



HAL
open science

Une approche par formalisme de green réduit pour le calcul des structures en contact dynamique : application au contact pneumatique/chaussée

Rabie Meftah

► **To cite this version:**

Rabie Meftah. Une approche par formalisme de green réduit pour le calcul des structures en contact dynamique : application au contact pneumatique/chaussée. Autre. Université Paris-Est, 2011. Français. NNT : 2011PEST1102 . pastel-00665546

HAL Id: pastel-00665546

<https://pastel.hal.science/pastel-00665546>

Submitted on 2 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ PARIS-EST
ECOLE DOCTORALE SCIENCE INGÉNIERIE ET ENVIRONNEMENT

THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR

DE

L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

Spécialité : *Structures et Matériaux*

par

Rabie MEFTAH

Sujet de la thèse :

UNE APPROCHE PAR FORMALISME DE GREEN RÉDUIT POUR LE
CALCUL DES STRUCTURES EN CONTACT DYNAMIQUE :
APPLICATION AU CONTACT PNEUMATIQUE/CHAUSSÉE

Thèse soutenue le 15 Novembre 2011 à l'ENPC devant le jury composé de :

Président : **M. BERENGIER** (IFSTTAR, Nantes)

Rapporteurs : **J.J. SINOUE** (ECL, Lyon)

Rapporteurs : **P. JEAN** (CSTB, Grenoble)

Examineurs : **H.P. YIN** (ENPC, Marne la Vallée)

A. GAUDIN (PSA, Vélizy)

J. CESBRON (IFSTTAR, Nantes)

Directeur de thèse : **D. DUHAMEL** (ENPC, Marne la Vallée)

*A la mémoire de mon père & ma soeur
A ma famille & ma femme
A tous ceux qui me sont chers*

“ Il n’y a pas de longue journée qui ne se termine par une nuit...”

Ahmadou Kourouma.

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse Denis DUHAMEL, le directeur de l'équipe dynamique de l'École des Ponts ParisTech, pour la confiance dont il a fait preuve à mon égard, pour son aide précieuse et sa gentillesse. Je voudrais lui exprimer ma grande reconnaissance de m'avoir dirigé avec élégance et dynamisme tout le long de ces trois années.

Mes remerciements s'adresse également à Julien CESBRON et Honorée YIN pour leur disponibilité et leurs conseils au cours de cette thèse.

J'exprime mes reconnaissances envers Messieurs Michel BERENGIER, Jean-Jacques SINOÛ, Philippe JEAN et Arnaud GAUDIN qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de ma thèse.

Je remercie tous les membres des équipes dynamique et structures pour leur enthousiasme, leur disponibilité et pour tous les moments inoubliables que nous avons partagés ensemble, au travail et en dehors du travail.

Tous mes sincères remerciements à mes collègues de bureau Wafa et Navid pour leur aide, leur soutien et leur sens d'humour. Merci pour ces deux années passées en leur compagnie.

Je remercie l'Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (Laboratoire Central des Ponts et Chaussées) d'avoir financé cette thèse.

Merci à toute ma famille et ma belle-famille pour leur soutien au quotidien. Enfin, je me dois de remercier ma femme pour m'avoir supporté pendant toute la durée de ma thèse et la force qu'elle m'offre pour surmonter toutes les difficultés.

Rabie

Résumé

Le travail de cette thèse s'inscrit dans le cadre de la réduction du bruit du trafic routier. Le contact pneumatique/chaussée représente la principale source de ce phénomène dès la vitesse de 50 km/h . Dans ce contexte, une nouvelle démarche de modélisation du comportement dynamique d'un pneumatique roulant sur une chaussée rigide est développée. Au niveau du pneumatique, un modèle périodique est adopté pour calculer les fonctions de Green du pneumatique dans la zone de contact. Ce modèle permet de réduire considérablement le temps de calcul et de modéliser le pneumatique dans une large bande de fréquence. Le modèle est validé en le comparant avec un modèle d'éléments finis classique réalisé sous le logiciel Abaqus. Habituellement, la réponse temporelle du pneumatique peut être calculée par une convolution des fonctions de Green et des forces de contact. Cette technique est très coûteuse en termes de temps de calcul. Nous avons adopté une nouvelle démarche. L'idée consiste à décomposer les fonctions de Green dans une base modale. Les paramètres modaux sont ensuite utilisés pour construire une convolution plus rapide. La convolution modale est adaptée au problème de contact par l'addition d'une condition de contact cinématique. Le modèle de contact est comparé à la méthode de pénalité dans le cas d'un exemple académique. Il présente l'avantage de sa stabilité et de sa facilité de mise en oeuvre. Dans la dernière partie de ce travail, le modèle de contact est appliqué au cas d'un modèle $3D$ de pneumatique roulant sur différents types de chaussée. Le contenu spectral des forces de contact est étudié en fonction de la vitesse de déplacement et de la rugosité des chaussées. Afin de construire le modèle de contact d'un pneumatique réel sur une chaussée réelle, plusieurs exemples à complexité croissante sont traités.

Mots clefs : vibration, contact, pneumatique, chaussée, bruit de roulement, modèle périodique, réduction de modèle, convolution.

Abstract

This work is part of the traffic noise reduction program. Tire/road contact is the principal source of this phenomenon at speeds greater than 50 km/h . In this context, a new approach for modeling the tire vibration behavior during rolling on rigid road surfaces is developed. For the tire, a periodic model is used to compute Green's functions of the tire in the contact area. This model leads to a significant reduction of computing time. The response of the tire can be modeled in a large frequency range. The model is compared to a classic finite element model built using Abaqus software. As a general approach, the dynamic response of the tire is calculated by convolution of the contact forces with the Green's functions. However the computation of the convolution can be time consuming. In this work we have used a new method. First it consists of the modal expansion of the pre-calculated Green's functions. The modal parameters are then used to construct a new convolution which allows quicker calculations than the traditional convolution. The modal convolution is adapted to dynamic contact problems by using a kinematic contact condition. Contact model is compared to the penalty method. Both methods give the same result but the developed method is more stable and easier to implement. In the last chapter of this work, the contact model is applied to a *3D* tire model rolling on different road profiles. Spectrum contents of the contact forces are studied for different values of the car speed and roughness of the roadway. During this study, several examples with an increasing complexity are studied.

Keywords : vibration, contact, tire, road, tire/road noise, periodic model, model reduction, modal expansion, convolution.

Table des matières

Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xix
Introduction générale	1
1 Bibliographie	5
1.1 L'importance du bruit	7
1.1.1 Les différentes sources de bruit des véhicules	7
1.1.2 Les mécanismes de génération du bruit	8
1.1.2.1 Le phénomène d'air-pumping	9
1.1.2.2 La propagation du bruit de roulement d'un pneumatique	10
1.1.2.3 L'effet dièdre	10
1.2 Modélisation du contact d'un pneumatique sur une chaussée	10
1.2.1 Contact hertzien	10
1.2.2 Modèle de contact ponctuel généralisé	12
1.2.3 Contact ponctuel viscoélastique	13
1.2.4 Méthodes numériques pour gérer le problème de contact dynamique	14
1.2.4.1 Méthode de pénalisation	15
1.2.4.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange	16
1.2.5 Applications au contact pneumatique-chaussée	17
1.3 Pneumatique	19
1.3.1 Propriétés mécaniques et géométriques	19
1.3.2 Fabrication d'un pneumatique	20
1.3.3 Rôles d'un pneumatique	21
1.3.4 Sources de vibration d'un pneumatique	21
1.3.5 Modélisation vibratoire du pneumatique	21
1.3.5.1 Modèles analytiques	21
1.3.5.2 Modèles éléments finis	25
1.4 Calcul en dynamique moyennes fréquences	28
1.4.1 La méthode des éléments finis - FEM	29

1.4.2	Modèles de guide d'onde	30
1.4.2.1	Présentation de la méthode	30
1.4.2.2	Application à des structures périodiques	31
1.4.3	Le modèle SEA	33
1.4.4	La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes	33
1.5	Conclusion	36
2	Modèle d'anneau circulaire sous fondation élastique	37
2.1	Modèle analytique	39
2.1.1	Calcul de la déformation	39
2.1.2	Loi de comportement	43
2.1.3	Cinématique d'un point de la fibre moyenne	43
2.1.4	Équilibre statique	44
2.1.4.1	Contrainte interne	44
2.1.4.2	Déplacement radial	45
2.1.5	Equations du mouvement	45
2.2	Comparaison avec Abaqus (oscillations libres)	47
2.2.1	État précontraint	48
2.2.2	Analyse modale	50
2.2.2.1	Fréquences propres	50
2.2.2.2	Formes modales	52
2.3	Fonction de Green	53
2.3.1	Cas général	53
2.3.2	Cas sans rotation	54
2.4	Conclusion	59
3	Modèle de contact ponctuel	61
3.1	Convolution standard	63
3.2	Identification des paramètres dynamiques	65
3.2.1	Méthodes polynomiales	66
3.2.2	Décomposition modale	66
3.2.3	Passage au domaine temporel	73
3.3	Modélisation du contact	74
3.3.1	Application à un système Masse-Ressort-Amortisseur	74
3.3.2	Application du modèle REF sur des profils de chaussées réelles	80
3.3.2.1	Description de la chaussée	80
3.3.2.2	Résultats des simulations	82
3.4	Conclusion	86

4	Modèle de contact multi-points	87
4.1	Modèle de contact avec condition cinématique	89
4.1.1	Présentation du modèle	89
4.1.1.1	Conditions de contact	89
4.1.1.2	Calcul de la force de contact	90
4.1.2	Comparaison avec la méthode de pénalisation	92
4.2	Application au contact multi points	96
4.2.1	Conditions de contact	96
4.2.2	Calcul des forces de contact	97
4.3	Exemples d'application	100
4.3.1	Système à deux degrés de liberté	100
4.3.1.1	Position du problème	100
4.3.1.2	Valeurs propres et modes propres	100
4.3.1.3	Fonctions de Green	102
4.3.2	Modèle d'anneau circulaire	106
4.4	Conclusion	110
5	Modèle périodique	111
5.1	Problème de dynamique	113
5.1.1	Equations du mouvement	113
5.1.2	Amortissement	114
5.2	Modèle de vibration des structures périodiques	115
5.2.1	Cellule de référence	115
5.2.2	Réduction de modèle	116
5.2.3	Matrice équivalente	117
5.3	Application	118
5.3.1	Modèle d'anneau circulaire	118
5.3.1.1	Matrice de rigidité dynamique	118
5.3.1.2	Condition de périodicité	119
5.3.2	Modèle de pneumatique homogène	121
5.3.2.1	Modélisation d'une cellule de pneumatique	121
5.3.2.2	Prise en compte de la pression de gonflage	123
5.4	Influence des paramètres géométriques et mécaniques	124
5.4.1	Les rainures	124
5.4.2	La pression	127
5.4.3	Le rayon de la jante	127
5.4.4	Symétrie de la bande de roulement	127
5.5	Modèle de pneumatique hétérogène	130
5.5.1	Propriétés des matériaux du pneumatique	130
5.5.2	Fonctions de Green	130
5.6	Conclusion	134

6	Application au contact pneumatique/chaussée	135
6.1	Calcul des fonctions de Green dans plusieurs sections	137
6.1.1	Matrice de rigidité dynamique	137
6.1.2	Matrice des fonctions de Green	138
6.1.3	Paramètres modaux	141
6.2	Profils de chaussées	143
6.2.1	Zone de contact	143
6.2.2	Chaussées sinusoïdales	143
6.2.3	Chaussées réelles	144
6.3	Principe du calcul	145
6.3.1	Paramètres de simulation	145
6.3.2	Déplacement statique	145
6.4	Résultats des simulations	148
6.4.1	Chaussées sinusoïdales	148
6.4.2	Chaussées réelles	150
6.4.3	Contenu spectral de la force de contact	151
6.5	Conclusion	155
	Conclusions et perspectives	155
	Annexes	159
A	Architecture du modèle de vibration du couple pneumatique/chaussée	161
A.1	Modélisation de la cellule de base	161
A.2	Réorganisation du modèle E.F	162
A.3	Modèle périodique	162
A.4	Modèle de contact	163
	Bibliographie	163

Table des figures

1.1	Limites des niveaux de bruit fixés par l'Union Européenne pour différents types de véhicules	7
1.2	Contribution des différentes sources de bruit de roulement	8
1.3	Les thématiques de recherche pour la modélisation du bruit engendré par le contact pneumatique/chaussée	9
1.4	Rayonnement acoustique autour d'un pneumatique, effet dièdre	11
1.5	Contact ponctuel entre deux solides déformables	12
1.6	Distribution de la pression en surface d'une pointe sphérique en contact avec un massif semi infini	14
1.7	Condition de contact de Signorini	15
1.8	Configuration des surfaces en contact avec le massif semi-infini [Ces07]	18
1.9	Distributions de pression normalisée pour les trois géométries : sphère, cylindre et cône [Ces07]	18
1.10	Constitution d'un pneumatique	19
1.11	Constitution d'un pneumatique	20
1.12	Zones de vibration d'un pneumatique	22
1.13	Modèle d'anneau circulaire sous fondation élastique	23
1.14	Méthode de la réceptance entre un anneau et une chaussée	24
1.15	Modèle de la plaque orthotrope	24
1.16	Modèle de la plaque bi-couche	25
1.17	Modélisation du pneumatique par des éléments coque de révolution [Kun87]	26
1.18	Modélisation du pneumatique par une membrane toroïdale [SYKS86]	26
1.19	Décomposition du mouvement	27
1.20	Formes modales au voisinage de 100 Hz (a), 360 Hz (b) et 720 Hz (c) [BNPE08]	28
1.21	Séparation des modes symétriques par l'effet de l'inertie de rotation [BNPE08]	29
1.22	Exemples de structures périodiques	30
1.23	Structure à périodicité linéaire composée de n cellules	32
1.24	Géométrie du problème de référence	34
1.25	Discrétisation des zones intérieures, des bords et des coins.	35
1.26	Exemple de rayons complexes admissibles intérieurs, bords et coins	35
2.1	Modèle d'anneau circulaire	39

2.2	Définition d'un élément d'anneau circulaire	40
2.3	élément d'anneau circulaire	41
2.4	Équilibre statique	44
2.5	Modèle numérique d'anneau circulaire	48
2.6	Influence de la vitesse de rotation sur la déformée statique	49
2.7	Influence de la pression sur la déformée statique	49
2.8	Bifurcation des fréquences propres due à l'effet Coriolis (modes inextensibles)	51
2.9	Bifurcation des fréquences propres due à l'effet Coriolis (modes extensibles)	51
2.10	Formes modales d'un anneau circulaire	52
2.11	Influence de la vitesse de rotation pour différentes valeurs d'amortissement (D_{11}^{-1})	55
2.12	Influence de la vitesse de rotation pour différentes valeurs d'amortissement (D_{22}^{-1})	56
2.13	Comparaison du modèle analytique au modèle numérique d'Abaqus (G_{zz})	57
2.14	Comparaison du modèle analytique au modèle numérique d'Abaqus ($G_{\theta\theta}$)	58
2.15	Amplitude de la fonction de Green G_{zz} de l'ensemble de l'anneau circulaire suite à une excitation au point à $\theta = 0^\circ$	58
3.1	Système masse-ressort-amortisseur	63
3.2	Détermination de l'intervalle de temps d'influence de la fonction de Green	65
3.3	Paramètres modaux	69
3.4	Identification des fréquences propres du modèle REF	69
3.5	Identification des amortissements du modèle REF	70
3.6	Reconstruction de la fonction de Green du modèle REF avec 12 coefficients	71
3.7	Reconstruction de la fonction de Green du modèle REF avec 15 coefficients	71
3.8	Reconstruction de la fonction de Green du modèle REF avec 18 coefficients	72
3.9	Contact d'un anneau avec une chaussée de profil sinusoïdal	74
3.10	Contact d'un système masse-ressort-amortisseur avec une chaussée sinusoïdale	75
3.11	Algorithme	76
3.12	Déplacement pour une chaussée sinusoïdale	77
3.13	Force de contact pour une chaussée sinusoïdale	78
3.14	Déplacement pour une chaussée multi-sinusoïdale	78
3.15	Force de contact pour une chaussée multi-sinusoïdale	79
3.16	Paramètres principaux pour caractériser une surface aléatoire	80
3.17	Les différentes échelles de texture (λ : échelle logarithmique).	81
3.18	Chaussée type BBTM 0/10	81
3.19	Chaussée type BBTM 0/6	82
3.20	Chaussée type BBP 0/6	82
3.21	Chaussée type BBSG 0/10	82
3.22	Déplacements sur une chaussée type BBTM 0/10	83
3.23	Force de contact pour une chaussée type BBTM 0/10	83

3.24	Déplacements sur une chaussée type BBTM 0/6	84
3.25	Force de contact pour une chaussée type BBTM 0/10	84
3.26	Déplacements sur une chaussée type BBP 0/10	84
3.27	Force de contact pour une chaussée type BBTM 0/10	85
3.28	Déplacements sur une chaussée type BBSG 0/10	85
3.29	Force de contact pour une chaussée type BBTM 0/10	85
4.1	Conditions de contact en déplacement et en vitesse	90
4.2	Comparaison des déplacements dans le cas où $K_c = 2K$	93
4.3	Comparaison des forces dans le cas où $K_c = 2K$	93
4.4	Comparaison des déplacements dans le cas où $K_c = 200K$	94
4.5	Comparaison des forces de contact dans le cas où $K_c = 200K$	94
4.6	Comparaison des déplacements filtrés dans le cas où $K_c = 200K$	95
4.7	Comparaison des forces de contact filtrées dans le cas où $K_c = 200K$	95
4.8	Déplacement d'un système à deux degrés de liberté sur une chaussée	100
4.9	Les trois composantes de la matrice des fonctions de Green	103
4.10	Influence de l'interaction du point M_2 sur le déplacement du point M_1	104
4.11	Influence de l'interaction du point M_2 sur la force de contact au point M_1	104
4.12	Déplacements des points M_1 et M_2	105
4.13	Forces de contact aux points M_1 et M_2	105
4.14	Roulement d'un anneau sur une chaussée rigide	106
4.15	Réponse en fréquence des sept points de la zone de contact suite à une excitation au point M_1	106
4.16	Influence de l'interaction sur le déplacement	107
4.17	Influence de l'interaction sur la force de contact	108
4.18	Déplacements des points M_1 à M_7	108
4.19	Forces de contact aux points M_1 à M_7	109
4.20	Nombre de points en contact au cours du temps	109
5.1	Problème aux limites	113
5.2	Transformation géométrique de la cellule	116
5.3	Modèle périodique d'anneau circulaire	118
5.4	Conditions périodiques d'anneau circulaire	119
5.5	Fonction de Green de l'anneau circulaire sans fondation élastique	120
5.6	Section du pneumatique homogène	121
5.7	Modélisation d'une cellule de pneumatique	122
5.8	Repères de calcul des fonctions de Green du pneumatique	122
5.9	État précontraint sous une pression de 2 bars	124
5.10	Validation du modèle périodique avec $P = 0$ bars	125
5.11	Validation du modèle périodique avec $P = 2$ bars	125

5.12	Influence des rainures sur la réponse fréquentielle du pneumatique	126
5.13	Positions des points de contact pour un pneumatique lisse et un pneumatique rainuré	126
5.14	Influence de la pression sur la réponse fréquentielle d'un pneumatique lisse	127
5.15	Influence de la pression sur la réponse fréquentielle d'un pneumatique rainuré	128
5.16	Influence du rayon de la jante sur la réponse fréquentielle d'un pneumatique lisse . . .	128
5.17	Réponse en fréquence pour différents points d'un pneumatique lisse	129
5.18	Réponse en fréquence pour différents points d'un pneumatique rainuré	129
5.19	Modélisation d'une cellule de pneumatique avec trois types de matériaux	131
5.20	Parties réelles des réponses en fréquence de différents points suite à une excitation en $x = 0$	132
5.21	Parties imaginaires des réponses en fréquence de différents points suite à une excita- tion à $x = 0$	132
5.22	Amplitudes des réponses en fréquence de différents points suite à une excitation à $x = 0$	133
6.1	Zone de contact avec la chaussée	137
6.2	Représentation des ddls de la matrice équivalente globale du pneumatique	138
6.3	Les termes non nuls de la matrice globale de rigidité dynamique	139
6.4	Périodicité de la matrice des fonctions de Green	140
6.5	Erreur d'approximation des fonctions de Green de la section à $\theta = 0$	141
6.6	Comparaison d'une fonction de Green et de son approximation dans le cas le plus défavorable	142
6.7	Déplacement de la zone de contact sur la chaussée	143
6.8	Types de chaussées simulées	144
6.9	Représentation 3D de la texture des échantillons des chaussées utilisées dans les simulations	144
6.10	Décomposition du mouvement d'un pneumatique en contact avec une chaussée . . .	145
6.11	Force de contact pour un pneumatique roulant sur une chaussée lisse	147
6.12	Evolution des déplacements et des forces de contact pour les points d'abscisses $x_0 = 0$ (chaussée sinusoïdale (a), $V_0 = 50 \text{ km/h}$, $\lambda_x = 4 \text{ mm}$, $\lambda_y = \infty$)	148
6.13	Evolution des déplacements et des forces de contact pour les points d'abscisses $x_0 = 0$ (chaussée sinusoïdale (b), $V_0 = 50 \text{ km/h}$, $\lambda_x = 4 \text{ mm}$, $\lambda_y = 4 \text{ mm}$)	149
6.14	Evolution des déplacements et des forces de contact pour les points d'abscisses $x_0 = 0$ (chaussée sinusoïdale (c), $V_0 = 50 \text{ km/h}$, $n = 5$	149
6.15	Evolution des déplacements et des forces de contact pour les points d'abscisses $x_0 = 0$ (chaussée réelle (A), $V_0 = 90 \text{ km/h}$)	150
6.16	Evolution des déplacements et des forces de contact pour les points d'abscisses $x_0 = 0$ (chaussée réelle (B), $V_0 = 90 \text{ km/h}$)	150
6.17	Spectre de la force de contact au point $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ pour différentes vitesses (chaussée sinusoïdale (b), $\lambda_x = \lambda_y = 4 \text{ mm}$)	152
6.18	Spectre de la force de contact au point $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ pour différentes longueurs d'ondes (chaussée sinusoïdale (b), $V_0 = 50 \text{ km/h}$)	152

6.19	Spectre de la force de contact au point $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ pour différentes vitesses (chaussée réelle (A))	153
6.20	Spectre de la force de contact en tiers d'octave au point $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ pour différentes vitesses (chaussée réelle (A))	153
6.21	Spectre de la force de contact au point $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ pour les chaussées réelles ($V_0 = 50 \text{ km/h}$)	154
6.22	Spectre de la force de contact en tiers d'octave au point $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ pour les chaussées réelles ($V_0 = 50 \text{ km/h}$)	154
A.1	Schéma des différentes étapes de calcul (1/2)	164
A.2	Schéma des différentes étapes de calcul (2/2)	165

Liste des tableaux

1.1	Comparaison du modèle généralisé de contact ponctuel avec l'expérience	13
2.1	Paramètres de simulations	49
2.2	Comparaison des fréquences propres pour une pression nulle ($p = 0 Pa$)	53
2.3	Comparaison des fréquences propres pour $p = 1000 Pa$	53
2.4	Comparaison des fréquences propres pour $p = 2.5 \cdot 10^5 Pa$	53
3.1	Paramètres de simulation pour le système masse-ressort	77
3.2	Comparaison des temps de calcul	77
3.3	Paramètres utilisés pour les simulations	83
4.1	Paramètres de simulations du système à deux ddls	103
5.1	Caractéristiques du pneumatique homogène	121
5.2	Caractéristiques d'un pneu Michelin de type 165/65/R13 77T	130
5.3	Caractéristiques du pneumatique homogène	131
6.1	Nombre de modes retenus pour l'approximation des fonctions de Green de la section à $\theta = 0$	142

Introduction générale

Le bruit de contact pneumatique/chaussée (ou bruit de roulement) est à l'heure actuelle la première source de bruit du trafic routier hors agglomération. A partir d'une vitesse de 50 *km/h* le bruit de roulement des pneumatiques devient plus important devant les autres bruits générés par une voiture de tourisme. En effet, le bruit du trafic routier a trois sources principales qui sont les effets aérodynamiques, le moteur et le contact pneumatique/chaussée. Pour des vitesses usuelles (inférieures à 100 *km/h*), le bruit aérodynamique reste très faible. Concernant le moteur, les progrès de l'industrie automobile ont permis de réduire considérablement cette source de bruit qui peut même disparaître avec l'arrivée des moteurs électriques. En contre-partie, le bruit généré par le contact pneumatique/chaussée est devenu une préoccupation majeure des organismes de recherche français et internationaux. Cette évolution est liée, pour l'essentiel, à l'augmentation constante du trafic routier.

Dans ce contexte, au cours de la dernière décennie, plusieurs projets français et européens ont été destinés à la lutte contre le bruit de roulement. Ces projets sont principalement axés sur les études théoriques et expérimentale de l'ensemble des phénomènes influençant le bruit de roulement : le projet français PREDIT Texture-Bruit (2004-2007) sur la corrélation entre la texture de la chaussée et le bruit de roulement, les projets européens SILVIA (2002-2005) pour le développement de revêtements de chaussées peu bruyantes, RATIN (2002-2003) et ITARI (2004-2007) pour la modélisation du contact pneumatique/chaussée et le projet franco-allemand DEUFRAKO P2RN (2006-2008) pour la prévision et la propagation du bruit de roulement.

La difficulté majeure de cette thématique est la compréhension des différents phénomènes qui interviennent dans les mécanismes de génération du bruit. Deux grandes familles de phénomènes sont responsables de la génération du bruit. La première concerne les phénomènes de pompage d'air (air-pumping) et la deuxième s'articule autour des vibrations du pneumatique et de son interaction avec la chaussée au cours du roulement. Le travail de cette thèse s'inscrit dans cette dernière famille. Il traite deux aspects majeurs dans la modélisation du bruit de roulement. Le premier consiste à calculer des fonctions de réponse en fréquence (ou fonctions de Green) du pneumatique dans une large bande de fréquences [0 4000 *Hz*]. Le second point est de calculer la réponse du pneumatique dans le domaine temporel en intégrant les non-linéarités dues au contact avec la chaussée au cours du roulement.

L'étude bibliographique menée au premier chapitre aborde plusieurs aspects du bruit de contact pneumatique/chaussée. Au départ, une présentation générale sur les différents mécanismes qui interviennent dans le processus de la génération de bruit est réalisée. Ensuite, l'étude se focalise sur la modélisation du contact pneumatique/chaussée et les différents modèles de pneumatiques existants dans la littérature sont présentés : modèles analytiques simplifiés, modèles numériques basés sur la méthode des éléments finis, leurs avantages et leurs inconvénients y seront aussi discutés. Concernant le contact, des modèles statiques, quasi-statiques et dynamiques qui traitent la problématique sont également présentés. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous exposons quelques modèles

numériques concernant la modélisation des structures en moyennes et hautes fréquences.

Le deuxième chapitre concerne l'étude d'un modèle simplifié de pneumatique. Le modèle est un anneau circulaire basé sur une fondation élastique. Il consiste à décrire l'effet de l'ensemble des éléments d'un modèle de pneumatique $3D$ à l'aide d'une poutre circulaire et de ressorts radiaux et tangentiels. Dans la première partie de ce chapitre, les équations et les différentes hypothèses adoptées pour la construction du modèle sont présentées en détail. Ensuite, le modèle analytique est comparé à un modèle numérique réalisé à l'aide du logiciel d'éléments finis Abaqus et d'un programme Matlab. Ce modèle sera utilisé comme modèle de base afin de valider les différentes idées développées dans cette thèse. La dernière partie de ce chapitre est consacrée aux calculs des fonctions de Green de l'anneau dans le domaine fréquentiel ainsi qu'aux effets de la pression de gonflement et de la vitesse de rotation sur le comportement du modèle.

Le troisième chapitre est consacré au problème de contact ponctuel unilatéral entre un système dynamique et un obstacle rigide, la fonction de Green du système dynamique étant supposée connue dans le domaine fréquentiel. Habituellement, la réponse dynamique est calculée par un produit de convolution entre la force et la fonction de Green. Cependant, cette démarche est souvent coûteuse en termes de temps de calcul. Dans ce chapitre, nous avons utilisé une autre démarche dont l'idée de base est de simplifier cette fonction en la décomposant sur une base modale. Les paramètres modaux sont identifiés à l'aide de l'algorithme LSCE (Least Square Complex Exponential). Ces paramètres sont ensuite utilisés pour construire une convolution plus rapide. Cette convolution modale est particulièrement adaptée au problème de contact dynamique. Afin de modéliser le contact, un ressort est introduit entre la chaussée et le système mécanique. Une comparaison entre la méthode classique et le modèle développé permet de montrer l'efficacité de la méthode. Enfin, des exemples d'anneau circulaire roulant sur différentes chaussées modèles et réelles sont présentés.

Au quatrième chapitre, nous présentons un nouveau modèle de contact dynamique. Le modèle est basé sur les mêmes principes que ceux utilisés dans le troisième chapitre. Le contact est ainsi modélisé par l'addition d'une condition cinématique au lieu d'un ressort de contact (méthode de pénalisation) entre les deux corps en contact. En effet, dans la méthode de pénalisation, le choix d'une valeur adéquate de la raideur de contact n'est pas toujours facile. L'addition d'une condition cinématique aux conditions classiques de contact permet d'éviter cette difficulté et de construire un modèle de contact plus stable et plus robuste. Le modèle est ensuite généralisé au problème de contact multi-points. Une application du modèle de contact multi-point à un système composé de deux ddls et du modèle d'anneau circulaire conclut ce chapitre.

Le cinquième chapitre porte sur le calcul des fonctions de Green d'un pneumatique $3D$. Le modèle utilisé exploite la propriété de symétrie de révolution du pneumatique. Le principe consiste à modéliser une seule cellule du pneumatique appelée cellule de référence. La matrice de rigidité dynamique globale est alors construite à partir de la matrice de rigidité dynamique de référence par un processus de réduction de modèle successif. Le transfert de repère, les conditions de périodicité et les conditions aux limites supplémentaires assurent l'équivalence entre le modèle éléments finis classique et le modèle périodique. Ce dernier permet de calculer les fonctions de Green d'un pneumatique complet jusqu'aux moyennes fréquences ($4000 Hz$) contrairement à la méthode des éléments finis classique, limitée aux basses fréquences [0 $500 Hz$]. Dans un premier temps, le modèle périodique est validé pour le cas du modèle d'anneau circulaire, puis, dans un second temps pour le cas de pneumatiques homogène et hétérogène. Dans la dernière partie du chapitre, quelques simulations sur l'influence de la pression de gonflement et de certains paramètres géométriques sur la réponse dynamique du pneumatique sont présentées.

Le dernier chapitre permet d'appliquer l'ensemble du travail développé au cours de cette thèse au cas d'un modèle de pneumatique $3D$ roulant sur différents types de chaussées rigides. La matrice des fonctions de Green de la zone de contact est calculée à l'aide du modèle périodique présenté dans le chapitre précédent. Les propriétés de symétrie et de périodicité de cette matrice sont exploitées pour optimiser le temps de calcul. Quelques simulations de l'évolution des déplacements et des forces de contact sont présentées pour différentes chaussées modèles et réelles. Enfin, l'étude du contenu spectral des forces de contact en fonction de la vitesse de déplacement et de la rugosité des chaussées est présentée.

Chapitre 1

Bibliographie

NOUS allons commencer ce chapitre par un bref historique de l'importance du bruit en particulier du bruit du trafic routier. Nous abordons également les différents mécanismes physiques qui interviennent dans le processus de génération de ce type de bruit. Dans la suite nous nous focalisons sur la modélisation du contact dynamique entre un pneumatique et une chaussée. Nous mettrons l'accent sur les différents modèles de contact utilisés pour traiter ce genre de problématique. Nous présentons également les différents modèles de pneumatiques existants dans la littérature, leurs avantages ainsi que leurs limites d'application. Enfin, nous présentons des modèles numériques appliqués aux structures dynamiques en moyennes fréquences.

 PLAN DU CHAPITRE 1

1.1	L'importance du bruit	7
1.1.1	Les différentes sources de bruit des véhicules	7
1.1.2	Les mécanismes de génération du bruit	8
1.2	Modélisation du contact d'un pneumatique sur une chaussée	10
1.2.1	Contact hertzien	10
1.2.2	Modèle de contact ponctuel généralisé	12
1.2.3	Contact ponctuel viscoélastique	13
1.2.4	Méthodes numériques pour gérer le problème de contact dynamique	14
1.2.5	Applications au contact pneumatique-chaussée	17
1.3	Pneumatique	19
1.3.1	Propriétés mécaniques et géométriques	19
1.3.2	Fabrication d'un pneumatique	20
1.3.3	Rôles d'un pneumatique	21
1.3.4	Sources de vibration d'un pneumatique	21
1.3.5	Modélisation vibratoire du pneumatique	21
1.4	Calcul en dynamique moyennes fréquences	28
1.4.1	La méthode des éléments finis - FEM	29
1.4.2	Modèles de guide d'onde	30
1.4.3	Le modèle SEA	33
1.4.4	La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes	33
1.5	Conclusion	36

1.1 L'importance du bruit

Depuis une trentaine d'années, les nuisances sonores figurent parmi les préoccupations majeures de la population. Selon des recherches récentes [Afs07], l'être humain ne s'habitue pas au bruit mais en accumule les effets : tachycardie, énervement, sommeil agité, fatigue... D'autres études [LGHZ04, IK04], ont conclu que ce bruit pourrait aussi être à l'origine d'un certain nombre de crises cardiaques qui peuvent être mortelles. Compte tenu de ces connaissances, une série de textes édictés depuis ont permis d'envisager des solutions.

Parmi les différentes sources de nuisances sonores, il apparaît que le bruit causé par la circulation routière est la source dominante. La lutte contre ce phénomène s'est longtemps résumée à implémenter des dispositifs anti-bruit le long des routes. Récemment, les efforts se portent davantage sur la réduction du bruit à la source : moteur, pneumatique, revêtement des chaussées, limitation de vitesse... Les dispositions de la loi du 31 décembre 1992 relative à la lutte contre le bruit ont pour but de limiter ces nuisances en définissant des normes sur la construction de routes nouvelles ou modifiées à proximité d'habitations existantes.

La figure (1.1) présente l'évolution des valeurs limites fixées par l'Union Européenne pour différents types de véhicules. Pour les automobiles (véhicules légers), la valeur limite du bruit était fixée à 77 dB(A), à partir de 1995/96, elle a été abaissée à 74 dB(A). Cela correspond à une réduction de moitié des émissions sonores. La valeur limite du bruit émis par les camions dépend à la fois de leur poids et de leur puissance.

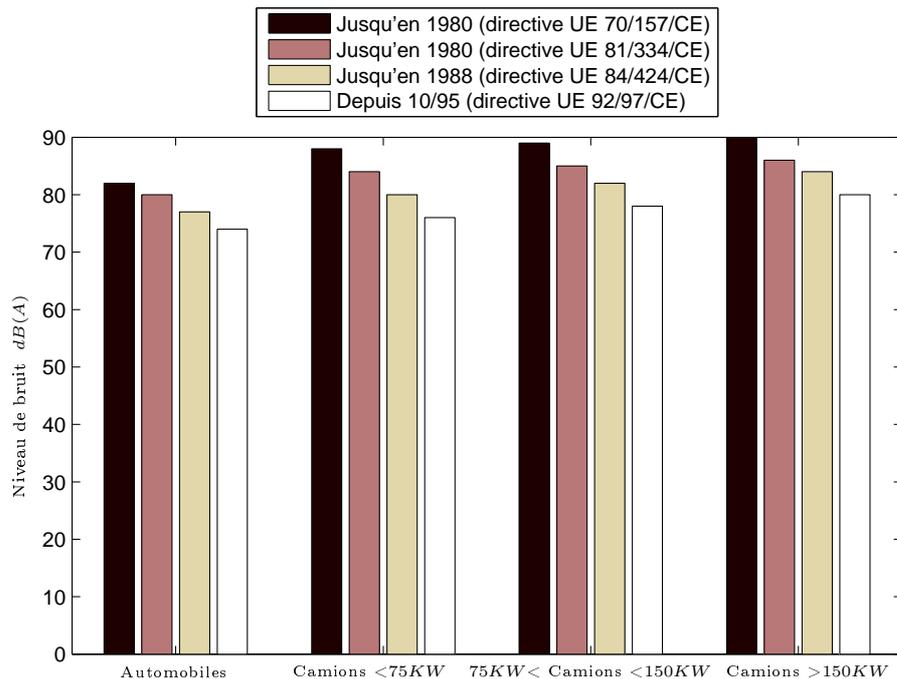


FIGURE 1.1: Limites des niveaux de bruit fixés par l'Union Européenne pour différents types de véhicules

1.1.1 Les différentes sources de bruit des véhicules

Les sources de bruit d'un véhicule vers l'extérieur sont multiples, elles proviennent principalement de trois origines :

le bruit du groupe moto-propulseur : il provient du bruit de l'admission, du moteur, de la chaîne de transmission et de la ligne d'échappement. Les acteurs de l'industrie automobile ont réalisé un progrès considérable en termes de réduction de cette source sonore, qui a baissé de 7 dB(A) depuis 1980 ;

le bruit aérodynamique : il est dû aux turbulences aérodynamiques créées autour du véhicule et à l'interaction de l'air avec la structure. A faible vitesse, les bruits aérodynamiques sont absents ;

le bruit de roulement, ou bruit de contact pneumatique/chaussée. C'est une préoccupation forte dès lors que la vitesse du véhicule dépasse 50 km/h. Il concerne l'ensemble des véhicules routiers et met en jeu à la fois la technologie de fabrication des pneumatiques qui doivent trouver un compromis entre sécurité, confort, résistance au roulement et faible niveau d'émission sonore, et les revêtements routiers qui doivent, eux aussi, trouver un compromis entre qualité d'usage, durabilité et performance acoustique. Face aux enjeux économiques et environnementaux, cette dernière source devient une préoccupation de plusieurs organismes de recherches.

En effet, le bruit de contact pneumatique/chaussée représente une part importante du bruit extérieur émis par les véhicules routiers (1.2). Pour une voiture roulant à 30 km/h en seconde, il compte pour 30% environ du bruit généré par le véhicule, les bruits du moteur, de la transmission et de l'échappement étant prédominants à cette vitesse. A partir de 50 km/h (troisième rapport de vitesse), le bruit de contact représente la moitié de la contribution sonore du véhicule. Sur autoroute, à 130 km/h, il est prépondérant, avec 90% du bruit.

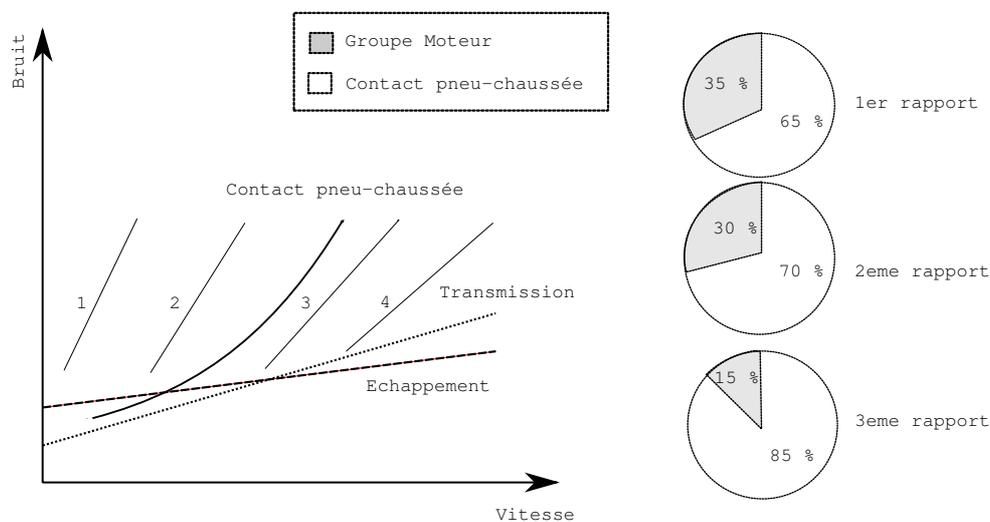


FIGURE 1.2: Contribution des différentes sources de bruit de roulement

1.1.2 Les mécanismes de génération du bruit

La modélisation des différents phénomènes responsables du bruit rayonné par le contact pneumatique/chaussée est un problème multi-physique complexe. Il fait l'objet de quatre thématiques de recherches comme l'illustre la figure (1.3).

Le bruit de roulement est essentiellement occasionné par deux phénomènes : d'une part, l'impact des pneus sur la chaussée qui provoque des vibrations et génère des sons plutôt graves (basses

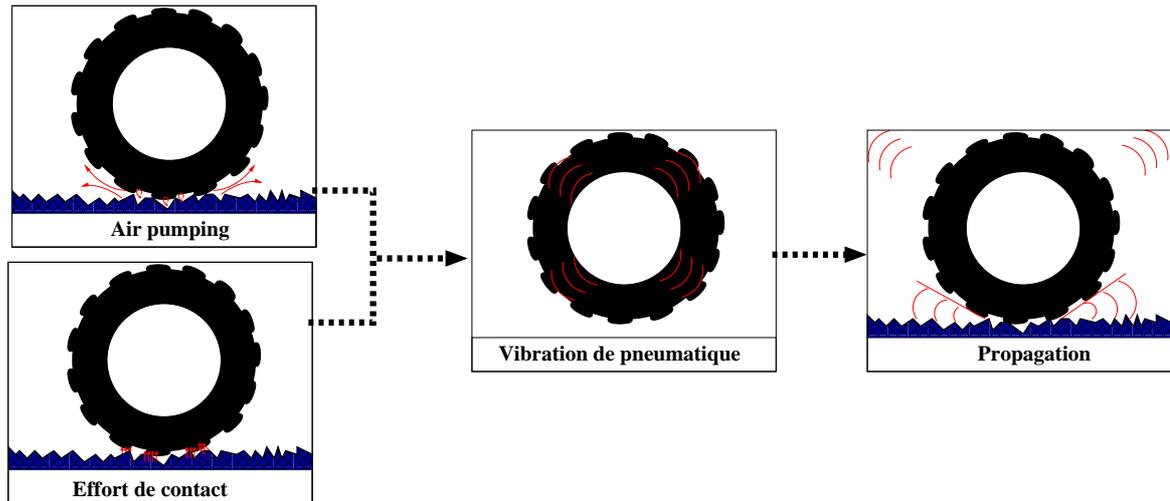


FIGURE 1.3: Les thématiques de recherche pour la modélisation du bruit engendré par le contact pneumatique/chaussée

fréquences), d'autre part la compression puis la détente de l'air piégé entre les sculptures du pneumatique et la chaussée. Ces mécanismes s'accompagnent d'un effet d'amplification (effet dièdre) sur toute la gamme de fréquence, un phénomène qui se traduit par des sons plutôt aigus (moyennes et hautes fréquences).

1.1.2.1 Le phénomène d'air-pumping

C'est un phénomène lié au comportement du fluide et son interaction avec la chaussée et le pneumatique dans la zone de contact. L'air piégé dans les sculptures du pneumatique, subit une dépression brusque ce qui engendre la propagation d'une onde acoustique, ce phénomène est dominant dans le domaine des hautes fréquences. Plusieurs auteurs se sont intéressés à ce phénomène et sa contribution au bruit engendré par le contact pneumatique-chaussée. Jennwein et Bergmann [JB85] supposent que l'air-pumping est la partie manquante pour mieux estimer le bruit rayonné par le roulement du pneumatique. Gerrestsen [GS97] a mis en évidence la contribution de cette source dans la génération du bruit de roulement, en particulier dans le domaine des hautes fréquences. Gagen [Gag99] a étudié l'écoulement du fluide piégé dans les sculptures, il a proposé deux solutions, une solution analytique approchée et une solution numérique. Son étude sur les paramètres influant l'état du fluide à la sortie des sculptures a permis d'établir une relation linéaire entre la largeur de la rainure et la vitesse de l'air. Une autre étude a été réalisée par Fujikawa, Koike Oshino et Tachibana [FOT99] sur la résonance des patins de gomme. Les auteurs ont testé l'influence des caractéristiques de la chaussée sur la génération du bruit de roulement et ils ont aussi conclu qu'il y a bien une résonance à l'intérieur du pneumatique. Hamet et al. [HDP90] ont proposé un modèle analytique qui décrit le phénomène dans sa phase d'échappement d'air. Ils ont également effectué des mesures de la pression à l'intérieur des cavités. Enfin, Conte [Con08] a modélisé le phénomène à l'aide de la méthode CFD (Computational Fluid Dynamics). Il a décrit le phénomène de pompage d'air pour une succession de cavités formées par des pneumatiques et des chaussées réelles. Il conclut que les propriétés géométriques de la chaussée constituent le paramètre qui contrôle la forme du spectre de bruit généré par ce phénomène.

1.1.2.2 La propagation du bruit de roulement d'un pneumatique

Cette thématique de recherche a été bien explorée, de nombreuses études ont été réalisées pour traiter le sujet. L'étude du rayonnement acoustique du pneumatique nécessite à la fois une connaissance de la vitesse de la surface du pneumatique et la prise en compte de l'amplification de la puissance rayonnée par effet dièdre. La plupart des modèles utilisés pour traiter cette problématique sont basés sur la méthode des éléments de frontières (BEM). Fadavi [Fad02] a calculé le niveau sonore et l'amplification du bruit d'un pneumatique à l'aide du logiciel Samray (basé sur la méthode BEM). Anfosso-Lédée [AL96] applique la même méthode en introduisant l'effet d'absorption d'un asphalt poreux sur l'amplification. Bécot [Bec03] a développé la méthode des sources équivalentes pour calculer le rayonnement sur des chaussées d'impédance quelconque. Jean [Jea98] a modélisé le rayonnement des pneumatiques à l'aide d'une approche appelée GRIM (Green Ray Integral Method). Son modèle consiste à utiliser une fonction de Green particulière d'un pneumatique rigide. Le calcul est réalisé à l'aide du code de calcul BEM MICADO utilisant une approche variationnelle [JNG08].

1.1.2.3 L'effet dièdre

A l'entrée et à la sortie des zones de contact se produit un effet dièdre ou ce qu'on appelle aussi effet pavillon. Le pneu et la chaussée forment au voisinage de la zone de contact une sorte de cône acoustique, qui s'accompagne d'une amplification de la puissance rayonnée. Cette amplification peut atteindre 20 dB par rapport à un champ libre. Plusieurs auteurs ont mis en évidence son importance, le phénomène a été abordé par K. Schaff [1] et D. Ronneberger [Ron82]. Il a fallu attendre dix ans pour modéliser ce phénomène par Kropp [Kro92]. Kropp a proposé un premier modèle prédisant le bruit de contact pneumatique/chaussée, en prenant en compte l'effet dièdre. Un modèle analytique a été étudié par Klein [Kle98] dans le cas 2D pour un cercle au dessus d'une chaussée réfléchissante. Dans le cas tridimensionnel avec des géométries plus complexes seule la méthode des éléments de frontières permet de modéliser ce phénomène. Fadavi [Fad02] a étudié le phénomène dans le cas 3D, son étude est réalisée à l'aide du logiciel SAMCEF pour le maillage du pneumatique puis SAMRAY pour le calcul du rayonnement acoustique. Il a montré que la modélisation de l'effet dièdre par un modèle 2D n'est pas suffisante pour décrire l'ensemble des phénomènes liés à cet effet. Dans le cas 3D l'onde acoustique peut tourner autour du pneumatique en produisant d'autres interférences, ces dernières ne peuvent pas être captées par le modèle 2D de l'INRETS étudié par Klein. Il a comparé l'amplification du son par effet dièdre des deux modèles, la différence peut atteindre 10 dB pour certaines fréquences. Des expériences ont conforté les résultats de la modélisation par la méthode des éléments de frontière. La figure (1.4) montre une simulation réalisée par le logiciel SAMRAY qui met en évidence l'amplification du rayonnement à cause de la géométrie anguleuse entre le pneumatique et la chaussée (l'effet dièdre).

1.2 Modélisation du contact d'un pneumatique sur une chaussée

Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse uniquement aux efforts de contact normaux. En particulier, on ne tiendra pas compte du frottement qui peut être à l'origine de différents phénomènes tels que le crissement [FSDJ07, CNS09].

1.2.1 Contact hertzien

Les problèmes de contact mécanique sont particulièrement complexes. Les modèles théoriques de contact font intervenir un grand nombre de paramètres et sont en général fortement non-linéaires.

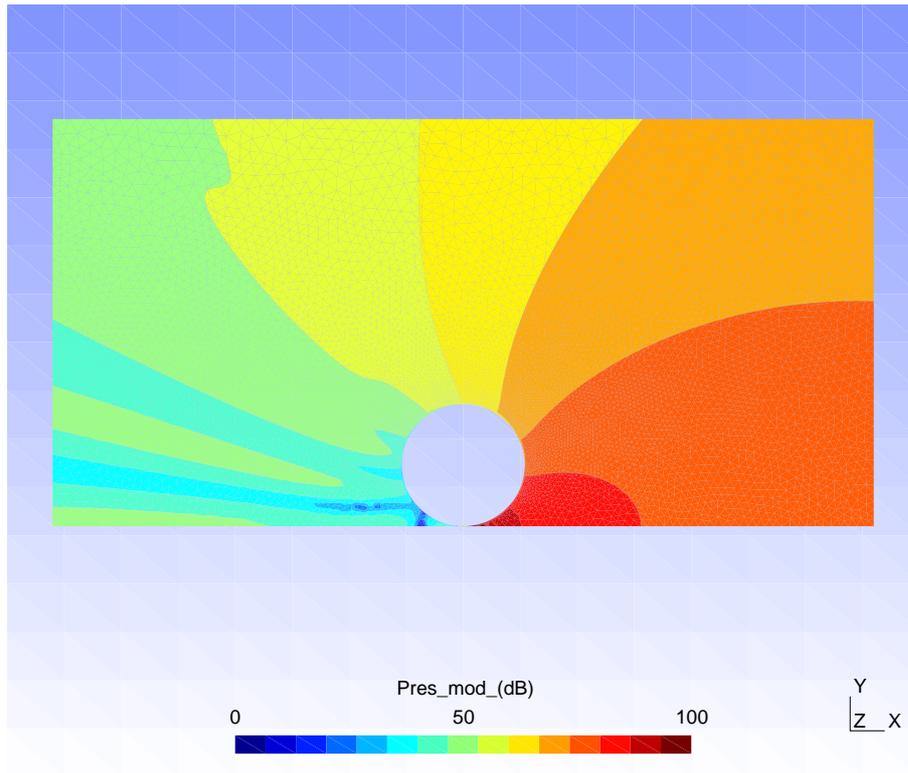


FIGURE 1.4: *Rayonnement acoustique autour d'un pneumatique, effet dièdre*

Plusieurs modèles sur le comportement mécanique du contact ont été proposés. La théorie de Hertz reste la référence du problème de contact. En 1882 Hertz a proposé une solution du problème de contact entre deux corps élastiques isotropes. Les formules proposées par Hertz permettent d'exprimer l'aire de contact, le déplacement relatif et la pression de contact de deux solides élastiques en fonction de la charge appliquée. Pour trouver la solution du problème de contact, Hertz [Her81] a supposé tout d'abord une distribution parabolique de la pression normale de contact agissant sur une aire de contact elliptique et a ensuite vérifié que les conditions de contact unilatéral étaient bien satisfaites.

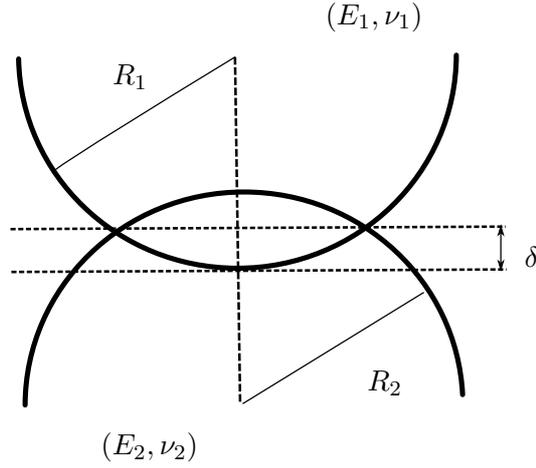
En se plaçant dans l'hypothèse des petites déformations, la surface de contact reste petite par rapport aux dimensions des solides en contact, chaque solide peut être assimilé à un demi-espace élastique. Pour une force d'appui donnée, la théorie de Hertz fournit la taille de la zone de contact, la pression normale sous le contact et les contraintes normales principales. Dans le cas d'un contact ponctuel entre deux solides (voir figure 1.5), Hertz établit une relation entre la charge normale appliquée et l'écrasement au niveau du point de contact par la formule suivante :

$$P = C\delta^{3/2} \quad (1.1)$$

avec

$$C = \frac{4E^*\sqrt{R}}{3} \quad (1.2)$$

où P représente la charge normale appliquée et δ l'interpénétration du corps (1) dans (2). R et E^* sont respectivement le rayon de courbure équivalent et le module de Young équivalent définis par :

FIGURE 1.5: *Contact ponctuel entre deux solides déformables*

$$\frac{1}{E_*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}, \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (1.4)$$

où E_1, ν_1, R_1 et E_2, ν_2, R_2 sont respectivement le module d'Young, le coefficient de Poisson et le rayon de courbure des deux solides (1) et (2).

1.2.2 Modèle de contact ponctuel généralisé

La théorie de Hertz est valable uniquement pour des contacts hertziens. De plus les déformations doivent être suffisamment faibles de sorte à rester dans le domaine élastique. Sameur [Sam04] s'est intéressé au contact ponctuel entre un massif semi-infini et une pointe de forme quelconque. Il s'est basé sur la théorie du potentiel d'interaction de Wilke. Le potentiel de contact entre deux solides ayant des surfaces régulières est donné par la formule :

$$U = c \frac{8}{15\pi^{\frac{1}{4}}(\theta_1 + \theta_2)} \frac{V^2 P^{\frac{1}{2}}}{S^{\frac{7}{4}}} \quad (1.5)$$

où $\theta_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i}$, V , P et S sont respectivement le volume, le périmètre et la section du domaine d'intersection des deux solides.

Par la suite, il suppose que cette formule est valable pour n'importe quelle forme de surface. Il étudie ainsi trois formes différentes, une pointe sphérique et une pointe conique où les lois de contact sont connues, puis une pointe de forme pyramidale.

La constante c dépend des paramètres géométriques. Dans le cas d'une pointe sphérique, la valeur de c est déterminée par identification avec la loi de Hertz. On trouve ainsi $c_s = 0,36$.

Dans le cas d'une pointe conique la relation entre la charge et l'interpénétration s'écrit :

$$P = \frac{8}{\pi} \frac{G^2}{(1 - \nu^2)E_*} \tan\alpha \delta^2 \quad (1.6)$$

Où G est le module de cisaillement. De la même façon la constante est identifiée pour une pointe conique en comparant avec la loi de contact (1.1), donnant cette fois $c_c = 0,45$.

Afin de valider le modèle de contact ponctuel généralisé (1.5), Sameur a effectué une campagne d'essai pour les trois formes de pointes. Les résultats d'identification des coefficients c_s , c_c et c_p sont regroupés dans le tableau (1.1).

Type de la pointe	Modèle	Expérience
sphérique c_s	0.36	0.34
conique c_c	0.45	0.45
pyramide c_p	–	0.53

TABLE 1.1: Comparaison du modèle généralisé de contact ponctuel avec l'expérience

Nous pouvons constater que les résultats expérimentaux sont très proches du modèle généralisé dans le cas d'une pointe sphérique et d'une pointe conique. En revanche dans le cas d'une pointe pyramidale, Sameur n'a pas pu se comparer avec un modèle théorique. L'étude expérimentale a permis de déterminer la constante c_p et d'avoir ainsi un modèle hybride, en couplant les résultats expérimentaux et le modèle généralisé.

1.2.3 Contact ponctuel viscoélastique

Un grand nombre de problèmes de contact est influencé par le comportement viscoélastique des matériaux. Plusieurs auteurs se sont intéressés à ce phénomène. Une approche simplifiée a été proposée par Lee et Radock [LR60]. Connaissant la solution dans le cas élastique, l'auteur propose de remplacer la constante élastique par un opérateur intégral qui tient compte du comportement viscoélastique du matériau. En effet, la relation entre contrainte et déformation dans le cas d'un problème élastique s'écrit :

$$s_{ij} = 2\mu_e e_{ij} \quad \text{ou encore} \quad e_{ij} = \frac{1}{2\mu_e} s_{ij}. \quad (1.7)$$

Et dans le cas viscoélastique cette relation prend la forme :

$$s_{ij} = \int_0^t G(t - \tau) \frac{de_{ij}}{d\tau} d\tau, \quad e_{ij} = \int_0^t J(t - \tau) \frac{ds_{ij}}{d\tau} d\tau. \quad (1.8)$$

où e_{ij} , s_{ij} sont respectivement les parties déviatoriques de la déformation et de la contrainte, G la fonction de relaxation et J celle du fluage.

En passant par la transformée de Laplace, I.F. Kozhevnikov et al. [KCD⁺08] ont proposé une relation entre le déplacement vertical u_z et la pression de contact par la formule :

$$u_z(x, y, t) = \frac{(1 - \nu)}{\pi} \int_0^t J(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \left[\iint_{\Omega_m} \frac{p(\xi, \eta, \tau)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi d\eta \right] d\tau \quad (1.9)$$

où $\Omega_m = \max(\Omega(t))$ est l'aire maximale qui peut être observée au cours du chargement.

En ajoutant l'équation d'équilibre suivante :

$$F(x, y, t) = \iint_{\Omega(t)} p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta, \quad (1.10)$$

on peut déterminer ainsi à chaque instant t l'écrasement $\delta(t)$ et la pression $p(r, t)$ en tout point de la surface du demi-espace. Avant de généraliser ce modèle, les auteurs ont comparé ces résultats avec la méthode MIM (Méthode d'Inversion de Matrice) dans le cas d'une pointe sphérique. La figure (1.6) illustre la comparaison de la distribution de la pression du contact entre les deux méthodes de résolution.

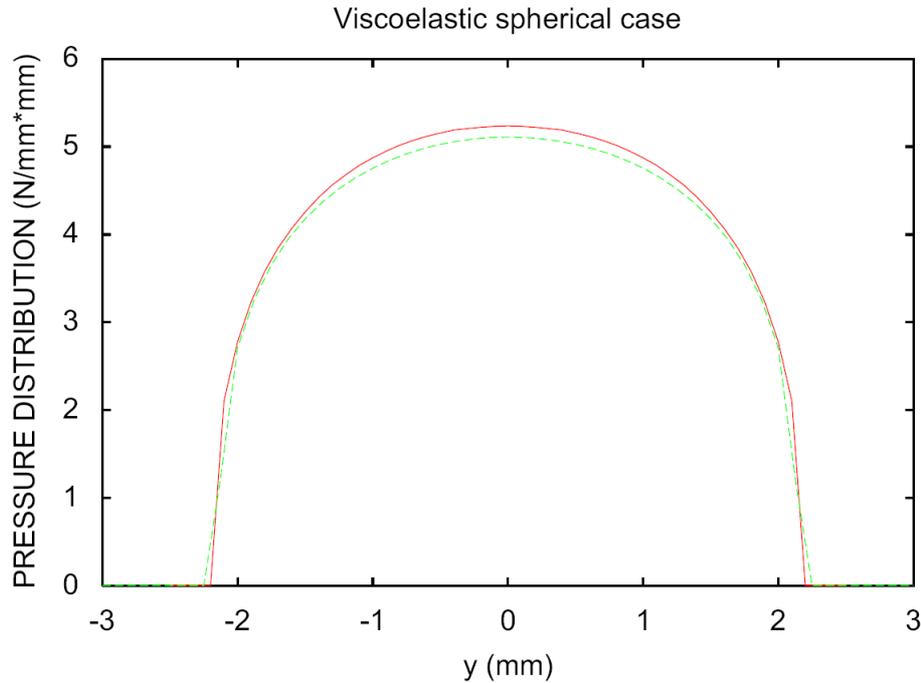


FIGURE 1.6: *Distribution de la pression en surface d'une pointe sphérique en contact avec un massif semi infini [KCD⁺08] : - modèle numérique, - - modèle analytique.*

1.2.4 Méthodes numériques pour gérer le problème de contact dynamique

L'analyse du problème de contact dynamique entre deux solides déformables ou un solide déformable et une surface rigide est généralement traitée par deux grandes familles de méthodes : la méthode de pénalisation [KY90] et la méthode des multiplicateurs de Lagrange [BC85]. D'autres méthodes ont été développées, par exemple la méthode de Lagrange perturbée [SWT85] qui est une régularisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange par l'addition d'un terme à la fonction lagrangienne, ou bien la méthode de Lagrange augmentée [JR88] qui combine des termes de la méthode des multiplicateurs de Lagrange et de la fonction de pénalité. On peut aussi citer d'autres méthodes comme la méthode des éléments de contact [SW79], la méthode de fonction de contrainte [EB91], la méthode de la compensation linéaire [KK96] et la méthode incrémentale de programmation convexe [MHS03].

Dans cette thèse on s'intéresse au problème de contact unilatéral entre un solide déformable (S) et un obstacle rigide (R) comme le montre la figure (1.7). Les conditions de contact unilatéral, dites conditions de Signorini, sont les suivantes :

- le solide ne peut pénétrer l'obstacle ;
- en cas d'absence de contact, le solide ne subit aucun effort de l'obstacle ;
- en cas de contact, le solide subit un effort de l'obstacle qui tend à le comprimer.

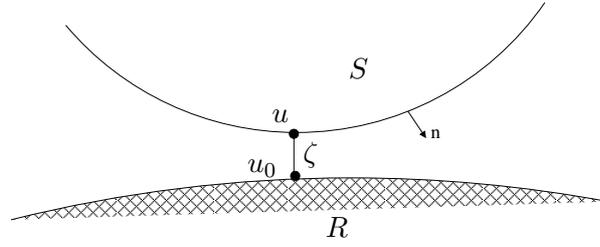


FIGURE 1.7: Condition de contact de Signorini

Ces conditions peuvent être écrites mathématiquement sous la forme :

$$\zeta = \mathbf{0} ; \sigma \cdot \mathbf{n} < 0 \quad (1.11)$$

$$\zeta < \mathbf{0} ; \sigma \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.12)$$

avec ζ l'écart entre le déplacement du solide \mathbf{u} et de l'obstacle \mathbf{u}_0 et \mathbf{n} la normale sortante de la surface du solide S .

1.2.4.1 Méthode de pénalisation

Cette méthode permet de gérer le contact entre un point matériel et une surface rigide ou déformable. Une petite pénétration du point matériel ζ dans la surface est autorisée contrairement aux conditions de Signori. Par conséquent la fonctionnelle de l'énergie totale est augmentée par une fonction de pénétration :

$$\Gamma(\mathbf{u}_t)^a = \Gamma(\mathbf{u}_t) + \frac{\kappa}{2} \zeta_t^T \zeta_t \quad (1.13)$$

avec $\Gamma(\mathbf{u})$ la fonction de l'énergie totale associée aux corps en contact, \mathbf{u}_t le déplacement nodal, ζ le vecteur pénétration à l'instant t et κ le facteur de pénalité (ou raideur de contact). La minimisation de l'équation (1.13) mène à l'équation variationnelle discrète.

$$\delta \Gamma(\mathbf{u}_t) = \delta \Gamma(\mathbf{u}_t) + \kappa \zeta_t^T \delta \zeta_t \quad (1.14)$$

Les forces de contact peuvent être calculées par la relation de récurrence :

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_{t-1} + \kappa \zeta^T \quad (1.15)$$

La méthode présente l'avantage d'être facile à mettre en oeuvre. Elle ne présente aucun ajout d'inconnue supplémentaire mais le choix de la raideur de contact est souvent délicat. Une valeur faible de cette raideur permet des pénétrations importantes qui ne sont pas acceptables physiquement, tandis que des valeurs trop grandes donnent naissance à des oscillations et des instabilités numériques [JR99, Zho93, MPE92]. Dans son article Halquist [HGB85] a proposé une formule pour le choix de cette valeur

$$\kappa = \alpha \frac{A^2}{V_e} K_0 \quad (1.16)$$

avec A l'aire de la surface de l'élément en contact, V_e le volume de cet élément, K_0 le module de compressibilité et α un facteur d'échelle qui est égal en général à 0,1. Une autre formule pour

le choix de la valeur de la raideur de contact a été proposée par Chamoret [CSRB04]. Cette fois la raideur de contact est choisie de façon automatique en fonction de la précision souhaitée. En plus elle ne dépend pas des propriétés des matériaux comme celle proposée par Halquist :

$$\kappa = \frac{1}{\beta \Delta t^2} [\mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^T]^{-1} \quad (1.17)$$

avec β un paramètre de Newmark. Le terme $\mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^T$ correspond à la condensation de toutes les masses qui participent au contact.

1.2.4.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Contrairement à la méthode de pénalisation, cette méthode permet de respecter parfaitement la condition de non pénétration. Elle permet également d'éviter les problèmes liés au choix de la raideur de contact. Elle consiste à introduire des inconnues supplémentaires appelées multiplicateurs de Lagrange puis à définir deux surfaces : une surface maître et une surface esclave. La surface maître est utilisée, via sa normale, pour la définition de la direction de contact. La surface esclave contient les noeuds de contact, ces noeuds n'ont pas le droit de pénétrer la surface maître, alors que le contraire est possible.

Le choix de cette hiérarchie dépend des critères suivants :

- si l'un des corps est infiniment rigide, alors il sera choisi comme maître ;
- si les deux corps sont déformables, la pièce la plus rigide et/ou maillée le plus grossièrement sera choisie comme maître (nb : il s'agit ici de la rigidité -locale- de la structure et non simplement du matériau qui la constitue).

L'introduction des multiplicateurs de Lagrange ainsi que la définition de ces surfaces rend la méthode difficile à mettre en oeuvre et coûteuse en termes de temps de calcul.

En effet la fonctionnelle de l'énergie totale à l'instant t est donnée par la formule

$$\Gamma(\mathbf{u}_t)^a = \Gamma(\mathbf{u}_t) + \boldsymbol{\lambda}_t^T \boldsymbol{\zeta}_t \quad (1.18)$$

Avec $\Gamma(\mathbf{u})$ la fonction de l'énergie totale associée aux corps en contact, \mathbf{u}_t le déplacement nodal, $\boldsymbol{\zeta}$ le vecteur pénétration à l'instant t et $\boldsymbol{\lambda}$ le vecteur des multiplicateurs de Lagrange. La minimisation de l'équation (1.18) mène à l'équation variationnelle discrète.

$$\delta \Gamma(\mathbf{u}_t) + \boldsymbol{\lambda}_t^T \delta \boldsymbol{\zeta}_t = 0 \quad (1.19)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_t^T \delta \boldsymbol{\zeta}_t \leq 0 \quad (1.20)$$

Les forces sont ensuite calculées par la formule :

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{K}_t^c \boldsymbol{\lambda}^T \quad (1.21)$$

avec \mathbf{K}_t^c la matrice de raideur de contact globale à l'instant t . Elle est obtenue par assemblage des matrices élémentaires des contraintes sur les déplacements.

1.2.5 Applications au contact pneumatique-chaussée

Plusieurs modèles ont été développés ces dernières années pour traiter le problème du contact pneumatique/chaussée. Ces modèles sont souvent basés sur des formules analytiques, parfois validées par des expériences. Klein et al. [KJFAL04] ont proposé un modèle 2D qui permet de retrouver le profil de la texture de la chaussée enveloppé par le pneumatique au cours du roulement. En partant du résultat de Johnson [Joh85] qui donne la relation entre le déplacement et la pression en surface du plan semi-infini, Klein [Kle98] écrit le problème sous la forme :

$$\begin{cases} u(x) - u(x_0) = \int_{\Gamma_c} [G(x, y) - G(x_0, y)] p(y) dy & \forall x \in \Gamma \\ u(x) - u(x_0) = z(x) - z(x_0) \text{ et } p(x) > 0 & \forall x \in \Gamma_c \\ p_m = \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} p(x) dx \end{cases} \quad (1.22)$$

où Γ_c est l'aire de contact et $G(x, y)$ est la fonction de Green périodique.

D'autres modèles ont été étudiés à l'université de Chalmers. Kropp [Kro89] a proposé un modèle 2D basé sur une fondation élastique de Winkler¹. Larsson [Lar02] propose un modèle quasi-3D en tenant compte des interactions entre les points à la surface de la bande de roulement. Le problème dynamique est décomposé en plusieurs problèmes statiques. En 2004 Wullens [Wul04] propose un modèle 3D en modélisant la bande de roulement par un massif élastique semi-infini. Les auteurs des trois modèles considèrent seulement les efforts radiaux et négligent les effets d'adhésion et de frottement.

Au cours de sa thèse Cesbron [Ces07] a développé un modèle de contact pneumatique/chaussée en roulement. Partant du même principe que Wullens, le modèle est approché par une succession d'états statiques et la bande de roulement est modélisée par un massif semi-infini. Pour résoudre le problème de contact Cesbron a développé une Méthode Itérative à Deux Echelles (MIDE). Le principe de la méthode est d'étudier le problème sur deux échelles différentes, d'abord une échelle macroscopique pour évaluer l'effort de contact aux niveaux des sommets des aspérités, puis une échelle microscopique qui vise à déterminer la distribution locale de la pression dans la surface de contact à partir des efforts aux sommets des aspérités. Cette étape fait appel à la Méthode d'Inversion de Matrice (MIM). Le couplage des deux échelles rend le problème moins coûteux en termes de temps de calcul. Les résultats de la méthode standard MIM et de la méthode MIDE sont comparés dans le cas de trois types d'aspérités (cylindrique, sphérique et conique). Les surfaces en contact avec le massif semi-infini sont composées de sept aspérités identiques disposées de façon hexagonale comme le montre la figure(1.8). La figure (1.9) illustre une comparaison de la distribution de pression calculée par les deux méthodes.

Dans Brinkmeier [BNPE08], l'auteur étudie l'influence de la rugosité de la chaussée sur le comportement dynamique d'un pneumatique. À l'aide de l'analyse de Fourier discrète des mesures de la texture, une expression déterministe de la rugosité dans la zone de contact est intégrée dans le modèle. Ainsi le déplacement dû au contact peut être décomposé en une somme de fonctions harmoniques. Ces fonctions sont définies en chaque noeud en contact avec la chaussée :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_i \mathbf{u}_i e^{j(\phi_i + \omega_i^{ex} t)} \quad (1.23)$$

où ω_i^{ex} est la fréquence d'excitation et ϕ_i la phase de contact. Cette dernière est calculée à partir de la vitesse de rotation dans la direction circonférentielle et de manière aléatoire dans la direction

1. le contact est modélisé par un ensemble de ressorts placés entre le pneumatique et la chaussée

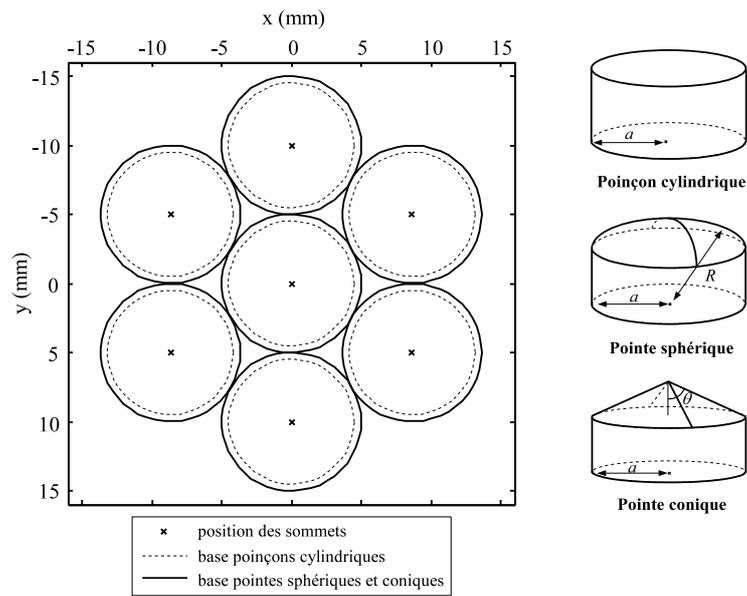


FIGURE 1.8: Configuration des surfaces en contact avec le massif semi-infini [Ces07]

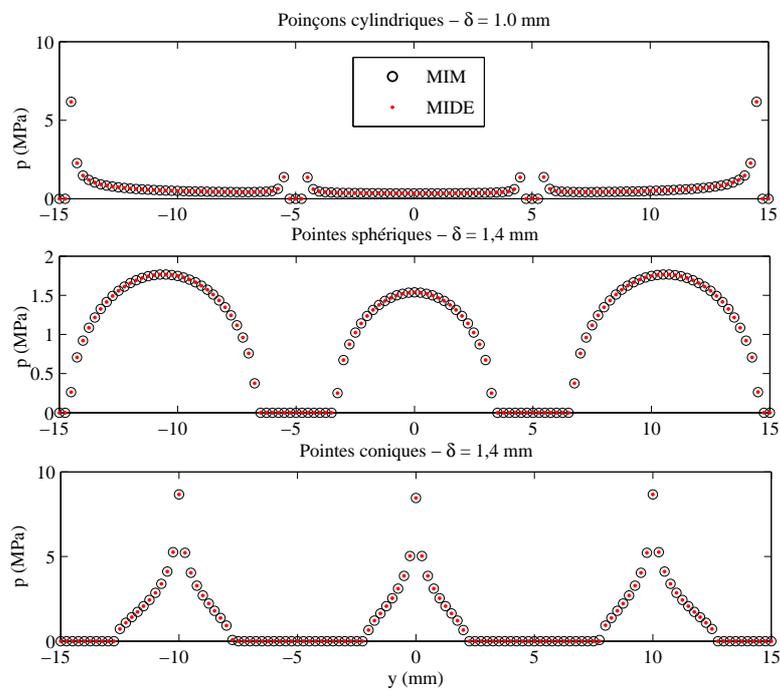


FIGURE 1.9: Distributions de pression normalisée pour les trois géométries : sphère, cylindre et cône [Ces07]

longitudinale. La force d'excitation \mathbf{f} est déduite en fonction de ces déplacements et de la matrice de raideur de contact K_c . L'équation de mouvement peut alors s'écrire :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad ; \quad \mathbf{f}(t) = -K_c\mathbf{u}(t) \quad (1.24)$$

où \mathbf{M} , \mathbf{G} et \mathbf{K} sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur.

1.3 Pneumatique

1.3.1 Propriétés mécaniques et géométriques

L'histoire du pneu a commencé en 1888, après son invention par l'écossais John Boyd Dunlop. Les premiers pneumatiques ont été conçus pour les vélos, des boudins de caoutchouc gonflés d'air et fixés à la jante. En 1891, le français Edouard Michelin invente le pneumatique démontable pour les bicyclettes. L'invention est un succès immédiat et pas seulement dans le monde du vélo : très vite l'automobile, le ferroviaire, l'aéronautique et la machinerie s'emparent à leur tour du pneu. Aujourd'hui le pneumatique a beaucoup évolué, il devient un produit de haute technologie qui doit répondre à des exigences fortes et diverses en termes de performance. Il existe ainsi des pneus à lamelles pour une meilleure adhérence sur la neige, des pneus faisant économiser du carburant par une moindre résistance au roulement, des pneus limitant le bruit de roulement... Malgré les différents modèles de pneumatique, leurs constitutions restent les mêmes. Ils sont fabriqués à partir de caoutchouc naturel et artificiel, d'adjuvants chimiques comme le soufre, les huiles et d'autres, ainsi que de câbles textiles et métalliques. Le pneu est constitué de trois grandes zones (voir figure 1.10) :



FIGURE 1.10: Constitution d'un pneumatique

1. La zone sommet s'appelle aussi la bande de roulement. C'est la couche de gomme qui entre en contact avec la route. Cette gomme doit être assez adhérente pour être capable de transmettre le couple permettant de guider le véhicule dans les virages, sans pour autant créer

une grande résistance au roulement. La bande de roulement est creusée de sculptures et de petits canaux qui évacuent l'eau et la neige et diminuent le risque d'aquaplanage. Sous la bande de roulement se trouvent les nappes ceintures, constituées de fils métalliques parallèles. Ces câbles, en deux couches croisées, assurent la rigidité du pneumatique, notamment lors de poussées latérales (virages).

2. Les flancs sont les éléments latéraux du pneu. Constitués d'une gomme souple, ils sont capables de résister aux chocs et aux tensions liées au roulement du pneu. Sur cette zone se trouvent tous les marquages du pneu (dimension, fabricant, indices etc) comme le montre la figure (1.11)
3. La zone basse assure l'accrochage du pneu à la jante grâce à deux anneaux métalliques qui prennent appui sur celle-ci. Ainsi faite, cette zone permet d'avoir une étanchéité parfaite entre la jante et le pneu dans le cas d'un pneu tubeless, c'est-à-dire sans chambre à air et pour lequel l'air est gardé dans l'espace entre la jante et le pneu.



FIGURE 1.11: Constitution d'un pneumatique

1.3.2 Fabrication d'un pneumatique

Le processus de fabrication d'un pneumatique commence par le mélange des caoutchoucs naturels et synthétiques (environ 30 types de caoutchoucs) avec les huiles de fabrication, le noir de carbone et d'autres produits chimiques. Les proportions variant d'une usine à une autre, elles sont plus dictées par les coûts et la qualité du produit que l'on veut obtenir. Ces ingrédients sont mélangés dans des malaxeurs géants, appelés Banbury, fonctionnant à des températures et des pressions extrêmement élevées. Ces mélanges servent à fabriquer des bandes. Ces dernières sont pressées et soumises à des températures très élevées. De là, elles seront découpées en bandes qui deviendront des flancs, des bandes de roulement ou d'autres parties de pneus. Les bandes sorties de cette opération vont envelopper un tambour pour obtenir un cylindre aux extrémités duquel des talons à fils d'acier seront enrobés dans un disque de gomme. Les pneus prennent leur forme finale

dans un moule de vulcanisation à une température d'environ 300 °C. L'identification des pneus ainsi que les sculptures de la bande de roulement sont gravées dans le moule et transférées au pneu durant cette opération.

1.3.3 Rôles d'un pneumatique

Les pneumatiques sont les seuls éléments du véhicule en contact avec le sol, ils ont de multiples fonctions qui sont principalement :

- supporter toute la charge du véhicule, ils ne doivent donc pas trop se déformer sous l'effort, tant en statique qu'en dynamique ;
- assurer la transmission des efforts du moteur et répercuter au sol les couples de freinage et d'accélération du véhicule ;
- donner la direction du véhicule et participer au maintien de la stabilité de la trajectoire ;
- contribuer à la suspension et au confort grâce à leur flexibilité ;
- adhérer sur tous les types de revêtements quelque soit leur état.

1.3.4 Sources de vibration d'un pneumatique

La vibration d'un pneumatique est l'une des sources principales du bruit de roulement. La compréhension du comportement dynamique du pneumatique est essentielle pour mieux évaluer le bruit. Plusieurs études théoriques et expérimentales ont été réalisées pour traiter le sujet. Iwao et Yamazaki [IY96] ont mesuré le déplacement de la surface de la bande de roulement et du bord d'un pneumatique lisse roulant à une vitesse de 50km/h. Ils ont identifié ainsi quatre zones de sources émissives (voir figure 1.12). La première zone est placée à l'arrière du pneumatique, juste au-dessus de la ligne de fuite de la zone de contact, le spectre fréquentiel de cette zone est situé entre 400 et 600 Hz . Elle contient la première fréquence de résonance des patins de gomme. La deuxième et la troisième zone sont situées au niveau de la zone de contact. Elles vibrent sur une large bande de 500 Hz à 2000 Hz , et contiennent la deuxième fréquence de résonance des patins. Enfin la quatrième zone est située en haut du pneumatique et vibre dans la bande de fréquence [500 600 Hz]. Les sources principales de l'émission sonore sont situées principalement autour de la zone de contact et du bord de pneumatique. Dans ces zones le niveau global de la pression acoustique est plus important.

1.3.5 Modélisation vibratoire du pneumatique

1.3.5.1 Modèles analytiques

Différents modèles sont proposés dans la littérature pour modéliser le comportement dynamique d'un pneumatique. Le modèle d'anneau circulaire de Bohm [Boh66] a été étudié par plusieurs auteurs (Dodge [Dod65], Kropp [Kro89], Heckel [Hec86], Dorhmann [Dor88] et Huang [HH92]). Le pneumatique est modélisé par un anneau circulaire lisse tournant à une vitesse angulaire constante (voir figure 1.13). Le modèle permet d'avoir des résultats pertinents dans le domaine des basses fréquences (0 – 400 Hz). Les modes et les fréquences propres calculés par ce modèle ont été validés par des mesures expérimentales ([Kro89], [WNR08]). Ce modèle sera étudié plus en détail dans le prochain chapitre.

Huang [Hua96] et Soedel [SW76] ont intégré l'influence d'une chaussée lisse sur le comportement dynamique de l'anneau circulaire. Les auteurs utilisent la méthode de la réactance (le principe de la

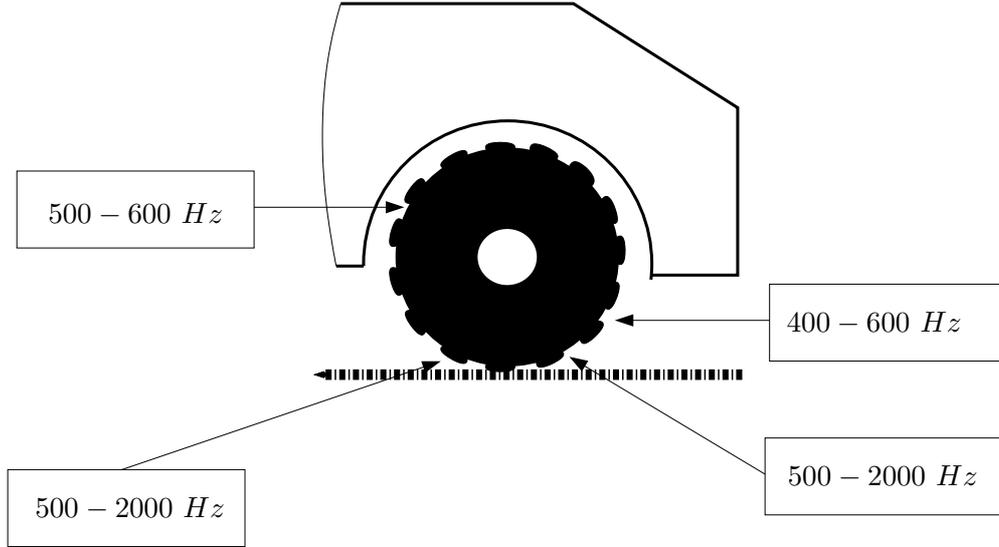


FIGURE 1.12: Zones de vibration d'un pneumatique

méthode est écrit entièrement dans [SW76]). La réceptance α_{ij} est définie comme le rapport entre la réponse de déflexion du système en un point i avec une force harmonique en un point j :

$$\alpha_{ij} = \frac{X}{F} \quad (1.25)$$

Dans le cas du contact d'un anneau circulaire (système A) /chaussée (système B) comme le montre la figure (1.14), on considère la force harmonique décrite par l'équation (1.26).

$$f_{A1} = F_{A1}e^{j\omega t} \quad (1.26)$$

La réponse non amortie de l'anneau circulaire est donnée par l'équation :

$$x_{A1} = X_{A1}e^{j\omega t} \quad (1.27)$$

et sa réceptance par :

$$\alpha_{11} = \frac{X_{A1}}{F_{A1}} \quad (1.28)$$

De même la réceptance de la chaussée s'écrit :

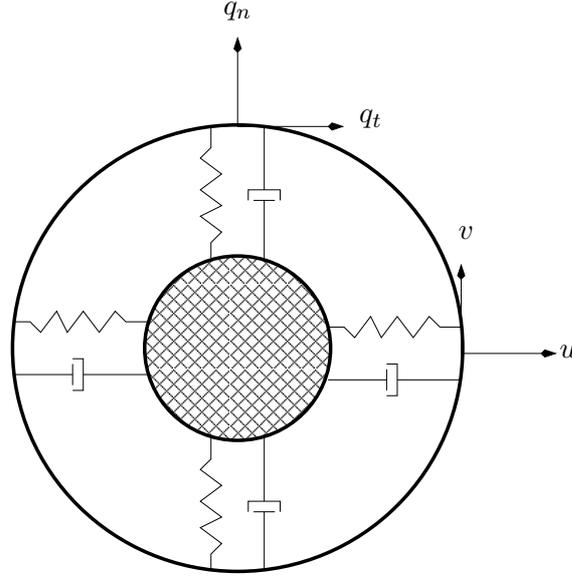
$$\beta_{11} = \frac{X_{B1}}{F_{B1}} \quad (1.29)$$

En joignant l'anneau circulaire et la chaussée, on peut écrire l'équation d'équilibre suivante :

$$\alpha_{11} + \beta_{11} = 0 \quad (1.30)$$

Si la chaussée est rigide, on a $\beta_{11} = 0$ et alors $\alpha_{11}(\omega) = 0$. La résolution de cette équation permet de calculer les fréquences propres de l'anneau circulaire. Les résultats sont très proches des fréquences propres d'un pneumatique réel pour des fréquences allant jusqu'à 400 Hz.

Dans la gamme des moyennes fréquences (400 – 2500 Hz), les longueurs d'onde restent encore grandes par rapport à l'épaisseur de la carcasse. Le pneumatique peut être considéré homogène

FIGURE 1.13: *Modèle d'anneau circulaire sous fondation élastique*

dans la direction radiale. De plus la courbure peut aussi être négligée. Le modèle simplifié le plus adapté est celui de la plaque orthotrope (voir figure (1.15)). La bande de roulement est modélisée par une plaque mince précontrainte, ayant deux raideurs différentes suivant les directions longitudinale ou transversale. Des conditions périodiques sont appliquées aux deux extrémités de la plaque. La pression de gonflage est modélisée par une fondation élastique supportant la plaque.

L'équation dynamique de la plaque orthotrope sous tension T_0 s'écrit

$$-T_0 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \left[\sqrt{K_x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \sqrt{K_y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]^2 + (K_a - \omega^2 M)v = F_0 \quad (1.31)$$

où K_x , K_y et K_a sont respectivement les raideurs longitudinale, transversale et de l'air à l'intérieur du pneumatique, M la masse de la couche par unité de surface et F_0 l'excitation extérieure.

La réponse en un point de coordonnées (x, y) suite à une excitation instantanée en un point de coordonnées (x_0, y_0) est donnée par la fonction de Green suivante [Hamse, Ham02] :

$$G(x, y | x_0, y_0) = -\frac{4}{M l_x l_y} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_{yn} y) \sin(k_{yn} y_0) \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \frac{\cos[k_{xp}(x - x_0)]}{(\omega - \Omega_{np})(\omega + \Omega_{np})} \quad (1.32)$$

avec

$$\Omega_{np} = \sqrt{\frac{[k_{xp}^2 \sqrt{K_x} + k_{yn}^2 \sqrt{K_y}]^2 + T_0(k_{xp}^2 + k_{yn}^2) + K_a}{M}} \quad (1.33)$$

où

$$k_{yn} = \frac{n\pi}{l_y} \quad (1.34)$$

$$k_{xp} = \frac{p\pi}{l_x} \quad (1.35)$$

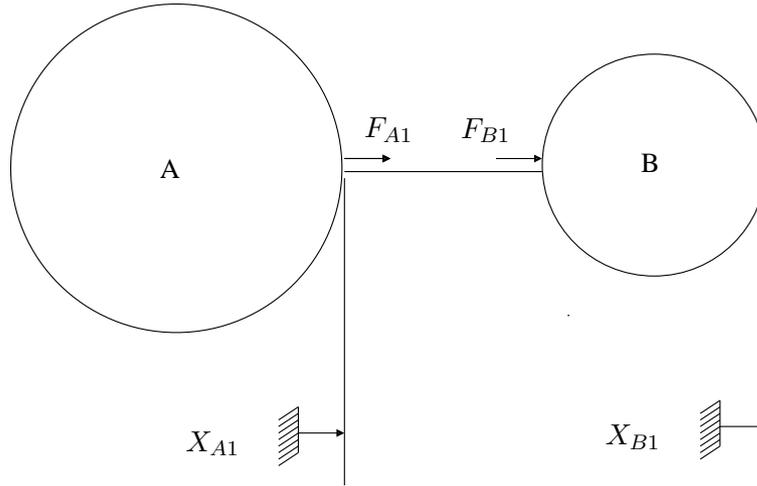


FIGURE 1.14: Méthode de la réceptance entre un anneau et une chaussée

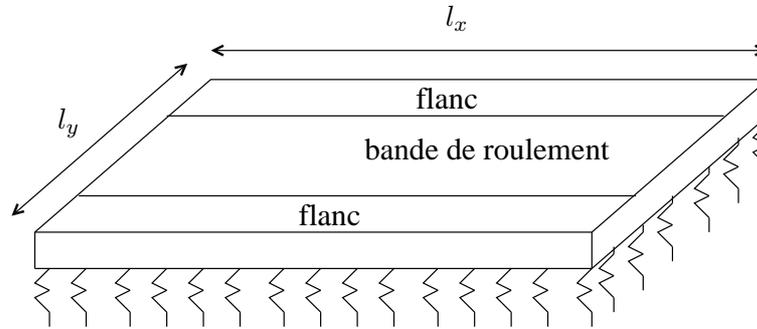


FIGURE 1.15: Modèle de la plaque orthotrope

et

$$\alpha_{(p=0)} = \frac{1}{2} ; \alpha_{(p \neq 0)} = 1 \quad (1.36)$$

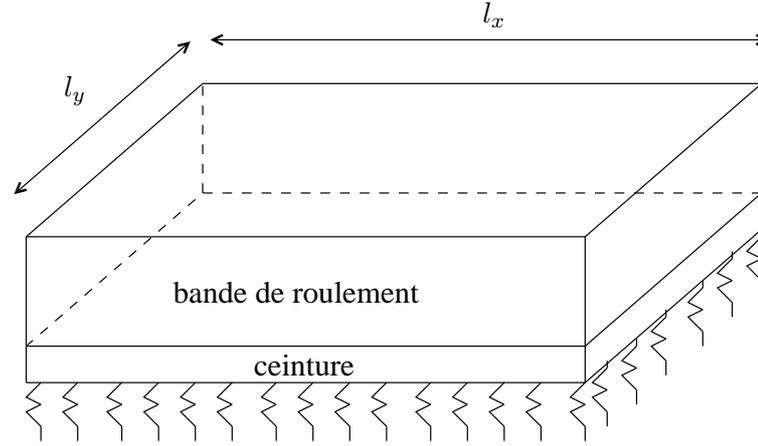
Après avoir déterminé la fonction de Green dans le domaine fréquentiel, la fonction de Green temporelle $g(t)$ peut être calculée soit par une FFT inverse [Kro92] soit par une expression analytique [HDP01, Hamse]. Ensuite le déplacement d'un point j de la ceinture du pneu peut être calculé par un produit de convolution de la fonction de Green et de la force $f(t)$ comme suit :

$$u_j(t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t f_i(\tau) g_{i,j}(t - \tau) d\tau \quad (1.37)$$

A hautes fréquences (au delà de 2500 Hz), les longueurs d'ondes deviennent comparables avec l'épaisseur de la plaque. Cette dernière est modélisée par deux couches : une première couche mince en acier représentant la ceinture et une deuxième couche en caoutchouc beaucoup plus épaisse représentant la bande de roulement (voir Fig. 1.16).

Le comportement de la première couche peut être décrit par l'équation (1.31) de la plaque orthotrope. La deuxième couche est considérée isotrope et homogène, le vecteur déplacement \mathbf{u} est solution de l'équation (1.38).

$$\mu[\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad}(\text{div} \mathbf{u})] - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.38)$$

FIGURE 1.16: *Modèle de la plaque bi-couche*

En passant par la transformée de Fourier spatiale, Kropp [Kro92] calcule le déplacement par la formule :

$$u_i(x, z, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{R^2} u_i(k_x, k_z, \omega) e^{jk_x x} e^{jk_z z} dk_x dk_z \quad (1.39)$$

où k_x et k_z sont respectivement les longueurs d'onde dans les directions x et z .

Pour les conditions aux limites, il considère la pression interne due au gonflement du pneumatique :

$$\sigma_{zz}(z = 0, k_x) = P_a(k_x); \quad \sigma_{zx}(z = 0, k_x) = T_a(k_x). \quad (1.40)$$

Puis, au niveau de l'interface entre les deux couches, les conditions de continuité de déplacements s'écrivent :

$$u_z(z = h_1, k_x) = v(k_x); \quad u_x(z = h_1, k_x) = u(k_x), \quad (1.41)$$

et les conditions de continuité de contraintes

$$\sigma_{zz}(z = h_1, k_x) = \frac{q_a(k_x)}{l_y}; \quad \sigma_{zx}(z = h_1, k_x) = \frac{q_t(k_x)}{l_y} \quad (1.42)$$

où P_a et T_a sont la pression et la tension dans la surface intérieure. q_a et q_t sont les tensions à l'interface des deux couches et h_1 l'épaisseur de la ceinture.

1.3.5.2 Modèles éléments finis

Malgré l'augmentation de la puissance des moyens informatiques, il reste toujours difficile de simuler le comportement dynamique complet du roulement d'un pneumatique sur une chaussée réelle. La complexité persiste dans la prise en compte des aspects non linéaires dus d'un coté au contact pneumatique/chaussée et de l'autre coté aux grandes déformations du pneumatique. De plus la modélisation dans une large gamme de fréquences $[0 \text{ } 5000 \text{ Hz}]$ est nécessaire pour prévoir le bruit de roulement.

L'ensemble des modèles numériques proposés sont limités aux basses fréquences. Ils donnent de bons résultats en dessous de 500 Hz . Au-delà de cette fréquence ces modèles deviennent trop lourds et trop coûteux. Plusieurs auteurs ont modélisé le pneumatique par des éléments finis $2D$. Kung [Kun87] le modélise par une coquille circulaire de révolution montée sur une paire de plaques

d'acier qui représente la jante (voir figure 1.17). L'auteur utilise des éléments non-linéaires (12 ddls par élément) pour le pneumatique. Il prend en compte également sa rotation ainsi que la pression de gonflage. La matrice de rigidité est calculée à partir du principe de minimum d'énergie potentielle. Le modèle a été validé par une comparaison avec le modèle d'anneau circulaire. Kim [Kim98] a aussi utilisé des éléments de coque multi-couche à l'aide d'Abaqus. Il calcule les modes jusqu'à 400 Hz. Une modélisation similaire a été proposée par Saigal [SYKS86], cette fois le pneumatique est modélisé comme une membrane toroïdale montée sur une jante (voir figure 1.18).

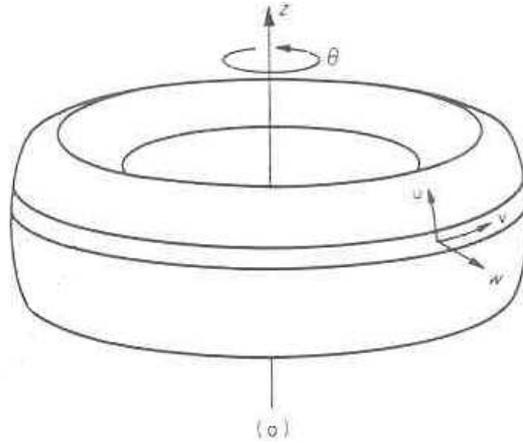


FIGURE 1.17: Modélisation du pneumatique par des éléments coque de révolution [Kun87]

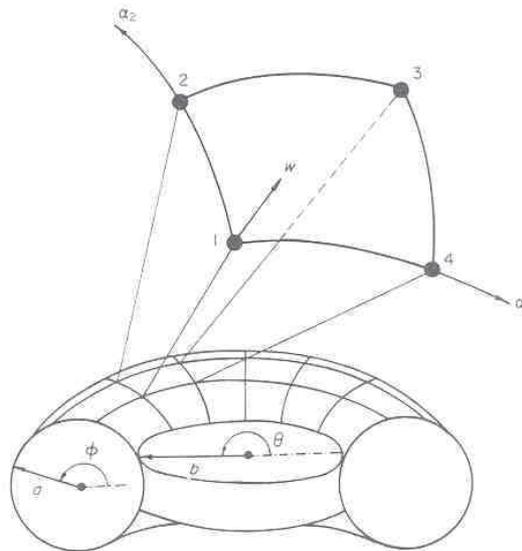


FIGURE 1.18: Modélisation du pneumatique par une membrane toroïdale [SYKS86]

D'autres auteurs ont proposé des modèles 3D. Durant sa thèse, Fadavi [Fad02] a étudié le bruit de roulement d'un pneumatique. Il modélise ainsi ce dernier par la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel Abaqus. Le pneumatique est maillé en 3D, avec des caractéristiques issues des données expérimentales. La carcasse et les flancs sont modélisés par des matériaux isotropes équivalents transverses et la bande de roulement par un matériau hyper-élastique. Fadavi a modélisé le bruit de roulement quasi-statique du pneumatique gonflé et chargé sous le poids du véhicule. L'auteur étudie également l'influence de la pression de gonflage, du chargement et de la vitesse de roulement sur le champ de déplacement du bord du pneumatique, sur la contrainte principale

dans la carcasse et sur la taille de la zone de contact. Les rugosités de la chaussée et les patins de gomme sont aussi pris en compte. Dans la bande de fréquence $[0 \text{ } 1500 \text{ Hz}]$, les fréquences propres du pneumatique en roulement, la vitesse normale sur le bord et la fonction de transfert en différents points ont été calculées. L'auteur a mis en évidence l'existence de résonances autour d'une fréquence de 1000 Hz suite à une excitation normale. Ces résultats coïncident avec les expérimentations. Sabiniarz [SK10] a développé un modèle de pneumatique lisse à l'aide de la méthode d'éléments finis guidé d'ondes (WFEM). Il a calculé les mobilités dans une bande de fréquence de $[0 \text{ } 1500 \text{ Hz}]$. Il a classifié les ondes dans cette gamme de fréquence en trois catégories suivant leurs natures et leurs complexités.

Dans Brinkmeier [BNPE08], l'auteur étudie les vibrations d'un pneumatique lisse gonflé en contact avec la chaussée. Il utilise la méthode des éléments finis en $3D$ en se basant sur une formulation ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian). Le mouvement du pneumatique est donc décomposé en un mouvement de corps rigide χ et une déformation δ voir figure (1.19).

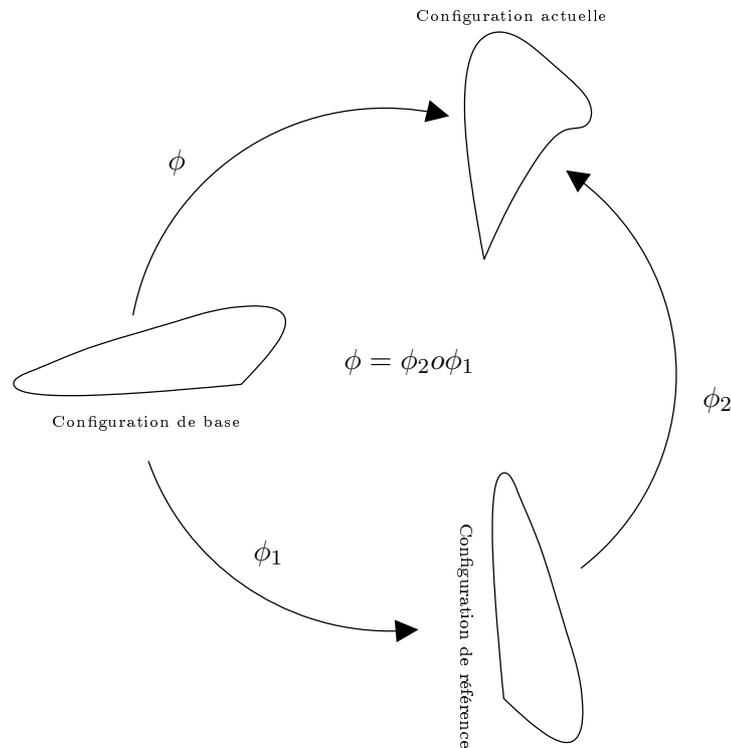


FIGURE 1.19: *Décomposition du mouvement*

L'équation du mouvement s'écrit :

$$(K^t - W)\Delta\phi = \mathbf{f}_e^{t+\Delta t} + \mathbf{f}_i^t + \mathbf{f}_\sigma^t \quad (1.43)$$

où K^t et W sont la matrice de rigidité et la matrice d'inertie ALE. $\mathbf{f}_e^{t+\Delta t}$, \mathbf{f}_σ^t et \mathbf{f}_i^t sont respectivement la charge extérieure, l'effort intérieur et l'effort d'inertie ALE.

Pour calculer les modes propres du pneumatique, l'auteur écrit le problème aux valeurs propres

linéarisé dans l'espace d'état :

$$\left(\begin{bmatrix} iG & K^t - W \\ K^t - W & 0 \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & K^t - W \end{bmatrix} \right) \mathbf{Z} = \mathbf{0} ; \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \omega \mathbf{z} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

Le problème aux valeurs propres généralisé (1.44) est résolu par la méthode d'Arnoldi avec redémarrage implicite. Les modes peuvent être calculés autour d'une fréquence ω_0 à l'aide de la méthode de shift-invert. La figure (1.20) illustre le résultat de calcul des modes propres autour d'une fréquence nulle, d'une fréquence de 360 Hz et de 720 Hz, pour un pneumatique d'un poids-lourd gonflé à 0.9 MPa et roulant à 50 Km/h.

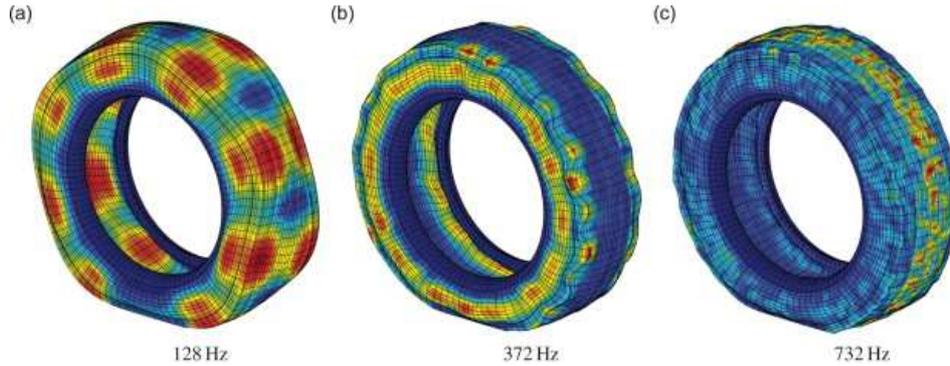


FIGURE 1.20: Formes modales au voisinage de 100 Hz (a), 360 Hz (b) et 720 Hz (c) [BNPE08]

A chaque fréquence propre de vibration de flexion ($n \geq 2$), correspond deux modes propres indépendants qui ont la même fréquence dans le cas idéal². En réalité, le pneumatique n'est pas tout à fait symétrique, la position d'équilibre présente un écrasement du pneumatique dû au poids du véhicule et au contact avec la chaussée. Brinkmeier montre aussi que l'effet gyroscopique engendre une dissymétrie de la paire de modes symétriques. En négligeant le contact, l'auteur compare les fréquences d'un pneumatique dans le cas statique et celles avec une rotation Ω . Il constate la séparation de deux fréquences de façon symétrique autour de la fréquence initiale. Le décalage Δf dépend de la vitesse de la rotation suivant la formule (1.45). La figure (1.22) illustre ce phénomène pour $n = 8$ avec une fréquence initiale de 230 Hz et pour une vitesse de rotation $\Omega = 31.7 \text{ rad/s}$, les fréquences se séparent de $\Delta f = 40.5 \text{ Hz}$.

$$\Delta f = \pm \frac{n\Omega}{2\pi} \quad (1.45)$$

1.4 Calcul en dynamique moyennes fréquences

De nombreux logiciels de calcul scientifique sont basés sur la méthode des éléments finis (Finite Elements Method : FEM) pour résoudre des problèmes dans divers domaines. La méthode consiste à rechercher une solution approchée d'une équation aux dérivées partielles sur un domaine compact avec conditions aux bords et/ou dans l'intérieur du compact. En acoustique, lorsque le domaine de propagation devient infini, la méthode des éléments de frontières (Boundary Elements Method : BEM) apparaît plus appropriée. En effet seule la surface de la frontière du domaine doit être discrétisée, contrairement à la méthode des éléments finis où on a besoin de mailler tout le domaine de propagation. Ainsi la méthode BEM permet de réduire la dimension du problème et de rendre le

2. le cas idéal correspond à une symétrie de révolution parfaite du pneumatique à l'état d'équilibre

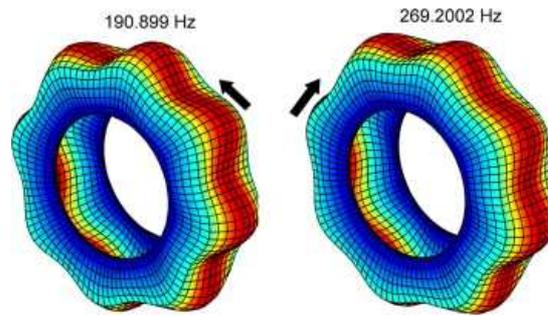


FIGURE 1.21: Séparation des modes symétriques par l'effet de l'inertie de rotation [BNPE08]

calcul moins coûteux. Dans le même but, plusieurs méthodes ont été développées : la méthode des éléments finis généralisés GFEM³ [SCB01] qui est une extension de la FEM qui se base sur la prise en compte de la connaissance d'une partie de la solution dans l'espace d'approximation d'éléments finis classiques, localement, ces fonctions constituent une bonne approximation de la solution. La XFEM⁴ [DMD⁺00] utilise des fonctions d'enrichissement adaptées au traitement des discontinuités ou encore les méthodes de réductions [Soi98].

D'une part, les structures complexes présentent un comportement vibratoire aux moyennes et hautes fréquences. La construction de modèles réduits devient problématique. Elle exige la prise en compte d'un grand nombre de modes propres de vibration. Les calculs deviennent alors très lourds à résoudre, voire impossibles dans certain cas. D'autre part le comportement du pneumatique qui nous intéresse est riche en moyennes fréquences. Les approches énergétiques de type SEA [LM62] utilisées en hautes fréquences ne permettent pas de traiter le problème d'une manière efficace. D'autres approches ont été développées particulièrement pour étudier les vibrations en moyennes fréquences.

1.4.1 La méthode des éléments finis - FEM

La méthode des éléments finis est très utilisée dans l'industrie, en particulier en aéronautique, dans l'industrie automobile et en météorologie. Cette méthode est intéressante, compte tenu de sa souplesse d'utilisation, en particulier vis-à-vis de l'approximation des divers opérateurs modélisant des phénomènes en physique-mathématique et également pour la prise en compte de conditions aux limites portant sur les gradients de la fonction à calculer. Le principe de la méthode est directement issu de l'approche variationnelle. L'idée de base de la méthode des éléments finis est de remplacer l'espace de Hilbert sur lequel est posée la formulation variationnelle par un sous espace de dimension finie. Le problème approché se ramène à la résolution d'un système linéaire sous la forme :

$$M\ddot{\mathbf{U}} + C\dot{\mathbf{U}} + K\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (1.46)$$

La superposition modale est généralement le procédé le plus utilisé pour résoudre cette équation. La méthode est efficace lorsque les premiers modes propres de la structure sont dominants dans la réponse dynamique. La densité modale augmente en général avec la fréquence, l'extraction de ces modes propres devient de plus en plus difficile. Lorsque le problème est non linéaire ou lorsque la structure étudiée exige un nombre élevé de modes propres, les techniques de résolution directes telle que l'intégration numérique sont plus appropriées. Cette dernière demande aussi des pas de temps

3. Generalized Finite Element Method

4. eXtended Finite Element Method

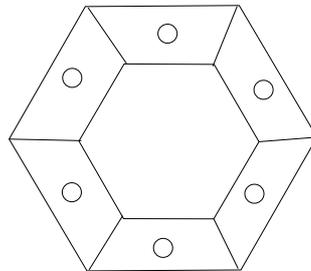
suffisamment petits pour assurer la stabilité du schéma d'intégration. Dans les deux cas, l'étude des structures complexes par la méthode des éléments finis conduit à des calculs lourds, difficiles à résoudre avec les moyens informatiques actuels.

Enfin, la solution décrite à l'aide de grandeurs ponctuelles que sont les déplacements généralisés devient très sensible aux moindres petites variations des paramètres structuraux et des conditions aux limites. Cette approche est donc inadaptée pour la description des phénomènes en moyennes et hautes fréquences.

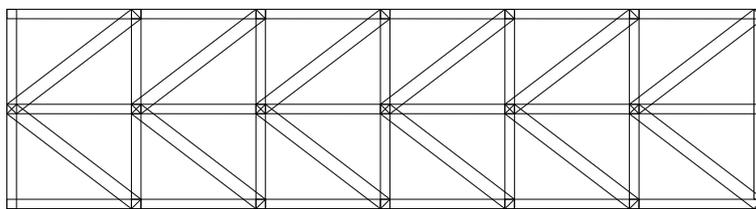
1.4.2 Modèles de guide d'onde

1.4.2.1 Présentation de la méthode

Les guides d'onde sont des milieux partiellement ou entièrement bornés où les ondes peuvent se propager. La propagation des ondes dans ces milieux est largement étudiée [Flo86, Gry97, HBR01, HIJ05]. Ces structures peuvent être simples comme des poutres et des plaques, ou bien des ensembles plus complexes sous forme de réseaux. La méthode des éléments finis est généralement utilisée pour étudier le comportement vibratoire de ces systèmes. Les structures périodiques sont constituées de plusieurs sous-ensembles identiques reliés entre eux de façons identiques. Leur périodicité peut être linéaire (1.22-a) ou de révolution (1.22-b). Plusieurs auteurs ont exploité cette propriété pour réduire la taille de leur problème. L'idée de base consiste en l'étude d'un seul sous-ensemble au lieu d'étudier toute la structure. La connaissance du comportement dynamique du sous-ensemble permet de construire le comportement global de la structure. L'étude de telles structures est initialement abordée par Brillouin [Bri53]. L'auteur s'est intéressé aux systèmes de treillis et lignes électriques. Ces études ont été largement développées dans les papiers de Mead [Mea73, Mea75a, Mea75b, Mea96]. Le passage du comportement local au niveau des sous-structures au comportement de la structure totale est basé sur le principe de Floquet ou de la matrice de transfert entre les sous-ensembles.



a) périodicité de révolution



b) périodicité linéaire

FIGURE 1.22: Exemples de structures périodiques

Les modèles d'éléments finis pour des structures complètes sont souvent trop gros pour être utilisés en pratique, en particulier dans le cas des moyennes et hautes fréquences. Les propriétés d'ondes

peuvent être exploitées dans la prédiction de la propagation de perturbation, de la transmission d'énergie ou de la diffusion acoustique.

La méthode des éléments finis spectraux (SFE) a été développée par Finneveden [Fin00, Fin97a, Fin97b] pour résoudre ce type de problème. La méthode consiste à décomposer la réponse de la structure dans une base harmonique, pour ensuite calculer les deux paramètres principaux d'ondes qui sont sa longueur et sa vitesse de groupe. L'auteur a présenté l'équation discrétisée sous la forme :

$$\sum_{n=0}^N K_n \frac{\partial^n \mathbf{U}}{\partial x^n} - \omega^2 M \mathbf{U} = 0 \quad (1.47)$$

dont la solution approchée peut s'écrire

$$\left[\sum_{i=1}^N k^i K_i - \omega^2 M \right] \mathbf{U} = 0 \quad (1.48)$$

Où M est la matrice de masse usuelle calculée par les formules de la méthode des éléments finis standard, tandis que la matrice de rigidité est calculée suivant la puissance du nombre d'onde k . Les matrices de rigidité sont calculées pour chaque problème par l'équation de Lagrange, le principe de Hamilton ou le principe des puissances virtuelles. Une description détaillée de la méthode est présentée par Finneveden [Fin00, Fin97b]. L'inconvénient de la méthode se situe dans le calcul de ces matrices. Pour des structures relativement complexes les calculs sont lourds ce qui rend la méthode SFE difficile à mettre en pratique dans un code de calcul.

Le principe de la méthode des éléments finis guide d'ondes (WFE-Waveguide Finite Elements) consiste à écrire le problème dynamique discret issu de la méthode des éléments finis standard dans le domaine fréquentiel (1.49), à calculer les ondes se propageant pour écrire la réponse comme une combinaison linéaire de ces ondes :

$$[K + j\omega C - \omega^2 M] \mathbf{q}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (1.49)$$

où K , M et C sont respectivement les matrices de rigidité, de masse et d'amortissement, \mathbf{F} le vecteur force et \mathbf{q} le vecteur de degrés de liberté de déplacement.

1.4.2.2 Application à des structures périodiques

Les vibrations des structures périodiques ont déjà fait l'objet de plusieurs travaux. Mead a largement contribué à la modélisation de ce genre de structures. L'auteur a étudié particulièrement la propagation des ondes harmoniques dans les systèmes linéaires unidimensionnels [Mea73], les modes propres dans les systèmes mono [Mea75a] et les systèmes multi-couplés [Mea75b]. Suite à ces travaux, la méthode des éléments finis pour structures guide d'onde périodique est décrite en détail dans Duhamel ([DMB05],[DMB06]).

Une structure périodique est obtenue en dupliquant plusieurs sous-structures identiques. Ces dernières sont appelées éléments de base ou cellules. Le principe consiste à étudier dans un premier temps un seul élément de base au lieu d'étudier la structure complète.

Le comportement dynamique de la cellule est obtenu par les constantes d'ondes λ dépendant de la fréquence ou de la matrice de transfert \mathbf{T} qui relie les déplacements \mathbf{q} et les forces \mathbf{f} de chaque

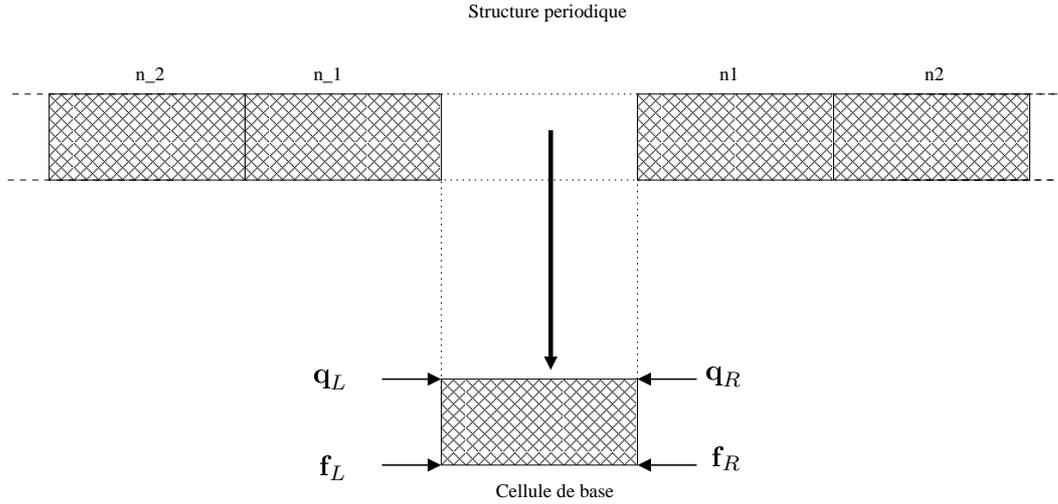


FIGURE 1.23: Structure à périodicité linéaire composée de n cellules

côté de la cellule. La matrice de transfert est calculée à partir des matrices de masse et de raideur de la cellule :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ -\mathbf{f}_R \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

La matrice de transfert permet de décrire la propagation des vibrations à travers la cellule sous forme d'une décomposition en ondes. Les vecteurs propres de la matrice de transfert forment une base sur laquelle les déplacements et les efforts à gauche de la cellule peuvent être décomposés comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n (a_i^+ \Phi_i^+ + a_i^- \Phi_i^-) \quad (1.51)$$

où Φ_i^+ et Φ_i^- sont les vecteurs propres correspondant aux ondes qui se propagent dans le sens positif et les ondes qui se propagent dans le sens négatif respectivement, puis les a_i^+ et les a_i^- sont leurs amplitudes. De la même façon les déplacements et les efforts à droite de la cellule peuvent se décomposer sur la même base :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ -\mathbf{f}_R \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n (b_i^+ \Phi_i^+ + b_i^- \Phi_i^-) \quad (1.52)$$

Grâce au théorème de Floquet-Block, Brillouin [Bri53] a démontré que le passage de chaque onde à travers la cellule s'obtient en multipliant son amplitude par la valeur propre correspondante. En effet la relation entre les ondes entrantes et sortantes est obtenue grâce à l'équation (1.50). Comme Φ_i^+ et Φ_i^- sont les vecteurs propres de la matrice de transfert \mathbf{T} , alors la relation entre les vecteurs d'amplitudes \mathbf{a}^+ , \mathbf{a}^- , \mathbf{b}^+ et \mathbf{b}^- est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}^+ \\ \mathbf{a}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^+ \\ \mathbf{b}^- \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

où $\mathbf{\Lambda}$ est la matrice diagonale qui contient les n valeurs propres de la matrice de transfert \mathbf{T} ($\mathbf{\Lambda}_{ii} = \lambda_i$). L'application successive de l'équation (1.52) permet de déterminer les déplacements et les

efforts dans l'ensemble des interfaces entre les cellules de toute la structure. Durant sa thèse Nguyen [Ngu08] a utilisé la méthode pour calculer les mobilités radiale et tangentielle d'un pneumatique 3D. Le pneumatique est modélisé par trois parties homogènes : les tringles par des tubes en acier, la bande de roulement par un matériau homogène équivalent et le reste de la géométrie par un massif en caoutchouc. Les matrices de masse et de rigidité de la cellule du pneumatique sont calculées à l'aide du logiciel élément finis ANSYS. Ensuite, les résultats du modèle périodique sont validés en les comparant à un modèle de pneumatique complet dans une bande de fréquence de $[0 \text{ } 600 \text{ Hz}]$. Il a également comparé le temps de calcul et la mémoire nécessaire pour résoudre le problème avec les deux modèles. La comparaison montre que le modèle périodique est beaucoup plus rapide et comporte moins de données à stocker. Cela permet de calculer les mobilités dans une large bande de fréquence contrairement au modèle complet qui est limité à 600 Hz .

1.4.3 Le modèle SEA

L'analyse statistique énergétique SEA⁵ constitue une approche globale basée sur des estimations des énergies vibratoires moyennes par sous-système mécanique. La méthode repose sur l'hypothèse d'une forte densité modale dans la bande de fréquence étudiée. Un avantage de la méthode est de s'appuyer sur une analyse globale de la structure dont les quantités déduites sont peu sensibles aux variations des paramètres de la structure. Toutefois, ces quantités sont trop globales en espace et en fréquence pour dimensionner finement la structure, notamment dans le domaine des moyennes fréquences.

Une autre difficulté de la méthode est la détermination des paramètres physiques qui interviennent dans sa formulation : facteurs de perte par dissipation, facteurs de perte par couplage entre sous-systèmes, densités modales et puissances transmises. Le modèle a été utilisé par Lee [LN97] pour modéliser le comportement dynamique en hautes fréquence du pneumatique. Ce dernier est modélisé par deux plaques présentant la bande de roulement et les flancs. L'énergie entre les deux sous-systèmes est transportée par des ondes circulaires, des ondes de compression et de cisaillement. Ces ondes peuvent parfois changer de nature lors du transfert. La puissance transmise de la bande de roulement au flanc est donnée par la formule :

$$P_{1,2} = \omega \eta_{1,2} E \quad (1.54)$$

De même la puissance dissipée s'écrit :

$$P_d = \omega \eta E \quad (1.55)$$

où $\eta_{1,2}$ et η sont le coefficient de perte par couplage et le coefficient de perte interne. E est l'énergie totale du système et ω la vitesse angulaire. En établissant l'équation d'équilibre énergétique, l'auteur calcule les caractéristiques vibratoires du pneumatique, puis il valide ces résultats en les comparant avec ceux de Kropp [Kro89].

1.4.4 La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes

La VTCR (Variational Theory of Complex Rays) est une approche destinée au calcul des vibrations en moyennes fréquences. La méthode a été développée par Ladevèze [Lad96]. L'idée de base est de construire une nouvelle formulation variationnelle permettant de vérifier exactement les

5. Statistical Energy Analysis

équations locales. Par contre, les conditions aux limites et les conditions de transmission en déplacement et en effort aux interfaces entre sous-systèmes n'ont pas besoin d'être vérifiées exactement, mais seulement de façon faible.

Considérant un système Ω constitué de deux sous-systèmes $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, ces derniers sont limités par les bords $\partial\Omega_1 = \partial_u\Omega_1 \cup \partial_g\Omega_1$ et $\partial\Omega_2 = \partial_u\Omega_2 \cup \partial_g\Omega_2$, Γ est l'interface entre Ω_1 et Ω_2 (voir Figure 1.24)

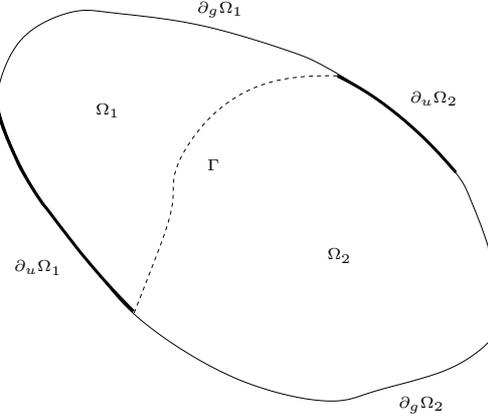


FIGURE 1.24: Géométrie du problème de référence

Dans les domaines $\Omega_i (i = 1, 2)$, l'équation d'équilibre dans le domaine fréquentiel et la loi de comportement sont définies comme suit :

$$Div\sigma_i + \mathbf{f}_i = -\omega^2 \rho \mathbf{U}_i \quad (1.56)$$

$$\sigma_i = (1 + j\eta)K\varepsilon_i(\mathbf{U}_i) \quad (1.57)$$

où K est l'opérateur de Hooke et η un coefficient d'amortissement.

Les conditions aux limites et les conditions de transmission entre les sous-systèmes Ω_i sont :

$$\mathbf{U}_i = \bar{\mathbf{U}}_i \quad \text{sur } \partial_u\Omega_i \quad (1.58)$$

$$\sigma_i \mathbf{n}_i = \mathbf{g}_i \quad \text{sur } \partial_g\Omega_i \quad (1.59)$$

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2 \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.60)$$

$$\sigma_1 \mathbf{n}_1 + \sigma_2 \mathbf{n}_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (1.61)$$

Le problème associé à la méthode VTCR est :

Trouver $(\mathbf{U}_i, \sigma_i) \in \Omega_{ad_i}$ tel que :

$$\begin{aligned} & Re \left(-j\omega \sum_{i=1}^2 \left[\int_{\partial_u\Omega_i} \delta\sigma_i \mathbf{n}_i (\mathbf{U}_i^* - \bar{\mathbf{U}}_i^*) ds + \int_{\partial_g\Omega_i} (\sigma_i \mathbf{n} - \mathbf{g}_i) \delta\mathbf{U}_i^* ds \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [(\delta\sigma_1 \mathbf{n}_1 - \delta\sigma_2 \mathbf{n}_2)(\mathbf{U}_1^* - \mathbf{U}_2^*) + (\sigma_1 \mathbf{n}_1 + \sigma_2 \mathbf{n}_2)(\delta\mathbf{U}_1^* + \delta\mathbf{U}_2^*)] ds \right) = 0 \\ & \forall (\delta\mathbf{U}_i, \delta\sigma_i) \in \Omega_{ad,0_i} \end{aligned} \quad (1.62)$$

$R_e(A)$ désigne la partie réelle de la quantité A et A^* son conjugué. Ω_{ad_i} est l'espace cinématiquement admissible et $\Omega_{ad,0_i} = \{\Omega_{ad_i} ; \mathbf{g}_i = 0\}$ l'espace cinématiquement admissible homogène.

La VTCR utilise une base de fonctions oscillantes appelées rayons complexes. Ces fonctions présentent deux échelles, une échelle rapide pour traiter les petites longueurs d'ondes dont les phénomènes sont pris en compte de façon analytique et l'échelle lente qui est discrétisée. Elle distingue également trois zones : la zone intérieure, les zones des bords et les zones des coins comme le montre la figure (1.25).

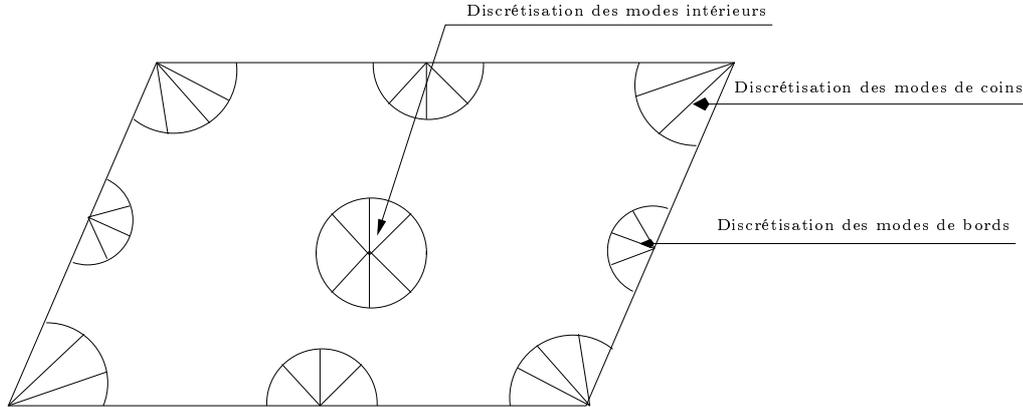


FIGURE 1.25: *Discretisation des zones intérieures, des bords et des coins.*

Par exemple, au voisinage d'un point \mathbf{x} de la zone intérieure, la solution est décrite localement comme une combinaison linéaire d'un nombre infini de rayons complexes⁶. Les déplacements et les contraintes sont donnés par les équations :

$$\mathbf{U}^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{P}) = \mathbf{W}^h(\mathbf{x}, \mathbf{P})e^{i\omega\mathbf{P}\cdot\mathbf{y}} \quad (1.63)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{P}) = \mathbf{C}^h(\mathbf{x}, \mathbf{P})e^{i\omega\mathbf{P}\cdot\mathbf{y}} \quad (1.64)$$

où \mathbf{x} et \mathbf{y} sont les vecteurs position, \mathbf{x} est associé à l'échelle lente et \mathbf{y} à l'échelle rapide.

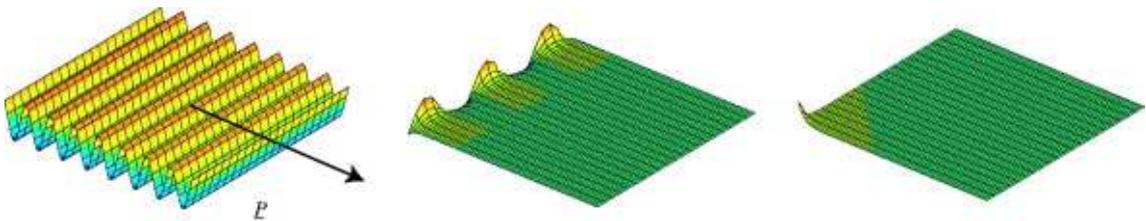


FIGURE 1.26: *Exemple de rayons complexes admissibles intérieurs, bords et coins [RL03]*

Dans son article [RL03], Ladevèze applique la méthode sur une plaque de Kirchhoff⁷, il détermine ainsi les rayons complexes pour les trois zones (intérieur, coins et bords) comme le montre la figure (1.26).

6. les fonctions de bases sont des ondes planes propagatives et évanescentes

7. le déplacement vertical de la plaque est gouverné par l'équation dynamique :

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu)}(1+j\eta)\Delta\Delta u = \rho h\omega^2 u$$

En prenant en compte toutes les directions possibles, définies par l'angle ϕ , le déplacement est calculé par l'intégrale suivante :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\phi \in C_i} \mathbf{u}_i^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{P}) d\Gamma + \int_{\phi \in C_c} \mathbf{u}_c^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{P}) d\Gamma + \int_{\phi \in C_e} \mathbf{u}_e^h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{P}) d\Gamma \quad (1.65)$$

L'intégrale est discrétisée pour se ramener à un problème à dimension finie, en supposant que les amplitudes $\mathbf{w}_i^h(\mathbf{x}, \mathbf{P})$, $\mathbf{w}_e^h(\mathbf{x}, \mathbf{P})$ et $\mathbf{w}_c^h(\mathbf{x}, \mathbf{P})$ sont constantes dans la direction circonférentielle. Le problème se ramène alors à la résolution d'un système d'équations linéaires :

$$K\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (1.66)$$

1.5 Conclusion

L'étude de l'interaction entre pneumatique et chaussée présente la tâche la plus importante dans la modélisation du mécanisme de génération du bruit du roulement. De nombreux travaux accumulés ces dernières années ont essayé de traiter cette problématique.

Du côté pneumatique, l'ensemble des modèles existants sont soit des modèles de pneumatiques réels basés sur la méthode des éléments finis standards et surtout, ils sont limités aux basses fréquences (jusqu'à 500 Hz), soit des modèles analytiques simplifiés qui peuvent atteindre les moyennes fréquences (jusqu'à 4000 Hz).

Du côté interaction entre pneumatique et chaussées, on trouve des modèles statiques ou quasi-statiques avec une description réelle et précise de la chaussée et des modèles dynamiques basés sur les techniques de convolution entre les fonctions de Green d'un pneumatique libre et les forces de contact. Ces modèles sont coûteux en termes de temps de calcul.

Comme nous l'avons dit au début de ce mémoire, l'objectif de cette thèse est de développer un modèle de contact pneumatique/chaussée qui permette à la fois de calculer les moyennes fréquences avec un pneumatique réel et de mettre en place une nouvelle méthode pour réduire le coût de la convolution entre les fonctions de Green et les forces de contact.

Chapitre 2

Modèle d'anneau circulaire sous fondation élastique

L'OBJECTIF de ce chapitre est d'étudier un modèle d'anneau circulaire sous fondation élastique. Le modèle consiste à décrire l'effet de l'ensemble des éléments d'un modèle 3D de pneumatique à l'aide d'une poutre circulaire et de ressorts radiaux et tangentiels. Au départ une mise en équation détaillée du modèle est présentée. Ensuite, le modèle est comparé avec un modèle numérique réalisé à l'aide du logiciel d'éléments finis Abaqus et d'un programme Matlab. L'avantage du modèle d'anneau circulaire est que son comportement peut être décrit par des solutions analytiques tout en gardant les propriétés d'un pneumatique réel (en basses fréquences). Ce modèle sera utilisé comme modèle de base pour valider les différentes idées développées dans cette thèse. Ce chapitre sera consacré à l'étude en détail des différentes hypothèses et équations pour construire ce modèle. On s'intéresse en particulier aux fonctions de Green de l'anneau dans le domaine fréquentiel. On présentera également quelques résultats sur l'effet de la pression de gonflement et de la vitesse de rotation de l'anneau circulaire.

PLAN DU CHAPITRE 2

2.1	Modèle analytique	39
2.1.1	Calcul de la déformation	39
2.1.2	Loi de comportement	43
2.1.3	Cinématique d'un point de la fibre moyenne	43
2.1.4	Équilibre statique	44
2.1.5	Equations du mouvement	45
2.2	Comparaison avec Abaqus (oscillations libres)	47
2.2.1	État précontraint	48
2.2.2	Analyse modale	50
2.3	Fonction de Green	53
2.3.1	Cas général	53
2.3.2	Cas sans rotation	54
2.4	Conclusion	59

Dans la littérature, plusieurs auteurs ont utilisé le modèle d'anneau circulaire pour modéliser le pneumatique. Le modèle a été initialement développé par Clark [Cla65], Tielking [Tie65] et Bohm [Boh66]. La bande de roulement est modélisée par une poutre circulaire et l'effet du flanc par une fondation élastique entre la jante et la bande de roulement. Au départ, les auteurs ont considéré seulement l'effet radial du flanc. Pacejka [Pac71] a été le premier à intégrer une raideur dans la direction circonférentielle de la fondation élastique. Padovan [Pad76] a introduit l'amortissement de la bande de roulement et du flanc. Potts et al. [PBCR77] ont étudié l'effet de la rotation de l'anneau ainsi que les contraintes initiales dues au gonflement. Huang [HS87, Hua96] et ses co-auteurs ont modélisé le contact pneu/chaussée par une excitation ponctuelle harmonique. Ils ont déterminé ainsi la réponse forcée de l'anneau. Wei [WNR08] et al. ont déterminé une formulation analytique complète de la réponse forcée en incluant le régime transitoire. Ils ont étudié également plusieurs conditions de chargement.

2.1 Modèle analytique

2.1.1 Calcul de la déformation

On considère un anneau circulaire de rayon R et de section S . L'anneau roule sans glissement sur un plan lisse, avec une vitesse de rotation constante Ω . $(O, \mathbf{X}, \mathbf{Z})$ est le repère fixe lié au centre de l'anneau et le repère $(O, \mathbf{x}, \mathbf{z})$ tourne avec la vitesse Ω , comme le montre la figure (2.1). k_θ et k_z sont respectivement les raideurs dans les directions circonférentielle et radiale. θ et z sont les coordonnées cylindriques d'un point de l'anneau dans le repère relatif $(O, \mathbf{x}, \mathbf{z})$.

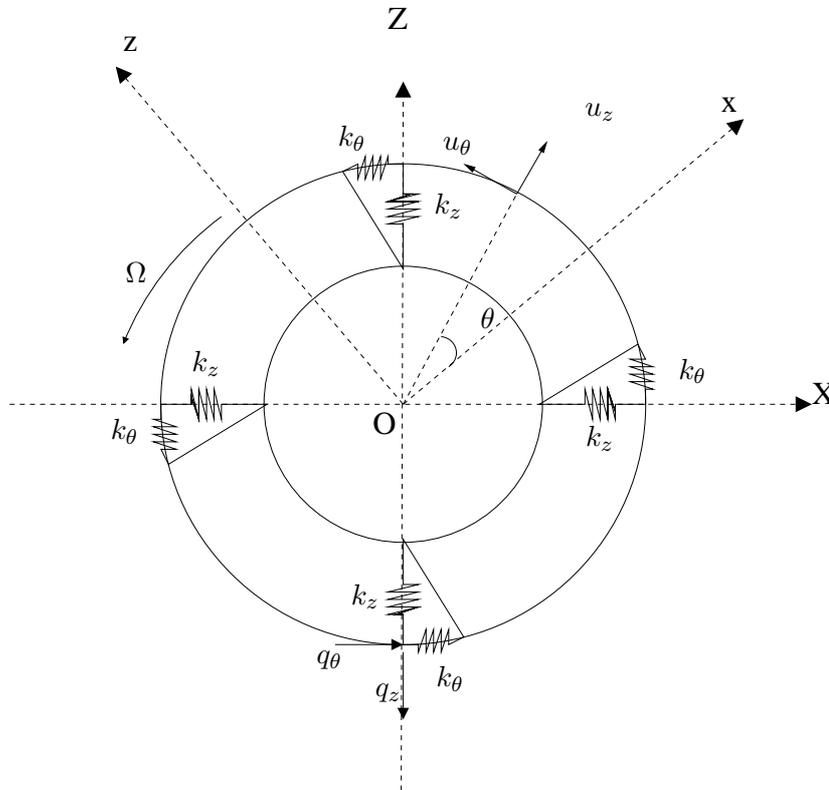


FIGURE 2.1: *Modèle d'anneau circulaire*

On considère un petit élément E de l'anneau circulaire, de fibre moyenne \widehat{AB} , soit \widehat{CD} un arc de

longueur L et de centre O appartenant à cet élément. Après application du chargement, l'élément E se transforme en élément E' de fibre moyenne $\widehat{A'B'}$, d'arc $\widehat{C'D'}$ de longueur L' et de centre O' comme le montre la figure (2.2). On appelle \mathbf{F} le tenseur gradient de la transformation qui fait passer l'élément E de la configuration initiale à la configuration actuelle.

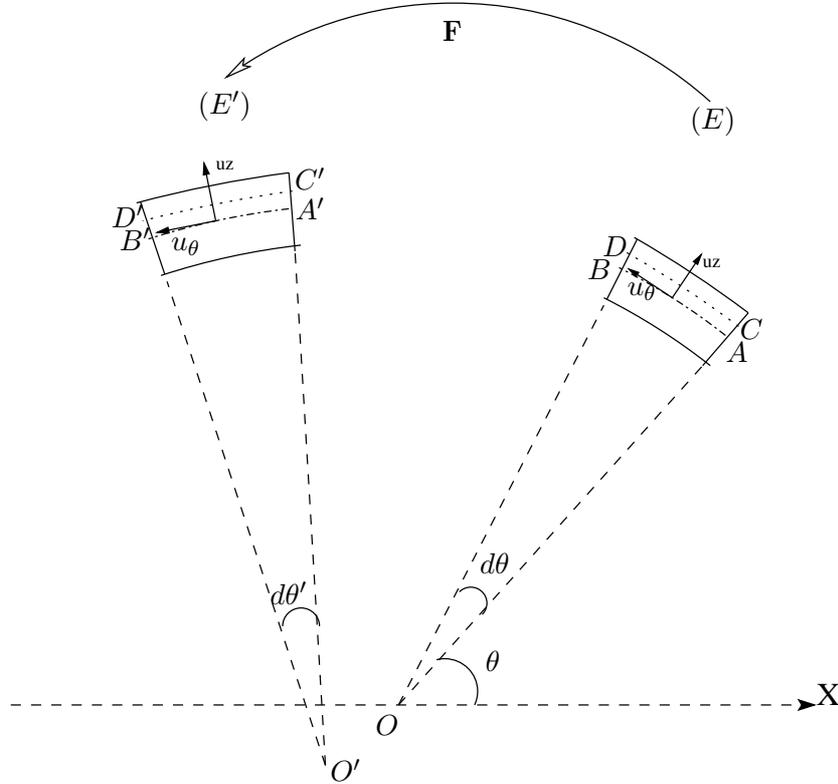


FIGURE 2.2: Définition d'un élément d'anneau circulaire

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange est défini par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{F}\mathbf{F} - \mathbf{I}_d) \quad (2.1)$$

avec

$$\mathbf{F} = \mathbf{I}_d + \nabla \mathbf{u} \quad (2.2)$$

où \mathbf{u} est le vecteur déplacement et \mathbf{I}_d la matrice identité, il en résulte

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{F}\mathbf{F} - \mathbf{I}_d) = \frac{1}{2} [{}^t(\mathbf{I}_d + \nabla \mathbf{u})(\mathbf{I}_d + \nabla \mathbf{u}) - \mathbf{I}_d] \quad (2.3)$$

Ou encore

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + {}^t(\nabla \mathbf{u})) + \frac{1}{2} ({}^t\nabla \mathbf{u}) \cdot (\nabla \mathbf{u}) \quad (2.4)$$

On se place dans la théorie des poutres, avec les hypothèses :

- une section droite reste droite après déformation,
- le rayon de l'anneau est grand devant l'épaisseur de la poutre ($\frac{h}{R} \ll 1$).

D'après la théorie des poutres, un point M de la section droite de coordonnées (R, θ) se déplace dans la direction radiale de u_z et dans la direction tangentielle de $u_\theta + z\gamma$, où γ est l'angle de rotation de la section droite autour de l'axe Y, d'après la figure (2.3)

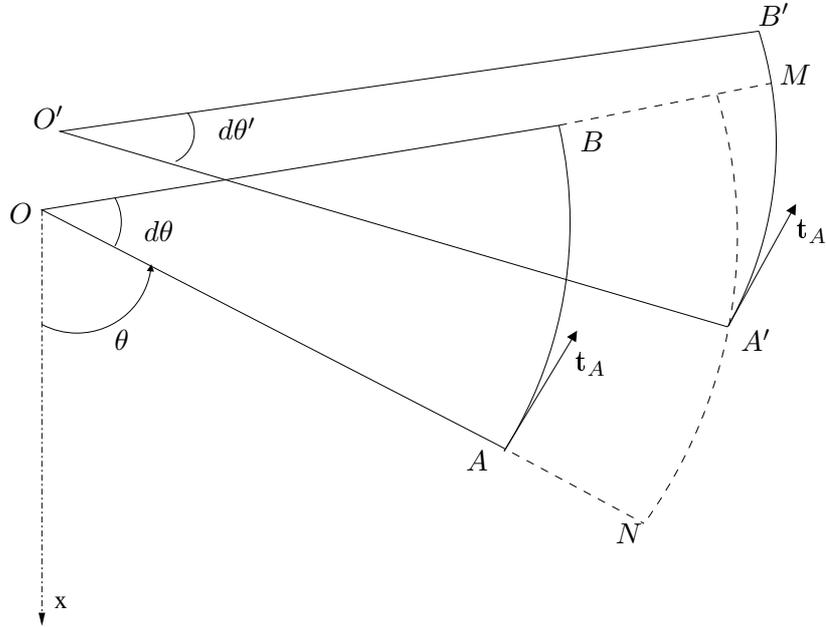


FIGURE 2.3: élément d'anneau circulaire

$$\gamma = \left(\frac{d\mathbf{OA}}{d\theta}, \frac{d\mathbf{OA}'}{d\theta} \right) = (\mathbf{t}_A, \mathbf{t}_{A'}) \quad (2.5)$$

En effet,

$$\mathbf{OA} = R \mathbf{e}_r(\theta) \quad (2.6)$$

$$\frac{d\mathbf{OA}}{d\theta} = R \mathbf{e}_\theta(\theta) \quad (2.7)$$

après déformation on a :

$$\mathbf{OA}' = (R + u_z) \mathbf{e}_r(\theta) + u_\theta \mathbf{e}_\theta(\theta) \quad (2.8)$$

$$\frac{d\mathbf{OA}'}{d\theta} = (u'_z - u_\theta) \mathbf{e}_r + (R + u_z + u'_\theta) \mathbf{e}_\theta \quad (2.9)$$

On trouve

$$\gamma = \frac{u_\theta - u'_z}{R} \quad (2.10)$$

Le vecteur déplacement peut être défini ainsi :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_z \\ u_\theta + z\gamma \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Le gradient de déplacement en coordonnées cylindriques est donné par :

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{(u_\theta + z\gamma)}{r} \\ \frac{\partial (u_\theta + z\gamma)}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta + z\gamma)}{\partial \theta} + \frac{u_z}{r} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{u'_z - u_\theta - \gamma z}{R} \\ 0 & \frac{u_z + u'_\theta + \gamma' z}{R} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le tenseur de déformation s'écrit comme une somme d'un terme linéaire \mathbf{E}^L et d'un terme non linéaire \mathbf{E}^{NL} :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^L + \mathbf{E}^{NL} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{E}^L = \begin{bmatrix} 0 & \frac{u'_z - u_\theta - \gamma z}{2R} \\ \frac{u'_z - u_\theta - \gamma z}{2R} & \frac{u_z + u'_\theta + \gamma' z}{R} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$(2.15)$$

et

$$\mathbf{E}^{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{u'_z - u_\theta - \gamma z}{R} \right)^2 + \left(\frac{u_z + u'_\theta + \gamma' z}{R} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

La composante $\varepsilon_{\theta\theta}$ du tenseur de déformation de Green-Lagrange s'écrit :

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_z + u'_\theta + \gamma' z}{R} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u'_z - u_\theta - \gamma z}{R} \right)^2 + \left(\frac{u_z + u'_\theta + \gamma' z}{R} \right)^2 \right] \quad (2.18)$$

On fait l'hypothèse que z est de l'ordre des déplacements, puis on ne garde que les termes des premier et second ordres. La déformation ε_θ peut s'écrire sous la forme :

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + \chi_\theta z + \varepsilon_\theta^{NL} \quad (2.19)$$

avec ε_θ^0 la déformation membranaire :

$$\varepsilon_\theta^0 = \frac{u_z + u'_\theta}{R} \quad (2.20)$$

$\chi_{\theta z}$ la déformation due à la flexion :

$$\chi_{\theta} = \frac{\gamma'}{R} = \frac{u'_{\theta} - u''_z}{R^2} \quad (2.21)$$

et $\varepsilon_{\theta}^{NL}$ le terme non linéaire qui est défini par :

$$\varepsilon_{\theta}^{NL} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u'_z - u_{\theta}}{R} \right)^2 + \left(\frac{u_z + u'_{\theta}}{R} \right)^2 \right] \quad (2.22)$$

2.1.2 Loi de comportement

Par définition l'effort normal N et le moment fléchissant M sont donnés par :

$$N = \int_S \sigma_{\theta} dS \quad ; \quad M = - \int_S \sigma_{\theta} z dS \quad (2.23)$$

où σ_{θ} est la contrainte dans la direction circonférentielle et S la section de la poutre. On néglige les autres composantes du tenseur des contraintes, puis on considère la loi de comportement unidirectionnelle :

$$\sigma_{\theta} = E \varepsilon_{\theta} \quad (2.24)$$

L'effort normal et le moment fléchissant sont ainsi :

$$N = ES\varepsilon_{\theta}^0 + \frac{ES}{2R^2} \left[(u'_z - u_{\theta})^2 + (u_z + u'_{\theta})^2 \right] \quad (2.25)$$

$$M = \frac{EI}{R^2} (u''_z - u'_{\theta}) \quad (2.26)$$

où E est le module d'Young et I le moment quadratique dans la direction y .

2.1.3 Cinématique d'un point de la fibre moyenne

A l'instant t , un point A de la fibre moyenne vérifie l'équation :

$$\mathbf{OA}(t) = [R + u_z(t)] \mathbf{e}_r(t) + u_{\theta}(t) \mathbf{e}_{\theta}(t)$$

La vitesse du point A est :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_A(t) &= \frac{d(\mathbf{OA}(t))}{dt} \\ &= [\dot{u}_{\theta} + R\Omega + \Omega u_z] \mathbf{e}_{\theta} + [\dot{u}_z - \Omega u_{\theta}] \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (2.27)$$

On obtient l'accélération du point A en dérivant sa vitesse

$$\mathbf{\Gamma}_A(t) = \frac{d(\mathbf{V}_A(t))}{dt} = (\ddot{u}_z - 2\Omega\dot{u}_{\theta} - \Omega^2(R + u_z)) \mathbf{e}_r + (\ddot{u}_{\theta} + 2\Omega\dot{u}_z - \Omega^2 u_{\theta}) \mathbf{e}_{\theta} \quad (2.28)$$

On reconnaît les différents termes de l'accélération absolue, l'accélération relative $\mathbf{\Gamma}_r$, l'accélération de Coriolis $\mathbf{\Gamma}_{cor}$ et l'accélération centripète $\mathbf{\Gamma}_{cent}$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_r + \mathbf{\Gamma}_{cor} + \mathbf{\Gamma}_{cent} \quad (2.29)$$

avec

$$\mathbf{\Gamma}_r = \ddot{u}_z \mathbf{e}_r + \ddot{u}_\theta \mathbf{e}_\theta \quad ; \quad \mathbf{\Gamma}_{cor} = 2\Omega (-\dot{u}_\theta \mathbf{e}_r + \dot{u}_z \mathbf{e}_\theta) \quad (2.30)$$

et

$$\mathbf{\Gamma}_{cent} = -\Omega^2 (R + u_z) \mathbf{e}_r - \Omega^2 u_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (2.31)$$

2.1.4 Équilibre statique

2.1.4.1 Contrainte interne

Le gonflement de l'anneau par une pression p puis sa rotation Ω engendre une contrainte interne σ_θ^0 . En considérant l'équilibre d'un demi-cercle (voir figure 2.4), on obtient

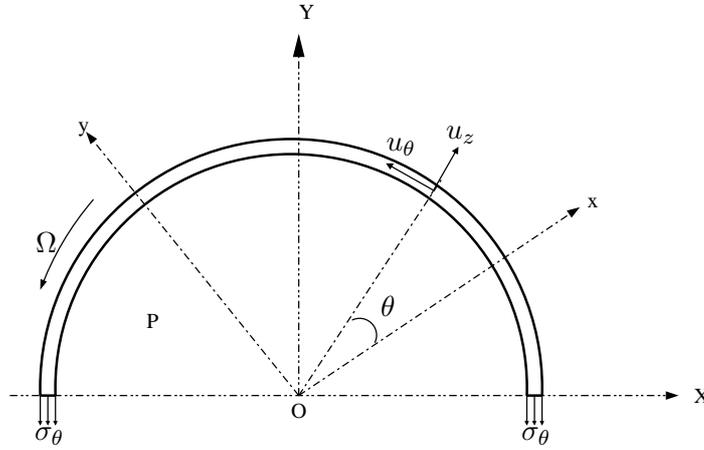


FIGURE 2.4: *Équilibre statique*

$$\begin{aligned} hb\sigma_\theta^0 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\rho S \Omega^2 R + pb] \sin\theta R d\theta \\ &= \rho S \Omega^2 R^2 + pbR \end{aligned} \quad (2.32)$$

avec S la section de l'anneau de largeur b et d'épaisseur h , ρ sa masse volumique.

2.1.4.2 Déplacement radial

Avec les hypothèses d'une poutre de Bernoulli, les équations d'équilibre s'écrivent dans le cas général sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial s} - N + f + q_z = 0 \\ \frac{\partial N}{\partial s} + M + q_\theta = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial s} - Q = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

où Q est l'effort tranchant, q_z et q_θ sont respectivement des efforts concentrés dans les directions radiale et circonférentielle. f est une force répartie. Dans le cas stationnaire, les efforts induisent une déformation à symétrie cylindrique, le déplacement circonférentiel u_θ est nul, et le déplacement radial u_z est constant. Il vérifie l'équation d'équilibre :

$$-N + pb(R + u_z) + \rho S \Omega^2 (R + u_z)^2 - k_z R u_z = 0 \quad (2.34)$$

On remplace N par son expression (2.25) puis on réarrange les termes, on trouve :

$$\left(\rho S \Omega^2 - \frac{ES}{2R^2} \right) u_z^2 + \left(pb + 2\rho S \Omega^2 R - \frac{ES}{R} - k_z R \right) u_z + pbR + \rho S \Omega^2 R^2 = 0 \quad (2.35)$$

Le déplacement u_z s'écrit :

$$u_z = \frac{\left(\frac{ES}{R} + k_z R - pb - 2\rho S \Omega^2 R \right) + \sqrt{\beta}}{2 \left(\rho S \Omega^2 - \frac{ES}{2R^2} \right)} \quad (2.36)$$

avec

$$\beta = \left(pb + 2\rho S \Omega^2 R - \frac{ES}{R} - k_z R \right)^2 + 4 \left(\rho S \Omega^2 R^2 + pbR \right) \left(\frac{ES}{2R^2} - \rho S \Omega^2 \right) \quad (2.37)$$

Si on considère que $u_z \ll R$ et qu'on néglige les termes du second ordre, on peut écrire :

$$u_z = \frac{pbR + \rho S \Omega^2 R^2}{\frac{ES}{R} + k_z R - pb - 2\rho S \Omega^2 R} \quad (2.38)$$

2.1.5 Equations du mouvement

Les équations du mouvement sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. Les énergies de déformation, cinétique et potentielle sont données respectivement par les équations (2.39), (2.40) et (2.41)

$$U = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{1}{2} \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_\theta^0 \varepsilon_\theta \right) b R dz d\theta \quad (2.39)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho S \left[(\dot{u}_z - \Omega u_\theta)^2 + (\dot{u}_\theta + \Omega u_z + \Omega R)^2 \right] R d\theta \quad (2.40)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (k_z u_z^2 + k_\theta u_\theta^2) R d\theta - \int_0^{2\pi} [q_z u_z + q_\theta u_\theta] R d\theta \quad (2.41)$$

où q_z et q_θ sont respectivement les efforts radial et tangentiel. Le principe d'Hamilton s'écrit :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T + W) dt = 0 \quad (2.42)$$

Le principe consiste à perturber le système par un déplacement infinitésimal δu_θ et δu_z en remplaçant u_θ par $u_\theta + \delta u_\theta$, u_z par $u_z + \delta u_z$, puis à garder seulement les termes du premier ordre. On trouve ainsi par la variation en u_θ

$$\begin{aligned} \delta_\theta U &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta_\theta \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_\theta^2 + \sigma_\theta^0 \varepsilon_\theta \right) b R dz d\theta \\ &= ERb \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_\theta \delta_\theta(\varepsilon_\theta) dz d\theta + b \sigma_\theta^0 R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta_\theta(\varepsilon_\theta) dz d\theta \end{aligned} \quad (2.43)$$

Nous avons démontré que la déformation ε_θ a comme expression :

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_z + u'_\theta}{R} + \frac{u'_\theta - u''_z}{R^2} z + \frac{(u'_z - u_\theta)^2}{2R^2} + \frac{(u_z + u'_\theta)^2}{2R^2} \quad (2.44)$$

Une petite variation δu_θ engendre une variation de $\delta_\theta \varepsilon_\theta$:

$$\delta_\theta \varepsilon_\theta = \frac{\delta u'_\theta}{R} + \frac{\delta u'_\theta}{R^2} z - \frac{(u'_z - u_\theta)}{R^2} \delta u_\theta + \frac{(u_z + u'_\theta)}{R^2} \delta u'_\theta \quad (2.45)$$

On néglige les termes du second ordre, l'intégrale du terme en z est alors nulle et il reste :

$$\begin{aligned} ERb \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_\theta \delta_\theta(\varepsilon_\theta) dz &= ERb \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{(u_z + u'_\theta) \delta u'_\theta}{R^2} + \frac{(u'_\theta - u''_z) \delta u'_\theta}{R^4} z^2 \right] dz \\ &= Ehb \frac{(u_z + u'_\theta)}{R} \delta u'_\theta + \frac{Ebh^3}{12} \frac{(u'_\theta - u''_z)}{R^3} \delta u'_\theta \end{aligned} \quad (2.46)$$

De même pour le deuxième terme de l'intégrale :

$$b \sigma_\theta^0 R \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta_\theta(\varepsilon_\theta) dz d\theta = b \sigma_\theta^0 R \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{\delta u'_\theta}{R} + \frac{\delta u'_\theta}{R^2} z - \frac{(u'_z - u_\theta)}{R^2} \delta u_\theta + \frac{(u_z + u'_\theta)}{R^2} \delta u'_\theta \right] dz \quad (2.47)$$

En faisant une intégration par parties, puis en réarrangeant les termes, la variation de l'énergie potentielle due à la perturbation δu_θ peut s'écrire

$$\delta_\theta U = \int_0^{2\pi} \left[\frac{EI}{R^3} (u_z''' - u''_\theta) - \frac{K}{R} (u'_z + u''_\theta) \right] \delta u_\theta d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{bh \sigma_\theta^0}{R} (-u_\theta + 2u'_z + u''_\theta) \delta u_\theta d\theta \quad (2.48)$$

avec

$$K = Ebh ; I = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.49)$$

Les variations de l'énergie cinétique $\delta_\theta T$ et des travaux extérieurs $\delta_\theta W$ sont calculées de la même façon,

$$\begin{aligned} \delta_\theta T &= \rho S R \int_0^{t_0} \int_0^{2\pi} \{ \Omega (\Omega u_\theta - \dot{u}_z) \delta u_\theta + (\dot{u}_\theta + \Omega u_z + R\Omega) \delta \dot{u}_\theta \} d\theta dt \\ &= -\rho S R \int_0^{t_0} \int_0^{2\pi} (\ddot{u}_\theta + 2\Omega \dot{u}_z - \Omega^2 u_\theta) \delta u_\theta d\theta dt \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\delta_\theta W = R \int_0^{2\pi} \{ (k_\theta u_\theta - q_\theta) \delta u_\theta \} d\theta \quad (2.51)$$

On regroupe les équations (2.48),(2.50),(2.51) et (2.42). On obtient l'équation du mouvement dans la direction circonférentielle :

$$\begin{aligned} \frac{EI}{R^4} (u_z'''' - u_\theta''') - \frac{K}{R^2} (u_z' + u_\theta'') - \frac{\rho S \Omega^2 R + pb}{R} (-u_\theta + 2u_z' + u_\theta'') + k_\theta u_\theta \\ + \rho S (\ddot{u}_\theta + 2\Omega \dot{u}_z - \Omega^2 u_\theta) = q_\theta \end{aligned} \quad (2.52)$$

De la même façon, on cherche l'équation du mouvement suivant la direction radiale, et on trouve finalement le système d'équations : (2.53,2.54)

$$\begin{aligned} \frac{EI}{R^4} (u_z'''' - u_\theta''') + \frac{K}{R^2} (u_z + u_\theta') + \frac{pb}{R} (u_z + 2u_\theta' - u_z'') + k_z u_z \\ + \rho S \Omega^2 (2u_\theta' - u_z'') + \rho S (\ddot{u}_z - 2\Omega \dot{u}_\theta) = q_z \end{aligned} \quad (2.53)$$

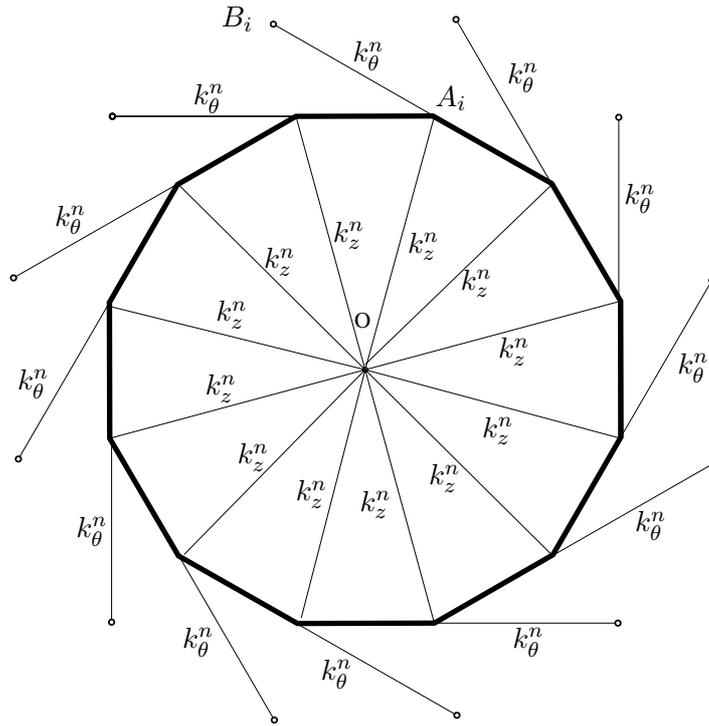
$$\begin{aligned} \frac{EI}{R^4} (u_z'''' - u_\theta''') - \frac{K}{R^2} (u_z' + u_\theta'') + \frac{pb}{R} (u_\theta - 2u_z' - u_\theta'') + k_\theta u_\theta \\ - \rho S \Omega^2 (2u_z' + u_\theta'') + \rho S (\ddot{u}_\theta + 2\Omega \dot{u}_z) = q_\theta \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.2 Comparaison avec Abaqus (oscillations libres)

L'anneau circulaire est modélisé par une poutre d'Euler-Bernoulli (Élément d'Abaqus B23). La fondation élastique est modélisée par des ressorts dans les deux directions radiale et longitudinale. Chaque point A_i du maillage est lié par deux ressorts, un ressort dans la direction radiale fixé au centre de l'anneau O et un ressort longitudinal fixé à un point B_i à l'extérieur de l'anneau, la droite $A_i B_i$ est tangente à l'anneau au point A_i comme le montre la figure (2.5). Le maillage est donné par un fichier matlab pour pouvoir générer les ressorts de façon automatique.

La relation entre les raideurs numériques et les raideurs analytiques est donnée par

$$k_z^n = Rd\theta k_z ; k_\theta^n = Rd\theta k_\theta \quad (2.55)$$

FIGURE 2.5: *Modèle numérique d'anneau circulaire*

2.2.1 État précontraint

Dans un premier temps, on compare le modèle analytique avec le modèle numérique pour le cas statique (régime permanent). L'anneau est soumis d'une part à la pression de gonflage et d'autre part à l'effet de la rotation (accélération centrifuge). Le problème est considéré axisymétrique, le déplacement résultant se fait uniquement dans la direction radiale. Les déplacements sont calculés par quatre modèles :

- modèle analytique (premier ordre) : on néglige les termes du second ordre, le déplacement est calculé par l'expression (2.38) ;
- modèle analytique (second ordre) : on considère aussi les termes du second ordre, le déplacement est calculé par l'expression (2.36) ;
- modèle numérique linéaire : modèle Abaqus linéaire (Ngem=0) ;
- modèle numérique non linéaire : modèle Abaqus non linéaire (Ngem=1).

Les données géométriques et mécaniques utilisées sont regroupées dans le tableau (2.1).

Les figures (2.7) et (2.6) montrent les déplacements pour différentes valeurs de la pression et de la vitesse de rotation. Les résultats sont en excellent accord dans le cas du modèle analytique (premier ordre) et le modèle linéaire d'Abaqus. Par ailleurs, avec la prise en compte des non linéarités géométriques dans le modèle numérique, les déplacements sont plus importants, dans ce cas le modèle numérique ne peut être comparé avec les résultats analytiques que pour des pressions faibles ($P \leq 10^4 Pa$) et des vitesses de rotations inférieures à 100 rad s^{-1} (102 km/h). La prise en compte des termes du second ordre dans le modèle analytique permet de mieux approcher le modèle numérique non linéaire.

Paramètres	Valeurs	Unités
Module de Young (E)	10^8	Pa
Masse volumique (ρ)	2280	kgm^{-3}
Rayon de l'anneau (R)	0.285	m
Epaisseur de la poutre (h)	0.01	m
Largeur de la poutre (b)	0.16	m
Raideur radiale (k_z)	1.6410^6	Nm^{-2}
Raideur tangentielle (k_θ)	2.1910^5	Nm^{-2}

TABLE 2.1: Paramètres de simulations

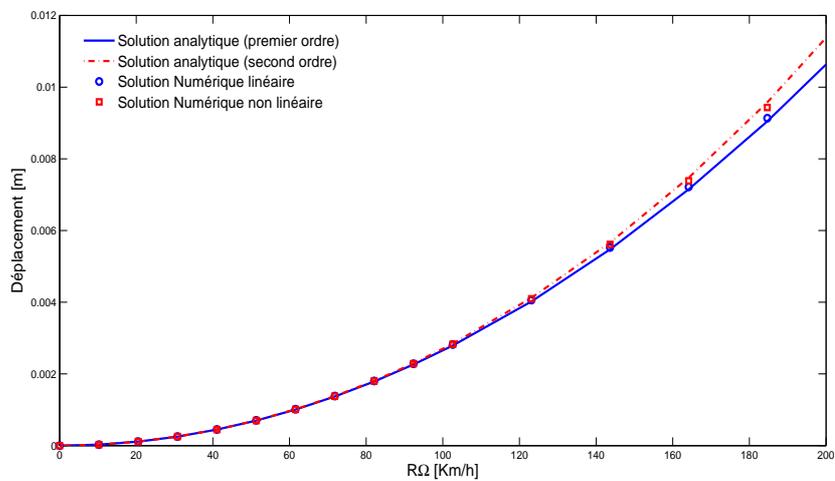


FIGURE 2.6: Influence de la vitesse de rotation sur la déformée statique

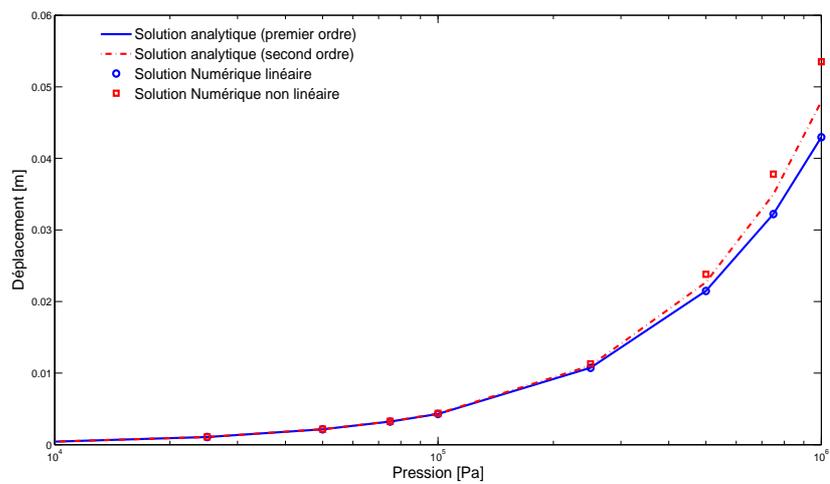


FIGURE 2.7: Influence de la pression sur la déformée statique

2.2.2 Analyse modale

2.2.2.1 Fréquences propres

Les déplacements u_z et u_θ sont des fonctions périodiques de la coordonnée θ . Elles peuvent ainsi se décomposer en séries de Fourier :

$$(u_z, u_\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (u_z^n, u_\theta^n) e^{jn\theta} \quad (2.56)$$

où u_z^n et u_θ^n sont les composantes des fonctions u_z et u_θ dans la base de Fourier. On cherche les modes propres harmoniques en temps tels que

$$(u_z^n, u_\theta^n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_z, u_\theta) e^{-jn\theta} d\theta \quad (2.57)$$

$$= \sum_{k=1}^M (A_{nk}, B_{nk}) e^{j\omega_{nk}t} \quad (2.58)$$

d'où la décomposition des fonctions u_z et u_θ ,

$$(u_z, u_\theta) = \sum_{k=1}^M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (A_{nk}, B_{nk}) e^{j(n\theta + \omega_{nk}t)} \quad (2.59)$$

En remplaçant les fonctions u_z et u_θ par leurs décompositions (2.59) dans les équations du mouvement (2.53) et (2.54), on trouve le système matriciel (2.60)

$$\begin{bmatrix} -j(d_1 - 2\Omega\omega_{nk}) & d_2 - \omega_{nk}^2 \\ d_3 - \omega_{nk}^2 & j(d_1 - 2\Omega\omega_{nk}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

où

$$d_1 = \frac{1}{\rho S} \left[n^3 \frac{EI}{R^4} + n \frac{K}{R^2} + 2n\rho S \Omega^2 + 2n \frac{pb}{R} \right] \quad (2.61)$$

$$d_2 = \frac{1}{\rho S} \left[n^2 \left(\frac{EI}{R^4} + \frac{K}{R^2} \right) + \rho S n^2 \Omega^2 + \frac{pb(n^2 + 1)}{R} + k_\theta \right] \quad (2.62)$$

$$d_3 = \frac{1}{\rho S} \left[n^4 \frac{EI}{R^4} + \frac{K}{R^2} + \rho S n^2 \Omega^2 + \frac{pb(n^2 + 1)}{R} + k_z \right] \quad (2.63)$$

$$(2.64)$$

Les ω_{nk} ($k = 1, 2, 3, 4$) sont les solutions de l'équation (2.65). Cette dernière conduit à résoudre l'équation du quatrième degré (2.66) :

$$\det \begin{bmatrix} -j(d_1 - 2\Omega\omega_{nk}) & d_2 - \omega_{nk}^2 \\ d_3 - \omega_{nk}^2 & j(d_1 - 2\Omega\omega_{nk}) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.65)$$

$$\omega_n^4 - (4\Omega^2 + d_2 + d_3) \omega_n^2 + 4d_1 \Omega \omega_n + d_2 d_3 - d_1^2 = 0 \quad (2.66)$$

Dans le cas général pour chaque $n > 0$, il y a quatre solutions distinctes : les deux premières valeurs faibles correspondent aux modes inextensibles (voir figure (2.10-a)) et les deux autres aux modes extensibles (voir figure (2.10-b)). Pour $n = 0$, il y a seulement deux modes : le premier est lié aux vibrations dans la direction circonférentielle et le deuxième est appelé mode de respiration.

Les figures (2.8) et (2.9) illustrent l'effet de la rotation de l'anneau sur les quatre premières fréquences propres ($n = 0, 1, 2, 3$) pour ($k = 1, 2, 3, 4$), avec une pression de $2.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. La vitesse de rotation donne naissance à une séparation des modes symétriques. L'écart entre les fréquences symétrique augmente avec la vitesse de rotation de façon symétrique autour des fréquences doubles ($\Omega = 0$) et suivant une courbe quasi linéaire. Ce phénomène est absent pour les premiers modes ($n = 0$) où les fréquences symétriques restent confondues quelle que soit la vitesse de la rotation.

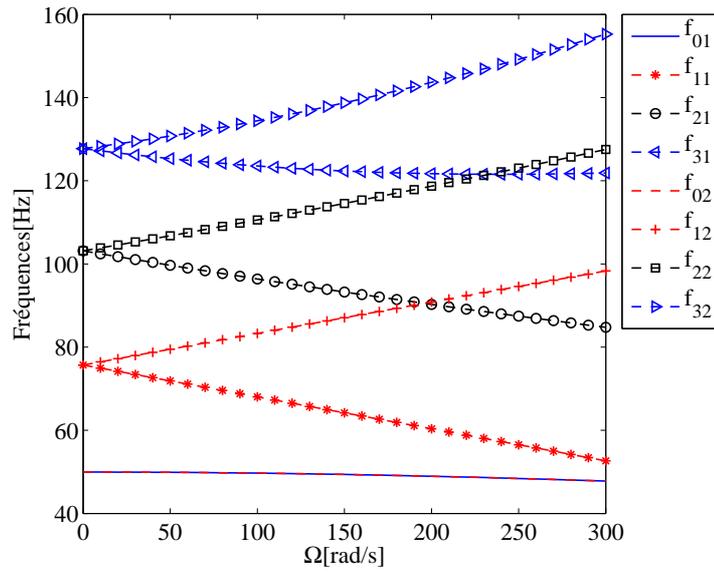


FIGURE 2.8: Bifurcation des fréquences propres due à l'effet Coriolis (modes inextensibles)

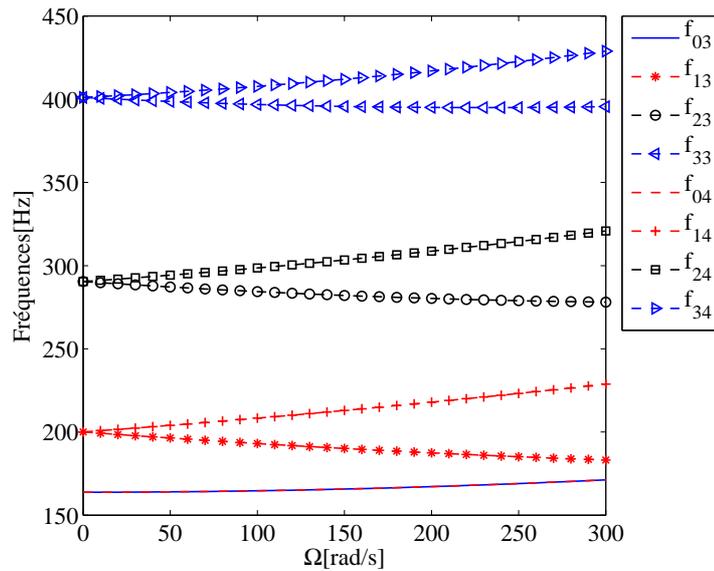


FIGURE 2.9: Bifurcation des fréquences propres due à l'effet Coriolis (modes extensibles)

2.2.2.2 Formes modales

A partir des équations (2.59) et (2.60), les déplacements u_z et u_θ peuvent s'écrire,

$$(u_z, u_\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^4 A_{nk}(1, jC_{nk}) e^{j(n\theta + \omega_{nk}t)} \quad (2.67)$$

avec

$$\begin{aligned} jC_{nk} &= \frac{B_n}{A_n} = j \frac{d_1 - 2\Omega\omega_{nk}}{d_2 - \omega_{nk}^2} \\ &= j \frac{n^3 \frac{EI}{R^4} + n \frac{K}{R^2} + 2 \frac{pbn}{R} + 2\rho S\Omega(n\Omega - \omega_{nk})}{n^2 \left(\frac{EI}{R^4} + \frac{K}{R^2} \right) + \frac{pb(n^2+1)}{R} + k_\theta + \rho S(n^2\Omega^2 - \omega_{nk}^2)} \end{aligned} \quad (2.68)$$

La figure (2.10) montre quelques déformées modales inextensibles et extensibles. Ces dernières correspondent à l'extension de l'anneau ce qui explique leurs apparition pour des grandes valeurs de fréquences.

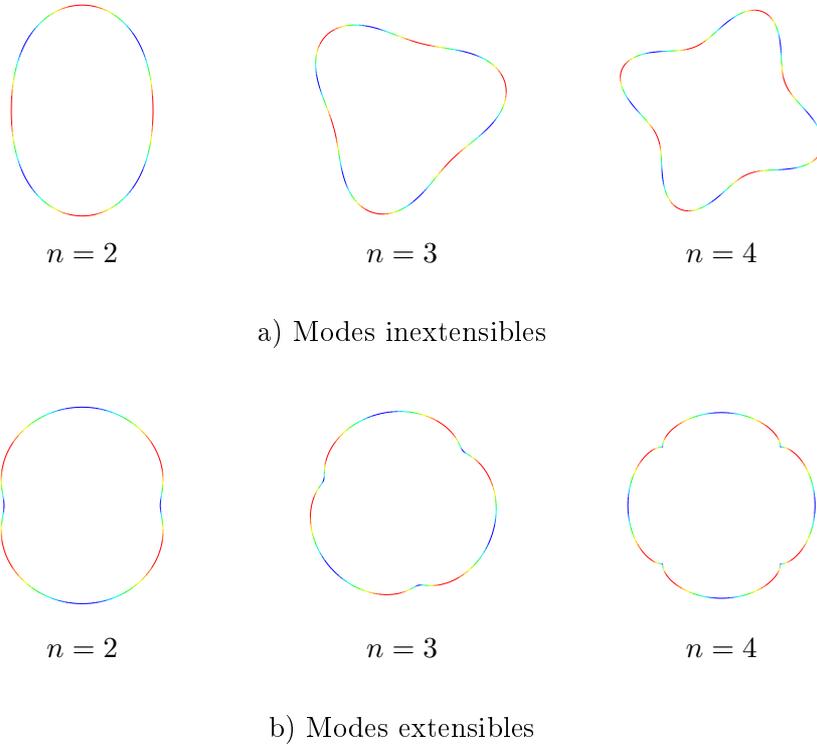


FIGURE 2.10: *Formes modales d'un anneau circulaire*

Comme dans le cas statique, on compare le modèle analytique avec le modèle numérique réalisé avec Abaqus. On garde les paramètres utilisés dans le cas statique. Les tableaux (2.2), (2.3) et (2.4) résument les fréquences des deux modèles dans le cas où $\Omega = 0$ pour trois valeurs de pression : $p = 0 \text{ Pa}$, $p = 1000 \text{ Pa}$ et $p = 2.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Les résultats des deux modèles sont en très bon accord, en particulier pour une pression de gonflage nulle où les dix premières fréquences sont quasiment les mêmes. Pour des pressions faibles (inférieures à 1000 Pa) les fréquences propres des deux modèles sont très proches, la différence ne dépasse pas 1%. Quand la pression augmente les différences entre les deux modèles augmentent également pour atteindre 10% pour une pression de $2.5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. La différence dans ce cas est liée à la prise en compte des termes non linéaires dans le modèle numérique contrairement au modèle analytique. Cette différence a déjà été constatée dans le cas statique. Elle est due à une sous estimation de l'effet de la pression dans le modèle analytique.

Numéro de Mode	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9
Modèle analytique	38.99	75.07	95.86	102.07	105.33	108.71	113.52	120.62	130.61	143.88
Modèle numérique	38.99	75.07	95.86	102.07	105.33	108.70	113.49	120.55	130.49	143.66

TABLE 2.2: Comparaison des fréquences propres pour une pression nulle ($p = 0$ Pa)

Numéro de Mode	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9
Modèle analytique	39.12	75.10	95.91	102.24	105.67	109.26	114.31	121.65	131.88	145.35
Modèle numérique	39.12	75.08	95.93	102.37	105.93	109.68	114.89	122.39	132.74	146.28

TABLE 2.3: Comparaison des fréquences propres pour $p = 1000$ Pa

Numéro de Mode	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9
Modèle analytique	49.95	75.68	95.91	103.13	127.71	153.82	163.79	181.88	200.02	211.65
Modèle numérique	49.60	77.42	100.66	117.36	134.63	153.78	165.73	174.96	198.10	201.38

TABLE 2.4: Comparaison des fréquences propres pour $p = 2.5 \cdot 10^5$ Pa

2.3 Fonction de Green

Au cours du roulement, l'anneau circulaire subit d'une part un écrasement dû au poids du véhicule et d'une autre part l'excitation de la chaussée. Dans un premier temps on néglige l'effet du poids du véhicule et on suppose que le contact avec la chaussée est ponctuel. Nous pouvons alors modéliser la chaussée par une force ponctuelle qu'on notera $Q(t)$.

2.3.1 Cas général

Dans le cas où on néglige l'amortissement, les équations du mouvement peuvent s'écrire sous la forme générale,

$$\mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{q}(t) \quad (2.69)$$

où $\mathbf{u} = [u_\theta \ u_z]^t$ et $\mathbf{q} = [q_\theta \ q_z]^t$ sont respectivement les vecteurs de déplacements et de forces, \mathbf{M} la matrice de masse, \mathbf{C} la matrice gyroscopique et \mathbf{L} l'opérateur différentiel linéaire qui sont définis par :

$$\mathbf{M} = \rho S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{C} = 2\rho S\Omega \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{EI}{R^4} + \frac{K}{R^2} + \frac{pb}{R} + \rho S\Omega^2\right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{pb}{R} + k_\theta & \frac{EI}{R^4} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} - \left(\frac{K}{R^2} + \frac{2pb}{R} + 2\rho S\Omega^2\right) \frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\frac{EI}{R^4} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \left(\frac{K}{R^2} + \frac{2pb}{R} + 2\rho S\Omega^2\right) \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{EI}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} - \left(\frac{pb}{R} + \rho S\Omega^2\right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{K}{R^2} + \frac{pb}{R} + k_z \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Le problème (2.69) peut être décomposé dans la base des fonctions harmoniques ($e^{jn\theta}$) :

$$\mathbf{L}_n \mathbf{u}_n + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_n = \mathbf{q}_n(t) \quad (2.72)$$

où

$$\mathbf{u}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u} e^{-jn\theta} d\theta \quad (2.73)$$

$$\mathbf{q}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{q} e^{-jn\theta} d\theta \quad (2.74)$$

$$\mathbf{L}_n = \begin{bmatrix} \left(\frac{EI}{R^4} + \frac{K}{R^2} + \frac{pb}{R} + \rho S \Omega^2 \right) n^2 + \frac{pb}{R} + k_\theta & -j \left[\frac{EI}{R^4} n^3 + \left(\frac{K}{R^2} + \frac{2pb}{R} + 2\rho S \Omega^2 \right) n \right] \\ j \left[\frac{EI}{R^4} n^3 + \left(\frac{K}{R^2} + \frac{2pb}{R} + 2\rho S \Omega^2 \right) n \right] & \frac{EI}{R^4} n^4 + \left(\frac{pb}{R} + \rho S \Omega^2 \right) n^2 + \frac{K}{R^2} + \frac{pb}{R} + k_z \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Dans le domaine fréquentiel, le problème (2.69) se transforme en :

$$[\mathbf{L}_n + j\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{U}_n(\omega) = \mathbf{Q}_n(\omega) \quad (2.76)$$

En notant $D_n(\omega)$ la matrice de rigidité dynamique :

$$\mathbf{D}_n = \mathbf{L}_n + j\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M} \quad (2.77)$$

Dans le cas où la matrice $D_n(\omega)$ est inversible on a :

$$\mathbf{U}_n(\omega) = \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{Q}_n(\omega) \quad (2.78)$$

Les figures (2.11) et (2.12) représentent respectivement les deux composantes diagonales de l'inverse de la matrice de rigidité dynamique. Les courbes montrent le phénomène de séparation des modes symétriques, qui est lié aux effets gyroscopiques. Ce phénomène est absent pour les premiers modes extensible et inextensible ($n = 0$). Nous pouvons constater également que l'effet de l'amortissement atténue l'effet gyroscopique. Pour un amortissement de 2%, l'effet gyroscopique est nettement marquant sur l'ensemble des modes alors qu'avec un amortissement de 5% les courbes sont quasiment confondues.

2.3.2 Cas sans rotation

Dans le cas où l'effet gyroscopique est négligé, l'orthogonalité des modes nous permet d'approcher l'inverse de la matrice de rigidité dynamique par une somme de contributions de chaque mode. La somme est tronquée à un ordre N suffisamment grand pour assurer une bonne approximation.

On définit ainsi la masse généralisée m_n par l'équation :

$$\Phi_n^t \mathbf{M} \Phi_n = m_n \quad (2.79)$$

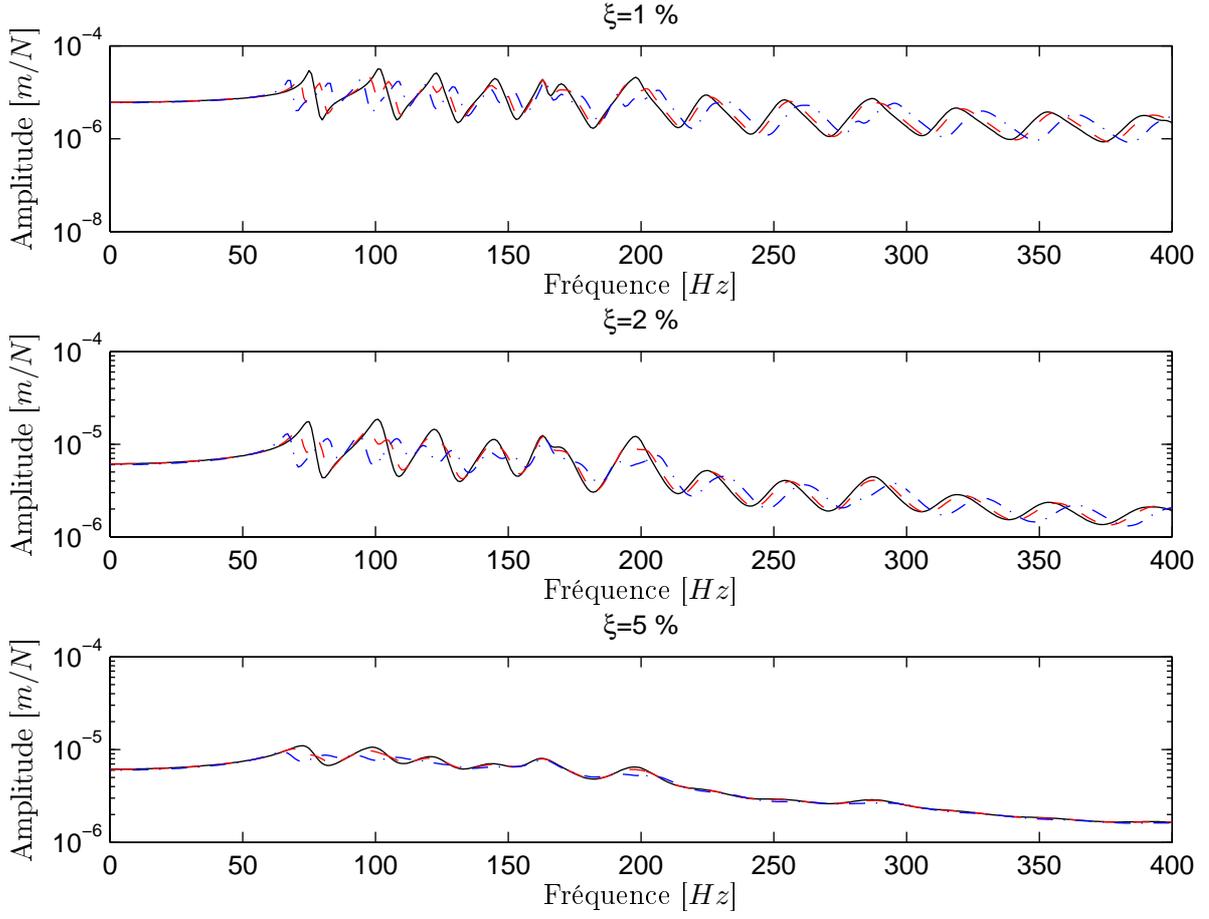


FIGURE 2.11: Influence de la vitesse de rotation pour différentes valeurs d'amortissement (D_{11}^{-1}) : - $V = 10 \text{ Km/h}$, - - $V = 50 \text{ Km/h}$, - · - $V = 100 \text{ Km/h}$

avec Φ_n le mode propre n de l'anneau. Les modes propres sont normalisés en prenant la masse généralisée égale à l'unité ($m_n = 1$) :

$$\rho h \int_0^{2\pi} \alpha_n^2 (u_{zn}^2 + u_{\theta n}^2) R d\theta = 1 \quad (2.80)$$

où α_n est le facteur de normalisation. L'inverse de la matrice de rigidité peut être alors approché par l'équation (2.81) :

$$[\mathbf{L} - \mathbf{M}\omega^2]^{-1} = \Phi \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \frac{1}{-\omega^2 + \omega_n^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \Phi^t = \sum_{n=1}^N \frac{\Phi_n \Phi_n^t}{-\omega^2 + \omega_n^2} \quad (2.81)$$

La prise en compte de l'amortissement est nécessaire pour stabiliser la réponse au voisinage des fréquences propres. On considère l'amortissement modal ξ_n pour le mode n . L'inverse de la matrice de rigidité dynamique (fonction de Green en fréquence) s'écrit ainsi

$$\mathbf{G}(\omega) = [\mathbf{L} + j\omega\mathbf{C} - \mathbf{M}\omega^2]^{-1} = \sum_{n=1}^N \frac{\Phi_n \Phi_n^t}{-\omega^2 + j2\xi_n \omega_n \omega + \omega_n^2} \quad (2.82)$$

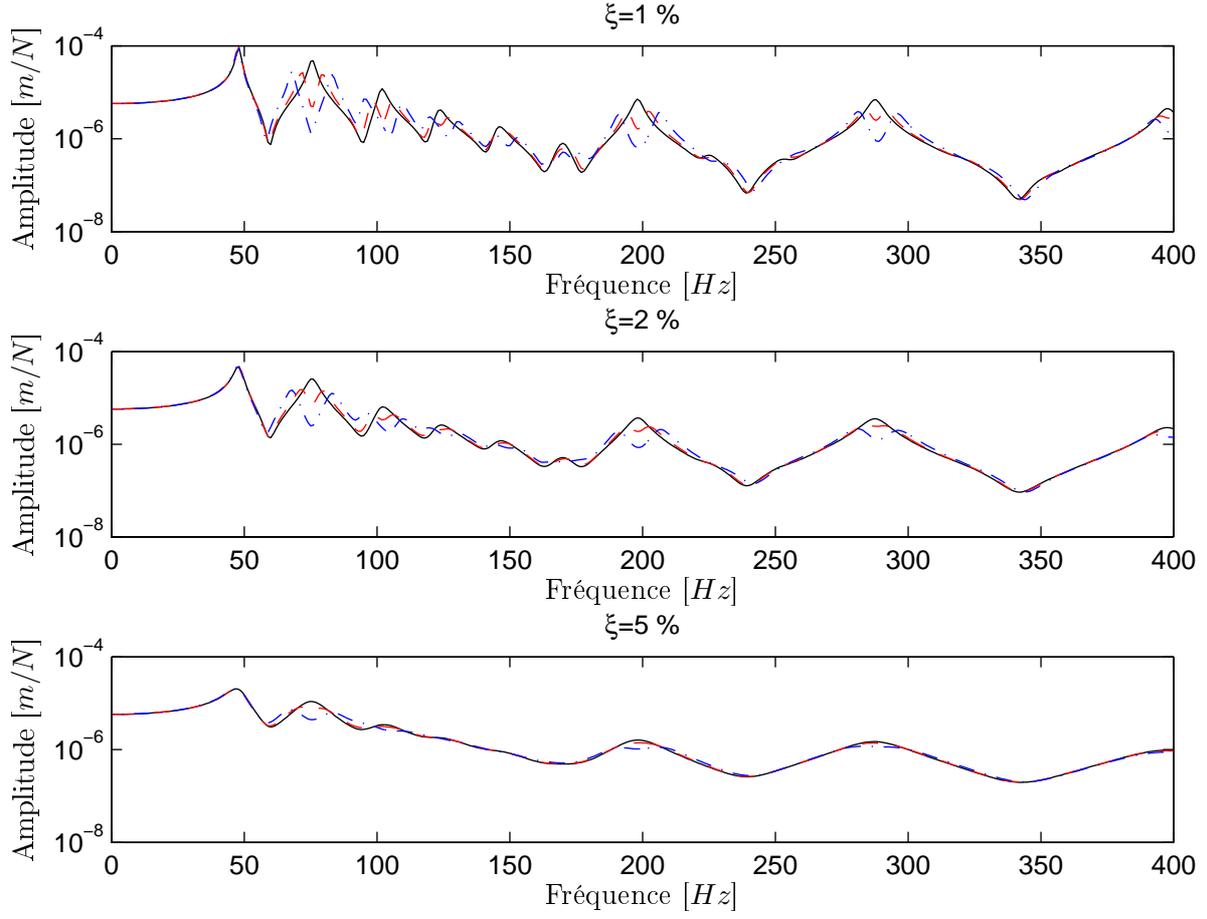


FIGURE 2.12: Influence de la vitesse de rotation pour différentes valeurs d'amortissement (D_{22}^{-1}) : $-V = 10 \text{ Km/h}$, $- - V = 50 \text{ Km/h}$, $- \cdot - V = 100 \text{ Km/h}$

La fonction de Green est une matrice 2x2 de composantes :

$$G_{zz}(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{(u_z^n)^2}{-\omega^2 + j2\xi_n \omega_n \omega + \omega_n^2} \quad (2.83)$$

$$G_{\theta z}(\omega) = G_{z\theta}(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{u_\theta^n u_z^n}{-\omega^2 + j2\xi_n \omega_n \omega + \omega_n^2}$$

$$G_{\theta\theta}(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{(u_\theta^n)^2}{-\omega^2 + j2\xi_n \omega_n \omega + \omega_n^2} \quad (2.84)$$

Les figures (2.13) et (2.14) représentent respectivement les amplitudes des composantes G_{zz} et $G_{\theta\theta}$ pour trois valeurs de pression de gonflage. Nous pouvons constater que dans le cas d'une pression nulle les résultats analytiques coïncident parfaitement avec les résultats numériques. Par ailleurs, si la pression augmente les résultats des deux modèles s'éloignent. Cela peut s'expliquer par la différence des hypothèses prises dans les deux modèles : le modèle analytique est basé sur l'hypothèse des petits déplacements tandis que dans le modèle numérique nous avons intégré les non linéarité-géométriques (option Abaqus NGeo). La figure (2.15) montre les amplitudes de la

réponse de tous les noeuds de l'anneau suite à une excitation à l'origine ($\theta = 0$). On peut voir le caractère symétrique de la réponse.

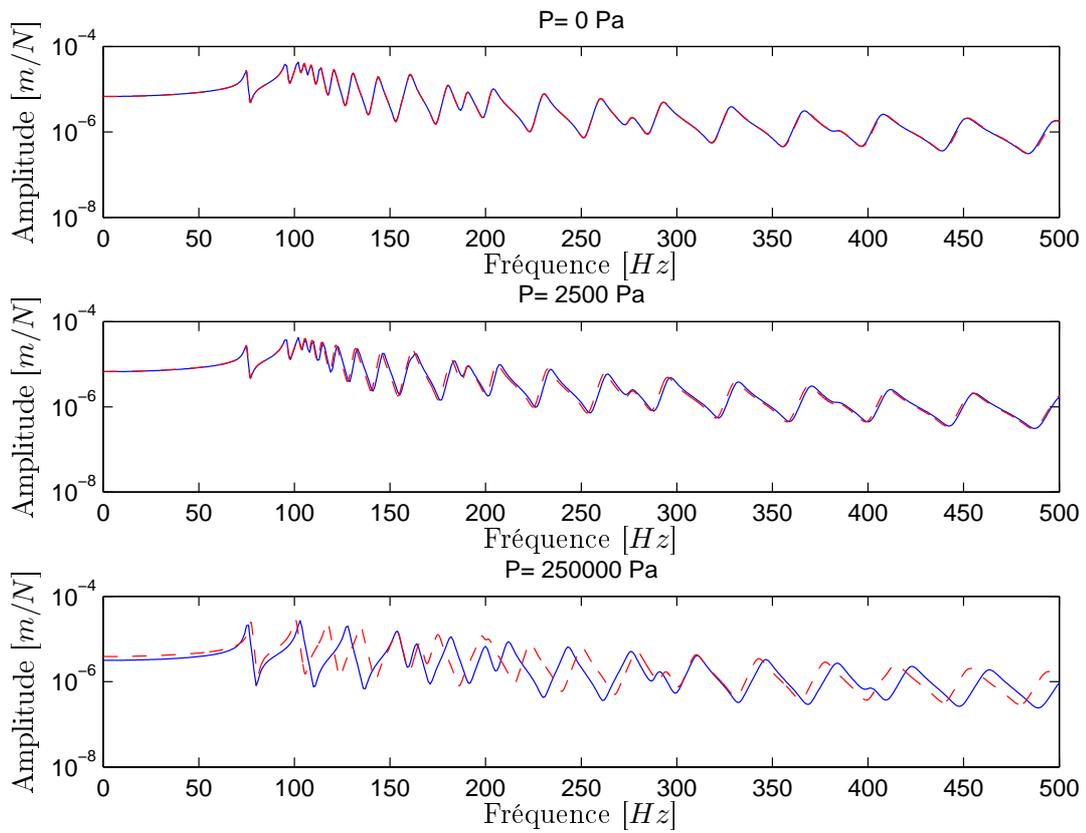


FIGURE 2.13: Comparaison du modèle analytique au modèle numérique d'Abaqus (G_{zz}) : — Modèle analytique, - - - Modèle numérique

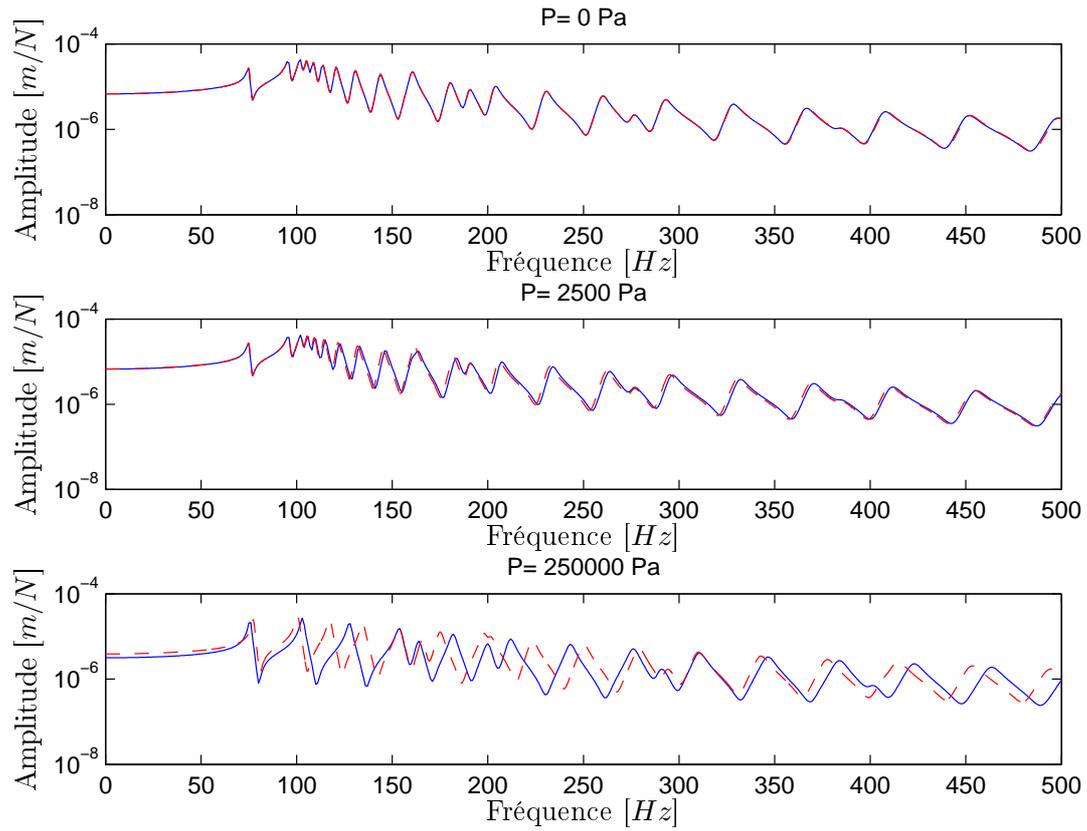


FIGURE 2.14: Comparaison du modèle analytique au modèle numérique d'Abaqus ($G_{\theta\theta}$) : — Modèle analytique, - - Modèle numérique

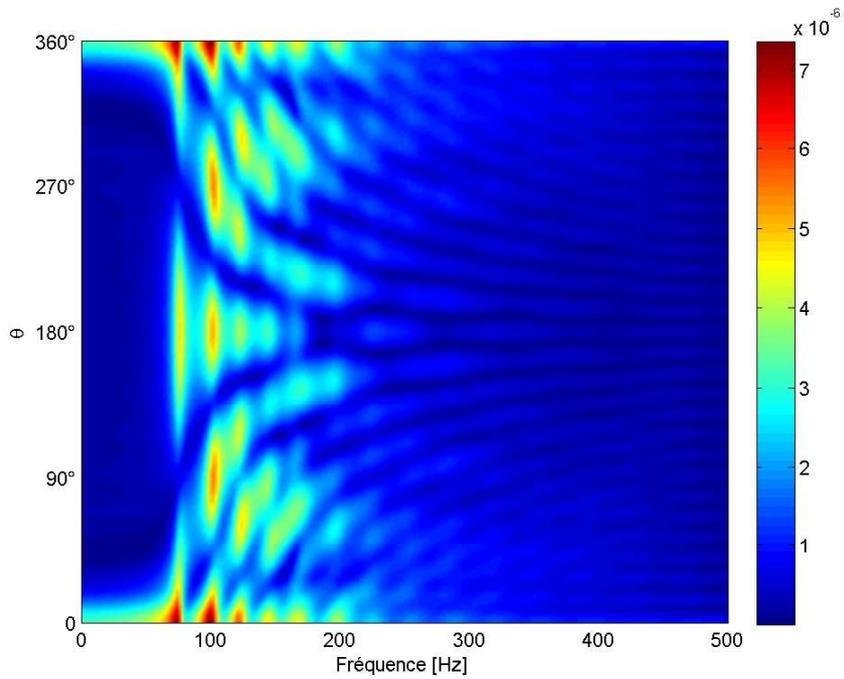


FIGURE 2.15: Amplitude de la fonction de Green G_{zz} de l'ensemble de l'anneau circulaire suite à une excitation au point à $\theta = 0^\circ$

2.4 Conclusion

Une étude détaillée du modèle d'anneau circulaire sous fondation élastique a été présentée. D'abord, les différentes hypothèses adoptées pour construire ce modèle sont explicitées. Ensuite les équations du mouvement sont obtenues en utilisant le principe des puissances virtuelles.

La comparaison entre le modèle analytique et le modèle numérique d'Abaqus est réalisée dans les cas statique et dynamique. En statique, la contrainte initiale et le déplacement dus à la pression de gonflage et l'effet de rotation calculé par le modèle analytique et le modèle linéaire d'Abaqus sont très proches. Or dans Abaqus, nous avons besoin d'intégrer les non linéarités géométriques pour prendre en compte l'état précontraint dans le modèle numérique. En dynamique, les fréquences propres et les fonctions de Green sont en excellent accord pour des faibles valeurs de pression (en dessous de $1000 Pa$). La différence entre les deux modèles augmente avec la pression de gonflage. Cette différence est due à la négligence des termes non linéaires de la pression dans le modèle analytique.

Concernant la vitesse de rotation, en statique, nous avons vu que son influence sur la contrainte initiale est plus faible que celui de la pression de gonflage en particulier pour des vitesses usuelles (inférieures à $100 km/h$). En dynamique, cette influence se traduit par l'apparition du phénomène de séparation des modes symétriques. Cet effet diminue avec l'amortissement. Il peut être négligé dans le cas des grands coefficients d'amortissement (supérieur à 5%).

Chapitre 3

Modèle de contact ponctuel

DANS ce chapitre, nous allons aborder le problème de contact entre un pneumatique et une chaussée. Nous partons de l'hypothèse que la fonction de Green est connue dans une bande de fréquence donnée. Habituellement la réponse du pneumatique est calculée par un produit de convolution entre la fonction de Green temporelle et l'effort de contact. Cette démarche est coûteuse en termes de temps de calcul. La méthode exposée dans ce chapitre consiste à simplifier la fonction de Green en la décomposant dans une base modale tronquée à un ordre suffisamment grand pour assurer une bonne précision. La réponse est donc calculée en utilisant les paramètres modaux identifiés à l'aide de l'algorithme LSCE. Les deux méthodes sont comparées en termes de précision et de temps de calcul dans le cas d'un système à un degré de liberté sur une chaussée sinusoïdale. La méthode est appliquée dans le cas du modèle d'anneau circulaire décrit dans le chapitre précédent sur des chaussées réelles. Les limites de l'adoption de l'hypothèse quasi-statique est discutée en fonction des paramètres du système dynamique et des paramètres géométriques de la chaussée.

PLAN DU CHAPITRE 3

3.1 Convolution standard	63
3.2 Identification des paramètres dynamiques	65
3.2.1 Méthodes polynomiales	66
3.2.2 Décomposition modale	66
3.2.3 Passage au domaine temporel	73
3.3 Modélisation du contact	74
3.3.1 Application à un système Masse-Ressort-Amortisseur	74
3.3.2 Application du modèle REF sur des profils de chaussées réelles	80
3.4 Conclusion	86

3.1 Convolution standard

La résolution de l'équation dynamique (3.1) demande d'une part la recherche d'une solution générale $\mathbf{u}_g(t)$ de l'équation homogène qui lui est associée, d'autre part, de chercher une solution particulière de l'équation complète. La connaissance de la fonction de Green $\mathbf{G}(\omega)$ est un moyen systématique pour trouver cette solution particulière. La méthode classique pour ce genre de calcul est de trouver la fonction de Green temporelle $\mathbf{g}(t)$ puis de faire un produit de convolution de cette fonction et de la force appliquée $\mathbf{q}(t)$.

$$\mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{q}(t) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_g(t) + \int_{-\infty}^t \mathbf{g}(t - \tau)\mathbf{q}(\tau)d\tau \quad (3.2)$$

On se place dans le cas où le système est au repos jusqu'à un certain temps pris comme origine $t = 0$. Dans ces conditions, la solution du problème homogène est nulle ($\mathbf{u}_g(t) = \mathbf{0}$), et la solution se réduit à

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{g}(t - \tau)\mathbf{q}(\tau)d\tau \quad (3.3)$$

Prenons un cas simple d'un oscillateur harmonique amorti (une masse ponctuelle de masse M attachée à un ressort de raideur K et à un amortisseur de coefficient d'amortissement C) comme le montre la figure (3.1).

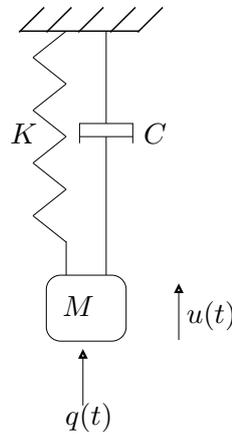


FIGURE 3.1: *Système masse-ressort-amortisseur*

L'équation dynamique du système s'écrit

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = q(t) \quad (3.4)$$

La fonction de Green de ce système est solution de l'équation,

$$M\ddot{g} + C\dot{g} + Kg = \delta(t) \quad (3.5)$$

ou encore dans le domaine fréquentiel

$$[-\omega^2 M + j\omega C + K] G(\omega) = 1 \quad (3.6)$$

Nous définissons la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ par

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.7)$$

La transformée de Fourier inverse est alors donnée par

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.8)$$

La fonction de Green fréquentielle peut s'écrire sous la forme

$$G(\omega) = \frac{1}{M} \frac{1}{-\omega^2 + 2j\xi\omega\omega_0 + \omega_0^2} \quad (3.9)$$

Sa transformée inverse est donnée par

$$g(t) = \frac{1}{2\pi M} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t} d\omega}{-\omega^2 + 2j\xi\omega\omega_0 + \omega_0^2} \quad (3.10)$$

En utilisant le théorème des résidus on trouve l'expression analytique de la fonction de Green dans le domaine temporel.

$$g(t) = \frac{1}{M\omega_d} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_d t) H(t) \quad (3.11)$$

Avec $H(t)$ la fonction de Heaviside définie par

$$\begin{cases} H(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ H(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

et

$$\xi = \frac{C}{2\sqrt{KM}} ; \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} ; \omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.13)$$

Le déplacement peut être calculé ainsi

$$u(t) = \int_0^t \frac{1}{M\omega_d} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) q(\tau) d\tau \quad (3.14)$$

Dans le cas d'un problème 1D, cette équation peut être discrétisée sous la forme :

$$u_k = \sum_{m=0}^k g_{k-m} q_m \quad (3.15)$$

où u_k est le déplacement à l'instant $k\Delta t$.

On note N_t le nombre de pas à simuler et N_g le nombre de pas pour représenter la fonction de Green dans l'intervalle de temps d'influence $[0, N_g\Delta t]$. Au delà de cet intervalle, la fonction de Green peut être négligée. On choisit donc le nombre N_g de façon que les amplitudes des oscillations soient supérieures ou égales à un centième de l'amplitude maximale.

La figure (3.2) montre l'erreur relative sur le déplacement due à la troncature de la fonction de Green en fonction du rapport entre l'amplitude maximale et l'amplitude minimale.

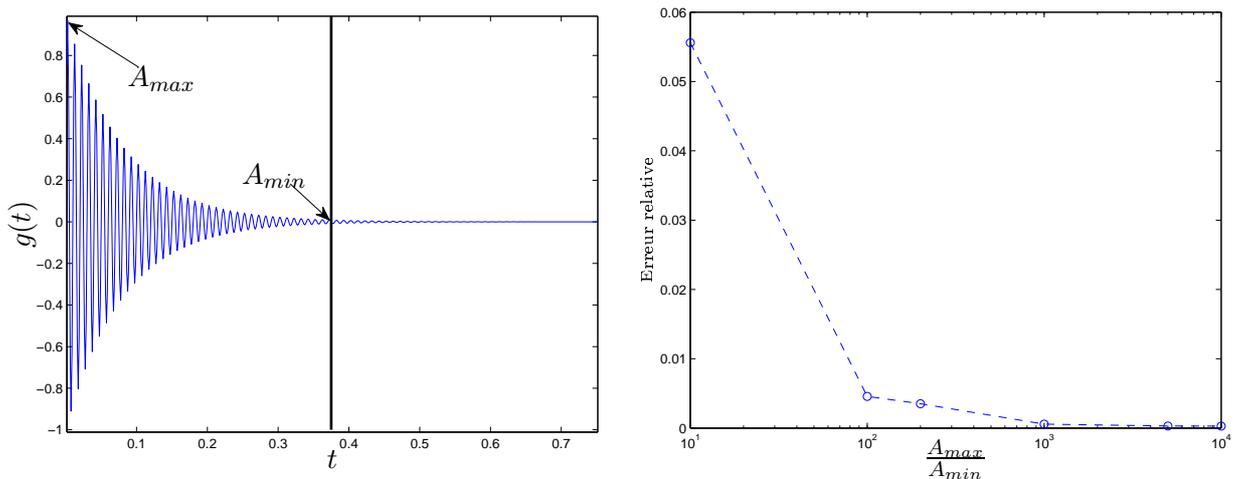


FIGURE 3.2: Détermination de l'intervalle de temps d'influence de la fonction de Green

L'équation (3.15) est réduite à

$$u_k = \sum_{m=0}^{\min(k, N_g)} g_{k-m} q_m \quad (3.16)$$

3.2 Identification des paramètres dynamiques

Le calcul de la réponse du pneu par une convolution standard demande un grand nombre de coefficients pour mieux approcher la solution exacte. Dans cette section on cherche à réduire le temps de calcul en simplifiant la fonction de Green. L'idée est de remplacer cette fonction par un nombre raisonnable de coefficients tout en gardant la même précision que dans la convolution standard. Le calcul se fait en deux temps, d'abord l'identification des paramètres dynamiques de

la fonction de Green dans le domaine temporel, puis le calcul de la réponse temporelle en intégrant les efforts de contact de la chaussée.

3.2.1 Méthodes polynomiales

Il existe plusieurs méthodes d'identification des systèmes comme les méthodes polynomiales couramment utilisées par les automaticiens. L'ensemble de ces méthodes est basée sur une représentation discrète dans le domaine temporel. La forme générale de ces modèles s'écrit

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{G(q)}e(t) \quad (3.17)$$

La plupart de ces méthodes sont développées dans la boîte à outils de MATLAB System Identification Toolbox. Les algorithmes les plus connus sont :

- ARX (Auto Régressive model with eXternal inputs) avec les polynômes $A(q)$ et $B(q)$
- ARMA (Auto Regressive and Moving Average) avec les polynômes $A(q)$ et $C(q)$
- OE (Output Error) avec les polynômes $B(q)$ et $F(q)$

3.2.2 Décomposition modale

Pour les problèmes de dynamique, la représentation modale est la plus adaptée. Contrairement aux méthodes citées dans le paragraphe précédent, les termes de la décomposition ont une signification physique. La fonction de Green peut être approximée par une combinaison linéaire de la contribution de chaque mode.

$$G(\omega) = \sum_{k=1}^{k=N_m} \frac{A_k}{-\omega^2 + 2j\xi_k\omega\omega_k + \omega_k^2} \quad (3.18)$$

On cherche à identifier les paramètres modaux qui sont, les résidus A_k , les amortissements ξ_k et les pulsations propres ω_k . Il existe plusieurs méthodes pour traiter ce genre de problème. La méthode LSCE (Least Squares Complex Exponential) reste la référence dans les applications d'analyse modale expérimentale.

La fonction de Green est supposée connue dans le domaine fréquentiel, soit $g(t)$ sa transformée de Fourier inverse. Dans le domaine fréquentiel, la fonction de Green peut s'écrire sous la forme

$$G(\omega) = \sum_{k=1}^{k=N_m} \left[\frac{R_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{R_k^*}{j\omega - \lambda_k^*} \right] \quad (3.19)$$

Pour $R_{n+k} = R_k^*$ et $\lambda_{n+k} = \lambda_k^*$, la fonction de Green peut se réécrire

$$G(\omega) = \sum_{k=1}^{k=2N_m} \frac{R_k}{j\omega - \lambda_k} \quad (3.20)$$

et dans le domaine temporel

$$g(t) = \sum_{k=1}^{k=2N_m} R_k e^{\lambda_k t} \quad (3.21)$$

On discrétise la fonction $g(t)$ avec un pas de temps Δt . On peut écrire alors

$$g(n\Delta t) = \sum_{k=1}^{k=2N_m} R_k e^{\lambda_k n\Delta t} \quad (3.22)$$

Pour simplifier le calcul, on pose $z_k = e^{\lambda_k \Delta t}$

$$g(n\Delta t) = \sum_{k=1}^{k=2N_m} R_k z_k^n \quad (3.23)$$

On exprime $g(t)$ pour différents instants $k\Delta t$ compris entre 0 et $L\Delta t$

$$\begin{aligned} g_0 = g(0) &= \sum_{k=1}^{k=2N_m} R_k \\ g_1 = g(\Delta t) &= \sum_{k=1}^{k=2N_m} R_k z_k \\ g_2 = g(2\Delta t) &= \sum_{k=1}^{k=2N_m} R_k z_k^2 \\ [\dots] & \\ g_i = g(i\Delta t) &= \sum_{k=1}^{k=2N_m} R_k z_k^i \\ [\dots] & \\ g_L = g(L\Delta t) &= \sum_{k=1}^{k=2N_m} R_k z_k^L \end{aligned} \quad (3.24)$$

On cherche z_k comme solution de l'équation polynomiale d'ordre L

$$\beta_0 + \beta_1 z_k + \beta_2 z_k^2 + \dots + \beta_i z_k^i \dots + \beta_L z_k^L = 0 \quad (3.25)$$

Pour calculer les coefficients β_i , on multiplie les équations (3.25) par les β_i correspondants puis on fait la somme de tous les instants $k\Delta t$ compris entre 0 et $L\Delta t$

$$\sum_{i=0}^{i=L} \beta_i g_i = \sum_{i=0}^{i=L} (\beta_i \sum_{k=1}^{k=2N_m} R_k z_k^i) = \sum_{k=1}^{k=2N_m} (R_k \sum_{i=0}^{i=L} \beta_i z_k^i) \quad (3.26)$$

D'après l'équation(3.25), nous pouvons écrire

$$\beta_0 g(0) + \beta_1 g(\Delta t) + \beta_2 g(2\Delta t) + \dots \beta_i g(i\Delta t) \dots + \beta_L g(L\Delta t) = 0 \quad (3.27)$$

Si on connaît la fonction de Green en $4N_m$ instants ($L = 2N_m - 1$), on peut construire la matrice de Hankel, et les $2N_m$ coefficients β_i sont solutions de l'équation matricielle

$$\begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_{2N_m-1} \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_{2N_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{2N_m-2} & g_{2N_m-1} & g_{2N_m} & \cdots & g_{4N_m-3} \\ g_{2N_m-1} & g_{2N_m} & g_{2N_m+1} & \cdots & g_{4N_m-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_{2N_m-2} \\ \beta_{2N_m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{2N_m} \\ g_{2N_m+1} \\ \cdots \\ g_{4N_m-2} \\ g_{4N_m-1} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Le nombre de lignes peut être augmenté afin d'avoir une solution au sens des moindres carrés. Si on note \mathbf{H} la matrice de Hankel, $\mathbf{b} = [\beta_0 \ \beta_1 \dots \beta_{2N_m-1}]^T$ et $\mathbf{h} = [g_{2N_m} \ g_{2N_m+1} \dots g_{4N_m-1}]^T$, les coefficients β_i peuvent être calculés par

$$\mathbf{b} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{h} \quad (3.29)$$

Une fois les coefficients β_i déterminés, on peut calculer facilement les z_k . La figure (3.3) illustre la relation entre le paramètre λ_k et les paramètres modaux ω_k et ξ_k . Cette relation peut être exprimée par les équations

$$\begin{cases} \omega_k^2 = \lambda_k \lambda_k^* \\ -\omega_k \xi_k = \frac{\lambda_k + \lambda_k^*}{2} \end{cases} \quad (3.30)$$

Sachant que $z_k = e^{\lambda_k \Delta t}$, finalement les pulsations propres et les amortissements peuvent se calculer par les deux formules

$$\begin{cases} \omega_k = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\log(z_k) \log(z_k^*)} \\ \xi_k = \frac{-\log(z_k z_k^*)}{2\omega_k \Delta t} \end{cases} \quad (3.31)$$

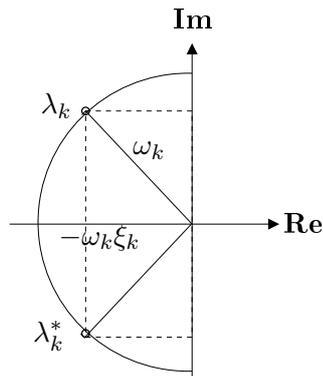


FIGURE 3.3: Paramètres modaux

Prenons l'exemple du modèle d'anneau circulaire (REF). On trace les fréquences (+) calculées par l'algorithme LSCE pour chaque ordre puis on compare avec les fréquences analytiques de la fonction de Green. La figure (3.4) montre l'évolution des fréquences propres en fonction de l'ordre de l'algorithme LSCE. Les deux premiers modes sont plus faciles à identifier. Ils sont identifiés à partir d'un ordre d'approximation égal à 20 et leurs valeurs restent stables avec l'augmentation de l'ordre. Par contre pour identifier tous les modes, il faut au moins un ordre d'approximation égal au double du nombre de pôles ($2N_m = 36$).

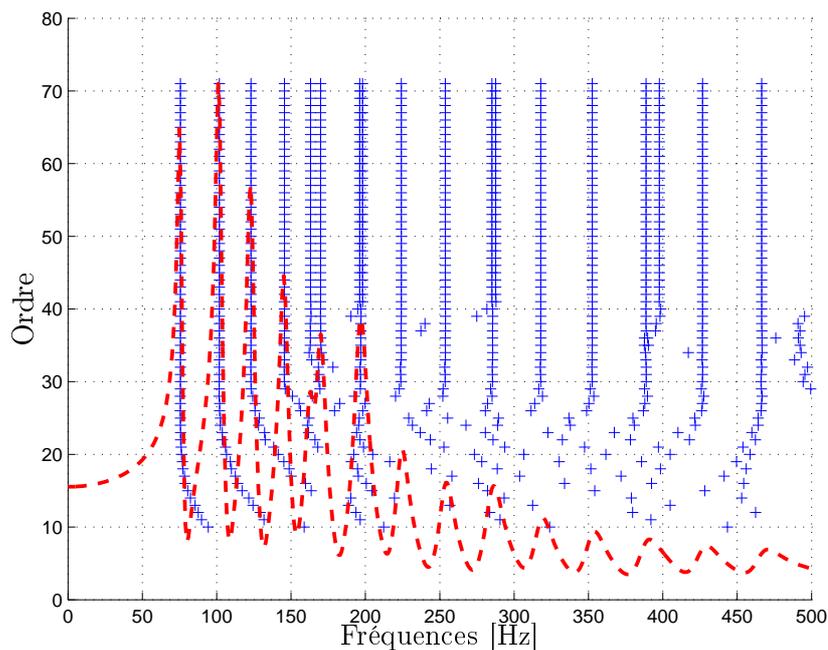


FIGURE 3.4: Identification des fréquences propres du modèle REF : - - fonction de Green , + fréquence identifiée

De même, pour l'identification des amortissements, la figure (3.5) montre que plus l'ordre augmente plus les amortissements des pôles identifiés précédemment tendent vers la valeur exacte. Dans cet exemple, nous avons pris un amortissement modal constant de 2%. Contrairement aux fréquences, les amortissements sont plus difficiles à identifier. Pour un ordre d'approximation égal au double du nombre de pôles, tous les amortissements ne sont pas identifiés. Comme le montre la figure (3.5), il faut au moins un ordre d'approximation égal à 40 pour identifier l'amortissement

des 18 modes identifiés précédemment.

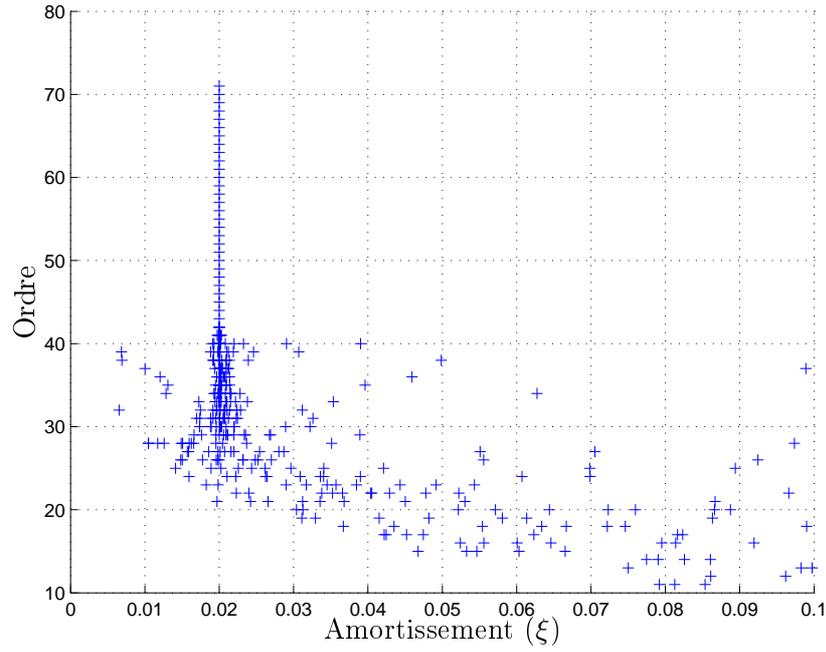


FIGURE 3.5: Identification des amortissements du modèle REF

Il reste à déterminer les amplitudes A_k . D'après l'équation (3.18) on peut exprimer la fonction de Green pour différentes fréquences ($\Omega_1, \Omega_2, \dots$), on obtient ainsi le système linéaire (3.32), ce dernier peut être résolu par une inversion de matrice ou bien au sens des moindres carrés dans le cas où le nombre de lignes est supérieur à celui des colonnes. Dans la dernière étape de l'identification, on élimine les modes ayant des amplitudes très faibles.

Les figures (3.6), (3.7) et (3.8) montrent la reconstruction des parties réelle et imaginaire de la fonction de Green du modèle REF. Les fonctions sont tracées dans la bande de fréquence $[0 \ 500 \text{ Hz}]$ pour différentes valeurs de l'ordre d'approximation. Comme on peut le voir sur ces figures, dans cette bande de fréquence nous avons 18 modes. Avec 12 coefficients, seuls les deux premiers modes sont identifiés. Par contre, si on considère 15 coefficients, nous pouvons pratiquement retracer toute la fonction de Green dans la bande $[0 \ 500 \text{ Hz}]$ de façon très précise. Avec 18 coefficients la fonction de Green est reconstruite de façon exacte, avec même les modes peu visibles (par exemple le sixième mode à 165 Hz).

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{-\Omega_1^2 + 2j\xi_1\Omega_1\omega_1 + \omega_1^2} & \frac{1}{-\Omega_1^2 + 2j\xi_2\Omega_1\omega_2 + \omega_2^2} & \dots & \frac{1}{-\Omega_1^2 + 2j\xi_L\Omega_1\omega_L + \omega_L^2} \\ \frac{1}{-\Omega_2^2 + 2j\xi_1\Omega_2\omega_1 + \omega_1^2} & \frac{1}{-\Omega_2^2 + 2j\xi_2\Omega_2\omega_2 + \omega_2^2} & \dots & \frac{1}{-\Omega_2^2 + 2j\xi_L\Omega_2\omega_L + \omega_L^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{-\Omega_L^2 + 2j\xi_1\Omega_L\omega_1 + \omega_1^2} & \frac{1}{-\Omega_L^2 + 2j\xi_2\Omega_L\omega_2 + \omega_2^2} & \dots & \frac{1}{-\Omega_L^2 + 2j\xi_L\Omega_L\omega_L + \omega_L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ \dots \\ A_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\Omega_1) \\ g(\Omega_2) \\ \dots \\ \dots \\ g(\Omega_L) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

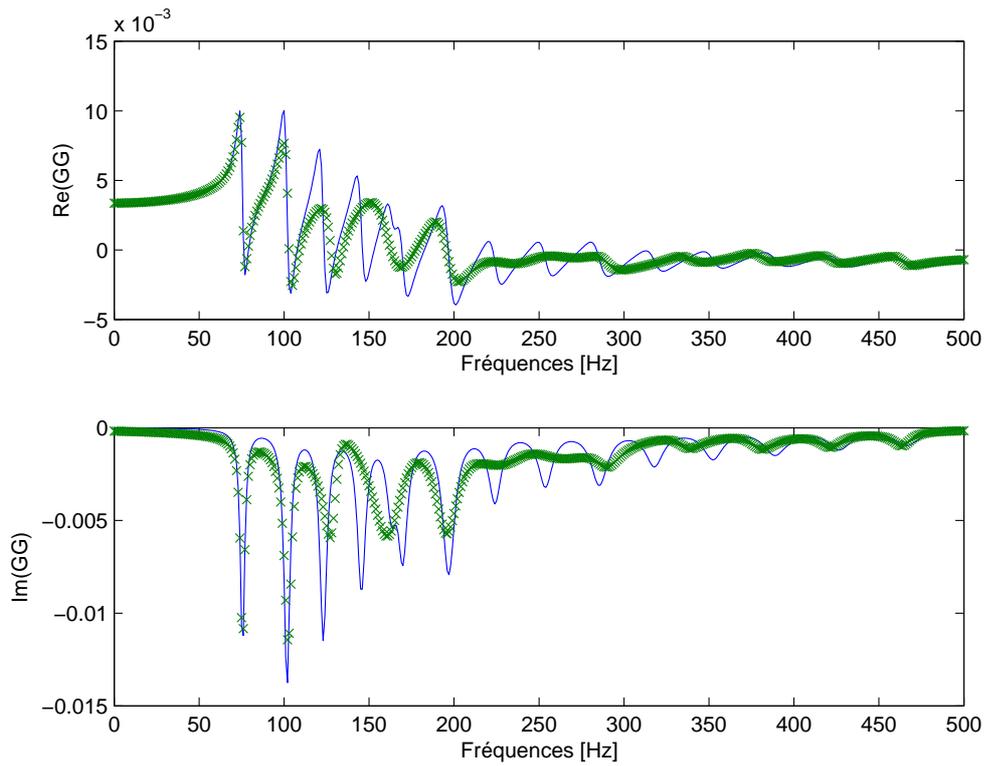


FIGURE 3.6: Reconstruction de la fonction de Green du modèle REF avec 12 coefficients : -, $G(\omega)$ x Approximation de $G(\omega)$

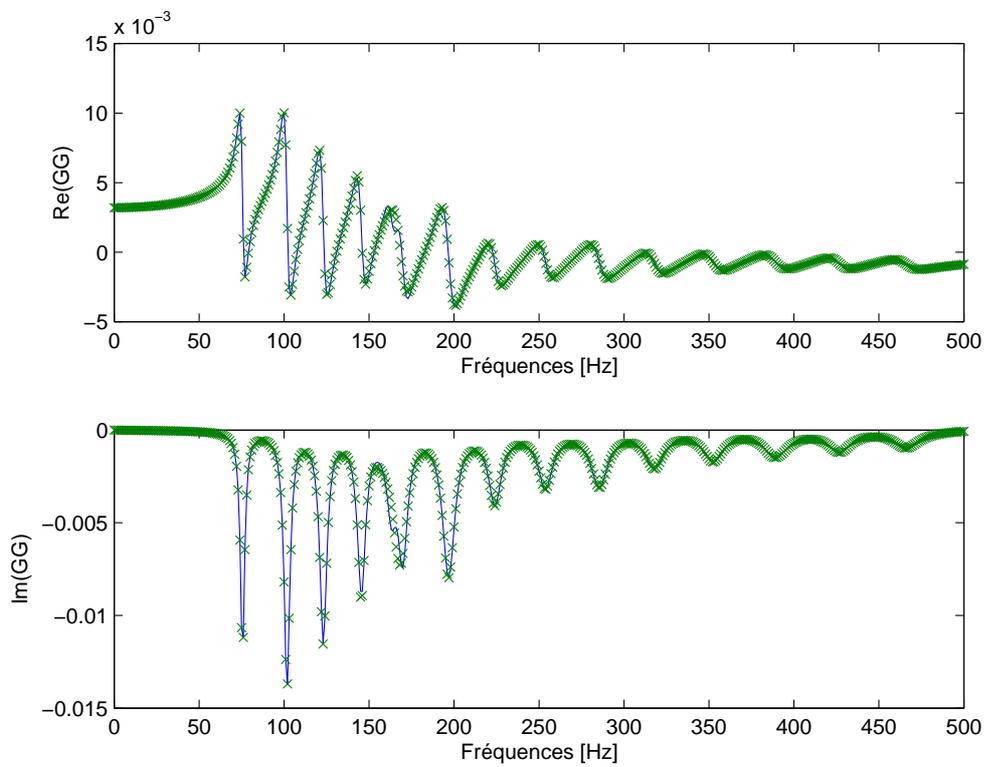


FIGURE 3.7: Reconstruction de la fonction de Green du modèle REF avec 15 coefficients : -, $G(\omega)$ x Approximation de $G(\omega)$

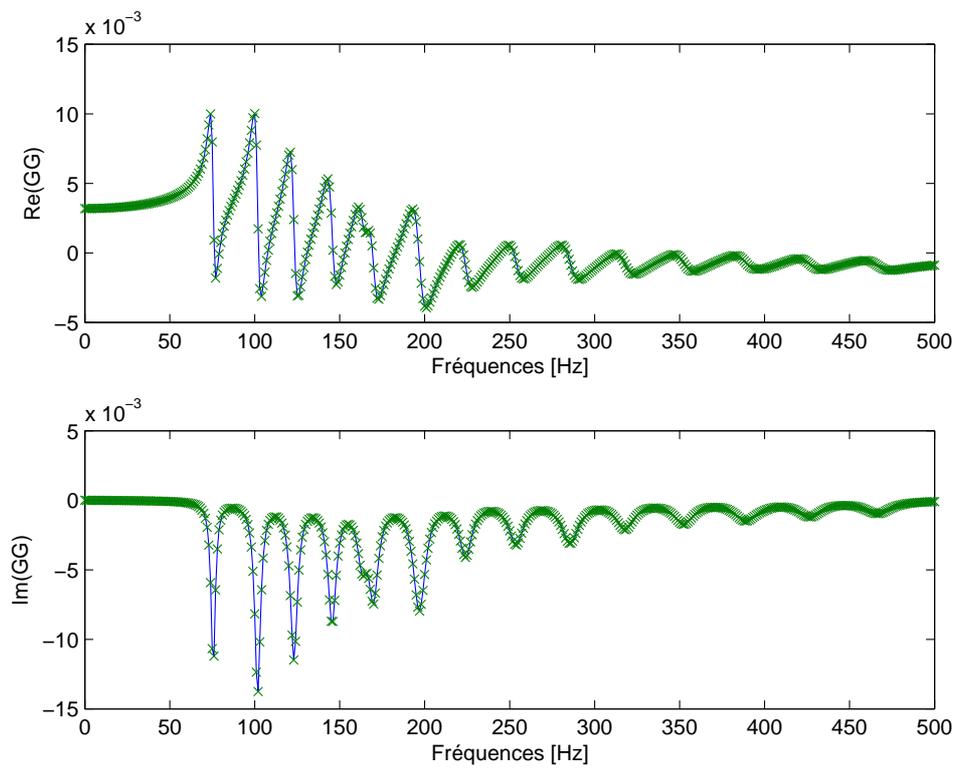


FIGURE 3.8: Reconstruction de la fonction de Green du modèle REF avec 18 coefficients : -, $G(\omega)$ x
Approximation de $G(\omega)$

3.2.3 Passage au domaine temporel

Après avoir déterminé les paramètres modaux A_k , ω_k et ξ_k et tronqué la décomposition à un ordre N_m , le déplacement dans le domaine fréquentiel peut s'écrire sous forme d'une série de la contribution de chaque mode.

$$G(\omega) = \sum_{k=1}^{k=N_m} \frac{A_k}{-\omega^2 + 2j\xi_k\omega\omega_k + \omega_k^2} \quad (3.33)$$

De la même façon, la fonction de Green dans le domaine temporel peut être obtenue par une transformation de Fourier inverse

$$g(t) = \sum_{k=1}^{k=N_m} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k\omega_k t} \sin(\omega_k^d t) H(t) \quad (3.34)$$

Avec

$$\omega_k^d = \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}$$

Le déplacement peut être calculé par un produit de convolution

$$u(t) = \int_0^t g(\tau) q(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(t - \tau) q(\tau) d\tau \quad (3.35)$$

On remplace l'expression de $g(t)$ dans l'équation (3.35) pour obtenir :

$$u(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{k=N_m} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k\omega_k(t-\tau)} \sin(\omega_k^d(t-\tau)) q(\tau) d\tau \quad (3.36)$$

En séparant les variables t et τ puis en réarrangeant les termes, nous pouvons écrire le déplacement sous la forme

$$u(t) = \sum_{k=1}^{k=N_m} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k\omega_k t} \left[\sin(\omega_k^d t) \alpha^k(t) - \cos(\omega_k^d t) \beta^k(t) \right] \quad (3.37)$$

où $\alpha^k(t)$ et $\beta^k(t)$ sont calculés par les formules

$$\alpha^k(t) = \int_0^t e^{\xi_k\omega_k\tau} \cos(\omega_k^d \tau) q(\tau) d\tau \quad (3.38)$$

$$\beta^k(t) = \int_0^t e^{\xi_k\omega_k\tau} \sin(\omega_k^d \tau) q(\tau) d\tau \quad (3.39)$$

$$(3.40)$$

Numériquement le déplacement à l'instant $n\Delta t$ est calculé par la formule

$$u(n\Delta t) = \sum_{k=1}^{k=N_m} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k\omega_k n\Delta t} \left[\sin(\omega_k^d n\Delta t) \alpha^k(n\Delta t) - \cos(\omega_k^d n\Delta t) \beta^k(n\Delta t) \right] \quad (3.41)$$

Les coefficients $\alpha^k(n\Delta t)$ et $\beta^k(n\Delta t)$ sont calculés par les relations de récurrence

$$\alpha^k((n+1)\Delta t) = \alpha^k(n\Delta t) + e^{\xi_k \omega_k n \Delta t} \cos(\omega_k^d n \Delta t) q(n\Delta t) \Delta t \quad (3.42)$$

$$\beta^k((n+1)\Delta t) = \beta^k(n\Delta t) + e^{\xi_k \omega_k n \Delta t} \sin(\omega_k^d n \Delta t) q(n\Delta t) \Delta t \quad (3.43)$$

3.3 Modélisation du contact

A l'instant t le déplacement $u_{\text{pneu}}(t)$ dépend de l'historique de l'effort de contact, ce dernier étant imposé par la texture de la chaussée (voir figure 3.9). Deux situations se présentent : soit il y a contact entre le pneu et la chaussée (dans ce cas le déplacement du pneu est égal au déplacement de la chaussée) soit il n'y a pas de contact, et dans ce cas l'effort de contact est nul et le déplacement du pneu est strictement supérieur à celui de la chaussée. On considère seulement les déplacements verticaux. Les conditions de contact sont données par les équations (3.44) et (3.45).

$$u_{\text{pneu}}(t) = u_{\text{chaussée}}(t) ; f_c(t) > 0 \quad (3.44)$$

$$u_{\text{pneu}}(t) > u_{\text{chaussée}}(t) ; f_c(t) = 0 \quad (3.45)$$

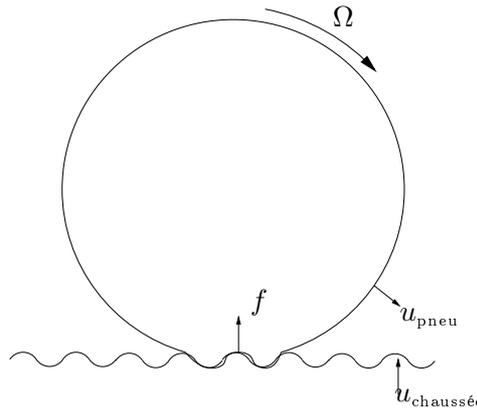


FIGURE 3.9: Contact d'un anneau avec une chaussée de profil sinusoïdal

Pour la suite, on note $u(t)$ le déplacement du pneu et $u_r(t)$ le profil de la chaussée.

3.3.1 Application à un système Masse-Ressort-Amortisseur

Comme exemple de validation, prenons un cas simple d'un oscillateur harmonique amorti (une masse ponctuelle de masse M attachée à un ressort de raideur K et un amortisseur de coefficient d'amortissement C). Le système masse-ressort-amortisseur se déplace avec une vitesse constante V_0 . On suppose que le déplacement se fait sans glissement sur une chaussée de profil $u_r(x)$ comme le montre la figure (3.10). Un ressort de contact de raideur k_c et de longueur l_0 est placé entre la masse et la chaussée afin de modéliser l'effort de contact. Le ressort de contact travaille seulement en compression. La chaussée a pour équation :

$$u_r = A_0 \sin(\omega_r x) = A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_r} V_0 t\right) \quad (3.46)$$

où λ_r est la longueur d'onde de la chaussée et A_0 son amplitude.

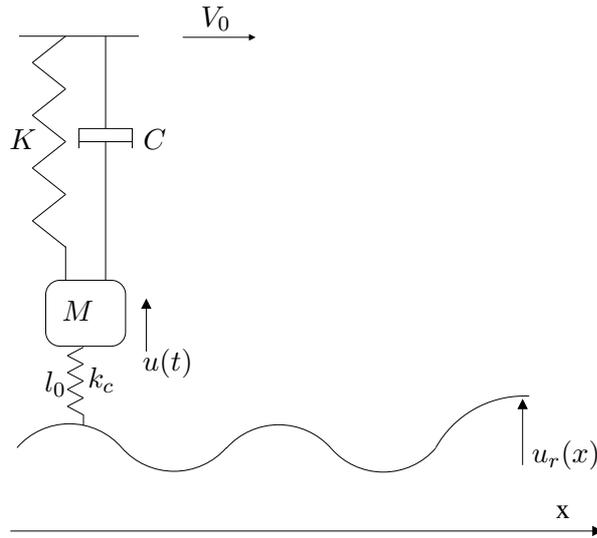


FIGURE 3.10: Contact d'un système masse-ressort-amortisseur avec une chaussée sinusoïdale

Le système vérifie les équations :

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -Mg + f_c \quad (3.47)$$

$$u(t) \geq u_r(t) \quad (3.48)$$

$$f_c \geq 0 \quad (3.49)$$

On prend comme conditions initiales

$$u(0) = U_0 = u_r(0) + l_0 \quad (3.50)$$

$$\frac{du(t)}{dt}\Big|_{t=0} = V_0 \quad (3.51)$$

On peut distinguer deux cas de figures :

– Cas sans contact ($u(t) > u_r(t) + l_0$) :

Le ressort de contact est en traction avec une raideur nulle, le système vibre donc en régime libre.

$$u(t) = e^{-\xi\omega_0(t-t_c)} \left[u_c \cos(\omega_d(t-t_c)) + \frac{v_c + \xi\omega_0 u_c}{\omega_d} \sin(\omega_d(t-t_c)) \right] \quad (3.52)$$

$$f_c(t) = 0 \quad (3.53)$$

où u_c et v_c sont respectivement les déplacements et les vitesses au moment du dernier contact t_c .

– Cas avec contact :

Le ressort de contact est en compression avec une raideur k_c , la force est calculée en utilisant la loi de Hertz

$$f_c(t) = k_c \Delta x^{\frac{3}{2}} = k_c [u_r(t) + l_0 - u(t)]^{\frac{3}{2}} \quad (3.54)$$

L'algorithme de calcul est composé de deux blocs, le premier consiste à identifier les paramètres modaux. On définit l'erreur relative entre la fonction de départ et la fonction reconstruite à partir des coefficients modaux par

$$E = \frac{\int_0^{\omega_{max}} |G(\omega) - \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{j\omega - \lambda_k}| d\omega}{\int_0^{\omega_{max}} |G(\omega)| d\omega} \quad (3.55)$$

Après avoir identifié les paramètres modaux, on passe au calcul des déplacements et des efforts de contact, le diagramme (3.11) résume le principe du calcul.

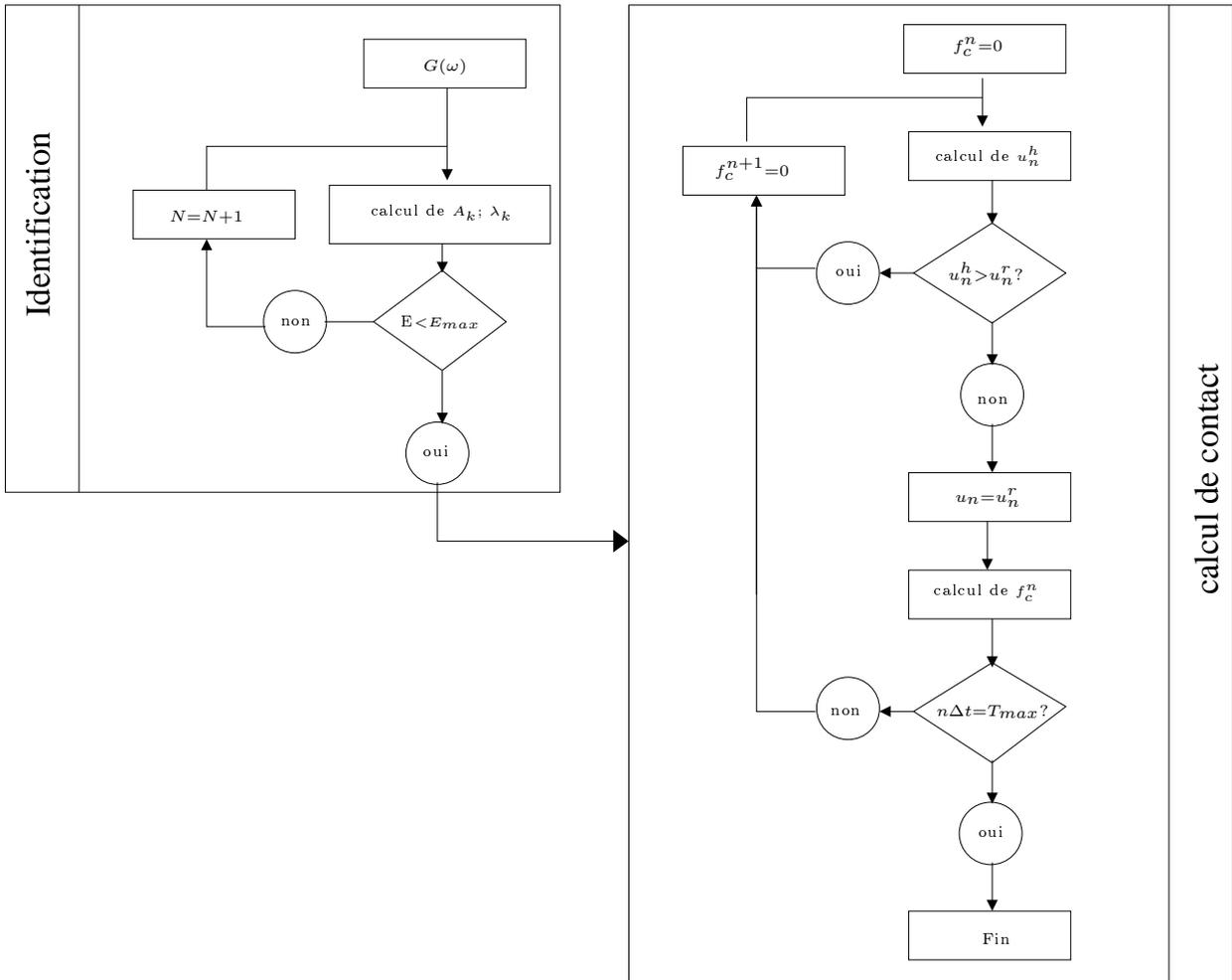


FIGURE 3.11: *Algorithme*

Les figures (3.12) et (3.13) montrent respectivement le déplacement $u(t)$ et l'effort de contact $F_c(t)$ du système masse ressort sur une chaussée sinusoïdale. Les paramètres de simulations utilisés sont regroupés dans le tableau (3.1).

Pour une autre simulation, on considère une chaussée avec un profil composé de quatre sinus : les figures (3.14) et (3.15) montrent les résultats de la simulation.

$$u_r(t) = \sum_{k=1}^{k=4} A_k \sin(\omega_{rk} t) \quad (3.56)$$

M[Kg]	K[N/m]	ξ	ω_r [rad/s]	K_c [N/m]
1	10^6	0.02	100	10^6

TABLE 3.1: Paramètres de simulation pour le système masse-ressort

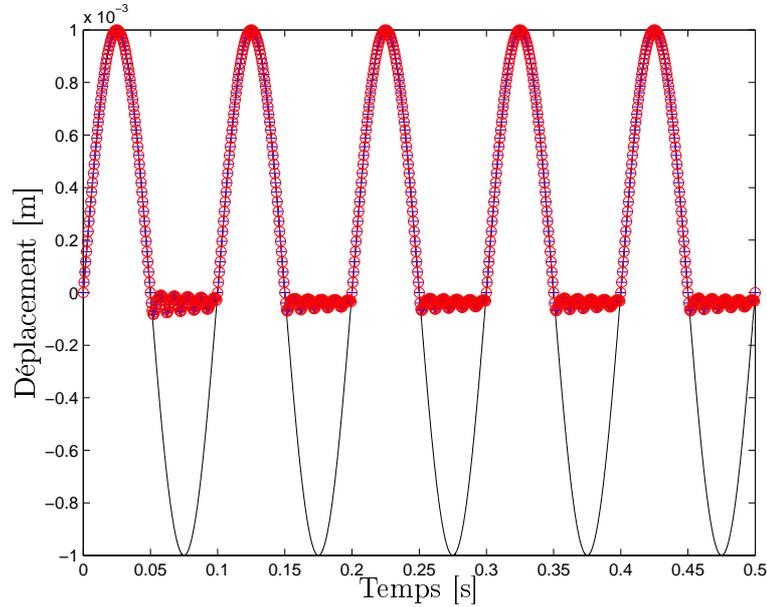


FIGURE 3.12: Déplacement pour une chaussée sinusoïdale : — profil de la chaussée, -+- décomposition modale, -o- convolution standard

Les deux méthodes utilisées donnent quasiment le même résultat. L'utilisation de la convolution standard est coûteuse en termes de temps de calcul, en particulier pour un nombre de pas de temps important. En effet, d'après les équations (3.41) et (3.15) nous pouvons constater que dans le cas d'une convolution classique, le nombre d'opérations de calcul est proportionnel au nombre de pas à simuler N_t et à la taille de la fonction de Green dans son intervalle d'influence N_g . Au contraire, pour la décomposition modale le nombre d'opérations est proportionnel à N_t et à l'ordre de l'approximation (le nombre de mode utilisé dans l'approximation N_m). Le tableau (3.2) illustre une comparaison de temps de calcul entre les deux méthodes pour plusieurs configurations.

Pas de temps[ms]	N_t	Convolution standard		Convolution modale	
		N_g	Durée de la simulation[s]	N_m	Temps de calcul[s]
0.1	2000	1900	0.06	1	0.02
0.1	20000	1900	1.01	1	0.10
0.01	20000	19000	5.50	1	0.15
0.01	200000	19000	105.14	1	1.50

TABLE 3.2: Comparaison des temps de calcul

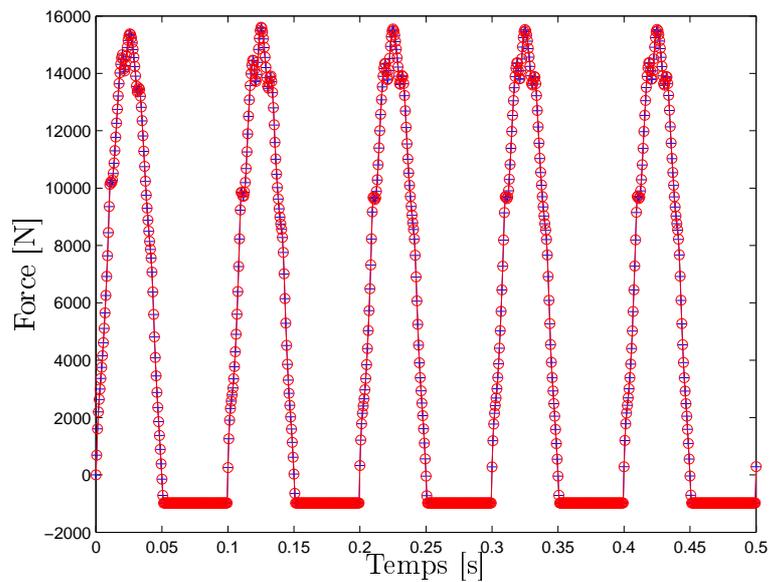


FIGURE 3.13: Force de contact pour une chaussée sinusoïdale : -+- décomposition modale, -o- convolution standard

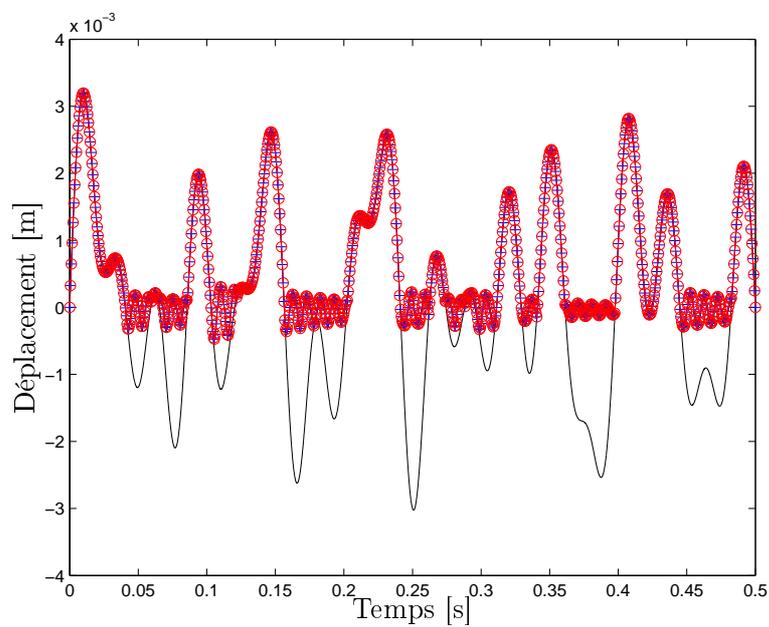


FIGURE 3.14: Déplacement pour une chaussée multi-sinusoïdale : — profil de la chaussée, -+- décomposition modale, -o- convolution standard

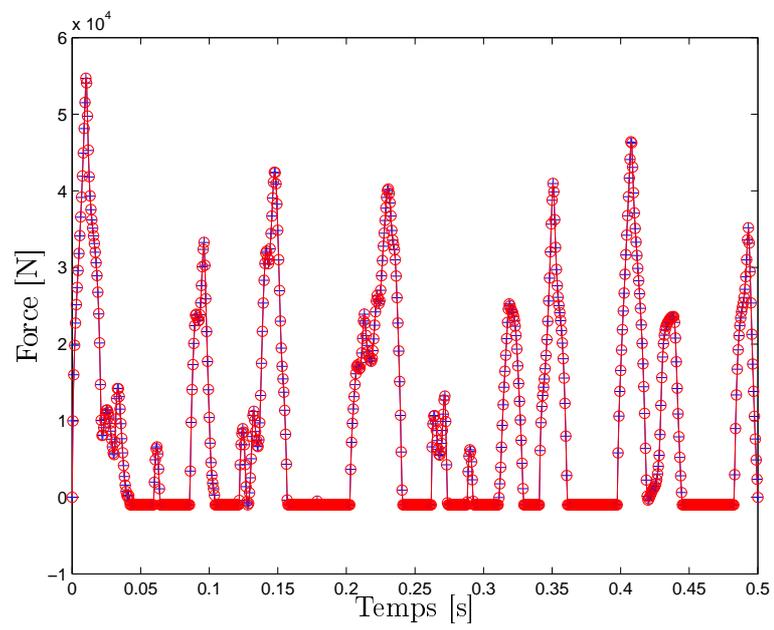


FIGURE 3.15: Force de contact pour une chaussée multi-sinusoidale : -+- décomposition modale, -o- convolution standard

3.3.2 Application du modèle REF sur des profils de chaussées réelles

3.3.2.1 Description de la chaussée

Les propriétés de la chaussée jouent un rôle essentiel dans le processus de génération du bruit. La caractérisation des propriétés de chaussées constitue un domaine extrêmement vaste qui englobe en outre, des caractérisations physiques (rigidité, résistance...), des caractérisations chimiques (densité, propriétés thermiques...) ou géométriques. Dans la présente étude, on considère que la chaussée est rigide et on se limite aux propriétés géométriques.

Dans la littérature, il existe plusieurs paramètres pour quantifier les dimensions d'une surface quelconque, mais les plus utilisés se séparent en deux familles :

- Paramètres géométriques :

Rt qui est la différence d'altitude entre le point le plus élevé et le point le plus bas. Il correspond à l'étendue d'altitude du profil,

Rp qui est la position du point le plus élevé du profil par rapport à la ligne moyenne (droite des moindres carrés).

- Paramètres statistiques :

Ra est la ligne moyenne arithmétique des ordonnées des points de profils par rapport à la ligne moyenne. Le paramètre Ra décrit la dispersion des amplitudes autour de la moyenne, autrement-dit l'écart-type.

Rsm est la périodicité moyenne des aspérités. Elle est calculée comme la moyenne des distances séparant les intersections successives en front montant entre le profil et la ligne moyenne. La figure (3.16) présente ces différents paramètres.

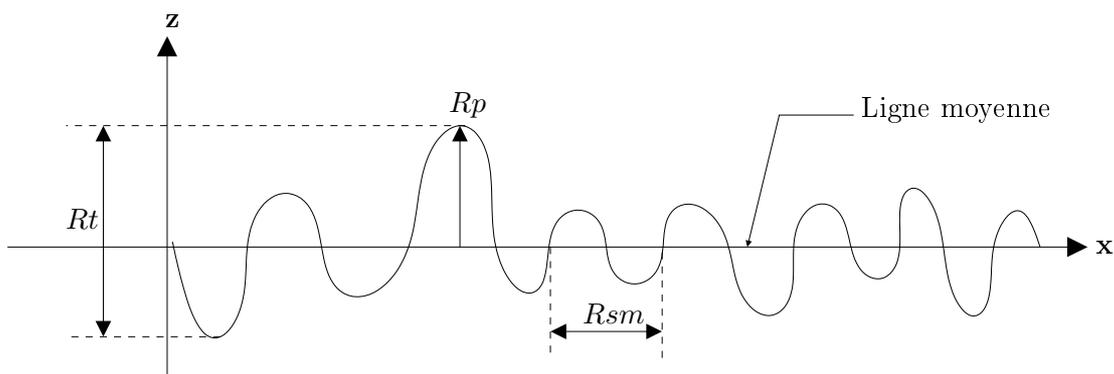


FIGURE 3.16: Paramètres principaux pour caractériser une surface aléatoire

Les paramètres décrits précédemment privilégient les ordonnées plutôt que les abscisses des points du profil. La norme ISO 13473-4 propose une description à partir des propriétés spectrales d'un profil à deux dimensions. La densité spectrale de puissance permet de caractériser les périodicités du profil grâce à la transformée de Fourier. Si on note $z(x)$ la fonction ordonnée de l'abscisse

x , sa transformée de Fourier spatiale $Z(k)$ est donnée par

$$Z(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(x)e^{ikx} dx \quad (3.57)$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde et λ la longueur d'onde.

Suivant les valeurs de la longueur d'onde, on peut distinguer différentes échelles de texture, la figure (3.17) illustre ces différentes échelles.

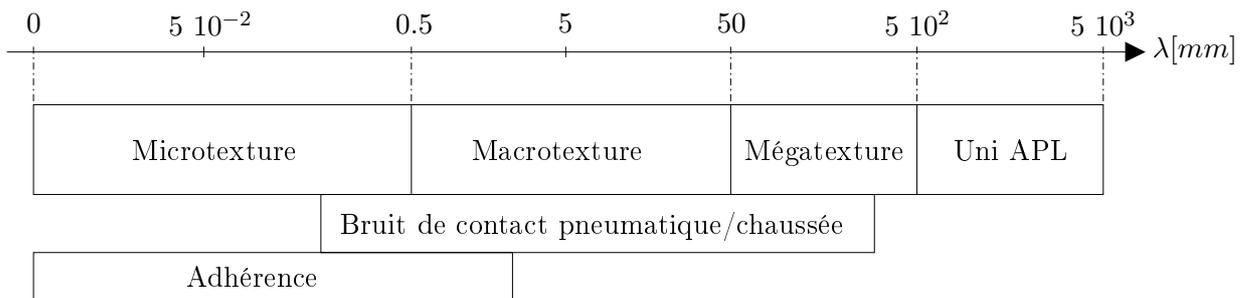


FIGURE 3.17: Les différentes échelles de texture (λ : échelle logarithmique).

Dans le cadre du projet franco-allemand Deufrako P2RN, des profils de texture ont été mesurés. Quatre types de chaussées sont utilisés pour les simulations, le BBTM 0/6, le BBTM 0/10, le BBDr 0/10 et le BBSG 0/10. Les figures (3.18), (3.19), (3.20) et (3.21) représentent la densité spectrale de puissance ainsi que les images de surface dont sont issus ces profils.

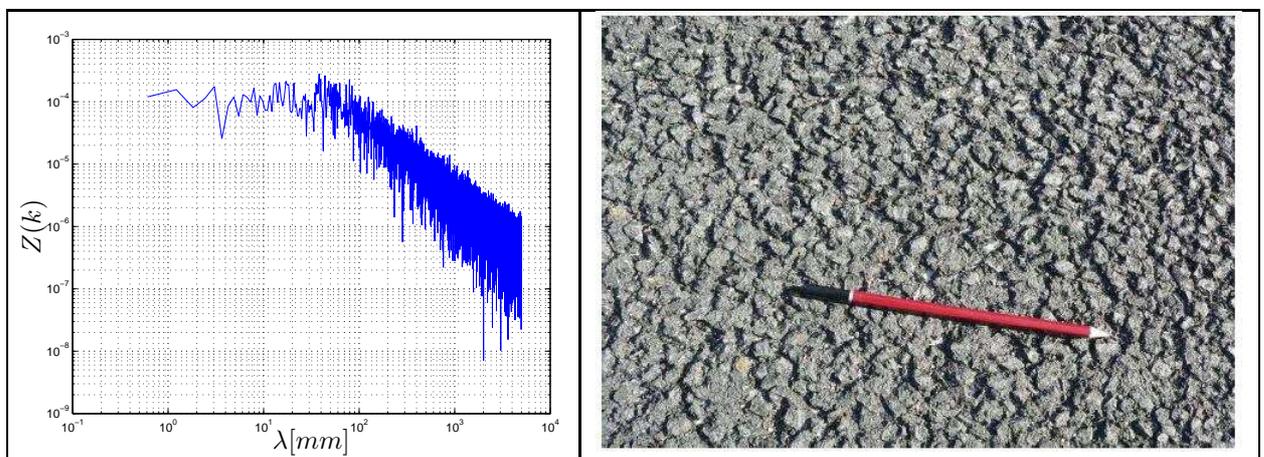
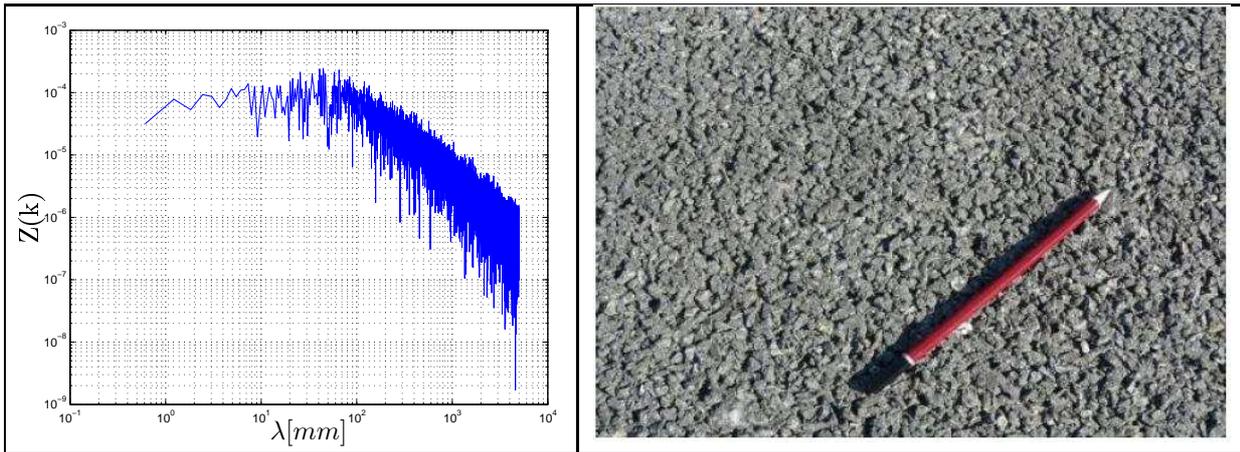
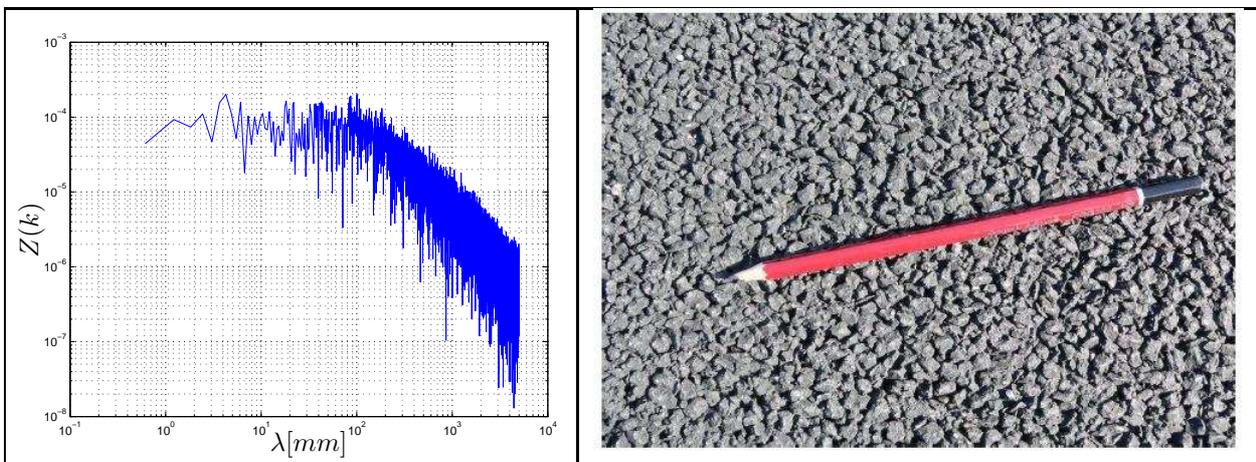
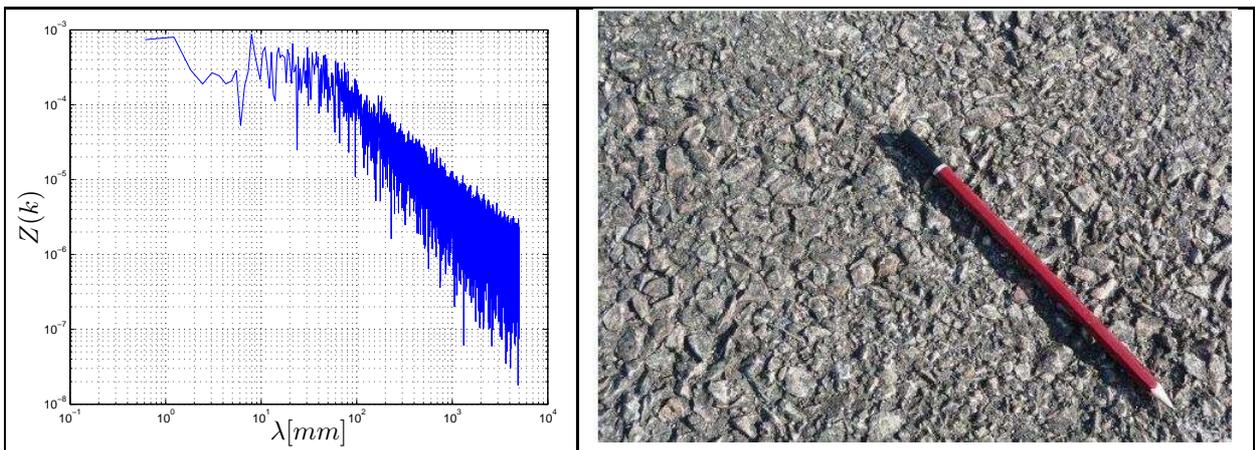


FIGURE 3.18: Chaussée type BBTM 0/10

FIGURE 3.19: *Chaussée type BBTM 0/6*FIGURE 3.20: *Chaussée type BBP 0/6*FIGURE 3.21: *Chaussée type BBSG 0/10*

3.3.2.2 Résultats des simulations

Dans la section précédente, nous avons calculé les déplacements et les efforts de contact pour un cas simple : un système masse ressort qui se déplace sur une chaussée sinusoïdale. Cette fois on considère le modèle d'anneau circulaire qui roule avec une vitesse constante et sans glissement sur des profils de chaussées réelles. Seuls les déplacements dans la direction verticale sont pris en

compte et on reste toujours dans l'hypothèse d'un contact ponctuel. Les données des simulations sont regroupées dans le tableau (3.3). Les figures (3.22, 3.23, 3.24, 3.25, 3.26, 3.27, 3.28 et 3.29) montrent les déplacements et les efforts de contact pour les cas des quatre types de chaussées. Les courbes montrent une forte corrélation entre les profils des chaussées, les forces de contact et les déplacements.

Paramètres	Valeurs	Unités
Module d'Young (E)	10^8	Pa
Masse volumique (ρ)	2280	Kgm^{-3}
Rayon (R)	0.285	m
Epaisseur (h)	0.01	m
Largeur (b)	0.16	m
Raideur radiale (k_z)	1.6410^6	Nm^{-2}
Raideur tangentielle (k_θ)	2.1910^5	Nm^{-2}

TABLE 3.3: Paramètres utilisés pour les simulations

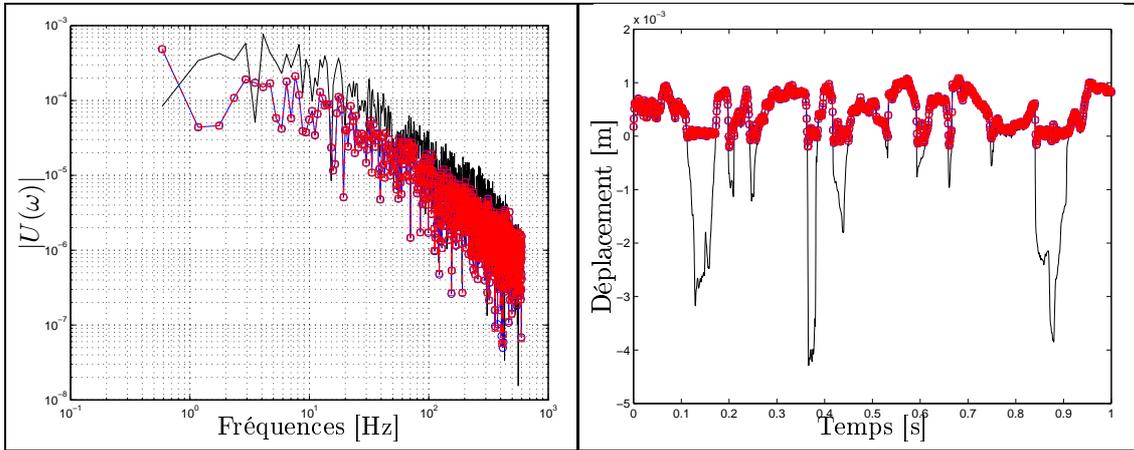


FIGURE 3.22: Déplacements sur une chaussée type BTM 0/10 : —profil de la chaussée, \square - convolution standard, \circ - décomposition modale

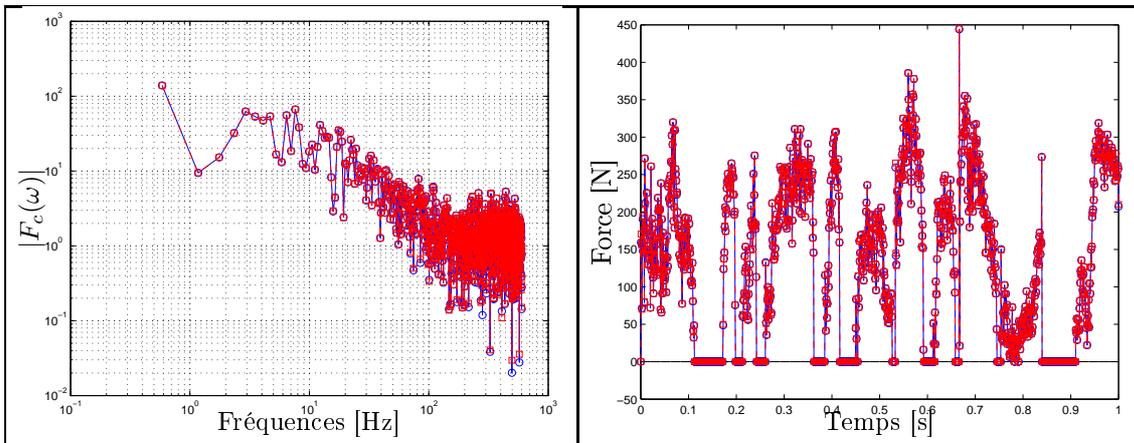


FIGURE 3.23: Force de contact pour une chaussée type BTM 0/10 : \square - convolution standard, \circ - décomposition modale

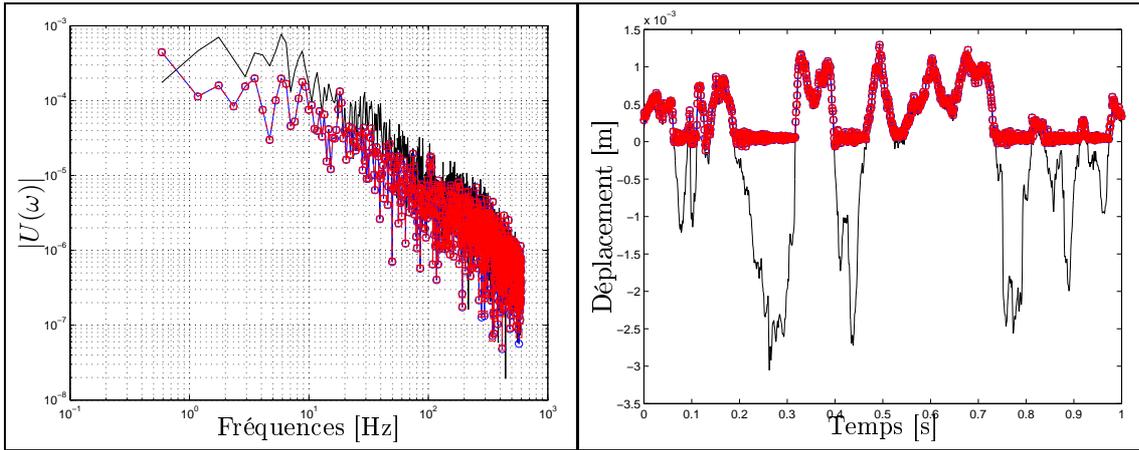


FIGURE 3.24: Déplacements sur une chaussée type BTM 0/6 : —profil de la chaussée, -□- convolution standard, -○- décomposition modale

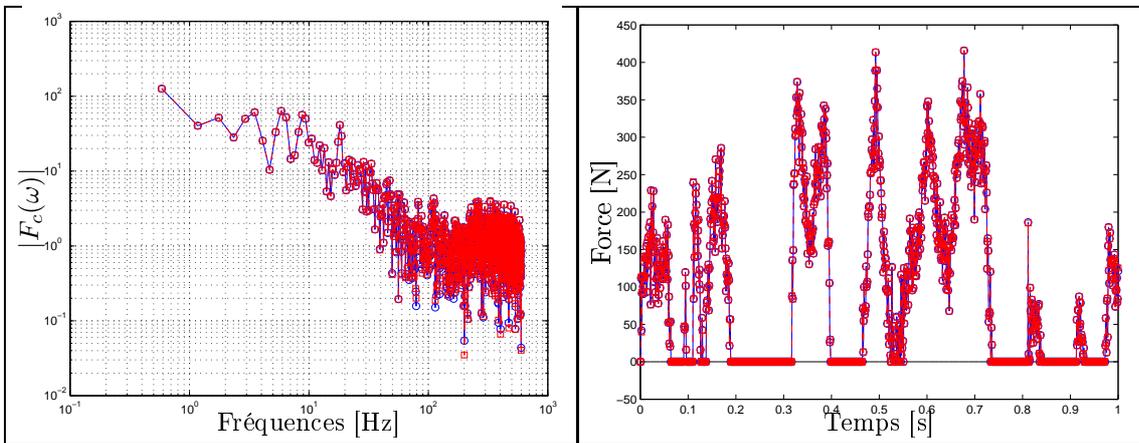


FIGURE 3.25: Force de contact pour une chaussée type BTM 0/10 : -□- convolution standard, -○- décomposition modale

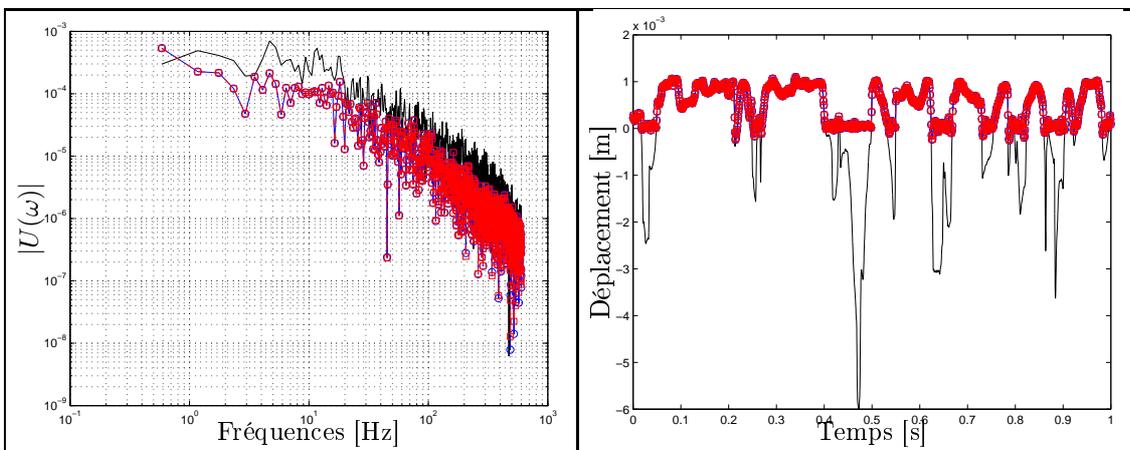


FIGURE 3.26: Déplacements sur une chaussée type BPB 0/10 : —profil de la chaussée, -□- convolution standard, -○- décomposition modale

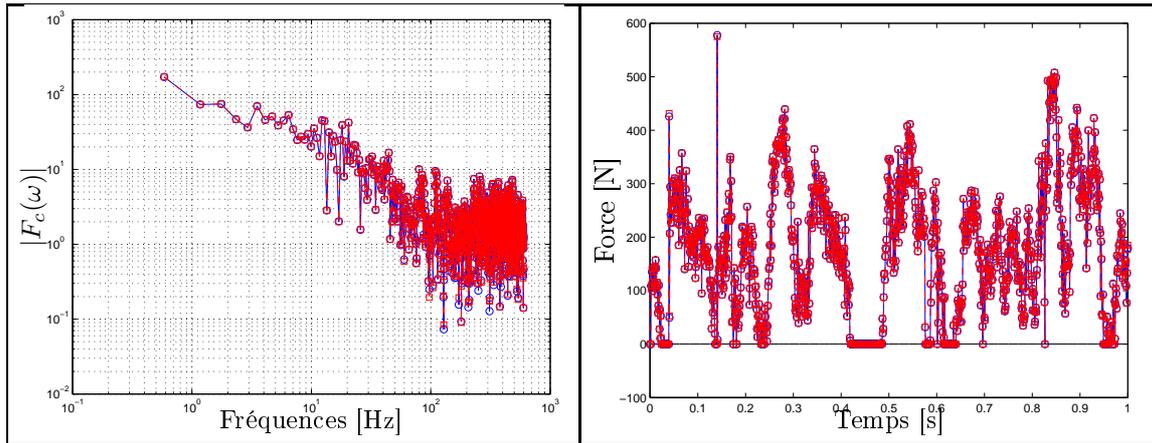


FIGURE 3.27: Force de contact pour une chaussée type BBTM 0/10 : \square - convolution standard , \circ - décomposition modale

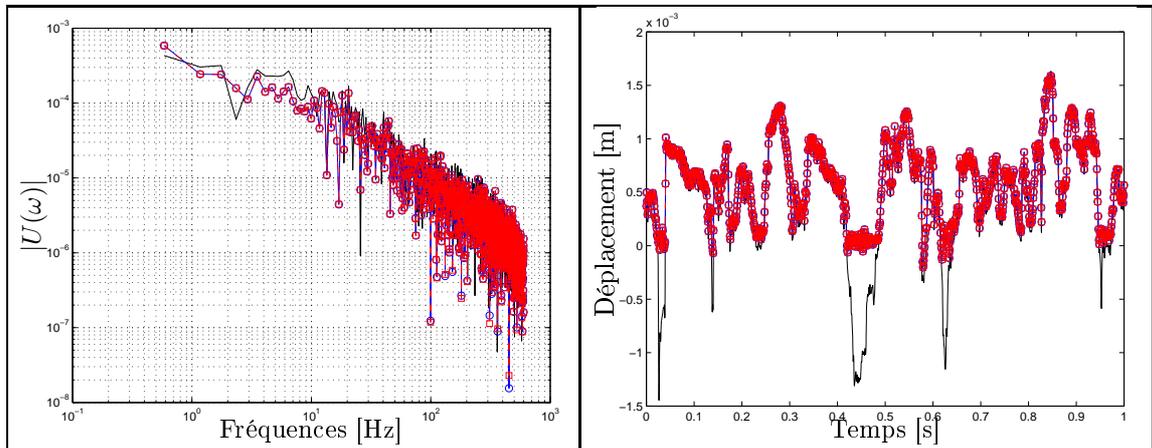


FIGURE 3.28: Déplacements sur une chaussée type BBSG 0/10 : —profil de la chaussée, \square - convolution standard , \circ - décomposition modale

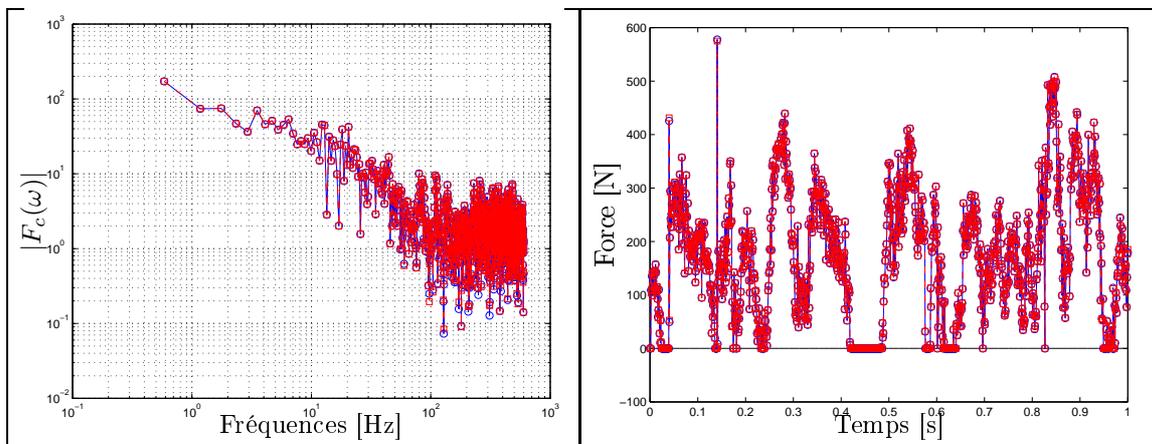


FIGURE 3.29: Force de contact pour une chaussée type BBTM 0/10 : \square - convolution standard , \circ - décomposition modale

3.4 Conclusion

L'intégration des non-linéarités dues aux efforts de contact dans le modèle de vibration d'un pneumatique est nécessaire pour mieux évaluer la réponse vibratoire dans les conditions de roulement. Cette réponse est liée à la fois aux propriétés de la chaussée, de la vitesse de déplacement et des propriétés du pneumatique.

L'effort de contact est modélisé à l'aide d'un ressort de raideur non linéaire, la loi de contact de Hertz a été adoptée pour relier déplacement et effort. La démarche classique pour calculer cette réponse par produit de convolution entre fonctions de Green et efforts de contact est très coûteuse en temps de calcul, en particulier pour des nombres de pas de temps importants. La décomposition modale des fonctions de Green permet de construire une nouvelle convolution plus rapide que la convolution classique. Le modèle de contact basé sur cette convolution conduit à des calculs plus rapides tout en gardant la même précision.

Chapitre 4

Modèle de contact multi-points

DANS ce chapitre nous allons développer un nouveau modèle de contact. Ce modèle consiste à ajouter une deuxième condition de contact sur la vitesse en plus de la condition sur le déplacement. Le modèle sera d'abord comparé avec le modèle de contact utilisé dans le chapitre précédent dans le cas d'un contact ponctuel. Ensuite nous le généraliserons pour le cas d'un problème de contact multi-points. Nous présenterons également deux exemples d'application : un système à deux degrés de liberté et le modèle d'anneau circulaire sous foundation élastique. Les deux systèmes se déplacent sur une chaussée de profil sinusoïdal avec une vitesse constante. Ces exemples montrent que la démarche présentée permet de traiter le contact de façon plus stable et plus robuste.

PLAN DU CHAPITRE 4

4.1	Modèle de contact avec condition cinématique	89
4.1.1	Présentation du modèle	89
4.1.2	Comparaison avec la méthode de pénalisation	92
4.2	Application au contact multi points	96
4.2.1	Conditions de contact	96
4.2.2	Calcul des forces de contact	97
4.3	Exemples d'application	100
4.3.1	Système à deux degrés de liberté	100
4.3.2	Modèle d'anneau circulaire	106
4.4	Conclusion	110

4.1 Modèle de contact avec condition cinématique

4.1.1 Présentation du modèle

Dans le chapitre précédent nous avons traité le contact par l'addition d'un troisième corps (ressort de contact) entre la chaussée et le pneumatique. Le choix de la raideur de contact est difficile à réaliser, comme nous l'avons vu, une valeur faible de cette valeur donne des pénétrations physiquement inacceptables et une trop grande valeur crée des oscillations et des instabilités numériques. Dans cette section, nous allons proposer une démarche différente. Cette démarche ne nécessite pas l'introduction d'une raideur entre les deux corps en contact. Elle présente le double avantage de satisfaire parfaitement les conditions de contact et permet de ne pas ajouter de paramètres réglables tout en ayant une bonne stabilité numérique.

4.1.1.1 Conditions de contact

Partons de l'équation de convolution pour calculer le déplacement

$$u(t) = \int_0^t g(t-\tau)q(\tau)d\tau \quad (4.1)$$

Dans le cas où il n'y a pas de contact, l'effort de contact est nul et le déplacement peut être calculé directement par cette convolution ou bien par la convolution à l'aide de la décomposition modale que nous avons développée dans le chapitre précédent. Or quand il y a contact l'inversion de cette convolution n'est pas possible puisque la fonction de Green est nulle à l'instant initial, d'où l'introduction de la raideur de contact pour calculer la force de contact. Cependant, cette façon de faire permet de contourner l'inversion de la convolution et de trouver la force de contact en ayant un choix de raideur de contact adapté. La démarche que nous proposons consiste à inverser la convolution. L'idée est d'ajouter une condition sur la vitesse et de chercher la force de contact qui vérifie à la fois cette nouvelle condition en vitesse et la condition de non pénétration sur le déplacement.

En effet l'équation (4.1) peut se réécrire comme une somme d'une contribution historique $u_h(t)$ et une contribution qui ne dépend que de l'instant actuel :

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^{t-\Delta t} g(t-\tau)q(\tau)d\tau + \int_{t-\Delta t}^t g(t-\tau)q(\tau)d\tau \\ &= \underbrace{\int_0^{t-\Delta t} g(t-\tau)q(\tau)d\tau}_{u_h(t)} + \int_0^{\Delta t} g(\tau)q(t-\tau)d\tau \end{aligned} \quad (4.2)$$

De la même façon si on dérive l'équation (4.1) par rapport au temps :

$$\begin{aligned} v(t) = u'(t) &= \int_0^{t-\Delta t} g'(t-\tau)q(\tau)d\tau + \int_{t-\Delta t}^t g'(t-\tau)q(\tau)d\tau \\ &= \underbrace{\int_0^{t-\Delta t} g'(t-\tau)q(\tau)d\tau}_{v_h(t)} + \int_0^{\Delta t} g'(\tau)q(t-\tau)d\tau \end{aligned} \quad (4.3)$$

Si on note $\mathbf{Y} = [u(t) \ v(t)]^T$ et $\mathbf{Y}_h = [u_h(t) \ v_h(t)]^T$ on peut écrire :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_h + \Psi(q) \quad (4.4)$$

avec Ψ un opérateur intégral qui traduit l'influence des efforts à l'instant actuel et qu'on cherche à inverser dans le cas où il y a contact.

Dans le cas où il y a contact, le déplacement est imposé par la surface rigide et on suppose que le point suit le profil de la surface comme illustré sur la figure (4.1)

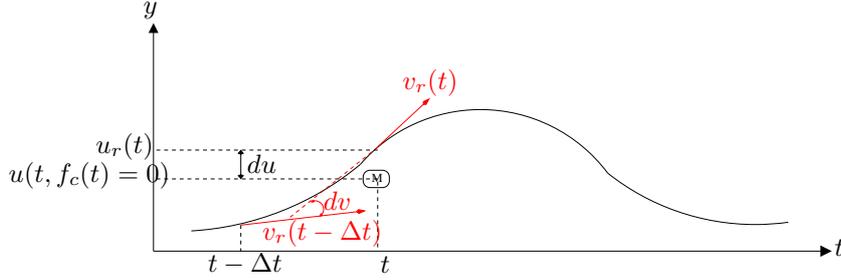


FIGURE 4.1: Conditions de contact en déplacement et en vitesse

Donc on peut écrire les conditions de contact suivantes :

$$u(t) = u_r(t) \quad (4.5)$$

$$v(t) = \frac{du_r(t)}{dt} \quad (4.6)$$

que l'on peut écrire aussi sous la forme vectorielle :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_r = [u_r(t) \ \frac{du_r(t)}{dt}]^T \quad (4.7)$$

4.1.1.2 Calcul de la force de contact

En utilisant la convolution par la méthode de décompositions modales, les équations (4.3) et (4.4) peuvent s'écrire sous les formes suivantes :

$$u(t) = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k \omega_k t} \left[\sin(\omega_k^d t) \alpha^k(t) - \cos(\omega_k^d t) \beta^k(t) \right] \quad (4.8)$$

et

$$\begin{aligned} v(t) = & - \sum_{k=1}^{k=N} \frac{A_k \xi_k \omega_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k \omega_k t} \left[\sin(\omega_k^d t) \alpha^k(t) - \cos(\omega_k^d t) \beta^k(t) \right] \\ & + \sum_{k=1}^{k=N} A_k e^{-\xi_k \omega_k t} \left[\cos(\omega_k^d t) \alpha^k(t) + \sin(\omega_k^d t) \beta^k(t) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

En réarrangeant les termes des équations (4.8) et (4.9), on obtient le système matriciel

$$\mathbf{Y} = \sum_{k=1}^{k=N} \mathbf{B}_k \mathbf{x}_k \quad (4.10)$$

Avec

$$\mathbf{x}_k = [\alpha_k(t) \quad \beta_k(t)]^T \quad (4.11)$$

Et

$$\mathbf{B}_k = A_k e^{-\xi_k \omega_k t} \begin{bmatrix} \frac{\sin(\omega_k^d t)}{\omega_k^d} & -\frac{\cos(\omega_k^d t)}{\omega_k^d} \\ \cos(\omega_k^d t) - \frac{\xi_k \omega_k}{\omega_k^d} \sin(\omega_k^d t) & \sin(\omega_k^d t) + \frac{\xi_k \omega_k}{\omega_k^d} \cos(\omega_k^d t) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Les conditions de contact mènent à

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{Y}^h + \Psi(\mathbf{q}) \quad (4.13)$$

On cherche à déterminer l'effort de contact qui vérifie à la fois la condition de contact sur le déplacement et la condition sur la vitesse. L'effort de contact est relié au déplacement et à la vitesse par un opérateur intégral.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Y} &= \mathbf{Y}_r - \mathbf{Y}^h \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^{\Delta t} g(\tau) q(t - \tau) d\tau \\ \int_0^{\Delta t} g'(\tau) q(t - \tau) d\tau \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Les intégrales peuvent être calculées en utilisant deux points de Gauss. Les valeurs de la force de contact à ces deux points de Gauss sont ensuite calculées en inversant l'opérateur Ψ .

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$= \Psi^{-1}(t_1, t_2) \Delta \mathbf{Y} \quad (4.16)$$

où Ψ est définie par

$$\Psi = \begin{bmatrix} g(t_1) & g(t_2) \\ g'(t_1) & g'(t_2) \end{bmatrix} \frac{\Delta t}{2} \quad (4.17)$$

avec,

$$g(t) = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k \omega_k t} \sin(\omega_k^d t) \quad (4.18)$$

Sur un intervalle de temps $[t \quad t + \Delta t]$, la force de contact est la moyenne de ses deux valeurs aux deux points de Gauss t_1 et t_2 définis par :

$$t_1 = t + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{\Delta t}{2} \quad (4.19)$$

$$t_2 = t + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{\Delta t}{2} \quad (4.20)$$

Connaissant les valeurs de la force de contact aux points de Gauss aux instants t_1 et t_2 nous pouvons calculer les paramètres $\alpha_k(t + \Delta t)$ et $\beta_k(t + \Delta t)$ par l'équation de récurrence et en utilisant de la même façon que pour la force de contact les mêmes points de Gauss t_1 et t_2 .

$$\alpha^k(t + \Delta t) = \alpha_h^k(t) + \frac{f^c(t_1)q_1 + f^c(t_2)q_2}{2} \Delta t \quad (4.21)$$

$$\beta^k(t + \Delta t) = \beta_h^k(t) + \frac{f^s(t_1)q_1 + f^s(t_2)q_2}{2} \Delta t \quad (4.22)$$

Avec

$$f^s(t) = e^{\xi_k \omega_k t} \sin(\omega_k^d t) \quad (4.23)$$

$$f^c(t) = e^{\xi_k \omega_k t} \cos(\omega_k^d t) \quad (4.24)$$

4.1.2 Comparaison avec la méthode de pénalisation

Afin d'illustrer l'avantage de cette démarche, on considère le même système à un *DDL* utilisé dans le chapitre précédent. Avec la méthode de pénalité, nous réalisons deux calculs. Dans le premier calcul, nous choisissons une valeur de raideur de contact comparable avec celle du système ($K_c = 2K$) et dans le deuxième calcul nous choisissons une grande valeur de la raideur de contact par rapport à la raideur du système ($K_c = 200K$).

Les figures (4.2), (4.3), (4.4) et (4.5) montrent une comparaison des résultats obtenus avec la méthode de condition cinématique et les résultats de la méthode de pénalité pour les deux cas de figures. Nous pouvons constater que lorsque la raideur de contact est faible, les déplacements obtenus avec la méthode de pénalité ne sont pas acceptables physiquement puisqu'on autorise de grandes pénétrations. En revanche, si on choisit une grande valeur de la raideur de contact, on constate l'apparition d'instabilités numériques. Ces instabilités peuvent être supprimées en appliquant un filtre passe-bas. En faisant cela nous retrouvons les résultats obtenus avec la méthode de condition cinématique comme le montrent les figures (4.6) et (4.7). Au niveau de la force de contact, avec la méthode de condition cinématique nous pouvons constater un pic qui est dû à un rebond du point matériel au moment du premier contact contrairement à la méthode de pénalité où ce phénomène est absent à cause de la présence du ressort de contact qui amortit le choc. Cet exemple illustre bien l'efficacité de la présente méthode en terme de stabilité et de facilité de mise en oeuvre.

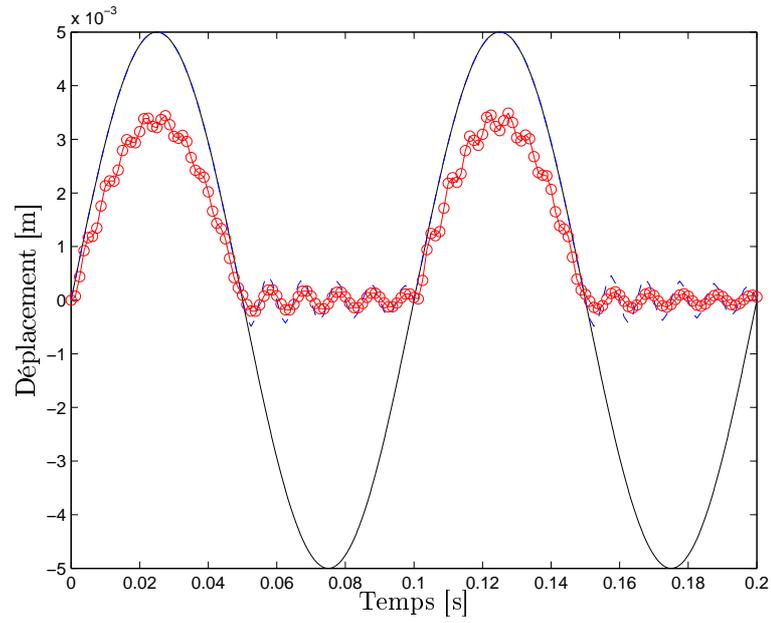


FIGURE 4.2: Comparaison des déplacements dans le cas où $K_c = 2K$: $-o-$ Méthode de pénalité, $- -$ Méthode de condition cinématique

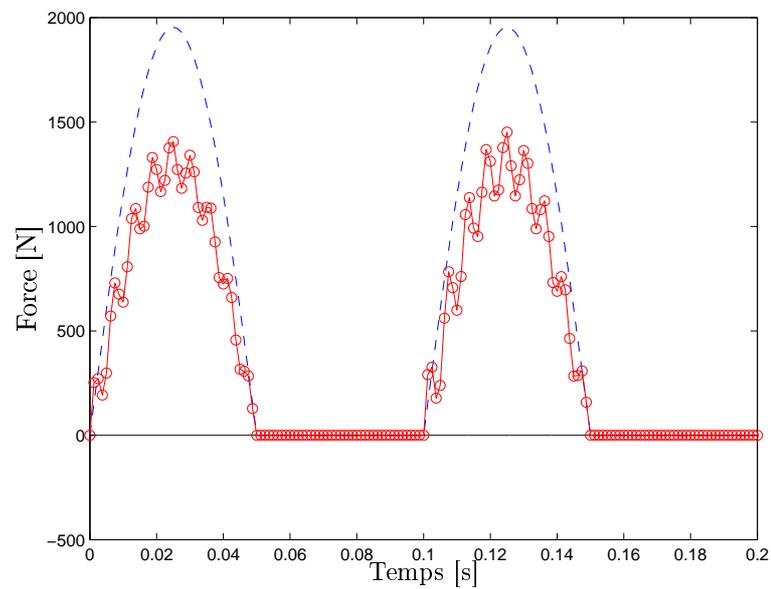


FIGURE 4.3: Comparaison des forces dans le cas où $K_c = 2K$: $-o-$ Méthode de pénalité, $- -$ Méthode de condition cinématique

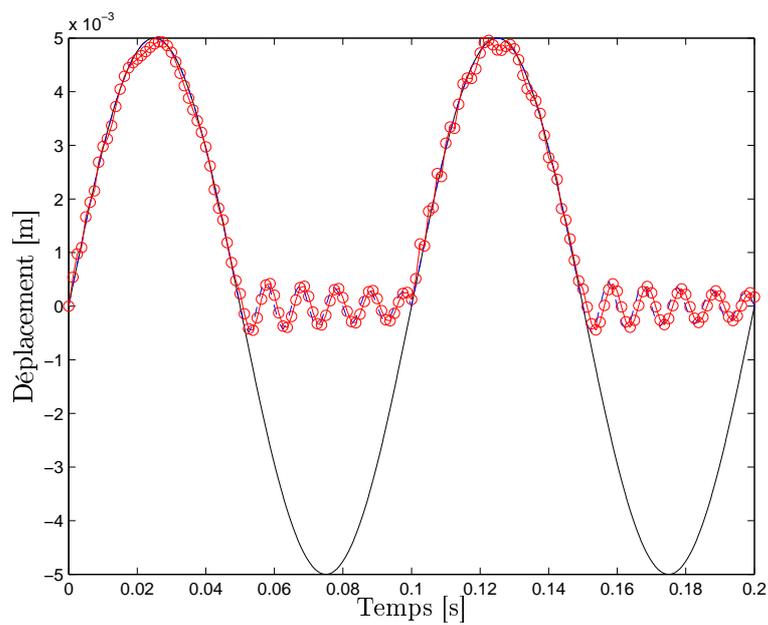


FIGURE 4.4: *Comparaison des déplacements dans le cas où $K_c = 200K$: $-o-$ Méthode de pénalité, $- -$ Méthode de condition cinématique*

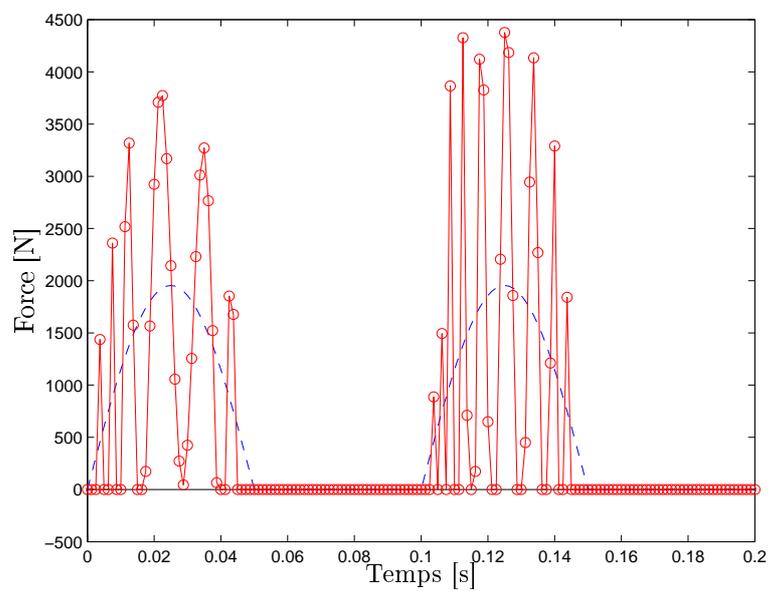


FIGURE 4.5: *Comparaison des forces de contact dans le cas où $K_c = 200K$: $-o-$ Méthode de pénalité, $- -$ Méthode de condition cinématique*

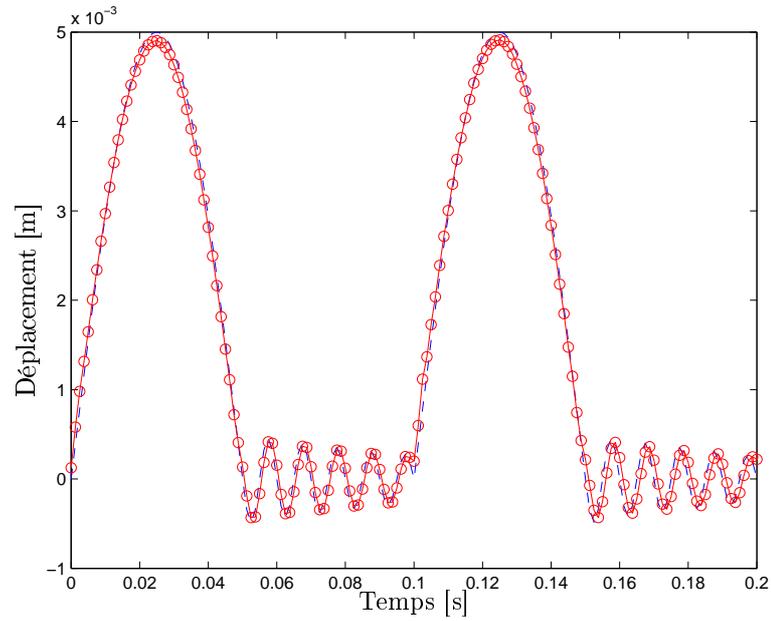


FIGURE 4.6: Comparaison des déplacements filtrés dans le cas où $K_c = 200K$: $-o-$ Méthode de pénalité, $--$ Méthode de condition cinématique

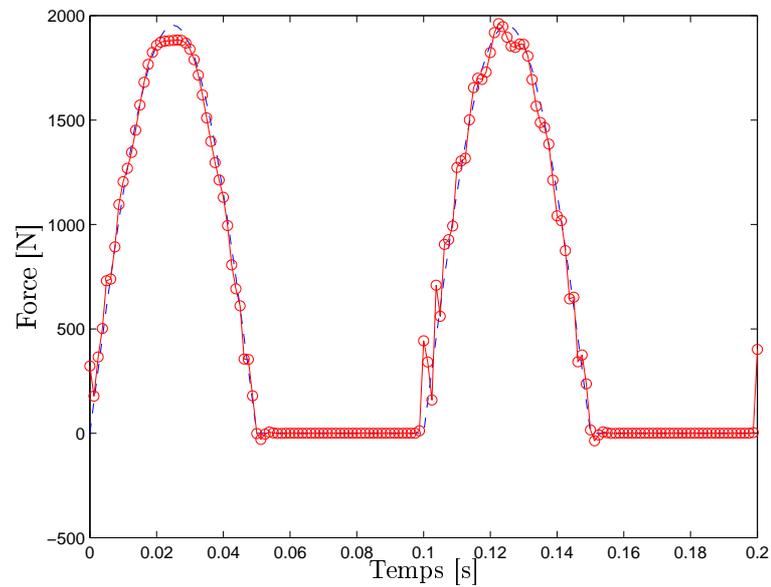


FIGURE 4.7: Comparaison des forces de contact filtrées dans le cas où $K_c = 200K$: $-o-$ Méthode de pénalité, $--$ Méthode de condition cinématique

4.2 Application au contact multi points

4.2.1 Conditions de contact

Dans le domaine fréquentiel, on rappelle que :

$$\mathbf{U}(\omega) = \mathbf{GF}(\omega) \quad (4.25)$$

Le déplacement dans le domaine temporel se calcule par le produit de convolution :

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{g}(\tau)\mathbf{q}(t - \tau)d\tau \quad (4.26)$$

Le déplacement d'un point i est donné par

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \sum_{j=1}^{j=N_p} \left[\int_0^t g_{ij}(t - \tau)q_j(\tau)d\tau \right] \\ u_i(t) &= \sum_{j=1}^{j=N_p} \left[\int_0^{t-\Delta t} g_{ij}(t - \tau)q_j(\tau)d\tau + \int_{t-\Delta t}^t g_{ij}(t - \tau)q_j(\tau)d\tau \right] \\ &= \sum_{j=1}^{j=N_p} \left[\underbrace{\int_0^{t-\Delta t} g_{ij}(t - \tau)q_j(\tau)d\tau}_{u_{ij}^h(t)} + \int_0^{\Delta t} g_{ij}(\tau)q_j(t - \tau)d\tau \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

De la même façon si on dérive l'équation (4.27) par rapport au temps, on obtient la vitesse du point i .

$$\begin{aligned} v_i(t) = u'_i(t) &= \sum_{j=1}^{j=N_p} \left[\int_0^{t-\Delta t} g'_{ij}(t - \tau)q_j(\tau)d\tau + \int_{t-\Delta t}^t g'_{ij}(t - \tau)q_j(\tau)d\tau \right] \\ &= \sum_{j=1}^{j=N_p} \left[\underbrace{\int_0^{t-\Delta t} g'_{ij}(t - \tau)q_j(\tau)d\tau}_{v_{ij}^h(t)} + \int_0^{\Delta t} g'_{ij}(\tau)q_j(t - \tau)d\tau \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

Si on note

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \\ \vdots \\ u_{N_p}(t) \\ v_{N_p}(t) \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{Y}_j^h = \begin{bmatrix} u_{1j}^h(t) \\ v_{1j}^h(t) \\ \vdots \\ u_{N_p j}^h(t) \\ v_{N_p j}^h(t) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

on peut écrire

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{j=1}^{j=N_p} \mathbf{Y}_j^h(t) + \Psi(\mathbf{q}(t)) \quad (4.30)$$

avec Ψ un opérateur intégral qui traduit l'influence des efforts à l'instant actuel et qu'on cherche à inverser dans le cas où il y a contact.

Dans le cas où il y a contact, le déplacement est imposé par la surface rigide, et on suppose que le point suit le profil de la surface. On peut donc écrire les conditions de contact suivantes :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^r(t) \quad (4.31)$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{u}^r(t)}{dt} \quad (4.32)$$

$$(4.33)$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}^r(t) = \begin{bmatrix} u_1^r(t) \\ \frac{du_1^r(t)}{dt} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N_p}^r(t) \\ \frac{du_{N_p}^r(t)}{dt} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

4.2.2 Calcul des forces de contact

Si on remplace les fonctions $g_{ij}(t)$ par leurs approximations dans l'équation (4.27), on obtient :

$$u_i(t) \approx \sum_{j=1}^{j=N_p} \int_0^t \sum_{k=1}^{k=N} \frac{A_{ij}^k}{\omega_{ij}^{dk}} e^{-\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k (t-\tau)} \left[\sin(\omega_{ij}^{dk} (t-\tau)) \right] q_j(\tau) d\tau \quad (4.35)$$

En séparant les variables t et τ puis en réarrangeant les termes, nous pouvons écrire le déplacement sous la forme

$$u_i(t) \approx \sum_{j=1}^{j=N_p} \sum_{k=1}^{k=N} \frac{A_{ij}^k}{\omega_{ij}^{dk}} e^{-\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k t} \left[\sin(\omega_{ij}^{dk} t) \alpha_{ij}^k(t) - \cos(\omega_{ij}^{dk} t) \beta_{ij}^k(t) \right] \quad (4.36)$$

avec

$$\alpha_{ij}^k(t) = \int_0^t e^{\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k \tau} \cos(\omega_{ij}^{dk} \tau) q_j(\tau) d\tau \quad (4.37)$$

$$\beta_{ij}^k(t) = \int_0^t e^{\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k \tau} \sin(\omega_{ij}^{dk} \tau) q_j(\tau) d\tau \quad (4.38)$$

$$(4.39)$$

En dérivant cette équation on trouve l'expression de la vitesse :

$$\begin{aligned}
v_i(t) = & - \sum_{j=1}^{j=N_p} \sum_{k=1}^{k=N} \frac{A_{ij}^k \xi_{ij}^k \omega_{ij}^k}{\omega_{ij}^{dk}} e^{-\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k t} \left[\sin(\omega_{ij}^{dk} t) \alpha_{ij}^k(t) - \cos(\omega_{ij}^{dk} t) \beta_{ij}^k(t) \right] \\
& + \sum_{j=1}^{j=N_p} \sum_{k=1}^{k=N} A_{ij}^k e^{-\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k t} \left[\cos(\omega_{ij}^{dk} t) \alpha_{ij}^k(t) + \sin(\omega_{ij}^{dk} t) \beta_{ij}^k(t) \right] \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Dans le cas où il y a contact, on peut écrire

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}^r(t) \quad (4.41)$$

$$= \mathbf{Y}^h(t) + \Psi(\mathbf{q}(t)) \quad (4.42)$$

Ici $\mathbf{Y}^h(t)$ est le vecteur d'état qui traduit la contribution de l'effort de contact jusqu'à l'instant $(t - \Delta t)$ en sachant que l'effort de contact n'est pas encore connu à l'instant t .

$$\mathbf{Y}^h(t) = \sum_{j=1}^{j=N_p} \sum_{k=1}^{k=N} \left[\begin{array}{c} \frac{A_{1j}^k}{\omega_{1j}^{dk}} e^{-\xi_{1j}^k \omega_{1j}^k t} \left[\sin(\omega_{1j}^{dk} t) \alpha_{1j}^k(t - \Delta t) - \cos(\omega_{1j}^{dk} t) \beta_{1j}^k(t - \Delta t) \right] \\ - \frac{A_{1j}^k \xi_{1j}^k \omega_{1j}^k}{\omega_{1j}^{dk}} e^{-\xi_{1j}^k \omega_{1j}^k t} \left[\sin(\omega_{1j}^{dk} t) \alpha_{1j}^k(t - \Delta t) - \cos(\omega_{1j}^{dk} t) \beta_{1j}^k(t - \Delta t) \right] \\ + A_{1j}^k e^{-\xi_{1j}^k \omega_{1j}^k t} \left[\cos(\omega_{1j}^{dk} t) \alpha_{1j}^k(t - \Delta t) + \sin(\omega_{1j}^{dk} t) \beta_{1j}^k(t - \Delta t) \right] \\ \vdots \\ \frac{A_{N_p j}^k}{\omega_{N_p j}^{dk}} e^{-\xi_{N_p j}^k \omega_{N_p j}^k t} \left[\sin(\omega_{N_p j}^{dk} t) \alpha_{N_p j}^k(t - \Delta t) - \cos(\omega_{N_p j}^{dk} t) \beta_{N_p j}^k(t - \Delta t) \right] \\ - \frac{A_{N_p j}^k \xi_{N_p j}^k \omega_{N_p j}^k}{\omega_{N_p j}^{dk}} e^{-\xi_{N_p j}^k \omega_{N_p j}^k t} \left[\sin(\omega_{N_p j}^{dk} t) \alpha_{N_p j}^k(t - \Delta t) - \cos(\omega_{N_p j}^{dk} t) \beta_{N_p j}^k(t - \Delta t) \right] \\ + A_{N_p j}^k e^{-\xi_{N_p j}^k \omega_{N_p j}^k t} \left[\cos(\omega_{N_p j}^{dk} t) \alpha_{N_p j}^k(t - \Delta t) + \sin(\omega_{N_p j}^{dk} t) \beta_{N_p j}^k(t - \Delta t) \right] \end{array} \right]$$

Le terme $\Psi(\mathbf{q}(t))$ représente la contribution des efforts de contact à l'instant t . A chaque point i les écarts en déplacement et en vitesse entre l'instant t et l'instant $t - \Delta t$ sont connus. Ils sont reliés aux efforts de contact par les relations suivantes :

$$du_i = \int_{t-\Delta t}^t \sum_{k=1}^{k=N} \frac{A_{ij}^k}{\omega_{ij}^{dk}} e^{-\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k (t-\tau)} \left[\sin \left(\omega_{ij}^{dk} (t-\tau) \right) \right] q_j(\tau) d\tau \quad (4.43)$$

$$dv_i = \int_{t-\Delta t}^t \sum_{k=1}^{k=N} \frac{A_{ij}^k}{\omega_{ij}^{dk}} e^{-\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k (t-\tau)} \left[-\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k \sin \left(\omega_{ij}^{dk} (t-\tau) \right) + \omega_{ij}^{dk} \cos \left(\omega_{ij}^{dk} (t-\tau) \right) \right] q_j(\tau) d\tau \quad (4.44)$$

On cherche à déterminer la force de contact qui vérifie à la fois ces deux conditions. Afin d'avoir une solution unique nous calculons les deux intégrales avec deux points de Gauss t_1 et t_2 , ce qui permet de chercher deux inconnues qui vérifient les deux équations. Les points de Gauss sont donnés par :

$$t_1 = t + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \frac{\Delta t}{2} \quad (4.45)$$

$$t_2 = t + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \frac{\Delta t}{2} \quad (4.46)$$

Le problème revient à résoudre le système matriciel suivant

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_1^2 \\ \vdots \\ q_{N_p}^1 \\ q_{N_p}^2 \end{bmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{k=N} \begin{bmatrix} \Psi_{11}^k & \cdots & \Psi_{1N_p}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Psi_{N_p 1}^k & \cdots & \Psi_{N_p N_p}^k \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} du_1 \\ dv_1 \\ \vdots \\ du_{N_p} \\ dv_{N_p} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Avec Ψ_{ij}^k une matrice 2x2 dont les composantes sont :

$$\Psi_{ij}^{k11} = \frac{A_k}{\omega_{ij}^{kd}} e^{\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k (t-t_1)} \sin(\omega_{ij}^{kd} (t-t_1)) \frac{\Delta t}{2} \quad (4.48)$$

$$\Psi_{ij}^{k12} = \frac{A_k}{\omega_{ij}^{kd}} e^{\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k (t-t_2)} \sin(\omega_{ij}^{kd} (t-t_2)) \frac{\Delta t}{2} \quad (4.49)$$

$$\Psi_{ij}^{k21} = -\frac{A_{ij}^k}{\omega_{ij}^{dk}} e^{-\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k (t-t_1)} \left[-\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k \sin \left(\omega_{ij}^{dk} (t-t_1) \right) + \omega_{ij}^{dk} \cos \left(\omega_{ij}^{dk} (t-t_1) \right) \right] \frac{\Delta t}{2} \quad (4.50)$$

$$\Psi_{ij}^{k22} = -\frac{A_{ij}^k}{\omega_{ij}^{dk}} e^{-\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k (t-t_2)} \left[-\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k \sin \left(\omega_{ij}^{dk} (t-t_2) \right) + \omega_{ij}^{dk} \cos \left(\omega_{ij}^{dk} (t-t_2) \right) \right] \frac{\Delta t}{2} \quad (4.51)$$

Connaissant les valeurs des efforts de contact aux instants t_1 et t_2 , nous pouvons calculer les paramètres $\alpha_k(t + \Delta t)$ et $\beta_k(t + \Delta t)$ par les équations de récurrence suivantes :

$$\alpha_{ij}^k(t + \Delta t) = \alpha_{ij}^k(t) + \frac{f_{ij}^c(t_1)q_j^1 + f_{ij}^c(t_2)q_j^2}{2} \Delta t \quad (4.52)$$

$$\beta_{ij}^k(t + \Delta t) = \beta_{ij}^k(t) + \frac{f_{ij}^s(t_1)q_j^1 + f_{ij}^s(t_2)q_j^2}{2} \Delta t \quad (4.53)$$

où

$$f_{ij}^s(t) = e^{\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k t} \sin(\omega_{ij}^k t) \quad (4.54)$$

$$f_{ij}^c(t) = e^{\xi_{ij}^k \omega_{ij}^k t} \cos(\omega_{ij}^k t) \quad (4.55)$$

4.3 Exemples d'application

4.3.1 Système à deux degrés de liberté

4.3.1.1 Position du problème

Comme première application, on considère un système à deux degrés de liberté qui se déplace sur une chaussée sinusoïdale. Le modèle est composé de deux sous-systèmes à un degré de liberté, reliés entre eux par un ressort de raideur k_{12} . Ce ressort est le moyen de couplage entre les deux sous-systèmes. Les masses m_1 et m_2 sont reliées de manière élastique à des supports infiniment rigides par l'intermédiaire de ressorts de raideurs k_1 et k_2 et d'amortisseurs de coefficients d'amortissements C_1 et C_2 . Les déplacements des masses m_1 et m_2 par rapport à leurs positions de repos sont notés respectivement u_1 et u_2 . Les deux masses se déplacent sur une chaussée de profil $u_r(x)$ avec une vitesse constante V_0 comme le montre la Figure (4.8).

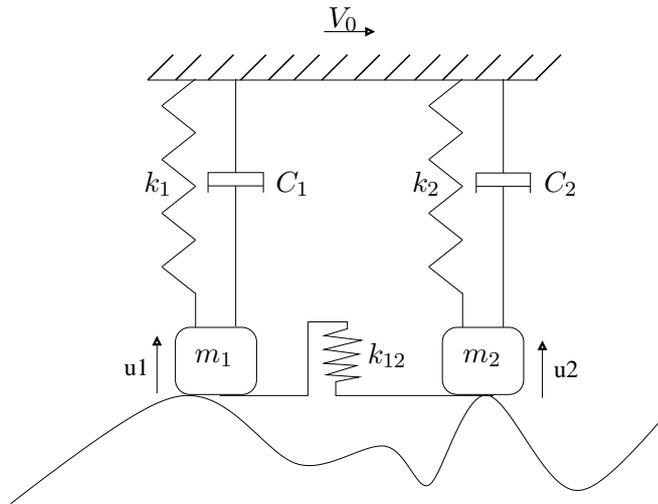


FIGURE 4.8: Déplacement d'un système à deux degrés de liberté sur une chaussée

4.3.1.2 Valeurs propres et modes propres

Dans un premier temps on néglige les amortisseurs C_1 et C_2 , les deux équations différentielles en régime libre sans couplage s'écrivent :

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} + k_1 u_1 &= 0 \\ m_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + k_2 u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Le ressort de couplage introduit une force supplémentaire, qui dépend à la fois du déplacement u_1 et u_2 . Le système (4.56) se transforme en un système d'équations couplées.

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} + k_1 u_1 + k_{12}(u_1 - u_2) &= 0 \\ m_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + k_2 u_2 + k_{12}(u_2 - u_1) &= 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Le système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2 u_1}{dt^2} \\ \frac{d^2 u_2}{dt^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.58)$$

Dans le domaine fréquentiel ce système s'écrira

$$\left\{ -\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.59)$$

Notons ω_1 et ω_2 les pulsations propres des deux sous systèmes, qui sont définies par :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (4.60)$$

et W_1 et W_2 les pulsations de couplage définies par :

$$W_1 = \sqrt{\frac{k_{12}}{m_1}} ; \quad W_2 = \sqrt{\frac{k_{12}}{m_2}} \quad (4.61)$$

Le système (4.59) s'écrit alors sous la forme :

$$\mathbf{D}(\omega)\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 + W_1^2 - \omega^2 & -W_1^2 \\ -W_2^2 & \omega_2^2 + W_2^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.62)$$

La détermination des valeurs propres se fait en résolvant l'équation $\det(\mathbf{D}(\omega)) = 0$, ce qui revient à résoudre l'équation (4.63)

$$\omega^4 - [\omega_1^2 + W_1^2 + \omega_2^2 + W_2^2] \omega^2 + (\omega_1 W_2)^2 + (\omega_2 W_1)^2 + (\omega_1 \omega_2)^2 = 0 \quad (4.63)$$

Dans le cas symétrique où $k_1 = k_2 = k$ et $m_1 = m_2 = m$. Le système (4.62) se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 + W^2 - \omega^2 & -W^2 \\ -W^2 & \omega_0^2 + W^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.64)$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ et $W = \sqrt{\frac{k_{12}}{m}}$. Les deux pulsations propres sont ainsi

$$\Omega_1 = \omega_0 \quad ; \quad \Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2W^2} \quad (4.65)$$

et les modes propres sont :

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

4.3.1.3 Fonctions de Green

On considère cette fois l'amortissement dans les deux sous-systèmes et on suppose que ces deux sous-systèmes sont excités par deux forces ponctuelles pour modéliser la force de contact de la chaussée. Le système d'équations dans le domaine fréquentiel s'écrit :

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_{12} + jC_1\omega - m_1\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} + jC_2\omega - m_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

La résolution classique de ce système consiste à inverser la matrice de rigidité dynamique $\mathbf{D}(\omega)$ pour obtenir les déplacements des masses.

Dans un but de simplicité, on note les variables suivantes :

$$D_1 = k_1 + k_{12} + jC_1\omega - m_1\omega^2 \quad (4.68)$$

$$D_2 = k_2 + k_{12} + jC_2\omega - m_2\omega^2. \quad (4.69)$$

Ici on cherche une solution analytique en inversant la matrice de rigidité dynamique de façon triviale, c'est-à-dire à l'aide du calcul du déterminant de cette matrice et de l'écriture de la matrice des co-facteurs :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D_1 D_2 - k_{12}^2} \begin{bmatrix} D_2 & k_{12} \\ k_{12} & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

La matrice des fonctions de Green est alors définie par :

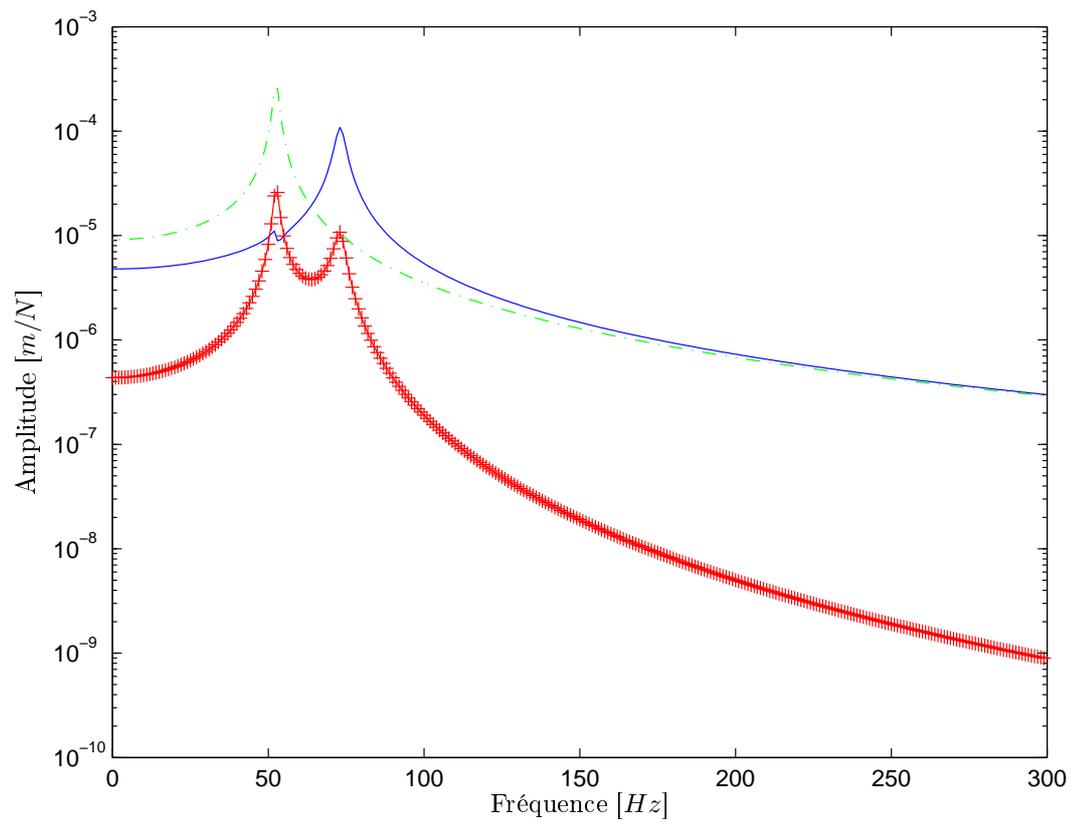
$$\mathbf{G} = \frac{1}{D_1 D_2 - k_{12}^2} \begin{bmatrix} D_2 & k_{12} \\ k_{12} & D_1 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Les paramètres utilisés dans les simulations du système à deux degrés de liberté sont regroupés dans le tableau (4.1). La figure (4.9) montre les trois composantes de la matrice des fonctions de Green \mathbf{G} .

Les deux points matériels sont séparés d'une distance $d = 4 \text{ cm}$. L'ensemble se déplace avec une vitesse constante $V_0 = 1 \text{ m.s}^{-1}$ sur une chaussée de profil sinusoïdal. Les figures (4.10) et (4.11) montrent respectivement une comparaison du déplacement et de la force de contact au point M_1 pour deux cas de figures : dans le premier cas on néglige l'influence du point M_2 et dans le deuxième cas on considère l'interaction avec le point M_2 . Les figures (4.12) et (4.13) montrent respectivement les déplacements et les forces de contact aux deux points M_1 et M_2 .

Paramètres	Valeurs
K_1	10^5 N/m
K_2	$2 \cdot 10^5 \text{ N/m}$
K_{12}	10^4 N/m
C_1	20 N.s/m
C_2	10 N.s/m
m_1	1 kg
m_2	1 kg

TABLE 4.1: Paramètres de simulations du système à deux dds

FIGURE 4.9: Les trois composantes de la matrice des fonctions de Green : $- G_{11}$, $-+ G_{12}$, $- - G_{22}$

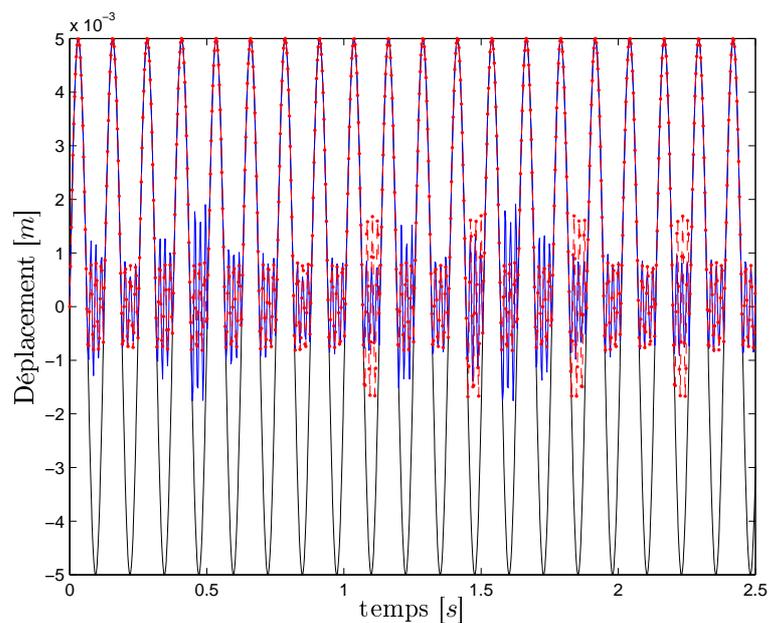


FIGURE 4.10: Influence de l'interaction du point M_2 sur le déplacement du point M_1 : — sans interaction, -.- avec interaction

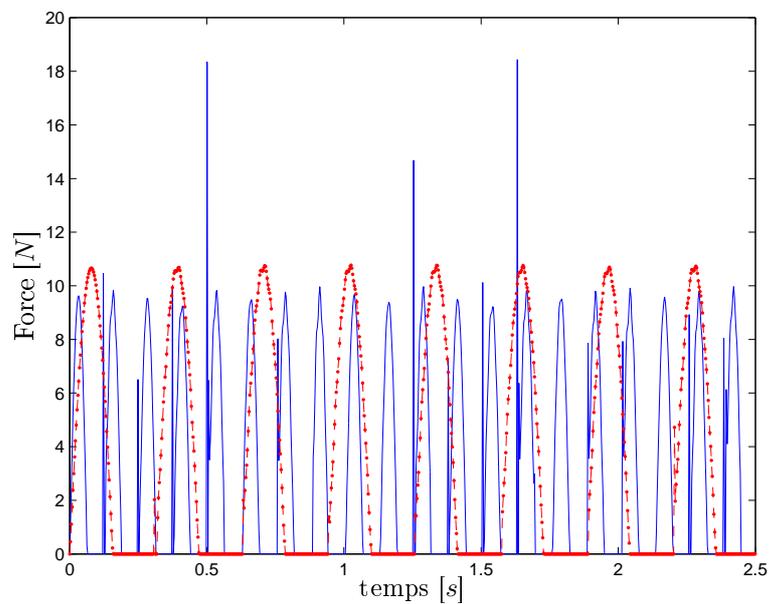
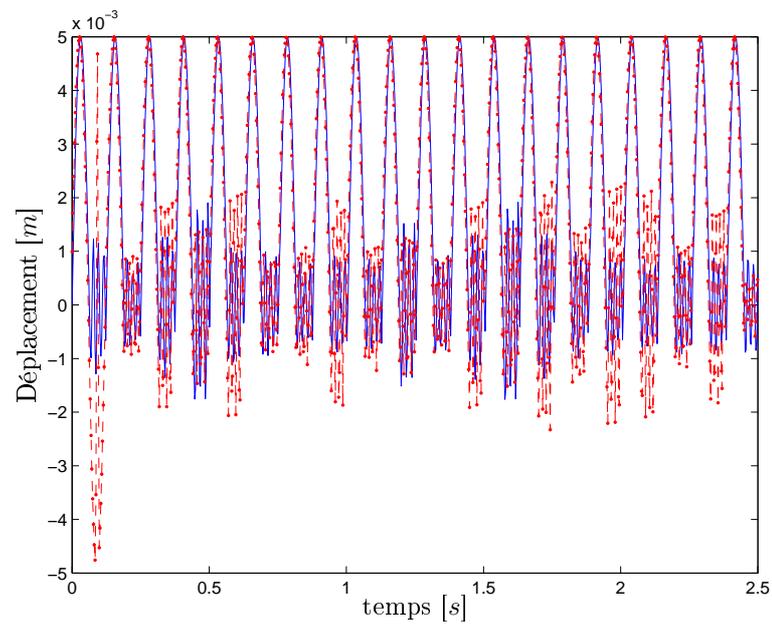
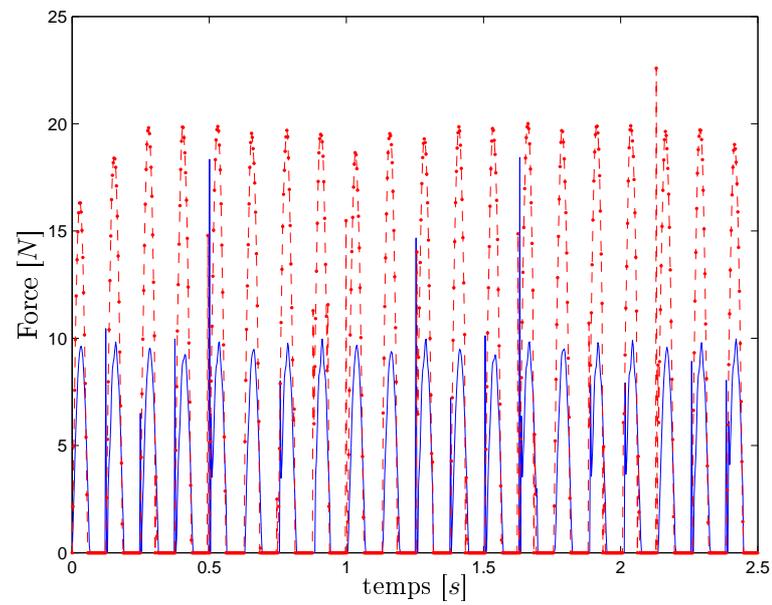


FIGURE 4.11: Influence de l'interaction du point M_2 sur la force de contact au point M_1 : — sans interaction, -.- avec interaction

FIGURE 4.12: *Déplacements des points M_1 et M_2 : — M_1 , -.- M_2* FIGURE 4.13: *Forces de contact aux points M_1 et M_2 : — M_1 , -.- M_2*

4.3.2 Modèle d'anneau circulaire

On reprend le modèle d'anneau circulaire que nous avons étudié dans le deuxième chapitre. Cette fois on considère que pendant le roulement, le contact peut se produire en plusieurs points. La zone de contact est située entre $\theta = \pm\theta_{max}$ comme le montre la figure (4.14). La zone de contact est maillée avec un pas de $\Delta\theta$. On note N_c le nombre de noeuds dans la zone de contact. Ils sont classés de $-\theta_{max}$ à $+\theta_{max}$ où $M_1 = M(-\theta_{max})$ et $M_{N_c} = M(+\theta_{max})$.

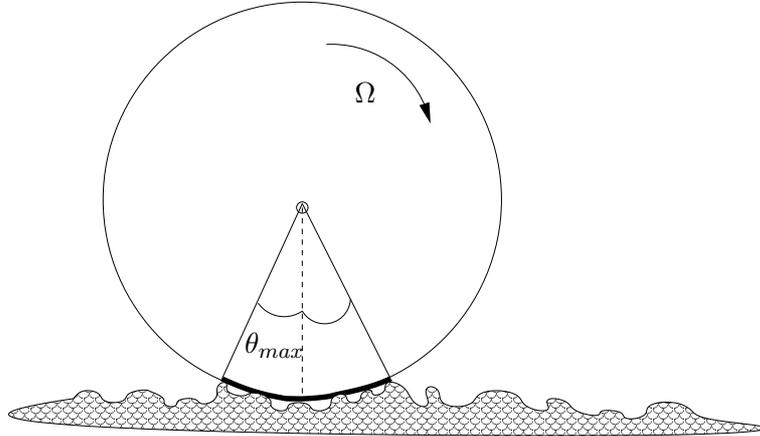


FIGURE 4.14: Roulement d'un anneau sur une chaussée rigide

Pour les simulations, on fixe $\Delta\theta$ à 9° , puis on varie le nombre de points N_c dans la zone de contact. La figure (4.15) montre la réponse en fréquence en sept points de l'anneau avec une excitation au point M_1 .

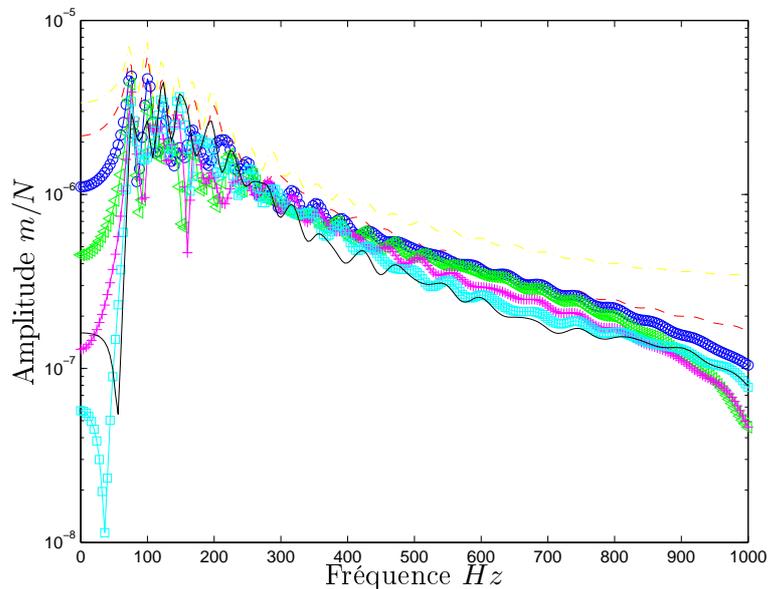


FIGURE 4.15: Réponse en fréquence des sept points de la zone de contact suite à une excitation au point M_1 : $\text{---}\text{---}\text{---}$ G_{11} , $\text{---}\text{---}\text{---}$ G_{12} , $\text{---}\text{---}\text{---}$ G_{13} , $\text{---}\text{---}\text{---}$ G_{14} , $\text{---}\text{---}\text{---}$ G_{15} , $\text{---}\text{---}\text{---}$ G_{16} , $\text{---}\text{---}\text{---}$ G_{17}

Afin d'étudier la sensibilité des déplacements et des forces de contact à la zone de contact, nous réalisons quatre simulations. On utilise les mêmes paramètres dans l'ensemble des simulations. La seule différence est le nombre de points considéré dans la zone de contact. Les figures (4.16) et

(4.17) montrent respectivement une comparaison des déplacements et des forces de contact du point ($\theta = 0^\circ$) pour différentes tailles de la zone de contact (ou nombre de points N_c dans la zone de contact).

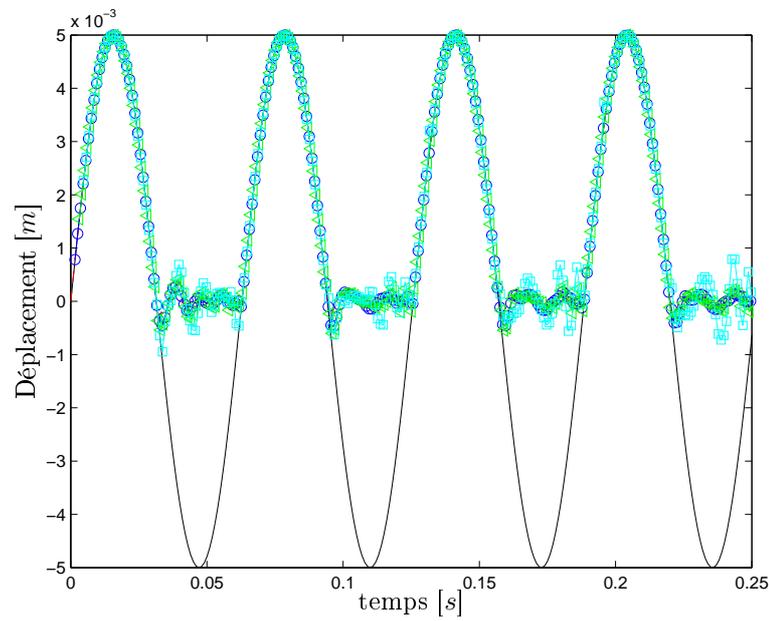


FIGURE 4.16: Influence de l'interaction sur le déplacement au point M_4 ($\theta = 0$) : — profil de la chaussée, — — $N_c = 1$, —o— $N_c = 3$, —▷— $N_c = 5$, —□— $N_c = 7$

Les figures (4.18), (4.19) et (4.20) montrent respectivement l'évolution des déplacements, des forces de contact et du nombre de points en contact au cours du temps pour les sept points de la zone de contact.

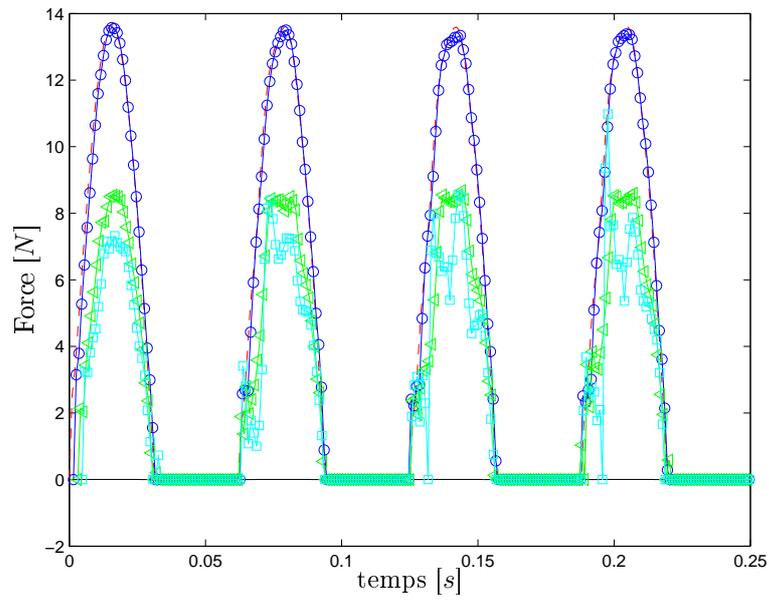


FIGURE 4.17: Influence de l'interaction sur la force de contact au point M_4 ($\theta = 0$) : $- - N_c = 1$, $-o-$ $N_c = 3$, $- \triangleright - N_c = 5$, $- \square - N_c = 7$

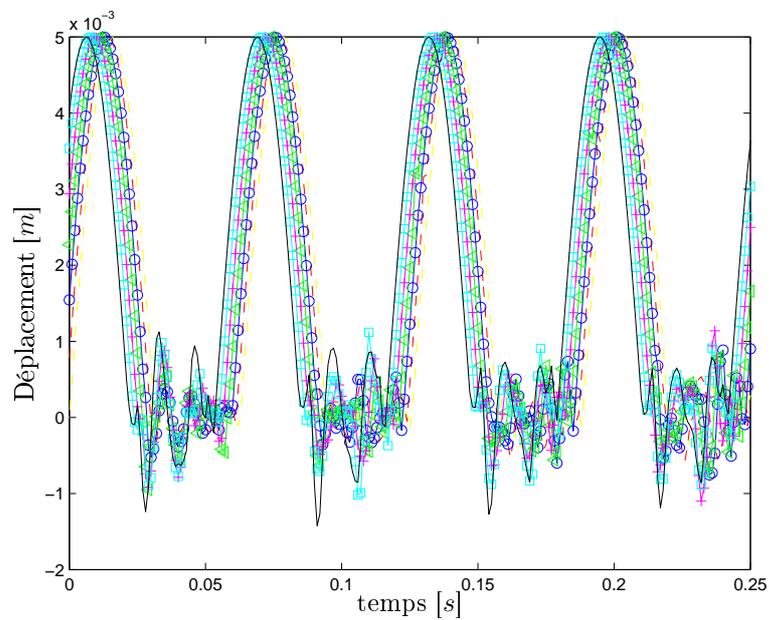


FIGURE 4.18: Déplacements des points M_1 à M_7 : $- \cdot - u_1$, $- - u_2$, $-o- u_3$, $- \triangleright - u_4$, $- + - u_5$, $- \square - u_6$, $- u_7$

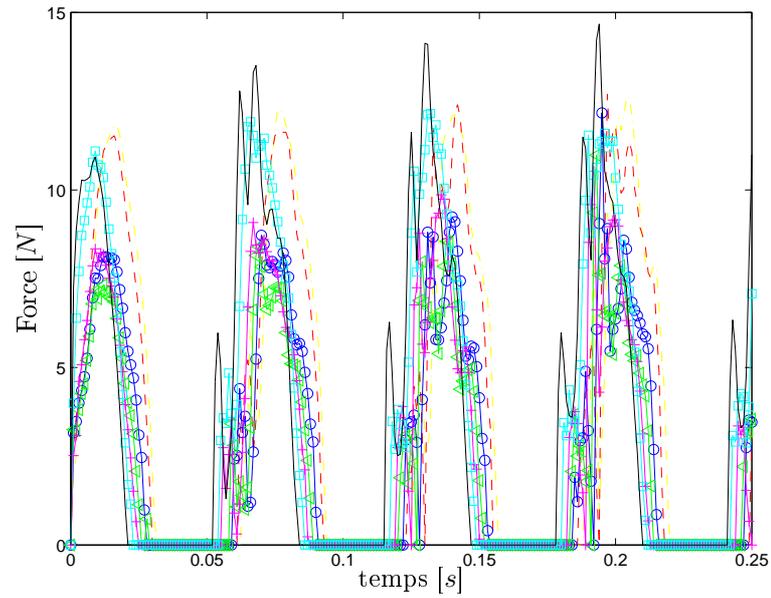


FIGURE 4.19: Forces de contact aux points M_1 à M_7 : $-\cdot-$ f_1 , $- -$ f_2 , $-o-$ f_3 , $- \triangleright -$ f_4 , $- + -$ f_5 , $- \square -$ f_6 , $-$ f_7

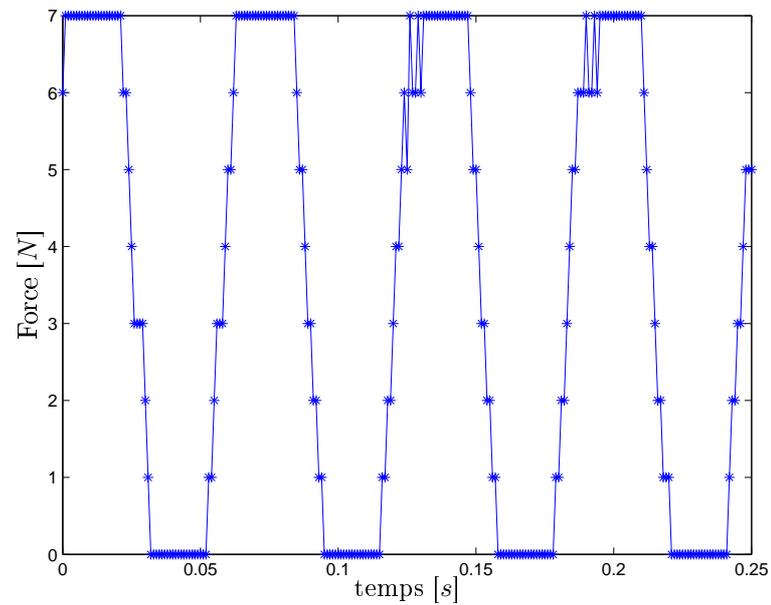


FIGURE 4.20: Nombre de points en contact au cours du temps

4.4 Conclusion

La prise en compte de la condition cinématique dans le modèle de contact permet de vérifier exactement les conditions de contact. Elle permet également d'éviter la difficulté de la recherche d'une raideur de contact pertinente contrairement à la méthode de pénalité. Comme nous l'avons vu au début de ce chapitre, une raideur faible mène à des résultats physiquement non acceptables et une raideur élevée donne naissance à des instabilités numériques.

Le modèle de contact développé au cours de cette thèse est basé sur un traitement original du problème de contact dynamique. D'une part, l'utilisation de la convolution modale mène à des calculs moins coûteux, d'autre part la prise en compte de la condition cinématique permet d'avoir des solutions plus stables et plus robustes. Ces deux caractères (rapidité et stabilité) sont très encourageants pour l'application du modèle au contact pneumatique/chaussée dans le cas 3D.

La détermination de la zone de contact est nécessaire pour un calcul plus juste de la réponse vibratoire. Les interactions entre les points de contact ont une influence importante sur cette réponse. Ces interactions sont prises en compte dans les fonctions de Green pré-calculées. Dans le cas d'un pneumatique réel, il serait important d'identifier la zone de contact dans les conditions de roulement et d'identifier soigneusement les points actifs (points en contact avec la chaussée) et les points passifs au cours du temps et dans les conditions de roulement.

Chapitre 5

Modèle périodique

L'OBJECTIF de ce chapitre est de calculer les fonctions de Green d'un pneumatique réel dans une large bande de fréquence. Le modèle de vibration utilisé est basé sur l'exploitation des propriétés de périodicité du pneumatique. Une seule cellule est modélisée par un logiciel d'éléments finis standard comme Abaqus ou Ansys. Ensuite, à partir de la rigidité dynamique de la cellule et des conditions de périodicité, la réponse du pneumatique complet est calculée jusqu'aux moyennes fréquences (4000 Hz) contrairement à la méthode des éléments finis classique qui est limitée aux basses fréquences (0 500 Hz). Le modèle périodique est validé au départ dans le cas du modèle d'anneau circulaire, puis pour un pneumatique homogène et enfin pour un pneumatique hétérogène. Nous présenterons également quelques simulations sur l'influence de la pression de gonflage et de certains paramètres géométriques sur la réponse dynamique du pneumatique.

 PLAN DU CHAPITRE 5

5.1	Problème de dynamique	113
5.1.1	Equations du mouvement	113
5.1.2	Amortissement	114
5.2	Modèle de vibration des structures périodiques	115
5.2.1	Cellule de référence	115
5.2.2	Réduction de modèle	116
5.2.3	Matrice équivalente	117
5.3	Application	118
5.3.1	Modèle d'anneau circulaire	118
5.3.2	Modèle de pneumatique homogène	121
5.4	Influence des paramètres géométriques et mécaniques	124
5.4.1	Les rainures	124
5.4.2	La pression	127
5.4.3	Le rayon de la jante	127
5.4.4	Symétrie de la bande de roulement	127
5.5	Modèle de pneumatique hétérogène	130
5.5.1	Propriétés des matériaux du pneumatique	130
5.5.2	Fonctions de Green	130
5.6	Conclusion	134

5.1 Problème de dynamique

5.1.1 Equations du mouvement

On considère un corps élastique occupant un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. On note $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_f$ le bord de Ω et \mathbf{n} la normale sortante à $\partial\Omega$ comme le montre la figure (5.1).

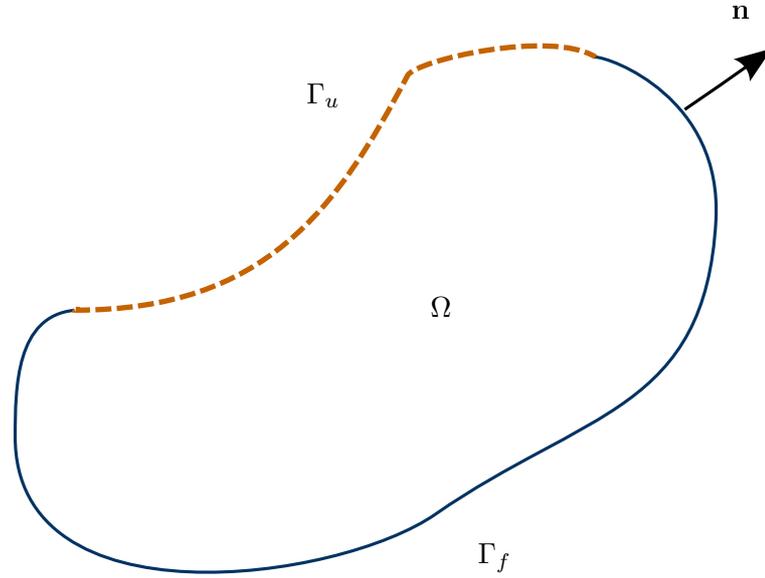


FIGURE 5.1: *Problème aux limites*

Sur le bord $\partial\Omega$, on considère deux types de conditions aux limites :

- déplacement imposé sur la partie du bord Γ_u . Le déplacement est donné : $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^d$ pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma_u$.
- contrainte imposée sur la partie du bord Γ_f . Le vecteur contrainte est donné : $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}^d$ pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma_f$.

On définit les conditions initiales du problème :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (5.1)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (5.2)$$

Les contraintes et les déformations sont liées par la loi de comportement

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathcal{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (5.3)$$

et les déformations sont liées aux déplacements par l'équation de compatibilité

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) \quad (5.4)$$

Finalement, déterminer le déplacement \mathbf{u} revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{\mathbf{u}} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathcal{C} : \boldsymbol{\epsilon} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^d & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}^d & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_f \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega \end{array} \right. \quad (5.5)$$

où ρ est la masse volumique et $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ la force volumique appliquée à Ω .

En supposant que $\mathbf{u}^d = \mathbf{0}$, la formulation variationnelle du problème s'écrit :

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \, d\Omega = \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}^d \, d\Gamma \quad (5.6)$$

pour tout déplacement virtuel quelconque $\delta \mathbf{u}$ appliqué à la région Ω , tel que $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur Γ_u . En discrétisant le domaine Ω en éléments finis, le déplacement virtuel peut se projeter sur la base nodale comme suit :

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{q}(t) \quad (5.7)$$

où $\delta \mathbf{q}$ est un déplacement virtuel des nœuds et \mathbf{N} sont les fonctions de forme pour le déplacement. Le déplacement virtuel provoque également des déformations virtuelles que l'on traduit par l'équation matricielle

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{q}(t) \quad (5.8)$$

où \mathbf{B} sont les fonctions de forme pour les déformations. Les champs de déplacements et de déformations sont estimés à l'intérieur du domaine Ω par les mêmes fonctions de forme, ce qui permet d'écrire l'équation intégrale (5.6) sous la forme d'une équation différentielle du second ordre

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (5.9)$$

où \mathbf{M} , \mathbf{K} et \mathbf{f} sont respectivement la matrice de masse, la matrice de raideur et le vecteur des forces extérieures. Ils sont calculés par les relations suivantes

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \, d\Omega \quad ; \quad \mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathcal{C} : \mathbf{B} \, d\Omega. \quad (5.10)$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{g} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{f}^d \, d\Gamma. \quad (5.11)$$

5.1.2 Amortissement

L'étude de la réponse vibratoire d'un système dynamique nécessite l'ajout des caractéristiques d'amortissement mécanique aux caractéristiques de rigidité et de masse. Il existe différentes modélisations de ce phénomène. Les modèles classiques utilisés par la plupart des codes éléments finis sont décrits ci-après.

– Amortissement visqueux

Le modèle d'amortissement visqueux est le plus couramment utilisé. Il correspond à une résistance proportionnelle à la vitesse. L'équation du mouvement (5.9) devient dans ce cas :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (5.12)$$

où \mathbf{C} est la matrice d'amortissement. Cette matrice peut être calculée par une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur (amortissement de Rayleigh) :

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (5.13)$$

Pour les analyses en base modale, les coefficients d'amortissement modaux ξ_i se déduisent des termes diagonaux de la matrice d'amortissement généralisée $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ par la relation :

$$2\xi_i\omega_i = \frac{\Phi_i^T \mathbf{C} \Phi_i}{\Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i} \quad (5.14)$$

avec Φ_i les modes propres de la structure.

– Amortissement hystérétique

Le modèle d'amortissement hystérétique (ou structural) est basé sur le concept d'un module d'Young complexe. Le coefficient d'amortissement η hystérétique est défini comme le rapport entre la partie imaginaire et la partie réelle du module complexe. Dans ce cas l'équation dynamique du mouvement dans le domaine fréquentiel s'écrit :

$$[-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}(1 + j\eta)] \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (5.15)$$

5.2 Modèle de vibration des structures périodiques

Une structure périodique est le résultat d'un assemblage de plusieurs sous-structures identiques (cellule de base). Ces structures présentent l'avantage d'une description complète à partir de trois paramètres : la cellule de base, la nature de la périodicité (linéaire ou suivant une courbe quelconque) et le nombre de cellules.

5.2.1 Cellule de référence

On considère une structure périodique composée de N cellules. On note \mathbf{t} la transformation géométrique qui relie la cellule réelle et la cellule de référence (voir figure 5.2).

Le principe d'introduire une cellule de référence est le même que celui de l'élément de référence de la méthode des éléments finis. Chaque cellule est complètement définie par la transformation géométrique correspondante et les matrices de rigidité et de masse de la cellule de référence. Si on note \mathbf{x}_0^i les coordonnées d'un nœud i , les coordonnées de ce nœud après transformation sont données par :

$$\mathbf{x}^i = \mathbf{t}^i \mathbf{x}_0^i \quad (5.16)$$

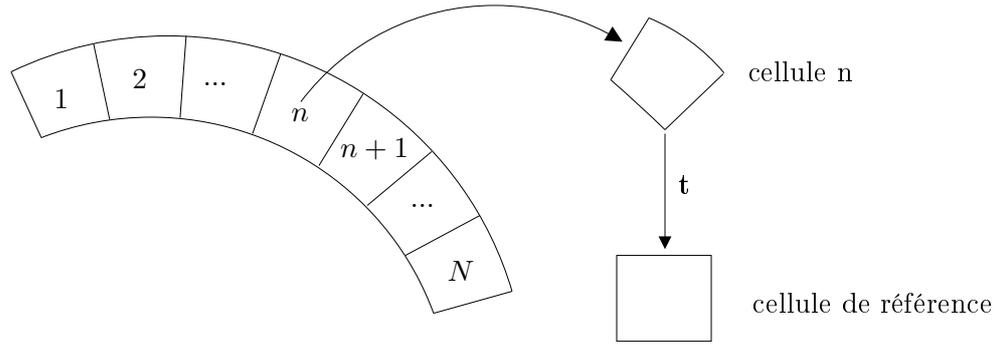


FIGURE 5.2: Transformation géométrique de la cellule

où \mathbf{t}^i est la matrice de transformation locale du nœud i . Pour une cellule maillée avec un nombre de nœud égal à L , la matrice de transformation globale \mathbf{T} est alors.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^i \\ \vdots \\ \mathbf{x}^L \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{t}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \mathbf{t}^i & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{t}^L \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_0^i \\ \vdots \\ \mathbf{x}_0^L \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Par conséquent, la matrice de masse \mathbf{M} et la matrice de raideur \mathbf{K} sont calculées dans le repère de référence à partir des matrices de masse (\mathbf{M}_0) et de raideur (\mathbf{K}_0) de la cellule réelle par :

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}\mathbf{M}_0\mathbf{T}^{-1} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}\mathbf{K}_0\mathbf{T}^{-1} \quad (5.19)$$

La matrice de rigidité dynamique est calculée à partir de ces matrices et de la matrice d'amortissement \mathbf{C}

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\omega) = \mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \quad (5.20)$$

Finalement l'équation dynamique discrétisée de la cellule de référence s'écrit :

$$\mathbf{D}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (5.21)$$

5.2.2 Réduction de modèle

Par construction, la cellule de base est maillée avec un nombre égal de nœuds sur le bord à gauche et de nœuds sur le bord à droite. Soient q_R , q_L et q_I respectivement les degrés de liberté à droite, les degrés de liberté à gauche et les degrés de liberté à l'intérieur. On suppose qu'il n'y a pas de force sur les nœuds de l'intérieur et on note \mathbf{f}_R les forces appliquées sur les nœuds à droite

et \mathbf{f}_L les forces appliquées sur les nœuds à gauche. Par conséquent l'équation (5.21) peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{II} & \tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{IR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{LI} & \tilde{\mathbf{D}}_{LL} & \tilde{\mathbf{D}}_{LR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{RI} & \tilde{\mathbf{D}}_{RL} & \tilde{\mathbf{D}}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Les ddls à l'intérieur peuvent être calculés en fonction de \mathbf{q}_L et \mathbf{q}_R en utilisant le premier rang du système d'équations (5.22)

$$\mathbf{q}_I = -\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}(\tilde{\mathbf{D}}_{IL}\mathbf{q}_L + \tilde{\mathbf{D}}_{IR}\mathbf{q}_R) \quad (5.23)$$

En éliminant q_I de l'équation (5.25), on trouve

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{LL} - \tilde{\mathbf{D}}_{LI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{LR} - \tilde{\mathbf{D}}_{LI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{RL} - \tilde{\mathbf{D}}_{RI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{RR} - \tilde{\mathbf{D}}_{RI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Finalement le problème dynamique réduit de la cellule peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

5.2.3 Matrice équivalente

Le but de la méthode est de construire une matrice de rigidité dynamique équivalente de la structure complète à partir de la matrice de rigidité dynamique de la cellule. Le principe est basé sur la technique de réduction de modèle expliquée dans la section précédente. Soient \mathbf{D}^1 et \mathbf{D}^2 deux matrices de rigidité dynamique avoisinantes définies comme suit :

$$\mathbf{D}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL}^1 & \mathbf{D}_{LR}^1 \\ \mathbf{D}_{RL}^1 & \mathbf{D}_{RR}^1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL}^2 & \mathbf{D}_{LR}^2 \\ \mathbf{D}_{RL}^2 & \mathbf{D}_{RR}^2 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

La matrice équivalente de deux cellules en éliminant les degrés de liberté d'interface (degrés de liberté intérieurs pour la structure constituée de deux cellules) s'écrit :

$$\mathbf{D}^{eq} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL}^{eq} & \mathbf{D}_{LR}^{eq} \\ \mathbf{D}_{RL}^{eq} & \mathbf{D}_{RR}^{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL}^1 - \mathbf{D}_{LR}^1 \mathbf{D}^* \mathbf{D}_{RL}^1 & -\mathbf{D}_{LR}^1 \mathbf{D}^* \mathbf{D}_{LR}^2 \\ -\mathbf{D}_{RL}^2 \mathbf{D}^* \mathbf{D}_{RL}^1 & \mathbf{D}_{RR}^2 - \mathbf{D}_{RL}^2 \mathbf{D}^* \mathbf{D}_{LR}^2 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

avec

$$\mathbf{D}^* = [\mathbf{D}_{RR}^1 + \mathbf{D}_{LL}^2]^{-1}$$

On répète l'opération n fois tel que

$$N = \sum_{i=1}^n 2^{p_i} ; \quad p_1 > p_2 \dots > p_n \quad (5.28)$$

avec p_i la position du i^{eme} chiffre 1 dans la représentation binaire du nombre de cellules N .

5.3 Application

5.3.1 Modèle d'anneau circulaire

Dans un premier temps nous allons reprendre le modèle d'anneau circulaire étudié dans les chapitres précédents. Le modèle périodique sera tout d'abord testé sur ce modèle où la mise en oeuvre est plus simple que pour un modèle de pneumatique réel. Néanmoins toutes les étapes de calculs sont les mêmes pour les deux modèles (maillage de la cellule de base, transformation dans un repère de référence, application des conditions périodiques et prise en compte de la pression).

5.3.1.1 Matrice de rigidité dynamique

Pour simplifier la modélisation nous négligeons la fondation élastique ($k_z = k_\theta = 0$). La cellule de base est une poutre sous forme d'un arc de rayon R et d'angle θ_0 autour de l'axe OZ . L'arc est maillé avec un seul élément de poutre à 6 ddl (voir figure 5.3).

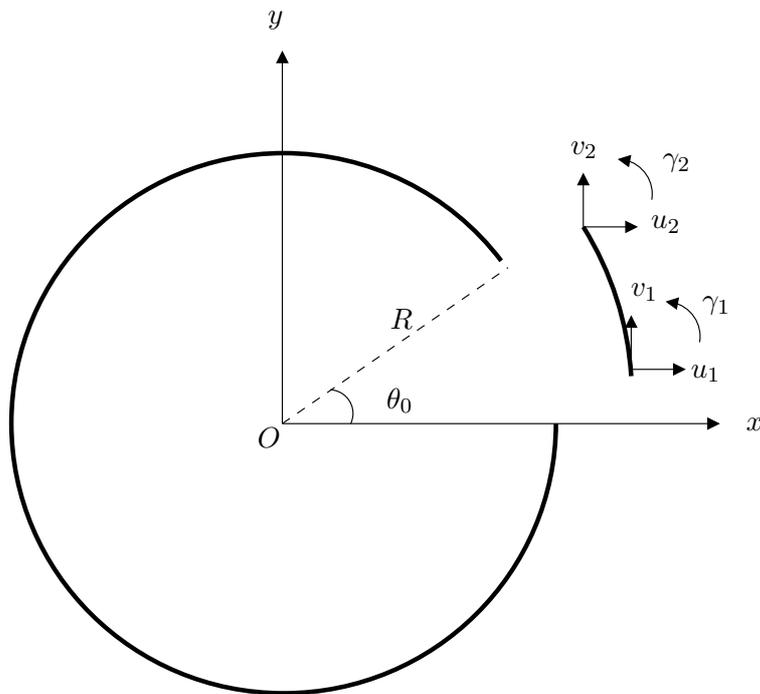


FIGURE 5.3: *Modèle périodique d'anneau circulaire*

L'anneau circulaire est subdivisé en $N = 180$ éléments ($\theta_0 = 2^\circ$). On applique une force unitaire concentrée au premier nœud (à $\theta = 0$) et suivant la direction (Ox), puis on calcule le déplacement au même point. Le calcul est réalisé à l'aide du logiciel d'éléments finis Abaqus. Les matrices de rigidité (\mathbf{K}_0) et de masse (\mathbf{M}_0) de la cellule sont également calculées par Abaqus.

La matrice de rigidité dynamique de la cellule de base est de taille 6x6. Elle est exprimée dans le repère cartésien (O, x, y). Pour assurer la périodicité des cellules, on tourne le deuxième nœud (à $\theta = \theta_0$) afin d'avoir les mêmes propriétés géométriques pour toutes les sections transversales. Dans

ce cas la matrice de transfert de la cellule en élément de référence est donnée par :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_0) & -\sin(\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Les matrices \mathbf{M}_0 et \mathbf{K}_0 sont transférées dans le nouveau repère à l'aide de la matrice de transfert \mathbf{T} .

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}\mathbf{M}_0\mathbf{T}^{-1} \quad (5.30)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}\mathbf{K}_0\mathbf{T}^{-1} \quad (5.31)$$

5.3.1.2 Condition de périodicité

On calcule la matrice de rigidité dynamique équivalente de l'anneau complet à l'aide de l'algorithme de matrice équivalente présenté dans la section précédente. L'équation d'équilibre peut s'écrire

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL}^{eq} & \mathbf{D}_{LR}^{eq} \\ \mathbf{D}_{RL}^{eq} & \mathbf{D}_{RR}^{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Le premier nœud ($\theta = 0$) et le dernier nœud ($\theta = 360^\circ$) sont les mêmes, ils ont les mêmes déplacements. Cette condition et la condition d'équilibre peuvent se traduire par les équations suivantes :

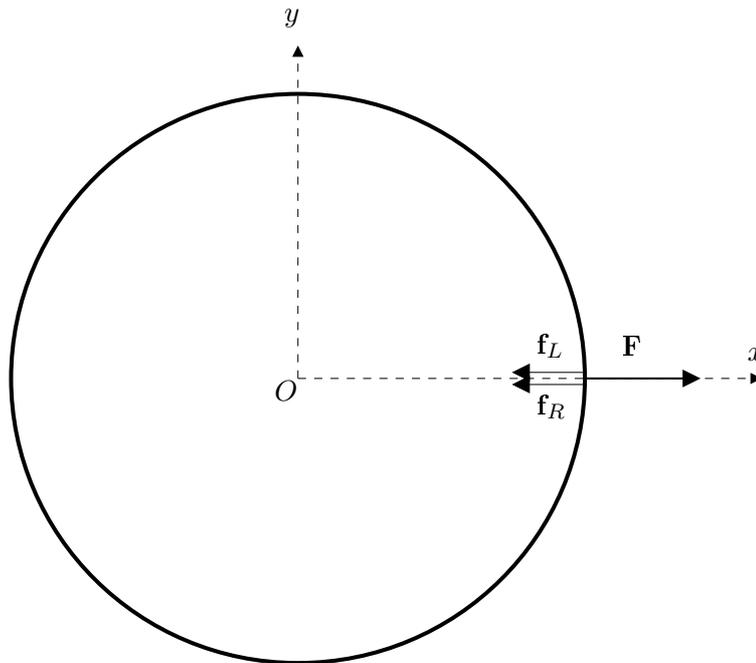


FIGURE 5.4: Conditions périodiques d'anneau circulaire

$$\begin{cases} \mathbf{q}_L = \mathbf{q}_R = \mathbf{q} \\ \mathbf{f}_L + \mathbf{f}_R + \mathbf{F} = 0 \end{cases} \quad (5.33)$$

avec

$$\mathbf{q}_L = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{q}_R = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

En combinant les équations (5.33) et (5.32), nous pouvons écrire :

$$\mathbf{D}_T \mathbf{q} = -\mathbf{F} \quad (5.35)$$

avec

$$\mathbf{D}_T = \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{LR} + \mathbf{D}_{RL} + \mathbf{D}_{RR} \quad (5.36)$$

On reprend le modèle d'anneau circulaire avec les paramètres utilisés dans le chapitre précédent. Pour simplifier le calcul, on néglige l'effet de la fondation élastique ($k_z = k_\theta = 0$). Comme conditions aux limites, l'anneau est considéré libre. Nous avons calculé la fonction de Green de trois manières : un calcul analytique, un calcul numérique de l'anneau complet avec Abaqus puis un calcul périodique. Dans ce dernier cas, les matrices de rigidité et de masse sont calculées par Abaqus et la méthode périodique est codée avec un programme Matlab. La figure (5.5) montre une comparaison entre ces trois modèles. Nous pouvons constater que les résultats sont très proches pour les trois modèles.

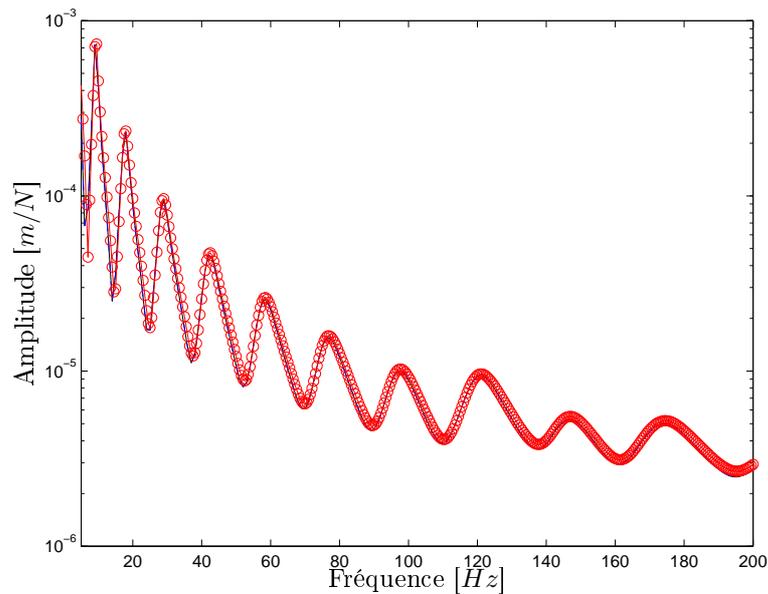


FIGURE 5.5: *Fonction de Green de l'anneau circulaire sans fondation élastique : —anneau complet avec Abaqus, -o- modèle analytique, -- modèle périodique*

5.3.2 Modèle de pneumatique homogène

5.3.2.1 Modélisation d'une cellule de pneumatique

Après avoir validé le modèle périodique dans le cas d'un anneau circulaire, nous allons adapter ce modèle à un pneumatique de géométrie plus complexe. La démarche reste la même avec une difficulté supplémentaire : cette fois les nœuds d'une section doivent être identifiés et renumérotés de sorte que chaque nœud de gauche $A(r, \theta)$ corresponde au bon nœud de droite $A'(r, \theta + \theta_0)$.

La section du pneumatique étudiée est représentée par la figure (5.6) et les valeurs des paramètres géométriques et mécaniques sont regroupés dans le tableau (5.1).

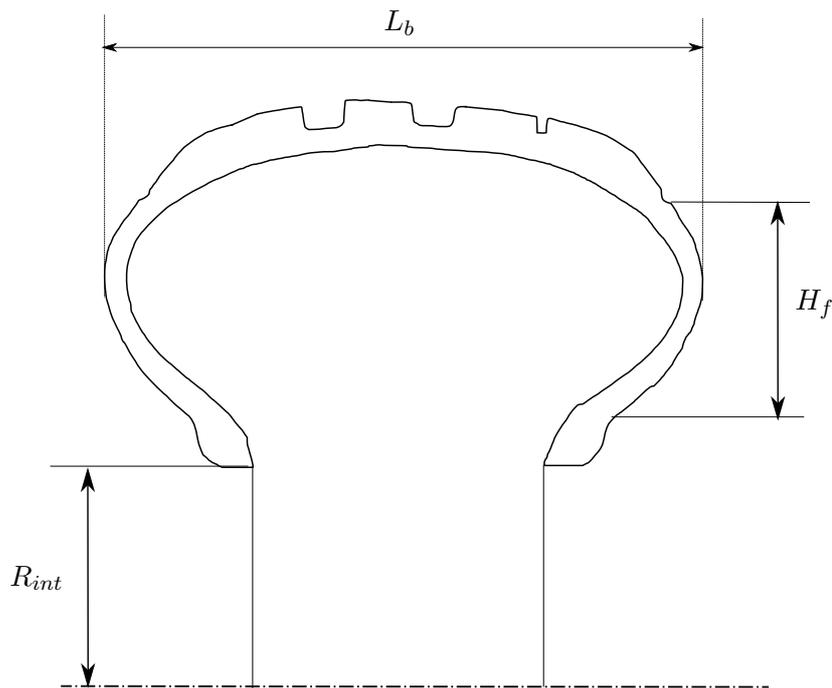


FIGURE 5.6: Section du pneumatique homogène

Rayon intérieur (R_{int})	165,1 mm
Largeur de bande de roulement (L_b)	165 mm
Hauteur du flanc (H_f)	65 mm
Module d'Young	80 MPa
Coefficient de Poisson	0,4
Amortissement structural	10 %

TABLE 5.1: Caractéristiques du pneumatique homogène

La modélisation de la cellule est réalisée sous le logiciel d'éléments finis Abaqus. Soit Ω le domaine occupé par une cellule d'un pneumatique. La frontière de la cellule $\partial\Omega$ est subdivisée en quatre frontières comme le montre la figure (5.7) :

- Γ_u : La partie en contact avec la jante. Elle est considérée encastée.
- Γ_p : La surface intérieure. Elle est soumise à la pression de gonflage.
- Γ_r : Les deux sections latérales de la cellule. Elles vérifient les conditions de périodicité.

– Γ_e : L'enveloppe extérieure.

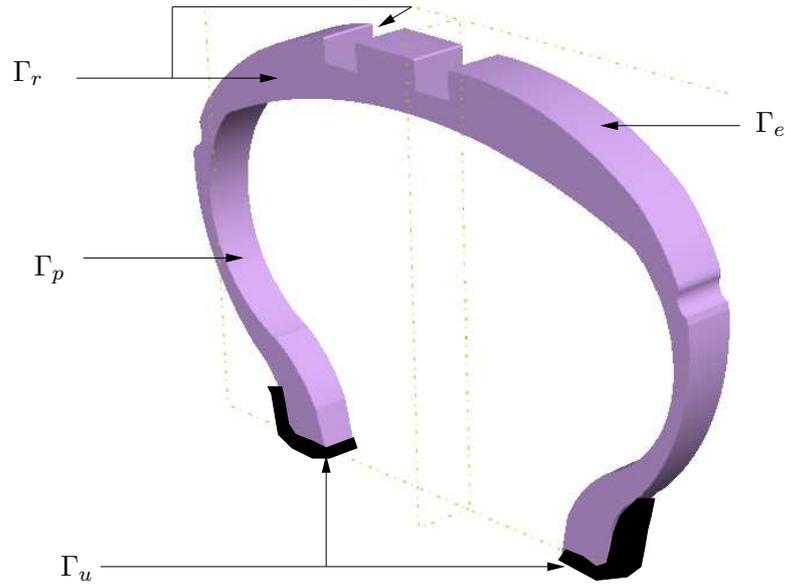


FIGURE 5.7: Modélisation d'une cellule de pneumatique

Les matrices de rigidité et de masse sont calculées dans le repère cartésien $(O, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$. Ces matrices dépendent de l'angle θ , ce qui ne nous permet pas d'appliquer la méthode périodique. Afin d'avoir les mêmes matrices pour toutes les cellules, nous transférons ces matrices dans le repère cylindrique $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_y)$ comme le montre la figure (5.8).

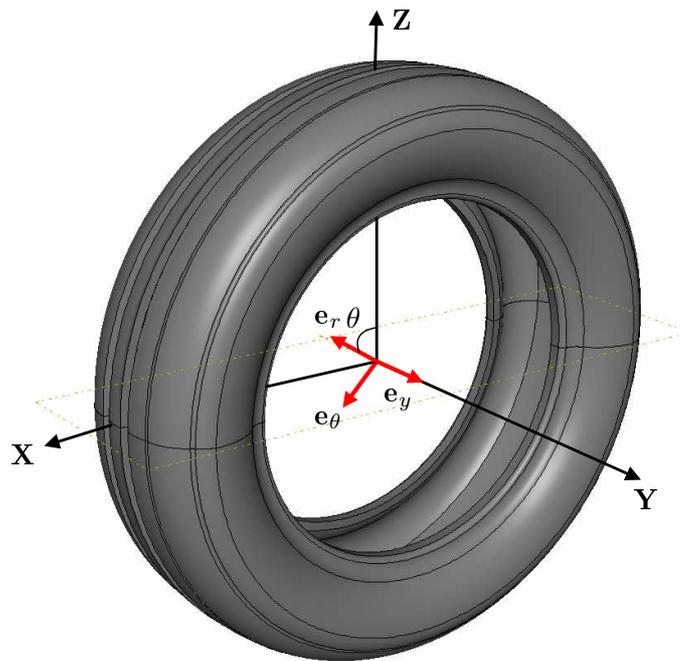


FIGURE 5.8: Repères de calcul des fonctions de Green du pneumatique

Dans ce cas la matrice de transfert globale peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1(\theta_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{t}_2(\theta_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{t}_N(\theta_N) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

avec \mathbf{t}_i la matrice de transfert locale qui transforme les coordonnées du nœud i de la base cartésienne $(O, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ à la base cylindrique $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_y)$. Elle est définie par :

$$\mathbf{t}_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & 0 & \sin(\theta_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_i) & 0 & \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

5.3.2.2 Prise en compte de la pression de gonflage

Le pneumatique est gonflé avec une pression P . Sa vibration est considérée comme une perturbation autour de l'état d'équilibre établi sous la précontrainte due à la pression. Cette précontrainte donne naissance à une raideur additionnelle qu'on note K_P . La matrice de rigidité dynamique devient dans ce cas :

$$\mathbf{D}(\omega) = [\mathbf{K} + \mathbf{K}_P + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}] \quad (5.39)$$

Les matrices de raideur et de masse sont calculées à l'aide d'Abaqus en deux étapes. Premièrement, on calcule l'équilibre du pneumatique sous la pression en intégrant les non linéarités géométriques (option d'Abaqus Ngeom). Dans la deuxième étape, on effectue une analyse modale autour de cette position d'équilibre. Étant donné que le problème du pneumatique complet est axisymétrique par rapport à la direction tangentielle, toutes les sections se déplacent de la même façon suivant la direction radiale et le déplacement est nul suivant la direction tangentielle. Il reste à savoir comment modéliser dans Abaqus une cellule de base pour reproduire le même état précontrainte que celui du pneumatique complet.

Comme les deux sections latérales de la cellule sont libres, l'application de la pression sur la surface intérieure provoque un déplacement radial et aussi un déplacement dans la direction tangentielle à cause de l'effet Poisson. En bloquant le déplacement dans la direction tangentielle des nœuds dans les deux sections Γ_r , on retrouve le même état de contrainte que dans le cas d'un pneumatique complet et donc une matrice de raideur ayant le même rôle que dans la matrice globale du pneumatique complet. La figure (5.9) montre les déplacements dans les deux cas de figure sous une pression de 2 bars.

Afin d'extraire les matrices de masse et de raideur de la cellule dans Abaqus, on effectue une analyse modale de la cellule autour de la position d'équilibre en relâchant les conditions aux limites sur les deux sections (Γ_R). Tous les termes de la matrice de raideur qui correspondent aux degrés de liberté bloqués sont remplacés par Abaqus par un grand nombre (10^{36}), même ceux qui correspondent aux conditions relâchées. Pour récupérer ces derniers, on calcule dans un premier temps les réactions aux nœuds appartenant à (Γ_R). Ces réactions sont ensuite introduites comme des forces concentrées dans un nouveau calcul statique. Finalement les matrices de masse et de raideur récupérées après une analyse modale correspondent à la matrice d'une cellule d'un pneumatique complet soumis à la même pression.

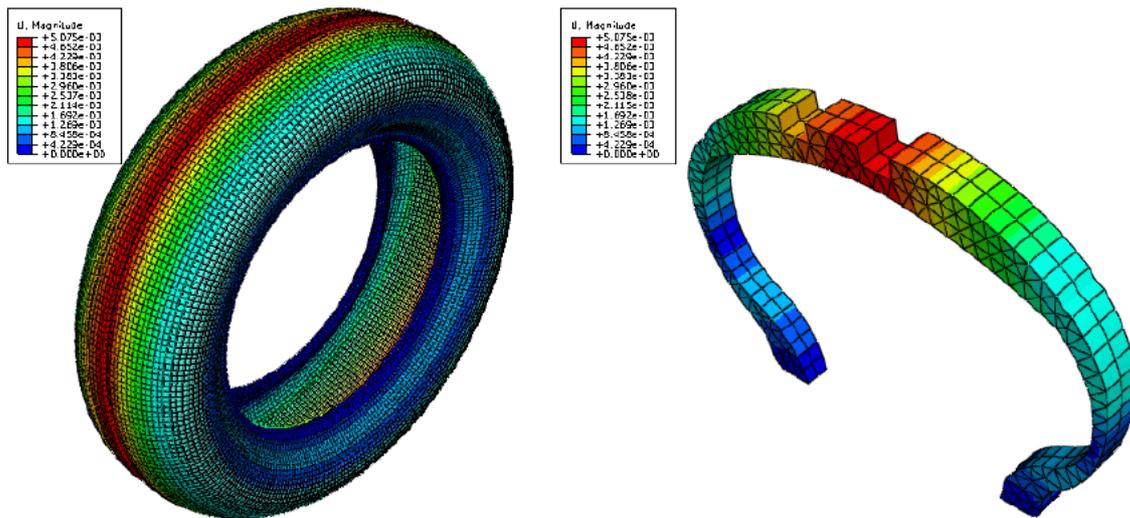


FIGURE 5.9: État précontraint sous une pression de 2 bars

Les figures (5.10) et (5.11) montrent respectivement la réponse radiale co-localisée d'un point de l'enveloppe extérieure d'abscisse $x = 0$, d'un pneumatique non gonflé et d'un pneumatique gonflé avec une pression de 2bars . Les calculs sont réalisés avec les deux modèles : le modèle complet d'Abaqus et le modèle périodique. Nous pouvons constater qu'on retrouve bien les mêmes résultats. L'avantage du modèle périodique est de permettre d'aller au-delà des basses fréquences ($0-500\text{ Hz}$) contrairement à un modèle éléments finis complet. Avec des codes industriels d'éléments finis comme Abaqus, Ansys ou Nastran, dès qu'on dépasse 500 Hz le problème devient très lourd et mène à des calculs très coûteux en terme de temps de calculs et de mémoire, voire impossible à résoudre avec les moyens informatiques actuels.

5.4 Influence des paramètres géométriques et mécaniques

Cette section sera consacrée à quelques simulations pour étudier l'influence des paramètres géométriques du pneumatique. Nous limitons notre étude à trois paramètres principaux : les deux rainures de la gomme, le rayon de la jante et la pression de gonflage. L'influence des matériaux n'est pas prise en compte, nous considérons un pneumatique de géométrie réelle avec un matériau homogène et isotrope. On s'intéresse particulièrement aux fonctions de Green et aux composantes radiales des forces et des déplacements.

5.4.1 Les rainures

C'est la partie creuse de la bande de roulement. Leurs formes et leurs tailles jouent un rôle fondamental dans la qualité du freinage, en particulier lorsque la chaussée est mouillée. Elles permettent de créer un espace indispensable pour évacuer l'eau entre le pneumatique et la chaussée. En revanche, elles ont un impact important sur le niveau de bruit émis lors du roulement avec le phénomène d'air pumping que nous avons expliqué dans le premier chapitre. Dans cette section, nous ne nous intéressons pas à ces aspects. Nous limitons notre étude à l'influence des rainures sur la réponse en fréquence du pneumatique. La figure (5.12) montre la réponse co-localisée d'un point de la surface extérieure du pneumatique d'abscisse $x = 0$ (voir figure 5.13).

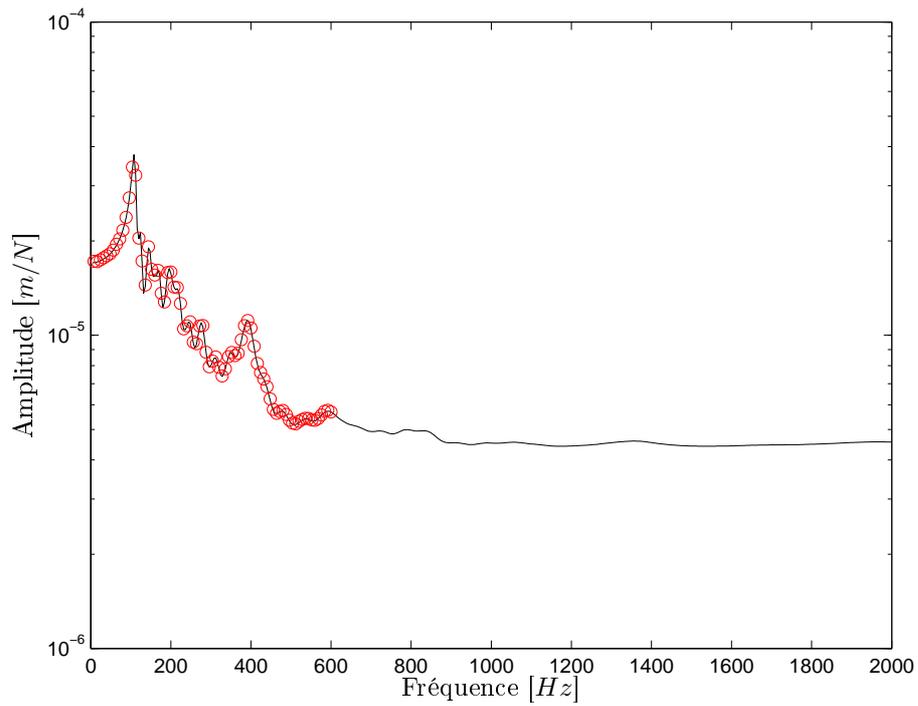


FIGURE 5.10: Validation du modèle périodique avec $P = 0$ bars : – modèle périodique, –o– modèle Abaqus complet

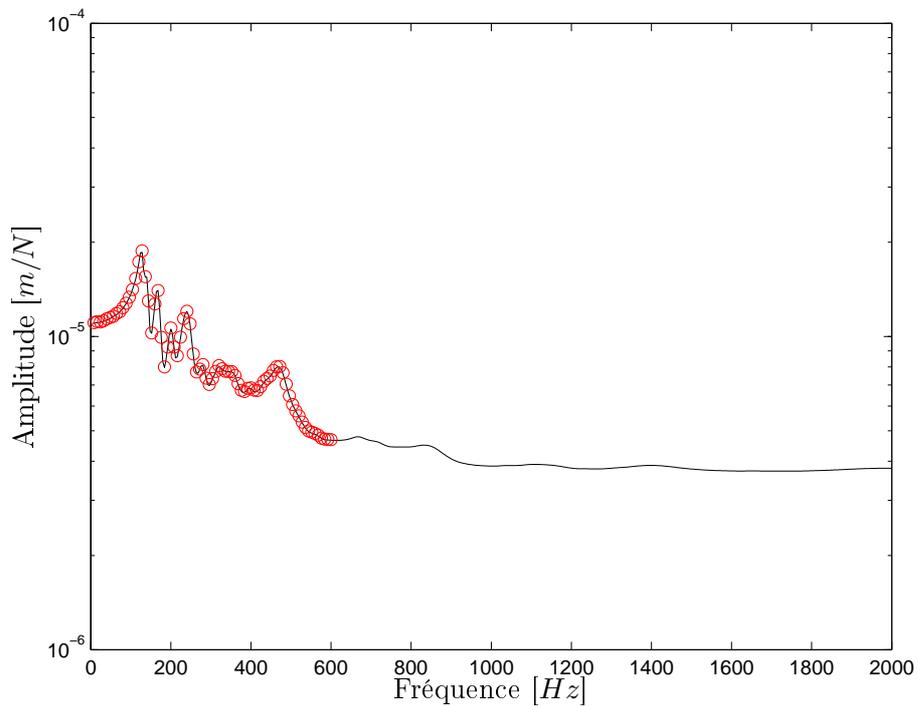


FIGURE 5.11: Validation du modèle périodique avec $P = 2$ bars : – modèle périodique, –o– modèle Abaqus complet

Globalement, les deux modèles ont un comportement similaire. La présence des rainures assouplit le pneumatique ce qui explique le décalage entre les deux courbes. La réponse du pneumatique

rainurée est plus importante en amplitude avec des fréquences propres plus faibles par rapport au pneumatique sans rainure. En réalité cette influence est moins importante pour un pneumatique réel où la rigidité des sculptures est très faible par rapport aux autres parties du pneumatique.

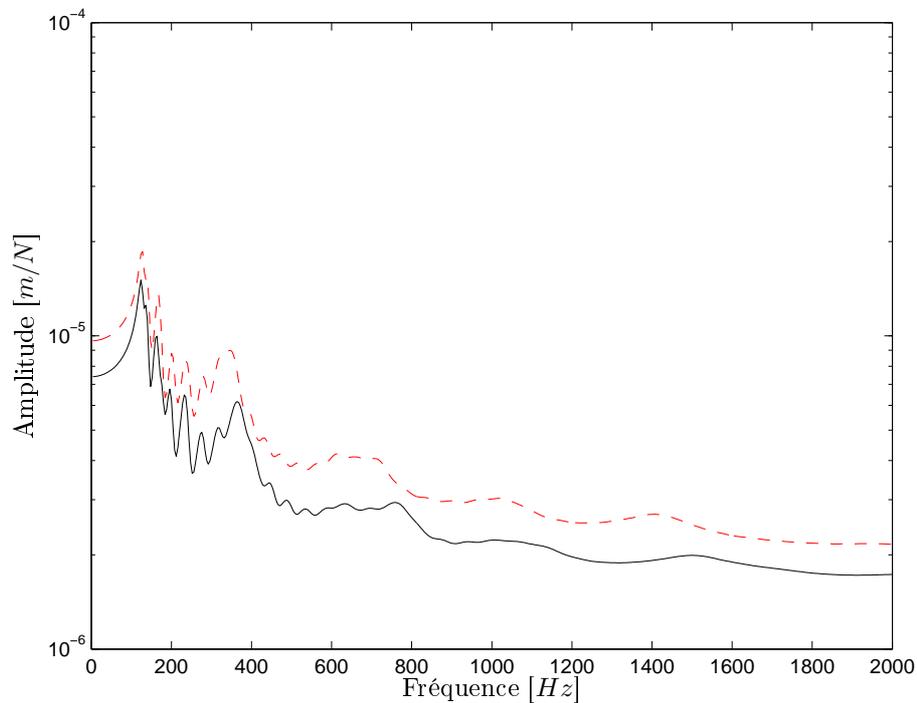


FIGURE 5.12: Influence des rainures sur la réponse fréquentielle du pneumatique : — pneumatique lisse, - - pneumatique rainuré

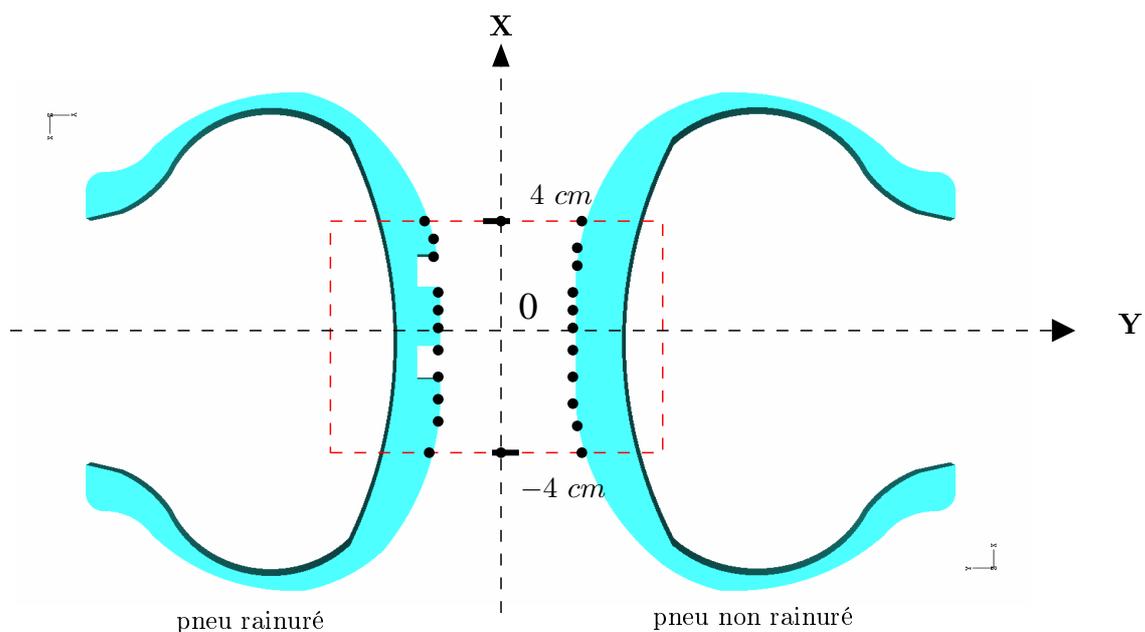


FIGURE 5.13: Positions des points de contact pour un pneumatique lisse et un pneumatique rainuré

5.4.2 La pression

Les figures (5.14) et (5.15) montrent respectivement la réponse co-localisée au point ($x = 0$) pour différentes valeurs de pression de gonflage d'un pneumatique lisse et d'un pneumatique rainuré. Augmenter la pression de gonflage revient à augmenter la rigidité du pneumatique ce qui explique le décalage entre les courbes pour les différentes valeurs de la pression. Ce décalage est plus marqué aux basses fréquences.

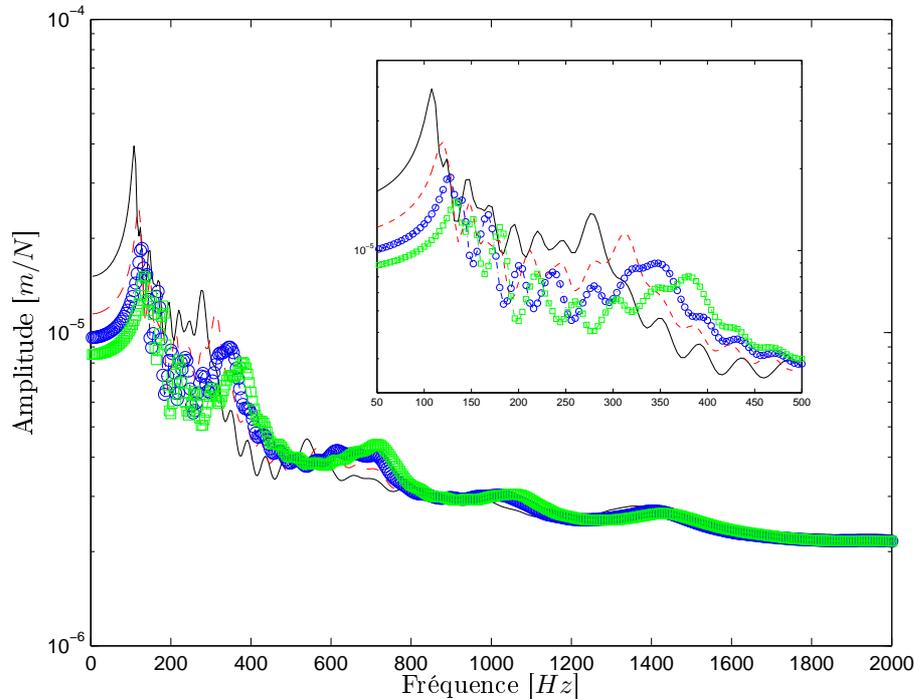


FIGURE 5.14: Influence de la pression sur la réponse fréquentielle d'un pneumatique lisse : - $P = 0$ bars ,
 - - $P = 1$ bars, -o- $P = 2$ bars, -□- $P = 3$ bars

5.4.3 Le rayon de la jante

La figure (5.16) montre la même réponse en fréquence co-localisée au point d'abscisse $x = 0$ pour trois valeurs de rayons : 13 pouces, 14 pouces et 15 pouces. L'augmentation du rayon de la jante assouplit le pneumatique. Nous pouvons constater que cette influence est moins importante que celle de la pression de gonflage ou la présence des rainures.

5.4.4 Symétrie de la bande de roulement

Le profil du pneumatique étudié représente une légère dissymétrie entre la partie intérieure et la partie extérieure de la bande de roulement. Les figures (5.17) et (5.18) illustrent cette dissymétrie. En effet, le pneumatique est excité au point $x = 0$ puis on calcule la réponse en fréquences aux points $x = \pm 1$ cm, $x = \pm 2$ cm et $x = \pm 3$ cm et $x = \pm 4$ cm. On peut constater que les courbes des points situés à $\pm x$ sont quasiment confondues en particulier dans les basses fréquences.

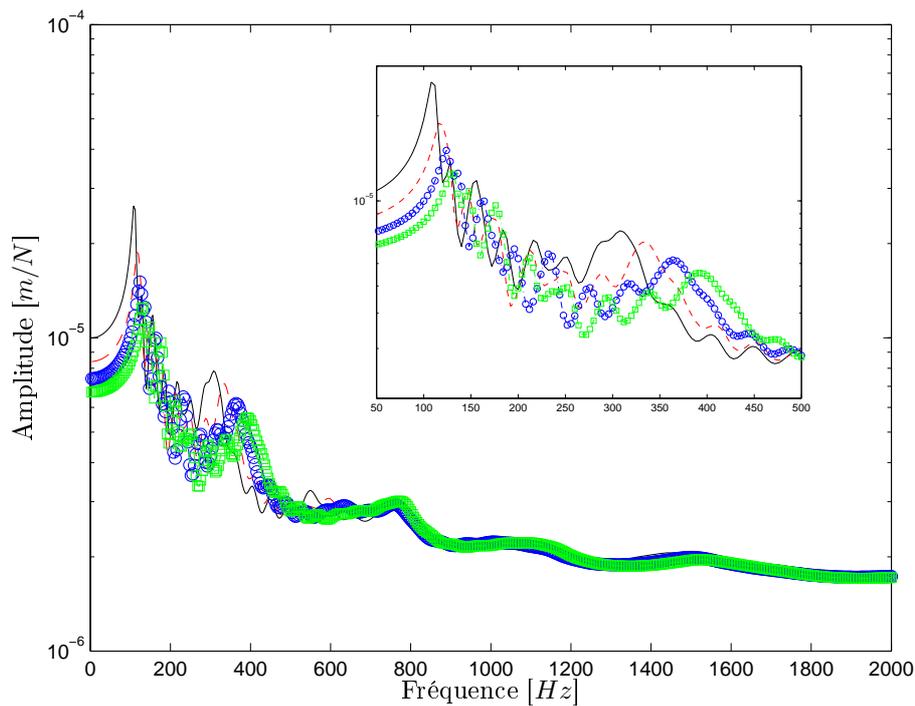


FIGURE 5.15: Influence de la pression sur la réponse fréquentielle d'un pneumatique rainuré : - $P = 0$ bars, - - $P = 1$ bars, -o- $P = 2$ bars, -□- $P = 3$ bars

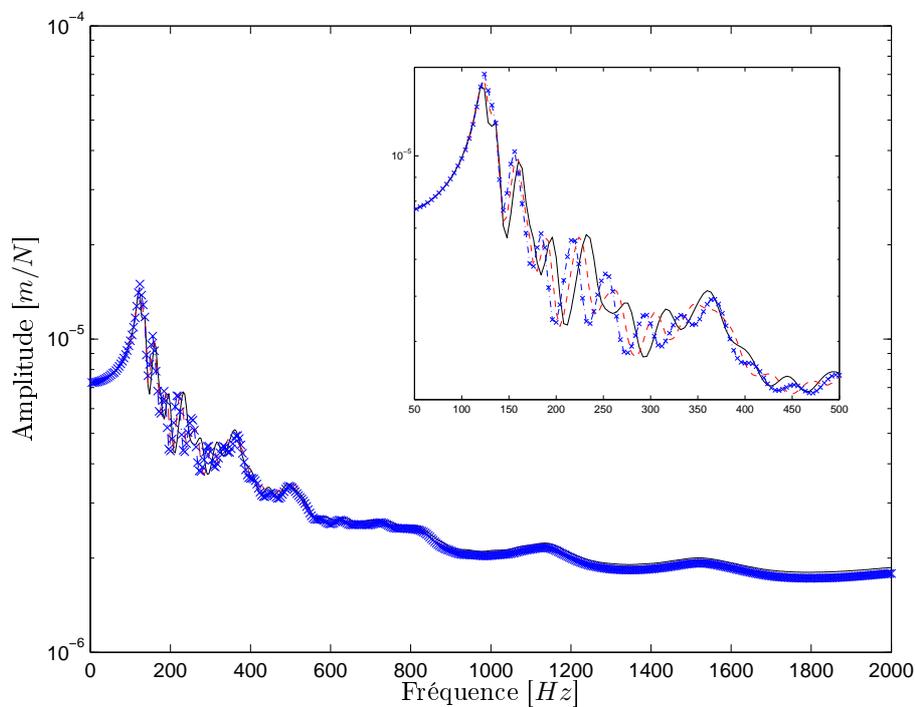


FIGURE 5.16: Influence du rayon de la jante sur la réponse fréquentielle d'un pneumatique lisse : - 13 pouces, - - 14 pouces, -o- 15 pouces

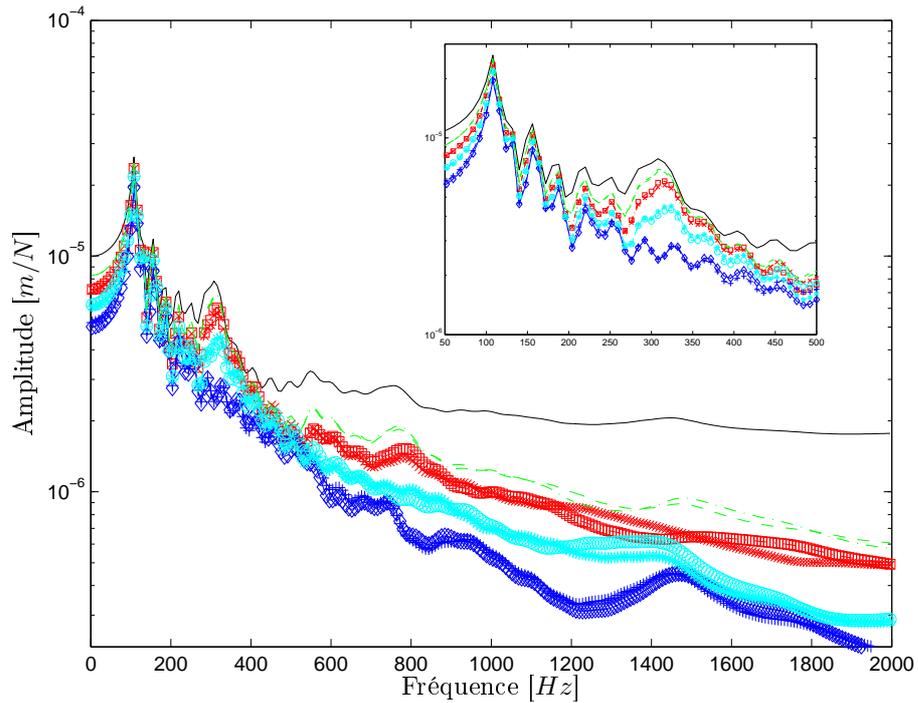


FIGURE 5.17: Réponse en fréquence pour différents points d'un pneumatique lisse : - $x = 0$, - - $x = -1$ cm, - . - $x = +1$ cm, - \square - $x = -2$ cm, - \diamond - $x = +2$ cm, - \circ - $x = -3$ cm, - $*$ - $x = +3$ cm, - $+$ - $x = -4$ cm, - X - $x = +4$ cm

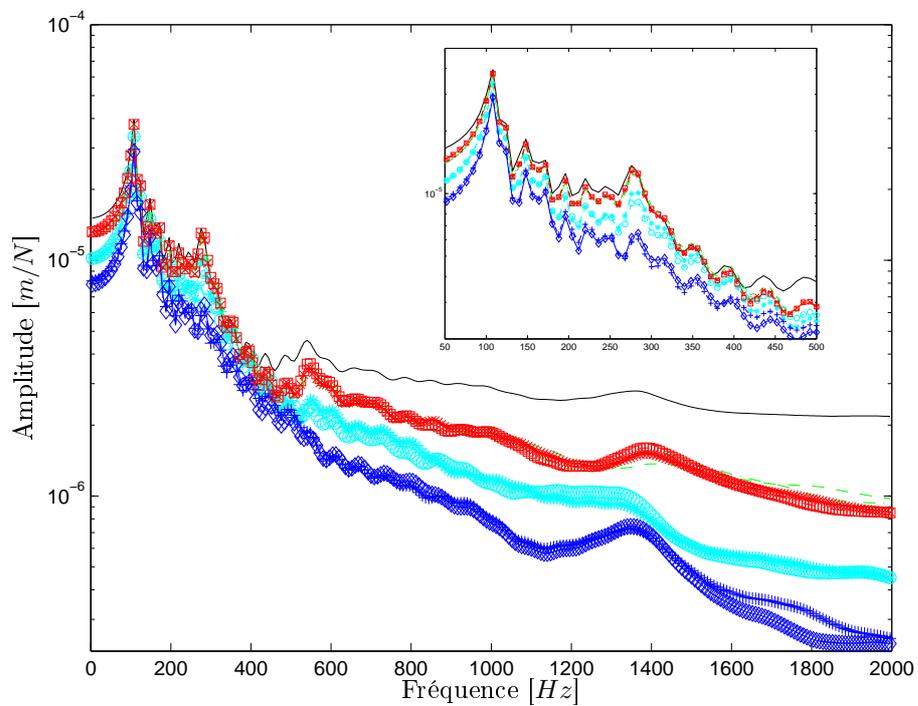


FIGURE 5.18: Réponse en fréquence pour différents points d'un pneumatique rainuré : - $x = 0$, - - $x = -1$ cm, - . - $x = +1$ cm, - \square - $x = +2$ cm, - \diamond - $x = +2$ cm, - \circ - $x = -3$ cm, - $*$ - $x = +3$ cm, - $+$ - $x = -4$ cm, - X - $x = +4$ cm

5.5 Modèle de pneumatique hétérogène

5.5.1 Propriétés des matériaux du pneumatique

Le pneumatique étudié est un pneu Michelin de type 165/65/R13 77T. Ses caractéristiques sont regroupées dans le tableau (5.2).

Diamètre intérieur	13 pouces (330.2 mm)
Largeur de bande de roulement	165 mm
Hauteur du flanc	65 mm
Charge maximale	412 kg
Vitesse maximale	190 km/h
Pression interne maximale	2.7 bars

TABLE 5.2: Caractéristiques d'un pneu Michelin de type 165/65/R13 77T

Au cours de sa thèse à l'École des Ponts ParisTech, Hong-Hai NGUYEN a réalisé une campagne d'essais pour mesurer les propriétés statiques et dynamiques des différents constituants du pneumatique étudié. Nous allons exploiter ses résultats pour notre modélisation numérique. Le pneumatique est subdivisé principalement en quatre matériaux :

- le caoutchouc : le caoutchouc est le composant principal du pneumatique. Ses propriétés mécaniques sont difficiles à mesurer localement. On considère que le caoutchouc dans les sculptures et le flanc est isotrope. Ses propriétés ont été mesurées par un essai de dureté en utilisant la loi de Hertz entre une bille en acier et un plan de caoutchouc ;
- les tringles : elles sont constituées de plusieurs câbles en acier de section circulaire. Le module équivalent de ses câbles est calculé par un essai de traction standard ;
- bande de roulement : elle se compose de deux couches élémentaires et d'une couche intermédiaire en caoutchouc. Chaque couche élémentaire est composée d'un mélange de câbles en acier torsadés avec une matrice de caoutchouc. Les deux directions principales de la couche élémentaire sont inclinées d'un angle $\theta = \pm 20^\circ$. Les modules élastiques ont d'abord été mesurés par un essai de traction. Ensuite ils ont été calculés par une loi de mélange ;
- Le flanc : il est constitué de fibres qui sont souvent fabriquées en nylon ou en polyester et dont le diamètre varie entre 0.2 mm et 0.4 mm [BCDP07]. Les fibres sont immergées dans une matrice de caoutchouc.

Pour conserver la propriété de périodicité du pneumatique, on modélise le flanc par un matériau homogène équivalent. Les quatre parties du pneumatique sont illustrées dans la figure (5.19) et le tableau (5.3) résume les valeurs des paramètres utilisés pour les simulations.

5.5.2 Fonctions de Green

Les figures (5.20), (5.21) et (5.22) montrent respectivement la partie réelle, la partie imaginaire et l'amplitude de la réponse en fréquence du pneumatique suite à une excitation au point d'abscise $x = 0$. Les réponses sont calculées en différents points de la l'enveloppe extérieurs du pneumatique de la même section et d'abscisses entre -4 cm et 4 cm (voir figure 5.13). Nous pouvons constater le caractère quasi-symétrique par rapport à l'origine. Cette dissymétrie est due à la dissymétrie des sculptures par rapport au plan (Oyz).

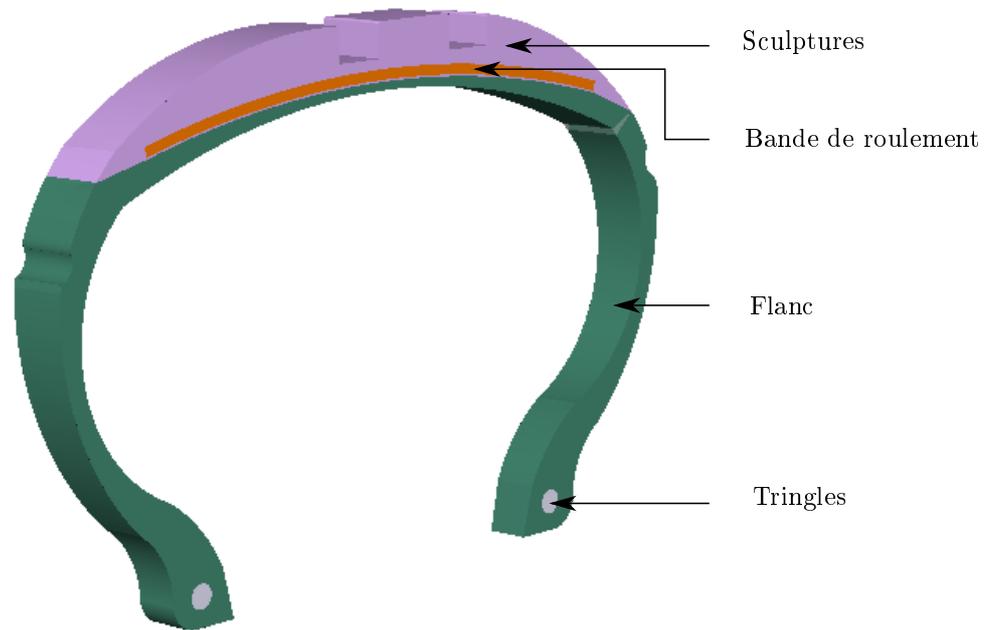


FIGURE 5.19: Modélisation d'une cellule de pneumatique avec trois types de matériaux

Parties	Composition	Paramètres	Valeurs
Sculptures	Caoutchouc	ρ	1000 kg/m^3
		E	7 MPa
		ν	$0,49$
Tringles	Fils d'acier	ρ	7850 kg/m^3
		E	$162,6 \text{ GPa}$
		ν	$0,33$
Flanc	Caoutchouc + fibre de nylon	ρ	1000 kg/m^3
		E	109 MPa
		ν	$0,48$
Bande de roulement	Matrice en caoutchouc + fils en acier	ρ	2014 kg/m^3
		E_r	663 MPa
		E_x	624 MPa
		ν_{ry}	$0,4$
		G_{ry}	330 MPa

TABLE 5.3: Caractéristiques du pneumatique homogène

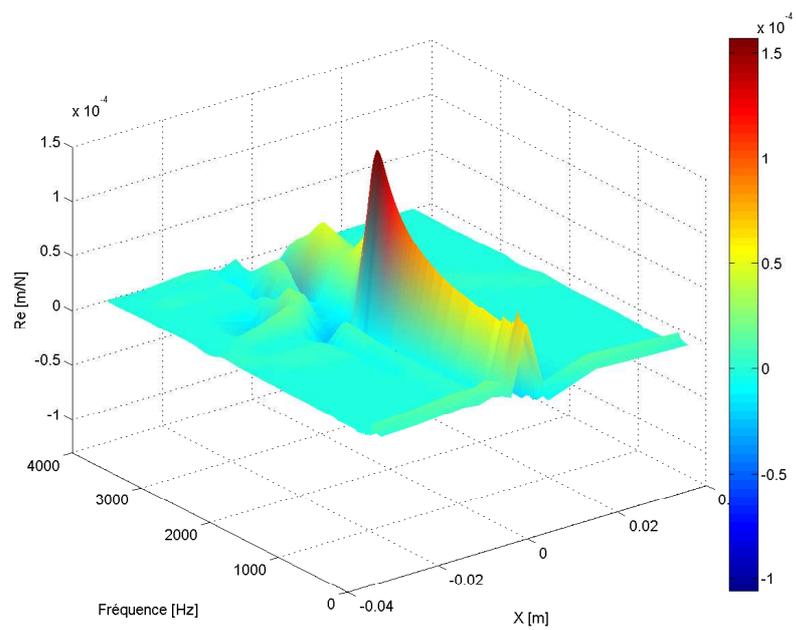


FIGURE 5.20: Parties réelles des réponses en fréquence de différents points suite à une excitation en $x = 0$

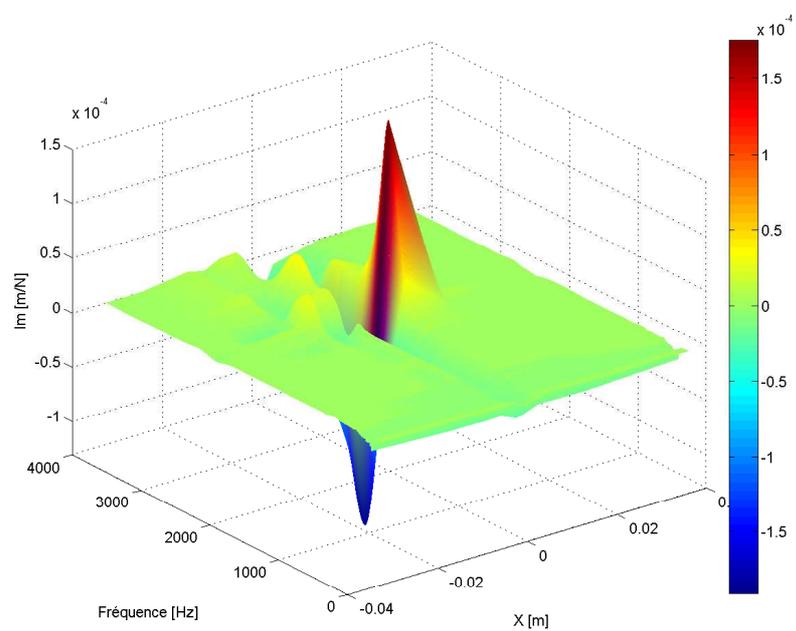


FIGURE 5.21: Parties imaginaires des réponses en fréquence de différents points suite à une excitation à $x = 0$

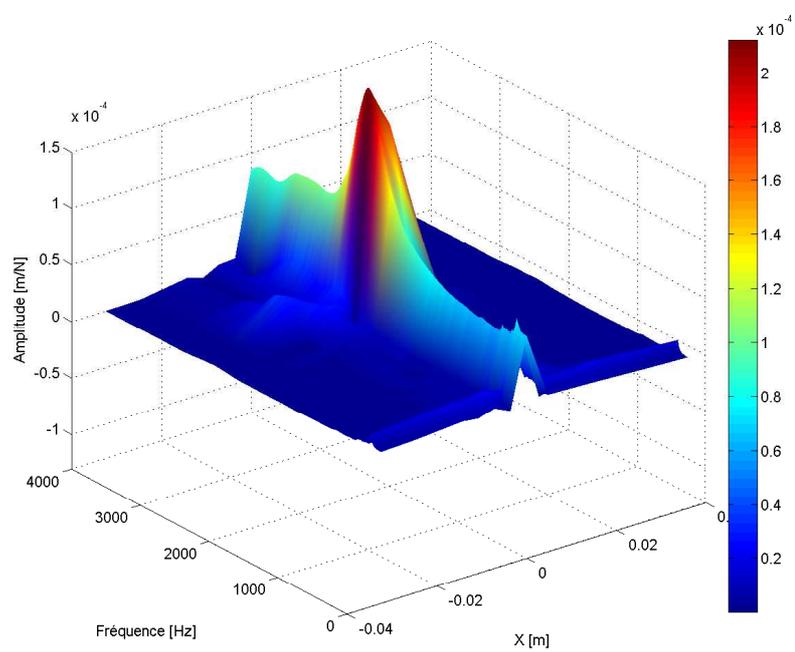


FIGURE 5.22: Amplitudes des réponses en fréquence de différents points suite à une excitation à $x = 0$

5.6 Conclusion

L'application de la méthode périodique pour une structure complexe tel qu'un pneumatique demande de prendre quelques précautions sur le maillage de la cellule de base, le repère d'étude et les conditions de chargement :

- le maillage de la section doit être adapté de telle façon que les nœuds à droite et les nœuds à gauche respectent les conditions de périodicité. Pour accélérer le calcul, il est préférable que la cellule de base ne contiennent pas de nœuds intérieurs. Les matrices de masse et de raideur doivent être exprimées dans un repère cylindrique ce qui permet d'avoir la même matrice de rigidité dynamique pour toutes les cellules du pneumatique ;
- l'application de la pression de gonflage sur la cellule de base doit amener la cellule au même état de contrainte qu'un pneumatique réel. Donc il est nécessaire de bloquer les déplacements circonférentiel de tous les nœuds des sections à gauche et à droite de la cellule de base. Les matrices élémentaires d'Abaqus ne prennent pas en compte la contribution non linéaire de la pression. Il est important de considérer les matrices de masse et les matrices de raideurs déjà assemblées par Abaqus où cette contribution est prise en compte.

Les propriétés géométriques et la pression ont une influence importante sur le comportement dynamique du pneumatique. La présence des rainures dans la bande de roulement diminue la rigidité de celle-ci tandis que la pression de gonflage permet de rigidifier le pneumatique.

Dans ce chapitre nous avons réussi à calculer les fonctions de Green de l'ensemble d'une cellule de pneumatique hétérogène. Le pneumatique est composé de quatre types de matériaux. La gomme, le flanc et les tringles sont modélisées par des matériaux homogènes et isotropes et la bande de roulement est modélisée par un matériau orthotrope. Les fonctions de Green sont calculées jusqu'à 4000 Hz . Ce calcul ne serait pas possible avec un code de calcul industriel comme Abaqus, Ansys ou Nastran.

Chapitre 6

Application au contact pneumatique/chaussée

LE modèle de contact multi-points a été présenté dans les chapitres précédents. Différents cas académiques ont été étudiés. Dans ce chapitre, nous allons appliquer ce modèle au cas d'un pneumatique $3D$ roulant sur différentes chaussées modèles et réelles. Dans un premier temps, les fonctions de Green sont calculées dans la zone de contact en utilisant le modèle périodique présenté dans le chapitre précédent. Ensuite, les propriétés de symétrie et de périodicité de la matrice globale des fonctions de Green sont exploitées afin d'optimiser le temps de calcul. Quelques simulations de l'évolution des déplacements et des forces de contact sont présentées pour différentes chaussées modèles sinusoïdales et réelles. Enfin, une étude de l'influence de la vitesse de déplacement et de la texture de la chaussée sur le contenu spectral de la force de contact pour différents types de chaussées est réalisée.

PLAN DU CHAPITRE 6

6.1	Calcul des fonctions de Green dans plusieurs sections	137
6.1.1	Matrice de rigidité dynamique	137
6.1.2	Matrice des fonctions de Green	138
6.1.3	Paramètres modaux	141
6.2	Profils de chaussées	143
6.2.1	Zone de contact	143
6.2.2	Chaussées sinusoïdales	143
6.2.3	Chaussées réelles	144
6.3	Principe du calcul	145
6.3.1	Paramètres de simulation	145
6.3.2	Déplacement statique	145
6.4	Résultats des simulations	148
6.4.1	Chaussées sinusoïdales	148
6.4.2	Chaussées réelles	150
6.4.3	Contenu spectral de la force de contact	151
6.5	Conclusion	155

6.1 Calcul des fonctions de Green dans plusieurs sections

Le modèle périodique, présenté dans le chapitre précédent, nous a permis de calculer les fonctions de Green dans une section du pneumatique. Le pneumatique a été réduit à une seule section. Les fonctions de Green ont été calculées en inversant la matrice de rigidité dynamique équivalente. Nous allons ici calculer ces fonctions de Green dans une zone de contact constituée de plusieurs sections.

6.1.1 Matrice de rigidité dynamique

On considère le domaine Ω occupé par le pneumatique. Ω est décomposé en deux sous-domaines Ω_l et Ω_c . On note N_c le nombre de cellules dans la zone de contact avec la chaussée située entre l'angle $\theta = 0$ et $\theta = \theta_c$, N_l le nombre de cellules libres (sans contact avec la chaussée) et N_s le nombre de degrés de liberté par section (voir figure 6.1).

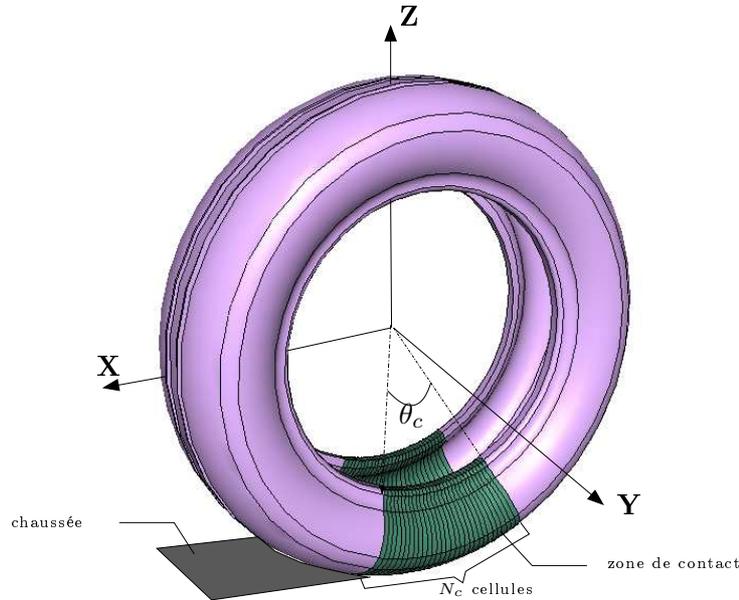


FIGURE 6.1: Zone de contact avec la chaussée

La matrice de rigidité dynamique des cellules libres (\mathbf{D}^{eq}) est calculée en utilisant l'algorithme de la matrice équivalente présenté dans le chapitre précédent. Elle est réduite à une taille de $2N_s$. La matrice globale équivalente de l'ensemble du pneumatique est calculée par un assemblage éléments finis classique de la matrice \mathbf{D}^{eq} et des N_c cellules de référence (voir figure (6.2)).

La matrice globale du pneumatique \mathbf{D}_T est calculée par l'équation (6.1). En cas d'absence de noeud à l'intérieur de la cellule de base, cette matrice a la structure illustrée par la figure (6.3). La matrice \mathbf{D}_T est creuse. Elle est constituée de plusieurs sous-matrices qui elles aussi sont creuses (résultant de l'assemblage de la matrice de référence). Seuls les blocs extrêmes sont pleins : ils traduisent le couplage entre la partie libre du pneu et la partie en contact. Dans le cas où la cellule de référence contient des noeuds intérieurs, la matrice globale aura la même forme mais avec des sous-matrices pleines. Cela aura pour effet d'augmenter le temps de calcul.

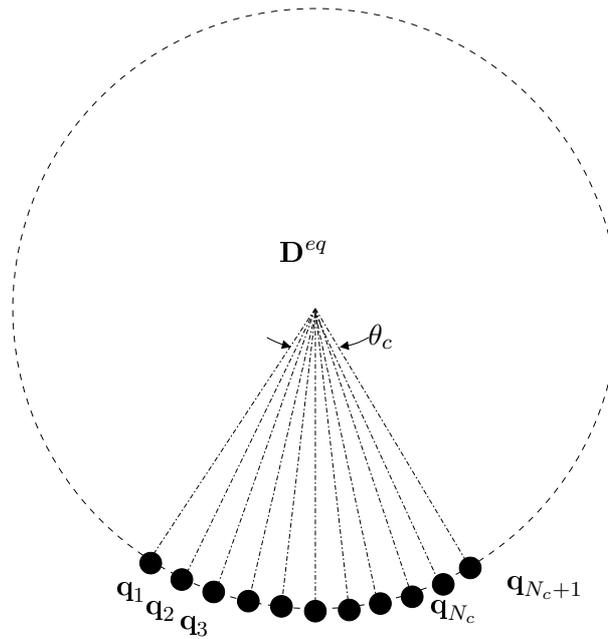


FIGURE 6.2: Représentation des dcls de la matrice équivalente globale du pneumatique

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{11}^{eq} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D}_{12}^{eq} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} + \mathbf{D}_{11} & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21}^{eq} & \ddots & \ddots & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} + \mathbf{D}_{22}^{eq} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_T} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{N_c} \\ \mathbf{q}_{N_c+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{N_c} \\ \mathbf{f}_{N_c+1} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

6.1.2 Matrice des fonctions de Green

La matrice des fonctions de Green est calculée en résolvant l'équation (6.1) avec plusieurs cas de chargement. Pour chaque cas de chargement, on considère que l'effort est nul partout sauf à un point de la zone de contact et suivant la direction radiale. En balayant l'ensemble des points de la zone de contact, la matrice globale \mathbf{G} des fonctions de Green est construite. Grâce à la périodicité du pneumatique suivant la direction tangentielle, seul un nombre de cas de chargement n_s égal au nombre de points de la zone de contact appartenant à une seule section est nécessaire pour construire la matrice globale \mathbf{G} .

De plus, la matrice \mathbf{G} présente plusieurs symétries. D'abord, elle est symétrique et est consti-

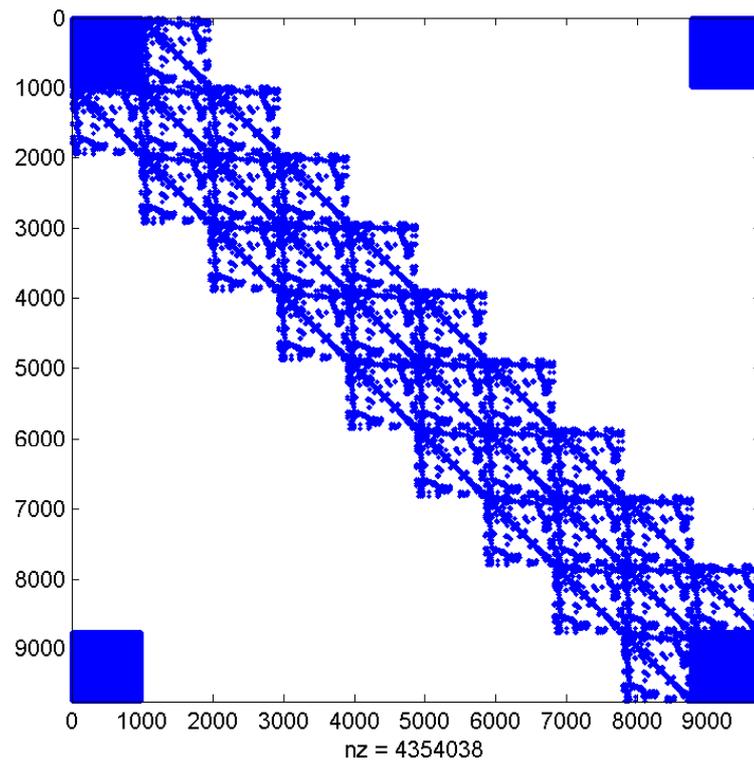


FIGURE 6.3: *Les termes non nuls de la matrice globale de rigidité dynamique*

tuée de plusieurs matrices locales¹ de taille n_s , également symétriques² comme le montre l'équation (6.2). Le nombre de fonctions de Green est de $[n_s(N_c + 1)]^2$. Cependant, il n'y a que $n_s(n_s + 1)(N_c + 1)/2$ fonctions différentes. La figure (6.4) montre un exemple d'amplitudes des fonctions de Green pour différentes fréquences. Nous pouvons voir le caractère symétrique de la matrice globale et des matrices locales, mais également la périodicité du problème. En effet, les matrices locales se répètent dans une direction diagonale de la matrice globale.

1. Les matrices locales correspondent aux interactions entre deux sections qui peuvent être identiques ou différentes

2. La symétrie est due au principe de réciprocité : la réponse en un point i suite à une excitation au point j est égale à la réponse au point j suite à la même excitation au point i

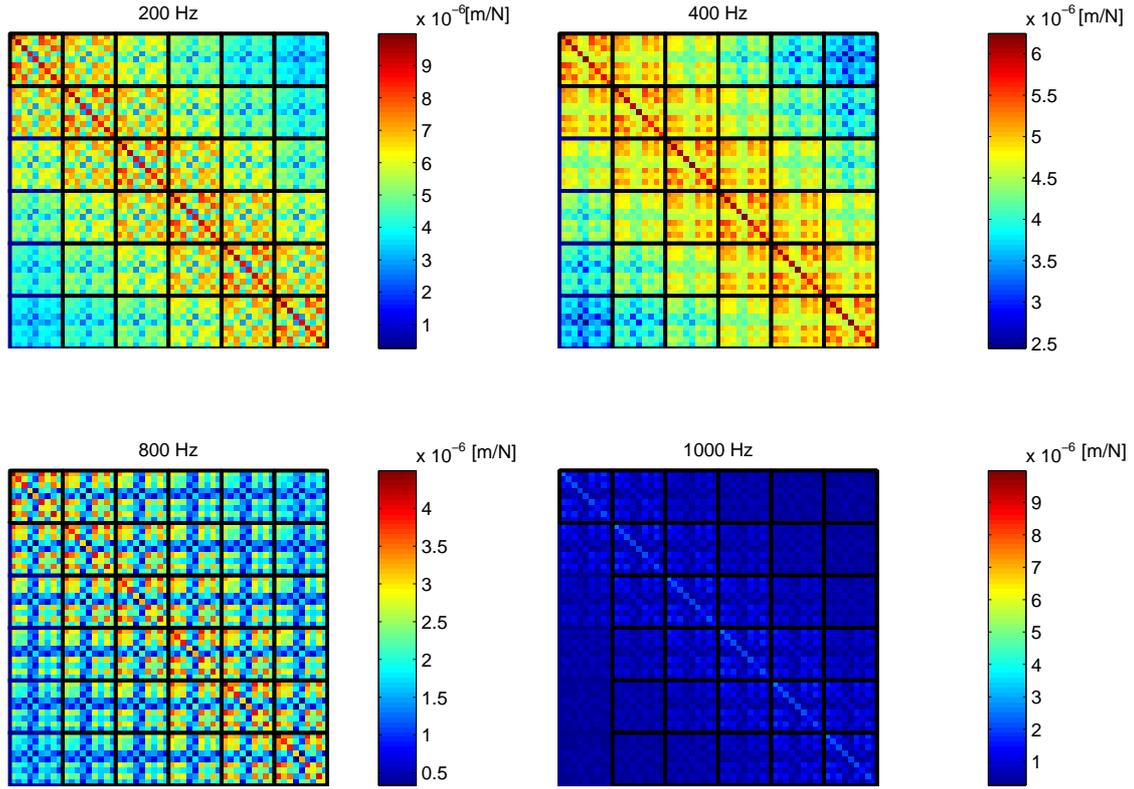


FIGURE 6.4: Périodicité de la matrice des fonctions de Green

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^1 & \cdots & \mathbf{G}_{1n_s}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{n_s n_s}^1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^2 & \cdots & \mathbf{G}_{1n_s}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{n_s n_s}^2 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^{N_c+1} & \cdots & \mathbf{G}_{1n_s}^{N_c+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{n_s n_s}^{N_c+1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^1 & \cdots & \mathbf{G}_{1n_s}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{n_s n_s}^1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^2 & \cdots & \mathbf{G}_{1n_s}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{n_s n_s}^2 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^3 & \cdots & \mathbf{G}_{1n_s}^3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{n_s n_s}^3 \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^1 & \cdots & \mathbf{G}_{1n_s}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{n_s n_s}^1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^2 & \cdots & \mathbf{G}_{1n_s}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{n_s n_s}^2 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^3 & \cdots & \mathbf{G}_{1n_s}^3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{n_s n_s}^3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

\mathbf{G}^1 est la matrice des fonctions de Green qui traduit les interactions entre les degrés de liberté appartenant à la même section, \mathbf{G}^2 traduit le couplage entre les degrés de liberté d'une section et de la section voisine et plus généralement la matrice \mathbf{G}^n traduit le couplage entre deux sections séparées de $(n - 2)$ sections.

6.1.3 Paramètres modaux

Les fonctions de Green calculées à l'aide du modèle périodique sont ensuite décomposées dans une base modale. Nous avons utilisé l'algorithme LSCE présenté dans le deuxième chapitre. Pour chaque fonction de Green nous choisissons le nombre de paramètres modaux donnant la meilleure approximation. L'erreur entre la fonction de Green et sa décomposition est donnée par la formule :

$$E = \frac{\int_0^{\omega_{max}} |G(\omega) - \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{j\omega - \lambda_k}| d\omega}{\int_0^{\omega_{max}} |G(\omega)| d\omega} \quad (6.3)$$

La figure (6.5) montre un exemple de valeurs de cette erreur pour la section du pneumatique à $\theta = 0$ (une section de pneumatique contient 12 points et à chaque couple de points correspond une fonction de Green) et le tableau (6.1) montre le nombre de modes retenus pour chaque fonction de Green.

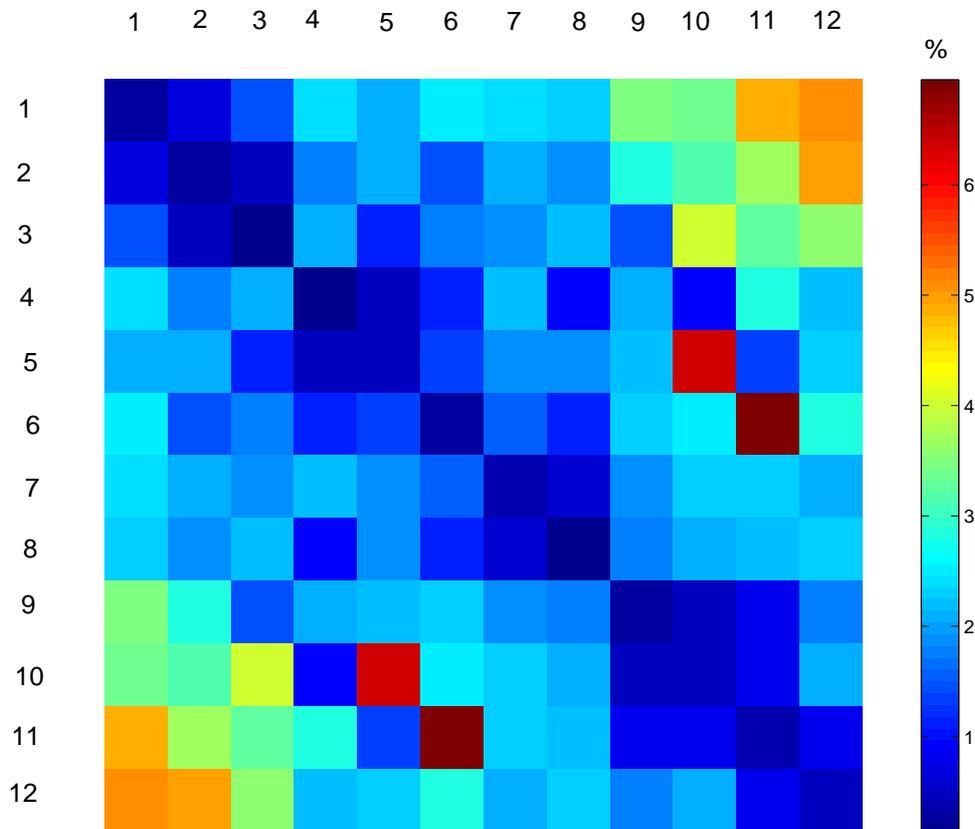
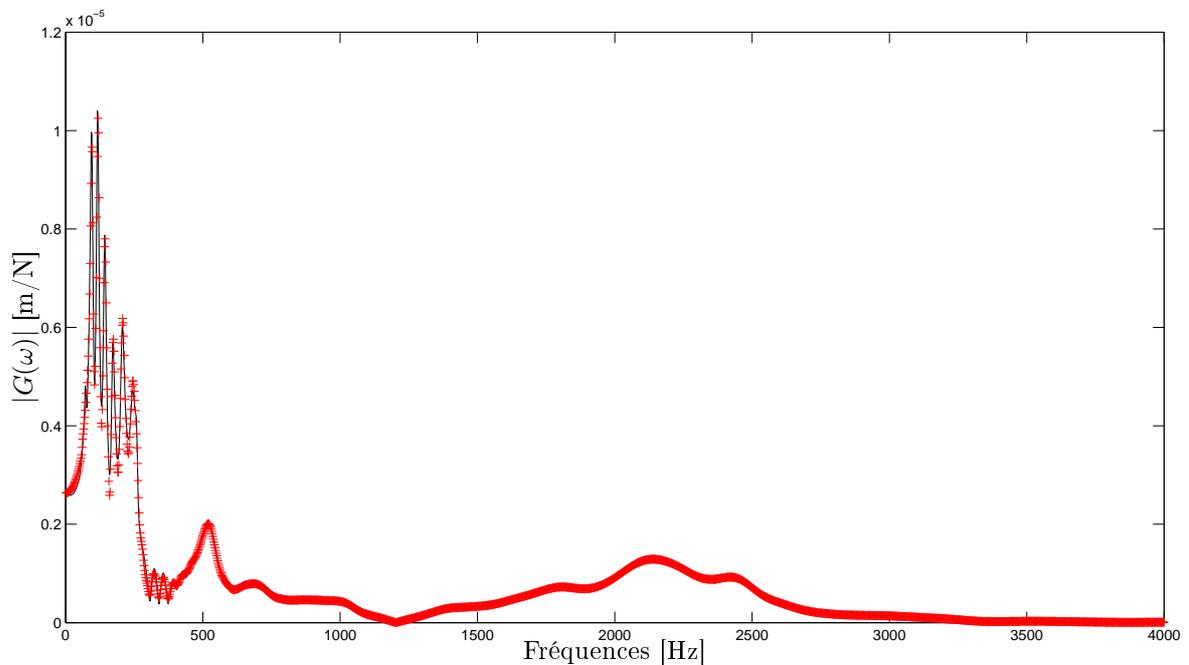


FIGURE 6.5: Erreur d'approximation des fonctions de Green de la section à $\theta = 0$

L'erreur d'approximation est généralement en dessous de 5%. La figure (6.6) montre une comparaison entre une fonction de Green et sa décomposition dans le cas où l'erreur est maximale (6.5%). Nous pouvons constater que les graphes sont quasiment confondus.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	33	38	39	39	74	79	73	78	79	77	75	74
2	38	31	42	39	82	76	67	81	78	77	78	73
3	39	42	34	39	76	70	79	61	81	68	78	79
4	39	39	39	33	76	71	73	71	72	80	79	77
5	74	82	76	76	34	41	37	72	39	72	72	74
6	79	76	70	71	41	36	39	37	38	79	72	71
7	73	67	79	73	37	39	38	39	40	76	72	76
8	78	81	61	71	72	37	39	37	41	79	70	70
9	79	78	81	72	39	38	40	41	37	67	71	76
10	77	77	68	80	72	79	76	79	67	36	38	41
11	75	78	78	79	72	72	72	70	71	38	35	38
12	74	73	79	77	74	71	76	70	76	41	38	35

TABLE 6.1: Nombre de modes retenus pour l'approximation des fonctions de Green de la section à $\theta = 0$ FIGURE 6.6: Comparaison d'une fonction de Green et de son approximation dans le cas le plus défavorable :
— fonction de Green, -+- son approximation

6.2 Profils de chaussées

6.2.1 Zone de contact

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la taille de l'aire de contact est un paramètre essentiel pour le calcul des déplacements et des forces de contact dans les conditions de roulement. Quelques travaux ont été réalisés sur la mesure de l'aire de contact dans les cas statique et dynamique. Sabey et Lupton [SL67] ont utilisé un système photographique placé sous la chaussée pour mesurer l'aire de contact dans les conditions de roulement. Ils constatent un écart de 10 à 20% entre l'aire en statique et en dynamique. Des résultats similaires ont été trouvés par Périssé [Per02] et Cesbron [Ces07]. Ce dernier a mesuré l'aire de contact en fixant un capteur Tekscan³ sur la chaussée. L'auteur a mesuré l'aire de contact pour différentes vitesses et pour plusieurs types de chaussées. Sur l'ensemble des chaussées, il constate également que la vitesse a très peu d'influence sur les dimensions de l'aire de contact une fois le roulement établi.

Dans l'ensemble des simulations, on suppose que les chaussées sont parfaitement rigides et que l'aire de contact est constante au cours du roulement. On définit deux surfaces, la surface de la chaussée notée S_r et la surface de contact entre le pneumatique et la chaussée S_c . S_r est fixe et S_c se déplace avec une vitesse constante V_0 dans la direction \mathbf{X} comme le montre la figure (6.7).

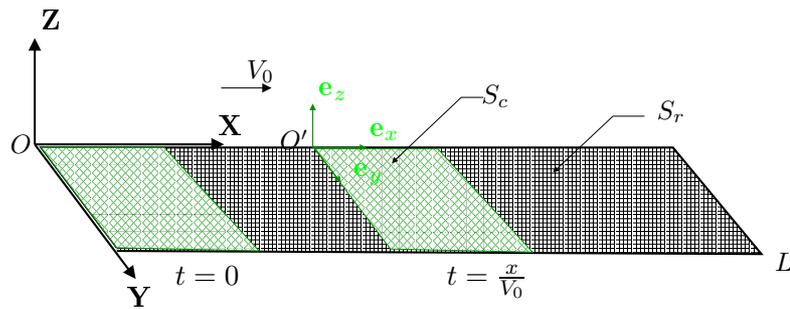


FIGURE 6.7: Déplacement de la zone de contact sur la chaussée

6.2.2 Chaussées sinusoïdales

On choisit une zone de contact rectangulaire de longueur $L_c = 6 \text{ cm}$ et de largeur $b_c = 8 \text{ cm}$. La chaussée est de longueur L et de largeur b , sa hauteur notée $u_r(x, y)$ est de forme sinusoïdale avec une amplitude maximale A_0 . Pour les simulations, on considère trois types de chaussée sinusoïdale u_r^a , u_r^b et u_r^c définis par les équations suivantes (voir figure 6.8) :

$$u_r^a(x, y) = A_0 \sin(k_x x) = A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_x} x\right) \quad (6.4)$$

$$u_r^b(x, y) = \frac{A_0}{2} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_x} x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_y} y\right) \right] \quad (6.5)$$

$$u_r^c(x, y) = \frac{A_0}{N} \sum_{i=1}^N \left[\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_{x_i}} x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_{y_i}} y\right) \right] \quad (6.6)$$

3. Le capteur Tekscan comporte 2288 cellules réparties sur 44 lignes et 52 colonnes

avec k_x et k_y les nombres d'onde dans les directions \mathbf{X} et \mathbf{Y} . λ_x et λ_y sont respectivement les longueurs d'onde dans les directions \mathbf{X} et \mathbf{Y}

Le pneumatique se déplace suivant la direction \mathbf{X} avec une vitesse constante V_0 . A l'instant t , un point de la zone de contact se situe à une distance $x = V_0 t$.

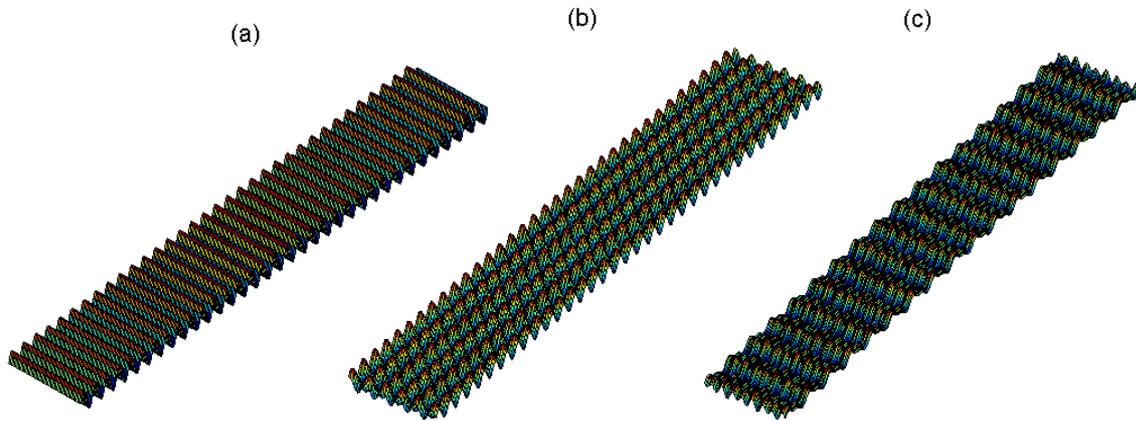


FIGURE 6.8: *Types de chaussées simulées : (a) chaussée mono-sinusoidale dans la direction \mathbf{X} , (b) chaussée mono-sinusoidale dans les directions \mathbf{X} et \mathbf{Y} , (c) chaussée multi-sinusoidale dans les directions \mathbf{X} et \mathbf{Y} .*

6.2.3 Chaussées réelles

Nous avons choisi de travailler sur deux textures de chaussées mesurées en $3D$ lors du projet franco-allemand Deufrako P2RN (2006-2008). Les amplitudes des chaussées sont mesurées sur une longueur $L = 2\text{ m}$ et une largeur $b = 0.35\text{ m}$ avec une résolution $dx = dy = 384\text{ }\mu\text{m}$. La figure 6.9 montre un échantillon de ces chaussées de 0.1 m par 0.1 m .

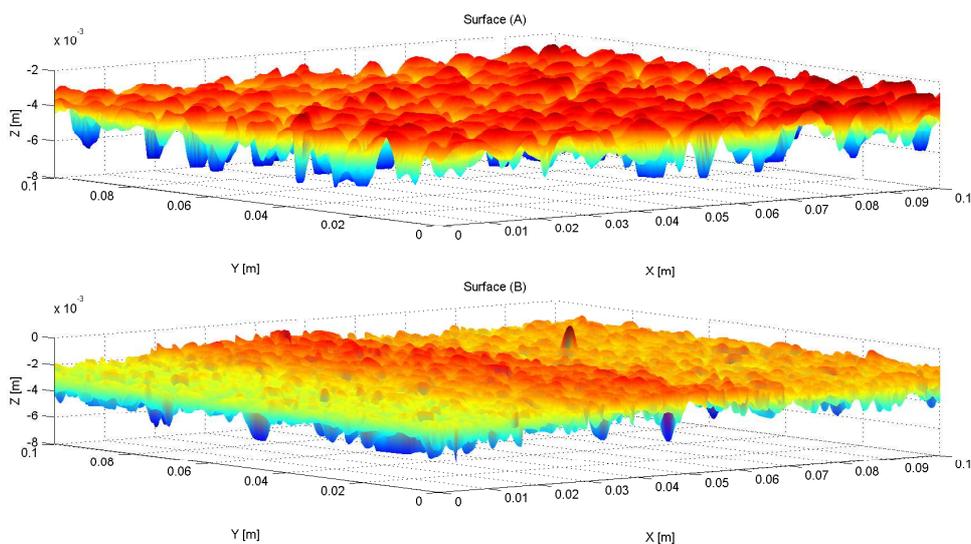


FIGURE 6.9: *Représentation 3D de la texture des échantillons des chaussées utilisées dans les simulations*

6.3 Principe du calcul

6.3.1 Paramètres de simulation

Dans cette partie, les déplacements et les forces de contact sont calculés pour différentes configurations. Pour le pneumatique, on reprend les mêmes paramètres que ceux utilisés dans le modèle hétérogène présenté au chapitre précédent. Les fonctions de Green sont calculées dans la bande de fréquence $[0 \text{ } 4000 \text{ Hz}]$. La zone de contact $S_c(t)$ évolue en fonction du temps en raison de la variation de la texture de chaussée au cours du roulement.

Dans le premier exemple de simulation, nous nous intéressons à l'influence des longueurs d'onde λ_x et λ_y de la chaussée. Le deuxième paramètre à étudier est la vitesse de déplacement du pneumatique V_0 . Elle est supposée constante avec un mouvement de translation rectiligne dans la direction \mathbf{X} .

Les points de contact sont les points appartenant à l'intersection de la surface $S_c(t)$ avec celle de la chaussée. A chaque instant t , leurs coordonnées dans le repère local $(O', \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ sont (x_0, y_0, z_0) . Ils se déplacent à la même vitesse V_0 dans la direction \mathbf{X} . Leurs coordonnées dans le repère fixe $(O, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ sont (x, y, z) tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + V_0 t \\ y = y_0 \\ z = u_r(x, y) \end{cases} \quad (6.7)$$

Par ailleurs, il faut bien noter que la zone de contact maximale reste constante au cours du roulement alors que le nombre de points en contact peut évoluer en raison des pertes de contact en certains points à cause des effets dynamiques.

6.3.2 Déplacement statique

A l'instant initial $t = 0$, le pneumatique est supposé en contact avec la chaussée dans la zone de contact $S_c(t = 0)$. Les forces de contact dynamiques \mathbf{F}_d sont nulles et les forces de contact statiques \mathbf{F}_s sont équilibrées par le poids du véhicule. A chaque instant t , le déplacement du pneumatique peut être décomposé en deux composantes, un déplacement statique U_s induit par la force statique et un déplacement \mathbf{U}_d dynamique autour de cette position d'équilibre. La figure (6.10) montre une illustration de cette décomposition.

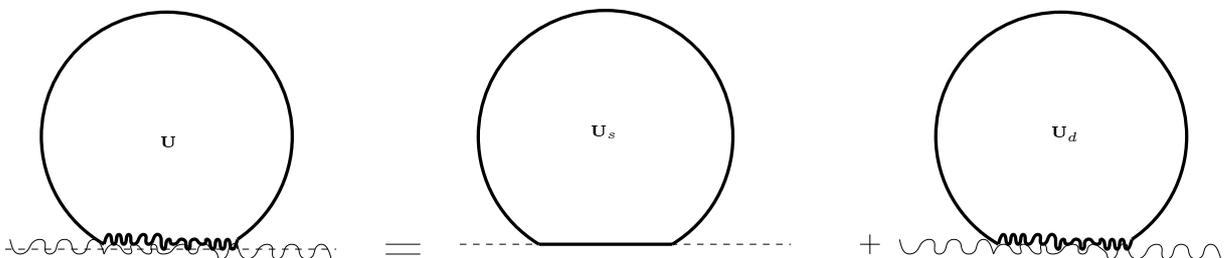


FIGURE 6.10: Décomposition du mouvement d'un pneumatique en contact avec une chaussée

L'équilibre statique se traduit par un écrasement du pneumatique sur une chaussée lisse. Le déplacement est le même dans toute la zone de contact et les forces de contact sont données par

l'intermédiaire de la rigidité statique du pneumatique. Les équations à résoudre sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_s = \mathbf{K}^s \mathbf{U}_s \\ \frac{M_0 g_0}{4} = \sum_{i=1}^{N_c} f_s^i \\ u_s = cte \end{cases} \quad (6.8)$$

avec

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} u_s \\ \vdots \\ u_s \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} f_s^1 \\ \vdots \\ f_s^{N_c} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

où $M_0 = 1200 \text{ kg}$, $g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, N_c , f_s^i et \mathbf{K}^s sont respectivement la masse du véhicule, l'accélération de la pesanteur, le nombre de points en contact, la force statique au point i et la matrice de rigidité statique ($\mathbf{K}^s = \mathbf{G}^{-1}(\omega = 0)$).

Les équations (6.8) peuvent aussi s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{f_s^i}{u_s} = \sum_{j=1}^{N_c} K_{ij}^s, \forall i \in [1, N_c] \\ \frac{M_0 g_0}{4} = \sum_{i=1}^{N_c} f_s^i \end{cases} \quad (6.10)$$

Finalement, le déplacement statique est calculé par la formule :

$$u_s = \frac{M_0 g_0}{4 \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} K_{ij}^s} \quad (6.11)$$

Les forces dynamiques sont dues aux irrégularités de la chaussée. En l'absence de ces irrégularités, les forces dynamiques sont nulles et le pneumatique est seulement soumis au poids du véhicule. La figure (6.11) montre les forces de contact d'un pneumatique roulant sur une chaussée lisse avec différents nombres N_p de points de contact. Au départ, nous pouvons constater une oscillation de la force de contact autour d'une valeur moyenne. Ces oscillations sont dues à la première mise en contact du pneumatique avec la chaussée. Le système retrouve ensuite son état d'équilibre avec des forces de contact qui équilibrent le poids du véhicule en vérifiant les équations (6.8).

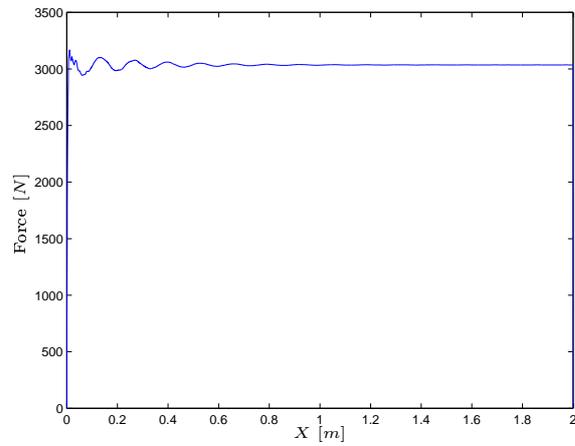
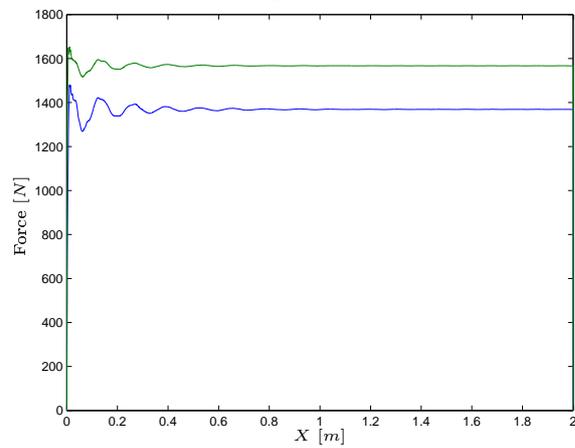
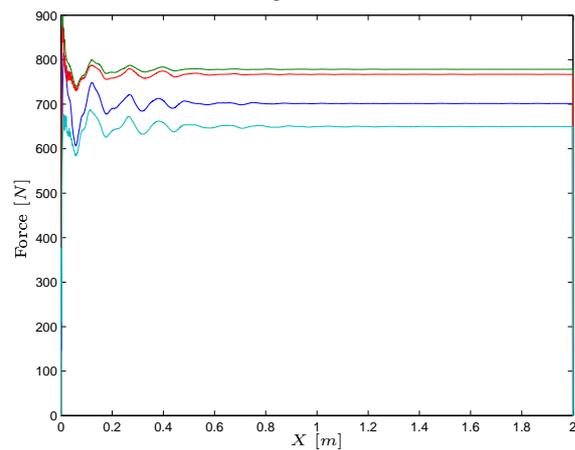
 $N_p = 1$  $N_p = 2$  $N_p = 4$

FIGURE 6.11: Force de contact pour un pneumatique roulant sur une chaussée lisse

6.4 Résultats des simulations

Pour l'ensemble des simulations, on considère une zone de contact de longueur $L_c = 6 \text{ cm}$ et de largeur $l_c = 8 \text{ cm}$. On note $N_x = 10$ le nombre de points dans la direction X et $N_y = 12$ le nombre de points dans la direction Y . Le pneumatique roule sur une chaussée de longueur $L = 2 \text{ m}$. Les simulations sont réalisées sur les différents types de chaussées présentés dans la section précédente.

6.4.1 Chaussées sinusoïdales

Dans un premier temps nous avons commencé par étudier des chaussées sinusoïdales. Des simulations sont effectuées pour les trois types de chaussées (a), (b) et (c). La vitesse de déplacement pour ces trois cas est de 50 km/h . Les figures (6.12), (6.13) et (6.14) représentent les déplacements et les forces de contact en fonction des coordonnées $x = V_0 t$ et y .

Dans les trois cas de figure, les déplacements ont généralement les mêmes formes que les chaussées. Nous constatons deux zones différentes, une zone dans laquelle les déplacements sont confondus avec les chaussées et une zone située entre les sommets des aspérités où le pneumatique vibre sans contact avec la chaussée. Des pertes de contact sont visibles au niveau des aspérités. Ces pertes sont plus marquées au niveau de la chaussée (c) où les tailles des grains sont plus grandes.

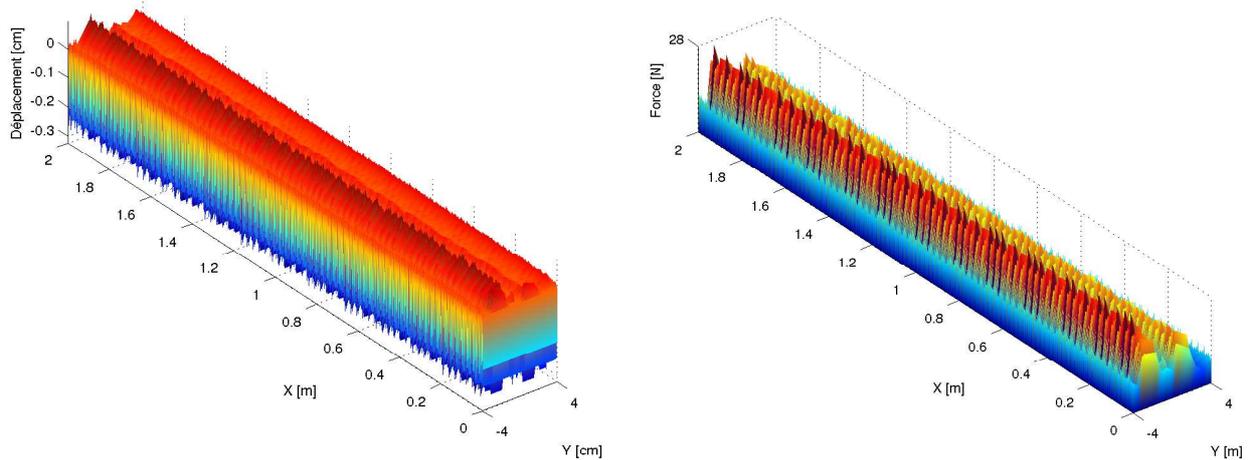


FIGURE 6.12: Evolution des déplacements et des forces de contact pour les points d'abscisses $x_0 = 0$ (chaussée sinusoïdale (a), $V_0 = 50 \text{ km/h}$, $\lambda_x = 4 \text{ mm}$, $\lambda_y = \infty$)

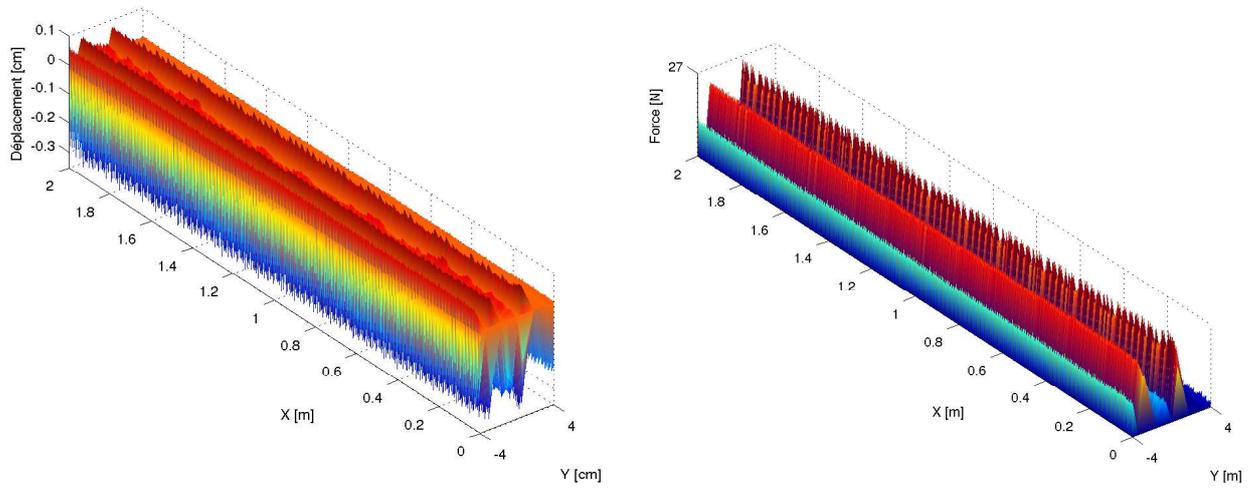


FIGURE 6.13: Evolution des déplacements et des forces de contact pour les points d'abscisses $x_0 = 0$ (chaussée sinusoïdale (b), $V_0 = 50$ km/h, $\lambda_x = 4$ mm, $\lambda_y = 4$ mm)

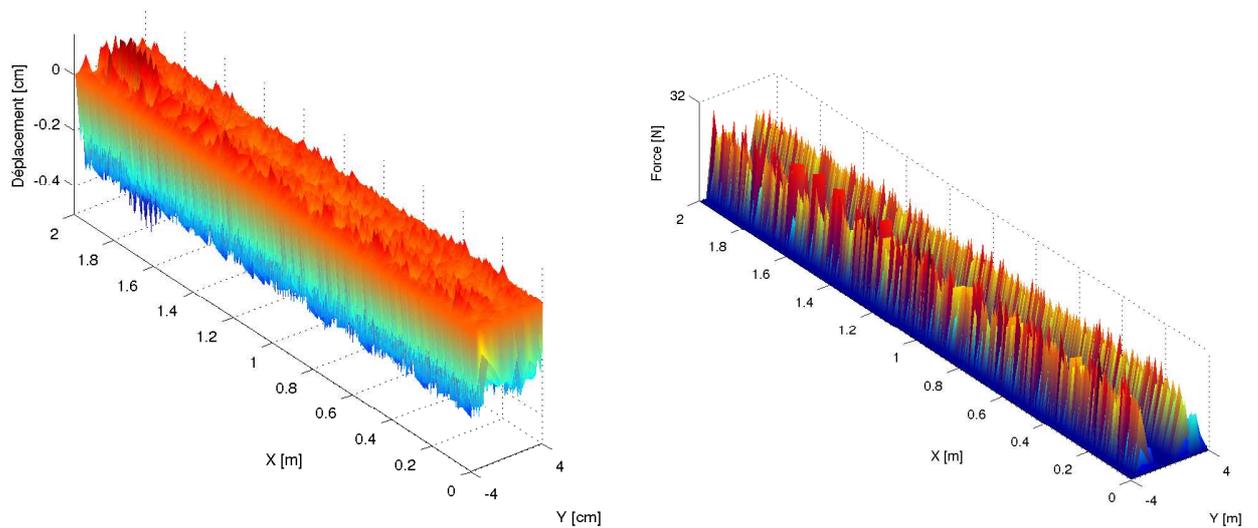


FIGURE 6.14: Evolution des déplacements et des forces de contact pour les points d'abscisses $x_0 = 0$ (chaussée sinusoïdale (c), $V_0 = 50$ km/h, $n = 5$)

6.4.2 Chaussées réelles

Les profils des textures de chaussées sont mesurées sur une longueur de deux mètres avec les résolutions $dx = dy = 0.38 \text{ mm}$. La bande de roulement du pneumatique est discrétisée avec un pas d'environ $dX \approx dY \approx 5 \text{ mm}$. Les amplitudes des chaussées sont interpolées sur les points d'abscisse $x = x_0 + V_0 t$ et d'ordonnée $y = y_0$. Les figures (6.15) et (6.16) présentent les résultats de la simulation pour les deux types de chaussées. Comme dans le cas des chaussées sinusoïdales, les déplacements ont généralement la même allure que la chaussée. Des pertes de contact et des forces importantes au niveau des pointes des aspérités sont observées. Les déplacements et les forces de contact sont plus importants pour le cas de la chaussée (A).

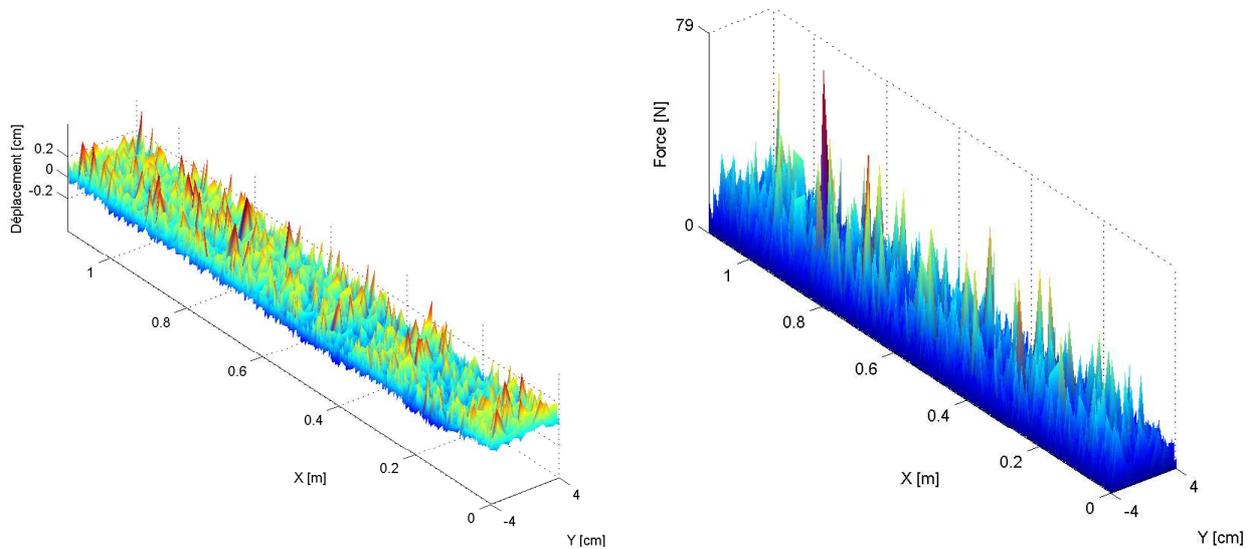


FIGURE 6.15: Evolution des déplacements et des forces de contact pour les points d'abscisses $x_0 = 0$ (chaussée réelle (A), $V_0 = 90 \text{ km/h}$)

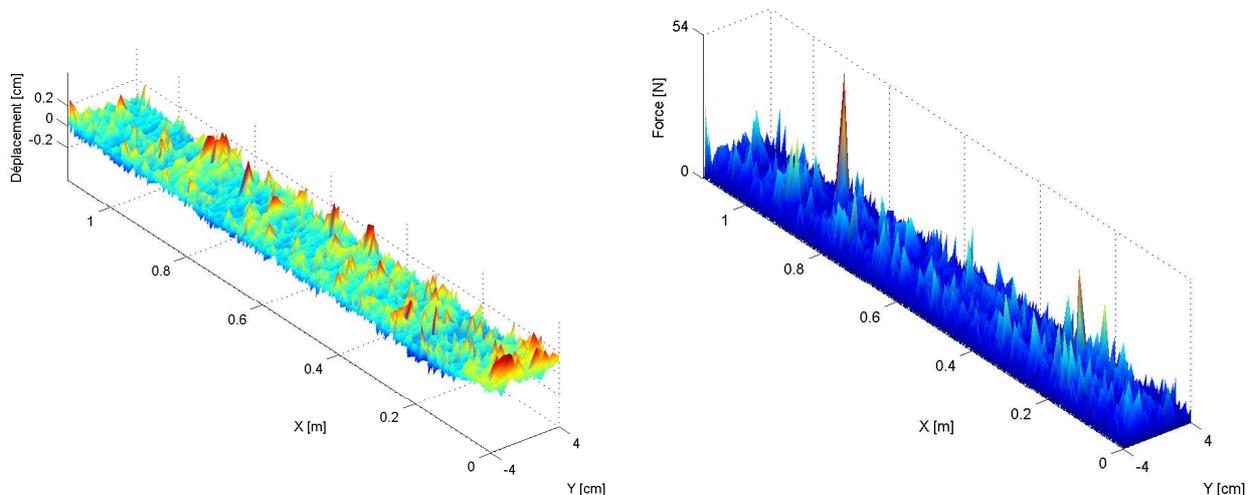


FIGURE 6.16: Evolution des déplacements et des forces de contact pour les points d'abscisses $x_0 = 0$ (chaussée réelle (B), $V_0 = 90 \text{ km/h}$)

6.4.3 Contenu spectral de la force de contact

Le contenu spectral de la force de contact est calculé par transformée de Fourier rapide après avoir appliqué une fenêtre de Hanning au signal temporel. Si on note h la fenêtre de Hanning, le signal fenêtré est donné par l'équation :

$$f_c^h(t) = \frac{f_c(t)h(t)}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |h(t)|^2 dt}} \quad \forall t \in [0, T] \quad (6.12)$$

Le niveau de la force de contact (en décibels), noté L_f , est calculé par rapport à une valeur de référence $F_c^0 = 10^{-4} N$ par la formule :

$$L_f = 20 \log_{10} \left(\frac{|F_c(\omega)|}{F_c^0} \right) \quad (6.13)$$

La figure (6.17) présente le contenu spectral de la force de contact pour des chaussées sinusoïdales avec une longueur d'onde de 4 mm et pour différentes valeurs de la vitesse de déplacement. La figure (6.18) montre le contenu spectral de la force de contact pour différentes longueurs d'onde et une vitesse de déplacement de 50 km/h. On peut constater que l'ensemble des spectres ont la même allure. Pour chaque valeur de la longueur d'onde et de la vitesse de déplacement, on observe des pics qui ont tendance à s'atténuer avec l'augmentation de la fréquence. Le premier pic observé correspond à une fréquence égale au rapport entre la vitesse de déplacement et la longueur d'onde. Par exemple, pour la courbe en bleu qui correspond à une vitesse de 30 km/h et une longueur d'onde de 4 mm, le premier pic est placé à $f_a^1 = 2083 \text{ Hz}$, le deuxième à $f_a^2 = 2f_a^1$, le troisième à $f_a^3 = 3f_a^1$ etc. Cela explique que plus la vitesse augmente ou la longueur d'onde de la chaussée diminue, plus les pics sont décalés vers les hautes fréquences.

Les figures (6.19), (6.20), (6.21) et (6.22) représentent les spectres de la force de contact (en bandes fines et en bandes de tiers d'octave) pour les chaussées réelles (A) et (B) avec différentes valeurs de vitesse. On constate les mêmes phénomènes qu'avec des chaussées sinusoïdales. Plus la vitesse augmente, plus les spectres sont décalés vers les hautes fréquences avec un niveau plus important. Pour les deux chaussées testées, le niveau de la force de contact est important dans une large bande de fréquence située entre 800 Hz et 5000 Hz. Pour la chaussée (A) le niveau maximum est atteint à une fréquence de 4000 Hz et pour la chaussée (B) ce niveau est atteint à 2000 Hz. Le niveau de force est plus important pour la chaussée (A) que pour la chaussée (B).

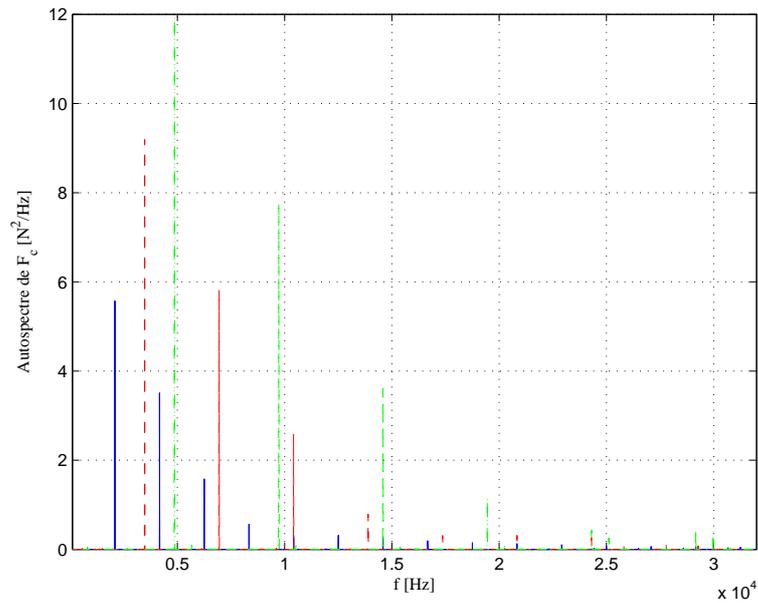


FIGURE 6.17: Spectre de la force de contact au point ($x_0 = 0, y_0 = 0$) pour différentes vitesses (chaussée sinusoïdale (b), $\lambda_x = \lambda_y = 4$ mm) : - $V_0 = 30$ km/h, - - $V_0 = 50$ km/h, -.- $V_0 = 70$ km/h

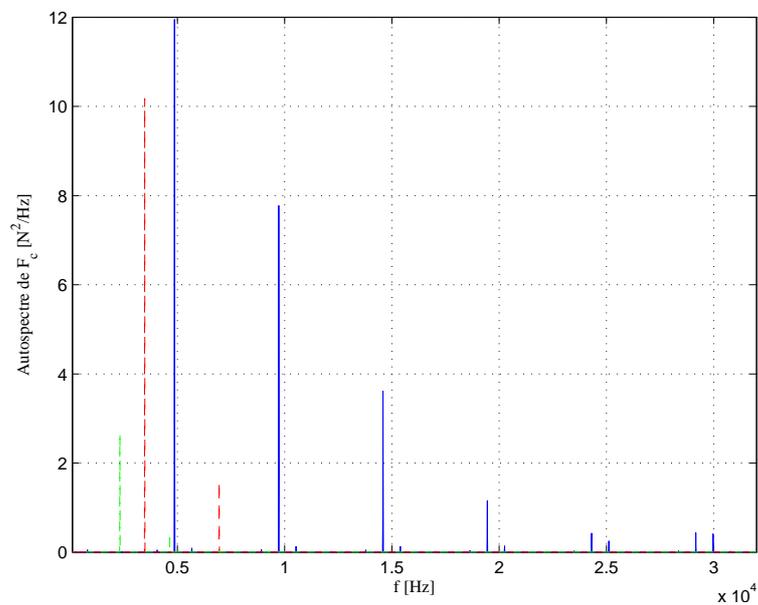


FIGURE 6.18: Spectre de la force de contact au point ($x_0 = 0, y_0 = 0$) pour différentes longueurs d'ondes (chaussée sinusoïdale (b), $V_0 = 50$ km/h) : - $\lambda = 2$ mm, - - $\lambda = 3$ mm, -.- $\lambda = 7$ mm

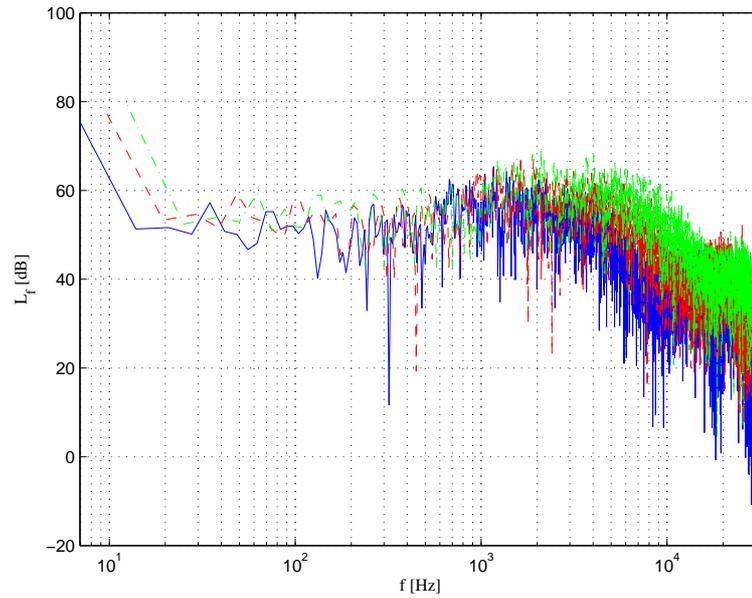


FIGURE 6.19: Spectre de la force de contact au point $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ pour différentes vitesses (chaussée réelle (A)) : — $V_0 = 50$ km/h, - - $V_0 = 70$ km/h, - . - $V_0 = 90$ km/h

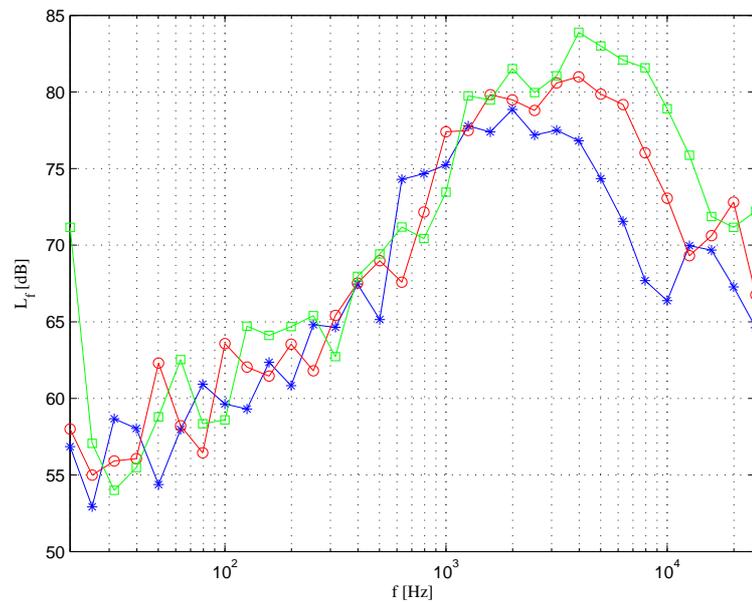


FIGURE 6.20: Spectre de la force de contact en tiers d'octave au point $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ pour différentes vitesses (chaussée réelle (A)) : - * - $V_0 = 50$ km/h, - o - $V_0 = 70$ km/h, - □ - $V_0 = 90$ km/h

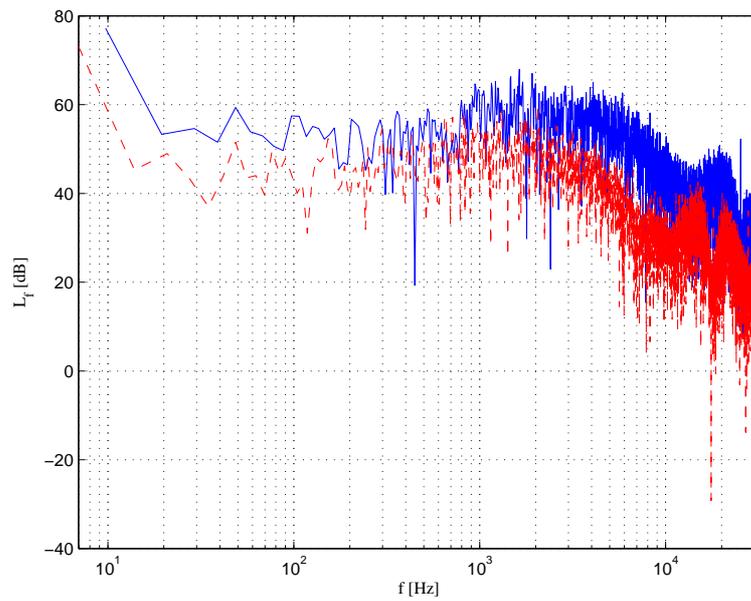


FIGURE 6.21: Spectre de la force de contact au point $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ pour les chaussées réelles ($V_0 = 50$ km/h) : - chaussée (A), - - chaussée (B)

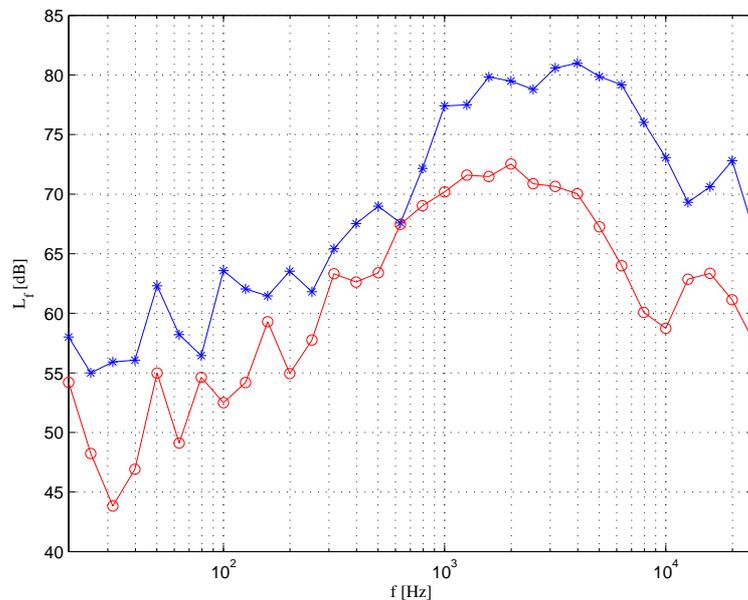


FIGURE 6.22: Spectre de la force de contact en tiers d'octave au point $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ pour les chaussées réelles ($V_0 = 50$ km/h) : -*- chaussée (A), -o- chaussée (B)

6.5 Conclusion

Le modèle périodique nous a permis de calculer les fonctions de Green dans une zone de contact de $6 \times 8 \text{ cm}^2$ constituée de 120 points. Il serait possible de les calculer dans une zone de contact deux fois plus grande (zone de contact réellement observée) et avec plus de points. Cela augmenterait cependant la taille du problème mais resterait tout à fait possible avec un temps de calcul raisonnable (quelques jours avec une machine standard). L'exploitation des propriétés de la symétrie et de la périodicité de la matrice de Green globale ont permis d'optimiser le temps de calcul. Nous avons choisi d'appliquer le modèle à différents types de chaussées, des chaussées modèles sinusoïdales et des chaussées réelles. L'évolution des déplacements et des forces de contact sont calculés pour une longueur de chaussée de deux mètres et pour différents types de chaussée. Le contenu spectral des forces de contact est aussi discuté. Les résultats de simulations montrent que ces niveaux dépendent fortement de la rugosité de la chaussée et de la vitesse de déplacement du véhicule. L'augmentation de la vitesse permet de décaler les niveaux de force vers les hautes fréquences avec un niveau plus important. Pour les chaussées réelles testées, le niveau de force est important sur une large bande de fréquences situées entre 500 Hz et 5000 Hz . Il faut bien noter que ces résultats concernent les forces de contact. En effet, la connaissance des forces de contact permet de calculer les niveaux de vibrations du pneumatique entier. Ces niveaux peuvent être plus importants vers des fréquences plus basses étant donné que le pneumatique joue le rôle de filtre passe-bas et ainsi a tendance à atténuer les hautes fréquences.

Conclusions et Perspectives

Le processus de génération du bruit de contact pneumatique/chaussée (aussi appelé bruit de roulement) est très complexe. Sa modélisation nécessite l'intégration de plusieurs phénomènes physiques : contact, air-pumping, vibration, effet dièdre et propagation. L'une des difficultés majeures réside dans la prise en compte de l'effort de contact pour le comportement dynamique du pneumatique. En effet, la complexité structurelle du couple pneumatique/chaussée rend le problème difficile à résoudre. La thèse a donc été consacrée à la modélisation *3D* de l'interaction dynamique d'un pneumatique roulant sur des chaussées réelles.

La démarche utilisée durant cette thèse a consisté à traiter plusieurs exemples et différentes configurations de complexités croissantes. Dans un premier temps, nous avons étudié le modèle d'anneau circulaire sous fondation élastique, qui est un modèle simplifié du pneumatique. Il est souvent utilisé dans la littérature pour modéliser le pneumatique en basses fréquences. Une étude détaillée du modèle a été présentée. Les différentes hypothèses adoptées pour construire ce modèle ont d'abord été explicitées. Ensuite, les équations du mouvement obtenues en utilisant le principe des puissances virtuelles ont été présentées. Le modèle analytique a été comparé avec un modèle numérique réalisé sous Abaqus. En statique, la contrainte initiale et le déplacement (dus à la pression de gonflage et à l'effet de rotation) sont calculés avec différentes hypothèses. Les résultats obtenus avec le modèle analytique et le modèle linéaire d'Abaqus sont très proches. Les fréquences propres et les fonctions de Green sont en excellent accord pour de faibles valeurs de pression (en dessous de $1000 Pa$). La différence entre les deux modèles augmente ensuite avec l'augmentation de la pression de gonflage. Cette différence est principalement due à la négligence des termes non linéaires de la pression dans le modèle analytique.

Par la suite, nous avons abordé le problème de contact pour un système dynamique qui se déplace sur une chaussée rigide. Nous nous sommes limités au contact ponctuel unilatéral. Nous avons tout d'abord traité le problème académique d'un système à un degré de liberté (masse-ressort-amortisseur) sur un profil sinusoïdal. Le contact est modélisé par un ressort situé entre le système et le profil de la chaussée (méthode de pénalisation). La résolution est d'abord réalisée à l'aide de la technique de convolution classique entre fonctions de Green et forces de contact. Cette démarche s'est avérée très coûteuse en temps de calcul. La convolution modale développée dans cette thèse a permis de réduire le temps de calcul tout en gardant la même précision. Son principe consiste à décomposer la fonction de Green dans une base modale et à utiliser les paramètres modaux identifiés pour construire une convolution plus rapide. Le modèle est ensuite appliqué au cas d'un anneau circulaire roulant sur différentes chaussées sinusoïdales et réelles. La difficulté de ce modèle réside dans le choix de la valeur de la raideur de contact, en particulier dans le cas de contact multi-points. L'addition d'une condition cinématique aux conditions de contact a permis d'éviter cette difficulté. Le nouveau modèle de contact a été validé en le comparant à la méthode de pénalisation dans le cas d'un contact ponctuel. Enfin, le modèle de contact a été étendu aux problèmes de contact multi-points avec différents exemples d'applications.

Le bruit de roulement est un bruit large bande. Son contenu fréquentiel est généralement compris entre 100 et 5000 Hz . Il est donc important de prendre en compte cette contrainte lors de la modélisation du pneumatique. Pour une telle structure et avec les moyens informatiques actuels, les modèles éléments finis classiques sont limités aux basses fréquences (environ 500 Hz). Pour s'affranchir de cet obstacle, nous avons utilisé un modèle périodique. Une cellule de référence a été modélisée par le logiciel Abaqus. A partir de la rigidité dynamique de cette cellule et en exploitant les propriétés de périodicité, les fonctions de Green ont été calculées dans toute la zone de contact et dans une bande de fréquence de $[0 \text{ } 4000 \text{ } Hz]$. Le modèle périodique est validé en basses fréquences en le comparant à un modèle classique d'éléments finis.

Dans le dernier chapitre, nous avons appliqué le modèle de contact développé au cours de cette thèse au cas d'un modèle de pneumatique 3D sur différents types de chaussées (modèles et réelles). Le modèle a mis en évidence l'influence de la texture des chaussées ainsi que celle de la vitesse de déplacement sur les forces de contact. En effet, plus la vitesse augmente plus les spectres de forces sont décalés vers les hautes fréquences avec des niveaux plus importants. Les simulations ont également montré que la rugosité de la chaussée était un paramètre important. Pour les deux chaussées réelles utilisées dans les simulations, les niveaux de forces sont importants dans une large bande de fréquences située entre 800 Hz et 5000 Hz . Le résultat montre l'intérêt de développer un modèle de pneumatique prenant en compte les moyennes fréquences.

Toutefois, les simulations réalisées dans ce dernier chapitre ne permettent pas de quantifier précisément les forces de contact. Le modèle de pneumatique pourrait être utilisé avec une meilleure résolution spatiale. Un maillage avec des éléments de tailles inférieures à la taille des grains de la chaussée permettrait une estimation plus précise des forces de contact. Le raffinement du maillage conduirait à des modèles plus lourds pour le calcul des fonctions de Green dans la zone de contact. Pour résoudre ce problème deux démarches peuvent être adoptées. La première consiste à utiliser le principe de réduction de modèle non seulement entre les cellules mais également au niveau de la cellule elle-même en ne gardant que les degrés de liberté de l'enveloppe extérieure. La deuxième est de déterminer les fonctions de Green dans une seule section puis calculer celles des sections voisines à l'aide de la matrice de transfert entre les cellules.

Quant au modèle de contact, l'exploitation des propriétés de symétrie et de périodicité peut également être intégrée dans la convolution modale afin d'optimiser le temps de calcul. Une bonne précision des forces de contact permettrait de calculer les vibrations de l'enveloppe du pneumatique et d'avoir une bonne estimation du bruit généré par les vibrations de pneumatique. La connaissance de l'évolution des déplacements dans la zone de contact permettrait aussi de calculer les volumes des cavités formées entre le pneumatique et la chaussée et ainsi de fournir une donnée essentielle pour estimer la part du phénomène de pompage d'air dans la génération du bruit qui reste actuellement difficile à déterminer.

Enfin, l'effet de la déformée statique due au poids de la voiture peut être pris en compte dans le comportement dynamique du pneumatique. Cela conduirait à la perte de la propriété de symétrie cyclique. Un modèle à deux échelles pourrait donc être utilisé : une échelle lente à l'aide de la méthode des éléments finis classique avec un modèle non périodique prenant en compte le poids de la voiture et une échelle rapide avec le modèle périodique développé au cours de cette thèse.

Annexes

Annexe A

Architecture du modèle de vibration du couple pneumatique/chaussée

Le modèle de vibration du couple pneumatique/chaussée développé au cours de cette thèse se décompose en quatre étapes de calcul. Son architecture permet d'avoir un code flexible et évolutif. Les figures (A.1) et (A.2) montrent ces différentes étapes de calcul.

A.1 Modélisation de la cellule de base

La modélisation d'une cellule de pneumatique se fait par la méthode des éléments finis. Pour réduire le temps de calcul, il est nécessaire d'éviter les degrés de liberté à l'intérieur de la cellule. Les éléments de la cellule sont du même ordre de grandeur que la longueur de l'arc de celle-ci. Cette modélisation peut être réalisée par un code de calcul standard. Ici nous avons utilisé le logiciel Abaqus. Voici les différentes sous-étapes de calcul :

- Premier calcul statique (A1) :
Cette étape est réalisée sous Abaqus. L'option (NLGE) est activée pour prendre en compte les non-linéarités géométriques. La cellule est soumise à un champ de pression sur la surface intérieure (Γ_p). Elle est encastree au niveau de la zone en contact avec la jante. Les degrés de liberté dans la direction tangentielle sont bloqués pour avoir le même comportement qu'un pneumatique complet.
- Calcul des réactions (A2) :
Les réactions sont calculées à l'aide d'un programme Matlab qui permet de remplacer les blocages au niveau de ces sections latérales de la cellule dans la direction tangentielle par des forces concentrées équivalentes.
- Deuxième calcul statique (A3) :
Un deuxième calcul similaire au calcul (A1) est réalisé en remplaçant les blocages par des forces concentrées. L'objectif ici est de récupérer les matrices de masse et de raideurs en gardant l'ensemble des degrés liés aux nœuds non-encastres.
- Calcul des matrices de masse et de raideurs (A4) :
Afin de calculer les matrices de masse et de raideur sous Abaqus, un troisième calcul dynamique est nécessaire (par exemple une analyse modale).

A.2 Réorganisation du modèle E.F

L'objectif de cette étape de calcul est de réorganiser le modèle éléments finis pour pouvoir exploiter la propriété de périodicité en utilisant un modèle périodique permettant de calculer les fonctions de Green dans une large bande de fréquence et avec un temps de calcul raisonnable.

- Extraction des matrices de raideur et de masse (B1) :
Un programme Matlab permet d'extraire l'ensemble du modèle éléments finis (nœuds, éléments, matrice de masse, matrice de raideur et les ddls).
- Renumérotation des nœuds (B2) :
Les nœuds à gauche de la cellule et les nœuds à sa droite doivent être organisés dans le même ordre. Un programme Matlab permet de vérifier cette condition et de renuméroter les nœuds le cas échéant.
- Transformation géométrique (B3) :
Comme nous l'avons expliqué dans le cinquième chapitre, pour pouvoir appliquer le modèle périodique les cellules de base doivent avoir la même matrice de rigidité dynamique, autrement dit ces matrices doivent être indépendantes de l'angle de rotation. Ces matrices subissent une transformation géométrique pour respecter cette condition.
- Réduction du modèle (B4) :
En cas de présence de nœuds intérieurs, le modèle est réduit en supprimant les ddls correspondant aux nœuds d'intérieurs.

A.3 Modèle périodique

- Calcul de la matrice équivalente (C1) :
Les cellules qui n'appartiennent pas à la zone de contact sont remplacées par une matrice équivalente.
- Assemblage des cellules de la zone de contact (C2) :
Les cellules qui appartiennent à la zone de contact sont assemblées en utilisant la même matrice de rigidité dynamique de référence.
- Assemblage de la matrice globale du pneu (C3) :
La matrice de rigidité dynamique équivalente et celle issue de l'assemblage des cellules de la zone de contact sont ensuite assemblées pour donner la matrice équivalente globale du pneumatique.
- Calcul des fonctions de Green (C4) :
La matrice des fonctions de Green est calculée par la résolution d'un système linéaire avec plusieurs cas de chargement. En exploitant la symétrie de cette matrice le nombre de cas de chargement est réduit à un nombre égal au nombre de nœuds d'une seule section en intersection avec la zone de contact. La matrice des fonctions de Green globale est construite en exploitant la propriété de périodicité du pneumatique.

A.4 Modèle de contact

La matrice des fonctions de Green dans la zone de contact est déjà calculée. Le profil de la chaussée est supposé connu. A partir de ces deux entrées nous cherchons à calculer à chaque instant et en tout point de la zone de contact, les déplacements et les forces de contact, c'est l'objectif de cette dernière étape de calcul.

– Approximation (D1) :

Les fonctions de Green sont décomposées sur une base modale. Les paramètres modaux sont calculés par l'algorithme LSCE. Une erreur maximale entre la fonction de Green et sa décomposition est fixée pour contrôler la qualité de la décomposition.

– Interpolation de la chaussée (D2) :

L'altitude de la chaussée est connue aux points qui ne sont pas nécessairement confondus avec le maillage du pneumatique. L'altitude est alors calculée par une interpolation aux points du maillage de pneumatique. Ensuite elle est exprimée en fonction du temps et de la vitesse de déplacement.

– Conditions initiales (D3) :

Le pneumatique est supposé en contact avec une chaussée lisse. Il est soumis au poids du véhicule. Les déplacements sont constants et les forces de contact sont équilibrées par le poids du véhicule. Les forces et les déplacements sont reliés par la matrice de rigidité statique. Le déplacement statique est ensuite ajouté au déplacement dynamique.

– Calcul des forces de contact et des déplacements :

A chaque instant t les forces de contact sont supposées nulles. Les déplacements sont calculés par une convolution modale. Ces déplacements sont comparés avec les altitudes de la chaussée. Si la condition de non contact est vérifiée, on passe à l'instant $t + \Delta t$, sinon les forces de contact sont corrigées en cherchant celles nécessaires pour créer la différence entre les altitudes de la chaussée et les déplacements calculés en supposant que la force de contact est nulle à l'instant t .

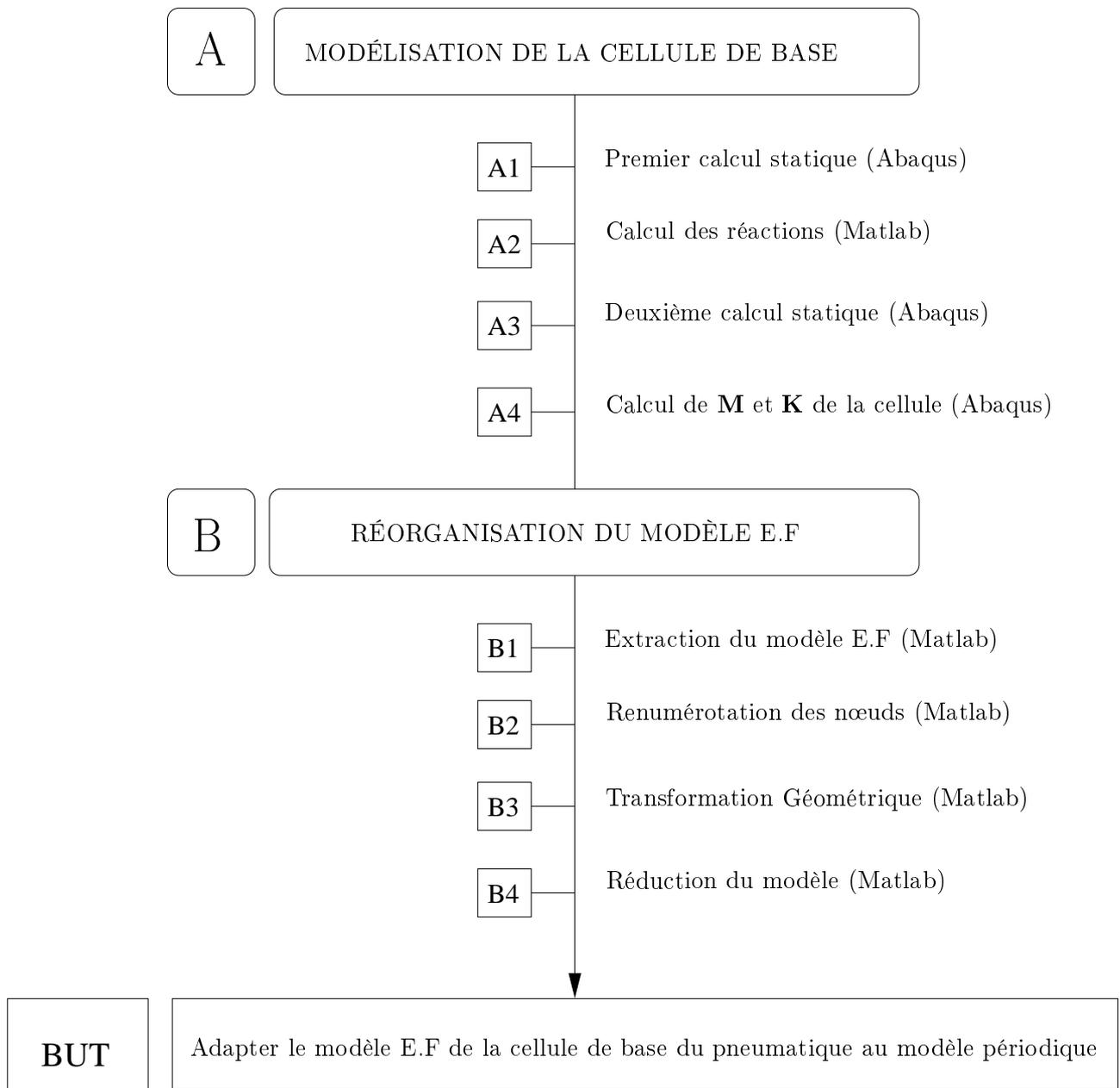


FIGURE A.1: Schéma des différentes étapes de calcul (1/2)

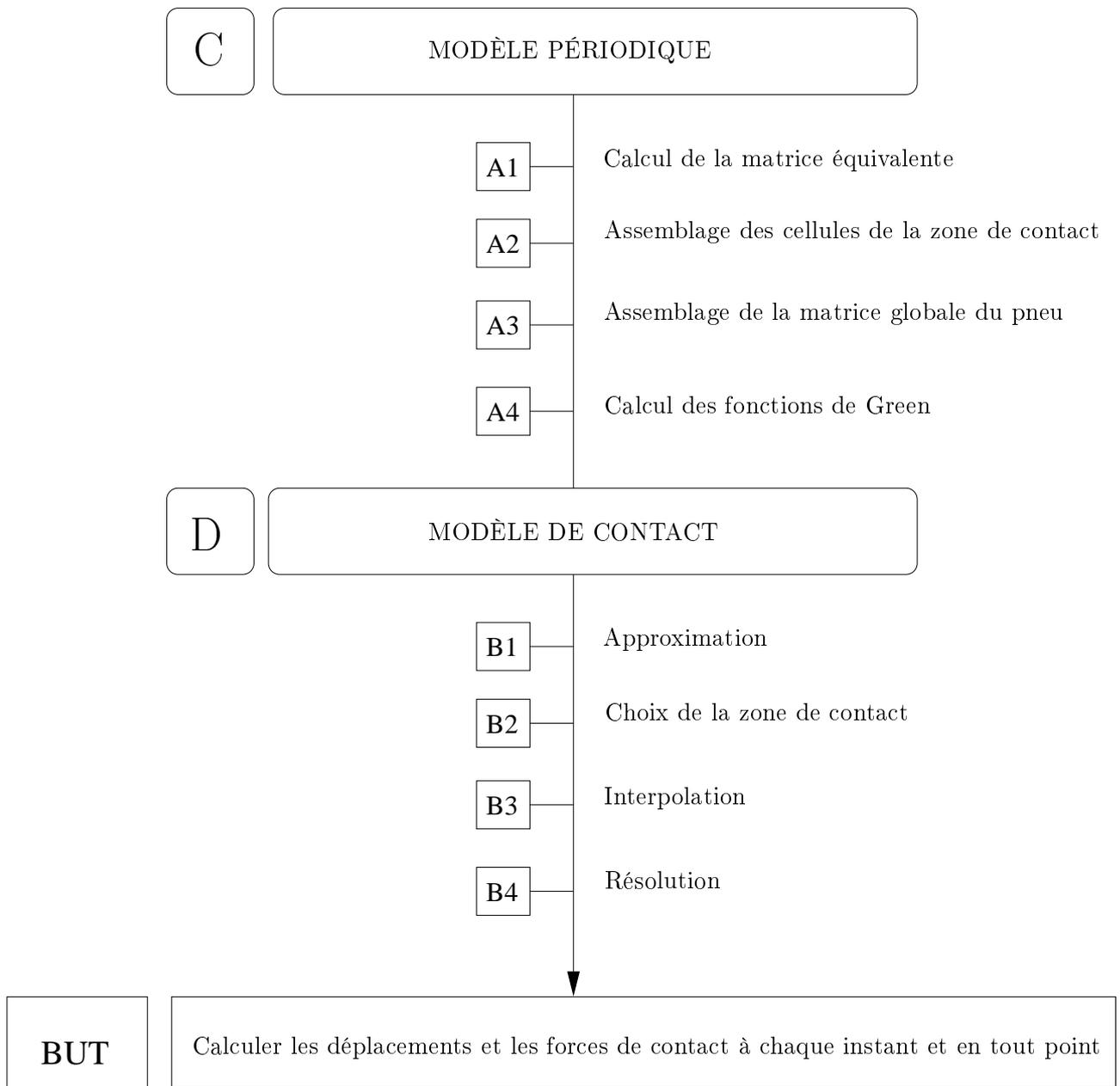


FIGURE A.2: Schéma des différentes étapes de calcul (2/2)

Bibliographie

- [Afs07] Afsset. Bruit et santé : effets biologiques et sanitaire du bruit. Technical report, Agence française de sécurité sanitaire de l'environnement et du travail, 2007.
- [AK08] P.B.U. Andersson and W. Kropp. Time domain contact model for tyre/road interaction including nonlinear contact stiffness due to small-scale roughness. *Journal of Sound and Vibration*, 318 :296–312, 2008.
- [AL96] F. Anfosso-Ledee. *Application de la méthode des équations intégrales à la modélisation du bruit aux bords des routes-Intéraction chaussée/écran antibruit*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg I, 1996.
- [BC85] K.J. Bathe and A.B. Chaudhary. A solution method for planar and axisymmetric contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21 :65–88, 1985.
- [BCDP07] H. Barguet, B. Chauvin, A. Domingo, and T. Pottier. Cables composites pour le pneumatique. In *Brevet WO/2007/090603*, 2007.
- [Bec03] F. X Becot. *Tyre noise over impedance surfaces-Efficient application of the equivalent sources method*. PhD thesis, Departement of Applied acoustics, Chalmers University of Technology, Goteborg (Suède) - Laboratoire Vibrations et Acoustique, Lyon (France), 2003.
- [BKM09] G. Beylkin, C. Kurcza, and L. Monzona. Fast convolution with the free space Helmholtz Green's function. *Journal of Computational Physics*, 228 :2770–2791, 2009.
- [BNPE08] M. Brinkmeier, U. Nackenhorst, S. Petersen, and O. V. Estorff. A finite element approach for the simulation of tire rolling noise. *Journal of Sound and Vibration*, 309 :20–39, 2008.
- [Boh66] F. Bohm. Mechanik des gurtelreifens. *Ingenicar-Archiv 35*, pages 82–101, 1966.
- [Bri53] L. Brillouin. Wave propagation in periodic structures. In *Dover, New-York*, 1953.
- [Ces07] J. Cesbron. *Influence de la texture de chaussée sur le bruit de contact pneumatique/chaussée*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes et l'Université de Nantes, 2007.
- [Cla65] S. K. Clark. The rolling tire under load. *SAE Paper 650493*, 1965.
- [CNS09] N. Coudeyras, S. Nacivet, and J. J. Sinou. Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 328(2) :520–540, 2009.
- [Con08] F. Conte. *Modélisation CFD du phénomène acoustique de pompage d'air dans un contact pneumatique/chaussée*. PhD thesis, Institut National des Sciences appliquées de Lyon, 2008.
- [CSRB04] D. Chamoret, P. Saillard, A. Rassinoux, and J.M. Bergheau. New smoothing procedures in contact mechanics. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 168 :107–116, 2004.

- [DMB05] D. Duhamel, B. R. Mace, and M. J. Brennan. Finite element prediction of wave motion in structural waveguides. *Journal of the Acoustical Society of America*, 117 :2835–2843, 2005.
- [DMB06] D. Duhamel, B. R. Mace, and M. J. Brennan. Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 294 :205–220, 2006.
- [DMD⁺00] C. Daux, N. Moes, J. Dolbow, N. Sukumar, and T. Belytschko. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48 :1741–1760, 2000.
- [Dod65] R.N Dodge. The dynamic stiffness of a pneumatique tire model. *Society of automotive engineers, Department of Engineering Mechanics, University of Michigan*, 1965.
- [Dor88] C. R. Dorhmann. Dynamics of tyre wheel suspension assembly. *Journal of Sound and Vibration*, 210 :627–642, 1988.
- [EB91] Etrovic and K.J. Bathe. On the treatment of inequality constraints arising from contact conditions in finite element analysis. *Computers and Structures*, 40(2) :203–209, 1991.
- [Fad02] A. Fadavi. *Modélisation numérique des vibrations d'un pneumatique et de la propagation du bruit de contact*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech (ENPC), 2002.
- [Fin97a] S. Finnveden. Formulas for modal density and for input power from mechanical and fluid point sources in fluid filled pipes. *Journal of Sound and Vibration*, 208 :705–728, 1997.
- [Fin97b] S. Finnveden. Spectral finite element analysis of the vibration of straight fluid-filled pipes up to high frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 199 :125–154, 1997.
- [Fin00] S. Finnveden. Finite element techniques for the evaluation of energy flow parameters. In *Proceedings of the Novem*, pages 235–260, Lyon, 2000.
- [Flo86] V. Flotow. Disturbance propagation in structural networks. *Journal of Sound and Vibration*, 106 :433–450, 1986.
- [FOT99] T. Fujikawa, Y. Oshimo, and H. Tachibana. Generation of tyre/road noise. *Inter Noise*, 1999.
- [FSDJ07] G. Fritz, J. J. Sinou, J. M. Duffal, and L. Jézéquel. Effets of damping on brake squeal coalescence patterns - application on a finite element model. *Mechanical Research Communications*, 34 :181–190, 2007.
- [Gag99] M.J. Gagen. Novel acoustic sources from squeezed cavities in car tires. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1999.
- [Gry97] L. Gry. Dynamic modelling of railway track based on wave propagation. *Journal of Sound and Vibration*, 505 :195–477, 1997.
- [GS97] E. Gerrestsen and E. Salomons. State of the art in tyre/road noise modeling. *Inter Noise*, 1 :87, 1997.
- [Ham02] J. F. Hamet. Propagating wave formulation of tire vibrations using the orthotropic plate model. In *Inter-Noise*, 2002.
- [Hamse] J. F. Hamet. Tire/road noise : time domain green's function for the orthotropic plate model. In *2002, Inter-Noise*.
- [HBR01] N. R. Harland, B.R.Mace, and R.W.Jones. Wave propagation, reflection and transmission in tunable fluid-filled beams. *Journal of Sound and Vibration*, 241 :753–754, 2001.
- [HDP90] J. F. Hamet, C. Deffayet, and M. A. Pallas. Phénomène d'air pumping dans le bruit de contact pneumatique/chaussée : cas d'une cavité aménagée dans la chaussée. Technical report, Borne (France). Rapport INRETS. n° 132, 1990.

- [HDP01] J. F. Hamet, C. Deffayet, and M. A. Pallas. Time domain green's function for the orthotropic plate model. In *Acta Acustica-Acustica*, volume 87, pages 470–474, 2001.
- [Hec86] M. Heckel. Tyre noise generation. *Wear* 113, pages 157–170, 1986.
- [Her81] H. Hertz. On the contact of elastic solids. "*fur reine und angewandte Mathematik*", 92 :156–171, 1881.
- [HGB85] J. O. Halquist, G.L. Goudreau, and D.J. Benson. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51 :107–137, 1985.
- [HH92] S. C. Huang and B. S. Hsu. In plane dynamics of tires on the road based on a experimentally verified rolling ring model. *Vehicle System Dynamics*, 21 :242–267, 1992.
- [HIJ05] L. Houillon, M. N. Ichchouh, and L. Jezequel. Wave motion in thin-walled structures. *Journal of Sound and Vibration*, 281 :483–507, 2005.
- [HS87] S.C. Huang and W. Soedel. Effects of coriolis acceleration on the free and forced in-plane vibrations of rotating rings on elastic foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 115 :253–274, 1987.
- [Hua96] S. C. Huang. The vibration of rolling tyres in ground contact. *Journal of Vehicle Design*, 13 :78–95, 1996.
- [IK04] H. Ining and B. Kruppa. Health effects caused by noise : evidence in the literature from the past 25 years. *Noise Health*, 6 :5–13, 2004.
- [IY96] K. Iwao and A. Yamazaki. Study on the mechanism of tyre/road noise. *JSAE Review*, 17 :139–144, 1996.
- [JB85] M. Jennewein and M. Bergmann. Investigation concerning tire/road noise sources and possibilities of noise reduction. *Proceeding of the Institution of the Mechanical Engineers*, 1 :87, 1985.
- [Jea98] P. Jean. A variational approach for the study of outdoor sound propagation and application to railway noise. *Journal of Sound and Vibration*, 212 :275–294, 1998.
- [Jea06] P. Jean. A multi domain bem approach, application to outdoor sound propagation and tyre noise. In *Proceeding of Euronoise 2006*, Tampere, Finland, 2006.
- [JNG08] P. Jean, N. Noe, and F. Gaudaire. Calculations of tyre noise radiation with a mixed approach. *Acta Acustica united with Acustica*, 94 (1) :91–103, 2008.
- [Joh85] K. L. Johnson. Contact mechanic. *Cambridge University Press*, 1985.
- [JR88] Lei Jianga and Robert J. Rogersa. Combined lagrangian multiplier and penalty function finite element technique for elastic impact analysis. *Computers and Structures*, 30 :1219–1229, 1988.
- [JR99] S.H. Ju and R.E. Rowlands. A three dimensional friction contact element whose stiffness matrix is symetric. *Journal of Applied Mechanics*, 66 :460–467, 1999.
- [KCD⁺08] I.F. Kozhevnikov, J. Cesbron, D. Duhamel, H.P. Yin, and Anfosso-Lédée. A new algorithm for computing the indentation for a rigid body of arbitrary shape on a viscoelastic half-space. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50 :1194–1202, 2008.
- [Kim98] G. J. Kim. *Wave propagation in tyres and the resultant noise radiation*. PhD thesis, Institute of Sound and Vibration research, University of Southampton, 1998.
- [KJFAL04] P. Klein, J-F.Hamet, and F. Anfosso-Ledee. An envelopment procedure for tire/road contact, proceeding of surf 2004. In *5th Symposium on Pavement Surface Characteristics Roads and Airports.*, Toronto, 2004.
- [KK96] J.O. Kim and B.M. Kwak. Dynamic analysis of two-dimensional friction contact by linear complementarity problem formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 33 (1996) :4605–4624, 1996.

- [Kle98] P. Klein. Effet dièdre : Etude du modèle de kropp. Technical report, Rapport MMA 9807, 1998.
- [Kro89] W. Kropp. Structure born sound on smooth tyre. *Applied Acoustics*, 26 :181–192, 1989.
- [Kro92] W. Kropp. *Ein Modell zur Beschreibung des Rollgeräusches eines unprofilierten Gürtelreifens auf rauher Strassenoberfläche -A model to describe the rolling noise of a smooth radial tire on a rough road surface-*. PhD thesis, T. U. Berlin, 1992.
- [Kun87] L.E. Kung. Radial vibration of pneumatic radial tires. *General Tire Inc*, 1987.
- [KY90] Y. Kanto and G. Yakwa. A dynamic contact buckling analysis by the penalty finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29 :755–774, 1990.
- [Lad96] P. Ladeveze. A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. II 322 (12)*, pages 849–856, 1996.
- [Lar02] K. Larsson. *Modelling of dynamic contact-exemplified on tire/road interaction*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 2002.
- [Led04] F. Anfosso Ledee. The effect of road absorption on tire/road horn effet. In *Proceedings of the joint Congress CFA/DAGA*, Strasbourg, France, 2004.
- [LGHZ04] SL. Lusk, B. Gillespie, BM. Hagerty, and RA. Ziemba. Acute effects of noise on blood pressure and heart rate. *Arch Environ Health*, 59 :392–399, 2004.
- [LK02] K. Larsson and W. Kropp. A high-frequency three-dimensional tyre model based on two coupled elastic layers. *Journal of Sound and Vibration*, 253 :889–908, 2002.
- [LM62] R. H. Lyon and G. Maidanik. Power flow between linearly coupled oscillators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 34 :623–639, 1962.
- [LN97] J.J. Lee and A.E. Ni. Structure borne tire noise statistical energy analysis model. *Tyre science and technology*, 25 :177–186, 1997.
- [LR60] E. Lee and J. Radock. The contact for viscoelastic bodies. *Journal of Applied Mechanics*, pages 438–444, 1960.
- [MD11a] R. Meftah and D. Duhamel. A fast method for computing convolution with structural green’s function : Application to tire/road contact problems. In *COMPADYN*, Corfu Island, 2011.
- [MD11b] R. Meftah and D. Duhamel. Modèle de contact dynamique pneumatique/chaussée basé sur les fonctions de green. In *CFM*, Besançon, 2011.
- [MDC⁺10] R. Meftah, D. Duhamel, J. Cesbron, F. Anfosso-Lédée, H. Yin, and P. Argoul. Efficient computation of tire/road contact forces using an ARMA model of the Green function. In *XVIIth Symposium Vibrations, Chocs and Bruit*, Lyon, 2010.
- [MDCY11] R. Meftah, D. Duhamel, J. Cesbron, and H. Yin. Une méthode rapide pour calculer un produit de convolution avec une fonction de green : application au problème de contact dynamique. In *10e colloque national en calcul des structures*, Giens, 2011.
- [Mea73] D. J. Mead. A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling. *Journal of Sound and Vibration*, 27 :235–260, 1973.
- [Mea75a] D. J. Mead. Wave propagation and natural modes in periodic systems : mono-coupled systems. *Journal of Sound and Vibration*, 40 :1–18, 1975.
- [Mea75b] D. J. Mead. Wave propagation and natural modes in periodic systems : multi-coupled systems with and without damping. *Journal of Sound and Vibration*, 40 :19–39, 1975.
- [Mea96] D. J. Mead. Wave propagation in continuous periodic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 190 :495–524, 1996.
- [MHS03] F.F. Mahmoud, M.M. Hassan, and N.J. Salamon. Dynamic contact of deformable bodies. *Computers and Structures*, 36 (1) :169–181, 2003.

- [MPE92] J. E. Mottershed, S.K. Pascoe, and R.G. English. A general finite element approach for contact stress analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 :765–779, 1992.
- [MSW83] M. McIntyre, R. Schumacher, and J. Woodhouse. On the oscillations of musical instruments. *Journal of the Acoustical Society of America*, 74 (1983) :1325–1345, 1983.
- [Ngu08] H. Nguyen. *Une nouvelle approche pour structures périodiques : Application au calcul des vibrations d'un pneumatique*. PhD thesis, Ecole des Ponts Paristech, 2008.
- [Nor02] A. Nordborg. Wheel/rail noise generation due to nonlinear effects and parametric excitation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 111 :1772–1781, 2002.
- [Pac71] H. B. Pacejka. Tire in-plane dynamics in : S. k. Clark (ed),. In *Mechanics of Pneumatic Tires*, volume 122, National Bureau of Standards Monograph, Washington, DC, 1971.
- [Pad76] J. Padovan. On viscoelasticity and standing wave in tires. *Tire Science and Technology* 4, pages 233–246, 1976.
- [PB01] R. J. Pinnington and A. R. Briscoe. A wave model for a pneumatic tyre belt. *Journal of Sound and Vibration*, 253 :969–987, 2001.
- [PBCR77] G. R. Potts, C. A. Bell, L. T. Charek, and T. K. Roy. Tire vibrations. *Tire Science and Technology*, pages 202–225, 1977.
- [Per02] J. Perisse. A study of radial vibrations of rolling tyre for tyre-road noise characterisation. *Mechanical systems and Signal Processing*, 16(6) :1043–1052, 2002.
- [Pin02] R. J. Pinnington. Radial force transmission to the hub from an unloaded stationary tyre. *Journal of Sound and Vibration*, 253 :961–983, 2002.
- [RL03] P. Rouch and P. Ladeveze. The variational theory of complex rays : a predictive tool for medium-frequency vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3301–3315, 2003.
- [Ron82] D. Ronneberger. Noise generation from rolling tires-sound amplification by the horn effect. In *INTER NOISE*, San Fransisco, USA, 1982.
- [Sam04] A. Sameur. *Modèle de contact pneumatique/chaussée pour la prévision du bruit de roulement*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2004.
- [SCB01] T. Strouboulis, K. Copps, and I. Babuska. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :4081–4193, 2001.
- [SK10] P. Sabiniarz and W. Kropp. A waveguide finite element aided analysis of the wave field on a stationary tyre, not in contact with the ground. *Journal of Sound and Vibration*, 329 :3041–3064, 2010.
- [SL67] B.E. Sabey and G.N. Lupton. Photography of the real contact area of tyres during motion. Technical report, Road Research Laboratory, Crowthorne, 1967.
- [Soi98] C. Soize. Reduced models in the medium frequency range for the general dissipative structural dynamic systems mechanical models variational formulations and discretization, structural acoustics and vibration. *Journal of Sound and Vibration*, pages 109–127, 1998.
- [SR82] K. Schaff and D. Ronneberger. Noise radiation from rolling tires-sound amplification by the horn effect. In Poughkeepsie, NY, and San Fransisco, editors, *InterNoise 82*, pages 131–134, San Fransisco (USA), 1982.
- [SW76] W. Soedel and I.D. Wilken. The receptance term method applied to ring-stiffened cylindrical shells : Analysis of modal characteristics. *Journal of Sound and Vibration*, 44 :563–576, 1976.
- [SW79] J.T. Stadter and R.O. Weiss. Analysis of previous contact through finite element gaps. *Computers and Structures*, 10 :867–873, 1979.

- [SWT85] C. Simo, P. Wriggers, and R.L. Taylor. A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50 :163–180, 1985.
- [SYKS86] S. Saigal, T.Y. Yang, W.H. Kim, and W. Sodel. Free vibrations of a tire as a toroidal membrane. *Journal of Sound and Vibration*, 107(1) :71–80, 1986.
- [Tie65] J.T. Tielking. Plane vibration characteristics of a pneumatic tire model. *SAE Paper 650492*, 1965.
- [WK91] C. Wang and J. Kim. New analysis method for a thin beam impacting against a stop based on the full continuous mode. *Journal of Sound and Vibration*, 1996 :809–823, 191.
- [WK97] C. Wang and J. Kim. The dynamic analysis of a thin beam impacting against a stop of general three-dimensional geometry. *Journal of Sound and Vibration*, 203 :237–249, 1997.
- [WNR08] Y.T. Wei, L. Nasdala, and H. Rothert. Analysis of forced transient response for rotating tires using REF models. *Journal of Sound and Vibration*, 320 :145–162, 2008.
- [Wul04] F. Wullens. *Excitation of tyre vibration due to tyre/road interaction*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 2004.
- [Zho93] Z.H. Zhong. Finite element procedures for contact impact problems. *Oxford University Press*, page 371, 1993.

UNE APPROCHE PAR FORMALISME DE GREEN RÉDUIT POUR LE CALCUL DES STRUCTURES EN CONTACT DYNAMIQUE : APPLICATION AU CONTACT PNEUMATIQUE/CHAUSSÉE

Le travail de cette thèse s'inscrit dans le cadre de la réduction du bruit du trafic routier. Le contact pneumatique/chaussée représente la principale source de ce phénomène dès la vitesse de 50 *km/h*. Dans ce contexte, une nouvelle démarche de modélisation du comportement dynamique d'un pneumatique roulant sur une chaussée rigide est développée. Au niveau du pneumatique, un modèle périodique est adopté pour calculer les fonctions de Green du pneumatique dans la zone de contact. Ce modèle permet de réduire considérablement le temps de calcul et de modéliser le pneumatique dans une large bande de fréquence. Le modèle est validé en le comparant avec un modèle d'éléments finis classique réalisé sous le logiciel Abaqus. Habituellement, la réponse temporelle du pneumatique peut être calculée par une convolution des fonctions de Green et des forces de contact. Cette technique est très coûteuse en termes de temps de calcul. Nous avons adopté une nouvelle démarche. L'idée consiste à décomposer les fonctions de Green dans une base modale. Les paramètres modaux sont ensuite utilisés pour construire une convolution plus rapide. La convolution modale est adaptée au problème de contact par l'addition d'une condition de contact cinématique. Le modèle de contact est comparé à la méthode de pénalité dans le cas d'un exemple académique. Il présente l'avantage de sa stabilité et de sa facilité de mise en oeuvre. Dans la dernière partie de ce travail, le modèle de contact est appliqué au cas d'un modèle *3D* de pneumatique roulant sur différents types de chaussée. Le contenu spectral des forces de contact est étudié en fonction de la vitesse de déplacement et de la rugosité des chaussées. Afin de construire le modèle de contact d'un pneumatique réel sur une chaussée réelle, plusieurs exemples de complexité croissante sont traités.

Mots clefs : vibration, contact, pneumatique, chaussée, bruit de roulement, modèle périodique, réduction de modèle, convolution.

A REDUCED GREEN APPROACH FOR CALCULATION OF DYNAMIC CONTACT STRUCTURES : APPLICATION TO TIRE/ROAD CONTACT

This work is part of the traffic noise reduction program. Tire/road contact is the principal source of this phenomenon at speeds greater than 50 *km/h*. In this context, a new approach for modeling the tire vibration behavior during rolling on rigid road surfaces is developed. For the tire, a periodic model is used to compute Green's functions of the tire in the contact area. This model leads to a significant reduction of computing time. The response of the tire can be modeled in a large frequency range. The model is compared to a classic finite element model built using Abaqus software. As a general approach, the dynamic response of the tire is calculated by convolution of the contact forces with the Green's functions. However the computation of the convolution can be time consuming. In this work we have used a new method. First it consists of the modal expansion of the pre-calculated Green's functions. The modal parameters are then used to construct a new convolution which allows quicker calculations than the traditional convolution. The modal convolution is adapted to dynamic contact problems by using a kinematic contact condition. Contact model is compared to the penalty method. Both methods give the same result but the developed method is more stable and easier to implement. In the last chapter of this work, the contact model is applied to a *3D* tire model rolling on different road profiles. Spectrum contents of the contact forces are studied for different values of the car speed and roughness of the roadway. During this study, several examples with an increasing complexity are studied.

Keywords : vibration, contact, tire, road, tire/road noise, periodic model, model reduction, modal expansion, convolution.