

Méthodes numériques de représentation à variables séparées pour la résolution des problèmes paramétriques en mécanique non-linéaire des structures

Sophie Cartel

École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Centre des Matériaux

Directeur de thèse

David Ryckelynck

Rapporteurs

Pierre Joyot

Florian de Vuyst

Examineur

Aziz Hamdouni

25 Novembre 2011

Plan

- 1 **Introduction**
- 2 **Modèle d'ordre réduit évolutif pour une suite de simulations**
 - État de l'art
 - Concept d'évènements récurrents
 - Résolution de problèmes inverses à évènements récurrents
- 3 **Modèle d'ordre réduit évolutif pour des simulations multidimensionnelles**
 - État de l'art
 - Extension de la méthode APR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APR
 - Extension de la méthode APHR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APHR
- 4 **Conclusion et Perspectives**

Plan

- 1 Introduction**
- 2 Modèle d'ordre réduit évolutif pour une suite de simulations
 - État de l'art
 - Concept d'évènements récurrents
 - Résolution de problèmes inverses à évènements récurrents
- 3 Modèle d'ordre réduit évolutif pour des simulations multidimensionnelles
 - État de l'art
 - Extension de la méthode APR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APR
 - Extension de la méthode APHR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APHR
- 4 Conclusion et Perspectives

Formulation générale des problèmes

Sollicitations $\underline{\mathbf{F}}$ → Système → Réponse $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t)$

Forme générale des problèmes

Trouver la fonction inconnue $\underline{\mathbf{u}}(., .)$ définie sur $\Omega \times]0, T]$ tel que :

$$\mathcal{L} : \begin{cases} \mathcal{L} \left(\underline{\mathbf{X}}, t, \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t), \left(\frac{\partial^\beta \underline{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}^\beta}(\underline{\mathbf{X}}, t) \right), \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t}(\underline{\mathbf{X}}, t) \right)_{(\beta=1, \dots, \zeta)} = 0, \\ \text{(Conditions initiales et aux limites)} \end{cases}$$

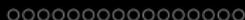
$\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}$, et on note \mathcal{V} l'espace vectoriel associé à \mathcal{U} .

Formulation faible par la méthode de Galerkin

Trouver $\underline{\mathbf{u}}(., t)$ dans l'espace fonctionnel \mathcal{U} tel que :

$$\int_{\Omega} \mathcal{L} \left(\underline{\mathbf{X}}, t, \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t), \frac{\partial^\beta \underline{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}^\beta}, \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) \underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{X}}) d\Omega = \mathcal{R}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}}^*, t)$$

$\forall \underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}, \forall t \in]0, T]$



Modèle numérique par Éléments Finis (MD)

Le modèle EF donne une solution approchée $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \sum_{j=1}^{j=n_h} \underline{\mathbf{N}}_j(\underline{\mathbf{X}}) q_j(t)$.

Il introduit :

- n_h degrés de libertés $q_j(t)$
- n_h fonctions de forme Éléments Finis $\underline{\mathbf{N}}_j$

Problème détaillé à résoudre

On cherche $\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}_h$ tel que :

$$\int_{\Omega} \mathcal{L} \left(\underline{\mathbf{X}}, t, \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t), \frac{\partial^{\beta} \underline{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}^{\beta}}, \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) \underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{X}}) d\Omega = 0$$

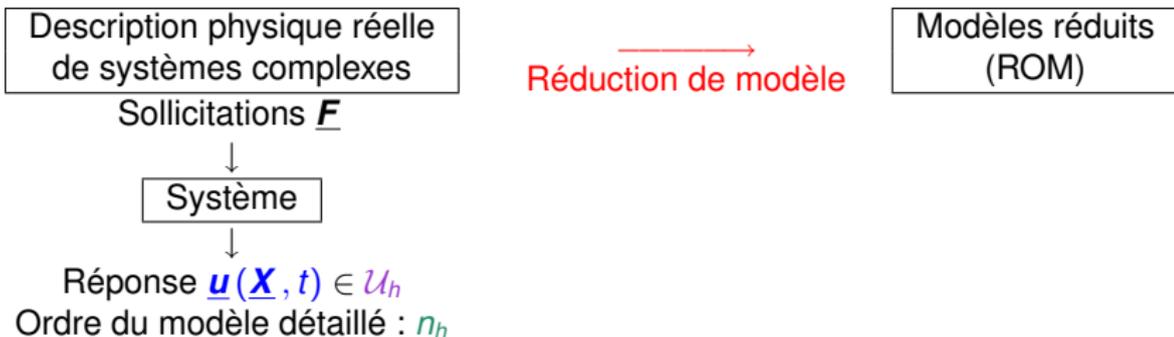
$$\forall \underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_h, \forall t \in]0, T]$$

où :

$$\rightarrow \mathcal{U}_h = \{ \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_h \mid \exists \{q\} \in \mathbb{R}^{n_h}, \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \sum_{j=1}^{j=n_h} \underline{\mathbf{N}}_j(\underline{\mathbf{X}}) q_j(t), \forall \underline{\mathbf{X}} \in \Omega, \forall t \in]0, T] \}$$

$$\rightarrow \mathcal{V}_h = \text{span} \{ \underline{\mathbf{N}}_1, \dots, \underline{\mathbf{N}}_{n_h} \}$$

Réduction de modèle



- Réduire le coût global de l'obtention de la solution \underline{u} .
- Objectif : réduire le nombre n_h d'équations nécessaires pour décrire le système physique.
- Chercher la solution \underline{u} dans un sous-espace de plus petite dimension que \mathcal{U}_h .
- Construction de bases réduites par POD.

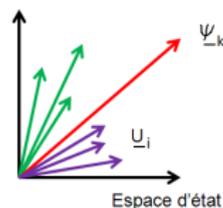
Proper Orthogonal Decomposition

- Définir une base orthogonale optimale pour représenter \underline{u} tel que :

$$\underline{u}(\underline{X}, t) \simeq \sum_{k=1}^{k=s} \underline{\psi}_k(\underline{X}) a_k(t) \quad \underline{u}(\underline{X}, t) \simeq \sum_{j=1}^{j=n_h} \underline{N}_j(\underline{X}) q_j(t)$$

- Chercher la meilleure approximation possible de \underline{u} pour une valeur de $s < n_h$ donnée.
- Projeter les équations d'état du système sur le sous-espace engendré par les fonctions propres $\underline{\psi}$

$$\lambda(\underline{\psi}) = \frac{\int_0^T (\underline{u}, \underline{\psi})_{\Omega}^2 dt}{(\underline{\psi}, \underline{\psi})_{\Omega}}$$



- Déterminer la base orthonormée $\{\underline{\psi}_k\}_{k=1}^s$ maximisant la projection $\lambda(\underline{\psi})$ sur toutes les réponses \underline{u} , i.e résoudre le problème de maximisation :

$$\max_{\underline{\psi} \in L^2(\Omega)} \lambda(\underline{\psi})$$



Proper Orthogonal Decomposition

- Problème aux valeurs propres : infinité dénombrable de solutions

$$\{\lambda_k, \underline{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$$

- Classement :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq \dots \geq 0$$

- s : nombre de modes POD nécessaire pour décrire correctement l'évolution dynamique du système
- Troncature : sélection des s premières valeurs propres telles que :

$$\sum_{k=1}^{k=s} \lambda_k = (1 - \varepsilon_{POD}) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$$

ε_{POD} : paramètre > 0 de la snapshot POD permettant de définir le seuil de troncature.

Proper Orthogonal Decomposition

Formulation de l'approximation réduite POD-Galerkin

Trouver $\underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}_{POD}$ tel que :

$$\int_{\Omega} \mathcal{L} \left(\underline{\mathbf{X}}, t, \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t), \frac{\partial^{\beta} \underline{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}^{\beta}}, \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) \underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{X}}) d\Omega = 0$$

$\forall \underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_{POD}, \forall t \in]0, T]$

où :

$$\rightarrow \mathcal{U}_{POD} = \left\{ \underline{\mathbf{u}} \in \mathcal{V} \mid \exists \{ \mathbf{a} \} \in \mathbb{R}^s, \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \sum_{k=1}^{k=s} \underline{\psi}_k(\underline{\mathbf{X}}) a_k(t), \quad \forall \underline{\mathbf{X}} \in \Omega \right\}$$

$$\rightarrow \mathcal{V}_{POD} = \text{span} \{ \underline{\psi}_1, \dots, \underline{\psi}_s \}$$

L'approximation réduite a la forme :

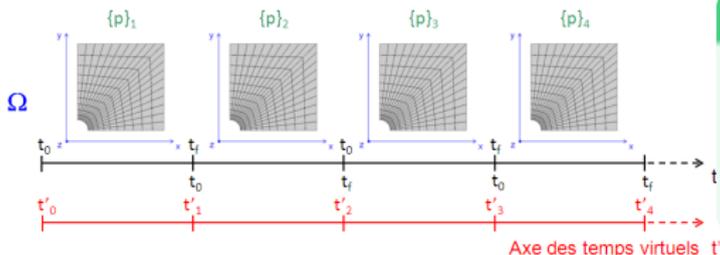
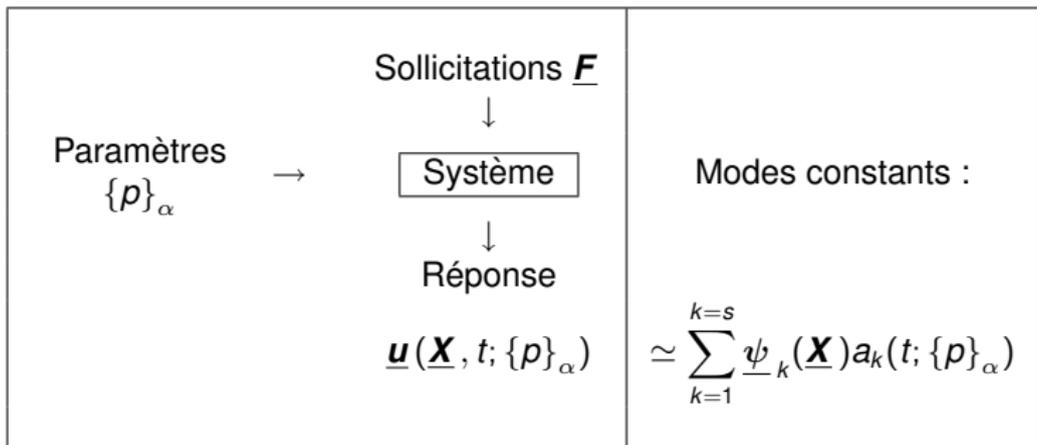
$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \sum_{k=1}^{k=s} \underline{\psi}_k(\underline{\mathbf{X}}) a_k(t) \\ \underline{\psi}_k(\underline{\mathbf{X}}) = \sum_{j=1}^{n_h} \underline{\mathbf{N}}_j(\underline{\mathbf{X}}) A_{jk} \end{array} \right.$$

Modèles paramétrés

<p>Paramètres $\{p\}_\alpha$ →</p> <p style="text-align: center;">Sollicitations \underline{F}</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p style="text-align: center;">Systeme</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p style="text-align: center;">Réponse</p> <p style="text-align: center;">$\underline{u}(\underline{X}, t; \{p\}_\alpha)$</p>	<p>Modes constants :</p> $\simeq \sum_{k=1}^{k=s} \underline{\psi}_k(\underline{X}) a_k(t; \{p\}_\alpha)$
<p>Paramètres $\{p\}_\alpha$ →</p> <p style="text-align: center;">Sollicitations \underline{F}</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p style="text-align: center;">Systeme</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p style="text-align: center;">Réponse</p> <p style="text-align: center;">$\underline{u}(\underline{X}, t, \{p\})$</p>	<p>Modes dépendant des paramètres :</p> $\simeq \sum_{k=1}^{k=s} \underline{\psi}_k(\underline{X}, \{p\}) a_k(t)$



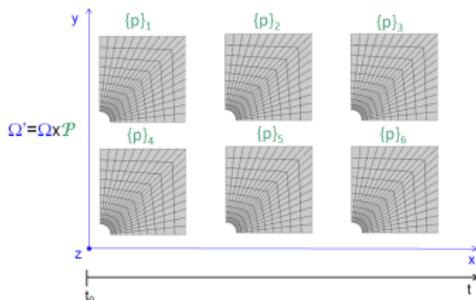
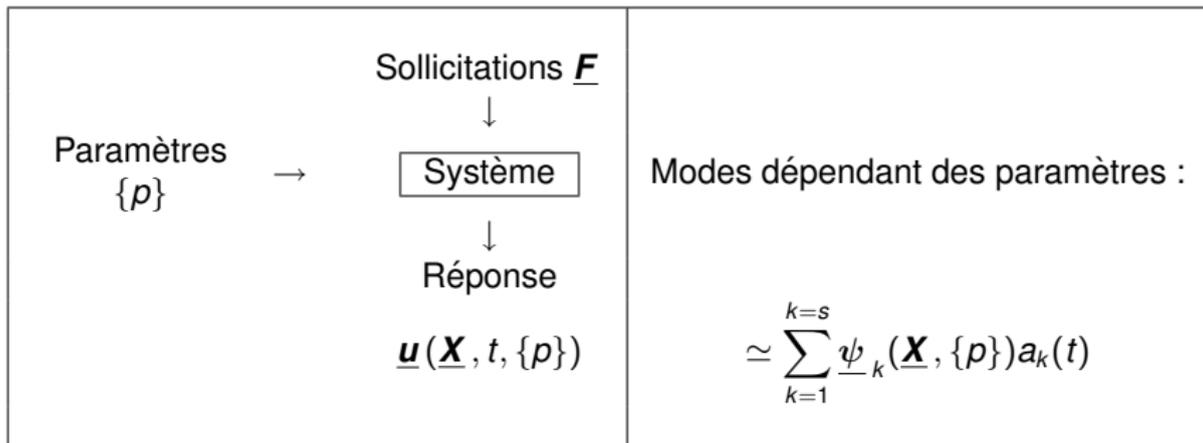
Simulations séquentielles



Application

- ✓ Approche bien adaptée aux problèmes d'optimisation classique (recalage de paramètres)

Simulation multidimensionnelle



Application

- ✓ Approche bien adaptée à l'optimisation par surface de réponse
- ✓ Construction des bases de données

Complexité des problèmes mécaniques non-linéaires

- Ordre de grandeur du nombre de résolutions de systèmes linéaires pour résoudre un problème d'optimisation : $N_g \simeq 10^4 - 10^5$
- Formulation variationnelle compliquée
- Suite d'ED non-linéaires dépendant du temps avec des variables internes qui tiennent compte de l'histoire des déformations subies
- Réduire la complexité des calculs avec une approche générique : méthode de réduction adaptative de modèle (APHR)
- Problème des évènements récurrents (ER) inhérent à l'APHR dans des suites de simulations

$$\text{FV : } \int_{\Omega} \mathcal{L} \left(\underline{\mathbf{X}}, t, \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t), \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}^\beta}, \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) \underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{X}}) d\Omega = 0$$

$$\text{MNLS : } \mathcal{L} = \text{div} \underline{\boldsymbol{\sigma}}, \text{ où } \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\boldsymbol{\Sigma}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\tau, \tau \leq t; \{p\}_\alpha)$$

Lois de comportement complexes cachées derrière l'opérateur $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}$

Equations du modèle de Rousselier [1]

Gradient de vitesse :

$$\underline{\mathbf{L}} = \dot{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{\mathbf{E}}^{-1}$$

Rotation définissant le référentiel corotationnel :

$$\underline{\dot{\mathbf{Q}}}_c = \underline{\Omega} \cdot \underline{\mathbf{Q}}_c \text{ avec } \underline{\mathbf{Q}}_c(t=0) = \underline{\mathbf{1}}$$

Tenseur des contraintes tournées :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_c = \underline{\mathbf{Q}}_c \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}_c^T$$

Tenseur taux de déformation :

$$\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_c = \underline{\mathbf{Q}}_c \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}_c^T$$

$$\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_c = \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p + \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_e$$

Critère de limite élastique :

$$\Phi = \frac{\underline{\boldsymbol{\sigma}}_c}{1-f} + \sigma_1 f D \exp\left(\frac{\text{tr}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_c)}{3(1-f)\sigma_1}\right) - \sigma_f(p)$$

Relation contrainte-déformation :

$$\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_e = \underline{\mathbf{E}} : \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_c$$

Loi d'érouissage isotrope :

$$\sigma_f(p) = R_0 + Q(1 - e^{-bp})$$

Tenseur taux de déformation plastique :

$$\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p = (1-f) \underline{\dot{\boldsymbol{\mu}}} \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\boldsymbol{\sigma}}_c}$$

Equation de porosité :

$$\dot{f} = (1-f) \text{tr}(\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p)$$

[1] G. Rousselier, Finite deformation constitutive relations including ductile fracture damage, 1987

Complexité des problèmes mécaniques non-linéaires

- Ordre de grandeur du nombre de résolutions de systèmes linéaires pour résoudre un problème d'optimisation : $N_g \simeq 10^4 - 10^5$
- Formulation variationnelle compliquée
- Suite d'ED non-linéaires dépendant du temps avec des variables internes qui tiennent compte de l'histoire des déformations subies
- Réduire la complexité des calculs avec une approche générique : méthode de réduction adaptative de modèle (APHR)
- Problème des évènements récurrents (ER) inhérents à l'utilisation de l'APHR dans des suites de simulations

$$\text{FV} : \int_{\Omega} \mathcal{L} \left(\underline{\mathbf{X}}, t, \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t), \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}^\beta}, \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) \underline{\mathbf{u}}^*(\underline{\mathbf{X}}) d\Omega = 0$$

$$\text{MNLS} : \mathcal{L} = \text{div} \underline{\boldsymbol{\sigma}}, \text{ où } \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\boldsymbol{\Sigma}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\tau, \tau \leq t; \{p\}_\alpha)$$

Lois de comportement complexes cachées derrière l'opérateur $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}$

Équations du modèle de frittage [2]

Vitesse de déformation :

$$\dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \dot{\varepsilon}_{th} \mathbb{1} + \dot{\varepsilon}_v(f, T) \mathbb{1} + \dot{\varepsilon}_{vp}$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{U}} \quad \text{et} \quad \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{R}}^T \cdot (\dot{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{\mathbf{E}}^{-1} + \underline{\mathbf{E}}^{-T} \cdot \dot{\underline{\mathbf{E}}}^T) \cdot \underline{\mathbf{R}}$$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mathbf{R}}^T$$

Équation de porosité :

$$\dot{f} = (1 - f) \text{Tr}(\dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \dot{\varepsilon}_{th} \mathbb{1})$$

Déformation frittage

$$\dot{\varepsilon}_v(f, T) = -f^v A_v \exp\left(\frac{-Q_v}{RT}\right)$$

Déformation viscoplastique $\dot{\varepsilon}_{vp}$

$$\underline{\mathbf{G}} = \eta(T) \underline{\mathbf{M}}^{(4)}(T, f) : \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{vp}$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{(4)}(T, f) = F(f) \underline{\mathbf{I}}^{(4)} + \frac{2}{3} C(f) \underline{\mathbf{J}}^{(4)}$$

$$\underline{\mathbf{I}}^{(4)} : \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{vp} = \text{Tr}(\dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{vp}) \mathbb{1}$$

$$\underline{\mathbf{J}}^{(4)} : \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{vp} = \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{vp} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{vp}) \mathbb{1}$$

$$C(f) = 1 + x f^n \quad F(f) = z f^m$$

$$\eta(T) = B_v \exp\left(\frac{-Q_v}{RT}\right)$$

[2] B. Sarbandi, S. Cartel, Truncated integration for simultaneous simulation of sintering using a separated representation, 2010

Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle d'ordre réduit évolutif pour une suite de simulations**
 - État de l'art
 - Concept d'évènements récurrents
 - Résolution de problèmes inverses à évènements récurrents
- 3 Modèle d'ordre réduit évolutif pour des simulations multidimensionnelles
 - État de l'art
 - Extension de la méthode APR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APR
 - Extension de la méthode APHR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APHR
- 4 Conclusion et Perspectives



- 1 Introduction
- 2 Modèle d'ordre réduit évolutif pour une suite de simulations**
 - État de l'art
 - Concept d'évènements récurrents
 - Résolution de problèmes inverses à évènements récurrents
- 3 Modèle d'ordre réduit évolutif pour des simulations multidimensionnelles
 - État de l'art
 - Extension de la méthode APR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APR
 - Extension de la méthode APHR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APHR
- 4 Conclusion et Perspectives

Méthodes de réduction de modèles

- POD [Lumley, 1967] et snapshot POD[Sirovich, 1987] : méthodes “a posteriori”
 - ▶ Nécessite la connaissance au préalable de données (snapshots)
 - ✗ Obtention de ces snapshots par un premier calcul en base complète
 - ✗ Choix de ces snapshots crucial : pas de mécanisme d'adaptation de la base
- ROM en Science des matériaux : Méthodes NTFA [Michel and Suquet, 2003]
 - ▶ Champs de contraintes rigoureusement en équilibre
 - ▶ Propose une représentation des déformations plastiques :

$$\varepsilon^p(\underline{\mathbf{x}}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \xi_{\alpha}(t) \underline{\boldsymbol{\mu}}^{(\alpha)}(\underline{\mathbf{x}})$$
 - ✓ Réduction des variables internes
 - ✗ Limitation aux petites déformations
 - ✗ Efficacité drastiquement liée au choix des modes plastiques
- Méthodes “a priori” : méthode LATIN [Ladevèze, 1985]
 - ✓ Ne nécessite pas la connaissance au préalable de snapshots
 - ▶ Basée sur la séparation de la nature des équations (globales linéaires/locales non-linéaires)
 - ▶ Recherche de la solution des EGL : $f(\underline{\mathbf{x}}, t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \cdot \Lambda_i(\underline{\mathbf{x}})$
 - ▶ Itération en 2 étapes : prédiction et enrichissement de la base
 - ✗ Méthode itérative, POD adaptative non incrémentale.
 - ✓ Coût de l'étape linéaire réduit.
- Méthode générique de réduction adaptative A Priori Hyper Réduction (APHR) [Ryckelynck, 2005][Verdon and Hamdouni, 2009]

Méthode A Priori Réduction en mécanique non linéaire

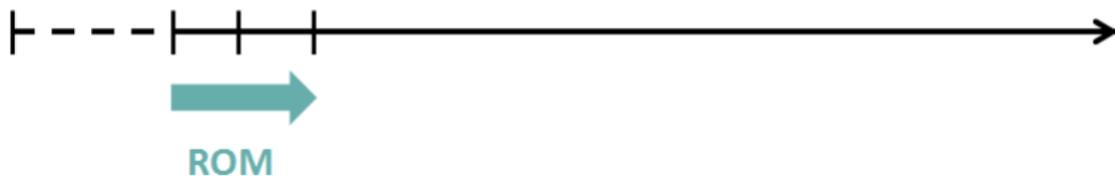
$$\mathbf{A} = \emptyset$$



Méthode A Priori Réduction en mécanique non linéaire

$$\int_{\Omega} \xi(\mathbf{u}^*) : \underline{\Sigma}(\xi_{\tau}(\mathbf{u}^{(n)}), \tau \leq t; \{p\}_{\alpha}) d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{u}^* \cdot \underline{f}(\underline{X}, t; \{p\}_{\alpha}) d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \underline{r}_v d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{u}^* \cdot \underline{r}_b d\Gamma, \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_{POD}^{(n)}, \text{ avec } \mathbf{u}^{(n)} \in \mathcal{V}_{POD}^{(n)}$$

$\mathbf{A} = \emptyset$

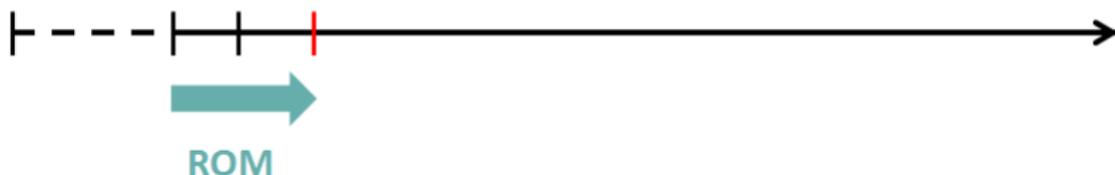


Méthode A Priori Réduction en mécanique non linéaire

$$\int_{\Omega} \underline{\xi}(\underline{\mathbf{u}}^*) : \underline{\Sigma}(\underline{\xi}_{\tau}(\underline{\mathbf{u}}^{(n)}), \tau \leq t; \{p\}_{\alpha}) d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{X}}, t; \{p\}_{\alpha}) d\Gamma = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{r}}_v d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{r}}_b d\Gamma, \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_{POD}^{(n)}, \text{ avec } \underline{\mathbf{u}}^{(n)} \in \mathcal{V}_{POD}^{(n)}$$

$$\{\tilde{\mathcal{R}}\}_j^{(n)} = \int_{\Omega} \underline{\xi}(\underline{\mathbf{N}}_j) : \underline{\Sigma}(\underline{\xi}_{\tau}(\underline{\mathbf{u}}^{(n)}), \tau \leq t; \{p\}_{\alpha}) d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \underline{\mathbf{N}}_j \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{X}}, t; \{p\}_{\alpha}) d\Gamma$$

$\mathbf{A} = \emptyset$



Contrôle de la qualité :

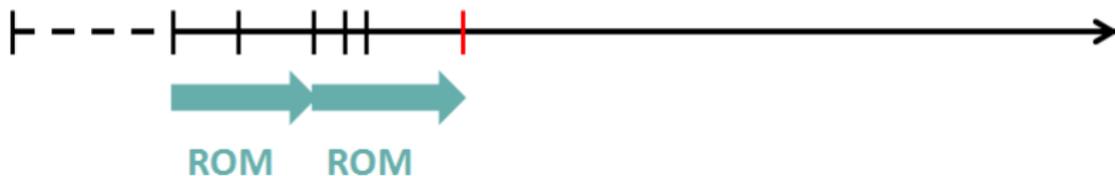
$$\|\{\tilde{\mathcal{R}}\}\| < \epsilon_R \|f\|$$

Méthode A Priori Réduction en mécanique non linéaire

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{\mathbf{u}}^*) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_{\tau}(\underline{\mathbf{u}}^{(n)}), \tau \leq t; \{p\}_{\alpha}) d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{X}}, t; \{p\}_{\alpha}) d\Gamma = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{r}}_v d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{r}}_b d\Gamma, \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_{POD}^{(n)}, \text{ avec } \underline{\mathbf{u}}^{(n)} \in \mathcal{V}_{POD}^{(n)}$$

$$\{\tilde{\mathcal{R}}\}_j^{(n)} = \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{\mathbf{N}}_j) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_{\tau}(\underline{\mathbf{u}}^{(n)}), \tau \leq t; \{p\}_{\alpha}) d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \underline{\mathbf{N}}_j \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{X}}, t; \{p\}_{\alpha}) d\Gamma$$

$\mathbf{A} = \emptyset$



Contrôle de la qualité :

$$\|\{\tilde{\mathcal{R}}\}\| < \epsilon_R \|f\|$$

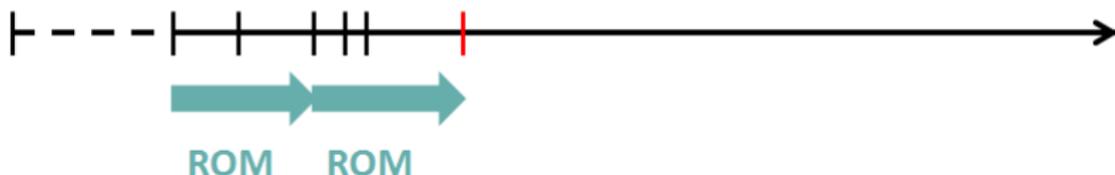
Période d'adaptation suivante

Méthode A Priori Réduction en mécanique non linéaire

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{\mathbf{u}}^*) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_{\tau}(\underline{\mathbf{u}}^{(n)}), \tau \leq t; \{p\}_{\alpha}) d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{X}}, t; \{p\}_{\alpha}) d\Gamma = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{r}}_v d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{r}}_b d\Gamma, \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{V}_{POD}^{(n)}, \text{ avec } \underline{\mathbf{u}}^{(n)} \in \mathcal{V}_{POD}^{(n)}$$

$$\{\tilde{\mathcal{R}}\}_j^{(n)} = \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{\mathbf{N}}_j) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_{\tau}(\underline{\mathbf{u}}^{(n)}), \tau \leq t; \{p\}_{\alpha}) d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \underline{\mathbf{N}}_j \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{X}}, t; \{p\}_{\alpha}) d\Gamma$$

$\mathbf{A} = \emptyset$



Contrôle de la qualité :

$$\|\{\tilde{\mathcal{R}}\}\| < \epsilon_R \|f\|$$

Période d'adaptation suivante

$$\text{Contrôle de la qualité : } \|\{\tilde{\mathcal{R}}\}\| \geq \epsilon_R \|f\|$$

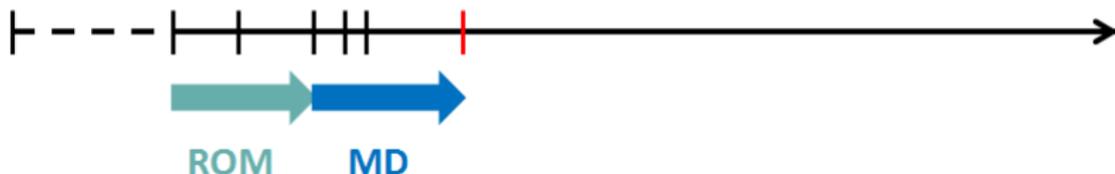
Méthode A Priori Réduction en mécanique non linéaire

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_{\tau}(\underline{u}^{(n)}), \tau \leq t; \{p\}_{\alpha}) d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{f}(\underline{X}, t; \{p\}_{\alpha}) d\Gamma = \int_{\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{r}_v d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{r}_b d\Gamma, \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{V}_{POD}^{(n)}, \text{ avec } \underline{u}^{(n)} \in \mathcal{V}_{POD}^{(n)}$$

$$\left\{ \tilde{\mathcal{R}} \right\}_j^{(n)} = \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{N}_j) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_{\tau}(\underline{u}^{(n)}), \tau \leq t; \{p\}_{\alpha}) d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \underline{N}_j \cdot \underline{f}(\underline{X}, t; \{p\}_{\alpha}) d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_{\tau}(\underline{u}^{(n)} + \delta \underline{u}_h^{(n)}), \tau \leq t; \{p\}_{\alpha}) d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{f}(\underline{X}, t; \{p\}_{\alpha}) d\Gamma = \int_{\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{r}_v d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{r}_b d\Gamma, \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{V}_h, \text{ avec } \underline{u}^{(n)} \in \mathcal{V}_h^{(n)}$$

$\mathbf{A} = \emptyset$



Contrôle de la qualité :

$$\| \left\{ \tilde{\mathcal{R}} \right\} \| < \epsilon_R \| f \|$$

Période d'adaptation suivante

Contrôle de la qualité : $\| \left\{ \tilde{\mathcal{R}} \right\} \| \geq \epsilon_R \| f \|$

Correction des déplacements :

$$\underline{u}^{(n+1)} = \underline{u}^{(n)} + \delta \underline{u}_h^{(n)}$$

Adaptation de la base :

→ Extension de la base ($\delta \underline{u}_h^{(n)}$)

→ Sélection des évènements les plus significatifs

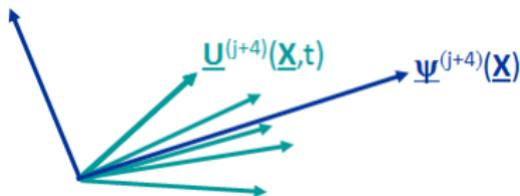
POD appliquée aux ver $\{a\}$ (ϵ_{POD})

Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle d'ordre réduit évolutif pour une suite de simulations**
 - État de l'art
 - **Concept d'évènements récurrents**
 - Résolution de problèmes inverses à évènements récurrents
- 3 Modèle d'ordre réduit évolutif pour des simulations multidimensionnelles
 - État de l'art
 - Extension de la méthode APR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APR
 - Extension de la méthode APHR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APHR
- 4 Conclusion et Perspectives

Introduction au problème des évènements récurrents

- Problème d'optimisation (problème inverse) → Suite de simulations similaires
- Accumulation de simulations similaires → Snapshots multipliés dans la même direction



- Certains modes empiriques $\underline{\psi}$ → de plus en plus importants
- Évènements nécessaires pour capter la sensibilité de la réponse → de moins en moins significatifs

Introduction au problème des événements récurrents

Nouveau problème de maximisation

Le problème de maximisation :

$$\max_{\underline{\psi} \in L^2(\Omega)} \lambda(\underline{\psi}) = \frac{\int_0^{T'} (\underline{\mathbf{u}}, \underline{\psi})_{\Omega}^2 dt'}{(\underline{\psi}, \underline{\psi})_{\Omega}}$$

devient :

$$\max_{\underline{\psi} \in L^2(\Omega)} \lambda(\underline{\psi}) = \frac{\sum_{j=1}^{m-1} \int_0^T (\underline{\mathbf{u}}_{(j)}, \underline{\psi})_{\Omega}^2 dt + \int_0^T (\underline{\mathbf{u}}_{(m)}, \underline{\psi})_{\Omega}^2 dt}{(\underline{\psi}, \underline{\psi})_{\Omega}}$$

où :

$$\underline{\mathbf{u}}_{(j)} = \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t; \{p\}_j) = \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t'_j)$$

Définition des évènements récurrents

- Un évènement est le couple $\left(\{A_k^{(n)}\}, a_k^{(n)}(t'_j)\right)$
- Mesure de la contribution de $\underline{\psi}_k^{(n)}$ pour la $j^{\text{ème}}$ simulation, $j \in \{1, \dots, m\}$ à l'aide du facteur μ_{kj} défini par :

$$\mu_{kj} = \frac{\int_{t'_{j-1}}^{t'_j} (\underline{\mathbf{u}}^{(n)}(t'), \underline{\psi}_k^{(n)})_{\Omega}^2 dt'}{(\underline{\psi}_k^{(n)}, \underline{\psi}_k^{(n)})_{\Omega}}$$

- Remarque : $\lambda_k = \sum_{j=1}^m \mu_{kj}$
- Mesure de la récurrence d'un évènement $\left(\{A_k^{(n)}\}, a_k^{(n)}(t'_j)\right)$:

$$I_k = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m \mu_{kj}}$$

- L'évènement $\left(\{A_k^{(n)}\}, a_k^{(n)}(t'_j)\right)$ est dit récurrent ssi :

$$\frac{mI_k}{\lambda_1} > \varepsilon_{POD}$$

Propriété de dégradation du modèle d'ordre réduit

- Rappel : Évènement $\left(\{A_k^{(n)}\}, a_k^{(n)}(t'_j)\right)$ **significatif** si $\lambda_k > \varepsilon_{POD}\lambda_1$
- Propriété de dégradation du modèle d'ordre réduit
 - Soit un évènement $\left(\{A_r^{(n)}\}, a_r^{(n)}(t'_j)\right)$ **parfaitement récurrent**, avec $r \in \{1, \dots, s\}$

$$\forall j = 1, \dots, m \quad \mu_{rj} = E_r \quad \left(I_k = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m \mu_{kj}} = E_r \right) \Rightarrow \lambda_r = mE_r$$

- Soit un évènement $\left(\{A_z^{(n)}\}, a_z^{(n)}(t'_j)\right)$ **parfaitement spécifique**, avec $z \in \{1, \dots, s\}$

$$\exists j_0 \text{ tel que } \mu_{zj} = 0 \quad \forall j \neq j_0 \Rightarrow \lambda_z = \mu_{zj_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_z}{\lambda_r} = \frac{C}{m} \text{ où } C = \frac{\mu_{zj_0}}{E_r} \text{ constante indépendante de } m$$

- On peut trouver m telle que $\frac{\lambda_z}{\lambda_r} < \varepsilon_{POD}$. Or, $\lambda_r < \lambda_1 \Rightarrow \frac{\lambda_z}{\lambda_1} < \varepsilon_{POD}$.
- λ_z **négligeable**.

Objectifs

- Tenir compte de la présence d'ER afin que les calculs se passent le mieux possible lors d'une adaptation

Contrôle de la qualité : $\| \{ \tilde{\mathcal{R}} \} \| \geq \epsilon_R \| f \|$

Correction des déplacements :

$$\underline{\mathbf{u}}^{(n+1)} = \underline{\mathbf{u}}^{(n)} + \delta \underline{\mathbf{u}}_h^{(n)}$$

Adaptation de la base :

Extension de la base ($\delta \underline{\mathbf{u}}_h^{(n)}$)

Sélection des évènements les plus significatifs

POD appliquée aux ver $\{a\}$ (ϵ_{POD}) _ _ _

- Améliorer la robustesse de la procédure d'optimisation en améliorant la précision du calcul
- Modifier la méthode APR pour tenir compte de la présence d'ER

Atténuation des évènements récurrents

- Développer une méthode de réduction adaptative avec atténuation des ER.
 - ▶ Modifier la construction de la base.
 - ▶ Principe : savoir oublier pour mieux adapter.
 - ▶ Coefficient multiplicateur $0 \leq \gamma \leq 1$ (facteur d'oubli) :

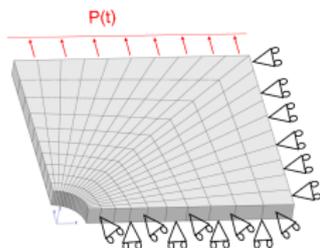
$$\lambda_k = \frac{\sum_{j=1}^{m-1} \gamma^{m-1-j} \int_0^T (\underline{\mathbf{u}}_{(j)}, \underline{\boldsymbol{\psi}})_{\Omega}^2 dt + \int_0^T (\underline{\mathbf{u}}_{(m)}, \underline{\boldsymbol{\psi}})_{\Omega}^2 dt}{(\underline{\boldsymbol{\psi}}, \underline{\boldsymbol{\psi}})_{\Omega}}$$

Choisir entre :

- Un ROM qui décrit tous les états ($\gamma = 1$ correspond à l'approche standard sans atténuation des évènements récurrents)
 - Un ROM plus précis pour les dernières valeurs de paramètres que pour les premières ($0 < \gamma < 1$)
 - Un ROM qui ne conserve que le dernier cas de calcul ($\gamma = 0$), au risque de perdre tous les résultats antérieurs lors d'une adaptation
- Evaluer l'effet des ER sur une suite de simulations (par une méthode de réduction de modèles).
 - Confirmer la solution proposée.

Exemple numérique prouvant la présence d'ER

● Éprouvette :



p : plasticité cumulée

R_0 : limite d'élasticité

● Loi comportement :

Équations de la loi de comportement

Relation contrainte-déformation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}_e$$

Tenseur de déformation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_e$$

Loi d'écrouissage isotrope :

$$f(R, \boldsymbol{\sigma}_{Mises}) = \boldsymbol{\sigma}_{Mises} - (H_p + R_0)$$

Tenseur taux de déformation plastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{p} \frac{\boldsymbol{\sigma}^D}{\boldsymbol{\sigma}_{Mises}}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \dot{p} \cdot f = 0, \quad f < 0$$

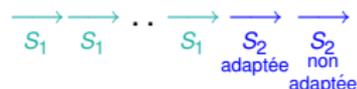
$$\boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{Mises}^2 = \frac{2}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D]$$

Condition initiale :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p|_{t=0} = 0$$

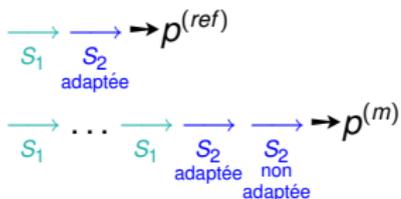
● Suite de simulations :



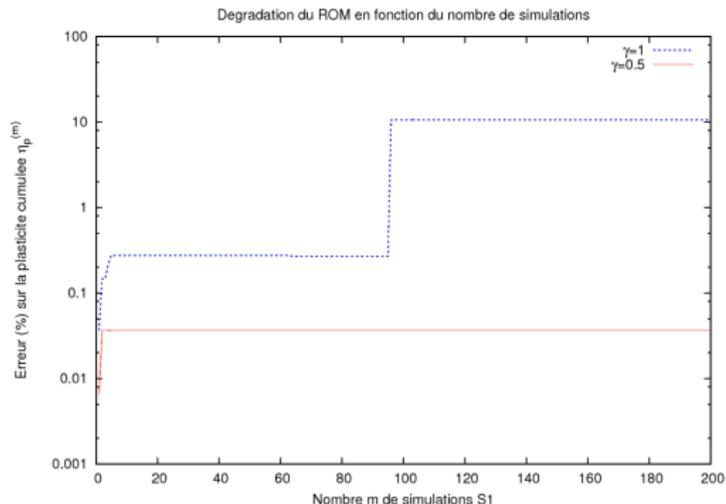
- ▶ $S_{2\text{adapt.}}$: acquérir des connaissances pour traiter **efficacement** $S_{2\text{ non adapt.}}$.
- ▶ **Efficacité** du traitement en BR de $S_{2\text{ non adapt.}}$.

Valeur des paramètres utilisés pour les simulations S_1		Valeur des paramètres utilisés pour les simulations S_2 (1ère/2ème)	
$E(\text{MPa})$	2.10^5	$E(\text{MPa})$	2.10^5
ν	0.3	ν	0.3
$R_0(\text{MPa})$	6.10^4	$R_0(\text{MPa})$	10^2
$H(\text{MPa})$	10^3	$H(\text{MPa})$	10^3
ε_{POD}	10^{-5}	ε_{POD}	10^{-5}
ϵ_R	10^{-4}	ϵ_R	$10^{-4}/10^2$

Exemple numérique prouvant la présence d'ER



$$\eta_p^{(m)} = 100 \left| \frac{p^{(m)} - p^{(ref)}}{p^{(ref)}} \right|$$



Conclusion

✓ Le facteur d'oubli γ a considérablement amélioré la qualité du calcul !

Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle d'ordre réduit évolutif pour une suite de simulations**
 - État de l'art
 - Concept d'évènements récurrents
 - Résolution de problèmes inverses à évènements récurrents
- 3 Modèle d'ordre réduit évolutif pour des simulations multidimensionnelles
 - État de l'art
 - Extension de la méthode APR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APR
 - Extension de la méthode APHR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APHR
- 4 Conclusion et Perspectives

Paramètres utilisés

Équations de la loi de comportement

Relation contrainte-déformation :

$$\underline{\sigma} = \underline{E} : \underline{\varepsilon}_e$$

Tenseur de déformation :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{u}) = \varepsilon_p + \varepsilon_e$$

Loi d'écrouissage isotrope :

$$f(R, \underline{\sigma}_{Mises}) = \underline{\sigma}_{Mises} - (Hp + R_0)$$

Tenseur taux de déformation plastique :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_p = \dot{p} \frac{\underline{\sigma}^D}{\underline{\sigma}_{Mises}}, \quad \dot{p} \geq 0, \quad \dot{p} \cdot f = 0, \quad f < 0$$

$$\underline{\sigma}^D = \underline{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}[\underline{\sigma}] \underline{1}$$

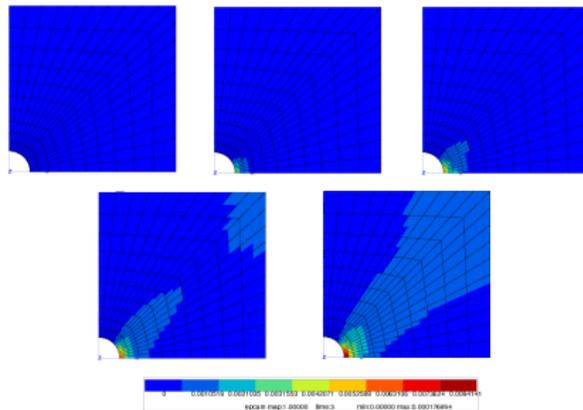
$$\underline{\sigma}_{Mises}^2 = \frac{2}{3} \text{tr}[\underline{\sigma}^D : \underline{\sigma}^D]$$

Condition initiale :

$$\underline{\varepsilon}_p|_{t=0} = 0$$

- Paramètres matériaux :

$\{p\}$	Initiaux	Référence
E (MPa)	1.10^5	2.10^5
R_0 (MPa)	300	150
H (MPa)	2.10^5	2.10^4
ν	0.3	0.3



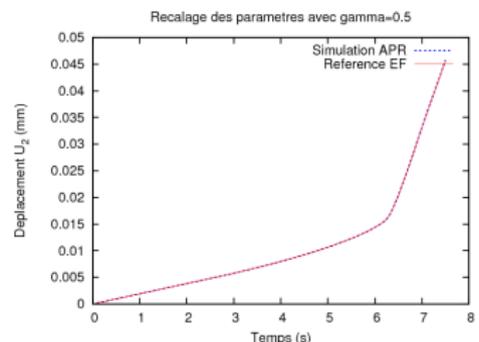
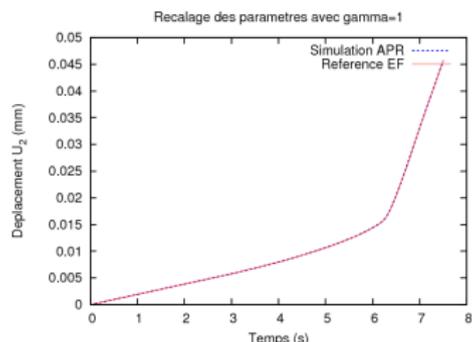
- Paramètres de la méthode :

ϵ_R	5.10^{-3}
ϵ_{POD}	10^{-8}



Résultats

Méthode utilisée	EF	APR			
		1	0.9	0.5	0
Facteur d'oubli γ	-	1	0.9	0.5	0
Nombre d'itérations	130	122	150	146	160
Nombre de résolutions de SLG N_g	23432	3946	3098	2263	3211
Gain par rapport à la méthode EF	-	5.94	7.56	10.35	7.3

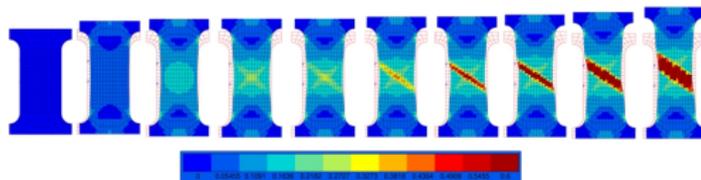


Conclusion

- ✓ Gain en nombre de résolutions de systèmes linéaires globaux : 10.3
- ✓ Valeur de γ pour un gain optimal : 0.5
- ✓ Recalage des paramètres réussi

Conclusion

- Méthode mise en œuvre sur des problèmes paramétrés fortement non-linéaires.
 - ▶ Modèle d'endommagement : phénomène de localisation des déformations



- ▶ Valeur de γ pour un gain optimal : 0.5
 - ▶ Gain en nombre de résolutions de systèmes linéaires globaux : 2.8
 - ▶ Gain sans facteur d'oubli : 2.7
- Présence d'ER nuisibles au processus d'optimisation avec méthode adaptative.
- Solution pour atténuer les ER : introduction d'un facteur d'oubli progressif.
- Efficacité de la méthode prouvée (gain jusqu'à 10.3).

Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle d'ordre réduit évolutif pour une suite de simulations
 - État de l'art
 - Concept d'évènements récurrents
 - Résolution de problèmes inverses à évènements récurrents
- 3 Modèle d'ordre réduit évolutif pour des simulations multidimensionnelles**
 - État de l'art
 - Extension de la méthode APR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APR
 - Extension de la méthode APHR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APHR
- 4 Conclusion et Perspectives

Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle d'ordre réduit évolutif pour une suite de simulations
 - État de l'art
 - Concept d'évènements récurrents
 - Résolution de problèmes inverses à évènements récurrents
- 3 Modèle d'ordre réduit évolutif pour des simulations multidimensionnelles**
 - État de l'art
 - Extension de la méthode APR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APR
 - Extension de la méthode APHR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APHR
- 4 Conclusion et Perspectives

Méthodes à région de confiance en optimisation

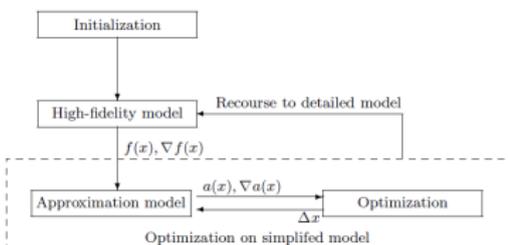


FIG.: Algorithme d'optimisation utilisant des modèles d'approximation [Alexandrov et al., 1998]

- Critère pour contrôler la qualité de l'approximation [Bergmann and Cordier, 2008]
- Région de confiance [Fahl, 2000] : partie restreinte de l'espace des paramètres
- Déterminer les bonnes gammes et échelles des paramètres du système
- Bases différentes suivant les régions de l'espace paramétrique

✓ Adaptation : réactualiser, optimiser la base POD

$$\underline{\psi}_k(\mathbf{X}, \{p\}) = \sum_{i=1}^{n_h} \mathbf{N}_i(\mathbf{X}) A_{ik}(\{p\}), k = 1, \dots, n_h$$

Proper Generalized Decomposition

- Nombre de degrés de libertés augmentant exponentiellement avec la dimension de l'espace.
- PGD pour les équations différentielles linéaires [Ammar et al., 2006]
- Construction a priori d'une décomposition en variables séparées de la solution
 - ▶ Formulation faible ($a_{\Omega'}$ forme bilinéaire paramétrée, l^i forme bilinéaire)

$$a_{\Omega'}(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{u}}; \{p\}; t) = \int_{\Omega'} \sum_i w_x^i(\underline{\mathbf{X}}) w_p^i(\{p\}) w_t^i(t) l^i(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{u}}) d\Omega', \quad \Omega' = \Omega \times \mathcal{P} \times [0, T]$$

- ▶ Représentation en variables séparées de la solution :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t, \{p\}) = \underline{\mathbf{u}}_0(\underline{\mathbf{X}}, t, \{p\}) + \sum_{k=1}^s \underline{\psi}_k(\underline{\mathbf{X}}) f_k(\{p\}) g_k(t)$$

$$\underline{\psi}_k(\underline{\mathbf{X}}) = \sum_{i=1}^{n_h} \underline{\mathbf{N}}_i(\underline{\mathbf{X}}) A_{ik}, \quad k = 1, \dots, n_h$$

✓ Taille du problème linéairement croissante avec la dimension de l'espace

✗ Méthode non-incrémentale en temps

✗ Efficacité nécessitant la séparabilité des champs

Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle d'ordre réduit évolutif pour une suite de simulations
 - État de l'art
 - Concept d'évènements récurrents
 - Résolution de problèmes inverses à évènements récurrents
- 3 Modèle d'ordre réduit évolutif pour des simulations multidimensionnelles**
 - État de l'art
 - Extension de la méthode APR aux analyses multidimensionnelles**
 - Exemple numérique avec méthode APR
 - Extension de la méthode APHR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APHR
- 4 Conclusion et Perspectives

Objectifs

$$\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_{\tau}(\underline{u}^{(n)}), \tau \leq t; \{p\}_{\alpha}) d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{f}(\underline{X}, t; \{p\}_{\alpha}) d\Gamma = \int_{\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{r}_v d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{r}_b d\Gamma$$

$$\Downarrow \quad \boxed{\Omega' = \Omega \times \mathcal{P}}$$

$$\int_{\Omega \times \mathcal{P}} \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_{\tau}(\underline{u}^{(n)}), \tau \leq t, \{p\}_{\alpha}) d\Omega dp - \int_{\partial_f \Omega \times \mathcal{P}} \underline{u}^* \cdot \underline{f}(\underline{X}, t, \{p\}_{\alpha}) d\Gamma dp = \int_{\Omega \times \mathcal{P}} \underline{u}^* \cdot \underline{r}_v d\Omega dp + \int_{\partial_f \Omega \times \mathcal{P}} \underline{u}^* \cdot \underline{r}_b d\Gamma dp$$

- PGD : Efficacité nécessitant la séparabilité des champs (✗).
- Proposer une méthode sans hypothèse de séparabilité
- APR avec algorithme PGD pour la séparation de problèmes linéaires

$$\underline{u}(\underline{X}, t, \{p\}) = \sum_{k=1}^s \underline{\psi}_k(\underline{X}, \{p\}) a_k(t)$$

$$\stackrel{PGD}{\Rightarrow} \underline{u}(\underline{X}, t, \{p\}) = \sum_{k=1}^s \left(\sum_{j=1}^{j=N_f} \underline{\Phi}_{kj}(\underline{X}) g_{kj}(\{p\}) \right) a_k(t)$$

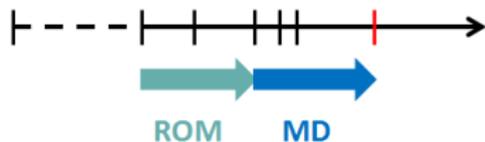
Extension de la méthode APR aux analyses multidimensionnelles

APR avec algorithme PGD pour la séparation de problèmes linéaires

$$\int_{\Omega'} \underline{\varepsilon}(\underline{\mathbf{u}}^*) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_r(\underline{\mathbf{u}}^{(n)}), \tau \leq t; \{p\}_\alpha) d\Omega' - \int_{\partial_f \Omega'} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{X}}, t; \{p\}_\alpha) d\Gamma' = \int_{\Omega'} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{r}}_v d\Omega' + \int_{\partial_f \Omega'} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{r}}_b d\Gamma', \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{W}_{POD}^{(n)}, \text{ avec } \underline{\mathbf{u}}^{(n)} \in \mathcal{W}_{POD}^{(n)}$$

$$\{\tilde{\mathcal{R}}\}_j^{(n)} = \int_{\Omega'} \underline{\varepsilon}(\underline{\mathbf{N}}_j) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_r(\underline{\mathbf{u}}^{(n)}), \tau \leq t; \{p\}_\alpha) d\Omega' - \int_{\partial_f \Omega'} \underline{\mathbf{N}}_j \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{X}}, t; \{p\}_\alpha) d\Gamma'$$

$$\int_{\Omega'} \underline{\varepsilon}(\underline{\mathbf{u}}^*) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_r(\underline{\mathbf{u}}^{(n)} + \delta \underline{\mathbf{u}}_h^{(n)}), \tau \leq t; \{p\}_\alpha) d\Omega' - \int_{\partial_f \Omega'} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{X}}, t; \{p\}_\alpha) d\Gamma' = \int_{\Omega'} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{r}}_v d\Omega' + \int_{\partial_f \Omega'} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\mathbf{r}}_b d\Gamma', \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{W}_h, \text{ avec } \underline{\mathbf{u}}^{(n)} \in \mathcal{W}_h^{(n)}$$

 $\mathbf{A} = \emptyset$ 

$$\Omega' = \Omega \times \mathcal{P}$$

Correction des déplacements : $\underline{\mathbf{u}}^{(n+1)} = \underline{\mathbf{u}}^{(n)} + \delta \underline{\mathbf{u}}_h^{(n)}$

$$\delta \underline{\mathbf{u}} = \sum_i^{N_j} \underline{\mathbf{R}}_{X_i}(\underline{\mathbf{X}}) R_{p_i}(\{p\})$$

$$\underline{\mathbf{u}}^* = \underline{\mathbf{R}}_X^*(\underline{\mathbf{X}}) R_p(\{p\}) + \underline{\mathbf{R}}_X(\underline{\mathbf{X}}) R_p^*(\{p\})$$

APR avec algorithme PGD pour la séparation de problèmes linéaires

- Rappel : $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t, \{p\}) = \sum_{k=1}^s \overbrace{\left(\sum_{j=1}^{j=N_I} \underline{\Phi}_{kj}(\underline{\mathbf{X}}) g_{kj}(\{p\}) \right)}^{\underline{\psi}_k^{(n)}} a_k^{(n)}(t)$

- Calcul de $\underline{\mathbf{R}}_X$ et R_p par une méthode de point fixe

- Nouvelle version de $\underline{\psi}_k^{(n+1)}$:

$$\underline{\psi}_k^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{j=N_I} \underline{\Phi}_{kj}(\underline{\mathbf{X}}) g_{kj}(\{p\})$$

avec :

$$\underline{\Phi}_i(\underline{\mathbf{X}}) = \frac{\underline{\mathbf{R}}_{X_i}}{\|\underline{\mathbf{R}}_{X_i}\|} \text{ et } g_i(\{p\}) = \frac{R_{p_i}}{\|R_{p_i}\|}$$

Solveur linéaire

- Solveur linéaire pour les systèmes de type bloc sur la diagonale

$$[K] = \begin{pmatrix} [\tilde{K}_1] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & [\tilde{K}_2] & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & [\tilde{K}_{m-1}] & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & [\tilde{K}_m] \end{pmatrix}$$

- Construction de \underline{R}_X :
→ résolution de systèmes linéaires de la taille d'un seul cas de calcul.
- Réduire le coût de l'étape de correction de la prévision \underline{u} :
→ diminuer le coût du solveur linéaire.

N_g : Nombre de passages dans ce solveur linéaire
: Nombre de systèmes linéaires globaux (SLG)

Paradoxe

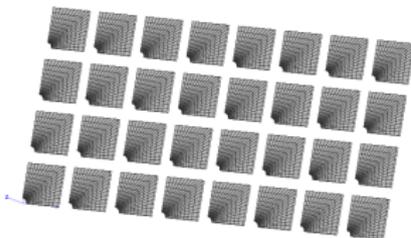
- Somme de systèmes découplés correspondant à une simulation simultanée de différents problèmes
- Aberration : traiter des problèmes découplés de manière couplée
- Gain en nombre de résolutions de problèmes linéaires (N_g)
- Efficacité numérique de la méthode liée à la réduction de la complexité du problème linéarisé

Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle d'ordre réduit évolutif pour une suite de simulations
 - État de l'art
 - Concept d'évènements récurrents
 - Résolution de problèmes inverses à évènements récurrents
- 3 Modèle d'ordre réduit évolutif pour des simulations multidimensionnelles**
 - État de l'art
 - Extension de la méthode APR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APR**
 - Extension de la méthode APR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APR
- 4 Conclusion et Perspectives

Présentation du cas d'étude

- 32 cas numériques provenant des 32 dernières itérations du problème inverse :



32x200=6400 éléments quadratiques

- Paramètres de la méthode

ϵ_R	$5 \cdot 10^{-3}$
ϵ_{POD}	10^{-8}

Résultats

- Comparaison des 2 méthodes

Stratégies	N_g	N_u
EF séquentielle	6464	$n_h = 4659$
Simulation simultanée APR	1542	$s = 18$

TAB.: Nombre de solutions globales N_g et nombre d'inconnues N_u relatifs à chaque stratégie

- ✓ Réduction du nombre de ddl N_u grâce à la POD (divisé par 259)
- ✓ Le nombre de problèmes linéaires EF N_g a été divisé par 4.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle d'ordre réduit évolutif pour une suite de simulations
 - État de l'art
 - Concept d'évènements récurrents
 - Résolution de problèmes inverses à évènements récurrents
- 3 Modèle d'ordre réduit évolutif pour des simulations multidimensionnelles**
 - État de l'art
 - Extension de la méthode APR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APR
 - Extension de la méthode APHR aux analyses multidimensionnelles**
 - Exemple numérique avec méthode APHR
- 4 Conclusion et Perspectives

Complexité du problème linéarisé

- Réduction de l'ordre du modèle insuffisante pour réduire la complexité des équations non-linéaires $\sigma = \Sigma(\underline{\varepsilon}_\tau, \tau \leq t; \{p\}_\alpha)$
- Problème linéarisé en base réduite avec une formulation de Galerkin :

Forme générale des problèmes

Trouver $\{\delta \{a\}_k\}_{k=1}^S$ telles que :

$$[A]^T [J] [A] \delta \{a\} = - [A]^T \{R\}$$

- Coût des produits nécessaires pour la construction de ce problème ?

Coût avec APR multidimensionnelle

- Problème linéarisé :

$$[A]^T [J] [A] \delta \{a\} = - [A]^T \{R\}$$

- Coût : $2s^2 m.n_h + 2s.m.n_h.\omega$

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c} A^T \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \diagdown \quad J \quad \diagup \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] \\ A^T(s, m.n_h) & J(\omega) & A(m.n_h, s) \end{array}$$

- Coût : $2s.m.n_h$

$$\begin{array}{cc} - & \left\{ \begin{array}{c} R \end{array} \right\} \\ A^T(s, m.n_h) & R(m.n_h) \end{array}$$

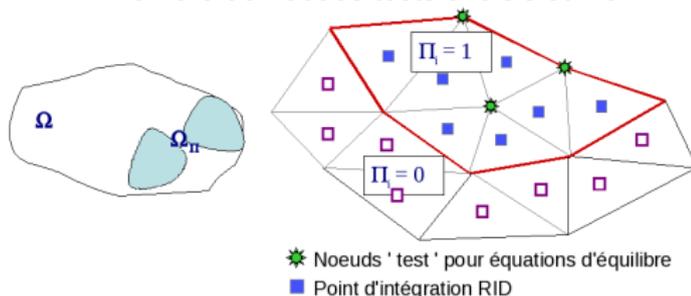
Point bibliographique sur l'Hyper Réduction

- Extraction de quelques équations d'équilibre EF (ℓ)
- Introduction d'une matrice $[\Pi]$ ($\ell, m.n_h$)

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}$$

▶ ℓ nombre de lignes de la matrice $[\Pi]$

- Introduction de noeuds tests
 - ▶ ℓ : nombre de noeuds tests choisis sur le RID



- Réduction du nombre d'équations locales à résoudre

Coût avec APHR multidimensionnelle

- Problème linéarisé :

$$[A]^T [\Pi]^T [\Pi] [J] [A] \delta \{a\} = - [A]^T [\Pi]^T [\Pi] \{R\}$$

- Coût : $2s^2\ell + 2s.l.\omega$

$$\begin{array}{ccccc} \left[\begin{array}{c} A^T \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \Pi^T \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \Pi \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \setminus J \setminus \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] \\ A^T(s, m.n_h) & \Pi^T(m.n_h, \ell) & \Pi(\ell, m.n_h) & J(\setminus\omega\setminus) & A(m.n_h, s) \end{array}$$

- Coût : $2s.l$

$$- \begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{c} A^T \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \Pi^T \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \Pi \end{array} \right] & \left\{ \begin{array}{c} R \end{array} \right\} \\ A^T(s, m.n_h) & \Pi^T(m.n_h, \ell) & \Pi(\ell, m.n_h) & R(m.n_h) \end{array}$$

Coût de construction du problème linéarisé

- Coût d'une méthode APHR :

Sans HR : $2s^2 m.n_h + 2s.m.n_h.\omega$ (1^{er} terme) et $2s.m.n_h$ (2nd terme)

Avec HR : $2s^2 \ell + 2s.\ell.\omega$ (1^{er} terme) et $2s.\ell$ (2nd terme)

- ▶ Gain avec HR :

$$\frac{m.n_h}{\ell}$$

- ▶ $\ell \geq s$ pour que le problème réduit soit bien posé

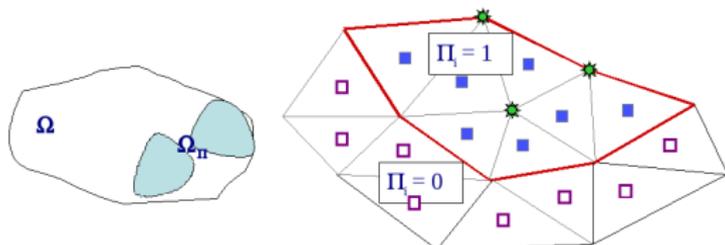
- ▶ Efficacité maximum quand ℓ est plus petit possible

- APHR avec algorithme PGD pour la séparation de problèmes linéaires

Extension de la méthode APHR aux analyses multidimensionnelles

APHR avec algorithme PGD pour la séparation de problèmes linéaires

$$\int_{\Omega \times \mathcal{P}} \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_\tau(\underline{u}^{(n)}), \tau \leq t, \{p\}_\alpha) d\Omega dp - \int_{\partial_f \Omega \times \mathcal{P}} \underline{u}^* \cdot \underline{f}(\underline{X}, t, \{p\}_\alpha) d\Gamma dp = \int_{\Omega \times \mathcal{P}} \underline{u}^* \cdot \underline{x}_v d\Omega dp + \int_{\partial_f \Omega \times \mathcal{P}} \underline{u}^* \cdot \underline{x}_b d\Gamma dp, \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{W}_{POD}^{(n)}, \text{ avec } \underline{u}^{(n)} \in \mathcal{W}_{POD}^{(n)}$$



★ Noeuds 'test' pour équations d'équilibre
 ■ Point d'intégration RID

$$\Omega'_\Pi = \Omega_\Pi \times \mathcal{P}$$

$$\int_{\Omega_\Pi \times \mathcal{P}} \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_\tau(\underline{u}^{(n)}), \tau \leq t, \{p\}_\alpha) d\Omega dp - \int_{(\partial_f \Omega_\Pi) \times \mathcal{P}} \underline{u}^* \cdot \underline{f}(\underline{X}, t, \{p\}_\alpha) d\Gamma dp = \int_{\Omega_\Pi \times \mathcal{P}} \underline{u}^* \cdot \underline{x}_v d\Omega dp + \int_{(\partial_f \Omega_\Pi) \times \mathcal{P}} \underline{u}^* \cdot \underline{x}_b d\Gamma dp, \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{W}_\Pi^{(n)}$$

$$\{\underline{\mathcal{R}}\}_j^{(n)} = \int_{\Omega_\Pi \times \mathcal{P}} \underline{\varepsilon}(\underline{N}_j) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_\tau(\underline{u}^{(n)}), \tau \leq t, \{p\}_\alpha) d\Omega dp - \int_{(\partial_f \Omega_\Pi) \times \mathcal{P}} \underline{N}_j \cdot \underline{f}(\underline{X}, t, \{p\}_\alpha) d\Gamma dp$$

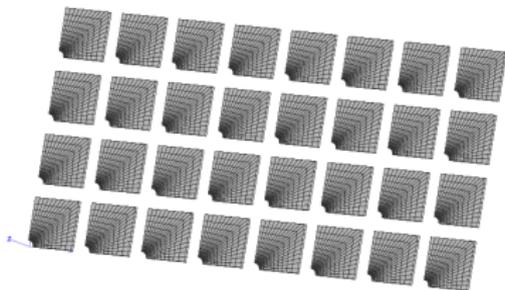
$$\int_{\Omega_\Pi \times \mathcal{P}} \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \underline{\Sigma}(\underline{\varepsilon}_\tau(\underline{u}^{(n)} + \delta \underline{u}_h^{(n)}), \tau \leq t, \{p\}_\alpha) d\Omega dp - \int_{(\partial_f \Omega_\Pi) \times \mathcal{P}} \underline{u}^* \cdot \underline{f}(\underline{X}, t, \{p\}_\alpha) d\Gamma dp = \int_{\Omega_\Pi \times \mathcal{P}} \underline{u}^* \cdot \underline{x}_v d\Omega dp + \int_{(\partial_f \Omega_\Pi) \times \mathcal{P}} \underline{u}^* \cdot \underline{x}_b d\Gamma dp, \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{W}_h$$

Plan

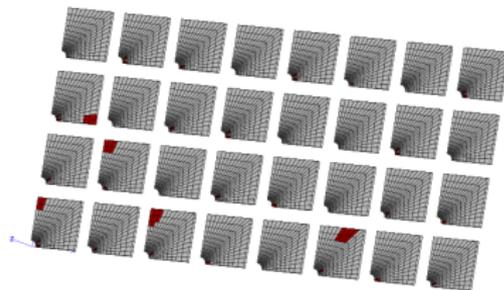
- 1 Introduction
- 2 Modèle d'ordre réduit évolutif pour une suite de simulations
 - État de l'art
 - Concept d'évènements récurrents
 - Résolution de problèmes inverses à évènements récurrents
- 3 **Modèle d'ordre réduit évolutif pour des simulations multidimensionnelles****
 - État de l'art
 - Extension de la méthode APR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APR
 - Extension de la méthode APHR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APHR**
- 4 Conclusion et Perspectives

Présentation du cas d'étude

- 32 cas numériques provenant des 32 dernières itérations du problème inverse :



32x200=6400 éléments quadratiques



114 éléments dans le RID

- Paramètres de la méthode

ϵ_R	$5 \cdot 10^{-3}$
ϵ_{POD}	10^{-8}

Résultats

- Comparaison des 3 méthodes

Stratégies	N_g	N_l	N_u
EF séquentiel	6464	7,526,400	$n_h = 4659$
Simulation simultanée sans HR (APR)	1542	7,065,600	$s = 18$
Simulation simultanée avec HR (APHR)	3002	2,861,144	$s = 16$

TAB.: Nombre de solutions globales N_g , de solutions locales N_l et nombre d'inconnues N_u relatifs à chaque stratégie

- ✓ Meilleur gain sur le nombre de ddl N_u (291 au lieu de 259)
- ✓ Le nombre de problèmes linéaires EF N_g a été divisé par 2.15
- ✓ L'Hyper Réduction permet de réduire le nombre de résolutions locales N_l sur un incrément de temps (divisé par 2.6)
- Cas du frittage (modèle à grand nombre de paramètres) :
 N_u divisé par 509, N_l divisé par 6.5, N_g divisé par 22.



Plan

- 1 Introduction
- 2 Modèle d'ordre réduit évolutif pour une suite de simulations
 - État de l'art
 - Concept d'évènements récurrents
 - Résolution de problèmes inverses à évènements récurrents
- 3 Modèle d'ordre réduit évolutif pour des simulations multidimensionnelles
 - État de l'art
 - Extension de la méthode APR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APR
 - Extension de la méthode APHR aux analyses multidimensionnelles
 - Exemple numérique avec méthode APHR
- 4 Conclusion et Perspectives**



Conclusion

- Méthodes mises en oeuvre sur des problèmes compliqués et variés (différents types de comportements mécaniques).
- La méthode adaptative permet de traiter de façon séquentielle ou multidimensionnelle des problèmes paramétrés fortement non-linéaires du type :
 - ▶ Problèmes inverses
 - Problème d'optimisation contenant de nombreuses itérations (> 100).
 - Apparition d'évènements récurrents.
 - Algorithme de réduction adaptative dédié aux problèmes d'optimisation avec prise en compte de la présence d'évènements récurrents nuisibles à l'efficacité du processus.
 - **Nombre de problèmes linéaires divisé par 10.**
 - ▶ Construction d'une base de données pour surfaces de réponses
 - Créer une base de données par une simulation simultanée de problèmes paramétriques (méthode de séparation de variables)
 - **Nombre de problèmes linéaires divisé par 2 (au mieux 22).**
- Efficacité prouvée numériquement.
- Perspectives :
 - ▶ Compléter nos travaux par des techniques d'interpolation [Amsallem and Farhat, 2008]

Merci de votre attention.

Références I



Alexandrov, N., Dennis, J., Lewis, R., and Torczon, V. (1998).
A trust region framework for managing the use of approximation models
in optimization.
Structural Optimization, 15 :16–23.



Ammar, A., Mokdad, B., Chinesta, F., and Keunings, R. (2006).
A new family of solvers for some classes of multidimensional partial
differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex
fluids.
J. of Non-Newtonian Fluid Mech., 139(3) :153–176.



Amsallem, D. and Farhat, C. (2008).
Interpolation method for adapting reduced-order models and application
to aeroelasticity.
American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal,
46 :1803–1813.

Références II



Bergmann, M. and Cordier, L. (2008).

Optimal control of the cylinder wake in the laminar regime by trust-region methods and pod reduced-order models.

J. of Computational Physics, 227 :7813–7840.



Fahl, M. (2000).

Trust-region methods for flow control based on reduced order modeling.

PhD thesis, Trier University.



Ladevèze, P. (1985).

Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures.

C. R. Acad. Sci. Paris, Série II, pages 41–44.



Lumley, J. (1967).

The structure of inhomogeneous turbulence.

Atmospheric Turbulence and Wave Propagation. A.M. Yaglom and V.I.

Tatarski.

Références III



Michel, J. and Suquet, P. (2003).
Nonuniform transformation field analysis.
Int. J. Solids Structures, 40 :6937–6955.



Ryckelynck, D. (2005).
A priori hyperreduction method : an adaptive approach.
Int. J. of Computational Physics, 202 :346–366.



Sirovich, L. (1987).
Turbulence and the dynamics of coherent structures parti : coherent structures.
Quarterly of applied mathematics, (3) :561–571.



Verdon, N. and Hamdouni, A. (2009).
Reduced-order modelling for solving linear and non-linear equations.
Commun. Numer. Meth. Engrg., in press.