



HAL
open science

Développement de méthodes de traitement d'images pour la détermination de paramètres variographiques locaux

Jean Felder

► **To cite this version:**

Jean Felder. Développement de méthodes de traitement d'images pour la détermination de paramètres variographiques locaux. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2011. Français. NNT : 2011ENMP0076 . pastel-00681301

HAL Id: pastel-00681301

<https://pastel.hal.science/pastel-00681301>

Submitted on 21 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n°432 :
Sciences des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École nationale supérieure des mines de Paris

Spécialité « Morphologie Mathématique »

présentée et soutenue publiquement par

Jean FELDER

le 02 décembre 2011

**Développement de méthodes de traitement d'images pour la
détermination de paramètres variographiques locaux**

Directeur de thèse : **Étienne DECENCIERE**

Jury

M. Francisco MONTES , Professeur, DEIO, Université de Valence	Rapporteur
M. Richard SINDING-LARSEN , Professeur, DGMRE, NTNU Trondheim	Rapporteur
M. Pierre BIVER , Docteur, Ingénieur de recherche, Total	Examinateur
M. Dominique JEULIN , Professeur, CMM-MS, Mines ParisTech	Examinateur
M. Frédéric PETIT , Docteur, Ingénieur de recherche, Estimages	Examinateur
M. Étienne DECENCIERE , Maître de recherche, CMM-MS, Mines ParisTech	Directeur de thèse

MINES ParisTech

Centre de Morphologie Mathématique, Mathématiques et Systèmes

35, rue Saint-Honoré, 77305 Fontainebleau

**T
H
È
S
E**

Remerciements

À l'heure de conclure cette thèse, il est de bon ton de rédiger des remerciements. Passage obligé pour certains, le plus succulent pour d'autres, règlement de comptes et vengeances puériles dans certains cas pathologiques, on ose même parfois affirmer que c'est la seule partie d'un manuscrit de thèse lue par tout le monde. Bref, me voilà dans l'obligation de soigner cette partie, la plus importante de tout ce mémoire.

Ainsi, je souhaiterais tout d'abord remercier Fernand Meyer et Cédric Magneron pour m'avoir respectivement accueillis au sein du centre de Morphologie Mathématique et de la société Estimages.

Je souhaiterais également associer à ces remerciements Francisco Montes, Richard Sinding-Larsen, Pierre Biver et Dominique Jeulin qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir juger ce travail de thèse et d'y apporter des remarques très intéressantes.

Qu'écrire maintenant sur Étienne Decencière et Frédéric Petit ? Ils ont rempli à la perfection ce délicat rôle de « haleur » tout au long de cette thèse. Contrairement au célèbre poème, ils n'ont pas été « pris pour cibles » par des « Peaux-rouges criards »¹, mais ils ont su m'accompagner et me laisser toute liberté pour affronter la « Mer » et arriver à bon port. Ces simples mots ne seront malheureusement pas suffisants pour tenter de décrire l'ensemble de l'aide qu'ils ont pu m'apporter tout au long de cette thèse aussi bien au niveau scientifique qu'humain. Merci.

Il est peut être temps maintenant de remercier l'ensemble de l'Estimages Team. Cette famille quelque peu étrange munie d'un coq, d'un

1. Peut-être étais-je moi-même le peau rouge criard qu'il fallait apprivoiser.

pur, d'un imitateur hors-pair qui murmure à l'oreille de son écran d'ordinateur lorsqu'il travaille et de l'homme le plus relax au monde, des écouteurs vissés aux oreilles lorsqu'il ne complot pas une bêtise. Bien pire qu'un scénario de Sergio Leone... Dire que c'est la seule famille au monde capable de comprendre ce qu'est un CS ou un BM, et qui trouve encore le temps de faire de la M-GS avec succès. Chapeau ! Merci pour ces trois années.

En ce qui concerne le CMM, j'ai eu l'occasion et la chance de croiser, rencontrer et parfois même discuter avec de nombreuses personnes allant du simple statut de doctorant misérable à celui très redouté de permanent. Je souhaiterais remercier l'ensemble de ces personnes et plus particulièrement ceux que j'ai pu côtoyer plus longuement. Ainsi, galanterie oblige, je souhaiterais tout d'abord remercier Catherine Moysan pour l'ensemble de son travail et ses réponses toujours rapides et efficaces qui rendent la vie au CMM si agréable. Certains bruits de couloir affirment avec véhémence, que sans sa présence, le CMM n'existerait plus depuis très longtemps. Je pense qu'ils ne sont pas loin de la vérité. Je souhaiterais également remercier en particulier Beatriz Marcotegui, Michel Bilodeau, Jesús Angulo et Petr Dokladal qui semblent incapables de ne pas être de bonne humeur et de ne pas être disponibles pour fournir de précieux conseils et tout simplement discuter. Il me faut également remercier tout particulièrement Serge, Monsieur Morph-M, le seul homme capable de passer de Linux à Windows en une demi-seconde sans avoir envie de jeter son écran par la fenêtre et de se frapper la tête contre un mur (c'est douloureux et ça laisse des traces). Un vrai héros. Parmi l'ensemble des personnes au statut inférieur, il me faut remercier (et j'espère n'oublier personne), Charles, Louise, Bruno, Julie, Santiago, Hellen, Romaric, Matthieu et François (tous deux ont osé nous trahir pour rejoindre la classe dominante), Ali, Vincent, Adnan, Jorge, Luc, Xiwei et Guillaume. Nous partageons tous en commun un vocabulaire formé de « soirée jeux », « potof », « Martin's », « LavClub », « gitans aux rasoirs affûtés », « soirée dépression », « fifrelin », « RoboRally », « philosophe à la

barbe blanche dont on taira le nom » et autres « algorithmes galactiques ». « Spéciale dédicace » au LavClub, toujours sale, jamais ouvert à la bonne heure mais qui m'a fait tellement rigoler. L'ensemble de ce dictionnaire, nous l'avons partagé et enrichi tout au long de nos séjours respectifs à Fontainebleau. Je ne sais pas si nous pouvons en être fiers, mais en tout cas, on s'est bien amusé. Merci.

Comment conclure ces remerciements sans avoir une pensée pour mes parents et mes deux soeurs. Bien qu'ils le nieront sous la torture, ils m'ont toujours soutenu pendant ces trois ans.

J'ai également une pensée forte pour Jean-Georges, Gaëtan (qui a réussi à me devancer de quelques mois, mais bon il fait des maths que personne ne comprend), Yannick et Sébastien projetés dans la vie réelle de Grenoble en Russie en passant par l'Australie, d'excellents amis depuis près de 10 ans maintenant.

Parmi les lointains gars du Nord, j'ai une pensée émue pour Xav, Nico, Steph et Mimel dont j'ai toujours la chance de les revoir régulièrement du côté de Lille.

Bien que je ne l'avouerai jamais complètement, il me faut remercier ces braves petits scouts que j'ai encadré durant 3 ans à Fontainebleau, ainsi que Brice, Étienne, Justine, Olivia, Myriam, Corentin et tous les autres.

Enfin, terminons ces remerciements dans la bonne humeur : cette humble thèse de doctorat ès science n'a pas pour but de remplacer, voire même l'espoir de concurrencer le manuel du castor junior ou la thèse universelle de Lars Tèlpréidanès (thèse émérite, dernier espoir de google lorsque son indexation échoue et que tout chercheur digne de se titre se doit de citer, même si tous ceux qui l'ont lue cherchent encore à comprendre son utilité). Mais elle tente d'apporter certains éclaircissements afin de mieux appréhender ces notions très difficilement accessibles.

« Je me suis bien amusé. Au revoir et merci. » (Romain Gary, *Vie et mort d'Émile Ajar*).

Résumé

La géostatistique fournit de nombreux outils pour caractériser et traiter des données réparties dans l'espace. La plupart de ces outils sont basés sur l'analyse et la modélisation d'une fonction appelée variogramme. A partir d'une caractérisation de la corrélation spatiale inhérente à chaque jeu de données, le variogramme permet de construire différents opérateurs spatiaux, essentiellement de deux types : des opérateurs d'estimation (krigeage) et des opérateurs de simulation.

Les modèles variographiques sont relativement intuitifs : certains paramètres variographiques peuvent être directement interprétés en termes de caractéristiques structurales. Par exemple, les portées du variogramme correspondent, avec une bonne approximation, à la taille moyenne des structures sous-jacentes.

Les approches variographiques conventionnelles sont cependant limitées car elles ne permettent pas de prendre correctement en compte la structuration locale des données. En effet, l'utilisation d'un modèle variographique global implique des caractéristiques structurales invariantes sur l'ensemble du domaine d'étude. Cette stationnarité structurale est peu vérifiée en pratique.

Plusieurs types de modèles géostatistiques non-stationnaires existent. Outre le fait qu'ils requièrent généralement un paramétrage compliqué, peu intuitif et donc une mise en oeuvre opérationnelle difficile, ils n'apportent pas de réponse satisfaisante quant à certains de types de non-stationnarité. En particulier, les variations spatiales de tailles et d'orientation de structures ne sont pas correctement appréhendées par ces modèles.

C'est pour répondre au besoin d'une prise en compte efficace et opérationnelle de la non-stationnarité dans un jeu de données que, dans le cadre de cette thèse, nous prenons le parti de déterminer des paramètres variographiques locaux, appelés M-Paramètres par des méthodes de traitement d'images ; en faisant l'hypothèse d'un comportement localement stationnaire de la variable étudiée (hypothèse de quasi-stationnarité). Notre démarche se fonde principalement sur la détermination des paramètres morphologiques de dimensions et d'orientations de structures. Paramètres que l'on peut relier aux portées et directions d'anisotropie du variogramme. Il est à noter que ces paramètres sont les plus influents dans le cadre d'un processus d'estimation. Il résulte de la détermination de M-Paramètres une meilleure adéquation entre modèles variographiques et caractéristiques structurales des données. Les résultats d'estimation et de simulation s'en trouvent améliorés.

En deux dimensions, les deux portées et l'angle de la structuration locale correspondent à une ellipse de corrélation. Notre démarche revient donc à calculer localement une ellipse maximale suivant un critère donné. Elle a également été généralisée en trois dimensions, le pendant de l'ellipse à deux dimensions étant un ellipsoïde défini par 6 paramètres (3 de longueur et 3 angulaires). Cette étude s'est également accompagnée du développement de nouvelles méthodes de visualisation de données à trois dimensions.

Les méthodes de détermination de M-Paramètres développées ont été appliquées sur des données bathymétriques, sur des jeux de données laissant apparaître des corps géologiques complexes ou encore sur des jeux de données environnementaux, liés au domaine de la pollution en zone urbaine par exemple.

Ces exemples illustrent les améliorations de résultats de traitement géostatistique obtenus avec M-Paramètres, et d'estimation par krigage en particulier. Comme attendu, ces améliorations sont d'autant

plus importantes que l'anisotropie est forte et d'orientation variable sur le champ des données.

Enfin, partant du constat que certains phénomènes ne respectent pas une propagation euclidienne (comme la pollution de l'air en milieu urbain), nous avons étudié l'influence du choix de la distance sur les résultats de krigeage. La plupart des outils de la géostatistique reposant strictement sur la distance euclidienne, certaines hypothèses fondamentales s'effondrent lorsque l'on étudie d'autres distances. En utilisant des distances géodésiques, nous avons cependant pu obtenir des résultats de krigeage impossibles à reproduire avec des distances euclidiennes.

Mots clés : anisotropie, caractérisation de formes, distance géodésique, géométrie discrète, géostatistique, krigeage, morphologie mathématique, paramètres variographiques, simulations géostatistiques, variogramme.

Abstract

Geostatistics provides many tools to characterize and deal with data spread in space. Most of these tools are based on the analysis and the modeling of a function called variogram. By characterizing the spatial correlation inherent to any data set, the variogram enables to build different spatial operators as estimation (kriging) and simulation ones. Variographic models are relatively intuitive: some variographic parameters can directly be interpreted as structural characteristics, namely size and orientations. For example, ranges match, in a good approximation, the average size of the underlying structures.

Conventional variographic approaches are however limited since they are not able to properly take into account the local data structure. Indeed, the use of a global variographic model involves invariant structural characteristics on the whole data field. This structural stationarity is not always verified in practice.

There are several types of non-stationary geostatistical models. However, they are difficult to use in practice because they need a complicated, not really intuitive setting. Besides, they are not able to take into account some types of non-stationarity. In particular, they cannot handle local changes of size and orientation.

In order to answer the need for an effective and efficient consideration of non-stationarity of a data set, we have chosen, in the context of this PhD thesis, to compute local variographic parameters, called Moving Parameters (M-Parameters), by using image processing methods. From a geostatistical point of view, we suppose a locally stationary behavior of the data set (quasi-stationary hypothesis). Our approach

relies mainly on the determination of morphological parameters of size and dimension. These parameters can be linked to the ranges and the directions of anisotropies of a variogram. These are amongst the most important parameters of an estimation process. It follows from the determination of M-Parameters a better match between variographic models and structural characteristics of the data. Estimation and simulation results are improved.

In two dimensions, the two ranges and the angle of the local structure correspond to a correlation ellipse. Therefore, our approach is an ellipse fitting problem with some criteria. This approach has been generalized to 3D data, the analogue of the 2D ellipse being an ellipsoid defined by six parameters (3 ranges and 3 orientations). This study was accompanied by the development of new tools to visualize 3D data.

These different methods for computing M-Parameters have been applied to bathymetry data, to data revealing complex geological bodies and to environmental data sets, such as air pollution in urban areas for example.

These examples illustrate the improvements in the results of the geostatistical process using M-Parameters, and the kriging process in particular. As expected, the most significant improvements of kriging or simulation correspond to the areas of highest and most variable anisotropies on the data field.

Finally, based on the observation that some phenomena do not respect an euclidean metric (such as air pollution in urban areas), we have studied the influence of the choice of the distance metric on kriging results. Most of the tools from geostatistics rely on an euclidean distance and certain basic assumptions are no more valid when using

other metrics. Using geodesic distances, we have been able to obtain kriging results which are impossible to reproduce with an euclidean distance.

Keywords: anisotropy, discrete geometry, geodesic distance, geostatistical simulation, geostatistics, kriging, mathematical morphology, shape characterization, variographic parameters, variogram.

Table des matières

Liste des Symboles	xx
1 Introduction	1
1.1 Contexte et objectifs	1
1.2 Organisation du manuscrit	4
2 Notions de base - définitions	7
2.1 Introduction	7
2.2 Notion d'espace discret	7
2.2.1 Introduction	7
2.2.2 Images	8
2.2.3 Points	8
2.2.4 Représentation	9
2.2.5 Relations de voisinage - connexité	10
2.3 Présentation de la géostatistique	12
2.3.1 Introduction - un bref historique	12
2.3.2 Variable régionalisée - fonction aléatoire	13
2.3.3 Hypothèses de stationnarité de la fonction aléatoire	14
2.3.3.1 Introduction	14
2.3.3.2 Hypothèse de stationnarité d'ordre 2	15
2.3.3.3 Hypothèse de stationnarité intrinsèque	15
2.3.3.4 Comparaison des deux hypothèses	15
2.3.4 Le variogramme	16
2.3.4.1 Introduction	16
2.3.4.2 Variogramme expérimental	16

TABLE DES MATIÈRES

2.3.4.3	Caractéristiques du variogramme	18
2.3.4.4	Modélisation	19
2.3.5	Krigeage et simulations	20
2.3.5.1	Le krigeage	20
2.3.5.2	Les simulations géostatistiques	23
2.4	Conclusion	24
3	Introduction aux M-Paramètres	25
3.1	Introduction	25
3.2	Géostatistique non stationnaire	27
3.2.1	Krigeage universel	27
3.2.2	FAI-k	27
3.2.3	Limitations des modèles non stationnaires	28
3.3	Les approches non stationnaires par caractérisation locale	29
3.3.1	Cadre de réalisation unique	29
3.3.2	Approche par convolutions	30
3.3.3	Approche par noyaux locaux pondérés	31
3.3.4	Approche utilisant un gradient	32
3.3.5	Approche quasi stationnaire	33
3.4	Interprétation des paramètres variographiques	34
3.5	Utilisation des M-Paramètres	35
3.5.1	Cadre d'utilisation	35
3.5.2	Principe	36
3.5.3	Exemple d'utilisation	39
3.6	Conclusion	43
4	Caractérisation de formes binaires	45
4.1	Introduction	45
4.2	État de l'art de la caractérisation de formes binaires	46
4.2.1	Introduction	46
4.2.2	Caractéristiques globales simples	46
4.2.3	Longueur, rayon, centre et extrémités géodésiques	48
4.2.4	Codage de contours	52
4.2.5	Moments	53

TABLE DES MATIÈRES

4.2.6	Squelette d'une forme binaire	56
4.2.7	Conclusion	59
4.3	Méthode basée sur un squelette	59
4.3.1	Introduction - recherche méthodologique	59
4.3.2	Présentation de la méthode	63
4.3.2.1	Calcul du squelette et décomposition	63
4.3.2.2	Estimation de l'orientation, la largeur et la longueur locales	65
4.3.2.3	Propagation des mesures locales à l'ensemble de la forme	67
4.3.3	Bilan	70
4.4	Méthode dite du lancer de rayons	70
4.4.1	Introduction	70
4.4.2	Présentation de la méthode	70
4.4.3	Estimation de l'erreur d'ajustement	73
4.5	Comparaison des deux méthodes	77
4.6	Passage des mesures locales aux M-Paramètres	77
4.7	Exemple d'application	78
4.8	Conclusion	81
5	Caractérisation de formes en niveaux de gris	83
5.1	Introduction	83
5.2	Méthodes de caractérisation de formes en niveaux de gris	85
5.2.1	Transformation résiduelle	85
5.2.2	Squelettes en niveaux de gris	89
5.2.3	Extrema et dynamique	91
5.2.4	Champ d'orientation	94
5.2.5	Conclusion	96
5.3	Généralisation de la méthode du lancer de rayons	97
5.3.1	Introduction	97
5.3.2	Retour sur la méthode binaire	97
5.3.3	Détermination des extrémités sur une image en niveaux de gris	100

TABLE DES MATIÈRES

5.3.4	Algorithme efficace de calcul	101
5.3.4.1	Introduction	101
5.3.4.2	Détermination des extrémités le long d'une droite	102
5.3.4.3	Pavage de l'image pour une direction donnée	104
5.3.4.4	Résumé de l'algorithme	106
5.4	Exemple d'application	106
5.5	Conclusion	110
6	Étude de cas - données bathymétriques	111
6.1	Introduction	111
6.2	Contexte - présentation du jeu de données	112
6.3	Cartographie par krigeage global	113
6.4	Cartographie par krigeage avec M-Paramètres	115
6.4.1	Principe	115
6.4.2	Étude binaire	116
6.4.2.1	Segmentation du chenal	116
6.4.2.2	Estimation des M-Paramètres et krigeage	118
6.4.3	Étude en niveaux de gris	123
6.4.4	Combinaison des deux approches	127
6.5	Bilan	132
7	Généralisation de l'approche en trois dimensions	135
7.1	Introduction	136
7.2	Présentation des nouveaux paramètres 3D	136
7.3	Méthode de calcul des mesures locales 3D	139
7.3.1	Introduction	139
7.3.2	Tracé des rayons	139
7.3.3	Calcul des extrémités	141
7.3.4	Ajustement de l'ellipsoïde	142
7.3.4.1	Introduction	142
7.3.4.2	Ajustement de l'ellipsoïde par moindres carrés	142
7.3.4.3	Ajustement de l'ellipsoïde par le calcul des moments d'inertie	145
7.3.4.4	Comparaison des deux méthodes d'ajustement	148

TABLE DES MATIÈRES

7.4	Visualisation des M-Paramètres 3D	149
7.5	Exemple d'utilisation	154
7.6	Conclusion du chapitre	157
8	Utilisation de distances non-euclidiennes en géostatistique	159
8.1	Introduction	160
8.2	De la difficulté d'utiliser des distances non-euclidiennes	161
8.2.1	Validité du variogramme	161
8.2.2	Calcul des distances	163
8.2.3	Bilan	165
8.3	Les différentes distances utilisées	166
8.3.1	Introduction	166
8.3.2	<i>Water distance</i>	166
8.3.3	Fonction distance basée sur un temps de parcours	167
8.3.4	Distance le long de rivières	169
8.3.5	Bilan	170
8.4	Étude de cas - estimation de la pollution de l'air en milieu urbain	171
8.4.1	Introduction - choix de la distance	171
8.4.2	Présentation des données	173
8.4.3	Variogramme géodésique	175
8.4.4	Krigeage euclidien et géodésique	176
8.4.4.1	Introduction	176
8.4.4.2	Données à minuit	177
8.4.4.3	Données à 9h du matin	183
8.4.4.4	Bilan	190
8.5	Conclusion du chapitre	190
9	Synthèse - deux cas d'application	193
9.1	Introduction	194
9.2	Simulation de données de porosité	194
9.2.1	Introduction	194
9.2.2	Estimation des M-Paramètres	195
9.2.3	Simulation géostatistique	199
9.2.4	Conclusion	201

TABLE DES MATIÈRES

9.3	Étude d'un <i>geobody</i>	201
9.3.1	Introduction	201
9.3.2	Étude en deux dimensions	202
9.3.2.1	Présentation des données	202
9.3.2.2	Caractérisation binaire	203
9.3.2.3	Caractérisation en niveaux de gris	207
9.3.2.4	Krigeage avec des distances euclidiennes et géo- désiques	209
9.3.3	Étude en trois dimensions	214
9.3.3.1	Estimation des M-Paramètres	214
9.3.3.2	Visualisation des résultats	215
9.4	Conclusion du chapitre	220
10	Conclusion	221
10.1	Apports de cette thèse	221
10.1.1	Détermination de paramètres variographiques locaux	221
10.1.2	Applications	222
10.1.3	Retombées industrielles	223
10.2	Perspectives	223
	Bibliographie	238

Liste des Symboles

Acronymes

$2D$ deux dimensions

$3D$ trois dimensions

M-GS Moving-GeoStatistics

M-Paramètres Paramètres variographiques locaux associés à la M-GS

Géostatistique

γ Variogramme

γ^* Variogramme expérimental

FAI- k Fonction aléatoire intrinsèque d'ordre k

PGS Simulation plurigaussienne

SGS Simulation séquentielle gaussienne

SIS Simulation séquentielles par indicatrices

Morphologie Mathématique

δ_B Dilatation morphologique par l'élément structurant B

ϵ_B Erosion morphologique par l'élément structurant B

γ_B Ouverture morphologique par l'élément structurant B

ϕ_B Fermeture morphologique par l'élément structurant B

$SKIZ$ géodésique squelette par zone d'influence géodésique

TABLE DES MATIÈRES

Statistiques

$\sigma(X)$ Écart type de la variable aléatoire X

$Cov(X_1, X_2)$ Covariance des variables aléatoires X_1 et X_2

$E[X]$ Espérance mathématique de la variable aléatoire X

$Var(X)$ Variance de la variable aléatoire X

X^c Ensemble complémentaire de l'ensemble X

Chapitre 1

Introduction

« La philosophie est écrite dans ce vaste livre constamment ouvert devant nos yeux (je veux dire l'univers), et on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend à connaître la langue et les caractères dans lesquels il est écrit. Or il est écrit en langue mathématique, et ses caractères sont le triangle et le cercle et autres figures géométriques, sans lesquelles il est humainement impossible d'en comprendre un mot. »

Il Saggiatore

Galilée, 1623, traduction de P. H. Michel

1.1 Contexte et objectifs

Initialement introduite dans le domaine minier, la géostatistique est aujourd'hui couramment employée dans des domaines aussi variés que l'environnement (qualité de l'air et qualité des sols par exemple), l'halieutique, l'agriculture de précision, la météorologie ou l'exploitation pétrolière. À partir d'un ensemble de données inégalement réparties sur un domaine d'étude (on parle de données géoréférencées), elle permet notamment d'obtenir l'estimation la plus probable en tout point du domaine par une opération dite de krigeage mais également un ensemble d'estimations équiprobables par simulation. D'un point de vue méthodologique, la plupart de ces opérations se basent sur la modélisation et l'utilisation d'une

1. INTRODUCTION

fonction appelée variogramme, laquelle permet de décrire et de quantifier de manière concrète la structuration spatiale du phénomène étudié.

La mise en œuvre et la validation de ces approches dites variographiques est facilitée par l'interprétation relativement simple qu'il est possible de faire de plusieurs paramètres du variogramme. Par exemple, certains d'entre eux peuvent s'interpréter en termes de tailles et d'orientations du phénomène sous-jacent avec une bonne approximation. Cette interprétation est justifiée tant que l'hypothèse dite de stationnarité est observée.

En pratique, suivant le phénomène ou l'échelle d'étude retenue, l'hypothèse de stationnarité peut ne plus être vérifiée. Pour y faire face, la géostatistique propose des modèles non stationnaires (krigeage avec dérive externe FAI-k par exemple). Ces modèles sont généralement jugés comme difficiles à mettre en œuvre. Il n'est pas étonnant que la partie non stationnaire de la géostatistique n'ait que peu d'applications industrielles. Concrètement, l'offre logicielle en géostatistique se limite essentiellement à des outils utilisant des modèles stationnaires, ceux-ci étant d'un paramétrage et donc d'une mise en œuvre beaucoup plus aisée. Ce constat représente le point de départ de notre réflexion : est-il possible de développer une méthodologie permettant de calculer et d'utiliser des paramètres variographiques lorsque le phénomène étudié est non stationnaire, et en particulier non stationnaire d'un point de vue structural ? Il pourrait être intéressant de pouvoir utiliser des modèles opérationnels intuitifs, les modèles variographiques, dans des contextes de non-stationnarité dus à des tailles et des orientations de structures variant spatialement. On trouve, par exemple, de telles configurations lorsque l'on étudie des phénomènes de pollution liés à une réseau routier ou lors de l'étude de la topographie de fonds marins.

La technologie M-GS (pour Moving-GeoStatistics) développée par la société Estimages¹ apporte des éléments de réponse. Elle consiste tout d'abord en un relâchement de l'hypothèse de stationnarité pour utiliser celle dite de quasi-stationnarité (également appelée stationnarité locale). Concrètement, cette hy-

1. <http://www.estimages.com>

pothèse revient à considérer qu'en chaque point étudié, il est possible d'obtenir un voisinage tel que le phénomène étudié soit stationnaire. Sur la base de l'hypothèse de quasi-stationnarité, elle consiste ensuite à optimiser localement et de façon objective les paramètres des modèles variographiques. Les paramètres optimisés sont appelés des M-Paramètres.

Plusieurs méthodes permettant d'estimer les M-Paramètres existent ou sont en cours de développement. Dans le cadre de cette thèse, nous présentons des méthodes de traitement d'images pour réaliser cette détermination. En effet les images représentent un support d'information très présent dans de nombreuses études géostatistiques (données sismiques par exemple dans le pétrole, grilles de modélisation météo, etc.). Souvent liée à une information auxiliaire corrélée au phénomène à étudier, leur caractérisation en termes de M-Paramètres se révèle précieuse. Outre le fait que les méthodes présentées ici se révèlent stables, il est à noter qu'elles tirent partie de la structure particulière des images (support régulier) pour optimiser en temps de calcul la détermination des M-Paramètres. Il est alors envisageable de les appliquer sur des volumes de données 3D importants.

De plus, notre démarche s'inscrit dans un contexte industriel ; nous souhaitons ainsi fournir à un utilisateur un catalogue d'outils et de solutions opérationnelles permettant de répondre aux problèmes de non-stationnarité auxquels il peut être confronté dans le cadre de l'analyse et du traitement de ses données spatialisées. L'objectif espéré est l'obtention relativement aisée d'un gain non négligeable en termes de qualité de résultats d'estimation et de simulation géostatistique.

Enfin, l'un des objectifs de cette thèse pourrait se résumer par cette simple question : considérant une forme, sur laquelle nous souhaitons effectuer une estimation ou une simulation, est-il possible de traduire cette forme dans un langage compréhensible et utilisable par un géostatisticien ? Le lexique de ce langage est constitué de portées, de seuils, de voisinages, d'anisotropies comme nous le verrons par la suite. En d'autres termes, l'un de nos objectifs consiste à déchiffrer

1. INTRODUCTION

une pierre de Rosette permettant de passer du monde du traitement d'images à celui de la géostatistique. La frontière entre ces deux mondes sera franchie à de nombreuses reprises tout au long de ce manuscrit, et ce, de différentes manières.

1.2 Organisation du manuscrit

Le présent mémoire peut se découper en trois parties distinctes. La première aura essentiellement une vocation introductive et se passera en deux temps. Le chapitre 2 permettra, d'une part, de présenter les types de données que nous utiliserons tout au long du recueil : les images et les points et, d'autre part, d'offrir des rappels sur la géostatistique stationnaire. Cette première étape franchie, nous pourrons revenir plus en détail au cours du chapitre 3 sur les avantages et les limites d'un modèle stationnaire. Après avoir abordé un état de l'art des méthodes non stationnaires en géostatistique, nous présenterons les approches d'optimisation variographique locale (M-GS et détermination de M-Paramètres). A la fin de cette partie introductive, nous aurons pu mettre en évidence les différents objectifs auxquels devront répondre nos nouveaux outils de calcul de M-Paramètres appliqués aux images : ces outils devront pouvoir être utilisés aussi bien pour des krigeages que des simulations de données 2D et 3D ; il sera possible de prendre en compte des informations extérieures connues *a priori* pour mieux modéliser certains phénomènes physiques (comme la pollution de l'air ou la caractérisation de réservoirs pétroliers par exemple) ; de plus, les calculs de M-Paramètres ne devront pas être pénalisés par des temps de traitement trop longs.

Les deux autres parties seront intimement liées. Il s'agira d'une partie méthodologique et d'une partie applicative. En ce qui concerne la partie méthodologique le choix a été fait de les présenter avec une généralisation croissante. Nous commencerons ainsi par étudier des formes binaires 2D au cours du chapitre 4, c'est-à-dire des images dont les éléments qui la constituent ne peuvent prendre que deux valeurs distinctes. Nous présenterons deux méthodes permettant de les caractériser en M-Paramètres ; la première sera basée sur l'utilisation du squelette, un opérateur de simplification de forme classique en traitement d'images ; la

seconde utilisera des droites discrètes estimées suivant plusieurs directions (méthode dite de lancer de rayons). Ces deux premières méthodes permettront de traduire une forme en les termes variographiques suivants : portées et directions d'anisotropies. Nous verrons ensuite comment généraliser la méthode de lancer de rayons. Le premier niveau de généralisation consistera au cours du chapitre 5 à caractériser des formes dites en niveaux de gris : leurs valeurs peuvent varier dans un ensemble beaucoup plus riche que deux valeurs. Le deuxième niveau de généralisation au cours du chapitre 7, répondra à l'un des objectifs fixés : l'étude et la caractérisation de données 3D.

Le chapitre 8 constituera le dernier chapitre méthodologique. Nous ne tenterons plus d'estimer localement des paramètres de portée ou d'orientation mais nous travaillerons à la recherche de distances réalistes entre points de données. En effet, dans certains cas, une logique de distance euclidienne devient difficilement tenable et l'application de processus de krigeage et de simulation conduit alors à des résultats qui peuvent présenter un écart important avec la réalité, et ceci même avec l'utilisation de M-Paramètres. Nous présenterons une méthodologie utilisant des distances géodésiques permettant de gérer ces cas particuliers. Ce chapitre constitue une ouverture sur des travaux plus poussés.

Entremêlées à ces différentes parties méthodologiques, seront présents deux chapitres à portée applicative. La première application (chapitre 6) sera en relation avec une étude géostatistique de données bathymétriques 2D. L'objectif de cette étude est d'obtenir l'estimation d'une carte de fonds marins robuste par la technique de krigeage. Ce type de données bathymétriques est particulièrement intéressant car on y rencontre à petite échelle une forte non-stationnarité liée à la présence de chenaux sur le fond marin. Nous estimerons tout d'abord une première carte de fonds marins avec une approche stationnaire. À partir des limites et approximations de cette première approche, nous verrons comment effectuer une nouvelle étude géostatistique M-GS avec une méthode binaire puis une méthode en niveaux de gris, permettant de gommer les imperfections d'une approche stationnaire et d'obtenir des résultats plus réalistes. Nous verrons également comment combiner la méthode binaire et la méthode en niveaux de gris pour obtenir

1. INTRODUCTION

une carte qui cumule les avantages des deux approches.

La dernière partie de ce mémoire (chapitre 9), centré autour d'applications du domaine pétrolier (spatialisation de propriétés réservoir, comme la porosité, dans un environnement chenalisant) constituera la seconde partie applicative. Nous y décrirons deux études géostatistiques. La première, basée sur des données synthétiques 2D illustrera comment il est possible d'utiliser des M-Paramètres pour effectuer des simulations géostatistiques. La seconde étude, utilisant des données réelles issues du domaine pétrolier, comportera une analyse 2D et 3D, en binaire et en niveaux de gris, ainsi qu'un exemple d'utilisation de la distance géodésique. L'ensemble de ces parties applicatives sera renseignée par les temps de calculs nécessaires pour obtenir les résultats présentés, ceci sur une configuration informatique sans prétention pour l'année 2011.

Chapitre 2

Notions de base - définitions

« Il n'est point besoin du vocabulaire bizarre, compliqué, nombreux et chinois qu'on nous impose aujourd'hui sous le nom d'écriture artiste, pour fixer toutes les nuances de la pensée ; mais il faut discerner avec une extrême lucidité toutes les modifications de la valeur d'un mot suivant la place qu'il occupe. »

Préface de Pierre et Jean nommée Le roman

G. de Maupassant

2.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter succinctement d'une part les types de données sur lesquels nous travaillerons et d'autre part les outils les plus classiques de la géostatistique.

2.2 Notion d'espace discret

2.2.1 Introduction

Dans l'ensemble de ce manuscrit, nous considérons une **grille digitale** G régulièrement espacée, sous-ensemble discret de \mathbb{Z}^n . Elle servira de support aux deux objets mathématiques que nous allons maintenant définir : les images et les points.

2. NOTIONS DE BASE - DÉFINITIONS

2.2.2 Images

Définition 2.1 Une *image* I est une application d'un domaine $G \subset \mathbb{Z}^n$ à valeurs dans E :

$$\begin{aligned} I : G &\rightarrow E \\ x &\mapsto I(x) \end{aligned}$$

L'image constitue un support de base aussi bien en morphologie mathématique qu'en géostatistique. Chaque élément de G est appelé un **pixel** (pour *picture element*) à deux dimensions ($n = 2$) et **voxel** (pour *volumetric pixel*) à trois dimensions ($n = 3$).

En se plaçant dans $E = \{0, 1\}$, une image est dite **binaire**. En d'autres termes, les éléments qui la constituent ne peuvent prendre que deux valeurs distinctes. Usuellement, on représente ces images par les couleurs noir et blanc, le noir étant utilisé pour le fond de l'image (codé à 0) et le blanc pour les objets d'intérêt de l'image (codé à 1).

Si l'on considère maintenant $E = \{0, \dots, 255\}$, nous obtenons une image numérique dite à 256 **niveaux de gris**. Par extension, nous pouvons construire des images en couleurs dites RGB (pour *red*, *green* et *blue*) codées suivant 3 canaux. Ainsi, $E = \{0, \dots, 255\} \times \{0, \dots, 255\} \times \{0, \dots, 255\}$, le premier canal étant la composante rouge, le second la verte et le troisième la bleue.

Enfin, d'un point de vue informatique, une image numérique est simplement un tableau d'entiers compris entre 0 et $2^m - 1$. On parle alors d'image à m bits. Une image à 256 niveaux de gris est ainsi codée sur 8 bits. La place d'une image prise en mémoire dépend donc de la taille de l'image suivant chacune de ses dimensions et de son nombre de bits.

2.2.3 Points

Définition 2.2 Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n , un **point** P est un couple représenté par ses coordonnées $x_i (i \in \llbracket 1, n \rrbracket)$ et une valeur v dans E .

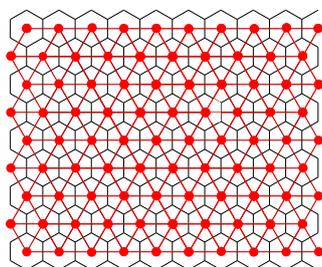
On appelle **point discret** un point dont le support est une grille digitale G de dimension n .

Un ensemble de N points $\{P_1, \dots, P_N\}$ est appelé un *jeu de points irrégulièrement échantillonnés*.

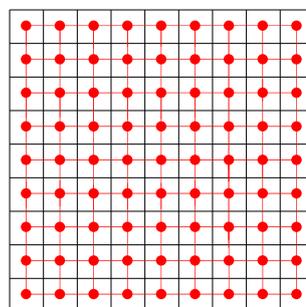
Par abus de langage, on parlera également de **donnée** à la place de point et de **jeu de données** pour jeu de points irrégulièrement échantillonnés. On pourra également constater qu'il est possible de considérer une image comme un ensemble de points discrets régulièrement échantillonnés sur \mathbb{Z}^n .

2.2.4 Représentation

Dans l'ensemble du manuscrit, nous représenterons les grilles digitales par un pavage régulier. Il existe deux grilles couramment utilisées : les **trames carrées** et les **trames hexagonales** (figure 2.1). On peut noter qu'une grille hexagonale est une grille carrée dont une ligne sur deux est décalée d'un demi-pixel. L'un des avantages de la trame hexagonale est d'être plus isotrope que la trame carrée. Sauf mention contraire, nous utiliserons, par la suite, uniquement des trames carrées.



(a) Grille hexagonale



(b) Grille carrée

FIGURE 2.1: Représentation des trames hexagonale et carrée (4-connexité) par pavage en noir et par maillage en rouge.

Muni d'une grille digitale carrée, un pixel sera représenté par un carré centré sur les cellules de la grille G (par extension, un voxel sera représenté par un cube) et un point par un cercle centré en un sommet de la grille. Ainsi, ces deux objets seront représentés de manière duale : les pixels par un pavage régulier et les points par les sommets du maillage associé.

2. NOTIONS DE BASE - DÉFINITIONS

2.2.5 Relations de voisinage - connexité

Définition 2.3 On appelle **distance** une application $d : E \times E \rightarrow \mathbf{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\forall a, b \in E \quad d(a, b) &= d(b, a) && \text{(symétrie)} \\ \forall a, b \in E \quad d(a, b) &= 0 \Leftrightarrow a = b && \text{(séparation)} \\ \forall a, b, c \in E \quad d(a, c) &\leq d(a, b) + d(b, c) && \text{(inégalité triangulaire)}\end{aligned}$$

Définition 2.4 On appelle **voisinage** d'ordre k du point p sur E , l'ensemble des points situés à une distance inférieure à k de p . Il est noté $V(p)$:

$$V(p) = \{q \in E / d(p, q) \leq k\}.$$

Par exemple, si l'on considère la distance euclidienne en dimension 2, le point P_2 est dans le voisinage d'ordre n de P_1 s'il est à l'intérieur du cercle centré en P_1 et de rayon n . En dimension 3, ce principe se généralise en remplaçant le cercle par une sphère.

La notion de voisinage précédemment définie est valable aussi bien pour des points que des pixels, sur un espace continu (\mathbf{R}^n) que discret (\mathbf{Z}^n). Dans le cadre d'une image on se ramène à la notion de **connexité** : elle correspond au voisinage élémentaire non vide d'un pixel p sur une grille digitale.

Par exemple, la 4- et la 8-connexité sur une image 2D correspondent, respectivement, à la distance de Manhattan et la distance de Tchebychev (distance infinie) sur une trame carrée pour un voisinage élémentaire.

Ainsi, pour une image 2D, les trois connexités les plus courantes sont les 4-, 6- et 8- connexités. Soit un pixel p de coordonnées (p_1, p_2) :

- **8-connexité** : $V_8(p) = \{q \in G / \max(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|) = 1\}$
- **6-connexité** (définie sur une trame hexagonale) : $V_6(p) = \{(p_1, p_2 - 1), (p_1 + 1, p_2 - 1), (p_1 - 1, p_2), (p_1 + 1, p_2), (p_1, p_2 + 1), (p_1 + 1, p_2 + 1)\}$ si p_2 est pair.
 $V_6(p) = \{(p_1 - 1, p_2 - 1), (p_1, p_2 - 1), (p_1 - 1, p_2), (p_1 + 1, p_2), (p_1 - 1, p_2 + 1), (p_1, p_2 + 1)\}$ si p_2 est impair.
- **4-connexité** : $V_4(p) = \{q \in G / |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| = 1\}$

Pour une image 3D, il existe également trois types de voisinages couramment utilisés, les 6-, 18- et 26-connexités. Soit un voxel p de coordonnées (p_1, p_2, p_3) :

- **26-connexité** : $V_{26}(p) = \{q \in G / \max(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|, |p_3 - q_3|) = 1\}$
- **18-connexité** : $V_{18}(p) = \{q \in G / |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + |p_3 - q_3| \leq 2\} \cap V_{26}(p)$
- **6-connexité** : $V_6(p) = \{q \in G / |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + |p_3 - q_3| = 1\}$

Ces différentes connexités sont illustrées aux figures 2.2 et 2.3.

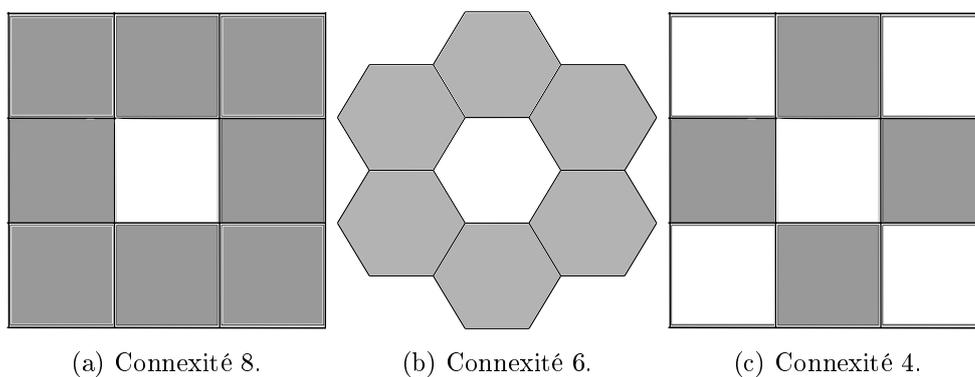


FIGURE 2.2: Les connexités usuelles pour une image 2D.

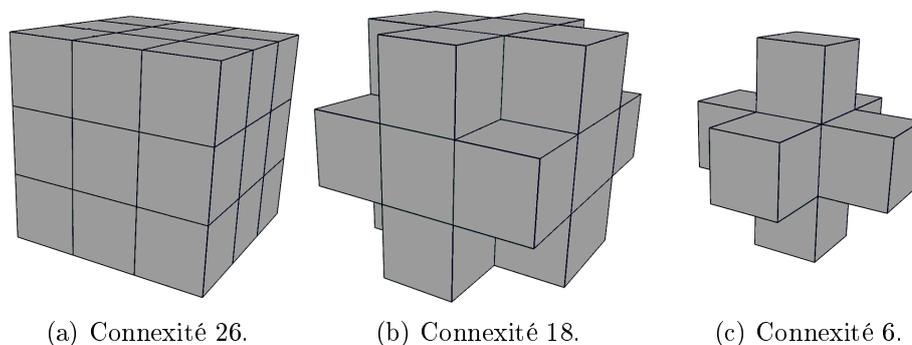


FIGURE 2.3: Les connexités usuelles pour une image 3D.

L'ensemble des raisonnements et algorithmes présentés dans ce manuscrit sont appliqués dans le cadre de la géostatistique. Nous présentons donc une rapide introduction de celle-ci dans la partie suivante.

2.3 Présentation de la géostatistique

2.3.1 Introduction - un bref historique

Les bases de la géostatistique sont apparues grâce aux travaux précurseurs de l'ingénieur sud-africain Daniel Krige dans le domaine minier, lequel s'est trouvé confronté à un problème de biais conditionnel constaté expérimentalement.

Ce problème peut se formuler de la manière suivante : supposons que l'on souhaite exploiter une mine d'or. L'objectif est de sélectionner les zones où la teneur est la plus forte. Pour cela, on divise la zone d'exploitation en différents blocs de taille donnée. Afin d'estimer la teneur en minerai du bloc, on en extrait un échantillon dont on mesure la teneur. On suppose que l'échantillonnage est représentatif, ce qui implique que la moyenne des échantillons est égale à la moyenne des blocs. On décide de n'exploiter que les blocs dont la teneur de l'échantillon est plus élevée qu'un seuil fixé (appelé teneur de coupure). Cependant, on constate en réalité que la moyenne des teneurs effectivement obtenue est plus faible que la moyenne des échantillons conservés. En conséquence, basée sur les échantillons, la teneur récupérable est surestimée. Mathématiquement, on parle de **biais conditionnel**. Cette surestimation provient d'un **effet de support** : les teneurs récupérées pour les échantillons ont des valeurs beaucoup plus dispersées que les valeurs des blocs (ces teneurs sont plus proches de la moyenne). En effet, plus une mesure est effectuée sur un support important, plus elle est moyennée ce qui a tendance à faire baisser sa variabilité. Pour corriger ce problème, Krige introduisit un estimateur basé sur une régression (Krige (1951)), permettant de prendre en compte l'ensemble des échantillons dans le choix effectué.

Dans les années 1960, Matheron reprit les travaux de Krige pour prendre en compte, prévoir et minimiser l'effet de support. Les différents développements théoriques qui en découlèrent correspondent à la naissance de la géostatistique. Ils permirent l'élaboration d'une méthode d'estimation appelée **krigeage** en hommage à Krige (Matheron (1965)). Par la suite, d'autres outils et modèles géostatistiques furent développés comme les simulations ou la géostatistique non stationnaire. Bien qu'initialement appliquée dans le cadre minier, la géostatistique est, de nos jours, couramment employée dans des domaines aussi variés que l'ex-

exploitation pétrolière, le domaine environnemental (pollution de l'air et des sols par exemple), l'halieutique, la météorologie, etc.

Dans la suite de cette partie, nous expliquerons succinctement les différentes hypothèses et outils à la base de la géostatistique stationnaire. Pour une présentation complète, on pourra se référer à [Armstrong \(1998\)](#) et [Chiles & Delfiner \(1999\)](#).

2.3.2 Variable régionalisée - fonction aléatoire

La géostatistique s'intéresse à l'étude d'un phénomène régionalisé quantifié dont les valeurs sont réparties dans l'espace comme la température de l'air ou la densité de population par exemple. Une étude géostatistique s'effectue à partir d'un jeu de données de ce phénomène sur un domaine borné de l'espace appelé **champ** et noté D .

Définition 2.5 *On appelle **variable régionalisée** sur D à valeurs dans E , une fonction notée $\{z(x), x \in D\}$ dont les valeurs sont connues sur une partie de D .*

Usuellement, $E = \mathbb{R}$ pour des grandeurs scalaires. Il est également tout à fait possible d'étudier des grandeurs vectorielles.

A partir de la seule notion de variable régionalisée, il est possible de définir une géostatistique dite transitive. Cependant, son champ d'applications est assez limité. C'est pourquoi, nous introduisons des modèles probabilistes pour définir des outils plus élaborés de traitement de la variable régionalisée.

Définition 2.6 *Un **espace probabilisé** est un triplet (Ω, \mathcal{A}, P) formé d'un ensemble Ω , d'une tribu \mathcal{A} sur Ω et d'une mesure P sur cette tribu telle que $P(\Omega) = 1$.*

Ω est appelé **l'univers** et les éléments de \mathcal{A} sont des **événements**.

Par exemple, une expérience très simple est le lancer d'un dé à six faces non pipé. A chaque lancer, le dé prendra nécessairement une valeur comprise entre 1 et 6. Ceci signifie que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Un événement possible, noté E_1 , est que la valeur du dé soit paire. La mesure P permet d'associer une probabilité de réalisation de l'évènement E_1 . Comme le dé n'est pas pipé, il y a 3 chances parmi 6 possibilités équiprobables que la valeur du dé soit paire. Ainsi, $P(E_1) = \frac{1}{2}$.

2. NOTIONS DE BASE - DÉFINITIONS

Définition 2.7 Une *variable aléatoire* X sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) est une fonction de Ω à valeurs dans E .

$$\begin{aligned} X &: \Omega \rightarrow E \\ w &\mapsto X(w) \end{aligned}$$

Une **loi de probabilité** sur X correspond à la connaissance de la probabilité P_X de chacun des évènements de Ω .

Une variable aléatoire est connue lorsque la distribution de sa loi de probabilité l'est.

Définition 2.8 Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Une **fonction aléatoire** sur D à valeurs dans E est une fonction de deux variables notée $Z(x, w)$ telle que pour chaque $x_0 \in D$, $Z(x_0, w)$ est une variable aléatoire et pour chaque $w_0 \in \Omega$, $Z(x, w_0)$ est une fonction de $D \rightarrow E$.

Elle est caractérisée par sa loi spatiale f connue pour tout nombre n de points $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:

$$f(x_1, \dots, x_n; w_1, \dots, w_n) = P(Z(x_1) \leq w_1, \dots, Z(x_n) \leq w_n)$$

En d'autres termes, une fonction aléatoire correspond à une variable aléatoire étendue spatialement dans D . Dans le cadre d'une fonction aléatoire, la variable régionalisée z est considérée comme la réalisation d'une fonction aléatoire Z . En géostatistique, il est courant de remplacer la notation $Z(x, w)$ pour une fonction aléatoire par $Z(x)$. Nous suivrons cette convention dans la suite du chapitre.

Ne connaissant pas les lois de probabilités en chaque point de D , et ne disposant que d'une seule réalisation, il est nécessaire d'effectuer des hypothèses supplémentaires de stationnarité pour aller plus loin.

2.3.3 Hypothèses de stationnarité de la fonction aléatoire

2.3.3.1 Introduction

Dans le cadre de la géostatistique stationnaire, on se restreint à l'étude des deux premiers moments d'une fonction aléatoire. Le moment d'ordre 1 correspond à l'**espérance mathématique** et le moment d'ordre 2 à la **variance**. Par la suite, nous faisons des hypothèses sur le comportement de ces deux premiers

moments.

Par convention, l'espérance de X sera notée $E[X]$, sa variance $Var(X)$ et $Cov(X_1, X_2)$, la covariance des variables aléatoires X_1 et X_2 .

2.3.3.2 Hypothèse de stationnarité d'ordre 2

Définition 2.9 Une fonction aléatoire $Z(x)$ sur D est **stationnaire d'ordre 2** si l'espérance et la covariance existent et sont invariantes par translation :

$$\forall (x, x+h) \in E^2,$$

$$E[Z(x)] = m \tag{2.1}$$

$$Cov(Z(x), Z(x+h)) = C(h) \tag{2.2}$$

En d'autres termes, l'espérance mathématique est la même dans tout le champ et la covariance de Z dépend uniquement de la distance entre les points.

2.3.3.3 Hypothèse de stationnarité intrinsèque

Définition 2.10 Une fonction aléatoire $Z(x)$ sur D est **stationnaire intrinsèque** si les accroissements de la fonction aléatoire sont stationnaires d'ordre 2 :

$$\forall (x, x+h) \in E^2,$$

$$E[Z(x+h) - Z(x)] = 0 \tag{2.3}$$

$$E[(Z(x+h) - Z(x))^2] = 2\gamma(h) \tag{2.4}$$

La fonction de variance γ est appelée **variogramme**.

2.3.3.4 Comparaison des deux hypothèses

Dans le cas d'une stationnarité d'ordre 2, covariance et variogramme sont reliés par la formule suivante :

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \tag{2.5}$$

2. NOTIONS DE BASE - DÉFINITIONS

avec $C(0) = \text{Var}(Z(h))$.

L'hypothèse de stationnarité d'ordre 2 est plus forte que l'hypothèse de stationnarité intrinsèque ce qui signifie qu'une fonction aléatoire stationnaire d'ordre 2 est stationnaire intrinsèque.

De plus, le variogramme d'une fonction aléatoire stationnaire d'ordre 2 est borné alors que celui d'une fonction aléatoire stationnaire intrinsèque peut ne pas l'être. Dans le cas d'un variogramme non borné, cela signifie que la covariance correspondante n'existe pas. On préfère donc utiliser le variogramme qui est un outil plus général que la covariance.

D'un point de vue applicatif, le choix de l'une ou l'autre des deux hypothèses peut s'effectuer suite à l'étude du variogramme expérimental du jeu de données.

2.3.4 Le variogramme

2.3.4.1 Introduction

Lorsque l'on travaille sur un phénomène spatial, il paraît naturel de penser que deux observations du phénomène situées à des distances proches devraient être plus semblables que deux observations éloignées. Le variogramme est l'outil mathématique qui va nous permettre de quantifier les relations entre les observations d'un phénomène spatial.

En pratique, pour définir le variogramme, on procède en deux temps :

- calcul du variogramme expérimental ;
- ajustement d'un modèle de variogramme.

2.3.4.2 Variogramme expérimental

Définition 2.11 *Le variogramme expérimental (Matheron (1965)) γ^* d'une fonction z est défini par la formule*

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (z(x_i + h) - z(x_i))^2 \quad (2.6)$$

avec $N(h)$ le nombre de couples de points distants de h

2.3 Présentation de la géostatistique

Pratiquement, on calcule le variogramme expérimental pour certaines classes de distance et une certaine tolérance. De plus, le variogramme est calculé entre deux points distants de h . Le vecteur h a deux caractéristiques, sa norme et son orientation. Si le variogramme ne dépend pas de la direction du vecteur h , on dit qu'il est **isotrope**.

Par contre, certains phénomènes ont un comportement différent suivant la direction étudiée. On parlera alors de **phénomène anisotrope**. Dans ce cas, il est nécessaire de calculer le variogramme expérimental dans plusieurs directions définies par la direction du vecteur h avec une certaine tolérance angulaire (on aura donc à la fois une tolérance angulaire et une tolérance de distance). Si le phénomène étudié est bien anisotrope, on constatera des comportements différents pour chacun des variogrammes directionnels.

D'un point de vue pratique, pour toute étude 2D, on calcule le variogramme expérimental suivant les quatre directions principales (0° , 45° , 90° , 135°) ce qui permet de détecter une éventuelle anisotropie. Si cette dernière a effectivement été détectée, on recalcule le variogramme expérimental en se plaçant dans le système d'axes correspondant à cette anisotropie.

Un exemple de variogramme expérimental isotrope est donné en figure 2.4.

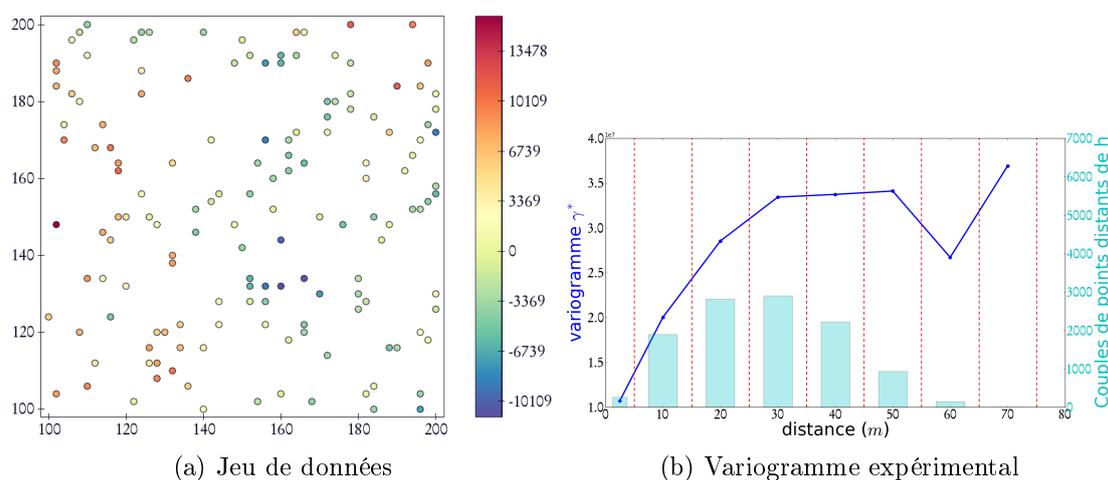


FIGURE 2.4: Un jeu de données et son variogramme expérimental isotrope (courbe bleue). L'histogramme associé au variogramme indique le nombre de couples de données par classe de distances.

2. NOTIONS DE BASE - DÉFINITIONS

2.3.4.3 Caractéristiques du variogramme

Un variogramme possède plusieurs caractéristiques illustrées en figure 2.5. En théorie, pour tout variogramme, $\gamma(0) = 0$ (formule 2.5). Néanmoins, on peut constater une discontinuité du variogramme à l'origine liée à la régularité des données.

Définition 2.12 On appelle *effet de pépite* un saut de discontinuité à l'origine du variogramme.

Dans le cas d'un effet pépite, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \gamma(h) = C_0$.

Le nom effet de pépite provient, historiquement, du domaine minier. En effet, dans une mine d'or, on ne retrouve pas d'or juste à côté d'une pépite.

Définition 2.13 Si le variogramme est borné, alors on appelle *palier* la valeur limite du variogramme. La *portée* est égale à la distance à laquelle le palier est atteint.

Si deux points sont à une distance plus grande que la portée alors ils sont décorrélés : un point n'a aucune influence sur la valeur du second.

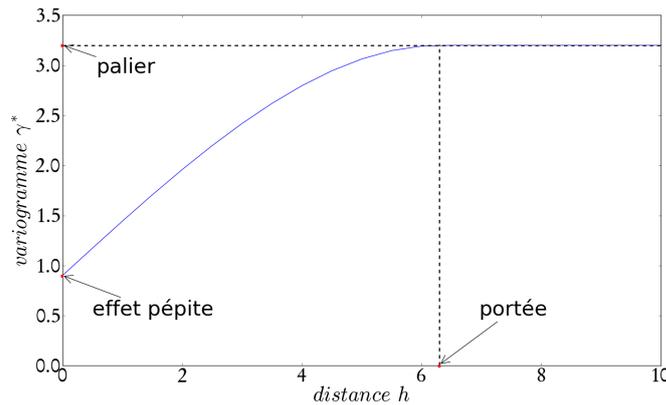


FIGURE 2.5: un exemple de variogramme sphérique isotrope. L'effet de pépite est égal à 0,9 , la portée est de 6,3 et le palier est égal à 3,2.

2.3.4.4 Modélisation

Dans une étude géostatistique, une fois le variogramme expérimental calculé, on ajuste un modèle de variogramme par des fonctions mathématiques autorisées. Cette étape est nécessaire pour assurer la stabilité des opérateurs variographiques (krigeage, simulation) et pour obtenir la connaissance de ce dernier en tout point du domaine D . Cependant, toute fonction continue ne peut pas être utilisée comme fonction de variogramme. Les fonctions autorisées correspondent à la famille des fonctions de type conditionnellement définies négatives.

Définition 2.14 *Une fonction aléatoire Z est dite **conditionnellement définie négative** si elle satisfait la condition suivante :*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j Z(x_i - x_j) \leq 0 \quad (2.7)$$

$\forall \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in D^n$ et $\forall \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$

Si cette condition n'est pas respectée, on risque d'obtenir des variances négatives. Ces problèmes sont illustrés à travers deux exemples simples dans [Armstrong & Jabin \(1981\)](#).

Les variogrammes respectant cette condition sont appelés des **modèles admissibles**. Il est en général difficile de prouver qu'une fonction donnée est un modèle de variogramme admissible. C'est pourquoi, on se ramène presque toujours à des classes de modèles dont on sait qu'ils sont admissibles. Parmi les modèles de variogrammes les plus utilisés, on peut citer les variogrammes sphérique, cubique, gaussien, exponentiel ou sinus cardinal. De plus une combinaison linéaire de variogrammes admissibles est un variogramme admissible.

Classiquement, l'étape de modélisation revient à choisir une fonction la plus proche possible du variogramme expérimental. Généralement, ceci est effectué manuellement. Il existe, cependant, des méthodes permettant d'automatiser l'ajustement. Une approche possible est un ajustement par une méthode des moindres carrés ([Cressie \(1985\)](#), [Jian et al. \(1996\)](#)).

Enfin, que l'on fasse le choix d'un ajustement de variogramme manuel ou automatique, il est nécessaire d'être conscient qu'une modélisation de variogramme n'est

2. NOTIONS DE BASE - DÉFINITIONS

valable que pour un jeu de données et un champ d'étude fixés. En d'autres termes, si l'on ajoute ou retire des données, le variogramme précédemment modélisé peut ne plus être valable. De même, pour un même phénomène, si le domaine d'étude est différent ou si l'on souhaite effectuer une étude à une échelle différente, il est indispensable d'effectuer une nouvelle modélisation variographique.

Une fois que le variogramme est modélisé, il est possible d'effectuer aussi bien du krigeage que des simulations.

2.3.5 Krigeage et simulations

2.3.5.1 Le krigeage

Le **krigeage** est l'outil de la géostatistique qui permet d'effectuer une estimation d'une variable z en des points inconnus à partir de la connaissance d'un nombre n d'échantillons de cette variable : $\{z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n), x_i \in D\}$. Depuis, les débuts de la géostatistique différentes méthodes de krigeage ont été développées. En faire une liste exhaustive serait aller au-delà de la portée de cette présentation de la géostatistique. Pour une présentation complète, on pourra se tourner vers [Chiles & Delfiner \(1999\)](#) ou [Baillargeon \(2005\)](#). On se contentera ici de lister les trois types de krigeage les plus simples puis de présenter les équations du krigeage dit ordinaire dont on considère qu'il est le krigeage le plus utilisé.

Par ailleurs, il existe un nombre important de méthodes d'interpolation spatiale comme l'inverse de distances, les splines, les moyennes mobiles. Pour un examen complet de ces méthodes, on peut citer par exemple [Lam \(1983\)](#) et [Franke & Nielson \(1991\)](#). [Li & Heap \(2008\)](#) proposent également une comparaison exhaustive de méthodes d'interpolation dans le domaine environnemental en effectuant une distinction entre les méthodes géostatistiques et non-géostatistiques. De manière synthétique, [O'Sullivan & Unwin \(2003\)](#) classent les différentes méthodes d'interpolation suivant l'objectif recherché. [Matheron \(1980\)](#) a par ailleurs démontré l'équivalence entre le krigeage et les splines.

L'un des points forts du krigeage par rapport aux autres méthodes d'interpolation est de prendre en compte les distances et les corrélations entre données.

Les trois krigeages les plus courants sont :

2.3 Présentation de la géostatistique

- le **krigeage simple** ou krigage à moyenne connue ;
- le **krigeage ordinaire** ou krigage à moyenne inconnue ;
- le **krigeage avec dérive externe**.

Le krigage simple fait l'hypothèse que la moyenne de la fonction aléatoire est connue et constante. Au contraire, le krigage ordinaire fait l'hypothèse d'une moyenne inconnue. Elle est seulement supposée constante dans le voisinage de krigage. Enfin, le krigage avec dérive externe, comme son nom l'indique, prend en compte une dérive non stationnaire dans le modèle. Cette dernière diffère également des deux autres en ce sens qu'elle représente une technique multivariable. Nous reprenons ici, de manière simplifiée et sans les étapes de calcul, la démarche de présentation du krigage proposée par [Chauvet \(2008\)](#). Le formalisme des fonctions aléatoires est appliqué aux données réelles.

Définition 2.15 *Pour une fonction aléatoire Z sur un domaine D , on appelle Z^* l'estimation de Z en un point inconnu (dit **point cible**). Nous considérons que l'estimateur est une combinaison linéaire des données :*

$$Z^*(x) = \sum_{i \in V(x)} \lambda_i Z(x_i). \quad (2.8)$$

On appelle **poinds de krigage** les λ_i .

Nous souhaitons obtenir un prédicteur non biaisé de variance minimale. Ces deux conditions se formalisent à partir de l'erreur d'estimation :

Définition 2.16 *L'erreur d'estimation ϵ est définie par l'équation*

$$\epsilon(x) = Z(x) - Z^*(x). \quad (2.9)$$

La contrainte de non-biais sur l'erreur d'estimation revient à écrire : $E[\epsilon(x)] = 0$.

La variance de l'erreur d'estimation, quant à elle doit être minimale : $Var(\epsilon(x))$ minimale.

La mise en œuvre de ces deux contraintes dans le cadre du krigage ordinaire est la suivante. On appelle m l'espérance de Z dans le voisinage de krigage. La contrainte de non biais donne l'équation :

2. NOTIONS DE BASE - DÉFINITIONS

$$\begin{aligned}
 E[\epsilon(x)] &= E[Z(x) - \sum_{i \in V(x)} \lambda_i Z(x_i)] \\
 &= E[Z(x)] - \sum_{i \in V(x)} \lambda_i E[Z(x_i)] \\
 &= m(1 - \sum_{i \in V(x)} \lambda_i).
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Comme $E[\epsilon(x)] = 0$, on obtient ainsi :

$$\sum_{i \in V(x)} \lambda_i = 1. \tag{2.11}$$

La contrainte de non biais entraîne donc une contrainte sur les poids de krigeage. Enfin, la contrainte de variance minimale permet de choisir les poids de krigeage vérifiant cette contrainte et minimisant la variance de l'erreur d'estimation.

$$\begin{aligned}
 Var(\epsilon(x)) &= Var(Z(x) - \sum_{i \in V(x)} \lambda_i Z(x_i)) \\
 &= C(0) - 2 \sum_{i \in V(x)} \lambda_i C(x_i - x) + \sum_{i \in V(x)} \sum_{j \in V(x)} \lambda_i \lambda_j C(x_i - x_j).
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Pour minimiser cette variance, on introduit le paramètres de Lagrange μ exprimant la contrainte sur les poids de krigeage. On en déduit finalement le système de krigeage.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in V(x)} \lambda_i C(x_i - x_j) - \mu = C(x_j - x) \\ \sum_{i \in V(x)} \lambda_i = 1 \end{array} \right. \tag{2.13}$$

La résolution du système précédent en tout point cible x permet de déterminer les poids de krigeage appliqués aux points de données pour obtenir l'estimation au point cible x .

De ces équations, il est également possible de quantifier l'erreur d'estimation effectuée. Nous pouvons, en effet, interpréter l'écart type de krigeage comme une carte d'incertitude associée à l'estimation par krigeage.

Définition 2.17 *On appelle écart type de krigeage, la racine carrée de la variance d'erreur d'estimation.*

$$\begin{aligned}\sigma(\epsilon(x)) &= \sqrt{\text{Var}(\epsilon(x))} \\ &= \sqrt{C(0) - \sum_{i \in V(x)} \lambda_i C(x_i - x) + \mu}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

On peut vérifier que la solution du système de krigeage est unique. De plus, l'opérateur de krigeage est un interpolateur exact ce qui signifie que l'erreur d'estimation et sa variance sont nulles en un point de donnée ¹.

Enfin, il est également important de remarquer que le krigeage a un effet de lissage : il ne reproduit pas la variabilité réelle du phénomène étudié. C'est pourquoi, il ne peut être utilisé pour prédire un dépassement de seuil par exemple ². D'une manière plus générale, le krigeage n'est pas adapté pour résoudre un problème non linéaire. La géostatistique propose alors des modèles et des outils plus adaptés tels que les simulations.

2.3.5.2 Les simulations géostatistiques

Le double objectif des **simulations** est premièrement d'être capable de reproduire la même variabilité spatiale que la réalité, c'est-à-dire le même histogramme, et deuxièmement, de restituer la même structuration spatiale, c'est-à-dire le même variogramme. Le krigeage fournit l'estimation la plus probable de la réalité à partir d'un jeu de données. Au contraire, les simulations permettent d'obtenir un ensemble de versions équiprobables de la réalité.

Les simulations dites conditionnelles sont contraintes, au niveau des points de données, afin d'être exactes.

En effectuant un grand nombre de simulations, il est possible de déterminer des intervalles de confiance d'estimation ou de calculer des probabilités de dépassement de seuil. Enfin, la moyenne des simulations converge vers le krigeage.

1. Exception, le krigeage factoriel, qui permet de filtrer des données, n'est pas un interpolateur exact.

2. Une telle problématique est par exemple primordiale dans des domaines où il est important de pouvoir prévoir dépassement de seuil comme la pollution par exemple.

2. NOTIONS DE BASE - DÉFINITIONS

Parmi les différentes méthodes de simulations, on peut citer les simulations séquentielles gaussiennes (SGS), les simulations séquentielles par indicatrices (SIS) ou les simulations plurigaussiennes (PGS).

2.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté rapidement les éléments de base géostatistiques qui nous serviront tout au long de ce manuscrit. Parmi ceux-ci, nous allons revenir en détail dans le chapitre suivant sur l'hypothèse de stationnarité et sur le variogramme. Cette démarche nous permettra de poser les fondements d'un cadre de travail pour la mise en œuvre de techniques de détermination de paramètres variographiques locaux (techniques **M-GS**). Ces paramètres pourront être utilisés pour traiter des jeux de données dans un environnement de non-stationnarité, et en particulier de non-stationnarité structurale.

Chapitre 3

Introduction aux M-Paramètres

« Donc le poète est vraiment voleur de feu.

Il est chargé de l'humanité, des animaux même ; il devra faire sentir, palper, écouter ses inventions ; si ce qu'il rapporte de là-bas a forme, il donne forme : si c'est informe, il donne de l'informe. Trouver une langue ; »

Lettre à Paul Demeny du 15 mai 1871 dite seconde lettre du voyant

A. Rimbaud

3.1 Introduction

Traiter des phénomènes non stationnaires en géostatistique n'est jamais simple. La première difficulté est de qualifier, à partir d'un jeu de données, un phénomène de non stationnaire. En effet, du point de vue du phénomène étudié, une non-stationnarité n'est définie que pour un domaine et une échelle d'étude fixés. Ceci signifie qu'un même phénomène étudié en deux lieux différents peut très bien avoir un comportement stationnaire dans le premier domaine et un comportement non stationnaire dans le second. De même, suivant l'échelle d'étude retenue, le comportement d'un même phénomène peut être complètement différent en termes de stationnarité (figure 3.1). Dans la suite de l'exposé, nous nous placerons dans des hypothèses claires de stationnarité ou de non-stationnarité. Ceci n'empêche pas de garder à l'esprit les remarques précédentes.

3. INTRODUCTION AUX M-PARAMÈTRES

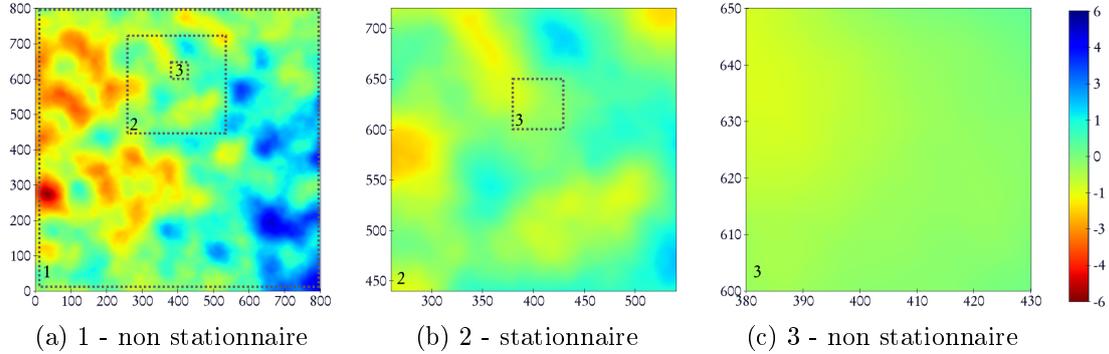


FIGURE 3.1: Trois échelles de travail pour le même phénomène. Il est non stationnaire pour les échelles 1 et 3, mais stationnaire pour la seconde échelle.

La seconde difficulté est liée aux outils disponibles pour traiter les phénomènes de non stationnaires. Ces outils sont aujourd’hui principalement de deux types. Le premier type d’outils est dérivé d’une géostatistique non stationnaire à proprement parler, pour laquelle de véritables modèles non stationnaires sont définis. Nous présenterons deux de ces modèles : le modèle de **krigeage universel** et le modèle des **fonctions aléatoires intrinsèques d’ordre k** (FAI- k). Nous verrons aussi les limitations de ces deux modèles. Le second type d’outils est en relation avec des approches de caractérisation locale. Ces approches, peut-être parfois moins rigoureuses mathématiquement, présentent l’intérêt d’une souplesse de traitement des phénomènes non stationnaires plus importante. Nous énumérerons les principales approches de ce types et en souligneront les limites.

La M-GS rentre dans le cadre des approches de caractérisation locale, et plus précisément, dans celui de l’approche **quasi stationnaire**. Elle rassemble des méthodes de détermination de paramètres variographiques locaux. Les paramètres, ainsi déterminés, sont appelés **M-Paramètres**. Ils sont utilisés dans le cadre de processus d’estimation par krigeage et de simulation « classiques » pour aboutir au final à un traitement localement adapté.

3.2 Géostatistique non stationnaire

3.2.1 Krigeage universel

Le modèle de krigeage universel est avant tout un modèle de décomposition de la fonction aléatoire Z en une fonction aléatoire Y appelée **résidu** et une **dérive régulière** m . Mathématiquement, cela revient à écrire :

$$Z(x) = Y(x) + m(x) \tag{3.1}$$

Y est une fonction aléatoire stationnaire d'espérance nulle et de covariance connue tandis que m , qui comporte la dérive non stationnaire du phénomène, est modélisée sous la forme d'un polynôme de degré l à coefficients inconnus. Sur la base de cette modélisation, il est possible de développer une nouvelle méthode de krigeage dite **krigeage universel** (Matheron (1969)).

Certaines critiques sont faites envers le modèle de krigeage universel. La dichotomie précédente, sous la forme d'un résidu stationnaire et d'une dérive régulière, est parfois perçue comme trop artificielle et ne correspondant pas à la nature du phénomène étudié. On observe, de plus, un biais sur le variogramme du résidu (Pardo-Igúzquiza & Dowd (1998)).

Pourtant, malgré ces critiques, cette approche dichotomique est très largement utilisée car elle permet de travailler sur des résidus stationnaires, et donc d'utiliser les outils de la géostatistique stationnaire vus précédemment. Si la théorie lui apporte des limitations, les résultats obtenus en pratique qualifient cette approche.

3.2.2 FAI-k

Le modèle des FAI-k est un modèle plus général. Il consiste à introduire des **fonctions aléatoires intrinsèques d'ordre k** et des **covariances généralisées**. Ce modèle permet d'aboutir à une généralisation du krigeage universel, appelée **krigeage intrinsèque**. Pour une description détaillée de ce modèle, on pourra se référer à Delfiner & Matheron (1980).

3. INTRODUCTION AUX M-PARAMÈTRES

3.2.3 Limitations des modèles non stationnaires

Les modèles non stationnaires que nous venons de présenter, à savoir le modèle de krigeage universel et le modèle des FAI- k présentent certaines limitations qui pénalisent leur mise en oeuvre pour des cas d'études réels.

Les deux modèles sont, en effet, incapables de gérer certaines variations structurales du phénomène étudié. Il est, par exemple, impossible de traiter des cas de non-stationnarités tels que ceux illustrés aux figures 3.2a où l'anisotropie varie localement et la figure 3.2b où, cette fois-ci, la portée varie localement. Ces limitations sont d'autant plus fortes que la structuration du phénomène est complexe. Dans cette perspective, le modèle de krigeage universel est le plus rapidement limité. Le modèle des FAI- k , bien que plus général, présente, quant à lui, une limitation relativement importante liée aux conditions de sa mise en oeuvre opérationnelle.

En effet, le modèle de FAI- k ne repose plus sur un modèle de variogramme, dont les paramètres restent interprétables, mais sur des covariances généralisées d'interprétation quasi impossible dès que l'ordre k devient supérieur à 1. Qui en 3D par exemple, essaie de se représenter une covariance généralisée d'ordre 3, et de faire un lien avec ce qu'il connaît de ses données, risque de se trouver rapidement confronté à un mur d'incompréhension. Ce paramétrage difficile et peu explicite explique en partie le peu de succès industriel du modèle des FAI- k .

D'un point de vue pratique, une approche de traitement stationnaire est très souvent privilégiée, même lorsque le phénomène étudié n'est pas stationnaire à l'échelle de l'étude. Ceci est dû, en grande partie, à l'offre logicielle disponible sur le marché ; composée majoritairement d'algorithmes de krigeage et de simulation stationnaires, et à la facilité de compréhension et de mise en oeuvre des outils stationnaires comparée à des outils non stationnaires.

Voulant traiter de non-stationnarité, la question est donc de savoir s'il est légitime et possible d'utiliser les outils stationnaires à notre disposition. Dans la suite de notre exposé, nous nous pencherons plus sur la deuxième partie de la question (la possibilité) que sur la première partie (la légitimité). Dans tous les cas, l'approche qui est poursuivie depuis quelques années pour y répondre de façon positive est de se ramener à une échelle de caractérisation locale.

3.3 Les approches non stationnaires par caractérisation locale

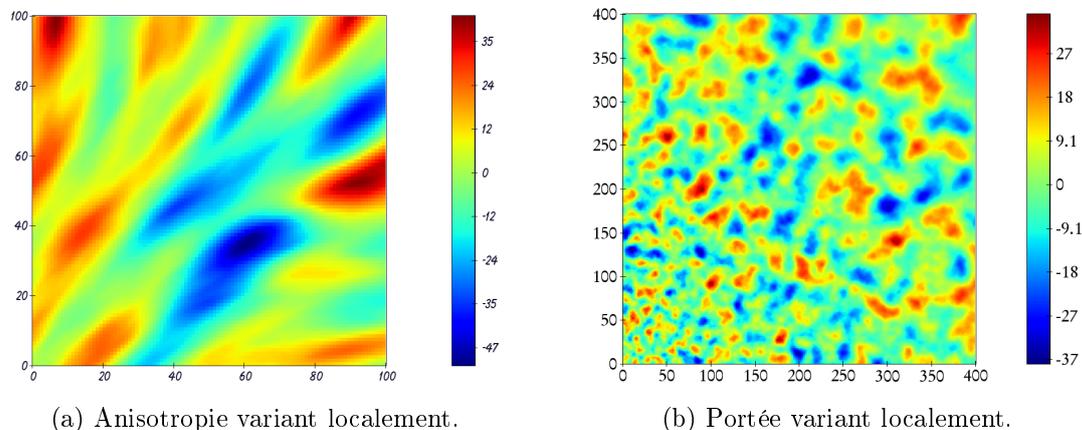


FIGURE 3.2: L'image de gauche illustre un phénomène localement anisotrope : en bas à droite (sud-est), les structures sont orientées horizontalement puis elles varient progressivement jusqu'à atteindre une orientation verticale en haut à gauche (nord-ouest). Sur l'image de droite, la structuration est isotrope mais les tailles des structures varient progressivement : elles sont petites en bas à gauche de l'image (sud-ouest) puis deviennent de plus en plus grandes jusqu'en haut à droite (nord-est). Les modèles non stationnaires ne peuvent pas caractériser de tels changements de structure.

3.3 Les approches non stationnaires par caractérisation locale

3.3.1 Cadre de réalisation unique

Certaines méthodes de prise en compte de la non-stationnarité reposent sur l'utilisation de plusieurs réalisations d'une fonction aléatoire sur le même domaine. On parle alors de phénomène spatio-temporel. L'une des méthodes les plus connues de cette famille consiste à effectuer une déformation spatiale du domaine d'étude pour se ramener à étudier un phénomène stationnaire et isotrope (Sampson & Guttorp (1992), Guttorp & Sampson (1994)). Ici, nous nous limi-

3. INTRODUCTION AUX M-PARAMÈTRES

tons à l'étude de phénomènes dont nous ne disposons que d'une seule réalisation¹. Machuca-Mory (2010) et Harris *et al.* (2010) proposent des examens approfondis des approches non stationnaires par caractérisation locale en géostatistique.

3.3.2 Approche par convolutions

Tout phénomène stationnaire gaussien $Z(s)$ peut s'écrire comme la convolution d'un bruit blanc gaussien $X(s)$ et d'un noyau de convolution $K(s)$:

$$Z(s) = \int_D K(s - u)X(u) du. \quad (3.2)$$

Higdon (1998) et Higdon *et al.* (1999) choisissent un noyau gaussien anisotrope. De plus, afin de prendre en compte la non-stationnarité, ils introduisent un noyau de convolution K_s dépendant de la position et centré en s . Ainsi, la formule 3.2 devient :

$$Z(s) = \int_D K_s(s - u)X(u) du. \quad (3.3)$$

On obtient la corrélation suivante entre deux points s et s' :

$$\rho(s, s') = \int_D K_s(u)K_{s'}(u) du. \quad (3.4)$$

Par construction, cette fonction de corrélation est définie positive ce qui assure que la covariance correspondante est valide.

Higdon (1998) détermine les paramètres de chaque K_s à partir de l'ajustement d'un variogramme expérimental gaussien local en un nombre restreint de points pour limiter les temps de calcul. Les paramètres du noyau gaussien aux points non calculés sont une moyenne pondérée des paramètres des points calculés. Par exemple, cette méthode est appliquée à l'estimation de températures dans l'océan Atlantique.

1. Pour un examen complet des problématiques spatio-temporelles, on pourra se référer à Sampson *et al.* (2001)

3.3 Les approches non stationnaires par caractérisation locale

Higdon *et al.* (1999) considèrent K_s comme une fonction inconnue que l'on contraint à être lisse. Ses paramètres sont estimés en chaque point par un modèle Bayésien hiérarchique. L'exemple d'application est l'estimation de concentration de dioxines sur un site dans le Missouri aux États-Unis d'Amérique.

Le principal inconvénient de cette approche est qu'elle se base sur une modélisation d'un variogramme expérimental. De plus, par construction, elle est incapable de gérer un changement brutal de la structuration spatiale des données. Elle n'est donc adaptée que pour des changements lisses de la structuration.

3.3.3 Approche par noyaux locaux pondérés

Fuentes (2001) propose de découper le domaine d'étude D en k sous-régions disjointes S_i . La forme d'une sous-région (rectangulaire, circulaire, etc.) est supposée connue *a priori* et le nombre de sous-régions est déterminé par un critère d'information Bayésien ou un critère d'information d'Akaike. Chaque sous-région est supposée avoir un nombre suffisant de points de données et un comportement stationnaire. Le phénomène spatial global $Z(x)$ est alors défini comme la moyenne pondérée de chacun des phénomènes locaux stationnaires Z_i de covariance K_{θ_i} :

$$Z(x) = \sum_{i=1}^k w_i(x) Z_i(x). \quad (3.5)$$

Ainsi, on dispose de modèles locaux régis par un modèle global. $w_i(x)$ est généralement une fonction telle que l'inverse de la distance au carré entre x , le point d'étude, et le centre de la partition.

Les phénomènes locaux sont dits « orthogonaux » car les covariances de deux partitions différentes sont nulles :

$$\text{Cov}(Z_i(x), Z_j(y)) = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (3.6)$$

La covariance du phénomène global Z est définie comme une somme pondérée de covariances locales :

3. INTRODUCTION AUX M-PARAMÈTRES

$$\text{Cov}(Z(x), Z(y)) = \sum_{i=1}^k w_i(x)w_i(y)K_{\theta_i}(x - y). \quad (3.7)$$

Chaque K_{θ_i} permet de pondérer l'influence d'un phénomène local à l'extérieur de sa sous-région de définition. θ_i correspond aux paramètres de la covariance de la partition i . Ils sont calculés à partir de fonctions spectrales.

Cependant, Il n'existe pas de méthode simple pour déterminer automatiquement la forme des fenêtres. Le principal reproche que l'on puisse faire à cette méthode est de ne pas générer des paramètres variographiques facilement interprétables et qui pourront ensuite être utilisés dans des processus de krigeage et de simulation « classiques ».

Nous pouvons également citer [Haas \(2002\)](#) qui utilise une approche basée sur des noyaux locaux.

3.3.4 Approche utilisant un gradient

[Stroet & Snepvangers \(2005\)](#) utilisent une méthode combinant un krigeage itératif avec un algorithme de gradient sur un jeu de données 2D afin de modifier les paramètres variographiques à chaque itération. En partant d'un premier krigeage des données utilisant un variogramme linéaire, ils calculent un gradient en chaque point de l'image krigée à l'intérieur d'une fenêtre de taille donnée. Cette étape permet de mettre en valeur les zones de plus grande continuité spatiale. On déduit de ce calcul les nouveaux paramètres du variogramme linéaire dans un contexte d'anisotropie :

$$\gamma(h) = \alpha h \quad \text{avec } \alpha = \frac{\text{seuil}}{\text{portée}} \quad (3.8)$$

Le processus est itéré en effectuant un nouveau krigeage avec ce nouveau variogramme. À chaque itération, la taille de la fenêtre de calcul du gradient diminue ce qui permet de caractériser des tailles de structures de plus en plus petites et de forcer la convergence du calcul.

Par la prise en compte de fortes variations de la structuration spatiale des données,

3.3 Les approches non stationnaires par caractérisation locale

cette méthode fournit des résultats très intéressants. Cependant, cette approche est aujourd'hui restreinte aux modèles linéaires 2D, ce qui limite la validité des paramètres variographiques obtenus lors de la dernière itération.

3.3.5 Approche quasi stationnaire

Comme le soulignent [Harris *et al.* \(2010\)](#), le krigeage ordinaire tel que défini au paragraphe [2.3.5.1](#) introduit déjà la notion de traitement local. En effet, en chaque point cible, le calcul est effectué dans un voisinage fixe du point considéré en utilisant des paramètres variographiques globaux. Cette démarche est valide tant que l'hypothèse de stationnarité est assurée. Dans le cas non stationnaire, on peut très bien imaginer généraliser cette approche en utilisant des paramètres variographiques locaux, déterminés dans une fenêtre centrée en chaque point cible ([Haas \(1990a\)](#) et [Haas \(1990b\)](#)). La fonction aléatoire sous-jacente est alors supposée stationnaire dans chacune de ces fenêtres. Nous nous plaçons alors dans un cadre de **quasi-stationnarité** ([Matheron \(1970\)](#)).

Le premier avantage de cette approche est qu'elle permet de caractériser la structuration locale des données, qui plus est par des paramètres interprétables (section [3.4](#)). Le second avantage est son degré de généralité qui permet de l'implémenter pour la quasi-totalité des algorithmes de krigeage et de simulations géostatistiques. Ainsi, [Haas \(1996\)](#) l'utilise dans le cas du cokrigeage et [Lloyd & Atkinson \(2002\)](#) proposent la même approche en utilisant un krigeage universel. Pour être complet, citons [Walter *et al.* \(2001\)](#), [Pardo-Igúzquiza *et al.* \(2005\)](#) et [Cattle *et al.* \(2002\)](#) qui utilisent aussi cette approche quasi stationnaire.

Bien sûr, l'approche variographique quasi stationnaire nécessite la détermination de paramètres variographiques locaux. Celle-ci est classiquement réalisée sur la base d'un ajustement automatique de variogramme expérimental ([Haas \(1990a\)](#) et [Haas \(1990b\)](#)). Une telle détermination peut être questionnée. En effet, quel degré de confiance peut-on accorder à un modèle ajusté sur un variogramme expérimental, lequel peut être sujet à des fluctuations statistiques d'autant plus importantes que l'on réduit la taille de la fenêtre de détermination des paramètres (et donc le nombre de points de données) ? En outre, plus le niveau de complexité de structuration est important plus cette approche est difficile à mettre en œuvre

3. INTRODUCTION AUX M-PARAMÈTRES

et peut être questionnée.

Les M-Paramètres, introduits en fin de chapitre, sont des paramètres variographiques locaux obtenus par d'autres critères qui représentent une bonne alternative aux paramètres variographiques déterminés à partir d'un variogramme expérimental.

3.4 Interprétation des paramètres variographiques

Comme nous l'avons souligné au chapitre 2, l'un des points importants de la géostatistique stationnaire est l'utilisation du variogramme qui permet de quantifier la corrélation entre deux points à partir de leurs distances respectives. Il permet également de décrire de manière intuitive la structuration spatiale du phénomène sous-jacent. En d'autres termes, certains paramètres variographiques peuvent être directement interprétés en termes de tailles et d'orientations de structures présentes dans un jeu de données. Ainsi, les portées correspondent, avec une bonne approximation, aux tailles moyennes des structures. Ce dernier point est illustré sur l'exemple de la figure 3.3 : à la portée suivant l'horizontale (en rouge) correspond la longueur des structures observables sur le jeu de données, et à la portée verticale (en vert) correspond la largeur de ces structures. Cette interprétation peut être représentée par une **ellipse de corrélation**.

La géostatistique stationnaire d'ordre 2 offre ainsi un environnement séduisant. D'une part, nous avons un cadre mathématique bien développé et de nombreux outils pour effectuer, à partir d'un jeu de données, aussi bien des estimations spatiales (krigeage) que des simulations. D'autre part, nous pouvons interpréter simplement et « graphiquement » certains des paramètres (les plus influents) mis en jeu. Le contrôle et la compréhension de nos modèles s'en trouvent renforcés.

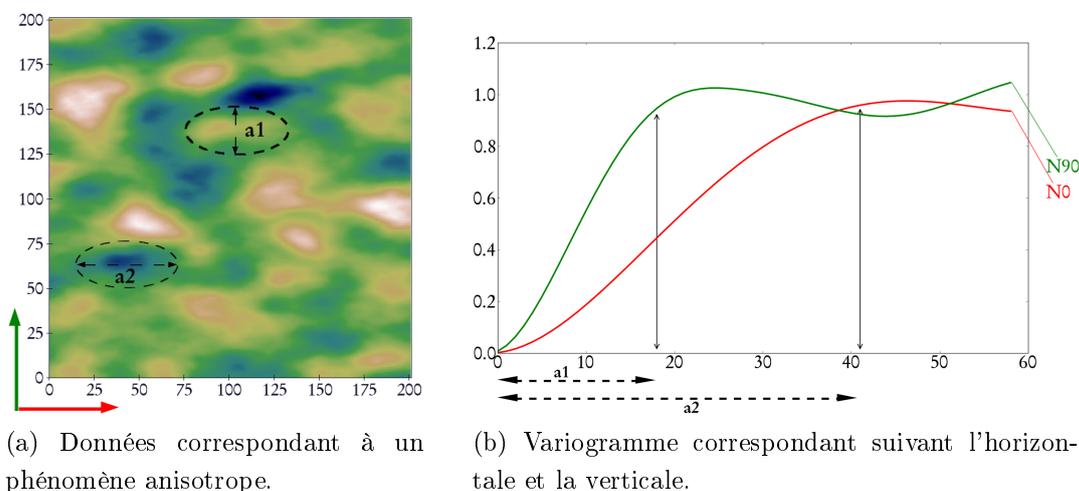


FIGURE 3.3: Illustration du lien entre le variogramme et la structuration du phénomène : les portées a_1 et a_2 correspondent respectivement aux dimensions des structures suivant la verticale et l'horizontale.

3.5 Utilisation des M-Paramètres

3.5.1 Cadre d'utilisation

Les méthodes de détermination de M-Paramètres présentées dans cette thèse reposent sur l'hypothèse de quasi-stationnarité. Cette hypothèse est la pierre angulaire de notre raisonnement car, sans elle, il serait impossible d'utiliser un variogramme et nous perdriions, par conséquent, le lien entre structuration des données et paramètres variographiques.

De plus, l'ensemble des paramètres variographiques locaux estimés aura une portée générale à deux niveaux. Premièrement, ils seront valables pour tous les types de krigeages et de simulations variographiques. Deuxièmement, ils pourront être appliqués sur des phénomènes très différents (domaines pétroliers, environnementaux, etc.). On pourra éventuellement consentir à des modifications mineures suivant les applications mais ceci n'est pas le premier objectif. De ce point de vue, nous souhaitons donc développer des méthodes générales.

Enfin, il semble évident de pouvoir disposer d'algorithmes performants en temps de calcul pour une mise en œuvre opérationnelle.

3. INTRODUCTION AUX M-PARAMÈTRES

3.5.2 Principe

Définition 3.1 La *M-GS* (pour *Moving-Geostatistics*) regroupe un ensemble de techniques de détermination de paramètres variographiques locaux utilisables dans un contexte de quasi-stationnarité (*Magneron et al. (2008)*). Les paramètres variographiques locaux sont appelés *M-Paramètres*.

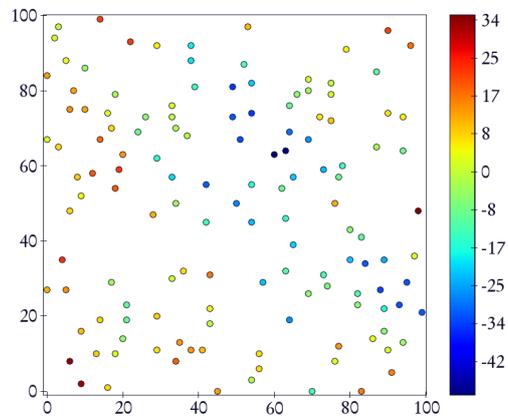
Les M-Paramètres peuvent être divisés en deux catégories (*Magneron et al. (2008)*). La première est celle des paramètres dits structuraux. Ils correspondent à des paramètres du modèle du variogramme : seuil, portées, direction d'anisotropie et type de fonction (sphérique, cubique, etc). La seconde catégorie correspondent aux paramètres de calcul. Il s'agit essentiellement de la taille et de l'orientation du voisinage autour du point cible pour un calcul de krigeage ou de simulation. Par abus de langage, il arrivera souvent que l'on parle de M-Paramètres comme de paramètres structuraux uniquement, et restreint plus encore, dans le cadre de cette thèse, à des paramètres de portées et de directions d'anisotropies (liées aux tailles et rotations de structures).

La figure 3.4 illustre les différences entre l'approche classique par la géostatistique stationnaire (figures 3.4b et 3.4c) et l'approche par M-GS (figures 3.4d et 3.4e). Considérons la figure 3.4c. Il est possible d'en extraire aléatoirement un certain nombre de points pour constituer un jeu de données (figure 3.4a). En effectuant une analyse géostatistique classique de ce jeu de données, nous obtenons 4 variogrammes directionnels (figure 3.4b). De cette analyse variographique, nous pouvons déduire des paramètres variographiques globaux, c'est-à-dire uniformes sur l'ensemble du domaine d'étude. La représentation de ces paramètres sous la forme d'une ellipse de corrélation (figure 3.4c) montre que ces paramètres ne sont localement pas adaptés à la structuration spatiale du phénomène. En effet, les structures ont une orientation horizontale au sud-est du domaine et évoluent graduellement jusqu'à une orientation verticale au nord-ouest. Le paramètre global d'orientation de l'étude variographique indique une orientation de 42° qui correspond avec une bonne approximation à l'orientation moyenne des structures sur l'ensemble du domaine, mais pas aux orientations locales. En d'autres

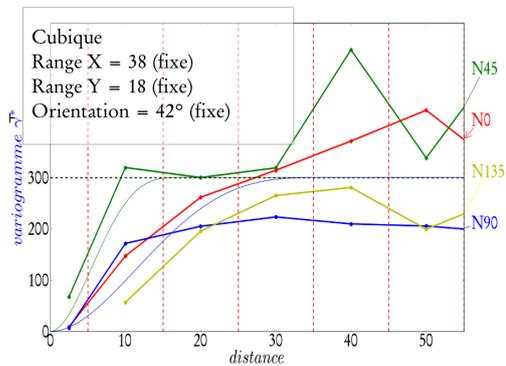
3.5 Utilisation des M-Paramètres

termes, la caractérisation est globalement correcte mais elle n'est pas adaptée localement. Au contraire, l'approche par M-GS revient à calculer des paramètres variographiques pouvant évoluer localement (figure 3.4d). Ainsi, si l'on considère l'orientation, elle varie bien cette fois-ci entre 0 et 90°. L'ellipse de corrélation est localement adaptée à la structuration des données (figure 3.4e).

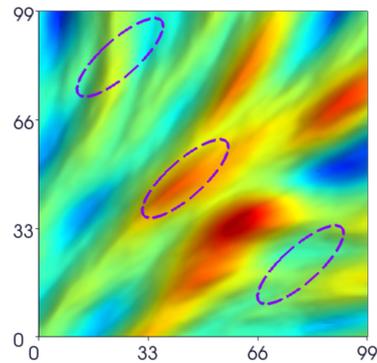
3. INTRODUCTION AUX M-PARAMÈTRES



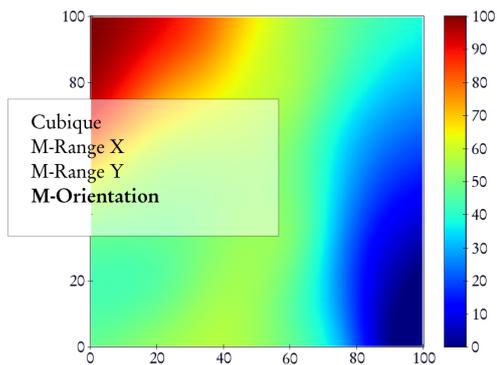
(a) Jeu de données.



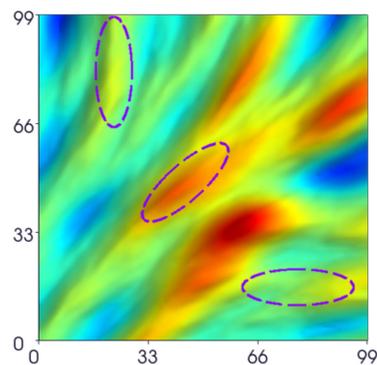
(b) Variogramme expérimental suivant 4 directions.



(c) Les paramètres globaux ne s'adaptent pas à la structuration locale.



(d) Carte des orientations locales (M-Orientation).



(e) Les M-Paramètres s'adaptent à la structuration locale.

FIGURE 3.4: Synthèse des approches globales et locales (M-GS). Les paramètres globaux traduisant la structuration des données à l'échelle globale, on obtient une anisotropie de 42° . Au contraire, la M-GS retranscrit localement les changements d'anisotropie.

3.5.3 Exemple d'utilisation

L'exemple suivant illustre l'intérêt d'utiliser des M-Paramètres dans un contexte de cartographie topographique. Il s'agit d'un cas d'étude industriel. Les conclusions qui en sont tirées peuvent être généralisées à tout processus d'estimation par krigeage ou de simulation.

De façon générale, nous disposons de données topographiques à maille 100 mètres. Cette maille est cependant trop lâche pour le dispositif logiciel utilisant ces données (dispositif de mesure du vent). Nous souhaitons obtenir une information topographique à maille 10 mètres la plus précise possible à partir des données à 100 mètres (figure 3.5). Pour cela, nous avons deux possibilités de traitement. La première consiste à effectuer une étude géostatistique classique avec un modèle de variogramme estimé globalement. La seconde utilise une approche locale reposant sur la détermination de M-Paramètres. Dans les deux cas, une estimation par krigeage ordinaire est réalisée. La démarche doit être assez générale pour s'appliquer sur d'autres cartes topographiques. Pour évaluer la qualité de chacun des deux traitements, nous disposons d'un jeu test de données topographiques réelles à maille 10 mètres.

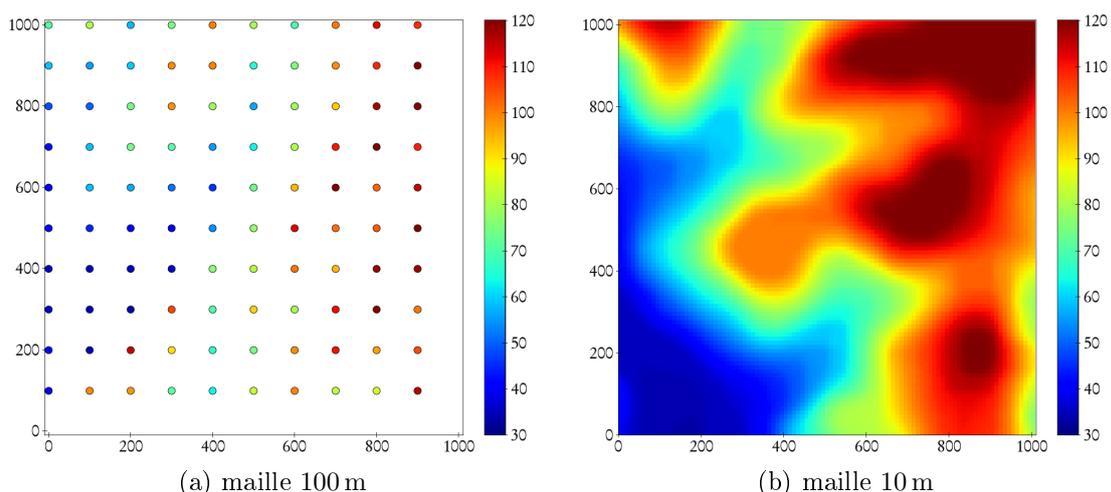


FIGURE 3.5: Données sur la gauche (maille 100 *m*) et vérité terrain (maille 10 *m*) sur la droite. L'objectif est d'obtenir la carte de droite à partir de celle de gauche.

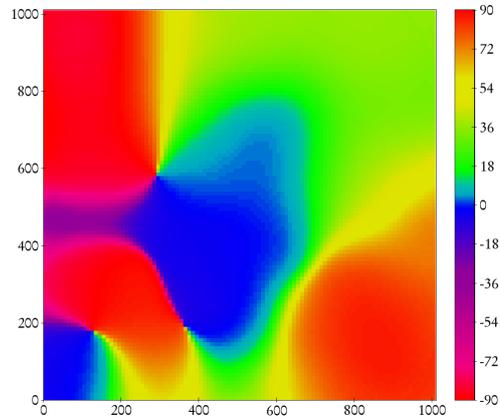
3. INTRODUCTION AUX M-PARAMÈTRES

L'étape de modélisation pour l'approche globale conduit à un modèle de variogramme isotrope de type sphérique avec une portée de 300 mètres. L'approche par M-GS, quant à elle, fournit un modèle anisotrope dont la portée horizontale varie entre 215 et 870 mètres (figure 3.6b) et la portée verticale entre 190 et 590 mètres (figure 3.6c) avec des variations de directions d'anisotropie importantes (figure 3.6a).

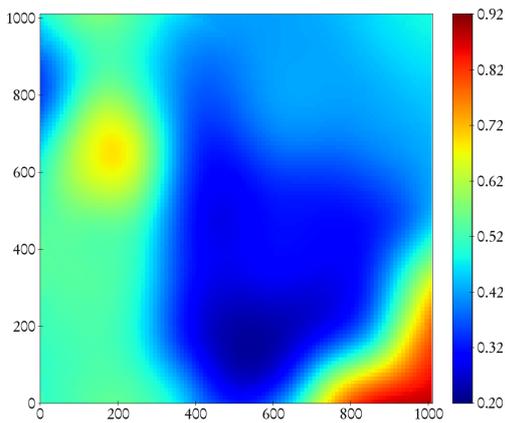
Les estimations topographiques à maille 10 mètres correspondant aux deux types de traitement semblent assez proches (figures 3.7a et 3.7c). Les différences entre cartes d'écart type de krigeage associées à chacun des traitements (figures 3.7b et 3.7d) sont elles visiblement plus marquées. En effet, l'écart type de krigeage est de manière générale très sensible aux paramètres du modèle de variogramme. L'écart type de krigeage se comporte de manière identique sur l'ensemble du domaine avec la méthode globale. Son comportement est, au contraire, très changeant avec la M-GS ; l'écart type de krigeage dans ce cas est en accord avec la structure sous-jacente des données. En d'autres termes, l'approche globale donne une version trop simpliste de l'écart type de krigeage car elle ne tient pas compte des variations de variabilité dans le champ des données.

Les différences entre estimations topographiques sont analysées plus finement en comparant les estimations à la vérité terrain (figure 3.8). L'amélioration globale avec la M-GS est de l'ordre de 10 % : la variance d'erreur globale passe de 3,8 m² avec l'approche globale à 3,1 m² avec l'approche M-GS. Localement cette amélioration peut aller jusqu'à 20 %, notamment dans des zones à anisotropie marquée.

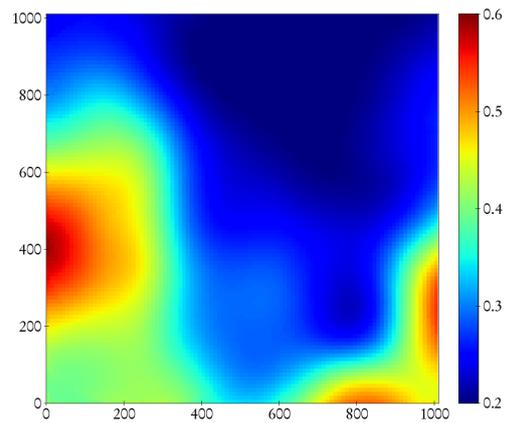
3.5 Utilisation des M-Paramètres



(a) Carte des orientations locales (M-Orientation). Valeurs exprimées en degrés.



(b) Carte de la portée horizontale locale (M-Ax). Valeurs exprimées en km.



(c) Carte de la portée verticale locale (M-Ay). Valeurs exprimées en km.

FIGURE 3.6: La modélisation par M-GS produit 3 cartes de paramètres variographiques : deux paramètres de portée (a, b) et un paramètre d'orientation (c).

3. INTRODUCTION AUX M-PARAMÈTRES

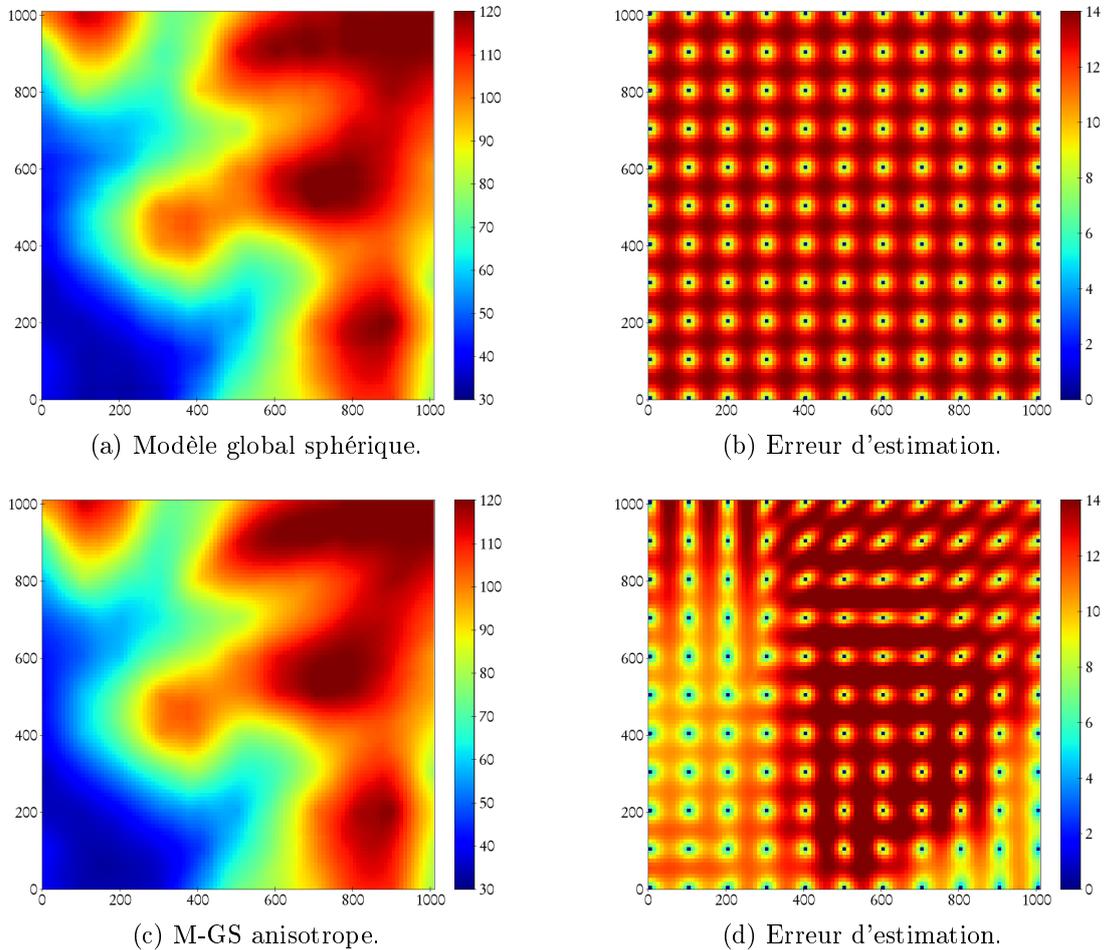
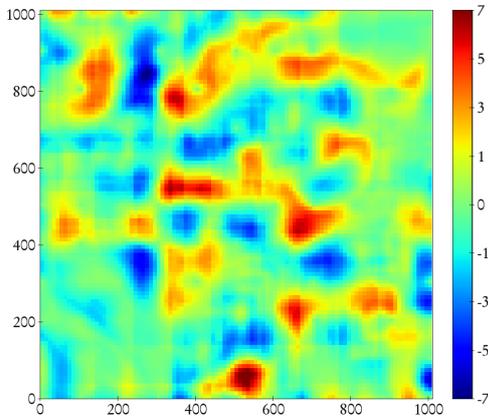
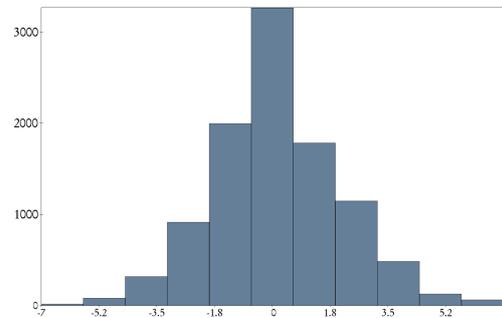


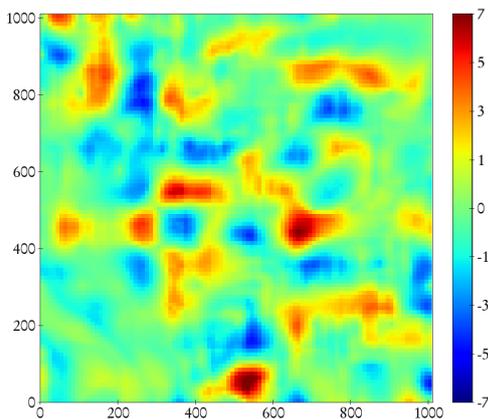
FIGURE 3.7: Les résultats d'interpolation pour chacun des modèles sur la colonne de gauche (a, c) et les cartes d'incertitudes de krigeage correspondantes sur la colonne de droite (b, d).



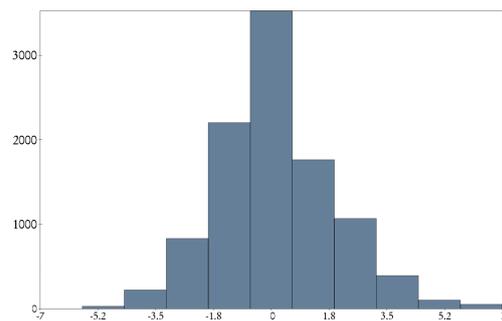
(a) Carte des différences pour le modèle global.



(b) Histogramme correspondant. Variance de 3,8.



(c) Carte des différences pour le modèle M-GS.



(d) Histogramme correspondant. Variance de 3,1.

FIGURE 3.8: Les cartes de différences entre la vérité terrain et chacune des interpolations (a, c) ainsi que leurs histogrammes sur la colonne de droite (b, d).

3.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les méthodes les plus classiques de la géostatistique non stationnaire. Nous avons également passé en revue un certain nombre d'approches géostatistiques locales dont l'objectif premier est la prise en compte de la non-stationnarité structurale.

Dans le cadre d'une quasi-stationnarité du phénomène étudié, il apparaît perti-

3. INTRODUCTION AUX M-PARAMÈTRES

ment de privilégier l'emploi de paramètres variographiques locaux, tels que des M-Paramètres, ces derniers étant perçus comme un ensemble de paramètres mathématiques qu'il est nécessaire d'optimiser sur l'ensemble du domaine d'étude. Néanmoins, tout au long de ce chapitre, nous avons volontairement esquivé cette question fondamentale : le calcul effectif des M-Paramètres. Ce point fondamental occupera notre propos au cours des chapitres suivants. Plus spécifiquement, nous proposerons des méthodes de détermination des paramètres structuraux de portées et de directions d'anisotropie par des techniques de traitement d'images. Ces méthodes répondront aux contraintes de temps de calcul et seront applicables en 2D comme en 3D.

Chapitre 4

Caractérisation de formes binaires

« Mais le calcul par deux, c'est-à-dire par 0 et par 1, en récompense de sa longueur, est le plus fondamental pour la science, et donne de nouvelles découvertes, qui se trouvent utiles ensuite, même pour la pratique des nombres, et surtout pour la Géométrie, dont la raison est que les nombres étant réduits aux plus simples principes, comme 0 et 1, il paraît partout un ordre merveilleux. »

Explication de l'arithmétique binaire [...]

G. W. Leibniz, 1703

4.1 Introduction

Au cours du chapitre 3, nous avons défini un cadre de travail général appelé M-GS dont les fondations reposent sur l'hypothèse de stationnarité locale. L'objectif principal est de permettre un meilleur traitement (krigeage ou simulation) de structures géologiques complexes. Nous avons également mis en valeur un premier lien entre les paramètres du variogramme et les dimensions des structures spatiales sous-jacentes au niveau global. L'idée de la M-GS est d'étendre localement ce lien entre tailles de structures et paramètres variographiques. Du point de vue du traitement d'images, cela revient à tenter d'associer une mesure locale à une ou plusieurs formes. Il est donc nécessaire de développer une méthodologie en deux temps : le premier temps, qui relève du traitement d'images, nécessite

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

d'associer des caractéristiques locales à une forme. Le second relève cette fois-ci de la géostatistique et nécessite de traduire ces caractéristiques en paramètres variographiques, c'est-à-dire en directions d'anisotropies et en portées.

Nous faisons tout d'abord le choix de nous restreindre à des images binaires car elles sont plus faciles à traiter et offrent déjà de nombreuses applications comme nous le verrons par la suite. Ainsi, nous allons maintenant revoir les différentes grandes méthodes de caractérisation de formes binaires. Par la suite, les formes binaires seront représentées soit en blanc sur son fond noir soit par leur contour. Pour la compréhension de ce chapitre, il est important d'être familier avec des notions de morphologie mathématique. Certaines d'entre elles sont introduites dans ce chapitre pour éclairer la présentation des méthodes. Pour une lecture plus complète, on pourra se référer à [Serra \(1982\)](#), [Serra \(1988\)](#) et [Soille \(2003\)](#).

4.2 État de l'art de la caractérisation de formes binaires

4.2.1 Introduction

L'analyse et la caractérisation de formes binaires sont des domaines de recherche actifs. Il n'est donc pas étonnant de trouver de nombreux articles proposant une revue complète. On peut notamment citer [Zhang & Lu \(2004\)](#), [Pavlidis \(1978\)](#) et [Loncaric \(1998\)](#). Nous reprenons ici les grandes familles de caractérisation de formes. Il est d'usage courant de séparer ces méthodes en deux grandes familles : les globales qui reposent sur l'étude de l'intérieur de la forme et les caractérisations qui étudient le contour de la forme ou son squelette.

4.2.2 Caractéristiques globales simples

Ces mesures constituent la manière la plus simple de caractériser une forme binaire. On peut citer la **surface** (notée S) qui consiste à compter le nombre de pixels de la forme, son **périmètre** (noté P), **l'excentricité** qui est le rapport entre le grand axe et le petit axe de la forme et la **circularité** (notée C, formule

4.2 État de l'art de la caractérisation de formes binaires

4.1). La plupart de ces paramètres se généralisent en 3D en remplaçant l'étude de la surface par celle du volume.

$$C(X) = \frac{P^2(X)}{S(X)} \quad (4.1)$$

Le calcul de ces différents paramètres de forme pour les exemples de la figure 4.1 (repris de Zhang & Lu (2004)) montrent qu'ils ne sont pas suffisamment discriminants. En effet, bien que ces trois formes soient visuellement bien distinctes, ni le critère d'excentricité ni celui de circularité ne sont pas capables de les caractériser efficacement. Ainsi, les figures 4.1a et 4.1b ont des excentricités proches et des circularités différentes tandis que les figures 4.1b et 4.1c ont des circularités égales mais des excentricités différentes. Dans un premier cas, la circularité est le critère le plus pertinent, alors que c'est l'excentricité dans le second cas.

À ces caractéristiques simples, nous pouvons ajouter par exemple la mesure de la plus petite boîte englobant une forme ou l'orientation d'une forme qui correspond à l'angle fait par le grand axe de la forme avec l'horizontale. Néanmoins, un contre exemple usuel de ce dernier critère est une forme circulaire, qui n'a pas de direction privilégiée.

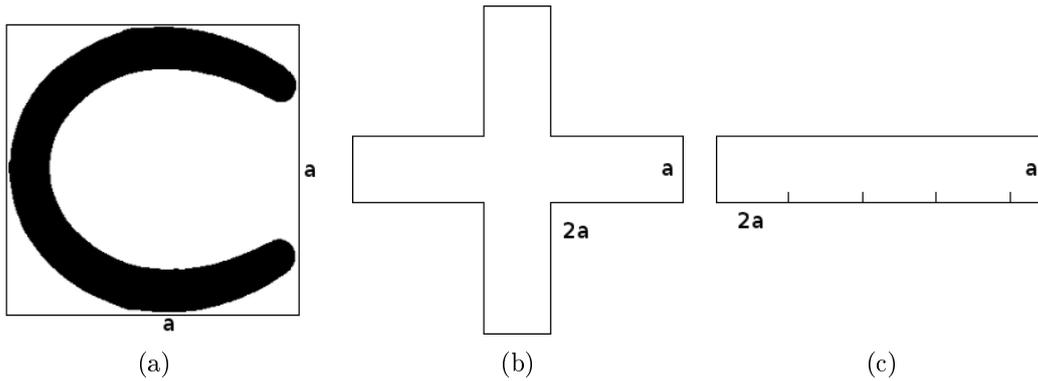


FIGURE 4.1: Il est nécessaire de combiner le calcul de l'excentricité et de la circularité de ces 3 formes pour les reconnaître.

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

4.2.3 Longueur, rayon, centre et extrémités géodésiques

La **distance géodésique** (Lantuéjoul & Beucher (1981)) et la **fonction de propagation géodésique** permettent de définir plusieurs caractéristiques adaptées à l'analyse de formes binaires. Dans la suite de cette section, nous appellerons « forme », que nous noterons X , un compact de \mathbf{R}^n . La distance géodésique se définit de la manière suivante :

Définition 4.1 La **distance géodésique** $d_X(x,y) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^+$ par rapport à la forme X , avec $x \in X$, est égale à la longueur du plus court chemin reliant x à y restant inclus dans X . S'il n'existe pas de chemin, alors cette distance est égale à l'infini. Remarquons que ce chemin peut ne pas être unique.

On peut montrer que la distance géodésique vérifie les propriétés d'une distance (définition 2.3). Le plus court chemin entre deux points x et y appartenant à une même forme est appelé un **arc géodésique**. La figure 4.2 illustre le principe de calcul de la distance géodésique. Nous pouvons noter que le chemin a tendance à coller au contour de la forme.

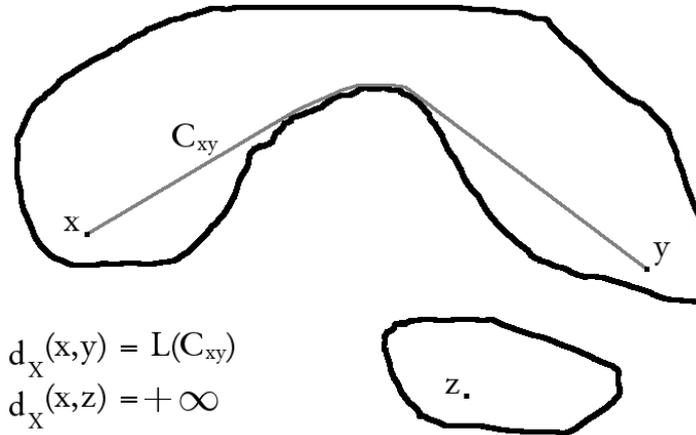


FIGURE 4.2: Distance géodésique de formes binaires. La distance géodésique entre x et y est égale à la longueur de l'arc en gris. Il n'existe pas de chemin entre x et z restant dans la forme.

Définition 4.2 La valeur de la **fonction de propagation géodésique** d'une forme binaire X en un point x noté $t(x)$ est égale au plus long arc géodésique

4.2 État de l'art de la caractérisation de formes binaires

inclus dans X dont x est l'une des extrémités :

$$t(x) = \sup_{y \in X} d_X(x, y). \quad (4.2)$$

Lantuéjoul & Maisonneuve (1984) proposent de se représenter une propagation géodésique comme une pierre jetée dans l'eau. Si l'on s'imagine que la forme X est un étang et que l'on jette une pierre en un point x , la propagation s'arrête à l'instant où toutes les ondulations provenant de x ont atteint les berges de l'étang (exemple figure 4.3).

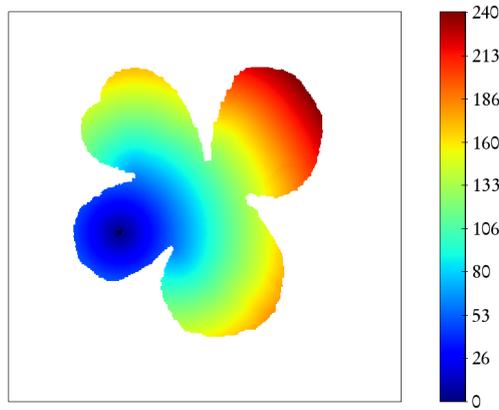


FIGURE 4.3: Exemple de propagation géodésique depuis le pixel indiqué en noir.

Définition 4.3 La *longueur géodésique* d'une forme binaire X (Lantuéjoul & Maisonneuve (1984)), notée $L(X)$, est égale à la longueur du plus long arc géodésique inclus dans la forme :

$$L(X) = \sup_{x, y \in X} d_X(x, y). \quad (4.3)$$

Elle est donc égale à la valeur maximale de la fonction de propagation géodésique sur X .

Cette définition de la longueur d'une forme n'est pas sensible au bruit ou à une faible modification du contour de la forme ce qui la rend robuste. De plus, elle est applicable à tout type de forme contrairement aux descripteurs définis précédemment. Enfin, on peut en déduire le **facteur d'allongement** d'une forme

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

X . Ce dernier peut être vu comme une généralisation de la circularité définie précédemment. On le note $\rho(x)$:

$$\rho(X) = \frac{\pi L(X)^2}{4S(X)} \quad (4.4)$$

avec $S(X)$ la surface de la forme X . Le facteur d'allongement géodésique est minimal et égal à 1 pour un disque. La figure 4.4 illustre le calcul du facteur d'allongement des formes du paragraphe précédent. Il est également possible de définir le centre et les extrémités d'une forme à partir de la propagation géodésique.

Définition 4.4 *Un point c est un **centre géodésique** de la forme X si la fonction de propagation de X y atteint un minimum (Lantuéjoul & Maisonneuve (1984)). Le **rayon géodésique**, noté $R(X)$, d'une forme binaire X , est égal à la valeur de la propagation géodésique au centre géodésique :*

$$R(X) = t(c) \quad (4.5)$$

Définition 4.5 *Les **extrémités géodésiques** (Lantuéjoul & Maisonneuve (1984)), notées e_i , d'une forme correspondent aux maximums régionaux de la fonction de propagation géodésique.*

On peut montrer que le centre géodésique d'une forme simplement connexe (i.e. connexe sans trou) est unique. Les extrémités se situent sur le contour de la forme. De plus, le centre géodésique d'une forme a l'avantage d'être nécessairement à l'intérieur de celle-ci contrairement à son centre de gravité¹. La figure 4.5 montre le centre et les extrémités géodésiques d'une forme simple.

Ainsi, à partir de la distance géodésique, il est possible de définir le centre et les extrémités d'une forme binaire ainsi que son rayon et son allongement. Ces différentes mesures sont applicables pour tout type de formes et elles ne sont pas sensibles au bruit le long du contour de la forme.

1. Une forme de type fer à cheval est à ce titre un exemple intéressant. Son centre géodésique est à l'intérieur de la forme contrairement à son centre de gravité. Le centre géodésique permet ainsi simplement de marquer une forme.

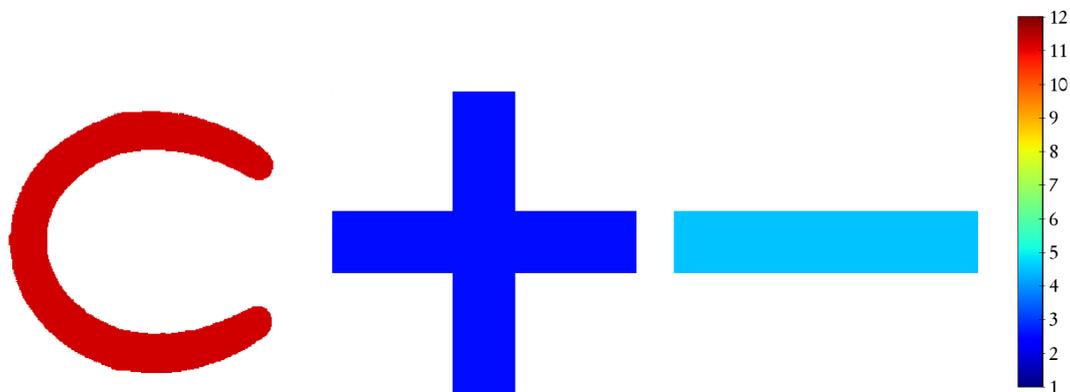


FIGURE 4.4: Calcul du facteur d'allongement des formes de la figure 4.1. Les valeurs obtenues sont respectivement 11,25 ; 2,52 et 4,52. Il est cette fois-ci facile de distinguer les trois formes avec un seul critère. Les deux dernières formes ont la même longueur géodésique mais leur facteur d'allongement est bien distinct.

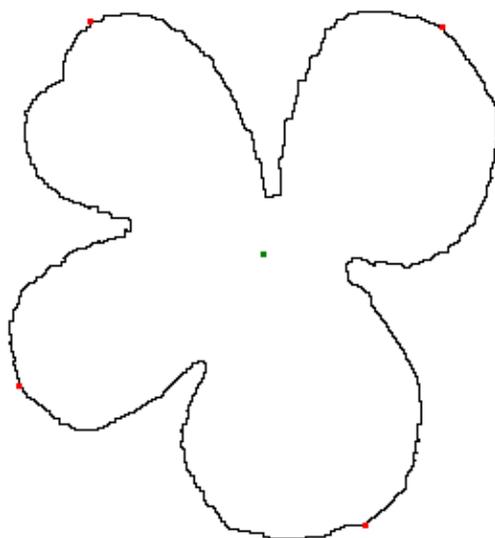


FIGURE 4.5: Le centre géodésique est indiqué par un point vert et les extrémités par les points rouges. Le centre est bien à l'intérieur de la forme et les extrémités sur son contour.

4.2.4 Codage de contours

Cette famille de méthodes fait partie de l'étude du contour d'une forme binaire sur une trame discrète. On appelle contour la frontière entre une forme le fond de l'image et ses trous. Le principe du codage de contours sous la forme de chaînes a été introduit par [Freeman \(1961\)](#). Il consiste à se fixer un point de départ sur le contour, un sens de parcours du contour pour le décomposer en un ensemble de vecteurs de taille unitaire qui correspondent au déplacement élémentaire d'un point du contour à son successeur. Ainsi, si l'on appelle S notre forme, on obtient $S = v_1v_2v_3\dots v_n$. Le résultat est une chaîne fermée, dit lacet, car le point de départ est le même que le point d'arrivée. Cette représentation dépend de la trame et de la connexité choisies. Pour une 4-connexité sur une trame carrée, il existe 4 directions possibles, 8 sur une 8-connexité et 6 pour une 6-connexité sur une trame hexagonale. [Freeman & Saghri \(1978\)](#) ont introduit un codage de chaînes dit généralisé qui consiste à appliquer la même démarche sur un voisinage étendu. Le grand avantage de la représentation d'une forme binaire sous la forme d'un lacet est d'obtenir une représentation très compacte : un point initial et une suite de directions. De plus, si l'on souhaite faire abstraction du point initial, on obtient la même forme à une translation près.

Traditionnellement, ce chaînage sert de point de départ pour l'extraction de points critiques d'un contour ([Freeman & Saghri \(1978\)](#)). Ils permettent, de plus, de calculer efficacement le périmètre d'une forme, la distance entre deux points d'un contour ainsi que ses moments géométriques (cf. section 4.2.5).

Les lacets ont également été étudiés en morphologie mathématique pour notamment obtenir des algorithmes rapides de calcul d'opérations classiques telles que la dilatation, l'érosion binaire et la transformée en distance euclidienne ([Schmitt \(1989\)](#), [Vincent \(1990\)](#)). Par exemple, si l'on considère la dilatation d'une forme binaire les seuls points nécessaires à étudier sont ceux de la frontière de la forme car l'intérieur de la forme reste inchangé par une dilatation. Il suffit donc de dilater les lacets de la forme pour obtenir le dilaté d'une forme et d'apporter éventuellement une correction. Malheureusement, la plupart de ces algorithmes sont uniquement applicables sur une trame hexagonale.

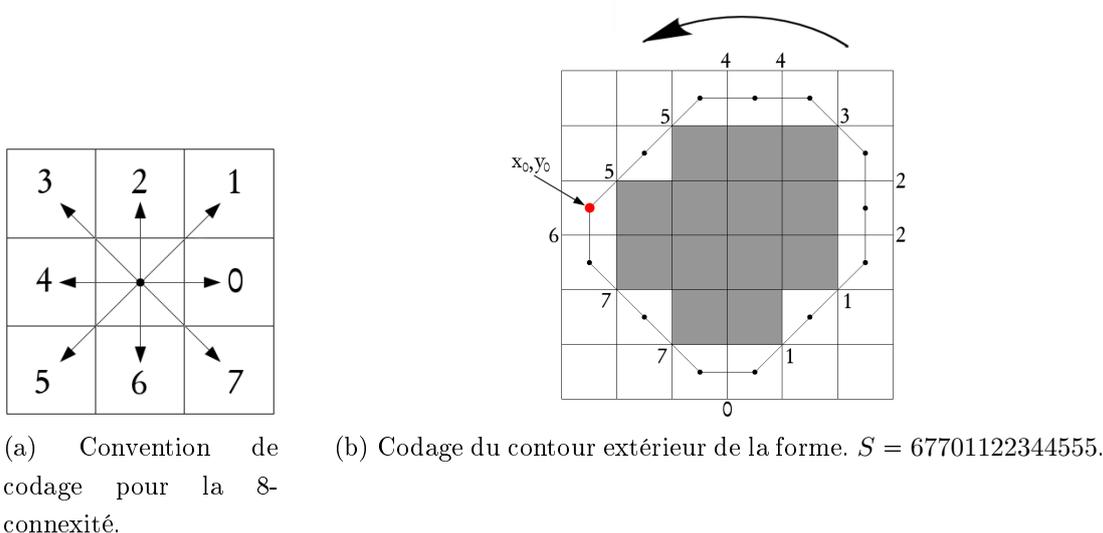


FIGURE 4.6: Exemple de codage de contour sous la forme d'un lacet pour la 8-connexité (b). Le parcours est effectué depuis le point marqué en rouge dans le sens anti-horaire.

4.2.5 Moments

Historiquement, les moments étaient étudiés dans le domaine de la mécanique pour caractériser la capacité d'une force à faire tourner un système mécanique. Ils ont été introduits pour la première fois en traitement d'images par [Hu \(1962\)](#) pour effectuer de la reconnaissance de formes. Par souci de concision nous présentons ici les formules pour des formes 2D mais elles se généralisent immédiatement en 3D. Dans le cas discret, le moment d'ordre $p + q$ d'une fonction $f(x,y)$ se déduit de la formule :

$$m_{pq} = \sum_x \sum_y x^p y^q f(x,y). \quad (4.6)$$

$f(x,y)$ est une fonction indicatrice pour le calcul des moments d'une forme binaire : elle vaut 1 lorsqu'un pixel est à l'intérieur de la forme et 0 à l'extérieur. Il est possible de reconstruire entièrement une forme binaire à partir de la connaissance de ses moments. Lorsque l'on ne connaît qu'une partie des moments, cette reconstruction est partielle. Les premiers moments d'une forme permettent de

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

décrire sa géométrie : le moment d'ordre 0 (m_{00}) correspond à l'aire de la forme. Les moments d'ordre 1 (m_{10}, m_{01}) permettent de déterminer le centre de gravité de la forme (x_c, y_c) :

$$x_c = \frac{m_{10}}{m_{00}} \quad y_c = \frac{m_{01}}{m_{00}} \quad (4.7)$$

Les moments d'ordre 2 (m_{20}, m_{11}, m_{02}) se relient, quant à eux, aux axes principaux d'inertie de la forme. Malheureusement, il est impossible de généraliser ce raisonnement pour des ordres supérieurs. Par ailleurs, les moments d'ordre supérieurs à 3 sont également très sensibles au bruit.

Il est possible de rendre les moments de la formule 4.6 invariants par translation en utilisant des moments centrés (μ_{pq}) :

$$\mu_{pq} = \sum_x \sum_y (x - x_c)^p (y - y_c)^q f(x, y). \quad (4.8)$$

Les axes principaux d'inertie (a et b) et l'orientation (θ) de la forme se déduisent facilement des moments centrés d'ordre 2. Ils se calculent à partir des formules suivantes :

$$a = \sqrt{2 \frac{\mu_{20} + \mu_{02} + \sqrt{(\mu_{20} - \mu_{02})^2 + 4\mu_{11}^2}}{\mu_{00}}} \quad (4.9)$$

$$b = \sqrt{2 \frac{\mu_{20} + \mu_{02} - \sqrt{(\mu_{20} - \mu_{02})^2 + 4\mu_{11}^2}}{\mu_{00}}} \quad (4.10)$$

L'orientation (θ) de la forme correspond à l'angle entre l'axe principal d'inertie a et l'horizontale :

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\mu_{11}}{\mu_{20} - \mu_{02}} \right). \quad (4.11)$$

En d'autres termes, caractériser une forme par ses moments d'ordre 2 revient à l'approximer par une ellipse de grand axe a , de petit axe b et d'orientation θ (figure 4.7).

Des moments d'ordre 2, il est également possible de calculer le rayon de giration R d'une forme. Il correspond au rayon qu'aurait un cercle dont le centre serait le

4.2 État de l'art de la caractérisation de formes binaires

centre d'inertie de la forme et dont tous les pixels de la forme seraient regroupés dans ce cercle. On le déduit de la formule :

$$R = \sqrt{\frac{\mu_{20} + \mu_{02}}{\mu_{00}}}. \quad (4.12)$$

Hu (1962) propose d'utiliser des moments invariants par translation, rotation et changement d'échelle. Ce sont des combinaisons non linéaires de moments centrés. Enfin, il existe également la famille de moments dits orthogonaux dont le but est de minimiser la redondance d'information entre les différents ordres. Le principe général est de remplacer la fonction indicatrice de la formule 4.6 par un polynôme. Parmi ces familles de moments citons les moments de Zernike, les moments de Legendre, les moments de Pseudo-Zernike ou encore ceux de Tchebichef (Teh & Chin (1988), Mukundan *et al.* (2001), Liao & Pawlak (1996)).

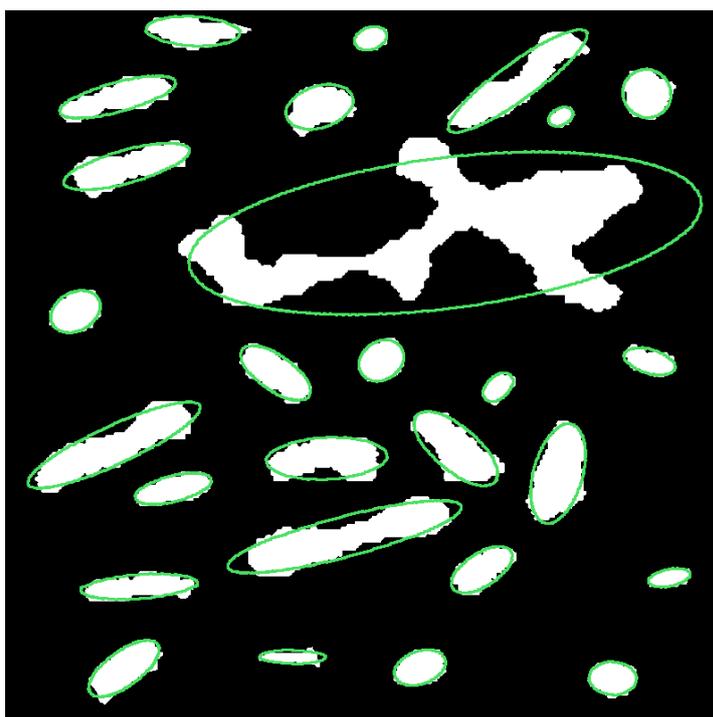


FIGURE 4.7: Calcul des axes principaux d'inertie et de l'orientation d'une forme binaire à partir de ses moments. Le résultat est une ellipse centrée sur le centre de gravité de la forme.

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

4.2.6 Squelette d'une forme binaire

La transformée en squelette et ses applications sont un sujet de recherche en soit. Nous nous restreignons ici à une présentation générale du principe de construction, des propriétés d'un squelette ainsi qu'à certaines notions utiles dans la suite de notre propos. Pour une lecture plus approfondie du sujet, on pourra se référer à [Lohou \(2001\)](#).

Le squelette d'une forme binaire a été introduit pour la première fois par [Blum \(1967\)](#). Cette simplification d'une forme binaire peut s'imaginer comme un amincissement progressif et régulier d'une forme binaire partant de tous les pixels de son contour jusqu'à obtenir une forme simplifiée d'épaisseur unitaire centrée : une sorte de ligne médiane de la forme. Il existe plusieurs manières de définir mathématiquement le squelette. L'une des plus classiques repose sur la notion de boule maximale.

Définition 4.6 Une *boule* $\delta_n(x)$ de taille n et de centre x est *maximale* vis à vis de l'ensemble X , s'il n'existe aucun autre indice k et aucun autre centre y tels que $\delta_n(x) \subseteq \delta_k(y) \subseteq X$, $k \geq n$.

En pratique, les boules maximales touchent la frontière en au moins deux points distincts.

Définition 4.7 Le *squelette* S d'un ensemble X selon une famille de boules $\{\delta_n\}$ est le lieu géométrique des centres de toutes ses boules maximales.

La construction du squelette à partir d'opérateurs morphologiques a été introduit par [Lantuéjoul \(1978\)](#) :

Définition 4.8 Soient $\{\epsilon_i\}$ une famille famille d'érosions élémentaires par des éléments structurants convexes indexés par $i \in \mathbb{N}$, et γ l'ouverture adjointe unitaire de l'érosion unitaire ϵ , le *squelette* de l'ensemble X est le résidu entre les familles $\{\epsilon_i\}$ et $\{\gamma(\epsilon_i)\}$:

$$S(X) = \bigcup_{i=0}^{\infty} [\epsilon_i(X) \setminus \gamma(\epsilon_i(X))] \quad (4.13)$$

4.2 État de l'art de la caractérisation de formes binaires

Cette transformation est appelée le **squelette par ouverture**. Elle est très intéressante car elle simplifie considérablement la forme initiale tout en étant **réversible** : il est possible de la reconstruire à partir de la simple connaissance de son squelette. Cependant, comme on peut voir sur la figure 4.8a, la connexité de l'ensemble de départ n'est pas préservée : d'une forme simplement connexe, nous obtenons plusieurs branches distinctes ; le squelette par ouverture n'est pas **homotopique**. En effet, une transformation est dite homotopique lorsqu'elle préserve les grains et les trous de la forme initiale.

Souhaitant préserver la topologie de l'ensemble de départ, dans la plupart des cas d'applications, on utilise de préférence les **squelettes par amincissements**.

Définition 4.9 *Considérant un couple d'éléments structurants $T = \{T_1, T_2\}$, l'amincissement θ_T d'un ensemble X est le résidu entre X et sa transformation par tout ou rien η_T :*

$$\theta_T(X) = X \setminus \eta_T(X) = X \setminus [\epsilon_{T_1}(X) \cap \epsilon_{T_2}(X^c)]. \quad (4.14)$$

Un amincissement revient à supprimer les pixels d'un ensemble qui correspondent à une forme d'un couple d'éléments structurants donné. Un élément structurant conservant l'homotopie permettra d'obtenir un amincissement homotopique. En appliquant l'opération précédente jusqu'à idempotence on construit un squelette homotopique (figure 4.8b).

Les squelettes ont très souvent des petites branches parasites dites **barbules**. L'opération consistant à les filtrer est appelée un **ébarbulage**. Une possibilité de traitement consiste à décomposer le squelette en branches élémentaires puis de supprimer celles qui sont plus petites qu'un certain seuil (figure 4.8c).

La transformée en squelette n'est pas continue : une faible modification du contour peut provoquer d'importantes modifications du squelette. La figure 4.9 en est une illustration classique.

Enfin, un squelette possède certains points remarquables. Un squelette étant une forme d'épaisseur unitaire, la plupart de ses pixels n'ont que deux voisins. Au contraire, les pixels situés à chacune des extrémités des branches du squelette (ou les points isolés pour un squelette non homotopique) n'ont qu'un seul voisin : ce sont des **extrémités** du squelette. La dernière configuration possible se situe

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

aux voisinages des jonctions de plusieurs branches du squelette. Certains pixels du squelette peuvent avoir plus de deux voisins ; ils sont appelés **points multiples** (figure 4.10). Nous verrons par la suite plusieurs méthodes permettant de déterminer automatiquement ces configurations de points.

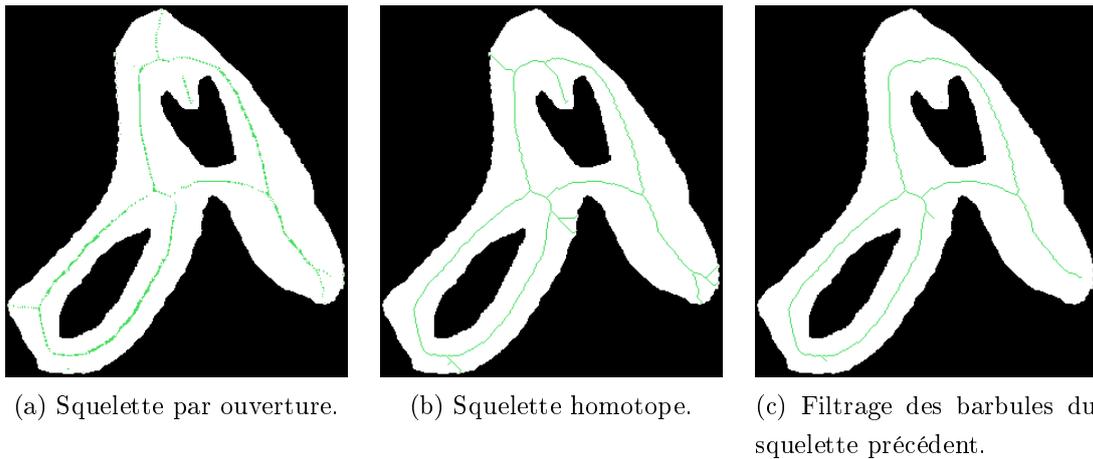


FIGURE 4.8: Les squelettes épousent les formes des contours au centre de la forme. Contrairement à (a), un squelette homotope (b) préserve la topologie de la forme. Il est possible de supprimer les branches parasites d'un squelette par ébarbulage (c).

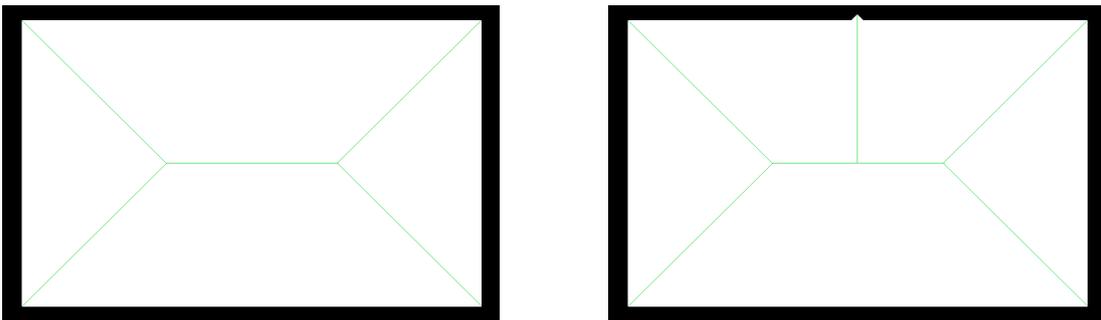


FIGURE 4.9: Une faible altération du contour de la forme modifie fortement le squelette.

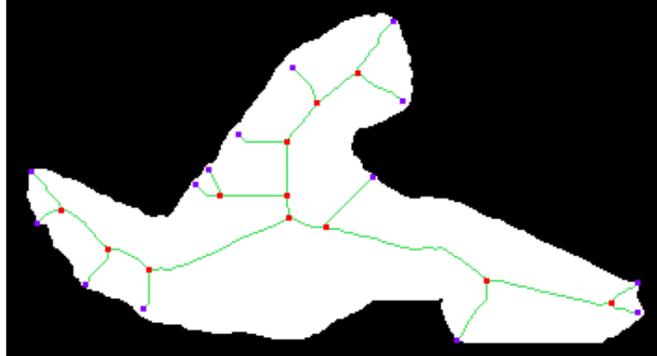


FIGURE 4.10: Les extrémités du squelette sont marquées en violet et les points multiples en rouge.

4.2.7 Conclusion

Ce parcours de l'état de l'art nous a permis de présenter plusieurs méthodes classiques d'analyse et de caractérisation de formes binaires. Elles sont basées soit sur une mesure globale de la forme comme la circularité, soit sur celle du contour ou du squelette de la forme. Cependant, pour calculer des M-Paramètres, nous souhaitons pouvoir associer une mesure locale de taille et d'orientation à chaque pixel de la forme. Ceci n'est pas possible directement avec les différentes transformations et mesures précédentes. Il est donc nécessaire de développer de nouvelles méthodes qui ne manqueront pas de faire appel aux méthodes de l'état de l'art, dès que le besoin se fera sentir.

4.3 Méthode basée sur un squelette

4.3.1 Introduction - recherche méthodologique

L'association d'une mesure locale à chaque pixel d'une forme binaire n'a en soit rien de nouveau. Par exemple, la fonction de propagation géodésique présentée précédemment associe à chaque point d'une forme sa distance géodésique à un point fixé (le marqueur) de la forme. De même, une simple fonction distance (également appelée transformée en distance) permet d'obtenir une mesure locale :

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

Définition 4.10 Soit d une distance, la **fonction distance** f_d d'un ensemble X associe à chaque pixel de X la distance au point le plus proche du complémentaire de X :

$$f_d(X)(x) = \inf\{d(x, y), y \in X^c\} \quad (4.15)$$

L'implémentation de la fonction distance euclidienne étant coûteuse en temps de calcul (Danielsson (1980), Meijster *et al.* (2000)), il est courant d'utiliser des distances discrètes (Rosenfeld & Pfaltz (1966)). La figure 4.11 illustre un calcul de la fonction distance euclidienne et discrète.

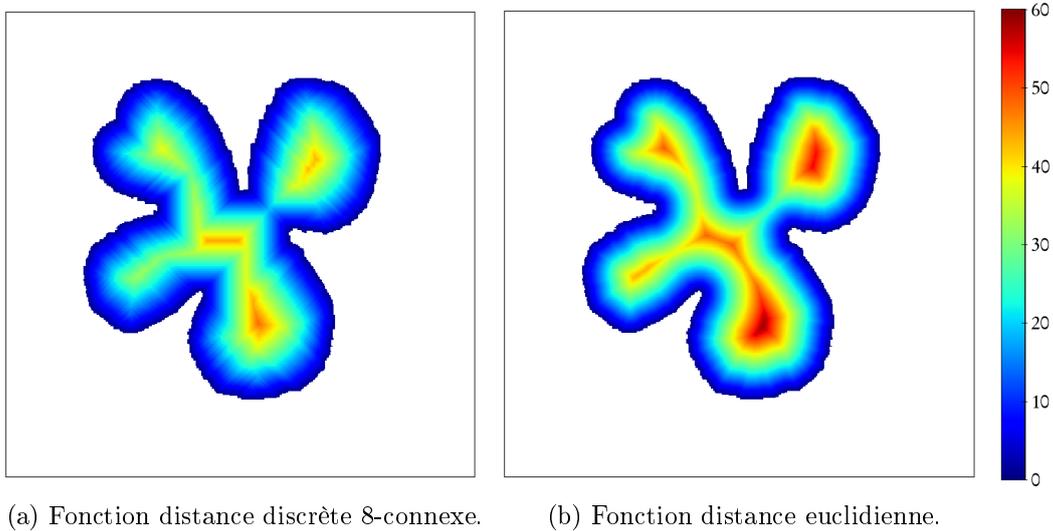


FIGURE 4.11: Exemples de calcul de la fonction distance discrète et euclidienne.

Au centre de la forme, les valeurs de la transformée en distance (figure 4.12a) correspondent localement à la largeur de la forme avec une bonne approximation. Il semble alors pertinent d'extraire cette information en ne conservant que les lignes de crête de la transformée en distance. Cette double opération de calcul de la fonction de distance puis d'extraction des maxima régionaux revient simplement à calculer le squelette par ouverture de la forme (figure 4.12b). Cette étape de simplification de la forme s'est accompagnée de l'extraction d'une information qui semble correspondre à une largeur au centre de la forme. Ce résultat n'est que

4.3 Méthode basée sur un squelette

partiel car nous souhaitons non seulement avoir cette information en tout point de la forme mais également disposer d'une information de longueur et d'orientation. Laissons pour l'instant de côté la question de calculer l'information de longueur et d'orientation le long des points du squelette par ouverture. L'autre enjeu est de propager l'information calculée sur les points du squelette par ouverture au reste de la forme binaire. Il semble naturel dans un premier temps d'assigner à un nouveau point la valeur du point du squelette le plus proche. Pour les pixels à égale distance d'au moins deux pixels du squelette nous pouvons leur assigner la valeur de largeur la plus faible. Cette opération de propagation revient simplement à calculer un squelette par zone d'influence géodésique (Lantuéjoul (1978)), noté **SKIZ géodésique** en utilisant comme marqueurs les points du squelette par ouverture (figure 4.12c) :

Définition 4.11 Soit $Y = \{Y_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ un ensemble formé de n composantes connexes compactes, toutes incluses dans le compact X . La **zone d'influence géodésique** de Y_i dans X se définit comme le lieu des points a de X qui sont géodésiquement plus proches de Y_i que de toute autre composante connexe de Y

$$ZI(Y_i \setminus X) = \{a \in X, \forall k \neq i, d_X(a, Y_i) \leq d_X(a, Y_k)\} \quad (4.16)$$

où la distance géodésique $d_X(a, Y)$ est la plus petite des distances géodésiques du point a à tous ceux de l'ensemble Y .

Le **SKIZ géodésique** est alors la frontière entre les différentes zones d'influence.

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

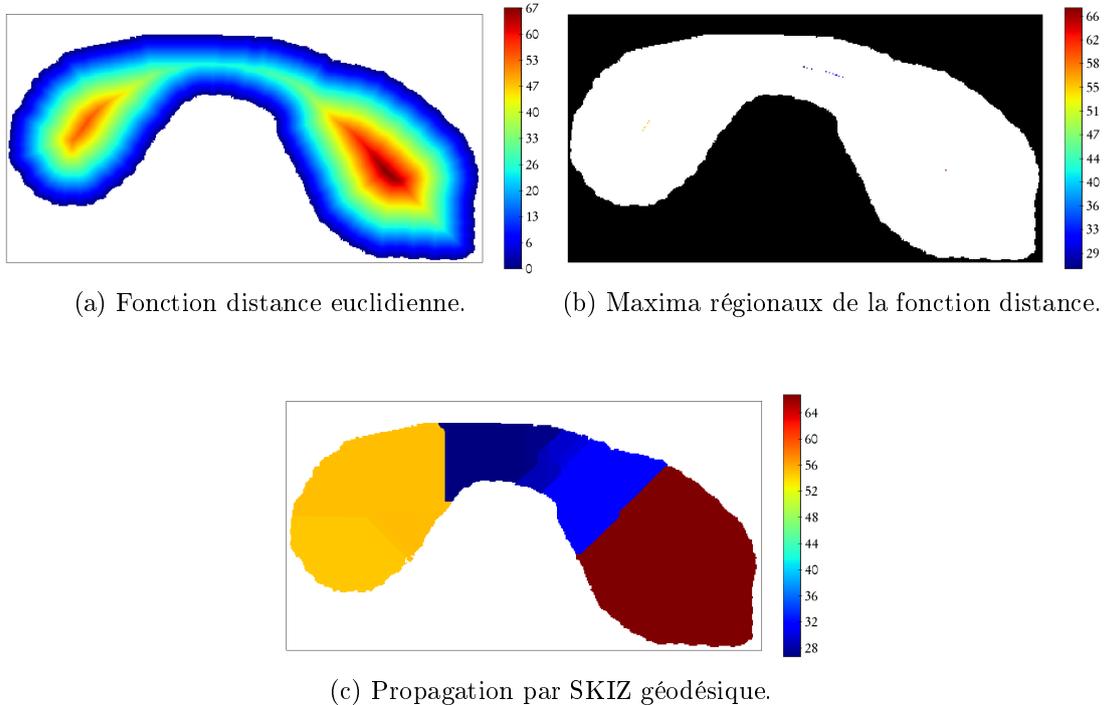


FIGURE 4.12: Simplification d'une forme binaire (a, b) puis propagation de l'information de la forme simplifiée à l'ensemble de la forme (c).

Ce raisonnement très simple ne nous a pas permis d'obtenir une méthode effective de détermination de la mesure locale d'une forme binaire. Par contre, nous avons pu établir une démarche permettant d'y arriver. Elle se décompose en trois grandes étapes :

1. **simplifier** la forme initiale (par exemple calculer son squelette) ;
2. **calculer** les caractéristiques de tailles et d'orientation sur la forme simplifiée ;
3. **propager** ces mesures locales au reste de la forme binaire.

Nous allons maintenant revoir en détail ces différents étapes et proposer une méthode de calcul des mesures locales.

4.3.2 Présentation de la méthode

4.3.2.1 Calcul du squelette et décomposition

Le squelette par ouverture proposé en introduction a le désavantage de ne pas être homotopique ce qui entraîne le non respect des propriétés géométriques de la forme étudiée. C'est pourquoi nous nous intéressons ici uniquement à des squelettes homotopiques. *A priori*, n'importe quel squelette homotopique pourrait être utilisé dans notre méthode. Ici, nous avons fait le choix d'utiliser le squelette de Zhang (Zhang (1984)) car il se calcule rapidement et il produit peu de barbules. La figure 4.13 montre un calcul du squelette de Zhang d'une forme.

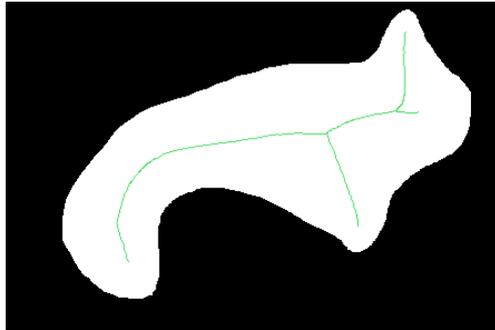


FIGURE 4.13: Calcul du squelette de Zhang (vert) de la forme binaire.

Le squelette obtenu est composé de plusieurs branches. Chacune d'entre elles semble correspondre à la géométrie locale (taille, orientation) de la forme. Il semble donc naturel de distinguer (cette étape d'étiquetage est appelée une **labellisation**) les différentes branches du squelette pour calculer les mesures locales sur chacune des branches séparément. Cette séparation s'effectue au niveau des points multiples du squelette. Un point multiple étant situé au niveau des jonctions de plusieurs branches, il suffit de calculer le nombre de branches connectées à chaque pixel du squelette.

Il existe différentes manières de calculer le nombre de croisements¹ : le nombre de croisements de Rutovitz (Rutovitz (1966)), le nombre de croisements de Hilditch (Hilditch (1973)), le nombre de croisements de Yokoi (Yokoi *et al.* (1975)) ou bien encore le nombre de croisements adaptatif (Decencièrre & Bilodeau (2007)). Dans

1. il est couramment appelé **crossing number** dans la littérature.

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

le cadre de cette méthode, nous utilisons le nombre de croisements de Hilditch, noté N_H . Il consiste à déterminer le nombre de fois que l'on rencontre la séquence $\{0, 1\}$ (pixel noir, pixel blanc) lorsque l'on parcourt le voisinage 8-connexe du pixel dans l'ordre $(p_0, p_1, p_2, \dots, p_7, p_0)$ (formule 4.18). La figure 4.14 illustre les différentes valeurs possibles du nombre de croisements de Hilditch. Les pixels de jonction du squelette sont ceux qui ont un nombre de croisements supérieur ou égal à 3 (figure 4.15a).

$$N_H = \sum_{i=1}^4 b_i \quad (4.17)$$

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{2i-1} = 0 \text{ et } (x_{2i} = 0 \text{ ou } x_{2i+1} = 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.18)$$

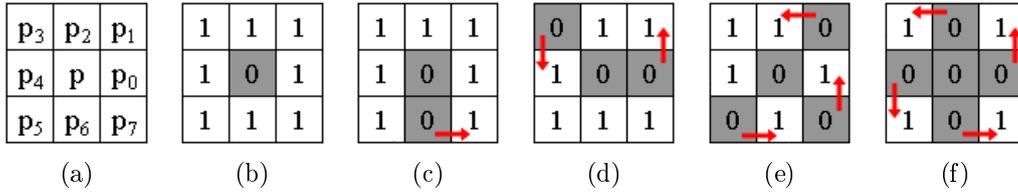


FIGURE 4.14: Parcours des voisins (a). Nombre de croisements égal à : 0 (b), 1 (c), 2 (d), 3 (e) et 4 (f).

La suppression des points multiples du squelette n'est cependant pas suffisante pour séparer complètement le squelette en branches distinctes. Une solution possible est d'utiliser une méthode de segmentation topologique (Malandain *et al.* (1993)). Nous avons finalement décidé d'utiliser une autre méthode qui est à la fois plus rapide, plus simple, et permet également de supprimer les barbules les plus courtes. Il suffit de retirer les points multiples et ses 8 voisins (figure 4.15b). Une fois les zones de jonction supprimées, il est possible de labelliser chacune des composantes connexes (figure 4.15c). Il ne reste plus, enfin, qu'à réassigner chaque pixel supprimé (les points multiples et son voisinage 8-connexe) à la branche labellisée la plus proche (figure 4.15d). Nous obtenons ainsi une décomposition du squelette en plusieurs composantes connexes (dites branches). Cette méthode de

décomposition du squelette avait déjà été utilisé sur des squelettes pour la compression d'images de textes anciens (Hassaine *et al.* (2007)).

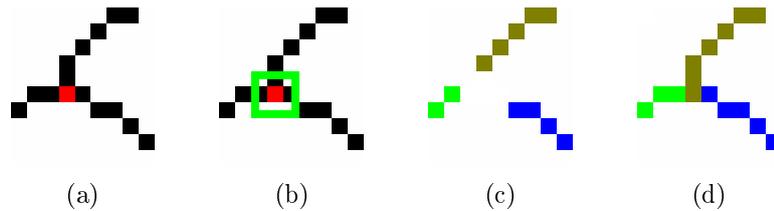


FIGURE 4.15: Les différentes étapes de décomposition du squelette. (a, b) détection et suppression d'un point multiple et des ses voisins. (c) labellisation des branches séparées. (d) assignation des points supprimés à la branche la plus proche.

À la lecture de cette partie de la méthode il pourrait paraître possible d'effectuer un raisonnement différent, consistant à calculer un squelette non homotopique, labelliser chacune des branches du squelette puis reconnecter les branches du squelette. Cette solution a cependant plusieurs inconvénients. D'une part, il existe également des points multiples sur un squelette non homotopique ce qui signifie qu'il aurait également été nécessaire de les supprimer. De plus, plusieurs points isolés peuvent apparaître sur un squelette non homotopique. Enfin, l'étape de reconnection d'un squelette non homotopique est généralement difficile.

4.3.2.2 Estimation de l'orientation, la largeur et la longueur locales

Une fois le squelette décomposé en branches, nous pouvons estimer l'orientation, la largeur et la longueur locales.

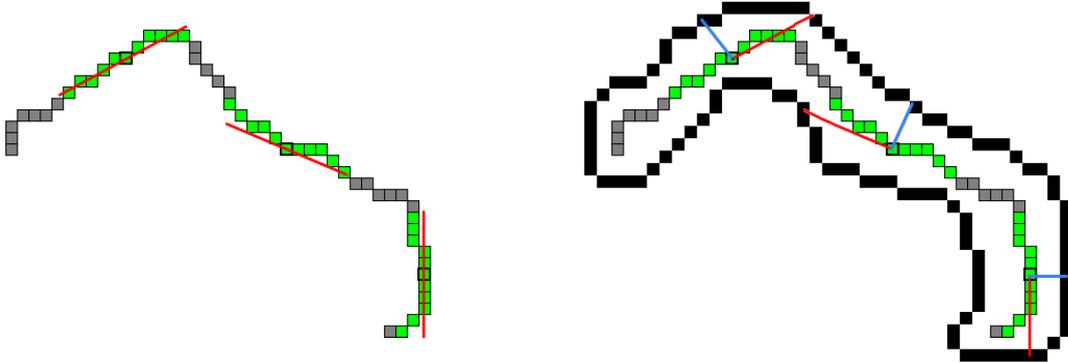
Le calcul de l'orientation s'effectue en estimant la tangente à chaque pixel des différentes branches. Il existe plusieurs méthodes permettant d'estimer une tangente locale. Lachaud *et al.* (2005) proposent une comparaison des avantages et inconvénients de chacune des méthodes existantes. Nous avons utilisé une méthode proche de celle utilisée par Matas *et al.* (1995).

Pour chaque pixel p d'une branche du squelette, nous considérons $2 \cdot N + 1$ voisins centrés en p avec N un nombre fixé. La régression linéaire de ces pixels permet

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

d'obtenir la tangente locale en p avec une bonne approximation (figure 4.16a), c'est-à-dire l'**orientation** locale. Expérimentalement, nous avons choisi une valeur de N égal à 5. Si le squelette a moins de $2 \cdot N + 1$ points, la tangente locale n'est alors pas définie.

La **largeur** d'un point du squelette, quant à elle, correspond à sa distance au point le plus proche du complémentaire de la forme. Enfin, la **longueur** correspond à la longueur du segment orienté suivant la tangente jusqu'au point le plus proche du complémentaire de la forme (figure 4.16b). La figure 4.17 propose un exemple de calcul de ces trois mesures locales.



(a) Estimation des tangentes locales aux pixels marqués en noir par régression linéaire.

(b) Représentation de la largeur par un segment bleu et la longueur par un segment rouge.

FIGURE 4.16: Principe de calcul des orientations (a), largeur et longueur (b) le long des points du squelette.

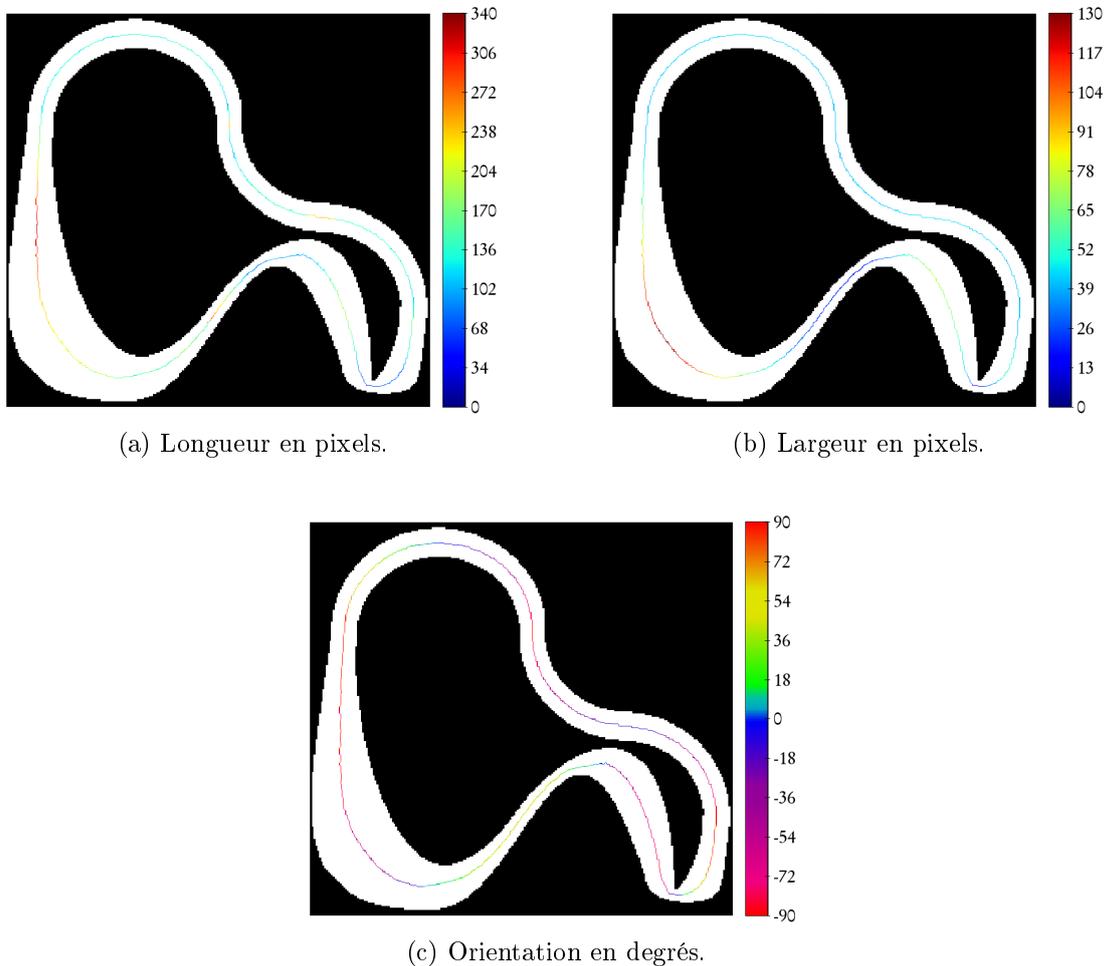


FIGURE 4.17: Exemple de calcul des trois paramètres sur tous les points du squelette de la forme.

4.3.2.3 Propagation des mesures locales à l'ensemble de la forme

Une fois que l'orientation, la largeur et la longueur ont été calculées pour tous les pixels du squelette, la dernière étape consiste à propager ces valeurs aux autres pixels de la forme. Comme nous l'avons vu en introduction, nous assignons à chaque pixel la valeur du pixel du squelette le plus proche en termes de distance géodésique. Le seul point délicat concerne les pixels qui sont équidistants d'au moins deux points du squelette.

Pour les tailles (longueur et largeur), la valeur attribuée sera la plus petite valeur

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

des différents pixels équidistants.

En ce qui concerne les orientations, la valeur attribuée sera la moyenne des différentes orientations. Il est cependant impossible de moyenner directement des orientations comme le montre l'exemple de la figure 4.18 : en prenant directement la moyenne d'une orientation à 90° avec une orientation à -70° par exemple, nous obtenons une orientation de 10° ce qui est complètement incohérent. Il est nécessaire de moyenner les cosinus et sinus des différentes orientations. Nous suivons la méthode proposée par [Gumiaux *et al.* \(2003\)](#). Soient n orientations α dont les valeurs sont comprises -90 et 90° :

- multiplier les valeurs angulaires par 2 ;
- calculer le cosinus et le sinus de ces nouvelles valeurs ;
- moyenner séparément les cosinus et sinus, on obtient \cos_{int} et \sin_{int} ;
- calculer $\alpha_{int} = \arctan\left(\frac{\sin_{int}}{\cos_{int}}\right)$;
- calculer l'angle final : $\alpha_{final} = \frac{\alpha_{int}}{2}$.

La propagation des 3 paramètres calculés précédemment (figure 4.17) à l'ensemble de la forme est illustrée à la figure 4.19.

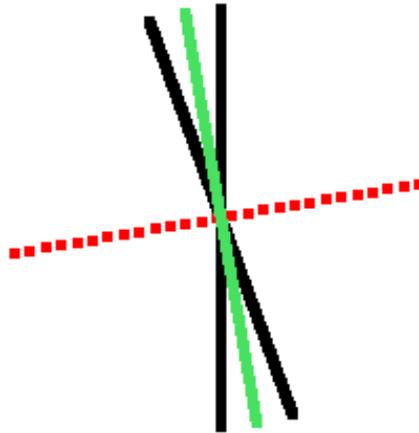


FIGURE 4.18: La moyenne directe des deux directions en noir (90 et -70°) donne 10° (trait en pointillé rouge) alors que la bonne orientation moyenne est de -80° (trait vert).

4.3 Méthode basée sur un squelette

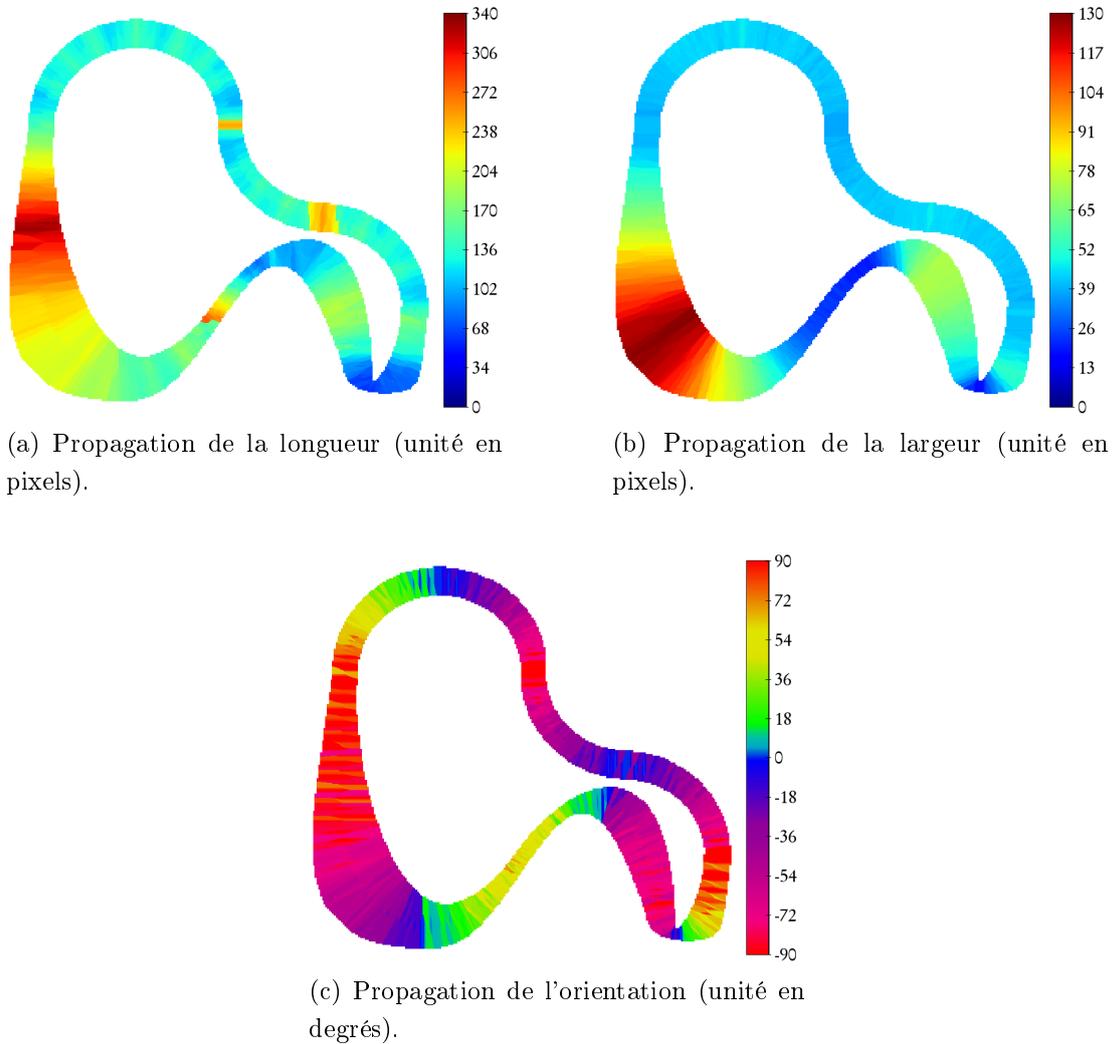


FIGURE 4.19: Exemple de propagation des trois paramètres sur l'ensemble de la forme.

Les résultats de mesures locales de largeur, longueur et orientation sont cohérents. Cependant, l'orientation locale n'est pas définie lorsque la forme étudiée s'approche trop d'une forme d'une type circulaire, son allongement est alors faible. Le calcul du facteur d'allongement géodésique (équation 4.4) permet de détecter ce type de formes. Elles seront approximées par un cercle : les largeurs et les longueurs locales de la forme seront égales.

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

4.3.3 Bilan

Basée sur une transformée en squelette, la méthode que nous venons de présenter permet d'assigner une largeur, une longueur et une orientation à une forme binaire. Elle est rapide et exacte : les paramètres de formes obtenus reproduisent la géométrie locale de la forme étudiée.

Nous allons maintenant présenter une seconde méthode complémentaire qui assigne des mesures locales de tailles maximales aux pixels situés au centre de la forme et minimales aux points du contour de la forme.

4.4 Méthode dite du lancer de rayons

4.4.1 Introduction

Nous avons constaté que la méthode basée sur le squelette assigne les mêmes longueurs et largeurs à un pixel de la forme qu'il soit au centre ou le long du contour de la forme grâce à l'étape de propagation. Un autre raisonnement voudrait, au contraire, que les dimensions soient maximales au centre de la forme et qu'elles diminuent lorsque l'on se rapproche du contour. *A priori*, ce second raisonnement n'est pas plus juste que le premier, il est simplement complémentaire. Nous allons maintenant définir une méthode permettant d'y arriver.

4.4.2 Présentation de la méthode

Au cours de la méthode précédente, nous avons défini la longueur comme la longueur du segment orienté suivant l'orientation locale jusqu'au point le plus proche du complémentaire de la forme. De même, la largeur a été définie comme la distance la plus courte d'un point du squelette au complémentaire de la forme, ce qui revient à calculer la longueur d'une droite orientée suivant la perpendiculaire à l'orientation locale. Si l'on cherche à généraliser cette démarche, il suffit de tracer régulièrement des segments, dits rayons, suivant différentes directions à l'intérieur de la forme jusqu'à atteindre le complémentaire de la forme (figure 4.20a). En d'autres termes, en chaque pixel p , nous associons une taille pour chaque

4.4 Méthode dite du lancer de rayons

orientation tracée. La longueur et la largeur locales devraient respectivement correspondre au plus long et au plus court rayons avec une bonne approximation. Si l'on généralise les définitions de longueurs et largeurs locales précédentes, on peut définir la longueur d'une forme suivant une certaine direction :

Définition 4.12 *la longueur $t_\theta(p)$ d'un ensemble X en p suivant la direction θ est égale à la longueur du plus court segment euclidien d'orientation θ dont le pixel p et un point du complémentaire de X forment les extrémités.*

Cependant, si l'on considère deux rayons de sens opposés de la figure 4.20a (par exemple 90° et -90°), ils ont bien la même direction mais leur longueur n'est pas identique. Se référant à la définition 4.12, il faut donc conserver la plus courte des deux longueurs (figure 4.20b).

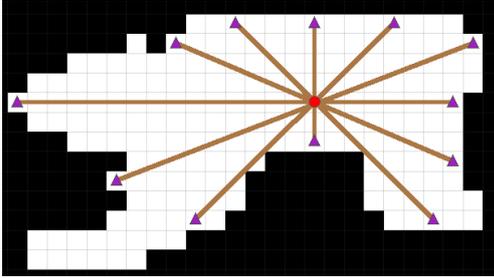
Traçant, deux par deux, $2 \cdot n$ rayons suivant des sens opposés, en un pixel p , nous obtenons, ainsi, n longueurs. Souhaitant obtenir une largeur, une longueur et une orientation, il est nécessaire de combiner ces différentes longueurs.

En reliant les $2 \cdot n$ extrémités obtenues, nous obtenons une forme binaire symétrique par construction de centre de gravité p (figure 4.20c).

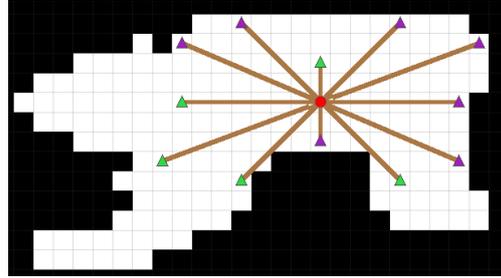
Or, nous avons souligné lors de l'étude des moments (partie 4.2.5), qu'il est possible d'approximer une forme binaire par une ellipse à partir de ses moments d'ordre 2. La longueur, la largeur et l'orientation locales correspondent donc respectivement au grand axe, petit axe et orientation de l'ellipse (figure 4.20d). Les moments de la forme se calculent rapidement à partir du parcours de son contour (Yang & Albrechtsen (1996)).

En appliquant ce raisonnement en tous les points de la forme, nous obtenons bien des dimensions maximales au centre de la forme et minimales aux contours de la forme (figure 4.21).

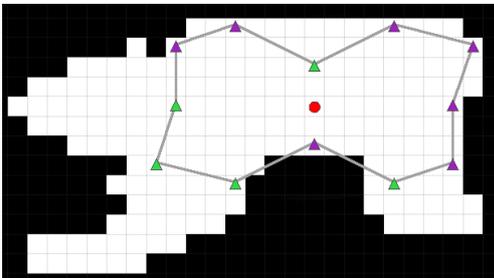
4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES



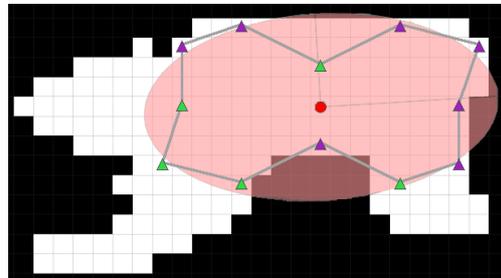
(a) Tracé des rayons deux par deux.



(b) Détection des longueurs minimales pour chaque direction.



(c) Création d'une forme en reliant les extrémités.



(d) Ajustement d'une ellipse sur la forme précédente.

FIGURE 4.20: Les différentes étapes de la méthode. On commence par tracer des rayons deux par deux de sens opposés dans la forme (a) puis on conserve la longueur minimale (b). On relie les extrémités obtenues (c) puis on ajuste une ellipse ayant les mêmes moments géométriques (d).

Cette nouvelle méthode introduit un paramètre : le nombre n de directions de tracé. Un nombre trop faible empêchera de reproduire la géométrie locale de la forme de même qu'un nombre trop important sera inutile à cause de la limitation imposée par la résolution angulaire : travaillant sur une trame discrète, des droites tracées suivant des directions trop proches auront tendance à se chevaucher à proximité de l'origine du tracé. Dans la pratique le choix de 8 directions est suffisamment grand pour bien caractériser la géométrie locale et suffisamment faible pour s'affranchir des problèmes de résolution angulaire.

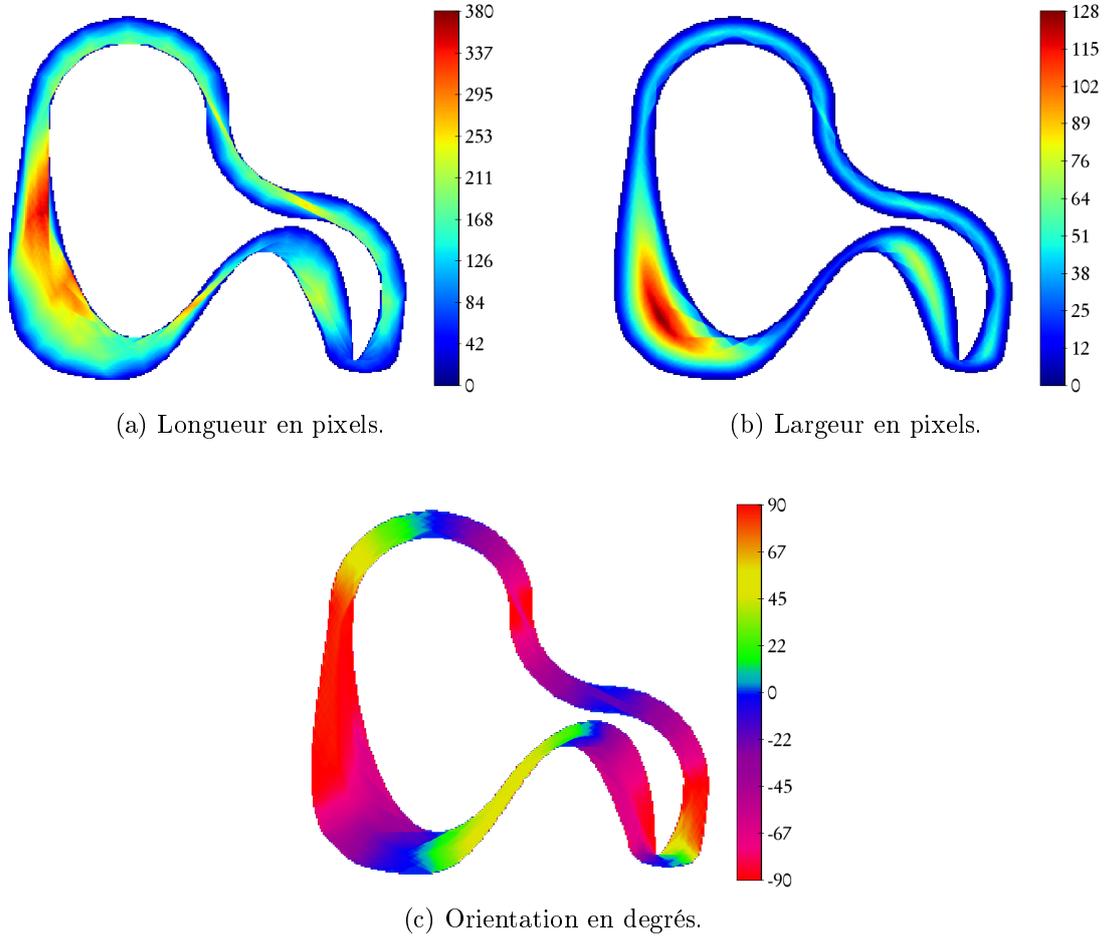


FIGURE 4.21: Le calcul des trois paramètres sur la même forme que la figure 4.19.

4.4.3 Estimation de l'erreur d'ajustement

Cette méthode utilisant un ajustement d'ellipses sur un nuage de points (les extrémités des rayons), il est possible d'estimer simplement une erreur de calcul. Cette erreur dite d'ajustement correspond à la distance euclidienne entre chaque extrémité X_i d'un rayon et l'ellipse estimée E . L'erreur totale, e_E est la somme de l'erreur pour chacune des extrémités :

$$e_E = \sum_{i=1}^{2 \cdot n} d(X_i, E) = \sum_{i=1}^{2 \cdot n} \inf\{d(X_i, I), I \in E\} \quad (4.19)$$

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

Le calcul de la distance euclidienne d'un point au contour d'une ellipse est assez difficile et coûteux en temps de calcul car il nécessite de résoudre une équation de degré 4 puis de choisir la plus petite solution positive. On préfère donc, le plus souvent, utiliser une valeur approchée.

La distance approchée la plus simple à calculer est appelée la distance algébrique. Elle correspond à la valeur de l'équation cartésienne de l'ellipse au point X_i . Elle souffre néanmoins d'un biais lié à la courbure : elle surestime les distances lorsque le point se situe près d'une section de forte courbure de l'ellipse, c'est-à-dire près d'une extrémité de l'ellipse. Rosin (1996) propose une comparaison des différentes méthodes permettant d'approcher la distance euclidienne entre un point et une ellipse. Celle qui obtient les meilleurs résultats consiste à approximer la normale de l'ellipse en X_i par la bissectrice entre les foyers de l'ellipse et X_i (figure 4.22). Nous utilisons cette dernière méthode pour calculer l'erreur d'ajustement.

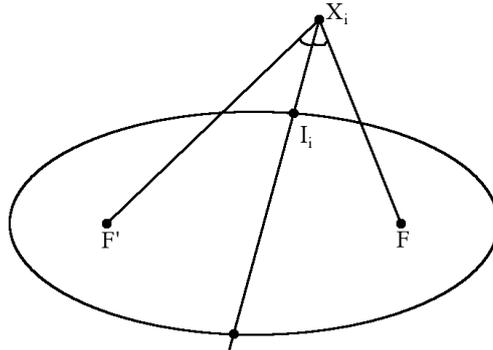


FIGURE 4.22: F et F' sont les foyers de l'ellipse. La distance correspond à l'intersection de la bissectrice avec l'ellipse : $d(X_i, E) \approx \overline{X_i I_i}$. La figure est reprise de Rosin (1996).

Nous obtenons donc en chaque point de la forme une nouvelle information qui permet de vérifier la qualité de la mesure locale. Il paraît ensuite intéressant de pouvoir corriger l'ajustement d'ellipse : recalculer l'ellipse avec de nouvelles extrémités de rayons lorsque l'erreur d'ajustement est plus importante qu'un certain seuil. Ce constat fort simple peut néanmoins s'avérer très difficile à mettre en pratique. Considérons l'exemple d'une croix de mêmes longueurs horizontale et verticale. Le calcul de l'erreur d'ajustement (figure 4.23) montre que les zones

4.4 Méthode dite du lancer de rayons

d'erreur d'ajustement maximales correspondent à la partie centrale de la forme : cette zone marque la transition entre l'orientation horizontale des bras horizontaux et l'orientation verticale des bras verticaux. L'ellipse au centre de la forme a ainsi une orientation de 45° et des axes trop grande (figure 4.24a).

Une première manière de corriger cette erreur consiste, pour chaque pixel de cette zone centrale, d'effectuer un nouvel ajustement en ne prenant pas en compte les extrémités qui avaient une erreur trop importante lors du premier ajustement. Cette nouvelle méthode apporte de nouveaux résultats plus cohérents au centre (figure 4.24b). Le grand axe de l'ellipse reste tout de même trop grand. Idéalement, nous souhaiterions obtenir un cercle : une forme qui n'a pas de direction privilégiée.

Il est possible de corriger directement, pour tous les pixels de la forme, le grand axe de l'ellipse par rapport à l'erreur maximale rencontrée sur la forme (e_{max}), le grand axe a et le petit axe b de l'ellipse E à corriger :

$$a' = \left(1 - \frac{e_E}{e_{max}}\right) \cdot a + \frac{e_E}{e_{max}} \cdot b \quad (4.20)$$

Ainsi, si l'erreur d'ajustement est nulle, le grand axe est inchangé et plus l'erreur d'ajustement devient maximale plus la valeur de grand axe s'approche de celle du petit axe : l'ellipse se rapproche de plus en plus d'une forme circulaire. L'application directe de cette méthode au centre de la croix n'apporte que peu de modifications (figure 4.24c) car la première ellipse calculée avait déjà une forme proche d'un cercle. Cependant, nous pouvons combiner les deux approches : nous commençons par supprimer les extrémités ayant une erreur d'ajustement trop grande puis nous calculons le nouveau grand axe de l'ellipse. Cette dernière approche donne le résultat le plus cohérent : l'ellipse obtenue reste confinée à l'intérieur de la croix et sa forme est proche d'un cercle, nous n'avons donc plus d'orientation privilégiée au centre de la croix (figure 4.24d).

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

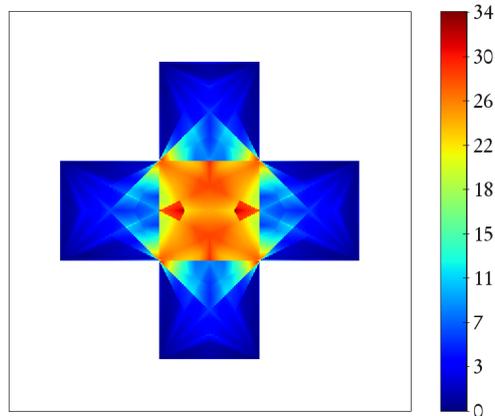


FIGURE 4.23: Calcul de l'erreur d'ajustement de l'ellipse pour tous les pixels de la forme. L'erreur est maximale à l'intersection des bras horizontaux et verticaux.

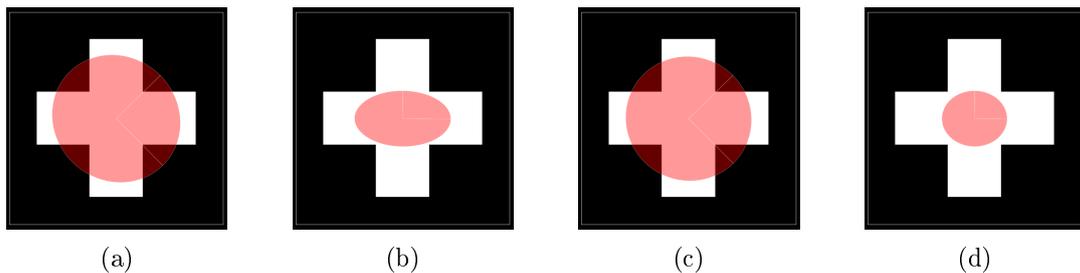


FIGURE 4.24: Comparaison des différentes méthodes de correction des mesures locales au centre de la croix.

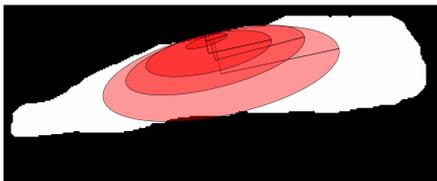
D'une manière générale, la correction des mesures locales est assez difficile. Il n'existe *a priori* pas de méthode générale valable pour toutes les formes. Nous aurions, de plus, pu tenter d'autres méthodes de correction. Par exemple, une solution pourrait être de tenter de reproduire la géométrie du contour de l'ellipse : parcourant le contour en partant du grand axe, on observe que la distance au centre de l'ellipse diminue jusqu'à devenir minimale au niveau du petit axe de l'ellipse puis elle augmente à nouveau, etc (la suite se déduisant par symétrie). La correction consisterait à mettre de côté les extrémités qui ne respectent pas ce comportement : après avoir estimé la distance entre chacune des extrémités et le centre des rayons, il suffirait de supprimer les extrémités qui vont à l'encontre

du comportement attendu puis d'effectuer un nouvel ajustement d'ellipse avec les extrémités conservées.

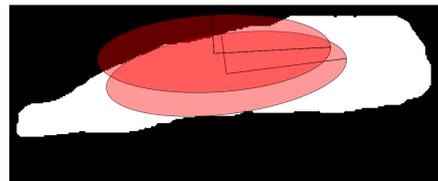
Cette étude de l'erreur d'ajustement nous a permis de mettre en valeur un point important : il ne devrait pas exister d'orientation privilégiée au niveau des zones de croisement : les ellipses devraient être des cercles.

4.5 Comparaison des deux méthodes

Au cours de la présentation des deux méthodes, nous avons souligné qu'elles étaient complémentaires. Cette différence est particulièrement visible lorsque l'on représente les ellipses correspondantes aux mesures locales pour chacune des méthodes (figure 4.25) ; en utilisant la méthode basé sur le squelette nous obtenons des régions homogènes : les ellipses ont donc les mêmes dimensions que l'on soit au centre de la forme ou proche du contour. Au contraire, avec la méthode des rayons, les ellipses sont maximales au centre de la forme et deviennent de plus en plus petites lorsque l'on s'approche du contour de la forme. Excepté cette différence d'approche, les résultats peuvent être exploités de la même manière.



(a)



(b)

FIGURE 4.25: Différence de comportement des M-Paramètres des deux méthodes au bord d'une forme.

4.6 Passage des mesures locales aux M-Paramètres

Nous avons vu précédemment que la M-GS consiste à étendre localement le traitement local du calcul de krigeage ou de simulation en adaptant localement

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

les paramètres variographiques. Du point de vue de la géostatistique, le passage de la géostatistique stationnaire à la M-GS revient à passer de paramètres fixés globalement à des paramètres variables en chaque point cible.

Les deux méthodes précédemment définies permettent d'associer à une forme binaire deux paramètres de longueur et un paramètre d'orientation. Nous avons déjà souligné le lien entre dimensions, orientations de structures et variogrammes. En utilisant directement ce lien, nous pouvons conclure que les tailles (largeur et longueur) correspondent directement aux tailles des structures mises en valeur par le variogramme et l'orientation calculée correspond à des directions d'anisotropies. En d'autres termes, les portées variographiques et les directions d'anisotropies correspondent aux diamètres et aux orientations des ellipses calculées : les ellipses calculées sont des ellipses de corrélation.

Enfin, les résultats des calculs de mesures de longueurs et de largeurs étant donnés en pixels, il est nécessaire de prendre en compte la résolution de la grille pour les traduire en M-Paramètres. De même, si les résolutions horizontales et verticales d'une grille sont différentes, il faut les prendre en compte dans l'orientation obtenue. Un dernier point particulier concerne les pixels où l'orientation locale n'est pas définie : les zones de croisement de plusieurs orientations. Dans ce cas, nous assignons une longueur et une largeur égales ainsi qu'une valeur d'orientation quelconque comme 0 par exemple : elle n'influera pas sur le calcul.

4.7 Exemple d'application

Nous aurons l'occasion au cours des chapitres 6 et 9 d'effectuer des études géostatistiques complètes et de comparer les différences entre les différentes approches. Cet exemple a simplement pour but de montrer comment nos méthodes peuvent s'utiliser directement.

La figure 4.26 correspond à une coupe d'un cube sismique 3D. Ces images sont couramment employées en géophysique pour analyser les strates géologiques. Localement, des orientations nettes semblent se dégager. Ainsi, en déterminant automatiquement ces orientations, nous aurons réussi à caractériser cette image.

Dans un premier temps, nous seuillons les données d'entrée au niveau de la moyenne des données pour nous ramener à une image binaire. Ensuite, nous

4.7 Exemple d'application

utilisons la méthode des rayons sur l'image binaire obtenue ainsi que sur son complémentaire afin d'obtenir une mesure locale pour tous les pixels de l'image.

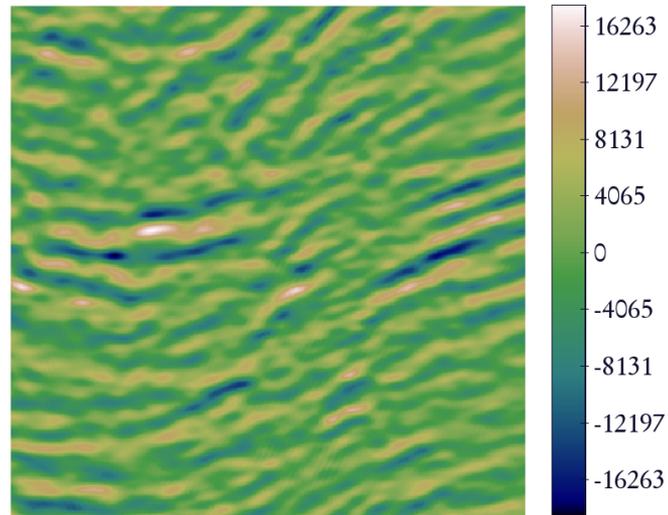


FIGURE 4.26: Coupe 2D d'un cube sismique.

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

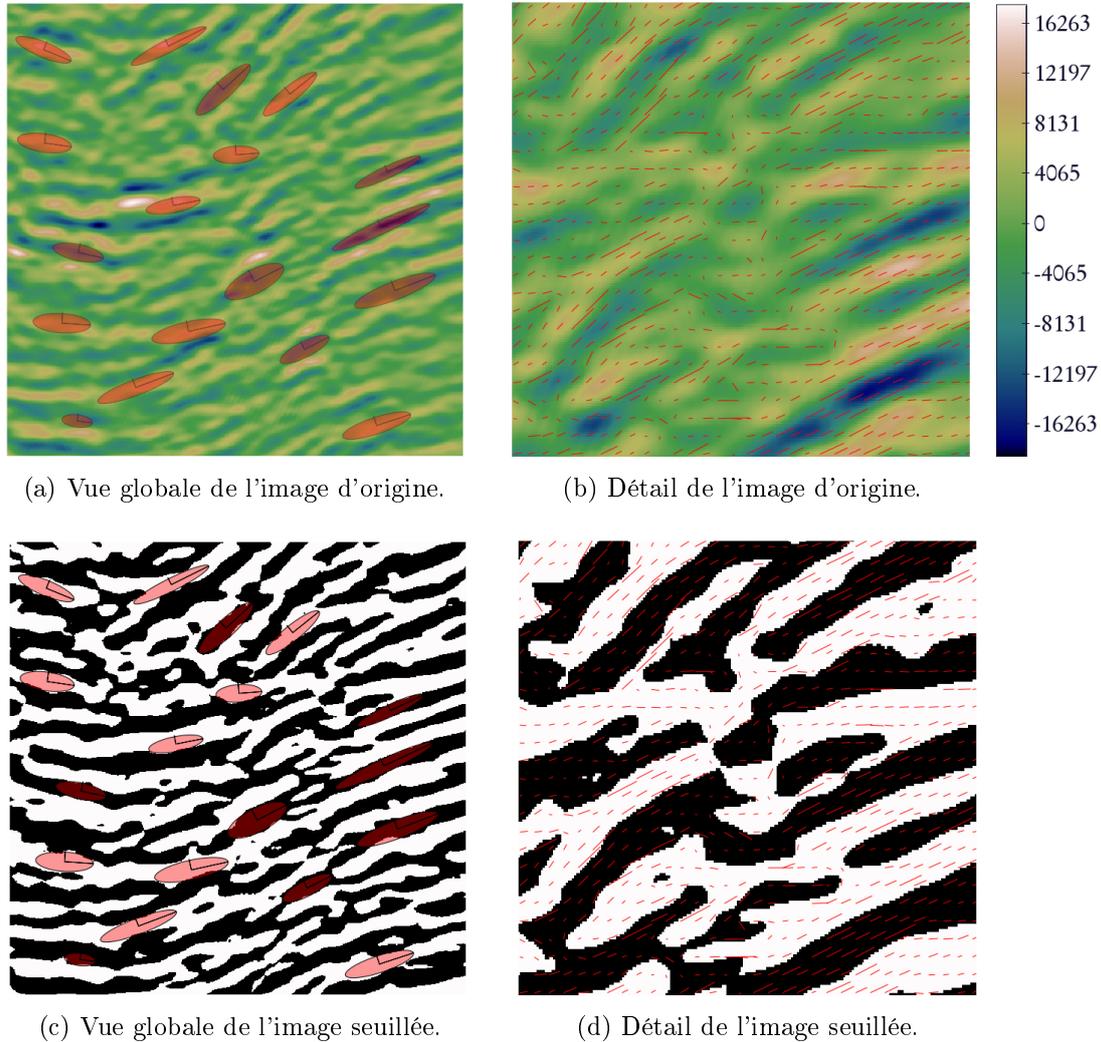


FIGURE 4.27: Calcul de M-Paramètres sur une coupe de données sismiques. Représentation des M-Paramètres sous la forme d'ellipses (colonne de gauche) et de vecteurs (colonne de droite).

Le résultat obtenu est intéressant : nous arrivons à reproduire les orientations perçues sur l'image d'origine. Cependant, le choix de seuiller l'image d'entrée au niveau de la moyenne des données est très hasardeux. Certes, il permet dans ce cas d'obtenir des résultats cohérents et intéressants, mais rien ne permet d'affirmer que ce choix pourra être reconduit sur une ou plusieurs autres images. Il est

donc nécessaire de développer de nouvelles méthodes qui puissent traiter objectivement ce type d'images sans passer par une étape préalable de seuillage ou de segmentation. Ce propos sera l'objet du prochain chapitre de ce manuscrit.

4.8 Conclusion

Ce chapitre a permis de développer deux nouvelles méthodes permettant d'associer des mesures de taille et d'orientation locales à chaque pixel d'une forme. Ces mesures se traduisent directement en M-Paramètres et peuvent donc être utilisées pour effectuer des études géostatistiques. Nous aurons l'occasion par la suite de les utiliser, notamment aux chapitres 6 et 9, pour répondre à des problématiques qu'il est impossible de traiter complètement avec les approches de la géostatistique stationnaire.

Nous allons maintenant tenter de généraliser notre approche pour la caractérisation de formes en niveaux de gris.

4. CARACTÉRISATION DE FORMES BINAIRES

Chapitre 5

Caractérisation de formes en niveaux de gris

« Le zinc du canal ouvrait juste avant le petit jour à cause des bateliers. L'écluse commence à pivoter lentement sur la fin de la nuit. Et puis c'est tout le paysage qui se ranime et se met à travailler. Les berges se séparent du fleuve tout doucement, elles se lèvent, se relèvent des deux côtés de l'eau. Le boulot émerge de l'ombre. On recommence à tout voir, tout simple, tout dur. Les treuils ici, les palissades aux chantiers là-bas et loin dessus la route voici que reviennent de plus loin encore les hommes. Ils s'infiltrèrent dans le jour sale par petits paquets transis. Ils se mettent du jour plein la figure pour commencer en passant devant l'aurore. Ils vont plus loin. On ne voit bien d'eux que leurs figures pâles et simples ; le reste est encore à la nuit. »

Voyage au bout de la nuit

L. F. Céline, 1932.

5.1 Introduction

Le passage d'opérateurs binaires à des opérateurs en niveaux de gris est généralement considéré comme une étape difficile. Historiquement, les opérateurs de morphologie mathématique ont d'abord été développés dans un contexte binaire

5. CARACTÉRISATION DE FORMES EN NIVEAUX DE GRIS

(cadre ensembliste) puis étendu à des images en niveaux de gris (cadre fonctionnel). À ce titre, l'un des exemples les plus connus est l'opérateur de ligne de partage des eaux qui est simplement un SKIZ géodésique appliqué seuil par seuil. Certains opérateurs simples, vus au chapitre 4, comme le facteur d'allongement géodésique ou la surface d'une forme n'ont pas d'équivalent en niveaux de gris. De même, d'autres opérateurs tels que la transformée en squelette perdent une partie de leur côté intuitif lorsqu'on les étudie en niveaux de gris.

Une manière simple de résoudre ces différents problèmes est de se ramener à une image binaire en segmentant l'image en niveaux de gris étudiée. Cette transformation s'accompagne malheureusement d'une perte d'information. On peut dès lors se demander s'il n'est pas possible de travailler directement sur des images en niveaux de gris.

Idéalement, nous souhaiterions pouvoir obtenir une généralisation directe des méthodes précédentes, c'est-à-dire qu'une nouvelle méthode en niveaux de gris appliquée sur une image binaire obtienne le même résultat que l'opérateur binaire équivalent. Au cours du chapitre 4, nous avons développé deux méthodes de caractérisation locales de formes binaires qui étaient liées aux notions de distance, de simplification de forme (comme la squelettisation), de caractérisation de formes d'épaisseur unitaire (comme la tangente d'une courbe) et d'extraction de points caractéristiques d'une forme (comme le centre et les extrémités géodésiques d'une forme ou les points multiples d'un squelette).

Nous nous proposons dans un premier temps de revoir différents opérateurs en niveaux de gris basés sur certaines de ces notions puis nous étudierons dans un second temps, comment il est possible de les combiner avec la méthode du lancer de rayons pour généraliser notre approche binaire en niveaux de gris. Enfin, nous proposerons un algorithme efficace de calcul de cette nouvelle méthode.

Tout au long du chapitre, nous parlons indifféremment d'images en niveaux de gris ou d'images numériques. Comme nous l'avions présenté à la section 2.2.2, ces images peuvent prendre un ensemble de valeurs beaucoup plus important que les images binaires. Par exemple, une image 16 bits correspond à une image de 65536 seuils de niveaux de gris.

5.2 Méthodes de caractérisation de formes en niveaux de gris

5.2.1 Transformation résiduelle

La notion de **transformation résiduelle** a été proposée par S. Beucher ([Beucher \(2004\)](#)).

Définition 5.1 *Un opérateur résiduel sur un ensemble X est défini à partir de deux familles de transformations ψ_i et ζ_i dépendant d'un paramètre $i \in I$ et appelées primitives avec $\psi_i \leq \zeta_i$. On appelle résidu de taille i la différence ensembliste de ces deux primitives :*

$$r_i = \psi_i / \zeta_i \quad (5.1)$$

La transformation résiduelle θ correspond alors à l'union des résidus :

$$\theta = \bigcup_{i \in I} \psi_i / \zeta_i \quad (5.2)$$

La notion de transformation résiduelle est très générale et permet de construire de nombreux opérateurs. Ainsi, le squelette par ouverture introduit à la section [4.2.6](#) est une transformation résiduelle binaire, où ψ_i une érosion ϵ_i et ζ_i est l'ouverture élémentaire γ de l'érodé de taille i :

$$\begin{aligned} \psi_i &= \epsilon_i \\ \zeta_i &= \gamma(\epsilon_i) \end{aligned}$$

À la transformée résiduelle présentée précédemment, on associe généralement une seconde fonction q appelée **fonction résiduelle** (ou fonction associée) qui correspond en chaque point de θ à l'indice i du résidu r_i . Dans le cas binaire, si les primitives sont correctement choisies, à chaque point x correspond un résidu unique r_i :

$$q(x) = i + 1. \quad (5.3)$$

Par exemple, dans le cas du squelette par ouverture, l'union des résidus correspond aux pixels du squelette et la fonction associée correspond à la taille des boules

5. CARACTÉRISATION DE FORMES EN NIVEAUX DE GRIS

des pixels du squelette.

De même, la transformée en distance discrète peut être vue comme la fonction résiduelle associée à une opération résiduelle en choisissant comme primitives des érosions de tailles successives :

$$\begin{aligned}\psi_i &= \epsilon_i \\ \zeta_i &= \epsilon_{i+1}.\end{aligned}$$

Cependant, cette définition n'est jamais utilisée en pratique car elle est beaucoup trop longue en temps de calcul.

La généralisation en niveaux de gris des transformations résiduelles n'est cependant pas évidente. L'un des problèmes théoriques est de définir un équivalent numérique de la soustraction ensembliste. La définition retenue consiste à considérer le supremum de la différence des primitives :

$$r_i = |\psi_i - \zeta_i| \tag{5.4}$$

$$\theta_i = \sup_{i \in I} |\psi_i - \zeta_i|. \tag{5.5}$$

La fonction associée q permet de déterminer en chaque pixel x , le résidu maximal associé :

$$q(x) = \sup_{i \in I} r(x)_i + 1 \text{ avec } r_i(x) \text{ maximal et positif.} \tag{5.6}$$

En appliquant cette définition en niveaux de gris des transformations résiduelles, et en choisissant $\psi_i = \epsilon_i$ et $\zeta_i = \gamma(\epsilon_i)$, il est possible de construire l'équivalent en niveaux de gris du squelette par ouverture. Un exemple de calcul du **squelette par ouverture en niveaux de gris** est illustré à la figure 5.1.

5.2 Méthodes de caractérisation de formes en niveaux de gris

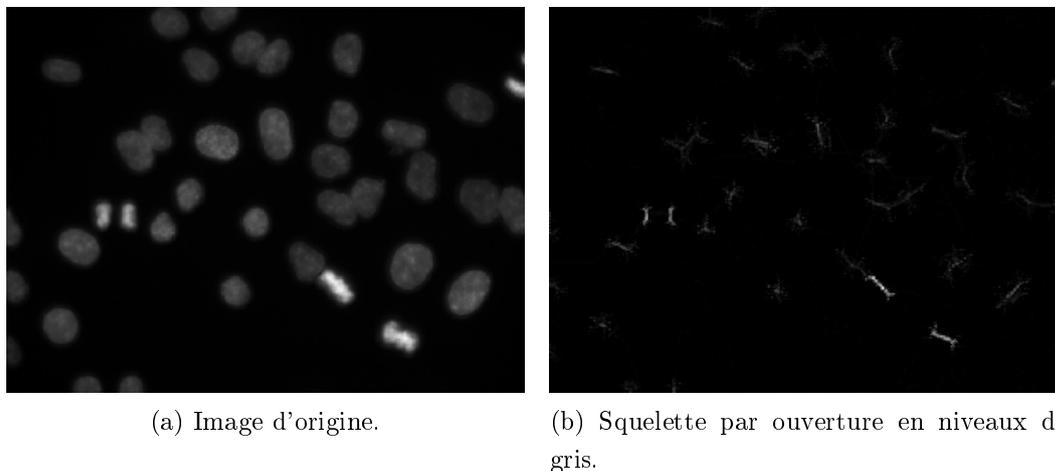


FIGURE 5.1: Exemple de calcul du squelette par ouverture en niveaux de gris. Le résultat du squelette calculé a été normalisé pour que l'image soit bien visible.

L'inconvénient de ce nouveau squelette est que, contrairement au cas binaire, il est impossible de reconstruire entièrement une forme à partir de sa transformée en squelette et de la fonction associée. De plus, le résultat obtenu avec l'exemple précédent est assez trompeur. En effet, l'image considérée se rapproche d'une image binaire (image biphasée), il n'est donc pas étonnant d'obtenir un résultat qui semble proche du squelette par ouverture binaire.

Nous avons vu plus tôt, dans le cas binaire, qu'en choisissant comme primitives deux érosions de tailles successives, la fonction associée correspondait à la transformée en distance. L'équivalent en niveaux de gris de cette fonction résiduelle est appelée la **quasi-distance** (Beucher (2004)). Cette fonction revient à calculer une transformée en distance des zones relativement plates d'une image. Cependant, si l'on applique directement cette opération, on observe l'apparition d'irrégularités (figure 5.2c) liées au chevauchement des résidus entre deux tailles successives. Ainsi, la quasi-distance ne respecte pas la propriété 1-lipschitzienne d'une distance qui correspond à l'inégalité suivante :

$$|d(x) - d(y)| \leq \|x - y\|. \quad (5.7)$$

5. CARACTÉRISATION DE FORMES EN NIVEAUX DE GRIS

Beucher (2004) propose une procédure permettant de corriger la quasi-distance pour qu'elle respecte la propriété 1-lipschitzienne. On parle alors de quasi-distance régularisée. Un algorithme efficace de calcul de la quasi-distance est proposé par **Enficiaud (2007)**. Le résidu associé à la quasi-distance est généralement considéré comme peu exploitable. Il est donc peu utilisé en pratique. La figure 5.2 illustre un calcul de la quasi-distance et de sa régularisée.



FIGURE 5.2: Exemple de calcul de la quasi-distance.

5.2.2 Squelettes en niveaux de gris

La littérature traitant de la squelettisation en niveaux de gris est beaucoup moins importante que celle du squelette binaire. En effet, en niveaux de gris, la

5. CARACTÉRISATION DE FORMES EN NIVEAUX DE GRIS

transformée en squelette perd une partie de son côté intuitif, ce qui peut la rendre moins attrayante. Tout comme dans le cas binaire, le principe de la transformée est de conserver un nombre minimal de pixels qui préservent la topologie de la forme. De plus, la notion d'homotopie peut se généraliser de la manière suivante : une transformée en niveaux de gris est dite homotope si elle est homotope pour toutes les images binaires obtenues par seuillage.

L'un des premiers algorithmes d'amincissement d'images en niveaux de gris a été proposé par [Dyer & Rosenfeld \(1979\)](#). Il repose sur la notion de pixels connexes : deux pixels sont dits connexes s'il existe un chemin les reliant tel qu'aucun des points formant ce chemin n'ait un niveau de gris plus élevé que les deux extrémités du chemin. En utilisant cette définition et en travaillant directement en niveaux de gris, ils construisent un amincissement en changeant la valeur de chaque pixel au minimum de la valeur de ses voisins tout en conservant la connexité. Ceci leur permet de supprimer des points jusqu'à l'obtention d'un squelette.

[Serra \(1982\)](#) propose une définition des squelettes en niveaux de gris. L'amincissement d'une image en niveaux de gris est réalisé en appliquant des opérations binaires au résultat de seuillage de l'image au niveau suivant. On parlera d'amincissement inférieur ou supérieur suivant que l'on effectue les différents seuillages en partant des valeurs les plus basses ou les plus élevées.

D'autres méthodes de calcul de squelette par suppression successive de points, telle que celle proposée par [Arcelli & Ramella \(1995\)](#), passent par une opération implicite de segmentation en travaillant sur tous les seuils de l'image en niveaux de gris. Le principe général consiste à ne conserver que les points les plus significatifs d'une image en supprimant les points simples, c'est-à-dire les points dont l'abaissement du niveau de gris ne modifie pas la topologie de l'image initiale. Ainsi, pour chaque seuil de l'image en niveaux de gris, on abaisse le niveau de gris d'un point simple détecté à la valeur la plus faible de ses voisins et on le supprime de la liste des points d'intérêt. Ces points simples sont détectés en inspectant leur voisinage. Une fois tous les seuils inspectés, les points conservés constituent le squelette de l'image.

Pour une lecture plus complète sur les squelettes en niveaux de gris, on pourra se référer à [Lohou \(2001\)](#), [Dokládál \(2000\)](#) et [Couprie *et al.* \(2001\)](#).

5.2.3 Extrema et dynamique

Une représentation usuelle d'une image numérique en traitement d'images consiste à la considérer comme un relief topographique. Les zones les plus sombres forment les vallées et les plus claires constituent les pics du relief. De cette description, certaines régions particulières se démarquent : les sommets des pics qui correspondent aux maxima régionaux et les fonds des vallées qui correspondent aux minima régionaux. Nous allons maintenant voir comment définir mathématiquement ces deux notions de **maxima régionaux** et de **minima régionaux**. Les définitions suivantes sont reprises de [Vachier \(1995\)](#) et certaines figures reprennent ou s'inspirent de celles présentées dans ce même manuscrit.

Définition 5.2 *Le plateau d'une fonction I d'un domaine $G \subset \mathbb{Z}^n$ à valeurs dans E au point x est la plus large composante connexe de I contenant x et d'altitude constante égale à $f(x)$.*

On distingue trois types de plateaux : les maxima régionaux, les minima régionaux et les plateaux non-extremaux (figure 5.3).

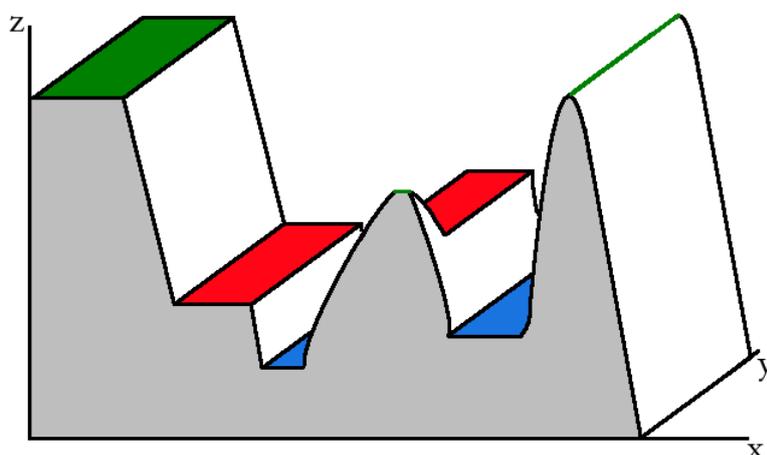


FIGURE 5.3: Extrema d'une image. Les régions en bleu correspondent aux minima régionaux de l'image, celles en rouge aux plateaux non-extremaux et les régions en vert aux maxima régionaux.

Définition 5.3 *Un maximum (respectivement un minimum) régional d'une image I est un plateau sans voisin plus haut (respectivement sans voisin plus bas).*

5. CARACTÉRISATION DE FORMES EN NIVEAUX DE GRIS

Dans le cas binaire, la notion de structure est parfaitement définie et intuitive. Ce n'est plus le cas pour des images en niveaux de gris. Les extrema sont un outil permettant de généraliser cette notion de structure dans le cas numérique. En effet, les extrema régionaux sont des marqueurs des structures d'une image. Cependant, l'un des principaux défauts des extrema est qu'ils sont très sensibles au bruit présent sur une image. En effet, le bruit peut être vu comme des structures de petites dimensions qui augmentent fortement le nombre d'extrema présents sur une image. Ainsi, les extrema marquent des structures de l'image qui correspondent à du bruit et qu'il faudrait ne pas considérer. Pour résoudre ce problème, il est nécessaire de disposer d'un outil permettant de valuer les extrema pour pouvoir séparer les extrema significatifs (ceux que l'on souhaite conserver) des minima non significatifs (ceux que l'on souhaite supprimer). La notion de dynamique ([Grimaud \(1991\)](#)) permet d'apporter une réponse à ce problème de tri en valuant les extrema par rapport à leur contraste.

Considérons, par exemple, un minimum régional M d'une image (la notion est identique par dualité pour un maximum régional). Le principe de la dynamique est de rechercher l'ensemble des minima régionaux de plus faible altitude que le minimum considéré. Pour chacun de ces minima, il est possible d'associer un chemin $C = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ le long de la trame discrète partant de M et allant jusqu'à ce minima de plus faible altitude. Parmi l'ensemble des chemins trouvés, la dynamique de M correspond à la valeur de dénivelé du chemin de plus faible dénivelé. La figure [5.4](#) illustre ce principe. Ainsi, la notion de dynamique se formalise de la manière suivante :

Définition 5.4 *La dynamique d'un minimum (respectivement d'un maximum) régional M d'une image I est la dénivellation minimale à franchir quand, partant de M , on cherche à atteindre un point de plus faible (respectivement plus haute) altitude.*

5.2 Méthodes de caractérisation de formes en niveaux de gris

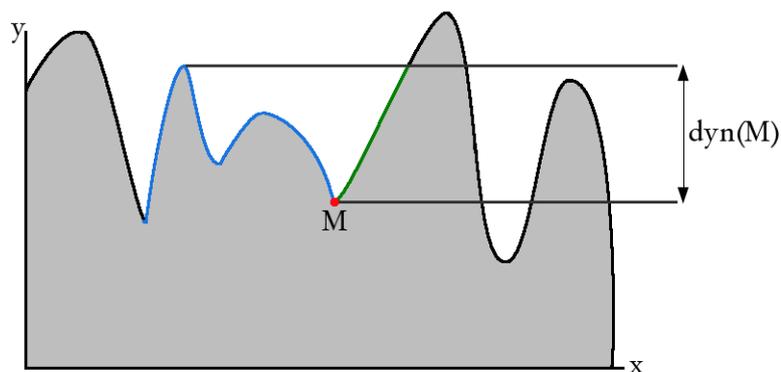
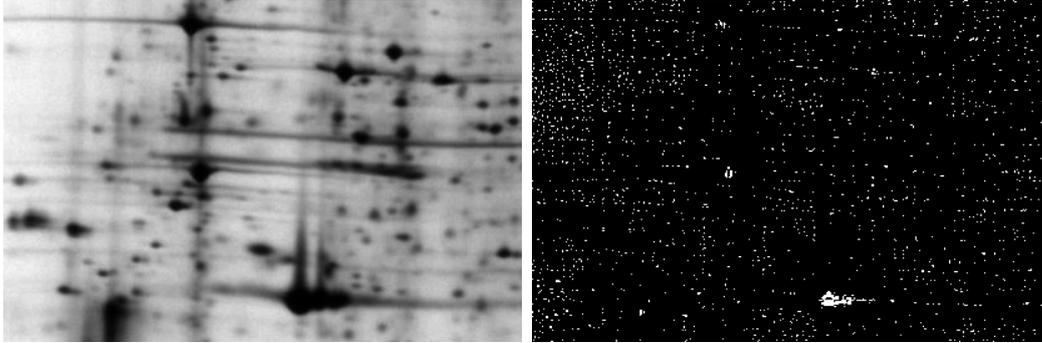


FIGURE 5.4: Dynamique d'un minimum régional. La courbe bleue correspond au chemin de dénivelé minimal à parcourir pour atteindre un minimal régional de hauteur plus faible. Le chemin vert n'est pas retenu car la dénivellation nécessaire à franchir, pour atteindre un minimum de plus faible altitude, est plus importante.

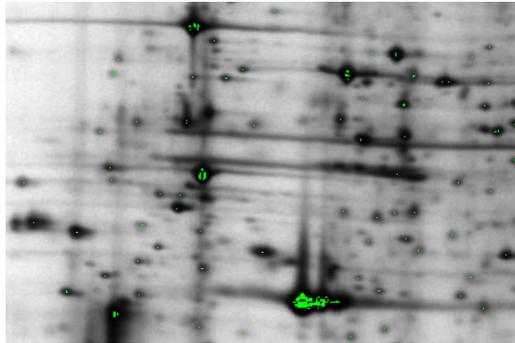
Ainsi, la dynamique permet de valuer les extrema en leur associant une valeur de contraste. Il devient alors facile de conserver les extrema les plus contrastés en ne sélectionnant, par seuillage, que ceux dont la dynamique est plus importante qu'une certaine valeur fixée. La figure 5.5 présente un exemple de sélection des minima les plus contrastés d'une image.

5. CARACTÉRISATION DE FORMES EN NIVEAUX DE GRIS



(a) Image d'origine.

(b) Minima de l'image.



(c) Minima de l'image de dynamique supérieure à 35.

FIGURE 5.5: Sélection des minima régionaux d'une image de plus forte dynamique.

En définitive, les extrema sont un outil permettant de déterminer les structures d'une image. En les associant avec l'opérateur de contraste, il est possible de ne sélectionner que les marqueurs des structures de plus forts contrastes. Enfin, la dynamique peut également être vue comme une mesure de la persistance d'un extremum.

5.2.4 Champ d'orientation

Le champ d'orientation introduit par [Soille & Talbot \(2001\)](#) est utilisé dans le domaine de la classement de texture pour déterminer l'orientation locale de tous les pixels d'une image. Le principe général consiste à calculer une série d'ouver-

5.2 Méthodes de caractérisation de formes en niveaux de gris

tures morphologiques directionnelles de l'image d'origine en utilisant des éléments structurants de la forme d'un segment d'une taille fixée (λ) dont l'orientation (α) varie. Cet élément structurant est noté $L_{\lambda,\alpha}$. Ensuite, pour chaque pixel de l'image, on étudie l'évolution de sa valeur pour chaque ouverture morphologique directionnelle. L'orientation d'un pixel correspond alors à l'orientation de l'ouverture morphologique directionnelle de la valeur la plus forte. En effet, si l'on considère un pixel appartenant à une structure directionnelle claire, il sera conservé lorsque l'on effectue une ouverture dans la direction correspondant à l'orientation de sa structure. Il sera par contre détruit lorsque l'ouverture directionnelle est effectuée dans une direction différente. De plus, il est possible de calculer la force de l'orientation en un pixel donné qui correspond à la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale des différentes ouvertures effectuées. Les ouvertures morphologiques ne permettent que de travailler sur les composantes claires d'une image. Il est donc nécessaire de les combiner avec des fermetures morphologiques pour étudier les composantes sombres de l'image.

Formellement, on définit l'orientation par ouverture morphologique d'une image I à un pixel x à l'échelle λ (dir_λ^γ) comme l'ouverture directionnelle qui modifie le moins la valeur de ce pixel. L'orientation par fermeture morphologique (dir_λ^ϕ) est construite de manière équivalent par dualité :

$$[dir_\lambda^\gamma(I)](x) = \left\{ \alpha_i \mid [\gamma_{L_{\lambda,\alpha_i}}(I)](x) \geq [\gamma_{L_{\lambda,\alpha_j}}(I)](x), \forall \alpha_j \neq \alpha_i \right\} \quad (5.8)$$

$$[dir_\lambda^\phi(I)](x) = \left\{ \alpha_i \mid [\phi_{L_{\lambda,\alpha_i}}(I)](x) \leq [\phi_{L_{\lambda,\alpha_j}}(I)](x), \forall \alpha_j \neq \alpha_i \right\}. \quad (5.9)$$

D'un point de vue pratique, il est nécessaire de pouvoir calculer une ouverture et une fermeture morphologiques par un élément structurant linéaire d'orientation quelconque. Pour cela, on peut utiliser l'algorithme proposé par [Soille *et al.* \(1996\)](#).

Si en un pixel donné, les différentes ouvertures (ou fermetures) donnent la même valeur alors ce pixel n'a pas d'orientation déterminée. On peut alors lui en affecter une arbitrairement, cette dernière n'ayant pas d'importance.

La force de l'orientation par ouverture $gdir^\gamma$ (respectivement par fermeture $gdir^\phi$) en un pixel x correspond à la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale des ouvertures (respectivement des fermetures) directionnelles calculées

5. CARACTÉRISATION DE FORMES EN NIVEAUX DE GRIS

en ce point :

$$[gdir_\lambda^\gamma(I)](x) = [\max_{\alpha_i} \gamma_{L_{\lambda,\alpha_i}}(I)](x) - [\min_{\alpha_i} \gamma_{L_{\lambda,\alpha_i}}(I)](x) \quad (5.10)$$

$$[gdir_\lambda^\phi(I)](x) = [\max_{\alpha_i} \phi_{L_{\lambda,\alpha_i}}(I)](x) - [\min_{\alpha_i} \phi_{L_{\lambda,\alpha_i}}(I)](x). \quad (5.11)$$

L'information de la force de l'orientation est la caractéristique qui va permettre de combiner les informations issues de l'analyse par ouvertures et par fermetures directionnelles pour obtenir une image directionnelle dir_λ . Cette image correspond, en chaque pixel, à son orientation pour l'échelle λ étudiée. Cette orientation correspond à celle de l'opérateur (ouverture ou fermeture) qui a la force la plus importante :

$$[dir_\lambda(I)](x) = \begin{cases} [dir_\lambda^\gamma(I)](x) & \text{si } [gdir_\lambda^\gamma(I)](x) > [gdir_\lambda^\phi(I)](x) \\ [dir_\lambda^\phi(I)](x) & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.12)$$

Enfin, à titre d'information, il est également possible d'effectuer une analyse directionnelle, non morphologique, d'une image texturée sur le même principe en utilisant des filtres de Gabor ([Jain & Farrokhnia \(1991\)](#)) à la place d'ouvertures et de fermetures morphologiques. Ce filtre consiste à convoluer l'image par un noyau sinusoïdal. En calculant différentes rotations de ce noyau, il est ainsi possible de construire une famille de filtres directionnels et d'étudier la réponse d'une image à ces différents filtres pour déterminer une orientation locale.

5.2.5 Conclusion

Nous avons présenté au cours de cette partie plusieurs méthodes permettant de caractériser des images à teintes de gris. Ceci a notamment été l'occasion de revoir comment certains opérateurs se généralisent en niveaux de gris. Nous avons également pu constater que le squelette, l'un des outils que nous utilisons dans nos méthodes de caractérisation binaire, n'est pas toujours adapté pour traiter des images en niveaux de gris.

5.3 Généralisation de la méthode du lancer de rayons

5.3.1 Introduction

Au cours du chapitre 4, nous avons développé deux méthodes de caractérisation de formes binaires. La première est basée sur la transformée en squelette. La seconde méthode consiste, en chaque point de la forme étudiée, à construire une caractérisation radiale à partir d'un lancer de rayons.

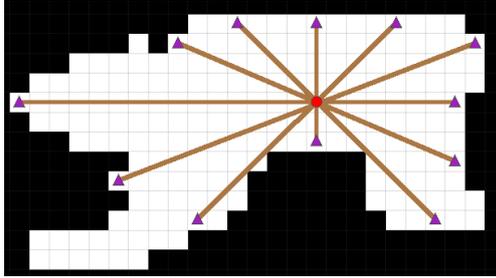
Comme l'avons au cours de la section précédente, il est possible de construire un opérateur de squelettisation en niveaux de gris. Malheureusement, son calcul n'est pas toujours simple ni évident. De plus, il perd, dans le cas numérique son côté très intuitif qui était son principal attrait au niveau binaire. Nous avons donc fait le choix de généraliser notre seconde méthode binaire : celle du lancer de rayons. Nous allons maintenant revenir en détail sur la méthode utilisée dans le cas binaire et expliquer, pas à pas, la démarche permettant de la généraliser.

5.3.2 Retour sur la méthode binaire

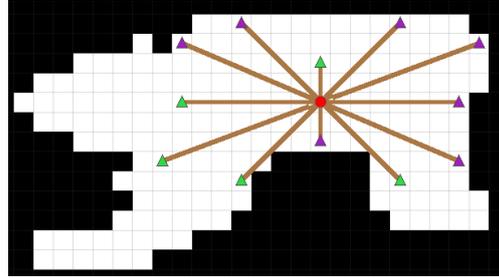
La méthode dite du lancer de rayons dans le cas 2D se divise en quatre grandes étapes. Pour chaque point de la forme binaire considérée, on effectue la même démarche :

1. partant du point étudié, on trace des rayons de sens opposés jusqu'à ce que les deux rayons atteignent le contour de la forme. Nous effectuons le même raisonnement pour n directions régulièrement espacées (figure 5.6a) ;
2. pour chaque direction de tracé, on ne conserve que l'extrémité correspondant au rayon de longueur minimale. La seconde extrémité se déduit par symétrie ;
3. on relie les extrémités obtenus pour créer une forme binaire ;
4. on ajuste une ellipse ayant les mêmes moments géométriques que la forme créée à l'étape précédente. Les mesures locales correspondent aux dimensions et à l'orientation de la forme.

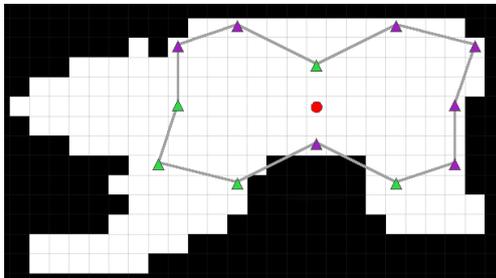
5. CARACTÉRISATION DE FORMES EN NIVEAUX DE GRIS



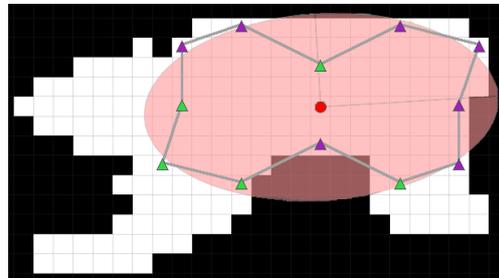
(a) Tracé des rayons deux par deux.



(b) Détection des longueurs minimales pour chaque direction.



(c) Création d'une forme en reliant les extrémités.



(d) Ajustement d'une ellipse sur la forme précédente.

FIGURE 5.6: Reprise de la figure de présentation de la méthode dans le cas binaire. On commence par tracer des rayons deux par deux de sens opposés dans la forme (a) puis on conserve la longueur minimale (b). On relie les extrémités obtenues (c) puis on ajuste une ellipse ayant les mêmes moments géométriques (d).

Nous pouvons remarquer que les deux premières étapes de la méthode précédente sont artificiellement séparées pour expliquer la démarche méthodologique. D'un point de vue pratique, pour une direction donnée, il suffit d'arrêter le tracé des rayons dès que l'un des deux atteint le contour de la forme.

De plus, la plupart des étapes de la méthode binaire se généralisent directement. En fait, ils n'ont même pas besoin d'être généralisés. En effet, l'image d'étude n'est véritablement nécessaire que pour la première étape de la méthode, celle de la détermination des extrémités. Une fois les extrémités déterminés, nous travaillons sur une nouvelle forme qui correspond aux extrémités reliées. Il est donc indifférent, à partir de la seconde étape, que l'image étudiée initialement soit binaire ou numérique. En d'autres termes, si nous arrivons à déterminer les ex-

5.3 Généralisation de la méthode du lancer de rayons

trémities associées aux différentes directions pour des images en niveaux de gris, l'ensemble de la méthode sera directement applicable à des images en niveaux de gris.

Le grand avantage de l'approche binaire est que la notion de frontière est parfaitement établie : elle correspond au contour de la forme étudiée. Elle semble par contre moins évidente à déterminer dans le cas numérique. Comme nous l'avons déjà souligné en introduction, le moyen le plus simple d'obtention d'un contour consiste à seuiller l'image en niveaux de gris pour se ramener à une image binaire. Par ce simple raisonnement, nous avons donc trouvé un moyen d'effectuer une première étude en niveaux de gris : nous seuillons l'image d'étude en niveaux de gris puis nous appliquons la méthode binaire. Cette approche, entrevue à la fin du chapitre précédent, pose néanmoins un certain nombre de problèmes. Tout d'abord, quel seuil faut-il choisir ? Ensuite, en supposant que l'on ait réussi à trouver un seuil qui soit globalement satisfaisant, il n'est pas assuré qu'il soit localement adapté à toutes les structures présentes au sein de l'image en niveaux de gris. Enfin, en simplifiant, par seuillage, l'image d'origine nous perdons une importante richesse d'informations, ce qui peut être particulièrement dangereux lorsque l'on souhaite calculer des mesures locales.

La manière la plus simple de s'affranchir du problème de détermination du seuil est d'appliquer le lancer de rayons binaire à tous les seuils de l'image en niveaux de gris puis de calculer les extrémities associées à chaque pixel en combinant d'une certaine manière les informations obtenues pour chaque seuil. Cette méthode ne semble pas très intéressante car, d'une part, elle risque d'être très longue (il est nécessaire d'effectuer le calcul par lancer de rayons pour tous les seuils de l'image) et, d'autre part, il faut concevoir une méthode de combinaison de l'ensemble des extrémities obtenues. Une solution, plus astucieuse, pourrait consister à ne pas seuiller globalement l'image en niveaux de gris mais à utiliser un seuil localement adaptatif. Cependant, ceci pose un nouveau problème : la détermination effective de ce seuil adaptatif.

Bref, le noeud du problème semble être la détermination effective du contour associé à une forme en niveaux de gris. En conclusion, de cette simple réflexion autour de la méthode de lancer de rayons binaire, nous avons tiré deux enseignements majeurs. Premièrement, pour généraliser la méthode de lancer de rayons binaire,

5. CARACTÉRISATION DE FORMES EN NIVEAUX DE GRIS

il suffit de généraliser la méthode de détermination des extrémités associées à un pixel. Deuxièmement, le problème de la détermination des extrémités revient à la détermination d'un contour d'une forme en niveaux de gris.

5.3.3 Détermination des extrémités sur une image en niveaux de gris

Comme nous venons de le souligner, le problème de détermination des extrémités est équivalent à celui de la détermination du contour d'une forme en niveaux de gris. Considérons un pixel pris au hasard d'une image en niveaux de gris. Appliquant la méthode du lancer de rayons sur ce pixel, nous traçons donc deux rayons de sens opposés partant de ce pixel. Dans le cas binaire, ces deux rayons sont tracés jusqu'à ce que l'un des deux touche le contour de la forme. D'une manière plus générale, le contour, qui correspond à la limite de la forme peut être vu comme une sorte de délimitation qui marque la fin d'une région. Ainsi, lorsque l'on trace les rayons sur une image en niveaux de gris, il suffit de stopper le tracé lorsque l'on rencontre cette délimitation. Par exemple, si nous cherchons à caractériser des zones homogènes de l'image il peut être intéressant de s'arrêter lorsque la différence entre le pixel de début de tracé et le pixel courant est plus importante qu'un certain seuil. En utilisant un critère d'arrêt, nous associons donc naturellement un contour à chaque pixel de l'image étudiée pour chacune des directions de tracé. Cette limite correspond au pixel où le critère prédéfini n'est plus valable : nous sommes donc en présence d'une extrémité dans la direction et le pixel étudiés. Ce critère peut être général, c'est-à-dire indépendant du pixel considéré, ou local s'il dépend du pixel étudié.

D'une manière générale, pour une image en niveaux de gris donnée, il suffit donc de déterminer un critère d'arrêt des rayons pour pouvoir effectuer un lancer de rayons. Cette méthode est très générale, et il est *a priori* possible d'imaginer beaucoup de critères. Ainsi, les méthodes présentées au début de ce chapitre peuvent très bien servir pour construire de nouveaux critères d'arrêt. Par exemple, considérons la quasi-distance. Cette transformée permet de faire ressortir les zones quasi-plates d'une image. Pour construire un critère d'arrêt des rayons, il suffit dans un premier temps, de calculer la transformée en quasi-distance de cette

5.3 Généralisation de la méthode du lancer de rayons

image, puis dans un second temps, de se servir de cette nouvelle image pour effectuer le lancer de rayons. Pour un pixel et une direction donnés, le rayon s'arrête dès que la valeur de la transformée en distance du pixel courant dépasse une certaine valeur fixée. Ce critère revient à seuiller la transformée en quasi-distance de l'image d'origine. (Altendorf (2011) a utilisé une méthode similaire pour caractériser l'orientation locale de structures fibreuses).

Le critère peut être une ligne de niveau : le rayon s'arrête lorsqu'il atteint une valeur fixée pour l'ensemble de l'image, ce qui revient à se ramener au cas binaire en seuillant l'image à la valeur fixée.

Un autre critère possible peut être le dénivelé cumulé le long du rayon : on associe un coût au passage d'un pixel au suivant le long du rayon considéré (par exemple la différence de valeurs entre deux rayons successifs). Lorsque le coût atteint une valeur fixée, le rayon est stoppé.

On peut également considérer un critère d'écart maximal par rapport au pixel considéré : nous pouvons prolonger un rayon tant que la différence entre la valeur du pixel étudié p et la valeur du pixel visité q est plus petite qu'une valeur v . On utilise donc le critère : $|I(p) - I(q)| < v$.

Nous aurons l'occasion au cours de nos cas d'application d'utiliser différents critères d'arrêt des rayons. Le problème auquel nous sommes confrontés pour l'instant, c'est que la méthode que nous avons développée est difficilement utilisable en pratique car elle souffre de temps de calculs trop importants. Nous allons donc maintenant présenter un algorithme permettant de la calculer efficacement.

5.3.4 Algorithme efficace de calcul

5.3.4.1 Introduction

Le problème de l'implémentation naïve de la méthode de lancer de rayons est qu'elle effectue plusieurs fois le même calcul pendant la première étape de détermination des extrémités. En effet, pour chaque pixel, nous traçons, deux par deux, des rayons de sens opposés pour n directions régulièrement espacées (figure 5.6a). Cependant, pour une direction donnée, si nous considérons les autres pixels appartenant à cette droite, nous effectuerons le même raisonnement, c'est-à-dire

5. CARACTÉRISATION DE FORMES EN NIVEAUX DE GRIS

que nous tracerons à nouveau la même ligne autant de fois qu'il y a de pixels, alors qu'il aurait été suffisant de tracer une seule ligne.

5.3.4.2 Détermination des extrémités le long d'une droite

Pour simplifier l'explication, nous considérons tout d'abord le cas simple de critère d'arrêt des rayons des lignes de niveau, ce qui est équivalent au cas binaire. Dans ce cas, plusieurs pixels de cette ligne partagent la même extrémité, il est donc suffisant de parcourir une seule fois la ligne pour déterminer les extrémités de chacun des pixels de cette ligne. Ce raisonnement correspond à l'illustration de la figure 5.7.

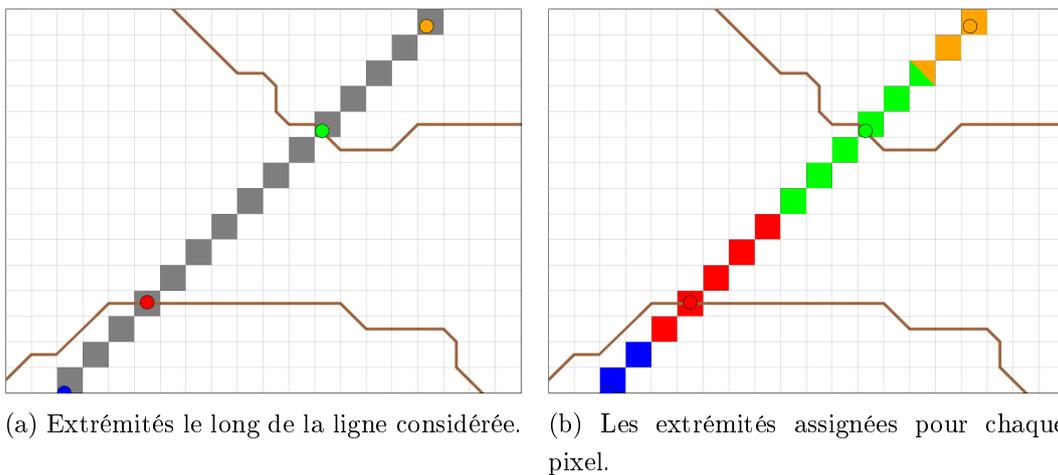


FIGURE 5.7: Parcours de la ligne courante pour déterminer les extrémités de chaque pixel. La ligne brune correspond à la ligne de niveau étudiée et les cercles aux extrémités le long de la ligne.

Concrètement, pour parcourir une ligne discrète donnée nous partons d'un bord de l'image (ce bord sera une extrémité) et avançons jusqu'à atteindre une extrémité. Nous initialisons également une liste vide qui va contenir les pixels visités. Pour chaque nouveau pixel, on l'ajoute à la liste des pixels parcourus et on met à jour la longueur courante de la ligne. Lorsque l'on atteint une nouvelle extrémité on s'arrête et on vide la liste des pixels parcourus pour leur assigner une extrémité. Ainsi, les pixels qui sont situés à une longueur plus petite que

5.3 Généralisation de la méthode du lancer de rayons

la moitié de la longueur totale de la ligne sont assignés à la première extrémité (le plus à gauche par rapport au sens de parcours). Les autres sont assignés à la seconde extrémité (ce raisonnement est illustré à la figure 5.7b). Si un pixel est équidistant des deux extrémités, on peut lui assigner indifféremment l'une des deux extrémités. Ensuite, pour reprendre le parcours de la ligne, la seconde extrémité devient la première, la longueur de la ligne est remise à zéro et on effectue le même raisonnement jusqu'à ce que l'on atteigne le bord de l'image. À la fin de cette étape, nous avons donc assigné une extrémité à chaque pixel de la ligne. Or, il est nécessaire d'obtenir deux extrémités pour chaque direction (une extrémité par sens de rayon). Pour un point donné de la ligne, les deux extrémités de sens opposées étant équidistantes par construction, la seconde extrémité se déduit facilement par symétrie.

Considérons maintenant le cas où nous n'avons plus un critère d'arrêt de rayons global (comme un seuil) mais un critère dépendant du pixel étudié. Choisissons par exemple le cas où on pour un pixel p donné, l'extrémité est atteinte dès que la différence de niveaux de gris entre p et le point visité est plus grande qu'une valeur v . Il suffit, dans ce cas, d'appliquer la même démarche que précédemment en ajoutant deux étapes supplémentaires. Premièrement, il faut trier la liste de pixels lors d'un ajout. En effet, en triant la liste des pixels, par ordre croissant, tant que la différence entre le premier et le dernier élément de la liste est plus petite que v , aucune extrémité n'est assignée. Deuxièmement, à chaque ajout d'un élément de la liste, on lui assigne une extrémité candidate à gauche. Cette extrémité est soit l'élément de la liste le plus proche du point courant tel que l'écart soit supérieur à la valeur de seuil, soit le dernier élément éliminé de la liste si l'écart est inférieur à la valeur de seuil. Le dernier élément éliminé de la liste est initialement égal au premier élément de la liste. À chaque fois qu'on retire un élément de la liste, on lui assigne comme extrémité, soit le dernier élément de la liste soit son extrémité candidate à gauche, en choisissant le plus proche des deux en termes de distance.

5. CARACTÉRISATION DE FORMES EN NIVEAUX DE GRIS

D'une manière générale, quel que soit le critère choisi, il est possible de déterminer une méthode pour parcourir une ligne et déterminer les extrémités associées à chacun de ses pixels. Nous disposons donc maintenant d'une méthodologie permettant de déterminer les extrémités le long d'une droite discrète. L'étape suivante de notre raisonnement consiste à créer un pavage d'une image 2D, c'est-à-dire à découper une image suivant un ensemble de lignes discrètes. Une fois cet obstacle franchi, nous pourrons, pour chaque direction étudiée, parcourir l'image en utilisant le pavage associé et ainsi obtenir les extrémités associés à tous les pixels de l'image.

5.3.4.3 Pavage de l'image pour une direction donnée

Par pavage d'une image, on comprend le principe de pouvoir recouvrir toute une image en utilisant le même motif de ligne sans qu'aucune ligne ne se superpose (figure 5.9). Les droites discrètes dite de Bresenham ([Bresenham \(1965\)](#)) ont la propriété de permettre l'élaboration de pavages.

Le principe de construction du pavage est très simple : il suffit de partir d'un coin l'image et de translater la ligne autant de fois que nécessaire pour le déterminer. Le choix du coin de départ et du sens de translation dépend de l'orientation de la ligne. Il n'existe que quatre configurations possibles qui sont résumées par le tableau suivant (en supposant une rotation dans le sens direct) :

orientation de la ligne	coin de départ	sens de translation	figure correspondante
$[0; 90^\circ [$	haut à gauche	vers le bas	5.8a
$]90; 180^\circ]$	haut à droite	vers le bas	5.8b
$]0; -90^\circ]$	haut à droite	vers la gauche	5.8c
$[-90; -180^\circ [$	haut à gauche	vers la droite	5.8d

5.3 Généralisation de la méthode du lancer de rayons

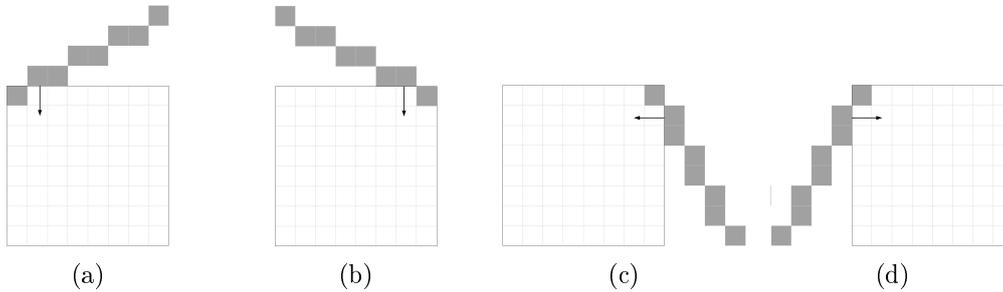
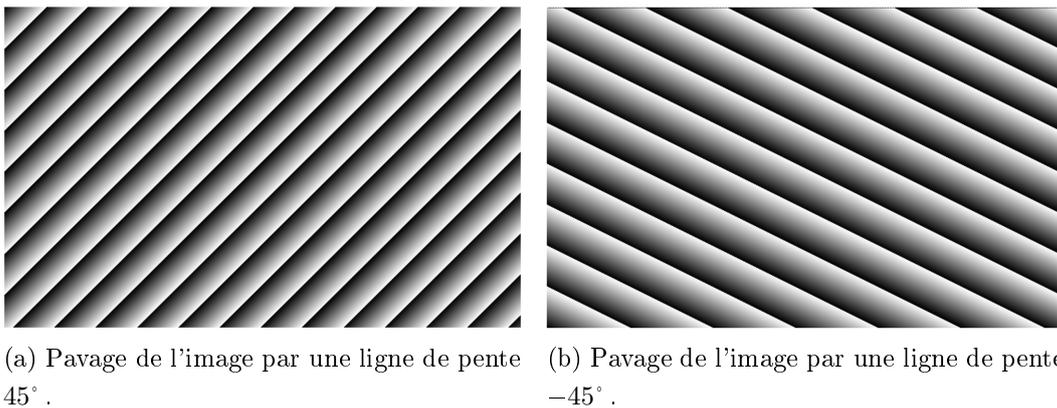


FIGURE 5.8: Les quatre différentes possibilités de pavage d'une image suivant la pente de la ligne discrète.



(a) Pavage de l'image par une ligne de pente 45° . (b) Pavage de l'image par une ligne de pente -45° .

FIGURE 5.9: Exemples de pavage d'une image.

Concrètement, pour une ligne orientée d'un angle θ donné, nous appliquons l'algorithme de tracé de ligne de Bresenham pour déterminer les points de la droite. Ensuite, en utilisant le tableau précédent, nous en déduisons le coin de départ et le sens de translation permettant d'effectuer un pavage. Nous déplaçons l'image au coin de départ et nous parcourons l'ensemble des points de l'image inclus dans cette ligne avec l'algorithme de la section précédente pour déduire les extrémités associées à ces points. Ensuite, nous translatons la ligne puis nous parcourons à nouveau la ligne. Ainsi, il suffit de translater la ligne un nombre suffisant de fois et d'appliquer à chaque fois notre méthode de détermination des extrémités le long d'une droite pour déterminer les extrémités associées à tous les points de l'image pour l'orientation θ .

5. CARACTÉRISATION DE FORMES EN NIVEAUX DE GRIS

5.3.4.4 Résumé de l’algorithme

Nous disposons maintenant de tous les outils pour obtenir une implémentation rapide de la méthode de lancer de rayons. En effet, une fois les extrémités calculées pour tous les pixels en utilisant la méthode précédente, il ne reste plus qu’à calculer, pour chaque pixel, les moments associés à la forme déduite des extrémités. Pour cela, nous utilisons la méthode basée sur un suivi de contour proposée par [Yang & Albreghsen \(1996\)](#). En utilisant les moments géométriques calculés, nous en déduisons les paramètres de taille et d’angle de l’ellipse associée. Il est également important de noter que nos méthodes de correction d’erreur de l’ajustement définies au chapitre précédent restent toujours valables dans le cas présent.

En résumé, considérant une image de travail, la méthode dite du lancer de rayons se découpe en 3 étapes :

1. construire un pavage de l’image initiale pour chacune des directions considérées (étape de **tracé des rayons**) ;
2. pour chaque droite de chacune des directions étudiées, calculer le critère d’arrêt d’un rayon permettant d’obtenir une liste d’extrémités associée à chaque pixel de l’image (étape de **calcul des extrémités**) ;
3. en chaque pixel, relier les extrémités pour créer une forme binaire puis ajuster une ellipse en calculant les moments géométriques associés à la forme (étape **d’ajustement**).

5.4 Exemple d’application

Nous reprenons le même exemple d’application que celui du chapitre 4 (figure [5.10](#)) qui correspond à une coupe d’un cube sismique 3D. En effet, pour caractériser cette image, nous avons été obligé au chapitre précédent, de seuiller cette coupe au niveaux de la moyenne des données afin de se ramener à une image binaire et ensuite pouvoir la caractériser (ainsi que son complémentaire) par la méthode de lancer de rayons binaire. Cette approche avait permis de reproduire

les orientations locales de l'image. Cependant, nous avons souligné que cette méthode n'était pas une bonne solution car d'une part, le choix de seuiller l'image au niveau de la moyenne des données est complètement arbitraire. Nous avons donc souligné la nécessité de développer des méthodes permettant de caractériser directement une image en niveaux de gris. Nous allons donc maintenant appliquer la méthode que nous venons de présenter. Pour cela, nous utilisons la démarche proposée par [Beucher \(2004\)](#) pour faire ressortir les zones quasi-plates d'une image. Nous calculons la quasi-distance de l'image initiale (figure [5.11a](#)), ainsi que celle de l'image inverse pour caractériser les teintes sombres de l'image (figure [5.11b](#)) puis nous prenons le supremum des deux images (figure [5.11c](#)). Ensuite, pour effectuer le lancer de rayons sur l'image de supremum des quasi-distances, nous prolongeons un pixel tant que la différence entre le pixel de départ et le pixel courant du rayon est plus faible que 3. Nous obtenons ainsi trois cartes de mesures locales : longueur, largeur et orientation. Cette information est représentée sous la forme de vecteurs aux figures [5.12a](#) (vue générale) et [5.12b](#) (détail) sur l'image d'entrée en fausse couleur. La norme des vecteurs correspond au rapport entre la longueur et la largeur. Contrairement à un seuillage direct de l'image d'étude pour se ramener à une étude binaire, nous avons utilisé cette fois-ci une information beaucoup plus riche. Nous verrons notamment au cours du prochain chapitre l'intérêt d'une caractérisation en niveaux de gris par rapport à une caractérisation binaire.

5. CARACTÉRISATION DE FORMES EN NIVEAUX DE GRIS

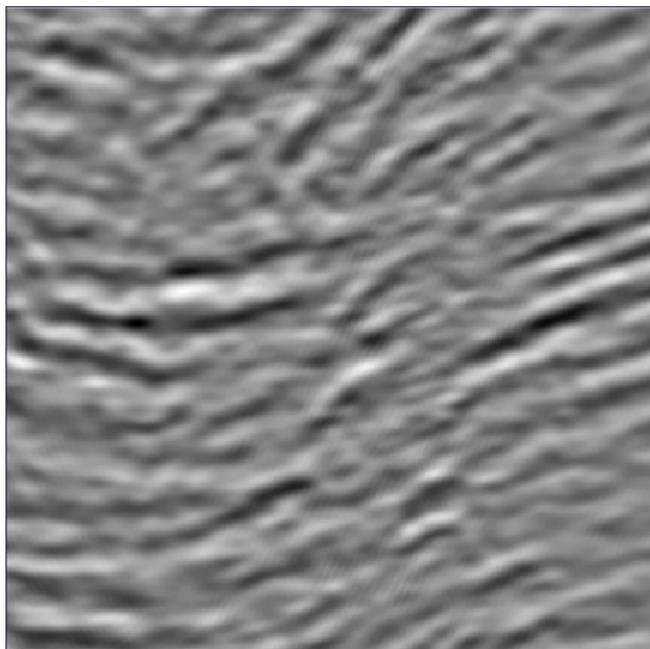
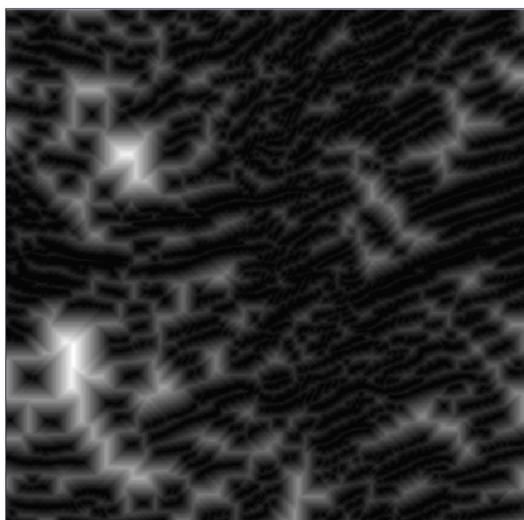
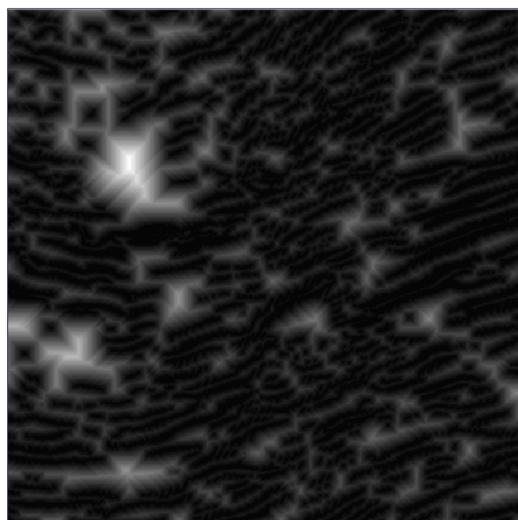


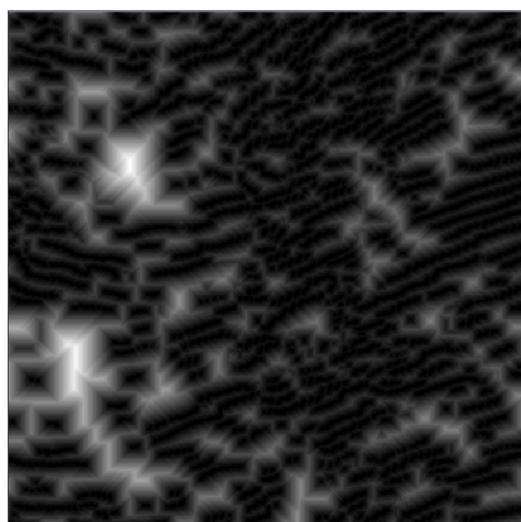
FIGURE 5.10: Coupe 2D d'un cube sismique.



(a) Quasi-distance (image normalisée).



(b) Quasi-distance de l'image inverse (image normalisée).



(c) Supremum des deux Quasi-distances (image normalisée).

FIGURE 5.11: Calcul de la quasi-distance régularisée de l'image [5.10](#).

5. CARACTÉRISATION DE FORMES EN NIVEAUX DE GRIS

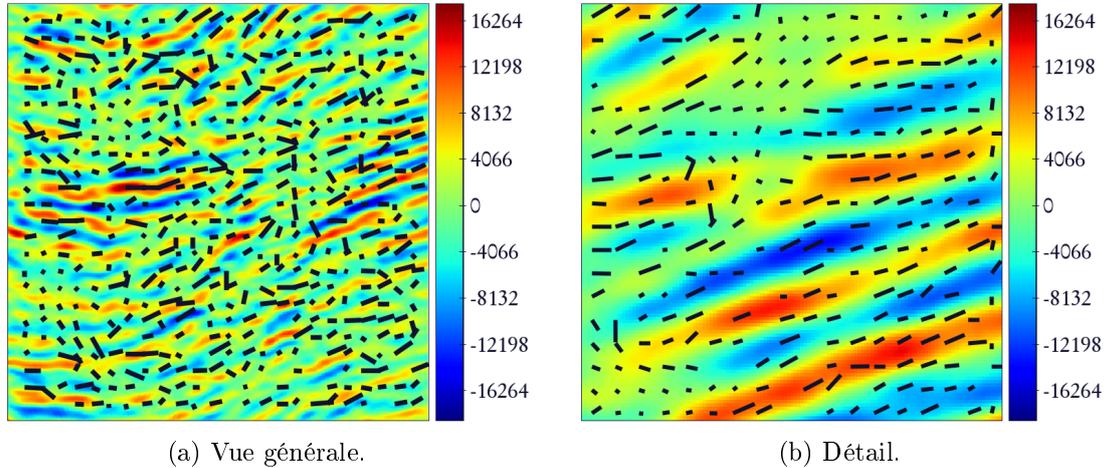


FIGURE 5.12: Visualisation des M-Paramètres sous la forme de vecteurs sur l'image de données en fausse couleur. La norme des vecteurs correspond au rapport entre la longueur et la largeur.

5.5 Conclusion

Nous avons vu au cours de ce chapitre comment la méthode de lancer de rayons binaire introduite au chapitre 4 peut être généralisée pour traiter des images en niveaux de gris. De plus, nous avons présenté un algorithme permettant de l'appliquer rapidement et qui est valable sur des images binaires comme sur des images en niveaux de gris.

Le prochain chapitre constituera le premier cas d'étude géostatistique. Il s'agira de déterminer une carte de fond marin par krigeage. Nous pourrons ainsi vérifier que les différentes méthodes que nous venons de présenter s'intègrent directement dans une opération géostatistique telle que le krigeage. Nous pourrons aussi mettre en valeur les différences de traitement possibles entre l'approche de caractérisation binaire et l'approche en niveaux de gris. Nous aurons également l'occasion de comparer les différences de résultats entre les méthodes de la géostatistique classique et celles de la M-GS.

Chapitre 6

Étude de cas - données bathymétriques

« Mais dans le temps qui suivit, il y eut des tremblements de terre et des inondations extraordinaires, et, dans l'espace d'un seul jour et d'une seule nuit néfastes, tout ce que vous aviez de combattants fut englouti d'un seul coup dans la terre, et l'île Atlantide, s'étant abîmée dans la mer, disparut de même. Voilà pourquoi, aujourd'hui encore, cette mer-là est impraticable et inexplorable, la navigation étant gênée par les bas fonds vaseux que l'île a formés en s'affaissant. »

Timée

Platon, Traduction de É. Chambry.

6.1 Introduction

Les premiers chapitres avaient une portée essentiellement théorique. Nous avons d'une part abordé un volet géostatistique avec l'introduction de paramètres variographiques locaux, dits M-Paramètres, et nous avons d'autre part développé des méthodes de traitement d'images pour obtenir des mesures locales de formes binaires et en niveaux de gris. Nous avons enfin réalisé que l'interprétation structurale des paramètres variographiques constitue le chaînon intéressant entre caractérisation structurale locale (non-stationnarité) et géostatistique stationnaire.

6. ÉTUDE DE CAS - DONNÉES BATHYMÉTRIQUES

Le présent chapitre a quant à lui une portée pratique : il illustre l'application de méthodes de traitement d'image pour la détermination de M-Paramètres et leur apport pour interpoler efficacement, dans un contexte chenalisant, des données bathymétriques.

6.2 Contexte - présentation du jeu de données

La connaissance de cartes de profondeur marine est importante pour des applications variées telles que l'étude des sédiments, l'étude de la qualité de l'eau ou encore l'halieutique. Ces cartes doivent être aussi précises que possible. L'estimation de la topographie des fonds marins est un problème classique d'interpolation. [Goff & Nordfjord \(2004\)](#) et [Merwade *et al.* \(2006\)](#) proposent une comparaison des différentes méthodes d'interpolation telles que les splines, le krigeage et les régressions appliquées à des données bathymétriques. Les méthodes basées sur le krigeage obtiennent les meilleurs résultats.

On rencontre généralement lors de l'étude de données bathymétriques de fortes non stationnarités spatiales liées à la présence de chenaux : ce sont des zones de plus forte profondeur avec d'importantes variations d'orientations locales. Par la prise en compte, uniquement globale, de la structuration spatiale des données, les méthodes de krigeage stationnaires n'arrivent pas, comme nous allons le voir dans un premier temps, à reproduire ces structures géologiques complexes.

Les données étudiées (figure 6.1) proviennent de la baie de Marennes-Oléron située dans l'ouest de la France. On y trouve de nombreux chenaux (zones bleu foncé sur la représentation proposée) entre la côte et l'île d'Oléron. Les données ont été régulièrement acquises par un bateau sondeur le long de lignes de l'est vers l'ouest. L'écart entre chaque ligne est quasiment constant et égal à 100 m. Nous avons sélectionné une zone d'étude intéressante permettant d'illustrer clairement les différences de résultats entre l'approche stationnaire et la M-GS ; la grille de données complète étant beaucoup plus grande. À noter que pour des raisons de confidentialité en phase de démarrage d'étude, la profondeur est en fait une profondeur relative (exprimée par rapport à une référence constante). Ceci ne change absolument rien à l'étude et à ses conclusions.

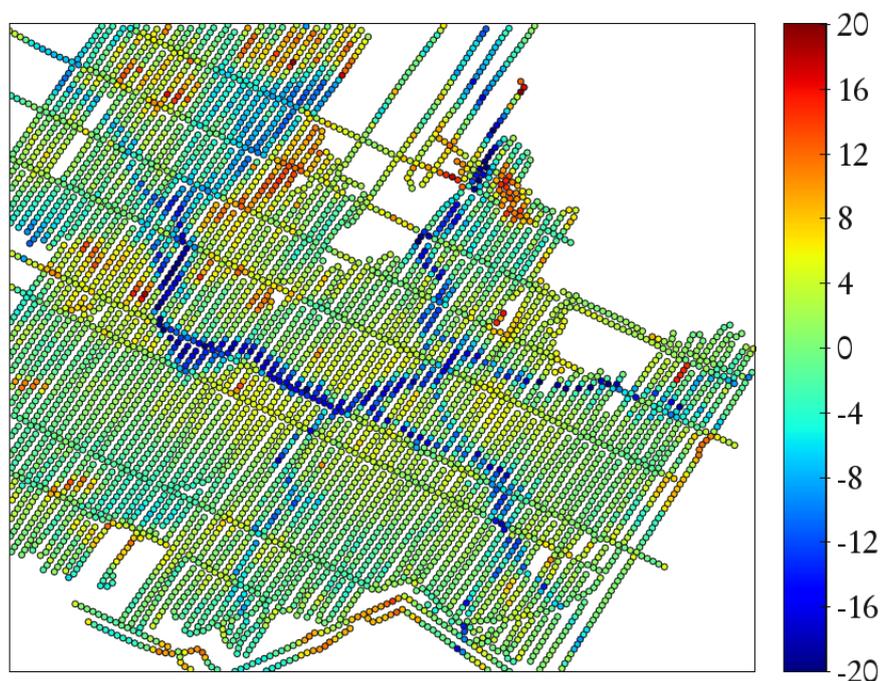


FIGURE 6.1: Données de l'étude prêtées par le Conseil Général de Charente Maritime - IFREMER (LERPC).

6.3 Cartographie par krigeage global

Afin de pouvoir réaliser un krigeage ordinaire, nous commençons par calculer le variogramme expérimental des données suivant les directions 0 et 90° (figure 6.2). Le calcul supplémentaire du variogramme suivant les directions 45 et 135° ne fait pas apparaître d'anisotropie. À partir de ces courbes nous ajustons un modèle de variogramme isotrope cubique avec une portée de 1000 m ce qui nous permet d'obtenir la carte de profondeur de la figure 6.3. Ce résultat est globalement cohérent dans la mesure où il reproduit correctement les fonds marins. Nous sommes néanmoins confrontés à des problèmes majeurs. Tout d'abord, des artefacts apparaissent, sous la forme d'effet bulle, le long des chenaux principalement à cause du manque d'information entre les lignes d'acquisition des données. Ceci est la cause du second problème : les chenaux obtenus sont en plusieurs endroits déconnectés alors qu'ils devraient être objectivement continus (figure 6.4). Nous allons tenter de résoudre ces problèmes de cartographie par une approche M-GS.

6. ÉTUDE DE CAS - DONNÉES BATHYMÉTRIQUES

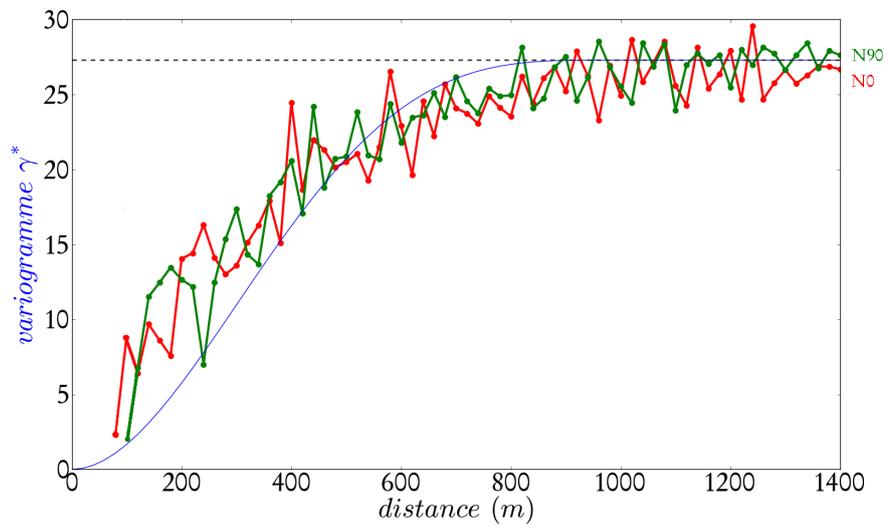


FIGURE 6.2: Variogramme expérimental des données.

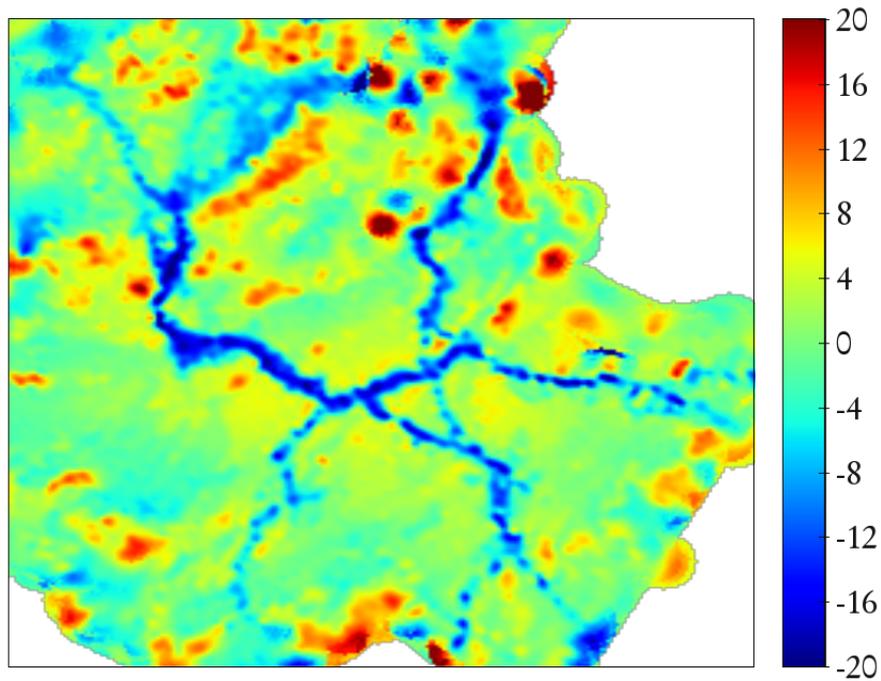


FIGURE 6.3: Krigage global avec un modèle cubique isotrope.

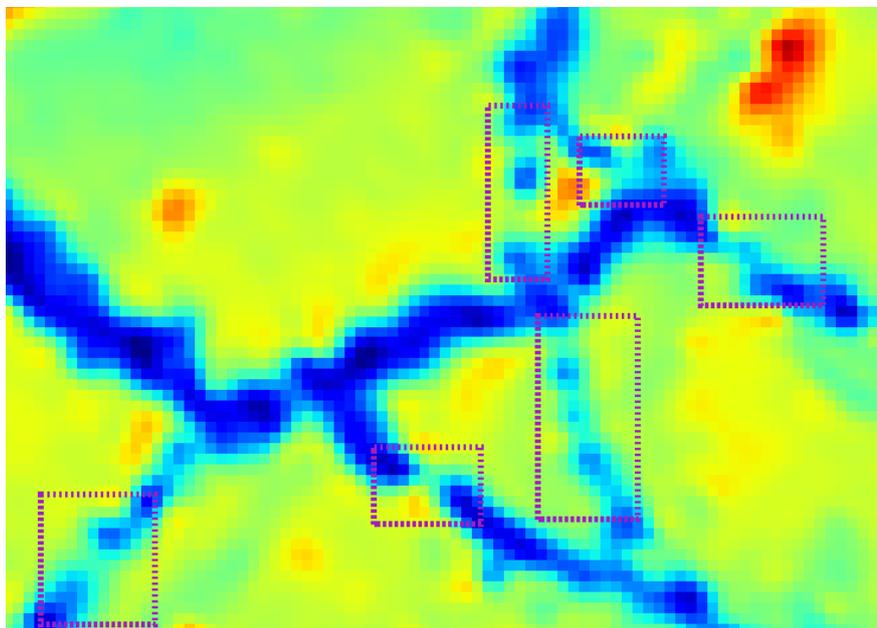


FIGURE 6.4: Exemples d'artefacts et de discontinuités le long du chenal.

6.4 Cartographie par krigeage avec M-Paramètres

6.4.1 Principe

Contrairement à l'étude globale, nous ne calculons pas de variogramme expérimental. Nous souhaitons pouvoir déterminer directement les paramètres variographiques par traitement d'images. Nous venons de constater que le principal défaut du krigeage global est qu'il est incapable de reproduire correctement la structure complexe des chenaux. Ce résultat n'est pas surprenant car ces chenaux ont un comportement local d'anisotropie très marquée et d'orientation variable. Il est impossible de reproduire ce comportement avec un modèle stationnaire. En d'autres termes les chenaux peuvent être vus comme des accidents dont le comportement diffère très fortement du modèle global. Intuitivement, nous souhaiterions pouvoir séparer notre carte de profondeur en deux modèles :

- un modèle local correspondant aux chenaux ;
- un modèle global à l'extérieur.

6. ÉTUDE DE CAS - DONNÉES BATHYMÉTRIQUES

Cette séparation peut se voir de deux manières différentes en termes de traitement d'images. La première consiste à segmenter la carte de profondeur pour isoler les chenaux. Il suffit ensuite de calculer des paramètres variographiques locaux sur l'ensemble binaire obtenu puis d'effectuer un nouveau krigeage avec ces nouveaux paramètres.

La seconde approche possible consiste au contraire à calculer directement des M-Paramètres sans passer par une étape de segmentation. Il s'agit donc d'une approche en niveaux de gris. Le point de départ des études sera une image krigée avec le modèle global précédent. Malgré ses défauts soulignés au paragraphe précédent, cette première image globale est suffisante pour que notre détermination de M-Paramètres soit stable.

Dans un contexte d'interpolation 2D, seuls trois paramètres variographiques ont besoin d'être déterminés. Nous devons calculer trois mesures locales : deux paramètres de taille qui correspondent aux portées du phénomène étudié, et un paramètre d'orientation, qui correspond à la direction du grand axe d'anisotropie. Effectuant une étude à deux dimensions, nous devons donc calculer les trois mesures locales définies précédemment : les deux paramètres de taille qui correspondent à la portée du phénomène étudié et l'orientation qui correspond à la direction du grand axe d'anisotropie.

6.4.2 Étude binaire

Nous avons constaté que l'approche classique par krigeage donne des résultats satisfaisants à l'extérieur des chenaux. Il semble donc judicieux de le conserver pour modéliser les données à l'extérieur. Il ne reste donc plus qu'à extraire le chenal de l'image krigée pour ensuite estimer les paramètres du modèle local.

6.4.2.1 Segmentation du chenal

L'étape de segmentation pourrait être optionnelle. En effet, un géologue pourrait fournir un masque du chenal sur lequel nous calculerions des M-Paramètres. Il s'agit là, de façon générale, d'un point intéressant : l'incorporation possible d'information *a priori* sous la forme de M-Paramètres, celle-ci pouvant prendre tous les degrés intermédiaires entre la simple correction locale et l'interprétation

6.4 Cartographie par krigeage avec M-Paramètres

complète.

Nous partons des données krigées avec le modèle global pour segmenter le chenal (figure 6.5a). Nous remarquons que comme le chenal a une profondeur plus importante que le reste des données, il suffit d'augmenter son contraste pour, ensuite, le segmenter efficacement. Pour cela, nous calculons la transformée en chapeau haut de forme de l'image krigée (figure 6.5b) pour faire ressortir plus nettement le chenal. Cet opérateur, qui est la différence entre l'ouverture morphologique et l'image d'origine, permet de faire ressortir les pics (ici le chenal) du reste de l'image en rehaussant son contraste. Une fois les régions du chenal renforcées, on peut seuiller l'image pour obtenir le chenal (figure 6.5c). Cependant, des formes parasites ne faisant pas partie du chenal persistent. Disposant d'un marqueur du chenal, nous effectuons une reconstruction géodésique sur l'image seuillée en utilisant le marqueur pour ne finalement conserver que le chenal (figure 6.5d). Encore une fois, le chenal obtenu est le résultat d'une carte krigée avec un modèle global. Il nous satisfait pour la détermination de nos M-Paramètres. Cependant il pourrait être intéressant de le modifier par une interprétation métier par exemple. Ceci est à envisager suivant les critères requis pour l'étude.

6. ÉTUDE DE CAS - DONNÉES BATHYMÉTRIQUES

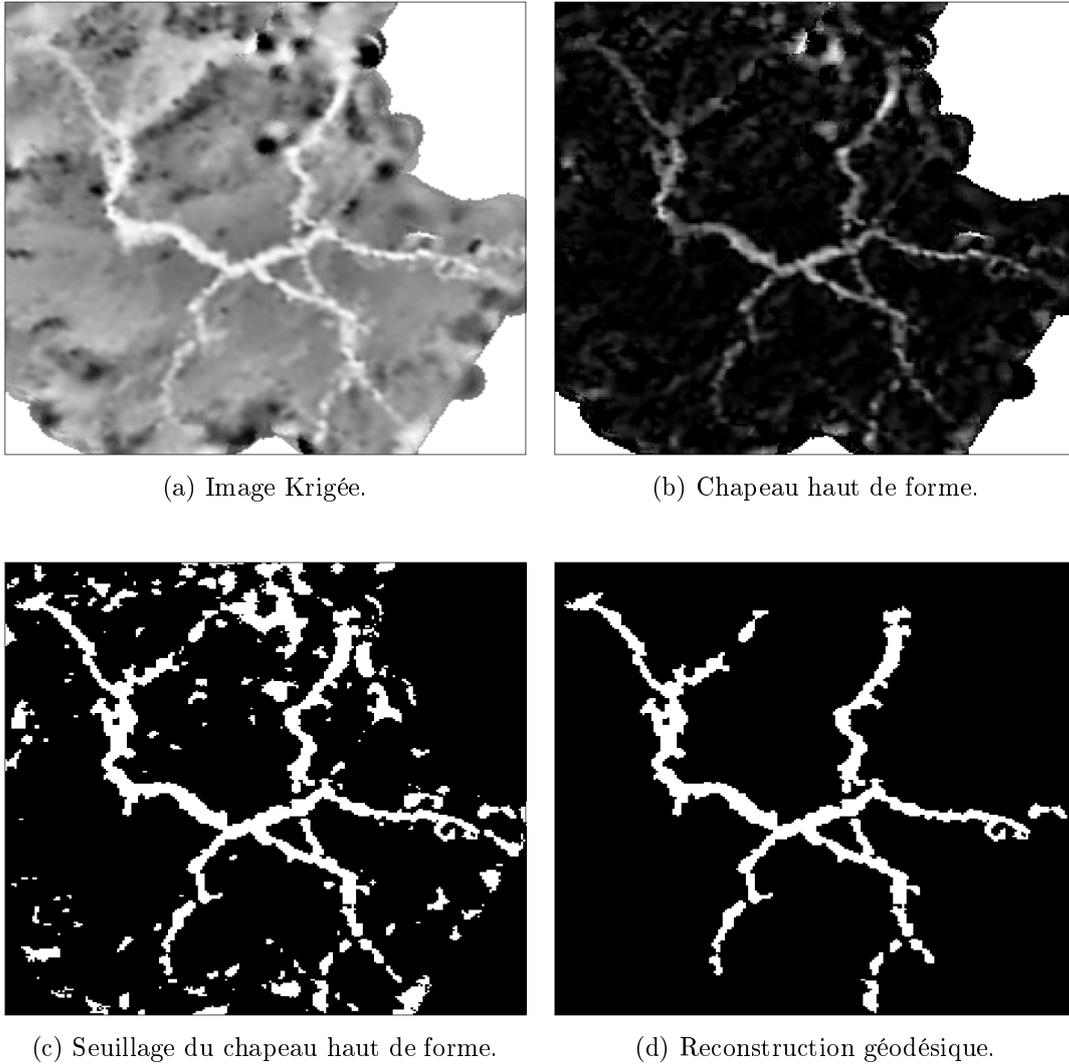


FIGURE 6.5: Les différentes étapes de la segmentation. Partant de l'image krigée (a), on calcule la transformée en chapeau haut de forme (b), puis on seuille l'image obtenue (c), et on effectue une reconstruction géodésique (d).

6.4.2.2 Estimation des M-Paramètres et krigeage

Disposant d'un masque du chenal nous choisissons d'utiliser la méthode basée sur le calcul du squelette, décrite dans 4.3, pour estimer les M-Paramètres. Nous commençons donc par calculer le squelette de Zhang de la forme binaire, nous le décomposons, nous calculons la largeur, la longueur et l'orientation du chenal

6.4 Cartographie par krigeage avec M-Paramètres

pour les pixels de son squelette puis nous propageons chacun des trois paramètres sur l'ensemble de la forme. Un point difficile concerne les zones de jonction entre les différentes branches du squelette. Nous avons déjà souligné l'importance de ces zones et le choix d'un modèle isotrope pour les gérer. Ces zones correspondent aux régions proches des points multiples du squelette de la forme. Pour les traiter, nous assignons une orientation égale à zéro au point multiple et une longueur égale à la largeur : l'ellipse de corrélation est ainsi un cercle. Enfin, l'étape de propagation permet de lisser les paramètres de manière à obtenir des zones de transition entre les différentes branches du squelette (figure 6.6). Les résultats de la figure 6.7 montrent que, comme attendu, les paramètres de taille correspondent bien localement à la largeur et à la longueur du chenal. De même l'orientation calculée correspond à l'orientation locale du chenal. Le passage de ces mesures aux M-Paramètres s'effectue immédiatement en multipliant les mesures de tailles en pixels par le pas de la grille.

Nous disposons donc maintenant de paramètres pour les deux modèles : le local et le global. D'une part, les paramètres globaux sont constants à l'extérieur du chenal. Ils proviennent de l'analyse variographique effectuée précédemment. D'autre part, les M-Paramètres sont valables uniquement à l'intérieur du chenal et s'adaptent localement à sa forme. Par conséquent, ce nouveau modèle de krigeage est formé de paramètres locaux à l'intérieur du chenal et de paramètres globaux à l'extérieur. Par souci de cohérence, nous gardons la même fonction variographique à l'intérieur comme à l'extérieur du chenal, soit un modèle cubique. Le résultat du krigeage avec ce nouveau modèle correspond à la figure 6.8. Nous pouvons constater que la forme générale du chenal est beaucoup mieux reproduite avec cette nouvelle carte. De même, les artefacts qui apparaissaient avec le krigeage global ont en grande partie disparu. Enfin, nous avons réussi à reconstruire des parties du chenal qui étaient déconnectées. Ce nouveau modèle respecte donc les contraintes géologiques que nous avons fixées avec le masque du chenal. Ces constatations sont particulièrement visibles sur des détails du chenal (figure 6.9). Les différents résultats obtenus avec la méthode binaire ont été présentés dans [Hassaine *et al.* \(2011\)](#). Nous comparerons plus en détail les résultats obtenus avec les différentes méthodes en fin de chapitre.

6. ÉTUDE DE CAS - DONNÉES BATHYMÉTRIQUES

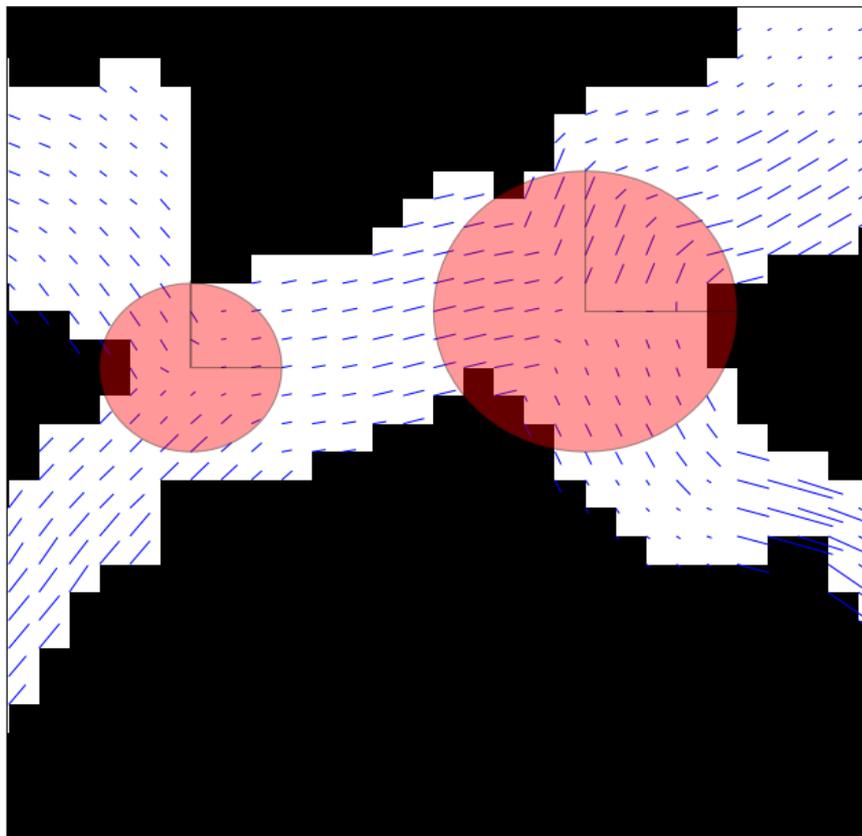
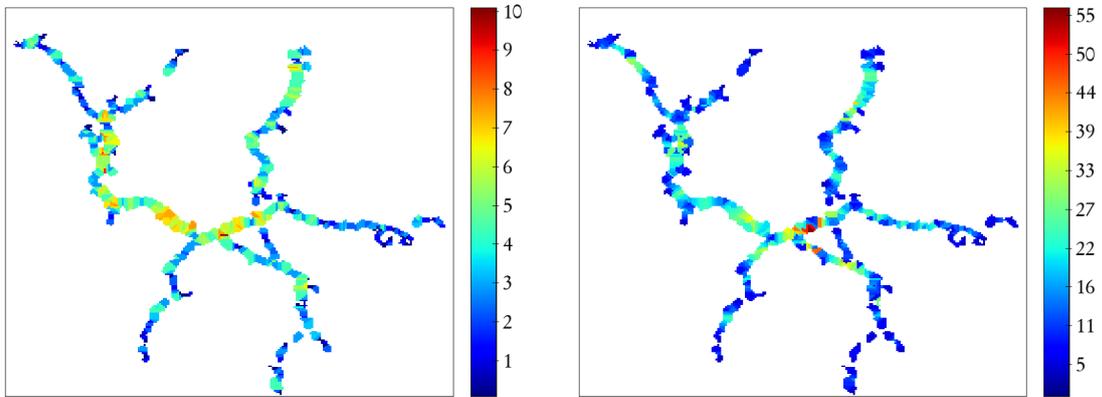


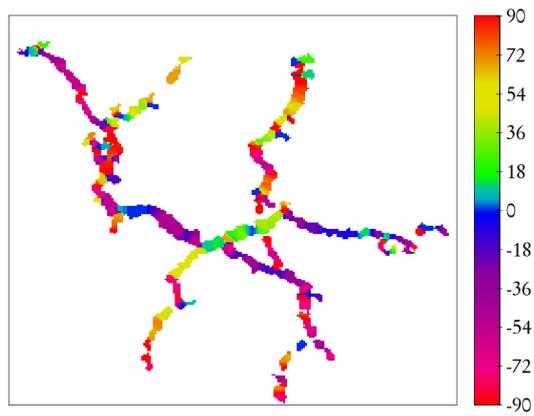
FIGURE 6.6: Représentation des paramètres du chenal sous forme de vecteurs. Les zones de transition sont considérées comme isotropes, elles correspondent donc à des cercles.

6.4 Cartographie par krigeage avec M-Paramètres



(a) Largeur en pixels.

(b) Longueur en pixels.



(c) Orientation en degrés.

FIGURE 6.7: Cartes des mesures locales à l'intérieur du chenal.

6. ÉTUDE DE CAS - DONNÉES BATHYMÉTRIQUES

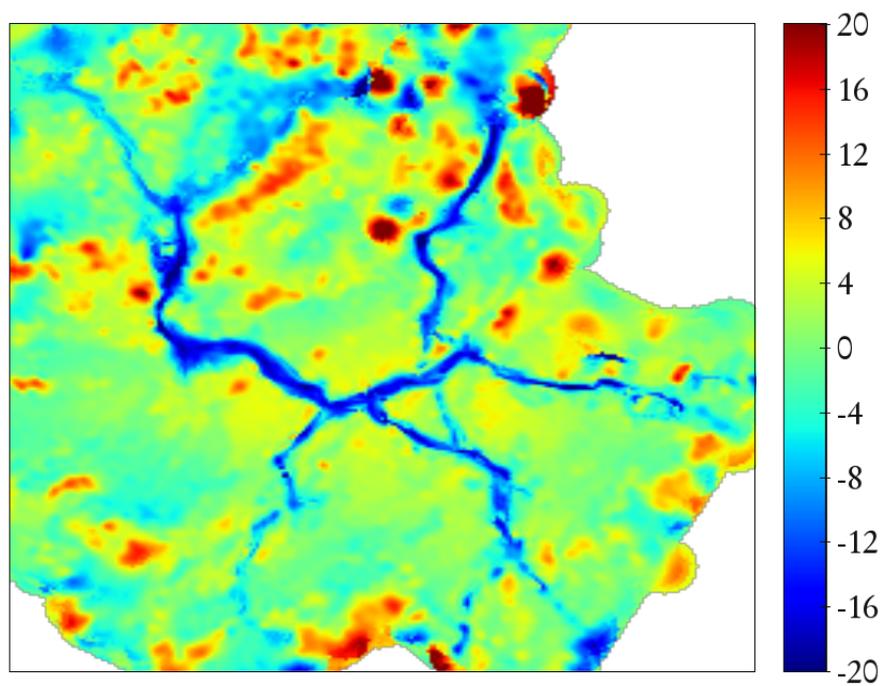


FIGURE 6.8: Krigeage avec M-Paramètres (modèle binaire).

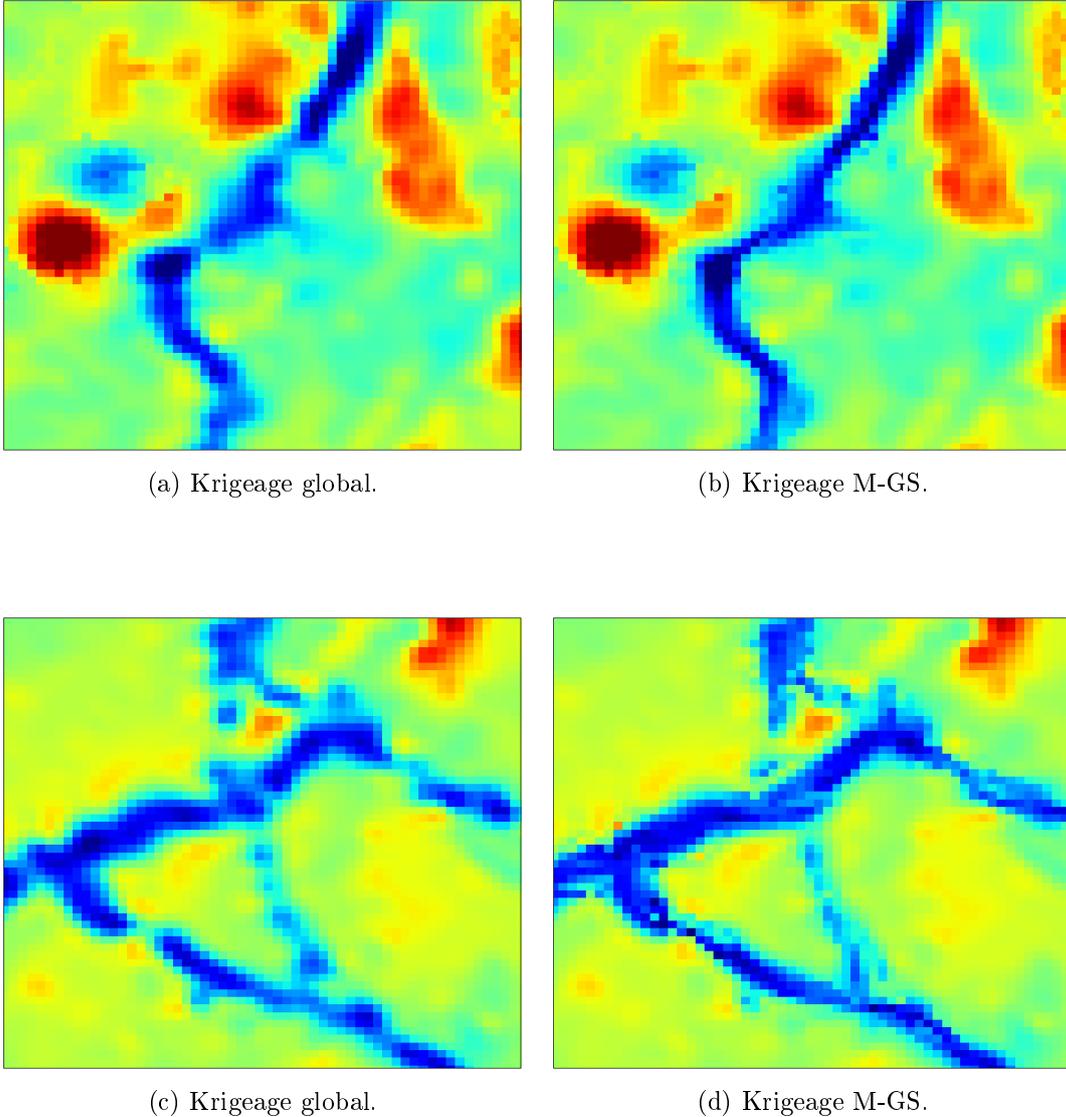


FIGURE 6.9: Détails de l'estimation. Krigage global sur la gauche et krigage avec M-Paramètres sur la droite.

6.4.3 Étude en niveaux de gris

Comme nous l'avons évoqué en introduction, la seconde manière d'appréhender ce problème consiste à étudier directement l'image krigée avec le modèle stationnaire sans effectuer de segmentation. La méthode de caractérisation en

6. ÉTUDE DE CAS - DONNÉES BATHYMÉTRIQUES

niveaux de gris est très générale et peut *a priori* s'appliquer avec n'importe quel critère. Les deux objectifs de cette caractérisation locale sont d'effacer les artefacts à proximité du chenal (l'effet de bulle) et de reconstruire les parties manquantes du chenal. Le premier objectif avait été pleinement rempli avec l'étude binaire. En effet, ces bulles s'effacent naturellement lorsque l'on caractérise l'orientation locale et la taille du chenal. Les discontinuités du chenal sont par contre plus difficiles à corriger : ces zones du chenal étant manquantes sur l'image initiale, elles n'apparaissent pas ou peu lors de la segmentation de ce dernier.

Les zones du chenal correspondant à des profondeurs plus importantes que le reste de la carte, on y retrouve donc la plupart des minima régionaux de la carte. Une manière possible de caractériser le chenal pourrait s'appuyer sur l'analyse de la disposition spatiale de ces minima. Les minima les plus significatifs pourraient être extraits en ne conservant que ceux qui ont la dynamique la plus importante. De nombreux minima correspondent aux centres des zones de morceaux du chenal. Néanmoins, ces zones n'étant pas reliées entre elles, il est difficile de les caractériser efficacement. Nous tentons donc de relier ces structures en utilisant un filtrage permettant de mettre en valeur des zones de plus grande continuité de contraste.

La première tentative consiste à effectuer une fermeture morphologique de grande taille (7 par exemple) par un élément structurant isotrope (un hexagone) sur l'image krigée puis de la caractériser par lancer de rayons en niveaux de gris et enfin d'effectuer une nouvelle estimation par krigeage. Cette méthode permet, en effet, de bien reconstruire les parties manquantes du chenal. Cependant, la fermeture a tendance à modifier la forme générale du chenal et ne permet pas de caractériser efficacement les parties les plus fines du chenal. Nous avons alors tenté une approche itérative en diminuant la taille de la fermeture morphologique pour caractériser de plus en plus finement le chenal. Nous commençons donc, comme précédemment, par une fermeture morphologique de taille 7 de l'image krigée, nous la caractérisons puis nous effectuons un nouveau krigeage avec les paramètres estimés. Ensuite, nous répétons ce même processus avec une fermeture de taille 6, puis 5, etc., jusqu'à une taille nulle. Nous constatons que les dernières caractérisations effectuées avec les fermetures morphologiques les plus petites n'apportent aucune amélioration dans l'estimation par krigeage. Au

6.4 Cartographie par krigeage avec M-Paramètres

contraire, les parties manquantes du chenal qui avaient été reconstruites grâce aux fermetures morphologiques de grande taille sont à nouveau perdues lorsque la taille de la fermeture diminue. C'est pourquoi, nous décidons de ne pas utiliser cette approche. Nous allons tenter de conserver les avantages d'une fermeture morphologique de grande taille sans modifier la forme générale du chenal.

Pour cela, nous effectuons tout d'abord une fermeture morphologique de l'image krigée d'origine puis nous effectuons le nivellement de l'image d'origine par l'image obtenue par fermeture. Le résultat de cette opération (figure 6.10) permet de reconnecter les parties manquantes du chenal tout en conservant la forme du chenal. Sur cette dernière image, le chenal apparaît plus nettement sous la forme de zones quasi-plates. Il semble donc intéressant d'utiliser cette image simplifiée pour caractériser le chenal. Le critère d'arrêt des rayons utilise ces nouvelles zones quasi-plates : en un point donné, on peut prolonger le rayon tant que la différence entre le pixel de départ et le pixel courant du rayon est plus faible qu'un certain seuil. Ce dernier se détermine facilement expérimentalement.

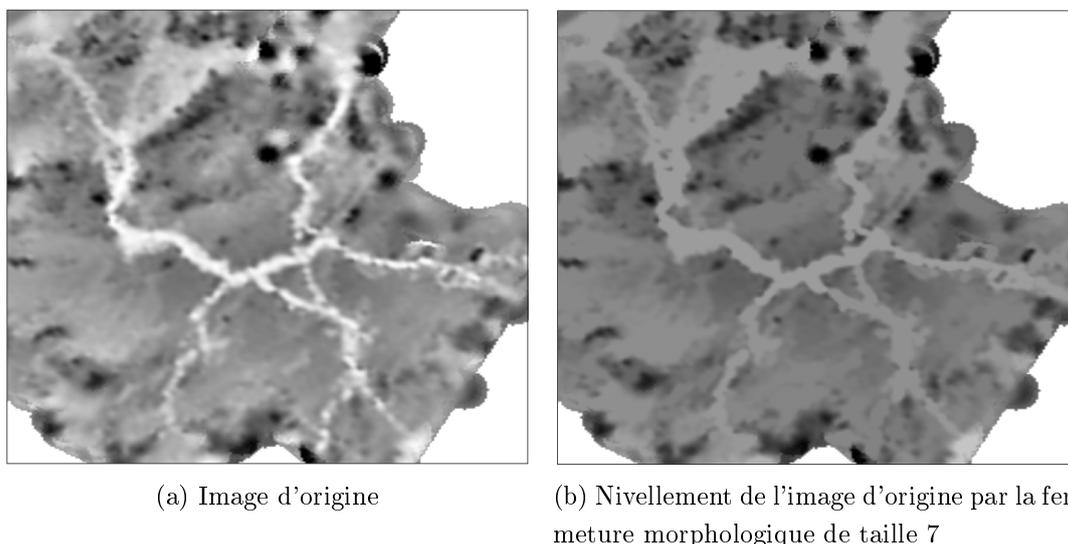


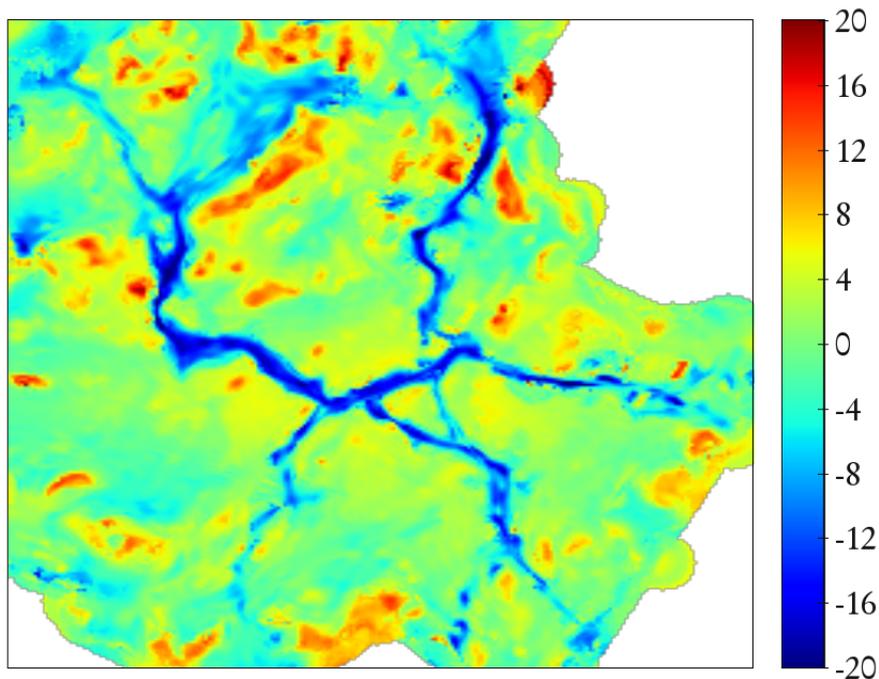
FIGURE 6.10: Pré-traitement de l'image avant d'effectuer la caractérisation en niveaux de gris.

L'obtention d'un modèle à l'extérieur du chenal est plus difficile car, contrairement à l'approche binaire, nous n'avons pas effectué de séparation nette entre

6. ÉTUDE DE CAS - DONNÉES BATHYMÉTRIQUES

le chenal et le reste des données. Cependant, le chenal a une largeur beaucoup plus faible que le reste des données et nous savons que le variogramme expérimental du début de l'étude modélise correctement l'extérieur du chenal. Ainsi, une méthode simple consiste à majorer la largeur : si en un point donné, la largeur estimée est plus importante que 1000 m , qui correspond à la portée estimée avec le modèle isotrope, alors on considère que ce point fait partie du modèle isotrope : sa portée (sa longueur et sa largeur) devient égal à 1000 m et son orientation est nulle. Ainsi, on ne conserve un modèle local qu'à l'intérieur et à proximité du chenal. La zone à proximité du chenal devient donc une zone de transition.

Le résultat de l'estimation effectuée avec ce nouveau modèle est illustré à la figure 6.11. Comme nous pouvons le constater sur la figure 6.12, l'estimation en niveaux de gris permet de mieux reconstruire les parties fines du chenal. Par contre, le modèle est, par construction, moins fidèle à l'extérieur du chenal.



(a)

FIGURE 6.11: Krigeage avec M-Paramètres (modèle en niveaux de gris).

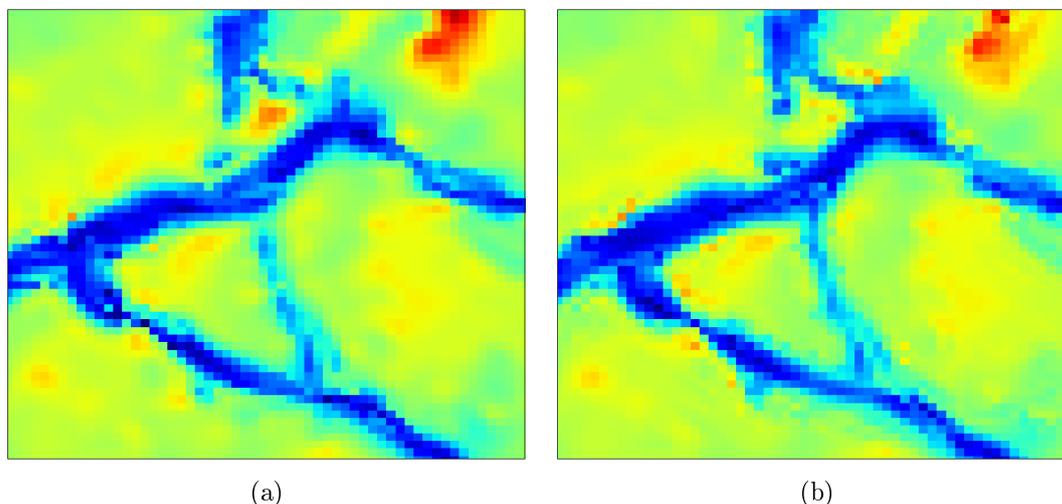


FIGURE 6.12: Comparaison de l'estimation binaire (a) et en niveaux de gris (b). L'estimation en niveaux de gris permet de mieux reconstruire les parties fines du chenal.

6.4.4 Combinaison des deux approches

D'une part, l'approche binaire a permis de séparer le chenal du reste de la carte. Cette distinction nette a permis de combiner un modèle local à l'intérieur du chenal avec le modèle global obtenu par analyse variographique. Ainsi, les artefacts présents sur la cartographie obtenue par krigeage ont presque totalement disparu et des parties manquantes ont pu être reconstruites. L'approche en niveaux de gris, d'autre part, ne permet pas de séparer directement les modèles locaux et globaux. Elle a par contre l'avantage de mieux reconstruire les parties fines du chenal que l'approche binaire. Il semble donc pertinent de vouloir combiner les deux approches : l'approche en niveaux de gris permettant dans un premier temps de reconstruire plus fidèlement le chenal qu'avec une seule approche binaire, suivie de l'approche binaire permettant de combiner rigoureusement le modèle local et le modèle global.

Ainsi, le premier temps de cette méthode combinée revient à obtenir à nouveau la carte de la méthode en niveaux de gris. Ensuite, nous utilisons cette carte pour segmenter le chenal. Le nouveau masque (figure 6.13) est plus complet que celui

6. ÉTUDE DE CAS - DONNÉES BATHYMÉTRIQUES

obtenu avec la seule méthode binaire. Nous calculons de nouveaux M-Paramètres obtenant ainsi un nouveau modèle local. En utilisant le modèle global à l'extérieur du chenal, nous en déduisons la carte finale (figure 6.14).

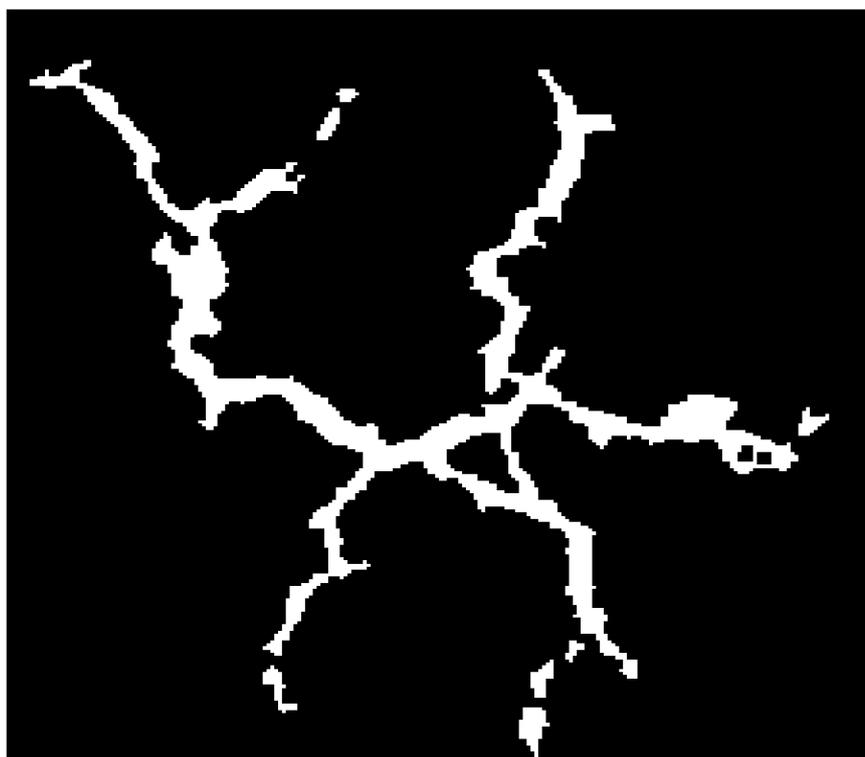


FIGURE 6.13: Nouveau masque du chenal obtenu par segmentation après avoir appliqué la méthode en niveaux de gris. Les parties fines du chenal sont cette fois-ci obtenues.

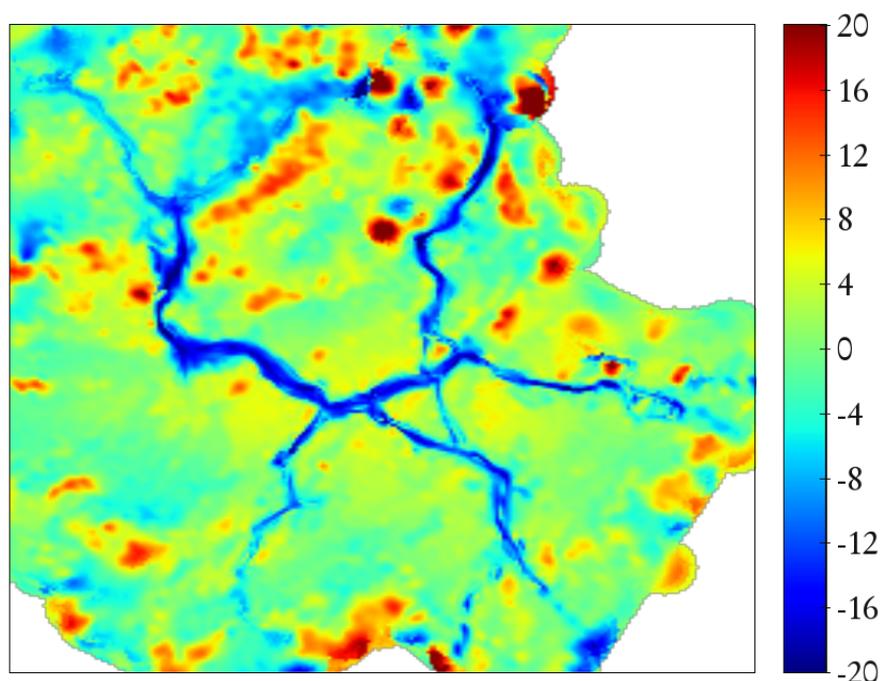


FIGURE 6.14: Cartographie finale combinant la méthode en niveaux de gris avec la partie binaire. Comme pour le masque, les parties fines du chenal sont cette fois-ci obtenues.

La figure 6.15 reprend les différents krigeages effectués. Les figures 6.16 et 6.17 proposent des détails de ces 4 estimations.

En résumé, la première approche, celle qui utilise les outils « classiques » de la géostatistique, modélise globalement bien le phénomène étudié. Cependant, elle est incapable de caractériser efficacement le chenal, car, il a un comportement local d'anisotropie très marquée et d'orientation variable que la géostatistique stationnaire ne peut pas retranscrire. L'approche par M-GS binaire, en caractérisant séparément le chenal du reste des données suite à une segmentation, permet d'obtenir un modèle cohérent du chenal et de son extérieur. Cependant, les parties du chenal qui étaient déjà manquantes avec l'approche globale ne sont que partiellement reconstruites. La troisième approche, l'approche M-GS en niveaux de gris apporte une solution au problème de reconstruction du chenal. Cependant, ne proposant pas, contrairement à l'approche binaire, de séparation claire entre le chenal et le reste de la carte, il ne permet pas d'avoir un modèle parfait.

6. ÉTUDE DE CAS - DONNÉES BATHYMÉTRIQUES

tement rigoureux à l'extérieur du chenal. La dernière approche, qui consiste en une caractérisation en niveaux de gris suivie d'une caractérisation binaire permet de combiner les avantages des deux approches précédentes : nous obtenons un modèle cohérent à l'intérieur du chenal tout comme à l'extérieur et les parties manquantes du chenal sont bien reconstruites. Nous avons donc retenu cette dernière solution.

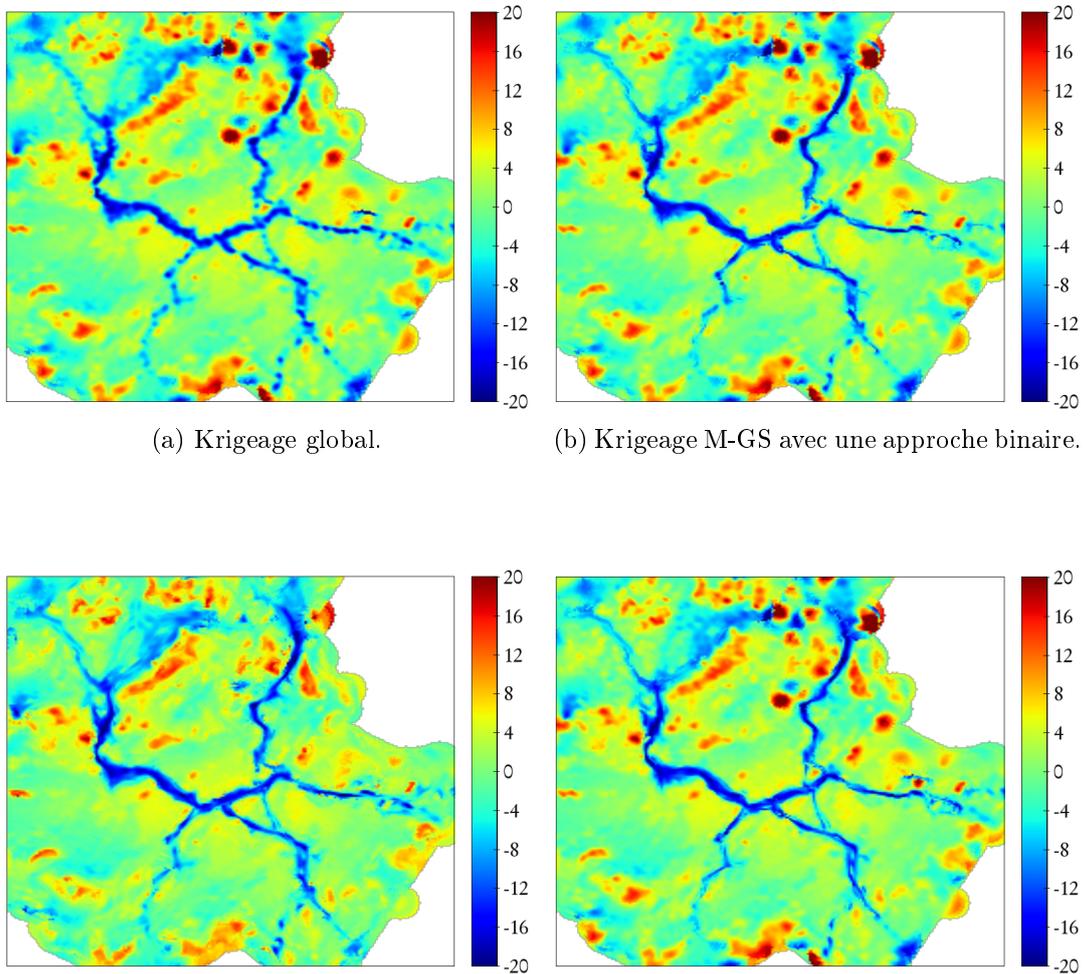
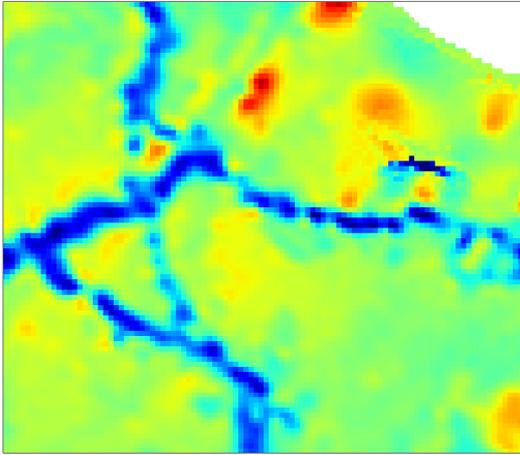
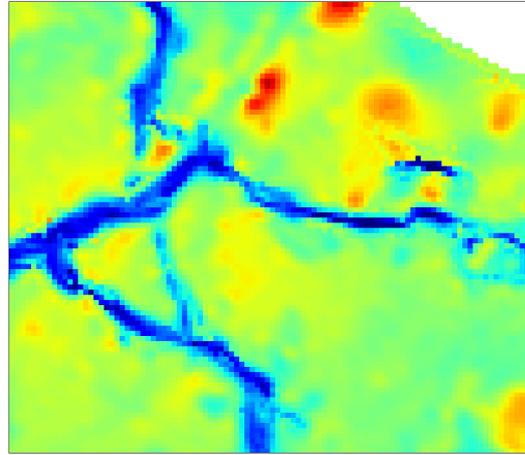


FIGURE 6.15: Synthèse des différentes estimations par krigeage effectuées.

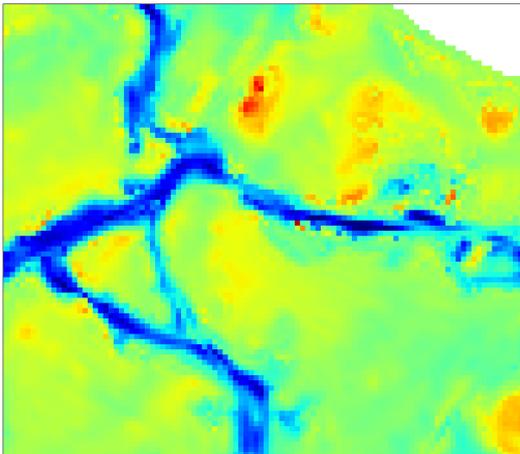
6.4 Cartographie par krigeage avec M-Paramètres



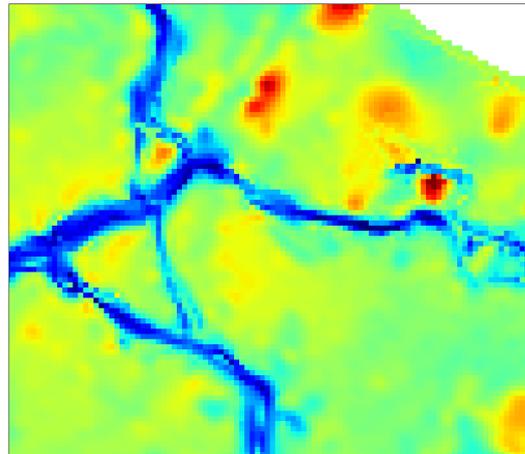
(a) Krigeage global.



(b) Krigeage M-GS avec une approche binaire.

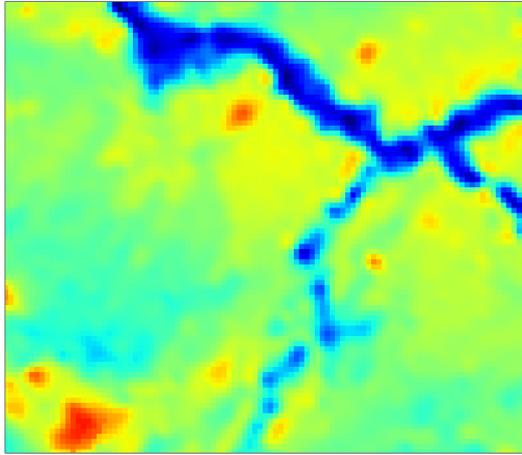


(c) Krigeage M-GS avec une approche en niveaux de gris.

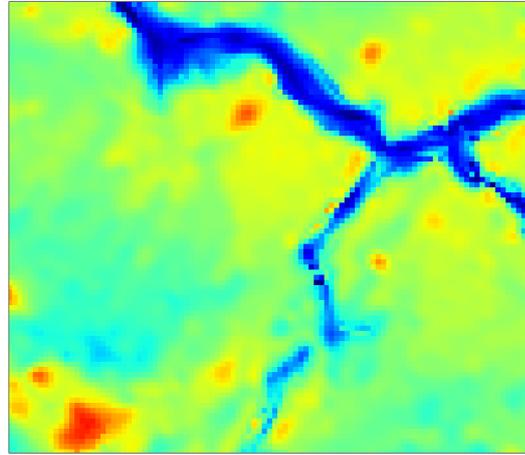


(d) Krigeage M-GS combinant l'approche en niveaux de gris et l'approche binaire.

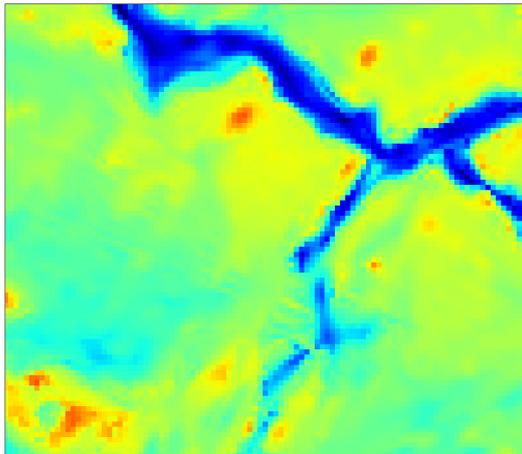
FIGURE 6.16: Premier détail des différentes estimations par krigeage effectuées.



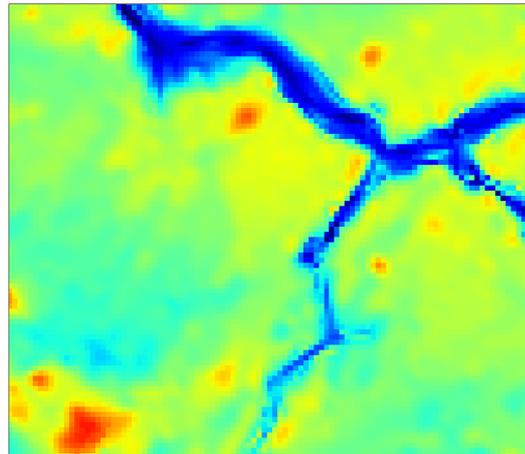
(a) Krigeage global.



(b) Krigeage M-GS avec une approche binaire.



(c) Krigeage M-GS avec une approche en niveaux de gris.



(d) Krigeage M-GS combinant l'approche en niveaux de gris et l'approche binaire.

FIGURE 6.17: Second détail des différentes estimations par krigeage effectuées.

6.5 Bilan

Le présent chapitre a permis d'utiliser de manière concrète les méthodes présentées au cours des deux précédents chapitres sur des données réelles et de développer une trame générale pour la prise en compte d'informations connues a

priori. Nous avons ainsi pu illustrer l'intérêt d'utiliser des méthodes à base de M-Paramètres lors de la présence de fortes anisotropies (ici des chenaux). Contrairement à une simple méthode de correction qui consisterait à gommer les artefacts et à reconstruire les parties manquantes du chenal manuellement avec un logiciel de traitement d'images, nous sommes non seulement capable de le faire automatiquement mais nous obtenons également et surtout de paramètres permettant de caractériser le chenal. La nouvelle carte obtenue est plus représentative, comparée à un krigeage classique, car elle respecte les contraintes géologiques que nous avons fixées. Ces contraintes peuvent être déduites automatiquement soit par segmentation (pour l'approche binaire), soit par filtrage (pour l'approche en niveaux de gris) ou elle peut être fournie par l'utilisateur sous la forme d'un masque du chenal. De ce masque, l'approche binaire permet d'obtenir directement des paramètres variographiques locaux. L'approche finalement retenue a consisté à effectuer tout d'abord une étude M-GS en niveaux de gris, suivie d'une étude M-GS binaire pour combiner les avantages de ces deux méthodologies complémentaires.

Enfin, les temps de calculs de calcul sont très courts. Sur cette grille de dimensions 400×350 , le calcul de la segmentation et des M-Paramètres dure entre 15 et 20 secondes. Le calcul des M-Paramètres avec la méthode en niveaux de gris prend quant à lui moins de 5 secondes. Le krigeage prend 46 secondes. Ces temps de calcul ont été estimés sur une machine cadencée à $2,5\text{ Ghz}$ en utilisant un seul cœur. Ainsi, cette nouvelle méthode n'est pas handicapée pas des temps de calculs trop longs.

Au cours du prochain chapitre nous verrons comment généraliser notre approche pour l'appliquer sur des données 3D.

6. ÉTUDE DE CAS - DONNÉES BATHYMÉTRIQUES

Chapitre 7

Généralisation de l'approche en trois dimensions



« Le peintre est légèrement en retrait du tableau. Il jette un coup d'œil sur le modèle ; peut-être s'agit-il d'ajouter une dernière touche, mais il se peut aussi que le premier trait encore n'ait pas été posé.

Le bras qui tient le pinceau est replié sur la gauche, dans la direction de la palette ; il est, pour un instant, immobile entre la toile et les couleurs. Cette main habile est suspendue au regard ; et le regard, en retour, repose sur le geste arrêté. Entre la fine pointe du pinceau et l'acier du regard, le spectacle va libérer son volume. »

Les mots et les choses

M. Foucault, 1966.

Toile de Vélasquez, *Les Ménines* (détail), 1656.

7. GÉNÉRALISATION DE L'APPROCHE EN TROIS DIMENSIONS

7.1 Introduction

Nous nous sommes jusqu'à présent intéressés à des données en deux dimensions. Pourtant, les méthodes et les outils de la géostatistique sont parfaitement adaptés pour traiter des données en trois dimensions. Par exemple, ils sont couramment utilisés dans le domaine pétrolier pour aussi bien modéliser des réservoirs que traiter et filtrer des cubes sismiques.

L'ajout d'une nouvelle dimension pose néanmoins plusieurs problèmes aussi bien théoriques que pratiques. D'un point de vue théorique, il est nécessaire de calculer un plus grand nombre de paramètres variographiques. D'un point de vue pratique ensuite, le traitement de données 3D peut être très coûteux en temps de calcul aussi bien pour déterminer des paramètres variographiques que pour les utiliser. Il est également nécessaire de disposer d'outils de visualisation performants de données en trois dimensions.

Conscients de l'ensemble de ces obstacles et constatations, nous allons, dans un premier temps, présenter les conventions d'utilisation des paramètres locaux 3D.

7.2 Présentation des nouveaux paramètres 3D

Les mesures locales calculées dans le cas 2D, par les méthodes de traitement d'images, étaient au nombre de 3 : 2 paramètres de taille et 1 paramètre d'orientation. L'ajout d'une troisième dimension entraîne l'apparition de 3 nouveaux paramètres : 1 paramètre de taille supplémentaire et 2 nouveaux paramètres d'orientation. Nous avons donc besoin de déterminer au total 6 paramètres : 3 paramètres de taille et 3 paramètres angulaires.

La représentation géométrique 2D des mesures locales s'effectue grâce à des ellipses. Le pendant naturel de l'ellipse en 3D est un ellipsoïde dont les grands axes correspondent aux paramètres de taille et son orientation aux paramètres d'angle.

D'après le théorème de rotation d'Euler, toute rotation dans l'espace peut se décomposer en trois rotations élémentaires suivant un axe. Les trois angles de rotation correspondants sont appelés les **angles d'Euler**. Le produit de deux

7.2 Présentation des nouveaux paramètres 3D

matrices de rotation n'étant pas commutatif, il est nécessaire de fixer une convention permettant de déterminer les angles d'Euler.

Nous considérons l'espace 3D muni d'un repère orthonormé $Oxyz$. Nous faisons le choix d'effectuer tout d'abord une rotation d'angle ϕ suivant l'axe z puis une rotation d'angle θ suivant l'axe y et enfin une rotation d'angle ψ suivant l'axe x (figure 7.1). Ces trois rotations correspondent aux matrices suivantes :

$$R_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

D'après la convention choisie, la matrice de rotation R est donc le produit de ces trois rotations :

$$R = R_x(\psi)R_y(\theta)R_z(\phi) \quad (7.4)$$

On obtient donc :

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi)\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\psi) + \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & \cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & -\cos(\theta)\sin(\psi) \\ \sin(\phi)\sin(\psi) - \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) & \cos(\phi)\sin(\psi) + \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) & \cos(\theta)\cos(\psi) \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

7. GÉNÉRALISATION DE L'APPROCHE EN TROIS DIMENSIONS

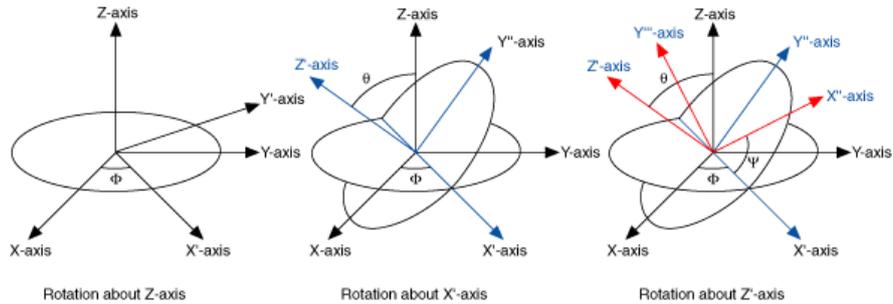


FIGURE 7.1: Convention des angles d'Euler. Image reprise du site internet <http://mathworld.wolfram.com>.

En ce qui concerne les grands axes de l'ellipsoïde, l'étude de leur valeur permet d'obtenir des caractéristiques intéressantes comme le type d'ellipsoïde rencontré relatif à son allongement et son éventuelle anisotropie.

Soient (a, b, c) les grands axes d'un ellipsoïde. Il est possible, par exemple, de classer un ellipsoïde suivant trois catégories (figure 7.2) :

- Si $a \approx b \approx c$, l'ellipsoïde est dite de type sphérique. N'ayant pas de direction privilégiée, il s'agit du cas isotrope (figure 7.2a) ;
- Si $a \gg b \approx c \approx 0$, l'ellipsoïde est de type tubulaire (figure 7.2b) ;
- Si $a \approx b \gg c \approx 0$, l'ellipsoïde est de type plat (figure 7.2c).

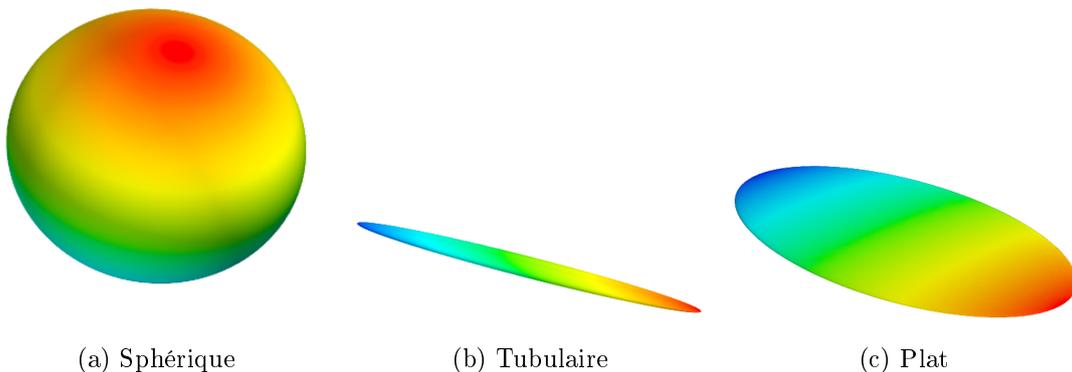


FIGURE 7.2: Les différents types d'ellipsoïdes.

7.3 Méthode de calcul des mesures locales 3D

7.3.1 Introduction

Nous avons vu aux chapitres 4 et 5 comment calculer des paramètres de forme locaux en 2D par une approche de lancer de rayons. C'est cette approche que nous allons généraliser pour déterminer des paramètres 3D.

Considérant une image de travail, la méthode dite du lancer de rayons 2D se découpe en 3 étapes :

1. construire un pavage de l'image initiale pour chacune des directions considérées (étape de **tracé des rayons**) ;
2. pour chaque droite de chacune des directions étudiées, calculer le critère d'arrêt d'un rayon permettant d'obtenir une liste d'extrémités associée à chaque pixel de l'image (étape de **calcul des extrémités**) ;
3. en chaque pixel, relier les extrémités pour créer une forme binaire puis ajuster une ellipse en calculant les moments géométriques associés à la forme (étape **d'ajustement**).

Nous allons maintenant revenir en détail sur chacune de ces étapes et tenter de les généraliser pour traiter des images à trois dimensions.

7.3.2 Tracé des rayons

Dans le cas 2D, Cette étape se réalise simplement en utilisant des droites de Bresenham (Bresenham (1965)) car elles ont la propriété de former un pavage régulier lorsqu'on les translate : les lignes successives ne se superposent pas et tous les pixels de l'images sont bien parcourus. Ensuite, pour une direction donnée, il suffit de se fixer un point de départ et un sens de translation pour obtenir le pavage. Souhaitant obtenir une caractérisation homogène, les directions de tracé sont choisies régulièrement ce qui revient à découper un cercle en n parties égales. Soient n directions de tracé, les directions θ_k sont choisies telles que :

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n} \quad (7.6)$$

7. GÉNÉRALISATION DE L'APPROCHE EN TROIS DIMENSIONS

avec $k \in i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$.

Le tracé d'une droite de Bresenham 3D n'est en soit pas un problème et il existe de nombreux algorithmes optimisés permettant de l'obtenir (Coeurjolly (2002), Klette & Rosenfeld (2004)). Cependant, le découpage régulier du cercle dans le cas 2D ne se transpose pas directement au niveau d'une sphère. Il est important de bien réaliser cette étape pour ne pas introduire un biais dans notre calcul. L'obtention du meilleur tracé régulier de n droites 3D passant par l'origine n'est pas évidente. Ceci revient à considérer le problème de distribuer $2n$ points sur la sphère unité. Ce problème, d'apparence simple, n'a, à ce jour, pas de solution : on ne connaît la solution optimale que pour quelques valeurs de n (Cohn & Kumar (2007)). Or, la notion de distribution homogène de points peut s'exprimer de différentes manières. De plus, nous imposons une contrainte supplémentaire : comme nous étudions les deux sens d'une même direction, les points doivent être deux à deux antipodaux.

Ici, nous abordons le problème de distribution de points dit de recouvrement (*covering problem*). Nous souhaitons disposer, de plus, d'une distribution avec une symétrie centrale par rapport au centre de la sphère. En d'autres termes, nous cherchons à arranger $2n$ points antipodaux sur la sphère unité de telle manière que la distance minimale entre deux points quelconques soit maximale. La solution à ce problème n'est connue que pour $n \leq 16$ (Conway *et al.* (1996)). Il existe par contre des tables fournissant des solutions approchées pour $n > 16$ ¹.

Nous disposons donc maintenant d'un algorithme de tracé de droite de Bresenham 3D et de tables permettant de connaître les directions de tracé pour un n fixé. Il ne reste plus qu'à résoudre le problème du parcours de l'ensemble des points du volume de l'image. Il est nécessaire, pour cela, de considérer un coin de l'image comme point de départ puis de parcourir le volume de l'image suivant deux translations (au lieu d'une seule dans le cas 2D). Les choix du coin de l'image et des deux translations dépendent de l'orientation de la droite considérée. Ceci signifie que pour une image volumique donnée et un coin de l'image comme point de départ du parcours, on effectue tout d'abord m translations pour parcourir toute une coupe de l'image. Ensuite, on effectue une translation de direction différente

1. Disponibles par exemple sur le site <http://www2.research.att.com/~njas/packings/index.html>

pour passer à la coupe suivante, puis on réeffectue m translations pour parcourir la nouvelle coupe, etc, jusqu'à avoir parcouru l'ensemble de l'image. La procédure en elle-même est assez technique mais on peut montrer que l'on peut regrouper les directions de telle manière que l'on ait à étudier seulement 16 cas différents. Une fois cette opération terminée, nous obtenons un pavage régulier de l'image pour chaque direction considérée.

7.3.3 Calcul des extrémités

Cette partie n'a pas besoin d'être modifiée par rapport à l'étude 2D. En effet, suite au tracé des rayons, le coeur de l'information à traiter est toujours une information à une seule dimension. Comme nous l'avions vu au chapitre 5, nous ne faisons simplement que parcourir la ligne étudiée et nous mettons à jour le critère choisi. Ainsi, l'approche 3D est valable aussi bien pour des données binaires que pour des données en niveaux de gris.

Bien que présentées de manière distinctes, ces deux étapes de tracé des rayons et de calcul des extrémités s'effectuent en réalité en simultané dans notre implémentation : une fois une ligne tracé nous calculons l'information le long de la ligne permettant d'obtenir l'extrémité associée à chaque pixel de la ligne. La seconde extrémité se déduit ensuite par symétrie. Ces différentes constatations sont vraies aussi bien dans le cas 2D que 3D. La figure 7.3 montre l'obtention des extrémités pour une forme binaire 3D.

7. GÉNÉRALISATION DE L'APPROCHE EN TROIS DIMENSIONS

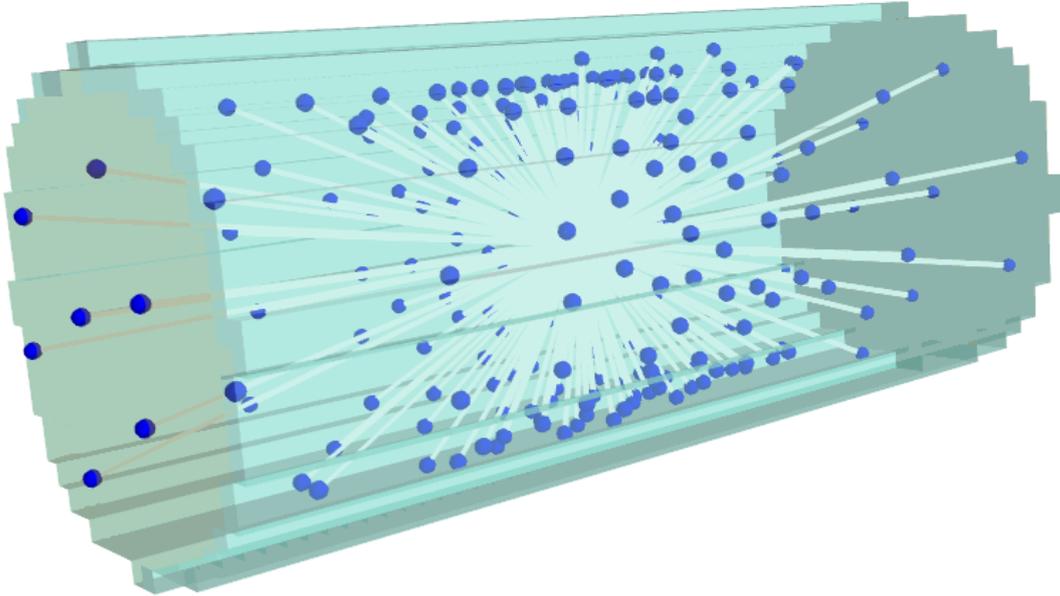


FIGURE 7.3: Exemple de détermination des extrémités pour une forme binaire 3D. Les extrémités correspondent aux points bleus.

7.3.4 Ajustement de l'ellipsoïde

7.3.4.1 Introduction

L'approche 2D consiste, pour chaque pixel étudié, à relier les extrémités obtenues pour créer une forme binaire 2D dont on calcule les moments géométriques. L'ellipse ajustée a les mêmes moments que la forme binaire.

En ce qui concerne des données 3D, deux approches sont *a priori* envisageables. La première considère l'ensemble des extrémités comme un nuage de points sur lequel on ajuste un ellipsoïde. La seconde approche revient au contraire à étudier la forme fermée associée aux extrémités, elle est donc le pendant direct de la méthode 2D.

7.3.4.2 Ajustement de l'ellipsoïde par moindres carrés

Les méthodes les plus courantes d'ajustement de quadriques sont basées sur des méthodes de moindres carrés. Néanmoins, la plupart d'entre elles ne sont pas spécifiquement adaptées à la détermination d'ellipsoïdes. Nous avons donc fait

7.3 Méthode de calcul des mesures locales 3D

le choix d'utiliser la méthode proposée par [Li & Griffiths \(2004\)](#). En effet, cette dernière méthode utilise une condition suffisante pour qu'une quadrique soit un ellipsoïde. Toute quadrique est une surface d'un espace euclidien de dimension 3 vérifiant l'équation :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy + 2px + 2qy + 2rz + d = 0. \quad (7.7)$$

Nous posons :

$$\begin{aligned} I &= a + b + c \\ J &= ab + bc + ac - f^2 - g^2 - h^2 \end{aligned} \quad (7.8)$$

[Li & Griffiths \(2004\)](#) montrent que si $4J - I^2 > 0$, alors la quadrique est un ellipsoïde. De plus, pour tout ellipsoïde, il existe un nombre réel α tel que $\alpha J - I^2 > 0$. Cependant, la condition $\alpha J - I^2 > 0$ n'est pas une condition suffisante pour qu'une quadrique soit un ellipsoïde lorsque $\alpha > 4$. Le problème d'optimisation revient donc à un déterminer un α optimal tel que l'on obtienne un ellipsoïde.

Pour cela, nous considérons un nuage de n points à ajuster : $\{p_1(x_1, y_1, z_1), p_2(x_2, y_2, z_2), \dots, p_n(x_n, y_n, z_n)\}$. Pour chaque point, nous posons

$$\mathbf{X}_i = (x_i^2, y_i^2, z_i^2, 2y_i z_i, 2x_i z_i, 2x_i y_i, 2x_i, 2y_i, 2z_i, 1)^t.$$

Nous pouvons ainsi obtenir une matrice D de taille $10 \times n$ de la forme

$$D = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n).$$

Reprenant, les paramètres de l'équation (7.8), nous posons de plus :

$$\mathbf{v} = (a, b, c, f, g, h, p, q, r, d)^t.$$

Le problème d'optimisation se formule de la manière suivante :

$$\min \|D\mathbf{v}\|^2 \quad \text{tel que} \quad kJ - I^2 = 1. \quad (7.9)$$

Ce problème de minimisation sous contrainte peut se reformuler en introduisant le paramètre de Lagrange λ . Nous posons la matrice suivante :

7. GÉNÉRALISATION DE L'APPROCHE EN TROIS DIMENSIONS

$$C_1 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{k}{2} - 1 & \frac{k}{2} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{2} - 1 & -1 & \frac{k}{2} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{2} - 1 & \frac{k}{2} - 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

À partir de cette matrice, nous pouvons définir :

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0_{6 \times 4} \\ 0_{4 \times 6} & 0_{4 \times 4} \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

En utilisant ces notations, le problème de minimisation se reformule sous la forme de la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

$$\begin{cases} DD^t \mathbf{v} = \lambda C \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t C \mathbf{v} = 1 \end{cases} \quad (7.12)$$

La résolution de ce système peut s'effectuer plus simplement en constatant que tous les éléments des quatre dernières lignes et colonnes de la matrice C sont égaux à zéro. Nous écrivons :

$$DD^t = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^t & S_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}. \quad (7.13)$$

où S_{11} , S_{12} , S_{22} sont des matrices, respectivement de tailles 6×6 , 6×4 et 4×4 . Le système (7.12) peut se réécrire :

$$\begin{cases} (S_{11} - \lambda C_1) \mathbf{v}_1 + S_{12} \mathbf{v}_2 = 0 \\ S_{12}^t \mathbf{v}_1 + S_{22} \mathbf{v}_2 = 0 \end{cases} \quad (7.14)$$

Si les données du nuage de points ne sont pas coplanaires, alors la matrice S_{22} est inversible. Nous pouvons donc écrire :

$$\mathbf{v}_2 = -S_{22}^{-1} S_{12}^t \mathbf{v}_1. \quad (7.15)$$

7.3 Méthode de calcul des mesures locales 3D

En remplaçant cette dernière équation dans (7.14), et comme la matrice C_1 est inversible, nous obtenons :

$$C_1^{-1}(S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^t)\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1. \quad (7.16)$$

En effectuant cette simplification, nous nous ramenons ainsi, de la résolution d'un système de taille 10×10 (équation (7.12)), à la résolution d'un système de taille 6×6 (équation (7.14)). Dans la plupart des cas, la matrice $(S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^t)$ est positive et possède une seule valeur propre positive. Dans le cas contraire, on considère la plus grande des valeurs propres. Soit \mathbf{u}_1 , le vecteur propre associé à la valeur propre précédente et soit $\mathbf{u}_2 = -S_{22}^{-1}S_{12}^t\mathbf{u}_1$. Le vecteur $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1^t, \mathbf{u}_2^t)$ est solution du système (7.12).

Si la matrice S_{22} n'est pas inversible, il suffit d'effectuer le même raisonnement en remplaçant l'inverse de S_{22} par sa pseudo-inverse.

La condition $4J - I^2$ correspond à un sous-ensemble d'ellipsoïdes de types sphériques. Lorsque l'ellipsoïde s'approche de ce type, l'ajustement est direct en prenant $k = 4$.

Au contraire, lorsque l'ellipsoïde recherché s'apparente plus à une forme tubulaire ou plate, il est nécessaire de rechercher une valeur optimale de k . Pour cela, [Li & Griffiths \(2004\)](#) proposent une procédure de recherche. On commence par rechercher une valeur maximale k_2 de k telle que la quadrique soit un ellipsoïde. Ensuite, nous effectuons une recherche dans l'intervalle $\{k_1; k_2\}$ par dichotomie avec $k_1 = 3$. Partant de $k = (k_1 + k_2)/2$, si le quadrique obtenu est un ellipsoïde, alors $k_1 = k$, sinon $k_2 = b$. Nous itérons ce processus jusqu'à ce que la différence entre k_1 et k_2 soit plus petite qu'un certain seuil fixé. D'un point de vue pratique, cette procédure est rapide et permet d'obtenir d'excellents résultats.

7.3.4.3 Ajustement de l'ellipsoïde par le calcul des moments d'inertie

La seconde méthode d'ajustement d'ellipsoïde est basée sur le calcul de la **matrice d'inertie**. Cet opérateur, bien connu dans le domaine de la mécanique, permet de mesurer la résistance d'un solide lorsque l'on tente de lui appliquer une rotation. La connaissance de la matrice d'inertie I permet d'en déduire un ellipsoïde équivalent. Cette matrice, symétrique, s'écrit de la manière suivante :

7. GÉNÉRALISATION DE L'APPROCHE EN TROIS DIMENSIONS

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad I_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) \quad I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \\ I_{xy} = I_{yx} = \sum_i m_i x_i y_i \\ I_{xz} = I_{zx} = \sum_i m_i x_i z_i \\ I_{yz} = I_{zy} = \sum_i m_i y_i z_i \end{array} \right. \quad (7.18)$$

Au cours des calculs effectués, les masses m_i sont égales à 1. (x_i, y_i, z_i) correspondent aux coordonnées des voxels étudiés.

Les éléments diagonaux de la matrice d'inertie (équation 7.17) sont appelés les **moments d'inertie**, les autres éléments étant les **produits d'inertie**.

La matrice I est symétrique définie positive, elle est donc diagonalisable. Dans cette nouvelle base, les produits d'inertie deviennent nuls. La diagonalisation permet d'obtenir un nouveau repère dans lequel l'inertie d'une forme est minimale, elle correspond donc à l'orientation locale de cette forme. La matrice de passage P qui permet de passer du repère fixe de l'image au repère local de la forme est constitué des vecteurs propres ; ils constituent les axes principaux d'inertie de la forme. Les nouveaux éléments diagonaux de la matrice I' sont les valeurs propres (équation 7.19) ; on les appelle les **moments principaux d'inertie**. Le vecteur propre associé à la plus petite des valeurs propres constitue la direction principale de la forme, les deux autres lui sont orthogonales.

$$I' = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

P étant une matrice de rotation il est possible d'en déduire directement les angles d'Euler (ϕ, θ, ψ) correspondants en identifiant ses termes avec ceux de la

7.3 Méthode de calcul des mesures locales 3D

matrice de rotation de l'équation (7.5). Il est par contre nécessaire de distinguer un cas particulier : si $\cos(\theta) = 0$, c'est-à-dire si $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Nous obtenons les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\phi &= \arctan\left(\frac{p_{01}}{p_{00}}\right) \\ \theta &= \arcsin(p_{02}) \\ \psi &= -\arctan\left(\frac{p_{12}}{p_{22}}\right).\end{aligned}\tag{7.20}$$

si $p_{02} \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}\phi &= 0 \\ \theta &= \operatorname{sgn}(p_{02}) \cdot \frac{\pi}{2} \\ \psi &= \operatorname{sgn}(p_{02}) \cdot \arctan\left(\frac{p_{10}}{p_{11}}\right).\end{aligned}\tag{7.21}$$

si $p_{02} = \pm 1$

De plus, les moments principaux d'inerties se relient quant à eux aux rayons de l'ellipsoïde ayant les mêmes moments d'inertie. A partir de la connaissance des moments principaux d'inertie d'un ellipsoïde (formules 7.22), nous pouvons déduire les rayons (a, b, c) de l'ellipsoïde équivalente d'une forme 3D (formules 7.23) où m est égal au nombre d'extrémités :

$$\begin{aligned}I_1 &= m \frac{b^2 + c^2}{5} \\ I_2 &= m \frac{a^2 + c^2}{5} \\ I_3 &= m \frac{a^2 + b^2}{5}.\end{aligned}\tag{7.22}$$

7. GÉNÉRALISATION DE L'APPROCHE EN TROIS DIMENSIONS

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{5 I_{yy} + I_{zz} - I_{xx}}{2m}} \\ b &= \sqrt{\frac{5 I_{xx} + I_{zz} - I_{yy}}{2m}} \\ c &= \sqrt{\frac{5 I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}}{2m}}. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Cependant, nous ne disposons que de la connaissance d'un nuage de points. La reconstruction d'une forme 3D à partir d'un simple nuage de points est un problème difficile. Ne souhaitant donc pas aborder un tel sujet, nous nous contentons de calculer la matrice d'inertie et d'effectuer les calculs associés à partir de la seule connaissance des extrémités. Le risque est grand d'effectuer une erreur importante d'ajustement si le nombre de rayons tracés est trop faible. Dans la pratique, avec un nombre de directions de rayons suffisant (à partir de 50 par exemple), nous obtenons des résultats comparables à ceux de la méthode d'ajustement spécifique d'un ellipsoïde.

7.3.4.4 Comparaison des deux méthodes d'ajustement

Nous disposons de deux méthodes qui permettent de déterminer l'ellipsoïde associé à un nuage de points. Nous avons effectué des tests, tout d'abord sur des images très simples, puis sur des cas réels, pour comparer d'un point de vue pratique les deux méthodes. Il ressort de ces différents essais que les valeurs angulaires obtenues avec les deux méthodes sont quasiment identiques. Aucune des deux méthodes ne se détache sur ce point. Par contre, pour les paramètres de taille, nous avons constaté que la méthode par moindres carrés donne dans l'ensemble de meilleurs résultats que la méthode basée sur les moments d'inertie. En effet, cette dernière méthode a légèrement tendance à sous-estimer les tailles. Nous l'expliquons en partie par le fait que, dans la méthode des calculs d'inertie, nous considérons que le nuage de points est une forme pleine 3D. Cependant, la méthode de moindres carrés est légèrement plus gourmande en temps de calcul que celle basée sur le calcul des moments d'inertie. Ainsi, dans la pratique, nous avons fait le choix d'utiliser la méthode de moindres carrés tout en gardant à l'esprit que nous pouvons utiliser la méthode basée sur les moments d'inertie si

nous avons besoin d'une méthode de calcul plus rapide qui fournit tout de même des résultats corrects.

Un exemple de lancer de rayons 3D et de l'ajustement d'ellipsoïde associé est illustré en figure 7.4.

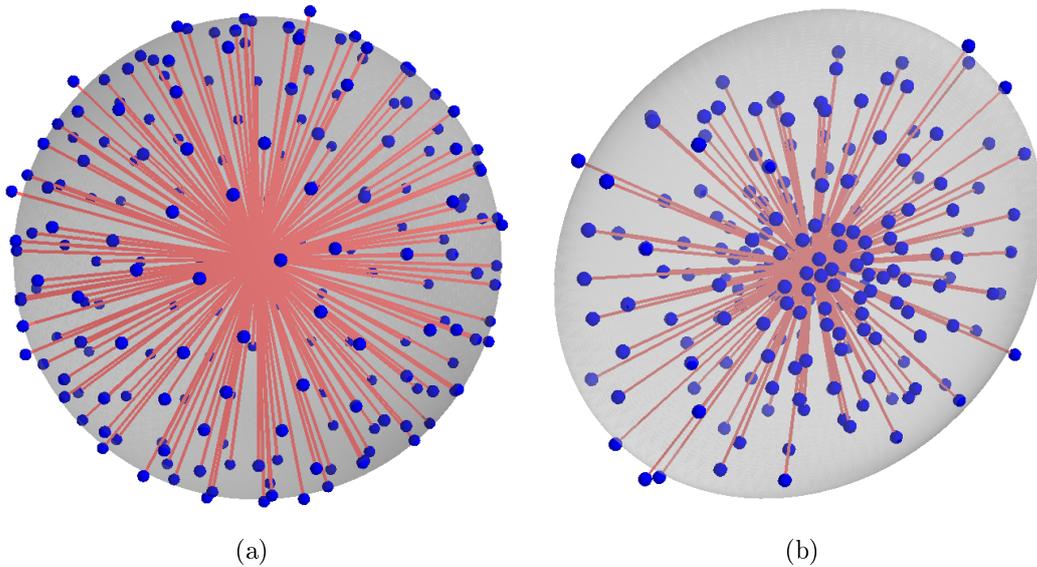


FIGURE 7.4: Ajustement d'ellipsoïde à partir des extrémités.

7.4 Visualisation des M-Paramètres 3D

La représentation des M-Paramètres 2D s'effectue à l'aide de trois outils de visualisation :

- les cartes de chacun des M-Paramètres ;
- les champs de vecteurs (éventuellement décimés d'un certain facteur) ;
- les ellipses de corrélation locale.

Dans le cas à deux dimensions, la représentation scalaire des cartes de M-Paramètres est pertinente mais insuffisante car l'information angulaire est difficile à interpréter. De plus, l'information est répartie sur 3 cartes différentes. L'approche par

7. GÉNÉRALISATION DE L'APPROCHE EN TROIS DIMENSIONS

champs de vecteurs permet de s'affranchir de ces deux défauts : l'information angulaire s'interprète facilement et la norme du vecteur représente le ratio entre les deux portées. Le troisième outil, via les ellipses de corrélation, fournit l'ensemble des informations, à savoir les portées et l'angle de la structuration locale, à l'aide des deux axes principaux et de son orientation.

Il est malheureusement difficile, voire problématique, de transposer directement ces outils pour représenter ces informations dans le cas de données en trois dimensions. Nous allons illustrer notre analyse à l'aide de l'exemple de la figure 7.5 qui représente un cylindre.

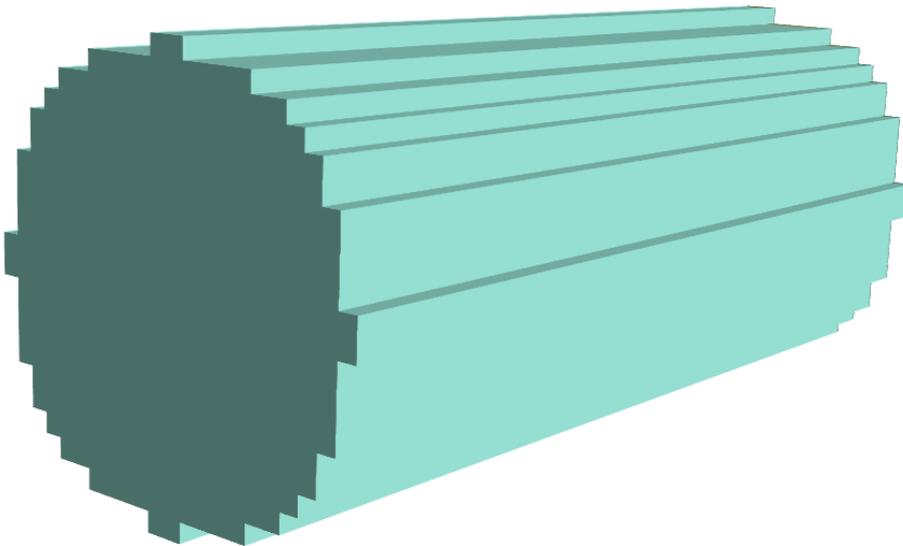


FIGURE 7.5: Forme cylindrique.

La représentation des cartes de M-Paramètres 3D peut directement s'effectuer. Bien que disponible sur l'ensemble du volume 3D, cette information est plus facilement interprétable lorsqu'on la visualise sur une simple coupe 2D (figure 7.6). Néanmoins, ce rendu sous la forme de coupes 2D souffre des mêmes limitations que le cas 2D : l'information angulaire est toujours difficile à interpréter et il est, de plus, nécessaire de disposer de 6 cartes, correspondant à chacun des

7.4 Visualisation des M-Paramètres 3D

M-Paramètres, pour recueillir l'ensemble de l'information.

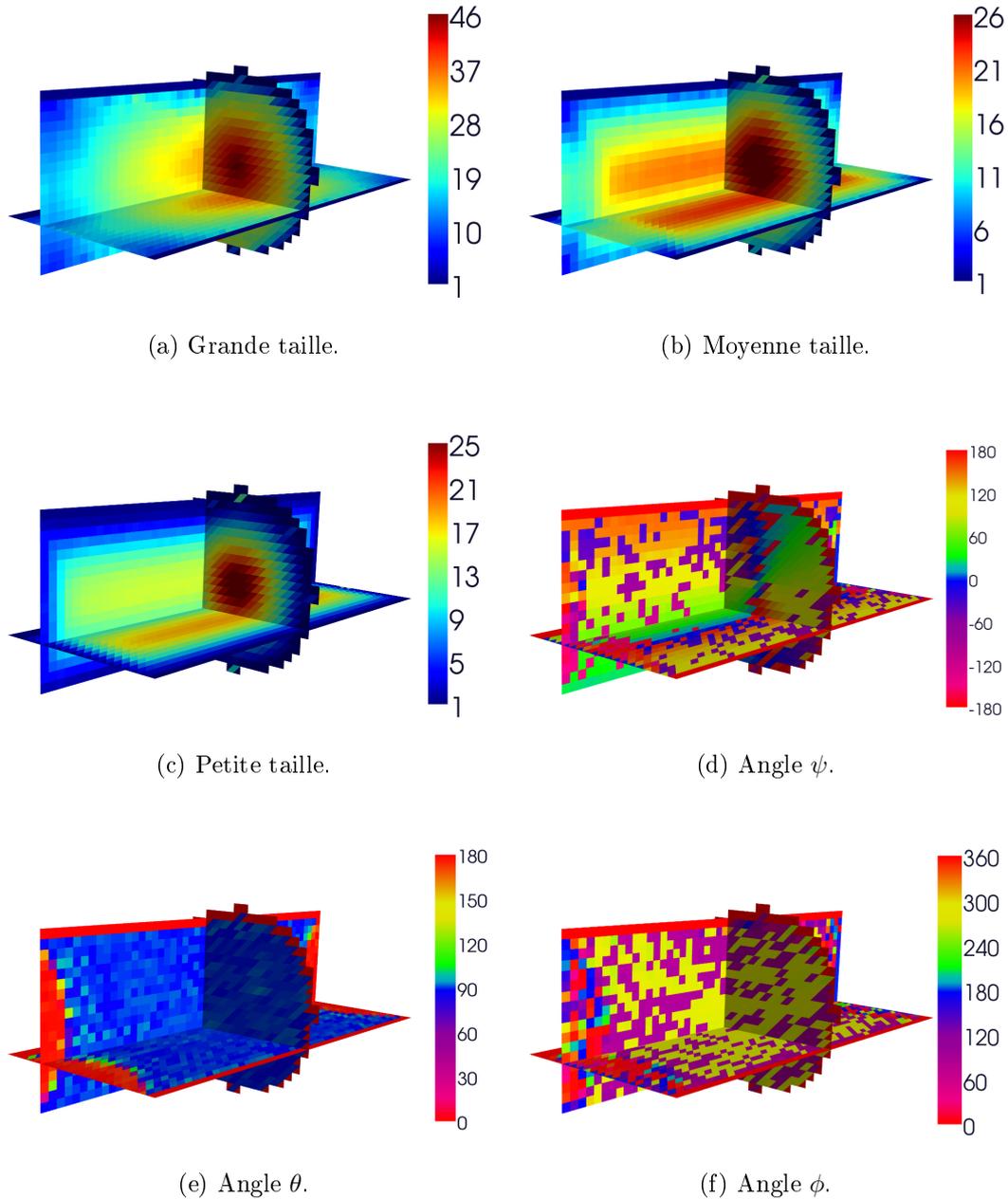


FIGURE 7.6: Les 6 paramètres calculés représentés le long de plans 2D du cylindre.

La visualisation de champs de vecteurs 3D est également possible (figure 7.7). Elle pâtit pourtant, cette fois-ci, de deux inconvénients :

7. GÉNÉRALISATION DE L'APPROCHE EN TROIS DIMENSIONS

- il est nécessaire de définir un nouveau rapport d'anisotropie (par exemple, celui de l'équation (7.24)), ce qui rend la lecture de l'information de taille moins évidente. Il est important de noter que c'est la couleur, et non plus la norme du vecteur, qui varie suivant la valeur du ratio ;
- il n'est possible de représenter que deux rotations avec des vecteurs : celle suivant z et celle suivant y . Nous aurions également pu nous intéresser à la direction de plus grande continuité (direction du plus grand axe). Il y a donc également une perte d'information angulaire en ce qui concerne la rotation suivant l'axe x .

$$r = \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}}. \quad (7.24)$$

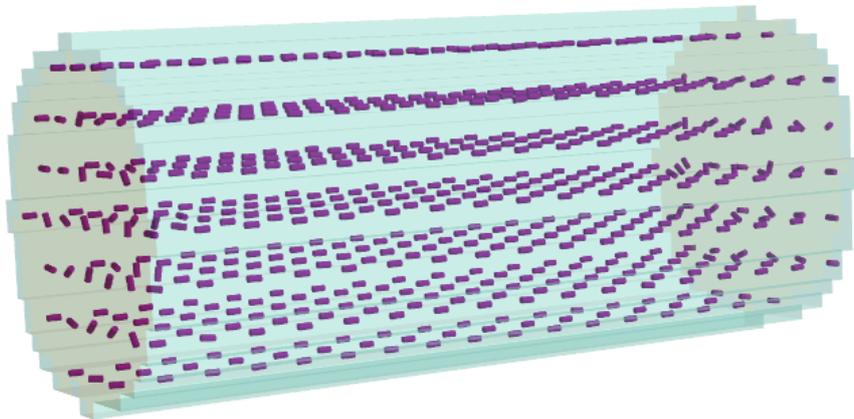


FIGURE 7.7: Représentation des M-Paramètres de taille unitaire par des vecteurs à l'intérieur du cylindre.

De même que pour la représentation 3D sous la forme de cartes, les vues des champs de vecteurs peuvent s'effectuer aussi bien sur l'ensemble du volume 3D

7.4 Visualisation des M-Paramètres 3D

que sur un plan de coupe 2D. La représentation des vecteurs sur un plan 2D semble plus pertinente que sur l'ensemble du volume 3D (figure 7.8).

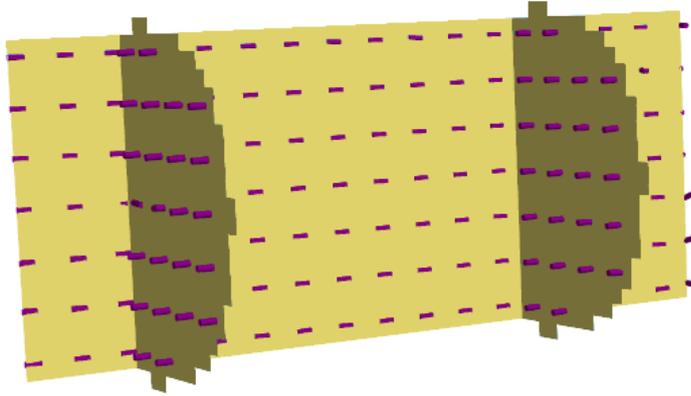


FIGURE 7.8: Représentation des M-Paramètres par des vecteurs le long de plans 2D.

Enfin, la dernière représentation possible correspond à des ellipsoïdes (figure 7.9). Cette dernière est la généralisation directe de la représentation elliptique à deux dimensions. Elle souffre donc des mêmes avantages et inconvénients : elle décrit bien l'ensemble des M-Paramètres (les 3 portées et les 3 orientations) mais il n'est pas possible de représenter cette information sur tous les nœuds de la grille à cause du chevauchement des ellipsoïdes. La décimation du champ d'ellipsoïdes permet de résoudre en partie ce problème. Il est possible de visualiser les champs d'ellipsoïdes sur l'ensemble du volume 3D ou sur des coupes le long de plans 2D. La représentation des ellipsoïdes sur l'ensemble du volume 3D semble très intéressante lorsque l'on travaille sur des données de type chenalissante comme nous le verrons lors de l'étude d'un *geobody*.

7. GÉNÉRALISATION DE L'APPROCHE EN TROIS DIMENSIONS

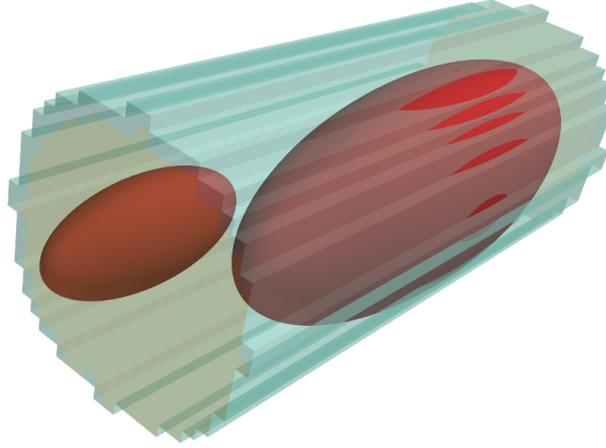


FIGURE 7.9: Représentation des M-paramètres sous la forme d'ellipsoïdes.

D'une manière générale, il n'existe pas de moyen de représentation générique des M-Paramètres à trois dimensions ni de solution clef en main, comme nous avons pu le voir sur cet exemple volontairement très simple et facilement interprétable. Une solution possible consiste très certainement en une combinaison de ces différents outils de visualisation et à être conscient qu'il très difficile de représenter toute l'information disponible sur une seule figure. Il est donc important d'effectuer des choix pour faire ressortir les informations les plus importantes.

7.5 Exemple d'utilisation

L'exemple choisi provient du domaine de l'amont pétrolier. Il concerne la caractérisation en termes de M-Paramètres d'un corps géologique 3D. Cette caractérisation est importante en ce sens qu'elle peut être utile à des applications de caractérisation de réservoir, et plus précisément de spatialisation par krigeage ou simulation d'informations de puits, telles que la porosité, la perméabilité et le faciès des roches. L'idée est d'utiliser le *geobody* comme guide à la spatialisation via l'emploi de M-Paramètres.

Les données de la figure 7.10 représentent un *geobody*, c'est-à-dire une zone dont la composition lithologique est différente du reste de son environnement : par

exemple, une composition sableuse entourée d'argiles. La prise en compte d'une telle zone est fondamentale pour obtenir des modèles géologiques et de réservoirs réalistes. Nous supposons ici que l'extraction du geobody a déjà été effectuée.

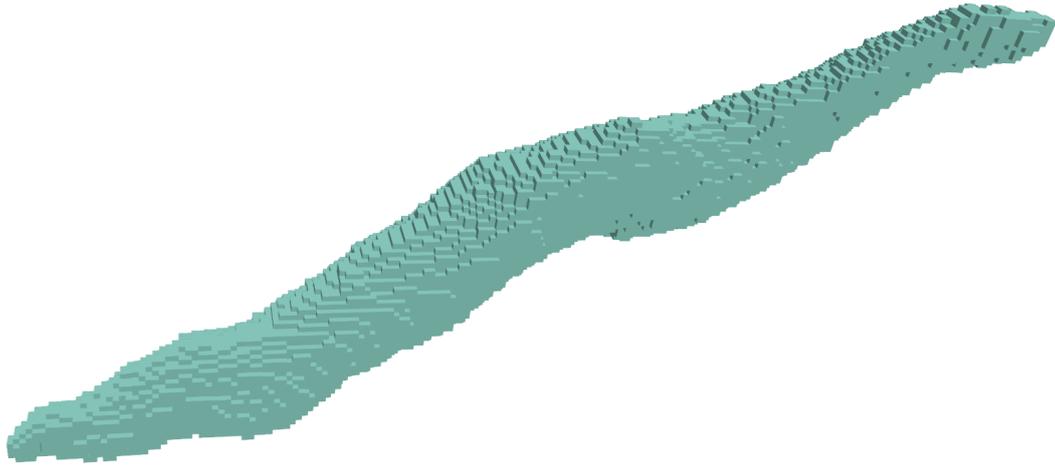


FIGURE 7.10: Exemple de *geobody*.

L'étape suivante consiste à analyser ce *geobody* pour pouvoir prendre en compte ses caractéristiques morphologiques dans des modèles géologiques. Afin de réaliser cette caractérisation, nous appliquons la méthode de lancer de rayons 3D, que nous venons de présenter, à ce *geobody*. Le cube complet a des dimensions de $182 \times 78 \times 44$. Le calcul des M-Paramètres prend un peu plus de 2 minutes. Nous obtenons alors six cartes de M-Paramètres : les trois paramètres de taille et les trois paramètres angulaires. Nous constatons que les représentations vues précédemment de ces paramètres sous la forme de vecteurs (figure 7.11) et d'ellipsoïdes (figure 7.12) sont particulièrement intéressantes pour des données de type chenalisante.

7. GÉNÉRALISATION DE L'APPROCHE EN TROIS DIMENSIONS

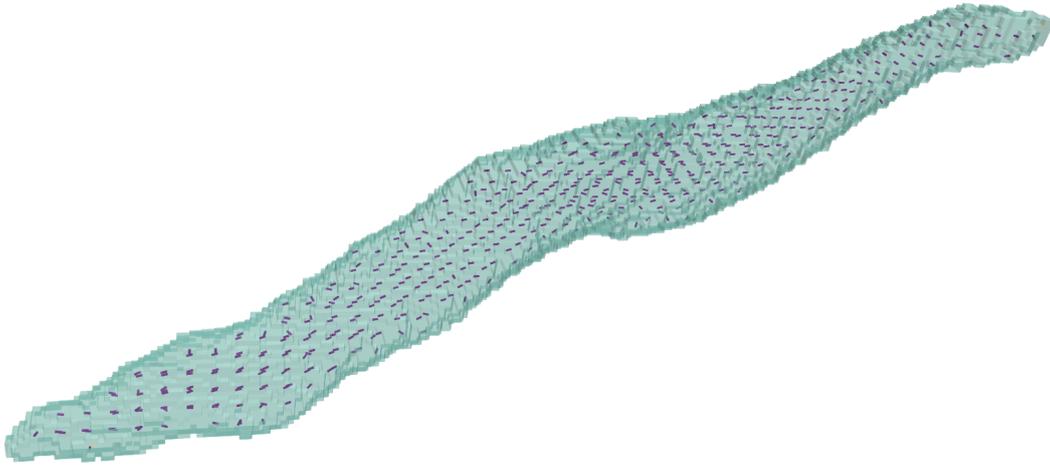


FIGURE 7.11: Représentation des M-Paramètres par des vecteurs à l'intérieur du *geobody*.

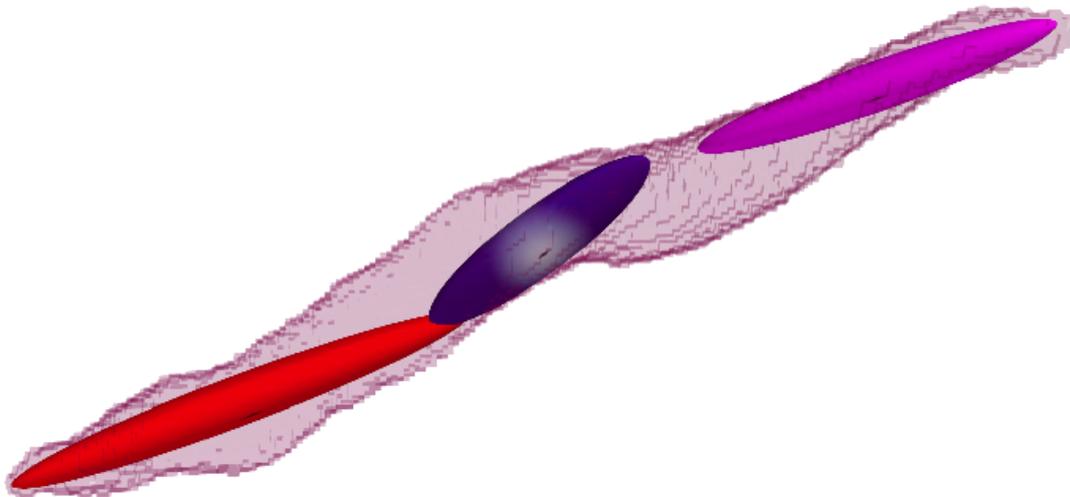


FIGURE 7.12: Représentation des M-Paramètres par des ellipsoïdes à l'intérieur du *geobody*. Les couleurs associées aux ellipsoïdes n'ont ici pas de signification particulière. Elles permettent seulement de bien les distinguer.

Nous aurons l'occasion au cours du chapitre 9 d'effectuer une caractérisation sur un *geobody* issu de données réelles et de montrer plus en détail les résultats obtenus. C'est pourquoi, nous ne nous attardons pas sur cet exemple. Cependant, nous avons déjà pu vérifier à travers cet exemple synthétique que les temps de

calcul sont courts pour des données 3D et que la caractérisation obtenue retranscrit correctement l'orientation et les dimensions locales du *geobody*. L'ensemble des paramètres obtenus peut être introduit dans un processus de spatialisation par krigeage ou simulation d'informations de puits.

7.6 Conclusion du chapitre

Nous avons vu au cours de ce chapitre comment généraliser notre approche de lancer de rayons pour caractériser localement des données en 3 dimensions. Comme dans le cas 2D, ces mesures locales correspondent directement aux M-Paramètres. Nous avons pu constater à travers l'exemple de caractérisation d'un *geobody* que cette approche permet d'obtenir des résultats très satisfaisants dans des temps de calcul courts. C'est un point très important à considérer si l'on souhaite traiter de manière opérationnelle des volumes de données 3D. Nous avons également souligné au cours de ce chapitre la difficulté de représentation des M-Paramètres 3D. Il n'existe pas d'outil idéal unique mais un ensemble d'outils que la pratique de chacun sélectionnera. Nous aurons l'occasion au cours du deuxième cas d'application du chapitre 9 d'effectuer une nouvelle caractérisation d'un *geobody* 3D.

Le prochain chapitre constituera le dernier apport théorique de ce manuscrit. Il occupe une place particulière par rapport aux autres chapitres méthodologiques car nous n'allons pas chercher à optimiser directement des portées ou des orientations. Au contraire, nous allons revenir plus en détail sur la notion de distance en géostatistique car elle intervient à plusieurs niveaux : pendant l'étape de calcul du variogramme expérimental, lors de la détermination du voisinage et pendant l'estimation. L'ensemble des outils de la géostatistique utilise des distances euclidiennes. Cependant certains phénomènes n'ont pas un comportement spatial basé sur cette distance. Nous allons donc maintenant nous demander s'il est possible de concilier les outils de la géostatistique avec des distances non-euclidiennes pour mieux appréhender ces phénomènes.

7. GÉNÉRALISATION DE L'APPROCHE EN TROIS DIMENSIONS

Chapitre 8

Utilisation de distances non-euclidiennes en géostatistique

« Le tracé de ce chemin de fer ne suit pas la ligne droite à travers l'Inde. La distance à vol d'oiseau n'est que de mille à onze cents milles, et des trains, animés d'une vitesse moyenne seulement, n'emploieraient pas trois jours à la franchir ; mais cette distance est accrue d'un tiers, au moins, par la corde que décrit le railway en s'élevant jusqu'à Allahabad dans le nord de la péninsule. Voici, en somme, le tracé à grands points du « Great Indian peninsular railway ». En quittant l'île de Bombay, il traverse Salcette, saute sur le continent en face de Tannah, franchit la chaîne des Ghâtes-Occidentales, court au nord-est jusqu'à Burhampour, sillonne le territoire à peu près indépendant du Bundelkund, s'élève jusqu'à Allahabad, s'infléchit vers l'est, rencontre le Gange à Bénarès, s'en écarte légèrement, et, redescendant au sud-est par Burdivan et la ville française de Chandernagor, il fait tête-de-ligne à Calcutta. »

Le tour du monde en 80 jours

J. Verne

8.1 Introduction

Au cours du présent chapitre, nous ne tenterons plus d'estimer localement des paramètres de portée ou d'orientation mais nous travaillerons à la recherche de distances réalistes entre points de données. Le point de départ de notre réflexion se résume en cette simple question : est-il possible d'utiliser d'autres distances que la distance euclidienne pour effectuer des estimations géostatistiques ? La géostatistique offre un cadre opérationnel parfaitement défini et stable pour effectuer des estimations par krigeage et par simulation tant que l'on utilise des distances euclidiennes. Le choix de cette distance est pertinent tant que le domaine d'étude est convexe.

Certains phénomènes ne respectent pas une métrique euclidienne. Si l'on étudie, par exemple, la pollution de l'air en milieu urbain ; étant principalement causée par les rejets des voitures, elle se propage essentiellement le long de routes, les bâtiments (maisons, immeubles) agissant comme des barrières qui empêchent ou retardent la propagation du polluant. Le phénomène est donc guidé par le réseau routier. Ce dernier représente un domaine d'étude qui n'est pas convexe et à l'intérieur duquel, la distance réelle entre points de données n'est pas euclidienne. Par exemple, deux points proches en termes de distance euclidienne peuvent être en réalité très éloignés du point de vue du phénomène (figure 8.1) et par conséquent avoir un niveau de corrélation appauvri.

En définitive, dès que le domaine d'étude n'est pas convexe, il semble plus cohérent d'utiliser des distances non-euclidiennes. Cette constatation s'accompagne néanmoins de plusieurs problèmes aussi bien théoriques que pratiques comme nous allons le voir.

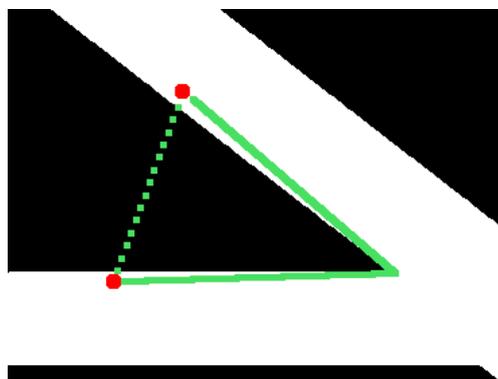


FIGURE 8.1: Les deux points de données en rouge situés le long de rues différentes sont très proches en termes de distance euclidienne (ligne pointillée) mais ils sont en réalité très lointain si l'on longe les rues (ligne continue).

8.2 De la difficulté d'utiliser des distances non-euclidiennes

8.2.1 Validité du variogramme

Nous avons vu au cours de la section 2.3.4.4 que l'on ne peut utiliser comme variogramme que des fonctions conditionnellement définies négatives¹. Comme il est difficile de démontrer qu'une fonction donnée est conditionnellement définie négative (Armstrong & Diamond (1984)), on utilise généralement des classes de modèles dont on sait qu'ils sont admissibles, comme les modèles sphérique, cubique, gaussien, etc. Cependant, ces modèles sont admissibles tant que l'on utilise une distance euclidienne. Par conséquent, si l'on effectue des études géostatistiques avec une autre distance, il n'y *a priori* aucune raison pour que les modèles de variogrammes usuels soient valides.

Considérons l'exemple proposé par Curriero (2006), de 4 points de \mathbb{Z}^2 régulièrement espacés d'un écart unitaire (figure 8.2).

1. Ce qui revient à écrire que la covariance correspondante doit être définie positive.

8. UTILISATION DE DISTANCES NON-EUCLIDIENNES EN GÉOSTATISTIQUE

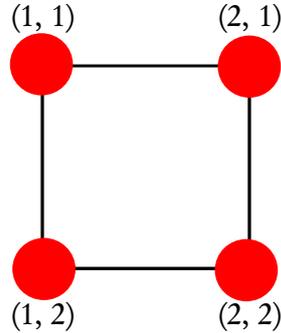


FIGURE 8.2: 4 points 2D régulièrement espacés.

En utilisant, la distance de Manhattan (également appelée *city block distance*), c'est-à-dire la distance discrète sur une trame 4-connexe définie en 2D par $d(i, j) = |x_j - x_i| + |y_j - y_i|$, nous obtenons la matrice de distance suivante entre ces 4 points :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Nous choisissons un modèle de covariance gaussien avec un effet de pépite nul, une portée égale à 4 et un seuil de 20, qui correspond à la formule :

$$Cov(i, j) = 20 e^{-\frac{d(i,j)}{4}}. \quad (8.2)$$

En l'appliquant sur la matrice de distance précédente, nous obtenons la matrice de covariance suivante :

$$\begin{pmatrix} 20,00 & 15,58 & 15,58 & 7,36 \\ 15,58 & 20,00 & 7,36 & 15,58 \\ 15,58 & 7,36 & 20,00 & 15,58 \\ 7,36 & 15,58 & 15,58 & 20,00 \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

Cette matrice est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Or, le spectre de cette matrice est égal à $(58,52; 12,64; 12,64; -3,80)$. Cette matrice n'étant pas définie positive, nous pouvons en conclure que la fonction de covariance gaussienne n'est pas définie positive pour la distance

8.2 De la difficulté d'utiliser des distances non-euclidiennes

de Manhattan dans le cas général ; il n'est donc pas toujours possible de l'utiliser si nous souhaitons effectuer des traitements géostatistiques avec la distance de Manhattan.

Ainsi, nous avons vérifié, grâce à cet exemple très simple, que d'un point de vue théorique, l'utilisation d'une distance non-euclidienne n'a rien d'évident. Le second problème, d'ordre pratique est tout aussi important.

8.2.2 Calcul des distances

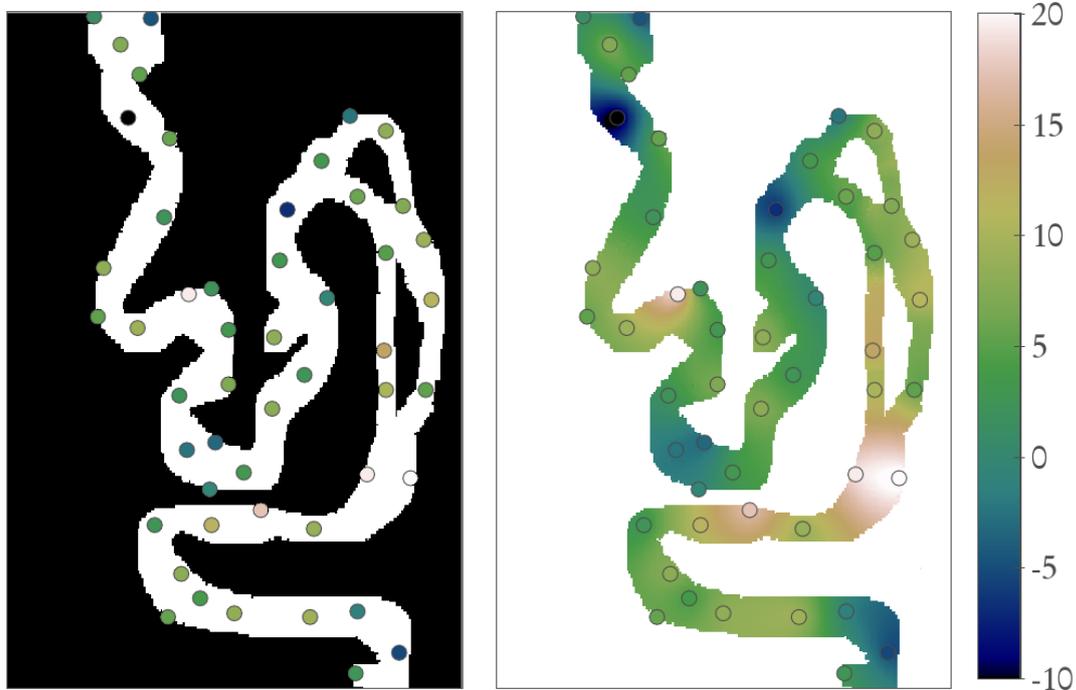
Dans le cas euclidien, le calcul de distance entre deux points est facile et très rapide. Par contre, si l'on utilise d'autres distances, l'implémentation du calcul de la distance peut devenir difficile et le temps de calcul très important. Ces deux contraintes sont fondamentales, car le calcul de distance entre couples de points intervient à de nombreuses reprises pendant une étude géostatistique.

En effet, considérons un ensemble de n points de données. Il est tout d'abord nécessaire de calculer les distances entre tous les couples de points de données. Il faut donc calculer $n(n - 1)/2$ distances. Ensuite, si nous souhaitons effectuer un krigeage par exemple, les distances entre les points de données étant connues depuis l'étude du variogramme expérimental, il ne reste plus qu'à calculer, en chaque point cible, les distances entre le point cible considéré et les points de données qui sont à l'intérieur du voisinage de ce point cible. Le cas extrême est celui du voisinage unique : tous les points de données sont inclus dans le voisinage d'un point cible. Il faut alors calculer mn distances. En additionnant les deux formules, nous obtenons donc :

$$N_{distances} = \frac{n(n - 1)}{2} + mn. \quad (8.4)$$

Imaginons, par exemple, que nous souhaitions effectuer un krigeage à l'intérieur de la forme de la figure 8.3a d'une surface de 24059 pixels. Cette forme n'étant pas convexe, il semble pertinent d'utiliser la distance géodésique binaire telle que définie à la section 4.2.3. Nous supposons, de plus, que nous disposons de 50 points de données à l'intérieur de cette forme.

8. UTILISATION DE DISTANCES NON-EUCLIDIENNES EN GÉOSTATISTIQUE



(a) Forme binaire et données superposées.

(b) Résultat de krigeage avec une distance géodésique exacte.

FIGURE 8.3: Exemple de calcul de la distance géodésique binaire le long d'une forme très tortueuse et d'une estimation par krigeage avec une distance non-euclidienne.

Nous effectuons la propagation sur une trame carrée 4-connexe. Dans ce cas, la formule 8.4 ne s'applique pas directement. En effet, après chaque propagation depuis un pixel donné, nous obtenons la distance associée à tous les autres pixels de la forme. Il suffit donc d'effectuer $(n - 1) + m$ propagations pour calculer toutes les paires de distances nécessaires. En partant, d'une des extrémités de la forme précédente, et en utilisant une implémentation optimisée de la distance géodésique discrète 4-connexe à base de file d'attente, nous obtenons un temps de propagation géodésique de 0,048 secondes. Ainsi, avec $m = 24059$, $n = 50$ et le temps de calcul de la propagation précédente, nous obtenons un temps de calcul total de 1157,18 secondes, soit 19 minutes et 17 secondes pour le calcul de tous les couples de distances.

Il est cependant possible de nuancer le résultat de ce calcul. Tout d'abord, il

8.2 De la difficulté d'utiliser des distances non-euclidiennes

constitue le pire scénario possible dans la mesure où l'on considère un voisinage unique. Si l'on utilise un voisinage plus petit, ce qui est le cas le plus fréquent, il suffit de stopper la propagation dès que l'on a dépassé la taille de voisinage. De plus, le temps de propagation précédent partait d'une extrémité de la forme, ce qui constitue un temps de propagation maximal. Si l'on considère un temps de propagation moyen de 0,023 secondes, nous obtenons un temps total de 554,48 secondes soit 9 minutes et 14 secondes. Ce temps est certes plus faible mais il reste tout de même très important. Il existe, par ailleurs, une certaine redondance d'information lorsque l'on effectue toutes les propagations. Certaines méthodes permettent de faire diminuer le nombre de propagations qu'il est nécessaire d'effectuer pour calculer toutes les paires de distances géodésiques. [Noyel \(2008\)](#) propose un état de l'art de ces méthodes.

Enfin, nous avons effectué une estimation par krigeage à l'intérieur de la forme binaire précédente en utilisant un modèle de variogramme sphérique, une portée de 300 pixels et un voisinage unique (figure 8.3b). Nous avons vérifié que les matrices de covariances utilisées sont bien définies positives. Le temps de calcul complet du krigeage est de 5926 secondes soit 1 heure et 39 minutes. En utilisant cette fois-ci un voisinage d'une taille de 150 pixels le calcul est beaucoup plus rapide et prend une quarantaine de minutes.

8.2.3 Bilan

Nous avons abordé trois problèmes qui peuvent rendre l'utilisation d'outils géostatistiques avec des distances non-euclidiennes difficile. Tout d'abord, d'un point de vue théorique, il est nécessaire de s'assurer de la validité du variogramme utilisé. Ensuite, d'un point de vue pratique, le calcul effectif de telles distances peut être difficile. Enfin, les temps de calcul avec ces nouvelles distances peuvent être très pénalisants. Grâce à un bref parcours de l'état de l'art des méthodes utilisant des distances non-euclidiennes, nous allons découvrir plusieurs méthodes permettant de s'affranchir de ces différentes contraintes.

8.3 Les différentes distances utilisées

8.3.1 Introduction

Bien que la géostatistique soit, de nos jours, couramment utilisée dans des domaines très variés, l'utilisation de distances autres que la distance euclidienne pour effectuer des traitements géostatistiques est un sujet qui n'a été que peu traité. Plusieurs enjeux sont présents. Il est nécessaire, tout d'abord, de choisir une distance qui soit adaptée au phénomène. Puis, il faut être capable de calculer cette distance, dans un temps raisonnable de préférence. Enfin, il est également nécessaire de s'assurer de la validité des résultats obtenus.

Pour une lecture théorique de ce sujet, [Curriero \(2006\)](#) propose une bonne introduction à l'utilisation de distances non-euclidiennes en géostatistique.

8.3.2 *Water distance*

Les premiers travaux, traitant de l'utilisation de distances non-euclidiennes, viennent notamment de [Little et al. \(1997\)](#) et [Rathbun \(1998\)](#) qui souhaitent effectuer des krigeages dans des estuaires pour estimer des ressources naturelles. Ils utilisent une distance appelée *water distance*, c'est-à-dire le chemin le plus court qui reste dans l'eau, ce qui revient à appliquer une distance géodésique binaire en effectuant une propagation à l'intérieur du masque de l'estuaire étudié. Le calcul de cette distance étant très coûteux en temps, ils utilisent des approximations. Ainsi, [Little et al. \(1997\)](#) construisent un réseau de lignes monodimensionnelles reliant différents points de l'estuaire (ce qui est équivalent à considérer un graphe) et calculent les distances le long de ce réseau. Cette approche a également été utilisée par [Gardner et al. \(2003\)](#) pour estimer la température de l'eau dans des rivières. Ils vérifient que la covariance utilisée est bien définie positive pour le jeu de données étudié mais ils ne savent pas si cela serait toujours vrai sur une autre étude.

[Rathbun \(1998\)](#) découpe le domaine d'étude en polygones réguliers de manière itérative jusqu'à avoir calculé toutes les distances entre les points de données. Comme pour les études précédentes il ne démontre pas que la covariance utilisée est bien définie positive dans le cas général.

Løland & Høst (2003) utilisent également une *water distance*. Pour calculer cette distance, ils construisent une grille discrète triangulaire puis appliquent l'algorithme de plus court chemin de Dijkstra (Dijkstra (1959)). Afin d'utiliser une covariance définie positive, ils appliquent une analyse multidimensionnelle (dite MDS pour *multidimensional scaling*, Borg & Groenen (2005)). Cette analyse consiste à approximer la matrice de distances non-euclidiennes par une nouvelle matrice dans un espace de plus grande dimension où les distances approchées entre les points de données sont maintenant euclidiennes. Cette approche a été utilisée pour estimer des ressources en hareng en Norvège.

8.3.3 Fonction distance basée sur un temps de parcours

Comme nous l'avons déjà souligné, l'utilisation de la *Water Distance* revient à calculer une distance géodésique binaire où les obstacles sont infranchissables. Au contraire, la distance basée sur un temps de parcours considère que les barrières qui étaient précédemment infranchissables, peuvent maintenant l'être, mais en un temps important. La distance entre deux points correspond alors à la longueur du parcours le plus rapide pour aller d'un point à l'autre.

En morphologie mathématique, la distance basée sur un temps de parcours, correspond à la notion de temps géodésique qui est une généralisation de la distance géodésique binaire (Soille (1992), Soille (1994)) :

Définition 8.1 Soit A une fonction numérique de \mathbb{Z}^n à valeurs dans \mathbb{Z}^+ (appelée *masque*) et P un chemin constitué de $n + 1$ points (p_0, p_1, \dots, p_n) . Le **temps** $t_A(P)$ nécessaire pour parcourir le chemin P dans A est égal à la moyenne des valeurs de A prises deux par deux le long de P :

$$t_A(P) = \sum_{i=1}^n \frac{A(p_{i-1}) + A(p_i)}{2} = \frac{A(p_0) + A(p_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} A(p_i). \quad (8.5)$$

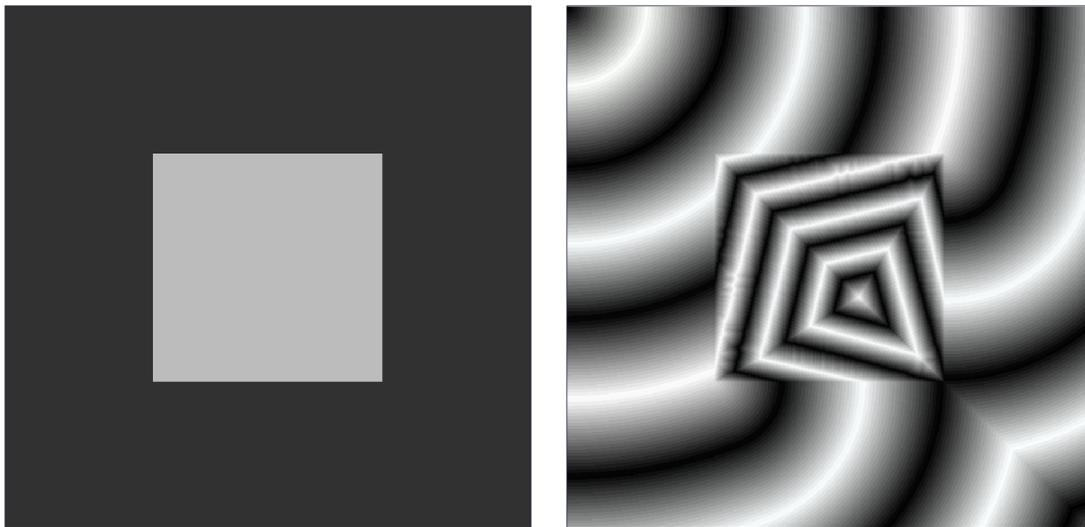
À partir de cette définition du temps sur une trame discrète, nous pouvons définir le temps géodésique.

Définition 8.2 Le **temps géodésique** $t_A(p, q)$ séparant deux points p et q est le temps le plus court permettant de relier p à q dans A :

$$t_A(p, q) = \inf\{t_A(P) / P \text{ relie } p \text{ à } q\}. \quad (8.6)$$

8. UTILISATION DE DISTANCES NON-EUCLIDIENNES EN GÉOSTATISTIQUE

Un exemple de calcul de temps géodésique est fourni en figure 8.4. Le masque de calcul est repris d'un exemple de Soille (1992). Le temps géodésique n'est pas une distance puisque deux points distincts peuvent être séparés par un temps géodésique nul, ce qui enfreint le principe de séparation d'une distance (définition 2.3). En se restreignant à n'utiliser que des temps strictement positifs, ce qui n'est pas contraignant dans la pratique, le temps géodésique respecte toutes les conditions d'une distance.



(a) Masque de calcul.

(b) Temps géodésique depuis le coin gauche supérieur de l'image.

FIGURE 8.4: Exemple de calcul du temps géodésique suivant deux milieux différents partant du point en haut à gauche de l'image. La vitesse de propagation à l'intérieur du carré clair est quatre fois plus rapide qu'à l'extérieur.

Jensen *et al.* (2006) présentent le principe d'utilisation d'une telle distance pour estimer, par krigeage, la présence de crabes à l'intérieur de la baie de Chesapeake aux États-Unis d'Amérique. Cependant, ils se ramènent à un cas binaire car ils supposent que les barrières de la baie sont infranchissables. Le seul coût introduit correspond à un déplacement suivant la diagonale de la grille discrète qui est égal à $\sqrt{2}$ alors qu'un déplacement horizontal ou vertical est égal à 1. Enfin, ils vérifient bien que la covariance utilisée dans le cas de cette étude est définie positive mais ils ne le démontrent pas dans le cas général.

Krivoruchko & Gribov (2004) utilisent également une distance pondérée par un coût. Souhaitant estimer, par krigeage, la pollution de l'air en Californie, ils utilisent un modèle numérique de terrain (MNT) comme fonction de coût. En effet, il est plus difficile pour une pollution aérienne de se propager le long d'une colline que le long d'une plaine. La fonction de coût utilisée permet de reproduire ce comportement : deux points séparés par une montagne auront tendance à être éloignés car le temps nécessaire pour traverser la montagne s'avère très important. Au contraire, deux points le long d'une plaine seront proches car la propagation est très rapide. Ils utilisent de plus une approche basée sur une moyenne mobile pour se ramener à une covariance définie positive, ce qui revient à effectuer un calcul de convolution (section 3.3.2). Cependant, ils ne comparent pas le résultat obtenu à celui d'un krigeage « classique » utilisant une distance euclidienne.

8.3.4 Distance le long de rivières

L'estimation par krigeage le long de rivières est nécessaire lors de l'étude de la propagation d'un polluant ou de la migration de poissons par exemple. De tels phénomènes ne respectent clairement pas une propagation euclidienne. Lors de telles études, on utilise des distances qui découpent la rivière étudiée en un graphe dont chacun des bras forme une arête et les points de confluence de la rivière constituent les sommets du graphe. Les distances définies le long de tels graphes sont appelées *Stream Distance* dans la littérature. Il peut, de plus, être nécessaire de prendre en compte le sens du courant de la rivière. On utilisera dans ce cas un graphe orienté.

Hoef *et al.* (2006) utilisent de telles distances et introduisent des modèles de covariance définies positives obtenus par moyenne mobile. Ils utilisent le modèle obtenu pour estimer la teneur d'un métal lourd le long d'une rivière. Cressie *et al.* (2006) utilisent également une approche similaire.

Enfin, De Fouquet & Bernard-Michel (2006) proposent une généralisation de ces modèles pour des fonctions aléatoires intrinsèques.

8. UTILISATION DE DISTANCES NON-EUCLIDIENNES EN GÉOSTATISTIQUE

8.3.5 Bilan

Suite au parcours de ces différentes méthodes, nous avons mis en valeur quatre moyens possibles d'utiliser des distances non-euclidiennes pour effectuer une estimation par krigeage.

Le premier consiste à choisir une distance adaptée au phénomène étudié, un modèle de variogramme et vérifier que les matrices de covariance utilisées sont bien définies positives. Cette approche a le désavantage de n'être valable que pour certaines études. De plus, elle n'apporte aucune solution lorsque l'on obtient des covariances négatives.

La seconde possibilité revient à calculer la matrice de distances entre les points de données en utilisant la distance choisie puis l'approximer dans un espace plus grand, par analyse multidimensionnelle, pour obtenir une nouvelle matrice où cette fois-ci les distances entre points de données sont euclidiennes. Cependant, on ne connaît pas, à ce jour, l'influence de cette approximation, sur les résultats d'un krigeage. Cette approche peut également s'avérer très coûteuse en temps de calcul, qui viennent s'ajouter aux importants temps de calcul des distances entre points de données. De plus, comme le souligne [Curriero \(2006\)](#), l'analyse multidimensionnelle prend en compte les distances entre points de données mais pas les points cibles. Enfin, l'ajout ou le retrait de points de données peut très fortement modifier l'allure de la matrice approximée.

La troisième possibilité, revient à appliquer une approche par moyenne mobile pour se ramener à une covariance définie positive. Cependant, l'utilisation d'une moyenne mobile nécessite de calculer analytiquement des intégrales qui peuvent s'avérer très difficiles à résoudre. Il n'est donc pas étonnant qu'il n'existe que très peu de modèles de covariances bâtis à partir de cette méthode.

Enfin, la dernière option consiste à démontrer que le modèle de variogramme utilisé est admissible pour la distance considérée, ce qui peut également s'avérer très difficile comme nous l'avons déjà souligné.

En ce qui concerne les temps de calcul des distances et des krigeages, tous les auteurs des publications présentées soulignent qu'ils sont beaucoup plus importants avec des distances non-euclidiennes. Cependant, aucun d'entre eux ne fournit de résultat quantitatif.

8.4 Étude de cas - estimation de la pollution de l'air en milieu urbain

Nous allons maintenant apporter une solution opérationnelle et stable pour estimer une carte d'un polluant, le NO_2 (dioxyde d'azote), en milieu urbain. La nouveauté de cette approche est d'utiliser directement les distances avec des méthodes de la morphologie mathématique. La première étape de l'étude consiste à choisir une distance adaptée à notre problématique.

8.4 Étude de cas - estimation de la pollution de l'air en milieu urbain

8.4.1 Introduction - choix de la distance

L'estimation de la pollution de l'air est un problème qui a déjà été traité à plusieurs reprises. L'approche utilisée dépend fortement de l'échelle de travail, que nous pouvons regrouper en trois types : nationale, régionale ou urbaine (ville). En effet, comme nous l'avons vu au chapitre 3, le comportement d'un même phénomène peut être complètement différent en termes de stationnarité suivant l'échelle retenue. Ici, nous considérons l'échelle d'une ville.

Les approches d'estimation par krigeage ont déjà été utilisées par [Bobbia *et al.* \(2000\)](#) et [Cressie *et al.* \(1998\)](#) par exemple. Une autre classe de méthodes consiste à effectuer une cartographie déterministe par régression ([Beelen *et al.* \(2007\)](#)). Les méthodes d'estimation géostatistiques par krigeage permettent d'obtenir les meilleurs résultats.

L'un des principaux problèmes méthodologiques, lorsque l'on étudie la pollution de l'air à l'échelle d'une ville, consiste à combiner des données dites de « fond » avec des données de « proximité ». En effet, les différentes études de surveillance de la qualité de l'air ont démontré que la pollution en milieu urbain est plus importante le long des axes routiers car elle est principalement causée par les rejets polluants des voitures. Cette pollution diminue lorsque l'on s'éloigne des routes. De plus, plus la route est large, plus la pollution engendrée se propage loin. Ainsi, les mesures de pollution acquises le long des routes correspondent aux données de proximité, en ce sens qu'elles sont plus proches de la source de pollution. De même, les données de fond correspondent aux mesures effectuées à l'extérieur de

8. UTILISATION DE DISTANCES NON-EUCLIDIENNES EN GÉOSTATISTIQUE

la zone d'influence des routes. De façon générale, le réseau routier impacte fortement le phénomène de pollution.

Une approche géostatistique couramment utilisée pour traiter ces données consiste à modéliser séparément chacun de ces deux types de données (fond et proximité) par un variogramme différent puis d'effectuer deux cartographies séparées. Le premier krigeage spatiale les données de fond à l'extérieur de la zone d'influence des routes avec le premier modèle de variogramme. Le second krigeage spatiale les données de proximité à l'intérieur de la zone d'influence des routes. Enfin, la carte de pollution finale consiste en la combinaison des deux spatialisations précédentes. Cette méthodologie a l'avantage de bien distinguer les données de fond des données de proximité. Cependant, lors de la spatialisation des deux types de données la géométrie du domaine d'étude n'est pas prise en compte.

Imaginons tout d'abord le cas des données de fond. Souhaitant effectuer une estimation en un point cible à l'extérieur de la zone d'influence des routes, le raisonnement le plus intuitif revient à considérer que le niveau de pollution en ce point est peu différent des données de fond proches de ce point. Cependant, si ce point cible est proche de la zone d'influence d'une route, il est possible de trouver un point de données de fond situé de l'autre côté de la route qui est proche en termes de distance euclidienne mais qui devrait être, en réalité, très éloigné du point de vue phénomène. La zone d'influence de la route devrait agir comme une barrière pour séparer ces comportements distincts. En utilisant une distance euclidienne, il est impossible de reproduire cette séparation.

De même, si nous considérons maintenant l'estimation d'un point cible à l'intérieur de la zone d'influence d'une route, cette valeur va cette fois-ci dépendre essentiellement des points de données de proximité. Tous les points de données de fond, c'est-à-dire ceux qui sont situés à l'extérieur de la zone de distance, ne devraient que très peu, voire pas du tout, entrer en compte lors de l'estimation. De plus, des points de données de proximité de routes différentes devraient avoir une influence moindre que ceux de la route étudiée car la source de pollution étudiée est différente. Ce double comportement peut être reproduit en se contraignant à rester uniquement à l'intérieur de la route lorsque nous effectuons nos calculs de distances. En d'autres termes, nous souhaiterions obtenir des poids de krigeage importants pour les points de données situés le long de cette route et faibles pour

8.4 Étude de cas - estimation de la pollution de l'air en milieu urbain

tous les autres points de données.

Nous allons tenter d'appliquer ces différentes constatations sur un cas d'étude réel dans la ville de Clermont-Ferrand en utilisant cette distance.

8.4.2 Présentation des données

Considérant le problème d'établir une cartographie d'un polluant, le NO_2 , le long des routes de la ville de Clermont-Ferrand. Pour cela, nous disposons d'une carte des axes routiers de cette ville sous la forme d'une transformée en squelette : toutes les routes ont une largeur d'un pixel. Nous connaissons de plus, en chacun des points du squelette routier, la largeur des routes. Enfin, nous disposons de deux jeux de données de proximité. Le premier correspond à des mesures de NO_2 relevées à minuit (figure 8.5a) et le second jeu de données à des mesures prises aux mêmes lieux mais à 9 heures du matin (figure 8.5b). Les mesures de NO_2 sont fournies en $mg.m^{-3}$. Comme attendu, les valeurs de NO_2 sont plus faibles la nuit car il y a moins de trafic routier. Il est aussi intéressant de remarquer que les données obtenues à 9h semblent visuellement beaucoup plus hétérogènes. Notre objectif est d'obtenir une cartographie de ce polluant sur l'ensemble du réseau routier.

La grille totale a pour dimension 1500×1500 pixels ce qui fait un total de 2250000 pixels. Le réseau routier est constitué de 33868 pixels. Il couvre 1,5 % de la grille. Il est important de noter que les routes ont été dilatées par un élément de structurant de taille 2 afin d'être correctement visibles pour toutes les figures.

8. UTILISATION DE DISTANCES NON-EUCLIDIENNES EN GÉOSTATISTIQUE

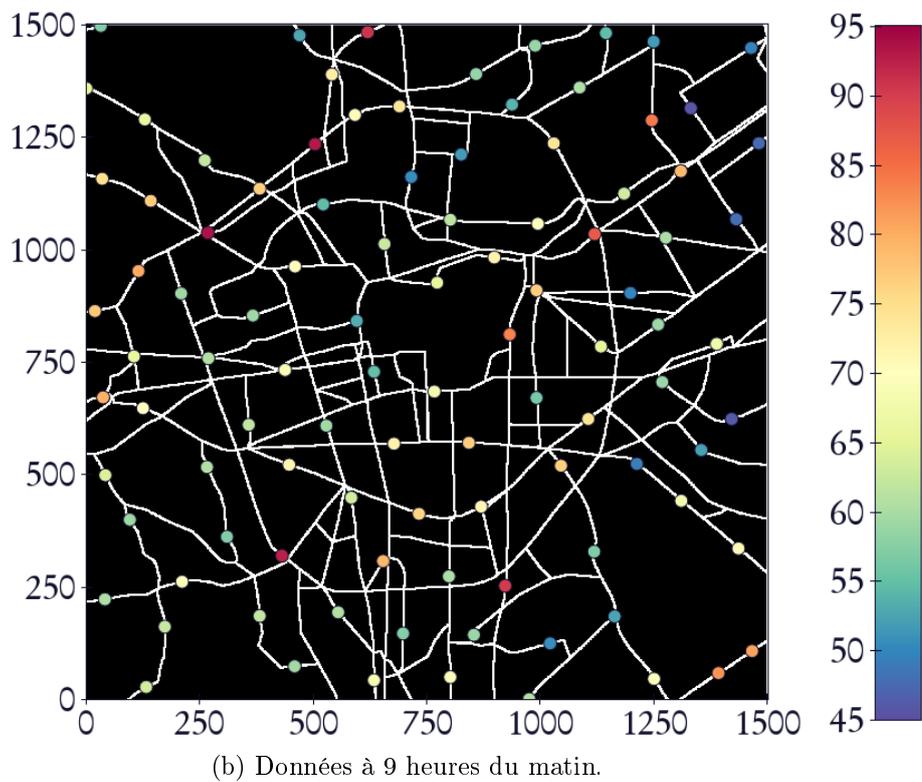
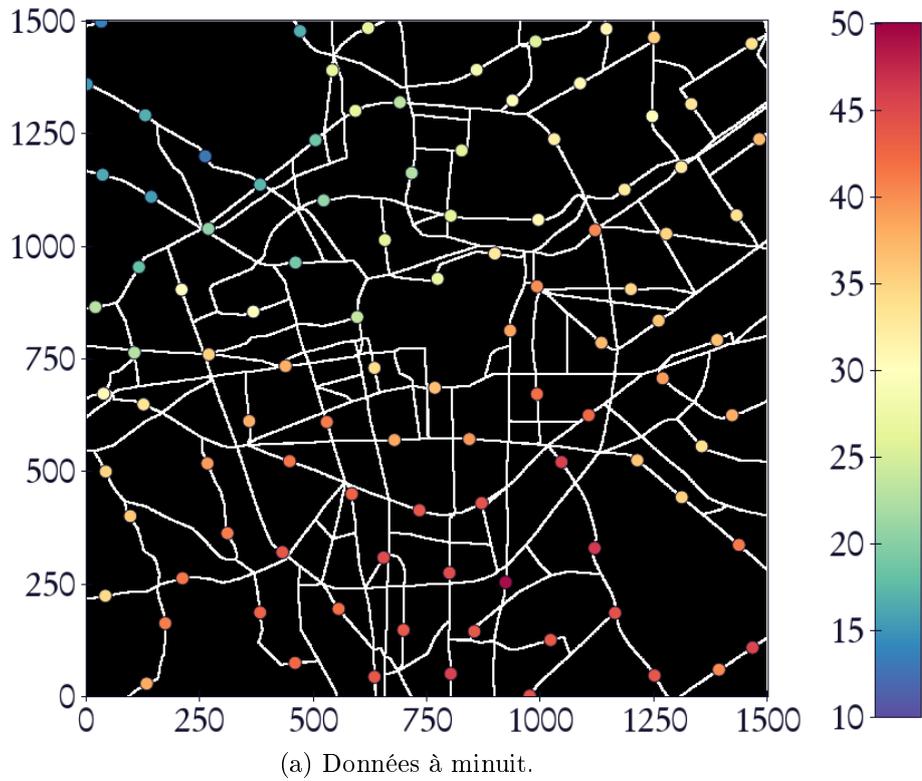


FIGURE 8.5: Données de NO_2 (en $mg.m^{-3}$) superposées sur la carte des axes routiers de la ville de Clermont-Ferrand relevées à minuit et 9h du matin.

8.4 Étude de cas - estimation de la pollution de l'air en milieu urbain

Nous avons précédemment vérifié que la distance géodésique binaire s'accorde particulièrement bien avec la propagation d'un polluant le long d'une route. Nous souhaitons donc utiliser cette distance pour calculer le variogramme expérimental des données et effectuer une estimation par krigeage.

En ce qui concerne le calcul effectif de cette distance, nous avons à notre disposition, pour une propagation sur une trame discrète, l'implémentation proposée par Soille (1992) ainsi que des méthodes à base de *fast marching* (Sethian (1996) et Sethian (2001)). Pour le calcul de la distance géodésique binaire euclidienne, Soille (1992) propose également un algorithme de calcul, de même que Cárdenes *et al.* (2010). Au cours des différents essais de calcul de la distance géodésique exacte, la méthode de Cárdenes *et al.* (2010) a toujours été plus rapide que celle de Soille (1992) avec des résultats identiques.

Nous disposons donc d'implémentations pour effectuer aussi bien des calculs de distances géodésiques discrètes qu'euclidiennes. Pour une propagation effectuée depuis un point au centre du réseau routier, nous obtenons un temps de propagation total de 2.01 secondes pour une distance géodésique euclidienne. Lorsque l'on stoppe la propagation à une distance de 500 pixels qui correspond au voisinage utilisé pour le krigeage, nous obtenons un temps de 0.84 secondes. En reprenant la formule précédente, nous obtenons donc des temps respectivement de 18 heures 59 minutes et de 7 heures et 55 minutes pour seulement calculer tous les couples de distances nécessaires au krigeage.

8.4.3 Variogramme géodésique

La définition du variogramme expérimental présenté à la section 2.3.4.2 peut directement s'utiliser pour n'importe quel type de distance. Cependant, la notion de variogramme isotrope et de variogramme anisotrope n'a plus de sens lorsque l'on utilise une distance géodésique. En effet, nous ne pouvons plus vraiment imposer de contrainte angulaire lors du calcul du variogramme expérimental.

Le variogramme expérimental géodésique calculé à partir des données recueillies à minuit est donné en figure 8.6 avec une unité de distance en pixels. De l'analyse de cette courbe expérimentale, nous pouvons déduire que le phénomène étudié a une portée de 1200 pixels. De plus, le nombre de couples de distances ayant de faibles

8. UTILISATION DE DISTANCES NON-EUCLIDIENNES EN GÉOSTATISTIQUE

valeurs de distance est trop faible pour pouvoir conclure quant à l'éventuelle présence d'un effet pépite.

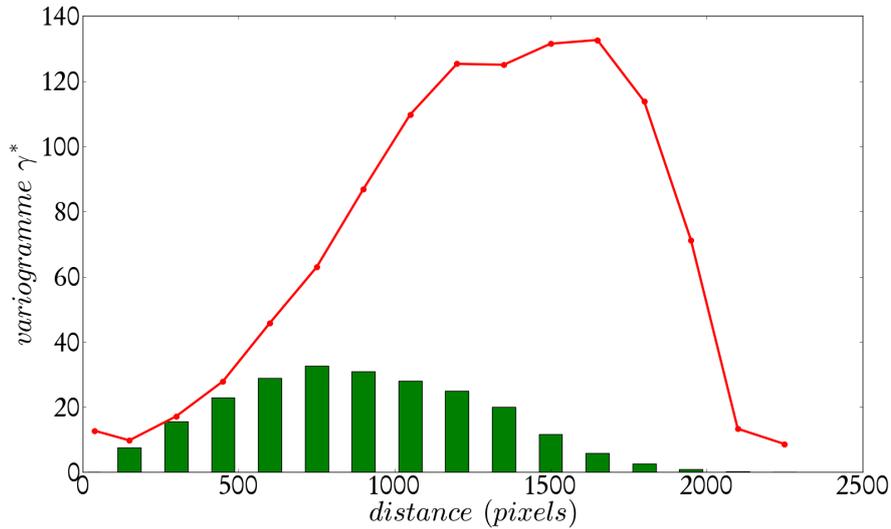


FIGURE 8.6: Variogramme expérimental géodésique. L'histogramme associé au variogramme indique le nombre de couples de données par classe de distances.

8.4.4 Krigeage euclidien et géodésique

8.4.4.1 Introduction

Contrairement aux rivières, le réseau routier comprend des boucles, il n'est donc pas possible d'utiliser les méthodes dérivées de distances le long de cours d'eau. De plus, ne connaissant pas l'influence d'une analyse multidimensionnelle sur les résultats d'une estimation, nous avons décidé de ne pas utiliser cette méthode.

Ne disposant pas d'un modèle de variogramme dont nous avons prouvé la validité, nous avons dû vérifier que toutes les matrices de covariance utilisées étaient bien définies positives. Finalement, nous avons fait le choix d'utiliser un krigeage ordinaire avec un modèle de variogramme exponentiel d'une portée de 1500 pixels et un voisinage de 500 pixels. Le calcul pratique d'un krigeage avec une distance non-euclidienne n'est aucunement différent, sur le principe, d'un krigeage « classique » avec une distance euclidienne. La seule différence se situe au niveau du

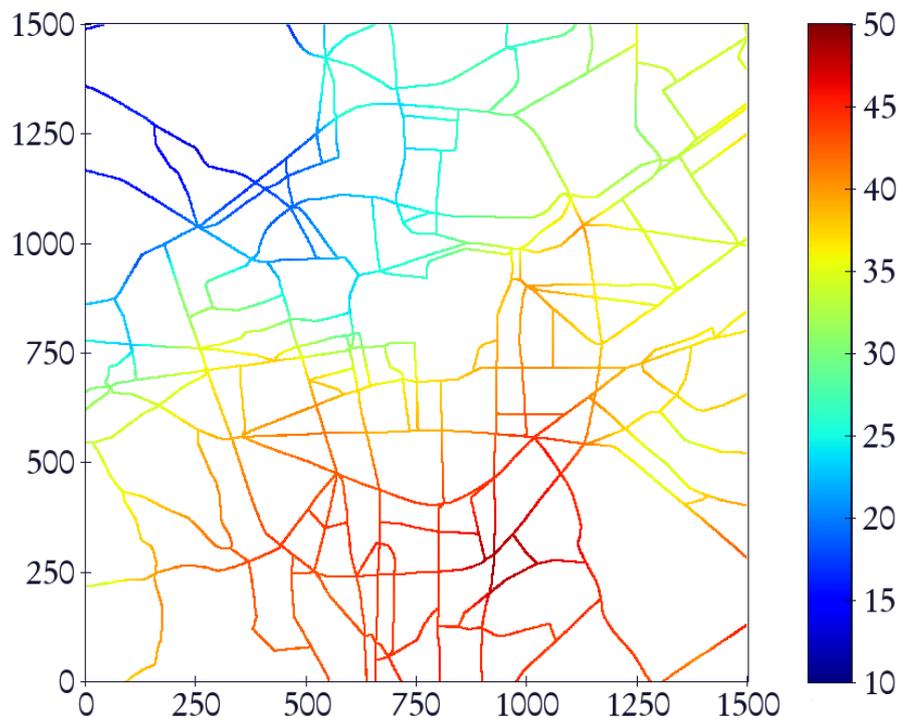
8.4 Étude de cas - estimation de la pollution de l'air en milieu urbain

calcul des paires de distances. Ainsi, il n'est pas nécessaire de modifier profondément nos implémentations de krigeage. Nous avons effectué un krigeage euclidien ainsi qu'un krigeage géodésique pour les données à minuit et les données à 9h du matin.

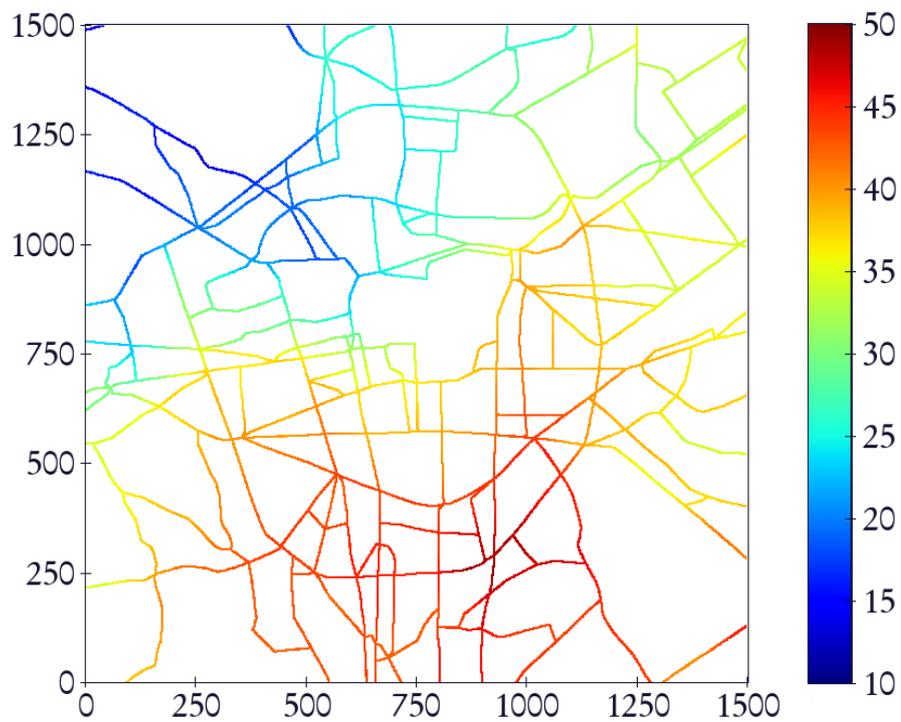
8.4.4.2 Données à minuit

Pour chacun des cas euclidiens et géodésiques, nous obtenons 3 cartes : le krigeage, l'écart type associé et le nombre de points dans le voisinage de chaque point cible.

8. UTILISATION DE DISTANCES NON-EUCLIDIENNES EN GÉOSTATISTIQUE



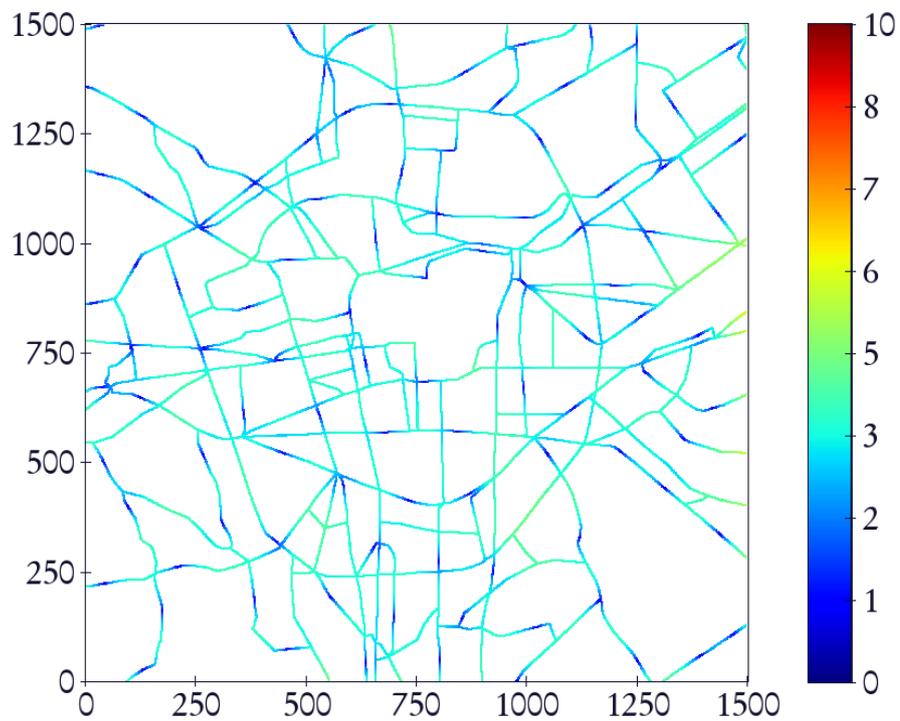
(a) Cas euclidien.



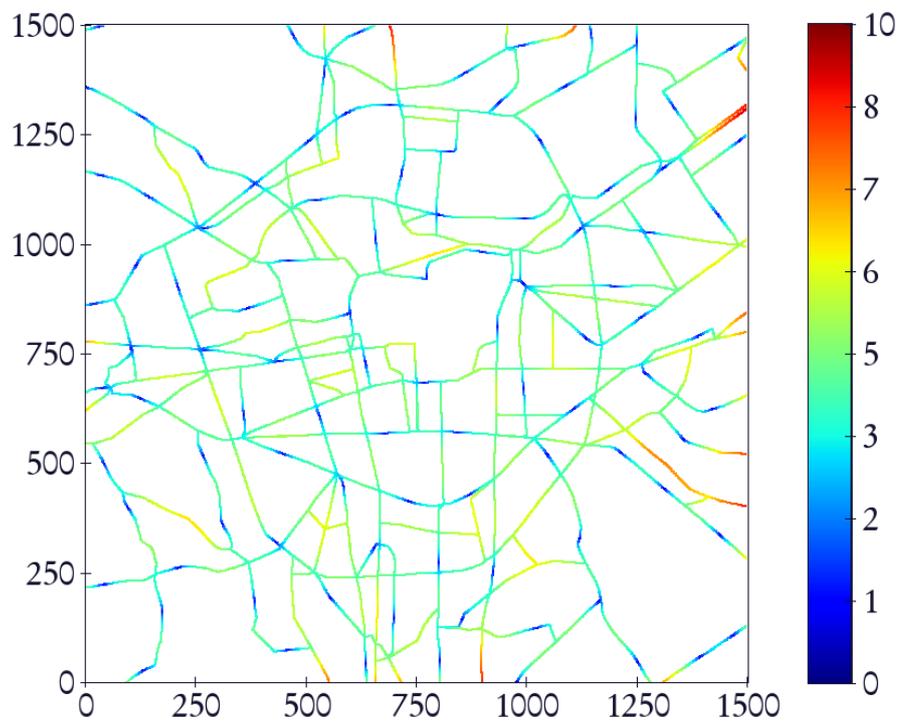
(b) Cas géodésique.

FIGURE 8.7: Krigage euclidien et géodésique des données mesurées à minuit. L'unité est en mg.m^{-3} .

8.4 Étude de cas - estimation de la pollution de l'air en milieu urbain



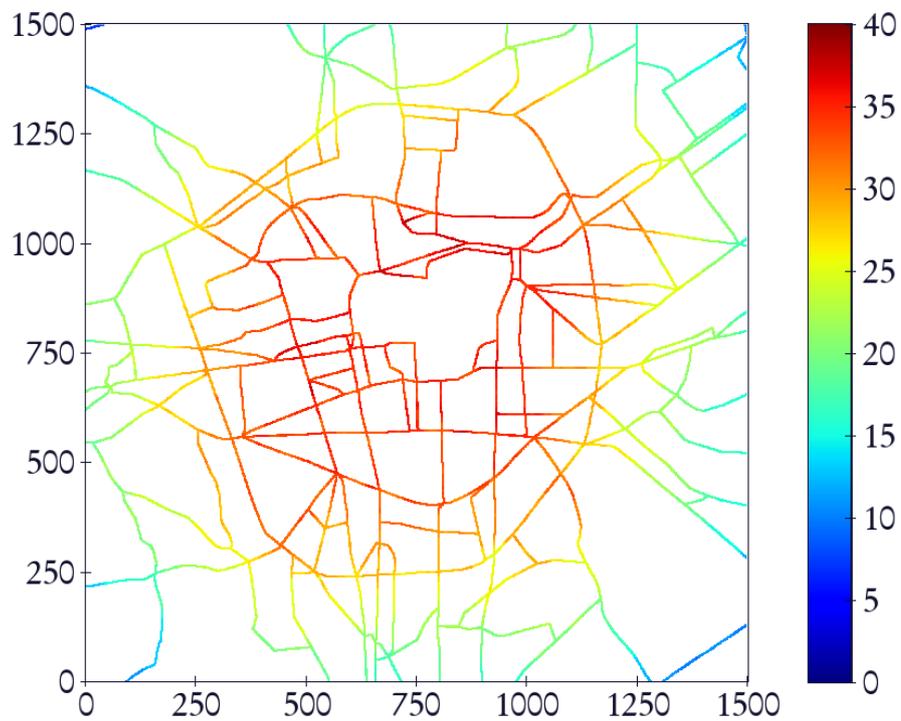
(a) Cas euclidien.



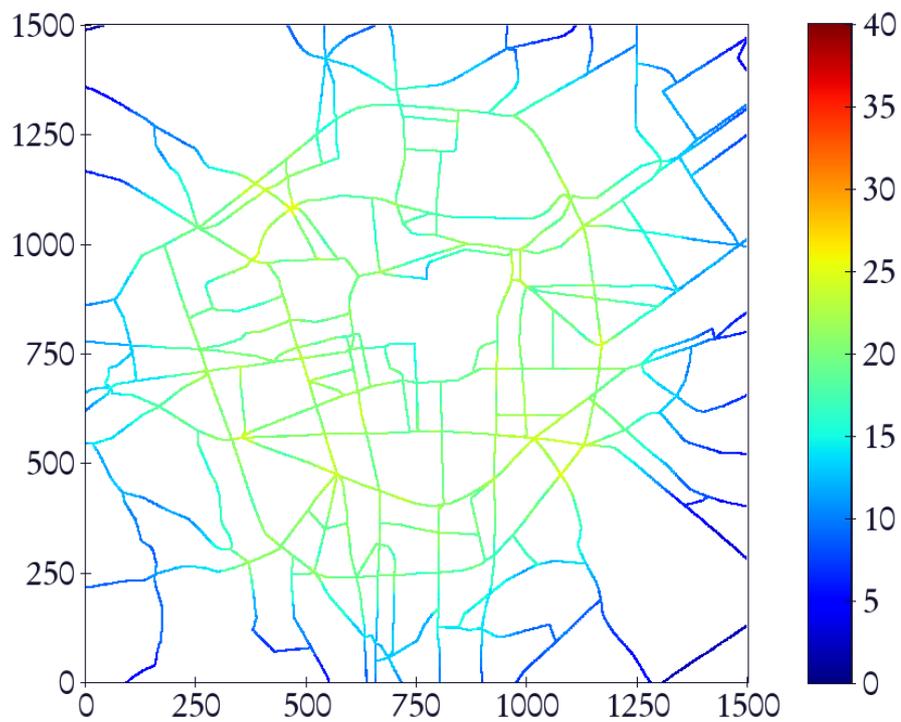
(b) Cas géodésique.

FIGURE 8.8: Écart type de krigeage euclidien et géodésique des données mesurées à minuit.

8. UTILISATION DE DISTANCES NON-EUCLIDIENNES EN GÉOSTATISTIQUE



(a) Cas euclidien.



(b) Cas géodésique.

FIGURE 8.9: Nombre de points de données dans le voisinage pour le krigeage euclidien et géodésique.

8.4 Étude de cas - estimation de la pollution de l'air en milieu urbain

En termes de temps de calcul, le krigeage géodésique a duré 13 heures 18 minutes contre une quinzaine de minutes pour le krigeage euclidien. Nous constatons que, visuellement, il n'y a, globalement, pas beaucoup de différences entre le krigeage euclidien et le krigeage géodésique. À minuit, le trafic routier est très faible, les données mesurées le long des routes correspondent alors à des données de fond. Or, sur les données de fond, les études ont mis en valeur la présence d'une dérive du nord-ouest vers le sud-est : les données les plus faibles sont situées en haut à gauche du domaine d'étude et plus l'on descend, plus les valeurs des données deviennent fortes. Ainsi, même en réarrangeant la distribution spatiale des points de données, les différences de résultats sont limitées. Il existe pourtant, localement, d'importantes disparités. Elles sont particulièrement visibles sur les figures 8.10 et 8.11. Nous remarquons que les différences d'estimation sont les plus importantes le long d'impasses (figure 8.10).

En ce qui concerne l'écart type, sa variation est très forte entre le krigeage euclidien et le krigeage géodésique. Il varie entre 0 et 6 pour le krigeage euclidien, contre entre 0 et 9 pour le krigeage géodésique. Nous avons déjà remarqué que l'écart type de krigeage est de manière générale très sensible aux paramètres du modèle de variogramme. Il est également particulièrement impacté par la densité de points de données. Il n'est donc pas étonnant qu'il soit plus important aux extrémités du réseau routier. La distance géodésique ayant tendance à étaler la distribution des points de données, les valeurs de l'écart type du krigeage géodésique sont donc plus importantes. En réagencant les points de données, la distance géodésique permet d'obtenir une estimation de l'écart type de krigeage plus cohérente car elle prend en compte l'agencement spatial du réseau routier. Enfin, la dernière carte représente le nombre de points de données inclus dans le voisinage de chaque point cible. La différence entre le cas euclidien et le cas géodésique est particulièrement marquée. Dans le cas géodésique, la propagation est obligée de rester à l'intérieur de la route et de suivre ses méandres. Elle va donc moins loin que son équivalent euclidien qui correspond à un cercle de rayon 500 pixels, centré sur l'origine de la propagation. Ce résultat est illustré à la figure 8.12. Ainsi, la distance géodésique permet de reproduire le comportement que nous avons décrit en introduction de cette étude.

8. UTILISATION DE DISTANCES NON-EUCLIDIENNES EN GÉOSTATISTIQUE

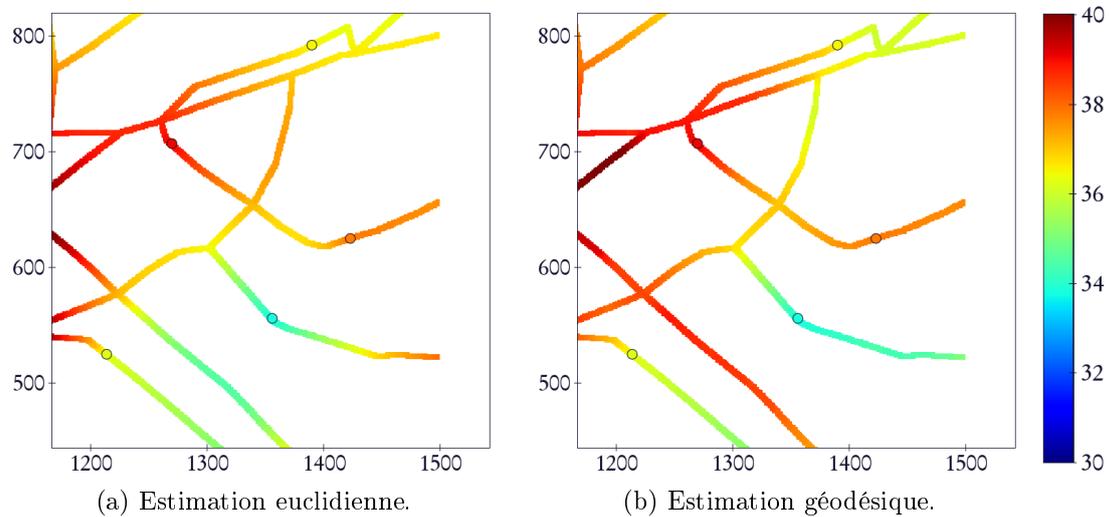


FIGURE 8.10: Détail 1 - cartographie avec une distance euclidienne sur la gauche et géodésique sur la droite. L'unité est en mg.m^{-3} .

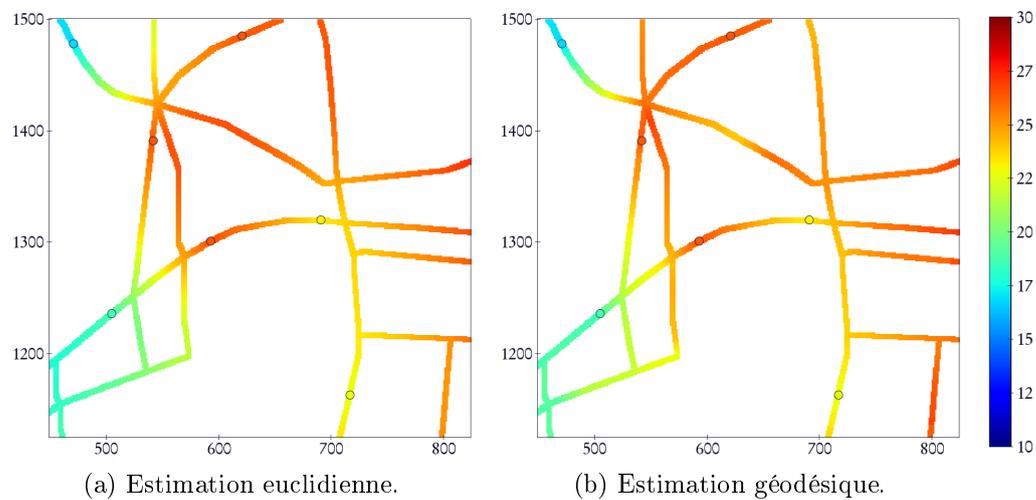


FIGURE 8.11: Détail 2 - cartographie avec une distance euclidienne sur la gauche et géodésique sur la droite. L'unité est en mg.m^{-3} .

8.4 Étude de cas - estimation de la pollution de l'air en milieu urbain

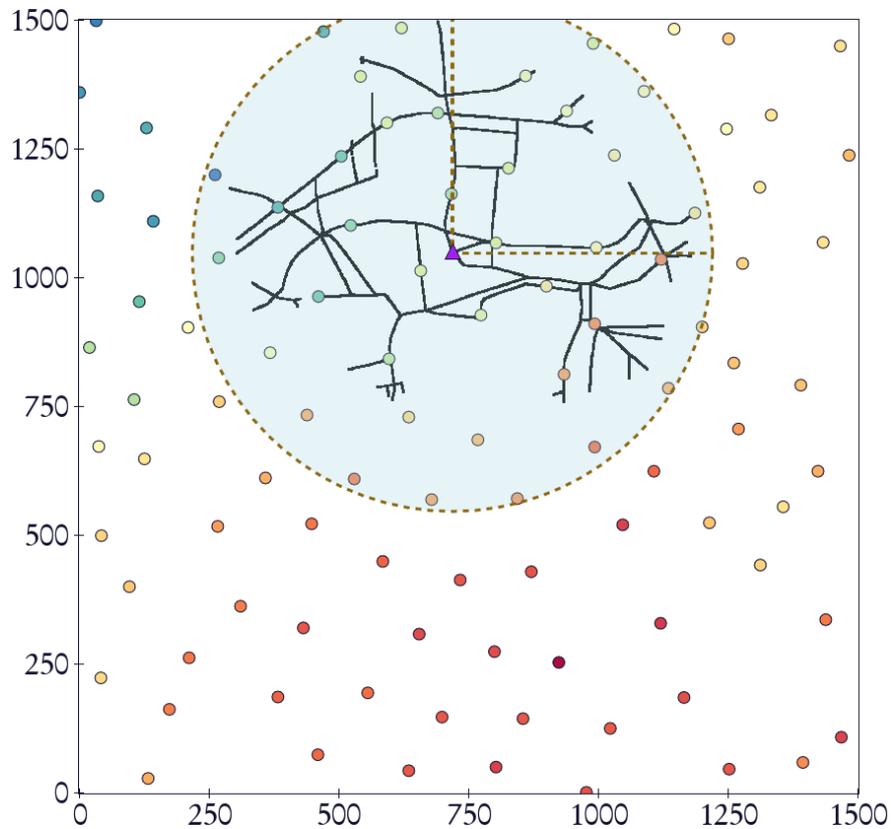


FIGURE 8.12: Voisinage associé au point représenté par un triangle violet. Dans le cas euclidien, le voisinage est un cercle de rayon 500 pixels. Le voisinage associé à la distance géodésique correspond aux branches noires. Plusieurs points de données du voisinage euclidien ne font pas partie du voisinage géodésique.

8.4.4.3 Données à 9h du matin

Comme la répartition spatiale des données est la même que pour les données mesurées à minuit et que nous avons utilisé la même taille de voisinage que lors de l'estimation du jeu de données précédent, les cartes du nombre de voisins de points sont les mêmes que celle du cas précédent. De même, nous obtenons des temps de calcul identiques.

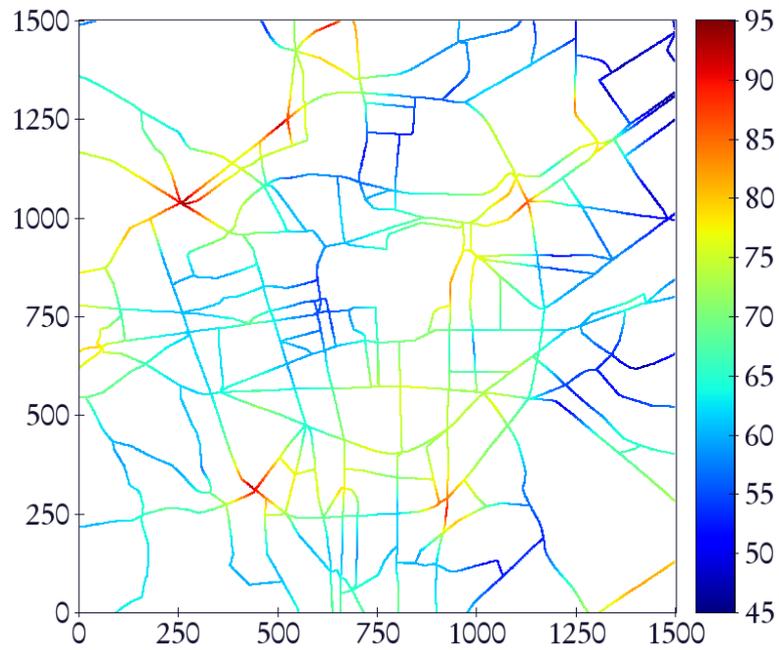
Comme pour le cas d'étude à minuit, la distance géodésique ayant tendance à faire augmenter les distances avec un voisinage identique entre le cas euclidien et géodésique, les densités de points ont tendance à diminuer ce qui impacte fortement l'écart type de krigeage. Prenant en compte le réseau routier, l'écart

8. UTILISATION DE DISTANCES NON-EUCLIDIENNES EN GÉOSTATISTIQUE

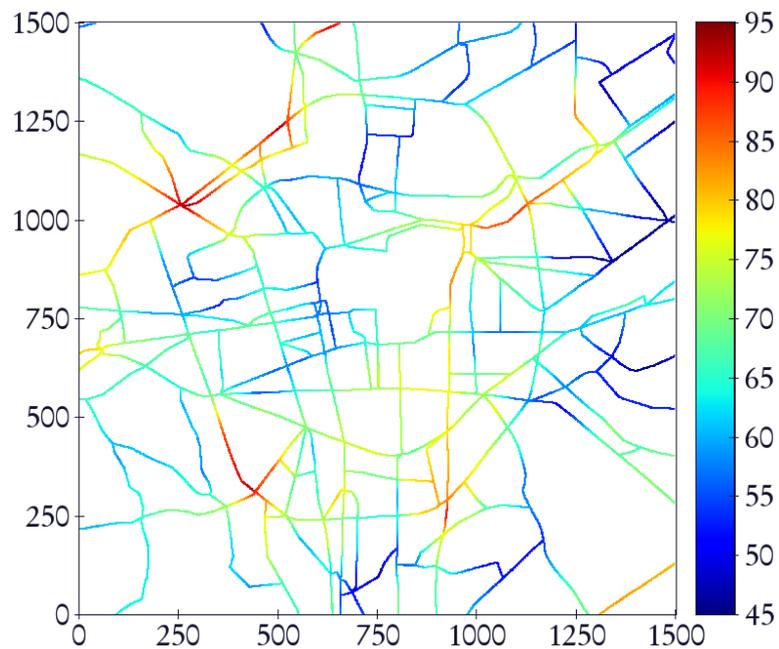
type géodésique est plus cohérent que l'écart type euclidien (figure 8.14).

En ce qui concerne les estimations, nous constatons, cette fois-ci, des différences très nettes en différentes zones du réseau routier entre le krigeage euclidien et le krigeage géodésique (figure 8.13). Ces importantes modifications de l'estimation sont particulièrement visibles sur les agrandissements des figures 8.15 et 8.16.

8.4 Étude de cas - estimation de la pollution de l'air en milieu urbain



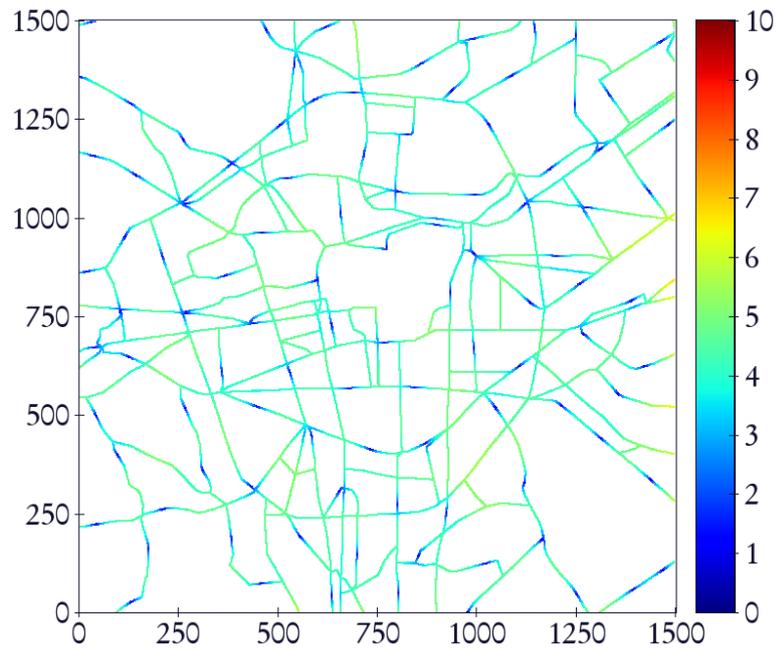
(a) Cas euclidien.



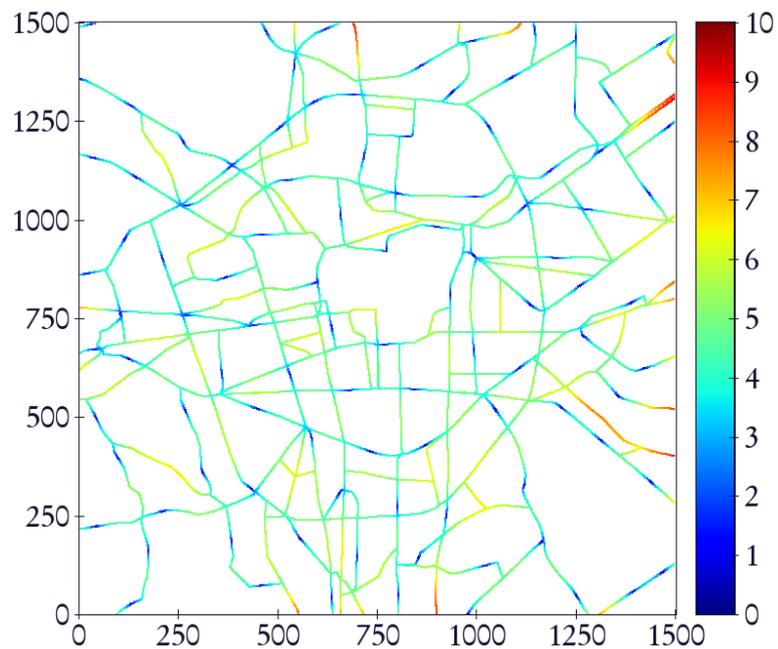
(b) Cas géodésique.

FIGURE 8.13: Krigeage euclidien et géodésique des données mesurées à 9h du matin. L'unité est en mg.m^{-3} .

8. UTILISATION DE DISTANCES NON-EUCLIDIENNES EN GÉOSTATISTIQUE



(a) Cas euclidien.



(b) Cas géodésique.

FIGURE 8.14: Écart type de krigeage euclidien et géodésique des données mesurées à 9h du matin.

8.4 Étude de cas - estimation de la pollution de l'air en milieu urbain

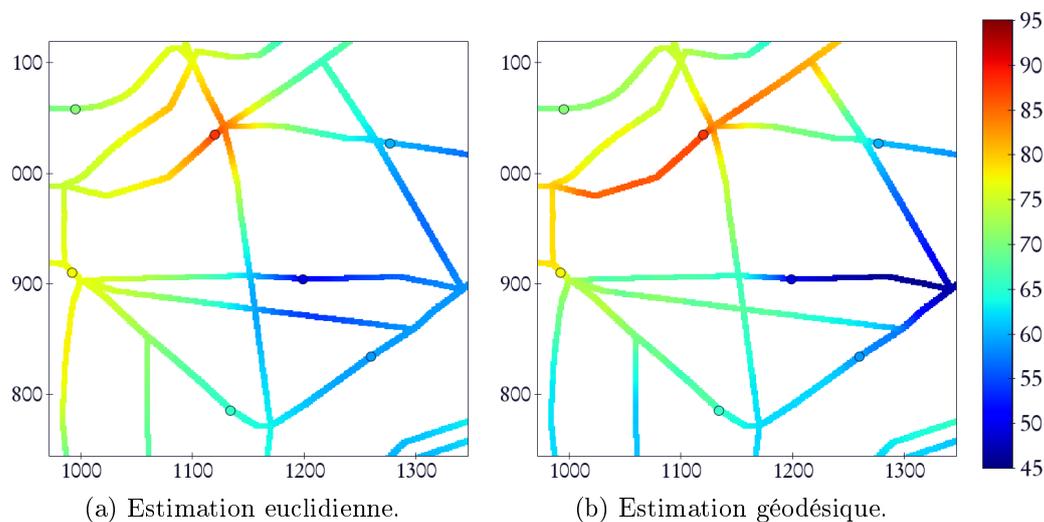


FIGURE 8.15: Détail 1 - cartographie avec une distance euclidienne sur la gauche et géodésique sur la droite. L'unité est en mg.m^{-3} .

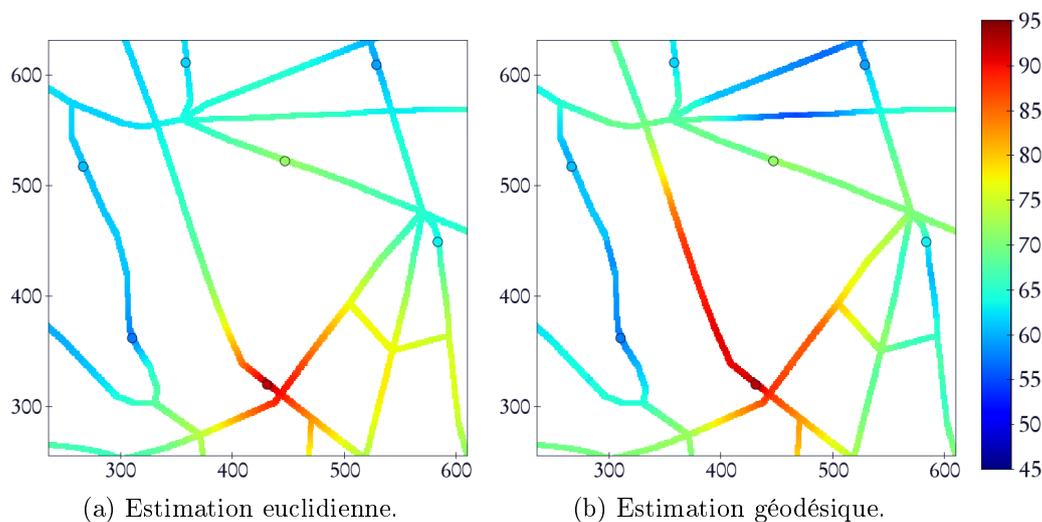


FIGURE 8.16: Détail 2 - cartographie avec une distance euclidienne sur la gauche et géodésique sur la droite. L'unité est en mg.m^{-3} .

Revenons plus en détail sur les résultats du dernier agrandissement et en particulier sur le point symbolisé par un triangle violet (figure 8.17) de coordonnées (367, 448). En ce point, on observe une très grande différence entre la valeur de

8. UTILISATION DE DISTANCES NON-EUCLIDIENNES EN GÉOSTATISTIQUE

pollution en NO_2 obtenue avec un krigeage euclidien (67,92) et celle obtenue avec un krigeage géodésique (87,71). Nous observons donc une différence de 19,79 alors que la plage de variation des données est de 48,10. Cette différence est donc très significative. Les points de données numérotés de 1 à 6 sur la figure 8.17 correspondent aux 6 points de données les plus proches en distance euclidienne de ce point cible.

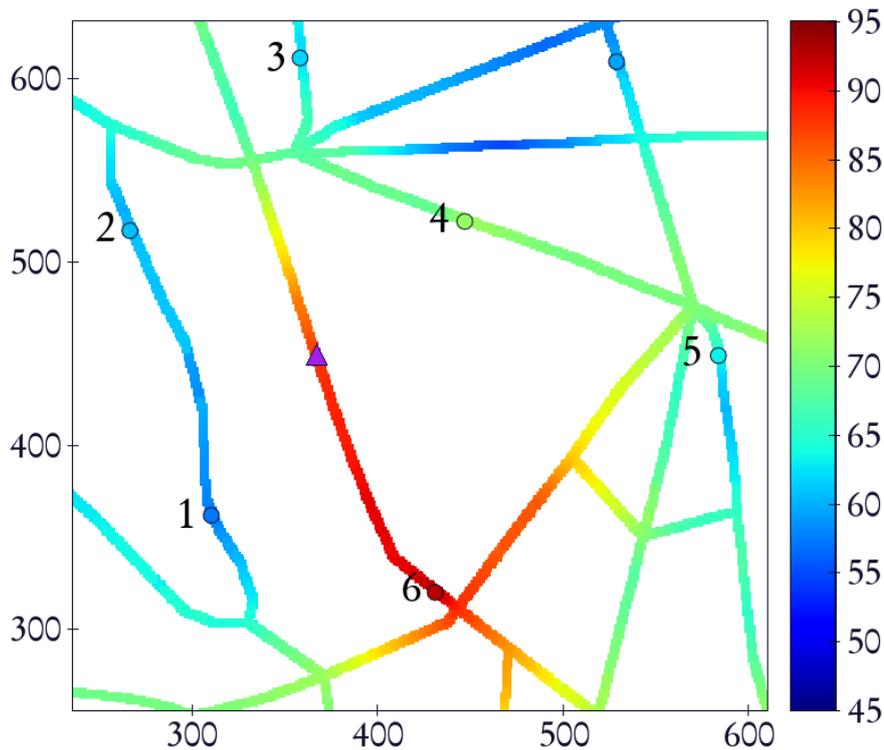


FIGURE 8.17: Les points de données numérotés de 1 à 6 correspondent aux 6 points de données les plus proches en distance euclidienne du point cible symbolisé par un triangle violet.

Le calcul de la tortuosité morphologique (Serra (1982), Peyrega (2010)) constitue une bonne manière de percevoir la différence entre la distance euclidienne et la distance géodésique.

Définition 8.3 La tortuosité morphologique d'un chemin reliant deux points x et y dans un ensemble X est égale au rapport entre la distance géodésique dans

8.4 Étude de cas - estimation de la pollution de l'air en milieu urbain

X et la distance euclidienne les séparant :

$$Tortuosite_A(x, y) = \frac{d_{Geodesique_A}(x, y)}{d_{Euclidienne}(x, y)}. \quad (8.7)$$

La distance géodésique entre deux points étant supérieure à la distance euclidienne, la tortuosité est donc toujours supérieure ou égale à 1.

Afin de comprendre la forte différence sur le point cible étudié, nous calculons les distances euclidiennes et géodésiques ainsi que les tortuosités entre les 6 points de données les plus proches (en distance euclidienne) et ce point cible. Nous obtenons le tableau suivant :

numéro	valeur	distance euclidienne	distance géodésique	tortuosité
1	57,24	103,17	359,05	3,48
2	60,71	122,32	253,88	2,08
3	61,88	163,25	190,81	1,17
4	71,57	108,98	236,62	2,17
5	63,28	217,00	399,48	1,84
6	92,68	143,11	147,11	1,03

Dans le cas euclidien, nous observons que les 3 points de données les plus proches du point cible ont respectivement des valeurs de 57,24 , 71,57 et 60,71. Il n'est donc pas étonnant d'obtenir une valeur de 67,92 en ce point. Nous pouvons également noter que, mis à part le point de données numéro 5, la différence de valeur de distance entre la distance la plus proche et la plus éloignée est assez faible (60,08). Elle est même de 60,08 si l'on fait abstraction du point le plus éloigné.

En ce qui concerne le cas géodésique, la hiérarchie établie dans le cas euclidien est complètement changée. Par exemple, le point numéro 1 qui était précédemment le point le plus proche du point cible est maintenant classé avant-dernier. Comme attendu, la plage de variation de l'ensemble des distances est beaucoup plus étalée que dans le cas euclidien. Seuls les points numérotés 3 et 6 voient leur distance peut modifiée (ils ont les deux tortuosités les plus faibles). En ce qui concerne les point numérotés 2 et 4, elle a doublée, et elle a même plus que triplée pour le point numéro 1. La valeur obtenue dans le cas géodésique est beaucoup plus cohérente qu'avec le krigeage euclidien car elle est en très grande partie due au point de

8. UTILISATION DE DISTANCES NON-EUCLIDIENNES EN GÉOSTATISTIQUE

donnée numéro 6 (de valeur 92,68) qui est le seul point à faire partie de la même route que le point cible. Les autres points de données ne faisant pas partie de la même route que le point cible, il est normal, du point de vue de la pollution, qu'ils influent peu sur le résultat de l'estimation. Quel que soit le modèle choisi avec un krigeage euclidien, stationnaire ou non stationnaire, il aurait été impossible de reproduire un tel comportement.

8.4.4.4 Bilan

Cette étude de l'estimation de la teneur en NO_2 le long des rues de Clermont-Ferrand nous a permis de mettre en valeur l'intérêt d'utiliser la distance géodésique binaire pour effectuer un krigeage lorsque le domaine d'étude n'est pas convexe. Les résultats obtenus avec le premier jeu de données (à minuit) ne sont pas très différents d'un krigeage euclidien. Ceci s'explique en grande partie par la répartition des valeurs qui présente un fort gradient vertical. Le deuxième jeu de données a été beaucoup plus intéressant à traiter et a mis en valeur les fortes différences que l'on peut observer entre un krigeage géodésique et un krigeage euclidien. Nous avons pu obtenir avec le krigeage géodésique des cartes d'estimation et d'écart type plus cohérentes et justes car elles prennent en compte et respectent les axes routiers, ce qu'il est impossible de retranscrire avec un krigeage euclidien.

8.5 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a permis de cerner les principales difficultés d'utilisation des distances non-euclidiennes pour effectuer des traitements géostatistiques. Nous avons tout de même pu présenter plusieurs méthodes de travail différentes adaptées pour certains types de distances. Suite à un raisonnement qualitatif, nous avons effectué le choix d'utiliser une distance géodésique binaire pour estimer une teneur en NO_2 le long du réseau routier de la ville de Clermont-Ferrand. Lorsque le domaine n'est pas convexe, l'utilisation d'une distance géodésique revient à redistribuer la répartition spatiale des points de données de telle manière qu'elle respecte le comportement et la structuration spatiale du phénomène étudié.

8.5 Conclusion du chapitre

Nous avons également proposé un parallèle entre les différentes distances évoquées dans l'état de l'art et les distances géodésiques utilisées en morphologie mathématique. L'un des principaux attraits de notre approche est d'utiliser les implémentations rapides de distances géodésiques fournies par la morphologie mathématique pour effectuer un krigeage. Contrairement aux autres méthodes de l'état de l'art, nous n'avons pas de difficulté pratique pour déterminer les distances entre les différents points de données et les points cibles et nous obtenons des valeurs exactes. L'utilisation de M-Paramètres avec des distances géodésiques constitue une perspective de recherche intéressante.

Le prochain chapitre, à vocation applicative, est centré autour d'applications du domaine pétrolier. Nous commencerons tout d'abord par spatialiser une donnée de porosité par simulation. Cette étude nous permettra notamment de vérifier que des M-Paramètres calculés avec les méthodes développées dans ce manuscrit peuvent directement s'incorporer dans des algorithmes de simulation géostatistique. Au cours de la seconde étude du prochain chapitre, nous effectuerons une caractérisation 2D et 3D d'un environnement chenalisant et nous aurons également l'occasion d'estimer une propriété de réservoir 2D par krigeage géodésique.

8. UTILISATION DE DISTANCES NON-EUCLIDIENNES EN GÉOSTATISTIQUE

Chapitre 9

Synthèse - deux cas d'application

« Il y a deux antagonistes : le premier le pousse de l'arrière, depuis l'origine. Le second barre la route devant lui. Il se bat avec les deux. Certes, le premier le soutient dans son combat contre le second car il veut le pousser en avant et de même le second le soutient contre le premier, car il le pousse en arrière. Mais il n'en est ainsi que théoriquement. Car il n'y a pas seulement les deux antagonistes en présence mais aussi, encore lui-même, et qui connaît réellement ses intentions? Son rêve, cependant, est qu'une fois, dans un moment d'inadvertance – et il y faudrait assurément une nuit plus sombre qu'il n'y en eut jamais – il quitte d'un saut la ligne de combat et soit élevé, à cause de son expérience du combat, à la position d'arbitre sur ses antagonistes dans leur combat l'un contre l'autre. »

HE, note des années 1920

F. Kafka, traduction de P. Lévy.

Parabole reprise par H. Arendt dans la préface de *La crise de la culture* pour illustrer la brèche entre le passé et le futur : le moment où « l'action écoulee attend d'être parachevée dans les consciences qui en héritent et la questionnent ».

9.1 Introduction

Ce chapitre est le deuxième de ce manuscrit à vocation applicative. Nous avons vu au cours du chapitre 6 comment l'incorporation d'un modèle de M-Paramètres a permis de mieux cartographier des zones localement non-stationnaires (des chenaux) par krigeage. Nous avons par ailleurs noté, au cours de l'introduction, l'importance de développer des méthodes de détermination de M-Paramètres de telle manière à pouvoir les appliquer aussi bien à des simulations qu'à des krigeages. Ainsi, le premier exemple de ce chapitre montre comment des M-Paramètres peuvent être introduits dans un algorithme de simulation conditionnelle pour décrire le comportement de données de porosité.

Le second cas d'application relève également du domaine pétrolier avec la caractérisation d'un environnement chenalisant. Cet exemple permettra d'appliquer l'ensemble des méthodes présentées au cours de ce manuscrit avec une caractérisation binaire et en niveaux de gris, un krigeage utilisant une distance géodésique et une caractérisation 3D.

9.2 Simulation de données de porosité

9.2.1 Introduction

Le champ de l'étude correspond à une coupe 2D d'une carte d'un attribut sismique (figure 9.1a). À l'intérieur de cette carte, nous délimitons manuellement un chenal correspondant à une zone que nous souhaitons caractériser (figure 9.1b). Cette étape de segmentation pourrait être automatisée. Ici, l'intérêt de la démarche n'est pas porté sur l'acquisition du domaine de travail mais sa caractérisation et l'utilisation de ces informations.

Ainsi, nous souhaitons dans un premier temps déterminer la structuration locale de ce corps géologique par une étude binaire sur l'ensemble du masque, puis nous voulons utiliser cette information pour estimer le comportement de données de porosité par simulation.

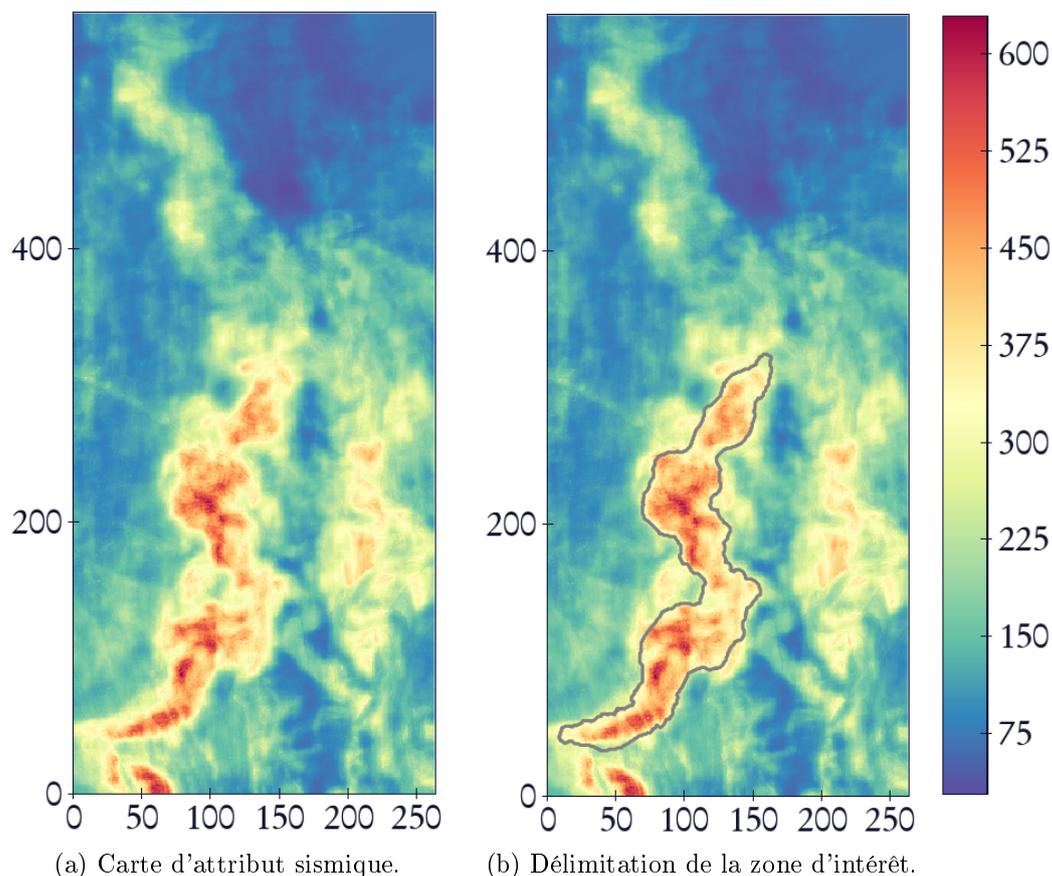


FIGURE 9.1: Carte d'un attribut sismique et zone à caractériser.

9.2.2 Estimation des M-Paramètres

Disposant d'un masque binaire du corps géologique à caractériser, le calcul des M-Paramètres peut s'effectuer directement. Nous utilisons la méthode de lancer de rayons binaire pour estimer les 3 cartes de M-Paramètres (figure 9.2). Comme attendu avec cette méthode, les paramètres de tailles sont maximums au centre de la forme et diminuent lorsque l'on se rapproche de son contour. Nous visualisons également les M-Paramètres sous la forme d'ellipses (figure 9.3a) et de vecteurs (figure 9.3b). D'autres informations complémentaires associées à l'ellipse de corrélation peuvent être visualisées comme son excentricité (figure 9.4a) ou le rapport entre le grand axe et le petit axe de l'ellipse qui correspond au rapport

9. SYNTHÈSE - DEUX CAS D'APPLICATION

d'anisotropie (figure 9.4b). Nous constatons ainsi que, comme la forme globale est très allongée, les rapports d'anisotropie ont tendance à être très élevés. Enfin, le corps géologique étudié étant également simple, il n'existe qu'une seule zone de jonction d'orientations différentes située en bas de la forme.

Enfin, en termes de temps de calculs, l'estimation des M-Paramètres du masque s'effectue en moins de 3 secondes.

N'ayant jusqu'à présent appliqué nos estimations de M-Paramètres qu'à des opérateurs de krigeage, nous pourrions penser que le calcul de M-Paramètres s'accompagne d'une certaine perte de richesse. En effet, si nous appliquons une estimation par krigeage dans ce corps géologique nous n'obtiendrons qu'une seule estimation : la plus probable. L'utilisation de simulation géostatistique va nous ouvrir l'accès à l'obtention de nouvelles cartes d'estimations.

9.2 Simulation de données de porosité

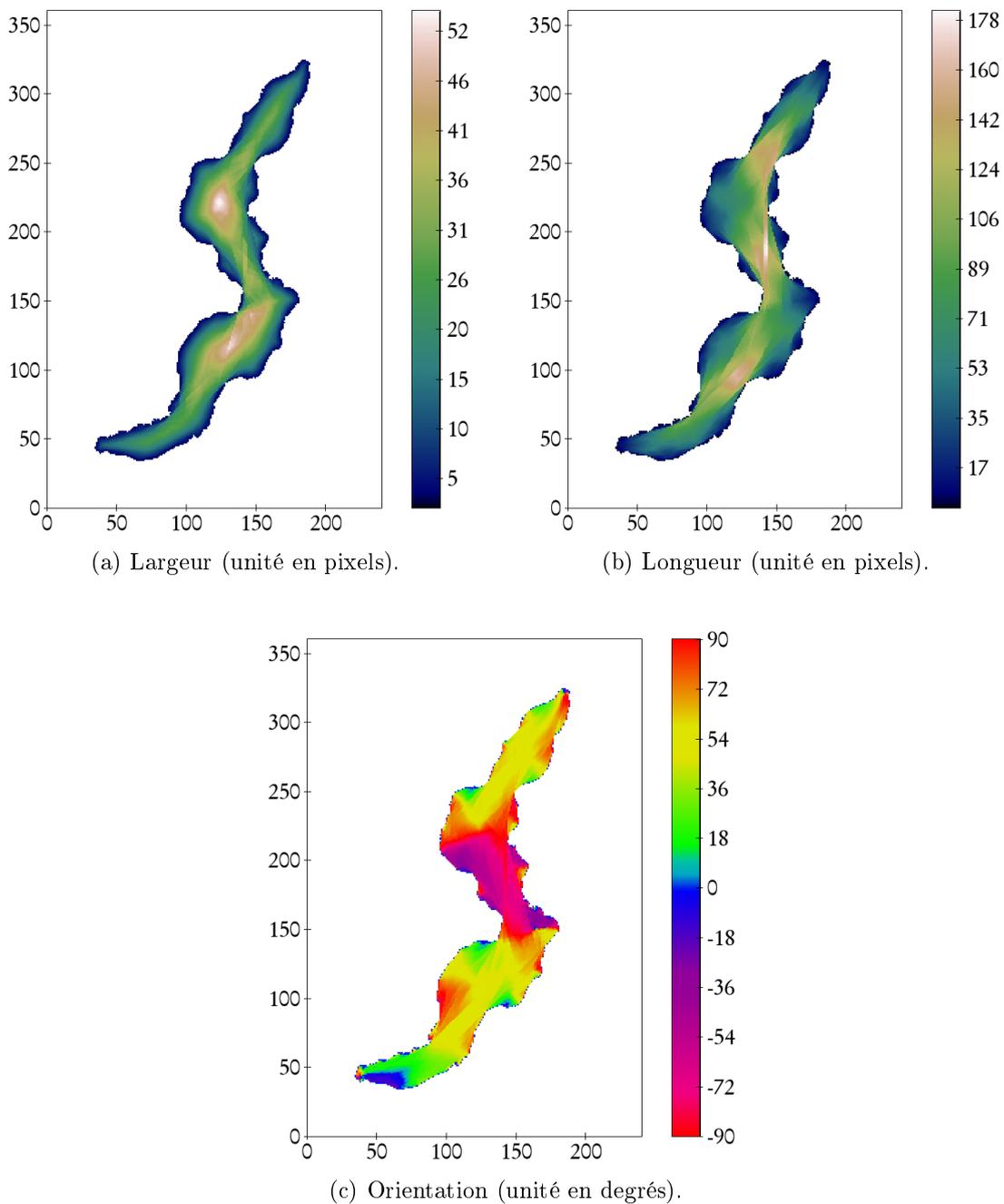


FIGURE 9.2: Cartes des mesures locales du chenal par lancer de rayons.

9. SYNTHÈSE - DEUX CAS D'APPLICATION

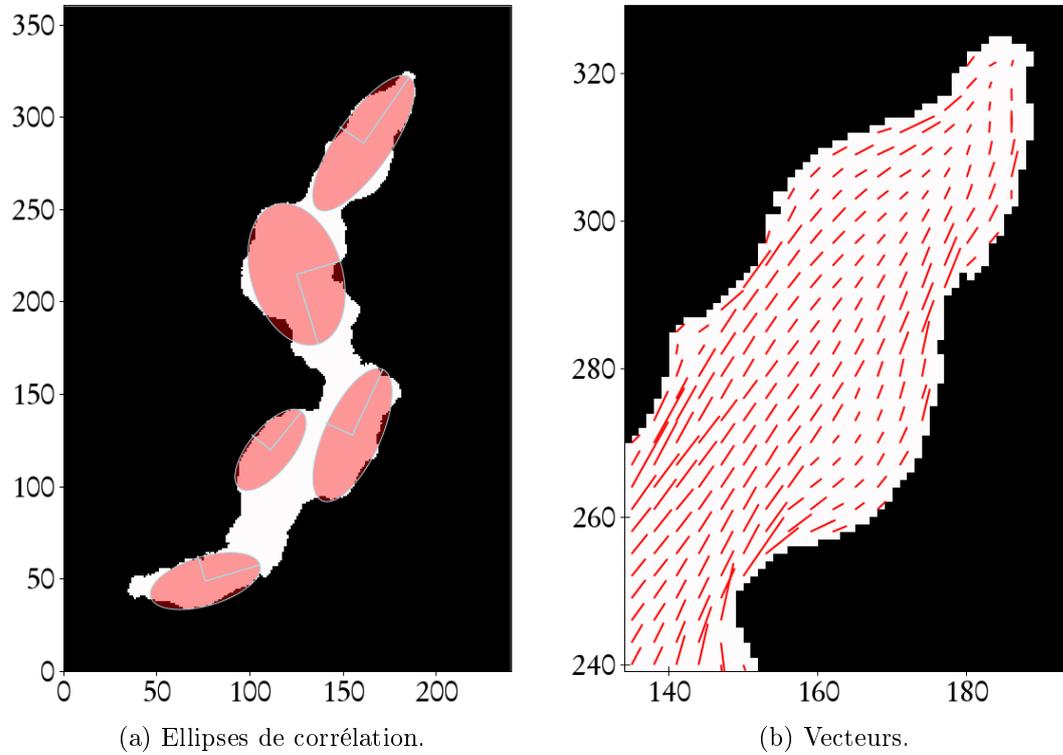


FIGURE 9.3: Représentation des M-Paramètres obtenus comme des ellipses de corrélation et des vecteurs. La norme des vecteurs est égale au rapport entre la longueur et la largeur.

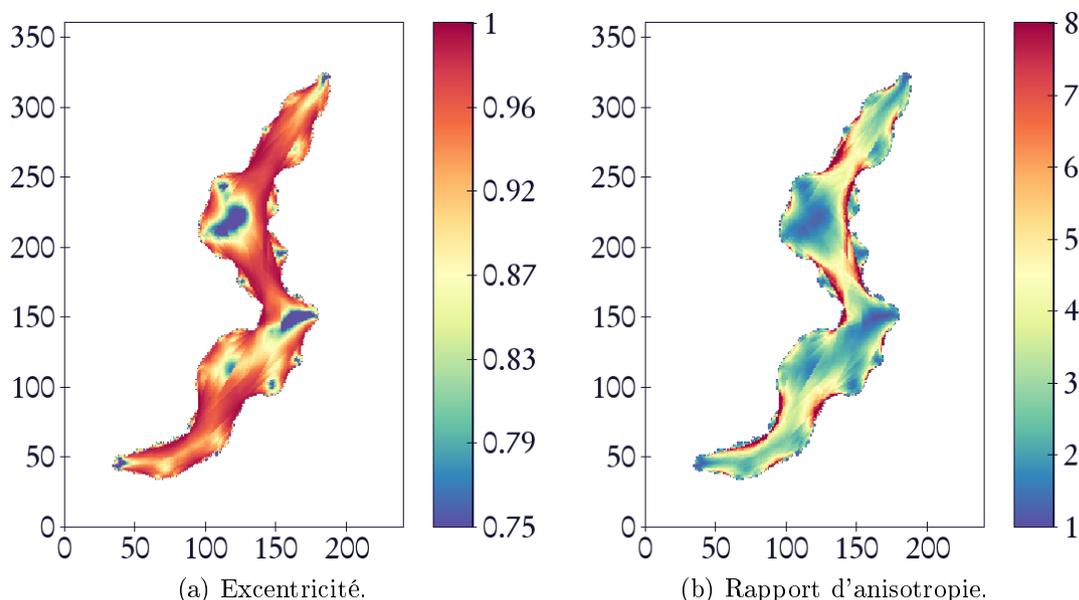


FIGURE 9.4: Carte d'excentricité des ellipses de corrélation et carte du rapport d'anisotropie entre la grande et la petite portée.

9.2.3 Simulation géostatistique

À l'intérieur du corps géologique précédent, nous considérons un ensemble de données de porosité synthétiques qui pourraient correspondre à des données enregistrées au niveau des puits (figure 9.5). Nous souhaitons effectuer des simulations géostatistiques qui soient exactes aux points de données et qui respectent la forme du corps géologique.

Pour contraindre les simulations au niveau des points de données, nous utilisons des simulations dites conditionnelles. Les M-Paramètres calculés précédemment, permettent quant à eux, d'introduire les informations locales de la forme du corps géologique dans les simulations.

Nous choisissons d'utiliser des simulations séquentielles gaussiennes en imposant une contrainte supplémentaire : la porosité doit être nulle à l'extérieur du canal. Trois différentes réalisations sont affichées en figure 9.6. Nous pouvons ainsi vérifier que le comportement de la porosité est très différent d'une simulation à une autre. Il aurait été impossible d'obtenir des résultats de simulations aussi

9. SYNTHÈSE - DEUX CAS D'APPLICATION

complexes avec les méthodes conventionnelles de la géostatistique.

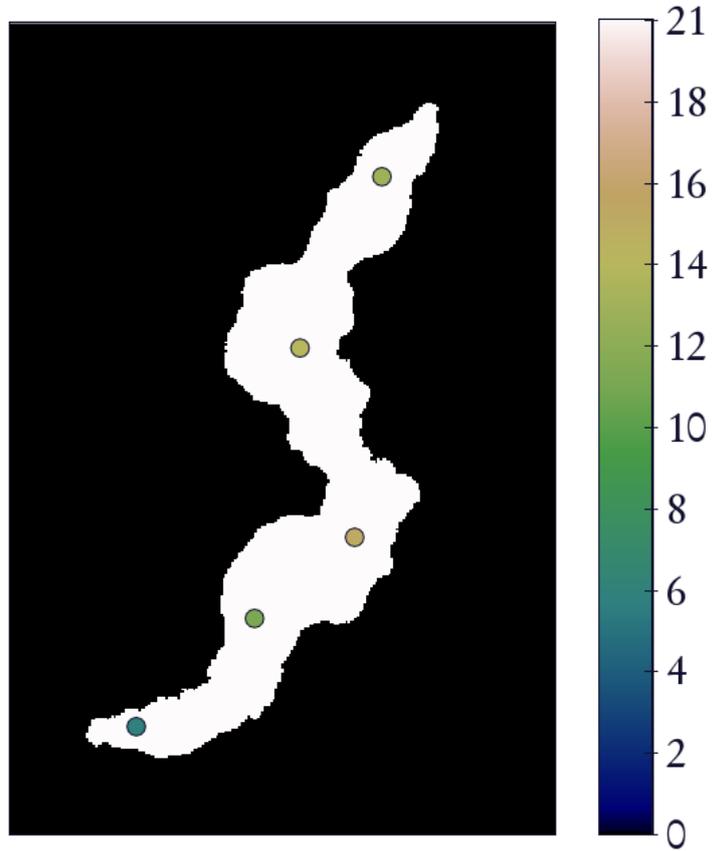


FIGURE 9.5: Données de porosité.

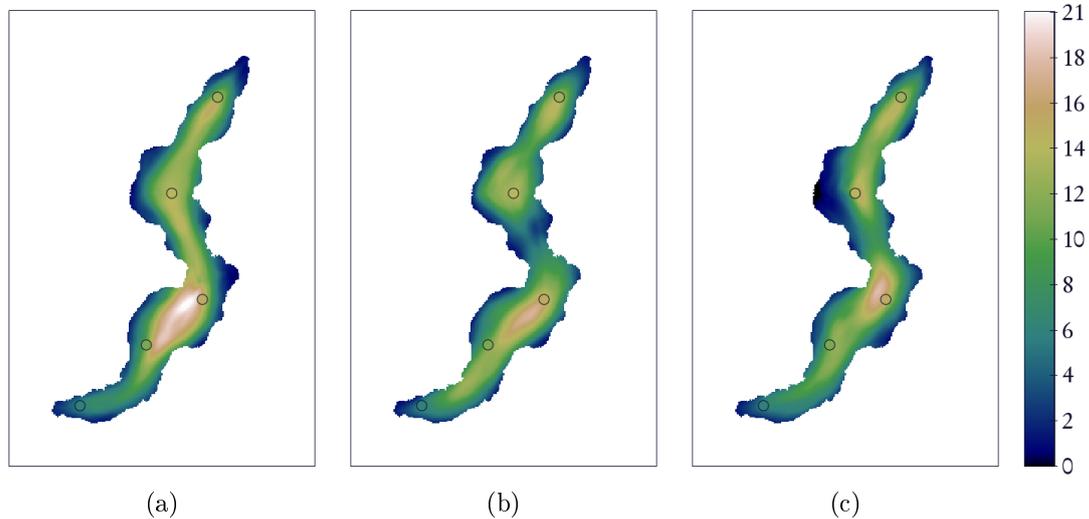


FIGURE 9.6: Trois estimations équiprobables.

9.2.4 Conclusion

Nous avons pu vérifier, grâce à cet exemple, que des M-Paramètres peuvent aussi être utilisés pour effectuer des simulations géostatistiques, c'est-à-dire obtenir un ensemble d'estimations équiprobables. Ceci signifie que le calcul de M-Paramètres ne s'accompagne pas d'une perte d'information : nous pouvons reproduire la même variabilité et structuration spatiale que la réalité. Contrairement aux simulations géostatistiques traditionnelles, nous obtenons des résultats d'estimations avec des motifs plus complets et plus complexes, qui respectent la forme du corps géologique.

9.3 Étude d'un *geobody*

9.3.1 Introduction

Nous avons déjà souligné au cours du chapitre 7 l'importance de disposer d'une caractérisation de tels corps géologiques. En effet, cette caractérisation est importante en ce sens qu'elle peut être utile à des applications de caractérisation de réservoir, et plus précisément de spatialisation par krigeage ou simulation

9. SYNTHÈSE - DEUX CAS D'APPLICATION

d'informations de puits, telles que la porosité, la perméabilité et le faciès des roches. L'idée est d'utiliser ce corps géologique comme guide à la spatialisation via l'emploi de M-Paramètres.

Au cours de cette étude, nous allons caractériser le *geobody* réel de la figure 9.7. Cette caractérisation se déroulera en deux temps : le premier temps sera une caractérisation en 2D d'une coupe de ce *geobody* et le second temps sera une caractérisation 3D. En ce qui concerne le premier temps, nous effectuerons tout d'abord une caractérisation binaire et une caractérisation en niveaux de gris par lancer de rayons. Nous effectuerons également une estimation par krigeage euclidien et géodésique d'une donnée de porosité à l'intérieur d'un sous-ensemble du masque binaire pour conclure cette partie 2D. Enfin, au cours du second temps, nous effectuerons une caractérisation 3D avec la méthode de lancer de rayons présentée au chapitre 7.

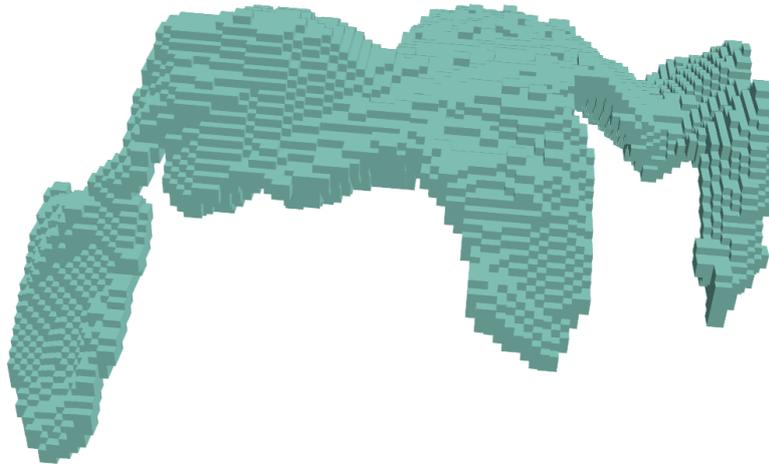


FIGURE 9.7: *Geobody* 3D.

9.3.2 Étude en deux dimensions

9.3.2.1 Présentation des données

Nous considérons une coupe 2D du *geobody* 3D (figure 9.7) : elle correspond au masque binaire de la figure 9.8a. Voulant également étudier une variable qui reproduit le chenal, nous avons fait le choix de représenter l'épaisseur du *geobody* à l'intérieur du masque (figure 9.8b). Le masque et la donnée d'épaisseur vont

nous permettre d'effectuer une étude binaire ainsi qu'une étude en niveaux de gris complémentaires.

Nous effectuerons ensuite une comparaison entre un krigeage avec une distance euclidienne et un krigeage avec une distance géodésique sur un sous-ensemble du masque binaire mis en valeur grâce à la caractérisation en niveaux de gris.

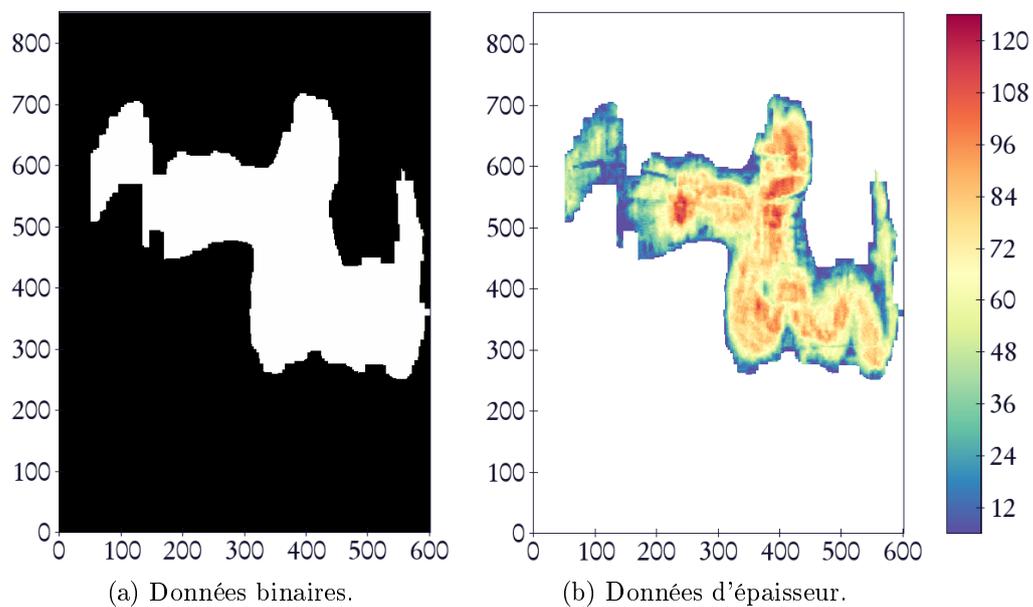


FIGURE 9.8: Coupe 2D du *geobody*.

9.3.2.2 Caractérisation binaire

Comme précédemment, disposant d'un masque binaire du corps géologique à caractériser, le calcul des M-Paramètres s'effectue directement. Nous utilisons la méthode de lancer de rayons binaire pour estimer les 3 cartes de M-Paramètres (figure 9.9) ainsi que celle basée sur le squelette (figure 9.10).

9. SYNTHÈSE - DEUX CAS D'APPLICATION

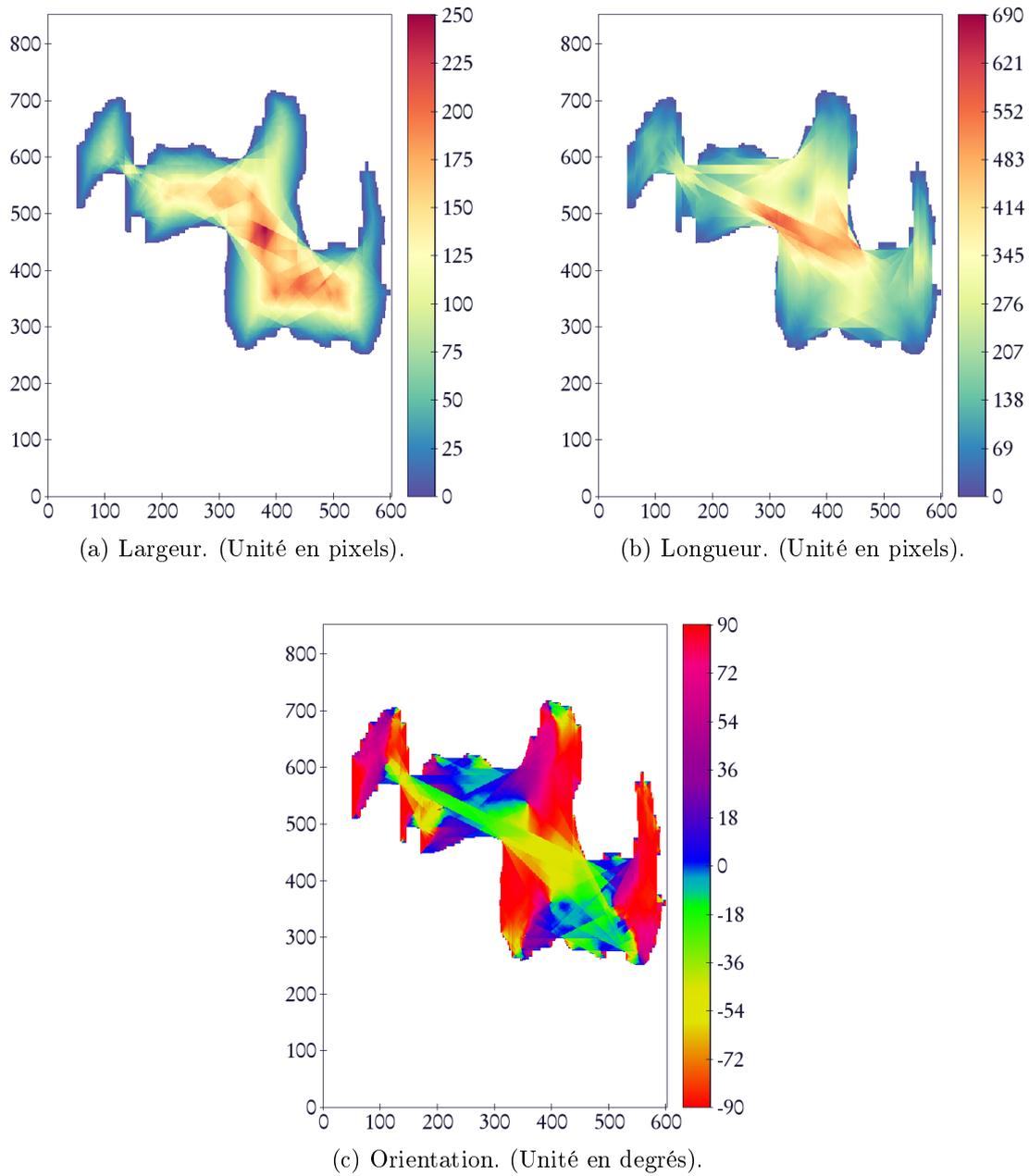


FIGURE 9.9: Cartes des mesures locales du corps géologique avec la méthode du lancer de rayons binaire.

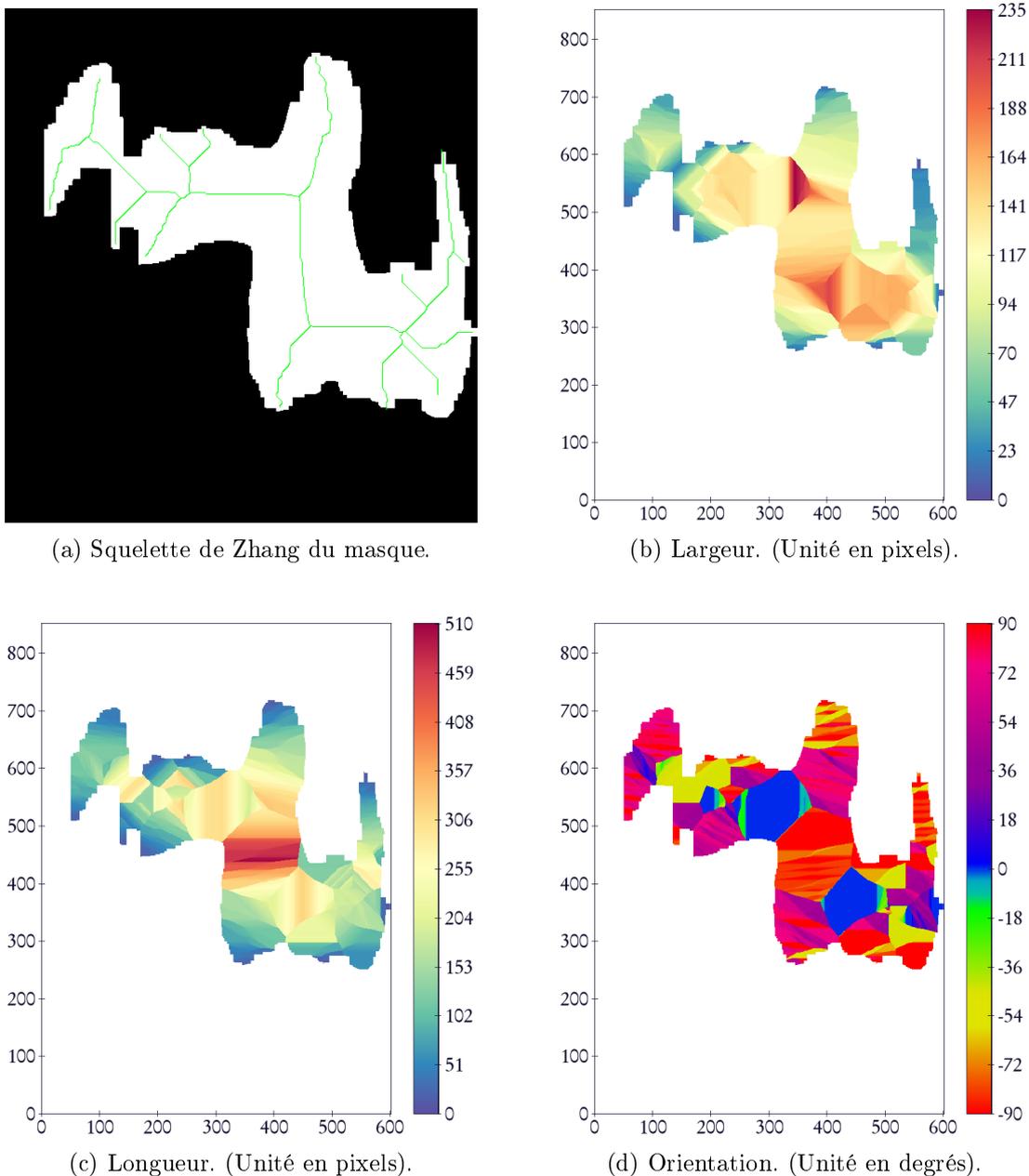


FIGURE 9.10: Cartes des mesures locales du corps géologique avec la méthode du squelette binaire.

Si nous superposons la représentation des vecteurs de M-Paramètres sur l'image d'épaisseur, nous constatons que nous avons effectivement bien caractérisé la

9. SYNTHÈSE - DEUX CAS D'APPLICATION

forme dans son globalité mais que nous n'arrivons pas à reproduire le comportement des oscillations internes de l'épaisseur (figures 9.11 et 9.12). En effet, les méthodes binaires ne prenant en compte que le masque ne peuvent pas reproduire le comportement sinueux des zones rouges où l'orientation des structures varie localement très fortement. Nous avons deux solutions possibles pour caractériser finement les zones sinueuses qui apparaissent sur la donnée d'épaisseur. La première consiste à extraire un masque de cette partie et la seconde revient à calculer directement sur la donnée en niveaux de gris. Nous choisissons cette seconde option.

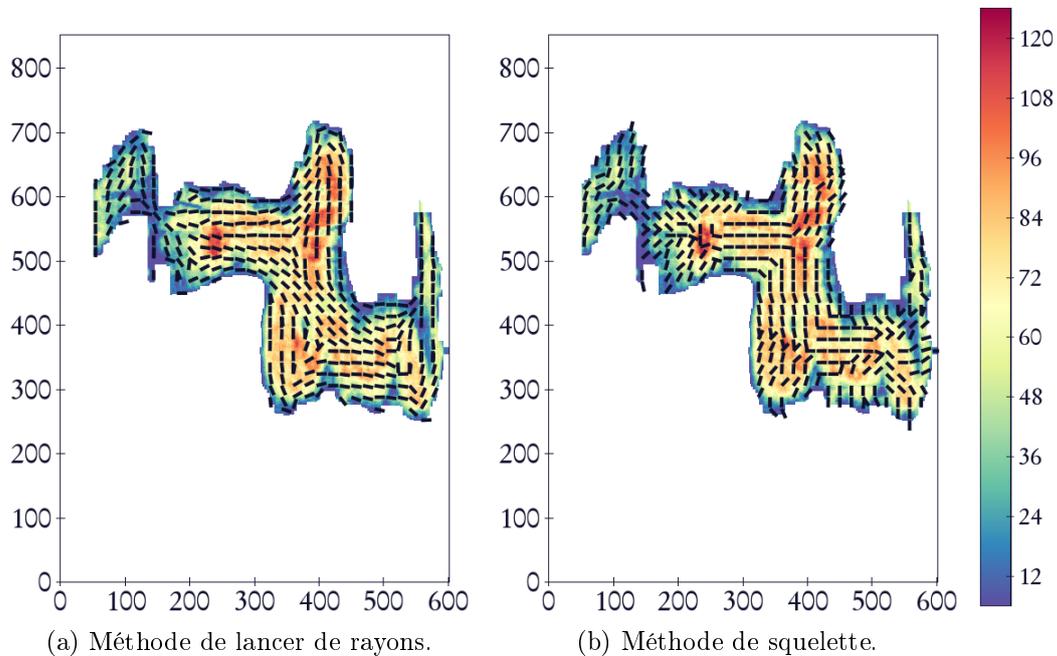


FIGURE 9.11: Vue générale - Représentation des vecteurs de M-Paramètres binaires sur la carte d'épaisseur. Les vecteurs sont de norme unitaire.

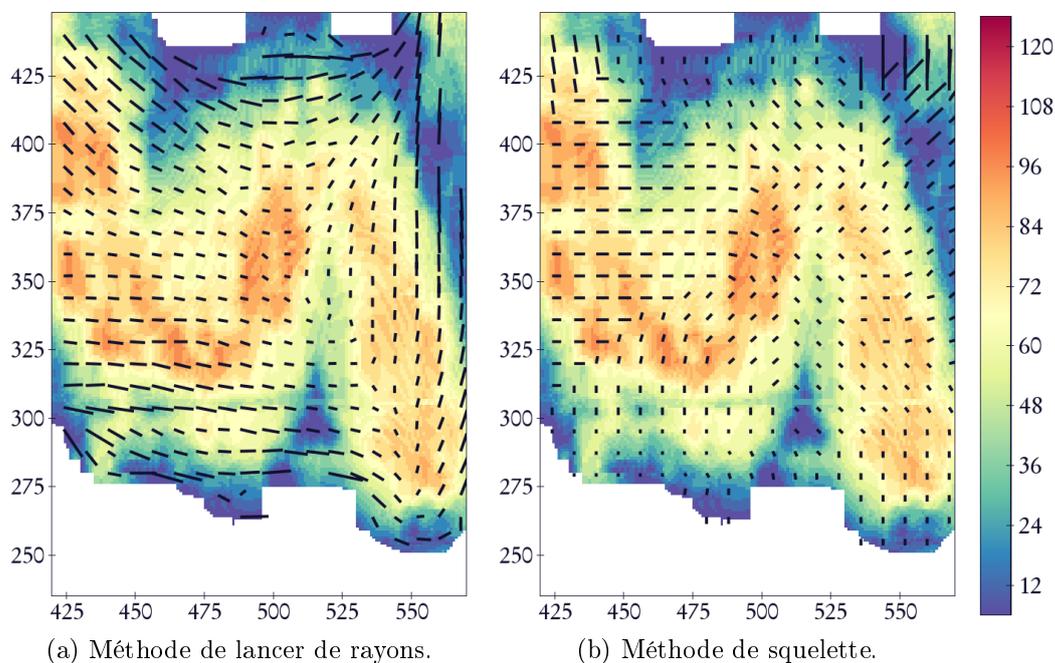


FIGURE 9.12: Détail - Représentation des vecteurs de M-Paramètres binaires sur la carte d'épaisseur.

9.3.2.3 Caractérisation en niveaux de gris

L'objectif est de pouvoir caractériser les structures qui apparaissent en rouge sur les données d'épaisseur (et qui correspondent aux zones de plus forte épaisseur) en travaillant directement sur cette donnée. Cherchant à caractériser des zones de valeurs homogènes, nous choisissons le critère suivant : en un point donné, on peut prolonger le rayon tant que la différence entre le pixel de départ et le pixel courant du rayon est plus faible qu'un certain seuil. Ce seuil est déterminé expérimentalement. Nous obtenons 3 cartes de M-Paramètres illustrées à la figure 9.13.

9. SYNTHÈSE - DEUX CAS D'APPLICATION

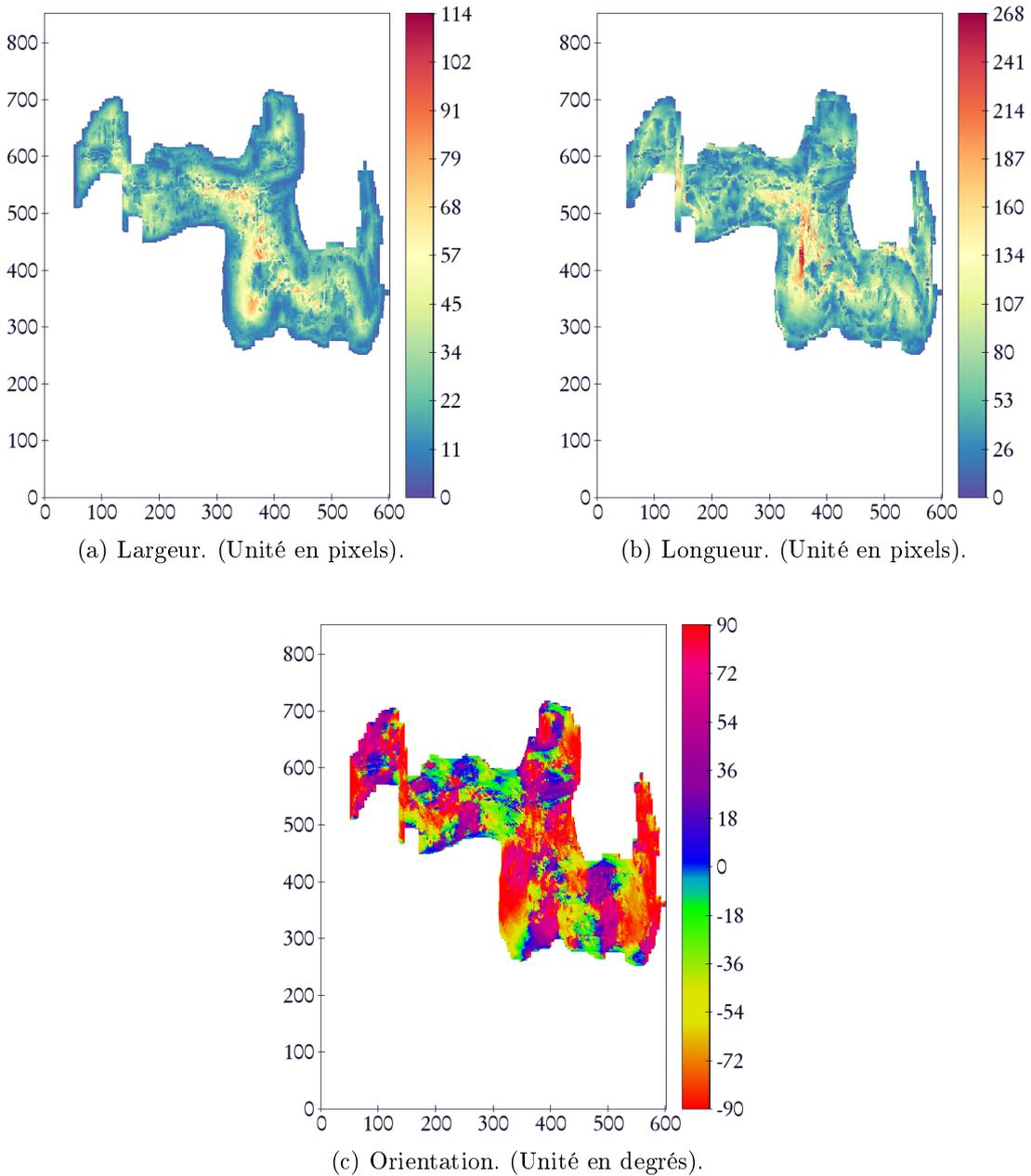


FIGURE 9.13: Cartes des mesures locales du corps géologique avec la méthode du lancer de rayons en niveaux de gris.

Si nous visualisons, à nouveau, les vecteurs associés à ces nouveaux M-Paramètres, nous observons que nous caractérisons, cette fois-ci, correctement les variations

locales d'épaisseur à l'intérieur du masque (figure 9.14).

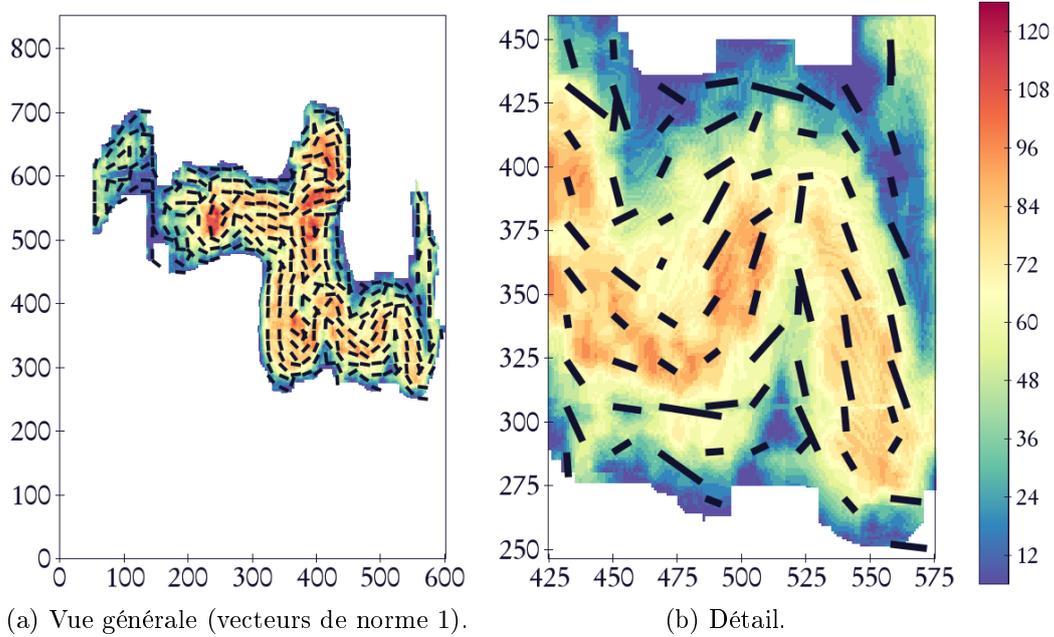


FIGURE 9.14: Représentation des vecteurs de M-Paramètres en niveaux de gris sur la carte d'épaisseur. Les M-Paramètres s'adaptent localement à la structuration de la donnée d'épaisseur.

Nous choisissons d'extraire manuellement cette zone mise en valeur pour effectuer une estimation par krigeage à l'intérieur de ce nouvel ensemble.

9.3.2.4 Krigeage avec des distances euclidiennes et géodésiques

Le nouveau masque d'étude est un sous-ensemble du masque initial. Il correspond aux zones de forte épaisseur. À l'intérieur de ce masque nous plaçons 9 points de données génériques qui pourraient correspondre à une propriété de réservoir (figure 9.15). Ce masque binaire présentant localement des zones assez tortueuses, il semble intéressant de tenter de les prendre en compte en effectuant un krigeage géodésique présenté au chapitre 8 et en comparant le résultat avec un krigeage « classique » euclidien.

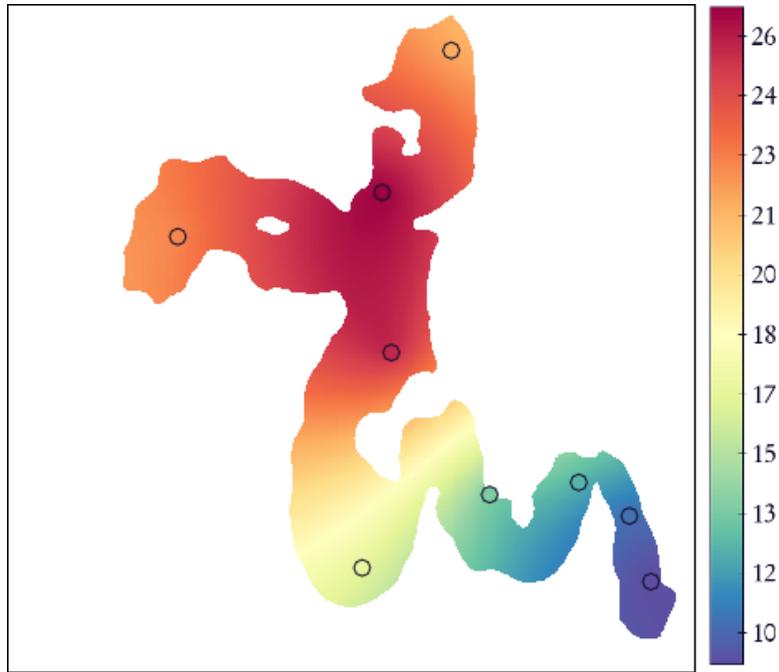
9. SYNTHÈSE - DEUX CAS D'APPLICATION



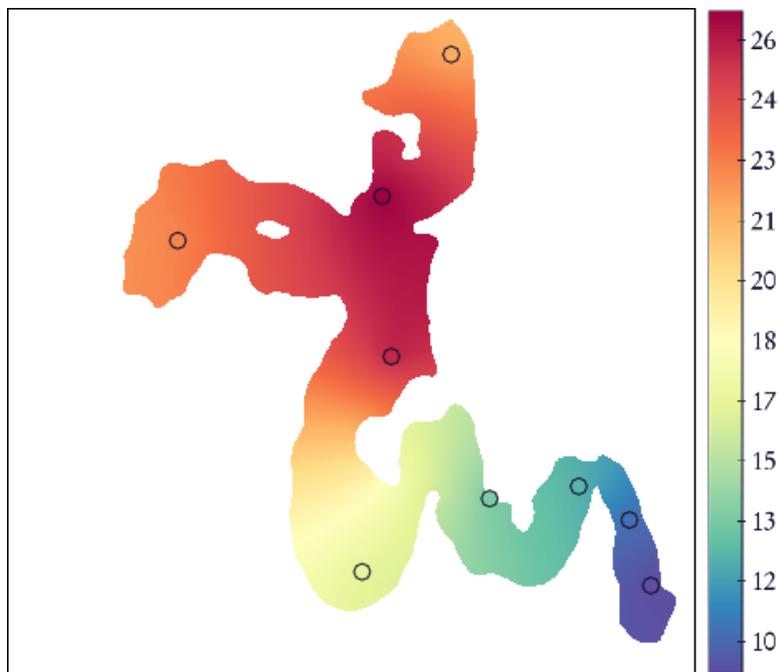
FIGURE 9.15: Masque de calcul et données de propriété réservoir génériques.

Nous choisissons comme modèle un variogramme sphérique isotrope avec une portée de 750. Nous faisons le choix d'effectuer un krigeage avec voisinage unique, c'est-à-dire que tous les points cibles sont dans le voisinage des points cibles. Pour vérifier la stabilité du krigeage géodésique, nous nous sommes assurés que l'ensemble des matrices de covariances calculées sont définies positives. L'estimation par krigeage géodésique prend plusieurs heures (un peu plus de 6 heures) contre quelques minutes pour le krigeage euclidien.

Les estimations par krigeage et les écarts types associés sont illustrés aux figures [9.16](#) et [9.17](#).



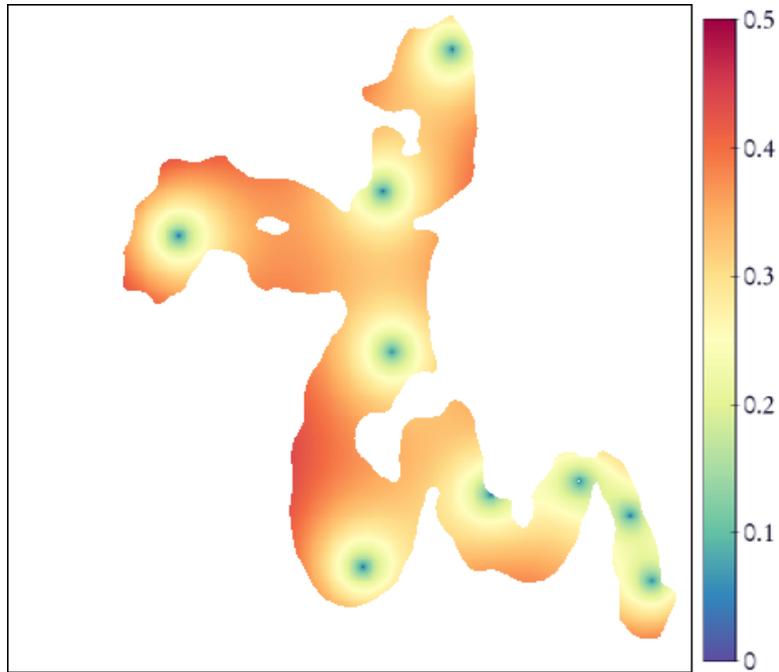
(a) Cas euclidien.



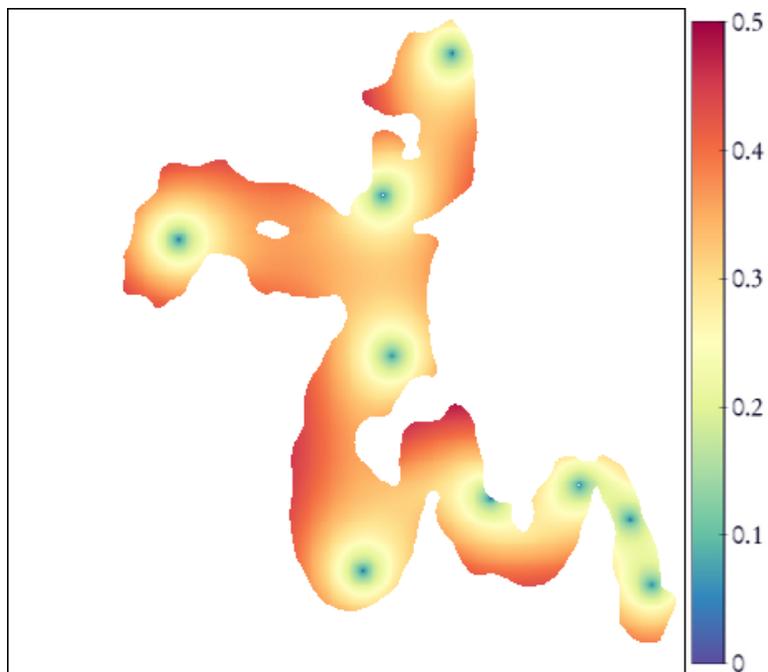
(b) Cas géodésique.

FIGURE 9.16: Estimation par krigeage avec une distance euclidienne et géodésique.

9. SYNTHÈSE - DEUX CAS D'APPLICATION



(a) Cas euclidien.



(b) Cas géodésique.

FIGURE 9.17: Écart type de krigeage euclidien et géodésique.

Les différences obtenues entre ces deux krigeages ne sont pas très visibles sur les figures précédentes. Nous calculons donc la différence en valeurs absolue entre les deux estimations (figure 9.18) et nous constatons que les écarts sont les plus importants sur la partie basse du masque. Ce résultat n'a rien d'étonnant, puisque cette région correspond aux zones les plus sinueuses du masque : celles où les différences entre la distance euclidienne et géodésique sont les plus fortes. La figure 9.19 permet de mieux voir ces différences.

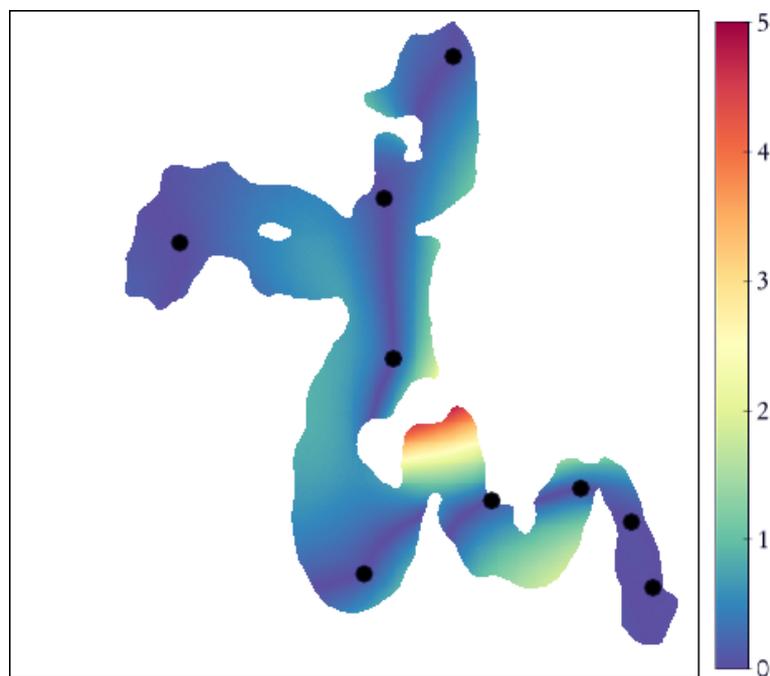


FIGURE 9.18: Valeur absolue des différences entre les deux estimations par krigeage.

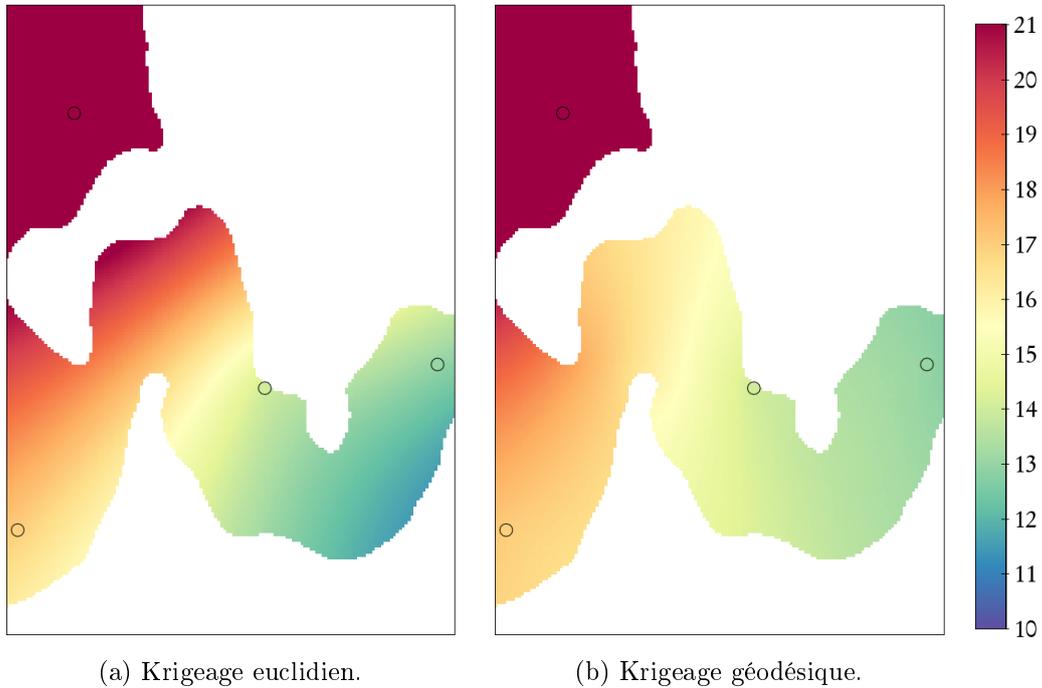


FIGURE 9.19: Détail - cartographie avec une distance euclidienne sur la gauche et géodésique sur la droite.

9.3.3 Étude en trois dimensions

9.3.3.1 Estimation des M-Paramètres

Nous souhaitons donc maintenant caractériser l'ensemble du *geobody* 3D. Sur un maillage grossier, le temps de calcul des M-Paramètres 3D est de quelques minutes. Il est par contre de près de 50 minutes lorsque l'on utilise une maille fine. La prochaine section présente différents moyens de visualisation des M-Paramètres calculés.

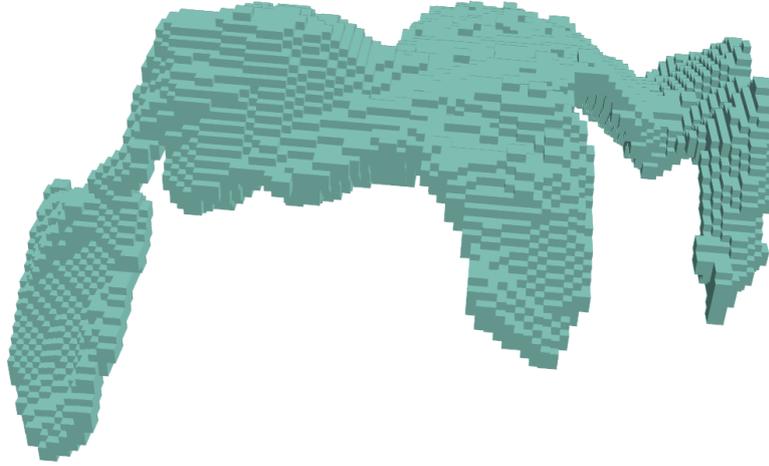


FIGURE 9.20: *Geobody* 3D.

9.3.3.2 Visualisation des résultats

Nous avons exposé au cours du chapitre 7 plusieurs moyens de représentation des M-Paramètres. Les résultats correspondent à la caractérisation effectuée en utilisant la maille fine de dimensions $601 \times 851 \times 134$.

En ce qui concerne la première représentation des orientations, la première figure correspond à la représentation de la direction principale du geobody le long d'une surface amincie de taille unitaire (figure 9.21). Les figures 9.22 et 9.23 illustrent le principe de représenter les M-Paramètres sous la forme de vecteurs. De plus, nous associons, une couleur à ces vecteurs correspondant aux ratios suivants (avec a , b et c , les paramètres de taille du plus grand au plus petit), ce qui permet d'afficher à la fois une information d'orientation et une information de taille :

$$r_1 = \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad (9.1)$$

$$r_2 = \frac{b}{c} \quad (9.2)$$

Nous pouvons également représenter la même information de ratio d'anisotropie avec des cartes le long de plan de coupes (figures 9.24 et 9.25). Enfin, pour conclure avec l'information de taille, nous représentons les 3 paramètres de taille le long du même plan de coupe (figures 9.26, 9.27 et 9.28).

9. SYNTHÈSE - DEUX CAS D'APPLICATION

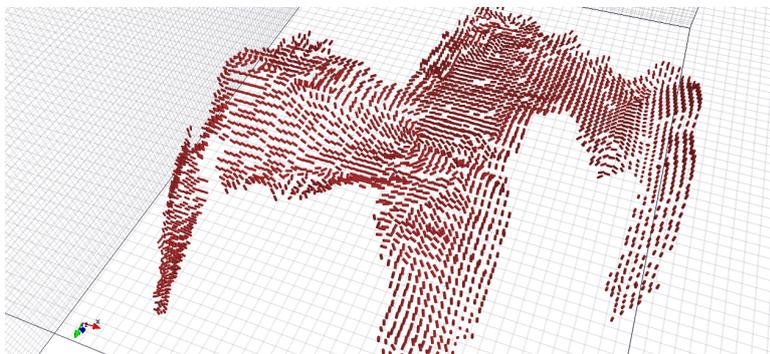


FIGURE 9.21: Orientation principale du *geobody* le long d'une surface moyenne.

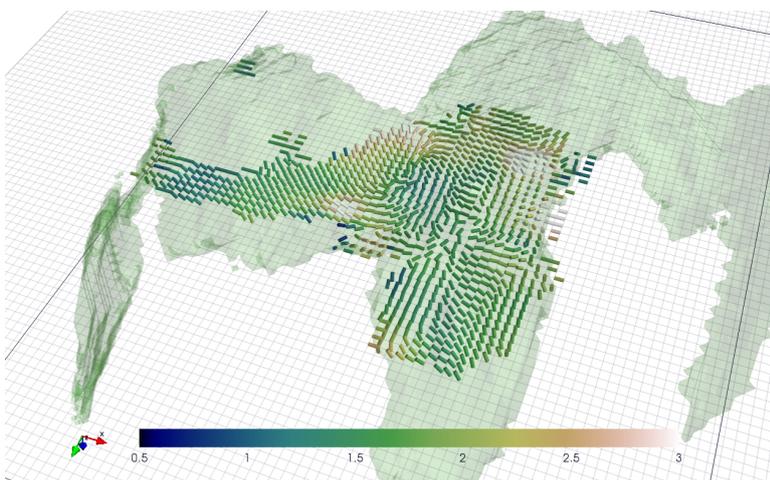


FIGURE 9.22: Représentation vectorielles des M-Paramètres. La couleur correspond au ratio r_1 (équation 9.1).

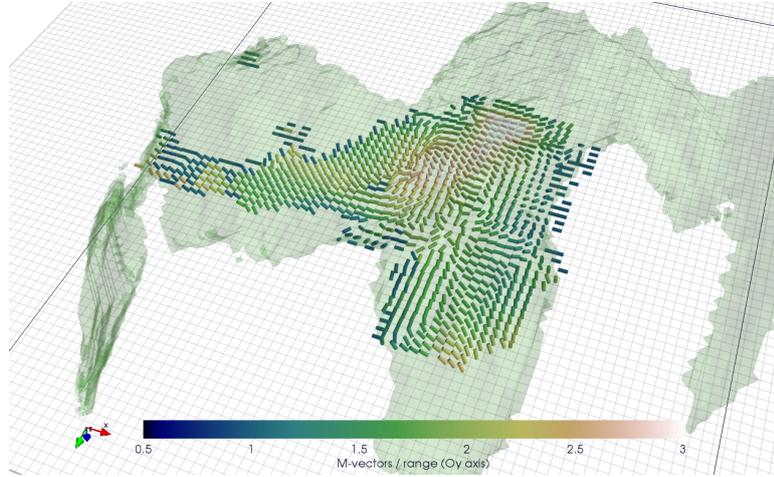


FIGURE 9.23: Représentation vectorielles des M-Paramètres. La couleur correspond au ratio r_2 (équation 9.2).

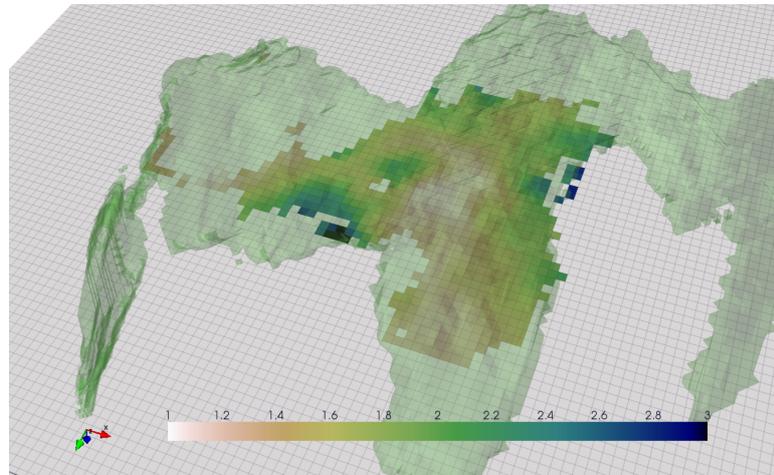


FIGURE 9.24: Carte du ratio r_1 (équation 9.1) le long d'un plan de coupe.

9. SYNTHÈSE - DEUX CAS D'APPLICATION

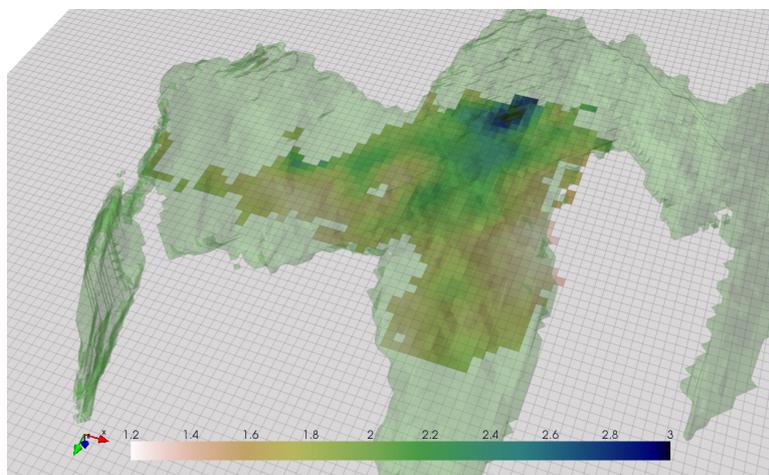


FIGURE 9.25: Carte du ratio r_2 (équation 9.2) le long d'un plan de coupe.

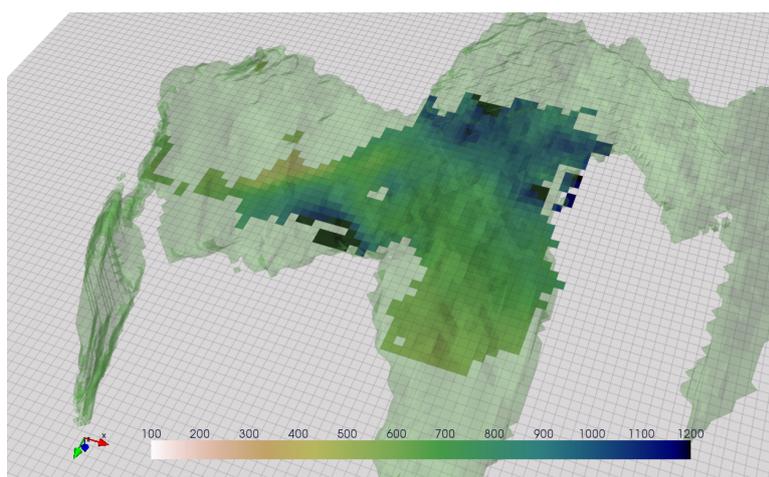


FIGURE 9.26: Carte de la longueur le long d'un plan de coupe.

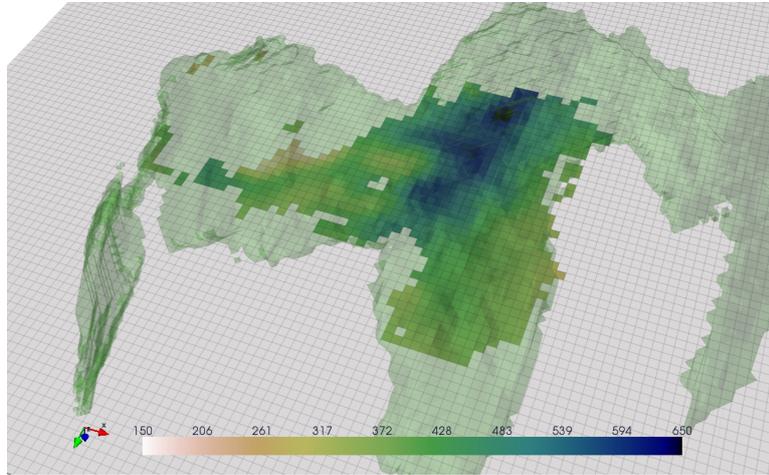


FIGURE 9.27: Carte de la largeur le long d'un plan de coupe.

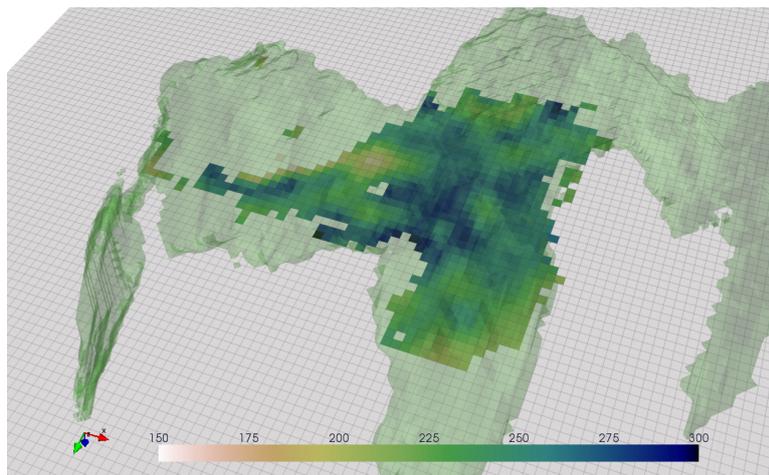


FIGURE 9.28: Carte de la profondeur le long d'un plan de coupe.

La caractérisation de ce *geobody* obtenue avec la méthode de lancer de rayons 3D est globalement cohérente. Ces résultats constituent cependant une étude préliminaire. Ils nécessiteraient très certainement des approfondissements pour pouvoir les affiner et mieux les mettre en valeur.

9.4 Conclusion du chapitre

Au cours de ce chapitre, nous avons vérifié que les méthodes développées dans ce manuscrit sont parfaitement adaptées pour traiter des données de l'amont pétrolier. Nous avons eu l'occasion d'appliquer une bonne partie des méthodes que nous avons développées au cours de ce manuscrit comme la caractérisation d'objets 2D (binaire et niveaux de gris) et 3D ainsi qu'une opération d'estimation par krigeage géodésique. L'ensemble de ces informations est important pour des applications de caractérisation de réservoir telles que la spatialisation par krigeage ou simulation d'informations de puits. Nous avons ainsi pu effectuer une estimation par simulation M-GS d'une donnée synthétique de porosité au cours du premier cas d'application. Ces simulations ont permis d'obtenir des motifs qui respectent la forme du corps géologique étudié.

Chapitre 10

Conclusion

“George,” he began. “All your life. Fantastic!”
[. . .] Peter Guillam touched his arm.
“Come on, old friend,” he said. “It’s bedtime.”
From long habit, Smiley had taken off his spectacles and was absently polishing them on the fat end of his tie, even though he had to delve for it among the folds of his tweed coat.
“George, you won,” said Guillam as they walked slowly towards the car.
“Did I?” said Smiley. “Yes. Yes, well I suppose I did.”
END

Smiley’s People
J. le Carré

10.1 Apports de cette thèse

10.1.1 Détermination de paramètres variographiques locaux

Les travaux de cette thèse s’inscrivent dans un contexte multidisciplinaire à la frontière de deux disciplines : le traitement d’images et la géostatistique. L’objectif principal de cette thèse consistait en un pari audacieux : déterminer des paramètres variographiques locaux de modèles géostatistiques par des méthodes de traitement d’images, pour offrir une alternative opérationnelle aux modèles non stationnaires « classiques » tels que le krigeage universel et les fonctions aléatoires intrinsèques d’ordre k (FAI- k). Ainsi, le premier enjeu a consisté à trouver

10. CONCLUSION

un langage permettant de faire communiquer des méthodes de caractérisation de formes du traitement d'images avec les modèles et outils de la géostatistique.

À partir d'une hypothèse de quasi-stationnarité en géostatistique, et en partant du cas le plus simple, que constitue la caractérisation d'une forme binaire 2D, nous avons progressivement généralisé notre approche, dite de lancer de rayons, pour obtenir des paramètres morphologiques de dimensions et d'orientations de structures relatifs aussi bien à des formes binaires que des formes en niveaux de gris, en 2D comme en 3D. Ces paramètres pouvant être ensuite directement incorporés dans des processus d'estimation par krigeage et dans des processus de simulation variographique.

Nous avons également proposé un cadre de travail opérationnel permettant d'utiliser directement les méthodes de calcul de distance géodésique bien connues en morphologie mathématique pour calculer un variogramme dit géodésique et effectuer une estimation par krigeage.

Contrairement à d'autres méthodes de caractérisation locale telle que celle présentée, par exemple, par [Boisvert & Deutsch \(2010\)](#), les méthodes développées, dans le cadre de cette thèse, sont rapides et ne nécessitent pas d'importantes ressources informatiques aussi bien en termes de *CPU* que de mémoire.

Enfin, notre panel d'outils est utilisable aussi bien par un géostatisticien que par une personne ayant peu de connaissances en géostatistique. Ce constat seul justifie *a posteriori* l'intérêt de notre démarche : elle ouvre sur un champ d'applications important.

10.1.2 Applications

Nous avons justifié, au cours de l'introduction, le choix de présenter des chapitres méthodologiques entrecoupés de plusieurs applications. Nous souhaitons pouvoir vérifier, grâce à des cas d'études réels, la pertinence de notre démarche. Les différents domaines d'application ont été très variés. Nous avons aussi bien pu traiter des données bathymétriques, que des données 2D et 3D du domaine pétrolier (spatialisation de propriétés de réservoir, caractérisation d'un *geobody*). Nous avons également estimé une carte de pollution de l'air en milieu urbain avec les méthodes géodésiques.

Les résultats des études d'estimation de la pollution de l'air et des études relatives au domaine pétrolier ont pu être présentés, par la société Estimages, à différentes entreprises afin de nouer des perspectives de collaboration.

10.1.3 Retombées industrielles

Ce travail de thèse ayant été effectué en partenariat avec la société Estimages, il était primordial que les méthodes décrites dans le présent manuscrit puissent être réutilisées par cette société. Ainsi, tous les algorithmes présentés ont été implémentés dans une librairie informatique qu'il est possible d'appeler aussi bien au niveau *C++* que *python*. De plus, cette librairie a été intégrée au sein du logiciel de traitement géostatistique développé par la société Estimages. Cette synergie fait qu'aujourd'hui la société Estimages se sert des outils et méthodes développés au cours de cette thèse pour certaines de ses études auprès de ses clients.

10.2 Perspectives

À l'heure de conclure cette thèse, il n'est pas forcément évident de prendre suffisamment de recul pour estimer avec justesse la portée de ces travaux. La perspective la plus valorisante, à titre personnel, serait qu'ils puissent être utilisés à nouveau pour développer de nouvelles méthodes dans le domaine.

D'un point de vue informatique, bien que les implémentations de nos algorithmes soient déjà rapides, il pourrait être intéressant d'effectuer un travail de parallélisation de ces derniers, maintenant que les machines multi-cœur forment la majorité du parc informatique. En outre, nous avons noté au cours du chapitre 7 que les outils de visualisation de M-Paramètres 3D que nous avons utilisés et développés pouvaient être étoffés. Un nouveau travail de recherche d'outils de visualisation 3D, complémentaires aux nôtres, pourrait être envisagé.

De plus, nous avons souligné au cours du chapitre 3, le parti-pris d'adopter une position pragmatique pour traiter des problèmes non stationnaires, en laissant en partie de côté, une recherche de légitimité théorique. En effet, nos méthodes de

10. CONCLUSION

détermination de M-Paramètres reposent sur l'hypothèse de stationnarité locale. Les travaux tels que ceux présentés par [Furrer \(2002\)](#) pourraient constituer une première base de travail pour valider expérimentalement cette hypothèse.

En ce qui concerne, les méthodes de caractérisation de formes locales, la question de savoir si notre méthode basée sur le squelette, valable dans le cas binaire, peut se généraliser en niveaux de gris et en 3D est ouverte. Cette méthode a l'avantage de traiter automatiquement les cas de croisement d'orientations. Nous n'avons pas aujourd'hui d'équivalent en niveaux de gris.

Nous avons également souligné que le travail effectué sur l'utilisation de distances non euclidiennes constituait une ouverture. Nous avons démontré comment les outils de la morphologie mathématique de calcul de distances peuvent se combiner avec ceux de la géostatistique. Ce champ de recherche étant peu exploré, de nombreuses perspectives de recherche et de développement peuvent être imaginées. Tout d'abord, il s'avère nécessaire de développer de nouvelles classes de covariances définies positives pour la distance géodésique binaire. De plus, de nouvelles études utilisant cette fois-ci des distances géodésiques généralisées sont actuellement en cours de réflexion. Pour améliorer les temps de calcul et pour pouvoir l'appliquer en 3D, nous réfléchissons actuellement au développement de nouveaux algorithmes de calcul de distances géodésiques binaires tirant pleinement avantage d'une structure de graphe ou d'une forme simplifiée de largeur unitaire telle que la transformée en squelette.

Enfin, il semble également pertinent de se demander s'il serait possible de développer des méthodes de traitement d'image pour travailler directement sur un jeu de données et non plus sur une image afin de calculer des portées et des orientations variant localement.

10. CONCLUSION

Bibliographie

- ALTENDORF, H. (2011). *3D Morphological Analysis and Modeling of Random Fiber Networks*. Ph.D. thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris. [101](#)
- ARCELLI, C. & RAMELLA, G. (1995). Finding grey-skeletons by iterated pixel removal. *Image and vision computing*, **13**, 159–167. [90](#)
- ARMSTRONG, M. (1998). *Basic linear geostatistics*. Springer Verlag. [13](#)
- ARMSTRONG, M. & DIAMOND, P. (1984). Testing variograms for positive-definiteness. *Mathematical Geology*, **16**, 407–421. [161](#)
- ARMSTRONG, M. & JABIN, R. (1981). Variogram models must be positive-definite. *Mathematical Geology*, **13**, 455–459. [19](#)
- BAILLARGEON, S. (2005). *Le krigeage : revue de la théorie et application à l'interpolation spatiale de données de précipitations*. Master's thesis, Université Laval. [20](#)
- BEELEN, R., HOEK, G., FISCHER, P., BRANDT, P.A. & BRUNEKREEF, B. (2007). Estimated long-term outdoor air pollution concentrations in a cohort study. *Atmospheric Environment*, **41**, 1343–1358. [171](#)
- BEUCHER, S. (2004). Transformations résiduelles en morphologie numérique. *Version longue du papier présenté à ISS, le 5 février 2004*. [85](#), [87](#), [88](#), [107](#)
- BLUM, H. (1967). A transformation for extracting new descriptors of shape. *Models for the perception of speech and visual form*, **19**, 362–380. [56](#)

BIBLIOGRAPHIE

- BOBBIA, M., MIETLICKI, F. & ROTH, C. (2000). Surveillance de la qualité de l'air par cartographie : l'approche géostatistique. *INRETS, Avignon, France, 5-8 Juin.* [171](#)
- BOISVERT, J.B. & DEUTSCH, C.V. (2010). Programs for kriging and sequential gaussian simulation with locally varying anisotropy using non-euclidean distances. *Computers & Geosciences.* [222](#)
- BORG, I. & GROENEN, P.J.F. (2005). *Modern multidimensional scaling : Theory and applications.* Springer Verlag. [167](#)
- BRESENHAM, J.E. (1965). Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Systems journal*, **4**, 25-30. [104](#), [139](#)
- CÁRDENES, R., ALBEROLA-LÓPEZ, C. & RUIZ-ALZOLA, J. (2010). Fast and accurate geodesic distance transform by ordered propagation. *Image and Vision Computing*, **28**, 307-316. [175](#)
- CATTLE, J.A., MCBRATNEY, A.B. & MINASNY, B. (2002). Kriging method evaluation for assessing the spatial distribution of urban soil lead contamination. *Journal of Environmental Quality*, **31**, 1576. [33](#)
- CHAUVET, P. (2008). *Aide-mémoire de géostatistique linéaire.* Presses de l'école des Mines. [21](#)
- CHILES, J.P. & DELFINER, P. (1999). *Geostatistics : modeling spatial uncertainty.* Wiley-Interscience. [13](#), [20](#)
- COEURJOLLY, D. (2002). *Algorithmique et géométrie pour la caractérisation des courbes et des surfaces.* Ph.D. thesis, Université de Lyon 2. [140](#)
- COHN, H. & KUMAR, A. (2007). Universally optimal distribution of points on spheres. *Journal of the American Mathematical Society*, **20**, 99. [140](#)
- CONWAY, J., HARDIN, R. & SLOANE, N.J.A. (1996). Packing lines, planes, etc. : Packings in grassmannian spaces. *Experimental Mathematics*, **5**, 139-159. [140](#)

- COUPRIE, M., BEZERRA, F. & BERTRAND, G. (2001). Topological operators for grayscale image processing. *Journal of Electronic Imaging*, **10**, 1003. 90
- CRESSIE, N. (1985). Fitting variogram models by weighted least squares. *Mathematical geology*, **17**, 563–586. 19
- CRESSIE, N., KAISER, M.S., DANIELS, M.J., ALDWORTH, J., LEE, J., LAHIRI, S.N. & COX, L.H. (1998). Spatial analysis of particulate matter in an urban environment. In *GeoENV II : Geostatistics for Environmental Applications : Proceedings of the Second European Conference on Geostatistics for Environmental Applications Held in Valencia, Spain, November 18-20, 1998*, 41, Kluwer Academic Pub. 171
- CRESSIE, N., FREY, J., HARCH, B. & SMITH, M. (2006). Spatial prediction on a river network. *Journal of agricultural, biological, and environmental statistics*, **11**, 127–150. 169
- CURRIERO, F.C. (2006). On the use of non-euclidean distance measures in geostatistics. *Mathematical geology*, **38**, 907–926. 161, 166, 170
- DANIELSSON, P.E. (1980). Euclidean distance mapping. *Computer Graphics and image processing*, **14**, 227–248. 60
- DE FOUQUET, C. & BERNARD-MICHEL, C. (2006). Modèles géostatistiques de concentrations ou de débits le long des cours d'eau. *Comptes Rendus Geosciences*, **338**, 307–318. 169
- DECENCIÈRE, E. & BILODEAU, M. (2007). Adaptive crossing numbers and their application to binary downsampling. *Image Analysis and Stereology*, **26**. 63
- DELFINER, P. & MATHERON, G. (1980). Les fonctions aléatoires intrinsèques d'ordre k. *Note C-84. Centre de Géostatistique, École nationale supérieure des Mines de Paris, Fontainebleau, Paris*. 27
- DIJKSTRA, E. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische mathematik*, **1**, 269–271. 167

BIBLIOGRAPHIE

- DOKLÁDAL (2000). *Grey-scale image segmentation : a topological approach*. Ph.D. thesis, Université de Marne-La-Vallée. [90](#)
- DYER, C.R. & ROSENFELD, A. (1979). Thinning algorithms for gray-scale pictures. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 88–89. [90](#)
- ENFICIAUD, R. (2007). *Algorithmes multidimensionnels et multispectraux en Morphologie Mathématique : approche par méta-programmation..* Ph.D. thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris. [88](#)
- FRANKE, R. & NIELSON, G.M. (1991). Scattered data interpolation and applications : A tutorial and survey. *Geometric Modelling : Methods and Their Application*, 131–160. [20](#)
- FREEMAN, H. (1961). On the encoding of arbitrary geometric configurations. *Electronic Computers, IRE Transactions*, 260–268. [52](#)
- FREEMAN, H. & SAGHRI, A. (1978). Generalized chain codes for planar curves. In *Proceedings of the 4th International Joint Conference on Pattern Recognition*, 701–703. [52](#)
- FUENTES, M. (2001). A high frequency kriging approach for nonstationary environmental processes. *Environmetrics*, **12**, 469–483. [31](#)
- FURRER, R. (2002). *Aspects of Modern Geostatistics : Nonstationarity, Covariance Estimation and State-Space Decompositions*. Ph.D. thesis, Swiss Federal Insitute of Technology. [224](#)
- GARDNER, B., SULLIVAN, P.J. & LEMBO JR, A.J. (2003). Predicting stream temperatures : geostatistical model comparison using alternative distance metrics. *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, **60**, 344–351. [166](#)
- GOFF, J.A. & NORDFJORD, S. (2004). Interpolation of fluvial morphology using channel-oriented coordinate transformation : a case study from the New Jersey shelf. *Mathematical Geology*, **36**, 643–658. [112](#)

- GRIMAUD, M. (1991). *La géodésie numérique en morphologie mathématique. Application à la détection automatique des microclassifications*. Ph.D. thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris. [92](#)
- GUMIAUX, C., GAPAIS, D. & BRUN, J.P. (2003). Geostatistics applied to best-fit interpolation of orientation data. *Tectonophysics*, **376**, 241–259. [68](#)
- GUTTORP, P. & SAMPSON, P.D. (1994). Methods for estimating heterogeneous spatial covariance functions with environmental applications. *Handbook of Statistics*, **12**, 661–689. [29](#)
- HAAS, T.C. (1990a). Kriging and automated variogram modeling within a moving window. *Atmospheric Environment. Part A. General Topics*, **24**, 1759–1769. [33](#)
- HAAS, T.C. (1990b). Lognormal and moving window methods of estimating acid deposition. *Journal of the American Statistical Association*, **85**, 950–963. [33](#)
- HAAS, T.C. (1996). Multivariate spatial prediction in the presence of non-linear trend and covariance non-stationarity. *Environmetrics*, **7**, 145–165. [33](#)
- HAAS, T.C. (2002). New systems for modeling, estimating, and predicting a multivariate spatio-temporal process. *Environmetrics*, **13**, 311–332. [32](#)
- HARRIS, P., CHARLTON, M. & FOTHERINGHAM, A.S. (2010). Moving window kriging with geographically weighted variograms. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, **24**, 1193–1209. [30](#), [33](#)
- HASSAÏNE, A., EGLIN, V. & BRES, S. (2007). Une méthode de compression sans perte pour les images de documents basée sur la séparation en couches. In *Compression et Représentation des Signaux Audiovisuels*, Montpellier. [65](#)
- HASSAÏNE, A., FELDER, J., DECENCIÈRE, E., MAGNERON, C. & PETIT, F. (2011). Computing local characteristics on binary shapes. application to geostatistical modelling. *À paraître dans Image Analysis and Stereology*. [119](#)

BIBLIOGRAPHIE

- HIGDON, D. (1998). A process-convolution approach to modelling temperatures in the north atlantic ocean. *Environmental and Ecological Statistics*, **5**, 173–190. [30](#)
- HIGDON, D., SWALL, J. & KERN, J. (1999). Non-stationary spatial modeling. In *Bayesian Statistics 6. Proceedings of the Sixth Valencia International Meeting*, vol. 6, 761–768, Oxford University Press. [30](#), [31](#)
- HILDITCH, C.J. (1973). Linear skeletons from square cupboards. *Pattern recognition : introduction and foundations*, 299. [63](#)
- HOEF, J.M.V., PETERSON, E. & THEOBALD, D. (2006). Spatial statistical models that use flow and stream distance. *Environmental and Ecological Statistics*, **13**, 449–464. [169](#)
- HU, M.K. (1962). Visual pattern recognition by moment invariants. *Information Theory, IRE Transactions*, **8**, 179–187. [53](#), [55](#)
- JAIN, A. & FARROKHNI, F. (1991). Unsupervised texture segmentation using gabor filters. *Pattern recognition*, **24**, 1167–1186. [96](#)
- JENSEN, O.P., CHRISTMAN, M.C. & MILLER, T.J. (2006). Landscape-based geostatistics : a case study of the distribution of blue crab in chesapeake bay. *Environmetrics*, **17**, 605–621. [168](#)
- JIAN, X., OLEA, R.A. & YU, Y.S. (1996). Semivariogram modeling by weighted least squares. *Computers & Geosciences*, **22**, 387–397. [19](#)
- KLETTE, R. & ROSENFELD, A. (2004). *Digital geometry*. Elsevier. [140](#)
- KRIGE, D.G. (1951). A statistical approach to some mine valuation and allied problems on the witwatersrand. *Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society*, **52**, 119–139. [12](#)
- KRIVORUCHKO, K. & GRIBOV, A. (2004). Geostatistical interpolation and simulation in the presence of barriers. *geoENV IV—Geostatistics for Environmental Applications*, 331–342. [169](#)

- LACHAUD, J.O., VIALARD, A. & DE VIEILLEVILLE, F. (2005). Analysis and comparative evaluation of discrete tangent estimators. In E. Andrès, G. Damiand & P. Lienhardt, eds., *Proc. Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2005), Poitiers, France*, vol. 3429 of *LNCS*, 140–251, Springer. 65
- LAM, N.S.N. (1983). Spatial interpolation methods : a review. *The American Cartographer*, **10**, 129–149. 20
- LANTUÉJOUL, C. & BEUCHER, S. (1981). On the use of the geodesic metric in image analysis. *Journal of Microscopy*, **121**, 39–49. 48
- LANTUÉJOUL, C. & MAISONNEUVE, F. (1984). Geodesic methods in quantitative image analysis. *Pattern Recognition*, **17**, 177–187. 49, 50
- LANTUÉJOUL, C. (1978). *La squelettisation et son application aux mesures topologiques des mosaïques polycristallines*. Ph.D. thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris. 56, 61
- LI, J. & HEAP, A.D. (2008). A review of spatial interpolation methods for environmental scientists. *Geoscience Australia Record*, **23**, 137 pp. 20
- LI, Q. & GRIFFITHS, J.G. (2004). Least squares ellipsoid specific fitting. In *Geometric Modeling and Processing 2004 Proceedings*, vol. 2004, 335–340. 143, 145
- LIAO, S.X. & PAWLAK, M. (1996). On image analysis by moments. *Pattern analysis and machine intelligence, IEEE Transactions on*, **18**, 254–266. 55
- LITTLE, L.S., EDWARDS, D. & PORTER, D.E. (1997). Kriging in estuaries : as the crow flies, or as the fish swims ? *Journal of experimental marine biology and ecology*, **213**, 1–11. 166
- LLOYD, C.D. & ATKINSON, P.M. (2002). Nonstationary approaches for mapping terrain and assessing prediction uncertainty. *Transactions in GIS*, **6**, 17–30. 33

BIBLIOGRAPHIE

- LOHOU, C. (2001). *Contribution à l'analyse topologique des images : étude d'algorithmes de squelettisation pour images 2D et 3D, selon une approche topologie digitale ou topologie discrète*. Ph.D. thesis, Université de Marne-La-Vallée. 56, 90
- LØLAND, A. & HØST, G. (2003). Spatial covariance modelling in a complex coastal domain by multidimensional scaling. *Environmetrics*, **14**, 307–321. 167
- LONCARIC, S. (1998). A survey of shape analysis techniques. *Pattern recognition*, **31**, 983–1001. 46
- MACHUCA-MORY, D.F. (2010). *Geostatistics with Location-Dependent Statistics*. Ph.D. thesis, University of Alberta. 30
- MAGNERON, C., JEANNEE, N., MOINE, O. & BOURILLET, J.F. (2008). Integrating prior knowledge and locally varying parameters with moving-geostatistics : methodology and application to bathymetric mapping. *geoENV VII—Geostatistics for Environmental Applications*, 405–415. 36
- MALANDAIN, G., BERTRAND, G. & AYACHE, N. (1993). Topological segmentation of discrete surfaces. *International Journal of Computer Vision*, **10**, 183–197. 64
- MATAS, J., SHAO, Z. & KITTLER, J. (1995). Estimation of curvature and tangent direction by median filtered differencing. In C. Braccini, L. DeFloriani & G. Vernazza, eds., *Image Analysis and Processing*, vol. 974 of *Lecture Notes in Computer Science*, 83–88, Springer Berlin / Heidelberg. 65
- MATHERON, G. (1965). *Les variables régionalisées et leur estimation : une application de la théorie des fonctions aléatoires aux sciences de la nature*. Masson, Paris. 12, 16
- MATHERON, G. (1969). *Le krigeage universel*. École nationale supérieure des mines de Paris. 27
- MATHERON, G. (1970). La théorie des variables régionalisées et ses applications. *Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fascicule 5, Ecole des Mines de Paris*. 33

- MATHERON, G. (1980). Splines et krigeage : leur équivalence formelle. *École des Mines, Paris*. 20
- MEIJSTER, A., ROERDINK, J. & HESSELINK, W.H. (2000). A general algorithm for computing distance transforms in linear time. In *Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing*, 331–340. 60
- MERWADE, V.M., MAIDMENT, D.R. & GOFF, J.A. (2006). Anisotropic considerations while interpolating river channel bathymetry. *Journal of Hydrology*, **331**, 731–741. 112
- MUKUNDAN, R., ONG, S.H. & LEE, P.A. (2001). Image analysis by tchebichef moments. *Image Processing, IEEE Transactions on*, **10**, 1357–1364. 55
- NOYEL, G. (2008). *Filtrage, réduction de dimension, classification et segmentation morphologique hyperspectrale*. Ph.D. thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris. 165
- O’SULLIVAN, D. & UNWIN, D.J. (2003). *Geographic information analysis*. John Wiley & Sons. 20
- PARDO-IGZÚQUIZA, E. & DOWD, P.A. (1998). The second-order stationary universal kriging model revisited. *Mathematical geology*, **30**, 347–378. 27
- PARDO-IGZÚQUIZA, E., DOWD, P.A. & GRIMES, D.I.F. (2005). An automatic moving window approach for mapping meteorological data. *International journal of climatology*, **25**, 665–678. 33
- PAVLIDIS, T. (1978). A review of algorithms for shape analysis. *Computer Graphics and Image Processing*, **7**, 243–258. 46
- PEYREGA, C. (2010). Prédiction des propriétés acoustiques de matériaux fibreux hétérogènes à partir de leur microstructure 3d. 188
- RATHBUN, S.L. (1998). Spatial modelling in irregularly shaped regions : kriging estuaries. *Environmetrics*, **9**, 109–129. 166

BIBLIOGRAPHIE

- ROSENFELD, A. & PFALTZ, J.L. (1966). Sequential operations in digital picture processing. *Journal of the ACM (JACM)*, **13**, 471–494. [60](#)
- ROSIN, P.L. (1996). Analysing error of fit functions for ellipses. *Pattern Recognition Letters*, **17**, 1461–1470. [74](#)
- RUTOVITZ, D. (1966). Pattern recognition. *J Royal Statist Soc*, 504–530. [63](#)
- SAMPSON, P.D. & GUTTORP, P. (1992). Nonparametric estimation of nonstationary spatial covariance structure. *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 108–119. [29](#)
- SAMPSON, P.O., DAMIAN, D. & GUTTORP, P. (2001). Advances in modeling and inference for environmental processes with nonstationary spatial covariance. In *GeoENV 2000 : geostatistics for environmental applications*, 17–32, Springer. [30](#)
- SCHMITT, M. (1989). *Des algorithmes morphologiques à l'intelligence artificielle*. Ph.D. thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris. [52](#)
- SERRA, J. (1982). *Image analysis and mathematical morphology*. Academic Press, London. [46](#), [90](#), [188](#)
- SERRA, J. (1988). *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2 : Theoretical Advances*. Academic Press, London. [46](#)
- SETHIAN, J.A. (1996). A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **93**, 1591. [175](#)
- SETHIAN, J.A. (2001). Evolution, implementation, and application of level set and fast marching methods for advancing fronts. *Journal of Computational Physics*, **169**, 503–555. [175](#)
- SOILLE, P. (1992). *Morphologie Mathématique : Du relief à la dimensionalité*. Ph.D. thesis, Université Catholique de Louvain, Louvain. [167](#), [168](#), [175](#)

- SOILLE, P. (1994). Generalized geodesy via geodesic time. *Pattern Recognition Letters*, **15**, 1235–1240. [167](#)
- SOILLE, P. (2003). *Morphological image analysis : Principles and applications*. Springer. [46](#)
- SOILLE, P. & TALBOT, H. (2001). Directional morphological filtering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1313–1329. [94](#)
- SOILLE, P., BREEN, E.J. & JONES, R. (1996). Recursive implementation of erosions and dilations along discrete lines at arbitrary angles. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, **18**, 562–567. [95](#)
- STROET, C.B.M. & SNEPVANGERS, J.J.J.C. (2005). Mapping curvilinear structures with local anisotropy kriging. *Mathematical Geology*, **37**, 635–649. [32](#)
- TEH, C.H. & CHIN, R.T. (1988). On image analysis by the methods of moments. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, **10**, 496–513. [55](#)
- VACHIER, C. (1995). *Extraction de caractéristiques, segmentation d'image et morphologie mathématique*. Ph.D. thesis. [91](#)
- VINCENT, L. (1990). *Algorithmes morphologiques à base de files d'attente et de lacets. Extension aux graphes*. Ph.D. thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris. [52](#)
- WALTER, C., MCBRATNEY, A.B., DOUAOUI, A. & MINASNY, B. (2001). Spatial prediction of topsoil salinity in the chelif valley, algeria, using local ordinary kriging with local variograms versus whole-area variogram. *Australian journal of soil research*, **39**, 259–272. [33](#)
- YANG, L. & ALBREGTSEN, F. (1996). Fast and exact computation of cartesian geometric moments using discrete green's theorem. *Pattern Recognition*, **29**, 1061–1073. [71](#), [106](#)

BIBLIOGRAPHIE

- YOKOI, S., TORIWAKI, J. & FUKUMURA, T. (1975). An analysis of topological properties of digitized binary pictures using local features. *Computer Graphics and Image Processing*, **4**, 63–73. [63](#)
- ZHANG, D. & LU, G. (2004). Review of shape representation and description techniques. *Pattern recognition*, **37**, 1–19. [46](#), [47](#)
- ZHANG, T.Y. (1984). A fast parallel algorithm for thinning digital patterns. *ACM*, **27**, 236–239. [63](#)

Développement de méthodes de traitement d'images pour la détermination de paramètres variographiques locaux

Résumé : La géostatistique fournit de nombreux outils pour caractériser et traiter des données réparties dans l'espace. La plupart de ces outils sont basés sur l'analyse et la modélisation d'une fonction appelée variogramme qui permet de construire différents opérateurs spatiaux : le krigeage et les simulations. Les modèles variographiques sont relativement intuitifs : certains paramètres variographiques peuvent être directement interprétés en termes de caractéristiques structurales. Ces approches sont cependant limitées car elles ne permettent pas de prendre correctement en compte la structuration locale des données. Plusieurs types de modèles géostatistiques non-stationnaires existent. Ils requièrent généralement un paramétrage compliqué, peu intuitif, et ils n'apportent pas de réponse satisfaisante quant à certains de types de non-stationnarité. C'est pour répondre au besoin d'une prise en compte efficace et opérationnelle de la non-stationnarité dans un jeu de données que, dans le cadre de cette thèse, nous prenons le parti de déterminer des paramètres variographiques locaux, appelés M-Paramètres par des méthodes de traitement d'images. Notre démarche se fonde principalement sur la détermination des paramètres morphologiques de dimensions et d'orientations de structures. Il résulte de la détermination de M-Paramètres une meilleure adéquation entre modèles variographiques et caractéristiques structurales des données. Les méthodes de détermination de M-Paramètres développées ont été appliquées sur des données bathymétriques, sur des jeux de données laissant apparaître des corps géologiques complexes ou encore sur des jeux de données environnementaux, liés au domaine de la pollution en zone urbaine par exemple. Ces exemples illustrent les améliorations de résultats de traitement géostatistique obtenus avec M-Paramètres. Enfin, partant du constat que certains phénomènes ne respectent pas une propagation euclidienne, nous avons étudié l'influence du choix de la distance sur les résultats de krigeage et de simulation. En utilisant des distances géodésiques, nous avons pu obtenir des résultats d'estimation impossible à reproduire avec des distances euclidiennes.

Mots clés : anisotropie, caractérisation de formes, distance géodésique, géométrie discrète, géostatistique, krigeage, morphologie mathématique, paramètres variographiques, simulations géostatistiques, variogramme.

Development of image processing methods for the determination of local variographic parameters

Abstract: Geostatistics provides many tools to characterize and deal with data spread in space. Most of these tools are based on the analysis and the modeling of a function called variogram. By characterizing the spatial correlation inherent to any data set, the variogram enables to build different spatial operators as estimation (kriging) and simulation ones. Variographic models are relatively intuitive: some variographic parameters can directly be interpreted as structural characteristics. These approaches are however limited since they are not able to properly take into account the local data structure. There are several types of non-stationary geostatistical models. However, they are difficult to use in practice because they need a complicated, not really intuitive setting. Besides, they are not able to take into account some types of non-stationarity. In order to answer the need for an effective and efficient consideration of non-stationarity of a data set, we have chosen, in the context of this PhD thesis, to compute local variographic parameters, called Moving Parameters (M-Parameters), by using image processing methods. Our approach relies mainly on the determination of morphological parameters of size and dimension. It follows from the determination of M-Parameters a better match between variographic models and structural characteristics of the data. These different methods for computing M-Parameters have been applied to bathymetry data, to data revealing complex geological bodies and to environmental data sets, such as air pollution in urban areas for example. These examples illustrate the improvements in the results of the geostatistical process using M-Parameters. Finally, based on the observation that some phenomena do not respect an euclidean metric (such as air pollution in urban areas), we have studied the influence of the choice of the distance metric on kriging results. Using geodesic distances, we have been able to obtain kriging results which are impossible to reproduce with an euclidean distance.

Keywords: anisotropy, discrete geometry, geodesic distance, geostatistical simulation, geostatistics, kriging, mathematical morphology, shape characterization, variographic parameters, variogram.

