



**HAL**  
open science

# Analyse numérique et expérimentale des fluctuations de pression dans les pompes centrifuges

Moisés Salvador Solis Coaguila

► **To cite this version:**

Moisés Salvador Solis Coaguila. Analyse numérique et expérimentale des fluctuations de pression dans les pompes centrifuges. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Arts et Métiers ParisTech, 2011. Français. NNT : 2011ENAM0040 . pastel-00676011

**HAL Id: pastel-00676011**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00676011>**

Submitted on 2 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

## Doctorat ParisTech

# THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers**

**Spécialité "Mécanique"**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Moisés Salvador SOLIS COAGUILA**

le 14 décembre 2011

## **ANALYSE NUMÉRIQUE ET EXPÉRIMENTALE DES FLUCTUATIONS DE PRESSION DANS LES POMPES CENTRIFUGES**

Directeur de thèse : **Farid BAKIR**

Co-encadrement de la thèse : **Sofiane KHELLADI**

### **Jury**

**M. Jean-François HETET**, Professeur des Universités, Ecole Centrale de Nantes  
**M. Smaïne KOUIDRI**, Professeur des Universités, LIMSI, CNRS  
**M. Georges DESCOMBES**, Professeur des Universités, CNAM  
**M. Xesús NOGUEIRA**, Maître de Conférences, Universidade da Coruña  
**M. Jacques CARDON**, Directeur R&D, Ensival Moret FAPMO  
**M. Sofiane KHELLADI**, Maître de Conférences, DynFluid, Arts et Métiers ParisTech  
**M. Farid BAKIR**, Professeur des Universités, DynFluid, Arts et Métiers ParisTech

PRÉSIDENT  
RAPPORTEUR  
RAPPORTEUR  
EXAMINATEUR  
EXAMINATEUR  
EXAMINATEUR  
EXAMINATEUR

**T  
H  
È  
S  
E**



# Remerciements

Tout d'abord, je remercie vivement à Monsieur Farid BAKIR, Professeur des Universités, de m'avoir choisi et proposé un sujet passionnante et d'avoir assuré l'encadrement scientifique de cette thèse. Je lui exprime aussi ma gratitude pour sa qualité professionnelle et personnelle qui m'ont permis d'apprendre beaucoup de choses dans tout ce temps partagé dans et dehors le laboratoire. Il m'a inculqué le goût d'ouverture à l'extérieur, la volonté d'échange avec d'autres équipes de recherche et la participation à des manifestations scientifiques. Je tiens à lui faire part de toute mon amitié et de ma reconnaissance. Je remercie aussi à Monsieur Sofiane KHELLADI, Maître de Conférences, pour ses capacités et ses qualités dans le domaine de la modélisation numérique des écoulements subsoniques. Les riches échanges et discussions m'ont permis d'acquérir des connaissances précieuses pendant ma thèse. D'autre part je lui exprime toute ma gratitude et ma reconnaissance pour sa sympathie et sa disponibilité.

Mes remerciements vont ensuite vers Monsieur Robert REY, Professeur des Universités. Sa grande maîtrise des écoulements internes dans les turbomachines et ses qualités pédagogiques m'ont aidé dans la compréhension de plusieurs aspects de ces machines. Je remercie Monsieur Ricardo NOGUERA, Maître de Conférences, d'avoir travaillé avec lui pendant mes activités d'ATER dans le cadre de formation des élèves ingénieurs de l'Ecole d'Arts et Métiers ParisTech. J'exprime ma gratitude aux enseignants du laboratoire DynFluid, notamment Messieurs : Christophe SARRAF et Florent RAVELET.

Je suis reconnaissant aux Messieurs Georges DESCOMBES et Smaïne KOUIDRI d'avoir accepté être rapporteurs de ma thèse et de la juger. Ses commentaires et ses questions m'ont permis de clarifier la rédaction du mémoire final, je le remercie profondément de leur lecture plus qu'attentionnée. Je remercie tous les autres membres du jury de thèse, Messieurs Jean-François HETET, Xesús NOGUEIRA et Jacques CARDON d'avoir accepté de participer à l'expertise de mon travail.

J'ai été ravi de travailler aux côtés de Djaafar Fedala, Jeremy Hurault, Rafael Campos, Lionel Bergerat, Hussain Nouri, Hakim Elhadjen, Monir Asgarpour, Jean Elie Mehal, Padipat Wongthep, Amrid Mammeri et Vianney Atim. Mes remerciements s'adressent aussi à Marc et Dolores Joulin et Farid Ou-kaci.

Je dédie ce travail à ma mère, à ma sœur, à ma grand mère Jesús, à mon grand père Santos et au Docteur Augusto, en les remerciant de leur soutien qu'ils n'ont jamais cessé de me t'emoigner.

Moisés Salvador SOLIS COAGUILA  
Paris le 14 décembre 2011

A Dieu  
A la mémoire de ma Grand-Mère Jesús  
A ma Mère  
A ma Sœur  
Au Docteur Augusto  
A mon Grand-Père Santos  
A toute ma famille  
A mes amis et à mes amies

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xv</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>xvii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>xxi</b>
<b>1 Etat de l'art</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	2
1.2 Phénomènes physiques . . . . .	4
1.2.1 Phénomènes instationnaires dans les pompes . . . . .	4
1.2.2 Mécanismes de génération de bruit acoustique d'origine fluidodynamique . . . . .	8
1.2.3 Forces fluidodynamiques . . . . .	8
1.2.4 Mécanismes de génération de bruit hydraulique . . . . .	10
1.3 Modèles physiques . . . . .	13
1.3.1 La mécanique des fluides numérique (CFD) . . . . .	13
1.3.2 Représentation de la physique du système . . . . .	16
1.4 Méthodes numériques . . . . .	21
1.4.1 Méthodes numériques usuelles . . . . .	21
1.4.2 Les conditions aux limites . . . . .	23
1.4.3 Approches de modélisation pour les zones en mouvement . . . . .	25
1.5 Travaux de recherche sur les fluctuations de pression . . . . .	28
1.5.1 Pompe centrifuge et son circuit . . . . .	28
1.5.2 Interactions roue-volute . . . . .	28
1.5.3 Point de fonctionnement . . . . .	29
1.5.4 Approche théorique et expérimentale . . . . .	30
1.5.5 Mécanismes générateurs . . . . .	30
1.5.6 Analyse des pressions instationnaires . . . . .	31
1.5.7 Fréquence aubage et de résonance . . . . .	32
1.6 Outils et Analyse . . . . .	32
1.6.1 Prédiction théorique du bruit des pompes centrifuges, Réf [1] . . . . .	32
1.6.2 Mesure du bruit hydraulique . . . . .	37
1.6.3 Réduction du niveau de bruit hydraulique . . . . .	38
1.6.4 Fréquences liées à des phénomènes de résonance . . . . .	42
1.6.5 Évolution théorique du bruit avec la vitesse . . . . .	42
1.6.6 Définitions et méthodes d'analyse . . . . .	43
1.7 Conclusions . . . . .	45

<b>2</b>	<b>Présentation des moyens et résultats expérimentaux</b>	<b>47</b>
2.1	Introduction	47
2.2	Banc d'essais et pompe NS32	48
2.2.1	Vue générale du banc d'essais	48
2.2.2	Mesure des performances globales	49
2.2.3	Mesure des fluctuations de pression à la paroi extérieure de la volute	50
2.2.4	Chaîne d'acquisition des fluctuations de pression	51
2.2.5	Description de la pompe centrifuge NS32	52
2.3	Banc d'essais et pompe NS33	54
2.3.1	Vue générale du banc d'essais	54
2.3.2	Mesure des performances globales	55
2.3.3	Mesure des fluctuations de pression à l'aspiration et au refoulement de la pompe	56
2.3.4	Description de la pompe centrifuge NS33	56
2.4	Résultats expérimentaux de la pompe NS32	58
2.4.1	Courbe de performances hauteur-débit	58
2.4.2	Fluctuations de pression dans la volute	59
2.5	Résultats expérimentaux de la pompe NS33	62
2.5.1	Courbe de performances hauteur-débit	62
2.5.2	Fluctuations de pression à l'aspiration et au refoulement	62
2.6	Conclusions	83
<b>3</b>	<b>Analyse numérique des fluctuations de pression</b>	<b>85</b>
3.1	Introduction	85
3.2	Procédure numérique adoptée	86
3.2.1	Définition des volumes fluide	86
3.2.2	Modèle numérique	86
3.2.3	Choix du modèle de turbulence	88
3.2.4	Maillage	90
3.2.5	Conditions aux limites	98
3.3	Analyse numérique des fluctuations de pression de la pompe NS32	108
3.3.1	Performances globales	108
3.3.2	Fluctuations de pression	109
3.4	Analyse numérique des fluctuations de pression de la pompe NS33	117
3.4.1	Performances globales	117
3.4.2	Fluctuations de pression	118
3.5	Conclusions	125
<b>4</b>	<b>Vers un nouvel outil de calcul des fluctuations de pression</b>	<b>131</b>
4.1	Introduction	132
4.2	Equations de Navier Stokes	132
4.2.1	Equations de Navier Stokes dans un repère fixe	133
4.2.2	Equations de Navier Stokes dans un repère tournant	138
4.3	Méthode des Volumes Finis	140
4.3.1	Définition de volumes finis	140

---

4.3.2	Grilles de calcul . . . . .	140
4.3.3	Volumes de contrôle . . . . .	142
4.3.4	Discrétisation spatiale . . . . .	144
4.3.5	Discrétisations temporelles . . . . .	150
4.3.6	Conditions aux limites . . . . .	159
4.3.7	Flux numérique . . . . .	170
4.3.8	Limiteurs spécifiques pour maillages non structurés . . . . .	178
4.4	Méthode des moindres carrés mobiles (MLS) . . . . .	182
4.4.1	Formulation générale de la méthode MLS . . . . .	182
4.4.2	Fonctions de base . . . . .	184
4.4.3	Calcul des dérivées . . . . .	185
4.4.4	Fonctions de Kernel . . . . .	186
4.5	Approche volumes finis et approximation par moindres carrés mobiles, FV-MLS . . . . .	190
4.5.1	Principe de la méthode FV-MLS . . . . .	191
4.5.2	Application aux équations de Navier Stokes en deux dimensions . . . . .	195
4.5.3	Approximations MLS (Moving Least Squares) . . . . .	197
4.5.4	Calcul des flux . . . . .	197
4.5.5	Matrice masse . . . . .	201
4.5.6	Limiteurs . . . . .	204
4.5.7	Simulation aux grandes échelles (LES) implicite avec la méthode FV-MLS, Réf [2] et [3] . . . . .	204
4.6	Validation numérique . . . . .	211
4.6.1	Ecoulement stationnaire laminaire autour d'un cylindre ( $Re=20$ et $40$ ) . . . . .	211
4.6.2	Ecoulement instationnaire turbulent autour d'un cylindre à $Re=3900$ . . . . .	212
4.6.3	Ecoulement visqueux autour d'un profil NACA 0012 à incidence $0^\circ$ . . . . .	215
4.7	Méthode pour la prise en compte du mouvement . . . . .	215
4.7.1	Hypothèses . . . . .	215
4.7.2	Technique du maillage glissant . . . . .	217
4.8	Conclusions . . . . .	223
<b>5</b>	<b>Validation de la nouvelle méthode FV-MLS dans la pompe centrifuge NS32</b> . . . . .	<b>225</b>
5.1	Introduction . . . . .	225
5.2	Présentation de la géométrie . . . . .	226
5.2.1	Pompe centrifuge NS32 - 2D . . . . .	226
5.3	Modèle numérique . . . . .	228
5.3.1	Méthode avec le solveur FV-MLS . . . . .	228
5.3.2	Méthode avec le solveur Ansys FLUENT . . . . .	230
5.4	Résultats numériques . . . . .	230
5.4.1	Résultats avec l'approche FV-MLS . . . . .	231
5.4.2	Résultats avec l'approche FLUENT-URANS . . . . .	237
5.4.3	Résultats avec l'approche FLUENT-ILES . . . . .	241
5.4.4	Comparaison des résultats . . . . .	245
5.5	Conclusions . . . . .	246

---

<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>247</b>
<b>Annexes</b>	<b>248</b>
<b>A Capteurs pour la mesure des fluctuations de pression</b>	<b>249</b>
A.1 Capteurs pour la mesure des fluctuations de pression . . . . .	249
A.1.1 Définition . . . . .	249
A.1.2 Aspects fonctionnels et structure . . . . .	249
A.1.3 Caractéristiques métrologiques . . . . .	250
A.1.4 Critères de choix . . . . .	251
A.1.5 Etalonnage . . . . .	252
A.1.6 Type de capteurs de pression . . . . .	253
<b>B Mesure de la célérité du son</b>	<b>255</b>
B.1 Célérité du son . . . . .	255
B.1.1 Partie réelle de la célérité du son à l'aspiration . . . . .	255
B.1.2 Partie imaginaire de la célérité du son à l'aspiration . . . . .	255
B.1.3 Partie réelle de la célérité du son au refoulement . . . . .	255
B.1.4 Partie imaginaire de la célérité du son au refoulement . . . . .	259
<b>Bibliographie</b>	<b>261</b>

# Table des figures

1.1	Pompe hydraulique classique. . . . .	2
1.2	Courbes de performance d'une pompe hydraulique. . . . .	3
1.3	Spectre fréquentiel typique d'une pompe. . . . .	3
1.4	Classification des principaux phénomènes instationnaires dans une turbomachine. . . . .	4
1.5	Interactions de type sillage. . . . .	6
1.6	Ecoulement sortant des aubes d'une pompe centrifuge, ((a) structure et-sillage résultante de la séparation de l'écoulement à partir des surfaces côtés extrados et intrados.) . . . . .	7
1.7	Décrochage tournant. . . . .	7
1.8	Bruit dû à la turbulence dans une conduite, Réf. [4]. . . . .	12
1.9	Influence de la désadaptation sur le bruit aérien, Réf. [4]. . . . .	13
1.10	Démarche globale de dimensionnement et d'analyse d'une turbomachine. . . . .	14
1.11	Modélisation de la turbulence. . . . .	18
1.12	Classement des modèles de turbulence. . . . .	20
1.13	Modèle MRF (Moving Reference Frame). . . . .	26
1.14	Modèle Mixing Plane. . . . .	27
1.15	Modèle Sliding Mesh. . . . .	27
1.16	Triangle de vitesse à l'entrée et à la sortie et à l'entrée de la roue. . . . .	34
1.17	Constantes de tracé - valeurs moyennes. . . . .	34
1.18	Influence du $N_s$ . . . . .	34
1.19	Bruit hydraulique d'une pompe centrifuge ( $b_2 = 1\ m$ ). . . . .	35
1.20	Constantes de tracé - valeurs extrêmes. . . . .	36
1.21	Vue méridienne d'une pompe normalisée $N_s = 32$ . . . . .	36
1.22	Pression fluctuante relative. . . . .	37
1.23	Influence du jeu entre la roue et le stator sur le niveau des fluctuations de pression, Réf [4]. . . . .	39
1.24	Influence d'actions locales à la sortie de la roue (ailes et bec de volute) sur le niveau de bruit, Réf [4]. . . . .	40
2.1	Banc d'essais des pompes centrifuges et axiales du DynFluid. . . . .	48
2.2	Banc d'essais de pompes centrifuges du DynFluid. . . . .	49
2.3	Schéma général du banc d'essais de pompes centrifuges du Dynfluid. . . . .	49
2.4	Détail de la position des capteurs de pression sur la paroi de la volute. . . . .	50
2.5	Chaîne de mesure des fluctuations de pression pour la pompe NS32. . . . .	51
2.6	Capteur KISTLER 601A. . . . .	51
2.7	Pompe centrifuge NS32. . . . .	53
2.8	Roue centrifuge de la pompe NS32. . . . .	53
2.9	Banc d'essais de la pompe centrifuge NS33. . . . .	55
2.10	Pompe centrifuge NS33. . . . .	57
2.11	Roue centrifuge de la pompe NS33. . . . .	57
2.12	Volute déportée de la pompe NS33. . . . .	58
2.13	Courbe performance hauteur-débit à 900 $tr/min$ . . . . .	59

2.14	Variation des fluctuations de pression dans les capteurs Cp1 et Cp2 en fonction du débit à 900 <i>tr/min</i> . . . . .	59
2.15	Variation des fluctuations de pression des capteurs Cp3 et Cp4 en fonction du débit à 900 <i>tr/min</i> . . . . .	60
2.16	Fluctuations de la pression relatives au niveau de la sortie de la pompe (Cps et Cpl) à 900 <i>tr/min</i> . . . . .	60
2.17	Amplitude des fluctuations de pression à 900 <i>tr/min</i> . . . . .	61
2.18	Courbe de performance hauteur-débit de la pompe NS33 à 1955 <i>tr/min</i> . . . . .	62
2.19	Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp1 ( $Q = 5$ et $10 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	63
2.20	Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp1 ( $Q = 24$ et $35 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	63
2.21	Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp1 ( $Q = 45$ et $60 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	63
2.22	Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp1 ( $Q = 70 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	64
2.23	Niveaux de fluctuations de pression en fonction du débit pour Cp1 ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	64
2.24	Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp2 ( $Q = 5$ et $10 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	65
2.25	Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp2 ( $Q = 24$ et $35 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	65
2.26	Spectres du capteur à l'aspiration Cp2 ( $Q = 45$ et $60 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	65
2.27	Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp2 ( $Q = 70 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	66
2.28	Niveaux de fluctuations de pression en fonction du débit pour Cp2 ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	66
2.29	Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp3 ( $Q = 5$ et $10 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	67
2.30	Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp3 ( $Q = 24$ et $35 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	67
2.31	Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp3 ( $Q = 45$ et $60 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	67
2.32	Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp3 ( $Q = 70 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	68
2.33	Niveaux de fluctuations de pression en fonction du débit pour Cp3 ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	68
2.34	Spectres du capteur de pression au refoulement Cp4 ( $Q = 5$ et $10 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	69
2.35	Spectres du capteur de pression au refoulement Cp4 ( $Q = 24$ et $35 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	69
2.36	Spectres du capteur de pression au refoulement Cp4 ( $Q = 45$ et $60 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	69
2.37	Spectres du capteur de pression au refoulement Cp4 ( $Q = 70 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	70
2.38	Niveaux de fluctuations de pression en fonction du débit pour Cp4 ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	70
2.39	Spectres du capteur de pression au refoulement Cp5 ( $Q = 5$ et $10 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	71
2.40	Spectres du capteur de pression au refoulement Cp5 ( $Q = 24$ et $35 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	71
2.41	Spectres du capteur de pression au refoulement Cp5 ( $Q = 45$ et $60 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	71
2.42	Spectres du capteur de pression au refoulement Cp5 ( $Q = 70 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	72
2.43	Niveaux de fluctuations de pression en fonction du débit pour Cp5 ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	72
2.44	Spectres du capteur de pression au refoulement Cp6 ( $Q = 5$ et $10 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	73
2.45	Spectres du capteur de pression au refoulement Cp6 ( $Q = 24$ et $35 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	73
2.46	Spectres du capteur de pression au refoulement Cp6 ( $Q = 45$ et $60 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	73
2.47	Spectres du capteur de pression au refoulement Cp6 ( $Q = 70 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	74
2.48	Niveaux de fluctuations de pression en fonction du débit pour Cp6 ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	74
2.49	Spectres de la moyenne des capteurs à l'aspiration ( $Q = 5$ et $10 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	75
2.50	Spectres de la moyenne des capteurs à l'aspiration ( $Q = 24$ et $35 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	75
2.51	Spectres de la moyenne des capteurs à l'aspiration ( $Q = 45$ et $60 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	75
2.52	Spectres de la moyenne des capteurs à l'aspiration ( $Q = 70 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	76
2.53	Spectres de la moyenne des capteurs au refoulement ( $Q = 5$ et $24 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	76
2.54	Spectres de la moyenne des capteurs au refoulement ( $Q = 35$ et $45 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	77

2.55 Spectres de la moyenne des capteurs au refoulement ( $Q = 60$ et $70 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . .	77
2.56 Spectres de la moyenne quadratique des capteurs à l'aspiration et au refoulement ( $Q = 5$ et $10 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	78
2.57 Spectres de la moyenne quadratique des capteurs à l'aspiration et au refoulement ( $Q = 35$ et $45 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	78
2.58 Spectres de la moyenne quadratique des capteurs de pression à l'aspiration et au refoulement ( $Q = 60$ et $70 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	79
2.59 Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence $F_{BP}$ ( $Q = 5$ et $10 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	80
2.60 Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence $F_{BP}$ ( $Q = 24$ et $35 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	81
2.61 Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence $F_{BP}$ ( $Q = 45$ et $60 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	81
2.62 Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence $F_{BP}$ ( $Q = 70 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	81
2.63 Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence $2F_{BP}$ ( $Q = 5$ et $10 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	82
2.64 Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence $2F_{BP}$ ( $Q = 24$ et $35 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	82
2.65 Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence $2F_{BP}$ ( $Q = 45$ et $60 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	82
2.66 Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence $2F_{BP}$ ( $Q = 70 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ). . . . .	83
3.1 Volumes fluide de la pompe NS32. . . . .	87
3.2 Volumes fluide de la pompe NS33. . . . .	87
3.3 Amplitude des fluctuations de pression en fonction du maillage pour Cp1 et Cp2 à $Q=360 \text{ m}^3/\text{h}$ . . . . .	91
3.4 Amplitude des fluctuations de pression en fonction du maillage pour Cp3 et Cps à $Q=360 \text{ m}^3/\text{h}$ . . . . .	92
3.5 Détails du maillage retenu pour la configuration de la pompe NS32. . . . .	92
3.6 Détails du maillage retenu pour la roue et la volute de de la pompe NS32. . . . .	93
3.7 Fluctuations de pression à l'aspiration (capteurs Cp1 et Cp2) en fonction du maillage à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ et à $1955 \text{ tr}/\text{min}$ . . . . .	94
3.8 Fluctuations de pression à l'aspiration (capteur Cp3) en fonction du maillage à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ et à $1955 \text{ tr}/\text{min}$ . . . . .	94
3.9 Fluctuations de pression au refoulement (capteurs Cp4 et Cp5) en fonction du maillage à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ et à $1955 \text{ tr}/\text{min}$ . . . . .	95
3.10 Fluctuations de pression au refoulement (capteur Cp6) en fonction du maillage à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ et à $1955 \text{ tr}/\text{min}$ . . . . .	95
3.11 Spectre fréquentiel en fonction du maillage pour Cp1 et Cp2 à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ et à $1955 \text{ tr}/\text{min}$ . $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ . . . . .	96
3.12 Spectre fréquentiel en fonction du maillage pour Cp3 à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ et à $1955 \text{ tr}/\text{min}$ . $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ . . . . .	96

3.13 Spectre fréquentiel en fonction du maillage pour Cp4 et Cp5 à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ et à 1955 $\text{tr}/\text{min}$ . $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ . . . . .	97
3.14 Spectre fréquentiel en fonction du maillage pour Cp6 à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ et à 1955 $\text{tr}/\text{min}$ . $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ . . . . .	97
3.15 Détails du maillage global retenu pour la configuration de la pompe NS33. . . . .	98
3.16 Détails du maillage retenu pour la roue et la volute de la pompe NS33. . . . .	98
3.17 Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp1 et Cp2 à $Q=360 \text{ m}^3/\text{h}$ . Conditions aux limites V-V (—), V-PS (—), V-O (—), PT-V (—), PT-PS (—). . . . .	100
3.18 Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp3 à $Q=360 \text{ m}^3/\text{h}$ . Conditions aux limites V-V (—), V-PS (—), V-O (—), PT-V (—), PT-PS (—). . . . .	100
3.19 Amplitudes des fluctuations de pression pour Cps et Cpl à $Q=360 \text{ m}^3/\text{h}$ . Condition aux limites V-V (—), V-PS (—), V-O (—), PT-V (—), PT-PS (—). . . . .	101
3.20 Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp1 et Cp2 à $Q=360 \text{ m}^3/\text{h}$ . . . . .	102
3.21 Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp3 à $Q=360 \text{ m}^3/\text{h}$ . . . . .	102
3.22 Amplitudes des fluctuations de pression pour Cps et Cpl à $Q=360 \text{ m}^3/\text{h}$ . . . . .	103
3.23 Hauteur statique de la pompe NS32 à $Q=360 \text{ m}^3/\text{h}$ . . . . .	103
3.24 Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp1 et Cp2 à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ . Condition aux limites V-O (—), PT-PS (—). . . . .	104
3.25 Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp3 à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ . Condition aux limites V-O (—), PT-PS (—). . . . .	104
3.26 Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp4 et Cp5 à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ . Condition aux limites V-O (—), PT-PS (—). . . . .	105
3.27 Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp6 à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ . Condition aux limites V-O (—), PT-PS (—). . . . .	105
3.28 Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp1 et Cp2 à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ . Comparaison des conditions aux limites, $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ . . . . .	106
3.29 Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp3 à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ . Comparaison des conditions aux limites, $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ . . . . .	106
3.30 Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp4 et Cp5 à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ . Comparaison des conditions aux limites, $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ . . . . .	107
3.31 Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp6 à $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ . Comparaison des conditions aux limites, $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ . . . . .	107
3.32 Performances globales stationnaires de la pompe centrifuge NS32 à 900 $\text{tr}/\text{min}$ . . . . .	108
3.33 Rendement de la pompe centrifuge NS32 à 900 $\text{tr}/\text{min}$ . . . . .	109
3.34 Résultats numériques de la pompe NS32 à 900 $\text{tr}/\text{min}$ dans la volute (Cp1 et Cp2). . . . .	109
3.35 Résultats numériques de la pompe NS32 à 900 $\text{tr}/\text{min}$ dans la volute (Cp3). . . . .	110
3.36 Comparaison de la performance globale de la pompe NS32. . . . .	110
3.37 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux de la pompe centrifuge NS32 à 900 $\text{tr}/\text{min}$ dans la volute (Cp1 et Cp2). . . . .	111
3.38 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux de la pompe centrifuge NS32 à 900 $\text{tr}/\text{min}$ dans la volute (Cp3). . . . .	112
3.39 Contours des fluctuations de pression ( $\text{Pa}$ ) dans la pompe NS32. . . . .	113
3.40 Contours des fluctuations de pression ( $\text{Pa}$ ) dans la pompe NS32. . . . .	114
3.41 Contours des fluctuations de pression ( $\text{Pa}$ ) dans la pompe NS32. . . . .	115

3.42	Contours des fluctuations de pression ( $Pa$ ) dans la pompe NS32. . . . .	116
3.43	Courbe caractéristique hauteur-débit de la pompe NS33 à 1955 $tr/min$ . . . . .	118
3.44	Rendement hydraulique de la pompe NS33 à 1955 $tr/min$ . . . . .	118
3.45	Comparaison de la courbe caractéristique numérique et expérimentale. . . . .	119
3.46	Contours des fluctuations de pression ( $Pa$ ) dans la pompe NS33, « Pression totale - Pression statique ». . . . .	121
3.47	Contours des fluctuations de pression ( $Pa$ ) dans la pompe NS33, « Pression totale - Pression statique ». . . . .	122
3.48	Contours des fluctuations de pression ( $Pa$ ) dans la pompe NS33, « Pression totale - Pression statique ». . . . .	123
3.49	Contours des fluctuations de pression ( $Pa$ ) dans la pompe NS33, « Pression totale - Pression statique ». . . . .	124
3.50	Contours des fluctuations de pression ( $Pa$ ) dans la pompe NS33, « Vitesse - Outflow ». . .	126
3.51	Contours des fluctuations de pression ( $Pa$ ) dans la pompe NS33, « Vitesse - Outflow ». . .	127
3.52	Contours des fluctuations de pression ( $Pa$ ) dans la pompe NS33, « Vitesse - Outflow ». . .	128
3.53	Contours des fluctuations de pression ( $Pa$ ) dans la pompe NS33, « Vitesse - Outflow ». . .	129
3.54	Contours des fluctuations de pression ( $Pa$ ) dans la pompe NS33, « Vitesse - Outflow ». . .	130
4.1	Maillage volumes finis structuré. . . . .	141
4.2	Maillage non structuré. . . . .	142
4.3	Maillage en triangles. Les volumes de contrôle coïncident avec les éléments du maillage (cell centered). . . . .	143
4.4	Condition aux limites de type paroi fixe non glissante pour un schéma « cell centered ». . .	161
4.5	Condition aux limites de type débit massique pour un schéma cell centered. . . . .	161
4.6	Ondes qui rentrent et sortent du domaine de calcul dans la direction de l'écoulement subsonique. . . . .	162
4.7	Frontière champ lointain : entrée (à gauche) et sortie (à droite). $a$ est à l'extérieur, $b$ sur la frontière, et $d$ est à l'intérieur du domaine physique. Le vecteur unitaire normal $\vec{n} = [n_x, n_y]^T$ pointe hors du domaine. . . . .	169
4.8	Notation du maillage non structuré. . . . .	180
4.9	Support compact $\Omega_x$ centré sur $P$ . . . . .	183
4.10	Support rectangulaire, obtenu à partir de différentes longueurs de lissage, et prenant le Kernel comme le produit des Kernels en chaque direction. . . . .	187
4.11	Orientation des axes d'inertie en 2D. . . . .	188
4.12	Solution constante par morceaux pour un instant $n$ . Sur l'axe $x$ est indiqué le nœud $I$ et ses voisins, $I + 1$ , $I - 1$ . Les interfaces entre les volumes de contrôle sont indiquées avec la notation $I + \frac{1}{2}$ , $I - \frac{1}{2}$ . . . . .	191
4.13	Reconstruction linéaire par morceaux pour un instant $n$ . Sur l'axe $x$ est indiqué le nœud $I$ et ses voisins, $I + 1$ , $I - 1$ . Les interfaces entre les volumes de contrôle sont indiquées avec la notation $I + \frac{1}{2}$ , $I - \frac{1}{2}$ . . . . .	192
4.14	Stencil pour l'approximation MLS. Stencil compact. . . . .	195
4.15	Stencil pour l'approximation MLS. Stencil non compact. . . . .	195
4.16	Stencil pour l'approximation de $U(x)$ . . . . .	199

4.17 Ensemble de cellules $\mathcal{A}_1$ pour le calcul des valeurs maximum et minimum de $U$ dans l'expression 4.243. . . . .	205
4.18 Courbe de dispersion pour le schéma de troisième ordre FV-MLS, pour différentes valeurs du paramètre de forme Kernel $\kappa_x$ , Réf [2]. . . . .	207
4.19 Courbe de dissipation pour le schéma de troisième ordre FV-MLS, pour différentes valeurs du paramètre de forme Kernel $\kappa_x$ , Réf [2]. . . . .	207
4.20 Fonction de transfert 1D, A gauche : Kernel exponentiel tronqué. A droite : Kernel basé sur le spline cubique, Réf [2]. . . . .	210
4.21 Maillage non structuré pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire. . . . .	211
4.22 Ecoulement autour d'un cylindre circulaire à $Re=40$ (FV-MLS o(3)). . . . .	212
4.23 Longueur de la zone de récirculation en fonction du nombre de Reynolds. . . . .	212
4.24 Maillage non structuré pour le cas test cylindre 2D. . . . .	213
4.25 Champ de vorticité instantan�e à $Re = 3900$ , Réf [3]. . . . .	214
4.26 Détails du maillage autour du profil NACA. . . . .	215
4.27 Contours du nombre de Mach autour du profil NACA avec FV-MLS troisième ordre. . . . .	215
4.28 Lignes de courant proche du bord de fuite du profil en montrant la zone de récirculation avec FV-MLS troisième ordre. . . . .	216
4.29 Distribution de la pression autour du profil NACA avec FV-MLS deuxième ordre. . . . .	216
4.30 Modèle de maillage glissant. . . . .	217
4.31 Etapes pour la simulation avec maillage glissant. . . . .	218
4.32 Assemblage des maillages fixe et tournant d'une pompe. . . . .	218
4.33 Détails du maillage à l'interface (en rouge le maillage tournant, en violet le maillage fixe et en bleu ciel les interfaces). . . . .	219
4.34 Nœuds d'intersection. . . . .	221
4.35 Calcul flux numérique. . . . .	222
5.1 Volume fluide de la roue de la pompe NS32. . . . .	227
5.2 Volume fluide de la volute de la pompe NS32. . . . .	227
5.3 Maillage de la configuration NS32-2D utilisé par le solveur FV-MLS et le solveur Ansys Fluent. . . . .	228
5.4 Détails du maillage de la pompe NS32-2D. . . . .	229
5.5 Position des capteurs virtuels dans la pompe NS32-2D. . . . .	231
5.6 Signaux temporels de la pression sur les capteurs Cp1 et Cp2 à 900 <i>tr/min</i> avec l'équation Stiffened gas equation of state (Réf. [5]) et l'équation Modified Tait equation of state (Ref. [6]) . . . . .	231
5.7 Signaux temporels de la pression sur les capteur Cp3 à 900 <i>tr/min</i> avec l'équation Stiffened gas equation of state (Réf. [5]), Modified Tait et l'équation of state (Ref. [6]) . . . . .	232
5.8 Spectres fréquentiels de la pression des capteurs Cp1 et Cp2 à 900 <i>tr/min</i> , Solveur FV-MLS. . . . .	232
5.9 Spectres fréquentiels de la pression du capteur Cp3 à 900 <i>tr/min</i> , Solveur FV-MLS. . . . .	233
5.10 Signaux de la pression statique en entrée et en sortie de la pompe NS32-2D � 900 <i>tr/min</i> , Solveur FV-MLS. . . . .	233
5.11 Contours de la pression statique ( $Pa$ ) dans la pompe NS32-2D, « FV-MLS ». . . . .	234
5.12 Contours du nombre de Mach dans la pompe NS32-2D, « FV-MLS ». . . . .	235
5.13 Champ des vecteurs relatives ( $m/s$ ) dans la pompe NS32-2D, « FV-MLS ». . . . .	236

5.14 Spectres fréquentiels de la pression des capteurs Cp1 et Cp2 à 900 <i>tr/min</i> , Solveur FLUENT-URANS. . . . .	237
5.15 Spectres fréquentiels de la pression du capteur Cp3 à 900 <i>tr/min</i> , Solveur FLUENT-URANS.	237
5.16 Contours de la pression statique ( <i>Pa</i> ) dans la pompe NS32-2D, « FLUENT-URANS ». . . . .	238
5.17 Contours du nombre de Mach dans la pompe NS32-2D, « FLUENT-URANS ». . . . .	239
5.18 Champ des vecteurs relatives ( <i>m/s</i> ) dans la pompe NS32-2D, « FLUENT-URANS ». . . . .	240
5.19 Spectres fréquentiels de la pression des capteurs Cp1 et Cp2 à 900 <i>tr/min</i> , Solveur FLUENT-ILES. . . . .	241
5.20 Spectres fréquentiels de la pression du capteur Cp3 à 900 <i>tr/min</i> , Solveur FLUENT-ILES.	241
5.21 Contours de la pression statique ( <i>Pa</i> ) dans la pompe NS32-2D, « FLUENT-ILES ». . . . .	242
5.22 Contours du nombre de Mach dans la pompe NS32-2D, « FLUENT-ILES ». . . . .	243
5.23 Champ des vecteurs relatives ( <i>m/s</i> ) dans la pompe NS32-2D, « FLUENT-ILES ». . . . .	244
5.24 Comparaison des spectres fréquentiels de la pression des capteurs Cp1 et Cp2 à 900 <i>tr/min</i> . . . . .	245
5.25 Comparaison spectres fréquentiels de la pression du capteur Cp3 à 900 <i>tr/min</i> . . . . .	245
B.1 Partie réelle de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 5$ et $10 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	255
B.2 Partie réelle de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 24$ et $35 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	256
B.3 Partie réelle de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 45$ et $60 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	256
B.4 Partie réelle de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 70 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	256
B.5 Partie imaginaire de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 5$ et $10 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	257
B.6 Partie imaginaire de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 24$ et $35 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	257
B.7 Partie imaginaire de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 45$ et $60 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	257
B.8 Partie imaginaire de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 70 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	258
B.9 Partie réelle de la célérité du son au refoulement ( $Q = 5$ et $10 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	258
B.10 Partie réelle de la célérité du son au refoulement ( $Q = 24$ et $35 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	258
B.11 Partie réelle de la célérité du son au refoulement ( $Q = 45$ et $60 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	259
B.12 Partie réelle de la célérité du son au refoulement ( $Q = 70 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	259
B.13 Partie imaginaire de la célérité du son au refoulement ( $Q = 5$ et $10 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	259
B.14 Partie imaginaire de la célérité du son au refoulement ( $Q = 24$ et $35 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	260
B.15 Partie imaginaire de la célérité du son au refoulement ( $Q = 45$ et $60 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	260
B.16 Partie imaginaire de la célérité du son au refoulement ( $Q = 70 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	260



# Liste des tableaux

1.1	Paramètres d'une pompe bruyante, normale et silencieuse. . . . .	36
2.1	Position des capteurs de pression sur la paroi de la volute. . . . .	51
2.2	Position des capteurs de pression sur le flasque avant de la roue. . . . .	51
2.3	Position du capteur de pression dans le tuyau de sortie. . . . .	51
2.4	Cahier des charges de la pompe NS32. . . . .	53
2.5	Caractéristiques géométriques de la roue de la pompe NS32. . . . .	54
2.6	Caractéristiques géométriques de la volute de la pompe NS32. . . . .	54
2.7	Position des capteurs de pression sur les parois des tuyaux d'aspiration et de refoulement. . . . .	56
2.8	Cahier des charges de la pompe NS33. . . . .	56
2.9	Caractéristiques géométriques de la roue de la pompe NS33. . . . .	58
2.10	Caractéristiques géométriques de la volute de la pompe NS33. . . . .	58
2.11	Valeurs des amplitudes de la fluctuations de pression à la fréquence de passage des aubes et sa première harmonique ( $Q=5, 10, 24, 35 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	80
2.12	Valeurs des amplitudes de la fluctuations de pression à la fréquence de passage des aubes et sa première harmonique ( $Q=45, 60, 70 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	80
3.1	Grilles utilisées pour l'étude de sensibilité de la pompe NS32. . . . .	91
3.2	Grilles utilisées pour l'étude de sensibilité de la pompe NS33. . . . .	93
3.3	Valeurs des amplitudes des fluctuations de pression en décibels à la fréquence de passage des aubes et à sa première harmonique ( $Q=60 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	97
3.4	Valeurs des amplitudes de la fluctuation de pression en décibels à la fréquence de passage des aubes ( $Q=60 \text{ m}^3/h$ ). . . . .	108
4.1	Valeurs de la constante $\gamma$ et $P_\infty$ pour de l'eau utilisées par plusieurs auteurs. . . . .	136
4.2	Schéma multi-étapes : coefficients optimisés ( $\alpha$ ) et nombres CFL pour un schéma de discrétisation spatiale upwind de premier et second ordre. . . . .	153
4.3	Coefficients de Runge Kutta pour les schémas d'ordre 4 et 5. . . . .	153
4.4	Coefficients $\gamma_i$ de l'algorithme RK46-L et coefficients $\alpha_i$ et $\beta_i$ et $c_i$ du schéma RK46-NL. . . . .	155
4.5	Méthodes de Runge Kutta explicite. . . . .	156
4.6	Résultats pour la simulation de l'écoulement laminaire autour d'un cylindre à $Re=20$ . . . . .	212
4.7	Résultats pour la simulation de l'écoulement laminaire autour d'un cylindre à $Re=40$ . . . . .	213
4.8	Résultats pour la simulation de l'écoulement turbulent autour d'un cylindre. . . . .	214
5.1	Caractéristiques du fluide de travail dans le solveur compressible FV-MLS. . . . .	229
5.2	Caractéristiques du fluide de travail dans le solveur Ansys Fluent. . . . .	230
5.3	Position des capteurs de pression dans la pompe NS32-2D. . . . .	231



# Nomenclature

## Lettres Latines

$2F_{BP}$	Première harmonique de $F_{BP}$	Hz
$b_2$	Largeur à la sortie de la roue	m
$c$	Vitesse du son	m/s
$c_p$	Chaleur spécifique à pression constante	
$C_\mu$	Constante du modèle de turbulence $k - \varepsilon$	
$D$	Dimension transversale de l'obstacle	m
$D_2$	Diamètre de la roue	cm, m
$R_2$	Rayon de la roue	cm
$D_3$	Diamètre à l'entrée de la volute	m
$\Delta p$	Hauteur statique de la pompe	Bar
$\Delta t$	Pas de temps	s
$P$	Energie interne massique	
$F_{BP}$	Fréquence de passage des aubes	Hz
$f_c$	Fréquence de coïncidence	Hz
$f_d$	Fréquence de rotation du diffuseur	Hz
$f_{ent}$	Fréquence à l'entrée de la roue	Hz
$f_{imp}$	Fréquence dû aux imperfections	Hz
$f_r$	Fréquence de rotation de la roue	Hz
$f_t$	Fréquence dû aux tourbillons de Karman	Hz
$g$	Gravité	m/s <sup>2</sup>
$q$	Flux de chaleur	
$H$	Hauteur statique de la pompe	m
$K$	Paramètre de la formule Simpson et Clark	
$k$	Energie cinétique turbulente	
$K_1$	Valeur de la fluctuation de pression	dB
$L_p$	Bruit hydraulique causée par la fluctuation de pression	dB
$L_{ph}$	Niveau de fluctuations de pression à la fréquence aubage	dB
$N$	Vitesse de rotation de la pompe	tr/min
$N_a$	Nombre d'aubes	
$n_d$	Nombre d'aubes du diffuseur	
$n_r$	Nombre d'aubes de la roue	

$N_s$	Vitesse spécifique	
$P$	Pression	Pa
$p$	Fluctuation de pression	Pa, Bar
$p$	Pression statique instantanée	Pa
$P_0$	Pression statique à l'aspiration de la pompe	Pa
$p_e$	Pression hydraulique	Pa
$p_{e3}$	Pression hydraulique entrée de la volute	Pa
$p'$	Pression statique fluctuante	Pa
$P_\infty$	Constante de pression	
$\bar{p}$	Pression statique moyenne	Pa
$\bar{p}$	Valeur moyenne de la pression	Pa
$P_{réf}$	Pression de référence	Pa
$p_{RMS}$	Moyenne quadratique de la pression	Pa
$W$	Paramètre de la formule Simpson et Clark	Kw
$Q$	Débit volumique	$m^3/h$
$N_0$	Vitesse de référence quelconque	tr/min
$p_0$	Pression de référence quelconque	Pa
$Q_n$	Débit au point de fonctionnement nominal de la pompe	$m^3/h$
$r$	Rayon sortie de la roue ou rayon entrée de la volute	m
$r_3$	Rayon entrée de la volute	m
$S$	Section anéchoïque	
$Sr$	Nombre de Strouhal	m
$T$	Température instantanée	°C
$T$	Temps	s
$t$	Temps	s
$T'$	Température fluctuante	°C
$\bar{T}$	Température moyenne	°C
$\mathbb{T}$	Invariant de puissance, $\frac{W}{U_2^3 R_2^2}$	
$u$	Composante instantanée de la vitesse absolue	m/s
$U_2$	Vitesse périphérique en sortie de roue	m/s
$u'$	Composante fluctuante de la vitesse absolue	m/s
$\bar{u}$	Composante moyenne de la vitesse absolue	m/s
$V$	Magnitude de la vitesse absolue de l'écoulement	m/s
$V$	Magnitude la vitesse absolue	m/s
$V_{2m}$	Vitesse débitante en sortie de roue	m/s

$V_{2u}$	Composante tangentielle de la vitesse absolue sortie roue	$m/s$
$u_t$	Vitesse turbulente	$m/s$
$\vec{W}_1$	Vitesse relative à l'entrée de la roue	$m/s$
$W_h$	Puissance hydraulique	$Kw$
$\vec{W}_{m1}$	Composante méridienne de la vitesse relative à l'entrée de la roue	$m/s$
$\vec{W}_{u1}$	Composante tangentielle de la vitesse relative à l'entrée de la roue	$m/s$
$\bar{x}$	Valeur moyenne d'une quantité	
$x_{RMS}$	Moyenne quadratique d'une quantité	

## Lettres Grecques

$\beta_2$	Angle de sortie des aubages	°
$\beta_{2m}$	Angle moyenne de sortie des aubages	°
$\frac{\varphi' u'}{\omega}$	Contrainte de Reynolds	$m/s$
$\delta$	Delta de Kronecker	
$\varepsilon$	Taux de dissipation de l'énergie cinétique	
$\eta_h$	Rendement hydraulique	
$\gamma$	Constante polytropique	
$\kappa$	Viscosité volumique	
$\ell_t$	Longueur de mélange	$m$
$\mu$	Viscosité dynamique	
$\omega$	Fréquence de turbulence	
$\varphi$	Composante de la vitesse absolue	$m/s$
$\rho$	Masse volumique	$kg/m^3$
$\sigma$	Tenseur de contraintes	
$\tau$	Contraintes visqueuses	
$\mu_t$	Viscosité turbulente	$m^2/s$

## Indices

0	Aspiration de la pompe
1	Entrée de l'aube de la roue
2	Sortie de la roue
3	Entrée de la volute
$BP$	Blade passing

<i>c</i>	Coïncidence
<i>d</i>	Diffuseur
<i>ent</i>	Entrée de la roue
<i>h</i>	Hydraulique
<i>imp</i>	Imperfections
<i>m</i>	Composante méridienne
<i>n</i>	Nominal
<i>p</i>	Pression
<i>r</i>	Roue
<i>réf</i>	Référence
<i>RMS</i>	Root Mean Square
<i>s</i>	Spécifique
<i>t</i>	Tourbillon de Karman
<i>t</i>	Turbulente
<i>u</i>	Composante tangentielle

# Introduction générale

Les turbomachines, et notamment les pompes centrifuges, sont largement utilisées dans plusieurs secteurs comme l'industrie navale, nucléaire, minière, etc. Leurs caractéristiques particulières de débit et de hauteur sont en fait des facteurs importants pour leur choix dans divers applications où il est nécessaire de véhiculer un fluide. Le comportement de l'écoulement au sein d'une pompe est complexe, notamment la présence de divers phénomènes physiques qui apparaissent quand elle est en fonctionnement. Les travaux de recherche numériques et expérimentaux qui se réalisent chaque année permettent de comprendre et d'optimiser le comportement de celles-ci. Lors de la phase de conception, la pompe est construite pour répondre à un cahier des charges déterminé (hydrauliques et acoustiques). Malgré, le développement technologique et le savoir faire acquis pendant toutes ces années, il est encore difficile pour les concepteurs de pompes de maîtriser les divers paramètres géométriques pour concevoir une pompe qui respecte un comportement hydraulique et sonore dans des limites attendues.

Malgré les travaux de recherche réalisés pour avoir une compréhension approfondie des sources de bruit d'origine hydraulique, il reste encore des travaux à effectuer dans le numérique et l'expérimental. De plus, la principale difficulté est la quantité élevée de paramètres géométriques de conception et d'autre part le manque de compréhension de l'impact des solutions classiques géométriques (distance roue-bec, nombre aubes, aubes intermédiaires, volute déportée, aubes affûtées) utilisées pour atteindre des pompes silencieuses sans comprendre leur influence sur la physique de l'écoulement. Bien que ces modifications apportent une atténuation du bruit hydraulique, une démarche d'optimisation et de prédiction des niveaux de fluctuation de pression serait de grande importance.

Le bruit hydraulique présent dans une pompe centrifuge est dû principalement aux fluctuations de pression générées principalement par les interactions de l'écoulement sortant de la roue qui impactent le bec de volute. L'intensité sonore de ce bruit dépend de divers facteurs géométriques et de fonctionnement. Il entraîne plusieurs effets non souhaitables tels que la vibration et le bruit même qui se propage à l'extérieur. De plus, il faut mentionner dans certaines configurations en particulier comme l'industrie navale, l'importance de réduire ce bruit d'origine hydraulique dans les pompes.

A cet effet, on cherche à maîtriser les mécanismes générateurs du comportement fluctuant de la pression au sein de l'écoulement. La tâche est loin d'être facile, tant expérimentalement et numériquement car il s'agit de modéliser et mesurer de grandeurs locales très précises, qui sont liées à des phénomènes physiques complexes. Dans l'aspect numérique, des simulations numériques tridimensionnelles évoluées seront des outils très importants pour une bonne prévision et compréhension des principaux phénomènes instationnaires.

De nos jours, le développement d'algorithmes numériques ainsi que de matériel informatique ont permis l'émergence de codes CFD de simulation des écoulements. Ces outils occupent une place dans la recherche car ils permettent une prévision réaliste de l'écoulement turbulent, tridimensionnel et instationnaire dans la pompe entière et son environnement immédiat. Son application permettra ainsi de

définir une démarche d'optimisation et de prédiction des niveaux de fluctuation de pression et aussi avoir une compréhension détaillée de l'écoulement interne. Par ailleurs, les résultats seront validés par comparaison aux études expérimentales.

L'objectif poursuivi dans cette thèse est de contribuer à l'analyse et la maîtrise des fluctuations de pression dans les pompes centrifuges à volute grâce aux apports conjugués de modélisations numériques fines et d'études expérimentales spécifiques. La finalité est de développer des outils prédictifs des fluctuations de pression fiables et rapides. La satisfaction de cet objectif passe par la réalisation d'un ensemble de travaux de deux configurations de pompes et d'une synthèse globale permettant de valoriser le savoir acquis pour d'autres études ultérieures.

Les travaux de recherche réalisés, à caractère théorique et expérimental, s'inscrivent dans deux axes principaux des activités de recherche du laboratoire DynFluid. Le premier axe vise à analyser et modéliser les écoulements internes par des approches numériques, expérimentales et théoriques. Le deuxième axe consiste à comprendre l'étude des mécanismes générateurs de fluctuations de pression qui sont liés à la génération du bruit hydraulique.

Le présent travail se compose de cinq chapitres principaux :

Le premier chapitre traite l'état de l'art concernant les pompes centrifuges et le bruit hydraulique. Il couvre les travaux numériques et expérimentaux effectués jusqu'à nos jours dans le cadre de l'analyse et la prédiction des fluctuations de pression. Les mécanismes générateurs des fluctuations de pression et l'influence des paramètres géométriques et de fonctionnement pour atténuer les amplitudes des fluctuations au sein de l'écoulement sont décrits. De plus, les aspects de traitement du signal sont présentés comme un outil important pour l'analyse des niveaux des fluctuations dans le domaine fréquentiel.

Le second chapitre est consacré à la présentation des moyens et des résultats expérimentaux. Deux bancs d'essais pour mesurer les performances globales et les fluctuations de pression sont détaillés. Deux pompes centrifuges différentes (NS32 et NS33) sont utilisées pour étudier leur comportement hydroacoustique en fonction du débit. La mesure de l'évolution temporelle de la pression dans la volute et dans les canalisations d'aspiration et de refoulement s'effectue par des capteurs piézoélectriques. A cet effet, une démarche expérimentale est décrite.

Le troisième chapitre concerne les modélisations numériques et la comparaison des résultats aux essais expérimentaux. Il décrit en détail la démarche numérique, basée sur une approche URANS (Unsteady Reynolds Average Navier Stokes) pour prédire les fluctuations de pression. D'autre part, des simulations numériques en régime stationnaire sont réalisés pour construire la courbe de performances de chaque pompe. Les simulations instationnaires ont permis d'accéder au comportement temporel de l'écoulement interne et de comparer l'influence de deux paramètres en particulier : maillage et conditions aux limites concluant qu'il est difficile de modéliser les fluctuations de pression.

Dans le quatrième chapitre, un nouvel outil plus précis de modélisation numérique est présenté. Ce code, développé au laboratoire DynFluid, est basé sur la méthode des volumes finis et la technique de reconstruction de moindres carrés mobiles MLS (Moving Least Squares). Il permet d'atteindre des schémas d'ordre plus élevé afin de pouvoir répondre aux exigences de précision telles que la quantification

des amplitudes des fluctuations de pression. Puis, il décrit la formulation théorique des équations de la mécanique des fluides et la formulation FV-MLS. Des cas test sont présentés et les résultats sont comparés aux expériences réalisées par divers chercheurs. Enfin, la formulation de la technique de maillage glissant est décrite et implémentée dans le solveur FV-MLS pour son application dans les turbomachines.

Le cinquième chapitre présente la validation du solveur FV-MLS pour la modélisation des fluctuations de pression. Le code sera appliqué sur la géométrie de la pompe NS32 en 2D qui est construite à cet effet. Pour juger la capacité du code, les résultats sont comparés aux résultats obtenus par deux différentes approches du code Ansys Fluent.

Finalement, les conclusions de l'ensemble des travaux effectués et les perspectives des travaux à venir notamment l'implémentation du code à la version 3D sont présentées.



# Etat de l'art

---

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>Phénomènes physiques</b>	<b>4</b>
1.2.1	Phénomènes instationnaires dans les pompes	4
1.2.2	Mécanismes de génération de bruit acoustique d'origine fluidodynamique	8
1.2.3	Forces fluidodynamiques	8
1.2.4	Mécanismes de génération de bruit hydraulique	10
<b>1.3</b>	<b>Modèles physiques</b>	<b>13</b>
1.3.1	La mécanique des fluides numérique (CFD)	13
1.3.2	Représentation de la physique du système	16
<b>1.4</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>21</b>
1.4.1	Méthodes numériques usuelles	21
1.4.2	Les conditions aux limites	23
1.4.3	Approches de modélisation pour les zones en mouvement	25
<b>1.5</b>	<b>Travaux de recherche sur les fluctuations de pression</b>	<b>28</b>
1.5.1	Pompe centrifuge et son circuit	28
1.5.2	Interactions roue-volute	28
1.5.3	Point de fonctionnement	29
1.5.4	Approche théorique et expérimentale	30
1.5.5	Mécanismes générateurs	30
1.5.6	Analyse des pressions instationnaires	31
1.5.7	Fréquence aubage et de résonance	32
<b>1.6</b>	<b>Outils et Analyse</b>	<b>32</b>
1.6.1	Prédiction théorique du bruit des pompes centrifuges, Réf [1]	32
1.6.2	Mesure du bruit hydraulique	37
1.6.3	Réduction du niveau de bruit hydraulique	38
1.6.4	Fréquences liées à des phénomènes de résonance	42
1.6.5	Évolution théorique du bruit avec la vitesse	42
1.6.6	Définitions et méthodes d'analyse	43
<b>1.7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>45</b>

---

## 1.1 Introduction

Les pompes rotodynamiques fournissent de l'énergie au fluide à l'aide d'une roue en rotation. La roue est constituée d'aubes qui véhiculent le fluide à travers des canaux. Dans ce type de machine l'écoulement en entrée suit l'axe de rotation de la roue et change ensuite de direction en aval, pour obtenir un mouvement radial.

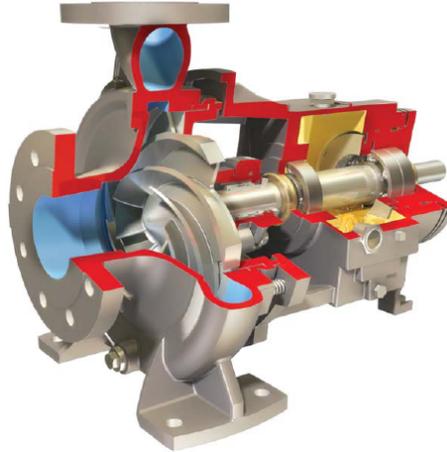


FIGURE 1.1 : Pompe hydraulique classique.

En général, les pompes sont caractérisées par un débit, une hauteur et un rendement qui sont mesurés sur un banc d'essais. La hauteur fournie tend à diminuer à mesure que le débit augmente, et le rendement dépend de la puissance fournie au fluide par rapport à la puissance consommée par la pompe. Les pompes rotodynamiques ont une faible vitesse spécifique et fournissent donc des débits faibles et des hauteurs élevées.

Outre les performances hydrauliques, il y a d'autres exigences telles que les niveaux de bruit. En fonctionnement, les pompes sont sources de bruit qui peut être généré par des sources d'excitations mécanique, électrique et hydraulique (associée à la circulation du fluide).

Il existe divers mécanismes d'excitation de composantes non-stationnaires dans l'écoulement. D'abord, des mécanismes qui donnent lieu à une excitation large bande comme la turbulence et en particulier ceux générés tout au long de la couche limite (détachement au bord d'attaque et sillage). Dans d'autres cas, ces mécanismes sont d'excitation discrète c'est-à-dire, qui induisent des perturbations périodiques à des fréquences bien définies. Notamment, les phénomènes d'interaction fluidodynamique roue-volute associés à la fréquence de rotation (défauts géométriques ou de montage), mais surtout, les mécanismes associés à la fréquence de passage des aubes. Ces derniers sont responsables de la distribution non-uniforme de l'écoulement en sortie de canaux, en aval de la roue.

Par ailleurs, l'amplitude de l'excitation pour une pompe déterminée dépend de son point de fonctionnement et aussi du circuit où elle est installée. Dans certains cas, les niveaux de bruit pourraient être

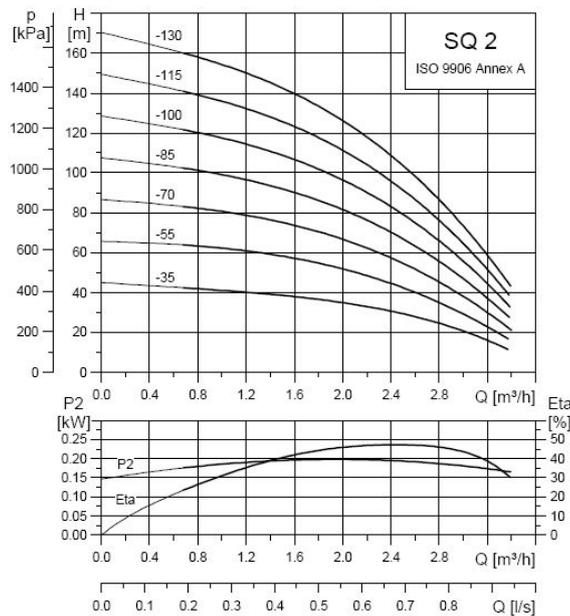


FIGURE 1.2 : Courbes de performance d'une pompe hydraulique.

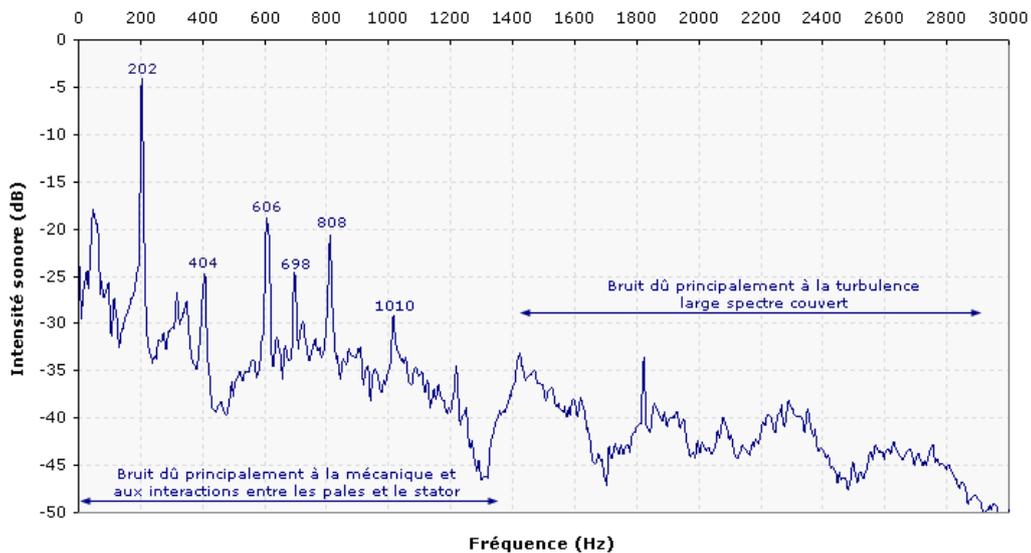


FIGURE 1.3 : Spectre fréquentiel typique d'une pompe.

admissibles mais dans certaines circonstances (par exemple, s'il existe une résonance acoustique avec une certaine fréquence d'excitation), ces niveaux peuvent augmenter et atteindre des valeurs critiques. En conséquence, les chercheurs et les constructeurs de pompes portent un grand intérêt à la prédiction des niveaux de fluctuations de pression qui peuvent apparaître à plusieurs points de fonctionnement au sein de la pompe, pendant la phase de conception.

## 1.2 Phénomènes physiques

### 1.2.1 Phénomènes instationnaires dans les pompes

Le comportement de l'écoulement dans une pompe est tridimensionnel, instationnaire et turbulent. Jusqu'à présent la conception d'une turbomachine repose sur l'hypothèse d'un écoulement stationnaire. Les mécanismes instationnaires et leur impact sur le champ moyenné en temps n'est pas encore suffisamment compris pour être intégrés dans la procédure de dessin. Les principaux phénomènes instationnaires mis en jeu sont décrits par la suite, à travers des mécanismes périodiques ou non-périodiques. Une pompe est constituée principalement d'une partie fixe et d'une partie mobile qui tourne à une vitesse donnée. Lors de son fonctionnement, des perturbations périodiques corrélées à cette vitesse de rotation apparaissent au sein de l'écoulement. Mais, certains phénomènes se produisent à d'autres fréquences comme la turbulence. Dans notre travail, on s'intéresse principalement aux mécanismes générateurs de fluctuations de pression liés à l'hydraulique et à la géométrie du système. Ces fluctuations de pression sont principalement périodiques et dépendent du nombre d'aubes de la roue. Les interactions générées à l'intérieur de la pompe sont fortes et produisent du bruit qui se propage à l'extérieur de la pompe. Une autre conséquence de ce phénomène est la vibration qui peut provoquer l'usure prématurée des composants de la turbomachine. La figure 1.4 présente les différents mécanismes instationnaires rencontrés dans une turbomachine.

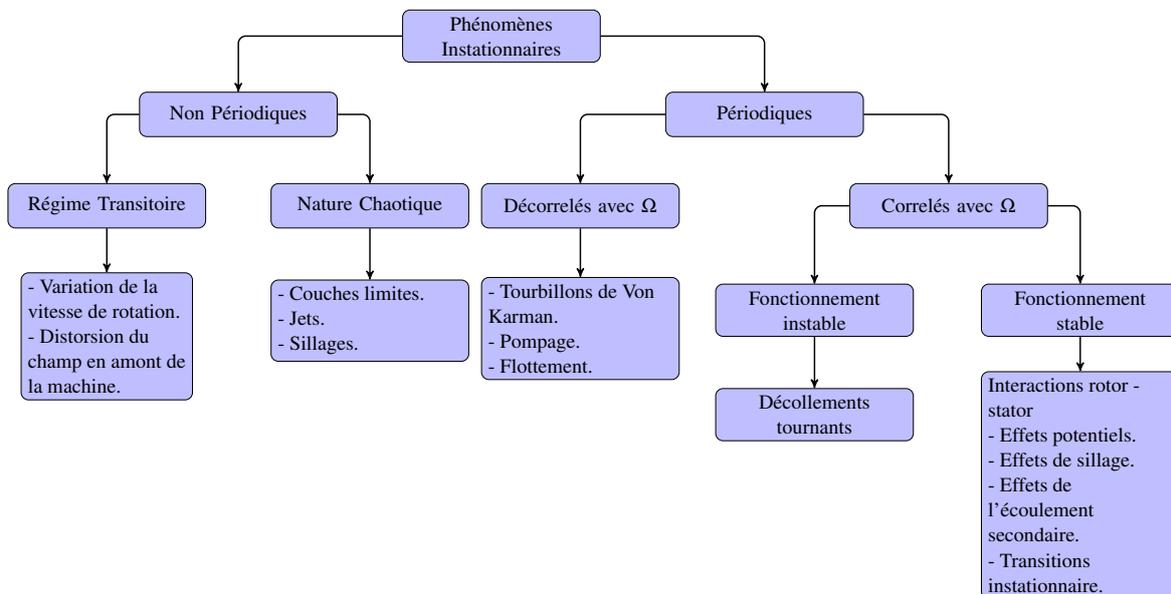


FIGURE 1.4 : Classification des principaux phénomènes instationnaires dans une turbomachine.

### 1.2.1.1 Instabilités de fonctionnement

Les pompes doivent opérer dans une large plage de débits et de pressions de refoulement avec des rendements acceptables dans tout le domaine d'intérêt, par une durée de vie imposée. Le niveau des effets instationnaires dans l'écoulement doit être suffisamment faible pour éviter des efforts mécaniques trop élevés et des instabilités de l'écoulement dans l'ensemble turbomachine-système de vannage-circuit récepteur. Pour les pompes, l'opération à débit nul est possible, mais précédée d'une large zone à rendements décroissants, dont le début correspond à l'apparition du phénomène de prérotation. Les informations dont on dispose à l'heure actuelle permettent de penser que dans la plupart des cas, la prérotation pour les pompes est précédée ou accompagnée de décollement tournant. Quelques références indiquent que la prérotation de l'écoulement d'entrée à une vitesse voisine de celle de rotation de la roue, est précédée d'une phase de perturbation due au décrochage tournant, à une vitesse voisine de 0.5 de celle de la roue. L'effet d'asymétrie de la volute ne paraît pas influencer le phénomène de décrochage tournant et d'autre part il a été également vérifié que pour la génération de la prérotation, l'effet de la volute est secondaire devant celui dû au dessin de la roue et, en particulier, à l'apparition de conditions voisines de celles du décollement statique au bord d'attaque de l'aube.

### 1.2.1.2 Mécanismes périodiques corrélés avec la vitesse de rotation

#### Effets potentiels

Les effets potentiels de la roue sont une conséquence du mouvement des aubes et peuvent être assimilés à des forces de pression. En considérant les distances intergrilles généralement utilisées dans les machines, les effets potentiels sont d'un ordre de grandeur plus faible que les interactions de sillages. Cette interaction est une cause d'instationnarités car la pression dans la région située entre la rangée mobile et la rangée fixe se décompose approximativement en trois parties, une partie stationnaire et uniforme, une partie non-uniforme stationnaire dans le repère de la roue et une partie non-uniforme stationnaire dans le repère du diffuseur. Ce type d'interaction se distingue de l'ensemble des interactions d'aubage car il est indépendant des phénomènes convectifs. Sa direction de propagation est indistinctement l'amont ou l'aval.

#### Interactions instationnaires de type sillage

Le sillage de l'aubage est un phénomène de nature purement visqueuse. L'origine du sillage réside principalement dans le développement des couches limites sur l'aubage. La réunion de la couche limite du côté en dépression et celle du côté en pression forme le sillage d'aubage. Les interactions du type sillage influencent principalement les aubes situées en aval du bord de fuite d'où provient le sillage. Le déficit de vitesse des segments de sillage est modélisé par un jet négatif qui a pour conséquence un transport de masse dans le plan aube à aube, de l'intrados d'une aube vers l'extrados de l'aube adjacente. Ce transport induit localement des gradients de pression, qui, combinés avec la vorticité contenue

dans les sillages, induisent un mécanisme tourbillonnaire à l'échelle du canal interaube. Les segments de sillage sont aussi déformés sous l'action des gradients de pression transverses qui proviennent de la circulation autour des aubes. Le sillage qui se forme au bord de fuite des aubes par la coalescence des couches limites provenant de l'extrados et de l'intrados interagissent avec les parois internes des parties fixes et les grosses structures de l'écoulement.

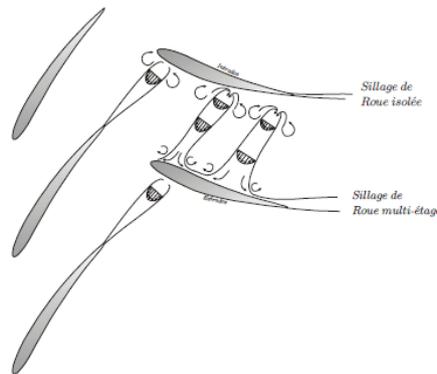


FIGURE 1.5 : Interactions de type sillage.

### Structure jet-sillage

Normalement, l'écoulement dans une pompe centrifuge se détache de l'extrados proche du bord de fuite, et produit un sillage considérable sur l'intrados de chaque aube. Fischer et Thoma (1932) ont identifié ce phénomène, et ont observé que le sillage peut se produire même dans des conditions de fonctionnement nominal. Il s'entend sur toute la longueur de la roue. En conséquence, l'écoulement sortant possède une zone de faible vitesse (sillage proche) du côté intrados, et, nécessairement, un écoulement avec une vitesse plus élevée dans le reste du canal d'aubage.

#### 1.2.1.3 Mécanismes instationnaires décorrélés avec la vitesse de rotation

On peut noter ceux qui sont décorrélés avec la vitesse de rotation de la machine. Il s'agit plus particulièrement des phénomènes de décrochage tournant, de pompage et de flottement. Le décrochage et le pompage se traduisent par l'apparition de structures périodiques dans la direction circumférentielle mais découplées des fréquences spatiales propres à la machine.

#### Décrochage tournant

Lors d'un fonctionnement en régime partiel générant de fortes incidences, des zones à débit réduit, nul ou négatif, apparaissent dans un ou plusieurs étages. Ces zones se répartissent en cellules de nombre et de longueur variables et tournant en bloc à vitesse angulaire constante. Elles affectent tout

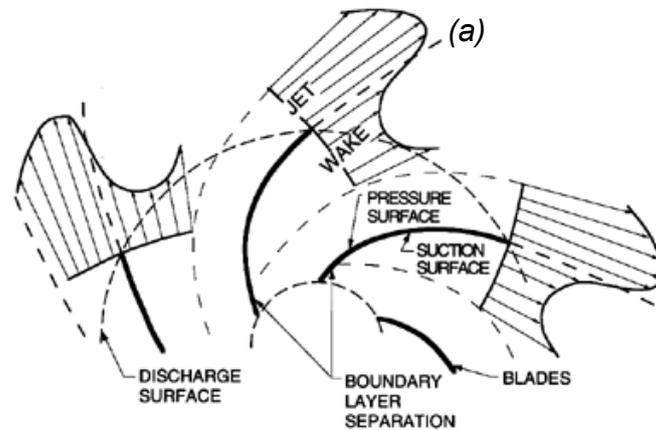


FIGURE 1.6 : Écoulement sortant des aubes d'une pompe centrifuge, ((a) structure et-sillage résultante de la séparation de l'écoulement à partir des surfaces côtés extrados et intrados.)

ou une partie de la hauteur de la veine et leur vitesse de rotation varie de 0.2 à 0.8 fois celle de la roue. Ce phénomène peut engendrer des ruptures par fatigue. Ce régime d'écoulement est essentiellement dû à l'épaississement des couches limites. L'obstruction d'un canal tend à dévier l'écoulement sur les deux canaux adjacents, ce qui augmente l'incidence sur l'aube côté intrados (ou sens inverse de rotation) et diminue l'incidence de l'aube côté extrados (sens de rotation). Dans le repère relatif, la cellule se propage donc dans le sens inverse du sens de rotation. Lors de l'apparition de ce mécanisme, on observe généralement un nombre élevé de cellules de décrochage, puis lors de l'organisation de ce phénomène, ce nombre diminue. Le décrochage tournant pénalise fortement le fonctionnement de la machine. Une fois établi, ce phénomène est stable et présente un cycle d'hystérésis important.

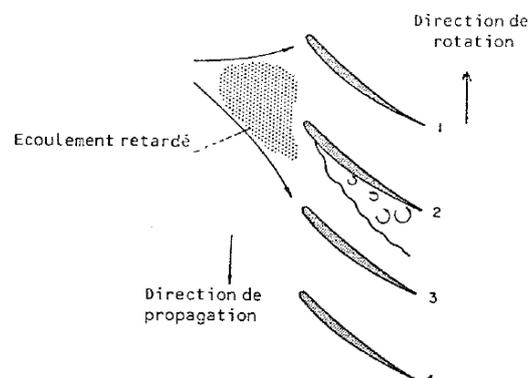


FIGURE 1.7 : Décrochage tournant.

## **1.2.2 Mécanismes de génération de bruit acoustique d'origine fluidodynamique**

### **1.2.2.1 Déplacement volumétrique du fluide imposant un mouvement à la paroi solide**

Ce phénomène se nomme aussi bruit d'épaisseur d'aube puisque, lorsque la roue tourne, les aubes déplacent du fluide, ce qui génère des fluctuations de pression périodiques dans le champ adjacent. Cette formation de fluctuations de pression est comparable à celle d'une source monopolaire acoustique. Cependant, dans le cas de pompes centrifuges la vitesse tangentielle des aubes (et donc la vitesse des fluctuations de pression induites par leur mouvement) est si faible par rapport à la vitesse du son que le bruit émis par l'épaisseur d'aube est faible en champ lointain.

### **1.2.2.2 Forces non stationnaires exercées par l'écoulement sur des surfaces rigides**

Il s'agit d'une génération de son de type bipolaire, puisque l'émission sonore est importante dans le sens perpendiculaire à la surface et très faible ou nulle dans la direction tangentielle. Ainsi, du point de vue acoustique ces forces non-stationnaires peuvent être considérées comme une distribution de dipôles sur la surface (qui peuvent être mobiles, comme une aube, ou non) dont la capacité d'émission est proportionnelle aux forces fluidodynamiques appliquées.

### **1.2.2.3 Sources volumétriques dans le fluide**

Ces sources comprennent la génération du son associée à la turbulence de l'écoulement qui est équivalente à celle d'une distribution de sources ponctuelles quadripolaires, avec une puissance sonore donnée par les dérivées secondes spatiales des termes du tenseur de contraintes turbulentes de Lighthill. Il s'agit d'un rayonnement qui n'est important que lorsque le nombre de Mach atteint des valeurs proches de l'unité. Dans le cas des pompes centrifuges, ce rayonnement est donc très faible.

En conséquence, les principales sources de bruit acoustique dans les pompes sont les forces fluidodynamiques exercées sur les contours de la machine, y compris les surfaces mobiles (les aubes de la roue), et les surfaces fixes (la volute et les aubes directrices telles que les ailettes antiprerrotation et les ailettes du diffuseur).

## **1.2.3 Forces fluidodynamiques**

Ces forces sont dues aux phénomènes instationnaires de l'écoulement qui peuvent avoir des composantes à large bande ou périodiques, et peuvent donc générer un champ sonore de la même nature. On peut distinguer différents types de mécanismes d'induction de forces fluidodynamiques, qui sont décrits dans les paragraphes suivants.

### 1.2.3.1 Forces stationnaires exercées sur les aubes

Les forces sont exercées sur les aubes d'une roue, placée dans un écoulement stationnaire et uniforme. En considérant un système de référence fixe, dans chaque position des fluctuations de pression périodiques se manifesteront à la fréquence de passage des aubes (et à ses harmoniques). Le son ainsi produit (appelé bruit Gutin) a une très faible efficacité d'émission, et est donc, semblable au bruit d'épaisseur d'aube. Les fluctuations de ces forces sont liées à la vitesse des aubes, qui est très faible par rapport à la vitesse du son dans le cas de pompes centrifuges.

### 1.2.3.2 Forces exercées sur la roue par l'écoulement extérieur stationnaire non-uniforme

Si l'écoulement extérieur est non-uniforme, l'écoulement dans le canal est soumis à une fluctuation égale à la période de rotation et chaque aube observe une composante de la force fluctuant à la fréquence de rotation. Il existe des cas de conditions externes non-uniformes tels que le sillage des ailettes directrices en entrée ou les distributions de pression et de vitesse non-uniformes le long de la volute, pour opérer en dehors du point de fonctionnement nominal. En général, on peut avoir un rendement d'émission sonore élevé lorsque la longueur d'onde de la distorsion dans la direction circumférentielle est de l'ordre de l'espacement entre les aubes, ce qui n'est pas souvent le cas avec les pompes centrifuges de volute sans diffuseur d'ailettes.

### 1.2.3.3 Forces exercées sur la roue par l'écoulement instationnaire

Lorsque les fluctuations de l'écoulement entrant sont instationnaires, comme par la turbulence, les forces exercées sur les aubes prennent des composantes aléatoires et le son émis a alors un spectre à large bande. La même chose se produit avec la turbulence générée par les couches limites des surfaces de la roue. S'il existe un détachement des tourbillons à partir des sillages générés en amont de la roue (ailettes directrices) ou depuis leurs propres aubes (à partir du bord d'attaque ou du bord de fuite), les spectres peuvent présenter des composantes discrètes à la fréquence caractéristique de détachement. Cela est étendu au cas d'autres écoulements secondaires instationnaires comme le détachement rotatif.

### 1.2.3.4 Forces exercées sur le stator par l'écoulement instationnaire

Ces forces comprennent les différents mécanismes d'écoulement instationnaire qui impactent le stator, par exemple celles du point précédent ou l'incidence de l'écoulement non-uniforme en aval de la roue (avec le modèle jet-sillage) sur les aubes directrices du diffuseur quand elles existent, ou directement sur la volute de la pompe. Dans ces conditions, on considère que les forces instationnaires exercées sur les ailettes directrices du diffuseur ou sur le bec de volute agissent comme des émetteurs acoustiques différents. En général, les forces fluidodynamiques induites et la génération de bruit acoustique sont fortement dépendantes de la géométrie et des caractéristiques de l'écoulement moyen, c'est-à-dire,

du point de fonctionnement de la machine. Dans le cas de pompes centrifuges à volute et sans diffuseur d'ailettes, l'écoulement instationnaire provenant des canaux de la roue génère des fluctuations de pression de forte amplitude dans la zone du bec, entre la roue et la volute, cette zone étant considérée comme la principale région émettrice de bruit tonal à la fréquence de passage des aubes.

## 1.2.4 Mécanismes de génération de bruit hydraulique

### 1.2.4.1 Bruit dû au défilement des aubes

Il est généré par l'impact du champ de vitesse hétérogène régnant à la sortie de la roue sur le bec de la volute (ou sur les ailes du diffuseur). C'est le signal hydraulique de plus grande amplitude. Le bruit, dû au défilement des aubes de la roue, existe même pour une réalisation parfaite du rotor. Il est lié aux mécanismes profonds qui génèrent la pression dans la pompe. Pour cette raison, on l'appelle aussi « bruit fondamental ». Il a pour fréquence :

$$f_r = Nn_r \quad (1.1)$$

avec  $N$  vitesse de rotation de la pompe et  $n_r$  nombre d'aubes de la roue. La fréquence  $f_r$  donne souvent lieu à des harmoniques d'amplitude élevée.

### 1.2.4.2 Bruit dû à la présence d'un diffuseur

Lorsque la roue est suivie d'un diffuseur, outre le bruit dû au défilement des aubes de la roue, il existe une modulation de l'écoulement due à la présence des aubes du diffuseur. La fréquence correspondante est :

$$f_d = Nn_d \quad (1.2)$$

avec  $n_d$  nombre d'aubes du diffuseur. Le bruit de fréquence  $f_d$  est d'un niveau plus bas que le bruit de fréquence  $f_r$ . Des fréquences composées ou d'interférences peuvent être rencontrées :  $Nn_r n_d$  et  $N(n_d \pm n_r)$ . Leur amplitude est faible.

### 1.2.4.3 Bruit dû à la fréquence de coïncidence

Lorsque les nombre d'aubes  $n_r$  et  $n_d$  ne sont pas premiers entre eux, une fréquence particulière due à la rencontre simultanée de plusieurs aubes du diffuseur avec plusieurs aubes de la roue apparaît. Dans le cas général, la fréquence du phénomène est :

$$f_c = Nn_r n_d / (\text{PGCD de } n_r, n_d) \quad (1.3)$$

avec PGCD le plus grand commun diviseur.

#### 1.2.4.4 Bruit dû aux imperfections de réalisation de la roue

La roue d'une pompe est presque toujours réalisée en fonderie. Il en résulte des écarts géométriques entre les différents canaux et un champ de pression à la sortie de la roue qui n'est pas périodique. Chaque canal a un champ de pression qui lui est propre, créant ainsi une force radiale tournante dite balourd hydraulique. Il se comporte, pour un point de fonctionnement donné, de la même façon qu'un balourd mécanique, en particulier en variant comme  $N^2$ . Il représente souvent en amplitude une valeur égale à plusieurs fois celle du balourd mécanique. La modulation sur un tour du champ de vitesse à la sortie de la roue génère aussi, au niveau du bec de la volute, un bruit purement hydraulique. La fréquence fondamentale du phénomène est :

$$f_{imp} = N \quad (1.4)$$

#### 1.2.4.5 Bruit à l'entrée de la roue

Lorsque la roue est précédée de bras, ou d'un croisillon, ou d'un coude assurant un changement de direction de  $90^\circ$ , le champ de vitesse à l'entrée de la roue n'est pas uniforme. Le sillage d'un bras rencontre une aile  $n_r$  fois par tour et donne lieu à des phénomènes proches de ceux qui existent sur le bec de la volute. Ils sont cependant de moindre importance. En effet, le sillage affecte surtout la vitesse débitante  $W_{m1}$  qui est la petite composante du vecteur  $\vec{W}_1 = \vec{W}_{m1} + \vec{W}_{u1}$ . La fréquence du phénomène est :

$$f_{ent} = Nn_r \quad (1.5)$$

#### 1.2.4.6 Bruit dû aux fuites internes

Les fuites internes se manifestent par des jets de liquide dont le débit représente entre 1 et 15% du débit de la pompe, selon son nombre de tours spécifiques  $N_s$ , sa taille, ses jeux, la présence ou non d'un piston, etc.

Le bruit dû aux fuites n'a pas de fréquence bien définie. Etant donné les niveaux d'énergie importants mis en jeu, il contribue de façon notable au bruit de fond de la pompe.

### 1.2.4.7 Bruit généré par les tourbillons de Bénard-Von Karman

Lorsqu'un obstacle est placé dans un écoulement (cas des bras que l'on rencontre parfois dans une pièce d'aspiration), il donne lieu à des décollements, et au phénomène des tourbillons de Bénard Von-Karman dont la fréquence est :

$$f_i = SrV/D \quad (1.6)$$

où  $V$  est la vitesse de l'écoulement,  $D$  la dimension transversale de l'obstacle et  $Sr$  le nombre de Strouhal (environ 0.2).

On notera que les aubes de la roue et les aubes du diffuseur ne peuvent pas être assimilées à des obstacles. Au point de fonctionnement nominal, elles donnent lieu à des décollements faibles. En dehors du point nominal, dans les zones de récirculation les mesures montrent des phénomènes aléatoires n'ayant pas la stabilité en fréquence des tourbillons de Bénard Von-Karman.

### 1.2.4.8 Bruit dû à la turbulence

C'est un bruit à large bande, dû à l'impact de noyaux turbulents sur les parois de la pompe, ou sur celles de la tuyauterie. La figure 1.8 montre l'importance de la turbulence dans un conduit long, d'un diamètre de 0.2 m, où circule de l'eau, en fonction de la vitesse de l'écoulement. On notera sur la figure 1.8, le faible niveau de bruit dû à la turbulence. Il représente à 100 Hz, pour  $V = 6$  m/s, 16 dB/0.1 Pa, ou -4 dB/1 Pa. On peut rattacher au bruit de turbulence le bruit créé par les circulations centrifuges qui existent dans les cavités situées de part et d'autre de la roue, vis-à-vis du flasque avant et du flasque arrière. Les vitesses de circulation s'y retrouvent totalement dégradées sous cette forme.

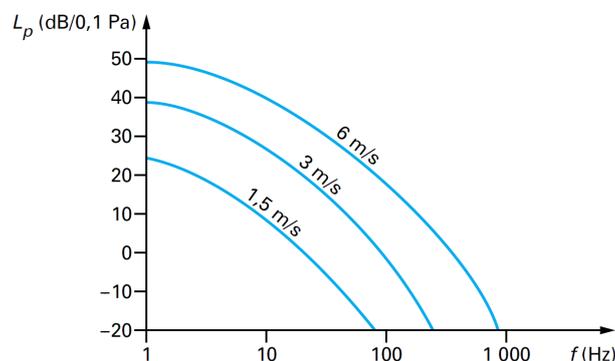


FIGURE 1.8 : Bruit dû à la turbulence dans une conduite, Réf. [4].

### 1.2.4.9 Bruit en régime désadapté

Lorsque la pompe fonctionne en régime désadapté (en dehors du débit nominal), on constate une augmentation générale du bruit et des vibrations. À petit débit, cette augmentation est très nette sur le bruit hydraulique dû au défilement des aubes de la roue et sur le bruit de fond à large bande dû aux récirculations. La figure 1.9 montre l'influence de la désadaptation sur le bruit aérien pour les trois grandes familles de pompes rotodynamiques. On constate que la sensibilité à un fonctionnement en dehors du point nominal est d'autant plus grande que le nombre de tours spécifique  $N_s$  de la pompe est grand.

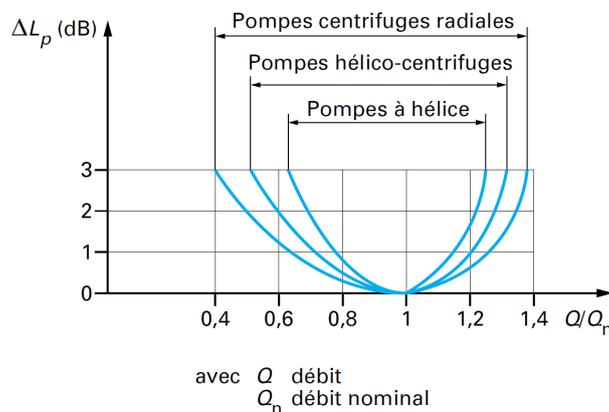


FIGURE 1.9 : Influence de la désadaptation sur le bruit aérien, Réf. [4].

### 1.2.4.10 Bruit dû à la cavitation

C'est un bruit sans fréquence bien définie que l'on rencontre lorsque la pression d'aspiration descend en dessous d'un certain seuil. Il ne peut donc être généralisé, contrairement aux bruits que nous venons d'examiner. Le bruit de cavitation n'existe donc que dans des conditions particulières, lorsque la pression  $P_0$  à l'aspiration de la pompe descend en dessous d'un certain seuil. Le bruit de cavitation est dû à l'implosion de bulles ou de poches de vapeur, soit sur elles-mêmes, soit sur une paroi. L'implosion des bulles se fait lorsqu'elles transitent d'une zone de faible pression vers une zone de forte pression. La valeur locale du gradient de pression, à l'endroit où les bulles se referment, conditionne la violence du phénomène et ce qui en découle : le bruit et l'érosion.

## 1.3 Modèles physiques

### 1.3.1 La mécanique des fluides numérique (CFD)

La CFD (Computational Fluid Dynamics) est le calcul numérique appliqué à la mécanique de fluides. Cela consiste à résoudre dans une géométrie donnée les équations fondamentales de la mécanique

des fluides, que l'on peut éventuellement coupler aux équations de transfert thermique ou de réaction chimique.

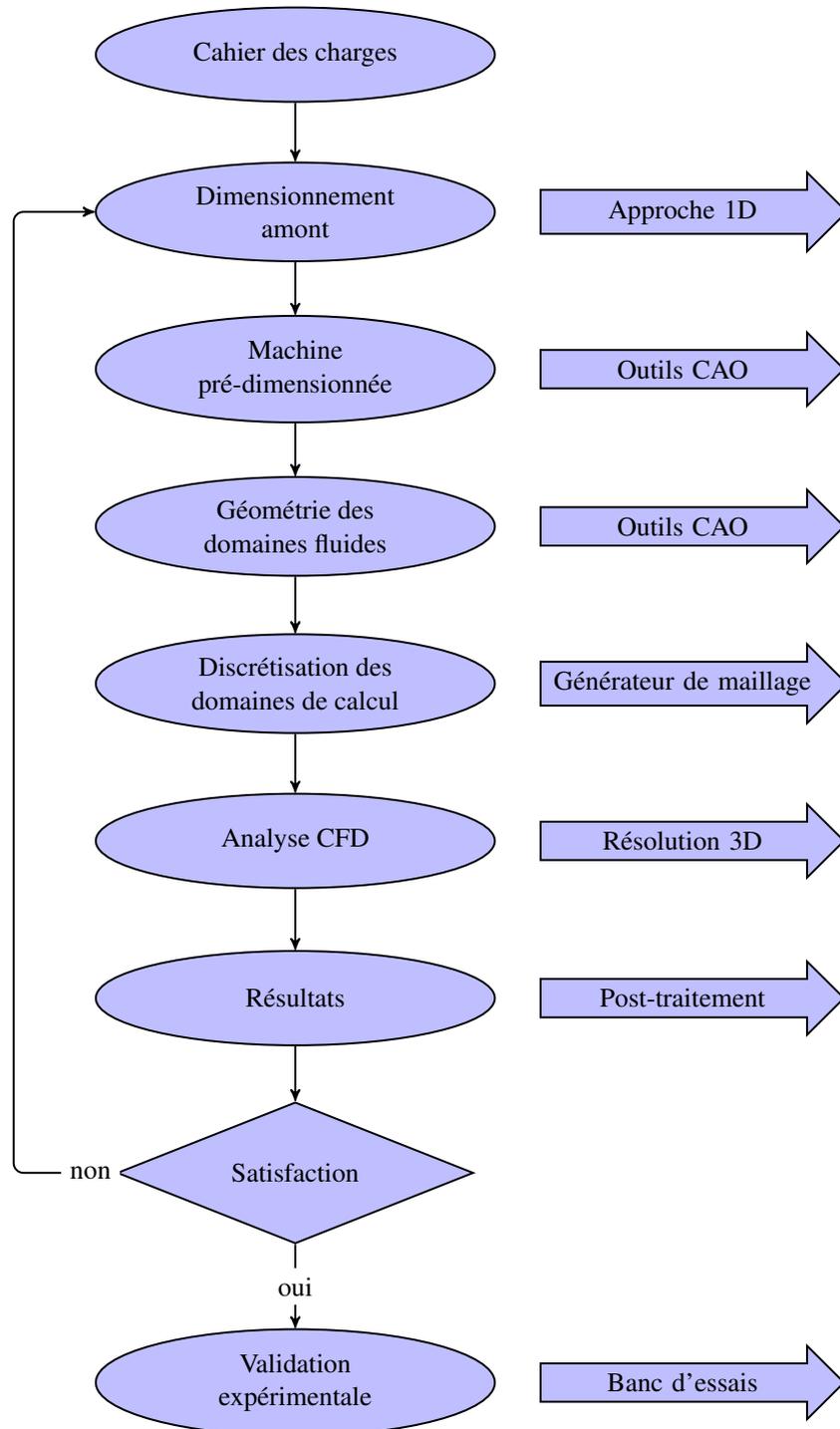


FIGURE 1.10 : Démarche globale de dimensionnement et d'analyse d'une turbomachine.

### 1.3.1.1 Étapes d'un calcul numérique

#### Représentation d'une géométrie

La première tâche est de borner le domaine de la simulation. Lorsque le système est fermé, cela ne pose pas de problème. Sur les systèmes ouverts, cela peut être plus difficile. Il faut s'assurer que l'on soit capable d'imposer correctement les conditions de frontière aux bornes du système, ou que les frontières soient suffisamment éloignées pour que le système soit peu sensible aux conditions imposées.

#### Maillage

L'étape du maillage est une étape clé pour assurer la validité des simulations. C'est l'étape de découpage du volume fluide étudié en petits volumes élémentaires. Le maillage en général n'est pas régulier : les mailles doivent être plus petites (maillage fin) dans les zones où les gradients de vitesse ou de pression vont être les plus importants. Une étude de sensibilité au maillage doit toujours être faite. Cela consiste à faire des simulations avec un nombre de mailles différent (par exemple 30% de plus) : si les résultats de simulation dépendent du maillage, il convient de resserrer celui-ci jusqu'à obtenir une indépendance entre maillage et solution. Si le maillage n'est pas assez dense, certains phénomènes locaux ne seront pas capturés (recirculations, décrochements de l'écoulement, etc).

#### Modèles physiques

Les simulations concernant un écoulement laminaire d'un fluide newtonien ne nécessitent pas l'utilisation de modèles physiques en supplément des équations de physique fondamentales. Dans tous les autres cas, il faut faire appel à un ou plusieurs modèles physiques pour représenter la turbulence, le caractère non newtonien du fluide, la coexistence de plusieurs phases et les interactions entre elles, les réactions chimiques, la porosité du milieu, etc. Il faut donc avoir une bonne connaissance de la physique et de la chimie de l'opération pour faire le bon choix.

#### Conditions aux limites

Au niveau des frontières du domaine simulé, certaines variables doivent être fixées. Par exemple s'il y a une entrée de fluide, on fixera sur le plan d'entrée le profil des vitesses, le niveau de turbulence, éventuellement la concentration en espèces et la température. Sur le plan de sortie, on pourra se contenter de fixer la valeur de la pression. Au niveau des parois, on spécifie les conditions de glissement ou d'adhérence du fluide et, éventuellement, la température de paroi ou le flux de chaleur. Cette étape est souvent difficile dans le cas des écoulements diphasiques.

## **Solveur**

C'est la partie du code de calcul consacrée à la résolution proprement dite du système d'équations discrétisées couplées aux modèles choisis. Plus le solveur est puissant, moins l'utilisateur a besoin d'intervenir. Mais il est encore souvent utile d'agir sur le solveur manuellement pour modifier le facteur de sous-relaxation ou le pas de temps afin d'assurer la convergence de la simulation. Le suivi de la convergence est assuré par le calcul des résidus (une mesure, souvent normalisée, des erreurs locales). Lorsque les résidus passent en dessous du seuil choisi, il convient de vérifier, à partir des résultats proposés, que les bilans globaux sont corrects (conservation de la masse, de la vitesse, de la pression, ...).

## **Traitement des résultats**

Les codes de calcul proposent en général un logiciel de post-traitement, qui permet de visualiser facilement les champs de vecteurs, de température, les surfaces d'isovaleur, etc. L'information est abondante, et l'utilisateur doit alors souvent exploiter les valeurs obtenues localement pour revenir à des valeurs globales qui vont caractériser l'opération (bilans, calculs de débits, de pertes de charge, de dissipation énergétique, etc.).

## **Validation expérimentale**

La dernière étape consiste à valider les résultats de simulation. Cette étape demeure d'autant plus indispensable qu'un certain nombre de choix dû être faits par l'utilisateur, particulièrement concernant les modèles physiques. La validation ne peut pas concerner l'ensemble des résultats, dans la majorité des cas, on ne peut se permettre qu'une validation par des valeurs globales.

### **1.3.2 Représentation de la physique du système**

De nombreux modèles physiques sont nécessaires pour tenir compte de la complexité des phénomènes. Parmi les modèles les plus utilisés, on distingue en particulier les modèles de turbulence et ceux qui permettent de prendre en compte le caractère diphasique des écoulements. Nous décrirons ici les modèles de turbulence les plus utiles dans le domaine de la mécanique des fluides.

#### **1.3.2.1 Modélisation de la turbulence**

La plupart des écoulements simulés dans des applications industrielles sont turbulents. La turbulence se caractérise par le développement dans l'écoulement de tourbillons de différentes tailles et de différentes durées de vie. Les plus grands tourbillons, qui ont la plus longue durée de vie, peuvent transporter la chaleur, la quantité de mouvement, les espèces, alors que les plus petits qui ont une durée de vie plus courte assurent la conversion de l'énergie cinétique en chaleur par frottements visqueux. En outre, on

est essentiellement intéressé par la connaissance du comportement de l'installation moyenné dans le temps.

Afin de prendre en compte la turbulence, chaque variable est décomposée en deux termes, un terme moyen et un terme fluctuant. Par exemple, une composante de la vitesse, de la pression et de la température s'écrivent à un instant donné sous la forme suivante (décomposition des variables en composantes moyenne et fluctuante) :

$$u = \bar{u} + u', \quad p = \bar{p} + p', \quad T = \bar{T} + T' \quad (1.7)$$

Par définition, le second terme, qui est le terme fluctuant, lié aux petites échelles, a une valeur moyenne nulle. Si on remplace les valeurs instantanées et que l'on moyenne le tout, dans le cas où la masse volumique est constante, on obtient l'équation de transport turbulent :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{\varphi}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\varphi} \bar{u} + \bar{\rho} \overline{\varphi' u'}) - \nabla \cdot (\mu / \sigma_{\varphi} \nabla \bar{\varphi}) = S_{\varphi} \quad (1.8)$$

Si  $\varphi$  représente une composante de la vitesse, le terme  $\overline{\varphi' u'}$  est dit contrainte de Reynolds et les équations sont appelées les équations RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes). Ce terme représente le transport effectif par les tourbillons. On peut noter que l'expression de l'équation de conservation de la matière ne change pas. De plus, si la masse volumique n'est pas une constante, on peut l'inclure dans l'expression des termes moyen avec un processus qui s'appelle moyenne de Favré.

Ainsi, le problème de la représentation de toutes les échelles de la turbulence a été déplacé : il s'agit maintenant d'être capable de modéliser les termes de contraintes de Reynolds. Le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. L'étape suivante va donc consister à utiliser un modèle de turbulence, afin de « fermer » le système d'équations.

### 1.3.2.2 Choix d'un modèle de turbulence

On peut distinguer trois manières de simuler un écoulement turbulent : la simulation numérique directe (DNS), la simulation des grandes échelles (LES) et l'approche statistique.

#### Modèles de « longueur de mélange » ou modèles à zéro équation

Dans cette catégorie de modèles, on utilise une analogie entre le transport diffusif et le transport turbulent. On peut alors écrire le modèle de longueur de mélange :

$$-\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad (1.9)$$

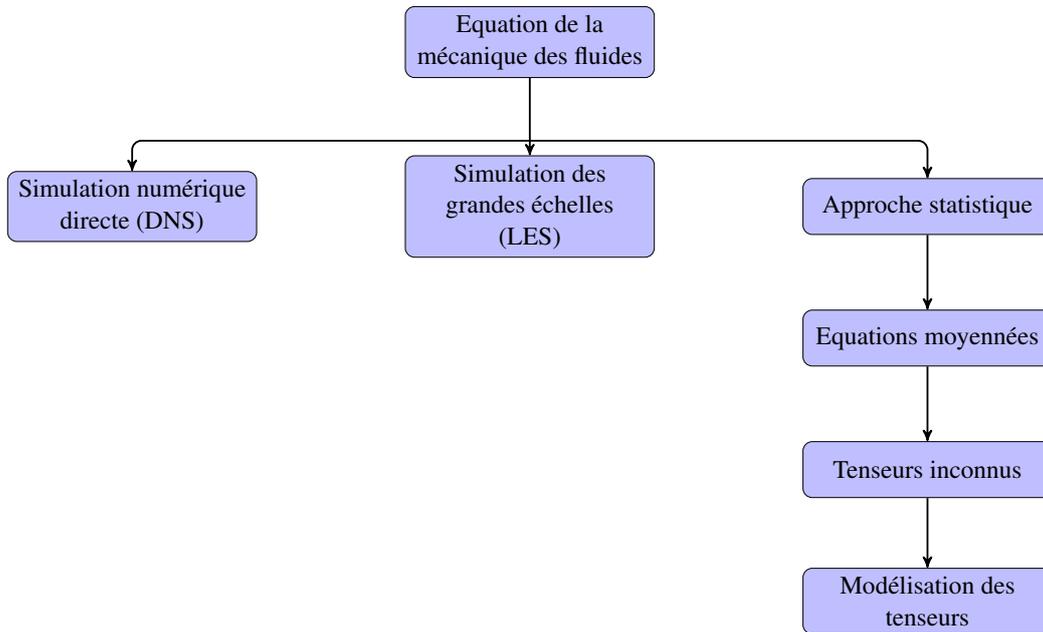


FIGURE 1.11 : Modélisation de la turbulence.

où  $\mu_t = \rho u_t \ell_t$ , avec  $\mu_t$  la viscosité turbulente.

Par analogie avec la théorie cinétique des gaz, on peut alors faire l'hypothèse que la viscosité turbulente est proportionnelle au produit d'une vitesse turbulente et d'une échelle spatiale de turbulence. Cette viscosité est une propriété de l'écoulement et non pas du fluide. Souvent on utilise le modèle de Prandtl qui permet d'écrire :

$$u_t = \ell_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (1.10)$$

et donc la viscosité turbulente pour le modèle de longueur de mélange :

$$\mu_t = \rho \ell_t^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (1.11)$$

Le modèle est fermé si on connaît l'expression de la longueur de mélange  $\ell_t$ . Ce genre de modèle est très utilisé pour les simulations des écoulements autour d'une aile d'avion, car la physique des écoulements est alors très bien connue. Ces modèles ont l'avantage d'être très simples à utiliser et peu coûteux numériquement. Leur utilité est pourtant très limitée car il est souvent difficile d'atteindre l'expression de  $\ell_t$  dans le cas de géométries complexes. De plus, ils ne prennent pas en compte le transport de la turbulence.

**Modèle  $k - \varepsilon$** 

Pour éviter les problèmes du modèle de « longueur de mélange », on peut retenir l'idée d'une viscosité turbulente, mais utiliser un moyen plus sophistiqué pour obtenir l'expression des échelles de vitesse et de longueur. Ce modèle est basé sur les deux équations de conservation de l'énergie cinétique turbulente  $k$  et du taux de dissipation de l'énergie cinétique  $\varepsilon$ . Dans ce modèle, on écrit alors :

$$u_t = \sqrt{k}, \quad \ell_t = k^{3/2} / \varepsilon \quad (1.12)$$

$$\text{où } \mu_t = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon \text{ et } C_\mu = 0.09$$

L'équation de conservation de l'énergie cinétique turbulente est très proche de l'équation exacte que l'on peut obtenir par le processus de moyenne de Reynolds, mais l'équation relative au taux de dissipation de l'énergie cinétique est très approximative et s'appuie sur l'analyse dimensionnelle. Il a en effet tendance à prédire des viscosités turbulentes trop élevées dans les zones stagnantes, dans les écoulements rotationnels et dans les cas où la courbure des lignes de courant est importante. Le modèle est souvent construit avec une seule source de turbulence, celle qui est produite par le cisaillement. Dans les cas où il existe des effets de différence de densité, il convient de s'assurer que la production de turbulence ainsi générée est incluse dans le modèle.

Le modèle  $k - \varepsilon$  est adapté aux écoulements où la turbulence est bien développée, c'est-à-dire où le nombre de Reynolds est élevé. On l'utilise avec une fonction de paroi qui permet de faire l'hypothèse que, dans la zone proche des parois, le profil des vitesses peut être modélisé par une loi logarithmique. Il est donc important de s'assurer que le premier nœud du maillage ne se situe pas dans la sous-couche laminaire. Certains codes permettent de vérifier ce critère automatiquement, d'autres font l'hypothèse que les parois sont situées à la limite de la sous-couche laminaire.

Une variante du modèle, appelée modèle  $k - \varepsilon$  à bas nombre de Reynolds, peut être utilisée pour capturer les détails de l'écoulement à proximité des parois, mais il nécessite un maillage extrêmement fin et les équations à résoudre sont très raides, la convergence est donc difficile.

Une autre variante est le modèle RNG  $k - \varepsilon$  (Re-Normalization Group) dans lequel la constante  $C_2$  est une fonction du rapport  $k/\varepsilon$  et de la vitesse de déformation locale. Ce modèle peut être préconisé pour les écoulements présentant des zones où le gradient de vitesses est très élevé et ce modèle peut capturer des structures que la diffusivité du modèle standard empêche de calculer.

**Modèle  $k - \omega$** 

Ce modèle résout les équations relatives à  $k$  et à la fréquence de turbulence  $\omega$ . Il fonctionne jusqu'à la paroi et il est meilleur que le modèle  $k - \varepsilon$  dans cette zone. Mais, dans les zones loin des parois, sa sensibilité extrême à la valeur de la turbulence dans l'écoulement n'est pas physique. Le plus souvent, on

utilise une combinaison des modèles  $k - \varepsilon$  et  $k - \omega$ , avec une fonction qui permute entre le modèle  $k - \omega$  proche des parois et le modèle  $k - \varepsilon$  loin des parois. Ce modèle, dit souvent modèle  $k - \omega$  baseline, est très efficace pour la simulation du transfert de chaleur si le maillage est assez fin proche de la paroi.

### Modèle SST

Le modèle  $k - \varepsilon$  a tendance à surestimer la viscosité turbulente, ce qui induit une difficulté à prédire des phénomènes de séparation ou de ségrégation. Si on ajoute une fonction qui limite les valeurs de la viscosité turbulente au modèle  $k - \omega$  baseline, on obtient le modèle de transport de contrainte de cisaillement (Shear Stress Transport : SST) qui est maintenant bien validé et de plus en plus utilisé.

### Modèle à contraintes de Reynolds (Reynolds Stress Model : RSM)

Ce modèle est encore plus sophistiqué. Il évite de faire l'hypothèse d'isotropie de la viscosité turbulente, car il résout les équations pour les six composantes des contraintes de Reynolds et pour  $\varepsilon$ . Ce modèle est donc très lourd numériquement et la convergence est souvent difficile. Il existe de nombreuses variantes de ce modèle, qui concernent en particulier la façon de modéliser la corrélation de la fluctuation de la pression et la déformation. Ce modèle est préconisé dans le cas des écoulements fortement tourbillonnaires, comme par exemple dans le cas d'un cyclone ou d'un injecteur dans une chaudière à combustion.

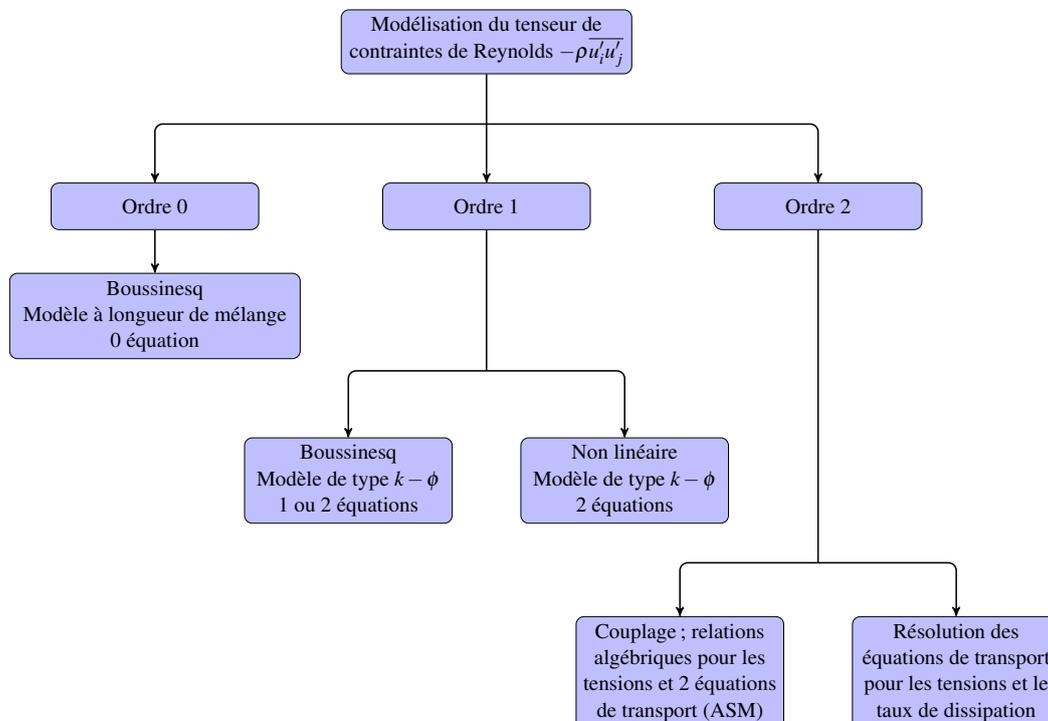


FIGURE 1.12 : Classement des modèles de turbulence.

### **Simulation des grandes échelles ou Large Eddy Simulation (LES)**

Dans l'approche LES, toutes les échelles de la turbulence sont résolues sauf celle relative à la dissipation, qui est modélisée. Il faut donc utiliser un maillage très fin et opter pour une solution instationnaire dans la résolution des équations. Après un temps de calcul assez long, la solution peut reproduire toutes les échelles de la turbulence. Ce modèle est très puissant dans le cas où les écoulements ne sont pas dominés par la présence des parois parce qu'il faut alors un maillage très fin ou l'utilisation d'une fonction de parois dans cette région. Ce modèle permet d'accéder à un tel niveau de détails qu'il peut être utilisé pour la prédiction du bruit.

Avec l'augmentation de la puissance des ordinateurs, ce modèle est devenu plus intéressant. Mais il faut éviter de l'utiliser avec un maillage trop grand, ou pour des simulations en deux dimensions parce que le modèle s'appuie sur des phénomènes tridimensionnels.

### **Simulation directe ou Direct Numerical Simulation (DNS)**

La DNS est théoriquement l'approche la plus puissante car elle fait appel à un maillage très fin et à un pas de temps très petit pour résoudre les équations de Navier-Stokes sans aucun modèle. Mais même avec les ordinateurs les plus puissants, on ne peut aujourd'hui étudier que les écoulements simples. Cette approche n'a donc encore aucune utilité industrielle. Elle reste réservée aux chercheurs qui travaillent sur la construction de modèles.

## **1.4 Méthodes numériques**

### **1.4.1 Méthodes numériques usuelles**

Très peu d'équations aux dérivées partielles peuvent être résolues de façon exacte par un algorithme (méthode directe). Cependant, plusieurs méthodes permettent de discrétiser un système d'équations, c'est-à-dire, certains problèmes continus peuvent parfois être remplacés par un problème discret dont la solution est connue pour approcher celle du problème continu. Pour cette raison et d'une manière générale, le problème exact est approché par un problème discret formulé dans un espace de dimension finie, ce qui conduit à la résolution d'un système linéaire. Les deux critères principaux de choix d'une de ses approches numériques sont souvent, d'une part la complexité de la géométrie du domaine de calcul et d'autre part le niveau de précision requis. Ces méthodes peuvent être cataloguées en cinq grandes familles : les différences finies, les éléments finis, la méthode Galerkin Discontinue (GD), les méthodes spectrales et les méthodes volumes finis, chacune de ces méthodes a ses avantages et ses inconvénients.

#### 1.4.1.1 Méthode des différences finies

La méthode consiste en une discrétisation des opérateurs différentiels sur une grille de pas d'espace fixe, à l'aide de développements de Taylor tronqués. Sa mise en œuvre utilise donc la formulation différentielle du problème en remplaçant chacun des opérateurs différentiels par un quotient aux différences.

Cette méthode, par sa grande simplicité d'écriture et sa facilité de mise en œuvre, présente un faible coût de calcul. Elle permet également d'atteindre aisément des ordres de précisions élevés. Mais elle reste limitée à des géométries simples, ce qui rend son application impossible pour notre cas, où l'on est confronté à des géométries complexes.

#### 1.4.1.2 Méthode des éléments finis

Cette méthode consiste à approcher dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie en général) dans un espace de dimension infinie. Dans ce cas, la solution approchée est une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres, comme par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage. La formulation variationnelle est obtenue en intégrant le produit scalaire de l'équation par une fonction test. Puis, en effectuant des intégrations par partie, on arrive à affaiblir la régularité demandée aux inconnues et/ou à faire apparaître des termes de bord qui correspondent aux conditions aux limites du problème.

Cette méthode a été initialement développée pour résoudre des problèmes de mécanique des milieux continus à géométrie complexe. Elle présente une facilité de prise en compte des conditions aux limites, mais celle-ci est très délicate à mettre en œuvre lors de la définition des éléments finis utilisés dans la résolution des problèmes d'ordres élevés ( $>2$ ). Elle présente également un grand coût en temps de calcul et de mémoire.

#### 1.4.1.3 Méthode de Galerkin Discontinu (GD)

La méthode Galerkin Discontinu (GD) repose sur une base de fonctions discontinues d'un élément de maillage à un autre, l'ordre d'interpolation pouvant varier d'une cellule à une autre. De plus, le champ approché peut être discontinu à l'interface entre deux cellules voisines. La méthode peut être interprétée comme une approche éléments finis où aucune continuité entre les éléments n'est imposée, ou comme une généralisation des méthodes volumes finis d'ordres élevés. Cependant, cette méthode n'est devenue populaire que récemment comme une méthode pour résoudre la dynamique des fluides.

Elle fournit un cadre pratique pour le développement des méthodes d'ordres élevés en utilisant des maillages non structurés. La méthode est bien adaptée pour des calculs à grande échelle en fonction du temps dans lequel une grande précision est requise. Une distinction importante entre la méthode GD et la méthode habituelle des éléments finis, est à noter : dans la méthode GD, les équations qui en résultent sont locales à l'élément générateur. La solution au sein de chaque élément n'est pas reconstruite par rapport à l'élément voisin. Sa formulation compacte peut être appliquée à proximité des frontières sans

traitement spécial, ce qui augmente considérablement la robustesse et la précision de mise en œuvre des conditions aux limites.

#### 1.4.1.4 Les méthodes spectrales

Contrairement à la méthode des éléments finis qui est une approche locale (elle se rapproche de la solution comme une combinaison linéaire des fonctions par morceaux qui sont non nulles sur les sous-domaines de petite taille), la méthode spectrale se base sur une approche globale pour laquelle la géométrie du domaine est capitale, elle se rapproche de la solution comme combinaison linéaire de fonctions continues qui sont généralement non nulles sur le domaine de la solution. Ces méthodes reposent sur un changement d'espace, entre l'espace physique du domaine de calcul et un espace de fonctions qui sont définies sur tout le domaine de calcul, connues analytiquement et qui forment une base de représentation convergente des fonctions de l'espace physique.

Ces méthodes spectrales sont connues pour leurs propriétés de convergence rapide et de précision. Virtuellement, elles sont libres de toute erreur dissipative ou dispersive. Ces méthodes peuvent donc apporter des niveaux de précision supérieurs à toute autre méthode mais restent très limitées par la nécessité d'obtenir le jeu de fonctions de base précédent qui dépend de la simplicité et de la régularité du domaine de calcul. Il est impossible d'obtenir des niveaux de résolution différents dans les différentes zones du domaine.

#### 1.4.1.5 Méthode des volumes finis

La méthode intègre sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi, de manière naturelle, des approximations discrètes conservatives et est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides. Sa mise en œuvre est simple avec des volumes élémentaires. L'idée de base de ces méthodes est de diviser le domaine spatial d'existence des équations en cellules appelées volumes finis et de former les équations discrètes à partir de la formulation faible du système de lois de conservation écrites pour chaque cellule.

Elle permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, sa mise en œuvre est simple et dispose de plusieurs schémas numériques pour la discrétisation numérique des flux aux interfaces des cellules. Néanmoins, cette méthode présente des difficultés à atteindre des ordres élevés, ce qui est un véritable handicap pour la résolution des problèmes en fluctuations de pression. Dans cette étude, une méthode originale est présentée pour permettre de monter en ordre de précision pour la prédiction des fluctuations de pression dans les pompes centrifuges.

### 1.4.2 Les conditions aux limites

En fonction du problème physique traité, les conditions aux limites sont différentes et leur compatibilité avec les modèles numériques associés a un impact direct sur la convergence et le réalisme des résultats

des simulations numériques. Plusieurs types de conditions aux limites sont proposés en CFD.

#### **1.4.2.1 Pression à l'entrée**

Ce type de condition aux limites est employé lorsqu'on veut imposer une pression à l'entrée du domaine de calcul. Cette condition est valable aussi bien en écoulement compressible qu'en écoulement incompressible, elle est utilisable lorsqu'on connaît la pression à l'entrée et qu'on recherche la vitesse de l'écoulement correspondante.

#### **1.4.2.2 Vitesse à l'entrée**

Cette condition aux limites sert à imposer une vitesse d'entrée au volume de contrôle. Une fois la vitesse fixée, on remonte aux autres grandeurs de l'écoulement. Cette condition aux limites est utilisable en général dans les écoulements supposés incompressibles. Pour des raisons d'instabilités numériques il est déconseillé d'appliquer la condition de vitesse à l'entrée dans le cas des écoulements compressibles.

#### **1.4.2.3 Débit massique à l'entrée**

Cette condition aux limites consiste à fixer le débit de l'écoulement à l'entrée pendant que la pression totale de l'écoulement varie. Dans plusieurs applications, la condition de pression à l'entrée rend la convergence des calculs plus lente, il est conseillé dans ces cas d'appliquer la condition de débit massique à l'entrée. Pour les calculs des écoulements incompressibles, il n'est pas nécessaire d'imposer le débit massique à l'entrée. La vitesse de l'écoulement impose la valeur du débit massique du fait que la masse volumique du fluide est constante.

#### **1.4.2.4 Pression à la sortie**

Cette condition permet d'imposer une valeur de la pression statique à la sortie du volume de contrôle. La valeur de la pression statique ne peut être imposée que lorsque l'écoulement est subsonique. Le processus de convergence devient plus rapide lorsque la valeur de la pression à la sortie imposée est proche de la réalité.

#### **1.4.2.5 Condition de paroi**

Cette condition aux frontières permet de spécifier les parois du volume de contrôle. Les parois peuvent être déclarées fixes ou en mouvement relatif comme les rotors des machines rotodynamiques. Pour des écoulements visqueux, la condition de non glissement est associée à cette condition aux limites.

### 1.4.2.6 Condition de périodicité

La condition de périodicité est utilisée lorsque le domaine de calcul présente une répétition géométrique régulière des sous domaines fluides. Beaucoup de problèmes en turbomachines peuvent être traités en utilisant cette stratégie de modélisation, notamment les machines axiales telles que les ventilateurs axiaux et les inducteurs. Les avantages sont nombreux dans cette approche de calcul. En effet, la division du domaine de contrôle en sous domaines périodiques permet de réduire considérablement le nombre de cellules de maillage nécessaire, et d'économiser ainsi les ressources informatiques et le temps de calcul. Cependant, l'application de cette technique se limite à la modélisation des géométries dites circulairement périodiques ou linéairement périodiques. Dans le cas des turbomachines, certains problèmes d'écoulement ne peuvent pas utiliser la périodicité, à l'exemple d'un écoulement dans un ensemble roue volute.

### 1.4.2.7 Condition outflow

La condition aux limites « outflow » est utilisée pour modéliser l'écoulement qui sort du domaine de calcul quand la vitesse et la pression de l'écoulement ne sont pas connus avant la solution du problème. Le solveur extrapole l'information nécessaire de l'intérieur du domaine de calcul. Il est important, cependant, de comprendre les limitations de ce type de condition. Par exemple cette condition ne peut pas s'appliquer :

- Si le problème concerne la condition de pression à l'entrée.
- Si on modélise un écoulement compressible.

La condition « outflow » s'applique pour des écoulements entièrement développés où le flux de diffusion pour toutes les variables de l'écoulement dans la direction de la sortie est nul. Néanmoins, on peut aussi définir la condition outflow aux frontières physiques, où l'écoulement n'est pas entièrement développé, si l'hypothèse d'un flux de diffusion nul à la sortie est prévue pour avoir un petit impact sur la solution du flux.

## 1.4.3 Approches de modélisation pour les zones en mouvement

Pour modéliser le mouvement d'une turbomachine, différents systèmes de référence pour les composants tournants et stationnaires sont souvent utilisés. Pour un mouvement rotatif, des conditions supplémentaires doivent être prise en compte dans les équations de mouvement. De cette façon, les solutions deviennent stables par rapport au référentiel tournant et peuvent ainsi être couplées avec les domaines stationnaires au travers d'interfaces.

Il est donc nécessaire d'utiliser un modèle d'interface approprié entre la partie tournante et les composants stationnaires. En général, trois techniques sont utilisées pour modéliser plusieurs configurations de turbomachines et notamment les pompes : le modèle « Moving Reference Frame (MRF) », le modèle « Circumferential Average (Mixing Plane) », et le modèle « Sliding Mesh ». Les deux premiers modèles

permettent une approximation stationnaire pour une grille immobile, tandis que le dernier modèle est souvent appliqué pour des approximations instationnaires. Les trois modèles donnent des résultats différents lorsqu'ils comprennent des éléments non-axisymétriques et qu'il existe des fortes interactions entre les parties tournantes et fixes.

Une pompe centrifuge est composée d'une partie rotative et d'une partie fixe, qui sont couplées dans un modèle CFD par une ou deux interfaces. Le système de référence MRF est une technique de modèle d'interface. La partie tournante, comme la roue de la pompe, est modélisée dans un repère tournant, tandis que la partie fixe est affectée à un repère fixe. Le transfert d'information entre les domaines tournant et fixe ainsi que le changement de repère s'effectuent à travers une ou plusieurs interfaces. La variation du profil de l'écoulement dans la direction circumférentielle est maintenant conservée à travers l'interface. Cependant, la position relative entre les deux composants modélisés dans leurs repères est fixée dans le temps et l'espace. Cette interface transfère ainsi la distribution non axisymétrique de l'écoulement développée seulement à la position relative donnée entre le rotor et les composants fixes vers la région voisine. Tout changement de la distribution circumférentielle de l'écoulement dû à la variation de la position relative entre les deux composants impliqués n'est pas pris en compte dans cette interface.

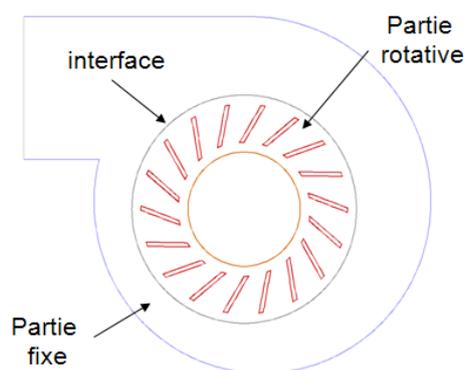
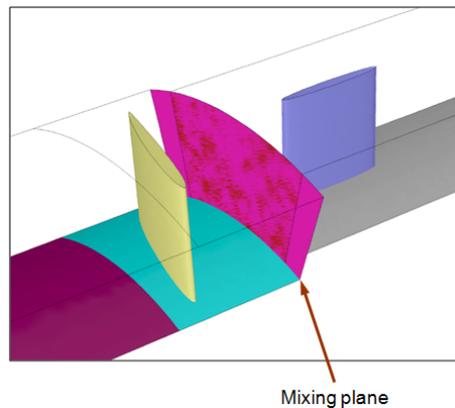


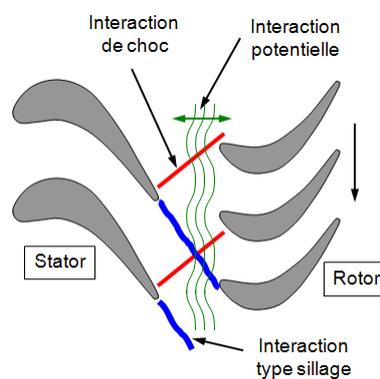
FIGURE 1.13 : Modèle MRF (Moving Reference Frame).

L'autre type de modèle d'interface est appelé « Circumferential Averaging », où le profil de vitesse de l'écoulement en amont est d'abord moyenné circumférentiellement avant de transférer l'information dans la région avale (système de référence). Cette méthode suppose que l'écoulement qui se dirige vers la zone entre les domaines fixe et tournant est stable et axisymétrique. Ainsi, cette méthode moyenne circumférentiellement les valeurs à l'interface avant de les imposer sur le repère voisin. Tout écoulement en amont non-uniforme ou distordu dans le sens circumférentiellement ne sera pas conservé dans l'autre domaine.

Le fonctionnement d'une pompe centrifuge est un processus intrinsèquement instable. L'interaction hydrodynamique entre la partie tournante et les parties fixes est un important contributeur à l'instabilité de l'écoulement présente dans l'hydraulique puisqu'elle génère des fluctuations de pression à l'intérieur de la machine. Aucun des deux modèles d'interface implémentés dans l'analyse stationnaire CFD n'est

FIGURE 1.14 : *Modèle Mixing Plane.*

capable de prédire les effets instationnaires résultants de l'interaction rotor-stator en raison de leur changement de position relative. Un troisième type d'interface, appelé « Sliding Mesh » ou maillage glissant, est disponible pour simuler le mouvement complexe du fluide causé par le déplacement relatif entre les composants tournant et fixe dans la pompe centrifuge. Dans cette approche, une interface de glissement est utilisée entre le maillage mobile du rotor et le maillage fixe des parties fixes. Lors d'un calcul instationnaire, le maillage mobile doit glisser par rapport au maillage fixe d'un certain degré au cours de chaque pas de temps selon la vitesse de rotation définie et la taille du pas de temps. L'échange d'information est continu à travers l'interface de glissement. La variation du champ de l'écoulement dans le temps et l'espace, plus précisément dans la direction circumférentielle, due à l'interaction instationnaire hydrodynamique et les effets de couplage entre la composante tournante et fixe, sont entièrement pris en compte dans la méthodologie de maillage glissant.

FIGURE 1.15 : *Modèle Sliding Mesh.*

## 1.5 Travaux de recherche sur les fluctuations de pression

Les pompes centrifuges sont une source de perturbations en particulier à la fréquence de passage des aubes. Ces perturbations affectent le comportement hydraulique et leur environnement. Elles sont très complexes et dépendants de la forme géométrique interne et des conditions de fonctionnement. Au cours des deux dernières décennies, de nombreuses études ont été réalisées afin d'approfondir la compréhension de ces phénomènes. Ci-dessous, plusieurs études qui ont servi de référence pour les travaux de recherche sont présentées.

### 1.5.1 Pompe centrifuge et son circuit

L'effet d'une pompe sur la propagation et l'excitation des ondes de pression sur le circuit a été étudié par Ulrich Bolleter [7]. Il montre que les amplitudes des fluctuations varient tout au long des tuyaux et l'existence de résonance pourrait amplifier ces pulsations à fréquences déterminées. D'autre part, il met en évidence le besoin de mesurer ou déterminer expérimentalement la vitesse du son du fluide dans le tuyau pour déterminer la présence de fractions de gaz dans le fluide. Une méthode expérimentale pour déterminer la valeur de la vitesse du son est d'utiliser deux fonctions de transfert qui sont déduites de trois capteurs de pression pour obtenir une fonction cosinus indépendante du type de signal de pression. Il signale que pour mesurer l'excitation générée par la pompe, il est important d'éviter d'exciter les modes acoustiques de résonance à la fréquence de vitesse de rotation ou à la fréquence de passage des aubes et ses harmoniques.

### 1.5.2 Interactions roue-volute

L'effet des interactions aube-bec sur les structures de l'écoulement, les fluctuations de pression et le bruit à l'intérieur de la pompe a été étudié par S. Chu et al. [8]. Les auteurs ont effectué des essais expérimentaux à l'aide de la technique PDV (Particle Displacement Velocimetry) pour mesurer les distributions de vitesse et le champ de pression dans la volute d'une pompe centrifuge. Les résultats ont montré que l'écoulement et les interactions du bec avec les aubes sont les sources plus importantes des fluctuations de pression et de bruit. Les tests ont prouvé qu'il est possible de diminuer le bruit considérablement si la distance entre la roue et le bec est agrandie. D'autre part, plusieurs structures de l'écoulement qui sont liées directement aux interactions aubes-bec ainsi que l'uniformité de l'écoulement sortant de la roue ont été identifiées.

L'écoulement dans la volute et l'espace entre le bec et la roue est fluctuant et dépend de la position relative de l'aube et du bec. Dong et al.[9] ont mis en évidence que les effets des aubes sont évidents près de la sortie de la roue, où le phénomène « jet-sillage » est présent. Ainsi, le bec induit un blocage dans l'espace entre les aubes qui induit une augmentation de la vitesse radiale sur la section sans obstruction. Le point de stagnation sur la pointe du bec fluctue également et la faible vitesse autour du bec induit une inadéquation entre la vitesse à la sortie de la roue et la vitesse locale dans la volute. Il en résulte une

formation des structures tourbillonnaires qui interagissent avec le bec et qui sont transportées dans la volute. Ils ont montré qu'il est difficile d'interpréter les signaux mesurés par les capteurs de pression et de trouver le lien avec la structure de l'écoulement parce que plusieurs phénomènes instationnaires se produisent simultanément.

L'écoulement instationnaire issu de l'interaction roue-volute est analysé numériquement et expérimentalement par D. Croba et al. [10]. Des mesures lasers ont été effectuées sur plusieurs positions dans la roue et la volute d'une pompe centrifuge en régime nominal. D'autre part, ils ont fait un calcul numérique, 2D, instationnaire, visqueux et incompressible. Les résultats expérimentaux montrent un bon accord avec les résultats numériques.

Les effets dynamiques dus à l'interaction roue-volute dans une pompe centrifuge sont étudiés par José Gonzales et al. [11]. Ils ont effectué des simulations numériques et des tests expérimentaux pour étudier les effets du passage des aubes devant le bec de volute ainsi que les fluctuations de pression induites. Ils ont comparé les résultats numériques et expérimentaux trouvant une bonne concordance des amplitudes de la pression à la fréquence de passage des aubes pour une large plage de débits volumiques. Ils ont conclu que la prédiction numérique de l'interaction roue-volute était satisfaisante : l'ensemble des travaux numériques et expérimentaux montrent un comportement spatial de la fluctuation de pression à la fréquence de passage des aubes, en fonction du débit.

De nombreuses études numériques ont été mené sur l'interaction roue-volute. Kitano [12] a réalisé des études numériques de l'écoulement dans une pompe centrifuge pour étudier l'interaction roue-volute et la distribution instationnaire de la pression, et déterminer la charge sur les aubes ainsi que la distorsion circumférentielle de la pression à la sortie de la roue induite par le bec de volute.

Une solution classique pour réduire les excitations roue-bec est appliquée par Yew-Wah Wong et al. [13]. Ils ont réalisé des simulations numériques pour étudier les effets de la distance roue-bec et de la position du bec de volute sur la distribution circumférentielle de la pression et sur la force radiale. Une série de volutes a été testée et ils ont conclu qu'une distance radiale de 10% permet d'obtenir des résultats prometteurs concernant les fluctuations de pression. D'autre part, si la position de la volute est de 30°, la force radiale et la hauteur diminuent. La position de 15° semble donner le meilleur compromis pour la hauteur et la force radiale.

### 1.5.3 Point de fonctionnement

Le fonctionnement à débit partiel pour analyser l'écoulement instationnaire et la présence de phénomènes instationnaires est réalisé sur quatre pompes de vitesse spécifique choisies par F. Hureau et al. [14]. Ils ont équipé les pompes de flasques transparents afin d'accéder à l'écoulement entre les aubes par vélocimétrie laser doppler. Ils ont mesuré à l'entrée et à la sortie de la roue les vitesses et les pressions statiques fluctuantes et moyennes.

Daniel Leducq et al. [15] ont étudié expérimentalement le déclenchement d'instabilités dans une pompe à diffuseur lisse et redresseur, lorsque le débit décroît linéairement dans le temps autour de sa

valeur critique. Des mesures concernant la pression et la vitesse fluctuante ont été réalisées en sortie de roue ainsi que des mesures de la pression fluctuante dans le diffuseur. Ils ont détecté la présence de trois structures tourbillonnaires avant le déclenchement de l'instabilité.

#### 1.5.4 Approche théorique et expérimentale

Une approche théorique et expérimentale du bruit hydraulique est réalisée par Jaremczak et al. [16] Ils ont appliqué le modèle théorique de Simpson, Clark et Weir à trois pompes. Les résultats obtenus à la fréquence de passage des aubes et au double de cette fréquence montrent une bonne concordance entre la théorie et l'expérience en ce qui concerne les niveaux de fluctuation de pression en sortie de pompe, y compris dans le fonctionnement à débits partiels. Ils ont aussi déterminé que ce modèle ne peut pas s'utiliser comme un outil de dessin d'une pompe centrifuge afin de diminuer le bruit hydraulique. Cette corrélation est très utile pour des pompes conventionnelles, mais elle ne peut pas être utilisée pour des débits différents du point nominal ou pour des dessins non conventionnels.

P. Pempie et al. [1] ont étudié la prédiction du bruit des pompes centrifuges généré par des sources hydrauliques et aussi le bruit hydraulique au refoulement. Ils ont proposé pour chacun de ces bruits une formule globale de prédiction qui est valable près du point nominal de fonctionnement et hors cavitation. Dans ces formules de prédiction, ils font apparaître le rôle important de la puissance hydraulique et de la vitesse de rotation.

#### 1.5.5 Mécanismes générateurs

Jong-Soo Choi et al. [17] ont étudié expérimentalement les instabilités de l'écoulement dans le rotor d'une pompe centrifuge et le processus de génération du bruit engendré par ces instabilités. Ils ont mesuré les composantes fluctuantes de la vitesse et la pression avec des sondes anémométriques à fil chaud et des capteurs de pression sur les aubes de la pompe en fonctionnement à l'air. Les essais ont montré qu'à la sortie de la roue, le phénomène jet-sillage se traduit par un champ tourbillonnaire fort et donc une instabilité de l'écoulement qui induit une fluctuation périodique de la pression sur la paroi de l'aube et du bruit.

Les mécanismes générateurs de bruit dans une pompe centrifuge sont étudiés à l'aide d'une analyse expérimentale par G. Chatel et al. [18]. L'étude a permis de caractériser de façon précise les sources dipolaires provenant de l'interaction des aubes avec l'écoulement en utilisant les méthodes de réciprocity. Le bruit mesuré dans les tuyauteries et provenant du fonctionnement de la pompe centrifuge a été comparé au bruit calculé provenant des sources hydrodynamiques dipolaires. La source dipolaire est caractérisée par l'interaction de l'écoulement aube-turbulence et la source monopolaire par le débit massique évacué de chaque canal interaubage.

F. Shi et al. [19] ont réalisé des études numériques 2D et 3D des fluctuations de pression générées par l'interaction roue-diffuseur dans un étage de pompe. Les résultats numériques ont été comparés avec les essais expérimentaux et les valeurs obtenues par la méthode des singularités. Ils ont ainsi

été capables de prédire les fluctuations de pression dans le diffuseur. Ils ont également fait plusieurs simulations afin de connaître les sources qui contribuent aux fluctuations de pression dans le diffuseur et pour aider à comprendre le mécanisme des interactions roue-diffuseur. Les sources qui contribuent aux fluctuations de pression sont principalement les interactions potentielles, le sillage et la structure de l'écoulement jet-sillage.

### 1.5.6 Analyse des pressions instationnaires

Les travaux effectués par J.P. Barrand et al. [20] dans la roue d'une pompe centrifuge ont permis de relever les pressions fluctuantes temporelles sur les aubes de la roue, sur la volute et dans les tubes d'aspiration et de refoulement. Ils ont ensuite fait une analyse appropriée des signaux en vue de comprendre les mécanismes de génération et de propagation des ondes de pression à l'intérieur de la pompe centrifuge.

Une étude expérimentale d'une pompe et de son champ de pression instationnaire a été réalisée par M. Pluviose et al. [21]. Ils ont développé une méthode pour visualiser le champ de pression instationnaire dans une pompe. D'autre part, ils ont mesuré la pression pariétale sur l'une des faces d'une machine centrifuge bidimensionnelle d'une roue sans flasque avant à l'aide de capteurs de pression. L'étude a été conduite sur une maquette en air qui permet d'avoir des avantages expérimentaux. Ces travaux ont permis de voir clairement la formation d'ondes acoustiques due à l'interaction des sillages des aubes avec le bec de volute.

Les pulsations de pression peuvent être minimisées par l'optimisation de la géométrie de l'hydraulique et son système environnant. H. Zogg et al. [22] ont présenté des méthodes à cet effet. Les travaux réalisés ont permis de constater que la réduction du bruit hydraulique peut s'effectuer par une bonne conception hydraulique de la pompe et une exploitation prévue du point nominal. L'optimisation pour réduire le bruit à la fréquence d'aubage concerne essentiellement la géométrie de la roue et du diffuseur.

Une pompe radiale à diffuseur est étudiée expérimentalement par Pavesi et al. [23] à travers des mesures de fluctuations de pression par des capteurs placés à l'aspiration et au refoulement de la pompe et sur les parois des aubes du diffuseur. Des analyses spectrales qui ont permis d'identifier l'apparition et l'évolution des instabilités de la pression. Les essais expérimentaux confrontés aux simulations numériques montrent par ailleurs l'existence d'une structure tournante en sortie de roue.

La validation des modèles numériques s'effectue par la comparaison des résultats numériques et expérimentaux. José Gonzales et al. [24] présentent une relation entre les variables globales et la structure dynamique de l'écoulement obtenue numériquement pour une pompe. Ils ont fait des comparaisons (numérique et expérimentale) concernant les fluctuations de pression étant trouvé un bon accord. Leur travail était axé sur la recherche d'une corrélation entre les paramètres locaux et globaux de l'écoulement dans une pompe centrifuge. Ainsi, les pressions fluctuantes dues à l'interaction roue-volute sont filtrées à la fréquence d'aubage fournissant ainsi une information précieuse qui explique quelques caractéristiques de l'écoulement dans la pompe.

### 1.5.7 Fréquence aubage et de résonance

Un facteur à prendre aussi en compte est la fréquence ou les fréquences de résonance qui peuvent apparaître, et dans certains cas, amplifier les amplitudes des pulsations de pression. Par exemple, S.F. Timushev et al. [25] ont réalisé des travaux numériques et expérimentaux qui ont montré une augmentation considérable des amplitudes des fluctuations de la pression à la fréquence de passage des aubes en résonance avec la cavité interne de la pompe.

## 1.6 Outils et Analyse

### 1.6.1 Prédiction théorique du bruit des pompes centrifuges, Réf [1]

Cette section concerne le bruit des pompes centrifuges généré par des sources hydrauliques à l'exclusion des sources mécaniques (balourd, paliers, etc). Les différents aspects du bruit, bruit hydraulique au refoulement, sont étudiés et une formule globale de prédiction, valable près du point de fonctionnement optimum et hors cavitation, est proposée.

#### 1.6.1.1 Bruit hydraulique

Le terme de bruit hydraulique est utilisé pour décrire le terme de la composante fluctuante de la pression de refoulement d'une pompe centrifuge sans prendre en compte l'aspect acoustique ou hydrodynamique de ces pulsations.

#### 1.6.1.2 Formule de Simpson et Clark

Une formule de prédiction du bruit hydraulique, a été proposée par Simpson et Clark [26], formule déduite de l'analyse expérimentale mais bénéficiant d'un support théorique établi par ces mêmes auteurs [27]. Leur modèle théorique considère les deux sources internes de bruit suivantes :

1. Portance instationnaire ou bruit de circulation.
2. Sillages visqueux émis par les aubages mobiles.

Le niveau prédit par la formule est donc essentiellement centré sur la fréquence de passage des aubes mobiles. Ce modèle exclut diverses sources de bruit reconnues particulièrement émissives telles que le bruit créé par les récirculations internes et décollements, phénomènes apparaissant en dehors du point nominal et le bruit de cavitation. Par ailleurs le bruit généré par la turbulence n'est pas pris en compte. Par conséquent, cette formule s'applique au point nominal, avec une charge convenable à l'aspiration et prédit la pression fluctuante au refoulement.

La formulation originale de cette formule s'écrit :

$$Lp_h = 20 \log \frac{p}{2 \cdot 10^{-5} \text{Pa}} = K + 20 \log \frac{\Delta p \cdot Q}{N_s \cdot N \cdot D_2^2 \cdot b_2} \quad (1.13)$$

où  $K = 150$ ,  $\Delta p$  en *bar*,  $Q$  en  $m^3/h$ ,  $H$  en *m*,  $N$  en *tr/min*,  $D_2$  diamètre de la roue (*m*),  $b_2$  largeur sortie roue (*m*),  $N_s$  vitesse spécifique  $N_s = N\sqrt{QH}^{0.75}$ .

### 1.6.1.3 Analyse de la formule de Simpson et Clark

#### Influence de la vitesse de rotation $N$

La formule 1.13 peut aussi s'écrire ainsi

$$Lp_h = 308.5 + 35\log\Delta p + 10\log Q - 40\log N - 20\log R_2^2 b_2 \quad (1.14)$$

où  $\Delta p$  en *bar*,  $Q$  en  $m^3/h$ ,  $N$  en *tr/min*,  $R_2$  en *cm*,  $b_2$  en *cm*.

Cette formule, établie par Mulhe [28] montre que le bruit émis augmente en fonction de la puissance quatre de la vitesse de rotation ( $\Delta p$  varie comme  $N^2$  et  $Q$  comme  $N$ ) : le niveau augmente de 12 dB lorsque la vitesse de rotation double. Cette relation est souvent vérifiée expérimentalement, en particulier par Tourret [29].

#### Influence des paramètres de conception

La prise en compte des termes du triangle de vitesse à la sortie de la roue, paramètres importants du dessin d'une pompe, permet d'écrire la formule 1.13 sous la forme suivante :

$$Lp_h = 113 + 10\log N \cdot W + 35\log \frac{V_{2u}}{U_2} + 10\log \frac{V_{2m}}{U_2} - 10\log \mathbb{T} - 10\log b_2 \quad (1.15)$$

$V_{2u}$  : Composante tangentielle de la vitesse absolue en sortie de roue,

$U_2$  : Vitesse périphérique en sortie de roue,

$V_{2m}$  : Vitesse débitante en sortie de roue,

$W$  : Puissance hydraulique utile (Kw),

$\mathbb{T}$  : Invariant de puissance =  $\frac{W}{U_2^3 R_2^2}$ ,

$N$  : Vitesse de rotation (*tr/min*).

Le triangle de vitesse à la sortie de la roue est illustré sur la figure 1.16.

#### Influence de la vitesse spécifique $N_s$

Les paramètres  $V_{2m}/U_2$  et  $V_{2u}/U_2$  sont deux paramètres choisis lors du dessin d'une pompe et sont souvent appelés à ce titre « constantes de tracé » et leurs valeurs moyennes dépendent du  $N_s$ . La figure 1.17 représente les valeurs moyennes des constantes de tracé en fonction du  $N_s$ .

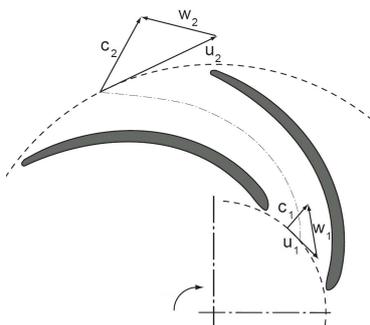


FIGURE 1.16 : Triangle de vitesse à l'entrée et à la sortie et à l'entrée de la roue.

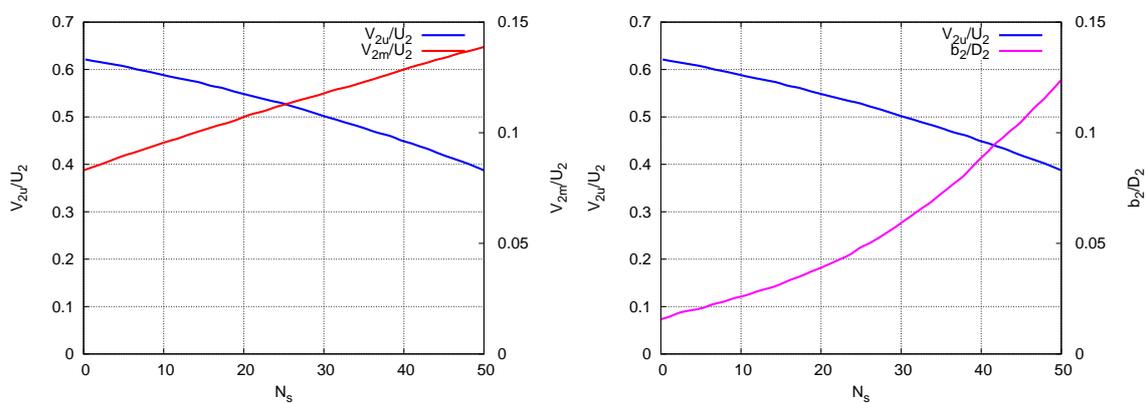
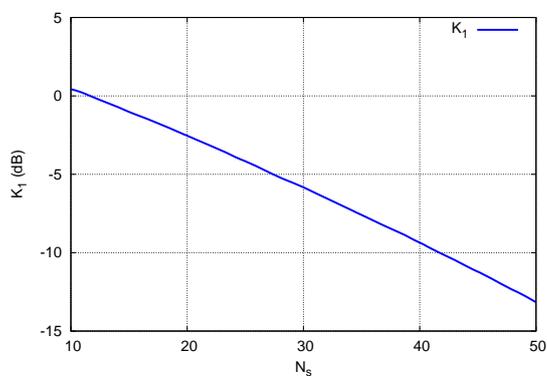


FIGURE 1.17 : Constantes de tracé - valeurs moyennes.

Si on considère le terme  $K_1$  égal à :

$$K_1 = 35 \log \frac{V_{2u}}{U_2} + 10 \log \frac{V_{2m}}{U_2} - 10 \log \Pi \quad (1.16)$$

On peut établir une relation en fonction de  $N_s$  (voir figure 1.18)

FIGURE 1.18 : Influence du  $N_s$ .

Sur la figure 1.19, le bruit hydraulique  $L_{p_h}$  est représenté en fonction du produit vitesse de rotation par la puissance et d'autre part par la vitesse spécifique  $N_s$ .

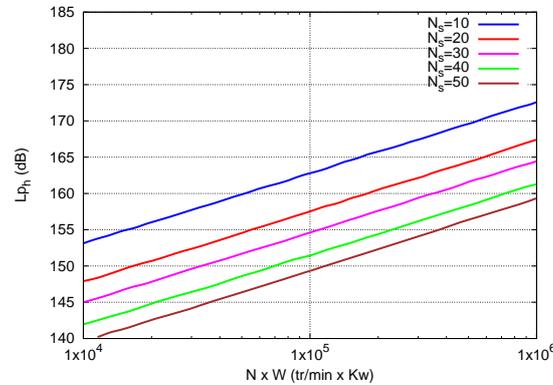


FIGURE 1.19 : Bruit hydraulique d'une pompe centrifuge ( $b_2 = 1$  m).

### Influence des constantes de tracé

Les constantes de tracé peuvent varier sensiblement en fonction du  $N_s$ . Les limites de choix possibles de ces constantes de tracé sont montrées sur la figure 1.20. Des essais sont effectués sur des pompes « silencieuses » et des pompes « bruyantes ». On peut remarquer que pour les tracés extrêmes utilisés pour un même point de fonctionnement et une même vitesse de rotation la différence sur le bruit hydraulique généré peut être de l'ordre de 5 à 8 dB. Pour comparer l'influence des constantes de tracé sur une pompe normalisée ( $Q = 315 \text{ m}^3/h$ ,  $H = 32 \text{ m}$ ,  $N = 1500 \text{ tr/min}$ ), le bruit hydraulique est calculé à partir de la formule proposée par Simpson et Clark. On peut observer les résultats obtenus dans le tableau 1.1, .

Pour rendre une pompe silencieuse, il faut minimiser l'énergie cinétique  $V_2^2/2g$  à la sortie de la roue. Il est évident que la conversion de l'énergie cinétique en énergie de pression statique par ralentissement de la vitesse dans des aubages fixes (volute, diffuseur) est toujours source d'excitations dynamiques non négligeables. L'angle de sortie des aubages  $\beta_2$ , strictement dépendant du choix des constantes de tracé, influe largement sur l'allure de la courbe caractéristique débit-pression. D'autre part de petits angles  $\beta_2$  peuvent rendre la réalisation de la roue délicate (fonderie et finition des canaux).

### Pression fluctuante relative

On peut comparer la valeur de la composante fluctuante au refoulement à la valeur de la hauteur délivrée par la pompe. Ainsi, il est possible d'écrire la formule suivante :

$$\frac{p}{\Delta p} = 0.019 \left( \frac{V_{2m}}{U_2} \right)^{0.5} \left( \frac{D_2}{b_2} \right)^{0.5} \left( \frac{V_{2u}}{U_2} \right)^{0.75} \eta_h^{0.75} \quad (1.17)$$

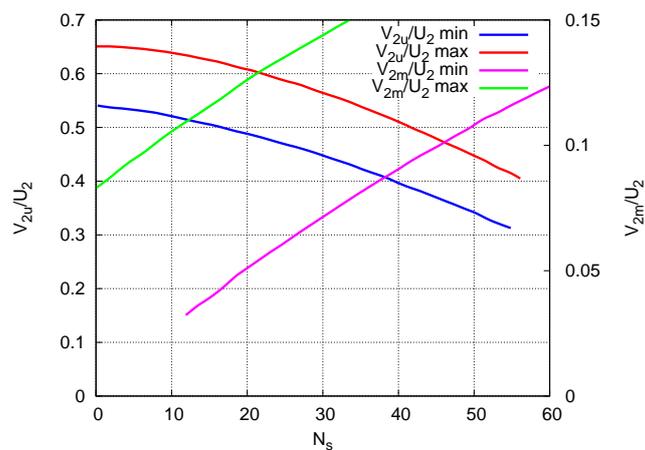
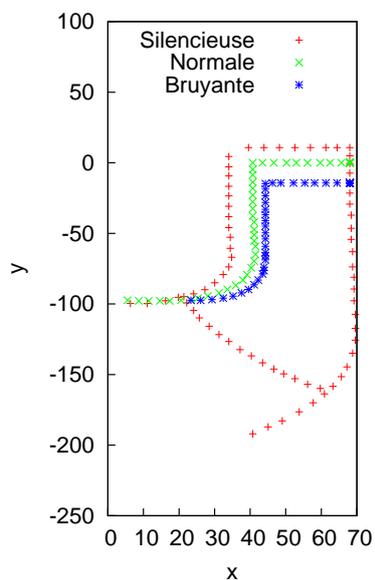


FIGURE 1.20 : Constantes de tracé - valeurs extrêmes.

FIGURE 1.21 : Vue méridienne d'une pompe normalisée  $N_s = 32$ .

Paramètre	Bruyante	Normale	Silencieuse
$D_2$ (mm)	317	339	360
$b_2$ (mm)	24.3	27	34
$\beta_{2m}$	$31^\circ$	$21.6^\circ$	$18^\circ$
$V_{2u}/U_2$	0.54	0.473	0.42
$V_{2m}/U_2$	0.156	0.124	0.088
$Lp_h$ (dB)	170	168	165

TABLEAU 1.1 : Paramètres d'une pompe bruyante, normale et silencieuse.

La figure 1.22 illustre l'allure de  $p/\Delta p$  en fonction du  $N_s$ . Les valeurs moyennes de  $V_{2m}/U_2$  et  $V_{2u}/U_2$  sont prises en compte et la courbe montre la grande importance de la vitesse spécifique  $N_s$ .

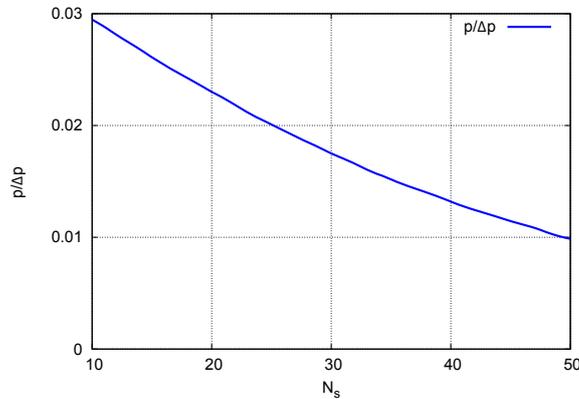


FIGURE 1.22 : Pression fluctuante relative.

#### 1.6.1.4 Conclusions

L'analyse de la formule de Simpson et Clark, malgré le modèle simplifié, montre des paramètres de dessin  $V_{2m}/U_2$ ,  $V_{2u}/U_2$  et du  $N_s$ . Elle peut constituer un guide pour prendre en compte le facteur bruit dans les études de dimensionnement.

La formule 1.13 prend en compte des paramètres essentiels de tracé, mais elle oublie l'influence d'autres paramètres tels que : l'affûtage à la sortie de la roue, le rapport entre le diamètre de l'entrée volute ou diffuseur et de la roue, la forme même du bec de volute.

La formule de Simpson et Clark permet une estimation de pression fluctuante interne, pour la fréquence de passage des aubes.

Construire une formule prévisionnelle de bruit de pompe est un exercice difficile.

- Les appuis théoriques sont encore insuffisants pour quantifier et même expliquer des phénomènes complexes (écoulements, structures, rayonnement).
- La validation expérimentale nécessaire demande de nombreux essais systématiques pour mettre en évidence l'influence de chacun des paramètres ( $N_s$ ,  $b_2$ ,  $D_3$ , ...); déterminer les voies de transmissions des excitations hydrauliques et dénoncer les surfaces émissives.

## 1.6.2 Mesure du bruit hydraulique

### 1.6.2.1 Mesure du bruit en un point donné

Elle s'effectue avec un système de mesure très proche de celui du bruit aérien. Dans ce cas, le microphone qui mesure la pression acoustique aérienne se trouve remplacé, par un hydrophone qui

plonge dans le milieu liquide, ou encore par un capteur à membrane affleurante.

Dans le cas d'un circuit de pompage où la vitesse de circulation n'est pas négligeable, on utilise un capteur de pression à membrane affleurante, mis en place sur la tuyauterie ou sur le corps de la pompe de telle façon qu'il assure une continuité aussi parfaite que possible de la surface d'écoulement.

### 1.6.2.2 Mesure de la puissance acoustique

Elle diffère par rapport au bruit aérien par deux aspects :

- D'une part, on est amené à définir non plus une puissance acoustique mais deux puissances hydroacoustiques ; celle qui transite par la bride de refoulement de la pompe et se dirige vers le circuit aval et celle qui transite par la bride d'aspiration de la pompe et se dirige vers le circuit amont.
- D'autre part, la propagation du bruit en conduite diffère totalement de la propagation tridimensionnelle dans un espace aérien.

Pour mesurer la puissance hydraulique, il est nécessaire de disposer sur la conduite une terminaison ou une section, anéchoïque telle qu'il n'y ait pas d'ondes réfléchies vers l'emplacement de la mesure, ni de bruit parasite venant, par exemple, d'une vanne de réglage et telle que l'indépendance des circuits d'aspiration et de refoulement soit assurée.

Dans ces conditions, on mesure dans une section proche de la bride de refoulement (ou de la bride d'aspiration) la pression hydraulique  $p_e$ , d'où :

$$W_h = Sp_e^2/\rho c \quad (1.18)$$

Dans les cas où l'on ne peut pas disposer d'une terminaison anéchoïque, la mesure de la puissance hydraulique a une signification réduite et ne caractérise pas vraiment la pompe.

## 1.6.3 Réduction du niveau de bruit hydraulique

### 1.6.3.1 Éloignement du bec de volute

L'action la plus simple consiste à éloigner de la roue le bec de la volute. Il est possible d'évaluer théoriquement le gain sur le niveau de bruit, en négligeant les frottements, le mélange turbulent et les écoulements secondaires.

Dans ces conditions, la vitesse  $V$  varie comme  $1/r$  et la pression dynamique  $(\rho V^2/2)$  comme  $1/r^2$ . Si l'on éloigne le bec de volute d'un rayon  $r_3$  vers un rayon  $r'_3$ , le gain théorique en pression qui en résulte est chiffré par :

$$p_{e3}/p'_{e3} = (r_3/r'_3)^2 \quad (1.19)$$

Le gain correspondant sur  $L_p$  en dB est :

$$\Delta L_p = 20 \log(r_3/r_3')^2 \quad (1.20)$$

La figure 1.23 montre l'influence du jeu roue-diffuseur ou roue-bec de volute dans quatre cas.

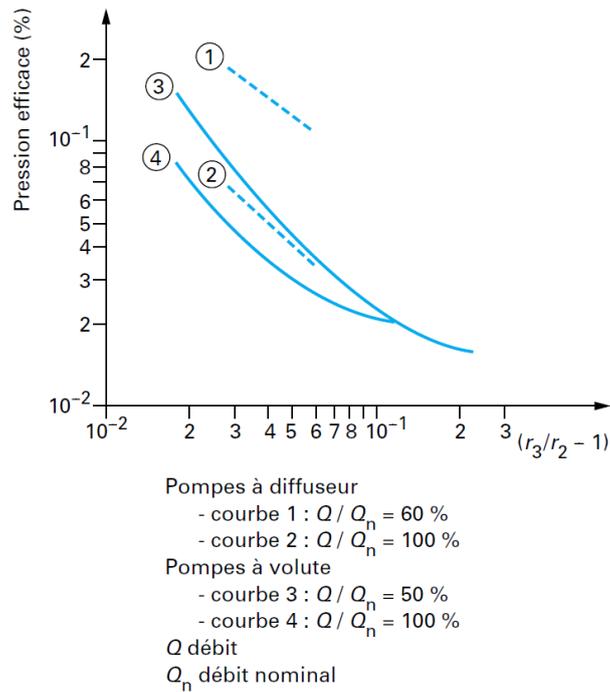


FIGURE 1.23 : Influence du jeu entre la roue et le stator sur le niveau des fluctuations de pression, Réf [4].

D'autres mesures viennent confirmer les valeurs précédentes. Celles-ci montrent un gain de 5 dB lorsque le jeu entre la roue et le bec de volute passe de 7% à 11%, et de 10 dB lorsqu'il passe de 7% à 18%. D'autre part, un gain de 5 dB environ est obtenu lorsque le jeu passe de 3% à 7%.

On remarque que la réduction des fluctuations de pression est plus rapide à petit débit ( $Q/Q_n = 50\%$  ou  $60\%$ ) qu'au débit nominal, ce qui correspond à un processus de mélange plus actif, dû à l'augmentation de la turbulence par les récirculations. On remarque encore que l'évolution est plus rapide avec un diffuseur qu'avec une volute.

### 1.6.3.2 Forme du bec de volute

Certains auteurs ont obtenu une réduction du niveau de bruit hydraulique en agissant sur la forme du bec de la volute (angle et arrondi d'entrée) et en modifiant la forme des surfaces de raccordement avec le corps de la volute.

### 1.6.3.3 Évaluation par le calcul

Il est théoriquement possible d'évaluer l'influence du jeu et de la forme du bec par un code de calcul. Des calculs réalisés sur l'influence du jeu ont fourni des résultats qui concordent assez bien avec les valeurs de la figure 1.23.

### 1.6.3.4 Actions locales à la sortie de la roue

La figure 1.24 montre l'influence sur le bruit de modifications locales à la sortie d'une roue de pompe centrifuge fonctionnant au débit nominal ( $Q = Q_n$ ). On remarque sur cette figure que la réalimentation de la face des aubes en dépression par des trous percés dans l'aile (tests n° 14 et 24) a conduit 2 fois à une réduction du niveau de bruit. Les deux dernières configurations (n° 21 et 24) ne peuvent pas être comparées avec les autres. En effet, elles associent trois actions simultanées, une coupure oblique, une réduction du diamètre moyen de la roue, un accroissement du jeu entre la roue et le stator. On retiendra que pour des caractéristiques inchangées de la pompe, (roue non coupée), des gains de 3 à 5% peuvent être espérés avec ce type d'action. Ces gains sont loin d'être négligeables.

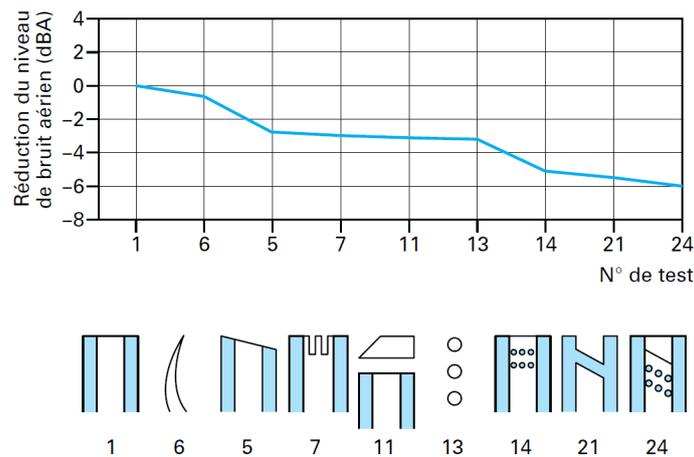


FIGURE 1.24 : Influence d'actions locales à la sortie de la roue (ailes et bec de volute) sur le niveau de bruit, Réf [4].

### 1.6.3.5 Action sur les grands paramètres de la roue

On peut difficilement envisager de rechercher l'influence des grands paramètres (nombre d'aubes, angles, répartition de la charge, etc.) par une démarche empirique et purement expérimentale.

### 1.6.3.6 Fonctionnement au point nominal

Il est important de vérifier que la pompe répond spécifiquement aux besoins de l'installation. Une pompe surdimensionnée fonctionnant à débit partiel verra son bruit majoré.

Dans ce cas, il conviendra de couper la roue pour ajuster la courbe caractéristique de la pompe au point de fonctionnement demandé. On obtiendra une triple réduction du bruit : meilleure adaptation, réduction de la vitesse périphérique, augmentation du jeu roue-volute.

### 1.6.3.7 Réduction du bruit par un capotage

Le capotage consiste à entourer la source, c'est-à-dire le groupe motopompe, par une enveloppe extérieure dont la masse par unité de surface n'est pas inférieure à  $5 \text{ kg/m}^2$ . Le capotage nécessite une ventilation de l'enceinte dans laquelle se trouve la pompe pour évacuer les pertes thermiques. Son efficacité est fortement dépendante du niveau d'étanchéité. Il conviendra de laisser un jeu minimal à la traversée des tuyauteries et des câbles électriques.

### 1.6.3.8 Silencieux hydraulique

Il existe d'assez nombreux types de silencieux applicables dans le domaine de l'hydraulique, nous n'en citerons qu'un : le silencieux à paroi souple. Il est constitué par un cylindre plus ou moins long, percé de nombreux petits trous et entouré d'une vessie gonflée d'air. Celle-ci est elle-même retenue par une enveloppe extérieure. L'énergie est dissipée par perte d'énergie dynamique et frottement visqueux de l'eau au passage des trous.

### 1.6.3.9 Contrôle actif

Déjà utilisé en bruit aérien, le contrôle actif est théoriquement applicable au bruit hydraulique de deux façons :

- A la source, c'est-à-dire à proximité immédiate du bec de la volute ; la validité du procédé a été démontrée au CETIM sur un ventilateur en air, où des gains importants ont pu être vérifiés.
- En conduite, le dispositif de mesure et l'actionneur sont placés sur une conduite de la pompe ; en toute rigueur, pour assurer une protection convenable du circuit, il faut pratiquer le contrôle actif, sur la tuyauterie d'aspiration et sur celle de refoulement.

Le contrôle actif du bruit consiste, en un point donné, à :

- Mesurer le signal acoustique indésirable et en faire l'analyse.
- Constituer un contresignal électrique sur cette base.
- Transformer le contresignal électrique en signal acoustique au moyen d'un actuateur (haut-parleur en bruit aérien).
- Introduire, par l'intermédiaire de l'actuateur, le contresignal acoustique dans l'écoulement, plus ou moins près de la source, selon que l'on veut éliminer le bruit généré (à la source) ou seulement le bruit propagé (en conduite).
- Suivre la progression du contrôle actif à partir de « capteurs d'erreur » situés un peu en dehors de la source (contrôle du bruit généré) ou dans la conduite (contrôle du bruit propagé).

- A partir des informations des capteurs d'erreur, corriger éventuellement la marche de la boucle.

Le contrôle actif du bruit, dont le potentiel est grand, n'est pas encore utilisé dans le domaine des pompes pour des raisons économiques mais aussi parce que les actionneurs, immergés, qui sont nécessaires au procédé, n'existent pas ou n'ont pas atteint le stade de l'industrialisation.

#### 1.6.4 Fréquences liées à des phénomènes de résonance

Ces fréquences ne correspondent pas vraiment à des sources de bruit. Cependant, une fréquence propre de structure peut, en renforçant considérablement un bruit de fond, créer une raie très semblable à celle d'une véritable source. Il est assez facile expérimentalement de mettre en évidence les fréquences de résonance, en modifiant la vitesse de rotation de la pompe. Ces sont les seules raies à ne pas subir un déplacement, en fréquence, proportionnel à la vitesse. La vitesse critique, qui est due à la coïncidence d'une fréquence propre de l'arbre avec la vitesse de rotation, entre dans cette catégorie. On notera que, dans ce cas, il ne s'agit pas du renforcement d'un bruit de fond, mais du renforcement d'une fréquence préexistante, bien définie (balourds mécaniques + hydrauliques).

#### 1.6.5 Évolution théorique du bruit avec la vitesse

Dans une pompe non cavitante, et pour un point de fonctionnement donné caractérisé par  $Q/N = Cte$  (avec  $Q$  débit), toutes les pressions, y compris les pressions de perturbation, varient comme le carré de la vitesse. On doit donc s'attendre, puisque  $L_p = 20\log(p_e/p_0)$ , à ce que le niveau de bruit hydraulique varie comme :

$$\Delta L_p = 20\log(N^2/N_0^2) \quad (1.21)$$

ou

$$\Delta L_p = 10\log(N^4/N_0^4) \quad (1.22)$$

avec  $N_0$  vitesse de référence quelconque. Un doublement de  $N$  se traduit par une augmentation du niveau de bruit  $\Delta L_p = 12$  dB et l'intensité acoustique varie, comme  $p^2$ , c'est-à-dire comme  $N^4$ . Si la transformation du bruit hydraulique en bruit aérien se fait de façon linéaire, on peut s'attendre à ce que le bruit aérien dépende de la vitesse selon les mêmes lois. On trouvera dans la littérature des expressions qui relient le niveau de bruit hydraulique à  $20\log(QH/N)$  et le niveau de bruit aérien à  $10\log(QH/N)$ ,  $H$  étant la hauteur fournie par la pompe.  $Q$  est proportionnel à  $N$  et  $H$  à  $N^2$ .

## 1.6.6 Définitions et méthodes d'analyse

### 1.6.6.1 Définitions dans le domaine temporel

#### Valeur moyenne et normalisation

La valeur moyenne  $\bar{x}$  d'une quantité  $x(t)$  est la moyenne temporelle de cette quantité.

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.23)$$

Pour des valeurs discrètes de la pression et un nombre suffisant d'échantillons, la valeur moyenne  $\bar{p}$  est définie ainsi :

$$\bar{p} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p(i) \quad (1.24)$$

Concernant les pompes hydrauliques, une normalisation des valeurs de la pression obtenue est habituellement calculée en se basant sur la pression dynamique à la sortie de la roue ( $\rho \frac{u_2^2}{2}$ ) :

$$c_{\tilde{p}} = 2 \cdot \frac{p - \bar{p}}{\rho \cdot u_2^2} \quad (1.25)$$

De cette façon, ces valeurs normalisées sont indépendantes de la vitesse de rotation et du diamètre de la roue.

#### Valeur efficace ou valeur RMS

La valeur efficace (dite aussi valeur RMS, de l'anglais Root Mean Square, ou moyenne quadratique) d'une quantité  $x(t)$  est définie comme :

$$x_{RMS} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (1.26)$$

et avec des valeurs discrètes de la pression, la formule de valeur efficace de pression devient :

$$p_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p^2(i)} \quad (1.27)$$

### 1.6.6.2 Méthodes et définitions dans le domaine fréquentiel

Il est nécessaire d'étudier et d'analyser les fréquences associées à un signal évoluant en fonction du temps. L'analyse spectrale d'un signal nous permettra d'identifier des fréquences caractéristiques de

fonctionnement de la turbomachine ainsi que d'associer ces fréquences à un phénomène physique. Le fonctionnement des turbomachines génère des écoulements turbulents instationnaires et des fluctuations de pression qui sont en quelque sorte périodiques et associées aux fortes interactions entre les éléments mobiles et les éléments fixes.

### Fréquence d'échantillonnage et filtrage

La fréquence d'échantillonnage doit correspondre à la gamme de fréquences d'intérêt et satisfaire le théorème d'échantillonnage de Shannon [30]. D'après ce théorème, une fonction  $f(x)$ , qui ne contient pas de fréquences plus élevées que  $\omega_{max}$ , est complètement déterminée, lorsque ses ordonnées sont données à une série de points séparés d'un intervalle  $T = \pi/\omega_{max}$ . Ce théorème est applicable uniquement pour les signaux à bande passante limitée (fréquence maximale finie). Pour des applications réelles, la fréquence maximale du signal sera filtrée par la fréquence supérieure d'intérêt et le signal sera échantillonné avec des fréquences d'échantillonnage deux fois supérieures à la fréquence de coupure du filtre. Si aucun filtrage n'est fait, ou la fréquence d'échantillonnage est trop faible, le phénomène de repliement se produirait, et des pics apparaissent dans le domaine fréquentiel qui ne seraient physiques. Pour certaines analyses, il est utile de filtrer de nouveau le signal obtenu.

### Transformée de Fourier

La transformée de Fourier  $X(f)$  d'une quantité  $x(t)$  est une fonction à valeur complexe définie comme

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad -\infty < f < \infty \quad (1.28)$$

Les quantités mesurées ont toujours une longueur finie, la transformée finie de Fourier est donc calculée comme :

$$X(f, T) = \int_0^T x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (1.29)$$

La quantité mesurée est alors acquise comme une série d'échantillons discrets, et la transformée de Fourier discrète (DFT) est appliquée :

$$X(f, T) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi fn\Delta t} \quad (1.30)$$

La transformée de Fourier discrète est calculée à l'aide de la transformée de Fourier proposée par Cooley et Tukey [31]. Les algorithmes donnant la FFT discrète d'un signal temporel nécessitent que le nombre de données instationnaires échantillonnées sur un signal temporel soit une puissance entière de 2. D'autres

---

algorithmes existent et permettent ainsi de calculer la transformée de Fourier à partir d'une série de données dont le nombre est décomposable en produit de facteurs premiers.

## 1.7 Conclusions

Ce chapitre nous a permis de faire un inventaire bibliographique des phénomènes physiques, modèles physiques, méthodes numériques, travaux de recherche et des outils d'analyse existantes pour effectuer l'étude des fluctuations de pression qui apparaissent dans le fonctionnement des pompes centrifuges. L'une des principales sources est l'interaction hydrodynamique des aubes de la roue et le bec de volute qui se manifeste par la présence d'une raie de forte amplitude dans le spectre de fréquences. Ce raie apparaît à la fréquence fondamentale ou fréquence de passage des aubes. Dans un premier temps, les travaux expérimentaux ont permis d'identifier ce phénomène et comprendre leur comportement en fonction de solutions classiques apportées à la géométrie de la pompe. La modélisation numérique CFD est un outil dans la chaîne de conception d'une pompe et est expliquée sous divers étapes. Dans l'approche numérique, on se base principalement sur la modélisation statistique des équations de Navier Stokes (RANS) qui a permis de valider les modèles numériques existantes et comprendre la morphologie de l'écoulement et analyser l'influence de divers paramètres géométriques afin d'atténuer les fluctuations à l'intérieur de la machine.



# Présentation des moyens et résultats expérimentaux

---

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>47</b>
<b>2.2</b>	<b>Banc d'essais et pompe NS32</b>	<b>48</b>
2.2.1	Vue générale du banc d'essais	48
2.2.2	Mesure des performances globales	49
2.2.3	Mesure des fluctuations de pression à la paroi extérieure de la volute	50
2.2.4	Chaîne d'acquisition des fluctuations de pression	51
2.2.5	Description de la pompe centrifuge NS32	52
<b>2.3</b>	<b>Banc d'essais et pompe NS33</b>	<b>54</b>
2.3.1	Vue générale du banc d'essais	54
2.3.2	Mesure des performances globales	55
2.3.3	Mesure des fluctuations de pression à l'aspiration et au refoulement de la pompe	56
2.3.4	Description de la pompe centrifuge NS33	56
<b>2.4</b>	<b>Résultats expérimentaux de la pompe NS32</b>	<b>58</b>
2.4.1	Courbe de performances hauteur-débit	58
2.4.2	Fluctuations de pression dans la volute	59
<b>2.5</b>	<b>Résultats expérimentaux de la pompe NS33</b>	<b>62</b>
2.5.1	Courbe de performances hauteur-débit	62
2.5.2	Fluctuations de pression à l'aspiration et au refoulement	62
<b>2.6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>83</b>

---

## 2.1 Introduction

L'analyse expérimentale est souvent nécessaire pour valider les modèles numériques utilisés lors de calculs CFD des pompes centrifuges. Les outils expérimentaux développés dans le cadre de notre étude concernent essentiellement deux bancs d'essais et deux pompes centrifuges à volute. L'importance de respecter la démarche adoptée pour mesurer les grandeurs globales (débit et pression) ainsi

que les grandeurs locales (les fluctuations de pression) est fondamentale pour qualifier et optimiser les hydrauliques. Les campagnes d'essais destinées à étudier le comportement hydrodynamique et hydroacoustique des machines rotodynamiques dans leur environnement de fonctionnement réel sont souvent onéreuses et difficiles à réaliser.

Ainsi, la mise en œuvre d'une chaîne de mesures requiert des dispositifs expérimentaux qui permettront la mesure simultanée du débit et de la pression statique stationnaire et instationnaire à l'intérieur et à l'extérieur de la machine (canalisations d'aspiration et de refoulement). Le choix des positions de mesure a été conditionné par l'intérêt de l'étude, par les contraintes d'encombrement et par la procédure expérimentale adoptée.

## 2.2 Banc d'essais et pompe NS32

### 2.2.1 Vue générale du banc d'essais

Le banc d'essais des pompes centrifuges et axiales du laboratoire DynFluid (2.1) est composé de deux boucles fermées, indépendantes mais imbriquées.



FIGURE 2.1 : Banc d'essais des pompes centrifuges et axiales du DynFluid.

Le circuit des pompes centrifuges peut se ramener au schéma de la figure 2.3. Il est composé principalement des parties suivantes :

- Deux réservoirs d'une capacité unitaire de  $4 m^3$ , reliés par des conduites de  $350 mm$  de diamètre. Le remplissage et la vidange sont assurés par deux électrovannes.
- Une pompe à vide à anneau liquide règle la pression à la surface libre des réservoirs.
- Une vanne motorisée qui permet de faire varier le débit de la pompe de façon précise et contrôlée.
- Un moteur ABB de  $45 kW$  commandé par un variateur de fréquence.
- Un pupitre, où sont centralisées les diverses commandes et mesures.
- La pompe centrifuge équipée d'un flasque avant et d'une manchette transparents.



FIGURE 2.2 : Banc d'essais de pompes centrifuges du DynFluid.

- Divers appareils et instruments de mesure dont :
- Un débitmètre électromagnétique KROHNE, monté au refoulement de la pompe.
- Manomètres métalliques doublés par des capteurs de pression de type piézorésistifs.
- Cinq capteurs de pression piézo-électriques KISTLER type 601A, disposés sur le flasque transparent en des rayons allant du bord d'attaque au bord de fuite de l'aube de la roue centrifuge.

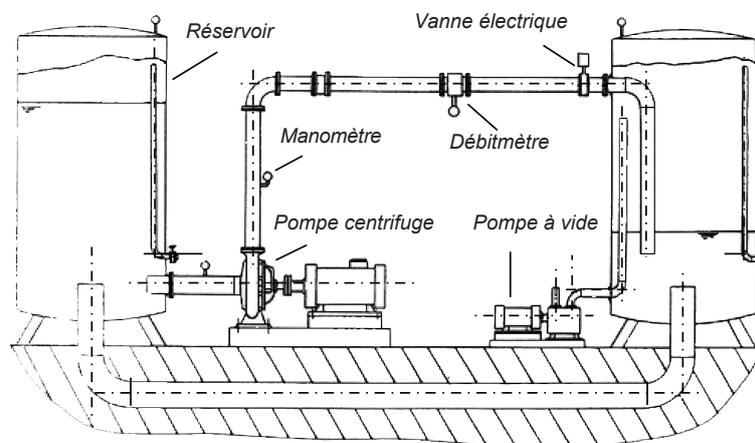


FIGURE 2.3 : Schéma général du banc d'essais de pompes centrifuges du Dynfluid.

## 2.2.2 Mesure des performances globales

### Débit-hauteur

Conformément au banc d'essais conçu pour la série de mesures des performances globales et des fluctuations de pression. Les essais ont été effectués à une vitesse de rotation d'environ  $900 \text{ tr/min}$ , grâce à un variateur de fréquence qui nous permet de varier la fréquence d'alimentation du moteur

électrique. Une fois la vitesse de rotation atteinte, la pression statique développée par la pompe centrifuge est relevée, ainsi que la puissance électrique absorbée pour chaque débit. L'opération pour atteindre le débit souhaité a été réalisée grâce à la vanne de régulation localisée en aval de la pompe. La fonction de cette vanne est de modifier la courbe du circuit par l'ouverture ou la fermeture de celle-ci. Les différents points d'essai ont permis d'obtenir au final la caractéristique expérimentale débit-hauteur de la pompe étudiée.

### Rendement

A cause de l'indisponibilité d'un couple-mètre pour mesurer la valeur du couple, nous avons utilisé la valeur de la puissance électrique absorbée indiquée sur le variateur de fréquence. Ainsi, la puissance fournie par le moteur entraînant la roue de la pompe centrifuge et la puissance hydraulique de la roue nous permettent de calculer le rendement hydraulique par la relation suivante :

$$\eta = \frac{\text{Puissance hydraulique}}{\text{Puissance électrique}} = \frac{Q \cdot \Delta p}{\text{Puissance électrique}} \quad (2.1)$$

### 2.2.3 Mesure des fluctuations de pression à la paroi extérieure de la volute

Des capteurs KISTLER sont utilisés pour l'étude des fluctuations de pression à la paroi de la volute et au refoulement de l'hydraulique. Les positions des capteurs sont indiquées sur les tableaux 2.1 à 2.3 et illustrées sur la figure 2.4.

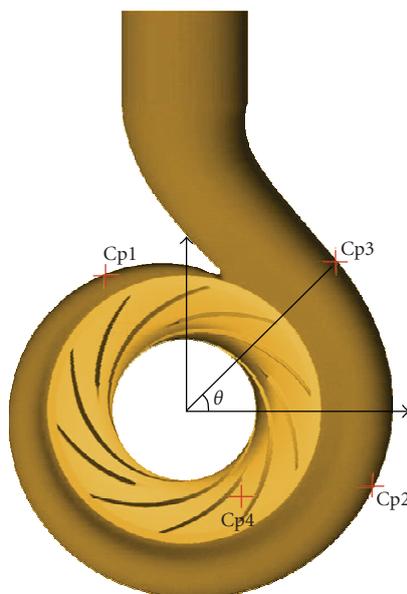


FIGURE 2.4 : Détail de la position des capteurs de pression sur la paroi de la volute.

Capteur	$\theta [^\circ]$
Cp1	120.0
Cp2	337.0
Cp3	60.0

TABLEAU 2.1 : Position des capteurs de pression sur la paroi de la volute.

Capteur	Rayon (mm)	$\theta [^\circ]$
Cp4	168.0	123.0
Cp4'	168.0	303.0

TABLEAU 2.2 : Position des capteurs de pression sur le flasque avant de la roue.

Capteur	Distance de la bride de refoulement
Cps	2*Diamètre de la bride refoulement
Cpl	10*Diamètre de bride de refoulement

TABLEAU 2.3 : Position du capteur de pression dans le tuyau de sortie.

## 2.2.4 Chaîne d'acquisition des fluctuations de pression

La chaîne de mesure des fluctuations de pression est principalement constituée comme suit :

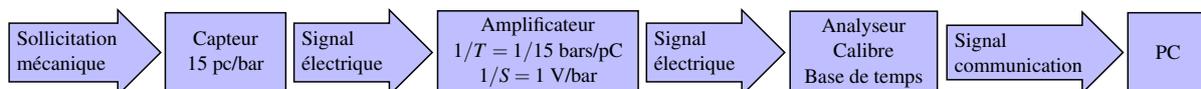


FIGURE 2.5 : Chaîne de mesure des fluctuations de pression pour la pompe NS32.

### Capteur KISTLER

**Principe de fonctionnement :** Ces capteurs permettent une mesure dynamique de la pression statique au sein de la volute. Ils fonctionnent sur le principe piézo-électrique. Soumis à des variations de pression, le quartz initialement neutre, se charge proportionnellement à ces contraintes. Ils n'indiquent qu'une variation de pression autour d'une pression moyenne.



FIGURE 2.6 : Capteur KISTLER 601A.

**Étalonnage des capteurs KISTLER :** Les capteurs de pression qui ne filtrent pas la composante continue ne peuvent pas être étalonnés par les moyens habituels utilisés en statique. Ces capteurs doivent être étalonnés dynamiquement à l'aide de générateurs d'échelon de pression. Le temps de montée de ces échelons doit être suffisamment court pour que l'influence de la constante de temps du capteur associé à son électronique, soit négligeable. Le capteur à étalonner est soumis à des échelons de pression dont l'amplitude est mesurée par un capteur de référence étalonné statiquement. Pour différentes amplitudes de l'échelon, en connaissant l'entrée et la sortie, on peut en déduire la sensibilité du capteur en quasi-statique.

### L'amplificateur

Il amplifie le signal de charge fourni par le capteur en une tension de sortie. Il est caractérisé par deux paramètres, la sensibilité  $T$  et le gain d'amplification  $S$ . La valeur de  $T$  est donnée sur la feuille d'étalonnage du capteur en l'occurrence  $14.7 \text{ pC}/\text{Bar}$  alors que celle de  $S$  doit être choisie de manière à faciliter la lecture des pressions sur l'analyseur de spectre. En ce qui nous concerne, nous avons pris  $S=1$ , pour faire correspondre 1 *bar* de pression sur les capteurs avec 1 volt de tension sur nos relevés.

### L'analyseur LeCroy

LeCroy est un appareil de traitement de signal, on l'a utilisé pour visualiser :

- La moyenne dans le temps des signaux temporels de fluctuations de pression.
- Leurs spectres issus d'une transformation de Fourier rapide appelée FFT.

### Le logiciel d'acquisition

Par la liaison RS232 on peut connecter LeCroy sur un PC, on dispose également d'un programme qui assure la communication entre le PC et LeCroy. Il s'agit de Scope Explorer-Terminal. A partir de ce logiciel, on peut télécharger un signal, vu à l'écran d'un oscilloscope et le sauvegarder en fichier bitmap, on peut également récupérer les données sous format TRC et reproduire le signal sous Excel.

## 2.2.5 Description de la pompe centrifuge NS32

### 2.2.5.1 Modèle de pompe

Les pompes centrifuges sont constituées principalement d'une roue, d'une volute et des canalisations d'aspiration et de refoulement. Elles sont largement utilisées dans plusieurs secteurs pour leurs avantages en termes de pression statique. Il est connu que les pompes sont de sources de bruit lors de son fonctionnement et leur niveau sonore constitue un critère de sélection pour des applications spéciales. La pompe NS32 fait partie d'une gamme de pompes industrielles à volute du constructeur européen ENSIVAL-MORET. Elle est classée sous la référence MP 250-200-400, son cahier des charges est présenté dans le tableau [2.4](#)

Caractéristiques	Pompe MP 250-200-400
$H_n[m]$	49
$Q_n[m^3/h]$	590
$N[tr/min]$	1470
$N_s$	32

TABLEAU 2.4 : Cahier des charges de la pompe NS32.

La figure 2.7 présente une vue de la pompe réelle utilisée pour notre étude de fluctuations de pression et validation des nouveaux outils numériques développés au sein du laboratoire.



FIGURE 2.7 : Pompe centrifuge NS32.

### 2.2.5.2 Roue

La roue est l'élément tournant dans une pompe, elle est composée de cinq aubes principales à angle d'aubage constant et elle est du type semi-ouverte. Elle est réalisée en fonderie et soudage. Ce type de roue est classique et elle a été dessinée pour tourner à de moyennes vitesses. La figure 2.8 montre une vue 3D de la roue.

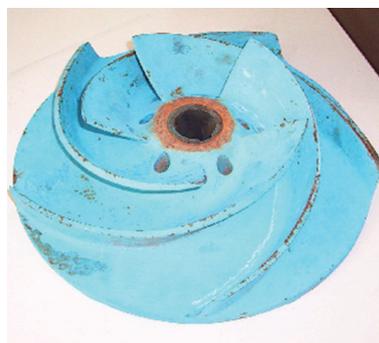


FIGURE 2.8 : Roue centrifuge de la pompe NS32.

Les principales dimensions de la roue sont synthétisées dans le tableau 2.5

Roue - Pompe NS32 (MP 250-200-400)		
Dimension	Valeur	Description
$R_0[mm]$	115.0	Rayon de la bride d'entrée
$R_1[mm]$	75.0	Rayon moyen à l'entrée de l'aube
$b_1[mm]$	85.9	Largeur à l'entrée de l'aube
$\beta_1[^\circ]$	70	Angle d'entrée de l'aube
$\theta_1[^\circ]$	37	Angle d'inclinaison de l'arête d'entrée
$R_2[mm]$	204.2	Rayon moyen à la sortie de l'aube
$b_2[mm]$	42.0	Largeur à la sortie de l'aube
$\beta_2[^\circ]$	63.0	Angle de sortie de l'aube
$\theta_2[^\circ]$	90	Angle d'inclinaison de l'arête de sortie
$Na$	5	Nombre d'aubes
$e[mm]$	8	Épaisseur des aubes

TABLEAU 2.5 : Caractéristiques géométriques de la roue de la pompe NS32.

### 2.2.5.3 Volute

La volute est l'élément fixe de la pompe, son rôle est de transformer l'énergie de pression sous la forme d'énergie de pression statique. Ce type de volute est aussi classique avec une section circulaire et symétrique. Elle est fabriquée en fonderie. Les principales dimensions de la volute sont résumées dans le tableau 2.6

Volute - Pompe NS32 (MP 250-200-400)		
Dimension	Valeur	Description
$R_3[mm]$	218.0	Rayon de base de la volute
$b_3[mm]$	50.0	Largeur de base de la volute

TABLEAU 2.6 : Caractéristiques géométriques de la volute de la pompe NS32.

## 2.3 Banc d'essais et pompe NS33

### 2.3.1 Vue générale du banc d'essais

Le banc d'essais pour mesurer les fluctuations de pression et les performances globales d'une pompe centrifuge (voir figure 2.9) a été conçu en respectant des considérations pour la mesure fiable des fluctuations de pression. Le banc est composé principalement des éléments suivants :

- Un réservoir d'une capacité unitaire de  $6 m^3$ , relié par des conduites de  $350 mm$  de diamètre. Le remplissage et la vidange sont assurés par deux électrovannes.

- Une vanne type papillon motorisée qui permet de faire varier le débit de la pompe de façon précise et contrôlée.
- Un moteur ABB de 11 kW commandé par un variateur de fréquence Télémécanique.
- Un pupitre, où sont centralisées les diverses commandes et mesures.
- Une électropompe centrifuge NS33.
- Divers appareils et instruments de mesure dont :
  - Un débitmètre électromagnétique KROHNE, monté au refoulement de la pompe.
  - Manomètre métallique Rousemont .
  - Six capteurs de pression piézo-électriques PCB, disposés sur les tuyaux d'aspiration et de refoulement (tronçon de mesures).

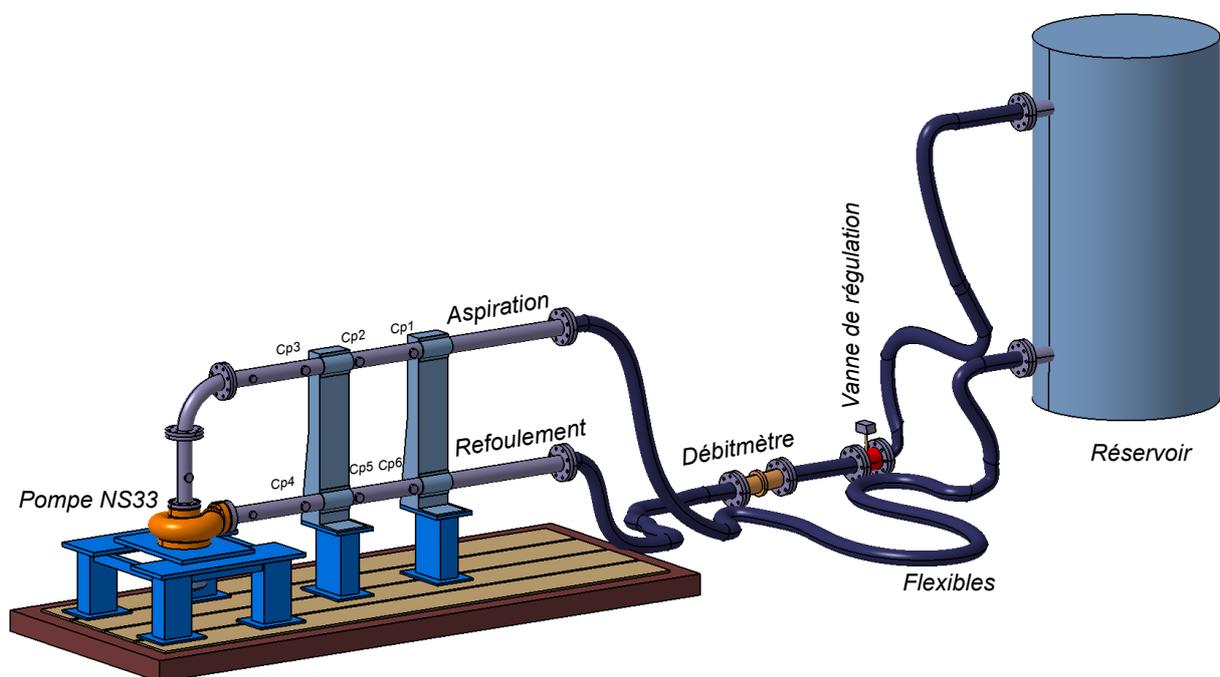


FIGURE 2.9 : Banc d'essais de la pompe centrifuge NS33.

## 2.3.2 Mesure des performances globales

### Débit-hauteur

Conformément aux normes de conception pour la mesure notamment des fluctuations de pression, le banc d'essais nous permet aussi d'effectuer une série de mesures des performances globales. Les essais ont été effectués à une vitesse de rotation d'environ 1955  $tr/min$ , grâce à un variateur de fréquence qui nous permet de varier la fréquence d'alimentation du moteur électrique. Une fois la vitesse de rotation atteinte, la pression statique développée par la pompe centrifuge est relevée pour chaque débit. L'opération pour atteindre le débit souhaité a été réalisée grâce à une vanne de régulation localisée

en aval de la pompe. La fonction de cette vanne est de modifier la courbe du circuit par l'ouverture ou la fermeture de celle-ci. Les différents points d'essai ont permis d'obtenir au final la courbe expérimentale débit-hauteur de la pompe étudiée NS33.

### 2.3.3 Mesure des fluctuations de pression à l'aspiration et au refoulement de la pompe

La mesure des fluctuations de pression a été réalisée à l'aide des capteurs de pression intrusifs, leur partie sensible (membrane) doit être affleurante à la surface interne des tuyauteries. La position de chaque capteur est définie par rapport aux brides de refoulement et aspiration de la pompe centrifuge.

Capteur	Position
Cp1	à 1050 mm de la bride d'entrée
Cp2	à 750 mm de la bride d'entrée
Cp3	à 450 mm de la bride d'entrée
Cp4	à 450 mm de la bride de sortie
Cp5	à 750 mm de la bride de sortie
Cp6	à 1050 mm de la bride de sortie

TABLEAU 2.7 : Position des capteurs de pression sur les parois des tuyaux d'aspiration et de refoulement.

### 2.3.4 Description de la pompe centrifuge NS33

#### 2.3.4.1 Modèle de pompe

La pompe centrifuge NS33 est constituée principalement d'une roue, d'une volute et des canalisations d'aspiration et de refoulement. Elle est utilisée dans plusieurs secteurs pour ses avantages en terme de pression statique et d'exigences acoustiques. Le cahier des charges de cette pompe est présenté dans le tableau 2.8

Caractéristiques	
$H_n [bar]$	1.56
$Q_n [m^3/h]$	60
$N [tr/min]$	1955
$N_s$	33

TABLEAU 2.8 : Cahier des charges de la pompe NS33.

La figure 2.10 présente une vue en coupe de la pompe réelle utilisée pour notre étude de fluctuations de pression et validation des nouveaux outils numériques développés au sein du laboratoire.

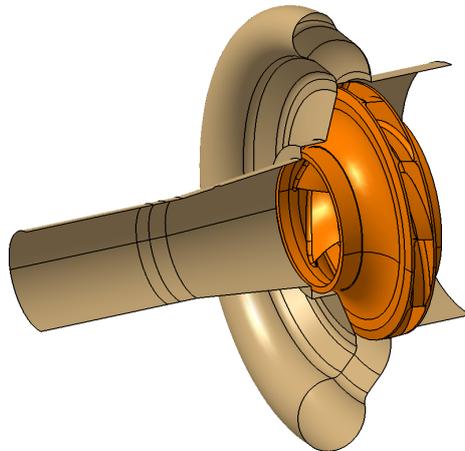


FIGURE 2.10 : Pompe centrifuge NS33.

#### 2.3.4.2 Roue

La roue est l'élément tournant dans une pompe, dans notre cas, elle est composée par 10 aubes (5 aubes principales et 5 aubes intermédiaires) et elle est de type fermée. Afin d'optimiser l'hydraulique en termes hydroacoustiques, des modifications locales à la sortie des aubes de la roue ont été réalisées. La fabrication de cette pièce est réalisée en fonderie et soudage. Ce type de roue n'est pas classique et elle a été dessinée pour tourner à de grandes vitesses. La figure 2.11 illustre une vue 3D de la roue.

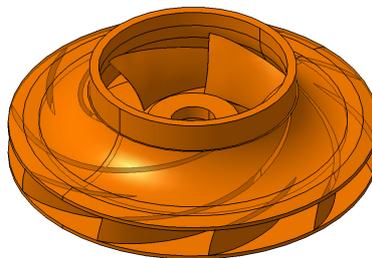


FIGURE 2.11 : Roue centrifuge de la pompe NS33.

Les principales dimensions de la roue sont synthétisées dans le tableau 2.9

#### 2.3.4.3 Volute

La volute est l'élément fixe de la pompe, son rôle est de transformer l'énergie de pression sous la forme d'énergie de pression statique. La volute est de type déportée avec une section circulaire. Elle est fabriquée en fonderie. Les principales dimensions de la volute sont résumées dans le tableau 2.10

Roue - Pompe NS33		
Dimension	Valeur	Description
$R_0[mm]$	86	Rayon de la bride d'entrée
$R_1[mm]$	30	Rayon moyen à l'entrée de l'aube principale
$b_1[mm]$	32	Largeur à l'entrée de l'aube principale
$\beta_1[^\circ]$	60	Angle d'entrée de l'aube
$R_2[mm]$	90	Rayon moyen à la sortie de l'aube
$b_2[mm]$	15	Largeur à la sortie de l'aube
$\beta_2[^\circ]$	70.0	Angle de sortie de l'aube
$Na$	10	Nombre d'aubes
$e[mm]$	3.00	Épaisseur des aubes

TABLEAU 2.9 : Caractéristiques géométriques de la roue de la pompe NS33.

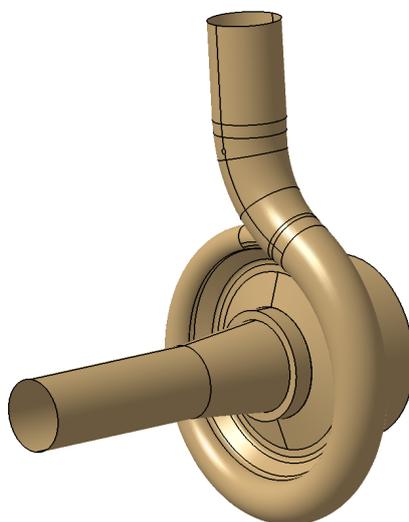


FIGURE 2.12 : Volute déportée de la pompe NS33.

Volute - Pompe NS33		
Dimension	Valeur	Description
$R_3[mm]$	92.0	Rayon de base de la volute
$b_3[mm]$	33.0	Largeur de base de la volute

TABLEAU 2.10 : Caractéristiques géométriques de la volute de la pompe NS33.

## 2.4 Résultats expérimentaux de la pompe NS32

### 2.4.1 Courbe de performances hauteur-débit

La mesure des performances globales donnent une courbe classique du comportement de ce type de pompe. La figure 2.13 illustre la courbe caractéristique hauteur-débit à une vitesse de 900  $tr/min$ .

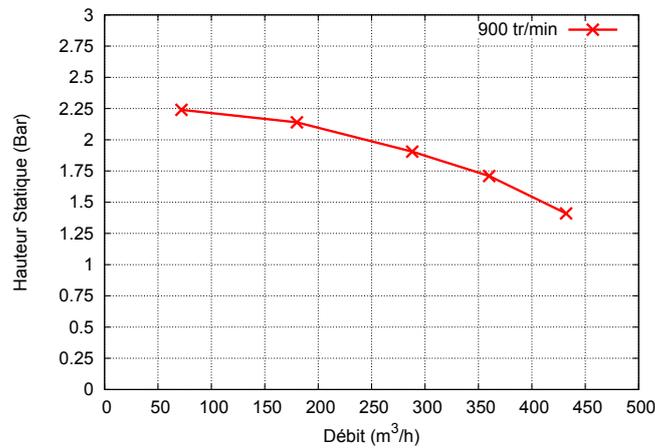


FIGURE 2.13 : Courbe performance hauteur-débit à 900 tr/min.

## 2.4.2 Fluctuations de pression dans la volute

Afin d'alléger l'écriture on adoptera les notations suivantes :

- $P$  : pression statique fournie par la pompe.
- $\Delta P$  : l'amplitude des fluctuations de pression.
- $\Delta P/P$  : fluctuation de pression relative.

L'intérêt des essais expérimentaux est d'analyser le comportement de la fluctuation de la pression relative à la sortie de la pompe. Pour donner un ordre de grandeur,  $\Delta P/P$  varie entre  $\pm 2\%$  et  $\pm 5\%$ , pour les pompes industrielles classiques. Pour une variation de  $\pm 2\%$ , la pompe est très performante selon ce critère. Pour  $\pm 1\%$ , la pompe a été conçue dans ce but.

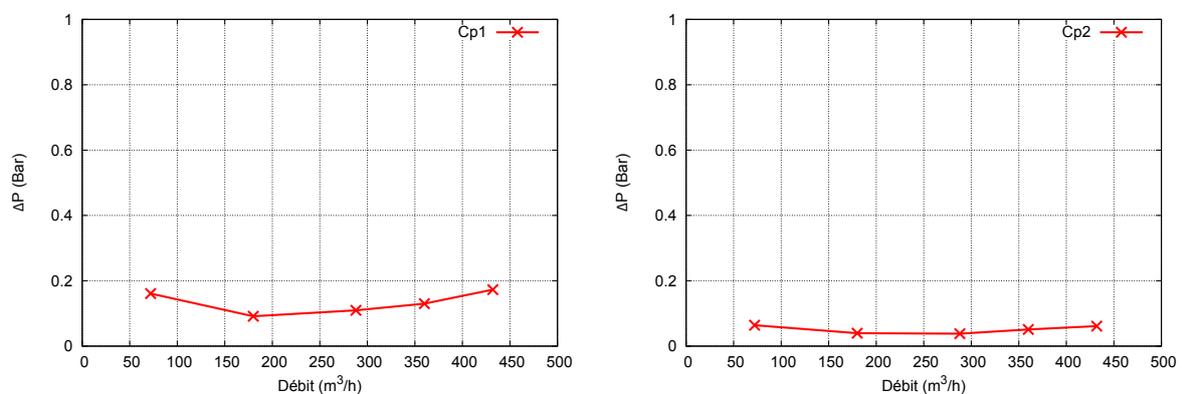


FIGURE 2.14 : Variation des fluctuations de pression dans les capteurs Cp1 et Cp2 en fonction du débit à 900 tr/min.

La figure 2.14 montre la variation de l'amplitude de la fluctuation de pression en fonction du débit. Le capteur Cp1 proche du bec de volute enregistre des amplitudes plus importantes que celles du capteur Cp2 qui est plus loin de la zone du bec. Les amplitudes du capteur Cp2 sont moindres et leurs variations par rapport au débit sont presque constantes. Cp1 révèle clairement les effets d'interaction hydrodynamique entre les aubes de la roue et le bec de volute. Ces fluctuations se propagent et se dissipent en s'éloignant vers le divergent de la volute (Cp2 et Cp3). D'autre part, la courbe de Cp1 montre un point bas entre les débits de 150 et 300  $m^3/h$ . Effectivement, cela est une bonne indication pour montrer que la pompe se comporte avec moins de bruit dans cette plage de débits. Les simulations numériques vérifieront si ce point correspond bien ou s'approche du débit nominal de cet hydraulique.

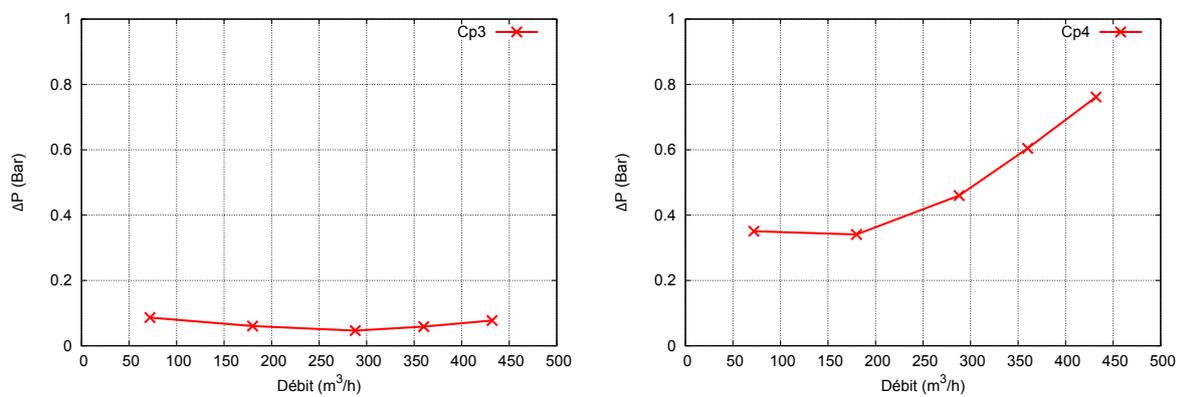


FIGURE 2.15 : Variation des fluctuations de pression des capteurs Cp3 et Cp4 en fonction du débit à 900  $tr/min$ .

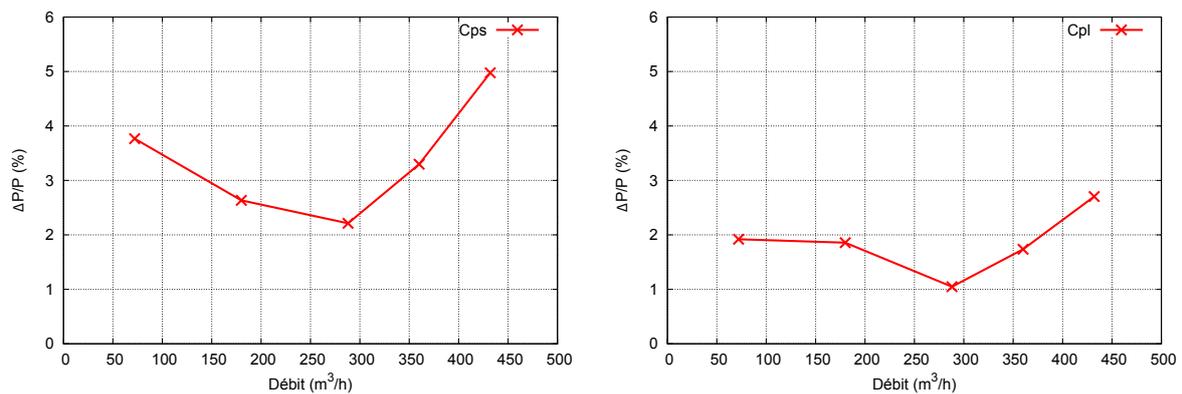


FIGURE 2.16 : Fluctuations de la pression relatives au niveau de la sortie de la pompe (Cps et Cpl) à 900  $tr/min$ .

La conception d'une pompe se réalise en fonction d'un cahier des charges qui correspond normalement au comportement nominal. Hors de ce point, l'écoulement est moins adapté à la roue et aussi à la volute. Pour les capteurs Cp1, Cp2 et Cp3, les amplitudes varient à cause du comportement com-

plexe de l'écoulement (présence de décollements, sillage, récirculations et aussi à cause de la volute qui n'est pas adaptée à tous les débits). Le capteur Cp4 montre une variation de l'amplitude différente aux autres capteurs parce qu'il est dans la zone de la roue (placé dans le flasque avant). Leurs amplitudes restent constantes entre 50 et 180  $m^3/h$  et augmente ensuite pour les débits supérieures. Cette augmentation est dû principalement à la désadaptation de l'écoulement dans la roue qui se manifeste par le décollement et une alimentation non uniforme de l'écoulement vers la volute.

La présence d'un point bas est aussi observé sur la figure 2.16 qui est proche de 300  $m^3/h$ . D'autre part, les fluctuations de pression relative se dissipent en s'éloignant de la sortie de la volute (comparaison des capteurs Cps et Cpl) pour un même débit. Pour le capteur Cps, la fluctuation relative varie aux alentours de 2 à 5% ce qui est une valeur correcte. Pour le capteur Cpl, les fluctuations se sont amorties de 2% environ. La figure aussi montre qu'en sur-débit et en sous-débit, le régime désadapté de la pompe se manifeste par une élévation de la fluctuation relative parce qu'il fonctionne hors de son point nominal. C'est-à-dire que l'écoulement est fortement instationnaire, les phénomènes de décollement et de pertes deviennent plus prépondérants.

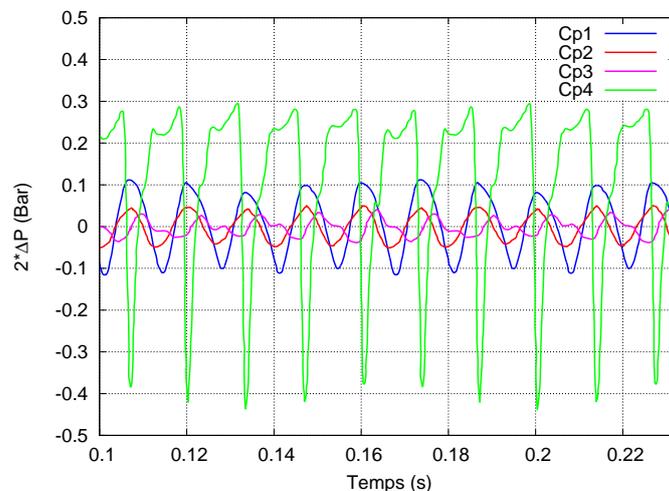


FIGURE 2.17 : Amplitude des fluctuations de pression à 900  $tr/min$ .

Les signaux enregistrés par les capteurs intrusifs (Cp1, Cp2, Cp3 et Cp4) sont illustrés sur la figure 2.17. Ils représentent deux tours de roue et ont un comportement périodique. Il est clair que les amplitudes sont différentes entre elles (elles sont les plus importantes pour le capteur qui se trouve dans le flasque avant). Les fluctuations de pression sont atténuées à mesure que l'écoulement se dirige vers la sortie de la volute.

## 2.5 Résultats expérimentaux de la pompe NS33

### 2.5.1 Courbe de performances hauteur-débit

La figure 2.18 illustre la courbe hauteur-débit de la pompe NS33 à la vitesse de 1955  $tr/min$ . Celle-ci est déterminée pour sept débits de  $Q=5$  à  $70 m^3/h$ .

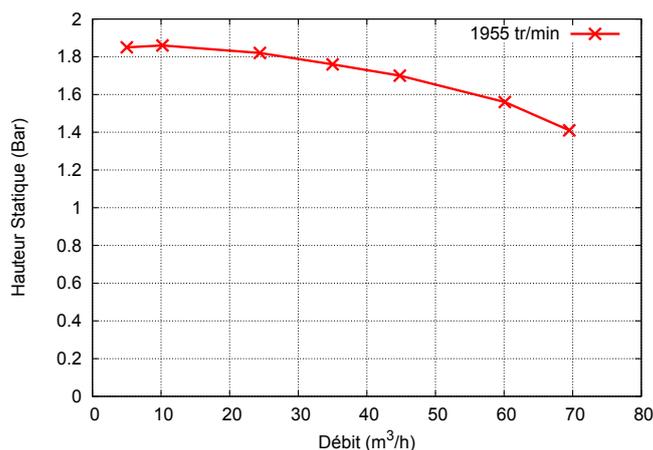


FIGURE 2.18 : Courbe de performance hauteur-débit de la pompe NS33 à 1955  $tr/min$ .

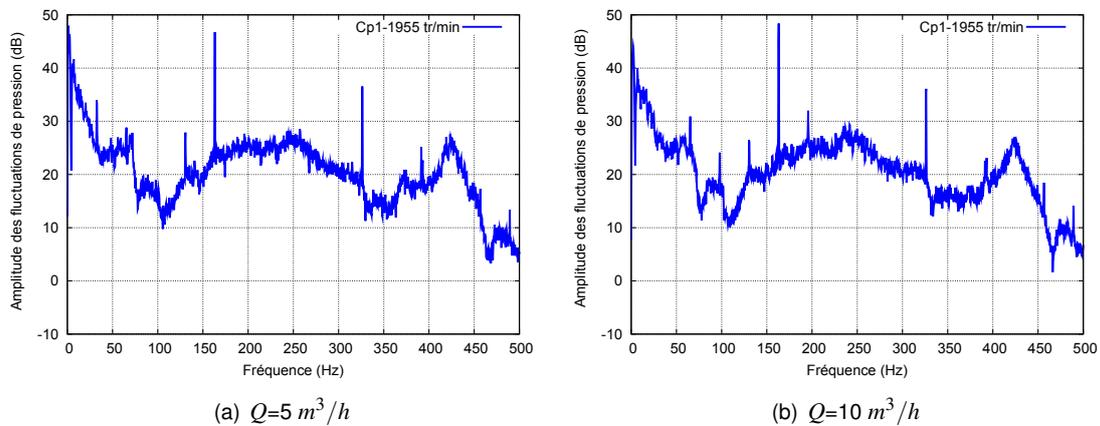
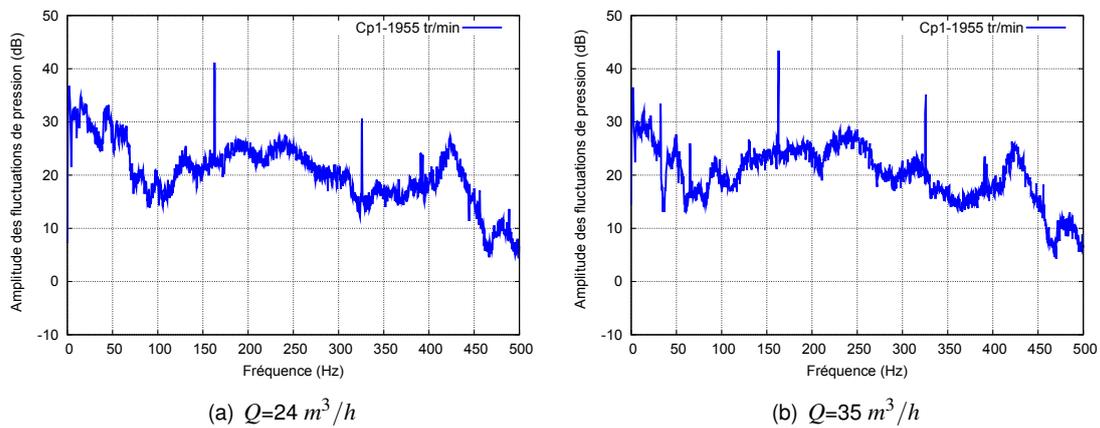
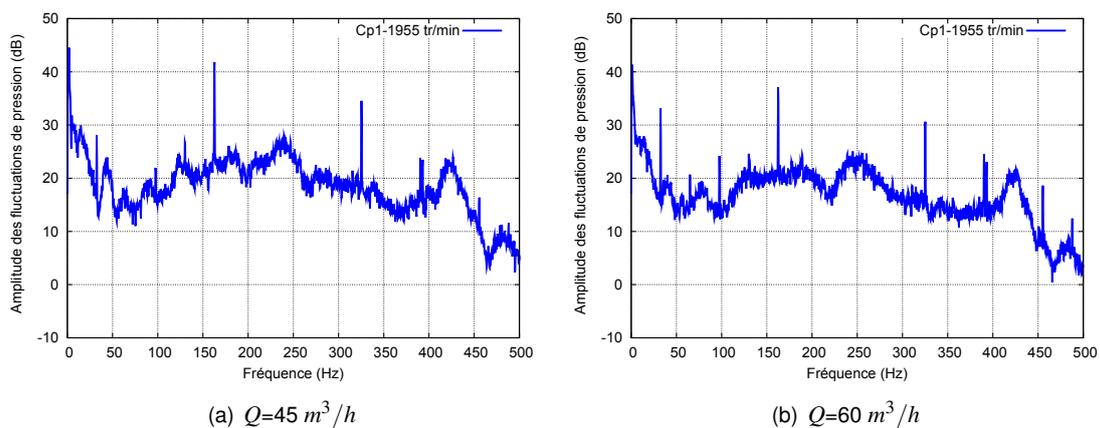
### 2.5.2 Fluctuations de pression à l'aspiration et au refoulement

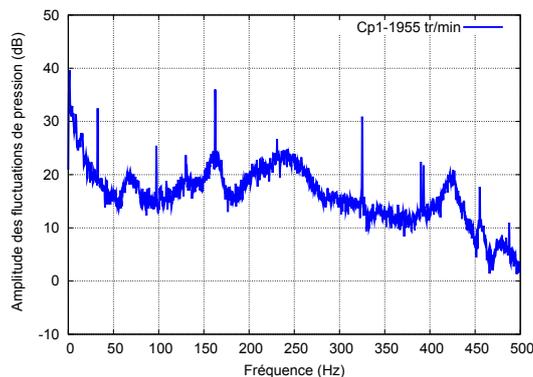
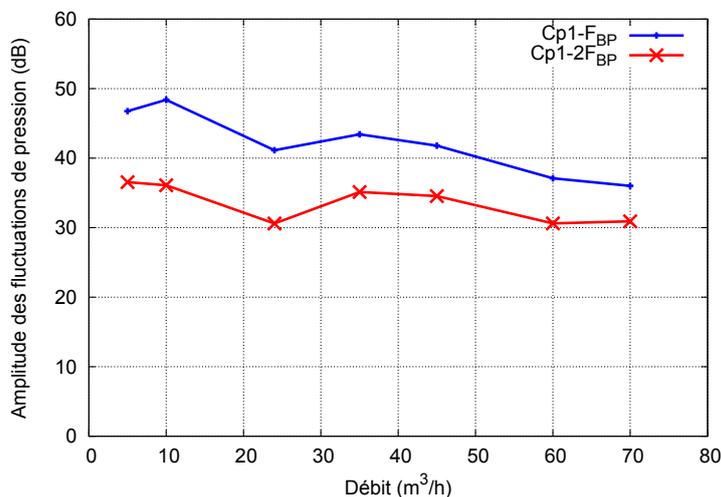
Les fluctuations de pression, à l'aspiration et au refoulement, ont été relevées pour les sept débits précédents et pour les six capteurs Cp1 à Cp6. Les figures 2.19 à 2.47 illustrent ces résultats.

#### Capteur Cp1

Les figures 2.19 à 2.23 montrent les spectres fréquentiels pour des débits compris entre  $Q = 5$  et  $70 m^3/h$ . On peut identifier des raies qui correspondent aux fréquences  $F_{BP}$ ,  $2F_{BP}$  et à la fréquence de rotation qui varient en fonction du débit de fonctionnement. Ces raies qui émergent sont le résultat des fortes interactions entre les aubes de la roue et le bec de la volute. Leurs amplitudes sont étroitement liées au débit de fonctionnement et à leur position dans la boucle d'essais.

D'autre part, sur la figure 2.23, les valeurs des amplitudes caractéristiques aux fréquences  $F_{BP}$  et  $2F_{BP}$  sont tracées en fonction du débit pour ce capteur. Elles diminuent à mesure que le débit augmente sauf pour le débit à  $24 m^3/h$ , où la courbe diminue puis augmente de nouveau sans pouvoir identifier la raison de ce comportement étrange. Les conditions de fonctionnement de la boucle ne permettent pas permis d'effectuer des essais à des débits plus élevés pour voir l'augmentation de la courbe et donc de constater le comportement classique de ce type de pompes.

FIGURE 2.19 : Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp1 ( $Q = 5$  et  $10 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).FIGURE 2.20 : Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp1 ( $Q = 24$  et  $35 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).FIGURE 2.21 : Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp1 ( $Q = 45$  et  $60 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

(a)  $Q=70 \text{ m}^3/h$ FIGURE 2.22 : Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp1 ( $Q = 70 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).FIGURE 2.23 : Niveaux de fluctuations de pression en fonction du débit pour Cp1 ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

### Capteur Cp2

Les images suivantes (figures 2.24 à 2.28) montrent les spectres fréquentiels du capteur Cp2 placé à une distance de 350 mm du capteur Cp1 pour des débits compris entre  $Q = 5$  et  $70 \text{ m}^3/h$ . On peut identifier les raies caractéristiques qui correspondent aux fréquences  $F_{BP}$  et  $2F_{BP}$  et qui varient en fonction du débit de fonctionnement. Ces raies qui émergent sont le résultat des fortes interactions hydrodynamiques entre les aubes de la roue et le bec de la volute.

Comme le cas précédent, la figure 2.28 montre l'évolution des amplitudes de Cp2 en fonction du débit de fonctionnement. La tendance est la même que celle du capteur Cp1 sauf qu'il y a des décalages pour les deux courbes. Les amplitudes de Cp2 sont plus élevées à la fréquence  $F_{BP}$  par rapport à Cp1 et en revanche la courbe correspondant à  $2F_{BP}$  pour le capteur Cp2 est plus faible que celle du capteur Cp1. Etant donné la petite distance entre ces deux capteurs, il est difficile d'interpréter ces écarts.

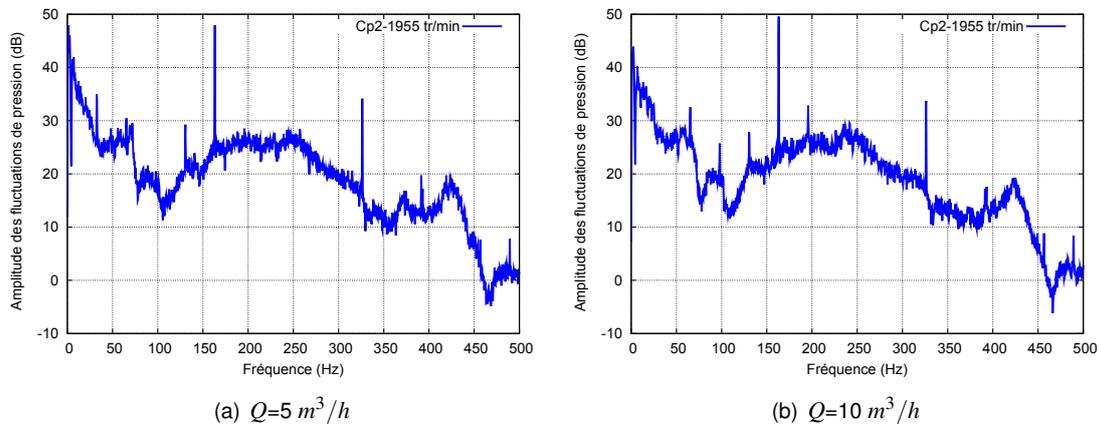


FIGURE 2.24 : Spectres du capteur de pression à l'aspiration  $Cp2$  ( $Q = 5$  et  $10 \text{ m}^3/\text{h}$ ) ( $P_{ref} = 1 \text{ Pa}$ ).

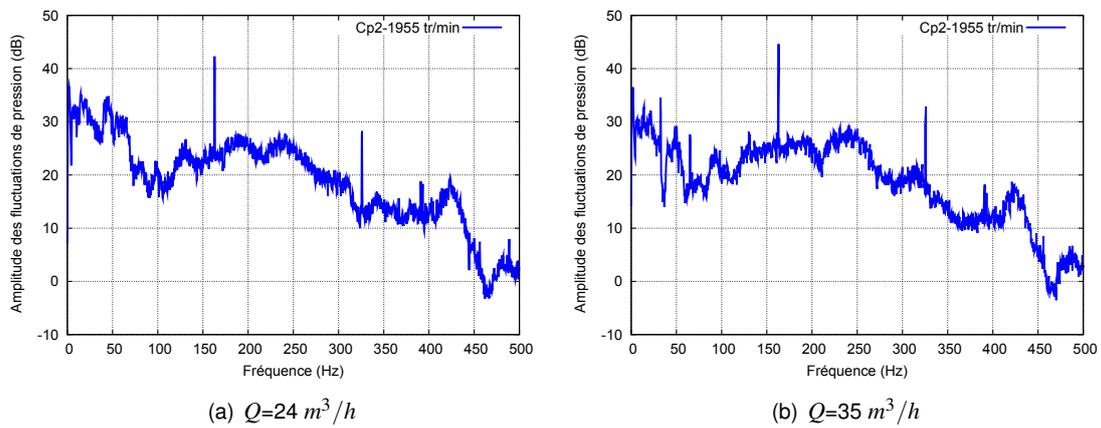


FIGURE 2.25 : Spectres du capteur de pression à l'aspiration  $Cp2$  ( $Q = 24$  et  $35 \text{ m}^3/\text{h}$ ) ( $P_{ref} = 1 \text{ Pa}$ ).

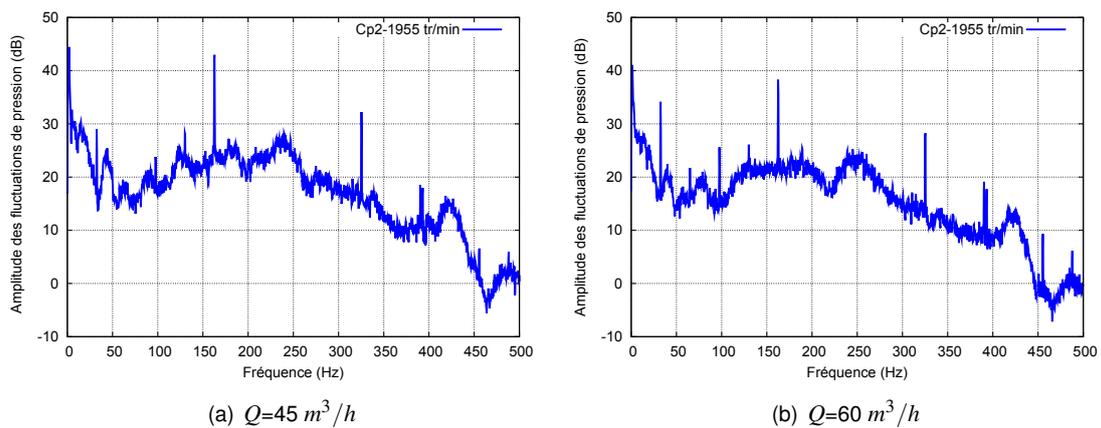
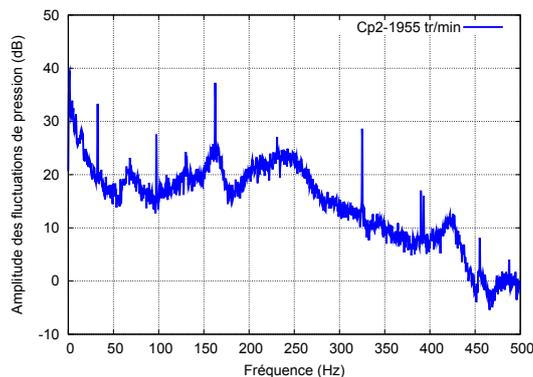
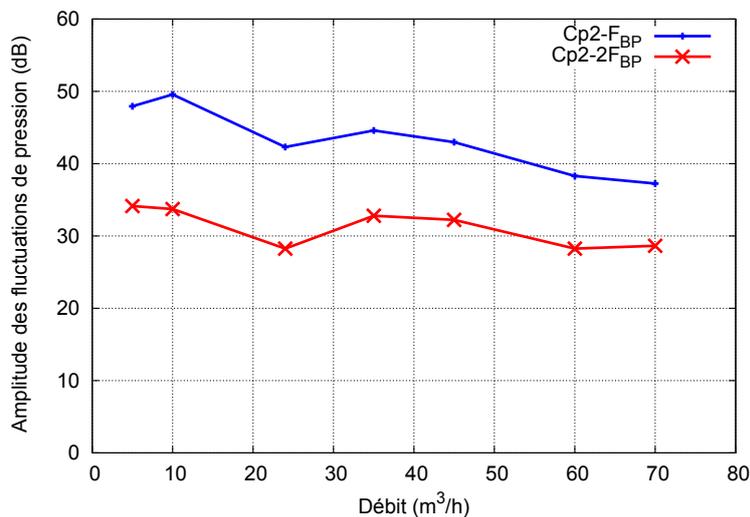


FIGURE 2.26 : Spectres du capteur à l'aspiration  $Cp2$  ( $Q = 45$  et  $60 \text{ m}^3/\text{h}$ ) ( $P_{ref} = 1 \text{ Pa}$ ).

(a)  $Q=70 \text{ m}^3/h$ FIGURE 2.27 : Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp2 ( $Q = 70 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{ref}=1 \text{ Pa}$ ).FIGURE 2.28 : Niveaux de fluctuations de pression en fonction du débit pour Cp2 ( $P_{ref}=1 \text{ Pa}$ ).

### Capteur Cp3

Les images 2.29 à 2.33 illustrent les spectres fréquentiels du capteur Cp3 pour des débits compris entre  $Q = 5$  et  $70 \text{ m}^3/h$ . Ce capteur se trouve à  $350 \text{ mm}$  du capteur Cp2 et montre des raies qui correspondent aux fréquences  $F_{BP}$  et  $2F_{BP}$ . On peut aussi distinguer une autre raie d'une amplitude plus faible, mais qui augmente avec le débit. Cette raie correspond bien à la fréquence de rotation de la roue. D'autre part, l'évolution des amplitudes de Cp3 en fonction du débit (voir figure 2.33) montre la même tendance que Cp1 et Cp2. Dans ce cas, la courbe de fréquence  $F_{BP}$  est presque la même pour Cp2 et Cp3, mais l'autre courbe à  $2F_{BP}$  se décale encore plus vers le bas. Il y a donc une atténuation des fluctuations de pression à mesure que l'écoulement se dirige vers l'entrée de la roue.

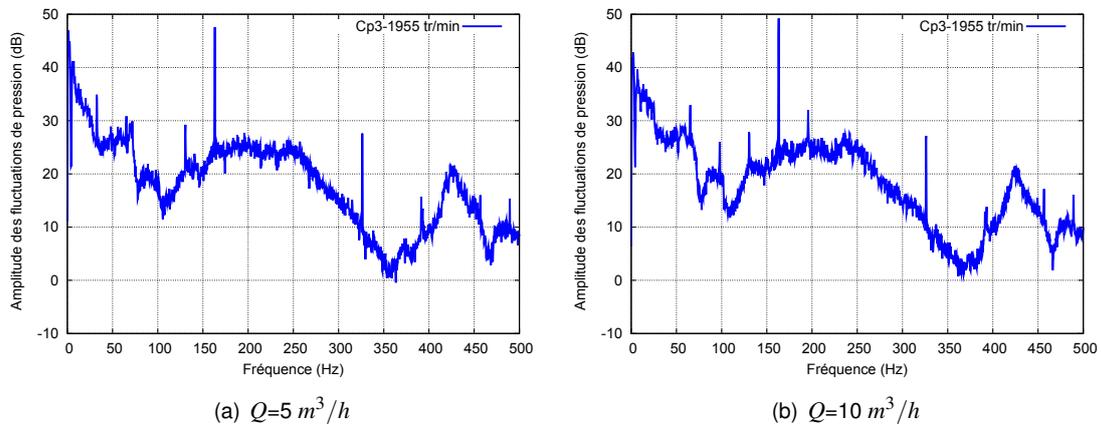


FIGURE 2.29 : Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp3 ( $Q = 5$  et  $10 \text{ m}^3/\text{h}$ ) ( $P_{\text{réf}} = 1 \text{ Pa}$ ).

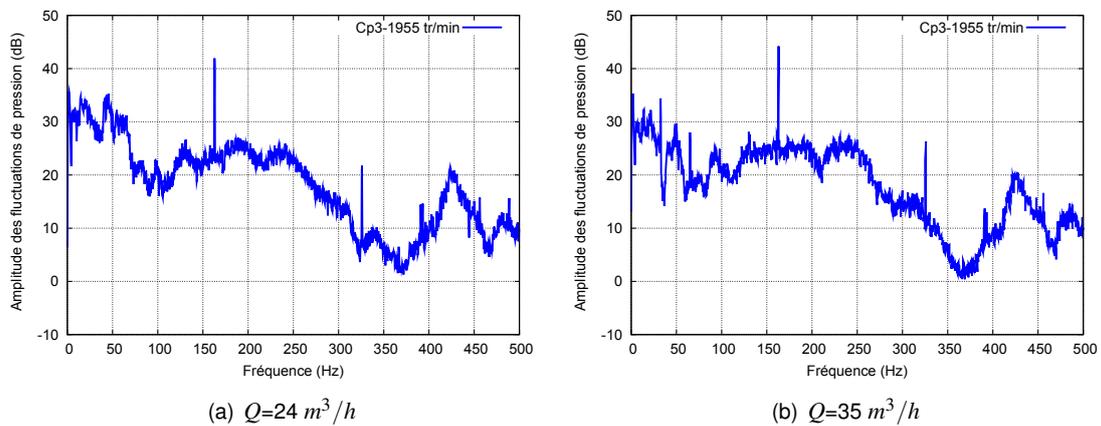


FIGURE 2.30 : Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp3 ( $Q = 24$  et  $35 \text{ m}^3/\text{h}$ ) ( $P_{\text{réf}} = 1 \text{ Pa}$ ).

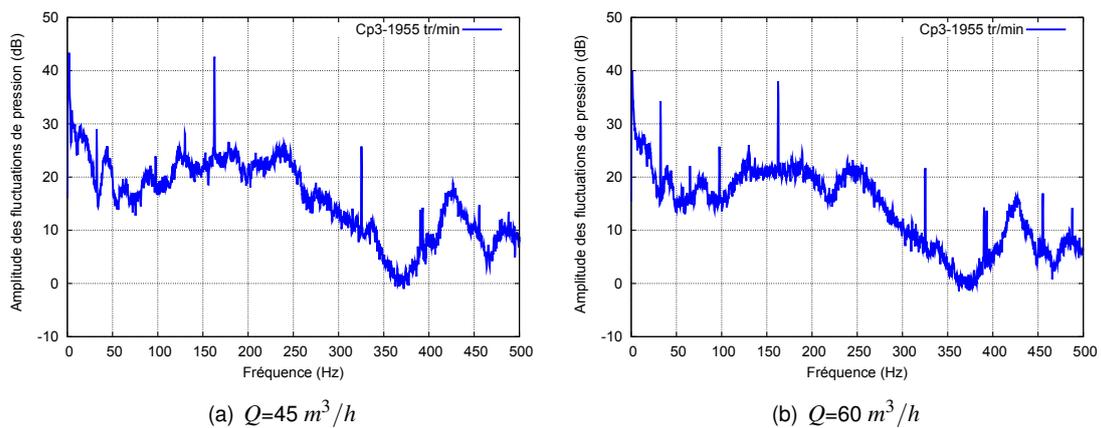
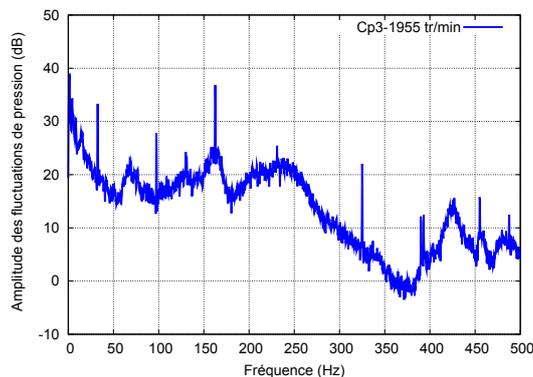
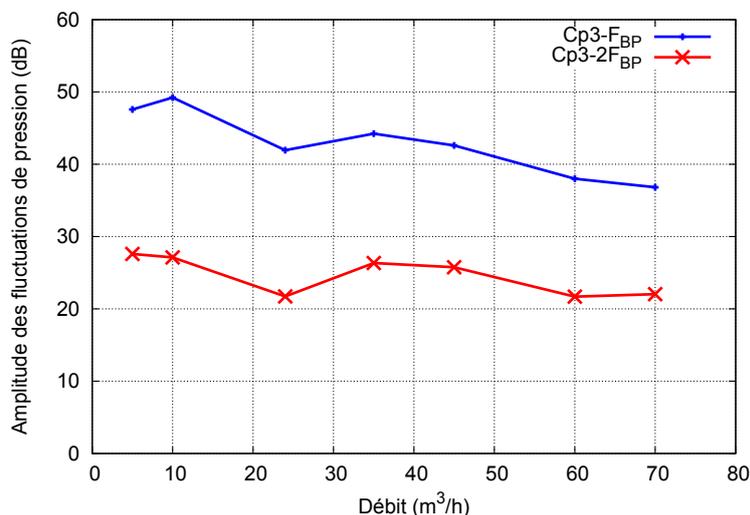


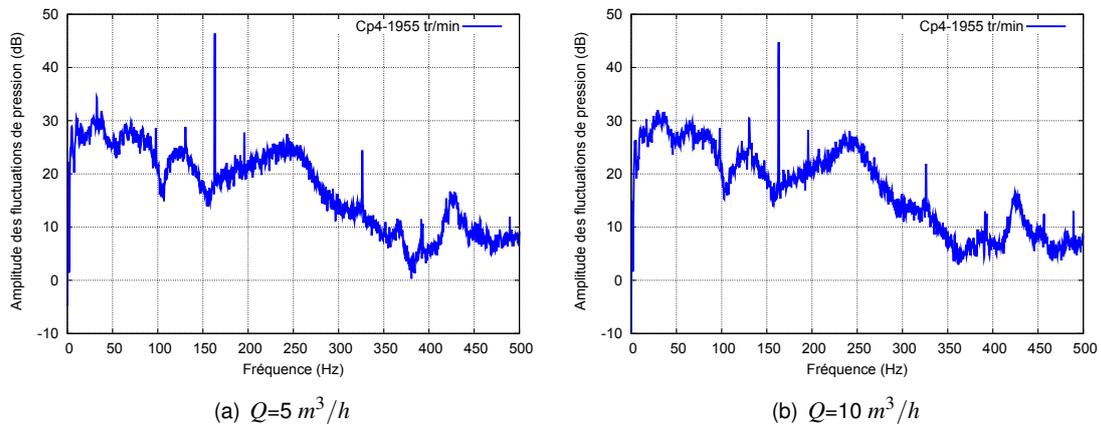
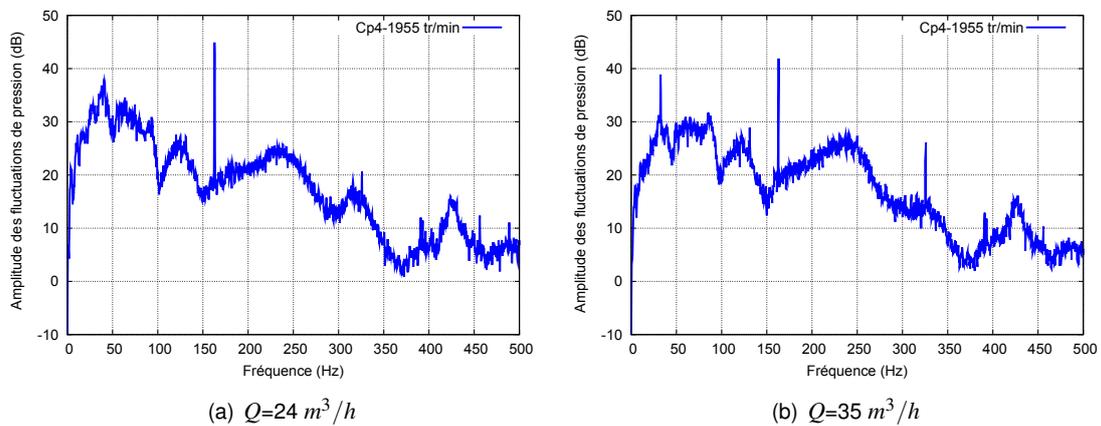
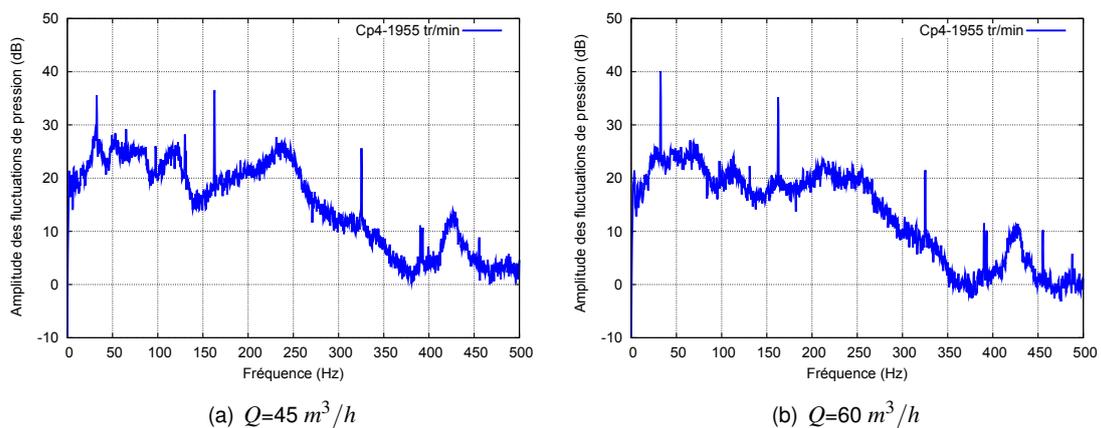
FIGURE 2.31 : Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp3 ( $Q = 45$  et  $60 \text{ m}^3/\text{h}$ ) ( $P_{\text{réf}} = 1 \text{ Pa}$ ).

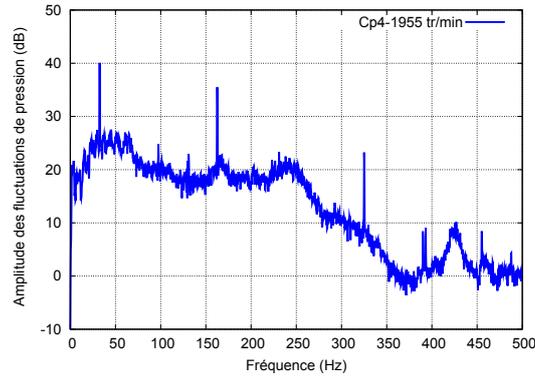
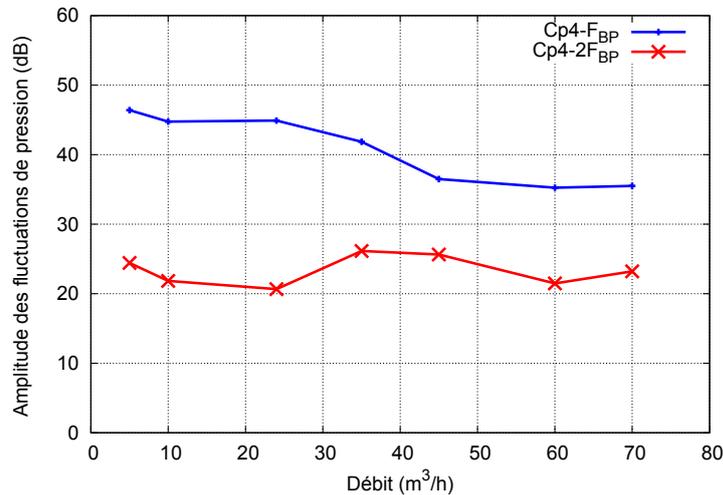
(a)  $Q=70 \text{ m}^3/h$ FIGURE 2.32 : Spectres du capteur de pression à l'aspiration Cp3 ( $Q = 70 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).FIGURE 2.33 : Niveaux de fluctuations de pression en fonction du débit pour Cp3 ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

### Capteur Cp4

Les figures 2.34 à 2.38 montrent les spectres fréquentiels du capteur Cp4 (proche de la bride de sortie) pour des débits compris entre  $Q = 5$  et  $70 \text{ m}^3/h$ . On peut identifier des raies qui correspondent aux fréquences  $F_{BP}$ ,  $2F_{BP}$  et à la fréquence de rotation de la pompe. L'amplitude de ces raies varie en fonction du débit de fonctionnement. Les pics sont le résultat des fortes interactions hydrodynamiques entre les aubes de la roue et le bec de la volute. La raie à la fréquence de rotation, qui est plus nette, est due au balourd hydraulique causé par la roue.

Ici, dans le tuyau de refoulement, l'évolution du niveau de fluctuation de pression diminue progressivement en fonction du débit pour la fréquence  $F_{BP}$ . L'amplitude des fluctuations de pression ne suit pas la même tendance pour la fréquence  $2F_{BP}$  et est plus faible de quelques décibels (voir figure 2.38).

FIGURE 2.34 : Spectres du capteur de pression au refoulement Cp4 ( $Q = 5$  et  $10 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).FIGURE 2.35 : Spectres du capteur de pression au refoulement Cp4 ( $Q = 24$  et  $35 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).FIGURE 2.36 : Spectres du capteur de pression au refoulement Cp4 ( $Q = 45$  et  $60 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

(a)  $Q=70 \text{ m}^3/h$ FIGURE 2.37 : Spectres du capteur de pression au refoulement Cp4 ( $Q = 70 \text{ m}^3/h$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).FIGURE 2.38 : Niveaux de fluctuations de pression en fonction du débit pour Cp4 ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

### Capteur Cp5

Les images 2.39 à 2.43 illustrent les spectres fréquentiels du capteur Cp5 (localisé à 350 mm de Cp4) pour des débits compris entre  $Q = 5$  et  $70 \text{ m}^3/h$ . On peut identifier des raies qui correspondent aux fréquences  $F_{BP}$ ,  $2F_{BP}$ , à la fréquence de rotation et à leurs harmoniques. Les amplitudes de toutes les raies varient en fonction du débit de fonctionnement, mettant en évidence que les capteurs placés au refoulement observent de façon plus nette le pic à la fréquence de rotation.

D'autre part, la figure 2.43 montre le comportement des amplitudes de Cp5 en fonction du débit de fonctionnement pour les deux fréquences  $F_{BP}$  et  $2F_{BP}$ . Pour la courbe  $F_{BP}$  la tendance est la même que celle du capteur Cp4 ; il semble que les amplitudes sont presque identiques. Par contre, à la fréquence de  $2F_{BP}$ , la courbe qui est en dessous de celle de  $F_{BP}$ , a des amplitudes plus élevées quand le débit augmente, comme dans le cas du capteur Cp4.

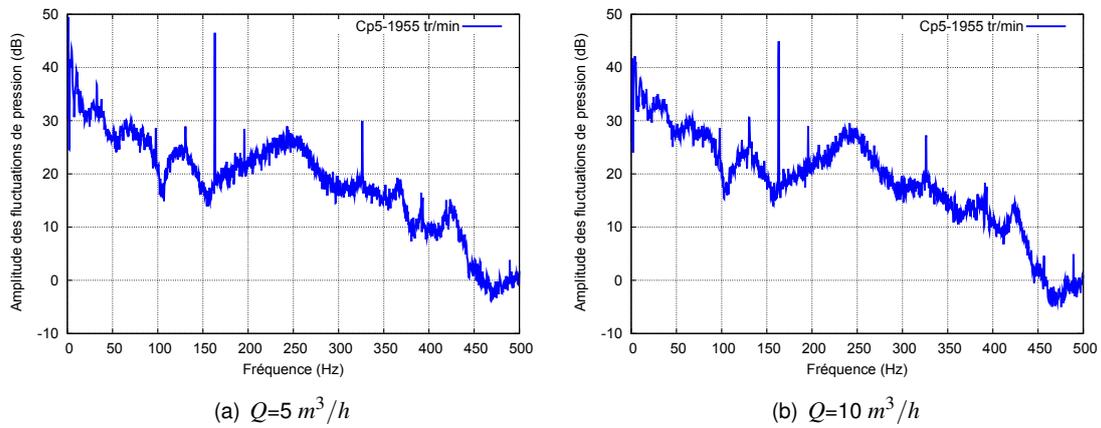


FIGURE 2.39 : Spectres du capteur de pression au refoulement Cp5 ( $Q = 5$  et  $10 \text{ m}^3/h$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

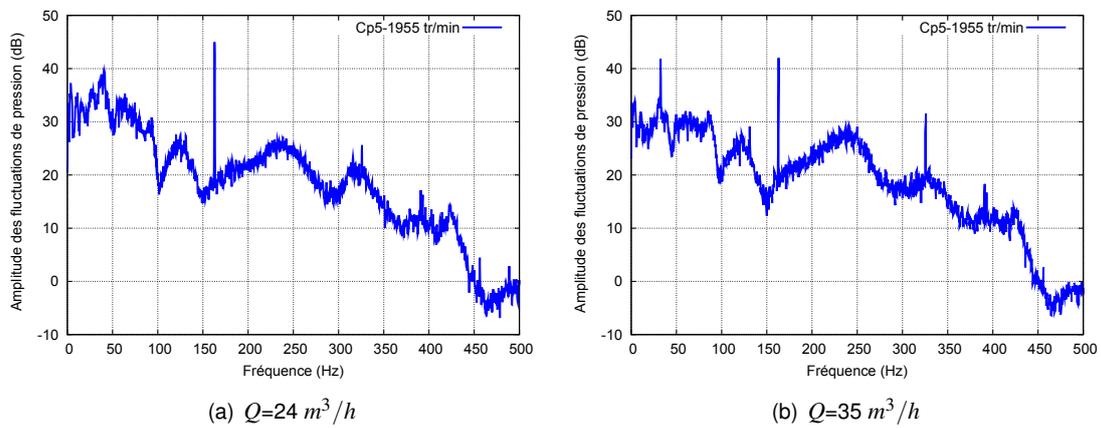


FIGURE 2.40 : Spectres du capteur de pression au refoulement Cp5 ( $Q = 24$  et  $35 \text{ m}^3/h$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

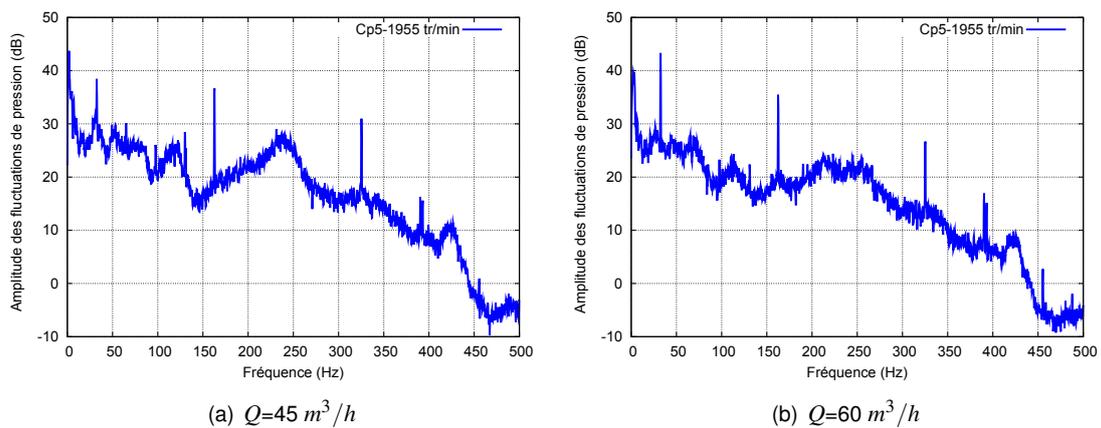
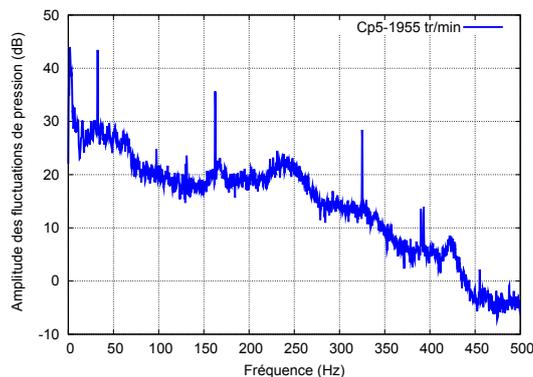
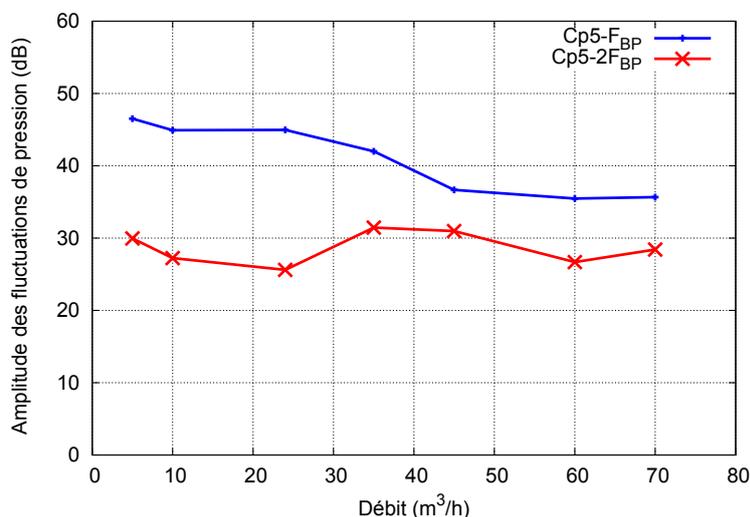


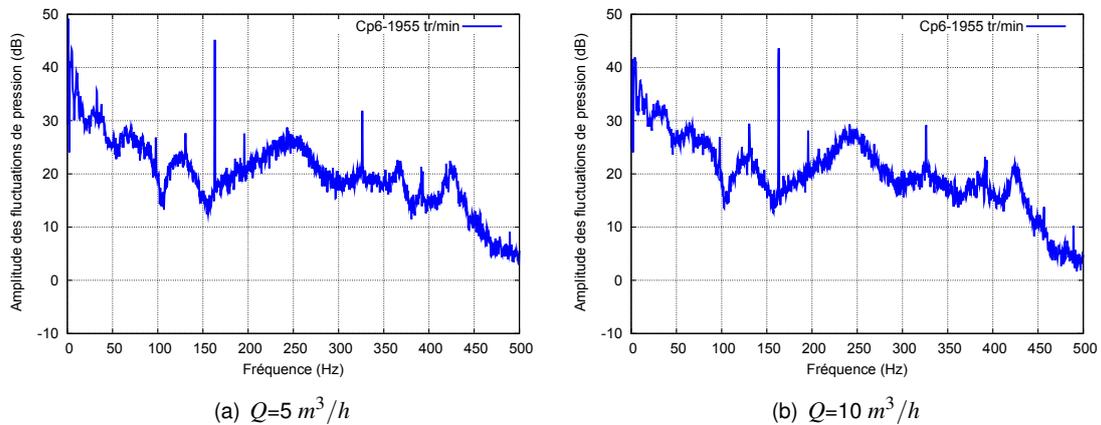
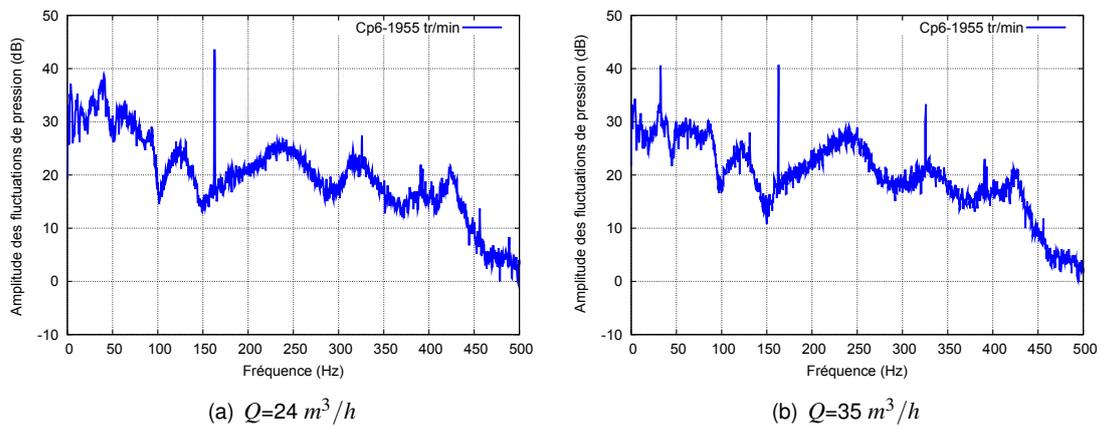
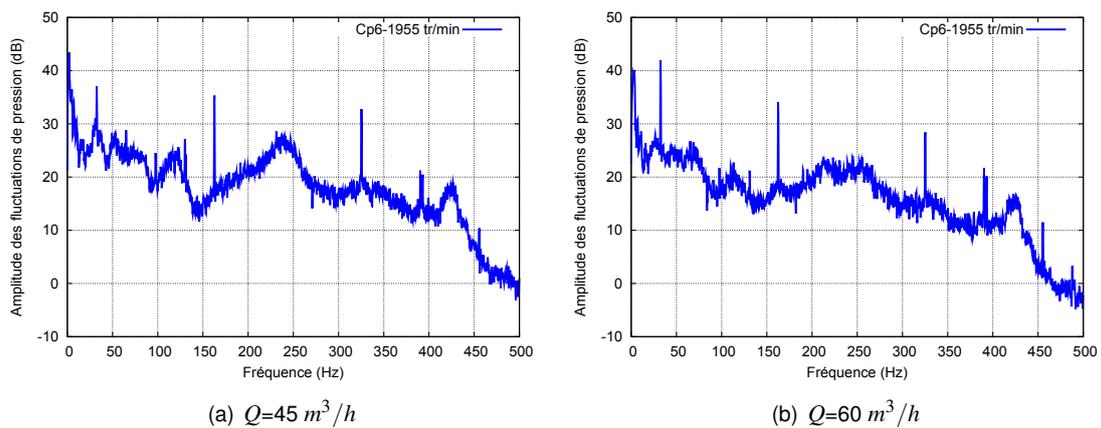
FIGURE 2.41 : Spectres du capteur de pression au refoulement Cp5 ( $Q = 45$  et  $60 \text{ m}^3/h$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

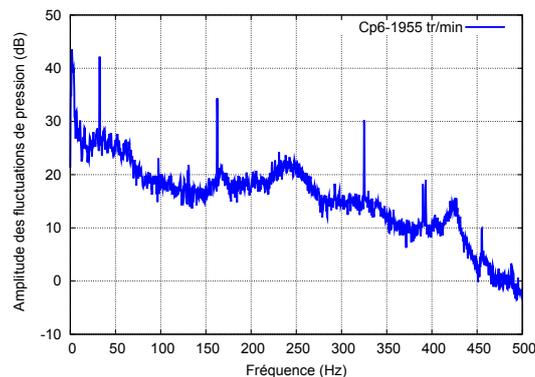
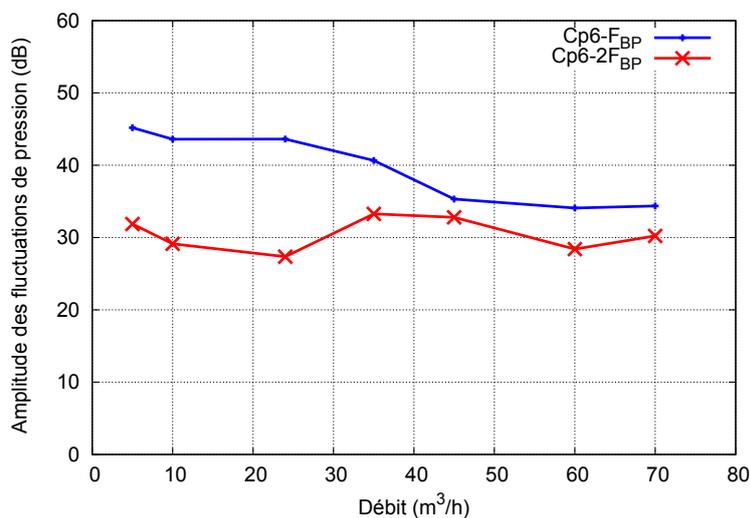
(a)  $Q=70 \text{ m}^3/h$ FIGURE 2.42 : Spectres du capteur de pression au refoulement Cp5 ( $Q = 70 \text{ m}^3/h$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).FIGURE 2.43 : Niveaux de fluctuations de pression en fonction du débit pour Cp5 ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

### Capteur Cp6

Les images 2.44 à 2.48 illustrent les spectres fréquentiels du capteur Cp6 (placé à 350 mm de Cp5) pour des débits compris entre  $Q = 5$  et  $70 \text{ m}^3/h$ . Les raies correspondantes aux fréquences  $F_{BP}$ ,  $2F_{BP}$  et à la fréquence de rotation sont présents. Leurs amplitudes varient en fonction du débit de fonctionnement. Ces pics sont le résultat des interactions entre les aubes de la roue et le bec de la volute ainsi que de l'existence d'un balourd hydraulique causé par la rotation de la roue.

La figure 2.48 montre l'évolution des amplitudes de Cp6 en fonction du débit de fonctionnement. La tendance des courbes  $F_{BP}$  et  $2F_{BP}$  est semblable à celle des capteurs Cp4 et Cp5. Les amplitudes à la fréquence  $F_{BP}$  sont presque les mêmes à celles des capteurs Cp4 et Cp5, tandis que celles à la fréquence  $2F_{BP}$  se décalent vers le haut mais continue à être plus faible que  $F_{BP}$ .

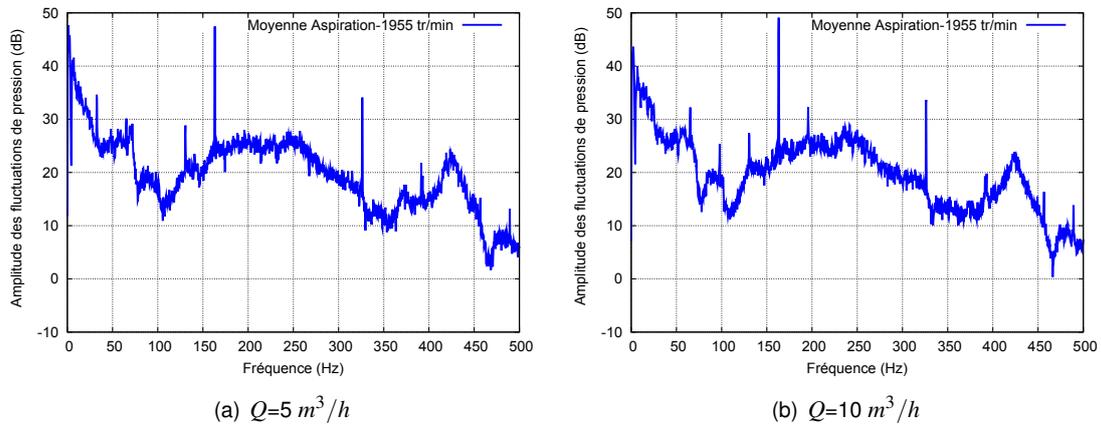
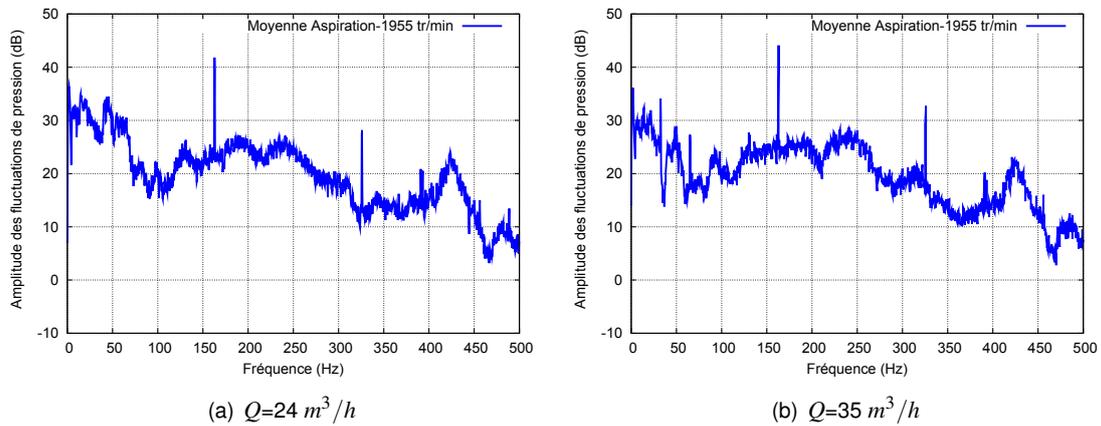
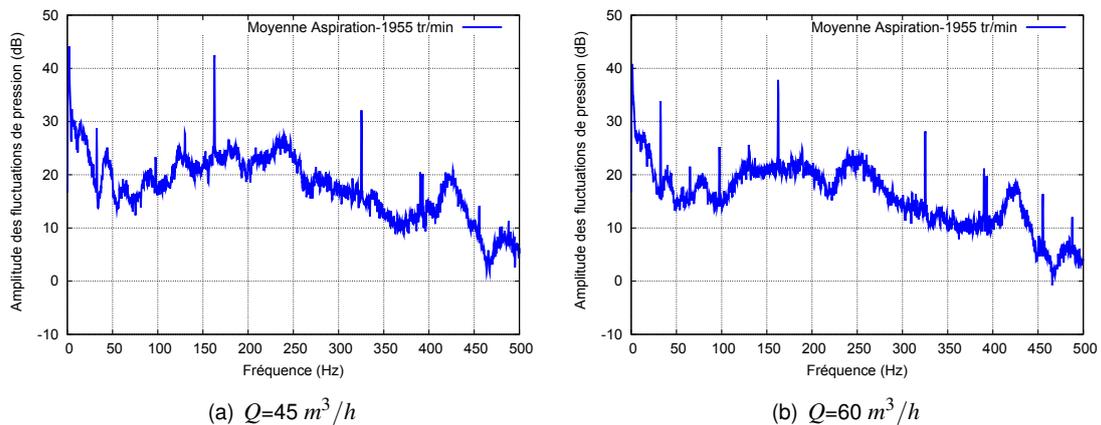
FIGURE 2.44 : Spectres du capteur de pression au refoulement Cp6 ( $Q = 5$  et  $10 \text{ m}^3/h$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).FIGURE 2.45 : Spectres du capteur de pression au refoulement Cp6 ( $Q = 24$  et  $35 \text{ m}^3/h$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).FIGURE 2.46 : Spectres du capteur de pression au refoulement Cp6 ( $Q = 45$  et  $60 \text{ m}^3/h$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

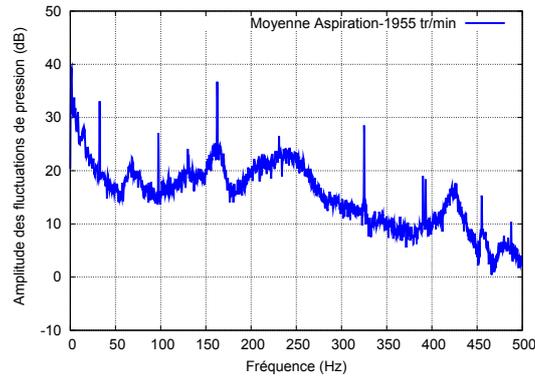
(a)  $Q=70 \text{ m}^3/h$ FIGURE 2.47 : Spectres du capteur de pression au refoulement Cp6 ( $Q = 70 \text{ m}^3/h$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).FIGURE 2.48 : Niveaux de fluctuations de pression en fonction du débit pour Cp6 ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

### Moyenne des capteurs de pression à l'aspiration

Les figures 2.49 à 2.52 illustrent la moyenne des amplitudes des fluctuations de pression dans le tuyau d'aspiration. Afin d'avoir une valeur représentative des niveaux de fluctuations de pression à l'aspiration de la pompe, des opérations pour obtenir les spectres fréquentiels des valeurs moyennes ont été réalisées pour les capteurs Cp1, Cp2 et Cp3 pour des débits compris entre  $Q = 5$  et  $70 \text{ m}^3/h$ .

Comme on peut le remarquer des spectres de chaque capteur, la présence notamment de trois raies ( $F_{BP}$ ,  $2F_{BP}$  et la fréquence de rotation). Il est évident que le point de fonctionnement a une influence sur les amplitudes de ces pics et leur évolution dépend fortement de la présence des aubes principales et intermédiaires. Leurs amplitudes seront résumées dans un tableau pour mieux les analyser.

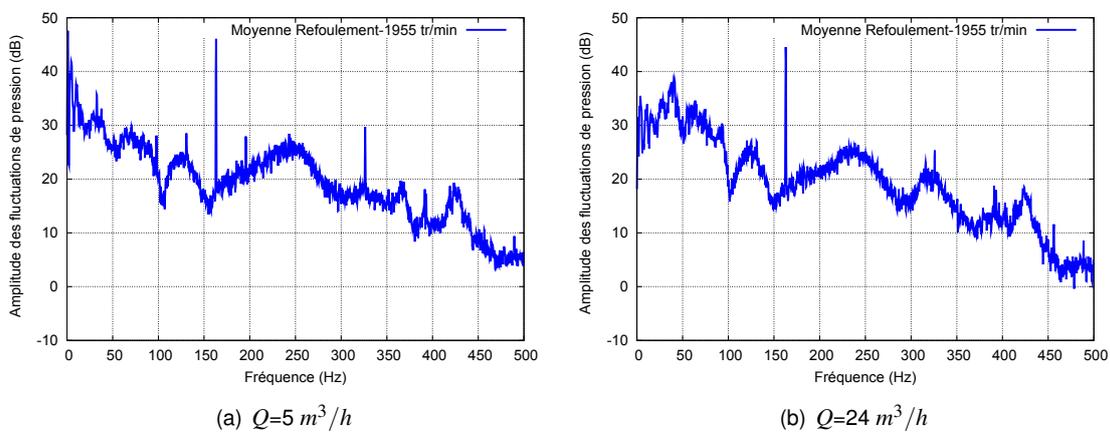
FIGURE 2.49 : Spectres de la moyenne des capteurs à l'aspiration ( $Q = 5$  et  $10 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).FIGURE 2.50 : Spectres de la moyenne des capteurs à l'aspiration ( $Q = 24$  et  $35 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).FIGURE 2.51 : Spectres de la moyenne des capteurs à l'aspiration ( $Q = 45$  et  $60 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

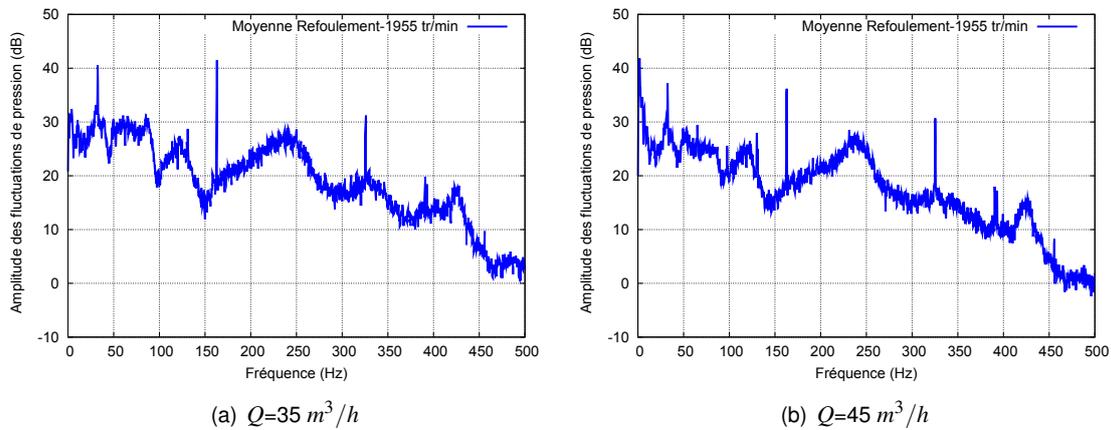
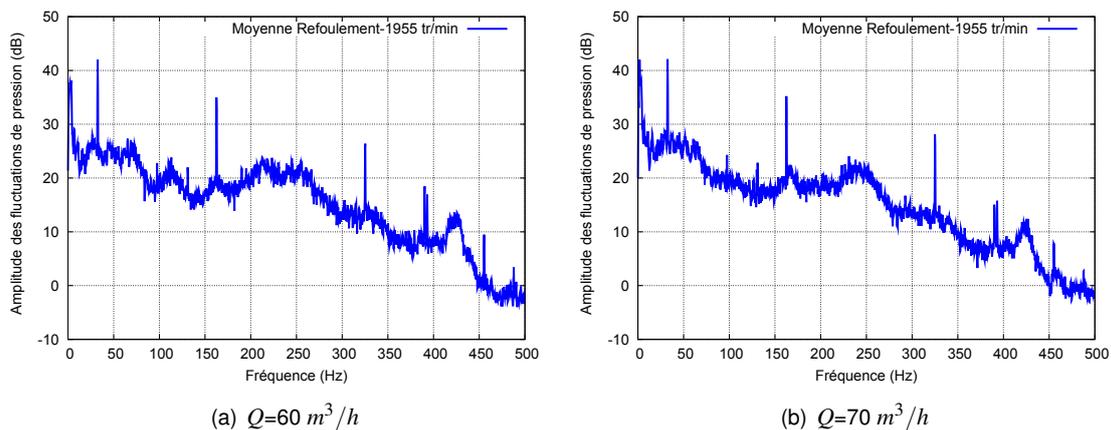
(a)  $Q=70 \text{ m}^3/h$ FIGURE 2.52 : Spectres de la moyenne des capteurs à l'aspiration ( $Q = 70 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

### Moyenne des capteurs de pression au refoulement

Une valeur représentative du bruit hydraulique au refoulement est calculée, des opérations mathématiques sont effectuées pour obtenir les spectres correspondants (voir figures 2.53 à 2.55). Les valeurs des niveaux de fluctuation de pression des capteurs Cp4, Cp5 et Cp6 ont été moyennées pour obtenir des spectres fréquentiels représentatifs au refoulement pour la plage de débits comprise entre  $Q = 5$  et  $70 \text{ m}^3/h$ .

En comparant les spectres de la moyenne des capteurs à l'aspiration et au refoulement, on peut dire qu'on observe une réduction des amplitudes aux fréquences  $F_{BP}$  et  $2F_{BP}$ . Tandis que pour la fréquence de rotation les amplitudes augmentent considérablement en fonction du débit de fonctionnement. Dans les tableaux 2.11 et 2.12, les valeurs des amplitudes sont résumées et comparées pour analyser s'il y a effectivement eu une atténuation des fluctuations de pression avec les modifications géométriques apportées à l'hydraulique NS33.

(a)  $Q=5 \text{ m}^3/h$ (b)  $Q=24 \text{ m}^3/h$ FIGURE 2.53 : Spectres de la moyenne des capteurs au refoulement ( $Q = 5$  et  $24 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

FIGURE 2.54 : Spectres de la moyenne des capteurs au refoulement ( $Q = 35$  et  $45 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).FIGURE 2.55 : Spectres de la moyenne des capteurs au refoulement ( $Q = 60$  et  $70 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

### Moyenne quadratique des capteurs de pression à l'aspiration et au refoulement

Les figures 2.56 à 2.58 illustrent les moyennes quadratiques ou RMS (root mean square) des amplitudes des fluctuations de pression pour les capteurs à l'aspiration et au refoulement. La plage de débits utilisée se place essentiellement aux débits déjà signalés dans les sections précédentes.

Ces spectres semblent permettre de qualifier le comportement hydroacoustique de la pompe NS33 avec divers débits pour une vitesse de  $1955 \text{ tr/min}$ . Trois raies sont nettement observables et correspondent en général aux fréquences de passage des aubes, à la fréquence de rotation et à leurs harmoniques.

Des conclusions intéressantes sont retenues de ces figures : par exemple, le niveau de fluctuation de pression à  $F_{BP}$  augmente si la pompe travaille en sous débit. D'autre part, à la fréquence de rotation,

le niveau augmente en sur débit. Par contre, pour la fréquence  $2F_{BP}$ , la tendance n'est pas évidente. L'amplitude reste constante entre les débits de 5 à  $45 \text{ m}^3/\text{h}$  et diminue pour les débits de 60 à  $70 \text{ m}^3/\text{h}$ .

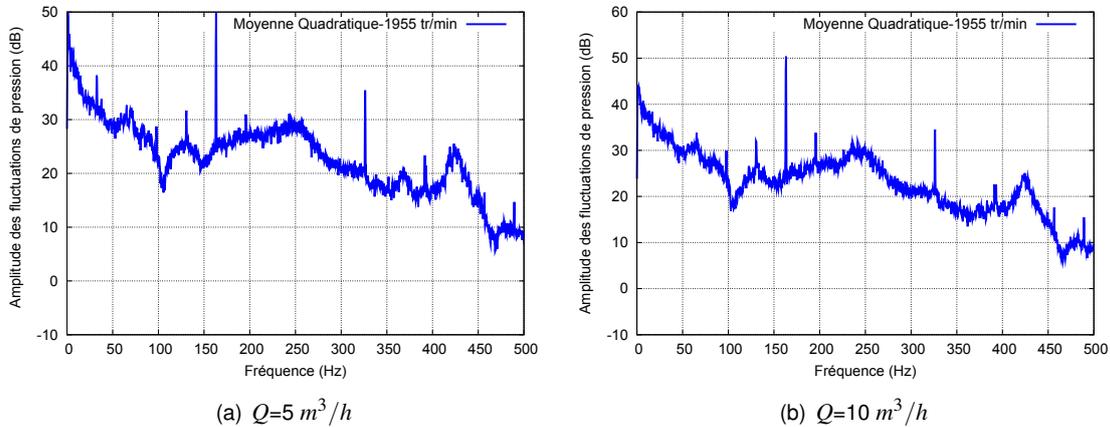


FIGURE 2.56 : Spectres de la moyenne quadratique des capteurs à l'aspiration et au refoulement ( $Q = 5$  et  $10 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

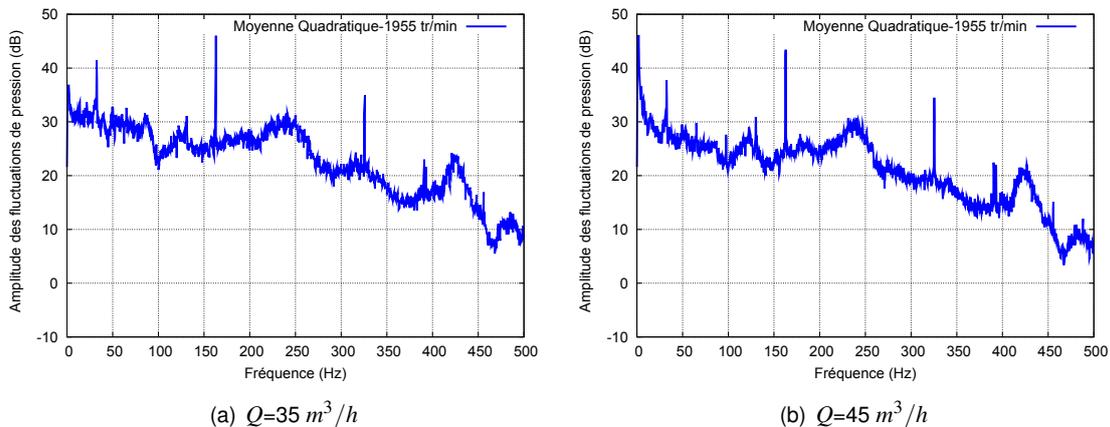


FIGURE 2.57 : Spectres de la moyenne quadratique des capteurs à l'aspiration et au refoulement ( $Q = 35$  et  $45 \text{ m}^3/\text{h}$ )( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

### Récapitulatif des résultats expérimentaux

Les tableaux 2.11 et 2.12 résument les valeurs des amplitudes des fluctuations de pression de tous les spectres vus précédemment notamment pour les fréquences  $F_{BP}$  et  $2F_{BP}$ . Les signes (-) indiquent que les valeurs n'ont pas pu être déterminées à partir des essais expérimentaux.

On peut tirer des conclusions de ces tableaux qui vont nous permettre de déterminer si les fluctuations de pression sont atténuées ou amplifiées à travers la pompe NS33. A la fréquence  $F_{BP}$ , la première

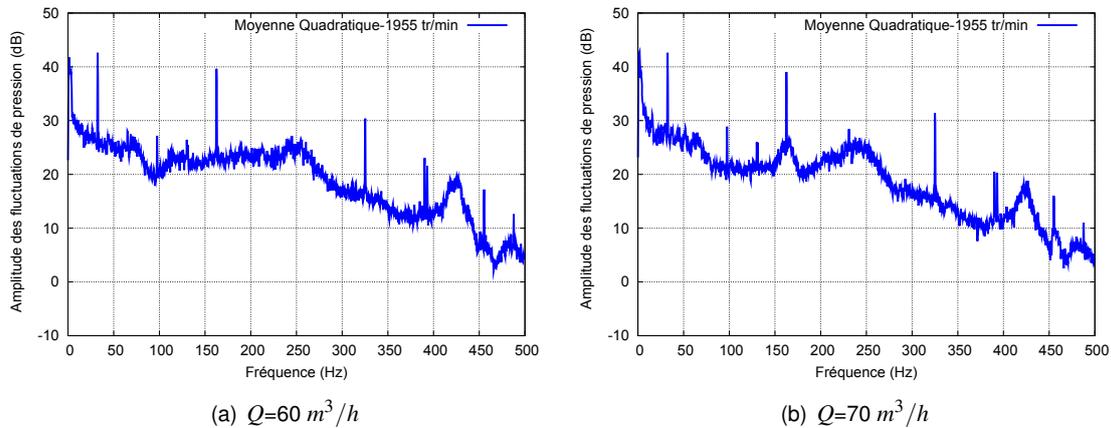


FIGURE 2.58 : Spectres de la moyenne quadratique des capteurs de pression à l'aspiration et au refoulement ( $Q = 60$  et  $70 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

conclusion que l'on peut retenir, concerne principalement l'existence d'une variation légère des amplitudes des fluctuations entre les capteurs à l'aspiration et au refoulement. La deuxième conclusion serait que les amplitudes sont atténuées quelques décibels à la sortie de la pompe pour tous les débits sauf pour  $24 \text{ m}^3/h$  où les amplitudes sont amplifiées. On ne peut pas expliquer ce comportement particulier à ce débit.

D'autre part, à cette fréquence, l'atténuation est plus visible pour le débit de  $45 \text{ m}^3/h$  qui est d'environ 6 décibels. Il s'agit d'un bon critère pour utiliser l'hydraulique à ce débit mais on doit aussi vérifier si ce point de fonctionnement correspond ou s'approche du point où le rendement est maximal. De cette façon, la pompe NS33 fonctionnerait correctement dans de meilleures conditions hydrauliques et hydroacoustiques.

Concernant la fréquence de  $2F_{BP}$ , les capteurs Cp3 et Cp4 qui sont les plus proches de la pompe révèlent des amplitudes faibles par rapport aux autres capteurs. Ce comportement est le même pour tous les débits de fonctionnement. De plus, les niveaux des fluctuations de pression à cette fréquence sont inférieures à ceux qui émergent à la fréquence  $F_{BP}$ . Une tendance du comportement des signaux à cette fréquence ne peut pas être constatée d'après les tableaux.

D'autre part, on a aussi tracé les amplitudes des niveaux de fluctuation de pression pour les capteurs Cp1 à Cp6 pour chaque débit de fonctionnement à la fréquence  $F_{BP}$  et à la fréquence  $2F_{BP}$  (voir figures 2.59 à 2.66). On a constaté qu'à la fréquence  $2F_{BP}$ , un comportement identique pour les sept débits.

L'amplitude de la fluctuation de pression diminue à mesure qu'on s'approche vers la pompe et elle augmente si le capteur s'éloigne de la bride de refoulement. Ce comportement est différent à la fréquence  $F_{BP}$ , où l'amplitude tend à diminuer quand l'écoulement passe à travers l'hydraulique.

Capteur	$Q=5 \text{ m}^3/h$		$Q=10 \text{ m}^3/h$		$Q=24 \text{ m}^3/h$		$Q=35 \text{ m}^3/h$	
	Fréquence		Fréquence		Fréquence		Fréquence	
	$F_{BF}$	$2F_{BF}$	$F_{BF}$	$2F_{BF}$	$F_{BF}$	$2F_{BF}$	$F_{BF}$	$2F_{BF}$
Cp1 (dB)	46.76	36.54	48.38	36.10	41.13	30.60	43.43	35.12
Cp2 (dB)	47.94	34.14	49.57	33.72	42.30	28.25	44.59	32.80
Cp3 (dB)	47.58	27.60	49.22	27.12	41.94	21.72	44.23	26.34
Cp4 (dB)	46.40	24.43	44.76	21.84	44.90	20.66	41.85	26.14
Cp5 (dB)	46.52	29.95	44.92	27.23	44.96	25.61	42.01	31.45
Cp6 (dB)	45.19	31.87	43.60	29.14	43.61	27.36	40.66	33.28
Moy. Asp. (dB)	47.45	34.08	49.08	33.65	41.82	28.16	44.11	32.70
Moy. Ref. (dB)	46.08	29.71	-	-	44.53	25.34	41.55	31.18
Moy. Quad. (dB)	49.83	35.44	50.37	34.50	-	-	46.03	35.02

TABLEAU 2.11 : Valeurs des amplitudes de la fluctuations de pression à la fréquence de passage des aubes et sa première harmonique ( $Q=5, 10, 24, 35 \text{ m}^3/h$ ).

Capteur	$Q=45 \text{ m}^3/h$		$Q=60 \text{ m}^3/h$		$Q=70 \text{ m}^3/h$	
	Fréquence		Fréquence		Fréquence	
	$F_{BF}$	$2F_{BF}$	$F_{BF}$	$2F_{BF}$	$F_{BF}$	$2F_{BF}$
Cp1 (dB)	41.80	34.54	37.10	30.62	36.01	30.91
Cp2 (dB)	42.97	32.23	38.30	28.25	37.25	28.64
Cp3 (dB)	42.60	25.75	38.00	21.69	36.82	22.03
Cp4 (dB)	36.48	25.63	35.24	21.48	35.50	23.22
Cp5 (dB)	36.66	30.97	35.47	26.68	35.66	28.42
Cp6 (dB)	35.32	32.79	34.08	28.40	34.36	30.22
Moy. Asp. (dB)	42.48	32.12	37.83	28.17	36.72	28.50
Moy. Ref. (dB)	36.19	30.69	34.97	26.36	35.21	28.15
Moy. Quad. (dB)	43.4	34.48	39.64	30.37	39.04	31.34

TABLEAU 2.12 : Valeurs des amplitudes de la fluctuations de pression à la fréquence de passage des aubes et sa première harmonique ( $Q=45, 60, 70 \text{ m}^3/h$ ).

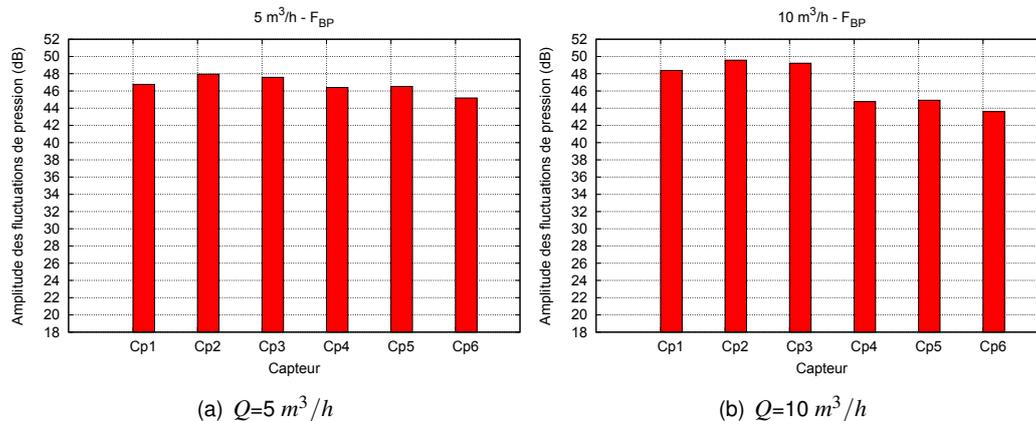


FIGURE 2.59 : Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence  $F_{BP}$  ( $Q = 5$  et  $10 \text{ m}^3/h$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

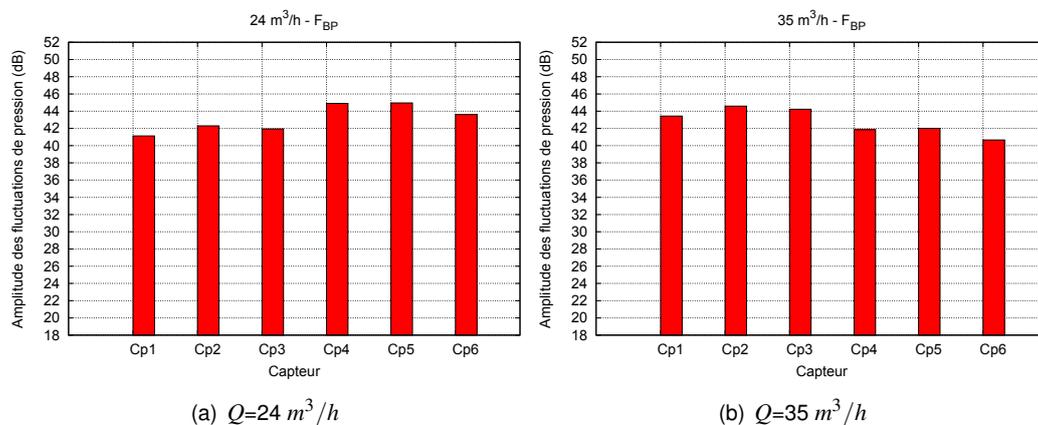


FIGURE 2.60 : Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence  $F_{BP}$  ( $Q = 24$  et  $35 \text{ m}^3/\text{h}$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

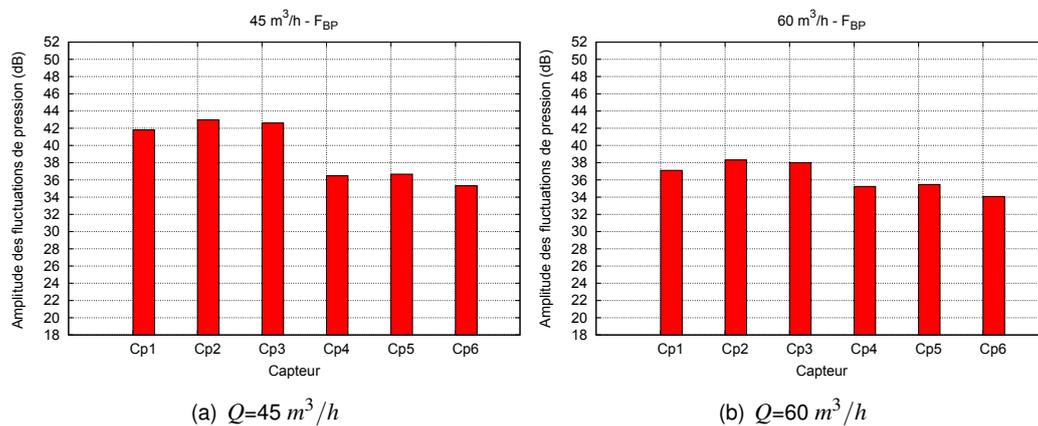


FIGURE 2.61 : Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence  $F_{BP}$  ( $Q = 45$  et  $60 \text{ m}^3/\text{h}$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

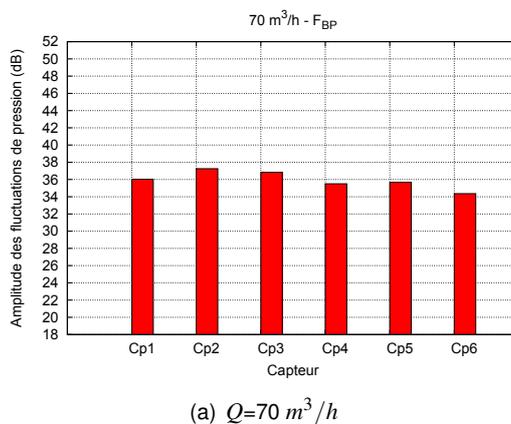


FIGURE 2.62 : Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence  $F_{BP}$  ( $Q = 70 \text{ m}^3/\text{h}$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

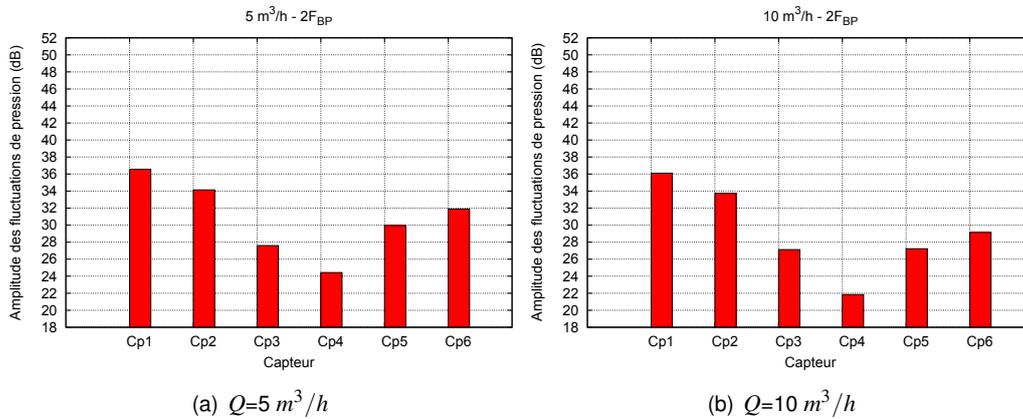


FIGURE 2.63 : Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence  $2F_{BP}$  ( $Q = 5$  et  $10 \text{ m}^3/\text{h}$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

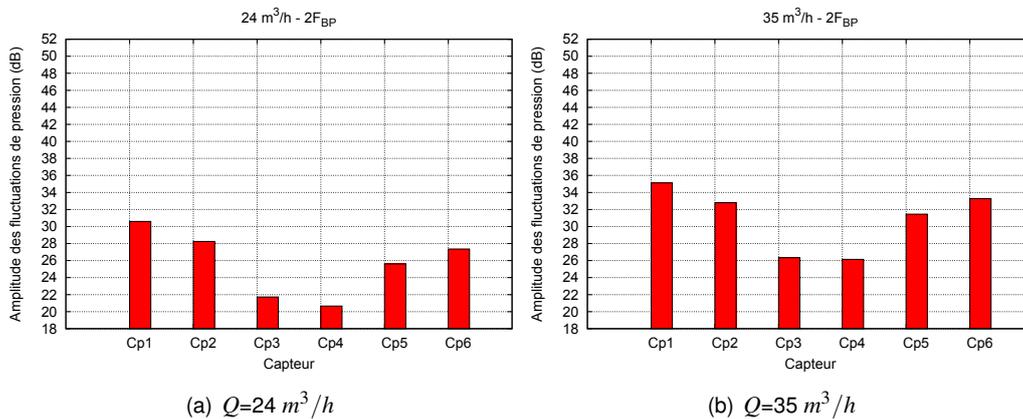


FIGURE 2.64 : Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence  $2F_{BP}$  ( $Q = 24$  et  $35 \text{ m}^3/\text{h}$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

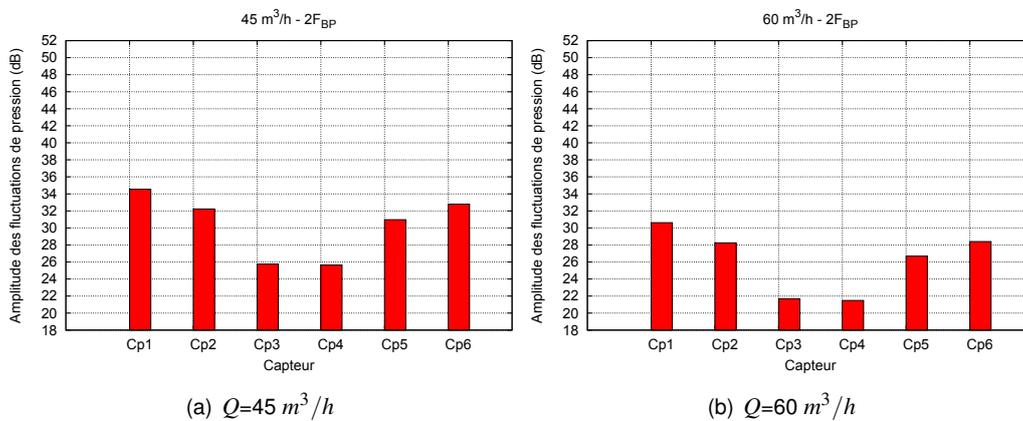


FIGURE 2.65 : Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence  $2F_{BP}$  ( $Q = 45$  et  $60 \text{ m}^3/\text{h}$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

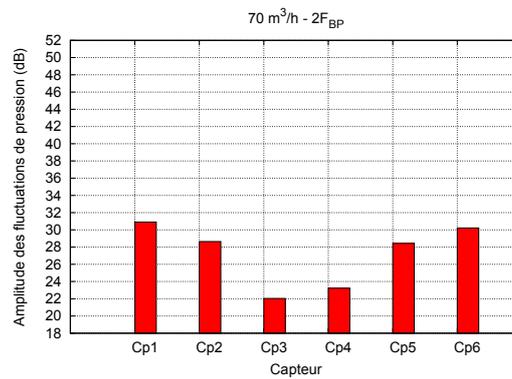
(a)  $Q=70 \text{ m}^3/\text{h}$ 

FIGURE 2.66 : Histogramme des amplitudes des fluctuations de pression à la fréquence  $2F_{BP}$  ( $Q = 70 \text{ m}^3/\text{h}$ ) ( $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ ).

## 2.6 Conclusions

Les travaux expérimentaux sont nécessaires pour évaluer et analyser le comportement d'une pompe sous divers conditions de fonctionnement. Dans ce cas, on a présenté deux banc d'essais conçus pour mesurer les amplitudes des fluctuations de pression à l'intérieur d'une pompe et dans ses canalisations d'aspiration et de refoulement. Le banc d'essais de la pompe NS32 a permis de mesurer les fluctuations de pression dans la paroi extérieure de la volute ainsi que sur le flasque transparent avant. Les résultats montrent que les pulsations sont évidemment plus fortes pour le capteur placé en face de la roue et pour la capteur proche du bec de volute. Cette pulsation diminue progressivement vers la sortie de la volute. Il faut remarquer que la pompe NS32 est une pompe classique qui n'a pas été conçue pour réduire les fluctuations de pression.

Dans un deuxième temps, le deuxième banc d'essais sert à mesurer les fluctuations de pression loin de la source, il est équipé de trois capteurs en amont et en aval de la pompe pour quantifier les amplitudes. La pompe NS33 est une machine construite spécialement pour générer moins de bruit car sa géométrie a été modifiée. La roue dispose d'aubes longues et courts et la section de la volute est déportée de son plan de symétrie. Ces deux modifications ont eu un fort impact sur le comportement de la morphologie de l'écoulement interne et notamment sur l'atténuation des amplitudes de fluctuation de pression à la fréquence de passage des aubes.



# Analyse numérique des fluctuations de pression

---

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>85</b>
<b>3.2</b>	<b>Procédure numérique adoptée</b>	<b>86</b>
3.2.1	Définition des volumes fluide	86
3.2.2	Modèle numérique	86
3.2.3	Choix du modèle de turbulence	88
3.2.4	Maillage	90
3.2.5	Conditions aux limites	98
<b>3.3</b>	<b>Analyse numérique des fluctuations de pression de la pompe NS32</b>	<b>108</b>
3.3.1	Performances globales	108
3.3.2	Fluctuations de pression	109
<b>3.4</b>	<b>Analyse numérique des fluctuations de pression de la pompe NS33</b>	<b>117</b>
3.4.1	Performances globales	117
3.4.2	Fluctuations de pression	118
<b>3.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>125</b>

---

## 3.1 Introduction

Les travaux numériques ont eu pour but de développer une procédure fiable pour prédire les fluctuations de pression et pour analyser et optimiser le comportement de l'écoulement interne dans les pompes. La procédure de simulation numérique est validée par la comparaison des résultats expérimentaux et numériques des pompes NS32 et NS33.

La modélisation de l'écoulement tridimensionnel turbulent utilisant une approche basée sur les équations de Navier Stokes moyennées (RANS-Reynolds Average Navier Stokes) est effectuée sur l'ensemble roue-volute ainsi que les éléments d'aspiration et de refoulement. Les simulations numériques 3D sont réalisées pour les deux pompes NS32 et NS33 à différents débits de fonctionnement. Elles permettent

d'accéder à la morphologie de l'écoulement interne et de montrer sa complexité : décollement, récirculations, tourbillons de divers tailles, etc. Les interactions entre les parties mobiles et les parties fixes sont mises en évidence par le calcul des fluctuations de pression en différents points (dans la roue, dans la volute et dans les canalisations d'aspiration et de refoulement) à l'aide de capteurs virtuels.

## 3.2 Procédure numérique adoptée

Divers paramètres de simulation sont importants afin de modéliser de façon réaliste l'écoulement interne dans la turbomachine et les phénomènes instationnaires générés lors de son fonctionnement. Parmi ces paramètres, on peut mentionner, la turbulence, le mouvement relatif roue-volute, les conditions aux limites, le pas de temps, le maillage, etc. La sensibilité aux conditions aux limites est exposée ci-dessous.

### 3.2.1 Définition des volumes fluide

#### Volume fluide de la pompe NS32

Le modèle CAO est utilisé pour créer les volumes fluide de la roue, de la volute et des canalisations d'aspiration et de refoulement. Ils sont ensuite utilisés pour la génération du maillage de chaque volume fluide. Les jeux axiaux entre le flasque avant ainsi que celui entre le flasque arrière et la partie dorsale de la volute ne sont pas pris en compte. Deux extensions ont été ajoutées en aval et en amont du volume fluide des brides d'aspiration et de refoulement. La surface latérale ainsi que la surface frontale de la roue constituent respectivement deux interfaces de transfert d'information avec le domaine fluide de la volute et l'aspiration. La surface de contact entre les blocs de la volute et de refoulement peut être considérée comme une interface ou une surface interne entre les deux volumes. La figure 3.1 montre le modèle géométrique utilisé pour la pompe NS32.

#### Volume fluide de la pompe NS33

Les modèles CAO élaborés nous ont servi pour construire le modèle géométrique. Il représente, au mieux, la boucle d'essais réelle utilisée pour mesurer les fluctuations de pression. Les volumes fluide représentent ainsi l'espace par où le fluide passe. Ils sont construits à partir d'opérations booléennes de soustraction de volumes. La présence d'interfaces ou de surfaces internes permet de transférer l'information entre les blocs considérés. La figure 3.2 montre le domaine de calcul de la pompe NS33.

### 3.2.2 Modèle numérique

Le code Ansys Fluent 13.0, basé sur une méthode de volumes finis, est utilisé pour les simulations numériques des fluctuations de pression. Les équations de continuité, de moment et de la turbulence sont résolues pour un régime stationnaire avec le modèle de mouvement MRF (moving reference frame).

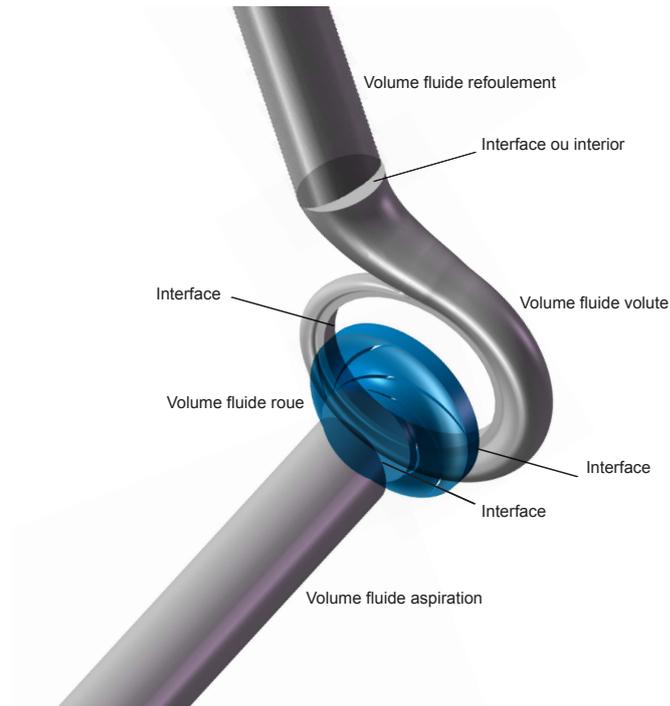


FIGURE 3.1 : *Volumes fluide de la pompe NS32.*

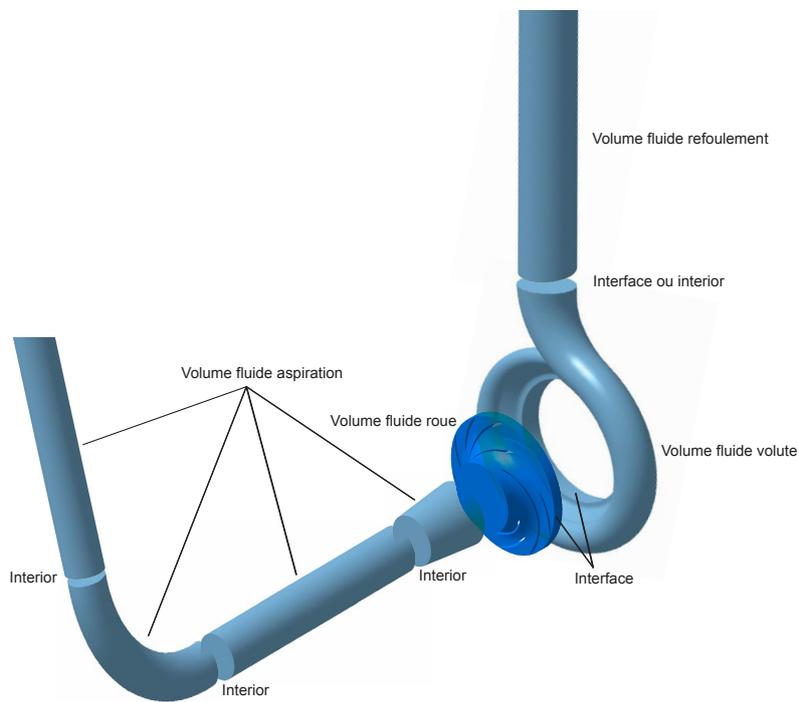


FIGURE 3.2 : *Volumes fluide de la pompe NS33.*

Les calculs instationnaires, la technique de maillage glissant « sliding mesh » est appliquée. Les fortes interactions hydrodynamiques entre la roue et la volute sont ainsi prises en compte. La turbulence a été simulée à l'aide du modèle  $k - \omega$  SST. Le choix de ce modèle est discuté dans la section suivante. Les conditions aux limites sont choisies par une étude de sensibilité. Le schéma pour résoudre le terme temporel est de deuxième ordre implicite. Le couplage pression-vitesse s'effectue grâce à l'utilisation de l'algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked equations). Le terme convectif est résolu en utilisant un schéma de discrétisation du type upwind de deuxième ordre, en revanche pour le terme diffusif un schéma de différence centrée est appliqué. Pour les modélisations numériques, il est habituel d'augmenter la longueur des canalisations d'aspiration et de refoulement afin d'assurer une stabilité numérique et de minimiser les effets des conditions aux limites. Le pas de temps utilisé pour l'ensemble des modélisations numériques est de  $1.10^{-4}s$ . Ce choix permet d'avoir une bonne résolution temporelle. Habituellement, tout calcul instationnaire est initié par un calcul stationnaire convergé et les simulations sont réalisées jusqu'à atteindre la convergence. Le critère de convergence choisi pour les simulations stationnaires et instationnaires est de  $10^{-5}$ , ce qui permet d'avoir un nombre important d'itérations pour chaque pas de temps. Les pressions fluctuantes sont enregistrées par des capteurs virtuels définis dans le code CFD. L'ensemble des simulations numériques ont été exécutées sur des ordinateurs de bureau de type, 2.40 GHz Core 2 Quad PC, en utilisant quatre processeurs en parallèle. Le temps de simulation notamment pour le calcul instationnaire, a d'environ trois semaines pour atteindre la convergence et obtenir l'information nécessaire pour l'analyse fréquentielle. Le maillage construit n'est pas le plus approprié pour une analyse approfondie des variables locales de la couche limite étant donné la complexité de la géométrie, mais les variables globales et locales (fluctuations de pression) sont calculées en utilisant un traitement particulier de la fonction de paroi basée sur une loi logarithmique.

### 3.2.3 Choix du modèle de turbulence

La modélisation de la turbulence dans les turbomachines notamment les pompes centrifuges est un challenge qui va permettre d'améliorer l'analyse des écoulements dans les turbomachines. Il faut tenir compte dans la modélisation de la turbulence des effets de rotation ou de courbure. Ainsi, la plupart des modèles de turbulence couramment utilisés pour des configurations sans rotation ne sont plus entièrement satisfaisants, en particulier pour les calculs dans les turbomachines. L'analyse des écoulements dans les turbomachines est complexe car ceux-ci sont très affectés par les effets de rotation et les effets de courbure. Ces effets peuvent modifier à la fois l'écoulement moyen et la structure turbulente. Ces dernières années, des études ont été menées pour modifier les modèles de fermeture existants.

Dans les pompes centrifuges, le niveau de pertes est fortement lié à la présence d'un décollement des couches limites se développant sur les aubes. Le décollement a lieu si l'énergie cinétique dans la couche limite est insuffisante pour vaincre le gradient de pression. Le risque de décollement dépend donc directement de l'évolution de la vitesse à la limite de la zone saine (jet). Les aubes sont calculées pour supprimer ce risque au débit nominal, mais à débit réduit, ce risque est important.

L'effet de la courbure des aubes joue donc un rôle important : pour une couche limite turbulente, la stabilisation de l'écoulement sur une paroi convexe diminue l'agitation turbulente. Les régions proches de la paroi sont alors moins bien alimentées en énergie et plus sensibles à un gradient de pression adverse. La couche limite décolle alors plus facilement ; à l'opposé, sur une paroi concave, l'agitation turbulente est augmentée et le décollement retardé.

La structure « jet-sillage », à l'origine des pertes par mélange, résulte de l'action de la force de Coriolis sur ces décollements. En effet, elle tend à séparer la zone décollée (sillage) de la zone saine (jet). On peut montrer qu'une particule issue du jet tend à y retourner si on la déplace dans la zone de sillage et réciproquement.

Ces différents aspects illustrent bien l'intérêt de la prise en compte, dans la modélisation de la turbulence, des effets de courbure ou de rotation pour représenter les écoulements dans ce type de machines. Ainsi pour notre étude de fluctuations de pression, le modèle de turbulence utilisé est une amélioration du modèle  $k - \omega$ . Le modèle a été choisi pour plusieurs raisons. Premièrement, les effets de la turbulence de l'écoulement libre, la rugosité de surface, et l'injection de masse sont facilement introduits dans le modèle [32]. Deuxièmement, la transition peut être calculée en utilisant la version du modèle à bas nombre de Reynolds [33]. Troisièmement, Menter a montré que le modèle  $k - \omega$  est bien adapté aux écoulements avec des gradients de pression adverse [34] [35]. Finalement, le modèle devrait être efficace numériquement car il évite l'utilisation de la distance à la paroi et des fonctions d'amortissement.

Le modèle  $k - \omega$  a été développé par Wilcox depuis de nombreuses années. Il est décrit en détails dans la référence [32]. Ce modèle résout deux équations de transport turbulent pour l'énergie cinétique turbulente  $k$  et pour le taux de dissipation spécifique  $\omega$ . Le modèle a une formulation de base pour les écoulements turbulents qui satisfait la loi de paroi sans avoir connaissance de la distance à la paroi ou des termes complexes d'amortissement proche de la paroi. Il y a aussi une formulation utilisée à bas nombre de Reynolds pour modéliser la transition. Des conditions aux limites peuvent être spécifiées pour modéliser l'injection de masse ou la rugosité de surface.

Dans le cadre des simulations numériques de ce travail, le modèle à deux équations  $k - \omega$  SST développé par Menter [36] a été utilisé. Ce modèle a été largement testé dans diverses applications et a donné d'excellents résultats, notamment en ce qui concerne la prédiction des phénomènes de décollement en proche paroi. Le modèle  $k - \omega$  SST a été validé dans plusieurs études de cas et est considéré comme le modèle le plus précis pour les applications aérodynamiques [36]. Enfin, l'application de ce modèle de turbulence dans le cadre de la modélisation des écoulements internes dans les turbomachines a donné des résultats prometteurs en ce qui concerne le calcul des fluctuations de pression [37]. Le modèle applique une méthode  $k - \omega$  à la paroi et une méthode  $k - \varepsilon$  dans le reste de l'écoulement. Une fonction de mélange assure une continuité entre les deux méthodes.

### 3.2.4 Maillage

La deuxième étape d'une modélisation numérique est la construction du maillage. Elle est l'une des plus délicates et des plus importantes pour la précision de la solution numérique. En termes de complexité, temps de calcul, ressources informatiques et problématique de la simulation, on peut envisager une simplification de la configuration en considérant des éléments symétriques et des conditions de périodicité, mais la présence de la volute ne permet pas l'application de ces conditions courantes. La technique de génération de maillage peut ainsi être résumée par les étapes suivantes :

- La géométrie est préparée au préalable (nettoyage, réparation et simplification de surfaces, avec la définition de tous les composants (flasques, parois, interfaces, surfaces internes, etc) de l'hydraulique sous forme de sélections nommées.
- La géométrie représentant les différents volumes fluides est décomposée en sous domaines à mailler.
- Le maillage des sous domaines fluides est réalisé par des outils de génération de maillages (Ansys ICEM CFD et Ansys Meshing 13.0) ;

La complexité des configurations NS32 et NS33, notamment les volumes roue et volute, font intervenir en général des techniques spéciales pour chaque sous domaine en particulier. La variété d'éléments existants (hexaèdres, tétraèdres, pyramides, etc) pour le maillage permet de choisir l'élément adéquat pour épouser au mieux la forme géométrique du problème. La combinaison des différents éléments de maillage définis précédemment permet de générer, selon leur disposition dans les volumes de calcul, des maillages monoblocs, des maillages multi-domaines, ou plutôt des maillages hybrides.

#### Validation du maillage

Une étude de sensibilité au maillage doit être conduite par une modélisation CFD, afin que la solution soit indépendante de la résolution et de la qualité du maillage. Dans le cadre de notre étude de fluctuations de pression cet aspect est crucial, pour que les paramètres de la solution deviennent insensibles à partir d'un certain nombre d'éléments. Le raffinement du maillage principalement dans les zones à fort gradient, peut aussi aider à obtenir une solution indépendante du maillage.

De cette façon, des tests d'indépendance au maillage ont été effectués pour les pompes NS32 et NS33 à deux débits différents. Les maillages considérés comportent entre  $1 \times 10^6$  et  $4 \times 10^6$  nombre de cellules. Pour chaque configuration, le maillage a été raffiné dans la zone du bec de volute et le modèle numérique utilisé correspond à une configuration de conditions aux limites de vitesse uniforme à l'aspiration et « d'outflow » au refoulement du domaine de calcul.

### Choix du maillage : cas de la pompe NS32

Le tableau 3.1 résume le nombre de grilles et la distribution des cellules dans les sous domaines de calcul pour l'étude de sensibilité du maillage. Le maillage retenu est celui qui donne des solutions numériques acceptables concernant les fluctuations de pression et qui se trouvent dans une zone où la variation de ces fluctuations est faible.

Maillage	Roue	Volute	Admission	Refoulement	Total
1	618160	251748	263100	125400	1258408
2	864639	251526	228480	100800	1445445
3	1154367	240544	228480	100800	1724191
4	1453930	513510	263100	208200	2438740
5	1571976	762156	394650	367800	3096582

TABLEAU 3.1 : Grilles utilisées pour l'étude de sensibilité de la pompe NS32.

Les figures 3.3 à 3.6 illustrent les résultats de sensibilité au maillage concernant les amplitudes des fluctuations de pression pour les capteurs Cp1, Cp2, Cp3 et Cps. On constate, en général, une bonne concordance entre les amplitudes de tous les maillages excepté le maillage 3.

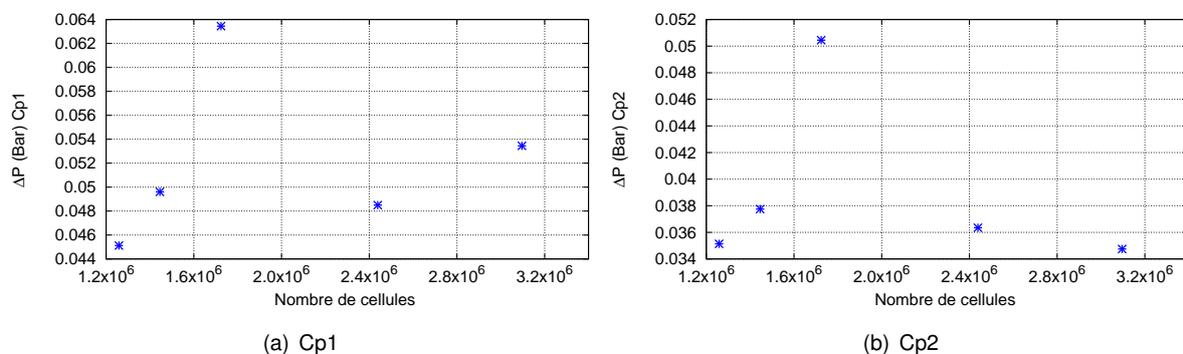


FIGURE 3.3 : Amplitude des fluctuations de pression en fonction du maillage pour Cp1 et Cp2 à  $Q=360 \text{ m}^3/\text{h}$ .

Pour les autres études de sensibilité le maillage retenu est le maillage 1. Il permet de réduire le temps de calcul.

Les figures 3.5 et 3.6 représentent le détail de ce maillage. Les critères considérés pour avoir une bonne qualité, une bonne résolution et pour assurer un bon lissage dans les zones de transition entre les zones de maillage fin et les zones de maillage grossier et surtout dans les zones de transition entre domaines fixes et tournants sont traités spécifiquement. La prise en compte de raffinement est primordial pour la fiabilité des simulations.

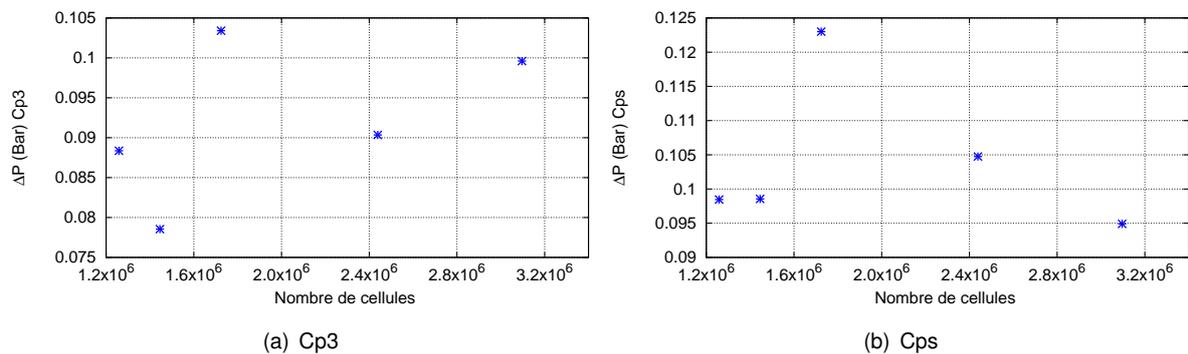


FIGURE 3.4 : Amplitude des fluctuations de pression en fonction du maillage pour Cp3 et Cps à  $Q=360 \text{ m}^3/h$ .

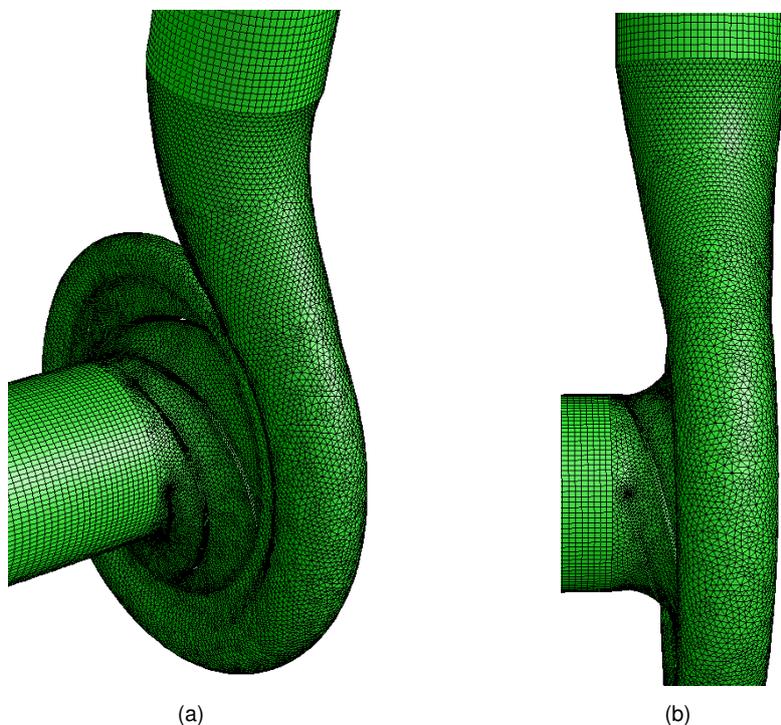


FIGURE 3.5 : Détails du maillage retenu pour la configuration de la pompe NS32.

### Choix du maillage : cas de la pompe NS33

Le tableau 3.2 résume le nombre de grilles et la distribution des cellules dans les sous domaines de calcul pour l'étude de sensibilité du maillage de la pompe NS33. Le maillage retenu est celui qui donne des solutions numériques acceptables et cohérentes pour les fluctuations de pression dans les canalisations d'aspiration et de refoulement.

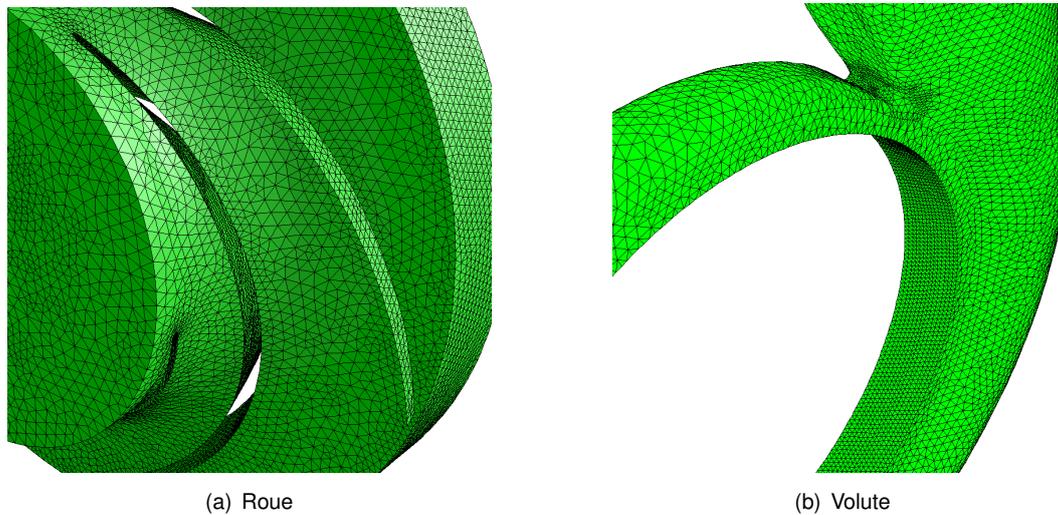


FIGURE 3.6 : Détails du maillage retenu pour la roue et la volute de de la pompe NS32.

Maillage	Roue	Volute	Admission	Refoulement	Total
1	1104727	329872	250580	162960	1848139
2	1171947	329872	548461	162960	2213240
3	1309663	659846	548460	206641	2724610
4	1469692	659845	913276	206640	3249453

TABLEAU 3.2 : Grilles utilisées pour l'étude de sensibilité de la pompe NS33.

Les figures 3.7 à 3.10 illustrent les signaux temporels des amplitudes de la pression pour les capteurs Cp1 à Cp6 en fonction du maillage. Pour les capteurs à l'aspiration, on se rend compte que le maillage 4, qui est le plus dense, donne des amplitudes plus élevées par rapport aux autres maillages. En revanche, les maillages 1, 2 et 3 génèrent des amplitudes dans la même gamme, et difficiles à distinguer.

On constate aussi que la procédure numérique utilisée est fiable pour la prédiction des fluctuations de pression dans la canalisation d'aspiration et de refoulement, car les amplitudes sont constantes pour les capteurs à l'aspiration et les capteurs au refoulement, il n'y a pas d'atténuation des signaux (ce qui aurait pu être le cas en utilisant d'autres conditions aux limites). Afin de valider l'application de conditions aux limites « vitesse-outflow », des simulations numériques ont été menés en parallèle avec la condition « pression totale-pression statique » pour comparer les résultats numériques aux essais expérimentaux.

En ce qui concerne les résultats pour les capteurs au refoulement Cp4, Cp5 et Cp6, on observe des signaux sinusoïdaux bruités. Comme à l'aspiration, le maillage 4 semble donner des valeurs d'amplitude plus élevées que les autres maillages, mais on remarque aussi qu'avec toute la gamme de maillages, les niveaux de fluctuations de pression sont plus élevés qu'à l'aspiration. Ceci peut être dû au schéma numérique utilisé dans le solveur Ansys Fluent.

Les signaux temporels ne nous donnent pas une idée claire du maillage le plus utile pour continuer les simulations numériques et étudier l'influence des conditions aux limites.

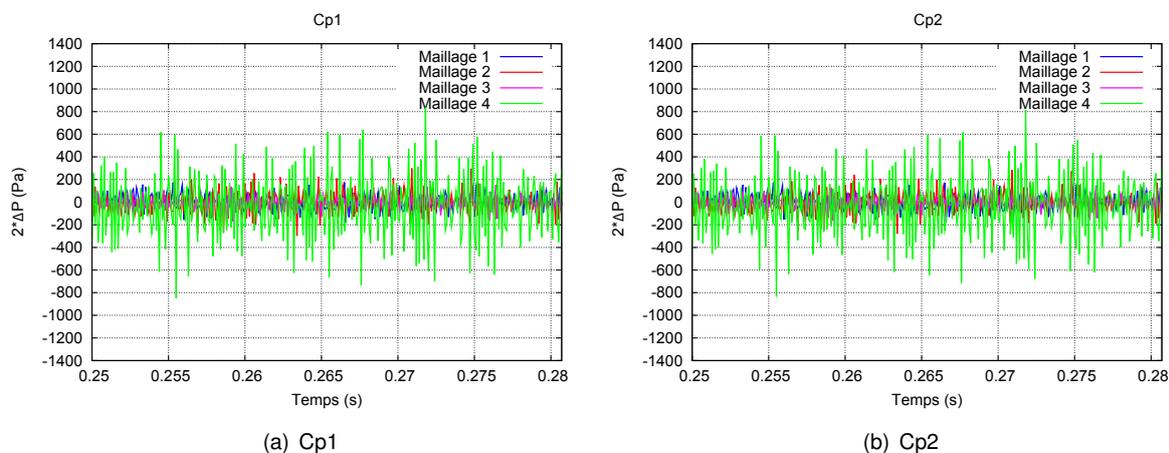


FIGURE 3.7 : Fluctuations de pression à l'aspiration (capteurs Cp1 et Cp2) en fonction du maillage à  $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$  et à  $1955 \text{ tr}/\text{min}$ .

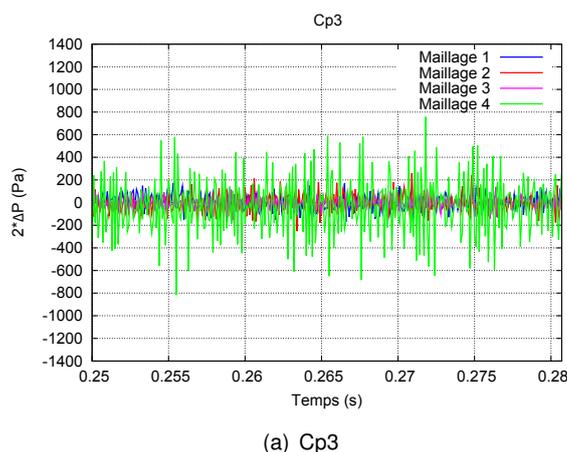


FIGURE 3.8 : Fluctuations de pression à l'aspiration (capteur Cp3) en fonction du maillage à  $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$  et à  $1955 \text{ tr}/\text{min}$ .

Le maillage 1 est un bon compromis pour avoir un temps de calcul et un nombre de mailles raisonnables pour prédire avec une bonne exactitude les fluctuations de pression de la pompe NS33. Une analyse fréquentielle est donc réalisée pour les quatre maillages et les résultats sont illustrés sur les figures 3.11 à 3.14. La différence pour ces quatre maillages est principalement la distribution du nombre d'éléments pour les sous domaines de calcul.

La comparaison des spectres fréquentiels pour les capteurs à l'aspiration montre que le maillage 4 donne une raie à la fréquence  $F_{BP}$  d'une amplitude supérieure aux autres maillages. D'autre part, le maillage 3, lui donne une raie d'une amplitude plus faible. Entre les 2 et 3, il existe un écart de quelques décibels pour cette fréquence fondamentale. Concernant la première harmonique  $2F_{BP}$ , c'est la modélisation avec le maillage 4 qui donne une raie d'une amplitude élevée. La différence d'amplitude entre le

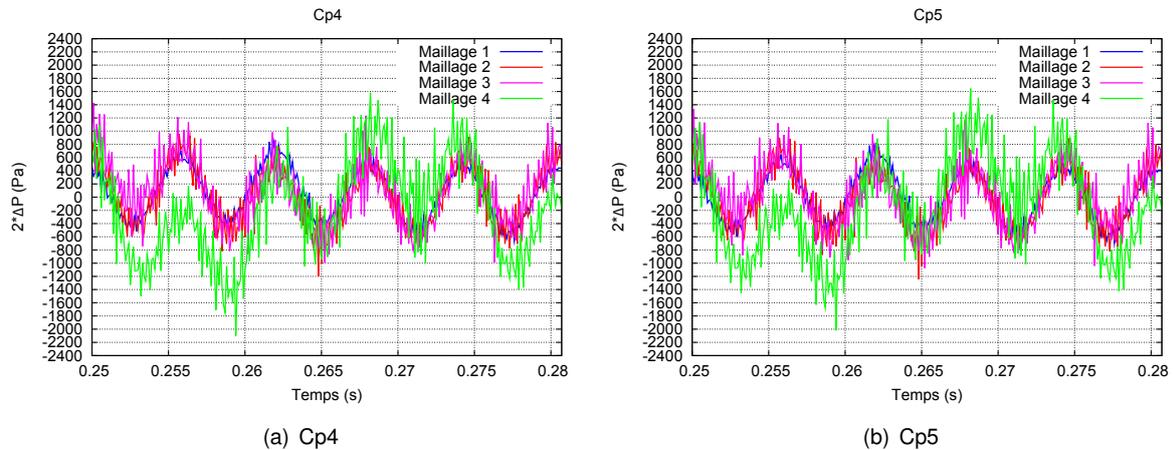


FIGURE 3.9 : Fluctuations de pression au refoulement (capteurs Cp4 et Cp5) en fonction du maillage à  $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$  et à  $1955 \text{ tr}/\text{min}$ .

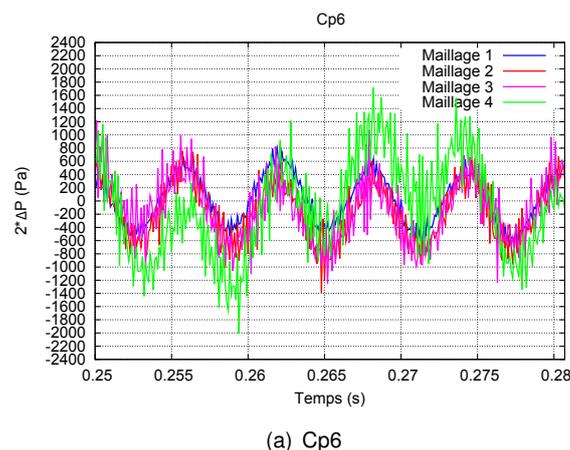


FIGURE 3.10 : Fluctuations de pression au refoulement (capteur Cp6) en fonction du maillage à  $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$  et à  $1955 \text{ tr}/\text{min}$ .

maillage 1 et 3 est presque négligeable tandis que le maillage 2 donne une raie d'amplitude faible.

Les spectres fréquentiels dans la canalisation de sortie pour les quatre maillages montrent clairement des pics aux fréquences  $F_{BP}$  et  $2F_{BP}$ . La première conclusion de cette comparaison est que le spectre du maillage 4 présente un pic d'une amplitude légèrement plus élevée que pour les autres maillages. Les maillages 1, 2 et 3 donnent des pics à la fréquence fondamentale  $F_{BP}$  qui se superposent et il ne semble exister aucune différence entre ces maillages.

Pour la fréquence  $2F_{BP}$ , le pic du maillage 4 est le plus prépondérant. Les maillages 1 et 2 montrent de légers écarts tandis que le maillage 3 présente un pic d'une amplitude noyée par les amplitudes des autres maillages.

Les résultats numériques présentés nous ont permis de voir l'influence du maillage sur les niveaux de

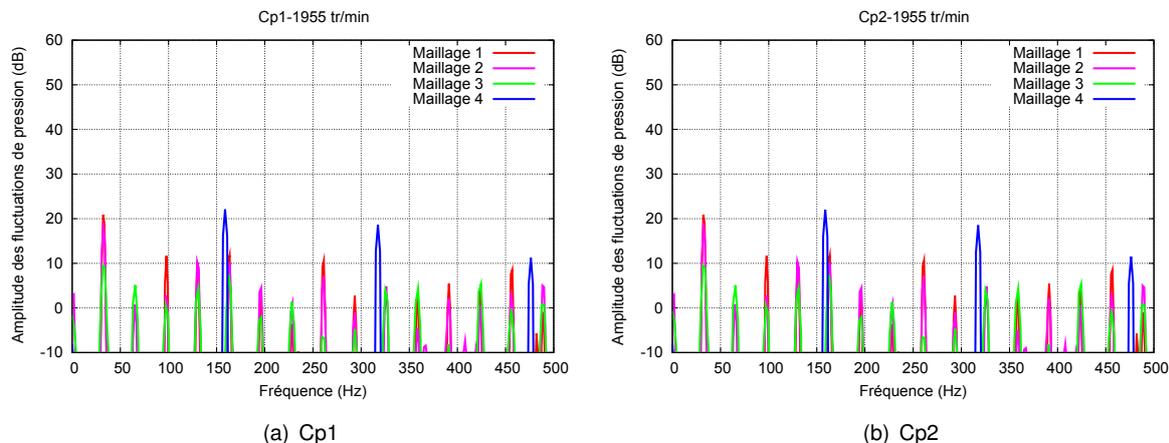


FIGURE 3.11 : Spectre fréquentiel en fonction du maillage pour  $Cp1$  et  $Cp2$  à  $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$  et à  $1955 \text{ tr}/\text{min}$ .  $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ .

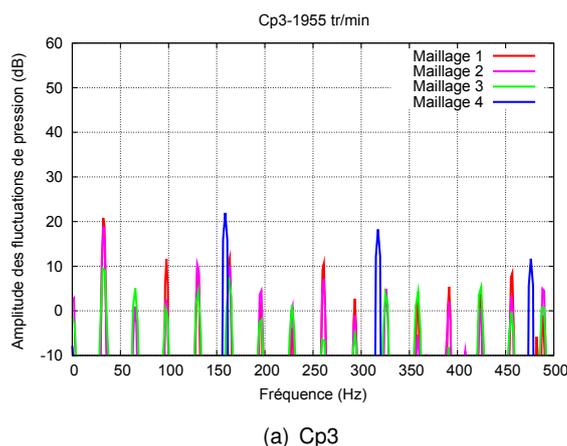


FIGURE 3.12 : Spectre fréquentiel en fonction du maillage pour  $Cp3$  à  $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$  et à  $1955 \text{ tr}/\text{min}$ .  $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ .

fluctuation de pression. Le maillage 1 sera donc utilisé par la suite pour effectuer des simulations stationnaires (construction des performances globales) et instationnaires (analyse de l'influence des conditions aux limites et la prédiction des fluctuations de pression). La tableau 3.3 résume les valeurs des amplitudes des spectres fréquentiels des modélisations instationnaires pour chaque maillage considéré.

Les figures 3.15 et 3.16 montrent plus en détails le maillage non structuré utilisé, le lissage considéré entre les parties fixes et mobiles ainsi que le maillage fin dans la région du bec de volute. Aux interfaces, le lissage doit être bien fait sinon il y aura des problèmes en termes de précision et de fiabilité des résultats numériques.

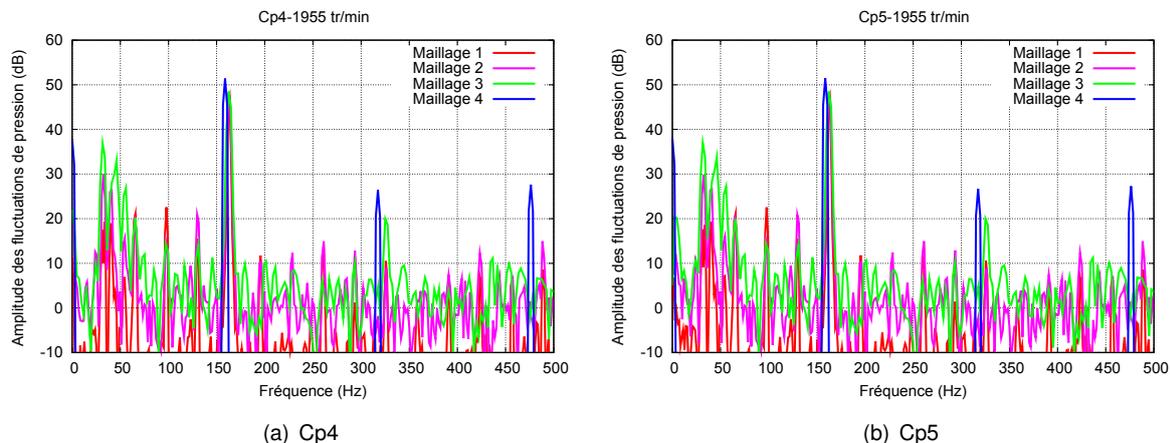


FIGURE 3.13 : Spectre fréquentiel en fonction du maillage pour Cp4 et Cp5 à  $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$  et à 1955  $\text{tr}/\text{min}$ .  $P_{\text{réf}}=1 \text{ Pa}$ .

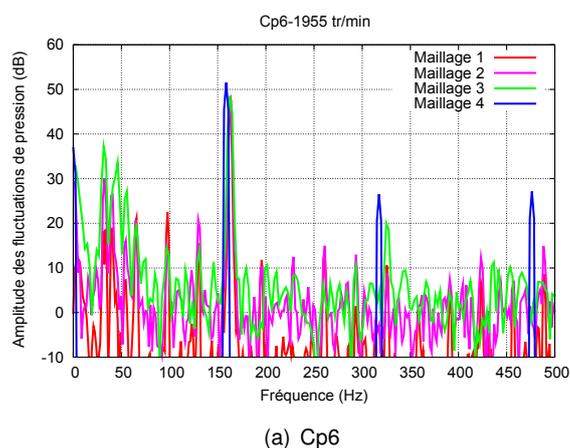


FIGURE 3.14 : Spectre fréquentiel en fonction du maillage pour Cp6 à  $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$  et à 1955  $\text{tr}/\text{min}$ .  $P_{\text{réf}}=1 \text{ Pa}$ .

Capteur	Maillage 1		Maillage 2		Maillage 3		Maillage 4	
	$F_{BF}$	$2F_{BF}$	$F_{BF}$	$2F_{BF}$	$F_{BF}$	$2F_{BF}$	$F_{BF}$	$2F_{BF}$
Cp1 (dB)	11.73	-12.56	10.08	4.84	7.52	3.86	22.07	18.66
Cp2 (dB)	10.17	-12.58	10.07	4.85	7.50	3.85	22.01	18.52
Cp3 (dB)	11.73	-12.60	10.05	4.85	7.47	3.83	15.93	18.23
Cp4 (dB)	47.10	10.49	47.81	8.94	48.51	19.97	51.40	20.41
Cp5 (dB)	47.10	10.54	47.81	8.83	48.51	20.00	51.47	26.70
Cp6 (dB)	47.10	10.56	47.81	8.78	48.51	20.02	51.51	20.52

TABEAU 3.3 : Valeurs des amplitudes des fluctuations de pression en décibels à la fréquence de passage des aubes et à sa première harmonique ( $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ ).

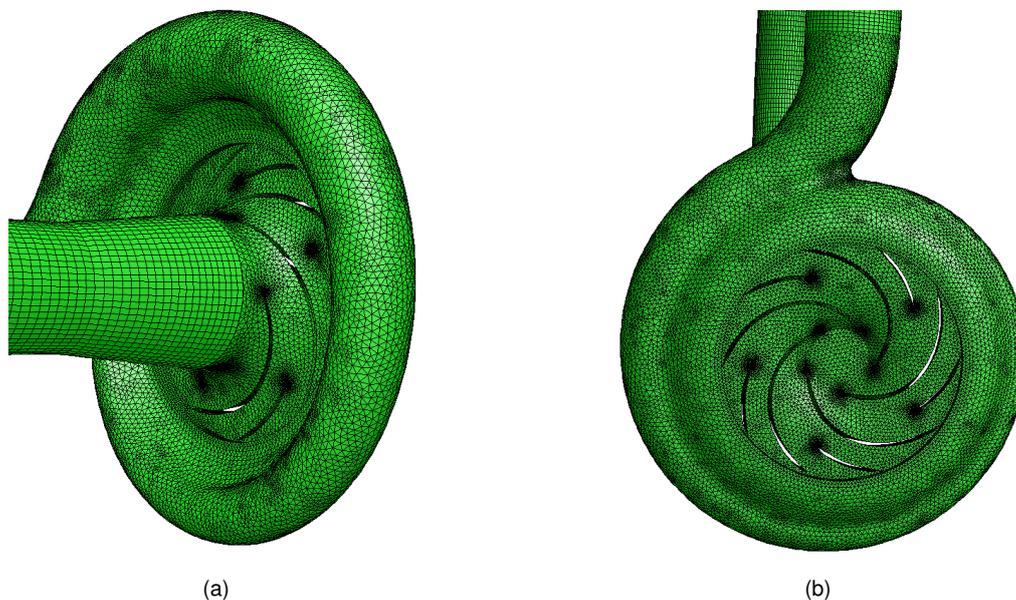


FIGURE 3.15 : Détails du maillage global retenu pour la configuration de la pompe NS33.

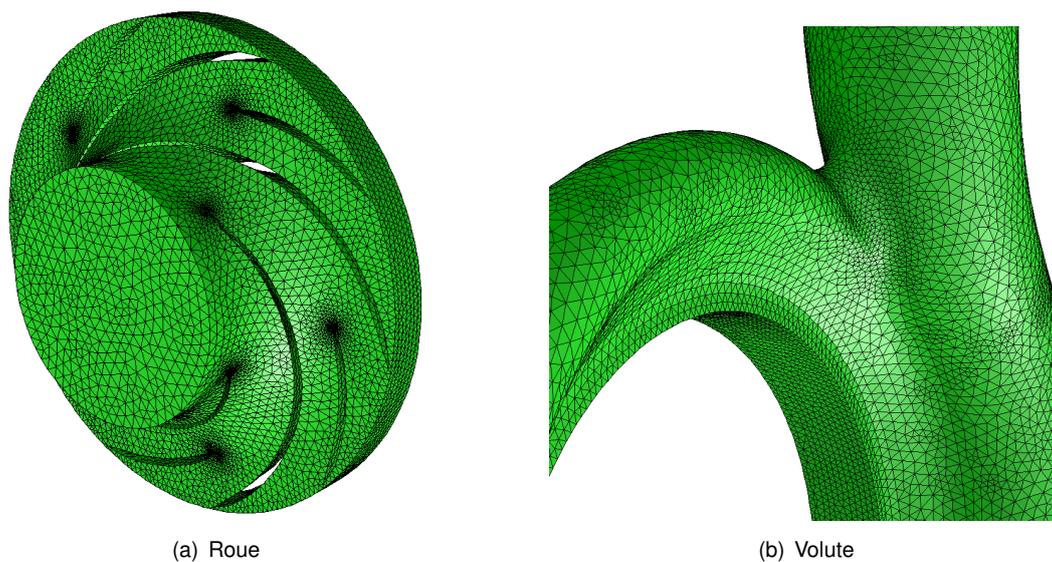


FIGURE 3.16 : Détails du maillage retenu pour la roue et la volute de la pompe NS33.

### 3.2.5 Conditions aux limites

Les difficultés de la modélisation mathématique et de la simulation numérique des écoulements dans une pompe centrifuge se posent dans les frontières où circule l'écoulement (entrée et sortie). Quand ce type de frontières existe, aucun critère ne permet de déterminer quel type des conditions aux limites est à la fois correcte mathématiquement et approprié physiquement pour l'écoulement considéré. Traditionnellement, ces problèmes sont traités en fixant la vitesse sur les frontières du domaine. Cependant, dans de

nombreuses applications les vitesses aux frontières ne sont pas connues. En revanche, la variation de la pression peut être donnée aux frontières, et l'écoulement doit alors être déterminé au sein du domaine.

Le traitement des conditions aux limites est un des problèmes les plus récurrents dans la CFD. La précision du calcul, en général, est fortement sensible à la solution aux frontières, qui peut être perturbée par des réflexions parasites numériques. Ces réflexions parasites de l'information physique, affectent défavorablement la précision et la stabilité des solutions. Ces difficultés nécessitent de développer des solutions pour réduire les réflexions et de mettre en place des conditions aux limites transparentes (expliquées en détail dans le chapitre suivant).

Les simulations numériques sont réalisées avec une précision de deuxième ordre en temps et en espace pour prédire les fluctuations de pression. Cinq configurations de conditions aux limites ont été testées sur la pompe NS32 et deux sur la pompe NS33 afin de trouver la meilleure configuration qui puisse permettre d'avoir des résultats proches des valeurs expérimentales.

### **Influence des conditions aux limites : cas de la pompe NS32**

Pour cette étude, le maillage 1 retenu est utilisé pour modéliser les fluctuations de pression. Le point de fonctionnement de la pompe NS32 correspond à un débit de  $360 \text{ m}^3/h$  et une vitesse de  $900 \text{ tr/min}$ . Les points de mesure de la pression fluctuante sont ceux de la figure 2.4 qui sont modélisés par des capteurs virtuels. Ainsi, les simulations numériques sont réalisées avec les mêmes paramètres qu'une simulation instationnaire, avec cinq configurations de conditions aux limites :

- Vitesse uniforme à l'entrée et vitesse uniforme à la sortie (V-V).
- Vitesse uniforme à l'entrée et pression statique à la sortie (V-PS).
- Vitesse uniforme à l'entrée et « outflow » à la sortie (V-O).
- Pression totale à l'entrée et vitesse uniforme à la sortie (PT-V).
- Pression totale à l'entrée et pression statique à la sortie (PT-PS).

### **Fluctuations de pression dans la volute**

Les fluctuations de pression dans la volute sont relevées par les capteurs virtuels Cp1, Cp2 et Cp3. La modélisation numérique pour chaque configuration de conditions aux limites a duré environ trois semaines de calcul pour atteindre la convergence. Les figures 3.17 et 3.18 résument les signaux numériques temporels obtenus lors d'un tour de la roue.

La comparaison pour le capteur Cp1 montre cinq signaux périodiques de fréquence  $F_{BP}$ . L'application des conditions aux limites PT-PS et V-PS donne des signaux qui ont la même allure mais le signal de la configuration V-PS est un peu bruité. D'autre part, les trois signaux (V-V, V-O et PT-V) sont bruités et coïncident mais leur amplitude est différente légèrement. Le signal correspondant à la condition aux limites PT-V est le plus bruité.

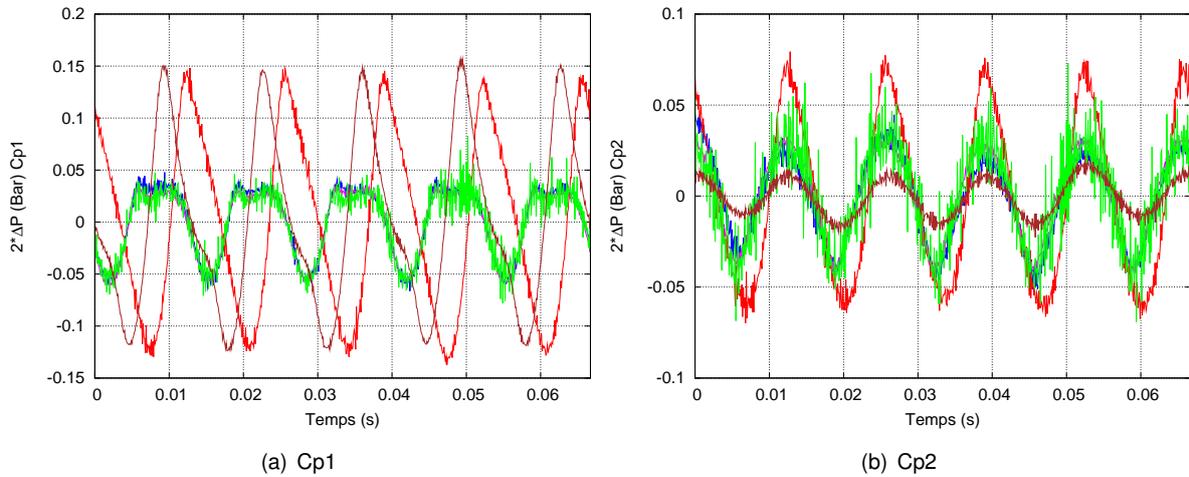


FIGURE 3.17 : Amplitudes des fluctuations de pression pour  $Cp1$  et  $Cp2$  à  $Q=360 \text{ m}^3/h$ . Conditions aux limites V-V (—), V-PS (—), V-O (—), PT-V (—), PT-PS (—).

Pour le capteur  $Cp2$ , les signaux sont périodiques et bruités. La condition aux limites PT-V est celle qui génère le plus de bruit dans le signal. Les trois signaux (V-V, V-O et PT-V) sont confondus ayant la même tendance mais l'amplitude est légèrement différente comme on peut le voir avec le capteur  $Cp1$ . Dans ce cas, les amplitudes pour les conditions V-PS et PT-PS sont différentes.

Dans le cas du capteur  $Cp3$ , les signaux sont aussi périodiques et bruités et les courbes suivent la même tendance que celles du capteur  $Cp2$ . Le signal le plus bruité est celui de la configuration PT-V et il coïncide avec les signaux des conditions aux limites V-V et V-O. D'autre part, les amplitudes diffèrent pour les deux autres courbes.

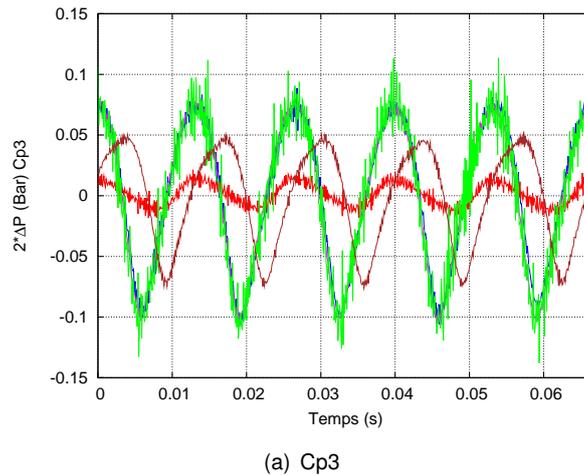


FIGURE 3.18 : Amplitudes des fluctuations de pression pour  $Cp3$  à  $Q=360 \text{ m}^3/h$ . Conditions aux limites V-V (—), V-PS (—), V-O (—), PT-V (—), PT-PS (—).

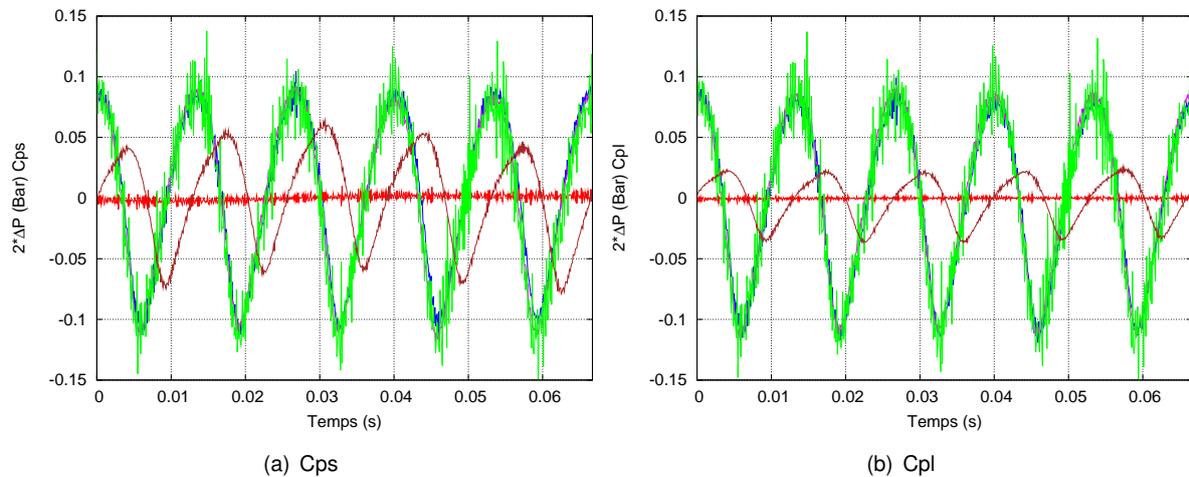


FIGURE 3.19 : Amplitudes des fluctuations de pression pour Cps et Cpl à  $Q=360 \text{ m}^3/h$ . Condition aux limites V-V (—), V-PS (—), V-O (—), PT-V (—), PT-PS (—).

### Fluctuations de pression dans le refoulement

Concernant les fluctuations de pression en refoulement, la figure 3.19 montre l'influence des conditions aux limites à la sortie de la pompe NS32. Il est clair que pour les deux capteurs Cps et Cpl, la configuration vitesse et outflow génère des amplitudes très basses par rapport aux autres configurations. La configuration PT-PS présente un comportement sinusoïdal de plus faible amplitude que les configurations V-V, V-PS et PT-V. On constate également que le signal se dissipe entre le capteur Cps et Cpl à cause de la réduction de l'amplitude du signal. En revanche pour les configurations V-V, V-PS et PT-V, qui présentent des signaux de même tendance et d'amplitudes semblables, cette dissipation ne s'observe pas entre les deux capteurs. A priori, en comparant les signaux de trois capteurs, il est difficile de conclure ou de retenir une configuration de conditions aux limites. On aura donc besoin de comparer les résultats avec les mesures expérimentales dont on dispose.

### Comparaison des fluctuations de pression

Afin de déterminer la meilleure configuration pour prédire les fluctuations de pression pour la pompe NS32, des comparaisons avec les résultats expérimentaux sont nécessaires. Ainsi, les figures 3.20 à 3.23 illustrent les amplitudes pour les capteurs Cp1, Cp2, Cp3, Cps, Cpl, la hauteur statique et la valeur expérimentale.

Pour le capteur Cp1, la comparaison donne deux possibilités de configuration V-PS et PT-PS dont les résultats sont proches des valeurs expérimentales, mais avec un avantage pour la configuration PT-PS. Ce capteur étant proche du bec, son amplitude doit être la plus haute de tous les capteurs. Concernant le capteur Cp2, aucune des cinq configurations ne correspond au résultat expérimental. L'amplitude donnée par la configuration PT-PS est vraiment sous-estimée. Dans le cas du capteur Cp3, l'amplitude de la

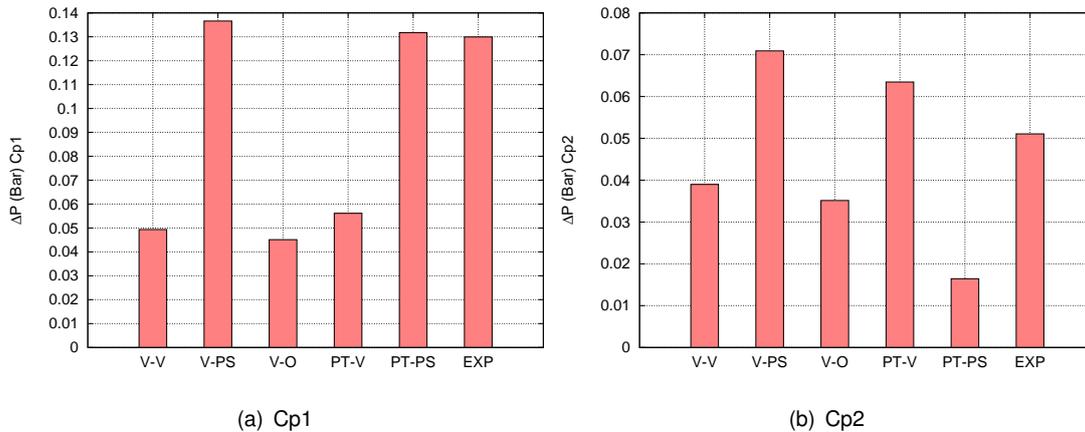


FIGURE 3.20 : Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp1 et Cp2 à  $Q=360 \text{ m}^3/\text{h}$ .

configuration PT-V est sur-estimée, par contre la condition aux limites PT-PS est là encore proche de la valeur expérimentale (il existe un écart d'environ 0.016 bar).

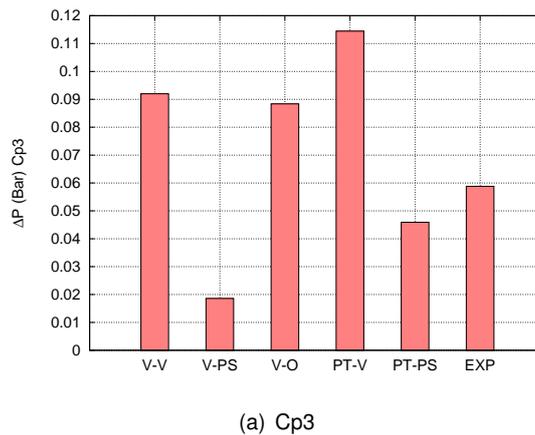


FIGURE 3.21 : Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp3 à  $Q=360 \text{ m}^3/\text{h}$ .

Les capteurs placés au refoulement (figure 3.22) révèlent que la configuration de condition aux limites PT-PS correspond bien aux essais expérimentaux. La configuration PT-V estime avec une grande différence les amplitudes, d'autre part la condition de vitesse uniforme et « d'outflow » sur-estime l'amplitude pour le capteur Cps et sous-estime l'amplitude pour Cpl, peut être à cause de la position du capteur proche de la sortie.

### Influence des conditions aux limites : cas de la pompe NS33

Pour cette étude, le maillage 1 a été utilisé pour la modélisation des fluctuations de pression. Le point de fonctionnement de la pompe NS33 correspond à un débit de  $60 \text{ m}^3/\text{h}$  et une vitesse de 1955

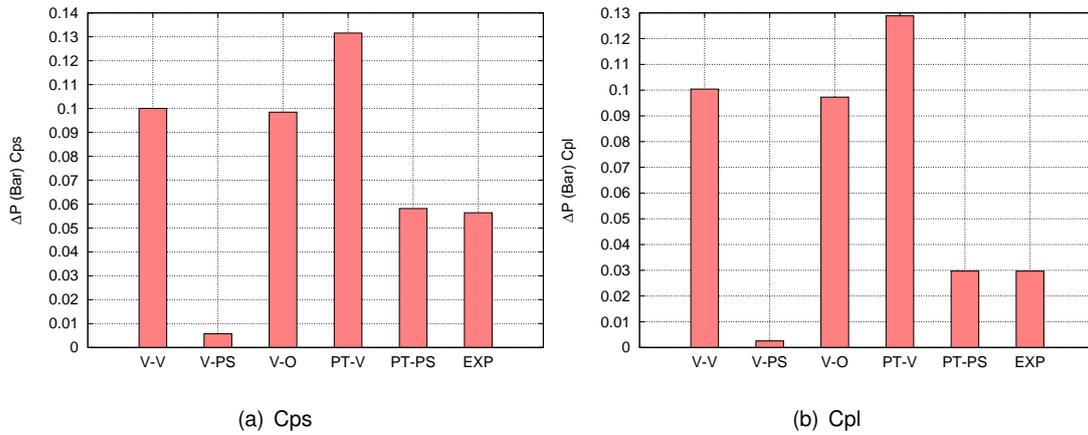


FIGURE 3.22 : Amplitudes des fluctuations de pression pour Cps et Cpl à  $Q=360 \text{ m}^3/\text{h}$ .

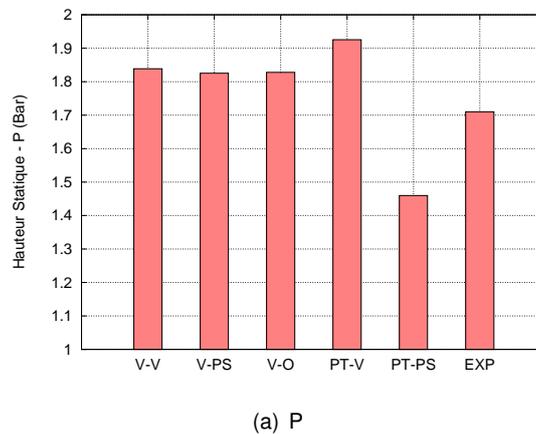


FIGURE 3.23 : Hauteur statique de la pompe NS32 à  $Q=360 \text{ m}^3/\text{h}$ .

$tr/min$ . Les points de mesure de la pression fluctuante sont ceux de la figure 2.9 qui sont modélisés par des capteurs virtuels. Les simulations numériques sont réalisées avec les mêmes paramètres qu'une simulation instationnaire avec deux configurations de conditions aux limites.

- Vitesse uniforme à l'entrée et « outflow » à la sortie (V-O).
- Pression totale à l'entrée et pression statique à la sortie (PT-PS).

### Fluctuations de pression à l'aspiration et au refoulement

En utilisant les mesures expérimentales des fluctuations de pression dans la pompe NS33, les amplitudes pour les capteurs placés à l'aspiration ou au refoulement ne varient pas trop. Les signaux doivent avoir le même ordre de grandeur, ce critère est à vérifier et à respecter si on veut déterminer la condition aux limites appropriée pour prédire les pressions fluctuantes.

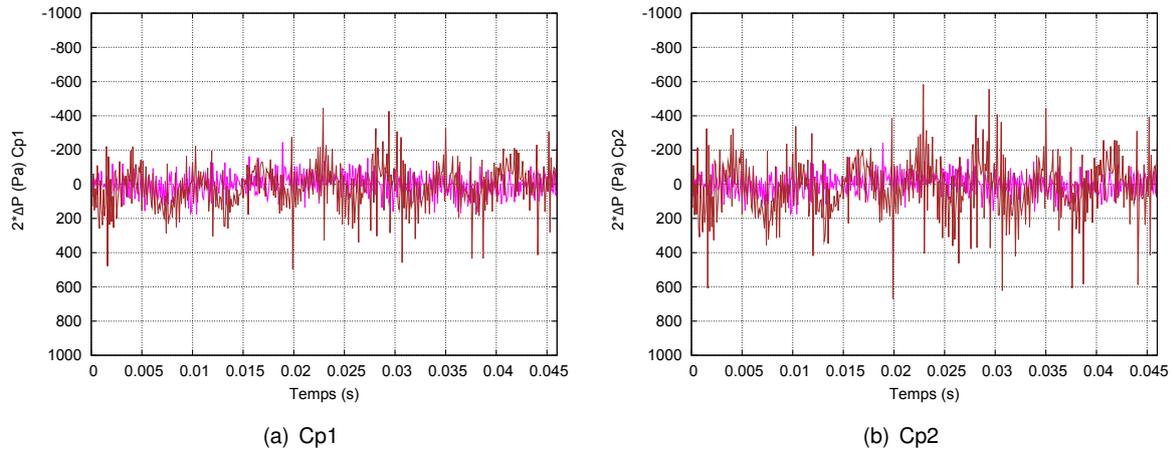


FIGURE 3.24 : Amplitudes des fluctuations de pression pour  $Cp1$  et  $Cp2$  à  $Q=60 \text{ m}^3/h$ . Condition aux limites V-O (—), PT-PS (—).

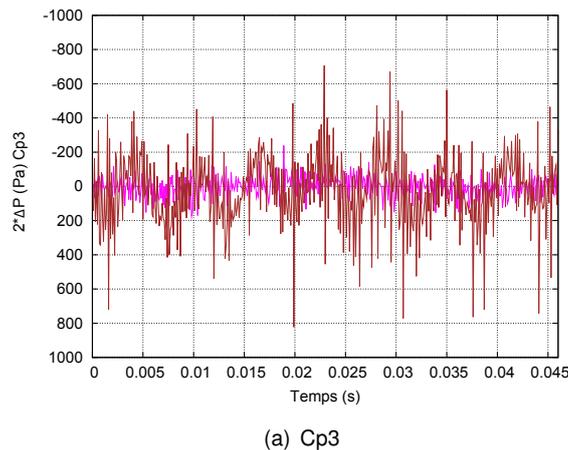


FIGURE 3.25 : Amplitudes des fluctuations de pression pour  $Cp3$  à  $Q=60 \text{ m}^3/h$ . Condition aux limites V-O (—), PT-PS (—).

Des simulations instationnaires ont été réalisées en utilisant les configurations aux limites (V-O) et (PT-PS). Les figures 3.24 à 3.27 montrent les résultats numériques basés sur le modèle décrit précédemment. Concernant les capteurs à l'aspiration  $Cp1$ ,  $Cp2$  et  $Cp3$ , les signaux révèlent que la combinaison de la pression totale et la pression statique amplifie les fluctuations de pression à mesure que le capteur est plus proche de la pompe.

D'autre part, cette configuration de condition aux limites donne des amplitudes plus fortes par rapport à la condition de vitesse et « d'outflow ». Imposer la vitesse à l'entrée semble permettre d'obtenir la même amplitude pour les capteurs  $Cp1$ ,  $Cp2$  et  $Cp3$ .

Pour les capteurs au refoulement  $Cp4$ ,  $Cp5$  et  $Cp6$ , les résultats numériques confirment un comportement sinusoïdal et une amplitude plus importante pour la configuration vitesse-outflow. La définition

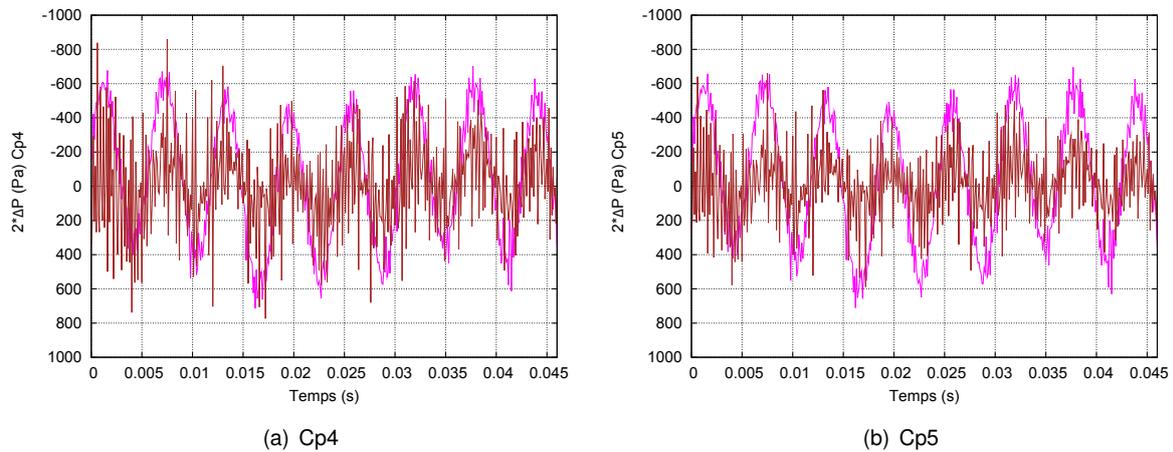


FIGURE 3.26 : Amplitudes des fluctuations de pression pour  $Cp4$  et  $Cp5$  à  $Q=60 \text{ m}^3/h$ . Condition aux limites V-O (—), PT-PS (—).

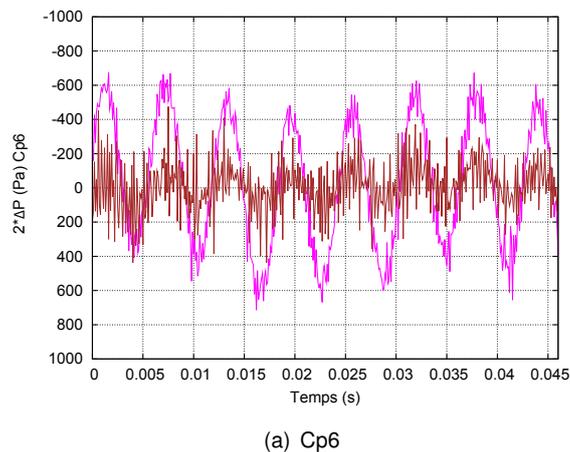


FIGURE 3.27 : Amplitudes des fluctuations de pression pour  $Cp6$  à  $Q=60 \text{ m}^3/h$ . Condition aux limites V-O (—), PT-PS (—).

d'une frontière du type pression statique a une influence significative sur le signal. L'atténuation du signal est constatée à travers les capteurs placés au refoulement, cette atténuation n'est pas réaliste étant donné la faible distance entre chaque capteur. Par contre, l'application d'une condition outflow à la sortie permet un comportement libre de la pression qui se traduit dans ce cas par un signal sinusoïdal un peu bruité et une amplitude qui varie peu entre chaque capteur. Ce résultat est en accord avec les essais expérimentaux.

Pour confirmer nos hypothèses afin de choisir la bonne configuration de condition aux limites, on a réalisé une comparaison dans le domaine fréquentiel des deux modèles numériques avec les résultats expérimentaux afin de choisir le modèle à adopter pour les calculs stationnaire et instationnaire. Les figures 3.28 à 3.31 présentent les spectres pour les capteurs à l'aspiration et au refoulement.

Concernant l'aspiration, le modèle numérique qui utilise une condition aux limites « pression totale-pression statique » modélise bien l'amplitude à la fréquence fondamentale  $F_{BP}$  malgré de légers écarts avec les essais expérimentaux. A la fréquence  $2F_{BP}$ , les écarts sont importants, mais la condition PT-PS donne des amplitudes plus élevées que la condition V-O.

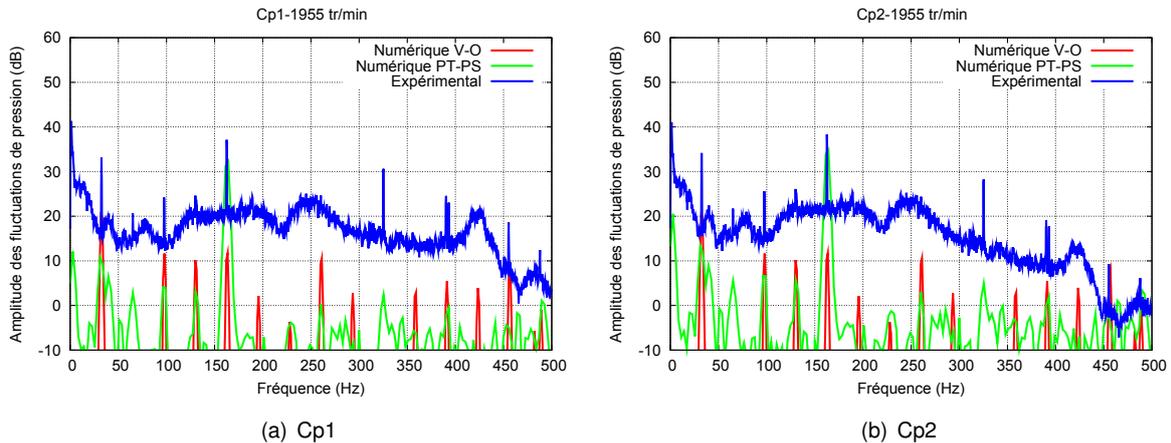


FIGURE 3.28 : Amplitudes des fluctuations de pression pour  $Cp1$  et  $Cp2$  à  $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ . Comparaison des conditions aux limites,  $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ .

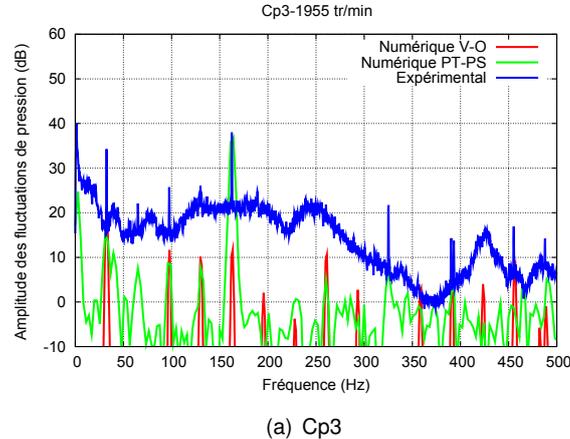


FIGURE 3.29 : Amplitudes des fluctuations de pression pour  $Cp3$  à  $Q=60 \text{ m}^3/\text{h}$ . Comparaison des conditions aux limites,  $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ .

Concernant les capteurs au refoulement, la comparaison montre clairement que le modèle numérique PP-PS qui calcule les amplitudes proche des valeurs réelles, présente une légère différence. Par contre le modèle V-O surestime les amplitudes, notamment à la fréquence fondamentale. Cette fois, la première harmonique est mieux modélisée par le modèle V-O mais elle est encore éloignée de la valeur réelle.

De plus, il est nécessaire de comparer les valeurs des amplitudes à  $F_{BP}$  et à  $2F_{BP}$  car les figures 3.28 à 3.31 révèlent que la condition vitesse-outflow développée dans le code Ansys Fluent surestime les fluc-

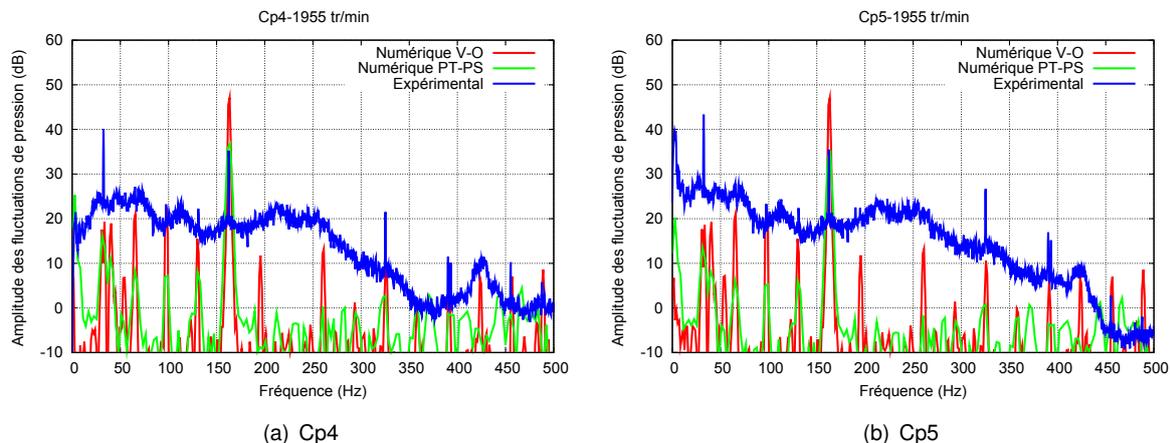


FIGURE 3.30 : Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp4 et Cp5 à  $Q=60 \text{ m}^3/h$ . Comparaison des conditions aux limites,  $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ .

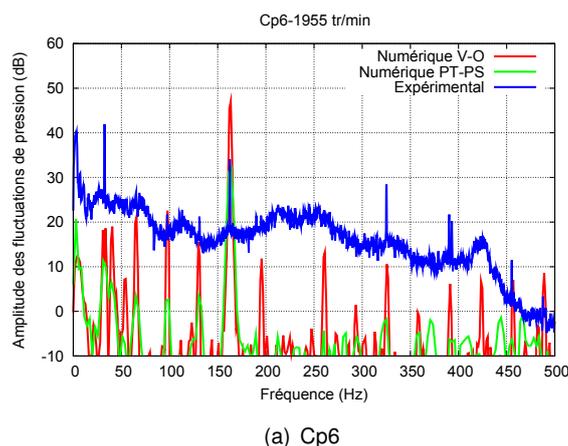


FIGURE 3.31 : Amplitudes des fluctuations de pression pour Cp6 à  $Q=60 \text{ m}^3/h$ . Comparaison des conditions aux limites,  $P_{réf}=1 \text{ Pa}$ .

tuations de pression tandis que la condition pression totale-pression statique prédit bien les fluctuations de pression. Le tableau 3.4 résume les résultats numériques et expérimentaux obtenus.

En observant le tableau 3.4, on remarque que la condition aux limites PT-PS donne des valeurs à la fréquence fondamentale assez proches des résultats expérimentaux. Mais, étant donné que la distance entre les capteurs à l'aspiration et au refoulement est petite, il ne devrait pas y avoir de dissipation d'amplitude entre eux, ce qui se passe pour les capteurs si le modèle utilisé est PT-PS, tandis que pour l'autre modèle qui donne des amplitudes plus éloignées des valeurs réelles, il y a une conservation des niveaux de fluctuation de pression entre les capteurs en amont ou en aval de la pompe d'essai. En conclusion on constate qu'il est difficile de trancher sur la pertinence du choix aux conditions aux limites.

Capteur	V-O		PT-PS		Expérimental	
	Fréquence		Fréquence		Fréquence	
	$F_{BF}$	$2F_{BF}$	$F_{BF}$	$2F_{BF}$	$F_{BF}$	$2F_{BF}$
Cp1 (dB)	11.73	-12.56	32.26	2.42	37.10	30.62
Cp2 (dB)	10.17	-12.58	34.87	4.99	38.30	28.25
Cp3 (dB)	11.73	-12.60	36.87	6.96	38.00	21.69
Cp4 (dB)	47.10	10.49	36.82	2.62	35.24	21.48
Cp5 (dB)	47.10	10.54	34.82	0.73	35.47	26.68
Cp6 (dB)	47.10	10.56	32.21	-1.79	34.08	28.40

TABLEAU 3.4 : Valeurs des amplitudes de la fluctuation de pression en décibels à la fréquence de passage des aubes ( $Q=60 \text{ m}^3/h$ ).

### 3.3 Analyse numérique des fluctuations de pression de la pompe NS32

Dans cette section nous présenterons respectivement les performances globales calculées, les fluctuations de pression calculées en sortie volute, une comparaison calcul - expérience et enfin l'analyse de l'écoulement interne.

#### 3.3.1 Performances globales

En utilisant le modèle géométrique défini précédemment et la procédure numérique définie pour un calcul stationnaire, les performances globales hauteur-débit et rendement-débit sont obtenues. La figure 3.32 montre l'évolution de la différence de pression statique relevée à une distance égale à deux fois le diamètre de la bride d'aspiration, en amont et en aval des brides d'aspiration et de refoulement.

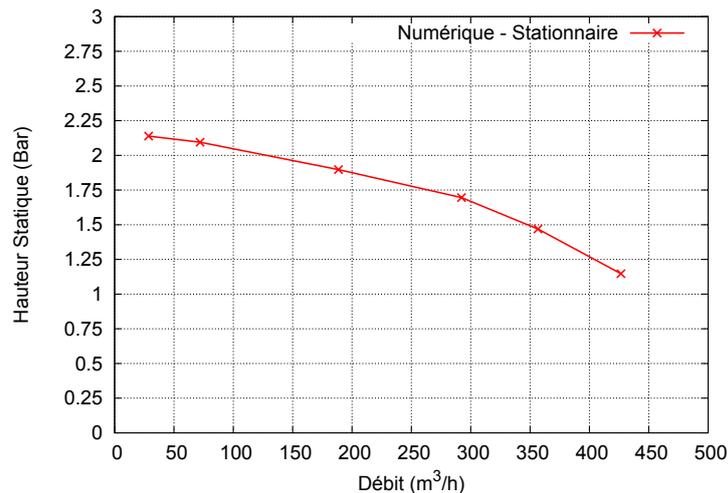


FIGURE 3.32 : Performances globales stationnaires de la pompe centrifuge NS32 à 900 tr/min.

La figure 3.33 montre l'évolution du rendement hydraulique de la machine, on constate que le point

nominal se trouve aux alentours de  $300 \text{ m}^3/\text{h}$ .

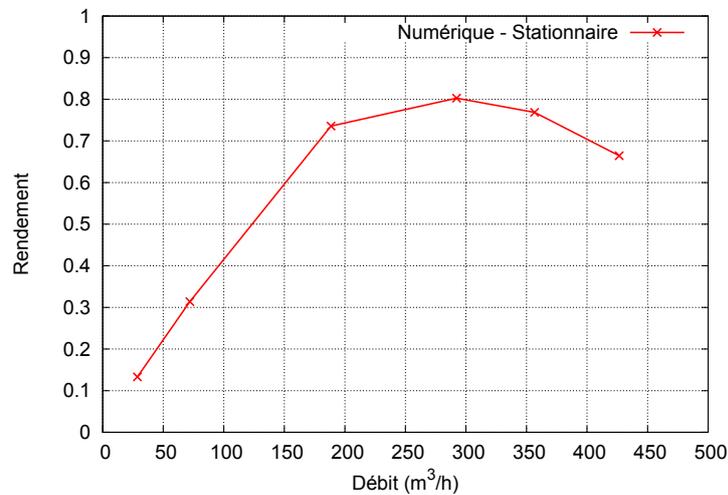


FIGURE 3.33 : Rendement de la pompe centrifuge NS32 à 900 tr/min.

### 3.3.2 Fluctuations de pression

Dans cette section, nous montrons les résultats des calculs numériques instationnaires basés sur une modélisation URANS de l'écoulement interne dans la pompe NS32. Les fluctuations de pression pariétale mesurées par les capteurs virtuels disposés dans la volute sont illustrées sur les figures 3.34 et 3.35.

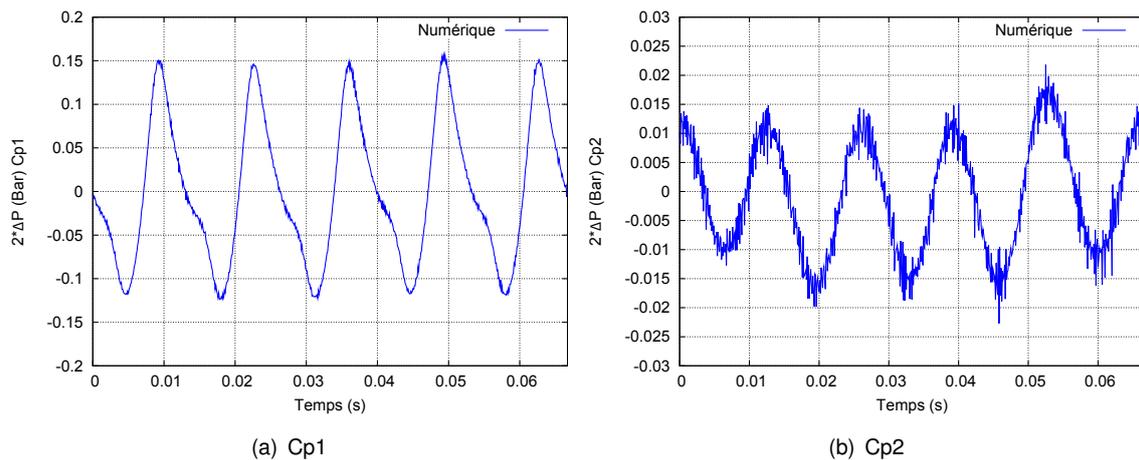
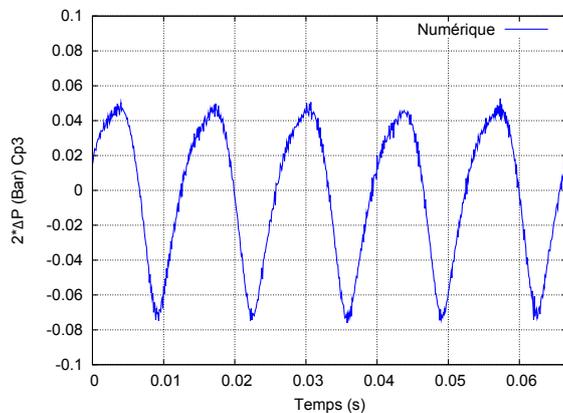


FIGURE 3.34 : Résultats numériques de la pompe NS32 à 900 tr/min dans la volute (Cp1 et Cp2).

Les signaux Cp1, Cp2 et Cp3 montrent les variations de pression statique en fonction du temps. L'acquisition des données est faite sur une durée de 0.7 s, qui correspond à 10 tours de la roue. Le

passage des cinq aubes est capturé par les capteurs, dont les amplitudes varient en fonction de leur position. L'amplitude la plus forte se manifeste sur Cp1 qui se trouve près du bec de la volute.



(a) Cp3

FIGURE 3.35 : Résultat numériques de la pompe NS32 à 900 tr/min dans la volute (Cp3).

### Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

Sur la figure 3.36, on compare les résultats des performances globales. On constate que le résultat numérique suit la même tendance que la courbe expérimentale mais il existe un écart presque constant de 0.2 bar : pour tous les débits, la hauteur numérique est sous estimée par rapport à la hauteur expérimentale.

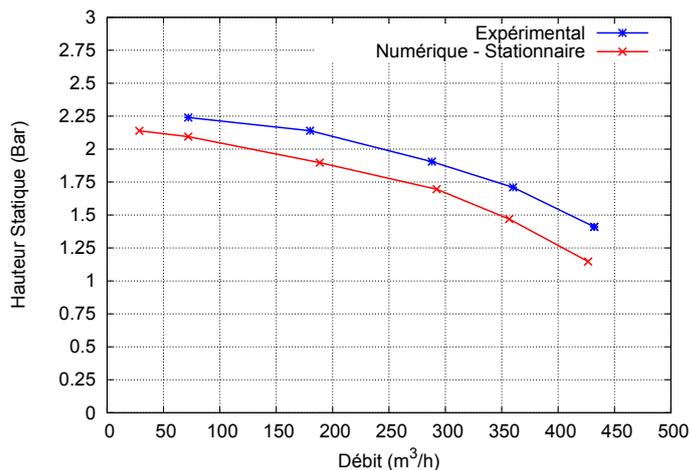


FIGURE 3.36 : Comparaison de la performance globale de la pompe NS32.

En effet, la valeur moyenne du calcul instationnaire de la pompe pour le débit de  $360 \text{ m}^3/\text{s}$  est égale à 1.5 bar. Cette différence obéit principalement à l'effet des conditions aux limites dans la solution numé-

rique et aussi aux pertes qui ne sont pas bien prédites par les modèles physiques, notamment le modèle de turbulence utilisé dans les simulations numériques réalisées. D'autre part, l'importance de considérer ou pas le jeu de fonctionnement serait une raison du manque d'accord des résultats mais qui ne peut pas être expliqué de façon raisonnable. Dans la section de l'étude de l'influence des conditions aux limites, la condition aux limites « vitesse-outflow » prédisait bien la valeur de la hauteur par contre les fluctuations de pression étaient sur-estimées ou sous-estimées.

La comparaison des fluctuations de pression numériques et expérimentales des capteurs Cp1, Cp2 et Cp3 est illustrée sur les figures 3.37 et 3.38. Concernant le cas expérimental, les essais ont été réalisés dans un régime non cavitant et les signaux de pression ont été relevés par des capteurs de pression. Les signaux expérimentaux et ceux obtenus par la simulation numérique 3D sont périodiques. En effet, l'observation des fluctuations de pression sur une période montre clairement le passage des cinq aubes de la roue de la pompe NS32.

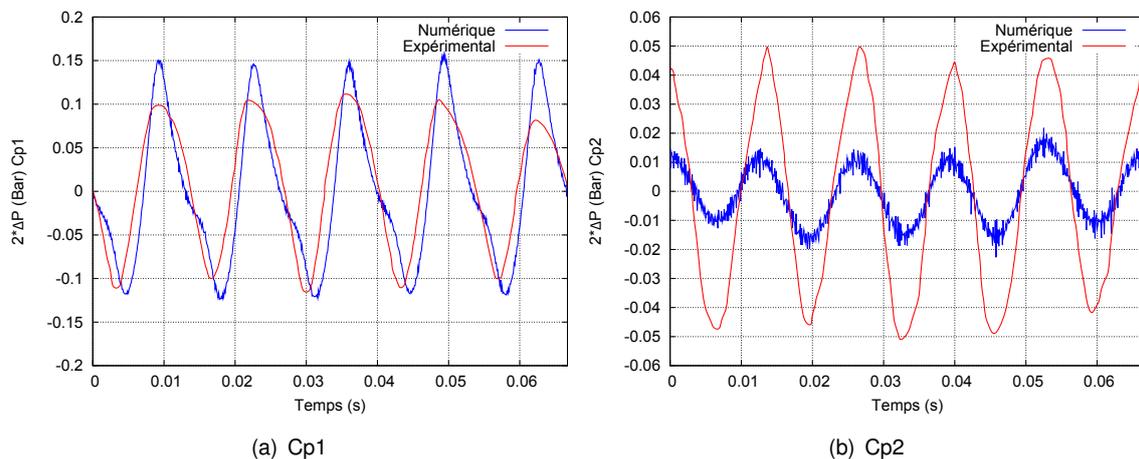
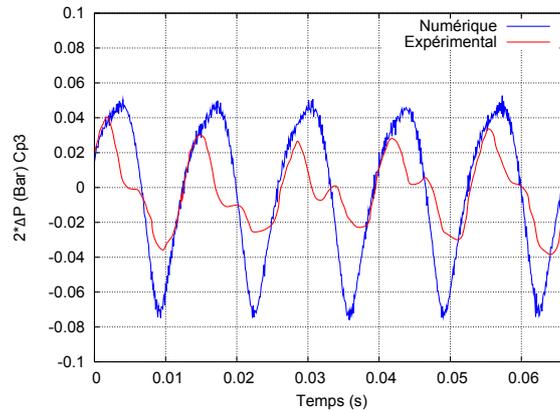


FIGURE 3.37 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux de la pompe centrifuge NS32 à 900 tr/min dans la volute (Cp1 et Cp2).

Il faut aussi préciser que le modèle numérique n'a pas pris en compte le jeu de fonctionnement. Malgré cette simplification de la géométrie, un bon accord entre les formes dynamiques des résultats est atteint pour le capteur Cp1 (proche du bec de volute). Par contre, pour les capteurs Cp2 et Cp3, les amplitudes numériques sont sous-estimées par le modèle numérique utilisé. Cet écart se réduit pour le capteur localisé proche de la sortie de la volute où les données expérimentales sont difficiles à obtenir à cause de l'écoulement qui est très perturbé.

Un léger décalage de phase entre les signaux numériques et expérimentaux est observé pour les trois capteurs. Cet inconvénient pourrait être dû à la répartition non uniforme des aubes sur la roue accompagnée d'une épaisseur variable de l'aube, conséquence du processus de fabrication. D'autre part, le modèle numérique ne considère ni les petites imperfections de fabrication et ni la rugosité du matériau.



(a) Cp3

FIGURE 3.38 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux de la pompe centrifuge NS32 à 900 tr/min dans la volute (Cp3).

### Analyse temporelle de l'écoulement interne

Afin d'étudier le comportement des fluctuations de pression au sein de la pompe NS32, une coupe du milieu de la longueur de sortie est réalisée sur la roue et sur la volute. Ces deux coupes permettront d'étudier l'évolution temporelle des fluctuations de pression lors du fonctionnement de la pompe. Le but de cette étude est de trouver des corrélations entre le comportement des fluctuations, l'écoulement et la position des aubes par rapport au bec de volute. Les contours qui représentent les fluctuations de pression sont illustrés sur les figures 3.39 à 3.42.

Les contours des fluctuations de pression à  $t=1.2710$  s sont au milieu de l'échelle de la roue et de la volute, la position de l'aube est un peu plus loin du bec de volute, mais on aperçoit une zone bleue (amplitude élevée) laissée par l'aube (bord de fuite) qui est proche du bec. On constate la formation d'une zone de forte amplitude de fluctuations dans le bec de volute et une autre vers la sortie proche de cette région à mesure que l'aube commence à se rapprocher du bec ( $t=1.2745$  s). De plus, dans le canal interaubage, plus précisément sur l'extrados de l'aube, on constate une zone où la fluctuation commence à augmenter doucement. Pour  $t=1.2759$  s, on remarque dans la zone du bec, la croissance d'une région de forte amplitude vers la sortie proche du bec et aussi dans l'extrados de l'aube. Idem pour  $t=1.2766$  s, sauf que la région de forte amplitude augmente progressivement à mesure que l'aube tend à s'approcher de cette zone dans la région du bec de volute.

Lorsque  $t=1.2773$  s, on note que, proche du bec de volute, la région d'amplitude élevée s'étend de la même façon dans le côté extrados de l'aube. L'alignement du bord de fuite avec le bec de volute se manifeste par la présence d'une région de fortes fluctuations qui couvre plus de la moitié de l'aube ainsi qu'une zone de la même intensité de fluctuations proche du bec vers la surface interne de la volute. Ceci est aussi accompagné par la présence d'une petite zone d'amplitude élevée au bord de fuite de l'aube.

A mesure que la roue tourne, on constate que la zone de forte amplitude s'étend et touche l'aube qui

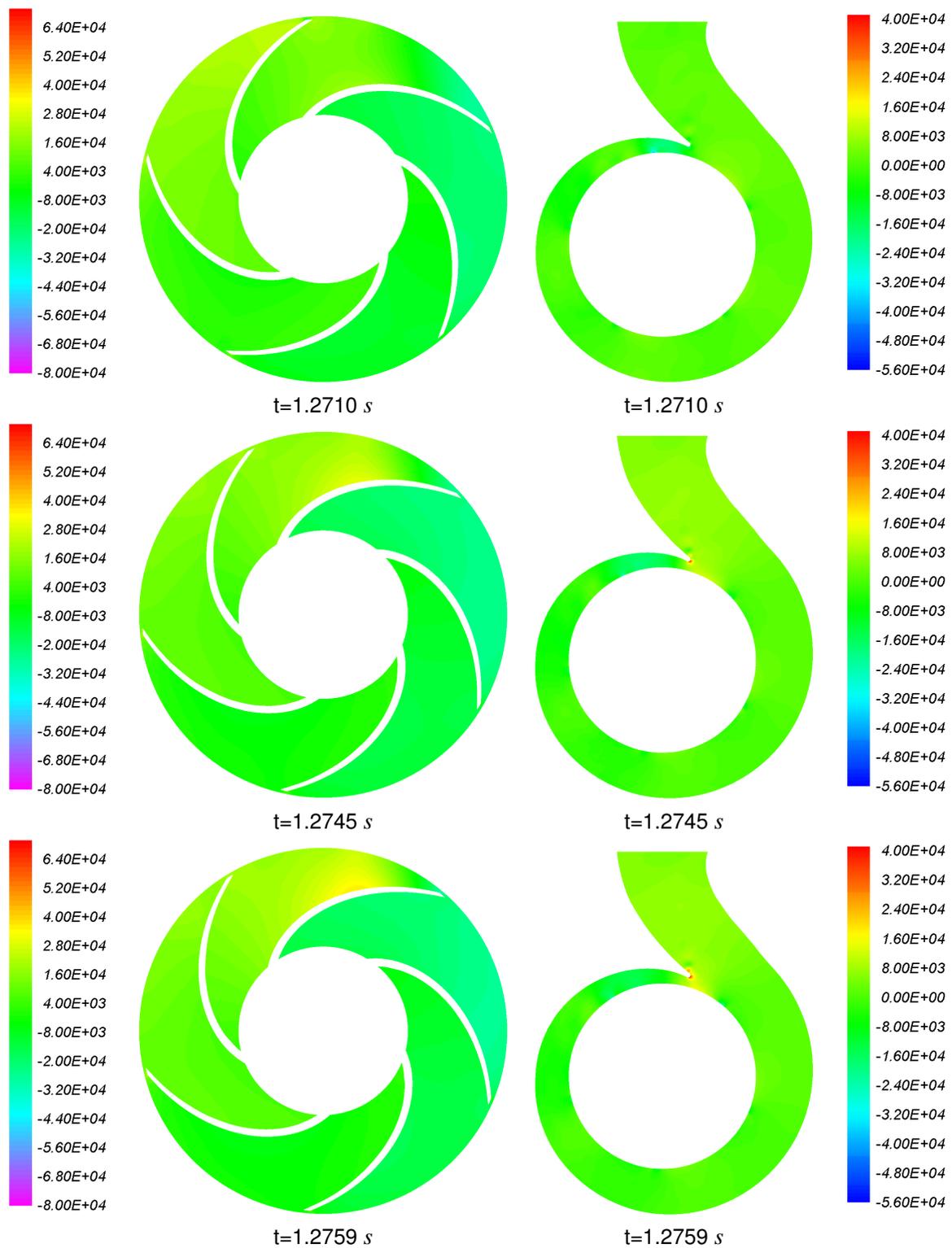


FIGURE 3.39 : Contours des fluctuations de pression (Pa) dans la pompe NS32.

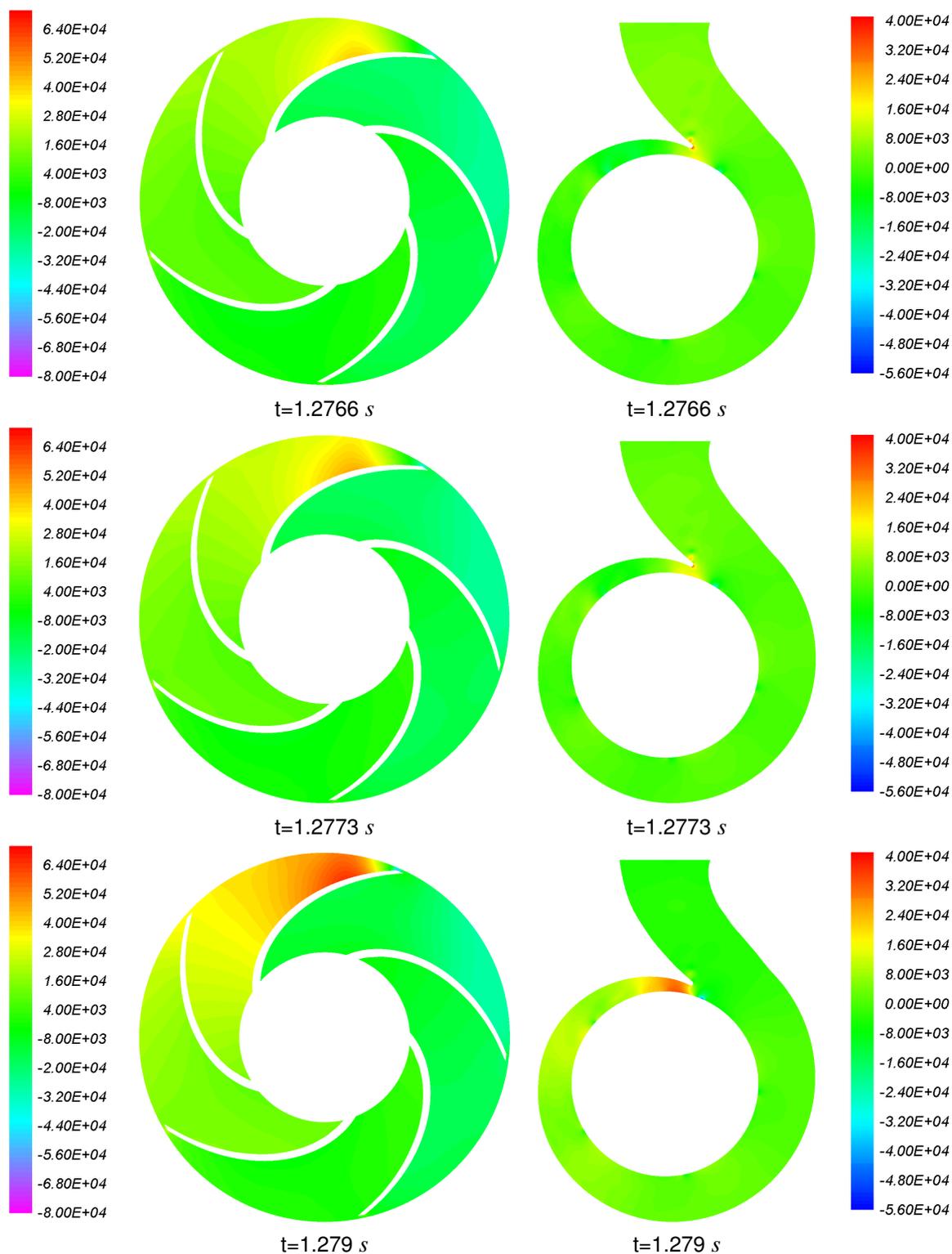


FIGURE 3.40 : Contours des fluctuations de pression (Pa) dans la pompe NS32.

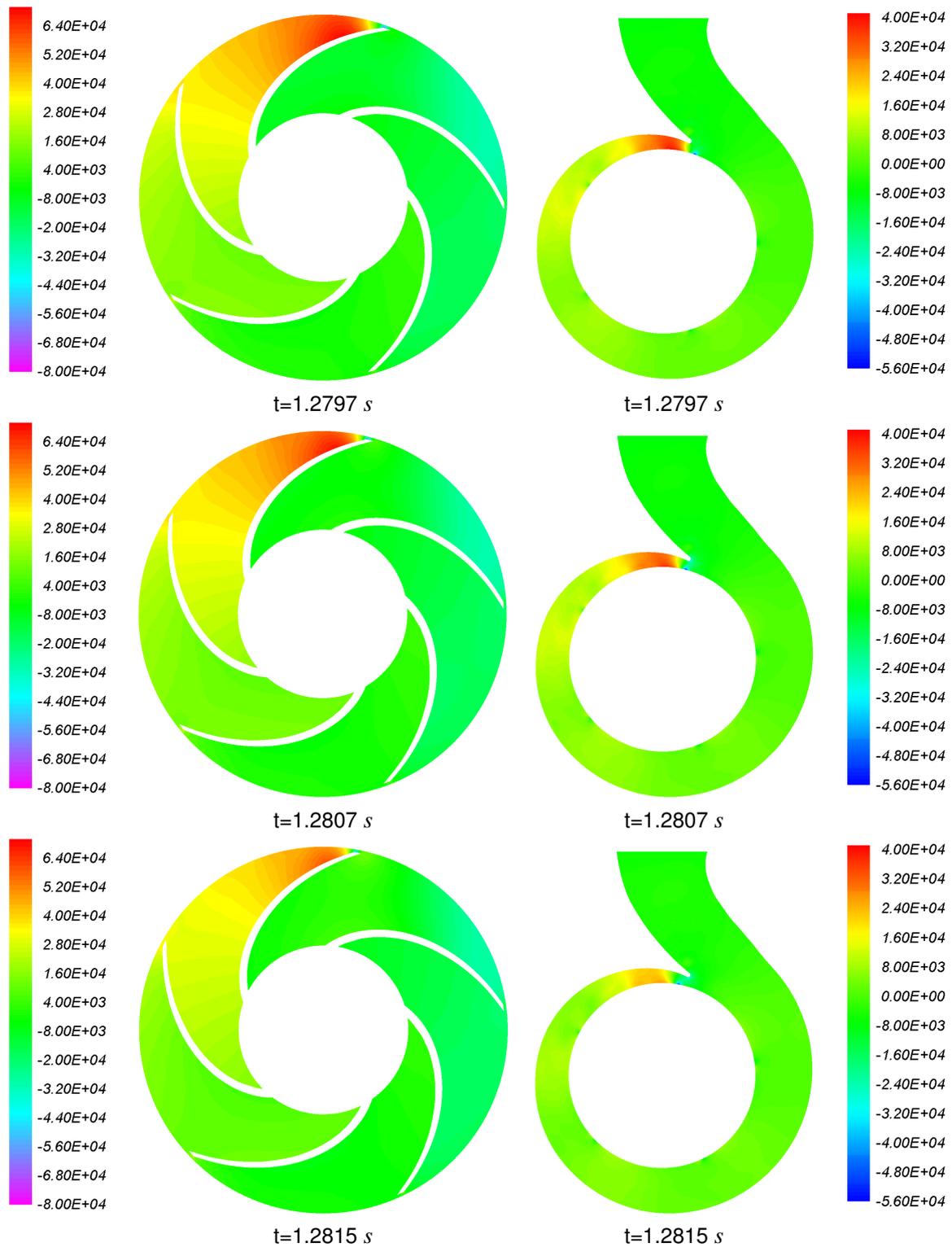


FIGURE 3.41 : Contours des fluctuations de pression (Pa) dans la pompe NS32.

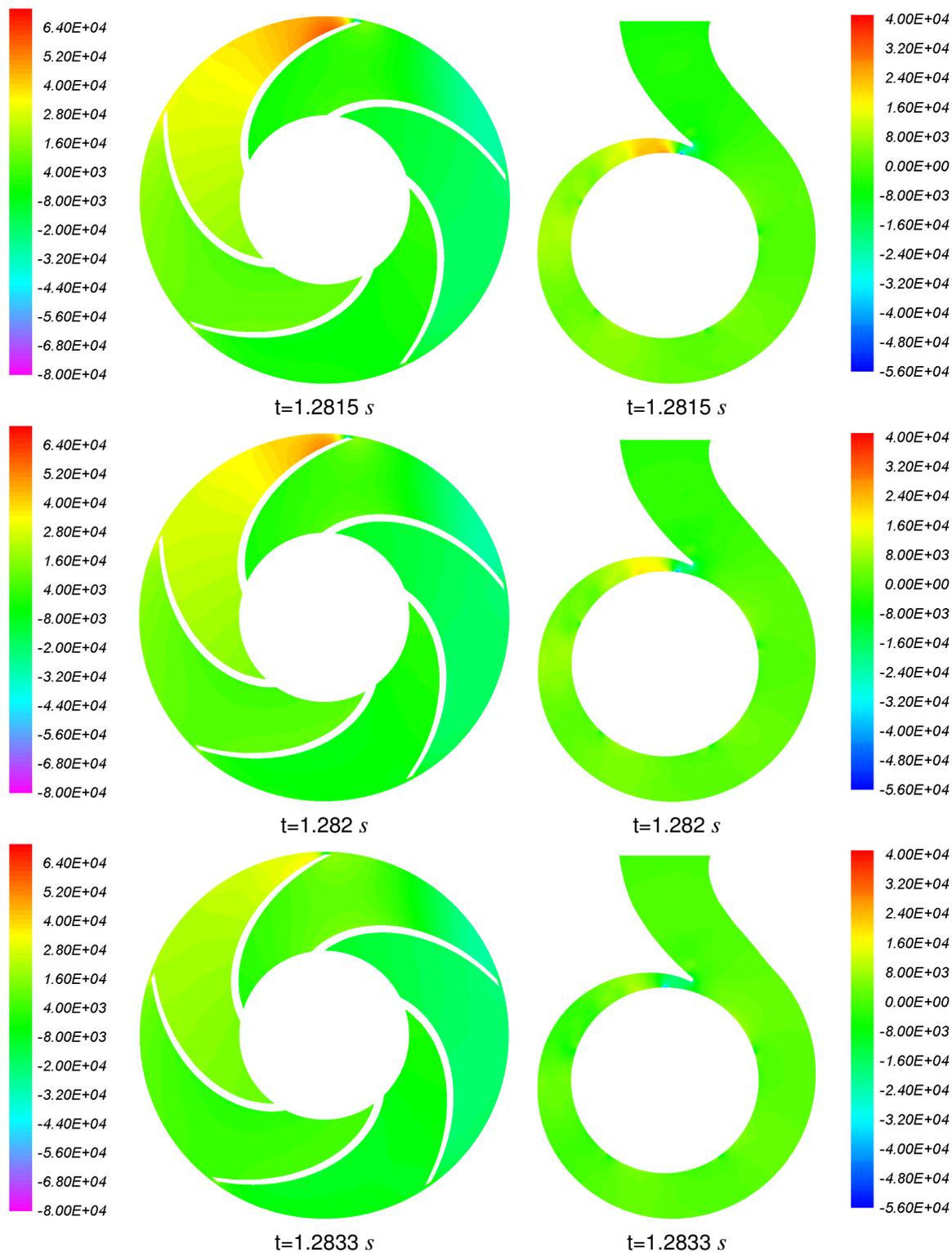


FIGURE 3.42 : Contours des fluctuations de pression (Pa) dans la pompe NS32.

se trouve en amont de l'aube, proche du bec ( $t=1.2797\text{ s}$  et  $t=1.2807\text{ s}$ ). La région proche du bec s'étend également et la source de bruit hydraulique au bord de fuite reste constante. Pour ces deux instants, la distance entre l'aube et le bec de volute est la plus petite et les fluctuations sont les plus élevées par rapport aux autres instants ou positions de la roue.

La roue glisse encore quelques secondes ( $t=1.2815\text{ s}$ ) et la région de fortes fluctuations commence à se rétrécir jusqu'à ce que l'aube s'éloigne assez du bec pour retourner à des valeurs de fluctuations plus faibles tandis qu'une autre s'approche et que le même comportement de fluctuations de pression dans la roue et la volute se répète. Pour tous ces instants, on peut retenir que la position relative entre la roue et le bec de volute ne modifie pas considérablement l'amplitude des fluctuations au bord de fuite de l'aube qui sont l'une des sources principales du bruit hydraulique. D'autre part, les fluctuations de pression varient dans le bec de volute en fonction de la position de l'aube (elles sont plus fortes quand l'aube s'approche). A mesure que la distance entre le bec et le bord de fuite diminue, la zone de fortes fluctuations grandit dans l'extrados et dans la région proche du bec, vers l'intérieur. Ce comportement se répète périodiquement à chaque tour de la roue.

### 3.4 Analyse numérique des fluctuations de pression de la pompe NS33

Dans cette partie, les résultats numériques obtenus respectivement par le modèle numérique et les conditions aux limites adoptées sont présentés. Ensuite, on confrontera les résultats numériques avec les résultats expérimentaux en observant les grandeurs globales de l'écoulement puis les grandeurs locales, à savoir les pressions statiques fluctuantes calculées dans les tuyaux d'aspiration et de refoulement.

#### 3.4.1 Performances globales

Les calculs numériques stationnaires visent à déterminer rapidement le comportement hydraulique de la pompe à la vitesse de  $1955\text{ tr/min}$ . La figure 3.43 montre l'évolution de la différence de pression statique prise à deux fois le diamètre de la bride d'aspiration en fonction du débit volumique. Le comportement de la courbe hauteur-débit est classique.

Concernant le rendement hydraulique de la machine (voir figure 3.44), on constate que le point nominal se trouve proche du débit de  $70\text{ m}^3/h$ . Donc, pour notre étude de fluctuations de pression, la simulation a été réalisée pour un léger sous-débit de  $60\text{ m}^3/h$ . Ces résultats de performances nous donnent déjà une première idée de la hauteur statique fournie par la pompe NS33 à une position donnée de la roue par rapport à la volute. La modélisation instationnaire permettra de calculer les fluctuations de pression, de vérifier la valeur de la hauteur statique et d'analyser le comportement de la morphologie de l'écoulement interne.

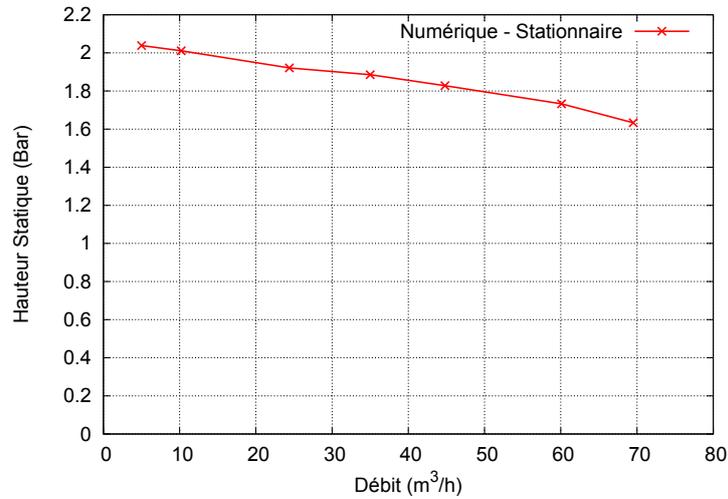


FIGURE 3.43 : Courbe caractéristique hauteur-débit de la pompe NS33 à 1955 tr/min.

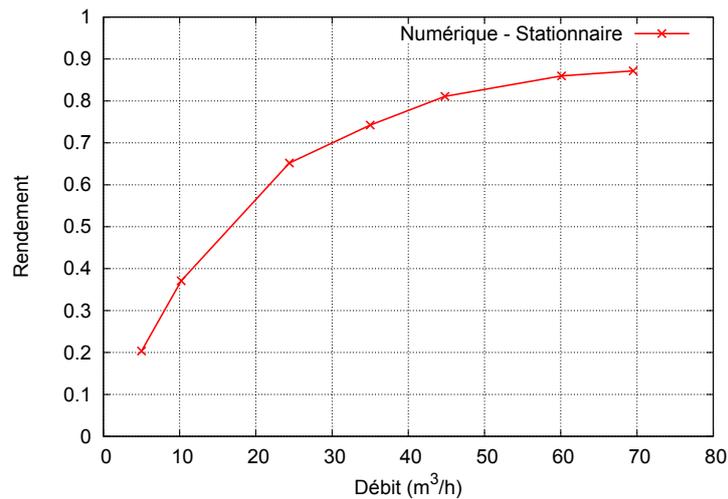


FIGURE 3.44 : Rendement hydraulique de la pompe NS33 à 1955 tr/min.

### 3.4.2 Fluctuations de pression

Les signaux numériques des fluctuations de pression pour les capteurs placés dans la canalisation d'aspiration et de refoulement sont illustrés dans les figures 3.24 à 3.27 qui ont été présentées dans la section d'étude de l'influence des conditions aux limites. Dans ce cas, deux signaux ont été tracés pour chaque capteur en fonction de la condition aux limites PT-PS et V-O pour un tour de roue. Des comparaisons avec les signaux expérimentaux ne sont pas possibles car notre base de données ne contient pas les valeurs expérimentales de la pression.

### Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

Les essais expérimentaux en régime non cavitant sont confrontés aux les résultats numériques stationnaires obtenus avec un calcul 3D. La hauteur statique numérique correspond à la différence de la valeur moyenne sur la surface à l'aspiration et au refoulement, ces surfaces correspondant exactement aux mêmes positions des essais réels. Ainsi, la figure 3.45 explique la différence existante entre les deux courbes caractéristiques (numérique et expérimentale). La courbe numérique suit la même tendance mais elle est écartée d'environ 0.2 bar au-dessus de la courbe expérimentale à cause du modèle numérique utilisé. Les raisons de cette différence pourraient être nombreuses mais ne peuvent pas être justifiées convenablement.

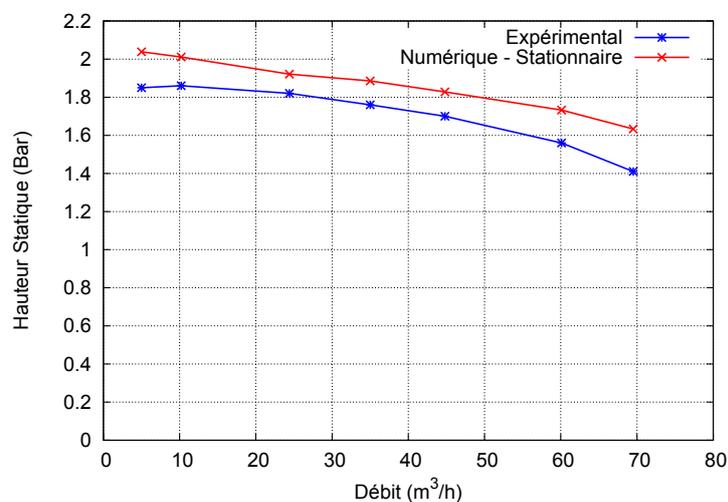


FIGURE 3.45 : Comparaison de la courbe caractéristique numérique et expérimentale.

Le banc d'essais numérique ne considère pas le jeu de fonctionnement, la rugosité du matériau est négligée lors des simulations, et les défauts de fabrication ne sont pas inclus parce que les volumes de fluide sont construits à partir des fichiers CAO. Même avec ces inconvénients, la hauteur stationnaire est proche de la hauteur réelle. Pour nous assurer de la validité de ces premiers résultats, une simulation numérique instationnaire est réalisée pour prédire les fluctuations de pression et pour déterminer la valeur moyenne de la hauteur statique qui est égale à 1.8 bar. Concernant la comparaison des spectres fréquentiels numériques et expérimentaux, elle a été faite dans la section influence des conditions aux limites dans la pompe NS33.

### Analyse temporelle de l'écoulement interne

Etant donné que les deux modèles numériques utilisés lors de notre étude d'influence des conditions aux limites ont abouti à des conclusions intéressantes, notamment au niveau des fluctuations de pression à la fréquence fondamentale. On a donc décidé de réaliser une étude du comportement des fluctuations

de pression pour ces deux modèles. Pour notre étude, une coupe de la roue et de la volute ont été réalisées à mi largeur de roue pour relever les valeurs de la pression instantanée et déterminer les valeurs de la pression fluctuante lors de deux tours de roue.

#### **Condition aux limites : « Pression Totale - Pression Statique »**

Les figures 3.46 à 3.49 illustrent les contours des fluctuations de pression. Les images révèlent clairement que le comportement des fluctuations de pression de ce type de pompe est complètement différent de la pompe NS32.

Les différences de géométries, la présence des aubes intermédiaires (splitters) et une volute déportée changent l'apparition et le développement des zones de fortes fluctuations de pression. La région de forte amplitude bouge et glisse de l'extrados de l'aube principale vers l'extrados du splitter ( $t=0.7681$  s), à cet instant, on constate la présence au bord d'attaque d'un splitter de fortes fluctuations de pression.

Pour la volute, des régions de fortes fluctuations de pression sont observables et liées au bord de fuite des aubes. A mesure que la roue tourne, les fluctuations couvrent presque tout l'extrados du splitter à  $t=0.7688$  s et  $t=0.769$  s tandis que la fluctuation au bord d'attaque du splitter reste constante. La forte fluctuation sur le bord d'attaque du splitter commence à se dissiper progressivement lorsque la roue tourne encore et d'autre part la région de fortes fluctuations développée sur l'extrados du splitter se rétrécit ( $t=0.7693$  s,  $t=0.7697$  s et  $t=0.7702$  s).

A  $t=0.7702$  s, on observe aussi dans la volute une zone de fortes amplitudes qui se développe, elles sont les plus fortes de notre échelle et se localisent au bord de fuite des aubes mais disparaissent à  $t=0.7706$  s. A cet instant, les fluctuations commencent à agir sur l'extrados de l'aube principale et se concentrent principalement sur la moitié de l'aube ( $t=0.7723$  s). Ce comportement se répète périodiquement à chaque tour de roue.

#### **Condition aux limites : « Vitesse - Outflow »**

Les figures 3.50 à 3.54 montrent les contours de fluctuations de pression pour la roue et pour la volute.

On observe à l'instant  $t=1$  s, la présence d'une zone de fortes amplitudes sur le bord d'attaque de deux splitters et le glissement également d'une région de fluctuation élevée de l'aube principale vers l'aube intermédiaire. Dans le cas de la volute, des fortes amplitudes sont générées par les bords de fuites et les plus élevées sont laissées par les splitters. A l'instant  $t=1.0009$  s, la région de fortes amplitudes couvre presque tout l'extrados du splitter tandis que dans la volute, les fortes amplitudes générées par les bords de fuites des aubes augmentent. Avec la rotation de la roue, on observe que les amplitudes élevées restent constantes dans la volute jusque  $t=1.0038$  s.

Pour la roue, le comportement est différent, la région de fortes amplitudes bouge vers l'aube principale à  $t=1.0028$  s et on se rend compte également que les fluctuations sur le bord d'attaque de deux splitters se dissipent jusque disparaître. A cet instant  $t=1.0038$  s, une région de forte amplitude commence

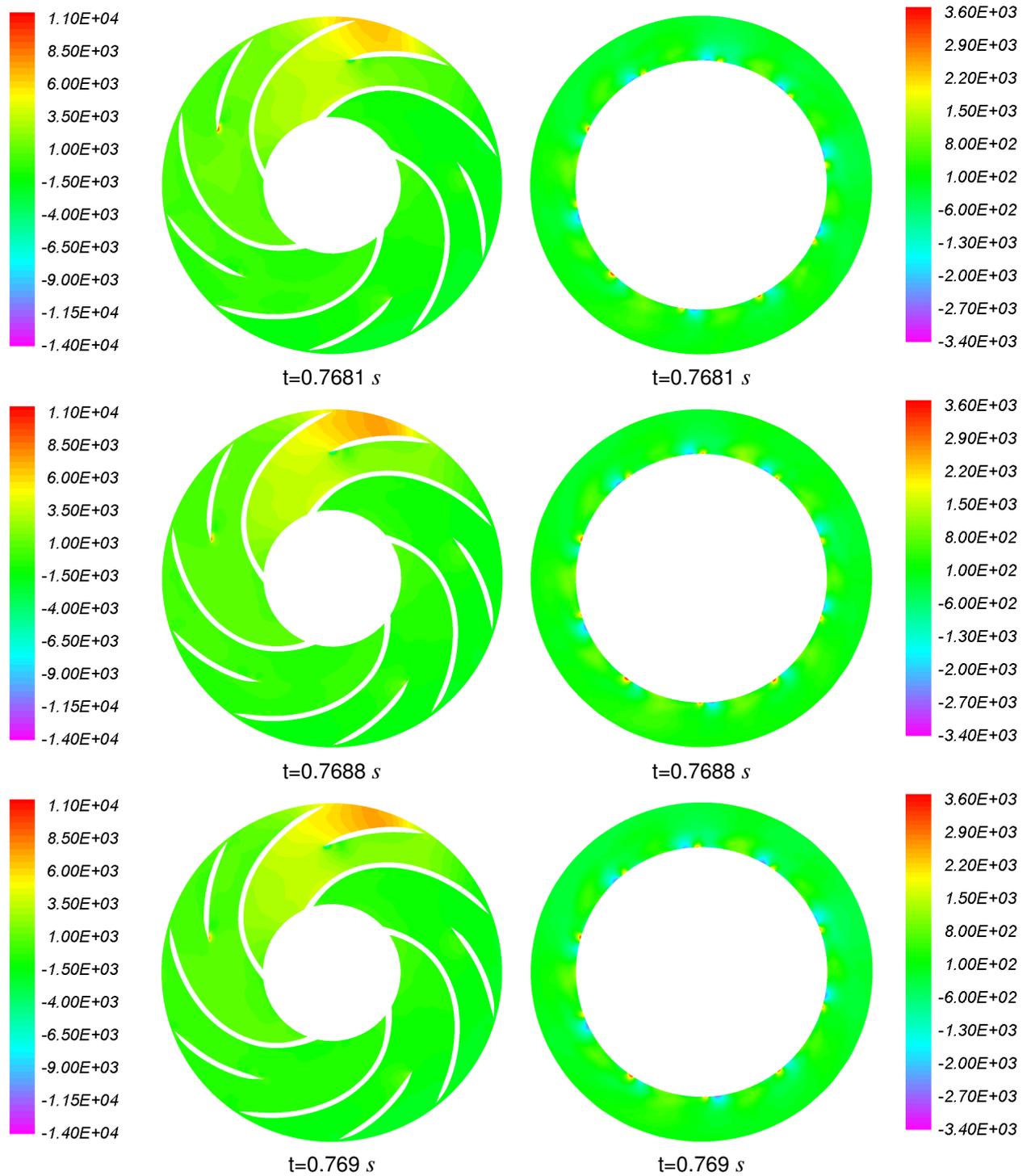


FIGURE 3.46 : Contours des fluctuations de pression (Pa) dans la pompe NS33, « Pression totale - Pression statique ».

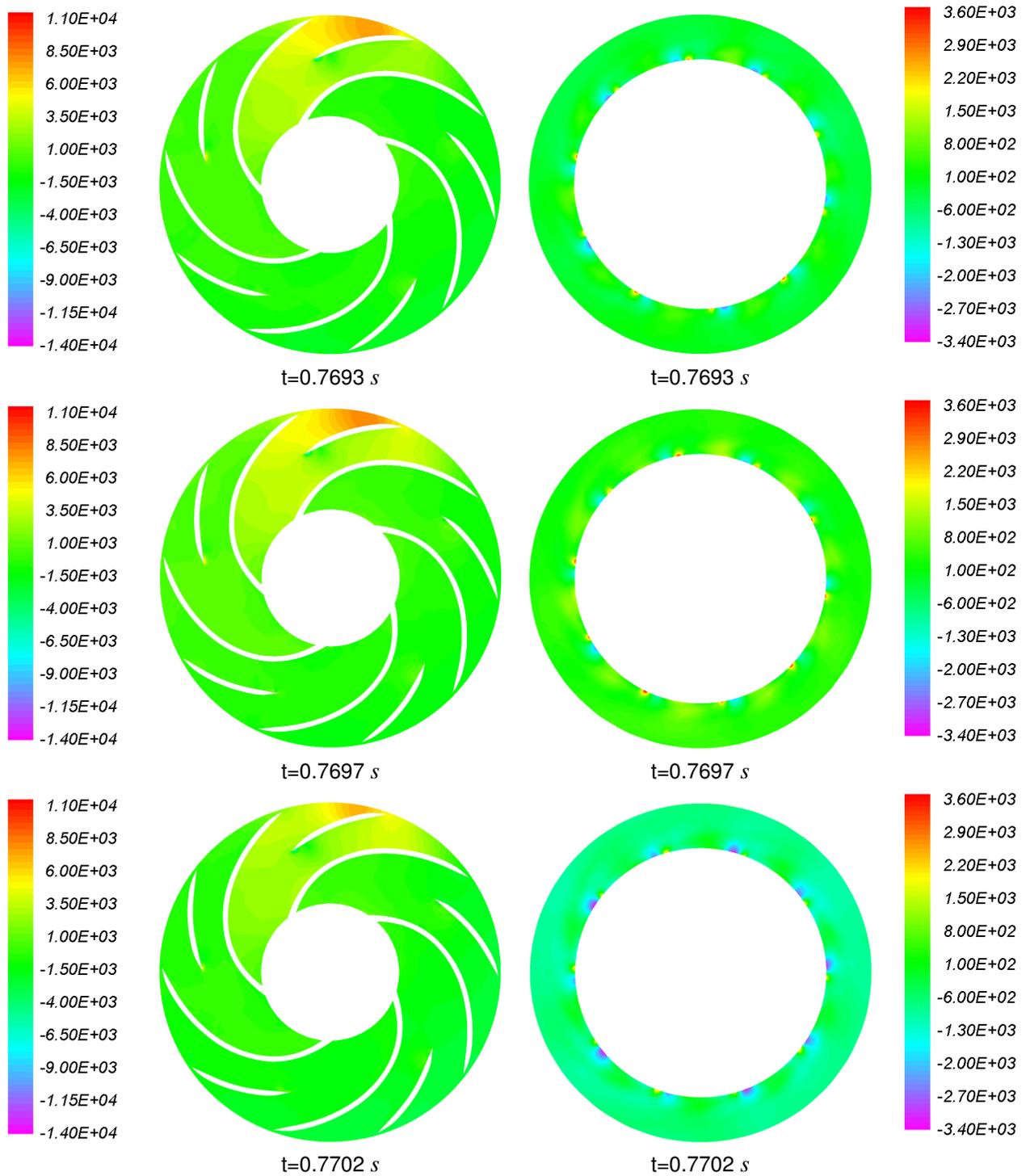


FIGURE 3.47 : Contours des fluctuations de pression (Pa) dans la pompe NS33, « Pression totale - Pression statique ».

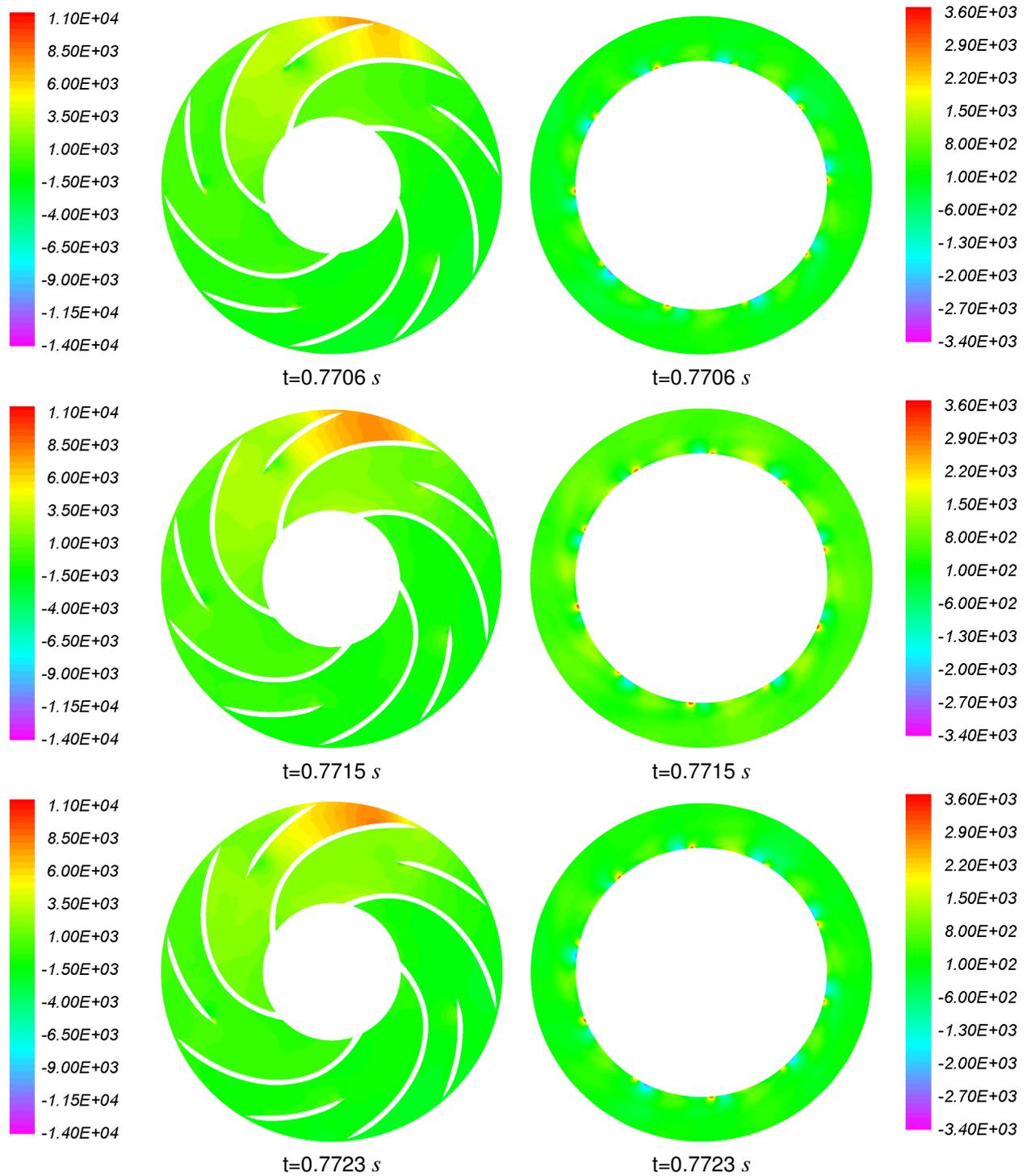


FIGURE 3.48 : Contours des fluctuations de pression (Pa) dans la pompe NS33, « Pression totale - Pression statique ».

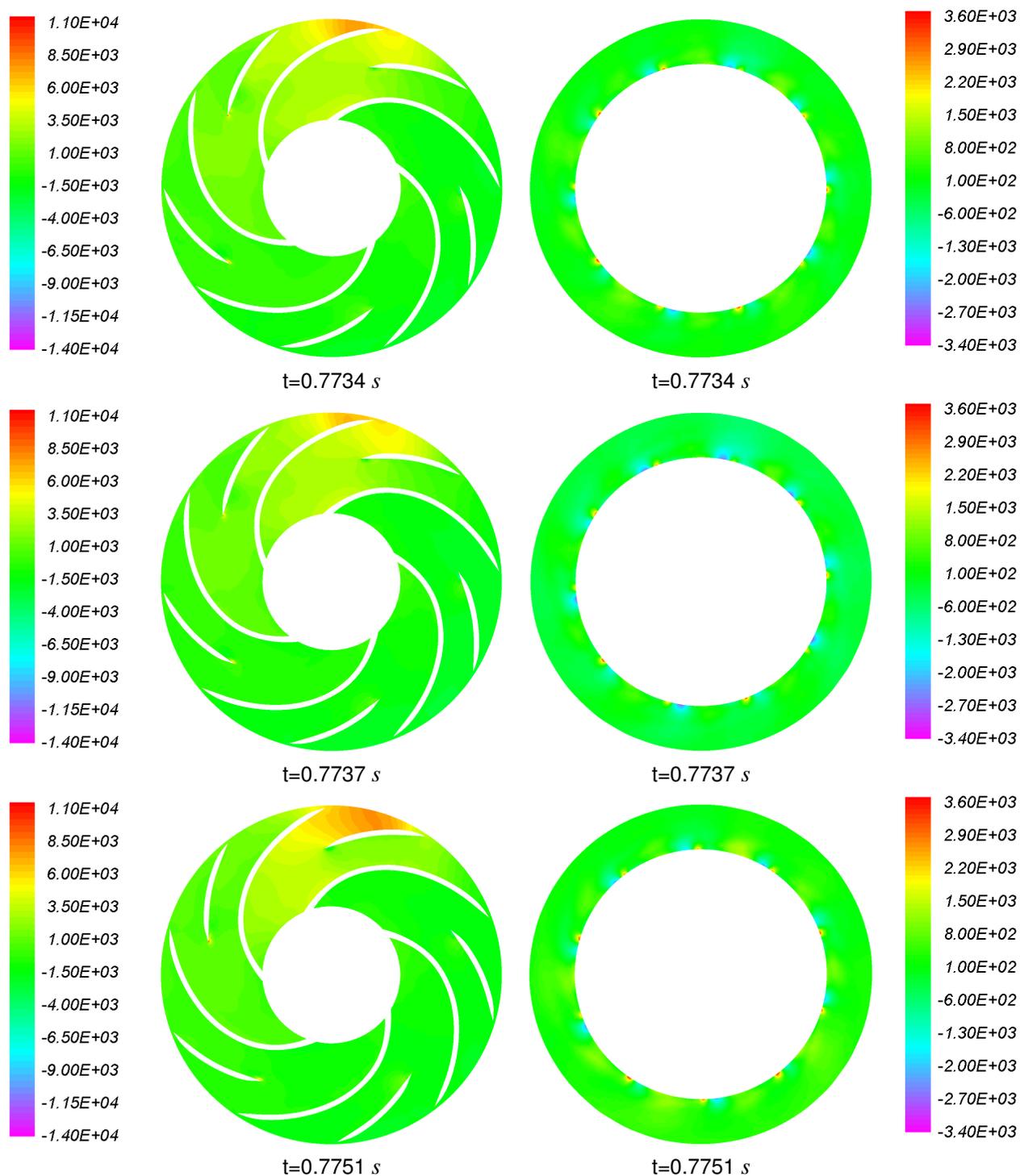


FIGURE 3.49 : Contours des fluctuations de pression (Pa) dans la pompe NS33, « Pression totale - Pression statique ».

à se développer sur le bord d'attaque d'une autre splitter, cet évènement coïncide avec la présence d'une zone de fortes fluctuations sur la moitié de l'extrados de l'aube principale. Une fois, la forte amplitude couvre complètement l'aube principale, la fluctuation élevée reste constante sur le splitter. La roue tourne un milliseconde, et on constate la présence plus accentuée de deux zones de fortes amplitudes qui se trouvent sur les bords d'attaque de deux splitters ( $t=1.0054 \text{ s}$ ).

Pour l'instant  $t=1.0065 \text{ s}$ , on remarque la présence de trois zones de fluctuations importantes sur trois splitters et sur l'extrados du splitter proche du bec qui se dissipe à mesure qu'il s'éloigne du bec. Cette région de forte amplitude bouge vers l'extrados de l'aube principale. Tous ces événements sont périodiques et sont caractérisés principalement par la position des aubes par rapport au bec de volute.

### 3.5 Conclusions

Dans ce troisième chapitre, la modélisation de l'écoulement instationnaire et la prédiction des fluctuations de pression de deux pompes centrifuges à volute ont été présentées dans toutes ses étapes. Les résultats numériques ont permis d'accéder à la morphologie de l'écoulement interne, et d'en confirmer la complexité. L'interaction entre la partie mobile constituée par la roue et la partie fixe constituée par la volute a été mise en évidence par le calcul des pressions fluctuantes sur la paroi de la volute en plusieurs points stratégiques et sur les canalisations d'aspiration et de refoulement. D'autre part, le spectre de raies obtenu de ces pompes a été calculé à partir des signaux temporelles de la pression grâce à des capteurs virtuels. L'influence du choix des conditions aux limites et du maillage est mis en évidence pour les deux modèles géométriques.

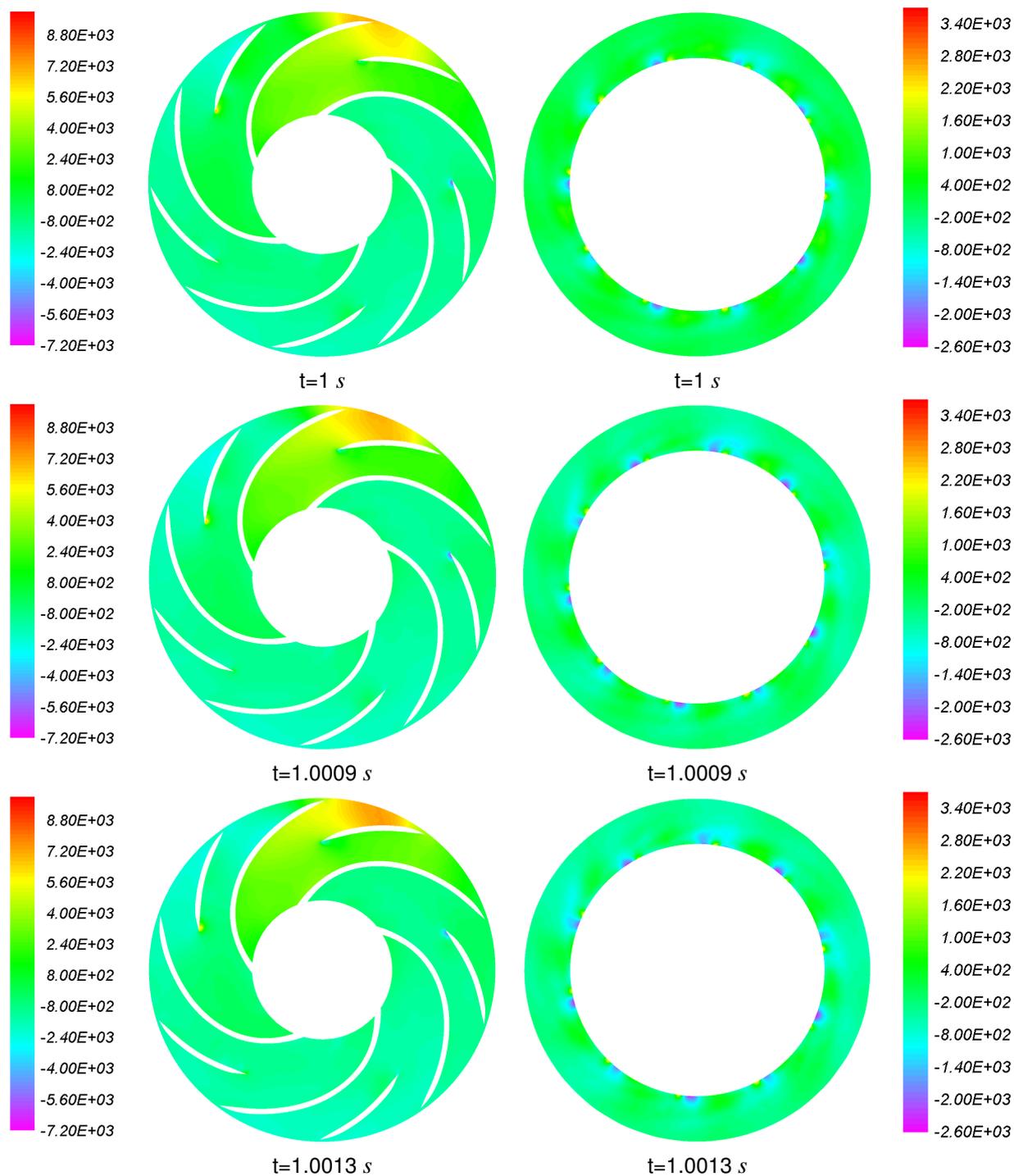


FIGURE 3.50 : Contours des fluctuations de pression (Pa) dans la pompe NS33, « Vitesse - Outflow ».

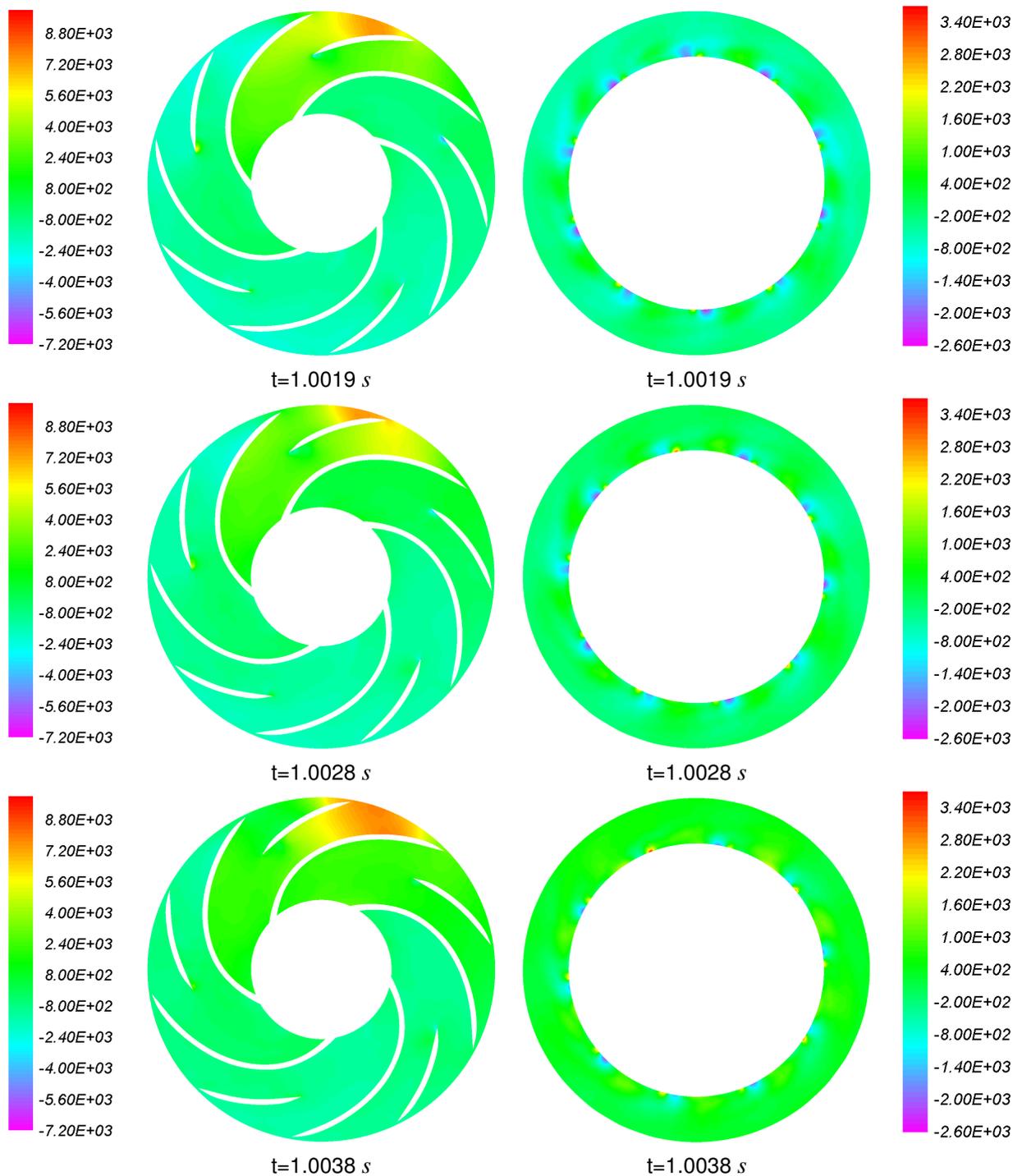


FIGURE 3.51 : Contours des fluctuations de pression (Pa) dans la pompe NS33, « Vitesse - Outflow ».

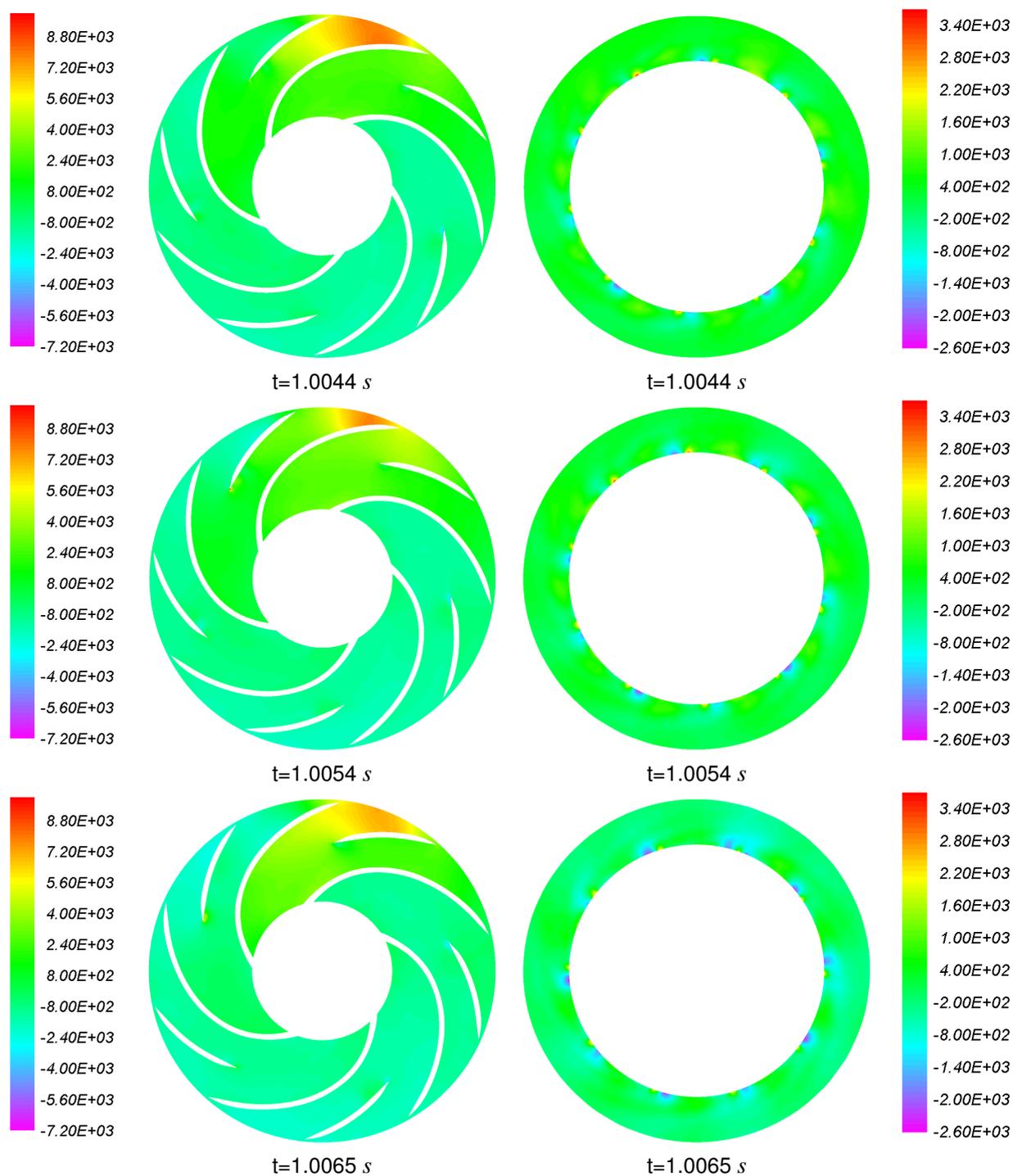


FIGURE 3.52 : Contours des fluctuations de pression (Pa) dans la pompe NS33, « Vitesse - Outflow ».

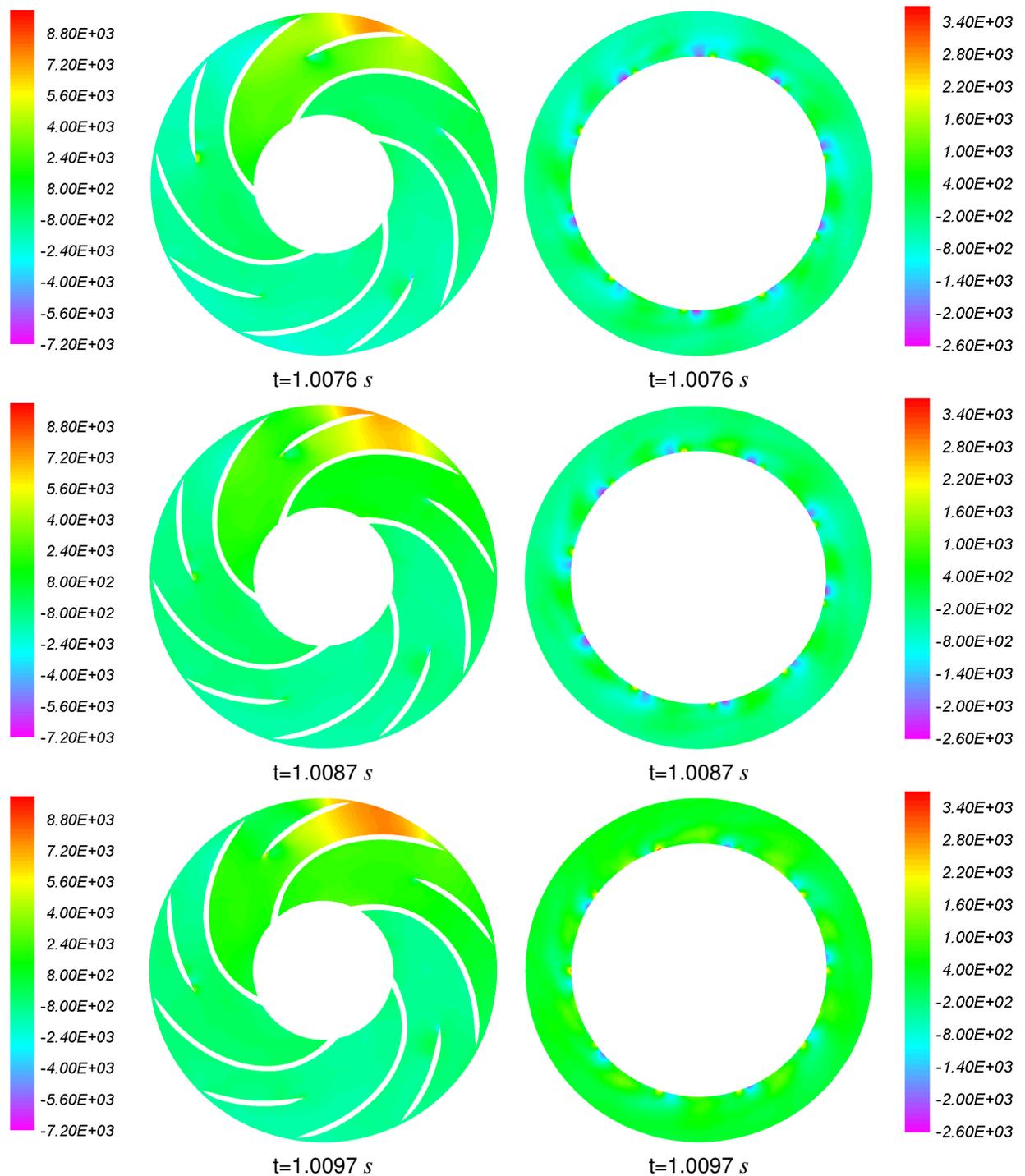


FIGURE 3.53 : Contours des fluctuations de pression (Pa) dans la pompe NS33, « Vitesse - Outflow ».

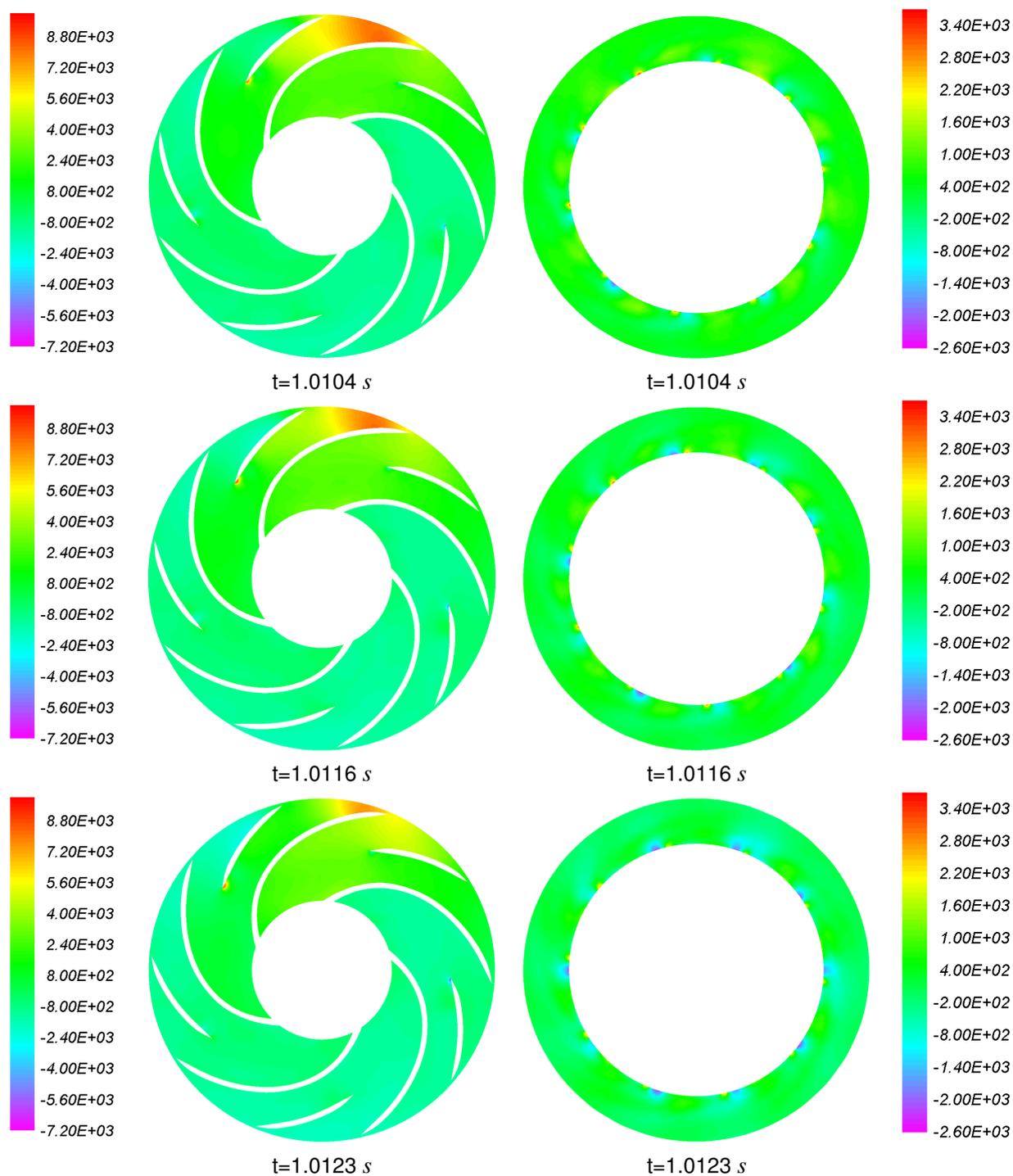


FIGURE 3.54 : Contours des fluctuations de pression (Pa) dans la pompe NS33, « Vitesse - Outflow ».

# Vers un nouvel outil de calcul des fluctuations de pression

---

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>132</b>
<b>4.2</b>	<b>Equations de Navier Stokes</b>	<b>132</b>
4.2.1	Equations de Navier Stokes dans un repère fixe	133
4.2.2	Equations de Navier Stokes dans un repère tournant	138
<b>4.3</b>	<b>Méthode des Volumes Finis</b>	<b>140</b>
4.3.1	Définition de volumes finis	140
4.3.2	Grilles de calcul	140
4.3.3	Volumes de contrôle	142
4.3.4	Discrétisation spatiale	144
4.3.5	Discrétisations temporelles	150
4.3.6	Conditions aux limites	159
4.3.7	Flux numérique	170
4.3.8	Limiteurs spécifiques pour maillages non structurés	178
<b>4.4</b>	<b>Méthode des moindres carrés mobiles (MLS)</b>	<b>182</b>
4.4.1	Formulation générale de la méthode MLS	182
4.4.2	Fonctions de base	184
4.4.3	Calcul des dérivées	185
4.4.4	Fonctions de Kernel	186
<b>4.5</b>	<b>Approche volumes finis et approximation par moindres carrés mobiles, FV-MLS</b>	<b>190</b>
4.5.1	Principe de la méthode FV-MLS	191
4.5.2	Application aux équations de Navier Stokes en deux dimensions	195
4.5.3	Approximations MLS (Moving Least Squares)	197
4.5.4	Calcul des flux	197
4.5.5	Matrice masse	201
4.5.6	Limiteurs	204
4.5.7	Simulation aux grandes échelles (LES) implicite avec la méthode FV-MLS, Réf [2] et [3]	204
<b>4.6</b>	<b>Validation numérique</b>	<b>211</b>

4.6.1	Ecoulement stationnaire laminaire autour d'un cylindre ( $Re=20$ et $40$ ) . . . . .	211
4.6.2	Ecoulement instationnaire turbulent autour d'un cylindre à $Re=3900$ . . . . .	212
4.6.3	Ecoulement visqueux autour d'un profil NACA 0012 à incidence $0^\circ$ . . . . .	215
<b>4.7</b>	<b>Méthode pour la prise en compte du mouvement</b> . . . . .	<b>215</b>
4.7.1	Hypothèses . . . . .	215
4.7.2	Technique du maillage glissant . . . . .	217
<b>4.8</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>223</b>

## 4.1 Introduction

Les exigences en matière d'ordre de précision des codes numériques sont un besoin qui a permis le développement d'algorithmes plus précis pour la mécanique des fluides. Malgré la puissance croissante des ordinateurs ces dernières années, il existe encore des problématiques qui présentent des difficultés avec les méthodes actuelles. On peut mentionner la turbulence, l'aéroacoustique et les fluctuations de pression, entre autres. Dans le domaine des turbomachines, la plupart des applications concernent des géométries complexes qui nécessitent principalement un maillage non structuré et un ordre de précision important vis-à-vis des résultats atteints. Ainsi, l'intérêt de disposer de nouveaux outils numériques plus précis et fiables nous conduit à développer un code d'une précision plus élevée que les codes commerciaux. Cette augmentation de précision est liée essentiellement à l'amélioration de l'ordre des schémas numériques et des conditions limites. La nouvelle technique proposée se base sur la méthode des volumes finis combinée avec les approximations aux moindres carrés mobiles « MLS ». La méthode des volumes finis type Godunov, est l'une des plus largement utilisée pour résoudre les problèmes d'écoulement compressible et incompressible sur des maillages non structurés. Dans ce type de maillage, le problème principal est d'atteindre un ordre élevé pour le calcul des gradients présents dans le terme visqueux et les termes convectifs des équations de Navier-Stokes. La précision sera la plus grande quand l'ordre de la reconstruction des variables à l'intérieur de la cellule sera le plus élevé. C'est pour cela que l'application de l'interpolation MLS avec la méthode de volumes finis est une alternative pour calculer les gradients et les dérivées successives pour la reconstruction des variables à l'intérieur de chaque volume de contrôle. Cette reconstruction est ainsi multidimensionnelle et est utilisée pour la détermination directe des flux visqueux.

## 4.2 Equations de Navier Stokes

Pour un écoulement tridimensionnel, les variables associées au problème à traiter sont au nombre de six :

- La masse volumique :  $\rho$ .

- La pression :  $P$ .
- Les composantes de la vitesse  $\vec{V} : (u, v, w)$ .
- L'énergie interne massique :  $e$ .

Les équations dont on dispose sont :

- Le bilan de masse.
- Le bilan dynamique (3 équations scalaires).
- Le bilan d'énergie.
- La loi d'état du fluide.

Soit, au total, six équations scalaires pour un système comportant six inconnues. Il reste maintenant à poser les équations régissant le mouvement d'un fluide dans le cas d'un écoulement tridimensionnel.

#### 4.2.1 Equations de Navier Stokes dans un repère fixe

Pour certains problèmes il n'est plus possible de négliger les termes visqueux qui jouent un rôle prépondérant dans la modélisation. L'objectif est, ici, de présenter les équations de Navier Stokes en insistant sur leurs différentes formes équivalentes que l'on rencontre dans la littérature ainsi que les hypothèses simplificatrices les plus souvent utilisées.

##### 4.2.1.1 Conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse est définie par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

ou encore :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.2)$$

L'équation de continuité peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.3)$$

Ou en développant

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (4.4)$$

Dans le cas où la masse volumique du fluide est constante, l'équation de continuité se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.5)$$

#### 4.2.1.2 Equations de conservation de la quantité de mouvement

L'équation pour la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho g_j \quad j = 1, \dots, 3 \quad (4.6)$$

Pour un fluide Newtonien le tenseur des contraintes s'écrit

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \left( \kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \quad (4.7)$$

Les symboles  $\mu$  et  $\kappa$  correspondent aux viscosités dynamique et volumique. On obtient finalement l'équation de la quantité de mouvement en remplaçant  $\sigma_{ij}$  par sa valeur dans 4.6 et  $\delta_{ij}$  est l'élément de Kronecker.

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ -P \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \left( \kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right] + \rho g_j \quad j = 1, \dots, 3 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \kappa - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] + \rho g_j \quad j = 1, \dots, 3 \quad (4.9)$$

L'équation de la quantité de mouvement suivant  $x$  s'écrit par exemple ;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} + \frac{\partial \rho w u}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \kappa - \frac{2}{3} \mu \Delta \right) \right] + \rho g_x \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\text{avec } \Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

### 4.2.1.3 Equation de conservation de l'énergie

Le flux de chaleur  $q_i$  pour les fluides les plus simples est donné par la loi de Fourier :

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (4.11)$$

L'équation de bilan d'énergie est définie par la somme de l'énergie interne  $e$  et de l'énergie cinétique  $V^2/2$  (par unité de masse). Le terme source est la somme du terme source de chaleur, du travail des forces volumiques et des forces surfaciques. Ce qui conduit au résultat suivant :

$$\frac{\partial \rho(e + V^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i(e + V^2/2)}{\partial x_i} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho u_i g_i \quad (4.12)$$

$$\rho \frac{\partial(e + V^2/2)}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial(e + V^2/2)}{\partial x_i} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho u_i g_i \quad (4.13)$$

De la même manière on peut écrire l'équation de la quantité de mouvement sous forme non conservative :

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho g_j \quad j = 1, \dots, 3 \quad (4.14)$$

En multipliant chacune des composantes de l'équation 4.14 par la vitesse  $u_j$  et en sommant les 3 termes on obtient :

$$u_j \left[ \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho g_j \right] \quad (4.15)$$

De plus on a la relation :

$$u du + v dv + w dw = d(u^2/2) + d(v^2/2) + d(w^2/2) = d(u^2 + v^2 + w^2)/2 = d(V^2/2) \quad (4.16)$$

Avec cette relation l'équation 4.14 peut s'écrire :

$$\rho \frac{\partial(V^2/2)}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial(V^2/2)}{\partial x_i} = u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + u_j \rho g_j \quad (4.17)$$

Cette équation peut être soustraite de l'équation de bilan écrite sous sa forme non conservative 4.14 pour obtenir l'équation pour l'énergie interne  $e$ .

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial e}{\partial x_i} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i \sigma_{ji}}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (4.18)$$

#### 4.2.1.4 Equation d'état du fluide

L'équation appelée « stiffened gas equation of state [38] » ou l'équation d'état de Tammann peut être utilisée pour décrire des liquides compressibles à pressions élevées. L'équation est définie comme suit :

$$P = (\gamma - 1)\rho e - \gamma P_\infty \quad (4.19)$$

où l'énergie interne spécifique est donnée par :

$$e = \frac{c_p}{\gamma} T + \frac{P_\infty}{\rho} \quad (4.20)$$

avec  $c_p$  la chaleur spécifique à pression constante qui est supposée constante. La valeur pour la constante de pression  $P_\infty$  et pour la constante polytropique  $\gamma$  sont définies pour de l'eau dans le tableau 4.1

Référence	$\gamma$	$P_\infty [10^8 Pa]$
Chang & Liou (2007)	1.932	11.645
Paillère et al. (2003)	2.8	8.5
Barberon & Helluy (2005)	3.0	8.533
Haller et al. (2003)	4.0	6.13
Saurel & Abgrall (1999)	4.4	6.0
Abgrall (2003)	4.4	6.0
Shyue (2006)	4.4	6.0
Cochi (1996, 1997)	4.4	6.0
Shye (1998)	5.5	4.92115
Johnsen (2006)	5.5	4.92115
Shyue (1999)	7.0	3.0
Luo et al. (2004)	7.0	3.03975
Gallouët (2002)	7.15	3.0

TABLEAU 4.1 : Valeurs de la constante  $\gamma$  et  $P_\infty$  pour de l'eau utilisées par plusieurs auteurs.

#### 4.2.1.5 Forme vectorielle des équations

Dans de nombreux schémas numériques, les différents termes de flux et leurs relations constitutives sont traités séparément. Le terme de contrainte est alors écrit comme étant la somme de la pression

$P\delta_{ij}$ , et des contraintes visqueuses  $\tau_{ij}$  :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (4.21)$$

Si l'on compare cette équation à la relation 4.6 on a :

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \left( \kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \Delta \delta_{ij} \quad (4.22)$$

L'équation de la quantité de mouvement peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \rho g_j \quad j = 1, \dots, 3 \quad (4.23)$$

Cette équation ne contient que des dérivées du premier ordre, mais il est nécessaire d'utiliser l'équation 4.22 pour calculer les termes visqueux. Finalement on peut écrire les différentes équations de bilan de masse, de quantité de mouvement, d'énergie comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \rho g_j \quad j = 1, \dots, 3 \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \rho(e + V^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j(e + V^2/2)}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial P u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho u_i g_i \quad (4.26)$$

En général on retrouve dans la littérature ces équations sous la forme suivante ;

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{U})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}(\vec{U})}{\partial y} + \frac{\partial \vec{H}(\vec{U})}{\partial z} = \vec{0} \quad (4.27)$$

où  $\vec{U}, \vec{F}(\vec{U}), \vec{G}(\vec{U}), \vec{H}(\vec{U})$ , sont des vecteurs définis comme suit :

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho(e + V^2/2) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\vec{F}(\vec{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho uu + P - \tau_{xx} \\ \rho vu - \tau_{xy} \\ \rho wu - \tau_{xz} \\ u [\rho(e + V^2/2) + P] - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} - q_x \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\vec{G}(\vec{U}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{yx} \\ \rho vv + P - \tau_{yy} \\ \rho wv - \tau_{yz} \\ v [\rho(e + V^2/2) + P] - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} - q_y \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\vec{H}(\vec{U}) = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{zx} \\ \rho vw - \tau_{zy} \\ \rho ww + P - \tau_{zz} \\ w [\rho(e + V^2/2) + P] - u\tau_{zx} - v\tau_{zy} - w\tau_{zz} - q_z \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

#### 4.2.2 Equations de Navier Stokes dans un repère tournant

Dans le cas d'un maillage mobile, l'observateur se déplace à l'intérieur du fluide indépendamment du mouvement de celui-ci. Le domaine observé est mobile et son mouvement est différent de celui du fluide. Ainsi, le maillage représente une zone mobile de l'espace. Le milieu à étudier traverse le maillage mobile. De même que pour la description eulérienne, les paramètres associés seront calculés aux points matériels qui vont se succéder au niveau des nœuds du maillage. La description Lagrange Euler arbitraire est très générale et traduit deux mouvements indépendants : le mouvement du fluide et celui du regard de l'observateur. L'observateur regarde les particules se succéder par rapport à un repère mobile. Dans la description lagrangienne, les nœuds du maillage (ou de la grille) suivent les points matériels. Pour la description eulérienne, le maillage reste fixe. On calcule à chaque instant les paramètres (vitesse, accélération) du point matériel qui est confondu avec le nœud du maillage. Dans la description A. L. E (Arbitrary Lagrangian Eulerian) la vitesse de la grille  $\vec{W}(u_{grille}, v_{grille}, w_{grille})$  est arbitraire et peut être différente de la vitesse  $\vec{V}(u, v, w)$  des particules matérielles.

## 4.2.2.1 Forme vectorielle des équations de Navier Stokes

Le système d'équations sous forme conservative est modifié pour tenir compte de la vitesse de la grille  $\vec{W}$ . Les équations de Navier Stokes sous forme vectorielle s'écrivent donc comme :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{U})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}(\vec{U})}{\partial y} + \frac{\partial \vec{H}(\vec{U})}{\partial z} = \vec{0} \quad (4.32)$$

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho(e + V^2/2) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\vec{F}(\vec{U}) = \begin{bmatrix} \rho(u - u_{grille}) \\ \rho u(u - u_{grille}) + P - \tau_{xx} \\ \rho v(u - u_{grille}) - \tau_{xy} \\ \rho w(u - u_{grille}) - \tau_{xz} \\ u(\rho(e + V^2/2) + P) - u_{grille}\rho(e + V^2/2) - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} - q_x \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\vec{G}(\vec{U}) = \begin{bmatrix} \rho(v - v_{grille}) \\ \rho u(v - v_{grille}) - \tau_{yx} \\ \rho v(v - v_{grille}) + P - \tau_{yy} \\ \rho w(v - v_{grille}) - \tau_{yz} \\ v(\rho(e + V^2/2) + P) - v_{grille}\rho(e + V^2/2) - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} - q_y \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\vec{H}(\vec{U}) = \begin{bmatrix} \rho(w - w_{grille}) \\ \rho u(w - w_{grille}) - \tau_{zx} \\ \rho v(w - w_{grille}) - \tau_{zy} \\ \rho w(w - w_{grille}) + P - \tau_{zz} \\ w(\rho(e + V^2/2) + P) - w_{grille}\rho(e + V^2/2) - u\tau_{zx} - v\tau_{zy} - w\tau_{zz} - q_z \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

### 4.3 Méthode des Volumes Finis

La méthode des volumes finis a été utilisée avec succès dans plusieurs applications. Néanmoins, elle présente des limitations dans le cas des problèmes à géométrie complexe, qui exigent une précision élevée. Pour ce type de géométrie, l'utilisation de maillages non-structurés est jusqu'à maintenant la solution la plus efficace, parfois la seule. Pour ce type de maillages, l'augmentation de l'ordre de la méthode des volumes finis est limitée par la difficulté du calcul des dérivées successives nécessaires et donc, la plupart de schémas de volumes finis réalisent uniquement une reconstruction linéaire des variables. Cette reconstruction n'est pas suffisamment précise pour certains problèmes de grande importance, tels que les écoulements turbulents, les problèmes d'acoustique, et les fluctuations de pression, entre autres.

#### 4.3.1 Définition de volumes finis

Dans la méthode des volumes finis le domaine est divisé en un nombre de volumes de contrôle qui recouvrent le domaine de calcul. Sur chaque volume de contrôle ou cellule, les lois de conservation sont appliquées pour déterminer les différentes variables associées au problème sur des points (ou nœuds) qui ne correspondent pas forcément aux points du maillage ou de la grille. Dans cette méthode les choix des volumes de contrôle et des nœuds sont très nombreux (cell-centered, cell-vertex, node-vertex). Le maillage associé au calcul peut être structuré ou non comme dans le cas des méthodes d'éléments finis, ce qui donne une grande souplesse à la méthode.

Un des principaux avantages de la méthode est que la discrétisation spatiale est faite directement sur le domaine physique. Il n'y a ainsi aucune transformation entre les différents systèmes de coordonnées, comme par exemple le cas en éléments finis où l'on doit effectuer une transformation de l'élément réel à l'élément de référence pour lequel les fonctions de formes sont connues ou bien encore pour les différences finies lorsque l'on n'utilise pas une grille cartésienne. Contrairement aux différences finies cette méthode peut être utilisée sur des maillages structurés ou non.

La formulation de type volumes finis étant basée sur une discrétisation des lois de conservation, ces dernières se trouvent alors naturellement satisfaites sur les volumes de contrôle par le schéma numérique. Cette propriété est très importante lorsque l'on doit traiter des chocs (ou d'autres types de discontinuités) puisqu'elle permet de garantir que les relations de Rankine-Hugoniot seront satisfaites par la méthode.

#### 4.3.2 Grilles de calcul

La localisation des variables du problème qui doivent être calculées est définie par le maillage (ou grille) qui correspond à une représentation discrète du domaine physique à représenter. Le domaine de calcul se trouve alors divisé en un nombre fini d'éléments et de volumes de contrôle qui ne coïncident pas forcément (comme nous le verrons par la suite). La distinction que nous faisons ici entre éléments et volumes de contrôle est essentielle. Nous appelons ici éléments une surface ou un volume 3D créé

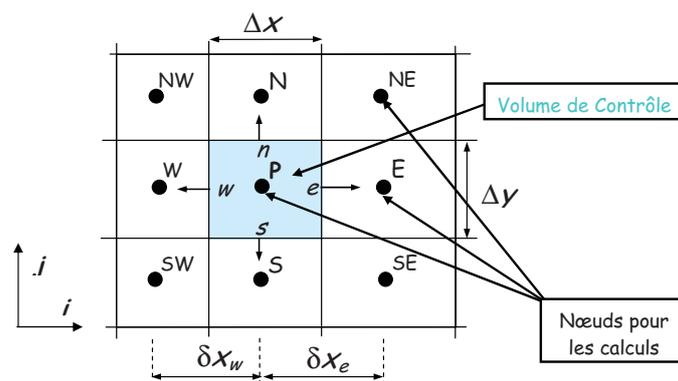


FIGURE 4.1 : Maillage volumes finis structuré.

à partir de points et qui sert uniquement dans la construction du maillage pour permettre de discrétiser spatialement le milieu. Le volume de contrôle correspond quant à lui à une surface ou un volume dans lequel les équations de bilan sont calculées.

Les choix des maillages (ou grilles de calcul) et des volumes de contrôle sont nombreux. On rencontre principalement deux types de grilles : maillages structurés et maillages non structurés. Dans notre travail, le type de maillage utilisé est principalement non structuré.

### Maillages non structurés

Cette catégorie de maillage offre la plus grande flexibilité dans la construction de géométries complexes. En effet il est toujours possible de créer des maillages (ou grilles) de manière automatique avec des triangles en 2D et des tétraèdres en 3D et ce, quelque soit la complexité de l'enveloppe du domaine. En pratique on préfère utiliser des quadrangles et des hexaèdres qui permettent d'obtenir une meilleure précision dans les calculs.

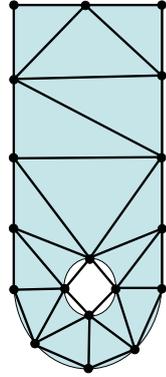
La construction de maillages non structurés est en général beaucoup plus simple et plus rapide à mettre en œuvre dans un contexte de calculs industriels. Il est aussi plus facile de raffiner localement certaines zones du domaine.

Un autre avantage des maillages non structurés est que les nœuds et la connectivité ne possèdent pas une structure globale comme les maillages structurés. Il est ainsi possible d'ajouter ou d'éliminer des nœuds et/ou des éléments en cours de calcul si besoin est. Dans le cas de l'utilisation d'un maillage adaptatif, pour par exemple représenter localement avec plus de précision un fort gradient de pression, cette spécificité est essentielle.

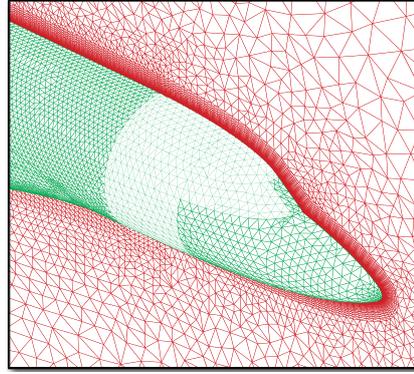
Par contre la structure des données associées est plus complexe (la localisation des nœuds et la connectivité avec leurs voisins doivent être spécifiées) ce qui nécessite plus de mémoire et un traitement particulier dans les solveurs. La structure des données nécessitant un adressage indirect, les performances s'en voient diminuées par rapport à un maillage structuré.

Dans le cas d'un schéma numérique implicite par exemple, la matrice associée au système d'équa-

tions algébriques n'a plus une structure diagonale régulière, ce qui conduit à des coûts de résolution plus élevés.



(a) Maillage non structuré 2D



(b) Maillage non structuré 3D

FIGURE 4.2 : Maillage non structuré.

### 4.3.3 Volumes de contrôle

On a vu précédemment que les équations de Navier Stokes peuvent être écrites sous forme conservative :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{U})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}(\vec{U})}{\partial y} + \frac{\partial \vec{H}(\vec{U})}{\partial z} = \vec{0} \quad (4.37)$$

On peut exprimer le système d'équations sous forme intégrale directement sur chaque volume de contrôle. Ce qui conduit à l'expression suivante en utilisant le théorème de la divergence :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{\Omega} \vec{U} \cdot d\Omega + \int \int_S (\mathcal{F} \cdot \vec{n}) dS = \int \int \int_{\Omega} \vec{Q} \cdot d\Omega \quad (4.38)$$

où :

$\Omega$  est le volume de contrôle.

$S$  la surface de  $\Omega$ .

$\mathcal{F} = \langle \vec{F}, \vec{G}, \vec{H} \rangle$  la matrice des flux convectifs et diffusifs.

$\vec{n}$  est la normale sortante de la surface  $S$ .

Comme nous l'avons vu, l'espace physique est en premier lieu divisé en éléments. La méthode des volumes finis utilise alors directement les lois de conservations sous forme intégrale.

L'intégrale de surface, dans l'équation 4.38 est alors approximée par la somme des flux traversant

chaque face du volume de contrôle. La précision de la discrétisation dépend de la manière de calculer ces flux.

Le découplage entre les volumes de contrôle et les éléments du maillage autorise une grande liberté dans la discrétisation du domaine associé au fluide. Il est nécessaire en premier lieu de définir géométriquement le volume de contrôle (le schéma de type « cell centered » est pris en compte dans l'outil développé). Nous décrivons dans les paragraphes suivants les différents types de volume de contrôles les plus couramment utilisés.

#### Schéma de type « cell centered »

Dans ce schéma les variables associées au fluide sont stockées aux centres des éléments du maillage, appelé ici maillage primal. Les volumes de contrôle correspondent aux éléments du maillage. Les inconnues correspondent ici à une valeur moyenne sur le volume de contrôle.

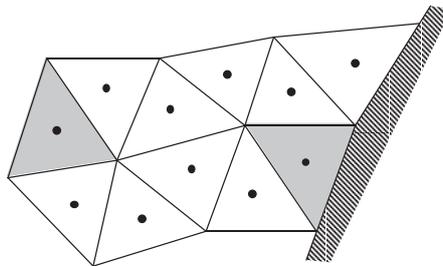


FIGURE 4.3 : Maillage en triangles. Les volumes de contrôle coïncident avec les éléments du maillage (cell centered).

#### Schéma de type « vertex centered »

Dans l'approche « node centered » ou « vertex centered » les inconnues sont associées aux sommets des éléments du maillage. Le volume de contrôle est alors construit autour de ces nœuds sans recouvrement des cellules voisines (on dit encore qu'elle forme une partition du domaine de calcul). Ce schéma est très souvent utilisé lorsque l'on veut étendre les équations d'Euler aux équations de Navier Stokes car il est bien adapté au calcul des dérivées du second ordre en utilisant les différences centrées.

La construction des cellules ou volumes de contrôle se fait à partir des centres de gravité de chacun des éléments du maillage. On construit ensuite un maillage dual en reliant entre eux les centres de gravité des éléments.

#### Schéma de type « cell vertex »

Pour cette variante, les inconnues sont associées aux nœuds des éléments du maillage initial (primal). Dans ce cas, une interpolation linéaire des flux est possible, aussi cette formulation est du second

ordre en espace. Plusieurs possibilités existent :

- Le volume de contrôle peut être formé de l'ensemble des éléments ayant un nœud commun. Dans ce cas, il y a recouvrement entre les différents volumes de contrôle. Les flux sont alors calculés sur les faces de l'enveloppe du volume formé par la réunion des éléments ayant un nœud commun.
- La seconde possibilité consiste à prendre pour un nœud donné tous les éléments adjacents le « touchant ». Mais dans ce cas les équations de bilan sont calculées séparément sur chaque élément et les différentes quantités sont redistribuées aux nœuds, ce qui demande une étape supplémentaire dans le traitement du schéma. Ce type de schéma fait actuellement l'objet d'une recherche très active car il peut conduire à des schémas numériques très peu diffusifs et peu sensibles à la distorsion du maillage.

#### 4.3.4 Discrétisation spatiale

Dans cette section de discussion des discrétisations spatiales, nous allons essayer d'entrevoir, la manière d'approximer les intégrales de surface et de volume qui apparaissent dans la méthode des volumes finis.

##### 4.3.4.1 Principes de discrétisation spatiale

La majorité des schémas numériques pour la résolution des équations de Navier Stokes utilisent la méthode des lignes qui consiste à séparer les discrétisations en temps et en espace. Cette approche autorise une souplesse plus importante dans le choix des algorithmes temporels et spatiaux en permettant notamment de traiter avec des précisions différentes les discrétisations spatiales et temporelles. On sait que les équations du fluide peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{\Omega} \vec{U} \cdot d\Omega + \int \int_S (\mathcal{F} \cdot \vec{n}) dS = \int \int \int_{\Omega} \vec{Q} \cdot d\Omega \quad (4.39)$$

En général, on préfère dissocier les discrétisations des flux convectifs et diffusifs qui sont traités différemment. On peut écrire l'équation 4.39 comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{\Omega} \vec{U} \cdot d\Omega + \int \int_S (\mathcal{F}_C - \mathcal{F}_D) \cdot \vec{n} dS = \int \int \int_{\Omega} \vec{Q} \cdot d\Omega \quad (4.40)$$

Où l'on a pour les équations de Navier Stokes les matrices des flux convectifs  $\mathcal{F}_C$  et diffusifs  $\mathcal{F}_D$ . Pour simplifier la présentation, nous supposons que le volume de contrôle ne varie pas au cours du temps (formulation eulérienne). Dans ce cas le terme transitoire peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{\Omega} \vec{U} \cdot d\Omega = \Omega \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \quad (4.41)$$

Où  $\bar{U} = \int \int \int_{\Omega} U(x,y,z)d\Omega$  est la valeur moyenne des inconnues sur le volume de contrôle  $\Omega$ . L'intégrale de surface dans l'équation 4.40 est approchée en prenant la somme des flux traversant les faces du volume de contrôle. Nous supposons de plus que le flux est constant sur chaque face et estimé en son centre. L'équation 4.40 devient alors :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega} \left[ \sum_{k=1}^{Nface} (\mathcal{F}_C - \mathcal{F}_D) \cdot \vec{n}_k S_k - \Omega \cdot Q \right] = -\frac{1}{\Omega} R \quad (4.42)$$

où

$\Omega$  est le volume de contrôle.

$S_k$  la surface de la  $k^{\text{ème}}$  face.

$Nface$  le nombre de faces du volume de contrôle.

$R$  est appelé le résidu.

#### 4.3.4.2 Discrétisation des flux convectifs $\mathcal{F}_C$

Les schémas numériques utilisés pour résoudre un système d'équations hyperboliques doivent avoir un certain niveau de dissipation numérique pour éviter les instabilités. La dissipation peut être ajoutée à un schéma non dissipatif (comme pour un schéma centré) ou peut provenir naturellement de la discrétisation spatiale de schémas du premier ordre de type « upwind ». Ici, on va présenter les schémas de base utilisés pour déterminer les flux convectifs.

Pour un maillage mobile, les flux convectifs de l'équation de Navier Stokes sont définis comme suit  $\mathcal{F}_C = (F^{NV}, G^{NV}, H^{NV})$  :

$$F^{NV} = \begin{bmatrix} \rho(u - u_{grille}) \\ \rho u(u - u_{grille}) + P \\ \rho v(u - u_{grille}) \\ \rho w(u - u_{grille}) \\ u(\rho(e + V^2/2) + P) - u_{grille}\rho(e + V^2/2) \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$G^{NV} = \begin{bmatrix} \rho(v - v_{grille}) \\ \rho u(v - v_{grille}) \\ \rho v(v - v_{grille}) + P \\ \rho w(v - v_{grille}) \\ v(\rho(e + V^2/2) + P) - v_{grille}\rho(e + V^2/2) \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$H^{NV} = \begin{bmatrix} \rho(w - w_{grille}) \\ \rho u(w - w_{grille}) \\ \rho v(w - w_{grille}) \\ \rho w(w - w_{grille}) + P \\ w(\rho(e + V^2/2) + P) - w_{grille}\rho(e + V^2/2) \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

### Schémas centrés

Dans ces schémas centrés on détermine les variables sur les faces en prenant la moyenne des valeurs « à gauche » et « à droite » des faces pour déterminer les flux. Pour éviter les instabilités qui se développent à cause d'un traitement centré de phénomènes directionnels, il est nécessaire d'introduire un terme supplémentaire appelé viscosité ou dissipation artificielle. Le flux entre 2 éléments d'indices  $I$  et  $J$  séparés par une surface  $S_{IJ}$  peut s'écrire :

$$(\mathcal{F}_C \cdot \vec{n}S)_{IJ} \approx \mathcal{F}_C \left( \frac{1}{2}(U_L + U_R) \right) \cdot \vec{n}_{IJ}S_{IJ} - D_{IJ} \quad (4.46)$$

où :

$U_R, U_L$  sont les valeurs à droite et à gauche de la face, c'est-à-dire le vecteur contenant les variables conservatives au centre des éléments ou aux nœuds pour la discrétisation spatiale cell centered.

$\vec{n}_{IJ}, S_{IJ}$  la normale et la surface de la face.

$D_{IJ}$  la dissipation artificielle associée à la face  $IJ$ .

Dans ce type de schéma, on peut mentionner les variables suivantes :

- Viscosité artificielle classique.
- Schéma JST.

### Schémas décentrés amont (upwind)

Il existe d'autres schémas plus sophistiqués. Ils prennent en compte les propriétés des équations d'Euler et notamment les directions de propagation des ondes dans le milieu.

Dans des équations d'Euler, les flux convectifs peuvent se discrétiser comme suit :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega} \left[ \sum_{k=1}^{N_{face}} \mathcal{F}_C \cdot \vec{n}_k S_k - \Omega \cdot Q \right] \quad (4.47)$$

où le flux peut s'encore s'écrire sous forme vectorielle :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega} \left[ \sum_{k=1}^{N_{face}} \vec{F}_C^k \cdot S_k - \Omega \cdot Q \right] \quad (4.48)$$

**Flux vector splitting :** Cette méthode prend en compte la direction de propagation de l'information. Dans ces approches, la direction de propagation est obtenue plus facilement que pour le schéma de Godunov, ce qui conduit à des méthodes plus aisément implémentables dans un code de calcul et particulièrement robustes pour traiter les chocs. Par contre, en général, ce type de schéma conduit à des résultats moins précis pour les discontinuités de contact.

Il est aussi très important de remarquer que ce type de méthode utilise une propriété importante qui est l'homogénéité des équations d'Euler, c'est-à-dire que l'on peut écrire le flux sous la forme suivante :

$$\vec{F}_C(U) = A(U) \cdot U \quad (4.49)$$

où  $A(U) = \frac{\partial \vec{F}_C}{\partial U}$  est la matrice jacobienne. Toutes les équations d'état ne vérifient pas cette condition. C'est le cas toutefois pour un fluide isotherme ou un gaz parfait. Le principe de la méthode est de décomposer le flux à l'interface en deux composantes :

$$\vec{F}_C = \vec{F}^+(U_L) + \vec{F}^-(U_R) \quad (4.50)$$

Tel que les valeurs propres  $\lambda_i^+$  et  $\lambda_i^-$  des matrices jacobiennes

$$A^+(U) = \frac{\vec{F}^+}{\partial U}, \quad A^-(U) = \frac{\vec{F}^-}{\partial U}$$

vérifient  $\lambda_i^+ \geq 0$ ,  $\lambda_i^- \leq 0$

On peut mentionner les schémas suivants de ce type :

- Flux vector splitting de Van Leer [39].
- AUSM [40](advection upstream splitting method).
- Schéma CUSP (convection upwind split pressure).

**Schéma de Godunov :** Pour déterminer le flux aux interfaces des volumes de contrôle, en 1959 Godunov a proposé de résoudre le problème de Riemann pour les équations d'Euler pour des données initiales discontinues à droite et à gauche des interfaces. Dans le schéma de Godunov le problème de Riemann est résolu de manière exacte.

De manière générale dans l'approche de Godunov les flux sont calculés en résolvant le problème de Riemann exact pour chaque face des volumes de contrôle. :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_C}{\partial x} = 0 \quad (4.51)$$

Sa résolution est souvent très coûteuse en temps de calcul et n'est pas toujours possible de manière analytique. Dans ce type de schémas, on peut décrire ci-dessous les plus connus :

- Schéma de ROE [41] (flux difference splitting).
- Schéma VFROE.

**Schéma de RUSANOV** : Un des schémas les plus simples pour lequel il n'est pas nécessaire de résoudre le problème de Riemann est le schéma de RUSANOV. Le flux est alors simplement calculé par :

$$\hat{F}_{Rusanov}^{IJ} = \frac{1}{2} (F_L^{IJ} + F_R^{IJ}) - \frac{1}{2} \lambda_{max}^{IJ} (U_R - U_L) \quad (4.52)$$

où  $\lambda_{max}^{IJ}$  est une estimation de la plus grande vitesse de propagation des ondes. Dans sa forme d'origine Rusanov a proposé d'estimer  $\lambda_{max}^{IJ}$  de la manière suivante :

$$\lambda_{max}^{IJ} = \frac{1}{2} (|\lambda_{max}^I| + |\lambda_{max}^J|) \quad (4.53)$$

$|\lambda_{max}^I|$  est alors la plus grande vitesse de propagation des ondes de l'état gauche (associé à l'élément d'indice  $I$ ) et  $|\lambda_{max}^J|$  est la plus grande vitesse de propagation des ondes de l'état droit (associé à l'élément d'indice  $J$ ).

Dans la pratique il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne du flux. Il est en général usuel de prendre la vitesse maximale de propagation donnée par  $|u| + c$ , où  $u$  est la vitesse du fluide et  $c$  la vitesse locale du son. Il en résulte un schéma qui est plus diffusif que le schéma de Roe mais qui est très robuste et assure la positivité de la densité si l'on utilise un pas de stabilité tel que :

$$\Delta t_{Stab} \leq \frac{L_{car}}{|u| + c} \quad (4.54)$$

où  $L_{car}$  désigne une longueur caractéristique associée au volume de contrôle.

**Schémas haute résolution** : On va présenter quelques unes des très nombreuses méthodes qui permettent d'obtenir un schéma de précision élevée tout en éliminant les oscillations d'ordre numérique qui apparaissent au voisinage de forts gradients. Il n'est malheureusement pas possible, ici, de présenter un état des lieux des différents schémas existant, compte tenu du nombre très important de publications se rapportant à ce sujet. On peut mentionner parmi les plus utilisés :

- Schéma M.U.S.C.L de Van Leer.
- Reconstruction sur maillage non structuré.
- Reconstruction linéaire par morceau.
- Reconstruction quadratique par morceau.
  - Schémas TVD
- Limiteurs de pente.
- Limiteurs spécifiques pour maillages non structurés.
  - Schémas ENO et WENO

#### 4.3.4.3 Discrétisation des flux diffusifs $\mathcal{F}_D$

Afin d'évaluer les flux diffusifs  $\mathcal{F}_D$ , les variables de l'écoulement et leurs premières dérivées doivent être connues sur les faces des volumes de contrôle. Le volume de contrôle pour les flux visqueux est commodément choisi pour être le même que pour les flux convectifs dans le but d'obtenir une discrétisation spatiale cohérente et de simplifier la structure de données.

Dans l'équation :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega} \left[ \sum_{k=1}^{N_{face}} (\mathcal{F}_C - \mathcal{F}_D) \cdot \vec{n}_k S_k - \Omega \cdot Q \right] \quad (4.55)$$

$\mathcal{F}_D = (F^V, G^V, H^V)$  représente le flux diffusif et est défini comme suit :

$$F^V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + q_x \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$G^V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + q_y \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$H^V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + q_z \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Les flux diffusifs étant de nature elliptique, on choisit le plus souvent de prendre pour les variables intervenants dans le calcul des flux à l'interface, la valeur moyenne des deux volumes de contrôle adjacents pour les composantes de la vitesse, le coefficient de viscosité dynamique  $\mu$  et le coefficient de conduction thermique  $k$ . Il convient alors de calculer le gradient de vitesse pour déterminer les contraintes visqueuses et le gradient de température utilisé dans la loi de Fourier. Plusieurs possibilités existent pour discrétiser ces flux. Parmi eux, on peut mentionner : volume d'intégration centré sur la face, méthode du Losange et gradients moyens.

#### 4.3.5 Discrétisations temporelles

Pour résoudre un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) avec la méthode des volumes finis on rencontre principalement deux techniques. L'approche discrète qui consiste à discrétiser toutes les dérivées partielles du système en même temps. La seconde approche appelée l'approche semi discrète (ou encore méthode des lignes) consiste à discrétiser dans un premier temps les dérivées spatiales seulement puis les dérivées temporelles. C'est l'approche que nous avons adoptée car elle conduit à une plus grande souplesse quant au choix des méthodes numériques utilisables. En discrétisant dans un premier temps les dérivées spatiales, le système d'EDP à résoudre devient finalement un système d'équations différentielles couplées.

Il est important en premier lieu de remarquer qu'il existe une certaine ambiguïté quant à l'interprétation du terme  $\bar{U}$  très souvent utilisé pour la discrétisation en volumes finis :

$$\int \int \int_{\Omega} \vec{U} \cdot d\Omega = \Omega \cdot \bar{U} \cong \Omega \cdot U \quad (4.59)$$

En effet une égalité stricte entraîne que  $\bar{U}$  est la valeur moyenne de  $U$  sur le volume de contrôle  $\Omega$ . Il est alors important de remarquer que dans ce cas la relation 4.59 n'est exacte que dans le cas où  $U$  varie de manière linéaire dans le volume de contrôle.

Très souvent dans la littérature la discrétisation du premier terme de l'équation 4.59 est approchée par :

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega} \vec{U} \cdot d\Omega \cong \frac{d}{dt} (\Omega \cdot \vec{U}) \quad (4.60)$$

De manière plus rigoureuse on obtient en suivant la démarche de discrétisation en volumes finis :

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega} \vec{U} \cdot d\Omega \cong \frac{d}{dt} (\Omega \cdot [M] \cdot \vec{U}) \quad (4.61)$$

La matrice masse  $[M]$  qui apparaît dans l'expression a une définition qui diffère de celle classiquement obtenue dans la méthode des éléments finis. Elle établit un lien entre la valeur moyenne dans le volume de contrôle et les valeurs ponctuelles du point de collocation et de ses voisins. Pour les schémas employant une procédure de reconstruction dans les volumes de contrôle, la matrice de masse est obtenue en calculant la moyenne du polynôme sur ce volume.

Dans le cas du schéma « cell centered », la valeur moyenne dans le volume de contrôle et la valeur ponctuelle au centre de gravité coïncident au second ordre près, ce qui permet de découpler le système d'équations à résoudre, tout au moins lorsque la précision requise du schéma n'est pas très élevée. Les valeurs moyennes dans le volume de contrôle et les valeurs ponctuelles au point de collocation ne sont approchées qu'au premier ordre, ce qui conduit en général à utiliser une matrice masse si l'on ne veut pas perdre de précision. Le système se trouve alors couplé et même dans le cas d'un schéma explicite il convient d'inverser à chaque pas de temps la matrice masse.

Une alternative à ce problème est de toujours utiliser le concept de valeur moyenne. Ce qui nécessite d'utiliser les valeurs moyennes et non les valeurs ponctuelles dans la procédure de reconstruction. La littérature conseille pour les schémas d'ordre supérieur ou égal à trois de construire la matrice masse  $[M]$  ou bien d'utiliser une reconstruction à partir des moyennes.

L'application de la méthode de lignes nous permet donc d'écrire les équations sur chaque volume de contrôle comme suit :

$$\frac{d(\Omega[M]\vec{U})_I}{dt} = -\vec{R}_I \quad (4.62)$$

sur l'équation 4.62,  $\Omega$  représente le volume,  $\vec{R}$  le vecteur résidu,  $[M]$  la matrice masse et  $I$  le volume de contrôle.

Nous avons vu que les différentes méthodes explicites et implicites peuvent être dérivées d'un schéma de base non-linéaire. Pour un maillage fixe, il peut être défini comme suit :

$$\frac{(\Omega[M])_I}{\Delta t_I} (\vec{U}_I^{n+1} - \vec{U}_I^n) = -\frac{\beta}{1+\omega} \vec{R}_I^{n+1} - \frac{1-\beta}{1+\omega} \vec{R}_I^n + \frac{\omega}{1+\omega} \frac{(\Omega[M])_I}{\Delta t_I} (\vec{U}_I^n - \vec{U}_I^{n-1}) \quad (4.63)$$

où  $\Delta t_I = t_I^{n+1} - t_I^n$ . Les paramètres  $\beta$  et  $\omega$  déterminent le type de discrétisation (explicite ou implicite) et aussi la précision temporelle.

### 4.3.5.1 Méthodes explicites

Une méthode explicite commence de la solution connue  $\vec{U}_I^n$  et utilise le résidu correspondant  $\vec{R}_I^n$  afin d'obtenir la nouvelle solution au temps  $t_I^{n+1}$ . C'est-à-dire, la nouvelle solution  $\vec{U}_I^{n+1}$  dépend des valeurs déjà connues. Les schémas explicites sont donc simples et faciles à utiliser. Un schéma explicite peut être dérivé à partir de l'équation 4.63 en considérant  $\beta = 0$  et  $\omega = 0$ . Ce qui donne.

$$\frac{(\Omega[M])_I}{\Delta t_I} (\vec{U}_I^{n+1} - \vec{U}_I^n) = -\vec{R}_I^n \quad (4.64)$$

qui est appelée l'approximation Euler vers l'avant. La matrice masse  $[M]$  matrice peut être « lumped » (c'est-à-dire substituée par la matrice identité) pour les problèmes stationnaires ou pour la discrétisation cell centered. Les méthodes les plus connues sont : le schéma multi-étapes Runge Kutta et sa variante le schéma multi-étapes hybride.

### Méthodes Runge Kutta

Les schémas multi-étapes Runge Kutta avancent la solution à un nombre de pas appelées étapes lesquelles peuvent être définies comme une séquence de mise à jour. En appliquant aux équations conservatives (équation 4.62), où la matrice masse est « lumped », un schéma d'étapes  $m$  s'obtient comme :

$$\begin{aligned} \vec{U}_I^0 &= \vec{U}_I^n \\ \vec{U}_I^1 &= \vec{U}_I^0 - \alpha_1 \frac{\Delta t_I}{V_I} \vec{R}_I^0 \\ \vec{U}_I^2 &= \vec{U}_I^0 - \alpha_2 \frac{\Delta t_I}{V_I} \vec{R}_I^1 \\ &\vdots \\ \vec{U}_I^{n+1} &= \vec{U}_I^m = \vec{U}_I^0 - \alpha_m \frac{\Delta t_I}{V_I} \vec{R}_I^{m-1} \end{aligned} \quad (4.65)$$

Dans l'expression 4.65,  $\alpha_k$  représente les coefficients de l'étape. En outre, la notation  $\vec{R}_I^k$  signifie que le résidu est évalué avec la solution  $\vec{U}_I^k$  de l'étape  $k^{\text{ème}}$ . Contrairement aux schémas classiques Runge Kutta, seule la solution d'ordre zéro et les résidus plus récents sont stockés ici afin de réduire les besoins en mémoire. Les coefficients d'étape peuvent être mis au point pour augmenter le maximum de pas de temps et améliorer la stabilité d'une discrétisation spatiale particulière.

Dans le tableau 4.2 sont présentés les coefficients optimisés pour des schémas de type upwind de premier et du second ordre en espace ainsi que la condition CFL (nombre de courant) associée.

L'équation 4.65 est particulièrement appropriée pour une discrétisation spatiale upwind sur maillages structurés et non structurés.

Nb. étapes	Schéma du premier ordre			Schéma du second ordre		
	3	4	5	3	4	5
CFL	1.5	2.0	2.5	0.69	0.92	1.15
$\alpha_1$	0.1481	0.0833	0.0533	0.1918	0.1084	0.0692
$\alpha_2$	0.4000	0.2069	0.1263	0.4929	0.2602	0.1602
$\alpha_3$	1.0	0.1265	0.2375	1.0	0.5052	0.2898
$\alpha_4$		1.0	0.4414		1.0	0.5060
$\alpha_5$			1.0			1.0

TABLEAU 4.2 : Schéma multi-étapes : coefficients optimisés ( $\alpha$ ) et nombres CFL pour un schéma de discrétisation spatiale upwind de premier et second ordre.

Nb. étapes	4	5
CFL	2.8	3.6
$\alpha_1$	1/4	1/4
$\alpha_2$	1/3	1/6
$\alpha_3$	1/2	3/8
$\alpha_4$	1.0	1/2
$\alpha_5$		1.0

TABLEAU 4.3 : Coefficients de Runge Kutta pour les schémas d'ordre 4 et 5.

### Runge Kutta optimisé d'ordre quatre à stockage réduit

Plusieurs équipes de recherche ont ainsi développé des algorithmes de Runge Kutta (RK) dont les coefficients ont été déterminés de manière à minimiser la dispersion et la dissipation sur une gamme de fréquences données. Ces schémas de RK sont en outre à stockage réduit puisqu'ils nécessitent l'utilisation de seulement trois registres mémoire par variable. D'autres schémas de RK ont cependant été proposés par Williamson [42], Stanescu et Habashi [43] et Hu [44].

Un algorithme de RK à stockage réduit, optimisé pour les opérateurs linéaires, d'ordre quatre en non linéaire, et avec une limite de stabilité élevée a donc été développé par Berland [45] afin de compléter les outils d'intégration temporelle actuellement disponibles. L'objectif est d'intégrer numériquement à l'aide d'un algorithme de RK le système différentiel :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, t) \quad (4.66)$$

où l'opérateur  $F$  est une fonction du temps  $t$  et de la fonction inconnue  $u(t)$ . Plusieurs types d'algorithmes de RK ont été formulés afin d'augmenter la précision de l'intégration, et de réduire les besoins en mémoire. Pour avancer temporellement de  $u^n = u[n\Delta t]$  à  $u^{n+1} = u[(n+1)\Delta t]$ , Hu [44] propose d'utiliser l'algorithme à  $s$  étapes tel que :

$$u^{n+1} = u^n + \sum_{j=1}^s \gamma_j \Delta t^j F^j(u) \quad (4.67)$$

avec la convention  $F^j = \overbrace{F \circ \dots \circ F}^j$ . Les  $\gamma_j$  sont les coefficients de l'algorithme, et  $\Delta t$  est le pas de temps. L'ordre formel de ce type de schéma d'intégration temporelle ne peut pas être supérieur à 2 si  $F$  est un opérateur non linéaire. Pour augmenter l'ordre, la formulation à stockage réduit de Williamson [42] peut cependant être utilisée :

$$\begin{cases} \omega_i = \alpha_i \omega_{i-1} + \Delta t F(u_{i-1}, t_i) \\ u_i = u_{i-1} + \beta_i \omega_i; \quad i = 1, \dots, s \end{cases} \quad (4.68)$$

où  $u_0 = u^n$ ,  $u^{n+1} = u_s$ ,  $\omega_0 = 0$  et  $t_i = (n + c_i)\Delta t$ . Les  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont les coefficients de l'algorithme, et pour un schéma explicite on pose  $\alpha_1 = 0$ .

Ainsi, un schéma explicite de quatrième ordre RK à six étapes basé sur l'algorithme (4.68) appelé RK46-NL est développé (Berland [45]). Ses coefficients sont calculés en utilisant la méthode proposée par Stanescu et Habashi [43]. Ce schéma semble être le plus approprié dans notre cas car il présente une gamme de stabilité importante. Il est donné comme suit :

$$\Phi_I^j = \alpha_i \Phi_I^{j-1} + \frac{\Delta t}{\Omega_I} \vec{R}(\vec{U}_I^{j-1}, t_i) \quad (4.69)$$

$$\vec{U}_I^i = \vec{U}_I^{i-1} + \beta_i \Phi_I^i \quad (4.70)$$

Avec  $i$  variant de 1 à 6,  $\Delta t$  le pas d'intégration,  $\vec{U}_I^n = \vec{U}_I^0$ ,  $\vec{U}_I^{n+1} = \vec{U}_I^6$ ,  $\Phi_I^0 = 0$  et  $t_i = (n + c_i)\Delta t$ .

En utilisant l'algorithme 4.67, un schéma RK est construit en optimisant les coefficients  $\gamma_j$  dans l'espace de Fourier pour les opérateurs linéaires. L'algorithme, appelé RK46-L, est d'ordre quatre en linéaire, mais d'ordre deux en non linéaire. Les coefficients  $\gamma_j$  sont utilisés comme point de départ pour déterminer les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  de l'algorithme 4.68, qui permet une précision de quatrième ordre si l'opérateur est linéaire ou non linéaire. Les coefficients  $\gamma_j$  de l'algorithme RK46-L sont fournis dans le tableau 4.4.

Le tableau 4.5 présente quelques schémas explicites classiques utilisant la méthode de Runge Kutta.

#### 4.3.5.2 Méthodes implicites

Pour construire un schéma implicite dans le temps,  $\omega = 0$  a été jugé le mieux adapté pour la solution des problèmes d'écoulement stationnaire. Avec ceci, l'équation 4.63 se simplifie à :

i	$\gamma_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$c_i$
1	1	0.0	0.032918605146	0.0
2	1/2	-0.737101392796	0.823256998200	0.032918605146
3	1/6	-1.634740794341	0.381530948900	0.249351723343
4	1/24	-0.744739003780	0.200092213184	0.466911705055
5	0.007856772044	-1.469897351522	1.718581042715	0.582030414044
6	0.000959998595	-2.813971388035	0.27	0.847252983783

TABLEAU 4.4 : Coefficients  $\gamma_i$  de l'algorithme RK46-L et coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  et  $c_i$  du schéma RK46-NL.

$$\frac{(\Omega[M])_I}{\Delta t_I} (\bar{U}_I^{n+1} - \bar{U}_I^n) = -\beta \bar{R}_I^{n+1} - (1 - \beta) \bar{R}_I^n \quad (4.71)$$

La solution de l'équation 4.71 exige l'évaluation du résidu à un nouveau pas de temps, c'est-à-dire  $\bar{R}_I^{n+1}$ . Puisque nous ne connaissons pas  $\bar{U}_I^{n+1}$ , on ne peut pas le calculer directement. Cependant, on peut linéariser le résidu  $\bar{R}_I^{n+1}$  de l'équation 4.71 sur le pas de temps actuel, c'est-à-dire,

$$\bar{R}_I^{n+1} \approx \bar{R}_I^n + \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{U}} \right)_I (\bar{U}_I^{n+1} - \bar{U}_I^n) \quad (4.72)$$

où le terme  $\frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{U}}$  désigne le flux jacobien. Il faut mentionner que le flux jacobien est souvent issu d'une approximation plutôt brut de la discrétisation spatiale représentée par  $\bar{R}_I^n$ .

Si nous remplaçons maintenant la linéarisation sur l'équation 4.72 pour  $\bar{R}_I^{n+1}$  dans l'équation 4.71, nous obtenons le schéma implicite suivant :

$$\left[ \frac{(\Omega[M])_I}{\Delta t_I} + \beta \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{U}} \right)_I \right] (\bar{U}_I^{n+1} - \bar{U}_I^n) = -\bar{R}_I^n \quad (4.73)$$

Le terme entre crochets du membre de gauche de l'équation 4.73 est désigné comme étant l'opérateur implicite ou la matrice du système. Le membre de droite de l'équation 4.73 est appelé opérateur explicite. Seul l'opérateur explicite détermine la précision spatiale de la solution.

L'opérateur implicite constitue le bloc d'une matrice large, creuse et non-symétrique de dimension égale au nombre total de cellules (schéma cell-centered). La matrice masse  $[M]$  peut être remplacée par la matrice identité, sans influencer la solution stationnaire. Le paramètre  $\beta$  est généralement égal à 1, ce qui entraîne une discrétisation temporelle d'une précision de premier ordre. Un schéma de deuxième ordre de précision est obtenu avec  $\beta = 1/2$ . Cependant, ce n'est pas recommandé, car le schéma avec  $\beta = 1$  est beaucoup plus robuste, et la précision dans le temps est sans importance pour les problèmes stationnaires.

La solution du système d'équations linéaires 4.73 nécessite l'inversion de l'opérateur implicite, c'est-

Ordre	Formules	Noms
1	$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n - \frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R}(t^n, \vec{U}^n)$	Méthode d'Euler
2	$\begin{aligned} \vec{U}^{n+1} &= \vec{U}^n + k_2 \\ k_1 &= -\frac{\Delta t}{2 \cdot V} \cdot f(t^n, \vec{U}^n) \\ k_2 &= f(t^n + \Delta t, \vec{U}^n, k_1) \end{aligned}$	Schéma d'Euler modifié
2	$\begin{aligned} \vec{U}^{n+1} &= \vec{U}^n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 &= -\frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R} \cdot (t^n, \vec{U}^n) \\ k_2 &= -\frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R} \cdot (t^n + \Delta t, \vec{U}^n + k_1) \end{aligned}$	Schéma de Heun
3	$\begin{aligned} \vec{U}^{n+1} &= \vec{U}^n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 &= -\frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R} \cdot (t^n, \vec{U}^n) \\ k_2 &= -\frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R} \cdot (t^n + \Delta t/2, \vec{U}^n + k_1/2) \\ k_3 &= -\frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R} \cdot (t^n + \Delta t, \vec{U}^n - k_1 + 2k_2) \end{aligned}$	Runge Kutta d'ordre 3 (RK3)
4	$\begin{aligned} \vec{U}^{n+1} &= \vec{U}^n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= -\frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R} \cdot (t^n, \vec{U}^n) \\ k_2 &= -\frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R} \cdot (t^n + \frac{\Delta t}{2}, \vec{U}^n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= -\frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R} \cdot (t^n + \frac{\Delta t}{2}, \vec{U}^n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= -\frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R} \cdot (t^n + \Delta t, \vec{U}^n + k_3) \end{aligned}$	Méthode classique de Runge Kutta (RK4)
5	$\begin{aligned} \vec{U}^{n+1} &= \vec{U}^n + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \\ k_1 &= -\frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R} \cdot (t^n, \vec{U}^n) \\ k_2 &= -\frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R} \cdot (t^n + \frac{\Delta t}{4}, \vec{U}^n + \frac{k_1}{4}) \\ k_3 &= -\frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R} \cdot (t^n + \frac{\Delta t}{4}, \vec{U}^n + \frac{k_1}{8} + \frac{k_2}{8}) \\ k_4 &= -\frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R} \cdot (t^n + \frac{\Delta t}{2}, \vec{U}^n - \frac{k_2}{2} + k_3) \\ k_5 &= -\frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R} \cdot (t^n + \frac{3\Delta t}{4}, \vec{U}^n + \frac{3k_1}{16} + \frac{9k_4}{16}) \\ k_6 &= -\frac{\Delta t}{V} \cdot \vec{R} \cdot (t^n + \Delta t, \vec{U}^n - \frac{3k_1}{7} + \frac{2k_2}{7} + \frac{12k_3}{7} - \frac{12k_4}{7} + \frac{8k_5}{7}) \end{aligned}$	Schéma de Butcher (RK5)

TABLEAU 4.5 : Méthodes de Runge Kutta explicite.

à-dire, l'inversion d'une très grande matrice. En principe, cela peut se faire de deux façons. La première consiste à inverser directement la matrice, en utilisant soit l'élimination de Gauss, soit une méthode directe de matrice creuse. Toutefois, en raison de la quantité excessive de mémoire nécessaire et de l'effort de calcul très élevé, cette approche n'est pas adaptée à des problèmes pratiques. La deuxième possibilité est d'inverser l'opérateur implicite par l'utilisation de méthodes itératives.

Les méthodes itératives peuvent être divisées en deux groupes. La première approche consiste à décomposer l'opérateur implicite en plusieurs parties (un processus appelé factorisation). Les facteurs sont construits de telle manière qu'ils puissent être plus facilement inversés que l'opérateur implicite d'origine.

Le second groupe considère l'utilisation d'une méthode de sous-espace de Krylov pour l'inversion de l'opérateur implicite.

Dans ce cas, le schéma implicite de temps (équation 4.73) est généralement transformé en méthode de Newton en fixant à  $\Delta t \rightarrow \infty$ . Le schéma est alors nommé méthode de Newton-Krylov.

### Forme de la matrice de l'opérateur implicite

Concernant l'équation 4.72, on peut écrire la linéarisation du résidu  $\vec{R}_I^{n+1}$  sous la forme :

$$\vec{R}_I^{n+1} \approx \vec{R}_I^n + \sum_{m=1}^{N_F} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vec{U}_I} [(\mathcal{F}_C - \mathcal{F}_D)_m \cdot \vec{n}_m S_m] (\vec{U}_I^{n+1} - \vec{U}_I^n) \right\} \quad (4.74)$$

avec  $N_F$  le nombre de faces du volume de contrôle  $\Omega$ . Ainsi, le flux jacobien se lit comme suit

$$\frac{\partial \vec{R}_I}{\partial \vec{U}_I} = \sum_{m=1}^{N_F} \frac{\partial (\mathcal{F}_C)_m}{\partial \vec{U}_I} \cdot \vec{n}_m S_m - \sum_{m=1}^{N_F} \frac{\partial (\mathcal{F}_D)_m}{\partial \vec{U}_I} \cdot \vec{n}_m S_m \quad (4.75)$$

Il convient de souligner que le flux jacobien doit être conçu comme un opérateur qui agit sur la mise à jour de  $(\vec{U}_I^{n+1} - \vec{U}_I^n)$ .

### Schéma LU-SGS

Le schéma implicite Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel (LU-SGS), qui est aussi appelé schéma Lower-Upper Symmetric Successive Overrelaxation (LU-SSOR) est largement utilisé en raison de sa simplicité numérique et des ses modestes besoins en mémoire, qui sont comparables à un schéma explicite multi-étapes. En outre, le schéma de LU-SGS peut être facilement mis en œuvre sur des ordinateurs en parallèle.

Le schéma LU-SGS a ses origines dans les travaux de Jameson et Turkel, qui ont considéré des décompositions de l'opérateur implicite comme produit de matrices triangulaires inférieure et supérieure. Le schéma de LU-SGS est également basé sur la factorisation de l'opérateur implicite de l'équation 4.73 :

$$(D+L)D^{-1}(D+U)(\vec{U}_I^{n+1} - \vec{U}_I^n) = -\vec{R}_I^n \quad (4.76)$$

Les facteurs sont construits de telle sorte que  $L$  soit une matrice triangulaire inférieure,  $U$  soit une matrice triangulaire supérieure et  $D$  une matrice diagonale.

### Méthode Newton-Krylov

L'équation du schéma implicite est défini par :

$$\bar{J}(\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n) = -\vec{R}^n \quad (4.77)$$

où  $\bar{J}$  représente l'opérateur implicite (matrice du système). Comme nous l'avons déjà vu,  $\bar{J}$  est une matrice creuse et est généralement non-symétrique. Il existe deux méthodes qui permettent de décomposer  $\bar{J}$  en plusieurs facteurs qui peuvent être plus facilement inversés que  $\bar{J}$  lui même. Afin d'obtenir la convergence quadratique de la méthode de Newton pour la solution des équations non linéaires, quatre conditions doivent être remplies :

- La linéarisation du résidu doit être exacte.
- $\bar{J}$  doit être exactement inversée.
- Le pas de temps doit être  $\Delta t \rightarrow \infty$ .
- La solution initiale doit être, en quelque sorte, proche de la solution finale.

Evidemment, les principaux obstacles à surmonter sont la linéarisation et l'inversion de la matrice complète du système. Une classe particulièrement appropriée de techniques itératives pour la solution de grands systèmes d'équations linéaires sont les méthodes des sous-espaces de Krylov. Plusieurs de ces méthodes ont été proposées pour l'inversion des matrices qui apparaissent dans la CFD, comme par exemple : la méthode Conjugate Gradient Squared (CGS), le schéma Bi-Conjugate Gradient Stabilised (Bi-CGSTAB), ou la méthode Transpose-Free Quasi-Minimum Residual (TFQMR). Cependant, la méthode des sous-espaces de Krylov la plus efficace est la technique GMRES (Generalised Minimal Residual).

### Méthode GMRES

La méthode GMRES [46] minimise la norme de la valeur résiduelle globale c'est-à-dire  $\left\| \bar{J}(\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n) + \vec{R}^n \right\|$  sur un ensemble de  $m$  vecteurs orthonormés (directions de recherche), qui couvrent le sous-espace de Krylov  $\mathcal{F}_m$ . L'algorithme de GMRES peut être résumé comme suit :

1. Supposer une solution de départ  $\vec{U}_0^n$  et évaluer le vecteur résidu initial  $\vec{r}_0 = \bar{J}(\vec{U}_0^{n+1} - \vec{U}_0^n) + \vec{R}^n$ .

2. Générer les directions de recherche  $m$  (par l'orthogonalisation de Gram-Schmidt).
3. Résoudre la minimisation du problème.
4. Former une solution approximée de l'équation 4.77 comme  $\Delta \vec{U}^n = \Delta \vec{U}_0^n + \vec{y}_m$ . Où  $\Delta \vec{U}^n = \vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n$  et  $\Delta \vec{U}_0^n = \vec{U}_0^{n+1} - \vec{U}_0^n$ .

Comme les exigences de la mémoire augmentent linéairement avec le nombre de directions de recherche,  $m$  est limitée à des valeurs comprises entre 10 et 40, dans la pratique. Cela pourrait ne pas être suffisant pour que la solution converge  $\vec{U}^n$ . Ainsi, la méthode GMRES doit être réitérer, c'est-à-dire, poser  $\Delta U_0^n = \Delta \vec{U}^n$ , calculer  $\vec{r}_0$  et passer à l'étape 2. Au lieu de travailler avec un nombre constant de directions de recherche,  $m$  doit être réduit si la norme du résidu global est inférieure à une tolérance spécifiée. De cette façon, un grand nombre d'opérations peut être enregistré dans les étapes ultérieures de l'itération de Newton.

L'efficacité des méthodes de sous-espaces de Krylov dépend fortement d'un bon préconditionneur. Son but est de regrouper les valeurs propres de la matrice du système  $\bar{J}$  autour de l'unité. Evidemment, le préconditionneur devrait être aussi proche que possible de l'inverse de la matrice du système. Mais d'autre part, il doit pouvoir s'inverser à faible coût. Nous devons donc trouver un compromis optimal entre la vitesse de convergence de la méthode de Krylov et le temps utilisé pour inverser la matrice de préconditionnement. L'un des préconditionneurs le plus efficace est la méthode de factorisation Incomplete Lower Upper (ILU). Le préconditionneur ILU est particulièrement efficace dans le cas d'écoulements visqueux et turbulents, c'est-à-dire, pour des équations raides. Afin d'obtenir une bonne performance sur des maillages non structurés, il est nécessaire de réorganiser les éléments de la matrice du système. Un inconvénient important du système de préconditionnement ILU est que les éléments de la matrice  $\bar{J}$  doivent être calculés et stockés. Par conséquent, certains auteurs ont suggéré d'utiliser le système LU-SGS comme un préconditionneur.

#### 4.3.6 Conditions aux limites

Toute simulation numérique peut considérer seulement une partie du domaine physique réel ou du système. La troncature du domaine conduit à des frontières artificielles, où il faut imposer les valeurs de certaines grandeurs physiques. En outre, les parois qui sont exposées à l'écoulement représentent les limites naturelles du domaine physique. Ainsi, le traitement numérique des conditions aux limites nécessite une attention particulière. Une implémentation inadéquate peut entraîner une simulation inexacte du système réel. De plus, la stabilité et la vitesse de convergence de la solution du schéma peuvent être influencées négativement. Les conditions aux limites suivantes sont en général rencontrées pour la résolution des équations de Navier Stokes :

- Paroi.
- Champ lointain dans des écoulements externes.

– Entrée et sortie des écoulement internes.

Indépendamment de la méthode numérique choisie pour résoudre les équations, nous devons spécifier des conditions initiales et des conditions aux limites appropriées. Les conditions initiales déterminent l'état du fluide à l'instant  $t = 0$ , ou au premier pas de temps d'un schéma itératif. Il est clair que la meilleure valeur initiale serait celle qui permet d'arriver rapidement à la solution. Dans les turbomachines, il est important de préciser le sens de l'écoulement dans tout le domaine. Le principal problème lors de la construction des conditions aux limites est bien sûr que la solution sur le domaine tronqué doit rester aussi proche que possible de la solution qui serait obtenue pour l'ensemble du domaine physique. Dans le cas des frontières de champ lointain, en entrée et en sortie, les conditions aux limites caractéristiques sont souvent utilisées afin de supprimer la génération de perturbations non-physiques dans le champ d'écoulement. Mais malgré cela, il faut éviter que les frontières de champ lointain, en entrée et en sortie soient placées trop près de l'objet d'étude (aube, aile, etc), sans quoi, la précision de la solution est réduite.

La mise en œuvre correcte des conditions aux limites est le point crucial de chaque solveur. Non seulement l'exactitude de la solution dépend fortement d'un traitement numérique et physique approprié des frontières (éviter la présence de réflexions numériques parasites qui peuvent affecter la précision et la stabilité des solutions), mais aussi la robustesse et la vitesse de convergence sont considérablement influencées. L'ensemble de ces éléments, nous motive pour développer des stratégies pour réduire la réflexion et mettre en place des conditions aux limites non réfléchissantes.

#### 4.3.6.1 Conditions aux limites : paroi sans glissement

Pour un fluide visqueux en contact avec une paroi solide, la vitesse relative entre la surface et le fluide est supposée nulle. Par conséquent, nous parlons d'une condition de « non glissement ». Dans le cas d'une paroi fixe ou mobile, les composantes cartésiennes de la vitesse  $\vec{V}$  deviennent :

$$u = v = 0 \quad \text{à la surface} \quad (4.78)$$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ -\rho u \\ -\rho v \\ \rho E \end{pmatrix}_o = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}_i \quad (4.79)$$

La vitesse à la paroi, la masse volumique et le gradient de l'énergie sont nuls. Pour la pression, on peut imposer une extrapolation d'ordre zéro :  $P_{mur} = P_i$  (i.e.  $P_o = P_i$ ). Si la paroi est isothermique :  $T_o = 2T_{mur} - T_i$  et si la paroi est adiabatique (le flux de chaleur est nul)  $T_o = T_i$ .

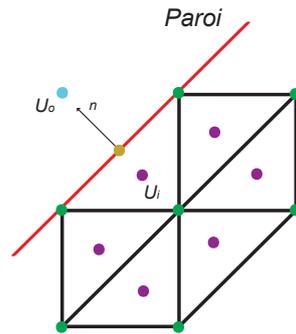


FIGURE 4.4 : Condition aux limites de type paroi fixe non glissante pour un schéma « cell centered ».

#### 4.3.6.2 Conditions aux limites : débit massique

La condition du débit massique à l'entrée peut être utilisée pour fournir un débit de masse à l'entrée du domaine de calcul. Physiquement, fixer la valeur du flux de masse permet à la pression totale de s'ajuster en réponse à la solution du domaine intérieur. Cette approche est en contradiction avec la condition limite de la pression totale à l'entrée, où la pression totale est fixe tandis que le flux de masse varie. Imposer comme condition d'entrée le débit massique est souvent utilisé quand il est plus important de respecter un débit de masse prescrit correspondant à la pression totale de l'écoulement entrant.

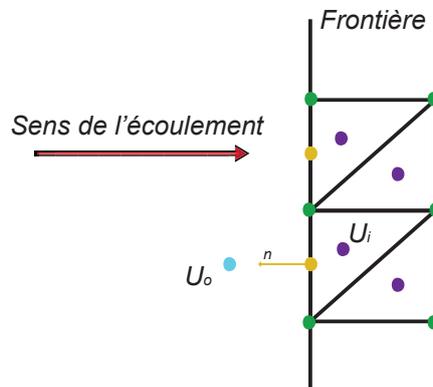


FIGURE 4.5 : Condition aux limites de type débit massique pour un schéma cell centered.

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}_o = \begin{pmatrix} \rho_i \\ \frac{\text{débit massique}}{\text{aire}} n_x \\ \frac{\text{débit massique}}{\text{aire}} n_y \\ \rho_o(4180(T_i - 273.15) + 617.0) + 0.5/\rho_o((\rho_o u_o)^2 + (\rho_o v_o)^2) \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

### 4.3.6.3 Conditions aux limites : champ lointain

La simulation numérique des écoulements externes qui concerne par exemple les ailes, les voitures et autres configurations doit être effectuée dans un domaine borné. Pour cette raison, des conditions artificielles aux limites en champ lointain deviennent nécessaires. La mise en œuvre numérique des conditions aux limites en champ lointain doit satisfaire deux exigences fondamentales. Tout d'abord, la troncature du domaine ne devrait pas avoir d'effets notables sur la solution de l'écoulement par rapport au domaine infini.

Deuxièmement, les perturbations sortantes ne doivent pas être réfléchies dans le champ de l'écoulement. En raison de leur nature elliptique, les problèmes concernant les écoulements subsoniques et transsoniques sont particulièrement sensibles aux conditions aux limites en champ lointain. Une mise en œuvre insuffisante peut conduire à un ralentissement significatif de la convergence vers l'état stationnaire. En outre, la précision de la solution est susceptible d'être dégradée. Diverses méthodes capables d'absorber les ondes sortantes aux frontières artificielles ont été développées.

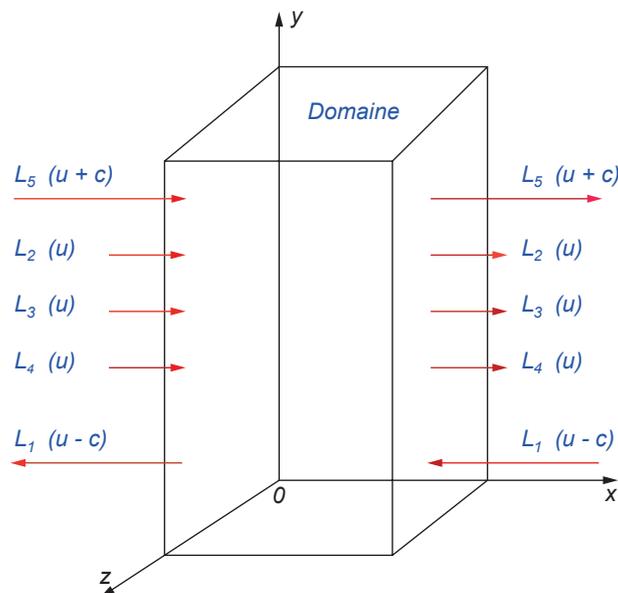


FIGURE 4.6 : Ondes qui rentrent et sortent du domaine de calcul dans la direction de l'écoulement subsonique.

### Notion de variables caractéristiques

Selon le signe des valeurs propres des jacobienes du flux convectif, l'information et les caractéristiques sont transportées hors de ou dans le domaine de calcul. Par exemple, dans le cas d'écoulements subsoniques il y a quatre caractéristiques entrantes (en 3D) et une sortante. La situation s'inverse pour

les sorties subsoniques. Selon la théorie unidimensionnelle de Kreiss [47], le nombre de conditions à être imposées sur la frontière devra être égal au nombre des caractéristiques entrantes. Les autres conditions doivent être déterminées à partir de la solution à l'intérieur du domaine. La méthodologie qui a été développée ici montre de très bonnes performances sur des grilles structurées et non structurées dans une grande variété de cas d'écoulement. Elle peut être appliquée non seulement aux frontières du champ lointain, mais aussi à des murs solides non visqueux.

Si on considère seulement la direction  $x$ ,  $y$  et  $z$ , les ondes entrantes et sortantes du domaine de calcul pour un écoulement subsonique sont illustrées dans la figure 4.6. Les amplitudes des ces ondes pour ce type d'écoulement sont spécifiées comme suit :

$$\text{suivant } x : \left\{ \begin{array}{l} L_1 = (u - c) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ L_2 = u \left( \frac{\partial p}{\partial x} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \\ L_3 = u \frac{\partial v}{\partial x} \\ L_4 = u \frac{\partial w}{\partial x} \\ L_5 = (u + c) \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (4.81)$$

$$\text{suivant } y : \left\{ \begin{array}{l} L_1 = (v - c) \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \rho c \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ L_2 = v \frac{\partial u}{\partial y} \\ L_3 = v \left( \frac{\partial p}{\partial y} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \\ L_4 = v \frac{\partial w}{\partial y} \\ L_5 = (v + c) \left( \frac{\partial p}{\partial y} + \rho c \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (4.82)$$

et

$$\text{suivant } z : \left\{ \begin{array}{l} L_1 = (w - c) \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho c \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ L_2 = w \frac{\partial u}{\partial z} \\ L_3 = w \frac{\partial v}{\partial z} \\ L_4 = w \left( \frac{\partial p}{\partial z} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \\ L_5 = (w + c) \left( \frac{\partial p}{\partial z} + \rho c \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (4.83)$$

Dans les équations 4.81 à 4.83,  $c$  est la vitesse du son. Les ondes caractéristiques jouent un rôle significatif dans les conditions NSCBC (Navier Stokes characteristic boundary condition) et la condition non réfléchissante. D'un point de vue numérique, les ondes sortantes ne causent aucun problème car leurs amplitudes peuvent être calculées à partir de la solution à l'intérieur du domaine de calcul. D'autre part, les ondes entrantes dans le domaine de calcul peuvent être problématiques parce qu'elles s'appuient sur la solution en dehors du domaine de calcul, qui est une inconnue dans la simulation.

Dans la condition limite non réfléchissante, les amplitudes de toutes les ondes entrantes sont simplement déclarées nulles. En conséquence, le champ inconnu hors du domaine de calcul est exclu de la simulation. La pratique courante a montré que la condition non réfléchissante est très efficace dans le contrôle des réflexions d'ondes à l'extérieur du domaine de calcul. Pour cette raison, la condition a été utilisée avec succès en DNS (Direct Numerical Simulation) et LES (Large Eddy Simulation) des écoulements compressibles. La condition non réfléchissante conduit à un champ de l'écoulement régulier proche de la frontière. Cependant, le réglage des amplitudes de toutes les ondes entrantes à une valeur nulle n'est pas physiquement réaliste. Quand une condition non réfléchissante est utilisée, une partie des variables de l'écoulement à la frontière sont fluctuantes et elles changent en fonction du temps selon les caractéristiques des ondes à travers la frontière, ce qui peut être gênant dans certains cas, par exemple si les variables de l'écoulement à l'entrée sont physiquement fixes.

La NSCBC peut surmonter cet inconvénient de la condition non réfléchissante en introduisant des conditions physiques dans la formulation de la BC (boundary condition) caractéristique, en utilisant le concept des relations LODI (local one-dimensional inviscid). LODI fournit des relations compatibles entre les conditions aux limites physiques et les amplitudes des ondes caractéristiques à travers la frontière. Les relations LODI sont faciles à implémenter et peuvent être vues comme des relations de compatibilité entre les choix faits pour les conditions physiques aux limites et les amplitudes des ondes à travers la frontière. Par exemple, les relations LODI pour la masse volumique, la pression, et les composantes de la vitesse d'un écoulement subsonique sont données comme suit :

$$\text{suivant } x : \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left[ -L_2 + \frac{1}{2}(L_5 + L_1) \right] = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}(L_5 + L_1) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2\rho c}(L_5 - L_1) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + L_3 = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + L_4 = 0 \end{array} \right. \quad (4.84)$$

$$\text{suivant } y : \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left[ -L_3 + \frac{1}{2}(L_5 + L_1) \right] = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}(L_5 + L_1) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + L_2 = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2\rho c}(L_5 - L_1) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + L_4 = 0 \end{array} \right. \quad (4.85)$$

and

$$\text{suivant } z : \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left[ -L_4 + \frac{1}{2}(L_5 + L_1) \right] = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}(L_5 + L_1) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + L_2 = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + L_3 = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2\rho c}(L_5 - L_1) = 0 \end{array} \right. \quad (4.86)$$

Les équations de Navier Stokes sous forme conservative 4.37 et les équations 4.84 à 4.89 peuvent

s'exprimer en 2D en fonction des variables primitives :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A \frac{\partial V}{\partial x} + B \frac{\partial V}{\partial y} = F_{vis} \quad (4.87)$$

où

$$V = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ (\gamma - 1) \left( \rho E - \rho \frac{(u^2 + v^2)}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

$$A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & u \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \rho c^2 & v \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

et

$$F_{vis} = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} \right) \\ T \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

avec

$$T = \frac{1}{\rho} (\gamma - 1) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial v}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \quad (4.91)$$

où  $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$  est la vitesse locale du son. Les variables inconnues  $V$  sont la masse volumique  $\rho$ , la composante axiale de la vitesse  $u$ , la composante transversale de la vitesse  $v$  et la pression du fluide  $p$ .

Le système ci-dessous est non linéaire, et ainsi il n'est pas couvert par la théorie générale des conditions aux limites non réfléchissantes. Cependant, la théorie est applicable à une version linéarisée du système. Pour avoir cette version, on suppose que  $V = (\rho, u, v, p)^T$  et  $\bar{V} = (\rho + \rho', u + u', v + v', p + p')^T$  sont des solutions de 4.90 et on suppose que les perturbations  $V' = (\rho', u', v', p')^T$  sont petites.

Si on remplace  $\bar{V}$  dans 4.90 et on néglige les termes quadratiques dans les perturbations, le système linéarisé résultant pour  $V'$  est donné par

$$\frac{\partial V'}{\partial t} + A \frac{\partial V'}{\partial x} + B \frac{\partial V'}{\partial y} = F'_{vis} - D \quad (4.92)$$

où

$$F'_{vis} = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau'_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau'_{xy} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau'_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau'_{yy} \right) \\ T' \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

avec

$$T' = \frac{1}{\rho} (\gamma - 1) \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial u'}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial v'}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial v'}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial q'_x}{\partial x} + \frac{\partial q'_y}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \tau'_{xx} + \frac{\partial u}{\partial y} \tau'_{xy} + \frac{\partial v}{\partial x} \tau'_{xy} + \frac{\partial v}{\partial y} \tau'_{yy} \right) \quad (4.94)$$

et

$$D = A' \frac{\partial V}{\partial x} + B' \frac{\partial V}{\partial y} \quad (4.95)$$

avec

$$A' = \begin{bmatrix} u' & \rho' & 0 & 0 \\ 0 & u' & 0 & -\rho' \\ 0 & 0 & u' & 0 \\ 0 & \rho' c^2 & 0 & u' \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} v' & 0 & 0 & \rho' \\ 0 & v' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v' & -\rho' \\ 0 & 0 & \rho' c^2 & v' \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

Pour déterminer les conditions aux limites appropriées à la sortie en utilisant la théorie de la condition non réfléchissante, il est nécessaire pour les équations précédentes d'effectuer des analyses dans l'espace fréquentiel, ce qui est un processus fastidieux. Pour simplifier le calcul, on suppose que toute perturbation instable sous forme d'onde qui frappe les frontières avec ses fronts d'ondes est parallèle aux frontières. C'est-à-dire que les dérivées partielles par rapport à la direction tangentielle sont négli-

geables. Sous cette hypothèse, les dérivations utiles des conditions aux limites à la sortie sont obtenues par la réécriture du système en fonction de variables caractéristiques.

$$\frac{\partial V'}{\partial t} + S\Lambda S \frac{\partial V'}{\partial x} = -B \frac{\partial V'}{\partial y} + F'_{vis} - D \quad (4.97)$$

ou

$$\frac{\partial W'}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial W'}{\partial x} = -S^{-1}B \frac{\partial V'}{\partial y} + S^{-1}F'_{vis} - S^{-1}D \quad (4.98)$$

où

$$A = S\Lambda S^{-1} \quad (4.99)$$

$$W' = S^{-1}V' \quad (4.100)$$

$$V' = SW' \quad (4.101)$$

et

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho c & 0 & 1 \\ 0 & -\rho c & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} \frac{-1}{c^2} & 0 & \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{2c^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\rho c} & \frac{-1}{2\rho c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u-c \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

où les éléments de la diagonale de  $\Lambda$  sont les valeurs propres de la matrice  $A$ . D'après ces valeurs propres on peut voir que trois ondes voyagent vers la droite et une voyage vers la gauche (voir figure

4.6). Si on ne veut pas que de telles ondes de perturbation instables réfléchies par les frontières aient une influence sur l'écoulement principal dans le domaine de calcul, il est nécessaire de les laisser passer librement les frontières à l'entrée et à la sortie.

Deux situations d'écoulement de base à la frontière de champ lointain sont représentées sur la figure

4.7. L'écoulement 2D peut entrer ou quitter le domaine.

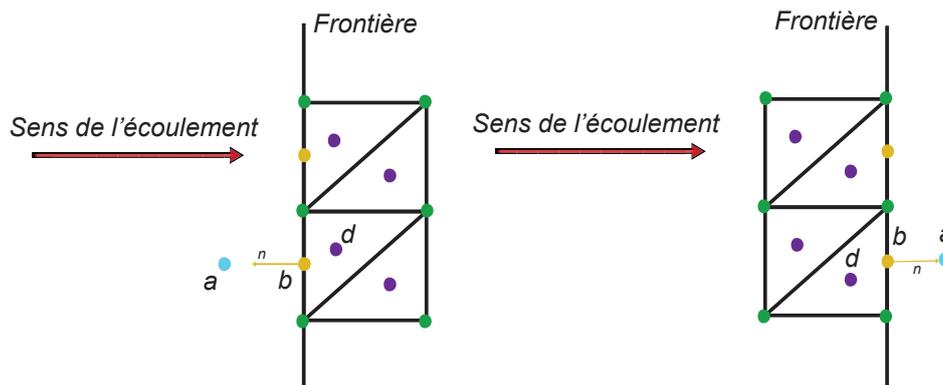


FIGURE 4.7 : Frontière champ lointain : entrée (à gauche) et sortie (à droite).  $a$  est à l'extérieur,  $b$  sur la frontière, et  $d$  est à l'intérieur du domaine physique. Le vecteur unitaire normal  $\vec{n} = [n_x, n_y]^T$  pointe hors du domaine.

### Entrée subsonique

Ici, trois caractéristiques rentrent et une quitte le domaine physique. Pour cette raison, trois variables caractéristiques sont données en fonction des valeurs de l'écoulement libre. Une variable caractéristique est extrapolée à partir de l'intérieur du domaine physique. Ainsi, les conditions aux limites non réfléchissantes sont données comme :

$$\begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} p_b &= \frac{1}{2} \{ p_a + p_d - \rho_0 c_0 [n_x(u_a - u_d) + n_y(v_a - v_d)] \} \\ \rho_b &= \rho_a + (p_b - p_a)/c_0^2 \\ u_b &= u_a - n_x(p_a - p_b)/(\rho_0 c_0) \\ v_b &= v_a - n_y(p_a - p_b)/(\rho_0 c_0) \end{aligned}$$

où  $\rho_0$  et  $c_0$  représentent un état de référence. L'état de référence est normalement égal à l'état au point de l'intérieur (point  $d$  figure 4.7). Les valeurs au point  $a$  sont déterminées à partir de l'état d'écoulement libre.

### Sortie subsonique

Dans le cas de la sortie subsonique, trois variables de l'écoulement doivent être extrapolées à partir de l'intérieur du domaine physique. La quatrième variable restante doit être précisée à l'extérieur. Ainsi, la condition non réfléchissante peut être définie comme

$$w'_4 = 0 \quad (4.105)$$

Dans le code, la condition implémentée porte le nom de « pressure outlet »

$$\begin{aligned} p_b &= p_a \\ \rho_b &= \rho_d + (p_b - p_d)/c_0^2 \\ u_b &= u_d + n_x(p_d - p_b)/(\rho_0 c_0) \\ v_b &= v_d + n_y(p_d - p_b)/(\rho_0 c_0) \end{aligned} \quad (4.106)$$

avec  $p_a$  étant la pression statique prescrite. Les propriétés physiques dans les cellules fantômes peuvent être obtenues par extrapolation linéaire des états  $b$  et  $d$ .

#### 4.3.7 Flux numérique

Les méthodes numériques pour un écoulement compressible pour des plages de vitesse allant d'un bas nombre de Mach avec faible dissipation, aux chocs violents et ondes d'expansion d'un écoulement à nombre de Mach élevé, sont très attractives pour différentes applications. Dans cette section, on va présenter un schéma de flux numérique de la famille AUSM pour toutes les vitesses sans paramètres ajustables appelé SLAU [48] (Simple Low-dissipation AUSM) ainsi que sa formulation. Ce schéma présente une faible dissipation sous un régime à faible nombre de Mach, tout en conservant la robustesse et la nature non-oscillante à nombre de Mach élevé. En outre, bien que cette méthode ne s'appuie pas sur l'échelle de la viscosité numérique par la matrice de préconditionnement, sa combinaison avec le préconditionnement de la dérivée temporelle se révèle très efficace pour une convergence rapide de la solution pour des écoulements à faible nombre de Mach.

Quand les méthodes compressibles CFD sont appliquées à des écoulements à très faible nombre de Mach ; des précautions doivent être prises sur la convergence lente (même la divergence) en raison du

ratio élevé des vitesses caractéristiques et des erreurs provenant de la dissipation numérique excessive. Ces défauts sont surmontés en utilisant des méthodes de préconditionnement. Cependant, certaines insuffisances des schémas originaux sont héréditaires, comme le manque de robustesse du schéma de Roe dans un écoulement à nombre de Mach élevé. En d'autres termes, le schéma préconditionné de Roe, par exemple, souffre encore d'instabilités de choc. En outre, ces schémas comprennent au moins un paramètre qui dépend du problème appelé « nombre de Mach de coupure » : Ce paramètre doit être très faible mais non nul pour des écoulements à faible nombre de Mach.

Le problème est qu'il n'existe pas, dans certains cas, une méthode appropriée pour définir le nombre de Mach de coupure, surtout lorsque l'écoulement est non uniforme. D'autre part, un certain nombre de schémas ont été proposés afin de surmonter les faiblesses du schéma à nombre de Mach élevé. Parmi eux, AUSM (Advection Upstream Splitting Method), initialement développé par Liou et Steffen [49], et ses variantes de la famille de schémas AUSM sont simples, mais précis et robustes pour les écoulements à nombre de Mach élevé. Ils ont été ainsi largement utilisés comme l'une des méthodes standard d'algorithmes CFD compressibles. Ces dernières années, toutes les versions de vitesse de la famille de schémas AUSM qui peuvent calculer des écoulement à partir du nombre de Mach très faible à très élevé ont été développés par Edwards [50] et Liou [51].

#### 4.3.7.1 Description des schémas de la famille AUSM

Le calcul du flux non visqueux est très important dans le cas d'écoulements à nombre de Reynolds élevé, et bien sûr d'écoulements non visqueux. Le flux non visqueux  $\vec{F}(U) \cdot \vec{n}$  pour un écoulement bidimensionnel est généralement divisé en deux parties, un flux convectif  $F^c$  et un flux de pression  $F^p$  qui sont exprimés comme suit :

$$\vec{F}(U) \cdot \vec{n} = F^c + F^p = \dot{m}U + F^p \quad (4.107)$$

où  $\dot{m} = \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})$  est le flux massique, le vecteur  $U = [1, u, v, h]^T$ , le vecteur normal  $n = [0, n_x, n_y, 0]^T$ , et l'enthalpie  $h = (e + p)/\rho$ . Le flux de pression est défini comme  $F^p = p[0, n_x, n_y, 0]^T$ .

Le flux numérique non visqueux  $H$  calculé par un schéma de la famille AUSM pour un écoulement bidimensionnel est aussi divisé en deux parties, un flux numérique convectif  $H^c$  et un flux numérique de pression  $H^p$  sont exprimés comme suit, en utilisant des valeurs de premier ordre de la cellule qui sont extrapolées à l'interface du côté gauche (+) et du côté droit (-) ou d'ordre supérieur comme MUSCL, par exemple :

$$H(U_L, U_R, \vec{n}_{ij}) = H^c(U_L, U_R, \vec{n}_{ij}) + H^p(U_L, U_R, \vec{n}_{ij}) \quad (4.108)$$

Le flux convectif numérique  $H^c$  est défini sous la forme générale upwind

$$H^c(U_L, U_R, \vec{n}_{ij}) = \dot{m}^+ U_L + \dot{m}^- U_R \quad (4.109)$$

où les contributions  $U_L$  et  $U_R$  sont pondérées par les flux de masse  $\dot{m}^+$  et  $\dot{m}^-$ , qui suivent l'exigence de cohérence

$$\dot{m} = \dot{m}^+ + \dot{m}^- \quad (4.110)$$

les conditions appropriées de centrage

$$\dot{m}^+ \geq 0, \quad \dot{m}^- \leq 0 \quad (4.111)$$

et l'exigence d'exclusion mutuelle

$$(\dot{m}^+)(\dot{m}^-) = 0 \quad (4.112)$$

$$H = \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2} U_L + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2} U_R + p \cdot \vec{n} \quad (4.113)$$

où  $n_x, n_y$  sont les composantes cartésiennes d'un vecteur normal à partir de la gauche et orienté vers la droite,  $u, v$  sont les vitesses suivant les directions  $x$  et  $y$  respectives,  $\rho, e, \dot{m}$ , et  $p$  représentent la masse volumique, l'énergie totale par unité de volume, le flux massique et la pression statique.

#### 4.3.7.2 Correction sur le terme de pression pour faible dissipation

La plupart des schémas de la famille AUSM utilisent le terme suivant de pression provenant de FVS de van Leer [52].

$$p = \beta^+ p^+ + \beta^- p^- \quad (4.114)$$

$$\beta^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4}(2 \mp M^\pm)(M^\pm \pm 1)^2 \pm \alpha M^\pm (M^{\pm 2} - 1)^2, & |M^\pm| < 1 \\ \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(\pm M^\pm)), & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.115)$$

Les nombres de Mach à gauche (+) et à droite (-) sont définis par :

$$M^\pm = \frac{V_n^\pm}{\bar{c}} = \frac{u^\pm n_x + v^\pm n_y}{\bar{c}} \quad (4.116)$$

où  $\bar{c}$  est la vitesse du son définie par  $\bar{c} = \frac{1}{2}(c_L + c_R)$ . On considère  $\alpha = 0$ , qui permet d'éliminer le terme défini par Liou [51], pour plus de simplicité dans cette étude. L'équation 4.114 peut être réécrite comme suit :

$$p = \frac{p^+ + p^-}{2} + \frac{\beta^+ + \beta^-}{2}(p^+ - p^-) + (\beta^+ + \beta^- - 1)\frac{p^+ + p^-}{2} \quad (4.117)$$

Le troisième terme de l'équation 4.117 s'approche de la notation suivante de la limite de faible nombre de Mach en définissant la vitesse moyenne du son  $\bar{c}$ .

$$(\beta^+ + \beta^- - 1)\frac{p^+ + p^-}{2} \Rightarrow \frac{3}{4\gamma} \frac{\rho^+ + \rho^-}{2} \bar{c}(V_n^+ - V_n^-) \quad (4.118)$$

Si l'on prend la valeur moyenne de la vitesse comme  $\bar{c} = \sqrt{\gamma(p^+ + p^-)/(\rho^+ + \rho^-)}$ , l'équation ci-dessus est vraie, mais on peut l'approcher par un autre choix de  $\bar{c}$  tel que  $\bar{c} = (c^+ + c^-)/2$ . Ainsi, pour simplifier, nous employons  $(c^+ + c^-)/2$ . On peut dire que le premier terme de l'équation 4.118 fonctionne comme la dissipation numérique pour des vitesses de l'ordre de celle du son mais il est trop grand pour des écoulements à faible nombre de Mach. Afin de remplacer ce terme par celui de la vitesse convective dans le régime à faible nombre de Mach tout en gardant la forme originale sous nombres de Mach élevés, une fonction non-dimensionnelle, ayant une échelle du nombre de Mach est introduite. L'équation finale est donnée par :

$$p = \frac{p^+ + p^-}{2} + \frac{\beta^+ + \beta^-}{2}(p^+ - p^-) + (1 - \chi)(\beta^+ + \beta^- - 1)\frac{p^+ + p^-}{2} \quad (4.119)$$

$$\chi = (1 - \widehat{M})^2 \quad (4.120)$$

$$\widehat{M} = \min \left( 1.0, \frac{1}{\bar{c}} \sqrt{\frac{u^{+2} + v^{+2} + u^{-2} + v^{-2}}{2}} \right) \quad (4.121)$$

Il faut noter que cette modification ne viole pas la discontinuité de contact préservant l'esprit de la plupart des schémas de type AUSM. Le terme de pression a également été modifié dans les autres schémas AUSM pour couvrir toutes les gammes de vitesse. Une autre caractéristique essentielle de la méthode actuelle est l'utilisation du nombre de Mach multidimensionnel défini par l'équation 4.121, qui est facilement applicable aux maillages arbitraires.

Il a été constaté par l'expérience que l'utilisation du nombre de Mach normal à la surface de la cellule

au lieu de l'équation 4.121 conduit à des résultats insatisfaisants en écoulements multi-dimensionnels.

#### 4.3.7.3 Sélection du flux de masse

L'emploi du schéma SHUS [53](Simple High-resolution Upwind Scheme) est proposé : le flux de masse du AUSM original est remplacé par celui du schéma de Roe. L'utilisation de SHUS permet bien d'agir sur le dépassement parasite d'un front de choc, apparu dans le cas du AUSM original. Le flux de masse du schéma SHUS est écrit comme suit :

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \left\{ (\rho V_n)^+ + (\rho V_n)^- - |\bar{V}_n| \Delta \rho - \frac{|\bar{M} + 1| - |\bar{M} - 1|}{2} \bar{\rho} \Delta V_n - \frac{|\bar{M} + 1| + |\bar{M} - 1| - 2|\bar{M}|}{2\bar{c}} \Delta p \right\} \quad (4.122)$$

$$\Delta q = q^- - q^+ \quad (4.123)$$

où  $(\bar{*})$  représente la moyenne arithmétique des deux côtés et  $\bar{M} = M^+ + M^-$ .

Il est confirmé que la performance du flux de masse donnée par l'équation 4.122 a été améliorée lorsqu'il est combiné avec le terme de pression donné par les équations 4.119 à 4.121, ce qui donne un schéma pour toute vitesse avec faible dissipation pour des écoulements subsoniques et transsoniques. Cependant, bien que ce schéma est plus robuste que le schéma de Roe, il rencontre encore des inconvénients dans un problème de propagation des chocs dans un canal à deux dimensions. Ainsi, ce défaut a été prévu pour être résolu par l'élimination du terme de différence de pression ( $\Delta p$ , le dernier terme) dans l'équation 4.122. Toutefois, cette modification s'est avérée être un échec : Le flux modifié a montré le dépassement à un front de choc, encore une fois. Il est probablement dû à l'annulation des effets de dissipation du troisième terme ( $\Delta \rho$ ) par le quatrième terme ( $\Delta V_n$ ), compte tenu du fait que ces termes sont de signes opposés dans le choc lorsque l'écoulement est comprimé ( $\Delta \rho > 0$ ) et décéléré ( $\Delta V_n < 0$ ). En d'autres termes, la forme originale de l'équation 4.122 a créé la quantité appropriée de dissipation dans une direction normale au choc (1D stable), mais pas dans sa direction parallèle (Multi-D instable) ; considérant que la forme modifiée n'est appropriée que pour la suppression de l'instabilité du choc dans sa direction parallèle (stable Multi-D), il souffre alors de l'instabilité 1D (1D instable). Après avoir confirmé que le terme de dissipation de caractère multi-dimensionnel est préférentiel, on procède à une nouvelle modification de l'équation 4.122 pour préparer de la forme finale du nouveau schéma.

Si le terme de différence de la masse volumique ( $\Delta \rho$ , le troisième terme) est modifié pour être plus dissipatif, et le terme de différence de vitesse ( $\Delta V_n$ , le quatrième terme) est également éliminé, une équation très simple pour le calcul du flux de masse peut être déduite :

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \left\{ (\rho V_n)^+ + (\rho V_n)^- - |\bar{V}_n| \Delta \rho \right\} \quad (4.124)$$

$$|\bar{V}_n| = \frac{\rho^+ |V_n|^+ + \rho^- |V_n|^-}{\rho^+ + \rho^-} \quad (4.125)$$

Il faut noter que cette fonction donne des valeurs correctes du flux de masse, c'est-à-dire pas de flux pour une discontinuité de contact stationnaire ou mobile où la pression et la vitesse normale sont constantes sur les deux côtés. En outre, ce flux de masse est indépendant des nombres de Mach qu'ont la plupart des schémas pour toutes les vitesses. Cette fonctionnalité est souhaitable pour les calculs d'écoulements à très faible nombre de Mach.

#### 4.3.7.4 Correction des flux de masse pour un nombre limite de Mach élevé et bas

D'après les tests préliminaires, l'équation 4.122 donne de bons résultats dans des conditions modérées telles que des vitesses faiblement supersoniques. Cependant, il donne un flux non physique pour une forte expansion asymétrique, ce qui entraîne un état de vide à l'interface. Ainsi, la modification suivante est apportée :

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \{ \rho^+ (V_n^+ + |\bar{V}_n|^+) + \rho^- (V_n^- - |\bar{V}_n|^-) \} \quad (4.126)$$

$$|\bar{V}_n|^\pm = (1 - g)|\bar{V}_n| + g|V_n|^\pm \quad (4.127)$$

$$g = -\max[\min(M^+, 0), -1] \cdot \min[\max(M^-, 0), 1] \in [0, 1] \quad (4.128)$$

Il faut noter que l'équation 4.126 est identique à l'équation 4.122 quand  $g = 0$ , tandis que l'équation 4.126 se réduit à zéro (pas de flux) dans le cas d'une forte expansion dans lequel  $g$  est l'unité. En d'autres termes, l'équation 4.126 résout avec succès le flux non physique produit par l'équation 4.122, sans perdre ses propriétés de base. Ici, on considère le terme  $\Delta p$  à nouveau. Cependant l'équation 4.126 donne des solutions satisfaisantes pour les écoulements subsoniques : il produit des oscillations numériques à faible nombre de Mach alors que l'équation 4.121 ne le fait pas.

Cela signifie que le terme  $\Delta p$  dans l'équation 4.121 a un effet favorable dans la stabilisation de calculs d'écoulements à faible vitesse. Ainsi, nous avons récupéré le terme une fois éliminé de l'équation 4.121, mais seulement dans un schéma à faible nombre de Mach ou dans une direction normale au choc dans des écoulements à grande vitesse.

Le terme  $\Delta p$  dans l'équation 4.121 a été conçu pour n'être actif que dans les écoulements subsoniques, cependant, ce terme joue aussi un rôle dans les écoulements à grande vitesse dans la direction normale à l'onde de choc. Cet effet favorable travaille probablement dans la partie subsonique de la structure de choc capturée numériquement ; d'autre part, le terme se comporte d'une manière non souhaitée

dans le sens parallèle au choc, où se propage la perturbation numérique à l'intérieur du choc. Ainsi, la dissipation produite par le terme de différence de pression doit être allégée dans la direction parallèle au choc pour les calculs de l'écoulement à grande vitesse. Compte tenu de cela, le terme  $\Delta p$  qui n'est pleinement actif que pour un très faible nombre de Mach et partiellement actif dans le choc est inséré dans à l'équation 4.126 comme suit :

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \left\{ \rho^+ (V_n^+ + |\bar{V}_n|^+) + \rho^- (V_n^- - |\bar{V}_n|^-) - \frac{\chi}{c} \Delta p \right\} \quad (4.129)$$

Le schéma passe doucement du mode basse vitesse au mode grande vitesse tout en conservant sa simplicité, en utilisant la fonction commune  $\chi$  définie dans les équations 4.119 et 4.120.

Maintenant, le nouveau schéma de flux numérique nommé SLAU (Simple Low-dissipation AUSM) est obtenu en combinant la fonction de flux de masse dans les équations 4.125, 4.127 à 4.129 et la fonction de la pression des équations 4.118 à 4.120

#### 4.3.7.5 Forme final du schéma SLAU

Le nouveau schéma numérique du flux de la famille AUSM qui couvre toutes les gammes de vitesses, est appelé SLAU (Simple Low-dissipation AUSM). En dépit de sa simplicité, le schéma SLAU est précis, robuste et efficace pour des calculs sur une large plage de nombres de Mach. De plus, SLAU n'a pas besoin de « nombre de Mach de coupure » à la différence des autres schémas pour toutes les vitesses, il peut donc être appliqué à n'importe quel nombre de Mach faible sans aucun ajustement en fonction des problèmes. En outre, ce schéma n'a pas besoin de mettre à l'échelle la viscosité artificielle par le pré-conditionnement de la matrice, cependant, on constate que la combinaison avec le pré-conditionnement de la dérivée temporelle est très efficace sur SLAU. Ainsi, SLAU peut calculer des nombres de Mach très faibles dans un délai étonnamment court.

Les principales caractéristiques de SLAU se résument comme suit :

- Le terme de pression a été modifié pour atteindre la propriété de faible dissipation dans le régime à très faible nombre de Mach.
- Les instabilités de choc ont été supprimées par l'introduction de viscosité numérique ayant un caractère multi-dimensionnel.
- En dépit de ces modifications, le schéma actuel est toujours aussi simple que AUSM.

Le flux numérique du schéma de la famille AUSM, y compris SLAU pour l'écoulement à deux dimensions est écrit comme suit :

$$H = \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2} U_L + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2} U_R + p \cdot \vec{n} \quad (4.130)$$

$$U = [1, u, v, h]^T \quad (4.131)$$

$$\vec{n} = (0, n_x, n_y, 0)^T \quad (4.132)$$

$$h = (e + p)/\rho \quad (4.133)$$

La fonction de flux de masse de SLAU est donnée par :

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \left\{ \rho^+ (V_n^+ + |\bar{V}_n|^+) + \rho^- (V_n^- - |\bar{V}_n|^-) - \frac{\chi}{\bar{c}} \Delta p \right\} \quad (4.134)$$

$$\chi = (1 - \widehat{M})^2 \quad (4.135)$$

$$\widehat{M} = \min \left( 1.0, \frac{1}{\bar{c}} \sqrt{\frac{u^{+2} + v^{+2} + u^{-2} + v^{-2}}{2}} \right) \quad (4.136)$$

$$|\bar{V}_n| = \frac{\rho^+ |V_n|^+ + \rho^- |V_n|^-}{\rho^+ + \rho^-} \quad (4.137)$$

$$|\bar{V}_n|^\pm = (1 - g) |\bar{V}_n| + g |V_n|^\pm \quad (4.138)$$

$$g = -\max [\min(M^+, 0), -1] \cdot \min [\max(M^-, 0), 1] \in [0, 1] \quad (4.139)$$

$$M^\pm = \frac{V_n^\pm}{\bar{c}} = \frac{u^\pm n_x + v^\pm n_y}{\bar{c}} \quad (4.140)$$

$$\bar{c} = \frac{c^+ + c^-}{2} \quad (4.141)$$

Finalement, la fonction de pression est donnée par :

$$p = \frac{p^+ + p^-}{2} + \frac{\beta^+ + \beta^-}{2} (p^+ - p^-) + (1 - \chi) (\beta^+ + \beta^- - 1) \frac{p^+ + p^-}{2} \quad (4.142)$$

$$\beta^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4} (2 \mp M^\pm) (M^\pm \pm 1)^2, & |M^\pm| < 1 \\ \frac{1}{2} (1 + \text{sign}(\pm M^\pm)), & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.143)$$

### 4.3.8 Limiteurs spécifiques pour maillages non structurés

La principale difficulté rencontrée dans la résolution du système de lois de conservation scalaire réside dans le choix de l'ordre d'approximation du schéma. Etant donné qu'un schéma du premier ordre est dissipatif et qu'un schéma du second ordre crée des oscillations, il est difficile de définir un schéma numérique qui n'oscille pas et qui soit précis. On dispose de classes de schémas qui n'oscillent pas : ce sont les schémas monotones. Malheureusement, ceux-ci sont limités au premier ordre de précision. En conséquence, l'utilisation de schémas numériques de ce type ne peut pas convenir pour des schémas où l'ordre de précision sera élevé. Néanmoins, il existe des méthodes numériques qui associent les deux qualités, ce sont les méthodes à variation totale décroissante (TVD).

Une caractéristique essentielle d'un schéma TVD est qu'il définit des solutions sans oscillations, en particulier dans les régions à fortes variations de gradient. Un tel schéma ne crée, ni n'amplifie les extrema, puisqu'il préserve la monotonie, c'est une propriété que ne partage pas l'ensemble des schémas numériques. Le critère TVD d'un schéma est lié à l'existence d'une quantité minimale de viscosité numérique nécessaire. Les schémas TVD sont intimement liés à la notion traditionnelle de viscosité numérique. Les méthodes TVD et à viscosité artificielle tentent de contourner le théorème de Godunov de telle sorte que les oscillations au niveau des zones à forts gradients soient éliminées ou au moins contrôlées. Dans la méthode à viscosité artificielle, la viscosité est ajoutée de manière explicite en ajoutant des termes aux équations aux dérivées partielles. Dans les méthodes TVD, cette viscosité artificielle est inhérente au schéma numérique lui-même et les techniques numériques mises en œuvre pour activer cette viscosité sont complexes. La viscosité numérique au niveau du schéma est contrôlée de manière très précise de telle sorte que les oscillations soient éliminées et qu'une haute précision soit assurée dans les parties lisses.

#### 4.3.8.1 Schéma TVD (Total Variational Diminishing)

À la suite de Roe, la valeur sur la face  $\phi_{i+\frac{1}{2}}$  d'un schéma TVD est écrite comme la somme du terme de diffusion de premier ordre upwind et du terme anti-diffusif de premier ordre upwind.

La partie anti-diffusive est multipliée par la fonction limiteur de flux,  $\psi(r)$ , qui est une fonction non-linéaire de  $r$ , le rapport upwind des gradients consécutifs de la solution, défini comme (sans perte de généralité, nous supposons que la vitesse sur la face égale à  $v_{i+\frac{1}{2}} > 0$ ) :

$$r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\phi_{i+1} - \phi_i} \quad (4.144)$$

conduisant au schéma de flux limité :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi_i + \frac{1}{2} \psi(r_{i+\frac{1}{2}}) (\phi_{i+1} - \phi_i) \quad (4.145)$$

L'utilisation d'un limiteur de flux,  $\psi(r)$ , qui est simplement une fonction linéaire de  $r$ , différents schémas d'ordre supérieur peuvent être écrits sous la forme de l'équation 4.145. Par exemple pour,  $\psi$  égal à  $r$ , le schéma de deuxième ordre upwind (SOU) est obtenu. D'autres schémas peuvent être également formulés :

- Schéma DOWNWIND  $\psi(r) = 2$
- Schéma CD  $\psi(r) = 1$
- Schéma SOU  $\psi(r) = r$
- Schéma FROMM  $\psi(r) = \frac{1+r}{2}$

Les schémas TVD peuvent également être écrits sous une forme légèrement différente de celle donnée par l'équation 4.145,

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi_i + \frac{1}{2} \psi(r'_{i+\frac{1}{2}}) (\phi_i - \phi_{i-1}) \quad (4.146)$$

dans ce cas le terme  $r$ , désormais désigné par  $r'$ , est défini comme :

$$r'_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\phi_i - \phi_{i-1}} = \frac{1}{r_{i+\frac{1}{2}}} \quad (4.147)$$

la relation entre les deux expressions est donnée par :

$$\frac{1}{r'_{i+\frac{1}{2}}} \psi'(r'_{i+\frac{1}{2}}) = \psi(r_{i+\frac{1}{2}}) \quad (4.148)$$

prenant pour exemple le schéma SOU où  $\psi(r) = r$ , l'équivalent du limiteur de flux pour l'équation 4.146 devient

$$\psi'_{SOU}(r') = r' \psi_{SOU}(r) = \frac{1}{r} r = 1 \quad (4.149)$$

Cela peut être démontré par le calcul de la dérivée de  $\phi_{i+\frac{1}{2}}$  pour le schéma SOU :

$$\begin{aligned}
\phi_{i+\frac{1}{2}} &= \phi_i + \frac{1}{2} \psi_{SOU}(r_{i+\frac{1}{2}})(\phi_{i+1} - \phi_i) \\
&= \phi_i + \frac{1}{2} (r_{i+\frac{1}{2}})(\phi_{i+1} - \phi_i) \\
&= \phi_i + \frac{1}{2} \frac{(\phi_i - \phi_{i-1})}{(\phi_{i+1} - \phi_i)} (\phi_{i+1} - \phi_i) \\
&= \frac{3}{2} \phi_i - \frac{1}{2} \phi_{i-1} \\
\phi_{i+\frac{1}{2}} &= \phi_i + \frac{1}{2} \psi'_{SOU}(r_{i+\frac{1}{2}})(\phi_i - \phi_{i-1}) \\
&= \phi_i + \frac{1}{2} (\phi_i - \phi_{i-1}) \\
&= \frac{3}{2} \phi_i - \frac{1}{2} \phi_{i-1}
\end{aligned} \tag{4.150}$$

Dans ce travail, la formulation des schémas TVD utilisera l'équation 4.145.

#### 4.3.8.2 Schéma Barth et Jespersen

Barth et Jespersen [54] ont suivi une approche différente pour imposer le critère de monotonie. Dans leur approche, le critère de monotonie de Speikreijse [55] a été modifié pour l'appliquer à la reconstruction de  $\phi$  dans le volume de contrôle : la condition a été modifiée pour indiquer que les valeurs du polynôme reconstruit dans le volume de contrôle ne doivent pas dépasser les valeurs maximum et minimum des voisins du volume de contrôle. En utilisant la notation de la figure 4.8 le critère de Speikreijse a été écrit comme suit :

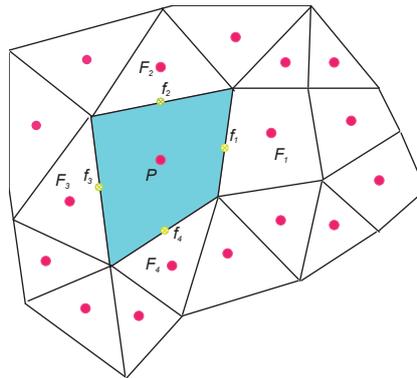


FIGURE 4.8 : Notation du maillage non structuré.

$$\min(\phi_N) \leq \phi_P \leq \max(\phi_N) \forall N \in \text{Voisins}(P) \tag{4.151}$$

L'équation 4.151 a été modifiée :

$$\min(\phi_N, \phi_P) \leq R_P(r_j) \leq \max(\phi_N, \phi_P) \forall N \in \text{Voisins}(P) \quad (4.152)$$

où  $j$  est un point donné dans le volume de contrôle  $P$ , et  $R$  est l'opérateur de reconstruction proposé par :

$$R_P(r_j) = \phi_P + \psi_j \nabla \phi_P \cdot (r_j - r_P) \quad (4.153)$$

où  $\psi$  est le limiteur de flux, et  $r$  est le vecteur position. Au lieu d'imposer la condition de l'équation 4.145 sur le volume de contrôle, elle est appliquée aux points d'intégration des faces de la cellule, ce qui modifie l'équation 4.152 :

$$\min(\phi_N, \phi_P) \leq R_P(r_f) \leq \max(\phi_N, \phi_P) \forall N \in \text{Voisins}(P) \quad (4.154)$$

où  $f$  est le centroïde d'une face de la cellule. Le calcul de la valeur du limiteur  $\psi$  est réalisé en deux étapes :

1. La reconstruction du polynôme est évaluée à chaque point d'intégration de la face de la cellule afin de déterminer la valeur de  $\psi_f$  qui satisfait la relation :

$$\min(\phi_N, \phi_P) \leq R_P(r_f) = \phi_P + \psi \nabla \phi_P \cdot (r_f - r_P) \leq \max(\phi_N, \phi_P) \quad (4.155)$$

qui peut être réécrite sous la forme

$$\psi_f = \begin{cases} \Phi \left( \frac{\max(\phi_N, \phi_P) - \phi_P}{\nabla \phi_P \cdot (r_f - r_P)} \right) & \phi_f > \phi_P \\ \Phi \left( \frac{\phi_P - \min(\phi_N, \phi_P)}{\nabla \phi_P \cdot (r_f - r_P)} \right) & \phi_f < \phi_P \\ 1 & \phi_f = \phi_P \end{cases} \quad (4.156)$$

où

$$\Phi(x) = \min(x, 1) \quad (4.157)$$

2. La valeur du limiteur est calculée comme la valeur minimale de  $\psi$  sur toutes les faces de la cellule, c'est-à-dire

$$\psi_P = \min(\psi_f) \quad (4.158)$$

#### 4.3.8.3 Schéma Venkatakrisnan

En raison du problème de convergence trouvé avec le limiteur, Venkatakrisnan [56], [57] a proposé une version modifiée du limiteur original. Le limiteur modifié est basé sur la fonction dérivable :

$$\Phi(x) = \frac{x^2 + 2x + \varepsilon^2}{x^2 + x + 2 + \varepsilon^2} \quad (4.159)$$

Le rôle de la constante  $\varepsilon^2$  est de désactiver le limiteur dans les régions où l'écoulement est régulier, avec sa valeur spécifiée comme  $\varepsilon^2 = (Kh)^3$  où  $K$  est une constante définie par l'utilisateur, et  $h$  la taille du maillage local.

Il est à noter que, pour une discrétisation unidimensionnelle, le schéma de Barth et Jespersen peut être équivalent au schéma TVD-MUSCL.

## 4.4 Méthode des moindres carrés mobiles (MLS)

Cette méthode a été proposée en 1981 par Lancaster et Salkauskas [58] pour la reconstruction de surfaces à partir d'une série de points arbitrairement placés. Elle a été largement analysée et utilisée dans le domaine des méthodes sans maillage. Les fondements de cette méthode sont décrits dans cette section.

### 4.4.1 Formulation générale de la méthode MLS

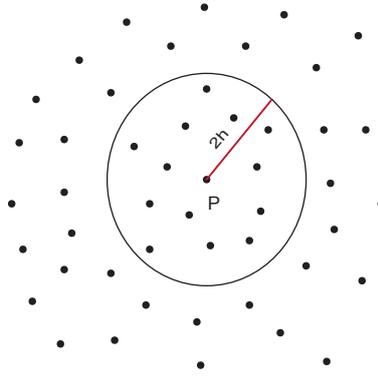
On considère une certaine fonction  $u(x)$  définie dans le domaine  $\Omega$ . La méthode MLS reconstruit la valeur de  $u(x)$  en un point déterminé  $x$  par un ajustement de moindres carrés pondérés dans un environnement de  $x$ . C'est-à-dire :

$$u(x) \approx \hat{u}(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) \alpha_i(z) \Big|_{z=x} = p^T(x) \alpha(z) \Big|_{z=x} \quad (4.160)$$

où  $p^T(x)$  sont des fonctions de base de dimension  $m$  et  $\alpha(z) \Big|_{z=x}$  est un ensemble de paramètres à déterminer, pour minimiser l'expression suivante :

$$J(\alpha(z) \Big|_{z=x}) = \int_{y \in \Omega_x} W(z-y, h) \Big|_{z=x} [u(y) - p^T(y) \alpha(z) \Big|_{z=x}]^2 d\Omega_x \quad (4.161)$$

$W(z-y, h) \Big|_{z=x}$  est un *Kernel* (ou fonction de lissage) à support compact ( $\Omega_x$ ) centré en  $z = x$ . Le para-

FIGURE 4.9 : Support compact  $\Omega_x$  centré sur  $P$ .

mètre  $h$  est la longueur de lissage (smoothing length), et est une mesure de la taille de  $\Omega_x$ . Il peut être considéré comme une mesure de l'erreur d'approximation.

Le processus de minimisation de  $J$  conduit à :

$$\int_{y \in \Omega_x} p(y) W(z-y, h) \Big|_{z=x} u(y) d\Omega_x = M(x) \alpha(z) \Big|_{z=x} \quad (4.162)$$

étant  $M(x)$  la matrice de moments définie comme :

$$M(x) = \int_{y \in \Omega_x} p(y) W(z-y, h) \Big|_{z=x} p^T(y) \quad (4.163)$$

Dans l'application pratique de cette méthode, le domaine  $\Omega$  est représenté pour un ensemble de points dispersés (nuage de points). Les intégrales 4.162 et 4.163 s'évaluent en utilisant les points qui se trouvent dans  $\Omega_x$  comme points de quadrature, en obtenant l'expression suivante

$$\alpha(z) \Big|_{z=x} = M^{-1}(x) P_{\Omega_x} W(x) u_{\Omega_x} \quad (4.164)$$

Le vecteur  $u_{\Omega_x}$

$$u_{\Omega_x} = (u(x_1) \ u(x_2) \ \cdots \ u(x_{n_x}))^T \quad (4.165)$$

contient les valeurs nodales de la fonction  $u_x$  qui va être reconstruite, évaluée dans les nœuds appartenants à  $\Omega_x$ . Schématiquement, ceci est représenté sur la figure 4.9

L'expression discrète de la matrice de moments est une matrice  $m \times m$  donnée par  $M(x) = P_{\Omega_x} W(x) P_{\Omega_x}^T$  où  $P_{\Omega_x}$ , de dimension  $m \times n_x$  et  $W(x)$  de dimension  $n_x \times n_x$  s'obtiennent comme

$$P_{\Omega_x} = (p(x_1) p(x_2) \cdots p(x_{n_x})) \quad (4.166)$$

$$W(x) = \text{diag} \{W_i(x - x_i)\} \quad i = 1, \dots, n_x \quad (4.167)$$

De cette façon, de l'équation 4.161 et 4.164 se déduit l'interpolation MLS qui peut s'exprimer de la façon suivante

$$\hat{u}(x) = \underbrace{p^T(x)}_{m \times 1} \underbrace{M^{-1}(x)}_{m \times m} \underbrace{P_{\Omega_x}}_{m \times n_x} \underbrace{W(x)}_{n_x \times n_x} \underbrace{u_{\Omega_x}}_{n_x \times 1} = \underbrace{N^T(x)}_{m \times n_x} \underbrace{u_{\Omega_x}}_{n_x \times 1} = \sum_{j=1}^{n_x} N_j(x) u_j \quad (4.168)$$

Ainsi, par analogie avec l'interpolation du type des éléments finis, l'approximation peut se faire en termes de fonctions de forme définies dans le sens des moindres carrés mobiles (MLS), calculées comme :

$$N^T(x) = p^T(x) M^{-1}(x) P_{\Omega_x} W(x) \quad (4.169)$$

#### 4.4.2 Fonctions de base

Les fonctions de base  $p(x)$  ont un rôle crucial dans la précision de l'approximation par moindres carrés mobiles. Il existe une série d'essais numériques qui montrent que pour une base de polynômes d'ordre  $r$ , l'ordre nominal de précision dans le calcul des dérivées d'ordre  $s$  est environ  $(r - s + 1)$ . L'approximation MLS est capable de reconstruire exactement n'importe quelle combinaison linéaire de fonctions  $y$  comprise la base, d'où l'importance de son choix. Normalement sont utilisées pour ces fonctions des fonctions polynômiques de base. Ainsi, par exemple, on peut mentionner la base polynômiale ci-dessous

$$p(x) = (1, x, y, z, xy, xz, yz, x^2, y^2, z^2) \quad (4.170)$$

où  $(x, y, z)$  sont les coordonnées cartésiennes du vecteur  $(x)$ .

Pour obtenir une reconstruction cubique, il faudrait ajouter les termes de troisième ordre :

$$(x^2y, x^2z, y^2x, y^2z, z^2x, z^2y, xyz, x^3, y^3, z^3) \quad (4.171)$$

La relation entre la méthode MLS et les autres comme le Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) est très étroite. L'une des améliorations que le RKPM introduit est de définir localement et de mettre à l'échelle les monômes qui forment la base. Cette modification offre un meilleur conditionnement de la matrice de moments. De cette façon, si les fonctions de forme  $N(x)$  sont évaluées au point  $x_I$ , les

fonctions de base 4.170 s'évaluent dans  $p\left(\frac{x-x_I}{h}\right)$ . Donc, l'expression 4.169 peut s'écrire de la façon suivante :

$$N^T(x_I) = p^T(0)M^{-1}(x_I)P_{\Omega_{x_I}}W(x_I) = p^T(0)C(x_I) \quad (4.172)$$

avec :

$$C(x_I) = M^{-1}(x_I)P_{\Omega_{x_I}}W(x_I) \quad (4.173)$$

#### 4.4.3 Calcul des dérivées

Les dérivées de la fonction  $u(x)$  s'obtiennent sous forme approximée à partir des dérivées de la fonction  $\hat{u}(x)$  de forme

$$\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \approx \frac{\partial \hat{u}(x)}{\partial x_\alpha} \Big|_{x=x_I} = \sum_{j=1}^{n_{x_I}} \frac{\partial N_j(x)}{\partial x_\alpha} \Big|_{x=x_I} u_j \quad (4.174)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \approx \frac{\partial^2 \hat{u}(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Big|_{x=x_I} = \sum_{j=1}^{n_{x_I}} \frac{\partial^2 N_j(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Big|_{x=x_I} u_j \quad (4.175)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \approx \frac{\partial^3 \hat{u}(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \Big|_{x=x_I} = \sum_{j=1}^{n_{x_I}} \frac{\partial^3 N_j(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \Big|_{x=x_I} u_j \quad (4.176)$$

où les sous indices  $\alpha, \beta, \gamma$  varient de 1 à 3. Les dérivées des fonctions de forme MLS peuvent s'obtenir de l'expression (4.172).

$$\frac{\partial N^T(x)}{\partial x_\alpha} \Big|_{x=x_I} = \frac{\partial p^T(0)}{\partial x_\alpha} C(x_I) + p^T(0) \frac{\partial C(x_I)}{\partial x_\alpha} \quad (4.177)$$

$$\frac{\partial^2 N^T(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Big|_{x=x_I} = \frac{\partial^2 p^T(0)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} C(x_I) + p^T(0) \frac{\partial^2 C(x_I)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial p^T(0)}{\partial x_\alpha} \frac{\partial C(x_I)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial p^T(0)}{\partial x_\beta} \frac{\partial C(x_I)}{\partial x_\alpha} \quad (4.178)$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^3 N^T(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \right|_{x=x_I} &= \frac{\partial^3 p^T(0)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} C(x_I) + \frac{\partial^2 p^T(0)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{\partial C(x_I)}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial^2 p^T(0)}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma} \frac{\partial C(x_I)}{\partial x_\beta} + \\
&+ \frac{\partial p^T(0)}{\partial x_\alpha} \frac{\partial^2 C(x_I)}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} + \frac{\partial^2 p^T(0)}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} \frac{\partial C(x_I)}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial p^T(0)}{\partial x_\beta} \frac{\partial^2 C(x_I)}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma} + \\
&+ \frac{\partial p^T(0)}{\partial x_\gamma} \frac{\partial^2 C(x_I)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + p^T(0) \frac{\partial^3 C(x_I)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}
\end{aligned} \quad (4.179)$$

Afin de réduire l'effort de calcul des dérivées des fonctions de forme, il est possible d'utiliser des « dérivées diffuses ». Les dérivées diffuses résultent de la non considération des dérivées successives de la matrice  $C(x_I)$  donnée par l'équation 4.173. Ainsi, les dérivées premières et deuxièmes « complètes » des fonctions de forme s'approchent par les dérivées diffuses suivantes :

$$\left. \frac{\partial N^T(x)}{\partial x_\alpha} \right|_{x=x_I} \approx \frac{\partial p^T(0)}{\partial x_\alpha} C(x_I) \quad (4.180)$$

$$\left. \frac{\partial^2 N^T(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right|_{x=x_I} \approx \frac{\partial^2 p^T(0)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} C(x_I) \quad (4.181)$$

Les résultats obtenus avec cette technique sont aussi précis qu'avec l'utilisation des dérivées complètes. De plus, on peut démontrer que les dérivées diffuses convergent de mode optimale aux dérivées exactes. Les monômes de la base polynomiale étant mis à l'échelle locale, le terme  $p^T(0)$  et ses dérivées successives sont des vecteurs avec un seul terme non nul, qui a une valeur constante, égalé à 1, dans le cas de  $p^T(0)$  qui est dépendante de  $h$  pour ses dérivées. Par exemple, la valeur de  $\frac{\partial p^T(0)}{\partial x_\alpha}$  est :

$$\frac{\partial p^T(0)}{\partial x_\alpha} = \left( 0, \frac{1}{h}, 0, 0, \dots, 0 \right) \quad (4.182)$$

De cette manière, les dérivées diffuses des fonctions de forme s'obtiennent directement à partir des lignes de  $C(x_I)$  multipliées par des paramètres dépendant de la longueur du lissage  $h$ . Dans ce travail, on a calculé les dérivées premières avec leur expression « complète », pendant les dérivées d'ordre supérieur ont été calculés à partir des dérivées diffuses.

#### 4.4.4 Fonctions de Kernel

L'objectif du Kernel est de pondérer chaque point intervenant dans l'interpolation. Les Kernels les plus fréquemment utilisés sont les splines, les gaussiens et les fonctions exponentielles. D'après Monaghan [59], une fonction Kernel  $W(x - x_i, h)$  doit être :

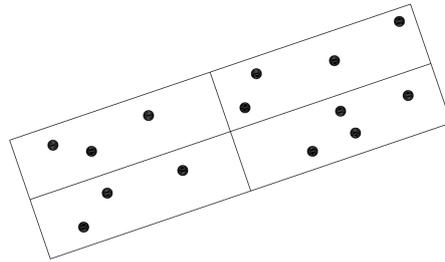


FIGURE 4.10 : Support rectangulaire, obtenu à partir de différentes longueurs de lissage, et prenant le Kernel comme le produit des Kernels en chaque direction.

- Positive.
- Définie en support compact dans le stencil afin de garantir une interaction zéro avec les particules en dehors du stencil.
- Normale :  $\int_{\Omega} W(x - x_i, h) dy = 1$ .
- Décroissante quand  $\|x - x_i\|$  augmente.
- $W(x - x_i, h)$  tend vers la fonction de Dirac  $\delta(x)$  quand  $h$  tend vers zéro.

Dans cette étude, la fonction Kernel exponentielle semble être la plus appropriée. Elle est définie en 1D comme suit :

$$W(x, x_i, \kappa) = \frac{e^{-\left(\frac{s}{c}\right)^2} - e^{-\left(\frac{d_m}{c}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{d_m}{c}\right)^2}} \quad (4.183)$$

avec  $s = |x - x_i|$ ,  $d_m = \max(|x - x_i|)$ ,  $c = \frac{d_m}{2\kappa}$ . De plus,  $\kappa$  est un paramètre de forme et  $x_i$  est un point de référence autour duquel se centre la fonction Kernel. Les fonctions Kernel sont définies en support compact, limité par la longueur de lissage (smoothing length)  $h$ . Dans un problème bidimensionnel, si la même longueur de lissage est utilisée pour chaque direction, le support serait un cercle de rayon  $2h$  (figure 4.9), tandis que dans le cas tridimensionnel, ce serait une sphère. Il est possible d'utiliser différentes longueurs de lissage pour chaque direction, dans ce cas, le Kernel doit être défini. Ainsi, si on définit le Kernel comme le produit des Kernels de chaque direction, on obtiendrait un rectangle en 2D (figure 4.10) et un prisme en 3D. Il est aussi possible d'utiliser un Kernel donné pour une direction et un autre pour les autres directions. L'utilisation de Kernel anisotropes est recommandée dans le cas de distributions de nœuds très différents en chaque direction.

### Cas bidimensionnel

La fonction de Kernel en 2D s'obtient en multipliant deux fonctions 1D.

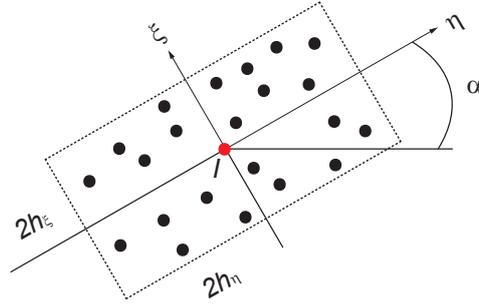


FIGURE 4.11 : Orientation des axes d'inertie en 2D.

$$W(x, x_i, \kappa_x, \kappa_y) = W(x, x_i, \kappa_x)W(y, y_i, \kappa_y) \quad (4.184)$$

Dans le cas bidimensionnel, les supports sont rectangulaires et sont définis par la longueur de leurs côtés et par l'angle de rotation  $\alpha$  défini en appliquant l'analogie des moments d'inertie, en tenant compte des directions principales du tenseur :

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{pmatrix} \quad (4.185)$$

Avec

$$I_{xx} = \sum_{j=1}^{n_x} (x_j - x_I)^2 \quad (4.186)$$

$$I_{xy} = \sum_{j=1}^{n_x} (x_j - x_I)(y_j - y_I) \quad (4.187)$$

$$I_{yy} = \sum_{j=1}^{n_x} (y_j - y_I)^2 \quad (4.188)$$

La direction de ces axes peut être déterminée (figure 4.11) par l'équation

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}} \right) \quad (4.189)$$

En utilisant un changement de coordonnées locales, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.190)$$

Si on considère  $A = \cos \alpha$  et  $B = \sin \alpha$ , on a :

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.191)$$

Après que les coordonnées des points du stencil aient été transformées, la fonction de forme  $N(x)$  et ses dérivées sont calculées dans le nouveau repère en employant les longueurs de lissage dans chaque nouvelle direction :

$$h_\eta = \kappa_1 \max(\|\eta_j - \eta_I\|) \quad j = 1, \dots, n_{x_I} \quad (4.192)$$

$$h_\xi = \kappa_2 \max(\|\xi_j - \xi_I\|) \quad j = 1, \dots, n_{x_I} \quad (4.193)$$

La fonction Kernel rectangulaire correspondante est donnée par :

$$W = W(\eta - \eta_I, h_\eta) W(\xi - \xi_I, h_\xi) \quad (4.194)$$

Tandis que les fonctions de forme dans l'espace transformé sont égales aux fonctions de forme dans l'espace physique, les dérivées doivent être retournées (rotation) à l'espace physique. Par exemple, la dérivée d'ordre 1 est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (4.195)$$

les dérivées secondes sont données par l'expression :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 N}{\partial \eta \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \eta \partial \xi} & \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \quad (4.196)$$

La forme générale est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha N}{\partial x^{(\alpha-\beta)} \partial y^\beta} &= \sum_{\gamma=0}^{\alpha-\beta} C_\gamma^{\alpha-\beta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^{(\alpha-\beta-\gamma)} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^\gamma \\ &\times \sum_{\lambda=0}^{\beta} C_\lambda^\beta \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^{(\beta-\lambda)} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^\lambda \frac{\partial^\alpha N}{\partial \eta^{(\alpha-\gamma-\lambda)} \partial \xi^{(\gamma+\lambda)}} \end{aligned} \quad (4.197)$$

$$\text{où : } C_\gamma^{\alpha-\beta} = \frac{(\alpha-\beta)!}{\gamma!(\alpha-\beta-\gamma)!} \text{ et } C_\lambda^\beta = \frac{\beta!}{\lambda!(\beta-\lambda)!}$$

### Cas tridimensionnel

La procédure pour construire des Kernels tridimensionnels est la même que pour le cas bidimensionnel.

$$W(x, x_i, y_i, z_i, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_z) = W(x, x_i, \kappa_x) W(y, y_i, \kappa_y) W(z, z_i, \kappa_z) \quad (4.198)$$

Il est possible que les paramètres de forme de chaque direction ( $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$ ) soient différents, et de cette façon, un Kernel non isotrope pourrait être construit. Le choix des valeurs des paramètres de forme a une influence sur les propriétés de dispersion et de dissipation de la méthodologie des volumes finis avec une interpolation basée sur schémas de moindres carrés mobiles.

## 4.5 Approche volumes finis et approximation par moindres carrés mobiles, FV-MLS

La méthode FV-MLS combine l'utilisation de techniques d'approximation MLS avec un schéma d'ordre élevé de volumes finis du type de Godunov Généralisé, applicable aux maillages non structurés. L'obtention d'ordres élevés dans ces maillages avec schémas traditionnels de volumes finis est limitée par le calcul des gradients et des dérivées successives. L'utilisation du schéma MLS permet de surmonter cette limitation, étant donné qu'elle permet d'obtenir de bonnes approximations à partir d'un nuage de points. Les premiers travaux sur la méthode FV-MLS ont été réalisés par Cueto-Felgueroso et al. [60], Cueto-Felgueroso et al. [61] et Khelladi et al. [62].

### 4.5.1 Principe de la méthode FV-MLS

La méthode FV-MLS est la combinaison de la méthode des volumes finis et de la méthode MLS (moindres carrés mobiles). MLS va nous permettre de reconstruire les valeurs des variables  $U$  par des approximations et de calculer les vecteurs de flux  $F(U)$  (convectifs et diffusifs) aux frontières des cellules.

Ainsi, en divisant le domaine en un ensemble de volumes de contrôle (cellules ou éléments) qui ne se superposent pas :

$$\int_{\Omega_I} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_I} \frac{\partial F(U)}{\partial x} d\Omega = 0 \quad (4.199)$$

L'équation 4.199 s'applique à chaque volume de contrôle  $\Omega_I$ . En appliquant le théorème de la divergence à l'intégrale des flux en 4.199, on obtient :

$$\int_{\Omega_I} \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma_I} F(U) \cdot \vec{n} d\Gamma = 0 \quad (4.200)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur extérieur unitaire normal au contour  $\Gamma_I$  du volume de contrôle  $\Omega_I$ . L'hypothèse de base de la méthode est que pour un instant déterminé  $t$  la solution est constante par morceaux (voir figure 4.12). Ainsi, les données pour un instant  $t_n$  peuvent être vues comme des paires d'états constants ( $U_I^n, U_{I+1}^n$ ) séparés par une discontinuité à l'interface entre les cellules.

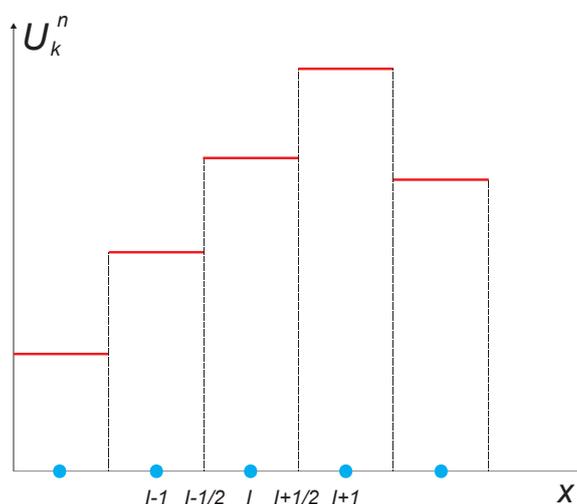


FIGURE 4.12 : Solution constante par morceaux pour un instant  $n$ . Sur l'axe  $x$  est indiqué le nœud  $I$  et ses voisins,  $I + 1$ ,  $I - 1$ . Les interfaces entre les volumes de contrôle sont indiquées avec la notation  $I + \frac{1}{2}$ ,  $I - \frac{1}{2}$ .

### Construction de schémas d'ordre supérieur

L'augmentation de l'ordre du schéma numérique consiste à améliorer la reconstruction des variables à l'intérieur de la cellule. Ainsi, par exemple, il est possible de remplacer l'hypothèse de solution constante à l'intérieur de chaque cellule par une reconstruction continue de la solution. Cette reconstruction peut se réaliser de diverses manières, la plus usuelle étant la reconstruction polynomiale. Ainsi, la solution continue reste discontinue entre les cellules, comme on peut le voir sur la figure 4.13, mais les valeurs des variables à l'interface ne sont pas les valeurs aux centroïdes des cellules adjacentes, mais des valeurs extrapolées. Cette forme de comportement est appelée Méthode de Godunov Généralisée. Ainsi, le schéma MUSCL (Monotone Upstream-centred Scheme for Conservation Laws) proposé par Van Leer [63] utilise des reconstructions linéaires atteignant un deuxième ordre. Pour les maillages structurés, ces méthodes ont été appliquées avec succès, cependant, pour le cas de maillages non structurés, l'application directe de ces méthodes de reconstruction n'est pas possible. Il existe des solutions qui présentent un caractère unidimensionnel et qui ont une dépendance de la géométrie du maillage. Il existe des techniques de reconstruction avec un caractère multidimensionnel, comme les techniques citées de reconstruction avec ajustement des moindres carrés ou de formes discrètes du théorème de Green-Gauss. La reconstruction par les moindres carrés mobiles permet aussi des reconstructions à caractère multidimensionnel. L'idée générale pour augmenter l'ordre de la reconstruction des variables en chaque cellule implique l'utilisation des séries de Taylor.

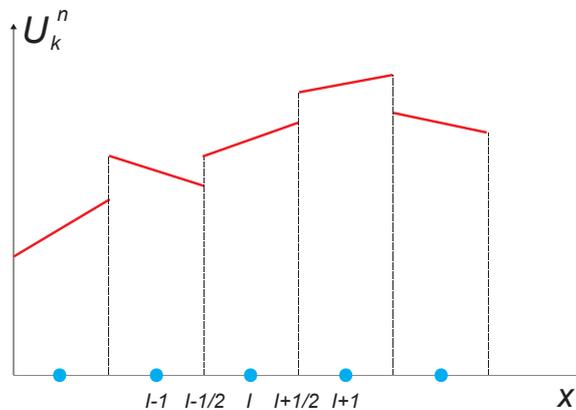


FIGURE 4.13 : Reconstruction linéaire par morceaux pour un instant  $n$ . Sur l'axe  $x$  est indiqué le nœud  $I$  et ses voisins,  $I + 1$ ,  $I - 1$ . Les interfaces entre les volumes de contrôle sont indiquées avec la notation  $I + \frac{1}{2}$ ,  $I - \frac{1}{2}$ .

$$U(x) = U_I + \nabla U_I \cdot (x - x_I) + \dots \quad (4.201)$$

où  $U_I$  est la valeur moyenne associée au centroïde de la cellule  $I$ , de coordonnées  $x_I$ , et  $\nabla U_I$  est le

gradient de  $U$  évalué au centroïde de  $I$ . Donc, à partir de la valeur au centroïde de la cellule, la valeur de la variable sur les points d'intégration aux interfaces entre les éléments est reconstruite afin d'évaluer l'intégrale du contour dans l'équation 4.200. Finalement, l'ordre du schéma augmente grâce à l'amélioration de la reconstruction des variables à l'intérieur de la cellule.

La principale difficulté pour appliquer les méthodes d'ordre élevé aux maillages non structurés réside dans le calcul des gradients et des dérivées d'ordre élevé. C'est pour cela que la plupart des méthodes existantes atteignent le deuxième ordre. Cependant, une caractéristique avantageuse de cette méthode est que, à la différence des méthodes du type éléments finis, on peut augmenter l'ordre sans augmenter le nombre de degrés de liberté.

D'autre part, on doit prendre en compte que dans l'équation 4.201 interviennent des valeurs moyennes et des dérivées évaluées ponctuellement. Ainsi, pour des ordres supérieures à 1, la reconstruction ne conserve pas la valeur moyenne et il est nécessaire de modifier la discrétisation de l'équation 4.200. D'après Venkatakrisnan [57], l'équation peut s'écrire comme :

$$\frac{\partial(\Omega[M]U)}{\partial t} + R(U) = 0 \quad (4.202)$$

où  $R(U)$  est le vecteur résidu qui approxime la deuxième intégrale de 4.200,  $\Omega$  est la dimension du volume de contrôle (surface en 2D) et  $[M]$  est la matrice masse. La matrice de masse apparaît parce que la variation de la valeur de  $U$  donnée par  $R(U)$  doit s'approcher de la valeur moyenne de  $U$  dans le volume de contrôle et non des valeurs ponctuelles associées au centroïde. De cette façon, la matrice de masse fait le lien entre la valeur moyenne de la variable dans un volume de contrôle avec la valeur ponctuelle de la variable dans le centroïde de la cellule. Le système donné par l'équation 4.202 est ainsi couplé. Dans les problèmes non-stationnaires, ceci nécessite de résoudre un système d'équations même avec l'utilisation de schémas explicites. Cependant, il est possible d'utiliser une technique connue comme « mass-lumping », qui consiste à remplacer la matrice masse par la matrice identité. Cette technique maintient la précision jusqu'au deuxième ordre dans des schémas de type cell-centered (avec les variables calculées aux centroïdes des cellules) des volumes finis, parce que bien que la reconstruction donnée par 4.201 utilise des valeurs ponctuelles, dans le cas d'une reconstruction linéaire, elle coïncide avec la reconstruction en termes de valeurs moyennes. Pour des schémas d'ordre supérieur, il est nécessaire d'introduire la matrice masse. Il faut souligner que pour les cas de problèmes stationnaires, le « mass-lumping » peut être utilisé sans restriction d'ordre.

Il est possible de négliger la matrice masse si la reconstruction 4.201 se réalise exclusivement en fonction des valeurs moyennes, auxquelles sont ajoutées certains termes afin d'assurer la conservation de la valeur moyenne.

## Nuage de points

Concernant la combinaison de la méthode MLS avec un schéma de volumes finis, il est nécessaire de définir les points qui vont intervenir dans la reconstruction MLS. La méthode MLS est capable de reconstruire une fonction à partir d'un nuage de points dispersés, parce que c'est une méthode d'approximation sans maillage. D'autre part, la méthode FV-MLS, qui est basée sur un schéma de volumes finis, a besoin d'un maillage et les valeurs des variables seront calculées aux centroïdes de chaque cellule, selon le schéma de volumes finis utilisé. Dans ce cas, le schéma utilisé calcule les valeurs des variables conservatives en chaque centroïde. Ainsi, les centroïdes vont être les points qui permettent aux différents nuages d'appliquer la méthode MLS.

Pour effectuer les calculs, il est nécessaire de définir une série de modèles (stencils) qui déterminent le nuage de nœuds pour chaque point où l'approximation est évaluée. Si les nuages des voisins ne changent pas dans le temps, il est nécessaire de réaliser la construction des stencils une seule fois. Pour éviter que la matrice de moments  $M$  soit singulière ou mal conditionnée, le nuage de points voisins doit répondre à certains critères.

D'une manière générale, pour plus d'efficacité dans les calculs, le stencil doit être le plus compact possible. Ainsi il doit vérifier les points suivants :

- L'union des stencils doit recouvrir tout le domaine de calcul.
- Le nombre de cellules englobées dans chaque stencil  $n_{x_I}$  doit être optimisé ( $n_{min} \leq n_{x_I} \leq n_{max}$ ) de façon à obtenir une meilleure stabilité et minimiser les effets dissipatifs, ce nombre optimal  $n_{x_I}$  est fonction de l'ordre de précision du schéma et de la dimension  $m$  du polynôme.  $n_{max} = n_{min} + p$ , où  $p$  est un nombre de points additionnels à déterminer, de façon à obtenir un équilibre barycentrique autour de la cellule considérée. Si  $p$  est très grand, on observera des effets dissipatifs et si  $p$  est égal à zéro, cela impliquera des instabilités, dans notre cas  $p$  est compris entre 5 et 15. D'autre part,  $n_{min}$  doit garantir l'inversibilité de la matrice de moment  $M$  ainsi calculée en tout point, cette matrice ne doit pas être singulière, ce qui implique  $n_{x_I} \geq m$  (le nombre de fonctions de base). Dans la pratique, le nombre de voisins est choisi légèrement supérieur à  $m$ . Il est important de rappeler que la taille de  $M$  ne dépend pas du nombre de voisins inclus dans le nuage, ou bien du nombre de fonctions de base. 
$$n_{min} = C_{dim}^{ordre+dim}.$$

Les figures 4.14 et 4.15 montrent les stencils compact et non compact. Le nuage doit être le plus compact possible pour éviter l'influence de points placés excessivement loin du point d'évaluation et maintenir le caractère local et l'efficacité du schéma.

Une fois l'ensemble des cellules qui forment le nuage de points pour l'utilisation de la méthode MLS déterminé, on peut obtenir la longueur de lissage  $h$  qui définit la mesure du support compact du Kernel. Elle est proportionnelle à la distance maximale entre le point d'évaluation  $x_I$  et les nœuds du nuage :

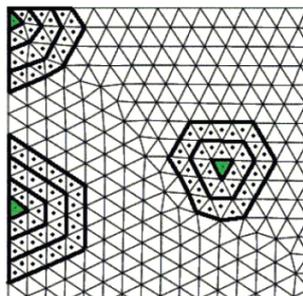


FIGURE 4.14 : Stencil pour l'approximation MLS. Stencil compact.

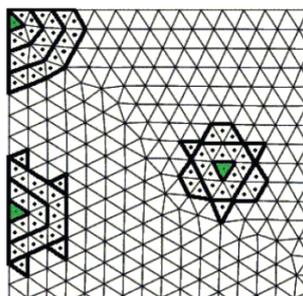


FIGURE 4.15 : Stencil pour l'approximation MLS. Stencil non compact.

$$h = k \max(\|x - x_I\|) \quad (4.203)$$

Les valeurs de  $k$  dépendent de la taille du stencil et de la forme de la fonction Kernel. Avec le Kernel exponentiel, la valeur utilisée est  $k = 1$ . Ces valeurs ne sont pas les mêmes pour les nuages définis et pour les centroïdes (employés pour les termes hyperboliques) et les définis sont pour les points d'intégration aux interfaces (employés pour les termes visqueux).

#### 4.5.2 Application aux équations de Navier Stokes en deux dimensions

Dans le domaine de la mécanique des fluides numérique, la méthode FV-MLS utilise l'approximation MLS pour le traitement de :

- Flux non visqueux : calcul de gradients et dérivées successives par l'extrapolation des valeurs des variables aux interfaces entre les volumes de contrôle. Avec ces dérivées, nous obtenons une reconstruction d'ordre élevé des variables en chaque cellule, par l'utilisation de développements polynômiaux de Taylor. Les points où seront évalués les fonctions de forme MLS seront les centroïdes des cellules.
- Flux visqueux : les flux visqueux s'obtiennent directement à l'interface, cette approche permet une discrétisation plus précise et beaucoup plus claire des termes diffusifs que ceux employés

habituellement par d'autres méthodes d'ordre élevé. Les points où seront évalués les fonctions de forme MLS vont être les points d'intégration aux interfaces des volumes de contrôle.

On peut écrire l'équation 4.27 comme suit

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(F^{NV} - F^V)}{\partial x} + \frac{\partial(G^{NV} - G^V)}{\partial y} = 0 \quad (4.204)$$

soit

$$F^{NV} = \begin{bmatrix} \rho(u - u_{grille}) \\ \rho u(u - u_{grille}) + P \\ \rho v(u - u_{grille}) \\ \rho w(u - u_{grille}) \\ u(\rho(e + V^2/2) + P) - u_{grille}\rho(e + V^2/2) \end{bmatrix} \quad F^V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x \end{bmatrix} \quad (4.205)$$

$$G^{NV} = \begin{bmatrix} \rho(v - v_{grille}) \\ \rho u(v - v_{grille}) \\ \rho v(v - v_{grille}) + P \\ \rho w(v - v_{grille}) \\ v(\rho(e + V^2/2) + P) - v_{grille}\rho(e + V^2/2) \end{bmatrix} \quad G^V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y \end{bmatrix} \quad (4.206)$$

et

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (4.207)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (4.208)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (4.209)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.210)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (4.211)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (4.212)$$

$\mathcal{F}^{NV} = (F^{NV}, G^{NV})$  est le flux non visqueux, et  $\mathcal{F}^V = (F^V, G^V)$  le flux visqueux.  $U$  est le vecteur de variables conservatives,  $\vec{V} = (u, v, w)$  est le vecteur vitesse,  $\mu$  est la viscosité effective du fluide,  $e$  est l'énergie interne et  $\rho$  est la densité.

Le flux thermique  $q = (q_x, q_y, q_z)$ , se calcule par la loi de Fourier :

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.213)$$

### 4.5.3 Approximations MLS (Moving Least Squares)

Les schémas d'ordre élevé traditionnels se construisent par la substitution d'une représentation constante de la solution dans chaque volume de contrôle par une représentation continue (normalement polynomiale) des variables à l'intérieur de chaque cellule. Comme les variables reconstruites sont toujours discontinues à l'interface des cellules, la discrétisation des termes visqueux doit s'effectuer avec prudence.

Cette procédure est différente de la méthode FV-MLS, qui travaille avec des valeurs ponctuelles des variables conservatives, associées aux centroïdes des cellules. La représentation spatiale donnée par l'approximation MLS est continue et d'un ordre de précision élevée. De cette façon, l'approximation des termes elliptiques (par exemple les termes visqueux) est directe. Cette facilité d'approximation des termes visqueux présente un grand avantage sur les méthodes comme Galerkin Discontinu, où la discrétisation des termes visqueux est un problème à traiter de manière discontinue.

Le traitement des termes hyperboliques est différent. Dans ce cas, la représentation continue de la solution est rompue pour obtenir une représentation continue dans chaque cellule à l'aide des séries de Taylor. De cette façon on obtient une méthode qui peut profiter du bon fonctionnement de la technique de volumes finis avec les termes hyperboliques (car il s'agit d'une méthode de type Godunov Généralisé) mais qui présente une discrétisation plus claire et plus précise des termes elliptiques, pour maintenir une représentation continue de ces termes.

### 4.5.4 Calcul des flux

#### 4.5.4.1 Flux non visqueux

Pour appliquer le schéma des volumes finis, on utilise une méthode de reconstruction précise pour évaluer les variables aux points d'intégration des interfaces de chaque volume de contrôle. Une façon

commune de réaliser cette reconstruction est d'utiliser des séries de Taylor. Ainsi, la reconstruction linéaire en 2D des variables conservatives dans chaque cellule  $I$  peut s'exprimer comme :

$$U(x)|_I = U_I + (x - x_I) \frac{\partial U_I}{\partial x} + (y - y_I) \frac{\partial U_I}{\partial y} + (x - x_I)(y - y_I) \frac{\partial^2 U_I}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} (x - x_I)^2 \frac{\partial^2 U_I}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (y - y_I)^2 \frac{\partial^2 U_I}{\partial y^2} + \dots \quad (4.214)$$

$U_I$  est la valeur moyenne de  $U$  dans la cellule  $I$  (valeur associée au centroïde),  $x_I$  représente les coordonnées cartésiennes du centroïde. On suppose que le gradient est constant dans chaque cellule, et que la variable reconstruite est discontinue entre deux cellules. Les dérivées nécessaires pour la reconstruction sont calculées en utilisant la méthode MLS. Avec cette opération, la continuité de la représentation spatiale de la variable donnée par les centroïdes des cellules est rompue. On peut ainsi définir la forme générale du développement de Taylor pour un ordre donné :

$$U(x)|_I = \sum_{\alpha=0}^N \left( \frac{1}{\alpha!} \underbrace{\left[ (x - x_I) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_I) \frac{\partial}{\partial y} \right]^\alpha}_{B} U_I \right) \quad (4.215)$$

où  $N$  est l'ordre du développement et  $B$  a une forme polynomiale de type :

$$(a + b)^\alpha = \sum_{\beta=0}^{\alpha} C_{\beta}^{\alpha} a^{\alpha-\beta} b^{\beta} \quad (4.216)$$

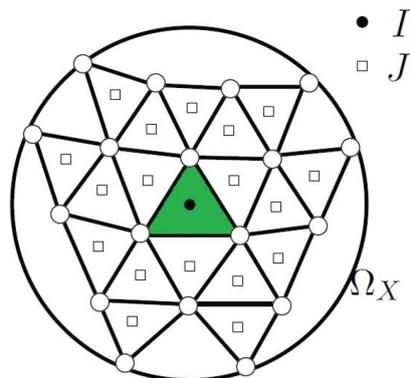
avec  $C_{\beta}^{\alpha} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$

$$a^{\alpha-\beta} b^{\beta} = (x - x_I)^{\alpha-\beta} (y - y_I)^{\beta} \frac{\partial^{\alpha} U_I}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^{\beta}} \quad (4.217)$$

au final, la forme générale du développement de Taylor de  $U$  au voisinage de  $I$  est donnée par :

$$U(x)|_I = U_I + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=0}^{\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} (x - x_I)^{\alpha-\beta} (y - y_I)^{\beta} \frac{\partial^{\alpha} U_I}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^{\beta}} + O(N) \quad (4.218)$$

Donc, la représentation générale de  $U(x)$ , qui est approchée ou reconstruite, est recherchée dans l'espace engendré par un ensemble de fonctions de forme  $N(x)$  associées aux nœuds, telles que  $U(x)$  est une fonction continue de forme :

FIGURE 4.16 : Stencil pour l'approximation de  $U(x)$ .

$$U(x)|_I = \sum_{j=1}^{n_{x_I}} N_j(x) U_j \quad (4.219)$$

L'équation 4.219 stipule que l'approximation en un point  $x$  au voisinage de  $I$ , est calculée en utilisant les nœuds  $n_x$  environnants. Dans un maillage non structuré triangulaire, si l'on considère  $I$  le centroïde de la cellule active et  $J$  les centroïdes des cellules  $n_x$  environnantes, cela conduit à la construction du stencil autour de  $I$ .

Toutes les dérivées peuvent être calculées en utilisant l'équation 4.219.

$$\frac{\partial^\alpha U_I}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta} \approx \sum_{j=1}^{n_{x_I}} \frac{\partial^\alpha N_j(x_I)}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta} U_j \quad (4.220)$$

Les dérivées d'ordre élevé de  $N(x_I)$  au centroïde de  $I$  sont données par :

$$\frac{\partial^\alpha N(x_I)}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta} = \frac{\partial^\alpha p^T(0)}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta} C(x_I) + p^T(0) \frac{\partial^\alpha C(x_I)}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta} \quad (4.221)$$

où  $\alpha$  est compris entre 0 et  $m$  et  $\beta$  entre 0 et  $\alpha$ . Les dérivées de l'équation précédente d'ordre supérieur à 2 du polynôme  $p$  sont simples à calculer contrairement à celles de la matrice  $C(x_I)$ . Pour des ordres supérieures à 2, les dérivées de la matrice  $C(x_I)$  sont négligeables par rapport à celles du polynôme  $p$ , ainsi l'équation devient :

$$\frac{\partial^\alpha N(x_I)}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta} \approx \frac{\partial^\alpha p^T(0)}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta} C(x_I) \quad (4.222)$$

La reconstruction de la variable  $U(x)|_I$  à l'ordre  $N$  est obtenue à partir de l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
U(x)|_I &= U_I + (x - x_I) \frac{\partial U_I}{\partial x} + (y - y_I) \frac{\partial U_I}{\partial y} \\
&+ \sum_{\alpha=2}^N \sum_{\beta=0}^{\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} \left[ (x - x_I)^{\alpha-\beta} (y - y_I)^{\beta} - \Phi_{\alpha\beta} \right] \frac{\partial^{\alpha} U_I}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^{\beta}} + O(N)
\end{aligned} \tag{4.223}$$

où  $\Phi_{\alpha\beta} = \frac{I_{x^{\alpha-\beta}y^{\beta}}}{A_I}$  sont des termes de correction définis comme suit :

$$I_{x^{\alpha}y^{\beta}} = \int_{A_I} (x - x_I)^{\alpha-1} (y - y_I)^{\beta} dA_I \tag{4.224}$$

Le terme  $I_{x^{\alpha}y^{\beta}}$  est calculé en utilisant une méthode « symmetric quadrature », proposé par Wandzura [64]

Comme on peut le constater, le calcul des dérivées complètes peut se réaliser à partir de l'utilisation de dérivées diffuses. Une fois les variables calculées sur les points d'intégration du contour des cellules, une fonction de flux numérique est utilisée pour évaluer les flux non visqueux.

#### 4.5.4.2 Flux visqueux

La discrétisation des termes visqueux est un problème pour les méthodes qui utilisent des approximations polynomiales continues par morceaux. En termes hyperboliques, la direction de propagation de l'information a un sens important, car elle permet de définir un problème de Riemann des deux côtés de l'interface et de définir une seule valeur de flux. Cependant, dans le cas de termes visqueux, de caractère elliptique, cela n'est pas possible. Par exemple, les schémas de deuxième ordre utilisent souvent la moyenne des dérivées des variables du flux de chaque côté de l'interface pour calculer les flux visqueux. Ceci n'est pas acceptable pour des approximations d'ordre plus élevé. Les méthodes du type Galerkin Discontinu (DG), décomposent le système original de deuxième ordre en un autre de premier ordre. Le problème de cette approximation réside dans l'introduction de degrés de liberté supplémentaires. De plus, il est nécessaire d'introduire un nouveau flux numérique, dont la définition pose des problèmes théoriques et qui constitue une des différences entre les méthodes DG et les autres. La méthode FV-MLS effectue une reconstruction centrée des flux visqueux sur les points d'intégration des interfaces, en utilisant l'information des cellules voisines à l'aide de la méthode MLS. Il est important de remarquer que cette reconstruction est continue et d'ordre élevée.

L'évaluation des contraintes visqueuses 4.207 à 4.212 exige d'interpoler le vecteur vitesse  $\vec{V} = (u, v, w)$ , la température  $T$ , et les gradients correspondants  $\nabla V$  et  $\nabla T$ , dans chaque point d'intégration  $x_{iq}$ . En utilisant les fonctions de forme MLS, ceux-ci peuvent s'obtenir comme :

$$V_{iq} = \sum_{j=1}^{n_{iq}} V_j N_j(x_{iq}) \quad T_{iq} = \sum_{j=1}^{n_{iq}} T_j N_j(x_{iq}) \quad (4.225)$$

et

$$\nabla V_{iq} = \sum_{j=1}^{n_{iq}} V_j \otimes \nabla N_j(x_{iq}) \quad \nabla T_{iq} = \sum_{j=1}^{n_{iq}} T_j \nabla N_j(x_{iq}) \quad (4.226)$$

où  $n_{iq}$  est le numéro des centroïdes voisins (qui appartiennent au nuage de points du point d'intégration  $iq$ ). Cette méthode permet que l'ordre de la reconstruction des termes visqueux soit le même que celui obtenu dans la reconstruction des flux non visqueux.

#### 4.5.5 Matrice masse

La matrice masse  $[M]$  établit un lien entre la valeur moyenne dans le volume de contrôle et les valeurs ponctuelles du point de collocation et de ses voisins. Pour les schémas employant une procédure de reconstruction dans les volumes de contrôle, la matrice masse est obtenue en calculant la moyenne du polynôme sur ce volume. Dans le cas du schéma cell centered, la valeur moyenne dans le volume de contrôle et la valeur ponctuelle au centre de gravité coïncident au second ordre près, ce qui permet de découpler le système d'équations à résoudre, tout au moins lorsque la précision requise du schéma n'est pas très élevée. Une alternative à ce problème est de toujours utiliser le concept de valeur moyenne. Ce qui nécessite, lors de la procédure de reconstruction, l'utilisation des valeurs moyennes et non pas des valeurs ponctuelles. Venkatakrisnan [65] a montré que pour les schémas d'ordre supérieur ou égal à 3, il est nécessaire de construire la matrice masse  $[M]$  ou bien d'utiliser une reconstruction à partir des moyennes.

##### 4.5.5.1 Reconstruction de la matrice masse

Au voisinage du volume de contrôle  $I$  avec un centroïde  $x_I$ ,  $U(x)|_I$  est localement approximée par l'équation suivante :

$$U(x)|_I = \sum_{j=1}^{n_{xI}} N_j(x) U_j \quad (4.227)$$

Si l'on écrit l'équation précédente sous forme intégrale, dépendante du temps :

$$\int_{V_i} \frac{\partial U}{\partial t} dV = \int_{V_i} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{j=1}^{n_{xI}} N_j(x) U_j \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{j=1}^{n_{xI}} \left( \int_{V_i} N_j(x) dV \right) U_j \right) \quad (4.228)$$

Pour un maillage fixe (il ne se déforme pas),  $N_j(x)$  est indépendant du temps alors

$$\int_{V_i} \frac{\partial U}{\partial t} dV = \sum_{j=1}^{n_{xj}} \left( \int_{V_i} N_j(x) dV \right) \frac{\partial U_j}{\partial t} \quad (4.229)$$

Si l'on définit la matrice masse  $[M] = [\mu_{ij}]$  avec

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} N_j(x) dV, & \text{si } j \text{ appartient au stencil,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.230)$$

tels que

$$\int_{V_i} \frac{\partial U}{\partial t} = \text{meas}(V_i) \sum_{j=1}^{n_{xj}} \mu_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial t} \quad (4.231)$$

Ainsi, le système à résoudre devient :

$$[M] \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = R(U) \quad (4.232)$$

La matrice masse est généralement creuse et large.  $i$  varie de 1 jusqu'au nombre de cellules et  $j$  varie de 1 jusqu'au nombre de cellules voisines à la cellule considérée (cellule  $I$ ). En utilisant le développement de Taylor sur la fonction de forme,  $\mu_{ij}$  est définie comme

$$\begin{aligned} \mu_{ij} = & \frac{1}{V_i} \left[ \int_{V_i} N_j(x_i) + (x - x_i) \frac{\partial N_j(x_i)}{\partial x} + (y - y_i) \frac{\partial N_j(x_i)}{\partial y} + (x - x_i)(y - y_i) \frac{\partial^2 N_j(x_i)}{\partial x \partial y} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(x - x_i)^2 \frac{\partial^2 N_j(x_i)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(y - y_i)^2 \frac{\partial^2 N_j(x_i)}{\partial y^2} + \dots \right] dV \end{aligned} \quad (4.233)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mu_{ij} = & N_j(x_i) + \frac{1}{V_i} \left[ I_x \frac{\partial N_j(x_i)}{\partial x} + I_y \frac{\partial N_j(x_i)}{\partial y} + I_{xy} \frac{\partial^2 N_j(x_i)}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} I_{x^2} \frac{\partial^2 N_j(x_i)}{\partial x^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} I_{y^2} \frac{\partial^2 N_j(x_i)}{\partial y^2} + \dots \right] dV \end{aligned} \quad (4.234)$$

Nous proposons une forme générale de l'équation 4.234 :

$$\mu_{ij} = N_j(x_i) + \frac{1}{V_i} \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \sum_{\beta=1}^{\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} I_{x^{\alpha-\beta}y^{\beta}} \frac{\partial^{\alpha} N_j(x_i)}{\partial x^{(\alpha-\beta)} \partial y^{\beta}} \quad (4.235)$$

où

$$I_{x^{\alpha}y^{\beta}} = \int_{V_i} (x-x_i)^{\alpha} (y-y_i)^{\beta} dV \quad (4.236)$$

#### 4.5.5.2 Formulation de masse « lumping »

Comme la plupart des solveurs implicites, le temps de convergence est sa plus grande faiblesse. Pour profiter de la faible dissipation et dispersion des schémas explicites, nous avons besoin d'inverser la matrice de masse ou d'utiliser des techniques de « lumping ». La deuxième solution semble plus attrayante, mais il faut construire une procédure adaptée pour la formulation de MLS. Considérons  $[M_d]$  une matrice diagonale localisée de  $[M]$  tel que :

$$[M_d] \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = R(U) \quad (4.237)$$

On peut écrire aussi

$$\left( \sum_{j=1}^{n_{xj}} \mu_{ij} \cdot \kappa_{ij} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right) \frac{\partial U_i}{\partial t} = R_i(U) \quad (4.238)$$

avec

$$\kappa_{ij} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right) := \frac{\partial U_j}{\partial t} \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^{-1} \quad (4.239)$$

Les éléments de la matrice diagonale  $[M_d]$  sont définis comme :

$$\mu_{di} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right) := \sum_{j=1}^{n_{xj}} \mu_{ij} \kappa_{ij} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right) \quad (4.240)$$

Notez que  $\mu_{di}$  varie avec le temps, donc pour chaque pas de temps on a besoin de calculer  $\kappa_{ij}$  contrairement aux paramètres  $\mu_{ij}$  qui peuvent être calculés une fois au début puisqu'ils dépendent seulement de l'espace (pour un maillage rigide).

### 4.5.6 Limiteurs

Avec la méthode FV-MLS, il est possible d'utiliser toute technique de limitation employée avec la méthode des volumes finis. Dans ce travail, la technique de Barth et Jespersen [54] est considérée. Cette méthode impose la monotonie dans la solution après la reconstruction polynômiale à l'intérieur de chaque cellule. Pour ce faire, on limite la valeur du gradient ainsi que les dérivées successives de façon à ce que la reconstruction ne crée pas de nouveaux maximum et minimum. La reconstruction limitée pour une variable  $U(x)$  est :

$$U(x)_I = U_I + \Phi_I \nabla U_I \cdot (x - x_I) \quad (4.241)$$

où  $\Phi_I \in [0; 1]$  est le limiteur. Quand  $\Phi_I = 0$ , la limitation est totale et le schéma est de premier ordre, tandis que si  $\Phi_I = 1$ , la limitation est désactivée. Ainsi, la variable  $U(x)$  vérifie que

$$U^{min} \leq U(x)_I \leq U^{max} \quad (4.242)$$

avec

$$U^{min} = \min_{j \in \mathcal{A}_I} (U_j) \quad U^{max} = \max_{j \in \mathcal{A}_I} (U_j) \quad (4.243)$$

où  $\mathcal{A}_I$  est l'ensemble des cellules voisines de la cellule  $I$ . La condition 4.242 est imposée aux points d'intégration, de façon à ce qu'en chaque point de quadrature on calcule la valeur sans limiteur  $U_I^q$ , et on obtient alors  $\Phi_I^q$  par l'expression :

$$\Phi_I^q = \begin{cases} \min \left( 1, \frac{U^{max} - U_I}{U_I^q - U_I} \right) & U_I^q - U_I > 0 \\ \min \left( 1, \frac{U^{min} - U_I}{U_I^q - U_I} \right) & U_I^q - U_I < 0 \\ 1 & U_I^q - U_I = 0 \end{cases} \quad (4.244)$$

La valeur du limiteur  $\Phi_I$  est la valeur minimale des  $\Phi_I^q$ . Il est possible d'introduire un détecteur de chocs, qui active le limiteur  $\Phi_I$  en présence de forts gradients et le désactive si ce n'est pas nécessaire, réduisant l'impact qu'a l'utilisation de limiteurs sur la précision des méthodes d'ordre élevé.

### 4.5.7 Simulation aux grandes échelles (LES) implicite avec la méthode FV-MLS, Réf [2] et [3]

L'approche RANS (Reynolds Average Navier Stokes) a été utilisé pendant ces dernières années pour modéliser les écoulements turbulents. Cependant, elle est incapable de prédire avec précision un grand

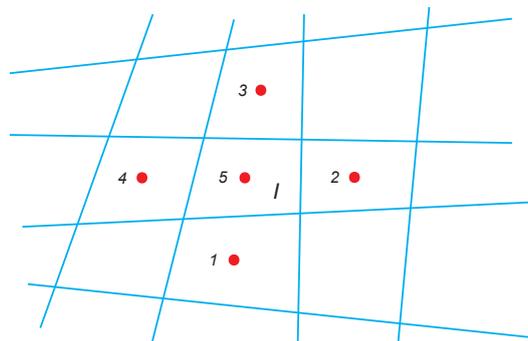


FIGURE 4.17 : Ensemble de cellules  $\mathcal{A}_1$  pour le calcul des valeurs maximum et minimum de  $U$  dans l'expression 4.243.

nombre de ces écoulements. La principale raison du manque de précision, est que la nature de l'approche Navier Stokes est modifiée avec l'approche URANS (les équations sont transformées à un ensemble d'équations statistiques). La simulation aux grandes échelles (LES) surmonte cette difficulté : au lieu de moyenniser les équations, on applique un filtre. Ce filtre sépare les échelles résolues des échelles non résolues. Les échelles les plus grandes de l'écoulement sont résolues et les échelles qui ne sont pas résolues sont modélisées.

#### 4.5.7.1 Définition MILES

L'approche MILES (Monotonically Implicit Large Eddy Simulation) permet de modéliser des écoulements turbulents. L'idée principale de la méthode MILES est l'absence de tout modèle d'échelle de sous-maille explicite (SGS) dans le code pour résoudre des écoulements turbulents. Etant donné que les approximations MLS sont utilisées pour calculer les gradients et les dérivées d'ordre élevé, les paramètres de la fonction Kernel jouent un rôle crucial dans les propriétés du schéma numérique, en particulier pour la dispersion et la dissipation de la méthode. Donc, de cette façon, nous pouvons ainsi définir un filtre implicite qui agit comme un modèle SGS dans les calculs turbulents (voir Nogueira et al. [?]).

#### 4.5.7.2 Définition ILES

L'approche ILES (Implicit Large Eddy Simulation) est une variante de l'approche MILES et permet de modéliser les écoulements turbulents. L'idée principale de la méthode ILES est de représenter les effets de la dynamique non résolue en régularisant les plus grandes échelles de l'écoulement. Cette régularisation peut être basée sur un raisonnement physique résultant de la séparation d'échelles, ou sur des contraintes numériques qui appliquent la préservation de la monotonie ou, plus généralement, d'assurer des solutions non oscillatoires. Cette méthode capture l'énergie contenue et les gammes d'inertie de l'écoulement turbulent, tout en s'appuyant sur leur dissipation intrinsèque qui agit comme un modèle de sous-maille.

### 4.5.7.3 Propriétés multi-échelles de la méthode FV-MLS

Le calcul des dérivées d'une variable est un aspect critique qui détermine la qualité d'une approximation numérique. Dans le cas de la résolution des équations de Navier Stokes par la méthode des volumes finis avec l'interpolation basée sur des schémas de moindres carrés mobiles, FV-MLS, l'approximation des dérivées intervient de façon directe dans l'évaluation des termes visqueux, comme dans la reconstruction des variables à l'aide des séries de Taylor définies pour l'évaluation des termes convectifs.

D'autre part, la solution qui tente de s'approcher numériquement présente un spectre de fréquences déterminé, et pour obtenir une solution précise, la méthode numérique utilisée doit être capable de résoudre la plupart de fréquences possibles. Ainsi, l'analyse de Fourier d'une méthode numérique permet d'avoir une vision du comportement de la méthode vis-à-vis des différentes fréquences de la solution. D'ailleurs, l'approximation de certaines fréquences (qui normalement coïncident avec les plus hautes du spectre) provoquent l'apparition d'ondes parasites d'origine numérique qui se propagent dans tout le domaine, provoquant la distorsion de la solution. Le fait qu'une discrétisation soit d'un ordre plus élevé n'est pas toujours indicateur d'une meilleure précision. Dans les maillages non structurés, il est difficile de trouver d'autres façons d'augmenter la résolution spectrale que d'augmenter l'ordre. Néanmoins, la flexibilité du Kernel basé sur une exponentielle tronquée ouvre la possibilité de l'optimisation locale du schéma FV-MLS, avec pour but d'obtenir les meilleures fonctions de forme pour chaque « stencil » d'un maillage non structuré.

### 4.5.7.4 Filtrage Implicite

La fonction Kernel détermine les propriétés du schéma FV-MLS. Les figures 4.18 et 4.19 montrent les courbes de dissipation et de dispersion du schéma de troisième ordre FV-MLS pour l'équation d'advection 1D (voir [66]). Sur ces figures on a tracé le nombre d'onde réel en fonction de la partie réelle du nombre d'onde modifié (liée aux erreurs de dispersion), et en fonction de la partie imaginaire du nombre d'onde modifié (lié aux erreurs de dissipation).

Sur la figure 4.19, il n'existe pas de dissipation lorsque la valeur de la partie imaginaire est nulle. Ces figures montrent que les opérateurs différentiels discrets obtenus par la méthode la méthode FV-MLS ne sont pas en mesure de reproduire toute la gamme de fréquences d'une onde donnée, en introduisant des erreurs de dispersion et dissipation.

Un choix différent de la valeur du paramètre de Kernel ( $\kappa_c$ ) conduit à différentes caractéristiques du schéma. L'intérêt de ces figures est de montrer ce que l'on peut attendre de la méthode FV-MLS de troisième ordre lorsqu'on utilise des termes hyperboliques. Ainsi, les courbes nous aident à comprendre comment le paramètre de forme agit comme un modèle SGS.

D'autre part, on peut voir ces figures en termes d'échelles résolues. Le schéma numérique introduit des erreurs de dispersion et de dissipation d'une fréquence donnée (fréquence de coupure). A partir de ce point, on considère comme une échelle résolue une échelle dont le nombre d'onde est inférieur à la fréquence de coupure. A partir de la courbe de dissipation on remarque que les fréquences supérieures

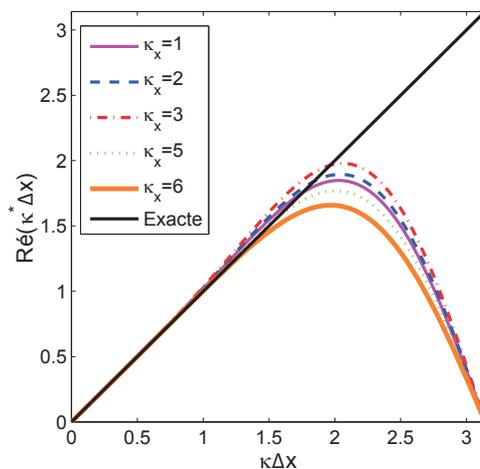


FIGURE 4.18 : Courbe de dispersion pour le schéma de troisième ordre FV-MLS, pour différentes valeurs du paramètre de forme Kernel  $\kappa_x$ , Réf [2].

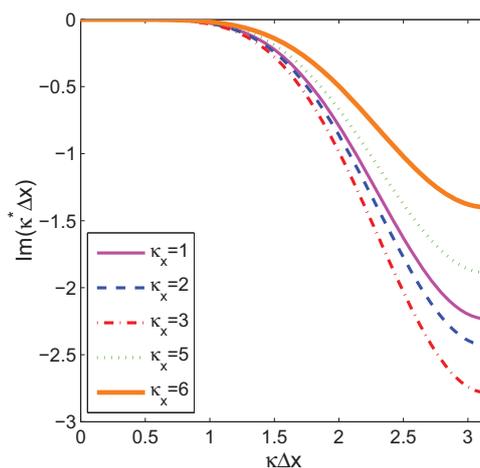


FIGURE 4.19 : Courbe de dissipation pour le schéma de troisième ordre FV-MLS, pour différentes valeurs du paramètre de forme Kernel  $\kappa_x$ , Réf [2].

à la fréquence de coupure sont naturellement dissipées par la méthode numérique. C'est la base de l'approche MILES [67] qui a été suivie dans ce travail. La méthodologie présentée dans [68] utilise une approche sans modèle avec une méthode numérique basée sur les différences finies compactes quasi spectrales additionnée d'un filtre explicite. Le filtre explicite ôte de l'énergie des fréquences les plus hautes, et la quantité d'énergie enlevée est contrôlée par le paramètre du filtre Padé. Dans notre cas, on suit une procédure similaire, le paramètre du filtre est le paramètre de forme du Kernel exponentiel  $\kappa_x$ . La courbe de dissipation de la figure 4.19 donne une idée de la forme du filtre implicite.

D'autre part, l'effet du limiteur de pente est restreint par le détecteur de chocs basé en MLS. Il permet de maintenir l'ordre élevé du schéma numérique, sauf dans le voisinage des chocs (où la précision est

de premier ordre). Ainsi, dans notre approche, la capture de chocs est utilisée seulement pour prévenir les oscillations proches des chocs. La dissipation pour le modèle SGS est contrôlée par le paramètre  $\kappa_x$ .

#### 4.5.7.5 Dispersion et dissipation dans un schéma numérique

Dans les sections précédentes, on a vu que la discrétisation d'une équation peut introduire de la dispersion et de la dissipation dans la solution numérique. On peut considérer la *dissipation* comme la perte de précision de la solution à mesure que le temps avance. D'autre part, la *dispersion* est la propagation des ondes de fréquences différentes à des vitesses différentes. Dans le cas d'un milieu non dispersif, toutes les ondes, quelle que soit la fréquence, se propagent à la même vitesse. Dans un milieu non dispersif, la relation de dispersion est linéaire. En général, une méthode numérique appliquée à la résolution d'équations hyperboliques introduit dispersion et dissipation dans la solution. Dans le cas de la méthode des volumes finis avec interpolation basée sur un schéma de moindres carrés mobiles, la dispersion et la dissipation introduites vont dépendre du choix du Kernel et de ses paramètres. Ainsi, les termes convectifs se discrétisent à l'aide du schéma FV-MLS et les termes dissipatifs utilisent une approximation directe par l'utilisation des moindres carrés mobiles.

#### 4.5.7.6 Construction de filtres basés sur des schémas de moindres carrés mobiles

Le développement de filtres explicites a suscité un intérêt croissant à mesure que la méthodologie large-eddy simulation (LES) se développait pour la simulation des écoulements turbulents. Cette méthode se base sur la séparation d'échelles dans l'écoulement, qui délimite la gamme d'échelles qui se résolvent et la gamme d'échelles qui se modélisent.

La séparation d'échelles peut s'effectuer à l'aide de filtres explicites. Bien que, des filtres aient été développés pour des maillages structurés avec des bonnes propriétés, la construction de filtres pour des maillages non structurés n'a pas eu un tel succès. L'utilisation de la méthode MLS comme filtre a été proposée par Wagner y Liu [69].

Ainsi une approximation MLS d'une variable  $\Phi$  peut se considérer comme un filtre passe bas de cette variable. L'approximation MLS de  $\Phi$  au point  $I$  (qui correspond au centroïde de la cellule correspondante) s'écrit comme :

$$\overline{\Phi}_I = \sum_{j=1}^n N_{jI}(x) \Phi_j \quad (4.245)$$

où  $n$  est le nombre d'éléments qui forment le stencil de la cellule  $I$ ,  $N_{jI}$  sont les fonctions de forme MLS et le symbole  $-$  désigne la partie filtrée. Un filtre qui sera utilisé en LES doit respecter certaines propriétés [70] :

1. Conservation des constantes.

$$\bar{a} = a, \quad a \in \mathbb{R} \quad (4.246)$$

2. Linearité.

$$\overline{\Phi + \Psi} = \bar{\Phi} + \bar{\Psi} \quad (4.247)$$

3. Commutation avec la dérivation.

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} = \bar{\frac{\partial \Phi}{\partial s}}, \quad \text{avec } s = x, t \quad (4.248)$$

La première de ces propriétés est vérifiée pour la formulation présentée, puisque les fonctions de forme  $N_{jI}(x)$  satisfont la propriété de partition de l'unité :

$$\sum_{j=1}^n N_{jI}(x) = 1 \quad (4.249)$$

La deuxième propriété se vérifie aussi,

$$\overline{\Phi_I + \Psi_I} = \sum_{j=1}^n N_{jI}(x) \Phi_I + \sum_{j=1}^n N_{jI}(x) \Psi_I = \bar{\Phi}_I + \bar{\Psi}_I \quad (4.250)$$

La démonstration de la troisième de ces propriétés n'est pas évidente. L'erreur de commutation est de l'ordre de  $h^k$ ,  $h$  étant la longueur de lissage et  $k$  l'ordre du polynôme qui est capable de reproduire exactement l'approximation MLS, dans le cas unidimensionnel. De cette façon, en 1D, l'erreur de commutation des filtres MLS est donnée par l'expression :

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} - \bar{\frac{\partial \Phi}{\partial s}} = \sum_{j=1}^n (x - x_I)^{k+1} \left[ C_1 \frac{dN_j(x)}{dx} + C_2 N_j(x) \right] \quad (4.251)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont indépendantes de la longueur de lissage  $h$  et sont définis comme :

$$C_1 = \sum_{j=1}^n (x - x_I)^{k+1} \left( \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{d^{k+1} \Phi}{dx^{k+1}} (x - \theta_1(x - x_I)) \right) \quad (4.252)$$

$$C_2 = \sum_{j=1}^n (x - x_I)^{k+1} \left( \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{d^{k+2} \Phi}{dx^{k+2}} (x - \theta_2(x - x_I)) \right) \quad (4.253)$$

avec  $0 < \theta_1 < 1$  et  $0 < \theta_2 < 1$

Ainsi, l'erreur de commutation se comporte comme :

$$\left| \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right| \approx O(h^k) \quad (4.254)$$

Le comportement d'un filtre s'analyse par sa fonction de transfert, c'est-à-dire un modèle mathématique qui exprime la réponse d'un système en fonction d'un signal d'entrée. Dans le cas d'un filtre numérique conçu pour la LES, le signal d'entrée est l'ensemble des valeurs de la variable à filtrer sur les nœuds. La réponse du système est le résultat de l'application de l'approximation des moindres carrés mobiles aux valeurs données de la variable sur les nœuds. Ainsi, la fonction de transfert associée à 4.245 est donnée par :

$$\widehat{G}(\kappa) = \sum_{j=1}^n N_{jI}(x) e^{i\kappa(x_j - x_I)} \quad (4.255)$$

La forme de  $\widehat{G}$  sera déterminée par le nombre de points du stencil, le type de base, et le type de fonction de Kernel utilisée. La figure 4.20 illustre la fonction de transfert des filtres obtenue avec MLS par les deux fonctions Kernel. Sur la figure, la valeur 1 de la fonction ( $G(\kappa)$ ) indique que la variable n'est pas affectée par l'application du filtre.

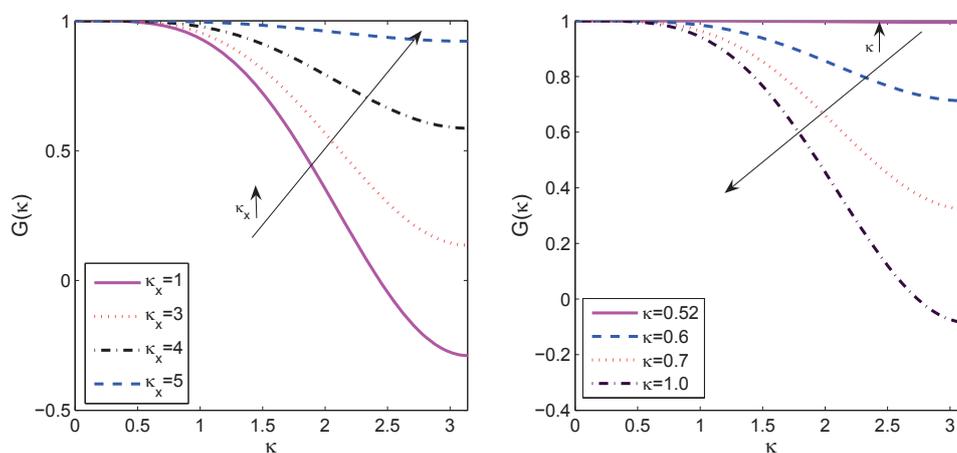


FIGURE 4.20 : Fonction de transfert 1D, A gauche : Kernel exponentiel tronqué. A droite : Kernel basé sur le spline cubique, Réf [2].

Le Kernel basé sur l'exponentielle tronquée permet un meilleur contrôle sur la forme de la fonction de transfert, à travers le choix des valeurs appropriées des fonctions de forme. Cette caractéristique s'apprécie clairement dans le cas de problèmes multidimensionnels.

## 4.6 Validation numérique

Plusieurs cas test ont été étudiés afin d'examiner la validation de la méthode FV-MLS sur la solution de l'écoulement laminaire et turbulent.

### 4.6.1 Écoulement stationnaire laminaire autour d'un cylindre (Re=20 et 40)

Le présent cas test se concentre sur l'analyse de l'écoulement stationnaire bidimensionnel sur un cylindre de diamètre  $D = 1$  pour un régime laminaire (Re=10 - 40, Mach=0.1). Pour la modélisation de l'écoulement, on a utilisé la méthode des volumes finis combinée aux approximations MLS (deuxième et troisième ordre FV-MLS) avec des valeurs du paramètre de Kernel  $\kappa_x = \kappa_y = 3$ . Le maillage retenu est non structuré et triangulaire (voir figure 4.21), avec  $128 \times 64$  éléments ayant un facteur de croissance de 1.1. La frontière externe est située à  $20D$ .

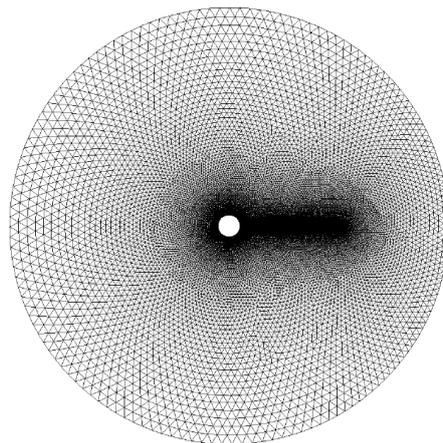
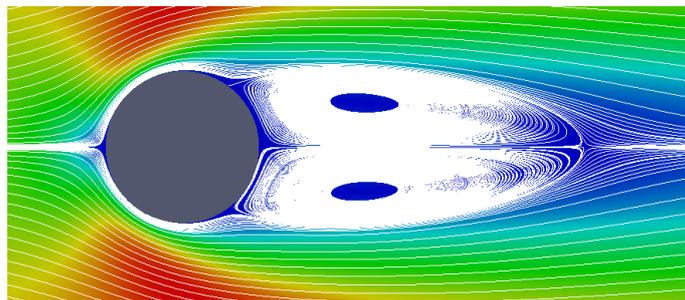
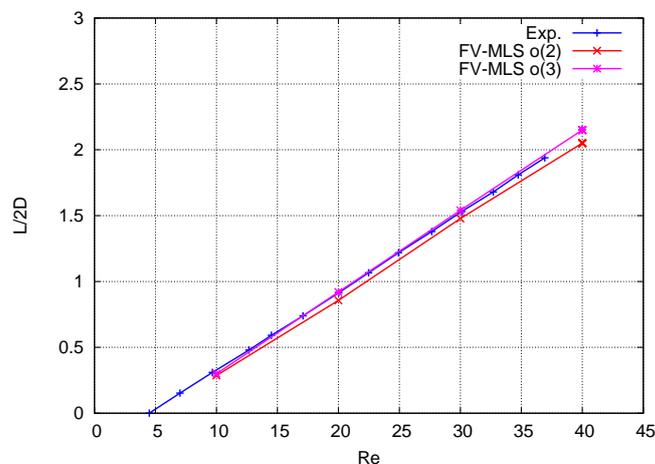


FIGURE 4.21 : Maillage non structuré pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire.

Ainsi, pour juger de l'exactitude de notre approche, nous comparons les résultats avec des données expérimentales et des simulations numériques principalement pour la longueur du sillage  $L$ , les coordonnées du centre du vortex  $(a, b)$ , l'angle de séparation  $(\theta_s)$ , le coefficient de traînée  $(C_d)$  et le coefficient de pression en avant et en amont  $(C_p)$  (voir tableaux 4.6 et 4.7)

La figure 4.23 montre la longueur de la zone de récirculation en fonction du nombre de Reynolds variant de 10 à 40. Les résultats expérimentaux sont ceux présentés par [71]. On peut observer que les résultats FV-MLS de deuxième et troisième ordre correspondent à ceux obtenus pour Re=10. Quand Re augmente, le troisième ordre FV-MLS donne de bons résultats par rapport aux mesures expérimentales, cependant, à partir de Re=20 jusqu'à Re=40, on peut observer un petit écart qui augmente quand Re augmente.

FIGURE 4.22 : *Écoulement autour d'un cylindre circulaire à  $Re=40$  (FV-MLS  $o(3)$ ).*FIGURE 4.23 : *Longueur de la zone de récirculation en fonction du nombre de Reynolds.*

Les données de	$L$	$a/D$	$b/2D$	$\theta_s$	$C_{p(\text{derrière})}$	$C_{p(\text{avant})}$	$C_d$
FV-MLS 2 <sup>ème</sup> ordre	1.713	0.67	0.82	41.83	-0.51	1.33	2.2
FV-MLS 3 <sup>ème</sup> ordre	1.84	0.697	0.849	43.73	-0.56	1.28	2.183
Référence [72]	1.88	-	-	43.7	-0.589	1.269	2.045
Référence [73]	1.842	-	-	42.96	-0.567	1.233	2.152
Référence [74]	1.92	-	-	42.79	-0.614	1.230	2.111

TABLEAU 4.6 : *Résultats pour la simulation de l'écoulement laminaire autour d'un cylindre à  $Re=20$ .*

#### 4.6.2 Écoulement instationnaire turbulent autour d'un cylindre à $Re=3900$

Ce cas test concerne l'application de la technique d'interpolation MLS avec l'approche « monotonically implicit Large Eddy Simulation (MILES) » qui va nous permettre de modéliser l'écoulement turbulent. Cette méthode nous permet de définir un filtre implicite qui agit comme un modèle de SGS pour le calcul de la turbulence.

Ainsi, les premiers résultats de validation concernent l'étude 2D d'un écoulement de Mach 0.2 sur un cylindre avec un nombre de Reynolds de 3900. Afin de juger de l'exactitude de notre approche, nous

Les données de	$L$	$a/D$	$b/2D$	$\theta_s$	$C_{p(\text{derrière})}$	$C_{p(\text{avant})}$	$C_d$
FV-MLS 2 <sup>ème</sup> ordre	4.1	1.34	1.14	52.39	-0.56	1.207	1.63
FV-MLS 3 <sup>ème</sup> ordre	4.3	1.338	1.168	52.71	-0.516	1.205	1.565
Référence [72]	4.51	-	-	53.8	-0.555	1.147	1.574
Référence [73]	4.51	-	-	53.8	-0.509	1.114	1.522
Référence [74]	4.49	-	-	52.84	-0.487	1.133	1.499
CD1973 [75]	4.3	-	-	53.6	-	-	-
CB1977 [71]	4.26	1.52	1.19	53.5	-	-	-
F1980 [76]	4.48	-	-	-	-	-	-
KL1995 [77]	-	-	-	53.03	-	-	-
HD1997 [78]	4.49	-	-	52.84	-	-	-
MS1998 [79]	4.38	-	-	50.12	-	-	-
GSW2000 [80]	4.40	-	-	53.13	-	-	-
Référence [81]	4.34	1.50	1.16	53.13	-	-	-

TABLEAU 4.7 : Résultats pour la simulation de l'écoulement laminaire autour d'un cylindre à  $Re=40$ .

comparons les résultats avec des données expérimentales et aussi avec des simulations LES 2D. Le problème à résoudre peut être considéré comme un problème de valeurs initiales d'équations algébriques différentielles (DAEs). Parmi les divers solveurs, plus ou moins adaptés pour notre cas, on choisit IDA [82] (pour un solveur Implicit Differential Algebraic) : La méthode d'intégration temporelle est d'ordre variable (de 0 à 5), une formule de différenciation vers l'arrière à coefficient variable, avec pas de temps adaptatif. Pour la solution du système linéaire, des corrections inexactes itératives du sous-espace de Newton/Krylov basées sur le solveur préconditionné GMRES (Generalized Minimal Residual method) est utilisé.

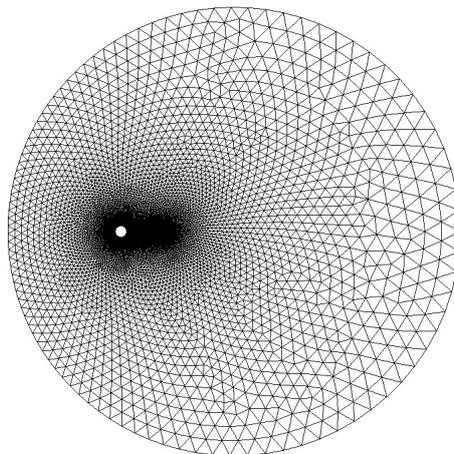


FIGURE 4.24 : Maillage non structuré pour le cas test cylindre 2D.

On a utilisé un troisième ordre FV-MLS avec une valeur du paramètre de Kernel  $\kappa_x = \kappa_y = 3$ . Le maillage utilisé est non structuré et triangulaire, avec 200 éléments sur la surface du cylindre et 214 points sur la frontière circulaire externe (voir figure 4.24). Un taux de croissance de 1.05 est utilisé pour construire le maillage, et le nombre final d'éléments est 44042. Le Kernel exponentiel est très précis pour les données dispersées, comme dans un maillage non structuré. Il n'est pas nécessaire d'utiliser des Kernels non isotropiques dans ce type de maillages avec ce Kernel exponentiel.

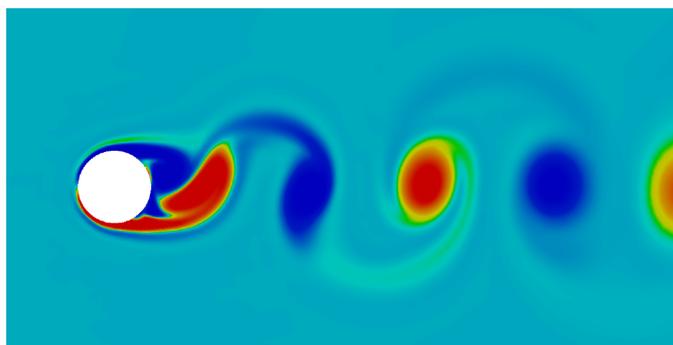


FIGURE 4.25 : Champ de vorticité instantan e à  $Re = 3900$ , Réf [3].

Les résultats pour le coefficient de traînée ( $C_d$ ), le coefficient de pression de retour ( $C_{pb}$ ), l'angle de séparation ( $\theta$ ) et le nombre de Strouhal ( $St$ ) sont montrés sur le tableau 4.8 pour 10 et 30 mesures de périodes de séparation. La simulation avec la méthodologie propos e obtient des résultats précis comparés avec les expériences et des simulations 2D ou simulations LES avec quelques éléments dans la direction  $z$ . La surestimation des coefficients calculés et des nombres de Strouhal est dû au manque de tridimensionnalité des calculs. Sur la figure 4.25, nous illustrons le champ de vorticité instantané. La formation de tourbillons obtenue est typique des simulations 2D, et elle n'est pas observ e lorsque les techniques RANS sont utilis es.

Les données de	$C_d$	$-C_{pb}$	$\theta$	$St$
FV-MLS 3�me ordre - 10 périodes	1.280	0.960	87.8	0.25
FV-MLS 3�me ordre - 30 périodes	1.268	0.898	87.4	0.25
2D URANS [83]	1.59	1.96	-	0.24
2D (Hybride LES-RANS) [84]	1.5	-	86.5	0.25
3D LES ( $n_z = 4$ ) [83]	1.55	1.86	-	0.22
Expériences	$0.99 \pm 0.05$	$0.88 \pm 0.05$	$86 \pm 2$	$0.215 \pm 0.005$

TABLEAU 4.8 : Résultats pour la simulation de l'écoulement turbulent autour d'un cylindre.

### 4.6.3 Écoulement visqueux autour d'un profil NACA 0012 à incidence 0°

Ce cas vise à montrer la capacité de la reconstruction MLS pour des écoulements visqueux dans un maillage non structuré. On considère l'écoulement laminaire visqueux autour d'un profil NACA 0012 à  $M_\infty = 0.5$ ,  $\alpha = 0$  deg et  $Re_\infty = 5000$ , voir figures 4.26 à 4.29.

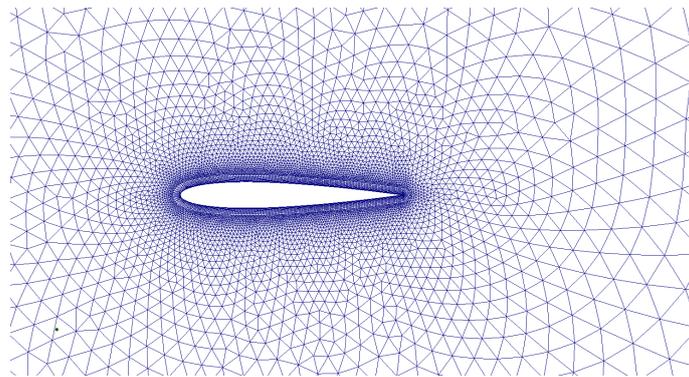


FIGURE 4.26 : Détails du maillage autour du profil NACA.

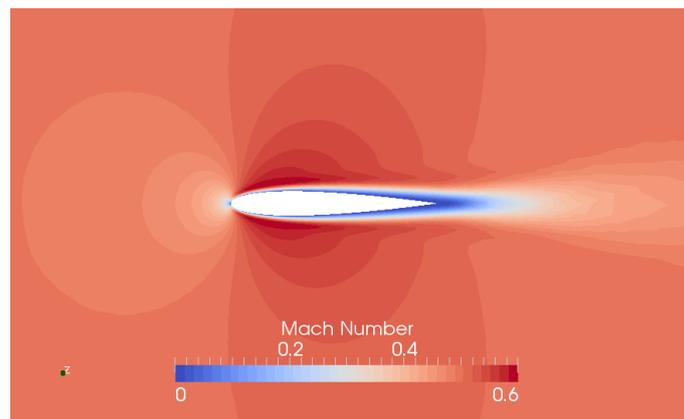


FIGURE 4.27 : Contours du nombre de Mach autour du profil NACA avec FV-MLS troisième ordre.

## 4.7 Méthode pour la prise en compte du mouvement

### 4.7.1 Hypothèses

Pour simuler le mouvement relatif de la roue et la volute d'une pompe centrifuge, lorsqu'on effectue une modélisation avec la méthode des volumes finis et les approximations MLS, diverses stratégies ou techniques numériques peuvent être envisagées. Dans ce cas, la technique de maillage glissant est prise en compte pour modéliser les interactions hydrodynamiques roue-volute. Afin d'implémenter le modèle numérique qui sera couplé à la méthode FV-MLS, il est important de prendre en compte quelques

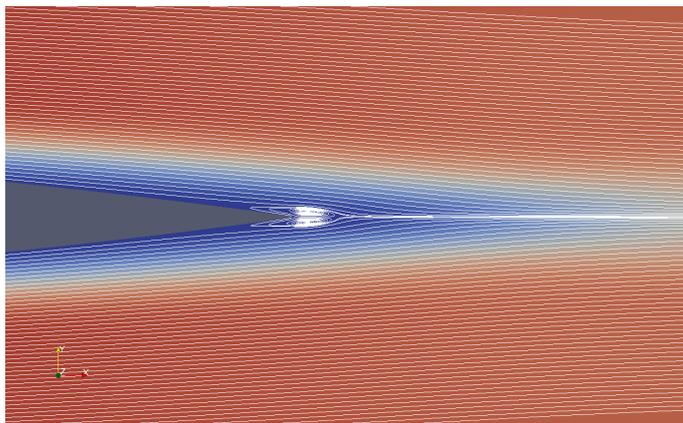


FIGURE 4.28 : Lignes de courant proche du bord de fuite du profil en montrant la zone de récirculation avec FV-MLS troisième ordre.

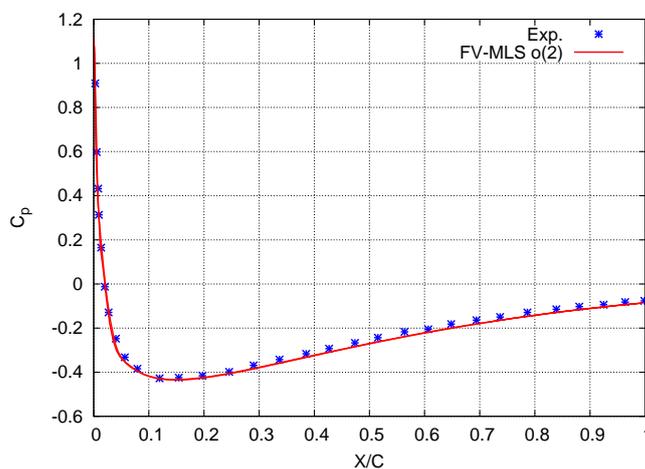


FIGURE 4.29 : Distribution de la pression autour du profil NACA avec FV-MLS deuxième ordre.

considérations ou hypothèses :

- Modifier les équations de Navier Stokes sous forme conservative afin de prendre en compte la vitesse de rotation  $\vec{\omega}$  des pièces mobiles.
- La taille du maillage au niveau des interfaces aura presque la même dimension de telle façon que l'intersection entre les frontières tournante et fixe sera toujours donnée par un nœud à mesure que la position du maillage mobile change.
- La reconstruction des variables conservatives pour les éléments proches de l'interface s'effectue séparément pour le domaine fixe et le domaine tournant.
- Les maillages à l'interface entre la partie fixe et la partie mobile sont non conformes au niveau de la surface de glissement.
- Le transfert d'information entre les deux domaines n'a pas besoin d'interpolations, c'est-à-dire

que l'ordre numérique est le même pour le schéma numérique global utilisé.

#### 4.7.2 Technique du maillage glissant

L'approche du modèle de maillage glissant implique deux régions maillées, une liée à la région tournante et l'autre liée à la région stationnaire, qui glisse par rapport à l'autre le long d'un plan de glissement. La figure 4.30 montre le principe de la technique du maillage glissant appliquée au maillage d'un rotor et d'un stator. A mesure que la rotation a lieu, l'alignement des deux grilles sur la surface glissante pour rendre l'ensemble du maillage conforme n'est plus nécessaire. Une méthode arbitraire ALE (An Arbitrary Lagrangian-Eulerian) est utilisée pour décrire en général les équations de transport dans les deux régions de grille. Comme l'écoulement est intrinsèquement instable, une procédure de solution dépendante du temps doit être utilisée.

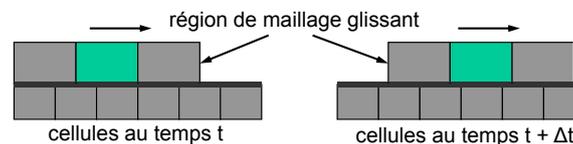


FIGURE 4.30 : *Modèle de maillage glissant.*

Etant donné que la technique de maillage glissant permet le glissement d'une région maillée par rapport à une région maillée fixe sans exiger l'alignement au cours du temps des maillages au niveau de la surface de glissement, les interpolations conservatives ne sont pas nécessaires afin de fournir les variables de l'écoulement et les flux à travers l'interface. La technique de maillage glissant fournit la meilleure méthode pour capturer la complexité de l'écoulement interne où de fortes interactions instationnaires entre le rotor et le stator dominent le champ de l'écoulement. Il s'agit donc de l'outil idéal pour simuler ce type de problèmes, mais le coût de calcul est élevé car le maillage tourne et une mise à jour des positions de nœuds et des vecteurs normaux est nécessaire.

Le mouvement de la roue est modélisé de façon réaliste avec cette technique et le mouvement de la grille n'est pas continu, il s'effectue plutôt par petites étapes discrètes. Après chaque mouvement, l'ensemble d'équations de conservation est résolu dans un processus itératif jusqu'à la convergence. Le maillage se déplace à nouveau, et la convergence est encore obtenue du calcul itératif. Pendant chaque itération quasi-stationnaire, l'information est transmise à travers l'interface depuis la région tournante vers la région stationnaire et vice-versa.

#### Aperçu des étapes suivies lors d'une simulation avec maillage glissant

Une représentation schématique des étapes pour la simulation avec maillage tournant est présentée sur la figure ci-dessous.

Le maillage illustré sur la figure 4.32 représente le volume fluide d'une pompe centrifuge en 2D.

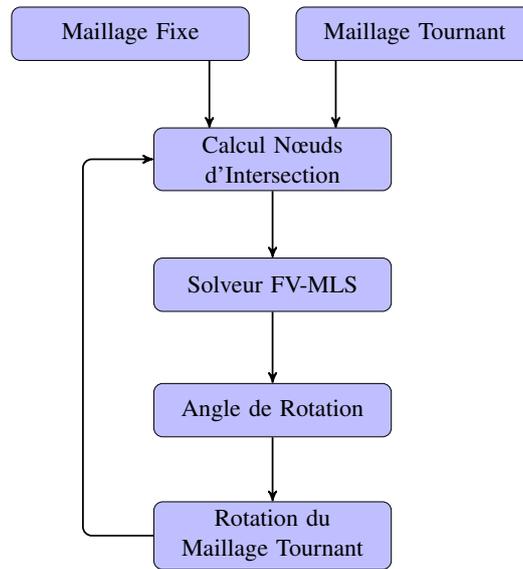


FIGURE 4.31 : Etapes pour la simulation avec maillage glissant.

La partie intérieure correspond à la partie mobile (roue) et la partie extérieure concerne la partie fixe (volute). La frontière de chacun des maillages est analysée afin de trouver les nœuds d'intersection qui nous serviront pour le calcul des flux numériques (solveur). Ensuite le maillage tourne d'un certain angle qui dépend du pas de temps et de la vitesse de rotation. Les données du maillage sont mis à jour et de cette façon la frontière du maillage tournant glisse par rapport au maillage fixe et ainsi de suite.

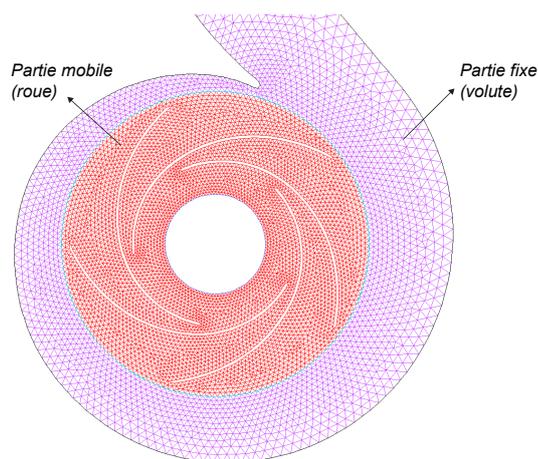


FIGURE 4.32 : Assemblage des maillages fixe et tournant d'une pompe.

### Maillage au niveau de l'interface

Le but est de développer une méthode de maillage glissant pour modéliser le mouvement relatif du maillage. Pour atteindre cet objectif, on utilise une approche qui n'implique aucune déformation de grille ou de remaillage. Le mouvement de rotation se fait par la rotation rigide du sous domaine qui représente l'élément mobile. La méthode n'impose pas de restrictions sur l'interface puisque la grille à l'interface est arbitraire, les grilles de chaque côté de l'interface ne sont pas alignées et donc les sous domaines sont discontinus.

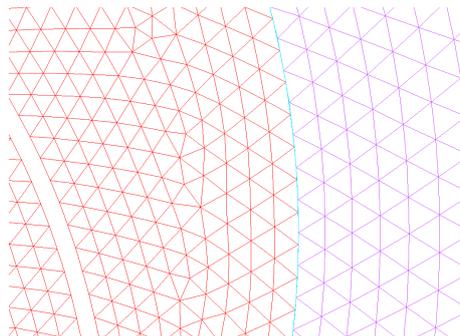


FIGURE 4.33 : Détails du maillage à l'interface (en rouge le maillage tournant, en violet le maillage fixe et en bleu ciel les interfaces).

La figure 4.33 montre un zoom du maillage de l'interface entre les domaines fixe et mobile d'une pompe 2D. Pour notre travail, on a considéré qu'au fur et à mesure de la rotation du rotor, il n'y aura toujours qu'un seul nœud d'intersection.

Ainsi, deux questions principales doivent être posées en vue d'un calcul du flux à travers l'interface des sous domaines disjoints :

- Comment calculer un flux à travers l'interface du sous domaine ?.
- Comment coupler les sous domaines dans le processus de solution ?.

### Rotation des nœuds et du domaine tournant

La rotation des nœuds est simplement définie par son angle  $\varphi$ . La matrice dans une base orthonormée directe est :

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (4.256)$$

Autrement dit, les coordonnées  $(x, y)$  du nœud ont pour image les composantes  $(x', y')$  que l'on peut calculer avec l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.257)$$

C'est-à-dire que l'on a :

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \quad (4.258)$$

et

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \quad (4.259)$$

L'angle de rotation de la partie mobile  $\varphi$  est défini par la vitesse angulaire de la grille et par le pas de temps. La rotation concerne essentiellement les centroïdes des cellules qui appartiennent au domaine mobile ainsi que la mise à jour des arêtes de chaque cellule (c'est-à-dire le calcul des nouvelles composantes des vecteurs normaux et des coordonnées des nœuds qui se trouvent au milieu de chaque arête). Pour réaliser toutes ces opérations, on utilise la fonction de rotation de nœuds implémentée dans le code.

### Algorithme de recherche récursif de nœuds d'intersection

Une partie importante de l'approche de maillage glissant est l'algorithme de recherche récursif. Une recherche est menée pour trouver les nœuds d'intersection entre l'interface du maillage tournant et l'interface du maillage fixe qui va nous permettre par la suite de calculer les flux numériques.

Pour des raisons purement numériques, l'interface du sous domaine tournant est appelée « interface principale » et celle du sous domaine fixe « interface secondaire » et sont présentées sur la figure 4.34. Les éléments et les nœuds sont désignés comme « éléments de glissement ». Ces éléments de glissement qui appartiennent aux volumes de contrôle et qui sont sur la frontière (l'interface) nous permettent de calculer les flux numériques à travers celle-ci.

Pour déterminer les nœuds d'intersection, on identifie d'abord les arêtes de type « interface principale » à l'aide d'un balayage sur toutes les arêtes de la partie tournante. Si l'arête est du type interface on détermine ensuite l'identifiant de l'interface secondaire lié à celle-ci. Une fois les interfaces principale et secondaire identifiées, on commence par déterminer à partir d'une arête de l'interface principale l'identifiant du nœud d'intersection (nœud 3) à l'aide d'une simple recherche (si les coordonnées du nœud 3 se trouvent entre celles du nœud 1 et du nœud 2, le nœud 3 appartient à l'interface secondaire et il est aussi adjacent aux cellules voisines). Les identifiants des cellules peuvent être connus, ainsi que le nombre d'arêtes de type interface qui seront très utiles pour les calculs du flux numérique.

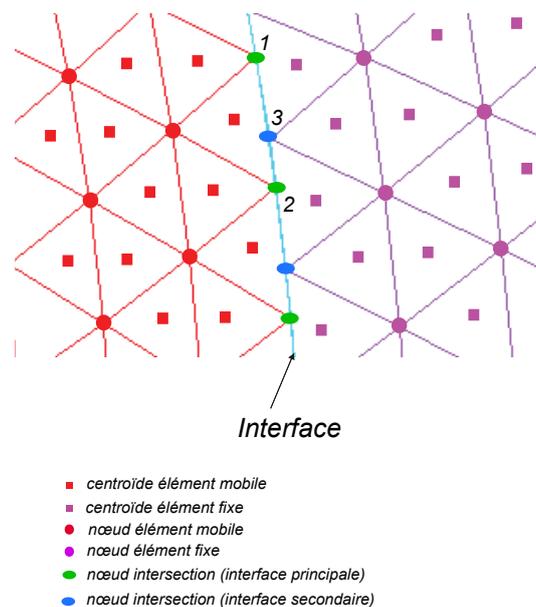


FIGURE 4.34 : Nœuds d'intersection.

### Calcul du flux numérique à l'interface

L'échange d'information entre les deux sous domaines se réalise à travers les interfaces principale et secondaire. Un flux numérique à l'interface doit être calculé, il est nécessaire d'obtenir les informations pour le calculer à partir des nœuds au niveau des interfaces. Notez qu'en général, lors du calcul de flux pour une face, l'information utilisée pour l'évaluation est locale et obtenue à partir des nœuds environnants. Ainsi, l'idée est d'avoir une transition douce des éléments de maillage à proximité de l'interface. Par exemple, si la taille de l'élément dans un sous domaine est significativement plus grand que le sous domaine voisin, cela implique également des problèmes de précision pour les résultats.

Les éléments de glissement se retrouvent d'abord par la définition des interfaces primaire et secondaire. Le fait de déclarer le type d'interface à la frontière du sous-domaine, implique que les nœuds de cette frontière soient du type interface et en même temps que les éléments soient proches de l'interface. La non conformité du maillage dans la zone d'interfaces à mesure que le maillage tourne est un problème pour le calcul de flux. Dans ce cas, l'usage d'un algorithme récursif nous a permis de déterminer les nœuds dans les intersections entre les interfaces primaire et secondaire. L'interface de glissement est construite à chaque pas de temps en utilisant la procédure décrite précédemment, ce qui élève les coûts informatiques élevés.

A partir du nœud 3 retrouvé, on calcule la longueur de l'arête formée par les nœuds 1 et 3 (c'est-à-dire l'arête originale qui a été divisée en deux morceaux), le vecteur normal  $\vec{n}$ , le nœud au milieu et on applique la reconstruction MLS à ces trois nœuds pour les cellules tournantes et fixes. Le même principe est appliqué à l'autre partie du segment formé par les nœuds 2 et 3. Les flux numériques à l'interface sont calculés en fonction de ces reconstructions MLS réalisées à l'interface.

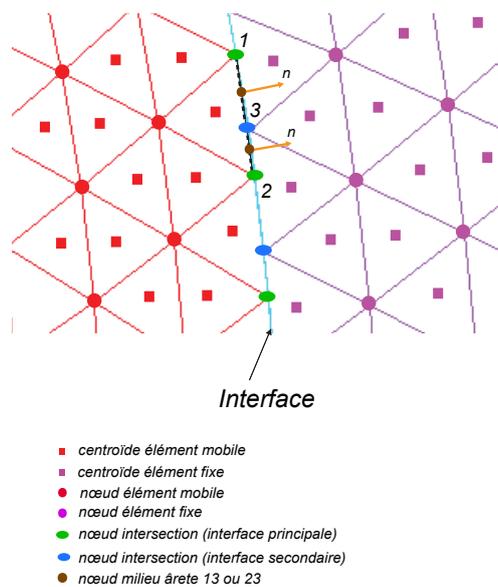


FIGURE 4.35 : Calcul flux numérique.

Lors de la génération du maillage, différents domaines sont créés pour les parties stationnaire et tournante de la pompe centrifuge. Pour la partie stationnaire les équations sont résolues dans un repère fixe, tandis que pour la partie tournante, les équations ont été modifiées pour prendre en compte le mouvement de la grille tournante. En raison du mouvement relatif des composantes stationnaire et tournante, la topologie du maillage devient indépendante du temps, et doit être mise à jour après chaque pas de temps. Une attention particulière doit être accordée à la gestion des interfaces entre les domaines fixes et en rotation pendant le calcul. Le couplage entre les deux domaines s'effectue par des échanges de valeurs à l'interface. Puisque la pression est la même dans les deux référentiels, elle peut être échangée sans aucune modification. Pour le couplage de vitesses, une transformation de coordonnées est nécessaire avant qu'elles ne soient échangées. A la fin de chaque pas de temps les coordonnées de la grille de la partie tournante sont recalculées en fonction de la vitesse de rotation et les vecteurs vitesse sont adaptés à la rotation de la grille.

Les valeurs du vecteur des variables conservatives  $U$  sont connues aux nœuds des interfaces primaire et secondaire, le volume de contrôle qui contient les nœuds sur l'interface connaît le volume de contrôle de l'autre côté de l'interface et vice-versa grâce à l'algorithme de recherche récursif. Concernant le calcul du flux numérique, il y a plusieurs approches qui peuvent être considérées, mais le schéma SLAU s'adapte bien à notre travaux de recherche et principalement au bas nombre de Mach. Le calcul des fonctions de forme est réalisé séparément pour chaque interface du sous domaine et elles ne sont calculées qu'une seule fois.

## 4.8 Conclusions

Le chapitre 4 est consacré principalement à présenter les fondements théoriques de la nouvelle méthode FV-MLS. L'augmentation de l'ordre de précision du code développé au sein du laboratoire DynFluid est atteinte par un meilleur calcul des gradients présents dans le terme visqueux et les termes convectifs des équations de Navier-Stokes. La précision sera la plus grande quand l'ordre de la reconstruction des variables à l'intérieur de la cellule sera le plus élevé. C'est pour cela que l'application de l'interpolation MLS avec la méthode de volumes finis est une alternative pour calculer les gradients et les dérivées successives pour la reconstruction des variables à l'intérieur de chaque volume de contrôle. La méthode FV-MLS est validée dans plusieurs cas test qui confirment ses capacités pour le calcul des écoulements compressibles turbulents et laminaires.



# Validation de la nouvelle méthode FV-MLS dans la pompe centrifuge NS32

---

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>225</b>
<b>5.2</b>	<b>Présentation de la géométrie</b>	<b>226</b>
5.2.1	Pompe centrifuge NS32 - 2D	226
<b>5.3</b>	<b>Modèle numérique</b>	<b>228</b>
5.3.1	Méthode avec le solveur FV-MLS	228
5.3.2	Méthode avec le solveur Ansys FLUENT	230
<b>5.4</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>230</b>
5.4.1	Résultats avec l'approche FV-MLS	231
5.4.2	Résultats avec l'approche FLUENT-URANS	237
5.4.3	Résultats avec l'approche FLUENT-ILES	241
5.4.4	Comparaison des résultats	245
<b>5.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>246</b>

---

## 5.1 Introduction

Le développement d'ordinateurs dédiés au calcul intensif et d'algorithmes numériques plus sophistiqués et précis, ont permis de résoudre les équations de Navier Stokes et de modéliser différents types d'écoulements incompressibles et compressibles. Afin de prédire les fluctuations de pression, il est nécessaire de comprendre l'interaction de l'écoulement sortant de la roue et son interaction avec la volute qui génère des perturbations au sein de la pompe centrifuge.

Les codes de CFD dans la phase de conception sont des outils importants pour caractériser et optimiser l'écoulement dans une pompe avant sa construction. Le comportement complexe de l'écoulement gouverné par des phénomènes physiques générés lors du fonctionnement de la pompe ont besoin de nouvelles techniques numériques pour satisfaire deux requis en particulier : avoir des résultats dans un raisonnable délai de temps, et d'être plus précis. Des efforts importants ont ainsi été consacrés ces dernières années pour développer des solveurs numériques plus robustes et précis (schémas d'ordre

élevé). L'un de ces travaux porte au développement du code de simulation au sein de notre laboratoire. Etant donné que les codes commerciaux sont considérés comme des boîtes noires où l'ingénieur ou le numéricien n'ont pas la possibilité de modifier ou de tester d'autres schémas qui pourront être d'aide significative dans certains cas. De plus, ils ne sont pas bien maîtrisés par la présence de divers paramètres à régler quand on veut modéliser des écoulements complexes.

Ainsi, le solveur compressible de Navier Stokes développé au laboratoire DynFluid basé sur la méthode des volumes finis et les approximations MLS est appliqué pour la première fois dans un cas test pour calculer les fluctuations de pression dans une pompe centrifuge 2D. Pour cela, il est implémenté de la technique de maillage glissant « Sliding Mesh » couplé aux approximations MLS, pour modéliser les interactions de la roue et de la volute qui sont la principale source de génération de fluctuations de pression.

Les résultats numériques du code sont comparés aux résultats obtenus par le code commercial de CFD Ansys Fluent. L'influence des aspects numériques sur la précision de la prédiction des pressions fluctuantes dans la pompe NS32 est analysée. La simulation instationnaire de l'écoulement a permis d'évaluer la capacité du code pour modéliser l'écoulement dans ce type de turbomachine.

La simulation numérique nécessite souvent l'application de conditions aux limites artificielles dans le domaine de calcul. Dans certains cas, des conditions artificielles sont placées à travers l'écoulement (troncation du domaine de calcul). Dans le chapitre 4, la condition aux limites « sortie subsonique » est présentée et sera utilisée pour la validation numérique. Cette condition artificielle est nommée « pressure outlet » et est appliquée en sortie du domaine de calcul, permettant ainsi de minimiser les perturbations numériques parasites sur la solution numérique. En général, la précision du calcul est très sensible à la condition aux limites imposée à la frontière en sortie dans la prédiction des fluctuations de pression et les réflexions numériques parasites sont dissipées avec cette condition non réfléchissante.

## 5.2 Présentation de la géométrie

La configuration de pompe centrifuge présentée nous a servi de cas test pour évaluer et juger la capacité du solveur compressible Navier Stokes comme une alternative plus précise pour prédire les fluctuations de pression.

### 5.2.1 Pompe centrifuge NS32 - 2D

Le cas test pour valider le code, est une version 2D de la géométrie réelle 3D de la pompe NS32 (voir figures 5.1 et 5.2). Les caractéristiques géométriques principales de la configuration 2D sont résumées dans les tableaux 2.5 et 2.6. D'autre part, les paramètres de fonctionnement (débit et vitesse de rotation) sont les mêmes utilisés dans la simulation instationnaire 3D.

La figure 5.1 montre à la fois le volume fluide 3D et 2D de la roue de la pompe NS32. La construction de la roue 2D a été faite à l'aide de projections horizontales de la surface latérale amont de la roue. La

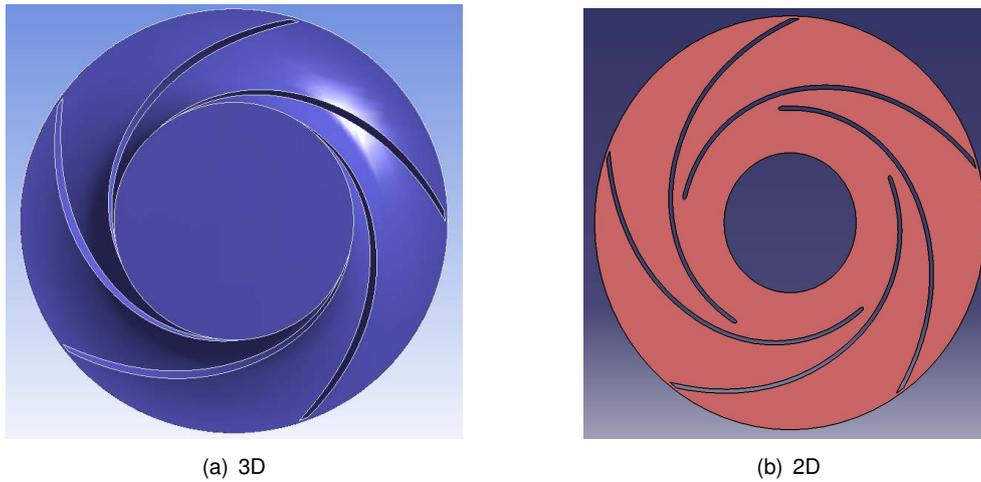


FIGURE 5.1 : Volume fluide de la roue de la pompe NS32.

construction de la forme des aubes 2D est déterminée à partir de la ligne moyenne appartenant à la paroi latérale de l'aube en amont de la roue. La forme de l'aube est ensuite construite en fonction de la ligne moyenne et de l'épaisseur constante tout au long de l'aube dans la version 3D. La position de l'entrée est déterminée en respectant deux aspects importants : avoir une stabilité numérique et minimiser l'influence de la condition aux limites sur les résultats.

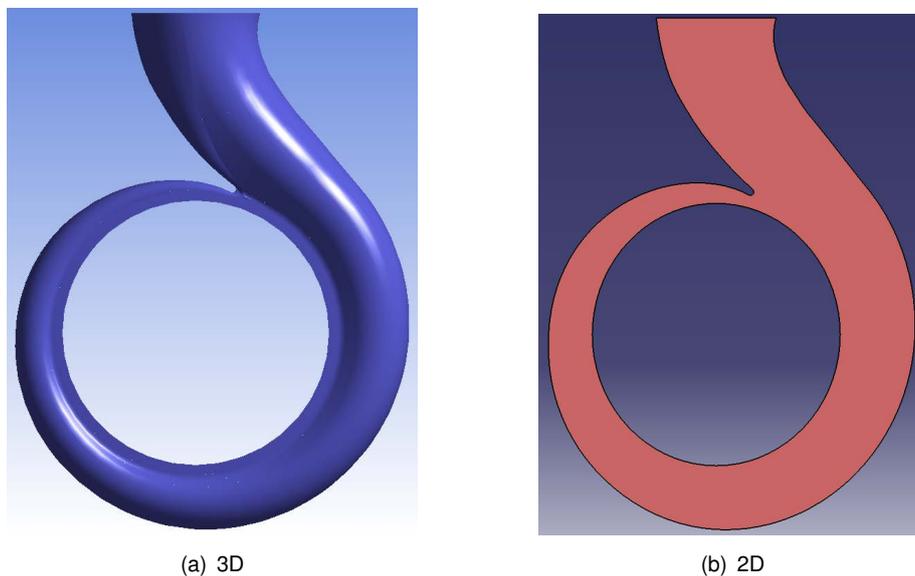


FIGURE 5.2 : Volume fluide de la volute de la pompe NS32.

La géométrie de la volute en 2D est illustrée sur la figure 5.2 et est utilisée pour les calculs instantanés de fluctuations de pression. La construction de la volute bidimensionnelle est simple, comme

la géométrie réelle a la forme d'une spirale de section circulaire symétrique. Il est donc possible de construire la projection 2D de la volute à partir d'une coupe de la volute en deux parties identiques, permettant ainsi d'obtenir le profil 2D et de le projeter dans le plan. La sortie de la volute (sortie en forme de divergent) est allongée d'une distance de 0.5 fois le diamètre de la roue. Cela nous a permis de construire un troisième volume fluide nommé tuyau de sortie. De cette façon, la frontière est déplacée une distance donnée permettant de respecter le critère habituel dans une simulation numérique.

## 5.3 Modèle numérique

### 5.3.1 Méthode avec le solveur FV-MLS

Les caractéristiques du modèle numérique utilisé pour modéliser l'écoulement dans la configuration bidimensionnelle NS32 (figures 5.1 et 5.2) sont décrites en détail. Les sous domaines de calcul sont maillés en utilisant des éléments triangulaires, le nombre total d'éléments est de 26960 éléments. Ils sont distribués convenablement dans la partie mobile (roue = 16988 éléments) et les parties fixes (volute+sortie = 9972 éléments). Les frontières en entrée et en sortie ont 110 et 21 nœuds respectivement, tandis que les interfaces primaire et secondaire ont 338 nœuds. Les figures 5.3 et 5.4 illustrent le maillage utilisé pour le domaine de calcul.

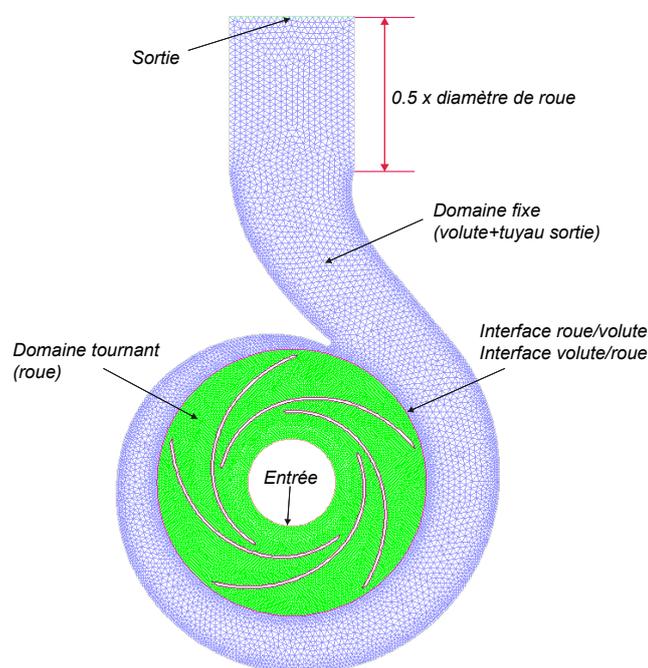


FIGURE 5.3 : Maillage de la configuration NS32-2D utilisé par le solveur FV-MLS et le solveur Ansys Fluent.

Les équations compressibles de Navier Stokes sont résolues par le solveur FV-MLS implicite de

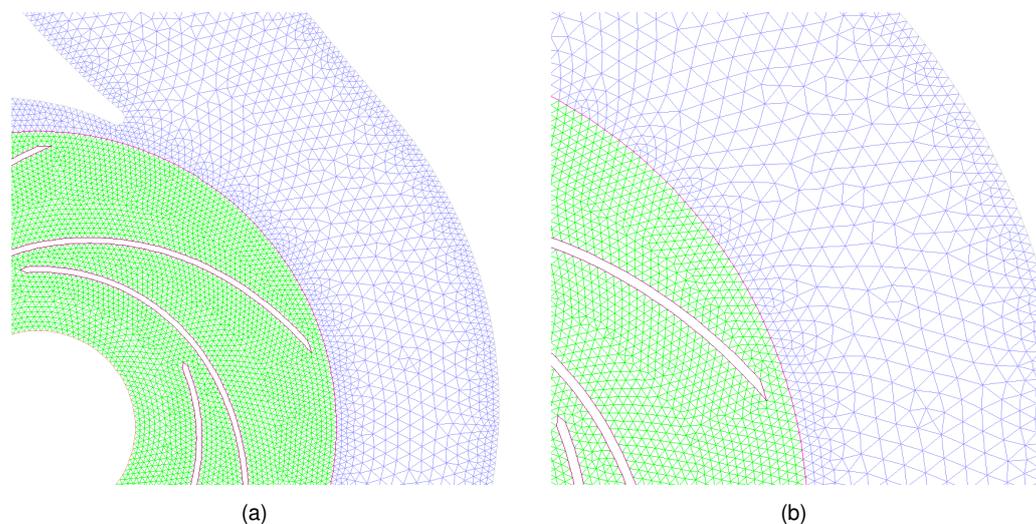


FIGURE 5.4 : Détails du maillage de la pompe NS32-2D.

troisième ordre en espace avec une reconstruction de troisième ordre de la matrice masse. Le schéma utilisé pour le flux numérique est une approche hybride SLAU-MLS. La valeur du Kernel  $\kappa$  est 6, tandis que le pas de temps est de  $1.10^{-04}$  s. Les données initiales pour effectuer la simulation sont résumées dans le tableau 5.1

Fluide de travail : de l'eau	
Température [K]	293
Masse volumique [ $Kg/m^3$ ]	998.2
Pression [Pa]	$1.013^{05}$
Chaleur spécifique à pression constante $C_p$ [ $JKg^{-1}K^{-1}$ ]	8095.08
R [ $JKg^{-1}K^{-1}$ ]	3905.08
Nombre de Prandtl $P_r$	9.47
Température de référence $T_{réf}$ [K]	247.8
Viscosité dynamique de référence $\mu_{réf}$ [ $Pa \cdot s$ ]	$2.414^{-05}$
Constante de Sutherland $S_o$	140
Pression écoulement libre $P_\infty$ [Pa]	$11.645^{08}$

TABLEAU 5.1 : Caractéristiques du fluide de travail dans le solveur compressible FV-MLS.

Les parois tournantes et fixes sont définies comme des parois sans glissement. En entrée, le débit massique est imposé et est de  $99.82 \text{ Kg/s}$  (qui correspond au débit de  $360 \text{ m}^3/\text{h}$ , qui est la valeur réelle en entrée), pour la sortie, la condition aux limites « pressure outlet » est utilisée et est de  $1.013^{05} \text{ Pa}$ . Cette condition impose à la frontière la propriété non réfléchissante afin d'éviter des ondes de réflexion parasites qui vont perturber la solution numérique. La vitesse de rotation de la roue est définie sur l'axe

$z$  et est de  $94.2478 \text{ rad/s}$  ( $900 \text{ tr/min}$ ).

### 5.3.2 Méthode avec le solveur Ansys FLUENT

Les caractéristiques des modèles numériques qui visent à prédire les fluctuations de pression dans la configuration bidimensionnelle NS32, se basent sur deux approches numériques disponibles dans le solveur Ansys Fluent. Le premier modèle incompressible concerne une approche implicite URANS (Unsteady Reynolds Average Navier Stokes) de deuxième ordre en espace et le deuxième est basé sur une approche ILES (Implicit Large Eddy Simulation) de troisième ordre en espace. Le terme temporel est résolu avec un schéma implicite de deuxième ordre. La modélisation du mouvement relatif entre la roue et la volute est modélisée par la technique de maillage glissant « Sliding Mesh ».

Fluide de travail : de l'eau	
Température [K]	298
Masse volumique [ $\text{Kg}/\text{m}^3$ ]	998.2
Pression de référence [Pa]	$1.013^{05}$
Chaleur spécifique à pression constante $C_p$ [ $\text{JKg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]	4182
Viscosité dynamique $\mu$ [ $\text{Kg}/\text{m}\cdot\text{s}$ ]	0.001003

TABLEAU 5.2 : Caractéristiques du fluide de travail dans le solveur Ansys Fluent.

Le calcul des termes diffusifs est fait par une méthode de différence centrée. Le pas de temps est de  $1.10^{-04} \text{ s}$  pour les deux approches. Les propriétés du fluide utilisé pour les simulations instationnaires sont résumées dans le tableau 5.2.

Les parois de la partie mobile et fixe sont non glissantes. Le débit massique en entrée est de  $99.82 \text{ Kg/s}$  et en sortie, la condition de « outflow » est définie. La vitesse de rotation de la roue est définie sur l'axe  $z$  et est de  $94.2478 \text{ rad/s}$  ( $900 \text{ tr/min}$ ).

## 5.4 Résultats numériques

Des simulations numériques sont réalisées avec les codes de CFD de DynFluid et d'Ansys Fluent dans la configuration de pompe centrifuge NS32-2D. Les calculs numériques prédisent principalement l'évolution temporelle de la pression statique dans la volute et la roue. Les signaux sont relevés et enregistrés par des capteurs virtuels placés proche de la paroi de la volute et dans le canal interaubage de la roue.

La figure 5.5 montre la localisation des capteurs dans notre configuration de pompe 2D et le tableau 5.3 résume en détail leurs positions et leurs noms.

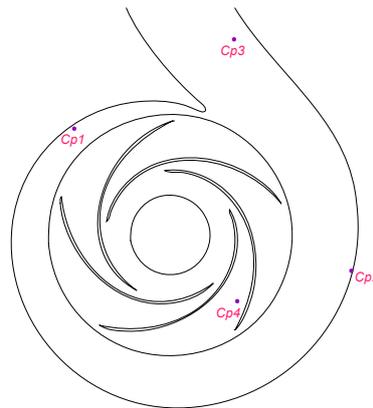


FIGURE 5.5 : Position des capteurs virtuels dans la pompe NS32-2D.

Capteur	Rayon [mm]	$\theta$ [°]
Cp1	254.71	131.86
Cp2	326.38	348.69
Cp3	365.54	72.16
Cp4	167.87	315.09

TABLEAU 5.3 : Position des capteurs de pression dans la pompe NS32-2D.

#### 5.4.1 Résultats avec l'approche FV-MLS

Les résultats numériques obtenus du code développé au laboratoire DynFluid sont illustrés sur les figures 5.6 et 5.7. Les courbes temporelles de la pression correspondent à deux tours et demi de la roue et ont été calculées avec l'équation d'état « Stiffened Gas Equation of State » et sa version modifiée « Modified Tait Equation of State ».

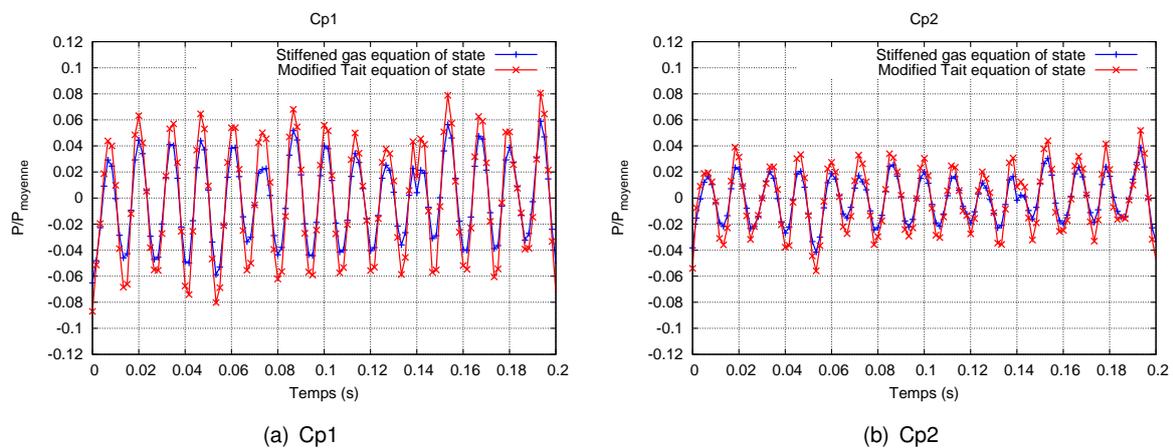
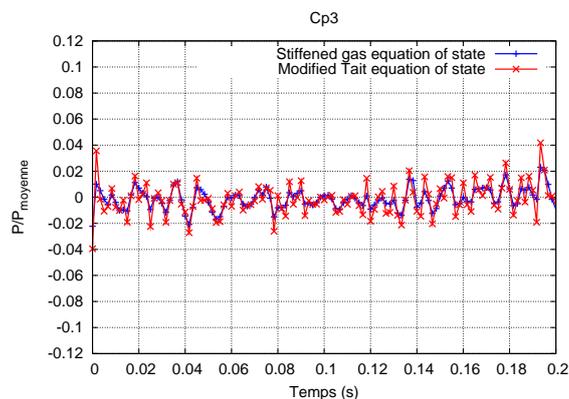


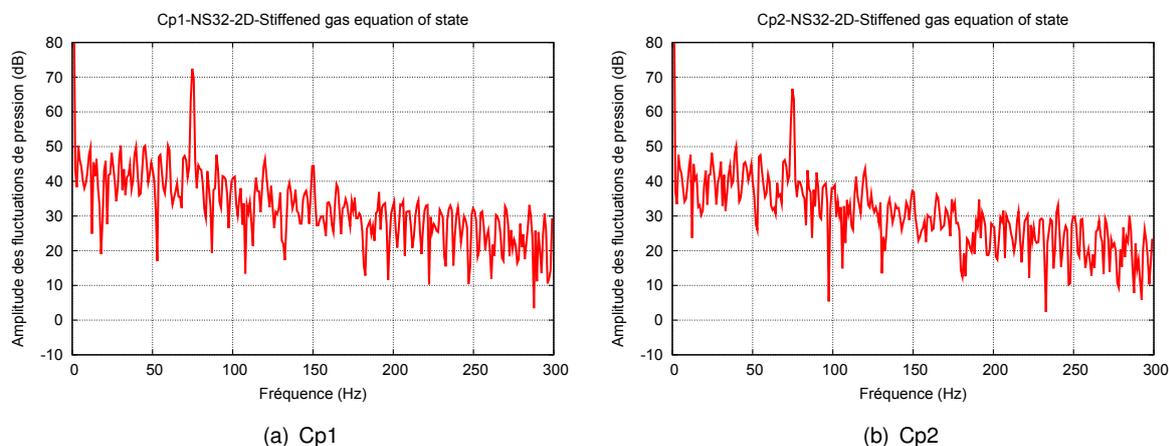
FIGURE 5.6 : Signaux temporels de la pression sur les capteurs Cp1 et Cp2 à 900 tr/min avec l'équation Stiffened gas equation of state (Réf. [5]) et l'équation Modified Tait equation of state (Ref. [6])



(a) Cp3

FIGURE 5.7 : Signaux temporels de la pression sur les capteur Cp3 à 900  $tr/min$  avec l'équation Stiffened gas equation of state (Réf. [5]), Modified Tait et l'équation of state (Ref. [6])

Les valeurs de la pression statique ont été normalisées en fonction de la pression moyenne pour chaque capteur. On observe que les signaux temporels de la pression sont identiques, excepté un léger écart qui peut être néglige. Pour comparer les résultats à ceux obtenus du solveur Ansys Fluent, le signal obtenu par le code en utilisant l'équation développée par Harlow et al. [5] est transformé dans le domaine fréquentiel (voir figures 5.8 et 5.9).

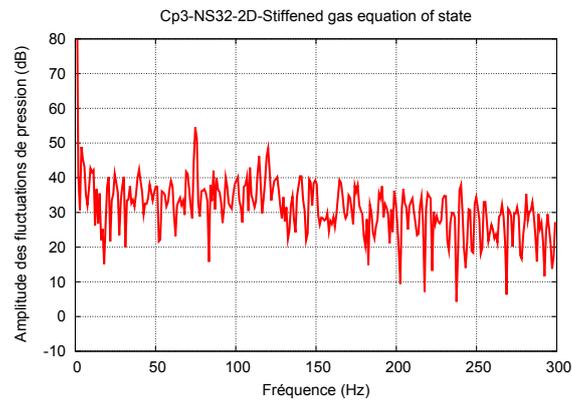


(a) Cp1

(b) Cp2

FIGURE 5.8 : Spectres fréquentiels de la pression des capteurs Cp1 et Cp2 à 900  $tr/min$ , Solveur FV-MLS.

Les spectres fréquentiels de chaque capteur montrent clairement la fréquence de passage des aubes  $F_{BP}$  générée par l'interaction roue-volute qui a une raie d'une amplitude élevée qui dépasse les 70 dB tandis que sa première harmonique  $2F_{BP}$  a une amplitude plus faible. D'autre part, il existe une atténuation des amplitudes des fluctuations de pression à mesure que l'écoulement se dirige vers la sortie, ce qui est un comportement normal d'une pompe centrifuge.



(a) Cp3

FIGURE 5.9 : Spectres fréquentiels de la pression du capteur Cp3 à 900 tr/min, Solveur FV-MLS.

D'autre part, la simulation numérique nous donne une hauteur moyenne de 150743.77 Pa (1.5 Bar) qui est proche de la hauteur réelle fournie par la pompe NS32. La figure 5.10 montre un schéma de la pompe 2D et une partie des signaux de pression en entrée et en sortie qui servent pour calculer la hauteur moyenne. On observe que les signaux passent une étape transitoire pour se stabiliser ultérieurement et devenir périodiques.

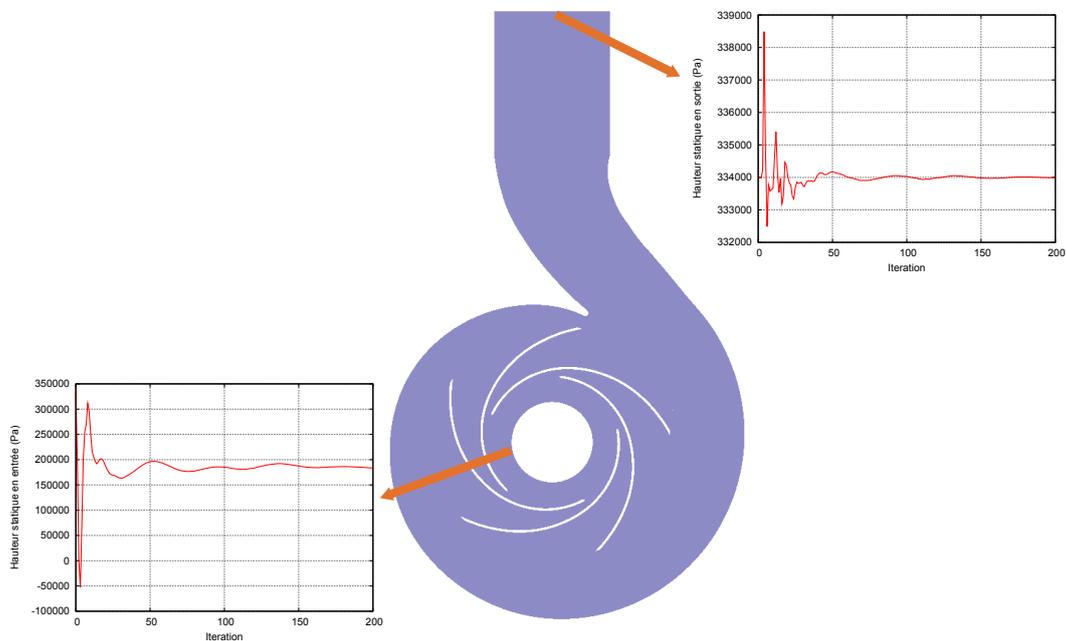


FIGURE 5.10 : Signaux de la pression statique en entrée et en sortie de la pompe NS32-2D à 900 tr/min, Solveur FV-MLS.

Pour juger la capacité du nouveau solveur et la technique de maillage glissant, le champ de vecteurs

de vitesse relative, les contours du nombre de Mach et de la pression statique sont illustrés sur les figures 5.11 à 5.13. Les contours de pression statique montrés en fonction de la position de la roue et le bec présentent de pressions élevées et faibles en entrée et en sortie de la pompe. La valeur la plus élevée se trouve proche du bec et on constate aussi que dans la région de sortie, la pression semble être uniforme.

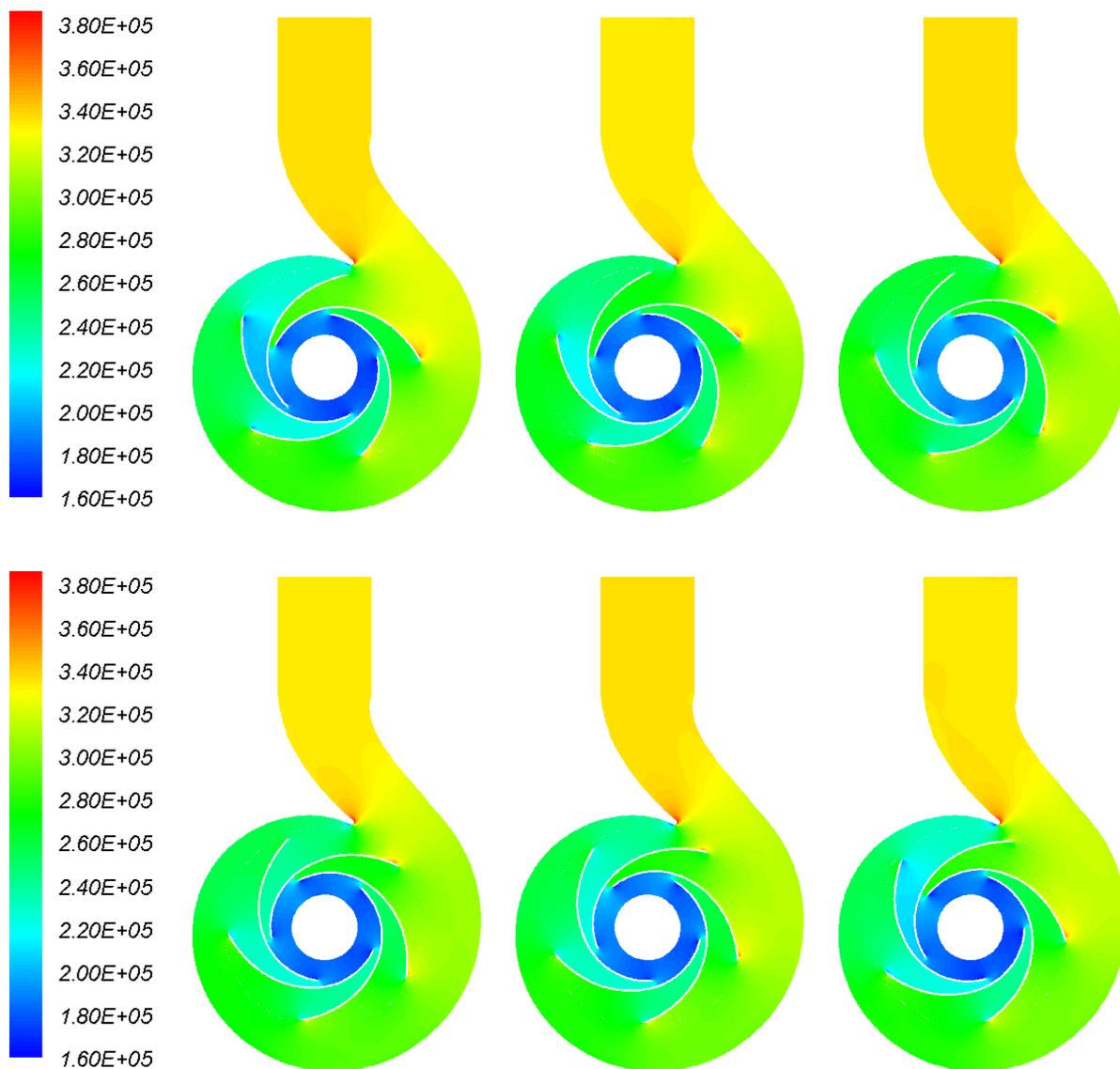


FIGURE 5.11 : Contours de la pression statique (Pa) dans la pompe NS32-2D, « FV-MLS ».

Concernant les contours du nombre de Mach (voir figure 5.12), le schéma numérique SLAU-MLS montre ses capacités pour modéliser les écoulements à faible nombre de Mach pour un solveur compressible. Les valeurs du nombre de Mach sont très faibles dans la région d'entrée et de sortie de la

géométrie tandis que les plus élevées se trouvent sur l'extrados de l'aube qui s'approche vers le bec. En sortie, on constate une région uniforme du nombre de Mach qui est liée aux faibles vitesses absolues.

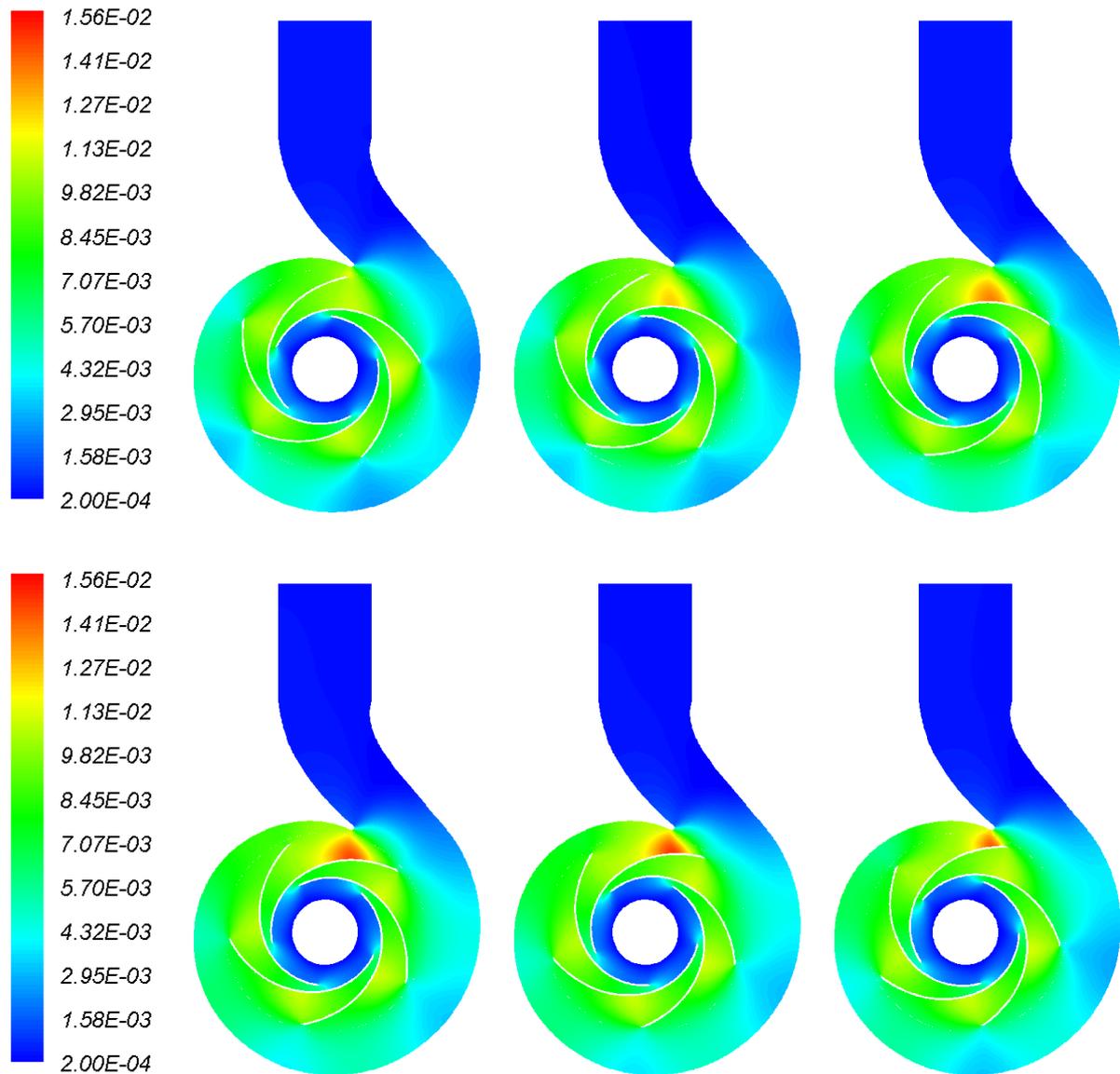


FIGURE 5.12 : Contours du nombre de Mach dans la pompe NS32-2D, « FV-MLS ».

Le champ de vecteur de vitesse relative est illustré sur la figure 5.13. Le modèle numérique utilisé (solveur FV-MLS et conditions aux limites : débit massique et sortie subsonique) permet de modéliser proprement le comportement de l'écoulement dans la roue et la volute.

On observe la formation de structures de l'écoulement dans le canal interaubage et l'écoulement de la volute a une incidence sur le bec de volute vers l'intérieur qui interagit avec le tourbillon formé

dans le canal aube-aube. L'écoulement de la volute suit sa trajectoire vers la sortie sans aucune autre perturbation que celle-là déjà mentionnée. Cette structure disparaît dans le canal formé par l'aube qui est très proche du bec de volute.

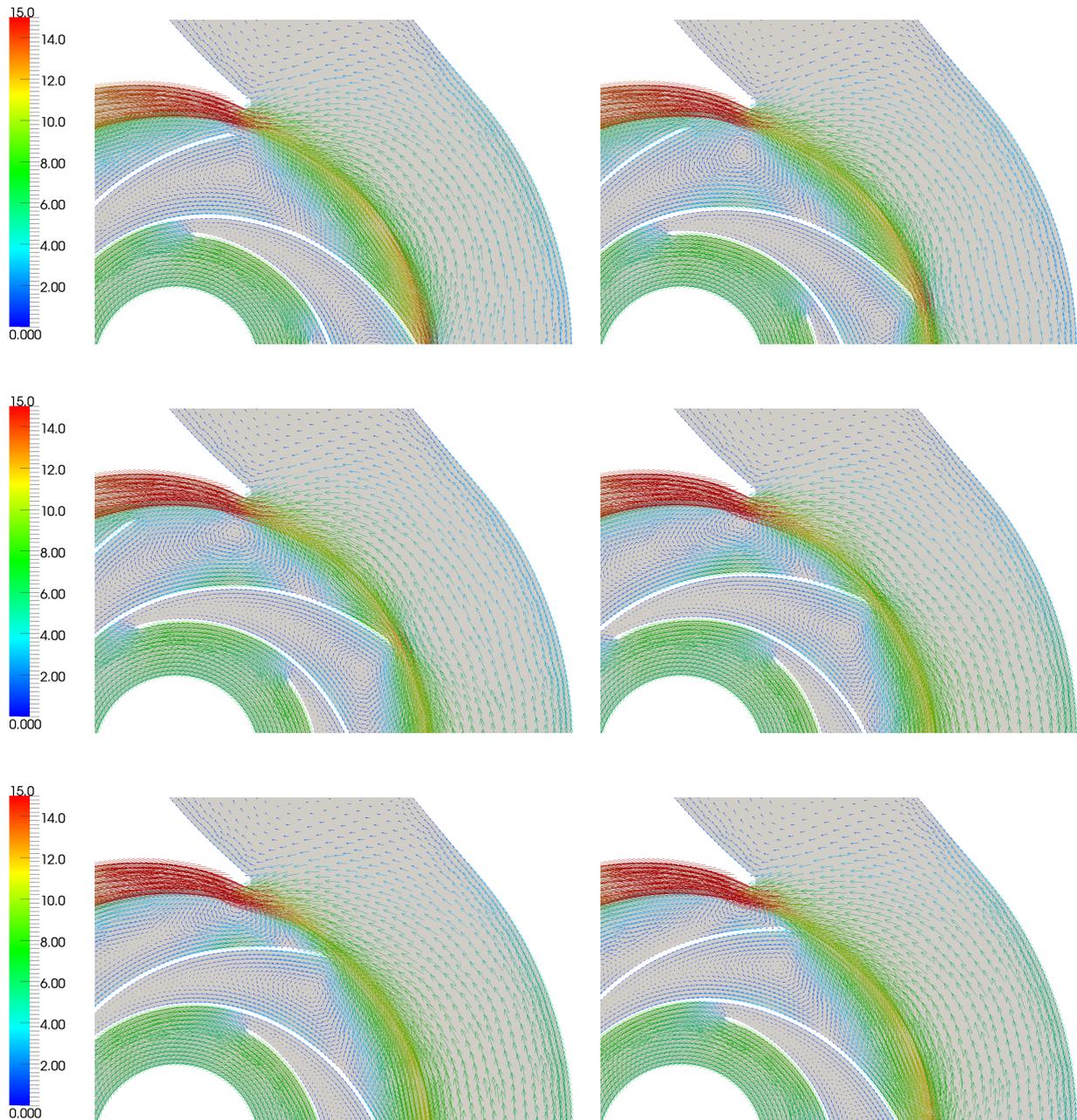


FIGURE 5.13 : Champ des vecteurs relatifs ( $m/s$ ) dans la pompe NS32-2D, « FV-MLS ».

### 5.4.2 Résultats avec l'approche FLUENT-URANS

Les figures 5.14 et 5.15 illustrent les spectres fréquentiels en utilisant l'approche URANS. Ils montrent des raies caractéristiques aux fréquences  $F_{BP}$  et  $2F_{BP}$ . Dans ce cas, l'amplitude de la fluctuation du capteur Cp3 n'est pas dissipée, elle augmente de quelques décibels. La première harmonique pour le capteur Cp1 a une amplitude plus élevée que les autres capteurs.

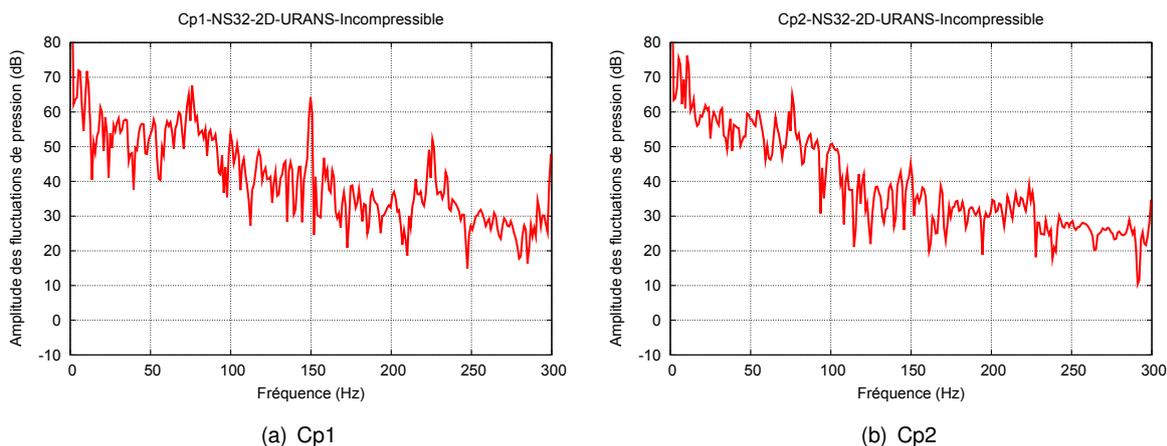


FIGURE 5.14 : Spectres fréquentiels de la pression des capteurs Cp1 et Cp2 à 900 tr/min, Solveur FLUENT-URANS.

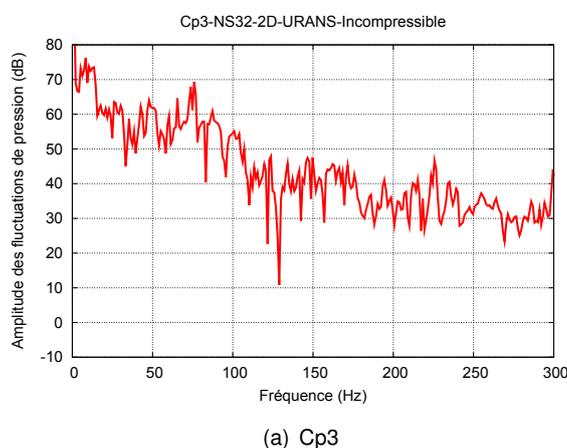


FIGURE 5.15 : Spectres fréquentiels de la pression du capteur Cp3 à 900 tr/min, Solveur FLUENT-URANS.

Le modèle numérique en régime instationnaire nous donne le champ de vecteurs de vitesse relative, les contours du nombre de Mach et de la pression statique pour différents positions de la roue en fonction du bec de volute (voir figures 5.16 à 5.18).

Les contours de pression statique ont un comportement caractéristique d'une pompe centrifuge car la volute transforme l'énergie cinétique sous forme d'énergie de pression. Les valeurs les plus élevées

sont dans la volute et en sortie tandis que les valeurs les plus faibles sont en entrée de la géométrie. La position du bec a une forte influence sur l'évolution temporelle des contours. La présence de valeurs négatives de la pression est due à ce que la pression de référence est la pression atmosphérique. L'application de l'approche numérique URANS nous permet d'obtenir une valeur moyenne de la hauteur statique de  $172916.82 \text{ Pa}$  ( $1.72 \text{ Bar}$ ).

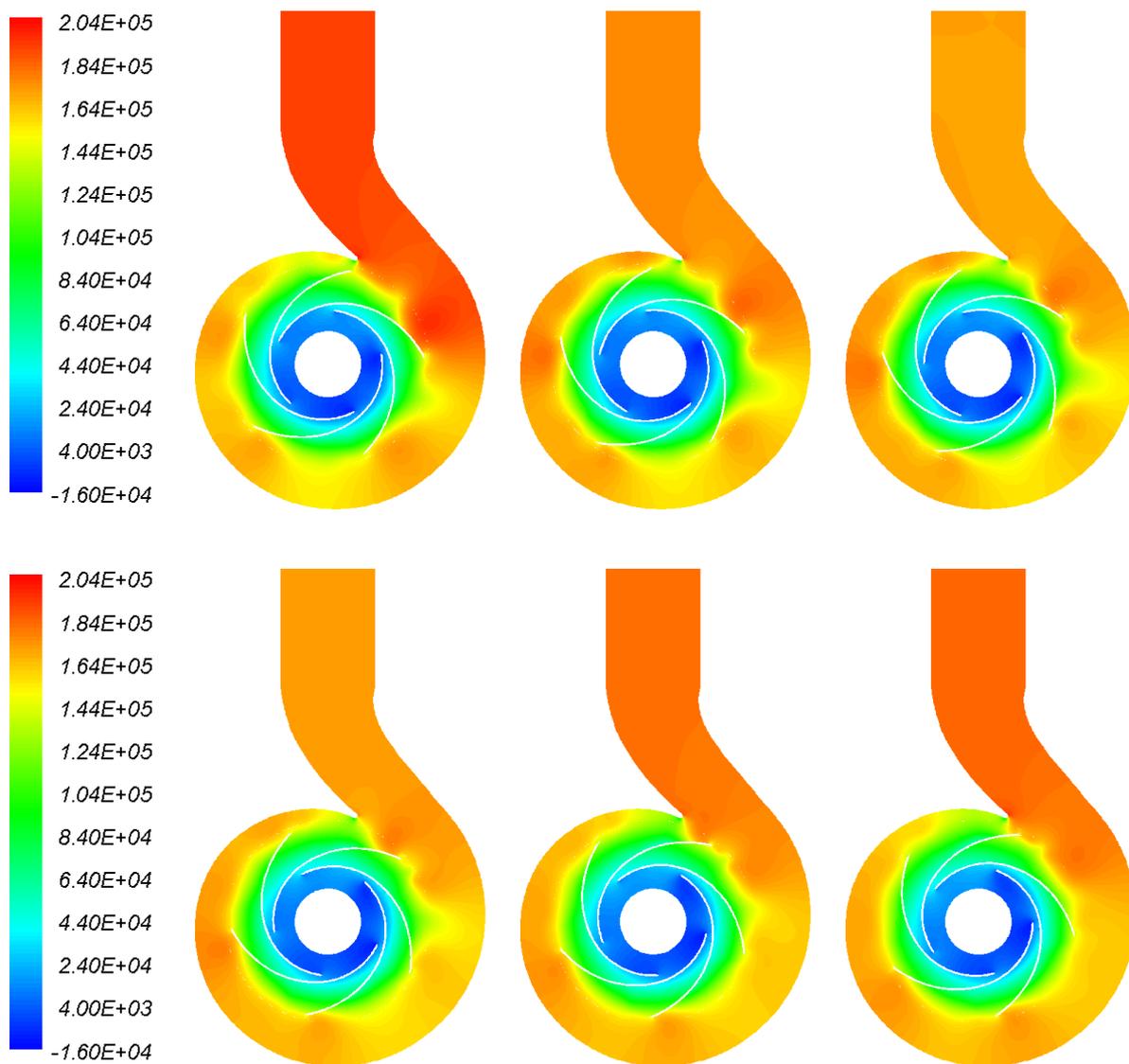


FIGURE 5.16 : Contours de la pression statique (Pa) dans la pompe NS32-2D, « FLUENT-URANS ».

Concernant le comportement du nombre de Mach dans la géométrie 2D, la figure 5.17 montre les contours du nombre de Mach pour différentes positions de la roue. On observe que les valeurs les plus

élevées se trouvent principalement sur l'extrados des aubes et les valeurs les plus faibles sont en sortie et dans une grande partie de la volute due à un ralentissement de l'écoulement lorsqu'il se dirige vers la sortie. Les valeurs maximale et minimale sont dans la même ordre de grandeur que celles obtenues par le code FV-MLS.

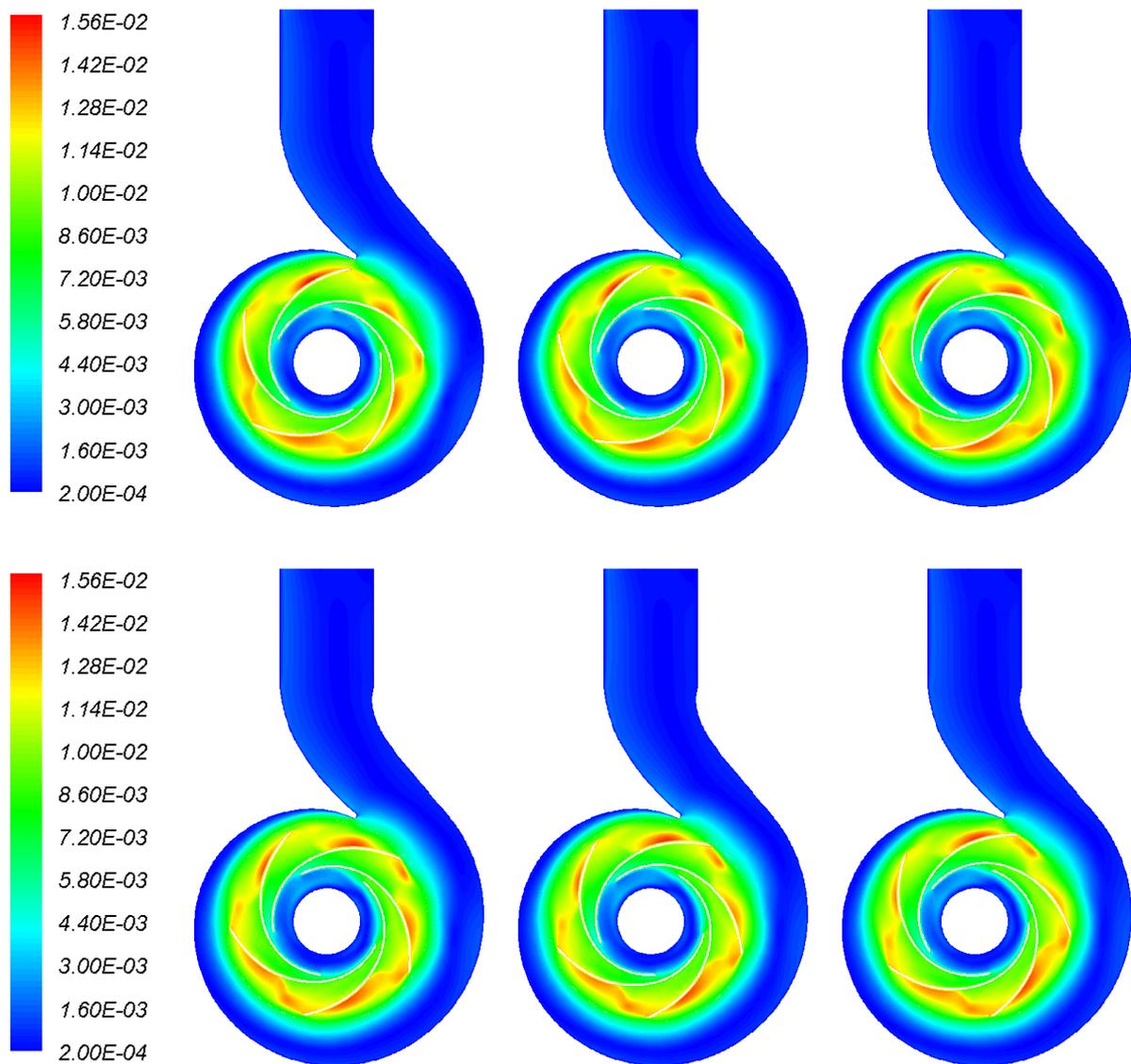


FIGURE 5.17 : Contours du nombre de Mach dans la pompe NS32-2D, « FLUENT-URANS ».

La figure 5.18 illustre le champ de vecteurs de vitesse relative dans la pompe NS32-2D. La position de la roue par rapport au bec a une forte influence sur le champ de vitesses. La présence de structures tourbillonnaires dans le canal interaubage dont leur taille et leur position changent à mesure que

la roue tourne. Ces structures ne disparaissent à aucune position de la roue. D'autre part, l'incidence de l'écoulement au bec est semblable à celle rencontrée par le solveur FV-MLS, sauf qu'on remarque dans la région de sortie de volute, des vecteurs vitesse qui rentrent vers l'intérieur. Ce comportement d'écoulement inversé est dû probablement à l'influence de la condition aux limites « outflow » définie en sortie du domaine de calcul.

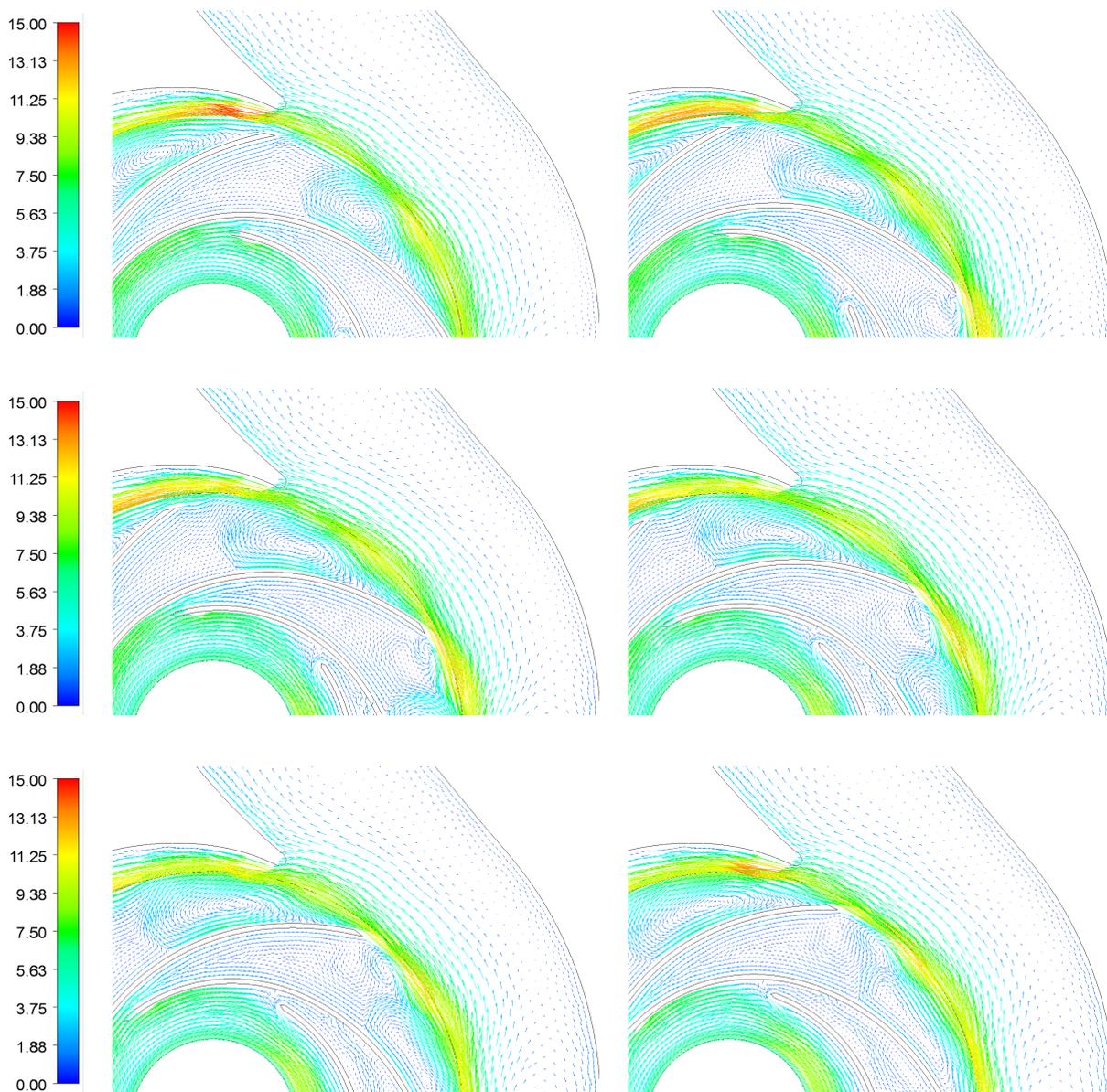


FIGURE 5.18 : Champ des vecteurs relatifs ( $m/s$ ) dans la pompe NS32-2D, « FLUENT-URANS ».

### 5.4.3 Résultats avec l'approche FLUENT-ILES

Les figures 5.19 et 5.20 illustrent les spectres fréquentiels en utilisant l'approche ILES (sans modèle de turbulence). Ils montrent les raies caractéristiques aux fréquences  $F_{BP}$  et  $2F_{BP}$ . La fluctuation de pression du capteur Cp3 est amplifiée comme on peut le constater, et est dû probablement à l'influence de la condition aux limites « outflow » définie à la frontière en sortie. La comparaison des résultats obtenus des différentes approches sera réalisée dans la section suivante.

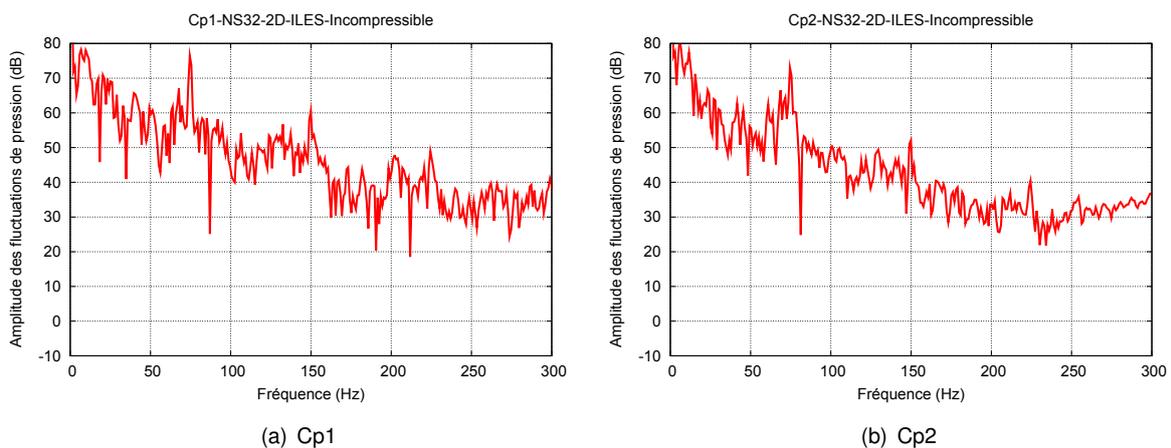


FIGURE 5.19 : Spectres fréquentiels de la pression des capteurs Cp1 et Cp2 à 900  $tr/min$ , Solveur FLUENT-ILES.

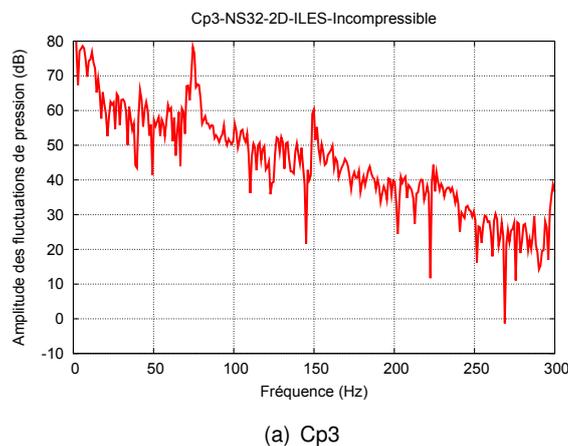


FIGURE 5.20 : Spectres fréquentiels de la pression du capteur Cp3 à 900  $tr/min$ , Solveur FLUENT-ILES.

Le calcul ILES (Implicit Large Eddy Simulation) réalisé dans le code Ansys Fluent montre un comportement différent de la morphologie interne de l'écoulement. Les figures 5.21 à 5.23 présentent le champ de vecteurs de vitesse relative, les contours du nombre de Mach et de la pression statique pour en régime instationnaire de la pompe NS32-2D.

Les contours de pression statique ont un comportement non uniforme dans la roue et dans la volute ce qui n'est pas physique. Il semble que le type de schéma numérique, le maillage ou le pas de temps ne sont pas les plus appropriés pour mener une simulation sans modèle de turbulence. Malgré les résultats de la pression, la hauteur moyenne obtenue est de  $137948.06 \text{ Pa}$  ( $1.37 \text{ Bar}$ ). L'utilisation du solveur incompressible avec un schéma de troisième ordre en espace et de deuxième ordre en temps n'est pas le plus approprié pour ce type d'application.

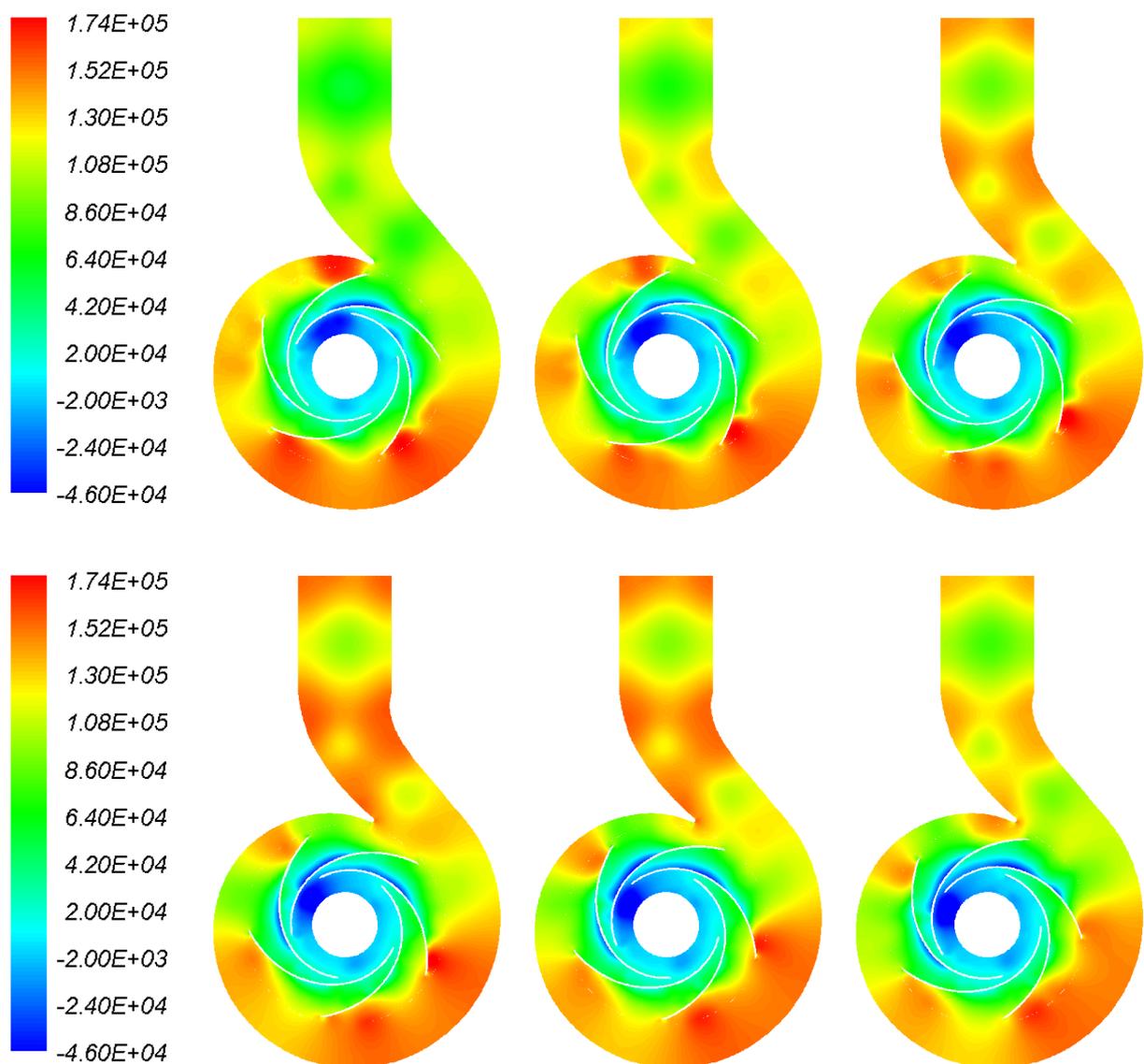


FIGURE 5.21 : Contours de la pression statique ( $\text{Pa}$ ) dans la pompe NS32-2D, « FLUENT-ILES ».

D'autre part, le comportement du nombre de Mach dans la géométrie 2D est illustré sur la figure 5.22.

Les contours diffèrent un peu de ceux obtenus par le solveur URANS. En sortie, le nombre de Mach n'est pas uniforme comme on a pu constater pour le solveur FV-MLS et URANS-FLUENT par contre il se ressemble dans la région de la volute et de la roue. Des zones à forte Mach sont observées sur l'extrados des aubes, ce qui est constatée également sur les solveurs précédents. Les valeurs maximale et minimale sont dans le même ordre de grandeur que celles obtenues par le code FV-MLS.

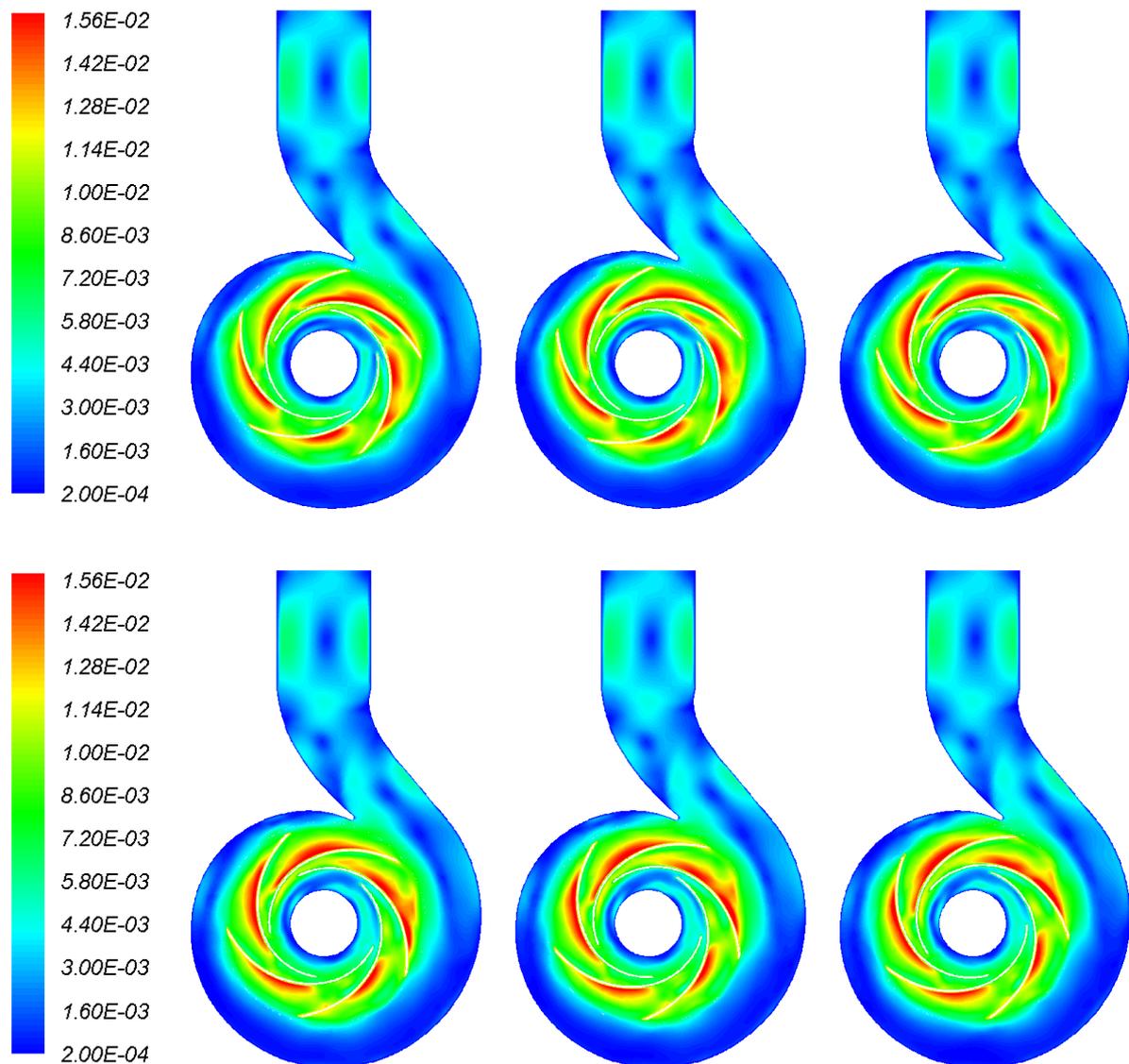


FIGURE 5.22 : Contours du nombre de Mach dans la pompe NS32-2D, « FLUENT-ILES ».

La figure 5.23 illustre le champ de vecteurs de vitesses relatives dans la pompe NS32-2D. L'écoulement est très désordonnée à n'importe quelle position de la roue. La présence de structures tourbillonnaires dans le canal interaubage qui changent de taille et de position à mesure que la roue tourne. Ces

structures ne disparaissent pas à aucune position de la roue.

L'incidence de l'écoulement au bec est semblable à celle rencontrée par le solveur FV-MLS et URANS, sauf qu'on remarque dans la région de sortie de volute, des structures de l'écoulement qui bloquent la surface de passage. Ce comportement étrange pourrait être dû principalement par l'application incorrecte de la condition « outflow » en sortie du domaine de calcul. L'utilisation de l'approche ILES semblerait intéressante car il permet d'observer de structures que l'approche URANS ne montre pas.

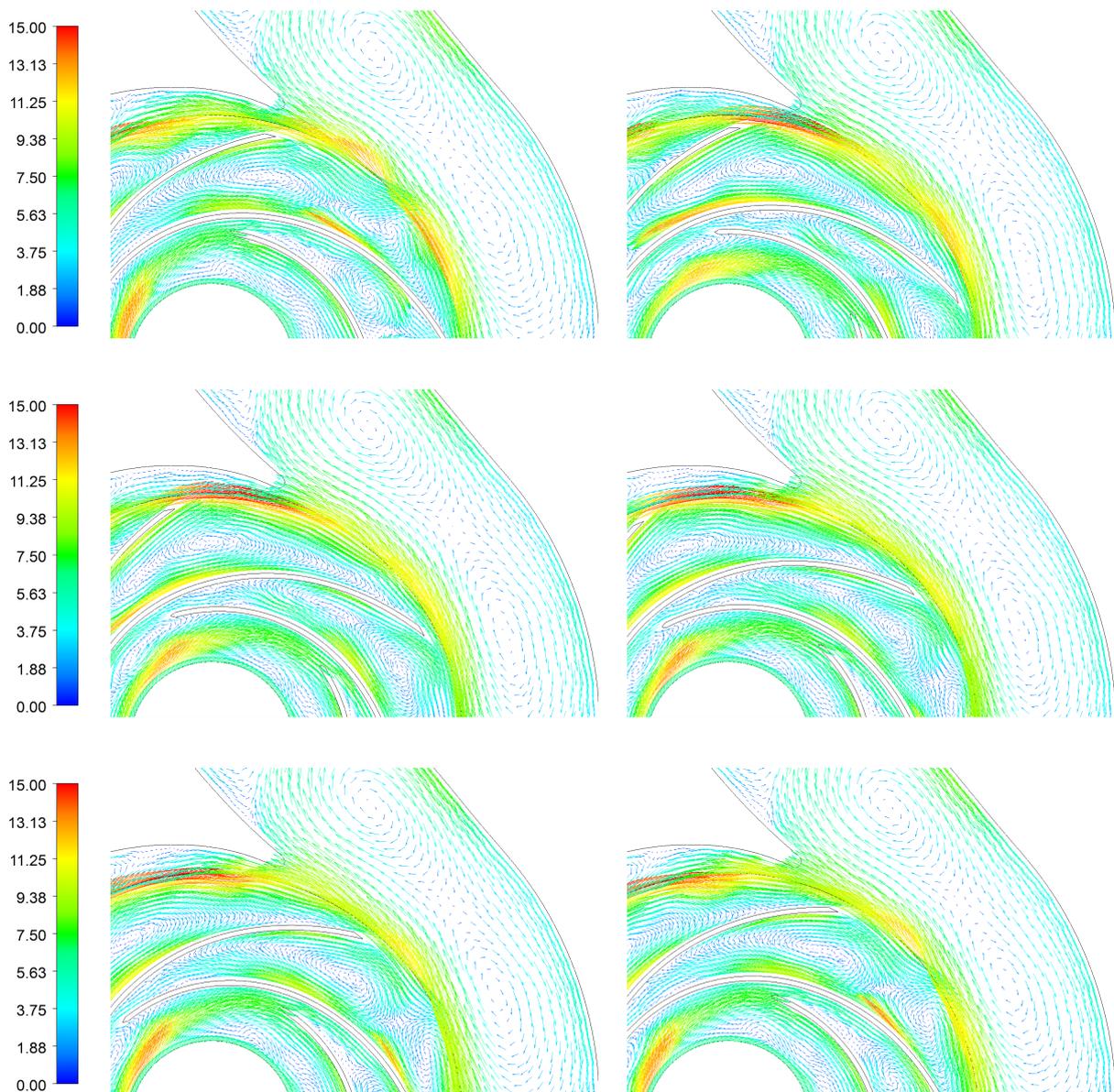


FIGURE 5.23 : Champ des vecteurs relatives ( $m/s$ ) dans la pompe NS32-2D, « FLUENT-ILES ».

### 5.4.4 Comparaison des résultats

La comparaison des spectres fréquentiels pour les trois modèles numériques utilisés est présentée sur les figures 5.24 et 5.25.

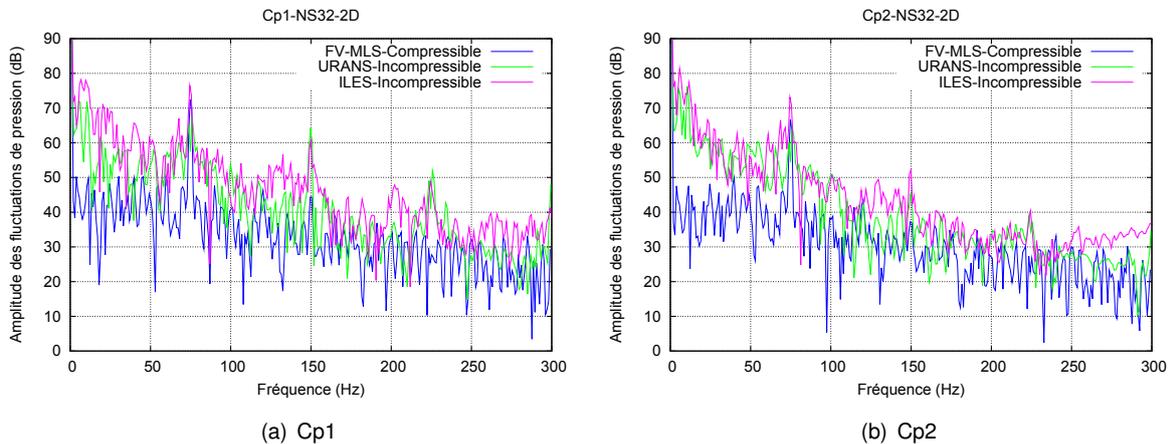


FIGURE 5.24 : Comparaison des spectres fréquentiels de la pression des capteurs Cp1 et Cp2 à 900  $tr/min$ .

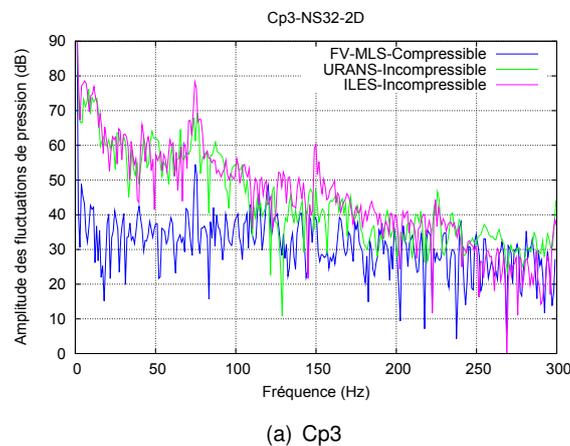


FIGURE 5.25 : Comparaison spectres fréquentiels de la pression du capteur Cp3 à 900  $tr/min$ .

On peut observer que les trois modèles prédisent les fréquences  $F_{BP}$  et  $2F_{BP}$  qui sont liées aux interactions roue-volute. L'amplitude de la raie à la fréquence  $F_{BP}$  est plus élevée pour le modèle ILES sur tous les capteurs, tandis que l'amplitude la plus faible correspond à l'approche FV-MLS. Les amplitudes prédites par l'approche URANS et FV-MLS coïncident pour le capteur Cp2 et l'écart le plus important correspond pour le capteur proche de la sortie de la volute (Cp3). La première harmonique  $2F_{BP}$  est sous estimée par le code du laboratoire sur tous les capteurs. D'autre part, l'approche URANS donne une amplitude plus élevée pour Cp1, mais pour Cp2 et Cp3, l'approche ILES donne des amplitudes

supérieures aux autres modèles.

Les différences retrouvées peuvent s'expliquer principalement par le schéma numérique et la condition aux limites utilisés. D'après les résultats expérimentaux et numériques tridimensionnels, les fluctuations de pressions sont atténuées dans la volute et le modèle qui s'approche le plus à ce comportement est l'approche FV-MLS implémentée avec une condition non réfléchissante en sortie. La différence à la fréquence  $F_{BP}$  sur  $C_{p1}$  et  $C_{p2}$  peut être due à la dissipation générée par le schéma numérique où le modèle FV-MLS est peu dissipatif.

## 5.5 Conclusions

Dans ce chapitre, la méthode FV-MLS couplée avec la technique de maillage glissant est utilisée pour modéliser l'écoulement 2D d'une configuration roue-volute de la pompe NS32. Les premiers résultats sont très encourageants car ils montrent un comportement cohérent de l'écoulement et des signaux temporelles périodiques dû à l'interaction roue-volute. On peut apercevoir l'influence de la condition aux limites appliquée à la sortie du domaine de calcul. La condition outflow ou pression amplifie les amplitudes de fluctuations de pression qui se dirigent vers la sortie, étant dans certains cas, supérieures aux amplitudes générées proche du bec de volute. Tandis que la condition absorbante permet une prédiction plus proche de la réalité.

# Conclusions et perspectives

## Conclusions

Le travail effectué est une contribution à la modélisation et à la mesure expérimentale des fluctuations de pression générées par les turbomachines subsoniques notamment les pompes centrifuges. Ainsi, une procédure numérique pour la prédiction du bruit hydraulique est développée et puis validée sur deux pompes centrifuges à volute de différentes caractéristiques. Par ailleurs, la modélisation est basée sur une approche statistique RANS qui permet de simuler le comportement turbulent, tridimensionnel et imprévisible de l'écoulement. La capacité du code commercial Ansys Fluent est évaluée pour prédire les fluctuations de pression liées à la fréquence de passage des aubes. En outre, cette thèse a permis de présenter et juger le nouvel outil numérique développé au sein du laboratoire DynFluid pour la prédiction plus précise des mécanismes générateurs des fluctuations de pression.

L'étude est concentrée sur les sources d'origine hydraulique qui contribuent au déclenchement des fluctuations de pression lors du fonctionnement de la pompe : l'interaction des aubes et le bec de volute, le comportement de l'intensité sonore en fonction de la position des aubes et la propagation de ce bruit hydraulique dans la pompe centrifuge. L'état de l'art des travaux théoriques, numériques et expérimentaux a permis de faire l'inventaire des moyens utilisés pour pour modéliser, mesurer et calculer les fluctuations de pression dans les pompes surtout à la fréquence fondamentale. Dans un premier temps, l'approche numérique se base sur la modélisation statistique des équations de Navier Stokes (RANS) qui a permis d'analyser l'influence de divers paramètres tels que le maillage et les conditions aux limites. Les résultats ont eu pour objectif de proposer une modèle numérique fiable de prédiction puis validée par la comparaison aux mesures réalisées. Dans un deuxième temps, il est difficile de trancher sur la pertinence du choix des conditions aux limites.

Les expériences ont montrée l'importance du bruit tonal à la fréquence aubage dans le spectre fréquentiel et qui varie en fonction du point de fonctionnement. Son intensité diminue progressivement proche du débit de fonctionnement nominal où le rendement est maximal. D'autre part, l'étude numérique a montré que l'endroit privilégié de l'apparition de fortes amplitudes de fluctuations de pression est proche du bec de volute, l'extrados de l'aube ainsi que le de bord de fuite et d'attaque. La comparaison des spectres d'amplitudes de fluctuations de pression pour un même débit a montré que le bruit hydraulique est atténuée dans la volute .

Les résultats numériques en régime stationnaire et instationnaire sans prise en compte du jeu de fonctionnement et la rugosité du matériau sur-estiment ou sous-estiment les caractéristiques de performance hauteur-débit pour tous les débits. Les causes de cette différence seraient les conditions aux limites et le schéma numérique utilisé pour les termes convectifs et diffusifs. Ils sont trop dissipatifs, ne permettant pas d'atteindre une bonne précision pour le calcul des grandeurs locales (fluctuations de pression).

Les pompes utilisées NS32 et NS33 ont permis d'évaluer l'influence de variantes géométriques (nombre d'aube et forme de la volute) dans le comportement temporel de l'écoulement interne. Cela a montré le nombre élevé de paramètres qui ont un impact sur la diminution ou l'augmentation du bruit d'origine hydrodynamique. Les variantes technologiques utilisées se situent dans le domaine de solutions classiques qui aura un impact à la fréquence fondamentale du spectre de la pompe.

Dans l'approche RANS, les simulations instationnaires ont montré le manque de précision et l'influence des schémas numériques et des conditions aux limites. Ces résultats ont permis de développer un code numérique basé sur la méthode des volumes finis et les approximations moindres carrés mobiles (Moving Least Squares - MLS) et des conditions aux limites non réfléchissantes. L'une des principales difficultés rencontrées sur le code commercial utilisé est la dissipation générée par les schémas et l'impossibilité d'implémenter nos propres modèles pour un calcul plus précis et peu dissipatif. Ainsi, le code FV-MLS a permis d'atteindre d'ordres élevés et d'être plus stable numériquement. Tous ces avantages numériques ont été validés dans de cas test et pour la première fois il a été appliqué dans une turbomachine pour prédire les fluctuations de pression grâce à la technique de maillage glissante, donnant des résultats prometteurs et encourageants.

## Perspectives

- Perfection de la technique de maillage glissant. Utilisation d'une reconstruction centrée à l'interface qui permettrait d'atteindre une meilleure précision.
- Etudier en détails l'influence des paramètres du solveur sur la stabilité et la précision de la simulation.
- Implémentation du code développé au laboratoire en 3D et son utilisation massivement en parallèle (GPU/MPI).
- Développement du solveur incompressible FV-MLS.
- Applications à d'autres types de pompes rotodynamiques (pompes axiales).

# Capteurs pour la mesure des fluctuations de pression

---

## A.1 Capteurs pour la mesure des fluctuations de pression

### A.1.1 Définition

Un capteur de pression produit un signal électrique qui est proportionnel à la pression appliquée. La fréquence de la fluctuation de pression doit être inférieure à la fréquence de résonance du capteur et le signal électrique est essentiellement indépendant de la fréquence inférieure à un cinquième de la fréquence de résonance (réponse en fréquence linéaire). Lorsque la pression est appliquée, la force sur l'élément de mesure due à la pression génère une déformation d'élément de mesure. Cette déformation change les propriétés électriques de l'élément et le signal électrique du capteur. Dans un capteur de pression bien conçu, la déformation et le signal électrique sont directement proportionnels à la pression sur une large plage de fréquences.

### A.1.2 Aspects fonctionnels et structure

#### Principe

Tout capteur assure plusieurs fonctions :

- Il dimensionne la grandeur à mesurer : c'est sa fonction principale. Un capteur est d'abord un appareil de mesure.
- Il convertit la mesure en un signal qui peut être exploité par la technologie du moment.
- Il émet un signal standard image de la grandeur à mesurer.

#### L'élément sensible

La plupart du temps la grandeur à mesurer n'est pas convertible directement en un signal électrique exploitable. L'élément de mesure ou élément sensible convertit la grandeur à mesurer  $G_m$  en une grandeur intermédiaire  $G_i$  facilement traduisible en signal électrique. La loi qui lie la grandeur intermédiaire à la grandeur à mesurer doit être parfaitement connue. La grandeur intermédiaire est souvent une déformation ou une force. Cet élément caractérise le capteur.

## **Le transducteur**

Il assure la conversion de la grandeur intermédiaire en une grandeur électrique, généralement une tension ou une fréquence. Le transducteur, ou encore appelé capteur primaire, peut se comporter :

- Comme un générateur, il s'agit d'un capteur actif.
- Comme une impédance, on parlera de capteur passif. Il est alors associé à un circuit électrique permettant de mesurer cette impédance.

## **La partie traitement**

Le signal émis par le transducteur est de faible puissance, il peut difficilement être transféré tel quel. Si on connaît la fonction de transfert liant le signal du transducteur à la grandeur à mesurer, celle-ci est rarement linéaire, elle est sensible à des grandeurs perturbatrices appelées grandeurs d'influence (généralement la température de l'ensemble élément sensible-transducteur). Le signal émis par le capteur doit varier linéairement avec la grandeur à mesurer. Des circuits électroniques amplifient, linéarisent et corrigent le signal du transducteur.

## **Le signal émis**

Le signal émis est en général, un signal analogique en courant (4 - 20mA) ou en tension (1 - 5 volts). L'alimentation en énergie électrique du capteur est faite par la ligne de communication.

### **A.1.3 Caractéristiques métrologiques**

L'incertitude de mesure est l'écart entre la valeur vraie du mesurande et la mesure effectuée par le capteur. Les seuls mesurandes connus sont les étalons dont la valeur est fixée par convention. On distingue les erreurs systématiques des incertitudes aléatoires car elles ont des origines et des conséquences sur la mesure très différentes.

#### **Erreurs systématiques**

L'erreur systématique est toujours due à une mauvaise connaissance ou à une mauvaise utilisation du capteur. L'erreur systématique se détecte en comparant les valeurs moyennes d'un même mesurande, données par deux capteurs différents. Les causes les plus fréquentes d'erreurs systématiques sont les suivantes :

- Etalonnage incorrect ou non effectué au delà de la durée de vie ou après une altération du capteur.
- Emploi incorrect. Par exemple, non attente du régime permanent, erreur sur l'un des éléments d'un conditionneur, modification du mesurande par le capteur lui-même.
- Exploitation inadéquate des données. Par exemple, erreur de linéarisation dans le chaîne de mesure, saturation d'un amplificateur de la chaîne de mesure.

### **Incertitudes aléatoires**

Ce sont les erreurs dont on peut connaître la cause sans que cette connaissance permette de prévoir la valeur de la mesure. Leur évaluation ne peut être que statistique. La cause principale de ces incertitudes est la présence de signaux ou d'influences « parasites » dont l'amplitude est aléatoire et que l'on qualifie par le terme assez vague de « bruit ».

Il existe bien d'autres causes d'incertitudes aléatoires comme les erreurs de lecture, les défauts de mobilité du capteur, les phénomènes d'hystérésis. Contrairement aux erreurs systématiques, les erreurs aléatoires ne peuvent pas être annulées.

#### **A.1.4 Critères de choix**

On est conduit à se documenter sur les caractéristiques d'un capteur quand il faut faire un choix. Il est évident que la nature de la grandeur à mesurer limite l'éventail des capteurs utilisables. Une autre évidence est le prix du capteur qui sera un élément souvent déterminant. Les critères déterminants vont être les contraintes de fonctionnement imposées par le système sur lequel on fera la mesure et les caractéristiques métrologiques imposées par le cahier des charges de la mesure.

#### **Les contraintes de fonctionnement**

Le capteur choisit doit fonctionner en permanence et pendant une longue période sans nécessiter une maintenance importante, dans l'environnement du système à contrôler. Il peut être mis au contact de fluide corrosif. Il sera peut-être soumis à des pressions, à des températures extrêmes, à des vibrations. Il pourra subir une ambiance peu favorable : forte humidité, risque d'explosion.

#### **Les caractéristiques métrologiques**

C'est un des aspects les plus importants des capteurs, sur lequel l'utilisateur n'est pas toujours suffisamment sensibilisé. Ces caractéristiques métrologiques sont celles d'un appareil de mesure.

**L'étendue d'échelle, la sensibilité, décalage de 0 :** Ces critères sont liés au calibrage du capteur. L'étendue d'échelle est la différence entre les valeurs minimale et maximale de la grandeur mesurée quand la sortie du capteur passe de 0% à 100% de sa valeur maxima. Elle peut-être réglable ou fixe. Si elle est réglable, il faut choisir un appareil que l'on pourra régler aux valeurs données par le cahier des charges. Le constructeur donne les échelles minima et maxima.

La sortie du capteur à 0%, ne correspond pas forcément à une valeur 0 de la grandeur mesurée, c'est ce qu'on appelle le décalage de 0.

La sensibilité d'un appareil de mesure est définie autour d'une valeur  $m$  de la grandeur mesurée par le rapport :

$$S = \frac{\Delta s}{\Delta m} \quad (\text{A.1})$$

où  $\Delta s$  est la variation de la sortie et  $\Delta m$  est la variation de la mesure. Un capteur est théoriquement linéaire,  $S$  est déterminé par l'étendue d'échelle.

**La précision d'un capteur :** La précision d'un capteur caractérise la qualité de la mesure effectuée par l'appareil. L'erreur de précision délimite l'intervalle autour de la valeur mesurée dans lequel on a de fortes chances de trouver la valeur vraie de la grandeur mesurée.

L'imprécision est due à deux types d'erreurs :

– Les erreurs systématiques sont toujours présentes et constantes à chaque opération de mesure. Elles peuvent être corrigées par un réglage du capteur.

– Les erreurs aléatoires sont imprévisibles et apparaissent aléatoirement. Elles sont minimisées par une correction de l'action des grandeurs d'influence.

Le constructeur définit la précision de son capteur, c'est une caractéristique importante souvent liée au prix du capteur.

**Le temps de réponse, la rapidité :** Ce critère permet d'apprécier les performances dynamiques du capteur. Celui-ci se comporte comme un filtre passe bas.

Le temps de réponse  $Tr(\varepsilon\%)$  permet de qualifier la rapidité du capteur.  $Tr$  est composé d'un temps de retard à la montée  $\theta$  et d'un temps de montée  $Tm$ .

C'est un élément important à prendre en compte lorsque l'on doit mesurer une grandeur ayant des vitesses de variation très rapides. Le temps de réponse d'un capteur installé dépend aussi des accessoires de l'installation, de la situation du point de mesure.

**La finesse :** Le capteur prélève une certaine quantité d'énergie (ou en fournit) au système sur lequel on fait la mesure. La finesse est une spécification qui permet d'évaluer l'influence du capteur sur la grandeur à mesurer. Elle dépend non seulement du capteur mais aussi du système sur lequel on fait la mesure.

### A.1.5 Etalonnage

L'étalonnage est l'opération qui établit la relation entre le mesurande et la grandeur électrique de sortie. Cette relation peut dépendre non seulement du mesurande mais aussi des grandeurs d'influence. S'il n'y a pas de grandeurs d'influence, l'étalonnage est simple, dans le cas contraire il est multiple.

#### Etalonnage simple

On distingue deux méthodes possibles :

- L'étalonnage direct dans lequel les valeurs du mesurande sont issues d'étalons ou d'objets de référence pour lesquels le mesurande est connu avec une incertitude donnée.
- L'étalonnage par comparaison dans lequel on compare les mesures du capteur à étalonner avec celles provenant d'un autre capteur lui-même préalablement étalonné et considéré comme étant la référence, ce qui signifie que son étalonnage est raccordé à des étalons et que l'incertitude correspondante est connue.

### **Etalonnage multiple**

L'existence de grandeurs d'influence susceptibles de varier au cours des mesures oblige à paramétrer l'étalonnage pour différentes valeurs de ces grandeurs : c'est l'étalonnage multiple. Quelques cas particuliers d'étalonnages multiples méritent d'être mentionnés :

- Pour les capteurs présentant une hystérésis, il est nécessaire de procéder à l'étalonnage par une succession ordonnée et spécifiée des valeurs du mesurande.
- Pour les capteurs de grandeurs dynamiques, il faut relever la réponse en fréquence pour un mesurande d'amplitude fixée et la réponse en amplitude pour une fréquence fixée.
- Dans certains cas, notamment pour beaucoup de capteurs mécaniques et thermiques, lorsque le constructeur ne donne pas d'indication relative à l'usage du capteur, il est souvent souhaitable d'effectuer l'étalonnage après son installation sur le site. Ainsi, l'étalonnage d'un accéléromètre peut être effectué après sa fixation à la structure dont on veut mesurer l'accélération, en particulier si, dans le certificat d'étalonnage, le constructeur a spécifié une procédure différente.

### **A.1.6 Type de capteurs de pression**

Deux modes d'opération pour les capteurs de pression. Capteurs de pression « charge mode pressure sensor » génèrent une charge de sortie de haute impédance. Les capteurs de pression « voltage mode-type sensor » ont la particularité d'être intégrés par des amplificateurs microélectroniques, qui convertissent la charge à haute impédance en une tension de sortie à faible impédance.

#### **Capteurs de pression piézorésistif**

Les capteurs de pression piézorésistifs sont utilisés pour les mesures de pression dynamiques. Ils font usage de l'effet d'une fine couche de matériau semi-conducteur qui change sa résistance sous l'effet de la pression.

#### **Construction d'un capteur**

Les capteurs de pression piézorésistif sont disponibles sous plusieurs formes et avec différents types de connexion pour permettre un montage approprié pour différents types de mesures de pression. Les cristaux de quartz sont utilisés dans la plupart de capteurs pour assurer le fonctionnement stable et

reproductible. Les cristaux de quartz sont généralement préchargés dans les logements pour assurer une bonne linéarité. La tourmaline, un autre cristal piézo-électrique naturellement stable, est utilisé dans certains capteurs où la sensibilité volumétrique est nécessaire.

### **Installation**

La précision de montage de capteurs de pression est indispensable pour une bonne mesure de la pression. Bien que certaines informations de montage sont présentées dans le catalogue, il faut toujours vérifier les plans d'installation fournis dans le manuel avec le capteur, ou de prendre contact avec le fournisseur pour demander des instructions de montage détaillées. Utiliser des bonnes méthodes d'usinage pour le perçage et le filetage des ports de montage, et le couple des capteurs aux valeurs notées.

Les cristaux de détection de nombreux capteurs de pression sont situés à l'extrémité de la membrane du capteur. Le chargement latéral de cette partie du capteur pendant une mesure de pression crée des distorsions dans le signal de sortie. Il est également important d'éviter des chargements inhabituels de contraintes indésirables et les tensions sur le haut du corps du capteur. Une installation correcte minimise les distorsions dans le signal de sortie.

### **Montage encastré**

Le montage encastré de capteurs de pression dans une plaque ou un mur est parfois souhaitable pour au minimum la turbulence, en évitant un effet de cavité, ou en évitant une augmentation de volume de la chambre.

# Mesure de la célérité du son

## B.1 Célérité du son

Le contrôle de la célérité du son permet de s'assurer de la faiblesse du taux de gaz dans l'eau. La valeur théorique de la célérité du son est déterminée et sa valeur est égale à  $1300 \text{ m/s}$ .

### B.1.1 Partie réelle de la célérité du son à l'aspiration

La partie réelle de la célérité du son permet d'évaluer expérimentalement la célérité du son en utilisant la méthode des trois capteurs.

Les figures B.1 à B.4 présentent la partie réelle de la célérité du son à l'aspiration. La valeur calculée de  $c$  est égale à  $1295 \text{ m/s}$ .

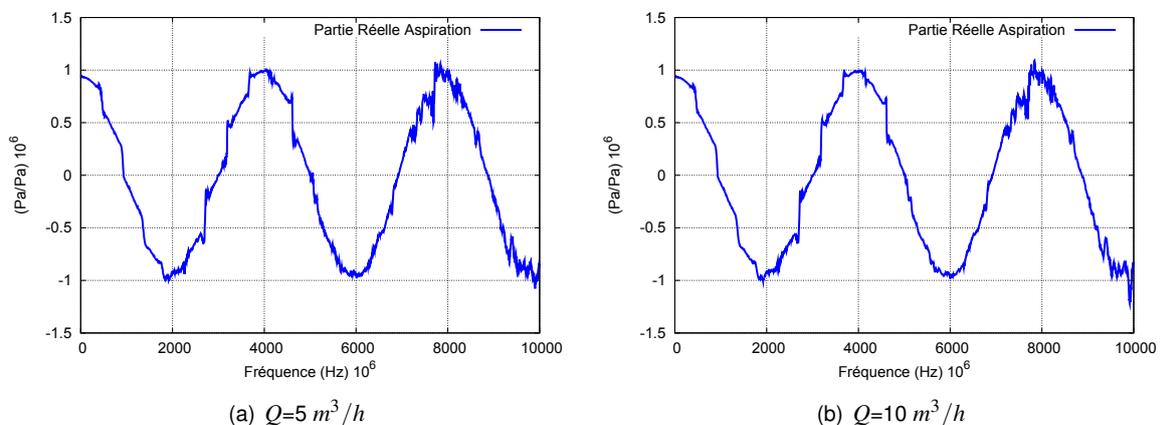


FIGURE B.1 : Partie réelle de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 5$  et  $10 \text{ m}^3/h$ ).

### B.1.2 Partie imaginaire de la célérité du son à l'aspiration

Les images B.5 à B.8 illustrent la partie imaginaire du son à l'aspiration.

### B.1.3 Partie réelle de la célérité du son au refoulement

Les figures B.9 à B.12 présentent la partie réelle de la célérité du son au refoulement.

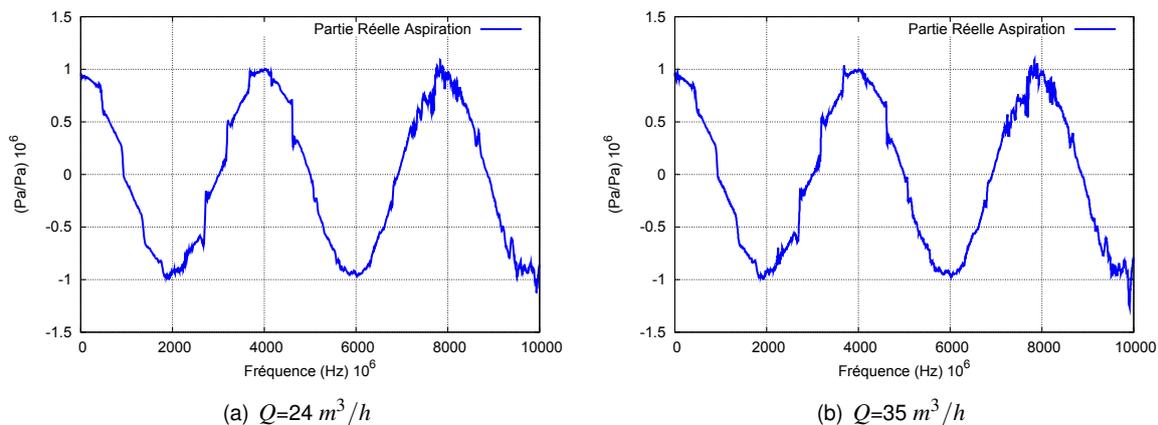


FIGURE B.2 : Partie réelle de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 24$  et  $35 \text{ m}^3/h$ ).

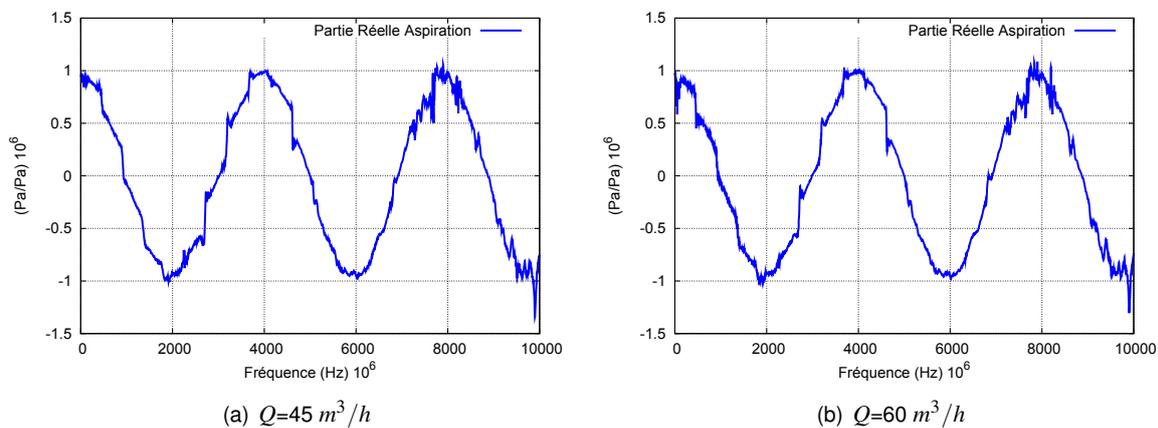


FIGURE B.3 : Partie réelle de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 45$  et  $60 \text{ m}^3/h$ ).

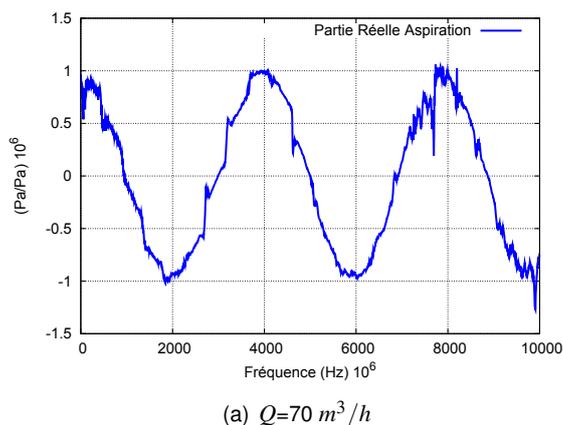


FIGURE B.4 : Partie réelle de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 70 \text{ m}^3/h$ ).

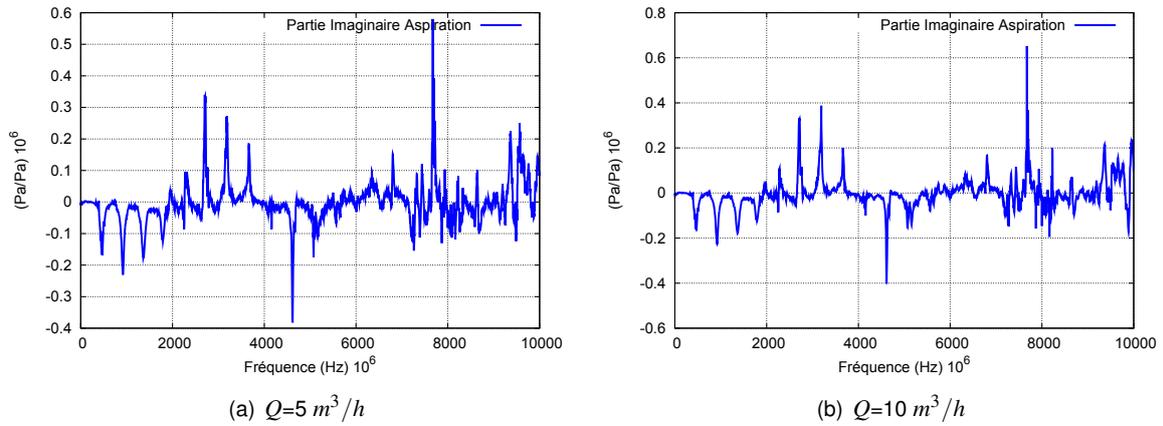


FIGURE B.5 : Partie imaginaire de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 5$  et  $10 \text{ m}^3/h$ ).

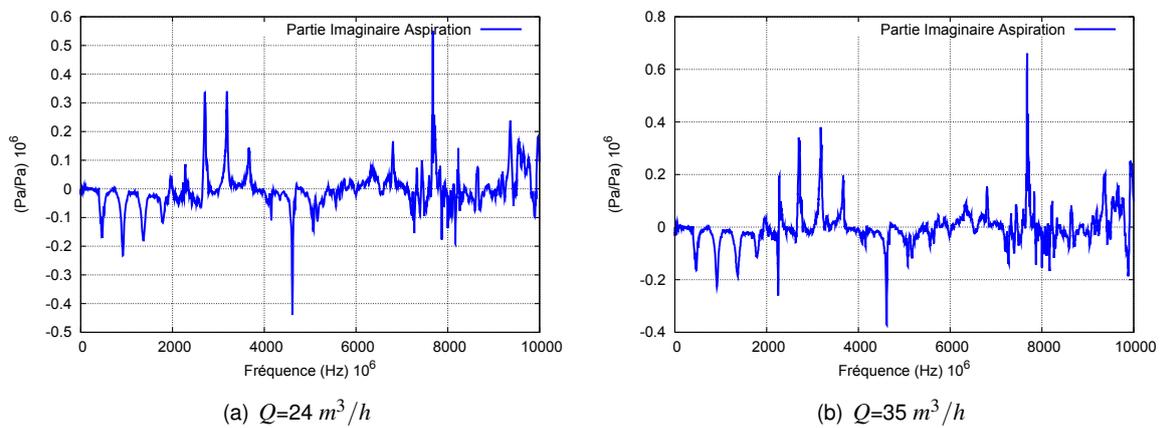


FIGURE B.6 : Partie imaginaire de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 24$  et  $35 \text{ m}^3/h$ ).

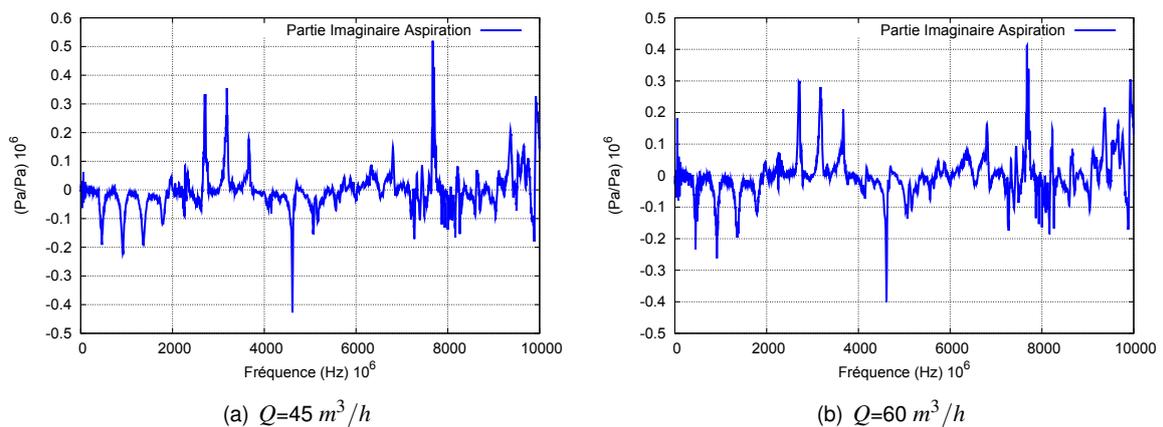
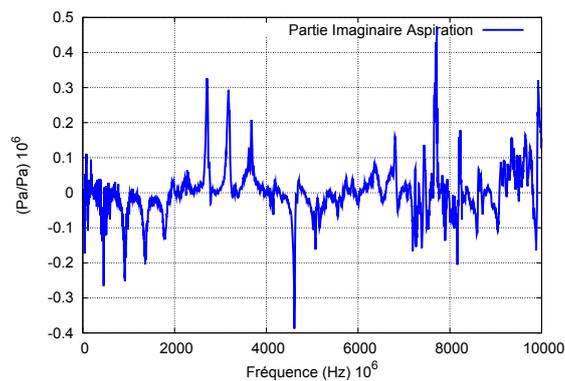
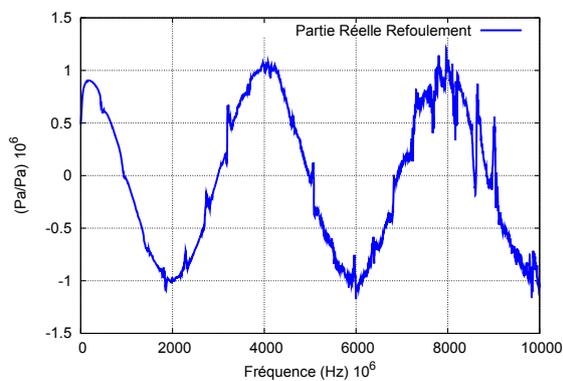
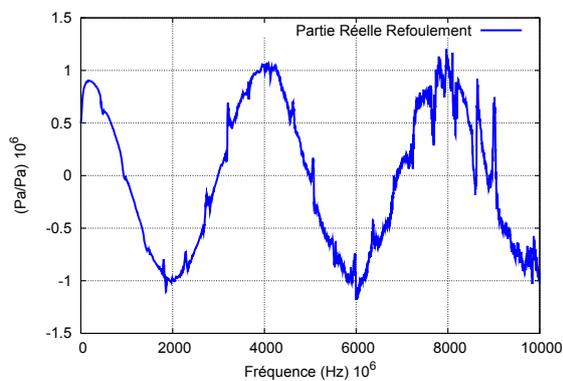
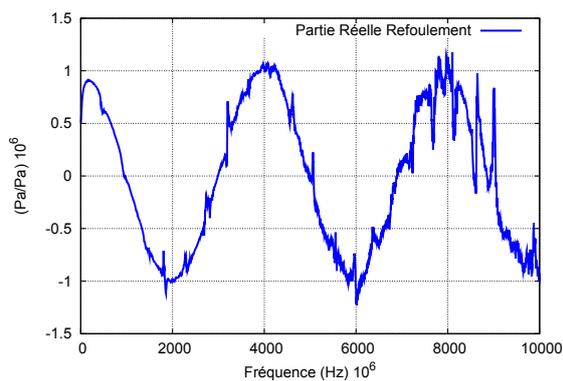
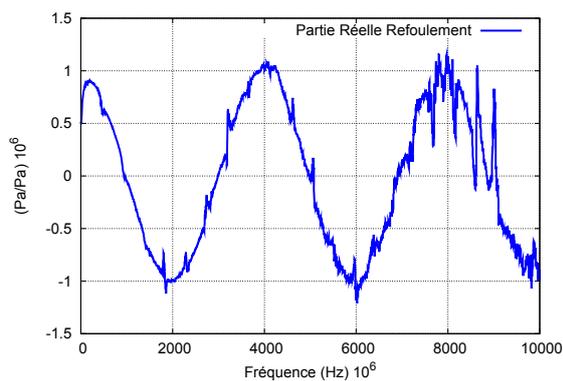
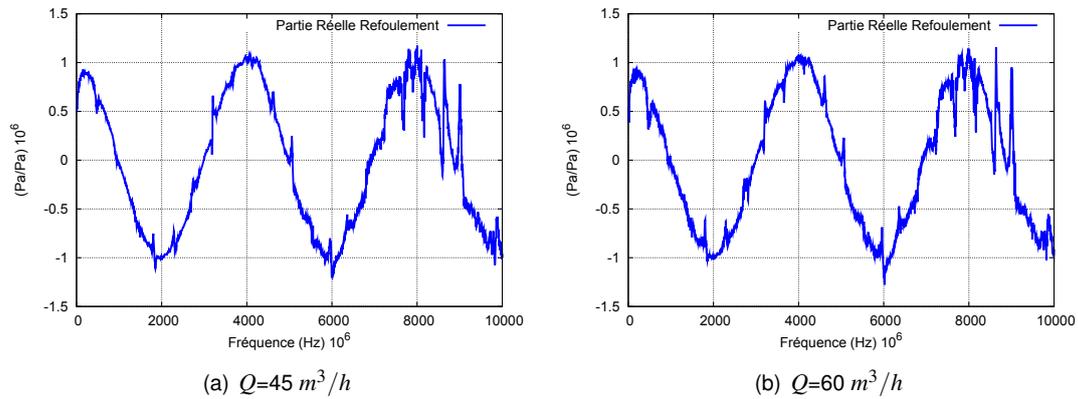
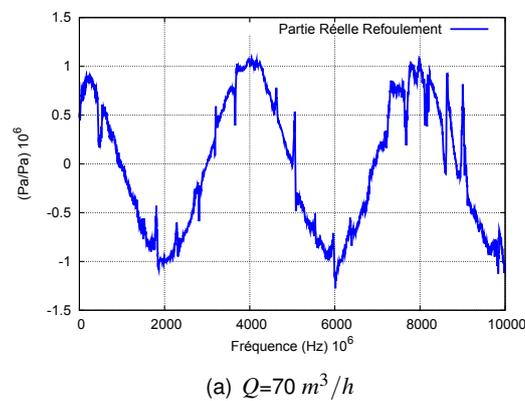


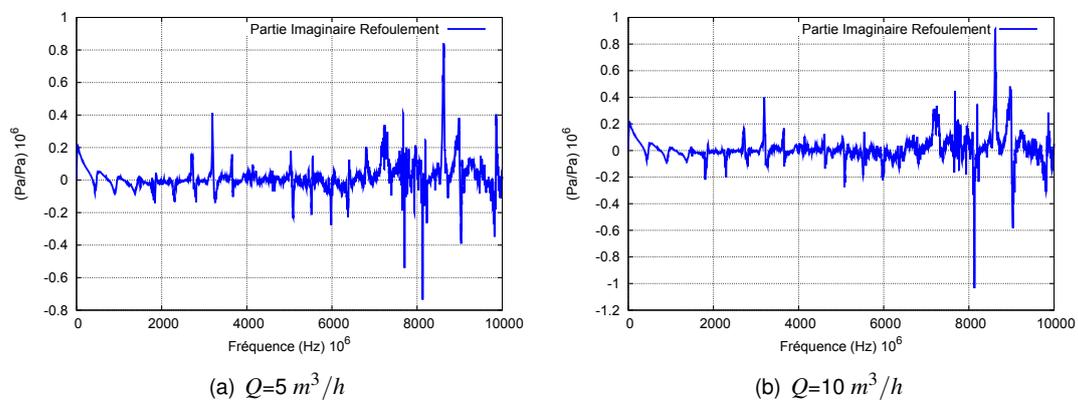
FIGURE B.7 : Partie imaginaire de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 45$  et  $60 \text{ m}^3/h$ ).

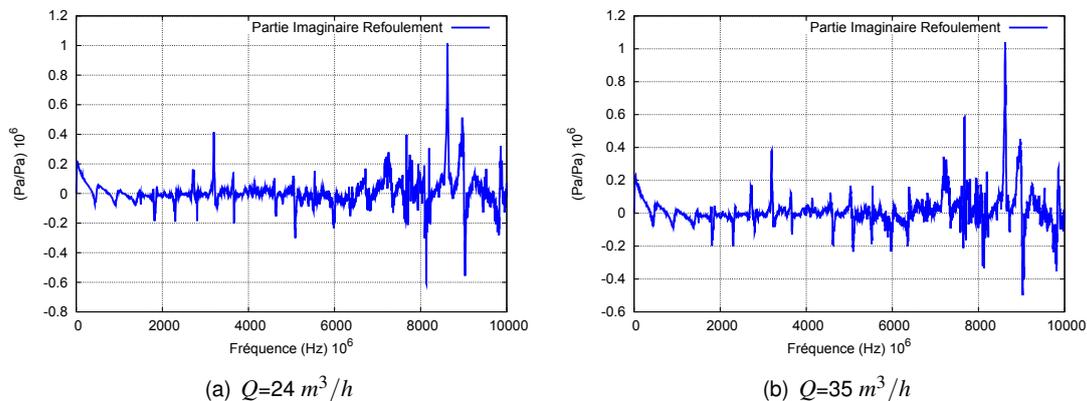
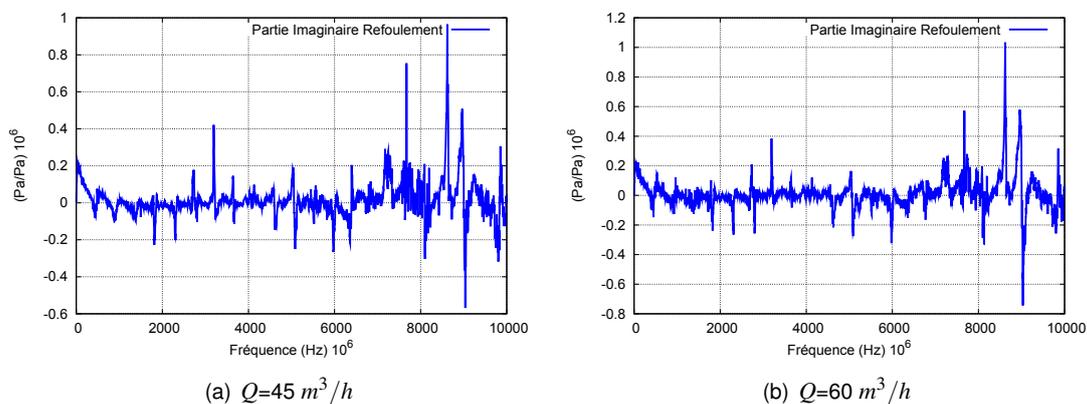
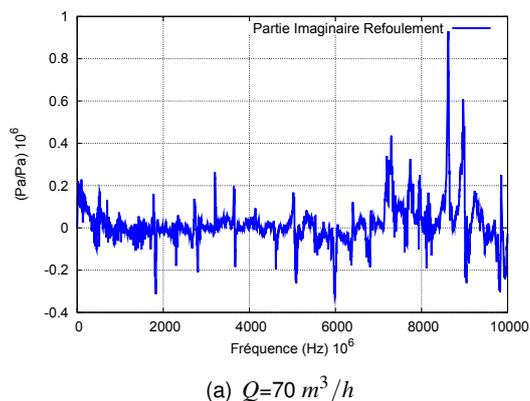
(a)  $Q=70 \text{ m}^3/h$ FIGURE B.8 : Partie imaginaire de la célérité du son à l'aspiration ( $Q = 70 \text{ m}^3/h$ ).(a)  $Q=5 \text{ m}^3/h$ (b)  $Q=10 \text{ m}^3/h$ FIGURE B.9 : Partie réelle de la célérité du son au refoulement ( $Q = 5$  et  $10 \text{ m}^3/h$ ).(a)  $Q=24 \text{ m}^3/h$ (b)  $Q=35 \text{ m}^3/h$ FIGURE B.10 : Partie réelle de la célérité du son au refoulement ( $Q = 24$  et  $35 \text{ m}^3/h$ ).

FIGURE B.11 : Partie réelle de la célérité du son au reflux ( $Q = 45$  et  $60 \text{ m}^3/h$ ).FIGURE B.12 : Partie réelle de la célérité du son au reflux ( $Q = 70 \text{ m}^3/h$ ).

### B.1.4 Partie imaginaire de la célérité du son au reflux

Les figures B.13 à B.16 présentent la partie imaginaire de la célérité du son au reflux.

FIGURE B.13 : Partie imaginaire de la célérité du son au reflux ( $Q = 5$  et  $10 \text{ m}^3/h$ ).

FIGURE B.14 : Partie imaginaire de la célérité du son au refoulement ( $Q = 24$  et  $35 \text{ m}^3/h$ ).FIGURE B.15 : Partie imaginaire de la célérité du son au refoulement ( $Q = 45$  et  $60 \text{ m}^3/h$ ).FIGURE B.16 : Partie imaginaire de la célérité du son au refoulement ( $Q = 70 \text{ m}^3/h$ ).

La valeur déterminée sur la base de l'ensemble de ces résultats expérimentaux est  $c = 1295 \text{ m/s}$ .

# Bibliographie

- [1] P. PEMPIE et J. P. METAIL : Prediction of noise in centrifugal pumps. *In Noise and vibration pumps*, 1993.
- [2] X. NOGUEIRA : *Moving Least Squares and High-Order finite Volume Methods for the Numerical Simulation of Compressible Flows (in Spanish)*. Phd thesis, Universidade da Coruna, 2009.
- [3] X. NOGUEIRA, S. KHELLADI, L. CUETO-FELGUEROSO, F. BAKIR, I. COLOMINAS et H. GOMEZ : Implicit large-eddy simulation with a moving least squares-based finite volume method. *IOP Conf. Series : Materials Science and Engineering*, 10:1–10, 2010.
- [4] J. POULAIN : Bruit des pompes. *Techniques de l'Ingenieur*, BM-4-179:1–24, 1998.
- [5] F. H. HARLOW et A. A. AMSDEN : Fluid dynamics, monograph la-4700. *Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM*, 1971.
- [6] P. SARUEL, J. P. COCCHI et P. B. BUTLER : A numerical study of cavitation in the wake of a hypervelocity underwater profile. *Journal of Propulsion and Power*, 15(4):513–522, 1999.
- [7] U. BOLLETER : Interaction of pumps and piping systems with regard to pressure pulsations. *In Noise and vibrations pumps*, 1993.
- [8] S. CHU, R. DONG et J. KATZ : The effect of blade-tongue interactions on the flow structure, pressure fluctuations and noise within a centrifugal pump. *In Noise and vibration pumps*, 1993.
- [9] R. DONG, S. CHU et J. KATZ : Effect of modification to tongue and impeller geometry on unsteady flow, pressure fluctuations, and noise in a centrifugal pump. *Journal of Turbomachinery*, 119:506–515, 1995.
- [10] D. CROBA, J. L. KUENY, F. HUREAU et J. KERMAREC : Numerical and experimental unsteady flow analysis in centrifugal pumps. impeller and volute interaction . *In Noise and vibration pumps*, 1993.
- [11] J. GONZALEZ, J. FERNANDEZ, E. BLANCO et C. SANTOLARIA : Numerical simulation of the dynamic effects due to impeller-volute interaction in a centrifugal pump. *Journal of Fluids Engineering*, 124: 348–355, June 2002.
- [12] M. KITANO : Numerical study of unsteady flow in a centrifugal pump. *Journal of Turbomachinery*, 127:363–371, 2005.
- [13] Y.-H. WONG, W.-H. CHAN et W. HU : Effects of tongue position and base circle diameter on the performance of a centrifugal blood pump. *Journal Compilation 2007, International Center for Artificial Organs and Transplantation*, 31:639–645, 2007.
- [14] F. HUREAU, J. KERMAREC et D. FOUCHER : Analysis of unsteady flow in a centrifugal pump operating at partial flow rate. *In Noise and vibrations pumps*, 1993.

- [15] D. LEDUCQ : Experimental analysis of instabilities in a centrifugal pump with a vaneless diffuser. *In Noise and vibration pumps*, 1993.
- [16] M. JAREMCZAK et G. CAIGNAERT : Theoretical and experimental analysis of hydraulic noise on 3 centrifugal pumps. *In Noise and vibration pumps*, 1993.
- [17] J. S. CHOI, D. K. MCLAUGHLIN et D. E. THOMPSON : Experiments on the unsteady flow field and noise generation in a centrifugal pump impeller. *Journal of Sound and Vibration*, 263:493–514, 2003.
- [18] G. CHATEL, J. F. LAURO et C. TROLLAT : Experimental analysis of noise generation mechanism in a centrifugal pump. *In Noise and vibration pumps*, 1993.
- [19] F. SHI et H. TSUKAMOTO : Numerical study of pressure fluctuations caused by impeller-diffuser interaction in a diffuser pump stage. *Journal of Fluids Engineering*, 123:466–474, September 2001.
- [20] J. P. BARRAND, M. JAREMCZAK et M. THALA : Pressure fluctuations and waves within a pump impeller. *In Noise and Vibrations Pumps*, 1993.
- [21] M. PLUVIOSE, F. LEZE, M. BESOMBES et J. TOURRET : Analysis of the behavior of a pump by visualization of the unsteady pressure field at partial flow. *In Noise and Vibrations Pumps*, 1993.
- [22] H. ZOGG et U. BOLLETER : Generation and propagation of hydraulic noise in centrifugal pumps. *In Noise and Vibrations Pumps*, pages 263–270, 1993.
- [23] G. PAVESI, G. CAVAZZINI et G. ARDIZZON : Time-frequency characterization of rotating instabilities in a centrifugal pump with a vaned diffuser. *International Journal of Rotating Machinery*, 2008:1–10, 2008.
- [24] J. GONZALEZ et C. SANTOLARIA : Unsteady flow structure and global variables in a centrifugal pump. *Journal of Fluids Engineering*, 128:937–946, September 2006.
- [25] S. F. TIMUSHEV et B. V. OVSYANNIKOV : Pressure fluctuation numerical simulation in a centrifugal pump volute casing. *Journal Physic*, 2, 1992.
- [26] H. C. SIMPSON et T. A. CLARK : Noise generation in a centrifugal pump.
- [27] H. C. SIMPSON, T. A. CLARK et G. A. WEIR : A theoretical investigation of hydraulic noise in pumps. *Journal of Sound Vibration*, 5:456–488, 1967.
- [28] Mulhe DAGA : Gerauschnuntersuchungen an einer kreisel.
- [29] TOURRET : Problemes associes Á l'etude du bruit d'un circuit de pompes centrifuges. *La houille blanche*, 2/3, 1979.
- [30] C. E. SHANNON : Communication in the presence of noise. *Proceedings of IRE*, 37:10–21, 1949.
- [31] J. W. COOLEY et J. W. TUKEY : An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Math. Comput.*, 19:297–301, 1965.
- [32] D. C. WILCOX : *Turbulence Modeling for CFD*. Library of Congress Cataloging in Publication Data, 1994.

- [33] D. C. WILCOX : Simulation of transition with a two-equation turbulence model. *AIAA Journal*, 32:247–255, 1994.
- [34] F. R. MENTER : Performance of popular turbulence models for attached and separated adverse pressure gradient flows. *AIAA Journal*, 30:2066–2071, 1992.
- [35] F. R. MENTER : Improved two-equation k-w turbulence model for aerodynamic flows. *NASA, Technical Memorandum*, 103975:1–31, 1992.
- [36] F. R. MENTER, M. KUNTZ et R. LANGTRY : Ten years of experience with the sst turbulence model. *Turbulence, Heat and Mass Transfer 4*, pages 625–632, 2003.
- [37] G. KERGOURLAY, M. YOUNSI, F. BAKIR et R. REY : Influence of splitter blades on the flow field of a centrifugal pump : Test-analysis comparison. *International Journal of Rotating Machinery*, 2007:13, 2007.
- [38] F. H. HARLOW et A. A. AMSDEN : Fluid dynamics, monograph la-4700. *Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM*, 1971.
- [39] B. van LEER : Flux-vector splitting for the euler equations. in *Lecture Notes in Physics*, 170:507–512, 1982.
- [40] M.-S. LIOU et C. J. STEFFEN JR : A new flux splitting scheme. *Journal of Computer and Physics*, 107:23, 1993.
- [41] P. L. ROE : Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comput. Phys*, 43, 1981.
- [42] J. H. WILLIAMSON : Low-storage runge-kutta schemes. *J. Comput. Phys.*, 35:48–56, 1980.
- [43] D. STANESCU et W. G. HABASHI : 2n-storage low dissipation and dispersion runge-kutta schemes for computational acoustics. *J. Comput. Phys.*, 143:674–681, 1998.
- [44] F. Q. HU, M. Y. HUSSAINI et J. L. MANTHEY : Low-dissipation and low-dispersion runge-kutta schemes for computational acoustics. *J. Comput. Phys.*, 124:177–191, 1996.
- [45] J. BERLAND, C. BOGEY et C. BAILLY : Low-dissipation and low-dispersion fourth-order runge kutta algorithm. *Computers and Fluids*, 35:1459–1463, 2006.
- [46] Y. SAAD et M. H. SCHULTZ : Gmres : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7:856–869, 1986.
- [47] H. O. KREISS : Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23:277–298, 1970.
- [48] B. SHIMA et K. KITAMURA : On new simple low-dissipation scheme of ausmfamily for all speeds. *AIAA Paper*, 136, 2009.
- [49] M. S. LIOU et Jr. STEFFEN : A new flux splitting scheme. *Journal of Computational Physics*, 107:23–39, 1993.

- [50] J. R. EDWARDS : Towards unified cfd simulation of real fluid flows. *AIAA Paper*, 2001.
- [51] M. S. LIOU : A sequel to ausm, part ii : Ausm+-up for all speeds. *Journal of Computational Physics*, 214:137–170, 2006.
- [52] B. VAN LEER : Flux vector splitting for the euler equations. *Lecture Notes in Physics*, 170:507–512, 1982.
- [53] E. SHIMA et T. JOUNOUCHI : Role of cfd in aeronautical engineering (no.14) - ausm type upwind schemes-,. *NAL-SP30, Proceedings of 13th NAL symposium on Aircraft Computational Aerodynamics*, 41-46.
- [54] T. J. BARTH et D. C. JESPERSEN : The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. *AIAA*, (89-0366), 1989.
- [55] S. SPEKREIJSE : Multigrid solution of monotone, second order discretization of hyperbolic conservation laws. *Mathematics of Computations*, 45:15–21, 1987.
- [56] V. VENKATAKRISHNAN : On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions. *AIAA Paper*, 93-0880, 1993.
- [57] V. VENKATAKRISHNAN : Convergence to steady state solutions of the euler equations on unstructured grids with limiters. *Journal of Computational Physics*, 118:120–130, 1995.
- [58] P. LANCASTER et K. SALKAUSKAS : Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*, 37:141–158, 1981.
- [59] J. J. MONAGHAN : Smoothed particle hydrodynamics. *Institute of Physics Publishing. Reports on progress in Physics*, 68:1703–1759, 2005.
- [60] Colominas I. Nogueira X. Navarrina F. CUETO-FELGUEROSO, L. et M. CASTELEIRO : Finite volume solvers and moving least-squares approximations for the compressible navier-stokes equations on unstructured grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:4712–4736, 2007.
- [61] Colominas I. F-Navarrina J. F. CUETO-FELGUEROSO, L. et M. CASTELEIRO : High-order finite volume schemes on structured grids using moving least-squares reconstruction. application to shallow dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65:295–331, 2006.
- [62] S. KHELLADI, X. NOGUEIRA, I. COLOMINAS et F. BAKIR : Toward a higher order unsteady finite volume solver based on reproducing kernel methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20, 2011.
- [63] B. VAN LEER : Towards the ultimate conservative difference scheme v. a second order sequel to godunov's method. *Journal of Computational Physics*, 32:101–136, 1979.
- [64] S. WANDZURA et H. XIAO : Symmetric quadrature rules on a triangle. *Computers and Mathematics with Applications*, 45:1829–1840, 2003.

- [65] V. VENKATAKRISHNAN et D. J. MAVRIPLIS : Implicit method for the computation of unsteady flows on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 127:380–397, 1996.
- [66] X. NOGUEIRA, L. CUETO-FELGUEROSO, I. COLOMINAS et S. KHELLADI : On the simulation of wave propagation with a higher-order finite volume scheme based on reproducing kernel methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009.
- [67] L. G. MARGOLIN et W. J. RIDER : A rationale for implicit turbulence modeling. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39:821–841, 2002.
- [68] M. R. VISBAL et D. P. RIZZETA : Large-eddy simulation on curvilinear grids using compact differencing and filtering schemes. *Journal of Fluids Engineering-Transactions of the ASME*, 124:836–847, 2002.
- [69] G. J. WAGNER et W. K. LIU : Turbulence simulation and multiple scale subgrid models. *Computational Mechanics*, 25:117–136, 2000.
- [70] P. SAGAUT : *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows. An introduction*. 2005.
- [71] M. COUTANCEAU et R. BOUARD : Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform traslation. part 1. steady flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 79:231–256, 1977a.
- [72] X. D. NIU, Y. T. CHEW et C. SHU : Simulation of flows around an impulsively started circular cylinder by taylor series expansion and least squares based lattice boltzmann method. *Journal of Computational Physics*, 188:176–193, 2003.
- [73] S. C. R. DENNIS et G. Z. CHANG : Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at reynolds number up to 100. *Journal Fluids Mechanics*, 98, 1980.
- [74] X. HE et G. D. DOOLEN : Lattice boltzmann method on curvilinear coordinates system : Flow around a circular cylinder. *Journal Computation Physics*, 134, 1997.
- [75] W. COLLINS et S. DENNIS : Flow past an impulsively started circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 60:105–127, 1973b.
- [76] B. FORNBERG : A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 98:819–855, 1980.
- [77] P. KOUMOUTSAKOS et A. LEONARD : High-resolution simulations of the flow around an impulsevily started cylinder using vortex methods. *Journal of Fluid Mechanics*, 296:1–38, 1995.
- [78] X. HE et G. DOOLEN : Lattice boltzmann method on curvilinear coordinates system : flow around a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 134:306–315, 1997.
- [79] R. MEI et W. SHYY : On the finite difference-based lattice-boltzmann method in curvilinear coordinates. *Journal of Computational Physics*, 143:426–306, 1998.
- [80] Z. GUO, B. SHI et N. WANG : Lattice bgk model for incompressible navier-stokes equation. *Journal of Computational Physics*, 165:288–306, 2000.

- 
- [81] Y. LI, R. SHOCK, R. ZHANG et H. CHEN : Numerical study of flow past an impulsively started cylinder by the lattice-boltzmann method. *Journal of Fluid Mechanics*, 519:273–300, 2004.
- [82] A. C. HINDMARSH, P. N. BROWN, K. E. GRANT, S. L. LEE, R. SERBAN, D. E. SHUMAKER et C. S. WOODWARD : Sundials : Suite of nonlinear and differential/algebraic equation solvers. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 31:363–396, 2005.
- [83] M. E. YOUNG et A. AOOI : Comparative assesment of les and urans for flow over a cylindre at a reynolds number of 3900. Decembre 2007.
- [84] C. E. LYNCH et M. J. SMITH : Hybrid rans-les turbulence models on unstructured grids. *AIAA paper*, 3854, 2008.

## ANALYSE NUMÉRIQUE ET EXPÉRIMENTALE DES FLUCTUATIONS DE PRESSION DANS LES POMPES CENTRIFUGES

**RESUME :** L'utilisation des pompes centrifuges à volute joue un rôle important dans divers secteurs de l'industrie en général. Parmi eux on peut mentionner l'automobile, la construction des installations navales, etc. Elles sont couramment employées par leurs prestations concernant leurs performances globales et leur comportement hydroacoustique. Il est bien connu que le comportement du fluide interne est caractérisé par des fortes interactions entre les parties mobiles et fixes qui sont à l'origine du bruit et des vibrations. Dans les cas des pompes centrifuges, le bruit se caractérise particulièrement à la fréquence aubage dû à l'interaction hydrodynamique entre la roue et le bec de volute. L'intensité de cette excitation, qui dépend de la géométrie et des conditions de fonctionnement, peut être nuisible dans certaines conditions et exigences. Les travaux de recherche effectués nous ont permis de contribuer à l'analyse et à la maîtrise des fluctuations de pression dans les pompes centrifuges grâce aux apports conjugués de simulations numériques et d'études expérimentales spécifiques. Une procédure numérique de prédiction du bruit tonal à la fréquence aubage est développée et validée par comparaison aux essais expérimentaux. En outre, l'amélioration des algorithmes numériques ainsi que le développement du matériel informatique ont permis l'émergence de codes de simulation d'écoulements plus avancés. Cependant, étant donné les exigences de précision pour prédire les fluctuations de pression et la difficulté des codes commerciaux d'atteindre des schémas d'ordre élevé nous mènent à développer notre propre code. Ce nouveau code (FV-MLS) plus précis, basé sur la méthode de volumes finis et les approximations de moindres carrés mobiles (Moving Least Squares - MLS), est couplé avec la technique de maillage glissant pour être appliqué dans une configuration 2D d'une pompe centrifuge.

**Mots clés :** fluctuation, pompe centrifuge, fréquence aubage, bec de volute, interaction hydrodynamique, simulation numérique.

## NUMERICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF PRESSURE FLUCTUATIONS IN CENTRIFUGAL PUMPS

**ABSTRACT :** Application of centrifugal pumps plays an important role in various sectors of industry in general among them we can mention the automotive, construction of naval facilities, etc. They are commonly used by their hydraulic performances to drive a fluid. It is well known that the behavior of the internal fluid is characterized by strong interactions between the moving parts and the fixed ones which are the origin of noise and vibration. In the case of centrifugal pumps, the noise is characterized especially at the blade passing frequency as a result of the hydrodynamic interaction between the impeller and the volute tongue. The intensity of this excitation, which depends on the geometry and operating conditions, can be harmful in certain conditions and requirements. The research works carried out, through numerical simulations and specific experimental studies enabled us to contribute to the analysis and control of pressure fluctuations in centrifugal pumps. A numerical procedure for predicting the tonal noise at the blade frequency is developed and validated by comparison to experimental results. In addition, improved numerical algorithms and the development of computer hardware have enabled the emergence of flow simulation codes. However, given the accuracy requirements to predict the pressure fluctuations and the difficulty of commercial codes to achieve high-order schemes, lead us to develop our own code. The new code (FV-MLS), which is based on finite volume method and high-order approximations, is implemented with the sliding mesh technique in order to validate the new approach in a 2D configuration centrifugal pump.

**Keywords :** fluctuation, centrifugal pump, blade passing frequency, volute tongue, hydrodynamic interaction, numerical simulation.

