



HAL
open science

Modélisation de la rugosité et de l'aspect de surfaces d'acier peintes

Bruno Figliuzzi

► **To cite this version:**

Bruno Figliuzzi. Modélisation de la rugosité et de l'aspect de surfaces d'acier peintes. Matériaux. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2011. Français. NNT : 2011ENMP0060 . pastel-00671439

HAL Id: pastel-00671439

<https://pastel.hal.science/pastel-00671439v1>

Submitted on 17 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n°432 :
Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École nationale supérieure des mines de Paris

Spécialité « Morphologie Mathématique »

présentée et soutenue publiquement par

Bruno FIGLIUZZI

le 28 octobre 2011

**Modélisation de la rugosité et de l'aspect de
surfaces d'acier peintes**

Directeur de thèse : **Dominique JEULIN**

Jury

| | |
|--|--------------------|
| M. Arthur SOUCEMARIANADIN , Professeur, Université Joseph Fourier de Grenoble | Président du jury |
| M. Mikhaël BALABANE , Professeur, Université Paris XIII | Rapporteur |
| M. Michel JOURLIN , Professeur, Université Jean Monnet de Saint-Etienne | Rapporteur |
| M. Anaël LEMAITRE , UMR Navier - Ecole des Ponts ParisTech - LCPC | Examinateur |
| M. François MUDRY , Directeur scientifique, ArcelorMittal | Examinateur |
| M. Dominique JEULIN , Professeur, CMM-MS, Ecole des Mines ParisTech | Directeur de thèse |
| M. Gabriel FRICOUT , Ingénieur de recherche, ArcelorMittal | Invité |

MINES ParisTech

Centre de Morphologie Mathématique

35, rue Saint Honoré, 77305 Fontainebleau CEDEX

**T
H
È
S
E**

Remerciements

Mon projet de thèse a été réalisé au sein du Centre de Morphologie Mathématique de l'école des Mines de Paris sous la direction de Dominique Jeulin, dans le cadre d'un contrat CIFRE avec l'entreprise de sidérurgie ArcelorMittal. Sur le plan personnel, ces trois années de thèse ont été très enrichissantes, en grande partie grâce aux personnes que j'ai pu rencontrer et que j'aimerais remercier ici.

Ma reconnaissance va en premier lieu à Dominique Jeulin, qui, malgré un emploi du temps souvent très chargé, a toujours été disponible pour soutenir le projet et trouver du temps pour répondre à mes nombreuses questions. Je pense avoir énormément appris à son contact au cours de ces trois années de thèse.

Je tiens également à chaleureusement remercier Artur Soucemarianadin, Anaël Lemaître, François Mudry et Gabriel Fricout qui ont accepté de faire partie de mon jury de thèse, ainsi que Mikhael Balabane et Michel Jourlin, qui ont relu avec minutie mon manuscrit de thèse.

La présente thèse doit beaucoup aux idées et conseil de Mikhael Balabane, Anaël Lemaître et Paul Manneville, que je tiens à vivement remercier pour leur implication sans faille au cours de ces trois années. Je ne saurais non plus oublier de remercier Gabriel Fricout, Jean-Michel Mataigne et Jean-Jacques Piezanowski, qui, au sein d'ArcelorMittal, ont accompagné de très près l'ensemble du projet et dont l'enthousiasme et le soutien ne se sont jamais démentis. Je tiens enfin à exprimer ma reconnaissance à Thibault Nion, qui, prédécesseur presque systématique sur ce sujet de thèse, m'a permis de m'appuyer sur des travaux de grande qualité.

Le Centre de Morphologie Mathématique de l'école des Mines de Paris a été durant ces trois ans un environnement de travail très agréable, et je remercie son directeur, Fernand Meyer, de m'avoir donné l'opportunité d'y effectuer mon travail de thèse. Je tiens de même à remercier tous les chercheurs du laboratoire pour leurs conseils et leur bienveillance : Jesus Angulo, Serge Beucher, Michel Bilodeau, Etienne Decencière, Petr Dokladal, Jean-Claude Klein, Beatriz Marcotegui, Estelle Parra et François Willot. J'aimerais également chaleureusement remercier Catherine Moysan pour sa gentillesse et sa disponibilité. Je ne saurais enfin oublier tous mes collègues : Hellen Altendorf, Romaric Audigier, El-Hadji Diop, Julie Escoda, Mathieu Faessel, Jean Felder, Joana Maria Frontera Pons, Luc Gilibert, Jorge Hernandez, Abdelâali Hassaine, Serge Koudoro, Amira Mensi, Vincent Morard, Louise Naud, Charles Pereyga, Guillaume Thibault, Santiago Velasco et Xiwei Zhang.

Etudier le dépôt de peinture sur les tôles a impliqué de nombreux aller-retours entre le Centre de Morphologie Mathématique à Fontainebleau et ArcelorMittal Research à Maizières-lès-Metz, où ont été réalisées la plupart des expériences décrites dans la présente thèse. Je tiens tout particulièrement à remercier Marine Kieffer, qui est directement intervenue au cours de la mise en oeuvre de ces expériences, ainsi que William Boucher de la société Phasics, dont l'expertise a été nécessaire à la réalisation des mesures présentées dans ce manuscrit. Mes remerciements vont également aux ingénieurs d'ArcelorMittal qui m'ont aidé au cours de ces trois ans, apportant leur pierre à l'édifice : Didier Verchère, Hervé Derule, Florence Bertrand, et David De Glijer. J'ai enfin une pensée pour tous ceux que j'ai pu croiser au cours de ces trois ans au sein du service d'Hervé Derule, et qui, de près ou de loin, m'ont aidé dans cette longue entreprise qu'est une thèse : Sébastien Champemaud, Sonia Edfresnes, Fabien Gervanosi, Tiago Machado, Michèle Orsini, Serge Santini, Delphine Thaï et Yussuf Yildirim.

Mes derniers remerciements vont enfin à mes proches et ma famille, qui m'ont toujours encouragé et soutenu pendant ces trois années.

Résumé

L'aspect visuel des pièces peintes d'une automobile contribue significativement à la qualité de l'ensemble du véhicule. Si les procédés industriels de dépôt de peinture mis en oeuvre au cours de la fabrication de l'automobile impactent de manière prépondérante l'aspect visuel des tôles revêtues, la qualité intrinsèque de la tôle utilisée n'en est pas moins un facteur essentiel de l'obtention de cet aspect. Nous nous intéressons dans ce projet de thèse à l'influence de la topographie des tôles rugueuses sur l'aspect des pièces automobiles après mise en peinture.

Le dépôt des couches successives de cataphorèse, sealer et laque sur la tôle modifie en profondeur la rugosité des surfaces. Plusieurs modèles hydrodynamiques ont été développés au cours de ce projet de thèse, qui permettent de prédire la topographie finale de la tôle revêtue. L'accent est mis sur l'influence de la rhéologie, newtonienne ou non-newtonienne, de la peinture automobile sur la dynamique de l'écoulement. Une des principales difficultés relative à l'étude menée sur la peinture est la mesure des paramètres de rhéologie dans la configuration géométrique des films minces. Une méthode est présentée qui, via la résolution d'un problème inverse, permet une caractérisation in situ de la rhéologie de la peinture constitutive du film. Un important travail expérimental et le développement d'outils de caractérisation de la rugosité des surfaces, basés notamment sur la transformée en ondelette, ont permis de valider l'utilisation des différents modèles en vue de décrire les différentes étapes du procédé de mise en peinture.

La question de l'interaction de la lumière avec les surfaces revêtues est enfin brièvement abordée. Un modèle permettant de prendre en compte l'influence de la rugosité et du phénomène de diffusion de la lumière au sein de la couche de peinture est présenté. Des simulations de rendus ont été réalisées à partir de ce modèle et confrontées à des rendus mesurés expérimentalement, qui donnent des résultats prometteurs.

Abstract

The visual appearance of the painted steel sheets constituting the body of a car contributes significantly to the quality of the entire vehicle. If the industrial processes of paint deposition has a major impact on the visual appearance of the painted steel sheets, the intrinsic quality of the steel sheet used remains a key factor in its obtention. In this thesis, the influence of the topography of rough steel sheets on the appearance after painting is investigated.

The deposition of the successive layers of electrophoresis, sealer and lacquer on the metal significantly modify the surface roughness. Hydrodynamic models were developed during this thesis project, which aim at predicting the final topography of the painted sheet. Emphasis is placed on the influence of the paint rheology, Newtonian or non-Newtonian, on the leveling. A major challenge regarding the study of the painting is the measurement of its rheological parameters in the geometric configuration of thin films. A method is presented which, by resolving an inverse problem, allows an in situ characterization of the rheology of the paint. An important experimental work and the development of tools for characterizing surface roughness based on the wavelet transform validated the use of the different models to describe the various stages of the process of painting.

The interaction of light with the painted surfaces is finally briefly investigated. A model which takes into account the influence of the roughness and the phenomenon of light scattering in the paint layer is presented. Simulations were made from this model and confronted to experimental results, showing promising results.

Table des matières

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 9 |
| I | Caractérisation multi-échelle de la rugosité des surfaces | 13 |
| 2 | Caractérisation multi-échelle de la rugosité et analyse en ondelettes | 15 |
| 2.1 | Aspects mathématiques de la transformée en ondelettes continue | 19 |
| 2.2 | Discrétisation de la transformée en ondelettes | 21 |
| 2.3 | Reconstruction discrète | 23 |
| 2.4 | Extension à deux dimensions | 23 |
| 2.5 | Reconstruction échelle par échelle et paramètres statistiques | 25 |
| 2.6 | Paramètre d'échelle et fréquence | 27 |
| 2.7 | Limites de l'algorithme | 28 |
| 3 | Bases d'ondelettes orthogonales | 35 |
| 3.1 | Transformée en ondelettes orthogonales | 35 |
| 3.2 | Transformée en paquets d'ondelettes | 44 |
| 3.3 | Conclusion | 47 |
| 4 | Caractérisation multi-échelle de l'orientation | 53 |
| 4.1 | Caractérisation de l'orientation et ondelettes de Gabor | 53 |
| 4.2 | Caractérisation de l'orientation et transformée en ondelettes dyadiques | 54 |
| II | Modélisation du procédé de mise en peinture | 61 |
| 5 | Modélisation des écoulements | 63 |
| 5.1 | Modèle newtonien | 65 |
| 5.2 | Effet Marangoni | 71 |
| 5.3 | Nivellement d'un film non-newtonien | 73 |
| 5.4 | Cross-over | 76 |
| 5.5 | Conclusion | 79 |
| 6 | Nivellement de la cataphorèse | 81 |
| 6.1 | Généralités sur la cataphorèse | 81 |
| 6.2 | Données expérimentales | 82 |

| | | |
|------------|--|------------|
| 6.3 | Modèle non-newtonien | 84 |
| 6.4 | Modèle newtonien | 91 |
| 6.5 | Modèle de cross-over | 93 |
| 6.6 | Conclusion | 104 |
| 7 | Nivellement des couches de sealer et de laque | 107 |
| 7.1 | Généralités sur le sealer et la laque | 108 |
| 7.2 | Expériences | 109 |
| 7.3 | Détermination du débit par méthode inverse | 116 |
| 7.4 | Estimation des paramètres de rhéologie des modèles | 124 |
| 7.5 | Simulations | 132 |
| 7.6 | Conclusion et perspectives | 147 |
| III | Modélisation de l'aspect peint | 149 |
| 8 | Modèles optiques | 151 |
| 8.1 | Rappels de radiométrie | 152 |
| 8.2 | Modèle de simulation de l'aspect peint | 159 |
| 8.3 | Résultats expérimentaux | 164 |
| 8.4 | Conclusion et perspectives | 173 |
| IV | Remarques conclusives | 175 |
| 9 | Conclusion générale | 177 |
| V | Annexes | 185 |
| A | Simulation numérique des modèles | 187 |
| A.1 | Calcul des dérivées spatiales | 187 |
| A.2 | Résolution du système couplé | 191 |
| A.3 | Validation du schéma numérique | 196 |
| B | Principales notations | 199 |
| B.1 | Modélisation des écoulements | 199 |
| B.2 | Modèles optiques | 200 |

Chapitre 1

Introduction

L'aspect peint d'une automobile est un argument de vente essentiel pour les constructeurs. Les premiers éléments qui apparaissent à l'acheteur potentiel sont ainsi, outre la forme globale et la couleur du véhicule, la qualité des détails de la carrosserie, ou encore son aspect plus ou moins mat ou plus ou moins texturé. Dans ce contexte, les constructeurs automobiles portent une attention toute particulière à la qualité visuelle de l'aspect peint.

Si les procédés industriels de dépôt de peinture mis en oeuvre au cours de la fabrication de l'automobile impactent de manière prépondérante l'aspect visuel des tôles revêtues, la qualité intrinsèque de la tôle utilisée n'en est pas moins un facteur essentiel de l'obtention de cet aspect. Les producteurs d'acier se doivent par conséquent d'être très attentifs à la manière dont la géométrie de surface des tôles interagit avec la qualité visuelle de la surface de l'automobile.

Outre ces questions - primordiales - d'esthétique, la mise en peinture des tôles destinées au secteur de l'automobile passe par des procédés industriels coûteux et relativement polluants. La directive européenne 2004/42/CE [13] relative à l'utilisation des solvants, et la directive 2000/53/CE [12] qui vise à limiter l'impact écologique des véhicules hors d'usage incitent les constructeurs à limiter la quantité de peinture utilisée dans un procédé dont le coût a été estimé à presque 10% du coût total de production de l'automobile.

Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit s'inscrit dans le cadre d'un projet mis en oeuvre par la société ArcelorMittal, principale entreprise sidérurgique française et l'un des leaders mondiaux dans le secteur des tôles destinées à la fabrication automobile, visant à maîtriser la géométrie de surface des tôles destinées au secteur de l'automobile afin d'en optimiser l'impact en termes de perception qualitative par le client. Nous nous focaliserons plus précisément sur l'influence de la rugosité des tôles d'acier, qui désigne les aspérités et variations d'altitude qui distinguent la surface de la tôle d'une surface entièrement lisse. La présente thèse se situe dans la droite ligne des travaux réalisés par P.Laurence [30], A.Aubert [1], G.Fricout [15] et surtout Th.Nion [42] sous la supervision de D. Jeulin, qui ont permis aux laboratoires d'ArcelorMittal Research et du Centre de Morphologie Mathématique de développer une réelle expertise sur la problématique de la rugosité.

Intéressons-nous plus précisément à cette problématique. Les pièces d'acier destinées à l'industrie automobile se doivent de répondre à un cahier des charges très complexe. La tôle doit ainsi posséder d'excellentes propriétés mécaniques (résistance aux chocs, déformabilité), tout en restant suffisamment modelable pour s'adapter aux formes très variées exigées

aujourd'hui par l'industrie automobile, en termes de design notamment.

L'état de surface de la tôle participe de manière essentielle au respect de ce cahier des charges. En premier lieu, la tôle doit être protégée des phénomènes de corrosion. Afin d'assurer cette protection, une fine couche de zinc (quelques μm) est déposée au cours du procédé de galvanisation. Pour parfaire la résistance de la tôle à la corrosion, un dépôt de phosphate est précipité à la surface de la tôle lors du procédé de phosphatation, qui va modifier en profondeur les caractéristiques de rugosité. La figure 1.1 présente la topographie d'une tôle d'acier après les procédés de galvanisation et de phosphatation. On aperçoit distinctement les grains de zinc apparus au cours des traitements chimiques appliqués à la tôle.

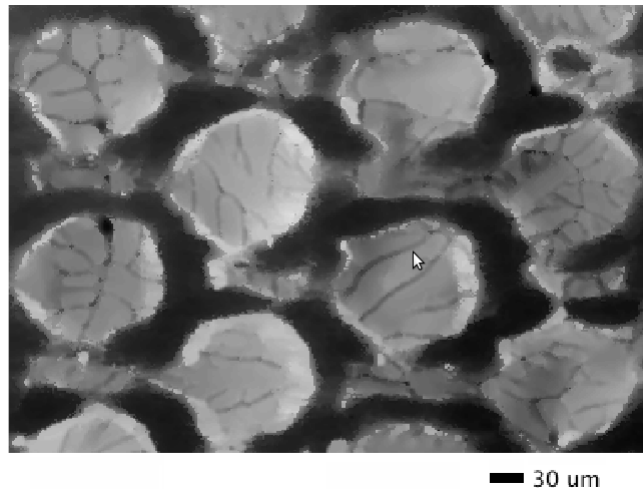


FIGURE 1.1 – Topographie d'une tôle d'acier galvanisée et phosphatée. On aperçoit distinctement les grains de zinc apparus lors des traitements chimiques subis par la tôle, qui modifient la rugosité de la surface. Le pas d'acquisition est ici de $1.76 \times 2.08 \mu m$. L'image est issue de la thèse de Th. Nion [42].

Les tôles destinées au secteur automobile doivent également être optimisées pour l'étape de mise en forme qui les transforme en pièces automobiles. En général, cette étape s'effectue par emboutissage : la tôle est compressée entre deux moules dont la forme correspond à la pièce qu'on souhaite réaliser. Il est alors indispensable que la tôle soit lubrifiée de manière optimale, ce qui n'est possible que lorsque la surface possède une rugosité non-nulle. Lors de sa production, des motifs sont donc imprimés sur la tôle au cours d'un procédé appelé skin-pass : la tôle est compressée entre deux rouleaux à la surface desquels les motifs qu'on souhaite imprimer sur la tôle ont été gravés. Le lecteur intéressé par plus de précisions sur l'influence du skin-pass sur la rugosité pourra se reporter aux travaux de P. Laurence et D. Jeulin [30] [26] sur le sujet. Retenons dans le contexte de la présente thèse que du fait des traitements chimiques et physiques qui leur sont appliqués au cours du procédé de fabrication, les tôles d'acier présentent inévitablement une certaine rugosité, susceptible d'impacter la qualité de l'aspect peint des pièces automobiles. Deux surfaces

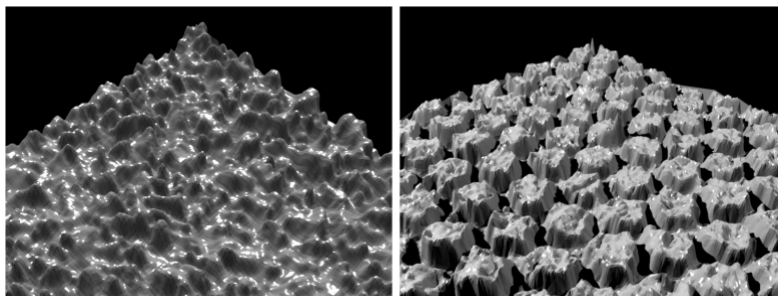


FIGURE 1.2 – Aperçu en trois dimensions d’une géométrie de tôle EDT (rugosité aléatoire) à gauche, et d’une tôle EBT (rugosité périodique) à droite. La hauteur des pics est d’une dizaine de microns environ, la largeur des motifs correspond environ à une centaine de microns. L’image est issue de la thèse de Th. Nion [42].

rugueuses sont représentées sur la figure 1.2, l’une présentant une rugosité aléatoire, l’autre périodique, à l’issue de l’étape de skin-pass.

Nous nous proposons dans la présente thèse de développer un modèle prédictif de l’aspect peint, connaissant l’état de surface des tôles d’acier. L’établissement d’un tel modèle implique le développement de nombreux outils et modèles. Il importe ainsi de disposer de méthodes de caractérisation des surfaces qui soient à même de décrire avec un nombre limité de paramètres la rugosité des surfaces étudiées. Nous présentons dans la première partie du manuscrit de thèse une méthode de caractérisation multi-échelle des surfaces basée sur la transformée en ondelettes. Cette méthode est utilisée avec profit dans le reste de la thèse afin d’exploiter les différents résultats expérimentaux.

Le dépôt des couches successives de peinture sur la tôle modifie en profondeur la rugosité des surfaces. Nous nous intéressons dans la seconde partie de la thèse à divers modèles qui permettent de prédire la géométrie finale de la tôle revêtue. Ces modèles partent des équations de l’hydrodynamique et visent à reproduire l’évolution des couches successives de peinture au cours de toute l’étape de dépôt. Les modèles sont confrontés à des données expérimentales obtenues à l’aide d’un analyseur de front d’onde développé par la société PhasicsTM, qui permet de suivre avec une dynamique élevée l’évolution de la topographie des couches de peinture au fur et à mesure du procédé de dépôt, ainsi qu’à une base de données expérimentales issue de la thèse de Th. Nion [42]. Une méthode de détermination des paramètres rhéologiques des peintures est également présentée, qui se base sur les données mesurées par l’analyseur de front d’onde.

La dernière partie de la thèse aborde enfin brièvement la question de l’interaction de la lumière avec les surfaces revêtues. Un modèle est présenté, qui offre un début de compréhension des différents phénomènes optiques mis en jeu.

Première partie

**Caractérisation multi-échelle de la
rugosité des surfaces**

Chapitre 2

Caractérisation multi-échelle de la rugosité et analyse en ondelettes

La caractérisation des surfaces est un problème difficile, une surface étant un objet physique complexe pour lequel on dispose d'une représentation numérique (carte de topographie discrète, image issue d'une caméra) elle-même complexe. Caractériser une surface consiste à extraire de cette représentation une partie de l'information qui y est contenue, dans le but d'obtenir des critères quantitatifs de comparaison des surfaces entre elles. Une des difficultés inhérentes à la caractérisation des surfaces est qu'il n'existe pas de méthode de caractérisation universelle et que le choix de la méthode dépend donc fortement de l'application à laquelle la surface étudiée est destinée. Une caractérisation donnée ne sera ainsi généralement pertinente que pour un type de propriétés de la surface (optiques, mécaniques, tactiles...).

Très souvent, une surface est représentée sous la forme d'une image bidimensionnelle (topographie obtenue par microscopie interférométrique, image issue d'une caméra haute définition, etc...). De nombreux descripteurs utilisés dans le domaine du traitement de l'image s'avèrent donc pertinents dans une optique de caractérisation. Certains descripteurs peuvent être purement statistiques, comme la fonction d'autocorrélation, d'autres faire intervenir des notions de morphologie mathématique, d'autres encore faire appel à des notions d'analyse harmonique, comme la transformée de Fourier ou la transformée en ondelettes. Nous conseillons au lecteur intéressé par le sujet de se reporter à la thèse de G.Fricout [15], qui passe en revue un certain nombre de descripteurs, tant statistiques que morphologiques. Comme dans le cas présent, ces descripteurs sont appliqués à la caractérisation des surfaces d'acier. Nous nous intéressons dans le cadre de la présente thèse à une méthode de caractérisation quantitative des surfaces basée sur la transformée en ondelettes, initialement développée dans le cadre des thèses de S.Lee [31], S.Mezghani [39] et S.Ekambi-Pokossi [10], et qui vise à décrire par un nombre restreint de paramètres la rugosité des surfaces étudiées.

La *rugosité* d'une surface désigne les aspérités et variations d'altitude qui distinguent cette surface d'une surface totalement lisse. La rugosité des surfaces d'acier que nous étudions s'introduit au cours des traitements physiques et chimiques appliqués à la tôle au cours de sa fabrication. Un certain nombre de critères de rugosité standards sont reconnus internationalement par une norme ISO. Ces paramètres de caractérisation sont

généralement obtenus à partir de profils, c'est à dire d'un ensemble de valeurs représentant l'altitude d'une surface selon une droite. Néanmoins, les progrès réalisés en terme d'acquisition et de traitement des données conduisent de plus en plus à considérer des paramètres surfaciques extraits à partir d'une représentation fournissant des altitudes sur une carte bidimensionnelle.

Il est intéressant d'appréhender la notion de rugosité des surfaces par le biais de l'analyse fréquentielle. Dans ce contexte, une surface usinée peut s'interpréter comme étant la superposition de plusieurs longueurs d'onde de rugosité, dont les amplitudes sont intimement liées aux processus qui sous-tendent la fabrication de la surface [49].

Définissons un profil par une fonction $Z(x)$. Usuellement trois échelles caractéristiques sont distinguées [49] :

- La *forme* $S(x)$ contient tout ce qui est considéré comme une déformation à grande échelle postérieure à la production de la surface étudiée. Il peut ainsi s'agir de la courbure globale d'un échantillon provenant de mauvais traitements (défaut de stockage, etc...). Il existe un certain nombre de méthodes d'obtention de la forme à partir d'un profil donné. Une première approche consiste à interpoler le profil à l'aide de polynômes de degrés plus ou moins élevés suivant la taille des structures considérées comme de la forme. Nous renvoyons le lecteur intéressé par la question de l'extraction de forme à la thèse de Th.Nion [42], qui développe un algorithme basé sur cette approche.

Une seconde approche consiste à appliquer un filtre au profil, qui permet de séparer la forme $S(x)$ du profil brut $P(x) = Z(x) - S(x)$.

- L'*ondulation* $W(x)$ est obtenue en appliquant un filtre passe-bas au profil brut, après extraction de forme. La nature du noyau de convolution appliqué ainsi que la fréquence de coupure sont laissées à l'appréciation de l'utilisateur. Très souvent, le profil est convolué avec un noyau Gaussien.
- La *rugosité* $R(x)$ désigne le résidu entre le profil brut $P(x)$ et l'ondulation $W(x)$. Elle contient toutes les structures de petite échelle du profil.

Notons que cette décomposition du profil en trois échelles de rugosité peut être trop restrictive, et il est souvent intéressant de chercher à décomposer plus finement les différentes composantes échelle par échelle. Sans prétendre à l'exhaustivité, nous pouvons recenser un certain nombre de paramètres statistiques standards parmi les plus couramment utilisés dans le but de caractériser la rugosité des profils étudiés. Le lecteur intéressé par d'autres paramètres pourra se reporter aux normes ISO 4287, ISO 12085 et ISO 13565.

$$X_a = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n |X(k)|$$

$$X_q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n X(k)^2}$$

$$X_p = \max_k (X[k] - E(X))$$

où E désigne l'espérance mathématique. Ces paramètres peuvent être calculés aussi bien sur le profil complet que sur les différentes décompositions de ce dernier. La notation R in-

dique généralement que le paramètre statistique a été calculé sur le profil brut, la notation W est spécifique aux profils d'ondulation, et la notation M correspond aux paramètres calculés sur des profils décomposés jusqu'au niveau de la rugosité. Nous nous conformerons à ces notations dans la suite de la thèse.

Dans tout ce qui suit, nous nous focaliserons peu ou prou sur la caractérisation de la rugosité des surfaces en utilisant un outil mathématique emprunté à l'analyse harmonique : l'analyse en *ondelettes*. L'analyse en ondelettes s'est développée au cours du XXème siècle en s'inspirant de l'analyse de Fourier. La transformée de Fourier permet de décomposer un signal donné en la somme de chacune de ses composantes fréquentielles. Cependant, cette transformée ne permet pas de localiser les brusques variations du signal dans l'espace physique. Le point de vue des ondelettes permet de définir une représentation des signaux qui soit précise à la fois dans l'espace des fréquences, mais également dans l'espace physique. Historiquement, l'analyse en ondelettes émerge à la fin des années 1980, après les travaux fondateurs de A.Haar, D.Gabor, J.Morlet, A.Grossman ou encore Y.Meyer. La théorie mathématique est rejointe à la même période par le traitement du signal, quand S.Mallat fait le lien entre les approximations multirésolutions, que nous aurons l'occasion de présenter dans la suite du manuscrit, et l'analyse en ondelettes, ouvrant ainsi la voie à une version discrète de la théorie et définissant une version orthogonale de la transformée en ondelettes. Les ondelettes sont devenues au début des années 1990 un des thèmes de prédilection dans le domaine du traitement du signal, et ont été appliquées à de nombreuses problématiques allant du débruitage à la compression de données. Nous présenterons brièvement dans la suite du manuscrit les bases de la théorie des ondelettes. Le lecteur intéressé par le sujet pourra se tourner vers le livre de S.Mallat [36] sur le sujet, véritable référence en la matière.

La transformée en ondelettes est largement utilisée dans le cadre de la caractérisation des textures [56], en particulier pour les surfaces rugueuses. Un premier outil de caractérisation basé sur la transformée en ondelettes continue a été introduit en 1997 dans l'article de S-H.Lee, H.Zahouani, R.Caterini et T.G. Mathia [31]. Cet outil de caractérisation a par la suite été amélioré et étendu dans le cadre de nombreux travaux menés par H.Zahouani [61] [59] [32] [60] et dans les thèses de S.Mezghani [39] et S.Ekambi-Pokossi [10]. L'algorithme proposé permet de décomposer un profil ou une surface donnée en la somme de ses composantes multi-échelles. Il peut ainsi permettre de séparer la forme, l'ondulation et la rugosité d'un profil ou d'une surface donnée, mais également de réaliser une décomposition beaucoup plus fine. L'algorithme a été généralisé au cas des bases d'ondelettes orthonormales par Q.Chen, S.Yang et Z.Li en 1999 [6]. Plus récemment, J.Jay Liu, D.Kim et C.Han [34] ont utilisé la transformée en paquets d'ondelettes, dérivée du point de vue des ondelettes orthogonales, afin de caractériser la rugosité de surfaces dans le domaine de la chimie.

Avant de poursuivre, il paraît intéressant de préciser quelques notions sur ce que nous désignerons sous le terme de *structures spatio-fréquentielles*. Considérons un signal d'énergie finie, autrement dit une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. La fonction $x \rightarrow \frac{|f(x)|^2}{\|f\|^2}$ peut s'interpréter comme une densité de probabilité sur \mathbb{R} , puisqu'elle est positive et que son intégrale est égale à l'unité. On peut donc définir une position moyenne du signal représenté par cette fonction dans les espaces physique et harmonique, et des variances autour de ces positions. La position moyenne de notre fonction est donnée par la relation :

$$\bar{x} = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx \quad (2.1)$$

La fréquence moyenne est quant à elle donnée par :

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi\|\hat{f}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.2)$$

Les variances autour de ces valeurs moyennes sont données par :

$$\sigma_x = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 |f(x)|^2 dx \quad (2.3)$$

et

$$\sigma_\omega = \frac{1}{2\pi\|\hat{f}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.4)$$

On démontre que les variances spatiales et fréquentielles vérifient l'inégalité :

$$\sigma_x^2 \sigma_\omega^2 > \frac{1}{4} \quad (2.5)$$

Ce résultat est connu sous le nom de *principe d'incertitude de Heisenberg*. Il signifie qu'on ne peut pas parfaitement localiser un signal en temps et en fréquence, et que plus un signal est localisé spatialement (resp. fréquentiellement), plus sa variance fréquentielle (resp. spatiale) est susceptible d'être étendue.

L'analyse en ondelettes est un outil particulièrement efficace en vue d'analyser les structures spatio-fréquentielles présentes dans une surface. En l'occurrence, nous cherchons à déterminer les structures spatio-fréquentielles présentes dans des échantillons de surfaces rugueuses dans les limites imposées par le principe d'incertitude. Le principe de l'analyse est de projeter ces surfaces sur des bases d'ondelettes précisément localisées en temps et en fréquence, puis d'étudier le module des coefficients afin d'en tirer des informations *multi-échelles* d'ordre statistique sur les caractéristiques de la rugosité de l'échantillon observé.

L'analyse en ondelettes est une branche importante du vaste domaine mathématique que constitue le traitement du signal. Nous avons vu précédemment que plusieurs approches permettent d'appréhender la notion d'ondelette. Nous commencerons dans ce chapitre par présenter l'algorithme de décomposition des surfaces dans le cadre de la transformée en ondelettes continue. Nous constaterons que cette approche, bien que valide, se heurte à un certain nombre de limitations. L'algorithme de transformée en ondelettes continue permet en effet uniquement de décomposer les surfaces étudiées sur des familles génératrices de l'espace de toutes les surfaces possibles, et non pas sur des bases orthonormées de cet espace, ce qui résulte en l'obtention d'une information fortement redondante et enchevêtrée entre les échelles. Nous nous attacherons en particulier à donner un cadre mathématique à la notion d'*information redondante*.

2.1 Aspects mathématiques de la transformée en ondelettes continue

Une ondelette est une fonction ψ de $L^2(\mathbb{R})$ de moyenne nulle, normalisée à $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ et centrée en $x = 0$. On obtient une famille d'ondelettes en dilatant cette fonction par un paramètre d'échelle $s > 0$ et en la translatant par $u \in \mathbb{R}$.

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{x-u}{s}\right) \quad (2.6)$$

Le fait de dilater l'ondelette par un coefficient supérieur (resp. inférieur) à 1 augmente (resp. diminue) sa variance temporelle et diminue (resp. augmente) sa variance fréquentielle. Le facteur $\frac{1}{\sqrt{s}}$ permet de conserver la norme de l'ondelette.

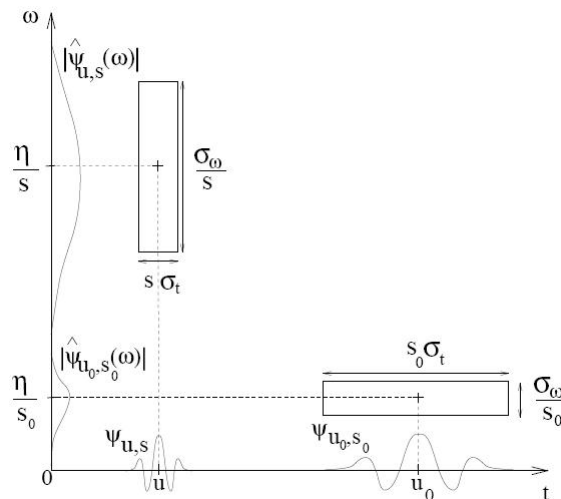


FIGURE 2.1 – Boîtes de Heisenberg d’une ondelette pour différents facteurs de dilatation [36]

Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. La transformée en ondelettes de f est la fonction :

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{x-u}{s}\right) dx = f * \bar{\psi}_s(u) \quad (2.7)$$

où $\bar{\psi}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{-x}{s}\right)$

Une transformée en ondelette est complète dès lors qu’elle satisfait à la condition d’admissibilité suivante :

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty \quad (2.8)$$

On peut alors reconstruire f à partir des coefficients des ondelettes par la formule :

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty Wf(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{x-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2} \quad (2.9)$$

Une propriété intéressante de la transformée en ondelettes est la conservation de l'énergie, qui correspond à la normalisation de l'ondelette dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$.

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx = \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \int_{-\infty}^\infty |Wf(u, s)|^2 du \quad (2.10)$$

Un exemple d'ondelette continue est donné par le chapeau mexicain, qui correspond à la dérivée seconde normalisée d'une fonction gaussienne.

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3\sigma}} \pi^{-1/4} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 1 \right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.11)$$

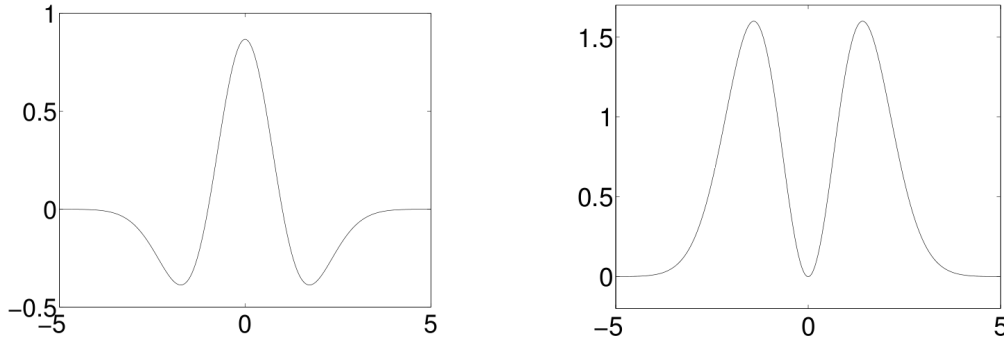


FIGURE 2.2 – Ondelette chapeau mexicain (gauche) et sa transformée de Fourier (droite) [36]

La transformée de Fourier de cette ondelette est :

$$\hat{\psi}(\omega) = -\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3\sigma}}\pi^{1/4}\sigma^2\omega^2 \exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right) \quad (2.12)$$

On vérifie que pour cette ondelette, $C_\psi = \frac{4\sqrt{\pi}}{3\sigma}$. Le paramètre σ représente la variance de la fonction gaussienne utilisée pour construire l'ondelette. Plus la variance de la gaussienne est élevée, moins l'ondelette est localisée spatialement. Inversement, une faible variance correspond à une ondelette bien localisée spatialement.

2.2 Discrétisation de la transformée en ondelettes

En pratique, nous sommes amenés à travailler avec des profils et surfaces échantillonnées. Soit $f : [0, N] \rightarrow \mathbb{R}$ un signal continu uniformément échantillonné avec un pas unitaire. Nous supposons que la taille N du signal est une puissance de deux, $N = 2^J$. Nous nous proposons de calculer la transformée en ondelettes discrète du signal f .

Soit ψ une ondelette en espace continu. On définit une ondelette discrète dilatée à l'échelle a^j en posant, $\forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$:

$$\psi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}}\psi\left(\frac{n}{a^j}\right) \quad (2.13)$$

La transformée de Fourier discrète de l'ondelette dilatée est :

$$\hat{\psi}_j[k] = \sqrt{a^j}\hat{\psi}\left(\frac{2\pi}{2^J}ka^j\right) \quad (2.14)$$

Du fait de l'échantillonnage, le facteur de dilatation ne peut être pertinent que s'il appartient à l'intervalle $[1, 2^J]$. Dans ce qui suit, nous prendrons un facteur a égal à $2^{\frac{1}{v}}$. On insère ainsi v échelles intermédiaires, ou *voix*, pour chaque *octave* $[2^j, 2^{j+1}]$.

Le calcul de la transformée discrète se fait en convoluant à chaque échelle le signal de départ avec l'ondelette ψ_j .

$$Wf[n, a^j] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m]\psi_j[m-n] \quad (2.15)$$

Afin d'éviter les problèmes de bord, on traite $f[n]$ et les ondelettes $\psi_j[n]$ comme des signaux périodiques de période N . On effectue une convolution périodique afin de mener à bien le calcul.

En pratique, on calcule la transformée de Fourier de notre échantillon. On effectue ensuite le produit des transformées de Fourier du signal échantillonné et de l'ondelette retenue.

$$\hat{W}f[k, a^j] = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{f}[k] \hat{\psi}_j^*[k] \quad (2.16)$$

On repasse enfin dans le domaine physique.

$$Wf[n, a^j] = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{W}f[k, a^j] e^{i \frac{2\pi}{N} kn} \quad (2.17)$$

On remarquera que le calcul de la transformée de Fourier d'un signal échantillonné a pour effet de périodiser le signal. Les signaux et filtres sur lesquels nous travaillons sont donc naturellement périodisés si cette méthode de passage dans le domaine de Fourier est employée.

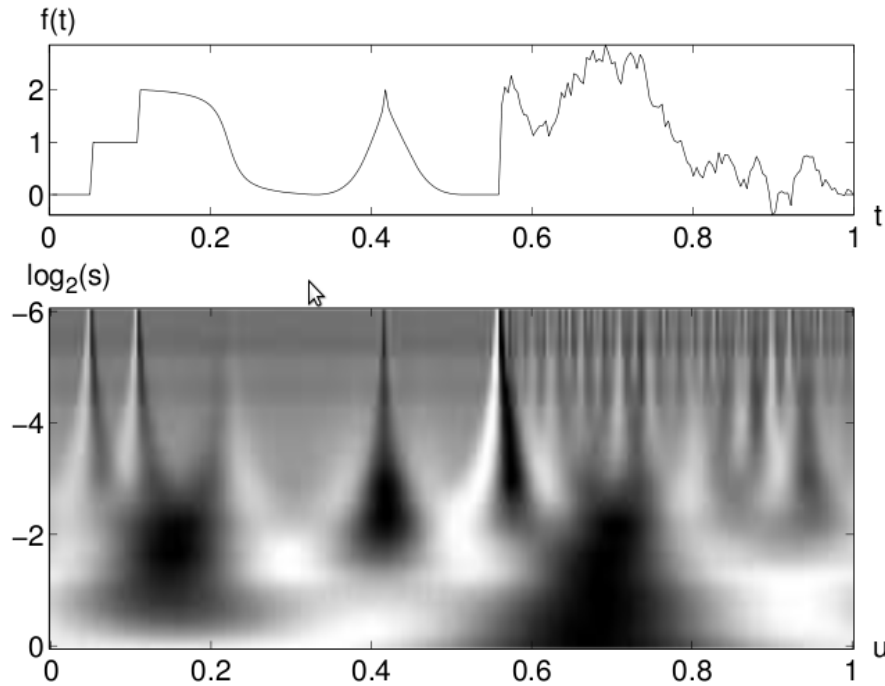


FIGURE 2.3 – Transformée en ondelettes continue d'un profil, réalisée avec des ondelettes chapeaux mexicains [36].

Une transformée en ondelettes calculée jusqu'à l'échelle 2^J ne constitue pas une représentation complète du signal. La composante de basse fréquence s'obtient en projetant le signal sur une fonction d'échelle qui agrège les échelles plus grandes que 2^J . En pratique, nous travaillons sur des signaux d'énergie nulle aux basses fréquences, puisque la forme des profils de rugosité que nous étudions a été extraite. Nous considérerons donc toujours que les coefficients de la composante de basse fréquence sont négligeables par rapport aux coefficients des transformées en ondelettes successives.

2.3 Reconstruction discrète

Dans l'espace continu, la formule de reconstruction est donnée par :

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty Wf(\cdot, s) * \psi_s(t) \frac{ds}{s^2} \quad (2.18)$$

La transformée de Fourier de \tilde{f} est donnée par :

$$\hat{\tilde{f}}(\omega) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \hat{W}f(\omega, s) \hat{\psi}_s(\omega) \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \hat{W}f(\omega, s) \hat{\psi}_s(\omega) \frac{d \ln s}{s} \quad (2.19)$$

Dans l'intégrale, on peut effectuer le changement de variable $u = \ln(s)$. La fonction $h : s \rightarrow \ln(s)$ réalise en effet un C^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $] -\infty, +\infty[$.

$$\hat{\tilde{f}}(\omega) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{W}f(\omega, e^u) \sqrt{e^u} \hat{\psi}(e^u \omega) \frac{du}{e^u} \quad (2.20)$$

Dans l'espace discrétisé, on calcule dans un premier temps les produits de convolution à chaque échelle dans le domaine de Fourier. On évalue dans un second temps la transformée de Fourier de la fonction reconstruite en discrétisant la formule précédente. L'intégrale est remplacée par une somme de Riemann sur les fréquences discrétisées qui interviennent dans la transformée, avec un pas de largeur $\ln(a)$.

$$\tilde{f}[k] = \frac{1}{C_\psi} \sum_{j=0}^{J=v \log_2(N)} \hat{W}f[k, a^j] \sqrt{a^j} \hat{\psi}[a^j k] \frac{\ln(a)}{a^j} \quad (2.21)$$

2.4 Extension à deux dimensions

Dans le cas unidimensionnel, on peut constater que la famille $\{\psi_{u,s}\}_{u,s \in \mathbb{R}^x]0, +\infty[}$ est stable vis à vis des transformations unidimensionnelles que constituent les translations et les dilatations. Combinées entre elles, ces deux transformations permettent de définir toutes les similitudes de la droite. Une famille d'ondelettes apparaît donc comme une famille stable par l'action des similitudes de la droite. En deux dimensions, les similitudes du plan sont définies à partir des opérations de translation, de dilatation, mais également de rotation. Par analogie avec le cas unidimensionnel, une famille d'ondelettes bidimensionnelles devra donc être stable sous l'action des rotations. La transformée en ondelettes continue se généralise ainsi à deux dimensions d'espace en introduisant un opérateur de rotation. Cette approche plus géométrique de la notion d'ondelette est notamment développée dans le livre de Bruno Torrèsani [55].

En deux dimensions, une ondelette est une fonction ψ de $L^2(\mathbb{R}^2)$ de moyenne nulle, normalisée à $\|\psi\| = 1$ et centrée en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. On obtient une famille d'ondelettes en dilatant cette fonction par un paramètre s , en la translatant par \mathbf{u} , et en la faisant tourner d'un angle θ .

$$\psi_{\mathbf{u},s,\theta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{s} \psi \left(R_\theta \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{s} \right) \right) \quad (2.22)$$

où R_θ désigne l'opérateur de rotation de \mathbb{R}^2 de centre $\mathbf{0}$. Le facteur $\frac{1}{s}$ permet de conserver la norme de l'ondelette.

Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R}^2)$. La transformée en ondelettes de f est la fonction :

$$Wf(\mathbf{u}, s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \frac{1}{s} \psi \left(R_\theta \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{s} \right) \right) d\mathbf{x} \quad (2.23)$$

On vérifie aisément que la transformée en ondelette de f correspond en fait au produit de convolution :

$$Wf(\mathbf{u}, s, \theta) = f * \bar{\psi}_{s,\theta}(\mathbf{u}) \quad (2.24)$$

où $\bar{\psi}_{s,\theta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{s} \psi \left(-R_\theta \left(\frac{\mathbf{x}}{s} \right) \right)$. La condition d'admissibilité de l'ondelette s'écrit :

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\|\omega\|^2} d\omega < +\infty \quad (2.25)$$

La formule de reconstruction prend la forme :

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} Wf(\mathbf{u}, s, \theta) \frac{1}{s} \psi \left(\frac{R_\theta(\mathbf{x} - \mathbf{u})}{s} \right) d\theta d\mathbf{u} \frac{ds}{s} \quad (2.26)$$

En deux dimensions, l'ondelette chapeau mexicain se réécrit de la manière suivante :

$$\psi(x, y) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (x^2 + y^2 - 2) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} \quad (2.27)$$

La transformée de Fourier de cette ondelette a pour expression :

$$\hat{\psi}(\omega) = -\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \pi^{1/4} (\omega_x^2 + \omega_y^2) \exp \left(-\frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{2} \right) \quad (2.28)$$

On vérifie que pour cette ondelette, $C_\psi = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$. A nouveau, dans le cas bidimensionnel, on peut jouer sur la variance du noyau gaussien utilisé afin de construire l'ondelette si l'on souhaite localiser l'ondelette, soit spatialement, soit fréquentiellement.

L'algorithme de discrétisation présenté dans le cadre unidimensionnel se transpose aisément au cas bidimensionnel.

2.5 Reconstruction échelle par échelle et paramètres statistiques

Le but de notre étude est de parvenir à une caractérisation *multi-échelle* de la rugosité d'une surface ou d'un profil de tôle. Dans le cadre d'une collaboration scientifique entre ArcelorMittal et le Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'école Centrale Lyon, un algorithme basé sur la transformée en ondelette et la formule de reconstruction a été développé, qui permet de décomposer la rugosité en la somme des contributions aux différentes échelles. Cette approche a été développée dans les thèses de S.Lee [31], S.Mezghani [39] et S.Ekambi-Pokossi [10], et a donné lieu à la publications de plusieurs articles [61] [59].

L'idée de l'algorithme est de décomposer le profil ou la surface étudiée sur une famille d'ondelettes continues, puis de reconstruire le signal en gardant uniquement les coefficients d'ondelettes qui correspondent à l'échelle étudiée. On décompose ainsi le signal en ses différentes composantes multi-échelles. Pour chaque composante, on peut définir un paramètre, le Ma . Ce dernier caractérise l'écart moyen à la surface plane caractéristique de l'échelle étudiée. La paramètre Ma peut être intéressant si on souhaite caractériser la qualité de la surface rugueuse. Ainsi, une valeur élevée du Ma à une échelle donnée peut impacter la qualité visuelle de la surface, ce d'autant plus si l'oeil humain est sensible aux motifs dont les longueurs caractéristiques correspondent à cette échelle. Une valeur élevée du paramètre Ma peut également être représentative d'un défaut induit par le processus de fabrication des tôles. Notons Δl le pas d'échantillonnage horizontal du profil. Le Ma est défini par la relation

$$Ma(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|f_j[n] - E[f_j]|}{\Delta l} \quad (2.29)$$

La courbe obtenue permet de caractériser le contenu multi-échelle de la rugosité étudiée. On attirera néanmoins l'attention du lecteur sur plusieurs points :

- Le paramètre Ma ainsi défini est une moyenne sur le profil ou la surface. Un même paramètre Ma peut décrire deux composantes de natures très différentes. Ainsi, un profil avec une rugosité bien localisée de grande amplitude et un profil avec une rugosité uniforme d'amplitude plus faible vont avoir un paramètre Ma similaire.
- Dans le cas des surfaces, le paramètre Ma ne fournit aucune indication sur l'orientation des structures multi-échelles qu'il décrit.

Une solution simple, partant de la décomposition en ondelettes de notre profil ou surface, pour exploiter les informations de localisation de la transformée en ondelette, est d'associer au Ma un paramètre statistique du second ordre. Le choix de la variance du Ma paraît dans ce contexte être judicieux.

$$VMa(j) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{|f_j[n] - E[f_j]|}{\Delta l} - Ma(j) \right)^2} \quad (2.30)$$

Nous nous intéresserons plus loin aux questions relatives à l'orientation des structures.

Outre le paramètre Ma , il peut être intéressant de considérer des paramètres statistiques faisant appel à la norme L^2 , qui s'avère particulièrement adaptés au contexte hilbertien sous-jacent à la notion d'ondelette. Le grand intérêt de ces paramètres réside dans la propriété de conservation de l'énergie. On peut ainsi définir le paramètre Mq et sa variance de la manière suivante :

$$Mq(j) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{f_j[n] - E[f_j]}{\Delta l} \right)^2} \quad (2.31)$$

$$VMq(j) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\left(\frac{f_j[n] - E[f_j]}{\Delta l} \right)^2 - Mq(j)^2 \right]^2} \quad (2.32)$$

Les figures 2.5 à 2.11 présentent la décomposition d'un profil et d'une surface de tôle en leurs composantes à chaque échelle de rugosité. La tôle est polie (rugosité résiduelle très faible) et est revêtue d'une couche de cataphorèse. La mesure a été réalisée à l'aide d'un microscope interférométrique Microxam 100HR d'ADE Phase Shift, dans le cadre de la thèse de Th. Nion [42]. Le pas d'échantillonnage horizontal est de $20.6 \mu m$, le pas d'échantillonnage vertical étant lui de $1.35 nm$. Le profil mesure $2.6 \mu m$, la surface $2.6 \mu m$ par $2.6 \mu m$.

La décomposition du profil (resp. de la surface) échelle par échelle est représentée sur la figure 2.5 (resp. 2.9). Les sept profils (resp. surfaces) correspondent à la décomposition sur chaque échelle dyadique. Aucune voix supplémentaire n'a ainsi été insérée au sein de chaque octave. Les surfaces ont été renormalisées à chaque échelle, de sorte que l'altitude maximale apparait en blanc et l'altitude minimale en noir. La transformée en ondelettes est réalisée avec des ondelettes chapeau mexicain, de variance égale à l'unité.

La reconstruction cumulée du profil (resp. de la surface) est représentée sur la figure 2.5 (resp. 2.10). On constate bien que la reconstruction du profil (resp. de la surface) ne peut être qu'*approchée* lorsqu'on utilise la transformée en ondelettes continue pour réaliser la décomposition.

Enfin, la figure 2.7 (resp. 2.11) représente la courbe de Ma du profil (resp. de la surface), en échelle logarithmique. On constate que la rugosité de la surface est particulièrement importante au niveau des échelles correspondant à un paramètre de dilatation de l'ondelette de l'ordre de 10^1 .

2.6 Paramètre d'échelle et fréquence

Il est intéressant de pouvoir exprimer le paramètre Ma , non pas en fonction du paramètre d'échelle qui caractérise la dilatation de l'ondelette utilisée pour décomposer le profil, mais en fonction d'une indication fréquentielle. Le lien entre paramètre d'échelle et fréquence est loin d'être trivial. Nous avons vu en introduction que toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$ peut être interprétée comme une densité de probabilité sur \mathbb{R} . Dans ce contexte, il est possible d'associer une position fréquentielle moyenne $\bar{\omega}$ à l'ondelette utilisée pour réaliser la décomposition, ainsi qu'une variance σ_ω autour de cette position.

On obtient une famille d'ondelettes en dilatant et translatant une ondelette mère ψ :

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (2.33)$$

Dans le domaine de Fourier :

$$\hat{\psi}_{u,s}(\omega) = \sqrt{s}\hat{\psi}(s\omega)e^{-iu\omega} \quad (2.34)$$

La fréquence moyenne associée à l'ondelette dilatée d'un facteur s et translatée d'un facteur u est donc :

$$\bar{\omega}_{u,s} = \frac{1}{2\pi\|\hat{\psi}_{u,s}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{\psi}_{u,s}(\omega)|^2 d\omega = \frac{\bar{\omega}}{s} \quad (2.35)$$

La variance associée à l'ondelette dilatée d'un facteur s et translatée d'un facteur u est enfin :

$$\sigma_\omega(u, s) = \frac{1}{2\pi\|\hat{\psi}_{u,s}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 |\hat{\psi}_{u,s}(\omega)|^2 d\omega = \frac{\sigma_\omega}{s^2} \quad (2.36)$$

Dans le cas de l'ondelette chapeau mexicain, la fréquence moyenne est $\omega = \frac{4}{3\pi\sqrt{\pi}}$. La relation entre l'échelle de dilatation de l'ondelette et la fréquence moyenne de la composante du profil associée à l'ondelette précisément dilatée à cette échelle est donc :

$$\bar{\omega}_{u,s} = \frac{4}{3\pi\sqrt{\pi}s} \quad (2.37)$$

Il est donc possible d'associer une fréquence moyenne et une variance autour de cette fréquence à chacune des composantes constitutives du profil décomposé (resp. de la surface décomposée). Il est toutefois important de noter que cette fréquence moyenne et cette variance dépendent du choix de l'ondelette utilisée pour la décomposition.

2.7 Limites de l'algorithme

L'algorithme présenté dans ce chapitre vise à caractériser une surface ou un profil de rugosité par le biais de descripteurs statistiques obtenus à partir des composantes multi-échelles de cette surface ou de ce profil. L'algorithme de transformée en ondelettes continue est utilisé afin de séparer les différentes composantes multi-échelles du signal. Cette démarche n'est pas sans poser un certain nombre de problèmes, que nous détaillons dans cette section.

En premier lieu, la décomposition de la surface ou du profil en leurs composantes multi-échelles fait appel à la formule de reconstruction. Cette dernière, comme cela a été décrit plus haut, s'obtient dans le cadre des signaux échantillonnés en discrétisant la formule continue. Cette discrétisation d'une formule adaptée au cas continu induit nécessairement une erreur lors de la reconstruction. La reconstruction qui est faite de chaque composante multi-échelle, et donc a fortiori du signal lui-même, n'est donc qu'approchée.

Un autre problème se pose, du fait que les ondelettes utilisées afin de décomposer le signal ne constituent pas une base de l'espace des signaux de taille N . Repartons de la formule de reconstruction :

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty Wf(\cdot, s) * \psi_s(x) \frac{ds}{s^2} \quad (2.38)$$

Dans l'intégrale, on peut effectuer le changement de variable $u = \ln(s)$. La fonction $h : s \rightarrow \ln(s)$ réalise en effet un C^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur $] - \infty, +\infty[$.

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(\cdot, e^u) * \psi_{\cdot, e^u}(x) \frac{du}{e^u} \quad (2.39)$$

Lorsqu'on discrétise cette formule, l'intégrale est remplacée par une somme de Riemann sur les fréquences discrétisées qui interviennent dans la transformée, avec un pas de largeur $\ln(a)$.

$$\tilde{f}[n] = \frac{1}{C_\psi} \sum_{j=0}^J Wf[\cdot, a^j] * \psi_{\cdot, a^j}[n] \frac{\ln(a)}{a^j} \quad (2.40)$$

Finalement, le profil s'exprime comme la somme de ses composantes multi-échelles de la manière qui suit :

$$\tilde{f}[n] = \sum_{j=0}^J \tilde{f}_j[n] = \sum_{j=0}^J \frac{\ln(a)}{a^j} \frac{1}{C_\psi} \sum_{p=0}^N \langle f, \psi_{p, a^j} \rangle \psi_{p, a^j}^{pér}(p) \quad (2.41)$$

La valeur du Ma est, à une échelle donnée :

$$Ma = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \left| \frac{\ln(a)}{a^j} \frac{1}{C_\psi} \sum_{p=0}^N \langle f, \psi_{p,a^j} \rangle \psi_{p,a^j}^{pér}[n] - E[\tilde{f}_j] \right| \quad (2.42)$$

Notons $l^2(\llbracket 0, N \rrbracket)$ l'espace des fonctions échantillonnées sur $\llbracket 0, N \rrbracket$ de carré intégrable. Il est possible de montrer que la famille $\{\psi_{p,a^j}, p \in \llbracket 0, N \rrbracket, j \in \llbracket 0, v \log_2(N) \rrbracket\}$ est une famille génératrice de $l^2(\llbracket 0, N \rrbracket)$ formée de vecteurs linéairement dépendants. La projection d'un profil sur cette famille de fonctions contient donc une information redondante. A une échelle donnée j_0 , les fonctions $\{\psi_{p,a^{j_0}}\}_{p \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ s'expriment en partie comme combinaison linéaire de fonctions d'autres échelles de la famille $\{\psi_{p,a^j}, p \in \llbracket 0, N \rrbracket, j \in \llbracket 0, v \log_2(N) \rrbracket\}$. Par conséquent, la projection orthogonale du profil sur les fonctions $\{\psi_{p,a^{j_0}}\}_{p \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ contient également de l'information sur le profil qui appartient aux échelles proches de l'échelle étudiée. De fait, si on souhaite bien isoler l'information propre à chaque échelle, il convient de décomposer le profil étudié sur une base de $l^2(\llbracket 0, N \rrbracket)$. Le profil étant projeté orthogonalement sur les vecteurs de cette base, il est en outre essentiel que cette dernière soit orthonormée.

Le caractère redondant de la transformée en ondelettes continue est évident lorsqu'on essaye de lier un paramètre statistique global de caractérisation et les paramètres statistiques multi-échelles qui correspondent à ce paramètre. Dans le contexte des espaces de Hilbert dans lequel est définie l'analyse en ondelettes, il est intéressant de travailler avec des paramètres qui font intervenir la norme quadratique. Une mesure globale de la rugosité d'un profil f est ainsi donnée par le Rq , défini comme suit :

$$Rq(f) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=0}^N (f[p] - E[f])^2} \quad (2.43)$$

Le paramètre multi-échelle correspondant est le Mq , dont nous rappelons l'expression :

$$Mq(f, j) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=0}^N (f_j[p] - E[f_j])^2} \quad (2.44)$$

Le Rq se réécrit de la manière qui suit :

$$Rq(f) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=0}^N \left(\sum_{j=0}^J f_j[p] - E[f_j] \right)^2}$$

On en déduit :

$$Rq(f)^2 = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^N \sum_{i,j=0}^J (f_i[p] - E[f_i])(f_j[p] - E[f_j])$$

ce qui se réécrit :

$$Rq(f)^2 = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^N \sum_{i,j=0, j \neq i}^J (f_i[p] - E[f_i])(f_j[p] - E[f_j]) + \frac{1}{N} \sum_{p=0}^N \sum_{j=0}^J (f_j[p] - E[f_j])^2$$

soit, en introduisant les paramètres Mq :

$$Rq(f)^2 = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^N \sum_{i,j=0, j \neq i}^J f_i[n] f_j[n] + \sum_{j=0}^J Mq(f, j)^2$$

$\forall (i, j) \in \llbracket 0, J \rrbracket^2$, la quantité $\frac{1}{N} \sum_{p=0}^N f_i[n] f_j[n]$ désigne le produit scalaire de f_j et f_i sur $l^2(\llbracket 0, N \rrbracket)$. Lorsque la décomposition du profil est effectuée sur une base orthonormée de $l^2(\llbracket 0, N \rrbracket)$, cette quantité s'annule, et on a alors la relation :

$$Rq(f, j) = \sqrt{\sum_{j=0}^J Mq(f, j)^2} \quad (2.45)$$

Dans ce cadre, on peut donc relier le Rq de la surface aux paramètres multi-échelles correspondants. Inversement, hors du contexte des bases orthonormées, les termes croisés ne s'annulent pas nécessairement. L'information contenue dans les paramètres multi-échelles ne permet pas à elle seule de retrouver l'information donnée par le paramètre global, du fait d'une information redondante entre les échelles.

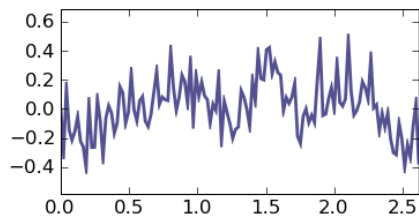


FIGURE 2.4 – Profil de rugosité, échantillonné avec un pas horizontal de $20.6\mu\text{m}$, de taille 2.6 mm . Les altitudes sont graduées en $10^{-5}m$.

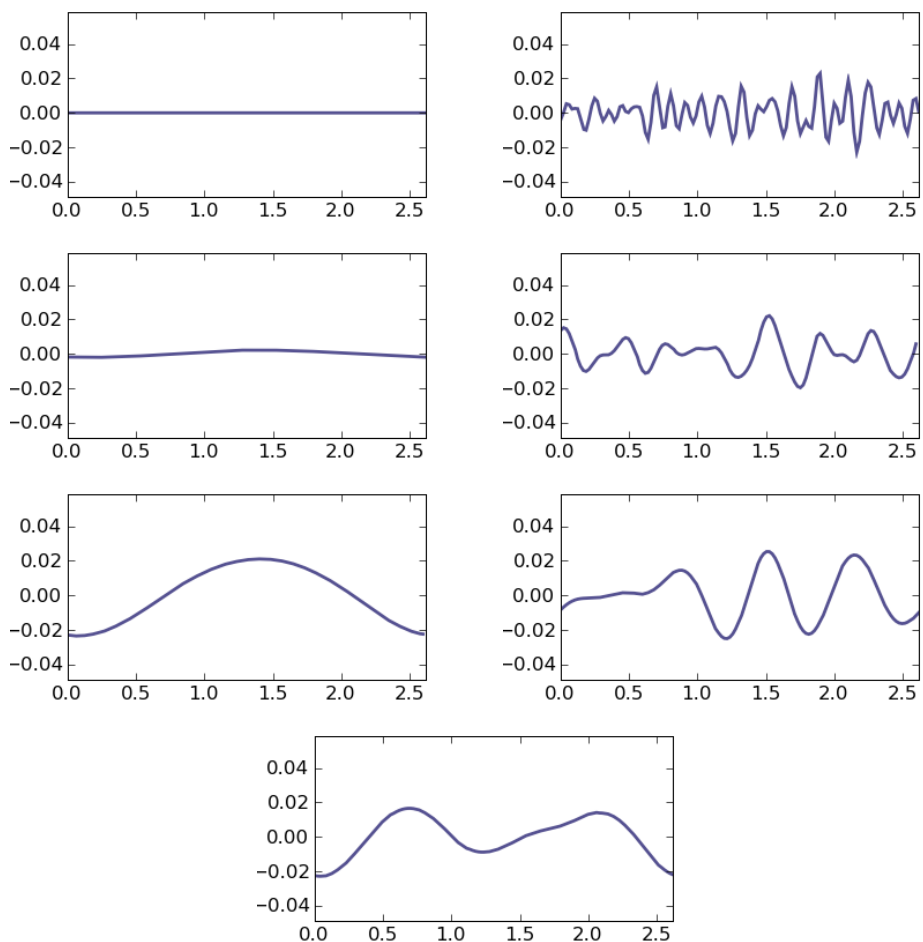


FIGURE 2.5 – Décomposition multi-échelle du profil de tôle : La décomposition du profil est réalisée avec des ondelettes de type chapeau mexicain de variance égale à l'unité. Il y a en tout sept échelles dyadiques, aucune voix supplémentaire n'a été insérée entre les échelles. Le profil correspondant à l'échelle la plus grande est représenté en haut à gauche, celui correspondant à l'échelle la plus fine en haut à droite. Les altitudes sont graduées en $10^{-5}m$.

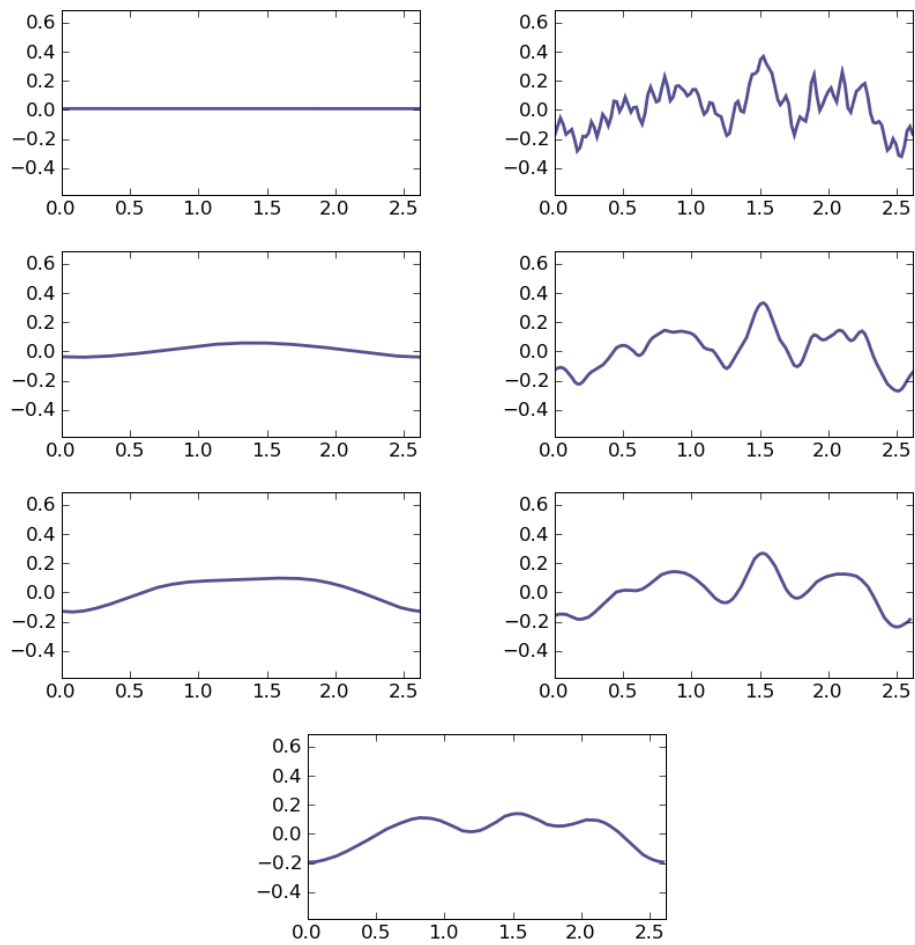


FIGURE 2.6 – Reconstruction cumulée du profil de tôle, une échelle est rajoutée à chaque nouvelle courbe. La dernière courbe, en haut à droite, correspond à une reconstruction approchée du profil initial. Les altitudes sont graduées en $10^{-5}m$.

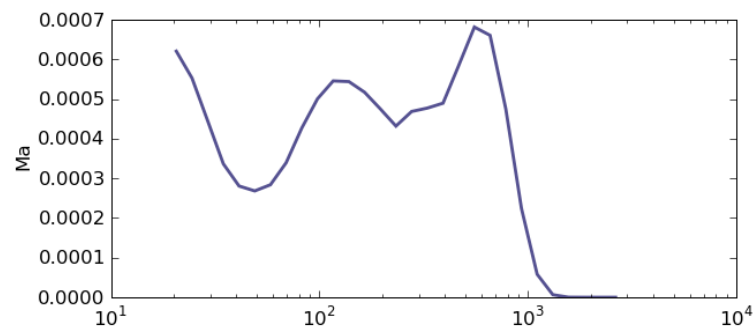


FIGURE 2.7 – Courbe de Ma du profil de rugosité. Les facteurs d'échelle sont données en μm .

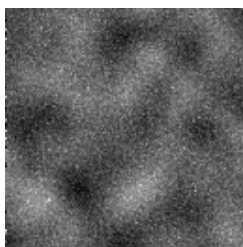


FIGURE 2.8 – Surface rugueuse, échantillonnée avec un pas horizontal de $20.6\mu\text{m}$, de taille 2.6mm par 2.6mm

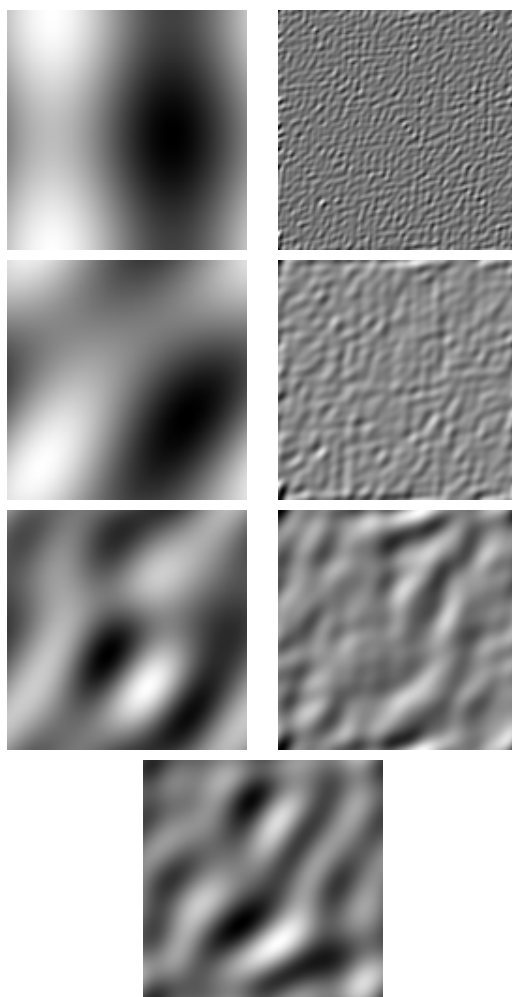


FIGURE 2.9 – Décomposition multi-échelle de la surface rugueuse : La décomposition est réalisée avec des ondelettes de type chapeau mexicain de variance égale à l'unité. Il y a en tout sept échelles dyadiques, aucune voix supplémentaire n'a été insérée entre les échelles. La surface correspondant à l'échelle la plus grande est représentée en haut à gauche, celle correspondant à l'échelle la plus fine en haut à droite.

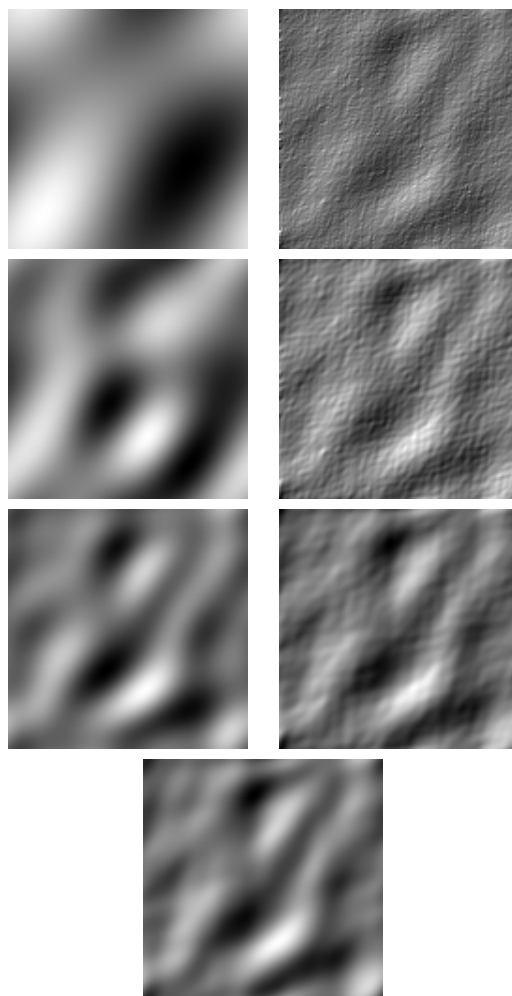


FIGURE 2.10 – Reconstruction cumulée de la surface de tôle, une échelle est rajoutée à chaque nouvelle surface. La dernière surface correspond à une reconstruction approchée de la surface initial

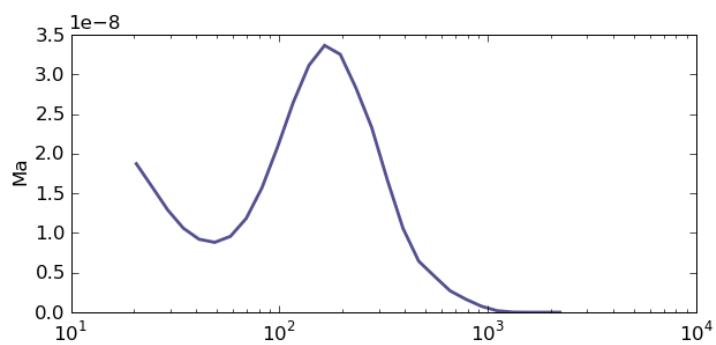


FIGURE 2.11 – Courbe de Ma de la surface rugueuse. Les facteurs d'échelle sont données en μm .

Chapitre 3

Bases d'ondelettes orthogonales

Nous avons vu dans le chapitre qui précède qu'en vue de caractériser la rugosité des surfaces échelle par échelle en projetant ces dernières sur une famille d'ondelettes, il est préférable que cette famille constitue une base orthonormée de l'ensemble des surfaces possibles. Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'extension des algorithmes précédents au cadre des transformées en ondelettes orthogonales et en paquets d'ondelettes, qui permettent la construction de telles bases d'ondelettes.

3.1 Transformée en ondelettes orthogonales

L'algorithme de décomposition multi-échelle des surfaces présenté précédemment dans le cadre de la transformée en ondelettes continue a été étendu par Q.Chen, S.Yang et Z.Li [6] à la *transformée en ondelettes orthogonales*, en vue de séparer la forme et l'ondulation au sein d'une surface donnée. La transformée en ondelettes orthogonales, introduite par S.Mallat [36] en 1989, permet de décomposer un signal sur une base d'ondelettes, et apparaît plus adaptée que la transformée en ondelettes continue au contexte des signaux discrets. Nous présentons dans cette section l'extension des algorithmes de détermination du Ma et du Mq dans le cadre de cette transformée.

3.1.1 Aspects mathématiques

Le point de vue des ondelettes orthogonales est basé sur la notion d'approximation multirésolution. Un espace multirésolution est défini comme une suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant les six propriétés suivantes :

- $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$
- $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j$
- $\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(\frac{t}{2}) \in V_{j+1}$
- $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$, 0 désignant la fonction nulle de $L^2(\mathbb{R})$.

- $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \text{Adh}(\cup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j) = L^2(\mathbb{R})$
- Il existe θ tel que $\{\theta(t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ soit une base de Riesz de V_0 .

Pour chaque entier j , l'espace V_j se décompose de la manière suivante : $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$. L'espace V_{j+1} est un espace d'approximation, qui contient les éléments du signal à l'échelle la plus grossière $\frac{1}{2^{j+1}}$, tandis que l'espace W_{j+1} s'interprète comme un espace de détail, qui contient les éléments de hautes fréquences du signal initial.

Comme on l'a vu précédemment dans la définition des approximations multirésolutions, l'espace V_0 est muni d'une base de Riesz $\{\theta(t - n), n \in \mathbb{Z}\}$. A partir de cette base, il est possible de définir une fonction ϕ , dite fonction d'échelle, telle que, d'une part, $\{\phi(t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ soit une base orthonormée de V_0 , et d'autre part, pour tout entier j , $\{\phi_j(t - n), n \in \mathbb{Z}\}$ soit une base orthonormée de V_j , ϕ_j désignant la fonction d'échelle dilatée d'un facteur 2^j . Le théorème suivant lie les propriétés de la fonction d'échelle ϕ à celles de filtres définis sur les espaces V_j .

Théorème (Mallat, Meyer) [35] *Soit ψ une fonction d'échelle. Alors, la série de Fourier de $h[n] = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(\frac{t}{2}), \phi(t - n) \rangle$ vérifie, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,*

$$\hat{h}(\omega)^2 + \hat{h}(\omega + \pi)^2 = 2 \quad (3.1)$$

et $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$.

Réciproquement, si $\hat{h}(\omega) = \sqrt{2}$, si pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\hat{h}(\omega)^2 + \hat{h}(\omega + \pi)^2 = 2$, si \hat{h} est 2π -périodique et si \hat{h} ne s'annule pas sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors la fonction $\hat{\phi}(\omega) = \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}}$ est la transformée de Fourier d'une fonction d'échelle. Le filtre h est appelé le filtre miroir conjugué passe-bas de la fonction d'échelle.

Ce théorème est au coeur de l'algorithme de transformation en ondelettes orthogonales. Partons d'un signal f de $L^2([0, 1])$ échantillonné par 2^J coefficients. On peut considérer ce signal comme un élément de l'espace multirésolution V_{-J} . Le théorème précédent nous apprend qu'on obtient la projection du signal sur l'espace de résolution plus grossière V_{-J+1} en filtrant le signal par le filtre h défini dans le théorème et en sous-échantillonnant d'un facteur 2. Si $a_j = \langle f, \phi_{j,n} \rangle$ désigne l'approximation du signal sur l'espace V_j , on a ainsi :

$$a_{j+1}[p] = a_j * \bar{h}[2p] \quad (3.2)$$

Notons bien qu'on obtient un signal de taille moitié du fait du sous-échantillonnage. Pour gérer les effets de bord, on calcule la convolution périodique des signaux.

Reste qu'on souhaite également décomposer le signal sur les espaces de détails W_j . Le théorème qui suit permet de déterminer un filtre g similaire à celui du théorème précédent qui réalise cette décomposition :

Théorème (Mallat, Meyer) [35] Soit ϕ une fonction d'échelle et h son filtre miroir conjugué. Soit ψ la fonction dont la transformée de Fourier vaut :

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.3)$$

avec

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi) \quad (3.4)$$

où h^* désigne le conjugué complexe de h . Pour toute échelle 2^j , $(\psi_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée d'ondelettes de l'espace de détail W_j .

Partant d'un signal a_j correspondant à la projection de notre signal initial f sur l'espace de résolution V_j , le théorème précédent nous apprend qu'on obtient la projection du signal sur l'espace de détail W_{-j+1} en filtrant le signal par le filtre g défini dans le théorème et en sous-échantillonnant d'un facteur 2. Si $a_j = \langle f, \phi_{j,n} \rangle$ désigne l'approximation du signal sur l'espace V_j et $d_j = \langle f, \psi_{j,n} \rangle$ désigne l'approximation du signal sur l'espace de détail W_j , on a ainsi :

$$d_{j+1}[p] = a_j * \bar{g}[2p] \quad (3.5)$$

Les calculs complets de la transformée en ondelettes d'un signal et la reconstruction de ce dernier se font donc à l'aide d'un banc de filtre, et peuvent se représenter à l'aide du schéma suivant :

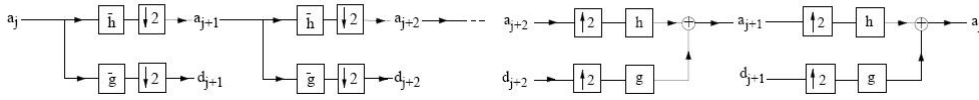


FIGURE 3.1 – Algorithme de transformée en ondelettes orthogonales [36]

3.1.2 Extension à deux dimensions

L'algorithme de transformée en ondelettes orthogonales s'étend en deux dimensions au prix d'un certain nombre d'adaptations. Partant d'une approximation multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$, on définit une approximation multirésolution séparable par le produit tensoriel :

$$V_j^2 = V_j \otimes V_j \quad (3.6)$$

Les fonctions d'échelles associées à l'espace de résolution V_j^2 sont donc les fonctions $\psi_{j,n}^{(2D)}(x, y) = \psi_{j,n}^{(1D)}(x) \psi_{j,n}^{(1D)}(y)$. Reste à définir les espaces de détails. Comme dans le cas unidimensionnel, on vérifie que :

$$V_j^2 = V_{j+1}^2 \oplus W_{j+1}^2 \quad (3.7)$$

En repartant de l'égalité $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$, on démontre sans trop de peine que l'espace de détail séparable se divise en fait en trois espaces de détails $W_{j+1}^2 = (V_{j+1} \otimes W_{j+1}) \oplus (W_{j+1} \otimes V_{j+1}) \oplus (W_{j+1} \otimes W_{j+1})$. Les ondelettes associées sont $\psi_{j,n}^{(1)}(x, y) = \phi_{j,n}(x)\psi_{j,n}(x)$, $\psi_{j,n}^{(2)}(x, y) = \psi_{j,n}(x)\phi_{j,n}(x)$, et $\psi_{j,n}^{(3)}(x, y) = \psi_{j,n}(x)\psi_{j,n}(x)$. La transformée en ondelettes est donc calculée par l'algorithme décrit dans le schéma qui suit :

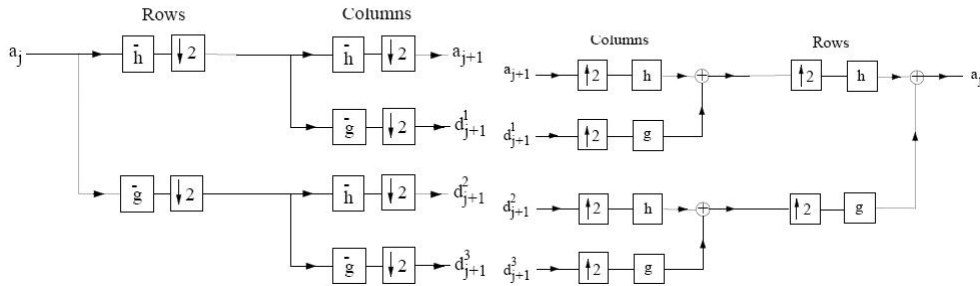


FIGURE 3.2 – Algorithme de transformée en ondelettes orthogonales bidimensionnel [36]

On part d'un signal 2D représenté sous la forme d'un tableau unidimensionnel, auquel on applique le banc de filtres décrit ci-dessus. Toutes les convolutions effectuées sont périodiques, afin de traiter les éventuels effets de bord.

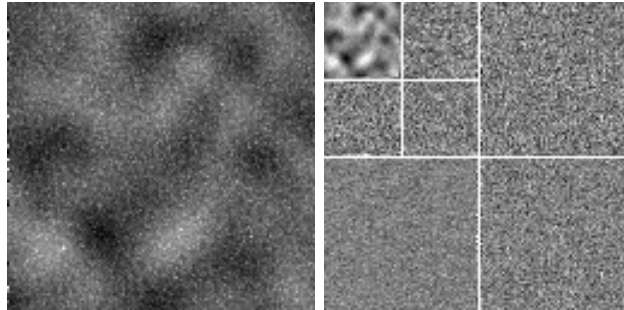


FIGURE 3.3 – Transformée en ondelettes orthogonales d'une surface rugueuse. La transformée en ondelettes est calculée avec des ondelettes de Daubechies, trois échelles sont représentées sur la figure.

3.1.3 Paramètre Ma

L'algorithme de calcul du Ma se transpose aisément du cas des ondelettes continues aux bases d'ondelettes orthogonales. L'algorithme consiste toujours à décomposer le profil ou la surface étudiée sur une famille d'ondelettes orthogonales, puis à reconstruire le signal en gardant uniquement les coefficients d'ondelettes qui correspondent à l'échelle étudiée.

On décompose ainsi le signal en ses différentes composantes multi-échelles. Le paramètre Ma est défini de la manière qui suit à partir des coefficients d'ondelettes :

$$Ma(j) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|f_j[n] - E[f_j]|}{\Delta l} \quad (3.8)$$

La variance du Ma est donnée par :

$$VMa(j) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{|f_j[n] - E[f_j]|}{\Delta l} - Ma(j) \right)^2} \quad (3.9)$$

Comme précédemment, les paramètres Mq et VMq sont donnés par les relations :

$$Mq(j) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{f_j[n] - E[f_j]}{\Delta l} \right)^2} \quad (3.10)$$

et

$$VMq(j) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\left(\frac{f_j[n] - E[f_j]}{\Delta l} \right)^2 - Mq(j)^2 \right]^2} \quad (3.11)$$

Les figures 3.4 à 3.11 présentent la décomposition du profil et de la surface de tôle du chapitre précédent en leurs composantes à chaque échelle de rugosité. La décomposition du profil (resp. de la surface) échelle par échelle est représentée sur la figure 3.5 (resp. 3.9). Les sept profils (resp. surfaces) correspondent à la décomposition sur chaque échelle dyadique. Les surfaces ont été renormalisées à chaque échelle, de sorte que l'altitude maximale apparait en blanc et l'altitude minimale en noir. La transformée en ondelettes est réalisée avec des ondelettes de Daubechies avec 12 moments nuls.

La reconstruction cumulée du profil (resp. de la surface) est représentée sur la figure 3.6 (resp. 3.10). On constate bien que la reconstruction du profil (resp. de la surface) est exacte dans le cas de la transformée en ondelettes orthogonales.

La figure 3.7 (resp. 3.11) représente enfin la courbe de Ma du profil (resp. de la surface), en échelle logarithmique. A nouveau, on constate bien que la rugosité de la surface est particulièrement importante sur cet exemple au niveau des échelles correspondant à un paramètre de dilatation de l'ondelette de l'ordre de 10^1 .

Comme dans le cas de la transformée en ondelettes continues, il est intéressant de pouvoir exprimer le paramètre Ma , non pas en fonction du paramètre d'échelle qui caractérise la dilatation de l'ondelette utilisée pour décomposer le profil, mais en fonction d'une indication fréquentielle. Le lien entre paramètre d'échelle et fréquence dépend du choix de l'ondelette de décomposition. Les formules du chapitre précédent restent valables dans le contexte des ondelettes orthogonales.

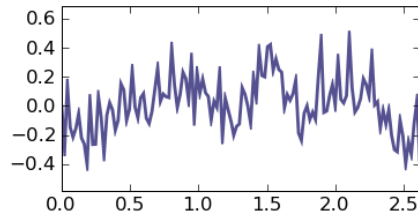


FIGURE 3.4 – Profil de rugosité, échantillonné avec un pas horizontal de $20.6\mu\text{m}$, de taille 2.6mm . Les altitudes sont graduées en $10^{-5}m$.

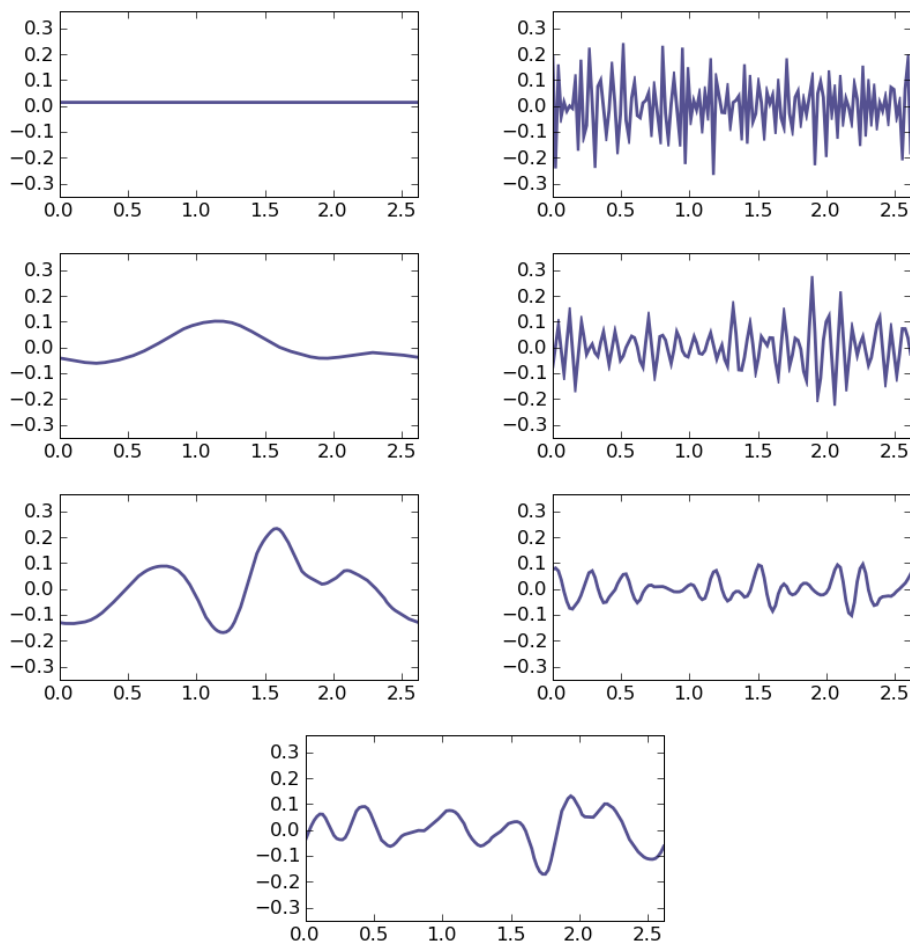


FIGURE 3.5 – Décomposition multi-échelle du profil de tôle : la décomposition du profil est réalisée avec des ondelettes de Daubechies avec 12 moments nuls. Il y a en tout sept échelles dyadiques. Le profil correspondant à l'échelle la plus grande est représenté en haut à gauche, celui correspondant à l'échelle la plus fine en haut à droite. Les altitudes sont graduées en $10^{-5}m$.

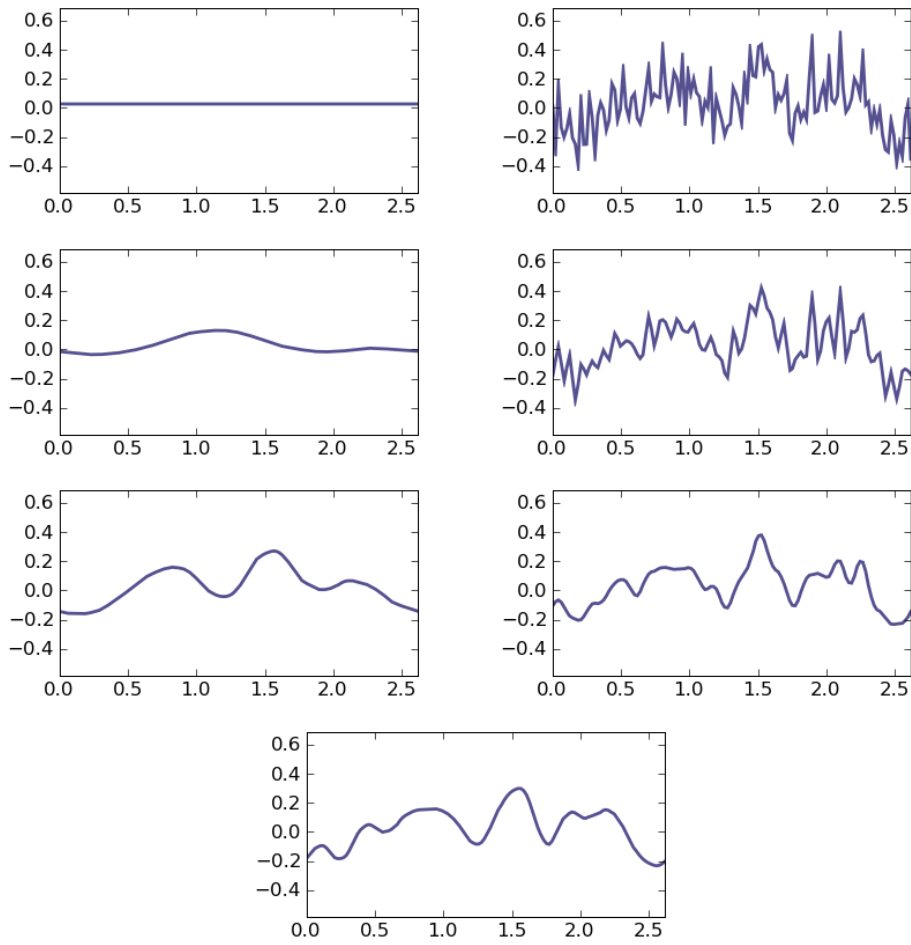


FIGURE 3.6 – Reconstruction cumulée du profil de tôle. Une échelle est rajoutée à chaque nouvelle image. La dernière image correspond à une reconstruction exacte du profil initial. Les altitudes sont graduées en $10^{-5}m$.

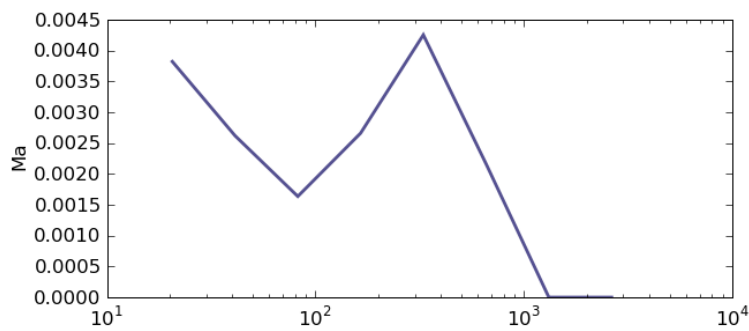


FIGURE 3.7 – Courbe de Ma du profil de rugosité. Les facteurs d'échelle sont données en μm .

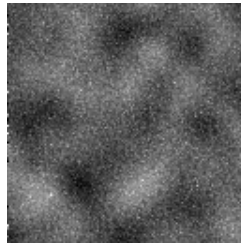


FIGURE 3.8 – Surface rugueuse, échantillonnée avec un pas horizontal de $20.6\mu\text{m}$, de taille 2.6mm par 2.6mm

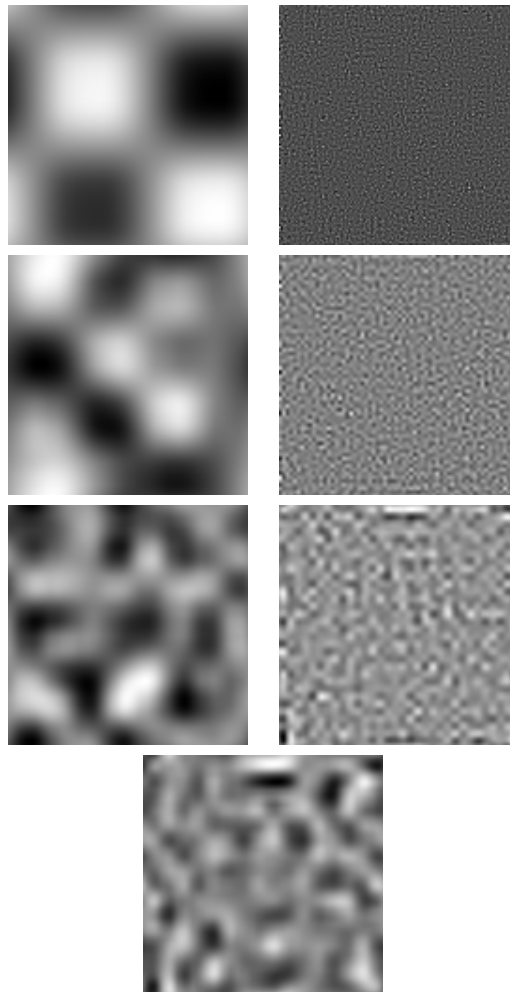


FIGURE 3.9 – Décomposition multi-échelle de la surface rugueuse : La décomposition est réalisée avec des ondelettes de Daubechies avec 12 moments nuls. Il y a en tout sept échelles dyadiques. La surface correspondant à l'échelle la plus grande est représentée en haut à gauche, celle correspondant à l'échelle la plus fine en haut à droite.

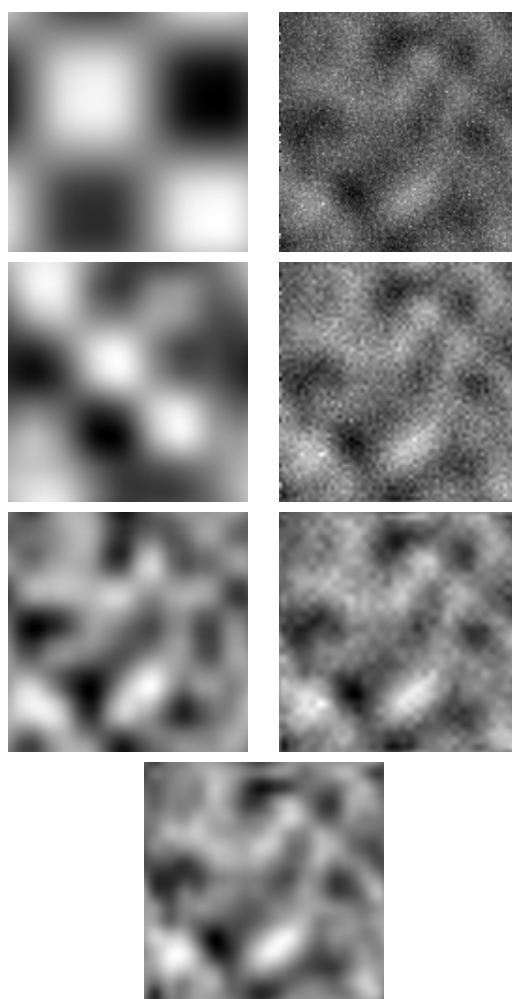


FIGURE 3.10 – Reconstruction cumulée du profil de tôle. Une échelle est rajoutée à chaque nouvelle image. La dernière image correspond à une reconstruction exacte de la surface initiale.

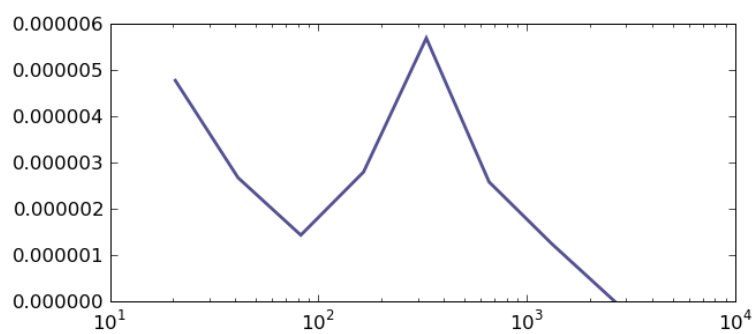


FIGURE 3.11 – Courbe de Ma de la surface rugueuse. Les facteurs d'échelle sont données en μm .

3.2 Transformée en paquets d'ondelettes

La transformée en ondelettes orthogonales décrite dans le paragraphe précédent présente un certain nombre d'inconvénients. L'utilisation des filtres miroirs conjugués conduit ainsi à une division de l'axe fréquentiel selon une échelle dyadique. Or, il se peut que l'on souhaite disposer de plus de précision fréquentielle pour analyser les échantillons, notamment lorsqu'on souhaite être précis dans les hautes fréquences. La transformée en paquets d'ondelettes permet d'étudier plus finement la décomposition multi-échelle d'un profil ou d'une surface en restant dans le cadre des bases orthonormales. J.Jay Liu, D.Kim et C.Han [34] ont récemment utilisé la transformée en paquets d'ondelettes en vue de décomposer des surfaces rugueuses destinées à des applications dans le domaine de la chimie.

3.2.1 Aspects mathématiques

L'idée derrière la notion de paquet d'ondelettes est très proche de celle qui a conduit à la notion de transformée en ondelettes orthogonales, et la transformée en paquets d'ondelettes peut d'ailleurs n'être vue que comme une simple extension de cette dernière notion. Le principe de la transformée se base sur le résultat suivant :

Théorème (Coifman, Meyer, Wickerhauser) Soit $\{\theta_j(t - 2^j n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ une base orthonormée d'un espace U_j . Soit h, g une paire de filtres miroirs conjugués. On définit

$$\theta_{j+1}^0(t) = h * \theta_j(t - 2^j n), \theta_{j+1}^1(t) = g * \theta_j(t - 2^j n) \quad (3.12)$$

Alors, la famille

$$\{\theta_{j+1}^0, \theta_{j+1}^1\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad (3.13)$$

est une base orthonormée de U_j .

L'idée de la transformée en paquets d'ondelettes est d'affiner la division de l'axe fréquentiel en appliquant ce résultat aux espaces de détail calculés par l'algorithme de transformée en ondelettes orthogonales. Dans le plan espace-fréquence, une décomposition en paquets d'ondelettes se représente comme sur le schéma 3.12. On vérifie bien qu'une amélioration de la localisation fréquentielle se paye par une dégradation de la localisation spatiale.

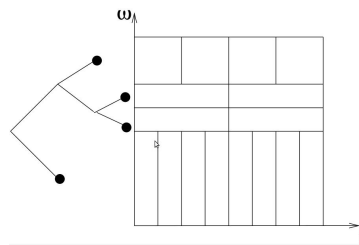


FIGURE 3.12 – Boîtes de Heisenberg des paquets d'ondelettes, et arbre de décomposition associé [36]

Une décomposition en paquets d'ondelettes peut de manière intuitive être représentée par un arbre binaire. On peut concevoir une décomposition en paquet d'ondelette comme la construction d'un arbre binaire. Pour chaque espace de détail qu'on obtient, on peut décider, soit de le décomposer en paquets d'ondelettes, auquel cas on affine notre résolution fréquentielle d'un facteur 2, en détériorant dans le même temps notre résolution spatiale du même facteur, soit de le laisser tel quel. L'algorithme de transformée en paquets d'ondelettes d'un espace de détail est décrit par la cascade de filtres représentée sur le schéma 3.13.

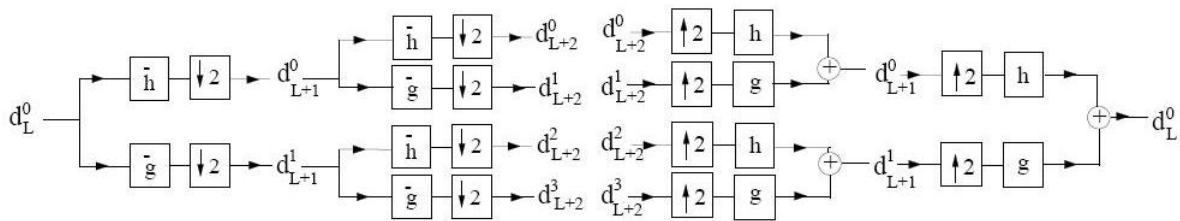


FIGURE 3.13 – Algorithme de transformée en paquets d'ondelettes bidimensionnel [36]

L'algorithme de transformée en paquets d'ondelettes s'étend en deux dimensions de la même manière que l'algorithme de transformée en ondelettes orthogonales. La transformée est alors représentée par un arbre quaternaire, puisqu'il y a trois espaces de détails dans le contexte des espaces multirésolution bidimensionnels.

3.2.2 Paramètre Ma

L'algorithme de calcul du Ma peut être adapté sous certaines conditions de la transformée en ondelettes orthogonales à la transformée en paquets d'ondelettes. Le principe va toujours être de décomposer le signal sur une base de paquets d'ondelettes, puis de le reconstruire échelle par échelle, en annulant tous les coefficients d'ondelette sauf ceux qui caractérisent l'échelle de reconstruction. En une dimension d'espace, les différentes échelles sont décrites par les terminaisons de l'arbre binaire qui décrit la transformée. Il est possible de calculer le Ma à partir de n'importe quel schéma de transformation. En deux dimensions, un certain nombre de limitations apparaissent.

A chaque noeud de l'arbre quaternaire, la transformée en paquets d'ondelettes va distinguer deux échelles : une échelle qui regroupe les trois espaces de détail, et une échelle qui contient l'approximation du signal. Les trois espaces de détail contiennent donc des éléments de la même échelle. La transformée en paquets d'ondelettes offre la possibilité de rediviser les espaces de détails afin d'affiner la localisation fréquentielle. Il va donc être important que les espaces de détail correspondant à la même échelle soit subdivisés de la même manière, ce qui impose la condition suivante sur l'arbre quaternaire qui décrit la transformée en paquets d'ondelettes : toutes les branches issues d'un noeud dyadique, c'est à dire d'un noeud qui correspondrait à une décomposition en ondelettes orthogonales, doivent être identiques. Afin de réaliser la décomposition du signal en vue d'en calculer le

Ma, on décide de subdiviser chaque octave en quatre échelles, afin de retrouver la discrétisation fréquentielle généralement adoptée lorsqu'on utilise l'algorithme de transformée en ondelettes continue. Les formules de Ma, Mq, VMa et VMq sont identiques aux précédentes, appliquées aux signaux reconstruits à chaque échelle.

Les figures 3.15 à 3.22 présentent la décomposition du profil et de la surface de tôle du chapitre précédent en leurs composantes à chaque échelle de rugosité. La décomposition du profil (resp. de la surface) échelle par échelle est représentée sur la figure 3.16 (resp. 3.20). Les sept profils (resp. surfaces) correspondent à la décomposition sur chaque échelle dyadique. Les surfaces ont été renormalisées à chaque échelle, de sorte que l'altitude maximale apparait en blanc et l'altitude minimale en noir. La transformée en ondelettes est réalisée avec des ondelettes de Daubechies avec 12 moments nuls.

La reconstruction cumulée du profil (resp. de la surface) est représentée sur la figure 3.17 (resp. 3.21). On constate bien que la reconstruction du profil (resp. de la surface) est exacte dans le cas de la transformée en ondelettes orthogonales.

La figure 3.18 (resp. 3.22) représente enfin la courbe de Ma du profil (resp. de la surface), en échelle logarithmique.

3.2.3 Choix de l'ondelette

Nous nous intéressons dans cette dernière section à la question du choix de l'ondelette utilisée pour décomposer la surface. Deux considérations vont guider ce choix :

- la localisation de l'ondelette dans le plan espace-fréquence : la décomposition échelle par échelle des surfaces rugueuses est réalisée en vue de calculer à chaque échelle des moyennes spatiales. Il est donc logique de privilégier des ondelettes bien localisées dans l'espace de Fourier, puisqu'on cherche à identifier précisément les échelles de fréquence qui interviennent dans la rugosité de la surface.
- la régularité de l'ondelette : étant donné que la surface est décomposée en reconstruisant échelle par échelle sa projection sur une base d'ondelette, il est important, tout particulièrement pour la reconstruction des grandes échelles, que les ondelettes utilisées soient suffisamment régulières. La figure (3.14) présente les résultats de reconstruction d'une surface donnée pour une grande échelle, réalisées respectivement avec des ondelettes de Haar, peu régulières, et des ondelettes de Daubechies avec 12 moments nuls. On constate bien que l'utilisation d'ondelettes peu régulières introduit des discontinuités importantes dans les surfaces reconstruites aux échelles les plus grandes.

Afin de réaliser la décomposition des surfaces, il est intéressant d'utiliser l'ondelette de Daubechies avec 12 moments nuls [7]. Cette ondelette, à support compact, possède de bonnes propriétés de régularité et est relativement bien localisée en fréquence. Notons enfin que, dans le cas des paquets d'ondelettes, le lien entre paramètre d'échelle et fréquence dépend du choix de l'ondelette de décomposition, et les formules du chapitre précédent restent à nouveau valides.

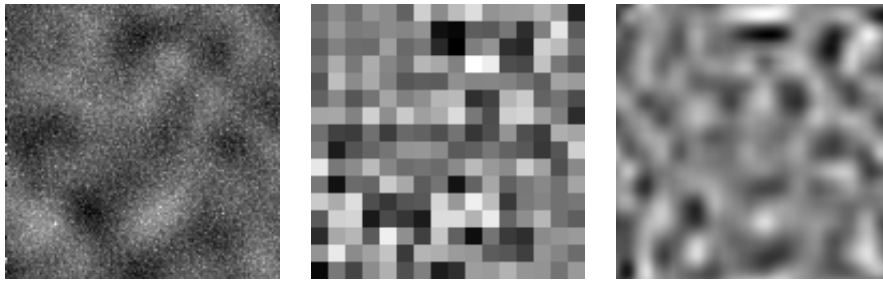


FIGURE 3.14 – Reconstruction d’une surface (à gauche) en ne conservant qu’une échelle de décomposition. La première reconstruction (au centre) est réalisée avec des ondelettes de Haar, qui introduisent des discontinuités importantes. La seconde reconstruction (à droite) est réalisée quant à elle avec des ondelettes de Daubechies à 12 moments nuls, beaucoup plus régulières.

3.3 Conclusion

Nous avons présenté dans les deux premiers chapitres de ce manuscrit de thèse plusieurs algorithmes de caractérisation multi-échelle de la rugosité des surfaces basés sur différents types de transformées en ondelettes. Il a été montré dans le premier chapitre qu’il était préférable d’utiliser des algorithmes basés sur des bases d’ondelettes orthogonales pour calculer les paramètres statistiques multi-échelles associés à la rugosité des surfaces. La transformée en paquets d’ondelettes, introduite dans le présent chapitre, de par la flexibilité qu’elle offre dans la discrétisation fréquentielle des échelles, apparaît être bien adaptée au calcul de ces paramètres.

Les outils développés dans cette première partie permettent de caractériser, échelle par échelle, la rugosité d’une surface donnée. Le dépôt des différentes couches de peinture modifie en profondeur la rugosité des surfaces étudiées. Nous verrons dans la suite de ce manuscrit que les différents effets physiques qui interviennent dans le procédé de mise en peinture se manifestent à des échelles bien spécifiques. La méthodologie présentée dans cette première partie s’avère par conséquent essentielle en vue d’analyser finement les différents phénomènes physiques qui interviennent au cours de la mise en peinture des tôles, et d’en quantifier les effets.

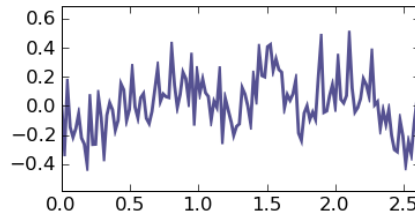


FIGURE 3.15 – Profil de rugosité, échantillonné avec un pas horizontal de $20.6\mu m$, de taille $2.6 mm$. Les altitudes sont graduées en $10^{-5}m$.

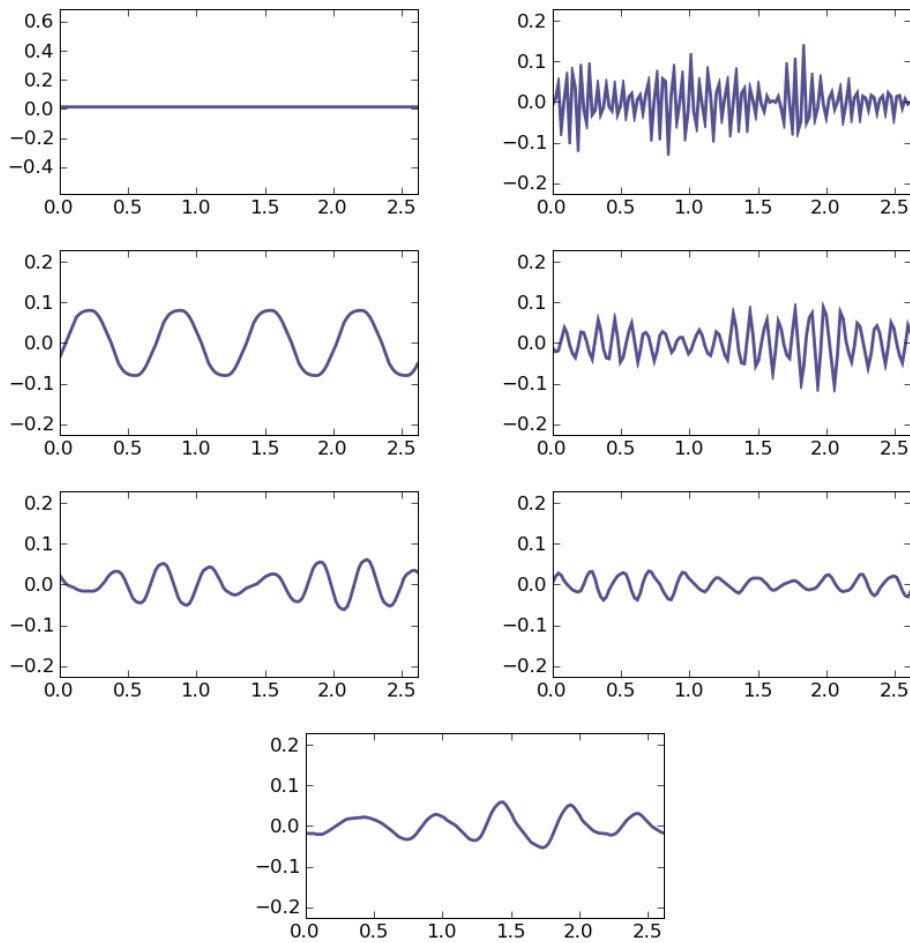


FIGURE 3.16 – Décomposition multi-échelle du profil de tôle : La décomposition du profil est réalisée avec des ondelettes de Daubechies avec 8 moments nuls. Il y a en tout sept échelles dyadiques. Chaque échelle a été subdivisée en quatre composantes fréquentielles, à l'exception des deux premières échelles (grandes longueurs d'onde), divisées en deux composantes. Il y a donc en tout 24 profils. Nous n'avons représenté qu'un profil par échelle. Le profil correspondant à l'échelle la plus grande est représenté en haut à gauche, celui correspondant à l'échelle la plus fine en haut à droite.

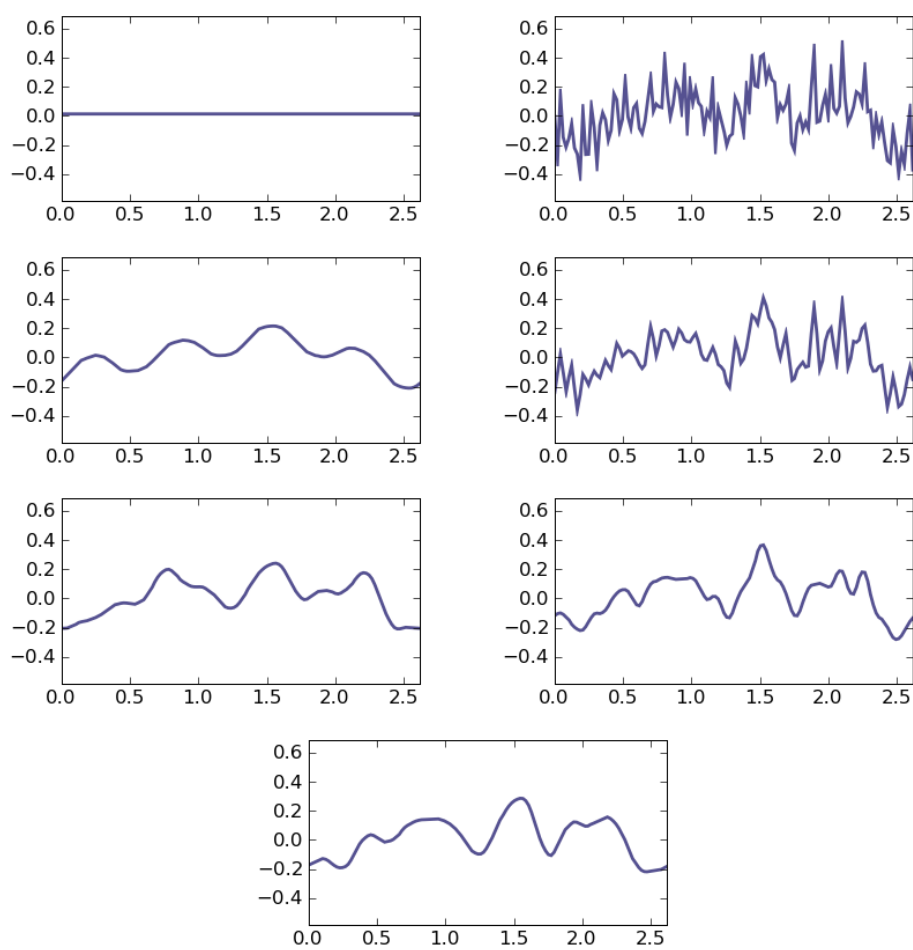


FIGURE 3.17 – Reconstruction cumulée du profil de tôle. La dernière image correspond à une reconstruction exacte du profil initial. Les altitudes sont graduées en $10^{-5}m$.

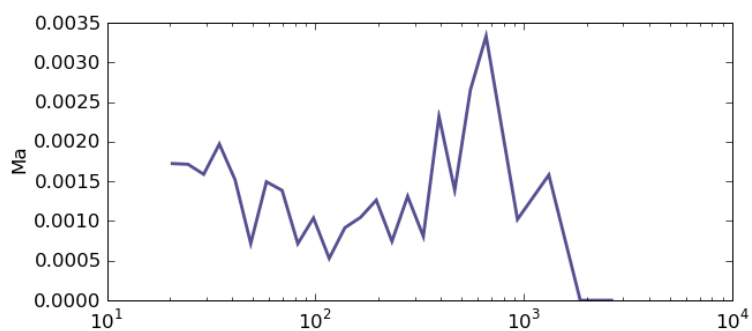


FIGURE 3.18 – Courbe de Ma du profil de rugosité. Les facteurs d'échelle sont données en μm .

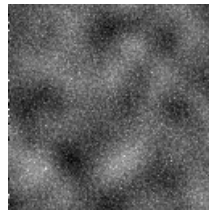


FIGURE 3.19 – Surface rugueuse, échantillonnée avec un pas horizontal de $20.6\mu\text{m}$, de taille 2.6mm par 2.6mm .

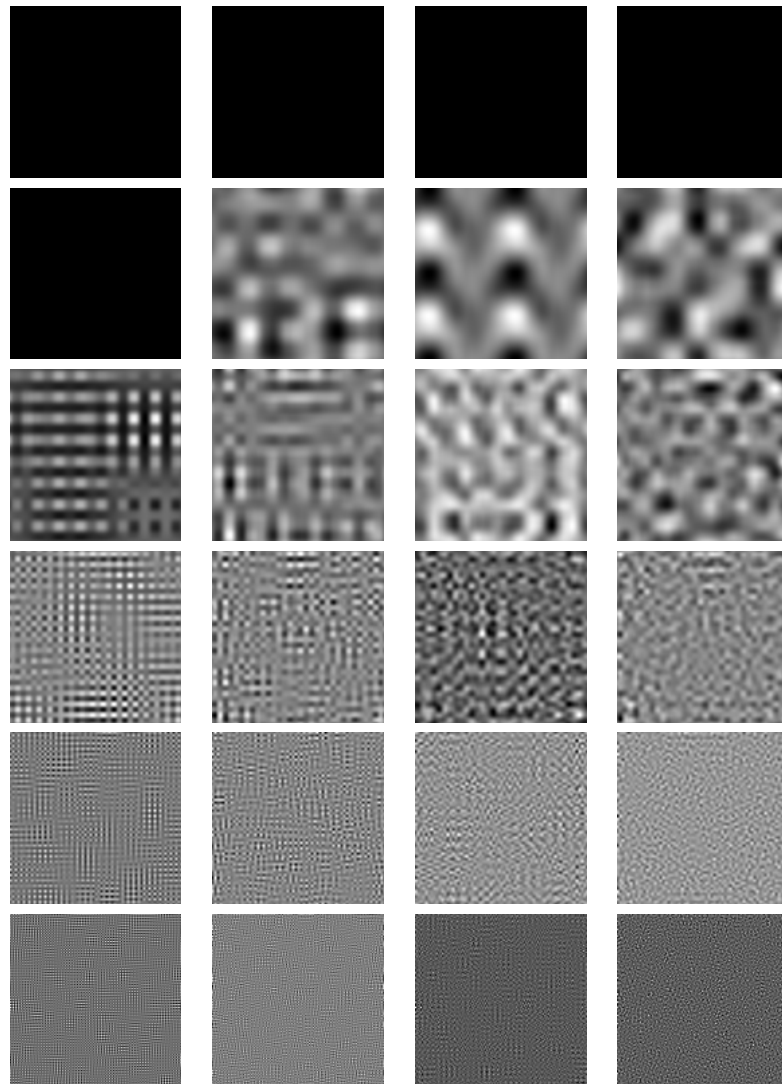


FIGURE 3.20 – Décomposition multi-échelle de la surface rugueuse, réalisée avec des ondelettes de Daubechies avec 8 moments nuls. Il y a en tout sept échelles dyadiques, et quatre voix ont été insérées au sein de chaque octave, à l'exception des deux premières échelles où seules deux voix ont été insérées. La surface correspondant à l'échelle la plus grande est représentée en haut à gauche, celle correspondant à l'échelle la plus fine en haut à droite.

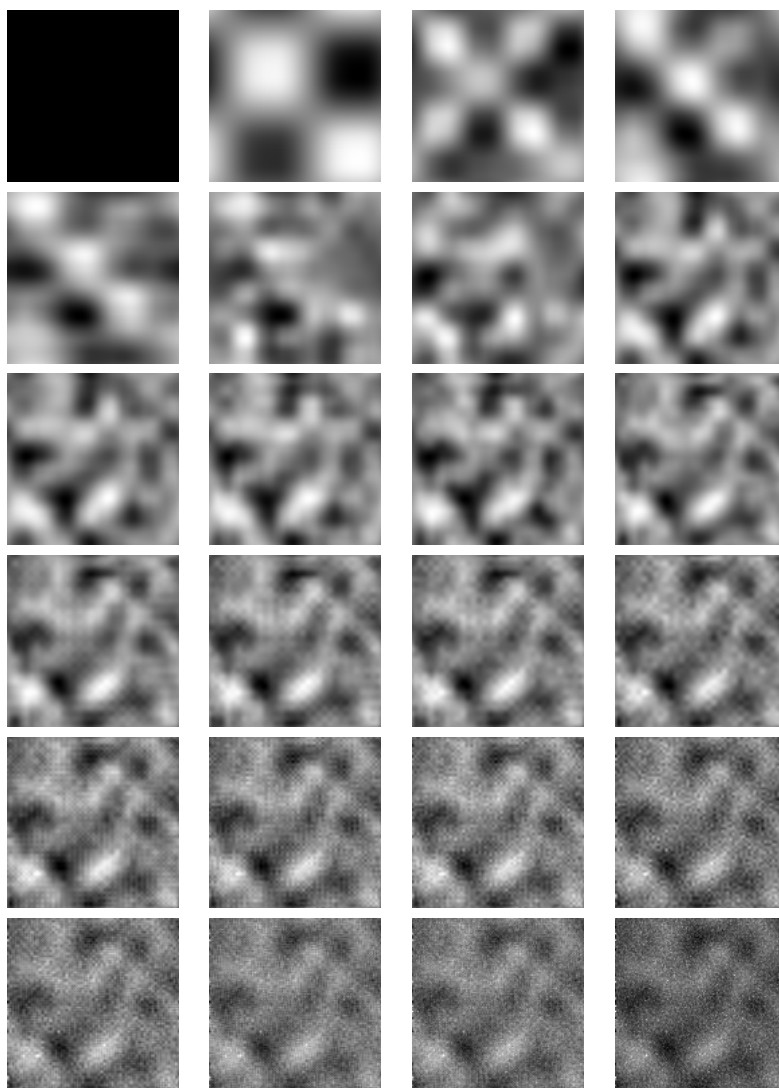


FIGURE 3.21 – Reconstruction cumulée de la surface de tôle. Une échelle est rajoutée à chaque nouvelle image. La dernière image correspond à une reconstruction exacte de la surface initiale.

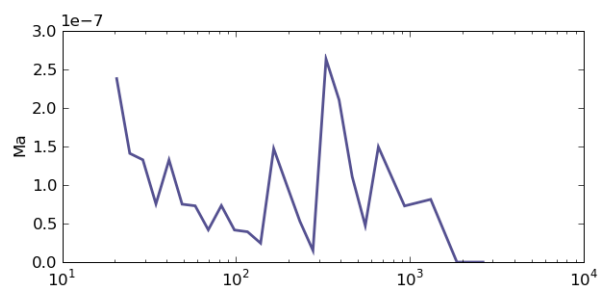


FIGURE 3.22 – Courbe de Ma de la surface rugueuse. Les facteurs d'échelle sont données en μm .

Chapitre 4

Caractérisation multi-échelle de l'orientation

Nous présentons dans le dernier chapitre de cette partie deux méthodes, l'une basée sur la transformée en ondelettes de Gabor, l'autre sur la transformée en ondelettes dyadiques, qui permettent de caractériser l'orientation multi-échelle de la rugosité.

4.1 Caractérisation de l'orientation et ondelettes de Gabor

Une méthode fréquemment utilisée afin de caractériser l'orientation de la texture rugueuse est la transformée en ondelettes de Gabor. Les ondelettes de Gabor bidimensionnelles analytiques sont définies par la relation :

$$\psi(x, y) = e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} \quad (4.1)$$

Les ondelettes de Gabor sont anisotropes. Elles présentent en effet une orientation privilégiée, définie par le vecteur (ω_1, ω_2) . La transformée en ondelette de Gabor d'un signal va donc être sensible à l'orientation des structures spatiales et fréquentielles de ce signal. La décomposition en ondelettes de Gabor du signal s'effectue en convoluant ce dernier avec l'ondelette de Gabor dilatée à différentes échelles et orientations.

$$Gf(x, y) = f * \bar{\psi}_j(x, y) \quad (4.2)$$

où $\bar{\psi}_j(x, y) = \frac{1}{2^j} \psi\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right)$.

Intuitivement, les coefficients d'ondelettes seront d'autant plus grands que le signal a un contenu fréquentiel proche de l'ondelette de Gabor sur laquelle il est projeté. En particulier, si l'orientation des structures fréquentielles du signal est proche de celle de l'ondelette de Gabor, la projection va donner de grands coefficients. Il est intéressant de caractériser la "proximité" entre le signal et l'ondelette de Gabor en terme d'énergie. A chaque projection de notre signal sur une ondelette d'échelle et d'orientation donnée, on

peut associer deux paramètres statistiques basés sur la norme L^2 qui caractérise l'énergie du signal : la moyenne des énergies et la variance de l'énergie. La comparaison des énergies pour différentes orientations, à une échelle donnée, permet de repérer d'éventuelles orientations dans la rugosité.

4.2 Caractérisation de l'orientation et transformée en ondelettes dyadiques

Outre la transformée en ondelettes de Gabor, une méthode basée sur la transformée en ondelettes dyadique bidimensionnelle permet de déterminer les orientations multi-échelles d'une surface donnée. Cette méthode, inspirée de l'article [37] de S.Mallat et S.Zong, est rapidement présentée dans cette section.

4.2.1 Transformée en ondelettes dyadiques

La transformée en ondelettes dyadique d'une fonction f est définie par

$$Wf(u, 2^j) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{x-u}{2^j}\right) dx \quad (4.3)$$

La transformée en ondelettes dyadique est invariante par translation, puisque l'échelle s est discrétisée, mais pas le paramètre de translation u . Comme dans le cas de la transformée en ondelettes orthogonale, on peut définir des bancs de filtres qui permettent le calcul rapide de transformées sur des frames d'ondelettes dyadiques. Soit h et g une paire de filtres à réponse impulsionnelle finie. On suppose que h est un filtre passe-bas vérifiant $\hat{h}[0] = \sqrt{2}$. On construit alors, à l'instar des bases d'ondelettes orthogonales, une fonction d'échelle ϕ dont la transformée de Fourier, qu'on suppose d'énergie finie, est donnée par :

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (4.4)$$

La transformée de Fourier de l'ondelette associée est alors donnée par :

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (4.5)$$

Etant donné que l'on travaille avec une frame d'ondelette, c'est à dire une famille non nécessairement libre de vecteurs $\{\Phi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ qui permet de caractériser tout signal f par les produits scalaires $\{\langle f, \Phi_n \rangle, n \in \mathbb{Z}\}$, et non pas une base orthonormale, la reconstruction du signal ne s'effectue pas avec les mêmes ondelettes, mais avec des filtres duaux \tilde{h} et \tilde{g} différents. On définit :

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (4.6)$$

et

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (4.7)$$

Si les filtres vérifient

$$\forall \omega \in [-\pi, \pi], \hat{g}(\omega)\hat{g}(\omega) + \hat{h}(\omega)\hat{h}(\omega) = 2 \quad (4.8)$$

alors

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^*, \sum \hat{\psi}^*(2^j\omega)\hat{\psi}(2^j\omega) = 1 \quad (4.9)$$

Ce résultat prouve que les filtres de reconstruction duaux définissent bien une frame dyadique d'ondelettes.

Il existe un algorithme rapide de calcul de la transformée en ondelettes dyadique, *l'algorithme à trous* [21] d'Holschneider, Kronland-Martinet, Morlet et Tchamitchian. Cet algorithme s'implémente avec un banc de filtres analogue à celui d'une transformée en ondelettes biorthogonales rapides, mais sans sous-échantillonnage. Nous renvoyons le lecteur intéressé par les détails de l'algorithme à l'ouvrage de S.Mallat [36].

4.2.2 Caractérisation de l'orientation avec la transformée en ondelettes dyadiques

Nous considérerons qu'un motif possède une orientation marquée dans une direction \mathbf{u} en un point (x, y) si ce motif *varie* rapidement le long de cette direction. Le vecteur gradient de la surface au point (x, y) sera donc colinéaire à \mathbf{u} . La définition qui est ici donnée à l'orientation d'un motif est donc très différente de celle définie dans la méthode plus classique des ondelettes de Gabor.

Considérons une surface $S(x, y)$. Les points de brusque variation de S sont caractérisés par le module important du vecteur gradient

$$\nabla S = \left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y} \right)$$

La dérivée partielle dans la direction du vecteur \mathbf{n} se calcule par produit scalaire avec le gradient.

$$\frac{\partial S}{\partial n} = \nabla S \cdot \mathbf{n}.$$

La valeur absolue de ce produit est bien évidemment maximale lorsque \mathbf{n} et ∇S sont colinéaires. L'étude des modules du gradient de la surface permet donc de détecter les zones de brusques variations à l'intérieur de la surface. Un cas particulier est donné par les maxima du gradient, qui correspondent aux contours présents sur la surface. Appliquée à la détection des contours, l'algorithme précédent est connu sous la dénomination *d'algorithme de Canny*.

Une variante multi-échelle de la méthode précédente peut s'implémenter en lissant la surface par un noyau de convolution $\theta(x)$, dilaté à différentes échelles. Le calcul du gradient s'effectue alors avec deux ondelettes directionnelles qui correspondent aux dérivées partielles du noyau θ .

$$\psi^1 = -\frac{\partial\theta}{\partial x} \text{ et } \psi^2 = -\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

Nous choisirons de dilater notre noyau de convolution par des échelles dyadiques. Nous poserons donc

$$\psi_{2^j}^k = \frac{1}{2^j} \psi^k \left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j} \right), \text{ où } k = 1, 2$$

La transformée en ondelettes dyadiques de la surface au point $u = (u_1, u_2)$ s'écrit :

$$W^k S(u, 2^j) = \langle f, \psi_{2^j}^k(\cdot - u) \rangle \quad (4.10)$$

Posons

$$\theta_{2^j}(x, y) = \frac{1}{2^j} \theta \left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j} \right)$$

Alors, les deux ondelettes dilatées peuvent s'écrire :

$$\psi_{2^j}^1 = 2^j \frac{\partial\theta_{2^j}}{\partial x} \text{ et } \psi_{2^j}^2 = 2^j \frac{\partial\theta_{2^j}}{\partial y}$$

On déduit des équations précédentes que les composantes de la transformée en ondelettes sont proportionnelles aux coordonnées du vecteur gradient de la surface lissée par le noyau :

$$\left(W^1 S(u, 2^j), W^2 S(u, 2^j) \right) = 2^j \left(\frac{\partial(f * \theta_{2^j})}{\partial u_1}(u), \frac{\partial(f * \theta_{2^j})}{\partial u_2}(u) \right) = 2^j \nabla(f * \theta_{2^j})(u) \quad (4.11)$$

Le module du vecteur gradient est donc, à chaque échelle, proportionnel au module de la transformée en ondelettes.

$$Mf(u, 2^j) = \sqrt{|W^1 f(u, 2^j)|^2 + |W^2 f(u, 2^j)|^2} \quad (4.12)$$

En chaque point, on peut également définir l'orientation locale du vecteur, qui correspond à la direction de variation maximale des motifs présents sur la surface.

$$Af(u, 2^j) = \begin{cases} \alpha(u) & \text{si } W^1S(u, 2^j) \geq 0 \\ \pi - \alpha(u) & \text{si } W^1S(u, 2^j) < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

où $\alpha(u) = \arctan\left(\frac{W^2S(u, 2^j)}{W^1S(u, 2^j)}\right)$.

La figure 4.1 présente une surface de tôle revêtue des trois couches de peinture rencontrées usuellement dans le contexte automobile. Cette surface est issue d'une base de données expérimentales établie dans la thèse de Th. Nion [42].

L'algorithme présenté précédemment a permis de déterminer l'orientation des motifs présents à la surface de la tôle pour chacune des composantes échelle par échelle de la tôle. Une cartographie des orientations multi-échelles est représentée sur la figure 4.2. Les résultats qui précèdent permettent en effet d'établir des cartes à chaque échelle des orientations des motifs présents dans la surface. Ces cartes sont représentées dans l'espace de couleurs Teinte Saturation Luminance (TSL). La teinte de l'image correspond à l'orientation locale de l'image, telle qu'elle est définie dans le cercle chromatique, et sa luminance correspond au module local de la transformée en ondelettes.

La figure 4.3 présente, pour chaque orientation, l'énergie globale à chaque échelle de décomposition, obtenue en sommant le module des pixels dont l'orientation appartient à la plage spécifiée. On peut constater sur cette figure que les motifs de petite échelle présents à la surface de la peinture sont essentiellement orientés dans les directions verticales pour la surface étudiée.

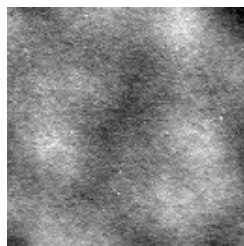


FIGURE 4.1 – Surface rugueuse revêtue d'une couche de cathorèse et d'une couche de sealer, échantillonnée avec un pas horizontal de $20.6\mu\text{m}$ et un pas vertical de $1\mu\text{m}$, de taille 2.6mm par 2.6mm . La cuisson du sealer est faite en position verticale

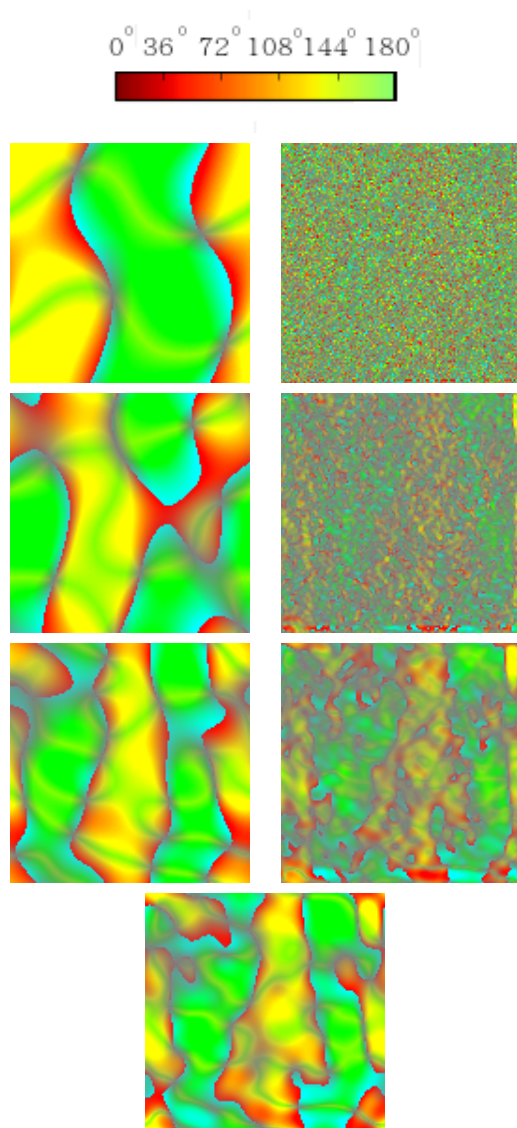


FIGURE 4.2 – Orientations multi-échelles de la surface rugueuse

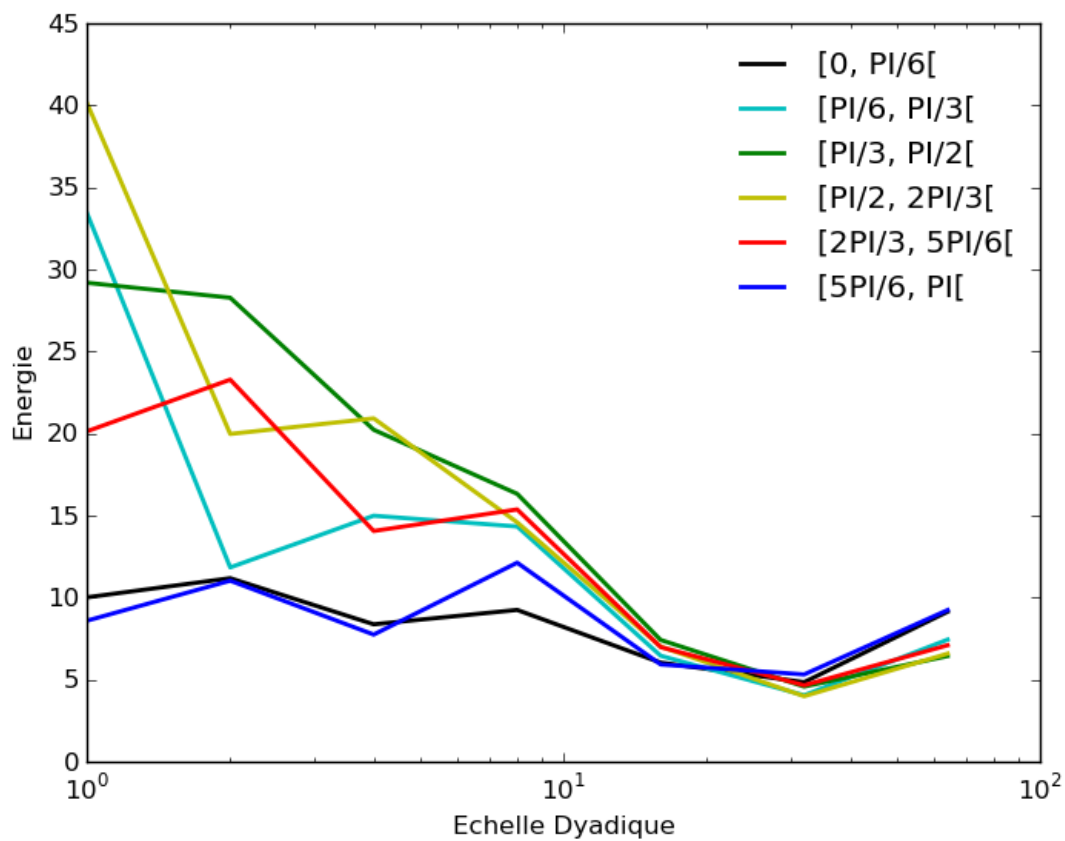


FIGURE 4.3 – Energies associées à chaque orientation, en fonction d'une échelle donnée. L'énergie est calculée à chaque échelle en sommant le module de chacun des pixels dont l'orientation appartient à la plage spécifiée.

Deuxième partie

Modélisation du procédé de mise en peinture

Chapitre 5

Modélisation des écoulements

Le dépôt d'une couche de peinture à la surface d'une tôle rugueuse modifie en profondeur la topographie de cette surface. On désigne sous le vocable d'*effet peinture* les modifications que l'ensemble du procédé de mise en peinture induit sur la géométrie des surfaces. Nous abordons dans la seconde partie de ce manuscrit de thèse la question de la modélisation du procédé de peinture des tôles rugueuses, en vue de caractériser de manière quantitative l'effet peinture connaissant la topographie initiale des tôles rugueuses.

L'application des divers revêtements sur une carrosserie automobile implique des processus physico-chimiques très complexes, liés à la nature elle-même complexe des composés chimiques qui entrent en jeu dans la composition de la peinture. Le processus peinture peut néanmoins être réduit de manière schématique à quelques étapes. Une fois assemblée, la caisse de l'automobile est plongée dans un bain de *cataphorèse* où une couche de peinture destinée à protéger le véhicule de la corrosion est appliquée par électro-déposition. L'ensemble est ensuite cuit dans un four. La caisse est alors revêtue d'une nouvelle couche de peinture, que nous désignerons indifféremment sous le vocable de *sealer*, *apprêt* ou *primaire* dans la suite du manuscrit. Le véhicule est à nouveau cuit afin de favoriser l'étalement de cette nouvelle couche. Enfin, une couche de *laque* est appliquée sur l'ensemble de la caisse, avant une nouvelle cuisson. Les deux dernières couches de peinture appliquées sont destinées à donner à la voiture un aspect esthétiquement agréable à un acheteur potentiel. Lors de la mise en peinture, pour chaque couche, un intervalle de temps est respecté entre la fin du dépôt de peinture et la cuisson. Nous désignerons ce temps de latence sous le vocable de *temps de flash*.

Les procédés utilisés dans l'industrie présentent bien évidemment quelques variations par rapport au procédé très général décrit ci-dessus. Néanmoins, dans notre cas d'étude, nous considérerons bien que la tôle dans son état de surface initial (galvanisé et phosphaté) est successivement recouverte selon les trois étapes précédentes. Ainsi, la tôle sera supposée porter trois couches de revêtement dont les épaisseurs approximatives sont rappelées dans le schéma qui suit.

Chaque application d'une couche de peinture comporte trois phases. Une phase de *dépose* qui peut être par électrodéposition (cataphorèse) ou par pulvérisation (laque, base ou vernis). Une phase de *nivellement*, pendant laquelle le feuil de peinture se déforme. Une phase de *réticulation* pendant laquelle le feuil de peinture est cuit, ce qui permet de le figer par formation de liaisons chimiques. Il existe par ailleurs des différences essentielles

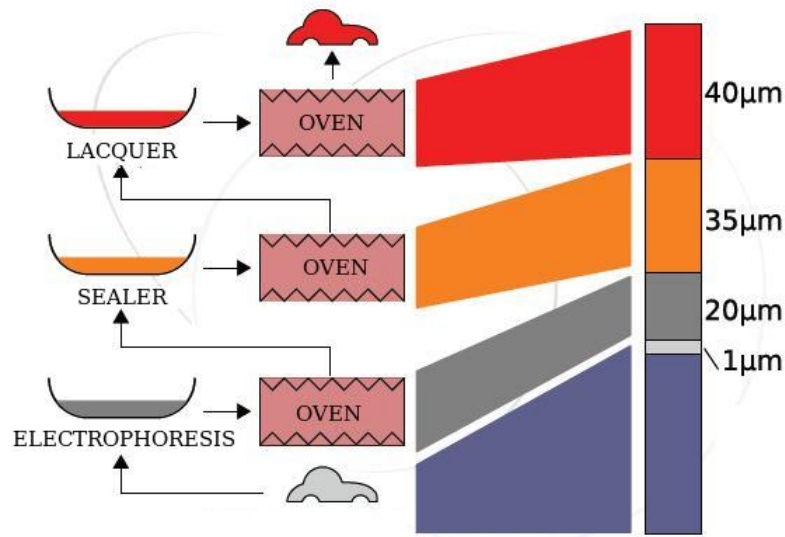


FIGURE 5.1 – Revêtements successifs des tôles

entre les propriétés mécaniques et physiques de la couche déposée par cataphorèse et des couches de laque ou de vernis. Du fait de ces différences, ces deux types de matériaux doivent être traités différemment.

Nous présentons dans ce chapitre les différents modèles de simulation développés dans le cadre de la thèse afin de simuler le phénomène de nivellement de la peinture sur la tôle au cours du processus de mise en peinture. Dans la première section, un modèle inspiré de celui développé par S.E.Orchard [44] en 1961, et adapté plus tard par J.P.Nauzin [40] [41] au cas de la peinture automobile est présenté, qui suppose que le fluide étudié a un comportement newtonien et néglige les variations spatiales des paramètres de rhéologie du film. La seconde section est consacrée à une extension du modèle qui permet de prendre en compte la variation de ces paramètres dans les simulations.

Nous avons vu que la mise en peinture d'une tôle automobile implique le dépôt de plusieurs couches de peintures aux caractéristiques physico-chimiques très différentes. Si l'hypothèse d'un fluide newtonien semble valide pour les couches de sealer et de laque, au moins pour les échelles considérées, comme nous le verrons dans la suite de ce manuscrit, elle est en revanche plus discutable dans le cas de la cataphorèse. Les données expérimentales recueillies par J.P.Nauzin [40] [41] dans son étude des propriétés des peintures indiquent ainsi clairement que la cataphorèse possède un comportement non-newtonien, au moins à des taux de cisaillement de l'ordre de $0.1s^{-1}$. Un modèle basé sur l'hypothèse d'un comportement non-newtonien de la peinture est présenté dans la troisième section du chapitre. L'approximation la plus douteuse du modèle non-newtonien provient de l'hypothèse selon laquelle la rhéologie du matériau est purement non-newtonienne. De fait, généralement, à faible taux de déformation, la viscosité d'un matériau non-newtonien sature, de sorte que le matériau recouvre un comportement newtonien. Selon les taux de déformation en jeu, cette saturation peut avoir un effet important sur l'équation du niv-

ellement. La quatrième et dernière section du chapitre est dédiée à la description d'un modèle de cross-over qui prend en compte l'effet de saturation de la viscosité aux faibles taux de déformation. Les modèles non-newtonien et de cross-over ont été développés par A.Lemaitre dans le cadre de la présente thèse, et la rédaction de ce chapitre s'inspire en partie de sa note [33].

5.1 Modèle newtonien

Nous considérons le nivellement d'un film mince déposé sur une tôle qui fait un angle β avec la direction horizontale. La hauteur de la tôle d'acier est notée $S_a(x, y)$, et l'épaisseur du film de peinture $e(x, y, t)$. On note enfin $h(x, y, t) = S_a(x, y) + e(x, y, t)$. Le film est déposé au temps $t = 0$, et évolue jusqu'à sa réticulation, supposée intervenir au temps t_{ret} . L'épaisseur finale du film à la fin de la dépose est donc $S_a(x) + e(x, t_{\text{ret}})$.

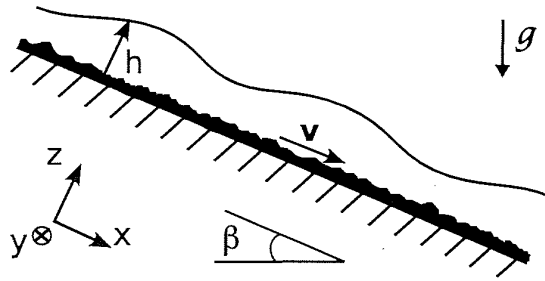


FIGURE 5.2 – Ecoulement d'un film mince

Equations de Navier-Stokes L'approche que nous empruntons afin de modéliser l'écoulement du film sur la tôle rugueuse se fonde sur les équations de base de l'hydrodynamique. Dans toute cette section, nous nous baserons sur les hypothèses qui suivent :

- Le fluide est incompressible
- La seule force volumique extérieure est la force de pesanteur
- Le comportement du fluide est newtonien
- Les propriétés de rhéologie du fluide sont homogènes au sein du film de peinture

Dans le contexte tracé par les hypothèses présentées ci-dessus, l'écoulement du film de peinture est décrit par les équations de Navier-Stokes [19]. Ces équations s'obtiennent en écrivant la conservation de la quantité de mouvement du fluide étudié et la conservation de la masse. L'équation de conservation de la quantité de mouvement prend la forme :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \eta \Delta \mathbf{u} \quad (5.1)$$

L'équation de conservation de la masse de fluide s'écrit, pour un fluide incompressible :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.2)$$

Dans ces équations, on note :

- ρ la masse volumique du fluide
- \mathbf{u} le champ de vitesses au sein du film
- p la pression locale au sein du film
- \mathbf{g} le champ de pesanteur
- η la viscosité du fluide
- ∇ l'opérateur gradient
- Δ l'opérateur Laplacien

La dérivée $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ correspond à la dérivée particulaire du champ vitesse : $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$.

Notons U la vitesse caractéristique de l'écoulement [m/s], et L sa dimension caractéristique [m]. On peut alors introduire les variables adimensionnées $\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}$ et $x^* = \frac{x}{L}$. Avec le changement de variables ainsi défini, l'équation (5.3) se réécrit :

$$\frac{\rho U L}{\eta} \frac{d\mathbf{u}^*}{dt} = -\frac{L^2}{U} \nabla p + \frac{L^2}{U} \rho \mathbf{g} + \Delta \mathbf{u}^* \quad (5.3)$$

On reconnaît à gauche de l'équation le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho U L}{\eta}$. Ce nombre adimensionné mesure l'importance relative des forces d'inertie et des forces visqueuses. Pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds, comme c'est le cas dans l'écoulement que nous étudions, il est possible de négliger le membre de gauche de l'équation de Navier-Stokes pour obtenir l'équation dite de Stokes. (5.3) devient alors :

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} + \eta \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (5.4)$$

L'étude de l'écoulement du fluide diffère profondément selon que l'on se place ou non dans l'approximation de Stokes. En effet, la prise en compte des effets inertiels dans l'équation de Navier-Stokes conduit à une expression complexe de l'équation d'évolution du film de peinture, et des effets d'instabilité du film de peinture apparaissent. De nombreux travaux ont été réalisés sur l'écoulement d'un film mince dans ce contexte, au premier rang desquels figurent ceux de D.J.Benney [2] ou V.Y.Shkadov [52] [53]. Plus récemment, on peut également citer les travaux de C.Ruyer-Quil et P.Manneville [51] [50] sur le sujet. L'article [45] de A.Oron, S.H.Davis et S.G.Bankoff réalise enfin une synthèse très complète des travaux réalisés sur l'écoulement des films minces.

L'approximation de lubrification L'article [44] de S.E.Orchard (1961) place le problème physique dans le cadre de l'approximation de lubrification. Les caractéristiques géométriques de l'écoulement permettent en effet de faire un certain nombre de simplifications dans les équations de Navier-Stokes qui décrivent l'écoulement du film de peinture sur la tôle. L'approximation de lubrification repose sur deux observations : d'une part, l'écoulement du film est très lent, ce qui permet de négliger les termes inertiels dans l'équation de Navier-Stokes ; d'autre part, l'échelle des épaisseurs, ici de l'ordre du micron, est assez bien séparée des autres échelles de longueur dans les directions horizontales, qui sont de l'ordre du millimètre. Cette séparation d'échelles implique que les gradients de vitesse

le long de z sont très grands par rapport aux gradients dans les directions parallèles au substrat, ceci étant accentué par la condition de vitesse nulle au contact de la tôle.

Cette séparation des échelles spatiales implique aussi que la vitesse de l'écoulement pointe essentiellement dans les directions horizontales. Ces hypothèses permettent de simplifier considérablement les équations de Stokes.

Comme on néglige la vitesse d'écoulement suivant z , en négligeant l'effet de la gravité dans l'épaisseur du film, l'équation de Stokes suivant z se réduit à :

$$\frac{\partial p}{\partial z}(x, y, t) = 0 \quad (5.5)$$

Notons u la composante de la vitesse du fluide dans la direction x et v la composante dans la direction y . En ne conservant que les gradients dans la direction verticale z dans l'expression des Laplaciens de u et v (approximation de lubrification), les équations de Stokes suivant x et y s'écrivent :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x}(x, y, t) + \rho g \sin(\beta) + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, y, t) = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y}(x, y, t) + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(x, y, t) = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

On peut déduire de manière plus rigoureuse l'expression des équations de Stokes dans le cadre de l'approximation de lubrification. Reprenons ainsi l'approche décrite par P.Manneville dans sa note[38] ou celle de l'article [43] de S.B.G O'Brien et L.W.Schwartz, en introduisant un paramètre $\epsilon \ll 1$ caractéristique de la configuration géométrique du film de peinture et les changements de variables :

$$\tilde{x} = \epsilon x, \quad \tilde{y} = \epsilon y, \quad \tilde{t} = \epsilon t \quad (5.7)$$

Si on effectue également le changement de variables donné par $\tilde{w} = \epsilon w$, l'équation de conservation de la masse prend la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (5.8)$$

tandis que l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\begin{cases} -\epsilon \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}}(x, y, t) + \rho g \sin(\beta) + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, y, t) + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}^2}(x, y, t) + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{y}^2}(x, y, t) \right) = 0 \\ -\epsilon \frac{\partial p}{\partial \tilde{y}}(x, y, t) + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(x, y, t) + \epsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x}^2}(x, y, t) + \epsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{y}^2}(x, y, t) \right) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z}(x, y, t) + \eta \left(\epsilon \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2}(x, y, t) + \epsilon^3 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2}(x, y, t) + \epsilon^3 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2}(x, y, t) \right) = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

En considérant les termes à l'ordre 0 en ϵ et en conservant le terme relatif au gradient de pression, principale cause de l'écoulement, on retrouve l'équation (5.6). Le champ de

vitesses est assujetti aux conditions aux limites classiques :

- Le non-glissement à la paroi solide se traduit par la condition cinématique $\mathbf{u}(z = 0) = 0$
- L'absence de contrainte à la surface libre se traduit par la condition :

$$\sigma|_h \mathbf{n} = (p|_h + \gamma C) \mathbf{n} \quad (5.10)$$

où \mathbf{n} désigne le vecteur normal à la surface du film, $C = \nabla \cdot \mathbf{n}$ la courbure locale de la surface libre, γ la tension de surface à l'interface entre l'air et le film de peinture et σ le tenseur des contraintes à la surface du film de peinture, évalué au niveau de l'interface.

La pression de Laplace est égale au produit de la tension superficielle par la courbure de l'interface, C . La séparation des échelles horizontales x et y d'une part et de l'échelle verticale z d'autre part permet de ne calculer la courbure qu'à l'ordre le plus bas : $C = -\partial^2 h / \partial x^2 - \partial^2 h / \partial y^2$, où $h(x, y) = e(x, y) + S_a(x, y)$ est l'altitude de la surface libre du film.

Comme le fluide est newtonien, le tenseur des contraintes est proportionnel au tenseur des taux de déformation :

$$\sigma = \frac{\eta}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (5.11)$$

Dans l'approximation de lubrification, à l'ordre zéro en ϵ , le tenseur des contraintes se réduit donc à

$$\sigma|_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & 0 & \eta \frac{\partial v}{\partial z} \\ \eta \frac{\partial u}{\partial z} & \eta \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Le vecteur \mathbf{n} normal à la surface est donné par

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ -\frac{\partial h}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

La relation (5.10) se réécrit donc, dans l'approximation de lubrification,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ p = -\gamma \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (5.14)$$

Intégration des équations Puisque la pression p ne dépend pas de z , les équations obtenues s'intègrent aisément. Les conditions aux limites sont données par la condition cinématique de vitesse nulle au contact de la tôle, $u(z = 0) = 0$, et la condition mécanique traduisant l'absence de contrainte à la surface libre, $\partial u / \partial z(z = e) = 0$. Nous obtenons ainsi, pour l'équation (5.6) :

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x}(x, y, t) - \rho g \sin(\beta) \right) \left(\frac{1}{2} z^2 - e(x, y, t) z \right) \quad (5.15)$$

On peut résumer le résultat donné par l'équation (5.15) sous forme de loi d'échelles en estimant des vitesses caractéristiques de l'écoulement. La composante en x de la vitesse moyenne dans l'épaisseur du film est :

$$\langle u \rangle(x, y, t) = -\frac{1}{3\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x}(x, y, t) - \rho g \sin(\beta) \right) e^2(x, y, t) \quad (5.16)$$

Cette vitesse moyenne permet de calculer le débit moyen dans l'épaisseur du film dans la direction x :

$$q_x(x, y, t) = e \langle u \rangle = -\frac{1}{3\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x}(x, y, t) - \rho g \sin(\beta) \right) e^3(x, y, t) \quad (5.17)$$

De manière analogue, le débit moyen sur l'épaisseur du film dans la direction y s'écrit :

$$q_y(x, y, t) = e \langle v \rangle = -\frac{1}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial y}(x, y, t) e^3(x, y, t) \quad (5.18)$$

La pression de Laplace à l'intérieur du film fluide est modulée dans les directions horizontales : elle est ainsi plus grande sous les bosses. Ces modulations de pression génèrent bien un écoulement des bosses vers les creux, qui permet le nivellement du film. Nous avons $p = \gamma C$, ce qui donne pour les débits :

$$\begin{cases} q_x \sim e \langle u \rangle = \frac{\gamma}{3\eta} \left(h(x, y, t) - S_a(x, y) \right)^3 \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}(x, y, t) + \frac{\partial^3 h}{\partial x \partial y^2}(x, y, t) - \frac{\rho g}{\gamma} \sin(\beta) \right) \\ q_y \sim e \langle v \rangle = \frac{\gamma}{3\eta} \left(h(x, y, t) - S_a(x, y) \right)^3 \left(\frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(x, y, t) + \frac{\partial^3 h}{\partial y \partial x^2}(x, y, t) \right) \end{cases} \quad (5.19)$$

Nous avons préféré écrire cette équation en faisant apparaître h plutôt que e : cela nous permettra d'éliminer S_a , sous l'hypothèse qu'il reste faible devant h .

Pour calculer la cinétique de nivellement du film, il nous reste à faire intervenir l'équation de conservation de la masse $\partial_t h + \partial_x q_x + \partial_y q_y = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t}(x, y, t) = & -\frac{\gamma}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left((h - S_a)^3 \left(\frac{\partial h}{\partial x^3} + \frac{\partial h}{\partial y \partial x^2} - \frac{\rho g}{\gamma} \sin(\beta) \right) \right) \\ & - \frac{\gamma}{3\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left((h - S_a)^3 \left(\frac{\partial h}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial h}{\partial y^3} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Décomposition linéaire du problème horizontal Dans son étude [40] [41] sur le nivellement des peintures, J.P.Nauzin s'appuie sur une décomposition linéaire de l'équation (5.20). Cette linéarisation suppose que la perturbation du film est faible en comparaison de son épaisseur. Dans le cas de la cataphorèse, l'épaisseur du film est de l'ordre d'une vingtaine de microns tandis que les fluctuations de la surface sont de l'ordre de quelques microns. La rugosité de la tôle est aussi de l'ordre de quelques microns. Si l'approximation reste ici permise, on peut tout de même s'interroger sur l'effet des non-linéarités puisque la séparation de ces deux échelles n'est pas excellente.

Nous écrivons donc $h = h_0 + \delta h$: à l'ordre le plus bas, l'équation (5.20) devient, dans le cas horizontal ($\beta = 0$) :

$$\frac{\partial \delta h}{\partial t}(x, y, t) = -\frac{\gamma}{3\eta} h_0^3 \left(\frac{\partial^4 \delta h}{\partial x^4}(x, y, t) + 2 \frac{\partial^4 \delta h}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y, t) + \frac{\partial^4 \delta h}{\partial y^4}(x, y, t) \right) \quad (5.21)$$

Il existe une solution analytique à l'équation (5.21). Dans le domaine de Fourier, (5.21) se réécrit :

$$\frac{\partial \hat{\delta h}}{\partial t} = -\frac{\gamma}{3\eta} h_0^3 \left(\xi_x^4 + \xi_x^2 \xi_y^2 + \xi_y^4 \right) \hat{\delta h} \quad (5.22)$$

On en déduit que

$$\hat{\delta h}(t) = \hat{\delta h}(0) \exp \left(-\frac{\gamma}{3\eta} h_0^3 \left(\xi_x^4 + \xi_x^2 \xi_y^2 + \xi_y^4 \right) t \right) \quad (5.23)$$

Nous retrouvons bien le résultat de J.P.Nauzin [40] [41], qui stipule que les composantes fréquentielles de δh relaxent exponentiellement avec un temps caractéristique

$$\tau = -\frac{3\eta}{h_0^3 \gamma (\xi_x^4 + \xi_x^2 \xi_y^2 + \xi_y^4)} \quad (5.24)$$

Décomposition linéaire du problème sur substrat incliné La linéarisation est différente dans le cas d'un écoulement sur plan incliné. Dans ce cas, (5.20) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta h}{\partial t}(x, y, t) = & -\frac{\gamma}{3\eta} h_0^3 \left(\frac{\partial^4 \delta h}{\partial x^4}(x, y, t) + 2 \frac{\partial^4 \delta h}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y, t) + \frac{\partial^4 \delta h}{\partial y^4}(x, y, t) \right) \\ & - h_0^2 \frac{\rho g \sin(\beta)}{\eta} \frac{\partial \delta h}{\partial x}(x, y, t) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Dans le domaine de Fourier, (5.25) s'écrit :

$$\frac{\partial \hat{\delta}h}{\partial t} = - \left[\frac{\gamma}{3\eta} h_0^3 (\xi_x^4 + \xi_x^2 \xi_y^2 + \xi_y^4) \right] + i \xi_x h_0^2 \frac{\rho g \sin(\beta)}{\eta} \hat{\delta}h \quad (5.26)$$

On en déduit que

$$\hat{\delta}h(t) = \hat{\delta}h(0) \exp \left(- \frac{\gamma}{3\eta} h_0^3 (\xi_x^4 + \xi_x^2 \xi_y^2 + \xi_y^4) t \right) \exp \left(i \xi_x h_0^2 \frac{\rho g \sin(\beta)}{\eta} t \right) \quad (5.27)$$

Les composantes fréquentielles de δ relaxent exponentiellement dans ce contexte avec un temps caractéristique

$$\tau^{-1} = \frac{\gamma}{3\eta} h_0^3 (\xi_x^4 + \xi_x^2 \xi_y^2 + \xi_y^4) \quad (5.28)$$

Le terme $\exp \left(i \xi_x h_0^2 \frac{\rho g \sin(\beta)}{\eta} t \right)$ traduit le transport de matière causé par l'effet de la gravité.

Prise en compte de l'évaporation Le modèle décrit précédemment ne prend pas en compte les effets d'évaporation du film de peinture. En présence d'évaporation, l'équation de conservation de la masse de fluide prend la forme :

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x, y, t) = -\nabla \cdot \mathbf{q}(x, y, t) - E(x, y, t) \quad (5.29)$$

5.2 Effet Marangoni

Afin de prendre en compte les effets de la variation spatiale des paramètres de rhéologie du modèle, W.S.Overdiep [46] (1986) considère un fluide constitué d'une résine et d'un solvant, seul susceptible de s'évaporer. Il met en évidence la potentielle importance des variations spatiales de la tension de surface. Cette dernière dépend en effet de la composition du film, et notamment des proportions respectives de résine et de solvant. En présence d'évaporation, les régions de plus faible épaisseur vont sécher plus vite, et donc présenter des concentrations plus fortes en résine, provoquant l'apparition d'un gradient de tension de surface. Ce phénomène physique est connu sous le nom d'effet Marangoni. Les variations de la tension de surface provoquent un effet de cisaillement au niveau de la surface du film, effet que W.S.Overdiep considère comme le moteur principal du nivellement du fluide.

L'approche de W.S.Overdiep a été reprise et développée dans plusieurs articles ultérieurs. S.K.Wilson, en 1992 [58] ou encore S.D.Howison *et al.*, en 1997 [22], ont ainsi analysé et généralisé le modèle de W.S.Overdiep, réalisant des simulations numériques qui montrent un bon accord avec les données expérimentales recueillies pour des géométries modèles du dépôt.

D.E.Weidner *et al.* se sont intéressés dès 1995 à l'effet d'un substrat courbe sur l'écoulement du film de peinture, dans un cadre bidimensionnel [57] avec le modèle de W.S.Overdiep. M.H.Eres *et al.* ont généralisé ces travaux au cas tridimensionnel en 1999 [11]. Dans ces articles, des simulations numériques des modèles pour des topographies modèles sont réalisées, qui montrent un bon agrément avec les mesures expérimentales.

P.H.Gaskell *et al.*, et M.C.T.Wilson [16] [17] se sont enfin intéressés à la généralisation de ces différents modèles au cas des substrats inclinés, cas où la gravité joue un rôle physique non négligeable dans la dynamique de l'écoulement.

Nous considérons dans tout ce qui suit un modèle simplifié où la peinture est constituée d'une résine et d'un solvant, seul susceptible de s'évaporer. Afin de prendre en compte l'effet Marangoni, P.H.Gaskell *et al.* [16] proposent la loi suivante qui lie la valeur de la tension de surface à la concentration en solvant du film :

$$\gamma = \gamma_r + c(\gamma_s - \gamma_r) = \gamma_r + c\Delta\gamma \quad (5.30)$$

où γ_r désigne la tension de surface de la résine, et γ_s la tension de surface qui caractérise le solvant. La viscosité dépend quant à elle de la concentration en solvant par le biais de la loi exponentielle

$$\eta(c) = \eta_0 e^{-ac} \quad (5.31)$$

La présence d'un gradient de la tension de surface modifie en profondeur la condition d'équilibre mécanique de l'interface. Dans ce contexte, l'équation (5.10) prend la forme suivante

$$\sigma|_h \mathbf{n} = (p|_h + \gamma C) \mathbf{n} + \nabla_S \gamma \quad (5.32)$$

où ∇_S est l'opérateur de gradient surfacique :

$$\nabla_S \gamma = \nabla \gamma - (\mathbf{n} \cdot \nabla \gamma) \mathbf{n} \quad (5.33)$$

Dans le cadre de l'approximation de lubrification, on vérifie que

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \gamma = O(\epsilon) \quad (5.34)$$

Par conséquent, au premier ordre en ϵ , l'équilibre mécanique de l'interface s'écrit

$$\begin{cases} \eta \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \eta \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\ p = -\gamma \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (5.35)$$

Les nouvelles conditions aux limites vont affecter l'expression des débits locaux, puisque la condition d'équilibre mécanique intervient dans la constante d'intégration du champ de vitesse selon \mathbf{z} . Les expressions locales du débits deviennent ainsi

$$\begin{cases} q_x \sim e \langle u \rangle = \frac{\gamma}{3\eta} \left(h - S_a \right)^3 \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial x \partial y^2} - \frac{\rho g}{\gamma} \sin(\beta) \right) + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \left(h - S_a \right)^2 \\ q_y \sim e \langle u \rangle = \frac{\gamma}{3\eta} \left(h - S_a \right)^3 \left(\frac{\partial^3 h}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial y \partial x^2} \right) + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial \gamma}{\partial y} \left(h - S_a \right)^2 \end{cases} \quad (5.36)$$

Pour calculer la cinétique de nivellement du film, il reste enfin à faire intervenir l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (5.37)$$

L'équation d'évolution de la concentration s'obtient en écrivant l'équation de conservation de la masse de solvant.

$$\frac{\partial(c e)}{\partial t} = -E - \frac{\partial(c q_x)}{\partial x} - \frac{\partial(c q_y)}{\partial y} \quad (5.38)$$

Combinée avec l'équation (5.37) de conservation de la masse, (5.38) devient

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\left(\frac{1-c}{e}\right)E - \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)\frac{q_x}{e} - \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)\frac{q_y}{e} \quad (5.39)$$

La combinaison des équations (5.37) et (5.39) permet de décrire l'évolution de la topographie du film de peinture.

5.3 Nivellement d'un film non-newtonien

Les données expérimentales recueillies par J.P.Nauzin [40] [41] dans son étude des propriétés des peintures indiquent clairement que la cataphorèse possède un comportement non newtonien, au moins à des taux de cisaillement de l'ordre de $0.1s^{-1}$. Nous nous intéressons dans cette section à la dérivation de l'équation de l'évolution du film de peinture pour une rhéologie purement non newtonienne. Nous supposons à partir de maintenant que le film est déposé sur un substrat rugueux horizontal et que les paramètres de rhéologie sont homogènes en son sein.

Pour un film non-newtonien, nous ne pouvons plus utiliser l'équation de Stokes. Afin de dériver les équations de nivellement, il convient de commencer par comprendre comment s'écrivent les équations de l'hydrodynamique dans ce cadre plus général. L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit sous la forme :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \sigma \quad (5.40)$$

σ désigne dans ce contexte le tenseur des contraintes. On peut décomposer ce tenseur en une partie diagonale, la pression $p = -\frac{1}{3}\text{Tr}\sigma$ et une partie non-diagonale, $\bar{\sigma}$, le tenseur des contraintes déviatoriques, ce qui revient à écrire σ comme :

$$\sigma = -p \text{Id} + \bar{\sigma} \quad .$$

Notons que si le fluide est newtonien, les contraintes déviatoriques sont proportionnelles au tenseur taux-de-déformation :

$$\bar{\sigma} = \eta \left(\nabla \mathbf{u} + {}^T \nabla \mathbf{u} \right)$$

où le signe T indique la transposée d'un tenseur. En remplaçant l'expression ainsi obtenue de σ dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.40), on retrouve l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\sigma} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u}$$

Nous avons ici utilisé la conservation de la masse pour éliminer un des termes provenant de l'expression du tenseur déviatorique.

L'approximation de lubrification pour un fluide non-newtonien Pour modéliser la phase de nivellement, nous pouvons à nouveau utiliser les hypothèses de l'approximation de lubrification. Pour commencer, nous négligeons les effets inertiels : c'est cette même hypothèse qui permet d'habitude d'utiliser l'équation de Stokes au lieu de Navier-Stokes. Dans notre cadre général, négliger les termes inertiels revient à écrire :

$$\nabla \cdot \sigma = 0$$

C'est une équation d'équilibre mécanique local. Les contraintes doivent être équilibrées, bien sûr, puisque l'on néglige l'accélération et l'inertie. Il est toujours plus commode de séparer la pression des contraintes déviatoriques : c'est une pure affaire de définition, qui nous mène à :

$$-\nabla p + \nabla \cdot \bar{\sigma} = 0 \quad (5.41)$$

Nous utilisons ensuite la seconde hypothèse de l'approximation de lubrification : la séparation d'échelle. De même qu'auparavant, la vitesse de l'écoulement pointe essentiellement dans les directions horizontales x et y . Nous avons besoin d'utiliser cette séparation d'échelle pour simplifier la forme du tenseur déviatorique, qui en général pourrait comprendre six composantes indépendantes. Pour se faire une idée, il est utile de commencer par écrire le tenseur taux de déformation :

$$\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + {}^T \nabla \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}$$

On a d'abord négligé tous les termes faisant intervenir la vitesse selon z , puis on a observé que les gradients de u selon x et de v selon y sont négligeables en comparaison des gradients selon z . La déformation est donc un cisaillement pur, et l'on s'attend à ce que le tenseur des contraintes soit au moins parallèle au tenseur taux-de-déformation :

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & 0 \end{pmatrix} .$$

L'équilibre local des contraintes (5.41) s'écrit donc :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (5.42)$$

où nous avons négligé les gradients dans les directions horizontales x et y .

Nous retrouvons des propriétés analogues à l'approximation de lubrification pour un fluide newtonien : d'une part, la pression est seulement fonction des variables x et y ; d'autre part, nous pouvons intégrer les premières équations pour obtenir :

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = -\frac{\partial p}{\partial x} (e - z) \\ \sigma_{yz} = -\frac{\partial p}{\partial y} (e - z) \end{cases} \quad (5.43)$$

en utilisant la condition de surface libre (contrainte nulle). Dans le cas d'un fluide newtonien, nous avons intégré deux fois l'équation de Stokes (5.6) pour obtenir le profil parabolique des vitesses (5.15). En remplaçant la contrainte par $\eta \frac{\partial u}{\partial z}$ dans l'équation (5.43) et par $\eta \frac{\partial v}{\partial z}$ dans l'équation (5.43) nous pourrions effectivement effectuer une seconde intégration et retrouver le profil parabolique du fluide newtonien. Ici, cependant, nous avons obtenu un résultat plus général dont le fluide newtonien est un cas particulier : dans l'approximation de lubrification, la contrainte est linéaire dans l'épaisseur du film.

Rhéologie non-newtonienne À ce stade, nous avons besoin d'introduire une loi constitutive pour exprimer σ_{xz} et σ_{xy} en fonction des composantes du taux de déformation $\dot{\gamma}_x = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z}$ et $\dot{\gamma}_y = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z}$. Les données de Nauzin semblent indiquer que la rhéologie du dépôt de cataphorèse peut être raisonnablement modélisée en utilisant un comportement en loi de puissance :

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = A(\sqrt{\dot{\gamma}_x^2 + \dot{\gamma}_y^2})^{n-1} & \dot{\gamma}_x = A\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}\right)^{n-1} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \sigma_{yz} = A(\sqrt{\dot{\gamma}_x^2 + \dot{\gamma}_y^2})^{n-1} & \dot{\gamma}_y = A\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}\right)^{n-1} \frac{\partial v}{\partial z} \end{cases} \quad (5.44)$$

avec $n < 1$. Les données de J.P.Nauzin indiquent que l'exposant est de l'ordre de $n \sim 1/3$. En combinant (5.43) et (5.44), on vérifie :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad (5.45)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}(z) = -\nabla p \left(\frac{1}{\|\nabla p\|}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{1}{A}\right)^{1/n} (e - z)^{1/n} \quad (5.46)$$

Après intégration, et en utilisant la condition de vitesse nulle au bord inférieur, on obtient :

$$\mathbf{u}(z) = \frac{2n}{n+1} \nabla p \left(\frac{1}{\|\nabla p\|}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{1}{A}\right)^{1/n} \left((e - z)^{1+1/n} - e^{1+1/n}\right) \quad (5.47)$$

La vitesse moyenne sur l'épaisseur de film vaut, quant à elle :

$$\langle \mathbf{u} \rangle = -\frac{2n}{2n+1} e^{1+1/n} \nabla p \left(\frac{1}{\|\nabla p\|}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{1}{A}\right)^{1/n} \left((e - z)^{1+1/n} - e^{1+1/n}\right)$$

et finalement, nous obtenons le débit :

$$\mathbf{q} = e\langle \mathbf{u} \rangle = -\frac{2n}{2n+1} e^{2+1/n} \nabla p \left(\frac{1}{\|\nabla p\|} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{1}{A} \right)^{1/n} \quad (5.48)$$

On retrouve, bien entendu, les expressions analogues pour le fluide newtonien en utilisant $n = 1$ et $A = 2\eta$.

Pour obtenir l'expression du débit gouvernant le nivellement du film non-newtonien, il nous reste à utiliser la relation d'équilibre mécanique de l'interface :

$$p(x) = -\gamma \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \quad (5.49)$$

Le débit est enfin relié à la variation de hauteur du film par la relation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}(x, y, t) - E(x, y, t) \quad (5.50)$$

Pour une rhéologie non-newtonienne, le nivellement du film sur le substrat est décrit par la combinaison des équations (5.48), (5.49) et (5.50).

5.4 Cross-over

Afin de mieux prendre en compte le comportement complexe de la cataphorèse, nous avons développé un modèle qui prend en compte le fait que la peinture puisse avoir un comportement non newtonien. L'approximation la plus douteuse du modèle non newtonien provient de l'hypothèse selon laquelle la rhéologie du matériau est une pure loi de puissance. Cette loi de puissance semble bien vérifiée dans une large fenêtre de taux de déformation, en tout cas au vu des données fournies par J.P.Nauzin [40] [41] concernant la cataphorèse. Cependant, utiliser cette loi de puissance pour tout taux de déformation signifie que l'on introduit une divergence de la viscosité pour $\dot{\gamma} \rightarrow 0$. Or on sait qu'en général, à faible taux de déformation $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_c$, la viscosité d'un matériau non-newtonien sature, de sorte que le matériau recouvre un comportement newtonien. Selon les taux de déformation en jeu, cette saturation peut avoir un effet important sur l'équation de nivellement.

Introduisons la grandeur $\dot{\gamma} = \sqrt{\dot{\gamma}_x^2 + \dot{\gamma}_y^2}$. On suppose que le comportement $\eta(\dot{\gamma}) = \frac{1}{2} A |\dot{\gamma}|^{n-1}$ reste valable tant que $|\dot{\gamma}| > \dot{\gamma}_c$, et qu'en deçà de cette valeur, la viscosité sature, $\eta(\dot{\gamma}) \equiv \eta_c = \frac{1}{2} A |\dot{\gamma}_c|^{n-1}$, de sorte que les composantes de la contrainte valent $\sigma_{xz} = A |\dot{\gamma}_c|^{n-1} \dot{\gamma}_x$ et $\sigma_{yz} = A |\dot{\gamma}_c|^{n-1} \dot{\gamma}_y$ dans ce régime Newtonien. On introduit enfin une notation pour la contrainte critique : $\sigma_c = A |\dot{\gamma}_c|^n$.

La dérivation des équations de nivellement dans l'approximation de film mince reste in-

changée jusqu'aux équations (5.43), que l'on rappelle ici :

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = -\frac{\partial p}{\partial x} (e - z) \\ \sigma_{yz} = -\frac{\partial p}{\partial y} (e - z) \end{cases}$$

Cette propriété ne dépend en effet d'aucune hypothèse sur la rhéologie. Le profil de contrainte à travers l'épaisseur du film est linéaire et part de zéro à la surface libre. La valeur maximale de la contrainte est atteinte en $z = 0$, et vaut :

$$\sigma_{\max} = e \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2} \quad (5.51)$$

On voit immédiatement qu'il va falloir séparer deux cas selon que σ_{\max} est plus grand ou plus petit que σ_c :

- Si $|\sigma_{\max}| < \sigma_c$, alors toute l'épaisseur du film est en régime newtonien. Dans ce cas, on retrouve l'équation de J.P.Nauzin [40] [41] pour gouverner le transport de masse.
- Si $|\sigma_{\max}| > \sigma_c$, alors il faut séparer le film entre une partie supérieure, où les contraintes sont $< \sigma_c$, qui est donc en régime newtonien, et une partie inférieure en régime non-newtonien. La transition entre les régions newtoniennes et non-newtoniennes dans la direction x , se produit à la coordonnée z_c telle que :

$$\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2} (e - z_c) = \sigma_c \quad (5.52)$$

Dans la suite, on calcule le profil de vitesse dans un film partiellement non-newtonien, puis on en déduit le flux de masse qui en résulte. Dans la couche inférieure, non-newtonienne, on a :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}(z) = -\nabla p \left(\frac{1}{\|\nabla p\|} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{1}{A} \right)^{1/n} (e - z)^{1/n} \quad (5.53)$$

Ce profil s'intègre à partir de la condition de non-glissement au fond de l'écoulement, de sorte que l'on retrouve le même profil que dans le cas non-newtonien pur :

$$\mathbf{u}_{\text{n.n.}}(z) = \frac{2n}{n+1} \nabla p \left(\frac{1}{\|\nabla p\|} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{1}{A} \right)^{1/n} \left((e - z)^{1+1/n} - e^{1+1/n} \right) \quad (5.54)$$

Ce profil n'est cependant valable que pour $z < z_c$. Au delà de z_c , on doit retrouver un profil newtonien. Soit :

$$\dot{\gamma}_x = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\sigma_{xz}}{2\eta_c} = -\frac{1}{2\eta_c} \frac{\partial p}{\partial x} (e - z)$$

d'où

$$u(z) = \frac{1}{2\eta_c} \frac{\partial p}{\partial x} (e - z)^2 + C$$

la valeur de la constante étant déduite par continuité avec le profil non-newtonien dans la partie basse de l'écoulement.

$$u(z) = \frac{1}{2\eta_c} \frac{\partial p}{\partial x} \left((e - z)^2 - (e - z_c)^2 \right) + u_{n.n.}(z_c)$$

Dans la suite des calculs, il est pratique d'introduire la quantité :

$$\alpha = \frac{e - z_c}{e}$$

C'est la fraction du film qui est en régime newtonien. En utilisant (5.52), on vérifie que

$$\alpha = \frac{\sigma_c}{e \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2}} \quad (5.55)$$

Il s'agit maintenant de calculer le débit résultant de ce profil des vitesses. La partie non-newtonienne de l'écoulement contribue à un débit :

$$\mathbf{q}_{n.n.} = \nabla p \left(\frac{1}{\|\nabla p\|} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{1}{A} \right)^{1/n} e^{2+1/n} \left(-\frac{2n}{n+1} \frac{n}{2n+1} \alpha^{2+1/n} + \frac{2n}{n+1} \alpha - \frac{2n}{2n+1} \right) \quad (5.56)$$

On voit clairement que l'on retrouverait le résultat (5.48) pour un film entièrement non-Newtonien, $\alpha = 0$. Le débit dans la partie supérieure du film, newtonienne, est :

$$q_n = \int_{z_c}^e u(z) dz = -\frac{1}{3\eta_c} \frac{\partial p}{\partial x} (e - z_c)^3 + (e - z_c) u_{n.n.}(z_c) \quad (5.57)$$

On en déduit l'expression du débit :

$$\mathbf{q} = -\frac{2n}{2n+1} \nabla p \left(\frac{1}{\|\nabla p\|} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{1}{A} \right)^{1/n} e^{2+1/n} \left(1 - \alpha^{2+1/n} \right) - \frac{1}{3\eta_c} \frac{\partial p}{\partial x} e^3 \alpha^3 \quad (5.58)$$

On remarque que, si on note q_n et $q_{n.n}$ les expressions des débits newtoniens et non-newtoniens, on a la relation

$$\mathbf{q} = \alpha^3 \mathbf{q}_n + (1 - \alpha^{2+1/n}) \mathbf{q}_{n.n} \quad (5.59)$$

Pour obtenir l'expression complète du débit, il nous reste à utiliser la relation d'équilibre mécanique de l'interface :

$$p(x) = -\gamma \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \quad (5.60)$$

Enfin, le débit est relié à la variation de hauteur du film par la relation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}(x, y, t) - E(x, y, t) \quad (5.61)$$

Dans le cadre du modèle de cross-over, le nivellement du film sur le substrat est décrit par la combinaison des équations (5.55), (5.58), (5.60) et (5.61).

L'expression (5.58) du débit fait intervenir quatre paramètres de rhéologie. La tension de surface γ et les paramètres de viscosité η_c et A interviennent explicitement dans l'évaluation des débits, alors que la contrainte critique σ_c intervient dans l'évaluation (5.55) de la proportion locale de fluide newtonien. Ces quantités ne sont pas indépendantes. De fait, en égalant les expressions de la déformation critique à l'altitude où la transition entre un comportement non-newtonien et un comportement newtonien a lieu, on obtient la relation :

$$\left(\frac{\sigma_c}{A}\right)^{1/n} = \frac{\sigma_c}{2\eta_c} \quad (5.62)$$

5.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre plusieurs modèles d'écoulement qui prennent en compte différentes hypothèses sur la rhéologie des peintures : rhéologie newtonienne, prise en compte des variations de la tension de surface, rhéologie non-newtonienne, ou encore modèle mixte de rhéologie. Nous nous intéressons dans les chapitres qui suivent à l'application de ces modèles au cas de la peinture automobile.

Chapitre 6

Nivellement de la cataphorèse

La cataphorèse est la première couche de peinture déposée sur la caisse d'une automobile, et vise pour l'essentiel à protéger le véhicule des phénomènes de corrosion. Le dépôt est effectué en immergeant la caisse de l'automobile dans un bain. Une importante base de données expérimentales a été établie par Th.Nion [42] dans sa thèse pour la couche de cataphorèse. Nous comparons dans ce chapitre les résultats de simulation obtenus avec les différents modèles à ces données expérimentales, en insistant tout particulièrement sur l'influence des aspects de rhéologie de la cataphorèse.

6.1 Généralités sur la cataphorèse

La cataphorèse ou électrodéposition cationique est une technique de peinture qui consiste à immerger la caisse de l'automobile dans un bain de peinture hydrosoluble, en mettant la pièce en cathode (d'où le nom de cataphorèse), et en faisant migrer les particules de peintures en suspension dans le bain au moyen d'un courant électrique de l'anode vers la cathode. Les particules de peinture se déposent alors uniformément et sur toute la surface de la pièce immergée. A l'issue de la phase d'électrodéposition de la peinture, la caisse de l'automobile est cuite dans un four.

La composition chimique de la cataphorèse est complexe. On peut néanmoins distinguer quatre composants principaux :

- un liant, qui est le principal constituant du film sec, et dont vont dépendre les principales caractéristiques du film réticulé. Le liant est un polymère cationique, de base époxyde dans le cas de la cataphorèse.
- une pâte pigmentaire, composée de pigments et de charges minérales enrobés par une résine également cationique.
- des solvants organiques, en faible quantité, qui vont jouer un rôle important sur l'aspect du film.
- de l'eau déminéralisée, qui constitue le milieu d'électrolyse de la peinture.

Après électrodéposition, la peinture ne contient plus qu'une très faible proportion d'eau. A la fin de la cuisson, la cataphorèse réticule : des liaisons chimiques s'opèrent ainsi entre les polymères constitutifs de la peinture, qui provoquent un durcissement rapide du

film.

La viscosité de la cataphorèse est très élevée à la température initiale (25°C), de l'ordre de 10^4Pa.s . A température ambiante, le film de peinture est donc fortement visqueux et le nivellement est négligeable. La viscosité du film diminue néanmoins fortement au cours de la cuisson, ce qui rend le nivellement possible. La cataphorèse possède une rhéologie complexe. J.P.Nauzin [40] [41] a montré que le comportement de la cataphorèse à des taux de déformation allant de 1 à 100s^{-1} est celui d'un fluide rhéofluidifiant. La viscosité va donc dépendre à la fois de la température et du taux de déformation. A partir d'essais menés à l'aide d'un rhéomètre plan, J.P.Nauzin propose la relation suivante entre la viscosité η de la cataphorèse et le taux de déformation $\dot{\gamma}$ à la température constante $T = 165^{\circ}\text{C}$.

$$\eta(\dot{\gamma}) = A\dot{\gamma}^{-2/3} \quad (6.1)$$

Dans le cadre des films minces, les taux de déformation observés sont nettement plus faibles, en général de l'ordre de $0,01 \text{s}^{-1}$. Utiliser la loi de puissance pour tout taux de déformation signifie que l'on introduit une divergence de la viscosité pour $\dot{\gamma} \rightarrow 0$. Or, on sait qu'en général, à faible taux de déformation $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_c$, la viscosité d'un matériau non-newtonien sature, de sorte que le matériau recouvre un comportement newtonien. Il n'est donc pas évident que la relation (6.1) soit transposable aux faibles valeurs de taux de déformation.

J.P.Nauzin suggère que la viscosité de la cataphorèse dépend de la température selon une loi d'Arrhénius :

$$\eta(T) = \lambda \exp\left(\frac{\mu}{T}\right) \quad (6.2)$$

Les constantes λ et μ dépendent des valeurs η_0 de la viscosité à la température ambiante $T_0 = 298,15 \text{K}$ et η_r à la température de réticulation $T_r = 433,15 \text{K}$.

$$\begin{cases} \mu = \frac{T_r T_0}{T_r - T_0} \log\left(\frac{\eta_0}{\eta_r}\right) \\ \lambda = \eta_r \left(\frac{\eta_0}{\eta_r}\right)^{-\frac{T_0}{T_r - T_0}} \end{cases} \quad (6.3)$$

6.2 Données expérimentales

Dans le cadre de la thèse de Th.Nion [42], une importante campagne d'expérimentation a été menée afin de caractériser au mieux la façon dont la géométrie des surfaces évolue avec le dépôt des divers revêtements, qui a permis de connaître précisément l'évolution des reliefs présents à chaque nouvelle couche de peinture. Nous utiliserons les données expérimentales issues de cette base afin de valider les modèles d'évolution développés pour la cataphorèse.

La campagne d'expériences vise à tenir compte de la variabilité des tôles mises en peinture et met par conséquent en jeu des échantillons de rugosités variables, allant des tôles polies à des tôles de fortes rugosités. Les rugosités des tôles utilisées afin de constituer la base de données expérimentale ont été mesurées à partir du Ra mesuré pour les échelles supérieures à $2.5mm$ et du Wa , mesuré pour les échelles de l'ordre de $0.8mm$. La nature de la rugosité, aléatoire pour les tôles de type EDT, périodique pour les tôles de type EBT, est également prise en compte dans le choix des échantillons. Les données expérimentales présentées permettent d'obtenir, pour un échantillon de tôle donné, une série d'images représentant l'évolution d'une région précise de cet échantillon, partant du substrat et allant jusqu'à la couche de laque. Il est possible à partir de ces images d'observer la façon dont chaque couche de peinture s'étale sur l'échantillon. Notons que la réalisation de ces expériences a mis l'accent sur un certains nombres de problématiques relatives au calage des topographies, problématiques étudiées en détail dans la thèse de Th.Nion [42].

Tous les échantillons sont galvanisés (dépôt d'une couche de zinc de quelques μm à la surface de l'échantillon) et phosphatés avant le début de l'expérience. Au cours de cette dernière, chaque échantillon est successivement recouvert par les trois couches de revêtements usuelles : cataphorèse, sealer, et laque. Dans ce chapitre, nous nous intéressons uniquement au cas de la cataphorèse. Le tableau 6.1 qui suit récapitule l'ensemble des échantillons mis en jeu dans la campagne expérimentale. Pour tous les échantillons, le dépôt de cataphorèse a été effectué en position horizontale.

| EBT | Ra 2,5 mm | Wa 0,8 mm |
|--------|-----------|-----------|
| HVP183 | 0,93 | 0,36 |
| HVP217 | 1,39 | 0,36 |
| JVP054 | 1,9 | 0,49 |

| EDT | Ra 2,5 mm | Wa 0,8 mm |
|--------|-----------|-----------|
| EXP3 | 1,06 | 0,35 |
| JVP020 | 1,23 | 0,35 |
| HVP228 | 0,97 | 0,27 |

| Polis | Ra 2,5 mm | Wa 0,8 mm |
|-------|-------------|--------------|
| DPB16 | 0,3 μm | 0,06 μm |

FIGURE 6.1 – Expériences de suivi de l'évolution d'une couche de sealer au cours du temps de flash.

Chaque échantillon est constitué par le recalage de 100 imagerie de taille 128 pixels par 128 pixels. Chaque pixel représente l'altitude moyenne sur un champ de $27.5\mu m$ par $27.5\mu m$, ce qui correspond à une taille globale de $3.52mm$ par $3.52mm$ pour une imagerie. L'objectif est, à partir de ces topographies, de simuler le plus exactement possible l'évolution de la topographie de la couche de cataphorèse au cours de la cuisson de la tôle. Les simulations présentées dans ce chapitre sont réalisées sur les imagerie, plutôt que sur la totalité de l'échantillon, pour d'évidentes raisons de temps de calcul. L'épaisseur du

film, de l'ordre d'une vingtaine de μm , est très inférieure à la taille de l'imagette, et il est donc exclu qu'il y ait des transports de fluide sur des longueurs comparables à celle de l'imagette.

Un défaut majeur de la base de données expérimentales est qu'elle ne contient qu'une image du substrat de l'échantillon et une image de la topographie de la couche de cataphorèse après la cuisson, alors que dans l'optique de simuler l'évolution de la topographie au cours de la cuisson de la cataphorèse, il conviendrait de disposer de la topographie de la surface en début de cuisson. Il est possible d'arriver à une bonne approximation de la topographie initiale en supposant que l'épaisseur de cataphorèse déposée sur le substrat est constante en tout point. En effet, la peinture électrodéposée possède une résistivité électrique intrinsèque : la résistance électrique du film croît au fur et à mesure de l'augmentation de son épaisseur, jusqu'à atteindre une valeur telle que l'intensité du courant tombe pratiquement à zéro. Cette propriété explique la grande uniformité de l'épaisseur de la couche de peinture. Nous supposons ainsi qu'immédiatement après la phase d'immersion, la topographie de la couche de peinture est identique à celle du substrat sous-jacent.

6.3 Modèle non-newtonien

Commençons par confronter le modèle non-newtonien aux données expérimentales recueillies sur la cataphorèse.

6.3.1 Equation du modèle

L'équation d'évolution de la topographie du film pour un fluide non-newtonien déposé sur un substrat horizontal est donnée, en reprenant les notations du chapitre précédent, par :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\frac{2}{5A^3} e^{5\|\nabla p\|^2} \nabla p \right) \quad (6.4)$$

La pression p est reliée à h par la relation

$$p = -\gamma \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \quad (6.5)$$

Il est intéressant de travailler avec une version adimensionnée de l'équation (6.4), qui permette de ne considérer qu'un seul paramètre de rhéologie caractéristique de l'évolution. Nous effectuerons donc les changements de variable donnés par $X = x/L$, $Y = y/L$, $\tilde{h} = h/H$, et $\tilde{e} = e/H$ où L désigne le pas d'échantillonnage de la topographie mesurée et H l'échelle d'altitude. Avec ces changements de variables :

$$p = -\frac{\gamma H}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial Y^2} \right) \quad (6.6)$$

Effectuons enfin le changement de variable donné par $t \rightarrow \theta(t)$. En posant

$$\theta'(\tau) = \frac{2}{5} \left(\frac{\gamma}{A(\tau)} \right)^3 \frac{H^7}{L^{10}} \quad (6.7)$$

l'équation (6.4) prend la forme

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} = -\nabla \cdot \left(\tilde{e}^5 \|\nabla \tilde{p}\|^2 \nabla \tilde{p} \right) \quad (6.8)$$

et l'ensemble de la rhéologie du film de peinture est prise en compte dans le paramètre adimensionné θ . Les paramètres qui interviennent dans la relation (6.7) sont :

- La tension de surface $\gamma = 0,033N/m$, supposée constante tout au long du dépôt de peinture.
- L'échelle des altitude $H = 10^{-6}m$
- Le pas d'échantillonnage $L = 2,75.10^{-5}m$
- Le paramètre de la loi de viscosité A

Le variable temporelle adimensionnée θ est donc liée au temps réel t par la relation :

$$\theta(t) = \frac{2}{5} \frac{H^7}{L^{10}} \int_0^t \left(\frac{\gamma}{A(\tau)} \right)^3 d\tau = 5,82.10^{-2} Pa^3 \left\langle \frac{1}{A^3} \right\rangle t \quad (6.9)$$

où $\langle 1/A^3 \rangle$ désigne la valeur moyenne de la quantité $1/A^3$. Selon les données de rhéologie de J.P.Nauzin, la valeur minimale du paramètre A est environ $10 Pa.s^{1/3}$. Par conséquent, la valeur maximale θ_{max} que peut atteindre le paramètre adimensionné θ est

$$\theta_{max} = 0,035$$

6.3.2 Réticulation du film

Au delà de la question de la rhéologie de la peinture, il est important de prendre en compte les phénomènes qui se produisent après l'écoulement de la cataphorèse, et plus précisément le phénomène de réticulation de la peinture. Dès lors que la température de cuisson atteint la température de réticulation de la cataphorèse, des réactions chimiques sont activées qui conduisent à la formation de liaisons chimiques entre les polymères qui constituent la peinture. Ce phénomène s'accompagne d'une contraction de l'ensemble de la couche de peinture d'environ 20% de son volume. La contraction de la peinture sur le substrat provoque la résurgence des motifs de petite échelle présents à la surface du substrat rugueux.

6.3.3 Simulation de l'écoulement du film de cataphorèse

Des simulations du modèle ont été réalisées sur la base de données expérimentales présentée dans la section précédente. Ces simulations ont été conduites en utilisant la version adimensionnée de l'équation (6.8) du modèle non-newtonien. L'équation d'évolution (6.8) de la topographie est résolue à l'aide de la méthode pseudo-spectrale décrite dans l'annexe A. Les simulations sont stoppées lorsque $\theta = \theta_{max}$, le phénomène de réticulation du film est ensuite simulé en contractant l'épaisseur du film.

Les figures 6.2 et 6.3 présentent les résultats de simulation du modèle non-newtonien sur un échantillon de chacun des types de rugosité. On peut constater sur ces figures que le modèle non-newtonien n'est pas capable d'atténuer suffisamment vite les motifs dont la taille avoisine $0.5mm$. Il semble ainsi que la rhéologie non-newtonienne de la cataphorèse ne permet pas d'expliquer la dynamique du nivellement des motifs présents à la surface de la tôle.

Il est également intéressant de considérer les courbes de Mq obtenues à partir des différentes topographies. Les figures (6.4) et (6.5) présentent les courbes de Mq des topographies précédentes. On peut d'emblée faire un certain nombre de commentaires sur ces courbes.

- On remarque en premier lieu que les motifs correspondant aux échelles supérieures à $0.5mm$ ne sont pas atténués au cours du nivellement du film. Ces échelles sont séparées par un ordre de grandeur de l'épaisseur caractéristique du film, et leur atténuation supposerait un transport de masse de peinture considérable. Il est donc logique de constater que la dynamique de l'écoulement ne permet pas d'atténuer les motifs présents à ces échelles.
- On peut également remarquer qu'aux grandes longueurs d'onde, les courbes de Mq des topographies initiales et de la cataphorèse mesurée, même si les différences sont faibles, ne coïncident pas. Nous avons fait l'hypothèse qu'immédiatement après la phase d'immersion, la topographie de la couche de peinture est identique à celle du substrat sous-jacent. Cette hypothèse ne peut qu'être approchée. Au cours de la mesure réalisée avec le microscope interférométrique, chaque image contient de plus une forme spécifique. Un algorithme d'extraction de forme a été appliqué aux échantillons expérimentaux. Néanmoins, cet algorithme ne peut prétendre enlever totalement la forme de l'échantillon, étant donné le nombre de paramètres qui influent sur la forme de l'échantillon au cours de la mesure. Ce problème d'extraction de forme explique en partie les différences observées au niveau des courbes de Mq aux grandes échelles de l'échantillon. Il ne saurait néanmoins expliquer à lui seul la différence entre les courbes, et il convient de garder à l'esprit que l'hypothèse faite sur les conditions initiales ne permet d'obtenir qu'une approximation de la topographie de la cataphorèse à l'issue de la phase d'immersion.
- Il apparaît sur les différentes courbes que les motifs qui correspondent aux échelles entre 0.1 et $0.5 mm$ ne sont pas assez atténués par la simulation réalisée à partir du modèle non-newtonien. En d'autres termes, la dynamique associée à ces échelles dans le cadre du modèle non-newtonien avec les paramètres rhéologiques mesurés par J.P.Nauzin pour la peinture semble trop faible pour pouvoir expliquer le phénomène de nivellement du film.

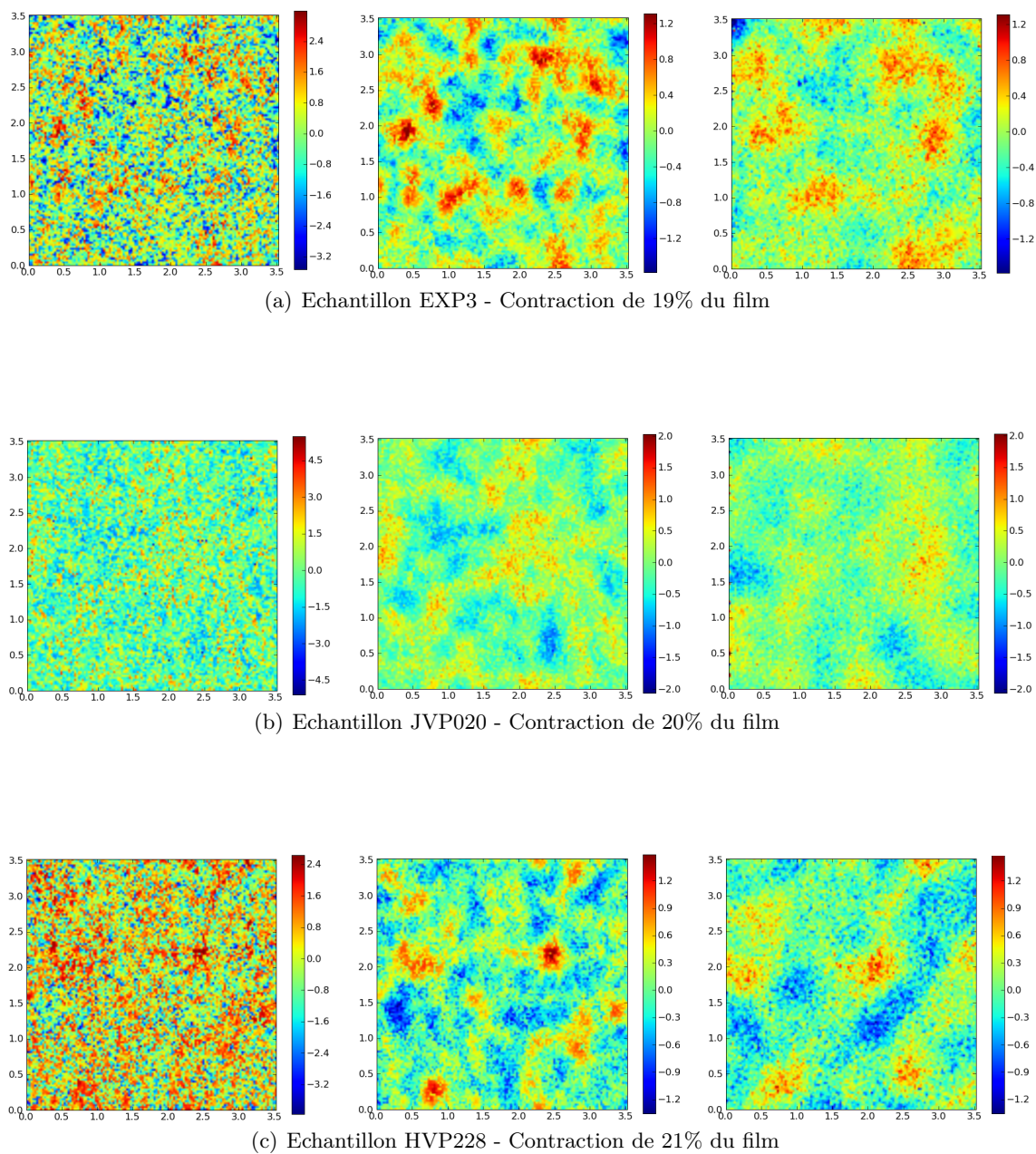


FIGURE 6.2 – Simulation avec le modèle non-newtonien de l'évolution des topographies de la cataphorèse des échantillons de type EDT (rugosité aléatoire). La figure de gauche représente la topographie du substrat, celle du centre la topographie simulée de la couche de cataphorèse, et celle de droite la topographie mesurée de la cataphorèse. Les dimensions de la surface sont graduées en mm . Les altitudes sont représentées à l'aide d'une échelle colorimétrique, et graduées en μm .

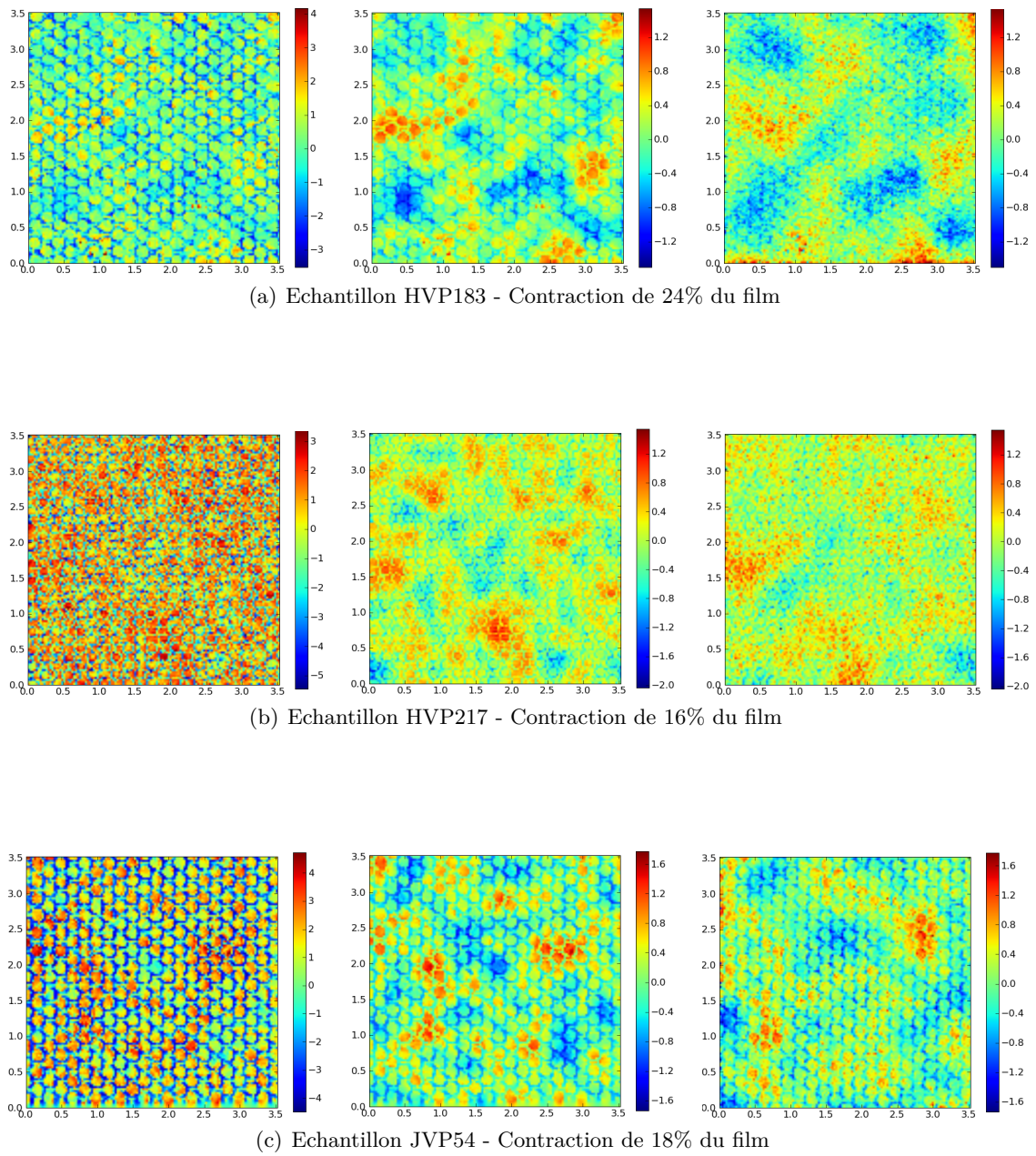
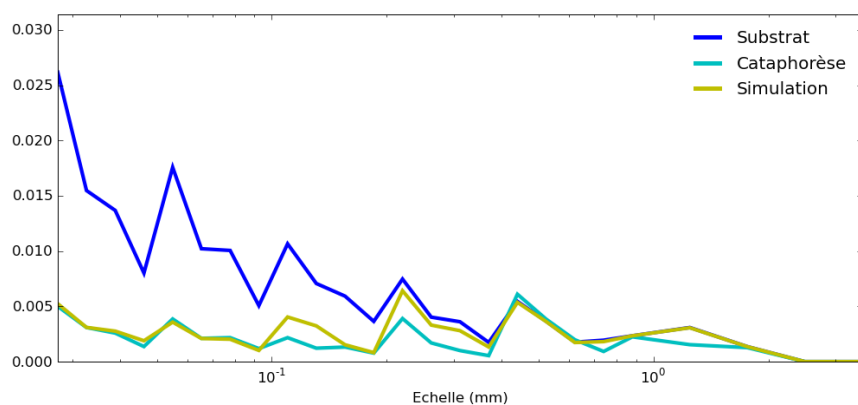
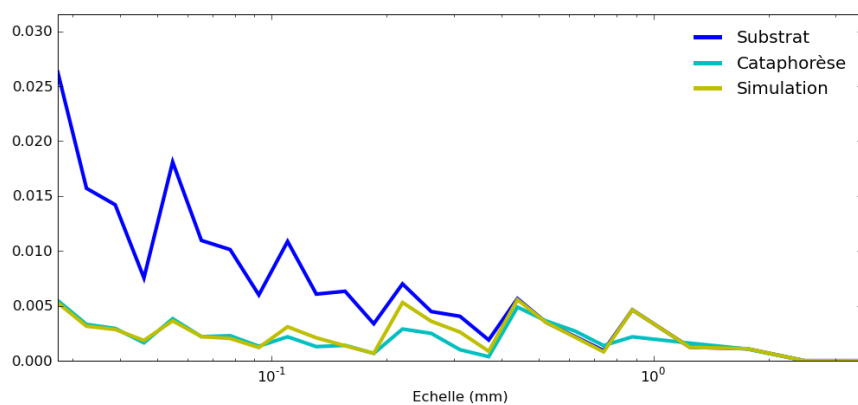
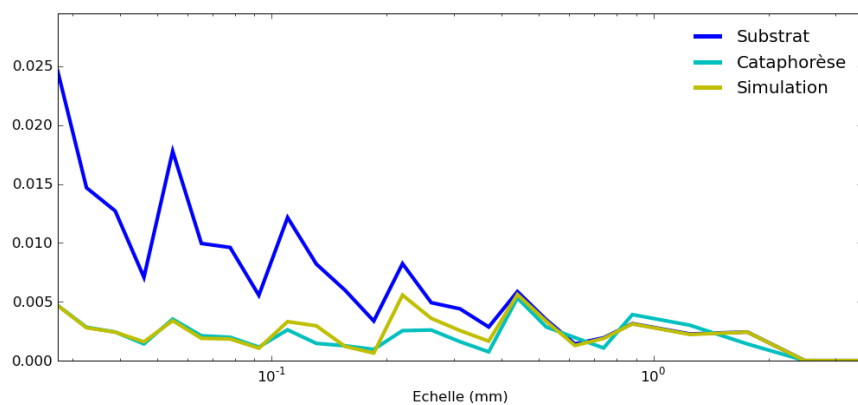
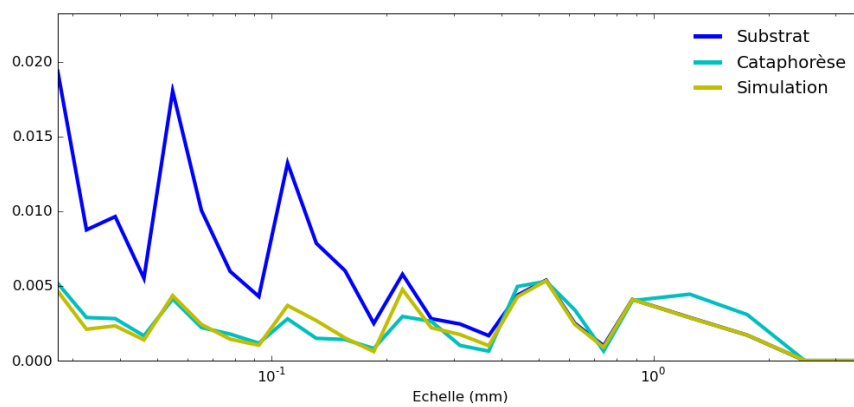
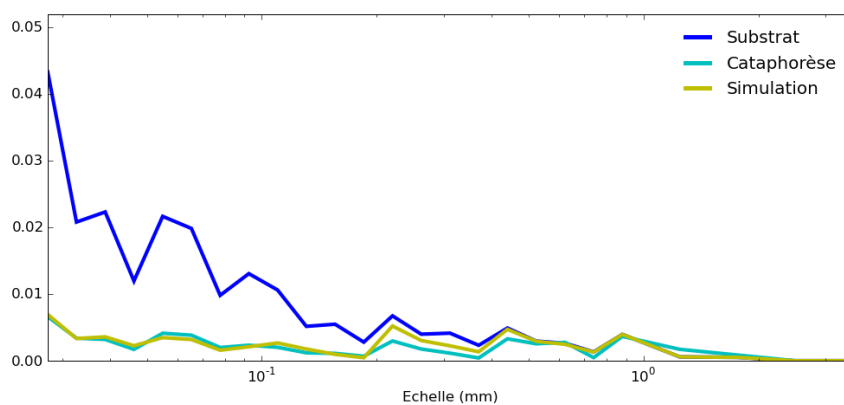


FIGURE 6.3 – Simulation avec le modèle non-newtonien de l'évolution des topographies de la cataphorèse des échantillons de type EBT (rugosité périodique).

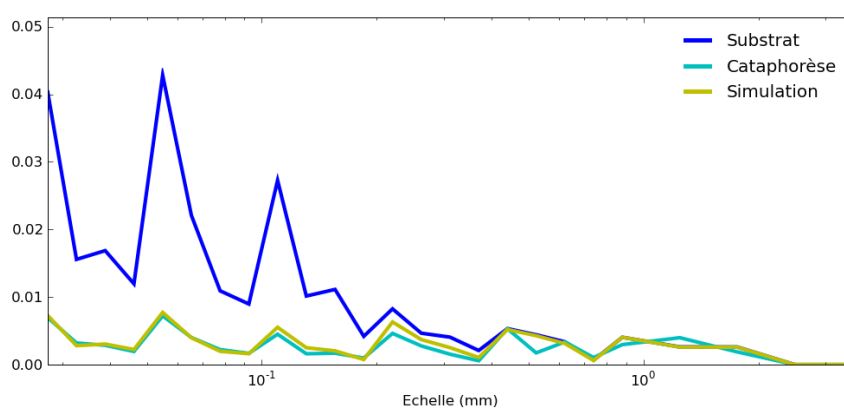
FIGURE 6.4 – Evolution des courbes de Mq des échantillons du type EDT (rugosité aléatoire)



(a) Echantillon HVP183



(b) Echantillon HVP217



(c) Echantillon JVP54

FIGURE 6.5 – Evolution des courbes de Mq des échantillons du type EBT (rugosité périodique)

- Enfin, on peut remarquer sur les courbes de Mq que la courbe expérimentale de la cataphorèse se déduit de la courbe expérimentale du substrat par simple affinité aux plus petites échelles considérées. C'est donc bien le phénomène de réticulation qui provoque la résurgence d'une rugosité à ces échelles sur la couche de cataphorèse. En effet, un nivellement provoqué par l'écoulement résultant de l'action de la tension de surface ne permettrait pas d'expliquer que les courbes soient affines. De fait, pour un tel nivellement, les motifs présents à la surface de la cataphorèse seraient d'autant plus atténués que leur échelle caractéristique est petite. On en déduit que l'effet de la tension de surface permet d'éliminer entièrement la rugosité de la surface sur une large plage d'échelles, et que c'est seulement lorsque le film réticule en fin de cuisson que la rugosité réapparaît.

Même si les différences entre les courbes de Mq restent faibles, le principal résultat des simulations menées sur les données expérimentales de cataphorèse dans cette section est que le modèle non-newtonien ne permet pas d'expliquer la dynamique de nivellement du film. Il semble bien que pour de faibles valeurs du taux de déformation, la viscosité sature à une valeur η_c , et que le film recouvre un comportement newtonien. La question se pose alors de savoir si cette transition a lieu à des taux de déformation dont l'ordre de grandeur est le même que celui du taux de cisaillement au sein du film de peinture, ou si au contraire la transition se produit à des taux de déformation plus élevés, auquel cas un modèle purement newtonien devrait permettre d'expliquer la dynamique des phénomènes d'écoulement de peinture au sein du film.

6.4 Modèle newtonien

Nous nous intéressons dans cette section aux simulations réalisées à partir du modèle newtonien.

6.4.1 Equation du modèle

L'équation d'évolution de la topographie du film pour un fluide newtonien déposé sur un substrat horizontal est donnée par :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\gamma}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^3 \left(\frac{\partial h}{\partial x^3} + \frac{\partial h}{\partial y \partial x^2} \right) \right) - \frac{\gamma}{3\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left(e^3 \left(\frac{\partial h}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial h}{\partial y^3} \right) \right) \quad (6.10)$$

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il était possible de linéariser l'équation (6.10), en supposant l'épaisseur du film de peinture constante en première approximation.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\gamma}{3\eta} e_0^3 \left(\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 h}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 h}{\partial y^4} \right) \quad (6.11)$$

Comme pour le modèle non-newtonien, il est intéressant de travailler avec une version adimensionnée de l'équation 6.10, qui permette de ne considérer qu'un seul paramètre de

rhéologie caractéristique de l'évolution. Nous effectuerons donc les changements de variable donnés par $X = x/L$, $Y = y/L$, et $\tilde{h} = h/H$ où L désigne le pas d'échantillonnage de la topographie mesurée et H l'échelle d'altitude. Effectuons enfin le changement de variable donné par $t \rightarrow \theta(t)$. En posant

$$\theta'(\tau) = \frac{\gamma e_0^3}{3\eta L^4} \quad (6.12)$$

l'équation (6.11) prend la forme

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} = - \left(\frac{\partial^4 \tilde{h}}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 \tilde{h}}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 \tilde{h}}{\partial Y^4} \right) \quad (6.13)$$

et l'ensemble de la rhéologie du film de peinture est prise en compte dans le paramètre adimensionné θ . Les paramètres qui interviennent dans la relation (6.12) sont :

- La tension de surface $\gamma = 0,033N/m$, supposée constante tout au long du dépôt de peinture.
- L'épaisseur du film $e_0 = 20,0.10^{-6}m$
- Le pas d'échantillonnage $L = 2,75.10^{-5}m$
- La viscosité $\eta [Pa.s]$

La variable temporelle adimensionnée θ est donc lié au temps réel t par la relation :

$$\theta(t) = \frac{\gamma e_0^3}{3L^4} \int_0^t \frac{d\tau}{\eta(\tau)} = 1,54.10^2 Pa \left\langle \frac{1}{\eta} \right\rangle t \quad (6.14)$$

Nous avons vu dans l'introduction de ce chapitre que la rhéologie de la cataphorèse dépend de la température selon une loi d'Arrhénius, dont les différents paramètres se déduisent de la viscosité initiale et de la viscosité à la température qui précède la réticulation du film de peinture. D'après les mesures de J.P.Nauzin :

$$\eta(T = 298K) = 10^4 Pa.s \quad \eta(T = 438K) = 290 Pa.s$$

A partir de ces données, l'intégrale de 6.14 peut se calculer numériquement via la méthode des trapèzes.

$$\int_{t=0}^{t=600s} \frac{d\tau}{\eta(\tau)} = 0,68 Pa^{-1}$$

On en déduit que $\theta(600s) = 104$. A la fin de la cuisson, le film réticule et cesse complètement d'évoluer. Ce phénomène provoque un amincissement du film de peinture d'environ 20%, et provoque la résurgence des motifs de petite échelle du substrat sous-jacent.

6.4.2 Simulation de l'écoulement du film de cataphorèse

Des simulations du modèle ont été réalisées sur la base de données expérimentales présentée dans la seconde section du chapitre. Ces simulations ont été conduites en utilisant la version adimensionnée de l'équation (6.13) du modèle newtonien. Cette équation peut être résolue analytiquement, comme on l'a vu dans le chapitre précédent. Un certain nombre de remarques peuvent être faites sur les résultats des simulations :

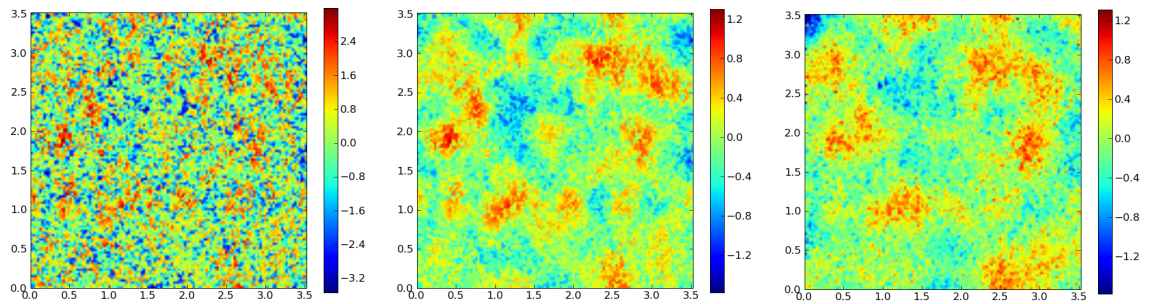
- Les questions du recalage des topographies [42] et de l'extraction de forme évoquée précédemment font qu'il est difficile de comparer les résultats des simulations et les données expérimentales directement sur les surfaces complètes. Les décalages qui apparaissent entre la forme des échantillons introduisent ainsi des différences conséquentes sur les grandes échelles des topographies. On constate néanmoins au vu des figures (6.6) et (6.7) que le modèle newtonien permet bien de reproduire les motifs caractéristiques de la cataphorèse au cours de la simulation. Les motifs observés sur la surface simulée sont ainsi très similaires à ceux qu'on peut observer sur la topographie expérimentale de la cataphorèse, comme en témoignent les courbes de Mq représentées sur les figures (6.8) et (6.9).
- On remarque également pour le modèle newtonien que les motifs correspondant aux échelles supérieures à $0.5mm$ ne sont pas atténués au cours du nivellement du film, comme c'était déjà le cas dans les simulations réalisées avec le modèle d'écoulement non-newtonien. Là encore, ces échelles sont séparées par un ordre de grandeur de l'épaisseur caractéristique du film, et leur atténuation supposerait un transport de masse de peinture considérable.

Les simulations menées sur les différents échantillons montrent donc que pour les valeurs de viscosité déterminées dans les travaux de J.P.Nauzin, le modèle newtonien semble être à même de reproduire les caractéristiques de la rugosité de la cataphorèse.

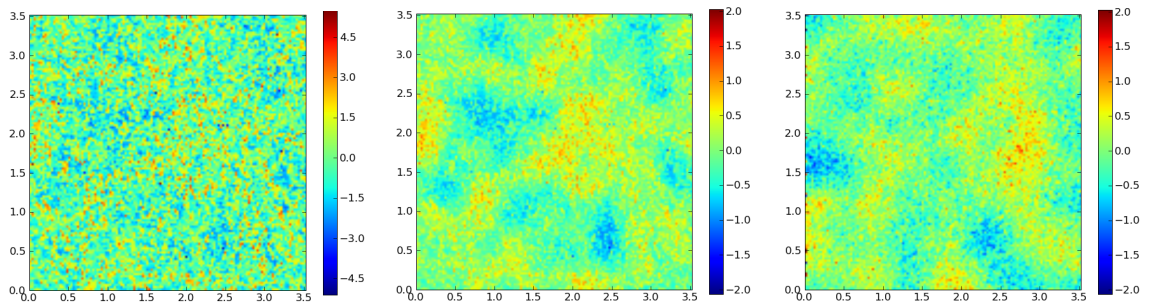
6.5 Modèle de cross-over

Il est apparu dans la quatrième section de ce chapitre que le modèle d'écoulement newtonien présenté dans le chapitre précédent du manuscrit permet de reproduire les motifs caractéristiques du nivellement de la couche de cataphorèse au cours de la cuisson de la peinture avec les valeurs de viscosité déterminées dans les études menées par J.P.Nauzin.

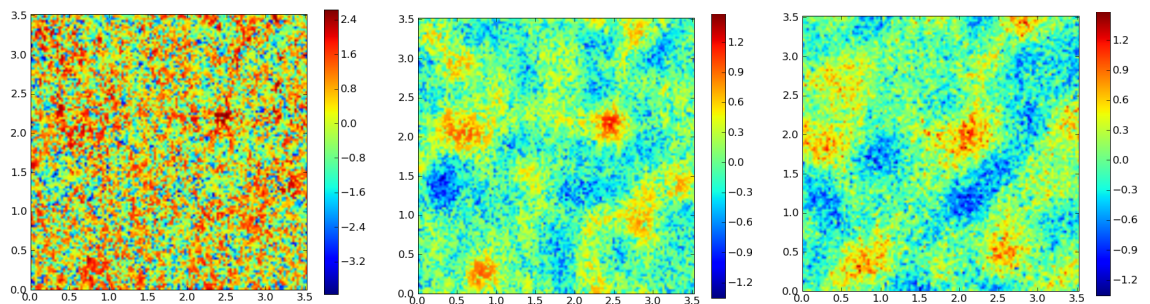
Pour autant, au vu des données expérimentales disponibles, les résultats de simulation ne permettent pas de valider un modèle de rhéologie purement newtonien pour la peinture aux taux de cisaillement rencontrés au sein du film de peinture. En effet, la base de données expérimentale ne permet de considérer la surface qu'à deux instants : l'instant initial, où on a fait l'hypothèse que la topographie de la couche de cataphorèse se déduit de celle du substrat sous-jacent par une simple translation, et l'instant où la couche de peinture cesse d'évoluer, et où la topographie est mesurée avec le microscope interférométrique. Il est donc impossible de confronter un modèle à la dynamique du nivellement à chaque instant, et il reste par conséquent intéressant de présenter les simulations réalisées avec le modèle de cross-over présenté dans le chapitre précédent.



(a) Echantillon EXP3 - Contraction de 19% du film



(b) Echantillon JVP20 - Contraction de 20% du film



(c) Echantillon HVP228 - Contraction de 21% du film

FIGURE 6.6 – Simulation avec le modèle newtonien de l'évolution des topographies de la cataphorèse des échantillons de type EDT (rugosité aléatoire). La figure de gauche représente la topographie du substrat, celle du centre la topographie simulée de la couche de cataphorèse, et celle de droite la topographie mesurée de la cataphorèse.

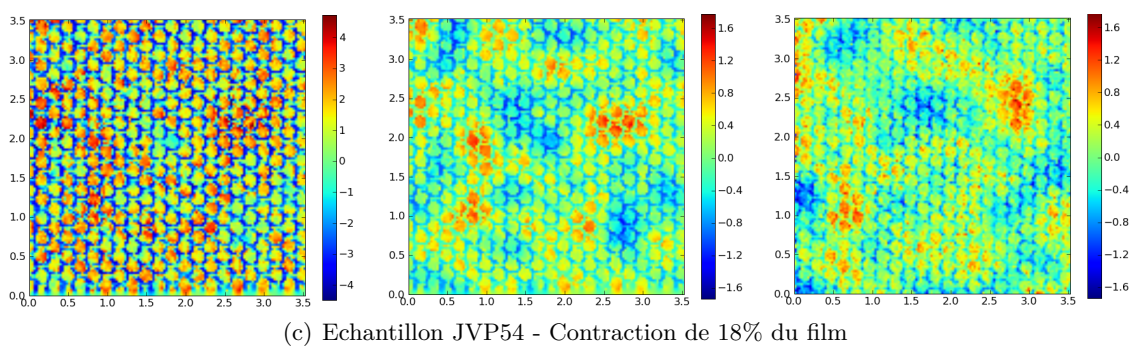
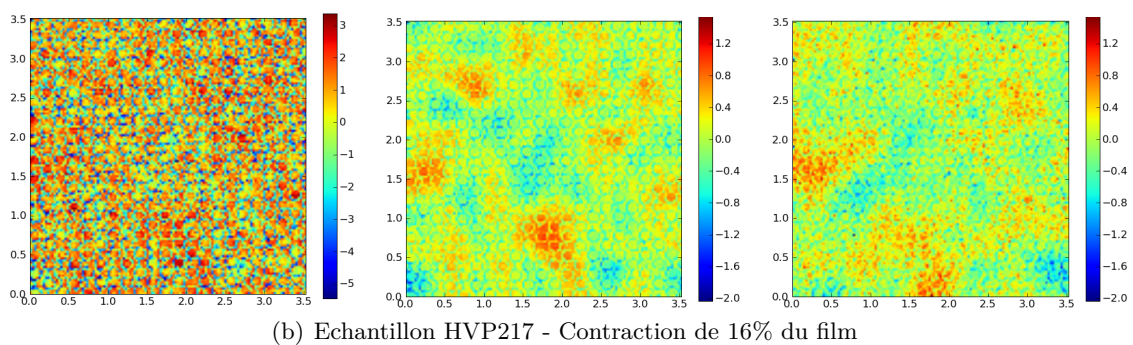
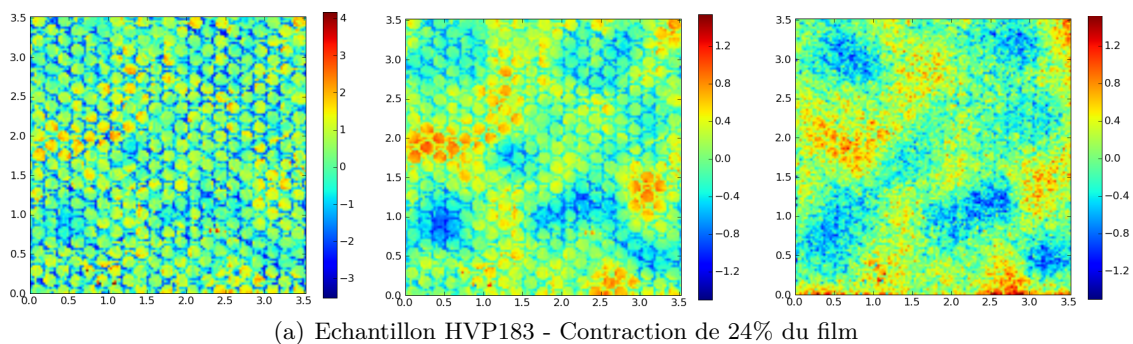
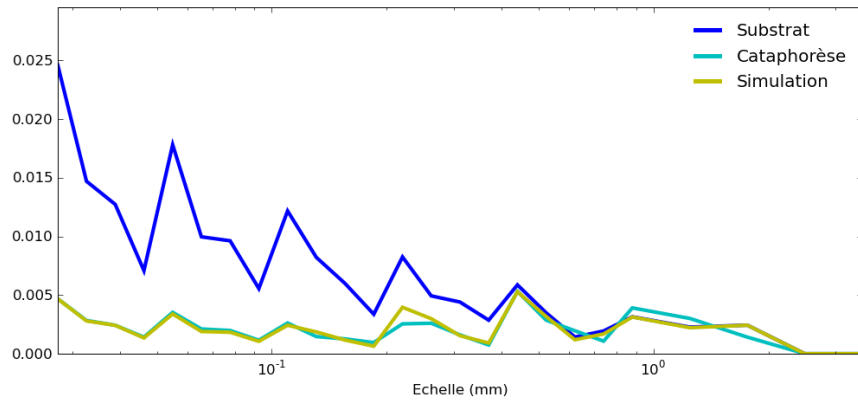
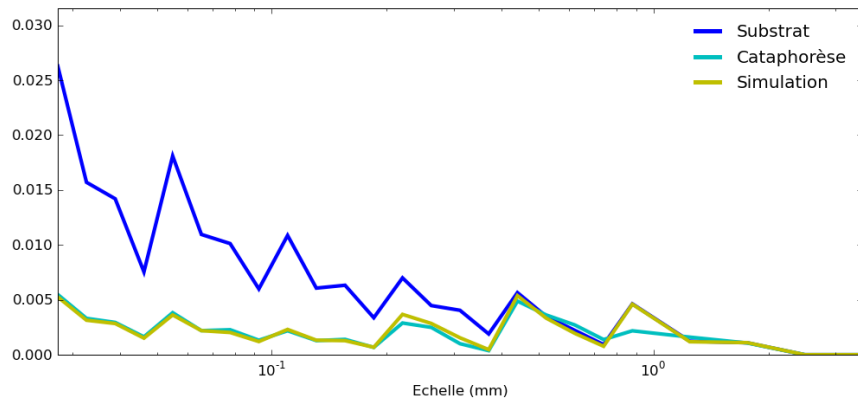


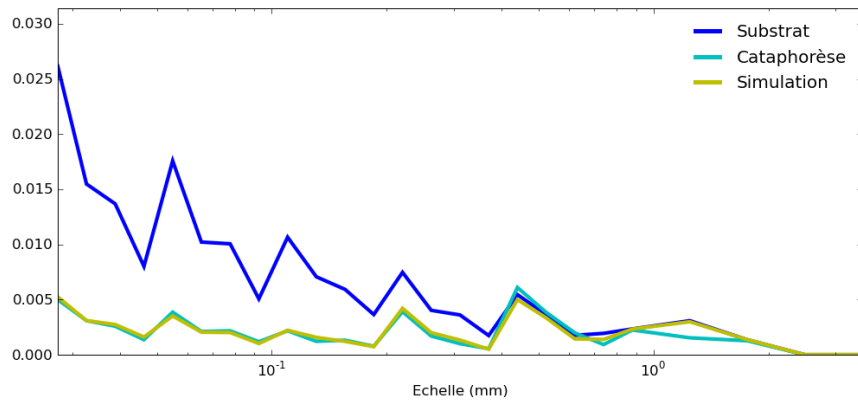
FIGURE 6.7 – Simulation avec le modèle newtonien de l'évolution des topographies de la cathorèse des échantillons de type EBT (rugosité périodique).



(a) Echantillon EXP3

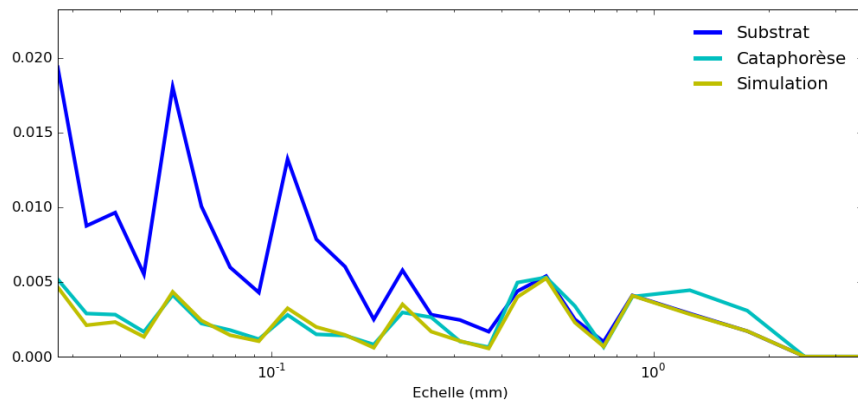


(b) Echantillon JVP020

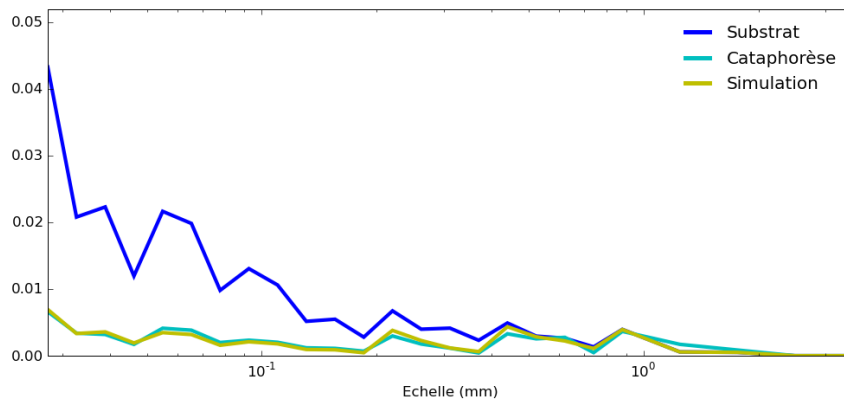


(c) Echantillon HVP228

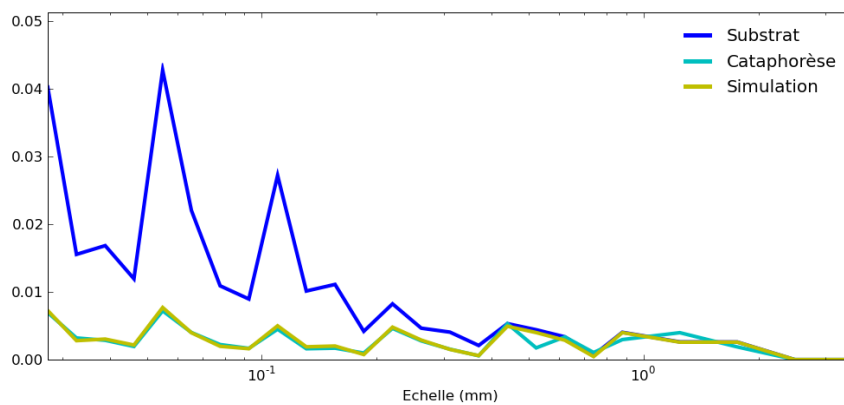
FIGURE 6.8 – Evolution des courbes de Mq des échantillons du type EDT (rugosité aléatoire)



(a) Echantillon HVP183



(b) Echantillon HVP217



(c) Echantillon JVP54

FIGURE 6.9 – Evolution des courbes de Mq des échantillons du type EBT (rugosité périodique)

6.5.1 Equation du modèle

Dans le modèle de cross-over, l'expression du débit est donnée par

$$\mathbf{q} = \alpha^3 \mathbf{q}_n + (1 - \alpha^5) \mathbf{q}_{n.n} \quad (6.15)$$

où \mathbf{q}_n et $\mathbf{q}_{n.n}$ désignent respectivement les expressions de débits obtenues pour des rhéologies newtoniennes et non-newtoniennes. Les paramètres de rhéologie qui interviennent dans les expressions des débits sont :

- Un paramètre non newtonien A , qui lie la valeur de la viscosité à celle du taux de déformation
- La valeur de saturation de la viscosité η_c du fluide
- La tension de surface γ

Nous voyons également intervenir un paramètre, α , qui représente la proportion locale de film qui est en régime newtonien. Ce paramètre dépend d'un unique paramètre de rhéologie, à savoir le taux de contrainte critique σ_c qui marque la transition entre le régime d'écoulement newtonien et le régime d'écoulement non newtonien au sein du film. Dans le chapitre précédent, nous avons montré que les quantité A , σ_c et η_c étaient liées par la relation

$$\left(\frac{\sigma_c}{A}\right)^{1/n} = \frac{\sigma_c}{2\eta_c} \quad (6.16)$$

Afin de prendre en compte la dépendance en température des trois paramètres A , σ_c et η_c , nous supposons à l'instar de J.P.Nauzin que ces derniers obéissent à une loi d'Arrhénius :

$$\begin{cases} \eta_c = \lambda_1 \exp\left(\frac{\mu_1}{T}\right) \\ A = \lambda_2 \exp\left(\frac{\mu_2}{T}\right) \\ \sigma_c = \lambda_3 \exp\left(\frac{\mu_3}{T}\right) \end{cases} \quad (6.17)$$

En injectant ces expressions dans la relation (6.16), on vérifie que

$$\begin{cases} \lambda_3 = \sqrt{\frac{\lambda_2^3}{2\lambda_1}} \\ \mu_3 = \frac{3\mu_2 - \mu_1}{2} \end{cases} \quad (6.18)$$

Les constantes λ_1 et μ_1 dépendent des valeurs η_0 de la viscosité à la température ambiante $T_0 = 298,15K$ et η_r à la température de réticulation $T_r = 433,15K$.

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{T_r T_0}{T_r - T_0} \log\left(\frac{\eta_0}{\eta_r}\right) \\ \lambda_1 = \eta_r \left(\frac{\eta_0}{\eta_r}\right)^{-\frac{T_0}{T_r - T_0}} \end{cases} \quad (6.19)$$

De même, les constantes λ_2 et μ_2 dépendent des valeurs A_0 et A_r du paramètre caractéristique de la rhéologie non-newtonienne aux températures $T_0 = 298,15K$ et $T_r = 433,15K$.

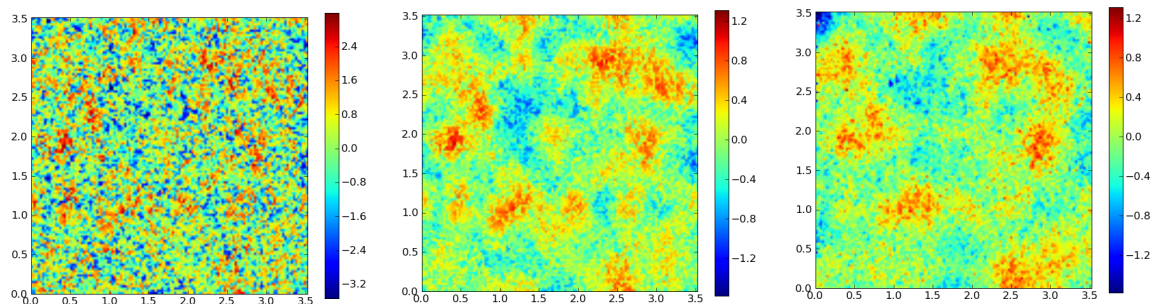
6.5.2 Simulation de l'écoulement du film de cataphorèse

Les simulations présentés sur les figures ont été réalisées avec le jeu de paramètres décrit dans le tableau (6.1).

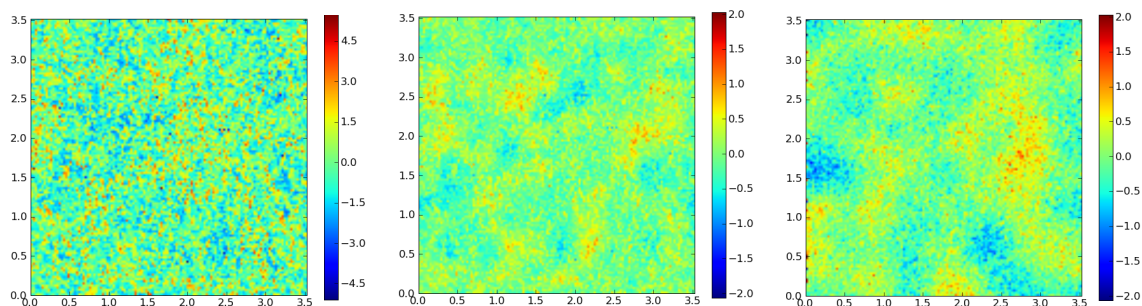
| Paramètre | Symbole | Valeur | Unité |
|---|----------|---------------------|---------------------|
| Tension de surface | γ | $3,0 \cdot 10^{-2}$ | N/m |
| Viscosité à T=25°C en régime newtonien | η_0 | 10000 | Pa.s |
| Viscosité à T=165°C en régime newtonien | η_r | 290 | Pa.s |
| Viscosité à T=25°C en régime non-newtonien | A_0 | 460 | Pa.s ^{1/3} |
| Viscosité à T=165°C en régime non-newtonien | A_r | 13,33 | Pa.s ^{1/3} |

TABLE 6.1 – Paramètres de simulation

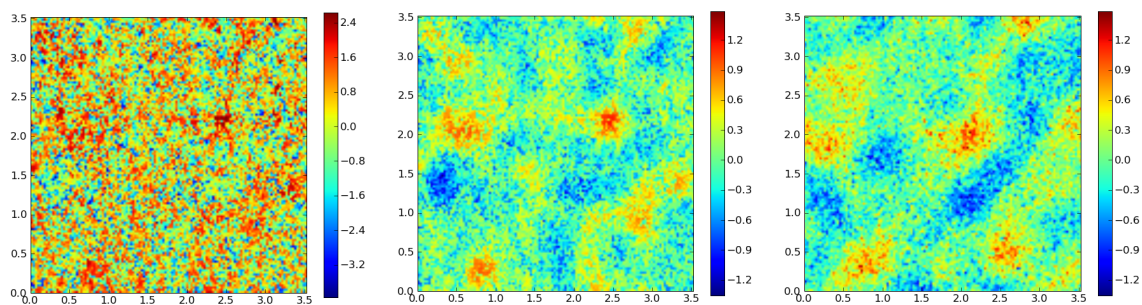
On constate sur les figures (6.10) et (6.11) que le modèle de cross-over permet comme le modèle newtonien de reproduire les motifs caractéristiques de la cataphorèse au cours de la simulation. Les échelles des motifs observés sur la surface simulée sont ainsi très similaires à celles qu'on peut observer sur la topographie expérimentale de la cataphorèse, comme en témoignent les courbes de Mq représentées sur les figures (6.12) et (6.13). Comme le modèle newtonien, le modèle de cross-over, avec les paramètres de rhéologie spécifiés dans le tableau (6.1), semble à même de reproduire avec précision la dynamique de l'écoulement.



(a) Echantillon EXP3 - Contraction de 19% du film



(b) Echantillon JVP020 - Contraction de 20% du film



(c) Echantillon HVP228 - Contraction de 21% du film

FIGURE 6.10 – Simulation avec le modèle de cross-overde l'évolution des topographies de la cataphorèse des échantillons de type EDT (rugosité aléatoire). La figure de gauche représente la topographie du substrat, celle du centre la topographie simulée de la couche de cataphorèse, et celle de droite la topographie mesurée de la cataphorèse.

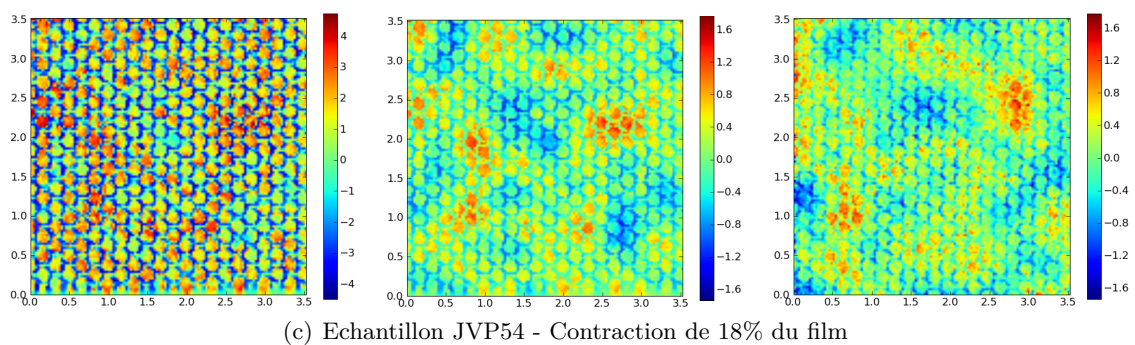
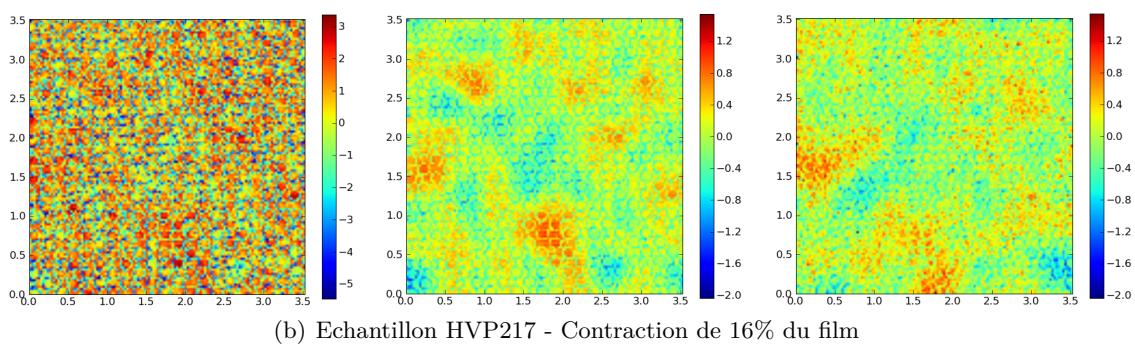
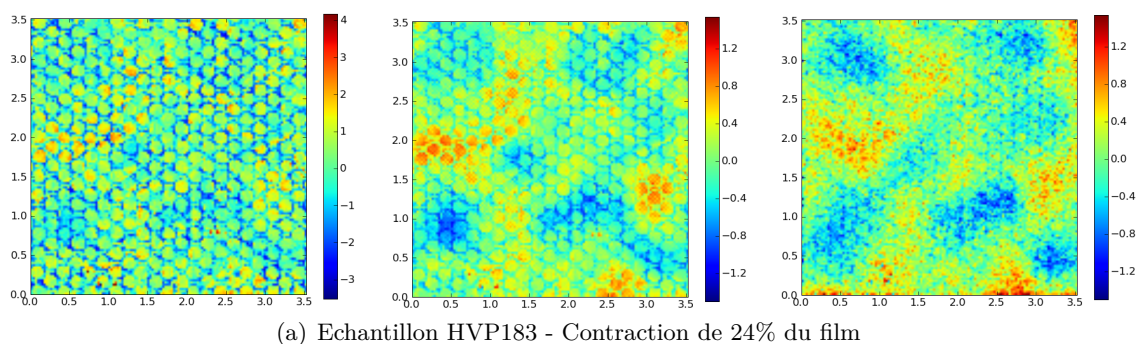


FIGURE 6.11 – Simulation avec le modèle de cross-over de l'évolution des topographies de la cataphorèse des échantillons de type EBT (rugosité périodique).

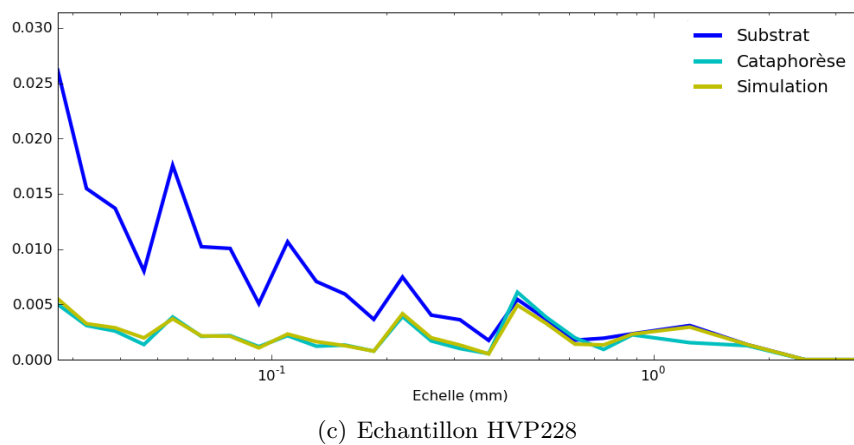
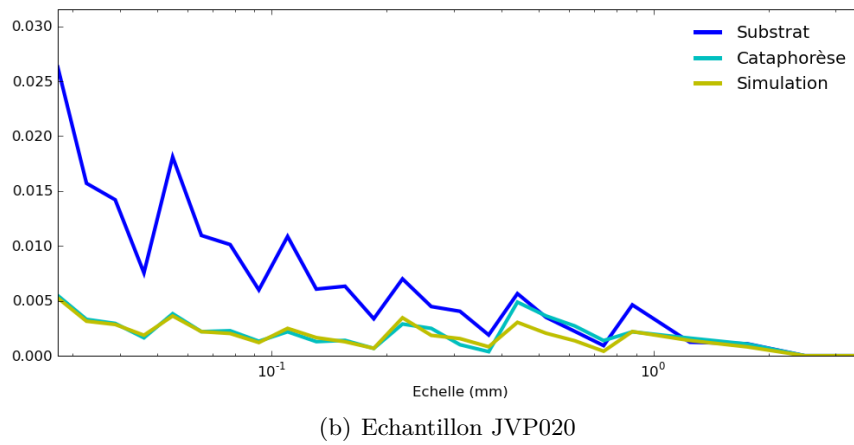
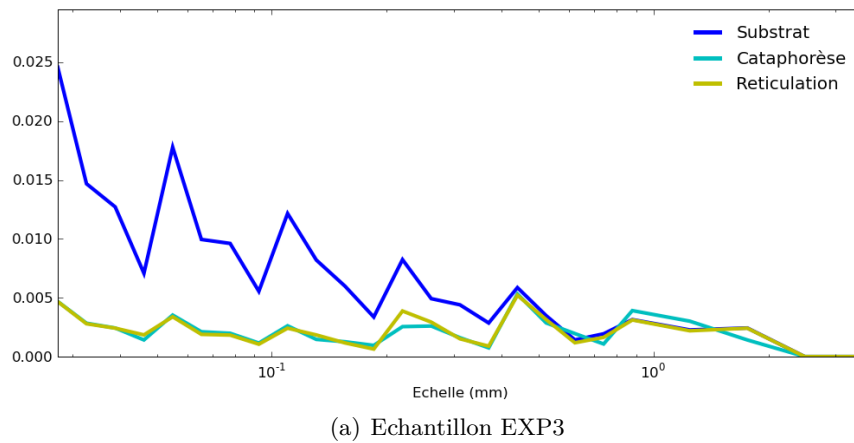
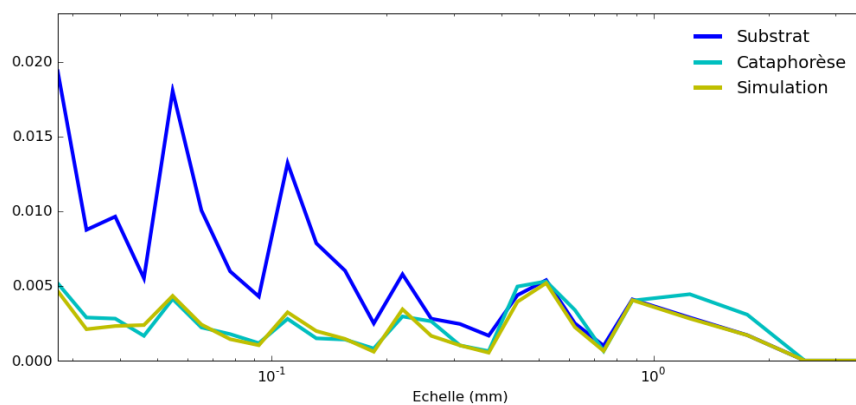
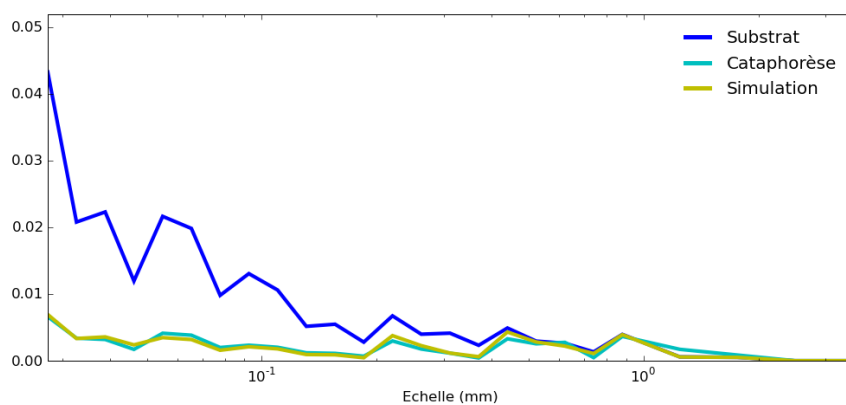


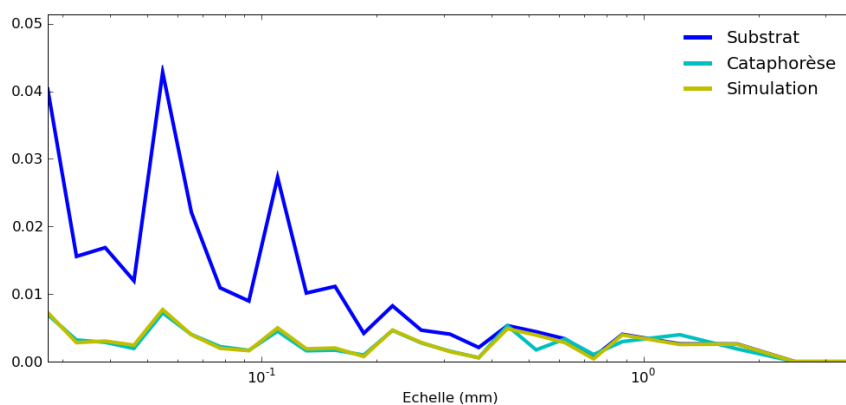
FIGURE 6.12 – Evolution des courbes de Mq des échantillons du type EDT (rugosité aléatoire)



(a) Echantillon HVP183



(b) Echantillon HVP217



(c) Echantillon JVP54

FIGURE 6.13 – Evolution des courbes de Mq des échantillons du type EBT (rugosité périodique)

6.6 Conclusion

La rhéologie de la cataphorèse influe fortement sur la dynamique du nivellement de la couche de cataphorèse. Plusieurs modèles de rhéologie ont été confrontés dans ce chapitre aux données expérimentales issues de la thèse de Th.Nion [42]. Il apparaît dans la quatrième section du chapitre que le modèle d'écoulement newtonien permet de reproduire les motifs caractéristiques du nivellement de la couche de cataphorèse au cours de la cuisson de la peinture avec les valeurs de viscosité déterminées dans les études menées par J.P.Nauzin. Nous avons par ailleurs montré dans la cinquième section que le modèle de cross-over permet également de reproduire les échelles des motifs caractéristiques de la cataphorèse.

Ces résultats de simulation ne sont nullement contradictoires : au cours de la cuisson, l'écoulement provoqué par la tension de surface permet d'atténuer presque complètement les motifs de petite échelle présents à la surface de la cataphorèse, que la rhéologie de la peinture soit newtonienne ou celle plus complexe du modèle de cross-over. La différence entre les deux modèles réside dans la dynamique de l'atténuation. La figure 6.14 présente les courbes de Mq obtenues avec les deux modèles de simulation, pour un échantillon de type EXP3 (tôle de type EDT) à $t = 162s$. On constate bien que les motifs de petite échelle, soumis à des contraintes plus fortes, s'atténuent d'autant plus vite que la rhéologie de la peinture est non-newtonienne. Afin de trancher entre l'un des deux modèles, il conviendrait donc de disposer de topographies intermédiaires, qui permettent de quantifier échelle par échelle la dynamique du nivellement.

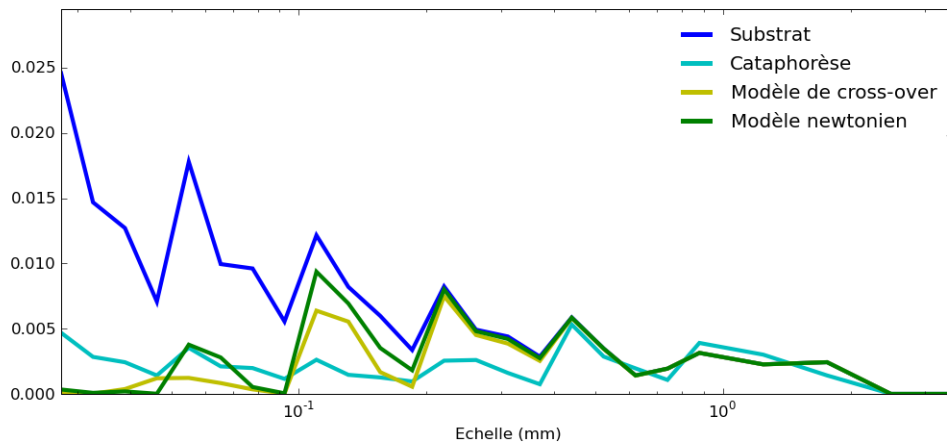


FIGURE 6.14 – Courbes de Mq obtenues avec les modèles de simulation newtonien (vert) et de cross-over (jaune), pour un échantillon de type EXP3 (tôle de type EDT) à $t = 162s$. Les courbes de Mq des topographies mesurées du substrat (bleu) et de la cataphorèse (cyan) sont également représentées.

Si la base de données expérimentales ne permet pas de conclure complètement sur la question de la rhéologie de la cataphorèse, les résultats de simulation permettent tout de même d'établir un certain nombre de conclusions sur le nivellement de la couche de cataphorèse.

- La cataphorèse étant électrodéposée sur le substrat rugueux, sa topographie va fortement dépendre des motifs initialement présents sur la tôle sous-jacente.
- Les simulations réalisées à partir du modèle d'écoulement non-newtonien dans la troisième section montrent que la viscosité de la cataphorèse sature nécessairement pour de faibles taux de cisaillement, et que la cataphorèse recouvre donc un comportement newtonien.
- Les simulations ont également mis en évidence l'importance de la réticulation du film de cataphorèse, qui fait ressortir les motifs de petite échelle présents à la surface du substrat dans la topographie de la cataphorèse.

Enfin, le modèle newtonien et le modèle de cross-over fournissent deux outils susceptibles de simuler avec précision la topographie finale des couches de cataphorèse connaissant la topographie de la tôle d'acier sous-jacente.

Chapitre 7

Nivellement des couches de sealer et de laque

Le dépôt des couches de sealer et de laque est effectué à la suite du dépôt de la couche de cataphorèse sur la caisse de l'automobile. Ces deux couches visent essentiellement à assurer un aspect esthétique agréable au véhicule. Leur dépôt est réalisé avec un pistolet à peinture, et contrairement au cas de la cataphorèse, la topographie de la surface initiale de la couche ne va donc que peu dépendre du substrat sous-jacent. En effet, la technique de peinture au pistolet ne permet pas d'assurer une épaisseur de couche constante localement.

La laque et le sealer possèdent des rhéologies très similaires qui diffèrent de celle de la cataphorèse. Une des difficultés majeures vis à vis de la modélisation des phénomènes physiques qui se produisent lors du nivellement est la validation expérimentale des modèles. Ainsi, peu d'articles ont été publiés concernant la rhéologie de l'écoulement des films minces pour les peintures considérées. Dans l'article [46], W.S. Overdiep propose un certain nombre de paramètres de rhéologie, qui correspondent à un modèle de rhéologie newtonienne. S. Kojima *et al.* [27] [28] [29] présentent de même dans trois articles publiés en 1993 et 1995 le résultat d'expériences visant à déterminer les paramètres de rhéologie des peintures. Nous nous proposons dans ce chapitre d'aborder la problématique de la rhéologie de la peinture automobile d'un point de vue expérimental à partir de mesures à intervalles réguliers de la topographie de la couche de peinture.

Avec des techniques classiques de microscopie, mesurer l'évolution de la topographie d'un film au cours du cycle de mise en peinture s'avère extrêmement compliqué du fait de la faible dynamique des microscopes ou encore de la difficulté à mettre rapidement les outils au point. Un analyseur de front d'onde développé par la société PhasicsTM [47] a cependant permis de réaliser un suivi précis de l'évolution de la topographie des couches de sealer et de laque au cours du procédé de cuisson.

L'analyseur de front d'onde étant à même de mesurer les échantillons peints avec une fréquence élevée, la comparaison de deux surfaces consécutives permet d'accéder à une approximation de bonne qualité de la dérivée temporelle de la topographie h de la surface. A partir de cette dérivée temporelle, il est possible en résolvant un problème inverse de remonter à la valeur des débits locaux dans les deux directions de la topographie. En particulier, en utilisant les méthodes de caractérisation des surfaces présentées dans la première partie de la thèse, il est possible de déterminer la loi d'évaporation au sein de la

peinture. Le calcul du débit par méthode inverse ne fait alors appel qu'à la seule loi de conservation de la masse de fluide et aux hypothèses de l'approximation de lubrification. Il est également possible de calculer directement le débit en utilisant des modèles physiques et les cartographies d'altitude reconstruites par l'analyseur de front d'onde. La comparaison des débits calculés directement et par méthode inverse permet par conséquent, d'une part de tester la validité des modèles de rhéologie utilisés pour le calcul direct, et d'autre part d'accéder à tout ou partie des paramètres rhéologiques qui interviennent dans les expressions des modèles.

Nous présentons enfin dans la dernière section de ce chapitre des résultats de simulation réalisées avec le modèle newtonien, qui prennent en compte ou non l'effet Marangoni. Ces simulations sont réalisées à partir des topographies expérimentales et utilisent les paramètres obtenus en résolvant le problème inverse brièvement décrit ci-dessus.

7.1 Généralités sur le sealer et la laque

Les couches de sealer et de laque possèdent des propriétés physiques similaires, et sont déposées sur la caisse de l'automobile à l'aide d'un pistolet à peinture, avant d'être cuites. La composition chimique de ces couches est complexe. Comme pour la cataphorèse, on peut grossièrement distinguer quatre composants principaux :

- Le liant est le principal constituant du film sec, dont vont dépendre les principales caractéristiques du film réticulé. Le liant est un polymère.
- Des solvants interviennent dans la composition de la peinture, et vont fortement influencer sur sa rhéologie, qui dépend pour l'essentiel de la concentration en solvants.
- Les pigments et charges permettent d'opacifier le liant et de conférer au feuil de peinture sa coloration. Ces composants peuvent influencer sur les propriétés mécaniques de la peinture.
- Enfin, une faible quantité d'additifs est rajoutée, afin de permettre d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la peinture.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous adopterons une modélisation simplifiée de la composition chimique de la peinture, en supposant que cette dernière est composée d'une résine, d'un solvant léger, susceptible de s'évaporer à température ambiante, et d'un solvant plus lourd, qui ne s'évapore que pour des températures plus élevées, atteintes lors de la phase de cuisson.

Le nivellement des couches de sealer et de laque est dû aux effets conjugués de l'évaporation et de l'écoulement provoqué par l'action de la tension de surface. La rhéologie de la peinture a une influence importante sur le nivellement, et dépend essentiellement des concentrations respectives de résine et de solvant au sein du film de peinture. La plupart des articles relatifs à l'écoulement des films minces lient la viscosité de la peinture à la concentration en solvant en utilisant une loi exponentielle [57].

$$\eta(c) = \eta_0 e^{-a(c-c_0)} \quad (7.1)$$

La tension de surface du solvant et celle de la résine ne sont pas égales. La tension de surface globale de la peinture dépend donc nécessairement des proportions relatives de

solvant et de résine. D.E.Weidner *et al.* [57] proposent la loi qui suit afin de prendre en compte cette dépendance :

$$\gamma = c\gamma_s + (1 - c)\gamma_r \quad (7.2)$$

7.2 Expériences

Nous nous intéressons dans cette section aux expériences conduites avec l'analyseur de front d'onde, qui permettent de réaliser un suivi de l'évolution de la topographie d'une surface tout au long du procédé de mise en peinture. L'analyseur de front d'onde haute résolution utilise une technologie innovante, l'interférométrie à décalage multilatérale, qui permet une mesure directe de tout type de front d'onde avec une résolution importante et une dynamique élevée. La topographie de la surface mesurée est reconstruite en utilisant les cartes de déphasage obtenues avec le microscope [47]. La dynamique élevée de l'analyseur de front d'onde, ainsi que la facilité de mise au point en font un outil particulièrement bien adapté en vue de réaliser un suivi expérimental de l'évolution de la topographie d'une couche de peinture au cours du procédé de mise en peinture.

La mesure se heurte néanmoins à plusieurs limitations. En premier lieu, il est indispensable que la peinture déposée soit suffisamment spéculaire pour que l'analyseur de front d'onde soit à même de reconstruire la topographie mesurée. Il n'a ainsi pas été possible de réaliser des mesures sur la cataphorèse, qui diffuse trop fortement la lumière. En second lieu, il est difficile pour l'analyseur de front d'onde de mesurer des rugosités trop fortes. Malgré ces quelques limitations, il a été possible de constituer une base de données expérimentales conséquente, à même de permettre de valider de nombreux aspects des modèles d'écoulement développés dans le cadre de la présente thèse.

7.2.1 Protocole expérimental

L'expérience menée avec l'analyseur de front d'onde consiste à mesurer la topographie d'un film de peinture déposé sur une tôle à intervalles réguliers au cours du procédé de mise en peinture. Le protocole expérimental, présenté ci-dessous, vise à reproduire le plus exactement possible les conditions industrielles de mise en peinture :

- Un échantillon de tôle (tôle polie ou cataphorésée) est mis en peinture à l'aide d'un pistolet.
- La tôle est disposée sur une plaque chauffante dès la fin du dépôt. Des acquisitions complètes de la surface sont réalisées à intervalles réguliers (1 Hz à 2.5 Hz suivant les expériences) au cours des premières minutes, afin d'acquérir en détail l'évolution de la couche de peinture au cours du temps de flash.
- Pour éviter une accumulation inutile des données expérimentales, on diminue la fréquence d'acquisition à 0.1 Hz au bout de deux à trois minutes d'évolution du film. De fait, la dynamique de l'écoulement s'est alors considérablement ralentie.
- Au bout de 10 minutes, on démarre le cycle de cuisson de la peinture. La dynamique des phénomènes physiques s'accélérant, on augmente la fréquence d'acquisition du Phasics à 1 Hz (1.25 Hz selon les échantillons).
- Cinq minutes après le début de la cuisson, des liaisons chimiques commencent à se former au sein du film de peinture, qui réticule et cesse d'évoluer pendant la phase

de fin de cuisson. La fréquence d'acquisition est diminuée à 0.1 Hz.

Durant le temps de flash, la température extérieure est de 25°C. Le cycle de cuisson se subdivise en deux étapes : une montée linéaire de 300s jusqu'à atteindre la température de 155°C, suivie d'un palier de 15 minutes à cette température.

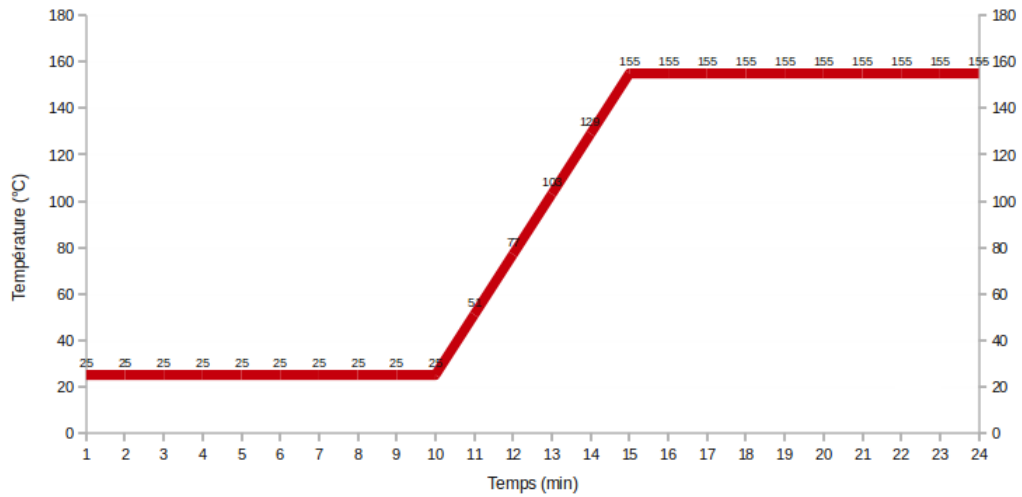


FIGURE 7.1 – Evolution de la température au cours de la mise en peinture

Les différentes expériences réalisées avec l'analyseur de front d'onde sont répertoriées dans les tableaux 7.1, 7.2 et 7.3. Au cours de ces expériences, on a fait varier la nature du substrat (tôle lisse, cataphorèse), son inclinaison (substrat horizontal, vertical, ou incliné à 45°), de manière à reproduire la variabilité du procédé de mise en peinture. Le tableau 7.1 récapitule les expériences réalisées au mois de Juin 2010, qui visent à suivre l'évolution d'une couche de peinture au cours du temps de flash uniquement. Pour toutes ces expériences, le pas d'acquisition horizontal est de 60 μm . Ces expériences sont réalisées avec une valeur de viscosité relativement faible. La peinture obtenue est donc relativement fluide, et l'effet de l'écoulement sur le nivellement est par conséquent important, tout au moins au début du temps de flash.

| Expérience | Substrat | Inclinaison |
|------------|------------|-------------|
| SEA01 | Tôle lisse | 45° |
| SEA02 | Tôle lisse | 45° |
| SEA03 | Tôle lisse | 45° |
| SEA04 | Tôle lisse | Horizontale |
| SEA05 | Tôle lisse | Horizontale |
| SEA06 | Tôle lisse | Horizontale |

TABLE 7.1 – Expériences de suivi de l'évolution d'une couche de sealer au cours du temps de flash.

Les expériences répertoriées dans le tableau 7.2 visent quant à elle à suivre l'évolution d'une couche de peinture sur l'ensemble du procédé de dépôt de peinture (temps de flash et cycle de cuisson). Pour toutes ces expériences, le pas d'acquisition horizontal est de $60 \mu m$. La viscosité de la peinture utilisée pour ces expériences est plus élevée que précédemment. Néanmoins, l'écoulement participe toujours de manière essentielle au phénomène de nivellement du film.

| Expérience | Substrat | Inclinaison |
|------------|-------------|-------------|
| SEA07 | Tôle lisse | Horizontale |
| SEA08 | Tôle EDT | Horizontale |
| SEA09 | Cataphorèse | Horizontale |
| SEA10 | Cataphorèse | Verticale |
| SEA11 | Tôle lisse | Verticale |
| LAQ01 | Cataphorèse | Verticale |
| LAQ02 | Tôle lisse | Verticale |
| LAQ03 | Cataphorèse | Horizontale |
| LAQ04 | Tôle lisse | Horizontale |
| LAQ05 | Tôle lisse | Horizontale |
| LAQ06 | Cataphorèse | 45° |

TABLE 7.2 – Expériences de suivi de l'évolution d'une couche de peinture au cours du procédé de dépôt de peinture.

Les expériences répertoriées dans le tableau 7.3 ont enfin été réalisées au mois de décembre 2010. Elles visent à suivre l'évolution d'une couche de peinture sur l'ensemble du procédé de dépôt de peinture (temps de flash et cycle de cuisson), à plus petite échelle d'observation (pas horizontal de $30 \mu m$). Les valeurs de viscosité utilisées pour le sealer sont relativement élevées, de sorte que l'évaporation est le principal phénomène physique responsable du nivellement du film. La viscosité de la laque utilisée est en revanche relativement faible.

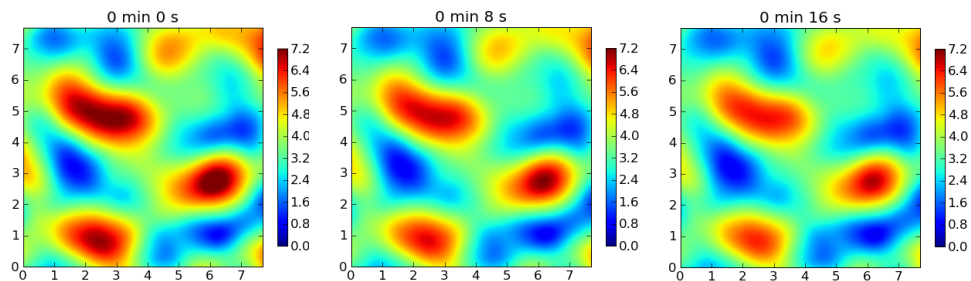
| Expérience | Substrat | Inclinaison |
|------------|-------------|-------------|
| SEA11 | Tôle lisse | Horizontale |
| SEA12 | Tôle lisse | Horizontale |
| SEA13 | Tôle lisse | Horizontale |
| SEA14 | Tôle lisse | Horizontale |
| SEA15 | Cataphorèse | Horizontale |
| SEA16 | Cataphorèse | Horizontale |
| SEA17 | Cataphorèse | Horizontale |
| SEA18 | Tôle lisse | Verticale |
| SEA19 | Cataphorèse | Verticale |
| SEA20 | Cataphorèse | Verticale |
| SEA21 | Cataphorèse | Verticale |
| LAQ11 | Cataphorèse | Verticale |
| LAQ12 | Cataphorèse | Horizontale |
| LAQ13 | Tôle lisse | Horizontale |
| LAQ14 | Cataphorèse | Horizontale |
| LAQ15 | Cataphorèse | Horizontale |

TABLE 7.3 – Expériences de suivi de l'évolution d'une couche de peinture au cours du procédé de dépôt de peinture.

7.2.2 Résultats expérimentaux

Nous présentons dans cette section les observations réalisées sur l'expérience SEA09, qui consiste à suivre l'évolution d'un film de sealer déposé sur un substrat de cataphorèse horizontal. Nous avons choisi de présenter en particulier les résultats de cette expérience car, d'une part, les données expérimentales sont de très bonne qualité, et d'autre part, l'expérience permet de visualiser l'ensemble des phénomènes physiques responsables du nivellement du film (évaporation, écoulement, résurgence du substrat sous-jacent).

La figure 7.2 présente l'évolution du film au cours des premiers instants du temps de flash. Les altitudes sont données en μm . Sur chaque surface, au cours de la mesure, le minimum est arbitrairement fixé à l'altitude zéro. Les cartographies représentées ont une taille de 128 pixels par 128 pixels, chaque pixel correspondant à l'altitude moyenne sur une surface de $60 \mu m$ par $60 \mu m$ pour cette expérience.



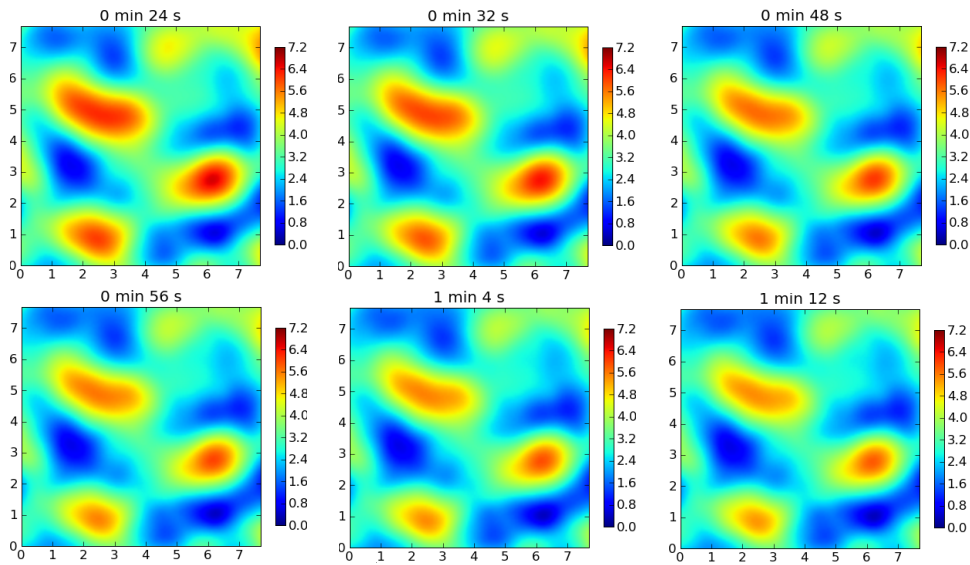
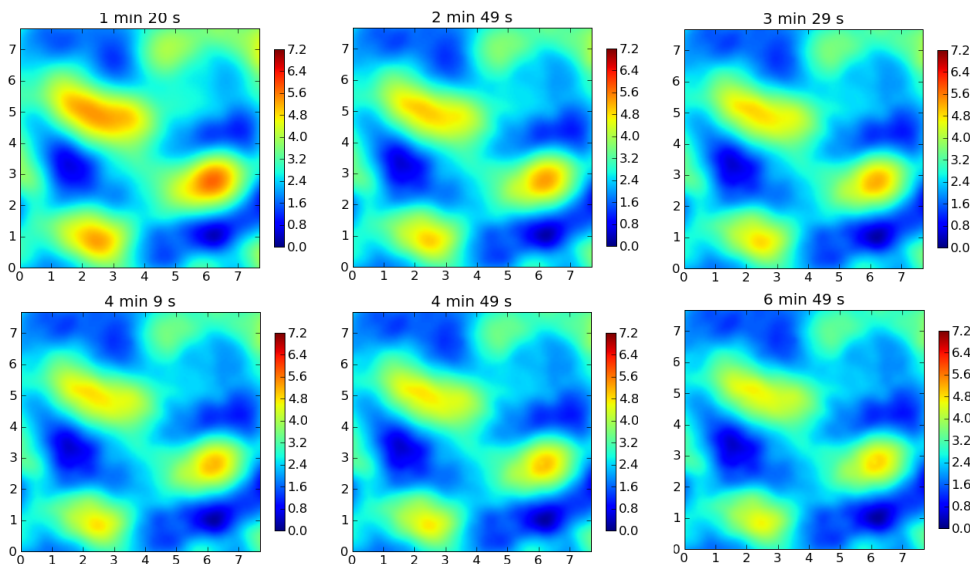


FIGURE 7.2 – Evolution de la peinture aux premiers instants du temps de flash. Les dimensions de la surface sont graduées en mm . Les altitudes sont représentées à l'aide d'une échelle colorimétrique, et graduées en μm .

Sur la figure 7.2, on observe un nivellement très rapide de la peinture. Ce nivellement est dû aux effets conjoints de l'évaporation rapide des solvants légers du sealer, ainsi qu'à l'écoulement provoqué par la tension de surface. Le phénomène est d'autant plus important au début du temps de flash que la viscosité du film est encore relativement faible.



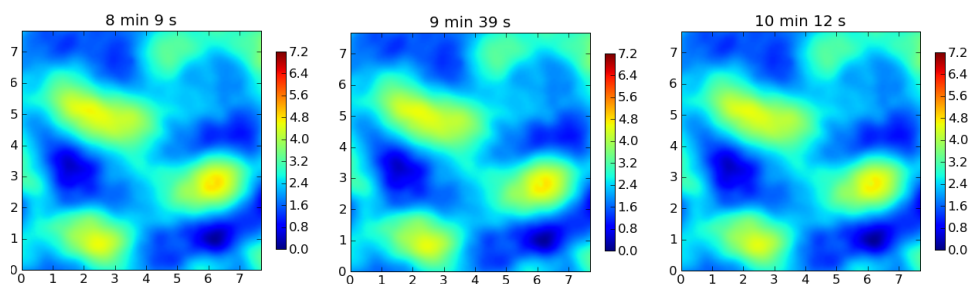


FIGURE 7.3 – Evolution de la peinture dans la suite du temps de flash

La figure 7.3 présente l'évolution du film dans la suite du temps de flash. L'échelle des altitudes de départ est conservée afin qu'on puisse comparer la dynamique des phénomènes avec la période précédente. On constate sur ces figures que le nivellement se ralentit, jusqu'à donner l'impression que le film de peinture cesse d'évoluer. L'évaporation des solvants légers, très rapide, semble donc essentiellement s'effectuer au début du temps de flash.

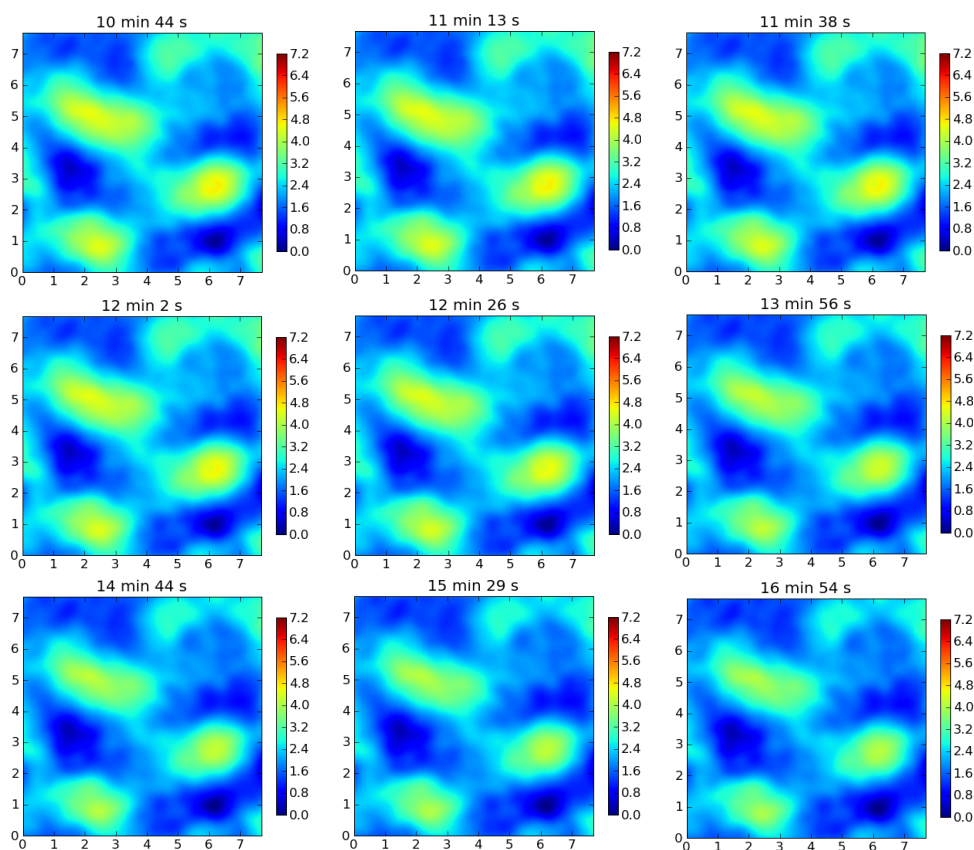


FIGURE 7.4 – Evolution de la peinture au début de la cuisson

La mise en cuisson de la peinture est à l'origine d'une seconde phase de nivellement et

d'évaporation. La hausse de température favorise en effet l'évaporation des solvants plus lourds contenus dans la peinture.

A la fin de la cuisson, des liaisons chimiques se forment entre les molécules qui constituent la peinture. Ce phénomène provoque la réticulation de la peinture, et, à l'instar de l'évaporation, amplifie la résurgence des motifs présents sur le substrat rugueux.

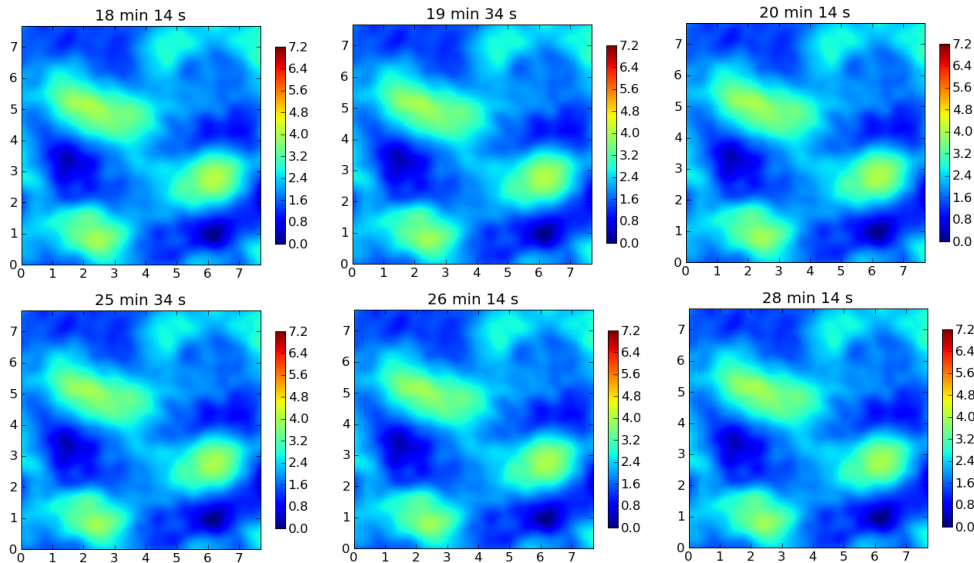


FIGURE 7.5 – Evolution de la peinture à la fin de la cuisson

La cartographie de gauche de la figure 7.6 correspond à la surface obtenue juste après le dépôt de peinture, celle de droite à la surface après la mise en peinture. Les surfaces sont représentées à des échelles différentes. On peut remarquer qu'on retrouve les motifs de la surface initiale sur la surface finale. On observe également sur la figure de droite l'apparition de motifs de petites échelles. Ces motifs correspondent à ceux que l'on peut observer sur le substrat sous-jacent de cataphorèse, et témoignent par conséquent du phénomène de résurgence du substrat sous-jacent à la couche de peinture.

La figure 7.7 présente enfin l'évolution du paramètre Mq de la surface à chaque étape du procédé de mise en peinture, pour l'expérience LAQ04. Le Mq est calculé à l'aide de l'algorithme de transformée en paquets d'ondelettes, en utilisant des ondelettes de Daubechies avec douze moments nuls. Les échelles et la valeur du paramètre sont données en μm . On constate que contrairement aux grandes longueurs d'onde, les faibles longueurs d'onde sont très peu atténuées au cours du procédé de mise en peinture, ce qui peut être attribué aux phénomènes d'évaporation et à la réticulation, qui tendent à faire ressortir le substrat sous-jacent à la couche de peinture.

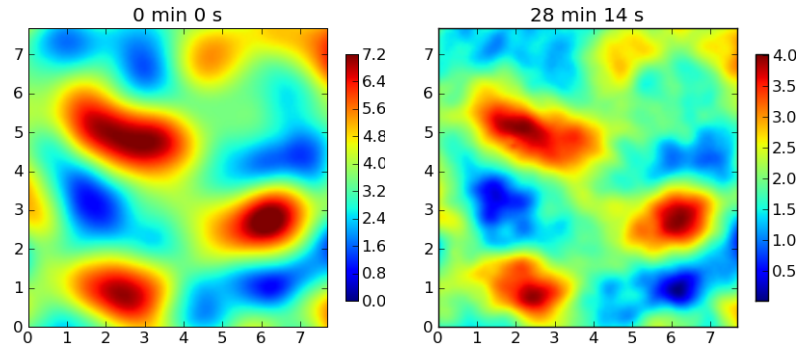
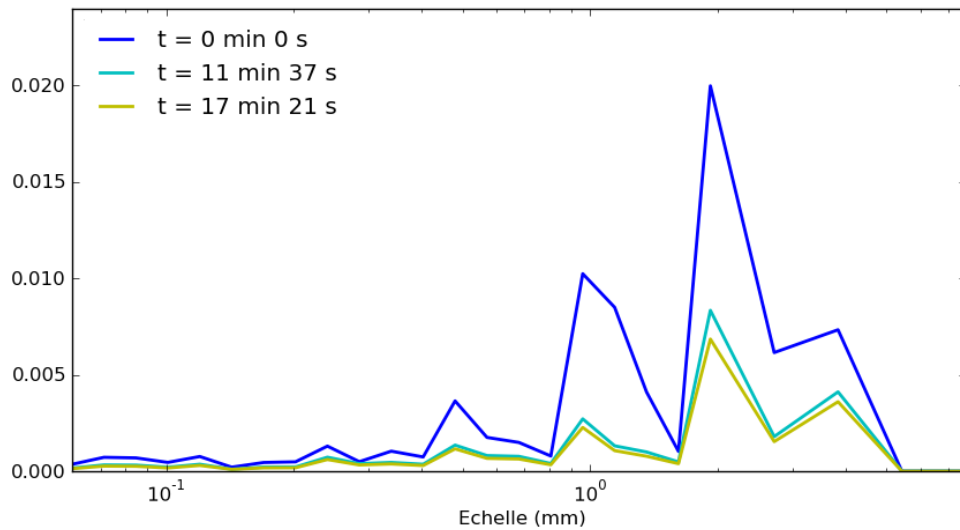


FIGURE 7.6 – Résurgence du substrat sous-jacent

FIGURE 7.7 – Evolution du paramètre de Mq au cours du procédé de cuisson : la courbe de Mq initiale apparaît en bleu, la courbe de Mq à l'issue du temps de flash en cyan, et la courbe de Mq après 5 minutes de cuisson en jaune.

7.3 Détermination du débit par méthode inverse

Le microscope Phasics est à même de mesurer les échantillons peints avec une fréquence élevée. La comparaison de deux surfaces consécutives permet donc intuitivement d'accéder à une approximation de bonne qualité de la dérivée temporelle de l'altitude h de la surface. Nous présentons dans cette section une méthode qui, partant de l'estimation de la dérivée temporelle, permet de remonter au débit de peinture dans le film en résolvant un problème inverse.

7.3.1 Principe

La variation d'altitude est liée au débit local et à l'évaporation par le biais de la loi de conservation de la masse de fluide :

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x, y, t) = -\nabla \cdot \mathbf{q}(x, y, t) - E(x, y, t) \quad (7.3)$$

Le problème direct exprimé par cette équation consiste à déterminer la variation d'altitude connaissant l'expression du débit. Nous nous intéressons ici au problème inverse, qui consiste à déterminer le débit connaissant la variation locale d'altitude. On peut définir un problème inverse comme un problème qui cherche à déterminer des *causes* connaissant des *effets*. Dans le cas présent, l'effet correspond à la variation mesurée de l'altitude locale, variation provoquée par le débit local. La définition que nous avons donné des problèmes inverses montre que ces derniers risquent de poser des difficultés bien spécifiques. En effet, si mathématiquement on comprend bien que les mêmes causes vont aboutir aux mêmes effets, on peut aisément concevoir que les mêmes effets peuvent provenir de causes différentes. Ainsi, une des principales difficultés inhérentes à l'étude des problèmes inverses est qu'il n'y a que rarement unicité de la solution.

La notion de problème bien posé a été définie dès 1923 par le mathématicien français Hadamard. On dit d'un problème qu'il est bien posé si ce problème admet une solution et une seule, et que cette solution dépend continûment des données du problème. Le problème auquel nous nous intéressons est un problème mal posé. De fait, il est évident au vu de l'équation que si \mathbf{q}_1 est solution du problème inverse, alors n'importe quel débit de la forme $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$, où $\nabla \cdot \mathbf{q}_2(x, y, t) = 0$ sera également solution.

Afin de sélectionner une solution donnée, il est nécessaire de rajouter des conditions¹, et donc a fortiori de mieux connaître la physique des phénomènes en jeu au sein du film. Dans le cadre de l'approximation de lubrification, il est légitime de considérer que

$$\mathbf{rot}[\mathbf{rot}(\mathbf{q})] = \mathbf{0} \quad (7.4)$$

De fait, cette relation fait intervenir successivement deux gradients dans les directions horizontales de l'écoulement, dont on a vu qu'ils étaient négligeable dans l'approximation de lubrification. Sous cette hypothèse, l'équation (7.3) se réécrit :

$$-\nabla \left(\frac{\partial h}{\partial t}(x, y, t) + E(x, y, t) \right) = \Delta \mathbf{q}(x, y, t) \quad (7.5)$$

Si on parvient à estimer la quantité à gauche de l'équation précédente, il devient possible en résolvant l'équation de Poisson de remonter aux valeurs locales du débit.

1. Une autre approche aurait consisté à appliquer une méthode de régularisation de Tikhonov. Dans le cas présent, il est plus simple de faire intervenir des arguments physiques.

7.3.2 Estimation du taux d'évaporation

Il est possible d'estimer le taux d'évaporation à partir des données expérimentales en étudiant l'amortissement des grandes longueurs d'onde présentes à la surface de la peinture. Il est en effet légitime dans le contexte de l'approximation de lubrification de faire l'hypothèse que l'atténuation des motifs à ces longueurs d'onde, qui correspondent à l'ondulation et à la forme de l'échantillon, est essentiellement due aux phénomènes d'évaporation, puisque les tailles caractéristiques de ces motifs sont séparées de l'épaisseur de la couche de peinture par plusieurs ordres de grandeur. Une possibilité pour estimer le taux d'évaporation est donc d'étudier l'atténuation du paramètre Mq qui correspond aux grandes longueurs d'onde entre deux surfaces successives. On obtient de cette manière une courbe expérimentale qui permet de caractériser l'évolution de l'altitude du film au cours du procédé. A l'aide des algorithmes de décomposition sur des bases de paquets d'ondelettes développés dans le cadre de la thèse, il est possible de décomposer les surfaces obtenues avec l'analyseur de front d'onde en leurs composantes multi-échelles. On vérifie ainsi, à un instant t_n donné :

$$h(t_n) = \sum_{j=0}^J h^{(j)}(t_n), \quad Sa = \sum_{j=0}^J Sa^{(j)} \quad (7.6)$$

où Sa désigne la topographie du substrat. Nous avons fait l'hypothèse physique, qui se justifie dans le cadre de l'approximation de lubrification, que les motifs de large échelle sont uniquement atténués du fait des phénomènes d'évaporation. Désignons par α le taux d'évaporation. L'évolution temporelle de la surface à l'échelle retenue est donnée par

$$h^{(j)}(t_{n+1}) - Sa^{(j)} = \alpha \left(h^{(j)}(t_n) - Sa^{(j)} \right) \quad (7.7)$$

Un calcul rapide permet de montrer que le paramètre $Mq_{n+1}[j]$ du Mq au temps t_{n+1} et à l'échelle j se déduit du paramètre $Mq_n[j]$ du Mq au temps t_n par la relation :

$$Mq_{n+1}[j]^2 = Mq_n[j]^2 + Mq_{Sa}[j]^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \sum_{k_1, k_2=0}^N \left(h^{(j)}[k_1, k_2] - E[h^{(j)}] \right) \left(Sa^{(j)}[k_1, k_2] - E[Sa^{(j)}] \right) \quad (7.8)$$

L'évolution relative de l'altitude en présence d'évaporation seule est représentée sur la figure 7.8. On peut constater à la vue de cette figure que cette courbe d'évaporation est légèrement bruitée. En utilisant sans traitement préalable les données recueillies, le risque est, comme l'intervalle de temps entre deux acquisitions de surface successives est très rapproché, d'introduire une forte imprécision dans l'estimation du terme d'évaporation. Une manière simple de débruiter au moins partiellement les données recueillies est d'essayer de déterminer une loi d'évaporation qui leur corresponde. On estimera alors la quantité de peinture évaporée en utilisant cette loi plutôt que les données expérimentales brutes.

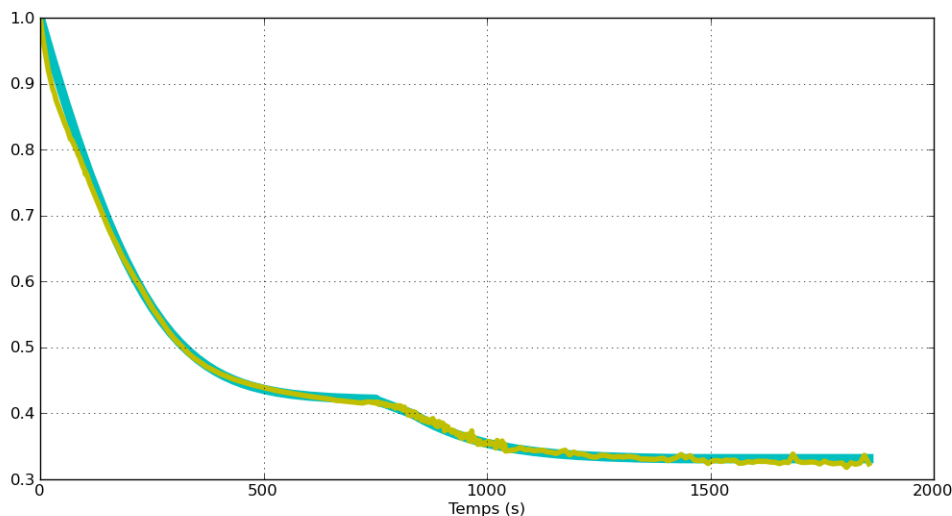


FIGURE 7.8 – Evolution de l'épaisseur moyenne au cours de la totalité du procédé de mise en peinture pour l'expérience LAQ04, mesurée expérimentalement (en jaune) et comparée à la loi d'évaporation (en vert). L'épaisseur de la couche de peinture est normalisée à l'unité.

Les données expérimentales montrent que la peinture subit deux phases d'évaporation, de dynamiques et d'amplitudes différentes : une première phase au début du temps de flash, et une seconde phase au cours de la mise en cuisson. La composition de la peinture automobile est complexe. Cependant, afin d'éviter que des phénomènes d'évaporation trop brutaux se produisent lors du dépôt de la peinture, plusieurs solvants sont ajoutés, qui assurent la régularité du phénomène d'évaporation. Pour chacune des phases, afin de déterminer la loi d'évaporation, il paraît donc légitime de faire l'hypothèse que la peinture est constituée d'une résine de concentration volumique $1 - c$ et d'un solvant de concentration volumique c . Nous supposons que l'évaporation E est proportionnelle à la concentration du solvant dans le film :

$$E = \lambda c \quad (7.9)$$

Dans un premier temps, étudions le cas d'un film de peinture lisse, sur un substrat lisse, qui subit donc uniquement l'effet des phénomènes d'évaporation. Notons h l'épaisseur du film, h_0 l'épaisseur initiale et h_∞ l'épaisseur finale lorsque la totalité du solvant s'est évaporée. La concentration en solvant dans le film est donnée à chaque instant par :

$$c = \frac{h - h_\infty}{h} \quad (7.10)$$

La loi de conservation de la masse de fluide permet de lier la variation de la hauteur du film à l'évaporation :

$$\frac{dh}{dt} = -E \quad (7.11)$$

On en déduit l'équation différentielle qui régit l'évolution de la hauteur du film :

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda \left(\frac{h - h_\infty}{h} \right) \quad (7.12)$$

Par conséquent, en séparant les variables,

$$\Phi(h) = h - h_0 + h_\infty \ln \left(\frac{h - h_\infty}{h_0 - h_\infty} \right) = -\lambda t \quad (7.13)$$

L'équation précédente indique que l'évolution de la quantité $\Phi(h)$ est proportionnelle au temps. On peut ainsi vérifier la validité du modèle à partir des données expérimentales, en effectuant une regression linéaire qui permet de caractériser au mieux le paramètre λ .

Reste que l'on souhaite obtenir l'expression de h en fonction du temps. La fonction inverse de Φ ne possède pas d'expression analytique évidente. Nous recourons donc à des méthodes numériques afin d'inverser l'équation. $\forall t \in]0, +\infty[$, on définit la fonction $h \rightarrow \Phi_t(h)$ sur $]h_\infty, h_0[$ par :

$$\Phi_t(h) = h - h_0 + h_\infty \ln \left(\frac{h - h_\infty}{h_0 - h_\infty} \right) + \lambda t \quad (7.14)$$

Inverser l'équation revient à résoudre l'équation $\Phi_t(h) = 0$ pour tout t . Pour ce faire, nous employons la méthode de Newton. $\forall t \in]0, +\infty[$, la fonction Φ_t est de classe C^∞ sur son domaine de définition.

$$\Phi'_t(h) = 1 + \frac{h_\infty}{h - h_\infty} \quad (7.15)$$

$\forall h \in]h_\infty, h_0[$, $\Phi'_t(h) > 0$ et la fonction Φ_t est strictement croissante. On peut donc affirmer que Φ_t admet une fonction réciproque. La dérivée seconde de Φ_t est donnée par :

$$\Phi''_t(h) = -\frac{h_\infty}{(h - h_\infty)^2} \quad (7.16)$$

$\forall h \in]h_\infty, h_0[, \Phi_t''(h) < 0$. La fonction Φ_t est ainsi concave. On constate ainsi que toutes les conditions de validité de la méthode de Newton sont réunies afin d'inverser la fonction.

Il est intéressant de considérer les courbes d'évolution du Mq afin de séparer, échelle par échelle, les effets de l'évaporation et de l'écoulement causé par la tension de surface dans le phénomène de nivellement global de la surface de la peinture. L'observation de ces courbes est très instructive sur l'influence de l'évaporation sur le nivellement du film :

- Au cours du temps de flash, on peut constater que les effets de l'écoulement provoqué par la tension de surface sont à peu près du même ordre de grandeur que les effets de l'évaporation. Le nivellement du film au cours de cette phase s'explique donc autant par l'effet de la tension de surface que par celui de l'évaporation.
- Inversement, on constate que le nivellement du film au cours de la cuisson semble presque exclusivement dû aux effets de l'évaporation. Même si la température augmente au cours de la cuisson, la viscosité de la peinture reste donc trop importante pour que l'effet de l'écoulement provoqué par la tension de surface ait une réelle influence sur le nivellement. C'est un résultat important, qu'on retrouve pour les autres expériences de suivi réalisées avec l'analyseur de front d'onde : l'évaporation permet à elle seule d'expliquer le phénomène de nivellement de la peinture sur le substrat au cours de la phase de cuisson.

7.3.3 Estimation du gradient

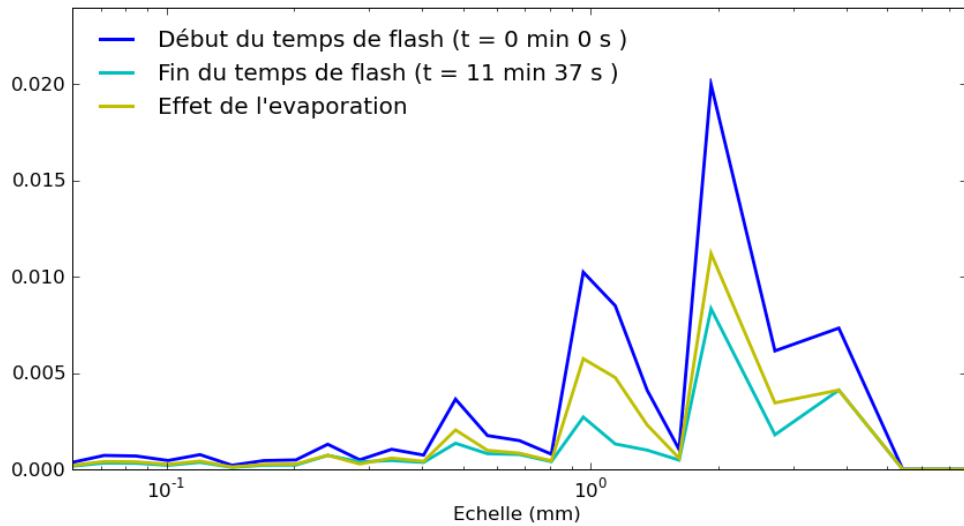
Il n'est pas possible avec l'analyseur de front d'onde d'obtenir les altitudes absolues des surfaces, mais uniquement des altitudes relatives. Notons $s(x, y, t)$ la topographie de la surface revêtue, et fixons arbitrairement le minimum de cette fonction à $z = 0$. Afin de mesurer la différence d'altitude entre deux surfaces consécutives, il convient de définir une échelle d'altitude absolue. Notons $Sa(x, y)$ la surface représentant le substrat. Nous fixerons arbitrairement le minimum du substrat à l'altitude absolue $z = 0$. La surface dans cette échelle d'altitude est donnée à l'instant t par la relation :

$$h(x, y, t) = s(x, y, t) + d(t) \quad (7.17)$$

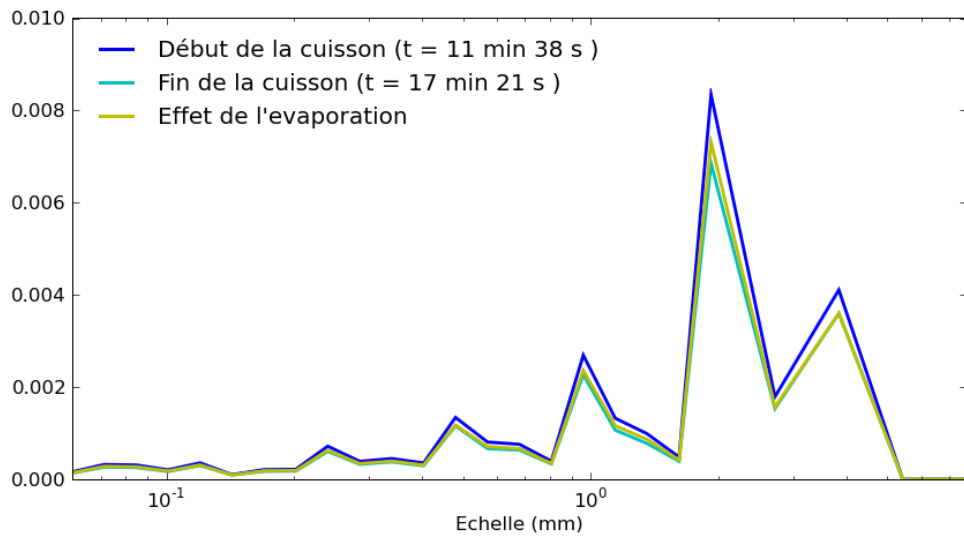
où d désigne l'altitude (inconnue) du minimum de la surface relative s mesurée par le microscope dans cette échelle d'altitude. La dérivée temporelle de l'altitude est donc estimée, à un temps t_n quelconque, par :

$$\frac{dh}{dt}(x, y, t_n) = \frac{1}{\Delta t} \left(s(x, y, t_{n+1}) - s(x, y, t_n) + d(t_{n+1}) - d(t_n) \right) \quad (7.18)$$

Nous avons vu précédemment que la proportion α_n de film évaporé entre les instants t_n et t_{n+1} peut être estimée à partir des données de topographie recueillies par l'analyseur de front d'onde. Ainsi :



(a) Temps de Flash



(b) Cuisson

FIGURE 7.9 – Evolution de la courbe de Mq aux différentes étapes du procédé de mise en peinture. La courbe jaune correspond à la courbe de Mq qui aurait été obtenue si on avait uniquement considéré les phénomènes d'évaporation.

$$E(x, y, t_n) = \alpha_n \left(h(x, y, t_n) - Sa(x, y) \right) = \alpha_n \left(s(x, y, t_n) + d(t_n) - Sa(x, y) \right) \quad (7.19)$$

On en déduit, comme $\nabla d = \mathbf{0}$,

$$\nabla \left(\frac{\partial h}{\partial t}(x, y, t_n) + E(x, y, t_n) \right) = \nabla \left(s(x, y, t_{n+1}) - (1 - \alpha_n)s(x, y, t_n) - \alpha_n Sa(x, y) \right) \quad (7.20)$$

Lors de la mesure des surfaces à l'aide de l'analyseur de front d'onde, une erreur sur la forme de la surface est susceptible de subsister :

- Une extraction de forme est réalisée par l'appareil afin de notamment corriger les aberrations optiques, qui soustrait à la surface mesurée sa projection sur une famille de polynômes harmoniques, dont le degré est spécifié empiriquement par l'expérimentateur. L'extraction de forme réalisée au cours de cette opération ne permet pas cependant de corriger complètement l'erreur de forme, qui est difficilement quantifiable.
- Dans la plupart des expériences qui ont été réalisées, la forme du substrat, qui n'est pas connue, est supposée être nulle, ce qui est proche de la réalité sans toutefois être entièrement exact. Du fait de l'évaporation, cette forme va inévitablement resurgir à la surface et introduire une très légère erreur de forme, là aussi difficilement quantifiable.

Il convient donc de garder à l'esprit que les topographies mesurées présentent de très légères erreurs de forme, erreurs qui deviennent non négligeables lorsqu'on considère la différence entre deux surfaces successives. Nous avons fait l'hypothèse qui se justifie dans le cadre de l'approximation de lubrification que seule l'évaporation est susceptible d'atténuer les motifs dont les échelles correspondent à celles de la forme de la surface. L'évaporation étant prise en compte dans l'évaluation du gradient, il est légitime d'extraire la forme de la quantité obtenue à la gauche de l'équation (7.20). L'extraction de forme se fait en soustrayant à la carte de débits sa projection sur des ondelettes dont l'échelle correspond à la forme qu'on souhaite enlever.

7.3.4 Résolution du problème inverse

Le problème inverse que l'on cherche à résoudre consiste à remonter aux valeurs locales du débit partant de la donnée de deux cartographies successives. On a vu précédemment que le débit est solution de l'équation de Poisson

$$-\nabla \left(\frac{\partial h}{\partial t}(x, y) + E(x, y) \right) = \Delta \mathbf{q}(x, y) \quad (7.21)$$

où il est possible d'obtenir une estimation du membre de gauche, dont nous noterons $f(x, y)$ et $g(x, y)$ les composantes dans les directions respectives x et y .

Nous supposons que les conditions aux limites du problème sont périodiques et cherchons à résoudre l'équation à l'aide d'une méthode spectrale. Afin de gérer les effets de bord, nous déplaçons la surface par symétrie miroir afin de supprimer les sauts aux interfaces. Dans le domaine de Fourier, l'équation se réécrit, composante par composante :

$$\hat{f}(\xi_x, \xi_y) = -(\xi_x^2 + \xi_y^2)\hat{q}_x(\xi_x, \xi_y) \quad (7.22)$$

$$\hat{g}(\xi_x, \xi_y) = -(\xi_x^2 + \xi_y^2)\hat{q}_y(\xi_x, \xi_y)$$

On en déduit aisément l'expression des débits dans le domaine de Fourier :

$$\hat{q}_x(\xi_x, \xi_y) = -\frac{\hat{f}(\xi_x, \xi_y)}{\xi_x^2 + \xi_y^2} \quad (7.23)$$

$$\hat{q}_y(\xi_x, \xi_y) = -\frac{\hat{g}(\xi_x, \xi_y)}{\xi_x^2 + \xi_y^2}$$

La valeur des débits se déduit des relations précédentes par transformée de Fourier inverse. On notera que $\hat{f}(0, 0) = 0$ et $\hat{g}(0, 0) = 0$. En effet, si on note L la largeur de la surface dépliée, par définition de la transformée de Fourier :

$$\hat{f}(0, 0) = \int_0^L \int_0^L f(x, y) dx dy \quad (7.24)$$

Cette quantité est nulle. $\hat{f}(0, 0)$ correspond en effet à l'intégrale sur une période du gradient d'une fonction périodique continue (rappelons que la surface de départ a été dépliée afin de supprimer les sauts périodiques aux interfaces).

7.4 Estimation des paramètres de rhéologie des modèles

A partir des surfaces reconstruites avec l'analyseur de front d'onde, il est possible de calculer le débit de manière directe, en utilisant les différents modèles développés dans le cadre de la thèse. Il devient possible, en comparant les débits calculés avec la méthode inverse et les débits calculés directement à partir des modèles, d'une part de tester la validité de ces derniers modèles, d'autre part d'arriver à estimer la valeur des paramètres rhéologiques du modèle physique.

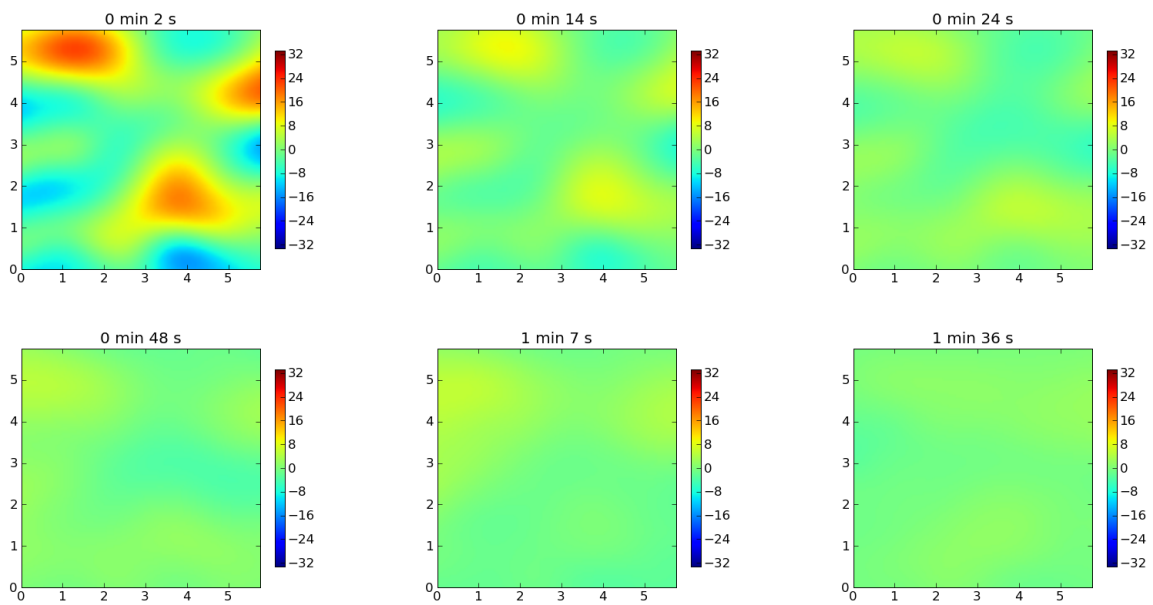


FIGURE 7.10 – Evolution du débit déterminé en résolvant le problème inverse dans la longueur x du film de laque. La longueur et la largeur de la surface sont graduées en mm . Le débit est donné en $\mu\text{m}^2/\text{s}$

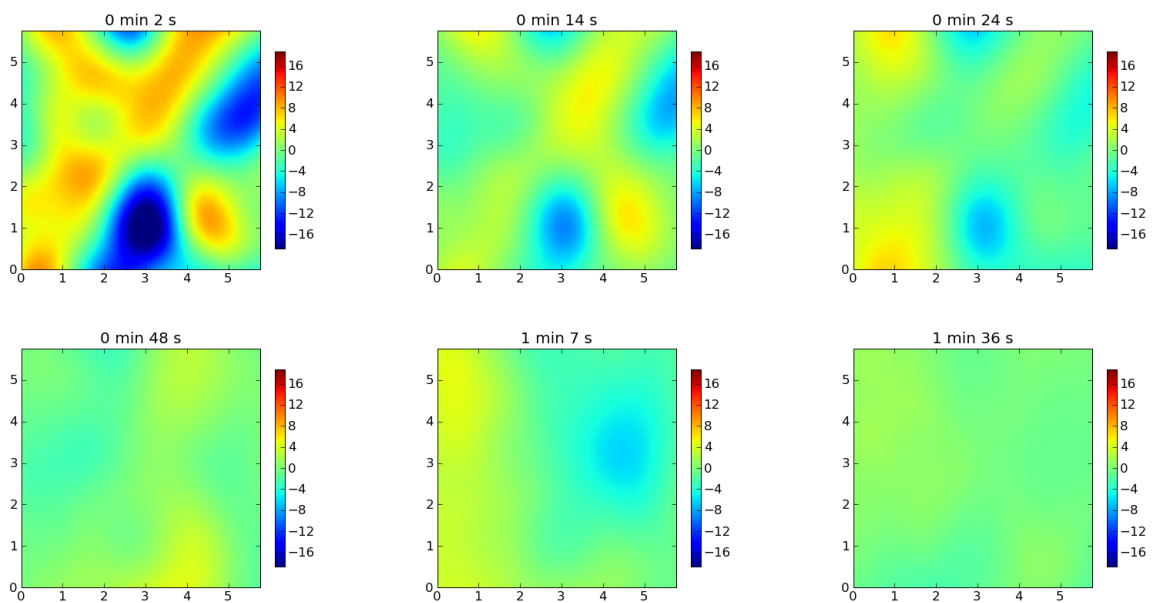


FIGURE 7.11 – Evolution du débit déterminé en résolvant le problème inverse dans la largeur y du film de laque. La longueur et la largeur de la surface sont graduées en mm . Le débit est donné en $\mu\text{m}^2/\text{s}$

7.4.1 Estimation des dérivées spatiales des surfaces

Les équations des différents modèles développés afin de décrire l'évolution de la surface des films minces font intervenir des dérivées spatiales d'ordre élevé de la surface étudiée. Si l'on souhaite pouvoir calculer le débit en utilisant ces modèles sur les surfaces obtenues avec l'analyseur de front d'onde, il est essentiel de disposer de méthodes d'évaluation performantes des dérivées spatiales qui entrent en jeu.

Le calcul de la dérivée spatiale d'une surface expérimentale est loin de constituer un problème trivial. De fait, l'opération de dérivation est très sensible au bruit, et calculer sans traitement préalable le gradient des topographies de la base de données expérimentales conduit à l'obtention d'une information bruitée non exploitable. Les surfaces obtenues par le biais de l'analyseur de front d'onde sont de fait très légèrement bruitées du fait de l'erreur commise lors de la mesure. Le problème du calcul de la dérivée d'une surface peut être considéré comme un problème mal posé, dans le sens où la solution ne dépend pas continument des données du problème. Considérons ainsi une fonction $x \rightarrow f(x)$ perturbée par un bruit de haute fréquence $x \rightarrow \epsilon(x) = \lambda \cos(\omega x)$ de très faible amplitude. f et $f + \epsilon$ peuvent être rendue arbitrairement proches pour λ très petit, mais les dérivées de ces deux fonctions peuvent être très différentes dès lors que la fréquence ω est suffisamment élevée.

Différentiation gaussienne Afin de régulariser les données, nous calculons les dérivées spatiales avec une différentiation gaussienne. Dans ce cadre, la différentiation s'effectue en convoluant la surface initiale avec le noyau de la dérivée d'une fonction gaussienne centrée de variance σ spécifiée :

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (7.25)$$

La convolution avec la dérivée partielle selon x de la gaussienne est donnée par la relation

$$S * \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \int_0^L S(u, v) \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{(u-v)^2 + (v-y)^2}{2\sigma^2}\right) dudv \quad (7.26)$$

On vérifie aisément par une intégration par parties que

$$S * \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = G * \frac{\partial S}{\partial x}(x, y) \quad (7.27)$$

Le résultat obtenu correspond donc au produit de convolution de la dérivée de notre surface avec une gaussienne de variance σ . On comprend bien que le choix de la variance σ du noyau gaussien est fondamental, puisque si la convolution permet d'atténuer le bruit gaussien aux hautes fréquences, il reste important d'éviter de perdre de l'information physique.

7.4.2 Calcul direct du débit pour le modèle newtonien

Dans les différents modèles développés, le débit est lié aux gradients spatiaux de l'altitude par les relations :

$$\begin{cases} q_x = \frac{\gamma e^2}{3\eta} \Psi \left(e(x, y) \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}(x, y, t) + \frac{\partial^3 h}{\partial x \partial y^2}(x, y, t) \right) \right) = \frac{\gamma e^2}{3\eta} \Psi(u(x, y)) \\ q_y = \frac{\gamma e^2}{3\eta} \Psi \left(e(x, y) \left(\frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(x, y, t) + \frac{\partial^3 h}{\partial y \partial x^2}(x, y, t) \right) \right) = \frac{\gamma e^2}{3\eta} \Psi(v(x, y)) \end{cases} \quad (7.28)$$

où e_0 désigne l'épaisseur moyenne du film, γ la tension de surface et η la viscosité dynamique de la peinture. La fonction Ψ dépend de la rhéologie du film de peinture. Ainsi, si on suppose que le fluide constitutif de la peinture est newtonien, il existe une relation linéaire entre les grandeurs q_x et q_y de peinture au sein du film d'une part, et les termes $u(x, y)$ et $v(x, y)$ d'autre part, le coefficient de proportionnalité étant donné à chaque instant par la quantité $\frac{\gamma}{3\eta}$.

Les figures 7.12 et 7.13 présentent l'évolution des grandeurs $u(x, y)$ et $v(x, y)$ pour l'expérience LAQ04. La variance du noyau gaussien utilisé pour la différentiation est de $92\mu m$. En comparant point par point les valeurs de $u(x, y)$ et les valeurs du débit local déterminées par méthode inverse, on obtient les nuages de point représentés dans la figure 7.14 qui suivent. Une régression linéaire a été effectuée sur les données (la droite de régression est représentée sur les figures). On peut constater que les nuages de point sont relativement bien interpolés par une droite au cours du temps de flash. De fait, les coefficients de corrélation linéaires ont des valeurs comprises entre 0.65 et 0.85, ce qui, compte-tenu du bruit, paraît représentatif d'une relation linéaire.

Ces résultats, qui tendent à indiquer que le fluide possède une rhéologie newtonienne aux longueurs d'onde considérées, sont tout de même à nuancer. Rappelons ainsi que le calcul direct du débit fait intervenir des gradients d'ordre élevé de la surface mesurée par l'analyseur de front d'onde. Nous avons montré qu'il était nécessaire de légèrement filtrer les données afin de pouvoir calculer le gradient des surfaces considérées. Ainsi, les résultats ne donnent pas réellement d'indications sur les phénomènes physiques qui ont cours aux petites échelles ($< 120\mu m$). Rien n'interdit donc que le fluide, pour des motifs de petites longueurs d'onde et donc de fortes valeurs du taux de cisaillement, adopte un comportement non-newtonien, ce qui est prévu par le modèle de cross-over présenté dans le premier chapitre de cette partie, et appliqué notamment au cas de la cataphorèse.

Notons également que si l'indice de corrélation linéaire est bon au début du temps de flash, les données sont extrêmement bruitées dans la suite du procédé de mise en peinture, ce qui s'explique pour deux raisons :

- En premier lieu, les effets physiques de l'écoulement tendent à devenir très faibles passé le temps de flash. Il suffit de considérer l'évolution de la courbe de Mq au cours de la cuisson pour se convaincre que l'évaporation est responsable de la très grande majorité du phénomène de nivellement.

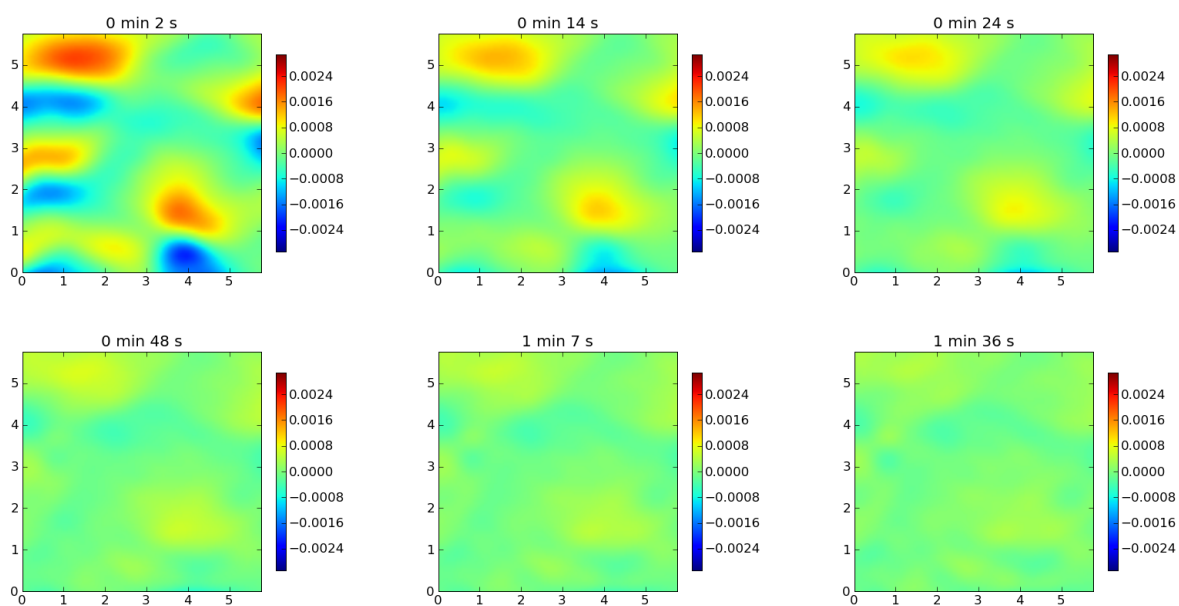


FIGURE 7.12 – Evolution de la grandeur $u(x, y)$ [μm]. La longueur et la largeur de la surface sont graduées en mm .

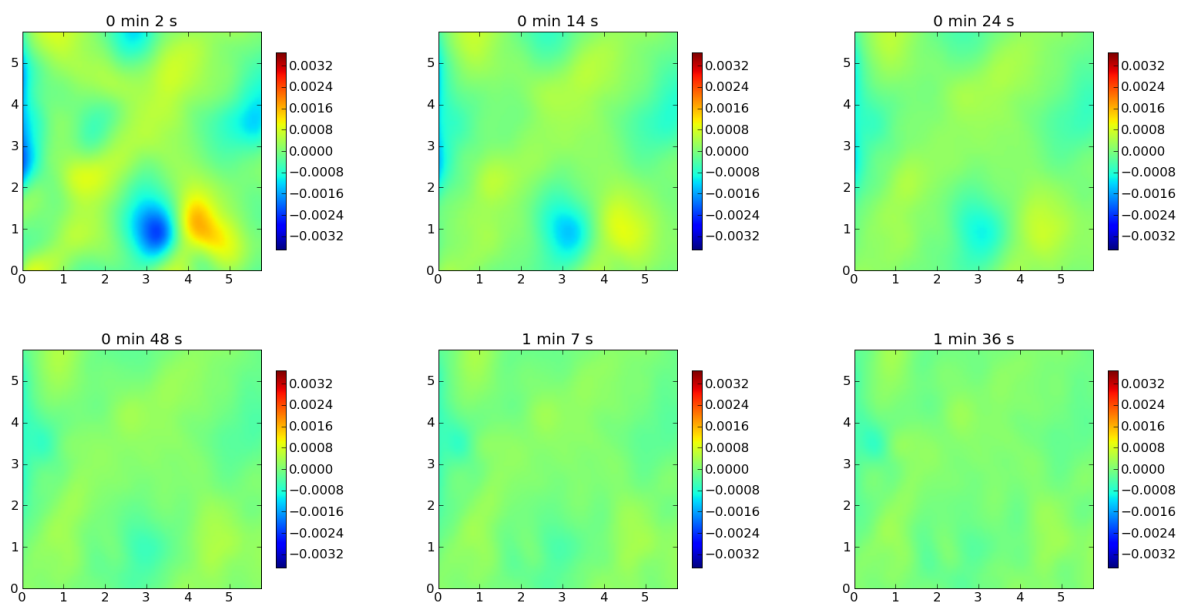
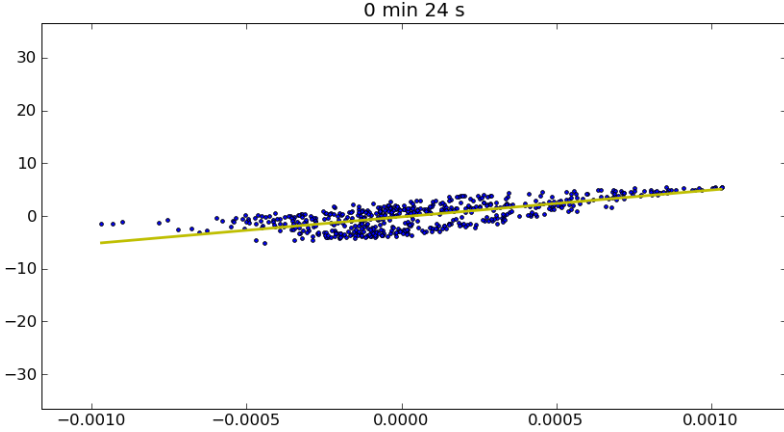
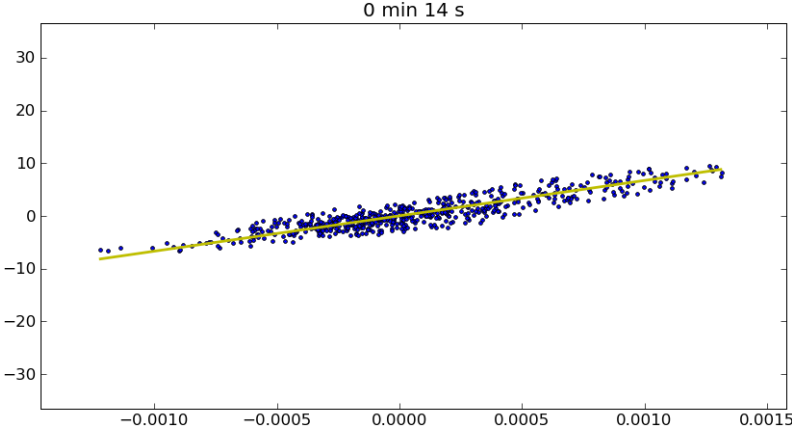
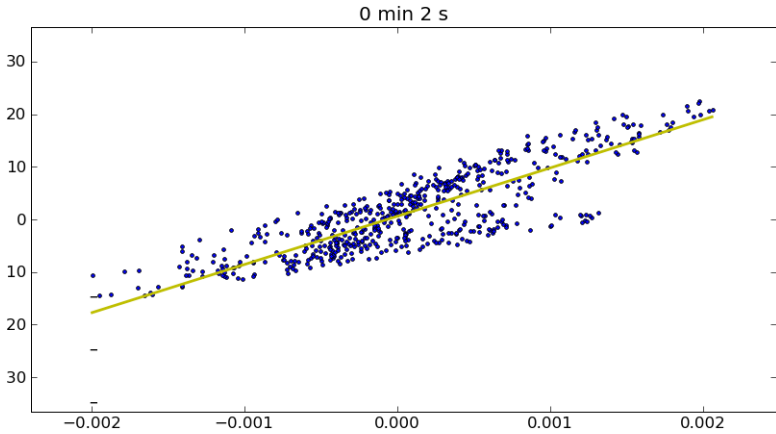


FIGURE 7.13 – Evolution de la grandeur $v(x, y)$ [μm]. La longueur et la largeur de la surface sont graduées en mm .



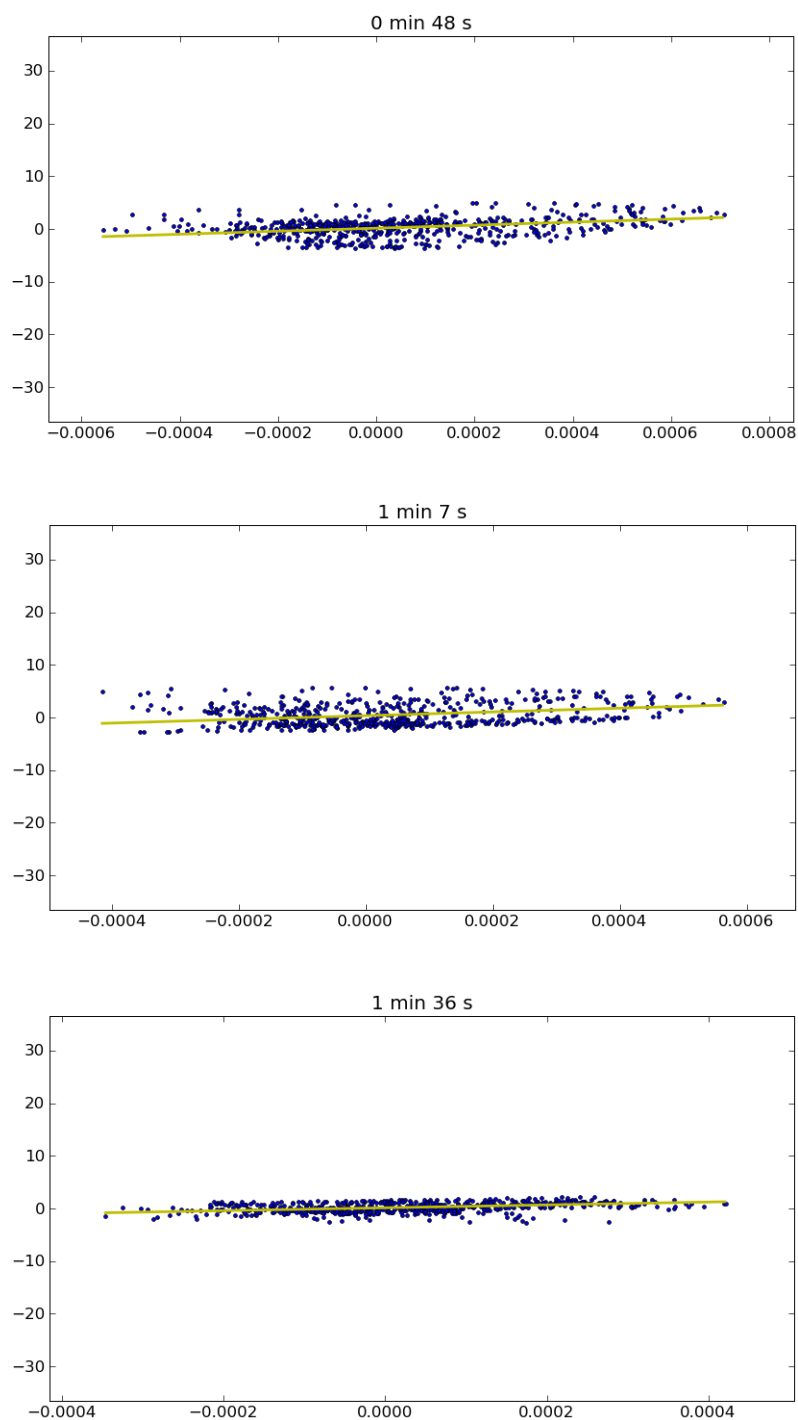


FIGURE 7.14 – Nuage de point représentant les valeurs du débit calculé par méthode inverse (en ordonnée) en fonction de $u(x,y)$ (en abscisse).

- En second lieu, comme le film s'évapore et perd du solvant, il tend de plus en plus à diffuser la lumière, ce qui vient impacter la qualité des données recueillies avec l'analyseur de front d'onde.

Enfin, rappelons qu'une extraction de forme a été réalisée sur la surface, qui ne peut prétendre corriger complètement l'erreur de forme de la mesure. Sur le premier nuage de point de la figure 7.14, deux groupes de points semblent ainsi pouvoir être distingués. Ces deux motifs sont caractéristiques d'une erreur de forme, qui impacte les grandes échelles de la surface étudiée.

7.4.3 Détermination in situ des paramètres de rhéologie du modèle

Nous avons vu dans la section précédente que, si l'on fait l'hypothèse d'une rhéologie newtonienne, les valeurs des débits locaux déterminées, d'une part en utilisant directement le modèle newtonien, et d'autre part en résolvant le problème inverse sont proportionnelles, le coefficient de proportionnalité étant donné par la quantité $\gamma/3\eta$. La figure (7.15) présente l'évolution de cette quantité en fonction de la concentration en solvant au sein du film de peinture.

Afin de réaliser le calage de la courbe théorique, seules les valeurs de $\gamma/3\eta$ auxquelles correspondent une valeur significative du coefficient de corrélation ont été prises en compte. Comme cela a été mentionné dans la section précédente, les mesures réalisées dans la fin du temps de flash sont fortement bruitées, et ne sont donc pas exploitables afin de déterminer les paramètres de rhéologie du film. C'est pourquoi les valeurs obtenues sont essentiellement situées autour de la valeur initiale de la concentration en solvant.

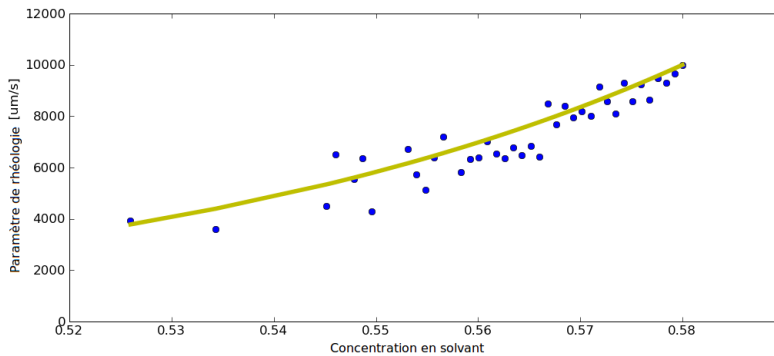


FIGURE 7.15 – Evolution de la quantité $\frac{\gamma}{3\eta}$ en fonction de la concentration en solvant au sein du film

La loi suivante est généralement proposée dans la littérature afin de relier la valeur de la tension de surface aux concentrations respectives de solvant et de résine dans la peinture :

$$\gamma = \gamma_r + c(\gamma_s - \gamma_r) = \gamma_r + c\Delta\gamma \quad (7.29)$$

où γ_r désigne la tension de surface propre à la résine, et γ_s la tension de surface propre au solvant. La viscosité dépend quant à elle de la concentration en solvant via la loi exponentielle :

$$\eta(c) = \eta_0 e^{-ac} \quad (7.30)$$

En utilisant ces lois afin de caler le paramètre $\gamma/3\eta$ sur les données expérimentales, on trouve

$$\frac{\gamma}{3\eta}(c) = \frac{\gamma_r + c_0 \Delta\gamma}{3\eta_0} e^{a(c-c_0)} = \frac{\gamma_0}{3\eta_0} e^{a(c-c_0)} \quad (7.31)$$

avec $\frac{\gamma_0}{3\eta_0} = 10000 \mu\text{m}/\text{s}$, $c_0 = 0.58$ et $a = 19.0$.

Les paramètres déterminés par la méthode inverse dans le cas de la laque sont comparés à ceux communément utilisés dans la littérature dans le cas des peintures dans le tableau 7.4.

| Paramètre | Symbole | Valeur | Valeur dans [46] | Unité |
|-----------------------------------|------------|----------------|------------------|-------|
| Tension de surface de la résine | γ_r | $3, 0.10^{-2}$ | $3, 0.10^{-2}$ | N/m |
| Tension de surface du solvant | γ_s | $2, 5.10^{-2}$ | $2, 5.10^{-2}$ | N/m |
| Viscosité initiale de la peinture | η_0 | 0.9 | 0.9 | Pa.s |
| Concentration initiale en solvant | c_0 | 0.58 | 0.5 | - |
| Exposant de la loi de viscosité | a | 19 | 15 [57] | - |
| Paramètre de la loi d'évaporation | λ | $4, 0.10^{-9}$ | $2, 0.10^{-9}$ | m/s |

TABLE 7.4 – Paramètres de rhéologie de la peinture déterminés en utilisant la méthode inverse. Les paramètres sont comparés à ceux communément utilisés dans la littérature [57].

On constate que les paramètres déterminés en résolvant le problème inverse sont très proches de ceux qui ont été mesurés dans les articles de W.S. Overdiep [46] ou D.E. Weidner *et al.* [57]. Malgré un certain nombre de limitations, exposées dans le paragraphe précédent, la méthode inverse développée semble être à même de valider l'hypothèse d'un fluide newtonien, et de déterminer des paramètres de rhéologie réalistes au vu des travaux qui existent sur le sujet [57] [46].

7.5 Simulations

Nous présentons dans cette section divers résultats de simulations réalisées à partir de la base de données expérimentales obtenue à l'aide de l'analyseur de front d'onde. Ces simulations partent de la première cartographie reconstruite par l'analyseur de front d'onde et visent à reproduire l'intégralité de l'évolution du film au cours du temps de flash. Les paramètres de rhéologie utilisés dans le modèle sont détaillés pour chaque simulation. Il eut été extrêmement redondant de présenter l'intégralité des simulations réalisées, et nous nous contenterons par conséquent dans ce manuscrit de nous intéresser à quatre cas représentatifs de la diversité des configurations géométriques étudiées : le dépôt d'une couche de laque sur un substrat lisse horizontal, celui d'une couche de sealer fortement dilué sur un substrat lisse horizontal, le dépôt d'une couche de laque sur cataphorèse et

le dépôt d'une couche de laque sur un substrat lisse incliné. Le code de résolution utilise une méthode pseudo-spectrale, détaillée dans l'annexe A de la thèse.

7.5.1 Nivellement d'une couche de laque sur un substrat lisse

Les simulations qui suivent ont été réalisées à partir des données recueillies sur l'expérience LAQ04, et visent à décrire l'évolution de la topographie du film de peinture au cours du temps de flash. Les paramètres de rhéologie utilisés pour ces simulations sont récapitulés dans le tableau 7.4 et correspondent à ceux qui ont déterminés en résolvant le problème inverse détaillé dans les sections précédentes.

La figure 7.17 présente les résultats de simulation obtenus avec le modèle newtonien au cours du temps de flash. La surface de gauche présente la topographie expérimentale, celle du milieu la topographie simulée, et celle de droite une cartographie de la valeur absolue de l'erreur locale ϵ , définie en chaque point par

$$\epsilon(x, y, t) = h^e(x, y, t) - h^s(x, y, t) \quad (7.32)$$

On constate sur la figure que le modèle newtonien permet de simuler avec précision l'évolution de la topographie du film de laque, tout au moins pour les motifs d'échelle millimétrique.

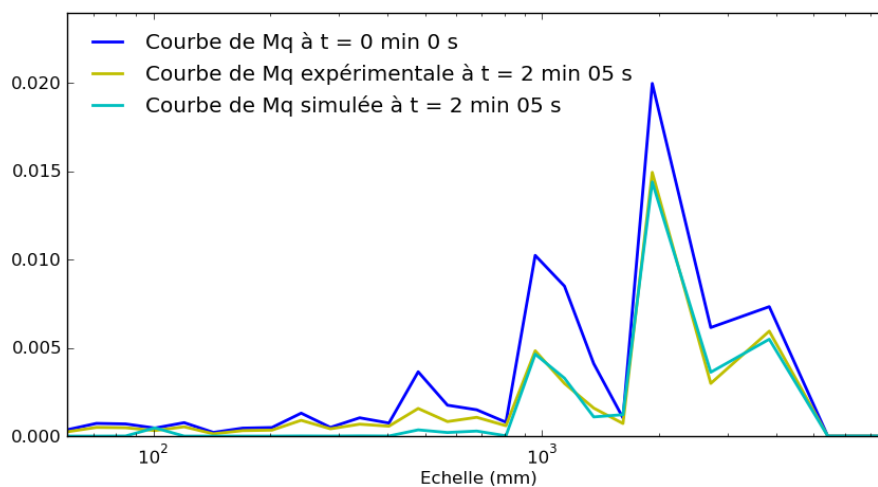


FIGURE 7.16 – Comparaison des courbes de Mq obtenues pour la topographie simulée (en vert) et pour la topographie expérimentale (en jaune)

La figure 7.16 compare les courbes de Mq obtenues pour les topographies simulée et expérimentale. Cette figure permet de constater que le modèle newtonien reproduit effectivement avec précision la dynamique de l'atténuation des motifs d'échelle millimétrique. On constate également que les motifs de rugosité aux plus petites échelles sont très mal

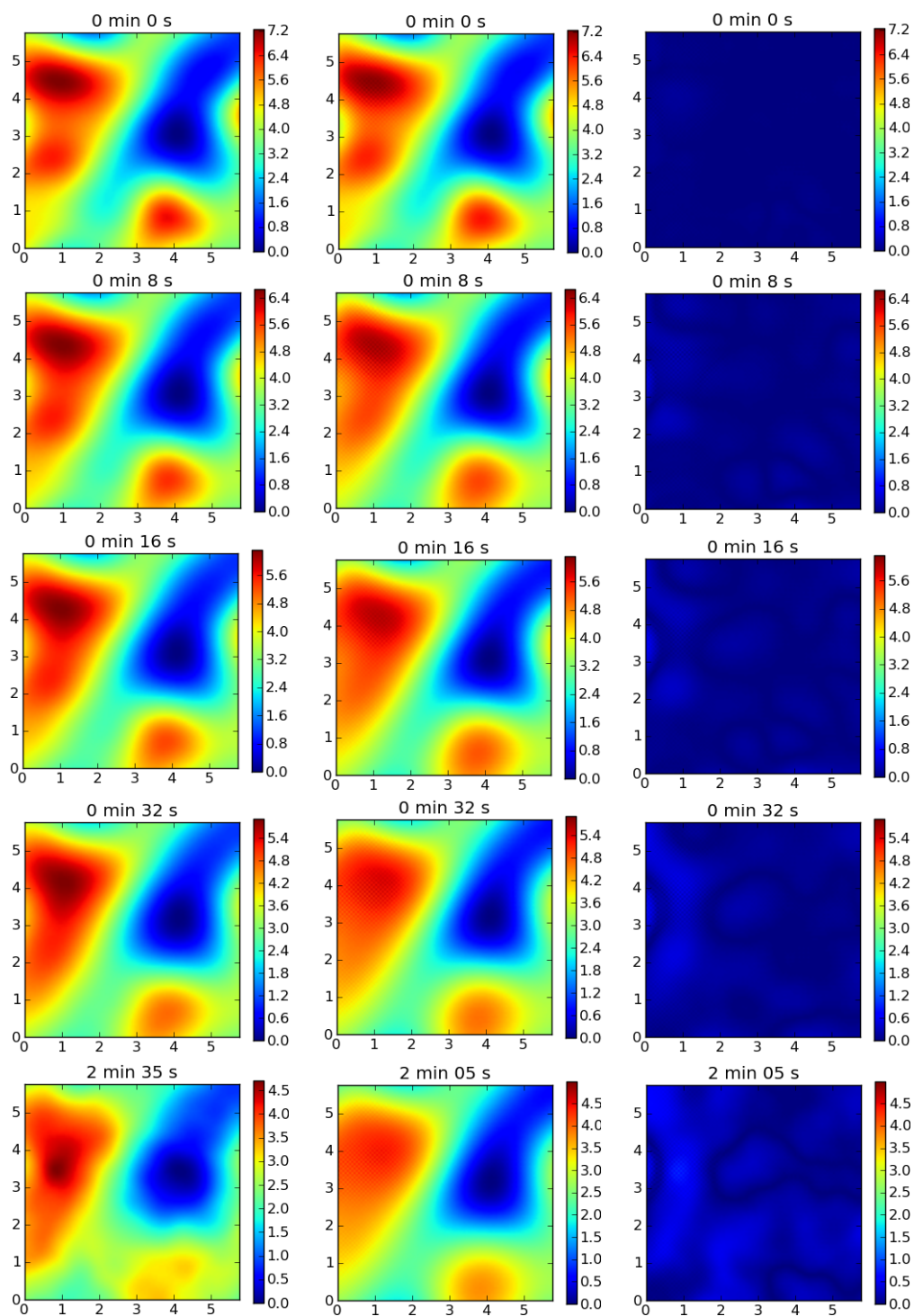


FIGURE 7.17 – Simulation de l'évolution de la topographie de la couche de peinture pour l'expérience LAQ04 : les topographies expérimentales (gauche) sont comparées aux topographies simulées (centre). Une cartographie de l'erreur locale est également représentée (droite). Les dimensions des surfaces sont graduées en mm , l'altitude est donnée en μm .

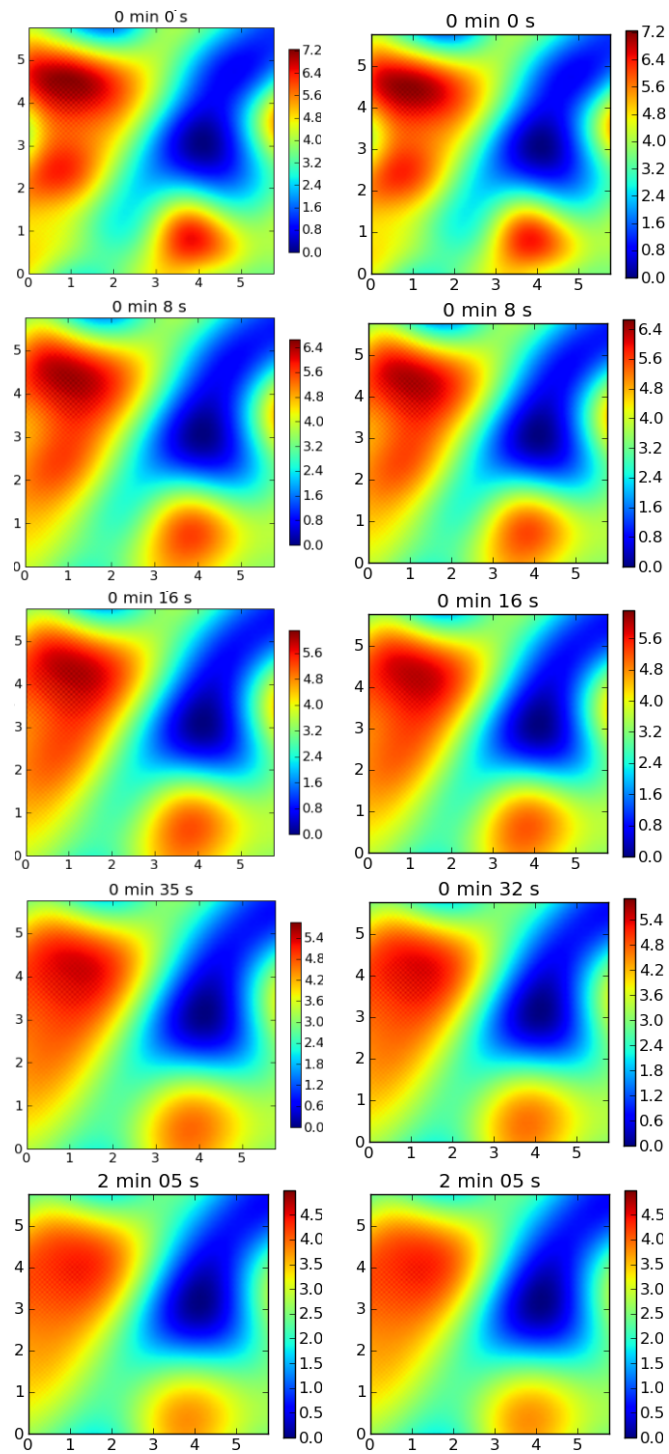
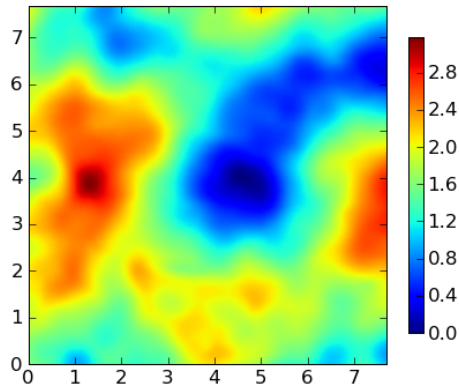
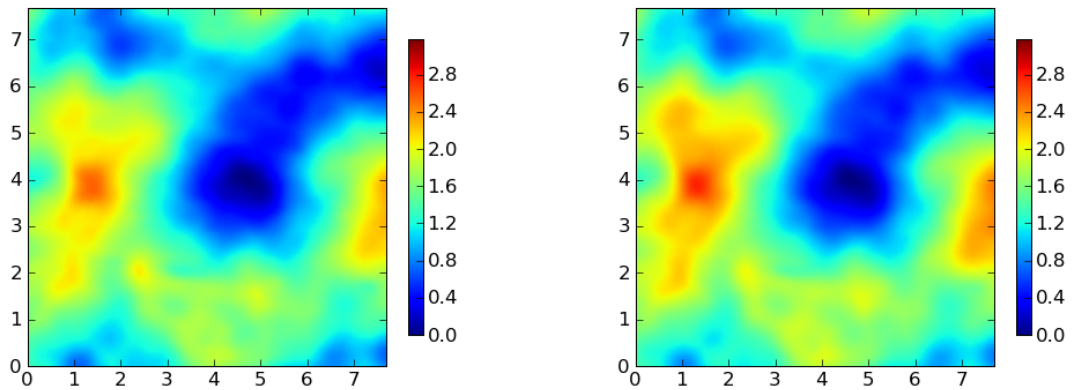


FIGURE 7.18 – Simulation de l'évolution de la topographie de la couche de peinture pour l'expérience LAQ04, avec le modèle newtonien prenant en compte l'effet Marangoni (gauche) ou non (droite). Les dimensions des surfaces sont graduées en mm , l'altitude est donnée en μm .



(a) Topographie du film de peinture mesurée au début de la cuisson. Les dimensions des surfaces sont graduées en mm , et l'altitude en μm .



(b) Evolution de la topographie au cours de la phase de cuisson : la topographie mesurée expérimentalement en fin de cuisson est présentée à gauche, la topographie simulée à droite.

FIGURE 7.19 – Simulation de l'évolution de la topographie de la couche de peinture au cours de la cuisson

reproduits dans la simulation considérée. Nous nous intéresserons dans la suite de ce chapitre à la question de ces motifs. Nous nous contenterons de rappeler que le principal effet physique responsable de leur apparition est la résurgence du substrat sous-jacent qui s'opère en parallèle aux phénomènes d'évaporation de la laque. Dans le cas présent, nous avons fait l'hypothèse que le substrat sur lequel la couche de peinture a été déposée est entièrement lisse. En réalité, il est difficile d'obtenir des tôles parfaitement lisses et les tôles utilisées pour l'expérience possèdent effectivement une très légère rugosité. Nous verrons dans la section 1.5.3 qu'en tenant compte de cette rugosité, il est possible de reproduire les motifs de petite échelle de la tôle dans les simulation.

Les résultats de simulation obtenus en prenant en compte l'effet Marangoni sont présentés sur la figure 7.18, et comparés aux résultats obtenus avec le modèle newtonien. Il apparait que la prise en compte de l'effet Marangoni dans les simulations numériques ne change que très peu les résultats obtenus. Le modèle développé par S.E.Orchard [44] paraît ainsi être suffisant pour expliquer la physique du nivellement de la couche de peinture. De fait, la situation géométrique considérée dans notre cas d'étude est très différente de celles qui ont pu être étudiées, notamment par D.E.Weidner *et al.* [57] ou P.H.Gaskell *et al.* [16]. En effet, dans le cas de la peinture automobile, les fluctuations de l'épaisseur de la couche de peinture sont relativement faibles devant l'épaisseur proprement dite, et le taux d'évaporation et donc a fortiori la concentration en solvant vont rester homogènes dans l'ensemble de la couche de peinture.

La figure 7.19 présente enfin une simulation de l'évolution de la topographie de la couche de peinture au cours de la cuisson. Au cours de cette phase, l'évaporation est prépondérante, de sorte qu'on peut considérer que les effets de l'écoulement sont négligeables. Rappelons que les données expérimentales disponibles perdent en qualité lors de la phase de cuisson : de fait, la couche de peinture tend à devenir de plus en plus diffuse, d'autant plus que le substrat sous-jacent tend légèrement à réapparaître du fait du phénomène d'évaporation. La topographie finale simulée à partir de la topographie expérimentale présentée sur la figure en prenant uniquement en compte le phénomène d'évaporation montre cependant un bon accord avec la topographie expérimentale correspondante, comme on peut le constater sur la figure 7.19 et sur la courbe de M_q présentée sur la figure 7.20.

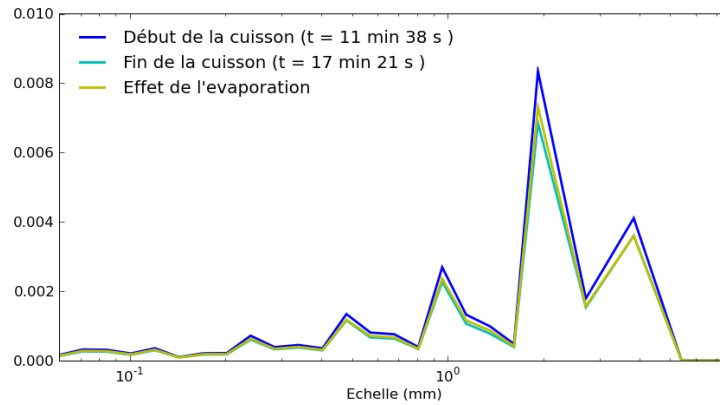


FIGURE 7.20 – Comparaison des courbes de Mq obtenues pour la topographie simulée en prenant uniquement en compte les effets d'évaporation (en jaune) et pour la topographie expérimentale (en vert). La courbe de Mq expérimentale au début de cuisson est représentée en bleu.

7.5.2 Nivellement d'une couche de sealer sur un substrat lisse

Les simulations qui suivent ont été réalisées à partir des données recueillies sur l'expérience SEA05, qui vise à réaliser un suivi de la topographie de la couche de sealer au cours du temps de flash uniquement. Le tableau 7.5 récapitule les paramètres de rhéologie utilisés dans les simulations. Par rapport à l'expérience LAQ04, les paramètres de simulations utilisés varient. La concentration en solvant de la couche de sealer qui a été déposée est plus importante que pour la laque précédente, et, dans le cas du sealer, le paramètre λ caractéristique de la dynamique de l'évaporation de la peinture diffère fortement de celui de la laque. Le cas de l'expérience SEA05 est par conséquent représentatif des phénomènes de nivellement qui interviennent lorsque la peinture est très diluée en solvant, et que le phénomène d'évaporation contribue fortement au nivellement du film, même si l'écoulement reste non négligeable.

| Paramètre | Symbole | Valeur | Unité |
|-----------------------------------|------------|---------------------|---------------|
| Tension de surface de la résine | γ_r | $3,0 \cdot 10^{-2}$ | N/m |
| Tension de surface du solvant | γ_s | $2,5 \cdot 10^{-2}$ | N/m |
| Viscosité initiale de la peinture | η_0 | 0,8 | Pa.s |
| Concentration initiale en solvant | c_0 | 0.71 | - |
| Epaisseur initiale moyenne | e_0 | 45.0 | μm |
| Exposant de la loi de viscosité | a | 15 | - |
| Paramètre de la loi d'évaporation | λ | $8,0 \cdot 10^{-9}$ | m/s |

TABLE 7.5 – Paramètres de simulation

La figure 7.21 présente les résultats de simulation obtenus avec le modèle newtonien pour le début du temps de flash. La topographie de gauche présente la topographie expérimentale, celle du milieu la topographie simulée, et celle de droite la topographie qui aurait été obtenu en considérant uniquement le phénomène d'évaporation. Il apparaît d'emblée

à la vue des topographies obtenues que le nivellement est essentiellement provoqué par l'évaporation. Les effets de l'écoulement sont néanmoins bien visibles, particulièrement dans les dernières topographies. On constate ainsi que les motifs présents initialement sur les tôles ont été légèrement lissés. Il est à cet égard intéressant de considérer l'évolution du motif présent en haut à gauche de la topographie, qui reste très marqué dans les simulations prenant uniquement l'évaporation en compte et qui est entièrement gommé par l'effet de l'écoulement.

Comme l'évaporation est beaucoup plus rapide que dans le cas de la laque, la peinture tend rapidement à devenir très visqueuse pendant le temps de flash, et le phénomène d'écoulement devient très vite négligeable par rapport à l'évaporation. La figure 7.22 présente une simulation de l'évolution de la topographie de la couche de sealer pour la fin du temps de flash. On peut constater que la topographie finale simulée à partir de la topographie expérimentale présentée sur la figure en prenant uniquement en compte le phénomène d'évaporation montre un bon accord avec la topographie expérimentale correspondante.

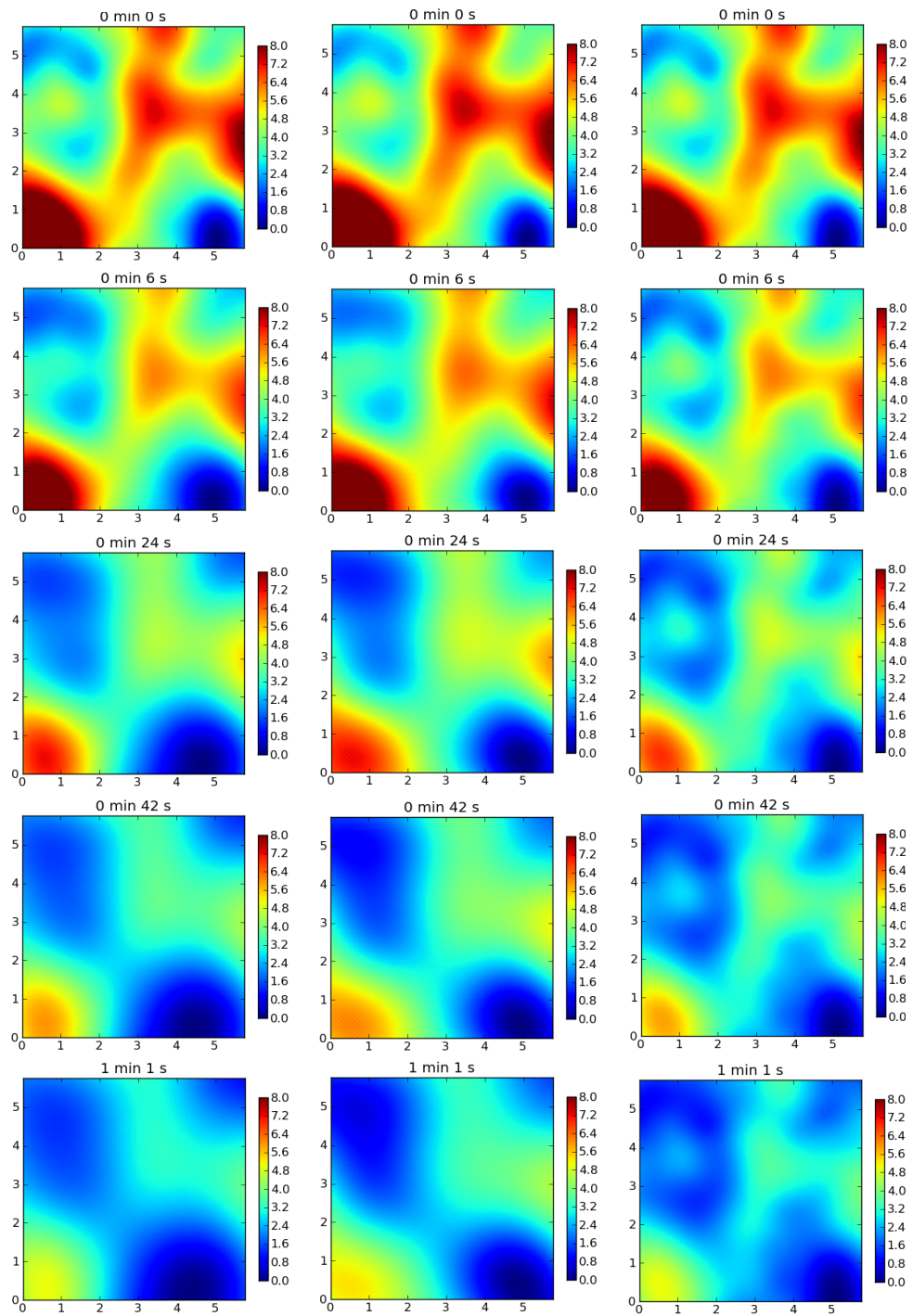
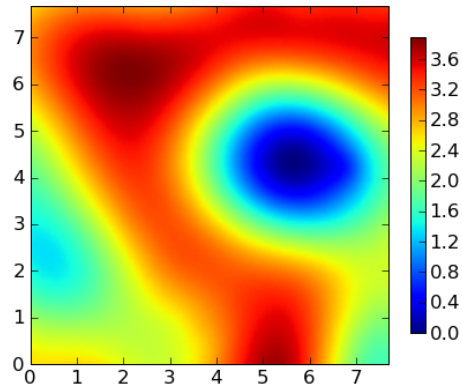
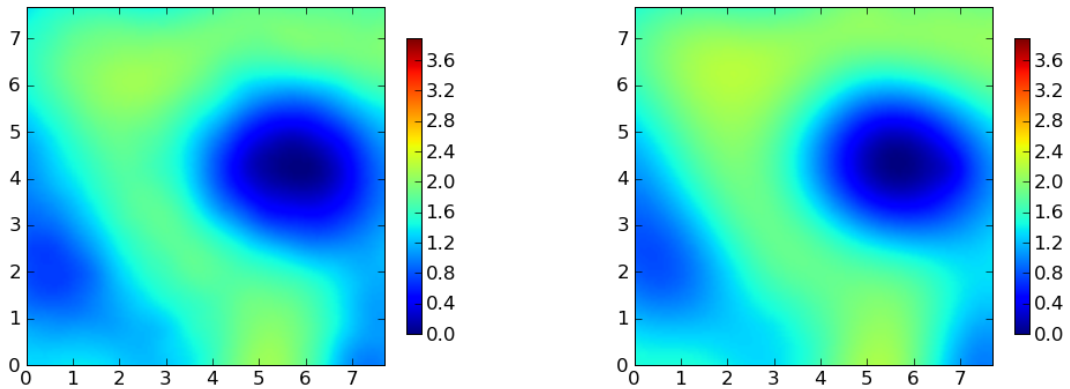


FIGURE 7.21 – Simulation de l'évolution de la topographie de la couche de peinture pour l'expérience SEA05



(a) Topographie du film de peinture mesurée au début de la cuisson. Les dimensions des surfaces sont graduées en mm , et l'altitude en μm .



(b) Evolution de la topographie au cours de la phase de cuisson : la topographie mesurée expérimentalement en fin de cuisson est présentée à gauche, la topographie simulée à droite.

FIGURE 7.22 – Simulation de l'évolution de la topographie de la couche de sealer à la fin du temps de flash, pour l'expérience SEA05

7.5.3 Nivellement d'une couche de laque sur un substrat revêtu de cataphorèse

Nous nous intéressons plus spécifiquement dans les simulations qui suivent à l'influence de la rugosité du substrat sous-jacent sur la topographie finale de la couche de peinture. Ces dernières ont été réalisées à partir des données recueillies sur l'expérience LAQ03, qui vise à réaliser un suivi de la topographie d'une couche de laque déposée sur un substrat cataphorésé au cours du procédé de mise en peinture. Compte-tenu des difficultés opératoires inhérentes aux mesures réalisées avec l'analyseur de front d'onde, il est impossible de connaître avec précision la topographie du substrat sous la couche de peinture. Dans la simulation présentée, cette dernière a été mesurée à l'aide d'un microscope interférométrique, avec un pas de mesure égal à $22 \mu m$. La cartographie obtenue a ensuite été sous-échantillonnée afin que le pas d'échantillonnage corresponde à celui du Phasics. La méthode de sous-échantillonnage consiste à interpoler la surface avec des fonctions splines d'ordre sept, puis à utiliser les valeurs interpolées afin de réaliser le sous-échantillonnage. Une librairie développée par Ph.Thevenaz *el al.* [54] a été utilisée afin de réaliser cette opération. A partir de repères préalablement disposés sur le substrat, on essaye enfin de recalculer au mieux les coordonnées des points du substrat avec ceux de la topographie mesurée. A l'issue de ces opérations, la topographie mesurée par le Phasics et la topographie mesurée du substrat restent cependant décalées d'au moins quelques pixels. Le tableau 7.6 récapitule les paramètres de rhéologie utilisés dans les simulations.

| Paramètre | Symbole | Valeur | Unité |
|-----------------------------------|------------|---------------------|---------|
| Tension de surface de la résine | γ_r | $3,0 \cdot 10^{-2}$ | N/m |
| Tension de surface du solvant | γ_s | $2,5 \cdot 10^{-2}$ | N/m |
| Viscosité initiale de la peinture | η_0 | 0,9 | Pa.s |
| Concentration initiale en solvant | c_0 | 0.58 | - |
| Epaisseur initiale moyenne | e_0 | 45.0 | μm |
| Exposant de la loi de viscosité | a | 19 | - |
| Paramètre de la loi d'évaporation | λ | $4,0 \cdot 10^{-9}$ | m/s |

TABLE 7.6 – Paramètres de simulation

La figure 7.24 présente les résultats de simulation obtenus avec le modèle newtonien au cours du temps de flash. La surface de gauche présente la topographie expérimentale, celle du milieu la topographie simulée, et celle de droite une cartographie de l'erreur locale ϵ , définie en chaque point par la relation (7.32). On constate sur la figure que le modèle newtonien permet de simuler avec précision l'évolution de la topographie du film de laque. En particulier, on retrouve dans les résultats de simulation de la dernière figure les motifs caractéristiques de la résurgence du substrat sous-jacent.

La figure 7.23 compare les courbes de Mq obtenues pour les topographies simulée et expérimentale. Cette figure permet de mettre en évidence l'influence de la rugosité du substrat sous-jacent pour les petites échelles de la simulation : on constate bien qu'en prenant en compte cette rugosité, il est possible de simuler la résurgence des motifs de petites échelles sur la tôle.

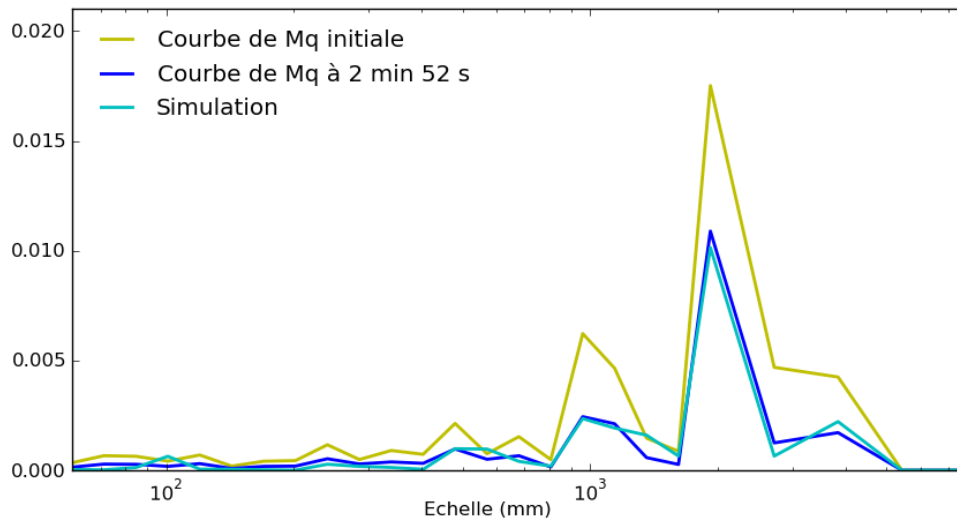


FIGURE 7.23 – Comparaison des courbes de Mq obtenues pour la topographie simulée (en vert) et pour la topographie expérimentale (en jaune)

7.5.4 Nivellement d'une couche de laque sur un substrat incliné

Nous présentons dans cette dernière section les résultats de simulation obtenus pour un des écoulements sur plan incliné. Les simulations ont été réalisées à partir des données recueillies sur l'expérience LAQ02, qui vise à réaliser un suivi de la topographie d'une couche de laque déposée sur un substrat lisse incliné de 45° au cours du procédé de mise en peinture. La méthode présentée plus haut afin de déterminer la loi d'évaporation et par conséquent les concentrations initiales en solvant et résine est inopérante dans le cas des écoulements sur substrat incliné, puisqu'outre l'évaporation, la gravité agit sur les grandes longueurs d'onde. Plusieurs jeux de paramètres ont été utilisés pour réaliser différentes simulations, inspirés des résultats obtenus dans le cas horizontal. Le tableau 7.7 récapitule les paramètres de rhéologie finalement retenus. Seul le paramètre de la loi d'évaporation λ a dû être modifié par rapport aux simulations précédentes.

Au cours de l'écoulement du film, dans le cas incliné, du fait de l'action de la gravité, on observe au début du temps de flash un écoulement de grande échelle de la couche de peinture. Cet écoulement se ralentit très rapidement, jusqu'à devenir négligeable, et on retrouve alors une dynamique de nivellement quasiment similaire à celle qui caractérise les écoulements sur un substrat horizontal. Au cours des expériences réalisées avec l'analyseur de front d'onde, la peinture utilisée pour les substrats inclinés a été un peu trop diluée, de sorte que le phénomène d'écoulement global du film est très exagéré par rapport au cas de la peinture automobile. L'objectif de cette section est par conséquent de montrer que d'un point de vue qualitatif, le modèle newtonien présenté dans le chapitre 5 de la thèse permet de reproduire les principaux phénomènes physiques qu'on peut observer dans l'écoulement, et en particulier l'écoulement global à grande échelle de la couche de peinture.

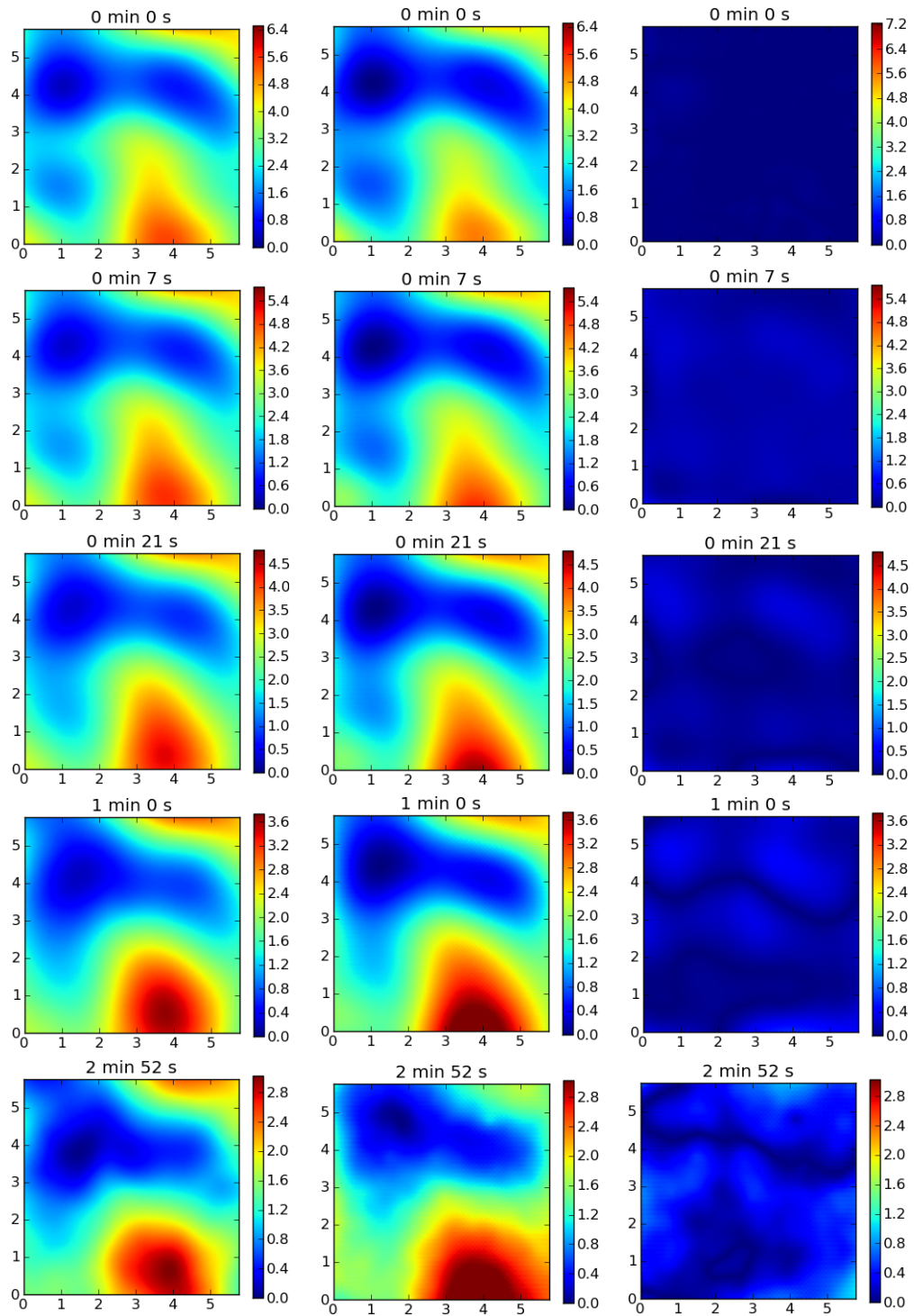


FIGURE 7.24 – Simulation de l'évolution de la topographie de la couche de peinture pour l'expérience LAQ03. Les dimensions des surfaces sont graduées en mm , l'altitude est donnée en μm .

| Paramètre | Symbole | Valeur | Unité |
|-----------------------------------|------------|---------------------|---------------|
| Tension de surface de la résine | γ_r | $3,0 \cdot 10^{-2}$ | N/m |
| Tension de surface du solvant | γ_s | $2,5 \cdot 10^{-2}$ | N/m |
| Viscosité initiale de la peinture | η_0 | 0,9 | Pa.s |
| Concentration initiale en solvant | c_0 | 0.58 | - |
| Epaisseur initiale moyenne | e_0 | 45.0 | μm |
| Exposant de la loi de viscosité | a | 19 | - |
| Paramètre de la loi d'évaporation | λ | $3,0 \cdot 10^{-9}$ | m/s |

TABLE 7.7 – Paramètres de simulation

La figure 7.25 présente les résultats de simulation obtenus avec le modèle newtonien au cours du temps de flash. La surface de gauche présente la topographie expérimentale, celle du milieu la topographie simulée, et celle de droite une cartographie de l'erreur locale ϵ , définie en chaque point par la relation (7.32). On constate bien sur la figure que le modèle newtonien permet de simuler l'évolution de la topographie du film de laque, et en particulier l'écoulement global de la couche de peinture. Les simulations réalisées sont cependant moins précises que dans le cas horizontal. De fait, comme cela a été mentionné ci-dessus, les paramètres de rhéologie n'ont pu qu'être estimés pour ces expériences, et non pas mesurés directement sur les données expérimentales.

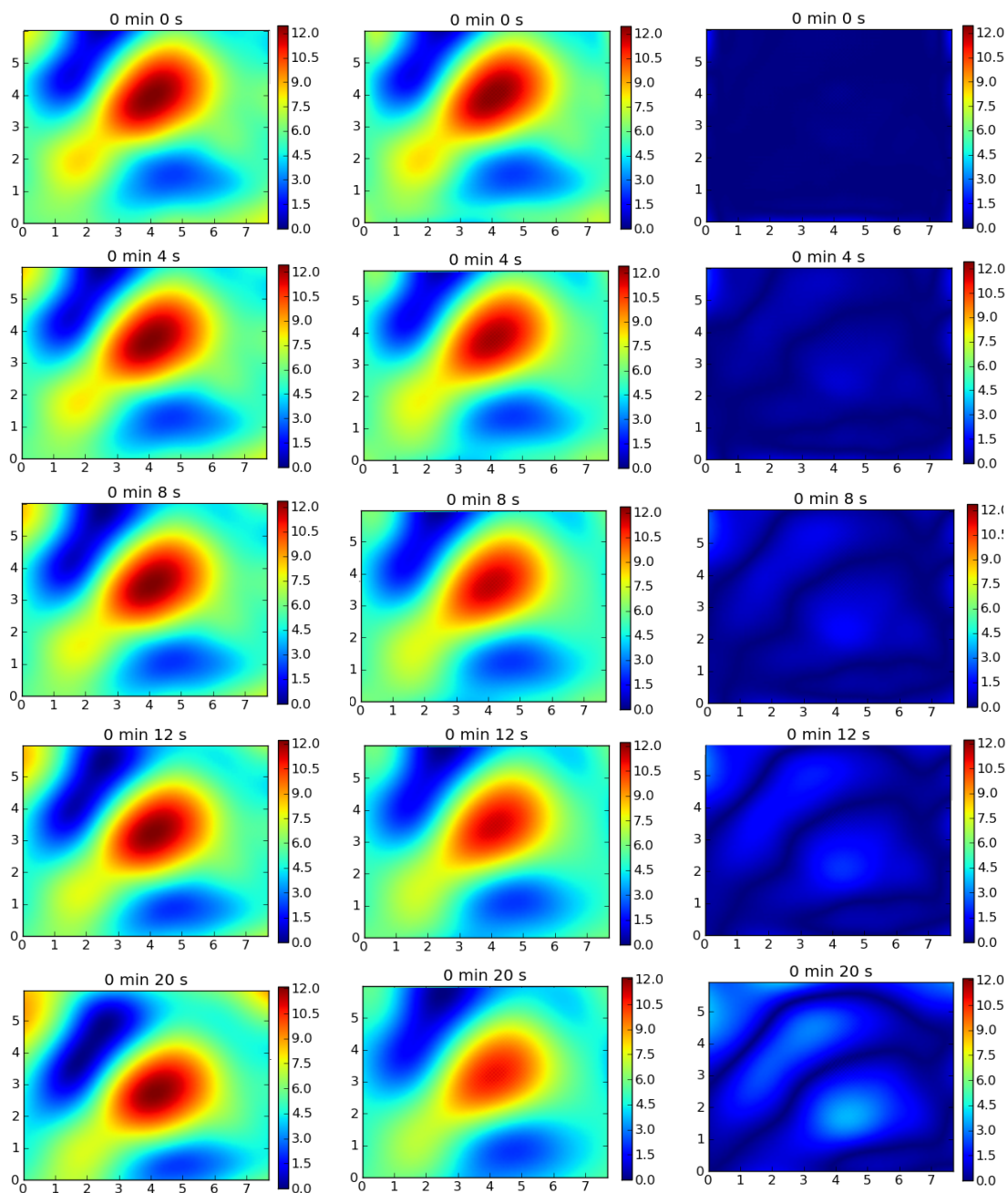


FIGURE 7.25 – Simulation de l'évolution de la topographie de la couche de peinture pour l'expérience LAQ02 (substrat incliné) : les topographies expérimentales (gauche) sont comparées aux topographies simulées (centre). Une cartographie de l'erreur locale est également représentée (droite). Les dimensions des surfaces sont graduées en mm , l'altitude est donnée en μm .

7.6 Conclusion et perspectives

Nous nous étions proposé dans ce chapitre d'aborder la problématique de la rhéologie de la peinture automobile d'un point de vue expérimental à l'aide de mesures obtenues en utilisant un analyseur de front d'onde développé par la société PhasicsTM. La dynamique élevée de cet appareil a permis de réaliser un suivi très précis de l'évolution de la topographie de couches de peintures, et d'obtenir de cette manière des données expérimentales de grande qualité. Une méthode inverse a été développée, qui se heurte à un certain nombre de limitations (influence du bruit de mesure, problématique de la forme de la surface) mais qui a tout de même permis, d'une part de valider l'hypothèse d'une rhéologie newtonienne de la laque et du sealer pour les taux de cisaillement caractéristiques des échelles de longueur étudiées, et d'autre part de déterminer à partir des topographies reconstruites par l'analyseur de front d'onde un certain nombre de paramètres rhéologiques de la peinture. En utilisant ces paramètres et le code numérique présenté dans l'annexe A de la thèse, il a été possible de reproduire avec précision l'évolution des topographies mesurées pour l'ensemble des données expérimentales recueillies.

Les résultats présentés dans ce chapitre ne permettent cependant pas encore de valider complètement l'utilisation du modèle développé dans le chapitre 5 de la thèse dans le cas de la laque et du sealer. Ainsi, il n'a pas été possible au cours de la présente thèse de réaliser des mesures expérimentales directes des paramètres rhéologiques mis en jeu, qui soient en mesure de confirmer les valeurs obtenues en résolvant le problème inverse présenté dans ce chapitre. Ces mesures présentent de fait de nombreuses difficultés, notamment parce qu'il convient de les réaliser en restant dans la configuration géométrique très particulière des films minces. Dans le cas des écoulements sur substrats inclinés, la base de données expérimentales reste de plus très incomplète pour permettre une validation du modèle.

Outre ces aspects expérimentaux, il convient de rappeler que la peinture utilisée dans l'industrie automobile reste un produit extrêmement complexe du point de vue de sa composition. Les modèles développés dans le cadre de cette thèse se basent sur des hypothèses très simplificatrices concernant la composition de la peinture, et ne peuvent donc prétendre s'appliquer qu'à des échelles horizontales de l'ordre de la centaine de microns. Les possibilités de mesure de l'analyseur de front d'onde utilisé dans la thèse donnent cependant envie d'aller voir plus en avant les phénomènes de nivellement qui s'opèrent à des échelles horizontales plus fines, où il est très probable que la peinture adopte un comportement rhéologique beaucoup plus complexe.

Troisième partie

Modélisation de l'aspect peint

Chapitre 8

Modèles optiques

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la physique de l'interaction entre la lumière et la tôle revêtue, en vue d'arriver à un premier modèle à même de caractériser l'aspect peint. L'étude de la physique de l'interaction de la lumière et de la tôle revêtue peut se faire sous de nombreux angles. Nous nous proposons dans le cadre de cette thèse de modéliser la propagation de la lumière entre sa source, la surface considérée et l'oeil d'un l'observateur, laissant ainsi de côté de nombreuses questions relatives aux phénomènes de couleur, de polarisation, ou encore aux phénomènes physiologiques et psychologiques de perception de la lumière lorsqu'elle parvient aux yeux de l'observateur. Le lecteur intéressé par ces problématiques dans le cadre des surfaces d'acier rugueuses pourra se référer au manuscrit de thèse de V. Goossens [18].

La lumière possède un comportement complexe, qui peut être appréhendé tantôt par le biais d'une description corpusculaire (optique géométrique), tantôt par le biais d'une description ondulatoire (optique ondulatoire). Ces deux descriptions, complémentaires, conduisent à mettre en oeuvre des méthodes de simulations bien spécifiques.

L'optique géométrique s'attache à décrire le trajet de la lumière par de simples relations géométriques et s'appuie sur des principes empiriques simples : le principe de propagation rectiligne de la lumière dans un milieu homogène et isotrope, et le principe du retour inverse de la lumière, qui exprime la réciprocité du trajet de la lumière entre source et destination. Les phénomènes de réflexion et de réfraction sont décrits par les lois de Snell-Descartes, illustrées sur la figure 8.1, et auxquelles correspondent les équations :

$$\begin{cases} \Theta_i = \Theta_s \\ n_1 \sin(\Theta_i) = n_2 \sin(\Theta_r) \end{cases} \quad (8.1)$$

où Θ_i désigne l'angle que forme le rayon incident avec la normale \mathbf{n} à la surface, Θ_r l'angle que forme le rayon réfléchi avec \mathbf{n} , et Θ_s l'angle que forme le rayon réfracté avec \mathbf{n} . n_1 et n_2 désignent les indices de réfraction des milieux qui se trouvent de part et d'autre de l'interface.

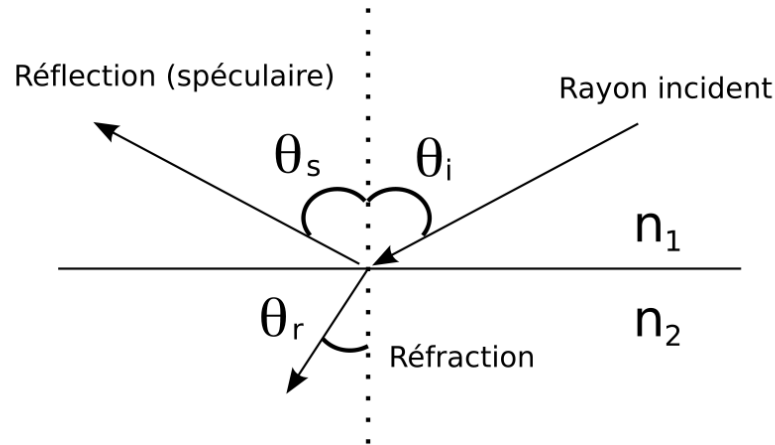


FIGURE 8.1 – Relations de Snell-Descartes

Les énergies lumineuses réfléchie E_r et transmise E_t se déduisent de l'énergie lumineuse incidente à l'aide des relations de Fresnel :

$$\begin{cases} E_r = \frac{n_1 \cos(\Theta_i) - n_2 \cos(\Theta_r)}{n_1 \cos(\Theta_i) + n_2 \cos(\Theta_r)} E_i \\ E_t = \frac{2n_1 \cos(\Theta_i)}{n_1 \cos(\Theta_i) + n_2 \cos(\Theta_r)} E_i \end{cases} \quad (8.2)$$

L'optique géométrique est valide tant que l'on ne cherche pas à modéliser des phénomènes liés à la polarisation ou aux interférences et qu'aucune dimension du système n'est comparable ou inférieure à la longueur d'onde de la lumière utilisée.

L'optique physique se fonde sur la description de la lumière comme onde électromagnétique. Le cheminement de la lumière dans l'espace est décrit dans ce contexte par les équations de Maxwell. L'optique physique permet d'expliquer les phénomènes de couleur, d'interférence ou de diffraction. Le lecteur intéressé par l'application des équations de Maxwell à l'étude des propriétés optiques des surfaces rugueuses pourra se référer à la thèse d'A.Aubert [1]. Dans cette thèse, il est montré qu'une approche basée sur l'optique géométrique permet de caractériser de manière satisfaisante l'interaction de la lumière avec ces surfaces, et nous nous placerons donc dans tout ce qui suit dans le cadre de l'optique géométrique.

8.1 Rappels de radiométrie

La problématique à laquelle nous nous intéressons dans le cadre de cette thèse relève d'un domaine particulier de l'étude des phénomènes lumineux : la radiométrie. La radiométrie s'intéresse à la détermination, pour une scène donnée, de la répartition d'énergie

lumineuse dans l'espace. Si on intègre un observateur (capteur d'une caméra, oeil, etc...) à la scène, cette répartition de l'énergie va permettre de synthétiser l'image perçue par cet observateur. Nous présentons dans cette section les principales notions de la radiométrie, en renvoyant le lecteur intéressé par une présentation plus détaillée au livre de P.Dutré, K.Bala et Ph.Bekaert [8].

8.1.1 Grandeurs radiométriques

La grandeur fondamentale en radiométrie est le *flux d'énergie lumineuse* Φ , qui s'exprime en watts (Joules/sec). Cette quantité caractérise le flux d'énergie lumineuse qui traverse une surface par unité de temps. L'*éclairement* E , exprimé en watts/m², correspond au flux d'énergie lumineuse reçu par unité de surface :

$$E = \frac{d\Phi_{incident}}{dA} \quad (8.3)$$

La *radiosité* B , qui s'exprime également en watts/m², correspond au flux d'énergie lumineuse émis par unité de surface.

$$B = \frac{d\Phi_{emis}}{dA} \quad (8.4)$$

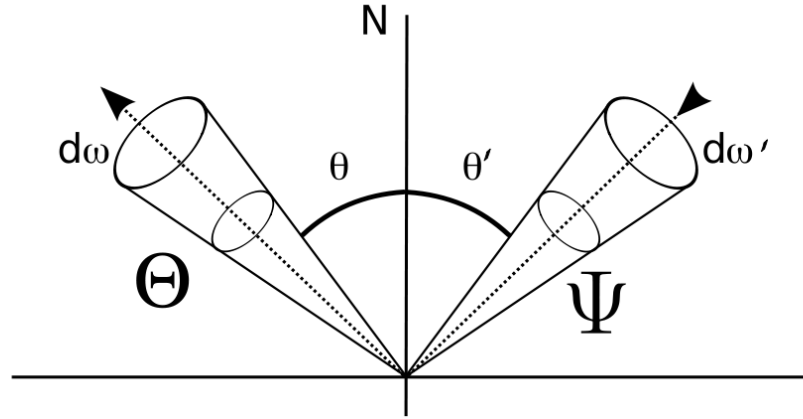
Des grandeurs comme l'éclairement ou la radiosité, si elles sont bien adaptées en vue de réaliser des bilans d'énergie sur des surfaces, ne donnent ni accès à la provenance des flux, ni à leur destination. Dès lors, même des lois macroscopiques simples comme les lois de Snell-Descartes ne peuvent permettre d'exploiter des informations aussi synthétiques. Afin de pouvoir caractériser les transferts d'énergie en tenant compte de leurs directions d'incidence et d'émission, il convient donc d'introduire la notion de *luminance*. La *luminance émise* L correspond au flux d'énergie lumineuse émis par unité de surface et par angle solide, et s'exprime en watts/(steradian.m²).

$$L = \frac{d^2\Phi}{d\omega dA \cos \Theta} \quad (8.5)$$

La luminance est définie de manière similaire dans le cas de la lumière incidente. Pour distinguer les deux luminances, une notation classique consiste à désigner par $L(x \rightarrow \Theta)$ la luminance émise vers l'angle solide porté par la direction Θ et $L(x \leftarrow \Psi)$ celle reçue depuis l'angle solide porté par la direction Ψ .

8.1.2 Interaction entre la lumière et les surfaces

L'énergie lumineuse émise dans une scène interagit avec la surface des objets présent dans cette dernière. Le comportement optique des matériaux présents dans la scène affecte profondément l'apparence de ces derniers. Ainsi, deux matériaux aux comportements

FIGURE 8.2 – Luminances émise (gauche) et reçue (droite) dans les directions respectives Θ et Ψ

optiques différents auront des apparences bien distinctes dans de mêmes conditions d'illumination.

Dans le cas le plus général, la lumière arrive sur une surface donnée en un point x de la direction incidente Ψ et repart de la surface en un point y dans la direction Θ . Supposons que la lumière reparte du même endroit où elle est arrivée sur la surface, avec la même longueur d'onde et de manière instantanée. Dans le cadre tracé par ces hypothèses, les propriétés de réflexion de la surface sont décrites par une fonction appelée *bidirectional reflectance distribution function* (BRDF). La BRDF est définie comme le ratio entre la luminance infinitésimale reflétée dans la direction Θ et la luminance infinitésimale reçue à travers l'angle solide $d\omega_{\Psi}$:

$$f_r(x, \Psi \rightarrow \Theta) = \frac{dL(x \rightarrow \Theta)}{dE(x \leftarrow \Psi)} = \frac{dL(x \rightarrow \Theta)}{L(x \leftarrow \Psi) \cos(\mathbf{N}_x, \Psi) d\omega_{\Psi}} \quad (8.6)$$

La BRDF est une fonction quadridimensionnelle définie en tout point de la surface ; deux dimensions correspondent à la direction du rayon incident, et deux à la direction du rayon réfléchi. Elle obéit au principe de réciprocité de Helmholtz ; intuitivement, inverser le sens de la propagation de la lumière ne change pas la quantité de lumière réfléchi :

$$f_r(x, \Psi \rightarrow \Theta) = f_r(x, \Theta \rightarrow \Psi) = f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) \quad (8.7)$$

Un exemple de BRDF est donné par les matériaux diffus. Ces matériaux diffusent la lumière de manière uniforme sur la totalité de l'hémisphère. On parle alors de comportement lambertien. Pour un éclairage donné, la radiance réfléchi est donc complètement isotrope. La BRDF de ces matériaux est constante quelles que soient les directions incidente et de réflexion :

$$f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) = \frac{\rho_d}{\pi} \quad (8.8)$$

où la réflectance ρ_d représente la fraction d'énergie incidente qui est réfléchiée par la surface.

Si on prend en compte le fait que la lumière puisse sortir en un point y différent du point d'entrée x , le comportement du matériaux est modélisé par une fonction appelée *bidirectional surface scattering reflectance distribution function* (BSSRDF). La BSSRDF est définie par la relation :

$$R_{dr}(x, y, \Psi \leftrightarrow \Theta) = \frac{dL(y \rightarrow \Theta)}{dE(x \leftarrow \Psi)} = \frac{dL(y \rightarrow \Theta)}{L(x \leftarrow \Psi) \cos(\mathbf{N}_x, \Psi) d\omega_\Psi} \quad (8.9)$$

8.1.3 Equation du rendu

L'étude de la répartition de l'énergie lumineuse est basiquement un problème de transport. L'énergie émise par les sources lumineuses est en effet transportée par le biais de réflexions et réfractions dans l'environnement tridimensionnel de la scène étudiée. L'équation du transport utilisée pour décrire le problème d'illumination est appelée *l'équation du rendu*. La luminance qui quitte un point x quelconque de la scène dans la direction Θ est donnée, en vertu du principe de conservation de l'énergie lumineuse, par la relation :

$$L(x \rightarrow \Theta) = L_e(x \rightarrow \Theta) + \int_{\Omega_x} f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L(x \leftarrow \Psi) \cos(N_x, \Psi) d\omega_\Psi \quad (8.10)$$

Le premier terme du membre de droite traduit l'émission de luminance au point x dans la direction Θ . L'émission peut être due à divers phénomènes physiques (chaleur, réactions chimiques, etc...). Le second terme caractérise les phénomènes de transmission dans la direction Θ de la luminance incidente au point x . L'intégration des différentes luminances incidentes se fait sur l'ensemble des directions de l'hémisphère qui surplombent le point x .

8.1.4 Equation du rendu dans un milieu participatif

L'équation (8.10) permet de modéliser le transport de l'énergie lumineuse dans le vide. Dans le cas de la peinture automobile, lorsqu'un rayon lumineux arrive au contact de la tôle, une partie de la lumière pénètre à l'intérieur de la fine couche de peinture et subit un nombre important de collisions avant de finalement ressortir. Ce phénomène est connu sous le nom de sub-scattering ou diffusion interne. Pour le décrire, il est nécessaire de prendre en compte les propriétés optiques du milieu qui participent au transport de l'énergie lumineuse. Dans un milieu participatif, quatre phénomènes viennent impacter le transport de l'énergie lumineuse : l'émission volumique, l'absorption, l'out-scattering et l'in-scattering.

Emission La création d'énergie lumineuse par le milieu est caractérisée par *l'émittance volumique*. Cette grandeur, exprimée en watts/m³, indique combien de photons sont émis par unité de volume et de temps en un point du milieu. Dans le cas de la peinture, le terme d'émission volumique est nul.

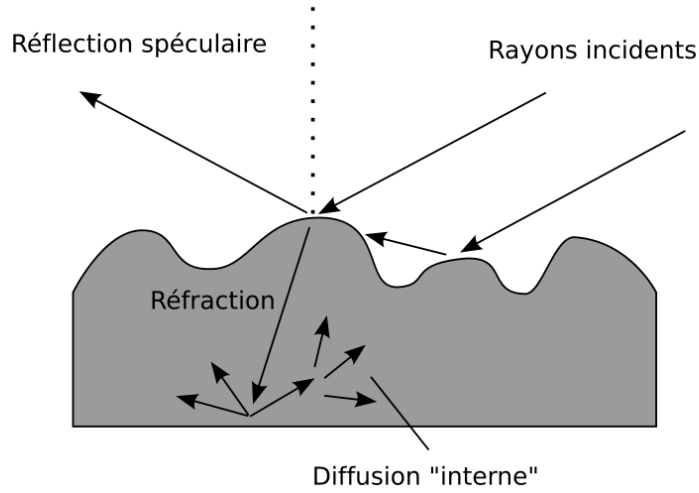


FIGURE 8.3 – Phénomène de subsattering au sein de la couche de peinture

Absorption Au cours de leur propagation, les photons qui traversent le milieu entrent en collisions avec les atomes qui constituent ce dernier. Lors d'une collision, le photon peut être dévié, ou absorbé par le milieu, par exemple sous forme d'énergie cinétique. La probabilité qu'un photon soit absorbé par le milieu dans sa direction de propagation est décrite par le coefficient d'absorption σ_a ([1/m]). La probabilité qu'un photon qui parcourt une distance Δx dans le milieu soit absorbé est ainsi $\sigma_a \Delta x$. On vérifie donc, en présence d'absorption :

$$L(x + \Delta x, \Theta \rightarrow \Theta) = L(x, \Theta \rightarrow \Theta) - L(x, \Theta \rightarrow \Theta) \sigma_a(x) \Delta x \quad (8.11)$$

Lorsque $\Delta x \rightarrow 0$, on obtient l'équation différentielle qui suit :

$$\frac{dL(x \rightarrow \Theta)}{dx} = -\sigma_a(x) L(x \rightarrow \Theta) \quad (8.12)$$

On en déduit, en posant $z = x + \Delta x \Theta$:

$$L(z \rightarrow \Theta) = L(x \rightarrow \Theta) \exp \left(- \int_0^{\Delta x} \sigma_a(x + t \Theta) dt \right) \quad (8.13)$$

Out-Scattering Lorsqu'un photon entre en collision avec un élément du milieu, il peut être dévié dans une autre direction. L'effet est le même que pour l'absorption. Le phénomène d'out-scattering est donc, à l'instar de l'absorption, décrit par un coefficient de scattering, noté σ_s [1/m]. Il peut être pratique de définir un coefficient commun

pour décrire les phénomènes d'out-scattering et d'absorption, le coefficient d'extinction $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$. Ce coefficient correspond à la probabilité qu'un photon entre en collision avec le milieu. Afin de distinguer les phénomènes de scattering et d'absorption, on introduit un coefficient d'albedo, défini par $\alpha = \sigma_s/\sigma_t$, qui décrit l'importance relative du scattering vis à vis de l'absorption. On vérifie, en présence des phénomènes d'absorption et d'out-scattering :

$$L(x \rightarrow \Theta) = L(x \rightarrow \Theta) \exp\left(-\int_0^s \sigma_t(x + t\Theta) dt\right) \quad (8.14)$$

In-Scattering De la même manière que pour le phénomène d'out-scattering, des photons peuvent suite à une interaction avec le milieu se diriger dans la direction sur laquelle s'effectue le bilan. Ce phénomène dit d'in-scattering est décrit par un terme volumique $L^{vi}(z \rightarrow \Theta)$ ($[W/m^3sr]$). Afin de décrire le phénomène d'in-scattering, on introduit une fonction de phase $p(z, \Psi \leftrightarrow \Theta)$, qui exprime la probabilité qu'un photon qui se déplace initialement dans la direction Ψ se retrouve après collision avec le milieu dans la direction Θ . En introduisant le coefficient de scattering, on obtient, en intégrant dans toutes les directions :

$$L^{vi}(x \rightarrow \Theta) = \sigma_s(x) \int_{\Omega} p(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L(x \rightarrow \Psi) d\omega_{\Psi} \quad (8.15)$$

Equation du rendu La variation du flux d'énergie lumineuse dans une direction donnée Ψ est, en régime stationnaire, $\Psi \cdot \nabla L(x, \Psi)$. L'équation du rendu exprime la conservation du flux d'énergie lumineuse dans la direction spécifiée.

$$\Psi \cdot \nabla L(x, \Psi) = -\sigma_t L(x, \Psi) + Q(x, \Psi) + \sigma_s \int_{\Omega} p(x, \Theta \leftrightarrow \Psi) L(x \rightarrow \Theta) d\omega_{\Theta} \quad (8.16)$$

8.1.5 De l'équation du rendu à l'équation de la diffusion

La résolution de l'équation du rendu au sein d'un milieu participatif s'avère complexe dans le cas général. Sous certaines hypothèses, que nous détaillerons dans la suite de cet exposé, il est possible de ramener la modélisation de l'effet de la diffusion interne au problème plus simple de la résolution de l'équation de la diffusion.

Dans l'équation du rendu, il peut être intéressant de séparer la luminance en deux composantes : la radiance incidente réduite L_{ri} et la luminance diffuse L_d .

Luminance réduite La luminance incidente réduite correspond à la luminance qui pénètre dans le milieu et est atténuée par les effets conjugués de l'absorption et de l'out-scattering. Considérons ainsi un rayon qui arrive sur le milieu au point x_0 dans la direction Ψ . L'intensité réduite au point $x = x_0 + \Delta x \Psi$ est, en notant σ_t le coefficient d'extinction de la lumière dans le milieu :

$$L_{ri}(x \rightarrow \Psi) = L_{ri}(x_0, \Psi) \exp \left(- \int_0^{\Delta x} \sigma_t(x_u) du \right) \quad (8.17)$$

Luminance diffuse La luminance diffuse correspond quant à elle à la partie de l'intensité créée au sein du milieu par le phénomène de scattering. Il n'existe pas de formulation analytique explicite de la luminance diffuse. Dans une direction donnée Ψ , la variation de l'intensité réduite est décrite en régime stationnaire par la quantité $\Psi \cdot \nabla L_d$. En utilisant la loi de conservation de l'énergie lumineuse, on obtient :

$$\begin{aligned} \Psi \cdot \nabla L_d = & -\sigma_t L_d + \sigma_s \int_{4\pi} p(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L_{ri}(x \rightarrow \Theta) d\omega_{\Theta} + \\ & + \sigma_s \int_{4\pi} p(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L_d(x \rightarrow \Theta) d\omega_{\Theta} \end{aligned} \quad (8.18)$$

Approximation de la diffusion Dans des milieux où le nombre de collisions est très important, la dépendance angulaire de la luminance diffuse tend à se lisser. L'approximation de la diffusion consiste à ne considérer qu'une dépendance angulaire au premier ordre. La formule de Taylor permet d'écrire dans ce contexte :

$$L_d(x \rightarrow \Psi) = \frac{1}{4\pi} \phi(x) + \frac{3}{4\pi} \mathbf{E}(x) \cdot \Psi \quad (8.19)$$

En injectant cette approximation de la luminance dans le membre de gauche de l'équation, il vient :

$$\Psi \cdot \nabla L_d = \frac{1}{4\pi} \Psi \cdot \nabla \phi + \frac{3}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (8.20)$$

La fonction de phase $p(x, \Psi \leftrightarrow \Theta)$ dépend de la quantité $\Theta \cdot \Psi$. Il est par conséquent possible de développer cette fonction sur une base $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de Legendre :

$$p(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) = \sum_{n=0}^N \left(\int_{-1}^1 p(x, \Theta \cdot \Psi) P_n(\Theta \cdot \Psi) d(\Theta \cdot \Psi) \right) P_n(\Theta \cdot \Psi) \quad (8.21)$$

Limitons-nous aux deux premiers termes du développement. On vérifie alors :

$$p(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) \approx \frac{1}{4\pi} + \frac{\bar{\mu}}{4\pi} \Theta \cdot \Psi \quad (8.22)$$

où :

$$\bar{\mu} = \int_{-1}^1 (\Theta \cdot \Psi) p(\Theta \cdot \Psi) d(\Theta \cdot \Psi) \quad (8.23)$$

La terme de scattering du membre de droite s'écrit par conséquent :

$$\sigma_s \int_{4\pi} p(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L_d(x \rightarrow \Theta) d\omega_{\Theta} \approx \sigma_s \left(\frac{1}{4\pi} \phi + \frac{\bar{\mu}}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \Psi \right) \quad (8.24)$$

Enfin, on peut réécrire le terme de source sous la forme :

$$\sigma_s \int_{4\pi} p(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L_{ri}(x \rightarrow \Theta) d\omega_{\Theta} = Q_{ri}^0 + \Psi \cdot \mathbf{Q}_{ri}^1 \quad (8.25)$$

On en déduit, en identifiant les termes de même ordre en Ψ :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = -\sigma_a \phi - Q_{ri}^0 \\ \nabla \phi = -\sigma'_t \mathbf{E} + \mathbf{Q}_{ri}^1 \end{cases} \quad (8.26)$$

où σ'_t est défini par la relation :

$$\sigma'_t = \sigma_s(1 - \bar{\mu}) + \sigma_a \quad (8.27)$$

En combinant les deux relations précédentes, il vient :

$$D \Delta L_d^0(x) - \sigma_a L_d^0(x) = S(x) \quad (8.28)$$

où $D = \frac{1}{3\sigma'_t}$ et $S(x) = Q_{ri}^0 - D \nabla \cdot \mathbf{Q}_{ri}^1$.

Au sein du film de peinture, la luminance diffuse est donc, à l'ordre 0, solution de l'équation de la diffusion.

8.2 Modèle de simulation de l'aspect peint

En radiométrie, on définit une scène comme un arrangement donné de plusieurs objets, qui met en oeuvre des éléments de trois types : les sources de lumière, les capteurs sur lesquels la synthèse d'image est effectuée, et les surfaces dont nous cherchons à simuler l'aspect peint. Du fait du phénomène de sub-scattering, l'aspect des surfaces que nous étudions est assez brillant sans être totalement spéculaire, puisque le sub-scattering provoque un effet de diffusion de la lumière. Nous nous intéressons dans cette section au développement d'un modèle de simulation de l'effet du sub-scattering sur l'aspect optique de la tôle revêtue.

8.2.1 Modélisation physique du phénomène de sub-scattering

Il est possible de simuler de manière exacte le phénomène de sub-scattering en résolvant l'équation du rendu dans les milieux participatifs. Une telle approche, si elle permet de simuler de manière très précise les phénomènes physiques qui se produisent au sein du film, s'avère très coûteuse en terme de temps de calcul, puisque les rayons lumineux subissent parfois jusqu'à des centaines de collisions dans la fine couche de peinture. Cependant, nous avons vu en début de chapitre que la dépendance angulaire du faisceau lumineux issu du phénomène de sub-scattering tend à se lisser. En considérant uniquement une dépendance au premier ordre en la variable angulaire, le phénomène de sub-scattering se ramène à la résolution de l'équation de la diffusion.

Nous présentons dans la suite une méthode de résolution analytique de cette équation pour des géométries approchées de la couche de peinture : la courbure de la surface libre de la peinture étant supposée négligeable devant la section efficace de la lumière dans la peinture, nous ferons l'hypothèse que la surface de la couche de peinture est entièrement plane afin de déterminer le BSSRDF de la surface étudiée.

Conditions aux limites du problème considéré Les conditions aux limites du problème considéré s'obtiennent en annulant le flux de luminance diffuse qui pénètre dans le milieu dans chaque direction. Etant donné que la luminance diffuse est uniquement approchée à l'ordre un par rapport à la variable angulaire, il n'est pas possible de satisfaire exactement à cette condition. On supposera donc que le flux global de luminance diffuse qui pénètre en un point donné est égal à la luminance diffuse qui résulte de la réflexion de la luminance sortante. Cette condition s'écrit, en utilisant les relations de Fresnel :

$$\int_{\Omega^-} L(x_s \leftarrow \Theta)(\Theta \cdot \mathbf{n}_-) d\Theta = F_{dr} \int_{\Omega^+} L(x_s \rightarrow \Theta)(\Theta \cdot \mathbf{n}_+) d\Theta \quad (8.29)$$

En utilisant la relation (8.19), on vérifie que :

$$\phi(x_s) - \left(\frac{1 + F_{dr}}{1 - F_{dr}} \right) D(\mathbf{n} \cdot \nabla \phi)(x_s) = \phi(x_s) - AD(\mathbf{n} \cdot \nabla \phi)(x_s) = 0 \quad (8.30)$$

Solution de Green de l'équation de la diffusion Commençons par nous intéresser à une configuration géométrique bien spécifique du problème, en supposant que le terme source est ponctuel, $S(x) = \delta(x)$, et que les conditions aux limites sont fixées dans l'espace tout entier en supposant que la solution G_d de ce problème s'annule à l'infini. Le problème s'écrit, sous une forme mathématique, en posant $\sigma_{tr} = \sqrt{3\sigma_t'\sigma_a}$:

$$\begin{cases} \Delta G_d(\mathbf{x}) - \sigma_{tr}^2 G^0(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} G^0(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (8.31)$$

On montre aisément que la fonction (8.32) est solution du problème considéré.

$$G_d(\mathbf{x}) = \frac{e^{-\sigma_{tr}\|\mathbf{x}\|}}{\|\mathbf{x}\|} \quad (8.32)$$

La solution (8.32) est appelée solution de Green de l'équation de la diffusion. Considérons maintenant le problème qui suit :

$$\begin{cases} \Delta\phi(\mathbf{x}) - \sigma_{tr}^2\phi(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}) \\ \lim_{|\mathbf{x}|\rightarrow+\infty} \phi(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (8.33)$$

La solution de Green est particulièrement intéressante, car elle permet de déterminer la solution L_d^0 du problème (8.33) pour une distribution $S(\mathbf{x})$ quelconque des sources lumineuses. En effet :

$$L_d^0(\mathbf{x}) = \phi * S(\mathbf{x}) \quad (8.34)$$

Définition d'un problème équivalent Il est possible de définir un problème approché équivalent, en utilisant un dipôle afin de représenter la source incidente de lumière. Eason [9] a ainsi montré que dans le cas d'un rayon lumineux, le terme de source peut être modélisé par une source ponctuelle placée en dessous du point d'incidence du rayon, à une altitude z_r . Eason arrive à ce résultat en développant le terme source en série asymptotique, et en ne conservant que les termes au premier ordre. Afin de satisfaire aux conditions aux limites du problème, une seconde source lumineuse ponctuelle est placée au-dessus du point d'incidence, à une altitude z_v . Farrell *et al.* [14] proposent dans l'article de positionner la source réelle à une altitude $z_r = 1/\sigma'_t$ en-dessous du point d'incidence, et la source virtuelle à une altitude $z_v = z_r + 4AD$ au-dessus de ce même point.

Dans ce contexte, le terme d'ordre zéro de la luminance s'écrit, en utilisant la relation (8.34) :

$$\phi(x) = \frac{\Phi}{4\pi D} \left(\frac{e^{-\sigma_{tr}d_r}}{d_r} - \frac{e^{-\sigma_{tr}d_v}}{d_v} \right) \quad (8.35)$$

où $d_r = \|x - x_r\|$, $d_v = \|x - x_v\|$, et Φ désigne l'intensité lumineuse de la source ponctuelle. Jensen *et al.* [24] ont comparé dans l'article les résultats obtenus en résolvant ce problème approché équivalent aux résultats obtenus en résolvant directement l'équation du rendu à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo sur la géométrie du problème initial, et montré que le modèle approché donnait d'excellents résultats de simulation.

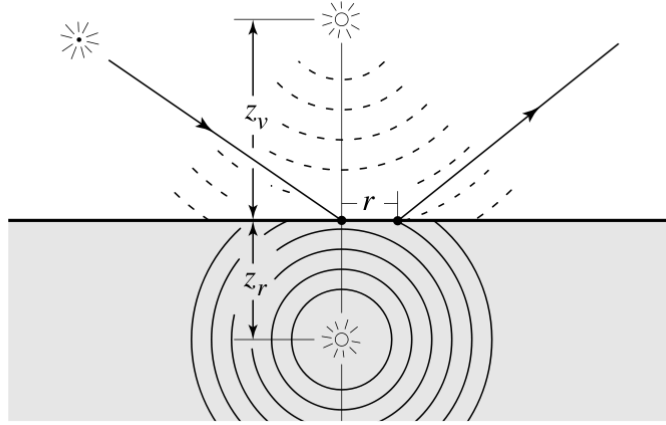


FIGURE 8.4 – Schéma du problème équivalent

Expression du terme de diffusion de la BSSRDF Le terme diffus de la BSSRDF R_d en un point x_s de la surface est égal au rapport entre le flux d'énergie lumineuse quittant la surface en ce point x_s et le flux incident d'énergie lumineuse Φ_i au point x_i :

$$R_d(x_s) = -D \frac{(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{E})}{d\Phi_i}(x_s) \quad (8.36)$$

En utilisant la relation (8.35), il vient :

$$R_d(r) = \frac{\alpha'}{4\pi} \left[(\sigma_{tr} d_r + 1) \frac{e^{-\sigma_{tr} d_r}}{\sigma'_t d_r^3} + z_v (\sigma_{tr} d_v + 1) \frac{e^{-\sigma_{tr} d_v}}{\sigma'_t d_v^3} \right] \quad (8.37)$$

où α' désigne le coefficient d'albedo réduit :

$$\alpha' = \frac{\sigma'_s}{\sigma'_t} \quad (8.38)$$

Il reste encore à prendre en compte les relations de Fresnel dans l'expression de la composante diffuse S_d de la BSSRDF, qui s'écrit finalement :

$$S_d(x_i, \Psi, x_s, \Theta) = \frac{1}{\pi} F_t(\eta, \Psi) R_d(\|x_i - x_s\|) F_t(\eta, \Theta) \quad (8.39)$$

8.2.2 Terme de premier scattering de la BSSRDF

Nous nous intéressons dans cette section à la détermination du terme de premier scattering de la BSSRD, qui permet de modéliser le comportement spéculaire de la surface, en présentant brièvement les modèles développés par Hanrahan *et al.* [20] et Jensen *et al.* [24].

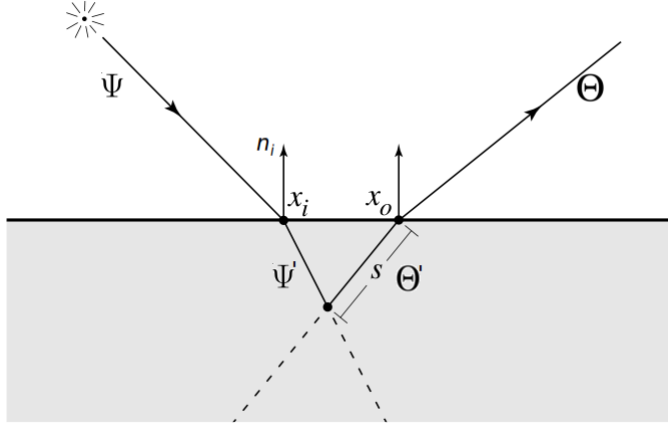


FIGURE 8.5 – Schéma du phénomène de premier scattering au sein de la couche de peinture

Notons $L(x_i \rightarrow \Psi)$ la luminance incidente au point x_i qui parvient de la direction Ψ . La luminance transmise au niveau de l'interface dans la direction Ψ' déduite des relations de Snell-Descartes est, en utilisant les relations de Fresnel :

$$L_t(x_i \rightarrow \Psi') = F_t(\eta, \Psi)L(x_i \rightarrow \Psi) \quad (8.40)$$

Nous nous intéressons à la luminance qui ressort au niveau du point de sortie x_s dans la direction Θ . Cette luminance parvient du rayon initialement orienté dans la direction Θ' au sein de la couche de peinture, et réfracté dans la direction Θ à l'interface. Supposons comme sur la figure 8.5 que le rayon incident rencontre le rayon réfracté après avoir parcouru une distance s' dans la direction Ψ' . Un calcul élémentaire de trigonométrie permet de montrer que le rayon réfracté parcourt une distance s au sein du milieu, telle que :

$$s = s' \left(\frac{\Psi' \cdot \mathbf{n}_i}{\Theta' \cdot \mathbf{n}_i} \right) \quad (8.41)$$

où \mathbf{n}_i représente le vecteur normal à l'interface et $\Psi' \cdot \mathbf{n}_i$ représente le produit scalaire des vecteurs Ψ' et \mathbf{n}_i . En tenant compte des relations de Fresnel, la contribution à la luminance $L(x_s \rightarrow \Theta)$ du rayon qui sort au point x_s dans la direction Θ après avoir suivi le trajet décrit ci-dessus est

$$dL(x_s \rightarrow \Theta) = \sigma_s F_t(\eta, \Psi) p(\Psi' \leftrightarrow \Theta') L(x_i \rightarrow \Psi) e^{-\sigma_{tc}s} F_t(\eta, \Theta) \quad (8.42)$$

$$\text{où } \sigma_{tc} = \sigma_t \left(1 + \frac{|\mathbf{n}_i \cdot \Psi'|}{|\mathbf{n}_i \cdot \Theta'|} \right).$$

On obtient l'expression globale de la luminance en intégrant la relation précédente sur le rayon réfracté :

$$L(x_s \rightarrow \Theta) = \sigma_s \int_{2\pi} \int_0^{+\infty} F_t(\eta, \Psi) p(\Psi' \leftrightarrow \Theta') L(x_i \rightarrow \Psi) e^{-\sigma_{tc}s} F_t(\eta, \Theta) d\omega_\Psi ds \quad (8.43)$$

En utilisant la définition de la BSSRDF, la quantité précédente est donnée par :

$$L(x_s \rightarrow \Theta) = \int_{2\pi} \int_A S^{(1)}(x_i, \Psi, x_s, \Theta) L(x_s \leftarrow \Psi) d\omega_\Psi dA(x_s) \quad (8.44)$$

Les équations (8.43) et (8.44) permettent de définir de manière implicite le terme de premier scattering $S^{(1)}$ de la BSSRDF de la surface étudiée. La BSSRDF globale est la somme des termes de premier scattering et de diffusion.

8.2.3 Premier bilan

Nous avons présenté dans les sections précédentes un modèle optique basé sur les travaux de H.W. Jensen *et al.* [24], qui permet de prendre en compte de manière relativement simple le phénomène de diffusion interne de la lumière au sein de la couche de peinture. Ce modèle a été implémenté dans le logiciel de rendu Blender, l'implémentation étant basée sur l'article de H.W. Jensen et J. Buhler [23]. Nous nous proposons dans la fin de ce chapitre de confronter le modèle décrit dans les premières sections à différents rendus mesurés expérimentalement.

8.3 Résultats expérimentaux

Une expérience a été menée visant à mesurer le rendu de plusieurs tôles revêtues des couches de cataphorèse, sealer et laque, de rugosités variables. Les mesures sont réalisées à l'aide d'un banc optique doté d'une caméra et d'une source lumineuse, tel que décrit dans la figure 8.6 qui suit. L'objectif, modeste, des simulations et expériences présentées dans cette section est de donner une idée de ce qui peut être fait dans le domaine de la simulation optique, et de vérifier que les résultats de simulation obtenus avec le modèle développé plus haut ne sont pas trop éloignés de la réalité physique.

La topographie des échantillons a été mesurée à l'aide d'un palpeur optique. La figure 8.7 présente les topographies de deux échantillons, l'un correspondant à une tôle lisse, l'autre à une tôle de forte rugosité. L'épaisseur cumulée des couches de peinture est de l'ordre d'une centaine de μm . La taille de chacune des surfaces est de 3 cm par 3 cm. Le pas d'échantillonnage utilisé lors de la mesure de la topographie est de 50 μm . Ce

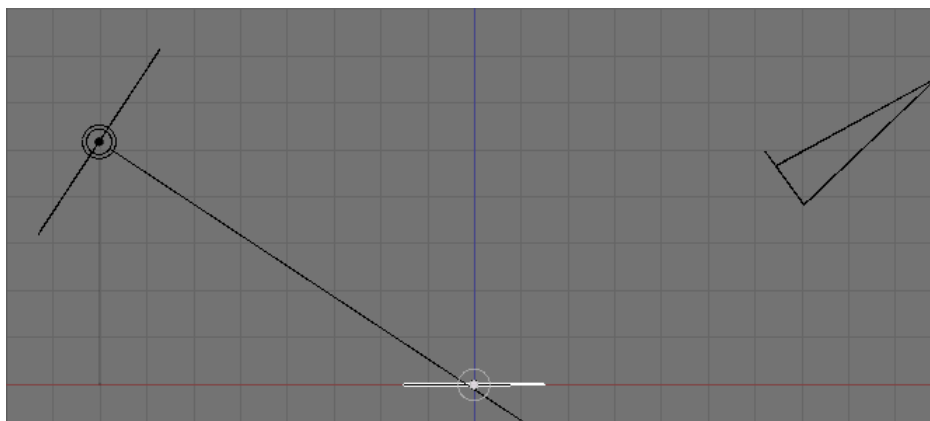


FIGURE 8.6 – Schéma du banc optique représenté dans le logiciel Blender. La source lumineuse est représentée à gauche du schéma. La distance entre la source lumineuse et l'échantillon (représenté en blanc) est de 30 cm . La caméra est quant à elle représentée à droite du schéma. La distance entre la caméra et l'échantillon est 81.4 cm (les échelles ne sont pas respectées sur le schéma). La caméra et la source lumineuse sont inclinées d'un angle de 56.5° par rapport à la direction verticale.

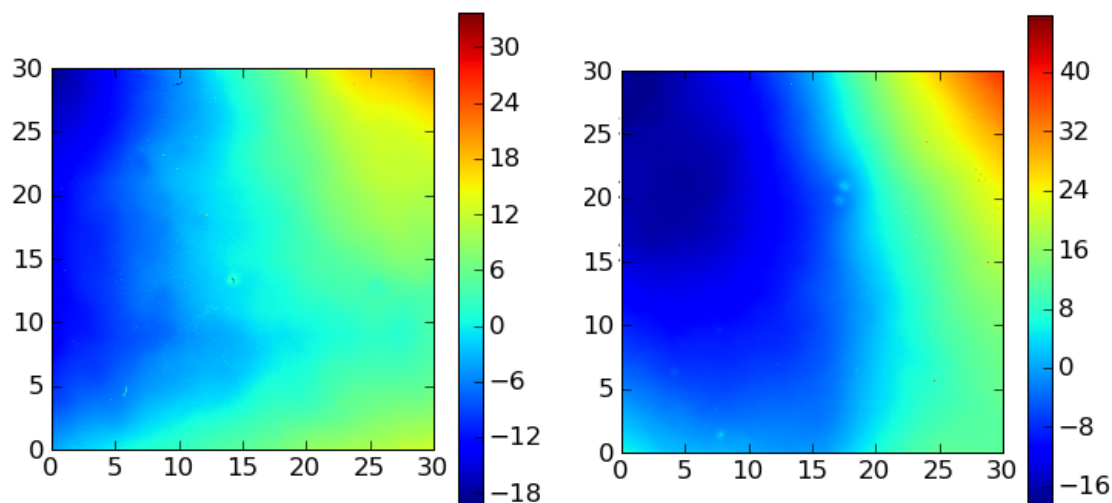


FIGURE 8.7 – Cartographie de la topographies des deux échantillons de tôle. La tôle lisse est représentée à gauche, la tôle de forte rugosité à droite. Aucun post-traitement n'a été appliqué après la mesure des topographies, et la forme, dont on peut constater qu'elle est relativement importante, a par conséquent été conservée. La taille des surfaces est graduée en mm . Les altitudes sont représentées en échelle de couleur, et graduées en μm . Le pas d'échantillonnage de la mesure est de $50\ \mu m$.

pas correspond à la résolution maximale qu'il est possible d'obtenir avec la caméra LCD utilisée pour mesurer le rendu. La réponse de la caméra est proportionnelle à la luminance mesurée, et le rendu obtenu est donc représenté sous la forme d'une cartographie des valeurs de luminance (à un facteur multiplicatif près, qui correspond au temps d'exposition de la caméra). L'éclairage utilisé est un écran LED de grande taille, qui permet d'obtenir une source lumineuse blanche étendue relativement isotrope.

8.3.1 Résultats de simulation

Les simulations présentées dans cette section ont été réalisées avec le logiciel libre Blender [3] qui permet de synthétiser des scènes tridimensionnelles. La topographie de l'échantillon peut ainsi être décrite avec précision dans le logiciel. Ce dernier utilise des algorithmes de lancer de rayon afin de calculer le rendu des scènes. Le modèle de diffusion interne présenté dans les premières sections de ce chapitre est en particulier implémenté. Les paramètres d'entrée du modèle sont l'indice optique de la peinture, ainsi qu'un paramètre $l = 1/\sigma_{tr}$ qui caractérise le libre parcours moyen de la lumière en son sein et permet de prendre en compte l'effet de la diffusion interne de la lumière au sein de la peinture. L'indice optique de la peinture, mesuré expérimentalement à l'aide d'un ellipsomètre, est $n = 1.5$, ce qui est caractéristique d'un vernis. Le paramètre l a été fixé à 0.75 mm dans les simulations. Cette valeur a été choisie car elle permet d'obtenir des rendus simulés en bon accord avec les rendus expérimentaux.

La figure 8.9 permet d'illustrer l'influence du paramètre l sur l'image de rendu. Une scène a été modélisée, représentée sur la figure 8.8, qui comprend une surface lisse, une source collimatée ainsi qu'une caméra, inclinée d'un angle de 56.5° par rapport à la direction verticale. La figure 8.9 présente les images de rendu obtenues pour cette configuration pour plusieurs valeurs du paramètre l . On constate bien que plus la longueur caractéristique de la propagation de la lumière au sein de la peinture est importante, plus l'effet de la diffusion est perceptible.

Il est délicat de comparer point par point les cartographies des rendus simulés à celles des rendus mesurés expérimentalement à l'aide du banc optique. Il est ainsi impossible de recalculer exactement les deux images au même endroit. La forme de l'échantillon varie de plus nécessairement entre la mesure réalisée avec le palpeur optique, qui permet de décrire la topographie de l'échantillon utilisé dans la simulation, et la mesure de rendu réalisée sur le banc optique. Il est en effet impossible de placer l'échantillon de la même manière sur son support au cours des deux mesures.

Afin de comparer les rendus expérimentaux et simulés, compte-tenu des décalages observés sur les formes et de l'erreur de recalage des images, il est intéressant de considérer les courbes de Ma des différentes cartographies obtenues. Rappelons que l'image simulée comme l'image issue de la caméra ne sont rien d'autre que des cartes de luminance en niveaux de gris, dont on peut extraire une courbe de Ma . Afin de corriger les problèmes de bord, la courbe de Ma est calculée sur une image de taille 256 par 256 pixels extraite du centre de l'image de rendu (rappelons que l'algorithme de calcul du Ma ne peut être appliqué qu'à des surfaces de taille dyadique). La figure 8.10 confronte les courbes extraites des données expérimentales obtenues avec le banc optique aux courbes obtenues à partir des simulations réalisées avec le logiciel Blender. On peut noter sur les courbes la présence

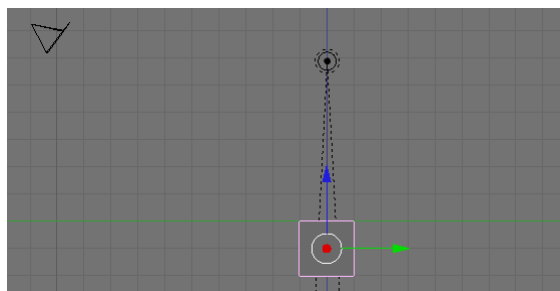


FIGURE 8.8 – Schéma de la configuration optique. La caméra est inclinée d'un angle de 56.5° par rapport à la direction verticale, la source étant à la verticale de la surface.

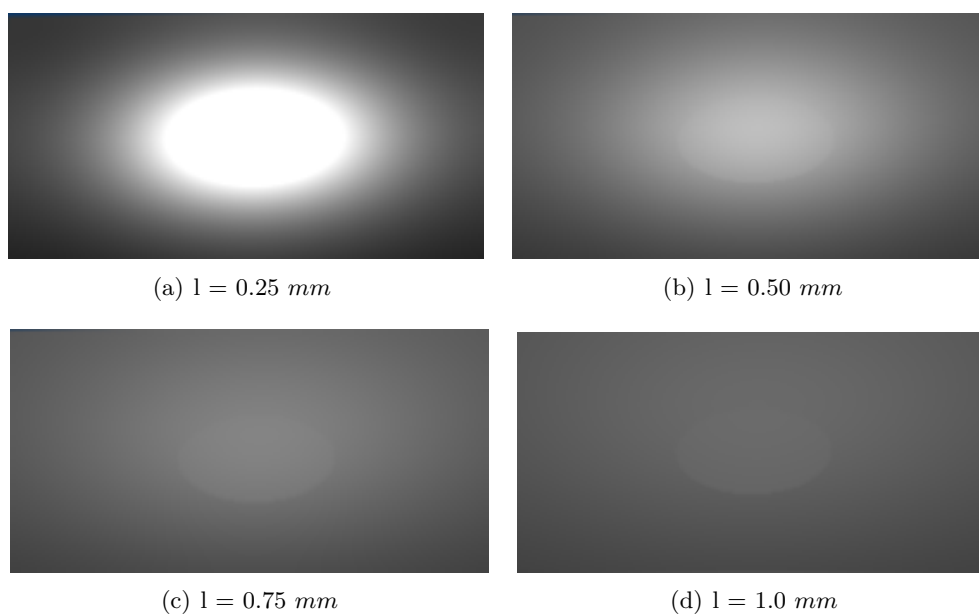
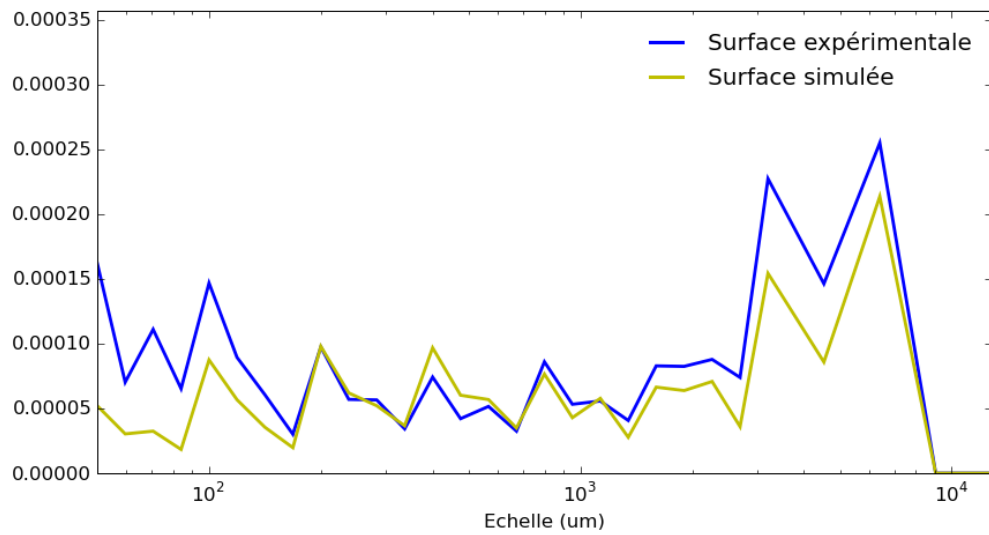
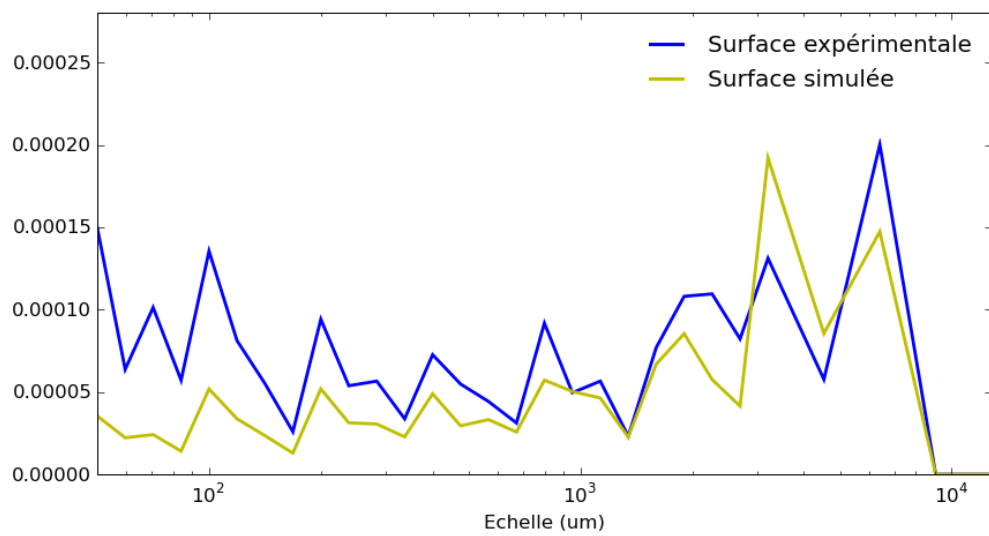


FIGURE 8.9 – Rendu simulés à partir de la configuration de la figure 8.8 pour plusieurs valeurs du paramètre l . Les rendus sont ici représentés sous forme d'images, et permettent de visualiser l'influence de la valeur du paramètre l sur le rendu.



(a) Echantillon lisse



(b) Echantillon de forte rugosité

FIGURE 8.10 – Comparaison des courbes de Ma obtenues pour les rendus expérimentaux et simulés. Ces courbes sont calculées à partir des images de rendu en niveaux de gris, simulées et expérimentales

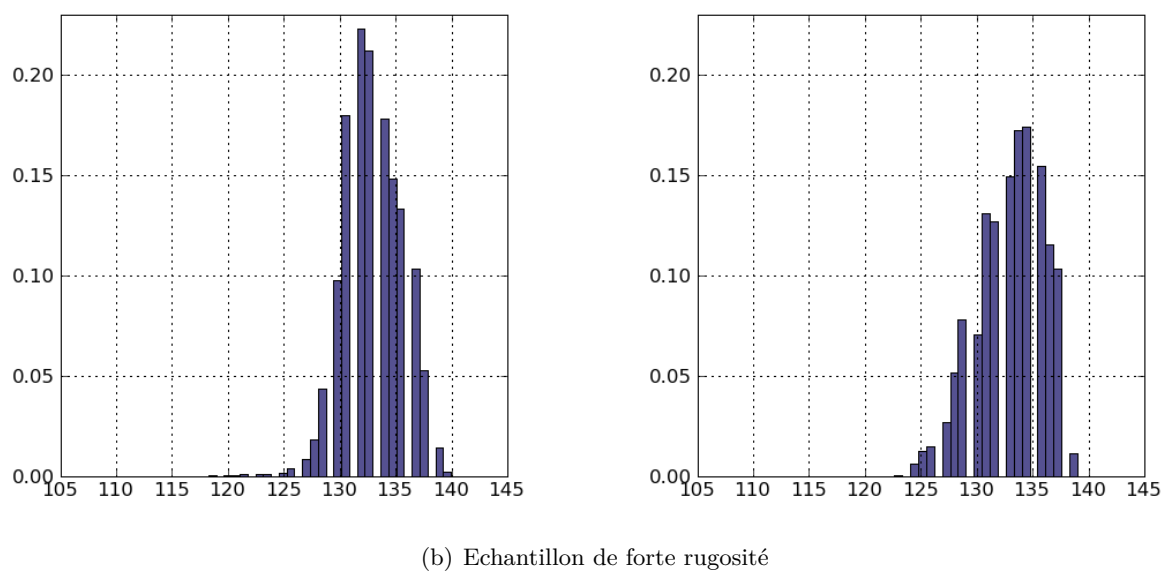
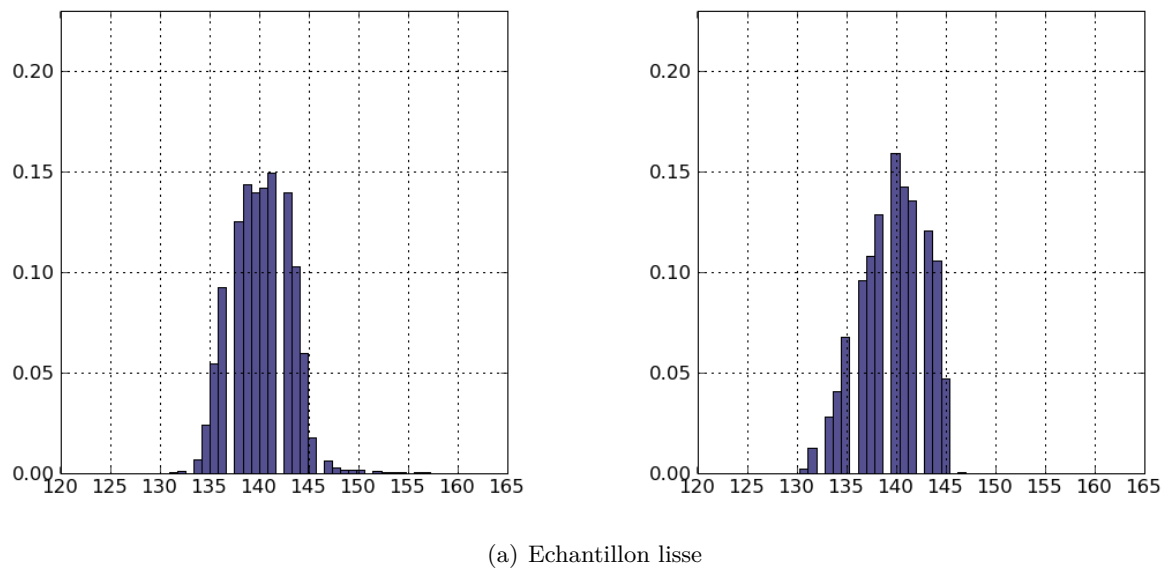


FIGURE 8.11 – Histogrammes des niveaux de gris des rendus mesurés expérimentalement (gauche) et simulés (droite) à l'aide du logiciel Blender

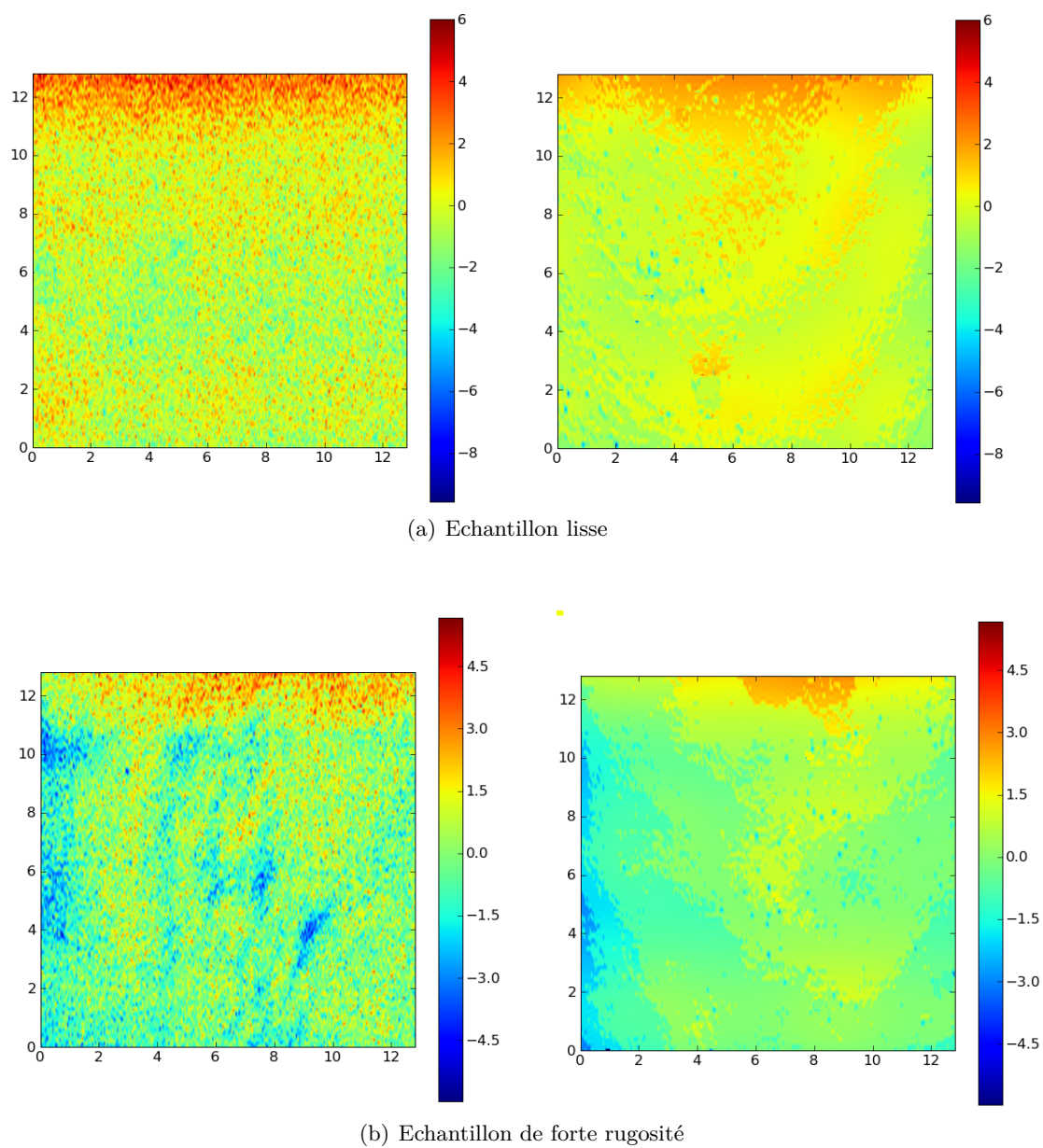


FIGURE 8.12 – Comparaison des rendus mesurés expérimentalement (gauche) et simulés (droite) à l'aide du logiciel Blender. Les grandes échelles des images de rendu ont été filtrées afin de corriger l'erreur de forme.

d'un bruit de haute fréquence relativement important sur les rendus expérimentaux, qu'il semble légitime d'attribuer à la réponse de la caméra. L'erreur de forme discutée plus haut apparaît également de manière distincte sur les figures. Les courbes de Ma montrent cependant une bonne corrélation pour les échelles allant de 0.1 mm à 1 mm , qui impactent de manière prépondérante l'aspect visuel des tôles.

La figure 8.11 compare les histogrammes des niveaux de gris des images de rendu expérimentales et simulées. Les histogrammes sont relativement proches, même si on note des différences plus tranchées pour la tôle de forte rugosité. Il est en particulier intéressant de constater que les simulations permettent de retrouver des valeurs moyennes de luminance proches des valeurs expérimentales. La figure 8.12 confronte enfin les cartographies de luminance obtenues avec le banc optique aux cartes de luminance simulées avec le logiciel Blender. Sur ces cartographies, la forme a été extraite, de sorte que l'on se focalise sur les structures correspondant aux motifs de taille millimétrique. L'extraction de forme a été réalisée en projetant les surfaces sur une base de paquets d'ondelettes, et en reconstruisant ces dernières en annulant les termes qui correspondent aux projections sur les échelles les plus grandes.

Les résultats obtenus avec le modèle, s'ils permettent de reproduire un certain nombre de caractéristiques des rendus expérimentaux, sont cependant à nuancer :

- La base de données utilisée afin de tester le modèle est beaucoup trop restreinte pour qu'il soit réellement possible de valider l'adéquation du modèle à la réalité physique de l'interaction.
- Un certain nombre de caractéristiques optiques propres à la peinture ont été introduites dans le modèle, au travers du paramètre l qui caractérise le libre parcours moyen de la lumière au sein de la peinture. Ces caractéristiques ont été choisies afin que les simulations collent le mieux possible aux rendus expérimentaux. Il conviendrait afin de valider les simulations de mesurer directement ces constantes, par exemple à partir d'échantillons lisses [24], et de vérifier que leur valeur réelle correspond bien à celle qui a été choisie dans les simulations.
- Il aurait enfin été intéressant de pouvoir comparer plusieurs modèles prenant en compte l'effet de diffusion interne de la peinture. Cependant, compte-tenu du temps qu'il a été possible de consacrer à la simulation optique de l'aspect peint au cours de la thèse, l'implémentation complète d'un modèle aurait constitué un travail trop ambitieux.

8.3.2 Comparaison avec un comportement optique spéculaire

Afin de caractériser l'effet de la diffusion interne, il est intéressant de comparer expérimentalement les rendus obtenus pour deux surfaces géométriquement identiques, mais de comportements optiques différents. Pour ce faire, la tôle peinte de forte rugosité a été recouverte d'une fine pellicule d'or après la première mesure, ce qui a permis d'obtenir une topographie géométriquement identique avec un comportement optique parfaitement spéculaire. La figure 8.13 compare les courbes de Ma obtenues pour ces deux surfaces expérimentales. S'il est délicat de se prononcer sur les différences qui apparaissent quant à la forme de l'échantillon, puisque là encore la forme mesurée va en partie dépendre de

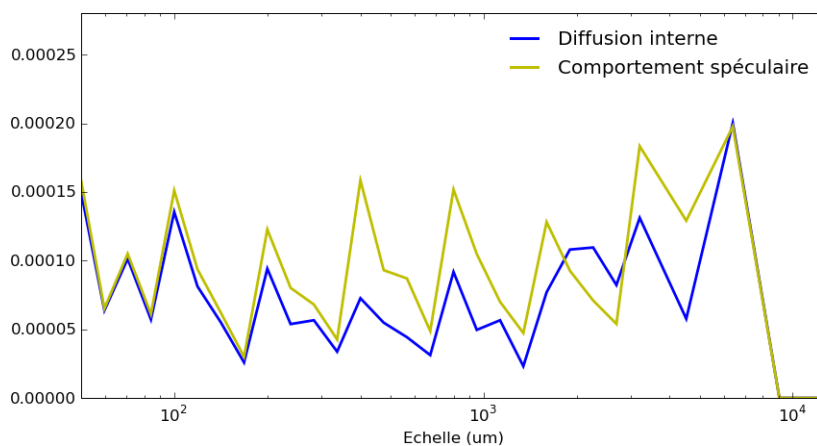


FIGURE 8.13 – Comparaison des courbes de Ma expérimentales pour deux surfaces géométriquement identiques de comportements optiques différents. Pour obtenir ces deux courbes, un rendu de la tôle peinte de forte rugosité a été réalisé (courbe jaune), avant que cette dernière soit recouverte d'une fine pellicule d'or qui permet d'obtenir une surface géométriquement identique avec un comportement optique parfaitement spéculaire (courbe bleue).

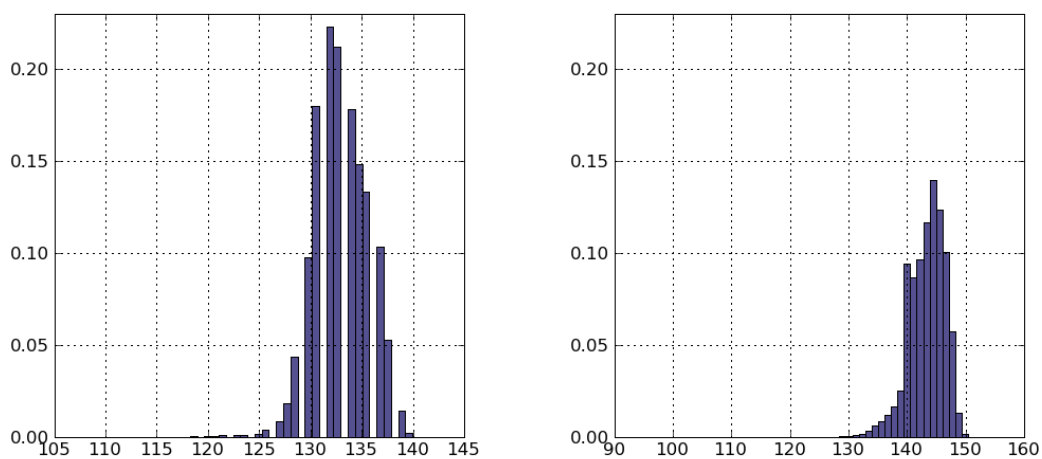


FIGURE 8.14 – Histogrammes des niveaux de gris des images de rendu expérimentales de la tôle de forte rugosité revêtue des trois couches de peinture (gauche), et de cette même tôle recouverte d'une fine pellicule d'or (droite).

la manière dont la tôle est posée sur le support de mesure, des différences apparaissent nettement pour les échelles allant de 0.1 mm à 1 mm entre les deux courbes, qui tendent à indiquer que le phénomène de diffusion interne permet de gommer une partie de l'aspect rugueux des tôles revêtues. La figure 8.14 présente les histogrammes des niveaux de gris obtenues sur les deux images de rendu expérimentales. On constate des différences assez marquées entre les histogrammes : ainsi, la surface parfaitement spéculaire apparaît plus brillante, et son histogramme est plus étalé.

8.4 Conclusion et perspectives

Nous nous étions proposés en préambule de ce chapitre de présenter un premier modèle optique qui puisse rendre compte des phénomènes d'interaction entre la lumière et la surface des tôles revêtues. Les résultats obtenus avec ce modèle sont très encourageants, puisque ce dernier est à même de reproduire un certain nombre de caractéristiques des rendus effectivement observés. Il conviendrait cependant de valider ces premiers résultats sur une base de données expérimentales beaucoup plus complète.

Les premiers travaux présentés dans ce chapitre ouvrent de nombreuses perspectives sur la caractérisation optique de l'aspect des tôles rugueuses, tant sur le plan théorique qu'expérimental. Il pourrait ainsi être intéressant d'utiliser un autre code pour simuler les rendus, qui permette de mieux maîtriser l'implémentation des modèles, et d'utiliser d'autres approches pour résoudre l'équation de la diffusion.

Sur le plan expérimental, la comparaison des cartographies de rendu simulées et expérimentales est un problème difficile, notamment lorsque l'accent est mis sur la notion très subjective de qualité de l'aspect peint. De nombreux descripteurs ont été développés, qui visent à caractériser cet aspect. Parmi eux, nous pouvons en particulier mentionner le tendu ("DOI" pour "Distinctness Of Image" en anglais), qui caractérise les déformations que subit une image lorsqu'elle est reflétée par la surface peinte. Dans le cadre de la présente thèse, les surfaces simulées ont été comparées aux surfaces expérimentales en utilisant essentiellement leurs courbes de Ma . Il pourrait être intéressant de développer des expériences pour vérifier que le modèle de simulation permet de reproduire avec précision les valeurs de tendu des surfaces.

Quatrième partie

Remarques conclusives

Chapitre 9

Conclusion générale

Nous nous sommes proposés au cours de ce projet de thèse d'étudier en détail la problématique de la caractérisation et de la modélisation de l'aspect peint des tôles revêtues à destination du secteur automobile. Cette problématique nous a amené à nous intéresser à différents domaines scientifiques, allant de la caractérisation métrologique des surfaces à la modélisation optique de l'interaction de la lumière avec la couche de peinture, en passant par la modélisation hydrodynamique du procédé industriel de dépôt de la peinture automobile.

Au regard des objectifs de la thèse, il importait de disposer de méthodes de caractérisation des surfaces qui soient à même de décrire avec un nombre limité de paramètres la rugosité des surfaces étudiées. Une méthode de caractérisation multi-échelle des surfaces basée sur la transformée en ondelettes a été étudiée dans la première partie du manuscrit. Plusieurs algorithmes ont été développés, inspirés de travaux antérieurs réalisés au sein d'ArcelorMittal, qui s'appuient sur les transformées en ondelettes continue et orthogonales et la transformée en paquets d'ondelettes. La méthode de caractérisation développée a été utilisée avec profit dans le reste de la thèse afin d'exploiter les différents résultats expérimentaux.

La seconde partie du manuscrit s'intéressait à la modélisation hydrodynamique du procédé de mise en peinture des tôles. Le dépôt des couches successives de peinture sur la tôle modifie en profondeur la rugosité des surfaces, et l'objectif du projet de thèse était d'arriver au développement d'outils qui permettent de prédire la géométrie finale de la tôle revêtue. Différents modèles hydrodynamiques ont été présentés, qui insistent sur les aspects rhéologiques de la peinture automobile, qui diffèrent radicalement selon que l'on s'intéresse à la couche de cataphorèse ou aux couches de sealer et de laque.

Une grande attention a été portée à la validation expérimentale des modèles. Le modèle de nivellement de la cataphorèse a ainsi été confronté à une bases de données expérimentales issue de la thèse de Th. Nion [42], et une méthode originale d'étude de la rhéologie des peintures a été développée pour les couches de laque et de sealer, qui s'appuie sur des mesures de topographies réalisées avec un analyseur de front d'onde développé par la société PhasicsTM [47]. Les travaux réalisés ont permis de valider l'utilisation des modèles développés dans la thèse afin de décrire le nivellement de la couche de cataphorèse, ainsi que des couches de sealer et de laque déposées horizontalement. Dans le cas des écoulements sur substrats inclinés, la base de données expérimentales recueillie pendant la thèse reste cependant trop incomplète pour permettre une validation du modèle.

La troisième partie du manuscrit présentait enfin les résultats obtenus au cours de la thèse sur la modélisation optique de l'aspect peint. Un premier modèle, encore imparfait, a été présenté, qui permet de modéliser l'interaction de la lumière avec la surface peinte et qui tient notamment compte du phénomène de diffusion interne de la lumière au sein de la couche de peinture. Les quelques travaux réalisés ont cependant permis de montrer que la modélisation optique de l'aspect peint pouvait donner lieu à des développements ambitieux, tant sur le plan théorique que sur le plan expérimental.

Au sein d'ArcelorMittal, le présent travail de thèse s'inscrit dans une dynamique générale de recherche qui vise à optimiser la rugosité des tôles d'acier afin d'obtenir un aspect après peinture à même de satisfaire les desiderata des constructeurs automobiles. La réalisation de ce projet de recherche nécessitait le développement de modèles susceptibles de décrire précisément, et le phénomène physique de nivellement de la peinture sur la tôle au cours du procédé de dépôt, et les phénomènes optiques d'interaction de la lumière avec la tôle revêtue. Nous espérons avoir significativement contribué au développement de ces modèles au cours de la présente thèse.

On ne saurait mieux conclure ce manuscrit de thèse qu'en présentant, sur un exemple, la modélisation complète du procédé de mise en peinture d'une tôle et de son aspect après peinture. Les figures 9.1 et 9.2 offrent un aperçu des simulations qu'il est possible de réaliser à partir des modèles développés dans la thèse. Une surface aléatoire a été simulée à partir d'un modèle séquentiel alterné de cônes avec le logiciel Micromorph [25]. Ce substrat aléatoire est successivement revêtu des couches de cataphorèse, de sealer et de laque, et une simulation du rendu obtenu pour cette surface est présentée sur la figure 9.2.

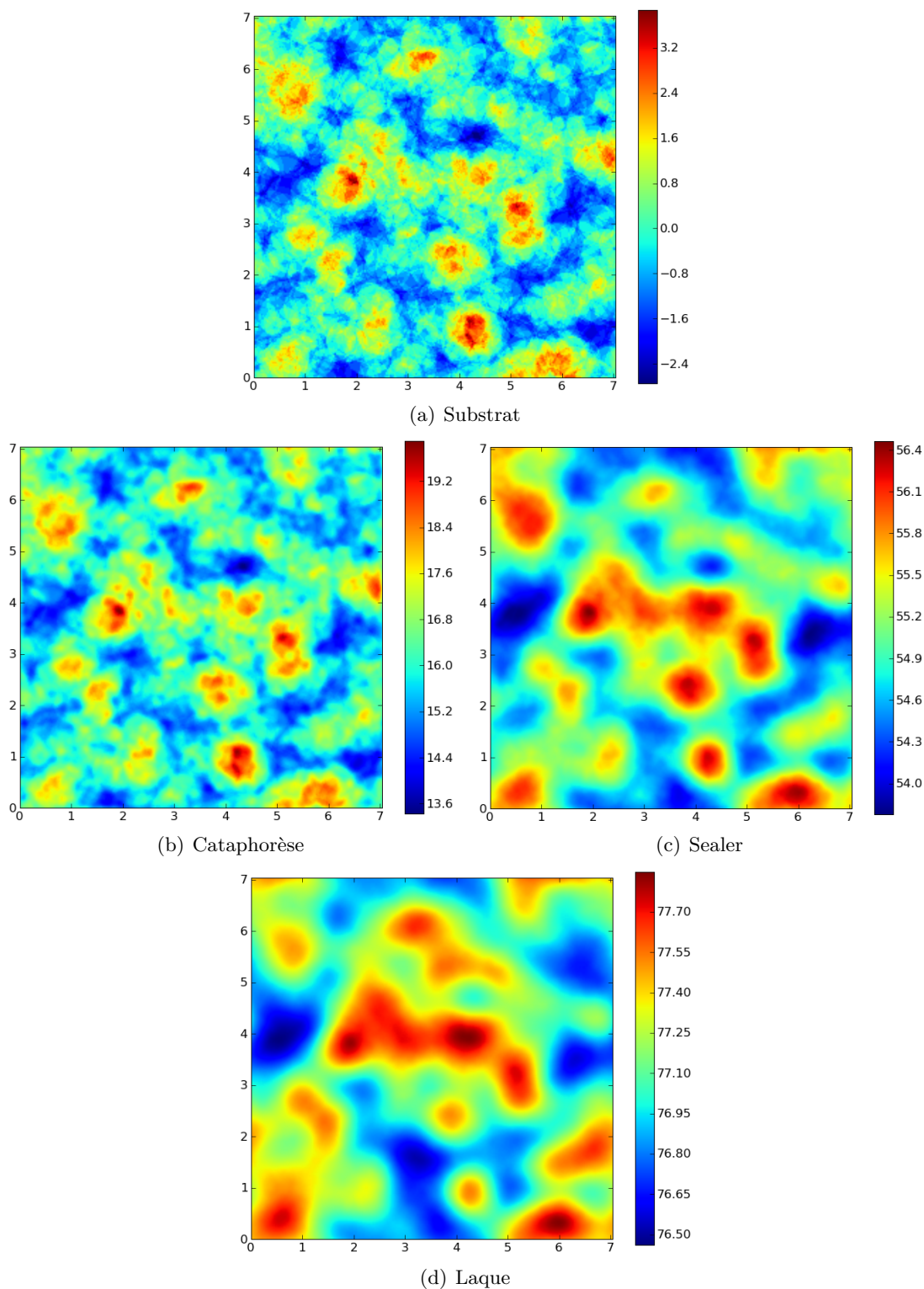


FIGURE 9.1 – Simulation numérique du dépôt des couches successives de cataphorèse, sealer et laque sur une topographie aléatoire. Les dimensions des surfaces sont graduées en mm . Les altitudes sont représentées à l'aide d'une échelle colorimétrique, et graduées en μm . L'origine des altitudes est fixée à l'altitude moyenne du substrat. L'écoulement de la couche de cataphorèse a été simulé à l'aide du modèle de cross-over, avec les paramètres de rhéologie décrits dans le tableau 6.1. Les écoulements des couches de sealer et de laque ont été simulés à partir du modèle newtonien, avec les paramètres de rhéologie décrits dans le tableau 7.6.



FIGURE 9.2 – Rendu simulé à l'aide du logiciel Blender à partir de la surface revêtue de la figure 9.1 (7.04 mm par 7.04 mm) pour une source de lumière collimatée. La caméra est inclinée d'un angle de 60° par rapport à la direction verticale. Le phénomène de diffusion de la lumière est pris en compte dans la simulation : l'indice optique de la peinture est $n = 1.5$, le libre parcours moyen de la lumière en son sein étant fixé à 0.75 mm .

Bibliographie

- [1] A. Aubert. *Propriétés optiques des surfaces rugueuses aléatoires*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines ParisTech - IRSID, 1999.
- [2] D.J. Benney. Long waves on liquid films. *J.Math.Phys.*, 45 :150 – 155, 1966.
- [3] Blender. <http://www.blender.org/>.
- [4] P. Bogacki and L. Shampine. A 3(2) pair of Runge-Kutta formulas. *Applied Mathematics Letters*, 2 :321–325, 1989.
- [5] J.R. Cash and A.H. Karp. A variable order Runge-Kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand sides. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 16 :201–222, 1990.
- [6] Q. Chen, S. Yang, and Z. Li. Surface roughness evaluation using wavelets analysis. *Precision Engineering*, 1999.
- [7] I. Daubechies. The wavelet transform time-frequency localization and signal analysis. *IEEE Trans. Info. Theory*, 36(5) :961–1005, 1990.
- [8] Ph. Dutré, K. Bala, and Ph. Bekaert. *Advanced Global Illumination*. A K Peters Ltd, 2006.
- [9] G. Eason, R. Veicht, R. Nisbet, and F. Turnbull. The theory of back-scattering of light by blood. *J. Phys. D*, 11 :1463–1479, 1978.
- [10] S. Ekambi-Pokossi. *Modélisation multiéchelle de la signature peinture*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2005.
- [11] M.H. Eres, D.E. Weidner, and L.W. Schwartz. Three-dimensional direct numerical simulation of surface-tension-gradient effects on the leveling of an evaporating multi-component fluid. *Langmuir*, 15 :1859–1871, 1999.
- [12] Conseil Parlement européen. Directive 2000/53/CE.
- [13] Conseil Parlement européen. Directive 2004/42/CE.
- [14] T.J. Farrell and M.S. Patterson. A diffusion theory model of spatially resolved, steady-state diffuse reflectance for the noninvasive determination of tissue optical properties in vivo. *Med. Phys.*, 19(4) :879–888.
- [15] G. Fricout. *Propriétés morphologiques et optiques des surfaces rugueuses*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines ParisTech, 2004.
- [16] P.H. Gaskell, P.K. Jimack, M. Sellier, and H.M. Thompson. Flow of evaporating gravity-driven thin liquid films over topography. *Physics of fluid*, 18 :031601, 2006.

- [17] P.H. Gaskell, P.K. Jimack, M. Sellier, H.M. Thompson, and M.C.T. Wilson. Gravity-driven flow of continuous thin liquid films on non-porous substrates with topography. *J.Fluid Mech.*, 509 :253–280, 2004.
- [18] V. Goossens. *Appearance of coated steel substrates*. PhD thesis, Vrije Universiteit Brussel, 2009.
- [19] E. Guyon, J.P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique Physique*. EDP Sciences, 2001.
- [20] P. Hanrahan and W. Krueger. Reflection from layered surfaces due to subsurface scattering. *Proceedings of SIGGRAPH*, pages 165–174, 1993.
- [21] M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, and P. Tchamitchian. A real-time algorithm for signal analysis with the help of the wavelet transform. *Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space*, pages 289–297, 1989.
- [22] S.D. Howison, J.A. Moriarty, J.R. Ockendon, and E.L. Terrill. A mathematical model for drying paint layers. *Journal of engineering Mathematics*, 32 :377 – 394, 1997.
- [23] H.W. Jensen and J. Buhler. A rapid hierarchical rendering technique for translucent materials. *ACM Transactions on Graphics*, 21(3), 2002.
- [24] W. Jensen, S.R. Marschner, M. Levoy, and P. Hanrahan. A practical model for subsurface light transport. *Proceedings of ACM SIGGRAPH 2001*, 2001.
- [25] D. Jeulin. *Models of random structures*. Ecole des Mines de Paris, 1998.
- [26] D. Jeulin and P. Laurence. Morphological simulation of the roughness transfer on steel sheet. *Microscopy, Microanalysis, and Microstructures*, 1997.
- [27] S. Kojima, T. Moriga, and K. Takenouchi. The leveling of thermosetting waterborne coatings. part i : Observation of leveling process. *Polymer Engineering and science*, 33(20) :1320 – 1328, 1993.
- [28] S. Kojima, T. Moriga, and K. Takenouchi. The leveling of thermosetting waterborne coatings. part ii : Drying of coated wet films. *Polymer Engineering and science*, 35(13) :1098 – 1105, 1995.
- [29] S. Kojima, T. Moriga, and K. Takenouchi. The leveling of thermosetting waterborne coatings. part iii : Leveling under controlled conditions. *Polymer Engineering and science*, 35(24) :1949 – 1953, 1995.
- [30] P. Laurence. *Analyse et modélisation du transfert de rugosité*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines ParisTech - IRSID, 1996.
- [31] S. Lee. *Application de l'analyse continue par ondelettes 1D et 2D à la caractérisation multi-échelle de la rugosité*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1997.
- [32] S.H. Lee, H. Zahouani, R. Caterini, and T.G. Mathia. Morphological characterization of engineered surfaces by wavelet transform. *Int.J.Mach.Tools Manufact.*, 38 :581–589, 1998.
- [33] A. Lemaitre. Communication personnelle.
- [34] J. Jay Liu, D. Kim, and C. Han. Use of wavelet packet transform in characterization of surface quality. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 2007.
- [35] S. Mallat. Multirésolution approximations and wavelet orthonormal bases of $l^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc*, 315 :69–87, 1989.

- [36] S. Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. 1999.
- [37] S. Mallat and S. Zong. Characterization of signals from multiscale edges. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 14-7, 1992.
- [38] P. Manneville. Communication personnelle.
- [39] S. Mezghani. *Approches multi-échelles de caractérisation tridimensionnelle des surfaces. Applications aux procédés d'usinage*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2005.
- [40] J.P. Nauzin. Simulation du pouvoir nivelant des peintures automobiles sur une surface d'acier réelle. Technical report, Usinor, 1999.
- [41] J.P. Nauzin. Prédiction et modélisation de l'aspect peint. Technical report, Usinor, 2002.
- [42] Th. Nion. *Modélisation mathématique de l'évolution de la topographie des couches successives des surfaces peintes destinées au secteur automobile*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines ParisTech, 2008.
- [43] S.B.G O'Brien and L.W. Schwartz. Theory and modeling of thin film flows. *Encyclopedia of surface and Colloid Science*, pages 5283–5297.
- [44] S.E. Orchard. On surface levelling in viscous liquids and gels. *Appl.sci.Res*, 11 :451–464, 1961.
- [45] A. Oron, S.H. Davis, and S.G. Bankoff. Long scale evolution of thin liquid films. *Reviews of Modern Physics*, 69(3) :931 – 980, 1997.
- [46] W.S. Overdiep. The levelling of paints. *Progress in Organic Coatings*, 14 :159–175, 1986.
- [47] Phasics. <http://www.phasicscorp.com/>.
- [48] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing (Third Edition)*. Cambridge University Press, 2007.
- [49] J. Raja, B. Muralikrishan, and S. Fu. Recent advances in separation of roughness, waviness and form. *Precision Engineering*, 26 :222–235, 2002.
- [50] C. Ruyer-Quil and P. Manneville. Modeling film flows down inclined planes. *The European Physical Journal B*, 6 :277 – 292, 1998.
- [51] C. Ruyer-Quil and P. Manneville. Improved modeling of flows down inclined planes. *The European Physical Journal B*, 15 :357 – 369, 2000.
- [52] V.Y. Shkadov. Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity. *Izv. AN SSSR Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, 2(1) :43–51, 1967.
- [53] V.Y. Shkadov. Solitary waves in a layer of viscous liquid. *Izv. AN SSSR Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, 1 :63–66, 1977.
- [54] Ph. Thevenaz, T. Blu, and T. Unser. Interpolation revisited. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19(7) :739–758.
- [55] B. Torrèsani. *Analyse continue par ondelettes*. CNRS Editions, 1995.
- [56] M. Unser. Texture classification and segmentation using wavelet frames. *IEEE Transactions on image processing*, 4 :1549–1560, 1995.
- [57] D.E. Weidner, L.W. Schwartz, and R.R. Eley. Role of surface tension gradients in correcting coating defects in corners. *Journal of Colloid and Interface Science*, 179 :66–75, 1996.

- [58] S.K. Wilson. The levelling of paint films. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 50 :149–166, 1993.
- [59] H. Zahouani, S.H. Lee, R. Vargiolu, and J. Rousseau. Characterization of surface topography by continuous wavelet tranform. *Acta Physica Superficierum*, 4 :1–13, 2001.
- [60] H. Zahouani, S. Mezghani, R. Vargiolu, and M. Dursapt. Identification of manufacturing signature by 2d wavelet decomposition. *Wear*, 264 :480–485, 2008.
- [61] H. Zahouani, S.E. Pokossi, S. Mezghani, R. Vargiolu, H. Jacobs, and J. Piezanowski. Characterization of the painted surfaces appareance by continuous wavelet transform. *9th International Conference on Metrology and Properties of Engineering Surfaces*, September 2003.

Cinquième partie

Annexes

Annexe A

Simulation numérique des modèles

Nous présentons dans cette annexe les méthodes utilisées afin de résoudre numériquement les équations des modèles d'écoulements présentés dans la thèse. Ces méthodes numériques utilisent une méthode pseudo-spectrale, en décomposant les solutions sur une base de Fourier qui permet de traiter de manière relativement simple les dérivations spatiales, et en évaluant les dérivées temporelles dans l'espace physique.

La méthode numérique est employée dans notre cas à la résolution du problème de Navier-Stokes incompressible dans le cadre de l'approximation en ondes longues. Néanmoins, elle peut être aisément adaptée en vue de résoudre tout système d'EDP de la forme ci-dessous, sous l'hypothèse de conditions aux limites périodiques :

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = F_i \left(\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial^n \psi_i}{\partial x_j^n} \right), \forall (i, j) \in [0, n]^2 \quad (\text{A.1})$$

La méthode peut en particulier être utilisée si les fonctions F_i ne sont pas linéaires par rapport aux dérivées successives de la solution.

A.1 Calcul des dérivées spatiales

Nous nous focalisons dans cette section sur l'évaluation des dérivées spatiales.

A.1.1 Principes mathématiques

Nous supposons dans tout ce qui suit que les conditions aux limites de notre problème sont périodiques. Nous allons chercher à développer les solutions des équations à l'aide d'une méthode pseudo-spectrale. Les dérivations temporelles seront évaluées dans l'espace physique, alors que les dérivations spatiales seront calculées dans l'espace de Fourier.

Considérons une fonction f périodique, de période L . On peut développer f en série de Fourier.

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}[k] \exp \left(i \frac{2\pi}{L} kx \right) \quad (\text{A.2})$$

Dans notre cas, nous travaillons avec un échantillonnage de f . Supposons que cette fonction soit échantillonnée sur une période L avec un pas $\Delta x = \frac{L}{N}$. Avec l'information que nous possédons, nous ne pouvons garder que les N premières fréquences de la transformée de Fourier de f .

$$f[n\Delta x] = \frac{1}{L} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \hat{f}[k] \exp\left(i\frac{2\pi}{N}kn\right) \quad (\text{A.3})$$

Les coefficients de Fourier sont calculés par le biais de la formule :

$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n\Delta x] \exp\left(i\frac{2\pi}{N}kn\right) \quad (\text{A.4})$$

On peut remarquer que l'échantillonnage de la fonction f a pour effet de rendre la transformée de Fourier de la fonction échantillonnée périodique, de période N .

$$\hat{f}[k + N] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n\Delta x] \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}(k + N)n\right) = \sum_{m=0}^{N-1} f[n\Delta x] \exp\left(i\frac{2\pi}{N}kn\right) \quad (\text{A.5})$$

Un des intérêts du domaine de Fourier est que la dérivation s'exprime comme un opérateur linéaire. Il devient donc aisé d'évaluer une dérivée dans le domaine de Fourier. Nous calculons ainsi les dérivées spatiales qui interviennent dans nos équations en passant dans le domaine de Fourier, en multipliant chaque mode harmonique par sa fréquence, puis en repassant dans le domaine physique.

$$f'[n\Delta x] = \frac{1}{L} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} i\frac{2\pi k}{N} \hat{f}[k] \exp\left(i\frac{2\pi}{N}kn\right) \quad (\text{A.6})$$

A.1.2 Traitement de l'aliasing

Les équations auxquelles nous nous intéressons sont fortement non-linéaires. Nous sommes donc fréquemment amenés dans le code à évaluer la transformée de Fourier d'un produit dans l'espace physique. Cette transformée correspond au produit de convolution des transformées de Fourier des deux fonctions qui apparaissent dans le produit. Numériquement, il convient de prendre des précautions lors du calcul de la transformée de Fourier du produit, l'échantillonnage étant susceptible d'introduire des phénomènes d'aliasing.

Supposons ainsi qu'on cherche à évaluer le produit de deux fonctions f et g . Nous supposons les fonctions échantillonnées avec un pas unitaire en vue de simplifier les calculs. La décomposition en séries de Fourier de chacune de ces fonctions prend la forme :

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \hat{f}[k] \exp\left(i \frac{2\pi}{N} kn\right), \quad g[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \hat{g}[k] \exp\left(i \frac{2\pi}{N} kn\right) \quad (\text{A.7})$$

La décomposition en séries de Fourier du produit fg est donnée par :

$$fg[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \hat{fg}[k] \exp\left(i \frac{2\pi}{N} nk\right) \quad (\text{A.8})$$

Les coefficients de Fourier sont évalués par la formule :

$$\hat{fg}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]g[n] \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} kn\right) \quad (\text{A.9})$$

La transformée de Fourier du produit évalué dans l'espace physique est par conséquent :

$$\hat{fg}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k_1=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \sum_{k_2=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \hat{f}[k_1]\hat{g}[k_2] \exp\left(i \frac{2\pi(k - k_1 - k_2)}{N} n\right) \quad (\text{A.10})$$

Les seuls coefficients non nuls sont ceux qui correspondent aux valeurs de $k - k_1 - k_2$ qui sont multiples de N . Nous retrouvons bien au premier terme le produit de convolution des transformées de Fourier des fonctions f et g . Les termes résiduels correspondant à $k_1 + k_2 = k + N$ et $k_1 + k_2 = k - N$ traduisent des effets d'aliasing qui découlent de la périodisation du spectre induise par l'échantillonnage.

Pour pouvoir évaluer les produits de fonctions dans le domaine de Fourier, il convient d'éliminer les phénomènes d'aliasing. Pour ce faire, une méthode simple [38] consiste à considérer M fréquences au lieu des N fréquences initiales, avec $N < M$, où les fréquences comprises entre $-\frac{M}{2}$ et $-\frac{N}{2}$, respectivement $\frac{N}{2}$ et $\frac{M}{2}$, sont artificiellement fixées à 0. Le spectre sera alors périodique de période M . Cette méthode revient simplement à suréchantillonner la projection de notre fonction sur la base constituées des N harmoniques initiales, en passant d'un pas $\frac{L}{N}$ à un pas $\frac{L}{M}$. Pour tout entier m compris entre 0 et $M - 1$, on vérifie ainsi, les harmoniques supérieures étant nulles :

$$f[m] = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \hat{f}[k] \exp\left(i \frac{2\pi}{M} km\right) \quad (\text{A.11})$$

Lorsqu'on effectue le produit, le terme le plus dangereux vis à vis de l'aliasing correspond à $m = m' = \frac{N}{2}$. Son alias $m + m' - M$ sort de la bande dès lors que $m + m' - M < \frac{N}{2} + 1$. En prenant $M > \frac{3N}{2}$, on parvient donc à remédier aux effets d'aliasing.

Nous allons expliciter la méthode de désaliasing sur un exemple. Considérons la fonction $f : x \rightarrow \cos(\pi x)$, définie sur l'intervalle $[0, 8]$, et échantillonnée avec un pas égal à l'unité. La décomposition en série de Fourier de cette fonction est :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2} \left(\exp\left(i\frac{2\pi}{8}4\omega\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi}{8}4\omega\right) \right) \quad (\text{A.12})$$

On s'intéresse à la fonction $x \rightarrow f(x)^2$. On vérifie que :

$$f(x)^2 = \frac{1}{2} \left(\cos(2\pi x) + 1 \right) \quad (\text{A.13})$$

La décomposition en série de Fourier de $f(x)^2$ s'écrit donc :

$$f(x)^2 = \frac{1}{4} \left(2 + \exp\left(i\frac{2\pi}{8}8x\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi}{8}8x\right) \right) \quad (\text{A.14})$$

Lorsqu'on échantillonne notre fonction avec un pas unitaire, au niveau du spectre de Fourier, le terme de haute fréquence $\exp\left(i\frac{2\pi}{8}8x\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi}{8}8x\right)$ se replie sur le fondamental. Le résultat du produit correspond donc à la fonction constante de valeur 1.

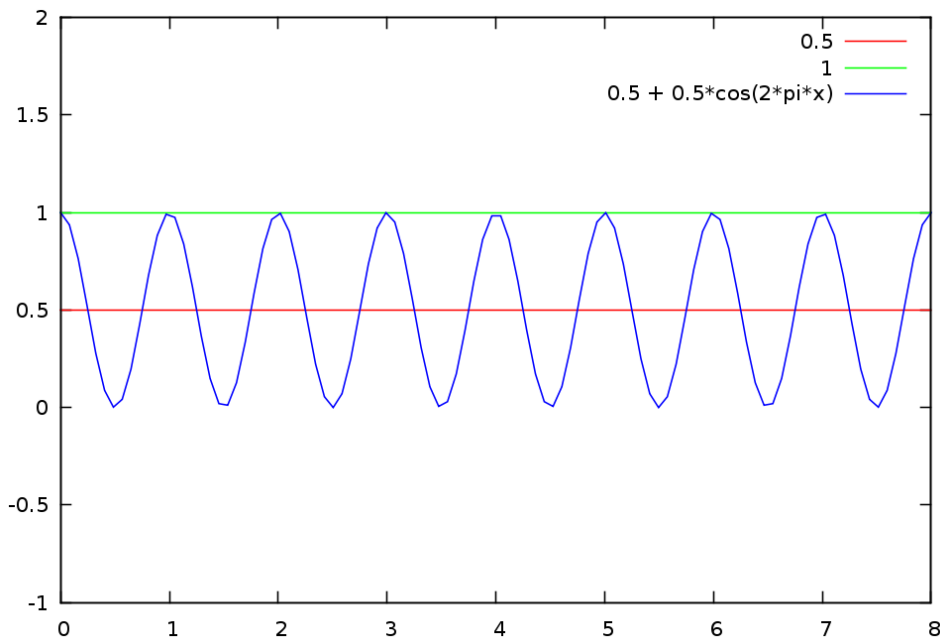
Le graphe de la fonction f^2 est tracé en bleu sur la courbe ci-dessus. Avec un pas d'échantillonnage unitaire, on voit que le terme de fréquences $\frac{2\pi}{8}4$ vient se replier sur le fondamental, pour donner la courbe verte, alors que dans la plage de fréquences qu'on considère, la fonction correcte est celle qui est tracée en rouge.

Pour évaluer le produit en préservant le spectre fréquentiel de notre signal, nous sommes donc amenés à suréchantillonner la fonction dans l'espace physique. Suréchantillonons par exemple notre fonction avec un pas égal à $1/2$.

$$\hat{f}^2[k] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{15} \exp\left(-\frac{2\pi}{16}kn\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{15} \exp\left(-\frac{2\pi}{16}(k-8)n\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{15} \exp\left(-\frac{2\pi}{16}(8+k)n\right) \quad (\text{A.15})$$

avec $k = -7, -6, \dots, 0, \dots, 7$.

Les termes non nuls correspondent aux valeurs $k = 0$ (terme fondamental), $k = -7$, $k = 7$ (termes aliasés). Les termes aliasés tombent dans les bande de fréquences $[-7, -4]$ et $[4, 7]$, qui sont artificiellement fixées à 0 lors du sous-échantillonnage. On parvient de cette manière à désaliaser le produit.



A.2 Résolution du système couplé

Le code de résolution numérique des équations du modèle utilise des méthodes pseudo-spectrales afin de résoudre le couple d'équations aux dérivées partielles. Nous avons vu dans la section précédente la manière dont les dérivées spatiales étaient évaluées par passage dans le domaine de Fourier. Nous nous intéressons dans cette section à l'intégration temporelle des équations, en proposant un schéma numérique basé sur des méthodes de Runge-Kutta explicites à pas de temps adaptatif. Nous utiliserons les versions unidimensionnelles des équations des différents modèles dans la présentation, afin de ne pas noyer le lecteur par de longs développements calculatoires.

A.2.1 Méthode de Runge-Kutta

Nous présentons dans cette section le principe mathématique de la méthode de Runge-Kutta. Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes d'analyse numérique d'approximation de solutions d'équations différentielles. Ces méthodes reposent sur le principe de l'itération : une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation, plus précise, et ainsi de suite.

Considérons l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) \quad (\text{A.16})$$

Une manière classique de discrétiser cette équation est donnée par la méthode d'Euler :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(y_n, t_n) \quad (\text{A.17})$$

La solution est alors donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_k, t_k) \quad (\text{A.18})$$

Une telle méthode présente l'inconvénient d'être peu symétrique, puisque la dérivée n'est évaluée qu'au début du pas de temps. Elle présente en outre l'inconvénient d'être relativement peu précise.

Le principe des méthodes de Runge-Kutta est d'utiliser des évaluations de la dérivée au niveau de points intermédiaires afin de réaliser l'intégration. Une méthode de Runge-Kutta d'ordre N utilise N valeurs intermédiaires afin d'évaluer la dérivée. Il est à noter que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 1 n'est donc rien d'autre que la méthode d'Euler. L'intégration est donnée par la formule suivante :

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (\text{A.19})$$

avec :

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1) \\ k_3 = f(t_n + c_3 h, y_n + a_{31} h k_1 + a_{32} h k_2) \\ \dots \\ k_N = f(t_n + c_s h, y_n + a_{N1} h k_1 + a_{N2} h k_2 + \dots + a_{N, N-1} h k_{N-1}) \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Pour spécifier une méthode particulière, il suffit de définir les coefficients a_{ij} et c_i pour $i = 1, 2, \dots, N$ et $j = 1, 2, \dots, i$. Les coefficients choisis peuvent être représenté sous la forme d'une table, appelée table de Butcher.

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|--------------|-------|
| 0 | | | | | |
| c_2 | a_{21} | | | | |
| c_3 | a_{31} | a_{32} | | | |
| \vdots | \vdots | | \ddots | | |
| c_s | a_{s1} | a_{s2} | \dots | $a_{s, s-1}$ | |
| | b_1 | b_2 | \dots | b_{s-1} | b_s |

La méthode d'intégration est consistante dès lors que l'égalité $\sum_{j=0}^i a_{ij} = c_i$ est vérifiée.

A.2.2 Contrôle de l'erreur

On peut montrer en effectuant un développement de Taylor qu'un schéma d'intégration de Runge-Kutta d'ordre N est précis à l'ordre N en h . Nous cherchons à maîtriser l'erreur

d'approximation. Une idée pour ce faire est de contrôler l'erreur d'approximation à chaque pas en estimant la différence entre les approximations d'ordres N-1 et N.

En choisissant les coefficients de manière judicieuse, les points intermédiaires calculés dans la méthode permettent deux évaluations distinctes de la solution :

- Une première évaluation $y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^N b_i k_i$ précise à l'ordre N.
- Une seconde évaluation $y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{N-1} b^*_i k_i$ précise à l'ordre N-1.

La différence entre ces deux évaluations permet d'estimer l'erreur d'approximation du schéma :

$$\epsilon = h \sum_{i=1}^{N-1} (b_i - b^*_i) k_i$$

Le tableau de Butcher correspondant prend la forme :

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|--------------|---------|
| 0 | | | | | |
| c_2 | a_{21} | | | | |
| c_3 | a_{31} | a_{32} | | | |
| \vdots | \vdots | | \ddots | | |
| c_s | a_{s1} | a_{s2} | \dots | $a_{s\ s-1}$ | |
| | b_1 | b_2 | \dots | b_{s-1} | b_s |
| | b^*_1 | b^*_2 | \dots | b^*_{s-1} | b^*_s |

Plusieurs méthodes ont été implémentées dans le code, d'ordres distincts :

- La méthode de Heun, d'ordre deux

| | | |
|---|-------|-------|
| 0 | | |
| 1 | 1 | |
| | $1/2$ | $1/2$ |
| | 1 | 0 |

- La méthode de Bogacki-Shampine [4], d'ordre trois

| | | | | |
|-------|--------|-------|-------|-------|
| 0 | | | | |
| $1/2$ | $1/2$ | | | |
| $3/4$ | 0 | $3/4$ | | |
| 1 | $2/9$ | $1/3$ | $4/9$ | |
| | $2/9$ | $1/3$ | $4/9$ | 0 |
| | $7/24$ | $1/4$ | $1/3$ | $1/8$ |

- la méthode de Cash-Karp [5], d'ordre cinq

| | | | | | | |
|------|----------------------|-------------------|------------------------|-----------------------|---------------------|----------------------|
| 0 | | | | | | |
| 1/5 | 1/5 | | | | | |
| 3/10 | 3/40 | 9/40 | | | | |
| 3/5 | 3/10 | -9/10 | 6/5 | | | |
| 1 | $-\frac{11}{54}$ | 5/2 | $-\frac{70}{27}$ | $\frac{35}{27}$ | | |
| 7/8 | $\frac{1631}{55296}$ | $\frac{175}{512}$ | $\frac{44275}{110592}$ | $\frac{4096}{253}$ | | |
| | $\frac{37}{27648}$ | 0 | $\frac{250}{48384}$ | $\frac{125}{55296}$ | 0 | $\frac{512}{14336}$ |
| | $\frac{378}{2825}$ | 0 | $\frac{621}{18575}$ | $\frac{594}{55296}$ | $\frac{277}{14336}$ | $\frac{1771}{14336}$ |
| | $\frac{2825}{27648}$ | 0 | $\frac{18575}{48384}$ | $\frac{13525}{55296}$ | $\frac{277}{14336}$ | $\frac{1}{4}$ |

A.2.3 Pas adaptatif

La méthode de Runge-Kutta permet d'intégrer une équation différentielle et donne une estimation de l'erreur à chaque pas d'intégration. Dans le code, nous cherchons à optimiser le choix du pas de temps, tout en conservant une précision donnée. L'algorithme de pas de temps adaptatif mis en place est inspiré de celui présenté dans Numerical Recipes [48].

Pour une méthode de Runge-Kutta d'ordre n , l'erreur d'intégration Δ_0 avec un pas h_0 est de l'ordre de h_0^n . Si l'on souhaite obtenir une erreur d'intégration de l'ordre de Δ , on peut estimer le pas h qui aurait donné cette erreur en posant :

$$h = h_0 \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} \right)^{1/n} \quad (\text{A.21})$$

Cette équation nous indique, lorsque $\Delta < \Delta_0$, comment réduire notre pas de temps, et lorsque $\Delta > \Delta_0$, dans quelles proportions il est possible de l'augmenter.

A.2.4 Stabilité du schéma de Runge-Kutta explicite

Le code est employé dans notre cas à la résolution du problème de Navier-Stokes incompressible dans le cadre de l'approximation en ondes longues. Un modèle d'écoulement simple sur un profil est décrit par l'équation suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = -\frac{1}{\zeta_0} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4}(x, t) \quad (\text{A.22})$$

où h désigne la hauteur du film, et ζ_0 est une constante physique. Nous présentons dans cette section une analyse de la stabilité au sens de Von Neumann du schéma pseudo-spectral présenté précédemment vis à vis de cette équation.

Commençons en premier lieu par l'étude du schéma d'Euler explicite :

$$h_{n+1} - h_n = -\frac{1}{\zeta_0} \frac{\partial^4 h_n}{\partial x^4}(x, t) \quad (\text{A.23})$$

Dans le domaine de Fourier, le schéma prend la forme :

$$\hat{h}_{n+1}[k] - \hat{h}_n[k] = -\frac{\Delta t}{\zeta_0} \left(\frac{2\pi k}{N} \right)^4 \hat{h}_n[k] \quad (\text{A.24})$$

On en déduit :

$$\hat{h}_{n+1}[k] = \left(1 - \frac{\Delta t}{\zeta_0} \left(\frac{2\pi k}{N} \right)^4 \right) \hat{h}_n[k] \quad (\text{A.25})$$

La condition de stabilité du schéma s'écrit :

$$\frac{\Delta t}{\zeta_0} \left(\frac{2\pi k}{N} \right)^4 \leq 2 \quad (\text{A.26})$$

La fréquence maximale est $k_{max} = \frac{N}{2}$. Par conséquent, la condition de stabilité devient, pour le pas de temps :

$$\Delta t \leq \frac{2\zeta_0}{\pi^4} \quad (\text{A.27})$$

A ce stade, il convient de remarquer deux choses :

- le schéma d'Euler explicite n'est que conditionnellement stable.
- la dérivation spatiale d'ordre quatre déstabilise l'équation. Elle est en effet à l'origine de l'apparition d'une puissance d'ordre 4 au dénominateur de la borne de stabilité.

Réalisons maintenant la même analyse de stabilité pour le schéma pseudo-spectral utilisant la méthode de Heun. La première estimation du second membre, calculée au début du pas de temps, est :

$$k_1 = -\frac{1}{\zeta_0} \frac{\partial^4 h_n}{\partial x^4} \quad (\text{A.28})$$

La second estimation est donnée par :

$$k_2 = -\frac{1}{\zeta_0} \left(\frac{\partial^4 h_n}{\partial x^4} - \frac{\Delta t}{\zeta_0^2} \frac{\partial^8 h_n}{\partial x^8} \right) \quad (\text{A.29})$$

On en déduit la valeur de h_{n+1} :

$$h_{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\zeta_0} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\Delta t^2}{2\zeta_0^2} \frac{\partial^8}{\partial x^8} \right) h_n \quad (\text{A.30})$$

Dans le domaine de Fourier, la relation précédente se réécrit :

$$\hat{h}_{n+1}[k] = \hat{h}_n[k] \left[1 - \frac{\Delta t}{\zeta_0} \left(\frac{2\pi k}{N} \right)^4 + \frac{\Delta t^2}{2\zeta_0^2} \left(\frac{2\pi k}{N} \right)^8 \right] = \chi(\Delta t) \quad (\text{A.31})$$

On vérifie aisément que le polynôme $\chi(\Delta t)$ est strictement positif. La condition de stabilité va donc s'écrire :

$$\Delta t \leq \frac{2\zeta_0}{\pi^4} \quad (\text{A.32})$$

A nouveau, on constate que le schéma pseudo-spectral utilisé n'est que conditionnellement stable, et que la dérivation spatiale limite l'extension du pas de temps. Même en employant des schémas de Runge-Kutta d'ordres plus élevés, la stabilité reste conditionnelle. Le pas de temps, bien qu'adaptatif, ne pourra donc pas dépasser une certaine valeur, relativement faible du fait de la présence d'un terme de dérivation spatiale d'ordre élevé.

Dans l'algorithme explicite utilisé, l'allongement du pas de temps est contrôlé par la précision réclamée par l'utilisateur. Les essais numériques réalisés montrent qu'il est nécessaire de spécifier une précision de l'ordre de 10^{-1} pour conserver la stabilité du schéma, pour des topographies bidimensionnelles de peinture.

A.3 Validation du schéma numérique

Nous nous proposons dans cette section de valider le schéma numérique sur la base du modèle newtonien développé dans le quatrième chapitre de la thèse, dont nous rappelons l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} = & -\frac{\gamma}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(h - S_a \right)^3 \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}(x, y, t) + \frac{\partial^3 h}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \\ & -\frac{\gamma}{3\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(h - S_a \right)^3 \left(\frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(x, y, t) + \frac{\partial^3 h}{\partial y \partial x^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

où h représente l'altitude de la couche de peinture, γ la tension de surface, η la viscosité de la peinture, et S_a l'altitude du substrat sous-jacent.

Nous avons vu que, si on suppose que les fluctuations de la surface peuvent être négligées en comparaison de l'épaisseur de la couche de peinture, il est possible de linéariser l'équation (A.33). En écrivant $h = h_0 + \delta h$, (A.33) devient, à l'ordre le plus bas en δh :

$$\frac{\partial \delta h}{\partial t}(x, y, t) = -\frac{\gamma}{3\eta} h_0^3 \left(\frac{\partial^4 \delta h}{\partial x^4}(x, y, t) + 2 \frac{\partial^4 \delta h}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y, t) + \frac{\partial^4 \delta h}{\partial y^4}(x, y, t) \right) \quad (\text{A.34})$$

Il est possible de déterminer une solution analytique à l'équation (A.34), et de comparer cette solution aux résultats de simulation obtenus avec le schéma numérique décrit dans cette annexe. En effet, si (A.34) possède une solution dans $L^2(\mathbb{R})$, cette dernière vérifie, dans le domaine de Fourier :

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} = -\frac{\gamma}{3\eta} h_0^3 (\xi_x^4 + \xi_x^2 \xi_y^2 + \xi_y^4) \hat{h} \quad (\text{A.35})$$

Par conséquent :

$$\hat{h}(t) = \hat{h}(0) \exp\left(-\frac{\gamma}{3\eta} h_0^3 (\xi_x^4 + \xi_x^2 \xi_y^2 + \xi_y^4) t\right) \quad (\text{A.36})$$

et

$$\delta h(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{h}(0) \exp\left(-\frac{\gamma}{3\eta} h_0^3 (\xi_x^4 + \xi_x^2 \xi_y^2 + \xi_y^4) t\right) \exp(i(\xi_x x + \xi_y y)) d\xi \quad (\text{A.37})$$

La figure (A.2) présente les résultats obtenus avec le schéma numérique et le modèle analytique sur une couche de cataphorèse, en résolvant l'équation (A.34). On peut remarquer que les résultats obtenus sont très proches, ce qui permet de valider le schéma numérique utilisé afin de résoudre l'équation du modèle. Les paramètres physiques retenus pour cette simulation sont présentés dans le tableau qui suit, et correspondent à des données obtenues dans l'article [57].

| Paramètre | Symbole | Valeur | Unité |
|--------------------------|----------|---------------------|---------|
| Tension de surface | γ | $3,0 \cdot 10^{-2}$ | N/m |
| Viscosité de la peinture | η | 1,0 | Pa.s |
| Épaisseur initiale | h_0 | 20.0 | μm |

TABLE A.1 – Paramètres de simulation

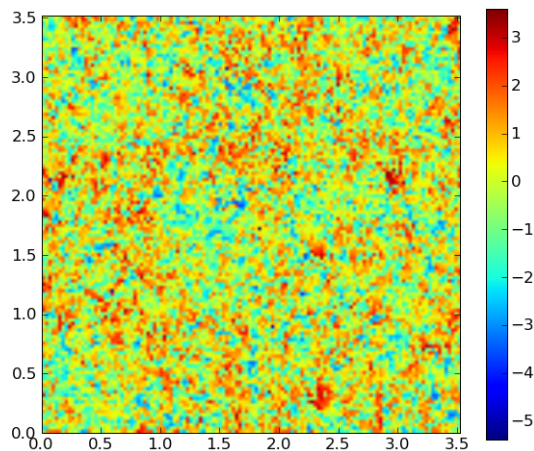


FIGURE A.1 – Validation du schéma numérique : la surface représente la topographie initiale de la cataphorèse, mesurée à l'aide d'un microscope interférométrique. Chaque valeur de pixel correspond à l'altitude moyen sur une surface de $27.5 \mu m$ par $27.5 \mu m$, ce qui résulte en l'obtention d'un surface de $3.52mm$ par $3.52mm$.

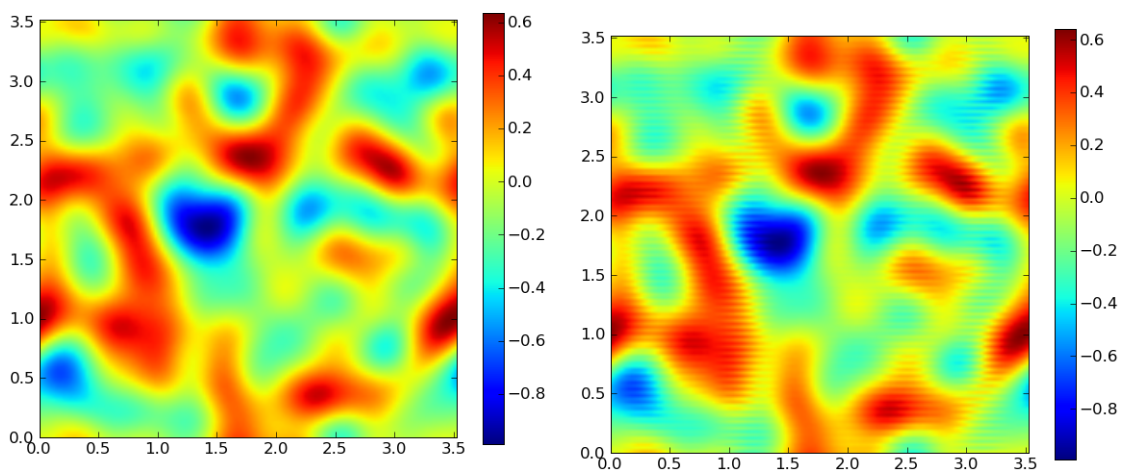


FIGURE A.2 – Validation du schéma numérique : La surface de gauche correspond à la solution analytique de l'équation (A.34), tandis que la seconde correspond à la solution obtenue avec le schéma numérique, pour $t_f = 600s$.

Annexe B

Principales notations

B.1 Modélisation des écoulements

| Symbole | Paramètre | Unité |
|----------------|---|----------|
| h | Topographie de la couche de peinture | m |
| e | Épaisseur de la couche de peinture | m |
| Sa | Topographie du substrat | m |
| ρ | Masse volumique de la peinture | kg/m^3 |
| \mathbf{u} | Vecteur vitesse d'écoulement de peinture | m/s |
| \mathbf{q} | Débit de l'écoulement | m^2/s |
| u | Première composante de la vitesse dans le plan du substrat | m/s |
| v | Seconde composante de la vitesse dans le plan du substrat | m/s |
| w | Composante de la vitesse normale au plan du substrat | m/s |
| β | Angle d'inclinaison du substrat par rapport à l'horizontale | - |
| p | Pression au sein de la peinture | Pa |
| η | Viscosité de la peinture | $Pa.s$ |
| γ | Tension de surface de la peinture | N/m |
| c | Concentration du solvant au sein de la peinture | - |
| γ_r | Tension de surface de la résine | N/m |
| γ_s | Tension de surface du solvant | N/m |
| σ | Tenseur des contraintes | Pa |
| $\dot{\gamma}$ | Tenseur des déformations | s^{-1} |

TABLE B.1 – Principales notations utilisées dans les modèles d'écoulement

B.2 Modèles optiques

| Symbole | Paramètre | Unité |
|------------|--|--------------|
| E | Eclairement | W/m^2 |
| ϕ | Flux d'énergie lumineuse | W |
| B | Radiosité | W/m^2 |
| L | Luminance | $W/(m^2.sr)$ |
| f_r | BRDF | - |
| R_{dr} | BSSRDF | - |
| Θ | Direction de la lumière incidente | - |
| Ψ | Direction de la lumière sortante | - |
| σ_a | Coefficient d'absorption de la lumière au sein de la peinture | m^{-1} |
| σ_s | Coefficient de scattering de la lumière au sein de la peinture | m^{-1} |
| σ_t | Section efficace d'extinction de la lumière au sein de la peinture | m^{-1} |
| α | Coefficient d'albedo | - |
| F_{dr} | Coefficient de Fresnel | - |
| L_{ri} | Luminance incidente réduite | $W/(m^2.sr)$ |
| L_d | Luminance diffuse | $W/(m^2.sr)$ |

TABLE B.2 – Principales notations utilisées dans les modèles de radiométrie

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Topographie d'une tôle d'acier galvanisée et phosphatée. On aperçoit distinctement les grains de zinc apparus lors des traitements chimiques subis par la tôle, qui modifient la rugosité de la surface. Le pas d'acquisition est ici de $1.76 \times 2.08 \mu m$. L'image est issue de la thèse de Th. Nion [42]. | 10 |
| 1.2 | Aperçu en trois dimensions d'une géométrie de tôle EDT (rugosité aléatoire) à gauche, et d'une tôle EBT (rugosité périodique) à droite. La hauteur des pics est d'une dizaine de microns environ, la largeur des motifs correspond environ à une centaine de microns. L'image est issue de la thèse de Th. Nion [42]. | 11 |
| 2.1 | Boîtes de Heisenberg d'une ondelette pour différents facteurs de dilatation [36] . . | 19 |
| 2.2 | Ondelette chapeau mexicain (gauche) et sa transformée de Fourier (droite) [36] . . | 20 |
| 2.3 | Transformée en ondelettes continue d'un profil, réalisée avec des ondelettes chapeaux mexicains [36]. | 22 |
| 2.4 | Profil de rugosité, échantillonné avec un pas horizontal de $20.6 \mu m$, de taille $2.6 mm$. Les altitudes sont graduées en $10^{-5} m$ | 31 |
| 2.5 | Décomposition multi-échelle du profil de tôle : La décomposition du profil est réalisée avec des ondelettes de type chapeau mexicain de variance égale à l'unité. Il y a en tout sept échelles dyadiques, aucune voix supplémentaire n'a été insérée entre les échelles. Le profil correspondant à l'échelle la plus grande est représenté en haut à gauche, celui correspondant à l'échelle la plus fine en haut à droite. Les altitudes sont graduées en $10^{-5} m$ | 31 |
| 2.6 | Reconstruction cumulée du profil de tôle, une échelle est rajoutée à chaque nouvelle courbe. La dernière courbe, en haut à droite, correspond à une reconstruction approchée du profil initial. Les altitudes sont graduées en $10^{-5} m$ | 32 |
| 2.7 | Courbe de Ma du profil de rugosité. Les facteurs d'échelle sont données en μm . . . | 32 |
| 2.8 | Surface rugueuse, échantillonnée avec un pas horizontal de $20.6 \mu m$, de taille $2.6 mm$ par $2.6 mm$ | 33 |
| 2.9 | Décomposition multi-échelle de la surface rugueuse : La décomposition est réalisée avec des ondelettes de type chapeau mexicain de variance égale à l'unité. Il y a en tout sept échelles dyadiques, aucune voix supplémentaire n'a été insérée entre les échelles. La surface correspondant à l'échelle la plus grande est représentée en haut à gauche, celle correspondant à l'échelle la plus fine en haut à droite. | 33 |
| 2.10 | Reconstruction cumulée de la surface de tôle, une échelle est rajoutée à chaque nouvelle surface. La dernière surface correspond à une reconstruction approchée de la surface initial | 34 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.11 | Courbe de Ma de la surface rugueuse. Les facteurs d'échelle sont données en μm | 34 |
| 3.1 | Algorithme de transformée en ondelettes orthogonales [36] | 37 |
| 3.2 | Algorithme de transformée en ondelettes orthogonales bidimensionnel [36] | 38 |
| 3.3 | Transformée en ondelettes orthogonales d'une surface rugueuse. La transformée en ondelettes est calculée avec des ondelettes de Daubechies, trois échelles sont représentées sur la figure. | 38 |
| 3.4 | Profil de rugosité, échantillonné avec un pas horizontal de $20.6\mu\text{m}$, de taille 2.6mm . Les altitudes sont graduées en $10^{-5}m$ | 40 |
| 3.5 | Décomposition multi-échelle du profil de tôle : la décomposition du profil est réalisée avec des ondelettes de Daubechies avec 12 moments nuls. Il y a en tout sept échelles dyadiques. Le profil correspondant à l'échelle la plus grande est représenté en haut à gauche, celui correspondant à l'échelle la plus fine en haut à droite. Les altitudes sont graduées en $10^{-5}m$ | 40 |
| 3.6 | Reconstruction cumulée du profil de tôle. Une échelle est rajoutée à chaque nouvelle image. La dernière image correspond à une reconstruction exacte du profil initial. Les altitudes sont graduées en $10^{-5}m$ | 41 |
| 3.7 | Courbe de Ma du profil de rugosité. Les facteurs d'échelle sont données en μm | 41 |
| 3.8 | Surface rugueuse, échantillonnée avec un pas horizontal de $20.6\mu\text{m}$, de taille 2.6mm par 2.6mm | 42 |
| 3.9 | Décomposition multi-échelle de la surface rugueuse : La décomposition est réalisée avec des ondelettes de Daubechies avec 12 moments nuls. Il y a en tout sept échelles dyadiques. La surface correspondant à l'échelle la plus grande est représentée en haut à gauche, celle correspondant à l'échelle la plus fine en haut à droite. | 42 |
| 3.10 | Reconstruction cumulée du profil de tôle. Une échelle est rajoutée à chaque nouvelle image. La dernière image correspond à une reconstruction exacte de la surface initiale. | 43 |
| 3.11 | Courbe de Ma de la surface rugueuse. Les facteurs d'échelle sont données en μm | 43 |
| 3.12 | Boîtes de Heisenberg des paquets d'ondelettes, et arbre de décomposition associé [36] | 44 |
| 3.13 | Algorithme de transformée en paquets d'ondelettes bidimensionnel [36] | 45 |
| 3.14 | Reconstruction d'une surface (à gauche) en ne conservant qu'une échelle de décomposition. La première reconstruction (au centre) est réalisée avec des ondelettes de Haar, qui introduisent des discontinuités importantes. La seconde reconstruction (à droite) est réalisée quant à elle avec des ondelettes de Daubechies à 12 moments nuls, beaucoup plus régulières. | 47 |
| 3.15 | Profil de rugosité, échantillonné avec un pas horizontal de $20.6\mu\text{m}$, de taille 2.6mm . Les altitudes sont graduées en $10^{-5}m$ | 48 |
| 3.16 | Décomposition multi-échelle du profil de tôle : La décomposition du profil est réalisée avec des ondelettes de Daubechies avec 8 moments nuls. Il y a en tout sept échelles dyadiques. Chaque échelle a été subdivisée en quatre composantes fréquentielles, à l'exception des deux premières échelles (grandes longueurs d'onde), divisées en deux composantes. Il y a donc en tout 24 profils. Nous n'avons représenté qu'un profil par échelle. Le profil correspondant à l'échelle la plus grande est représenté en haut à gauche, celui correspondant à l'échelle la plus fine en haut à droite. | 48 |
| 3.17 | Reconstruction cumulée du profil de tôle. La dernière image correspond à une reconstruction exacte du profil initial. Les altitudes sont graduées en $10^{-5}m$ | 49 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.18 | Courbe de Ma du profil de rugosité. Les facteurs d'échelle sont données en μm . . . | 49 |
| 3.19 | Surface rugueuse, échantillonnée avec un pas horizontal de $20.6\mu m$, de taille $2.6mm$ par $2.6mm$ | 50 |
| 3.20 | Décomposition multi-échelle de la surface rugueuse, réalisée avec des ondelettes de Daubechies avec 8 moments nuls. Il y a en tout sept échelles dyadiques, et quatre voix ont été insérées au sein de chaque octave, à l'exception des deux premières échelles où seules deux voix ont été insérées. La surface correspondant à l'échelle la plus grande est représentée en haut à gauche, celle correspondant à l'échelle la plus fine en haut à droite. | 50 |
| 3.21 | Reconstruction cumulée de la surface de tôle. Une échelle est rajoutée à chaque nouvelle image. La dernière image correspond à une reconstruction exacte de la surface initiale. | 51 |
| 3.22 | Courbe de Ma de la surface rugueuse. Les facteurs d'échelle sont données en μm . . | 51 |
| 4.1 | | 58 |
| 4.2 | Orientations multi-échelles de la surface rugueuse | 58 |
| 4.3 | Energies associées à chaque orientation, en fonction d'une échelle donnée. L'énergie est calculée à chaque échelle en sommant le module de chacun des pixels dont l'orientation appartient à la plage spécifiée. | 59 |
| 5.1 | Revêtements successifs des tôles | 64 |
| 5.2 | Ecoulement d'un film mince | 65 |
| 6.1 | Expériences de suivi de l'évolution d'une couche de sealer au cours du temps de flash. | 83 |
| 6.2 | Simulation avec le modèle non-newtonien de l'évolution des topographies de la cataphorèse des échantillons de type EDT (rugosité aléatoire). La figure de gauche représente la topographie du substrat, celle du centre la topographie simulée de la couche de cataphorèse, et celle de droite la topographie mesurée de la cataphorèse. Les dimensions de la surface sont graduées en mm . Les altitudes sont représentées à l'aide d'une échelle colorimétrique, et graduées en μm | 87 |
| 6.3 | Simulation avec le modèle non-newtonien de l'évolution des topographies de la cataphorèse des échantillons de type EBT (rugosité périodique). | 88 |
| 6.4 | Evolution des courbes de Mq des échantillons du type EDT (rugosité aléatoire) . . | 89 |
| 6.5 | Evolution des courbes de Mq des échantillons du type EBT (rugosité périodique) . | 90 |
| 6.6 | Simulation avec le modèle newtonien de l'évolution des topographies de la cataphorèse des échantillons de type EDT (rugosité aléatoire). La figure de gauche représente la topographie du substrat, celle du centre la topographie simulée de la couche de cataphorèse, et celle de droite la topographie mesurée de la cataphorèse. | 94 |
| 6.7 | Simulation avec le modèle newtonien de l'évolution des topographies de la cataphorèse des échantillons de type EBT (rugosité périodique). | 95 |
| 6.8 | Evolution des courbes de Mq des échantillons du type EDT (rugosité aléatoire) . . | 96 |
| 6.9 | Evolution des courbes de Mq des échantillons du type EBT (rugosité périodique) . | 97 |
| 6.10 | Simulation avec le modèle de cross-over de l'évolution des topographies de la cataphorèse des échantillons de type EDT (rugosité aléatoire). La figure de gauche représente la topographie du substrat, celle du centre la topographie simulée de la couche de cataphorèse, et celle de droite la topographie mesurée de la cataphorèse. | 100 |

| | | |
|------|---|-----|
| 6.11 | Simulation avec le modèle de cross-over de l'évolution des topographies de la cataphorèse des échantillons de type EBT (rugosité périodique). | 101 |
| 6.12 | Evolution des courbes de Mq des échantillons du type EDT (rugosité aléatoire) . . | 102 |
| 6.13 | Evolution des courbes de Mq des échantillons du type EBT (rugosité périodique) . | 103 |
| 6.14 | Courbes de Mq obtenues avec les modèles de simulation newtonien (vert) et de cross-over (jaune), pour un échantillon de type EXP3 (tôle de type EDT) à $t = 162s$. Les courbes de Mq des topographies mesurées du substrat (bleu) et de la cataphorèse (cyan) sont également représentées. | 104 |
| | | |
| 7.1 | Evolution de la température au cours de la mise en peinture | 110 |
| 7.2 | Evolution de la peinture aux premiers instants du temps de flash. Les dimensions de la surface sont graduées en mm . Les altitudes sont représentées à l'aide d'une échelle colorimétrique, et graduées en μm | 113 |
| 7.3 | Evolution de la peinture dans la suite du temps de flash | 114 |
| 7.4 | Evolution de la peinture au début de la cuisson | 114 |
| 7.5 | Evolution de la peinture à la fin de la cuisson | 115 |
| 7.6 | Résurgence du substrat sous-jacent | 116 |
| 7.7 | Evolution du paramètre de Mq au cours du procédé de cuisson : la courbe de Mq initiale apparaît en bleu, la courbe de Mq à l'issue du temps de flash en cyan, et la courbe de Mq après 5 minutes de cuisson en jaune. | 116 |
| 7.8 | Evolution de l'épaisseur moyenne au cours de la totalité du procédé de mise en peinture pour l'expérience LAQ04, mesurée expérimentalement (en jaune) et comparée à la loi d'évaporation (en vert). L'épaisseur de la couche de peinture est normalisée à l'unité. | 119 |
| 7.9 | Evolution de la courbe de Mq aux différentes étapes du procédé de mise en peinture. La courbe jaune correspond à la courbe de Mq qui aurait été obtenue si on avait uniquement considéré les phénomènes d'évaporation. | 122 |
| 7.10 | Evolution du débit déterminé en résolvant le problème inverse dans la longueur x du film de laque. La longueur et la largeur de la surface sont graduées en mm . Le débit est donné en $\mu m^2/s$ | 125 |
| 7.11 | Evolution du débit déterminé en résolvant le problème inverse dans la largeur y du film de laque. La longueur et la largeur de la surface sont graduées en mm . Le débit est donné en $\mu m^2/s$ | 125 |
| 7.12 | Evolution de la grandeur $u(x, y)$ [μm]. La longueur et la largeur de la surface sont graduées en mm | 128 |
| 7.13 | Evolution de la grandeur $v(x, y)$ [μm]. La longueur et la largeur de la surface sont graduées en mm | 128 |
| 7.14 | Nuage de point représentant les valeurs du débit calculé par méthode inverse (en ordonnée) en fonction de $u(x, y)$ (en abscisse). | 130 |
| 7.15 | Evolution de la quantité $\frac{\gamma}{3\eta}$ en fonction de la concentration en solvant au sein du film | 131 |
| 7.16 | Comparaison des courbes de Mq obtenues pour la topographie simulée (en vert) et pour la topographie expérimentale (en jaune) | 133 |

| | | |
|------|---|-----|
| 7.17 | Simulation de l'évolution de la topographie de la couche de peinture pour l'expérience LAQ04 : les topographies expérimentales (gauche) sont comparées aux topographies simulées (centre). Une cartographie de l'erreur locale est également représentée (droite). Les dimensions des surfaces sont graduées en mm , l'altitude est donnée en μm | 134 |
| 7.18 | Simulation de l'évolution de la topographie de la couche de peinture pour l'expérience LAQ04, avec le modèle newtonien prenant en compte l'effet Marangoni (gauche) ou non (droite). Les dimensions des surfaces sont graduées en mm , l'altitude est donnée en μm | 135 |
| 7.19 | Simulation de l'évolution de la topographie de la couche de peinture au cours de la cuisson | 136 |
| 7.20 | Comparaison des courbes de Mq obtenues pour la topographie simulée en prenant uniquement en compte les effets d'évaporation(en jaune) et pour la topographie expérimentale (en vert). La courbe de Mq expérimentale au début de cuisson est représentée en bleu. | 138 |
| 7.21 | Simulation de l'évolution de la topographie de la couche de peinture pour l'expérience SEA05 | 140 |
| 7.22 | Simulation de l'évolution de la topographie de la couche de sealer à la fin du temps de flash, pour l'expérience SEA05 | 141 |
| 7.23 | Comparaison des courbes de Mq obtenues pour la topographie simulée (en vert) et pour la topographie expérimentale (en jaune) | 143 |
| 7.24 | Simulation de l'évolution de la topographie de la couche de peinture pour l'expérience LAQ03. Les dimensions des surfaces sont graduées en mm , l'altitude est donnée en μm | 144 |
| 7.25 | Simulation de l'évolution de la topographie de la couche de peinture pour l'expérience LAQ02 (substrat incliné) : les topographies expérimentales (gauche) sont comparées aux topographies simulées (centre). Une cartographie de l'erreur locale est également représentée (droite). Les dimensions des surfaces sont graduées en mm , l'altitude est donnée en μm | 146 |
| 8.1 | Relations de Snell-Descartes | 152 |
| 8.2 | Luminances émise (gauche) et reçue (droite) dans les directions respectives Θ et Ψ | 154 |
| 8.3 | Phénomène de subscattering au sein de la couche de peinture | 156 |
| 8.4 | Schéma du problème équivalent | 162 |
| 8.5 | Schéma du phénomène de premier scattering au sein de la couche de peinture | 163 |
| 8.6 | Schéma du banc optique représenté dans le logiciel Blender. La source lumineuse est représentée à gauche du schéma. La distance entre la source lumineuse et l'échantillon (représenté en blanc) est de 30 cm . La caméra est quant à elle représentée à droite du schéma. La distance entre la caméra et l'échantillon est 81.4 cm (les échelles ne sont pas respectées sur le schéma). La caméra et la source lumineuse sont inclinées d'un angle de 56.5° par rapport à la direction verticale. | 165 |

| | | |
|------|--|-----|
| 8.7 | Cartographie de la topographies des deux échantillons de tôle. La tôle lisse est représentée à gauche, la tôle de forte rugosité à droite. Aucun post-traitement n'a été appliqué après la mesure des topographies, et la forme, dont on peut constater qu'elle est relativement importante, a par conséquent été conservée. La taille des surfaces est graduée en mm . Les altitudes sont représentées en échelle de couleur, et graduées en μm . Le pas d'échantillonnage de la mesure est de $50 \mu m$ | 165 |
| 8.8 | Schéma de la configuration optique. La caméra est inclinée d'un angle de 56.5° par rapport à la direction verticale, la source étant à la verticale de la surface. | 167 |
| 8.9 | Rendu simulés à partir de la configuration de la figure 8.8 pour plusieurs valeurs du paramètre l . Les rendus sont ici représentés sous forme d'images, et permettent de visualiser l'influence de la valeur du paramètre l sur le rendu. | 167 |
| 8.10 | Comparaison des courbes de Ma obtenues pour les rendus expérimentaux et simulés. Ces courbes sont calculées à partir des images de rendu en niveaux de gris, simulées et expérimentales | 168 |
| 8.11 | Histogrammes des niveaux de gris des rendus mesurés expérimentalement (gauche) et simulés (droite) à l'aide du logiciel Blender | 169 |
| 8.12 | Comparaison des rendus mesurés expérimentalement (gauche) et simulés (droite) à l'aide du logiciel Blender. Les grandes échelles des images de rendu ont été filtrées afin de corriger l'erreur de forme. | 170 |
| 8.13 | Comparaison des courbes de Ma expérimentales pour deux surfaces géométriquement identiques de comportements optiques différents. Pour obtenir ces deux courbes, un rendu de la tôles peinte de forte rugosité a été réalisé (courbe jaune), avant que cette dernière soit recouverte d'une fine pellicule d'or qui permet d'obtenir une surface géométriquement identique avec un comportement optique parfaitement spéculaire (courbe bleue). | 172 |
| 8.14 | Histogrammes des niveaux de gris des images de rendu expérimentales de la tôle de forte rugosité revêtue des trois couches de peinture (gauche), et de cette même tôle recouverte d'une fine pellicule d'or (droite). | 172 |
| 9.1 | Simulation numérique du dépôt des couches successives de cataphorèse, sealer et laque sur une topographie aléatoire. Les dimensions des surfaces sont graduées en mm . Les altitudes sont représentées à l'aide d'une échelle colorimétrique, et graduées en μm . L'origine des altitudes est fixée à l'altitude moyenne du substrat. L'écoulement de la couche de cataphorèse a été simulé à l'aide du modèle de crossover, avec les paramètres de rhéologie décrits dans le tableau 6.1. Les écoulement des couches de sealer et de laque ont été simulés à partir du modèle newtonien, avec les paramètres de rhéologie décrits dans le tableau 7.6. | 179 |
| 9.2 | Rendu simulé à l'aide du logiciel Blender à partir de la surface revêtue de la figure 9.1 ($7.04 mm$ par $7.04 mm$) pour une source de lumière collimatée. La caméra est inclinée d'un angle de 60° par rapport à la direction verticale. Le phénomène de diffusion de la lumière est pris en compte dans la simulation : l'indice optique de la peinture est $n = 1.5$, le libre parcours moyen de la lumière en son sein étant fixé à $0.75 mm$ | 180 |

- A.1 Validation du schéma numérique : la surface représente la topographie initiale de la cataphorèse, mesurée à l'aide d'un microscope interférométrique. Chaque valeur de pixel correspond à l'altitude moyen sur une surface de $27.5 \mu m$ par $27.5 \mu m$, ce qui résulte en l'obtention d'une surface de $3.52mm$ par $3.52mm$ 198
- A.2 Validation du schéma numérique : La surface de gauche correspond à la solution analytique de l'équation (A.34), tandis que la seconde correspond à la solution obtenue avec le schéma numérique, pour $t_f = 600s$ 198

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---|-----|
| 6.1 | Paramètres de simulation | 99 |
| 7.1 | Expériences de suivi de l'évolution d'une couche de sealer au cours du temps de flash. | 111 |
| 7.2 | Expériences de suivi de l'évolution d'une couche de peinture au cours du procédé de dépôt de peinture. | 111 |
| 7.3 | Expériences de suivi de l'évolution d'une couche de peinture au cours du procédé de dépôt de peinture. | 112 |
| 7.4 | Paramètres de rhéologie de la peinture déterminés en utilisant la méthode inverse. Les paramètres sont comparés à ceux communément utilisés dans la littérature [57]. | 132 |
| 7.5 | Paramètres de simulation | 138 |
| 7.6 | Paramètres de simulation | 142 |
| 7.7 | Paramètres de simulation | 145 |
| A.1 | Paramètres de simulation | 197 |
| B.1 | Principales notations utilisées dans les modèles d'écoulement | 199 |
| B.2 | Principales notations utilisées dans les modèles de radiométrie | 200 |

Modélisation de la rugosité et de l'aspect de surfaces d'acier peintes

Résumé : L'aspect visuel des pièces peintes d'une automobile contribue significativement à la qualité de l'ensemble du véhicule. Si les procédés industriels de dépôt de peinture mis en oeuvre au cours de la fabrication de l'automobile impactent de manière prépondérante l'aspect visuel des tôles revêtues, la qualité intrinsèque de la tôle utilisée n'en est pas moins un facteur essentiel de l'obtention de cet aspect. Nous nous intéressons dans ce projet de thèse à l'influence de la topographie des tôles rugueuses sur l'aspect des pièces automobiles après mise en peinture.

Le dépôt des couches successives de cataphorèse, sealer et laque sur la tôle modifie en profondeur la rugosité des surfaces. Plusieurs modèles hydrodynamiques ont été développés au cours de ce projet de thèse, qui permettent de prédire la topographie finale de la tôle revêtue. L'accent est mis sur l'influence de la rhéologie, newtonienne ou non-newtonienne, de la peinture automobile sur la dynamique de l'écoulement. Une des principales difficultés relative à l'étude menée sur la peinture est la mesure des paramètres de rhéologie dans la configuration géométrique des films minces. Une méthode est présentée qui, via la résolution d'un problème inverse, permet une caractérisation in situ de la rhéologie de la peinture constitutive du film. Un important travail expérimental et le développement d'outils de caractérisation de la rugosité des surfaces, basés notamment sur la transformée en ondelette, ont permis de valider l'utilisation des différents modèles en vue de décrire les différentes étapes du procédé de mise en peinture.

La question de l'interaction de la lumière avec les surfaces revêtues est enfin brièvement abordée. Un modèle permettant de prendre en compte l'influence de la rugosité et du phénomène de diffusion de la lumière au sein de la couche de peinture est présenté. Des simulations de rendus ont été réalisées à partir de ce modèle et confrontées à des rendus mesurés expérimentalement, qui donnent des résultats prometteurs.

Mots clés : Caractérisation des surfaces, Rugosité, Transformée en ondelettes, Hydrodynamique des films minces, Peinture, Radiométrie

Modeling of the roughness and the appearance of painted steel surfaces

Abstract: The visual appearance of the painted steel sheets constituting the body of a car contributes significantly to the quality of the entire vehicle. If the industrial processes of paint deposition has a major impact on the visual appearance of the painted steel sheets, the intrinsic quality of the steel sheet used remains a key factor in its obtention. In this thesis, the influence of the topography of rough steel sheets on the appearance after painting is investigated.

The deposition of the successive layers of electrophoresis, sealer and lacquer on the metal significantly modify the surface roughness. Hydrodynamic models were developed during this thesis project, which aim at predicting the final topography of the painted sheet. Emphasis is placed on the influence of the paint rheology, Newtonian or non-Newtonian, on the leveling. A major challenge regarding the study of the painting is the measurement of its rheological parameters in the geometric configuration of thin films. A method is presented which, by resolving an inverse problem, allows an in situ characterization of the rheology of the paint. An important experimental work and the development of tools for characterizing surface roughness based on the wavelet transform validated the use of the different models to describe the various stages of the process of painting.

The interaction of light with the painted surfaces is finally briefly investigated. A model which takes into account the influence of the roughness and the phenomenon of light scattering in the paint layer is presented. Simulations were made from this model and confronted to experimental results, showing promising results.

Keywords: Surface characterization, Roughness, Wavelet transform, Thin film hydrodynamics, Paint, Radiometry

