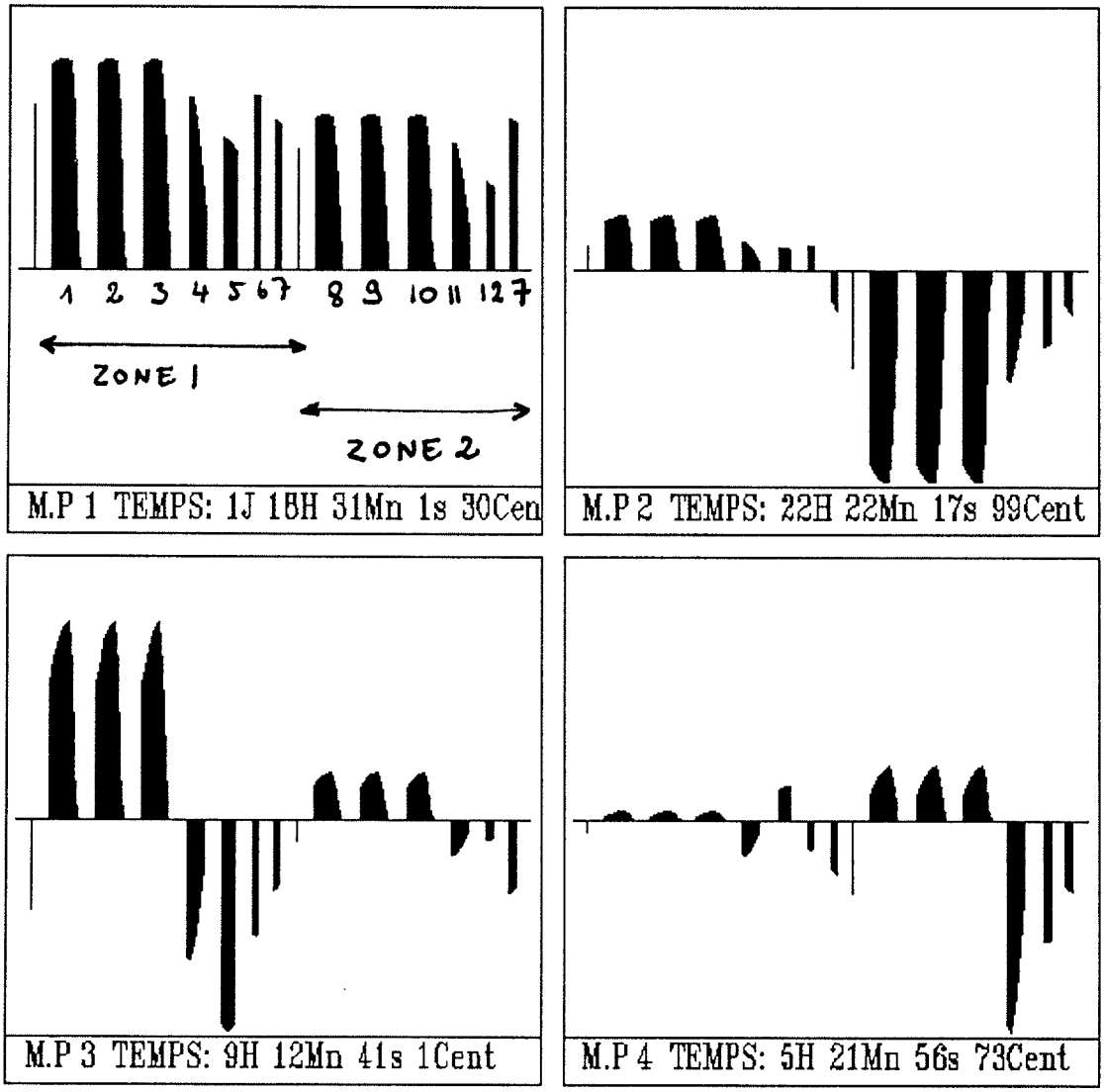


Figure 6.68: Modes du modèle de synthèse réduit (1 à 4)

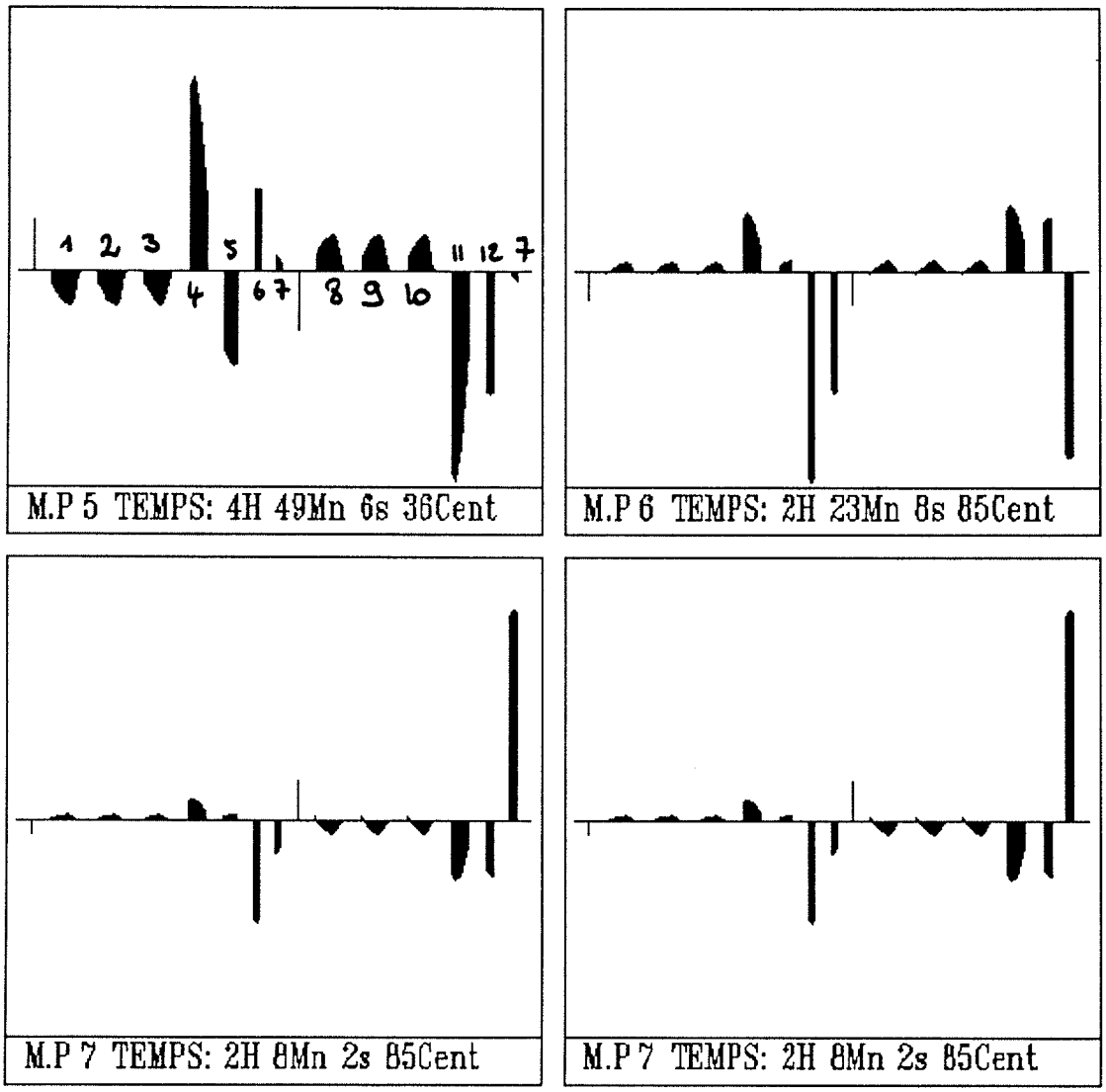


Figure 6.69: Modes du modèle de synthèse réduit (5 à 7)

6.3 Conclusion

L'étude du couplage de composants du bâtiment à l'aide de la synthèse modale sur des configurations élémentaires a permis de dégager des règles de base pour l'analyse:

- L'outil pour la caractérisation rapide ou lente d'un couplage repose essentiellement sur l'étude de la forme des modes eux mêmes. Le premier mode présentant une opposition entre les valeurs sur les noeuds de l'air des différentes zones et dont la constante de temps associée est assez importante (de l'ordre de quelque heures) sera caractéristique d'un couplage lent entre les zones. Cette règle se vérifie aisément sur les spectres.

- L'outil pour la caractérisation forte, faible ou glissante d'un couplage repose sur l'étude de la décomposition des modes de synthèse en terme dynamique et statique. Dans le cas d'un couplage faible, les termes dynamiques de chaque zones sont dominants et sont donc caractéristiques d'une évolution découplée entre les zones. Les termes de raccordement interviennent lorsque le couplage est fort. Enfin pour le couplage glissant entre deux zones, la dominance respective des termes dynamiques et de raccordement pour chaque zone permet d'identifier l'évolution glissante d'une zone par rapport à l'autre. Il faut néanmoins rappeler que ces règles ne s'appliquent que pour caractériser la dynamique du couplage et que les valeurs des paramètres **statiques** sont tout de même essentiels pour caractériser un couplage.

- La décomposition du terme dynamique des modes de synthèse sur les bases locales s'est révélée très riche comme outil potentiel pour établir des règles quant à la réduction de ses bases locales.

L'étude du couplage d'un bâtiment plus complexe a permis de valider les règles de base caractérisant le type de couplage. Ce modèle de bâtiment a également été soumis à une réduction au niveau de ses modèles locaux de zones avant de reconstituer par synthèse modale le modèle modal global réduit. La pertinence des réductions effectuées a permis de montrer la précision de la synthèse modale dans la reconstitution du modèle modal global à partir de modèles modaux réduits. La validation de cette méthode va maintenant être complétée par la simulation du comportement thermique de bâtiment multizone.

Chapitre 7

Simulation et Validation

L'analyse modale de bâtiments multizones, que nous qualifions de qualitative, peut être complétée par une évaluation quantitative de ses performances grâce à la simulation dynamique. La simulation permet d'affiner la connaissance des performances thermiques des bâtiments. Elle permet d'évaluer les besoins de chauffage par zone, de détecter les périodes d'inconfort par le biais de profils de température sur des périodes critiques.

Cette étape de simulation va constituer dans le cadre de ce travail une validation de la synthèse modale en confrontant des profils de températures issus du modèle modal de bâtiments multizones avec ceux issus de la synthèse modale. De plus la simulation va permettre d'estimer la justesse et la pertinence de la réduction modale des modèles de zones et de composants sur le comportement dynamique du bâtiment. Par conséquent la simulation sera un outil justifiant *a posteriori* les réductions des modèles.

La simulation nécessite une description fine du bâtiment, la connaissance de scénarios d'occupation, de ventilation, ... et le traitement des données météorologiques correspondant au site. Cette résolution numérique repose sur une discrétisation spatiale et temporelle. La méthode modale basée sur le principe de la sépararation des variables d'espace et de temps facilite et accélère la simulation.

7.1 Simulation modale

Le modèle modal obtenu après la phase de synthèse est strictement identique à un modèle modal direct (issu directement du changement de la base des températures à la base modale). Pour obtenir ce modèle modal, une discrétisation spatiale a été nécessaire (modèle numérique de type différences finies par exemple).

L'expression du modèle modal est rappelée:

$$\dot{\mathcal{X}} = [\mathcal{F}]\mathcal{X} + [\mathcal{B}]\dot{U}_e \tag{7.1}$$

$$\mathcal{Y} = [\mathcal{H}]\mathcal{X} + [\mathcal{S}]U_e \tag{7.2}$$

$$\mathcal{T} = [\mathcal{P}]\mathcal{X} + [\mathcal{S}_\mathcal{P}]U_e \tag{7.3}$$

avec:

- $\mathcal{X}$: vecteur d'état
- $\mathcal{F}$: matrice diagonale des valeurs propres

- $\mathcal{T}$: champ des températures complet sur la base du maillage
- $\mathcal{Y}$: vecteur des sorties

La résolution de l'équation différentielle (7.1) est détaillée dans l'annexe E. Après discrétisation des sollicitations, on obtient le modèle modal suivant:

$$\mathcal{X}^{n+1} = [e^{F\delta t}]\mathcal{X}^n + [\mathcal{W}](U_e^{n+1} - U_e^n) \tag{7.4}$$

$$\mathcal{Y}^{n+1} = [\mathcal{H}]\mathcal{X}^{n+1} + [\mathcal{S}]U_e^{n+1} \tag{7.5}$$

avec:

$$\mathcal{W} = \frac{-1}{\mathcal{F}\delta t}(1 - e^{\mathcal{F}\delta t})\mathcal{B}$$

7.2 Simulation avec un modèle de synthèse réduit

Au cours du chapitre précédent, le couplage d'un bâtiment bizone a été étudié (section 6.2). Une réduction modale des modèles locaux de zones a été effectuée (à l'ordre 4 pour la zone 1 et à l'ordre 3 pour la zone 2) puis le modèle multizone a été recréé par synthèse modale. La pertinence des réductions effectuées a été mise en évidence sur les spectres de réponse indicielle: les réponses des modèles de synthèse réduit et global sont identiques. Pour confirmer la bonne performance et la précision du modèle de synthèse réduit, nous comparons les évolutions des températures de chaque zone de ce modèle avec le modèle de synthèse non réduit. Le simulateur du logiciel COMFIE [Blanc-Sommereux, Peuportier][1] a été utilisé pour faire deux types de simulations:

- simulation à partir de modèle modal multizone obtenu par synthèse (type 1)
- simulation du type COMFIE (type 2) dans laquelle chaque zone est décrite par un modèle modal, et dont le couplage est réalisé au cours de la simulation, sans synthèse modale (voir annexe D).

Cette dernière simulation, largement validée par ailleurs, a servi de référence aux simulations du type 1 précédent. On peut noter ici que les bons résultats obtenus avec les simulations du type 2 ont été le point de départ des recherches exposées dans cette thèse dans le domaine du couplage de zones par synthèse modale.

La procédure de comparaison pour l'exemple du bâtiment bizone est la suivante:

1. Génération des modèles modaux de chaque zone
2. Réduction de ces modèles à 4 modes pour la zone 1, à 3 modes pour la zone 2
3. Génération du modèle de synthèse réduit (7 modes)
4. Simulation avec le modèle de synthèse réduit (type 1)
5. Simulation avec le modèle de synthèse non réduit (type 1)
6. Simulation du même bâtiment avec cette fois le modèle non réduit du type 2.

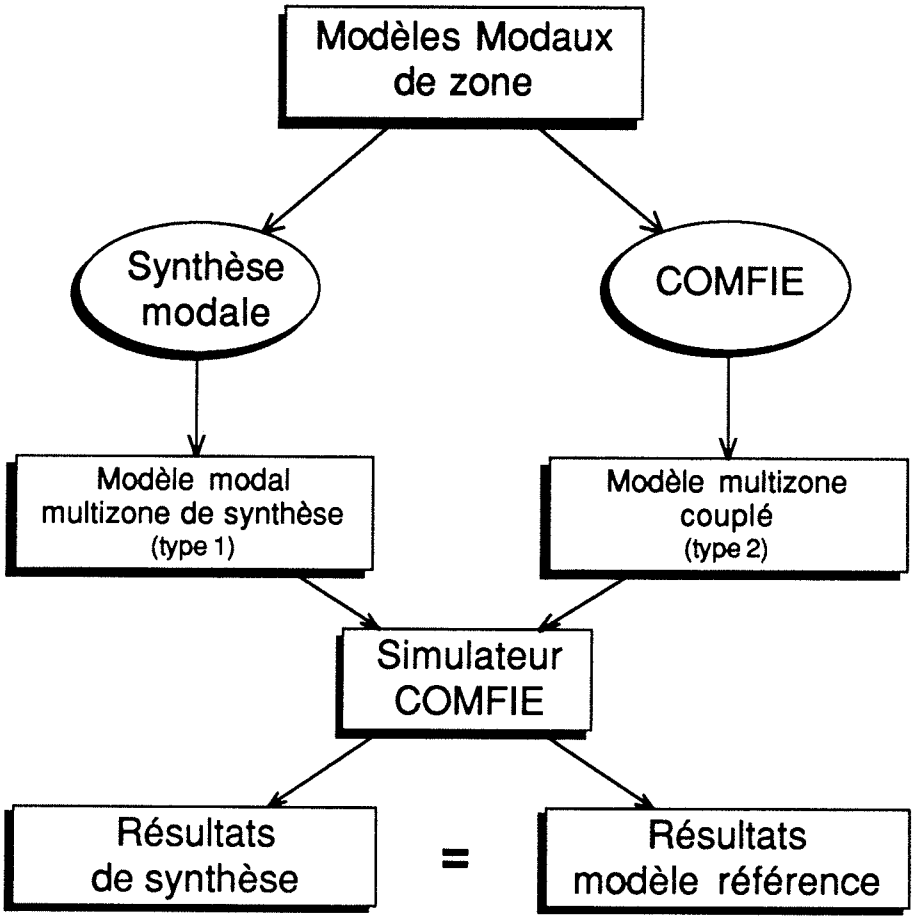


Figure 7.1: Mise en oeuvre des comparaisons entre modèles globaux et modèles de synthèse

Cette procédure de comparaison est schématisée sur la figure 7.1.

Le modèle de référence est constitué de deux modèles modaux ayant 25 modes pour la zone 1 et de 22 modes pour la zone 2[2]. La discrétisation n'est pas strictement identique à celle employée pour la modélisation du même bâtiment au chapitre 6. Néanmoins les constantes de temps des modes dominants sont très proches (tableau 7.1).

Les deux zones sont régulées à 19^0C et le climat sélectionné est celui de Carpentras. Deux journées à fort ensoleillement ont été sélectionnées provoquant ainsi des surchauffes dans les deux zones. Ces surchauffes sont intéressantes car elle mettent en évidence la dynamique de ces zones permettant ainsi d'identifier des différences entre les différents modèles. La simulation s'effectue avec les fichiers météorologiques SRY (Short Reference Year) [Lund][3]. La figure 7.2 et la figure 7.3 représentent les évolutions de température pour chaque zone avec les deux modèles: le modèle de synthèse non réduit (d'ordre 47), le modèle de synthèse réduit (d'ordre 7) et le modèle global non réduit de COMFIE (d'ordre 47). Les courbes sont très proches (moins d'un demi degré décart entre les deux profils) et confirment bien la bonne reconstitution du modèle modal bizone par la synthèse modale à

[1] Blanc-Sommereux, I., Peuportier, B., 1991 *A bioclimatic design aid based on multizone simulation* ISES Denver Colorado.

[2] 3 noeuds pour la couche du béton et 1 noeud pour les autres matériaux

[3] Lund, H., 1985, *Short Reference Years and Test Reference Years for E.E.C. contrat ESF-029-DK.*

zone 1	mode 1	35h 38mn
	mode 2	9h 12mn
	mode 3	5h 2mn
	mode 4	2h 4mn
	...	
zone 2	mode 1	23h 12mn
	mode 2	4h 48mn
	mode 3	2h 16mn
	...	

Table 7.1: modes du bâtiment bizone avec COMFIE

partir de modèles locaux réduits.

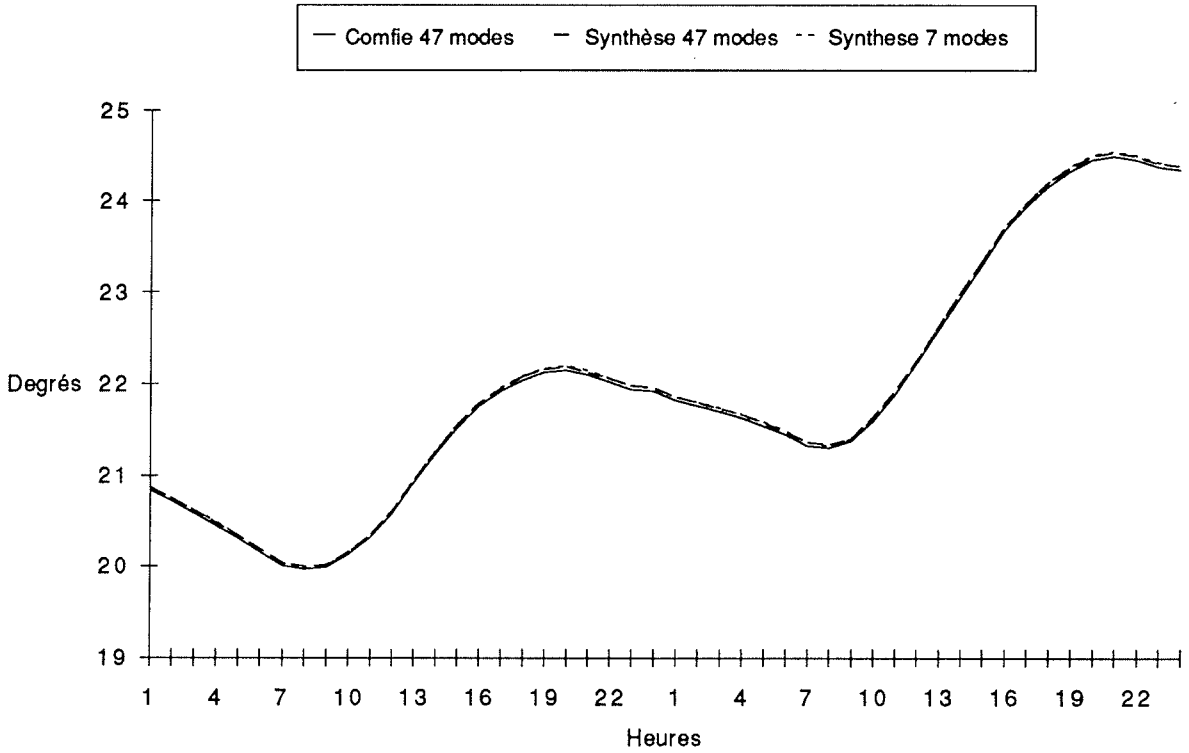


Figure 7.2: Température de la zone Nord

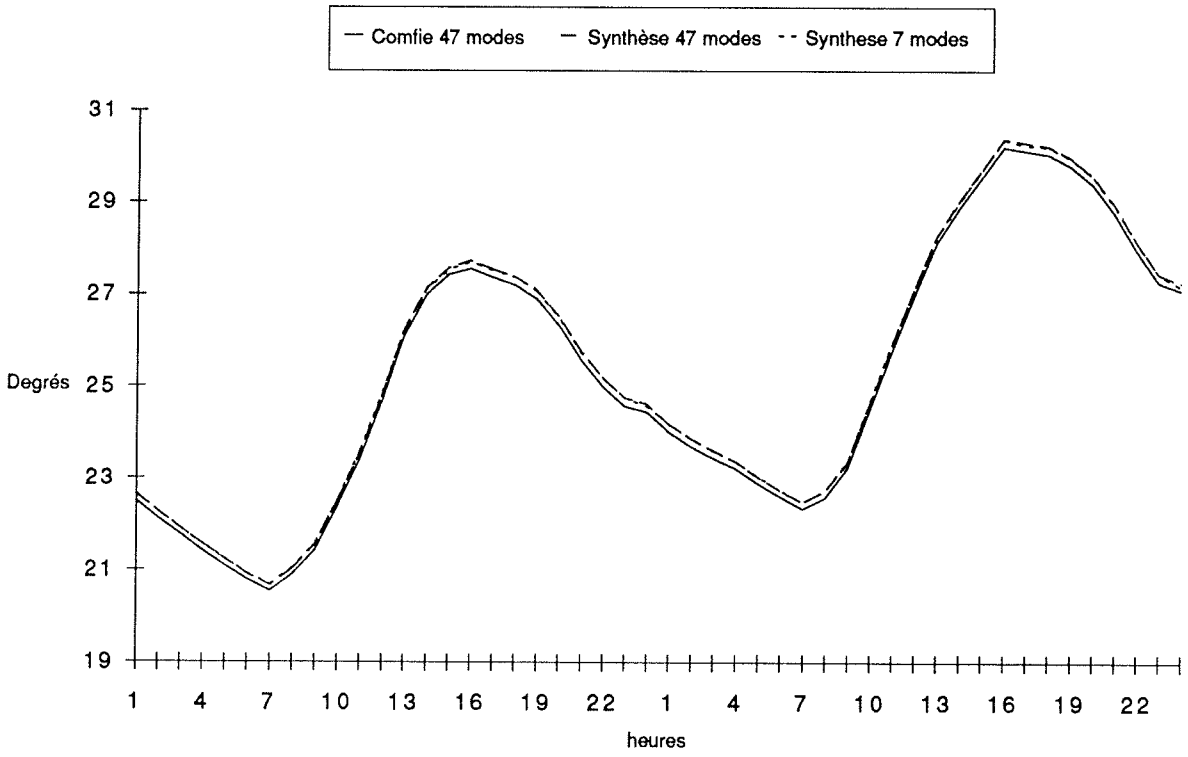


Figure 7.3: Température de la zone Sud

Chapitre 8

Conclusions

L'analyse modale est une méthode puissante pour l'étude du comportement thermique des bâtiments. Néanmoins cette analyse modale connaît des limites pour traiter des bâtiments complexes multizones en raison de la manipulation mathématique et numérique de matrices très importantes. De plus le traitement de bâtiments multizones sous forme globale rend difficile toute analyse fine au niveau du couplage de ces zones.

Le couplage de zones est un phénomène difficile à évaluer et à quantifier sous forme simplifiée. Des essais de représentation multizone de bâtiment sous forme simplifiée existent [Passys], [European solar handbook], mais de telles méthodes ne décrivent pas le couplage lui même par des paramètres dynamiques explicites. La résolution du couplage dynamique s'y effectue sous forme itérative. Ces méthodes ne caractérisent la dynamique de chaque zone qu'à l'aide de la première constante de temps.

L'analyse du couplage de composants s'est donc appuyée, dans cette thèse, sur la synthèse modale. La synthèse est formellement définie comme l'opération inverse de l'analyse. En effet son principe repose sur la reconstitution de la forme modale d'un modèle complexe à partir des modèles modaux de ses sous systèmes. Elle s'est révélée très riche dans l'analyse du couplage de zones. Une typologie de couplage a pu être établie distinguant ainsi trois grandes familles:

- couplage dynamique lent
- couplage dynamique rapide
- couplage dynamique glissant

La constitution d'un bâtiment multizone à partir des modèles de zones a été élaborée à partir du couplage par recouvrement d'une partie commune entre les modèles de zones. Ce type de couplage est intéressant car il autorise l'utilisation de modèles de zones fermées, c'est à dire incluant les parois susceptibles d'être mises en commun avec d'autres zones.

L'intérêt de la synthèse modale réside également dans la possibilité de coupler des modèles modaux soumis au préalable à une réduction. Une telle approche est évidemment adaptée au principe des simulations simplifiées qui reposent sur des modèles d'ordre faible. Le couplage par paire de zones dans le cas du raccordement par recouvrement a été implémenté et validé sur quelques exemples. La simulation du comportement thermique de bâtiments basée sur des modèles synthétisés réduits a permis de compléter

la validation de cette approche. Toute la méthodologie et la connaissance développée dans cette thèse s'appliquent également aux composants susceptibles d'être décrits comme des zones, c'est à dire un volume d'air à température homogène entouré de parois. Deux développements futurs pourront être donnés aux résultats de ces travaux: les premiers iront dans le sens de l'automatisation de la réduction au cours de la synthèse basée sur des règles expertes, les autres contribueront à la réalisation de logiciels de simulation simplifiés.

Annexe A

Unicité de la solution pour l'équation de la chaleur

L'Unicité de la solution pour l'équation de la chaleur dans un domaine dont les frontières sont soumises à des conditions aux limites de Dirichlet est maintenant démontrée dans le cas où l'équation de la chaleur est limitée aux phénomènes conductifs.

A.1 Hypothèses

On limite l'opérateur de la chaleur $\mathcal{L}$ à la conduction.

$$\mathcal{L}[T(M,t)] = \vec{\nabla}.(K(M)\vec{\nabla}T(M,t))$$

On peut alors écrire l'équation de la chaleur sous la forme:

$$C\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K(y)\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K(z)\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

Si C et K ne dépendent ni de M ni de $t \Rightarrow$

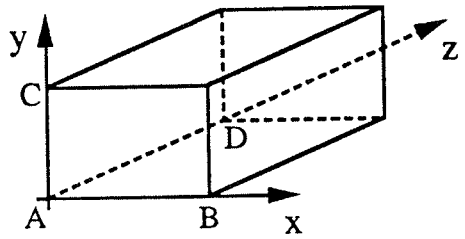
$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \frac{K}{C}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

Le rapport K/C est défini comme étant la diffusivité. Si l'on passe à des grandeurs correctement adimensionnées, on obtient ainsi :

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

A.2 Problème

Le domaine à étudier est le suivant:



Soient les conditions aux limites suivantes:

$$T(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z)$$

$$\begin{cases} A \leq x \leq B \\ A \leq y \leq C \\ A \leq z \leq D \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(x,y,z_A,t) &= \psi_{zA} \\ T(x,y,z_D,t) &= \psi_{zD} \\ T(x_A,y,z,t) &= \psi_{xA} \\ T(x_B,y,z,t) &= \psi_{xB} \\ T(x,y_A,z,t) &= \psi_{yA} \\ T(x,y_C,z,t) &= \psi_{yC} \end{aligned}$$

Il faut trouver dans le domaine délimité par $A \leq x \leq B$, $A \leq y \leq C$, $A \leq z \leq D$, et $0 \leq t \leq t_0$, une solution continue jusqu'à même la frontière de l'équation :

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{A.1}$$

La fonction $T(x,y,z,t)$ est continue pour le domaine $\mathcal{D}$ et elle a en chaque point intérieur des dérivées premières et secondes vérifiant l'équation (A.1).

A.3 Résolution

La démonstration est basée sur le "principe du maximum" qui permet de déduire l'unicité de la solution.

Cette résolution est issue de celle exposée dans [Godounov][1] et est maintenant étendue aux phénomènes conductifs tridimentionnels.

[1] Godounov, 1973, *Equations de la physique mathématique*. Mir.

A.3.1 Principe du maximum

Toute solution de l'équation de la chaleur dans un domaine $\mathcal{D}$ continue jusqu'à même les frontières prend ses plus grandes et ses plus petites valeurs sur les côtés latéraux de sa frontière ou à l'instant initial.

Démonstration:

Désignons par M le maximum de $T(x,y,z,t)$ sur le domaine, par m la plus grande valeur de $T(x,y,z,t)$ sur les frontières (y compris à l'instant initial). $M = T(x_0,y_0,z_0,t_0)$.

On considère la fonction auxiliaire :

$$v(x,y,z,t) = T(x,y,x,t) + \frac{(M-m)(x-x_0)^2(y-y_0)^2(z-z_0)^2}{2(B-A)^2(C-A)^2(D-A)^2}$$

Sur les frontières, $v(x,y,z,t)$ vérifie l'inégalité

$$v(x,y,z,t) \leq T(x,y,z,t) + \frac{M-m}{2} \leq m + \frac{M-m}{2} < M.$$

Si l'on suppose ici que $M > m$

Par ailleurs $v(x_0,y_0,z_0,t_0) = T(x_0,y_0,z_0,t_0) = M$.

$v(x,y,z,t)$ prend sa plus grande valeur en un certain point $M_1 = (x_1,y_1,z_1,t_1)$.

Etant donné que $v(x_1,y_1,z_1,t_1) \geq M$, et que sur les frontières $v(x,y,z,t) < M$ le point M_1 ne peut se trouver sur les frontières.

Si M_1 est un point intérieur de maximum, en ce point les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0\,, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0\,, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0\,, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leq 0.$$

Donc

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \geq 0. \tag{A.2}$$

Comme $M = max\ T(x,y,z,t) > m$, il existe M_1 tel que (A.2) soit vérifiée.

Or si on revient à la définition de $v(x,y,z,t)$, sachant que $T(x,y,z,t)$ vérifie A.1 on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = -3\frac{(M-m)}{(B-A)^2(C-A)^2(D-A)^2} < 0 \tag{A.3}$$

qui est en contradiction avec A.2; L'inégalité $M > m$ est donc impossible.

L'inégalité $T(x,y,z,t) \leq max\ T(x,y,z,t)$ sur les frontières ou à l'instant initial est ainsi démontrée.

Le principe du maximum est vrai.

La fonction $-T(x,y,z,t)$ vérifiant aussi l'équation de la chaleur on peut en lui appliquant le principe du maximum, démontrer de même le principe du miminum.

On suppose dans cette démonstration que $T(x,y,z,t)$ est 2 fois dérivable en tous les points intérieurs du domaine.

A.3.2 Unicité de la solution.

On peut maintenant démontrer l'unicité de la solution. Soient $T_1(x,y,z,t)$ et $T_2(x,y,z,t)$ 2 solutions de ce problème.

$$Soit \quad T(x,y,z,t) = T_1(x,y,z,t) - T_2(x,y,z,t)$$

une fonction continue telle que:

$$\begin{aligned} T(x,y,z_A,t) &= 0 \\ T(x,y,z_D,t) &= 0 \\ T(x_A,y,z,t) &= 0 \\ T(x_B,y,z,t) &= 0 \\ T(x,y_A,z,t) &= 0 \\ T(x,y_C,z,t) &= 0 \\ \text{et} \quad T(x,y,z,0) &= 0 \end{aligned}$$

A l'intérieur du domaine $A < x < B$, $A < y < C$, $A < z < D$, $0 < t < t_0$ la fonction $T(x,y,z,t)$ vérifie de toute évidence, l'équation de la chaleur A.1.

On déduit du principe du maximum que :

$$\begin{aligned} max^{(1)} \mid T(x,y,z,t) \mid \leq max\{ \quad & max^{(2)} \mid T(x,y,z,0) \mid, \\ & max^{(3)} \mid T(x_A,y,z,t) \mid, \\ & max^{(3)} \mid T(x_B,y,z,t) \mid, \\ & max^{(4)} \mid T(x,y_A,z,t) \mid, \\ & max^{(4)} \mid T(x,y_C,z,t) \mid, \\ & max^{(5)} \mid T(x,y,z_A,t) \mid, \\ & max^{(5)} \mid T(x,y,z_D,t) \mid\} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
(1)\ \begin{array}{l} A \le x \le B \\ A \le y \le C \\ A \le z \le D \\ 0 \le t \le t_0 \end{array} & (2)\ \begin{array}{l} A \le x \le B \\ A \le y \le C \\ A \le z \le D \end{array} & (3)\ \begin{array}{l} A \le y \le C \\ A \le z \le D \\ 0 \le t \le t_0 \end{array} \\
(4)\ \begin{array}{l} A \le x \le B \\ A \le z \le D \\ 0 \le t \le t_0 \end{array} & (5)\ \begin{array}{l} A \le x \le B \\ A \le y \le C \\ 0 \le t \le t_0 \end{array} &
\end{array}$$

La combinaison des relations précédentes montre que $T(x,y,z,t) \equiv 0$ pour

$$A \le x \le B, \qquad A \le y \le C, \qquad A \le z \le D, \qquad 0 \le t \le t_o$$

c'est à dire que dans le domaine $T_1(x,y,z,t) \equiv T_2(x,y,z,t)$.

L'unicité de la solution est ainsi démontrée.

Annexe B

Orthogonalisation de vecteurs propres par la méthode de Gram-Schmidt

Dans le cas de valeurs propres multiples, la dimension du sous espace propre associé à une telle valeur propre est égal à la multiplicité de la racine. Les vecteurs propres de ce sous espace ont pour valeur propre associée la valeur propre multiple. Ces vecteurs propres sont orthogonaux avec le reste de l'espace propre. Par contre ces vecteurs propres ne sont pas nécessairement orthogonaux entre eux. La méthode de Gram-Schmidt [Durand][1] permet, connaissant n vecteurs linéairement indépendants de ce sous espace, d'en déduire n autres orthogonaux entre eux. Dans le cas de la diagonalisation de matrice non symétrique, il est nécessaire de rendre deux suites de vecteurs biorthogonaux: les vecteurs du problème à droite, les vecteurs du problème à gauche.

Soit M_i les vecteurs à droite et N_i les vecteurs à gauche. Les vecteurs orthogonaux seront respectivement X_i et Y_i.

Les vecteurs X_i et Y_i orthogonaux s'obtiennent à partir des vecteurs M_i etN_i par les relations:

$$\begin{cases} X_1 = M_1 \\ X_2 = \lambda_{12}X_1 + M_2 \\ X_3 = \lambda_{13}X_1 + \lambda_{23}X_2 + M_3 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ X_p = \lambda_{1p}X_1 + \lambda_{2p}X_2 + \cdots \quad \lambda_{p-1}X_{p-1} + M_p \end{cases} \tag{B.1}$$

$$\begin{cases} Y_1 = N_1 \\ Y_2 = \mu_{12}Y_1 + N_2 \\ Y_3 = \mu_{13}Y_1 + \mu_{23}Y_2 + N_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ Y_p = \mu_{1p}Y_1 + \mu_{2p}Y_2 + \cdots \quad \mu_{p-1}Y_{p-1} + N_p \end{cases} \tag{B.2}$$

Les coefficients λ et μ sont définis par les formules que l'on obtient en écrivant que les relations d'orthogonalité sont satisfaites, soient:

[1] Durand, E., 1961, *Solutions numériques des équations algébriques*, Tome II, Masson.

$$\begin{array}{rcl} Y_1X_2 = 0 = \lambda_{12}Y_1X_1 + Y_1M_2 \\ Y_2X_1 = 0 = \mu_{12}Y_1X_1 + N_2X_1 \end{array} \tag{B.3}$$

D'où:

$$\lambda_{12} = -\frac{Y_1M_2}{Y_1X_1} \quad \mu_{12} = -\frac{N_2X_1}{Y_1X_1} \tag{B.4}$$

et ainsi de suite on obtient:

$$\begin{array}{llll} \lambda_{1p} = -\dfrac{Y_1M_p}{Y_1X_1} & \lambda_{p-1,p} = -\dfrac{Y_{p-1}M_p}{Y_{p-1}X_{p-1}} \\ \mu_{1p} = -\dfrac{N_pX_1}{Y_1X_1} & \mu_{p-1,p} = -\dfrac{N_pX_{p-1}}{Y_{p-1}X_{p-1}} \end{array} \tag{B.5}$$

Annexe C

Diagonalisation de la matrice $N^{-1}F$

C.1 Diagonalisation de la matrice NF^{-1}

La matrice N^{-1} n'est pas symétrique aussi son inversion numérique nécessite l'emploi d'algorithme plus complexe que celui nécessaire à l'inversion d'une matrice symétrique. Pour diagonaliser la matrice $N^{-1}F$, tout en évitant l'inversion de la matrice N, on a recours à la diagonalisation de la matrice NF^{-1}. L'inversion de la matrice F ne pose aucun problème car celle-ci est diagonale.

La recherche des éléments propres de NF^{-1} s'effectue par la résolution des deux systèmes suivants, le problème à droite et le problème à gauche:

$$p'_i \, z'_i \; = \; NF^{-1} \, p'_i \tag{C.1}$$

avec :

- z'_i : i ème valeur propre de NF^{-1},
- p'_i : i ème vecteur propre à droite de NF^{-1}

Le problème à gauche est alors:

$$z'_i \, q'_i \; = \; q'_i \, NF^{-1} \tag{C.2}$$

avec :

- z'_i : i ème valeur propre de NF^{-1},
- q'_i : i ème vecteur propre à gauche de NF^{-1}

Il est nécessaire de normer les vecteurs p'_i par rapport aux vecteurs q'_i avec la relation de biorthogonalité:

$$\begin{array}{rcl} q'_i p'_j & = & \delta_{ij} \quad avec \quad \delta_{ij} = 1 \quad si \quad i = j \\ & & \quad\;\; et \quad\;\; \delta_{ij} = 0 \quad si \quad i \neq j \end{array} \tag{C.3}$$

C.2 Eléments propres de $N^{-1}F$

Nous pouvons passer des éléments propres de la matrice NF^{-1} à ceux de la matrice $N^{-1}F$ par les relations suivantes:

$$[p] = F^{-1}[p'] \tag{C.4}$$

$$[q] = [q']N \tag{C.5}$$

$$[z] = [z']^{-1} \tag{C.6}$$

En remplaçant les relations C.4 et C.5 dans celle de bi-orthogonalité (C.3) nous obtenons:

$$[q]N^{-1}F[p] = I \tag{C.7}$$

En combinant la relation précédente avec celle du problème à gauche correspondant à $N^{-1}F$ on obtient[1]:

$$[q][p] = [z]^{-1} \tag{C.8}$$

C.3 Relation entre X vecteurs propres de synthèse et $\mathcal{X}$ vecteurs propres globaux

Dans l'annexe G, la relation entre les états locaux et les états globaux est donnée par:

$$X = [p]\,\mathcal{X} \tag{C.9}$$

En multipliant cette équation par $[q]$ et en utilisant la relation C.8, on obtient:

$$\mathcal{X} = [z][q]X \tag{C.10}$$

C.4 Identification des matrices $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$

Au chapitre 5, la formulation du modèle de synthèse est donnée par:

$$N\dot{X} = FX + B_A\dot{U}_e \tag{C.11}$$

En remplaçant X par $[p]\mathcal{X}$ on a:

$$N[p]\dot{\mathcal{X}} = F[p]X + B_A\dot{U}_e \tag{C.12}$$

donc:

$$[p]\dot{\mathcal{X}} = N^{-1}F[p]X + N^{-1}B_A\dot{U}_e \tag{C.13}$$

mais $qp = z^{-1}$ et $qN^{-1}Fp = I$ donc

$$\dot{\mathcal{X}} = z\mathcal{X} + zqN^{-1}B_A\dot{U}_e \tag{C.14}$$

[1] $zq = qN^{-1}F$

mais $qN^{-1}F = zq$, donc $qN^{-1} = zqF^{-1}$ soit:

$$\dot{X} = zX + z^2 qF^{-1}B_A\dot{U}_e \tag{C.15}$$

En identifiant avec la relation du modèle global:

$$\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{F}\mathcal{X} + \mathcal{B}\dot{U}_e \tag{C.16}$$

On obtient:

$$\mathcal{F} = z \tag{C.17}$$

$$\mathcal{B} = [z][z][q]F^{-1}\mathcal{B}_A \tag{C.18}$$

L'inversion de la matrice N dans le calcul numérique a pu être évitée grâce à cette dernière relation. A aucun momemt, on n'inverse les vecteurs propres $[p]$ et $[q]$ de façon à ce que ces relations soient vraies même lorsque l'ordre des modèles est réduit.

Annexe D

Le Logiciel COMFIE

D.1 Principe du couplage de zones avec COMFIE

La modélisation de bâtiments multizones par couplage de modèles modaux de zones a fait l'objet de recherche [Blanc-Sommereux][1] qui ont permis d'aboutir à un logiciel de simulation: COMFIE [Peuportier et Blanc Sommereux, 1990][2]. La simulation avec le logiciel COMFIE est basée sur le couplage au cours de la simulation de modèles modaux réduits à l'ordre 3. Chaque zone est représentée par un modèle modal. Ces modèles sont couplés selon le principe du couplage par recouvrement pour constituer le modèle multizone. La simulation de bâtiments selon ce couplage donne de bon résultats. Contrairement à la synthèse modale, COMFIE ne reconstitue pas un modèle **modal** après le couplage des modèles modaux de zones. En effet la résolution du couplage et de la simulation se font **simultanément**. Les bonnes performances de ce type de couplage ont été le point de départ des recherches exposées dans cette thèse dans le domaine du couplage de zones par synthèse modale.

La résolution simultanée du couplage et de la simulation dans COMFIE est maintenant brièvement rappelée. Dans les expressions 7.4 et 7.5, les sollicitations sont uniquement extérieures, U_e. Pour le couplage de modèles locaux il faut bien sûr tenir également compte des sollicitations de couplage. Les sollicitations de couplage dans COMFIE sont les températures dites "équivalentes". Ces températures équivalentes sont les températures de chaque zone auxquelles ont été rajoutées un terme tenant compte du flux solaire incident sur la paroi mitoyenne.

D.1.1 Les températures équivalentes comme sollicitations de couplage

Le couplage des zones dans COMFIE est un couplage par recouvrement d'une partie commune aux zones couplées. Comme il a été décrit au chapitre 5, cette partie commune ne se limite pas au seul mur mitoyen des zones couplées mais inclut également les échanges superficiels. Cette partie commune est alors soumise à des conditions aux limites de 1ère espèce et est équivalente au mur mitoyen soumis à des conditions de 3ème espèce (section 3.3 traitant des conditions aux limites). Les frontières de cette partie commune étant

[1], Blanc-Sommereux, I., 1987, *Simulation de bâtiments multizones par couplage de modeles modaux reduits*, DEA Université Paris VI.

[2] Peuportier, B. et I. Blanc Sommereux, 1990, *Simulation tool with its expert interface for the thermal design of multizone buildings*, International Journal of Solar Energy, 8,109-120, 1990.

soumises à des conditions de Dirichlet (1ère espèce), l'unicité du champ de température dans la partie commune permet le raccordement correct des modèles (voir démonstration page 66).

L'unicité du champ de température dans la partie commune peut ne plus être respectée si des sollicitations agissent à l'intérieur de la zone de recouvrement. Ce cas se présente dans COMFIE avec le flux solaire transmis par les vitrages qui est absorbé par la paroi mitoyenne. Dans COMFIE [Peuportier et Blanc Sommereux, 1989][3], le rayonnement solaire entrant par les différents vitrages de la zone est globalisé dans un flux unique considéré comme diffus. Une partie de ce flux est réfléchie par les murs et renvoyée hors de la zone à travers les vitrages. Le flux solaire net restant dans la zone est distribué sur les différentes parois en fonction de leur surface. Une partie de ce flux est ainsi absorbée par chaque paroi et le reste est cédé à à l'air.

Dans le cas d'un bâtiment bizone, le bilan au noeud sur la frontière du mur mitoyen pour la zone 1 donne ainsi le flux net absorbé par la face intérieure du mur commun égal à la somme du flux absorbé par échange convectif et radiatif et le flux solaire absorbé (figure D.1):

$$\phi_{1a} = h_{1a}(T_1 - T_{1Ma}) + \phi_{sol1a} \qquad \text{(D.1)}$$

avec:

- T_1 température de la zone 1
- ϕ_{sol1a} flux solaire absorbé par le mur mitoyen de la zone 1 et 2
- T_{1Ma} température de surface du mur

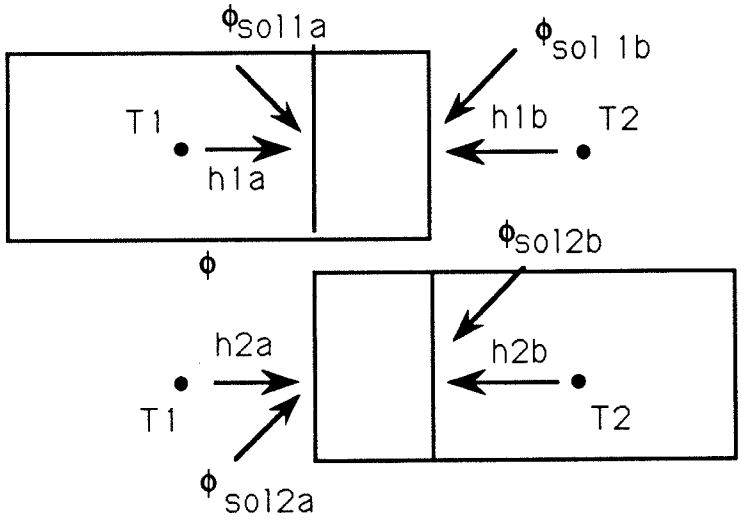


Figure D.1: Modèles locaux dans Comfie

L'unicité du champ de température dans la partie commune pourra néanmoins être respectée si:

[3] Peuportier, B. et I. Blanc Sommereux, 1989, *COMFIE, Calcul d'Ouvrages Multizones Fixé à une Interface Experte* Manuel des utilisateurs, Centre d'Energétique, Ecole des Mines de Paris.

- la sollicitation appliquée à l'intérieur de la zone de recouvrement est strictement identique pour les deux modèles comprenant le mur mitoyen. C'est à dire pour ce cas précis si $(\phi_{sol1a} = \phi_{sol2a})$ et $(\phi_{sol1b} = \phi_{sol2b})$.
- ou si cette sollicitation est reportée sur la frontière de la partie commune en définissant une variable intermédiaire. Cette nouvelle variable devra alors respecter les conditions de raccordement pour le couplage par recouvrement.

Cette seconde condition a été implémentée dans COMFIE en définissant des températures équivalentes. Les températures équivalentes sont définies comme étant les températures de chaque zone auxquelles ont été rajoutées un terme tenant compte du flux solaire sur la paroi mitoyenne:

$$T_{12eq} = T_1 + \frac{\phi_{sol1a}}{h_{1a}} \tag{D.2}$$

$$T_{21eq} = T_2 + \frac{\phi_{sol2b}}{h_{2b}} \tag{D.3}$$

Ces températures équivalentes permettent de réécrire les bilans sur les faces du mur mitoyen sous la forme suivante:

$$\phi_{1a} = h_{1a}(T_{12eq} - T_{1Ma}) \tag{D.4}$$

$$\phi_{2b} = h_{2b}(T_{21eq} - T_{2Mb}) \tag{D.5}$$

Le raccordement des modèles de zones s'exprimera alors en égalant les températures équivalentes pour les deux zones:

$$T_{12eq} = \theta_{12eq} \tag{D.6}$$

$$T_{21eq} = \theta_{21eq} \tag{D.7}$$

L'intérêt de cette représentation est qu'elle permet le couplage des zones par le biais d'un seul type de variable qui combine la température de l'air et le flux solaire absorbé par le mur mitoyen. Dans le cas où on raccorde plusieurs zones autour de la zone principale, le modèle de cette dernière devra avoir en sorties N_{kc} températures équivalentes respectivement associées à chacun des N_{kc} murs communs. La représentation avec les températures équivalentes permet de définir la zone de recouvrement soumise à des conditions de 1ère espèce comme sur la figure D.2: $U_{1c} = T_{21eq}$ et $U_{2c} = T_{12eq}$.

D.1.2 Le simulateur dans COMFIE

Pour chaque ambiance k d'un bâtiment, l'évolution de la température intérieure est représentée par un modèle d'état d'ordre M_k:

$$X_k^{n+1} = [e^{F_k \delta t}] X_k^n + [\mathcal{W}_k^\alpha](U_{ke}^{n+1} - U_{ke}^n) + [\mathcal{W}_k^\beta](Y_k^{n+1} - Y_k^n) \tag{D.8}$$

$$Y_k^{n+1} = [H_k] X_k^{n+1} + [S_{ke}^\alpha] U_{ke}^{n+1} + [S_k^\beta] Y_k^{n+1} \tag{D.9}$$

Les matrices $\mathcal{W}_k^\alpha$ et $\mathcal{W}_k^\beta$ sont reliées respectivement aux matrices B_k^α et B_k^β par la relation:

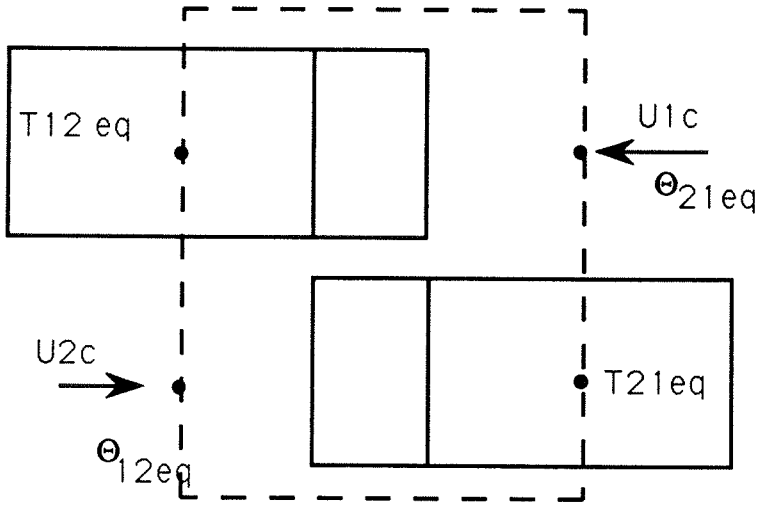


Figure D.2: Zone de recouvrement d'un bizone dans Comfie

$$\mathcal{W}_k = \frac{-1}{F_k \delta t}(1 - e^{F_k \delta t}) B_k \tag{D.10}$$

Les sorties Y_k pour le modèle k sont constituées de $(N_{kc} + 1)$ sorties. En effet à chaque modèle local de zone sont associées N_{kc} zones mitoyennes. Pour chaque zone, on a donc 1 sortie de température de la zone plus N_{kc} températures équivalentes. On note T_{kjeq} la $j$ème température équivalente de la zone k. Pour simplifier la compréhension du couplage, le couplage de deux zones est représenté avec la figure D.3.

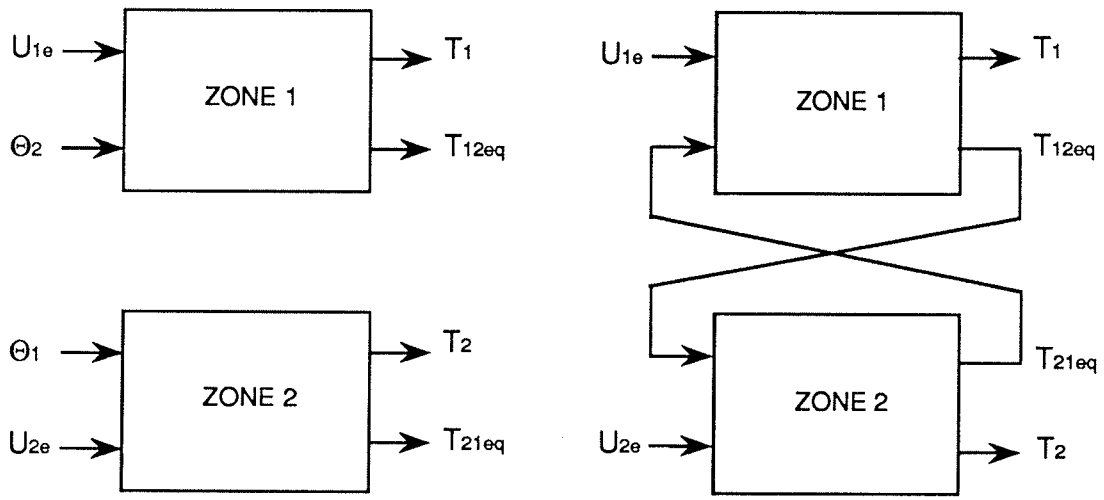


Figure D.3: Principe du couplage des zones dans COMFIE

Pour l'ensemble des ambiances d'un bâtiment, l'évolution des températures intérieures est représentée par un modèle d'état (juxtaposition des sorties et des états

modaux):

$$X^{n+1} = [e^{F\delta t}]X^n + [W^\alpha](U_e^{n+1} - U_e^n) + [W^\beta](Y^{n+1} - Y^n) \quad \text{(D.11)}$$

$$Y^{n+1} = [H]X^{n+1} + [S^\alpha]U_e^{n+1} + [S^\beta]Y^{n+1} \quad \text{(D.12)}$$

Pour résoudre ce système, on remplace X_k^{n+1} dans la deuxième équation par sa valeur donnée par la première équation pour aboutir au système suivant:

$$Y^{n+1} = [MGIF]X^n + [MGIE]U_e^{n+1} - [MGID]U_e^n + [MGIC]Y^n \quad \text{(D.13)}$$

$$X^{n+1} = e^{F\delta t}X^n + W^\alpha(U_e^{n+1} - U_e^n) + W^\beta(Y^{n+1} - Y^n) \quad \text{(D.14)}$$

avec:

- $[MGIF] = [I - [H][W^\beta] - [S^\beta]]^{-1}[H][F]$
- $[MGIE] = [I - [H][W^\beta] - [S^\beta]]^{-1}([H][W^\alpha] + [S^\alpha])$
- $[MGID] = [I - [H][W^\beta] - [S^\beta]]^{-1}[H][W^\alpha]$
- $[MGIC] = [I - [H][W^\beta] - [S^\beta]]^{-1}[H][W^\beta]$

I étant la matrice identité.

Connaissant les valeurs Y^n, U^n et U^{n+1}, les deux dernières équations permettent alors de calculer Y au pas de temps suivant $n+1$.

Annexe E

Intégration de l'équation d'état modale

E.1 Forme intégrale générale

L'équation d'état du modèle local k peut se mettre sous forme matricielle en considérant un nombre fini de modes:

$$\dot{X}_k = F_k X_k + B_k \dot{U}_k \tag{E.1}$$

avec :

- U_k : sollicitations extérieures.
- F_k : matrice diagonale des valeurs propres λ_{ki} (i indice du mode).

L'équation précédente est résolue en deux étapes:

- **résolution du problème homogène** (Les sollicitations sont mises à zéro)
  La solution pour chaque composante i du vecteur propre est:

$$X_i = A(t)e^{\lambda_i t} \tag{E.2}$$

- **méthode de la variation de la constante sur l'équation complète:**

$$\dot{X}_i(t) = \frac{\partial A(t)}{\partial t} e^{\lambda_i t} + A(t)\lambda_i e^{\lambda_i t} \tag{E.3}$$

En reprenant l'équation E.1 pour p sollicitations:

$$\dot{X}_i(t) = \lambda_i X_i(t) + \sum_{j=1}^{p} B_{ij}\dot{U}_{kj} \tag{E.4}$$

L'équation E.4 peut également se mettre sous la forme:

$$\dot{X}_i(t) = A(t)\lambda_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^{p} B_{ij}\dot{U}_{kj} \tag{E.5}$$

Par conséquent, en égalant les équations E.3 et E.5:

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^{p} B_{ij} \dot{U}_{kj} \tag{E.6}$$

En intégrant l'équation E.6, on obtient:

$$A(t) = \int_0^t e^{-\lambda_i \theta} \sum_{j=1}^{p} B_{ij} \dot{U}_{kj}(\theta) d\theta + C \tag{E.7}$$

avec C constante d'intégration.

La solution est donc:

$$X_i(t) = X_i(0) e^{\lambda_i t} + \int_0^t e^{\lambda_i (t-\theta)} \sum_{j=1}^{p} B_{ij} \dot{U}_{kj}(\theta) d\theta \tag{E.8}$$

E.2 Discrétisation temporelle des sollicitations

Lorsque les sollicitations ont une forme simple on peut obtenir une solution analytique exacte pour le vecteur d'état X en intégrant E.8. Dans les autres cas on peut procéder à une discrétisation du temps. Les sollicitations disponibles dans les fichiers météorologiques sont données à des intervalles de temps δt et nous supposons qu'elles varient linéairement entre deux valeurs successives.

On exprime ainsi la dérivée temporelle du vecteur "sollicitation" U_j par:

$$\dot{U}_j = \frac{U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}}{\delta t} \tag{E.9}$$

En reprenant l'équation E.8 on intègre de 0 à δt:

$$X_i(t) = X_i(0) e^{\lambda_i t} + \int_0^{\delta t} e^{\lambda_i (\delta t - \theta)} \sum_{j=1}^{p} B_{ij} \frac{U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}}{\delta t} d\theta \tag{E.10}$$

$$X_i(t) = X_i(0) e^{\lambda_i t} + \frac{e^{\lambda_i \delta t}}{\delta t} \left[(\frac{-1}{\lambda_i}) e^{-\theta \lambda_i} \right]_0^{\delta t} \sum_{j=1}^{p} B_{ij} (U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}) \tag{E.11}$$

$$X_i(t) = X_i(0) e^{\lambda_i \delta t} + \frac{-1}{\delta t \lambda_i} (1 - e^{\lambda_i \delta t}) \sum_{j=1}^{p} B_{ij} (U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}) \tag{E.12}$$

ou bien

$$X_i^{n+1} = X_i^n e^{\lambda_i \delta t} + \sum_{j=1}^{p} W_{ij} (U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}) \tag{E.13}$$

avec

$$W_{ij} = \frac{-1}{\lambda_i \delta t} (1 - e^{\lambda_i \delta t}) B_{ij} \tag{E.14}$$

Annexe F

Spectre de réponse à une sollicitation indicielle

L'intérêt de la représentation dans la base modale est entre autre liée aux possibilités de réduction de l'ordre des modèles (voir section 4.1.5). Parmi les outils développés pour mettre en évidence les modes dominants, le spectre de réponse indicielle est un outil permettant de les distinguer pour des couples sollicitations/sorties.

L'intégration de l'équation d'état donne l'équation suivante (voir Annexe E)[1]:

$$X_i(t) = X_i(0)e^{\lambda_i t} + \int_0^t e^{\lambda_i(t-\theta)} \sum_{j=1}^{p} B_{ij}\dot{U}_j(\theta)d\theta \tag{F.1}$$

A partir d'un état thermique uniforme (pris à zéro pour simplifier), on applique une fonction échelon unitaire sur la $j$ème sollicitation U_j et l'on étudie la $q$ème mesure Y_q. L'intégration de l'équation F.1 est alors:

$$X_i(t) = e^{\lambda_i t}B_{ij} \tag{F.2}$$

Soit:

$$Y_q(t) = \sum_{i=1}^{N} e^{\lambda_i(t)}H_{qi}B_{ij} + G_{qj} \tag{F.3}$$

ou encore:

$$Y_q(t) = G_{qj}(1 - \sum_{i=1}^{N} r_{qj}(i)e^{\lambda_i(t)}) \tag{F.4}$$

avec:

$$r_{qj} = \frac{-H_{qi}B_{ij}}{G_{qj}} \tag{F.5}$$

La réponse $Y_q(t)$ apparait donc comme une somme d'exponentielles décroissantes. La dynamique des phénomènes thermiques est traduite, dans la réponse Y_q selon une mesure à une sollicitation U_j, par la décomposition du paramètre statique G_{qj} en coefficients de pondération, r_{qj}, associés aux temps propres du système[2]. L' ensemble de ces

[1] i est l'indice du mode

[2] En régime permanent $Y_q(t) = G_{qj}$ et donc $\sum_{i=1}^{N} r_{qj}(i) = 1$ lorsque le modèle est non réduit

coefficients est le spectre de réponse indicielle d'une sortie associée à une sollicitation. Un exemple de spectre est donné sur la figure F.1. Il s'agit du spectre de la réponse d'une zone 1 à un échelon de température extérieure.

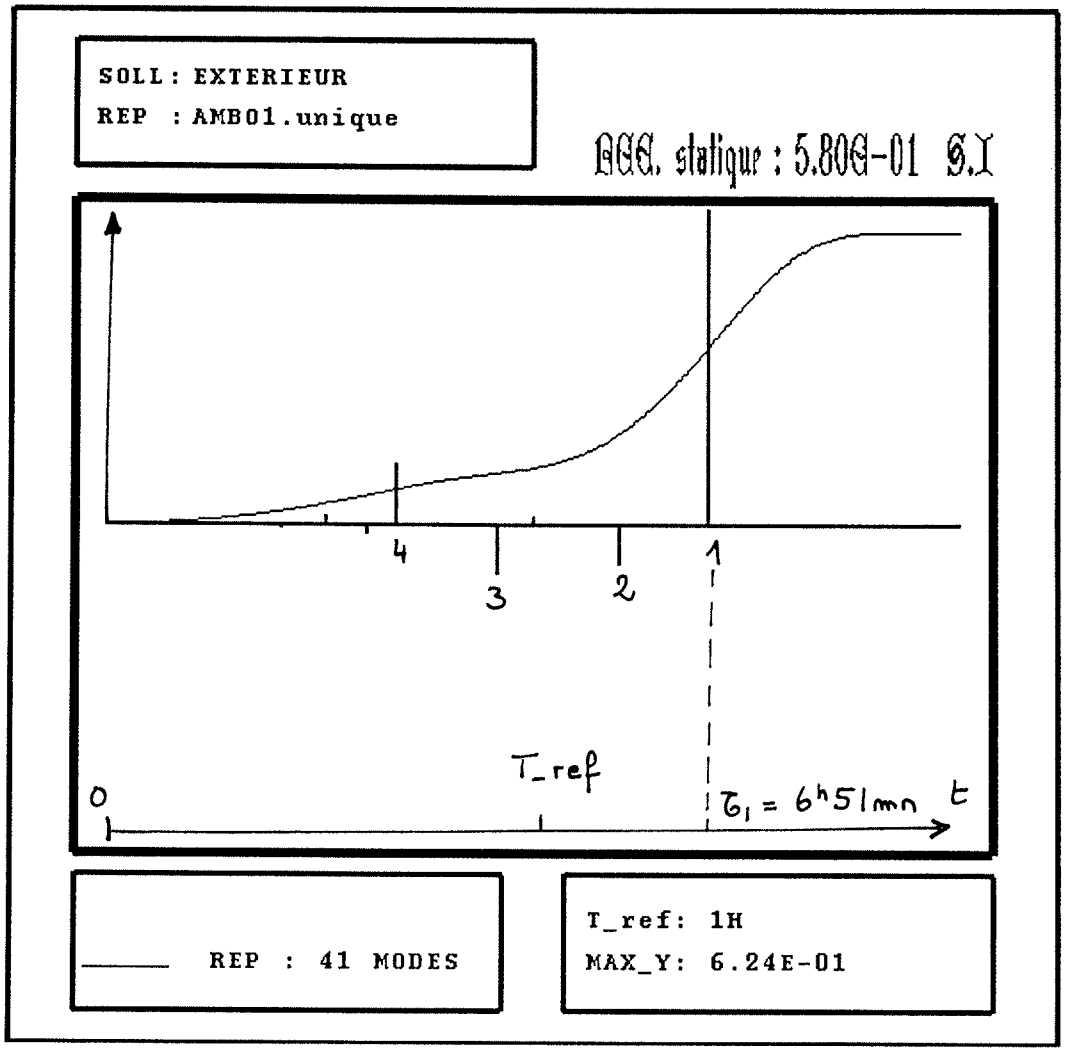


Figure F.1: Spectre de la réponse de la zone 1 à la température extérieure

Pour illustrer le rôle des différents termes de la somme, on représente le coefficient r_{qj} en fonction du temps caractéristique correspondant $\tau_i = \frac{-1}{\lambda_i}$. Les spectres sont donnés selon une échelle de temps logarithmique de façon à dilater la partie correspondant aux faibles constantes de temps[3]

Les raies représentées sur le spectre sont les taux de contribution de chacun des modes à la réponse de l'échelon indiciel, et elles permettent ainsi aisément de distinguer les modes dominants pour ces couples de sollicitations/sorties. Dans cet exemple, le mode 1 a un effet dominant pour ce couple sollicitation/sortie. Si toutes les raies sont de même

[3]L'échelle de temps logarithmique est la suivante: $t_{log} = \frac{\log(1+100\frac{t}{t_{ref}})}{\log(101)}$. t_{ref} est choisi égal à une heure dans cet exemple

signe, elles participent toutes dans le même sens à ce que la réponse évolue vers sa valeur en régime permanent. Au contraire une raie négative contrarie cette évolution inévitable en la retardant (cas des modes 2 et 3 dans ce cas précis).

On superpose sur le même graphe le tracé des raies r_{qj} et la réponse à l'échelon $\frac{Y_q}{G_{qj}}$ (donnée aussi avec une échelle logarithmique pour le temps). Lorsque le rapport $\frac{t}{\tau_i}$ est faible, la valeur de l'exponentielle associée est proche de 1 et la contribution du mode à la réponse à cet instant précis est donc faible; lorsqu'il devient au contraire grand, la valeur de l'exponentielle tend vers zéro et le mode apporte le maximum de sa contribution égale à sa part statique. La courbe d'évolution est le reflet de la décomposition du terme dynamique en coefficients pondérés par des exponentielles dont l'importance varie selon le temps écoulé.

La formulation donnée par l'équation F.4 est celle correspondant à la décomposition "soustractive" pour le champ des températures (On soustrait à la partie statique les contributions des modes). On peut également formuler une décomposition "additive" sous la forme suivante:

$$Y_q(t) = G_{qj} \sum_{i=1}^{N} r_{qj}(i)(1 - e^{\lambda_i(t)}) \tag{F.6}$$

Annexe G

Equivalence du modèle de synthèse et du modèle modal global

G.1 Equivalence de la méthode de synthèse (sans réduction des modèles) avec l'approche modale directe.

Pour montrer cette équivalence, nous allons comparer les problèmes aux valeurs propres obtenus à partir de chacune des méthodes.

Nous appelons *modèle modal global* ou *modèle global*, le modèle obtenu par une approche modale directe, les modes le caractérisant sont appelés *modes globaux* (fonctions propres globales...).

De plus, dans la suite du paragraphe, toutes les variables ou fonctions relatives au modèle global sont surlignées par un ˜. Pour que les démonstrations suivantes soient plus simples, nous avons choisi de traiter le cas du couplage de deux composants quelconques. Sachant que pour Q composants, la démarche présentée ici reste valable (le couplage de Q composants peut être obtenu récursivement par Q-1 couplages deux à deux.

Au modèle de synthèse obtenu après la phase d'assemblage (Equations 4.44), correspond un problème aux valeurs propres du type :

$$z_i \, N \, p_i \; = \; F \, p_i \tag{G.1}$$

avec :

- z_i : i ème valeur propre de $N^{-1}F$,
- p_i : i ème vecteur propre de $N^{-1}F$

De même, le problème aux valeurs propres relatif au modèle global s'écrit de la façon suivante (pour le i ème mode propre) :

$$
\begin{array}{lrcl}
\forall M \in \mathcal{D}_k^0 & & & \\
 & \ldots & \vdots & \ldots \\
 & \mathcal{L}_k[\tilde{\mathcal{V}}_{ki}(M)] & = & \tilde{z}_i \; C_k \; \tilde{\mathcal{V}}_{ki}(M) \\
 & \ldots & \vdots & \ldots \\
\forall M \in \Gamma_{ke} & & & \\
 & \ldots & \vdots & \ldots \\
 & \mathcal{B}_k[\tilde{\mathcal{V}}_{ki}(M)] & = & 0 \\
 & \ldots & \vdots & \ldots \\
\forall M \in \Gamma_{kjc} \quad \text{Cas du couplage bord à bord} & & & \\
 & \tilde{\mathcal{V}}_{ki}(M) & = & \tilde{\mathcal{V}}_{mi}(M) \\
 & K_k(M)\nabla\tilde{\mathcal{V}}_{ki}(M).\vec{n}_{km} & + & K_m(M)\nabla\tilde{\mathcal{V}}_{mi}(M).\vec{n}_{mk} \; = \; 0
\end{array}
\qquad \text{(G.2)}
$$

avec :

- $\tilde{\mathcal{V}}_{ki}(M)$: partie de la ième fonction propre globale concernant le composant k,
- $\tilde{z}_i$: i ème valeur propre globale de l'opérateur $\mathcal{L}$

Les opérateurs de la chaleur $\mathcal{L}_k$ de chaque sous domaine $\mathcal{D}_k$ sont les mêmes que ceux ayant définis les modèles locaux.

Par contre, les conditions aux limites d'un sous domaine $\mathcal{D}_k$, vérifiées par les fonctions propres globales sont différentes de celles respectées par les fonctions propres locales.

En effet, l'opérateur de conditions aux limites $\mathcal{B}_k$ appliqué aux fonctions propres locales $V_{ki}(M)$ est nul quelque soit le point M appartenant à une interface quelconque de $\mathcal{D}_k$. En revanche la relation $\mathcal{B}_k[\tilde{\mathcal{V}}_{ki}(M)] = 0$ n'est vraie que pour les points M appartenant à une interface Γ_{ke} séparant le composant k du milieu extérieur $\mathcal{D}'$.

Au niveau des interfaces de couplage, les fonctions propres globales vérifient des conditions de raccordement traduisant un contact thermique entre les composants. Ainsi la similitude entre le système global (Equation G.2) et les systèmes locaux(4.15) n'est que partielle.

Si dans les relations du modèle global(G.2) vérifiées aux interfaces entre les $\mathcal{D}_k$ on introduit l'opérateur des conditions aux limites $\mathcal{B}_k$ (cf relations 4.7), on obtient :

$$\mathcal{B}_k[\tilde{\mathcal{V}}_{ki}(M)] = \mathcal{B}_m[\tilde{\mathcal{V}}_{mi}(M)] - (\sigma_{kjc} + \sigma_{mjc}) \; \tilde{\mathcal{V}}_{mi}(M)$$

et le second membre de cette équation n'ayant aucune raison d'être nul, on peut retenir simplement que:

$$\mathcal{B}_k[\tilde{\mathcal{V}}_{ki}(M)] \neq 0 \quad \forall M \in \Gamma_{kjc} \quad j = 1, ..., N_{kc} \qquad \text{(G.3)}$$

Les deux problèmes aux valeurs propres précités sont en fait formellement très différents.

De plus, le modèle de synthèse ne dépend que des caractéristiques des modèles locaux (valeurs propres, fonctions propres, champs statiques...), qui n'interviennent pas a priori dans le modèle global.

La démarche que nous avons alors retenue, pour établir l'équivalence des problèmes exprimés par les relations G.1 et G.2, consiste tout d'abord à relier les fonctions propres **globales** aux caractéristiques des modèles **locaux**, puis à remplacer les fonctions globales par ces nouvelles expressions dans les relations G.2, ce qui permet, moyennant quelques manipulations mathématiques d'obtenir une formulation du problème aux valeurs propres global identique à celle donnée par la relation G.1.

Les différentes étapes de cette démarche sont explicitées ci-après.

Décomposition des fonctions propres globales

La condition pour qu'une fonction $f(M)$ à valeurs complexes définie dans $\mathcal{D}_k$, continue et dérivable dans $\mathcal{D}_k^0$, soit décomposable sur la base des fonctions propres $V_{ki}(M)$, est que cette fonction vérifie la condition aux limites homogène $\mathcal{B}_k[f(M)] = 0$.

Dans ces conditions, sa décomposition est unique et s'écrit :

$$f(M) = \sum_{j=1}^{\infty} < f(M), C_k(M)\, V_{km}(M) > \; V_{kj}(M)$$

avec un produit scalaire défini par :

$< f(M), C_k(M)\, V_{km}(M) > = \int_{\mathcal{D}_k^0} f(M)\, C_k(M)\, V_{kj}(M)\, dM$

Or nous avons vu précédemment que les fonctions propres globales vérifient une condition aux limites non homogène sur les interfaces de couplage (relation G.3).

Si bien que ces fonctions $\tilde{\mathcal{V}}_{ki}$ ne sont pas directement décomposables sur la base des fonctions propres locales.

On décide alors d'exprimer ces fonctions globales comme la superposition d' une fonction vérifiant une condition aux limites homogène sur chaque interface de couplage et donc décomposable sur la base des fonctions propres locales $\tilde{\mathcal{V}}_{ki}^d(M)$, et d'une fonction résiduelle $\tilde{\mathcal{V}}_{ki}^r(M)$, vérifiant des conditions aux limites inhomogènes sur les interfaces de couplage. Soit :

$$\tilde{\mathcal{V}}_{ki}(M) = \tilde{\mathcal{V}}_{ki}^d(M) + \tilde{\mathcal{V}}_{ki}^r(M) \qquad \text{(G.4)}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k(\tilde{\mathcal{V}}_{ki}^d(M)) &= 0 \\ \mathcal{L}_k(\tilde{\mathcal{V}}_{ki}^d(M)) &= \tilde{z}_i\, C_k\, (\tilde{\mathcal{V}}_{ki}^d(M) + \tilde{\mathcal{V}}_{ki}^r(M)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k(\tilde{\mathcal{V}}_{ki}^r(M)) &= \tilde{U}_{kji} \quad j = 1, \ldots, N_{kc} \\ \mathcal{L}_k(\tilde{\mathcal{V}}_{ki}^r(M)) &= 0 \end{aligned}$$

Les $\tilde{U}_{kji}$ s'apparentent en fait à des sollicitations de couplage qu'il nous faut déterminer.

La solution vérifiée par les fonctions globales résiduelles,$\tilde{\mathcal{V}}^r_{ki}(M)$, est en fait un champ statique de $\mathcal{D}_k$.

On obtient alors :

$$\tilde{\mathcal{V}}_{ki}(M) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{p}_{kli}\, V_{kl}(M) + \sum_{j=1}^{N_k} S_{kj}(M)\, \tilde{U}_{kji} \tag{G.5}$$

Dans l'expression G.5, les coefficients de décomposition $\tilde{p}$ des fonctions globales sur les bases propres locales ainsi que les "sollicitations" de couplage $\tilde{U}_{kji}$ sont inconnus.

Ces dernières se déterminent à partir des conditions de raccordement des fonctions propres au niveau des interfaces de couplage (relations G.2, vérifiées $\forall M \in \Gamma_{kjc}$). On aboutit finalement à une équation de connexion qui a la même allure que celle obtenue lors de la construction du modèle de synthèse, et qui permet de relier les inconnues $\tilde{U}_{kji}$ et aux coefficients de décomposition $\tilde{p}$. Soit :

$$[G_{rc}]\, \tilde{U}_i = [H_r]\, \tilde{p}_i \tag{G.6}$$

Remarque :

- i correspond à l'indice du mode global,
- les matrices $[G_{rc}]$ et $[H_r]$ sont rigoureusement les mêmes que celles figurant dans l'équation de connexion 4.43.

Des relations précédentes, on peut exprimer formellement la sollicitation de couplage relative à la j ième interface du composant k :

$$\tilde{U}_{kji} = \sum_{l=1}^{\infty} \theta_{kjl}\, \tilde{p}_{kli} \tag{G.7}$$

Ainsi, la combinaison des relations G.5 et G.7 permet d'écrire la partie de la i ème fonction propre globale définie dans le composant k sous la forme :

$$\tilde{\mathcal{V}}_{ki}(M) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{p}_{kli} V_{kl}(M) + \sum_{j=1}^{N_k} \sum_{l=1}^{\infty} S_{kj}(M) \theta_{kjl}\, \tilde{p}_{kli} \tag{G.8}$$

Cette dernière relation est vérifiée, quelque soit le composant k, quelque soit le mode global i, et quelque soit le point M du domaine $\mathcal{D}_k$.

Les coefficients de décomposition $(\tilde{p})$ des fonctions propres globales sur les bases locales restent néanmoins inconnus. Leur détermination va découler de la nouvelle formulation du problème aux valeurs propres global.

G.1.1 Détermination des coefficients de décomposition

Pour formuler différemment le problème aux valeurs propres du modèle global, nous allons introduire dans l'expression classique de ce problème, donnée par la relation G.2, les expressions G.8 définies ci-dessus.

Ainsi, en tenant compte également du problème aux valeurs propres vérifié par les fonctions propres locales (relations 4.15 du problème local), on obtient pour un composant k, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_{kl}\, C_k\, \tilde{p}_{kli}\, V_{kl}(M) &= \tilde{z}_i\, C_k \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{p}_{kli}\, V_{kl}(M) \\ &+ \tilde{z}_i\, C_k \sum_{j=1}^{N_k} \sum_{l=1}^{\infty} S_{kj}(M)\, \theta_{kjl}\, \tilde{p}_{kli} \end{aligned} \tag{G.9}$$

Pour simplifier cette expression, en utilisant la propriété de bi-orthogonalité des fonctions propres locales, il suffit de faire le produit scalaire des membres de chaque équation par $V_{km}(M)$. Ainsi, on obtient :

$$\lambda_{kl}\, \tilde{p}_{kli} = \tilde{z}_i \left[\tilde{p}_{kli} + \sum_{j=1}^{N_k} \left(\int_{\mathcal{D}_k^0} C_k\, S_{kj}(M)\, V_{kl}(M)\, dM \right) \sum_{q=1}^{\infty} \theta_{kjq}\, \tilde{p}_{kqi} \right] \tag{G.10}$$

Or les relations 4.20 et 4.28, montrent que $\int_{\mathcal{D}_k^0} C_k\, S_{kj}(M)\, V_{kl}(M)\, dM$ est un élément de la matrice $[B_c]$ du modèle juxtaposé.

De même les coefficients θ_{kjq} sont des éléments des matrices $[G_{rc}]^{-1}\, [H_r]$.

Si bien que l'ensemble des relations G.10 pour la totalité des Q composants du système $\mathcal{D}$ peut s'écrire matriciellement sous la forme :

$$F\, \tilde{p}_i = \tilde{z}_i\, N\, \tilde{p}_i \tag{G.11}$$

avec :

$$[N] = [I] - [B_c][G_{rc}]^{-1}[H_r]$$

On retrouve alors un problème aux valeurs propres équivalent à celui du modèle de synthèse (relation G.1).

L'unicité du spectre des valeurs propres du couple matriciel (F,N) entraine donc l'égalité des spectres des valeurs propres z_i ainsi qu'une relation de colinéarité des vecteurs propres p_i.

Ce résultat permet de donner une interprétation des coefficients de décomposition des parties dynamiques des fonctions propres globales sur les bases locales, en effet ces coefficients ne sont rien d'autre que les vecteurs propres de $N^{-1}F$.

Ainsi, nous venons de montrer l'équivalence du modèle de synthèse non réduit avec un modèle modal obtenu par une approche directe. On peut alors utiliser un modèle de synthèse à la fois pour faire de la simulation et aussi de l'analyse puisque l'on peut reconstituer les modes propres globaux (fonctions propres, valeurs propres) à partir, entre autre, des éléments propres des matrices $N^{-1}F$.

G.2 Relation entre les états globaux $\mathcal{X}$ et les états locaux X

L'égalité de la partie dynamique du champ de température obtenue à partir du modèle de synthèse et de celle obtenue à partir de la forme modale directe permet d'écrire la relation suivante, pour un composant k du système $\mathcal{D}$.

$$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{X}_i(t)\, \mathcal{V}_{ki}(M) \;=\; \sum_{b=1}^{2} \sum_{l=1}^{n_b} [\delta_{kb}\, V_{bl}(M) \;+\; \theta_{kbl}\, S_{k1}(M)]\; X_{bl}(t) \qquad \text{(G.12)}$$

Or les fonctions propres globales $\mathcal{V}_{ki}(M)$ peuvent s'exprimer à partir des fonctions propres locales et des champs statiques unitaires locaux:

$$\mathcal{V}_{ki}(M) \;=\; \sum_{b=1}^{2} \sum_{l=1}^{n_b} [\delta_{kb}\, V_{bl}(M) \;+\; \theta_{kbl}\, S_{k1}(M)]\; p_{bli} \qquad \text{(G.13)}$$

Ces deux relations peuvent en fait s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} ([V] \;+\; [\Theta])\, X & = & [\mathcal{V}]\, \mathcal{X} \\ ([V] \;+\; [\Theta])\, [p] & = & [\mathcal{V}] \end{array} \qquad \text{(G.14)}$$

La combinaison de ces deux relations matricielles aboutit à l'expression suivante :

$$([V] \;+\; [\Theta])\, X \;=\; ([V] \;+\; [\Theta])\, [p]\, \mathcal{X}$$

d'où la relation entre les états locaux et les états globaux :

$$X \;=\; [p]\, \mathcal{X} \qquad \text{(G.15)}$$

Bibliographie

[Achard,Gicquel] Achard, P., et R., Gicquel, 1986, *European Passive Solar Handbook: preliminary edition, Basic principles and concepts for passive solar architecture*, CEC, DG XII, Luxembourg.

[Adolphe] Adolphe, L., 1991, *L'aide à la décision technique dans la conception architecturale: Application à l'Energétique du bâtiment,* Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris.

[Bacot] Bacot, P., 1984, *Analyse Modale des Systèmes thermique*, Thèse de Docteur Ingénieur, Université Paris VI.

[Bacot,Neveu,Sicard] , Bacot, P., Neveu, A., Sicard, J., 1984, *Analyse modale des phénomènes thermiques en régime variable dans le bâtiment*, Rev. Gén. Therm. Fr., 267, 189-201.

[Balcomb] , Balcomb, D., 1986, *Design tools for passive solar applications*, Proceedings of the 1986 Annual Meeting ASES, Boulder Colorado.

[Blanc-Sommereux,1985] , Blanc Sommereux, I., 1985, *A design method for passive sunspace systems*, Master of Science, Université du Wisconsin, USA.

[Blanc-Sommereux,1987] , Blanc-Sommereux, I., 1987, *Simulation de bâtiments multizones par couplage de modeles modaux reduits*, DEA Université Paris VI.

[Blanc-Sommereux, Lefebvre] , Blanc-Sommereux, I., 1989, *Simulation de bâtiments multizones par couplage de modèles modaux réduits*, CVC, mai 1989, 31-37.

[Blanc-Sommereux, Peuportier] Blanc-Sommereux, I., Peuportier, B., 1991 *A bioclimatic design aid based on multizone simulation* ISES Denver Colorado.

[Bourquin] Bourquin, F., 1990, *Analysis and comparison of several component mode synthesis on one-dimensionnal domains*, Numer. Math. 58, 11-34 (1990).

[Buffat,Lerbet] Buffat, B., Lerbet, F., 1991, *Les vitrages électrochromes* La Recherche, Avril 1991, vol 22, 434-442.

[Carter,1990] Carter, C., 1990, *Computational methods for passive solar simulation*, Solar Energy Vol 45, No. 6, 379-384.

[Carter et De Villiers] Carter, C. et J. De Villiers. 1987, *Principles of passive solar building design*, Pergamon Press, New York.

[Carter,1979] Carter, C., 1979, *A validation of the modal expansion method of modelling heat conduction in passive solar buildings*, Solar Energy, 23, 537-539.

[CEE,1991] CEE, 1991, *Architectures solaires en Europe, Commission des Communautés Européennes*, Edisud, France.

[CEE,1988] CEE, 1988, *Travailler en Ville, Conditions du concours et procédure, Concours d'idées architecturales des communautés européennes.*

[Chen] Chen, M. 1989, *Nouvelle solution modale pour les parois des bâtiments.* Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris.

[Chevalier] Chevalier, J.L., 1991 *La mesure des propriétés des vitrages*, Les rendez-vous du CSTB: Le Bâtiment à l'âge du verre.

[Cools] Cools, C., 1990, *Méthodologie de caractéristion de composants solaires passifs basée sur une technique d'identification*, Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

[Dautray] Dautray, R. et J.L. Lions., 1984, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Collection CEA Masson, Tome 1, 601-610.

[Dehausse] , Dehausse, R., 1988, *Energétique des bâtiments Tomes 1 et 2. Situation, Besoins*, Ouvrage coordonné par R. Dehausse, Pyc Edition.

[Durand] Durand, E., 1961, *Solutions numériques des équations algébriques*, Tome II, Masson.

[European passive solar handbook] , à paraitre *Basic principles and concepts for passive solar architecture.*

[Flament,Blanc-Sommereux,Neveu] Flament, B., Blanc-Sommereux, I., Neveu, A., 1991, *A new technique for thermal modelling of building: The Modal Synthesis*, IBPSA, Sophia Antipolis.

[Flament,Neveu] Flament, B., Neveu, A., 1991, *Traitement des grands systèmes linéaires par synthèse modale*, Journée Soc. Fran. Therm. du 5 juin 91, Modélisation des champs thermiques: techniques innovantes et récents développements.

[Fourier] Fourier, J. *Oeuvres complètes I:252, (in Bachelard, G., Etude sur l'évolution d'un problème de physique: la propagation thermique dans les solides., " L'histoire des sciences. Textes et études", 2ème éd., PARIS Vrin, 1973.*)

[Khoury] El Khoury, K., 1989, *Formulation modale de problèmes de diffusion thermique avec transport.* Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris.

[Khoury,Neveu] El Khoury, K., Neveu, A., 1989, *Analyse modale des systèmes thermiques en présence de transferts non réciproques*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol 32, n2, 213-226.

[Godounov] Godounov, 1973, *Equations de la physique mathématique.* Mir.

[Lefebvre et al.,1990] Lefebvre, G., Neveu, A., El Khoury, K., Salgon, JJ., 1990, *Applying the modal method to thermal modelling* , Conference Internationale des transferts thermiques, Jerusalem, vol 3, p 157.

[Lefebvre,1989] Lefebvre, G., 1989, *Caractérisation de l'inertie thermique d'un bâtiment par analyse modale*, Rev. Gén. Therm. Fr., n0 332-333, Aout Septembre 1989.

[Lefebvre,1987] Lefebvre, G., 1987, *Analyse et réduction modales d'un modèle de comportement thermique de bâtiment*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI.

[Lund] Lund, H., 1985, *Short Reference Years and Test Reference Years for E.E.C. contrat ESF-029-DK.*

[Maillard] Maillard, R., 1991, *Les évolutions des vitrages* Les rendez-vous du CSTB: Le Bâtiment à l'âge du verre.

[Monsen et al.] Monsen, W. A., Klein, S. A., Beckman, W. A., 1982, *The un-utilisability design method for collector storage walls*, Solar Energy, 29, $n^0 5$.

[Morck] Morck, O., C., 1991, *IEA Task XI: Integrated Knowledge Based Solar Design Tool (Isolde)*, Proceedings of the 1991 ISES Conference Denver Colarado.

[Neirac] Neirac, F.P., 1989, *Approche thermique et expérimentale des modèles réduits de comportement thermique de bâtiments*, Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

[Neveu,1988] Neveu, A., 1988, *Condensation du problème aux valeurs propres d'un système thermique complexe par synthèse modale de ses composants*, Note interne, Centre d'Energétique, Ecole des Mines de Paris.

[Neveu,1984] Neveu, A., 1984, *Etude d'un code de calcul d'évolution thermique d'une enveloppe de bâtiment*, Thèse de 3ème cycle de l'Univ. P. et M. Curie, Paris VI.

[Oulefki] Oulefki, H., 1990, Sur la détermination analytique des éléments propres d'une paroi plane composite Raport interne, Gise.

[Özisik] Özisik, M.N., 1980, *Heat conduction*, J.Whiley, New York.

[Le Paige et al] Le Paige, M., Gratia, E., de Herde, A., 1986, *Guide d'aide à la conception bioclimatique Architecture et Climat.* CRA, Université Catholique de Louvain, Belgique.

[Passys] PASSYS, à paraitre, *Rapport final*

[Petitcollot] Petitcollot, C., 1991, *Le vieux Nice, un exemple remarquable de climatisation urbaine*, Séminaire Architecture (Bio)climatique, AFME 4/5 Juillet 1991.

[Peuportier et Blanc Sommereux, 1990] Peuportier, B. et I. Blanc Sommereux, 1990, *Simulation tool with its expert interface for the thermal design of multizone buildings*, International Journal of Solar Energy, 8,109-120, 1990.

[Peuportier et Blanc Sommereux, 1989] Peuportier, B. et I. Blanc Sommereux, 1989, *COMFIE, Calcul d'Ouvrages Multizones Fixé à une Interface Experte* Manuel des utilisateurs, Centre d'Energétique, Ecole des Mines de Paris.

[Sacadurra] Sacadurra, 1980, *Initiation aux transferts thermiques*, Technique et Documentation, Paris.

[Salgon] Salgon, J.J., 1987, *Analyse modale par discrétisation spatiale - Application à la modélisation des ponts thermiques dans le bâtiment*, Thèse de Doctorat de l'univ. Pierre et Marie Curie, Paris VI.

[Sicard] Sicard, 1984, *Analyse modale appliquée à la thermique* Thèse de docteur Ingénieur, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris VI.

[Sicard,Bacot,Neveu] Sicard, J., Bacot, P., Neveu, A., 1985, *Analyse modale des échanges thermiques dans le bâtiment*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol 28 $n^0$1, 111-123.

[Steemers] Steemers, T., 1989-1990, *Rapport de Recherche CCE DG XII, EUR 13094 EEC.*

[SYMBOL] Blanc-Sommereux, I., Caplain, G., Ebert, R., Flament, B., Lefebvre, G., Neveu, A. and Peuportier, B., 1989, Rap[port AFME/ARMINES 1988/1989 projet SYMBOL.