



HAL
open science

Résolution numérique en électromagnétisme statique de problèmes aux incertitudes géométriques par la méthode de transformation : application aux machines électriques

Duy Hung Mac

► To cite this version:

Duy Hung Mac. Résolution numérique en électromagnétisme statique de problèmes aux incertitudes géométriques par la méthode de transformation : application aux machines électriques. *Electromagnétisme*. Arts et Métiers ParisTech, 2012. Français. NNT : 2012ENAM0005 . pastel-00685277

HAL Id: pastel-00685277

<https://pastel.hal.science/pastel-00685277v1>

Submitted on 4 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n°2012 - ENAM-0005

Doctorat ParisTech

T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité “ Génie électrique ”

présentée et soutenue publiquement par

Duy Hung MAC

15 mars 2012

Résolution numérique en électromagnétisme statique de problèmes aux incertitudes géométriques par la méthode de transformation : Application aux machines électriques

Directeur de thèse : **Stéphane CLENET**
Co-encadrement de la thèse : **Jean-Claude MIPO**

Jury

M. Emmanuel CREUSE, Professeur des Universités, USTL
M. Anthony NOUY, Professeur des Universités, ECN
M. Frédéric WURTZ, Directeur de Recherches au CNRS, ENSE3
M. Ronan PERRUSSEL, Chargé de Recherches au CNRS, ENSEEIHT
M. Herbert DE GERSEM, Professeur des Universités, K.U.Leuven (Belgique)
M. Jean-Yves DANTAN, Professeur des Universités, Arts et Métiers ParisTech
M. Jean-Claude MIPO, Ingénieur de Recherches, Valeo E.E.M
M. Stéphane CLENET, Professeur des Universités, Arts et Métiers ParisTech
M. Thierry COOREVITS, Maître de Conférences, Arts et Métiers ParisTech

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examinateur
Examinateur
Examinateur
Examinateur
Invité

**T
H
È
S
E**

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE.....	12
CHAPITRE 1 : ETAT DE L'ART.....	15
1.1. Notions sur la théorie des probabilités	15
1.1.1 Notion sur les probabilités.....	15
1.1.2 Chaos polynomial.....	17
1.1.2.1. Base hilbertienne de H^d	17
1.1.2.2. Polynômes de Hermite	18
1.1.2.3. Chaos polynômial	20
1.1.2.4. Exemple d'application	21
1.2. Problème à résoudre.....	24
1.2.1 Problème de magnétostatique déterministe.....	24
1.2.1.1. Les équations de Maxwell.....	24
1.2.1.2. Définition des espaces fonctionnels	25
1.2.1.3. Formulations faibles en potentiels.....	26
1.2.1.4. Discrétisation	27
1.2.2 Problème en magnétostatique stochastique - incertitudes portées par la loi de comportement	29
1.2.2.1. Incertitudes portées par la loi de comportement	29
1.2.2.2 Discrétisation spatiale	30
1.3. Propagation des incertitudes portées par la loi de comportement	31
1.3.1 Méthodes non intrusives.....	31
1.3.1.1. Méthode de Monte Carlo	31
1.3.1.2. Méthode de régression	33
1.3.1.3. Méthode de projection.....	34
1.3.2 Méthodes intrusives	35
1.3.2.1. Méthode SSFEM (Spectral Stochastic Finite Elements Method).....	35
1.3.2.2. Méthode basée sur un développement de Taylor	36
1.3.2.3. Méthode basée sur une décomposition de Neumann	37
1.4. Etat de l'art sur le problème des incertitudes portées par la géométrie	38
1.4.1 Définition du problème	38
1.4.1.1. Problème aux frontières aléatoires.....	39
1.4.1.2. Problème aux interfaces aléatoires.....	40
1.4.1.3. Discussion sur le problème des incertitudes portées par la géométrie.....	41
1.4.2 Propagation des incertitudes portées par la géométrie	44

1.4.2.1. Méthode du domaine fictif.....	44
1.4.2.2. Méthode des éléments finis étendus	47
1.4.2.3. Méthode de transformation.....	50
1.5. Conclusion	53
CHAPITRE 2 : METHODE DE TRANSFORMATION	54
2.1. Détermination de la transformation	54
2.1.1. Illustration de la méthode de transformation.....	54
2.1.2. Transformations numériques.....	60
2.1.2.1. Méthode géométrique.....	62
2.1.2.2. Méthode du Laplacien.....	68
2.1.2.3. Exemple en magnétostatique.....	77
2.1.3. Transformation discrète	80
2.1.3.1. Transformation discrète – déformation de maillage.....	81
2.1.3.2. Exemple de magnétostatique.....	82
2.1.4. Synthèse.	86
2.2. Discussion sur le choix de la transformation	86
2.2.1. Transformation continue ou transformation discrète	86
2.2.2 Estimation d’erreur a priori	94
2.2.2.1. Etudes théoriques.....	94
2.2.2.2. Exemple d’application	100
2.3. Etude des grandeurs locales	105
2.3.1. Discussion sur la discontinuité stochastique	105
2.3.2. Exemple analytique.....	105
2.3.3. Exemple numérique	107
2.4. Conclusion	109
CHAPITRE 3 : APPLICATION.....	111
3.1. Présentation du stator	111
3.2. Mesures du rayon des dents.....	112
3.2.1. Description des mesures effectuées.....	113
3.2.2. Calcul du couple à vide	114
3.2.2.1 Description de la transformation.....	114
3.2.2.2. Résultats obtenus.....	119
3.3. Modèle probabiliste	120
3.3.1. Propriété d’un modèle réduit.....	120
3.4. Propagation et validité du modèle.....	124

3.5. Influence de la largeur des dents.....	127
3.5.1. Méthode de transformation dans le cas non linéaire.	128
3.5.2. Résultats obtenus.....	128
3.6. Conclusion	129
CONCLUSION ET PERSPECTIVE.....	131
ANNEXE A1: NOTION DE PROBABILITES	140
A.1.1. Espace de probabilités	140
A.1.2. Variable aléatoire réelle.....	140
A.1.3. Lois de probabilités	141
A.1.4. Quantités usuelles d'une variable aléatoire	142
A.1.5. Indépendance.....	142
A.1.6. Convergence de variables aléatoires	143
ANNEXE A2 : CALCUL SEMI ANALYTIQUE DE L'ESPERANCE DE PRODUIT DES POLYNOMES	144
A.2.1. Cas de polynômes monodimensionnels	144
A.2.2. Cas de polynômes multidimensionnels	145
ANNEXE A3 : ELEMENTS DE WHITNEY	146
A.3.1. Fonction de forme nodale.....	146
A.3.2. Fonction de forme d'arête	146
A.3.3. Fonction de forme de facette	146
A.3.4. Fonction de forme de volume.....	146
ANNEXE A4 : ESTIMATEUR D'ERREUR A PRIORI EN FORMULATION EN POTENTIEL VECTEUR	148
ANNEXE A5 : ENRICHISSEMENT STOCHASTIQUE	154
A.5.1. Méthode de régression	154
A.5.2. Méthode de projection.....	155
ANNEXE A6 : DETERMINATION DE LA TRANSFORMATION.....	156
A.6.1. La transformation de E_1 en D_1	157
A.6.2. La transformation de E_7 en D_7	158
A.6.3. La transformation de E_4 en D_4	158
A.6.4. La transformation de E_8 en D_8	160
A.6.5. La transformation de E_2 en D_2	161
A.6.6. La transformation de E_3 en D_3 , E_6 en D_6 et E_9 en D_9	162

Liste des figures

Figure 1. Exemple électrique.....	22
Figure 2. Fonctions de densité de probabilités de I et I_P – polynômes de Legendre	22
Figure 3. Fonctions de densité de probabilités de I et I_P – polynômes d’Hermite	24
Figure 4. Problème de magnétostatique	25
Figure 5. Problème aux incertitudes portées par la loi de comportement.....	29
Figure 6. Problème aux incertitudes portées par la frontière du domaine.....	39
Figure 7. Problème aux incertitudes portées par les interfaces entre les sous-domaines	40
Figure 8. Maillage non conforme au niveau des interfaces.....	42
Figure 9. Problème de magnétostatique dans le domaine $D(\xi)$	43
Figure 10. Champ magnétique au point A avec $l=1, \mu_1=2, \mu_2=1, P_1=8$ et $x_0=l/2$	44
Figure 11. Domaine réel et domaine fictif.....	45
Figure 12. Fonction « level set » $\phi(x, \xi_0)$	49
Figure 13. Fonction $\tau(x, \xi)$	49
Figure 14. Nœuds enrichis.....	50
Figure 15. Transformation T	51
Figure 16. Exemple magnétostatique.....	54
Figure 17. Problème à étudier sur le domaine D'	55
Figure 18. Transformation aléatoire	55
Figure 19. Subdivision du domaine D' et E	56
Figure 20. La dilatation linéaire.....	56
Figure 21. Méthode de transformation et méthode de remaillage.....	58
Figure 22. Valeur moyenne de l’énergie obtenue par deux méthodes pour les deux formulations.....	58
Figure 23. Ecart-type de l’énergie obtenue par deux méthodes pour les deux formulations.....	59
Figure 24. Maillages utilisés pour la méthode de transformation	59
Figure 25. Transformation T	60
Figure 26. Transformation stochastique du sous domaine E_i	61
Figure 27. Division en ensemble de segments	63
Figure 28. Coordonnée curviligne du point Q'	63
Figure 29. Détermination du segment OQ	63
Figure 30. Détermination du point P transformé de P' dans D_1	64
Figure 31. Problème de magnétostatique étudié.....	64
Figure 32. Un quart du domaine en 2 dimensions.....	65
Figure 33. Subdivision de E et D en plusieurs sous-domaines	65
Figure 34. Transformation à déterminer	66
Figure 35. Transformation des segments	66
Figure 36. Transformation géométrique du domaine E_1 en D_1 et E_{21} en D_{21}	67
Figure 37. Maillage utilisé.....	68
Figure 38. Transformation basée sur la résolution des équations de Laplace	71
Figure 39. Grille des points du domaine E_2	75
Figure 40. Premier cas de répartition des points de collocation et la transformation de la grille \mathcal{S}	75
Figure 41. Deuxième choix de répartition des points de collocation et la transformation de la grille \mathcal{S}	76
Figure 42. Troisième cas de répartition des points de collocation.....	76
Figure 43. Problème de magnétostatique	78
Figure 44. Division du domaine E	78

Figure 45. Méthode du Laplacien-Points de collocations	79
Figure 46. Ensemble de segments du domaine E_1	79
Figure 47. Méthode de transformation géométrique	79
Figure 48. Transformation discrète	82
Figure 49. Problème de magnétostatique	83
Figure 50. Transformation T et le domaine de référence E	83
Figure 51. Transformation T_1^{-1}	84
Figure 52. Maillage du domaine E	85
Figure 53. Champ magnétique obtenu en utilisant la transformation T_{dis}	85
Figure 54. Champ magnétique obtenu en appliquant la transformation 1	87
Figure 55. Élément coupé par OA'	88
Figure 56. Division du domaine E	88
Figure 57. Champ magnétique obtenu en appliquant la transformation 2	88
Figure 58. Description de la transformation 3	89
Figure 59. Champ magnétique obtenu en appliquant la transformation 3	89
Figure 60. Ecart entre le champ exact et le champ obtenu en appliquant la transformation 3.....	90
Figure 61. Définition du domaine initial D et du domaine de référence E	91
Figure 62. Transformation du domaine E en domaine D	91
Figure 63. Éléments du domaine E	92
Figure 64. Déformation du maillage.....	92
Figure 65. Éléments du domaine E	93
Figure 66. Différentes transformations du domaine D en E	94
Figure 67. Transformation T	96
Figure 68. Éléments e_i et d_i	97
Figure 69. Système étudié	101
Figure 70. Transformation 1.....	101
Figure 71. Transformation 2.....	102
Figure 72. Rapport $r = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ au point A	102
Figure 73. Rapport $r_2 = \log(1/\lambda_{min})$ au point A	103
Figure 74. Répartition du rapport $r = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ dans le cas $c_1=c_2=2.2$	103
Figure 75. Erreur numérique en fonction de $\cotan(\delta)$	104
Figure 76. Système étudié	106
Figure 77. Transformation utilisée dans le cas 1D.....	106
Figure 78. Champ magnétique au point A	107
Figure 79. Problème magnétostatique.....	108
Figure 80. Densité de probabilités du champ magnétique aux points Q_1 , Q_2 , et Q_3	109
Figure 81. Stator étudié	111
Figure 82. Machine étudiée	112
Figure 83. Rayon et largeur des dents qui sont considérés comme variables aléatoires.....	112
Figure 84. Etude sur le rayon des dents.....	113
Figure 85. Division du stator en 30 couches.....	113
Figure 86. Histogramme du rayon des dents pour les 5 stators caractérisés	114
Figure 87. Maillage utilisé pour le domaine de référence	115
Figure 88. Maillage dans l'entrefer comportant 3 couches d'éléments et indication de la ligne de glissement	115
Figure 89. Présentation de la partie 2 où est définie une transformation	116
Figure 90. Division de la partie 2 en 36 zones	116

Figure 91. Division de la zone i en 9 sous domaines	117
Figure 92. Définition de l'ensemble des segments du sous domaine E_5	117
Figure 93. Angles φ_A , $\varphi_{A'}$, φ_{Q2} , $\varphi_{Q'2}$	118
Figure 94. Evolution du couple à vide pour les différents stators et pour les deux stators S_{min} et S_{max} stators ayant un rayon de dent constant égal respectivement au rayon minimal et maximal.....	119
Figure 95. Réduction du modèle	121
Figure 96. Coefficient γ_n en fonction de n : stator S0 (extrait du master de Shaoqu Zheng).....	122
Figure 97. Forme réelle des écarts entre les rayons mesurés et le rayon nominal : stator S0 (extrait du master de Shaoqu Zheng)	123
Figure 98. Couples $C_{15}(\alpha)$ et $C_{15a}(\alpha)$ pour les stators S0 et S1	125
Figure 99. Loi $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ du matériau utilisé pour modéliser le matériau ferromagnétique	127
Figure 100. Flux traversant la phase 1 du stator.....	129
Figure 101. Hiérarchie des convergences	143
Figure 102. Transformation T.....	150
Figure 103. Eléments e_i et d_i	150
Figure 104. Stator étudié	156
Figure 105. Division en zones des domaines E et D	156
Figure 106. Division de la zone i en 9 sous domaines	157
Figure 107. Transformation de E_1 en D_1	157
Figure 108. Transformation de E_4 en D_4	159
Figure 109. Transformation de E_8 en D_8	160
Figure 110. Transformation de E_2 en D_2	161

Liste des tableaux

<i>Tableau 1. Chaos polynomial généralisés</i>	<i>21</i>
<i>Tableau 2. Erreurs en fonction de degré maximal p.....</i>	<i>23</i>
<i>Tableau 3. Méthode transformation comparée à la méthode de remaillage.....</i>	<i>68</i>
<i>Tableau 4. Méthode de transformation comparée à la méthode de remaillage.....</i>	<i>77</i>
<i>Tableau 5. Information sur les dimensions aléatoires d'entrée</i>	<i>80</i>
<i>Tableau 6. Comparaison des deux méthodes</i>	<i>80</i>
<i>Tableau 7. Composante du champ magnétique suivant l'axe Ox_2 obtenue par les méthodes 1 et 2</i>	<i>108</i>
<i>Tableau 8. Modes de déformation le plus importants</i>	<i>123</i>
<i>Tableau 9. Coefficient γ pour chaque stator</i>	<i>123</i>
<i>Tableau 10. Ecart entre $C_{15}(\alpha)$ et $C_{15a}(\alpha)$ pour chaque stator</i>	<i>124</i>
<i>Tableau 11. Valeurs moyennes et écart-types empiriques des amplitudes et des phases de 4 modes de déformation.....</i>	<i>125</i>
<i>Tableau 12. Ecart type de la valeur efficace du couple en fonction du mode.....</i>	<i>126</i>
<i>Tableau 13. Coefficient de Sobol du premier ordre.....</i>	<i>126</i>

Abréviations

θ : événement élémentaire

\mathcal{O}^d : ensemble des réalisations de ξ

ξ_i : variable aléatoire réelle

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$: vecteur aléatoire

d : dimension de vecteur aléatoire

P_ξ, P_θ : mesure de probabilités

R : ensemble des réels

N : ensemble des entiers

f_ξ : fonction de densité de probabilités de ξ de \mathcal{O}^d dans $[0 ; +\infty]$

F_ξ : fonction de répartition de ξ de \mathcal{O}^d dans $[0 ; 1]$

H^d : espace Hilbertienne

$E[\]$: espérance

σ : écart-type

δ_k : moment de l'ordre k centré

Cov : covariance

ρ : coefficient de corrélation

h_i : polynôme de Hermite monodimensionnel

H_i : polynôme de Hermite monodimensionnel normalisé

H_α : polynôme de Hermite multidimensionnel normalisé

Ψ_α : Chaos polynomial généralisé

p : degré du polynôme

P : nombre de polynômes

n : nombre de calculs déterministes à réaliser

D : domaine spatial réel

E : domaine de référence

\hat{D} : domaine fictif

Γ_H, Γ_B : frontière de D

N_{0H} : ensemble des nœuds qui n'appartiennent pas à Γ_H

n_0, n_1, n_2, n_3 : nombre de nœuds, nombre d'arrêtes, nombre de facette, nombre d'éléments

Γ'_H, Γ'_B : frontière de E

$\Gamma_{\hat{D}}$: frontière de \hat{D}

n_D, n_E : nombre de sous-domaines de D et E

\mathbf{B}, \mathbf{H} : induction et champ magnétique

μ : perméabilité

$\Omega, \Omega', \hat{\Omega}$: potentiel scalaire

\mathbf{A}, \mathbf{A}' : potentiel vecteur

$E_0(D), E_1(D), E_2(D)$: espaces fonctionnels continus définis sur D

$W_0(D), W_1(D), W_2(D)$: espaces fonctionnels discrets définis sur D

w_{0i}, w_{1i}, w_{2i} : fonctions de base

\mathcal{M} : maillage

\mathbf{A}, β : matrice de rigidité, vecteur de source

$G(\xi)$: quantité aléatoire d'intérêt

x, X : coordonnées spatiales sur le domaine réel D et de référence E

\mathbf{T} : transformation

\mathbf{M} : matrice de jacobienne de la transformation

Introduction générale

Pour développer un modèle, la première étape consiste tout d'abord à traduire les phénomènes physiques qui s'opèrent au sein du dispositif étudié en langage mathématique par des équations. Ces équations relient des grandeurs d'entrée ou paramètres à des grandeurs de sortie d'intérêt pour l'utilisateur. L'obtention de ces équations se fait en général au prix d'un certain nombre de simplifications (provenant d'hypothèses faites sur le dispositif). Il apparaît à ce stade des erreurs dites de modélisation. Par ailleurs, la résolution de ces équations est souvent impossible analytiquement et nécessite la mise œuvre de méthodes numériques. Ces méthodes conduisent à une solution approchée de la solution exacte du problème mathématique. Il apparaît alors des erreurs dites de discrétisation.

Les progrès réalisés dans le domaine de l'analyse numérique, dans les capacités de stockage et de vitesse d'exécution des calculateurs ont permis de traiter des équations mathématiques plus complexes, avec des bases d'approximation plus riches, ce qui a conduit à une réduction simultanée des erreurs de modélisation et de discrétisation.

A côté de cela, le modèle numérique nécessite d'être alimenté par des paramètres d'entrée comme les dimensions géométriques, les caractéristiques physiques des matériaux et les sollicitations. Les grandeurs d'intérêt dépendent bien entendu de ces paramètres d'entrée. Une méconnaissance, même partielle, de ces derniers peut conduire à une erreur sur les grandeurs de sortie. Cette erreur était souvent négligeable devant les erreurs de modélisation et de discrétisation.

Maintenant, pour certains problèmes, cela ne semble plus évident et on ne peut pas affirmer que les écarts entre la simulation et l'expérience sont induits par des erreurs de modélisation et de discrétisation. Il est fort possible qu'une partie non négligeable de ces écarts soit due aux erreurs sur les paramètres qui se propagent au travers du modèle. Il est donc nécessaire de se doter d'outils qui permettent de prendre en compte cette méconnaissance des données d'entrée en les considérant comme incertaines.

Il est alors légitime de se demander : comment caractériser l'effet des incertitudes des paramètres d'entrée sur les grandeurs d'intérêt de sortie du modèle?

Pour répondre, plusieurs approches ont été proposées. On peut noter tout d'abord les approches par intervalles et par logique floue [46, 47]. L'approche par logique floue consiste à représenter les incertitudes par des fonctions caractéristiques modélisant le degré d'appartenance [48, 49]. On

détermine ensuite la fonction caractéristique de la grandeur de sortie en propageant les incertitudes au travers du modèle numérique [50-52].

Une autre approche dite « probabiliste » [40-45, 53-59] consiste à modéliser les paramètres d'entrée incertains par des variables ou des champs aléatoires. Alors, les grandeurs de sortie sont aussi des variables aléatoires qu'il convient donc de caractériser. L'approche probabiliste se décompose en trois étapes qui sont :

- La modélisation des incertitudes des paramètres d'entrée
- La propagation des incertitudes vers des grandeurs de sortie
- L'exploitation des résultats obtenus

Dans un problème d'électromagnétisme où la physique peut être représentée par les équations de Maxwell, on peut citer trois types d'incertitudes sur les paramètres d'entrée: Les incertitudes sur la géométrie (entrefer d'une machine électrique, largeurs des dents d'un stator...), les incertitudes sur la loi de comportement (perméabilité et conductivité d'un matériau ferromagnétique...) ou sur les termes sources. Ces incertitudes peuvent avoir pour origine les imperfections des procédés de fabrication ou l'impact de l'environnement extérieur sur le vieillissement (les contraintes mécaniques, l'humidité, la température...). La propagation des incertitudes portées par la loi de comportement a fait l'objet de nombreux travaux dans la littérature [3-7, 12, 16, 36]. Dans le domaine de l'électromagnétisme, les travaux sont assez récents [7, 12, 16].

Pour les incertitudes portées par la géométrie, les travaux dans le domaine des sciences de l'ingénieur sont plus rares. On peut noter la méthode des domaines fictifs [17] pour traiter un problème avec des incertitudes au niveau de la frontière ou la méthode des éléments finis étendue [9, 29, 30] pour traiter un problème avec des incertitudes au niveau des interfaces des matériaux.

La méthode des domaines fictifs consiste à introduire un domaine déterministe qui contient toutes les réalisations du domaine réel. Des multiplicateurs de Lagrange sont utilisés pour imposer les conditions aux limites sur la frontière du domaine réel à l'intérieur du domaine fictif. La méthode des éléments finis étendue consiste à utiliser un maillage déterministe non conforme à l'intérieur du domaine étudié. Des fonctions supplémentaires d'approximation sont ajoutées complétant l'ensemble des fonctions de base classiques pour prendre en compte la discontinuité au niveau des interfaces des matériaux des champs locaux qui ne peut pas être prise en compte avec les fonctions de base classiques. La méthode de transformation proposée dans [8] est utilisée pour traiter initialement un problème avec des frontières aléatoires. Cette méthode consiste à ramener le problème avec une frontière aléatoire à un problème défini dans un domaine déterministe en utilisant une transformation aléatoire bijective. Les incertitudes de ce dernier problème sont portées par la loi de comportement. L'objectif de cette thèse est de mettre en œuvre la méthode de

transformation pour traiter des problèmes d'électromagnétisme avec des incertitudes portées par la géométrie et de l'appliquer aux cas des machines électriques.

Ce travail a été effectué dans le cadre d'une bourse CIFRE financée par la société Valeo Systèmes Electriques et s'inscrit dans le cadre du pôle MEDEE supporté par la région Nord Pas de Calais, l'Etat et les fonds européens FEDER.

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on introduit des notions sur la théorie des probabilités et le chaos polynomial qui sera utilisé pour une discrétisation au niveau stochastique. Ensuite, on présente un problème magnétostatique déterministe ainsi que la méthode des éléments finis pour le résoudre. Puis, on pose le problème de magnétostatique stochastique dans le cas où les incertitudes sont portées par la loi de comportement. Les méthodes numériques employées pour résoudre ce problème sont discutées. Ensuite, on aborde le problème magnétostatique stochastique dans le cas où les incertitudes sont portées par la géométrie. On présente ainsi les différentes méthodes utilisées dans la littérature comme la méthode des domaines fictifs, la méthode des éléments finis étendus et enfin la méthode qui sera retenue par la suite dite de « transformation ».

Le deuxième chapitre porte sur l'application de la méthode de transformation pour résoudre un problème de magnétostatique stochastique. Différentes méthodes de détermination de la transformation sont présentées et discutées. Il existe une infinité de transformations possibles pour un problème donné et on montre en particulier que certaines transformations, dites « discrètes », permettent de simplifier la résolution numérique. Ensuite, on essaie de définir les critères de choix de la transformation en se basant sur un estimateur d'erreur *a priori*. Enfin, le chapitre 2 se termine par l'étude de discontinuité au niveau stochastique de certaines grandeurs locales et on montre que la méthode de transformation est bien adaptée pour traiter ce type de problème.

Le chapitre 3 est consacré à une application de la méthode de transformation à l'étude de l'effet de la variabilité des dimensions d'un stator d'un alternateur automobile de Valeo. On proposera d'abord dans ce chapitre une modélisation probabiliste des paramètres d'entrée appliquée aux rayons internes de dents du stator. Ensuite, la méthode de transformation est utilisée pour caractériser l'impact de ces incertitudes des paramètres d'entrée sur une grandeur de sortie, le couple. A la fin de ce chapitre, on étudie l'impact de la variabilité de la largeur des dents sur le flux magnétique traversant une phase du stator. Dans cette dernière partie, le matériau ferromagnétique constituant le stator est supposé non linéaire.

Chapitre 1 : Etat de l'art

Dans ce chapitre, on présentera les méthodes proposées dans la littérature pour résoudre un problème aux dérivées partielles prenant en compte les incertitudes sur les données d'entrée. Ces méthodes ont été peu appliquées dans le domaine de l'électromagnétisme mais principalement dans le domaine de la mécanique et du génie civil. On introduit d'abord les notations sur la théorie des probabilités ainsi que sur le chaos polynomial qui est souvent utilisé pour approcher les solutions du problème stochastique selon la dimension aléatoire. Ensuite, on rappelle les équations de Maxwell pour un problème de magnétostatique déterministe dont on donne les formulations faibles. Le problème est étendu au cas des incertitudes portées par la loi de comportement. Puis, des méthodes proposées dans la littérature pour propager ce type d'incertitudes à travers le modèle numérique sont présentées. Après cette présentation sur les incertitudes portées par la loi de comportement, on abordera les difficultés rencontrées lorsque les incertitudes sont portées par la géométrie. Enfin, les méthodes proposées pour propager ces incertitudes géométriques sont présentées et discutées.

1.1. Notions sur la théorie des probabilités

Dans le cadre de ce mémoire, l'approche probabiliste est choisie pour modéliser les incertitudes. Dans cette approche, les paramètres incertains vont être modélisés par des variables ou des champs aléatoires. Dans cette partie, on introduit d'abord quelques notations sur la théorie des probabilités. Ensuite, on présentera le chaos polynomial qui est souvent utilisé pour approcher une variable aléatoire dont la variance existe.

1.1.1 Notion sur les probabilités

On rappelle ici quelques notions de base ainsi que des notations de la théorie des probabilités qui seront utilisées dans le reste de ce mémoire.

Dans l'observation d'un phénomène aléatoire, on introduit Θ l'ensemble des résultats possibles dont θ est un événement élémentaire. On munit Θ d'une tribu F (voir annexe 1 pour plus de détails) dont les éléments sont appelés événements. L'espace (Θ, F) est muni d'une mesure probabiliste P_Θ de F dans $[0 ; 1]$. On appelle (Θ, F, P_Θ) l'espace probabilisé.

Une variable aléatoire ζ réelle qui est une fonction de Θ dans R est associée à une loi de probabilité P_ζ :

$$P_\zeta(U) = P_\Theta(\zeta^{-1}(U)) \quad (1.1)$$

avec U appartient à une tribu B de R . On note $F_\zeta(x) = P_\zeta(\zeta \leq x)$ la fonction de répartition de ζ de R dans $[0 ; 1]$. Dans le cas où la loi de probabilité de ζ admet la relation suivante :

$$P_{\xi}(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) \cdot dt \quad (1.2)$$

avec f_{ξ} de R dans $[0, +\infty[$ alors f_{ξ} est appelée fonction de densité de probabilités de ξ .

Dans le cadre de cette thèse, on ne considère que des variables aléatoires qui admettent (1.2). On peut définir aussi les quantités souvent utilisées dans ce mémoire :

- *L'espérance de ξ :*

$$E[\xi] = \int_{\mathbb{R}} \xi \cdot f_{\xi}(x) \cdot dx \quad (1.3)$$

qui permet d'obtenir la valeur moyenne de ξ .

- *La variance de ξ : $\text{Var}(\xi) = E[(\xi - E(\xi))^2]$ représente « l'amplitude » de l'oscillation de ξ autour de sa valeur moyenne. La racine carrée σ_{ξ} de la variance est appelée écart-type de ξ .*
- *Le moment d'ordre k de ξ est l'espérance de ξ^k .*
- *Le moment centré d'ordre k de ξ : $\delta_k = E[(\xi - E(\xi))^k]$.*

◇ *L'asymétrie de ξ : $\gamma = \frac{\delta_3}{\sigma_{\xi}^3}$ avec δ_3 le moment centré d'ordre 3 et σ_{ξ} l'écart-type de ξ .*

◇ *Le coefficient d'aplatissement de ξ : $\beta = \frac{\delta_4}{\sigma_{\xi}^4}$ avec δ_4 le moment centré d'ordre 4 et σ_{ξ} l'écart-type de ξ .*

- *La covariance entre deux variables aléatoires ξ et κ : $\text{cov}(\xi, \kappa) = E[(\xi - E[\xi]) \cdot (\kappa - E[\kappa])]$. Cette quantité permet d'évaluer le degré de dépendance entre ξ et κ . Dans le cas où ξ et κ sont indépendantes, la covariance est nulle. Le coefficient de corrélation est défini par : $\rho_{\xi\kappa} = \frac{\text{cov}(\xi, \kappa)}{\sigma_{\xi}\sigma_{\kappa}}$.*

A partir de la notion de variable aléatoire, on peut introduire la notion de vecteur aléatoire: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$ de dimension d avec $\xi_i, i=1 : d$ des variables aléatoires réelles. On note \mathcal{O}^d l'ensemble des valeurs du vecteur ξ qui est un sous-ensemble de R^d (dans le cas de vecteur gaussien ξ , on a $\mathcal{O}^d \equiv R^d$). On note f_{ξ} la fonction de densité de probabilité de ce vecteur aléatoire. On peut définir une espace de Hilbert réel $H^d = L^2(\mathcal{O}^d, f_{\xi} d\xi)$ des fonctions g de \mathcal{O}^d dans R de carré intégrable par rapport à la mesure de probabilité $f_{\xi} d\xi$ muni du produit scalaire :

$$\langle g, h \rangle_{H^d} = \int_{\mathcal{O}^d} g(\xi) \cdot h(\xi) f_{\xi}(\xi) \cdot d\xi \quad (1.4)$$

et de la norme associée:

$$\|g\|_{\mathbb{H}^d} = \sqrt{\int_{\mathbb{O}^d} g^2(\boldsymbol{\xi}) \cdot f_{\boldsymbol{\xi}}(x) d\boldsymbol{\xi}} \quad (1.5)$$

1.1.2 Chaos polynomial

Cette partie est consacrée à une présentation générale de la notion de chaos polynomial [1]. Celui-ci est un outil utilisé dans les méthodes développées récemment pour propager des incertitudes au travers d'un modèle numérique.

On considère une variable aléatoire Y dont la variance existe qui est une fonction d'un vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)$:

$$Y = g(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.6)$$

où $\xi_i, i=1 : d$ sont des variables aléatoires indépendantes et chacune suit une loi normale centrée réduite. Le vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ peut être formé de données d'entrée incertaines d'un modèle dont Y est une grandeur de sortie d'intérêt. On note $f_{\boldsymbol{\xi}}$ la fonction de densité de probabilité de $\boldsymbol{\xi}$. Lorsque la variance de Y existe, la fonction g appartient alors à l'espace hilbertien $\mathbb{H}^d = L^2(\mathbb{O}^d, f_{\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi})$. Dans la suite, on va rappeler comment on peut construire une base polynomiale de $\mathbb{H}^d = L^2(\mathbb{O}^d, f_{\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi})$ qui nous permettra d'approcher $Y = g(\boldsymbol{\xi})$.

1.1.2.1. Base hilbertienne de \mathbb{H}^d

On peut constater qu'une variable aléatoire est complètement déterminée lorsque celle-ci est écrite sous la forme d'une fonction de variables aléatoires connues. Lors de la résolution d'un modèle stochastique, il n'est pas évident de représenter exactement une variable aléatoire de sortie par une fonction des variables aléatoires d'entrée. Une technique utilisée régulièrement dans le calcul numérique consiste à chercher son approximation dans un espace vectoriel (cet espace est un sous espace vectoriel appartenant à l'espace contenant la fonction à approcher) de dimension finie. Cette technique nécessite d'abord la construction des fonctions de base de l'espace vectoriel. Revenons à notre problème, une base hilbertienne $\{h_{\alpha}, \alpha \in \mathcal{N}\}$ de \mathbb{H}^d introduite dans la partie 1.1.2 est définie de la façon suivante [37] :

- h_i est une fonction définie de \mathbb{O}^d dans \mathbb{R} .
- $\{h_i, i \in \mathcal{N}\}$ est un système orthonormal, ce qui signifie que :

$$\langle h_i, h_j \rangle_{\mathbb{H}^d} = \delta_{ij} \quad (1.7)$$

$$\text{avec } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i - j \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- le sous espace engendré par l'ensemble $h_i(\boldsymbol{\xi})$ est dense dans $L^2(\mathbb{O}^d, f_{\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi})$, c'est-à-dire : si $\langle g, h_i \rangle_{\mathbb{H}^d} = 0$ pour tous $i \in \mathcal{N}$ alors $g = 0$.

On a le théorème [37] suivant :

Théorème 1: Soit $\{h_i, i \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de l'espace de Hilbert \mathbb{H}^d . Alors pour tout g dans \mathbb{H}^d on a :

$$g = \sum_{i=0}^{+\infty} g_i h_i \quad (1.8)$$

Les coefficients g_i sont tels que :

$$g_i = \langle g, h_i \rangle_{\mathbb{H}^d} \quad (1.9)$$

La détermination de g peut se ramener à la détermination des coefficients g_i . Lors de la résolution numérique, on limite le calcul à un nombre fini de termes $g_i, i = 0 : P$. On discutera du choix de P par la suite. Une estimation numérique de (1.9) peut être utilisée pour déterminer les coefficients g_i .

Dans la suite, on présentera une construction des polynômes orthogonaux multidimensionnels qui forment une base $\{H_i, i \in \mathbb{N}\}$ de \mathbb{H}^d à partir des polynômes monodimensionnels.

1.1.2.2. Polynômes de Hermite

Rappelons que dans cette partie f_ξ est la densité de probabilités du vecteur variable aléatoire $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ où $\xi_j, j=1 : d$ sont des variables aléatoires indépendantes dont chacune suit la loi normale centrée réduite. Dans ce cas $\mathbb{O}^d \equiv \mathbb{R}^d$. Une base $\{H_i, i \in \mathbb{N}\}$ de \mathbb{H}^d peut être construite en utilisant dans ce cas des polynômes de Hermite monodimensionnels comme on va le voir dans la suite.

Polynômes de Hermite monodimensionnels :

On note dans ce cas f_ξ la fonction de densité de probabilités de la variable aléatoire gaussienne ξ centrée réduite. La définition des polynômes de Hermite h_i de \mathbb{R} dans \mathbb{R} d'indice $i \in \mathbb{N}$ est la suivante :

$$h_i(\xi) f_\xi(\xi) = (-1)^i \frac{d^i}{d\xi^i} f_\xi(\xi) \quad (1.10)$$

avec $f_\xi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{\xi^2}{2})$. On peut montrer que :

$$h_0(\xi) = 1, \quad h_{i+1}(\xi) = \xi h_i(\xi) - \frac{d}{d\xi} h_i(\xi) \quad (1.11)$$

La construction de $h_i(\xi)$ peut être réalisée d'une façon récursive à l'aide de l'équation (1.11). On donne à titre d'exemple les premiers polynômes de Hermite monodimensionnels:

$$\begin{aligned}
h_0(\xi) &= 1 \\
h_1(\xi) &= \xi \\
h_2(\xi) &= \xi^2 - 1 \\
h_3(\xi) &= \xi^3 - 3\xi \\
h_4(\xi) &= \xi^4 - 6\xi^2 + 3
\end{aligned}$$

On peut introduire les polynômes normalisés $H_i(\xi)$:

$$H_i(\xi) = \frac{h_i(\xi)}{\sqrt{i!}} \quad (1.12)$$

On peut démontrer que la famille $H_i(\xi)$, $i \in \mathbb{N}$ est orthonormée, ce qui signifie que :

$$\langle H_i(\xi), H_j(\xi) \rangle_{H^1} = \int_{\mathbb{R}} H_i(\xi) H_j(\xi) \cdot f_\xi(\xi) d\xi = \delta_{ij} \quad (1.13)$$

Une fois les polynômes de Hermite unidimensionnels construits, on peut les associer pour former les polynômes de Hermite multidimensionnels.

Polynômes de Hermite multidimensionnels :

Revenons au cas où f_ξ est la densité du vecteur variable aléatoire $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ où ξ_j , $j = 1 : d$ sont des variables aléatoires indépendantes dont chacune suit une loi normale centrée réduite. Un polynôme de Hermite multidimensionnel $H_i(\xi)$ avec $i = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$ est défini par :

$$H_i(\xi) = H_{i_1}(\xi_1) \cdot H_{i_2}(\xi_2) \cdots H_{i_d}(\xi_d) \quad (1.14)$$

Le degré d'un polynôme $H_{(i_1, \dots, i_d)}(\xi)$ est défini par : $p = i_1 + \dots + i_d$. On a alors le nombre P de polynômes de degré inférieur ou égal à p qui vérifie :

$$P = C_{d+p}^p = \frac{(d+p)!}{d! p!} \quad (1.15)$$

Pour simplifier la notation, on va noter $H_\alpha(\xi)$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$ au lieu de $H_{(i_1, i_2, \dots, i_d)}(\xi)$ avec $(i_1, i_2, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$ (voir [7] pour plus de détail concernant la relation entre α et i). On donne à titre d'exemple les 6 premiers polynômes de Hermite ($p = 2$) dans le cas $d = 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_0(\xi_1, \xi_2) &= \mathbf{H}_{(0,0)}(\xi_1, \xi_2) = H_0(\xi_1)H_0(\xi_2) = 1 \\
\mathbf{H}_1(\xi_1, \xi_2) &= \mathbf{H}_{(1,0)}(\xi_1, \xi_2) = H_1(\xi_1)H_0(\xi_2) = \xi_1 \\
\mathbf{H}_2(\xi_1, \xi_2) &= \mathbf{H}_{(0,1)}(\xi_1, \xi_2) = H_0(\xi_1)H_1(\xi_2) = \xi_2 \\
\mathbf{H}_3(\xi_1, \xi_2) &= \mathbf{H}_{(2,0)}(\xi_1, \xi_2) = H_2(\xi_1)H_0(\xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1^2 - 1) \\
\mathbf{H}_4(\xi_1, \xi_2) &= \mathbf{H}_{(1,1)}(\xi_1, \xi_2) = H_1(\xi_1)H_1(\xi_2) = \xi_1\xi_2 \\
\mathbf{H}_5(\xi_1, \xi_2) &= \mathbf{H}_{(0,2)}(\xi_1, \xi_2) = H_0(\xi_1)H_2(\xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_2^2 - 1)
\end{aligned}$$

A partir de (1.13), on peut constater que la famille $\mathbf{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ définie par (1.14) est orthonormée dans $\mathbb{H}^d = L^2(\mathbb{R}^d, f_\xi d\xi)$. En utilisant le théorème de Martin-Cameron [13], on peut démontrer que le sous espace engendré par l'ensemble $\mathbf{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ est dense dans $\mathbb{H}^d = L^2(\mathbb{R}^d, f_\xi d\xi)$. Par conséquent, $\mathbf{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ forme une base Hilbertienne de \mathbb{H}^d .

Dans la suite, on va utiliser cette base des polynômes de Hermite pour approcher une variable aléatoire Y de la forme (1.6).

1.1.2.3. Chaos polynômial

On vient de rappeler dans la partie précédente que l'ensemble des polynômes de Hermite $\mathbf{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ forme une base hilbertienne de $\mathbb{H}^d = L^2(\mathbb{R}^d, f_\xi d\xi)$ avec f_ξ , la densité conjointe du vecteur de variables aléatoires $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ où $\xi_i, i=1 : d$ sont des variables aléatoires indépendantes dont chacune suit la loi normale centrée réduite. En utilisant le **théorème 1**, une variable aléatoire $Y = g(\boldsymbol{\xi})$ dont la variance existe peut être approchée par :

$$Y \approx g_p(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha=0}^{p-1} g_\alpha \mathbf{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.16)$$

Les coefficients g_α , à déterminer, peuvent s'écrire sous la forme :

$$g_\alpha = \langle g, \mathbf{H}_\alpha \rangle_{\mathbb{H}^d} = \int_{\mathbb{R}^d} g(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \cdot f_\xi(\boldsymbol{\xi}) d\xi \quad (1.17)$$

Une fois que Y est approchée par (1.16) les informations sur Y (différents moments, fonction de densité de probabilité, etc.) peuvent être obtenues aisément. Cela peut nécessiter l'évaluation des termes $E[\mathbf{H}_{\alpha_1} \mathbf{H}_{\alpha_2} \dots \mathbf{H}_{\alpha_n}]$. Dans l'annexe 2, une méthode semi analytique est présentée pour réaliser cette évaluation.

Puisque on a $\lim_{p \rightarrow \infty} g_p(\boldsymbol{\xi}) = g(\boldsymbol{\xi})$, alors si P est suffisamment grand, on peut obtenir une approximation $g_p(\boldsymbol{\xi})$ de $g(\boldsymbol{\xi})$ avec une erreur suffisamment faible. On ne connaît pas $g(\boldsymbol{\xi})$ mais

une méthode pour évaluer la qualité de l'approximation consiste à comparer $g_p(\xi)$ et $g_{p+k}(\xi)$, $k=1 : N_0$ (N_0 peut être choisi égal à 1 ou plus si la fonction à approximer possède des symétries). Si la distance entre $g_p(\xi)$ et $g_{p+k}(\xi)$ est faible, l'approximation pourra être considérée comme correcte. Pour des cas particuliers, on peut disposer d'un estimateur d'erreur qui nous permet d'avoir la distance avec la solution exacte [18].

Dans certains cas où $g(\xi)$ prend une forme « peu régulière » [30], la convergence $\lim_{p \rightarrow \infty} g_p(\xi) = g(\xi)$ peut être très lente. Ces cas nécessitent des traitements adaptés pour accélérer la vitesse de convergence. Ce phénomène est discuté dans le chapitre 2.

Dans [14], il est montré qu'une généralisation est possible avec des lois non gaussiennes. On a dans ce cas $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ où $\xi_i, i=1 : d$ sont des variables aléatoires indépendantes. Les fonctions de densité de probabilités f_{ξ_i} de $\xi_i, i=1 : d$ sont identiques. La fonction f_{ξ_i} peut être la fonction de densité d'une loi Beta, uniforme, etc... Dans ce cas, une autre famille de polynômes monodimensionnels $\psi_{i_k}(\xi_k)$ va être mise en œuvre (voir le Tableau 1 extrait de [14]). Les polynômes multidimensionnels sont établis à partir de ces polynômes monodimensionnels par :

$$\Psi_{\alpha}(\xi) = \psi_{i_1}(\xi_1) \cdot \psi_{i_2}(\xi_2) \cdots \psi_{i_d}(\xi_d) \quad (1.18)$$

Dans le reste de cette thèse on note $\Psi_{\alpha}(\xi)$ avec $\alpha \in \mathcal{N}$ le chaos polynomial généralisé.

Tableau 1. Chaos polynomial généralisés

	Variable aléatoire	Chaos polynomial	Support
Continue	Gaussienne	Hermite	$(-\infty, +\infty)$
	Gamma	Laguerre	$[0, +\infty)$
	Beta	Jacobi	$[a, b]$
	Uniforme	Legendre	$[a, b]$
Discrète	Poisson	Charlier	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Binomial	Krawtchouk	$\{0, 1, 2, \dots, N\}$
	Hypergéométrique	Hahn	$\{0, 1, 2, \dots, N\}$

Dans la suite, nous allons traiter un exemple simple pour illustrer l'utilisation d'une décomposition en chaos polynomial pour résoudre un problème stochastique et démontrer aussi l'importance du choix de la base d'approximation.

1.1.2.4. Exemple d'application

Cette partie illustre l'application du chaos polynomial afin d'approcher une grandeur aléatoire. On utilisera deux types de polynôme : les polynômes de Legendre et les polynômes d'Hermite.

A titre d'exemple, on s'intéresse au problème électrique suivant :

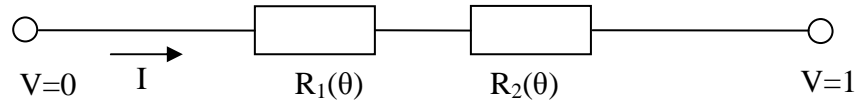


Figure 1. Exemple électrique

Les deux résistances $R_1(\theta)$ et $R_2(\theta)$ sont des variables aléatoires uniformes indépendantes qui varient dans l'intervalle $[2 ; 4]$. On s'intéresse au courant I qui est aussi une variable aléatoire.

Dans ce problème, le courant est obtenu analytiquement par :

$$I(\theta) = \frac{1}{R_1(\theta) + R_2(\theta)} \quad (1.19)$$

La fonction de densité de probabilités de variable aléatoire $I(\theta)$ présentée sur la Figure 2 est tracée par la méthode de noyau [35]. On cherche maintenant à approcher $I(\theta)$ de (1.19) par un chaos polynomial.

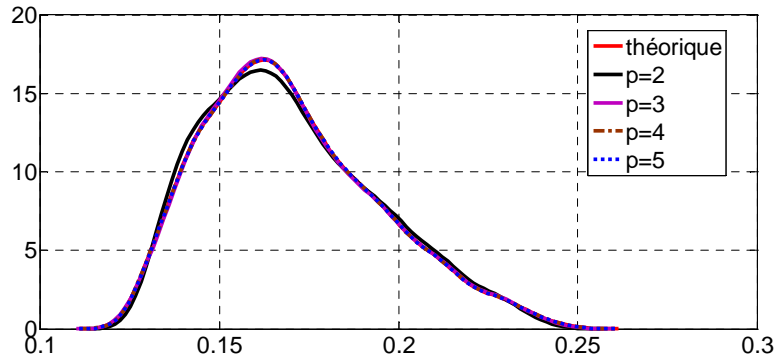


Figure 2. Fonctions de densité de probabilités de I et I_p – polynômes de Legendre

On peut constater que $R_1(\theta)$ et $R_2(\theta)$ peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} R_1 &= 3 + \xi_1 \\ R_2 &= 3 + \xi_2 \end{aligned}$$

avec ξ_1 et ξ_2 les variables aléatoires uniformes indépendantes dans l'intervalle $[-1 ; 1]$. Par conséquent, le courant peut s'écrire sous la forme :

$$I(\xi) = I(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{6 + \xi_1 + \xi_2} \quad (1.20)$$

Le courant est approché par :

$$I(\xi) \approx I_p(\xi) = \sum_{\alpha=0}^p I_\alpha \Psi_\alpha(\xi) \quad (1.21)$$

avec $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ et $\Psi_\alpha(\xi)$ les polynômes de Legendre et I_α les coefficients à déterminer par la méthode de projection [7]. Sur la Figure 2, on donne la fonction de densité de probabilités de I_p avec différents degrés maximal p des polynômes utilisés.

L'erreur de l'approximation (1.21) est définie par :

$$e = \mathbb{E}[(I_p - I)^2] \quad (1.22)$$

Dans le Tableau 2, on donne l'évolution de l'erreur (1.22) en fonction des valeurs de p . On peut constater que avec $p \geq 3$, la fonction approchée I_p est très proche de I .

Tableau 2. Erreurs en fonction de degré maximal p

p	Erreur	
	Chaos de Polynôme de Legendre	Chaos de Polynôme de Hermite
2	$1.51 \cdot 10^{-5}$	$8.71 \cdot 10^{-4}$
3	$4.16 \cdot 10^{-7}$	$1.50 \cdot 10^{-4}$
4	$1.12 \cdot 10^{-8}$	$8.97 \cdot 10^{-5}$
5	$3.20 \cdot 10^{-10}$	$1.96 \cdot 10^{-5}$

On cherche maintenant à approcher I (1.19) sous la forme (1.21) mais avec $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ où ξ_1, ξ_2 sont des variables gaussiennes centrées réduites indépendantes et $\Psi_\alpha(\xi)$ les polynômes d'Hermite. Une relation de R_1 avec ξ_1 et R_2 avec ξ_2 peut s'établir par une transformation isoprobabiliste :

$$\begin{aligned} F_{R_1}(R_1) &= F_{\xi_1}(\xi_1) \\ F_{R_2}(R_2) &= F_{\xi_2}(\xi_2) \end{aligned}$$

avec $F_{R_1}, F_{R_2}, F_{\xi_1}, F_{\xi_2}$ les fonctions de répartition des variables aléatoires R_1, R_2, ξ_1, ξ_2 respectivement. Sur la Figure 3, on donne la fonction de densité de probabilité de I_p et dans le Tableau 2, on donne l'évolution de l'erreur (1.22) en fonction du degré maximal p des polynômes utilisés.

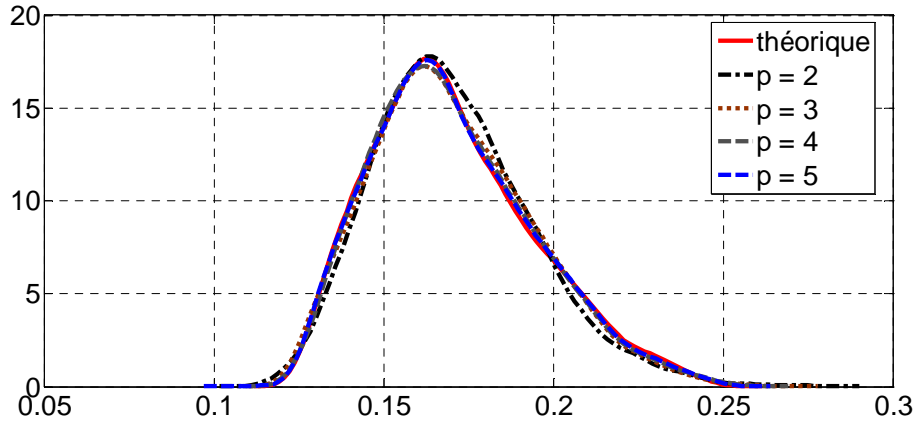


Figure 3. Fonctions de densité de probabilités de I et I_p – polynômes d’Hermite

On peut constater à partir du Tableau 2 que la convergence en utilisant les polynômes de Legendre dans ce cas converge plus vite. On retrouve un résultat de [14], où il a été montré numériquement que l’utilisation des polynômes de Legendre est mieux adaptée pour le cas où les variables aléatoires d’entrée sont des variables aléatoires uniformes.

1.2. Problème à résoudre

Dans cette partie, on rappelle d’abord le modèle mathématique utilisé dans un problème de l’électromagnétisme dans le cas déterministe. On présentera les équations en magnétostatique mais l’approche pourra être généralisée au cas de l’électrocinétique et de l’électrostatique. Les formulations faibles en potentiel scalaire et en potentiel vecteur sont ensuite introduites. On présentera alors la discrétisation dans le domaine spatial des potentiels et la résolution du problème par la méthode des éléments finis. Une fois le problème déterministe défini, on va l’étendre au cas stochastique dans le cas où les incertitudes sont portées par la loi de comportement.

1.2.1 Problème de magnétostatique déterministe

1.2.1.1. Les équations de Maxwell

Un problème de magnétostatique déterministe sur le domaine D , que l’on suppose contractile, où la densité de courant est supposée nulle peut s’écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \text{div} \mathbf{B}(x) = 0 \\ \text{rot} \mathbf{H}(x) = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

avec \mathbf{B} l’induction magnétique et \mathbf{H} le champ magnétique. La loi de comportement peut être représentée par :

$$\mathbf{B}(x) = \mu(x) \cdot \mathbf{H}(x) \quad (1.24)$$

où $\mu(x)$ est la perméabilité du domaine D . D'une façon générale, cette perméabilité est un tenseur d'ordre 2 qui peut dépendre en même temps de l'espace x et du champ magnétique \mathbf{H} (problème non linéaire). Dans la suite, on suppose que cette perméabilité est indépendante du champ \mathbf{H} , c'est-à-dire que le problème que l'on résout est linéaire.

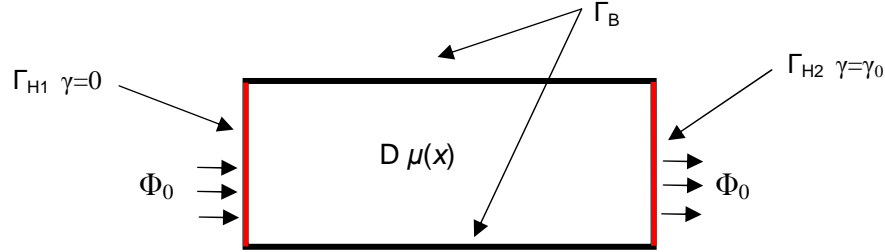


Figure 4. Problème de magnétostatique

Sur la frontière du domaine D les conditions aux limites sont imposées :

$$\begin{cases} \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur une partie } \Gamma_H \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur le reste de la frontière } \Gamma_B \end{cases} \quad (1.25)$$

avec \mathbf{n} le vecteur normal à la frontière. On suppose que la surface Γ_H est divisée en deux surfaces distinctes Γ_{H1} et Γ_{H2} où une force magnétomotrice γ_0 est imposée [19, 20]. On note Φ_0 le flux magnétique qui traverse les surfaces Γ_{H1} et Γ_{H2} .

Dans la partie suivante on va définir des espaces fonctionnels où se trouvent les champs \mathbf{B} , \mathbf{H} ainsi que les potentiels utilisés pour résoudre (1.23) et (1.24).

1.2.1.2. Définition des espaces fonctionnels

On note $L^2(D)$ et $\mathbf{L}^2(D)$ respectivement les espaces des fonctions scalaires réelles et fonctions vectorielles réelles d'énergie finie dans D . On introduit les espaces [21, 22] :

$$\begin{aligned} E_0(D) &= \{u \in L^2(D) / \mathbf{grad} u \in \mathbf{L}^2(D)\} \\ E_1(D) &= \{u \in L^2(D) / \mathbf{rot} u \in \mathbf{L}^2(D)\} \\ E_2(D) &= \{u \in L^2(D) / \mathbf{div} u \in L^2(D)\} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Lorsque le domaine D est contractile, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\mathbf{rot}(E_1)) &= \text{Im}(\mathbf{grad}(E_0)) \\ \text{Ker}(\mathbf{div}(E_2)) &= \text{Im}(\mathbf{rot}(E_1)) \end{aligned} \quad (1.27)$$

avec

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\vartheta(E)) &= \{u \in E / \vartheta(u) = 0\} \\ \text{Im}(\vartheta(E)) &= \{v / \exists u \in E, v = \vartheta(u)\} \end{aligned}$$

où ϑ est un opérateur linéaire quelconque. La relation (1.27) signifie que pour $\mathbf{u}_1 \in E_1(D)$, $\mathbf{v}_1 \in E_2(D)$ tels que $\mathbf{rot}(\mathbf{u}_1) = 0$ et $\text{div}(\mathbf{v}_1) = 0$, il existe alors $u_2 \in E_0(D)$, $\mathbf{v}_2 \in E_1(D)$ tels que : $\mathbf{grad}(u_2) = \mathbf{u}_1$ et $\mathbf{rot}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$.

On introduit aussi les espaces des champs satisfaisant des conditions aux limites homogènes :

$$\begin{aligned} E_H^0(D) &= \{u \in E_0(D) / u = 0 \text{ sur } \Gamma_H\} \\ E_B^1(D) &= \{\mathbf{u} \in E_1(D) / \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B\} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Dans la suite, on va introduire les formulations faibles en potentiel scalaire et en potentiel vecteur qui sont utilisées en pratique pour résoudre le problème (1.23)-(1.25).

1.2.1.3. Formulations faibles en potentiels

Formulation en potentiel scalaire :

A partir de (1.23) et (1.27), on peut déduire qu'il existe une fonction $\Omega \in E_0(D)$ telle que :

$$\mathbf{H} = -\mathbf{grad} \Omega \quad (1.29)$$

En utilisant (1.29) et (1.24), l'équation $\text{div} \mathbf{B} = 0$ devient :

$$\text{div}(\mu \mathbf{grad} \Omega) = 0 \quad (1.30)$$

Pour prendre en compte les conditions aux limites, on introduit une fonction $\alpha(x) \in E_0(D)$ [21] telle que :

$$\begin{cases} \alpha(x) = 0 \text{ sur } \Gamma_{H1} \\ \alpha(x) = 1 \text{ sur } \Gamma_{H2} \end{cases} \quad (1.31)$$

Le potentiel scalaire Ω peut s'écrire sous la forme :

$$\Omega(x) = \Omega'(x) + \gamma_0 \alpha(x) \quad (1.32)$$

avec $\Omega'(x)$ une fonction qui possède des conditions de Dirichlet homogènes sur Γ_H . L'équation (1.30) prenant en compte les conditions aux limites peut s'écrire alors sous la forme :

$$\text{div}(\mu \mathbf{grad} \Omega') = -\gamma_0 \text{div}(\mu \mathbf{grad} \alpha) \quad (1.33)$$

avec $\Omega' \in E_H^0(D)$ à déterminer.

L'équation (1.33) conduit à la formulation faible suivante:

$$\int_D \mathbf{grad}(\Omega'(x)) \cdot \mu(x) \cdot \mathbf{grad}(\lambda(x)) dx = -\gamma_0 \int_D \mathbf{grad}(\alpha(x)) \cdot \mu(x) \cdot \mathbf{grad}(\lambda(x)) dx \quad (1.34)$$

pour tout $\lambda(x) \in E_H^0(D)$.

Formulation en potentiel vecteur :

A partir de (1.23) et (1.27), on peut déduire qu'il existe un champ $\mathbf{A} \in E_1(D)$ tel que :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A} \quad (1.35)$$

En utilisant (1.35) et (1.24), l'équation $\mathbf{rot} \mathbf{H} = 0$ devient :

$$\mathbf{rot}(\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}) = 0 \quad (1.36)$$

Pour prendre en compte les conditions aux limites, on introduit une fonction $\mathbf{N}(x) \in E_2(D)$ [18] telle que :

$$\begin{cases} \mathit{div} \mathbf{N} = 0 \\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B \\ \int_{\Gamma_{H1}} \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} ds = - \int_{\Gamma_{H2}} \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} ds = 1 \end{cases} \quad (1.37)$$

Le potentiel vecteur \mathbf{A} peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{A}(x)) = \mathbf{rot}(\mathbf{A}'(x)) + \Phi_0 \mathbf{N}(x) \quad (1.38)$$

avec $\mathbf{A}'(x)$ une fonction qui possède des conditions homogènes $\mathbf{A}'(x) \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ_B . L'équation (1.36) devient alors:

$$\mathbf{rot}(\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}') = -\Phi_0 \mathbf{rot}(\mu^{-1} \mathbf{N}) \quad (1.39)$$

avec $\mathbf{A}' \in E_B^1(D)$ à déterminer.

De l'équation (1.33), on peut en déduire la formulation faible suivante:

$$\int_D \mathbf{rot}(\mathbf{A}'(x)) \cdot \mu^{-1}(x) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{w}(x)) dx + \Phi_0 \int_D \mu^{-1}(x) \cdot \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{w}(x)) dx = 0 \quad (1.40)$$

pour tout $\mathbf{w}(x) \in E_B^1(D)$. Comme on impose une force magnétomotrice γ_0 entre Γ_{H1} et Γ_{H2} et que le flux Φ_0 n'est pas connu, une équation supplémentaire est nécessaire pour prendre en compte le degré de liberté Φ_0 . Cette équation est donnée par [22]:

$$\int_D \mu^{-1}(x) \cdot (\mathbf{rot}(\mathbf{A}'(x)) + \Phi_0 \mathbf{N}(x)) \cdot \mathbf{N}(x) dx = -\gamma_0 \quad (1.41)$$

Dans la suite on présente la résolution des problèmes (1.34) et (1.40) - (1.41) dans le domaine discret.

1.2.1.4. Discrétisation

Pour approcher le potentiel scalaire $\Omega'(x)$ et le potentiel vecteur $\mathbf{A}'(x)$ présentés dans la partie précédente, les éléments de Whitney sont souvent utilisés [23] (voir pour plus de détail l'annexe 3). On se donne un maillage \mathcal{M} du domaine D avec n_0 nœuds, n_1 arêtes, n_2 facettes et n_3 éléments. On introduit des espaces fonctionnels de fonctions du premier ordre:

$$\begin{aligned}
W_0 &= \text{span}\{w_{0i} / i = 1 : n_0\} \\
W_1 &= \text{span}\{w_{1i} / i = 1 : n_1\} \\
W_2 &= \text{span}\{w_{2i} / i = 1 : n_2\}
\end{aligned} \tag{1.42}$$

avec w_{0i} la fonction de forme associée au nœud i , w_{1i} la fonction de forme associée à l'arête i et w_{2i} la fonction de forme associée à la facette i . Si le domaine D est contractile, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\mathbf{rot}(W_1)) &= \text{Im}(\mathbf{grad}(W_0)) \\
\text{Ker}(\text{div}(W_2)) &= \text{Im}(\mathbf{rot}(W_1))
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Les espaces W_0 , W_1 , W_2 sont respectivement des sous-espaces de E_0 , E_1 , E_2 et vérifient des propriétés similaires aux opérateurs vectoriels div , \mathbf{grad} et \mathbf{rot} . Le potentiel scalaire de (1.34) est approché par la forme suivante :

$$\Omega'(x) \approx \sum_{i \in N_{0H}} \Omega'_i w_{0i}(x) \tag{1.44}$$

avec N_{0H} l'ensemble des nœuds qui appartient à Γ_H et Ω'_i les coefficients à déterminer. La fonction $\alpha(x)$ dans (1.34) peut prendre la forme discrète suivante :

$$\alpha(x) = \sum_{i \in N_{0H2}} w_{0i}(x) \tag{1.45}$$

où N_{0H2} l'ensemble des nœuds qui appartiennent à Γ_{H2} . On utilise la formulation faible (1.34) en appliquant la méthode de Galerkin [10], on obtient :

$$\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Omega}' = \boldsymbol{\beta} \tag{1.46}$$

avec $\mathbf{\Lambda}$ une matrice de dimension $n'_0 \times n'_0$, $\boldsymbol{\beta}$ un vecteur de dimension n'_0 et $\mathbf{\Omega}'$ le vecteur des valeurs aux nœuds du potentiel scalaire de dimension n'_0 où n'_0 représente le nombre des nœuds qui n'appartiennent pas à Γ_H . Les coefficients de $\mathbf{\Lambda}$, $\boldsymbol{\beta}$, et $\mathbf{\Omega}'$ sont donnés par:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{ij} &= \int_D \mathbf{grad}(w_{0i}(x)) \cdot \mu(x) \cdot \mathbf{grad}(w_{0j}(x)) \cdot dx \\
\beta_i &= -\gamma_0 \cdot \int_D \mathbf{grad}(\alpha(x)) \cdot \mu(x) \cdot \mathbf{grad}(w_{0i}(x)) \cdot dx \\
\Omega'_j &= \Omega'_j
\end{aligned} \tag{1.47}$$

D'une façon similaire, le potentiel vecteur est approché par :

$$A'(x) \approx \sum_{i \in N_{0B}} A'_i \cdot w_{1i}(x) \tag{1.48}$$

avec N_{0B} l'ensemble des arêtes qui appartiennent à Γ_B et A'_i des coefficients à déterminer. Le système linéaire final à résoudre s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{A}' = \boldsymbol{\eta} \tag{1.49}$$

avec Δ une matrice de taille $(n'_1 + 1) \times (n'_1 + 1)$, A' le vecteur $(n'_1 + 1) \times 1$ des inconnues et η le vecteur de taille $(n'_1 + 1) \times 1$ qui s'écrivent sous la forme :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^t & c \end{bmatrix}; \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} A'_1 \\ \dots \\ A'_{n'_1} \\ \Phi_0 \end{bmatrix}; \eta = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\gamma_0 \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

$$C_{ij} = \int_D \mathbf{rot}(\mathbf{w}_{1i}(x)) \cdot \mu^{-1}(x) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{w}_{1j}(x)) dx$$

$$\mathbf{F}_i = \int_D \mu^{-1}(x) \cdot \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{w}_{1i}(x)) dx$$

$$c = \int_D \mu^{-1}(x) \cdot \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{N}(x) dx$$

où n'_1 le nombre d'arêtes qui n'appartiennent pas à Γ_B . Dans la suite, pour illustrer la démarche de la résolution d'un problème stochastique, on va utiliser la formulation en potentiel scalaire. Une transposition au cas de la formulation en potentiel vecteur ne pose pas de difficulté particulière.

1.2.2 Problème en magnétostatique stochastique - incertitudes portées par la loi de comportement

1.2.2.1. Incertitudes portées par la loi de comportement

Supposons que l'on dispose déjà d'un modèle probabiliste de la perméabilité μ qui nous permette d'écrire celle ci sous la forme d'un champ aléatoire :

$$\mu = \mu(x, \theta) \quad (1.51)$$

et que ce champ aléatoire est une fonction d'un nombre fini de variables aléatoires (ξ_1, \dots, ξ_d) que l'on regroupe dans un vecteur aléatoire $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$. Cette fonction d'un nombre fini des variables aléatoires peut être obtenue par exemple en tronquant un développement de Karhunen Loeve du champ aléatoire représentant la perméabilité [24]. La perméabilité s'écrit alors sous la forme :

$$\mu(x, \theta) = \mu(x, \xi(\theta)) \quad (1.52)$$

En conséquence, le champ magnétique \mathbf{H} et l'induction magnétique \mathbf{B} dépendent non seulement de x mais aussi de $\xi(\theta)$.

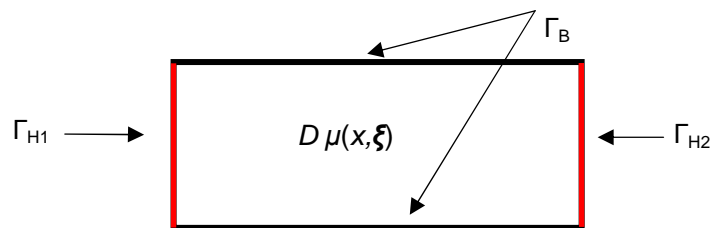


Figure 5. Problème aux incertitudes portées par la loi de comportement

Pour simplifier l'écriture, on va omettre dans la suite la notation de l'aléa θ et écrire ξ au lieu de $\xi(\theta)$. Le problème de magnétostatique stochastique sur le domaine D peut s'écrire pour tout $\xi \in \mathcal{O}^d$ sous la forme :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B}(x, \xi) = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(x, \xi) = 0 \end{cases} \quad (1.53)$$

avec la loi de comportement :

$$\mathbf{B}(x, \xi) = \mu(x, \xi) \cdot \mathbf{H}(x, \xi) \quad (1.54)$$

Les conditions aux limites sont imposées par :

$$\begin{cases} \mathbf{H}(x, \xi) \times \mathbf{n}(x) = 0 \text{ sur une partie } \Gamma_H \\ \mathbf{B}(x, \xi) \cdot \mathbf{n}(x) = 0 \text{ sur le reste de la frontière } \Gamma_B \end{cases} \quad (1.55)$$

On suppose aussi que la surface Γ_H est divisée en deux surfaces distinctes Γ_{H1} et Γ_{H2} où une force magnétomotrice γ_0 est imposée.

On introduit un espace fonctionnel :

$$U_H^0(D, H^d) = \left\{ u(x, \xi) / \forall \xi \in \mathcal{O}^d, u(\cdot, \xi) \in E_H^0(D) \text{ et } \forall x \in D, u(x, \cdot) \in H^d \right\} \quad (1.56)$$

En se basant sur l'approche de la partie 1.2.1.3, on peut déduire une formulation faible suivante :

Trouver $\Omega'(x, \xi) \in U_H^0(D, H^d)$ tel que pour $\xi \in \mathcal{O}^d$:

$$\int_D \operatorname{grad}(\Omega'(x, \xi)) \cdot \mu(x, \xi) \cdot \operatorname{grad}(\lambda(x)) dx = -\gamma_0 \int_D \operatorname{grad}(\alpha(x)) \cdot \mu(x, \xi) \cdot \operatorname{grad}(\lambda(x)) dx \quad (1.57)$$

pour tout $\lambda(x) \in E_H^0(D)$.

1.2.2.2 Discrétisation spatiale

Le potentiel scalaire est approché sous la forme :

$$\Omega'(x, \xi) \approx \sum_{i \in N_{0H}} \Omega'_i(\xi) w_{0i}(x) \quad (1.58)$$

avec $\Omega'_i(\xi)$ les variables aléatoires à déterminer et $w_{0i}(x)$ les fonctions de forme nodale identiques à celles utilisées dans le cas déterministe. En utilisant la formulation faible (1.57), les fonctions nodales comme fonction test, cela conduit au système matriciel suivant :

$$\mathbf{\Lambda}(\xi) \cdot \mathbf{\Omega}'(\xi) = \mathbf{\beta}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathcal{O}^d \quad (1.59)$$

avec:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{ij}(\xi) &= \int_D \mathbf{grad}(w_{0i}(x)) \cdot \mu(x, \xi) \cdot \mathbf{grad}(w_{0j}(x)) \cdot dx \\
\beta_i(\xi) &= -\gamma_0 \cdot \int_D \mathbf{grad}(\alpha(x)) \cdot \mu(x, \xi) \cdot \mathbf{grad}(w_{0i}(x)) \cdot dx \\
\Omega'_j(\xi) &= \Omega'_j(\xi)
\end{aligned} \tag{1.60}$$

Pour chaque événement élémentaire $\xi \in \mathcal{O}^d$, on peut déterminer une solution approchée $\Omega'(x, \xi)$ de (1.58) dans le domaine spatial. Cela nécessite la résolution d'un système matriciel (1.59) pour chaque ξ . Le nombre de calcul est alors infini ce qui est numériquement impossible. Dans la suite, sont présentées les méthodes de propagation des incertitudes portées par la loi de comportement qui vont permettre de réduire le nombre de calcul et, en fonction des cas, d'obtenir une expression explicite de $\Omega'(x, \xi)$ en fonction de x et ξ ce qui est plus facilement exploitable.

1.3. Propagation des incertitudes portées par la loi de comportement

Les méthodes de propagation d'incertitudes portées par la loi de comportement peuvent se diviser en 2 catégories : les méthodes non intrusives et les méthodes intrusives.

Pour les méthodes de type non intrusives, on s'intéresse à une grandeur G qui peut être le flux traversant une surface, l'énergie du système, les pertes ou la valeur du potentiel en certains points... Cette grandeur est une variable aléatoire dépendant du vecteur des inconnues $\Omega'(\xi)$ de (1.59) :

$$G(\xi) = G(\Omega'(\xi)) \tag{1.61}$$

La caractérisation de $G(\xi)$ est réalisée grâce à un nombre d'évaluations de $G : G(\xi^k)$, $k=1 : n$. Il faut alors réaliser n calculs déterministes de $\Omega'(\xi)$ en résolvant le système (1.59) correspondant au $\xi = \xi^k$. Puis les évaluations de $G(\xi^k)$ sont obtenues par (1.61). Pour les méthodes non intrusives, on ajoute une « couche » au modèle déterministe permettant de prendre en compte les aspects probabilistes.

Concernant les méthodes de type intrusive, le système (1.59) se ramène à un nouveau système à résoudre pour obtenir une expression de $\Omega'(\xi)$. Dans la suite, on présentera les méthodes de résolution non intrusives et intrusives d'un problème stochastique.

1.3.1 Méthodes non intrusives

Dans cette partie, on présente trois méthodes non intrusives pour caractériser la grandeur $G(\xi)$.

1.3.1.1. Méthode de Monte Carlo

Une manière simple d'introduire la méthode de Monte Carlo est de considérer le théorème central limite (TCL). Il est donné par:

Théorème 2 : Soit $(Y_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de carrée intégrable de même loi d'espérance m et d'écart-type σ .

Alors la suite $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{Y}_n - m)$, avec $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, converge en loi vers une variable de loi gaussienne centrée réduite Z . Ce qui signifie que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{Y}_n - m) < a\right) = P(Z < a) \quad (1.62)$$

On peut déduire à partir de ce théorème que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bar{Y}_n - b \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{Y}_n - a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(a < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{Y}_n - m) < b\right) = P(a < Z < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Par conséquent, pour estimer la moyenne m d'une variable aléatoire Y , une possibilité est d'obtenir un nombre n suffisamment grand de réalisations $y_i, i=1 : n$, de Y et de supposer que $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{Y}_n - m)$ suit effectivement une loi normale centrée réduite. L'intervalle de confiance à 95% par exemple de m est le suivant:

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Dans le cas où on ne connaît pas l'écart type σ , celui-ci peut être estimé par la formulation suivante :

$$\bar{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \right)^2$$

Cette estimation vient du fait que $\bar{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(Y_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j \right)^2$ est un estimateur sans biais de σ^2 et $\bar{\sigma}_n^2$ converge presque sûrement vers σ^2 . Ce qui signifie que :

$$E(\bar{\sigma}_n^2) = \sigma^2 \text{ et } P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_n^2 = \sigma^2) = 1$$

En remplaçant σ par $\bar{\sigma}_n$, on peut approcher un intervalle de confiance à 95% de m :

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - 1.96 \cdot \frac{\bar{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i + 1.96 \cdot \frac{\bar{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \right]$$

Maintenant, on s'intéresse à la grandeur physique aléatoire d'intérêt $G(\xi)$ considérée précédemment. La méthode de Monte-Carlo permet de déterminer les différents moments de $G(\xi)$ tels que son espérance, sa variance, etc...

Comme cela a été montré ci-dessus, il suffit de calculer un nombre n suffisamment grand de réalisations de $G : G_k = G(\xi^k)$ avec $k=1 : n$. Pour la mise en œuvre de la méthode de Monte-Carlo, on génère d'abord n réalisations indépendantes ξ^k de $\xi, k=1 : n$. Pour chaque réalisation ξ^k l'équation (1.63) est résolue:

$$\Lambda(\xi^k) \cdot \Omega'(\xi^k) = \beta(\xi^k) \quad (1.63)$$

La réalisation G_k est obtenue par :

$$G_k = G(\Omega'(\xi^k)) \quad (1.64)$$

L'intervalle de confiance de 95% de $E(G(\xi))$ peut être obtenue par :

$$[\bar{G}_n - 1.96 \cdot \frac{\bar{\sigma}_G}{\sqrt{n}}, \bar{G}_n + 1.96 \cdot \frac{\bar{\sigma}_G}{\sqrt{n}}]$$

avec:

$$\bar{G}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n G_k$$

et $\bar{\sigma}_G^2$ de la forme suivante :

$$\bar{\sigma}_G^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (G_k - \bar{G}_n)^2$$

Cette méthode est non intrusive parce qu'il suffit de réaliser n calculs déterministes correspondant aux n réalisations des données d'entrée ξ^k , $k=1 : n$. Cette méthode est facile à mettre en œuvre et on peut maîtriser la convergence de l'estimation. Par contre, la vitesse de convergence est assez lente (proportionnelle à $1/\sqrt{n}$). En effet, dans certain cas, on doit réaliser un grand nombre de calcul ce qui peut s'avérer numériquement lourd. On peut trouver dans la littérature la méthode de l'hypercube latin [25], la méthode « importance sampling » [38] permettant de réduire le nombre de calculs.

Les méthodes d'échantillonnage précédentes permettent d'estimer certaines grandeurs statistiques liées à $G(\xi)$. Néanmoins, il peut être utile d'avoir une expression explicite de $G(\xi)$ en fonction de ξ . Dans la littérature, différentes bases de dimension finie sont utilisées pour approcher $G(\xi)$ (le chaos polynomial, les ondelettes, etc. [39]). Dans la suite, nous allons nous concentrer sur le chaos polynomial sachant qu'une extension à d'autres bases est possible. La grandeur $G(\xi)$ est approchée sous la forme :

$$G(\xi) \approx G^P(\xi) = \sum_{i=1}^P \alpha_i \Psi_i(\xi) \quad (1.65)$$

avec $\Psi_i(\xi)$ le chaos polynomial et α_i des coefficients à déterminer. Nous allons présenter des méthodes qui permettent d'identifier les coefficients α_i du développement (1.65).

1.3.1.2. Méthode de régression

Dans la méthode de régression, les coefficients α_i sont déterminés de la façon suivante [4] :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \arg_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p} \text{Min}(E[(G(\xi) - G^P(\xi))^2]) \quad (1.66)$$

En réalité, on ne dispose que de n évaluations de $G(\xi)$ pour estimer $E[(G(\xi) - G^P(\xi))^2]$. On obtient alors :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \arg_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p} \left[\text{Min}(r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)) \right] \quad (1.67)$$

avec :

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \sum_{k=1}^n \omega_k (G(\xi^k) - \sum_{i=1}^p \alpha_i \Psi_i(\xi^k))^2 \quad (1.68)$$

En cherchant le point stationnaire de $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ de (1.68), on obtient le système matriciel suivant:

$$\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b} \quad (1.69)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{ij} &= \sum_{k=1}^n \omega_k \Psi_i(\xi_k) \Psi_j(\xi_k) \\ \mathbf{b}_i &= \sum_{k=1}^n \omega_k \Psi_i(\xi_k) G(\xi_k) \text{ et} \\ \boldsymbol{\alpha}_i &= \alpha_i \text{ avec } i, j = 1:P \end{aligned} \quad (1.70)$$

La résolution de (1.69) permet d'obtenir les coefficients α_i . Dans cette méthode, on doit effectuer n calculs $G(\xi^k)$, $k = 1 : n$. Rappelons que pour chaque ξ^k , le problème (1.63) est résolu et l'évaluation $G(\xi^k)$ est obtenue à partir de $\Omega'(\xi^k)$. Ces n calculs peuvent être réalisés en parallèle. Le choix des points de réalisation ξ^k ainsi que celui des poids ω_k est un point délicat. En effet, un choix non pertinent peut conduire à un système (1.69) singulier ou parfois mal conditionné. Dans [26], les points d'évaluation ξ^k peuvent se construire à partir des racines du polynôme monodimensionnel $\psi_i(\xi)$ et les poids peuvent être donnés par $\omega_k = 1/n$.

On peut constater aussi que pour un système (1.69) non singulier il faut prendre $n \geq P$. Dans le cas où la dimension d est très grande et on utilise tous les polynômes d'ordre inférieur ou égal à p , la valeur de P (1.15) peut être très élevée. La réalisation au moins de P calculs peut être numériquement très lourde. Dans [15], une méthode est proposée consistant à choisir d'une façon adaptative des polynômes utilisés dans le cas d'une grande dimension d . Ce choix a pour but d'exclure les polynômes dont la contribution est faible dans l'approximation (1.65).

1.3.1.3. Méthode de projection

En raison de l'orthogonalité et de la normalité des polynômes $\Psi_i(\xi)$ les coefficients α_i (1.65) peuvent être déterminés par [5]:

$$\alpha_i = E[G(\xi) \cdot \Psi_i(\xi)] = \int_{\Omega^d} G(\xi) \cdot \Psi_i(\xi) \cdot f_\xi(\xi) d\xi \quad (1.71)$$

Pour approcher $G(\xi)$, il faut donc être capable d'évaluer numériquement l'intégrale (1.71). Pour cela, on peut utiliser la méthode de Monte Carlo, la méthode quadrature de Gauss avec des grilles creuses [11] ou des schémas adaptatifs [16]. Toutes ces méthodes nous ramènent à l'expression générale d'approximation de l'intégrale suivante :

$$\alpha_i = \int_{\mathcal{O}^d} G(\xi) \cdot \Psi_i(\xi) \cdot f_\xi(\xi) d\xi \approx \sum_{k=1}^n \omega_k \cdot G(\xi^k) \cdot \Psi_i(\xi^k) \quad (1.72)$$

avec ξ^k sont les points d'intégration et ω_k sont les poids d'intégration associés. Cette méthode nécessite aussi n calculs déterministes de $G(\xi^k)$. Les erreurs numériques de cette méthode viennent de la troncature du développement en chaos polynomial (1.65) et de l'approximation (1.72).

1.3.2 Méthodes intrusives

Dans la suite, on présente les méthodes intrusives pour résoudre le problème (1.59). Rappelons que pour ces méthodes le potentiel aux noeuds $\Omega'(\xi)$ s'écrit explicitement en fonction de ξ .

1.3.2.1. Méthode SSFEM (Spectral Stochastic Finite Elements Method)

On introduit un espace :

$$H_p^d = \text{span}\{\Psi_i(\xi) \mid i=1:P\} \quad (1.73)$$

On peut constater que H_p^d est un sous-espace de H^d (voir la partie 1.1.1). On cherche une approximation de $\Omega'(\xi)$ (1.59) dans l'espace $(H_p^d)^{n'_0}$. Rappelons que n'_0 est la dimension du vecteur $\Omega'(\xi)$ et :

$$(H_p^d)^{n'_0} = \{u(\xi) = (u_1(\xi), u_2(\xi), \dots, u_{n'_0}(\xi)) \mid u_i(\xi) \in H_p^d, i=1:n'_0\} \quad (1.74)$$

L'approximation de $\Omega'(\xi)$ s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\Omega'(\xi) \approx \sum_{i=1}^P \Omega^i \Psi_i(\xi) \quad (1.75)$$

avec $\Psi_i(\xi)$ est le chaos polynomial et Ω^i des vecteurs des coefficients à déterminer de dimension n'_0 . La projection de Galerkin [6, 7] de $\Omega'(\xi)$ (1.59) dans $(H_p^d)^{n'_0}$ nous donne :

$$E[(\Lambda(\xi) \cdot \Omega'(\xi) - \beta(\xi)) \cdot \Psi_i(\xi)] = 0 \quad (1.76)$$

Ce qui conduit à :

$$\sum_{j=1}^P E[\Psi_i(\xi) \cdot \Lambda(\xi) \cdot \Psi_j(\xi)] \cdot \Omega^j = E[\Psi_i(\xi) \cdot \beta(\xi)] \quad (1.77)$$

pour tous $i = 1 : P$ avec les termes $\Lambda(\xi)$ et $\beta(\xi)$ qui sont définis dans (1.60). L'équation (1.77) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} E[\Psi_1(\xi) \cdot \Lambda(\xi) \cdot \Psi_1(\xi)] & \dots & E[\Psi_1(\xi) \cdot \Lambda(\xi) \cdot \Psi_p(\xi)] \\ \dots & \dots & \dots \\ E[\Psi_p(\xi) \cdot \Lambda(\xi) \cdot \Psi_1(\xi)] & \dots & E[\Psi_p(\xi) \cdot \Lambda(\xi) \cdot \Psi_p(\xi)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega' \\ \dots \\ \Omega'^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[\Psi_1(\xi) \cdot \beta(\xi)] \\ \dots \\ E[\Psi_p(\xi) \cdot \beta(\xi)] \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

En pratique, pour calculer les termes $E[\Psi_i(\xi) \cdot \Lambda(\xi) \cdot \Psi_j(\xi)]$ on écrit d'abord :

$$\Lambda(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_i \Psi_i(\xi) \quad (1.79)$$

On peut montrer aisément que seuls les termes $\Psi_i(\xi)$ de (1.79) de degré inférieur à $2p$ (p est le degré maximum de polynôme $\Psi_p(\xi)$, voir (1.15)) interviennent dans l'expression $E[\Psi_i(\xi) \cdot \Lambda(\xi) \cdot \Psi_j(\xi)]$ de (1.78). Puis, on utilise le calcul préalablement réalisé (annexe 2) du terme $E[\Psi_i(\xi) \Psi_j(\xi) \Psi_k(\xi)]$. On effectue la même démarche pour les termes $E[\Psi_i(\xi) \cdot \beta(\xi)]$.

Dans cette méthode, on résout un système unique (1.78) mais de taille très grande $(n'_0 \cdot P) \times (n'_0 \cdot P)$. Dans [12, 36] la méthode des polynômes doublement orthogonaux est proposée permettant de ramener (1.78) à la résolution de systèmes matriciels déterministes indépendants.

1.3.2.2. Méthode basée sur un développement de Taylor

Cette méthode consiste à approcher $\Omega'(\xi)$ dans (1.59) sous la forme d'un développement de Taylor autour de la valeur moyenne ξ_0 de ξ [9] :

$$\Omega'(\xi) = \Omega'_0 + \sum_{i=1}^d \Omega'_{,i} \cdot (\xi_i - \xi_{i0}) + \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \frac{1}{2} \Omega'_{,ij} \cdot (\xi_i - \xi_{i0})(\xi_j - \xi_{j0}) + o(\|\xi - \xi_0\|^2) \quad (1.80)$$

On note ici :

$$\Omega'_{,i} = \frac{\partial \Omega'}{\partial \xi_i} \quad \text{et} \quad \Omega'_{,ij} = \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$$

Si on effectue le même développement à l'ordre 2 pour Λ et β , on a:

$$\Lambda(\xi) = \Lambda_0 + \sum_{i=1}^d \Lambda_{,i} \cdot (\xi_i - \xi_{i0}) + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{1}{2} \Lambda_{,ij} \cdot (\xi_i - \xi_{i0})(\xi_j - \xi_{j0}) + o(\|\xi - \xi_0\|^2) \quad (1.81)$$

$$\beta(\xi) \approx \beta_0 + \sum_{i=1}^d \beta_{,i} \cdot (\xi_i - \xi_{i0}) + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{1}{2} \beta_{,ij} \cdot (\xi_i - \xi_{i0})(\xi_j - \xi_{j0}) + o(\|\xi - \xi_0\|^2) \quad (1.82)$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \Lambda(\xi_0); \quad \Lambda_{,i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi_i}; \quad \Lambda_{,ij} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \\ \beta_0 &= \beta(\xi_0); \quad \beta_{,i} = \frac{\partial \beta}{\partial \xi_i}; \quad \beta_{,ij} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \end{aligned} \quad (1.83)$$

A partir de (1.60) on a :

$$\begin{aligned}
[\Lambda_0]_{kl} &= \int_D \mathbf{grad}(w_{0k}(x)) \cdot \mu(x, \xi_0) \cdot \mathbf{grad}(w_{0l}(x)) \cdot dx \\
[\Lambda_{\cdot i}]_{kl} &= \int_D \mathbf{grad}(w_{0k}(x)) \cdot \frac{\partial \mu(x, \xi)}{\partial \xi_i} \cdot \mathbf{grad}(w_{0l}(x)) \cdot dx \\
[\Lambda_{\cdot ij}]_{kl} &= \int_D \mathbf{grad}(w_{0k}(x)) \cdot \frac{\partial^2 \mu(x, \xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \cdot \mathbf{grad}(w_{0l}(x)) \cdot dx \\
[\beta_0]_k &= -\gamma_0 \cdot \int_D \mathbf{grad}(\alpha(x)) \cdot \mu(x, \xi_0) \cdot \mathbf{grad}(w_{0k}(x)) \cdot dx \\
[\beta_{\cdot i}]_k &= -\gamma_0 \int_D \mathbf{grad}(\alpha(x)) \cdot \frac{\partial \mu(x, \xi)}{\partial \xi_i} \cdot \mathbf{grad}(w_{0k}(x)) \cdot dx \\
[\beta_{\cdot ij}]_k &= -\gamma_0 \int_D \mathbf{grad}(\alpha(x)) \cdot \frac{\partial^2 \mu(x, \xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \cdot \mathbf{grad}(w_{0k}(x)) \cdot dx
\end{aligned} \tag{1.84}$$

En injectant (1.80), (1.81) et (1.82) dans (1.59), on obtient :

$$\begin{aligned}
(a) \quad \Lambda_0 \cdot \Omega' &= \beta_0 \\
(b) \quad \Lambda_0 \cdot \Omega'_i &= \beta_{\cdot i} - \Lambda_{\cdot i} \cdot \Omega' \\
(c) \quad \Lambda_0 \cdot \Omega'_{ij} &= \beta_{\cdot ij} - \Lambda_{\cdot i} \cdot \Omega'_j - \Lambda_{\cdot ij} \cdot \Omega'_0
\end{aligned} \tag{1.85}$$

pour $i=1 : d$ et $j=1 : d$. Les coefficients dans le développement de $\Omega'(\xi)$ sont calculés en résolvant (a) puis (b) puis (c) du système (1.85). Les termes de (1.84) peuvent être calculés soit analytiquement soit par une méthode numérique. En pratique, on se limite souvent à l'ordre deux comme présenté ci-dessus parce qu'un développement à un ordre plus élevé peut conduire à un accroissement du temps de calcul.

On peut estimer les premiers moments de la solution en prenant seulement des termes de deuxième ordre et on montre que [9] :

$$\begin{aligned}
E(\Omega'(\xi)) &\approx \Omega'_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \Omega'_{ij} \cdot \text{Cov}(\xi_i, \xi_j) \\
\text{Cov}(\Omega') &\approx \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \Omega'_i \cdot \Omega'_j \cdot \text{Cov}(\xi_i, \xi_j)
\end{aligned}$$

Cette méthode est appliquée seulement dans le cas de faible variabilité de la grandeur de sortie car dans le cas contraire, les termes à l'ordre supérieur à 2 dans le développement(1.80) deviennent non négligeables et la méthode devient beaucoup moins précise.

1.3.2.3. Méthode basée sur une décomposition de Neumann

Le vecteur $\Omega'(\xi)$ d'après (1.59) est égale à :

$$\Omega'(\xi) = \Lambda^{-1}(\xi) \cdot \beta(\xi) \tag{1.86}$$

En général, le calcul direct du terme $\Lambda^{-1}(\xi)$ n'est pas possible. L'idée de la décomposition de Neumann est d'exprimer $\Lambda^{-1}(\xi)$ sous la forme d'une série de matrices [3]. On pose initialement :

$$\Lambda(\xi) = \Lambda_0 + \Lambda_1(\xi)$$

où Λ_0 est une matrice déterministe et inversible. On peut prendre:

$$\Lambda_0 = \mathbb{E}(\Lambda(\xi))$$

En d'autres termes, on peut écrire:

$$\Lambda(\xi) = \Lambda_0 (\mathbf{I} + \Lambda_0^{-1} \Lambda_1(\xi)) = \Lambda_0 (\mathbf{I} + L(\xi))$$

avec:

$$L(\xi) = \Lambda_0^{-1} \Lambda_1(\xi)$$

On a aussi:

$$(\mathbf{I} + L(\xi))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L^k(\xi) \quad (1.87)$$

On obtient alors :

$$\Omega'(\xi) = (\mathbf{I} + L(\xi))^{-1} \Lambda_0^{-1} \cdot \beta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L^k(\xi) \Lambda_0^{-1} \cdot \beta(\xi)$$

La solution tronquée à l'ordre P s'écrit :

$$\Omega'(\xi) \approx \sum_{k=0}^P (-1)^k L^k(\xi) \Lambda_0^{-1} \cdot \beta(\xi) \quad (1.88)$$

Cette méthode est simple à mettre en œuvre, par contre, elle est coûteuse car elle nécessite le calcul explicite de la matrice Λ_0^{-1} .

On vient de présenter le problème des incertitudes portées par la loi de comportement ainsi que des méthodes pour résoudre ce type de problème. Même si il reste encore des travaux à effectuer pour disposer de méthode numériquement viable, nous disposons d'outils pour résoudre ce type de problème.

Dans la partie suivante, on va aborder le cas où les incertitudes sont portées par la géométrie.

1.4. Etat de l'art sur le problème des incertitudes portées par la géométrie

Dans cette partie, on définit d'abord le problème des incertitudes portées par la géométrie. Puis, les différentes méthodes pour propager ce type d'incertitudes vont être discutées.

1.4.1 Définition du problème

On peut distinguer le problème des incertitudes portées par la géométrie en deux catégories : le problème aux frontières aléatoires et le problème aux interfaces aléatoires entre les sous domaines (frontière entre différents matériaux). Pour définir ces deux problèmes, on considère d'abord une surface aléatoire $\Gamma(\theta)$. Cette surface est supposée paramétrée par un paramètre c :

$$\begin{cases} x_1 = g_1(\theta, c) \\ x_2 = g_2(\theta, c) \\ x_3 = g_3(\theta, c) \end{cases} \text{ avec } c \in \Delta \quad (1.89)$$

Où x_1 , x_2 , et x_3 sont les coordonnées des points situés sur la surface $\Gamma(\theta)$ et g_1 , g_2 , g_3 sont des expressions connues. Le paramètre c appartient à un sous ensemble de R^2 (R dans le cas 2D où $\Gamma(\theta)$ devient une ligne). Pour chaque réalisation de θ , il existe une bijection de Δ dans $\Gamma(\theta)$. Dans la suite, on suppose que le caractère aléatoire de cette surface peut être représenté par un vecteur aléatoire de dimension finie d : $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ (voir la partie 1.1) : $\Gamma(\theta) = \Gamma(\xi)$. On a alors :

$$\begin{cases} x_1 = g_1(\xi, c) \\ x_2 = g_2(\xi, c) \\ x_3 = g_3(\xi, c) \end{cases} \text{ avec } c \in \Delta \quad (1.90)$$

Nous allons présenter maintenant le problème des incertitudes portées par la frontière et le problème des incertitudes portées par les interfaces entre les sous-domaines composés de matériaux différents. Dans ces deux problèmes, les surfaces aléatoires sont supposées représentées par (1.90).

1.4.1.1. Problème aux frontières aléatoires

Dans un problème aux frontières aléatoires, le domaine $D(\xi)$ se compose d'un seul matériau ce qui signifie que la loi de comportement est homogène :

$$\mu(x, \xi) = \mu_0 \quad (1.91)$$

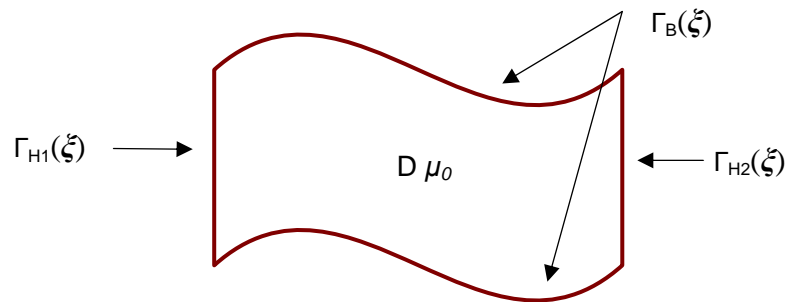


Figure 6. Problème aux incertitudes portées par la frontière du domaine

Le problème est défini sur le domaine $D(\xi)$ de frontière aléatoire $\Gamma_D(\xi)$, pour tout $\xi \in \mathcal{O}^d$, de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{div} \mathbf{B}(x, \xi) = 0 \\ \text{rot} \mathbf{H}(x, \xi) = 0 \end{cases} \quad (1.92)$$

avec la loi de comportement :

$$\mathbf{B}(x, \boldsymbol{\xi}) = \mu_0 \cdot \mathbf{H}(x, \boldsymbol{\xi}) \quad (1.93)$$

Les conditions aux limites sont imposées par :

$$\begin{cases} \mathbf{H}(x, \boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{n}(x, \boldsymbol{\xi}) = 0 \text{ sur la partie } \Gamma_H(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathbf{B}(x, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}(x, \boldsymbol{\xi}) = 0 \text{ sur le reste de la frontière } \Gamma_B(\boldsymbol{\xi}) \end{cases} \quad (1.94)$$

On suppose aussi que la surface $\Gamma_H(\boldsymbol{\xi})$ est divisée en deux surfaces distinctes $\Gamma_{H1}(\boldsymbol{\xi})$ et $\Gamma_{H2}(\boldsymbol{\xi})$ où une force magnétomotrice γ_0 est imposée.

En pratique, un domaine D peut avoir des interfaces et une frontière aléatoires en même temps.

1.4.1.2. Problème aux interfaces aléatoires

Dans ce cas, le domaine D se compose de plusieurs sous-domaines $D_i(\boldsymbol{\xi})$. La perméabilité dans chaque sous domaine est supposée homogène. Les incertitudes sont portées par les interfaces $\Gamma_k(\boldsymbol{\xi})$ entre les sous-domaines $D_i(\boldsymbol{\xi})$ et $D_j(\boldsymbol{\xi})$ (interfaces entre matériaux différents).

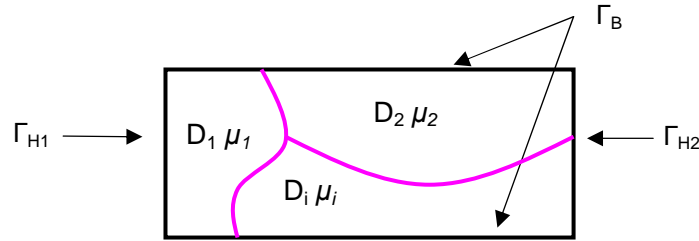


Figure 7. Problème aux incertitudes portées par les interfaces entre les sous-domaines

La perméabilité est représentée par :

$$\mu(x, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n_D} \mu_i \cdot I_{D_i}(x, \boldsymbol{\xi}) \quad (1.95)$$

avec $I_{D_i}(x, \boldsymbol{\xi})$ la fonction indicatrice définie par :

$$I_{D_i}(x, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D_i(\boldsymbol{\xi}) \\ 0 & \text{si } x \notin D_i(\boldsymbol{\xi}) \end{cases} \quad (1.96)$$

et n_D le nombre de sous domaines du domaine D . Le problème à résoudre dans le domaine D avec des interfaces aléatoires, pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{O}^d$, s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{div} \mathbf{B}(x, \boldsymbol{\xi}) = 0 \\ \text{rot} \mathbf{H}(x, \boldsymbol{\xi}) = 0 \end{cases} \quad (1.97)$$

avec la loi de comportement :

$$\mathbf{B}(x, \boldsymbol{\xi}) = \mu(x, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{H}(x, \boldsymbol{\xi}) \quad (1.98)$$

Les conditions aux limites sont imposées par :

$$\begin{cases} \mathbf{H}(x, \boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{n}(x) = 0 & \text{sur une partie } \Gamma_H \\ \mathbf{B}(x, \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}(x) = 0 & \text{sur le reste de la frontière } \Gamma_B \end{cases} \quad (1.99)$$

On suppose aussi que la surface Γ_H est divisée en deux surfaces distinctes Γ_{H1} et Γ_{H2} où une force magnétomotrice γ_0 est imposée.

1.4.1.3. Discussion sur le problème des incertitudes portées par la géométrie

Dans le cas de la méthode des éléments finis utilisée dans le cas déterministe [10], un maillage conforme est utilisé. Rappelons qu'un maillage est conforme si les interfaces entre les sous-domaines et la frontière du domaine sont entièrement représentées par des facettes (arêtes dans le cas 2D) des éléments du maillage. Cela permet de faciliter l'imposition des conditions aux limites au niveau de la frontière et d'assurer la discontinuité de certains champs au niveau des interfaces des matériaux (la composante normale de \mathbf{H} et la composante tangentielle de \mathbf{B} par exemple, voir exemple ci-dessous). Un maillage non conforme au niveau de la frontière prend difficilement en compte les conditions aux limites. Un maillage non conforme au niveau des interfaces des matériaux avec une discrétisation classique (voir la partie 1.2.1.4) ne peut pas assurer certaines discontinuités ce qui dégrade les résultats numériques [9]. A titre d'exemple, on présente dans la Figure 8 un domaine D découpé en 2 sous domaines D_1 et D_2 séparés par une interface aléatoire définie par la variable $\boldsymbol{\xi}$. Avec une discrétisation classique en 2D, le potentiel scalaire dans l'élément triangulaire i prend la forme suivante (voir la partie 1.2.2.2) :

$$\Omega(x) = \sum_{k=1}^3 \Omega_{ik} w_{0ik}(x) \quad (1.100)$$

On obtient alors le champ magnétique dans l'élément i :

$$\mathbf{H} = -\mathbf{grad} \Omega(x) = -\sum_{k=1}^3 \Omega_{ik} \mathbf{grad} w_{0ik}(x) \quad (1.101)$$

On peut constater que le champ \mathbf{H} obtenu par (1.101) est continu dans l'élément i . Or, si le maillage n'est pas conforme, l'interface aléatoire peut couper un élément en deux et dans ce cas l'approximation de \mathbf{H} ne peut être discontinue sur cet élément dégradant fortement la qualité de la solution.

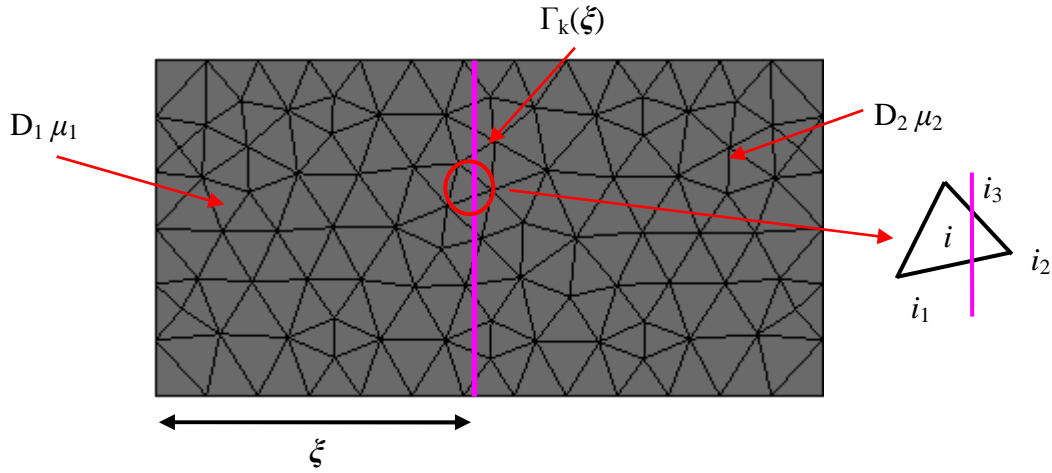


Figure 8. Maillage non conforme au niveau des interfaces

Si on utilise un maillage conforme, alors celui-ci devient aléatoire. Une représentation du potentiel scalaire sous la forme (1.58) n'est plus valable parce que w_{0i} dépend non seulement de x mais aussi de ξ . Il existe un couplage entre les dimensions aléatoires et les dimensions spatiales qui n'existe pas lorsque les incertitudes sont portées par la loi de comportement. L'approximation sous une forme explicite d'un champ aléatoire n'est pas évidente et les méthodes intrusives présentées dans la partie 1.3.2 ne peuvent pas être directement applicables.

Pour caractériser la grandeur $G(\xi)$ quelconque, une possibilité consiste à utiliser l'approche non intrusive (voir la partie 1.3.1) qui réalise plusieurs calculs déterministes de $G(\xi^k)$ sur le maillage $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}(\xi^k)$ conforme à la réalisation de la géométrie avec $\xi = \xi^k$. Par contre, le fait de devoir reconstruire le maillage pour chaque nouvelle géométrie rend le problème numériquement très lourd. De plus, une modification de maillage, sans prendre de précaution particulière, peut introduire du bruit numérique (dû principalement à la modification de la connectivité entre les nœuds), comme cela a été clairement montré par I. Tsukerman dans le cas déterministe de la prise en compte du mouvement [28]. Enfin, dans le cas où $G(\xi)$ est une grandeur locale, elle peut être éventuellement discontinue au niveau stochastique. Comme on va le voir dans l'exemple qui suit, cette discontinuité dégrade [34] l'approximation par un chaos polynomial qui est continue et infiniment dérivable.

Exemple 2:

On s'intéresse à un problème de magnétostatique de dimension 1 défini sur la Figure 9. On impose une force magnétomotrice $\gamma_0=1$ entre les deux faces opposées du domaine D . Le domaine D est divisé en deux sous domaines D_1 et D_2 de perméabilités μ_1 et μ_2 .

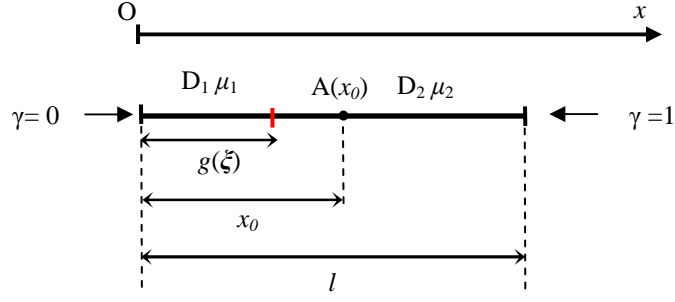


Figure 9. Problème de magnétostatique dans le domaine $D(\xi)$.

La position de l'interface entre deux sous domaines est aléatoire (Figure 9). On suppose que l'interface aléatoire peut être modélisée par :

$$x = g(\xi) = 0.5l + 0.1 \cdot l \cdot \xi \quad (1.102)$$

avec ξ une variable aléatoire uniforme dans l'intervalle $[-1 ; 1]$. Alors $g(\xi)$ est une variable aléatoire uniforme définie dans $[0.4.l ; 0.6.l]$. On s'intéresse au point A dont la position x_0 est telle que $0.4.l < x_0 < 0.6.l$. Le champ magnétique au point A est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_A(x_0, \xi) &= \frac{\gamma_0 \mu_1}{\mu_2 g(\xi) + \mu_1 (l - g(\xi))} & \text{avec } g(\xi) < x_0 \\ \mathbf{H}_A(x_0, \xi) &= \frac{\gamma_0 \mu_2}{\mu_2 g(\xi) + \mu_1 (l - g(\xi))} & \text{avec } g(\xi) > x_0 \end{aligned} \quad (1.103)$$

Lorsque les perméabilités μ_1 et μ_2 sont différentes, le champ magnétique au point A est discontinu au point ξ où $g(\xi) = x_0$ comme cela est présenté Figure 10. Ce point de discontinuité correspond au cas où le point A se situe sur l'interface entre D_1 et D_2 . On constate que la discontinuité du champ magnétique au niveau de l'interface aléatoire entraîne une discontinuité selon la dimension aléatoire. Si on s'intéresse à l'approximation de $\mathbf{H}_A(x_0, \xi)$ sous la forme d'une décomposition en chaos polynomial :

$$\mathbf{H}_A(x_0, \xi) \approx \mathbf{H}_A^P(x_0, \xi) = \sum_{i=1}^P \alpha_i \Psi_i(\xi) \quad (1.104)$$

avec les coefficients α_i déterminés (voir la partie 1.3.1.3) par :

$$\alpha_i = E[\mathbf{H}_A(x_0, \xi) \cdot \Psi_i(\xi)] \quad (1.105)$$

Les évolutions de $\mathbf{H}_A(x_0, \xi)$ et $\mathbf{H}_A^P(x_0, \xi)$ en fonction de la position de l'interface $g(\xi)$ sont présentées Figure 10. On peut constater que l'approximation (1.104) n'est pas pertinente du fait que $\mathbf{H}_A(x_0, \xi)$ est discontinu selon $g(\xi)$ donc ξ .

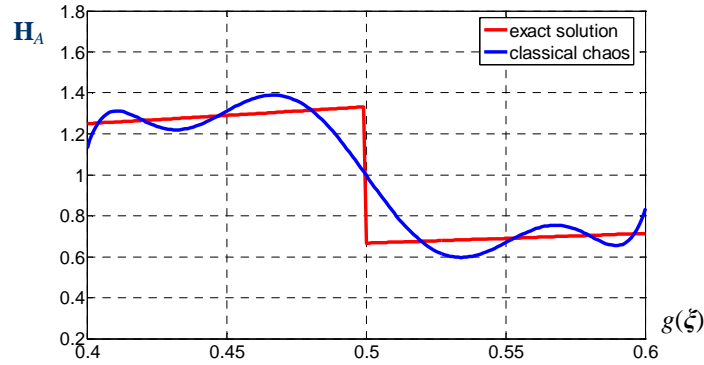


Figure 10. Champ magnétique au point A avec $l=1$, $\mu_1=2$, $\mu_2=1$, $P_1=8$ et $x_0=1/2$

Nous avons déduit dans ce qui précède les différences entre un problème où les incertitudes sont portées par la loi de comportement et un problème où les incertitudes sont portées par la géométrie. Dans la suite, nous allons présenter trois méthodes pour résoudre ce dernier problème. La méthode des domaines fictifs pour résoudre un problème de frontière aléatoire a été proposée dans [17]. La deuxième méthode appelée « méthode des éléments finis étendu stochastique » pour résoudre un problème aux interfaces aléatoires a été proposée dans [9]. Ces deux premières méthodes ont été proposées dans le domaine de la mécanique. La dernière méthode s'appelle « méthode de transformation » pour résoudre un problème de frontière aléatoire [8] proposée dans le domaine de mathématiques appliquées. On va les transposer au cas de la magnétostatique et on montrera que la méthode de transformation est applicable dans le cas où le domaine D possède des interfaces aléatoires et une frontière aléatoire en même temps.

1.4.2 Propagation des incertitudes portées par la géométrie

1.4.2.1. Méthode du domaine fictif

Dans [17] une méthode a été proposée pour traiter un problème avec une frontière aléatoire. L'idée principale de cette méthode consiste à introduire un domaine fictif \hat{D} déterministe qui contient toutes les réalisations du domaine réel aléatoire $D(\xi)$. Le problème initial se ramène alors à un nouveau problème défini dans ce domaine fictif \hat{D} . Dans certains cas, on peut considérer la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles comme le point stationnaire d'un problème d'optimisation. Le nouveau problème défini dans le domaine fictif peut alors être considéré comme un problème d'optimisation avec contraintes pour imposer les conditions aux limites sur la frontière aléatoire du domaine $D(\xi)$. Les multiplicateurs de Lagrange peuvent être utilisés pour imposer ces contraintes.

Dans la suite, on va présenter cette approche dans le cas non intrusif (voir la partie 1.3.1) où on ramène la résolution du problème stochastique à la résolution de plusieurs problèmes

déterministes. Un maillage unique du domaine fictif déterministe sera utilisé pour les différentes réalisations du domaine réel. Dans [17], la méthode a été appliquée dans le cas d'un problème de mécanique. On le transposera à un problème de magnétostatique défini dans la partie 1.4.1.1.

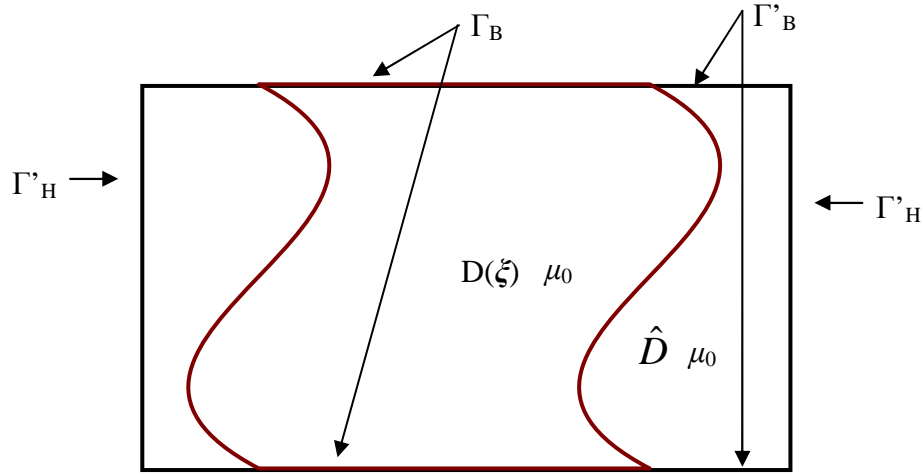


Figure 11. Domaine réel et domaine fictif

Avec l'approche non intrusive, le problème stochastique présenté dans 1.4.1.1 se ramène à des problèmes déterministes qui prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B}(x, \xi^k) = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(x, \xi^k) = 0 \end{cases} \quad (1.106)$$

avec la loi de comportement :

$$\mathbf{B}(x, \xi^k) = \mu_0 \cdot \mathbf{H}(x, \xi^k) \quad (1.107)$$

Les conditions aux limites sont imposées par :

$$\begin{cases} \mathbf{H}(x, \xi^k) \times \mathbf{n}(x, \xi^k) = 0 \text{ sur la partie } \Gamma_H(\xi^k) \\ \mathbf{B}(x, \xi^k) \cdot \mathbf{n}(x, \xi^k) = 0 \text{ sur le reste de la frontière } \Gamma_B(\xi^k) \end{cases} \quad (1.108)$$

avec ξ^k une réalisation de ξ . La surface $\Gamma_H(\xi^k)$ est divisée en deux surfaces distinctes $\Gamma_{H1}(\xi^k)$ et $\Gamma_{H2}(\xi^k)$ où une force magnétomotrice γ_0 est imposée. Dans cette section, on suppose que la partie Γ_B de la frontière est déterministe. La discussion concernant le cas où Γ_B , la frontière où l'on impose des conditions de type Neumann, est aléatoire sera faite à la fin de cette section. En utilisant la formulation en potentiel scalaire, le problème (1.106) - (1.108) se ramène à :

$$\operatorname{div}(\mu_0 \operatorname{grad} \Omega(\xi^k)) = 0 \quad (1.109)$$

avec des conditions aux limites

$$\begin{cases} \Omega(\xi^k) = 0 \text{ sur } \Gamma_{H1}(\xi^k) \\ \Omega(\xi^k) = \gamma_0 \text{ sur } \Gamma_{H2}(\xi^k) \end{cases} \quad (1.110)$$

On peut constater que le problème (1.109) - (1.110) peut être considéré comme équivalent au problème suivant:

$$\Omega = \arg \text{Min}_{u \in E_H(D(\xi^k))} \left[\int_{D(\xi^k)} \nabla u(x) \cdot \mu_0 \cdot \nabla u(x) dx \right] \quad (1.111)$$

avec:

$$E_H(D(\xi^k)) = \{u(x) / u(x) \in E_0(D), u(x) = 0 \text{ sur } \Gamma_{H1}(\xi^k), u(x) = \gamma_0 \text{ sur } \Gamma_{H2}(\xi^k)\} \quad (1.112)$$

où $E_0(D)$ est défini dans la partie 1.2.1.2.

On introduit un domaine fictif \hat{D} contenant toutes les réalisations possibles de D . La frontière du domaine \hat{D} se compose de deux parties: Γ'_B contenant Γ_B et Γ'_H (Figure 11). Au lieu de traiter le problème (1.111), on s'intéresse au problème défini dans le domaine fictif déterministe \hat{D} suivant :

$$\hat{\Omega} = \arg \text{Min}_{u \in E_H(\hat{D})} \left[\int_{\hat{D}} \nabla u(x) \cdot \mu_0 \cdot \nabla u(x) dx \right] \quad (1.113)$$

avec

$$E_H(\hat{D}) = \{u(x) / u(x) \in E_0(\hat{D}), u(x) = 0 \text{ sur } \Gamma_{H1}(\xi^k), u(x) = \gamma_0 \text{ sur } \Gamma_{H2}(\xi^k) \text{ et } u(x) = 0 \text{ sur } \Gamma'_H\}$$

On peut constater que Ω est une restriction de $\hat{\Omega}$ dans $D(\xi^k)$. Le problème d'optimisation avec contraintes (1.113) est résolu en utilisant les multiplicateurs de Lagrange :

$$\mathcal{L}(u, \eta) = \int_{\hat{D}} \nabla u(x) \cdot \mu_0 \cdot \nabla u(x) dx + \int_{\Gamma_{H1}(\xi^k)} \eta(x) \cdot u(x) \cdot ds + \int_{\Gamma_{H2}(\xi^k)} \eta(x) \cdot (u(x) - \gamma_0) \cdot ds \quad (1.114)$$

On obtient alors :

$$(\hat{\Omega}, \eta_0) = \arg \text{Min}_{(u \in E'_0(\hat{D}), \eta \in K(\Gamma_H(\xi^k)))} [\mathcal{L}(u, \eta)] \quad (1.115)$$

avec

$$E'_0(\hat{D}) = \{u(x) / u(x) \in E_0(\hat{D}) \text{ et } u(x) = 0 \text{ sur } \Gamma_{\hat{D}}\} \quad (1.116)$$

et $K(\Gamma_H(\xi^k))$ un espace de fonctions de carré intégrable, continues par morceaux de $\Gamma_H(\xi^k)$ dans R . Le système (1.115) se ramène à :

$$\begin{cases} \int_{\hat{D}} \nabla \hat{\Omega}(x) \cdot \mu_0 \cdot \nabla u(x) dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{\Gamma_H(\xi^k)} \eta_0(x) \cdot u(x) \cdot ds = 0 \\ \int_{\Gamma_H(\xi^k)} \eta(x) \cdot \hat{\Omega}(x) \cdot ds + \int_{\Gamma_H(\xi^k)} \eta(x) \cdot (\hat{\Omega}(x) - \gamma_0) \cdot ds = 0 \end{cases} \quad (1.117)$$

pour toutes les fonctions test $u \in E'_0(\hat{D})$ et $\eta \in K(\Gamma_H(\xi^k))$.

Le système (1.117) nécessite non seulement une discrétisation du champ $\hat{\Omega}(x)$ dans le domaine \hat{D} (voir la partie 1.2.1.2) mais aussi une discrétisation de $\eta_0(x)$ dans $\Gamma_H(\xi^k)$. Le maillage se compose alors de deux parties : une partie indépendante de l'aléa qui correspond au maillage du domaine \hat{D} et une partie liée à $\Gamma_H(\xi^k)$ à recalculer pour chaque valeur ξ^k .

On peut constater que dans cette méthode des domaines fictifs, on utilise un maillage non conforme au niveau de la frontière du domaine $D(\xi^k)$. Comme cela a été signalé dans la partie 1.4.1.1, l'utilisation d'un maillage conforme au niveau de la frontière a pour but de prendre en compte naturellement les conditions aux limites. Dans la méthode du domaine fictif, ces conditions aux limites sont prises en compte par la technique des multiplicateurs de Lagrange. Concernant le domaine complémentaire à $D(\xi^k)$ dans \hat{D} , on y impose une même perméabilité que $D(\xi^k)$. Alors, on ne génère pas d'interface entre les sous domaines et aucune non-conformité du maillage au niveau de l'interface ne peut apparaître. Rappelons qu'avec une discrétisation classique (voir la partie 1.2.1.2) de $\hat{\Omega}(x)$ la non-conformité au niveau des interfaces peut dégrader les résultats numériques. Dans [67], le cas où Γ_B est aléatoire et Γ_H est déterministe a été traité. Une fonction indicatrice est introduite pour prendre en compte des conditions aux limites de type Neumann. En associant la méthode présentée au dessus avec la méthode proposée dans [67], on peut prendre en compte le cas où Γ_B et aussi Γ_H sont aléatoires.

Dans le cas des incertitudes portées par des interfaces entre les sous-domaines, cette méthode ne peut pas être directement applicable. En réalité, l'utilisation d'un maillage fixe dans ce cas génère des non-conformités au niveau des interfaces. Cela nécessite des traitements supplémentaires dans la discrétisation de $\hat{\Omega}(x)$ que l'on va aborder dans la partie suivante.

1.4.2.2. Méthode des éléments finis étendus

Cette méthode a été proposée dans [9, 29, 30] pour résoudre un problème aux interfaces aléatoires entre les sous domaines. Cette méthode consiste à utiliser un maillage non conforme au niveau des interfaces aléatoires. Ce maillage est déterministe et ne dépend pas de la réalisation de la géométrie (voir la Figure 8). Comme on l'a vu dans la partie 1.4.1.3, l'utilisation du maillage non

conforme au niveau des interfaces nécessite des traitements numériques supplémentaires pour prendre en compte la discontinuité des champs aux interfaces.

On enrichit alors W_0 (voir partie 1.2.1.4) par des fonctions supplémentaires qui s'appellent fonctions d'enrichissement :

$$W_0^+ = \text{span} \{ w_{0i}(x), w_{0k}(x)\tau(x, \xi) / i = 1 : n_0, k \in I_e \} \quad (1.118)$$

avec $w_{0k}(x)\tau(x, \xi)$ des fonctions d'enrichissement et I_e l'ensemble des nœuds enrichis. La construction de la fonction $\tau(x, \xi)$ et I_e va être présentée dans la suite. Le potentiel scalaire s'écrit alors sous la forme :

$$\Omega'(x, \xi) \approx \sum_{i \in N_{0H}} \Omega'_i(\xi) w_{0i}(x) + \sum_{k \in I_e} \Omega'_k(\xi) w_{0k}(x) \tau(x, \xi) \quad (1.119)$$

La projection de Galerkin dans le domaine spatial nous permet d'obtenir le système matriciel suivant :

$$\Lambda^+(\xi) \cdot \Omega'^+(\xi) = \beta^+(\xi) \quad (1.120)$$

avec

$$\Lambda^+(\xi) = \begin{bmatrix} \Lambda(\xi) & \Lambda^{1+}(\xi) \\ (\Lambda^{1+}(\xi))^t & \Lambda^{2+}(\xi) \end{bmatrix}; \quad \beta^+(\xi) = \begin{bmatrix} \beta(\xi) \\ \beta^{1+}(\xi) \end{bmatrix}; \quad \Omega'^+(\xi) = \begin{bmatrix} \Omega'(\xi) \\ \Omega'^{1+}(\xi) \end{bmatrix} \quad (1.121)$$

Les matrices $\Lambda(\xi)$, $\Lambda^{1+}(\xi)$ et $\Lambda^{2+}(\xi)$ sont respectivement de dimensions $n'_0 \times n'_0$, $n'_0 \times n'_e$, $n'_e \times n'_e$ avec n'_0 le nombre des nœuds qui n'appartiennent pas à Γ_H et n'_e le nombre de nœuds enrichis et leurs composantes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}(\xi) &= \int_D \mathbf{grad}(w_{0i}(x)) \cdot \mu(x, \xi) \cdot \mathbf{grad}(w_{0j}(x)) \cdot dx \\ \Lambda_{ik}^{1+}(\xi) &= \int_D \mathbf{grad}(w_{0i}(x)) \cdot \mu(x, \xi) \cdot \mathbf{grad}(\tau(x, \xi) \cdot w_{0k}(x)) \cdot dx \\ \Lambda_{lk}^{2+}(\xi) &= \int_D \mathbf{grad}(\tau(x, \xi) \cdot w_{0l}(x)) \cdot \mu(x, \xi) \cdot \mathbf{grad}(\tau(x, \xi) \cdot w_{0k}(x)) \cdot dx \end{aligned} \quad (1.122)$$

Les vecteurs $\beta(\xi)$ et $\beta^{1+}(\xi)$ sont de dimensions n'_0 et n'_e respectivement de composantes :

$$\begin{aligned} \beta_j(\xi) &= -\gamma_0 \cdot \int_D \mathbf{grad}(\alpha(x)) \cdot \mu(x, \xi) \cdot \mathbf{grad}(w_{0j}(x)) \cdot dx \\ \beta_k^{1+}(\xi) &= -\gamma_0 \cdot \int_D \mathbf{grad}(\alpha(x)) \cdot \mu(x, \xi) \cdot \mathbf{grad}(w_{0k}(x)\tau(x, \xi)) \cdot dx \end{aligned} \quad (1.123)$$

Les vecteurs des inconnues $\Omega'(\xi)$ et $\Omega'^{1+}(\xi)$ sont respectivement de dimensions n'_0 et n'_e .

Pour construire les fonctions d'enrichissement, on construit d'abord la fonction $\tau(x, \xi)$. Cette fonction peut être construite grâce à la fonction de *level set* qui est définie par :

$$\phi(x, \xi) = \pm \text{dist}(x, \Gamma(\xi)) \quad (1.124)$$

qui est la distance entre le point x et l'interface aléatoire $\Gamma(\xi)$. Le signe est choisi de telle façon que la fonction *level set* soit positive dans un sous domaine et négative dans l'autre sous domaine séparé par l'interface aléatoire $\Gamma(\xi)$. On trace par exemple sur la Figure 12 la fonction *level set* dans le domaine D associé à l'interface aléatoire $\Gamma(\xi)$ donnée Figure 8 pour une valeur $\xi = \xi_0 = 0.5l$.

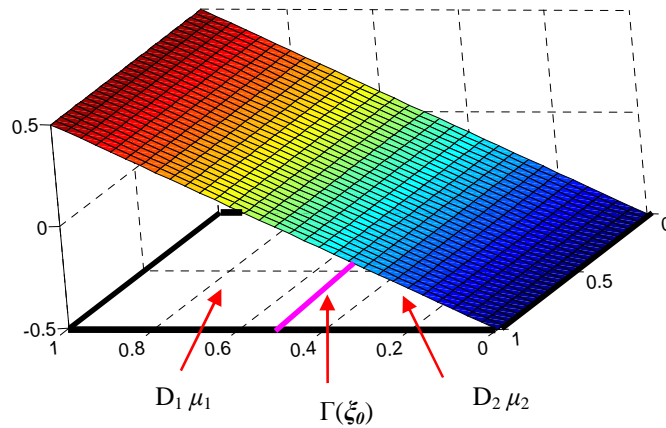


Figure 12. Fonction « level set » $\phi(x, \xi_0)$

Intuitivement, le premier choix de $\tau(x, \xi)$ peut être donné sous la forme :

$$\tau(x, \xi) = |\phi(x, \xi)| \quad (1.125)$$

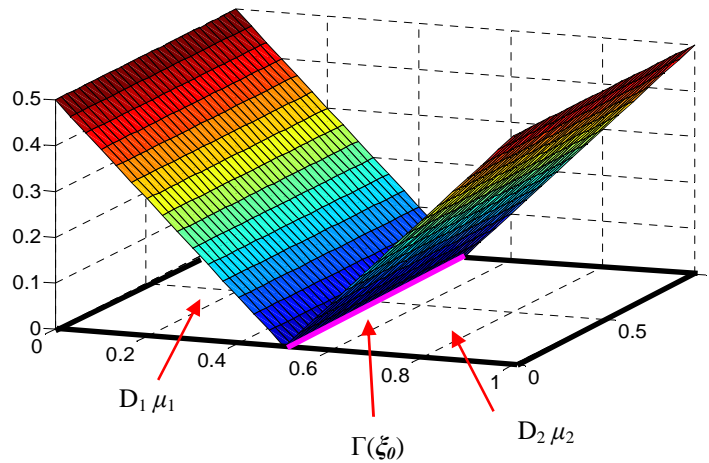


Figure 13. Fonction $\tau(x, \xi)$

On peut constater que le gradient de $\tau(x, \xi)$ de la forme (1.125) est discontinu au point x situé sur l'interface $\Gamma(\xi)$ (la fonction *level set* est égale à zéro). L'ensemble des nœuds enrichis I_e appartient aux éléments qui peuvent être potentiellement coupés par l'interface aléatoire $\Gamma(\xi)$ (voir Figure 14).

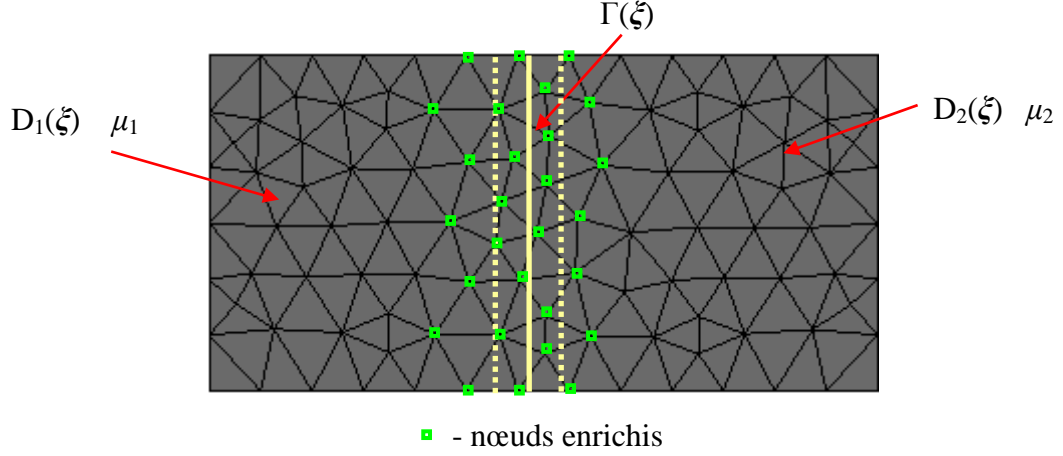


Figure 14. Nœuds enrichis

Revenons à l'élément i présenté sur la Figure 8, le champ magnétique dans cet élément pour la valeur $\xi = \xi_0$ prend la forme suivante :

$$\mathbf{H}(x, \xi_0) = \mathbf{grad} \Omega(x, \xi_0) = \sum_{k=1}^3 \Omega_{ik}(\xi_0) \mathbf{grad} w_{0ik}(x) + \sum_{k=1}^3 \Omega_{ik}^+(\xi_0) \mathbf{grad} (\tau(x, \xi_0) w_{0ik}(x)) \quad (1.126)$$

La discontinuité de champ magnétique à l'interface $\Gamma(\xi_0)$ est prise en compte par le gradient des fonctions $\tau(x, \xi_0)$.

Dans [31], il est montré que dans le cadre déterministe, avec le choix (1.125), la convergence de l'approximation éléments finis (1.119) n'est pas optimale (converge en $O(h^2)$ en norme L^2). Dans [9, 30] un autre choix de $\tau(x, \xi)$ est proposé. Ce choix conduit à une convergence optimale de l'approximation éléments finis. Cependant, ce choix donne $\Omega'_i(\xi)$ et $\Omega_k^+(\xi)$ de (1.119) peu régulière (leur dérivée au premier ordre en fonction de ξ est discontinue) ce qui peut générer des problèmes de convergence lorsque l'on souhaite approcher ces potentiels par un chaos polynomial. Aussi dans [9, 30], un troisième choix de la fonction $\tau(x, \xi)$ qui permet d'éviter les inconvénients ci-dessus a été proposé.

Pour la méthode des éléments finis étendus, les approches non intrusives ou intrusives peuvent être utilisées. Un maillage unique est nécessaire. Cependant, il nécessite des calculs numériques des intégrales des fonctions discontinues (1.122) (rappelons que $\mu(x, \xi)$ est discontinue d'après (1.95)). La technique de quadrature de Gauss classique n'est plus adaptée. Des traitements spécifiques sur ce point sont alors nécessaires [9].

1.4.2.3. Méthode de transformation

Cette méthode a été proposée dans [8] pour résoudre un problème d'équations aux dérivées partielles dans un domaine où la frontière est aléatoire. Cette méthode peut être étendue au cas des incertitudes portées par les interfaces [32, 33]. Cette méthode consiste à utiliser une transformation aléatoire inversible qui transforme le domaine aléatoire $D(\xi)$ en un domaine de

référence déterministe E. Le problème initial se ramène à un nouveau problème défini dans le domaine déterministe E avec une loi de comportement modifiée qui devient un champ aléatoire (Figure 15). On suppose qu'il existe une transformation aléatoire inversible $X = \mathbf{T}(x, \xi)$ qui transforme le domaine $D(\xi)$ en un domaine déterministe E.

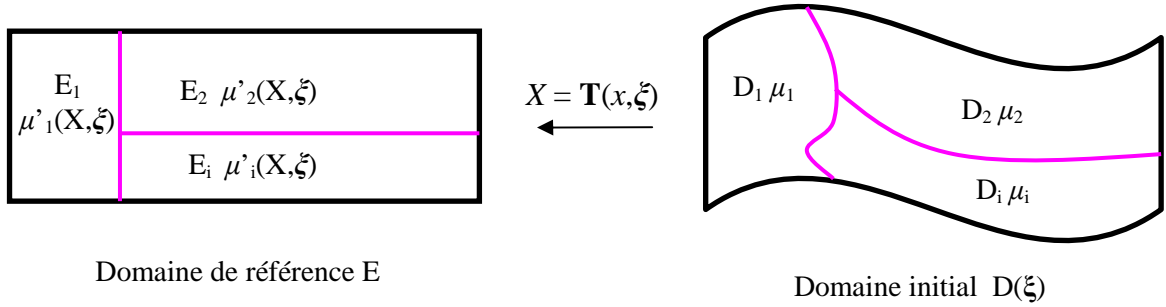


Figure 15. Transformation T

On peut écrire:

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathbf{T}_1(x_1, x_2, x_3, \xi) \\ X_2 &= \mathbf{T}_2(x_1, x_2, x_3, \xi) \\ X_3 &= \mathbf{T}_3(x_1, x_2, x_3, \xi) \end{aligned} \quad (1.127)$$

où x_i et X_i , $i=1, 2, 3$ représentent respectivement les coordonnées cartésiennes dans l'ancien (domaine D) et dans le nouveau système de coordonnées (domaine E). On suppose aussi que $\mathbf{T}_i(\cdot, \xi) \in E_0(D)$, $i=1, 2, 3$ pour tout $\xi \in \mathcal{O}^d$. On note Γ'_H et Γ'_B , deux parties de la frontière du domaine E, qui sont respectivement les images de $\Gamma_H(\xi)$ et $\Gamma_B(\xi)$ du domaine D en appliquant la transformation $X = \mathbf{T}(x, \xi)$. On définit, comme dans la partie 1.2.1.2, les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned} E_0(E) &= \{u \in L^2(E) / \mathbf{grad} u \in L^2(E)\} \\ E_H^0(E) &= \{u \in E_0(E) / u = 0 \text{ sur } \Gamma'_H\} \end{aligned} \quad (1.128)$$

La transformation (1.127) correspond à la matrice jacobienne suivante:

$$\mathbf{M}(X, \xi) = \underline{\underline{\mathbf{grad}_x \mathbf{T}(x, \xi)}} = [\mathbf{grad}_x \mathbf{T}_1(x, \xi) \quad \mathbf{grad}_x \mathbf{T}_2(x, \xi) \quad \mathbf{grad}_x \mathbf{T}_3(x, \xi)] \quad (1.129)$$

avec $\vartheta_x(u(x))$ et $\vartheta_X(u(X))$ un opérateur dans l'ancien et dans le nouveau système de repère. On suppose également que la matrice jacobienne $\mathbf{M}(X, \xi)$ possède un déterminant positif. On a alors les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned}
\int_{D(\xi)} u(x) \cdot dx &= \int_E \frac{u(X)}{\det(\mathbf{M})} \cdot dX \\
\mathbf{grad}_x u &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{grad}_X u \\
\mathbf{rot}_x v &= \mathbf{M}^{-tr} \cdot \mathbf{rot}_X v \cdot \det(\mathbf{M})
\end{aligned} \tag{1.130}$$

pour $u \in E_0(D)$ et $v \in E_1(D)$.

On rappelle la formulation faible en potentiel scalaire du problème défini dans le domaine $D(\xi)$ suivant :

Trouver $\Omega'(x, \xi) \in U_H^0(D, \mathbb{H}^d)$ tel que :

$$\begin{aligned}
&\int_{D(\xi)} \mathbf{grad}_x(\Omega'(x, \xi)) \mu(x(\xi)) \mathbf{grad}_x(\lambda(x(\xi))) dx = \\
&-\gamma_0 \int_{D(\xi)} \mathbf{grad}_x(\alpha(x, \xi)) \mu(x(\xi)) \mathbf{grad}_x(\lambda(x(\xi))) dx
\end{aligned} \tag{1.131}$$

pour tout $\lambda(x(\xi)) \in E_H^0(D(\xi))$, avec :

$$U_H^0(D, \mathbb{H}^d) = \left\{ u(x, \xi) / \forall \xi_0 \in \mathcal{O}^d, u(\cdot, \xi_0) \in E_H^0(D(\xi_0)) \text{ et } \forall x_0 \in D(\xi), u(x_0, \cdot) \in \mathbb{H}^d \right\} \tag{1.132}$$

En utilisant (1.130), on peut ramener (1.131) à une équation dans le domaine E de la forme suivante :

Trouver $\Omega'(X, \xi) \in U_H^0(E, \mathbb{H}^d)$ tel que :

$$\begin{aligned}
&\int_E \mathbf{grad}_x(\Omega'(X, \xi)) \frac{\mathbf{M}'(X, \xi) \mu(X) \mathbf{M}(X, \xi)}{\det(\mathbf{M}(X, \xi))} \mathbf{grad}_x(\lambda(X)) dx = \\
&-\gamma_0 \int_E \mathbf{grad}_x(\alpha(X)) \frac{\mathbf{M}'(X, \xi) \mu(X) \mathbf{M}(X, \xi)}{\det(\mathbf{M}(X, \xi))} \mathbf{grad}_x(\lambda(X)) dx
\end{aligned} \tag{1.133}$$

pour tout $\lambda(X) \in E_H^0(E)$, avec :

$$U_H^0(E, \mathbb{H}^d) = \left\{ u(x, \xi) / \forall \xi_0 \in \mathcal{O}^d, u(\cdot, \xi_0) \in E_H^0(E) \text{ et } \forall x_0 \in E, u(x_0, \cdot) \in \mathbb{H}^d \right\} \tag{1.134}$$

Si on pose :

$$\mu'(X, \xi) = \frac{\mathbf{M}'(X, \xi) \mu(X) \mathbf{M}(X, \xi)}{\det(\mathbf{M}(X, \xi))} \tag{1.135}$$

le problème (1.133) devient alors un problème aux incertitudes portées par la loi de comportement défini dans un domaine déterministe E . Si on note \mathbf{B}' et \mathbf{H}' l'induction et le champ magnétique du problème défini dans le domaine E avec la perméabilité (1.135), en utilisant (1.130), on obtient l'induction et le champ magnétique dans le domaine $D(\xi)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{M}^{-tr} \cdot \mathbf{B}' \cdot \det(\mathbf{M}) \\
\mathbf{H} &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}'
\end{aligned} \tag{1.136}$$

Pour résoudre le problème (1.133), les méthodes non intrusives et intrusives définies dans la partie 1.3.1 et 1.3.2 peuvent être utilisées. Dans la méthode de transformation, la difficulté principale réside en la détermination de la transformation aléatoire (1.127).

1.5. Conclusion

On a présenté dans ce chapitre les méthodes dites « probabilistes » qui permettent de prendre en compte les incertitudes dans un problème magnétostatique. Des méthodes intrusives et non intrusives sont proposées dans la littérature pour traiter le problème aux incertitudes portées par la loi de comportement. L'approche spectrale basée sur le développement en chaos polynomial est souvent utilisée. Lorsque les incertitudes sont portées par la géométrie, ces méthodes intrusives et non intrusives ne peuvent pas être directement appliquées. Une méthode basée sur l'introduction d'un domaine fictif utilisée dans le cas de frontière aléatoire et une méthode baptisée « méthode des éléments finis étendus » dans le cas des interfaces aléatoires ont été proposées. Une autre méthode mettant en œuvre une transformation aléatoire proposée initialement pour résoudre un problème aux frontières aléatoires peut être étendue sans difficulté dans le cas des interfaces aléatoires. Avec cette dernière méthode, on peut ramener le problème aux incertitudes portées par la géométrie à un problème aux incertitudes portées par la loi de comportement. Il est alors possible de mettre en œuvre les méthodes de résolution largement développées dans la littérature. La difficulté principale de la méthode de transformation réside dans la détermination de la transformation qui va être discutée au chapitre 2.

Chapitre 2 : Méthode de transformation

Dans ce chapitre, on va développer la méthode de transformation abordée dans le chapitre 1. On présentera d'abord différentes méthodes de construction d'une transformation aléatoire. Ensuite, on abordera les critères de choix de la transformation. Un estimateur d'erreur *a priori* sera proposé pour cela. Finalement, la prise en compte de la discontinuité au niveau stochastique qui apparaît dans le calcul des grandeurs locales est discutée.

2.1. Détermination de la transformation

La difficulté principale dans la méthode de transformation réside dans la détermination de la transformation aléatoire. Pour un problème où la géométrie prend une forme simple, une transformation analytique peut être mise en place. Par contre, les systèmes électromagnétiques en pratique prennent souvent une forme complexe où une transformation analytique n'est pas aisément disponible. Dans ce cas, une méthode systématique pour la détermination de la transformation est nécessaire.

Dans cette partie, on s'intéresse d'abord à un exemple de magnétostatique simple où une transformation analytique est disponible. L'objectif de cet exemple est d'illustrer l'application de la méthode de transformation pour résoudre un problème électromagnétique avec la géométrie aléatoire. Puis, deux méthodes numériques pour déterminer la transformation sont proposées. La première méthode proposée dans [8] est basée sur la résolution des équations de Laplace que nous nommerons par la suite la méthode du Laplacien. La deuxième méthode que nous avons développée [32, 33] est basée sur une transformation géométrique (méthode géométrique). Ces deux méthodes vont être illustrées et comparées sur plusieurs cas académiques. Finalement, une discussion sur la transformation « discrète » associée à une transformation continue et qui est équivalente à une déformation de maillage est proposée.

2.1.1. Illustration de la méthode de transformation.

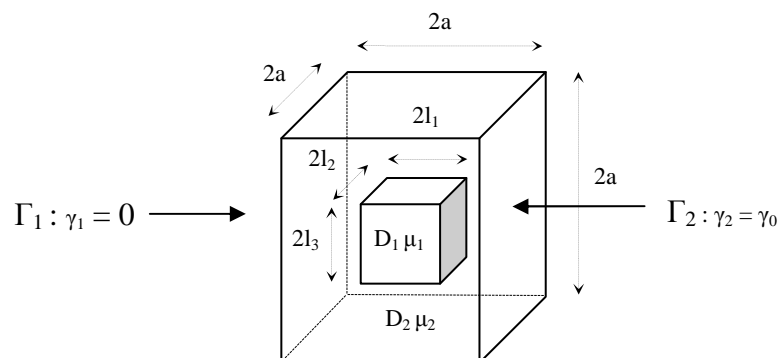


Figure 16. Exemple magnétostatique

On s'intéresse à l'exemple de magnéto-statique présenté Figure 16. Le domaine aléatoire D est un cube de dimension $2a = 4$. Ce domaine se compose d'un cube D_1 de perméabilité $\mu_1 = 10$ de dimensions aléatoires $2l_1 \times 2l_2 \times 2l_3$ et D_2 , le complément du domaine D_1 dans D , de perméabilité $\mu_2 = 1$. Les deux cubes D_1 et D ont le même centre. On prend pour les dimensions $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$ des variables aléatoires uniformes indépendantes dans l'intervalle $[0.5a ; 0.75a]$. On peut constater que le vecteur aléatoire \mathbf{l} peut être exprimé en fonction d'un vecteur des variables aléatoires uniformes indépendantes $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ définies dans $[-1 ; 1]$:

$$\mathbf{l} = 0.125a \cdot \boldsymbol{\xi} + 0.625a \quad (2.1)$$

Une force magnétomotrice $\gamma_0 = 4$ est imposée entre les deux faces opposées Γ_1 et Γ_2 . Sur le reste de la frontière du domaine D la condition $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ est imposée avec \mathbf{n} le vecteur normal à la frontière. L'énergie du système qui devient une grandeur aléatoire en raison des incertitudes sur les dimensions \mathbf{l} du cube D_1 est la grandeur d'intérêt pour cette étude académique.

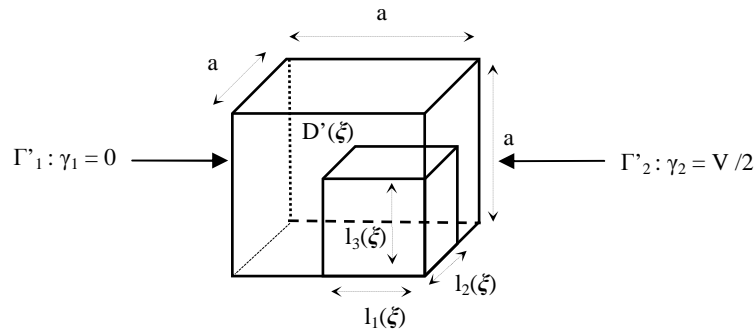


Figure 17. Problème à étudier sur le domaine D'

En raison de la symétrie du système défini Figure 16, le domaine D peut être coupé en 8 sous-domaines $D'(\boldsymbol{\xi})$ identiques. On considère l'énergie $W(\boldsymbol{\xi})$ du problème défini sur le domaine $D'(\boldsymbol{\xi})$ (Figure 17). Dans cet exemple, on va appliquer la méthode de transformation pour calculer l'espérance et l'écart-type de $W(\boldsymbol{\xi})$. Concernant la méthode de transformation, on va ramener le problème défini sur $D'(\boldsymbol{\xi})$ (problème initial) à un problème défini sur un domaine de référence E (problème de référence) en utilisant la transformation présentée Figure 18:

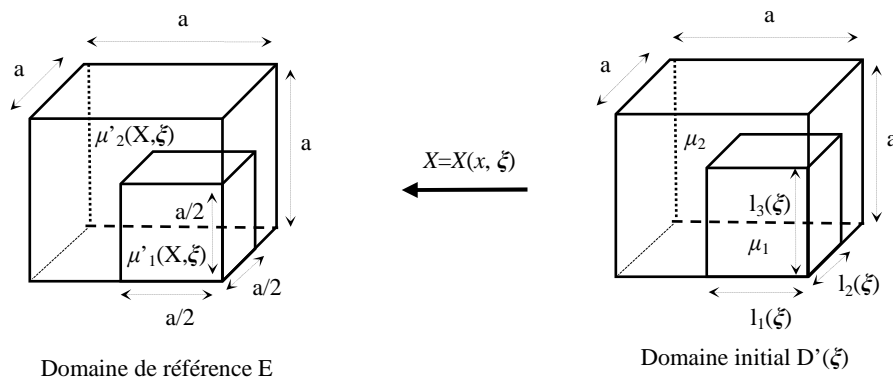


Figure 18. Transformation aléatoire

Le domaine de référence E est formé de deux cubes imbriqués de dimensions fixes mais de perméabilités aléatoires.

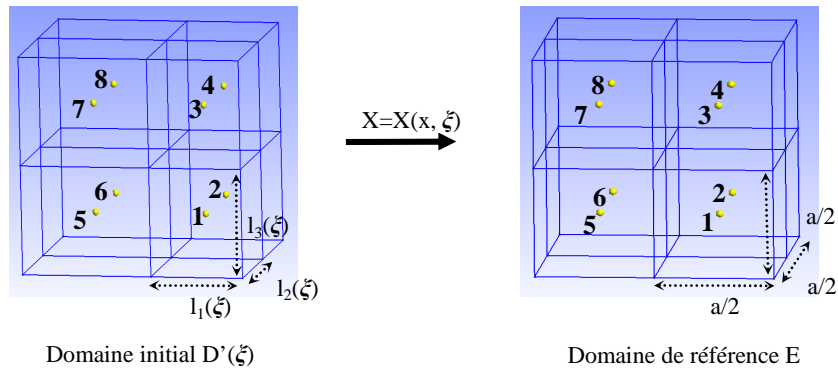


Figure 19. Subdivision du domaine D' et E

On divise le domaine E et $D'(\xi)$ en 8 sous-domaines E_i et $D'_i(\xi)$, $i=1:8$ (Figure 19). La transformation de $D'(\xi)$ en E est déterminée grâce à des transformations linéaires (dilatation) de $D'_i(\xi)$ en E_i . Une illustration est donnée Figure 20.

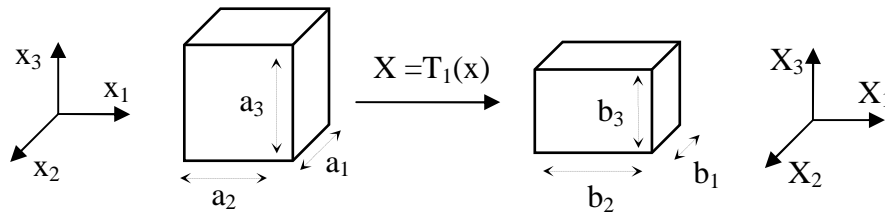


Figure 20. La dilatation linéaire

Le changement de variable $X = T_1(x)$ qui transforme le cube de dimension $a_1 \times a_2 \times a_3$ en un cube de dimension $b_1 \times b_2 \times b_3$ peut être défini par la relation matricielle donnée par (2.2).

$$X = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_2}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_3}{a_3} \end{bmatrix} x + C \quad (2.2)$$

où C représente un vecteur de translation indépendant de x qui disparaît dans le calcul de la matrice jacobienne M . Cette matrice est nécessaire à la détermination des perméabilités sur le domaine de référence E (1.135):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_2}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_3}{a_3} \end{bmatrix}$$

En appliquant des transformations de la forme (2.2), dans notre cas, on obtient des matrices jacobiennes uniformes pour chaque transformation de $D'_i(\xi)$ en E_i . La matrice jacobienne de la transformation du $D'_4(\xi)$ en E_4 (Figure 19), à titre d'exemple, est donnée par :

$$\mathbf{M}_4(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{a}{2 \cdot l_1(\xi)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2 \cdot (a - l_2(\xi))} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{2 \cdot (a - l_3(\xi))} \end{bmatrix}$$

La perméabilité équivalente du sous-domaine E_4 prend alors la forme suivante :

$$\mu'_{E_4}(\xi) = \frac{\mathbf{M}'_4(\xi) \mu_2 \mathbf{M}_4(\xi)}{\det(\mathbf{M}_4(\xi))} = \mu_2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{2(a - l_2(\xi))(a - l_3(\xi))}{a \cdot l_1(\xi)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2l_1(\xi)(a - l_3(\xi))}{a \cdot (a - l_2(\xi))} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2l_1(\xi)(a - l_2(\xi))}{a \cdot (a - l_3(\xi))} \end{bmatrix}$$

On utilise la même méthode pour déterminer la perméabilité sur les autres sous-domaines de E . Les incertitudes dans le cas du problème défini sur le domaine de référence E sont portées par les lois de comportement et non plus par les dimensions qui sont ici déterministes. Concernant le problème défini sur E , l'énergie magnétique peut être approchée par la méthode de projection non intrusive (voir partie 1.3). Elle est approchée sous la forme suivante :

$$W(\xi) \approx \sum_{i=1}^P \alpha_i \Psi_i(\xi) \quad (2.3)$$

avec $\Psi_i(\xi)$ le chaos polynomial de Legendre et α_i des coefficients déterminés par:

$$\alpha_i = E[W(\xi) \cdot \Psi_i(\xi)] \quad (2.4)$$

On a vu dans (1.72) que le calcul numérique de l'intégral (2.4) nécessite n évaluations de $W(\xi^k)$, $k=1:n$, correspondant à la réalisation de la variable $\xi = \xi^k$. Pour évaluer $W(\xi^k)$, on détermine d'abord la matrice jacobienne de la transformation pour chaque $\xi = \xi^k$. Puis, la perméabilité $\mu'(X, \xi^k)$ du domaine E est calculée en utilisant (1.135). Ensuite, on résout le problème défini sur le

domaine E avec la perméabilité $\mu'(X, \xi^k)$ pour obtenir l'énergie $W(\xi^k)$. Un maillage unique du domaine E est utilisé pour tous les calculs de $W(\xi^k)$.

Pour analyser les résultats obtenus par la méthode de transformation, nous avons développé une autre méthode, basée sur le remaillage du domaine D. Cette méthode sera dite « de remaillage ». Dans ce cas, l'énergie $W(\xi)$ est approchée également sous la forme (2.3)-(2.4) et le calcul de l'intégrale (2.4) nécessite aussi des évaluations $W(\xi^k)$. Par contre, $W(\xi^k)$ est évaluée en résolvant le problème initial défini dans le domaine $D(\xi^k)$. Pour chaque ξ^k , un maillage conforme à la géométrie $D(\xi^k)$ est utilisé. On doit effectuer alors un remaillage pour chaque réalisation ξ^k de ξ . La Figure 21 récapitule les étapes de ces deux méthodes.

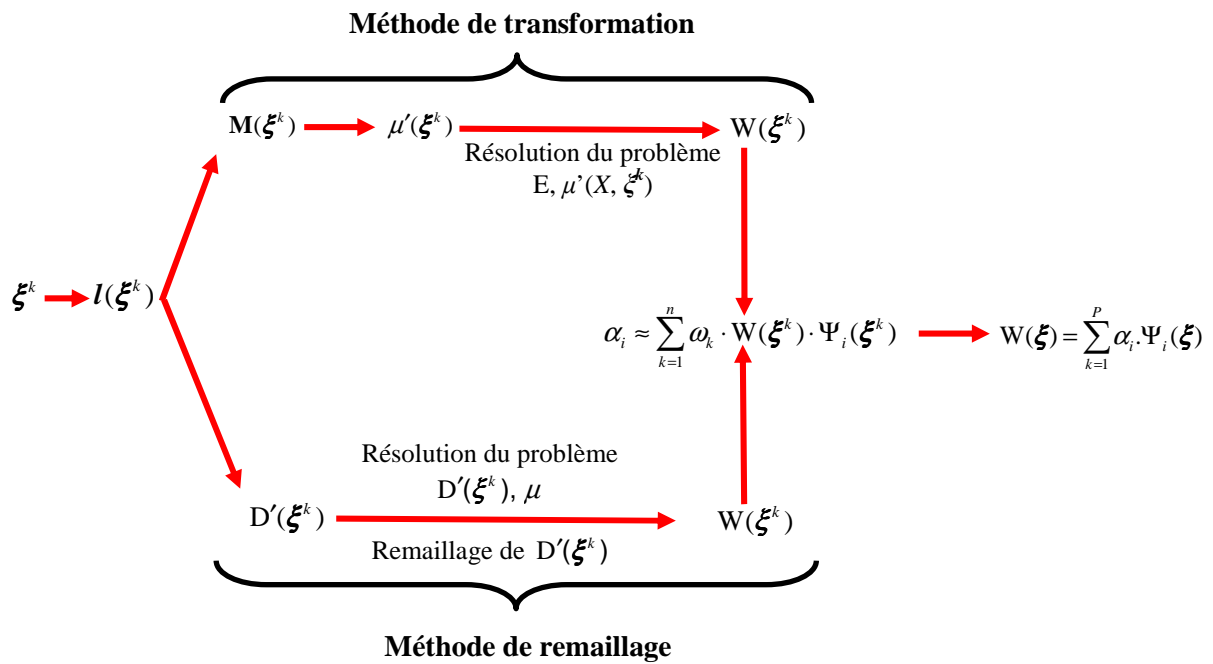


Figure 21. Méthode de transformation et méthode de remaillage

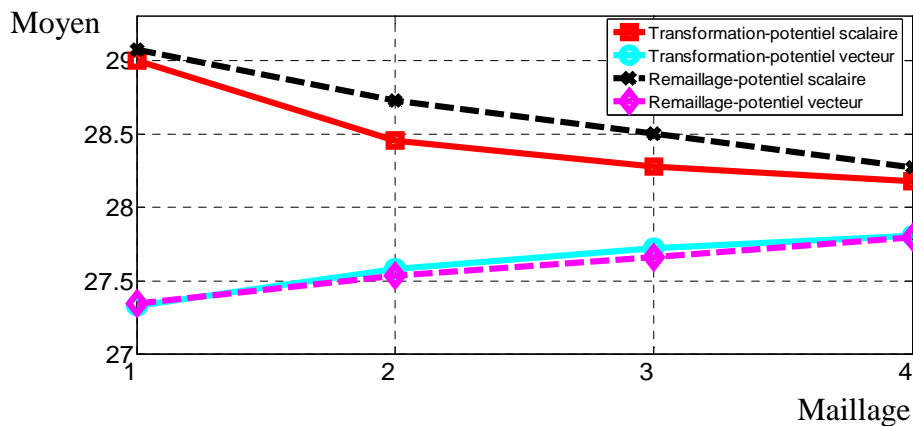


Figure 22. Valeur moyenne de l'énergie obtenue par deux méthodes pour les deux formulations

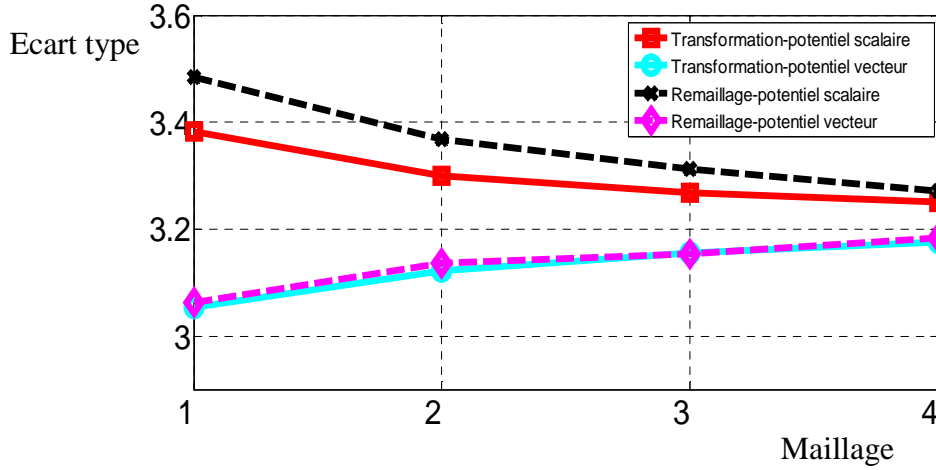


Figure 23. Ecart-type de l'énergie obtenue par deux méthodes pour les deux formulations

Sur la Figure 22 et la Figure 23, la valeur moyenne et l'écart-type de l'énergie obtenue par les deux méthodes ont été tracés en fonction de la taille du maillage utilisé. Pour chaque méthode, les deux formulations en potentiel scalaire et en potentiel vecteur ont été mises en œuvre (voir la partie 1.2.1.3). Les maillages \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 , \mathcal{M}_3 et \mathcal{M}_4 avec un nombre d'éléments de $n_{st1}=228$, $n_{st2}=1729$, $n_{st3}=2951$ et $n_{st4}=6825$ ont été utilisés pour la méthode de transformation.

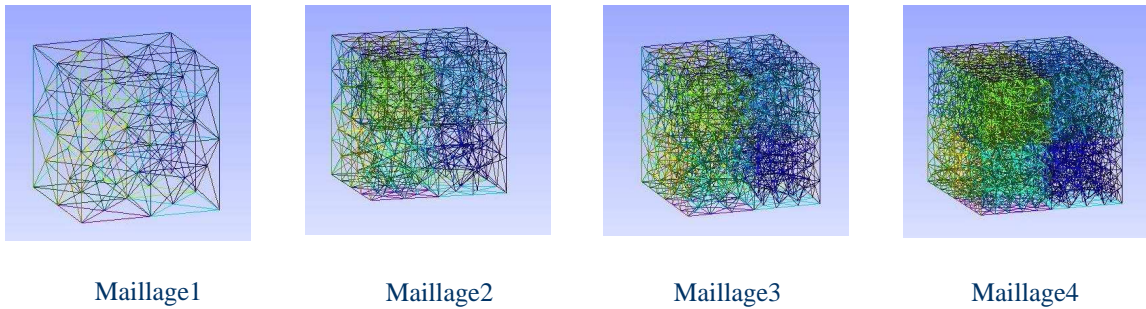


Figure 24. Maillages utilisés pour la méthode de transformation

Pour la méthode de remaillage, 4 groupes \mathcal{G}_i , $i=1:4$ de maillages ont été utilisés. On impose un nombre similaire d'éléments à celui du maillage \mathcal{M}_i pour les maillages du groupe \mathcal{G}_i , $i=1:4$.

On constate un encadrement des valeurs moyennes de l'énergie obtenues par les deux formulations en potentiel et une convergence des résultats lorsque le maillage s'affine. Ce résultat commenté dans [18] peut être expliqué de la manière suivante :

Il est connu que pour l'exemple traité [60] on a pour toutes réalisations de ξ^k :

$$W_A(\xi^k) \leq W_{ex}(\xi^k) \leq W_\Omega(\xi^k) \quad (2.5)$$

Avec respectivement W_{ex} , W_Ω , W_A l'énergie exacte, l'énergie en formulation en potentiel scalaire, l'énergie en formulation en potentiel vecteur. On montre alors aisément que :

$$E[W_A(\boldsymbol{\xi})] \leq E[W_{ex}(\boldsymbol{\xi})] \leq E[W_\Omega(\boldsymbol{\xi})] \quad (2.6)$$

L'écart entre les résultats des deux formulations représente alors une image de l'erreur numérique. Plus les deux formulations donnent des résultats proches, plus l'erreur numérique est faible. Dans l'exemple considéré, on peut constater, sur la Figure 22, que les résultats obtenus par la méthode de transformation sont légèrement meilleurs que ceux obtenus par la méthode de remaillage. On peut noter aussi que la méthode de remaillage est plus couteuse du point de vue du temps de calcul.

Le cas traité ici est très simple et permet la détermination d'une expression analytique pour la transformation ce qui, dans le cas général, n'est pas toujours possible. Une approche générale pour déterminer la transformation doit être alors proposée. Dans la suite, on va présenter deux méthodes numériques pour déterminer la transformation. La première est basée sur une transformation géométrique (méthode géométrique) [32, 33] et la deuxième est basée sur la résolution des équations de Laplace (méthode du Laplacien) [8].

2.1.2. Transformations numériques.

Dans la suite, nous allons définir le problème que nous souhaitons résoudre et les notations associées.

La transformation à déterminer lie le domaine aléatoire $D(\boldsymbol{\xi})$ et un domaine déterministe E (Figure 25).

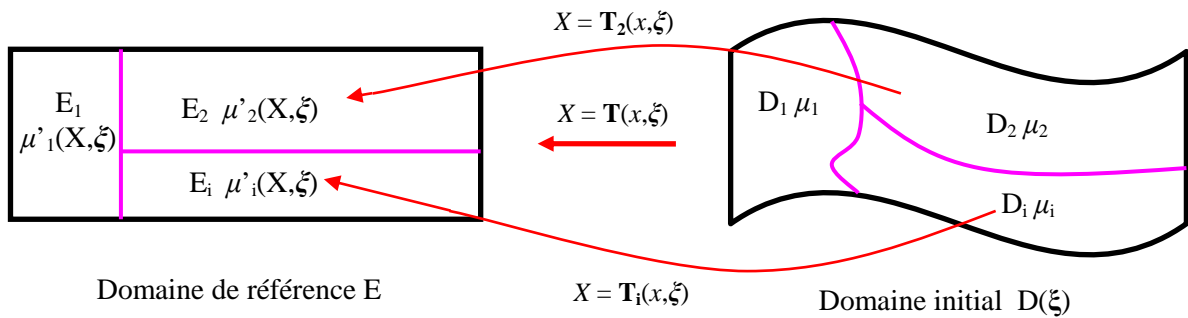


Figure 25. Transformation T

Supposons que le domaine $D(\boldsymbol{\xi})$ soit divisé en n_D sous-domaines $D_i(\boldsymbol{\xi})$ contractiles de perméabilité uniforme μ_i de frontière $\Gamma_{D_i}(c, \boldsymbol{\xi})$. Comme on a vu dans la partie 1.4.1 du chapitre 1, on admet que cette frontière puisse être représentée par une courbe paramétrée $\Gamma_{D_i}(c, \boldsymbol{\xi})$ où c représente les coordonnées curvilignes. On choisit le domaine de référence E composé de $n_E = n_D$ sous-domaines E_i aussi contractile. En pratique, on prend souvent un domaine E composé de sous-domaines E_i de frontières $\Gamma_{E_i}(c)$ de la forme suivante:

$$\Gamma_{E_i}(c) = \Gamma_{D_i}(c, E[\boldsymbol{\xi}]) \quad (2.7)$$

La frontière $\Gamma_{E_i}(c)$ est alors une réalisation de $\Gamma_{D_i}(c, \xi)$ où ξ prend la valeur moyenne $E[\xi]$. D'une façon générale, la paramétrisation de la frontière $\Gamma_{D_i}(c, \xi)$ et $\Gamma_{E_i}(c)$ permet de fixer naturellement, pour une réalisation de ξ , une bijection de $\Gamma_{E_i}(c)$ en $\Gamma_{D_i}(c, \xi)$. Elle est définie de manière suivante :

$$Q' \in \Gamma_{E_i}(c) \rightarrow c_{Q'} \rightarrow c_Q = c_{Q'} \rightarrow Q \in \Gamma_{D_i}(c, \xi) \quad (2.8)$$

où c_Q et $c_{Q'}$ sont respectivement les coordonnées curvilignes des points Q et Q' appartenant à $\Gamma_{D_i}(c, \xi)$ et $\Gamma_{E_i}(c)$.

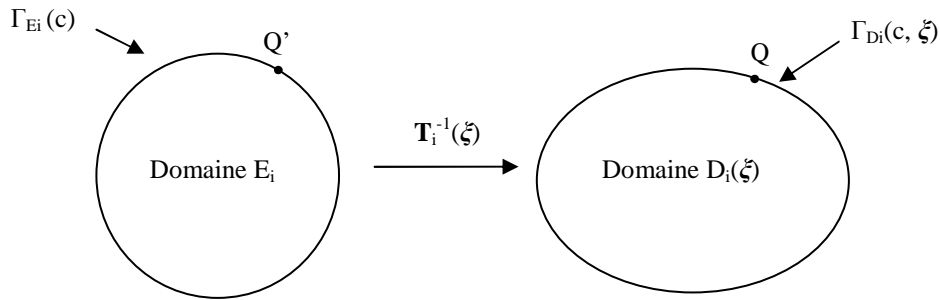


Figure 26. Transformation stochastique du sous domaine E_i

En pratique, il est plus simple de déterminer la transformation $\mathbf{T}^{-1}(\xi)$ du domaine E en $D(\xi)$ car le domaine de définition E est déterministe. La matrice jacobienne de la transformation $\mathbf{T}(\xi)$ est déterminée simplement en inversant celle de $\mathbf{T}^{-1}(\xi)$.

Pour déterminer la transformation $\mathbf{T}^{-1}(\xi)$ du domaine E en $D(\xi)$, il suffit de connaître les transformations $\mathbf{T}_i^{-1}(\xi)$ sur chaque sous domaine E_i . Une contrainte imposée pour $\mathbf{T}_i^{-1}(\xi)$ est que pour les 2 sous-domaines E_i et E_j possédant une partie commune de la frontière $\Gamma_k = \Gamma_{E_i} \cap \Gamma_{E_j}$, les 2 transformations $\mathbf{T}_i^{-1}(\xi)$ et $\mathbf{T}_j^{-1}(\xi)$ doivent donner une même image de Γ_k . Ce qui signifie que :

$$\mathbf{T}_i^{-1}(Q \in \Gamma_k) \equiv \mathbf{T}_j^{-1}(Q \in \Gamma_k) \quad (2.9)$$

Cette contrainte a pour l'objectif d'assurer le caractère bijectif de $\mathbf{T}^{-1}(\xi)$. Une autre contrainte pour $\mathbf{T}_i^{-1}(\xi)$ est qu'elle admette une matrice jacobienne continue au niveau spatial pour chaque réalisation de ξ . Cette contrainte a pour l'objectif d'obtenir une perméabilité $\mu'_i(X, \xi)$ du sous-domaine E_i continue pour chaque réalisation de ξ . En réalité, l'intérêt de la méthode de transformation réside dans le fait qu'il ne nécessite qu'un maillage fixé et déterministe. Cependant, il est possible que les zones de discontinuité de la perméabilité équivalente ne soient pas conformes avec les éléments du maillage (une zone de discontinuité traverse un élément) ce qui dégrade les résultats numériques (voir la partie 1.4.1.3). Pour éviter cette situation, nous supposons que la matrice jacobienne est continue dans chaque sous domaine.

Lorsque les matrices jacobienes $\mathbf{M}_i^{-1}(X, \xi)$ de $\mathbf{T}_i^{-1}(\xi)$ sont définies, la matrice jacobienne de la transformation $\mathbf{T}^{-1}(\xi)$ est déterminée par :

$$\mathbf{M}^{-1}(X, \xi) = \sum_{i=1}^{n_E} \mathbf{M}_i^{-1}(X, \xi) \cdot I_{E_i}(X) \quad (2.10)$$

avec $I_{E_i}(X)$ la fonction indicatrice qui est égale à 1 dans E_i et zéro ailleurs. Dans la suite, nous présentons deux méthodes pour déterminer la transformation \mathbf{T}_i^{-1} du sous domaine E_i en D_i : la méthode géométrique et la méthode du Laplacien. Pour décrire la démarche, on s'intéresse à un problème à deux dimensions. La généralisation à un problème de trois dimensions est aisée.

2.1.2.1. Méthode géométrique

a. Présentation générale

On se fixe une réalisation de ξ et donc une géométrie pour D . On peut considérer qu'une transformation du domaine E_i en un domaine D_i est équivalente à une bijection qui fait correspondre chaque point P' du domaine E_i à un point unique P du domaine D_i . En conséquence, l'objectif de la méthode de transformation géométrique est de déterminer la bijection suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^{-1} : E_i &\rightarrow D_i \\ P' &\mapsto P \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ce travail est réalisé en plusieurs étapes qui sont les suivantes:

Etape 1 :

Le domaine D_i et le domaine de référence E_i sont considérés respectivement comme un ensemble de courbes $\mathfrak{S}(D_i) = \{OQ\}$ et $\mathfrak{S}(E_i) = \{O'Q'\}$. Rappelons qu'un segment droit est un cas particulier d'une courbe. Cet ensemble est établi de telle façon que chaque point P' dans E_i et P dans D_i (sauf cas particulier, voir pour plus de détail dans l'exemple de la Figure 27) appartient à un unique segment de $\mathfrak{S}(E_i)$ et $\mathfrak{S}(D_i)$ respectivement. Cette contrainte a pour le but de satisfaire le caractère bijectif de la transformation (2.11), ce qui signifie que chaque point P' du domaine E_i est associé à un point unique P du domaine D_i et l'inverse. Ensuite, on détermine la bijection suivante :

$$\begin{aligned} t_i : \mathfrak{S}(E_i) &\rightarrow \mathfrak{S}(D_i) \\ O'Q' &\mapsto OQ \end{aligned} \quad (2.12)$$

Etape 2 :

Pour chaque point P' du domaine E , on détermine la courbe $O'Q'$ qui passe par ce point. En utilisant (2.12), on détermine la courbe $OQ = t_i(O'Q')$. Le point P l'image de P' appartient à OQ et est déterminé par :

$$\frac{\widehat{OP}}{\widehat{OQ}} = \frac{\widehat{O'P'}}{\widehat{O'Q'}} \quad (2.13)$$

où \widehat{OX} représente la longueur de l'arc OX . Dans le cas où OQ est un segment droit, cette longueur est la distance entre deux points P et O .

Exemple : Si on suppose que les domaines D_i et E_i sont étoilés, ceci signifie qu'il existe un point O dans D_i tel que pour tous les points M dans D_i le segment OM appartient à D_i (de même avec O' et M' dans E_i), on peut diviser E_i et D_i en un ensemble de segments $\{O'Q'\}$ et $\{OQ\}$ (Figure 27).

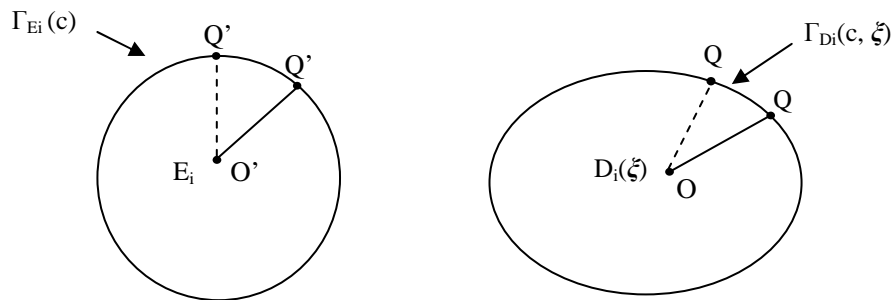


Figure 27. Division en ensemble de segments

On peut constater que si les points Q' et Q parcourent respectivement sur les frontières de Γ_{E_i} et Γ_{D_i} , (faire varier c dans Δ , voir la partie 1.4.1), l'ensemble des segments $\mathfrak{S}(D_i)=\{OQ\}$ et $\mathfrak{S}(E_i)=\{O'Q'\}$ couvrent entièrement respectivement les domaines E_i et D_i . Un point quelconque P' dans le domaine E_i (sauf le point O') appartient à un unique segment $O'Q'$. La transformation(2.11) peut donc être déterminée de la façon suivante :

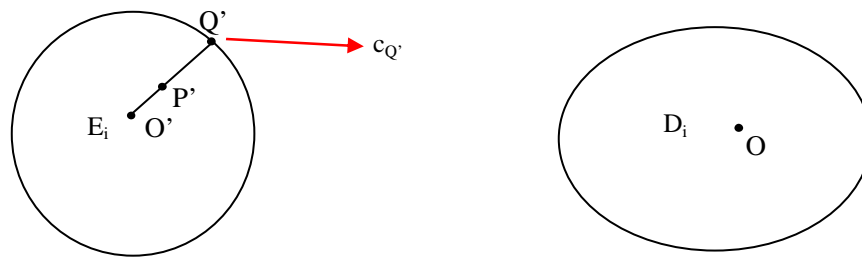


Figure 28. Coordonnée curviligne du point Q'

On détermine pour le segment $O'Q'$ la coordonnée curviligne $c_{Q'}$ de Q' (Figure 28).

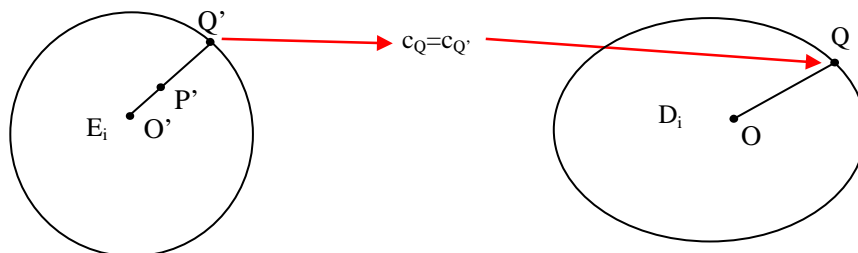


Figure 29. Détermination du segment OQ

Puis on détermine le point Q appartient à Γ_{D_i} tel que la coordonnée curviligne c_Q de Q est égale à $c_{Q'}$ (Figure 29).

La transformation P du point P' appartenant à OQ et déterminée par (Figure 30):

$$OP = \chi \cdot OQ \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{O'P'}{O'Q'} \quad (2.14)$$

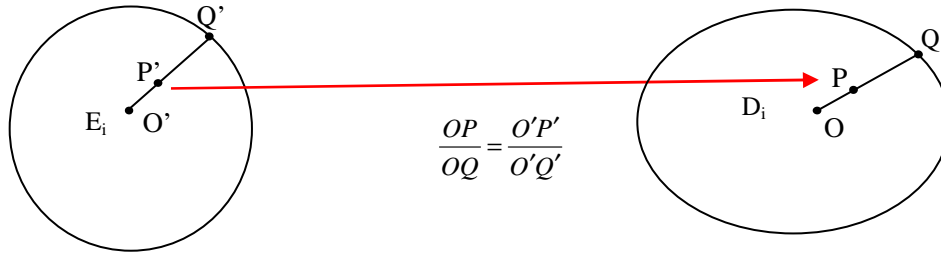


Figure 30. Détermination du point P transformé de P' dans D_i

Pour la méthode de transformation géométrique, une expression analytique de \mathbf{M}_i^{-1} n'est pas évidente à obtenir. Cependant, lorsque la transformation (2.11) est numériquement définie, la matrice jacobienne $\mathbf{M}_i^{-1}(X_1^0, X_2^0, \xi^k)$ en un point (X_1^0, X_2^0, ξ^k) peut être facilement approchée par un schéma aux différences finies. On donne par exemple le premier coefficient de la matrice $\mathbf{M}_i^{-1}(X_1^0, X_2^0, \xi^k)$:

$$\mathbf{M}_i^{-1}(1,1) = \frac{\partial \mathbf{T}_i^{-1}}{\partial X_1} \approx \frac{x_1(X_1^0 + \delta X_1^0, X_2^0, \xi^k) - x_1(X_1^0, X_2^0, \xi^k)}{\delta X_1^0} \quad (2.15)$$

où δX_1^0 est une petite variation. La partie droite de (2.15) est calculée grâce à (2.11) où x_i avec $i=1, 2$ sont les coordonnées cartésiennes de P dans le domaine réel et X_i , $i=1, 2$, sont les coordonnées cartésiennes de P' dans le domaine de référence. En conséquence, une approximation de $\mathbf{M}_i^{-1}(X_1^0, X_2^0, \xi^k)$ est facilement accessible. De plus, la résolution numérique d'un problème stochastique ne nécessite qu'un nombre fixé de valeurs de \mathbf{M} du fait que les calculs d'intégrales se ramènent à une somme des termes en un nombre fini de points (point de quadrature).

Pour illustrer la méthode de transformation, un exemple académique en magnétostatique est présenté dans la partie suivante.

b. Exemple d'illustration

On s'intéresse au problème de magnétostatique suivant :

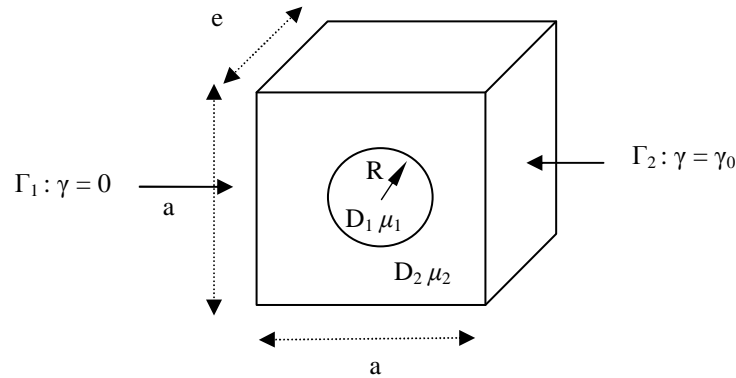


Figure 31. Problème de magnétostatique étudié

Le domaine D étudié se compose d'un domaine D_1 de forme cylindrique de rayon R de perméabilité μ_1 plongé dans un cube D_2 de perméabilité μ_2 . On impose une force magnétomotrice γ_0 aux deux faces opposées Γ_1 et Γ_2 . Sur le reste de la frontière, on impose $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$. Les incertitudes géométriques sont portées par la variable aléatoire uniforme R défini dans l'intervalle $[0.2a ; 0.4a]$ (Figure 31). Cette variable aléatoire peut être écrite sous la forme $R = 0.3a + 0.1a\xi$ avec ξ une variable aléatoire uniforme définie dans l'intervalle $[-1;1]$. Dans cet exemple, on s'intéresse à l'énergie magnétique W du système qui est une variable aléatoire dépendant de R et donc de ξ . Pour des raisons de symétrie, on va étudier seulement un quart du domaine :

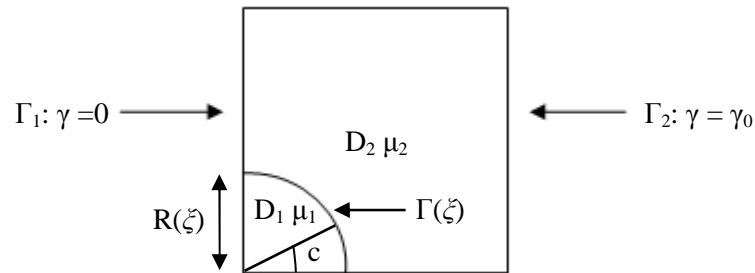


Figure 32. Un quart du domaine en 2 dimensions

Le problème présenté sur la Figure 31 peut être considéré comme un problème 2D dont un quart du domaine étudié est présenté sur la Figure 32.

Afin de faciliter la détermination de la transformation, on subdivise D en trois sous domaines D_1 , D_{21} , D_{22} présentés Figure 33. Les sous domaines D_{21} , D_{22} sont déterminés par les rayons $R(\xi)$ et $R_1 = 0.45.a$. On considère le domaine de référence E divisé aussi en 3 sous domaines E_1 , E_{21} , E_{22} avec E_{21} , E_{22} déterminés par les rayons $R_0 = E[R(\xi)] = 0.3a$ et R_1 .

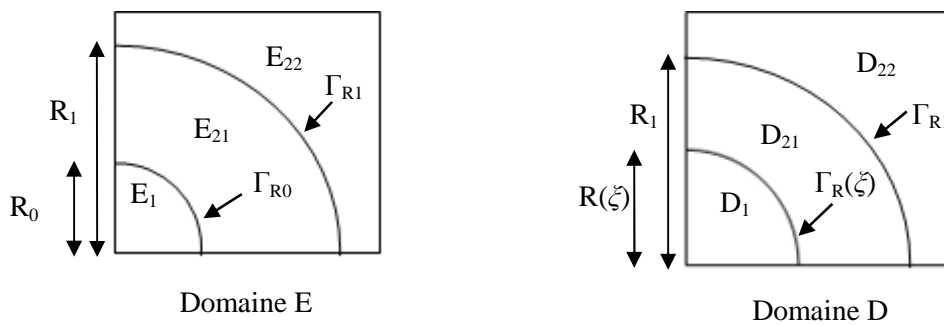


Figure 33. Subdivision de E et D en plusieurs sous-domaines

Les interfaces $\Gamma_R(\xi)$ et Γ_{R1} du domaine D peuvent être représentées sous la forme (2.16) en utilisant le paramètre c .

$$\Gamma_R(\xi) : \begin{cases} x_1 = R(\xi)\cos(c) \\ x_2 = R(\xi)\sin(c) \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\Gamma_{R_1} : \begin{cases} x_1 = R_1\cos(c) \\ x_2 = R_1\sin(c) \end{cases} \quad \text{avec } c \in \Delta = [0, \pi / 2]$$

D'une façon similaire, les interfaces Γ_{R_0} et Γ_{R_1} du domaine E peuvent être représentées sous la forme suivante:

$$\Gamma_{R_0} : \begin{cases} X_1 = R_0\cos(c) \\ X_2 = R_0\sin(c) \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\Gamma_{R_1} : \begin{cases} X_1 = R_1\cos(c) \\ X_2 = R_1\sin(c) \end{cases} \quad \text{avec } c \in \Delta = [0, \pi / 2]$$

Il s'agit donc de déterminer sur chacun des trois sous domaines une transformation.

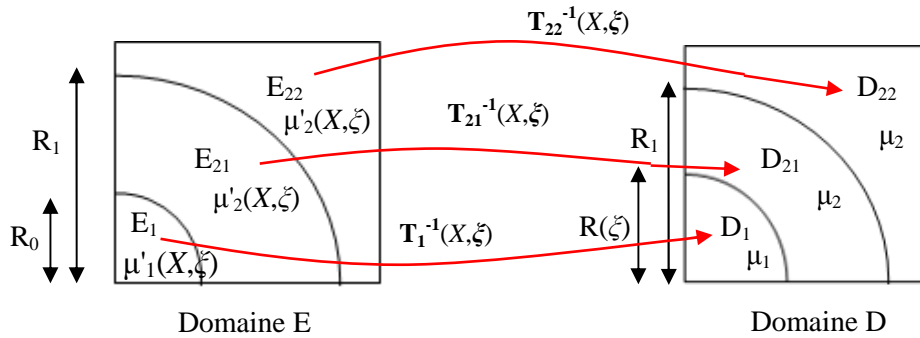


Figure 34. Transformation à déterminer

Les subdivisions des domaines E et D présentées Figure 33 permettent d'utiliser la transformation identité $T_{22}^{-1}(X, \xi) = X$ pour transformer le domaine E_{22} en D_{22} . Il nous reste maintenant à déterminer les transformations de E_1 en D_1 et de E_{21} en D_{21} qui sont décrites ci-dessous :

A partir de (2.16) et (2.17), on peut obtenir (Figure 35) :

$$\begin{cases} x_{1Q_1} = \frac{R(\xi)}{R_0} X_{1Q'_1} \\ x_{2Q_1} = \frac{R(\xi)}{R_0} X_{2Q'_1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{1Q_2} = X_{1Q'_2} \\ x_{2Q_2} = X_{2Q'_2} \end{cases} \quad (2.18)$$

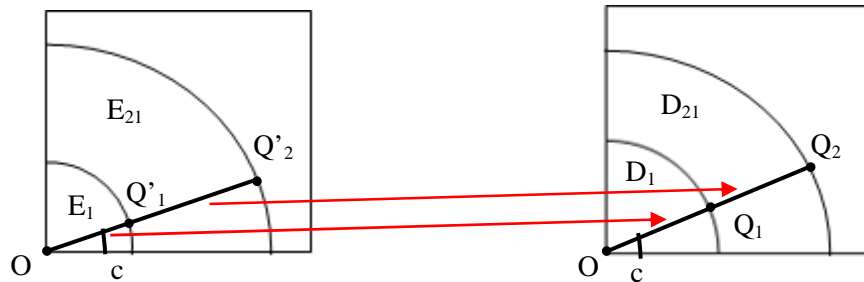


Figure 35. Transformation des segments

La première étape consiste à diviser E_1 et E_{21} en un ensemble de segments. Ce travail peut être réalisé en faisant varier c de 0° à 90° . L'ensemble des segments OQ'_1 couvre entièrement le domaine E_1 et celui des segments $Q'_1Q'_2$ couvre entièrement le domaine E_{21} . On peut constater que les ensembles définis par OQ_1 et Q_1Q_2 couvrent aussi entièrement respectivement les domaines D_1 et D_{21} . La transformation (2.12) des segments est déterminée grâce à (2.18) (Figure 35).

Pour chaque point P'_1 dans E_1 et P'_2 dans E_{21} , on détermine OQ'_1 passant par P'_1 et $Q'_1Q'_2$ passant par P'_2 . Puis, on définit OQ_1 du D_1 l'image de OQ'_1 et Q_1Q_2 du D_{21} l'image de $Q'_1Q'_2$. Les points P_1 , image de P'_1 , et P_2 , image de P'_2 , sont déterminés de la manière suivante (Figure 36) :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1^{-1} : E_1 &\rightarrow D_1 \\ P'_1 &\mapsto P_1 : \overline{OP_1} = \chi \cdot \overline{OQ_1} \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{OP'_1}{OQ'_1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2^{-1} : E_{21} &\rightarrow D_{21} \\ P'_2 &\mapsto P_2 : \overline{Q_1P_2} = \chi \cdot \overline{Q_1Q_2} \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{Q'_1P'_2}{Q'_1Q'_1} \end{aligned} \quad (2.20)$$

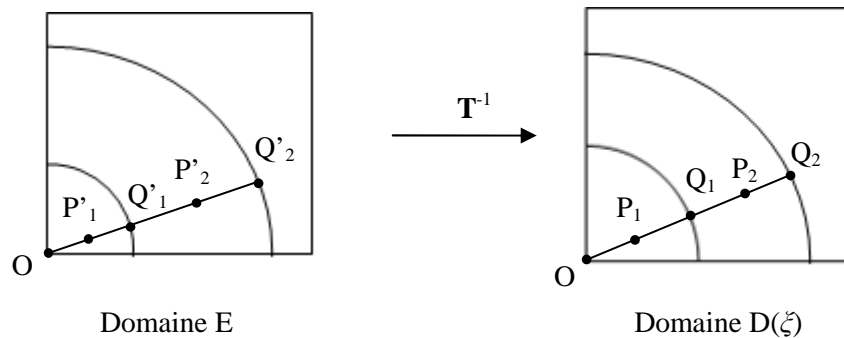


Figure 36. Transformation géométrique du domaine E_1 en D_1 et E_{21} en D_{21}

Résultats obtenus :

On effectue une application numérique avec $a=1$, la variable aléatoire uniforme R est alors définie dans l'intervalle $[0.2 ; 0.4]$. L'épaisseur vaut $e = 0.1$ et les perméabilités $\mu_1=1000$ et $\mu_2=1$. Les résultats concernant la variable aléatoire de l'énergie $W(\xi)$ obtenus par la méthode de transformation vont être comparés avec ceux obtenus par la méthode de remaillage classique. On utilise aussi un développement de $W(\xi)$ sous forme de chaos polynomial (2.3)-(2.4). Les démarches ont déjà été présentées sur la Figure 21.

Dans la méthode de transformation, on utilise un maillage de 1490 nœuds (Figure 37). Concernant la méthode de remaillage classique, le maillage change d'un point de quadrature à l'autre. Par contre, nous avons conservé un nombre de nœuds pour chaque maillage de l'ordre de 1500.

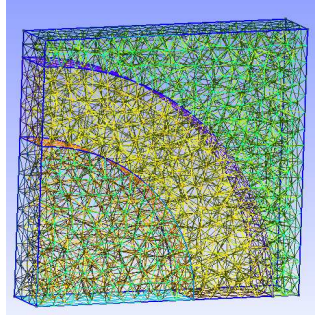


Figure 37. Maillage utilisé

La valeur moyenne et l'écart-type de la variable aléatoire $W(\xi)$ obtenus par deux méthodes sont présentés dans le Tableau 3.

Tableau 3. Méthode transformation comparée à la méthode de remaillage

Moment	Méthode transformation		Méthode de remaillage	
	Potentiel scalaire	Potentiel vecteur	Potentiel scalaire	Potentiel vecteur
Moyen	0.7650	0.7630	0.7651	0.7633
Ecart-type	0.1973	0.1967	0.1979	0.1971

On peut constater que les résultats obtenus par ces deux méthodes sont très proches sachant que la méthode de remaillage est plus couteuse du point de vue du temps de calcul.

2.1.2.2. Méthode du Laplacien

a. Présentation générale

Cette méthode a été proposée dans [8]. On cherche la transformation \mathbf{T}_i^{-1} du domaine E_i en $D_i(\xi)$ sous la forme :

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(X_1, X_2, \xi) \\ x_2 = \phi_2(X_1, X_2, \xi) \end{cases} \quad (2.21)$$

Les fonctions $\phi_1(X_1, X_2, \xi)$ et $\phi_2(X_1, X_2, \xi)$ sont déterminées en imposant que le Laplacien de $\phi_1(X_1, X_2, \xi)$ et $\phi_2(X_1, X_2, \xi)$ soit nul à l'intérieur du domaine E . C'est à dire :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi_1(X_1, X_2, \xi)}{\partial^2 X_1} + \frac{\partial^2 \phi_1(X_1, X_2, \xi)}{\partial^2 X_2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_2(X_1, X_2, \xi)}{\partial^2 X_1} + \frac{\partial^2 \phi_2(X_1, X_2, \xi)}{\partial^2 X_2} = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

On impose aussi des conditions aux limites sur la frontière Γ_{E_i} du domaine E_i de manière à satisfaire (2.8):

$$\begin{cases} x_{1Q}(c, \xi) = \phi_1(X_{1Q}(c), X_{2Q}(c), \xi) \\ x_{2Q}(c, \xi) = \phi_2(X_{1Q}(c), X_{2Q}(c), \xi) \end{cases} \quad (2.23)$$

pour tous les points Q' appartenant à la frontière Γ_{Ei} (Figure 26) et les points Q correspondant sur $\Gamma_{Di}(\xi)$. La condition (2.23) impose que la transformation \mathbf{T}_i^{-1} transforme $\Gamma_{Ei}(c)$ en $\Gamma_{Di}(c, \xi)$.

On peut constater que la résolution du problème (2.22) et (2.23) est équivalent à chercher $\phi_1(X_1, X_2, \xi)$, $\phi_2(X_1, X_2, \xi)$ parmi les fonctions qui satisfassent (2.23) telles que les termes $\int_{E_i} (\mathbf{grad} \phi_1)^2 dX$ et $\int_{E_i} (\mathbf{grad} \phi_2)^2 dX$ soient minimal. Imposer un Laplacien nul pour ϕ_1 et ϕ_2

revient donc à minimiser $(\mathbf{grad} \phi_1)^2$ et $(\mathbf{grad} \phi_2)^2$ sur le domaine et donc à limiter la variation de ϕ_1 et ϕ_2 tout en satisfaisant les conditions aux limites.

Une méthode pour résoudre numériquement (2.22) et (2.23) proposée dans [8] va être présentée dans la suite :

Découplage de dimension aléatoire et spatiale :

On cherche d'abord à découpler de la dimension spatiale et la dimension aléatoire de $\phi_1(X_1, X_2, \xi)$ et $\phi_2(X_1, X_2, \xi)$. La frontière aléatoire $\Gamma_{Di}(\xi)$ est approchée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{1Q}(c, \xi) \approx \sum_{i=0}^K x_{1Q}^i(c) \cdot A_i(\xi) \\ x_{2Q}(c, \xi) \approx \sum_{i=0}^K x_{2Q}^i(c) \cdot A_i(\xi) \end{cases} \quad \text{avec } c \in \Delta \quad (2.24)$$

avec $A_i(\xi)$ des variables aléatoires mutuellement non corrélées et $x_{1Q}^i(c)$, $x_{2Q}^i(c)$ sont des coefficients déterministes. Si le problème ne permet pas de représenter naturellement la frontière sous la forme (2.24), une approximation de (2.24) peut être obtenue par une décomposition de Karhunen Loève tronquée à l'ordre K [24]. Les fonctions $\phi_1(X_1, X_2, \xi)$ et $\phi_2(X_1, X_2, \xi)$ sont approchées sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \phi_1(X_1, X_2, \xi) \approx \sum_{i=0}^K \phi_1^i(X_1, X_2) \cdot A_i(\xi) \\ \phi_2(X_1, X_2, \xi) \approx \sum_{i=0}^K \phi_2^i(X_1, X_2) \cdot A_i(\xi) \end{cases} \quad (2.25)$$

avec $\phi_1^i(X_1, X_2)$ et $\phi_2^i(X_1, X_2)$ des fonctions déterministes à déterminer. En injectant (2.24) et (2.25) dans (2.22) - (2.23), on obtient :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^K \left(\frac{\partial^2 \phi_1^i(X_1, X_2)}{\partial^2 X_1} + \frac{\partial^2 \phi_1^i(X_1, X_2)}{\partial^2 X_2} \right) A_i(\xi) = 0 \\ \sum_{i=1}^K \left(\frac{\partial^2 \phi_2^i(X_1, X_2)}{\partial^2 X_1} + \frac{\partial^2 \phi_2^i(X_1, X_2)}{\partial^2 X_2} \right) A_i(\xi) = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^K (x_{1Q}^i(c) - \phi_1^i(X_{1Q}(c), X_{2Q}(c))) A_i(\xi) = 0 \\ \sum_{i=1}^K (x_{2Q}^i(c) - \phi_2^i(X_{1Q}(c), X_{2Q}(c))) A_i(\xi) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Les variables $A_i(\xi)$ sont mutuellement non corrélées. Alors, le système stochastique (2.26)-(2.27) peut être ramené à plusieurs systèmes déterministes à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi_1^i(X_1, X_2)}{\partial^2 X_1} + \frac{\partial^2 \phi_1^i(X_1, X_2)}{\partial^2 X_2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_2^i(X_1, X_2)}{\partial^2 X_1} + \frac{\partial^2 \phi_2^i(X_1, X_2)}{\partial^2 X_2} = 0 \end{cases} \quad \text{pour } i = 0 : K \quad (2.28)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} x_{1Q}^i(c) = \phi_1^i(X_{1Q}(c), X_{2Q}(c)) \\ x_{2Q}^i(c) = \phi_2^i(X_{1Q}(c), X_{2Q}(c)) \end{cases} \quad \text{pour } i = 0 : K \quad (2.29)$$

La résolution des systèmes (2.28)-(2.29) est présentée dans la suite.

Résolution numérique :

Le système déterministe (2.28) - (2.29) est résolu par une méthode de collocation basée sur un développement de $\phi_1^i(X_1, X_2)$ et $\phi_2^i(X_1, X_2)$ en polynômes de Tchebychev :

$$\begin{cases} \phi_1^i(X_1, X_2) \approx \sum_{k=0}^{q_1} a_{1k}^i \cdot \mathcal{T}_k(X_1, X_2) \\ \phi_2^i(X_1, X_2) \approx \sum_{k=0}^{q_2} a_{2k}^i \cdot \mathcal{T}_k(X_1, X_2) \end{cases} \quad (2.30)$$

où $\mathcal{T}_k(X_1, X_2)$ des polynômes de Tchebychev, q_1 et q_2 le nombre de polynômes de Tchebychev choisi pour la décomposition et a_{1k}^i, a_{2k}^i des coefficients à déterminer. La méthode de collocation consiste à choisir n_1 points à l'intérieur du domaine E_i où l'équation (2.28) est vérifiée et n_2 points sur la frontière Γ_{E_i} où (2.29) est vérifiée. En utilisant (2.30), les équations (2.28) - (2.29) appliquées aux $n_1 + n_2$ points de collocation conduit à $n_1 + n_2$ équations linéaires avec comme inconnues les coefficients a_{1k}^i, a_{2k}^i . On prend $n_1 + n_2 = q_1 + q_2 + 2$ pour assurer un nombre d'équations égal au nombre de coefficients à déterminer.

Dans le cas où la géométrie du système électromagnétique prend une forme complexe, la représentation de la frontière aléatoire sous la forme (2.25) n'est pas toujours évidente. Cependant, on peut constater que pour l'approche Non Intrusive, cette représentation n'est pas nécessaire. La

détermination de la transformation n'est nécessaire qu'aux n points de quadrature ξ^k , $k=1 : n$, on n'a besoin de résoudre (2.22)-(2.23) que pour chaque point de quadrature ξ^k :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi_1(X_1, X_2, \xi^k)}{\partial^2 X_1} + \frac{\partial^2 \phi_1(X_1, X_2, \xi^k)}{\partial^2 X_2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_2(X_1, X_2, \xi^k)}{\partial^2 X_1} + \frac{\partial^2 \phi_2(X_1, X_2, \xi^k)}{\partial^2 X_2} = 0 \end{cases} \quad \text{pour } k = 1 : n \quad (2.31)$$

avec des conditions aux limites sur la frontière Γ_{E_i} du E_i :

$$\begin{cases} x_{1Q}(c, \xi^k) = \phi_1(X_{1Q}(c), X_{2Q}(c), \xi^k) \\ x_{2Q}(c, \xi^k) = \phi_2(X_{1Q}(c), X_{2Q}(c), \xi^k) \end{cases} \quad \text{pour } k = 1 : n \quad (2.32)$$

La méthode de collocation basée sur un développement de $\phi_1(X_1, X_2, \xi^k)$, $\phi_2(X_1, X_2, \xi^k)$ en polynôme de Tchebychev peut être directement appliquée pour résoudre (2.31)-(2.32).

Il faut noter que récemment [68], le problème du Laplacien précédent a été résolu en utilisant une approche éléments finis. Il faut noter également que quelque soit la méthode de résolution, la méthode du Laplacien peut conduire, si on n'y prête pas attention, à une matrice jacobienne de transformation avec un déterminant négatif et donc à un problème stochastique mal posé dans le domaine de référence.

b. Exemple d'illustration

On prend le même exemple de la partie 2.1.2. On divise la frontière du domaine de référence et du domaine aléatoire réel en plusieurs parties comme cela est présenté sur la Figure 38. La transformation à déterminer est la suivante :

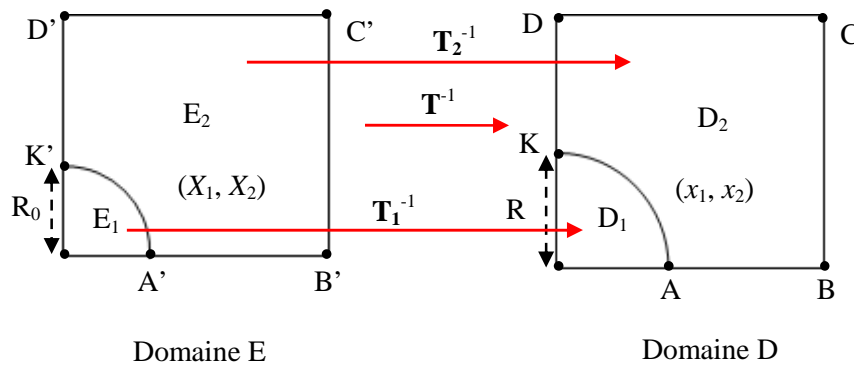


Figure 38. Transformation basée sur la résolution des équations de Laplace

On prend aussi $R_0 = \mathbb{E}[R] = 0.3a$ pour le domaine de référence E.

Découplage des dimensions aléatoire et spatiale :

Les transformations à déterminer sont alors \mathbf{T}_1^{-1} qui transforme E_1 en D_1 et \mathbf{T}_2^{-1} qui transforme E_2 en D_2 . On peut constater que la transformation du domaine E_1 en D_1 est déterminée analytiquement par :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{R(\xi)}{R_0} \cdot X_1 \\ x_2 = \frac{R(\xi)}{R_0} \cdot X_2 \end{cases} \quad (2.33)$$

Il n'est donc pas utile de mettre en œuvre la méthode précédente. Par contre, pour la transformation \mathbf{T}_2^{-1} de E_2 en D_2 , nous allons mettre en œuvre la méthode dite du Laplacien proposée au précédemment. La transformation \mathbf{T}_2^{-1} du domaine E_2 en D_2 s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(X_1, X_2, \xi) \\ x_2 = \phi_2(X_1, X_2, \xi) \end{cases} \quad (2.34)$$

Les fonctions $\phi_1(X_1, X_2, \xi)$ et $\phi_2(X_1, X_2, \xi)$ vérifient (2.22) sur tout le domaine D_2 . Pour imposer les conditions aux limites, il faut d'abord paramétrer les frontières de E_2 et de D_2 . Pour cela, chaque portion de frontière (Figure 38) $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'K'$ et $K'A'$ de E_2 et les portions correspondantes AB , BC , CD , DK et KA sur D_2 sont paramétrées. On a alors pour les portions de frontière de E_2 (en posant $R_0 = E[R(\xi)] = 0.3a$) :

$$\begin{aligned} \text{pour } A'B' : & \begin{cases} X_{1Q'} = R_0 + (a - R_0) \cdot c = 0.3a + 0.7ac \\ X_{2Q'} = 0 \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\ \text{pour } B'C' : & \begin{cases} X_{1Q'} = a \\ X_{2Q'} = a \cdot c \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\ \text{pour } C'D' : & \begin{cases} X_{1Q'} = a \cdot c \\ X_{2Q'} = a \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\ \text{pour } D'K' : & \begin{cases} X_{1Q'} = 0 \\ X_{2Q'} = R_0 + (a - R_0) \cdot c = 0.3a + 0.7ac \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\ \text{pour } K'A' : & \begin{cases} X_{1Q'} = R_0 \cos(c \frac{\pi}{2}) = 0.3a \cos(c \frac{\pi}{2}) \\ X_{2Q'} = R_0 \sin(c \frac{\pi}{2}) = 0.3a \sin(c \frac{\pi}{2}) \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Pour les portions de frontière de D_2 :

$$\begin{aligned}
\text{pour } AB : & \begin{cases} x_{1Q} = R(\xi) + (a - R(\xi)) \cdot c \\ x_{2Q} = 0 \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\
\text{pour } BC : & \begin{cases} x_{1Q} = a \\ x_{2Q} = a \cdot c \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\
\text{pour } CD : & \begin{cases} x_{1Q} = a \cdot c \\ x_{2Q} = a \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\
\text{pour } DK : & \begin{cases} x_{1Q} = 0 \\ x_{2Q} = R(\xi) + (a - R(\xi)) \cdot c \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\
\text{pour } KA : & \begin{cases} x_{1Q} = R(\xi) \cos(c \frac{\pi}{2}) \\ x_{2Q} = R(\xi) \sin(c \frac{\pi}{2}) \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1]
\end{aligned} \tag{2.36}$$

En remplaçant $R(\xi) = 0.3a + 0.1a\xi$ dans (2.36) on peut écrire (2.36) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\text{pour } AB : & \begin{cases} x_{1Q} = (0.3a + 0.7ac) + (0.1a - 0.1ac)\xi \\ x_{2Q} = 0 \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\
\text{pour } BC : & \begin{cases} x_{1Q} = a \\ x_{2Q} = a \cdot c \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\
\text{pour } CD : & \begin{cases} x_{1Q} = a \cdot c \\ x_{2Q} = a \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\
\text{pour } DK : & \begin{cases} x_{1Q} = 0 \\ x_{2Q} = (0.3a + 0.7ac) + (0.1a - 0.1ac)\xi \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\
\text{pour } KA : & \begin{cases} x_{1Q} = 0.3a \cos(c \frac{\pi}{2}) + 0.1a \cos(c \frac{\pi}{2})\xi \\ x_{2Q} = 0.3a \sin(c \frac{\pi}{2}) + 0.1a \sin(c \frac{\pi}{2})\xi \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1]
\end{aligned} \tag{2.37}$$

La représentation de la frontière de D_2 (2.37) peut être écrite sous la forme (2.24) avec les variables $A_i(\xi)$ sont les suivantes :

$$A_0(\xi) = 1 ; A_1(\xi) = \xi \tag{2.38}$$

Les fonctions $\phi_1(X_1, X_2, \xi)$ et de $\phi_2(X_1, X_2, \xi)$ sont approchées alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \phi_1(X_1, X_2, \xi) = \phi_1^0(X_1, X_2)A_0(\xi) + \phi_1^1(X_1, X_2)A_1(\xi) = \phi_1^0(X_1, X_2) + \phi_1^1(X_1, X_2)\xi \\ \phi_2(X_1, X_2, \xi) = \phi_2^0(X_1, X_2)A_0(\xi) + \phi_2^1(X_1, X_2)A_1(\xi) = \phi_2^0(X_1, X_2) + \phi_2^1(X_1, X_2)\xi \end{cases} \tag{2.39}$$

En injectant (2.39) dans (2.22) on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi_1^i(X_1, X_2)}{\partial^2 X_1} + \frac{\partial^2 \phi_1^i(X_1, X_2)}{\partial^2 X_2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_2^i(X_1, X_2)}{\partial^2 X_1} + \frac{\partial^2 \phi_2^i(X_1, X_2)}{\partial^2 X_2} = 0 \end{cases} \quad \text{pour } i = 0:1 \quad (2.40)$$

Concernant les conditions aux limites pour $\phi_1^0(X_1, X_2)$ et $\phi_2^0(X_1, X_2)$, en utilisant (2.37) on obtient :

$$\begin{aligned} \text{pour } A'B' : & \begin{cases} \phi_1^0(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = (0.3a + 0.7ac) \\ \phi_2^0(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = 0 \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\ \text{pour } B'C' : & \begin{cases} \phi_1^0(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = a \\ \phi_2^0(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = a \cdot c \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\ \text{pour } C'D' : & \begin{cases} \phi_1^0(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = a \cdot c \\ \phi_2^0(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = a \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\ \text{pour } D'K' : & \begin{cases} \phi_1^0(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = 0 \\ \phi_2^0(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = (0.3a + 0.7ac) \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\ \text{pour } K'A' : & \begin{cases} \phi_1^0(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = 0.3a \cos(c \frac{\pi}{2}) \\ \phi_2^0(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = 0.3a \sin(c \frac{\pi}{2}) \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \end{aligned} \quad (2.41)$$

Et pour $\phi_1^1(X_1, X_2)$ et $\phi_2^1(X_1, X_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{pour } A'B' : & \begin{cases} \phi_1^1(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = 0.1a - 0.1ac \\ \phi_2^1(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = 0 \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\ \text{pour } B'C' : & \begin{cases} \phi_1^1(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = 0 \\ \phi_2^1(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = 0 \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\ \text{pour } C'D' : & \begin{cases} \phi_1^1(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = 0 \\ \phi_2^1(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = 0 \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\ \text{pour } D'K' : & \begin{cases} \phi_1^1(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = 0 \\ \phi_2^1(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = (0.1a - 0.1ac) \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \\ \text{pour } K'A' : & \begin{cases} \phi_1^1(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = 0.1a \cos(c \frac{\pi}{2}) \\ \phi_2^1(X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)) = 0.1a \sin(c \frac{\pi}{2}) X_{2Q'} \end{cases} & \text{avec } c \in [0;1] \end{aligned} \quad (2.42)$$

avec $X_{1Q'}(c), X_{2Q'}(c)$ qui ont été définis par la relation (2.35). On peut constater que les fonctions $\phi_1^0(X_1, X_2)$ et $\phi_2^0(X_1, X_2)$ peuvent être déterminées aisément de manière analytique à partir de (2.35), (2.41) et (2.40) :

$$\begin{cases} \phi_1^0(X_1, X_2) = X_1 \\ \phi_2^0(X_1, X_2) = X_2 \end{cases} \quad (2.43)$$

Par contre, concernant $\phi_1^1(X_1, X_2)$ et $\phi_2^2(X_1, X_2)$, celles-ci vont être approchées en résolvant numériquement (2.40)-(2.42) par la méthode de collocation utilisant un développement en polynômes de Tchebychev présentée précédemment.

Résolution numérique :

Pour étudier cette méthode de résolution, différentes répartitions de points de collocation ont été choisies. Les différentes transformations sont obtenues en fonction du choix de points de collocation. On considère la grille \mathcal{S} des points sur E_2 présentée sur la Figure 39. Pour pouvoir comparer les différentes transformations entre elles, on s'intéresse aux transformations de la grille \mathcal{S} dans le domaine D_2 dans le cas où on prend $R=0.4a$.

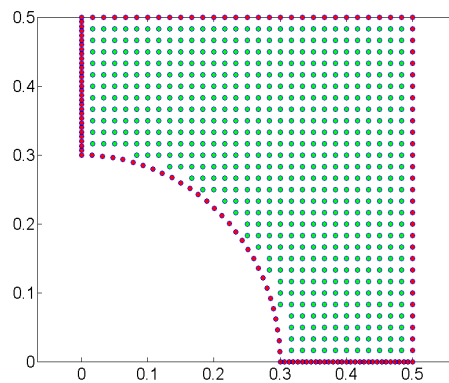


Figure 39. Grille des points du domaine E_2

Dans la Figure 40, on présente le premier choix des points de collocation (à gauche) et la transformation correspondant de la grille \mathcal{S} obtenue (à droite).

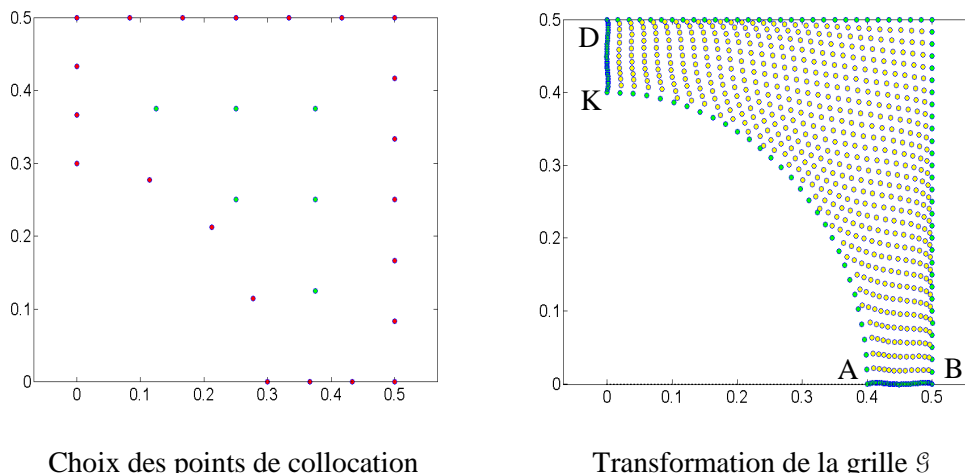


Figure 40. Premier cas de répartition des points de collocation et la transformation de la grille \mathcal{S}

On peut constater que la transformation de la frontière E_2 ne correspond pas exactement à la frontière théorique du domaine D_2 . En fait, les segments $D'K'$ et $A'B'$ obtenus par la transformation ne sont pas parfaitement droits.

Sur la Figure 41, on présente le deuxième choix des points de collocation (à gauche) et la transformation correspondant de la grille \mathcal{S} obtenue (à droite).

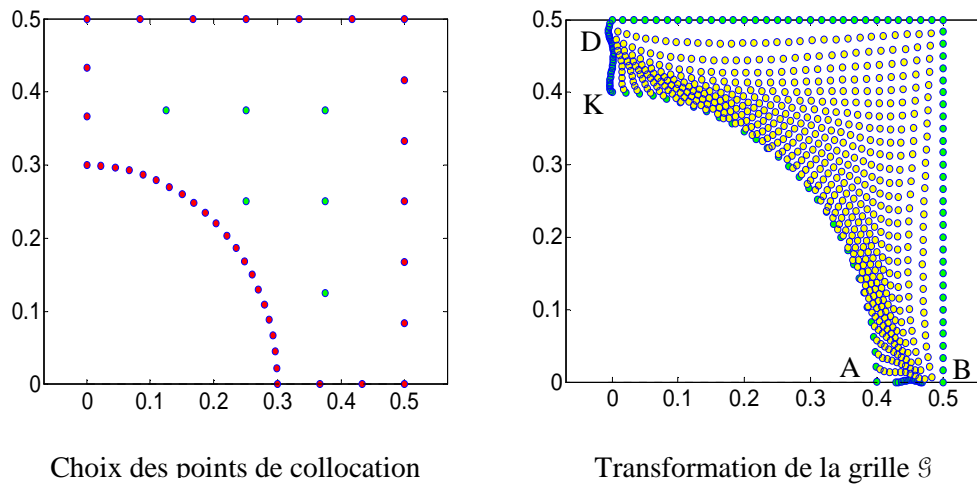


Figure 41. Deuxième choix de répartition des points de collocation et la transformation de la grille \mathcal{S}

On peut constater que la qualité de la transformation correspondant au deuxième choix des points de collocation est moins bonne rapport celle correspondant au premier choix. La déformation des segments DK et AB est relativement importante ainsi que la transformation de la grille \mathcal{S} qui est moins régulière par rapport celle correspondant au premier choix.

Le troisième choix des points de collocation est présenté sur la Figure 42.

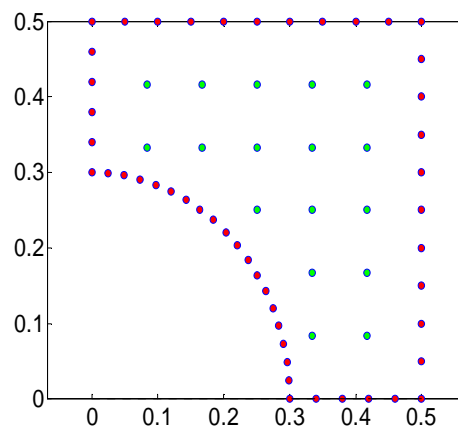


Figure 42. Troisième cas de répartition des points de collocation

Pour le troisième choix, on obtient un système linéaire des coefficients a_{1k}^1 , a_{2k}^1 (2.30) mal conditionné ce qui rend la solution obtenue inexploitable.

On peut donc constater que le choix des points de collocation influence significativement la qualité de la transformation obtenue. Un choix non pertinent des points de collocation peut générer une transformation du domaine de référence en un domaine qui présente une déformation par rapport le domaine initial (Figure 41). Un choix non pertinent peut également un système linéaire mal conditionné. Cela constitue une limitation à l'utilisation de cette méthode. Dans cet exemple, la transformation obtenue en utilisant le premier choix des points de collocation va être utilisée pour étudier la variable aléatoire de l'énergie $W(\xi)$.

On effectue le calcul de la valeur moyenne et de l'écart type de la variable aléatoire $W(\xi)$ pour les deux formulations en potentiel. Les résultats sont présentés dans le Tableau 4. On utilise le même maillage que celui de la méthode de transformation géométrique traité précédemment (Figure 37). On peut constater que les résultats obtenus par cette transformation sont proches de ceux obtenus par la méthode de transformation géométrique (Tableau 3) et de ceux de la méthode de remaillage.

Tableau 4. Méthode de transformation comparée à la méthode de remaillage

Information	Méthode du Laplacien		Méthode de remaillage	
	Potentiel scalaire	Potentiel vecteur	Potentiel scalaire	Potentiel vecteur
Moyenne	0.7655	0.7629	0.7651	0.7633
Ecart-type	0.1988	0.1966	0.1979	0.1971

Dans la suite, les deux méthodes de transformation vont être utilisées pour traiter un problème magnétostatique un peu plus proche de ce que l'on peut rencontrer au niveau de l'entrefer d'une machine électrique tournante.

2.1.2.3. Exemple en magnétostatique

On s'intéresse à un problème de magnétostatique défini sur un domaine D présenté sur la Figure 43. Le domaine D est composé de 4 sous domaines D_i , $i=1:4$ de perméabilités $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1000$ et $\mu_4 = 1$. On impose une force magnétomotrice $\gamma = 2A$ entre Γ_1 et Γ_2 et $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur le reste de la frontière. Les incertitudes sur les dimensions sont portées par des variables aléatoires uniformes indépendantes r, r_1, r_2, x_0, y_0 où x_0, y_0 correspondent à la position du centre du disque D_3 , r_1 et r_2 sont les rayons de la surface intérieure des deux dents D_1 et D_2 en face du disque D_3 et r est le rayon du disque D_3 . Les informations sur les variables r, r_1, r_2, x_0, y_0 sont données dans le Tableau 5. On peut constater que les variables aléatoires r, r_1, r_2, x_0, y_0 peuvent être représentées comme des fonctions linéaires des variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ qui sont des variables aléatoires uniformes indépendantes définies dans l'intervalle $[-1,1]$. Ces 5 variables sont regroupées dans le vecteur aléatoire $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$. Dans cet exemple, on s'intéresse toujours à l'énergie magnétique $W(\xi)$ stockée dans le domaine D .

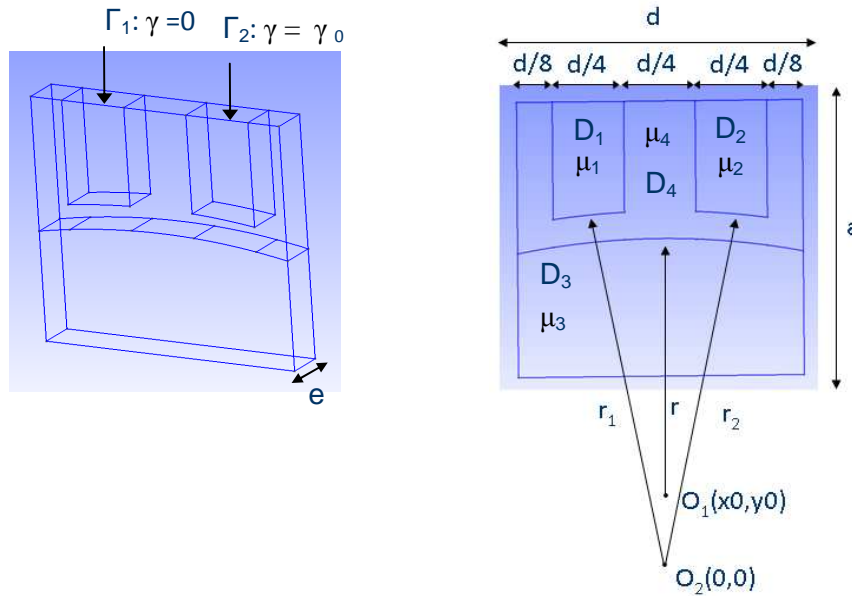


Figure 43. Problème de magnéto-statique

Dans cet exemple, les deux méthodes pour déterminer la transformation présentées au-dessus (méthode géométrique et méthode du Laplacien) sont employées pour résoudre ce problème. On prend un même domaine de référence avec les dimensions $r=R$, $r_1=R_1$, $r_2=R_2$, $x_0=X_0$, $y_0=Y_0$ qui sont les valeurs moyennes des variables aléatoires r , r_1 , r_2 , x_0 , y_0 (voir le Tableau 5) pour les deux transformations. Le domaine de référence et sa subdivision en sous domaines sont présentés sur la Figure 44. Le domaine initial D est divisé de la même façon et on détermine pour chaque sous domaine E_i et D_i une transformation T_i .

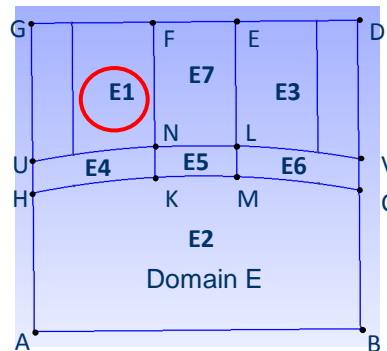


Figure 44. Division du domaine E

Concernant l'approximation de $W(\xi)$, une décomposition en chaos polynomial (2.3) est utilisée et les coefficients de la décomposition sont toujours calculés par la méthode de projection (2.4). Les étapes ont été décrites sur la Figure 21. La transformation est alors déterminée pour chaque point de quadrature ξ^k . Concernant la méthode du Laplacien, on rappelle que l'on résout pour chaque point de quadrature le système d'équations (2.31)-(2.32).

Dans la suite, afin d'illustrer la démarche, on va détailler seulement la détermination de la transformation du sous domaine E_1 (domaine borné par NFGU sur la Figure 44) en $D_1(\xi^k)$.

Pour la méthode du Laplacien, on considère 15 points de collocation (Figure 45). Les points à l'intérieur (carrés sur la Figure 45) satisfont (2.31) et les points sur la frontière (ronds sur la Figure 45) satisfont (2.32).

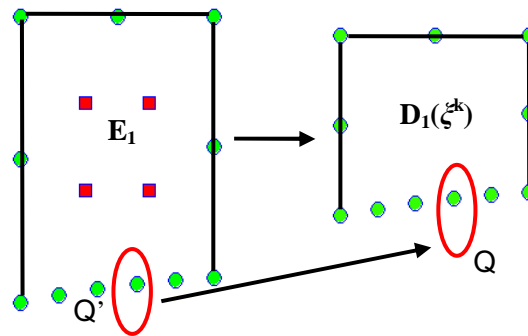


Figure 45. Méthode du Laplacien-Points de collocations

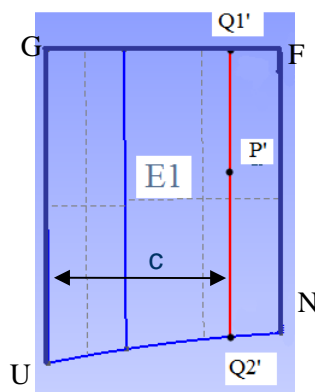


Figure 46. Ensemble de segments du domaine E_1

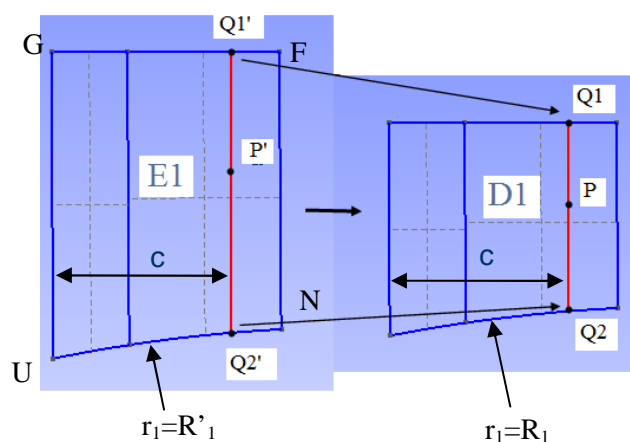


Figure 47. Méthode de transformation géométrique

Pour la méthode de transformation géométrique, les domaines E_1 et D_1 peuvent être considérés comme un ensemble de segments parallèles $Q_1'Q_2'$ et Q_1Q_2 (Figure 47). La coordonnée curviligne choisie pour représenter un segment est sa distance c avec l'arête à l'extrême gauche GU (Figure 47). La transformation du point P' en P est donnée par:

$$\overline{PQ_1} = \chi \overline{Q_1Q_2} \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{P'Q_1'}{Q_1'Q_2'} \quad (2.44)$$

Tableau 5. Information sur les dimensions aléatoires d'entrée

	r(cm)	r ₁ (cm)	r ₂ (cm)	x ₀ (cm)	y ₀ (cm)
Borne inférieure	49.97	50.27	50.27	-0.03	-0.03
Borne supérieure	50.03	50.33	50.33	0.03	0.03
Valeur moyenne	50	50.3	50.3	0	0

Tableau 6. Comparaison des deux méthodes

Information	Méthode de transformation géométrique		Méthode de transformation du Laplacien	
	Formulation en potentiel scalaire	Formulation en potentiel vecteur	Formulation en potentiel scalaire	Formulation en potentiel vecteur
Valeur moyenne	138.98	134.31	138.97	134.31
Ecart-type	9.25	8.83	9.22	8.82

Dans le Tableau 6, on présente la valeur moyenne et l'écart-type de l'énergie $W(\xi)$ stockée dans le domaine $D(\xi)$ obtenue par les deux méthodes en utilisant un maillage de 4700 nœuds.

Comme pour les exemples précédents, l'erreur numérique dans cet exemple peut être évaluée aussi par l'écart entre l'énergie en formulation de potentiel scalaire et l'énergie en formulation de potentiel vecteur. On peut constater que, il y a peu de différence entre les résultats obtenus par la méthode du Laplacien et par la méthode géométrique. Par contre, la méthode géométrique est plus simple à mettre en œuvre. De plus, avec un maillage de 4700 nœuds, la méthode géométrique est environs 2 fois moins coûteuse du point de vue du temps de calcul car celle ci ne nécessite pas la résolution de l'équation de Laplace pour chaque point de quadrature.

2.1.3. Transformation discrète

Dans les parties ci dessus on a présenté deux méthodes de détermination de la transformation. Pour ces méthodes, on obtient dans le cas général une matrice jacobienne qui dépend non seulement de la dimension aléatoire mais aussi de la dimension spatiale. La perméabilité sur le domaine de référence n'est pas alors constante dans chaque élément de maillage. Si a_{ij} est un coefficient de la matrice de raideur et si on note a_{ij}^e la contribution de l'élément e sur a_{ij} , on a pour la formulation en potentiel scalaire l'expression de a_{ij}^e suivante:

$$a_{ij}^e = \int_e \mathbf{grad} w_{0i}(X) \cdot \frac{\mathbf{M}'(X, \xi^k) \cdot \mu(X) \cdot \mathbf{M}(X, \xi^k)}{\det(\mathbf{M}(\xi^k))} \cdot \mathbf{grad} w_{0j}(X) \cdot dX \quad (2.45)$$

Une approximation du terme a_{ij}^e est calculée en utilisant une méthode de quadrature. On a alors :

$$a_{ij}^e \approx \sum_{l=1}^{N'} \bar{w}_l \cdot \mathbf{grad}_{w_{0i}}(X) \cdot \frac{\mathbf{M}^t(X^l, \boldsymbol{\xi}^k) \cdot \mu(X^l) \cdot \mathbf{M}(X^l, \boldsymbol{\xi}^k)}{|\det \mathbf{M}(X^l, \boldsymbol{\xi}^k)|} \cdot \mathbf{grad}_{w_{0j}}(X) \quad (2.46)$$

Si les variations de la matrice jacobienne de la transformation sont importantes sur l'élément e , l'approximation peut être de mauvaise qualité. Donc, il est souhaitable d'avoir une matrice jacobienne de transformation la plus constante possible sur l'élément pour réduire les erreurs numériques.

La détermination de la transformation nécessite une étape préliminaire consistant à diviser le domaine initial en plusieurs sous-domaines. La transformation est alors déterminée sur chaque sous-domaine. Dans le cas où le domaine de référence E est maillé, le plus petit sous domaine possible est l'élément. Il est alors légitime de se poser la question : Est-il possible de considérer chaque élément comme un sous-domaine où la transformation sera déterminée?

Dans cette partie, on va présenter une telle transformation et on va montrer que cette transformation admet une matrice jacobienne constante dans chaque élément du maillage. On peut montrer aussi que cette transformation peut être considérée comme équivalente à une déformation de maillage où on effectue un mouvement des nœuds du maillage en gardant les mêmes connectivités. Ensuite, un exemple magnétostatique simple sera mis en œuvre pour l'illustration.

2.1.3.1. Transformation discrète – déformation de maillage

On suppose que l'on dispose d'une transformation $\mathbf{T}^{-1}(\boldsymbol{\xi}^k)$ du domaine E supportant un maillage 2D en triangles de n_0 nœuds (X_{i1}, X_{i2}) , $i=1 : n_0$, en un domaine $D(\boldsymbol{\xi}^k)$ qui correspond à une réalisation $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^k$ du domaine aléatoire $D(\boldsymbol{\xi})$:

$$\mathbf{T}^{-1}(\boldsymbol{\xi}^k) : \begin{cases} x_1 = \phi_1(X_1, X_2, \boldsymbol{\xi}^k) \\ x_2 = \phi_2(X_1, X_2, \boldsymbol{\xi}^k) \end{cases} \quad (2.47)$$

La transformation $\mathbf{T}^{-1}(\boldsymbol{\xi}^k)$ (2.47) peut être déterminée implicitement par la méthode géométrique (2.11) ou explicitement par la méthode du Laplacien (2.21) présentées précédemment. On s'intéresse alors à la transformation $\mathbf{T}_{dis}^{-1}(\boldsymbol{\xi}^k)$ basée sur la transformation $\mathbf{T}^{-1}(\boldsymbol{\xi}^k)$ qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{T}_{dis}^{-1}(\boldsymbol{\xi}^k) : \begin{cases} x_1 = \sum_{i=1}^{n_0} \phi_1(X_{i1}, X_{i2}, \boldsymbol{\xi}^k) \cdot w_{0i}(X_1, X_2) \\ x_2 = \sum_{i=1}^{n_0} \phi_2(X_{i1}, X_{i2}, \boldsymbol{\xi}^k) \cdot w_{0i}(X_1, X_2) \end{cases} \quad (2.48)$$

avec (X_{i1}, X_{i2}) les coordonnées du nœud i et w_{0i} les fonctions de forme associées aux nœuds (voir la partie 1.2.1.4). On peut constater que la transformation sous la forme (2.48) transforme un

élément triangulaire e_i de trois sommets $P'_q(X_{iq1}, X_{iq2})$, $q=1 :3$ en un élément triangulaire d_i de trois sommets $P_q(x_{iq1}(\xi^k), x_{iq2}(\xi^k))$, $q=1 :3$ (Figure 48):

$$\begin{cases} x_{iq1}(\xi^k) = \phi_1(X_{iq1}, X_{iq2}, \xi^k) \\ x_{iq2}(\xi^k) = \phi_2(X_{iq1}, X_{iq2}, \xi^k) \end{cases} \quad \text{avec } q = 1 : 3 \quad (2.49)$$

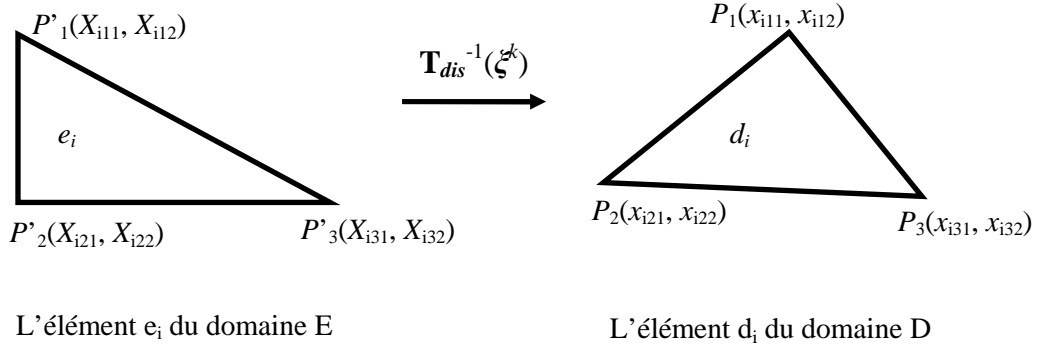


Figure 48. Transformation discrète

Par conséquent, la transformation (2.48) peut être considérée comme équivalente à une déformation de maillage où les nœuds (X_{i1}, X_{i2}) se déplacent vers une nouvelle position $(x_{i1}(\xi^k), x_{i2}(\xi^k))$ tout en gardant la même connectivité. Ainsi, on peut constater que la transformation $\mathbf{T}_{dis}^{-1}(\xi^k)$ admet une matrice jacobienne constante dans l'élément e_i car le gradient de fonctions de forme associés aux nœuds est constant dans chaque élément. En effet, la matrice jacobienne sur l'élément e_i s'écrit:

$$\mathbf{M}_{dis-i}^{-1}(\xi) = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{GRAD}'_i \quad (2.50)$$

avec \mathbf{x}_i une matrice 2x3 représentant les coordonnées des sommets de l'élément d_i et \mathbf{GRAD}'_i une matrice 2x3 de gradients des fonctions de forme associées aux nœuds de l'élément e_i :

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i11} & x_{i12} & x_{i13} \\ x_{i21} & x_{i22} & x_{i23} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{GRAD}'_i = [\mathbf{grad}_{x_1} w_{0i1}(X) \quad \mathbf{grad}_{x_2} w_{0i2}(X) \quad \mathbf{grad}_{x_3} w_{0i3}(X)] \quad (2.51)$$

A partir d'une transformation $\mathbf{T}^{-1}(\xi)$ connue, il est donc possible de déterminer une transformation discrète $\mathbf{T}_{dis}^{-1}(\xi)$ qui est parfaitement définie par la connaissance de l'image dans D des nœuds du maillage de domaine de référence E. L'utilisation de cette méthode permet d'obtenir une perméabilité sur le domaine de référence constante par élément, ce qui limite les erreurs de calcul numérique (2.46). Dans la suite, nous allons présenter un exemple simple d'application pour illustrer cette approche.

2.1.3.2. Exemple de magnétostatique

On s'intéresse à un exemple de magnétostatique déterministe présenté Figure 49 dont la géométrie peut être considérée comme une réalisation d'une géométrie aléatoire $D(\xi^k)$.

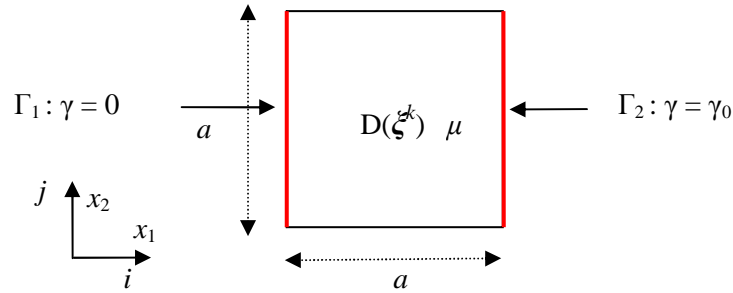


Figure 49. Problème de magnétostatique

Un carré $D(\xi^k)$ de dimension axa de perméabilité μ est considéré. Une force magnétomotrice γ_0 est imposée sur les deux faces opposées Γ_1 et Γ_2 . On impose $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur le reste de la frontière. Avec $a=1$, $\mu=1$ et $\gamma_0=2$, on obtient une solution analytique de la forme:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= 2\vec{i} \\ \mathbf{H} &= 2\vec{i} \end{aligned} \quad (2.52)$$

où \vec{i} est un vecteur unitaire selon l'axe horizontal (Figure 49). Au lieu de traiter ce problème initial, en appliquant la méthode de transformation, on s'intéresse à un problème de référence défini sur le domaine E (Figure 50).

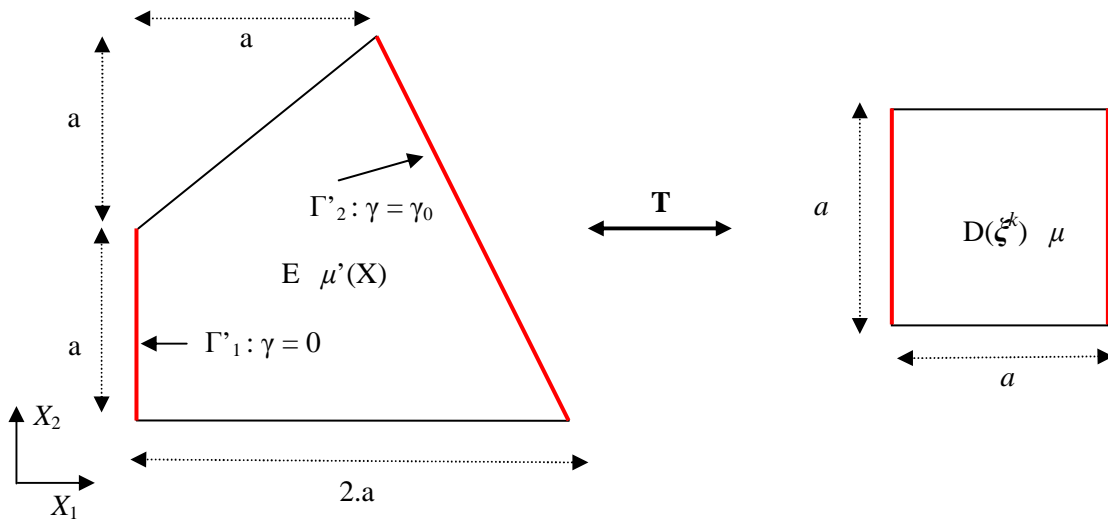


Figure 50. Transformation T et le domaine de référence E

La perméabilité du domaine E est donnée par :

$$\mu'(X) = \frac{\mathbf{M}'(X) \cdot \mu \cdot \mathbf{M}(X)}{\det(\mathbf{M}(X))} \quad (2.53)$$

avec \mathbf{M} la matrice jacobienne de la transformation du domaine $D(\xi^k)$ en E . Rappelons qu'avec la méthode de transformation (voir la partie 1.4.2.3), on a:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x) &= \mathbf{M}^{-1t} \cdot \mathbf{B}'(X) \cdot \det(\mathbf{M}) \\ \mathbf{H}(x) &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}'(X) \end{aligned} \quad (2.54)$$

avec \mathbf{B} , \mathbf{H} l'induction et le champ magnétique du problème initial et \mathbf{B}' , \mathbf{H}' l'induction et le champs magnétique du problème de référence. On résout d'abord le problème de référence. La solution du problème initial est ensuite donnée par (2.54) que l'on peut comparer avec la solution analytique donnée par (2.52).

On détermine d'abord une transformation continue \mathbf{T}_1^{-1} du domaine E en $D(\xi^k)$ qui est présentée dans la suite:

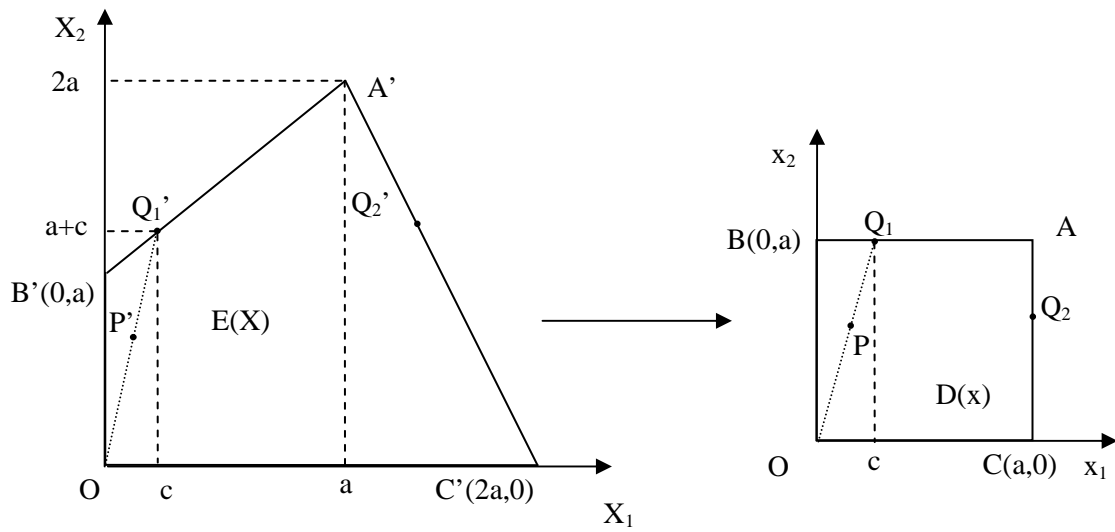


Figure 51. Transformation \mathbf{T}_1^{-1}

Les parties BA et $B'A'$ de la frontière de E et $D(\xi^k)$ sont paramétrées sous la forme suivante (Figure 51) :

$$\begin{cases} x_{1Q_1} = c \\ x_{2Q_1} = a \end{cases} ; \begin{cases} X_{1Q_1'} = c \\ X_{2Q_1'} = a + c \end{cases} \quad \text{avec } c \in [0, a] \quad (2.55)$$

Pour la partie AC et $A'C'$, on a :

$$\begin{cases} x_{1Q_2} = a \\ x_{2Q_2} = c \end{cases} ; \begin{cases} X_{1Q_2'} = 2a - c \\ X_{2Q_2'} = 2c \end{cases} \quad \text{avec } c \in [0, a] \quad (2.56)$$

Le domaine $D(\xi^k)$ peut être considéré comme l'ensemble $\mathcal{S}(D(\xi^k))$ des segments $OQ_1(c)$ et $OQ_2(c)$ avec Q_1 et Q_2 qui appartiennent respectivement à BA et AC . On peut considérer également E comme un ensemble $\mathcal{S}(E)$ de $OQ_1'(c)$ et $OQ_2'(c)$ avec Q_1' et Q_2' qui appartiennent respectivement à $B'A'$ et $A'C'$. Pour un point P' dans E qui appartient à $OQ_1'(c)$, son image P dans D appartient à $OQ_1(c)$. Il est déterminé par :

$$\frac{OP}{OQ_1} = \frac{OP'}{OQ'_1} \quad (2.57)$$

Dans le cas où P' appartient à $OQ'_2(c)$, son image P dans D appartient alors à $OQ_2(c)$. Il est déterminé d'une façon similaire. La transformation continue \mathbf{T}_1^{-1} est donc définie.

On s'intéresse au maillage \mathcal{M} du domaine E présenté sur la Figure 52 suivante :

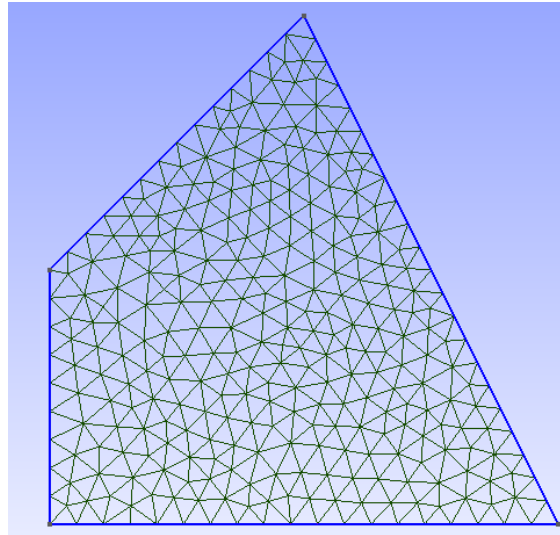


Figure 52. Maillage du domaine E

On définit une transformation discrète \mathbf{T}_{dis}^{-1} sur \mathcal{M} qui est basée sur la transformation \mathbf{T}_1^{-1} (2.57) comme cela a été proposé dans la partie précédente (voir la partie 2.1.3.1).

En utilisant cette transformation discrète \mathbf{T}_{dis}^{-1} on obtient un résultat numérique sur le champ magnétique présenté dans la Figure 53.

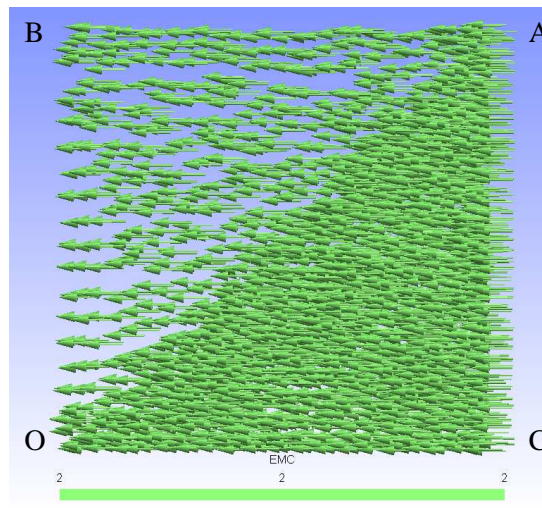


Figure 53. Champ magnétique obtenu en utilisant la transformation \mathbf{T}_{dis}

On peut constater que ce résultat numérique est identique à la solution analytique (2.52).

2.1.4. Synthèse.

Dans la partie 2.1, on vient de voir qu'il existe différentes méthodes pour déterminer la transformation qui permettent de ramener un problème aux incertitudes portées par la géométrie à un problème aux incertitudes portées par la loi de comportement. En réalité, pour un problème donné, il existe une infinité de choix du domaine de référence E. Pour un domaine de référence E donné, il existe également une infinité de choix de la transformation de D en E. Dans la méthode de transformation, après la résolution du problème défini dans le domaine de référence E, la solution est ramenée dans le domaine initial D (2.54). Les multiples choix du domaine de référence et de la transformation donnent la même solution exacte sur le domaine D. Par contre, la solution obtenue par une méthode numérique sur le domaine D dépend de ces choix. Dans la partie suivante, on va étudier l'influence du choix de la transformation sur l'erreur numérique de la solution obtenue.

2.2. Discussion sur le choix de la transformation

Comme cela a été signalé précédemment, le choix du domaine E et de la transformation \mathbf{T} ont une influence sur la qualité de la solution numérique. Concernant le choix du domaine E, on prend en pratique le domaine E défini par (2.7) qui correspond à la réalisation moyenne du domaine D. L'explication de ce choix est le suivant : Si on considère une transformation discrète \mathbf{T}_{dis} , elle est équivalente à une déformation de maillage où les nœuds du maillage du domaine E se déplacent en gardant la même connectivité. Le maillage sur D issue de la transformation \mathbf{T}_{dis} est conforme. Le choix le plus adéquat pour le domaine E est celui qui conduit à une déformation minimale sur D du maillage. Le choix de E comme la réalisation moyenne (géométrie nominale) du domaine initial D semble intuitivement une bonne solution. Pour essayer d'évaluer en vue de limiter l'impact de l'erreur numérique sur la solution obtenue par la méthode de transformation, nous allons dans la suite montrer les limitations introduites par l'utilisation d'une transformation discrète et proposer un estimateur d'erreur *a priori*.

2.2.1. Transformation continue ou transformation discrète

Dans cette partie, l'exemple présenté dans la partie 2.1.3.1 est repris pour comparer les transformations continue et discrète. Le domaine E présenté sur la Figure 50 est utilisé comme domaine de référence. Le problème initial était un domaine D avec une perméabilité constante. Le problème est résolu dans le domaine de référence où la perméabilité n'est plus uniforme. Puis, la solution est ramenée sur le domaine initial par (2.54). Rappelons que le champ solution doit être uniforme sur tout le domaine D (2.52).

En utilisant la transformation continue \mathbf{T}_1^{-1} (2.57) (transformation 1), on obtient le champ magnétique présenté sur la Figure 54.

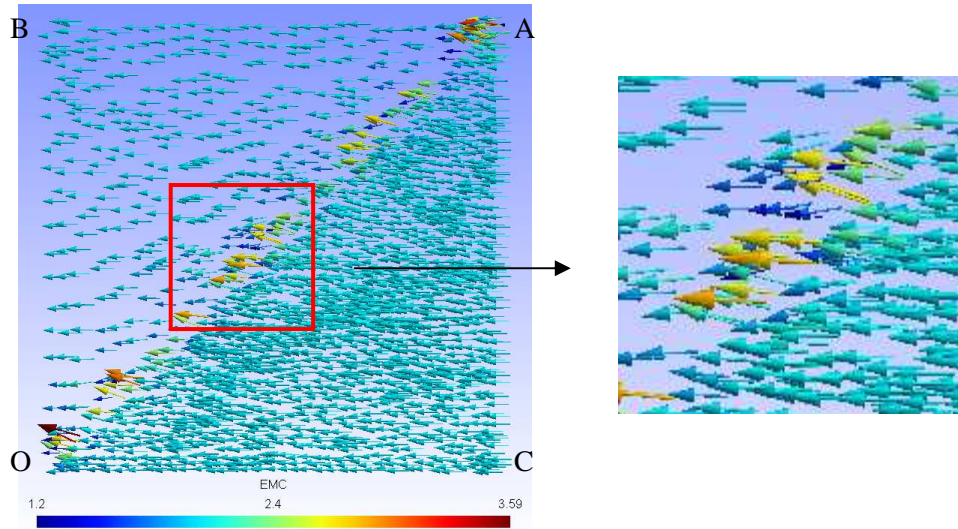


Figure 54. Champ magnétique obtenu en appliquant la transformation 1

On peut constater qu'il existe des erreurs numériques importantes localisées autour de la diagonale OA. Ce phénomène peut être expliqué de la façon suivante. La matrice jacobienne de \mathbf{T}_1^{-1} prend deux valeurs selon la position du point considéré dans le domaine E (Figure 55) avec :

$$\mathbf{M}_1^{-1}(P') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ si } P' \in E_1 \quad (2.58)$$

et

$$\mathbf{M}_2^{-1}(P') = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ si } P' \in E_2 \quad (2.59)$$

En conséquence, la perméabilité du domaine E obtenue par (2.53) présente une discontinuité sur les éléments traversés par le segment OA' (Figure 55) :

$$\mu'_1 = \frac{\mathbf{M}_1' \mu \mathbf{M}_1}{\det(\mathbf{M}_1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mu'_2 = \frac{\mathbf{M}_2' \mu \mathbf{M}_2}{\det(\mathbf{M}_2)} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1.25 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Cette discontinuité est équivalente à une utilisation d'un maillage non conforme au niveau des interfaces des matériaux. Comme cela a été abordé dans la partie 1.4.1.3, l'utilisation d'un maillage non conforme au niveau des interfaces donne lieu à une erreur numérique importante. En effet, on voit sur la Figure 54 que le champ magnétique obtenu dans le domaine D présente une erreur localisée autour du segment OA (correspond à OA' dans le domaine E).

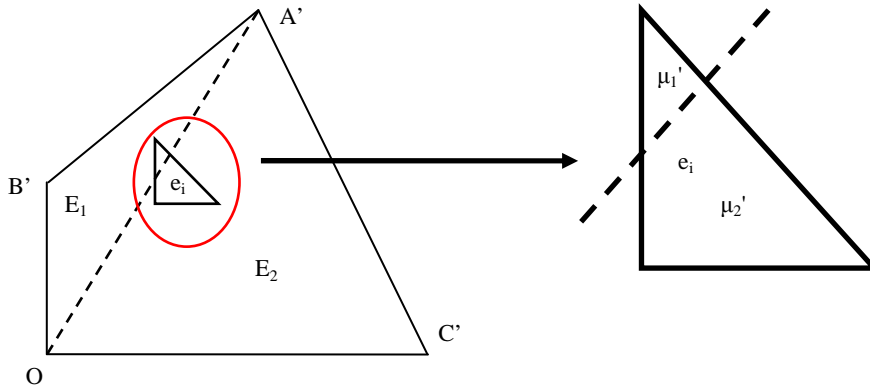


Figure 55. Élément coupé par OA'

Ensuite, la même transformation (2.57) est utilisée. Par contre, le domaine E est divisé en deux sous domaines E_1 et E_2 par OA' (transformation 2). On obtient alors le problème suivant à résoudre :

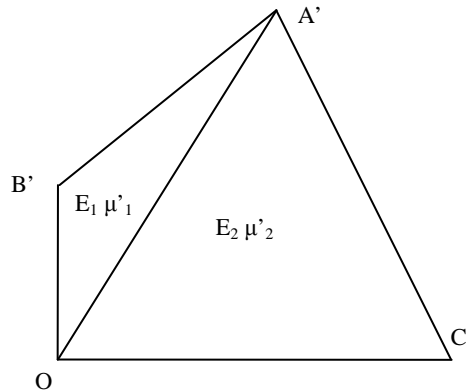


Figure 56. Division du domaine E

Les perméabilités μ'_1 et μ'_2 prennent la forme (2.60). En conséquence, il n'existe pas d'éléments traversés par OA' et la perméabilité est alors continue dans chaque élément. Cette fois, on obtient un champ qui est bien uniforme sur D :

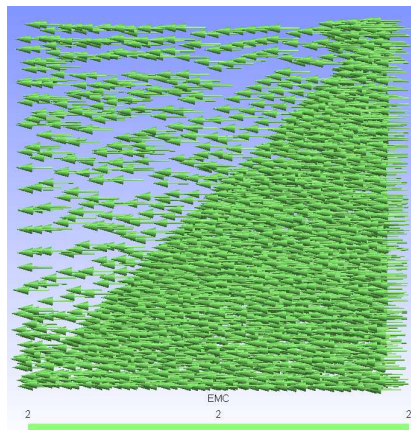


Figure 57. Champ magnétique obtenu en appliquant la transformation 2

Une autre possibilité de choix de la transformation pour éviter une discontinuité de la matrice jacobienne est représentée sur la Figure 58 (transformation 3):

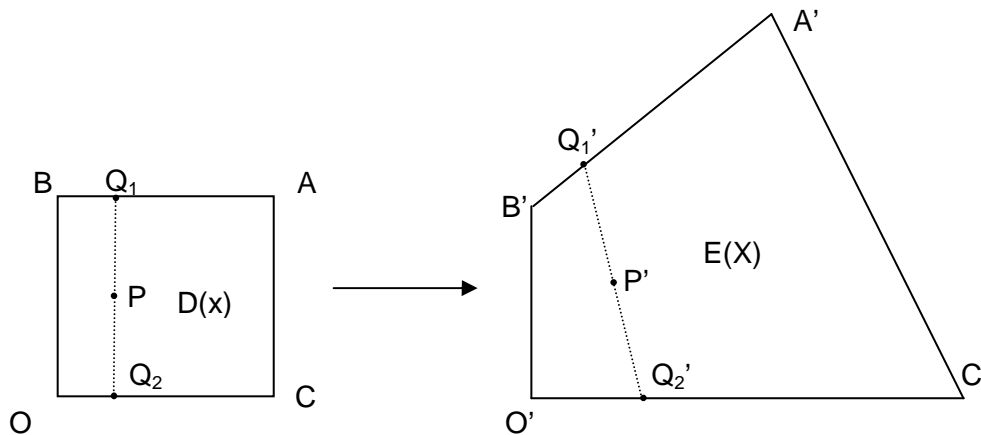


Figure 58. Description de la transformation 3

Le domaine E (respectivement D) est considéré comme l'ensemble des segments Q_1Q_2 (respectivement $Q'_1Q'_2$) avec:

$$\begin{cases} x_{1Q_1} = c, x_{2Q_1} = a \\ X_{1Q'_1} = c, X_{2Q'_1} = a + c \end{cases} ; \begin{cases} x_{1Q_2} = c, x_{2Q_2} = 0 \\ X_{1Q'_2} = 2c, X_{2Q'_2} = 0 \end{cases} \quad \text{avec } c \in [0, a] \quad (2.61)$$

L'utilisation de cette transformation, qui conduit à une matrice jacobienne continue sur E, nous donne encore un champ pratiquement uniforme présenté sur la Figure 59.

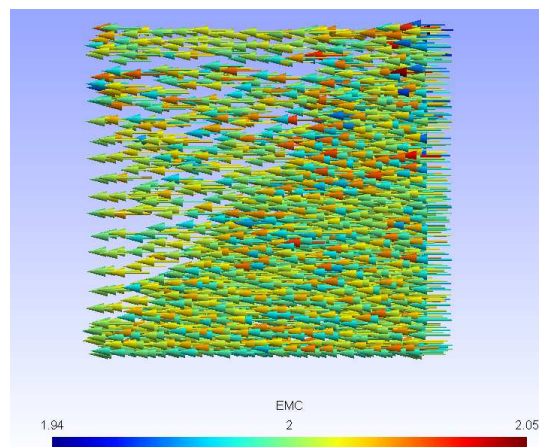


Figure 59. Champ magnétique obtenu en appliquant la transformation 3

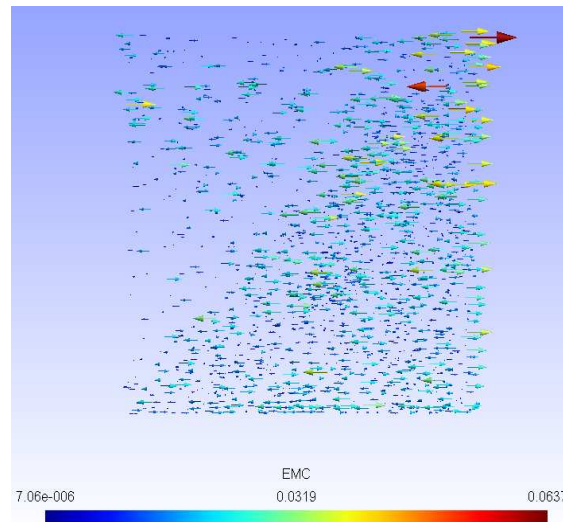


Figure 60. Ecart entre le champ exact et le champ obtenu en appliquant la transformation 3

Sur la Figure 60, nous avons représenté la différence entre le champ calculé en utilisant la transformation 3 et le champ exact. On constate néanmoins l'apparition d'un écart. La transformation 3 conduit donc à un champ de moins bonne qualité que le champ obtenu par la transformation 2 ou une transformation discrète (2.1.3.1).

Ce phénomène peut être expliqué par le fait que la matrice jacobienne de la transformation 3 n'est pas constante dans chaque élément ce qui est le cas pour la transformation discrète et la transformation 2. En conséquence, la méthode de quadrature utilisée pour calculer les coefficients de la matrice de raideur (2.46) introduit des erreurs numériques dans le cas de la transformation 3. Avec l'utilisation d'une transformation continue, dans un problème 2D, il existe toujours une façon de diviser de manière efficace le domaine étudié en plusieurs sous domaines pour éviter toute discontinuité de la matrice jacobienne sur chaque élément. Par contre, pour un problème 3D ce n'est pas toujours évident. Dans le cas où le problème de discontinuité de la matrice jacobienne ne peut pas être résolu, une transformation discrète peut être utilisée. Rappelons qu'avec l'utilisation de la transformation discrète, la matrice jacobienne est constante dans chaque élément du maillage.

Cependant, avec la transformation discrète, dans le cas de grandes déformations de la géométrie du domaine aléatoire réel, certains éléments peuvent « se retourner », ce qui conduit à une matrice jacobienne dont le déterminant est négatif. La transformation n'est alors plus bijective et le problème défini dans le domaine de référence présente une perméabilité tensorielle n'étant plus définie positive. Ce problème est alors mal posé. Si on regarde ce phénomène du point de vue de la déformation de maillage, il est équivalent au cas d'éléments qui se chevauchent. Pour illustrer ce phénomène, on considère l'exemple suivant :

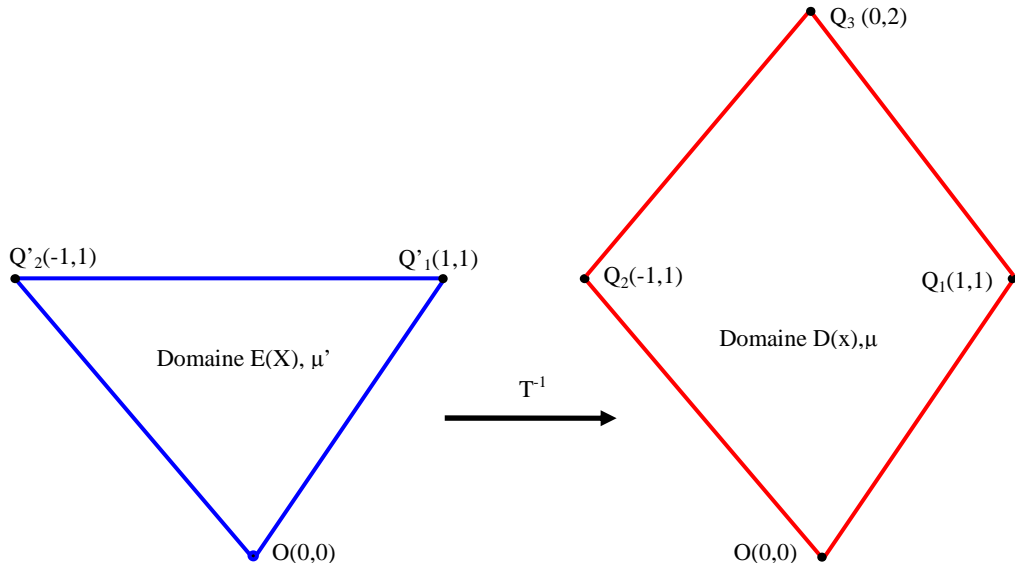


Figure 61. Définition du domaine initial D et du domaine de référence E

On s'intéresse à un problème magnétique défini dans le domaine D de perméabilité constante μ . On s'intéresse d'abord à une transformation continue \mathbf{T}^{-1} qui permet de ramener ce problème à un problème défini sur le domaine E de perméabilité μ' (Figure 61). La relation entre μ' et μ est donnée par (2.53) avec \mathbf{M} la matrice jacobienne de la transformation \mathbf{T} . Concernant la transformation \mathbf{T}^{-1} , elle est déterminée de la façon suivante (Figure 62) :

$$\overline{OP} = \chi \overline{OQ} \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{OP'}{OQ'} \quad (2.62)$$

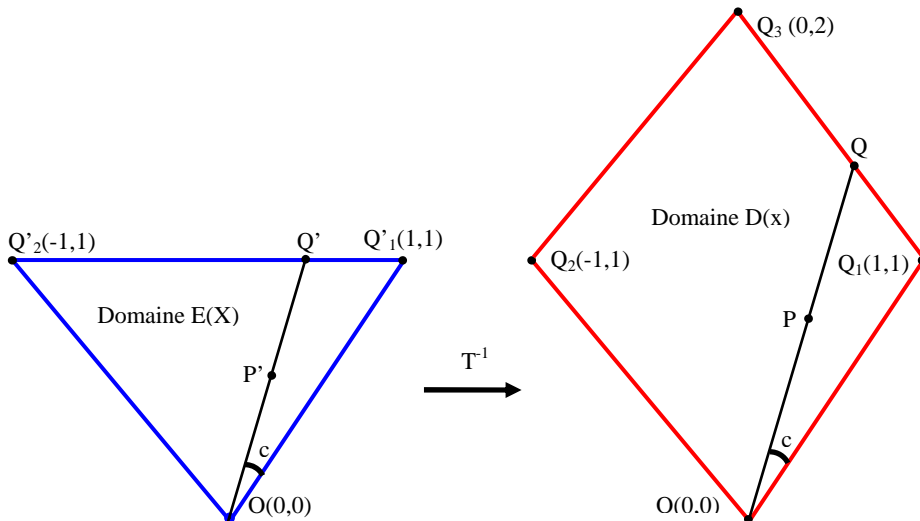


Figure 62. Transformation du domaine E en domaine D

On considère maintenant un maillage du domaine E présenté dans les Figure 63 et Figure 64. On s'intéresse aux éléments triangulaires $P'_1P'_2P'_3$, $OP'_2P'_3$ et $OP'_1P'_3$ du maillage du domaine E

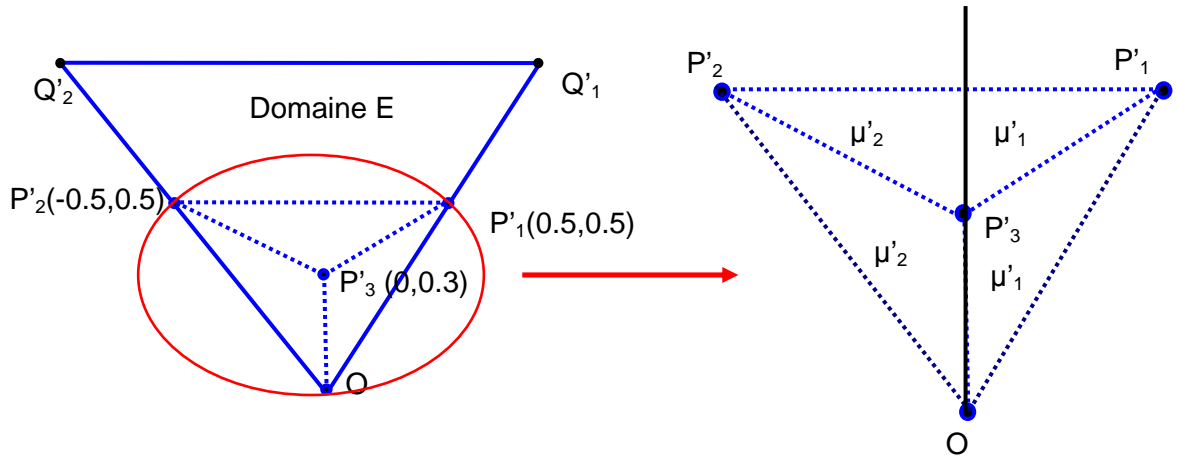


Figure 63. Eléments du domaine E

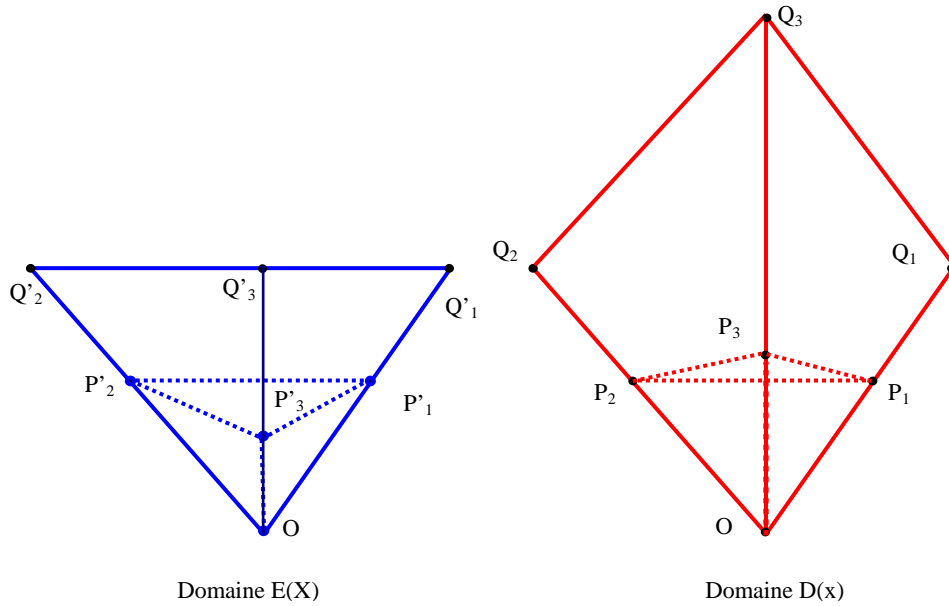


Figure 64. Déformation du maillage

L'application numérique nous donne les valeurs de perméabilités μ'_1 et μ'_2 sur ces éléments du domaine E (Figure 65):

$$\mu'_1 = \begin{bmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} ; \mu'_2 = \begin{bmatrix} 2.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

On peut constater que μ'_1 et μ'_2 sont définies positives. Le problème défini sur le domaine E est alors bien posé.

Ensuite, on s'intéresse à la transformation discrète \mathbf{T}_{dis} basée sur la transformation \mathbf{T} . La détermination de la matrice jacobienne de \mathbf{T}_{dis} est réalisée dans chaque élément du maillage en fonction de la nouvelle position des nœuds de l'élément (2.50). L'application numérique nous donne les valeurs de perméabilités μ'_1 , μ'_2 et μ'_3 (Figure 65) de la forme suivante :

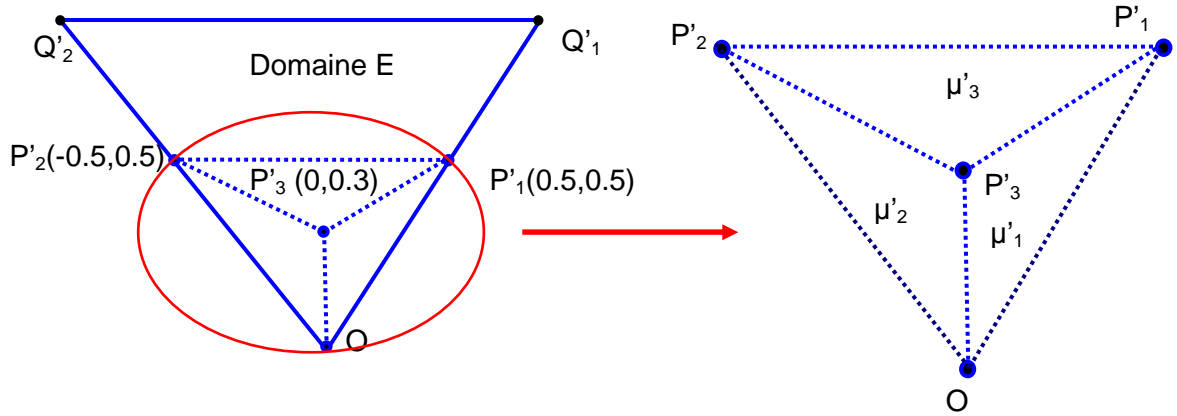


Figure 65. Eléments du domaine E

$$\mu'_1 = \begin{bmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}; \mu'_2 = \begin{bmatrix} 2.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}; \mu'_3 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

On peut constater que la perméabilité tensorielle μ'_3 n'est plus définie positive, ce qui conduit à un problème défini sur E mal posé.

Si on considère la transformation discrète \mathbf{T}_{dis} comme une déformation de maillage, on obtient la nouvelle position des points P_i avec $i=1, 2, 3$ (Figure 64) qui vérifient:

$$P_2 \equiv P'_2, P_1 \equiv P'_1, \frac{OP_3}{OQ_3} = \frac{OP'_3}{OQ'_3} \quad (2.65)$$

On peut constater que l'élément $P'_1P'_2P'_3$ et son image $P_1P_2P_3$ n'ont pas la même orientation, ce qui constitue une explication visuelle du problème décrit précédemment.

Pour assurer alors de bonne condition d'application de la méthode transformation discrète, la matrice jacobienne de la transformation doit toujours avoir un déterminant positif dans chaque élément. Dans le cas où on considère une transformation discrète comme équivalente à une déformation du maillage, tous les éléments doivent alors conserver la même orientation, après application de la transformation.

Dans cette partie, une comparaison entre une transformation continue et une transformation discrète a été faite. On peut constater que l'utilisation d'une transformation continue nous oblige à diviser les domaines E et D d'une façon efficace pour éviter toute discontinuité de la matrice jacobienne de transformation dans les éléments du maillage sur E. D'un autre côté, pour la transformation discrète, une grande déformation de la géométrie de D peut donner lieu à un problème mal posé puisque la perméabilité peut être non définie-positive sur le domaine de référence E. Dans un problème avec des incertitudes portées par la géométrie, où la variation de la géométrie est faible, la méthode de transformation discrète semble la plus adaptée. Dans le reste de ce mémoire de thèse, nous nous focaliserons principalement sur la méthode de transformation discrète en prenant soin lors des applications de vérifier que le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation est toujours positif.

Dans la suite, nous allons proposer un estimateur d'erreurs *a priori* permettant d'estimer une borne de l'écart entre la solution exacte et la solution numérique dans le cas où est employée une méthode de transformation discrète. Cet estimateur devrait nous permettre d'extraire des critères pour choisir la transformation qui semble la mieux adaptée.

2.2.2 Estimation d'erreur a priori

Dans cette partie, on va étudier l'influence de la forme de la transformation ou plus concrètement la forme de la matrice jacobienne sur l'erreur numérique. On donnera une estimation d'erreur *a priori* qui pourra constituer un critère de choix de transformations. L'analyse qui suit est basée sur les travaux de I.Tsukerman sur l'influence de la forme des éléments sur l'erreur numérique dans la méthode des éléments finis [62]. On présente d'abord la démarche qui nous conduit à une expression de l'erreur *a priori*. Puis, un exemple de magnétostatique sera traité pour illustrer les résultats obtenus. Dans cette étude, on suppose que la matrice jacobienne est constante dans chaque élément ce qui correspond aux cas de la transformation discrète. Néanmoins, certains résultats obtenus peuvent être étendus au cas des transformations continues.

2.2.2.1. Etudes théoriques

On s'intéresse au problème de magnétostatique avec des incertitudes portées par la géométrie, défini dans la partie 1.4.1.1 et 1.4.1.2. Pour un même domaine de référence E , il existe une infinité de transformations. Par conséquent, on obtient différents problèmes, correspondant aux différentes perméabilités équivalentes, définis sur le domaine E (Figure 66). Dans le cas continu, tous ces problèmes donnent la même solution qui correspond à la solution exacte lorsqu'on la ramène au domaine initial (1.134). Cependant, lorsqu'on utilise une méthode numérique, ceci n'est plus vrai. Pour un même maillage du domaine E , deux transformations conduisent à deux résultats différents. Ceci est dû à des erreurs numériques différentes que l'on souhaite bien entendu minimiser.

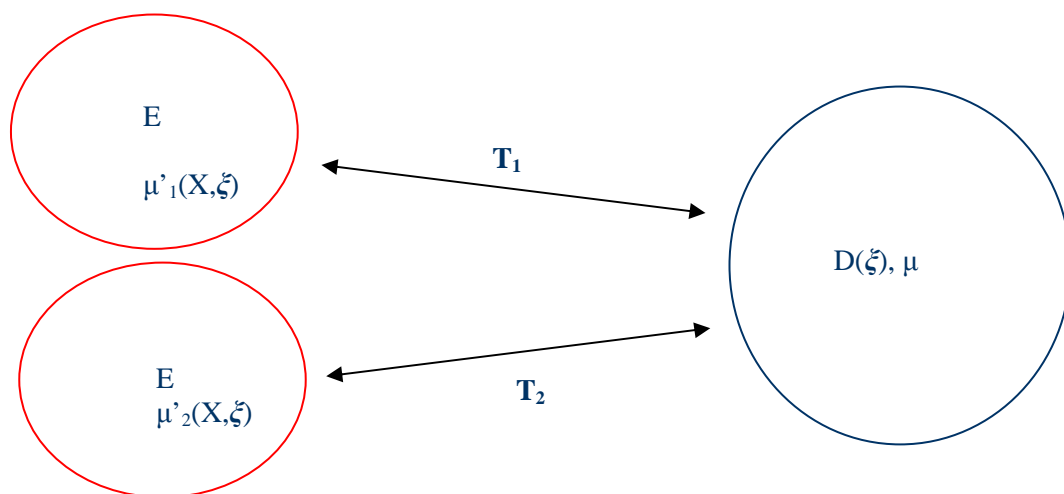


Figure 66. Différentes transformations du domaine D en E

Dans la suite, on va analyser l'influence du choix de la transformation sur l'erreur numérique de ces solutions dans le cas des deux formulations (voir la partie 1.2.1.3). On traitera en détail le cas de la formulation en potentiel scalaire pour un problème 2D pour plus de simplicité. Puis, des expressions de l'erreur *a priori* seront données dans le cas de deux formulations pour un problème 3D.

Considérons une transformation $\mathbf{T}(X, \xi)$ qui transforme D en E, de matrice jacobienne $\mathbf{M}(X, \xi)$. On obtient alors un problème défini sur E avec une perméabilité modifiée $\mu'(X, \xi)$ donnée par (1.135). On note le potentiel scalaire $\Omega_{ex}(X, \xi)$ la solution exacte du problème défini sur le domaine E. Par conséquent $\Omega_{ex}(x, \xi) = \Omega_{ex}(X(x, \xi), \xi)$ est la solution exacte du problème initial sur le domaine D (voir la partie 1.4.2.3). Le maillage \mathcal{M} du domaine déterministe E possède n_0 nœuds, et n_3 éléments. On rappelle l'espace fonctionnel :

$$W_0 = \text{span}\{w_{0i} / i = 1 : n_0\} \quad (2.66)$$

avec w_{0i} la fonction de forme associée au nœud i . On introduit l'espace fonctionnel :

$$W'_0 = \{f / f \in W_0, f = 0 \text{ sur } \Gamma_{H1} \text{ et } f = \gamma_0 \text{ sur } \Gamma_{H2}\} \quad (2.67)$$

On cherche à borner la distance entre $\Omega_{ex}(X, \xi)$ et la solution $\tilde{\Omega}(X, \xi)$ obtenue par la méthode des éléments finis en utilisant la méthode de Galerkin. Cette distance représente l'erreur numérique et est donnée par :

$$er_{abs}(\xi) = \int_E \mathbf{grad}_X (\tilde{\Omega}(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'(X, \xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\tilde{\Omega}(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot dX \quad (2.68)$$

On peut constater que l'erreur est la même sur le domaine D du fait de la relation entre μ et μ' (1.135):

$$er_{abs}(\xi) = \int_{D(\xi)} \mathbf{grad}_x (\tilde{\Omega}(x, \xi) - \Omega_{ex}(x, \xi)) \cdot \mu(x, \xi) \cdot \mathbf{grad}_x (\tilde{\Omega}(x, \xi) - \Omega_{ex}(x, \xi)) \cdot dx \quad (2.69)$$

avec $\tilde{\Omega}(x, \xi) = \tilde{\Omega}(X(x, \xi), \xi)$. On note $\Omega^*(X, \xi)$ la fonction linéaire telle que:

$$\Omega^*(X, \xi) = \sum_{i=1}^{n_0} \Omega_{ex}^i(\xi) \cdot w_{0i}(X) \quad (2.70)$$

où $\Omega_{ex}^i(\xi)$ sont les valeurs de la solution exacte aux nœuds i . On peut constater que $\Omega^*(X, \xi)$ appartient à W'_0 . La solution « éléments finis » minimise la distance au sens de la norme d'énergie à la solution exacte parmi les fonctions appartenant à W'_0 . Par conséquent, on obtient :

$$er_{abs}(\xi) \leq \int_E \mathbf{grad}_X (\Omega^*(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'(X, \xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega^*(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot dX \quad (2.71)$$

Si on note $e_i, i=1 : n_3$ les éléments du maillage \mathcal{M} , on obtient alors :

$$er_{abs}(\xi) \leq \sum_{i=1}^{n_3} \int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega^*(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'(X, \xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega^*(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot dX \quad (2.72)$$

On s'intéresse à l'erreur sur un élément e_i définie de la façon suivante:

$$er_i(\xi) = \int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega^*(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'(\xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega^*(X, \xi) - \Omega_{ex}(X, \xi)) \cdot dX \quad (2.73)$$

On peut constater, puisque nous avons supposé la matrice jacobienne constante sur chaque élément, que la transformation prend la forme suivante sur l'élément e_i :

$$X = \mathbf{T}(x, \xi) = \mathbf{M}(\xi) \cdot x + c_0(\xi) \quad (2.74)$$

avec $c_0(\xi)$ une constante et $\mathbf{M}(\xi)$ la matrice jacobienne de la transformation sur cet élément. Dans un problème de deux dimensions, la matrice $\mathbf{M}'(\xi) \cdot \mathbf{M}(\xi)$ possède deux valeurs propres $0 < \lambda_{\min}(\xi) \leq \lambda_{\max}(\xi)$.

On note X_0 le centre du cercle de rayon h_e , circonscrit à l'élément e_i .

$$h_e = \max_{X \in e_i} (\|X - X_0\|) = \|X_1 - X_0\| \quad (2.75)$$

avec X_1 le point le plus éloigné de X_0 dans e_i et $\|v\|$ signifie la longueur du vecteur v . Comme e_i est un triangle, alors le point X_1 se situe sur un des sommets de l'élément e_i (Figure 68).

On note également $x_0(\xi) = \mathbf{T}^{-1}(X_0, \xi)$ et $d_i(\xi) = \mathbf{T}^{-1}(e_i, \xi)$ les images respectives de X_0 et e_i par la transformation \mathbf{T}^{-1} . Alors, $d_i(\xi)$ est inscrit dans un cercle de centre x_0 et de rayon h_d (Figure 67- Figure 68).

$$h_d(\xi) = \max_{x \in d_i} (\|x(\xi) - x_0(\xi)\|) = \|x_1(\xi) - x_0(\xi)\| \quad (2.76)$$

avec $x_1(\xi)$ est le point le plus éloigné de x_0 dans d_i . Comme d_i est également un triangle, le point $x_1(\xi)$ se situe sur un des sommets de d_i et on peut choisir le point X_1 parmi les sommets de l'élément e_i tel que le point $x_1(\xi)$ soit l'image de X_1 (Figure 68).

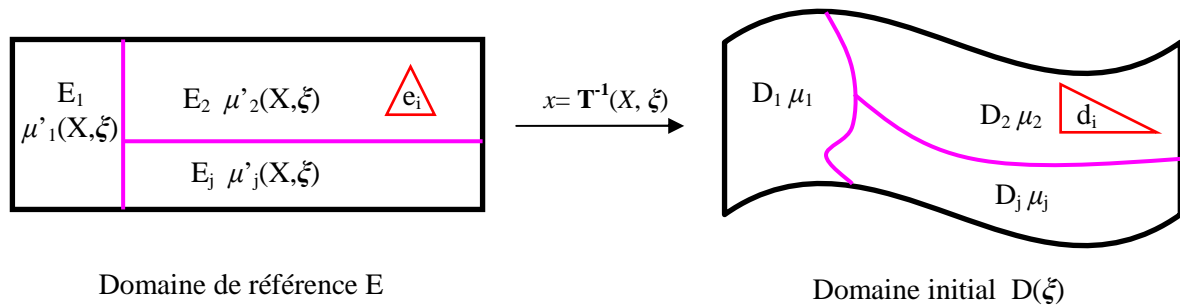


Figure 67. Transformation T

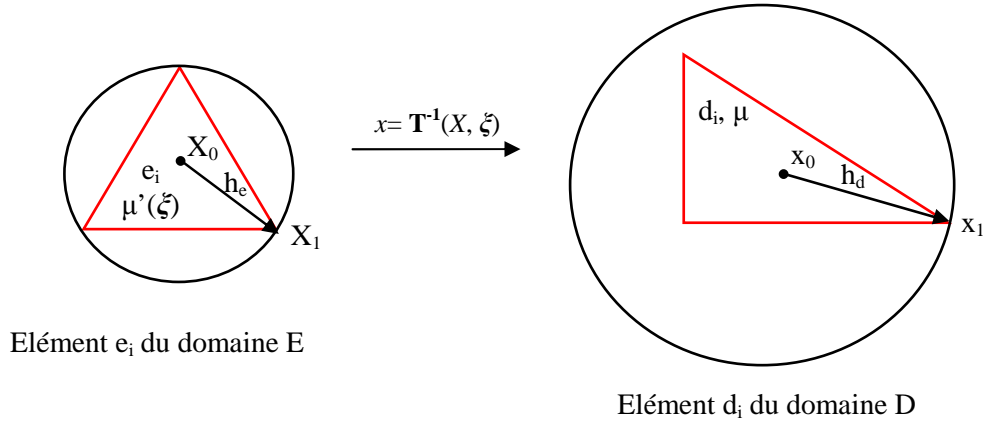


Figure 68. Eléments e_i et d_i

On note $\Omega_r(X, \xi)$, un développement de Taylor au premier ordre de $\Omega_{ex}(X_0, \xi)$ autour du point X_0 :

$$\Omega_r(X, \xi) = \Omega_{ex}(X_0, \xi) + \mathbf{grad}_x \Omega_{ex}(X_0, \xi) \cdot (X - X_0) \quad (2.77)$$

Alors, en utilisant (2.74) et (1.130), $\Omega_r(X, \xi)$ peut s'écrire dans le domaine initial $D(\xi)$:

$$\Omega_r(x, \xi) = \Omega_r(X(x, \xi), \xi) = \Omega_{ex}(x_0, \xi) + \mathbf{grad}_x \Omega_{ex}(x_0, \xi) \cdot (x - x_0) \quad (2.78)$$

Supposons que $\Omega_{ex}(x, \xi)$ ait une forme « assez régulière », c'est-à-dire [62] :

$$\begin{aligned} \forall x \in d_i(\xi) \\ |\Omega_{ex}(x, \xi) - \Omega_r(x, \xi)| &\leq C_1(\xi) \cdot h_d^2(\xi) \\ \|\mathbf{grad}_x \Omega_{ex}(x, \xi) - \mathbf{grad}_x \Omega_r(x, \xi)\|^2 &\leq C_2(\xi) \cdot h_d^2(\xi) \end{aligned} \quad (2.79)$$

avec $|u|$ la valeur absolue de la grandeur scalaire u et $C_1(\xi)$ et $C_2(\xi)$ les coefficients qui ne dépendent que de la solution exacte du problème initial défini sur D et ne dépendent en aucun cas de la transformation \mathbf{T} . Ces coefficients sont indépendants de la matrice jacobienne \mathbf{M} . On a alors :

$$\begin{aligned} \forall X \in e_i, x = \mathbf{T}(X, \xi) : \\ |\Omega_{ex}(X, \xi) - \Omega_r(X, \xi)| = |\Omega_{ex}(x, \xi) - \Omega_r(x, \xi)| &\leq C_1(\xi) \cdot h_d^2(\xi) \quad (a) \\ \|\mathbf{grad}_x \Omega_{ex}(x, \xi) - \mathbf{grad}_x \Omega_r(x, \xi)\|^2 &\leq C_2(\xi) \cdot h_d^2(\xi) \quad (b) \end{aligned} \quad (2.80)$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega^* (X, \xi) - \Omega_{ex} (X, \xi)) \cdot \mu'(\xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega^* (X, \xi) - \Omega_{ex} (X, \xi)) \cdot dX} \leq \\
& \sqrt{\int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega_r (X, \xi) - \Omega_{ex} (X, \xi)) \cdot \mu'(\xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega_r (X, \xi) - \Omega_{ex} (X, \xi)) \cdot dX} + \\
& \sqrt{\int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega^* (X, \xi) - \Omega_r (X, \xi)) \cdot \mu'(\xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega^* (X, \xi) - \Omega_r (X, \xi)) \cdot dX}
\end{aligned} \tag{2.81}$$

On analyse maintenant chaque terme de la partie droite de (2.81). Pour le premier terme, en utilisant (2.79), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& \int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega_r (X, \xi) - \Omega_{ex} (X, \xi)) \cdot \mu'(\xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega_r (X, \xi) - \Omega_{ex} (X, \xi)) \cdot dX = \\
& \int_{d_i} \mathbf{grad}_X (\Omega_r (x, \xi) - \Omega_{ex} (x, \xi)) \cdot \mu \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega_r (x, \xi) - \Omega_{ex} (x, \xi)) \cdot dx \leq \\
& \leq C_2(\xi) \cdot \mu \cdot V_{d_i}(\xi) \cdot h_d^2(\xi) = C_3(\xi) \cdot V_{d_i}(\xi) \cdot h_d^2(\xi) = C_3(\xi) \cdot \frac{V_{e_i}}{\det(\mathbf{M}(\xi))} \cdot h_d^2(\xi)
\end{aligned} \tag{2.82}$$

avec $C_3(\xi) = C_2(\xi) \cdot \mu$ et $V_{d_i}(\xi)$, V_{e_i} les volumes des éléments d_i et e_i respectivement. Concernant le deuxième terme de la partie droite de (2.81), on peut constater que la fonction linéaire $\Omega_r (X, \xi)$ (2.77) peut s'écrire dans l'élément e_i sous la forme suivante :

$$\Omega_r (X, \xi) = \sum_{k=1}^3 \Omega_r^k(\xi) \cdot w_{0ik}(X) \tag{2.83}$$

On note :

$$\mathbf{GRAD} = [\mathbf{grad}_X w_{0i1}(X) \quad \mathbf{grad}_X w_{0i2}(X) \quad \mathbf{grad}_X w_{0i3}(X)] \tag{2.84}$$

On en déduit alors:

$$\begin{aligned}
& \int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega^* (X, \xi) - \Omega_r (X, \xi)) \cdot \mu'(\xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega^* (X, \xi) - \Omega_r (X, \xi)) \cdot dX \\
& = \int_{e_i} \mu \cdot (\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi))' \mathbf{GRAD}' \cdot \frac{\mathbf{M}'(\xi) \cdot \mathbf{M}(\xi)}{\det(\mathbf{M}(\xi))} \cdot \mathbf{GRAD} \cdot (\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi)) \cdot dX \\
& \leq \int_{e_i} \mu \cdot (\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi))' \mathbf{GRAD}' \cdot \frac{\lambda_{\max}(\xi)}{\det(\mathbf{M}(\xi))} \cdot \mathbf{GRAD} \cdot (\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi)) \cdot dX \\
& = \mu \cdot (\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi))' \mathbf{GRAD}' \cdot \frac{\lambda_{\max}(\xi)}{\det(\mathbf{M}(\xi))} \cdot \mathbf{GRAD} \cdot (\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi)) \cdot V_{e_i}(\xi) \\
& \leq \mu \cdot \|\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi)\|^2 \cdot \lambda_{1\max} \cdot \lambda_{\max}(\xi) \cdot \frac{V_{e_i}(\xi)}{\det(\mathbf{M}(\xi))}
\end{aligned} \tag{2.85}$$

où $\Theta^* (\xi) - \Theta_r (\xi) = [\Omega_{ex}^1(\xi) - \Omega_r^1(\xi) \quad \Omega_{ex}^2(\xi) - \Omega_r^2(\xi) \quad \Omega_{ex}^3(\xi) - \Omega_r^3(\xi)]$ est le vecteur contenant la différence de $\Omega_{ex}(X, \xi)$ et $\Omega_r(X, \xi)$ aux 3 sommets du triangle e_i . Le terme $\lambda_{1\max}$ est la valeur propre maximale de $\mathbf{GRAD}' \cdot \mathbf{GRAD}$.

En utilisant (2.80)(a), on obtient :

$$\|\Theta^*(\xi) - \Theta_r(\xi)\|^2 \leq 3C_1^2(\xi) \cdot h_d^4(\xi) \quad (2.86)$$

En remplaçant (2.86) dans (2.85), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{e_i} \mathbf{grad}_X (\Omega^*(X, \xi) - \Omega_r(X, \xi)) \cdot \mu'(\xi) \cdot \mathbf{grad}_X (\Omega^*(X, \xi) - \Omega_r(X, \xi)) \cdot dX \\ & \leq C_4(\xi) \cdot h_d^4(\xi) \cdot \lambda_{1\max} \cdot \lambda_{\max}(\xi) \cdot \frac{V_{e_i}(\xi)}{\det(\mathbf{M}(\xi))} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Avec $C_4(\xi) = 3C_1^2(\xi) \cdot \mu$. A partir de (2.73), (2.79), (2.81), (2.82) et (2.87), on obtient:

$$\begin{aligned} er_i & \leq (\sqrt{C_3(\xi)} \cdot h_d(\xi) + \sqrt{C_4(\xi) \cdot \lambda_{\max}(\xi) \cdot \lambda_{1\max}} \cdot h_d^2(\xi))^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\det(\mathbf{M}(\xi))} = \\ & = (\sqrt{C_3(\xi)} \cdot h_d(\xi) + \sqrt{C_4(\xi) \cdot \lambda_{\max}(\xi) \cdot \lambda_{1\max}} \cdot h_d^2(\xi))^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\sqrt{\lambda_{\max}(\xi) \lambda_{\min}(\xi)}} \end{aligned} \quad (2.88)$$

L'étape finale consiste à représenter $h_d(\xi)$ en fonction de h_e . Cette étape est réalisée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} h_e^2 & = \|X_1 - X_0\|^2 = \|\mathbf{T}(x_1, \xi) - \mathbf{T}(x_0, \xi)\|^2 \\ & = (\mathbf{T}(x_1, \xi) - \mathbf{T}(x_0, \xi))^t \cdot (\mathbf{T}(x_1, \xi) - \mathbf{T}(x_0, \xi)) \\ & = (x_1(\xi) - x_0(\xi))^t \cdot \mathbf{M}'(\xi) \cdot \mathbf{M}(\xi) \cdot (x_1(\xi) - x_0(\xi)) \\ & \geq \lambda_{\min}(\xi) \|x_1(\xi) - x_0(\xi)\|^2 = \lambda_{\min}(\xi) h_d^2(\xi) \end{aligned} \quad (2.89)$$

Rappelons que $\lambda_{\min}(\xi)$ est la valeur propre minimale de la matrice $\mathbf{M}'(\xi) \cdot \mathbf{M}(\xi)$. En utilisant (2.89) et (2.88), on obtient l'encadrement final suivant:

$$\begin{aligned} er_i(\xi) & \leq (\sqrt{C_3(\xi)} \cdot h_d(\xi) + \sqrt{C_4(\xi) \cdot \lambda_{\max}(\xi) \cdot \lambda_{1\max}} \cdot h_d^2(\xi))^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\sqrt{\lambda_{\max}(\xi) \lambda_{\min}(\xi)}} \\ & \leq (\sqrt{C_3(\xi)} + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\xi)}{\lambda_{\min}(\xi)}} \sqrt{C_4(\xi) \cdot \lambda_{1\max}} \cdot h_e)^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\lambda_{\min}(\xi) \sqrt{\lambda_{\max}(\xi) \lambda_{\min}(\xi)}} \cdot h_e^2 \end{aligned} \quad (2.90)$$

A partir de (2.90), on peut constater que pour diminuer la borne supérieure de l'erreur numérique, il faut augmenter $\lambda_{\min}(\xi)$ et diminuer $\lambda_{\max}(\xi)$. Sachant qu'on a la contrainte suivante pour ces valeurs propres :

$$V_D(\xi) = \int_E \frac{1}{\det(\mathbf{M}(X, \xi))} dX = \int_E \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\max}(X, \xi) \lambda_{\min}(X, \xi)}} dX = \sum_{i=1}^{n_3} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\max}^i(\xi) \lambda_{\min}^i(\xi)}} V_{e_i} \quad (2.91)$$

avec $\lambda_{\max}^i(\xi)$, $\lambda_{\min}^i(\xi)$ les deux valeurs propres de $\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}$ dans l'élément e_i et V_E , V_D les volumes des domaines E et D.

D'une façon similaire, dans le cas 3D où la matrice $\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}$ est de dimension 3×3 , on peut obtenir un estimateur d'erreur suivant :

$$\begin{aligned} er_i(\xi) &\leq (\sqrt{C_3(\xi)} \cdot h_d(\xi) + \sqrt{C_4(\xi) \cdot \lambda_{\max}(\xi) \cdot \lambda_{1\max}} \cdot h_d(\xi))^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\sqrt{\lambda_{\max}(\xi) \lambda_{\text{mil}}(\xi) \lambda_{\min}(\xi)}} \\ &\leq (\sqrt{C_3(\xi)} + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\xi)}{\lambda_{\min}(\xi)}} \sqrt{C_4(\xi) \cdot \lambda_{1\max}} \cdot h_e)^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\lambda_{\min}(\xi) \sqrt{\lambda_{\max}(\xi) \lambda_{\text{mil}}(\xi) \lambda_{\min}(\xi)}} \cdot h_e^2 \end{aligned} \quad (2.92)$$

où $0 < \lambda_{\min}(\xi) \leq \lambda_{\text{mil}}(\xi) \leq \lambda_{\max}(\xi)$ les valeurs propres de $\mathbf{M}'(\xi) \cdot \mathbf{M}(\xi)$. On a la contrainte suivante sur les valeurs propres :

$$V_D(\xi) = \int_E \frac{1}{\det(\mathbf{M}(X, \xi))} dX = \sum_{i=1}^{n_3} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\max}^i(\xi) \lambda_{\text{mil}}^i(\xi) \lambda_{\min}^i(\xi)}} V_{e_i} \quad (2.93)$$

On peut obtenir en effectuant des développements similaires une borne supérieure de l'erreur dans le cas de formulation en potentiel vecteur :

$$er'_i(\xi) = \int_{e_i} \mathbf{rot}_x (A^*(X, \xi) - A_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'^{-1}(\xi) \cdot \mathbf{rot}_x (A^*(X, \xi) - A_{ex}(X, \xi)) \cdot dX \quad (2.94)$$

avec $A_{ex}(x, \xi) = A_{ex}(X(x, \xi), \xi)$ le potentiel vecteur exact du problème défini dans le domaine E avec une perméabilité modifiée μ' et A^* l'interpolation de A_{ex} aux arêtes. La formulation obtenue prend la forme suivante (voir l'annexe 4 pour plus de détail) :

$$er'_i(\xi) \leq (\sqrt{C'_3(\xi)} + \sqrt{\frac{\lambda_{\text{mil}}(\xi) \lambda_{\max}(\xi)}{\lambda_{\min}(\xi)}} \sqrt{C'_4(\xi) \cdot \lambda'_{1\max}} \cdot h_e)^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\lambda_{\min}(\xi) \sqrt{\lambda_{\max}(\xi) \lambda_{\text{mil}}(\xi) \lambda_{\min}(\xi)}} \cdot h_e^2 \quad (2.95)$$

Avec $\lambda'_{1\max}$ la valeur propre maximale de la matrice $\mathbf{ROT}^t \cdot \mathbf{ROT}$ avec :

$$\mathbf{ROT} = [\mathbf{rot}_x w_{i1}(X) \quad \mathbf{rot}_x w_{i2}(X) \quad \mathbf{rot}_x w_{i3}(X) \quad \mathbf{rot}_x w_{i4}(X) \quad \mathbf{rot}_x w_{i5}(X) \quad \mathbf{rot}_x w_{i6}(X)] \quad (2.96)$$

Dans la suite, une application numérique pour illustrer les résultats ci-dessus sera présentée.

2.2.2.2. Exemple d'application

Dans cette partie, on va illustrer les résultats obtenus sur l'estimation d'erreur présentées dans la partie 2.2.2.1 sur un exemple de magnétostatique présenté sur la Figure 69:

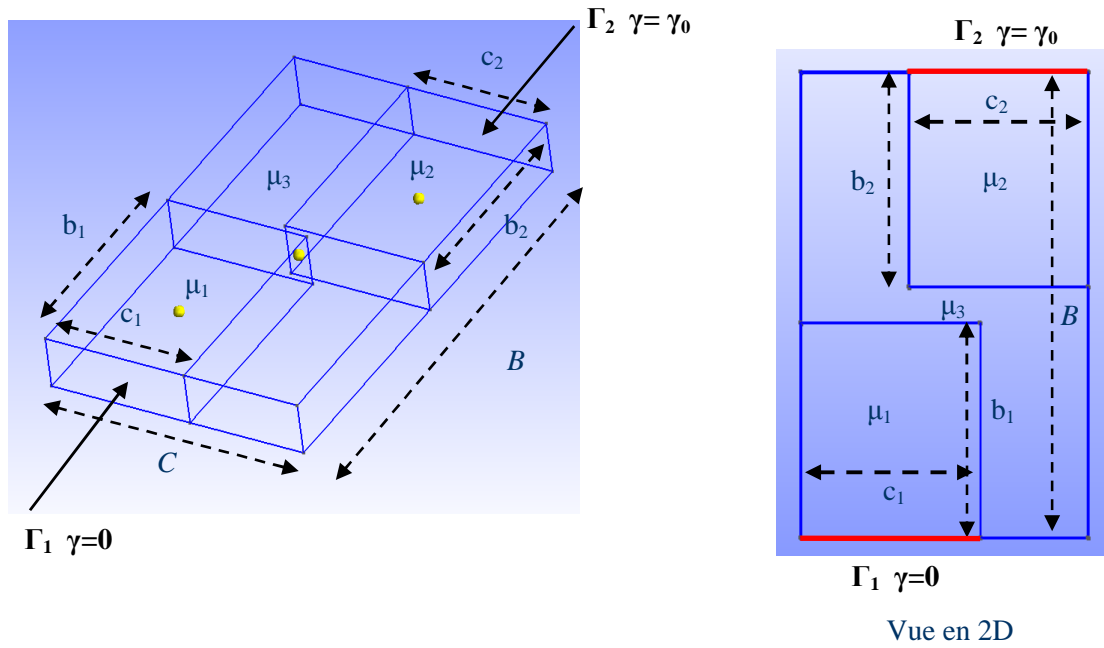


Figure 69. Système étudié

On impose une force magnétomotrice $\gamma_0=2$ entre les deux faces opposées Γ_1, Γ_2 et $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur le reste de la frontière. Les incertitudes sur la géométrie sont portées par les variables aléatoires c_1 et c_2 . On prend $B=6.5, C=4, b_1=b_2=3.235, \mu_1=\mu_2=1000$ et $\mu_3=1$. Les variables aléatoires c_1 et c_2 varient dans l'intervalle $[2.05, 2.5]$. On se propose de comparer les deux transformations présentées sur les Figure 70 et Figure 71:

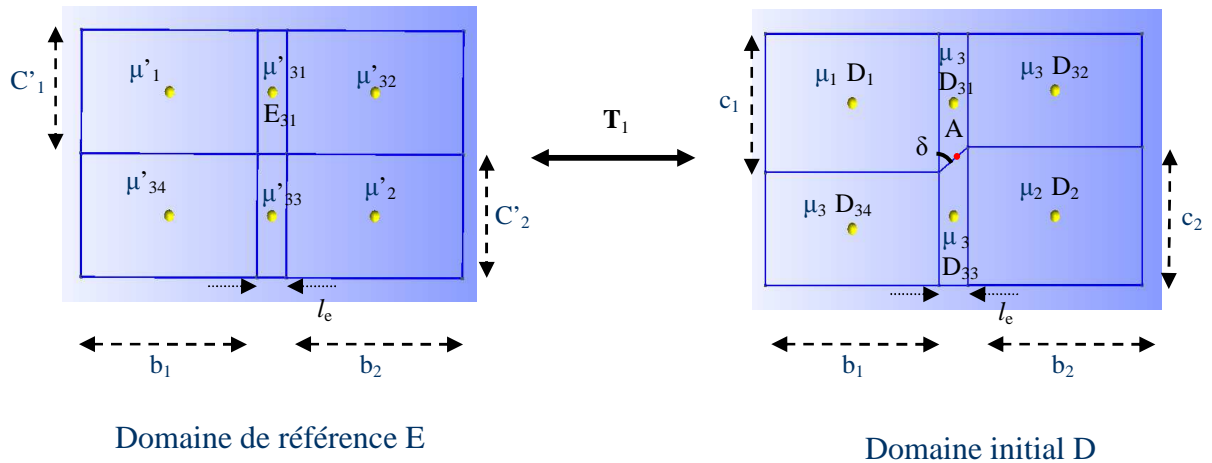


Figure 70. Transformation 1

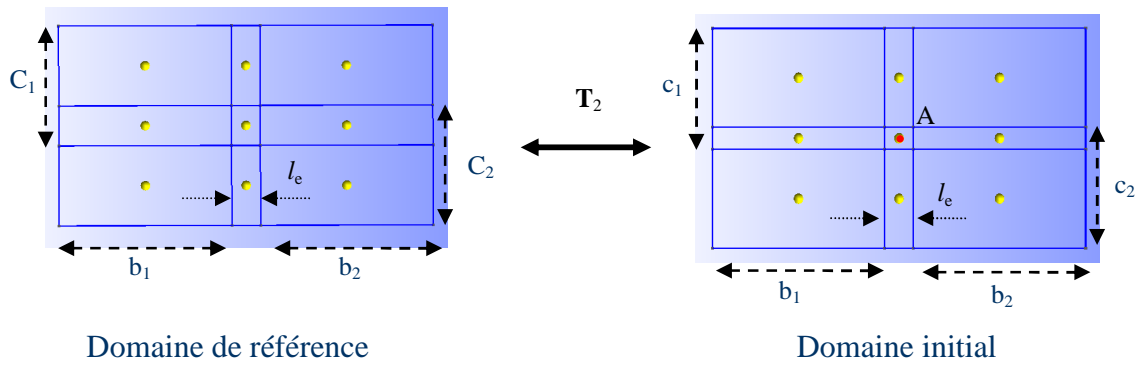


Figure 71. Transformation 2

On prend $C_1=C_2=2.1$ pour la transformation T_2 et $C'_1=C'_2=2$ pour la transformation T_1 . On peut constater que la transformation T_2 correspond à une « dilatation-compression » de chaque sous-domaine. Par contre, la transformation T_1 présente une déformation de type « cisaillement » pour transformer les sous-domaines E_{31} en D_{31} et E_{33} en D_{33} . Cette transformation génère une matrice $M'M$ avec un grand ratio r entre la valeur propre maximum et la valeur propre minimum comme on peut constater sur la Figure 72. Sur cette figure, on trace l'évolution du logarithme de ce ratio au point $A(B/2, C/2)$ (voir la Figure 70, la Figure 71) en fonction de la cotangente de l'angle δ qui correspond à la valeur de $(c_1 + c_2 - C)/l_e$ pour les deux transformations.

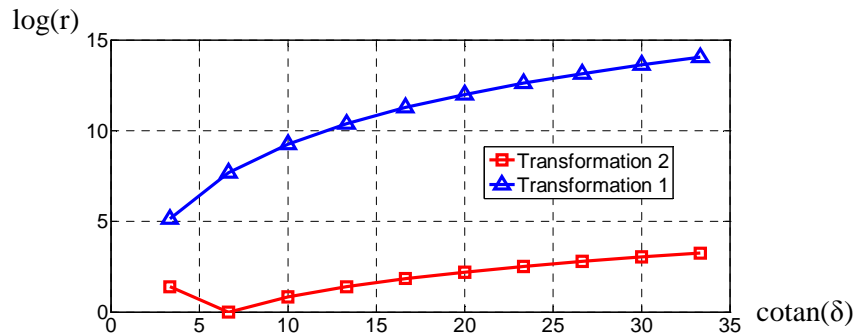


Figure 72. Rapport $r = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ au point A

Sur la Figure 73, on trace $r_2 = \log(1/\lambda_{min})$ au point A qui intervient dans l'expression de l'erreur numérique pour les deux formulations (2.90), (2.95) en fonction de $\cotan(\delta)$. On peut constater aussi que ce ratio est plus important dans le cas de la transformation 1 que dans le cas de la transformation 2.

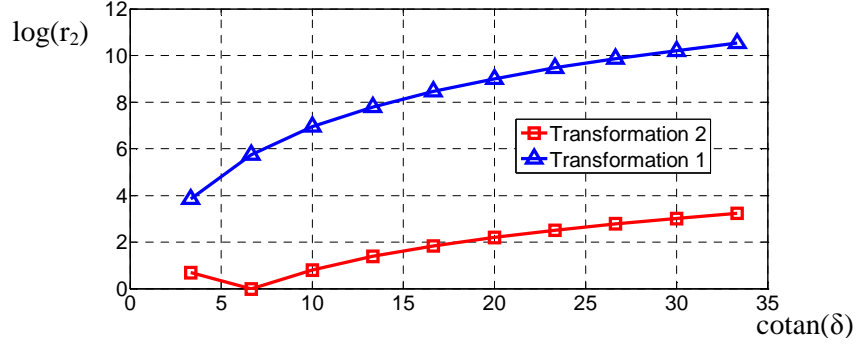


Figure 73. Rapport $r_2 = \log(1/\lambda_{\min})$ au point A

Maintenant, on trace sur la Figure 74 la répartition du rapport $r = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ dans le cas $c_1=c_2=2.2$. On constate que pour la transformation 1, il existe une zone (MNPQ) où ce ratio présente des valeurs très élevées.

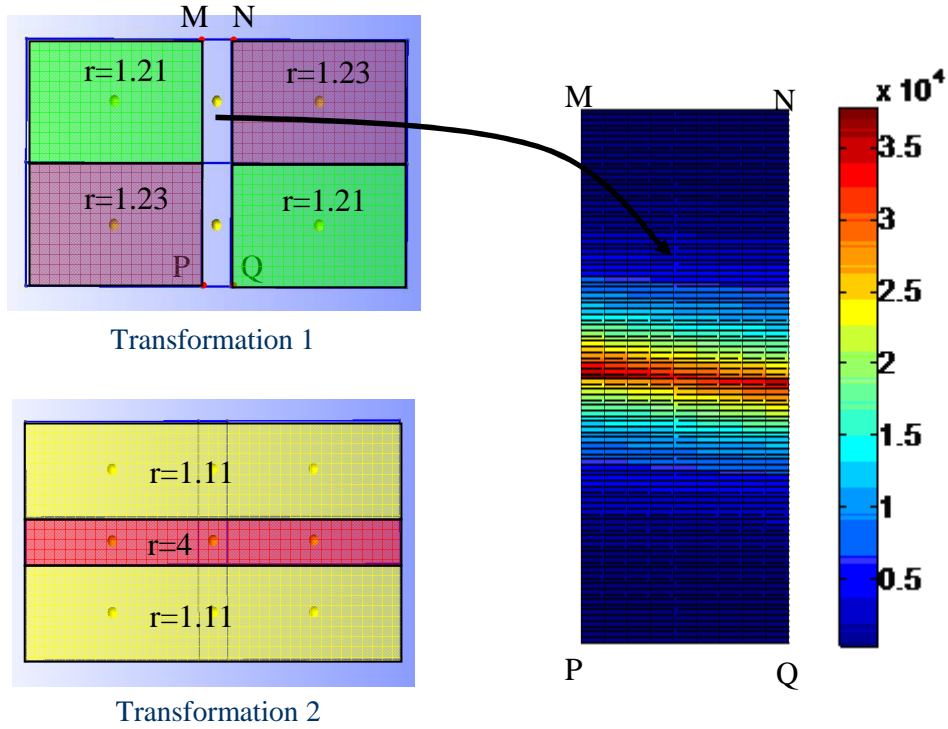


Figure 74. Répartition du rapport $r = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ dans le cas $c_1=c_2=2.2$

Finalement, il est possible d'évaluer l'erreur numérique a posteriori (er_p) en utilisant les résultats obtenus par les deux formulations en appliquant le théorème de l'hypercerce qui permet de calculer la distance de la solution numérique avec la solution exacte sans la connaître. Cet estimateur d'erreur s'écrit [18] :

$$\begin{aligned}
 er_p &= \int_E (\mathbf{H}'_{ad} - \mu'^{-1} \mathbf{B}'_{ad}) \mu' (\mathbf{H}'_{ad} - \mu'^{-1} \mathbf{B}'_{ad}) = \\
 &= \int_E (\mathbf{H}'_{ad} - \mathbf{H}'_{ex}) \mu' (\mathbf{H}'_{ad} - \mathbf{H}'_{ex}) + \int_E (\mathbf{B}'_{ad} - \mathbf{B}'_{ex}) \mu'^{-1} (\mathbf{B}'_{ad} - \mathbf{B}'_{ex})
 \end{aligned}
 \tag{2.97}$$

où $\mathbf{H}'_{ex}, \mathbf{B}'_{ex}$ sont le champ et l'induction magnétiques exacts et $\mathbf{H}'_{ad}, \mathbf{B}'_{ad}$ sont le champ et l'induction magnétiques admissibles du problème défini dans le domaine de référence. Ces champs $\mathbf{H}'_{ad}, \mathbf{B}'_{ad}$ sont obtenus en utilisant la formulation en potentiel scalaire et la formulation en potentiel vecteur :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}'_{ad} &= \text{grad}_x \tilde{\Omega} \\ \mathbf{B}'_{ad} &= \text{rot}_x \tilde{A}\end{aligned}\tag{2.98}$$

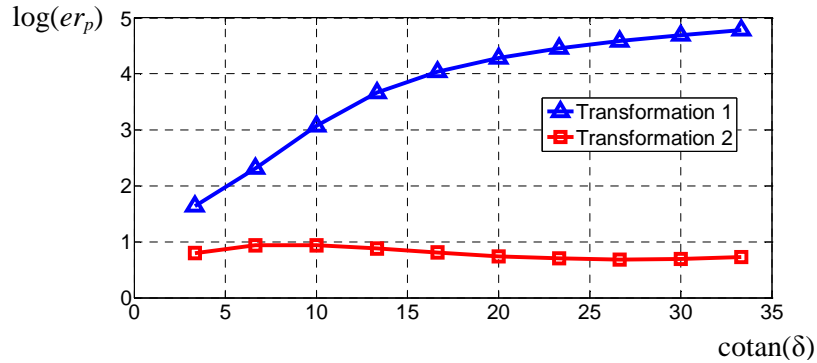


Figure 75. Erreur numérique en fonction de $\cotan(\delta)$

Sur la Figure 75, on a tracé l'évolution du logarithme de l'erreur a posteriori er_p déterminé par (2.97) en fonction de $\cotan(\delta)$. On constate que l'évolution des courbes des ratios de valeurs propres de $\mathbf{M}'\mathbf{M}$, liées à l'estimateur a priori, et celle de l'estimateur a posteriori sont cohérentes. Ceci montre que l'approche *a priori* permet d'évaluer l'influence des paramètres de la transformation en particulier les valeurs propres de $\mathbf{M}'\mathbf{M}$ sur l'erreur numérique.

De plus, la comparaison des erreurs introduites par les transformations montrent clairement l'intérêt de limiter le ratio entre les valeurs propres de $\mathbf{M}'\mathbf{M}$, ce qui revient à privilégier plutôt les transformations de type « compression » que « cisaillement ».

Dans les parties 2.1 et 2.2, des techniques de détermination de la transformation utilisée dans la méthode de transformation pour résoudre un problème aux incertitudes portées par la géométrie ont été discutées. Concernant l'exploitation des résultats, nous nous sommes jusqu'à présent focalisés principalement sur le calcul des grandeurs globales. Dans ce cas, une approche utilisant un chaos polynomial est bien adaptée pour l'approximation. Cependant, comme cela a été abordé dans la partie 1.4.1.3, pour certaines grandeurs locales, une approximation par un chaos polynomial peut ne pas être la plus pertinente. Ce phénomène peut s'expliquer par une discontinuité qui apparaît au niveau stochastique de la grandeur locale qui ne peut pas être prise en compte par un chaos polynomial classique. Rappelons que ce dernier est continu et infiniment dérivable. Une possibilité pour résoudre ce problème consiste à enrichir la base polynomiale [9, 29, 30] par des fonctions qui permettent de prendre en compte la discontinuité stochastique (voir

annexe 5). Dans la partie suivante, on va montrer que l'utilisation de la méthode de transformation permet de prendre en compte naturellement cette discontinuité.

2.3. Etude des grandeurs locales

Dans cette partie, on va montrer d'abord que la méthode de transformation est efficace pour traiter les discontinuités des grandeurs locales dans un problème aux incertitudes portées par la géométrie. Puis, un exemple analytique et un exemple numérique sont présentés pour l'illustration.

2.3.1. Discussion sur la discontinuité stochastique

On a vu dans l'exemple 2 de la partie 1.4.1.3 que l'utilisation d'un chaos polynomial pour approcher le champ magnétique dans le cas où les incertitudes sont portées par la géométrie peut ne plus être pertinente. Ce phénomène est expliqué par la discontinuité stochastique du champ magnétique. Par exemple, le champ magnétique en un point fixe du domaine D , qui peut se situer dans des sous-domaines de perméabilités différentes en fonction des réalisations possibles de la géométrie, possède cette discontinuité.

Comme on l'a vu dans la partie 1.4.2.3, la méthode de transformation consiste à transformer un problème aux incertitudes géométriques en un problème aux des incertitudes portées par la loi de comportement, défini sur un domaine de référence déterministe. Dans ce dernier problème, les points fixes du domaine de référence se situent toujours dans un même sous domaine. Il n'existe alors pas de discontinuités au niveau stochastique des grandeurs locales aux points fixes du domaine de référence. Par conséquent, dans le domaine de référence, le champ magnétique par exemple peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{H}'(X, \xi) \approx \mathbf{H}'^P(X, \xi) = \sum_{i=1}^P \mathbf{H}'_i(X) \Psi_i(\xi) \quad (2.99)$$

Puis, la solution sur le domaine D s'écrit :

$$\mathbf{H}^P(x, \xi) = \mathbf{M}(X(x, \xi), \xi) \cdot \mathbf{H}'^P(X(x, \xi), \xi) \quad (2.100)$$

On peut constater que pour un point $X = X_0$ donné, $\mathbf{M}(X, \xi)$ et $\mathbf{H}'^P(X, \xi)$ sont continus en fonction de ξ . Par contre, avec un $\xi = \xi_0$ donné $\mathbf{M}(X, \xi)$ et $\mathbf{H}'^P(X, \xi)$ peuvent être discontinus en fonction de X . Les points de discontinuité $X=X_0'$ sont ceux qui se situent sur les interfaces entre des matériaux. Par conséquent, pour un point $x=x_0$ donné, la discontinuité de $\mathbf{H}^P(x_0, \xi)$ en fonction de ξ peut être prise en compte par $\mathbf{M}(X(x_0, \xi), \xi)$ et $\mathbf{H}'^P(X(x_0, \xi), \xi)$. Dans la suite, on va illustrer cet aspect avec l'exemple analytique présenté dans la partie 1.4.1.3.

2.3.2. Exemple analytique

Revenons à l'exemple de magnétostatique 1D de la partie 1.4.1.3 :

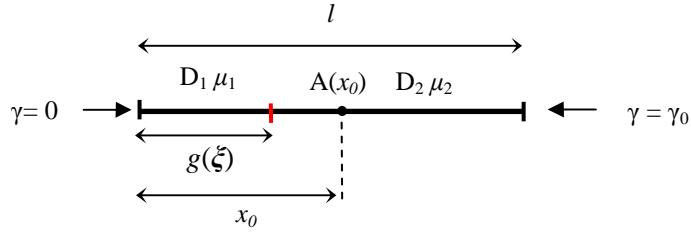


Figure 76. Système étudié

On s'intéresse à la composante suivant l'axe x_1 du champ magnétique au point A (Figure 76) qui prend analytiquement la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_A(x_0, \xi) &= \frac{\gamma_0 \mu_1}{\mu_2 g(\xi) + \mu_1 (l - g(\xi))} \quad \text{avec } g(\xi) < x_0 \\ \mathbf{H}_A(x_0, \xi) &= \frac{\gamma_0 \mu_2}{\mu_2 g(\xi) + \mu_1 (l - g(\xi))} \quad \text{avec } g(\xi) > x_0 \end{aligned} \quad (2.101)$$

Concernant la méthode de transformation, on peut ramener le problème défini sur la Figure 76 à un problème défini sur un domaine déterministe en utilisant la transformation suivante :

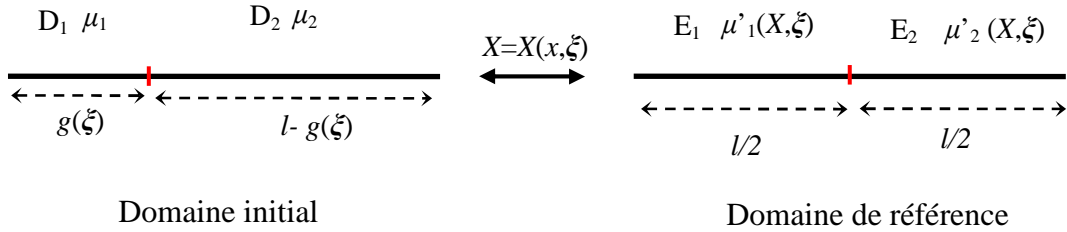


Figure 77. Transformation utilisée dans le cas 1D

$$X = \begin{cases} x \cdot \frac{l}{2g(\xi)} & \text{avec } x \leq g(\xi) \\ x \cdot \frac{l}{2(l-g(\xi))} + \frac{l(l-2g(\xi))}{2(l-g(\xi))} & \text{avec } x > g(\xi) \end{cases} \quad (2.102)$$

Cette transformation admet une matrice jacobienne (qui devient un scalaire dans ce cas 1D) suivante :

$$\mathbf{M}(X, \xi) = \frac{l}{2g(\xi)} I_{E_1}(X) + \frac{l}{2(l-g(\xi))} I_{E_2}(X) \quad (2.103)$$

avec $I_{E_i}(X)$, $i=1, 2$, la fonction indicatrice qui est égale à 1 dans le domaine E_i et zéro ailleurs. La perméabilité dans le domaine de référence prend la forme suivante :

$$\mu'(X, \xi) = \mu'_1 I_{E1}(X) + \mu'_2 I_{E2}(X) = \mu_1 \cdot \frac{l}{2g(\xi)} I_{E1}(X) + \mu_2 \cdot \frac{l}{2(l-g(\xi))} I_{E2}(X) \quad (2.104)$$

Le problème défini dans le domaine E admet la solution analytique suivante :

$$\mathbf{H}'(X, \xi) = \frac{2\gamma_0 g(\xi) \mu_2}{l(\mu_2 g(\xi) + \mu_1(l-g(\xi)))} I_{E1}(X) + \frac{2\gamma_0(l-g(\xi)) \mu_1}{l(\mu_2 g(\xi) + \mu_1(l-g(\xi)))} I_{E2}(X) \quad (2.105)$$

On peut constater que la solution (2.105) est continue en fonction de ξ pour un X donné. Par conséquent, elle peut être approchée par un chaos polynomial sous la forme (2.99). La solution dans le domaine initial D est obtenue par (2.100). On peut constater aussi que, pour une réalisation ξ donnée, le champ magnétique (2.105) est discontinu en fonction de X du fait de la présence des fonctions indicatrices $I_{E1}(X)$ et $I_{E2}(X)$. Comme X est une fonction en x et ξ le champ magnétique dans le domaine initial (2.100) peut être discontinu en fonction de ξ pour un x donné.

Sur la Figure 78, on trace l'évolution du champ magnétique au point A obtenu par la méthode d'enrichissement développée dans [9, 29, 30] (voir annexe 5) et celui obtenu par la méthode de transformation en utilisant (2.99) avec $P=8$ en comparant avec la solution exacte.

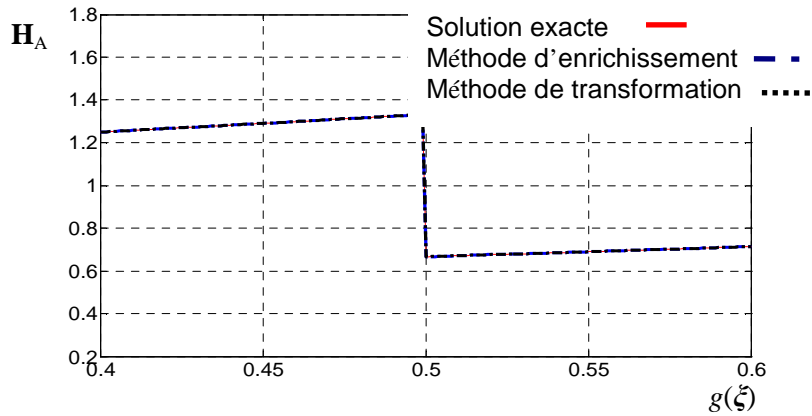


Figure 78. Champ magnétique au point A

Cet exemple montre que la méthode de transformation semble bien adaptée pour calculer des grandeurs locales.

2.3.3. Exemple numérique

On reprend le problème de magnétostatique, défini sur le domaine $D(\xi)$, présenté dans la partie 2.1.2.3 (Figure 43). Par contre, on fixe x_0, y_0, R (voir la partie 2.1.2.3). Les incertitudes géométriques sont modélisées par les variables aléatoires uniformes indépendantes $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ qui sont les rayons de deux dents en face du disque D_3 . Ces variables aléatoires uniformes sont définies dans l'intervalle $[a ; b]$. On peut alors représenter le vecteur aléatoire \mathbf{r} en fonction du vecteur aléatoire $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ avec ξ_1, ξ_2 deux variables aléatoires uniformes indépendantes dans l'intervalle $[-1,1]$.

L'objectif est de comparer la composante $\mathbf{H}_{x_2}(\xi)$ suivant l'axe Ox_2 du champ magnétique respectivement aux points Q_1, Q_2, Q_3 , obtenue par différentes méthodes. On approche d'abord la variable aléatoire $\mathbf{H}_{x_2}(\xi)$ par un chaos polynomial classique (2.99) en utilisant la méthode de transformation (méthode 1). Pour comparer les résultats obtenus par la méthode de transformation, la variable $\mathbf{H}_{x_2}(\xi)$ est approchée ensuite par un chaos polynomial en utilisant une méthode de remaillage (Figure 21) (méthode 2). Concernant la méthode 2, le chaos polynomial utilisé est soit classique ou soit enrichi (voir annexe 5) dépendant de la position du point étudié.

Le point Q_1 est fixé mais peut être localisé dans le sous domaine D_1 ou dans D_4 dépendant de la valeur de ξ_1 . Le point Q_2 est fixé mais il est localisé toujours dans D_4 pour toutes les valeurs de ξ_1 et ξ_2 . Le point Q_3 est localisé sur la surface de la dent D_1 mais reste toujours à l'intérieur de celle-ci. Ce point se déplace en fonction de la valeur de ξ_1 .

Tableau 7. Composante du champ magnétique suivant l'axe Ox_2 obtenue par les méthodes 1 et 2

	Point Q_1		Point Q_3		Point Q_2	
	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 1	Méthode 2
Valeur moyenne	1.45	1.47	3.4×10^{-3}	3.4×10^{-3}	3.12	3.14
Ecart-type	1.49	1.50	2.13×10^{-4}	2.17×10^{-4}	0.20	0.20

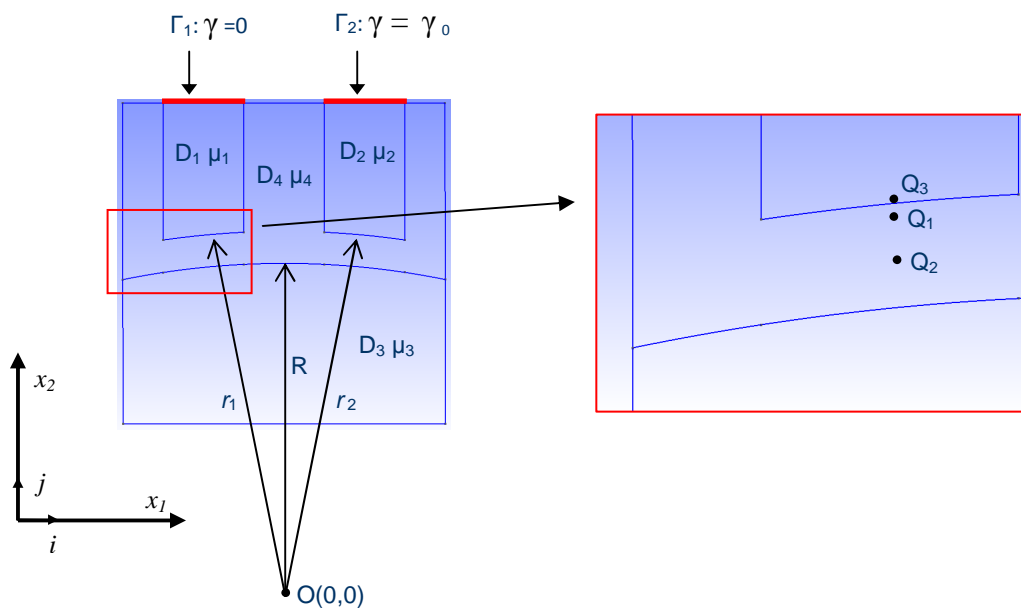


Figure 79. Problème magnétostatique

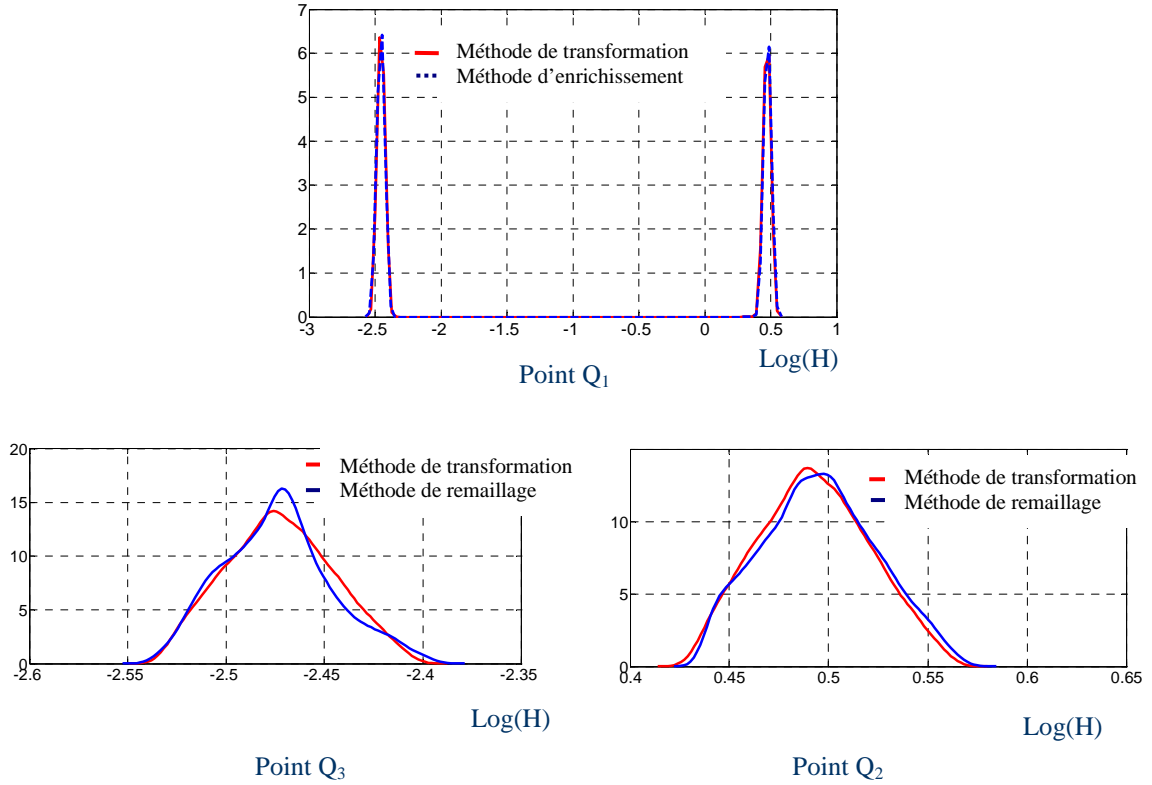


Figure 80. Densité de probabilités du champ magnétique aux points Q_1 , Q_2 , et Q_3

Concernant la méthode 2, on peut constater que le chaos polynomial classique est bien adapté pour approcher le champ magnétique aux points Q_2 et Q_3 . Ceci est dû au fait que ces points restent toujours dans le même sous-domaine de référence pour toutes les valeurs de ξ_1 et ξ_2 . La discontinuité au niveau stochastique ne se présente pas pour ce type de points. On peut constater aussi que le champ magnétique au point Q_3 qui devient fixe dans le domaine de référence peut être obtenu directement par la méthode de transformation.

Pour le point Q_1 , si on utilise la méthode 1, la discontinuité au niveau stochastique est alors naturellement prise en compte. Cependant, lorsque le problème est résolu directement dans le domaine $D(\xi)$ (méthode 2), un enrichissement est nécessaire pour accélérer la vitesse de convergence de l'approximation en chaos polynomial.

Dans le Tableau 7, on donne la valeur moyenne et l'écart-type de $\mathbf{H}_{x2}(\xi)$ obtenu par la méthode 1 et par la méthode 2. La densité de probabilité de $\mathbf{H}_{x2}(\xi)$ obtenue par la méthode des noyaux est présentée sur la Figure 80. On peut constater que ces deux méthodes donnent des résultats proches. Pour le point Q_1 , la densité de probabilité du champ magnétique présente deux modes dues à sa discontinuité au niveau stochastique.

2.4. Conclusion

Dans ce chapitre, on a comparé différentes méthodes pour déterminer une transformation aléatoire permettant de résoudre un problème aux incertitudes portées par la géométrie. Dans un cas simple,

une expression analytique de la transformation peut être trouvée. Par contre, dans les cas usuellement rencontrés en pratique, le recours à d'autres méthodes qu'analytique est nécessaire. Dans ce chapitre, on a introduit 2 méthodes. La première méthode est basée sur la résolution des équations de Laplace et la deuxième méthode est basée sur une transformation géométrique. Les avantages et les inconvénients de chaque méthode ont été discutés sur la base d'exemples.

En se basant sur ces méthodes de détermination de la transformation, on a également proposé une méthode dite « transformation discrète ». La transformation discrète peut être considérée comme équivalente à une déformation de maillage où les nœuds se déplacent en gardant la même connectivité. Cette transformation génère des matrices jacobiniennes de transformation constantes dans chaque élément et cela supprime l'erreur numérique du calcul des coefficients de la matrice de raideur. Cependant, dans des cas de grande variation de la géométrie, la perméabilité équivalente obtenue sur le domaine de référence peut ne pas être définie positive ce qui conduit à un problème mal posé.

Dans la méthode de transformation, le choix de la transformation joue un rôle non négligeable sur l'erreur numérique de la solution obtenue. Un estimateur d'erreur *a priori* a été développé qui permet d'établir un critère de choix de la transformation. Ce critère est basé sur les valeurs propres de $\mathbf{M}'\mathbf{M}$ où \mathbf{M} est la matrice jacobienne de la transformation. Dans ce critère, plus le rapport entre les valeurs propres de $\mathbf{M}'\mathbf{M}$ est proche de l'unité, plus la transformation est de bonne qualité. Dans un exemple d'application, on a montré qu'il est préférable de prendre une transformation de type « dilatation » que de type « cisaillement ».

Enfin, on a analysé le calcul de grandeurs locales. Dans un problème aux incertitudes portées par la géométrie, il existe des grandeurs locales qui présentent des discontinuités au niveau stochastique. La méthode de transformation permet de prendre en compte cette discontinuité naturellement sans avoir recours à un enrichissement de la base du chaos polynomial.

Les cas académiques montrent que la méthode de transformation conduit à des résultats convaincants en particulier dans le cas de petites variations. Il reste maintenant à l'appliquer sur un cas plus proche des besoins industriels ce qui va être fait dans le chapitre 3.

Chapitre 3 : Application

Dans ce chapitre, on se propose en utilisant un modèle éléments finis mettant en œuvre la méthode de transformation d'évaluer l'impact d'incertitudes portées par certaines dimensions caractéristiques d'un stator sur les performances d'une machine électrique. Il se compose de trois parties. La première partie porte sur la campagne de mesure qui a permis d'obtenir un échantillon des rayons des dents pour 5 stators et sur l'analyse de ces données. Des calculs numériques seront effectués pour évaluer l'influence des variations du rayon des dents sur le couple en utilisant la méthode de transformation proposée dans le chapitre précédent. Dans la deuxième partie, on cherche à modéliser les incertitudes du rayon des dents par un modèle probabiliste. Puis, ce modèle probabiliste sera utilisé pour propager les incertitudes du rayon des dents au travers du modèle numérique. La troisième partie porte sur l'analyse de l'influence de la largeur des dents sur le flux magnétique traversant des phases de stator dans le cas non linéaire.

3.1. Présentation du stator

Le stator étudié est un stator d'alternateur automobile qui possède 36 dents. Sur la Figure 81 sont données les dimensions nominales du stator.



Le rayon et la largeur nominal d'une dent sont respectivement de $R_1=49.5\text{mm}$ et $T=4.1\text{mm}$. Les rayons intérieur et extérieur de la culasse sont respectivement de $R_2=61.2\text{mm}$ et $R_3=65.5\text{mm}$. La longueur du stator est : $H=31.5\text{mm}$. Le modèle numérique utilisé est présenté sur la Figure 82:

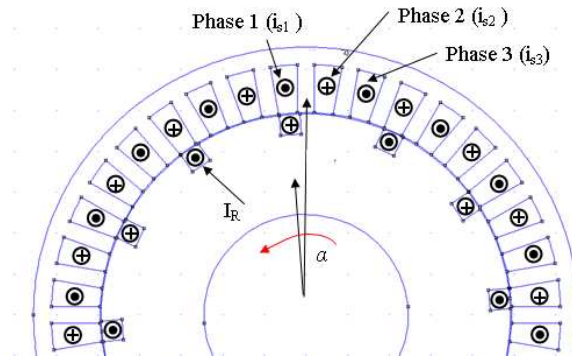


Figure 82. Machine étudiée

Dans la suite, nous ne tiendrons compte que des incertitudes portées par les dimensions du stator. Sachant que les caractéristiques des matériaux subissent aussi des variations comme les ont montrés les travaux de thèse de R. Ramarotafika [66]. Les dimensions du rotor sont supposées parfaitement connues. Par ailleurs, pour limiter le temps de calcul, nous travaillerons sur un modèle 2D. Aussi, la structure réelle à griffes du stator ne pourra être modélisée. Dans la suite, nous supposons que le rotor est bobiné avec un nombre de paires de pôles égal à celui du rotor à griffes c'est-à-dire de 6 paires de pôles. La valeur nominale de l'entrefer est aussi maintenue et est égale à $300\mu\text{m}$. Une représentation de l'ensemble de la machine étudiée est donnée Figure 82.

Les incertitudes au niveau du stator seront portées par le rayon des dents r_d et par la largeur des dents l_d . Comme le stator possède 36 dents, nous avons donc 36 variables aléatoires pour caractériser le rayon des dents et autant pour la largeur des dents (Figure 83).

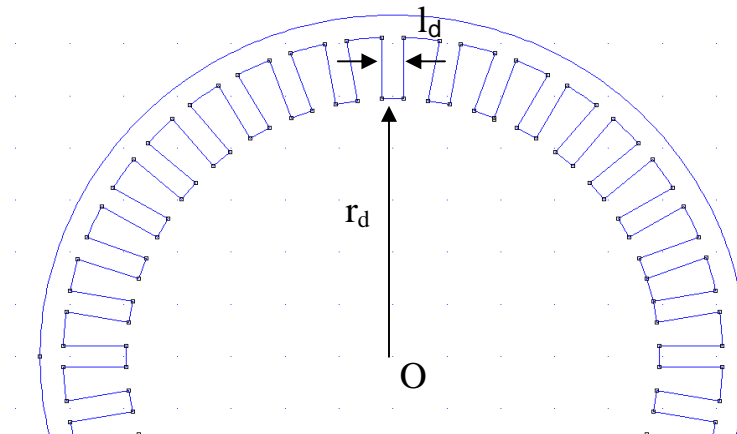


Figure 83. Rayon et largeur des dents qui sont considérés comme variables aléatoires

L'inducteur du stator est alimenté par un courant I_R . Le stator est triphasé et est alimenté par trois courants i_{s1} , i_{s2} , i_{s3} . Le matériau ferromagnétique utilisé dans les études qui suivent est supposé linéaire ou non mais toujours parfaitement connu.

3.2. Mesures du rayon des dents

Dans cette partie, on va présenter d'abord les mesures du rayon des dents pour 5 stators référencés S0, S1, S2, S7, S20. On utilisera ensuite un modèle numérique mettant en œuvre la méthode de transformation pour évaluer l'influence de ces dimensions mesurées sur le couple à vide de la machine. On suppose dans cette partie que la surface des dents est lisse dans le plan Ox_1x_2 (Figure 84) et que la largeur des dents est constante et égale à la largeur nominale.

3.2.1. Description des mesures effectuées

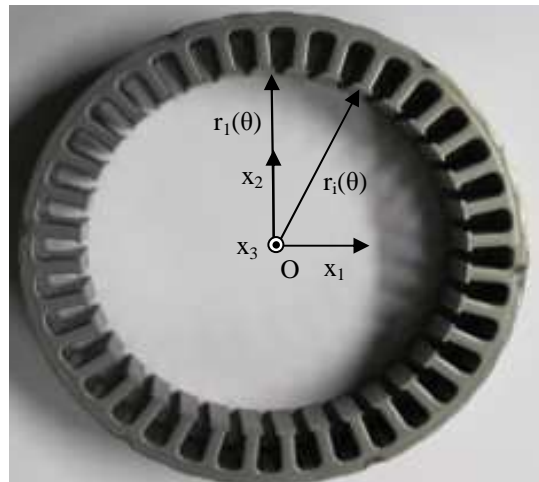


Figure 84. Etude sur le rayon des dents

On divise chaque stator en 30 couches suivant la profondeur Ox_3 ce qui nous donne pour chaque dent 30 valeurs du rayon (Figure 84-Figure 85). Comme le stator compte 36 dents, on obtient au total $30 \times 36 = 1080$ mesures pour chaque stator. Ces mesures ont été effectuées au centre de métrologie d'Arts et Métiers ParisTech qui fait partie du Laboratoire de Mécanique de Lille (LML).

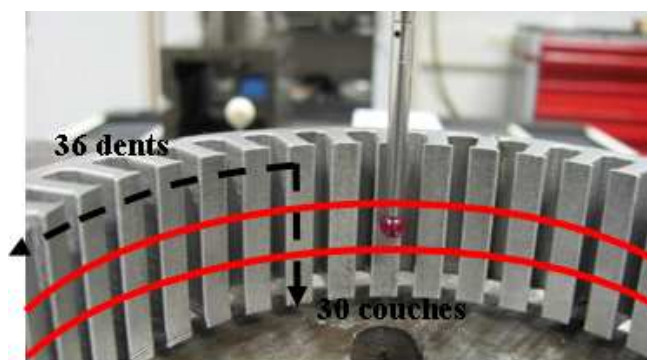


Figure 85. Division du stator en 30 couches

A partir de ces 1080 valeurs de rayon des dents, on trace 5 histogrammes pour les 5 stators qui sont présentés sur la Figure 86.

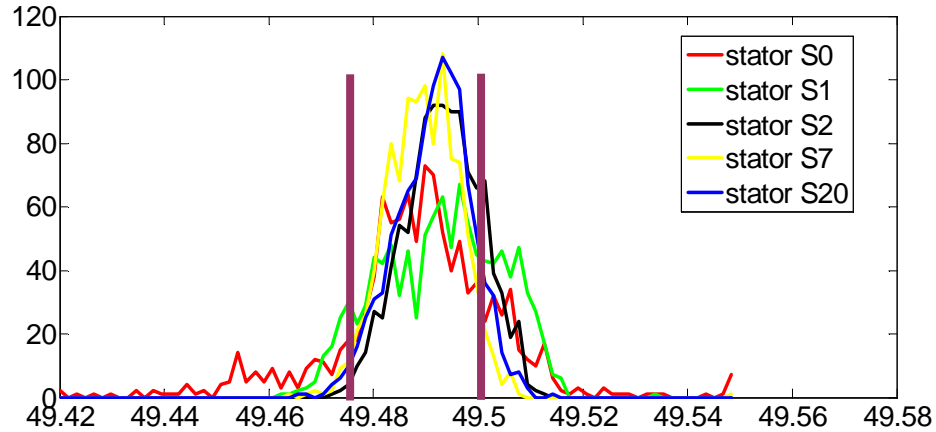


Figure 86. Histogramme du rayon des dents pour les 5 stators caractérisés

Les traits verticaux représentent les rayons maximum et minimum de l'intervalle de tolérance autorisé. On peut constater qu'un certain nombre de valeurs sont à l'extérieur de l'intervalle de tolérance. On peut constater aussi que la répartition des valeurs varie d'un stator à l'autre et que donc les incertitudes ne semblent pas a priori suivre une même loi même si on retrouve à chaque fois une forme « cloche ».

3.2.2. Calcul du couple à vide

Dans la suite, des calculs numériques du couple à vide utilisant les mesures effectuées seront réalisés. On s'intéresse à la grandeur suivante (somme des couples produits par chacune des 30 couches):

$$C(\alpha) = \sum_{i=1}^{30} C_i(\alpha) \quad (3.1)$$

Le couple $C_i(\alpha)$ est égal à la somme des couples $C_i(\alpha)$ de chaque couche calculés (Figure 82) en prenant comme rayon de dents ceux mesurés pour la couche i . Les autres dimensions sont égales aux dimensions nominales. Le couple total est la somme des contributions de chaque couche. On introduit aussi deux stators fictifs S_{\min} et S_{\max} qui correspondent respectivement aux cas où les rayons des dents sont tous égaux soit à la valeur maximale soit à la valeur minimale de l'intervalle de tolérance.

On s'intéresse aux couples à vide, ce qui signifie que $i_{s1} = i_{s2} = i_{s3} = 0$. Le rotor et le stator sont constitués respectivement d'un matériau de perméabilités relatives $\mu_1 = 1000$ et $\mu_2 = 3520$ supposées constantes.

Pour évaluer les couples $C_i(\alpha)$ avec différentes géométries (différents rayons de dent) la méthode de transformation introduite au chapitre précédent a été mise en oeuvre. Les détails de la transformation utilisée sont décrits dans la suite.

3.2.2.1 Description de la transformation

On déterminera une transformation d'un domaine de référence en un domaine réel avec comme paramètres les 36 rayons de dent et les 36 largeurs de dent. Cette transformation sera utilisée également dans la partie 3.3 où l'on étudie l'effet de la largeur des dents sur le flux.

Le domaine de référence correspond à la géométrie du stator dont les dimensions sont les dimensions nominales. On utilisera une transformation discrète (voir la partie 2.1.3) qui sera déduite d'une transformation continue qui sera décrite dans la suite. Rappelons qu'une transformation discrète peut être considérée comme équivalente à une déformation de maillage où les nœuds se déplacent en gardant la même connectivité. Le maillage du domaine de référence utilisé est présenté sur la Figure 87.

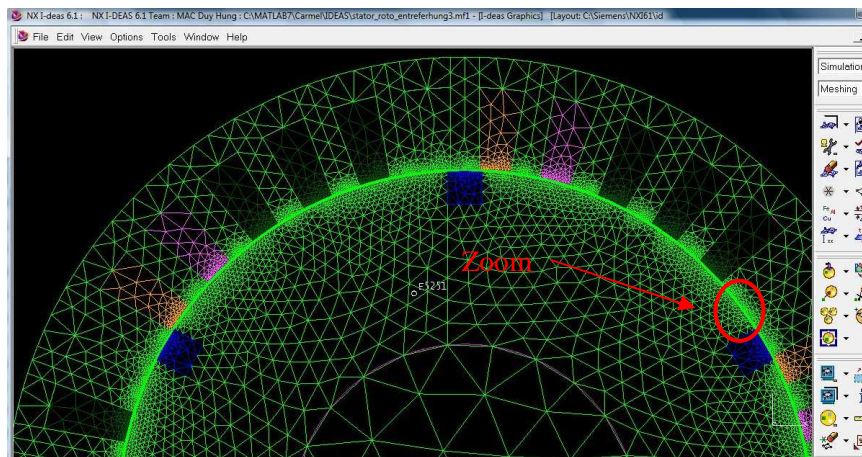


Figure 87. Maillage utilisé pour le domaine de référence

Le maillage 2D comporte 21810 éléments et 21992 nœuds. Le maillage au niveau de l'entrefer comprend 3 couches d'éléments. La ligne de glissement qui permettra de prendre en compte le mouvement pour la méthode du pas bloqué [63, 64] est présentée sur la Figure 88.

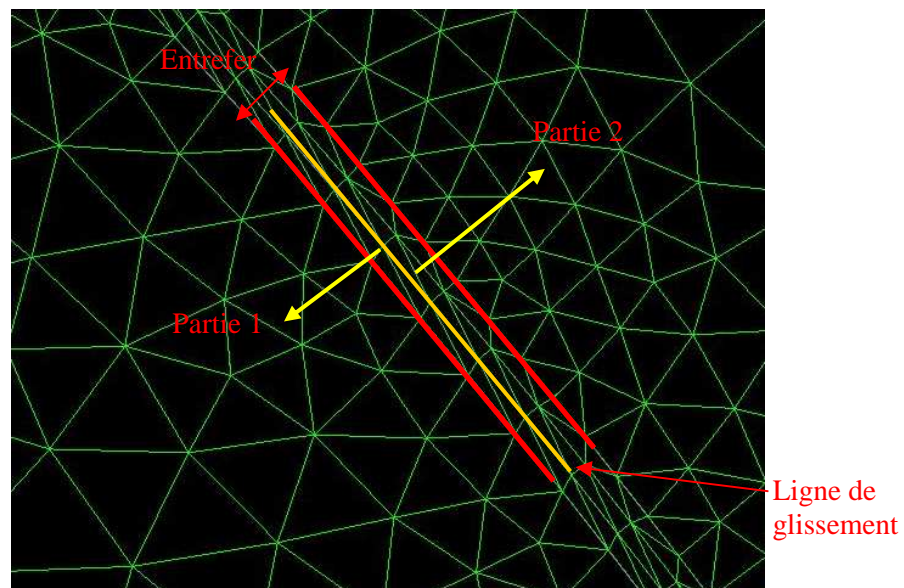


Figure 88. Maillage dans l'entrefer comportant 3 couches d'éléments et indication de la ligne de glissement

Concernant la détermination de la transformation, la machine est divisée en 2 parties : partie 1 à l'intérieur et partie 2 à l'extérieur de la ligne de glissement. La transformation associée à la partie 1 est l'identité (aucune modification). Par contre, sur la partie 2 qui supporte les dimensions variables, il est nécessaire de définir une transformation.

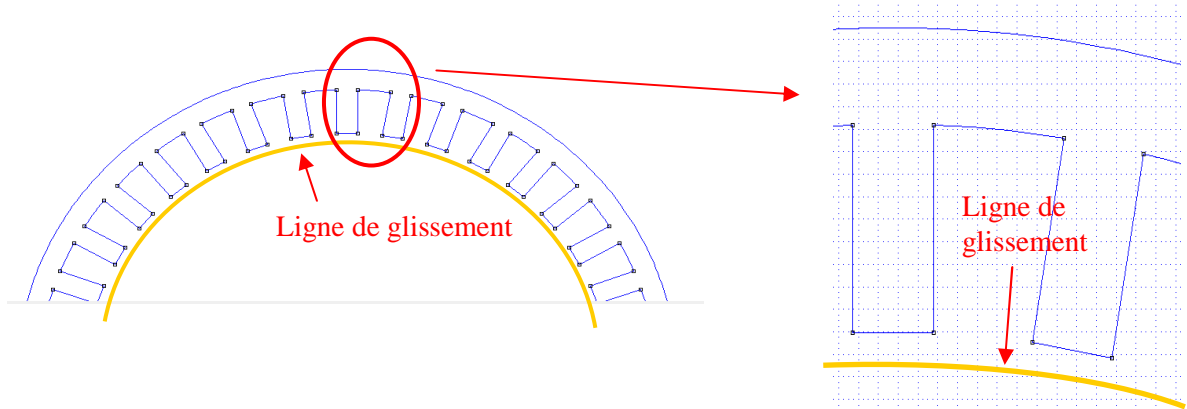


Figure 89. Présentation de la partie 2 où est définie une transformation

On divise la partie 2 du domaine de référence et du domaine initial en 36 zones identiques qui sont délimitées par des traits pointillés sur la Figure 90.

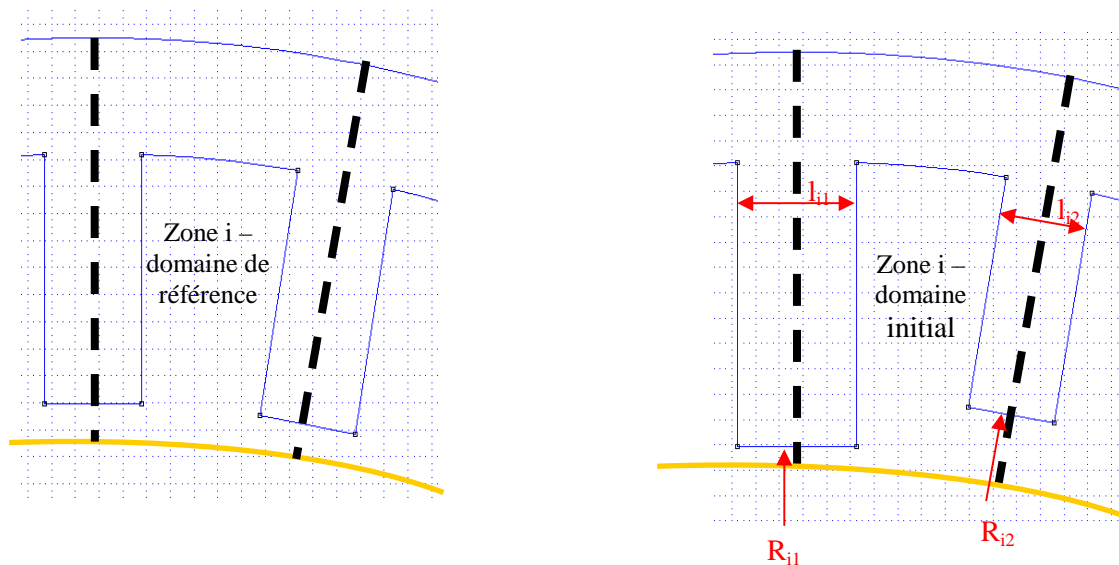


Figure 90. Division de la partie 2 en 36 zones

La transformation est déterminée pour chaque zone en assurant la continuité au niveau des interfaces entre les zones i et $i+1$ et également entre la partie 1 et la partie 2. Pour cette dernière contrainte, on doit imposer que les points situés sur la ligne de glissement restent immobiles. Dans

la suite, on ne détaille que la transformation pour une zone. Pour les autres zones la transformation est déterminée d'une façon identique.

On divise alors la zone i du domaine de référence et du domaine initial en 9 sous domaines E_j et $D_j, j=1:9$ présentés sur la Figure 91.

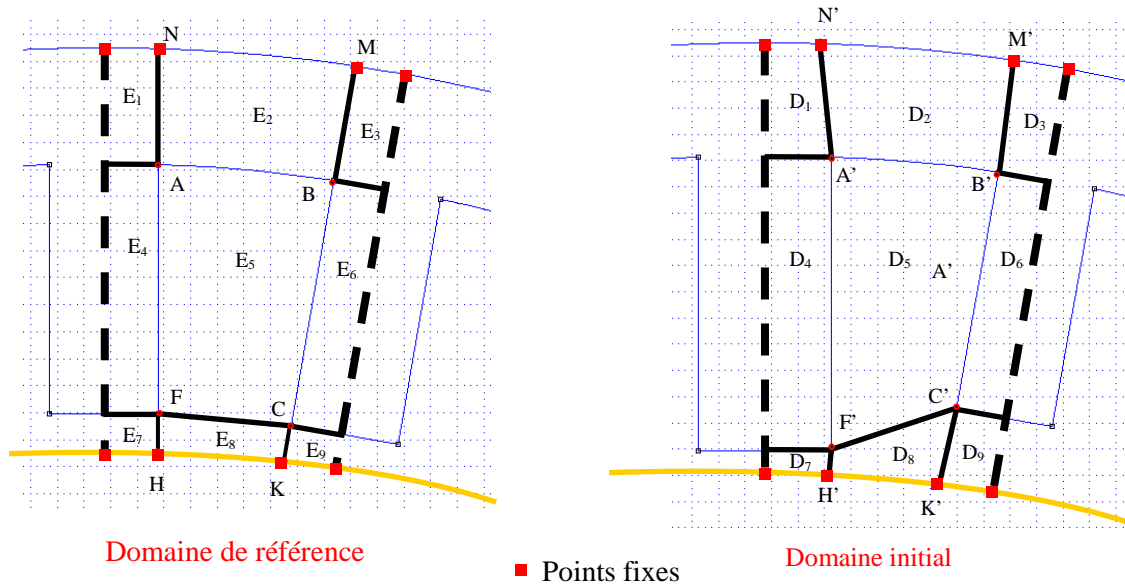


Figure 91. Division de la zone i en 9 sous domaines

La transformation de la zone i du domaine de référence est réalisée en déterminant les 9 transformations des sous domaines E_j en D_j . Dans la suite, pour illustrer la démarche, on va détailler la transformation de E_5 ($ABCF$) en D_5 ($A'B'C'F'$). Les transformations relatives aux autres sous domaines sont données en annexe VI.

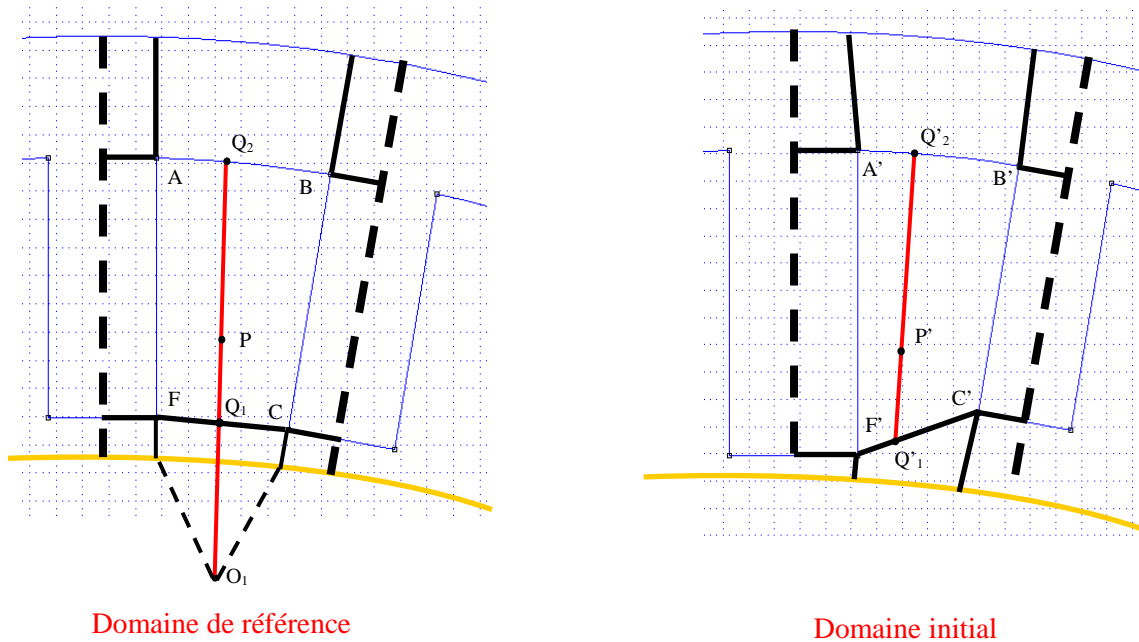


Figure 92. Définition de l'ensemble des segments du sous domaine E_5

Le point O_1 est l'intersection de AF et BC (Figure 92). Le domaine E_5 peut alors être considéré comme un ensemble de segments Q_1Q_2 avec Q_2 appartenant à AB et Q_1 appartenant à FC. Les coordonnées du point Q'_1 dans le domaine D_5 , image du point Q_1 , sont déterminées par :

$$\begin{aligned}(x_{1Q'_1} - x_{1F'}) &= (x_{1C'} - x_{1F'}) \cdot \frac{Q_1F}{CF} \\ (x_{2Q'_1} - x_{2F'}) &= (x_{2C'} - x_{2F'}) \cdot \frac{Q_1F}{CF}\end{aligned}\quad (3.2)$$

avec $(x_{1Q'_1}, x_{2Q'_1}), (x_{1F'}, x_{2F'}), (x_{1C'}, x_{2C'})$ sont les coordonnées du point Q'_1, F', C' respectivement. Rappelons que les coordonnées des points A', B', C', F' sont déterminées en fonction des valeurs de $R_{i1}, R_{i2}, l_{i1}, l_{i2}$ (Figure 90). Le point Q'_2 , image dans le domaine D_5 du point Q_2 , est déterminé par :

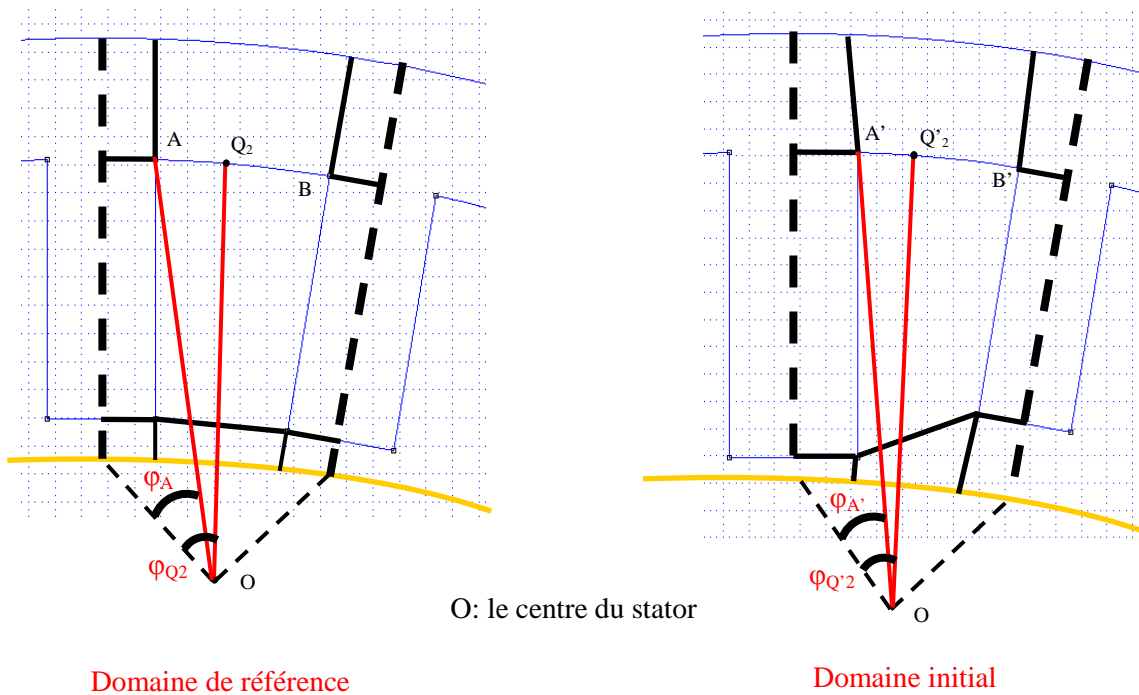


Figure 93. Angles $\varphi_A, \varphi_{A'}, \varphi_{Q_2}, \varphi_{Q'_2}$

$$\begin{aligned}x_{1Q'_2} &= R_2 \sin(\varphi_{Q'_2}) \\ x_{2Q'_2} &= R_2 \cos(\varphi_{Q'_2})\end{aligned}\quad (3.3)$$

avec $R_2=61.2\text{mm}$ (Figure 81) et l'angle $\varphi_{Q'_2}$ déterminé par :

$$(\varphi_{Q'_2} - \varphi_{A'}) = (\varphi_{B'} - \varphi_{A'}) \cdot \frac{(\varphi_{Q_2} - \varphi_A)}{(\varphi_B - \varphi_A)}\quad (3.4)$$

avec:

$$\begin{aligned}
\varphi_{A'} &= \arcsin\left(\frac{x_{1A'}}{R_2}\right); \quad \varphi_A = \arcsin\left(\frac{x_{1A}}{R_2}\right) \\
\varphi_{B'} &= \arcsin\left(\frac{x_{1B'}}{R_2}\right); \quad \varphi_B = \arcsin\left(\frac{x_{1B}}{R_2}\right) \\
\varphi_{Q_2} &= \arcsin\left(\frac{x_{Q_2}}{R_2}\right)
\end{aligned}
\tag{3.5}$$

Le segment $Q'_1Q'_2$, image de Q_1Q_2 dans le domaine D_5 , est alors parfaitement défini.

Pour un point P quelconque dans le domaine E_5 , on détermine le segment Q_1Q_2 auquel le point P appartient. Le point P', image de P, appartient alors à $Q'_1Q'_2$ et peut être déterminé par :

$$\begin{aligned}
(x_{1P'} - x_{1Q'_1}) &= (x_{1Q'_2} - x_{1Q'_1}) \cdot \frac{Q_1P}{Q_2Q_1} \\
(x_{2P'} - x_{2Q'_1}) &= (x_{2Q'_2} - x_{2Q'_1}) \cdot \frac{Q_1P}{Q_2Q_1}
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

La transformation du sous domaine E_5 en D_5 est alors finalement déterminée. Les transformations pour les autres sous domaines sont données dans l'annexe VI. Cette transformation a été intégrée dans le code Code_Carmel du L2EP.

3.2.2.2. Résultats obtenus

La transformation déterminée auparavant permet pour chaque couche i d'un stator donné d'effectuer un calcul de couple avec les 36 rayons mesurés. On utilise le maillage présenté sur la Figure 87.

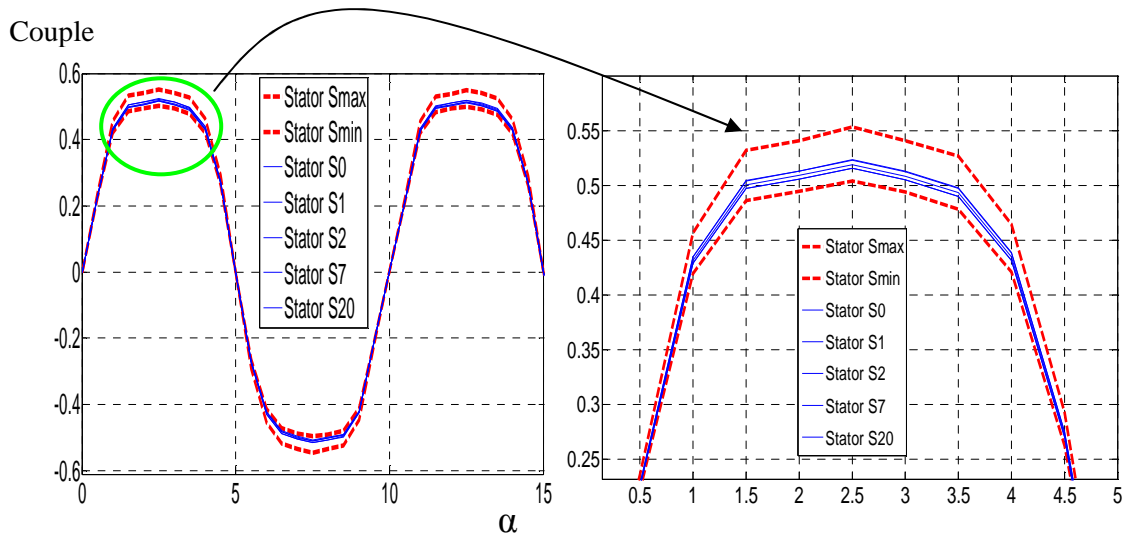


Figure 94. Evolution du couple à vide pour les différents stators et pour les deux stators S_{min} et S_{max} , stators ayant un rayon de dent constant égal respectivement au rayon minimal et maximal

Les résultats pour chaque stator sont présentés sur la Figure 94. Les courbes en trait discontinu correspondent aux cas des stators notés S_{max} et S_{min} qui possèdent des rayons qui sont constants et

égaux respectivement à: $R_{\max}=49.5\text{mm}$, $R_{\min}=49.475\text{mm}$ qui sont les rayons maximal et minimal de l'intervalle de tolérance. Les courbes en trait continu correspondent aux cas des stators S0, S1, S2, S7, S20. On peut constater que les courbes correspondant aux stators réels restent encadrées par les courbes obtenues par S_{\min} et S_{\max} . De plus, on constate qu'elles sont très proches les unes des autres. Aussi, même si on a constaté que certaines valeurs de rayons mesurées sont en dehors de l'intervalle de tolérance (Figure 86), la variation des couples entre eux dans le cas des stators S0, S1, S2, S7, S20 est relativement faible. On constate donc ici qu'une approche par intervalles consistant à faire des calculs pour des valeurs extrêmes des entrées pour déterminer le domaine de variation d'une grandeur sortie d'intérêt n'est pas nécessairement adaptée. Il est nécessaire de prendre en compte les corrélations entre les différentes variables aléatoires d'entrée qui induisent ici des phénomènes d'auto-compensation conduisant à une réduction de la variabilité du couple. Dans la suite, les mesures sur les rayons sont utilisées pour construire un modèle probabiliste des incertitudes relatives à ces rayons.

3.3. Modèle probabiliste

Pour prendre en compte les incertitudes portées par les rayons, on peut utiliser *a priori* un modèle probabiliste basé sur un vecteur de variables $\mathbf{r}(\theta) = (r_1(\theta), r_2(\theta), \dots, r_{36}(\theta))$. Cependant, dans ce modèle, le nombre de variables aléatoires égal à 36 est relativement élevé, ce qui peut conduire à un accroissement du temps de calcul dans une modélisation stochastique. On va chercher dans la suite un modèle réduit avec un nombre de variables aléatoires plus faible.

Dans le cadre de ce travail, on limite notre approche en 2D, on ne considère pas ici la variabilité au niveau de la profondeur. Ce travail s'appuie fortement sur les résultats obtenus dans le master de Shaoqu Zheng : « *Modeling and Inclusion of Geometric Uncertainties in the Assessment of a Stator* » effectué dans le cadre d'une collaboration avec Thierry Correbits, chercheur au LML (Laboratoire de Mécanique de Lille).

3.3.1. Propriété d'un modèle réduit

Dans cette partie, on s'intéresse à un modèle réduit qui a pour objectif de diminuer le nombre de variables aléatoires d'entrée qui est égal initialement à 36 pour chaque couche du stator. On s'intéresse aux écarts entre le rayon mesuré pour la dent i avec le rayon nominal:

$$e_i(\theta) = r_i(\theta) - R_i \quad \text{avec } i = 1 : 36 \quad (3.7)$$

avec $R_i=49.5\text{mm}$ le rayon nominal. Lorsque ces écarts sont modélisés sous forme de variables aléatoires, le rayon $r_i(\theta)$ de la dent i est obtenu par :

$$r_i(\theta) = R_i + e_i(\theta) \quad \text{avec } i = 1 : 36 \quad (3.8)$$

On s'intéresse à l'approximation suivante de ces écarts $e_i(\theta)$:

$$e_i(\theta) \approx \widehat{e}_i^n(\theta) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(\theta) \sin(ki \frac{\pi}{18}) + \sum_{k=0}^n \beta_k(\theta) \cos(ki \frac{\pi}{18}) \quad \text{avec } i = 1:36 \quad (3.9)$$

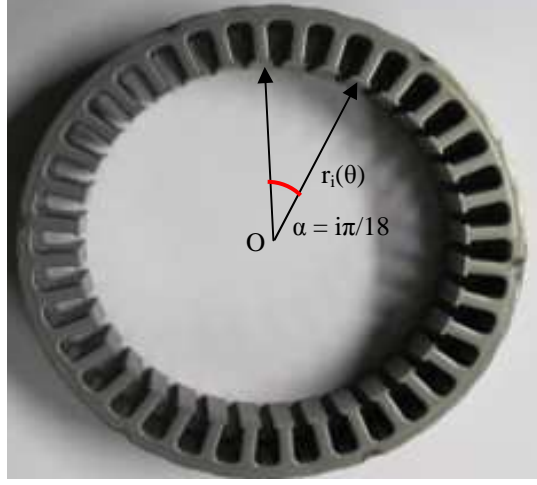


Figure 95. Réduction du modèle

avec $\alpha_k(\theta)$, $\beta_k(\theta)$ les variables aléatoires à déterminer. Le nombre de dents est de 36. Alors, le nombre maximum de termes $\alpha_k(\theta)$, $\beta_k(\theta)$ sera 36 et donc n est inférieur à 18. La formulation (3.9) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\widehat{\mathbf{e}}^n = \mathbf{A} \cdot \Lambda \quad (3.10)$$

avec:

$$\widehat{\mathbf{e}}^n(\theta) = \begin{bmatrix} \widehat{e}_1^n(\theta) \\ \widehat{e}_2^n(\theta) \\ \widehat{e}_3^n(\theta) \\ \dots \\ \widehat{e}_{36}^n(\theta) \end{bmatrix}; \Lambda(\theta) = \begin{bmatrix} \beta_0(\theta) \\ \alpha_1(\theta) \\ \beta_1(\theta) \\ \dots \\ \alpha_n(\theta) \\ \beta_n(\theta) \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\frac{\pi}{18}) & \cos(\frac{\pi}{18}) & \dots & \sin(n\frac{\pi}{18}) & \cos(n\frac{\pi}{18}) \\ 1 & \sin(\frac{2\pi}{18}) & \cos(\frac{2\pi}{18}) & \dots & \sin(n\frac{2\pi}{18}) & \cos(n\frac{2\pi}{18}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sin(\frac{36\pi}{18}) & \cos(\frac{36\pi}{18}) & \dots & \sin(n\frac{36\pi}{18}) & \cos(n\frac{36\pi}{18}) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

A partir de (3.9), le nombre de variables aléatoires peut être réduit de 36 à $2n+1$. Les réalisations de $\alpha_k(\theta_0)$, $\beta_k(\theta_0)$ (θ_0 représente une réalisation relative à une couche) peuvent être évaluées à partir des mesures $e_i(\theta_0)$ de e_i , $i=1:36$ par la méthode des moindres carrés :

$$([\alpha_k(\theta_0)]_{k=1,n}, [\beta_k(\theta_0)]_{k=0,n}) = \arg \text{Min} \sum_{i=1}^{36} (e_i(\theta_0) - \widehat{e}_i^n(\theta_0))^2 \quad (3.12)$$

Ce qui nous donne :

$$\Lambda(\theta_0) = (\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}' \cdot \mathbf{e}(\theta_0) \quad (3.13)$$

avec

$$\mathbf{e}(\theta_0) = \begin{bmatrix} e_1(\theta_0) \\ \dots \\ e_{36}(\theta_0) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Rappelons que pour chaque stator, on a les mesures de rayons pour 30 couches. On a alors 30 mesures de $\mathbf{e}(\theta_0) : e_j(\theta_0), j=1:30$. Par conséquent, on obtient 30 valeurs $\Lambda_j(\theta_0), j=1:30$ de $\Lambda(\theta)$ pour chaque stator. Une approximation des rayons utilisant (3.10) pour chaque couche est donnée par :

$$\widehat{e}_j^n(\theta_0) = \mathbf{A} \cdot \Lambda_j(\theta_0) \quad \text{avec } j = 1:30 \quad (3.15)$$

Pour évaluer l'exactitude du modèle (3.9), on évalue la grandeur suivante pour différents ordres n du développement (3.9) :

$$y_n(\theta_0) = 1 - \varepsilon_n(\theta_0) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{30} \left\| e_j(\theta_0) - \widehat{e}_j^n(\theta_0) \right\|^2}{\sum_{j=1}^{30} \left\| e_j(\theta_0) \right\|^2} \quad (3.16)$$

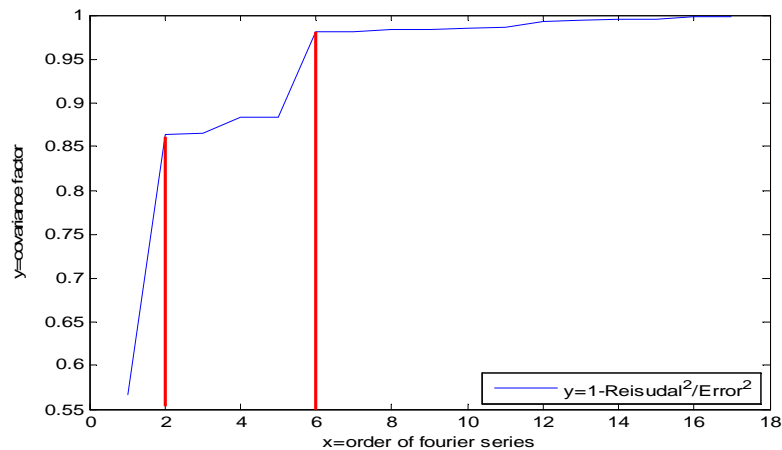


Figure 96. Coefficient y_n en fonction de n : stator S0 (extrait du master de Shaoqu Zheng)

Sur la Figure 96, on trace le coefficient y_n en fonction de n pour le stator S0. On peut constater qu'il existe des valeurs de n qui correspondent à un accroissement brutal de la valeur de y_n et qui correspondent à des modes majeurs ($n=2, n=6$). Chaque valeur de n correspond à un mode de déformation de la surface intérieure du stator. Le cas $n=2$ correspond à une forme en ellipsoïde et $n=6$ correspond à une forme avec 6 « bosses ».

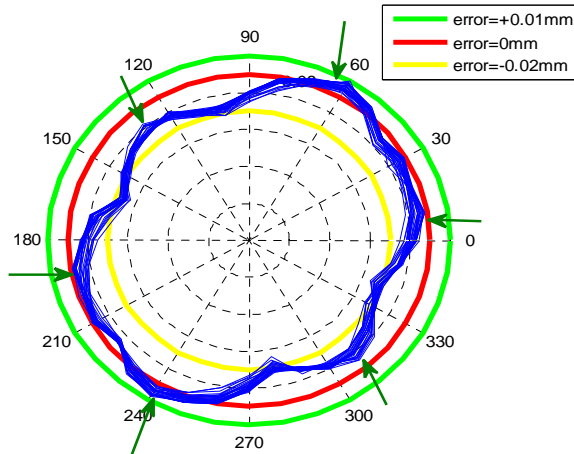


Figure 97. Forme réelle des écarts entre les rayons mesurés et le rayon nominal : stator S0 (extrait du master de Shaoqu Zheng)

On retrouve nettement ces deux formes sur la Figure 97 où est présentée l'évolution de l'écart entre les rayons mesurés et le rayon nominal du stator S0 en fonction de l'angle. Les mêmes processus d'analyse ont été appliqués pour les stators S1, S2, S7, S20 et on obtient dans le Tableau 8 les modes les plus importants. L'apparition de ces deux modes peut s'expliquer en partie par le procédé de fabrication du stator qui d'une part nécessite un maintien de la pièce introduisant une déformation de mode 2 et d'autre part un assemblage du ruban de tôles du stator par 6 lignes de soudure réparties régulièrement sur la surface externe du stator impliquant une déformation de mode 6. On constate aussi que pour le stator 1, on retrouve aussi un mode 4.

Tableau 8. Modes de déformation les plus importants

Stator	S0	S1	S2	S7	S20
Ordre	2&6	2&4	6	6	2&6

Finalement, le modèle suivant peut être retenu :

$$\begin{aligned}
 e_i(\theta) \approx \hat{e}_i^n(\theta) &= \beta_0(\theta) + \alpha_2(\theta) \sin\left(2i \frac{\pi}{18}\right) + \beta_2(\theta) \cos\left(2i \frac{\pi}{18}\right) \\
 &+ \alpha_4(\theta) \sin\left(i \cdot 4 \frac{\pi}{18}\right) + \beta_4(\theta) \cos\left(i \cdot 4 \frac{\pi}{18}\right) \\
 &+ \alpha_6(\theta) \sin\left(i \cdot 6 \frac{\pi}{18}\right) + \beta_6(\theta) \cos\left(i \cdot 6 \frac{\pi}{18}\right) \quad \text{avec } i = 1:36
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Le nombre de variables aléatoires peut être alors réduit de 36 à 7. En utilisant (3.17), le coefficient y calculé pour chaque stator est présenté dans le Tableau 9. On peut constater que les coefficients α_i, β_i déterminés conduisent à des résultats acceptables pour le coefficient de détermination y .

Tableau 9. Coefficient y pour chaque stator

Stator	S0	S1	S2	S7	S20
Coefficient y	97.76%	92.43%	92.38%	89.60%	94.17%

3.4. Propagation et validité du modèle

Les coefficients α_i, β_i de chaque mode dans le modèle (3.17) peuvent être corrélés. Pour analyser l'influence de l'amplitude de chaque mode sur le couple, il est peut être plus pertinent d'écrire (3.17) sous la forme suivante :

$$e_i(\theta) \approx \hat{e}_i^n(\theta) = a_0(\theta) + a_2(\theta) \sin\left(2i \frac{\pi}{18} + \varphi_2(\theta)\right) + a_4(\theta) \sin\left(4i \frac{\pi}{18} + \varphi_4(\theta)\right) + a_6(\theta) \sin\left(6i \frac{\pi}{18} + \varphi_6(\theta)\right) \quad (3.18)$$

avec $i=1 : 36$. Les 4 modes de déformation du stator sont :

- le mode 0: $a_0(\theta)$
- le mode 2 : $a_2(\theta) \sin\left(2i \frac{\pi}{18} + \varphi_2(\theta)\right)$
- le mode 4 : $a_4(\theta) \sin\left(4i \frac{\pi}{18} + \varphi_4(\theta)\right)$
- le mode 6 : $a_6(\theta) \sin\left(6i \frac{\pi}{18} + \varphi_6(\theta)\right)$

Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'aux mesures de la couche 15 pour chaque stator S0, S1, S2, S7, S20.

Pour les 5 mesures de ${}_{15}e(\theta_{0k})$, $k=1 : 5$ qui correspondent aux mesures de la couche 15 des 5 stators, on obtient 5 réalisations des coefficients a_i et φ_i , $i=0, 2, 4, 6$ qui sont déterminés en utilisant la méthode des moindres carrés présentée en 3.2.1.

Validation du modèle

Dans un premier temps, on s'intéresse aux couples $C_{15}(\alpha)$ correspondant aux mesures ${}_{15}e(\theta_0)$ de la couche 15 de chaque stator S0, S1, S2, S7, S20 et aux couples $C_{15a}(\alpha)$ obtenus en utilisant l'approximation $\widehat{{}_{15}e^n}(\theta_0)$ de ${}_{15}e(\theta_0)$ donnée par la relation (3.18). Dans le Tableau 10, on donne l'écart (en %) entre les valeurs maximales des couples $C_{15}(\alpha)$ et $C_{15a}(\alpha)$ pour chaque stator.

Tableau 10. Ecart entre $C_{15}(\alpha)$ et $C_{15a}(\alpha)$ pour chaque stator

Stator	S0	S1	S2	S7	S20
Ecart	-0.29%	-0.18%	-0.20%	0.29%	0.35%

On donne sur la Figure 98 l'évolution de deux couples pour les stators S1 et S20.

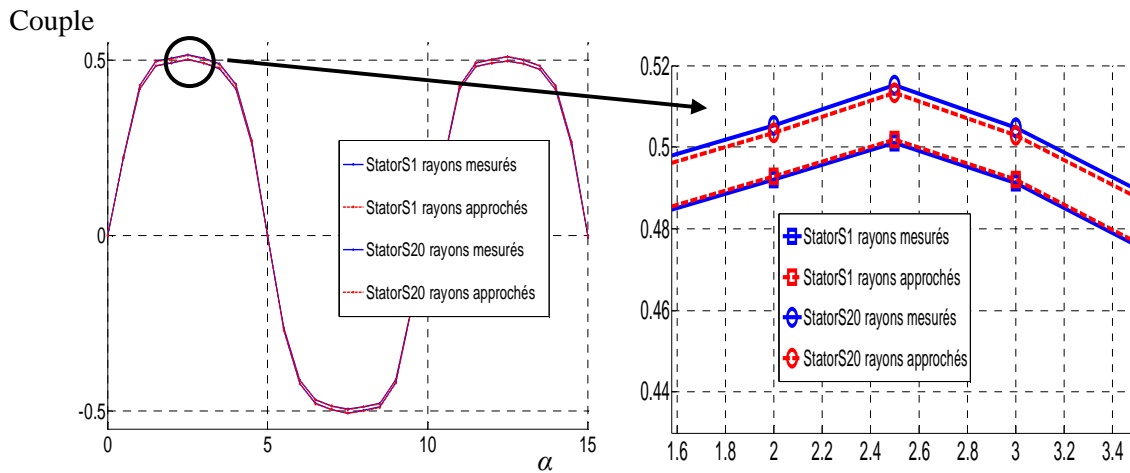


Figure 98. Couples $C_{15}(\alpha)$ et $C_{15a}(\alpha)$ pour les stators S0 et S1

On peut constater que le couple obtenu en utilisant comme entrée du modèle numérique le modèle des rayons donné par (3.18), après l'identification des coefficients a_i et φ_i par une méthode des moindres carrés régression, est proche de celui obtenu dans le cas des rayons mesurés.

Influence des modes

Dans le deuxième temps, on va analyser la contribution des modes de déformation sur la variation du couple. Pour chaque mode, on suppose que l'amplitude suit une loi gaussienne et la phase suit une loi uniforme. La valeur moyenne et l'écart type de ces variables sont déterminés d'une façon empirique à partir de 5 valeurs disponibles pour la couche 15 de 5 stators. Les valeurs moyennes et les écarts types sont donnés dans le Tableau 11.

Remarque : La loi d'une variable aléatoire Gaussienne est parfaitement déterminée en connaissant la valeur moyenne et l'écart type de celle-ci. De même, si une variable aléatoire est uniforme sur $[a, b]$, on peut montrer que :

$$a = m - \sqrt{3}\sigma ; b = m + \sqrt{3}\sigma \tag{3.19}$$

où m est la valeur moyenne et σ est l'écart type.

Tableau 11. Valeurs moyennes et écart-types empiriques des amplitudes et des phases de 4 modes de déformation

	a_0	a_2	φ_2	a_4	φ_4	a_6	φ_6
Moyenne	$1.93 \cdot 10^{-6}$	$5.16 \cdot 10^{-6}$	1.82	$1.77 \cdot 10^{-6}$	2.06	$3.74 \cdot 10^{-6}$	1.20
Ecart type	$3.86 \cdot 10^{-6}$	$3.93 \cdot 10^{-6}$	0.70	$1.18 \cdot 10^{-6}$	1.31	$1.59 \cdot 10^{-6}$	0.89

D'abord, on s'intéresse à l'influence de l'amplitude de chaque mode sur la variation du couple. Cette influence sera étudiée séparément d'un mode à l'autre. Ce qui signifie que pour l'amplitude du mode 2, c'est-à-dire la variable a_2 (3.18) par exemple, on suppose que les phases et les autres amplitudes sont constantes et égales à leur valeur moyenne empirique. On calcule l'écart type de

la valeur efficace du couple. La méthode de transformation pour prendre en compte des variations géométriques et le chaos polynomial d'Hermite pour approcher le couple, qui est une variable aléatoire, sont utilisés.

On effectue les mêmes calculs pour l'amplitude des autres modes, c'est-à-dire pour les variables a_0 , a_4 , a_6 et les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 12.

Tableau 12. Ecart type de la valeur efficace du couple en fonction du mode

Amplitude intéressée	a_0	a_2	a_4	a_6
L'écart type de la valeur efficace du couple	560.10^{-5}	$9.22.10^{-5}$	$0.95.10^{-5}$	$2.53.10^{-5}$
Moyenne de la valeur efficace du couple	0.4047	0.4047	0.4046	0.4046

On peut constater que l'influence de a_0 sur la valeur efficace du couple est la plus importante. Ce phénomène peut être expliqué par le fait que la variation de a_0 entraîne une variation uniforme du rayon des dents et donc de l'entrefer. Par contre, même si leur amplitude est du même ordre de grandeur que le mode 0, les autres modes conduisent à des variations de couple très faibles. Il s'opère à l'intérieur de la machine un phénomène d'auto-compensation qui conduit à un impact très faible sur le couple.

On s'intéresse maintenant aux effets couplés des modes. Dans le cas des modes 0 et 2 par exemple, on suppose que a_0 , a_2 , φ_2 sont des variables aléatoires indépendantes. En pratique, celles-ci ne le sont pas mais nous disposons de trop peu de données pour caractériser correctement la corrélation. Les autres variables sont déterministes et sont égales à leur valeur moyenne empirique. On détermine la contribution de chaque variable à la variance de la valeur efficace du couple en calculant les coefficients de Sobol de premier ordre [65] via chaque variable aléatoire. Les indices de Sobol sont un moyen efficace d'effectuer une analyse de sensibilité globale. Plus la part de l'indice associé à une variable d'entrée est importante, plus la grandeur de sortie est sensible à cette variable d'entrée.

On effectue le même calcul pour le mode 0 associé avec le mode 6 et pour le mode 2 associé avec le mode 6. Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 13 suivant :

Tableau 13. Coefficient de Sobol du premier ordre

	Associé des modes 0 et 2			Associé des modes 0 et 6			Associé des modes 2 et 6			
	a_0	a_2	φ_2	a_0	a_6	φ_6	a_2	a_6	φ_4	φ_6
Coefficient de Sobol	99.97%	0.027%	$4.1.10^{-8}\%$	99.99%	0.0021%	0.000012%	93.01%	6.94%	$5.69.10^{-3}\%$	0.00452%

On peut constater que l'influence de mode 0 est dominante par rapport à celle des autres modes. Ce qui signifie que pour la machine, on peut considérer que seule l'amplitude du mode 0 (rayon moyen des dents) joue un rôle effectif sur la valeur du couple. Ces résultats étaient en partie

prévisibles du fait du nombre de dents du stator et du nombre de pôles au rotor dont le ratio est entier. L'impact de ces modes dans le cas d'une machine ayant un nombre d'encoches par pôle et par phase fractionnaire est bien moins évident.

Dans les parties précédentes, une étude de l'impact du rayon des dents sur le couple à vide a été effectuée. Dans la suite, on va s'intéresser à une autre dimension caractéristique du stator : la largeur des dents.

3.5. Influence de la largeur des dents

Dans cette partie, on s'intéresse au flux qui traverse la phase 1 du stator en fonction du courant de l'inducteur dans le rotor. Dans ce cas, le rotor reste immobile et sa position est fixée à $\alpha=0$ (Figure 82). On effectue les calculs avec différentes valeurs de la largeur des dents. Comme aucune mesure de largeur de dent n'était disponible, on impose les lois de variation de celle-ci. On suppose aussi que les autres dimensions sont égales aux dimensions nominales. Le matériau du rotor est le même que celui de la partie 3.2.2. Par contre, on utilise un matériau non linéaire pour le stator. La courbe (\mathbf{B}, \mathbf{H}) est présentée sur la Figure 99:

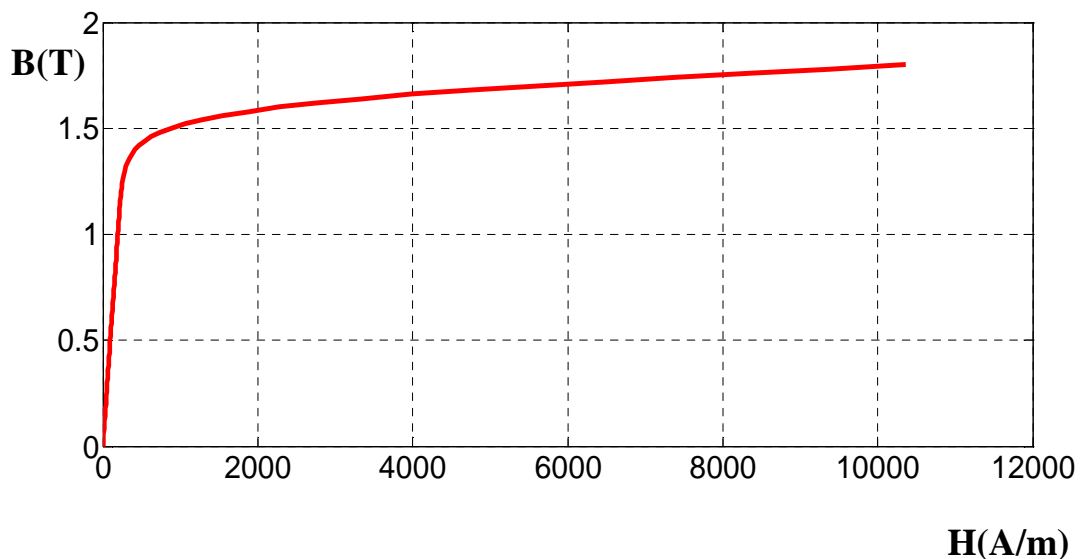


Figure 99. Loi $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ du matériau utilisé pour modéliser le matériau ferromagnétique

Jusqu'à présent, la méthode de transformation a été utilisée pour résoudre des problèmes linéaires en magnéto-statique avec des incertitudes portées par la géométrie. Dans cette partie, comme le matériau utilisé pour le stator est non linéaire (Figure 99), une extension de la méthode de transformation dans le cas non linéaire est nécessaire et sera présentée par la suite.

3.5.1. Méthode de transformation dans le cas non linéaire.

On s'intéresse à un problème de magnétostatique avec des incertitudes portées par la géométrie défini dans 1.4.1 mais avec une relation non linéaire entre l'induction magnétique \mathbf{B} et le champ magnétique \mathbf{H} . La loi de comportement est donnée par :

$$\mathbf{B} = \mathbf{g}(x, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{H}) = \mu(x, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} \quad (3.20)$$

Avec les mêmes notations utilisées dans la partie 1.4.2.3. On obtient une formulation faible en potentiel scalaire dans le cas non linéaire donnée par (1.131):

$$\int_{D(\boldsymbol{\xi})} \mathbf{g}(x, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{grad}_x(\Omega'(x, \boldsymbol{\xi}) + \gamma_0 \alpha(x, \boldsymbol{\xi}))) \cdot \mathbf{grad}_x(\lambda(x, \boldsymbol{\xi})) dx = 0 \quad (3.21)$$

En utilisant (1.130) on peut ramener (3.21) en utilisant le domaine de référence E comme domaine d'intégration à la forme suivante :

$$\int_E \mathbf{g}(X, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{M}(X, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{grad}_x(\Omega'(X, \boldsymbol{\xi}) + \gamma_0 \alpha(X))) \frac{\mathbf{M}(X, \boldsymbol{\xi})}{\det(\mathbf{M}(X, \boldsymbol{\xi}))} \mathbf{grad}_x(\lambda(X)) dX = 0 \quad (3.22)$$

Il apparaît donc une différence dans le cas linéaire (1.135) par rapport au cas non linéaire. Néanmoins, on peut montrer qu'en appliquant une transformation discrète, on retrouve le même système non linéaire à résoudre que si on effectue un déplacement des nœuds (voir la partie 2.1.3). Dans cette partie, la transformation discrète décrite dans la partie 3.1.2.1 est utilisée pour calculer les flux magnétiques traversant la phase 1 du stator.

3.5.2. Résultats obtenus.

On se propose dans la suite d'étudier 8 scénarios possibles :

Les scénarios 1 et 2 correspondent aux cas où les largeurs des dents sont égales (les dimensions sont alors parfaitement corrélées) et prennent respectivement les valeurs $l_{\max} = 4.15\text{mm}$ et $l_{\min} = 3.80\text{mm}$.

Les scénarios 3, 4 et 5 correspondent aux cas où les largeurs des dents sont égales (parfaitement corrélées) et prennent successivement trois réalisations d'une variable aléatoire uniforme définie dans l'intervalle $[l_{\min} - l_{\max}]$.

Les scénarios 6, 7 et 8 correspondent au cas où l'on considère que les 36 largeurs de dents sont des variables aléatoires indépendantes. Elles constituent un vecteur des variables aléatoires uniformes dans l'intervalle $[l_{\min} - l_{\max}]$. On considère alors 3 réalisations pour ces largeurs des dents. Puis, trois simulations numériques correspondant aux cas d'un stator avec ces largeurs des dents ont été réalisées.

On trace sur la Figure 100 l'évolution du flux traversant la phase 1 du stator en fonction des Ampère tours imposés au rotor. Il y a alors 8 courbes correspondant aux 8 scénarios.

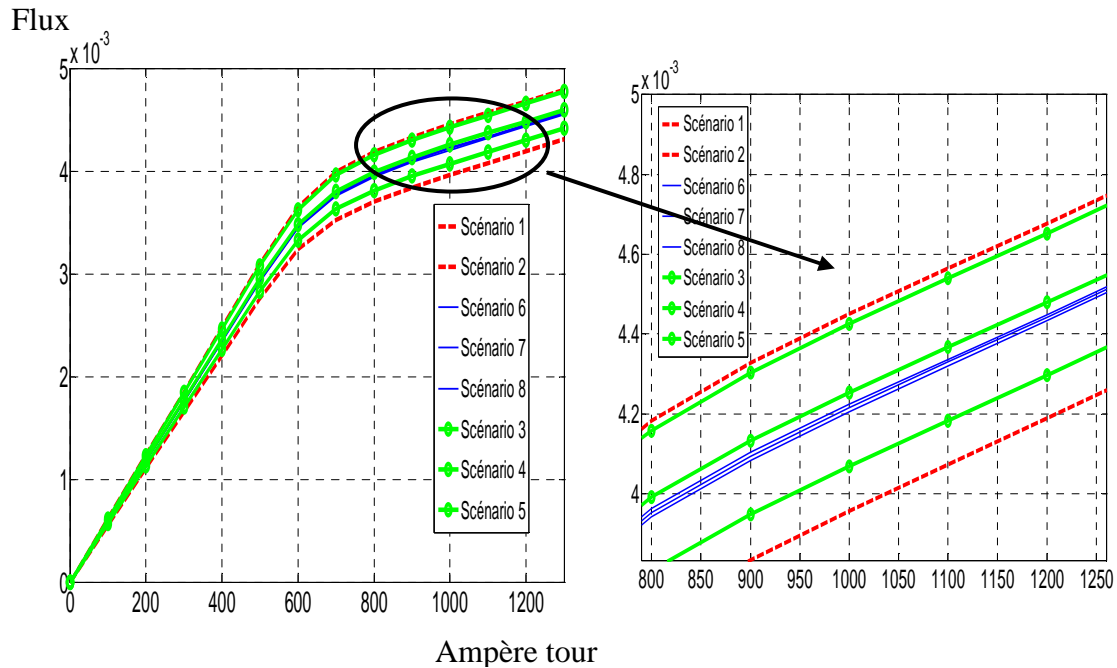


Figure 100. Flux traversant la phase 1 du stator

On peut constater que l'écart entre les courbes dans les cas où on considère les largeurs des dents parfaitement corrélées (scénarios 1, 2, 3, 4, 5) est beaucoup plus forte par rapport aux cas où on considère une indépendance totale entre les largeurs des dents (scénarios 6, 7, 8). On peut constater même dans ce dernier cas que la variation du flux est très faible. On voit donc encore ici l'effet non négligeable de la corrélation entre les dimensions qui impactent grandement la variabilité des grandeurs de sortie. Cette corrélation est bien entendu fortement liée aux procédés de fabrication.

3.6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié l'influence de dimensions caractéristiques sur les performances d'une machine électrique. Pour cela, on a utilisé la méthode de transformation présentée au chapitre 2 qui était très bien adaptée ici du fait d'une variabilité faible des paramètres géométriques d'entrée.

Les exemples traités conduisent aux résultats suivants concernant la démarche de prise en compte des incertitudes géométriques.

- Le nombre de variables aléatoires d'entrée croît très vite ce qui peut conduire dans le cas d'une approche stochastique à des temps de calcul prohibitifs. Il est nécessaire de mettre en place une approche de réduction permettant de diminuer le nombre de variables aléatoires d'entrée. Celle-ci peut découler d'une approche purement mathématique comme une *analyse en composante principale* ou plus proche de la physique comme celle que nous avons employée.

- L'impact des corrélations entre les variables d'entrée est important. Cette corrélation est dans notre cas fortement liée aux procédés de fabrication. Il faut donc caractériser l'effet de tel ou tel procédé sur la variabilité des dimensions et les liens entre elles.

Conclusion et perspective

Dans ce mémoire, nous avons présenté une méthode dite « méthode de transformation » pour résoudre un problème magnétostatique dans le cas où les incertitudes sont portées par la géométrie. Le principe de cette méthode consiste à utiliser une transformation aléatoire bijective qui permet de ramener le problème initial à un problème où les incertitudes sont portées par la loi de comportement. Il est alors possible d'utiliser différents schémas de résolution disponibles dans la littérature pour le problème ainsi posé.

Concernant la méthode étudiée, la difficulté principale réside dans la détermination de la transformation. Dans le cas d'une géométrie simple, une expression analytique de la transformation peut être disponible. Pour des géométries complexes, des méthodes numériques doivent être mises en œuvre pour déterminer la transformation adaptée. On a présenté et comparé deux méthodes pour déterminer cette transformation : une méthode dite « méthode du Laplacien » proposée dans la littérature et autre méthode dite « transformation géométrique » que nous avons proposée et développée. Pour ces deux méthodes, le domaine de référence E et le domaine initial D sont divisés respectivement en un ensemble de sous domaines E_i et D_i . La transformation est déterminée sur chaque sous domaine. La première méthode consiste à imposer le Laplacien de la transformation égal à zéro dans chaque sous domaine E_i ainsi que des conditions aux limites qui permettent d'avoir la frontière de D_i image de la frontière du sous domaine E_i . La résolution numérique (une méthode de collocation a été employée dans notre cas) de ce système d'équations aux dérivées partielles nous conduit à la transformation. Cependant, la résolution numérique des équations de Laplace conduit à une transformation qui peut induire de fortes erreurs numériques sur la solution finale. Par exemple, pour un sous domaine E_i non convexe, la transformation peut conduire à des points image situés à l'extérieur du domaine D_i . La deuxième méthode consiste à déterminer la transformation pour chaque point du domaine de référence. On considère alors le sous domaine E_i ainsi que le sous domaine D_i comme un ensemble de courbes. Grâce à la paramétrisation de la frontière des sous domaines E_i et D_i , on détermine l'image -qui correspond à une courbe dans le sous domaine D_i - d'une courbe du sous domaine E_i . La transformation d'un point appartenant à une courbe du sous domaine E_i appartient à la courbe d'image dans le sous domaine D_i . La deuxième méthode de transformation permet d'éviter les inconvénients de la première méthode. De plus, elle est simple à mettre en œuvre pour des géométries simples. Cependant, la subdivision des domaines E et D en sous-domaines E_i et D_i doit être faite avec prudence. Une division non pertinente peut entraîner des discontinuités sur la matrice jacobienne de la transformation (et donc sur la perméabilité équivalente) dans des éléments du maillage du domaine E . Cette discontinuité au sein des éléments induira une erreur numérique importante.

Une fois qu'une transformation est déterminée, on peut déduire une transformation dite « discrète » associée à la transformation initiale dite « continue ». L'idée de cette transformation discrète consiste à considérer les éléments du maillage du domaine de référence E comme des sous-domaines. La transformation discrète transforme alors un élément tétraédrique dans E en un élément tétraédrique dans D. Cette transformation affine par morceaux dans le cas des tétraèdres est parfaitement définie en déterminant les images dans D des nœuds du maillage du domaine E. La transformation discrète permet d'obtenir une matrice jacobienne constante dans chaque élément du maillage du domaine E. Par conséquent, on peut supprimer l'erreur du calcul numérique des coefficients de la matrice de raideur ce qui n'est pas le cas pour une transformation continue. Cependant, cette transformation n'est plus adaptée dans le cas de grandes variations de la géométrie où il peut apparaître un « retournement » des éléments conduisant à un problème mal posé.

Pour un problème défini dans un domaine aléatoire donné, il existe une infinité de transformations possibles. Il est alors nécessaire d'établir un critère de choix de la transformation pour déterminer la « meilleure transformation » possible. Un critère basé sur la minimisation de l'erreur numérique *a priori* qui s'exprime en fonction des valeurs propres de $\mathbf{M}'\mathbf{M}$, où \mathbf{M} la matrice jacobienne de la transformation, a été proposé. D'après ce critère, la meilleure transformation est celle qui minimise l'écart entre les valeurs propres de la matrice $\mathbf{M}'\mathbf{M}$. Ce résultat a été illustré sur un exemple académique. Sur cet exemple, on voit qu'une transformation de type « dilatation » conduit à un ratio des valeurs propres de la matrice $\mathbf{M}'\mathbf{M}$ plus petits par rapport à celui d'une transformation de type de « cisaillement ». Ce dernier type de transformation induit un fort rapport entre les valeurs propres minimal et maximal.

Dans ce mémoire, on a étudié également la discontinuité de certaines grandeurs locales (champ magnétique aux points proches de l'interface aléatoire des matériaux) au niveau stochastique qui apparaît dans un problème avec des incertitudes portées par la géométrie. On a montré qu'une approche non intrusive - remaillage utilisant un chaos polynomial classique - n'est plus adaptée dans ce cas. Cette approche nécessite des traitements supplémentaires comme des techniques d'enrichissement déjà proposées dans la littérature. Concernant la méthode de transformation, le fait de ramener le problème comportant des incertitudes portées par la géométrie à un problème comportant des incertitudes portées par la loi de comportement permet d'utiliser le chaos polynomial pour le problème défini dans le domaine de référence. La matrice jacobienne qui est discontinue au niveau des interfaces des matériaux permet de prendre en compte naturellement la discontinuité au niveau stochastique des grandeurs locales.

A la fin de ce mémoire, on a utilisé la méthode de transformation pour étudier l'effet d'incertitudes géométriques (rayon des dents) sur le stator d'un alternateur automobile de Valeo.

On a constaté qu'une approche par intervalle consistant à faire des calculs pour des valeurs extrêmes des entrées pour déterminer le domaine de variation d'une grandeur sortie d'intérêt n'est pas nécessairement adaptée. Les corrélations entre les différentes variables aléatoires d'entrées peuvent induire des phénomènes d'auto-compensation conduisant à une réduction de la variabilité de la grandeur de sortie d'intérêt. On a constaté le même phénomène lorsque l'on a réalisé des études sur la largeur des dents. Dans ce dernier cas, la méthode de transformation a été appliquée pour un problème avec des matériaux non linéaires.

Perspectives

Dans ce mémoire, la méthode de transformation a été utilisée pour résoudre un problème où les incertitudes sont portées par la géométrie. La méthode de résolution utilisée était non intrusive (méthode de projection). Dans le cas où les incertitudes sont portées par les lois de comportement, les travaux effectués au L2EP (R. Gaignaire-2008 et K. Beddek-2012) ont montré que l'approche intrusive basée sur une approche de Galerkin (méthode SSFEM) pouvait être compétitive par rapport aux méthodes non intrusives pour traiter des problèmes industriels. Dans le cas où les incertitudes sont portées par la géométrie, la SSFEM a été développée et comparée avec les approches non intrusives dans le cas d'une approche X-SSFEM [9, 29, 30]. Il pourrait être intéressant de faire la même comparaison dans le cas d'une approche par méthode de transformation.

On a constaté également que la méthode de transformation qui semble bien fonctionner dans le cas où la variabilité géométrique est faible peut poser des problèmes dans le cas de grandes déformations. Pour ce cas, un couplage entre la méthode de remaillage et la méthode de transformation peut être une solution où on utilise plusieurs domaines de référence. Cependant, la méthode SSFEM ne pourra plus être directement applicable. De plus, le remaillage introduisant un bruit numérique additionnel, il sera nécessaire de d'adjoindre à cette approche un estimateur d'erreur a posteriori. Une comparaison avec la X-SSFEM sera alors intéressante.

Dans les exemples que l'on a traité, le découpage en sous domaines ainsi que la détermination de la transformation ont été faits au cas par cas. Pour mettre une mise en œuvre industrielle, il est nécessaire que cette étape soit automatique et que les transformations et le découpage associés soient effectués sur la base uniquement des données géométrique du problème et de leur variabilité. Pour cela, il sera nécessaire de travailler avec des chercheurs dans le domaine de la modélisation géométrique (CAO, DAO...) et de l'analyse numérique. La manière de modéliser les données a aussi son importance pour être compatible et efficace avec la procédure automatique proposée ci-dessus. Cette étape de modélisation est d'autant plus importante qu'elle peut

permettre de réduire fortement les temps de calcul comme nous l'avons montré au chapitre 3 en réduisant le nombre de paramètres incertains de 36 à 7. Cela constitue un enjeu important pour le développement et la diffusion dans le monde académique et industriel de ces approches stochastiques.

Bibliographies

- [1]N. Wiener. *The homogeneous chaos*. Am. J. Math, vol. 60, no. 4, pp. 897-936, 1938.
- [2]R. Ghanem, P. Spanos. *Stochastic finite elements: a spectral approach*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [3]M. Shinozuka, F. Yamakasi. *Stochastic finite element analysis: an introduction*. Stochastic Structural Dynamics, Progress in Theory and Applications, pages 241-291, Elsevier applied science, 1988.
- [4]M. Berveiller, B. Sudret et M. Lemaire. *Stochastic finite element: a non intrusive approach by regression*. European Journal of Computational Mechanics, vol. 15, no. 1-2-3, pp. 81-92, 2006.
- [5]M.T. Reagan, H.N. Najm, R.G. Ghanem and O.M. Knio. *Uncertainty quantification in reacting flow simulations through non-intrusive spectral projection*. Combustion and Flames, vol. 132, issue 3, pp. 545-555, 2003.
- [6]P. Frauenfelder, C. Schwab and R.A. Todor. *Finite elements for elliptic problems with stochastic coefficients*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, no. 2-5, pp. 205 - 228, 2005.
- [7]R. Gagnaire. *Contribution à la modélisation numérique en électromagnétisme statique stochastique*. Thèse de doctorat, Arts et Métier ParisTech, 2008.
- [8]D. Xiu, D.M. Tartakovsky. *Numerical methods for differential equations in random domains*. SIAM J.SCI COMPUT, vol. 28, no. 3, pp. 1167-1185.
- [9]A. Clement. *Elément finis étendu pour calculer de structures à géométrie aléatoire : application à la pris en compte de la corrosion de structures en région littorale*. Thèse de doctorat de l'université de Nantes, 2008.
- [10]I. Tsukerman. *Computational Methods for Nanoscale Applications*. Nanostructure science and technology, Springer 2008.
- [11]H.J. Bungartz and S. Dirnstorfer. *Multivariate Quadrature on Adaptive Sparse Grids*. Computing, vol. 71, no. 1 pp. 89-114, 2003.
- [12]S. Clenet, N. Ida, R. Gagnaire, O. Moreau. *Solution of dual stochastic static formulations using double orthogonal polynomials*. IEEE Trans. on Mag, vol. 46, issue 8, pp 3543-3546, 2010.
- [13]R.H. Cameron and W.T. Martin. *The orthogonal development of non linear functionals in series of Fourier-Hermite functionals Error Estimation in a Stochastic Finite Element Method*. Annal of mathematics, vol. 48, no. 2, 1947.
- [14]D. Xiu, G.E. Karniadakis. *The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations*. SIAM J. Sci. Comput, vol. 24, issue 2, pp. 619-644, 2002.

- [15]G. Blattman, B. Sudret. *Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach*. C.R mécanique, vol. 336, issue 6, pp. 516-523, 2008.
- [16]K. Beddek, S. Clénet, O. Moreau, V. Costan, Y. Le Menach, A. Benabou. *Adaptive method for Non-Intrusive Spectral Projection – Application on Eddy Current Non Destructive Testing*. Compumag 2011, Sydney, Australia - July 2011.
- [17]C. Canuto, T. Kozubek. *A fictitious domain approach to the numerical solution of PDEs in stochastic domains*. Numerische mathematik, vol. 107, no. 2, pp. 257-293, 2007.
- [18]S. Clénet, N. Ida. *Error Estimation in a Stochastic Finite Element Method in electrokinetics*. Int. J. Numer. Mth. Engng 2010, vol. 81, no. 11, pp. 1417-1438.
- [19]T. Henneron, Y. Le Menach, F. Piriou, O. Moreau, S. Clénet, J.P Ducreux and J.C. Verite. *Source field computation in NDT applications*. IEEE Trans. on Mag, vol.43, issue 4, pp. 1785-1788, 2007.
- [20]P. Dular, W. Legros and A. Nicolet. *Coupling of local and global quantities in various finite element formulations and its application to electrostatics, magnetostatics and magnetodynamics*. IEEE Trans. On Mag. vol.34, issue 5, pp. 3078-3081, 1998.
- [21]S. Clénet. *Contribution à la modélisation numérique en électromagnétisme statique*. HDR, université des sciences et technologies de Lille, 2001.
- [22]T. Henneron. *Contribution à la prise en compte des Grandeurs Globales dans les Problèmes d'Electromagnétisme résolu avec la Méthode des Eléments Finis*. Thèse de doctorat, U.S.T.L, 2004.
- [23]A. Bossavit. *Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism*. Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education - Reviews, IEE Proceedings A., vol. 135, issue 8, pp. 493-500, 1988.
- [24]S.P. Huang, S.T. Quek and K. K. Phoon. *Convergence study of the truncated Karhunen–Loeve expansion for simulation of stochastic processes*. Int. J. Numer. Meth. Engng, vol. 52, issue 9, pp. 1029–1043, 2001.
- [25]J.C. Helton and F.J. Davis. *Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems*. Reliability Engineering & System Safety, vol. 81, Issue 1, pp. 23-69, 2003.
- [26]B. Sudret. *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models contribution to structural reliability and stochastic spectral method*. HDR, université BLAISE PASCAL – Clermont II, 2007.
- [28]I. Tsukerman. *Accurate Computation of 'Ripple Solutions' on Moving Finite Element Meshes*. IEEE Trans. on Mag, vol. 31, issue 3, pp. 1472-1475, 1995.

- [29]A. Nouy, A. Clément, F. Schoefs, and N. Moës. *An extended stochastic finite element method for solving stochastic differential equations on random domains*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 197, no. 51-52, pp. 4663-4682, 2008.
- [30]A. Nouy. *Contributions à la quantification et à la propagation des incertitudes en mécanique numérique*. HDR université de Nantes, 2008.
- [31]N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud, and J.F. Remacle. *A computational approach to handle complex microstructure geometries*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 192, issue 28-30, pp. 3163-3177, 2003.
- [32]D.H. Mac, S. Clenet, J.C. Mipo, O. Moreau. *Solution for static field problem in random domains*. IEEE Trans. On Mag, vol.46, no.8, pp. 3385-3388, 2010.
- [33]D.H. Mac, S. Clenet, J.C. Mipo. *Transformation method for static field problem with random domain*. IEEE Trans. on Mag, vol.47, pp. 1446-1449, 2011.
- [34]D.H. Mac, S. Clenet, J.C. Mipo. *Calculation of field distribution in electromagnetic problem with random domains*. CEM 2011, Wroclaw Poland, April 2011
- [35]E. Parzen. *On estimation of a probability density function and mode*, Ann. Math. Stat, vol. 33, no. 3, pp. 1065-1076, 1962.
- [36]I. Babuska, R. Tempone, G.E. Zouraris, *Galerkin finite element approximation of stochastic elliptic partial differential equations*. SIAM J. NUMER. ANAL, vol. 42, no. 2, pp. 800-825. 2004
- [37]C. Soize. *Probabilités et modélisation des incertitudes*. Polycopié de cours Mater recherche MMS – Pont Paristech – Université de Marne la Vallée, 2008.
- [38]M. Ferrari, S. Bellini. *Importance Sampling simulation of turbo product codes*. ICC2001, The IEEE International Conference on Communications, vol. 9, pp. 2773-2777, June 2001.
- [39]O. Le Maitre, O. Knio, H. Najm and R. Ghanem. *Adaptive multi-wavelets decomposition for stochastic processes*. International Conference on Spectral and High Order Methods (ICOSAHOM) 2004, Brown University, Providence, RI, June 21-25, 2004.
- [40]T.T. Soong. *Random differential equations in science and engineering*. Academic Press, 1973.
- [41]C. Papadimitriou, L.S. Katafygiotis, J.L. Beck. *Approximate analysis of response variability of uncertain linear systems*. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 10, issue 4, pp. 251-64, 1995.
- [42]J.D. Collins, W.T. Thomson. *The eigenvalue problem for structural systems with statistical properties*. AIAA Journal, vol. 7, issue 4, pp. 642-648, 1969.

- [43]R.C. Micaletti, A.S. Cakmak, S.R.K. Nielsen, H.U. Koyluglu. *A solution method for linear and geometrically nonlinear MDOF systems with random properties subject to random excitation*. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 13, issue 2, pp. 85–95, 1998.
- [44]E. Vanmarcke, M. Grigoriu. *Stochastic finite element analysis of simple beams*. Journal of Engineering Mechanics, vol 109, issue 5, pp. 1203–1214, 1983.
- [45]V. Papadopoulos, M. Papadrakakis. *Stochastic finite element-based reliability analysis*. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 13, issue 1, pp. 53–65, 1998.
- [46]L. A. Zadeh. *Fuzzy set*. Information and control, vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [47]L. A. Zadeh, K.S. Fu, K. Tanaka, M. Shimura. *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes*. Academic Press Inc, 1975.
- [48]S. Medasani, J. Kim, R. Krishnapuram. *An overview of membership function generation techniques for pattern recognition*. International journal of approximated reasoning, vol. 19, issue 3-4, pp. 391-417, 1998.
- [49]A. L. Medaglia, S.C. Fang, H. L.W. Nuttle and J.R. Wilson 2001. *An efficient and flexible mechanism for constructing membership functions*. European Journal of Operational Research, vol. 139, issue 1, pp. 84–95, 2002.
- [50]B. Möller, M. Beer, W. Graf and J.U. Sickert. *Fuzzy finite element method and its application*. Trends in computational structural mechanics, Barcelona, Spain 2001.
- [51]David Moens, Michael Hanss. *Non-probabilistic finite element analysis for parametric uncertainty treatment in applied mechanics: Recent advances*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 47, issue 1, pp. 4-16, 2011.
- [52]S. Valiappan and T.D. Pham. *Elasto-plastic finite element analysis with fuzzy parameters*. International journal for numerical method in engineering, vol 38, issue 4, pp. 531-548, 1995.
- [53]P. Billingsley. *Probability and Measure*. Willey, 1986.
- [54]J.-P. Ouvrard. *Probabilités 1*. Cassini, 1999.
- [55]J.-P. Ouvrard. *Probabilité 2*. Cassini, 2003.
- [56]E. Castillo, J. M. Sarabia, C. Solares, and P. Gomez. *Uncertainty analyses in fault trees and bayesian networks using form/sorm methods*. Reliability Engineering System Safety, vol 65, issue 1, pp. 29–40, 1999.
- [57]T. Haukaas and A. D. Kiureghian. *Strategies for finding the design point in non-linear finite element reliability analysis*. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 21, issue 2, pp. 133–147, 2006.
- [58]A. D. Kiureghian, T. Haukaas, and K. Fujimura. *Structural reliability software at the university of california, berkeley*. Structural Safety, vol. 28, issue 1-2, pp. 44–67, 2006.

- [59]Y.G. Zhao and T. Ono. *A general procedure for first/second-order reliability method (form/sorm)*. Structural Safety, vol. 21, no. 2, pp. 95–112, 1999.
- [60]W. Prager, J.L. Synge. *Approximations in elasticity based on the concept of function space*. Q. App. Math, vol. 5, pp. 241–269, 1947.
- [61]J.F. Le Gall. *Intégration, probabilités et processus aléatoires*. <http://www.math.u-psud.fr/~jflgall/IPPA2.pdf>.
- [62]I. Tsukerman. *A General Accuracy Criterion for Finite Element Approximation*. IEEE Trans. on Mag, vol. 34, no. 5, 1998.
- [63]T. W. Preston, A. B. J. Reece, P. S. Sangha. *Induction motor analysis by time-stepping techniques*, IEEE Trans. on Mag. vol. 24, no. 1, pp. 471-474, 1988.
- [64]B. Boualem. *Contribution à la modélisation des systèmes électrotechnique à l'aide des formulations en potentiels: application à la machine asynchrone*. Thèse de doctorat, U.S.T.L, 1997.
- [65]B. Sudret. *Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions*. Reliability Engineering & System Safety, vol. 93, no. 7, pp. 964-979, 2008.
- [66]R. Ramarotafika. *Modélisation stochastique de la loi de comportement des matériaux ferromagnétiques, application sur les machines électriques*. Thèse de doctorat, Arts et Métiers ParisTech- 2012.
- [67]A. Nouy, M. Chevreuil, E. Safatly. *Fictitious domain method and separated representations for the solution of boundary value problems on uncertain parameterized domains*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, vol. 200, no. 45-46, pp. 3066–3082, 2011.
- [68]P. Surya Mohan, Prasanth B. Nair, Andy J. Keane. *Stochastic projection schemes for deterministic linear elliptic partial differential equations on random domains*. Int. J. Numer. Meth. Engng 2011, pp.874-895.

Annexe A1: Notion de probabilités

Dans cette partie, quelques notions sur la théorie des probabilités vont être rappelées. Le contenu de cette partie est basé principalement sur le livre de Jean-François le Gall [61] et sur le polycopié du cours de C. Soize [37].

A.1.1. Espace de probabilités

Dans l'observation d'un phénomène aléatoire, on introduit Θ , l'ensemble des résultats possibles dont θ est un événement élémentaire. On munit Θ d'une tribu¹ F dont les éléments sont appelés événements. L'espace (Θ, F) est muni d'une mesure de probabilités P de F dans $[0 ; 1]$ ce qui signifie que :

- Pour toute suite $\{A_n\}_n$ d'événements de F deux à deux disjoints, on a : $P(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$
- Pour tout A dans F , on a $P(A) \geq 0$
- On a $P(\Theta) = 1$

On appelle alors (Θ, F, P) un espace probabilisé.

A.1.2. Variable aléatoire réelle

Soit (Θ, F, P) un espace probabilisé, \mathbb{R} l'ensemble des réels et $B_{\mathbb{R}}$ une tribu sur \mathbb{R} . Une application mesurable X de Θ dans \mathbb{R} c'est-à-dire : $\forall B \in B_{\mathbb{R}}, X^{-1}(B) \in F$, est une variable aléatoire réelle. L'espace $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ est équipé d'une mesure probabiliste P_X telle que : $\forall B \in B_{\mathbb{R}}, P_X(B) = P(X^{-1}(B))$. On appelle alors P_X la loi de probabilité de la variable aléatoire X . La loi de probabilité peut être définie par la fonction de répartition de \mathbb{R} dans $[0 ; 1]$ telle que :

$$F_X(x) = P_X(X \leq x) = P_X(B_x)$$

avec $B_x =]-\infty, x]$. Dans le cas où la loi de probabilité admet la relation suivante :

$$P_X(dx) = f_X(x)dx$$

alors la fonction $x \mapsto f_X(x)$ définie sur \mathbb{R} à valeur dans $[0, +\infty[$ est appelée la fonction de densité de probabilité. A partir des variables aléatoires réelles, on peut définir un vecteur des variables aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ à valeurs dans \mathbb{R}^n .

¹Définition d'une tribu : Une famille F de parties d'un ensemble Θ est une tribu si F a les trois propriétés suivantes :

- F contient l'ensemble vide et Θ
- Si $A \in F$ alors le complément A^c de A dans Θ est dans F
- Si A_1, A_2, \dots est une famille dénombrable quelconque d'éléments de F , alors $\cup_n A_n \in F$

A.1.3. Loïs de probabilités

Les lois classiques sont rapidement présentées dans la suite.

Loïs discrètes :

Loi uniforme d'une variable aléatoire discrète sur \mathbb{R}

La loi uniforme de la variable aléatoire discrète X , qui ne peut prendre avec une probabilité non nulle que les valeurs entières 1, 2, ..., n , s'écrit :

$$P_X(dx) = \frac{1}{n} \delta_1(x) + \frac{1}{n} \delta_2(x) + \dots + \frac{1}{n} \delta_n(x)$$

avec $\delta_y(x)$ est la mesure Dirac sur \mathbb{R} au point y .

Loi de Bernoulli

Soit p un paramètre réel tel que $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$. La loi de Bernoulli de paramètre p d'une variable aléatoire discrète X s'écrit :

$$P_X(dx) = q \delta_0(x) + p \delta_1(x)$$

La variable X ne peut prendre que des valeurs égales à 0 et 1 avec une probabilité non nulle.

Loi binomiale sur \mathbb{R}

Soit p un paramètre réel tel que $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$ et n un entier plus grand que 1. La loi binomiale de paramètre n et p s'écrit :

$$P_X(dx) = \sum_{k=0}^n C_k^n p^k q^{n-k} \delta_k(x)$$

Une variable aléatoire discrète X qui suit une loi binomiale peut être considérée comme une somme de variables aléatoires discrètes indépendantes X_k , $k = 1 : n$, suivant la même loi de Bernoulli :

$$X = \sum_{k=1}^n X_k$$

Loïs continues :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} et à densité de probabilité $f_X(x)$

Loi uniforme sur $[a, b]$, $a < b$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$$

avec $1_{[a,b]}(x)$ égale à 1 si x appartient à $[a, b]$ et égale à zéro ailleurs.

Loi exponentielle de paramètre λ

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty)}(x)$$

Loi Gaussienne ou normale $N(m, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{A.1})$$

A.1.4. Quantités usuelles d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire avec la densité de probabilité f_X , on définit des quantités usuelles de X suivantes :

L'espérance de X :

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x) \cdot dx \quad (\text{A.2})$$

qui permet d'obtenir la valeur moyenne de X .

La variance de X : $\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2]$ représente « l'amplitude » de l'oscillation de X autour de sa valeur moyenne. La racine carrée σ_X de la variance est appelée écart-type de X .

Le moment d'ordre k de X est l'espérance de X^k .

Le moment centré d'ordre k de X : $m_k = E[(X - E(X))^k]$.

- L'asymétrie de X : $\gamma = \frac{m_3}{\sigma_X^3}$ avec m_3 le moment centré d'ordre 3 et σ_X l'écart-type de X .
- Le coefficient d'aplatissement de X : $\beta = \frac{m_4}{\sigma_X^4}$ avec m_4 le moment centré d'ordre 4 et σ_X

l'écart-type de X .

La covariance entre deux variables aléatoires X et Y : $\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y)))$. Cette quantité permet d'évaluer le degré de dépendance entre X et Y . Dans le cas où X et Y sont indépendants (voir dans la suite), la covariance est nulle. Le coefficient de corrélation est défini

par : $\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

A.1.5. Indépendance

Définition : Soient $X_i, i=1:n, n$ variables aléatoires réelles. On dit que $X_i, i=1:n$ sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall B_i \in \mathcal{B}_R, i=1:n :$$

$$P_X(X_1 \in B_1 \cap X_2 \in B_2 \cap \dots \cap X_n \in B_n) = P_{X_1}(X_1 \in B_1) \cdot P_{X_2}(X_2 \in B_2) \cdot \dots \cdot P_{X_n}(X_n \in B_n)$$

Remarque : Soient $X_i, i=1:n, n$ variables aléatoires réelles indépendantes. X_i a une densité de probabilité f_{X_i} . Alors, la loi conjointe de $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ suit une densité donnée par :

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$$

On peut aussi obtenir que :

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$$

A.1.6. Convergence de variables aléatoires

Convergence en moyenne d'ordre q

Soit q un entier positif fini et $\{X_i\}$, $i \in N$ une suite des variables aléatoires à valeur dans \mathbb{R}^n d'ordre q , c'est-à-dire le moment d'ordre q de X_i existe. La suite $\{X_i\}$, $i \in N$ converge en moyenne d'ordre q vers une variable aléatoire X d'ordre q , à valeurs dans \mathbb{R}^n si :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} (E\{|X_i - X|^q\})^{1/q} = 0 \tag{A.3}$$

Convergence en probabilité

La suite $\{X_i\}$, $i \in N$ des variables aléatoires à valeur dans \mathbb{R}^n converge en probabilité vers une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^n si pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} P(|X_i - X| \geq \varepsilon) = 0 \tag{A.4}$$

Convergence presque sure

La suite $\{X_i\}$, $i \in N$ des variables aléatoires à valeur dans \mathbb{R}^n converge presque sure vers une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^n si :

$$P(\lim_{i \rightarrow +\infty} X_i = X) = 1 \tag{A.5}$$

Convergence en loi

La suite $\{X_i\}$, $i \in N$ des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n de fonction de répartition F_{X_i} converge en loi vers une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^n de fonction de répartition F_X si :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} F_{X_i}(x_0) = F_X(x_0) \tag{A.6}$$

pour tout point x_0 où F_X est continue.

Remarque :

On peut résumer la hiérarchie des convergences par le diagramme suivant :

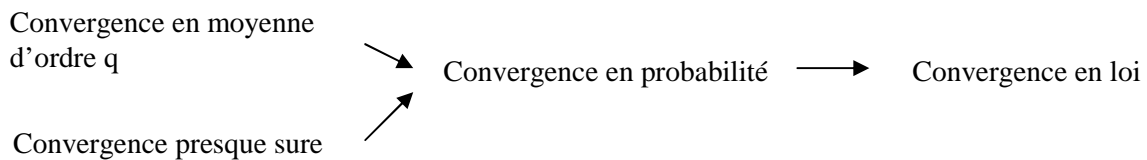


Figure 101. Hiérarchie des convergences

Ce qui signifie qu'une convergence en moyenne d'ordre q ou une convergence presque sure implique une convergence en probabilité. Une convergence en probabilité implique une convergence en loi.

Annexe A2 : Calcul semi analytique de l'espérance de produit des polynômes

A.2.1. Cas de polynômes monodimensionnels

Soit X une variable aléatoire réelle et $\Psi_i(X)$, $i \in N$ des polynômes de degré i de X tels que :

$$\begin{aligned}\Psi_0(X) &= 1 \\ \Psi_i(X) &= \sum_{k=0}^i a_{ik} X^k \quad , \quad a_{ii} \neq 0 \\ E[\Psi_i(X) \cdot \Psi_j(X)] &= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}\end{aligned}\tag{A.7}$$

avec a_{ik} des coefficients réels donnés.

Dans la suite, on va présenter une méthode semi analytique qui permet de calculer $E[\Psi_{i_1}(X) \cdot \Psi_{i_2}(X) \cdots \Psi_{i_q}(X)]$ avec q un entier positif fini.

La première étape consiste à écrire $\Psi_{i_1}(X) \cdot \Psi_{i_2}(X) \cdots \Psi_{i_q}(X)$ sous la forme suivante :

$$\Psi_{i_1}(X) \cdot \Psi_{i_2}(X) \cdots \Psi_{i_q}(X) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot X^k \tag{A.8}$$

avec $N = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$. Les coefficients a_k , $k=1:N$ sont déterminés facilement à partir des coefficients de polynômes $\Psi_{i_1}(X), \Psi_{i_2}(X), \cdots, \Psi_{i_q}(X)$.

La deuxième étape consiste à représenter X^k en fonction de $\Psi_i(X)$, $i=0:k$. Cette étape s'effectue de la façon suivante :

$$\begin{aligned}X^0 &= \Psi_0(X) = 1 \\ X &= \frac{(\Psi_1(X) - a_{10}X^0)}{a_{11}} \\ &\dots \\ X^k &= \frac{(\Psi_k(X) - \sum_{i=0}^{k-1} a_{ki}X^i)}{a_{kk}}\end{aligned}\tag{A.9}$$

On peut obtenir alors d'une façon récurrente :

$$X^k = \sum_{j=0}^k b_{kj} \Psi_j(X) \tag{A.10}$$

avec les coefficients b_{kj} déterminés à partir des coefficients de polynômes $\Psi_i(X)$, $i=1:k$.

A partir de (A.8) et (A.10) on obtient :

$$\Psi_{i1}(X) \cdot \Psi_{i2}(X) \cdots \Psi_{iq}(X) = \sum_{k=0}^N c_k \cdot \Psi_k(X) \quad (\text{A.11})$$

avec les coefficients $c_k, k=0 : N$ calculés à partir de a_k et b_{kj} . On a enfin :

$$\mathbb{E}[\Psi_{i1}(X) \cdot \Psi_{i2}(X) \cdots \Psi_{iq}(X)] = c_0 \quad (\text{A.12})$$

parce que $\mathbb{E}[\Psi_i(X)] = \mathbb{E}[\Psi_i(X)\Psi_0(X)] = \delta_{0i}$.

A.2.2. Cas de polynômes multidimensionnels

Soit $\mathbf{X}=\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ un vecteur de variables à valeurs dans \mathbb{R}^n . Les variables $X_i, i=1:n$ sont indépendantes. Les polynômes multidimensionnels $\Psi_i(\mathbf{X}), i = \{i1, i2, \dots, in\} \in N^n$ sont tels que :

$$\Psi_i(\mathbf{X}) = \prod_{k=1}^n \Psi_{ik}(X_k) \quad (\text{A.13})$$

avec $\Psi_{ik}(X_k)$ des polynômes monodimensionnels définis au dessus. Le terme $\mathbb{E}[\Psi_{i1}(\mathbf{X}) \cdot \Psi_{i2}(\mathbf{X}) \cdots \Psi_{iq}(\mathbf{X})]$ est calculé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Psi_{i1}(\mathbf{X}) \cdot \Psi_{i2}(\mathbf{X}) \cdots \Psi_{iq}(\mathbf{X})] &= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n \Psi_{i1k}(X_k) \prod_{k=1}^n \Psi_{i2k}(X_k) \cdots \prod_{k=1}^n \Psi_{i qk}(X_k)\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n \Psi_{i1k}(X_k) \Psi_{i2k}(X_k) \cdots \Psi_{i qk}(X_k)\right] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[\Psi_{i1k}(X_k) \Psi_{i2k}(X_k) \cdots \Psi_{i qk}(X_k)] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

avec les termes $\mathbb{E}[\Psi_{i1k}(X_k) \Psi_{i2k}(X_k) \cdots \Psi_{i qk}(X_k)], k=1 : n$, calculés dans la partie A.2.1.

Annexe A3 : Eléments de Whitney

On se donne un maillage de tétraèdres \mathcal{M} du domaine D avec n_0 nœuds, n_1 arêtes, n_2 facettes et n_3 éléments. On introduit des espaces fonctionnels de fonctions de premier ordre:

$$\begin{aligned} W_0 &= \{w_{0i} / i = 1 : n_0\} \\ W_1 &= \{w_{1i} / i = 1 : n_1\} \\ W_2 &= \{w_{2i} / i = 1 : n_2\} \\ W_3 &= \{w_{3i} / i = 1 : n_3\} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

avec w_{0i} la fonction de forme associée au nœud i , w_{1i} la fonction de forme associée à l'arête i , w_{2i} la fonction de forme associée à la facette i et w_{3i} la fonction de forme associée au volume i . Ces fonctions sont définies de la façon suivante.

A.3.1. Fonction de forme nodale

La fonction de forme nodale w_{0i} associée au nœud i est une fonction linéaire qui est égale à 1 au nœud i et nulle aux autres nœuds.

A.3.2. Fonction de forme d'arête

La fonction de forme d'arête w_{1i} associée à l'arête i est définie de la façon suivante :

$$\mathbf{w}_{1i} = w_{0i_1} \mathbf{grad} w_{0i_2} - w_{0i_2} \mathbf{grad} w_{0i_1} \quad (\text{A.16})$$

où i_1 est le nœud de départ et i_2 celui d'arrivée de l'arête i (l'arête est donc un élément orienté). On montre alors que la circulation de \mathbf{w}_{1i} est égale à 1 sur l'arête i et est nulle sur les autres arêtes. De plus, la composante tangentielle de cette fonction est continue à l'interface de deux éléments.

A.3.3. Fonction de forme de facette

Soit i une facette triangulaire formée par les nœuds (i_1, i_2, i_3) (l'ordre (i_1, i_2, i_3) impose une normale orientée vers l'extérieur du tétraèdre), la fonction de forme facette associée à la facette i est définie de la façon suivante :

$$\mathbf{w}_{2i} = 2w_{0i_1} \mathbf{grad} w_{0i_2} \wedge \mathbf{grad} w_{0i_3} + 2w_{0i_2} \mathbf{grad} w_{0i_3} \wedge \mathbf{grad} w_{0i_1} + 2w_{0i_3} \mathbf{grad} w_{0i_1} \wedge \mathbf{grad} w_{0i_2} \quad (\text{A.17})$$

Le flux de \mathbf{w}_{2i} est égal à 1 à travers la facette i et est nul à travers les autres facettes du maillage. De plus, la composante normale de \mathbf{w}_{2i} est continue à l'interface entre deux éléments.

A.3.4. Fonction de forme de volume

La fonction de forme de volume w_{3i} sur l'élément i est égale à v_i sur cet élément et est nulle sur les autres éléments avec v_i le volume de l'élément i .

Remarque : En 2D, on peut définir aussi les fonctions de base. On a alors seulement trois entités géométriques que sont les nœuds, les arêtes et les éléments auxquelles est associée une fonction de forme comme en 3D.

Annexe A4 : Estimateur d'erreur a priori en formulation en potentiel vecteur

Dans la partie 2.2.2, on a présenté un estimateur d'erreur *a priori* en fonction de la transformation. Le développement a été fait avec la formulation en potentiel scalaire. Dans la suite, on va développer un estimateur *a priori* basé sur la formulation en potentiel vecteur.

On s'intéresse à un problème de magnétostatique défini sur le domaine aléatoire $D(\xi)$. Ce problème est ramené à celui défini sur un domaine déterministe E en utilisant la méthode de transformation.

Supposons que l'on dispose une transformation $\mathbf{T}(X, \xi)$ qui transforme le domaine initial D en un domaine de référence E dont $\mathbf{M}(X, \xi)$ est la matrice jacobienne que l'on suppose constante sur chaque élément (cas d'une transformation discrète). On obtient alors un problème défini sur E avec une perméabilité modifiée $\mu'(X, \xi)$ définie par (1.135). On note $\mathbf{A}_{ex}(X, \xi)$ le potentiel vecteur exact du problème défini sur le domaine E . Par conséquent $\mathbf{A}_{ex}(x, \xi) = \mathbf{A}_{ex}(X(x, \xi), \xi)$ est le potentiel vecteur exact du problème initial sur le domaine D . Un maillage des tétraèdres \mathcal{M} est défini dans le domaine de référence E avec n_0 nœuds, n_1 arêtes, n_2 facettes et n_3 éléments. On rappelle les notations pour les espaces fonctionnels :

$$\begin{aligned} W_0 &= \{w_{0i} / i = 1 : n_0\} \\ W_1 &= \{w_{1i} / i = 1 : n_1\} \\ W_2 &= \{w_{2i} / i = 1 : n_2\} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

avec w_{0i} la fonction de forme associée au nœud i , w_{1i} la fonction de forme associée à l'arête i et w_{2i} la fonction de forme associée à la facette i (voir annexe 3). On cherche à borner la distance entre $\mathbf{A}_{ex}(X, \xi)$ et la solution $\tilde{\mathbf{A}}(X, \xi)$ obtenue par la méthode des éléments finis en utilisant la projection de Galerkin. On peut constater que $\tilde{\mathbf{A}}(X, \xi)$ est la projection de $\mathbf{A}_{ex}(X, \xi)$ sur l'espace W_1 défini dans (2.66). Cette distance représente l'erreur numérique et est donnée par :

$$er'_{abs}(\xi) = \int_E \mathbf{rot}_x(\tilde{\mathbf{A}}(X, \xi) - \mathbf{A}_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'^{-1}(X, \xi) \cdot \mathbf{rot}_x(\tilde{\mathbf{A}}(X, \xi) - \mathbf{A}_{ex}(X, \xi)) \cdot dX \quad (\text{A.19})$$

On peut constater que l'erreur est la même sur le domaine D du fait de la relation entre μ et μ' (1.135):

$$er'_{abs}(\xi) = \int_{D(\xi)} \mathbf{rot}_x(\tilde{\mathbf{A}}(x, \xi) - \mathbf{A}_{ex}(x, \xi)) \cdot \mu^{-1}(x, \xi) \cdot \mathbf{rot}_x(\tilde{\mathbf{A}}(x, \xi) - \mathbf{A}_{ex}(x, \xi)) \cdot dx \quad (\text{A.20})$$

avec $\tilde{\mathbf{A}}(x, \xi) = \tilde{\mathbf{A}}(X(x, \xi), \xi)$. On note $\mathbf{A}^*(X, \xi)$ la fonction d'interpolation de $\mathbf{A}_{ex}(X, \xi)$ aux arêtes du maillage \mathcal{M} . Elle prend alors la forme suivante:

$$\mathbf{A}^*(X, \xi) = \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{A}_{ex}^i(\xi) \cdot \mathbf{w}_{1i}(X) \quad (\text{A.21})$$

où $\mathbf{A}_{ex}^i(\xi)$ est la circulation de $\mathbf{A}_{ex}(X, \xi)$ sur l'arête i . On peut constater que $\mathbf{A}_{ex}(X, \xi)$ appartient à W_1 . La solution de la méthode des éléments finis minimise la distance des fonctions appartenant à W_1 avec la solution exacte. Par conséquent, on obtient :

$$er'_{abs}(\xi) \leq \int_E \mathbf{rot}_X (\mathbf{A}^*(X, \xi) - \mathbf{A}_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'^{-1}(X, \xi) \cdot \mathbf{rot}_X (\mathbf{A}^*(X, \xi) - \mathbf{A}_{ex}(X, \xi)) \cdot dX \quad (\text{A.22})$$

Si on note $e_i, i=1 : n_3$ des éléments du maillage \mathcal{M} , on obtient lors :

$$er'_{abs}(\xi) \leq \sum_{i=1}^{n_3} \int_{e_i} \mathbf{rot}_X (\mathbf{A}^*(X, \xi) - \mathbf{A}_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'^{-1}(X, \xi) \cdot \mathbf{rot}_X (\mathbf{A}^*(X, \xi) - \mathbf{A}_{ex}(X, \xi)) \cdot dX \quad (\text{A.23})$$

On s'intéresse à l'erreur sur un élément e_i définie de la façon suivante:

$$er'_i(\xi) = \int_{e_i} \mathbf{rot}_X (\mathbf{A}^*(X, \xi) - \mathbf{A}_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'^{-1}(X, \xi) \cdot \mathbf{rot}_X (\mathbf{A}^*(X, \xi) - \mathbf{A}_{ex}(X, \xi)) \cdot dX \quad (\text{A.24})$$

On peut constater qu'étant donné que nous avons supposé la matrice jacobienne constante sur chaque élément, la transformation prend la forme suivante dans l'élément e_i :

$$X = \mathbf{T}(x, \xi) = \mathbf{M}'(\xi) \cdot x + c(\xi) \quad (\text{A.25})$$

avec $c(\xi)$ une constante et $\mathbf{M}'(\xi)$ la matrice Jacobienne de la transformation dans cet l'élément. On suppose que $\det(\mathbf{M}') > 0$ pour que la perméabilité μ' obtenue par (1.135) soit définie positive. La matrice $\mathbf{M}'(\xi) \cdot \mathbf{M}(\xi)$ possède trois valeurs propres $0 < \lambda_{\min}(\xi) \leq \lambda_{\text{mil}}(\xi) \leq \lambda_{\max}(\xi)$.

On note X_0 le centre de la sphère de rayon h_e circonscrit à l'élément e_i .

$$h_e = \max_{X \in e_i} (\|X - X_0\|) = \|X_1 - X_0\| \quad (\text{1.26})$$

avec X_1 le point le plus éloigné de X_0 dans e_i et $\|\mathbf{v}\|$ signifie la norme du vecteur \mathbf{v} . Comme e_i est un tétraèdre, alors le point X_1 se situe sur un des sommets de l'élément e_i (Figure 102-Figure 103).

On note également $x_0(\xi) = \mathbf{T}^{-1}(X_0, \xi)$ et $d_i(\xi) = \mathbf{T}^{-1}(e_i, \xi)$ l'image de X_0 et de e_i respectivement auprès la transformation \mathbf{T}^{-1} . Alors, $d_i(\xi)$ est inscrit dans une sphère dont le centre est x_0 et de rayon h_d (Figure 103).

$$h_d(\xi) = \max_{x \in d_i} (\|x(\xi) - x_0(\xi)\|) = \|x_1(\xi) - x_0(\xi)\| \quad (\text{1.27})$$

avec $x_1(\xi)$ est le point le plus éloigné de x_0 dans d_i . Comme d_i est également un tétraèdre, le point $x_1(\xi)$ se situe sur un des sommets de d_i et on peut choisir le point X_1 parmi les sommets de l'élément e_i tel que le point $x_1(\xi)$ soit l'image de X_1 (Figure 103).

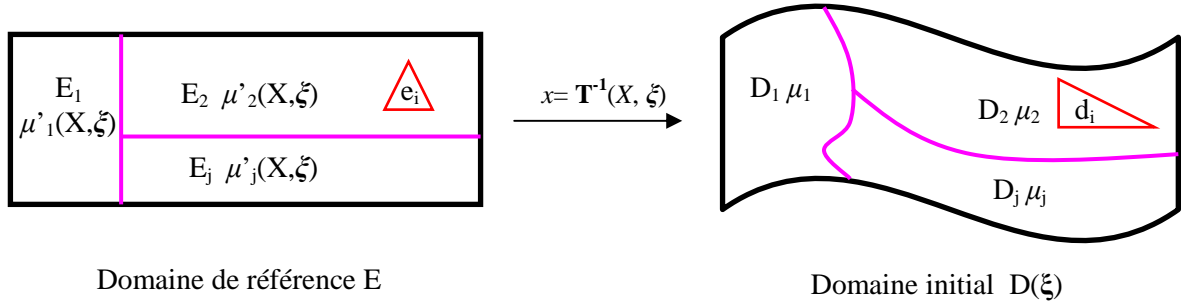


Figure 102. Transformation T

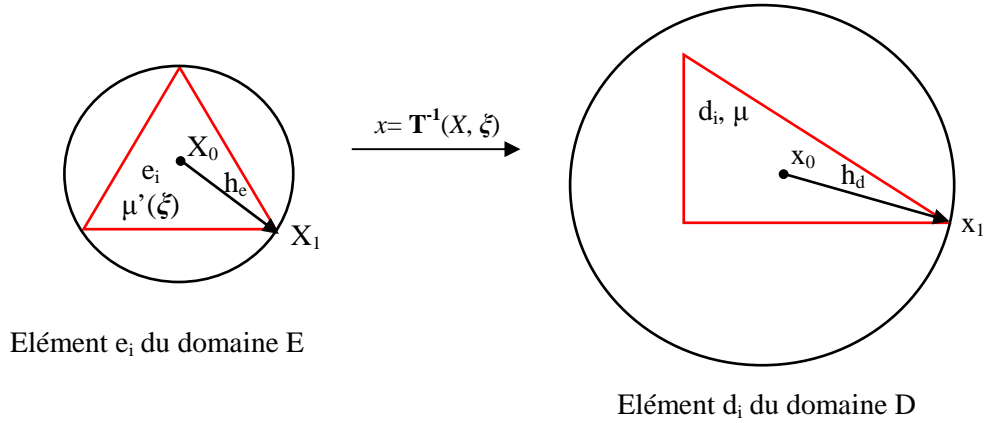


Figure 103. Eléments e_i et d_i

On note $A_r(X, \xi)$, une approximation de $A_{ex}(X_0, \xi)$ autour du point X_0 :

$$A_r(X, \xi) = A_{ex}(X_0, \xi) + \underline{\underline{\text{grad}}}_X A_{ex}(X_0, \xi) \cdot (X - X_0) \quad (\text{A.28})$$

avec $\underline{\underline{\text{grad}}}_X \mathbf{v}$ est une matrice de gradient de chaque composante du vecteur \mathbf{v} :

$$\underline{\underline{\text{grad}}}_X \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \text{grad}_X v_{x_1} & \text{grad}_X v_{x_2} & \text{grad}_X v_{x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

Alors, en utilisant (2.74), $A_r(X, \xi)$ peut s'écrire autrement dans le domaine initial $D(\xi)$:

$$A_r(x, \xi) = A_r(X(x, \xi), \xi) = A_{ex}(x_0, \xi) + \underline{\underline{\text{grad}}}_x A_{ex}(x_0, \xi) \cdot (x - x_0) \quad (\text{A.30})$$

Supposons que $A_{ex}(x, \xi)$ ait une forme « assez régulière », c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall X \in e_i, x = \mathbf{T}(X, \xi) : \\ \|A_{ex}(X, \xi) - A_r(X, \xi)\| &= \|A_{ex}(x, \xi) - A_r(x, \xi)\| \leq C_1(\xi) \cdot h_d^2 & (a) \\ \|\text{rot}_x A_{ex}(x, \xi) - \text{rot}_x A_r(x, \xi)\|^2 &= \|\mathbf{B}_{ex}(x, \xi) - \mathbf{B}_{ex}(x_0, \xi)\|^2 \leq C_2(\xi) \cdot h_d^2 & (b) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

avec $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$ les coefficients qui ne dépendent que du phénomène physique du problème initial défini sur D. Ils sont indépendants de la transformation et donc de la matrice jacobienne \mathbf{M} . En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{e_i} \mathbf{rot}_X (A^*(X, \xi) - A_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'^{-1}(\xi) \cdot \mathbf{rot}_X (A^*(X, \xi) - A_{ex}(X, \xi)) \cdot dX \leq \\ & \left(\int_{e_i} \mathbf{rot}_X (A_r(X, \xi) - A_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'^{-1}(\xi) \cdot \mathbf{rot}_X (A_r(X, \xi) - A_{ex}(X, \xi)) \cdot dX + \right. \\ & \left. \int_{e_i} \mathbf{rot}_X (A^*(X, \xi) - A_r(X, \xi)) \cdot \mu'^{-1}(\xi) \cdot \mathbf{rot}_X (A^*(X, \xi) - A_r(X, \xi)) \cdot dX \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

On analyse maintenant chaque terme de la partie droite de (A.32). Pour le premier terme, en utilisant (A.31)(b), on peut l'écrire :

$$\begin{aligned} & \int_{e_i} \mathbf{rot}_X (A_r(X, \xi) - A_{ex}(X, \xi)) \cdot \mu'^{-1}(\xi) \cdot \mathbf{rot}_X (A_r(X, \xi) - A_{ex}(X, \xi)) \cdot dX = \\ & \int_{d_i} \mathbf{rot}_x (A_r(x, \xi) - A_{ex}(x, \xi)) \cdot \mu^{-1} \cdot \mathbf{rot}_x (A_r(x, \xi) - A_{ex}(x, \xi)) \cdot dx \leq C_2(\xi) \cdot \mu^{-1} \cdot V_{d_i}(\xi) \cdot h_d^2(\xi) \quad (\text{A.33}) \\ & = C_3(\xi) \cdot V_{d_i}(\xi) \cdot h_d^2(\xi) = C_3(\xi) \cdot \frac{V_{e_i}}{\det(\mathbf{M}(\xi))} \cdot h_d^2(\xi) \end{aligned}$$

avec $C_3(\xi) = C_2(\xi) \cdot \mu^{-1}$ et V_{d_i} , V_{e_i} le volume de l'élément d_i et e_i respectivement. Concernant le deuxième terme de la partie droite de (A.32), on démontre d'abord que le rotationnel de la fonction linéaire $A_r(X, \xi)$ (A.28) peut s'écrire dans l'élément e_i sous la forme suivante :

$$\mathbf{rot}_X A_r(X, \xi) = \mathbf{rot}_X \left(\sum_{k=1}^6 \int_{l_k} A_r(X, \xi) \cdot \overrightarrow{dl} \right) \mathbf{w}_{ik}(X) \quad (\text{A.34})$$

En effet, on constate que $A_r(X, \xi)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} A_r(X, \xi) &= A_{ex}(X_0, \xi) + \underline{\underline{\mathbf{grad}_X}} A_{ex}(X_0, \xi) \cdot (X - X_0) = \\ &= a(\xi) + B(\xi) \cdot (X - X_0) = a(\xi) + \frac{1}{2}(B(\xi) - B'(\xi))(X - X_0) + \frac{1}{2}(B(\xi) + B'(\xi))(X - X_0) \quad (\text{A.35}) \\ &= f(X, \xi) + g(X, \xi) \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned} a(\xi) &= A_{ex}(X_0, \xi) \\ B(\xi) &= \underline{\underline{\mathbf{grad}_X}} A_{ex}(X_0, \xi) \\ f(X, \xi) &= a(\xi) + \frac{1}{2}(B(\xi) - B'(\xi))(X - X_0) \\ g(X, \xi) &= \frac{1}{2}(B(\xi) + B'(\xi))(X - X_0) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

On peut constater que la fonction $f(X, \xi)$ de la forme (A.36) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f(X, \xi) = \sum_{i=1}^6 f_k(\xi) w_{1ik}(X) \quad (\text{A.37})$$

avec f_k la circulation de f sur l'arête k de l'élément e_i :

$$f_k(\xi) = \int_{l_k} f(X, \xi) \cdot \bar{dl} = \int_{l_k} (A_r(X, \xi) - g(X, \xi)) \cdot \bar{dl} \quad (\text{A.38})$$

Sachant que $g(X, \xi)$ de la forme (A.36) est issue du gradient d'un champ, on a $\text{rot}_X g(X, \xi) = 0$ et

$\sum_{k=1}^6 (\int_{l_k} g(X, \xi) \cdot \bar{dl}) w_{1ik}(X) = \text{const}$ sur l'élément e_i . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \text{rot}_X A_r(X, \xi) &= \text{rot}_X f(X, \xi) = \text{rot}_X \left[\sum_{k=1}^6 (\int_{l_k} (A_r(X, \xi) - g(X, \xi)) \cdot \bar{dl}) w_{1ik}(X) \right] = \\ &= \text{rot}_X \left[\sum_{k=1}^6 (\int_{l_k} A_r(X, \xi) \cdot \bar{dl}) w_{1ik}(X) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

La relation (A.34) est alors démontrée.

Si on revient maintenant au deuxième terme de la partie droite de (A.32), on note :

$$\mathbf{ROT} = [\text{rot}_X w_{1i1}(X) \quad \text{rot}_X w_{1i2}(X) \quad \text{rot}_X w_{1i3}(X) \quad \text{rot}_X w_{1i4}(X) \quad \text{rot}_X w_{1i5}(X) \quad \text{rot}_X w_{1i6}(X)] \quad (\text{A.40})$$

On peut déduire alors:

$$\begin{aligned} & \int_{e_i} \text{rot}_X (A^*(X, \xi) - A_r(X, \xi)) \cdot \mu'^{-1}(\xi) \cdot \text{rot}_X (A^*(X, \xi) - A_r(X, \xi)) \cdot dX \\ &= \int_{e_i} \mu^{-1} \cdot (\Lambda^*(\xi) - \Lambda_r(\xi))' \mathbf{ROT}' \cdot \det(\mathbf{M}(\xi)) \mathbf{M}^{-1}(\xi) \mathbf{M}^{-1t}(\xi) \cdot \mathbf{ROT} \cdot (\Lambda^*(\xi) - \Lambda_r(\xi)) \cdot dX \\ &\leq \int_{e_i} \mu^{-1} \cdot (\Lambda^*(\xi) - \Lambda_r(\xi))' \mathbf{ROT}' \cdot \det(\mathbf{M}(\xi)) \frac{1}{\lambda_{\min}(\xi)} \cdot \mathbf{ROT} \cdot (\Lambda^*(\xi) - \Lambda_r(\xi)) \cdot dX \\ &= \mu^{-1} \cdot (\Lambda^*(\xi) - \Lambda_r(\xi))' \mathbf{ROT}' \cdot \det(\mathbf{M}(\xi)) \frac{1}{\lambda_{\min}(\xi)} \cdot \mathbf{ROT} \cdot (\Lambda^*(\xi) - \Lambda_r(\xi)) V_{e_i}(\xi) \quad (\text{A.41}) \\ &\leq \mu^{-1} \cdot \|\Lambda^*(\xi) - \Lambda_r(\xi)\|^2 \cdot \lambda_{1\max} \cdot \frac{1}{\lambda_{\min}(\xi)} \cdot V_{e_i}(\xi) \det(\mathbf{M}(\xi)) \\ &= \mu^{-1} \cdot \|\Lambda^*(\xi) - \Lambda_r(\xi)\|^2 \cdot \lambda_{1\max} \cdot \frac{1}{\lambda_{\min}(\xi)} \cdot (\det(\mathbf{M}(\xi)))^2 \frac{V_{e_i}(\xi)}{\det(\mathbf{M}(\xi))} \\ &= \mu^{-1} \cdot \|\Lambda^*(\xi) - \Lambda_r(\xi)\|^2 \cdot \lambda_{1\max} \cdot \lambda_{\text{mil}}(\xi) \cdot \lambda_{\max}(\xi) \frac{V_{e_i}(\xi)}{\det(\mathbf{M}(\xi))} \end{aligned}$$

où

$$\Lambda^*(\xi) - \Lambda_r(\xi) = \begin{bmatrix} A_{ex}^1(\xi) - A_r^1(\xi) & A_{ex}^2(\xi) - A_r^2(\xi) & A_{ex}^3(\xi) - A_r^3(\xi) \\ A_{ex}^4(\xi) - A_r^4(\xi) & A_{ex}^5(\xi) - A_r^5(\xi) & A_{ex}^6(\xi) - A_r^6(\xi) \end{bmatrix}$$

est le vecteur des circulations de $A_{ex}(X, \xi) - A_r(X, \xi)$ sur les 6 arêtes du tétraèdre e_i . Le terme $\lambda_{1\max}$ est la valeur propre maximale de $\mathbf{ROT}' \cdot \mathbf{ROT}$.

En utilisant (A.31)(a), on obtient :

$$\|\mathbf{\Lambda}^*(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{\Lambda}_r(\boldsymbol{\xi})\|^2 \leq 6C_1^2(\boldsymbol{\xi}) \cdot c_1^2 \cdot h_d^4(\boldsymbol{\xi}) \cdot h_e^2 \quad (\text{A.42})$$

En remplaçant (A.42) dans (A.41), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{e_i} \mathbf{rot}_X (A^*(X, \boldsymbol{\xi}) - A_r(X, \boldsymbol{\xi})) \cdot \mu'^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{rot}_X (A^*(X, \boldsymbol{\xi}) - A_r(X, \boldsymbol{\xi})) \cdot dX \\ & \leq C_4(\boldsymbol{\xi}) \cdot h_d^4(\boldsymbol{\xi}) \cdot h_e^2(\boldsymbol{\xi}) \cdot \lambda_{1\max} \cdot \lambda_{\text{mil}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{V_{e_i}(\boldsymbol{\xi})}{\det(\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}))} \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Avec $C_4(\boldsymbol{\xi}) = 6C_1^2(\boldsymbol{\xi}) \cdot c_1^2 \mu^{-1}$. A partir de (A.32), (A.33) et (A.43) on obtient:

$$\begin{aligned} er'_i & \leq (\sqrt{C_3(\boldsymbol{\xi})} \cdot h_d(\boldsymbol{\xi}) + \sqrt{C_4(\boldsymbol{\xi}) \cdot \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \lambda_{\text{mil}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \lambda_{1\max}} \cdot h_d^2(\boldsymbol{\xi}) h_e^2)^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\det(\mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}))} = \\ & = (\sqrt{C_3(\boldsymbol{\xi})} \cdot h_d(\boldsymbol{\xi}) + \sqrt{C_4(\boldsymbol{\xi}) \cdot \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \lambda_{\text{mil}}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \lambda_{1\max}} \cdot h_d^2(\boldsymbol{\xi}) h_e^2)^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}) \lambda_{\text{mil}}(\boldsymbol{\xi}) \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi})}} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

L'étape finale consiste à représenter $h_d(\boldsymbol{\xi})$ en fonction de h_e qui est réalisé dans la partie 2.2.2.1:

$$h_d^2(\boldsymbol{\xi}) \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi})} h_e^2 \quad (\text{A.45})$$

Rappelons que $\lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi})$ est la valeur propre minimum de la matrice $\mathbf{M}'(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{M}(\boldsymbol{\xi})$. En utilisant (A.44) et (A.45) la formulation finale prend la forme suivante:

$$er'_i(\boldsymbol{\xi}) \leq (\sqrt{C_3(\boldsymbol{\xi})} + \sqrt{\frac{\lambda_{\text{mil}}(\boldsymbol{\xi}) \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi})}} \sqrt{C_4(\boldsymbol{\xi}) \cdot \lambda_{1\max}} \cdot h_e^2)^2 \cdot \frac{V_{e_i}}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}) \sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}) \lambda_{\text{mil}}(\boldsymbol{\xi}) \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi})}} \cdot h_e^2 \quad (\text{A.46})$$

Annexe A5 : Enrichissement stochastique

Cette partie s'appuie sur la méthode XSFEM proposée par A. Nouy [9, 29, 30].

On s'intéresse à une grandeur locale aléatoire d'intérêt $G(\xi)$ qui possède une discontinuité en $\xi = \xi_0$. Il a été montré dans la partie 1.4.1.3 qu'un chaos polynômial classique n'est plus adapté pour approcher $G(\xi)$. Il est alors nécessaire d'enrichir la base de polynômes par des fonctions discontinues en $\xi = \xi_0$ et la variable aléatoire $G(\xi)$ va être approchée sous la forme suivante :

$$G(\xi) \approx G^{P+}(\xi) = \sum_{i=1}^P \alpha_i \cdot \Psi_i(\xi) + \sum_{i=1}^K \gamma_i \cdot \chi_i(\xi) \quad (\text{A.47})$$

avec $\Psi_i(\xi)$ les polynômes du chaos classiques, $\chi_i(\xi)$ les fonctions d'enrichissement qui prennent en compte la discontinuité en $\xi = \xi_0$ et α_i, γ_i sont des coefficients à déterminer. A priori, on peut prendre $\chi_i(\xi)$ de la forme suivante :

$$\chi_i(\xi) = \tau(\xi) \cdot \Psi_i(\xi), \quad i = 1 : K \quad (\text{A.48})$$

avec:

$$\tau(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi < \xi_0 \\ -1 & \text{si } \xi \geq \xi_0 \end{cases} \quad (\text{A.49})$$

La détermination des coefficients α_i, γ_i peut être réalisée en utilisant la méthode de régression ou la méthode de projection (voir les parties 1.3.1.2 et 1.3.1.3).

A.5.1. Méthode de régression

On cherche α_i, γ_i de manière à minimiser le terme :

$$r(\alpha_i, \gamma_i) = \sum_{k=1}^n \omega_k (G(\xi^k) - \sum_{i=1}^P \alpha_i \Psi_i(\xi^k) - \sum_{i=1}^K \gamma_i \chi_i(\xi^k))^2 \quad (\text{A.50})$$

On obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_0 & \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_1^t & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (\text{A.51})$$

avec $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ des matrices de taille $P \times P, P \times K, K \times K$ respectivement. Les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} sont respectivement de taille P et K . Les coefficients de ces matrices et de ces vecteurs sont donnés par :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{S}]_{ij} &= \sum_{k=1}^n \omega_k \Psi_i(\xi^k) \Psi_j(\xi^k) ; \quad [\mathbf{S}_1]_{ij} = \sum_{k=1}^n \omega_k \chi_j(\xi^k) \Psi_i(\xi^k) \\
[\mathbf{S}_2]_{ij} &= \sum_{k=1}^n \omega_k \chi_i(\xi^k) \chi_j(\xi^k) ; \quad [\mathbf{a}]_i = \sum_{k=1}^n \omega_k \Psi_i(\xi^k) G(\xi^k) \\
[\mathbf{b}]_i &= \sum_{k=1}^n \omega_k \chi_i(\xi^k) G(\xi^k) ; \quad [\boldsymbol{\alpha}]_i = \alpha_i \quad \text{and} \quad [\boldsymbol{\gamma}]_i = \gamma_i
\end{aligned} \tag{A.52}$$

La réalisation de n calculs déterministes $G(\xi^k)$, $k=1 : n$, est nécessaire dans ce cas.

A.5.2. Méthode de projection

On cherche la projection de $G(\xi)$ dans l'espace :

$$H_p^{d+} = \text{span} \{ \Psi_i(\xi), \chi_j(\xi) / i=1:P, j=1:K \} \tag{A.53}$$

Ce qui impose que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[(G(\xi) - G^{P+}(\xi)) \cdot \Psi_i(\xi) \right] &= 0 \quad \text{avec} \quad i=1:P \\
\mathbb{E} \left[(G(\xi) - G^{P+}(\xi)) \cdot \chi_j(\xi) \right] &= 0 \quad \text{avec} \quad j=1:K
\end{aligned} \tag{A.54}$$

L'équation (A.54) conduit au système suivant:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_0 & \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_1' & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \tag{A.55}$$

avec \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 des matrices de taille $P \times P$, $P \times K$, $K \times K$ respectivement. Les vecteurs \mathbf{c} et \mathbf{d} sont de taille P et K successivement. Les coefficients de ces matrices et vecteurs sont donnés par :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{E}_0]_{ij} &= \mathbb{E} \left[\Psi_i(\xi) \cdot \Psi_j(\xi) \right] = \delta_{ij} ; \quad [\mathbf{E}_1]_{ij} = \mathbb{E} \left[\Psi_i(\xi) \cdot \chi_j(\xi) \right] \\
[\mathbf{E}_2]_{ij} &= \mathbb{E} \left[\chi_i(\xi) \cdot \chi_j(\xi) \right] ; \quad [\mathbf{c}]_i = \mathbb{E} \left[G(\xi) \cdot \Psi_i(\xi) \right] \\
[\mathbf{d}]_i &= \mathbb{E} \left[G(\xi) \cdot \chi_i(\xi) \right] ; \quad [\boldsymbol{\alpha}]_i = \alpha_i \quad \text{et} \quad [\boldsymbol{\gamma}]_i = \gamma_i
\end{aligned} \tag{A.56}$$

Dans (A.56), on doit effectuer différents calculs de l'intégrale. Les coefficients de \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 peuvent être déterminés analytiquement. Par contre, les coefficients de \mathbf{c} et \mathbf{d} doivent être calculés numériquement. Ces calculs nécessitent n évaluations déterministes de $G(\xi^k)$, $k=1 : n$.

Annexe A6 : Détermination de la transformation

Dans cette annexe, on va détailler la détermination de la transformation présentée partiellement dans la partie 3.1.2.1.

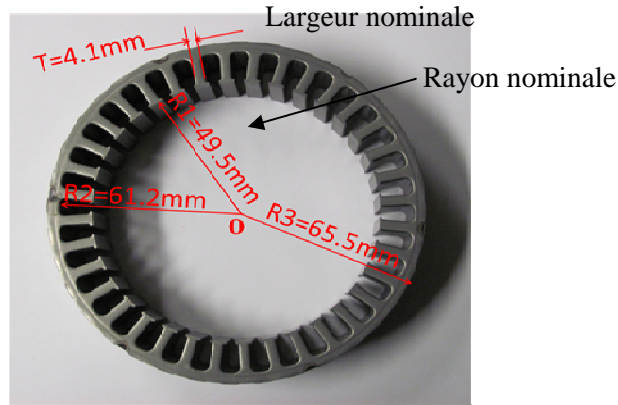


Figure 104. Stator étudié

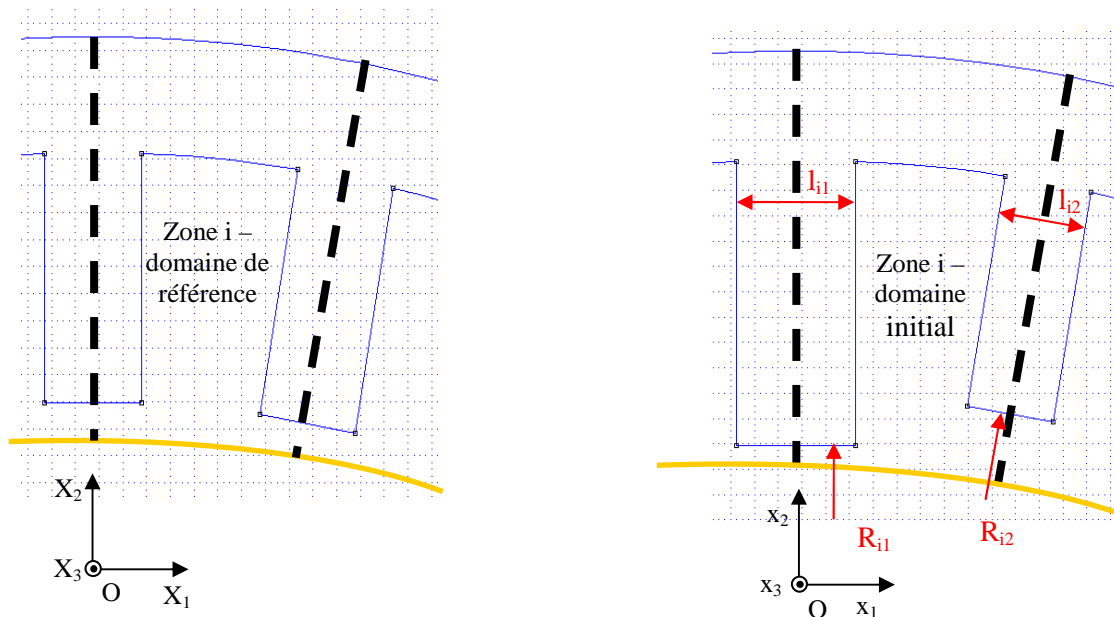


Figure 105. Division en zones des domaines E et D

On divise alors la zone i du domaine de référence et celui du domaine initial en 9 sous domaines E_j et D_j , $j=1:9$ de la façon présentée sur la Figure 106.

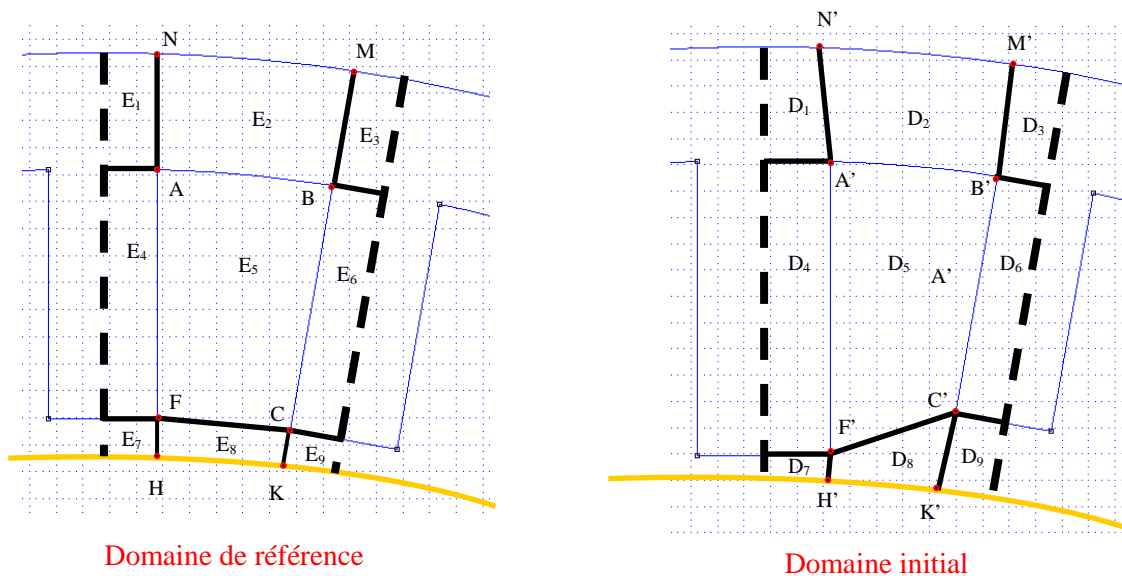


Figure 106. Division de la zone i en 9 sous domaines

La transformation de la zone i du domaine de référence est réalisée en déterminant 9 transformation du sous domaine E_j en sous domaine D_j . La transformation du E_5 (ABCF) en D_5 ($A'B'C'F'$) a été présentée dans le chapitre 3. Dans la suite, on va détailler la transformation pour les autres sous-domaines.

A.6.1. La transformation de E_1 en D_1

La transformation du E_1 en D_1 est présentée sur la Figure 107.

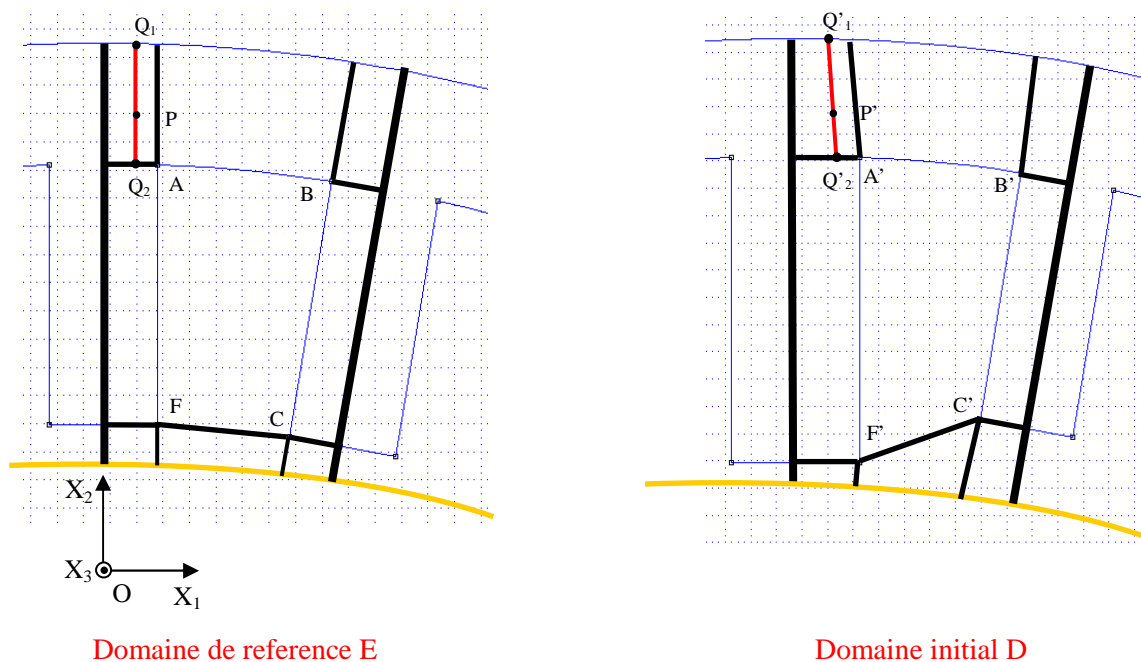


Figure 107. Transformation de E_1 en D_1

Le domaine E_1 peut être alors considéré comme un ensemble de segments Q_1Q_2 parallèles avec OX_2 (Figure 107-Figure 105). Les coordonnées du point Q'_2 dans le domaine D_1 , image du point Q_2 , sont déterminées par :

$$\begin{aligned}x_{1Q'_2} &= X_{1Q_2} \cdot \frac{x_{1A'}}{X_{1A}} \\x_{2Q'_2} &= x_{2A'}\end{aligned}\tag{A.57}$$

avec (X_{1Q_2}, X_{2Q_2}) , $(x_{1Q'_2}, x_{2Q'_2})$, (X_{1A}, X_{2A}) , $(x_{1A'}, x_{2A'})$ sont respectivement les coordonnées du point Q_2 , Q'_2 , A , A' . Rappelons que les coordonnées du point A' sont déterminées en fonction des valeurs de R_{i1} , R_{i2} , l_{i1} , l_{i2} (Figure 105). Le point Q'_1 , image dans le domaine D_1 du point Q_1 , est déterminé par :

$$\begin{aligned}x_{1Q'_1} &= X_{1Q_1} \\x_{2Q'_1} &= X_{2Q_1}\end{aligned}\tag{A.58}$$

Le segment $Q'_1Q'_2$, l'image de Q_1Q_2 dans le domaine D_1 , est alors parfaitement défini.

Pour un point P quelconque dans le domaine E_1 , on détermine le segment Q_1Q_2 auquel le point P appartient. Le point P' , l'image de P , appartient alors à $Q'_1Q'_2$ et peut être déterminé par :

$$\begin{aligned}(x_{1P'} - x_{1Q'_1}) &= (x_{1Q_2} - x_{1Q'_1}) \cdot \frac{Q_1P}{Q_2Q_1} \\(x_{2P'} - x_{2Q'_1}) &= (x_{2Q_2} - x_{2Q'_1}) \cdot \frac{Q_1P}{Q_2Q_1}\end{aligned}\tag{A.59}$$

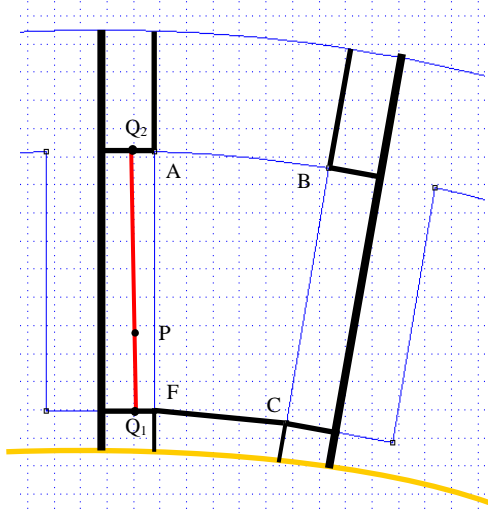
La transformation du sous domaine E_1 en D_1 est alors finalement déterminée.

A.6.2. La transformation de E_7 en D_7

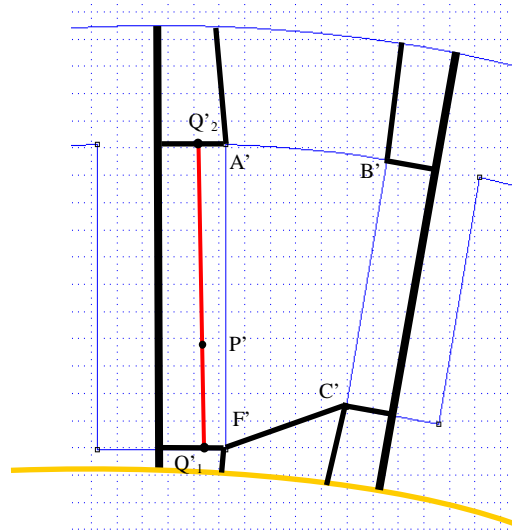
La transformation de E_7 en D_7 est très similaire à celle de E_1 en D_1 .

A.6.3. La transformation de E_4 en D_4

La transformation de E_4 en D_4 est présentée sur la Figure 108.



Domaine de référence



Domaine initial

Figure 108. Transformation de E_4 en D_4

Le domaine E_4 peut être alors considéré comme un ensemble de segments Q_1Q_2 parallèles avec OX_2 (Figure 108-Figure 105). Les coordonnées du point Q'_2 dans le domaine D_4 , image du point Q_2 , sont déterminées par :

$$\begin{aligned} x_{1Q'_2} &= X_{1Q_2} \cdot \frac{x_{1A'}}{X_{1A}} \\ x_{2Q'_2} &= x_{2A'} \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Le point Q'_1 , image du point Q_1 dans le domaine D_4 , est déterminé par :

$$\begin{aligned} x_{1Q'_1} &= X_{1Q_1} \cdot \frac{x_{1F'}}{X_{1F}} \\ x_{2Q'_1} &= x_{2F'} \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Le segment $Q'_1Q'_2$, image de Q_1Q_2 dans le domaine D_4 , est alors parfaitement défini.

Pour un point P quelconque dans le domaine E_4 , on détermine le segment Q_1Q_2 auquel le point P appartient. Le point P' , l'image de P , appartient alors à $Q'_1Q'_2$ du D_4 et peut être déterminé par :

$$\begin{aligned} (x_{1P'} - x_{1Q'_1}) &= (x_{1Q_2} - x_{1Q'_1}) \cdot \frac{Q_1P}{Q_2Q_1} \\ (x_{2P'} - x_{2Q'_1}) &= (x_{2Q_2} - x_{2Q'_1}) \cdot \frac{Q_1P}{Q_2Q_1} \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

La transformation du sous-domaine E_4 en D_4 est alors finalement déterminée.

A.6.4. La transformation de E_8 en D_8

La transformation de E_8 en D_8 est présentée sur la Figure 109.

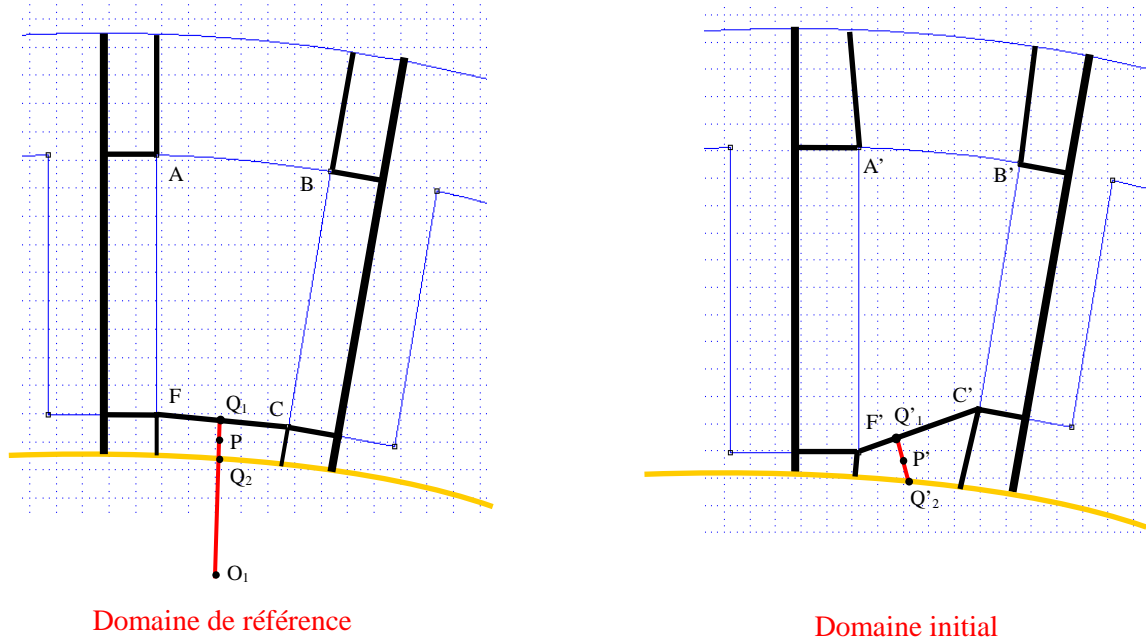


Figure 109. Transformation de E_8 en D_8

Le point O est l'intersection de AF et BC (Figure 109). Le domaine E_8 peut être alors considéré comme un l'ensemble de segments Q_1Q_2 . Les coordonnées du point Q'_1 dans le domaine D_8 , l'image du point Q_1 , sont déterminées par :

$$\begin{aligned} (x_{1Q'_1} - x_{1F'}) &= (x_{1C'} - x_{1F'}) \cdot \frac{Q_1F}{CF} \\ (x_{2Q'_1} - x_{2F'}) &= (x_{2C'} - x_{2F'}) \cdot \frac{Q_1F}{CF} \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Le point Q'_2 l'image du point Q_2 dans le domaine D_8 est déterminé par :

$$\begin{aligned} x_{1Q'_2} &= X_{1Q_2} \\ x_{2Q'_2} &= X_{2Q_2} \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

Pour un point P quelconque dans le domaine E_8 , on détermine le segment Q_1Q_2 auquel le point P appartient. Le point P' , l'image de P , appartient alors à $Q'_1Q'_2$ et peut être déterminé par :

$$\begin{aligned} (x_{1P'} - x_{1Q'_1}) &= (x_{1Q_2} - x_{1Q'_1}) \cdot \frac{Q_1P}{Q_2Q_1} \\ (x_{2P'} - x_{2Q'_1}) &= (x_{2Q_2} - x_{2Q'_1}) \cdot \frac{Q_1P}{Q_2Q_1} \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

La transformation du sous-domaine E_8 en D_8 est alors finalement déterminée.

A.6.5. La transformation de E_2 en D_2

La transformation de E_2 en D_2 est présentée sur la Figure 110.

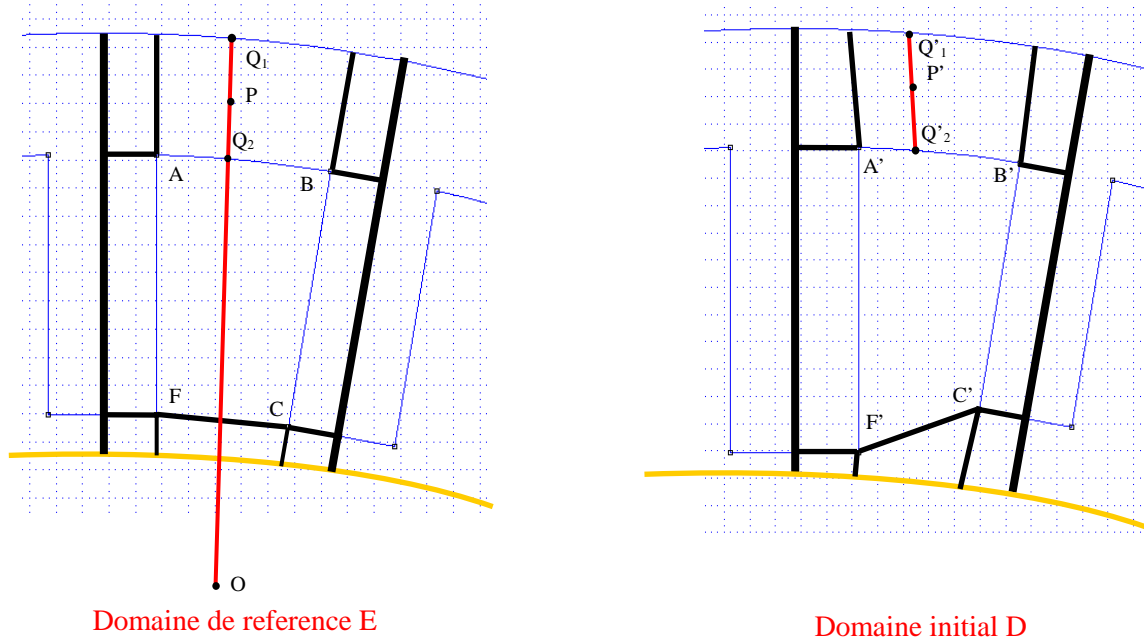


Figure 110. Transformation de E_2 en D_2

Le point O est l'intersection de AF et BC (Figure 110). Le domaine E_2 peut être alors considéré comme un ensemble de segments Q_1Q_2 (Figure 110). Les coordonnées du point Q'_1 dans le domaine D_2 , l'image du point Q_1 , sont déterminées par :

$$\begin{aligned} x_{1Q'_1} &= X_{1Q_1} \\ x_{2Q'_1} &= X_{2Q_1} \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

Le point Q'_2 l'image du point Q_2 dans le domaine D_2 est déterminé par :

$$\begin{aligned} x_{1Q'_2} &= R_2 \sin(\varphi_{Q'_2}) \\ x_{2Q'_2} &= R_2 \cos(\varphi_{Q'_2}) \end{aligned} \quad (\text{1.67})$$

avec $R_2=61.2\text{mm}$ (Figure 104) et l'angle $\varphi_{Q'_2}$ déterminé par (Figure 93) :

$$(\varphi_{Q'_2} - \varphi_{A'}) = (\varphi_{B'} - \varphi_{A'}) \cdot \frac{(\varphi_{Q_2} - \varphi_A)}{(\varphi_B - \varphi_A)} \quad (\text{1.68})$$

avec:

$$\begin{aligned}
\varphi_{A'} &= \arcsin\left(\frac{x_{1A'}}{R_2}\right); \quad \varphi_A = \arcsin\left(\frac{x_{1A}}{R_2}\right) \\
\varphi_{B'} &= \arcsin\left(\frac{x_{1B'}}{R_2}\right); \quad \varphi_B = \arcsin\left(\frac{x_{1B}}{R_2}\right) \\
\varphi_{Q_2} &= \arcsin\left(\frac{x_{Q_2}}{R_2}\right)
\end{aligned}
\tag{1.69}$$

Pour un point P quelconque dans le domaine E_2 , on détermine le segment Q_1Q_2 auquel le point P appartient. Le point P', l'image de P, appartient alors à $Q'_1Q'_2$ et peut être déterminé par :

$$\begin{aligned}
(x_{1P'} - x_{1Q'_1}) &= (x_{1Q_2} - x_{1Q'_1}) \cdot \frac{Q_1P}{Q_2Q_1} \\
(x_{2P'} - x_{2Q'_1}) &= (x_{2Q_2} - x_{2Q'_1}) \cdot \frac{Q_1P}{Q_2Q_1}
\end{aligned}
\tag{A.70}$$

La transformation du sous domaine E_2 en D_2 est alors finalement déterminée.

A.6.6. La transformation de E_3 en D_3 , E_6 en D_6 et E_9 en D_9 .

Les transformations du E_3 en D_3 , E_6 en D_6 et E_9 en D_9 sont déterminées aisément en se basant respectivement sur les transformations de E_1 en D_1 , E_4 en D_4 et E_7 en D_7 en utilisant des rotations d'un angle de 10° autour des axes Ox_3 et Ox_3 , puis des symétries par rapport aux axes Ox_2 , Ox_2 .

Résolution numérique en électromagnétisme statique de problèmes aux incertitudes géométriques par la méthode de transformation : Application aux machines électriques

RESUME : Les modèles numériques, de plus en plus utilisés en tant que prototypes virtuels, requièrent la connaissance de paramètres d'entrée comme les dimensions géométriques, les caractéristiques physiques des matériaux et les sollicitations externes. Les modèles numériques disponibles actuellement sont très proches de la physique qu'il représente et les écarts que l'on constate avec la réalité peuvent maintenant incomber en partie à une méconnaissance des paramètres d'entrée. L'approche probabiliste qui consiste à modéliser les quantités incertaines par des variables ou champs aléatoires est la solution qui a été retenue dans cette thèse pour prendre en compte les incertitudes d'origine géométrique. Pour résoudre le problème, la méthode de transformation, permettant de ramener un problème aux incertitudes portées par la géométrie à un problème aux incertitudes portées par les lois de comportement, a été choisie. Comme il existe une infinité de transformations possibles, différentes méthodes de détermination de la transformation ont été mises en œuvre et comparées. En particulier, un estimateur d'erreur *a-priori* a été proposé de manière à dégager des critères de choix. Il a été aussi montré que la méthode de transformation peut prendre en compte naturellement des discontinuités au niveau stochastique des grandeurs locales. Enfin, la méthode étudiée a été employée pour étudier l'influence des incertitudes géométriques d'un stator sur les performances d'une machine électrique. Cette étude s'appuie sur un ensemble de mesures faites sur un lot de stators.

Mots clés : variable aléatoire, incertitudes géométriques, problème stochastique, chaos polynomial, méthode non intrusive, électromagnétisme, machines électriques.

Numerical solution of static electromagnetic problems with geometric uncertainties by the transformation method: application to electrical machines

ABSTRACT: The numerical models that are more and more used as virtual prototypes require information on the input data as the geometrical dimensions, the physical characteristics of materials and the external solicitations. At present, the models available are very close to the physics they represent and the gap met with the reality can come now partially from a lack of information on the input data. The probabilistic approach which consists in modelling the uncertain quantities by variables or random fields is the solution which was chosen in this thesis to take into account the uncertainties on the geometrical dimensions. To resolve the problem, the transformation method, allowing transposing a problem with uncertainties on the geometry to a problem with uncertainties on the behaviour laws, was chosen. As there are an infinite number of possible transformations, various methods to determine the transformation were implemented and compared. In particular, an *a-priori* error estimator has been proposed which gives a criterion for the transformation choice. It was also shown that the transformation method can take into account naturally the discontinuities at the stochastic level of the electromagnetic fields. Finally, the method was used to study the influence of the geometrical uncertainties of a stator on the performances of an electrical machine. This study is based on a set of measurements made on a batch of stators.

Keywords : random variables, geometrical uncertainties, stochastic problem, polynomial chaos, non intrusive method, electromagnetism, electrical machines.

