HAL
open science

Modélisation du comportement dynamique non-linéaire des structures en matériaux mémoire de forme

Mohamed Ould Moussa

To cite this version:

Mohamed Ould Moussa. Modélisation du comportement dynamique non-linéaire des structures en matériaux mémoire de forme. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique X, 2011. Français. NNT : . pastel-00675919

HAL Id: pastel-00675919

https://pastel.hal.science/pastel-00675919v1

Submitted on 6 Jun 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'École Polytechnique

Spécialité : Mécanique

Modélisation du comportement dynamique non-linéaire des structures en matériaux à mémoire de forme

par

Mohamed Ould Moussa

Soutenue le 12 décembre devant le jury composé de :

M. Günay Anlaş, rapporteur
M. Tarak Ben Zineb, rapporteur
M. Olivier Doaré, co-encadrant
M. Gérard Gary, examinateur
M. Michael Peigney examinateur
M. Nguyen Quoc Son, président
M. Wael Zaki, co-encadrant
M. Ziad Moumni, directeur

Thèse financée par le FNR du Luxembourg et préparée au Laboratoire UME/ENSTA-ParisTech.

A Mohamed Seyidi
A Moussa, Fatimetou, Khadijetou, Mounaye et Zeinebou
A mes amis
Au désert qui m'a vu naître

Remerciement

Mes remerciements vont à mon directeur de thèse Ziad Moumni qui m'a orienté scientifiquement et m'a aidé à acquérir une autonomie dans mes travaux de recherche, à mes co-encadreurs Wael Zaki et Olivier Doaré de leurs conseils et orientations. Cyril Touzé m'a beaucoup appris et aidé dans les calculs numériques tout au long de la thèse, qu'il trouve ici mes sincères remerciements. Je tiens à remercier également Antoine Chaigne de m'avoir accepté au sein de son laboratoire, encouragé et conseillé au début de ma thèse. Je remercie Gérard Gary de son aide et de sa disponibilité aucours de ma première année où l'objet était de faire des essais dynamiques avec le dispositif des barres de Hopkinson dont il avait la maîtrise scientifique et technique.

Je remercie Günay AnlaŞ et Tarak Ben Zineb d'avoir accepté de rapporter ma thèse, qu'ils trouvent toute ma reconnaissance de m'avoir accordé de leur temps précieux. Nguyen Quoc Son a accepté de faire partie de mon jury de thèse, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude et mon remerciement. Je remercie également Michael Peigney d'avoir accepté d'être membre de mon jury.

Sans oublier l'aide perpétuelle de Fabrice Baronnet et Audrey Lemarechal de l'école doctorale de Polytechnique, je les remercie chaleureusement. Je remercie les techniciens du laboratoire, Lahcene Cherfa et Patrice Riberty de leur aide et soutien dans la réalisation des expériences qui ont fait partie de cette thèse. Je remercie également les membres du Service Informatique et Edition de leur aide dans la reproduction de ma thèse. Tout celui ou celle qui a contribué de près ou de loin à la finalisation de ce travail est sujet ici à de chaleureux remerciements et profonde reconnaissance.

Résumé :

Le comportement thermomécanique des matériaux à mémoire de forme est étudié dans la plage de leur pseudoélasticité. En effet, le modèle Zaki-Moumni initialement validé dans les conditions de chargements quasi statiques, est étendu à l'effet de la vitesse de chargement par la prise en compte du couplage thermomécanique. Les résultats de la simulation de cette extension sont comparés à l'expérience et montre une bonne reproduction qualitative des observations à différentes vitesses de chargements et à température initiale fixée. Le modèle tridimensionnel est ensuite réduit pour analyser les oscillations unidimensionnelles d'un dispositif en matériaux à mémoire de forme. La réponse en fréquences de l'oscillateur forcé est alors investie autour de la résonance. Les oscillations isothermes et non isothermes ainsi que la dissymétrie en traction-compression de la force de rappel, sont prises en compte. Des phénomènes dynamiques tels que le chaos, le doublement de périodes et les sauts autour de bifurcations dans la solution, apparaissent pour des amplitudes de chargement élevées et pour des paramètres matériaux donnés.

Abstract :

The dynamical non-linear thermomechanical behaviour of shape memory alloy (SMA) displaying superelasticity is investigated. For that purpose, the Zaki-Moumni (ZM) model, initially developped for quasi-static loading cases, is extended to simulate the uniaxial forced oscillations of a SMA device. The influence of loading rate is accounted for by considering the thermomechanical coupling in the behaviour of NiTi shape memory alloy. The model is compared to experimental results on a wire subjected to tensile loadings at different strain rates, showing good agreement. Then, the forced response of a SMA device is investigated at resonance. Both isothermal and non-isothermal conditions are accounted for, as well as non-symmetric tensile-compressive restoring force. In the case of large values of forcing amplitudes, simulation results show that the dynamic response is prone to jumps, bifurcations and chaotic solutions.

Glossaire

Symbole	Description
M^0_{ms}	Température de début de formation de la martensite
M^0_{mf}	Température de fin de formation de la martensite
A^0_{as}	Température de début de formation de l'austénite
A^0_{af}	Température de fin de formation de l'austénite
$\boldsymbol{\Lambda}_A$	Module d´élasticité de l´austénite
ε_A	Déformation locale de l´austénite
$\boldsymbol{\Lambda}_M$	Module d´élasticité de la martensite
ε_M	Déformation locale de la martensite
ε_{ori}	Déformation due l'orientation des martensites
z	Fraction volumique de la martensite
α, β, G,ξ,	Autres paramètres matériaux
η	Entropie spécifique
$\mathbf{S}_A$	Module de souplesse de l´austénite
$\mathbf{S}_M$	Module de souplesse de la martensite
a et b	Paramètres matériaux dont dépend le plateau de transformation
Y	Contrainte seuil de début d'orientation
C_P	Capacité thermique
ρ	Masse volumique du matériau
k	Coefficient de conduction thermique
r_l	Source volumique de chaleur
T	Température du matériau
T_0	Température de reférence
κ	Densité de chaleur latente initiale
h	Coefficient d'échange de chaleur
ε_0	Déformation d'orientation maximale
λ_1,λ_2,$\boldsymbol{\lambda}$ et μ	Multiplicateurs de Lagrange
$\boldsymbol{\sigma}$	Contrainte

$\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{eq}}$	Module élastique équivalent
$\mathcal{K}_A$	Rigidité de l'austénite
$\mathcal{K}_M$	Rigidité de la martensite
X_A	Déplacement local de l'austénite
X_M	Déplacement local de la martensite
X_{ori}	Déplacement dû à l'orientation
X	Déplacement total
F	Force de rappel
τ	Contrainte de cisaillement
γ	Déformation de cisaillement
γ_{ori}	Cisaillement dû à l'orientation
α_c	Angle de rotation imposé
ϵ_{cr}	Tolérance sur les critères métallurgiques
ϵ_{eq}	Tolérance sur l'équilibre mécanique
ϵ_{ch}	Tolérance sur l'équilibre thermique

TABLE DES MATIÈRES

1 Introduction générale 9
2 Etat de l'art 13
2.1 À propos des matériaux à mémoire de forme 14
2.2 La transformation martensitique 14
2.3 Comportements 16
2.4 Types et fabrication des MMF 23
2.5 Applications 24
2.6 Etat de l'art sur la dynamique 27
2.6.1 Introduction 27
2.6.2 Couplage thermomécanique 27
2.6.3 Aspect de calcul de structure 30
2.6.4 Conclusion 33
3 Prise en compte du couplage thermomécanique 35
3.1 Introduction 36
3.2 Essais thermomécaniques 36
3.2.1 Objectifs 37
3.2.2 Résultats et interprétations 37
3.3 Modèle Zaki-Moumni isotherme 39
3.4 Prise en compte du couplage thermomécanique 42
3.4.1 Equations 42
3.4.2 Algorithme de résolution 44
3.4.3 Simulations numériques 47
3.5 Conclusion 51
4 Etude d'oscillateur en matériau à mémoire de forme 53
4.1 Introduction 54
4.2 Modèle à un degré de liberté 54
4.2.1 Identification des paramètres 58
4.2.2 Adimensionnement des variables 59
4.3 Méthode numérique 61
4.4 Résultats 62
4.4.1 Réponses en fréquence à température constante . . . 65
4.4.2 Réponses non isothermes 73
4.4.3 L'énergie dissipée en fonction de la fréquence 76
4.5 Conclusion 78
5 Torsion d'un fil pseudoélastique 79
5.1 Introduction 80
5.2 Modélisation du comportement 82

5.2.1 Equations physiques du problème de torsion 83
5.2.2 Modélisation quasi statique 86
5.2.3 Modélisation dynamique 94
5.3 Expériences de torsion d'un MMF 105
5.3.1 Description de l´expérience 105
5.3.2 Résultats en quasi statique et comparaison avec le modèle 107
5.3.3 Résultats en dynamique 109
5.4 Analyse expérimentale du comportement cyclique 110
5.4.1 Recherche du cycle stabilisé 110
5.4.2 Recherche du point mémoire 112
5.5 Conclusion 114
6 Conclusion générale 115
7 Bibliographie 117

1 INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les matériaux à mémoire de forme (MMF) présentent des comportements inhabituels par rapport aux matériaux "classiques". En effet, ils peuvent subir de déformations réversibles importantes (10%) suite à un chargement mécanique (pseudo-élasticité), et recouvrer leur forme initiale par simple élévation de température après avoir été déformés quasi-plastiquement (effet mémoire de forme). En plus de ces deux comportements bien connus, les MMF présentent d'autres particularités telles que l'effet super-thermique, l'effet double sens, l'effet caoutchoutique, etc. Il est bien établi que ces comportements sont dus à une transformation de phase à l'état solide : la transformation martensitique. Du fait de leurs caractéristiques particulières, les MMF sont de plus en plus utilisés dans la technologie de pointe, allant du biomédical à l'aérospatial. Notamment, le caractère dissipatif de la transformation de phase en fait de très bon candidats à des dispositifs d' amortissement (nucléaire) ou de contrôle de vibrations (aéronautique). Deux problématiques sont de ce fait à considérer : leur réponse dynamique et leur tenue à la fatigue dynamique.
Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre d'une approche globale unifiée pour la modélisation du comportement thermomécanique des MMF développée initialement par Moumni *et al.* [1]. Cette approche a pour objectif la modélisation de tous les comportements inhabituels (effet simple sens, effet double sens, orientation de la martensite, pseudo-élasticité, réponse cyclique) des MMF, dans le cadre des matériaux standards généralisés avec liaisons internes (Moumni *et al.* [2]) .
Dans un premier temps, on propose une extension du modèle ZM (Zaki-Moumni), (*cf.* Moumni *et al.* [2] et Zaki et Moumni [3]), afin de prendre en compte les effets du couplage thermomécanique qui deviennent prépondérants, et donc non négligeables, dans le cas d'un chargement dynamique. A cette fin, des essais réalisés montrent clairement l'influence de la vitesse du chargement sur la réponse pseudo-élastique du matériau. Ces essais confirment que la dépendance de la réponse par rapport à la vitesse de chargement est essentiellement due au couplage thermomécanique et non à la viscosité du matériau. Ce phénomène a été pris en compte en modifiant l'énergie libre du modèle et en résolvant des équations de la mécanique et l'équation de la chaleur d'une manière couplée. Les résultats de la simulation montrent une bonne reproduction qualitative des observations expérimentales.

Ensuite une réduction du modèle couplé afin d'analyser les oscillations unidimensionnelles d'un dispositif en MMF a été réalisée. La réponse en fréquence de l'oscillateur forcé est étudiée autour de la résonance. Les oscillations isothermes et non isothermes, ainsi que la dissymétrie en traction-compression de la force de rappel sont prises en compte. Cette étude a permis de révéler des réponses dynamiques fort intéressantes en fonction de l'amplitude du chargement telles que le doublement de période, bifurcations ainsi que le chaos. Les résultats obtenus montrent une bonne corrélation avec ceux de la littérature (Bernardini *et al.* [4, 5, 6]). L'originalité de notre contribution réside, d'une part, dans l'utilisation d'une loi de comportement dont l'admissibilité thermodynamique a été prouvée (Moumni *et al* [2]) ouvrant ainsi la voie au calcul dynamique des structures 3D en MMF et, d'autre part, dans l'investigation des amplitudes de chargement plus importantes, faisant ainsi apparaître des réponses dynamiques nouvelles, et dans la prise en compte de la dissymétrie entre traction et compression. En outre, la modélisation de la réponse dynamique des MMF en comparant la simulation de la réponse en fréquence à l'essai dans le cadre de la torsion, a été réalisée par Doaré *et al.* [7]. C'est, à notre connaissance, la première fois qu'une telle comparaison est réalisée dans le domaine des MMF.

Dans la dernière partie, nous abordons la fatigue dynamique des MMF par l'étude de l'influence de la fréquence de sollicitation sur la dissipation d'énergie, ouvrant ainsi la voie à une généralisation du critère énergétique de fatigue des MMF développé au sein du groupe MS (Moumni *et al* [1]) pour tenir compte des effets dynamiques.

Ce travail s'articule en six chapitres :

o Le premier chapitre est consacré à une présentation générale des matériaux à mémoire de forme. On y montre leurs différents comportements et leurs applications en mettant en valeur celles qui nécessitent la prise en compte des effets dynamiques. Un état de l'art sur la dynamique des MMF discute les différents travaux sur le sujet. L'apport de notre contribution est alors mis en valeur. Nous organisons ainsi cette bibliographie suivant deux axes : un premier aspect qui concerne le comportement du matériau où les travaux de mise en évidence, de caractérisation et de modélisation du couplage thermomécanique sont présentés. Un second aspect qui traite le calcul de structures où une synthèse des travaux consacrés à l'étude de la réponse dynamique d'une structure en MMF est réalisée.

o Le deuxième chapitre est dédié à la prise en compte du couplage thermomécanique. Pour ce faire, nous présentons les essais thermomécaniques qui ont permis la mise en évidence des effets de ce couplage. Un rappel des équations du modèle ZM et l'énergie libre modifiée y apparaissent également. La simulation de l'extension proposée dans un cas de traction

d'un cylindre est réalisée sous le code éléments finis *cast3m*. Les résultats reproduisent qualitativement les effets du couplage. Une comparaison quantitative, pour deux vitesses de déformation, avec les travaux de Shaw et Kyriakides [8], montre tout de même un bon accord.
o Le troisième chapitre traite la modélisation de la réponse dynamique d'un oscillateur harmonique en MMF. Les résultats de la simulation sous Matlab des oscillations isothermes et non isothermes, sont présentés avec une interprétation des phénomènes physiques qui y apparaissent. La comparaison avec les résultats de la littérature, présente un très bon accord.
o Le quatrième chapitre analyse la réponse dynamique d'une structure continue. Il s'agit d'un cylindre en MMF, soumis à un chargement dynamique de torsion. Une modélisation du problème est réalisée dans les deux cas statique et dynamique. Une comparaison avec l'expérience des résultats numériques du comportement local de cisaillement à différentes fréquences de chargement, est présentée. Ce chapitre contient également, une analyse expérimentale du comportement cyclique (cycle stabilisé et boucles d'hystérésis internes) dans les conditions de chargement en torsion dynamique.
o Une conclusion et quelques perspectives font l'objet du dernier chapitre.

2

ETAT DE L'ART

Sommaire

2.1 À propos des matériaux à mémoire de forme 14
2.2 La transformation martensitique 14
2.3 Comportements 16
2.4 Types et fabrication des MMF 23
2.5 Applications 24
2.6 Etat de l'art sur la dynamique 27

Ce chapitre présente des généralités sur les matériaux à mémoire de forme (MMF). La transformation martensitique qu'ils subissent est présentée en soulignant sa dépendance des chargements mécaniques et thermiques. Leurs types et propriétés (compositions chimiques et températures de transition) ainsi que les applications qui en découlent, sont présentés.

2.1 À PROPOS DES MATÉRIAUX À MÉMOIRE DE FORME

Les matériaux à mémoire de forme (MMF) peuvent se présenter sous deux phases de microstructures différentes. Une phase appelée *Austénite* où la microstructure est stable énergétiquement à haute température. Une seconde appelée *Martensite* où plusieurs variantes de microstructures d'orientations différentes existent, est stable énergétiquement à basse température. Ils se transforment de l'austénite vers la martensite par une transformation martensitique.

La figure 2.1 met en évidence la différence entre la disposition des atomes

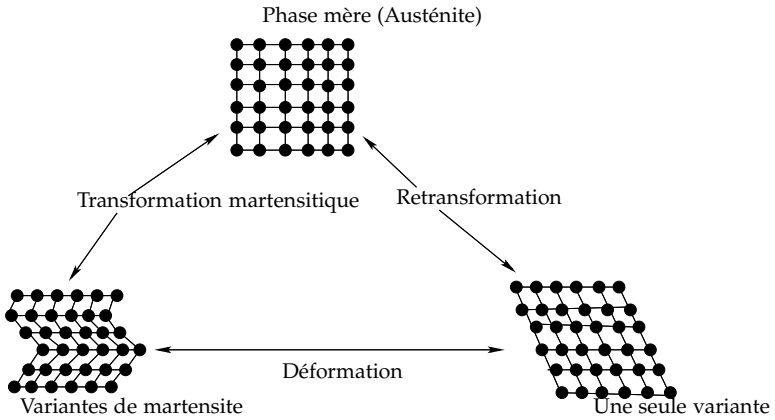

Figure 2.1: *De l'austénite la martensite autoaccommodée ou orientée*

dans les deux phases : l'austénite (la phase mère) et la martensite dans ses deux états, autoaccommodée et orientée. Des sollicitations thermomécaniques peuvent faire passer ces matériaux d'une phase à l'autre moyennant des contraintes ou températures de transition. Ce passage est connu sous le nom de transformation martensitique dont une présentation est donnée par ce qui suit.

2.2 LA TRANSFORMATION MARTENSITIQUE

La transformation martensitique n'est pas propre au changement de phase solide-solide des matériaux à mémoire de forme. En effet, lorsque l'acier initialement dans la phase austénitique est trempé, il présente un durcissement. A l'échelle microscopique, la structure semble extrêmement fine et est appelée *martensite* par référence au métallurgiste allemand Adolf Martens. Le durcissement est le résultat d'une transformation cristallographique sans diffusion d'atomes. Des mailles cubiques faces centrées sont transformées en mailles souvent tetragonales ou rhombohédriques (Funakubo [9]). La phase cristalline ainsi créée est appelée *martensite* et la transformation cristallographique est appelée *transformation martensitique*. Cette transformation a été observée dans nombre de métaux et alliages autres

que l'acier et caractérise un type de transition entre des phases solides sans diffusion d'atomes et de premier ordre.
La *transformation martensitique* peut se définir par : une transformation de mailles entraînant des déformations de cisaillement et opérant par un mouvement coopératif des atomes. Les atomes maintiennent une coordination comme au jeu Domino jusqu'à ce que la maille austénitique se transforme en martensite.
Les propriétés suivantes découlent de la définition de la transformation martensitique (Funakubo [9]) :
1. Le processus de changement de phase se fait sans diffusion d'atomes. La concentration des atomes est la même indépendamment du changement de phase qui peut se produire en *austénite*.
2. La transformation est accompagnée par une déformation surfacique macroscopiquement quantifiable. Un échantillon austénitique dont la surface a été polie, est refroidi jusqu´à transformation de l´austénite en martensite : la surface montre alors une nette déformation.
3. Chaque grain martensitique présente un plan habitat ou plan-limite. Il s'agit de l'interface entre la phase mère et la phase martensitique au long de laquelle le cisaillement se produit durant la transformation.
4. La phase austénitique et la phase martensitique sont reliées suivant une orientation bien définie.
5. Des défauts de glissement des plans limites apparaîssent durant la transformation de phase. Par conséquent, la déformation de transformation est la somme de la déformation de cisaillement et de la déformation engendrée par ces défauts cristallins.
Thermodynamiquement parlant, pour induire la transformation *austénite* vers *martensite*, l'énergie chimique de la *martensite* doit être plus faible que celle de l'*austénite*. Cependant, le changement de phase ne peut s'opérer que lorsque la différence entre les deux énergies chimiques dépasse la somme des énergies non chimiques (énergie de déformation de transformation, énergie d'interfaces, etc ...). Si le matériau n'est pas refroidi jusqu'à une température $\mathcal{M}_{ms}^{0}$ en dessous de la température d'équilibre T_0 (où les deux énergies chimiques sont égales) alors la transformation ne se déclenche pas. De même, si le matériau n'est pas chauffé jusqu'à une température $\mathcal{A}_{as}^{0}$ au-dessus de T_0, la transformation inverse (*martensite* vers *austénite*) ne se produit pas.
Du point de vue de l'évolution, le changement de phase n'avance que lorsque la température chute en deçà de $\mathcal{M}_{ms}^{0}$. Il s'agit d'un mécanisme athermique qui s'opère par nucléation de nouveaux cristaux martensitiques dans la phase mère. Les derniers apparaissent et croissent rapidement à environ un tiers de la célérité des ondes élastiques dans les solides (Funakubo [9]) .

2.3 COMPORTEMENTS

Les comportements des matériaux à mémoire de forme dépendent de la température, du niveau de contrainte, de l´histoire du chargement thermomécanique, de la composition chimique et de la vitesse de chargement (Funakubo [9]). Nous nous basons dans la présentation de leurs comportements usuels, sur leur diagramme de phase, établi en général de façon empirique.

Diagramme de phase

Le diagramme de phase (figure 2.2) des MMF tel qu'il est considéré dans la présente contribution, exprime la contrainte dans le matériau en fonction de sa température pour une composition chimique fixée. Nous notons par ailleurs que la relation thermomécanique qui existe entre les contraintes et températures de transition est empirique et reproduite par un modèle linéaire.

On se propose d'illustrer certains comportements usuels des MMF, par des

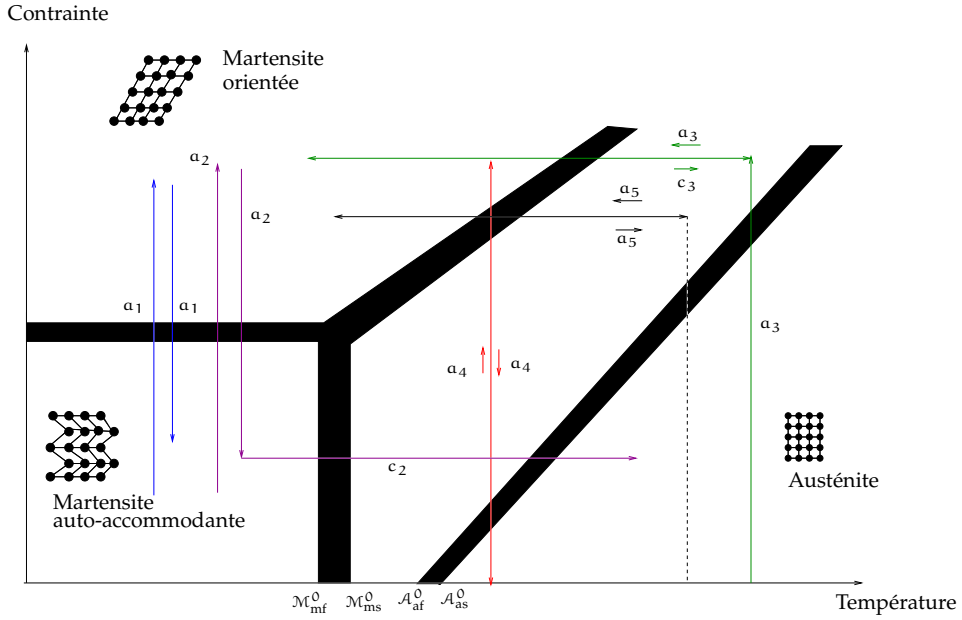

Figure 2.2: *Diagramme de phase Contrainte-Température à composition chimique fixée montrant les différents trajets correspondants aux comportements usuels des MMF*

trajets thermomécaniques sur ce diagramme de phase. Les comportements usuels des MMF sont en effet :

Auto-accommodation

L'austénite est la phase d'un MMF à haute température (voir figure 2.2). Cependant, lorsque le matériau est refroidi, il se transforme en martensite partir de la température seuil $\mathcal{M}^0_{ms}$. En l'absence de contrainte dans

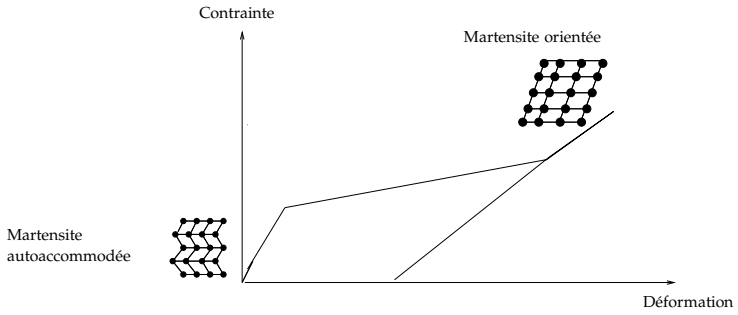

Figure 2.3: *Contrainte en fonction de la déformation dans un essai d'orientation des variantes autoaccommodées de la martensite, dont l'apparition est issue d'un refroidissement du matériau sans effort mécanique*

le matériau, la microstructure s'organise sans privilégier une orientation particulière. Par conséquent, des variantes martensitiques se créent, avec une déformation macroscopique moyenne nulle.

Orientation des martensites autoaccommodées

L'orientation de la martensite autoaccommodée s'opère par un chargement mécanique (*cf.* le chemin $(a_1 b_1)$ sur la figure 2.2). Dans ce cas, les variantes martensitiques qui sont compatibles avec le sens de la contrainte dans le matériau, sont alors privilégiées. Dans ce type d'essais, le niveau de la déformation macroscopique engendrée est très élévé, de l'ordre de 10% pour le MMF de type Nickel-Titane, par exemple. La figure 2.3 montre une illustration du résultat d'un essai mécanique d'orientation, on peut y voir l'apparition de déformation inélastique importante à la décharge.

Pseudo-élasticité

Une réversibilité à l'échelle cristallographique accompagnée d'une dissipation d'énergie, peut être observée lors d'un cycle de chargement mécanique d'une structure en MMF, à haute température (*cf.* le chemin $(a_4 b_4)$ sur la figure 2.2). Il s'agit de la pseudo-élasticité (voir figure 2.4) : la transformation de phase directe est déclenchée à partir d'un niveau de contrainte seuil qui dépend de la température, ensuite lors de la décharge, la transformation de phase inverse ramène le MMF à sa phase austénitique initiale.

Effet mémoire de forme simple sens

Déformé à basse température en martensite, un MMF peut revenir à l'austénite (sa phase initiale), sous l'effet d'un chauffage au-dessus d'une température seuil qui dépend du niveau de contrainte dans le matériau (*cf* le chemin $(a_2 b_2 c_2)$ sur la figure 2.2). Le chauffage déclenche une transformation de phase d'un état déformé (basse température) vers un état austénitique (haute température), annulant la déformation macroscopique observée en martensite (voir la figure 2.5).

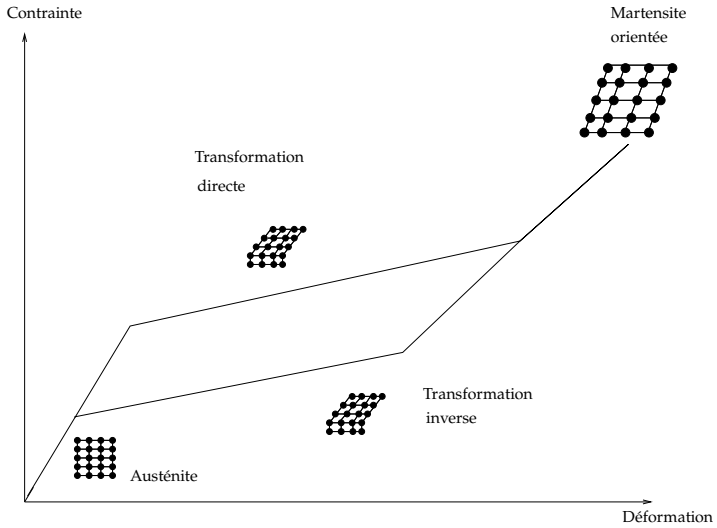

Figure 2.4: *Contrainte en fonction de la déformation dans un essai de pseudo-élasticité*

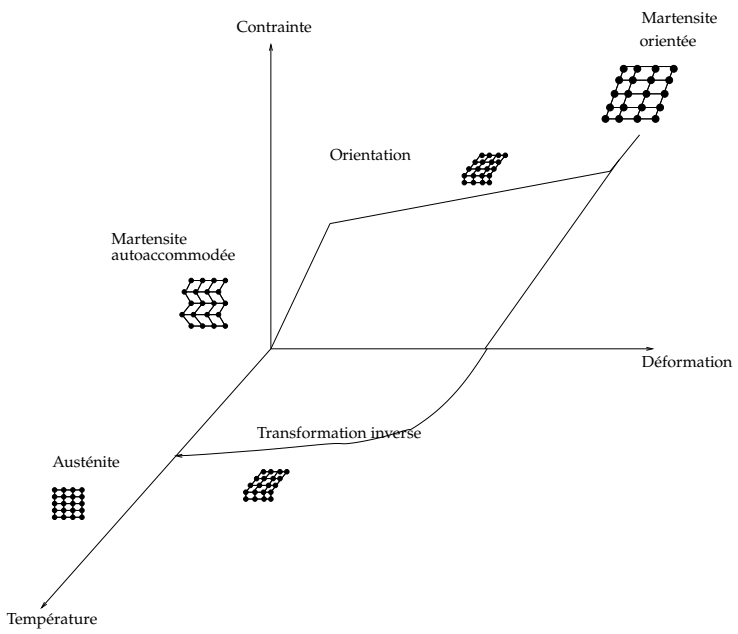

Figure 2.5: *Courbe contrainte-déformation-température dans un essai de mise en évidence du comportement effet mémoire simple sens*

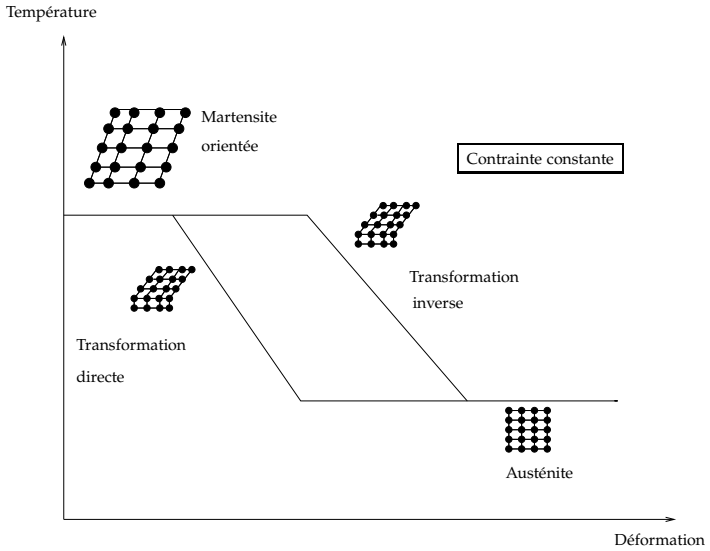

Figure 2.6: *Température en fonction de la déformation dans un essai de mise en évidence du comportement effet mémoire double sens*

Effet mémoire de forme double sens
Au cours de la transformation martensitique, le niveau de contrainte dans le matériau peut engendrer une accumulation de défauts irréversibles (glissement au niveau des plans-limites) qui se stabilisent suite à un chargement thermomécanique cyclique. Cela conduit à l'apparition d'un champ de contraintes résiduelles associé à ces défauts et responsable d'une orientation de la martensite au cours de la transformation directe (voir la figure 2.6). On dit que le matériau MMF est "éduqué" si bien qu'il peut passer de l'une des phases à l'autre sous l'effet d'un chargement purement thermique (*cf.* le chemin (a_5b_5) sur la figure 2.2).

Effet superthermique
Lorsqu'on maintient un niveau de contrainte constant dans le MMF en austénite alors un chargement thermique engendre l'effet superthermique (*cf* le chemin $(a_3b_3c_3)$ sur la figure 2.2). En effet, le niveau de contrainte constant provoque une transformation de l'austénite refroidie en martensite orientée. La déformation peut être recouvrée par un chauffage au-dessus de la température de fin du changement de phase inverse (voir la figure 2.7).
Effet caoutchoutique
Lorsque le MMF est en basse température, à l'état martensitique, alors le mouvement relatif des interfaces inter-variantes est à l'origine d'une inélasticité même si le chargement n'atteint pas le seuil d'orientation. En effet, une dissipation par frottement interne de ces interfaces dans le MMF, en-

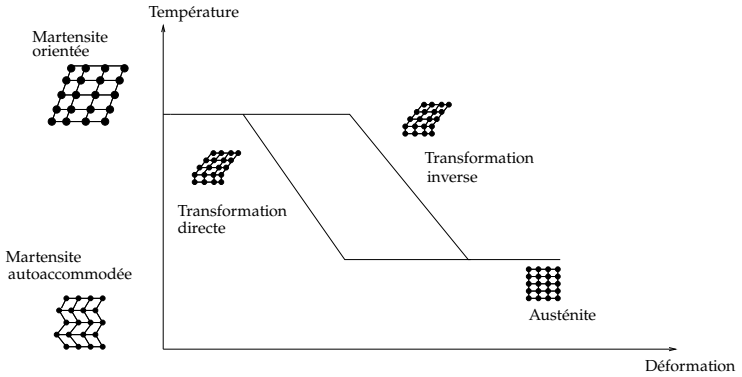

Figure 2.7: *Température en fonction de la déformation dans un essai de mise en évidence du comportement superthermique des MMF*

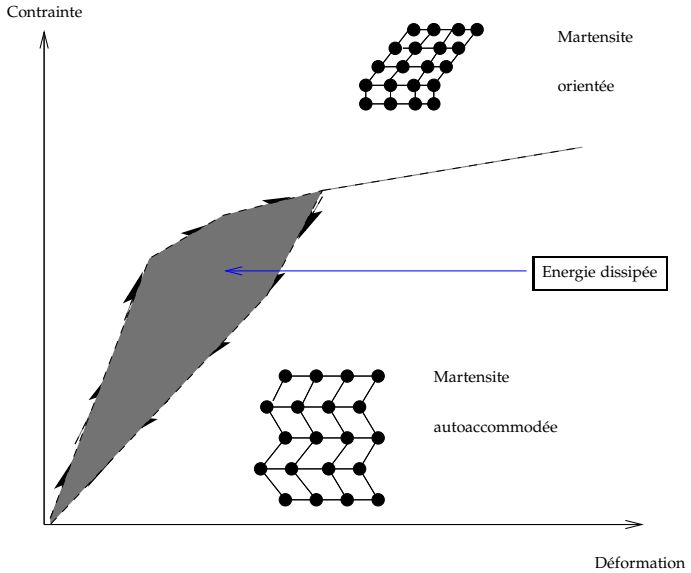

Figure 2.8: *Contrainte en fonction de la déformation dans un essai de mise en évidence du comportement caoutchoutique des MMF*

gendre l'effet caoutchoutique (voir la figure 2.8).

Nous venons de présenter les comportements usuels des MMF dans les conditions de chargements quasi-statiques. Nous nous proposons maintenant de faire une synthèse des modèles phénoménologiques proposés dans la littérature pour ces comportements.

Modélisation des comportements usuels des MMF

Il existe plusieurs écoles de modélisation des comportements des MMF dans la littérature : une modélisation à l'échelle microscopique, une approche mico-macroscopique et une modélisation macroscopique basée sur la phénoménologie. Cependant, étant donné que nos travaux sont dévelop-

pés dans un cadre thermodynamique, nous nous limiterons ici à présenter les modèles phénoménologiques (ou thermodynamiques). Le point commun entre tous les modèles thermodynamiques des MMF, est l'utilisation de l'énergie libre (potentiel énergétique pour les phénomènes réversibles) et d'un potentiel de dissipation. Edelen [10] a démontré que les flux qui apparaissent dans l'inégalité de Clausius-Duhem peuvent être décomposés en flux dissipatifs et non dissipatifs. Les lois des flux dissipatifs sont établis à partir des potentiels de dissipation. Tanaka et Nagazaki [11] sont les premiers à étudier la transformation martensitique dans le contexte du formalisme d'Edelen.
Tanaka [12] a développé un ensemble d'équations reliant la contrainte, la déformation et la température ainsi que des fonctions puissances (exponentielles) pour la cinématique de la fraction volumique de martensite. Niezgodka *et al.* [13], Niezgodka et Sprekels [14, 15], Hoffman et Sprekels [16] et Hoffman et Zheng [17] ont proposé des modèles semblables. Se basant sur les travaux de Tanaka, Liang et Rogers [18] ont proposé un ensemble d'équations empiriques pour la cinématique de la transformation de phase. Ils simplifient le modèle de Tanaka en introduisant une relation cinématique sinusoidale (modèle en cosinus) pour la fraction volumique de martensite. Cependant, le modèle qu'ils ont développé est limité à un comportement thermomécanique en dehors de l'intervalle $\left[\mathcal{M}^0_{\mathrm{mf}}\ \mathcal{M}^0_{\mathrm{ms}}\right]$ de température. Brinson [19] a amélioré le modèle de Liang et Rogers pour qu'il soit validé pour n'importe qu'elle température, en introduisant deux variables de fractions volumiques de martensite, une associée à la température et une seconde associée à la contrainte. Il est montré que le modèle de Brinson est plus général et simple à utiliser. Cependant, il ne tient pas compte de l'effet de chargements cycliques et de l'accumulation de la fraction volumique de martensite résiduelle. Dans d'autres travaux de Tanaka *et al.* [20], le comportement thermomécanique des boucles d'hystérésis internes est expliqué.
Toujours dans le cadre thermodynamique, Patoor *et al.* [21], Sun et Hwang [22] et d'autres ont développé des modèles thermomécaniques différents pour le NiTi. Raniecki et Lexcellent [23] ont développé trois modèles avec l'hypothèse d'un écoulement et un recouvrement pseudo-élastiques parfaits, un plateau de transformation linéaire et non linéaire isotrope, qui permettent de prendre en compte l'ensemble des observations dans le comportement pseudo-élastique. Boyd et Lagoudas [24] ont développé un modèle thermodynamique de la pseudo-élasticité et de l'effet mémoire de forme, qui tient compte de la transformation de phase et de l'orientation dans la phase martensitique. Il tient compte aussi bien du cas de chargements non proportionnels que des transformations isothermes et adiabatiques.
Falk [25] a proposé un modèle unidimensionnel, basé sur la théorie clas-

sique de Devonshire où l'effet mémoire de forme et la pseudo-élasticité sont représentés par une énergie libre. L'expression de celle-ci est un polynôme de degré six et de variables la déformation uniaxiale et la température. Cependant, ce modèle ne considère pas un potentiel de dissipation et des résultats expérimentaux ont montré qu'il ne peut pas reproduire le comportement mécanique du NiTi pour les faibles amplitudes de déformation.

Savi et Kouzak [26] ont modifié le modèle de Falk mais le manque de résultats expérimentaux pour l'identification des paramètres matériaux et la dépendance entre le module élastique et la température, ont constitué les principales limites pour leur modèle. Muller et Xu [27] ont également développé un modèle du comportement pseudo-élastique, en utilisant une approche de potentiels énergétiques. Patoor *et al.* [21] et Berveiller *et al.* [28] ont développé des lois constitutives locales pour le comportement pseudo-élastique, en utilisant une analyse micromécanique basée sur une description de la cinématique du mécanisme physique de déformation et une définition d'un potentiel thermodynamique local.

D'autres modèles ont été développés tenant compte de l'effet du chargement cyclique sur le comportement du NiTi. Bo et Lagoudas [29] ont développé un modèle thermodynamique pour le NiTi sous un chargement cyclique. Le modèle prend en compte l'influence des contraintes résiduelles sur la transformation martensitique, les déformations plastiques dans l'effet mémoire de forme double sens et la variation dans l'hystérésis en fonction du nombre de cycles de chargement. Lexcellent et Tobushi [30] ont analysé l'effet du chargement cyclique pour les cas isothermes et présenté un cadre thermodynamique pour la modélisation des boucles internes en pseudo-élasticité. Delobelle et Lexcellent [31] ont utilisé un modèle viscoplastique unifié avec des variables cinématiques internes pour améliorer la description du chargement uniaxial et proportionnel dans la plage thermique de pseudo-élasticité. Ils ont développé également un ensemble de lois constitutives pour la description des boucles internes pseudo-élastiques dans des conditions isothermes de chargement. L'introduction de la notion de martensite résiduelle instantanée et la définition des conditions cinématiques de la variable associée, ont permis dans les travaux de Lexcellent et Bourbon [32] de développer un modèle thermodynamique en fonction de l'énergie libre pour le comportement cyclique du NiTi, dans des conditions isothermes et une plage de déformation spécifique. Cependant, ce modèle ne peut pas tenir compte des effets de la vitesse de charge ou de déformation. Graesser et Cozzarelli [33] ont modifié un modèle unidimensionnel existant de l'hystérésis pour inclure des caractéristiques macroscopiques du NiTi, cependant, leur modèle surestime le comportement pseudo-élastique d'environs 35 %.

D'autres modèles du comportement pseudo-élastique, comme celui de Duval *et al.* [34], utilisent des approches à gradient pour une modélisation non locale de la transformation martensitique.
Par ailleurs, ces modèles ne tiennent pas compte du couplage thermomécanique dont l'effet change complètement le comportement pseudo-élastique du MMF.
En réalité, nous pouvons voir sur la figure 2.9 une illustration de cet effet

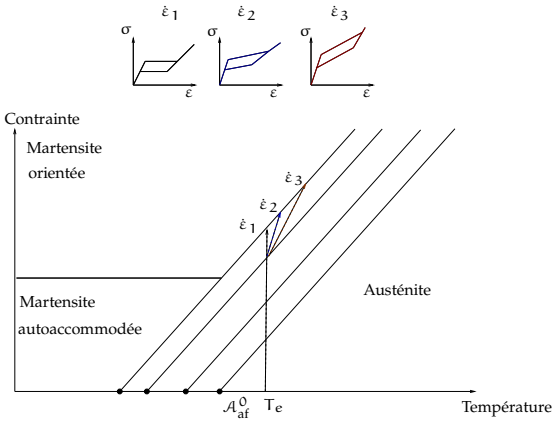

Figure 2.9: *Diagramme de phase : contrainte en fonction de la température et variations du comportement pseudo-élastique avec la vitesse de déformation*

absent dans ces modèles : plus la vitesse de déformation augmente, plus la température du matériau augmente, engendrant ainsi une augmentation de la pente du plateau de transformation et une variation de l'aire de la boucle d'hystérésis. C'est la raison pour laquelle, nous nous proposons dans la présente contribution de tenir compte de ce couplage thermomécanique qui intervient lorsque le chargement est dynamique. Nous étendons comme dit dans l'introduction, le modèle ZM par une modification de l'expression de l'énergie libre proposée initialement.

2.4 TYPES ET FABRICATION DES MMF

Parmi les familles des matériaux à mémoire de forme, on peut citer ceux à base de cuivre (CuAlNi et CuAlZn) ou du Nickel (NiTi). Le Nickel-Titane (NiTi) est très utilisé grâce à sa bonne résistance à la fatigue, sa grande capacité d´amortissement et les déformations réversibles importantes qu´il peut subir (Duerig [35]).
La technologie des micro-actionneurs attire des applications de l'alliage NiTi sous forme de couches minces et le développement de nouveaux alliages à mémoire de forme encore non utilisés à cette échelle (Walker et al. [36]).
Cependant, la température de transition de phase du NiTi est très sensible à sa composition chimique. Une variation d'environ 1% de la composition

chimique nominale fait varier la température de transition de 150°C. Par conséquent, atteindre une composition chimique bien adéquate pour le NiTi est une tâche difficile. Les techniques d'ablation, de pulvérisation et de grésillement par LASER qui sont les principales méthodes de fabrication ont le défaut d'avoir des tolérances plus larges que celles idéales. Un aperçu général sur les procédés de fabrication de ce type d'alliages peut être trouvé dans Walker et al. [36] et Stalmans et Humbeeck [37]. Quelques familles d'alliages à mémoire de forme (Hodgson et al. [38]) peuvent être repertoriées dans le tableau 2.1 avec certaines propriétés.

Alliage	Composition	Température de transition de phase
Ag-Cd	44/49 at. % Cd	[-190 50 °C
Au-Cd	46.5/50 at. %Cd	[30 100 °C
Cu-Al-Ni	14/14.5 wt. %Al, 3/4.5 wt.% Ni	[-140 100 °C
Cu-Sn	approx. 15 at. % Sn	[-120 30 °C
Cu-zn	38.5/41.5 wt.% Zn	[-180 -10 °C
Cu-Zn-X (X=Si,Sn,Al)	quelques wt.% de X	[-120 200 °C
In-Ti	18/23 at.% Ti	[60 100 °C
Ni-Al	36/38 at.% Al	[-180 100 °C
Ni-Ti	49/51 at.% Ni	[-50 110 °C

Table 2.1: *Quelques familles de matériaux à mémoire de forme*

2.5 APPLICATIONS

Considérant l'utilisation de nouveaux alliages à mémoire de forme, beaucoup de matériaux découverts dans les années 40 n'ont pas eu de larges applications. L'origine de ce fait peut être :

1. Le coût des composants en ces alliages,
2. Les limites de comportements (faible résistance à la fatigue ou à la corrosion) de certains alliages,
3. La complexité du procédé de fabrication.

L'utilisation des MMF comme micro-actionneurs a commencé dans les années 1990. Depuis lors, beaucoup de dispositifs en MMF ont vu le jour comme des micro-pistons et pompes (Wilson et al. [39], Gill et al. [40] et Abadie [41]). Ces actionneurs sont souvent chauffés par Effet Joule mais on peut faire varier la température ambiante autour d'eux.

Les figures 2.10 (a), (b), (c) et (d) montrent des applications dans le domaine biomédical. Il s'agit de fils guides (Fig. 2.10 (a)) utilisés en chirur-

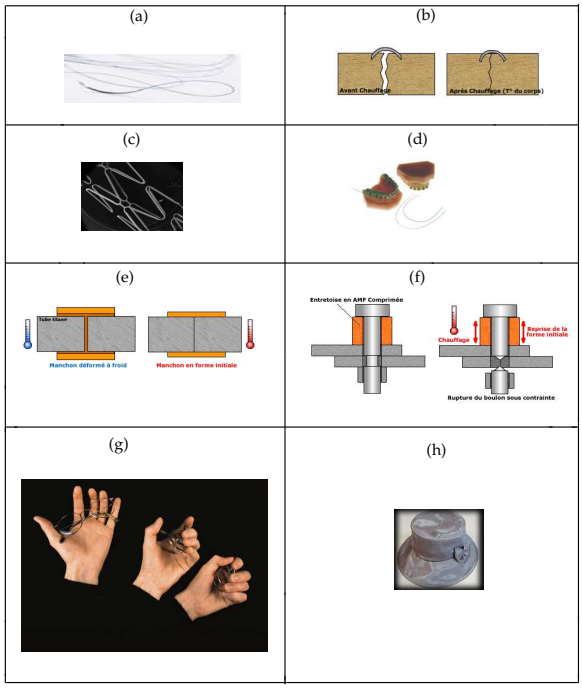

Figure 2.10: *Applications des MMF : (a) Fils guides utilisés en chirurgie (b) Agrafes en MMF pour les os fracturés (c) Stents en MMF pour supporter les artères au niveau du coeur (d) Appareil dentaire en MMF (e) Système de raccordement en MMF (f) Système en MMF pour la fixation d'entretoises (g) Des lunettes pseudo-élastiques en MMF (h) Chapeau pseudo-élastique pour le confort (http ://www.sma-inc.com/)*

gie, d'agrafes qui permettent de joindre des os fracturés (Fig. 2.10 (b)), de "Stents" qui peuvent être introduits pour maintenir les artères ouverts au niveau du coeur humain (Fig. 2.10 (c)) et d'appareils dentaires pour l'agencement des dents (Fig. 2.10 (d)). Les comportements des MMF dans ces applications sont respectivement l'effet mémoire de forme simple sens (agrafes) et la pseudo-élasticité (fils guides, "Stents" et appareil dentaire). Les figures 2.10 (e) et (f) montrent des applications dans les domaines de l'aérospatial et de l'automobile. Un système utilise l'effet mémoire de forme simple sens pour le raccordement de tuyaux dans un chanfrein (Fig. 2.10 (e)). Un système de fixation d'entretoises peut également faire appel à cet effet de mémoire (Fig. 2.10 (f)).

D'autres applications de la pseudo-élasticité peuvent être des lunettes (Fig. 2.10 (g)) ou un chapeau (Fig. 2.10 (h)) pseudo-élastiques, par exemple.
Par ailleurs, les résultats de la présente contribution sont plus particulièrement orientés vers les applications des MMF dans des environnements vibrant.

(a) (b)

Figure 2.11: *Applications des MMF : (a) Bloc minéral séparé en deux morceaux par les MMF (b) Système anti-sismique en MMF (http ://www.smaterial.com/SMA/link/link.html)*

En effet, on peut imaginer l'utilisation des MMF comme actionneurs dans un contrôle actif, comme isolateurs de structures contre les vibrations indésirables ou des absorbeurs d'énergie anti-sismiques. En termes d'actionneurs, une application peut utiliser les forces développées par un MMF en retrouvant sa forme initiale, pour écarter les parois d'un bloc minéral (figure 2.11 (a)). En contrôle passif, on peut citer une première application des MMF comme système anti-sismique (figure 2.11 (b)) après les tremblements de terre, survenus en Italie en 1997 et qui ont endommagé la Basilique Saint-François d'Assise.

2.6 ETAT DE L'ART SUR LA DYNAMIQUE

2.6.1 *Introduction*

Nous présentons ici une synthèse des travaux antérieurs, réalisés dans le but d'analyser le comportement dynamique des MMF. L'importance du couplage thermomécanique mis en évidence par les chargements dynamiques, mérite d'organiser la synthèse bibliographique suivant deux axes : un premier axe qui concerne le comportement local du matériau, où la mise en évidence expérimentale et la modélisation du couplage thermomécanique sont abordées. Un second axe où les travaux sur l'aspect calcul dynamique de structures sont présentés.

2.6.2 *Couplage thermomécanique*

Plusieurs difficultés ont été rapportées dans la caractérisation du couplage thermomécanique, présent au niveau du comportement des MMF, aussi bien sur le plan expérimental que sur le plan de la modélisation théorique. L'étude du comportement dynamique nécessite en effet, la connaissance et la maîtrise d'un certain nombre d'aspects sur les effets de la vitesse de chargement, de la température, du transfert de la chaleur et de la géométrie de la structure. Nous commençons dans cette partie par présenter les études expérimentales de mise en évidence du couplage thermomécanique. Ensuite, un aperçu sur les principales contributions dans la modélisation physique de son effet.

Essais de mise en évidence

Des études expérimentales réalisées par Miyazaki *et al.* [42], Leo *et al.* [43], Wu *et al.* [44], Bruno [45], Piedboeuf *et al.* [46], Filip et Mazanec [47], Lim et Mcdowell [48], McCormickt et Liu [49], Xie *et al.* [50], Liu et Van Humbeeck [51] et Liu *et al.* [52], ont montré que les comportements pseudo-élastique et de mémoire de forme dépendent de paramètres internes et externes, comme la température, la vitesse de déformation, la contrainte, les caractéristiques du transfert de chaleur du milieu ambiant et la géométrie de l'échantillon.

Dans la plage de température où le comportement est pseudo-élastique, Bruno [45], Wu *et al.* [44] et Leo *et al.* [43] ont montré par ailleurs que les effets de la température et de la vitesse de déformation sont couplés et dépendent des conditions de transfert de chaleur avec le milieu extérieur et de la géométrie de la structure. Nous nous intéressons par conséquent dans cette partie aux manifestations de ce couplage.

Effet de la vitesse de déformation sur le comportement pseudo-élastique

L´influence de la vitesse de déformation sur le comportement pseudo-élastique des MMF a fait l´objet de plusieurs publications. Le couplage

thermomécanique est à l'origine de cette dépendance. En effet, lorsque le chargement est rapide, les phénomènes de transfert de chaleur, de nature lents, se font partiellement et la température du matériau augmente. L'élévation de celle-ci renforce la stabilité de l'austénite et par conséquent, la formation de nouvelles zones martensitiques nécessite de l'effort mécanique (*cf.* diagramme de phase, figure 2.2). C'est la raison pour laquelle, la pente du plateau de transformation augmente systématiquement. Le seuil initial de début de la transformation martensitique (de l'austénite vers la martensite) ne varie pas, le matériau étant initialement élastique. Cependant, l'évolution de celui de la transformation inverse (de la martensite vers l'austénite) engendre une variation de l'aire de la boucle d'hystérésis avec la vitesse de déformation. Au cours de la transformation de phase, la croissance des contraintes seuils en fonction de la vitesse, est impliquée par les effets calorimétriques qui accompagnent la transformation martensitique d'après Mukherjee et al. [53].
Le niveau de contrainte et l'énergie dissipée durant la transformation de phase, augmentent avec la vitesse de déformation dans les résultats de Lin et al. [54]. L'alternance de l'échauffement et du refroidissement, due à la transformation exothermique (de l'austénite vers la martensite) et la transformation endothermique (de la martensite vers l'austénite), engendre une variation de l'énergie dissipée avec la vitesse d'après Humbeeck et Delaey [55]. Les variations n'apparaissent dans la pente du plateau de transformation et l'énergie dissipée qu'à partir d'une certaine vitesse, 0.16 s^{-1} d'après Lin et al. [54]. Des essais cycliques à déformation maximale imposée (6%) et à différentes vitesses, montrent une plus grande sensibilité du comportement du Nickel-Titane à la vitesse que pour les alliages à base de cuivre (Cu), Malécot et al. [56] attribuent cette sensibilité au couplage thermomécanique. Cependant, l'existence de la viscosité dans le comportement des MMF est admise dans les travaux de Helm et Haupt [57]. Les résultats des essais non isothermes de relaxation dans les travaux de Lim et McDowell [58], montrent que la température décroît engendrant une diminution de la contrainte. Le comportement pseudo-visco-élastique apparent dans ces essais, est attribué dans Tobushi et al. [59] à la variation de la température due à la chaleur latente du changement de phase. Toutefois, l'évolution de la température dont la figure 2.12 montre une allure, est rarement mesurée dans ces essais à cause de l'imprécision des thermocouples classiques.
Ce n'est que récemment que des mesures précises par la technique de thermographie infrarouge ont été présentées dans les travaux de Chrysochoos [60]. Le même profil que dans la figure 2.12 est montré . Lorsque la vitesse augmente, la température augmente à partir de la température initiale T_{ini} durant la transformation directe exothermique et diminue au cours de la transformation inverse endothermique.

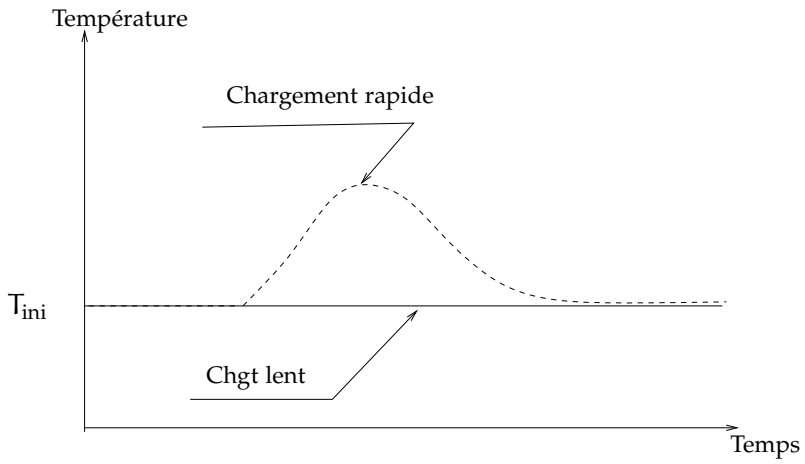

Figure 2.12: *Allure de la température durant les sollicitations rapides*

Par ailleurs, des études réalisées par Liu et Van Humbeeck [51] et Lu *et al.* [61] ont montré que le NiTi possède une grande capacité d'amortissement dans les deux phases, austénite et martensite, due à la pseudo-élasticité et à l'orientation des variantes autoaccommodées de la martensite. Cette capacité d'amortissement semble dans ces travaux, être reliée à la propagation des interfaces entre les phases et aux défauts au sein de la phase martensitique. Liu et Van Humbeeck [51] ont montré que la capacité d'amortissement de la martensite dépend des traitements thermiques (recuit ou détrempe) subis par le matériau et de l'amplitude de déformation. Pour des températures en dessous de 550 ° C, la capacité d'amortissement croît avec la température de recuit et pour celles au dessus de 550 ° C, elle décroît lorsque la température augmente. Ils ont montré également que cette capacité décroît en fonction du nombre de cycles de chargement jusqu'à stabilisation et que la capacité d'amortissement de l'austénite est plus petite que celle de la martensite.

Effet du transfert de chaleur et de la géométrie

Leo *et al.* [43] ont étudié les effets de la vitesse et de la température dans des travaux analytiques et expérimentaux. Dans les expériences, deux fils en NiTi pseudo-élastiques de diamètres identiques (∅ 0.652 mm) et à une température initiale de 23 ° C, ont été testés dans l'air pour l'un et dans l'eau pour l'autre. Pour les deux fils, trois tests de traction ont été réalisés aux vitesses de déplacement 0.5, 5 et 50 $mm.min^{-1}$. Les variations longitudinales de la température ont été mesurées par des thermocouples, positionnés tous les 20 mm. Les résultats ont montré que les caractéristiques de transfert de chaleur du milieu extérieur, déterminent le niveau de l'ef-

fet de la vitesse. En effet, lorsque la température du matériau est constante durant l'expérience, l'effet de la vitesse de déformation est négligeable. Cependant, si l'expérience est non isotherme, la température augmente avec la vitesse, faisant varier le comportement pseudo-élastique. D'autres expériences semblables ont été menées par Wu *et al.* [44] et ont confirmé les observations précitées. Dans le but de comparer l'effet de la géométrie sur le transfert de chaleur, ils comparent leurs résultats avec ceux de Witting [62], où le fil a un diamètre quinze fois plus petit. Les résultats ont montré qu'en plus de l'influence des caractéristiques du transfert de chaleur du milieu extérieur, la taille de la section contribue également à la détermination de la quantité de chaleur échangée par le fil. Des observations semblables ont été obtenues également par He *et al.* [63], Bruno [45] et Piedboeuf *et al.* [46].

Modèles du couplage thermomécanique

Nous trouvons, dans la plupart des modèles phénoménologiques, une démarche qui consiste à ajouter un terme de dimension énergétique à l'expression de l'énergie libre, pour tenir compte du couplage thermomécanique. Elle est adoptée dans la présente contribution tout comme dans les travaux de Morin et al. [64], Hartl et al. [65] et Auricchio et Sacco [66]. Une question pertinente s'est révelée néanmoins dans de telles modélisations : la contribution de la chaleur latente dans les variations de la température est-elle plus importante que celle de la dissipation intrinsèque ?. L'analyse approfondie du couplage thermomécanique faite dans Morin et al. [64], montre que l'apport en chaleur le plus important est celui de la chaleur latente engendrée par le changement de phase mais que la dissipation intrinsèque reste également une source de chaleur. Toutefois, d'autres travaux comme Chrysochoos et al. [67] vont jusqu'à prétendre que l'existence même de la boucle d'hystérésis est due au couplage thermomécanique et pas à la dissipation intrinsèque. En plus des modèles thermodynamiques, la littérature montre l'existence de modèles empiriques qui cherchent à relier les contraintes seuils à la température afin de considérer ce couplage, comme dans les travaux de Ortin et Planes [68], Leo et al. [69] et McCormick et al. [70].
D'autres modèles inspirés de la micromécanique ont été également proposés pour tenir compte du couplage thermomécanique, comme dans les travaux de Sadjadpour et Bhattacharya [71].

2.6.3 *Aspect de calcul de structure*

Des applications à base de MMF témoignent d'un intérêt croissant ces dernières années dans nombre de domaines. La plupart de ces applications

se font dans des conditions d'actions quasi-statiques, leur comportement à faibles vitesses de chargement a donc connu beaucoup d'études aussi bien en théorie qu'en pratique. Cependant, lorsqu'ils sont soumis à des chargements relativement rapides, comme dans le cas des actionneurs, l'interaction thermodynamique avec l'environnement devient importante et requiert une attention particulière.
Par ailleurs, la synthèse bibliographique sur cet aspect de calcul de structure, est organisée suivant les mécanismes physiques respectivement derrière les applications en contrôle actif, en contrôle passif et en contrôle hybride. Une dernière section est dédiée aux travaux sur les réponses dynamiques des structures en MMF d'une manière générale.

Contrôle actif

Dans ce type de contrôle, la propriété des MMF utilisée est l'effet mémoire de forme. En effet, une fois que le NiTi est déformé pour avoir une forme spécifique, il peut être utilisé via une activation thermique, comme un actionneur dans un contrôle actif ou un système de contrôle de forme, par exemple. Cependant, le temps de réponse et l'effort mécanique de réaction engendré par une activation thermique d'un NiTi, dépendent des caractéristiques du transfert de chaleur du matériau et du milieu extérieur. Baz *et al.* [72] ont réalisé un ensemble d'études théoriques et expérimentales sur l'utilisation des actionneurs en NiTi dans le contrôle de vibrations en flexion. Ils montrent que le NiTi est un bon candidat dans le contrôle de vibrations pour les modes de flexion basse fréquence. Seelecke *et al.* [73] ont fait une investigation dans le contrôle de la forme d'une structure en utilisant des actionneurs en NiTi. Rediniotis *et al.* [74] ont analysé, dans des études expérimentales et analytiques, la possibilité d'utiliser des fils en NiTi comme actionneurs. Leur investigation a conduit à la fabrication d'un dispositif de contrôle, de géométrie plane et composé de NiTi. Un fil en NiTi, chargé par une masse, a été utilisé comme actionneur dans l'étude de Benzaoui *et al.* : le processus d'activation thermique est réalisé par Effet de Joule. Le comportement dynamique du fil sous un chargement thermomécanique est analysé dans cette étude. D'autres études, comme les travaux de Gotthardt et Bidaux [75], ont abordé l'utilisation éventuelle d'actionneurs en NiTi dans les composites.

Contrôle passif

Ce type de contrôle concerne les applications qui utilisent la pseudo-élasticité des MMF. La présente contribution est en effet plus orientée vers ce type de contrôle, car nous modélisons le comportement pseudo-élastique dynamique. Des travaux de Birman [76] ont exploré l'effet d'amortisseurs

en NiTi sur les vibrations non linéaires de structures. Les résultats ont montré que les propriétés du NiTi sont très attractives pour améliorer le comportement amortissant d'une structure. Clark *et al.* [77] ont fabriqué un dispositif amortissant en NiTi : leur réalisation a montré l'intérêt du caractère dissipatif du comportement pseudo-élastique dans le contrôle passif. Thomson *et al.* [78] ont étudié, expérimentalement et théoriquement, la réponse dynamique en flexion d'une structure composée de fils en NiTi. Eaton [79] a considéré un système dynamique à un degré de liberté où un absorbeur en NiTi, est mis en parallèle avec un ressort linéaire et un amortisseur visqueux. En effet, son étude a montré une réduction dans la réponse du ressort linéaire. Il attribue cette observation à deux mécanismes physiques : le comportement assouplissant du NiTi (diminution de la rigidité) et la dissipation de l'énergie (boucle d'hystérésis).

Contrôle hybride

Nous entendons par ce type de contrôle les applications qui combinent l'effet mémoire de forme et la pseudo-élasticité. Malgré l'enjeu et l'utilité d'un tel usage simultané, nous trouvons peu d'études dans la littérature qui abordent cela. Cependant, le travail de Shahin *et al.* [80] est un bon exemple de contrôle hybride, utilisant le NiTi. Brailovski *et al.* [81] ont introduit une méthodologie de fabrication d'actionneurs en NiTi, qui tient compte des effets thermique et mécanique. Ils utilisent deux modèles : un modèle mécanique qui reproduit le comportement thermomécanique de l'actionneur et un modèle thermique pour l'activation. Liang et Rogers [82] ont utilisé une approche similaire pour la fabrication d'actionneurs en NiTi. Regelbrugge *et al.* [83] ont développé, en utilisant du NiTi, un système adaptatif d'amortissement passif.

Réponse dynamique

L'état dynamique d'un oscillateur MMF, est décrit par le déplacement, la vitesse, des variables thermodynamiques internes (la fraction volumique de martensite z et le déplacement x_{ori} provoqué par la déformation d'orientation des martensites autoaccommodées) et la température dont l'évolution est déduite de l'équation de la chaleur. La non linéarité du comportement des MMF engendre des phénomènes de sauts, de bifurcations, de Symmetry Breaking et de chaos dans leur réponse en fréquence. Nous entendons par la réponse en fréquence l'amplitude maximale de déplacement en fonction de la fréquence de chargement. Des résultats expérimentaux et numériques à température constante montrent une réponse en fréquence non linéaire en fonction de l'amplitude dans un comportement assouplissant comme présenté par Feng et Li [84]. L'effet de la fréquence de sollicitation

sur le comportement pseudo-élastique local, montre les manifestations du couplage thermomécanique (augmentation de la pente du plateau et variation de l'aire de la boucle d'hystérésis) entre 0.2 et 4Hz, dans les résultats de Mauro et Donatello [85]. Les pentes des deux plateaux de transformation directe et celle inverse augmentent et l'aire de l'hystérésis diminue dans des essais dynamiques sur des barres en NiTi à des fréquences de 0.25, 0.5 et 1 Hz, réalisés par (DesRoches et al. [86]). Foltête *et al.* [87] ont analysé le comportement d'une barre en MMF sous un chargement dynamique à différentes fréquences, ils retrouvent le caractère assouplissant et dissipatif du comportement du matériau.
Nous soulignons d'emblée que les travaux expérimentaux en vibrations ne sont pas nombreux et sont peu concluant pour la plupart. Cependant, (Sbarra et al. [88]) ont effectué des essais dynamiques propres en torsion : les phénomènes de sauts entre les bifurcations et le comportement assouplissant ont été retrouvés dans la réponse en fréquence de fils en NiTi.
Des réponses en fréquence non linéaires à température constante qui montrent des sauts entre des solutions stables, existent dans les travaux numériques de (Lacarbonara et al. [4]). Les phénomènes de doublement de périodes et de chaos y sont également montrés pour des jeux de paramètres matériaux et des conditions de sollicitation donnés. Ils utilisent la stroboscopie de Poincaré pour la détection du chaos et de la multiplicité de période. L'effet de la variation de la température sur la réponse dynamique est analysé dans les oscillations non isothermes de dispositifs en MMF par Bernardini et Vestroni [5] et Bernardini et Rega [6]. L'influence du coefficient de transfert de chaleur avec l'environnement, est étudiée dans ces travaux.
Cependant, l'ensemble de ces intégrations numériques repose sur soit des modèles de forces non-linéaires par morceaux en fonction du déplacement ou soit des modèles thermodynamiques nécessitant la vérification de l'admissibilité au second principe de la thermodynamique. Ces études dynamiques restent encore au stade de l'analyse de systèmes à réponse symétrique sans prendre en compte la dissymétrie qui existe entre la traction et la compression dans le comportement des MMF (Orgéas et Favier [89] et Zaki [90]).

2.6.4 *Conclusion*

Nous concluons ce chapitre en soulignant l'importance de la prise en compte du couplage thermomécanique en dynamique. Notre cadre de modélisation est thermodynamiquement admissible, comparé à la plupart des travaux de la littérature. L'analyse du comportement dynamique des structures en MMF est encore un champ de recherche propice, méritant l'investigation. Enfin, nous commençons dans le prochain chapitre, par l'extension du modèle ZM en introduisant l'effet du couplage thermomécanique.

3

PRISE EN COMPTE DU COUPLAGE THERMOMÉCANIQUE

Sommaire

3.1 Introduction 36
3.2 Essais thermomécaniques 36
3.3 Modèle Zaki-Moumni isotherme 39
3.4 Prise en compte du couplage thermomécanique 42
3.5 Conclusion 51

Ce chapitre présente une prise en compte du couplage thermomécanique dans un modèle quasi statique existant (Zaki-Moumni, ZM). Des résultats d'expériences à différentes vitesses de déformation sont présentés : la pente du plateau de transformation martensitique augmente avec la vitesse et l'aire de la boucle d'hystérésis varie. Les équations continues du modèle sont présentées et appuyées par des calculs éléments finis sous cast3m. Les simulations reproduisent qualitativement les observations.

3.1 INTRODUCTION

La prise en compte de l'effet de la vitesse de chargement sur le comportement mécanique du matériau est importante dans l'étude de la réponse dynamique d'une structure. Dans le cas des MMF, l'influence de la vitesse est engendrée par l'existence du couplage thermomécanique dans leur comportement. On commence par vérifier la reproduction de l'effet du couplage dans des essais thermomécaniques sur le Nickel Titane (NiTi) en pseudo-élasticité. Le modèle Zaki-Moumni (ZM), établi en 3D dans un cadre thermodynamique, est étendu par la considération du couplage thermomécanique. Une comparaison numérique est réalisée qualitativement pour s'assurer de l'aptitude du modèle à retrouver les observations. L'objectif, étant in fine l'analyse de la réponse dynamique de la structure, le présent chapitre constitue un pont nécessaire vers cette finalité : tous les effets que le temps physique risque d'avoir sur le comportement du matériau doivent être pris en compte. Le chapitre présente des expériences thermomécaniques (Calorimétrie et traction mécanique) dans la première section, un aperçu du modèle ZM en deuxième et la prise en compte du couplage thermomécanique en dernier. Cette dernière section se compose d'une partie de simulation d'un cas de traction de structure cylindrique en MMF à l'aide du code Éléments Finis cast3m.

3.2 ESSAIS THERMOMÉCANIQUES

Le comportement des matériaux à mémoire de forme dépend fortement de leur composition chimique. Un essai mécanique sur de tels matériaux nécessite une préparation minutieuse. La détermination des températures seuils de transformation, à l'état libre, permet de définir le domaine thermique où le comportement mécanique est pseudo-élastique. On peut utiliser pour cela plusieurs techniques dont la DSC (Differential Scanning Calorimetry). Le matériau est le nickel-titane (Nitinol) composé en masse atomique de 56.7% de nickel et 43.3% de titane. La structure étudiée est un fil de longueur 150 mm et de diamètre 2 mm.
La figure 3.1 montre un profil de la température imposée (figure 3.1 (a)) et une évolution du flux de chaleur au sein d'un échantillon en Nickel-Titane. La vitesse de la température est imposée à $5^{o}\mathrm{C.mn}^{-1}$ pour la montée et $-4.5^{o}\mathrm{C.mn}^{-1}$ pour la descente. Les deux pics dans le profil du flux de chaleur Q (figure 3.1 (b)), correspondent aux zones de transformations, l'ascendant à la transformation exothermique (de l'austénite vers la martensite) et le descendant à celle endothermique (de la martensite vers l'austénite). La méthode de la tangeante permet de déduire les températures de début et de fin des changements de phase. La température $\mathcal{A}^0_{\mathrm{af}}$ indique la fin de la transformation de la martensite en austénite. Sur la figure 3.1, $\mathcal{A}^0_{\mathrm{af}}$=43°C, $\mathcal{A}^0_{\mathrm{as}}$=19 °C, $\mathcal{M}^0_{\mathrm{ms}}$=17 °C et $\mathcal{M}^0_{\mathrm{mf}}$=10 °C.

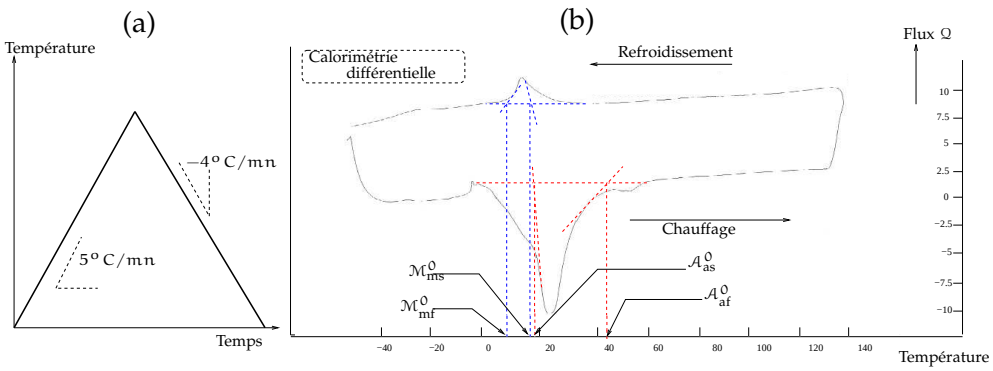

Figure 3.1: *Courbe d'évolution du flux de chaleur mesurée par la DSC*

3.2.1 *Objectifs*

L'objectif de ces premières expériences est d´étudier l'effet de la vitesse de chargement sur le comportement pseudo-élastique du matériau à mémoire de forme. Les essais réalisés permettent de reproduire les effets de la variation de la température du matériau. Ils constituent un point de départ pour une prise en compte du couplage thermomécanique dans la modélisation. La vitesse de déformation est contrôlée et la température ambiante portée à 47°C, dans le but d'être dans la plage pseudo-élastique (température supérieure à $\mathcal{A}^0_{af}$). Le fil mis dans une enceinte d'isolation thermique, est soumis à une traction sans aller au-delà de sa pseudo-élasticité, la plasticité en martensite n'étant pas étudiée dans le cadre de la thèse. Les essais sont réalisés en régime quasi-statique et l'enceinte thermique permet de maintenir la température ambiante à 47 °C.

3.2.2 *Résultats et interprétations*

Le dépouillement des essais est basé sur l'hypothèse de Saint-Venant si bien que les champs de contrainte et de déformation sont supposés homogènes dans la partie utile du fil. La contrainte de traction est mesurée par une moyennation de la charge sur la section, la déformation par l'allongement relatif mesuré à l´aide d´un extensomètre.

La figure 3.2 montre des comportements pseudo-élastiques à différentes vitesses de déformation. À faible vitesse de déformation (10^{-3} s^{-1}), le matériau a eu le temps d´évacuer la chaleur produite par le changement de phase. Le plateau de transformation reste quasiment plat avec de petites bosses dues au phénomène de nucléation.

Cependant, à partir d´une vitesse de $10^{-2}s^{-1}$, on observe une augmentation de la pente du plateau de transformation et une diminution de l'aire de la boucle d'hystérésis. En réalité, au cours du changement de phase, la chaleur latente et la dissipation intrinsèque engendrées contribuent, moyennant la conduction et la convection, à l'élévation de la température. Ceci entraine une augmentation des seuils de transformation et,

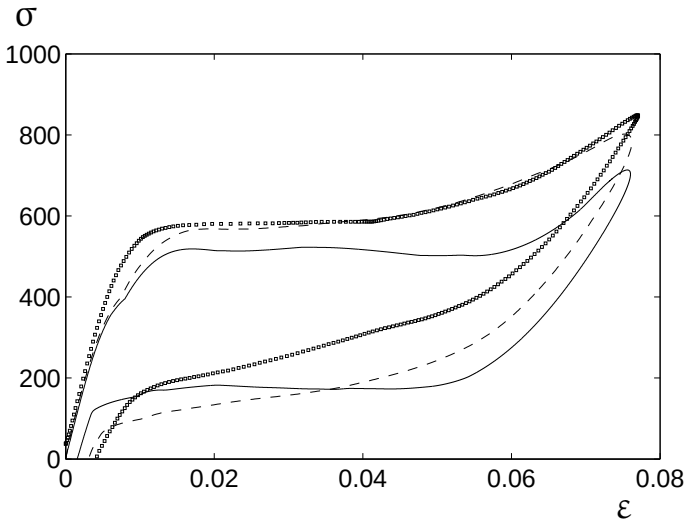

Figure 3.2: *Expériences à differentes vitesses :* $\dot{\varepsilon} = 0.001\text{s}^{-1}$ *(—)* , $\dot{\varepsilon} = 0.01\text{s}^{-1}$ *(— — —) et* $\dot{\varepsilon} = 0.1\text{s}^{-1}$ *(□ □ □)*

par conséquent, l´effort nécessaire à la poursuite du changement de phase croît. Il y a donc la nécessité de prendre en compte le couplage thermomécanique lorsque l'étude des structures est réalisée en dynamique. Cela s'explique par le fait qu'une augmentation de la pente du plateau de transformation influence la rigidité de la structure. Par ailleurs, l'aire de la boucle étant reliée à un pouvoir de dissipation d'énergie, sa variation affecte les propriétés d'amortissement des forçages dynamiques. Ces résultats sont en accord avec les travaux de Morin et al. [64], He et Sun [63] et Chrysochoos et al. [67].

Des expériences cycliques ont été réalisées afin d´étudier la dissipation d´énergie au cours de sollicitations repétées dans le temps et à différentes vitesses de déformation. Les figures 3.3 (a) et (b) montrent le comportement cyclique à deux vitesses de déformation respectivement de 0.01s^{-1} et de 0.1s^{-1}.

Les seuils de transformation de phase diminuent au fur et à mesure que le nombre de cycles augmente : physiquement, les déformations résiduelles non compatibles induisent des champs de contraintes internes. Celles-ci maintiennent certaines plaquettes martensitiques stables au sein de la microstructure du matériau. Ceci entraine un changement de phase de l´*Austénite* vers la *Martensite* avec moins d´énergie mécanique. La vitesse de déformation influence la stabilisation de la déformation résiduelle et l'aire de la boucle d'hystérésis.

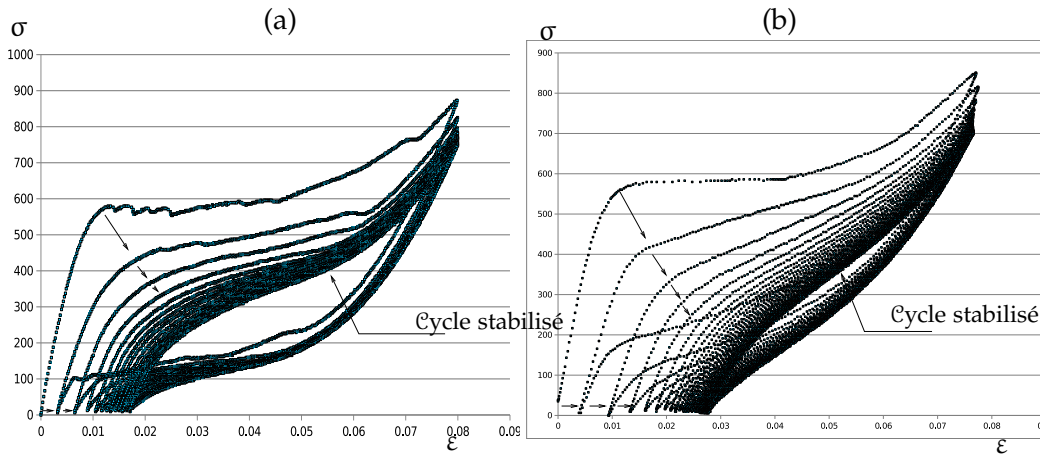

Figure 3.3: *(a) Traction cyclique à* $0.01s^{-1}$ *(b) Traction cyclique à* $0.1s^{-1}$

3.3 MODÈLE ZAKI-MOUMNI ISOTHERME

Le modèle Zaki-Moumni (ZM) [91, 3] isotherme est basé sur le choix d'une expression de la déformation due à la transformation, qui permet d'unifier plusieurs comportements des matériaux à mémoire de forme. Il s'agit du produit de la fraction volumique de martensite par un tenseur de déformation décrivant l'orientation des variantes autoaccommodées, soit

$$\varepsilon_{tr} = z\varepsilon_{ori}. \tag{3.1}$$

Un potentiel d'énergie libre est proposé et permet d'établir les lois de l'état thermodynamique dans le cadre de la théorie des matériaux standards généralisés en présence de liaisons internes, Moumni et al. [91].

$$\begin{aligned}\phi(\varepsilon_A, \varepsilon_M, \varepsilon_{ori}, z, T) =& \frac{1}{2}(1-z)\varepsilon_A : \boldsymbol{\Lambda}_A : \varepsilon_A + \frac{1}{2}z(\varepsilon_M - \varepsilon_{ori}) : \boldsymbol{\Lambda}_M : (\varepsilon_M - \varepsilon_{ori}) \\ &+ zC(T) + (z(\alpha z + (1-z)\beta)(\frac{1}{3}\varepsilon_{ori} : \varepsilon_{ori}),\end{aligned} \tag{3.2}$$

où ε_A est la déformation locale dans l'austénite,
ε_M est la déformation locale dans la martensite,
$\boldsymbol{\Lambda}_A$ est le module élastique de l'austénite,
$\boldsymbol{\Lambda}_M$ est le module élastique de la martensite
et G, α et β sont des paramètres matériaux.
Le terme $C(T)$ représente une densité d´énergie thermique due à la transformation martensitique. Il est donné par

$$C(T) = \xi(T - T_0) + \kappa. \tag{3.3}$$

Les variables thermodynamiques sont soumises à des contraintes de types unilatéral et bilatéral :

$$z \geqslant 0\,, \tag{3.4}$$
$$(1-z) \geqslant 0\,, \tag{3.5}$$
$$\varepsilon = (1-z)\varepsilon_A + z\varepsilon_M, \tag{3.6}$$
$$\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ori} : \varepsilon_{ori}} \leqslant \varepsilon_{max}. \tag{3.7}$$

Les liaisons internes sont supposées être parfaites et dérivent par conséquent d'un potentiel de liaisons (Germain [92, 93]) :

$$\begin{aligned}\phi_L(\varepsilon_A, \varepsilon_M, \varepsilon_{ori}, z, \varepsilon) = &-\lambda_1 z - \lambda_2(1-z) - \boldsymbol{\lambda} : ((1-z)\varepsilon_A + z\varepsilon_M - \varepsilon) \\ &- \mu(\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ori} : \varepsilon_{ori}} - \varepsilon_{max}),\end{aligned} \tag{3.8}$$

où λ_1 ($\lambda_1 \geqslant 0$), λ_2 ($\lambda_2 \geqslant 0$), $\boldsymbol{\lambda}$ et μ ($\mu \geqslant 0$) sont des multiplicateurs de Lagrange, associés aux conditions sur les variables dissipatives.
Un lagrangien du système peut ainsi être défini par l´expression suivante :

$$\mathcal{L} = \phi + \phi_L. \tag{3.9}$$

Les lois d´état suivantes sont établies à partir du Lagrangien :
1. La loi de comportement
L'expression du lagrangien permet d'écrire

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon}, \tag{3.10}$$

dont se déduit que,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\lambda}. \tag{3.11}$$

L'égalité (3.12) est en effet vérifiée,

$$\varepsilon = (1-z)\varepsilon_A + z\varepsilon_M. \tag{3.12}$$

Un modèle de type Reuss (les deux phases sont mises en série) implique que le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est le même dans les deux phases. On pose alors

$$\varepsilon_A = \boldsymbol{\Lambda}_A{}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \tag{3.13}$$

et

$$\varepsilon_M = \boldsymbol{\Lambda}_M{}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \varepsilon_{ori}. \tag{3.14}$$

De la relation (3.12), on déduit,

$$\varepsilon = (1-z)\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{A}}{}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + z\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{M}}{}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \varepsilon_{\mathrm{ori}}\right). \tag{3.15}$$

Cette expression permet de déduire le comportement par

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{eq}}\left(\varepsilon - z\varepsilon_{\mathrm{ori}}\right), \tag{3.16}$$

où $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{eq}}$ est un module élastique équivalent, donné par

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{eq}} = \left((1-z)\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{A}}{}^{-1} + z\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{M}}{}^{-1}\right)^{-1}. \tag{3.17}$$

2. L'entropie du système
L'entropie par unité de volume du système est donnée par

$$\eta = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} = -z\xi. \tag{3.18}$$

3. Les lois complémentaires d'évolution
L´action des deux mécanismes de transformation martensitique et d'orientation des martensites est modélisée par la définition de deux forces thermodynamiques A_z et $\boldsymbol{A}_{\mathbf{ori}}$ associées respectivement à z et à $\varepsilon_{\mathbf{ori}}$, soit,

$$\mathcal{A}_z = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \tag{3.19}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_z =& \frac{-1}{2}\mathbf{S}_{\mathrm{A}}{}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2}\mathbf{S}_{\mathrm{M}}{}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : \varepsilon_{\mathrm{ori}} - C(T) - Gz \\ & - ((\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2})(\frac{2}{3}\varepsilon_{\mathrm{ori}} : \varepsilon_{\mathrm{ori}}),\end{aligned} \tag{3.20}$$

où $\mathbf{S}_{\mathrm{A}}$ et $\mathbf{S}_{\mathrm{M}}$ sont les modules de souplesse respectifs de l'austénite et la martensite
et

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{ori}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon_{\mathrm{ori}}} \tag{3.21}$$

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{ori}} = z\boldsymbol{\sigma} - z(\alpha z + (1-z)\beta)\varepsilon_{\mathrm{ori}} - \frac{2}{3}\mu\frac{\varepsilon_{\mathrm{ori}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{\mathrm{ori}} : \varepsilon_{\mathrm{ori}}}}. \tag{3.22}$$

Dans le cadre des MSG (Matériaux Standards Généralisés), la dissipation d'énergie est prise en compte par un pseudo potentiel de dissipation $\mathcal{D}$

permettant de suivre l'évolution des variables internes dissipatives, soit,

$$\mathcal{D}(z, \dot{z}, \varepsilon_{ori}, \dot{\varepsilon}_{ori}) = (a(1-z) + bz)sgn(\dot{z})\dot{z} + \left(Yz^2 \sqrt{\frac{2}{3}(\dot{\varepsilon}_{ori} : \dot{\varepsilon}_{ori})} \right). \quad (3.23)$$

Dans le cadre de la théorie des matériaux standards généralisés avec liaisons internes (Moumni et al. [91]), les forces thermodynamiques associées aux variables internes appartiennent aux sous-différentiels de $\mathcal{D}$ par rapport à $\dot{z}$ et $\dot{\varepsilon}_{ori}$. Le pseudo potentiel est une fonctionnelle de $\dot{z}$ et $\dot{\varepsilon}_{ori}$, non différentiable en $(0\,;\,0)$. Il admet en revanche des dérivées directionnelles permettant de construire les domaines de transformation de phase et d'orientation, par la définition de fonctions critères :
- Pour la transformation de phase directe de l'austénite vers la martensite

$$\mathcal{F}_z^1 = \mathcal{A}_z - (a(1-z) + bz). \quad (3.24)$$

L'évolution de z est donnée par la condition de charge, soit,

$$\mathcal{F}_z^1 \leqslant 0\,,\ \dot{z}\dot{\mathcal{F}}_z^1 = 0\,,\ \dot{z} \geqslant 0,$$

- Pour la transformation de phase inverse de la martensite vers l'austénite

$$\mathcal{F}_z^2 = -\mathcal{A}_z - (a(1-z) + bz). \quad (3.25)$$

L'évolution de z est donnée par la condition de charge, soit,

$$\mathcal{F}_z^2 \leqslant 0\,,\ \dot{z}\dot{\mathcal{F}}_z^2 = 0\,,\ \dot{z} \leqslant 0,$$

- Pour l'orientation des martensites

$$\mathcal{F}_{ori} = \| \frac{\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ori}}{z} \|_{vm} - Yz, \text{ pour} z\, 0, \quad (3.26)$$

où $\| \mathbf{X} \|_{vm}$ est la norme de Von Mises du tenseur $\mathbf{X}$. L'évolution de $\dot{\varepsilon}_{ori}$ est donnée par la règle de normalité,

$$\dot{\varepsilon}_{ori} = \dot{\zeta}\frac{\partial \mathcal{F}_{ori}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{A}}_{ori}}, \quad (3.27)$$

où ζ est donnée par la condition de charge, soit,

$$\mathcal{F}_{ori} \leqslant 0\,,\ \dot{\zeta}\dot{\mathcal{F}}_{ori} = 0\,,\ \dot{\zeta} \geqslant 0.$$

3.4 PRISE EN COMPTE DU COUPLAGE THERMOMÉCANIQUE

3.4.1 *Equations*

Pour prendre en compte la contribution de la température à l´énergie libre du matériau, le terme

$$\phi_{th} = C_P(T - T_0 - T.ln(\frac{T}{T_0})), \quad (3.28)$$

est ajouté au Lagrangien qui devient

$$\mathcal{L} = \phi + \phi_L + \phi_{th}. \tag{3.29}$$

Cette proposition de modélisation est en accord avec les travaux dans Hartl et al. [65], Hartl et al. [94] et Morin et al. [64]. L'évolution de la température est donnée par l'équation de la chaleur.
Les équations à résoudre sont données dans le tableau 3.1 pour le problème physique couplé.

=>L´équation de l´équilibre mécanique

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0,$$

=> L´équation de compatibilité de la déformation macroscopique

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} +^{T} \nabla \mathbf{u}),$$

=> La loi de comportement

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Lambda}_{eq} : (\boldsymbol{\varepsilon} - z\boldsymbol{\varepsilon}_{ori}),$$

=>La condition de charge dans les critères des transformations de phase,

$$\mathcal{F}_z^1 \leqslant 0\,,\ \dot{z}\dot{\mathcal{F}}_z^1 = 0\,,\ \dot{z} \geqslant 0,$$

et

$$\mathcal{F}_z^2 \leqslant 0\,,\ \dot{z}\dot{\mathcal{F}}_z^2 = 0\,,\ \dot{z} \leqslant 0,$$

sachant que nous supposons que dès que la transformation de phase se produit, les plaquettes martensitiques sont totalement orientées. Par conséquent, la norme de la déformation d'orientation est constante et nous n'avons pas besoin de résoudre la condition de charge pour l'orientation.

=>L´équation de la chaleur,

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathbf{q}) = A_z \frac{\partial z}{\partial t} + T\xi \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial T \partial \varepsilon^e} + r_l,$$

où $A_z \frac{\partial z}{\partial t}$, $T\xi \frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial T \partial \varepsilon^e}$ et r_l sont respectivement la dissipation intrinsèque dans le comportement pseudo-élastique, le couplage thermomécanique dû à la chaleur de changement de phase, le couplage thermoélastique et une source volumique externe de chaleur,

=>La loi de conduction de Fourier

$$\mathbf{q} = -k\boldsymbol{\nabla} T.$$

Table 3.1: *Bilan des équations du problème physique couplé*

Où
div et ∇ sont respectivement les opérateurs différentiels spatiaux : divergence et gradient

3.4.2 *Algorithme de résolution*

Pour une géométrie Ω donnée, un maillage Ω_h suivant l'approximation de la méthode des éléments finis est utilisé pour la discrétisation spatiale. L'indice h correspond à la taille du maillage. Les champs de déplacement et de température élémentaires sont exprimés par interpolation aux noeuds du maillage.

$$\mathbf{u}_{e,mec}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}_i^{e,mec}(x)\mathbf{U}_i(t)\,, \tag{3.30}$$

$$\mathbf{T}_{e,th}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}_i^{e,th}(x)\mathbf{T}_i(t)\,, \tag{3.31}$$

où n, $\mathcal{N}_i^{e,mec}$ et $\mathcal{N}_i^{e,th}$ sont respectivement le nombre de noeuds de l'élément, la fonction de forme de l'élément de mécanique et celle de l'élément de thermique.
Des matrices élémentaires de rigidité ($\mathcal{K}$), de capacité thermique ($\mathcal{C}_P$) et de conduction ($\mathcal{H}$) sont définies au sens de la méthode des éléments finis.
Pour une charge imposée $\mathbf{F}$ de durée T_m, on discrétise le problème en temps à chaque noeud du maillage par,

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t\,, \tag{3.32}$$

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_n + \Delta\mathbf{F}_{n+1}. \tag{3.33}$$

- Le problème mécanique (équilibre) est résolu par la méthode Newton-Raphson modifiée où le module tangent n'est pas actualisé. A un instant n, $\mathbf{U}_S$ est la solution recherchée qui correspond à l'intersection entre la charge imposée et le comportement. Le principe est de construire une suite $(\mathbf{U}_n)_k$ qui converge vers $\mathbf{U}_S$. La somme des incréments entre les termes de la suite représente l'écart entre $\mathbf{U}_n$ et la solution $\mathbf{U}_S$:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{U}_n^k &= \mathbf{U}_S - \mathbf{U}_n^k \\ &= \sum \delta\Delta\mathbf{U}_n^k.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Le module tangent est initialisé au module élastique comme montre la figure 3.4.
- L'algorithme du retour radial permet de trouver une solution qui vérifie les critères de la transformation directe de phase et celle inverse. Une prédiction initiale de solution élastique qui vérifie $\mathcal{F}_{1,2}^{z,*} > 0$ pour $\dot{z} > 0$, nécessite une correction $-\mathbf{\Lambda}_{eq} : \varepsilon_{ori}\Delta z$ orthogonale à la surface de charge dans l'espace des contraintes principales (figure 3.5). Cependant, les cas où $\mathcal{F}_{1,2}^{z,*} \leqslant 0$ pour $\dot{z} < 0$ correspond à une décharge élastique et la prédiction est bien correcte.

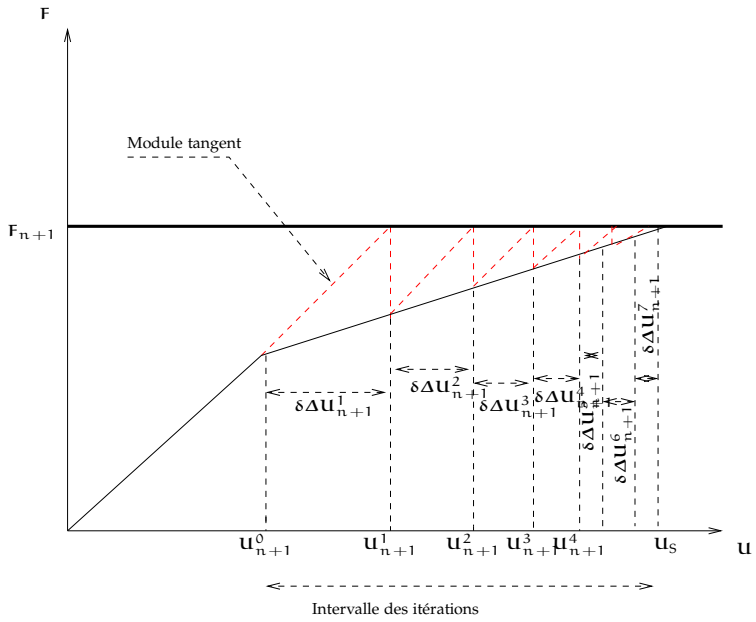

Figure 3.4: *Principe de la méthode Newton Raphson modifié*

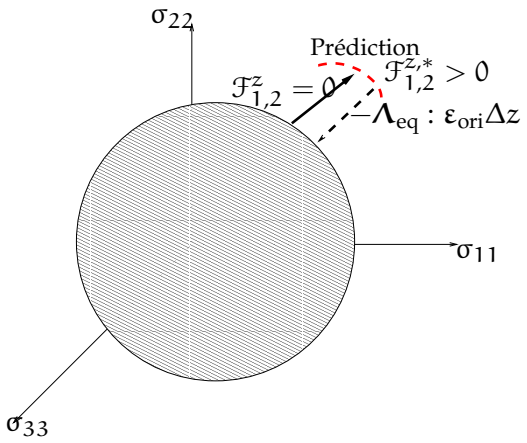

Figure 3.5: *Principe du retour radial*

Nom : algorithme_EQUILIBRE
Données : Paramètres matériaux, $\boldsymbol{\sigma}_n$,z_n,$\mathbf{F}_{n+1}$, tolérances : ϵ_{cr}, ϵ_{eq} et ϵ_{ch}
Sorties : $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, z_{n+1}, T_{n+1}
Initialisation : $k = 0$, z^0_{n+1}, $\mathbf{S}^0_{n+1}$
1. Simulation de la réponse isotherme
a) Calcul du déplacement à l'équilibre
$\mathcal{K}\left(z^{(k)}_{n+1}\right).\mathbf{U}^{(k)}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}$
b) Détermination de la déformation par la formule de compatibilité
$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}^{k}_{n+1} +^{t} \boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}^{(k)}_{n+1}\right)$
c) Prédiction thermoélastique et retour radial
- Déterminer la prédiction thermoélastique et évaluer les fonctions-critères :
$(i = 1, 2)$, $\mathcal{F}^{z,(k)}_{i,n+1} = \mathcal{F}^{z}_{i}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(k)}_{n+1}, \boldsymbol{z}^{(k)}_{n+1}\right)$
- Si $\mathcal{F}^{z,(k)}_{i,n+1} < 0$ (ou au cours des itérations $\left|\mathcal{F}^{z,(k)}_{i,n+1}\right| < \epsilon_{cr}$) alors incrémenter $k = k + 1$ et aller à 1.d)
- Calculer l'incrément de la fraction volumique Δz^{k+1}_{n+1}
- Actualiser les variables d'état
- Incrémenter le compteur : k=k+1 et aller à 1.c)
d) Calculer le résidu :
$\mathcal{R}$=$\mathcal{K}\left(z^{(k)}_{n+1}\right).\mathbf{U}^{(k)}_{n+1}$-$\mathbf{F}_{n+1}$
e) Si $\|\mathcal{R}\| > \epsilon_{eq}$ alors aller à 1.a)
2. Calculer la température T^{k+1}_{n+1} par la résolution de l'équation de la chaleur
3. Si $|T^{k+1}_{n+1} - T^{k}_{n}| > \epsilon_{ch}\ T^{k}_{n}$ alors aller à 1.a)
4. Fin de l'algorithme (algorithme_EQUILIBRE)

Table 3.2: *Algorithme couplé du problème d'équilibre mécanique et thermique*

- Le problème thermique est résolu par un schéma numérique Euler implicite d'ordre 1.

Le tableau 3.2 présente les principales étapes de l'algorithme du retour radial en présence du couplage thermomécanique. ϵ_{cr}, ϵ_{eq} et ϵ_{ch} sont respectivement la tolérance sur l'équilibre mécanique, celle sur les critères métallurgiques et celle sur la température.

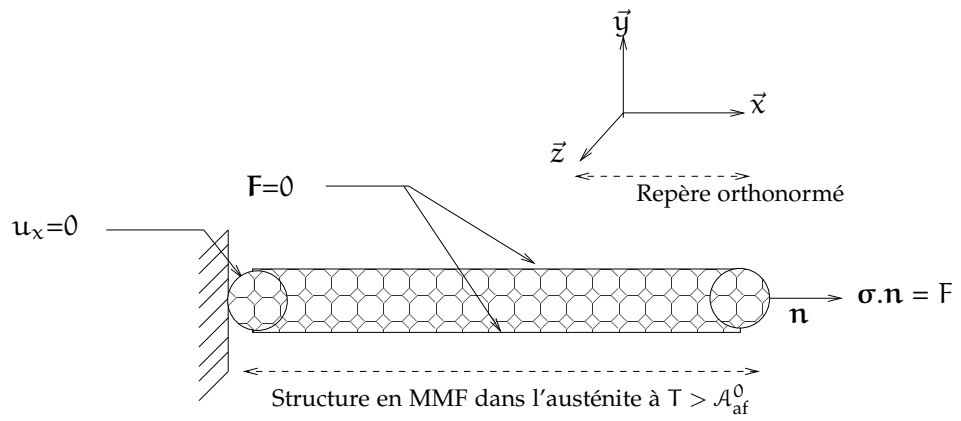

Figure 3.6: *Géometrie Ω modélisant le fil dans un referentiel galiléen*

3.4.3 *Simulations numériques*

Le code éléments finis utilisé est cast3m développé au Commissariat à l´Énergie Atomique (CEA). Les éléments finis utilisés en mécanique et en thermique sont cubiques dans une géométrie 3D cylindrique pleine.
Soit un domaine Ω (figure 3.6) constitué d´un matériau à mémoire de forme dont le comportement est décrit par le modèle après la prise en compte du couplage thermomécanique. Les dimensions du cylindre sont 100 mm de longueur et 2 mm de diamètre. La sollicitation est de type force monotone imposée.

La température initiale du matériau est fixée à 49°C. 500 éléments cubiques ont été utilisés par section dans le maillage. Chaque élément cubique est constitué de 20 noeuds d'intégrations (points de Gauss). Chaque noeud présente trois degrés de liberté. 50 incréments de charge ($\Delta F = \frac{F}{50}$) ont été considérés. Une convection naturelle est utilisée pour les échanges de chaleur avec l'environnement porté à la température initiale de l´essai. L´algorithme local de résolution numérique est explicite pour la métallurgie et implicite pour la thermique. Trois pas de temps physique de $\Delta t_1 = 40s$, $\Delta t_2 = 0.4s$ et $\Delta t_3 = 0.004s$ ont été choisis, cependant, la durée de calcul est estimée à 1h CPU, sous un PC à quatre processeurs (2 GHz de vitesse par processeur) et de 8 GHz de RAM. Les paramètres matériaux (tableau 3.3) sont extraits des travaux de Moumni et al. [91], la capacité thermique, la densité, la conductivité et les coefficients de convection sont les mêmes que ceux utilisés par Morin et al. [64].

Pour des raisons de simplicité, on fait les hypothèses suivantes :

- L´orientation des martensites est complète dès le début de la transformation de phase.
- Les paramètres matériaux sont constants.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
E_A	61500 (MPa)	a	6.89 MPa
E_M	24000 MPa	b	6.91 MPa
μ	0.3	G	4.65 MPa
α	2750 MPa	β	5500 MPa
Y	110 MPa	$\mathcal{A}^0_{af}$	40 °C
ξ	0.29 MPa/°C	κ	6.89 MPa
ε_{max}	4.0%	$\mathcal{K}$	18 $W\,m^{-1}\,K^{-1}$
C_P	440 $J\,kg^{-1}\,K^{-1}$	h_{air}	50 $W\,m^{-2}\,K^{-1}$
ρ	6500 $kg\,m^{-3}$	h_{eau}	800 $W\,m^{-2}\,K^{-1}$

Table 3.3: *Paramètres matériaux identifiés dans Morin et al. [64]*

- La température initiale (ambiante) est constante.
- Il y a absence de source volumique externe de chaleur.
- Les paramètres thermiques sont les mêmes pour les deux phases.
- Les termes du couplage thermoélastique sont négligés.

Les résultats suivants ont été obtenus dans la zone de post-traitement du maillage, loin des bords de la structure.

1. Le comportement mécanique à différentes vitesses de déformation : Trois vitesses de déformation respectivement de $4.10^{-5}s^{-1}$, $4.10^{-2}s^{-1}$ et $4.10^{-1}s^{-1}$ ont été choisies et les résultats (voir figure (3.8)) montrent que les pentes des plateaux de transformations directe et inverse augmentent avec la vitesse de déformation. Une interprétation de cette observation est que l´élévation de la température du matériau, induite par la transformation de phase, a tendance à provoquer une augmentation de la contrainte seuil. En effet, plus la température s'élève, plus la phase austénitique du matériau devient stable et par conséquent, l'avancement de la transformation martensitique (formation de nouvelles plaquettes martensitiques) nécessitera plus d'effort mécanique (*cf.* par exemple la figure 3.7), ce qui provoque une augmentation de la pente du plateau de transformation.

Ces observations sont en accord avec les travaux de Sadjadpour et Bhattacharya [71] et Morin et al. [64].

2. La variation de la température avec la vitesse de déformation : La figure (3.9 (a) et (b)) montre l´évolution de la température du matériau respectivement à $4.10^{-5}s^{-1}$ et $4.10^{-2}s^{-1}$. Les zones I dans les deux figures correspondent au temps passé par le matériau dans l'austénite : la température n'évolue pas car le comportement est élastique et le couplage thermoélastique ($\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial T \partial \varepsilon^e}$) est négligé dans le présent modèle. Les zones II correspondent à la période de déclenchement et d'avancement de la transformation de phase directe qui est exothermique : la variation de la tem-

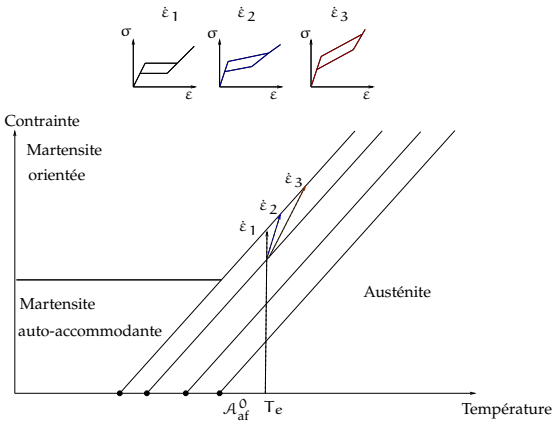

Figure 3.7: *Diagramme de phase : contrainte en fonction de la température et variations du comportement pseudo-élastique avec la vitesse de déformation*

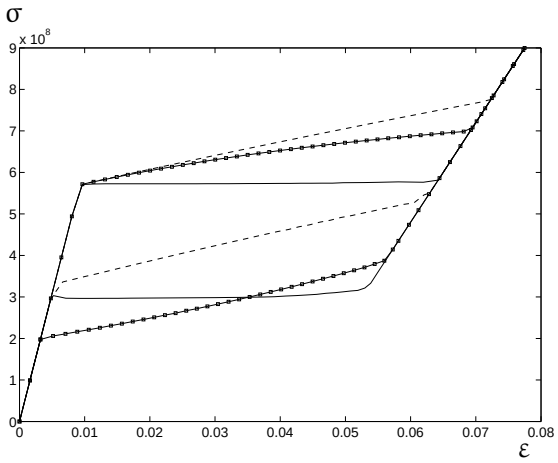

Figure 3.8: *Comportement à différentes vitesses de déformation :* $4.10^{-5}s^{-1}$ *(—),* $4.10^{-2}s^{-1}$ *(□ □ □) et* $4.10^{-1}s^{-1}$ *(— — —)*

pérature est due à un bilan énergétique entre la dissipation intrinsèque ($\mathcal{A}_z\dot{z}$), le couplage thermomécanique ($\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial T\partial z}$) et les échanges avec le milieu extérieur (h).

Les zones III correspondent à l'accomplissement de la transformation si bien que le comportement redevient élastique : la température n'évolue pas durant ces instants. La propriété endothermique de la transformation inverse (absorption de la chaleur) et la présence du couplage thermomécanique ($\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial T\partial z}$) engendre la diminution de la température dans les zones IV. Les zones V sont caractérisées par une température constante : le matériau retourne à l'austénite et le comportement redevient élastique.

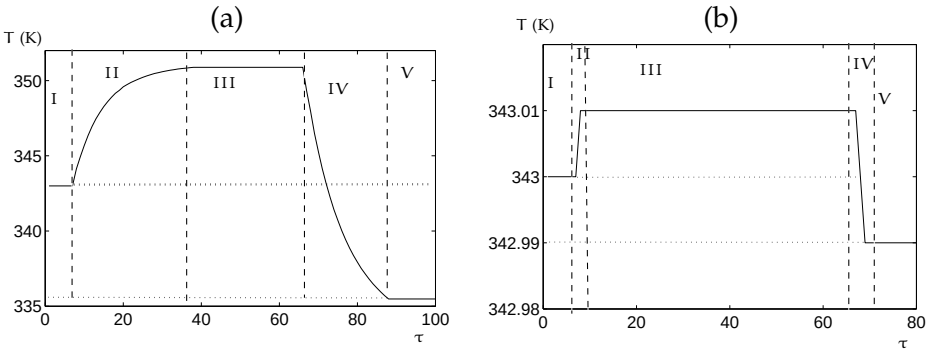

Figure 3.9: *Evolution de la température à : (a)* $\dot{\varepsilon} = 0.04 s^{-1}$*, (b)* $\dot{\varepsilon} = 4.10^{-5} s^{-1}$

Cependant, la variation de la température (ΔT) est plus importante dans la figure 3.9 (a) car la vitesse est plus grande que dans la figure 3.9 (b). La température du matériau descend parfois en dessous de la température ambiante à la fin de l´essai, comme dans les travaux de Auricchio et Sacco [66]. En effet, à ce niveau de vitesse de déformation et de coefficient d'échange thermique, la pente du plateau de la transformation inverse est plus grande que celle du plateau dans le cas isotherme. Par conséquent, la contrainte seuil de fin est plus petite que celle en isotherme et le caractère endothermique de la transformation inverse engendre cette décroissance de la température en dessous de l'ambiante. Une comparaison quantita-

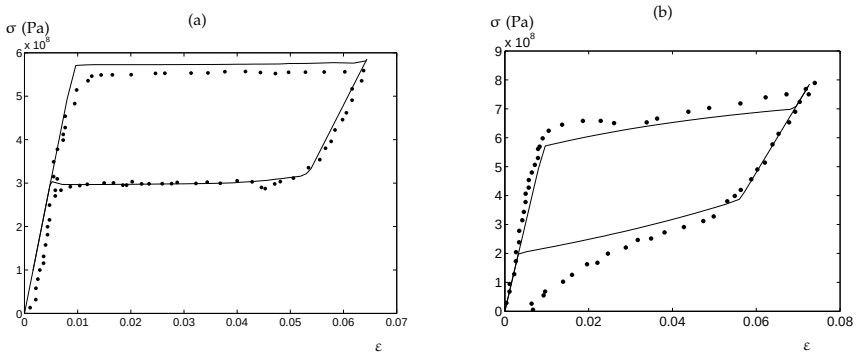

Figure 3.10: *Contrainte-déformation dans le cas du modèle ZM (ligne continue) et de l'expérience de Shaw et Kyriakides (en pointillé) à : (a)* $\dot{\varepsilon} = 4.10^{-5} s^{-1}$ *(b)* $\dot{\varepsilon} = 4.10^{-2} s^{-1}$

tive est réalisée avec les données expérimentales de Shaw et Kyriakides [8] dans les figures 3.10 (a) et (b). La réponse à $\dot{\varepsilon} = 4.10^{-5} s^{-1}$ montre que le modèle reproduit bien le comportement quasi-statique des MMF, voir la figure 3.10 (a). L'effet du couplage thermomécanique est également montré

par le modèle comme montre la courbe de comparaison à $\dot{\varepsilon} = 4.10^{-2} s^{-1}$ (figure 3.10 (b)).

3.5 CONCLUSION

Nous avons dans ce chapitre, pris en compte le couplage thermomécanique dans le modèle ZM et disposons maintenant d'une loi tridimensionnelle qui permet d'analyser la réponse dynamique de toute structure en MMF sans omettre les effets du temps physique sur le comportement du matériau. Nous particularisons cette loi en une dimension dans le prochain chapitre afin d'étudier les oscillations d'un ressort pseudo-élastique.

4

ETUDE D'OSCILLATEUR EN MATÉRIAU À MÉMOIRE DE FORME

Sommaire

4.1 Introduction 54
4.2 Modèle à un degré de liberté 54
4.3 Méthode numérique 61
4.4 Résultats 62
4.5 Conclusion 78

Ce chapitre présente une analyse numérique des réponses dynamiques d'un oscillateur dont le comportement en raideur est pseudo-élastique. L'inertie est prise en compte, ce qui amène à étudier les réponses à la résonance de l'oscillateur. Le modèle ZM tridimensionnel est tout d'abord réduit à un degré de liberté afin de comparer les résultats à ceux de la littérature. Des phénomènes typiquement non linéaires sont observés : un comportement assouplissant (diminution de la fréquence de vibrations avec l'amplitude), sauts et régimes chaotiques.

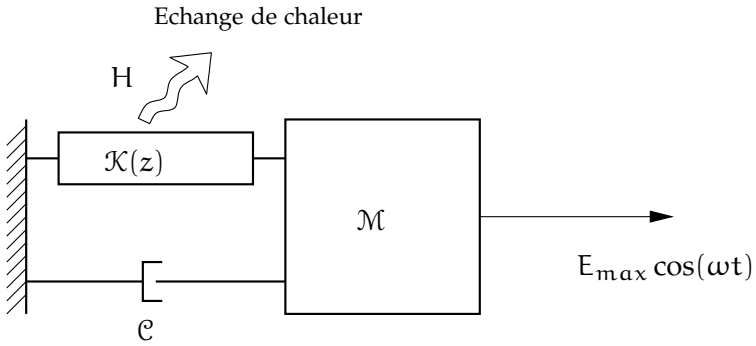

Figure 4.1: *Le modèle phénoménologique de l'oscillateur à mémoire de forme*

4.1 INTRODUCTION

L'analyse de la dynamique des MMF concerne, dans ce chapitre, l'étude de la réponse en fréquence d'un oscillateur pseudo-élastique. Il s'agit de l'évolution de la valeur maximale du déplacement ($\max_{i\leqslant N} x(\tau_i)$) en fonction de la fréquence, sur un nombre de périodes N de chargement. Ces matériaux ont des propriétés qui peuvent modifier la dynamique des structures. En effet, la transformation martensitique leur permet de présenter un comportement assouplissant : diminution de la fréquence non linéaire en fonction de l'amplitude, engendrée par la décroissance de la rigidité. Ce comportement assouplissant et la cappacité d'amortissement (dissipation de l'énergie) que se procurent les MMF font d'eux de bons candidats à l'utilisation dans les structures soumises aux sollicitations dynamiques. En effet, l'analyse de la dynamique des structures en MMF trouve un grand intérêt dans la recherche fondamentale.

4.2 MODÈLE À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

Décrivons dans un premier temps le système étudié dans ce chapitre. Il s'agit du modèle phénoménologique d'oscillateur, schématisé en figure 4.1.

L'étude d'un oscillateur à un degré de liberté en matériaux à mémoire de forme, nécessite la construction d'une expression de la force de rappel qui reproduit le comportement pseudo-élastique. La raideur est représentée dans la présente contribution, par une barre en traction-compression. Une poutre (figure 4.2) de longueur L et de section $\mathcal{S}$ est considérée. L'hypothèse qu'une section reste plane avant et après une déformation, est faite dans ce chapitre. On écrit le champ de contrainte sous la forme : $\boldsymbol{\sigma} = \sigma \boldsymbol{e}_x \otimes \boldsymbol{e}_x$. La contrainte $[\sigma]$ est donnée par la composante suivant la direction $\vec{x}$ de force interne $[F]$ divisée par la section initiale $\mathcal{S}$,

$$\sigma = \frac{F}{\mathcal{S}}. \tag{4.1}$$

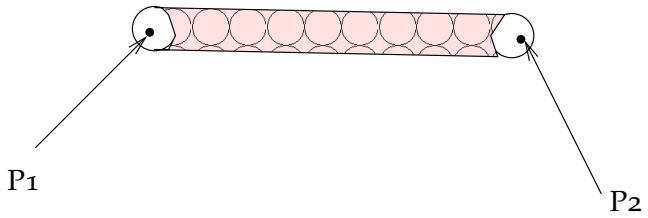

Figure 4.2: *Barre en MMF de longueur L, de section S et d'extrémités P1 et P2*

La déformation totale dans la direction axiale ($\vec{x}$) est donnée par le déplacement relatif à la longueur initiale de la géométrie,

$$\varepsilon = \frac{X}{L}. \tag{4.2}$$

L'étude du déplacement relatif ($X = u_{P_2} - u_{P_1}$) des extrémités P_1 et P_2 de la poutre permet de se ramener à un modèle phénoménologique "Ressort + Masse + Amortisseur" (figure 4.1).
De la même façon et avec les mêmes hypothèses que pour le modèle 3D, l'expression unidimensionnelle de la déformation d'orientation est donnée respectivement par l'équation suivante :

$$\varepsilon_{tr} = z\varepsilon_{ori}, \tag{4.3}$$

ε_{ori} est associée à un déplacement interne X_{ori} du dispositif. Cela permet d'exprimer la déformation de transformation en fonction de la variable déplacement par

$$\varepsilon_{tr} = z\frac{X_{ori}}{L}. \tag{4.4}$$

L'expression du lagrangien en fonction de la force et du déplacement en une dimension, est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\frac{1}{2}(1-z)E_A(\frac{X_A}{L})^2 + \frac{1}{2}zE_M(\frac{X_M - X_{ori}}{L})^2 + zC(T)\\ &+ (z(\alpha z + (1-z)\beta) \times (\frac{1}{2}(\frac{X_{ori}}{L})^2)) - \lambda_1 z - \lambda_2(1-z)\\ &- \frac{F}{SL}((1-z)X_A + zX_M - X) - \mu(\frac{|X_{ori}|}{L} - \frac{X_{max}}{L}),\end{aligned} \tag{4.5}$$

où X_A est le déplacement correspondant à la déformation locale en austénite (ε_A), X_M est le déplacement correspondant à la déformation locale en martensite (ε_M). E_A est le module d'Young de l'austénite. E_M est le module d'Young de la martensite. X_{max} est le déplacement maximal associé à la déformation ε_{max}.

On établit ainsi la relation entre la force interne et le déplacement,

$$\begin{aligned} F &= \frac{S}{L}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \\ &= \frac{S}{L}E_{eq}(X - zX_{ori}), \end{aligned} \tag{4.6}$$

où,

$$E_{eq} = (\frac{1-z}{E_A} + \frac{z}{E_M})^{-1}. \tag{4.7}$$

Les expressions en une dimension des forces thermodynamiques $\mathcal{A}_z$ et $\mathcal{A}_{ori}$ sont données par,

$$\mathcal{A}_z = \frac{-1}{2E_A}(\frac{F}{S})^2 + \frac{1}{2E_M}(\frac{F}{S})^2 + \frac{1}{SL}F.X_{ori} - C(T) - Gz - ((\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2})(\frac{X_{ori}}{L})^2, \tag{4.8}$$

et

$$\mathcal{A}_{ori} = z\frac{F}{S} - z(\alpha z + (1-z)\beta)\frac{X_{ori}}{L} - \mu\frac{sgn(X_{ori})}{L}. \tag{4.9}$$

L'orientation de la martensite est complète au début du chargement, d'où

$$X_{ori} = X_{max}sgn(F). \tag{4.10}$$

L'expression unidimensionnelle du critère de changement de phase devient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z^1 =& \frac{-1}{2E_A}(\frac{F}{S})^2 + \frac{1}{2E_M}(\frac{F}{S})^2 + \frac{1}{SL}F.X_{ori} - C(T) - Gz - ((\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2})(\frac{X_{ori}}{L})^2 \\ &- (a(1-z) + bz), \end{aligned} \tag{4.11}$$

pour la transformation directe et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z^2 =& \frac{1}{2E_A}(\frac{F}{S})^2 - \frac{1}{2E_M}(\frac{F}{S})^2 - \frac{1}{SL}F.X_{ori} + C(T) + Gz + ((\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2})(\frac{X_{ori}}{L})^2 \\ &- (a(1-z) + bz), \end{aligned} \tag{4.12}$$

pour la transformation inverse.
L'équation du mouvement s'écrit finalement :

$$\mathcal{M}\ddot{X} + \mathcal{C}\dot{X} + \mathcal{K}(z,\dot{z})X = A(t), \tag{4.13}$$

où $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}$ sont respectivement les coefficients de masse, d'amortissement et de rigidité non-linéaire.
La rigidité non-linéaire $\mathcal{K}(z, \dot{z})$ n'est autre que la force de rappel du ressort en matériau à mémoire de forme relativement au déplacement du dispositif, l'équation de la dynamique devient donc

$$\mathcal{M}\ddot{X} + \mathcal{C}\dot{X} + \mathcal{K}_{eq}(z)(X - zX_{ori}) = A(t), \tag{4.14}$$

où,

$$X_{ori} = X_{max} sgn(F) \tag{4.15}$$

$$\mathcal{K}_{eq} = \left(\frac{1-z}{\mathcal{K}_A} + \frac{z}{\mathcal{K}_M}\right)^{-1}, \tag{4.16}$$

$\mathcal{K}_A$ est la rigidité du dispositif dans l'austénite. $\mathcal{K}_M$ est la rigidité du dispositif dans la martensite.
L'effet du couplage thermomécanique est pris en compte de la même façon qu'en 3D. En effet, l'équation de la chaleur en une dimension devient :

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial X} = \mathcal{A}_z \frac{\partial z}{\partial t} + T\xi \frac{\partial z}{\partial t} + r_l, \tag{4.17}$$

où ρ est la masse volumique de la poutre, C_P la capacité thermique massique du matériau, q le flux de chaleur à travers les sections de la poutre et r_l une source externe de chaleur.
La quantité de chaleur engendrée par le couplage thermoélastique est négligée. Le système est dépourvu de source de chaleur externe si bien que le terme r_l n'est plus considéré dans l'équation de la chaleur.
L'hypothèse de conduction uniforme de chaleur dans la poutre permet d'ôter la variation spatiale du flux ($\frac{\partial q}{\partial x}$) de l'équation de la chaleur.
Les équations principales du modèle unidimensionnel sont résumées dans le tableau 4.1.

Equation de la dynamique :	$\mathcal{M}\ddot{X} + \mathcal{C}\dot{X} + \mathcal{K}_{eq}(z)(X - zX_{ori}) = A(t)$,
Force de rappel :	$F = \mathcal{K}_{eq}(z)(X - zX_{ori})$,
Evolution de z :	$\mathcal{F}_z^1 \leqslant 0$, $\dot{z}\mathcal{F}_z^1 = 0$ et $\dot{z} > 0$
	$\mathcal{F}_z^2 \leqslant 0$, $\dot{z}\mathcal{F}_z^2 = 0$ et $\dot{z} < 0$,
Equation de la chaleur :	$\rho C_P \dot{T} = \mathcal{A}_z \dot{z} + T\xi\dot{z} + H(T - T_0)$.

Table 4.1: *Bilan des équations physiques du problème en une dimension*

4.2.1 *Identification des paramètres*

Afin de pouvoir valider les résultats de simulations de l'oscillateur MMF, la comparaison est réalisée avec ceux publiés par Bernardini *et al.* [4],[5] et [6]. Le modèle utilisé par ces derniers , complètement différent du modèle ZM (*cg.* le chapitre 2), repose sur les hypothèses d'Ivshin-Pence. La procédure d'identification des 13 paramètres du modèle ZM à ceux de leur modèle, est décrite dans cette section. Les paramètres dans leur modèle sont données dans le tableau suivant :

Dans ce tableau σ_{ms}, σ_{mf}, σ_{as}, σ_{af},$\mathcal{M}^0_{ms}$,$\mathcal{M}^0_{mf}$,$\mathcal{A}^0_{as}$ et $\mathcal{A}^0_{af}$ sont les contraintes

Paramètre	Description
q_1	Rapport entre la force de fin et celle de début de la transformation de phase directe ($q_1 = \frac{F_{mf}}{F_{ms}}$)
q_2	Rapport entre la force de fin et celle de début de la transformation de phase inverse ($q_2 = \frac{F_{af}}{F_{as}}$)
q_3	Rapport entre la force de début de la transformation de phase inverse et celle de début de la transformation directe ($q_3 = \frac{F_{as}}{F_{ms}}$)
J	Fonction du rapport entre la température de début de la transformation de phase directe et celle de référence ($J = 1 - \frac{M_{ms}}{T_{ref}}$)
	Utilisation des paramètres pour les seuils
$\sigma_{mf} = \frac{F_{mf}}{S}$, $\mathcal{M}^0_{ms}=(1-J)T_{ref}$, $\mathcal{A}^0_{af}=(1-J.q_3.q_2)T_{ref}$	$\sigma_{as} = \frac{F_{as}}{S}$, $\mathcal{M}^0_{mf}=(1-J.q_1)T_{ref}$, $\sigma_{af} = \frac{F_{af}}{S}$ $\mathcal{A}^0_{as}=(1-J.q_3)T_{ref}$

Table 4.2: *Paramètres de Lacarbonara et Bernardini et seuils de transformation*

et températures seuils. Les indices m et a, avant s (start en anglais) et f (finish en anglais), indiquent respectivement la transformation martensitique directe et la transformation inverse.

Connaissant la section S, la longueur L, la contrainte σ_{ms} de début de la transformation de phase directe, la déformation d'orientation ε_{ori} et la température de référence T_{ref}, la force F_{ms} et le déplacement d'orientation sont évalués respectivement par $F_{ms} = \sigma_{ms}S$ et $X_{ori} = \varepsilon_{ori}L$. L'utilisation des valeurs des paramètres q_1, q_2, q_3 et J permet d'identifier les autres forces et par la suite les contraintes et les températures seuils.

Certains paramètres du modèle ZM peuvent être choisis arbitrairement et d'autres déterminés à partir de q_1, q_2, q_3 et J. Dans la présente contribu-

tion, le rayon de la poutre est égal à 1mm, sa section à $\mathcal{S} = 3.14 \times 10^{-6}\mathrm{m}^2$, sa longueur à $l = 0.1\mathrm{m}$ et la température de référence à $T_{ref} = 296$ K. Des paramètres matériaux ont été fixés se rapprochant de quantités réelles observées dans les expériences [64], $\sigma_{ms} = 800\mathrm{MPa}$, $\sigma_{sori} = 80\mathrm{MPa}$ (contrainte de début de l'orientation), $\sigma_{fori} = 165\mathrm{MPa}$ (contrainte de fin de l'orientation). La masse volumique est égale à $\rho = 6600\mathrm{Kgm}^{-3}$. La cappacité thermique massique est égale à $C_P = 440\mathrm{JK}^{-1}\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^{-3}$. Les modules d'Young et la déformation maximale d'orientation sont fixés à $E_A = E_M = 50\mathrm{GPa}$ et $\varepsilon_{max} = 0.112$. La détermination de ces paramètres permet d'identifier l'ensemble des paramètres matériaux du modèle ZM :

$$
\begin{aligned}
X_{ms} &= \frac{\sigma_{ms} l}{E_A}, \mathcal{M}^0_{ms} = (1-J)T_{ref}, \mathcal{M}^0_{mf} = (1-Jq_1)T_{ref} \\
\mathcal{A}^0_{as} &= (1-Jq_3)T_{ref}, \mathcal{A}^0_{af} = (1-Jq_3.q_2)T_{ref} \\
a &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{E_M}-\frac{1}{E_A}\right)\frac{\sigma^2_{ms}-\sigma^2_{af}}{2} + \varepsilon_{max}(\sigma_{ms}-\sigma_{af})\right] \\
b &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{E_M}-\frac{1}{E_A}\right)\frac{\sigma^2_{mf}-\sigma^2_{as}}{2} + \varepsilon_{max}(\sigma_{mf}-\sigma_{as})\right] \\
\beta &= \frac{\sigma_{fori}}{\varepsilon_{max}}, \alpha = \beta - \frac{\sigma_{sori}}{\sigma_{fori}}\varepsilon_{ori} \\
G &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{E_M}-\frac{1}{E_A}\right)\frac{\sigma^2_{mf}-\sigma^2_{af}-\sigma^2_{ms}+\sigma^2_{as}}{2}\right. \\
&\quad \left. + (\sigma_{mf}+\sigma_{as}-\sigma_{ms}-\sigma_{af})\,\varepsilon_{max} - (\alpha-\beta)\varepsilon^2_{max}\right] \\
X_{max} &= \frac{\varepsilon_{max} l}{X_{ms}}, T_0 = T_{ref}; \kappa = a - \frac{\beta\varepsilon^2_{max}}{2} \\
C(T_0) &= \left(\frac{1}{E_M}-\frac{1}{E_A}\right)\frac{\sigma^2_{ms}+\sigma^2_{af}}{2} + \varepsilon_{max}(\sigma_{ms}+\sigma_{af}) - \beta\varepsilon_{max}, \\
\xi &= \frac{C(\theta_0)-\kappa}{T_0-\mathcal{A}^0_{af}}
\end{aligned}
$$

La masse du dispositif est identifiée grâce à la valeur de la masse volumique du matériau, soit, $\mathcal{M} = \rho\mathcal{S}L$.

4.2.2 *Adimensionnement des variables*

Nous procédons ici à un adimensionnement des variables physiques par rapport à des paramètres intrinsèques au matériau et au chargement. L'avantage de cet adimensionnement est de se ramener à un modèle numérique valable pour tout oscillateur pseudo-élastique et de pouvoir interpréter les résultats relativement à des proportions de variables physiques.

Un temps sans dimension est défini relativement à la période naturelle de l'oscillateur T_n,

$$\tau = \frac{t}{T_n}, \tag{4.18}$$

où,

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{K}_A}}. \tag{4.19}$$

La pulsation de la sollicitation est adimensionnée par rapport à la pulsation naturelle de l'oscillateur, soit,

$$\Omega = \frac{\omega_e}{\omega_n}, \tag{4.20}$$

où,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\mathcal{K}_A}{\mathcal{M}}}. \tag{4.21}$$

Le déplacement de l'oscillateur est adimensionné par rapport à un déplacement intrinsèque X_{ms} de début du changement de phase, soit,

$$x = \frac{X}{X_{ms}}. \tag{4.22}$$

L'amplitude du forçage harmonique est adimensionnée par rapport à la force F_{ms} seuil de début du changement de phase, soit,

$$\gamma = \frac{A_{max}}{F_{ms}}. \tag{4.23}$$

Le déplacement dû à l'orientation des martensites est adimensionné par rapport au déplacement X_{ms} seuil de début du changement de phase,

$$x_{ori} = \frac{X_{ori}}{X_{ms}}. \tag{4.24}$$

La température T est adimensionnée par rapport à une température de référence T_{ref},

$$\theta = \frac{T}{T_{ref}}. \tag{4.25}$$

La température du milieu extérieur T_0 est adimensionnée par rapport à T_{ref},

$$\theta_0 = \frac{T_0}{T_{ref}}. \tag{4.26}$$

Equation de la dynamique :	$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + (x - zx_{ori}) = \gamma\cos(\Omega\tau)$,
Force de rappel :	$f = x - zx_{ori}$,
Evolution de z :	$\mathcal{F}_z^1 \leqslant 0$, $\dot{z}\mathcal{F}_z^1 = 0$ et $\dot{z} > 0$,
	$\mathcal{F}_z^2 \leqslant 0$, $\dot{z}\mathcal{F}_z^2 = 0$ et $\dot{z} < 0$,
Equation de la chaleur :	$\dot{\theta} = \frac{1}{\rho C_P T_{ref}}(\mathcal{A}_z + T_{ref}\theta\xi)\dot{z} + h(\theta - \theta_0)$.

Table 4.3: *Bilan des équations sans dimension du problème*

Le coefficient d'échange de chaleur est adimensionné par rapport à $\rho C_P \omega_n$,

$$h = \frac{H}{\rho C_P \omega_n}. \tag{4.27}$$

La version adimensionnée de l'équation de la dynamique devient alors,

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \frac{\mathcal{K}_{eq}(z)}{\mathcal{M}\omega_n^2}(x - zx_{ori}) = \gamma\cos(\Omega\tau), \tag{4.28}$$

où l'amortissement structural réduit ζ est donné par,

$$\zeta = \frac{\mathcal{C}}{2\mathcal{M}\omega_n^2}. \tag{4.29}$$

Cependant, l'hypothèse que $\mathcal{K}_A$=$\mathcal{K}_M$ permet d'écrire que $\frac{\mathcal{K}_{eq}(z)}{\mathcal{M}\omega_n^2}$=1. Par conséquent, les principales équations sans dimension sont données dans le tableau 4.3.

4.3 MÉTHODE NUMÉRIQUE

La sollicitation $A_e(t)$ est harmonique en temps dans la présente contribution. L'amplitude du forçage est notée γ et sa période T_e, si bien que la force externe s'exprime :

$$A_e(t) = \gamma\cos(\frac{2\pi}{T_e}t), \tag{4.30}$$

où t est le temps physique. La pulsation ou vitesse angulaire de l'excitation A_e est donnée par

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}. \tag{4.31}$$

L'équation de la dynamique étant non linéaire, la résolution numérique est réalisée grâce à un schéma temporel de la famille Newmark de paramètres p_1 et p_2. Sur un intervalle de temps N fois multiple de la période du chargement T_e, l'équation du mouvement est discrétisée par l'utilisation d'une méthode de Newmark (Gerardin et Rixen [95] et Hughes [96]). Les

étapes de la méthode sont énumérées ci-après :
1. Prédiction uniforme
Le déplacement prédit à l'instant τ_{n+1} est exprimé par,

$$x_{n+1}^{\mathcal{T}} = x_n + \dot{x}_n \Delta\tau + \frac{\Delta\tau^2}{2}(1 - 2p_2)\ddot{x}_n. \tag{4.32}$$

La vitesse prédite à l'instant τ_{n+1} est donnée par,

$$\dot{x}_{n+1}^{\mathcal{T}} = \dot{x}_n + (1 - p_1)\Delta\tau\ddot{x}_n. \tag{4.33}$$

L'incrément de l'accélération est supposé nul au début de la sollicitation à l'instant τ_{n+1}

$$\ddot{x}_{n+1} = \ddot{x}_n. \tag{4.34}$$

2. Définition du résidu
Le mouvement est le résultat d'une compétition entre les forces appliquées, les forces inertielles et celles amortissant qui s'y opposent. Il fait intervenir la masse de l'objet mobile. L'expression du résidu est définie par,

$$\mathcal{R}_{n+1} = \ddot{x}_{n+1} + \frac{\mathcal{K}_{eq}(z_{n+1})}{\mathcal{M}\omega_n^2}(x_{n+1} - z_{n+1}x_{n+1}^{ori}) + 2\zeta\omega_n\dot{x}_{n+1} - \gamma\cos(\Omega\tau_{n+1}). \tag{4.35}$$

Les principales étapes de l'algorithme de la résolution en temps du problème à une dimension, sont détaillées dans le tableau 4.4.

4.4 RÉSULTATS

L'objet de la présente section est d'étudier les régimes permanents des réponses du système à des forçages dont la fréquence ($f_e = \frac{\Omega}{2\pi}$) et l'amplitude ($\gamma$) d'excitation sont contrôlées. Une fois que f_e, γ et les conditions initiales sont définies, la simulation de la dynamique est réalisée avec un schéma Newmark non linéaire, sur un nombre de périodes n_{per}. Le temps d'observation est en effet, $T_{obs} = n_{per}T_e$ et le pas de temps est défini par l'équation (4.36).

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{T_e}{n_p} \\ &= \frac{2\pi}{n_p\Omega}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Sur n_{per} périodes, un nombre n_{tran} correspond au transitoire et n'est pas retenu. Le réglage de n_{per} et n_{tran} dépend des expériences numériques à faire. Pour $n_p = 1000$, $n_{per} = 200$ et $n_{tran} = 80$, les figures 4.3 et 4.4

Nom : algorithme_ressort
Données : Paramètres matériaux, x_n, $\dot{x}_n$, $\ddot{x}_n$,z_n, x_n^{ori}, f_n, θ_n, γ, τ_{n+1}, $\Delta\tau$, Ω, paramètres de Newmark (p_1 et p_2), tolérances : ϵ_{cr}, ϵ_{eq} et ϵ_{ch}
Sorties : x_{n+1}, $\dot{x}_{n+1}$,$\ddot{x}_{n+1}$,z_{n+1},$x_{ori,n+1}$, θ_{n+1}
Initialisation : $k = 0$, z_{n+1}^0, θ_{n+1}^0, $x_{n+1}^{ori,0}$,
1. Simulation de la réponse dynamique isotherme
a) Prédiction de Newmark avec les équations (4.32), (4.33) et (4.34), où x_n, $x_{n+1}^{\mathcal{T}}$, $\dot{x}_n$, $\dot{x}_{n+1}^{\mathcal{T}}$, $\ddot{x}_n$, $\ddot{x}_{n+1}^{\mathcal{T}}$, z_n, $z_{n+1}^{\mathcal{T}}$, θ_n et $\theta_{n+1}^{\mathcal{T}}$ deviennent $x_n^{(k)}$, $x_{n+1}^{(k+1)}$, $\dot{x}_n^{(k)}$, $\dot{x}_{n+1}^{(k+1)}$, $\ddot{x}_n^{(k)}$, $\ddot{x}_{n+1}^{(k+1)}$, $z_n^{(k)}$, $z_{n+1}^{(k+1)}$, $\theta_n^{(k)}$ et $\theta_{n+1}^{(k+1)}$
b) Détermination de l'incrément de déplacement
$\delta x_{n+1}^{(k+1)} = \frac{-\mathcal{R}_{n+1}}{\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \delta x}\right)_{n+1}^{(k)}}$, où $\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \delta x}\right)_{n+1}^{(k)} = 1 + \frac{1}{p_2 \Delta\tau^2} + 2\zeta \frac{p_1}{p_2 \Delta\tau}$
c) Actualisation des variables cinématiques ($x_{n+1}^{(k+1)}$, $\dot{x}_{n+1}^{(k+1)}$ et $\ddot{x}_{n+1}^{(k+1)}$) et de la force de rappel ($f_{n+1}^{(k+1)}$)
d) Prédiction thermoélastique et le retour radial
- Déterminer la prédiction thermoélastique et évaluer les fonctions-critères : $(i = 1, 2)$, $\mathcal{F}_{z,n+1}^{i,(k)} = \mathcal{F}_z^i\left(f_{n+1}^{(k)}, z_{n+1}^{(k)}\right)$
- Si $\mathcal{F}_{z,n+1}^{i,(k)} < 0$ (ou au cours des itérations $\left|\mathcal{F}_{i,n+1}^{z,(k)}\right| < \epsilon_{cr}$) alors incrémenter $k = k + 1$ et aller à 1.e)
- Calculer l'incrément de la fraction volumique Δz_{n+1}^{k+1}
- Actualiser les variables d'état qui dépendent de $z_{n+1}^{(k+1)}$
- Incrémenter le compteur : k=k+1 et aller à 1.d)
e) Calculer le résidu :
$\mathcal{R}$=$\ddot{x}_{n+1}^{(k+1)} + (x_{n+1}^{(k+1)} - z_{n+1}^{(k+1)} x_{n+1}^{ori,(k+1)}) + 2\zeta\omega_n \dot{x}_{n+1}^{(k+1)} - \gamma\cos(\Omega\tau_{n+1})$
f) Si $|\mathcal{R}| > \epsilon_{eq}$ alors aller à 1.b)
2. Calculer la température $\theta_{n+1}^{(k+1)}$ par la résolution de l'équation de la chaleur
3. Si $|\theta_{n+1}^{(k+1)} - \theta_n^{(k)}| > \epsilon_{ch}\ \theta_n^{(k)}$ alors aller à 1.b)
4. Fin de l'algorithme (algorithme_ressort)

Table 4.4: *Algorithme de Newmark adapté à la présence de fonctions critères et du couplage thermomécanique dans le comportement*

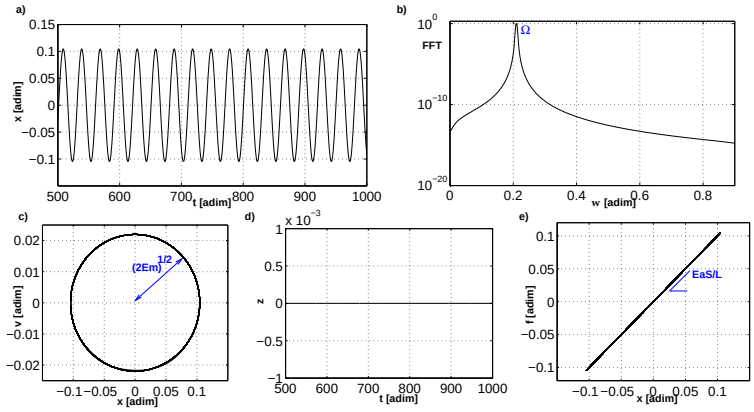

Figure 4.3: *(a) Déplacement* [x] *en fonction du temps* τ *pour* $\gamma = 0.1$ *et* $\Omega = 0.8$*(b) Transformée de Fourier du déplacement* [x] *(c) Vitesse* [v] *en fonction du déplacement* [x] *(Plan de phase) (d) Fraction volumique* [z] *en fonction du temps* τ *(e) Force de rappel* [f] *en fonction du déplacement* [x]

montrent deux exemples de réponses en temps de l'oscillateur pour deux amplitudes de forçage différentes.
La figure 4.3 (a) montre le déplacement en fonction du temps pour une amplitude de $\gamma = 0.1$ et $\Omega = 0.8$. La réponse devient périodique après un transitoire assez bref où l'ensemble de l'amortissement dû à l'hystérésis se manifeste. Le déplacement maximal n'atteint pas le déplacement de début de la transformation de phase cette amplitude. La figure 4.3 (b) montre la transformée de Fourier du signal de déplacement : l'existence d'une seule harmonique fondamentale ($f_n = \frac{1}{2\pi}\Omega$) caractérise un comportement linéaire. L'énergie mécanique du système est conservée comme le montre le plan de phase (figure 4.3 (c)). En l'absence du changement de phase, la fraction volumique [z] ne varie pas (figure 4.3 d)). Le comportement (force [f] en fonction du déplacement [x]) est linéaire (figure 4.3 e)).
À $\gamma = 0.5$, la non-linéarité du comportement apparait (figure 4.4 (e)). La réponse est périodique (4.4 a)) avec l'apparition des harmoniques impaires (multiples impairs de la fréquence fondamentale). Le plan de phase (figure 4.4 c)) est déformé à cause de la dissipation de l'énergie induite par le changement de phase. Ces observations caractérisent un comportement non-linéaire symétrique. La fraction volumique de martensite z change (figure 4.4 d)) et le comportement pseudo-élastique se manifeste par l'apparition de la boucle d'hystérésis (figure 4.4 e)).
Concernant les réponses en fréquence, les simulations sont réalisées à différentes amplitudes relatives à la force de début de la transformation de phase F_{ms}, $\gamma \in [0.1, 0.2, 0.5, 0.8, 1.2]$ et dans une plage de pulsations, $\Omega \in [0.01 : 0.01 : 2.01]$, à chaque amplitude. La non linéarité du comporte-

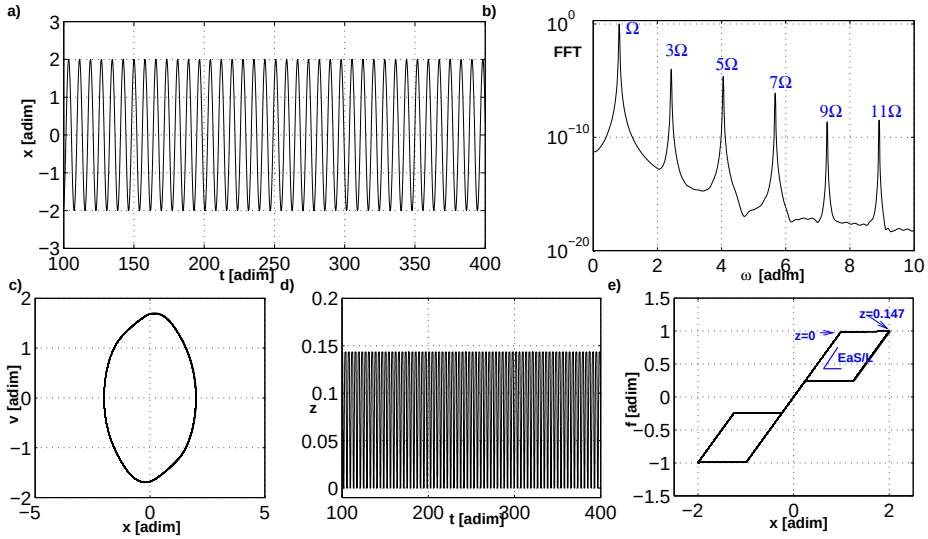

Figure 4.4: *(a) Déplacement* [x] *en fonction du temps* τ *pour* $\gamma = 0.5$ *et* $\Omega = 0.8$ *(b) Transformée de Fourier du déplacement* [x] *(c) Vitesse* [v] *en fonction du déplacement* [x] *(Plan de phase) (d) Fraction volumique* [z] *en fonction du temps* τ *(e) Force de rappel* [f] *en fonction du déplacement* [x]

ment exige deux parcours croissant et décroissant de cet intervalle de pulsations afin d'atteindre l'ensemble des branches stables séparées par des sauts et des bifurcations. A chaque fréquence de forçage f_e, les conditions initiales pour l'intégration en temps pour une simulation sont données par les points finaux de la simulation qui la précède afin de minimiser le temps du transitoire.

4.4.1 *Réponses en fréquence à température constante*

Dans cette section, nous nous référons à deux cas étudiés par Lacarbonara *et al.* [4] afin de valider les résultats des réponses en fréquence de notre modèle. Ensuite, un troisième cas qui traite la dissymétrie dans le comportement est exploré.

1. Cas 1 : $q_1 = 1.3$,$q_2 = 0.9$ et $J = 0.315$

Dans cette section, les résultats numériques issus du modèle ZM sont présentés pour des valeurs $q_1 = 1.3$, $q_3 = 0.9$, $q_2 = 0.667$ et J=0.315 des paramètres de Lacarbonara et al. [4]. L'identification des paramètres permet de déterminer les valeurs des paramètres ZM dans le tableau 4.5. Les réponses en fréquence et la comparaison des résultats sont effectuées pour analyser la dynamique au voisinage de la fréquence propre normalisée. Une méthode simple sans recours une méthode de continuation a été utilisée pour obtenir les réponses en fréquence : Pour chaque valeur de la fréquence de forçage $\Omega \in [0, 2]$, une intégration en temps des équations

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
a	17.9 MPa	ε_{max}	0.112
b	17.9 MPa	$\mathcal{A}^0_{af}$	238 K
β	1.47 GPa	E_a	50 GPa
α	1.47 GPa	E_m	50 GPa
G	26.8 MPa	κ	8.68 MPa
Y	164 MPa	θ_0	233 K
ξ	0.53MPa/°C		

Table 4.5: *Paramètres ZM correspondant* $q_1 = 1.3$, $q_3 = 0.9$, $q_2 = 0.667$ *et* J=0.315.

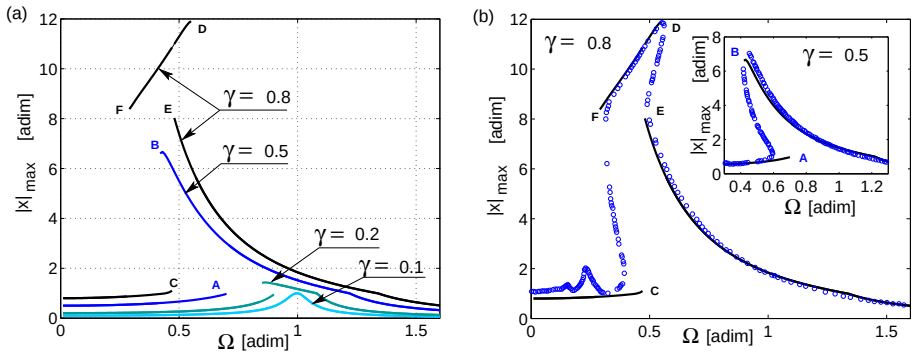

Figure 4.5: *Amplitude maximale du déplacement* $|x|_{max}$ *pour différentes fréquences de forçage* Ω *et pour quatre amplitudes :* γ=0.1, 0.2, 0.5 *et* 0.8. *(b) : Comparaison des résultats du modèle (ligne) et ceux de Lacarbonara* et al *(cercles), pour* γ=0.8 *et* γ=0.5 *(en haut droite de la figure).*

est réalisée. Au régime établi, l'amplitude maximale de la valeur absolue du déplacement $|x|_{max}$ est recherchée. La figure 4.5(a) montre les réponses en fréquence calculées, pour quatre amplitudes de forçage : γ=0.1, 0.2, 0.5 et 0.8. Pour γ=0.1, l'amplitude de la réponse n'excédant jamais 1, la transformation de phase ne se produit pas : une réponse linéaire est observée. Pour γ=0.2, une réponse non-linéaire du matériau est sollicitée. Comme la rigidité équivalente du matériau diminue lorsque le changement de phase commence, un comportement assouplissant est observé avec apparition de phénomènes de sauts qui s'accentuent pour γ=0.5. Dans ce cas, le premier saut est observé au point A lorsque la fréquence du forçage est augmentée à partir de 0 et la réponse s'amplifie fortement vu que le saut est vers une branche haute de solution. De façon analogue, au cours du balayage fréquentiel décroissant, le saut apparait au point B et l'amplitude chute vers la branche de petite amplitude. Pour γ=0.8, les niveaux d'amplitude

sont tels que la transformation martensitique s'accomplit totalement et les oscillations deviennent purement dans la martensite. Il en résulte l'apparition d'une troisième branche stable. Lorsque la fréquence augmente à partir de 0, un premier saut est observé au point C où les amplitudes de la réponse sont au niveau de la troisième branche qui termine au point D où un deuxième saut arrive.
Les réponses en fréquence calculées partir du modèle ZM sont en accord avec des travaux antérieurs où un comportement non linéaire assouplissant et une émergence d'une troisième branche durcissant font partie des caractéristiques relevées (Lacarbonara et al. [4]).
Une comparaison quantitative est réalisée avec les résultats de Lacarbonara *et al* dans la figure 4.5(b), pour des amplitudes γ=0.5 et 0.8. Dans Lacarbonara et al. [4], une méthode de continuation est utilisée afin d'obtenir aussi bien les réponses stables que celles instables. En revanche, dans les présents calculs, une méthode d'intégration directe est utilisée si bien que seules les solutions stables sont atteintes. La comparaison quantitative pour γ=0.5 montre un bon accord à l'exception de la position du point de bifurcation A qui apparaît plus tard dans les présents calculs, Ω= 0.7 au lieu de Ω=0.6 dans Lacarbonara et al. [4]. La deuxième différence est une amplitude maximale, de la branche principale au niveau du point B, qui est plus petite dans le modèle ZM. Cependant, les autres solutions sont retrouvées qualitativement et quantitativement. Une même comparaison donne des résultats satisfaisant pour γ=0.8, où les points de bifurcations et les amplitudes des réponses sont correctes. Cependant, la différence principale est au niveau des basses fréquences où le modèle de Lacarbonara prédit l'existence des superharmoniques 1/3 et 1/5 de la résonance alors que le modèle ZM ne les montre pas. Dans les présentes simulations, l'amplitude du déplacement n'excède jamais 1 sur la branche basses fréquences, donc il n'y a aucune raison pour que l'on observe les résonances superharmoniques.
Nous nous sommes intéressés ensuite à savoir ce qui se passe pour une grande amplitude de forçage, et en particulier si notre modèle montre des résonances superharmoniques. En effet, l'étude est réalisée également pour γ=1.2. La réponse en fréquence est montrée sur la figure 4.6(a). On voit que :
- le comportement raidissant domine vu que toutes les réponses sont à transformation martensitique complète : la troisième branche domine le comportement assouplissant observé aux petites amplitudes,
- des résonances superharmoniques apparaissent dans la réponse. Cependant, le phénomène physique derrière cela est méconnu à ce stade.

Nous effectuons une section de Poincaré sur les réponses temporelles afin de déceler la nature de cette apériodicité. Le principe de la méthode de sec-

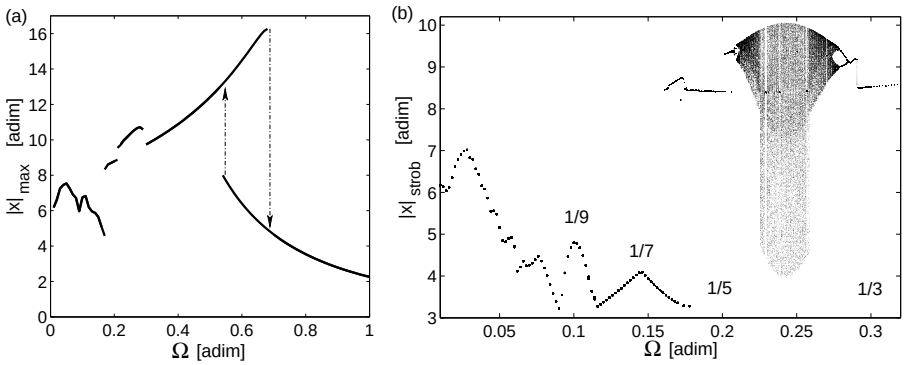

Figure 4.6: *(a) : Amplitude maximale de déplacement* $|x|_{max}$ *pour différentes fréquences de forçage* Ω *et* γ*=1.2. (b) : section de Poincaré pour* $\Omega \in [0, 0.35]$*, montrant l'émergence du chaos dans le mouvement*

tion de Poincaré consiste à enregistrer des points de la réponse en phase avec le forçage pour chaque fréquence. Lorsque la réponse est périodique alors un seul point apparait à chaque fréquence dans le diagramme déplacement sectionné en fonction de la fréquence de chargement. Cependant, en présence d'une non périodicité dans la réponse, une superposition et des amas de points dispersés apparaissent pour chaque fréquence.
Une section de Poincaré, réalisée dans notre cas, est montrée dans la figure 4.6(b). On voit l'existence de superharmoniques d'ordres 5, 7 et 9 ainsi qu'un nuage de points dispersés autour de la résonance d'ordre 3, il s'agit donc d'un comportement chaotique. Celui-ci est illustré par la figure 4.7 pour Ω=0.23 et γ=1.2. On voit :
- du chaos en modulation d'amplitude du déplacement,
- des attracteurs fractals dans le plan de phase,
- apparaître des harmoniques pairs dans la transformée de Fourier du déplacement. Cela est un signe de l'existence d'une bifurcation de type Symmetry Breaking et en effet, en revenant, la figure 4.6(b), on voit bien qu'on entre dans la zone chaotique par une bifurcation franche qui se poursuit par une cascade de doublements de périodes.

Par ailleurs, ces phénomènes physiques ont été observés pour la première fois dans l'analyse de l'oscillateur de Duffing (Parlitz et Lauterborn [97] et Kozlowski et al. [98]) et observés également dans les travaux de Lacarbonara et al. [4], mais pour d'autres valeurs de paramètres comme les amplitudes de forçage dans leurs travaux n'atteignent pas un niveau pareil.
2. Cas 2 : $q_1 = 1.05, q_2 = 0.3$ et $J = 0.315$
Dans cette section, les résultats du modèle ZM sont confrontés à ceux pré-

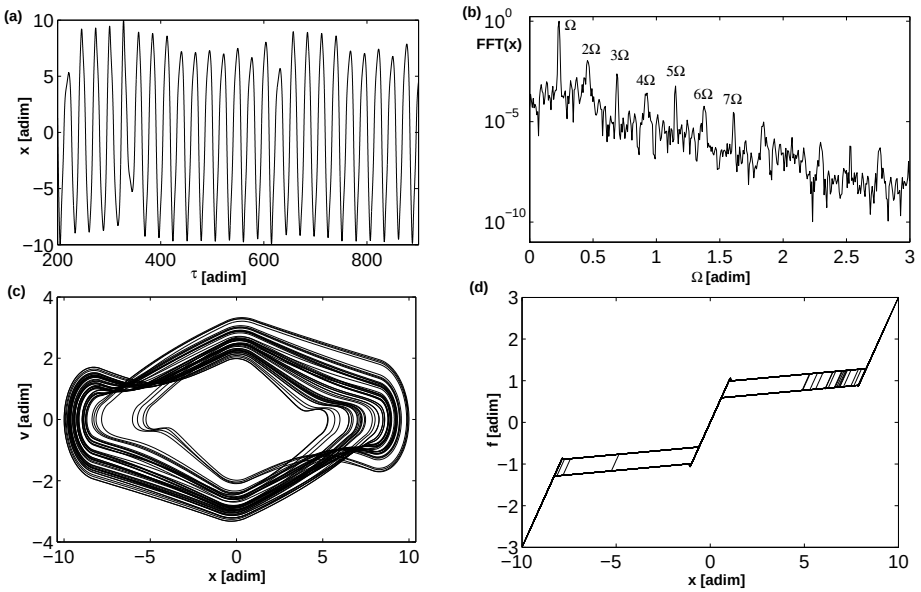

Figure 4.7: *Réponse chaotique pour le cas 1, Ω=0.23 et γ=1.2. (a) : Réponse en temps au régime établi. (b) : Transformée de Fourier du déplacement x. (c) : Evolution de la phase x en fonction de la vitesse $v = \dot{x}$. (d) : Force de rappel en fonction du déplacement*

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
a	33.6 MPa	ξ	0.31MPa/°C
b	33.6 MPa	ε_{max}	0.11
β	0.71 GPa	$\mathcal{A}_f^0$	306 K
α	0.71 GPa	E_a	50 (Gpa)
G	4.48 MPa	E_m	50 (Gpa)
Y	160 MPa	κ	29.1 MPa
θ_0	264 K		

Table 4.6: *Paramètres de ZM pour le cas 2, correspondant au jeu de paramètres dans Lacarbonara et al. [4] :* $q_1 = 1.05$, $q_3 = 0.3$, $q_2 = 0.833$ *et J=0.315. NB :* ε_{max}, E_a *et* E_m *ayant les mêmes valeurs que dans le cas 1, ne sont pas redonnés dans ce tableau.*

sentés dans Lacarbonara et al. [4] où la boucle d'hystérésis admet un plateau pseudo-élastique plus plat que dans le cas précédent. Les paramètres utilisés dans ce cas sont : $q_1 = 1.05$, $q_3 = 0.3$, $q_2 = 0.833$ et J=0.315. Les paramètres ZM correspondants sont donnés dans le tableau 4.6. La figure 4.8 montre les réponses en fréquence obtenues dans ce cas pour γ=0.1, 0.2, 0.5 et 0.8. Les résultats ont été qualitativement comparés ceux de Lacarbo-

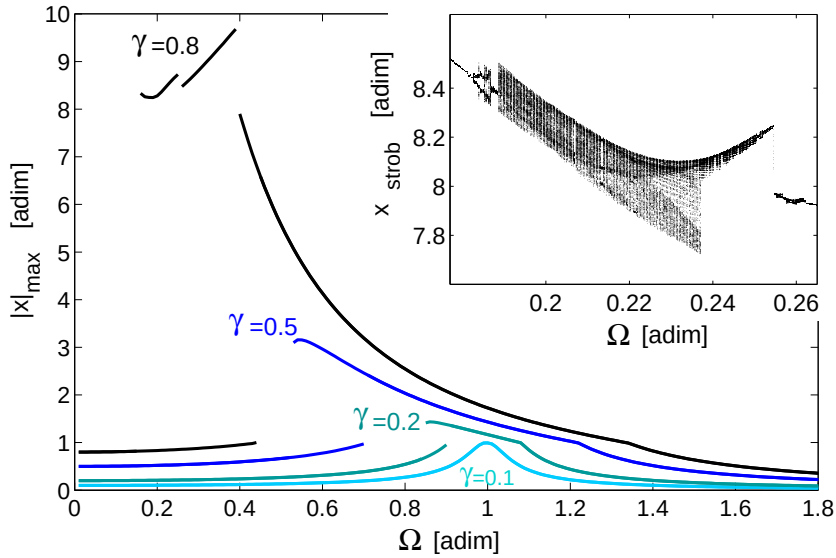

Figure 4.8: *Amplitude maximale de déplacement* $|x|_{max}$ *pour le cas 2* γ*=0.1, 0.2, 0.5 et 0.8. Figure insérée : Section de Poincaré pour* $\Omega \in [0.18, 0.26]$ *et* γ*=0.8, correspondant aux solutions obtenues au début de la troisième branche.*

nara et al. [4] et montrent à nouveau un bon accord. Dans le deuxième cas, la taille de la boucle d'hystérésis étant plus grande que dans le cas 1, les pics des amplitudes sont plus amortis. A nouveau, aucune résonance superharmonique n'est excitée en dessous de la fréquence propre normalisée pour γ=0.8, cette observation étant cette fois-ci en accord avec Lacarbonara et al. [4]. L'émergence de la troisième branche correspondant à l'accomplissement de la transformation martensitique est également observée comme au cas 1. Cependant, cette branche est divisée en deux parties où une réponse chaotique apparaît à basses fréquences, cela étant à nouveau en accord avec les observations reportées dans Lacarbonara et al. [4]. Une section de Poincaré est réalisée pour la plage correspondante d'amplitudes et de fréquences et est montrée dans la figure insérée en haut à droite de la figure 4.8, on voit clairement que les réponses chaotiques sont prédites par le modèle ZM. Une réponse chaotique est montrée dans la figure 4.9 pour Ω=0.22. Le caractère chaotique de la réponse se présente principalement dans la variation temporelle de l'enveloppe, figure 4.9(a), on peut parler d'un chaos de modulation d'amplitude. Les séries temporelles, aussi bien de la fraction volumique z que de la force de rappel f, dans les figures 4.9(d) et (e), montrent que le système tantôt arrive à accomplir la transformation de phase, z atteint 1, tantôt il ne l'accomplit pas et z décroît

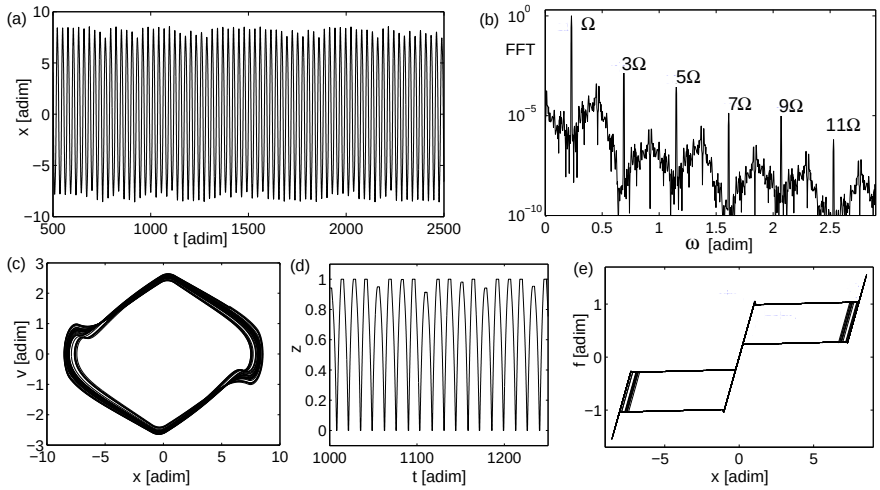

Figure 4.9: *Réponse chaotique dans le cas 2, Ω=0.22 et γ=0.8. (a) : déplacement x dans le régime permanent. (b) : FFT de x. (c) : Profil de phase. (d) : évolution de la fraction volumique z. (e) : force interne en fonction du déplacement dans le régime permanent.*

avant d'atteindre 1. Ces résultats montrent que les réponses chaotiques sont généralement observées au point où la transformation martensitique est complète. Le profil de la phase et la transformée de Fourier du déplacement sont comparables à ceux obtenus par Lacarbonara et al. [4], montrant un excellent accord de prédictions entre les deux modèles.

3. Cas 3 : comportement dissymétrique

Dans le but d'aller plus loin dans l'étude du modèle dynamique à température constante, cette section présente des résultats qui tiennent compte de la dissymétrie entre la traction et la compression d'une structure en MMF, observée en expériences de Lexcellent et Rejzner [99] et Orgéas et Favier [89]. Le modèle ZM peut inclure cette dissymétrie en introduisant le troisième invariant du tenseur de déformation dans l'expression de la déformation équivalente d'orientation (Zaki [90]). La loi 3D dissymétrique est réduite à une dimension de la même manière que dans la section 4.2. Après la réduction en une dimension, la déformation maximale d'orientation admet dans ce cas deux valeurs différentes : une pour la traction ε^t_{max} et une pour la compression ε^c_{max}. Dans cette section, les paramètres matériaux sont les mêmes que dans le cas 1 à l'exception de ε^t_{max} (0.112) et ε^c_{max} (0.064).

Comparé au cas symétrique étudié dans les sections précédentes, la boucle d'hystérésis est plus petite et la pente du plateau plus raide en compression. Le comportement dissymétrique du dispositif est montré dans la fi-

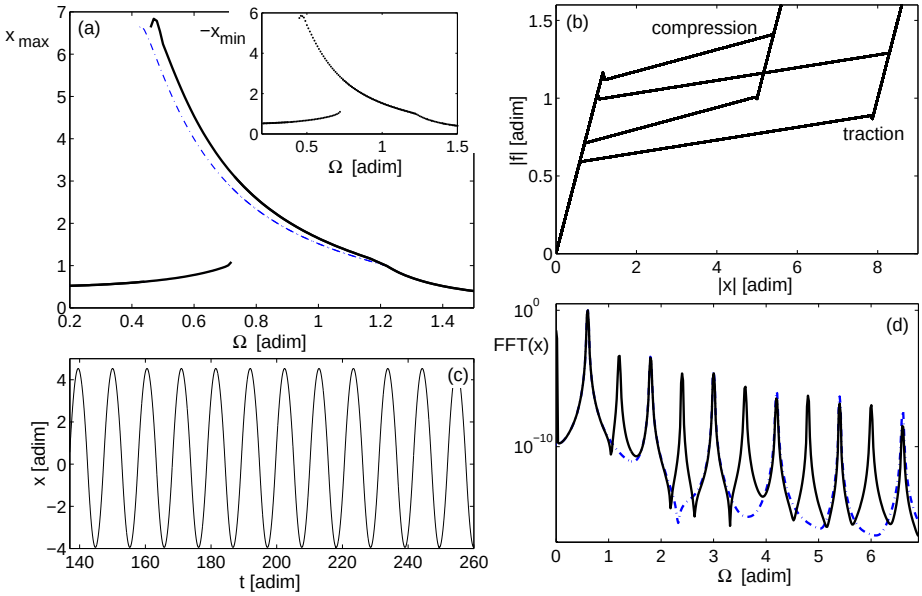

Figure 4.10: *Comportement dissymétrique du dispositif pseudo-élastique. (a) : Réponse en fréquence : x_{max} (en haut à droite : x_{min}) en fonction de la fréquence d'excitation Ω, pour γ=0.5. (b) : Comportement dissymétrique en traction et en compression. (c) : Réponse temporelle x en régime permanent pour Ω=0.6, la branche haute. (d) : Transformée de Fourier du déplacement x (noir), comparée au cas symétrique (Pointillé, en bleu).*

gure 4.10(b).

La réponse en fréquence pour une amplitude de γ=0.5 est montrée dans la figure 4.10(a) où l'amplitude maximale est comparée au cas symétrique. Comme le comportement est plus rigide en compression, le caractère assouplissant est moins prononcé que dans le cas symétrique. La dissymétrie se manifeste également par le fait que l'amplitude maximale du déplacement et son amplitude minimale ont deux valeurs absolues différentes. La figure en haut à droite dans la figure 4.10(a) montre la valeur absolue de l'amplitude minimale du déplacement pour comparaison. La figure 4.10(c) montre une série temporelle du déplacement pour Ω=0.6, où cette dissymétrie s'illustre clairement. Enfin, le spectre de Fourier du déplacement contient aussi bien les harmoniques paires que celles impaires alors que dans le cas symétrique, seules les harmoniques impaires apparaissent, comme montré dans la figure 4.10(d). Le modèle permet donc de reproduire le comportement d'une force de rappel dissymétrique ainsi que la réponse en fréquence correspondante.

Nous venons de faire l'étude d'un dispositif en matériaux à mémoire de

forme qui oscille autour d'une position d'équilibre à température constante (en isotherme). La suite concerne l'étude du même système mais avec la prise en compte du couplage thermomécanique qui s'avère nécessaire quand les sollicitations sont dynamiques.
L'équation de la chaleur sera donc couplée celle de la dynamique dans la résolution du problème d'oscillations non isothermes. Des questions scientifiques motivent la section ultérieure :
- La variation de la température du matériau aura-t-elle un effet sur la dynamique du système ?.
- Qu'en est il pour la cappacité d'amortissement de ces matériaux en fonction de la fréquence du forçage ?.
- La réponse en fréquence non linéaire est elle changée ?.

4.4.2 *Réponses non isothermes*

1. Evolution de la température

Effet du coefficient de transfert de chaleur h

Les matériaux à mémoire de forme présentent un couplage thermomécanique fort, responsable de plusieurs manifestations dans leur comportement mécanique comme évoqué dans Bernardini et Vestroni [5], Bernardini et Rega [6],Morin et al. [64] et He et Sun [63]. En effet, une étude de la dynamique d'un dispositif en alliages à mémoire de forme, nécessite de considérer un comportement non isotherme. L'équation de la chaleur est couplée à l'équation du mouvement dans la résolution. La variation de la température est la somme d'un terme proportionnel à $\dot{z}$, quantifiant une dissipation intrinsèque de l'énergie et une chaleur latente de changement de phase et un terme proportionnel à h correspondant à la chaleur échangée avec l'environnement. Le couplage thermoélastique est negligé dans la dynamique de la température θ. L'influence du coefficient d'échange h sur la température est montrée dans la figure 4.11, à une amplitude $\gamma = 0.8$ et une fréquence $\Omega = 0.8$. Les paramètres matériaux sont les mêmes que ceux donnés dans le cas 1 des calculs isothermes, à l'exception de ceux ajoutés dans le tableau 4.7. L'étude est réalisée pour une force de rappel symétrique. La valeur h=0 correspond à un régime adiabatique : le système est supposé thermiquement isolé du milieu extérieur. En effet, la chaleur engendrée par la transformation de phase (exothermique de l'austénite vers la martensite et endothermique dans le sens inverse avec l'existence d'une chaleur résiduelle ou latente à la fin d'un cycle) fait augmenter la température moyenne indéfiniment. Dans ce cas, il n'existe pas un état stable pour la température si bien que ce cas non réaliste ne sera pas considéré dans l'analyse de la réponse en fréquence des états permanents.
Cependant pour des valeurs $h > 0$, l'énergie échangée avec le milieu ex-

Paramètre	Value
C_P	440 $(JK^{-1}m^{-3}Kg^{-1})$
ρ	6500 (Kgm^{-3})
T_{ext}	333K

Table 4.7: *Paramètres ajoutés au cas 1 pour le cas non isotherme : cappacité spécifique de chaleur C_P, la masse volumique ρ et la température du milieu extérieur T_{ext}*

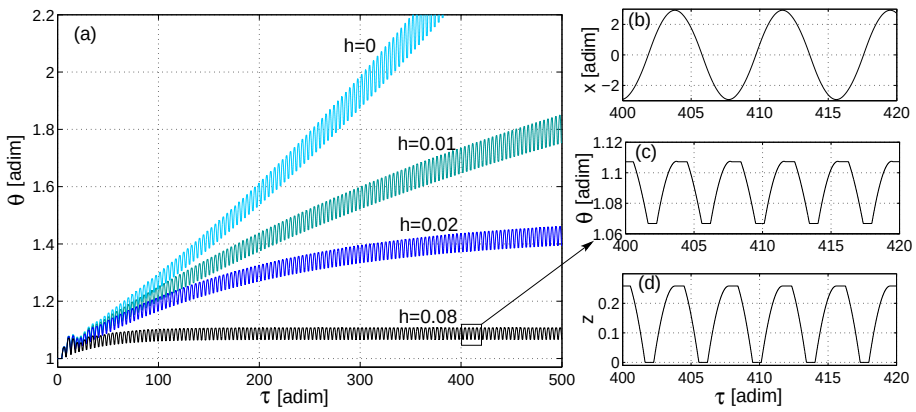

Figure 4.11: *Evolution de la température en fonction du temps pour différentes valeurs du coefficient d'échange :* $h \in \{0, 0.01, 0.02, 0.08\}$

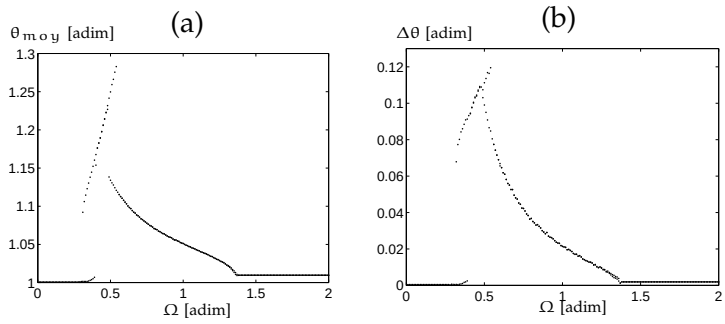

Figure 4.12: *Réponse en fréquence de la température du matériau dans des conditions non isothermes pour* $h = 0.08$ *et* $\gamma = 0.8$

térieur rend l'émergence de régimes permanents possible. La température du matériau se stabilise à une valeur moyenne constante. L'augmentation de la valeur de h permet d'observer que :
(i) la durée du régime transitoire diminue (pour h=0.01, le régime permanent est atteint après un temps τ=1000),
(ii) la température moyenne se stabilise à une valeur plus petite,
(iii) les amplitudes des fluctuations autour de cette moyenne diminuent également.
Ces observations vérifient le comportement thermique et l'équilibre du système avec le milieu extérieur qui dépend de la valeur de h. La fréquence des oscillations de la température θ est le double de celle du déplacement x : pour un cycle de déplacement du système composé de traction et compression, deux cycles pour la température sont réalisés. La figure 4.11 montre que le comportement de la température θ est principalement gouverné par la variation de la fraction volumique z.

Effet de la fréquence du forçage

Figures 4.12 (a) et (b) montrent respectivement les réponses en fréquence de la valeur moyenne de la température ($\theta_{my}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\theta(\tau_i)$, où N est le nombre de périodes dans le régime permanent) et de l'échauffement moyen ($\Delta\theta = \theta_{max}-\theta_{moy}$). Le profil de ces dynamiques est similaire à celui de l'amplitude maximale du déplacement : phénomènes de sauts, bifurcations à la fréquence de début du changement de phase et l'émergence de la troisième branche stable. En plus, à cette valeur de h ($h = 0.08$), les variations de la température correspondent à des valeurs physiques de l'ordre de 30.6 K.
2. Effet du couplage thermomécanique sur la mécanique
Dans l'étude de la réponse en fréquence du système, chaque état dynamique $\{x, \dot{x}, \ddot{x}, z, x_{ori}, \theta\}$ est initialisé par les valeurs finales des variables

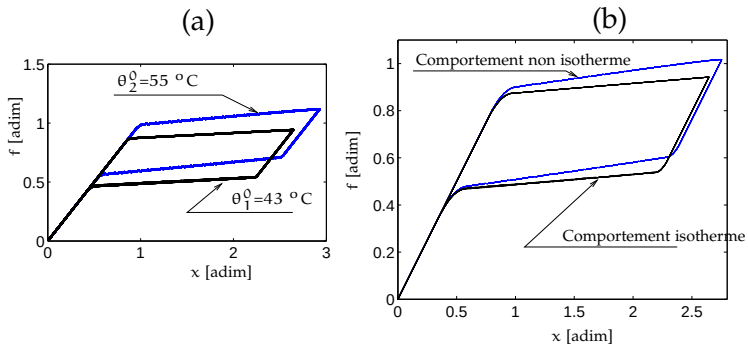

Figure 4.13: *Force de rappel non linéaire dans des conditions non isothermes (en raison de symétrie, seule la partie positive est montrée). (a) : effet de la température initiale sur le comportement mécanique (b) : comparaison entre un comportement non-isotherme et un isotherme* (h=*0.08)*

dans l'état précédent. En effet, l'influence de la température initiale apparaît considérable dans le comportement non isotherme. La figure 4.13(a) montre deux comportements mécaniques à deux températures initiales différentes : les seuils de la transformation et l'aire de la boucle augmentent avec la température initiale.
Cependant, sous une même température initiale, la figure 4.13(b) montre une comparaison entre un comportement mécanique isotherme et un comportement non isotherme. La prise en compte du couplage thermomécanique permet d'observer deux principaux effets : l'augmentation de la pente du plateau de transformation de phase (durcissement du matériau) et une réduction de l'aire de la boucle d'hystérésis (diminution de la cappacité d'amortissement) avec une augmentation de la fréquence de forçage. La réponse en fréquence est montrée dans la figure 4.14. La présence du couplage thermomécanique rend le régime transitoire plus long que dans dans les calculs isothermes. Par conséquent, nous considérons les 80 dernières périodes sur 400 afin d'être certain qu'on se trouve dans le régime permanent. Cela résulte en des temps de simulations considérablement longs. Dans la figure 4.14, deux caractéristiques peuvent être relevées :
- Le couplage thermomécanique dans le comportement mécanique fait augmenter la rigidité au cours de la transformation de phase. Cela résulte en une modification de la fréquence non linéaire en fonction de l'amplitude.
- La variation de l'énergie dissipée affecte la cappacité d'amortissement du dispositif

4.4.3 *L'énergie dissipée en fonction de la fréquence*

La transformation martensitique que subissent les matériaux à mémoire de forme engendre une dissipation importante de l'énergie. La question dans cette section est d'étudier l'évolution de cette grandeur en fonction

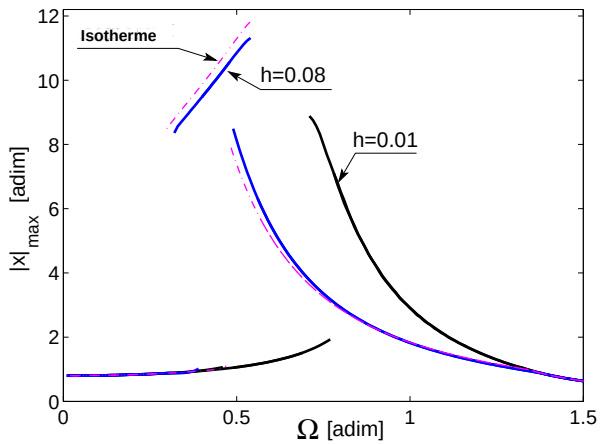

Figure 4.14: *Amplitude maximale du déplacement en fonction de la fréquence en présence du couplage thermomécanique*

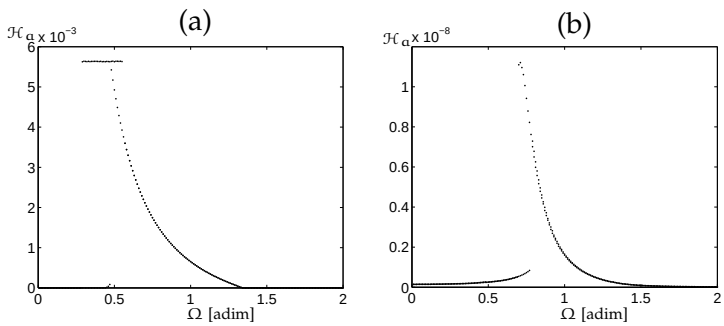

Figure 4.15: *Aire de l'hystérésis (en* $J\,m^{-3}$*)* h*=0.08 et* $\gamma = 0.8$ *: (a) cas isotherme (b) cas non isotherme*

de la fréquence de forçage dans les deux cas isotherme et non isotherme.
La figure 4.15 (a) montre une valeur constante de l'énergie dissipée dans la plage de fréquences [0.2 0.57] et $\gamma = 0.8$. Cela est dû à l'accomplissement de la transformation de phase en l'absence de la viscosité dans le comportement des matériaux à mémoire de forme.
Cependant, dans le cas non isotherme figure 4.15 (b), l'aire de la boucle d'hystérésis ne sature pas dans la même plage de fréquences mais diminue, comparativement aux calculs isothermes. L'aire totale de la boucle d'hystérésis n'est pas atteinte parce que la transformation martensitique n'est pas accomplie en présence du couplage thermomécanique. En réalité, l'énergie dissipée est mesurée par la dissipation intrinsèque ($\mathcal{A}_z \dot{z}$) dans les calculs isothermes. Cependant, la prise en compte du couplage thermomécanique nécessite de considérer en plus la dissipation due à la chaleur latente engendrée par le changement de phase.

4.5 CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre une étude du comportement dynamique d'un système discret en MMF. Il s'agit d'un oscillateur composé d'un ressort pseudo-élastique non linéaire, d'une masse inertielle et d'un amortisseur visqueux linéaire. Le prochain chapitre concerne l'analyse de la dynamique d'un système continu composé d'un pendule de torsion et une confrontation du modèle aux données réelles de l'expérience.

5

TORSION D'UN FIL PSEUDOÉLASTIQUE

Sommaire

5.1 Introduction 80
5.2 Modélisation du comportement 82
5.3 Expériences de torsion d'un MMF 105
5.4 Analyse expérimentale du comportement cyclique . . . 110
5.5 Conclusion 114

Ce chapitre présente l'analyse de la torsion d'un fil en matériau à mémoire de forme, avec et sans la prise en compte de l'inertie. Le modèle de comportement de cisaillement local (contrainte de cisaillement en fonction de l'angle de torsion) est établi à partir du modèle développé au chapitre 3. Deux cas sont étudiés : la torsion quasi statique d'un fil et l'analyse dynamique du même fil auquel est suspendu une masse à son extrémité ; Ce deuxième cas est étudié aussi expérimentalement. Les résultats des expériences statiques permettent de valider le modèle dynamique local. De même qu'au chapitre précédent, le couplage thermomécanique est pris en compte, afin de mieux étudier son apport. Des comparaisons avec les résultats expérimentaux montrent un bon accord. Des expériences de fatigue en torsion dynamique et une recherche du point mémoire dans les boucles internes sont réalisées. Nos résultats semblent confirmer son existence.

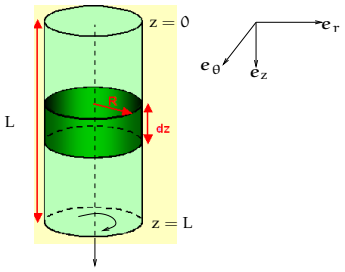

Figure 5.1: *Cylindre en torsion*

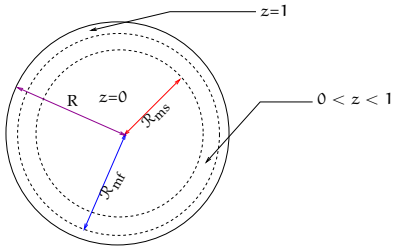

Figure 5.2: *Répartition de z dans une section*

5.1 INTRODUCTION

Le chapitre précédent présente une confrontation de nos résultats numériques à la littérature. L'identification des paramètres matériaux est faite à la lumière des travaux de Lacarbonara et al. [4]. Bien que n'ayant pas été comparés à des résultats expérimentaux, ce travail a permis de valider notre démarche d'utiliser le modèle ZM enrichi du couplage thermomécanique pour l'étude dynamique d'oscillateurs en MMF. Dans le présent chapitre consacré à la torsion, nous aurons des résultats expérimentaux pour faire cette comparaison. L'étude de la torsion présente un certain nombre de difficultés par rapport à la traction ou la compression. En effet, le problème est tridimensionnel : le champ de contrainte dépend des coordonnées cylindriques z (la hauteur), r (le rayon) et θ (l'angle). Le changement de phase est hétérogène dans une section : pour une valeur de l'angle imposée, la fraction volumique de martensite dépend du rayon. Bien qu'en pratique le problème dépend aussi de la coordonnée z, nous nous plaçons dans un cas tel que cette dépendance puisse être vérifiée : par la projection de la dynamique sur un mode propre linéaire en z et l'hypothèse que la température est uniforme suivant l'axe (Oz).

Position du problème

On considère un cylindre de section S, de hauteur L et de rayon R, orienté comme sur la figure 5.1. La dépendance entre la fraction volumique de martensite z et le rayon r pour un angle donné, engendre l'apparition de trois zones délimitées par des rayons $\mathcal{R}_{ms}$, $\mathcal{R}_{mf}$ et R (figure 5.2) : la région $r \leqslant \mathcal{R}_{ms}$, constituée d'un matériau dans l'austénite (z=0), la région $\mathcal{R}_{ms} < r < \mathcal{R}_{mf}$, dans laquelle on a coexistence ($z \in]0\,1[$) des deux phases : l'austénite et la martensite, la région $r \geqslant \mathcal{R}_{mf}$, constituée d'un matériau complètement transformé en martensite, où $\mathcal{R}_{ms}$ est un rayon seuil pour la transformation directe (austénite vers martensite) et $\mathcal{R}_{mf}$, un rayon seuil pour la transformation inverse (martensite vers austénite).

L'intérêt dans ce chapitre est porté donc à une modélisation du problème posé et à une confrontation aux résultats expérimentaux. Nous présenterons ensuite une analyse expérimentale des deux problématiques ouvertes :

	Fil en MMF	Masse inertielle
Longueur	L	
Rayon	R	R_M
Masse volumique	ρ_f	ρ_M
Moment inertiel	I_f	I_M
Moment polaire de section	J_f	

Table 5.1: *Paramètres géométriques du pendule de torsion*

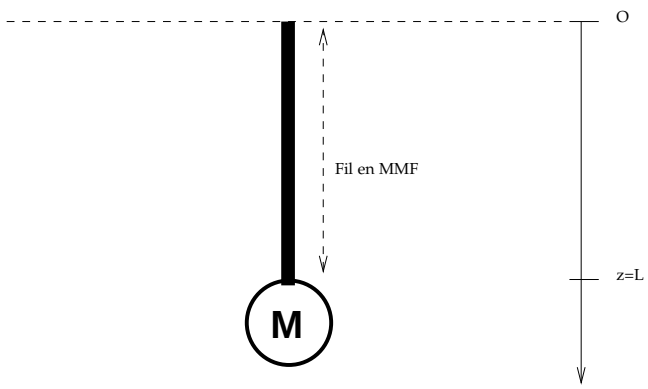

Figure 5.3: *Modèle physique du pendule de torsion*

la fatigue en torsion dynamique et l'existence de point mémoire dans les boucles internes. Nous commençons par donner une idée du modèle physique et le type d'expériences à étudier.

Modèle physique

Le pendule de torsion correspondant au problème est représenté sur la figure 5.3. Il est composé d'un fil en MMF attaché à une masse inertielle à l'extrémité z=L. Les paramètres géométriques du système sont donnés dans le tableau 5.1. Les difficultés liées au problème de torsion sont résolues par le biais d'un ensemble d'hypothèses :

1. La résolution du problème dynamique est réalisée sur le premier mode de torsion.
2. La température est considérée homogène suivant l'axe principal (Oz). L'avantage de cette hypothèse est de simplifier l'équation de la chaleur en se passant de la variation spatiale de la température.
3. L'orientation en cisaillement de la martensite autoaccommodée, est complète au début du chargement.

Une conséquence des hypothèses 1 et 2 est de réduire le problème 3D en un modèle dans le plan $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$.

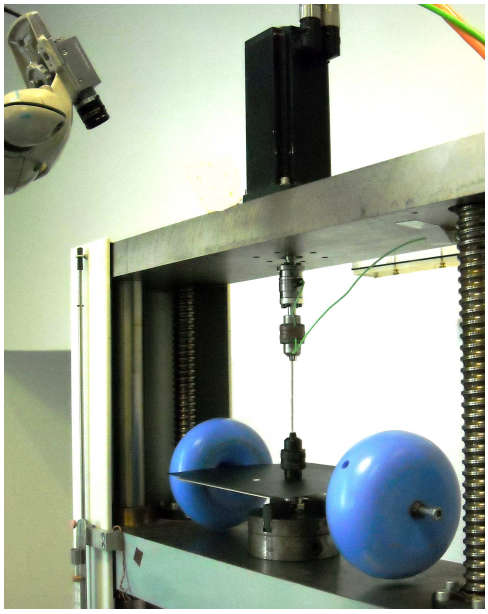

Figure 5.4: *Image du dispositif de torsion*

Essais

L'essai de torsion est réalisé par l'utilisation du dispositif expérimental montré sur la figure 5.4 et sera détaillé en section 5.3.1.

Il permet d'obtenir en régime pseudo-élastique, les comportements à différentes fréquences (moment en fonction de l'angle). Les réponses typiques pour trois fréquences différentes sont montrées sur la figure 5.5. En commentant ces résultats, on peut voir que la pente du plateau de transformation augmente lorsque la sollicitation devient rapide. L'aire de la boucle d'hystérésis change avec la fréquence. Les manifestations de l'influence du couplage thermomécanique, observées en traction et compression se retrouvent. Cependant, dans le cas de la torsion contrairement à la traction ou la compression, l'hétérogénéité de la transformation au sein d'une même section (Orgéas et Favier [89], Lexcellent et Rejzner [99] et Mirzaeifar et al. [100]) a la conséquence suivante : l'effort nécessaire pour avoir une section complètement en martensite ($\mathcal{R}_{ms}$=0) dépasse l'endurance maximale du matériau avant de se rompre en torsion.

5.2 MODÉLISATION DU COMPORTEMENT

Nous nous intéressons dans la présente section à l'étude de la dynamique d'un pendule de torsion. Tout d'abord, la réponse locale à un chargement dynamique est étudiée. Deux approches de résolution, analytique et incrémentale, seront évoquées dans la modélisation du comportement quasi statique face aux chargements monotones. Dans cette section, l'angle maxi-

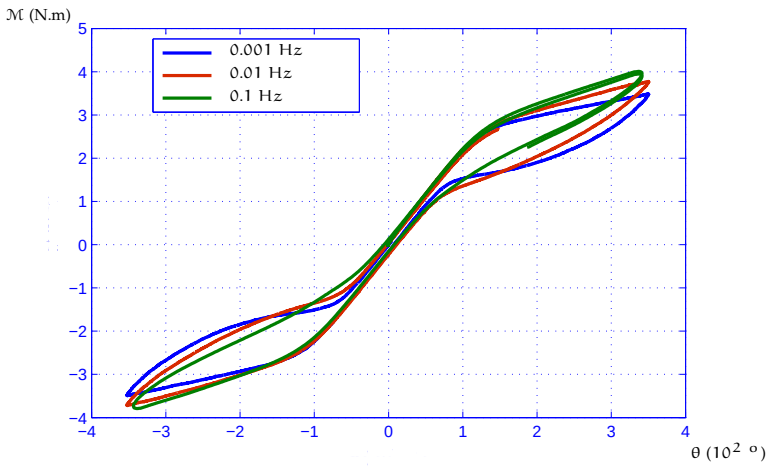

Figure 5.5: *Moment en fonction de l'angle à trois fréquences différentes*

mal de rotation est calculé en fonction de la fréquence de chargement sur le premier mode propre de torsion.

5.2.1 *Equations physiques du problème de torsion*

La modélisation du problème considère une section circulaire S sans gauchissement ($\Phi(z)$=0, où $\Phi(z)$ est la fonction de gauchissement) au cours de la torsion. L'axe principal du cylindre est (Oz) et le repère orthonormé considéré est ($\boldsymbol{e}_r$,$\boldsymbol{e}_\theta$,$\boldsymbol{e}_z$) comme montré sur la figure 5.1. Un déplacement de rotation est imposé à l'extrémité $z = 0$. En z=L, le cylindre est encastré. Finalement, les conditions aux limites du problème sont données en déplacement $\mathbf{u}$ et en force $\mathbf{F}$ dans l'équation suivante :
En

$$\begin{cases} z = 0 : u_r = 0, u_\theta = \theta r, F_z = 0, \\ z = L : u_r = u_\theta = 0, F_z = 0, \\ r = R : \mathbf{F} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{5.1}$$

L'expression de la déformation totale de cisaillement ($\varepsilon_{\theta z}$) en l'absence de gauchissement de la section, est donnée par :

$$\varepsilon_{\theta z} = r\frac{\partial \theta}{\partial z}. \tag{5.2}$$

L'hypothèse des petites perturbations ($\mathcal{HPP}$) permet de considérer que $r\frac{\partial \theta}{\partial z} \ll 1$. Nous pouvons donc partitionner la déformation totale en une déformation élastique et une déformation de transformation dans la direction de cisaillement,

$$\varepsilon_{\theta z} = \varepsilon^{E}_{\theta z} + (z\varepsilon_{ori,\theta z}), \tag{5.3}$$

où $\varepsilon_{ori,\theta z}$ est la déformation d'orientation,

$$\varepsilon_{ori,\theta z} = \sqrt{3}\gamma_{ori}. \tag{5.4}$$

γ_{ori} est la déformation de cisaillement équivalente. Les tenseurs de déformation s'écrivent (Moumni [101]) :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} r \frac{\partial \theta}{\partial z} (\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_\theta), \tag{5.5}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ori} = \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_{ori} (\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_\theta), \tag{5.6}$$

Le tenseur de contrainte a l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{\theta z} (\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_\theta), \tag{5.7}$$

La symétrie de ces tenseurs permet de simplifier les notations en introduisant la contrainte de cisaillement $\tau = \sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z}$ et la déformation de cisaillement $\gamma = 2\varepsilon_{z\theta} = 2\varepsilon_{\theta z}$.
Le modèle tridimensionnel (décrit au chapitre 3) permet d'exprimer le comportement local en cisaillement :

$$\begin{aligned} \tau &= \mu_{eq}(z)(\gamma - z\sqrt{3}\gamma_{ori}) \\ &= 2\mu_{eq}(z)(r\frac{\partial \theta}{\partial z} - z\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{ori}), \end{aligned} \tag{5.8}$$

où le module de cisaillement μ_{eq} est donné par :

$$\mu_{eq}(z) = \left(\frac{1-z}{\mu_A} + \frac{z}{\mu_M} \right)^{-1}, \tag{5.9}$$

μ_A et μ_M sont les modules de cisaillement respectifs de l'austénite et de la martensite.
Le comportement global est alors donné par l'intégration du moment sur l'ensemble de la section S :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int_S r\tau(r) dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \tau(r) dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^R r^2 \tau dr \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\mathcal{R}_{ms}} 2\mu_A r^3 \frac{\partial \theta}{\partial z} dr + \int_{\mathcal{R}_{ms}}^{\mathcal{R}_{mf}} 2\mu_{eq}(z) r^2 \left(r\frac{\partial \theta}{\partial z} - z\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{ori} \right) dr \right) \\ &+ 2\pi \left(\int_{\mathcal{R}_{mf}}^R 2\mu_M r^2 \left(r\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{ori} \right) dr \right). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Comme au chapitre précédent, on fait l'hypothèse selon laquelle l'orientation est complète dès le début de la transformation. La déformation d'orientation a alors pour expression :

$$\gamma_{ori} = \gamma_{max} sgn(\gamma), \tag{5.11}$$

où γ_{max} est la déformation maximale d'orientation.
La force thermodynamique associée à z est donnée en torsion par :

$$\mathcal{A}_z = El_{MA}\tau^2 - C(T) + \sqrt{3}\tau\gamma_{ori} - Gz - \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\gamma_{ori}^2 \tag{5.12}$$

Les critères des transformations de phase directe et inverse en torsion, sont donnés respectivement par :

$$\mathcal{F}_1^{cri} = El_{MA}\tau^2 - C(T) + \sqrt{3}\tau\gamma_{ori} - (G+b)z - a(1-z) - \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\gamma_{ori}^2, \tag{5.13}$$

$$\mathcal{F}_2^{cri} = -El_{MA}\tau^2 + C(T) - \sqrt{3}\tau\gamma_{ori} + (G-b)z - a(1-z) + \left[(\alpha-\beta)z + \frac{\beta}{2}\right]\gamma_{ori}^2, \tag{5.14}$$

Le terme $C(T)$ apparaissant dans les équations (5.13) et (5.14) est la densité d'énergie thermique, qui a pour expression :

$$C(T) = \xi(T - T_0) + \kappa, \tag{5.15}$$

El_{MA}, ξ, T_0, κ, G, b, a, α et β sont des paramètres matériaux.
La présence du couplage thermomécanique dans le comportement représentant des MMF, nécessite la résolution de l'équation de la chaleur :

$$\rho C_P \dot{T} = \mathcal{A}_z \dot{z} + T\xi\dot{z} + h(T_{ex} - T), \tag{5.16}$$

où C_P, T_{ex} et h sont respectivement la cappacité thermique massique du matériau, la température du milieu extérieur et le coefficient des échanges thermiques.
Finalement, le tableau 5.2 regroupe le bilan des équations physiques à résoudre pour le problème du comportement en torsion d'un cylindre en MMF.

Comportement local :	$\tau = 2\mu_{eq}(z)(r\frac{\partial\theta}{\partial z} - z\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{ori})$,
Comportement global :	$\mathcal{M} = 2\pi\left(\int_0^{\mathcal{R}_{ms}} 2\mu_A r^3 \frac{\partial\theta}{\partial z} dr\right)$
	$+2\pi\left(\int_{\mathcal{R}_{ms}}^{\mathcal{R}_{mf}} 2\mu_{eq}(z) r^2 (r\frac{\partial\theta}{\partial z} - z\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{ori}) dr\right)$
	$+2\pi\left(\int_{\mathcal{R}_{mf}}^{R} 2\mu_M r^2 \left(r\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{ori}\right) dr\right)$,
Evolution de z :	$\mathcal{F}_1^{cri} \leqslant 0$, $\dot{z}\mathcal{F}_1^{cri} = 0$ et $\dot{z} > 0$,
	$\mathcal{F}_2^{cri} \leqslant 0$, $\dot{z}\mathcal{F}_2^{cri} = 0$ et $\dot{z} < 0$,
Equation de la chaleur :	$\rho C_P \dot{T} = \mathcal{A}_z \dot{z} + T\xi\dot{z} + h(T_{ex} - T)$.

Table 5.2: *Bilan des équations physiques du problème de torsion*

5.2.2 *Modélisation quasi statique*

On considère que le fil est excité par un déplacement de rotation sinusoidal ($\mathcal{A}\sin(\Omega t)$) en z=0. La modélisation quasi statique suppose que : la masse inertielle attachée au fil, est bloquée durant la sollicitation et la pulsation du forçage Ω est très inférieure à la première pulsation propre du système ω_1 ($\Omega \ll \omega_1$).
L'objet de cette section est l'analyse de cette réponse quasi statique en fonction de la fréquence. La torsion pure permet de considérer que l'angle relatif $\frac{\partial\theta}{\partial z}$ est constant , d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial z} &= \frac{\Delta\theta}{\Delta z},\\ &= \frac{\theta - \theta_0}{L - (-L)},\\ &= \frac{\theta}{2L}.\end{aligned} \tag{5.17}$$

Ce problème admet une solution analytique pour les chargements monotones (Mirzaeifar et al. [100]). Cependant, dans le cas de sollicitations non monotones, la résolution numérique est nécessaire. Les deux prochaines sections présentent les deux approches, analytique, dans le cas monotone et numérique, dans le cas général.

Chargements monotones

Dans le cas des chargements monotones, la solution correspondante peut être obtenue analytiquement en charge. Une simulation de charge est réalisée, avec des paramètres matériaux (tableau 5.3) identifiés dans Morin *et al* [64], afin d'illustrer le comportement en charge. Cependant, en décharge, des difficultés dans le calcul ont poussé à résoudre le problème numérique-

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
E_A	61500 (MPa)	b	6.91 MPa
E_M	24000 MPa	G	4.65 MPa
ν	0.3	β	5500 MPa
α	2750 MPa	$\mathcal{A}^0_{af}$	40 °C
Y	110 MPa	κ	6.89 MPa
ξ	0.29 MPa/°C	h	50 $W\,m^{-2}\,K^{-1}$
ε_{max}	4.0%	R	50 mm
C_P	440 $J\,kg^{-1}\,K^{-1}$	L	100 mm
ρ	6500 $kg\,m^{-3}$	θ_{max}	.22 rd
a	6.89 MPa		

Table 5.3: *Paramètres matériaux pour la solution analytique*

ment. Nous présenterons la charge et la charge-décharge dans les sections suivantes :

Charge

La solution du problème est purement analytique à partir d'un polynôme simple. On considère ainsi que la condition de charge $\mathcal{F}_1^{cri} = 0$ pour la transformation directe, permet d'exprimer la fraction volumique de martensite z à partir de (5.13) :

$$z = \frac{El_{MA}\sigma_{\theta z}^2 + \sqrt{3}\gamma_{ori}\sigma_{\theta z} - C(T) - a - \frac{\beta}{2}\gamma_{ori}^2}{G + b - a + (\alpha - \beta)\gamma_{ori}^2}. \tag{5.18}$$

L'introduction de l'équation (5.18) dans l'équation du comportement (5.8) permet de construire un polynôme de degré trois pour la variable τ :

$$\begin{aligned}
&\frac{El_{MA}^2}{G + b - a + (\alpha - \beta)\gamma_{ori}^2}\tau^3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{El_{MA}\gamma_{ori}}{G + b - a + (\alpha - \beta)\gamma_{ori}^2}\tau^2 \\
&+ \left[El_A - \frac{El_{MA}}{G + b - a + (\alpha - \beta)\gamma_{ori}^2}\left(C(T) + a + \frac{\beta}{2}\gamma_{ori}^2\right)\right. \\
&+ \frac{3}{2}\frac{\gamma_{ori}^2}{G + b - a + (\alpha - \beta)\gamma_{ori}^2}\tau \\
&- \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{C(T) + a + \frac{\beta}{2}\gamma_{ori}^2}{G + b - a + (\alpha - \beta)\gamma_{ori}^2}\gamma_{ori} = r\frac{\theta}{2L}.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Dans l'équation (5.19), le paramètre contrôlé est l'angle θ (au second membre). La solution recherchée τ parmi les trois racines du polynôme doit appartenir à l'intervalle $[\tau_{ms}\ \tau_{mf}]$. Le formalisme des matériaux standards généralisés assure l'unicité de cette solution (Moumni et al. [91]) parce que c'est

la seule racine qui est thermodynamiquement admissible.
En posant z=0, la résolution de (5.19) donne :

$$\tau_{ms} = \frac{-\sqrt{3}\gamma_{ori} + \sqrt{3\gamma_{ori}^2 + 4El_{MA}(C(T) + a + \frac{\beta}{2}\gamma_{ori}^2)}}{2El_{MA}}. \tag{5.20}$$

De même, en posant z=1, on trouve :

$$\tau_{mf} = \frac{-\sqrt{3}\gamma_{ori} + \sqrt{3\gamma_{ori}^2 + 4El_{MA}(C(T) + G + b + \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\gamma_{ori}^2)}}{2El_{MA}}. \tag{5.21}$$

En utilisant $\tau_{ms} = \mu_A \mathcal{R}_{ms}\frac{\theta}{L}$ et $\tau_{mf} = \mu_M \mathcal{R}_{mf}\frac{\theta}{L}$, on trouve l'expression des rayons $\mathcal{R}_{ms}$ et $\mathcal{R}_{mf}$ délimitant les zones du matériau dans différents états de transformation :

$$\mathcal{R}_{ms} = \frac{-\sqrt{3}\gamma_{ori} + \sqrt{3\gamma_{ori}^2 + 4El_{MA}(C(T) + a + \frac{\beta}{2}\gamma_{ori}^2)}}{2\mu_A El_{MA}}\frac{L}{\theta}, \tag{5.22}$$

$$\mathcal{R}_{mf} = \frac{-\sqrt{3}\gamma_{ori} + \sqrt{3\gamma_{ori}^2 + 4El_{MA}(C(T) + G + b + \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)\gamma_{ori}^2)}}{2\mu_M El_{MA}}\frac{L}{\theta}. \tag{5.23}$$

Les données cinématiques et le comportement suivant le rayon de la section sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \text{Déplacement} \quad u(r) = \dfrac{\theta r z}{L}\boldsymbol{e}_\theta, \forall r \in [0, R], & (5.24) \\ \text{Déformation} \quad \varepsilon(r) = \dfrac{\theta r}{2L}(\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_\theta), \forall r \in [0, R], & (5.25) \\ \text{En austénite}\, \boldsymbol{\sigma}(r) = \dfrac{\mu_A \theta r}{L}(\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_\theta), z = 0, & (5.26) \\ \forall r \leqslant \mathcal{R}_{ms}, & (5.27) \\ \text{En martensite}\, \boldsymbol{\sigma}(r) = \left(\dfrac{\mu_M \theta r}{L} - 3\mu_M \gamma_{ori}\right)(\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_\theta), & (5.28) \\ \quad z = 1, \forall r \geqslant \mathcal{R}_{mf}. \end{cases}$$

Pour les rayons entre $\mathcal{R}_{ms}$ et $\mathcal{R}_{mf}$, le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est solution de l'équation (5.19). La figure 5.6 montre une illustration du comportement de torsion en charge : pour un angle maximal imposé de 0.85 rd (figure 5.6 (a)), la transformation de phase est déclenchée et le début du plateau est plus lisse qu'en traction car le comportement en torsion est intégré sur l'ensemble de la structure.

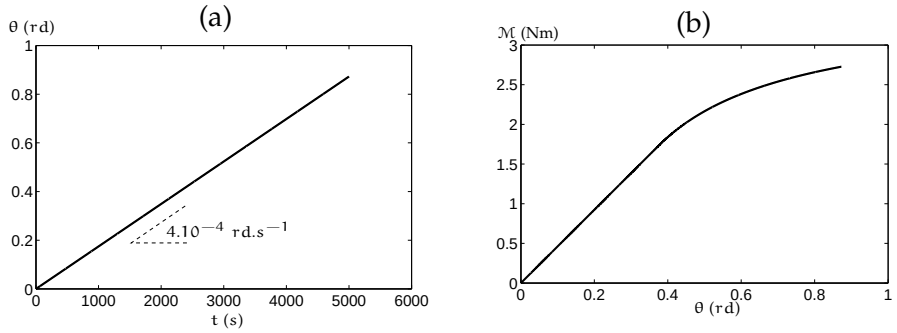

Figure 5.6: *Charge et comportement : (a) Angle imposé (b) Moment en fonction de l'angle*

Charge-décharge

Dans cette section, la solution en charge est toujours analytique mais la décharge est résolue de manière incrémentale. Soit θ_{max} l'angle maximal atteint à la fin de la charge et θ_- l'angle durant la décharge. Le déplacement et la déformation sont donnés, durant la décharge, par les équations suivantes :

$$\mathbf{u}(r) = \frac{rz(\theta_{max} - \theta_-)}{L}\boldsymbol{e}_\theta,\ \forall r \in [0\,,\,R]\,, \tag{5.29}$$

$$\varepsilon(r) = \frac{r(\theta_{max} - \theta_-)}{2L}(\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{e}_\theta),\ \forall r \in [0\,,\,R]\,. \tag{5.30}$$

Cependant, la valeur maximale z_{max} de la fraction volumique obtenue à la fin de la charge, ne permet pas d'obtenir une valeur de la contrainte τ_- qui vérifie $\mathcal{F}_2^{cri} = 0$. Le comportement étant élastique avant le déclenchement de la transformation inverse, τ_- est La contrainte et est définie par :

$$\tau_- = \tau_{max} - \mu_{eq}(z_{max})\gamma_-. \tag{5.31}$$

Cependant, la fraction volumique restant constante, on continue la décharge jusqu'à atteindre un niveau de chargement où $\mathcal{F}_2^{cri}(\tau, z_{max}) = 0$: à partir de ce niveau, la fraction volumique z commence à décroître. Une simulation, avec les mêmes paramètres matériaux que dans le tableau 5.3, est montrée sur la figure 5.7. Un exemple de résultat de comportement global (moment en fonction de l'angle) est donné dans la figure 5.7 (b), pour des paramètres matériaux donnés dans le tableau 5.3 et pour un chargement monotone (figure 5.6 (a)). La zone I sur la figure 5.6 (a), correspondant à la charge, est résolue analytiquement. La décharge dans la zone II est résolue de façon incrémentale.

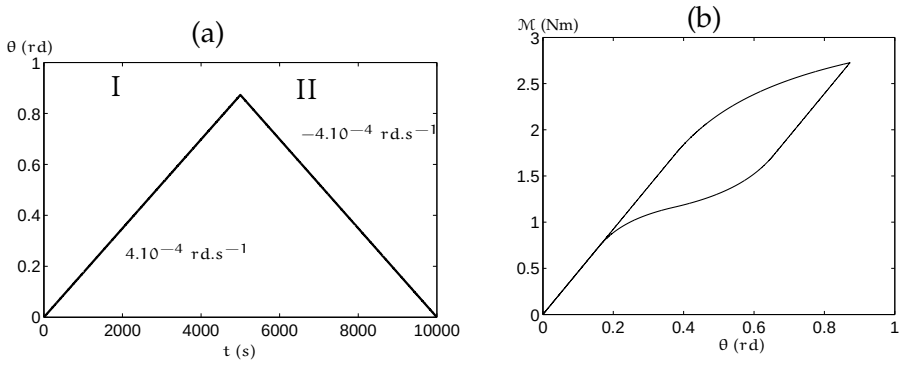

Figure 5.7: *Charge-décharge et comportement : (a) Angle imposé (b) Moment en fonction de l'angle*

Chargements harmoniques

Dans les expériences que la présente contribution cherche à reproduire, le chargement étant généralement sinusoidal, une résolution du problème de torsion par une intégration numérique est nécessaire. On note que, dans cette section et dans la perspective de comparaison, les paramètres matériaux sont directement identifiés à partir de données expérimentales et l'unité de l'angle est le degré (°) au lieu du radian (rd). Le déplacement de rotation dû à la torsion étant une fonction du rayon et de l'angle, l'expression du déplacement de début (resp. de fin) de transformation est donnée soit par $u_{ms}=\mathcal{R}_{ms}\theta$ (resp. $u_{mf}=\mathcal{R}_{mf}\theta$) ou soit par $u_{ms}=R\theta_{ms}$ (resp. $u_{mf}=R\theta_{mf}$). θ_{ms} (resp. θ_{mf}) est l'angle de début (resp. de fin) de transformation de phase. L'introduction de ces expressions de déplacements seuils de changement de phase, permet de définir les rayons seuils $\mathcal{R}_{ms}$ et $\mathcal{R}_{mf}$ de façon plus simple, par :

$$\mathcal{R}_{ms} = \frac{R\theta_{ms}}{\theta}, \tag{5.32}$$

$$\mathcal{R}_{mf} = \frac{R\theta_{mf}}{\theta}. \tag{5.33}$$

Le tableau 5.4 donne les paramètres matériaux identifiés pour la résolution incrémentale du problème. La figure 5.8 (a) montre le chargement imposé d'amplitude A=350° et de fréquence $\Omega = 1.10^{-5}$Hz. Le comportement global ($\mathcal{M}$ *vs.* θ) est donné dans la figure 5.8 (b). Le comportement en torsion montre un plateau de transformation plus raidissant qu'en traction. La figure 5.9 (a) montre la répartition de la fraction volumique z en fonction du rayon de la section à des instants donnés de la charge : le front de la transformation de phase commence au bord (r=R) et se propage à l'intérieur jusqu'à atteindre le rayon de changement de phase initial. La figure

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
E_A	5000 (MPa)	b	15.3 MPa
E_M	5000 MPa	G	23.6 MPa
ν	0.3	β	31.5 MPa
α	31.5 MPa	$\mathcal{A}_f^0$	40 °C
Y	110 MPa	κ	12.7 MPa
ξ	1.62 MPa/°C	h	50 $W\,m^{-2}\,K^{-1}$
γ_{max}	7.0%	R	1 mm
C_P	440 $J\,kg^{-1}\,K^{-1}$	L	100 mm
ρ	6500 $kg\,m^{-3}$	a	13.9 MPa

Table 5.4: *Paramètres matériaux pour la résolution incrémentale*

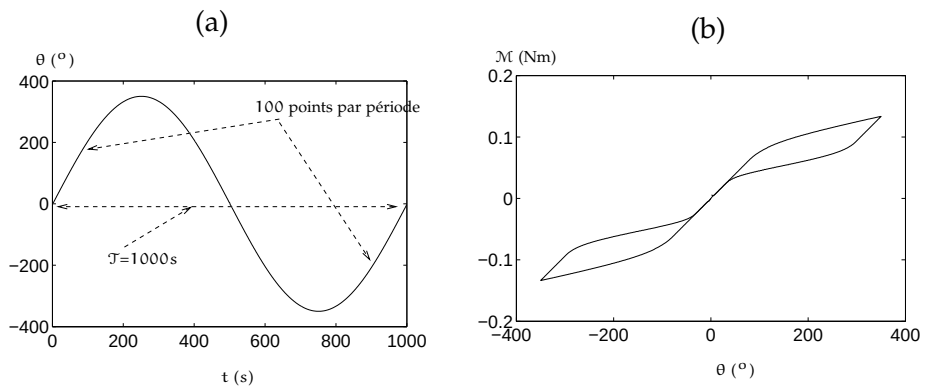

Figure 5.8: *Chargement et comportement : (a) Angle imposé (b) Moment en fonction de l'angle*

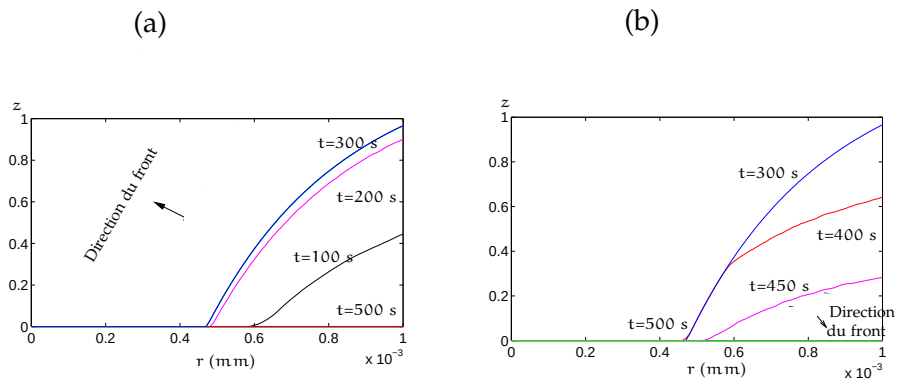

Figure 5.9: *(a) z en fonction du rayon de la section à plusieurs instants de chargement (b) z en fonction du rayon de la section à plusieurs instants de décharge*

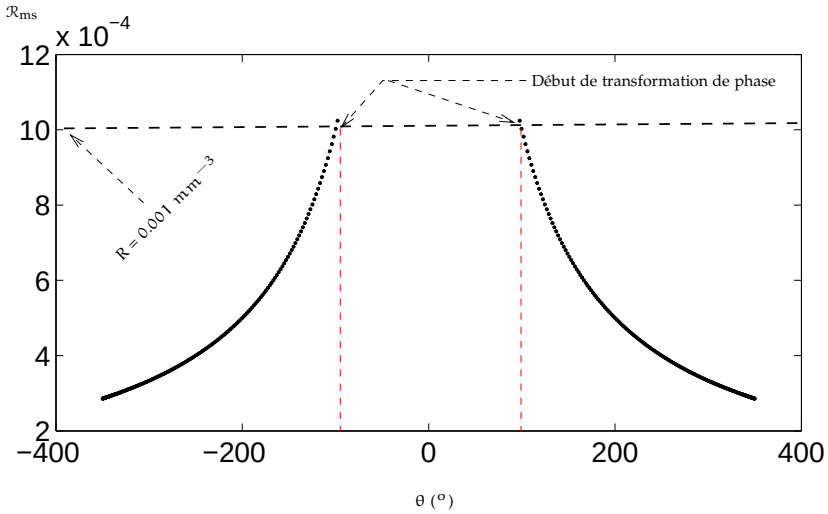

Figure 5.10: *Evolution du rayon $\mathcal{R}_{ms}$ en fonction de l'angle*

5.9 (b) montre une évolution du front de changement de phase dans le sens contraire au cours de la décharge. On note que la valeur de z est maximale à l'instant ($t = 300s$) qui correspond au déplacement maximal. Les évolutions des rayons $\mathcal{R}_{ms}$ et $\mathcal{R}_{mf}$ en fonction de l'angle θ sont données respectivement par les figures 5.10 et 5.11. Au début de la transformation de phase, les rayons seuils décroissent en $\frac{1}{\theta}$ et saturent à la fin.

L'introduction du couplage thermomécanique permet de calculer la variation de la température durant la torsion. Dans ce cas, le problème est résolu de manière entièrement incrémentale. De manière analogue que pour z, le front des ondes thermiques commence de l'extérieur et se propage vers

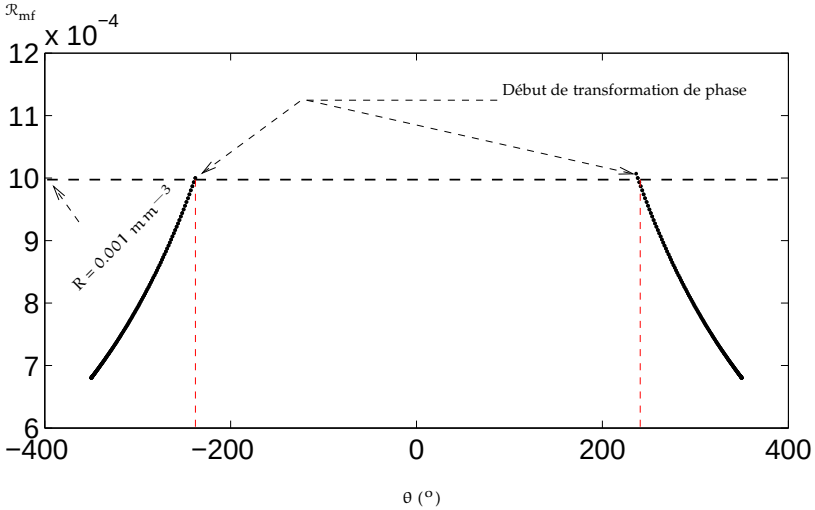

Figure 5.11: *Evolution du rayon $\mathcal{R}_{mf}$ en fonction de l'angle*

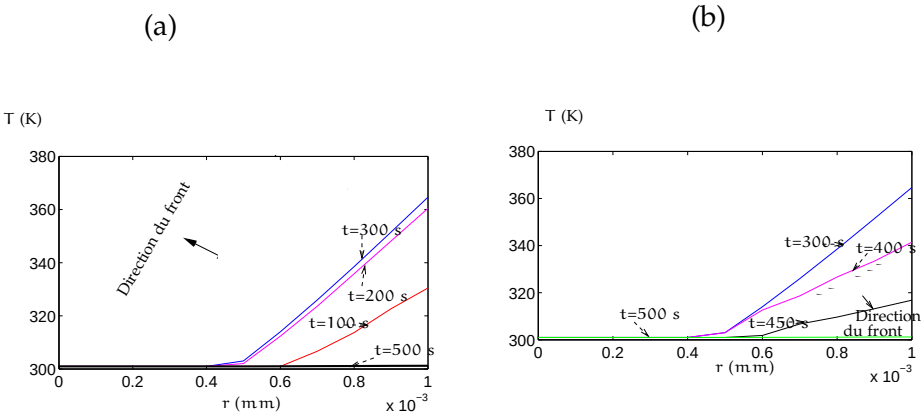

Figure 5.12: *Evolution de la température : (a)* T *en fonction du rayon de la section à plusieurs instants de chargement (b)* T *en fonction du rayon de la section à plusieurs instants de décharge*

l'intérieur de la section en charge (figure 5.12 (a)) : la température est plus intense à l'instant t=300s et aux bords de la section car c'est là où la chaleur produite est la plus importante. Le sens de propagation est inversé en décharge comme montré sur la figure 5.12 (b).

La figure 5.13 (a) montre l'évolution de la température en fonction du temps pour une amplitude θ_{max}=350 ° et une fréquence Ω=3.10^{-4}. La figure 5.13 (b) montre l'évolution de la température en fonction de l'angle

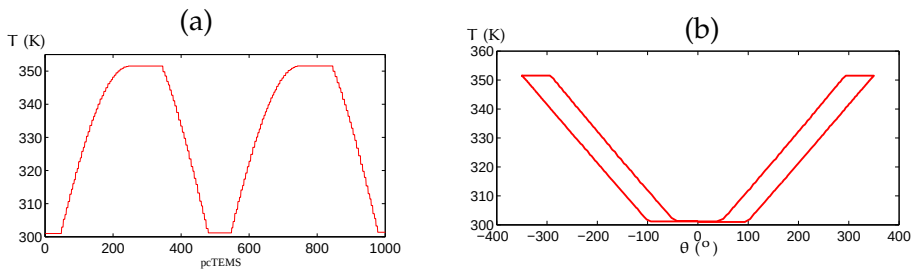

Figure 5.13: *Evolution de la température : (a)* T *en fonction du temps au rayon* $r = R$ *(b)* T *moyennée sur la section en fonction de l'angle* θ

de torsion : on voit l'existence de boucles d'hystérésis thermiques dans les deux sens de rotation.

5.2.3 *Modélisation dynamique*

Le problème que nous cherchons à résoudre dans cette section, est l'analyse du mouvement d'un fil pseudo-élastique en MMF, soumis à un chargement dynamique de torsion. Le modèle dynamique est un pendule de torsion comme montré sur la figure 5.3. Le problème étant tridimensionnel, nous procédons par une décomposition modale de la stucture. Cependant, nous nous limiterons à une projection du problème non linéaire sur les modes normaux linéaires de torsion pour des raisons de simplification du modèle.

Les prochaines sections présentent donc la détermination des modes propres linéaires du système {Fil (matériau élastique)+Masse} en vibrations libres et la résolution du problème où le matériau est en MMF, projeté sur le premier mode.

Décomposition modale

Une recherche des modes normaux linéaires du système {Fil + Masse} est présentée dans cette section. Les vibrations libres du fil, encastré à l'extrémité z=0 et attaché à une masse M à z=L, sont régies par l'équation de la dynamique (Meirovitch [102]) et les conditions aux limites suivantes :

$$\mu \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial z^2} = \rho_f \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial t^2}, \quad \forall z \in [0\,,\,L]\ ,\ \forall t \tag{5.34}$$

$$\begin{cases} \theta(0,t) = 0 \\ \mu J_f \dfrac{\partial \theta(L,t)}{\partial z} = -I_M \dfrac{\partial^2 \theta(L,t)}{\partial t^2}. \end{cases} \tag{5.35}$$

La présente contribution considère le cas où un angle $\alpha_c(t)$ est imposé à l'extrémité z= 0 du fil. L'angle de torsion total $\theta(z,t)$ est décomposé en sa

partie imposée par le forçage au bord, $\alpha_c(t)$, et l'angle relatif $\tilde{\theta}(z,t)$ qui devient la nouvelle variable principale du problème,

$$\theta(z,t) = \tilde{\theta}(z,t) + \alpha_c(t). \tag{5.36}$$

Les équations du problème, pour $\tilde{\theta}(z,t)$ s'écrivent alors,

$$\rho\frac{\partial^2\tilde{\theta}(z,t)}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial^2\tilde{\theta}(z,t)}{\partial z^2} = -\rho\frac{\partial^2\alpha_c(t)}{\partial t^2}, \tag{5.37}$$

$$\begin{cases} \tilde{\theta}(0,t) = 0 \ (\theta(0,t) = \alpha_c(t)) \\ \mu J_f\dfrac{\partial\tilde{\theta}(L,t)}{\partial z} = -I_M\dfrac{\partial^2\tilde{\theta}(L,t)}{\partial t^2} - I_M\dfrac{\partial^2\alpha_c(t)}{\partial t^2}. \end{cases} \tag{5.38}$$

Les équations des vibrations libres pour le problème en angle relatif $\tilde{\theta}(z,t)$ sont données en posant α_c=0 dans les équations (5.37) et (5.38).
Cherchons des solutions à ce système d'équations sous une forme séparant l'espace et le temps (Olivier Doaré et Cyril Touzé [103]), dont l'évolution temporelle est harmonique,

$$\tilde{\theta}(z,t) = \Phi(z).\exp^{i\omega t}, \tag{5.39}$$

les dérivées en temps et en espace sont alors de la forme :

$$\ddot{\tilde{\theta}} = -\omega^2\Phi(z).\exp^{i\omega t}, \tag{5.40}$$

$$\tilde{\theta}^{''} = \Phi^{''}.\exp^{i\omega t}, \tag{5.41}$$

où $()^{''}$ dénote la dérivée seconde par rapport à z. L'évolution en espace des modes propres de torsion est donnée par :

$$\Phi^{''}(z) = -\frac{\omega^2}{c^2}\Phi(z), \tag{5.42}$$

la solution générale est fournie par :

$$\Phi(z) = A\cos(\frac{\omega}{c}z) + B\sin(\frac{\omega}{c}z). \tag{5.43}$$

La première équation des conditions aux limites dans (5.38) impose A=0. La forme finale des modes propres est alors donnée par :

$$\Phi(z) = B\sin(\frac{\omega}{c}z). \tag{5.44}$$

La condition aux limites en z=L permet d'établir l'équation caractéristique que satisfont les pulsations propres $\{\omega_i\}$ du système :

$$\tan(\frac{\omega}{c}L).\frac{\omega}{c}L = \frac{\rho J_f L}{I_M}. \tag{5.45}$$

Les solutions correspondent au nombre infini de modes propres de torsion du système étudié. En effet, la forme d'un mode n est donnée par :

$$\Phi_n(z) = B_n \sin(\frac{\omega_n}{c}z) \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{5.46}$$

On définit une normalisation des modes :

$$\int_0^L \Phi_n^2 dz = B_n^2 \int_0^L \sin^2(\frac{\omega_n}{c}z) dz = 1, \tag{5.47}$$

On obtient ainsi la constante B_n :

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{-1}{2}\left[\frac{c}{\omega_n}\sin(\frac{\omega_n}{c}L)\cos(\frac{\omega_n}{c}L)\right] + \frac{L}{2}}}. \tag{5.48}$$

La définition de la constante B_n permet d'écrire la forme finale du mode n :

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{-1}{2}\left[\frac{c}{\omega_n}\sin(\frac{\omega_n}{c}L)\cos(\frac{\omega_n}{c}L)\right] + \frac{L}{2}}} \sin(\frac{\omega_n}{c}z). \tag{5.49}$$

La notion d'orthogonalité de deux modes propres n et m est relative à la masse et à la rigidité de la structure. La définition de deux formes linéaires (produits scalaires) relatives respectivement à la masse ($\langle \Phi_n | \Phi_m \rangle_M$) et à la rigidité ($\langle \Phi_n | \Phi_m \rangle_K$), est nécessaire et est l'objet de cette section.
Les développements dans la section 5.2.3 permettent d'exprimer l'angle $\tilde{\theta}(z,t)$ par la combinaison des contributions des différents modes dans l'équation (5.50). L'introduction de cette expression dans l'équation de la dynamique permet d'obtenir (5.51).

$$\tilde{\theta}(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\Phi_n(z), \tag{5.50}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n \rho \Phi_n(z) - \sum_{n=1}^{\infty} q_n \mu \Phi_n^{''}(z) = -\rho \frac{\partial^2 \alpha_c}{\partial t^2}. \tag{5.51}$$

La multiplication de l'équation (5.51) par Φ_m et l'intégration sur l'ensemble de la longueur du fil conduisent à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n \int_0^L \rho \Phi_n(z)\Phi_m(z) dz - \sum_{n=1}^{\infty} q_n \int_0^L \mu \Phi_n^{''}(z)\Phi_m(z) dz = \int_0^L -\rho \frac{\partial^2 \alpha_c}{\partial t^2} \Phi_m(z) dz. \tag{5.52}$$

Si on fait la même chose dans (5.42), on obtient :

$$\int_0^L \mu\Phi_n^{''}(z)\Phi_m(z)dz = -\omega_n^2 \int_0^L \rho\Phi_n(z)\Phi_m(z)dz, \tag{5.53}$$

L'intégration par partie permet d'écrire

$$\int_0^L \mu\Phi_n^{''}(z)\Phi_m(z)dz = -\int_0^L \mu\Phi_n^{'}(z)\Phi_m^{'}(z)dz + \left[\mu\Phi_n\Phi_m^{'}\right]_0^L. \tag{5.54}$$

L'équation (5.53) se reécrit pour les deux modes n et m respectivement :

$$\omega_n^2 \int_0^L \rho\Phi_n(z)\Phi_m(z)dz = \int_0^L \mu\Phi_n^{'}(z)\Phi_m^{'}(z)dz - \left[\mu\Phi_n\Phi_m^{'}\right]_0^L, \tag{5.55}$$

$$\omega_m^2 \int_0^L \rho\Phi_m(z)\Phi_n(z)dz = \int_0^L \mu\Phi_m^{'}(z)\Phi_n^{'}(z)dz - \left[\mu\Phi_m\Phi_n^{'}\right]_0^L. \tag{5.56}$$

La différence entre les deux équations (5.55) et (5.56) donne

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2)\mathcal{P}_M(n,m) = \left[\mu\Phi_n\Phi_m^{'} - \mu\Phi_m\Phi_n^{'}\right]_0^L, \tag{5.57}$$

où

$$\mathcal{P}_M(n,m) = \int_0^L \rho\Phi_n(z)\Phi_m(z)dz. \tag{5.58}$$

De la même manière, la différence entre les produits de (5.55) par ω_m^2 et de (5.56) par ω_n^2 permet d'écrire

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2)\mathcal{P}_K(n,m) = \left[\mu\omega_m^2\Phi_n\Phi_m^{'} - \mu\omega_n^2\Phi_m\Phi_n^{'}\right]_0^L, \tag{5.59}$$

où

$$\mathcal{P}_K(n,m) = \int_0^L \mu\Phi_n^{'}(z)\Phi_m^{'}(z)dz. \tag{5.60}$$

Les conditions aux limites permettent d'écrire la forme $\Phi_n(z)$ du mode n aux extrémités $z = 0$ et $z = L$:

$$\Phi_n(0) = 0, \tag{5.61}$$

$$\mu J_f\Phi_n^{'}(L) = I_M\Phi_n(L)\omega_n^2. \tag{5.62}$$

Ainsi,

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2)\mathcal{P}_K(n,m) = \omega_m^2\Phi_m(L)\frac{I_M}{J_f}\Phi_n(L)\omega_n^2 - \omega_n^2\Phi_n(L)\frac{I_M}{J_f}\Phi_m(L)\omega_m^2,$$

$$(5.63)$$

ne peut être satisfaite que si

$$\mathcal{P}_K(n,m) = 0. \tag{5.64}$$

De même, la vérification de

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2)\mathcal{P}_M(n,m) = \Phi_n(L)\frac{I_M}{J_f}\Phi_m(L)\omega_m^2 - \Phi_m(L)\frac{I_M}{J_f}\Phi_n(L)\omega_n^2, \tag{5.65}$$

nécessite

$$\mathcal{P}_M(n,m) = -\Phi_n(L)\frac{I_M}{J_f}\Phi_m(L). \tag{5.66}$$

Les développements précédents permettent de définir les produits scalaires
$\langle\Phi_n|\Phi_m\rangle_M$ et $\langle\Phi_n|\Phi_m\rangle_K$ respectivement par :

$$\langle\Phi_n|\Phi_m\rangle_M = \int_0^L \rho\Phi_n\Phi_m dz + \Phi_n(L)\frac{I_M}{J_f}\Phi_m(L) = m_n\delta_{n,m}, \tag{5.67}$$

$$\langle\Phi_n|\Phi_m\rangle_K = \int_0^L \mu\Phi_n^{'}\Phi_m^{'} dz = k_n\delta_{n,m}, \tag{5.68}$$

où m_n, k_n et $\delta_{n,m}$ sont respectivement la masse modale du mode n, la rigidité modale du mode n et le symbole de Krönecker. Ils ont pour expression :

$$m_n = -\frac{I_M}{J_f}\Phi_n^2(L) + \frac{I_M}{J_f}\Phi_n^2(L), \tag{5.69}$$

$$k_n = \omega_n^2 m_n, \tag{5.70}$$

$$\delta \begin{cases} {}_{m,n} = 1 \text{ Si } m = n \\ 0 \text{ Si } m \neq n. \end{cases} \tag{5.71}$$

L'introduction de ces nouvelles définitions dans l'équation de la dynamique conduit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n \left[-\Phi_n(L)\frac{I_M}{J_f}\Phi_m(L) + m_n\delta_{n,m}\right] \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} q_n \left[k_n\delta_{n,m} - \omega_n^2\Phi_n(L)\frac{I_M}{J_f}\Phi_m(L)\right] = \int_0^L -\rho\frac{\partial^2\alpha_c}{\partial t^2}\Phi_m(z)dz. \end{aligned} \tag{5.72}$$

Au niveau du mode n, l'équation (5.72) devient :

$$m_n \ddot{q}_n + k_n q_n - \frac{I_M}{J_f} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_n \Phi_n^2(L) + q_n \omega_n^2 \Phi_n^2(L) \right] = \int_0^L -\rho \frac{\partial^2 \alpha_c}{\partial t^2} \Phi_n(z) dz. \tag{5.73}$$

En utilisant la condition aux limites en z=L,

$$\mu J_f \sum_{n=1}^{\infty} q_n \Phi_n^{'}(L) = -I_M \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n \Phi_n(L) - I_M \frac{\partial^2 \alpha_c(t)}{\partial t^2}, \tag{5.74}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_n \Phi_n^2(L) + q_n \omega_n^2 \Phi_n^2(L) \right] = -\frac{\partial^2 \alpha_c(t)}{\partial t^2} \Phi_n(L), \tag{5.75}$$

l'équation de la dynamique sur le mode n peut finalement s'écrire :

$$m_n \ddot{q}_n + k_n q_n = \frac{\partial^2 \alpha_c}{\partial t^2} \left[-\int_0^L \rho \Phi_n(z) dz - \frac{I_M}{J_f} \Phi_n(L) \right]. \tag{5.76}$$

La considération d'un amortissement visqueux et linéaire de coefficient C, au niveau du mode n, permet d'écrire, après la réduction de C à $\zeta = \frac{C}{C_{cr}} = \frac{C}{2 m_n \omega_n}$,

$$\ddot{q}_n + 2\zeta \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\frac{1}{m_n} \frac{\partial^2 \alpha_c}{\partial t^2} \left[\int_0^L \rho \Phi_n(z) dz + \frac{I_M}{J_f} \Phi_n(L) \right]. \tag{5.77}$$

Dynamique projetée sur le premier mode

Une hypothèse de masse attachée très grande, permet de se raméner au premier mode dans l'analyse du problème physique. Contrairement aux modes $(\Phi_n)_{n>1}$, le premier mode est par conséquent entraîné vers les basses fréquences et le seul considéré dans la gamme de fréquences de notre étude. De plus, le niveau de masse (I_M grand) permet de justifier l'hypothèse de linéarité du premier mode car $\frac{\omega_1 L}{c} \ll 1$ (où ω_1 est la pulsation du premier mode et c est la célérité des ondes élastiques dans le fil, $c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_f}}$) et par conséquent de simplifier $\Phi_1(z)$ par :

$$\sin(\frac{\omega_1 L}{c}) \simeq \frac{\omega_1 L}{c}, \tag{5.78}$$

$$\cos(\frac{\omega_1 L}{c}) \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1 L}{c} \right)^2 \tag{5.79}$$

et

$$\sin(\frac{\omega_1 z}{c}) \simeq \frac{\omega_1 z}{c}, \tag{5.80}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Phi_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{-1}{2}\left[\frac{c}{\omega_1}\sin(\frac{\omega_1}{c}L)\cos(\frac{\omega_1}{c}L)\right]+\frac{L}{2}}}\sin(\frac{\omega_1}{c}z) \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{\frac{-1}{2}\left[\frac{c}{\omega_1}\left(\frac{\omega_1 L}{c}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_1 L}{c}\right)^2\right)\right)\right]+\frac{L}{2}}}(\frac{\omega_1}{c}z) \\
&= \frac{2}{L\sqrt{L}}z.
\end{aligned} \tag{5.81}$$

On pose

$$D = \frac{2}{L\sqrt{L}}. \tag{5.82}$$

Désormais, la variable inconnue est prise égale à :

$$\tilde{\theta}(z,t) = \Phi_1(z)q_1(t). \tag{5.83}$$

En section 5.2, nous avons montré que le comportement local en torsion se résumait via la relation suivante entre la contrainte de torsion τ et la déformation de cisaillement $\varepsilon_{\theta z}$:

$$\tau = 2\mu_{eq}(z)\left(\varepsilon_{\theta z} - \frac{\sqrt{3}z\gamma_{ori}}{2}\right), \tag{5.84}$$

où

$$\mu_{eq}(z) = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{1-z}{E_A}+\frac{z}{E_M}\right)^{-1}. \tag{5.85}$$

La déformation $\varepsilon_{\theta z}$ est exprimée en fonction de l'angle par,

$$\varepsilon_{\theta z} = r\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial z} \quad = r\Phi^{'}(z).q_1(t). \tag{5.86}$$

La linéarité par rapport à z de l'angle $\tilde{\theta}$ permet d'écrire :

$$\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial z} = D.q_1(t) \tag{5.87}$$

Forme du premier mode :	$\Phi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{-1}{2}\left[\frac{c}{\omega_n}\sin(\frac{\omega_1}{c}L)\cos(\frac{\omega_1}{c}L)\right]+\frac{L}{2}}}(\frac{\omega_1}{c}z)$,
Déformation :	$\varepsilon_{\theta z} = r\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial z}$,
Comportement local :	$\tau = 2\mu_{eq}(z)\left(\varepsilon_{\theta z} - \frac{\sqrt{3}z\gamma_{ori}}{2}\right)$,
Comportement global :	$\mathcal{M} = \int_0^{2\pi}\int_0^R 2\mu_{eq}(z)\left(r.D.q_1(t) - \frac{\sqrt{3}z\gamma_{ori}}{2}\right)r^2 dr d\theta$,
Equation de la dynamique :	$\mathcal{M}(q_1) + I_M.D.L.\ddot{q}_1 + I_M\frac{\partial^2\alpha_c}{\partial t^2} = 0$,
Evolution de z :	$\mathcal{F}_1^{cri} \leqslant 0$, $\dot{z}\mathcal{F}_1^{cri} = 0$ et $\dot{z} > 0$,
	$\mathcal{F}_2^{cri} \leqslant 0$, $\dot{z}\mathcal{F}_2^{cri} = 0$ et $\dot{z} < 0$,
Equation de la chaleur :	$\rho C_P\dot{T} = \mathcal{A}_z\dot{z} + T\xi\dot{z} + h(T - T_0)$.

Table 5.5: *Bilan des équations physiques du problème de torsion*

L'expression du moment $\mathcal{M}$ sur le premier mode de torsion, est alors donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{M} = \int_0^{2\pi}\int_0^R 2\mu_{eq}(z)\left(r.D.q_1(t) - \frac{\sqrt{3}z\gamma_{ori}}{2}\right)r^2 dr d\theta. \tag{5.88}$$

La dépendance linéaire du premier mode par rapport à z permet de résoudre l'équation de la dynamique en torsion à z=L pour simplifier (équation (5.89)).

$$\begin{aligned} &2\pi\int_0^R 2\mu_{eq}(z)\left(r.D.q_1(t) - \frac{\sqrt{3}z\gamma_{ori}}{2}\right)r^2 dr \\ &+ I_M.D.L\ddot{q}_1(t) + I_M\frac{\partial^2\alpha_c}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \tag{5.89}$$

La sollicitation α_c est donnée par l'équation (5.90).

$$\alpha_c(t) = \mathcal{A}\sin(\Omega t) \tag{5.90}$$

Le tableau 5.5 donne le bilan des équations physiques à résoudre sur le premier mode propre pour le pendule de torsion constitué d'un fil en MMF. La section suivante présente les méthodes numériques utilisées pour résoudre le problème ainsi posé.

Discrétisation de l'équation (5.89)

L'angle à l'instant t_{n+1} est donné par,

$$q_{1,n+1}^{\mathcal{T}} = q_{1,n} + \dot{q}_{1,n}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2p_2)\ddot{q}_{1,n}. \tag{5.91}$$

La vitesse de l'angle à l'instant t_{n+1} est prédite par,

$$\dot{q}^{\mathcal{T}}_{1,n+1} = \dot{q}_{1,n} + (1 - p_1)\Delta t \ddot{q}_{1,n}. \tag{5.92}$$

L'incrément de l'accélération est supposé nul à l'instant t_{n+1}

$$\ddot{q}^{\mathcal{T}}_{1,n+1} = \ddot{q}_{1,n}. \tag{5.93}$$

Le résidu $\mathcal{R}t$ en torsion est donné à l'instant t_{n+1} par l'équation (5.94).

$$\begin{aligned}\mathcal{R}t_{n+1} =& 2\pi \int_0^R 2\mu_{eq}(z) \left(r.D.q_{1,n+1} - \frac{\sqrt{3} z_{n+1} \gamma_{ori,n+1}}{2} \right) r^2 dr \\ &+ I_M.D.L.\ddot{q}_{1,n+1} - I_M \omega_1^2 \mathcal{A} \sin(\omega_1 t_{n+1}).\end{aligned} \tag{5.94}$$

Discrétisation de l'équation de la chaleur

L'expression du comportement est donnée par l'équation (5.95).

$$\tau_{n+1} = 2\mu_{eq}(z_{n+1}) \left(r.D.q_{1,n+1} - \frac{\sqrt{3} z_{n+1} \gamma_{ori,n+1}}{2} \right), \tag{5.95}$$

où

$$\mu_{eq}(z_{n+1}) = \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{1 - z_{n+1}}{E_A} + \frac{z_{n+1}}{E_M} \right)^{-1}. \tag{5.96}$$

La densité de l'énergie thermique à l'instant t_{n+1} est donnée par l'équation (5.97).

$$C(T_{n+1}) = \xi(T_{n+1} - T_0) + \kappa. \tag{5.97}$$

La force thermodynamique associée à la fraction volumique z en torsion, est donnée à l'instant t_{n+1} par l'équation (5.98).

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{z,n+1} =& El_{MA} \tau_{n+1}^2 - C(T_{n+1}) + \sqrt{3} \tau_{n+1} \gamma_{ori,n+1} - G z_{n+1} \\ &- \left[(\alpha - \beta) z_{n+1} + \frac{\beta}{2}) \right] \gamma_{ori,n+1}^2.\end{aligned} \tag{5.98}$$

L'équation de la chaleur donne la variation de la température à l'instant t_{n+1} dans l'équation (5.99), par un schéma Euler implicite.

$$T_{n+1} = \frac{T_n + \frac{h}{\rho C_P} T_{ex} dt + \left(\frac{\mathcal{A}_{z,n+1}}{\rho C_P} \right) (z_{n+1} - z_n)}{1 + \frac{h}{\rho C_P} dt - \left(\frac{\xi}{\rho C_P} \right) (z_{n+1} - z_n)}. \tag{5.99}$$

Les critères (direct et inverse) à l'instant t_{n+1}

Le critère de la transformation directe en torsion est donné à l'instant t_{n+1} par l'équation (5.100).

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{cri}_{1,n+1} &= El_{MA}\tau^2_{n+1} - C(T_{n+1}) + \sqrt{3}\tau_{n+1}\gamma_{ori,n+1} - (G+b)z_{n+1} - a(1-z_{n+1}) \\ &\quad - \left[(\alpha-\beta)z_{n+1} + \frac{\beta}{2})\right]\gamma^2_{ori,n+1}\end{aligned} \tag{5.100}$$

Le critère de la transformation inverse est donné par l'équation (5.101).

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{cri}_{2,n+1} &= -El_{MA}\tau^2_{n+1} + C(T_{n+1}) - \sqrt{3}\tau_{n+1}\gamma_{ori,n+1} + (G-b)z_{n+1} - a(1-z_{n+1}) \\ &\quad + \left[(\alpha-\beta)z_{n+1} + \frac{\beta}{2})\right]\gamma^2_{ori,n+1}\end{aligned} \tag{5.101}$$

La résolution des critères non linéaires ($\mathcal{F}^{cri}_{1,n+1} = 0$ et $\mathcal{F}^{cri}_{2,n+1} = 0$) est effectuée par des itérations de type Newton.
Les principales étapes de l'algorithme de résolution du problème de torsion sur le premier mode propre, est détaillé dans le tableau 5.6.

Nom : algorithme_modal
Données : Paramètres matériaux, $q_{1,n}$, $\dot{q}_{1,n}$, $\ddot{q}_{1,n}$,z_n, $\gamma_{ori,n}$, τ_n, $\tilde{\theta}_n$, T_n, $\mathcal{A}$, t_{n+1}, $\Delta\tau$, Ω, ω_1, Φ_1,
paramètres géométriques (R, L), paramètres de Newmark (p_1 et p_2),
tolérances : ϵ_{cr}, ϵ_{eq} et ϵ_{ch}
Sorties : $q_{1,n+1}$, $\dot{q}_{1,n+1}$,$\ddot{q}_{1,n+1}$,z_{n+1},$\gamma_{ori,n+1}$, $\tilde{\theta}_{n+1}$, T_{n+1}, $\mathcal{R}_{ms}$, $\mathcal{R}_{mf}$
Initialisation : $k = 0$, z^0_{n+1}, T^0_{n+1}, $\gamma^0_{ori,n+1}$,
1. Pour tout rayon $r \in [0\ R]$
2. Simulation de la réponse dynamique isotherme
a) Prédiction de Newmark avec les équations (5.91), (5.92) et (5.93), où $q_{1,n}$, $q^{\mathcal{T}}_{1,n+1}$, $\dot{q}_{1,n}$, $\dot{q}^{\mathcal{T}}_{1,n+1}$, $\ddot{q}_{1,n}$, $\ddot{q}^{\mathcal{T}}_{1,n+1}$, z_n, $z^{\mathcal{T}}_{n+1}$, $\tilde{\theta}_n$, $\tilde{\theta}_{n+1}$, T_n et T_{n+1} deviennent $q^{(k)}_{1,n}$, $q^{(k+1)}_{1,n+1}$, $\dot{q}^{(k)}_{1,n}$, $\dot{q}^{(k+1)}_{1,n+1}$, $\ddot{q}^{(k)}_{1,n}$, $\ddot{q}^{(k+1)}_{1,n+1}$, $z^{(k)}_n$, $z^{(k+1)}_{n+1}$, $\tilde{\theta}^{(k)}_n$, $\tilde{\theta}^{(k+1)}_{n+1}$, $T^{(k)}_n$ et $T^{(k+1)}_{n+1}$
b) Détermination de l'incrément de la variable modale
$\delta q^{(k+1)}_{1,n+1} = \frac{-\mathcal{R}_{n+1}}{\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \delta q_1}\right)^{(k)}_{n+1}}$
c) Actualisation des variables cinématiques ($q^{(k+1)}_{1,n+1}$, $\dot{q}^{(k+1)}_{1,n+1}$ et $\ddot{q}^{(k+1)}_{1,n+1}$), de l'angle $\tilde{\theta}^{(k+1)}_{n+1}$, des rayons seuils $\mathcal{R}_{ms}$ et $\mathcal{R}_{mf}$ et de la contrainte de cisaillement $\tau^{(k+1)}_{n+1}$
d) Prédiction thermoélastique et le retour radial
- Déterminer la prédiction thermoélastique et évaluer les fonctions-critères : $(i = 1, 2)$, $\mathcal{F}^{cri,(k)}_{i,n+1} = \mathcal{F}^{cri}_i\left(\tau^{(k)}_{n+1}, z^{(k)}_{n+1}\right)$
- Si $\mathcal{F}^{cri,(k)}_{i,n+1} < 0$ (ou au cours des itérations $\left|\mathcal{F}^{cri,(k)}_{i,n+1}\right| < \epsilon_{cr}$) alors incrémenter $k = k + 1$ et aller à 1.e)
- Calculer l'incrément de la fraction volumique Δz^{k+1}_{n+1}
- Actualiser les variables d'état qui dépendent de $z^{(k+1)}_{n+1}$
- Incrémenter le compteur : k=k+1 et aller à 1.d)
f) Calculer le résidu : $\mathcal{R}$ à l'aide de l'équation (5.94)
g) Si $|\mathcal{R}| > \epsilon_{eq}$ alors aller à 1.b)
3. Calculer la température $T^{(k+1)}_{n+1}$ par la résolution de l'équation de la chaleur
4. Si $|T^{(k+1)}_{n+1} - T^{(k)}_n| > \epsilon_{ch}\ T^{(k)}_n$ alors aller à 1.b)
5. Fin de la boucle sur les rayons de la section
6. Fin de l'algorithme (algorithme_modal)

Table 5.6: *Algorithme de Newmark pour la résolution du problème dynamique projeté sur le premier mode de torsion*

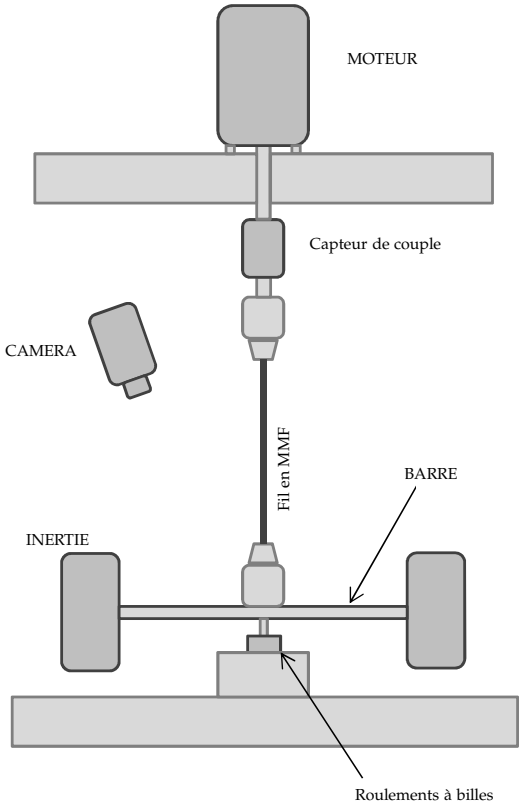

Figure 5.14: *Illustration des composants de l'expérience*

5.3 EXPÉRIENCES DE TORSION D'UN MMF

5.3.1 *Description de l'expérience*

Decription du matériel

Le matériau du fil est le NiTi (composition : 56.1 % Ni) et son diamètre est de ∅ 2mm. Les températures de transformation de phase sans effort mécanique, données par le fournisseur, sont : $\mathcal{A}^0_{af}$=29 °C, $\mathcal{A}^0_{as}$=9 °C, $\mathcal{M}^0_{mf}$=13 °C et $\mathcal{M}^0_{ms}$=29 °C. La longueur utile de l'échantillon est L_u= 115 mm sur une longueur initiale de L=150mm. La masse de l'échantillon est de $m = 4g$ et la masse volumique est de ρ_f=6600 kg m^{-3}. Concernant la consigne de température imposée, le moyen expérimental utilisé est un sèche-cheveux. Le fil en MMF est fixé entre deux mors (*cf.* la figure 5.14) : l'extrémité du haut est reliée au moteur et l'extrémité du bas est attachée à la masse inertielle, nécessaire dans les expériences dynamiques. Un roulement à billes relie la masse au deuxième mors du bas, afin d'éliminer les vibrations transversales du fil et les dérives du moteur. Le dispositif expérimental permet de

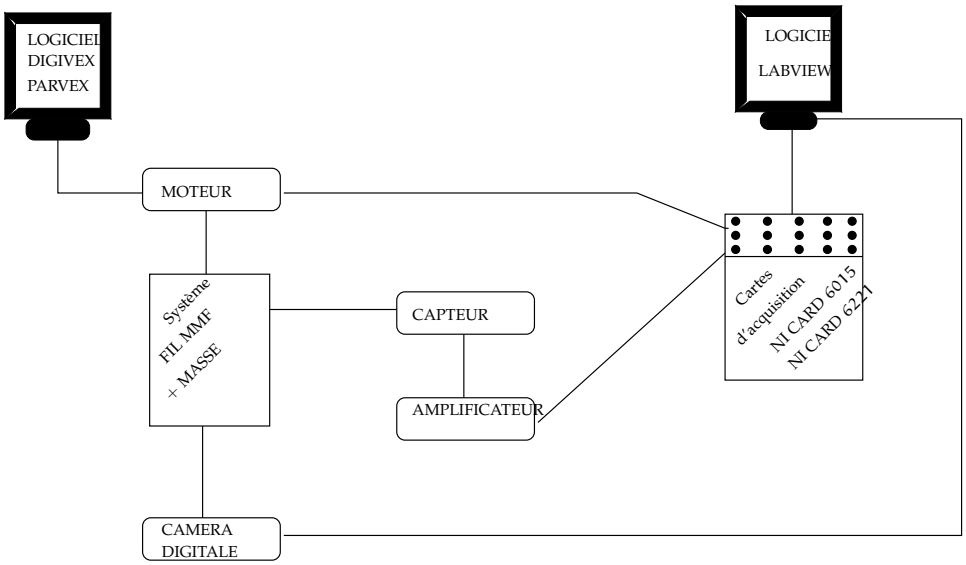

Figure 5.15: *Acquisition des données*

réaliser des essais aussi bien statiques que dynamiques. Les premiers se font en bloquant la masse inertielle et en sollicitant le fil depuis l'extrémité du haut. Les seconds s'effectuent en laissant la masse libre et en appliquant une commande harmonique (déplacement imposé) à l'ensemble du système.

Acquisition de données

La figure 5.15 montre une illustration du système d'acquisition des signaux. Les différents composants, montrés dans la figure 5.15, sont les suivants :

- Un moteur de type brushless (SSD-Parvex). La sortie du moteur renvoie la position réelle suivant l'axe (Oz). Le réglage des paramètres de contrôle des cartes d'acquisition se fait par un système de PID classique.
- Deux cartes d'acquisition National Instrument (NI DAQPad-6015 et NI USB-6221),
- Un capteur piézoélectrique de couple (KISTLER 9339A). La plage de mesure du capteur est de $\pm$ 10 Nm,
- Un amplificateur de charge pour le capteur de couple piézoélectrique (KISTLER 5015),
- Une caméra Fireware (SONY CDD de type XCD-V60). La fréquence d'acquisition de la caméra est de 60 im/s.

La caméra Firewire permet d'obtenir une image de la plaque fixée en bas du dispositif toutes les $\frac{1}{60}$ s. Un traitement d'image est alors effectué en temps réel pour en obtenir un signal de déplacement :

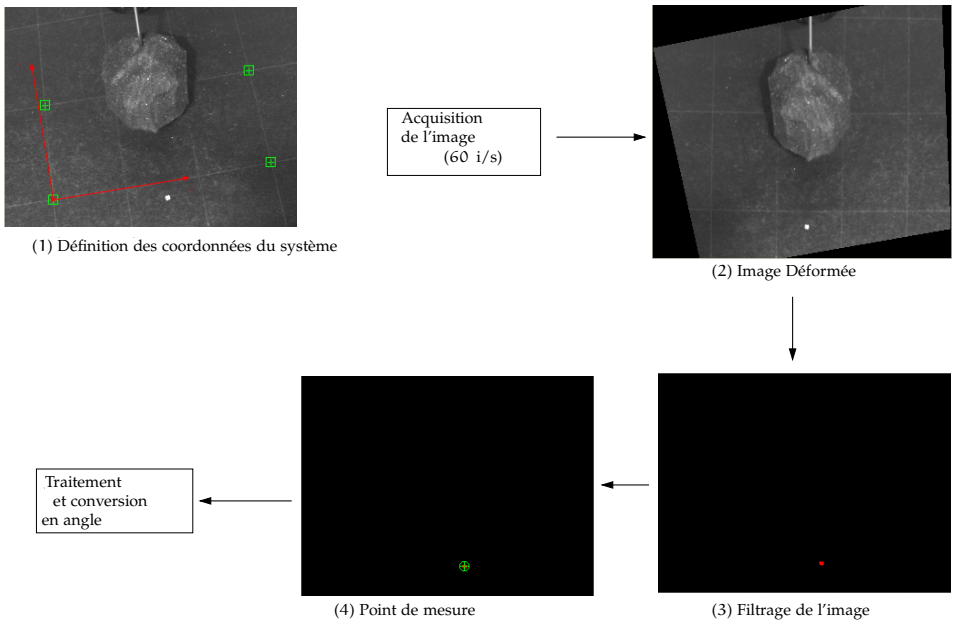

Figure 5.16: *Mesure du déplacement et de l'angle*

1. Définition des coordonnées du système par rapport à une image de référence 5.16 (1),
2. acquisition de l'image est réalisée à une cadence de 60 images par seconde. La figure 5.16 (2) montre une image de la configuration déformée, après un certain angle de torsion,
3. filtrage permettant d'isoler le point de mesure sur l'image (figure 5.16 (3)),
4. détermination du déplacement de rotation.

Le chargement imposé est périodique et on considère un nombre de cycles suffisant pour arriver au régime établi des vibrations. Durant les expériences numériques, l'échantillonnage des signaux dans l'expérience, se fait à une cadence de 1000 points par période et le nombre de périodes est de 200.

5.3.2 *Résultats en quasi statique et comparaison avec le modèle*

Cette section présente une confrontation des résultats de simulation avec les expériences. La résolution numérique est réalisée à l'aide des paramètres matériaux, repertoriés dans le tableau 5.7. Les figures 5.17 (a), (b) et (c) comparent le modèle de torsion aux expériences, respectivement à 3.10^{-5}Hz, 3.10^{-4}Hz et 1.10^{-4}Hz. Les résultats montrent un bon accord entre le modèle et l'expérience avec quelques écarts : nous observons des plateaux de transformations (directe et inverse) plus hauts dans l'expérience que dans le modèle, tout comme, une déformation résiduelle appa-

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
E_A	5000 (MPa)	b	15.3 MPa
E_M	5000 MPa	G	23.6 MPa
ν	0.3	β	31.5 MPa
α	31.5 MPa	$\mathcal{A}^0_{af}$	40 °C
Y	110 MPa	κ	12.7 MPa
ξ	1.62 MPa/°C	h	50 $W\,m^{-2}\,K^{-1}$
γ_{max}	7.0%	R	1 mm
C_P	440 $J\,kg^{-1}\,K^{-1}$	L	100 mm
ρ	6500 $kg\,m^{-3}$	a	13.9 MPa

Table 5.7: *Paramètres matériaux pour la résolution numérique*

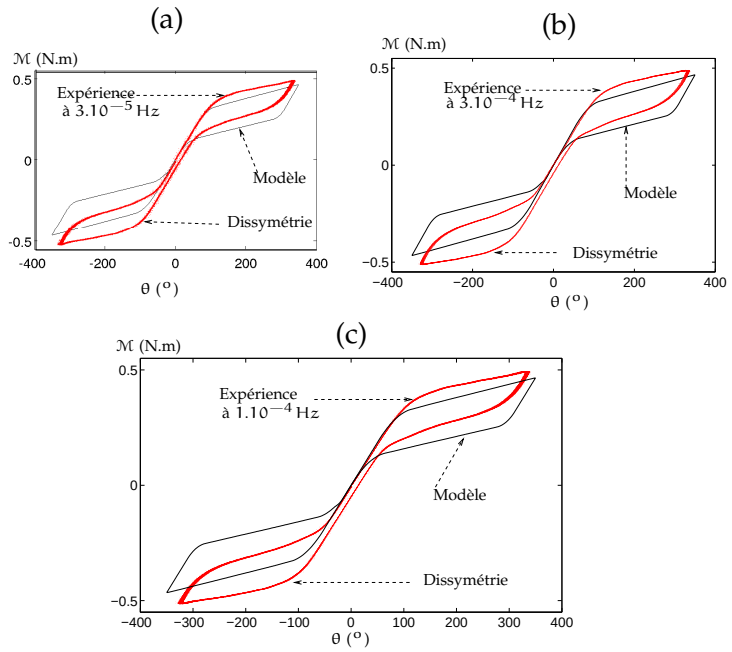

Figure 5.17: *Validation du modèle de torsion par les expériences*

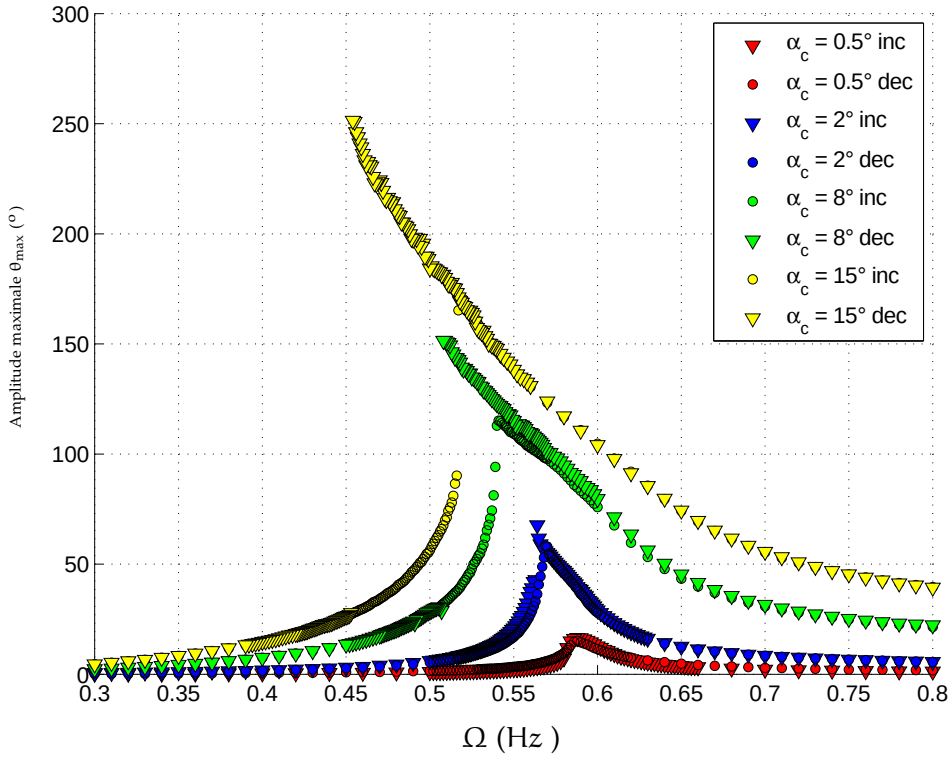

Figure 5.18: *Réponse en fréquence du fil en torsion : Amplitude maximale de l'angle de torsion en fonction de la fréquence de sollicitation*

raît dans la réponse expérimentale que le modèle n'arrive pas à reproduire. Une absence d'identification des paramètres d'orientation de la martensite en torsion et un manque de précision dans les paramètres d'échanges thermiques, sont à l'origine de ces écarts. Cependant, la symétrie du modèle nous a permis de nous rendre compte d'un résultat important, à savoir, l'existence de dissymétrie dans le comportement expérimental en torsion entre les sens direct et indirect.

5.3.3 *Résultats en dynamique*

L'objectif de ces expériences est d'observer l'effet de l'inertie en présence d'un comportement pseudo-élastique (rigidité MMF). La masse inertielle est libérée et la température initiale du système est prise égale à 24°C. Un forçage sinusoidal d'amplitude α_c est appliqué à différentes fréquences ($\Omega \in [0\ 0.8]$). L'amplitude α_c a le rôle d'un paramètre dans cette étude qui permet d'aller de la réponse d'un oscillateur harmonique linéaire (petites valeurs de α_c) à une réponse en fréquence non linéaire due au comportement des MMF.

La figure 5.18 montre l'amplitude maximale de la réponse (i.e l'angle maxi-

Fréquence (HZ)	0.0001	0.003	0.007	0.009	0.1	0.2
Nombre de cycle	50	100	150	200	600	800

Table 5.8: *Nombre de cycles en fonction de la fréquence de chargement*

mal relatif entre l'extrémité z=0 et z=L) en fonction de la fréquence du fil en torsion à différentes amplitudes de forçage.
À α_c = 0.5°, le matériau du fil est dans l'austénite et la structure se comporte comme un oscillateur linéaire. Pour des amplitudes plus grandes ($\alpha_c > 0.5$ °), la transformation de phase du matériau engendre des sauts dans la réponse en fréquence, semblables à ceux obtenus dans le cas du ressort. Le niveau maximal des angles de rotation imposés (15 °, soit $\frac{2}{25}\pi$), ne permet pas dans ces expériences, d'observer la troisième branche stable dans la réponse : la transformation de phase n'étant pas complète. Un autre point important que nous souhaitons souligner en vue des résultats expérimentaux, est que le comportement des MMF est moins assouplissant en torsion dynamique qu'en traction-compression. Nous notons par ailleurs que les simulations numériques de ces réponses en fréquence (avec le modèle présenté dans la section modélisation dynamique) font l'objet des perspectives de la thèse.

5.4 ANALYSE EXPÉRIMENTALE DU COMPORTEMENT CYCLIQUE

5.4.1 *Recherche du cycle stabilisé*

L'objectif de ces expériences est d'observer l'influence de la fréquence sur le cycle stabilisé d'un MMF lors de sollicitations répétées afin d'analyser sa tenue à la fatigue (Moumni *et al.* [1]). Le fil en NiTi est précontraint jusqu'à une amplitude $\mathcal{A}$=360 ° à une vitesse $\dot{\theta}$=7°/s. Une déscente linéaire à $\dot{\theta}$=−5°/s est ensuite effectuée jusqu'à $\mathcal{A}$=210 °. Ensuite, un forçage harmonique est appliqué durant un nombre de périodes (ou de cycles) qui dépend de la fréquence (5.8) : plus nous augmentons la fréquence, plus nous avons besoin de plus de cycles pour arriver au régime stabilisé. La valeur moyenne et l'amplitude du forçage sinusoidale sont respectivement de $\mathcal{A}_{moy}$=210° et $\mathcal{A}$=150°.
La figure 5.19 montre le profil de l'angle imposé en fonction du temps. Ce type de chargement est semblable aux sollicitations subies par un Stent en MMF, précontraint et introduit dans un coeur humain.
La figure 5.20 (a) montre la réponse ($\mathcal{M}$ en fonction de θ) à une fréquence de 0.1 Hz. La figure 5.20 (b) donne la réponse à une fréquence de 0.2 Hz. L'augmentation de la fréquence engendre un retard dans la stabilisation du matériau, une augmentation de la pente du plateau de transformation et une variation de l'aire de la boucle d'hystérésis dans les cycles. Les observations faites dans les essais de traction se retrouvent : les seuils de la

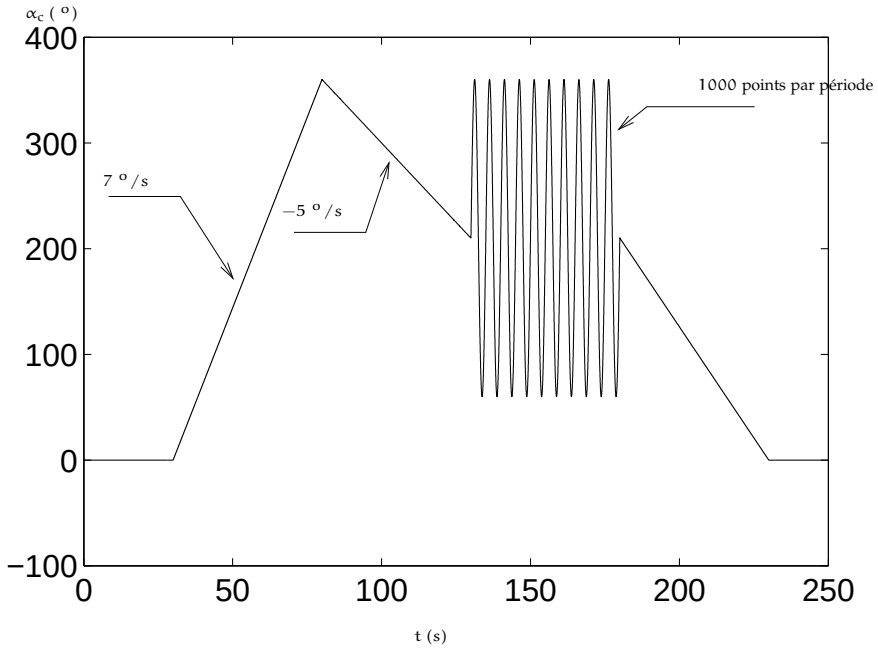

Figure 5.19: *Angle imposé en fonction du temps pour les expériences montrées en figures 5.20 et 5.21*

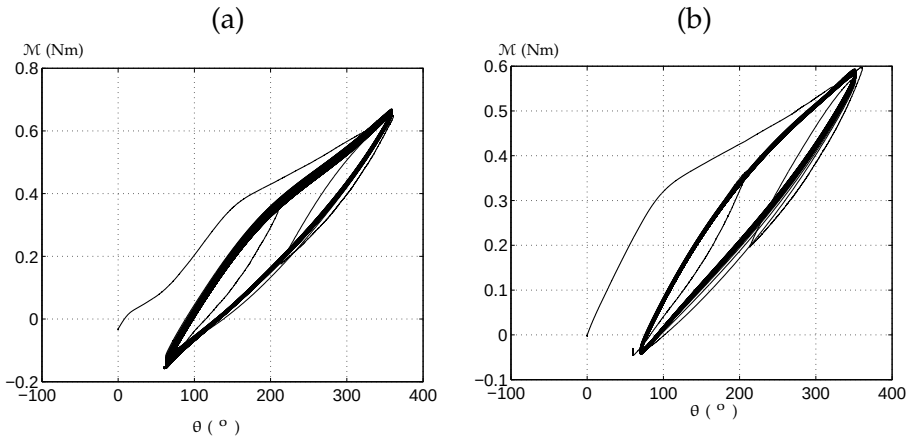

Figure 5.20: *Moment en fonction de l'angle pour un chargement cyclique : (a) à* 0.1 Hz *(b) à* 0.2 Hz

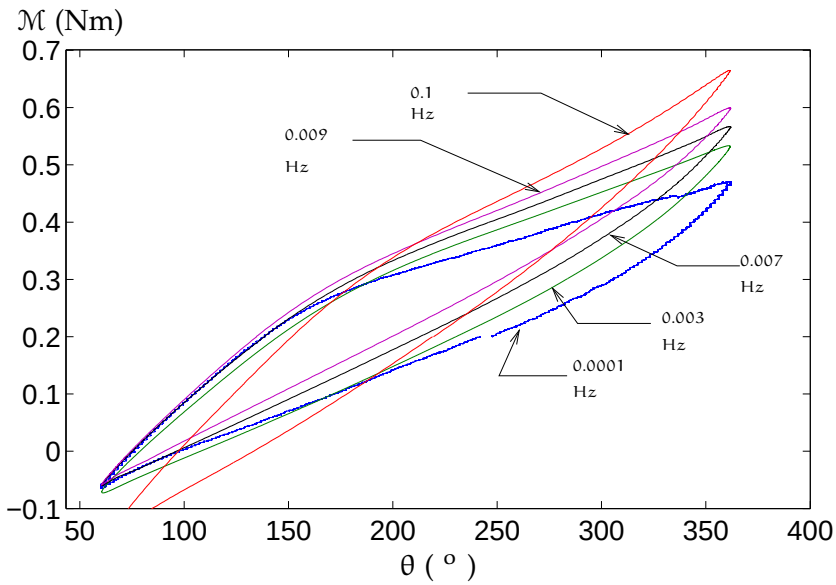

Figure 5.21: *Cycle stabilisé à plusieurs fréquences*

transformation (moments dans le cas de la torsion) diminuent en fonction du nombre de cycles. Le matériau accumule de l'effort interne cycle après cycle, favorisant la formation de la martensite, stable à basse température ou à haute déformation (Moumni *et al* [104]).

La fatigue des MMF dans le cadre du modèle de Moumni *et al.* [1] est prédite par un critère énergétique valable dans les conditions de chargement quasi statique. Le paramètre du critère est l'énergie dissipée (aire de la boucle d'hystérésis). L'influence de la fréquence sur le cycle stabilisé est montrée dans la figure 5.21 : la pente du plateau augmente et l'aire de la boucle varie à cause du couplage thermomécanique que l'augmentation de la fréquence permet d'en engendrer l'effet. En effet, ces observations en dynamique peuvent servir dans l'extension du critère de fatigue quasi-statique.

5.4.2 *Recherche du point mémoire*

Des études récentes (Tanaka et al. [105]) montrent l'existence d'un point où l'ensemble des boucles internes (à la transformation) passent par un même point, appelé Point Mémoire. L'objectif des expériences dans cette section est de rechercher ce point mémoire dans le cas de la torsion. La stratégie de recherche est d'imposer à l'intérieur d'une grande boucle d'hystérésis (max θ=350 °), des boucles internes qui augmentent cycle après cycle. Le profil de l'angle imposé en forme de pyramide, est montré dans la figure 5.22.

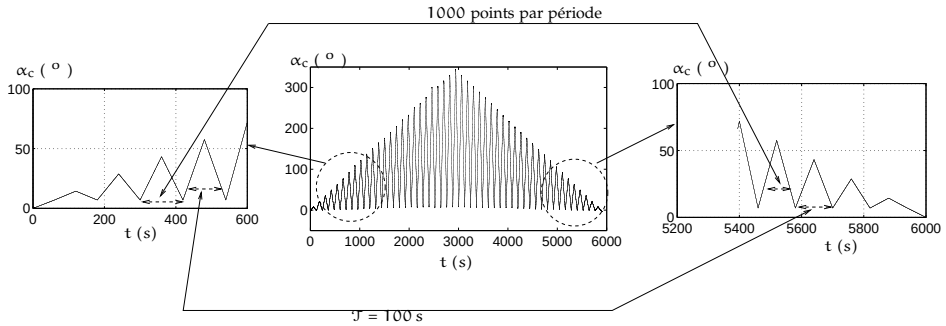

Figure 5.22: *Angle imposé en fonction du temps à la recherche du point mémoire*

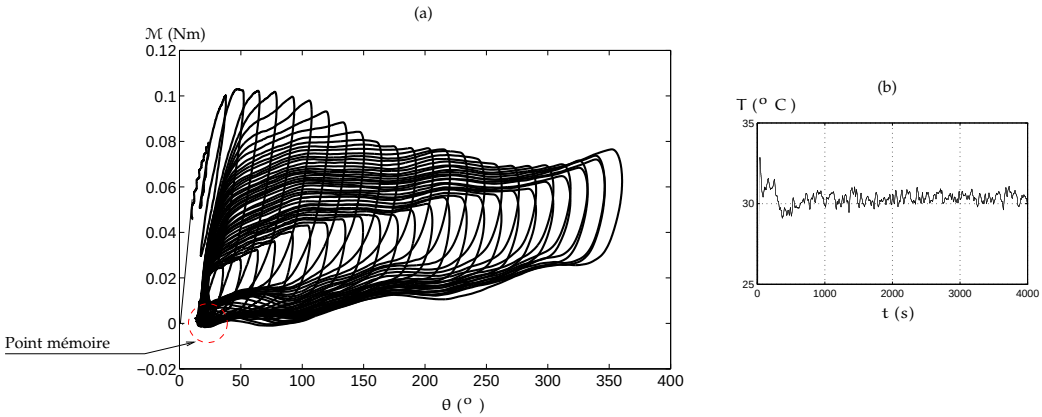

Figure 5.23: *Comportement et température : (a)* $\mathcal{M}$ *en fonction de* θ *(b)* T *en fonction de* t

La valeur de l'angle à la fin de chaque cycle est fixée à 20°. La figure 5.23 (a) montre l'évolution des boucles internes dans les sens croissant et décroissant de l'amplitude de l'angle (première et deuxième parties avant et après $\mathcal{A} = 350°$). Les boucles internes ont un point d'intersection (θ=20° ; $\mathcal{M}$=0.003 Nm) qui constitue un point mémoire dans le comportement pour cette expérience que nous avons réalisée. Nous remarquons sur la figure par ailleurs, l'effet d'un chargement cyclique (*cf.* chapitre 3) sur les seuils de changement de phase : les moments seuils de la transformation de phase directe diminuent au cours du chargement cyclique. Cependant, l'angle minimum de rotation étant imposé, nous observons que les seuils de la transformation inverse augmentent avec le nombre de boucles internes : l'austénite étant stable à faible déformation, la présence d'une déformation résiduelle à chaque cycle, rend le changement de phase de la martensite vers l'austénite plus consommateur d'effort.

La figure 5.23 (b) montre l'évolution de la température en fonction du temps au cours des boucles internes. Les caractères exothermique et en-

dothermique respectifs des transformations directe et inverse, engendrent l'augmentation de la température durant le chargement sur une boucle interne et sa diminution au cours de la décharge. Cependant, nous ne disposions pas d'un dispositif plus performant dans les mesures de température afin d'avoir une évolution temporelle où l'on distingue les cycles thermiques avec précision. Cela pourrait faire l'objet de mesure par la thermographie infrarouge dans une investigation ultérieure.

5.5 CONCLUSION

Ce chapitre nous a permis d'explorer la réponse dynamique d'un fil en MMF, soumis à un chargement dynamique de torsion. La réalisation d'expérience dynamique en torsion constitue en soi, à notre connaissance, une originalité de la présente contribution. Les résultats de ces expériences ont servi à valider un modèle simplifié de la torsion du fil. Des poursuites approfondies des développements présentés dans ce chapitre, constitueront des perspectives qui sont présentées dans le prochain chapitre.

6 CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif de la thèse est la modélisation du comportement dynamique des MMF dans la perspective de calcul de structures multiaxiales. Pour ce faire, nous avons tout d'abord, réalisé des essais thermomécaniques de mise en évidence du couplage thermomécanique et proposé une extension du modèle ZM afin de prendre en compte les effets observés. Le modèle ainsi généralisé a fait l'objet d'une validation via une simulation d'un cas de traction d'une structure tridimensionnelle sous le code éléments finis cast3m.
Ensuite, cette loi thermomécanique 3D a été particularisée en une dimension, afin d'analyser les oscillations isothermes et non isothermes, symétriques et dissymétriques du dispositif "Ressort en MMF + Masse + Amortisseur". Nos résultats ont été comparés avec ceux de Bernardini *et al.* [4] pour deux jeux des paramètres matériaux qu'ils utilisent. Un très bon accord est obtenu dans l'ensemble, moyennant quelques écarts dans les réponses en fréquence. Par ailleurs, cette étude a permis d'observer l'émergence de phénomènes physiques tels que le doublement de période, bifurcations ainsi que le chaos.
En outre, le comportement dynamique d'un pendule de torsion a été analysé. En effet, nous avons particularisé la loi tridimensionnelle ZM au comportement local en cisaillement, ensuite, une intégration sur la section du pendule nous a permis de construire le comportement global de la structure, moment en fonction de l'angle de rotation. Des simulations de torsion ont été effectuées et comparées aux résultats des expériences réalisées à différentes fréquences. Un bon accord a été obtenu dans cette confrontation modèle-expérience.
Notre apport peut-être résumé dans les cinq points suivants :
1. prise en compte de l'effet du couplage thermomécanique dans le modèle ZM,
2. analyse de la dynamique des MMF à l'aide d'un modèle 3D, thermodynamiquement admissible, ce qui ouvre la voie au calcul dynamique de structures,
3. mise en évidence de nouvelles réponses dynamiques par rapport aux travaux antérieurs, en particulier, la dissymétrie entre traction et compres-

sion est prise en compte,
4. comparaison essai-simulation dans le cas d'un pendule de torsion,
5. introduction à la fatigue dynamique des MMF à l'aide des essais en torsion dynamique.
Ce travail appelle les perspectives suivantes :
1. Réalisation de la comparaison essai-simulation pour la réponse en fréquence en torsion.
2. Généralisation de la loi de fatigue énergétique développée par Moumni *et al.* [1] à la dynamique des MMF en prenant en compte l'effet de la fréquence.
3. Finalisation de l'étude du point mémoire dans les boucles internes.
4. Validation du modèle dynamique sur un essai de structure multiaxiale à concevoir.

7 BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

[1] Z. Moumni, A. Van Herpen, and P. Riberty. Fatigue analysis of Shape Memory Alloys : energy approach. *Smart Materials and Structures*, 14 : 287–292, 2005.

[2] Ziad Moumni, Wael Zaki, and Quoc Son Nguyen. Theoretical and numerical modeling of solid-solid phase change : Application to the description of the thermomechanical behavior of Shape Memory Alloys. *International Journal of Plasticity*, 24(4) :614–645, April 2008.

[3] Ziad Moumni and Wael Zaki. A three-dimensional model of the thermomechanical behavior of Shape Memory Alloys. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(11) :2455–2490, November 2007.

[4] W. Lacarbonara, D. Bernardini, and F. Vestroni. Nonlinear thermomechanical oscillations of Shape Memory devices. *International Journal of Solids and Structures*, 41 :1209–1234, 2004.

[5] D. Bernardini and F. Vestroni. Non-isothermal oscillations of pseudoelastic devices. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38 : 1297–1313, 2003.

[6] D. Bernardini and G. Rega. The influence of model parameters and of the thermomechanical coupling on the behavior of Shape Memory devices. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45 :933–946, 2009.

[7] O Doaré, A Sbarra, C Touzé, M Ould Moussa, and Z Moumni. Experimental analysis of the quasi-static and dynamic behavior of Shape Memory Alloys. *International Journal of Solids and Structures*, 49 :32–42, 2011.

[8] John Shaw and S. Kyriakides. Thermomechanical aspects of NiTi. *Journal of the Mechanics and Physics of solids*, 43(8) :1243–1281, August 1995.

[9] H. Funakubo. Shape Memory Alloys. *Precision Machinery and Robotics*.

[10] D. C. Edelen. On the characterization of fluxes in nonlinear irreversible thermodynamics. *Int. J. Eng. Sci.*, 12 :397–411, 1974.

[11] K. Tanaka and S. Nagaki. A thermomechanical description of materials with internal variables in the process of phase transitions. *Ing.-Arch.*, 51 :287–99, 1982.

[12] K. Tanaka. A thermomechanical sketch of shape memory effect : one-dimensional tensile behavior. *Res. Mech.*, 18 :251–63, 1986.

[13] M. Niezgodka, S. M. Zheng, and J. Sprekels. Global solutions to structural phase transitions in shape memory alloys. *Preprint 105 Inst. fur Mathe., University of Augsburg*, 1986.

[14] M. Niezgodka and J. Sprekels. Existence of solution for a mathematical model of structural phase transition in shape memory alloys. *Preprint 89 Inst. fur Mathe., University of Augsburg*, 1985.

[15] M. Niezgodka and J. Sprekels. On the dynamics of structural phase transformation in shape memory alloys. *Preprint 114 Inst. fur Mathe., University of Augsburg*, 1986.

[16] K. H. Hoffmann and J. Sprekels. Phase transformation in shape memory alloys i : stability and optimal control. *Preprint 136 Inst. fur Mathe., University of Augsburg*, 1987.

[17] K. H. Hoffmann and S. M. Zheng. Uniqueness for nonlinear coupled equations arising from alloy mechanism. *Preprint 118 Inst. fur Mathe., University of Augsburg*, 1986.

[18] C. Liang and C. A. Rogers. One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 8 :285–302, 1997.

[19] L. C. Brinson. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys : thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 4 :229–42, 1993.

[20] K. Tanaka, F. Nishimura, and H. Tobushi. Phenomenological analysis on subloops in shape memory alloys due to incomplete transformations. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 5 :487–93, 1994.

[21] E. Patoor, A. Eberhardt, and M. Berveiller. Thermomechanical behavior of shape memory alloys. *Arch. Mech. (Warszawa)*, 40 :775–94, 1988.

[22] Q. P. Sun and K. C. Hwang. Micromechanics modeling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys, part i : derivation of general relations. *J. Mech. Phys. Solids*, 41 :1–17, 1993.

[23] B. Raniecki and C. Lexcellent. Rl -models of pseudoelasticity and their specification for some shape memory solids. *Eur. J. Mech. A*, 12 :21–50, 1994.

[24] J. G. Boyd and D. C. Lagoudas. A thermodynamical constitutive model for the shape memory effect due to transformation and reorientation. *Proc. SPIE*, 2189 :276–88, 1994.

[25] F. Falk. Landau theory and martensitic phase transitions. *J. Physique Coll.*, 43 C4 :3–15, 1982.

[26] M. A. Savi and Z. Kouzak. Polynomial constitutive model for shape memory and pseudoelasticity. *personal communication*, 1996.

[27] Muller and H. Xu. On the pseudo-elastic hysteresis. *Acta Metall. Mater.*, 39 :263–71, 1991.

[28] M. Berveiller, E. Patoor, and M. Busson. Thermomechanical constitutive equations for shape memory alloys. *J. Physique Coll. IV*, 1 C4 : 4–387, 1991.

[29] Z. Bo and D. C. Lagoudas. A thermodynamic constitutive model for cyclic loading of shape memory alloy materials with application to two way training. *Proc. SPIE*, 2441 :118–30, 1995.

[30] C. Lexcellent and H. Tobushi. Internal loops in pseudoelastic behavior of Ti-Ni shape memory alloys : experimental and modeling. *Meccanica*, 30 :459–66, 1995.

[31] P. Delobelle and C. Lexcellent. A phenomenological three dimensional model for pseudoelastic behavior of shape memory alloys. *J. Physique Coll. IV*, 6 C1 :293–300, 1996.

[32] C. Lexcellent and G. Bourbon. Thermodynamical model of cyclic behvaior of Ti-Ni and Cu-Zn-Al shape memory alloys under isothermal undulated tensile test. *Mech. Mater.*, 24 :59–73, 1996.

[33] E. J. Graesser and F. A. Cozzarelli. Shape memory alloys as new materials for aseismic isolation. *J. Eng. Mech. ASCE*, 117 :2590–608, 1991.

[34] A. Duval, M. Haboussi, and T. B. Zineb. Modeling of sma superelastic behavior with nonlocal approach. *Physics Procedia*, 10 :33–38, 2011.

[35] T. Duerig. Engineering aspects of Shape Memory Alloys. *Butterworth*, 1990.

[36] J. Walker, K. Gabriel, and M. Mehregany. Thin-film processing of TiNi Shape Memory Alloy. *Sens. Actuators*, A21-A23 :243–246, 1990.

[37] R. Stalmans and J. Humbeeck. *Workshop on Control Systems and Regulators, Prague Czech Republik*, 1995.

[38] D. Hodgson, M. Wu, and R. Biermann. Shape Memory Alloys. *ASM Handbook*, 2 :887–902, 1995.

[39] A. Stephen Wilson, P.J. Renaud Jourdain, Qi Zhang, A. Robert Dorey, R. Chris Bowen, Willander Magnus, Ul Qamar Wahab, Willander Magnus, M. Safaa Al-hilli, Nur Omer, Quandt Eckhard, Johansson Christer, Pagounis Emmanouel, Kohl Manfred, Matovic Jovan, Samel Bjorn, Wouter van der Wijngaart, Edwin W.H. Jager, Daniel Carlsson, Zoran Djinovic, Michael Wegener, Carmen Moldovan, Rodica Iosub, Estefania Abad, Michael Wendlandt, Cristina Rusu, and Katrin Persson. New materials for micro-scale sensors and actuators an engineering review. *Materials Science and Engineering*, R 56 :1–129, 2007.

[40] J. Gill, D. Chang, L. Momoda, and G. Carman. Manufacturing issues of thin film NiTi microwrapper.

[41] Joel Abadie. Thèse : Etude et réalisation de mico-actionneurs intégré ase d'alliage émoire de forme, application a microrobotique et aux microsystèmes. *Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté, 2000.*

[42] S. Miyazaki, T. Imai, Y. Igo, and K. Otsoka. Effect of cyclic deformation on the pseudoelastic characteristics of Ti-Ni alloys. *Metall. Trans. A*, 17 :115–20, 1986.

[43] P. H. Leo, T. W. Shild, and O. P. Bruno. Transient heat transfer effects on the pseudoelastic behavior of shape memory wires. *Acta Metall. Mater.*, 41 :2477–85, 1993.

[44] P. H. Leo, T. W. Shild, and O. P. Bruno. The effect of strain rate on detwinning and superelastic behavior of NiTi shape memory alloys. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 7 :138–44, 1996.

[45] O. P. Bruno. Quasi-static dynamics and pseudoelasticity in polycrystalline shape memory wires. *Proc. SPIE*, 2192 :370–9, 1994.

[46] M. C. Piedboeuf, R. Gauvin, and M. Thomas. Damping behavior of shape memory alloys : strain amplitude, frequency and temperature effects. *J. Sound Vib.*, 214 :885–901, 1998.

[47] P. Filip and K. Mazanec. Influence of cycling on the reversible martensitic transformation and shape memory phenomena in NITI alloys. *Scr. Metall. Mater.*, 30 :67–72, 1993.

[48] T. J. Lim and D. L. McDowell. Path dependence of shape memory alloys during cyclic loading. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 6 :817–30, 1995.

[49] P. G. McCormick and Y. Liu. Thermodynamic analysis of the martensitic transformation in TiNi-II. Effect of transformation cycling. *Acta Metall. Mater.*, 42 :2407–12, 1994.

[50] Z. Xie, Y. Liu, and J. Van Humbeeck. Microstructure of NITI shape memory alloy due to tension–compression cyclic deformation. *Acta Metall.*, 46 :1989–2000, 1998.

[51] Y. Liu and J. Van Humbeeck. On the damping behavior of NiTi shape memory alloy. *J. Physique Coll. IV 7 C5*, 519, 1997.

[52] Y. Liu, J. Van Humbeeck, R. Stalmans, and L. Delaey. Damping related properties of NITI shape memory alloy. *Displacive Phase Transformations and their Applications in Materials Engineering ed K Inoue, K Mukherjee, K Otsuka and H Chen (Warrendale, PA : Minerals, Metals and Materials Society)*, 1998.

[53] K. Mukherjee, S. Sircar, and N. Dahotre. Thermal effects associated with stress-induced martensitic transformation in Ti-Ni alloy. *Materials Science and Engineering*, 74 :75–84, 1985.

[54] P. Lin, H. Tobushi, K. Tanaka, T. Hahori, and A. Ikai. Influence of strain rate on deformation properties of TiNi Shape Memory Alloy. *JSME Int. J. Ser. A-Mech. Mater. Eng.*, 39(1) :117–123, 1996a.

[55] J.V. Humbeeck and L. Delaey. The influence of strain-rate, amplitude and temperature on the hysteresis of a pseudoelastic Cu-Zn-Al single crystal. *Journal de Physique IV*, 42 :1007–1011, 1981.

[56] P. Malécot, C. Lexcellent, E. Foltête, and M Collet. Shape Memory Alloys cyclic behavior : Experimental study and modeling. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 128, 2006.

[57] O. Helm and P. Haupt. Thermomechanical representation of the multiaxial behavior of Shape Memory Alloys. *In : Lynch, C.S.(Ed.), Proc. SPIE Smart Structure and Materials 2002 ; Active Materials : Behavior and Mechanics*, 4699 :343–354, 2002.

[58] T. Lim and D. L. McDowell. Mechanical behavior of an NiTi Shape Memory Alloy under axial-torsional proportional and non-proportional loading. *J. Eng. Mater. Technol.*, 121(1) :9–18, 1999.

[59] H. Tobushi, M. Endo, K. Tanaka, T. Ikawa, and D. Shimada. Pseudoviscoelastic behavior of TiNi Shape Memory Alloys under stress-controlled subloop loadings. *Arch. Mech.*, 55(5-6) :519–530, 2003.

[60] A. Chrysochoos. La thermographie infrarouge, un outil en puissance pour étudier le comportement des matériaux. *Mécanique et Industries*, 3, ISSUE 1 :3–14.

[61] H. C. Lin, S. K. Wu, and M. T. Yeh. Damping characteristics of NiTi shape memory alloys. *Metall. Trans. A*, 24 :2189–94, 1990.

[62] P. R. Witting. Phd dissertation. *University of New York, Buffalo*, 1994.

[63] He Yong Jun and Q. P. Sun. On non-monotonic rate dependence of stress hysteresis of superelastic Shape Memory Alloy bars. *International Journal of Solids and Structures*, 48 (11-12) :1688–1695, 2011.

[64] C. Morin, Z. Moumni, and W. Zaki. A constitutive model for Shape Memory Alloys accounting for thermomechanical coupling. *International Journal of Plasticity*, 27 :748–767, 2011.

[65] D J Hartl, J T Mooney, D C Lagoudas, F T Calkins, and J H Mabe. Use of a Ni60Ti Shape Memory Alloy for active jet engine chevron application : I. thermomechanical characterization. *Smart Materials and Structures*, 19 (1) :015020 (14pp), 2010.

[66] Ferdinando Auricchio and Elio Sacco. Thermo-mechanical modelling of a superelastic Shape Memory wire under cyclic stretching-bending loadings. *International Journal of Solids and Structures*, 38 : 6123 – 6145, 2001.

[67] A. Chrysochoos, H. Pham, and O. Maisonneuve. Energy balance of thermoelastic martensite transformation under stress. *Nuclear Engineering*, 162(1) :1–2, March 1996.

[68] J. Ortin and A. Planes. Thermodynamics of thermoelastic martensitic transformations. *Acta Metallurgica*, 37(5) :1433–1441, May 1989.

[69] P. Leo, T. Shield, and O. Bruno. Transient heat transfer effects on the pseudoelastic behavior of Shape Memory wires. *Acta Metallurgica and Materialia*, 41(8) :2477–2485, August 1993.

[70] P. McCormick, Y. Liu, and S. Miyazaki. Intrinsic thermal-mechanical behaviour associated with the stress-induced martensitic transformation in NiTi. *Materials Science and Engineering A*, 167 :51–56, 1993.

[71] Amir Sadjadpour and Kaushik Bhattacharya. A micromechanics inspired constitutive model for Shape Memory Alloys : the one-dimensional case. *Smart Mater. Struct.*, 16 :S51–S62, 2007.

[72] A. Baz, K. Imam, and J. McCoy. Active vibration control of flexible beams using shape memory actuators. *J. Sound Vib.*, 140 :437–56, 1990.

[73] S. Seelecke and B. C. uskens. Optimal control of beam structures by shape memory wires. *personal communication*, 1998.

[74] O. K. Rediniotis, D. C. Lagoudas, T. Mashio, L. J. Garner, and M. A. Qidwai. Theoretical and experimental investigations of an active hydrofoil with sma actuators. *Proc. SPIE*, 3039 :277–89, 1997.

[75] R. Gotthardtand and J. E. Bidaux. Functional Materials Based on Polymer Matrix Composites with Embedded Shape Memory Alloy Fibers. *(TMS)*, pages 157–66, 1998.

[76] V. Birman. Effect of SMA dampers on nonlinear vibrations of elastic structures. *Proc. SPIE*, 3038 :268–76, 1997.

[77] P. W. Clark, I. D. Aiken, J. M. Kelly, M. Higashino, and R. C. Krumme. Experimental and analytical studies of shape memory alloy damper for structural control. *Proc. Passive Damping (San Diego, CA, 1995)*, 1995.

[78] P. Thomson, G. J. Balas, and V. Nalbantoglu. Shape memory alloys for augmenting damping of flexible structures. *AIAA Guidance Navigation and Control Conf. (San Diego, CA, 1996)*, 1996.

[79] J. P. Eaton. Feasibility study of using passive SMA absorbers to minimize secondary system structural response. *Master Thesis Worcester Polytechnic Institute, MA*, 1999.

[80] A. R. Shahin, P. H. Meckl, and J. D. Jones. Modeling of SMA tendons for active control of structures. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 8 :51–70, 1997.

[81] V. Brailovski, F. Trochu, and A. Leboeuf. Design of shape memory linear actuators. *SMST Conf. (Asilomar, CA, 1997)*, 1997.

[82] C. Liang and C. A. Rogers. Design of shape memory alloy actuators intelligent systems ed k p chong, s c liu and j c li (amsterdam : Elsevier). pages 416–38, 1990.

[83] M. E. Regelbrugge, A. Carrier, and W. C. Dickson. Performance of a smart vibration isolator for precision spacecraft instruments. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 7 :211–15, 1996.

[84] Z. Feng and D. Li. Dynamics of a mechanical system with a Shape Memory Alloy bar. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 7 (4) :399–410, 1996.

[85] Dolce Mauro and Cardone Donatello. Mechanical behavior of Shape Memory Alloys for seismic applications : 2. austenite bars subjected to tension. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43(11) :2631–2656, November 2001.

[86] R. DesRoches, McCormick J., and Delemont M. A. Cyclical properties of superelastic Shape Memory Alloys. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 130(1) :38–46, 2004.

[87] C. Manuel, E. Foltête, and C. Lexcellent. Analysis of the behavior of a Shape Memory Alloy beam under dynamical loading. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 20 :615–630, 2001.

[88] A. Sbarra, O. Doare, M. Ould Moussa, C. Touze, and Z. Moumni. Dynamical behaviour of a Shape Memory Alloy torsional pendulum. *In proceedings : ENOC 24-29 July 2011, Rome Italy*.

[89] L. Orgéas and D. Favier. Stress-induced martensitic transformation of a NiTi alloy in isothermal shear, tension and compression. *Acta Materialia*, 46 :5579–5591, 1998.

[90] W. Zaki. An approach to modeling tensile-compressive asymmetry for martensitic Shape Memory Alloys. *Smart Materials and Structures*, 19 :025009 (7pp), 2010.

[91] Z. Moumni, W. Zaki, and NGuyen Q. S. Theoretical and numerical modeling of solid-solid phase change :application to the description of the thermomechanical behavior of Shape Memory Alloys. *International Journal of Plasticity*, 24 :614–645, 2008.

[92] Paul Germain. Mécanique. tome 1 (école polytechnique). *Ellipses*, 1986.

[93] Paul Germain. Mécanique. tome 2 (école polytechnique). *Ellipses*, 1986.

[94] D J Hartl, J T Mooney, D C Lagoudas, F T Calkins, and J H Mabe. Use of a Ni60Ti Shape Memory Alloy for active jet engine chevron application : II. experimentally validated numerical analysis. *Smart Materials and Structures*, 19 (1) :015021 (18pp), 2010.

[95] M. Gerardin and D. Rixen. Mechanical vibrations — theory and application tu structural dynamics. *Wiley, Chichester*, 1994.

[96] Thomas Hughes. The finite element method : Linear static and dynamic Finite Element Analysis. *Dover Publications*, Mathematics, 2000.

[97] U. Parlitz and W. Lauterborn. Superstructure in the bifurcation set of the duffing equation. *Physics Letters A*, 107(8) :351–355, 1985.

[98] J. Kozlowski, U. Parlitz, and W. Lauterborn. Bifurcation analysis of two coupled periodically driven duffing oscillators. *Phys. Rev. E*, 51(3) :1861–1867, 1995.

[99] C. Lexcellent and J. Rejzner. Modeling of the strain rate effect, creep and relaxation of a NiTi Shape Memory Alloy under tension (compression)-torsional proportional loading in the pseudoelastic range. *Smart Materials and Structures*, 9 :613–621, 2000.

[100] Reza Mirzaeifar, Reginald DesRoches, and Arash Yavari. Exact solutions for pure torsion of Shape Memory Alloy circular bars. *Mechanics of Materials*, 42 :797–806, 2010.

[101] Ziad Moumni. Mécanique des milieux continus. *Cours MS 101 , 2007-2008, ENSTA-PARISTECH*.

[102] L. Meirovitch. Fundamentals of vibrations. 2001.

[103] O. Doaré and C. Touzé. Dynamique des systèmes mécaniques : Ondes et vibrations, polycopié de cours de 2eme année, ensta-paristech , 2006.

[104] Ziad Moumni, Wael Zaki, and H. Maitournam. Cyclic behavior and energy approach to the fatigue of Shape Memory Alloys. *To appear in Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 4(2) :395–411, 2009.

[105] K. Tanaka, F. Nishimura, T. Hayashi, H. Tobushi, and C. Lexcellent. Phenomenological analysis on subloops and cyclic behavior in Shape Memory Alloys under mechanical and/or thermal loads. *Mechanics of Materials*, 19 :281 – 292, 1995.