



HAL
open science

Modélisation et simulation numérique d'un piano par modèles physiques

Juliette Chabassier

► **To cite this version:**

Juliette Chabassier. Modélisation et simulation numérique d'un piano par modèles physiques. Analyse numérique [math.NA]. Ecole Polytechnique X, 2012. Français. NNT : . pastel-00690351

HAL Id: pastel-00690351

<https://pastel.hal.science/pastel-00690351>

Submitted on 23 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Juliette CHABASSIER

**MODÉLISATION ET SIMULATION NUMÉRIQUE D'UN PIANO
PAR MODÈLES PHYSIQUES.**

Thèse soutenue le 12 Mars 2012 devant la commission d'examen:

M.	Stefan BILBAO	(Rapporteur)
M.	Bertrand MAURY	(Rapporteur)
M.	François GAUTIER	(Président)
Mme	Jean ROBERTS	
M.	Toufic ABBOUD	
M.	Marc DURUFLE	
M.	Patrick JOLY	(Directeur de thèse)
M.	Antoine CHAIGNE	(Directeur de thèse)



Équipe projet POEMS
Unité mixte INRIA - ENSTA - CNRS
INRIA Rocquencourt
78 153 Le Chesnay



Unité de Mécanique
UME ENSTA
Chemin de la Hunière
91 127 Palaiseau

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont tout naturellement à Patrick Joly et Antoine Chaigne, mes deux directeurs de thèse, pour m'avoir proposé ce sujet, au croisement de l'analyse numérique et de l'acoustique musicale. Modéliser cet instrument de musique pendant ces trois ans a été de loin l'aventure scientifique la plus passionnante, la plus riche et la plus épanouissante de mon parcours.

En commençant cette thèse, je suis entrée dans la grande famille, ou plutôt la dynastie des thésards de Patrick. Quelle chance de pouvoir chaque jour évoluer aux côtés d'un chercheur d'une telle qualité, qui de plus a fait le choix de toujours montrer à ses étudiants une immense disponibilité, une pédagogie hors norme et de s'armer de toute la patience nécessaire pour transmettre ses idées, son savoir, sa rigueur et son souci de la perfection. Au delà de la formation technique, je le remercie également de m'avoir associée à plusieurs de ses voyages scientifiques, et d'avoir été toujours à l'écoute, prêt à me rassurer dans les moments de questionnement, et à tempérer mon enthousiasme parfois débordant. J'ai également été très heureuse de partager une passion commune pour la musique, et j'espère que notre amitié perdurera quelle que soit la route qui m'attend.

Bien que j'ai passé la majorité de ma thèse à l'INRIA, j'ai toujours pu compter sur Antoine pour passer le temps nécessaire à m'expliquer les nombreuses subtilités de la physique sous-jacente au fonctionnement du piano, et faire tous les efforts possibles pour comprendre le sens caché de mes questions de mathématicienne. Je le remercie de m'avoir accordé une très grande confiance, de m'avoir à plusieurs reprises permis de présenter mon travail à la communauté d'acousticiens mais aussi de m'avoir associée à une formation d'accordeur de piano, expérience aussi inattendue qu'enrichissante.

Un grand merci à mes deux rapporteurs, Stefan Bilbao et Bertrand Maury, pour avoir relu en détails mon manuscrit et avoir établi des rapports très judicieux dont les remarques ont alimenté certaines réflexions de cette version finale du document. Je remercie également François Gautier, Jean Roberts, Toufic Abboud, et Marc Duruflé d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Nous avons eu la chance de pouvoir mener à bien une campagne de mesures sur un Steinway D à l'IRCAM, qui se sont avérées très précieuses pour ce travail. Un grand merci à René Caussé de nous avoir donné l'accès à ce piano pendant deux jours, mais aussi pour l'intérêt qu'il a manifesté envers mon travail à plusieurs occasions.

Pour l'aspect plus numérique de ce travail, j'ai fait le choix d'utiliser le programme de calcul Montjoie, car ce dernier recelait une multitude de méthodes numériques, de type d'équations résolues, de conditions aux limites, bref, le rêve d'un numéricien. Avec le recul, utiliser ce code de calcul fut un excellent parti pris, non seulement grâce au temps et la robustesse de programmation gagnés, mais surtout car ceci m'a donné l'occasion de collaborer avec Marc. Il montre non seulement une expertise incontestée en à peu près toutes les méthodes numériques pour les équations d'onde, mais également une très grande gentillesse et disponibilité au quotidien. Ses nombreuses remarques constructives sur mon travail, sa contribution

intensive au développement du code conjointement à l'apparition de besoins spécifiques au piano et sa relecture plus qu'attentive de mon manuscrit m'ont permis d'aller vraiment beaucoup plus loin dans la modélisation de l'instrument. La qualité de ce travail ne serait pas la même sans son aide précieuse. Travailler avec Marc a été un vrai plaisir, et j'espère de tout cœur que cette collaboration ne s'arrêtera pas là.

Lors de ma première venue à POems à la recherche d'un sujet de stage, j'ai rencontré Sonia, qui m'a consacré quelques minutes pour m'expliquer à quel point faire une thèse dans ce laboratoire était une formidable opportunité. Je salue sa bonne humeur, ses conseils Mac, et son exemplaire diplomatie dont je m'efforce de m'inspirer au quotidien... Elle nous a montré qu'il était possible (bien que douloureux) de rendre son manuscrit après validation par Patrick. Je lui souhaite l'excellente carrière qu'elle mérite et de continuer à ensoleiller son entourage comme elle sait si bien le faire.

Faire sa thèse au sein de l'équipe POems, c'est avoir un pied à l'INRIA et un pied à l'UMA de l'ENSTA. Pour l'ambiance très agréable qui règne dans l'équipe, merci à tous les permanents et thésards que je connaissais moins et que je n'énumérerai pas ici, mais dont j'ai pu apprécier l'excellence, la bienveillance et la sympathie à l'occasion de nos séminaires, ou des divers congrès d'analyse numérique aux quatre coins du monde (Pau, Lyon, Carcans Maubuisson, Vancouver...).

Lors de la première année de ma thèse, la parité régnait dans le bâtiment 13, en particulier grâce à la présence enjouée et dynamique de Morgane, discrète et avisée de Bérangère. Je les remercie toutes les deux pour leur amitié au quotidien, et en particulier pour nos débats passionnés aux pauses cafés si mémorables de ce temps là. La musique baroque animait souvent nos discussions avec la violoncelliste qu'est Bérangère... Je lui souhaite de construire une vie qui lui permette de concilier musique, enseignement et recherche, et à continuer à prendre confiance en la personne extraordinaire qu'elle est. J'ai une pensée particulière pour Morgane : nos duos de chant, notre aventure inoubliable face à un monstre à huit pattes au CANUM, des « tchai ti latte » à refaire le monde, bref, une amitié qui saura traverser la distance Bordeaux - Strasbourg.

Vient le tour des garçons de cette même promotion de thésards : Alexandre caractérisé par son humour et son attitude déagée, Adrien par toute sa gentillesse et sa faculté à nous apporter tout type d'aide et d'informations détaillées en Linux, en mac, en réseau... Ses phrases chocs resteront à jamais dans la mémoire collective de POems. Je leur souhaite à tous les deux réussite et de bonheur dans leurs voies respectives.

Nous étions trois à commencer notre thèse la même année à Rocquencourt, et quel trio ! Julien se caractérise entre autre par sa peur totalement irrationnelle de l'avion, sa passion pour Napoléon, mais aussi par son expertise en équations d'ondes (ce qui en a fait le meilleur élève de l'ENSTA depuis deux millénaires). C'est malgré le regard condamateur de son lapin en paille que nous allions à tour de rôle lui soumettre nos interrogations mathématiques, auxquelles il essayait toujours de trouver une réponse à la portée de notre compréhension... Je lui souhaite de tout cœur de trouver sa voie et de s'épanouir pleinement.

Mon autre camarade de thèse Sébastien se caractérise quant à lui par ses idées foisonnantes, son optimisme et son engouement éternel, sa vivacité et son ouverture d'esprit et sa capacité à s'intéresser à tous les sujets qui se présentent à lui. Collaborer avec lui est un vrai plaisir et il sait avec sa bonne humeur habituelle donner envie de finir des calculs affreux ou d'utiliser des fonctions de Bessel. Il ne faut pas non plus négliger son attrait pour les festivités et sa capacité à nouer des contacts. Difficile de ne pas mentionner les « meilleures soirées de tous les temps » et les moments inoubliables que nous avons passés en conférence : le bistrot à Pau, le retour en voiture du CANUM ou les randonnées avec ours à Vancouver... Je lui souhaite le meilleur pour la suite et toute la réussite qu'il mérite, en espérant pour la Science et le bien de l'humanité qu'il continue dans la recherche.

Un des meilleurs choix de ma thèse a été ~~mon esclave~~ ma stagiaire Aliénor, que je remercie pour son courage face aux développements multi échelle... Malgré cette expérience traumatisante, elle a choisi de rester au sein du labo, ce qui a rendu le quotidien très agréable grâce à sa personnalité joyeuse et énergique. Seule thésarde de sa promotion, elle a pris la relève pour un grand nombre de choses : faire la compta du coin café, organiser le séminaire, dépanner Patrick avec ses problèmes de mac... Un grand bravo pour toutes ces responsabilités, et surtout bon courage !

Kersten, Edouard, Xavier, Ricardo, Jeronimo ont également partagé un échantillon d'année avec nous



(a) Soutenance de thèse de Sonia, notez les couleurs de l'écharpe



(b) Waves, 2009 à Pau



(c) Waves, 2009 à Pau



(d) SANUM, 2009 à Stellenbosch



(e) Partie INRIA de l'équipe, septembre 2010

FIGURE 1 – Quelques souvenirs

à Rocquencourt, je les remercie pour nos discussions et leurs conseils, et leur souhaite bonne continuation. Je souhaite beaucoup de réussite aux doctorants qui ont rejoint l'équipe pendant mon passage. Je remercie en particulier Nicolas S. pour tous ses bons plans à l'époque où nous partageons le bureau, et Antoine pour sa gentillesse et sa bonne humeur qui sont contagieuses.

Un grand merci à Nathalie pour sa gentillesse et sa sympathie, mais aussi sa compétence et son efficacité au quotidien.

Je voudrais remercier également tous mes professeurs et camarades musiciens, qui sans le savoir vraiment, ont contribué à l'aboutissement de ce travail en garantissant l'équilibre nécessaire dans ma vie entre musique et science... Je remercie donc Alexandre, incarnation de la pédagogie, qui sait plus que quiconque transmettre sa passion et sa connaissance infinie de la musique baroque, pour chacun des mercredi soirs de répétition et toute sa disponibilité et sa patience pour tirer le meilleur de nous. Merci aussi à Olivier pour m'avoir initiée au hautbois baroque, une découverte fabuleuse qui a changé mon regard sur l'instrument et la musique en général. Merci à Franck, Géraldine, Thibault, Benoit, Armelle, Christophe, Claire, Louis-Joseph. Je remercie Angélique pour ses cours de chant très enrichissants et son initiation à la musique médiévale. Merci enfin à Isabelle de m'avoir fait une place dans sa classe dès mon arrivée à Talence, et pour tous les projets passionnants qu'elle m'a proposés cette année.

Je me suis exilée à Bordeaux pour finir la rédaction de ma thèse, et je remercie les membres de l'équipe Bacchus et en particulier Rémi Abgrall pour leur accueil chaleureux. Merci aussi à Josy et Nicolas de m'avoir sortie des problèmes administratifs causés par le fait d'appartenir à trois équipes INRIA à la fois...

Mes parents qui étaient heureux de mon diplôme d'ingénieur l'étaient un peu moins de mon choix de me lancer dans la préparation d'un doctorat. Je les remercie d'avoir toujours respecté ce choix, et d'avoir manifesté un intérêt croissant pour mon travail, jusqu'à finalement faire de mon manuscrit leur livre de chevet. Je suis très heureuse de revenir en région bordelaise et de pouvoir partager un peu de quotidien ensemble. J'en profite pour souhaiter beaucoup de réussite et d'épanouissement à mon frère et ma sœur.

Pour terminer, j'ai une pensée toute particulière pour Franck, qui a toujours su m'écouter et me rassurer dans les moments de doute ou de découragement, et célébrer les moments de joie et de réussite. Merci de m'avoir boostée avec de la musique de qualité les matins difficiles de rédaction, d'avoir mis le doigt sur des passages obscurs du manuscrit, d'être allé jusqu'à m'accompagner à l'INRIA un samedi de décembre pour réaliser certains schémas en 3D que je suis totalement incapable de faire. Merci pour notre complémentarité qui fait et continuera à faire notre force...

TABLE DES MATIÈRES

Communications	xi
Introduction	1
I Un modèle de piano	11
I.1 La corde du piano	14
I.1.1 Equation de corde vibrante	16
I.1.2 Raideur, inharmonicité et dispersion	19
I.1.3 Vibration longitudinale et non-linéarité des cordes	31
I.1.4 Mouvement non planaire de la corde	46
I.1.5 Filage des cordes	51
I.1.6 Amortissement	57
I.1.7 Un modèle de corde complet et unifié	59
I.2 Le marteau	67
I.2.1 Propriétés viscoélastiques du feutre	68
I.2.2 Interaction avec la corde	70
I.2.3 Position d'attaque du marteau	73
I.3 La table d'harmonie et son rayonnement dans l'air	75
I.3.1 La table d'harmonie comme une plaque bidimensionnelle	77
I.3.2 Décomposition modale	80
I.3.3 Amortissement	82
I.3.4 Prise en compte des raidisseurs et du chevalet	84
I.3.5 Formulation variationnelle	85
I.3.6 Couplage vibroacoustique avec l'air	86
I.4 Couplage au chevalet	90

I.4.1	Charge des cordes et angle au chevalet	90
I.4.2	Condition de contact	92
I.4.3	Transmission de la vibration longitudinale, partiels fantômes	95
I.4.4	Les chœurs de cordes	99
I.4.5	Jeu <i>una corda</i> et cordes aliquotes	101
I.4.6	Échelles duplex	101
I.5	Modèle complet de piano	104
I.6	Discussion du modèle et quelques pistes	109
I.6.1	Couplage au chevalet	109
I.6.2	Table d'harmonie	109
I.6.3	Plateau de touches et ceinture	111
I.6.4	Marteau, interaction avec les cordes	112
I.6.5	Réalisme du jeu pianistique	113
II	Discrétisation du modèle	115
II.1	Équations de cordes	119
II.1.1	Approximation numérique en espace	120
II.1.2	Les theta-schémas pour les équations d'ondes linéaires	123
II.1.3	Des theta-schémas à plusieurs theta pour le système de Timoshenko	131
II.1.4	Des nouveaux schémas préservant une énergie pour un système d'équations d'ondes non linéaires	140
II.1.5	Deux schémas numériques pour la corde de piano	163
II.2	Marteau et chœurs de cordes	169
II.2.1	Propriétés du schéma	170
II.2.2	Implémentation et résolution numérique	171
II.3	Table d'harmonie	174
II.3.1	Calcul numérique des modes	174
II.3.2	Décomposition sur les modes numériques	184
II.3.3	Résolution analytique en temps	184
II.3.4	Schéma en temps pour la table d'harmonie	188
II.4	Couplage au chevalet	190
II.4.1	Schéma pour le système couplé	190
II.4.2	Résolution séparée sur les cordes et sur la table	193
II.4.3	Illustration numérique	194
II.5	Vibroacoustique	197
II.5.1	Discrétisation spatiale de l'acoustique	197
II.5.2	Schéma temporel pour l'acoustique	198
II.5.3	Troncature artificielle du domaine acoustique	199
II.5.4	Schéma couplé pour la vibroacoustique	201
II.5.5	Résolution séparée sur la table et dans l'air	203

II.5.6	Illustration numérique	204
II.6	Piano complet	209
II.6.1	Schéma discret pour le piano	209
II.6.2	Résolution séparée sur chaque sous système	211
II.6.3	Illustration numérique	213
II.7	Discussion de la discrétisation	217
II.7.1	Discrétisation spatiale du modèle de plaque	217
II.7.2	Choix de la méthode modale	217
II.7.3	Traitement des couplages	218
II.7.4	Résolution des équations de l'acoustique	218
II.7.5	Schémas pour résoudre l'équation de corde	218
II.7.6	Dictature de l'énergie	219
III	Simulations et résultats physiques	221
III.1	Notes témoin du Steinway D	224
III.1.1	Note Dd1	224
III.1.2	Note C2	226
III.1.3	Note F3	227
III.1.4	Note Cd5	228
III.1.5	Note G6	230
III.2	Effet du couplage avec l'air	232
III.3	Précurseurs et transitoire	235
III.3.1	Déplacement de corde	236
III.3.2	Accélération de la table d'harmonie	240
III.3.3	Signal de pression	244
III.4	Enrichissement spectral et partiels fantômes	247
III.4.1	Contenu spectral lors des étapes de la vibration	247
III.4.2	Effet de l'augmentation de la vitesse du marteau	248
III.4.3	Effet de l'équation sur les partiels	251
III.5	Diagrammes de directivité	254
III.6	Et bien d'autres possibilités	258
	Conclusions et perspectives	259
A	Rappels sur l'équation des ondes	263
A.1	Problème général, existence de solutions fortes	264
A.2	Identité d'énergie	265
A.3	Domaine borné et décomposition modale	266
B	Existence de solution forte au système de Timoshenko	269

C	Dérivation physique du modèle géométriquement exact	273
D	Systèmes hyperboliques et théorème de Li Ta Tsien	277
	D.1 Systèmes hyperboliques	277
	D.2 Théorème de Li Ta-Tsien	278
E	Modèles de plaques	279
	E.1 Modèle élastodynamique linéaire 3D	279
	E.2 Modèle de Reissner Mindlin	280
	E.2.1 Détermination d'une écriture simplifiée des déplacements.	281
	E.2.2 Loi de comportement pour les déplacements admissibles de Reissner Mindlin.	282
	E.2.3 Formulation variationnelle pour les déplacements admissibles de Reissner Mindlin.	283
	E.3 Modèle de Kirchhoff Love	286
	E.3.1 Détermination d'une écriture simplifiée des déplacements.	287
	E.3.2 Loi de comportement pour les déplacements admissibles de Kirchhoff Love.	287
	E.3.3 Formulation variationnelle pour les déplacements admissibles de Kirchhoff Love.	288
	E.4 Modèle abstrait général	289
F	Gradient approché et traitement de la singularité	291
	F.1 Expression	291
	F.2 Dérivées d'ordre un	292
	F.3 Dérivées d'ordre deux	292
	F.4 Différences finies directionnelles	292
	F.5 Dérivées des différences finies directionnelles	293
	Glossaire	295
	Références du premier chapitre (modélisation)	296
	Références du second chapitre (discrétisation)	300
	Autres références	303

COMMUNICATIONS RELATIVES À CE TRAVAIL DE THÈSE

Revue internationale à comité de lecture

- août 2011** S. Imperiale, J. Chabassier
Introduction and study of fourth order theta schemes for linear wave equations
à paraître dans Journal of Computational and Applied Mathematics
- nov. 2010** J. Chabassier et P. Joly
Energy Preserving Schemes for Nonlinear Hamiltonian Systems of Wave Equations.
Application to the Vibrating Piano String
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 199, Nov. 2010

Congrès

- juil. 2011** J. Chabassier, P. Joly WAVES 11 Vancouver, Canada
 *Modeling and numerical simulation of a grand piano*
- juil. 2011** J. Chabassier, S. Imperiale ICIAM 11 Vancouver, Canada
Construction of optimal high order θ schemes for the linear wave equation
- juil. 2011** J. Chabassier, S. Imperiale ICIAM 11 Vancouver, Canada
Introduction of high order θ schemes for the linear wave equation
- mai 2011** J. Chabassier, A. Chaigne Meeting de l'ASA Seattle, USA
Modeling and numerical simulation of a piano
- nov. 2010** J. Chabassier, A. Chaigne, P. Joly JJCAAS, IRCAM Paris, France
 *Modélisation d'un piano de concert*
- sep. 2010** J. Chabassier, P. Joly 5th WNMEE Heraklion, Crete
Numerical simulation of a concert piano
- août 2010** J. Chabassier, A. Chaigne ICA 10 Sydney, Australie
 *Modeling and numerical simulation of a nonlinear system of piano strings coupled to a soundboard*
- juin 2010** J. Chabassier, S. Impériale CANUM 10 Carcans, France
 *θ -schémas d'ordre élevé inconditionnellement stables pour la discrétisation temporelle de l'équation des ondes*
- avr. 2010** J. Chabassier, A. Chaigne CFA 10 Lyon, France
 *Transitoires de piano et non-linéarités des cordes : mesures et simulations*
- jan. 2010** J. Chabassier, P. Joly WINSH Dinard, France
 *Schémas préservant l'énergie pour des systèmes hamiltoniens non linéaires de cordes.*
Application à la corde du piano
- juin 2009** J. Chabassier, P. Joly WAVES 09 Pau, France
 *Energy preserving schemes for nonlinear systems of wave equations.*
Application to piano strings
- avr. 2009** J. Chabassier, P. Joly SANUM 09 Stellenbosch, Afrique du Sud
Energy preserving scheme for a nonlinear system of piano strings

Séminaires et groupes de travail

sept. 2011	<u>J. Chabassier</u> , A. Chaigne, P. Joly	MAGIQUE 3D	Inria Pau
	<i>Modélisation et simulation numérique d'un piano de concert</i>		
sept. 2011	<u>J. Chabassier</u> , A. Chaigne, P. Joly	Sém. Calcul et Modélisation	Inria Bordeaux
	<i>Modélisation et simulation numérique d'un piano de concert</i>		
déc. 2010	<u>J. Chabassier</u> , A. Chaigne, P. Joly	CERMICS	ENPC
	<i>Modélisation et simulation numérique d'un piano de concert</i>		
avr. 2010	J. Chabassier, <u>P. Joly</u>	Sém. Math. App.	Collège de France
	<i>Schémas numériques préservant l'énergie pour les systèmes hamiltoniens d'équations d'ondes. Application aux cordes de piano.</i>		
déc. 2008	<u>J. Chabassier</u> , A. Chaigne, P. Joly	UME	ENSTA
	<i>Modélisation et simulation numérique de systèmes hamiltoniens non linéaires de cordes de piano</i>		

Rapports de recherche

jan. 2010 J. Chabassier, P. Joly, *Energy Preserving Schemes for Nonlinear Hamiltonian Systems of Wave Equations. Application to the Vibrating Piano String*, INRIA Research Report n°7168, 2010

Vulgarisation scientifique

avr. 2011 *Modélisation d'un piano par modèles physiques*, Journal de l'Association des Anciens de Sciences et Musicologie

oct. 2008 *Musique et son*, Bar des sciences

<i>Acronymes</i>	
ICIAM	International Conference on Industrial and Applied Mathematics
ASA	Acoustical Society of America
JJCAAS	Journées Jeunes Chercheurs en Acoustique, Audition et Signal audio
WMNEE	Workshop on numerical methods for evolution equations
ICA	International Conference on Acoustics
CANUM	Congrès d'Analyse Numérique
CFA	Congrès Français d'Acoustique
WINSH	Workshop sur l'intégration numérique des systèmes hamiltoniens
SANUM	South African symposium on Numerical and Applied Mathematics
<i>Légende</i>	
	<i>L'auteur souligné est celui ou celle qui a présenté le travail à l'oral.</i>
	<i>signifie que la conférence a été suivie d'une publication des actes.</i>
	<i>signifie que la conférence était française.</i>
	<i>signifie que la présentation était sous la forme d'un poster.</i>

HISTOIRE, FACTURE ET SYNTHÈSE SONORE DU PIANO

Le lecteur non familier des termes musicaux pourra se référer au glossaire page 295. Les termes de ce glossaire apparaissent colorés dans le texte, comme par exemple accord, et envoient directement au glossaire par un clic dans la version électronique de ce document.

En dotant ses clavecins de marteaux garnis de peau, Bartolomeo Christofori résolvait aux alentours de 1700 la double énigme que posait l'excitation des cordes par un mécanisme de frappe : s'assurer d'une part que le marteau quitte la corde après l'avoir frappée, pour éviter son assourdissement, et contrôler d'autre part son retour pour éviter un éventuel rebond vers la corde. Cette prouesse technologique, rendue possible par un principe primitif d'« échappement », donna au nouvel instrument des possibilités de nuances inexistantes dans le clavecin auquel il était semblable par ailleurs, qui lui valurent son nom : pianoforte. Le son, bien que nuancé, était cependant plus faible que celui d'un clavecin, surtout dans l'aigu, et son toucher était très délicat. Dès lors, c'est la recherche d'un toucher plus facile, mais aussi d'un son plus puissant et mieux équilibré qui a motivé les évolutions de l'instrument. Il fallu pourtant attendre presque un siècle (et l'intérêt de Mozart ?) avant que sa facture ne se généralise en Europe, puis aux États-Unis. Entre 1770 et 1900, de multiples inventions technologiques, souvent ponctuées de brevets, métamorphosent l'instrument qui devient plébiscité des compositeurs et du public. On peut citer quelques évolutions majeures qui ont marqué le début de cette histoire : l'introduction d'étouffoirs dans le mécanisme d'échappement par Stein en 1777, l'invention de la pédale sostenuto par Broadwood en 1783, l'utilisation de cordes filées de cuivre par Pape en 1813, l'invention du mécanisme de répétition appelé « double échappement » par Erard en 1823. . . Les progrès de la métallurgie et la fiabilisation des procédés industriels sont très liés à l'évolution du piano, instrument remarquable par la complexité de sa facture, c'est en particulier ce qui a permis l'introduction d'un cadre métallique d'une seule pièce par Bobcock en 1825, ou encore des cordes en acier trempé par Pape en 1827. L'amélioration de la résistance des alliages métalliques permet pour sa part d'augmenter la tension des cordes, toujours dans un souci de puissance. Le cuir garnissant les marteaux est remplacé par du feutre en 1826 par Pape, qui propose également en 1828 un plan croisé de cordes afin de limiter l'encombrement tout en autorisant des grandes longueurs de cordes. On peut dire que les fondements du fonctionnement du piano moderne étaient acquis vers la fin du XIX^e siècle, comme en témoigne la comparaison des gravures datant de 1887 illustrant la fabrique de pianos Blüthner¹ avec des photographies de la fabrique actuelle².

La plupart des pianos possèdent aujourd'hui un clavier constitué de 88 touches, noires et blanches,

1. www.pianosesther.be/Manufacture_Bluethner.htm

2. www.bluethner.de

correspondant aux notes de la **gamme** tempérée (voir la figure 2). L'action d'une de ces touches provoque le lancer d'un marteau vers les cordes. En effet, selon la note jouée, une ou plusieurs cordes sont mises en vibration par l'interaction avec le marteau. Les cordes sont en acier, les plus **graves** étant recouvertes d'un filage de cuivre. Chaque corde est attachée à une poutre de bois, le chevalet, à travers lequel elle transmet ses vibrations à la table d'harmonie, une grande planche de bois assez fine (moins d'un centimètre) dont le rayonnement dans l'air provoque notre perception d'un son. Un cadre en fonte est placé au dessus de la table d'harmonie afin de supporter la tension des cordes, et le tout est intégré dans un meuble épais qui place l'instrument à hauteur de jeu. Le pianiste trouve à ses pieds un ensemble de pédales (trois, le plus souvent) qui lui permettent de soulever les étouffoirs ou d'influencer la mécanique des marteaux. Ce principe de fonctionnement est commun aux pianos droits et aux pianos à queue, même si sa mise en œuvre y est différente. Dans la suite, nous adopterons la notation anglo-saxonne (de A à G) pour désigner les notes du piano, en commençant la numérotation à 0. La première touche est donc A0 et a pour **fréquence** fondamentale 27,5 Hz, tandis que la dernière est C8, à 4 186 Hz.

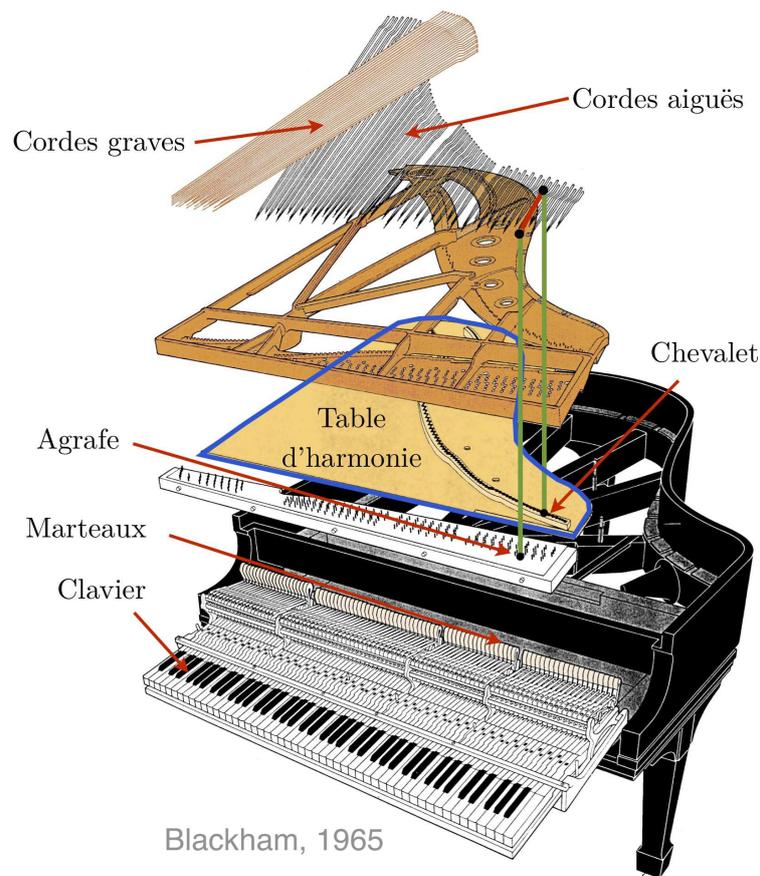


FIGURE 2 – Vue éclatée d'un piano à queue

Aujourd'hui, le piano est probablement l'instrument de musique le plus répandu, et sa facture a atteint un degré de précision et d'excellence à la hauteur de son succès. Même si l'échelle a changé, les enjeux qui se posent aujourd'hui pour la facture du piano incluent toujours la recherche de puissance et d'homogénéité du grave à l'aigu de l'instrument, et vont bien au delà : recherche d'un **timbre** particulier, d'une grande durée de son, d'une idéale répartition sonore. . . Bien que dans les grandes lignes, les mécanismes de vibration soient relativement bien compris, la différence entre deux pianos de facture différente réside dans des détails de fabrication qui dépassent souvent les connaissances des scientifiques en matière d'acoustique musicale. C'est l'ensemble des réglages fins auxquels se livrent les techniciens du piano, formés et spécialisés, qui permettent de transformer cette belle mécanique en un instrument de musique. Cette approche, guidée par un savoir faire historique et une approche empirique (voir la citation ci dessous), n'a pour juge final que l'appréciation auditive et semble encore devoir être ajustée pour chaque piano, afin de s'adapter

aux légères variations de matériaux, de conditions aux limites, qui peuvent affecter profondément le son de l'instrument.

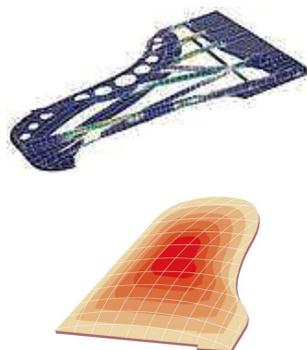
Dans l'optique de réduire la part d'empirisme et d'anticiper l'effet d'éventuelles modifications sur le comportement vibratoire ou acoustique de l'instrument, de nombreux fabricants de pianos possèdent leur propre laboratoire de recherche orienté vers l'expérimentation mais aussi la simulation numérique, comme en témoigne la citation ci dessous dans le cas de la maison Schimmel. Des méthodes et outils qui ont montré leur performance dans de nombreux domaines de l'ingénierie (construction automobile, météorologie, géologie, aéronautique . . .) font désormais partie du processus d'amélioration et de test des différentes parties du piano (analyse modale de la table d'harmonie, étude spectrale des cordes, optimisation de la forme du cadre en fonte . . .). Certains facteurs collaborent même avec des universités ou des laboratoires de recherche, afin de répondre à des questions plus spécifiques concernant l'instrument (efficacité de radiation, temps caractéristiques d'amortissement, ou encore conditions aux limites au chevalet comme dans la collaboration entre les pianos Stuart & Sons et le centre australien de recherche CSIRO : www.cmis.csiro.au/bob.anderssen/stuartpiano/stuartpiano.htm).

« *Le fondement de bonnes qualités musicales*

Il est possible que certains facteurs de piano estiment qu'on peut aussi exagérer en matière de professionnalisme. Par exemple en construisant 400 prototypes - comme nos spécialistes l'ont fait pour le premier queue de la Konzert Série. Ou bien en testant 600 versions de têtes de marteaux, pour ne vraiment rien laisser au hasard. Nous sommes persuadés qu'on ne va jamais trop loin dans la perfection. La mise au point d'instruments d'exception, telle que nous l'entendons, est un processus continu, jamais clos. Ce point de vue n'a rien à voir avec la mystique de la facture pianistique, mais plutôt avec la persévérance et un travail laborieux.

Le géant de fer

Revenons par exemple au cadre en fonte de l'instrument, qui doit résister à des forces de traction atteignant jusqu'à 21 tonnes, mais se contenter par contre d'un minimum de matériaux qui absorberaient de l'énergie vibratoire précieuse.



La solution a été trouvée grâce à la technologie informatique de dernière génération pour simuler des forces et construire des cadres en fonte avec une répartition idéale des matériaux. Le secret d'une bonne sonorité résidant dans les détails, nous pratiquons la recherche fondamentale, par exemple sur les propriétés vibratoires du bois et des cordes. Nos experts travaillent en collaboration avec des scientifiques et des instituts renommés. Ce savoir-faire concentré a permis à Schimmel, au cours des années, de mettre au point CAPE (Computer Assisted Piano Engineering), un logiciel de conception unique : l'ingénierie du piano assistée par ordinateur. Il seconde les facteurs dans le développement de nouveaux modèles et crée des possibilités qui n'existaient pas avant. » schimmel-piano.de

Les approches utilisées par les facteurs de pianos souffrent cependant d'un défaut majeur : si elles permettent d'étudier en détail le comportement de chaque partie de l'instrument, elles ne prennent pas en compte leur couplage qui pourtant peut modifier radicalement ce même comportement. Seul un outil de modélisation complet, rendant compte des couplages précis entre chaque partie mécanique constituant l'instrument, permettrait de mieux comprendre l'influence de certains réglages sur le comportement général du piano. Il serait alors possible de mener des « campagnes d'expériences virtuelles », en faisant systématiquement varier des matériaux, des géométries, ou certains paramètres de conception, et d'observer l'effet de ces changements sur toute la vibratoire de l'instrument, y compris le son.

C'est dans ce contexte que s'inscrit cette collaboration entre l'Unité de Mécanique de l'ENSTA, spécialisée en acoustique musicale, et dirigée par Antoine Chaigne, et le projet POems commun à l'ENSTA, l'INRIA

et le CNRS, spécialisé dans le développement de méthodes numériques pour les équations d'ondes, et dirigé par Patrick Joly. Cette collaboration a donné naissance dans le passé à des outils de modélisation d'autres instruments de musique (la timbale [Rhaouti et al., 1999] et la guitare [Derveaux et al., 2003]), dont le succès nous a incité à réitérer l'expérience dans le cas du piano.

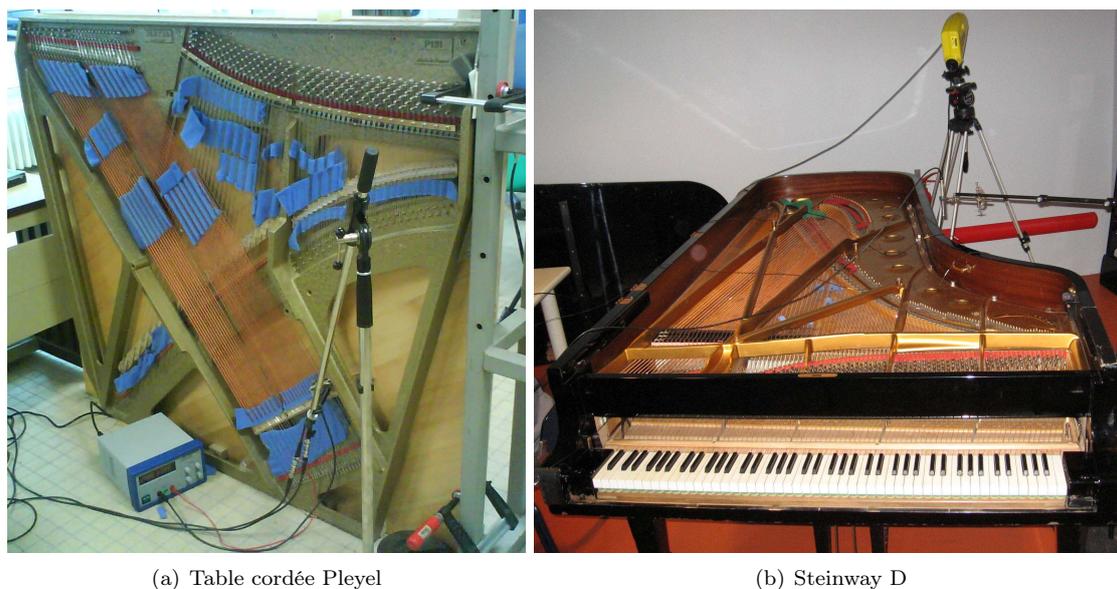
L'objectif de ce projet est de contribuer à la compréhension des mécanismes physiques mis en jeu lors de la génération du son du piano, en menant une modélisation puis une simulation numérique des vibrations mécaniques et acoustiques, depuis l'excitation (marteau) jusqu'à la propagation du son (acoustique), en passant par la vibration des cordes et celle de la table d'harmonie. Ceci rejoint la problématique de la « synthèse sonore », qui s'attache à générer un son réaliste (ici, de piano). Il existe un grand nombre de méthodes qui atteignent avec succès cet objectif, fonctionnant pour beaucoup en temps réel, basées sur des principes très divers (pré-enregistrement de certains sons ; modulation de fréquence, d'amplitude, de phase ; synthèse additive ou soustractive...) auxquels on peut parfois reprocher de ne pas forcément garder un lien avec la physique. En effet, notre souhait n'est pas seulement de bien reproduire un son (celui du piano) qui a été généré par un objet physique (le piano), mais plutôt de comprendre comment cet objet a pu générer ce son, grâce à une modélisation complète de l'instrument, basée sur les équations de la physique. C'est ce que l'on appelle la « synthèse sonore par modèles physiques », qui s'est déclinée ces dernières années sous beaucoup de formes, selon les hypothèses ou les points de vue adoptés. Elle consiste à écrire dans le domaine temporel les équations de la dynamique du problème couplé, et à en chercher une solution numérique. En ce qui concerne le cas particulier du piano, on peut par exemple citer la méthode très populaire des guides d'onde numériques, grâce à laquelle un modèle complet linéaire de piano a été proposé dans [Nakamura et Iwaoka, 1986] et qui est passée en revue dans [Bank et al., 2003]. C'est une méthode qui se révèle particulièrement efficace et performante et présente l'intérêt de se prêter si besoin à un couplage avec des méthodes plus classiques du type différences finies (comme dans [Bensa et al., 2003]). La méthode modale choisie à l'IRCAM pour le logiciel Modalys³ constitue également un point de vue intéressant. Une autre approche est d'utiliser les outils classiques de l'analyse numérique pour les équations aux dérivées partielles (éléments finis, différences finies) afin de résoudre numériquement le système d'équations ainsi posé. L'apport d'un tel point de vue est de garder un lien très fort avec la réalité physique, et de faire très peu d'hypothèses *a priori* sur le comportement de la solution. On souhaite ainsi reproduire fidèlement le transitoire d'attaque puis d'extinction de l'instrument, en offrant au passage une meilleure compréhension des mécanismes complexes ayant lieu au sein de la structure vibrante. Cette démarche a été adoptée dans le passé pour traiter différentes parties du piano : [Boutillon, 1988] et [Chaigne et Askenfelt, 1994a] se sont intéressés à l'interaction marteau - corde, [Bilbao, 2005] s'est intéressé à modéliser le comportement non linéaire de la corde, on trouve dans [Cuenca et Caussé, 2007] un modèle permettant d'expliquer le couplage entre les cordes et la table d'harmonie au chevalet, [Vyasarayani et al., 2009] et [Izadbakhsh et al., 2008] ont étudié les vibrations du manche de marteau. À notre connaissance, il n'y a qu'un seul travail publié [Giordano et Jiang, 2004] qui s'intéresse d'une part à la modélisation par équations aux dérivées partielles d'un piano complet, depuis l'excitation du marteau jusqu'à la propagation du son, en passant par la vibration linéaire des cordes et de la table d'harmonie et d'autre part à leur résolution numérique par des outils classiques d'analyse numérique, ici des méthodes de différences finies en espace et en temps.

Notre travail a voulu continuer cet effort, en proposant un modèle de piano complet (le plus riche, à notre connaissance), ainsi qu'une résolution numérique fiable, innovante et précise. Un tel projet est composé de deux phases, qui ont naturellement constitué les deux premières parties de ce document :

- ◇ **L'écriture du modèle continu**, représentant la physique sous-jacente, sera l'objet du chapitre I. C'est lors de cette étape que des choix de modèles doivent être faits, en se basant sur la littérature et les observations. Il faut alors déjà avoir à l'esprit le niveau de généralité que l'on souhaite garantir, en anticipant sur les possibilités que nous souhaitons pouvoir envisager avec le modèle. La littérature faisant état de mesures sur le piano est très riche et abondante, nous avons donc mené une étude de ces documents, en essayant d'en tirer un maximum de renseignements quant aux phénomènes physiques jouant un rôle significatif dans la génération du son de piano.

Pour combler certaines de nos interrogations restées sans réponse, mais aussi nous fournir des signaux expérimentaux se prêtant bien à l'analyse et à la comparaison future avec les simulations, nous avons également procédé à des campagnes de mesures sur différents pianos. Le premier, montré

3. http://support.ircam.fr/doc-modalys/spip/article.php3?id_article=26

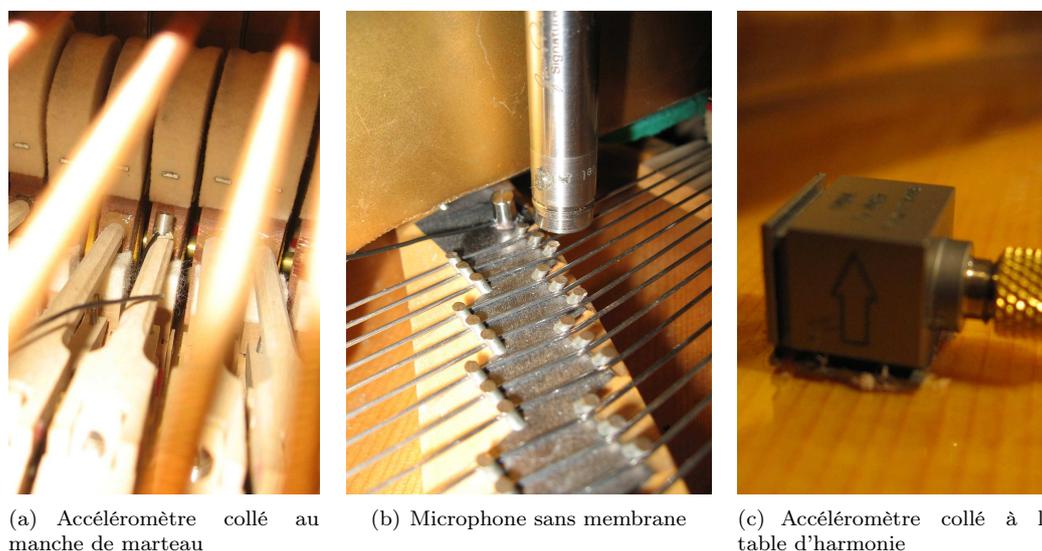


(a) Table cordée Pleyel

(b) Steinway D

FIGURE 3 – Photographies des deux pianos soumis aux mesures.

en figure 3(a), est en fait une table d'harmonie cordée d'un piano droit de marque Pleyel, prêté par l'ITEMM⁴ (la table est sortie du meuble et la mécanique est manquante). Le deuxième, montré en figure 3(b), est un modèle D de la gamme Steinway en situation de jeu, auquel on a simplement retiré le couvercle, mis à notre disposition par l'IRCAM⁵. Nous avons profité de deux jours de mesure sur ce piano pour explorer six notes particulières, que nous prendrons comme « notes témoin » tout le long de ce manuscrit, pour illustrer nos propos. Elles sont mises en valeur en bleu sur la figure 6 sur laquelle on donne par ailleurs le repère dans lequel seront décrits tous les points concernant ce piano. Le contour de la table d'harmonie est également matérialisé en vert. C'est ce piano particulier



(a) Accéléromètre collé au manche de marteau

(b) Microphone sans membrane

(c) Accéléromètre collé à la table d'harmonie

FIGURE 4 – Dispositifs de mesure mis en place sur le Steinway D de l'IRCAM.

qui servira de modèle pour calibrer les coefficients physiques et la géométrie que nous utiliserons dans les simulations. Les expériences menées sur ce piano, qui ne seront pas décrites ici en détail, impliquaient plusieurs points de mesure simultanés dont l'accélération du marteau (à l'aide d'un petit accéléromètre collé au manche de marteau, voir figure 4(a)), le déplacement ou la vitesse d'un

4. <http://www.itemm.fr>

5. <http://www.ircam.fr>

point de la corde (à l'aide d'un microphone sans membrane, voir figure 4(b) ou d'un vibromètre laser), l'accélération en un point de la table d'harmonie (voir 4(c)).

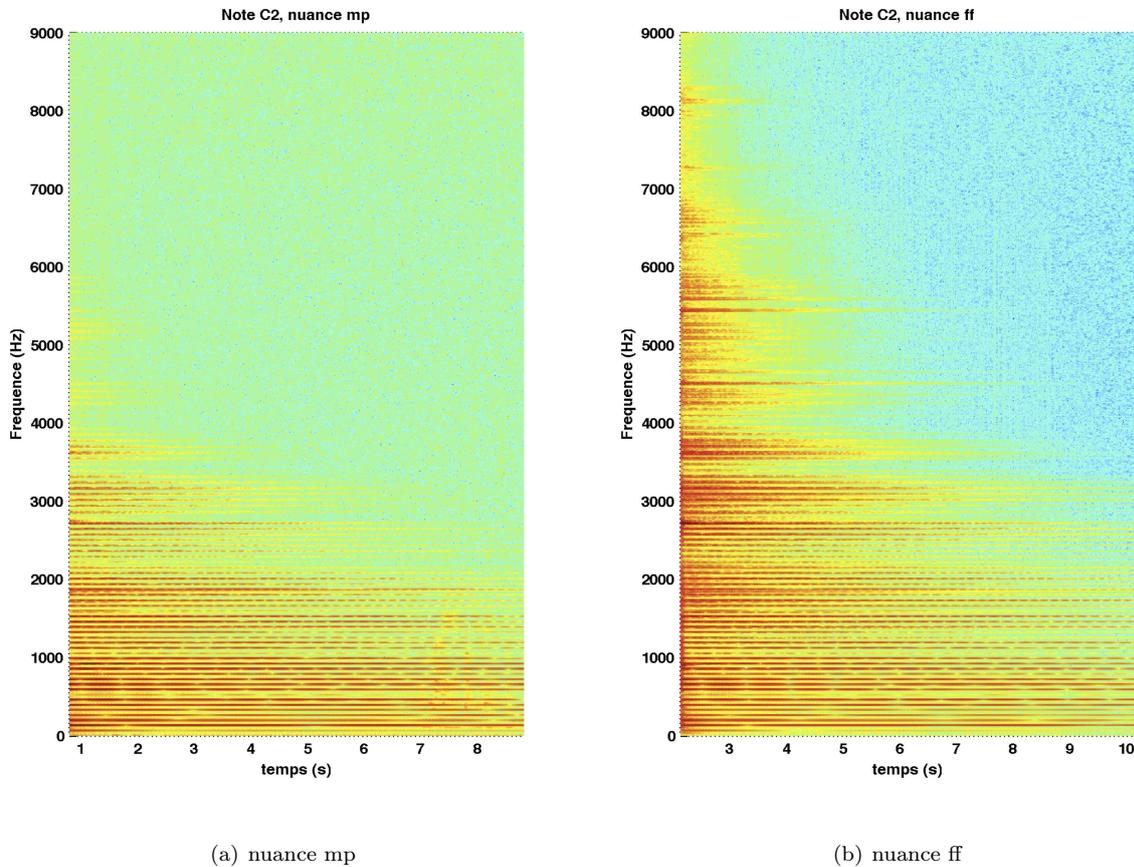


FIGURE 5 – Spectrogrammes de l'accélération de la table d'harmonie du Steinway D, note C2.

Une intuition des particularités du son de piano, qu'il faudra prendre en compte lors de notre modélisation, peut dores et déjà être donnée grâce à la comparaison de deux mesures très simples : l'accélération du point de la table d'harmonie repéré par « AcTa » sur la figure 6 lorsque la note C2 est actionnée, la première fois dans la nuance mezzo-piano (mp), la seconde dans la nuance fortissimo (ff). On trace alors en figure 5 le diagramme temps - fréquence (spectrogramme) de la mesure obtenue, pour les premières secondes qui suivent l'attaque du marteau, entre 0 et 9 000 Hz (la fenêtre temps - fréquence est la même pour les deux mesures).

- ▷ La mesure s'arrête bien avant la fin des vibrations, qui continuent en fait pendant plus de 20 secondes,
- ▷ Le signal a une composition fréquentielle proche d'une répartition harmonique, ce qui reflète la nature musicale du son, et provient de la vibration particulière de la corde, (nous verrons le lien entre les deux au paragraphe I.1, mais une définition du mot « spectre » dans le contexte des oscillateurs harmoniques et dans le contexte de la transformée de Fourier d'un signal est donnée dans le glossaire). En fait, une analyse plus précise montre une légère inharmonicité qui sera attribuée à la raideur de la corde.
- ▷ Le contenu fréquentiel d'une note grave comme C2 peut s'étendre jusqu'à 9 000 Hz,
- ▷ Les composantes hautes fréquences s'atténuent beaucoup plus vite que les composantes basses fréquences, ce qui vient en particulier, comme nous le verrons en I.1.6 et I.3.3, des phénomènes d'amortissement présents dans les cordes et la table d'harmonie,

- ▷ Il y a une grande différence entre le spectrogramme obtenu en nuance mp et le spectrogramme obtenu en nuance ff. En particulier, on trouve beaucoup plus d'aigus dans le second, qui montre également des « halos » laissant entrevoir la présence de **partiels** non harmoniques, qui par ailleurs semblent s'amortir différemment des autres. Cet enrichissement spectral en grande dynamique est la marque d'un comportement non linéaire au sein de l'instrument, et nous verrons en effet qu'à la fois le marteau et les cordes sont le siège de phénomènes non linéaires, en paragraphes [I.1](#) et [I.2](#).

Au vu de ces observations, il semble essentiel d'écrire un modèle qui restitue le caractère non linéaire du marteau et des cordes, ainsi que la dépendance de l'amortissement en fréquence, et bien sûr le rayonnement de la table d'harmonie dans l'air avoisinant. Nous fournirons des estimations a priori pour ce problème couplé et parfois non linéaire grâce à l'établissement d'identités d'énergie pour chaque partie du piano, puis en présence de couplages. Outre l'intérêt physique que présentent de telles identités, nous verrons qu'elles nous permettront d'assurer la stabilité numérique du problème discret, ce qui peut s'avérer difficile pour des problèmes de ce type.

Un effort particulier a été apporté à l'écriture du modèle de corde, qui sera vue comme une corde raide en grandes déformations, soumise à une dissipation viscoélastique. En plus de la vibration transversale prépondérante étudiée en [I.1.1](#), nous modéliserons en [I.1.2](#) l'onde de cisaillement, conséquence de la raideur de la corde, avec un modèle de type Timoshenko précontraint. Enfin, nous verrons en [I.1.3](#) que la prise en compte de la vibration longitudinale passe par l'écriture d'un modèle non linéaire basé sur la description exacte des déformations géométriques. Un modèle de vibration non plane sera proposé en [I.1.4](#). Nous supposerons que la corde possède une section homogène, ce qui nous amènera à chercher des coefficients équivalents pour les cordes filées en [I.1.5](#). Enfin, la question de l'amortissement sera abordée en [I.1.6](#). Lorsque cela est possible (c'est à dire dans les cas linéaires pour l'instant), nous avons donné les fréquences propres de vibration de la corde. Une écriture du modèle complet de corde, prenant en compte tous les phénomènes physiques évoqués ci dessus, sera proposée en [I.1.7](#), ainsi qu'une formulation unifiée de tous les modèles considérés pour la corde.

Le modèle de marteau développé en [I.2](#) sera assez classique, traduisant le comportement non linéaire et avec hysteresis que suit le feutre duquel il est garni.

La table d'harmonie sera étudiée en [I.3](#). Elle sera modélisée comme une plaque épaisse orthotrope de Reissner Mindlin, dont l'hétérogénéité permettra de prendre en compte les raidisseurs et les chevalets. Une décomposition modale permettra de modéliser un amortissement dit « diagonal », c'est à dire intrinsèque à chaque mode. Son rayonnement acoustique sera modélisé par les équations de la vibroacoustique, qui couplent l'équation de plaque écrite dans la base modale avec les équations de propagation du son dans l'air, formulées en vitesse - pression, pour lequel les ceintures du piano constitueront un obstacle.

Les cordes sont couplées avec la table d'harmonie au chevalet. On considèrera en [I.4](#) le chevalet comme un corps rigide mobile dans la seule direction orthogonale à la table, solidarissant les vitesses des cordes et de la table en ce point. Nous prendrons en compte le léger angle que forment les cordes par rapport à l'horizontale, dont l'effet est de transmettre à la table d'harmonie à la fois les composantes transversale et longitudinale de la tension, ce qui permettra de rendre compte des phénomènes de « précurseurs » et de « partiels fantômes » caractéristiques du son de piano. Les chœurs de cordes seront considérés dans ce modèle, ainsi que les échelles duplex, le jeu *una corda* et les cordes aliquotes.

Un modèle complet de piano, regroupant tous les modèles mentionnés ci dessus, sera écrit en [I.5](#), ainsi que sa formulation variationnelle, en vue de la discrétisation. C'est également dans cette optique que seront introduits des multiplicateurs de Lagrange pour matérialiser les forces exercées par les cordes au chevalet, afin de traiter les conditions de couplage de façon faible.

- ◇ Le **choix ou le développement de méthodes numériques** adaptées au problème posé, sera l'objet du chapitre [II](#). La difficulté vient non seulement des spécificités de chaque sous problème

pour lesquelles il faudra développer des méthodes numériques adéquates, mais aussi de leur couplage. En particulier, la stabilité numérique peut être perdue si les non linéarités ou les couplages sont traités avec désinvolture. Dans le contexte du piano où les notes peuvent sonner jusqu'à 30 secondes, et où l'étendue spectrale va largement jusqu'à 10 000 Hz, il ne sera pas rare de chercher la solution numérique pour 10 millions de pas de temps, c'est pourquoi il sera essentiel de garantir la stabilité de la méthode avant de se lancer dans un tel calcul. Nous chercherons pour cela à obtenir des estimations a priori à partir d'un équivalent discret des identités d'énergie obtenues dans le cas continu, méthode qui a déjà fait ses preuves dans le cas de la modélisation d'autres instruments de musique qui présentaient des difficultés numériques analogues ([Rhaouti et al., 1999], [Derveaux et al., 2003]). Nous aurons également pour objectif de conserver au niveau numérique le caractère réciproque des couplages, tout en assurant une bonne efficacité de résolution. Enfin, un soin particulier doit être apporté à limiter la dispersion numérique, qui est une caractéristique intrinsèque et quasiment inévitable de toute méthode numérique, mais peut dégrader significativement les résultats de simulations, surtout dans le contexte de l'acoustique musicale.

La discrétisation en espace s'appuiera sur les formulations variationnelles de chaque sous problème (cordes, table d'harmonie et acoustique), pour procéder à une approximation conforme de type Galerkin, ce qui garantira la stabilité du problème semi discret. Nous utiliserons pour le problème posé sur les cordes et pour la propagation acoustique des éléments finis d'ordre élevé, en prenant soin pour l'acoustique de choisir les degrés de liberté en rapport avec les points d'intégration numérique, afin de réaliser la condensation de masse qui réduira le coût du calcul tridimensionnel. Pour le problème posé sur la table d'harmonie, en raison de la forme particulière de l'amortissement (mode par mode), on choisira comme espace d'approximation l'espace engendré par les premiers modes propres de l'opérateur spatial. Ceux-ci n'étant pas connus analytiquement, ils seront obtenus par la résolution d'un problème aux valeurs propres avec la méthode des éléments finis d'ordre élevé.

C'est la discrétisation en temps qui doit être réalisée dans l'objectif de conserver ou dissiper une énergie discrète, d'un pas de temps au suivant. Les difficultés étant très différentes sur chaque sous problème, nous utiliserons des méthodes numériques adaptées :

- ▷ La discrétisation du problème acoustique est faite par un schéma explicite de type saute-mouton, en raison du très grand nombre d'inconnues. La condition de stabilité inhérente à ce schéma imposera, pour un maillage réaliste de piano, un pas de temps de 10^{-6} secondes, ce qui ne sera pas trop contraignant sachant que l'échantillonnage audio habituel est fait à environ 2×10^{-5} secondes. Des couches PML (perfectly matched layers) viendront tronquer artificiellement le bord du domaine de calcul. Malgré une parallélisation massive du code, la résolution du problème acoustique restera de loin le premier poste de dépense en temps de calcul.
- ▷ La formulation du problème de table d'harmonie dans la base des modes propres présente l'avantage de le ramener à un ensemble d'équations différentielles ordinaires découplées. Si on suppose que les termes d'interaction (provenant des cordes et du saut de pression acoustique) sont constants durant un pas de temps, il est possible de les résoudre analytiquement, c'est à dire sans introduire d'approximation supplémentaire, voir [II.3](#).
- ▷ C'est la discrétisation en temps du système d'équations régissant la vibration des cordes abordée en [II.1](#) qui est probablement la plus originale et novatrice. Les schémas conservatifs les plus populaires pour les équations d'onde sont la famille des θ -schémas, qui possèdent cependant deux inconvénients dans le contexte de la corde de piano : d'une part, ils sont destinés à des équations linéaires, et d'autre part, les schémas les moins dispersifs parmi cette famille sont soumis à une condition CFL. Nous déciderons donc d'une part d'adopter une discrétisation différente pour la partie linéaire du système et pour sa partie non linéaire, et d'autre part, de développer pour la partie linéaire une variante du θ -schéma qui nous permettra d'allier stabilité et précision dans le cas où deux ondes de vitesses très différentes co-existent au sein du même système d'équations. Pour la partie non linéaire, nous serons amenés à développer des nouveaux schémas basés sur l'expression d'un gradient approché, qui garantissent une conservation d'énergie, pour une classe d'équations appelées « systèmes hamiltoniens d'équations d'ondes ». Des estimations a priori seront proposées pour ces schémas hybrides.

Enfin, la discrétisation des couplages doit être réalisée en assurant elle aussi la conservation d'une énergie discrète. Nous choisirons de traiter les couplages de façon centrée pour préserver l'ordre de précision des méthodes choisies sur les problèmes indépendants, et implicite, pour ne pas introduire de condition de stabilité liée au couplage ni de dissipation numérique artificielle, autant pour le couplage du marteau avec les cordes, abordé en [II.2](#), que pour le couplage entre les cordes et la table, objet de [II.4](#) et enfin du couplage vibroacoustique traité en [II.5](#). Un travail a alors été nécessaire afin d'optimiser l'efficacité du code de calcul, en utilisant des multiplicateurs de Lagrange et des compléments de Schur adaptés, de telle sorte que la mise à jour des inconnues de chaque sous système est faite de façon séparée à chaque pas de temps.

Chacun de ces deux chapitre consacrés respectivement à l'établissement du modèle et à sa discrétisation sera clos par un paragraphe de discussion et de perspectives, permettant de reconnaître les points faibles de notre approche et de proposer des alternatives à plus ou moins long terme.

Enfin, un chapitre de résultats numériques présentera un ensemble de simulations réalistes basées sur quelques notes du Steinway D choisies pour illustrer les potentialités du code de calcul. Quelques notes parsemées sur le clavier seront simulées et comparées à l'expérience (une comparaison auditive étant disponible en ligne), afin de démontrer l'aptitude de notre modèle à reproduire les particularités de chaque registre de la tessiture. L'intérêt d'utiliser une corde raide en grandes déformations sera illustré par des simulations dans lesquelles certains phénomènes physiques de la corde ne sont pas modélisés (raideur, non linéarité) : on y verra l'apparition d'un précurseur non linéaire dans le son de piano, et la présence des partiels fantômes sera conditionnée à la prise en compte simultanée des deux phénomènes. L'enrichissement spectral pour les grandes dynamiques de jeu, dont nous parlions dans cette introduction, sera reproduit numériquement par des simulations avec une vitesse croissante de frappe du marteau. D'autres simulations montreront l'effet du couplage avec l'air ou encore des diagrammes de directivité. Il sera très intéressant dans le futur de mener des expériences numériques supplémentaire afin d'exploiter les possibilités du modèle, ce que nous développerons en [III.6](#) pour terminer.

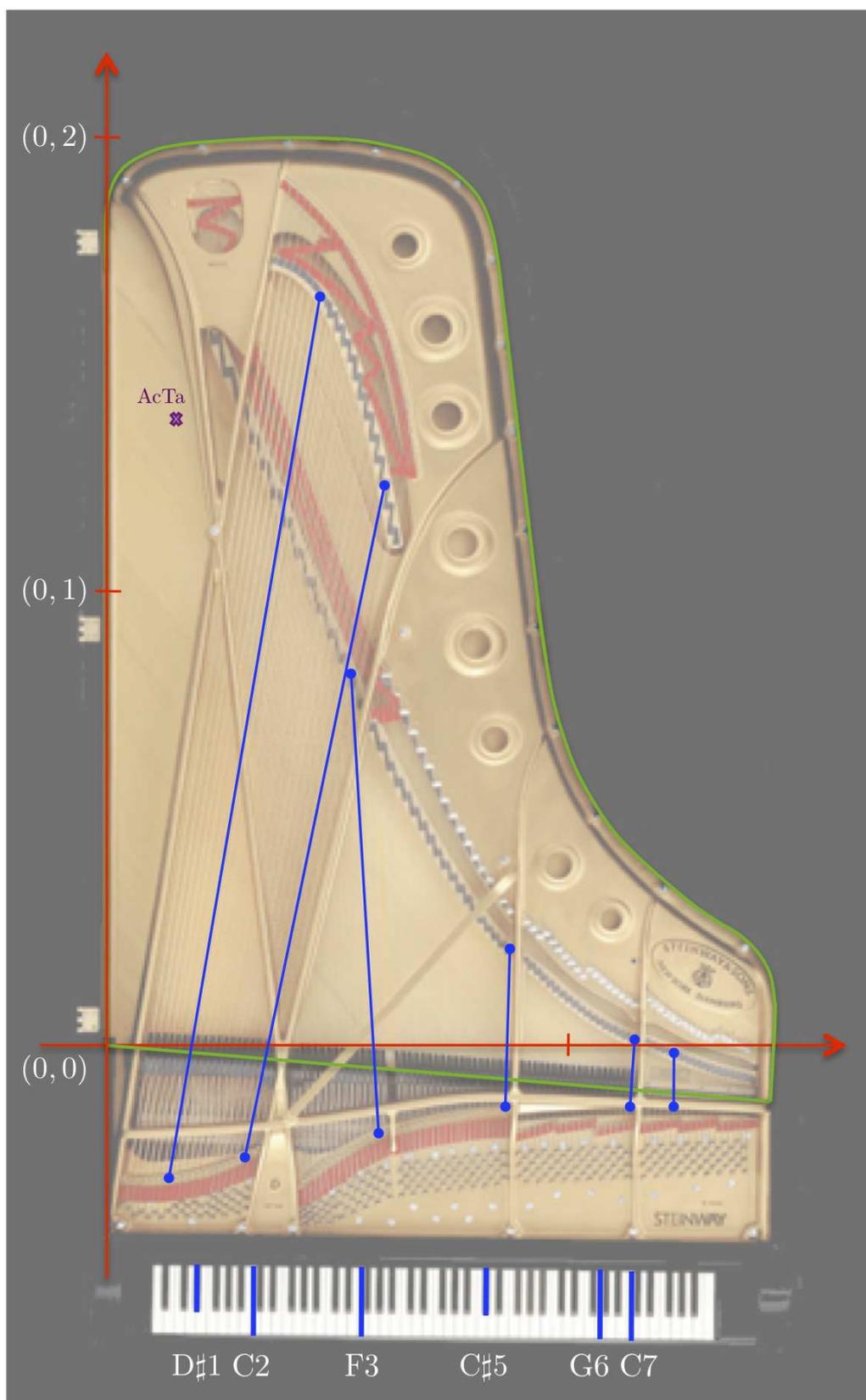


FIGURE 6 – Photographie d'un Steinway D ouvert (extrait de yost.com). Les six cordes « témoin » utilisées tout au long de ce manuscrit sont indiquées en bleu. L'emplacement de la table d'harmonie est entouré de vert. Le repère rouge sera utilisé pour indiquer la position des points sur la table. L'unité est le mètre.

CHAPITRE

I

UN MODÈLE DE PIANO

Prélude

Nous avons comme objectif de réaliser un modèle de piano complet, dans le domaine temporel, rendant compte de la fonction acoustique de l'instrument grâce à une description fidèle de la physique. Le piano est en réalité une structure complexe, siège de phénomènes physiques très intéressants : acoustique bien sûr, mais aussi mécanique (cadre, meuble, pieds), et source d'impératifs pratiques liées par exemple à la faisabilité des mécanismes (pédales, système de double échappement), à l'encombrement (taille des cordes, disposition des marteaux), à la maniabilité du jeu pianistique. . . La présentation de l'instrument par un professionnel est impressionnante tant les pièces sont nombreuses et tant leur réglage fin influence de façon capitale le son du piano.

Cependant, nous devons garder à l'esprit quelques critères essentiels qui nous guideront dans nos choix lors de l'écriture du modèle. Nos aspirations majeures sont les suivantes :

▷ **Rendre compte des phénomènes acoustiques et vibratoires.** La grande force de notre modèle résidera dans la prise en compte fidèle des phénomènes physiques à travers les équations de la dynamique appliquées aux différents éléments. C'est pourquoi nous schématiserons le fonctionnement de l'instrument en ne prenant en compte que son aspect vibratoire et acoustique :

- le marteau et son interaction avec les cordes,
- la table d'harmonie et son rayonnement vibroacoustique dans l'air,
- le couplage réciproque entre les cordes et la table d'harmonie, au chevalet.

Certaines pièces ont une utilité matérielle (les pieds permettent de maintenir le piano à une hauteur permettant le jeu, le cadre sert à supporter la tension des cordes, le meuble permet de tenir le cadre, la table et la mécanique . . .) et, bien qu'elles puissent avoir un effet non forcément désiré sur l'acoustique de l'instrument, nous les négligerons complètement.

▷ **Écrire un modèle simple (quitte à le compléter par la suite).** Nous supposerons donc à chaque fois un comportement idéalisé (le marteau sera parfaitement aligné, les

couplages seront sans dissipation, la pièce sera infinie et vide, la table d'harmonie sera parfaitement maintenue), et nous essaierons de traduire l'effet qu'ont certains éléments oubliés sur l'acoustique (l'agrafe a pour objectif de fixer la corde en son extrémité : nous supposons la corde immobile à ce point, la mécanique du marteau sert à lui donner une vitesse initiale depuis la touche : nous donnerons une vitesse au marteau, sans expliquer d'où elle provient ...).

- ▷ **Pouvoir alimenter le modèle avec des coefficients issus de la physique.** Il s'agit d'un point crucial dans notre approche, c'est ce qui nous permettra de nous affranchir d'une campagne de mesures systématiques avant toute nouvelle simulation, ce qui nous permettra de faire des prédictions scientifiques. Nous verrons que cette contrainte ne pourra pas toujours être suivie, en particulier en ce qui concerne les modèles d'amortissement de corde, de plaque, mais aussi la loi de comportement du marteau, cette dernière étant liée au comportement viscoélastique du matériau.
- ▷ **Écrire un modèle qui dissipe une énergie.** Au delà de l'intérêt certain de calquer un comportement physique, cette démarche comporte plusieurs intérêts mathématiques : au niveau continu, cela nous permet d'obtenir des estimations a priori sur les inconnues du problème. L'étape de discrétisation sera ensuite faite en respectant une propriété similaire, les schémas construits dissipant un équivalent discret de l'énergie, ce qui nous permettra alors d'obtenir des estimations a priori sur les inconnues discrètes. C'est ainsi que la stabilité numérique sera garantie, sous certaines conditions sur les paramètres de discrétisation. C'est donc surtout dans l'optique de la discrétisation du système que nous nous efforcerons d'écrire un modèle continu dont on sache montrer une dissipation d'énergie.

Ce chapitre considérera successivement chaque sous système indépendamment, afin de faire un choix de modèle conservatif en accord avec la littérature, les observations, nos mesures parfois, mais aussi les données disponibles pour l'alimenter. Le premier paragraphe I.1 sera consacré aux cordes, qui occuperont la moitié du chapitre entier tant elles jouent un rôle important et font intervenir des phénomènes variés et intéressants. Nous introduirons différents modèles selon les phénomènes physiques pris en compte (flexion, cisaillement, rotation des sections, compression, dissipation...), pour finalement aboutir à un modèle complet de corde regroupant tous ces phénomènes. Nous nous pencherons ensuite dans le paragraphe I.2 sur la modélisation du marteau et de son interaction avec les cordes, la difficulté principale venant de la description de la loi de comportement du feutre écrasé qui constitue le revêtement des marteaux. La question de la vibration de la table d'harmonie et de son rayonnement dans l'air sera abordée en paragraphe I.3, sous l'angle assez classique de la vibroacoustique, formulée pour une plaque de Reissner Mindlin couplée avec les équations de l'acoustique formulées en vitesse-pressure. L'amortissement de la table d'harmonie ainsi que la prise en compte des raidisseurs feront l'objet d'un traitement moins classique. Une question cruciale et très peu abordée dans la littérature est celle du couplage des cordes à la table d'harmonie à travers le chevalet. Nous verrons dans le paragraphe I.4 que notre modèle s'appuiera sur la « charge » des cordes, c'est à dire l'angle qu'elles forment au chevalet avec l'horizontale. L'objet du dernier paragraphe I.5 sera de coupler les sous systèmes de façon conservative afin d'aboutir à notre modèle général du piano, pour lequel nous verrons qu'une énergie globale est dissipée. Pour terminer, nous reviendrons dès le paragraphe I.6 sur les choix que nous aurons faits au cours de ce chapitre, et proposerons des pistes envisageables pour améliorer le modèle construit.

Sommaire

I.1	La corde du piano	14
I.1.1	Equation de corde vibrante	16
I.1.2	Raideur, inharmonicité et dispersion	19
I.1.3	Vibration longitudinale et non-linéarité des cordes	31
I.1.4	Mouvement non planaire de la corde	46
I.1.5	Filage des cordes	51
I.1.6	Amortissement	57
I.1.7	Un modèle de corde complet et unifié	59
I.2	Le marteau	67
I.2.1	Propriétés viscoélastiques du feutre	68
I.2.2	Interaction avec la corde	70
I.2.3	Position d'attaque du marteau	73
I.3	La table d'harmonie et son rayonnement dans l'air	75
I.3.1	La table d'harmonie comme une plaque bidimensionnelle	77
I.3.2	Décomposition modale	80
I.3.3	Amortissement	82
I.3.4	Prise en compte des raidisseurs et du chevalet	84
I.3.5	Formulation variationnelle	85
I.3.6	Couplage vibroacoustique avec l'air	86
I.4	Couplage au chevalet	90
I.4.1	Charge des cordes et angle au chevalet	90
I.4.2	Condition de contact	92
I.4.3	Transmission de la vibration longitudinale, partiels fantômes	95
I.4.4	Les chœurs de cordes	99
I.4.5	Jeu <i>una corda</i> et cordes aliquotes	101
I.4.6	Échelles duplex	101
I.5	Modèle complet de piano	104
I.6	Discussion du modèle et quelques pistes	109
I.6.1	Couplage au chevalet	109
I.6.2	Table d'harmonie	109
I.6.3	Plateau de touches et ceinture	111
I.6.4	Marteau, interaction avec les cordes	112
I.6.5	Réalisme du jeu pianistique	113

I.1

La corde du piano

La corde du piano est l'élément mécanique responsable de la nature musicale du son de piano. C'est en effet le seul élément du piano qui puisse générer un mouvement dont le **spectre** est quasiment **harmonique**. Ce mouvement devra être amplifié par la table d'harmonie avant d'être véhiculé par l'air, car la corde possède une section tellement petite que son rayonnement direct dans l'air est infime.

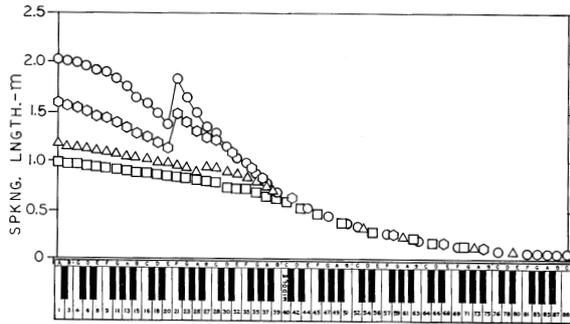
L'extrême complexité de la structure d'un piano commence déjà par les cordes, dont les plus aiguës sont composées d'acier. Ce matériau a pour caractéristique, comme nous le verrons plus tard, d'induire une certaine **inharmonicité** au spectre du mouvement de corde, qui contribue au **timbre** du piano. En revanche, si les cordes les plus graves (dont la longueur est limitée par la taille du meuble) étaient composées uniquement d'acier, l'inharmonicité serait telle que l'oreille perdrait tout repère et ne pourrait plus identifier la hauteur du son. Le diamètre des cordes serait également très gros d'un bout à l'autre de chaque corde, ce qui aurait par ailleurs des conséquences disqualifiantes du point de vue pratique : la mise en tension des cordes à la main, nécessaire lors de l'**accord**, ainsi que l'attache seraient rendues très difficiles. C'est pourquoi ces dernières sont constituées d'acier filé de cuivre, ce qui permet d'augmenter la masse linéique des cordes tout en limitant l'augmentation de l'inharmonicité. Le filage consiste à enrouler une ou deux corde(s) de cuivre en spires serrées autour d'une corde d'acier tendue, que l'on appelle « âme » (voir la figure I.22). L'âme est parfois à section hexagonale afin d'améliorer la tenue du filage. Les caractéristiques mécaniques de ces deux métaux sont rappelées en tableau I.1.

La conception d'un piano commence par l'établissement de ce que les facteurs appellent un « plan de cordes », un document qui contient entre autres l'ensemble des longueurs et des diamètres de cordes (de l'âme et des filages le cas échéant), ainsi que les angles et écartements entre les cordes. Ce plan résulte d'un calcul permettant d'assurer l'accord du piano au **tempérament** égal¹ tout en restant dans des gammes de tensions de cordes supportables pour le cadre en fonte mais surtout la table d'harmonie, qui est également soumise à une fraction de la tension des cordes au niveau du chevalet (entre 0,5 et 3% selon [Conklin, 1996b]). Les longueurs des cordes sont donc très variables d'un piano à l'autre (voir figure I.2(a)), surtout dans le registre grave. C'est d'ailleurs dans ce registre que la qualité du timbre change le plus entre les pianos de qualités différentes, en partie pour cette raison.

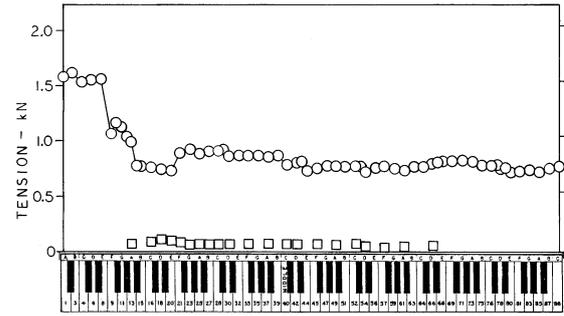


FIGURE I.1 – Cordes d'un piano à queue en situation de jeu. Les cordes aiguës sont en premier plan (on voit ici la partie des cordes reliée au chevalet), les cordes graves en second plan sont croisées et passent au dessus pour aller rejoindre le chevalet des graves.

1. ou presque, voir le paragraphe I.1.2 consacré à l'inharmonicité et la dispersion. . .



(a) Longueur des cordes sur différents pianos. \square : piano droit de 0.91 m, \triangle : piano à queue de 1.57 m, \circ : piano à queue de 2.13 m, \circ : piano à queue de 2.74 m.



(b) Tension calculée des cordes sur différents pianos. \circ : piano à queue de 2.74 m, \square : piano de Cristofori de 1720.

FIGURE I.2 – Extraits de [Conklin, 1996b] et [Conklin, 1996c]

	Densité ($\text{kg}\cdot\text{m}^3$)	Module d'Young (Pa)	Module de cisaillement (Pa)
Acier	7850	$2,02 \times 10^{11}$	$8,0 \times 10^{10}$
Cuivre	8900	$1,20 \times 10^{11}$	$4,8 \times 10^{10}$

TABLE I.1 – Constantes mécaniques typiques de l'acier et du cuivre

Le tableau I.2 recense les longueurs et les diamètres mesurés sur les six cordes témoin du Steinway D de l'IRCAM, auxquelles nous ferons référence dans la suite afin de donner des ordres de grandeur des paramètres qui apparaîtront au fur et à mesure de la modélisation.

Note	D \sharp 1	C2	F3	C \sharp 5	G6	C7
Longueur (m)	194,5	160,0	97,3	33,2	12,6	8,8
\varnothing Ame (mm)	1,380	0,935	1,057	0,937	0,890	0,900
\varnothing Gaine (mm)	3,390	1,725				

TABLE I.2 – Paramètres mesurés sur les cordes témoins du Steinway D de l'IRCAM

Dans ce qui suit, nous allons passer en revue plusieurs modèles permettant de décrire les vibrations de la corde de piano. Une corde est une structure tridimensionnelle dont une dimension est beaucoup plus grande que les deux autres, nous écrirons donc des modèles tirant partie de cette observation, pour lesquels la variable de position x évolue en une seule dimension. La géométrie de la section de la corde sera représentée non pas par sa description fidèle, tridimensionnelle, mais par un ensemble de paramètres qui alimenteront les modèles choisis. Nous commencerons par écrire un modèle très classique qui permet de rendre compte du phénomène prépondérant : la vibration transversale, c'est à dire la vibration dans la direction donnée par le marteau. Le modèle le plus simple s'obtient en considérant que la corde est infiniment fine et élastique : c'est l'équation de corde vibrante qui n'est autre que l'équation des ondes en dimension un et dont nous verrons qu'elle conduit à un mouvement dont le spectre est parfaitement harmonique. Le caractère harmonique du spectre n'est cependant pas réaliste, et résulte plus précisément de l'hypothèse selon laquelle la corde est infiniment fine. Prendre en compte la présence d'une épaisseur non nulle nous amène à considérer le phénomène de raideur de la corde, pour laquelle on peut écrire un premier modèle (d'Euler Bernoulli) qui consiste à ajouter un terme à l'équation de corde vibrante. Nous verrons qu'il permet de rendre compte de l'inharmonicité du spectre, mais conduit à une vitesse de propagation non bornée à hautes fréquences. Un deuxième modèle (de Timoshenko avec précontrainte) vient corriger ce comportement non physique : il s'agit d'un système linéaire à deux inconnues : la vibration transversale de la corde, et un angle de déviation des sections par rapport à la normale de la fibre neutre, qui permet de représenter l'onde de cisaillement. D'autre part, certaines observations nous conduiront à

enrichir encore ce modèle, en prenant en compte les vibrations longitudinales (dans le sens de l'élongation de la corde), ce qui mènera à un système non linéaire. Les mesures montrent également que la corde a tendance à sortir du plan de vibration imposé par le marteau, et à posséder une composante de polarisation horizontale. Nous généraliserons donc le système écrit précédemment à cette configuration tridimensionnelle. Nous aborderons enfin le sujet du filage, nous verrons que le choix se portera sur l'écriture d'une corde homogène équivalente, rendant compte du comportement vibratoire de la corde filée sans modéliser en détails le filage lui-même. Pour terminer, nous introduirons un terme d'amortissement viscoélastique destiné à représenter très simplement la dissipation interne à la corde, et nous étudierons son effet sur le spectre de l'équation de corde vibrante.

Nous verrons que tous ces modèles, excepté Euler Bernoulli, peuvent s'écrire sous une même forme générale unifiée. Sur ce modèle abstrait, nous montrerons que la solution dissipe une énergie et cela nous permettra d'écrire des estimations a priori sur les inconnues.

I.1.1 Equation de corde vibrante

Intéressons nous pour commencer à la vibration prépondérante de la corde de piano : sa vibration transversale verticale, c'est à dire la direction de vibration imposée par la frappe du marteau, ce qui permet de modéliser les ondes de flexion se propageant dans la corde. Cette équation d'onde, apparue historiquement dans les travaux de d'Alembert [*le Rond D'Alembert, 1761*], est souvent utilisée comme cas d'école pour sa simplicité. On suppose qu'un point au repos est autorisé à se déplacer le long d'une droite verticale à ce point, ce qui est illustré en figure I.1.1. On appelle alors $u_c(x, t)$ son déplacement transversal en mètres avec $t \in \mathbb{R}^+$ le temps et $x \in \Omega = [0, L]$ l'abscisse du point au repos.

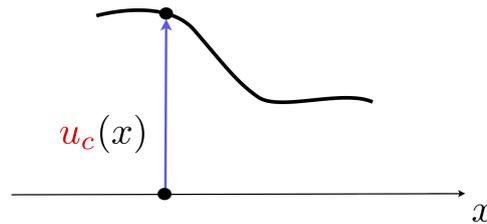


FIGURE I.3 – Schéma de l'inconnue transversale verticale $u_c(x)$.

Considérons une corde de longueur L en mètres, de section circulaire dont l'aire est donnée par $A = \pi d^2/4$ en m^2 (où d est le diamètre en m), composée d'un matériau de densité ρ en $kg \cdot m^{-3}$, et soumise à une tension au repos de T_0 en N . L'équation de la corde vibrante, sans données initiales, soumise à une source à support compact en temps $S(x, t)$ s'écrit en ne considérant que les efforts de tension appliqués à la corde et en restant dans le cadre des petites déformations. La corde est autorisée à vibrer entre ses deux points d'attache auxquels on impose des conditions de Dirichlet (déplacement nul) :

$$\rho A \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}(x, t) - T_0 \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2}(x, t) = S(x, t), \quad \forall x \in [0, L] \quad (I.1.1)$$

$$\begin{cases} u_c(x, t = 0) = 0 \\ \partial_t u_c(x, t = 0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u_c(x = 0, t) = 0, \\ u_c(x = L, t) = 0. \end{cases} \quad (I.1.2)$$

Il s'agit d'une propagation d'onde en dimension un à la vitesse

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}.$$

L'existence d'une solution à cette équation est très classique et élémentaire, nous rappelons ce résultat dans un but d'uniformité avec la suite du document.

THÉORÈME I.1.1 (Existence d'une unique solution)

Si $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; L^2)$, alors il existe une unique solution forte au système (I.1.1)-(I.1.2)

$$u_c \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+; L^2) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H^1) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; H^2)$$

DÉMONSTRATION. Cette équation est un cas particulier de l'annexe A en prenant

$$\rho(x) = \rho A, \quad \mu(x) = T_0, \quad \text{et} \quad \mathcal{A}u = -\frac{T_0}{\rho A} \frac{d^2}{dx^2} u. \quad (\text{I.1.3})$$

En vertu du théorème de Hille-Yosida appliqué à l'équation (I.1.1) (voir A.1.1), on conclut au résultat. \square

Il est intéressant de faire le lien entre le spectre de l'opérateur qui intervient dans cette équation et le spectre d'un signal généré par une solution de cette même équation. Si $u_c(x, t)$ est une solution de l'équation (I.1.1), il est possible d'enregistrer un « sismogramme » avec différents appareils de mesure (microphone sans membrane², vibromètre laser³...): on choisit $x_0 \in \Omega$, et on enregistre $u_c(x_0, t)$ qui devient alors un signal temporel dont on peut prendre la transformée de Fourier. Il se trouve que le spectre du signal montrera des singularités à des fréquences particulières, appelées fréquences propres de l'équation, et qui ont un lien très fort avec le spectre mathématique de l'opérateur autoadjoint à résolvante compacte qui intervient dans l'équation. C'est ce lien qu'établit le théorème suivant, dans le cas particulier où les coefficients sont constants en espace.

THÉORÈME I.1.2 (Fréquences propres de l'équation de corde vibrante)

Les fréquences propres de l'équation (I.1.1) sont multiples entières d'une fréquence fondamentale :

$$f_n = n f_0, \quad f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} \quad (\text{I.1.4})$$

On dit que le spectre est harmonique.

DÉMONSTRATION. Le théorème spectral A.3.1 nous garantit qu'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $L^2(\Omega)$ et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ positive et croissante telles que :

$$\begin{cases} e_n \in H_0^1(\Omega), \\ \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{cases} \quad \text{et} \quad -T_0 \Delta e_n = \rho A \lambda_n e_n \quad (\text{I.1.5})$$

De plus les valeurs propres λ_n sont de multiplicité finie et la famille $(\frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. En dimension 1, avec des coefficients constants, il est facile d'exhiber explicitement cette base : on cherche $e_n(x)$ et λ_n tels que

$$T_0 \frac{d^2}{dx^2} e_n(x) + \rho A \lambda_n e_n(x) = 0, \quad e_n(0) = e_n(L) = 0$$

Posons

$$c_n = \sqrt{\frac{\lambda_n \rho A}{T_0}}. \quad (\text{I.1.6})$$

Il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, tels que $e_n(x) = A \cos(c_n x) + B \sin(c_n x)$, $e_n(0) = e_n(L) = 0$. Le respect de la condition à la limite $x = 0$ impose $A = 0$. Le respect de la seconde condition impose :

$$B \sin(c_n L) = 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } c_n = \frac{n\pi}{L} \quad (\text{I.1.7})$$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } \lambda_n = \frac{T_0}{\rho A} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (\text{I.1.8})$$

La famille des $(\sin(n\pi x/L))_{n \in \mathbb{N}^*}$ constitue donc la base de $H_0^1([0, L])$ que nous recherchons, associée aux valeurs propres données par (I.1.8).

Exprimons $u_c(x, t)$ et $S(x, t)$ sur cette base, pour chaque temps t : il existe des familles d'éléments $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $H_0^1([0, L])$ tels que

$$u_c(\cdot, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{0 < n \leq N} u_n(t) e_n, \quad S(\cdot, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{0 < n \leq N} s_n(t) e_n. \quad (\text{I.1.9})$$

2. restitue le déplacement.

3. restitue la dérivée par rapport au temps, donc la vitesse.

En injectant cette décomposition dans l'équation (I.1.1), on trouve pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n''(t) + \lambda_n u_n(t) = s_n(t) \quad (\text{I.1.10})$$

$$\begin{cases} u_n(t=0) = 0 \\ u_n'(t=0) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.1.11})$$

On peut alors entreprendre de résoudre ces équations différentielles ordinaires découplées. On obtient :

$$u_n(t) = -\cos(\sqrt{\lambda_n}t) \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda_n}s) \frac{s_n(s)}{\sqrt{\lambda_n}} ds + \sin(\sqrt{\lambda_n}t) \int_0^t \cos(\sqrt{\lambda_n}s) \frac{s_n(s)}{\sqrt{\lambda_n}} ds \quad (\text{I.1.12})$$

Ces fonctions continues possèdent une transformée de Fourier à condition de les considérer au sens des distributions. Le résultat A.3.3 nous assure en effet que les sommes partielles de (I.1.9) ainsi que la solution forte u_c sont des distributions tempérées, et que l'on a convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^+; L^2)$. Il est donc équivalent d'effectuer directement une transformée de Fourier en temps sur l'équation (I.1.1) et d'effectuer une transformée de Fourier sur chaque u_n de l'équation (I.1.10) pour en déduire celle de u_c . Soit ω la variable de Fourier associée au temps, $\hat{u}_c(x, \omega)$ la transformée de $u_c(x, t)$ et $\hat{u}_n(\omega)$ celle de $u_n(t)$, on a :

$$\hat{u}_c(x, \omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \hat{u}_n(\omega) e_n(x). \quad (\text{I.1.13})$$

On écrit donc la transformée de Fourier de l'équation (I.1.10) :

$$(-\omega^2 + \omega_n^2) \hat{u}_n(\omega) - \hat{s}_n(\omega) = 0, \quad \text{avec } \omega_n = \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} \frac{n\pi}{L}. \quad (\text{I.1.14})$$

Cette relation étant considérée au sens des distributions, il existe deux constantes complexes u_n^+ et u_n^- telles que \hat{u}_n s'exprime :

$$\hat{u}_n(\omega) = \text{v. p.} \left(\frac{\hat{s}_n(\omega)}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) + u_n^+ \delta_{\omega_n} + u_n^- \delta_{-\omega_n}, \quad (\text{I.1.15})$$

où v. p. désigne la distribution valeur principale.

La transformée de Fourier de la solution $\hat{u}_c(x, \omega)$ montre donc des singularités à toutes les pulsations ω_n qui correspondent aux fréquences physiques en Hertz (avec le facteur multiplicatif 2π) :

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} \quad (\text{I.1.16})$$

□

À titre d'illustration, nous donnons en table I.3 la valeur de f_0 pour les notes témoin du Steinway D, qui sont universellement utilisées pour accorder les pianos modernes.

Note	D \sharp 1	C2	F3	C \sharp 5	G6	C7
f_0 (Hz)	38,89	65,41	174,61	554,36	1567,98	2093,00

TABLE I.3 – Fréquences fondamentales sur les cordes témoin du Steinway D de l'IRCAM.

REMARQUE I.1.1

Par linéarité, les valeurs des fréquences propres peuvent être retrouvées directement en procédant à une transformée de Fourier sur l'équation (I.1.1) :

$$-\omega^2 \rho A \hat{u}_c - T_0 \frac{\partial^2 \hat{u}_c}{\partial x^2} = \hat{S}(x, \omega) \quad (\text{I.1.17})$$

et en statuant que toute solution de cette équation doit vérifier les conditions aux limites. Toute solution $\hat{u}_c(x, \omega)$ s'écrit comme

$$\hat{u}_c(x, \omega) = A \cos(\omega \sqrt{\frac{\rho A}{T_0}} x) + B \sin(\omega \sqrt{\frac{\rho A}{T_0}} x). \quad (\text{I.1.18})$$

Le respect des conditions aux limites $\hat{u}_c(0) = \hat{u}_c(L) = 0$ impose $A = 0$ et l'existence d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega = \omega_n$, où

$$\omega_n \sqrt{\frac{\rho A}{T_0}} L = n\pi \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}. \quad (\text{I.1.19})$$

Les fréquences physiques en Hertz se retrouvent en utilisant la formule (I.1.16).



Nous avons introduit le modèle le plus simple de vibration de corde, l'équation de corde vibrante. Il s'agit d'une équation linéaire scalaire, pour laquelle nous avons montré qu'au sens des distributions, la solution s'écrit comme une combinaison linéaire de modes propres, et que les coefficients sur ces modes sélectionnent certaines fréquences de vibration qui dépendent des constantes physiques paramétrant l'équation. Dans le cas de la corde de piano, on peut les retrouver explicitement par la formule (I.1.4) qui établit que le spectre est harmonique :

$$f_n = n f_0, \quad f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}.$$

I.1.2 Raideur, inharmonicité et dispersion

La corde de piano n'est pas infiniment fine, contrairement à ce que nous avons supposé au paragraphe précédent. Elle possède une section qui lui confère une certaine raideur, matérialisée par une force de rappel tendant à ramener la corde à son état de repos. Nous verrons dans ce paragraphe que ce phénomène conduit à un double effet, selon que l'on considère l'aspect spectral ou temporel du signal. Du point de vue spectral, une corde raide présente un spectre inharmonique, au sens où les fréquences ne sont plus exactement les multiples d'une fréquence fondamentale, mais s'en éloignent de plus en plus en proportion du carré de leur rang (on appelle facteur d'inharmonicité le coefficient de proportionnalité, qui correspondra à ϵ^{EB}/f_0 dans (I.1.35)). Dans le domaine temporel, la raideur a pour effet une dispersion des ondes : la vitesse de propagation dépend de la fréquence.

L'inharmonicité, c'est à dire la manifestation spectrale de la raideur, participe grandement au timbre du piano. Elle a longtemps été considéré comme le premier critère de qualité d'un piano ([Schuck et Young, 1943], [Fletcher et Blackham, 1962]), bien que cette affirmation ait cependant été modérée plusieurs fois dans la littérature, voir par exemple [Galembo et al., 2004], pour lesquels l'inharmonicité joue un rôle secondaire dans la reconnaissance du timbre d'un piano, les premiers facteurs étant l'enveloppe spectrale et l'atténuation relative des partiels, ce qui semble en faire des critères plus importants. Des tests de synthèse issus de [Fletcher et Blackham, 1962] comparant des sons synthétiques avec et sans prise en compte de l'inharmonicité suggèrent qu'elle est source de réalisme, de chaleur dans le son, donc de qualité du timbre, surtout dans les graves (en dessous du Do du milieu), l'absence d'inharmonicité rendant les sons « artificiels ». À l'opposé, accroître l'inharmonicité d'une note tout en maintenant la fréquence fondamentale constante donne l'impression perceptive que la hauteur de la note monte ([Conklin, 1996c]), et provoque un changement dans le timbre assez caractéristique, qui, lorsque poussé à l'extrême, peut provoquer une confusion dans la hauteur réelle du son, et donc rendre l'accord difficile⁴. Concrètement, elle est responsable d'une déviation entre l'accord effectif du piano et l'accord théorique au tempérament égal. En effet, le processus d'accord repose sur le principe suivant : éviter les battements entre le second partiel des notes graves et les fondamentales des aiguës. Admettons que l'on souhaite accorder la note La3 à partir de la note La4 que l'on suppose juste. Selon les règles du tempérament égal, l'octave d'une note doit vibrer à la fréquence double de cette note. Si les cordes avaient un spectre parfaitement harmonique, le second partiel du La3 serait égal au double de sa propre fréquence fondamentale $f_2^{La3} = 2 \times f_0^{La3}$, ce qui correspondrait à la fréquence fondamentale du La4 f_0^{La4} . En écoutant les battements entre le second partiel du La3 et le fondamental du La4, l'accordeur trouverait la bonne fréquence du La3 en faisant varier la tension de cette corde lorsque les battements entre les deux notes s'arrêteraient. Or, les partiels sont légèrement inharmoniques, au sens où les partiels sont un peu plus aigus que le prévoit la théorie de la corde vibrante, comme nous le verrons dans ce paragraphe. Cependant, l'accordeur écoute toujours les battements entre le fondamental du La4 f_0^{La4} et le second partiel du La3 f_2^{La3} , qui est donc un peu plus aigu que $2 \times f_0^{La3}$. Il en résulte que le fondamental f_0^{La3} sera fixé à une valeur un peu inférieure à $\frac{1}{2} f_0^{La4}$ par cette méthode. Cela résulte en une courbe d'accord en S (voir [Railsback, 1937], et la figure I.4 issue de [Schuck et Young, 1943]) que les accordeurs de piano qualifient d'étirement d'octave (« octave stretching »).

4. Pour entendre cette modification du timbre, le lecteur peut écouter les exemples sonores de Philippe Guillaume accompagnant son livre [Guillaume, 2005] et disponibles à la page <http://www-gmm.insa-toulouse.fr/~guillaum/AM/index.html>,

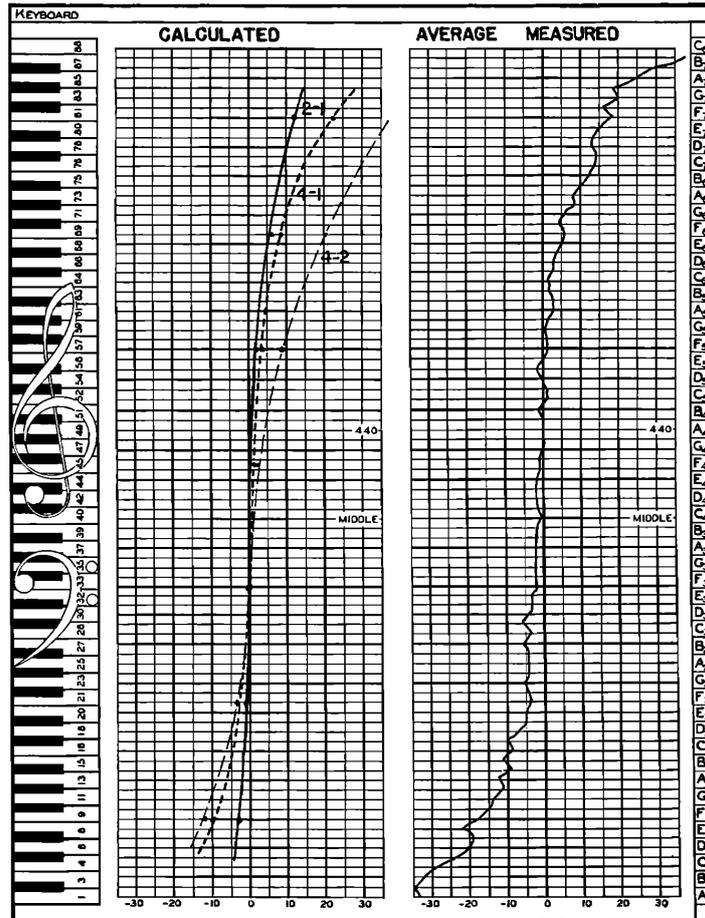


FIG. 11. (a) Left: Calculated tunings, showing deviations in cents.
 (b) Right: Average of 16 pianos tested by Railsback.

FIGURE I.4 – Déviation relative des fréquences fondamentales des notes d’un piano par rapport aux fréquences prévues par le tempérament égal. Gauche : déviation calculée à partir du principe d’annulation des battements prenant en compte l’inharmonicité. Droite : déviation moyenne mesurée sur 16 pianos. Extrait de [Schuck et Young, 1943]. L’unité utilisée, le cent, reflète la sensation audible d’écart entre les notes. Deux notes de fréquences fondamentales f_1 et f_2 sont séparées de $c = 1200 \times \log_2(\frac{f_2}{f_1})$ cents, de sorte que 1 200 cents font une octave.

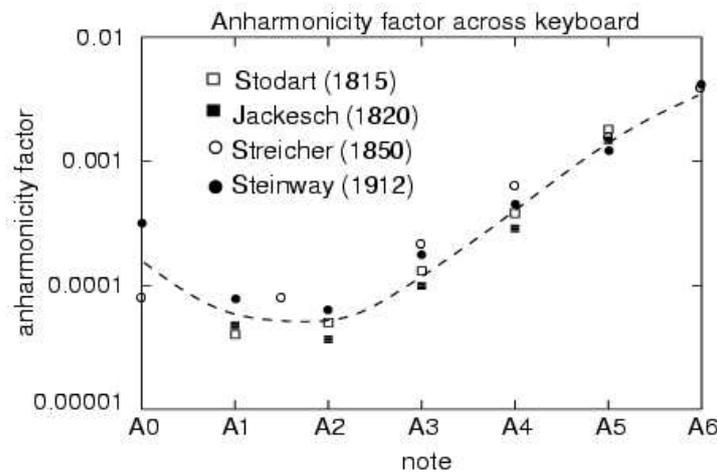


FIGURE I.5 – Facteur d’inharmonicité pour plusieurs pianos. Extrait de [Giordano, 2011]

Une question épineuse est, bien sûr, y a-t-il une « quantité » idéale d'inharmonicité ? Il semble que malgré des progrès technologiques sur les matériaux de corde (des cordes de plus en plus robustes qui pourraient autoriser une plus grande tension avec pour conséquence une modification de l'inharmonicité), les facteurs n'aient pas l'air de l'avoir modifiée depuis presque deux siècles, ce qui porte à penser que cette valeur est communément admise comme bonne ou agréable (voir [Giordano, 2011] d'où est issue la figure I.5 où l'auteur a représenté un coefficient sans dimension permettant de quantifier l'inharmonicité, qui correspondra à ϵ^{EB}/f_0 dans (I.1.35)). Des calculs sur le Christofori de 1720 menés par [Conklin, 1996c] donnent cependant des valeurs bien plus petites d'inharmonicité. Il compare un piano à queue à un piano droit et montre que l'inharmonicité est du même ordre dans les aigus mais bien différente dans les graves, à cause, entre autres, de la longueur des cordes limitées sur le piano droit. Selon lui, il serait meilleur de la réduire dans les pianos droits car elle nuit à la clarté de la hauteur de note et elle modifie le timbre. Nous verrons pourtant que l'inharmonicité est qualitativement plus grande dans les aigus, mais n'a pas de conséquence audible car très vite, les partiels sortent du domaine audible. La richesse spectrale des sons graves, malgré une inharmonicité moins marquée, la rend donc paradoxalement plus gênante.

La raideur vue comme source de phénomènes physiques notoires dans le domaine temporel est un sujet moins souvent abordé dans la littérature concernant le piano. Deux grands effets peuvent pourtant être distingués : la dispersion qui d'après [Podlesak et Lee, 1988] est responsable d'un glissement de fréquences, c'est à dire le fait que les fréquences n'arrivent pas en même temps au point de mesure placé en l'occurrence à proximité du chevalet (voir figure I.6), et l'apparition d'un **précurseur** précédant l'impulsion principale, liée à la déformation du front d'onde, qui est mentionnée à plusieurs reprises dans la littérature et illustré pour la corde de clavecin en figure I.7 :

« *The inverted reflection returning from the bridge [...] is preceded by a high-frequency component with increasing amplitude. This effect is caused by wave dispersion due to string stiffness.* » [Askenfelt et Jansson, 1993]

« *Un paquet d'ondes [...] se propage avec déformation, les hautes fréquences qu'il contient partent en avant où elles constituent un précurseur.* » [Valette et Cuesta, 1993]

Du point de vue de la modélisation, l'inharmonicité vient du fait que la corde n'est pas infiniment fine mais possède une section, comme une poutre. L'inharmonicité des cordes de piano a été mesurée expérimentalement et évaluée depuis plus d'un siècle avec diverses formules qui utilisent des équations de poutres précontraintes, souvent l'équation d'Euler Bernoulli (voir par exemple le livre [Donkin, 1870]). Il existe aujourd'hui beaucoup de modèles de poutres que l'on peut adapter en imposant une précontrainte pour modéliser les vibrations en flexion de la corde : l'article [Han et al., 1999] regroupe quatre théories très utilisées en ingénierie, en précisant quels effets physiques sont pris en compte dans ces modèles, comme le résume le tableau I.4. Dans la suite de ce paragraphe, nous en retiendrons deux et nous étudierons le spectre auquel ils conduisent ainsi que leur pertinence physique : l'équation d'Euler Bernoulli, qui nous permettra de retrouver la formule d'inharmonicité bien connue de la littérature grâce à des calculs simples, et le système de Timoshenko, qui nous permettra de trouver une formule moins simple mais ayant un comportement similaire à basses fréquences, et plus physique à hautes fréquences.

Modèle de poutre	Moment de flexion	Déplacement latéral	Déformation de cisaillement	Inertie de rotation
Euler-Bernoulli	✓	✓	✗	✗
Rayleigh	✓	✓	✗	✓
Cisaillement	✓	✓	✓	✗
Timoshenko	✓	✓	✓	✓

TABLE I.4 – Prise en compte des phénomènes physiques dans les théories de poutre. Extrait de [Han et al., 1999]

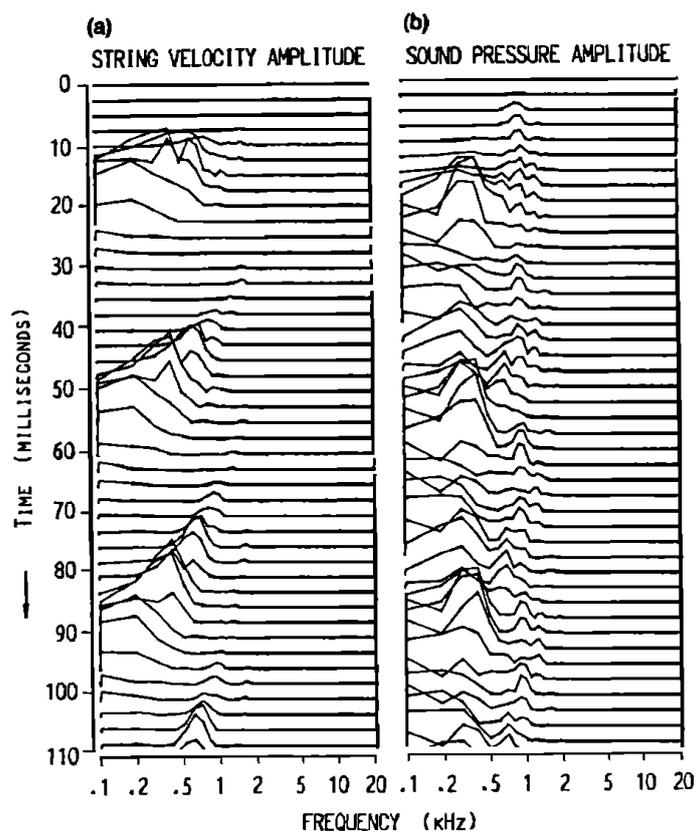


FIGURE I.6 – Spectrogramme (diagramme temps - fréquence) de la vitesse transversale verticale de la corde mesurée en un point proche du chevalet et de la pression du son. Un glissement de fréquences est notoire dans le signal de corde, témoignant d'un phénomène dispersif dans la corde du piano. Extrait de [Podlesak et Lee, 1988]

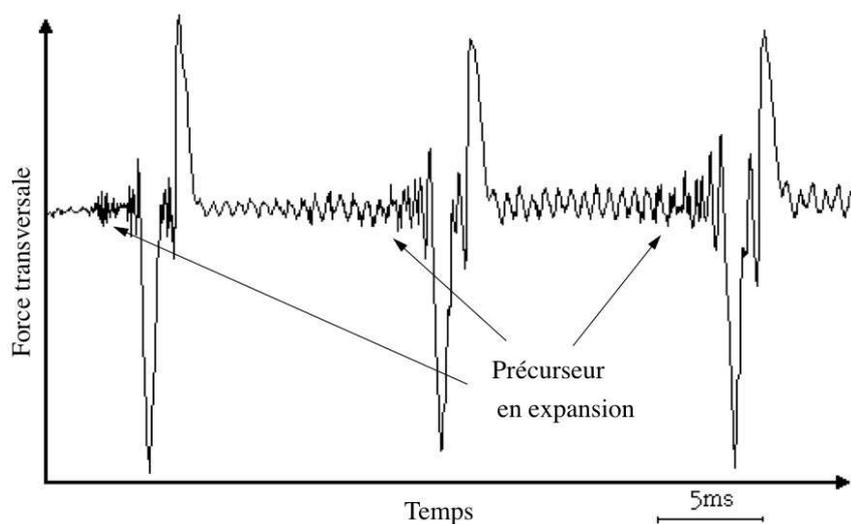


FIGURE I.7 – Force au chevalet d'un clavecin en fonction du temps : le précurseur est attribué à la raideur. Extrait de [Valette et Cuesta, 1993]

I.1.2.a Modèle d'Euler-Bernoulli

Ce modèle très simple explique la raideur par un effet de courbure qui fait intervenir une dérivée d'ordre quatre en espace du déplacement transversal vertical. On peut par exemple voir sa dérivation dans [Rayleigh, 1877], qui lui-même s'appuie sur les travaux plus anciens de Euler ou encore Daniel Bernoulli. La forme de la section est prise en compte grâce à l'introduction d'un nouveau paramètre, le moment d'inertie I , exprimé en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$. Pour une corde de section circulaire de diamètre d , le calcul est très simple et $I = \pi d^4/64$. On a également besoin d'introduire le module d'Young E en Pa. L'équation de corde raide est une perturbation de l'équation de corde vibrante linéaire. En raison des termes faisant intervenir des dérivées d'ordre quatre, des conditions aux limites supplémentaires doivent être écrites. On impose des conditions « simplement supportées », qui nous conduisent à ajouter une condition de moment nul (dérivée seconde en espace nulle aux bords) à la condition de déplacement nul déjà prise en compte dans le modèle de corde vibrante :

$$\rho A \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}(x, t) + EI \frac{\partial^4 u_c}{\partial x^4}(x, t) - T_0 \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2}(x, t) = S(x, t), \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}^+, \quad (\text{I.1.20})$$

$$\begin{cases} u_c(x, t = 0) = 0 \\ \partial_t u_c(x, t = 0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u_c(x = 0, t) = \partial_x^2 u_c(x = 0, t) = 0, \\ u_c(x = L, t) = \partial_x^2 u_c(x = L, t) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.1.21})$$

THÉORÈME I.1.3 (Fréquences propres de l'équation d'Euler Bernoulli simplement supportée)

Les fréquences propres du système (I.1.20)-(I.1.21) sont données par

$$f_n = n f_0 \sqrt{1 + B n^2}, \quad \text{où } f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} \text{ et } B = \frac{\pi^2 EI}{T_0 L^2}. \quad (\text{I.1.22})$$

DÉMONSTRATION. Procédons à une transformée de Fourier en temps sur cette équation. Soit comme ci dessus ω la variable de Fourier associée au temps. On obtient

$$-\omega^2 \rho A \hat{u}_c(x, \omega) + EI \frac{\partial^4 \hat{u}_c}{\partial x^4}(x, \omega) - T_0 \frac{\partial^2 \hat{u}_c}{\partial x^2}(x, \omega) = \hat{S}(x, \omega) \quad (\text{I.1.23})$$

Cette EDO peut être réécrite comme une EDO d'ordre un en introduisant la nouvelle inconnue vectorielle Y , le vecteur F et la matrice \mathbb{A} :

$$Y = \begin{pmatrix} \hat{u}_c \\ \partial_x \hat{u}_c \\ \partial_x^2 \hat{u}_c \\ \partial_x^3 \hat{u}_c \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\rho A \omega^2}{EI} & 0 & -\frac{T_0}{EI} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{S}(x, \omega) \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.24})$$

Alors l'équation (I.1.23) est équivalente à

$$Y' + \mathbb{A}Y = F \quad (\text{I.1.25})$$

et les solutions s'écrivent comme une combinaison linéaire d'exponentielles dépendant des valeurs propres de la matrice \mathbb{A} . Ces valeurs propres sont solutions de l'équation

$$\det(\mathbb{A} - \lambda I_4) = 0 \Leftrightarrow EI \lambda^4 - T_0 \lambda^2 - \rho A \omega^2 = 0 \quad (\text{I.1.26})$$

À ω fixé, cette équation comporte quatre solutions :

$$\{i\lambda^-, -i\lambda^-, \lambda^+, -\lambda^+\}, \quad \text{avec } \lambda^- = \sqrt{|r^-|}, \quad \lambda^+ = \sqrt{r^+} \quad (\text{I.1.27})$$

où r^+ et r^- sont les deux racines de signe opposé de la parabole $EI \ell^2 - T_0 \ell - \rho A \omega^2$:

$$r^\pm = \frac{T_0 \pm \sqrt{T_0^2 + 4\rho A EI \omega^2}}{2EI}. \quad (\text{I.1.28})$$

Toute solution s'écrit donc comme une combinaison linéaire de cosinus, sinus, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique : il existe $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\hat{u}_c(x, \omega) = A \cosh(\lambda^+ x) + B \sinh(\lambda^+ x) + C \cos(\lambda^- x) + D \sin(\lambda^- x). \quad (\text{I.1.29})$$

Le respect des conditions aux limites en 0 donne la relation $A = C = 0$. Quant aux conditions en L , elles donnent le système suivant :

$$(r^+ + r^-)B \sinh(\lambda^+ L) = 0 \Rightarrow B = 0. \quad (\text{I.1.30})$$

$$(r^+ + r^-)D \sin(\lambda^- L) = 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } \lambda^- L = n\pi. \quad (\text{I.1.31})$$

On en déduit qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega = \omega_n$, où l'on calcule ce dernier comme :

$$\sqrt{|r^-|}L = n\pi \Rightarrow -r^- = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow T_0 - \sqrt{T_0^2 + 4\rho AEI\omega_n^2} = -2n^2\pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (\text{I.1.32})$$

$$\Rightarrow \omega_n^2 = n^2\pi^2 \frac{T_0}{\rho AL^2} \left[1 + \frac{n^2\pi^2 EI}{T_0 L^2} \right] \quad (\text{I.1.33})$$

Les fréquences physiques de cette corde raide d'Euler Bernoulli sont donc, en Hertz :

$$f_n = nf_0 \sqrt{1 + Bn^2}, \text{ où } f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} \text{ et } B = \frac{\pi^2 EI}{T_0 L^2}. \quad (\text{I.1.34})$$

□

On retrouve évidemment la formule ancestrale donnée par exemple par [Fletcher, 1964] qui montre que les fréquences propres de la corde d'Euler Bernoulli ne sont pas exactement harmoniques mais sont décalées vers les aigus par rapport au spectre harmonique. On les appelle alors les partiels. Le coefficient B caractérise l'inharmonicité dans la corde, il est inversement proportionnel à la tension de la corde et au carré de sa longueur.

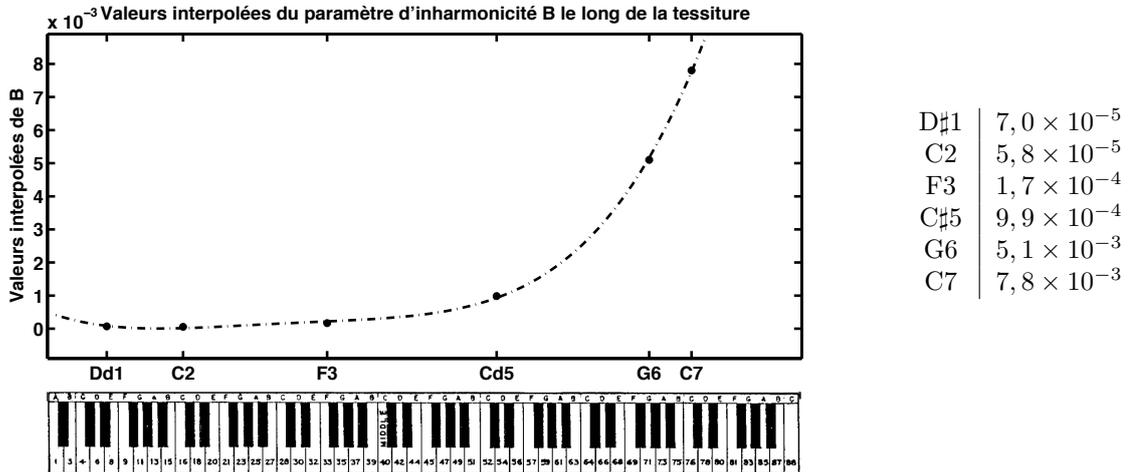


FIGURE I.8 – Valeur du coefficient B pour plusieurs cordes du piano Steinway modèle D de l'IRCAM.

En utilisant les mesures faites sur le Steinway modèle D de l'IRCAM, on peut tracer la valeur qui maximise l'adéquation de ce paramètre B avec les mesures, pour les différentes cordes du piano. Pour chaque corde, nous avons pointé les premières fréquences sur le spectre de l'accélération au chevalet. Puis nous avons utilisé une méthode de moindres carrés non linéaire pour trouver les valeurs de f_0 et B qui interpolaient le mieux les fréquences mesurées. Les valeurs sont représentées par les points en figure I.8. On peut voir sur cette figure que l'inharmonicité augmente au fur et à mesure de la tessiture. La ligne est l'interpolation de ces points par un polynôme d'ordre 4, qui rend bien compte de cette augmentation mais aussi de la légère remontée de B dans les extrêmes graves.

REMARQUE I.1.2 (*Perception de l'inharmonicité*)

Bien que la valeur du coefficient d'inharmonicité soit beaucoup plus grande dans les aigus, on ressent beaucoup plus son effet dans les graves. Ce phénomène est lié au fait que bien que les cordes aiguës soient en effet sujettes à une plus grande inharmonicité, seuls peu de partiels restent sous le seuil des 20 kHz au delà duquel l'oreille humaine n'est plus sensible. C'est donc paradoxalement pour les

cordes graves, pour lesquelles on peut entendre jusqu'à 300 partiels, que l'inharmonicité se fait le plus ressentir.

Revenons à une corde donnée. Pour les premiers partiels, on peut procéder à un développement de Taylor pour Bn^2 petit devant 1, et donner la formule approchée suivante :

$$f_n^{EB} \approx nf_0 + \epsilon^{EB}n^3, \text{ où } f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}, \quad \epsilon^{EB} = \frac{\pi^2}{4L^3} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A} \frac{EI}{T_0}}, \quad \text{quand } Bn^2 \ll 1. \quad (\text{I.1.35})$$

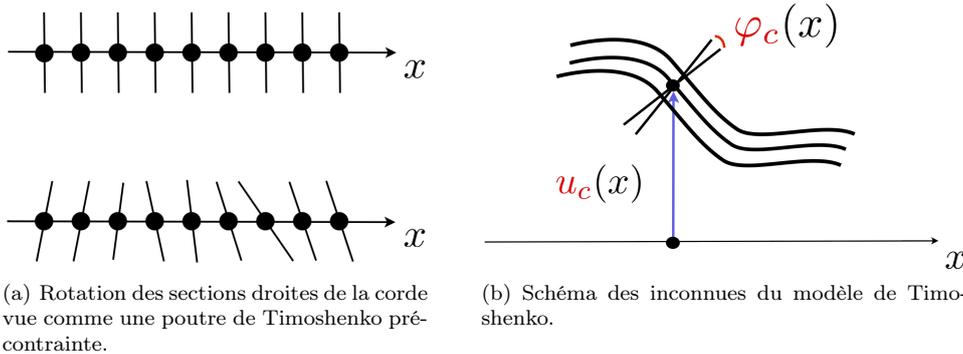
Le comportement en hautes fréquences est pour sa part donné par l'équivalent pour n grand :

$$f_n^{EB} \sim n^2 f_\infty^{EB} \text{ où } f_\infty^{EB} = \sqrt{B} f_0 = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (\text{I.1.36})$$

On voit avec cette formule asymptotique que les hautes fréquences prévues par le modèle d'Euler-Bernoulli augmentent proportionnellement à n^2 , ce qui reflète un défaut bien connu de ce modèle : en domaine non borné, la vitesse de propagation augmente indéfiniment avec le nombre d'onde. La dispersion, c'est à dire le fait que la vitesse dépende du nombre d'onde, était l'effet recherché lorsque nous avons introduit l'effet de la raideur dans l'équation, et le comportement basses fréquences donné par (I.1.35) est très satisfaisant. En revanche, le comportement hautes fréquences n'est pas conforme aux observations physiques. Nous verrons que le modèle de Timoshenko permet de remédier à ce défaut tout en étant très proche du modèle d'Euler-Bernoulli en basses fréquences.

I.1.2.b Modèle de Timoshenko

Le modèle de Timoshenko améliore le modèle d'Euler-Bernoulli en ajoutant la prise en compte de la distorsion de cisaillement ainsi que l'inertie de rotation. Les sections de la corde sont considérées, comme dans Euler-Bernoulli, mais ont de plus la liberté d'effectuer des rotations par rapport à la fibre neutre de la corde, tout en restant droites, comme l'illustre la figure I.9(a). Pour cela est introduite une nouvelle



inconnue notée φ_c , qui quantifie la déviation des sections droites à la normale de la fibre neutre et permet de modéliser les ondes de cisaillement circulant dans le système. Comme précédemment, nous ajoutons un terme de précontrainte pour modéliser la tension T_0 au repos de la corde. Comme dans le modèle d'Euler Bernoulli, I désigne le moment d'inertie, E le module d'Young. On introduit en plus le module de cisaillement G en Pa, qui est un coefficient du matériau. Le paramètre κ est un paramètre artificiel du modèle destiné à compenser l'approximation du cisaillement par sa moyenne sur la section de la corde, qui est faite lors de la dérivation du modèle (voir [Timoshenko, 1921]). Il a inspiré beaucoup d'auteurs (voir par exemple [Cowper, 1966]) et sa valeur se situe entre 0 et 1. Les conditions aux limites choisies sont les mêmes que précédemment, à savoir les conditions « simplement supportées », c'est à dire déplacement nul, moment nul.

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} - (AG\kappa + T_0) \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} + AG\kappa \frac{\partial \varphi_c}{\partial x} = S(x, t) \\ \rho I \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial x^2} - AG\kappa \frac{\partial u_c}{\partial x} + AG\kappa \varphi_c = 0 \end{cases} \quad (\text{I.1.37})$$

$$\begin{cases} u_c(x=0, t) = 0, & u_c(x=L, t) = 0 \\ \partial_x \varphi_c(x=0, t) = 0, & \partial_x \varphi_c(x=L, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.1.38})$$

REMARQUE I.1.3 (Conditions simplement supportées exprimées sur l'inconnue u_c)

Si l'on écrit la première équation de (I.1.37) à l'une des extrémités x_b de la corde, on obtient :

$$\underbrace{\rho A \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}(x=x_b, t)}_{=0} - (AG\kappa + T_0) \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2}(x=x_b, t) + AG\kappa \underbrace{\frac{\partial \varphi_c}{\partial x}(x=x_b, t)}_{=0} = S(x=x_b, t) \quad (\text{I.1.39})$$

Ainsi, en l'absence de source ou si la source est localisée loin des bords, on obtient la condition suivante sur u_c :

$$\frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2}(x=x_b, t) = 0 \quad (\text{I.1.40})$$

qui fait écho à la condition de moment nul imposée pour l'équation d'Euler-Bernoulli au paragraphe précédent.

REMARQUE I.1.4 (Existence d'une solution forte)

La démonstration de l'existence d'une unique solution forte est faite en appliquant le théorème de Hille Yosida à ce système dans l'annexe B.

THÉORÈME I.1.4 (Fréquences propres du système de Timoshenko simplement supporté)

Introduisons

$$\alpha = \frac{\rho A}{T_0 + AG\kappa}, \quad \beta = \frac{\rho I}{EI}, \quad \gamma = \frac{AG\kappa}{EI}, \quad \text{et } \delta = \frac{AG\kappa}{T_0 + AG\kappa} \quad (\text{I.1.41})$$

Les pulsations associées et les fréquences propres du système de Timoshenko simplement supporté (I.1.37)-(I.1.38) sont données par

$$\omega_n^\pm = \sqrt{\Omega_n^\pm}, \quad f_n^\pm = \frac{\omega_n^\pm}{2\pi} \quad (\text{I.1.42})$$

où

$$\Omega_n^- = \frac{\frac{n^2 \pi^2}{L^2}(\alpha + \beta) + \alpha\gamma - \sqrt{\Delta_n}}{2\alpha\beta} < \Omega_n^+ = \frac{\frac{n^2 \pi^2}{L^2}(\alpha + \beta) + \alpha\gamma + \sqrt{\Delta_n}}{2\alpha\beta} \quad (\text{I.1.43})$$

$$\Delta_n = \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2}(\alpha + \beta) + \alpha\gamma \right]^2 - 4\alpha\beta \left[\gamma(1 - \delta) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \right] \quad (\text{I.1.44})$$

DÉMONSTRATION. Dans le but d'obtenir une relation de dispersion, nous effectuons comme précédemment une transformée de Fourier en temps sur ce système avec ω la variable de Fourier :

$$\begin{cases} -\rho A \omega^2 \hat{u}_c - (AG\kappa + T_0) \frac{\partial^2 \hat{u}_c}{\partial x^2} + AG\kappa \frac{\partial \hat{\varphi}_c}{\partial x} = \hat{S}(x, \omega) \\ -\rho I \omega^2 \hat{\varphi}_c - EI \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_c}{\partial x^2} - AG\kappa \frac{\partial \hat{u}_c}{\partial x} + AG\kappa \hat{\varphi}_c = 0 \end{cases} \quad (\text{I.1.45})$$

En posant les matrices

$$M = \begin{pmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} T_0 + AG\kappa & 0 \\ 0 & EI \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -AG\kappa \\ AG\kappa & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -AG\kappa \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.46})$$

et les vecteurs $X = \begin{pmatrix} \hat{u}_c \\ \hat{\varphi}_c \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{pmatrix}$, le système devient, en notant ' la dérivée par rapport à x :

$$\boxed{-\omega^2 MX = AX'' + BX' + CX + F} \quad (\text{I.1.47})$$

Il est possible de reformuler ce système en un système d'ordre 1. Posons $Y = \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}$. Alors (I.1.37) se reformule en un système à quatre inconnues :

$$Y' + \mathbb{A}Y = \begin{pmatrix} 0 \\ A^{-1}F \end{pmatrix}, \quad \text{où } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ A^{-1}(C + \omega^2 M) & A^{-1}B \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.48})$$

Pour résoudre ce système d'équations différentielles ordinaires couplées, nous étudions la matrice \mathbb{A} et en particulier, nous recherchons ses valeurs propres. Cette matrice se réécrit :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ a(\omega) & 0 & 0 & d(\omega) \\ 0 & b(\omega) & c(\omega) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.49})$$

où

$$a(\omega) = \frac{\rho A}{\underbrace{T_0 + AG\kappa}_{\alpha}} \omega^2, \quad b(\omega) = \frac{\rho I}{\underbrace{EI}_{\beta}} \omega^2 - \frac{AG\kappa}{\underbrace{EI}_{\gamma}}, \quad c = \frac{AG\kappa}{\underbrace{EI}_{\gamma}}, \quad d(\omega) = -\frac{AG\kappa}{\underbrace{T_0 + AG\kappa}_{\delta}} \quad (\text{I.1.50})$$

Les valeurs propres de \mathbb{A} sont les complexes λ tels que

$$\det(\mathbb{A} - \lambda I_4) = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 + \lambda^2(a + b - cd) + ab = 0 \quad (\text{I.1.51})$$

Il s'agit d'une équation de degré 4 couplant les valeurs propres λ et la variable de Fourier ω :

$$\boxed{\lambda^4 + (\alpha + \beta)\omega^2 \lambda^2 + \alpha\beta\omega^4 - \gamma(1 - \delta)\lambda^2 - \alpha\gamma\omega^2 = 0} \quad (\text{I.1.52})$$

Seules les puissances paires apparaissent, on peut donc poser $\Lambda = \lambda^2$ et $\Omega = \omega^2$, ce qui conduit à l'équation du second ordre :

$$\Lambda^2 + [(\alpha + \beta)\Omega - \gamma(1 - \delta)]\Lambda + \alpha\beta\Omega^2 - \alpha\gamma\Omega = 0 \quad (\text{I.1.53})$$

que l'on peut résoudre en Λ . En effet, il s'agit d'une équation du second ordre en Λ avec comme discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta(\Omega) &= [(\alpha + \beta)\Omega - \gamma(1 - \delta)]^2 - 4\alpha\Omega(\beta\Omega - \gamma) \\ &= (\alpha - \beta)^2\Omega^2 + [4\alpha\gamma - 2\gamma(\alpha + \beta)(1 - \delta)]\Omega + \gamma^2(1 - \delta)^2 \end{aligned}$$

Le discriminant est donc un polynôme d'ordre deux en Ω , de discriminant $\tilde{\Delta} = 16\gamma^2\delta\alpha(\alpha + \beta(\delta - 1)) \geq 0$ si $EA > T_0$, ce qui est largement le cas pour des valeurs typiques de cordes. Il change de signe en fonction des valeurs prises par Ω , mais les racines sont négatives. En effet,

$$\begin{aligned} \Delta(\Omega = 0) &= \gamma^2(1 - \delta)^2 \geq 0 \\ \Delta'(\Omega = 0) &= 4\alpha\gamma - 2\gamma(\alpha + \beta)(1 - \delta) \geq 0 && \Leftrightarrow 4\alpha\gamma \geq 2\gamma(\alpha + \beta)(1 - \delta) \\ &&& \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta - 2(\alpha + \beta)\delta \leq 4\alpha \\ &&& \Leftrightarrow 2(\beta - \alpha) \leq 2(\alpha + \beta)\delta \\ &&& \Leftrightarrow 1 - \frac{EA - T_0}{AG\kappa} \leq 1 + \frac{EA}{T_0 + AG\kappa} \end{aligned}$$

ce qui est vrai tant que $EA - T_0 \geq 0$. La parabole $\Delta(\Omega)$ est tournée vers le haut puisque le coefficient dominant est positif, sa valeur en 0 est positive et sa pente en 0 est positive : ses racines sont donc négatives. Or, on s'intéresse à $\omega \in \mathbb{R}$, donc $\Omega \geq 0$, donc l'équation (I.1.53) possède deux solutions $\Lambda^- \equiv \Lambda^-(\Omega)$ et $\Lambda^+ \equiv \Lambda^+(\Omega)$ qui s'écrivent :

$$\Lambda^-(\Omega) = \frac{\gamma(1 - \delta) - (\alpha + \beta)\Omega - \sqrt{\Delta(\Omega)}}{2}, \quad \Lambda^+(\Omega) = \frac{\gamma(1 - \delta) - (\alpha + \beta)\Omega + \sqrt{\Delta(\Omega)}}{2} \quad (\text{I.1.54})$$

Il est aisé de montrer que ces racines vérifient :

$$\begin{cases} \Lambda^-(\Omega) \leq 0 & \forall \Omega \geq 0 \\ \Lambda^+(\Omega) \leq 0 & \Leftrightarrow \Omega \geq \frac{\gamma}{\beta} \end{cases} \quad (\text{I.1.55})$$

Alors, les valeurs propres de la matrice \mathbb{A} sont au nombre de 4 et vérifient :

$$(\lambda_{\pm}^-)^2 = \Lambda^- \quad \text{et} \quad (\lambda_{\pm}^+)^2 = \Lambda^+ \quad (\text{I.1.56})$$

Elles diffèrent selon la valeur prise par Ω :

Ω	0	γ/β	∞
λ_{\pm}^-	$\pm i\sqrt{ \Lambda^-(\Omega) }$	$\pm i\sqrt{ \Lambda^-(\Omega) }$	
λ_{\pm}^+	$\pm\sqrt{\Lambda^+(\Omega)}$	$\pm i\sqrt{ \Lambda^+(\Omega) }$	

On peut alors écrire les solutions du système d'équations différentielles ordinaires (I.1.48) dans la base des $(e^{\lambda^-x}, e^{\lambda_+^-x}, e^{\lambda_+^+x}, e^{\lambda_-^+x})$: il existe des fonctions de ω (P, Q, R, S) tels que

$$\hat{u}_c(x, \omega) = P(\omega)e^{\lambda^-x} + Q(\omega)e^{\lambda_+^-x} + R(\omega)e^{\lambda_+^+x} + S(\omega)e^{\lambda_-^+x} \quad (\text{I.1.57})$$

On utilise alors les conditions aux limites traduites (voir remarque I.1.3) sur $\hat{u}_c(x, \omega)$, qui sont les mêmes que celles de $u_c(x, t)$:

$$\hat{u}_c(x=0, \omega) = \hat{u}_c(x=L, \omega) = \hat{u}_c''(x=0, \omega) = \hat{u}_c''(x=L, \omega) = 0 \quad (\text{I.1.58})$$

ce qui donne des équations de compatibilité :

$$\begin{aligned} (L1) \quad & P + Q + R + S = 0 \\ (L2) \quad & P(\lambda_-^-)^2 + Q(\lambda_+^-)^2 + R(\lambda_-^+)^2 + S(\lambda_+^+)^2 = 0 \\ (L3) \quad & Pe^{\lambda_-^-L} + Qe^{\lambda_+^-L} + Re^{\lambda_-^+L} + Se^{\lambda_+^+L} = 0 \\ (L4) \quad & P(\lambda_-^-)^2 e^{\lambda_-^-L} + Q(\lambda_+^-)^2 e^{\lambda_+^-L} + R(\lambda_-^+)^2 e^{\lambda_-^+L} + S(\lambda_+^+)^2 e^{\lambda_+^+L} = 0 \end{aligned}$$

On effectue quelques opérations sur le système :

$$(L2) - (\Lambda^-)(L1) \quad (P+Q)(\Lambda^- - \Lambda^-) + (R+S)(\Lambda^- - \Lambda^+) = 0 \Rightarrow \boxed{R+S=0} \quad (\text{I.1.59})$$

$$(L2) - (\Lambda^+)(L1) \quad (P+Q)(\Lambda^+ - \Lambda^-) + (R+S)(\Lambda^+ - \Lambda^+) = 0 \Rightarrow \boxed{P+Q=0} \quad (\text{I.1.60})$$

Les deux première lignes deviennent alors triviales, il reste :

$$P[e^{\lambda_-^-L} - e^{\lambda_+^-L}] + R[e^{\lambda_-^+L} - e^{\lambda_+^+L}] = 0 \quad (\text{I.1.61})$$

$$P(\Lambda^-)[e^{\lambda_-^-L} - e^{\lambda_+^-L}] + R(\Lambda^+)[e^{\lambda_-^+L} - e^{\lambda_+^+L}] = 0 \quad (\text{I.1.62})$$

Ainsi, afin que la solution \hat{u}_c ne soit pas nulle, il faut que le système ci dessus admette au moins une solution non nulle. Il doit donc être dégénéré, ce qui donne des conditions sur les valeurs propres :

$$\det \begin{pmatrix} e^{\lambda_-^-L} - e^{\lambda_+^-L} & e^{\lambda_-^+L} - e^{\lambda_+^+L} \\ (\Lambda^-)[e^{\lambda_-^-L} - e^{\lambda_+^-L}] & (\Lambda^+)[e^{\lambda_-^+L} - e^{\lambda_+^+L}] \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{I.1.63})$$

$$\Leftrightarrow [e^{\lambda_-^-L} - e^{\lambda_+^-L}](\Lambda^+ - \Lambda^-)[e^{\lambda_-^+L} - e^{\lambda_+^+L}] = 0 \quad (\text{I.1.64})$$

Or les deux racines Λ^+ et Λ^- sont distinctes, donc deux possibilités se présentent :

$$e^{\lambda_-^-L} - e^{\lambda_+^-L} = 0 \text{ ou } e^{\lambda_-^+L} - e^{\lambda_+^+L} = 0 \quad (\text{I.1.65})$$

$$\sin(\sqrt{|\Lambda^-|}L) = 0 \text{ ou } \begin{cases} \sinh(\sqrt{|\Lambda^+|}L) = 0, & \text{si } \Omega < \gamma/\beta \\ \sin(\sqrt{|\Lambda^+|}L) = 0, & \text{si } \Omega \geq \gamma/\beta \end{cases} \quad (\text{I.1.66})$$

$$\begin{cases} \exists n \in \mathbb{Z}^*, \sqrt{|\Lambda^-|}L = n\pi, \text{ ou } \sqrt{|\Lambda^+|} = 0 & \text{si } \Omega < \gamma/\beta, \\ \exists n \in \mathbb{Z}^*, \sqrt{|\Lambda^-|}L = n\pi, \text{ ou } \exists m \in \mathbb{Z}^*, \sqrt{|\Lambda^+|}L = m\pi & \text{si } \Omega \geq \gamma/\beta \end{cases} \quad (\text{I.1.67})$$

Comme précédemment, le caractère fini de la corde et l'imposition des conditions aux limites n'autorisent que certains nombres d'onde et pulsations dans la corde. Pour trouver les fréquences propres de la corde, qui sont associées aux pulsations vérifiant (I.1.67), il faut résoudre les équations suivantes :

$$\Lambda^-(\Omega) = \frac{\gamma(1-\delta) - (\alpha+\beta)\Omega - \sqrt{\Delta(\Omega)}}{2} = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad (\text{I.1.68})$$

$$\Lambda^+(\Omega) = \frac{\gamma(1-\delta) - (\alpha+\beta)\Omega + \sqrt{\Delta(\Omega)}}{2} = -\frac{m^2\pi^2}{L^2}, \quad \Omega \geq \gamma/\beta \quad (\text{I.1.69})$$

On peut facilement montrer l'existence et l'unicité de Ω_n^- et Ω_m^+ tels que

$$\Lambda^-(\Omega_n^-) = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \text{ et } \Lambda^+(\Omega_m^+) = -\frac{m^2\pi^2}{L^2}$$

De nombreux papiers étudient le comportement asymptotique de ces solutions, en particulier pour la poutre de Timoshenko (à laquelle on se ramène en prenant $T_0 = 0$) comme dans van Rensburg, van der Merwe, Wave Motion, 2006. Il est possible de résoudre numériquement ce problème, par exemple pour les premières valeurs de n et m .

Ici (pour nos conditions aux limites) nous avons la chance de pouvoir calculer explicitement les valeurs de Ω_n^- et Ω_m^+ . En effet, $\Lambda^-(\Omega_n^-)$ est par définition l'une des deux solutions de l'équation du second degré (I.1.53) paramétrée par Ω_n^- , elle vérifie donc très naturellement :

$$(\Lambda^-(\Omega_n^-))^2 + [(\alpha+\beta)\Omega_n^- - \gamma(1-\delta)]\Lambda^-(\Omega_n^-) + \alpha\beta(\Omega_n^-)^2 - \alpha\gamma\Omega_n^- = 0 \quad (\text{I.1.70})$$

On peut alors remplacer $\Lambda^-(\Omega_n^-)$ par sa valeur dans cette équation, ce qui donne :

$$\alpha\beta(\Omega_n^-)^2 - \left[\frac{n^2\pi^2}{L^2}(\alpha+\beta) + \alpha\gamma \right] \Omega_n^- + \gamma(1-\delta)\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{n^4\pi^4}{L^4} = 0 \quad (\text{I.1.71})$$

Il s'agit, encore, d'une équation du second degré en Ω_n^- que l'on peut résoudre en cherchant son discriminant :

$$\Delta_n = \left[\frac{n^2 \pi^2}{L^2} (\alpha + \beta) + \alpha \gamma \right]^2 - 4\alpha\beta \left[\gamma(1 - \delta) \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \right] \quad (\text{I.1.72})$$

$$= \alpha^2 \gamma^2 + 2\alpha\gamma \frac{n^2 \pi^2}{L^2} [\alpha + \beta - 2\beta(1 - \delta)] + (\alpha - \beta)^2 \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \geq 0 \quad (\text{I.1.73})$$

Cette équation a donc deux solutions, qui sont en fait les deux solutions que l'on obtiendrait en inversant Λ^- et Λ^+ avec les équations (I.1.68) et (I.1.69). Ces deux solutions sont positives (racines d'une parabole tournée vers le haut, positive en 0 et à pente négative en 0) et s'écrivent, pour un n fixé dans \mathbb{N}^* :

$$\Omega_n^- = \frac{\frac{n^2 \pi^2}{L^2} (\alpha + \beta) + \alpha \gamma - \sqrt{\Delta_n}}{2\alpha\beta} < \Omega_n^+ = \frac{\frac{n^2 \pi^2}{L^2} (\alpha + \beta) + \alpha \gamma + \sqrt{\Delta_n}}{2\alpha\beta} \quad (\text{I.1.74})$$

Les pulsations associées et les fréquences propres sont

$$\omega_n^\pm = \sqrt{\Omega_n^\pm}, \quad f_n^\pm = \frac{\omega_n^\pm}{2\pi} \quad (\text{I.1.75})$$

□

On obtient donc deux branches de fréquences propres, correspondant aux deux ondes se propageant dans le système : les ondes de flexion (inconnue transversale verticale u_c) et les ondes de cisaillement (inconnue modélisant l'angle φ_c). La formule explicite (mais un peu compliquée) (I.1.42) nous permet de donner une formule approchée pour les premières fréquences de la vibration transversale de la corde : procédons à un développement de Taylor pour n petit de la première branche :

$$f_n^{Timo} = n f_0 + \epsilon^{Timo} n^3 + \mathcal{O}(n^5) \text{ où } f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}, \quad \epsilon^{Timo} = \frac{\pi^2}{4L^3} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} \frac{EI}{T_0} \left[1 - \frac{T_0}{EA} \right], \quad \text{pour } n \text{ petit.} \quad (\text{I.1.76})$$

Cette formule est à rapprocher de (I.1.35) où l'on avait obtenu un coefficient très similaire dans le développement limité. En effet, le terme T_0/EA est petit devant 1. En basses fréquences, le modèle de Timoshenko donne donc des fréquences propres très similaires au modèle d'Euler Bernoulli. Le comportement hautes fréquences est obtenu par un équivalent quand n est grand, en sachant que $\beta < \alpha$ car $EA > T_0$:

$$f_n^{Timo} \sim n f_\infty^{Timo}, \text{ où } f_\infty^{Timo} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0 + AG\kappa}{AG\kappa}}, \quad \text{pour } n \rightarrow +\infty \quad (\text{I.1.77})$$

Cette formule montre que les partiels prévus par le modèle de Timoshenko tendent vers ceux d'une corde harmonique pour n grand, ce qui reflète le fait que ce modèle appliqué à un domaine non borné admet une vitesse finie de propagation.

D'autre part, un développement de Taylor des premières fréquences de l'autre branche correspondant aux ondes de cisaillement donne la formule suivante :

$$\tilde{f}_n^{Timo} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{AG\kappa}{\rho I}} + \frac{\pi(E + G\kappa)}{4L^2} \sqrt{\frac{I}{\rho AG\kappa}} n^2 + \mathcal{O}(n^4), \quad \text{pour } n \text{ petit,} \quad (\text{I.1.78})$$

tandis que son comportement à l'infini suit la formule

$$\tilde{f}_n^{Timo} \sim n \tilde{f}_\infty^{Timo}, \text{ où } \tilde{f}_\infty^{Timo} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \text{pour } n \rightarrow +\infty \quad (\text{I.1.79})$$

On peut observer ces comportements sur la figure I.9 :

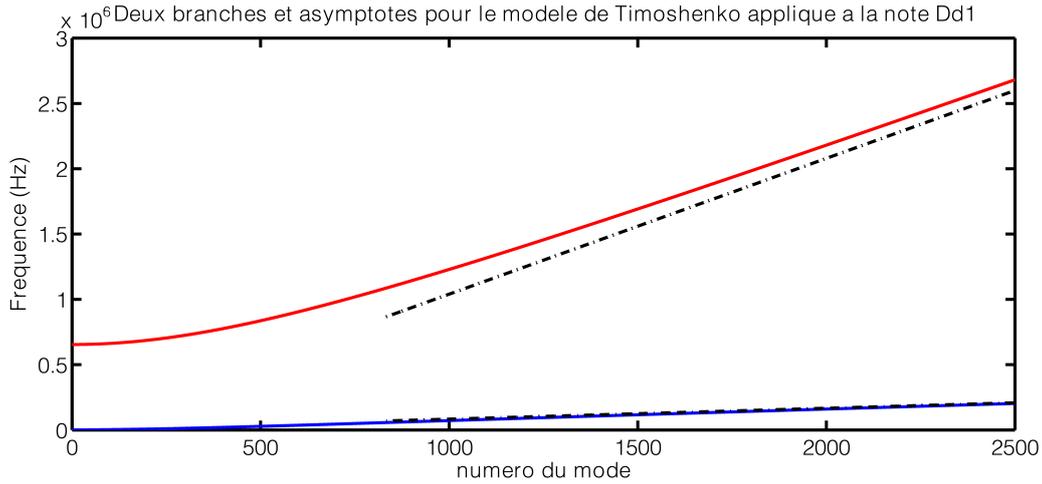


FIGURE I.9 – Deux branches de fréquences propres pour le système de Timoshenko précontraint simplement supporté, pour la note D#1 : bleue pour l’onde de flexion, rouge pour l’onde de cisaillement. Les asymptotes de chaque courbe sont figurées par les pointillés.

La raideur de la corde se manifeste à la fois dans le domaine spectral et temporel. L’effet le plus connu est l’inharmonicité des partiels, conduisant les accordeurs à effectuer un accord en S par rapport au tempérament égal. Cette inharmonicité n’est pas sans effet sur le timbre de l’instrument, et même sur la perception de hauteur de la note. Dans le domaine temporel, la raideur provoque une dispersion des ondes qui se manifeste par un glissement de fréquences et un précurseur dit « de raideur » visible en particulier au chevalet.

Nous avons introduit deux modèles de cordes raides en adaptant deux modèles de poutres à la situation précontrainte de la corde. Le modèle d’Euler Bernoulli qui prend en compte l’effet du moment de flexion est une équation linéaire scalaire, faisant intervenir des dérivées d’ordre 4 en espace. Le calcul des fréquences propres montre le comportement suivant pour les premiers partiels :

$$f_n^{EB} = n f_0 + \epsilon^{EB} n^3 + \mathcal{O}(n^5), \text{ où } f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}, \quad \epsilon^{EB} = \frac{\pi^2}{4L^3} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} \frac{EI}{T_0}.$$

Le modèle de Timoshenko qui prend en compte l’effet du moment de flexion, la déformation de cisaillement et l’inertie de rotation, est un système d’équations linéaires couplées, ne faisant intervenir des dérivées en espace que jusqu’à l’ordre 2. Le calcul des fréquences propres est beaucoup moins immédiat, et conduit à deux branches de fréquences propres associées aux deux inconnues du système. On peut cependant montrer le comportement suivant pour les premiers partiels de la vibration transversale :

$$f_n^{Timo} = n f_0 + \epsilon^{Timo} n^3 + \mathcal{O}(n^5), \text{ où } f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}, \quad \epsilon^{Timo} = \epsilon^{EB} \left[1 - \frac{T_0}{EA} \right].$$

Le ratio T_0/EA étant petit devant 1, les deux modèles donnent des valeurs très proches pour les premiers partiels. Le comportement hautes fréquences des deux modèles est cependant très différent : le modèle d’Euler-Bernoulli prévoit que la vitesse de propagation augmente indéfiniment, alors que le modèle de Timoshenko admet une vitesse de propagation finie. Nous préférons donc le second qui est plus proche de la réalité physique et qui restituera plus précisément les phénomènes hautes fréquences, qui prennent toute leur importance lorsque l’on s’intéresse à une modélisation dans le domaine temporel.

I.1.3 Vibration longitudinale et non-linéarité des cordes

On s'intéresse dans ce paragraphe à la vibration longitudinale de la corde de piano, qui est l'onde de compression se propageant dans la direction d'élongation de la corde, comme l'illustre la figure I.10.

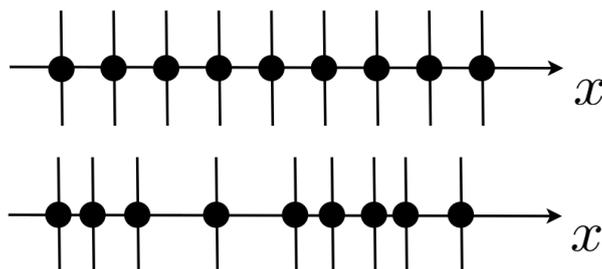


FIGURE I.10 – Compression dans la direction d'élongation de la corde.

I.1.3.a Vibration longitudinale, partiels longitudinaux et précurseur non linéaire

La présence, en plus de la vibration transversale dont nous avons parlé jusqu'ici, d'une vibration longitudinale dans la corde du piano ne fait plus l'ombre d'un doute. On trouve une première allusion à ce phénomène lors d'une conférence de l'ASA en 1944 : Knoblaugh de la Baldwin Company fait une présentation [Knoblaugh, 1944] dans laquelle il attribue le son de cloche (« clang tone ») à la présence d'une onde longitudinale dans les cordes graves. Une étude spectrale montre que les [partiels](#) qui apparaissent sont des [harmoniques](#) de la fréquence fondamentale des ondes longitudinales.

« *The clang tone of the pianoforte*

This phenomenon occurs in the bass section of all pianofortes and is termed a “clang” or “wolf” tone by piano makers. It comprises a distinctly audible, high pitched sound, emitted with the bass tone when the string is struck in the usual manner. Its pitch, varying from 500 to 3000 c.p.s. throughout a piano, is constant for any one string but varies with string dimensions being higher for the shorter, lighter bass wires. The fundamental tones of the corresponding bass strings range from 30 to 100 c.p.s. With the aid of a tone analyzer and other apparatus, the effect has been shown to be due to a longitudinal vibration of the bass string. The velocity along the string has been found to be $(AE/M)^{1/2}$ where A is the cross-sectional area of the core wire, E is the modulus of elasticity of the core wire material, and M is the total mass (core+wrapping) per unit length of the string. Dividing the velocity by twice the length of the string yields the frequency of the clang, confirmed by observation and experiment. The clang has its own system of partials, substantially harmonic. The component of hammer motion tangential to the string is probably an exciting cause and the complex motion of the bass bridge probably permits transfer of energy to the soundboard. » [Knoblaugh, 1944]

Il donne une formule pour la fréquence fondamentale de l'onde longitudinale, nous retrouverons bien la même. Il donne aussi une origine probable : une composante horizontale non nulle de l'excitation du marteau ; et souligne que le chevalet des graves transfère cette vibration au reste de la structure.

Dans [Conklin, 1996c], l'auteur raconte une anecdote : lors d'un [accord](#), il se rend compte qu'une note sonnait mieux lorsque la corde était accordée à une mauvaise fréquence. Il mesure ensuite la première fréquence n'appartenant pas au spectre quasi-harmonique de la corde, $LM1$, l'attribue à la présence d'une onde longitudinale dans la corde, et remarque alors que la note sonne mieux pour certaines valeurs de $LM1$ par rapport à la première fréquence transversale $TM1$. Il affirme que dans le premier tiers de la [tessiture](#), on entend clairement dans le son l'ensemble des harmoniques de cette fréquence $LM1$, et que ne pas l'ajuster peut avoir pour conséquence une confusion dans la [hauteur](#) de la note, un changement de

couleur de note à note, une qualité du timbre moyenne ou même étrange, et enfin une sur-représentation de certains partiels transversaux qui coïncideraient avec *LM1*. Ces effets sont exacerbés sur des petits pianos pour lesquels la table d'harmonie amplifie mal les graves, c'est alors parfois *LM1* que l'on perçoit majoritairement et le piano peut sonner faux alors qu'il est bien accordé (transversalement)⁵. Cette technique fait l'objet d'un brevet [Conklin, 1970] qui propose d'accorder les partiels longitudinaux lors de l'élaboration du plan de cordes.

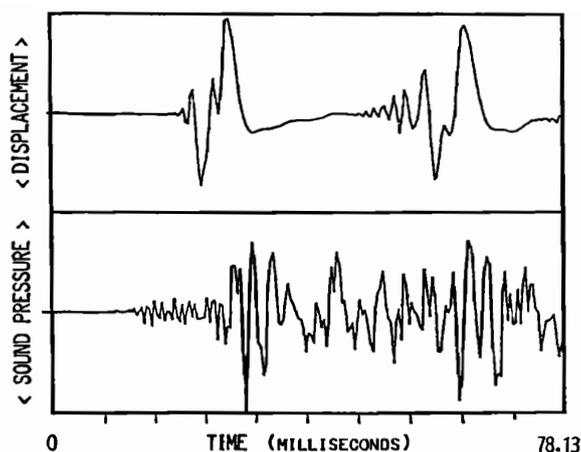


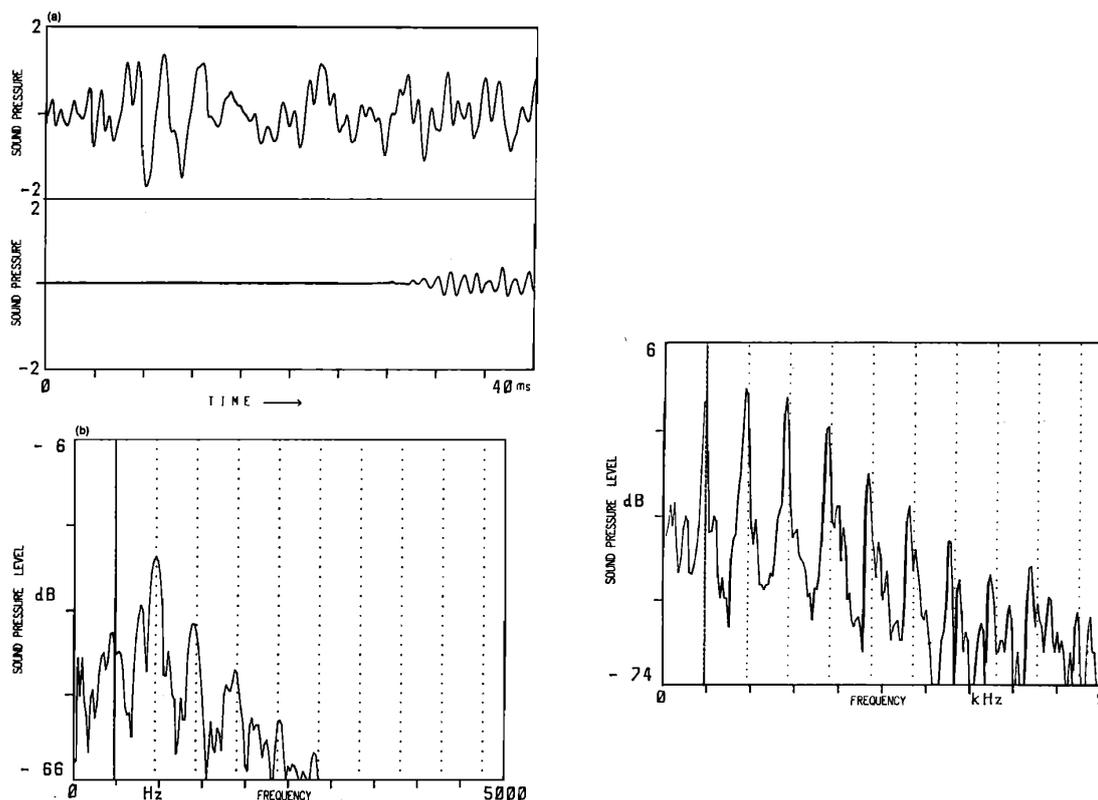
FIGURE I.11 – Mise en évidence de la présence d'un précurseur dans le son : graphes temporels du déplacement de la corde A0 (cadre supérieur) et de la pression acoustique (cadre inférieur), synchronisés. Extrait de [Podlesak et Lee, 1988]

L'article de [Podlesak et Lee, 1988], à l'origine écrit à propos de la dispersion dans les cordes de piano, montre de façon très méthodique la présence d'une onde longitudinale dans la corde, et le fait qu'elle se transmet au reste de la structure. Le procédé expérimental permet de comparer le déplacement d'une corde près du chevalet avec la pression acoustique dans la pièce, les signaux étant synchronisés. Ils observent (contre leurs attentes) un précurseur dans le son de piano, c'est à dire un signal sonore qui commence avant même l'arrivée de l'onde transversale au capteur de déplacement, et donc avant son arrivée au chevalet (voir figure I.11). Ils analysent le précurseur en fréquences et trouvent un spectre presque harmonique. Ses partiels coïncident avec leurs mesures de pression acoustique lorsqu'ils n'excitent que la vibration longitudinale de la corde, voir figure I.12. Cette expérience appuie d'une part l'hypothèse selon laquelle le précurseur observé est dû à la présence d'ondes longitudinales dans la corde qui se propagent plus rapidement que les ondes transversales, et montre d'autre part que ces ondes se transmettent indéniablement à la structure.

Enfin, [Giordano et Korty, 1996] montrent dans leur article des mesures plus poussées que les articles précédents, sur la corde, au chevalet et sur la table d'harmonie permettant de confirmer que le précurseur au chevalet est dû à la présence d'ondes longitudinales dans la corde. Ils mettent de plus en évidence le lien non linéaire entre l'amplitude du précurseur et l'amplitude de l'impulsion principale de l'onde, voir figure I.13.

Pour conclure cette introduction, voici une citation qui met en relief le besoin de prendre en compte ces ondes longitudinales afin d'espérer obtenir une synthèse convaincante.

5. Des exemples sonores très étonnants et édifiants ont été donnés par Conklin sur la page http://www.speech.kth.se/music/5_lectures/conklin/longitudinal.html



(a) Profil temporel du signal de pression (commence dans le cadre inférieur et se poursuit dans le cadre supérieur) et spectre du précurseur

(b) Spectre du signal de pression après une excitation de la corde dans la direction longitudinale

FIGURE I.12 – Mise en évidence de la contribution de l’onde longitudinale de la corde de piano dans le son de la note A0 de fréquence fondamentale 27,5 Hz. Les curseurs harmoniques sont les multiples entiers de 475,0 Hz. Extraits de [Podlesak et Lee, 1988]

« As well known, the piano tone contains a characteristic attack component, which is mixed with the sound of the string vibrations. When separating the two by using a detector for the string motion, and a microphone for the total radiated sound, respectively, the “attack-thump” can be clearly heard. This acoustic signature of the piano has caused problems when synthesising piano tones by physical modeling (Chaigne & Askenfelt, 1992), which motivated a closer look at the origin of these attack components. » [Askenfelt, 1993a]

▷ la référence donnée a ensuite été publiée comme [Chaigne et Askenfelt, 1994a].

I.1.3.b Modèle Géométriquement Exact

Les expériences dont nous venons de parler témoignent de deux phénomènes : la présence d’une onde longitudinale dans la corde de piano, mais aussi sa transmission au reste de la structure, notamment la table d’harmonie. Dans ce chapitre consacré uniquement aux cordes, nous allons proposer un modèle qui prend en compte ces ondes longitudinales, et nous verrons dans le chapitre concernant le couplage ayant lieu au chevalet I.4 comment nous modéliserons leur transmission au reste du piano.

La démarche pour prendre en compte les vibrations longitudinales dans la modélisation de la corde est de décrire la géométrie de la corde sans approximation, sans linéariser le tenseur des déformations. La loi de Hooke du matériau, qui permet de relier les contraintes aux déformations, reste affine. On aboutit avec ces deux principes, à considérer une tension de corde qui varie au cours du temps et de la corde, en raison

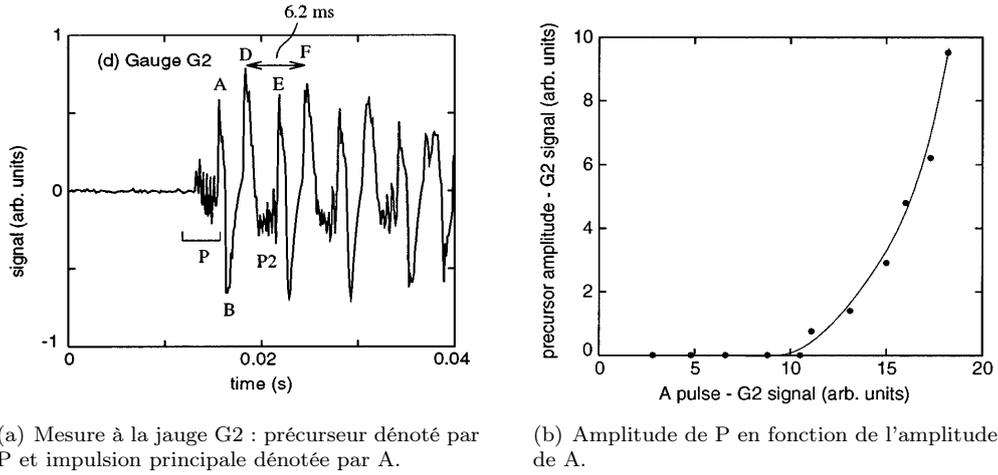


FIGURE I.13 – Mise en évidence de la relation non linéaire entre amplitude d'excitation et amplitude du précurseur au chevalet. Extraits de [Giordano et Korty, 1996]

des variations locales de la vibration longitudinale. Le modèle obtenu selon cette démarche s'appelle le « modèle géométriquement exact » (MGE), car les non linéarités proviennent de la description fidèle de la géométrie et non pas d'une relation non linéaire entre contraintes et déformations. On trouve sa dérivation physique dans [Morse et Ingard, 1968], nous l'avons présentée sous nos propres termes en annexe C. Cette approche a été conduite à de nombreuses reprises dans différents contextes, et suivie ou non d'autres approximations par [Carrier, 1945], [Oplinger, 1960], [Murthy et Ramakrishna, 1965], [Narasimha, 1968], [Morse et Ingard, 1968], [Anand, 1969], [Watzky, 1992], pour ne citer qu'eux. Les approximations supplémentaires couramment pratiquées sont :

- de pratiquer un développement de Taylor sur la racine carrée provenant du tenseur des déformations,
- de négliger la vibration longitudinale (ce qui n'est pas notre objectif),
- de négliger la vitesse des ondes longitudinales face à celle des ondes transversales, ce qui permet d'écrire une équation scalaire non linéaire et non locale sur la vibration transversale.

Nous proposons de ne pas procéder à ces approximations, au moins dans un premier temps, et de considérer le modèle géométriquement exact comme il apparaît dans [Morse et Ingard, 1968]. De plus, nous considérons pour l'instant que le mouvement de la corde se fait dans un plan, ce qui sera remis en question au paragraphe suivant, qui considérera les deux polarisations transversales possibles. Soient u_c le déplacement transversal vertical d'un point de la corde (comme précédemment), et v_c le déplacement longitudinal de ce même point, comme l'illustre la figure I.14.

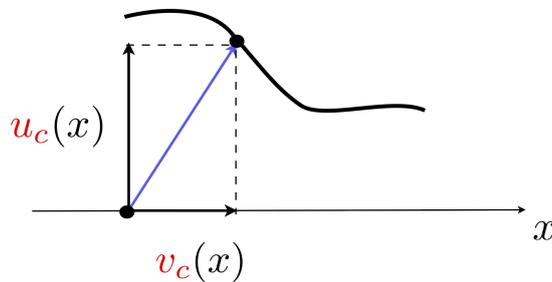


FIGURE I.14 – Schéma des inconnues du modèle géométriquement exact : inconnue transversale verticale $u_c(x, t)$ et inconnue longitudinale $v_c(x, t)$.

On aboutit au système de deux inconnues (vibration transversale et vibration longitudinale) suivant, soumis à un second membre dans la direction transversale et à des conditions aux bords rigides :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho A \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial u_c}{\partial x} - (EA - T_0) \frac{\frac{\partial u_c}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u_c}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)^2}} \right] = S(x, t), \\ \rho A \frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial v_c}{\partial x} - (EA - T_0) \frac{\left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial u_c}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)^2}} \right] = 0, \\ u_c(x=0, t) = u_c(x=L, t) = v_c(x=0, t) = v_c(x=L, t) = 0, \\ u_c(x, t=0) = \partial_t u_c(x, t=0) = v_c(x, t=0) = \partial_t v_c(x, t=0) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{I.1.80})$$

Ce système se réécrit sous forme plus abstraite

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{q}_c}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla H_{ex} \left(\frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial x} \right) \right] = F, \\ \mathbf{q}_c(x=0, t) = \mathbf{q}_c(x=L, t) = 0, \\ \mathbf{q}_c(x, t=0) = \partial_t \mathbf{q}_c(x, t=0) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{I.1.81})$$

avec $\mathbf{q}_c = (u_c, v_c)$, $F = (S, 0)$ et

$$H_{ex} \left(\frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial x} \right) = \frac{EA}{2} \left(\frac{\partial u_c}{\partial x} \right)^2 + \frac{EA}{2} \left(\frac{\partial v_c}{\partial x} \right)^2 - (EA - T_0) \left[\sqrt{\left(\frac{\partial u_c}{\partial x} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x} \right)^2} - \left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x} \right) \right] \quad (\text{I.1.82})$$

Nous verrons plus tard que la fonctionnelle H_{ex} joue le rôle d'une énergie potentielle de déformation, c'est pourquoi on a ajouté le terme $\left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)$, qui laisse l'équation invariante, mais permet d'assurer la positivité de l'énergie potentielle.

I.1.3.c Second membre vertical de petite amplitude : modèles approchés

Certains articles de la littérature concernant la modélisation du couplage transversal / longitudinal dans les cordes de piano utilisent un modèle approché à la place du MGE de Morse et Ingard. En effet, [Bilbao, 2005] ou encore [Bank et Sujbert, 2005] utilisent tous deux un modèle basé sur le développement de Taylor de la racine carrée qui apparait dans la dérivation physique des équations. Le développement que l'on obtient arithmétiquement s'écrit :

$$H_{ex}(u_x, v_x) = \frac{T_0}{2} u_x^2 + \frac{EA}{2} v_x^2 + \frac{EA - T_0}{2} u_x^2 v_x + \frac{EA - T_0}{8} u_x^4 - \frac{EA - T_0}{2} u_x^2 v_x^2 + \mathcal{O}(|(u_x, v_x)|^5). \quad (\text{I.1.83})$$

Cependant, on s'aperçoit que les modèles approchés proposés écartent le dernier terme de cette somme, pourtant *a priori* du même ordre que les autres. La raison invoquée est que cette troncature conduit à des bonnes propriétés sur le modèle, et l'argumentation est basée sur des considérations d'amplitude relative :

« One might well ask in what sense the use of system S_4^* is justified. One answer follows from the energetic properties to be discussed in the next section; another relates to the relative orders of magnitude of q_ξ and q_η in system S . As noted by Anand and Morse, q_ξ is of the same order of magnitude as q_η^2 , and it is perhaps more natural, then, to use a homogeneous approximation, truncated to powers of, say, q_η . Given that the term $q_\xi^2 q_\eta^2$ is clearly of sixth order in q_η , it is then justified to neglect it with respect to the term in q_η^4 . » [Bilbao, 2005]

- ▷ S désigne le système original alors que S_4^* désigne le système obtenu après troncature,
- ▷ q_η et q_ξ représentent les inconnues $\partial_x u$ et $\partial_x v$,
- ▷ les références données sont [Anand, 1969] et [Morse et Ingard, 1968].

Nous proposons ici de donner une justification de ces affirmations et du système approché obtenu, dans le cas où le système est excité seulement dans la direction transversale, par un second membre de faible

amplitude.

THÉORÈME I.1.5 (Second membre vertical de faible amplitude)

Le modèle proposé dans [Bilbao, 2005] est justifié par une approche asymptotique lorsque l'on considère que le second membre (ou la donnée initiale) est vertical et petit (de taille $\varepsilon > 0$). On obtient :

$$(\mathcal{S}_\varepsilon) \begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[T_0 \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} + (EA - T_0) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x} + \frac{EA - T_0}{2} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right)^3 \right] = \varepsilon s(x, t), & \text{(I.1.84a)} \\ \rho A \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x} + \frac{EA - T_0}{2} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right)^2 \right] = 0, & \text{(I.1.84b)} \\ u^\varepsilon(x=0, t) = u^\varepsilon(x=L, t) = u^\varepsilon(x, t=0) = \partial_t u^\varepsilon(x, t=0) = 0, & \text{(I.1.84c)} \\ v^\varepsilon(x=0, t) = v^\varepsilon(x=L, t) = v^\varepsilon(x, t=0) = \partial_t v^\varepsilon(x, t=0) = 0. & \text{(I.1.84d)} \end{cases}$$

Si l'on pose

$$H^\varepsilon(u_x, v_x) = \frac{T_0}{2} u_x^2 + \frac{EA}{2} v_x^2 + \frac{EA - T_0}{2} u_x^2 v_x + \frac{EA - T_0}{8} u_x^4, \quad \text{(I.1.85)}$$

le système précédent prend la forme abstraite suivante

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{q}^\varepsilon}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla H^\varepsilon \left(\frac{\partial \mathbf{q}^\varepsilon}{\partial x} \right) \right](x, t) = \varepsilon \begin{pmatrix} s(x, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{q}^\varepsilon(x=0, t) = 0, \quad \mathbf{q}^\varepsilon(x=L, t) = 0, \\ \mathbf{q}^\varepsilon(x, t=0) = 0, \quad \partial_t \mathbf{q}^\varepsilon(x, t=0) = 0. \end{cases} \quad \text{(I.1.86)}$$

DÉMONSTRATION. Soit ε un réel positif petit qui caractérise la taille du second membre : le problème posé est de trouver $\mathbf{q}^\varepsilon = (u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ tel que

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{q}^\varepsilon}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla H_{ex} \left(\frac{\partial \mathbf{q}^\varepsilon}{\partial x} \right) \right](x, t) = \varepsilon \begin{pmatrix} s(x, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{q}^\varepsilon(x=0, t) = 0, \quad \mathbf{q}^\varepsilon(x=L, t) = 0, \\ \mathbf{q}^\varepsilon(x, t=0) = 0, \quad \partial_t \mathbf{q}^\varepsilon(x, t=0) = 0. \end{cases} \quad \text{(I.1.87)}$$

On se propose de chercher la solution \mathbf{q}^ε comme un développement en puissances de ε :

$$\begin{cases} u^\varepsilon = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\ v^\varepsilon = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \end{cases} \quad \text{(I.1.88)}$$

On se base sur un développement de ∇H_{ex} :

$$\nabla H_{ex}(u_x, v_x) = \begin{pmatrix} T_0 u_x + (EA - T_0) u_x v_x + \frac{EA - T_0}{2} u_x^3 - (EA - T_0) u_x v_x^2 \\ EA v_x + \frac{EA - T_0}{2} u_x^2 - (EA - T_0) u_x^2 v_x \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(u_x, v_x)|^4)$$

et sur le calcul facile des expressions suivantes

$$\begin{cases} (u^\varepsilon)^2 = \varepsilon^2 u_1^2 + 2\varepsilon^3 u_1 u_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\ (v^\varepsilon)^2 = \varepsilon^2 v_1^2 + 2\varepsilon^3 v_1 v_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\ (u^\varepsilon)^2 v^\varepsilon = \varepsilon^3 u_1^2 v_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\ u^\varepsilon v^\varepsilon = \varepsilon^2 u_1 v_1 + \varepsilon^3 (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\ u^\varepsilon (v^\varepsilon)^2 = \varepsilon^3 u_1 v_1^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\ (u^\varepsilon)^3 = \varepsilon^3 u_1^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \end{cases} \quad \text{(I.1.89)}$$

afin d'écrire le développement de ∇H_{ex} en puissances de ε , qui permettra d'établir les équations emboîtées régissant les u_i

et v_i :

$$\begin{aligned} \nabla H_{ex}(u_x, v_x) = \varepsilon \begin{pmatrix} T_0 u_1 \\ EA v_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} T_0 u_2 + (EA - T_0) u_1 v_1 \\ EA v_2 + \frac{EA - T_0}{2} (u_1)^2 \end{pmatrix} \\ + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} T_0 u_3 + (EA - T_0) \left(u_1 v_2 + v_1 u_2 + \frac{(u_1)^3}{2} - u_1 (v_1)^2 \right) \\ EA v_3 + (EA - T_0) \left(u_1 u_2 - v_1 (u_1)^2 \right) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (\text{I.1.90})$$

• Le premier système, qui ne considère que les termes en facteur de ε , s'écrit :

$$(\mathcal{S}_1) \quad \begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = s(x, t), \\ \rho A \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0, \\ u_1(x=0, t) = u_1(x=L, t) = u_1(x, t=0) = \partial_t u_1(x, t=0) = 0, \\ v_1(x=0, t) = v_1(x=L, t) = v_1(x, t=0) = \partial_t v_1(x, t=0) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.1.91})$$

Ce système découple complètement les inconnues u_1 et v_1 . Le premier terme du développement de u^ε est solution d'une équation d'onde linéaire scalaire à vitesse $\sqrt{T_0/\rho A}$ mue par le second membre $s(x, t)$. Le premier terme du développement de v^ε quant à lui est solution d'une équation d'onde linéaire scalaire à vitesse $\sqrt{E/\rho}$ sans données initiales et sans second membre. Il est donc trivial de conclure que

$$\boxed{v_1 \equiv 0.} \quad (\text{I.1.92})$$

En conséquence, v^ε n'a pas, dans son développement, de terme en ε , ce qui justifie l'affirmation de [Bilbao, 2005] selon laquelle v^ε est de l'ordre de grandeur de $(u^\varepsilon)^2$. Remarquons cependant que cette situation n'est vraie que si la sollicitation du système est faite transversalement.

• Le second système, qui ne considère que les termes en facteur de ε^2 , s'écrit, en ayant pris en compte que $v_1 = 0$:

$$(\mathcal{S}_2) \quad \begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \\ \rho A \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = \frac{EA - T_0}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right], \\ u_3(x=0, t) = u_3(x=L, t) = u_3(x, t=0) = \partial_t u_3(x, t=0) = 0, \\ v_3(x=0, t) = v_3(x=L, t) = v_3(x, t=0) = \partial_t v_3(x, t=0) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.1.93})$$

Le même raisonnement que précédemment conduit à

$$\boxed{u_2 \equiv 0.} \quad (\text{I.1.94})$$

De son côté, v_2 est la solution d'une équation d'onde linéaire scalaire de vitesse $\sqrt{E/\rho}$, forcée par un second membre qui dépend de façon quadratique de u_1 , que l'on connaît grâce à (\mathcal{S}_1) .

• Enfin, le troisième système, qui ne considère que les termes en facteur de ε^3 , s'écrit, en ayant pris en compte que $v_1 = u_2 = 0$:

$$(\mathcal{S}_3) \quad \begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = (EA - T_0) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^3 \right], \\ \rho A \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = 0, \\ u_2(x=0, t) = u_2(x=L, t) = u_2(x, t=0) = \partial_t u_2(x, t=0) = 0, \\ v_2(x=0, t) = v_2(x=L, t) = v_2(x, t=0) = \partial_t v_2(x, t=0) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.1.95})$$

Encore une fois, on conclut que

$$\boxed{v_3 \equiv 0.} \quad (\text{I.1.96})$$

Quant à u_3 , il est solution d'une équation d'onde linéaire scalaire de vitesse $\sqrt{T_0/\rho A}$, forcée par un second membre qui dépend de façon quadratique et cubique de u_1 et v_2 , que l'on connaît grâce à (\mathcal{S}_1) et (\mathcal{S}_2) .

• On peut alors recombinaison les systèmes en utilisant notre connaissance *a priori* sur les développements de u^ε et v^ε . En effet, nous savons désormais que

$$\begin{cases} u^\varepsilon = \varepsilon u_1 + \varepsilon^3 u_3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\ v^\varepsilon = \varepsilon^2 v_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \end{cases} \quad (\text{I.1.97})$$

Or le système recomposé $\varepsilon(\mathcal{S}_1) + \varepsilon^2(\mathcal{S}_2) + \varepsilon^3(\mathcal{S}_3)$ s'écrit :

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2(\varepsilon u_1 + \varepsilon^3 u_3)}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2(\varepsilon u_1 + \varepsilon^3 u_3)}{\partial x^2} \\ \quad - (EA - T_0) \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon^3 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\varepsilon^3}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^3 \right] = \varepsilon s(x, t), \\ \rho A \frac{\partial^2(\varepsilon^2 v_2)}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2(\varepsilon^2 v_2)}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{EA - T_0}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right] = 0, \\ u^\varepsilon(x=0, t) = u^\varepsilon(x=L, t) = u^\varepsilon(x, t=0) = \partial_t u^\varepsilon(x, t=0) = 0, \\ v^\varepsilon(x=0, t) = v^\varepsilon(x=L, t) = v^\varepsilon(x, t=0) = \partial_t v^\varepsilon(x, t=0) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.1.98})$$

Ce qui devient, lorsque l'on rassemble u^ε et v^ε :

$$(\mathcal{S}_\varepsilon) \begin{cases} \rho A \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[T_0 \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} + (EA - T_0) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x} + \frac{EA - T_0}{2} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right)^3 \right] = \varepsilon s(x, t), \\ \rho A \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x} + \frac{EA - T_0}{2} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right)^2 \right] = 0, \\ u^\varepsilon(x=0, t) = u^\varepsilon(x=L, t) = u^\varepsilon(x, t=0) = \partial_t u^\varepsilon(x, t=0) = 0, \\ v^\varepsilon(x=0, t) = v^\varepsilon(x=L, t) = v^\varepsilon(x, t=0) = \partial_t v^\varepsilon(x, t=0) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.1.99})$$

Si l'on pose

$$H^\varepsilon(u_x, v_x) = \frac{T_0}{2} u_x^2 + \frac{EA}{2} v_x^2 + \frac{EA - T_0}{2} u_x^2 v_x + \frac{EA - T_0}{8} u_x^4, \quad (\text{I.1.100})$$

le système précédent prend la forme abstraite suivante

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{q}^\varepsilon}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla H^\varepsilon \left(\frac{\partial \mathbf{q}^\varepsilon}{\partial x} \right) \right](x, t) = \varepsilon \begin{pmatrix} s(x, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{q}^\varepsilon(x=0, t) = 0, \quad \mathbf{q}^\varepsilon(x=L, t) = 0, \\ \mathbf{q}^\varepsilon(x, t=0) = 0, \quad \partial_t \mathbf{q}^\varepsilon(x, t=0) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.1.101})$$

qui est identique au développement de Taylor à l'ordre 4 de (I.1.87) si on supprime le terme en $u_x^2 v_x^2$ de (I.1.83). On retrouve grâce à cette analyse le système S_4^* de [Bilbao, 2005], dans le cas où le système est excité seulement dans la direction transversale, par un second membre de faible amplitude. □

REMARQUE I.1.5 (Système de Bank & Sujbert)

Le système utilisé par [Bank et Sujbert, 2005] n'est pas exactement le même, ils négligent dans leur papier T_0 devant EA , conduisant au système

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla H^{BS} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} \right) \right](x, t) = \begin{pmatrix} S(x, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{q}(x=0, t) = 0, \quad \mathbf{q}(x=L, t) = 0, \\ \mathbf{q}(x, t=0) = 0, \quad \partial_t \mathbf{q}(x, t=0) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.1.102})$$

avec

$$H^{BS}(u_x, v_x) = \frac{T_0}{2} u_x^2 + \frac{EA}{2} v_x^2 + \frac{EA}{2} u_x^2 v_x + \frac{EA}{8} u_x^4. \quad (\text{I.1.103})$$

REMARQUE I.1.6 (Systèmes d'ordres inférieurs)

Le système obtenu si l'on ne conserve que les termes en facteur de ε s'écrit :

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2} = \varepsilon s(x, t), \\ \rho A \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x^2} = 0, \\ u^\varepsilon(x=0, t) = u^\varepsilon(x=L, t) = u^\varepsilon(x, t=0) = \partial_t u^\varepsilon(x, t=0) = 0, \\ v^\varepsilon(x=0, t) = v^\varepsilon(x=L, t) = v^\varepsilon(x, t=0) = \partial_t v^\varepsilon(x, t=0) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.1.104})$$

Ce modèle revient à un découplage complet des inconnues u^ε et v^ε , et conduit à la nullité de v^ε en l'absence de source longitudinale. Il n'est donc pas intéressant si l'on s'intéresse précisément à ce couplage. Par contre, il permet de retrouver la fréquence fondamentale des ondes longitudinales : ces dernières sont soumises à une équation d'ondes à célérité

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{EA}{\mu}} \quad (\text{I.1.105})$$

où μ est la masse linéique de la corde. Pour une corde de longueur L , la fréquence fondamentale est

donc bien égale à la formule proposée par [Knoblauch, 1944] :

$$f_L = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{EA}{\mu}} \quad (\text{I.1.106})$$

D'autre part, si l'on ne conserve que les termes en facteur de ε^2 , on obtient :

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2} = \varepsilon s(x, t), \\ \rho A \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x^2} = \frac{EA - T_0}{2} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right)^2, \\ u^\varepsilon(x=0, t) = u^\varepsilon(x=L, t) = u^\varepsilon(x, t=0) = \partial_t u^\varepsilon(x, t=0) = 0, \\ v^\varepsilon(x=0, t) = v^\varepsilon(x=L, t) = v^\varepsilon(x, t=0) = \partial_t v^\varepsilon(x, t=0) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.1.107})$$

Ce système n'a plus la même structure que les autres, à savoir qu'il n'est plus possible de trouver une fonction H telle que le système s'écrive sous la forme (I.1.81). Ceci est dû à l'asymétrie du système obtenu : l'équation portant sur v^ε est forcée par u^ε mais la réciproque n'est pas vraie, si bien qu'aucune énergie ne peut être conservée par le système (l'inconnue u^ε donne de l'énergie sans en perdre). Or nous verrons plus tard que H joue en fait un rôle d'énergie potentielle.

Il est donc nécessaire lorsque l'on considère des modèles approchant (I.1.80) de prendre en compte les non linéarités quadratiques et cubiques présentes dans (I.1.84) afin de garder la structure de l'équation ainsi que le couplage entre les inconnues transversale et longitudinale.

I.1.3.d Modèle tirant partie de l'écart des vitesses

Le système non linéaire fait intervenir deux vibrations : l'onde de flexion modélisée par le déplacement transversal u_c et l'onde de compression modélisée par le déplacement longitudinal v_c . Au premier ordre, ces deux ondes sont régies par des équations aux vitesses bien différentes. En effet, ces vitesses sont respectivement égales à

$$c_T = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad \text{et} \quad c_L = \sqrt{\frac{EA}{\mu}} \quad (\text{I.1.108})$$

Or, le quotient T_0/EA est très petit (de l'ordre de 5.1×10^{-3} pour la corde D#1 du Steinway témoin), ce qui permet de dire que l'onde longitudinale est beaucoup plus rapide que l'onde transversale (de l'ordre de 10 à 20 fois plus rapide selon la corde considérée). Il est tentant d'écrire un modèle tirant partie de cette observation. Dans le contexte d'une corde planaire, c'est ce que font les articles [Oplinger, 1960] et [Legge et Fletcher, 1984], à base d'arguments physiques⁶, et [Narasimha, 1968] en utilisant une analyse perturbative.

Une explication simple est la suivante. Si on ne s'intéresse qu'à l'effet de l'onde longitudinale (rapide) sur l'onde transversale (lente), on peut faire une approximation quasi statique de l'onde longitudinale, en négligeant son effet inertiel, c'est à dire le terme $\partial^2 v_c / \partial t^2$ de l'équation (I.1.84b). On peut alors intégrer l'équation entre 0 et x pour exprimer $\partial v_c / \partial x$ en fonction de $(\partial u_c / \partial x)^2$:

$$c_L^2 \frac{\partial v_c}{\partial x} + \frac{c_L^2 - c_T^2}{2} \left(\frac{\partial u_c}{\partial x} \right)^2 = cst \in \mathbb{R} \quad (\text{I.1.109})$$

On peut intégrer à nouveau cette équation entre 0 et L et utiliser les conditions de Dirichlet sur l'inconnue v_c pour conclure que la constante s'exprime en fonction d'une certaine moyenne de l'inconnue u_c :

$$cst = \frac{c_L^2 - c_T^2}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial u_c}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{I.1.110})$$

6. par opposition à une approche du type "développement asymptotique" qui apporterait un regard nouveau sur le problème...

On introduit alors $\delta = c_T/c_L$ qui est un nombre petit. Remplacer $\partial v_c/\partial x$ par sa nouvelle expression dans (I.1.84a) conduit à :

$$\frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} - c_T^2 \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} - c_L^2 (1 - \delta^2) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_c}{\partial x} \left(-\frac{1 - \delta^2}{2} \left(\frac{\partial u_c}{\partial x} \right)^2 + \frac{1 - \delta^2}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial u_c}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_c}{\partial x} \right)^3 \right] = 0 \quad (\text{I.1.111})$$

$$\frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} - c_T^2 \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} - c_L^2 (1 - \delta^2) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\delta^2}{2} \left(\frac{\partial u_c}{\partial x} \right)^3 + \frac{1 - \delta^2}{2L} \frac{\partial u_c}{\partial x} \int_0^L \left(\frac{\partial u_c}{\partial x} \right)^2 \right] = 0 \quad (\text{I.1.112})$$

L'équation à laquelle on aboutit en prenant la limite formelle quand $\delta \rightarrow 0$ revient à une équation d'onde standard, mais dont la vitesse dépend de la solution (dans la littérature, les auteurs interprètent ce comportement comme la présence d'une tension uniforme dans la corde mais variable au cours du temps) :

$$\frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} - c_T^2 \left[1 + \frac{1}{2L} \frac{c_L^2}{c_T^2} \int_0^L \left(\frac{\partial u_c}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{I.1.113})$$

Cette équation permet certaines analyses théoriques et certains calculs, mais se prête assez mal à une discrétisation par éléments finis en raison de son caractère non local, et de la perte de la forme conservative du système originel.

I.1.3.e Fréquences propres et corde non linéaire

La question de la dispersion et des fréquences propres est une question délicate dans un contexte d'équation non linéaire. En effet, le raisonnement classique en domaine borné qui consiste à étudier les vibrations des modes propres de l'opérateur spatial ne se généralise pas ici, une combinaison linéaire de solutions particulières n'étant pas *a priori* solution de l'équation non linéaire. Pourtant, on trouve dans la littérature des remarques liant le concept de corde non linéaire à celui de fréquence propre, avec cette particularité d'une corrélation de la fréquence avec l'amplitude.

« *It is known that the resonance frequency of a string depends on the amplitude of motion.* » [Harrison, 1948]

On peut faire le parallèle avec l'étude des EDO du type oscillateur de Duffing, pour lesquelles on peut montrer avec des méthodes multi-échelles que la solution peut être écrite comme un développement de solutions périodiques, dont la période est corrélée avec l'amplitude. Concernant la corde de piano, on trouve des résultats expérimentaux en oscillations forcées dans [Oplinger, 1960] avec un procédé mécanique (excitation par le bout de la corde, mesure de l'amplitude au milieu renormalisée par rapport à l'excitation) et [Murthy et Ramakrishna, 1965] avec un procédé électromagnétique. Ces deux papiers proposent également une analyse théorique basée sur des équations ayant évincé le couplage avec la vibration longitudinale. On retrouve d'autres résultats théoriques dans [Anand, 1969]. Le contexte théorique qui nous semble le plus adapté pour traiter cette question (connaître les fréquences propres pour la corde non linéaire) est le concept de modes normaux non linéaires, introduits par [Rosenberg, 1966] et formalisés mathématiquement par [Shaw et Pierre, 1993]. On se pose comme problème de rechercher non plus des sous espaces vectoriels invariants pour l'opérateur spatial (comme dans le cas linéaire) mais des variétés invariantes dans l'espace des phases, que l'on appelle modes normaux non linéaires. Concrètement, la théorie des formes normales permet de calculer les modes normaux non linéaires, et consiste à décomposer la solution sur la base hilbertienne des modes propres du problème linéarisé, ce qui transforme le système d'EDP en système infini d'EDO couplées, dont les inconnues sont les amplitudes sur chaque mode linéarisé. On cherche alors un changement de variables qui rend le problème découplé au premier ordre (c'est à dire que les seuls couplages sont cubiques), et on réitère la méthode pour renvoyer les couplages à l'ordre d'après, c'est à dire plus que cubiques. Cette méthode a été développée et utilisée dans le cadre de la vibration de poutres ou coques fines en régime de grandes déformations dans [Touze et Thomas, 2003], les détails étant donnés dans [Touze, 2004]. Elle permet entre autres de prédire si le comportement non linéaire aura tendance à augmenter ou diminuer les fréquences avec l'amplitude, et il serait très intéressant d'appliquer cette méthode à l'équation non linéaire de la corde de piano.

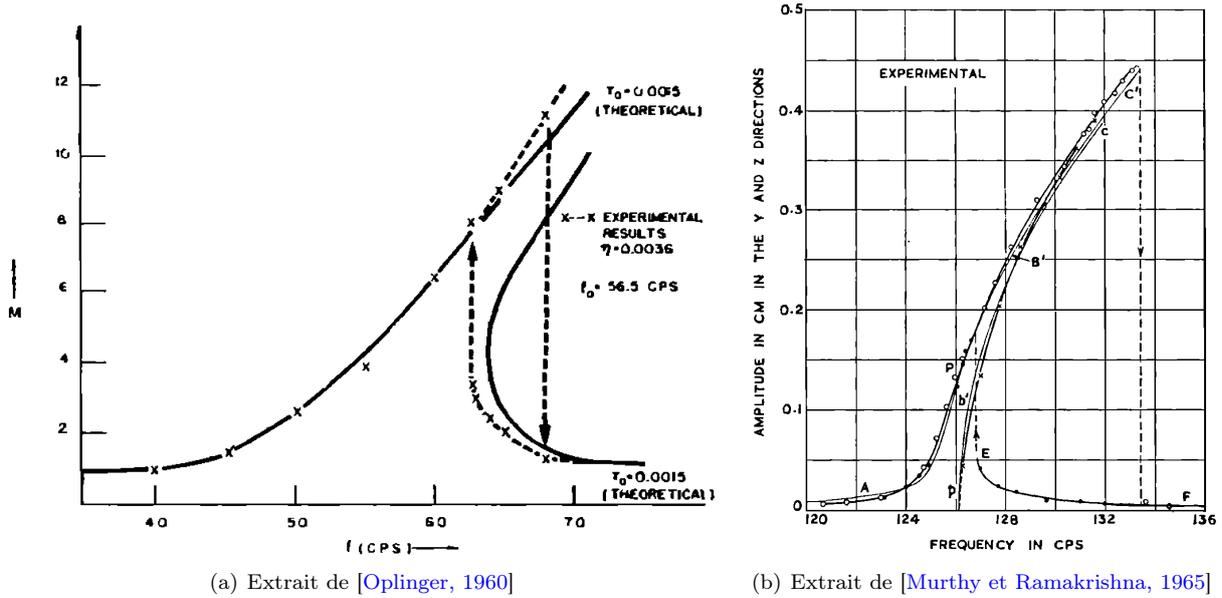


FIGURE I.15 – Amplitude de l’oscillation forcée en fonction de la fréquence : comparaison théorie - expérience. L’unité employée (CPS) est une unité de fréquence équivalente au Hz.

I.1.3.f Existence de solutions

La théorie des systèmes hyperboliques montre qu’en général, même si les conditions initiales sont très régulières, la régularité de la solution peut être perdue après un certain intervalle de temps, en raison de la création de chocs. Nous allons montrer que le modèle géométriquement exact (écrit en domaine non borné) entre dans le cadre du théorème de [Ta-Tsien, 1994] qui garantit l’existence de solutions au sens classique en particulier si le système est linéairement dégénéré. L’annexe D rappelle les définitions liées aux systèmes hyperboliques ainsi que le théorème en question.

THÉORÈME I.1.6 (Existence et unicité pour un système hamiltonien d’équations d’ondes)

Soit $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^4 et strictement convexe dans un voisinage de 0. Soient $(\lambda_i(\mathbf{q}), \mathbf{v}_i(\mathbf{q}))_{1 \leq i \leq N}$ les valeurs propres strictement positives et distinctes et les vecteurs propres de la Hessienne $D^2H(\mathbf{q})$. On suppose qu’il existe un voisinage de zéro $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ tel qu’ils vérifient :

$$\nabla \lambda_i(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}_i(\mathbf{q}) = 0, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{D} \tag{I.1.114}$$

Supposons de plus que $\mathbf{q}_0 \in C^2$, que $\mathbf{q}_1 \in C^1$ et qu’ils ont tous les deux un support compact inclus dans $[\alpha_0, \beta_0]$. Alors il existe $\theta_0 > 0$ tel que si

$$\theta := (\beta_0 - \alpha_0) \sup_{x \in \mathbb{R}} [|\mathbf{q}_0''(x)|, |\mathbf{q}_1'(x)|] < \theta_0, \tag{I.1.115}$$

alors le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{q}_c}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla H \left(\frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \mathbf{q}_c(x, 0) = \mathbf{q}_0(x), \quad \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial t}(x, 0) = \mathbf{q}_1(x). \end{array} \right. \tag{I.1.116}$$

admet une unique solution globale $\mathbf{q}_c(x, t) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

DÉMONSTRATION. On peut reformuler le problème (I.1.116) sous la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{2N}, \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(\mathbf{U}) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (\text{I.1.117})$$

où

$$\forall \mathbf{U} = (\mathbf{U}_t, \mathbf{U}_x) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \quad F(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} -\nabla H(\mathbf{U}_x) \\ -\mathbf{U}_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_0 = {}^t(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}'_0).$$

Si l'on développe ce système pour des solutions régulières, on obtient un système sous la forme du problème de Cauchy intervenant dans le théorème D.1 :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{2N}, \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

où

$$\forall \mathbf{U} = (\mathbf{U}_t, \mathbf{U}_x) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \quad A(\mathbf{U}) = DF(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & -D^2H(\mathbf{U}_x) \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

où $D^2H(\mathbf{U}_x)$ désigne la matrice Hessienne de H .

On peut tout d'abord montrer que l'hyperbolicité locale nécessaire dans D.1 est équivalente à la convexité locale de H . En effet, le problème aux valeurs propres

$$\text{Trouver } (\mathbf{Z}(\mathbf{U}) = (\mathbf{Z}_t(\mathbf{U}), \mathbf{Z}_x(\mathbf{U})), \mu(\mathbf{U})) \in \mathbb{C}^{2N} \times \mathbb{C}, \quad A(\mathbf{U}) \mathbf{Z}(\mathbf{U}) = \mu(\mathbf{U}) \mathbf{Z}(\mathbf{U}),$$

est équivalent à

$$\text{Trouver } ((\mathbf{Z}_x(\mathbf{U}_x)), \mu(\mathbf{U})) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}, \quad D^2H(\mathbf{U}_x) \mathbf{Z}_x(\mathbf{U}) = \mu^2(\mathbf{U}) \mathbf{Z}_x(\mathbf{U}) \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}_t(\mathbf{U}) = -\mu(\mathbf{U}) \mathbf{Z}_x(\mathbf{U}).$$

Ainsi, le problème formulé à l'ordre un admet $\mu(\mathbf{U})$ et $-\mu(\mathbf{U})$ comme valeurs propres si et seulement si $\mu^2(\mathbf{U})$ est valeur propre de $D^2H(\mathbf{U}_x)$. Comme $D^2H(\mathbf{U}_x)$ ne dépend que de \mathbf{U}_x , μ^2 et \mathbf{Z}_x ne dépendent également que de \mathbf{U}_x . On cherche à résoudre :

$$D^2H(\mathbf{U}_x) \mathbf{v}(\mathbf{U}_x) = \lambda(\mathbf{U}_x) \mathbf{v}(\mathbf{U}_x)$$

En conséquence, si $D^2H(\mathbf{U}_x)$ admet N couples valeurs / vecteurs propres $(\lambda_k, \mathbf{v}_k)_{1 \leq k \leq N}$ alors la formulation à l'ordre un du système aura $2N$ couples propre qui s'écrivent :

$$\left(\left(\mu_k^+ := \sqrt{\lambda_k}, \mathbf{r}_k^+ := \begin{pmatrix} -\sqrt{\lambda_k} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_k \end{pmatrix} \right), \left(\mu_k^- := -\sqrt{\lambda_k}, \mathbf{r}_k^- := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_k} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_k \end{pmatrix} \right) \right)_{1 \leq k \leq N} \quad (\text{I.1.118})$$

Alors, le système général sera strictement hyperbolique si les valeurs propres de la Hessienne sont d'une part distinctes, mais aussi strictement positives puisqu'alors, leurs racines sont réelles, et $\mu_k^+ \neq \mu_k^-$.

Montrons alors comment l'hypothèse selon laquelle $A(\mathbf{U})$ est linéairement dégénérée se traduit sur les couples $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$. Notons $\nabla_{\mathbf{U}}$ le gradient dans \mathbb{R}^{2N} et ∇ le gradient dans \mathbb{R}^N .

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{U}} \mu_k^\pm \cdot \mathbf{r}_k^\pm &= \pm \nabla_{\mathbf{U}}(\sqrt{\lambda_k}) \cdot \begin{pmatrix} \mp \sqrt{\lambda_k} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_k \end{pmatrix} \quad \text{or } \lambda_k \text{ ne dépend que de } \mathbf{U}_x, \\ &= \pm \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla(\sqrt{\lambda_k}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mp \sqrt{\lambda_k} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_k \end{pmatrix} \\ &= \pm \frac{\nabla \lambda_k}{2\sqrt{\lambda_k}} \cdot \mathbf{v}_k \end{aligned}$$

Ce qui montre que $A(\mathbf{U})$ est L.D. si et seulement si $D^2H(\mathbf{U}_x)$ est L.D., et de même, $A(\mathbf{U})$ est V.N.L. si et seulement si $D^2H(\mathbf{U}_x)$ est V.N.L.

Les hypothèses de régularité sont enfin simplement reformulées sur les inconnues et fonctionnelle adéquates, pour appliquer le théorème D.1 de l'annexe.

□

THÉORÈME I.1.7 (Modèle géométriquement exact)

Le modèle géométriquement exact (I.1.80) vérifie les hypothèses du théorème I.1.6.

DÉMONSTRATION. Rappelons l'expression de $H_{ex} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$H_{ex}\left(\frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial x}\right) = \frac{EA}{2} \left(\frac{\partial u_c}{\partial x}\right)^2 + \frac{EA}{2} \left(\frac{\partial v_c}{\partial x}\right)^2 - (EA - T_0) \left[\sqrt{\left(\frac{\partial u_c}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)^2} - \left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right) \right] = EA \tilde{H}_{ex}\left(\frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial x}\right)$$

où l'on a introduit une version adimensionalisée de H_{ex} , pour simplifier. Posons $\alpha = \frac{EA - T_0}{EA}$:

$$\tilde{H}_{ex}\left(\frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial x}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_c}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_c}{\partial x}\right)^2 - \alpha \left[\sqrt{\left(\frac{\partial u_c}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)^2} - \left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right) \right] \quad (\text{I.1.119})$$

\tilde{H}_{ex} n'est pas une fonction convexe puisque si l'on considère les trois points alignés suivants :

$$\tilde{H}_{ex}(-\alpha, -1) = \frac{1 - \alpha^2}{2}, \quad \tilde{H}_{ex}(0, -1) = \frac{1}{2}, \quad \tilde{H}_{ex}(\alpha, -1) = \frac{1 - \alpha^2}{2}$$

la seconde image est supérieure aux deux autres, ce qui contredit la convexité de \tilde{H}_{ex} . De plus, \tilde{H}_{ex} n'est pas régulière (même pas de classe \mathcal{C}^1 au voisinage du point $u_x = 0, v_x = -1$). Cependant, montrons qu'elle est localement \mathcal{C}^∞ et convexe dans un voisinage de $(0, 0)$. Intéressons nous pour cela aux valeurs propres et vecteurs propres de $D^2 \tilde{H}_{ex}(\mathbf{U}_x)$. On a :

$$\nabla \tilde{H}_{ex}(\mathbf{U}_x) = \nabla \tilde{H}_{ex}(u_x, v_x) = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} - \alpha \left[\frac{1}{\sqrt{u_x^2 + (1 + v_x)^2}} \begin{pmatrix} u_x \\ 1 + v_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Alors,

$$D^2 \tilde{H}_{ex}(u_x, v_x) = \text{Id}_{\mathbb{R}^2} - \frac{\alpha}{(\sqrt{u_x^2 + (1 + v_x)^2})^3} \begin{pmatrix} (1 + v_x)^2 & -u_x(1 + v_x) \\ -u_x(1 + v_x) & u_x^2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet les valeurs propres $\lambda_1(u_x, v_x)$ et $\lambda_2(u_x, v_x)$ suivantes :

$$\lambda_1(u_x, v_x) = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2(u_x, v_x) = 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{u_x^2 + (1 + v_x)^2}}$$

associées aux vecteurs propres suivants :

$$\mathbf{v}_1(u_x, v_x) = \begin{pmatrix} u_x \\ 1 + v_x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_2(u_x, v_x) = \begin{pmatrix} -(1 + v_x) \\ u_x \end{pmatrix}$$

La première valeur propre est donc constante sur tout le plan (u_x, v_x) , tandis que la seconde admet comme lignes de niveaux des cercles centrés autour du point $(0, -1)$. Le système est donc (strictement) hyperbolique tant que $\sqrt{u_x^2 + (1 + v_x)^2} \geq (>) \alpha$. Cette propriété est en particulier vraie autour du point $(0, 0)$, puisque $0 < \alpha < 1$.

Étudions à présent la nature des champs propres. La première valeur propre étant constante, son champ associé est trivialement L.D. Quant à la seconde, on a

$$\nabla \lambda_2(u_x, v_x) = \frac{\alpha}{(\sqrt{u_x^2 + (1 + v_x)^2})^3} \begin{pmatrix} u_x \\ 1 + v_x \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\nabla \lambda_2(u_x, v_x) \cdot \mathbf{v}_2(u_x, v_x) = \frac{\alpha}{(\sqrt{u_x^2 + (1 + v_x)^2})^3} \begin{pmatrix} u_x \\ 1 + v_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(1 + v_x) \\ u_x \end{pmatrix} = 0$$

Ce qui montre que le second champ est L.D. également. En ajoutant des hypothèses sur les données initiales du problème, on peut donc appliquer le théorème I.1.6.

□

REMARQUE I.1.7 (Modèle approché et explosion en temps fini)

Rappelons l'expression de H^ε intervenant dans le modèle approché de [Bilbao, 2005] :

$$H^\varepsilon = \frac{T_0}{2}u_x^2 + \frac{EA}{2}v_x^2 + \frac{EA - T_0}{2}u_x^2v_x + \frac{EA - T_0}{8}u_x^4 = EA\tilde{H}^\varepsilon \quad (\text{I.1.120})$$

où on pose toujours $\alpha = \frac{EA - T_0}{EA}$ et

$$\tilde{H}^\varepsilon = \frac{1 - \alpha}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}v_x^2 + \frac{\alpha}{2}u_x^2v_x + \frac{\alpha}{8}u_x^4 \quad (\text{I.1.121})$$

\tilde{H}^ε n'est pas une fonction convexe puisque si l'on considère les points alignés suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{H}^\varepsilon\left(-\sqrt{2\frac{1+\alpha}{\alpha}}, -\frac{2}{\alpha}\right) &= \frac{2}{\alpha^2} - \left[1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2\alpha}\right], & \tilde{H}^\varepsilon\left(0, -\frac{2}{\alpha}\right) &= \frac{2}{\alpha^2}, \\ \tilde{H}^\varepsilon\left(+\sqrt{2\frac{1+\alpha}{\alpha}}, -\frac{2}{\alpha}\right) &= \frac{2}{\alpha^2} - \left[1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2\alpha}\right] \end{aligned}$$

La seconde image est supérieure aux deux autres dès que $0 < \alpha < 1$, ce qui contredit la convexité de \tilde{H}^ε . Ceci dit, il s'agit d'une fonction polynomiale, elle est donc C^∞ . Nous pouvons exprimer les valeurs propres de $D^2\tilde{H}^\varepsilon$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - \alpha \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}u_x^2 - \frac{1}{2}v_x \right] + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\left(1 - v_x - \frac{3}{2}u_x^2\right)^2 + 4u_x^2} \\ \lambda_2 = 1 - \alpha \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}u_x^2 - \frac{1}{2}v_x \right] - \frac{\alpha}{2} \sqrt{\left(1 - v_x - \frac{3}{2}u_x^2\right)^2 + 4u_x^2} \end{cases}$$

ainsi que les vecteurs propres :

$$\begin{cases} v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}u_x^2 + \frac{1}{2}v_x + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - v_x - \frac{3}{2}u_x^2\right)^2 + 4u_x^2} \\ u_x \end{pmatrix} \\ v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}u_x^2 + \frac{1}{2}v_x - \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - v_x - \frac{3}{2}u_x^2\right)^2 + 4u_x^2} \\ u_x \end{pmatrix} \end{cases}$$

Le calcul de $\nabla\lambda.v$ mène à :

$$\begin{cases} \nabla\lambda_1.v_1 = \frac{\alpha}{8} \left[9u_x^2 + 6\sqrt{\Delta} - 12\frac{1}{\sqrt{\Delta}} + 27\frac{1}{\sqrt{\Delta}}u_x^4 + 36\frac{1}{\sqrt{\Delta}}u_x^2v_x + 9u_x^2 + 12\frac{1}{\sqrt{\Delta}}v_x^2 + 6v_x \right] \\ \nabla\lambda_2.v_2 = \alpha \left[\frac{9}{4}u_x^2 + \frac{3}{4}v_x - \frac{3}{8}\sqrt{\Delta} + \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{\Delta}} - \frac{27}{8}\frac{1}{\sqrt{\Delta}}u_x^4 - \frac{9}{2}\frac{1}{\sqrt{\Delta}}u_x^2v_x \right] \end{cases}$$

où $\Delta = 4 \left[\left(1 - v_x - \frac{3}{2}u_x^2\right)^2 + 4u_x^2 \right]$.

Ce calcul montre que le système est « vraiment non linéaire » (V.N.L.), on peut donc lui appliquer la remarque D.2.1 et conclure à l'explosion de la norme C^2 de toute solution, en un temps fini qui dépend de la taille des données initiales.

Il ne fait aucun doute que la corde de piano est le siège, en plus de la propagation classique d'une onde transversale, de la propagation d'une onde longitudinale qui de surcroît se transmet au reste de l'instrument, comme l'attestent plusieurs expériences issues de la littérature. L'effet majeur dans le domaine temporel est la présence dans le son du piano d'un précurseur non linéaire, l'onde longitudinale se propageant à une vitesse 10 à 30 fois supérieure à l'onde transversale.

Dans ce chapitre destiné aux modèles de corde, nous nous intéressons à la génération et la propagation de l'onde longitudinale dans la corde, la question de la transmission au reste du piano sera abordée plus tard. Nous avons proposé d'écrire un modèle provenant de la prise en compte des non linéarités géométriques (le tenseur des déformations n'est pas linéarisé), tandis que la loi de comportement reste affine. Ceci nous mène à l'écriture du modèle géométriquement exact (MGE) :

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial u_c}{\partial x} - (EA - T_0) \frac{\frac{\partial u_c}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u_c}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)^2}} \right] = S(x, t) \\ \rho A \frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial v_c}{\partial x} - (EA - T_0) \frac{\left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial u_c}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)^2}} \right] = 0 \end{cases}$$

Il s'avère que le système linéarisé est constitué de deux équations d'ondes découplées (transversale et longitudinale), ce qui est incompatible avec notre objectif d'écrire un système couplant les deux vibrations. Nous sommes donc contraints de travailler avec un système non linéaire.

De nombreux modèles dérivés existent dans la littérature, en pratiquant des approximations supplémentaires. Nous avons montré que le système d'EDP basé sur le développement de Taylor de la racine carrée pouvait être justifié par une analyse asymptotique dans le cadre d'un second membre transversal de faible amplitude. Il s'écrit

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[T_0 \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} + (EA - T_0) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x} + \frac{EA - T_0}{2} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right)^3 \right] = \varepsilon s(x, t) \\ \rho A \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x} + \frac{EA - T_0}{2} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right)^2 \right] = 0 \end{cases}$$

Nous avons également montré en appliquant le théorème de [Ta-Tsien, 1994] que le MGE possède une unique solution classique en temps infiniment long, alors que le modèle issu du développement présente une explosion (de la norme \mathcal{C}^2) en temps fini.

Il serait intéressant de se pencher sur le modèle qui tire parti de l'écart des deux vitesses d'ondes, et d'essayer de le retrouver par une approche asymptotique. Enfin, on trouve dans la littérature une étude des fréquences propres de la corde non linéaire, et il nous semble que la théorie des modes normaux non linéaires nous permettrait d'aller plus loin en considérant non pas les modèles simplifiés scalaires mais directement le système du modèle géométriquement exact.

C'est le modèle géométriquement exact qui retiendra notre attention pour modéliser les non linéarités géométriques dans la suite, en raison de ses bonnes propriétés mathématiques.

I.1.4 Mouvement non planaire de la corde

Ce paragraphe traite de l'aptitude de la corde à sortir de son plan de vibration, de telle sorte que deux composantes, aussi appelées deux polarisations dans la suite, doivent être considérées pour décrire complètement son déplacement transversal. Pour fixer les idées, nous adopterons dans la suite la convention du piano à queue (par opposition au piano droit), pour lequel le marteau frappe la corde dans sa polarisation verticale $\bar{u}_c(x, t)$, la polarisation horizontale $\tilde{u}_c(x, t)$ étant donc dans un plan parallèle à la table d'harmonie. Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que la polarisation verticale.

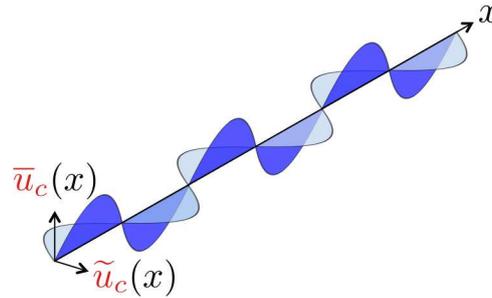
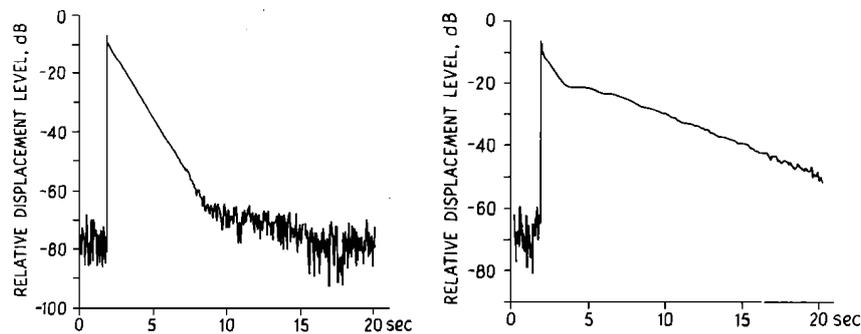


FIGURE I.16 – Deux polarisations (horizontale \tilde{u}_c et verticale \bar{u}_c) du mouvement de la corde.

Il semble qu'une corde, en conditions expérimentales, ait tendance à se mettre en mouvement circulaire lorsqu'un forçage est pourtant effectué dans la direction transversale. On trouve une mention de ce phénomène dans [Harrison, 1948], qui propose un dispositif spécial permettant d'éviter cette mise en rotation, qui sera plus tard utilisé par [Oplinger, 1960] dans ses propres expériences. On trouve dans [Murthy et Ramakrishna, 1965] une mise en place expérimentale destinée à observer précisément cette mise en mouvement tubulaire dans le cas d'une excitation forcée harmonique, ainsi qu'une étude théorique basée sur des équations simplifiées (la vibration longitudinale n'est pas prise en compte). Les papiers [Narasimha, 1968] et [Anand, 1969] proposent un système d'équations prenant en compte les deux polarisations ainsi que l'effet, de façon indirecte, de la vibration longitudinale, et mettent en évidence un lien entre l'amplitude des deux polarisations et leur fréquence de vibration. Une étude expérimentale et théorique étudiant attracteurs, bifurcations et établissement du chaos est présentée dans [O'Reilly et Holmes, 1992]. On trouve dans [Kurmyshev, 2003] une étude précise du couplage entre modes transversaux et modes longitudinaux.



(a) Niveau relatif de déplacement vertical (b) Niveau relatif de déplacement horizontal

FIGURE I.17 – Extrait de [Weinreich, 1977]

Dans le contexte précis du piano (et ses conditions aux limites bien particulières), la littérature se fait rare sur ce sujet. Lors de son étude sur la décroissance du signal de corde, [Weinreich, 1977] fournit une mesure en condition de jeu sur un Steinway B dans deux polarisations différentes de la même corde (D \sharp 4), que l'on a reproduit ici en figure I.17 (la polarisation verticale étant la polarisation considérée jusqu'à

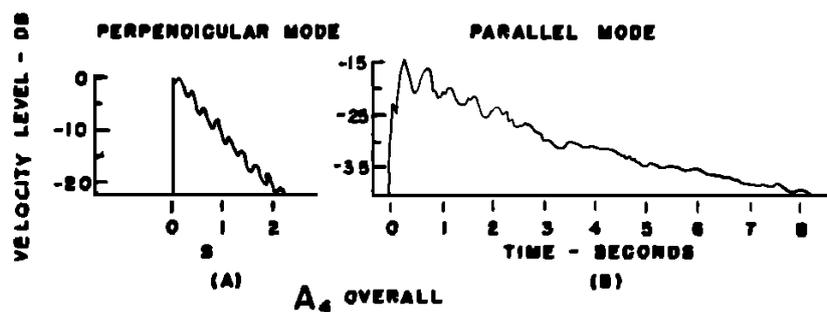


FIGURE I.18 – Comparaison des vitesses de la corde A4 dans les deux directions (parallèle et perpendiculaire à la table). Extrait de [Hundley et al., 1978]

présent). La polarisation horizontale est bien présente, et possède un temps caractéristique de dissipation beaucoup plus grand, le couplage au chevalet n'étant pas destiné à transmettre à la table d'harmonie cette polarisation mais plutôt l'autre. L'auteur suggère que cette polarisation soit responsable d'un certain soutien dans le son du piano, qu'il appelle son rémanent (« aftersound »), de telle sorte que la présence des deux polarisations explique le phénomène de « double décroissance » selon lequel le son, d'abord fort, décroît fortement puis aborde une seconde phase moins sonore et moins amortie. Quasiment au même moment, le papier [Hundley et al., 1978] présente des mesures similaires témoignant de la même tendance sur la note A4 d'un Baldwin M (voir figure I.18), mais donnant aussi un résultat quantitatif selon lequel la vibration horizontale possède une vitesse de vibration d'environ -15 dB en moyenne par rapport à la vibration transversale. Une mesure plus récente à l'aide de phototransistors a été présentée dans [Tanaka et al., 1996], sur la note E1, montrant que la corde oscille d'abord dans la direction du marteau, puis entame un mouvement de rotation après quelques secondes de vibration. Enfin, un brevet déposé par la compagnie Stuart & Sons concerne l'invention d'un nouveau type d'attache au chevalet, qui permet d'empêcher la corde de vibrer dans le plan horizontal, ce qui porte à croire que cette vibration n'est pas désirée et encore moins contrôlée dans la facture habituelle du piano.

« One of the distinctive design features of the piano is the Stuart bridge agraffe, a scientifically designed vertical coupling device that encourages the strings to vibrate in a more controlled manner. Unlike the traditional method, where the strings are held horizontally by two off set metal pins, the agraffe holds the strings vertically — the same direction as the hammer strike. The result is a constant vibration that provides an outstanding dynamic range, long sustain and greater clarity of sound sympathetic to the entire piano repertoire. » www.stuartandsons.com

Les mécanismes à l'origine de la présence d'une polarisation horizontale de la corde de piano sont assez mal connus. Les causes les plus citées sont

- Mécanisme 1. le mauvais alignement du marteau, qui excite dès le départ les deux polarisations ([Weinreich, 1977]),
- Mécanisme 2. la présence du filage ou d'irrégularités dans la composition de la corde qui créent un déséquilibre dans le milieu de propagation, qui n'est plus vraiment homogène (et donc plus vraiment une corde au sens théorique du terme),
- Mécanisme 3. un transfert de l'énergie d'une polarisation à l'autre, pendant la propagation à travers le couplage non linéaire des deux polarisations avec la vibration longitudinale ([Kurmyshev, 2003]), ou au chevalet ([Anderssen et Stuart, 2007]).

Pour faire un peu la part des choses, nous avons mené une expérience de « débroussaillage » sur la corde D \sharp 3 du piano droit Pleyel prêté par l'ITEMM. Il s'agit de la dernière corde du chevalet des graves, elle est filée et fait partie d'un doublet (nous reparlerons des chœurs de cordes en section I.4.4). Sa situation la rend très accessible, comme en témoigne la figure I.19, sur laquelle on distingue le dispositif expérimental, constitué de deux capteurs optiques, en suivant le protocole de l'article [Hanson et al., 1994]. Les capteurs sont orthogonaux l'un à l'autre, mais pas forcément alignés avec les deux polarisations de la corde. C'est pourquoi nous avons tracé les résultats comme des figures paramétriques dans le plan capteur gauche /

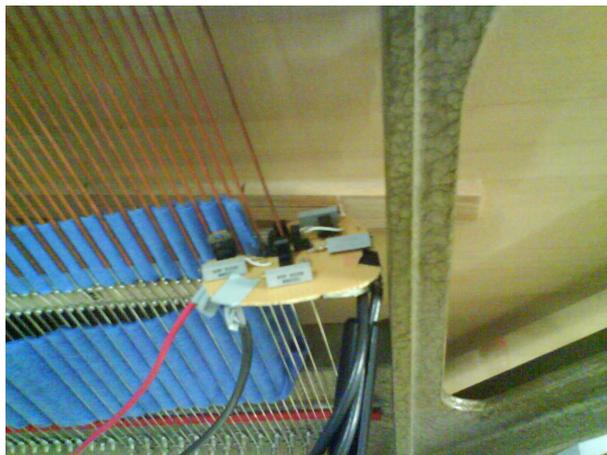


FIGURE I.19 – Notre dispositif expérimental, constitué de deux capteurs optiques orthogonaux.

capteur droit, l'échelle étant la même sur les deux axes en supposant que les deux capteurs ont la même amplification de signal. Si la corde reste dans la même polarisation, la figure obtenue sera un segment orienté, alors que si elle change de polarisation, on obtiendra une figure plus complexe (un mouvement purement tubulaire ayant pour signature un cercle dans cette représentation).

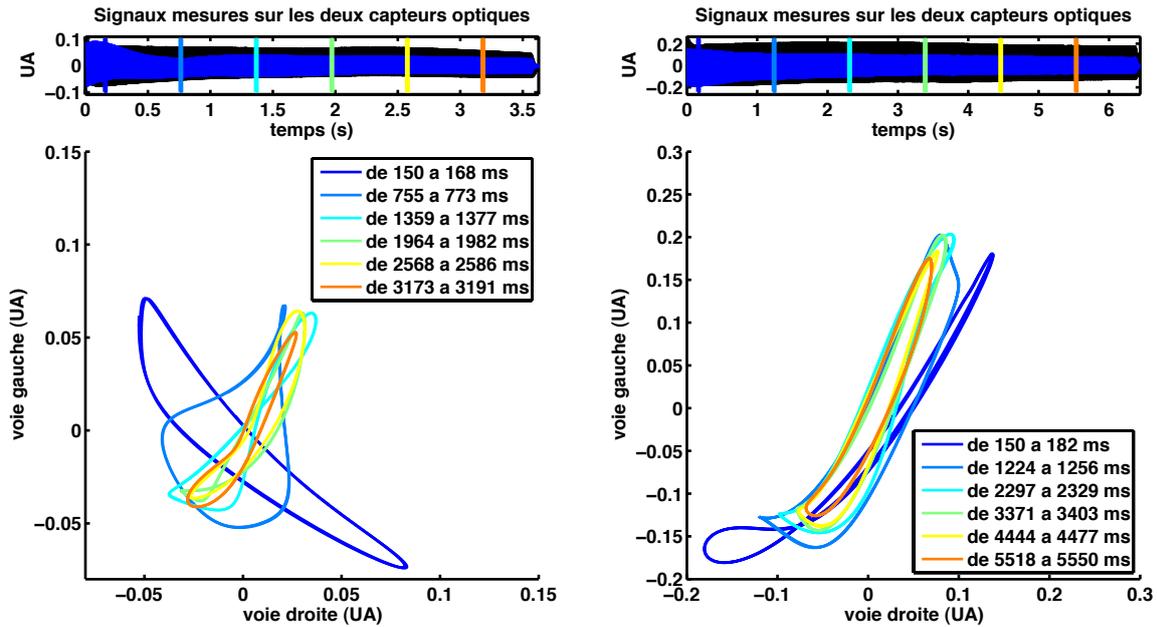
Nous avons mené trois types de mesures dont les résultats sont montrés en figure I.20. Il s'agit du type de représentation mentionné ci dessus (paramétrique dans le plan capteur droit / capteur gauche), en utilisant une fenêtre glissante pour visualiser un éventuel changement de polarisation au cours du temps. Les trois configurations sont :

- Frappe verticale d'une des cordes du doublet, l'autre restant libre de vibrer : figure I.20(a)
- Frappe horizontale d'une des cordes du doublet, l'autre restant libre de vibrer : figure I.20(b)
- Frappe verticale d'une corde, l'autre ayant été démontée : figure I.20(c)

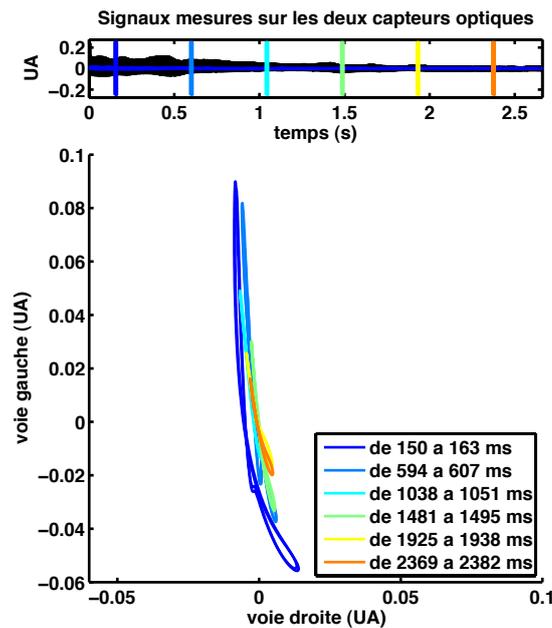
La figure I.20(a) est réalisée sur un signal d'environ 3,5 secondes, et nous utilisons pour la représentation graphique une fenêtre d'analyse de 18 millisecondes qui se déplace de 605 millisecondes à chaque nouvelle représentation. Le premier échantillon (figure bleue) correspond aux premières 18 millisecondes de signal et exhibe un segment orienté à 45° qui correspond (car les capteurs sont tournés) à une polarisation verticale de la corde, c'est à dire dans le sens de la frappe. Les autres couleurs montrent que cette orientation se transforme au cours du temps pour devenir complètement horizontale, en passant par une étape quasiment circulaire. On retrouve ici le comportement décrit dans la littérature mentionnée ci dessus, et il s'agit d'un phénomène répétable puisque nos 3 autres essais (que nous n'avons pas représenté ici) nous amènent à la même constatation.

La figure I.20(b) est réalisée sur un signal de plus de 6 secondes, nous utilisons une fenêtre de 32 millisecondes qui se déplace de 1.064 secondes pour chaque nouvelle analyse. L'orientation de toutes les figures est celle d'une polarisation horizontale, qui est le sens de la frappe. On ne retrouve pas ici le même comportement que dans la figure précédente, la polarisation n'a pas l'air de tourner dans le cas d'une excitation horizontale. Cette expérience a été reproduite 4 fois avec le même résultat : pas de rotation de la polarisation. Or, la plupart des explications de cette double polarisation sont pour ainsi dire symétriques, au sens où on ne voit pas bien pourquoi les phénomènes invoqués auraient lieu pour une excitation verticale et pas pour une excitation horizontale. Seule une explication brise cette symétrie : l'invocation de la condition au chevalet. En effet, chaque polarisation voit une condition totalement différente en arrivant au chevalet (voir figure I.21), et cela nous semble la cause la plus probable de ces disparités de comportement.

La figure I.20(c) reproduit la première expérience, mais après avoir enlevé la deuxième corde du doublet (les capteurs ont au passage été pivotés pour coïncider avec les deux polarisations). Le signal dure environ 2,5 secondes, on visualise la même représentation graphique que précédemment, avec une fenêtre de 13 millisecondes qui se déplace de 444 millisecondes pour chaque nouvelle représentation. Le résultat est époustouffant : aucune rotation de polarisation, contrairement à la première expérience qui était



(a) Corde en doublet, frappe verticale (capteurs orientés à environ 45° par rapport aux polarisations de la corde) (b) Corde en doublet, frappe horizontale (capteurs orientés à environ 45° par rapport aux polarisations de la corde)



(c) Doublet démonté, frappe verticale (capteurs orientés pratiquement dans les directions de polarisation de la corde)

FIGURE I.20 – Représentation paramétrique de la vitesse de la corde dans les deux directions des capteurs. Les différentes courbes de couleur correspondent aux portions de signal encadrés dans cette couleur.

exactement la même, mais avec la corde du doublet en place.

Il semble donc clair que l’attache et le couplage des cordes à travers le chevalet a une influence sur la conversion de polarisations. Cette dernière ne saurait donc être expliquée uniquement par la considération d’une équation d’onde qui couple ces vibrations, mais par un modèle beaucoup plus poussé, qui prend en compte une équation de corde à deux polarisation et un chevalet qui rend compte de l’attache des

cordes et de leur couplage au chevalet. Une campagne de mesures plus ample permettrait de confirmer les résultats obtenus ici de façon préliminaire, en commençant par fiabiliser le processus de frappe (ici manuel), par tester d'autres cordes (pour quantifier l'effet du filage, un éventuel effet de bord du chevalet puisqu'ici, D \sharp 3 est la dernière corde du chevalet des graves ...) mais aussi mesurer les vibrations de la corde non frappée du doublet, s'intéresser aux triplets ... Au niveau de la modélisation, un modèle de corde tridimensionnelle (deux polarisations transversales et une polarisation longitudinale) peut facilement être écrit en généralisant le modèle (I.1.80), mais le point délicat et pourtant crucial, comme ces expériences l'indiquent, sera de concevoir un modèle de chevalet qui provoque cette conversion de polarisations, et qui permette d'expliquer les phénomènes observés ici. Dans ce chapitre réservé aux cordes, intéressons nous donc tout de suite à l'écriture d'un modèle prenant en compte la vibration transversale horizontale. Nous reviendrons sur la modélisation du chevalet dans la section I.4.



FIGURE I.21 – Configuration d'attache des cordes au chevalet, qui crée une disymétrie entre les deux polarisations (verticale et horizontale) des cordes.

Soient \bar{u}_c et \tilde{u}_c les deux polarisations de la corde dans le plan orthogonal à son élongation (voir figure I.16). Le modèle géométriquement exact autorisant les déplacements d'une corde à deux polarisations s'écrit, en suivant⁷ par exemple [Carrier, 1945], [Narasimha, 1968], [Anand, 1969], [O'Reilly et Holmes, 1992], [Watzky, 1992] et [Kurmyshev, 2003] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho A \frac{\partial^2 \bar{u}_c}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial x} - (EA - T_0) \frac{\frac{\partial \bar{u}_c}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}_c}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_c}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)^2}} \right] = \bar{S}(x, t), \\ \rho A \frac{\partial^2 \tilde{u}_c}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial \tilde{u}_c}{\partial x} - (EA - T_0) \frac{\frac{\partial \tilde{u}_c}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}_c}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_c}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)^2}} \right] = \tilde{S}(x, t), \\ \rho A \frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial v_c}{\partial x} - (EA - T_0) \frac{\left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}_c}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_c}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)^2}} \right] = 0, \\ \tilde{u}_c(x = 0, t) = \tilde{u}_c(x = L, t) = \bar{u}_c(x = 0, t) = \bar{u}_c(x = L, t) = v_c(x = 0, t) = v_c(x = L, t) = 0, \\ \tilde{u}_c(x, t = 0) = \partial_t \tilde{u}_c(x, t = 0) = \bar{u}_c(x, t = 0) = \partial_t \bar{u}_c(x, t = 0) = v_c(x, t = 0) = \partial_t v_c(x, t = 0) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{I.1.122})$$

Il semble qu'une corde excitée en régime de grandes déformations a tendance à se mettre en mouvement circulaire alors que le forçage est effectué dans la direction verticale. Pour le piano, la présence de vibration dans les deux plans transversaux est mentionnée à plusieurs reprises dans la littérature, même si peu de mesures en condition de jeu sont disponibles. Nous avons procédé à des mesures préliminaires nous permettant de pointer du doigt la conversion de polarisation qui semble avoir lieu lors d'une excitation verticale, mais aussi l'influence des conditions aux limites sur cette conversion de polarisation. Nous proposons dans ce chapitre consacré aux cordes une généralisation du modèle géométriquement exact pour une vibration de corde non plane.

7. mais sans faire d'approximations concernant la racine carrée ou la différence des vitesses des ondes

I.1.5 Filage des cordes

Le filage, ou gainage des cordes consiste à enrouler un ou deux fils de cuivre autour d'un fil d'acier appelé âme, et permet d'obtenir une masse linéique suffisante pour atteindre les notes les plus graves du piano, tout en limitant l'inharmonicité. En effet, une corde massive en acier ayant la même masse linéique se comporterait comme une poutre et l'inharmonicité serait très désagréable. Le filage est réalisé de telle sorte que les spires adjacentes soient très légèrement disjointes lorsque la corde est sous tension, ce qui permet d'alourdir l'âme sans la raidir excessivement (voir [Conklin, 1996c]). Le filage ne s'étend pas sur toute la longueur de la corde, mais est interrompu à quelques centimètres de ses extrémités, de telle sorte que les conditions aux limites d'une corde filée sont les mêmes qu'une corde non filée.

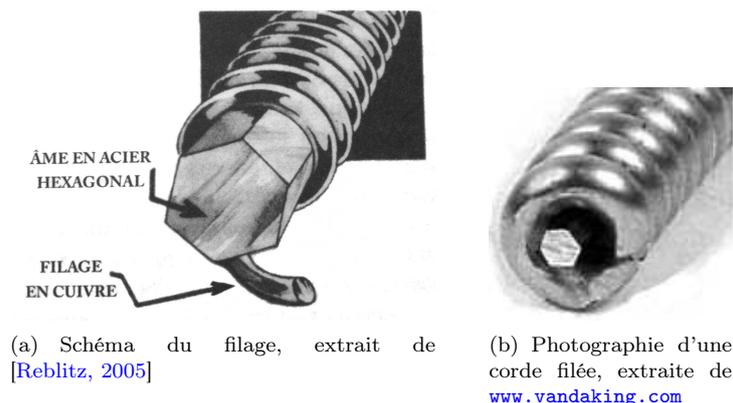


FIGURE I.22 – Schéma et photographie d'une corde filée

Bien que le filage constitue une pratique courante depuis le XVIII^e siècle, peu de modèles permettent de calculer avec justesse les paramètres d'une corde filée. Il est établi expérimentalement dans [Young, 1954] que gagner l'âme lui confère une raideur supplémentaire :

« *The core itself is stiff and causes inharmonicity (i.e., departure of the natural frequencies of the string from a harmonic series), and the covering winding increases the stiffness still more. A theory has been developed for the limiting stiffness resulting from the covering wire. Experiment indicates that the covering wire does stiffen the string somewhat, but that the stiffening is not nearly as great as it would be if the coils of covering wire just touched each other with the string at rest.* » [Young, 1954]

[Fletcher, 1964] propose un modèle empirique qui permet de calculer l'inharmonicité des cordes filées à partir de la mesure des diamètres de l'âme et de la gaine ainsi que de la fréquence fondamentale et de la longueur, en se basant sur l'équation d'Euler Bernoulli avec précontrainte. Cette méthode de calcul a cependant été remise en question dans [Chumnantas et al., 1994] et [Suzuki et Nakamura, 1990] qui suggèrent que les extrémités non filées de la corde participent à l'augmentation de la raideur :

« *The inharmonicity of the overwound piano strings does not only depend on the string's stiffness; since the copper windings do not extend up to the string's supports, the resulting nonuniformity in the linear mass density must also be taken into account.* » [Chumnantas et al., 1994]

« *Nakamura & Iwaoka showed that the inharmonicity of a wound string is larger than that of an unwound string because of reflections at the boundaries where the winding ends.* » [Suzuki et Nakamura, 1990]

▷ Référence à :

On the inharmonicity of a piano string wrapped a single copper winding.
Trans. Acoust. Soc. Jpn, 1986
 Spring Meeting, pp. 353–4 (en japonais).

On trouve dans [Conklin, 1996c] une formule permettant de calculer de façon plus satisfaisante l'inharmonicité de la vibration transversale des cordes filées simplement ou doublement, bien que cette formule ne soit pas expliquée dans les détails.

Dans notre modèle, nous avons fait le choix de considérer que les cordes sont **homogènes** et **uniformes**, entièrement décrites par leur longueur L , leur diamètre d , leur masse volumique ρ et leur tension T_0 . Ceci est assez réaliste pour les cordes aiguës, non filées, mais ne l'est plus pour les cordes graves qui présentent une section hétérogène, et variable dans la longueur (le filage n'atteint pas les bords de la corde). L'objectif de ce paragraphe est de proposer une méthode afin de trouver les paramètres d'une corde « équivalente » homogène et uniforme, qui reproduit le comportement vibratoire de la corde filée. Ce comportement vibratoire sera caractérisé par les observables simples que l'on peut tirer soit de mesures géométriques (longueur, diamètre) soit de l'analyse de sons de piano : fréquence fondamentale f_T , inharmonicité caractérisée par le coefficient B , fréquence longitudinale f_L . Rappelons les formules permettant de relier les observables aux paramètres :

$$f_T = \frac{1}{dL} \sqrt{\frac{T_0}{\pi\rho}}, \quad f_L = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad B = \frac{\pi^3 E d^2}{64 T_0 L^2} \quad (\text{I.1.123})$$

D'un point de vue formel, il s'agit d'ajuster quatre paramètres afin de bien représenter trois observables, de telle sorte que plusieurs solutions semblent exister. Ce paragraphe présente différentes approches permettant de calculer ces coefficients équivalents, en restant le plus proche de la situation réelle possible, afin de les utiliser pour nos simulations numériques. Nous verrons qu'elles pourront aussi être appliquées aux cordes non filées pour lesquelles les mesures ne sont pas toujours très précises. Bien sûr, une approche d'homogénéisation serait une façon beaucoup plus rigoureuse de traiter ce problème et il serait fort intéressant de s'y pencher.

Une première méthode basée sur les mesures de longueur et de diamètres Pour commencer, le calcul de la masse linéique va devoir rendre compte de la géométrie du gainage. Si ce dernier était parfaitement cylindrique, on verrait deux cercles concentriques en prenant une coupe de la corde. Alors la surface du cœur A_a serait celle du cercle intérieur et la surface de la gaine A_c la différence des surfaces des deux cercles, comme le résume la figure I.23.

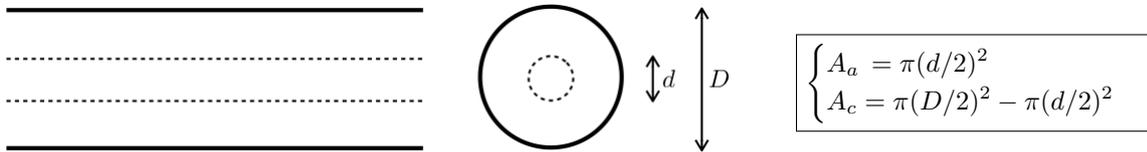


FIGURE I.23 – Vue schématique d'une corde qui aurait un gainage cylindrique.

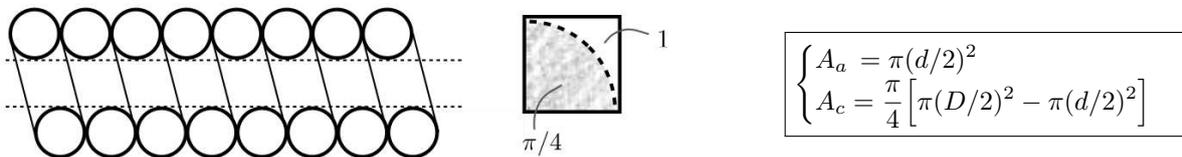


FIGURE I.24 – Vue schématique d'une corde avec gainage par enroulement.

Or, en suivant [Fletcher, 1964], nous écrivons que la différence entre le gainage en « entortillement » et la situation d'un cylindre se fait dans la présence d'un facteur $\pi/4$ pour calculer la surface de gainage, comme le résume la figure I.24. Le calcul de la masse linéique μ se fait donc de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mu &= \rho_a A_a + \rho_c A_c = \rho_a \pi (d/2)^2 + \rho_c \frac{\pi}{4} [\pi (D/2)^2 - \pi (d/2)^2] \\ &= \rho_c \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 D^2 + \left[\rho_a \frac{\pi}{4} - \rho_c \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right] d^2 \end{aligned} \quad (\text{I.1.124})$$

où ρ_a et ρ_c sont les densités respectives de l'acier de l'âme et du cuivre de la gaine. Le calcul de la tension de la corde est alors possible grâce à la formule de la fréquence fondamentale des ondes transversales :

$$f_T = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \Rightarrow T_0 = \mu(2Lf_T)^2 \quad (\text{I.1.125})$$

Enfin, on peut calculer un diamètre équivalent d_{eq} en cherchant à reproduire le coefficient d'inharmonicité B car on a la formule

$$B = \frac{\pi^3 E d_{eq}^4}{64 T_0 L^2} \Rightarrow d_{eq}^4 = \frac{64 B T_0 L^2}{\pi^3 E} \quad (\text{I.1.126})$$

Cette procédure, qui consiste à reproduire en priorité la masse linéique, puis la fréquence transversale (en faisant confiance à la mesure de longueur) et enfin en reproduisant le coefficient d'inharmonicité, conduit aux courbes représentées en figure I.25. On voit qu'effectivement, la longueur et la masse linéique sont conformes entre la mesure et la valeur prise pour la simulation. Les valeurs de tension T_0 obtenues par cette méthode sont du même ordre que celles que l'on trouve dans la littérature, voir [Conklin, 1996c]. A présent,

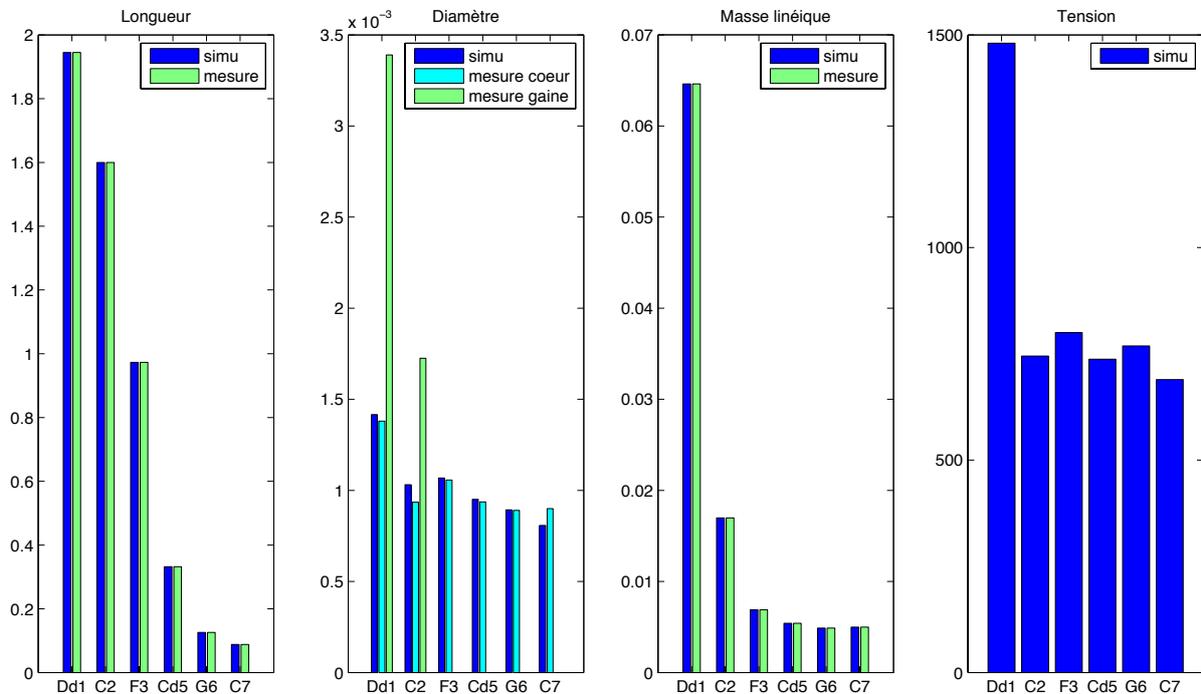
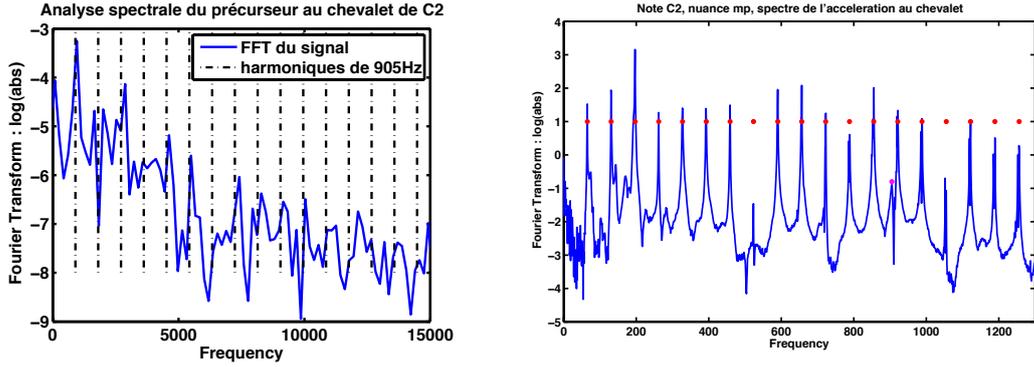


FIGURE I.25 – Calcul des coefficients T_0 et d_{eq} en imposant la longueur et la masse linéique (calculée à partir des diamètres mesurés et de valeurs nominales de densité) et en cherchant à reproduire f_T et B .

avec les valeurs obtenues, nous pouvons calculer la valeur théorique de f_L , la fréquence fondamentale des ondes longitudinales. Ce calcul donne le tableau suivant :

note	D#1	C2	F3	C#5	G6	C7
f_L (Hz)	570	985	2633	7756	20195	25865

Or, nous pouvons aussi la mesurer dans le spectre du signal (lorsqu'elle est bien distincte d'un partiel transversal) ou comme [Podlesak et Lee, 1988] en regardant le contenu spectral du précurseur qui arrive au chevalet. Ces deux méthodes appliquées à la corde C2 donnent la figure I.26. Nous distinguons sans ambiguïté la valeur 905 Hz comme étant la fréquence fondamentale de la vibration longitudinale. L'erreur entre la fréquence longitudinale mesurée et la fréquence fondamentale calculée avec les coefficients ci dessus est d'environ 8%, ce qui est tout à fait audible. Il semble donc que sur C2, qui est une corde filée,



(a) analyse spectrale du précurseur de C2

(b) analyse spectrale de l'accélération au chevalet de C2

FIGURE I.26 – Détermination du fondamental longitudinal de la corde C2 par deux approches différentes.

la méthode ci dessus ne soit pas assez précise pour calculer les coefficients. Or il n'est pas absurde de remettre en question la précision des mesures de diamètres et de longueur de corde. En effet, ces valeurs qui paraissent assez objectives, sont difficiles à mesurer sur un piano en état de fonctionnement pour diverses raisons : proximité des cordes entre elles (qui empêche d'utiliser l'appareil de mesure électronique, laissant l'appareil manuel, moins précis), difficulté d'identifier clairement l'extrémité de la corde, en particulier dans l'aigu où le capo d'astre est sous une barre de cadre... De plus, des approximations ont été faites pour établir les formules ci dessus, en particulier on suppose que le gainage des cordes a lieu sur toute la longueur de la corde, ce qui n'est pas vrai. Pour toutes ces raisons, le prochain paragraphe propose une autre méthode se basant sur les observations issues des mesures, et remettant en question la mesure des diamètres.

Une deuxième méthode qui remet en cause la mesure des diamètres Deux cas de figure se présentent selon qu'il est possible ou non de mesurer la fréquence longitudinale à partir des mesures au chevalet.

► Si l'on ne connaît pas f_L . Il faut donc supposer que soit la densité soit le diamètre est connu. Or les cordes pour lesquelles on ne connaît pas f_L sont plutôt des cordes aiguës car cette fréquence se situe alors au dessus de la fréquence d'échantillonnage. Ce sont donc des cordes non filées. On supposera que la densité est celle de l'acier, et que l'incertitude se situe plutôt sur la mesure de diamètre. La procédure est la suivante :

① Calculer la tension :

$$T_0 = \frac{64Bf_T^4 L^6 \rho^2}{\pi E} \quad (\text{I.1.127})$$

② Ajuster le diamètre :

$$d_{eq} = \frac{1}{Lf_T} \sqrt{\frac{T_0}{\pi \rho_a}} \quad (\text{I.1.128})$$

La figure I.27 montre les coefficients obtenus par cette méthode sur les six cordes témoin. On trouve des valeurs de tension conforme à la littérature sauf pour C7 qui devrait selon cette méthode présenter une tension d'environ 450 N, ce qui est beaucoup trop faible. De même, sur C7, le diamètre que l'on calcule est inférieur à $0,75 \times 10^{-3}$ m, ce qui est vraiment improbable pour une corde de cette tessiture. La mesure de longueur semble avoir été erronée sur cette corde, nous remettrons cette longueur en cause dans le paragraphe suivant.

► Si l'on arrive à mesurer f_L (ou que l'on souhaite l'imposer). Alors on peut ajuster trois coefficients à partir des mesures de f_T , B et f_L . Le diamètre et la tension en feront partie, et le troisième coefficient sera soit la longueur soit la densité de la corde. Pour les cordes filées, la densité est *a priori* inconnue, on fera donc confiance en la mesure de longueur. Pour les cordes non filées, on supposera que l'acier a une densité de 7850 kg/m^3 . La procédure est donc la suivante :

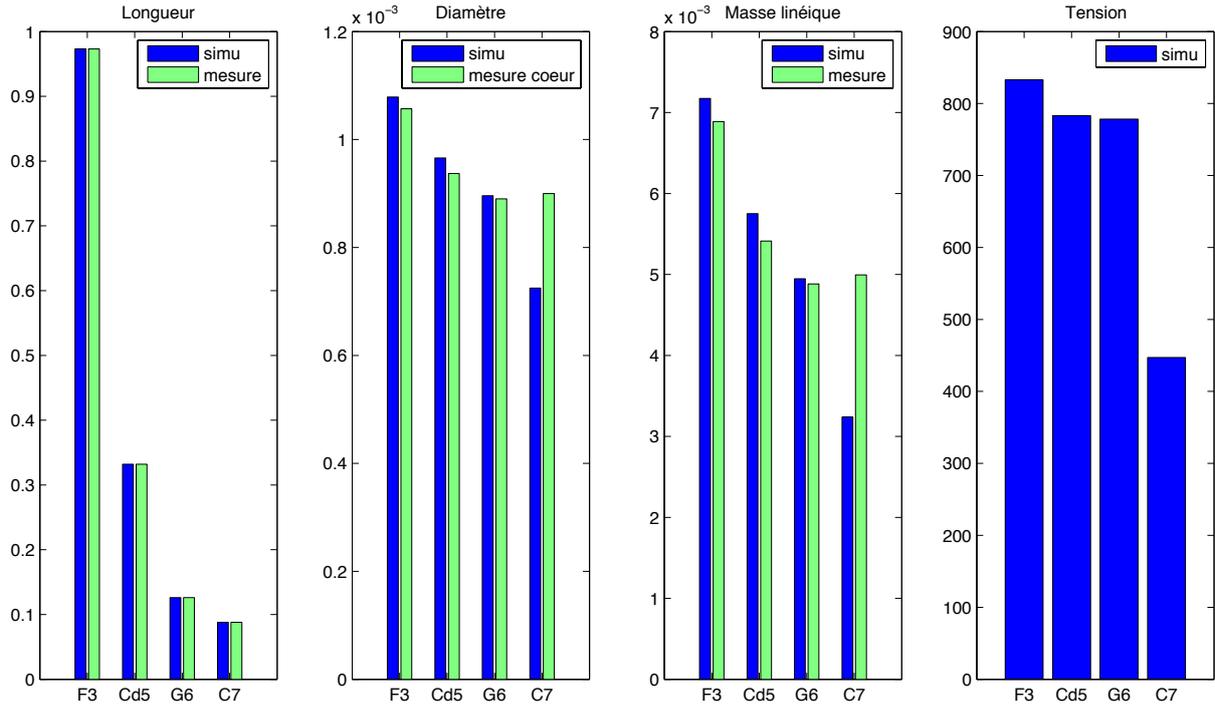


FIGURE I.27 – Calcul des coefficients T_0 et d_{eq} pour les cordes non filées en imposant la longueur et la densité et en cherchant à reproduire f_T et B .

① Partir de la connaissance de f_L pour calculer L ou ρ :

$$\begin{cases} L_{eq} = \frac{1}{2f_L} \sqrt{\frac{E}{\rho_a}} \text{ et } \rho_{eq} = \rho_a & \text{pour les cordes non filées} \\ \rho_{eq} = \frac{E}{(2Lf_L^2)} \text{ et } L_{eq} = L & \text{pour les cordes filées} \end{cases} \quad (I.1.129)$$

② En déduire un diamètre équivalent :

$$d_{eq} = \frac{4L_{eq}f_T\sqrt{B}}{\pi f_L} \quad (I.1.130)$$

③ Enfin, calculer la tension nécessaire pour reproduire la fréquence transversale :

$$T_0 = (L_{eq}f_T)^2 \rho_{eq} \pi d_{eq}^2 \quad (I.1.131)$$

La figure I.28 montre les coefficients obtenus par cette méthode sur les six cordes témoin, sachant que l'on a pu mesurer f_L pour les trois premières, et que l'on l'impose à une valeur précise pour les trois dernières comme précisé dans le tableau suivant :

note	D#1	C2	F3	C#5	G6	C7
f_L (Hz)	549	905	2640	$14 f_T$	$13 f_T$	$12,8 f_T$

Les valeurs numériques obtenues par la dernière stratégie proposée, et que nous allons utiliser pour nos simulations, sont résumées ici :

	D#1	C2	F3	C#5	G6	C7
L	1,945	1,600	0,961	0,326	0,124	0,094
d	$1,4833 \times 10^{-3}$	$1,1227 \times 10^{-3}$	$1,0525 \times 10^{-3}$	$9,3122 \times 10^{-4}$	$8,6705 \times 10^{-4}$	$8,2463 \times 10^{-4}$
ρ	44983	24085	7850	7850	7850	7850
T_0	1781	1046	774	702	706	658

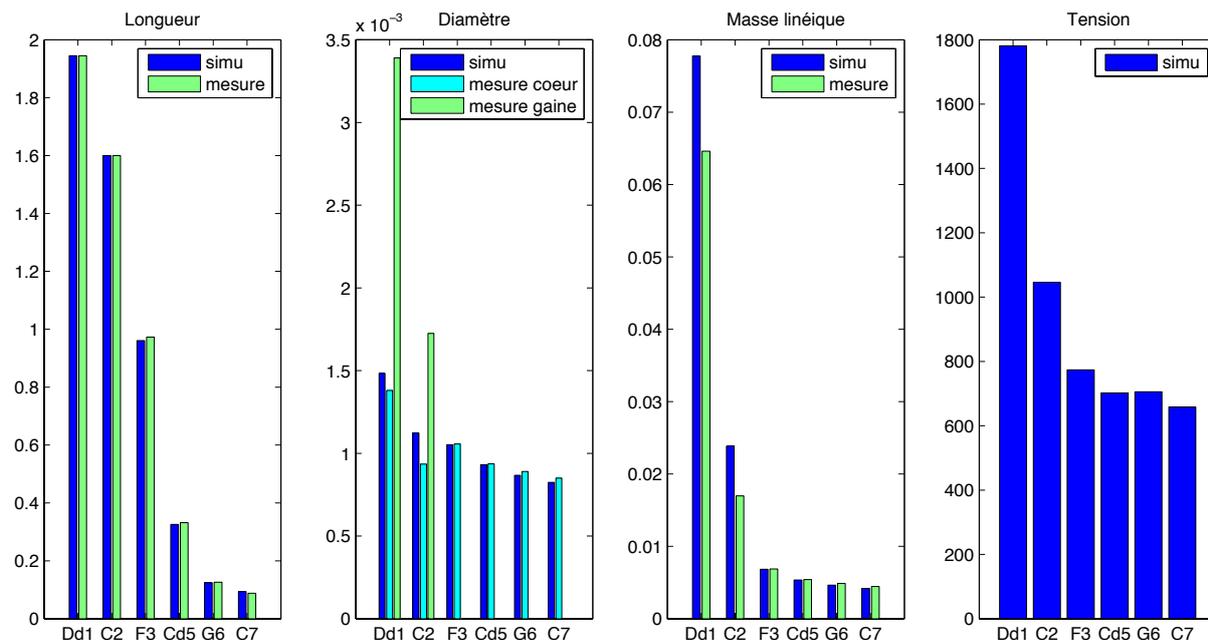


FIGURE I.28 – Calcul des coefficients T_0 , d_{eq} et L_{eq} ou ρ_{eq} en imposant soit la densité soit la longueur et en cherchant à reproduire f_T , f_L et B .



Les cordes les plus graves du piano sont filées de cuivre pour atteindre les notes les plus graves tout en restant dans des longueurs de cordes et une inharmonicité acceptables : le filage permet d'augmenter la masse linéique des cordes tout en limitant l'augmentation de l'inharmonicité. Or nous modélisons chaque corde comme étant homogène et uniforme, c'est à dire entièrement décrite par quatre paramètres (longueur, diamètre, tension, masse volumique). Ce paragraphe donne plusieurs stratégies pour calculer les paramètres équivalents qu'il faudra utiliser dans nos simulations, afin d'utiliser une corde homogène ayant le même comportement vibratoire que la corde filée, c'est à dire reproduisant les observables f_T (fréquence fondamentale), B (inharmonicité) et f_L (fréquence longitudinale). C'est la dernière stratégie qui sera retenue par la suite.

I.1.6 Amortissement

Les cordes de piano, comme toute structure mécanique, sont le siège de phénomènes dissipatifs variés, que l'on peut classifier selon leur origine :

- les pertes **thermoélastiques** proviennent du couplage entre les ondes de chaleur et les vibrations de la corde, elles sont présentes dans les cordes de piano métalliques conductrices de la chaleur,
- la dissipation par **couplage aux extrémités**, qui sont négligeables à l'agrafe, mais sont très importantes au chevalet puisque c'est précisément par ce mécanisme que la table d'harmonie est mise en vibration,
- les pertes par **rayonnement** de la corde, qui en raison du très faible diamètre de la corde, sont très petites,
- les pertes par **viscosité de l'air**, aussi appelées « amortissement fluide », qui sont assez faibles mais s'expriment de façon très simple comme étant proportionnelles à la vitesse de corde.

Notre objectif étant d'écrire un modèle de piano prenant en compte le couplage entre les cordes et la table d'harmonie, nous n'avons pas besoin d'écrire ici un modèle d'amortissement reproduisant artificiellement ce comportement, il sera naturellement modélisé par notre approche. En revanche, nous souhaitons rendre compte des autres dissipations intrinsèques à la corde, en particulier les dissipations thermoélastiques prépondérantes dans les cordes qui sont métalliques. Cependant, le modèle de corde auquel nous désirons ajouter un terme d'amortissement étant non linéaire, il n'est ni simple ni classique d'écrire un terme d'amortissement thermoélastique qui permet de prendre en compte le fait que l'amortissement dépend de la fréquence. C'est pourquoi nous utiliserons un terme viscoélastique pour modéliser ce comportement, en suivant [Bensa et al., 2003]. Cet artefact permettra de modéliser de façon simple l'amortissement naturel, intrinsèque, d'origine multiple, observé sur des cordes non couplées. Malheureusement, le manque de réalisme physique de cette modélisation de l'amortissement de corde va à l'encontre de nos aspirations générales dans la mesure où les coefficients qui seront introduits n'auront pas de signification physique simple et seront donc difficiles à calibrer.

Si $u_c(x, t)$ désigne le déplacement transversal vertical de la corde, nous proposons d'ajouter le terme d'amortissement suivant :

$$2R \rho A \frac{\partial u_c}{\partial t}(x, t) + 2\eta T_0 \frac{\partial^3 u_c}{\partial t \partial x^2}(x, t) \quad (\text{I.1.132})$$

où R est le coefficient d'amortissement fluide en s^{-1} , et η est le coefficient d'amortissement visqueux en s . Si l'on applique cet amortissement au modèle de corde vibrante proposé en paragraphe I.1.1, l'équation devient, en considérant toujours des conditions aux limites idéalisées :

$$\rho A \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}(x, t) + 2R \rho A \frac{\partial u_c}{\partial t}(x, t) - T_0 \left(1 + 2\eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2}(x, t) = S(x, t) \quad (\text{I.1.133})$$

$$\begin{cases} u_c(x, t = 0) = 0 \\ \partial_t u_c(x, t = 0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u_c(x = 0, t) = 0, \\ u_c(x = L, t) = 0. \end{cases} \quad (\text{I.1.134})$$

THÉORÈME I.1.8 (*Fréquences propres de l'équation de corde vibrante amortie*)

Les fréquences propres de l'équation (I.1.133) sont données par :

$$\tilde{f}_n = \frac{\tilde{\omega}_n}{2\pi}, \quad \text{où } \tilde{\omega}_n = \omega_n \sqrt{1 - \frac{R_n^2}{\omega_n^2}} \quad (\text{I.1.135})$$

en ayant appelé ω_n les pulsations du problème non amorti, et $R_n = R + \eta \frac{T_0}{\rho A} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$.

DÉMONSTRATION. La base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des modes propres du problème non amorti est toujours une base hilbertienne sur laquelle on peut décomposer au sens des distributions tempérées la solution u_c du nouveau problème (I.1.133) amorti que l'on considère homogène pour la recherche de ses fréquences propres :

$$u_c(x, t) = \sum u_n(t) e_n(x), \quad \text{où l'on rappelle que} \quad -T_0 \partial_x^2 e_n = \rho A \lambda_n e_n, \quad \lambda_n = \frac{T_0}{\rho A} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad \omega_n = \sqrt{\lambda_n}. \quad (\text{I.1.136})$$

On projette alors l'équation sur les modes :

$$\rho A \partial_t^2 u_n + 2\rho A (R + \eta \lambda_n) \partial_t u_n + \rho A \lambda_n u_n = 0 \quad (\text{I.1.137})$$

Trois cas se présentent selon le signe du discriminant de l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + 2(R + \eta \lambda_n)r + \lambda_n = 0, \quad \Delta_n = 4(R + \eta \lambda_n)^2 - 4\lambda_n \quad (\text{I.1.138})$$

Notons $R_n = R + \eta \lambda_n$ le coefficient d'amortissement du mode n , qui se comporte donc en n^2 , témoignant du fait que les fréquences aiguës seront bien plus amorties que les graves.

- Si $\Delta_n < 0$, une solution oscillante existe : il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$u_n(t) = e^{-R_n t} [A \cos(\tilde{\omega}_n t) + B \sin(\tilde{\omega}_n t)] \quad (\text{I.1.139})$$

- Si $\Delta_n = 0$, on parle d'amortissement critique : il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$u_n(t) = e^{-R_n t} [At + B] \quad (\text{I.1.140})$$

- Si $\Delta_n > 0$, il n'y a pas d'oscillations, la solution est fortement amortie : il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$u_n(t) = A e^{-R_n (1 + \sqrt{1 - \omega_n^2 / R_n^2}) t} + B e^{-R_n (1 - \sqrt{1 - \omega_n^2 / R_n^2}) t} \quad (\text{I.1.141})$$

□

REMARQUE I.1.8 (Signe de Δ_n)

On voit dans l'équation I.1.138 que Δ_n est une parabole en λ_n , tournée vers le haut, et positive à l'origine. Or, nous allons voir que pour les fréquences situées dans le domaine audible et pour des valeurs réalistes de paramètres R et η , les amplitudes modales $u_n(t)$ seront en régime oscillant, aussi dit « de faible amortissement ». Introduisons $\Psi(x)$ telle que $4\Psi(\lambda_n) = \Delta_n$:

$$\Psi(x) = \eta^2 x^2 + (2R\eta - 1)x + R^2 \quad (\text{I.1.142})$$

Cette parabole est négative entre ses racines si elle en a. Son discriminant $\delta = (2R\eta - 1)^2 - 4\eta^2 R^2$ se simplifie pour donner $\delta = 1 - 4R\eta$. En pratique, les coefficients R et η sont très petits, de l'ordre de 0,25 à 4 s^{-1} pour R et de 10^{-12} à 10^{-9} s pour η . Ainsi, δ est très proche de 1, donc positif. Les racines s'écrivent :

$$\lambda^\pm = \frac{1 - 2\eta R \pm \sqrt{1 - 4\eta R}}{2\eta^2} \quad (\text{I.1.143})$$

Pour tous les modes pour lesquels $\lambda_n \in [\lambda^-, \lambda^+]$, l'amplitude modale suivra un régime oscillant. Or, un simple calcul pour des valeurs typiques des paramètres : $R = 1 s^{-1}$ et $\eta = 10^{-9}$ s montre qu'il s'agit des fréquences situées entre 7×10^{-2} Hz et $3,18 \times 10^8$ Hz, couvrant largement le domaine audible.

P

our modéliser l'amortissement interne des cordes, nous choisissons d'ajouter aux modèles écrits précédemment, de manière artificielle, un terme d'amortissement viscoélastique dont il faudra ajuster les coefficients pour représenter la réalité le mieux possible. Nous avons vu que sur l'équation de corde vibrante, pourvu qu'il soit assez faible, l'amortissement avait pour effet bien sûr de faire tendre vers zéro le déplacement au cours du temps, mais aussi de diminuer très légèrement les fréquences propres de vibration.

I.1.7 Un modèle de corde complet et unifié

Jusqu'ici, nous avons montré des preuves expérimentales de certains phénomènes dans les cordes de piano (vibration transversale, inharmonicité, précurseur non linéaire, dissipation ...) et nous avons à chaque fois construit un modèle permettant de rendre compte de ce phénomène (équation de corde vibrante, système de Timoshenko, modèle géométriquement exact, amortissement fluide ...). Écrivons à présent un modèle qui prenne en compte tous ces phénomènes à la fois, que nous appellerons le modèle complet de corde. L'objet de cette section est également de regrouper presque tous les modèles sous une même formulation unifiée. Nous montrerons par la même occasion que tous ces modèles ont la propriété de conserver une énergie physique si l'amortissement est nul, ou de la dissiper sinon. Enfin, nous établirons la formulation variationnelle du système abstrait.

I.1.7.a Modèle complet

Considérons dans un premier temps la vibration de la corde dans un plan, en prenant en compte tous les phénomènes physiques mentionnés jusqu'ici, grâce aux modèles écrits petit à petit. Le déplacement transversal u_c est couplé par les équations de Timoshenko à l'angle de cisaillement φ_c mais aussi par le MGE au déplacement longitudinal v_c (voir la figure I.29). La vibration transversale subit un amortissement de type viscoélastique avec des coefficients R_u et η_u , ainsi que la vibration longitudinale avec les coefficients R_v et η_v , et enfin l'angle de cisaillement avec les coefficients R_φ et η_φ , pour tenir compte de façon simple de son amortissement interne. Le terme modélisant le fait que l'amortissement dépend de la fréquence est associé à la partie linéaire modélisant la propagation d'onde dans l'équation (terme en $-\Delta$). Enfin, le système est soumis à un second membre S (destiné à devenir la force issue du couplage avec le marteau) orienté selon la direction verticale, c'est à dire selon l'inconnue u_c .

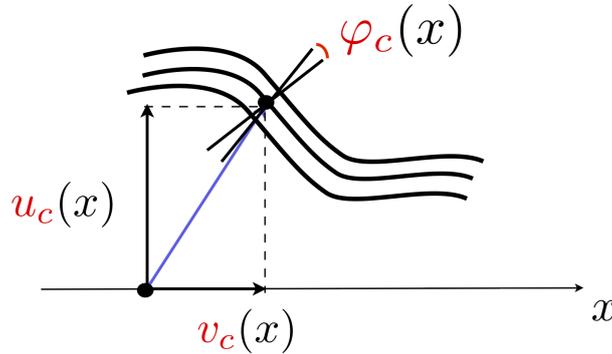


FIGURE I.29 – Schéma des inconnues du modèle complet planaire : déplacement transversal vertical u_c , déplacement longitudinal v_c , et angle de cisaillement φ_c .

Pour terminer, les conditions aux limites sont les conditions simplement supportées, c'est à dire déplacement nul, moment nul, traduites sur les inconnues mises en jeu. Le système s'écrit :

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} + 2 \rho A R_u \frac{\partial u_c}{\partial t} - 2 T_0 \eta_u \frac{\partial^3 u_c}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial u_c}{\partial x} - (EA - T_0) \frac{\frac{\partial u_c}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u_c}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)^2}} \right] + AG\kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_c - \frac{\partial u_c}{\partial x} \right) = S, \\ \rho A \frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2} + 2 \rho A R_v \frac{\partial v_c}{\partial t} - 2 EA \eta_v \frac{\partial^3 v_c}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial v_c}{\partial x} - (EA - T_0) \frac{\left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial u_c}{\partial x}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v_c}{\partial x}\right)^2}} \right] = 0, \\ \rho I \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial t^2} + 2 \rho I R_\varphi \frac{\partial \varphi_c}{\partial t} - EI(1 + 2 \eta_\varphi \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial x^2} + AG\kappa \left(\varphi_c - \frac{\partial u_c}{\partial x} \right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_c(x=0, t) = u_c(x=L, t) = v_c(x=0, t) = v_c(x=L, t) = \partial_x \varphi_c(x=0, t) = \partial_x \varphi_c(x=L, t) = 0, \\ u_c(x, t=0) = \partial_t u_c(x, t=0) = v_c(x, t=0) = \partial_t v_c(x, t=0) = \varphi_c(x, t=0) = \partial_t \varphi_c(x, t=0) = 0. \end{cases}$$

Ce système peut être généralisé aux mouvements non planaires, en prenant en compte les deux polarisations et les deux angles qui leur sont associés afin de modéliser la raideur, mais nous ne développons pas ici le système. Il sera pris en compte dans l'écriture unifiée de tous les modèles de corde dans le paragraphe qui vient.

I.1.7.b Ecriture unifiée des modèles de corde

Il est intéressant de regrouper sous une même forme tous les modèles de corde que nous allons utiliser. D'une part, ceci va nous permettre de montrer des propriétés communes, notamment la dissipation d'une énergie et les estimations a priori. D'autre part, la forme que nous allons adopter distinguera clairement la partie linéaire et la partie non linéaire du système. Ceci est motivé par le fait que du point de vue numérique, il existe des outils très puissants pour discrétiser les systèmes linéaires (nous pensons concrètement aux θ -schémas, voir paragraphe II.1.2), tandis que nous serons amenés à développer nous-mêmes des schémas adaptés pour les systèmes non linéaires. Nous souhaiterons alors utiliser sur chaque partie du système un schéma qui lui est adapté, afin d'obtenir de bonnes performances, notamment en matière de dispersion numérique mais aussi de condition de stabilité. Notons $\mathbf{q}(x, t) : [0, L] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ le vecteur des inconnues, qui prend ses valeurs dans \mathbb{R}^N . Nous considérons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}
 \partial_t^2 \mathbf{M} \mathbf{q} + \partial_t (\mathbf{R} \mathbf{q} - \partial_x (\mathbf{H} \partial_x \mathbf{q})) - \partial_x (\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q})) + \mathbf{C} \mathbf{q} + {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} & = \mathbf{S}(x, t) \quad (\text{I.1.144a}) \\
 q_k(x=0, t) = q_k(x=L, t) = 0, \forall k \in \mathcal{I}_D, & (\text{I.1.144b}) \\
 \partial_x q_k(x=0, t) = \partial_x q_k(x=L, t) = 0, \forall k \in \mathcal{I}_N, & (\text{I.1.144c}) \\
 \mathbf{q}(x, t=0) = \mathbf{q}_0(x), \quad \partial_t \mathbf{q}(x, t=0) = \mathbf{q}_1(x). & (\text{I.1.144d})
 \end{cases}$$

où \mathbf{M} , \mathbf{R} , \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{H} sont des matrices $N \times N$ avec \mathbf{A} , \mathbf{M} et \mathbf{C} symétriques, \mathbf{R} et \mathbf{H} positives, et $\mathcal{U} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle qui rend compte de la partie non linéaire du système et qui s'annule à l'origine. Les ensembles \mathcal{I}_D et \mathcal{I}_N partitionnent $[1, N]$ entre les deux types de conditions aux limites sur les inconnues : Dirichlet homogène et Neumann homogène.

Tous les modèles de corde écrits précédemment pourront être résumés sous cette forme, sauf Euler-Bernoulli. En effet, précisons pour chaque modèle comment on se ramène à ce système.

Equation de corde vibrante

On pose $N = 1$, $\mathbf{q} = u_c$, $\mathcal{I}_D = \{1\}$, $\mathcal{I}_N = \emptyset$, et les matrices sont des scalaires :

$$\mathbf{M} = \rho A, \quad \mathbf{A} = T_0, \quad \mathbf{R} = 2\rho A R_u, \quad \mathbf{H} = 2T_0 \eta_u, \quad \mathbf{B} = \mathbf{C} = 0, \quad \mathcal{U} = 0. \quad (\text{I.1.145})$$

Système de Timoshenko (équation de corde raide linéaire planaire)

On pose $N = 2$, $\mathbf{q} = (u_c, \varphi_c)$, $\mathcal{I}_D = \{1\}$, $\mathcal{I}_N = \{2\}$, et :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} T_0 + AG\kappa & 0 \\ 0 & EI \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -AG\kappa \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & AG\kappa \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = 0, \quad (\text{I.1.146})$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2\rho A R_u & 0 \\ 0 & 2\rho I R_\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2T_0 \eta_u & 0 \\ 0 & 2EI \eta_\varphi \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.147})$$

Modèle Géométriquement Exact (système de corde non linéaire planaire)

On pose $N = 2$, $\mathbf{q} = (u_c, v_c)$, $\mathcal{I}_D = \{1, 2\}$, $\mathcal{I}_N = \emptyset$, et :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho A \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & EA \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2\rho A R_u & 0 \\ 0 & 2\rho A R_v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2T_0 \eta_u & 0 \\ 0 & 2EA \eta_v \end{pmatrix}, \quad (\text{I.1.148})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} = 0, \quad \mathcal{U}(u, v) = (EA - T_0) \left[\frac{u^2}{2} + (1+v) - \sqrt{u^2 + (1+v)^2} \right]. \quad (\text{I.1.149})$$

Système de corde non linéaire planaire approché

On pose $N = 2$, $\mathbf{q} = (u_c, v_c)$, $\mathcal{I}_D = \{1, 2\}$, $\mathcal{I}_N = \emptyset$, et :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho A \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & EA \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2\rho A R_u & 0 \\ 0 & 2\rho A R_v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2T_0 \eta_u & 0 \\ 0 & 2EA \eta_v \end{pmatrix}, \quad (\text{I.1.150})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} = 0, \quad \mathbf{U}(u, v) = (EA - T_0) \left[\frac{u^2 v}{2} + \frac{u^4}{8} \right]. \quad (\text{I.1.151})$$

Système de corde non linéaire non planaire

On pose $N = 3$, $\mathbf{q} = (\bar{u}_c, \tilde{u}_c, v_c)$, $\mathcal{I}_D = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{I}_N = \emptyset$, et :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & \rho A \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} T_0 & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & 0 \\ 0 & 0 & EA \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{C} = 0, \quad (\text{I.1.152})$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2\rho A \bar{R}_u & 0 & 0 \\ 0 & 2\rho A \tilde{R}_u & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho A R_v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2T_0 \bar{\eta}_u & 0 & 0 \\ 0 & 2T_0 \tilde{\eta}_u & 0 \\ 0 & 0 & 2EA \eta_v \end{pmatrix}, \quad (\text{I.1.153})$$

$$\mathbf{U}(\bar{u}, \tilde{u}, v) = (EA - T_0) \left[\frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{\tilde{u}^2}{2} + (1 + v) - \sqrt{\bar{u}^2 + \tilde{u}^2 + (1 + v)^2} \right]. \quad (\text{I.1.154})$$

Modèle de corde raide non linéaire planaire

On pose $N = 3$, $\mathbf{q} = (u_c, v_c, \varphi_c)$, $\mathcal{I}_D = \{1, 2\}$, $\mathcal{I}_N = \{3\}$, et :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} T_0 + AG\kappa & 0 & 0 \\ 0 & EA & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -AG\kappa \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.1.155})$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AG\kappa \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2\rho A R_u & 0 & 0 \\ 0 & 2\rho A R_v & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho I R_\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2T_0 \eta_u & 0 & 0 \\ 0 & 2EA \eta_v & 0 \\ 0 & 0 & 2EI \eta_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}(u, v) = (EA - T_0) \left[\frac{u^2}{2} + (1 + v) - \sqrt{u^2 + (1 + v)^2} \right]. \quad (\text{I.1.156})$$

Modèle de corde raide non linéaire non planaire

On doit prendre en compte deux angles pour modéliser la raideur des deux directions de vibration transversales : on pose $N = 5$, $\mathbf{q} = (\bar{u}_c, \tilde{u}_c, v_c, \bar{\varphi}_c, \tilde{\varphi}_c)$, $\mathcal{I}_D = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{I}_N = \{4, 5\}$, et

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} T_0 + AG\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_0 + AG\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI \end{pmatrix}, \quad (\text{I.1.157})$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2\rho A \bar{R}_u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\rho A \tilde{R}_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho A R_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\rho I \bar{R}_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\rho I \tilde{R}_\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2T_0 \bar{\eta}_u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2T_0 \tilde{\eta}_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2EA \eta_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2EI \bar{\eta}_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2EI \tilde{\eta}_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -AG\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -AG\kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & AG\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & AG\kappa \end{pmatrix}, \quad (\text{I.1.158})$$

$$\mathbf{U}(\bar{u}, \tilde{u}, v) = (EA - T_0) \left[\frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{\tilde{u}^2}{2} + (1 + v) - \sqrt{\bar{u}^2 + \tilde{u}^2 + (1 + v)^2} \right]. \quad (\text{I.1.159})$$

REMARQUE I.1.9

Les variantes approchées des trois derniers modèles existent également et consistent à remplacer \mathcal{U} par la fonctionnelle approchée que l'on obtient en reproduisant la méthode vue en I.1.3.c.

I.1.7.c Conservation ou dissipation d'une énergie, estimations a priori

Sous certaines conditions sur les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} ainsi que sur la fonctionnelle \mathcal{U} , tout système de la forme (I.1.144), possède une énergie qui est conservée si $\mathbf{R} = \mathbf{H} = 0$, ou montre une décroissance d'énergie si les matrices \mathbf{R} et \mathbf{H} sont positives. Ceci permet de montrer des bornes a priori sur toute solution au système. Nous notons par un point la dérivée en temps pour simplifier les notations dans le prochain paragraphe.

Les hypothèses que nous serons amenés à supposer à propos des matrices et de \mathcal{U} sont rassemblées ci dessous. Nous préciserons au fur et à mesure quelles hypothèses sont nécessaires, et nous les supposerons acquises pour la suite. Les premières hypothèses nous permettront d'écrire que le système possède une énergie constituée de la somme de termes positifs, qui décroît au cours du temps. Les autres hypothèses sont plus liées à l'établissement de majorations a priori et à l'écriture de la formulation variationnelle.

$$\mathbf{A}, \mathbf{M} \text{ et } \mathbf{C} \text{ sont des matrices symétriques} \quad (\mathcal{H1})$$

$$\mathbf{M} \text{ est une matrice définie positive} \quad (\mathcal{H2})$$

$$\mathbf{R} \text{ et } \mathbf{H} \text{ sont des matrices positives} \quad (\mathcal{H3})$$

$$(\mathbf{B} \mathbf{q})_k = 0, \quad \forall k \in \mathcal{I}_N \quad (\mathcal{H4})$$

La matrice \mathbf{A} peut être décomposée comme une somme $\mathbf{A}_{stab} + \mathbf{A}_{coupl}$ telle que :

$$\text{la matrice } \begin{pmatrix} \mathbf{C} & {}^t\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}_{coupl} \end{pmatrix} \text{ est positive} \quad (\mathcal{H5})$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{A}_{stab} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \mathcal{U}(\mathbf{p}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^N \quad (\mathcal{H6})$$

$$\text{Il existe } K > 0, \quad \frac{1}{2} \mathbf{A}_{stab} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \mathcal{U}(\mathbf{p}) \geq K |\mathbf{p}|^2, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^N \quad (\mathcal{H7})$$

$$\text{Il existe } M > 0, \quad |\nabla \mathcal{U}(\mathbf{p})| \leq M (1 + |\mathbf{p}|), \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^N \quad (\mathcal{H8})$$

THÉORÈME I.1.9 (Conservation ou décroissance de l'énergie du système de corde)

Supposons que les matrices \mathbf{A} , \mathbf{M} , \mathbf{C} vérifient l'hypothèse (H1). Alors toute solution \mathbf{q} au système (I.1.144) vérifie l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_c(t) = [\mathbf{B} \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}}]_0^L - \int_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}} \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}} + \int_0^L \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad (\text{I.1.160})$$

où l'énergie du système de corde est définie comme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c(t) = & \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} \cdot \partial_x \mathbf{q} + \int_0^L \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q}) + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{C} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{q} \cdot \partial_x \mathbf{q} + \frac{1}{2} \int_0^L {}^t\mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}. \quad (\text{I.1.161}) \end{aligned}$$

Si de plus, la matrice \mathbf{B} vérifie la propriété (H4) : $(\mathbf{B}\mathbf{q})_k = 0, \forall k \in \mathcal{I}_N$, alors l'énergie vérifie :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_c(t) = \int_0^L \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \int_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}} \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}}. \quad (\text{I.1.162})$$

DÉMONSTRATION. Soit \mathbf{q} une solution de (I.1.144). Prenons le produit scalaire (dans \mathbb{R}^N) du système (I.1.144) par $\dot{\mathbf{q}}$ et intégrons sur l'espace $[0, L]$:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \int_0^L \partial_x [\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q}) + \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}}] \cdot \dot{\mathbf{q}} + \int_0^L \mathbf{C} \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \int_0^L {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = - \int_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \int_0^L \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \\ & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right] + \int_0^L [\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q}) + \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}}] \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}} - [\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q}) + \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}}] \cdot \dot{\mathbf{q}} \Big|_0^L \\ & \quad + \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{C} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \right] + \int_0^L {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = - \int_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \int_0^L \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \\ & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} \cdot \partial_x \mathbf{q} \right] + \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{q} \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}} + \frac{d}{dt} \int_0^L \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q}) + \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{C} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \right] \\ & \quad - [\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q}) + \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}}] \cdot \dot{\mathbf{q}} \Big|_0^L + \int_0^L {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = - \int_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}} \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}} + \int_0^L \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

où le passage à la dernière ligne utilise l'hypothèse (H1). Or, comme \mathcal{I}_D et \mathcal{I}_N forment une partition de $[1, N]$, les termes de bord qui multiplient la variable avec sa dérivée en espace sont forcément nuls (on rappelle que \mathcal{U} s'annule à l'origine) :

$$[\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q}) + \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}}] \cdot \dot{\mathbf{q}} \Big|_0^L = 0$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{q} \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}} + \int_0^L {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{q} \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}} + \int_0^L \partial_x \mathbf{q} \cdot \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} \\ & = \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \mathbf{B} \mathbf{q} \cdot \partial_x \mathbf{q} \right] \\ & = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{q} \cdot \partial_x \mathbf{q} + \frac{1}{2} \int_0^L {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \right]. \end{aligned}$$

Ceci permet de montrer l'égalité (I.1.160). Si de plus, la matrice \mathbf{B} vérifie la propriété (H4), alors le dernier terme de bord $[\mathbf{B} \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}}]_0^L$ est éliminé et on montre la relation de l'énergie (II.1.4). □

THÉORÈME I.1.10 (Positivité de l'énergie de corde)

Supposons en plus la propriété (H2) et que \mathbf{A} peut être décomposée comme une somme $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{stab} + \mathbf{A}_{coupl}$ telle que (H5) et (H6) sont vérifiées. Alors l'énergie $\mathcal{E}_c(t)$ est positive pour tout temps.

DÉMONSTRATION. Réécrivons l'énergie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c(t) = & \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}}_{\text{① énergie cinétique}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{A}_{stab} \partial_x \mathbf{q} \cdot \partial_x \mathbf{q} + \int_0^L \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q})}_{\text{② partie de l'énergie potentielle}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{A}_{coupl} \partial_x \mathbf{q} \cdot \partial_x \mathbf{q} + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{C} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{q} \cdot \partial_x \mathbf{q} + \frac{1}{2} \int_0^L {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}_{\text{③ partie de l'énergie potentielle}} \end{aligned}$$

La positivité de ① vient directement de (H2). Quant à ②, elle découle précisément de la condition (H6). Enfin, en posant :

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \partial_x \mathbf{q} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & {}^t \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}_{coupl} \end{pmatrix}$$

la partie ③ se réécrit $\frac{1}{2} \int_0^L \mathbb{K} U \cdot U$ et c'est la condition (H5) qui en assure la positivité. □

Il est alors possible d'utiliser ces identités concernant l'énergie pour établir une borne en semi norme H^1 à priori sur toute solution de (I.1.144), en ajoutant quelques hypothèses concernant le système d'équations.

THÉORÈME I.1.11 (Estimations a priori)

Supposons en plus les hypothèses (H2), (H3) et (H7). Alors pour tout instant $t \geq 0$, il existe $M^- > 0$ tel que pour l'énergie \mathcal{E}_c et pour toute solution \mathbf{q} de (I.1.144) :

$$\mathcal{E}_c(t) \leq \left[\sqrt{\mathcal{E}_c(0)} + \frac{1}{\sqrt{2M^-}} \int_0^t \|\mathbf{S}(\cdot, s)\|_{L^2} ds \right]^2, \quad (\text{I.1.163})$$

$$\|\dot{\mathbf{q}}(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \sqrt{\frac{2}{M^-}} \left[\sqrt{\mathcal{E}_c(0)} + \frac{1}{\sqrt{2M^-}} \int_0^t \|\mathbf{S}(\cdot, s)\|_{L^2} ds \right], \quad (\text{I.1.164})$$

$$\|\mathbf{q}(\cdot, t)\|_{H^1} \leq \frac{1}{\sqrt{K}} \left[\sqrt{\mathcal{E}_c(0)} + \frac{1}{\sqrt{2M^-}} \int_0^t \|\mathbf{S}(\cdot, s)\|_{L^2} ds \right], \quad (\text{I.1.165})$$

$$\|\mathbf{q}(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|\mathbf{q}_0\|_{L^2} + \sqrt{\frac{2}{M^-}} t \sqrt{\mathcal{E}_c(0)} + \frac{1}{M^-} \int_0^t (t-s) \|\mathbf{S}(\cdot, s)\|_{L^2} ds, \quad (\text{I.1.166})$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c(0) = & \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{M} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_1 + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{A} \partial_x \mathbf{q}_0 \cdot \partial_x \mathbf{q}_0 + \int_0^L \mathbf{U}(\partial_x \mathbf{q}_0) + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{C} \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{q}_0 \cdot \partial_x \mathbf{q}_0 + \frac{1}{2} \int_0^L {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0. \end{aligned} \quad (\text{I.1.167})$$

DÉMONSTRATION. On part de l'expression (II.1.4) et on utilise (H3) :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_c(t) = \int_0^L \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \int_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}} \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}} \leq \int_0^L \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{q}} \leq \|\mathbf{S}\|_{L^2} \|\dot{\mathbf{q}}\|_{L^2} \quad (\text{I.1.168})$$

puis on écrit, par positivité des termes ② et ③ de l'énergie, que

$$\mathcal{E}_c(t) \geq \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{I.1.169})$$

Or, \mathbf{M} étant définie positive, il existe un réel positif M^- tel que $M^- \int_0^L \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \leq \int_0^L \mathbf{M} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$, $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_c(t) \geq \frac{M^-}{2} \int_0^L \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \Rightarrow \|\dot{\mathbf{q}}\|_{L^2} \leq \sqrt{\frac{2}{M^-}} \sqrt{\mathcal{E}_c(t)} \quad (\text{I.1.170})$$

On remarque ensuite que

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 2\sqrt{\mathcal{E}} \frac{d\sqrt{\mathcal{E}}}{dt} \text{ pour établir que } 2\sqrt{\mathcal{E}} \frac{d\sqrt{\mathcal{E}}}{dt} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{M^-}} \sqrt{\mathcal{E}} \|\mathbf{S}\|_{L^2} \quad (\text{I.1.171})$$

On intègre alors en temps entre 0 et t et on utilise la définition de $\mathcal{E}_c(0)$:

$$\sqrt{\mathcal{E}_c(t)} - \sqrt{\mathcal{E}_c(0)} \leq \frac{1}{\sqrt{2M^-}} \int_0^t \|\mathbf{S}\|_{L^2} ds \quad (\text{I.1.172})$$

ce qui mène à l'inégalité (I.1.163) sans difficulté, qui permet de remonter à (I.1.164) en utilisant (I.1.170). Pour la troisième inégalité, la positivité des termes ① et ③ de l'énergie montre que

$$\frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{A}_{stab} \partial_x \mathbf{q} \cdot \partial_x \mathbf{q} + \int_0^L \mathbf{U}(\partial_x \mathbf{q}) \leq \mathcal{E}_c(t) \quad (\text{I.1.173})$$

Or, l'hypothèse (H7) nous permet de retrouver (I.1.165). Enfin, pour la dernière inégalité, on écrit que

$$\mathbf{q}(x, t) = \mathbf{q}_0(x) + \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(x, s) ds \Rightarrow \|\mathbf{q}(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|\mathbf{q}_0\|_{L^2} + \int_0^t \|\dot{\mathbf{q}}(\cdot, s)\|_{L^2} ds \quad (\text{I.1.174})$$

et l'on utilise alors (I.1.164) ainsi qu'une intégration par parties sur le terme source.

□

REMARQUE I.1.10

Pour les inconnues correspondant à des conditions aux bords de Dirichlet homogène, il est possible d'utiliser l'inégalité de Poincaré pour écrire une borne en norme L^2 qui ne dépend pas du temps à partir de (I.1.165).

I.1.7.d Vérification des hypothèses par les modèles de corde

Les hypothèses $(\mathcal{H}1)$, $(\mathcal{H}2)$, $(\mathcal{H}3)$ et $(\mathcal{H}4)$ sont très faciles à vérifier pour tous les modèles de corde mentionnés plus haut. Nous nous contenterons ici de montrer pour chacun les deux hypothèses $(\mathcal{H}5)$ et $(\mathcal{H}7)$ puisque cette dernière implique $(\mathcal{H}6)$.

Equation de corde vibrante

Ce cas trivial vérifie les hypothèses en posant $\mathbf{A}_{stab} = T_0$ et $\mathbf{A}_{coupl} = 0$. L'inégalité $(\mathcal{H}7)$ est en fait une égalité, avec $K = T_0/2$.

Système de Timoshenko

On pose $\mathbf{A}_{stab} = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & EI \end{pmatrix}$. Alors l'hypothèse $(\mathcal{H}5)$ est vérifiée puisque les valeurs propres de la matrice sont 0 et $2AG\kappa$; et l'hypothèse $(\mathcal{H}7)$ est vérifiée avec $K = \min(T_0, EI)/2$.

Système de corde non linéaire planaire

On pose $\mathbf{A}_{stab} = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & EA \end{pmatrix}$. L'hypothèse $(\mathcal{H}5)$ est trivialement vérifiée puisque la matrice est nulle. Pour l'hypothèse $(\mathcal{H}7)$, on montre qu'elle est vérifiée avec $K = T_0/2$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \left[\sqrt{u^2 + (1+v)^2} - 1 \right]^2 \geq 0 \\ & u^2 + (1+v)^2 - 2\sqrt{u^2 + (1+v)^2} + 1 \geq 0 \\ & u^2 + (1+v)^2 + 1 \geq 2\sqrt{u^2 + (1+v)^2} \\ & u^2 + 1 + 2v + v^2 + 1 \geq 2\sqrt{u^2 + (1+v)^2} \\ & u^2 + v^2 \geq 2\sqrt{u^2 + (1+v)^2} - 2(1+v) \\ & \frac{EA - T_0}{2}u^2 + \frac{EA - T_0}{2}v^2 \geq (EA - T_0) \left[\sqrt{u^2 + (1+v)^2} - (1+v) \right] \\ & \underbrace{\frac{EA}{2}u^2 + \frac{EA}{2}v^2 - (EA - T_0) \left[\sqrt{u^2 + (1+v)^2} - (1+v) \right]}_{\frac{1}{2}\mathbf{A}_{stab} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + \mathcal{U}(\mathbf{q})} \geq \frac{T_0}{2}u^2 + \frac{T_0}{2}v^2 \\ & \qquad \qquad \qquad \geq \frac{T_0}{2} |\mathbf{q}|^2 \end{aligned}$$

Système de corde non linéaire planaire approché

On pose $\mathbf{A}_{stab} = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & EA \end{pmatrix}$. L'hypothèse $(\mathcal{H}5)$ est trivialement vérifiée puisque la matrice est nulle. Pour l'hypothèse $(\mathcal{H}7)$, on montre qu'elle est vérifiée avec $K = T_0/2$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \cancel{\frac{T_0}{2}}u^2 + \frac{EA}{2}v^2 + (EA - T_0) \left[\frac{u^2v}{2} + \frac{u^4}{8} \right] & \geq \cancel{\frac{T_0}{2}}u^2 + \frac{T_0}{2}v^2 \\ \frac{EA - T_0}{2} \left[v^2 + u^2v + \frac{u^4}{4} \right] & \geq 0 \end{aligned}$$

cette dernière inégalité est vraie car à u constant, c'est une parabole en v qui a le discriminant

$$\Delta(u) = (u^2)^2 - 4\left(\frac{u^4}{4}\right) < 0$$

et qui passe par une valeur positive en 0, donc est toujours positive.

Autres systèmes

On montre que les autres systèmes vérifient les hypothèses $(\mathcal{H}5)$ et $(\mathcal{H}7)$ en combinant ou en adaptant les démonstrations évoquées ci dessus.

I.1.7.e Formulation variationnelle

Dans l'optique de la discrétisation de ces systèmes de corde, écrivons dès à présent la formulation variationnelle. Introduisons l'espace fonctionnel naturellement associé au système d'équations (I.1.144), à savoir

$$\mathcal{Q}_D = \left\{ \mathbf{q} \in (H^1([0, L]))^N, \quad q_k(0) = q_k(L) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{I}_D \right\} \quad (\text{I.1.175})$$

La formulation variationnelle du système (I.1.144) s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{q} \in \mathcal{Q}_D \text{ tel que } \forall \mathbf{q}^* \in \mathcal{Q}_D, \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_0^L \mathbf{M} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^* + \frac{d}{dt} \int_0^L \mathbf{R} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^* + \frac{d}{dt} \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \mathbf{q} \cdot \partial_x \mathbf{q}^* + \int_0^L (\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q})) \cdot \partial_x \mathbf{q}^* \\ + \int_0^L {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^* + \int_0^L \mathbf{C} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^* = \int_0^L \mathbf{S} \cdot \mathbf{q}^*. \end{aligned} \quad (\text{I.1.176})$$

La réinterprétation du système (I.1.144) sera faite en intégrant par parties la formulation variationnelle ci dessus, ce qui conduira à écrire des conditions aux limites de Neumann pour les inconnues de \mathcal{I}_N .

REMARQUE I.1.11 (Sur la définition de \mathcal{Q}_D)

L'hypothèse (H8) nous permet de nous assurer que

$$\nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q}) \in (L^2([0, L]))^N, \quad \forall \mathbf{q} \in (H^1([0, L]))^N, \quad (\text{I.1.177})$$

ce qui donne un sens à la formulation variationnelle pour tout élément de \mathcal{Q}_D .



ette section a permis de regrouper tous les modèles de corde précédemment établis (sauf Euler-Bernoulli) sous le même système d'équations :

$$\partial_t^2 \mathbf{M} \mathbf{q} + \partial_t (\mathbf{R} \mathbf{q} - \partial_x (\mathbf{H} \partial_x \mathbf{q})) - \partial_x (\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q})) + \mathbf{C} \mathbf{q} + {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} = \mathbf{S}(x, t)$$

Moyennant certaines hypothèses sur les matrices et la fonctionnelle \mathcal{U} qui apparaissent dans ce système, il est possible de montrer qu'une quantité positive $\mathcal{E}_c(t)$ que l'on appelle énergie vérifie

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_c(t) = \int_0^L \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \int_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}} \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}},$$

et que toute solution du système est bornée en seminorme H^1 pour tout temps :

$$|\mathbf{q}(\cdot, t)|_{H^1}^2 \leq \frac{1}{K} \left[\sqrt{\mathcal{E}_c(0)} + \frac{1}{\sqrt{2M^-}} \int_0^t \|\mathbf{S}(\cdot, t)\|_{L^2} \right]^2$$

I.2 Le marteau

L'introduction des marteaux dans la facture des instruments à claviers fut une révolution par rapport aux plectres qui ne permettent pas l'exécution de **nuances** par le musicien. Les premiers marteaux (voir page 348 de [Forss, 2010]) étaient des pièces de bois recouvertes de peau, puis furent constitués de cuir recouvert de peau et aujourd'hui de feutre, avec ou sans sous-garniture. C'est en 1838 que l'on voit l'apparition du marteau moderne, offrant une bonne homogénéité dans la tessiture, et son évolution a continué jusqu'à nos jours. Les marteaux du piano sont au nombre de 88 et sont de plus en plus petits vers l'aigu, pesant d'environ 11 g pour les notes graves et environ 4 g pour la note la plus aiguë, voir figure I.30(a). Ils sont reliés à la touche par un système de leviers articulés : la mécanique.

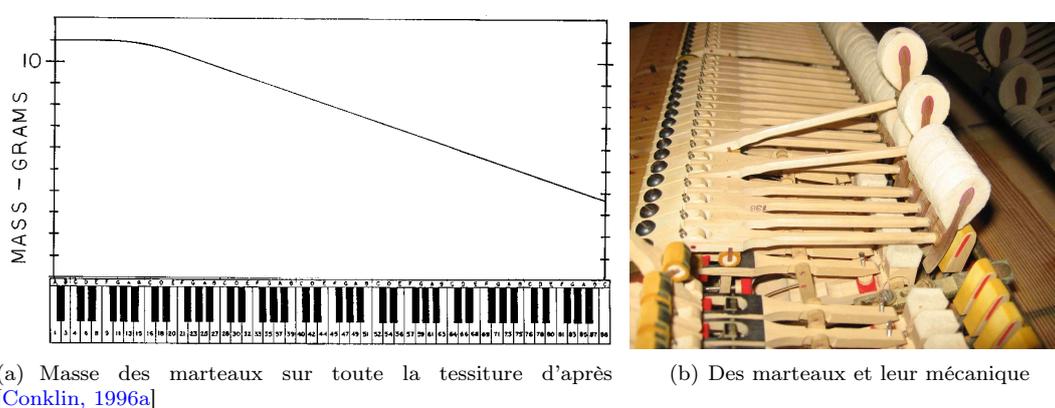


FIGURE I.30 – Photographie des marteaux en situation de jeu, et masse des marteaux le long de la tessiture.

Lors de l'enfoncement d'une touche, la course du marteau jusqu'à la corde s'effectue en deux phases : l'accélération, lors de laquelle la touche pivote autour de son axe en poussant le marteau vers le haut, puis l'échappement, où le marteau n'est plus asservi à la touche et part librement vers la corde avec une certaine vitesse, qui est de l'ordre de quelques $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Il est donc tentant de penser que la vitesse du marteau juste avant l'impact avec les cordes suffit à caractériser l'état initial du système. On trouve d'ailleurs dans [Hart et Fuller, 1934] une expérience très intéressante où les auteurs ont mis en place un dispositif de mesure de la vitesse du marteau, et montrent que les formes d'ondes du son enregistré lorsqu'un pianiste joue ne peuvent pas être distinguées (voir figure I.31) des formes d'ondes obtenues en reproduisant mécaniquement la vitesse du marteau juste avant l'impact des cordes. Cette expérience semble reléguer la question du **toucher** pianistique au simple contrôle de la vitesse d'enfoncement de la touche, comme l'illustre cette citation trouvée en conclusion de l'article :

« *The skill of the pianist depends upon the way in which he combines tones, making certain tones stand out by dynamic emphasis and making others stand out by agogic or timing emphasis. There is ample justification for a pianist's use of varied technique of striking. A loose wrist gives him greater control of the shading of the force of the blow delivered to the string than is possible in the clumsy touch of the novice. The use of a stiff wrist allows him to play loud notes with less effort. Beyond enabling him to control loudness more precisely and easily the skilled performer's technique of striking means nothing. [...] The records reproduced in this paper are but representative of many more in the writers' files, all of which bear out the conclusion that though theoretically manual control of the tone of a single note is possible, actually the pianist can do nothing to vary his tone except to vary the final hammer velocity; and that in so doing he inevitably varies the loudness too.* » [Hart et Fuller, 1934]

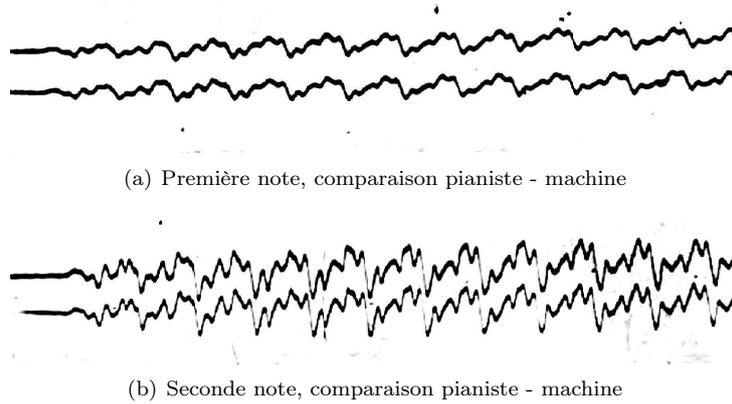


FIGURE I.31 – Comparaison des formes d’onde de pression obtenues lorsqu’un pianiste joue et lorsqu’on reproduit mécaniquement la vitesse d’attaque du marteau. Essai reproduit sur deux notes différentes. Extrait de [Hart et Fuller, 1934]

Cette conclusion a été très controversée, en particulier parce que le dispositif de mesure utilisé était attaché fermement au manche de marteau avec un bout de carton, ce qui empêchait le manche de rentrer en vibration. Or il semble que les oscillations du manche jouent un rôle crucial dans les différents **couleurs** du son de piano, en particulier parce qu’elles influencent l’angle d’attaque du marteau (et donc font varier les propriétés du feutre utilisé) mais aussi parce qu’elles continuent à appliquer une force lors du contact marteau - corde, ou encore parce qu’elles imposent au marteau un mouvement dans l’axe longitudinal de la corde (voir [Askenfelt et Jansson, 1991]).

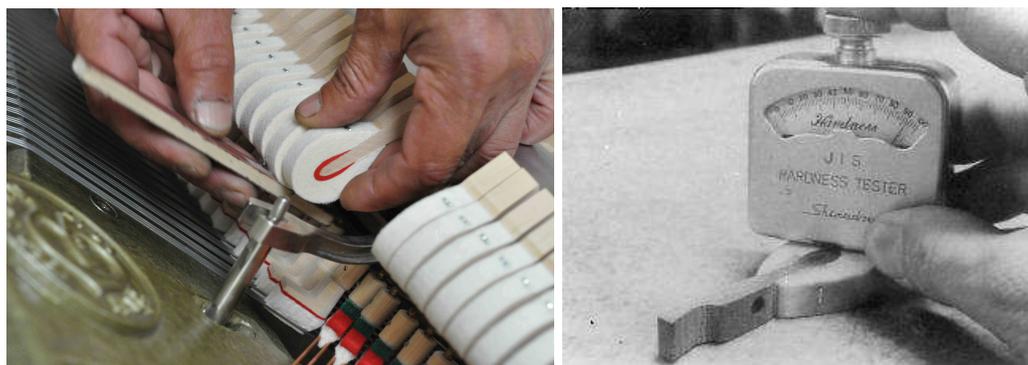
I.2.1 Propriétés viscoélastiques du feutre

La qualité du feutre et ses propriétés influencent énormément le son du piano. Une technique très courante lors de l’entretien régulier d’un piano consiste à ajuster les propriétés du feutre de chaque marteau afin d’obtenir un son satisfaisant et homogène sur la **tessiture**. Cette pratique s’appelle l’harmonisation et consiste à limer les marteaux si on veut retrouver une dureté perdue ou à piquer le feutre avec des aiguilles adaptées pour lui redonner de la souplesse. L’accordeur peut mesurer la dureté des marteaux avec un duromètre (voir figure I.32(b)). L’effet de l’harmonisation sur le son est indéniable, la figure I.33 témoigne de son influence sur les formes d’ondes et le spectre de la vitesse de corde.

Il est possible de procéder à des mesures afin de quantifier la relation entre écrasement du feutre et force résultante. La figure I.34 montre le résultat de telles mesures pour trois marteaux ayant subi différentes harmonisations. Les deux observations majeures sont la non linéarité des courbes obtenues et l’hysteresis : les courbes sont différentes selon que le marteau est en phase d’écrasement ou de « dés-écrasement ». Un modèle couramment mentionné dans la littérature pour approcher la non linéarité de ces courbes est le suivant, où la notation $\cdot^{\mathcal{H}}$ signifie que l’inconnue est associée au marteau (hammer) :

$$F^{\mathcal{H}} = K^{\mathcal{H}} e^p \quad (\text{I.2.1})$$

où $F^{\mathcal{H}}$ est la force résultante, e l’écrasement du feutre (distance entre le haut du marteau au repos et le haut du marteau écrasé), tandis que $K^{\mathcal{H}}$ et p sont des réels positifs qui caractérisent respectivement la dureté du marteau et sa non linéarité. Ce modèle est par exemple utilisé dans [Boutillon, 1988] ou encore dans [Hall et Askenfelt, 1988], où les auteurs précisent qu’étant donnée la géométrie dans laquelle se trouve le feutre collé autour de l’âme du marteau, même si la loi de comportement du matériau était linéaire, la relation entre écrasement et force donnerait $p = 1,5$. Ils interpolent la valeur de p pour plusieurs marteaux provenant de pianos différents, et trouvent des valeurs allant de 1,5 à 3,5. De même, on trouve des valeurs autour de 3,0 dans [Giordano et II, 2000]. Ces derniers mesurent également des valeurs de $K^{\mathcal{H}}$ pour différents marteaux, et trouvent une variabilité énorme : entre 10^9 et 10^{12} . La même disparité est observée dans les valeurs utilisées dans [Chaigne et Askenfelt, 1994b].



(a) Limage de marteaux

(b) Mesure de dureté d'un marteau avec un durromètre, extrait de [Askenfelt et al., 1990]



(c) Piquage de marteaux

(d) Piquage de marteaux

FIGURE I.32 – Différentes étapes de l'harmonisation des marteaux.

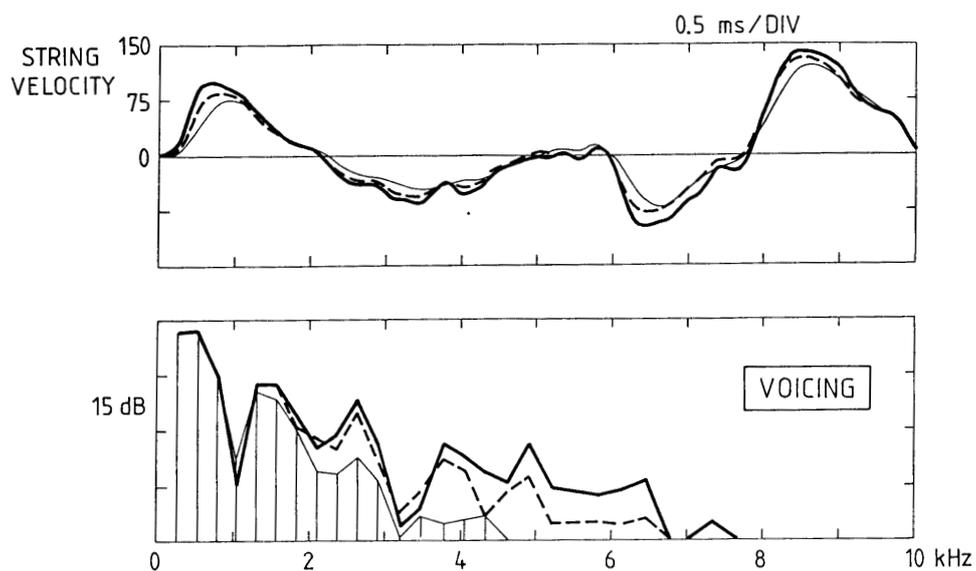


FIGURE I.33 – Vitesse (en haut) et spectre (en bas) de la corde C4 à différentes étapes de l'harmonisation : ligne grasse : trop dur, ligne pointillée : normal et ligne fine : trop mou. La touche est actionnée par un pendule mécanique afin d'assurer la reproductibilité des mesures. Extrait de [Askenfelt et Jansson, 1993]

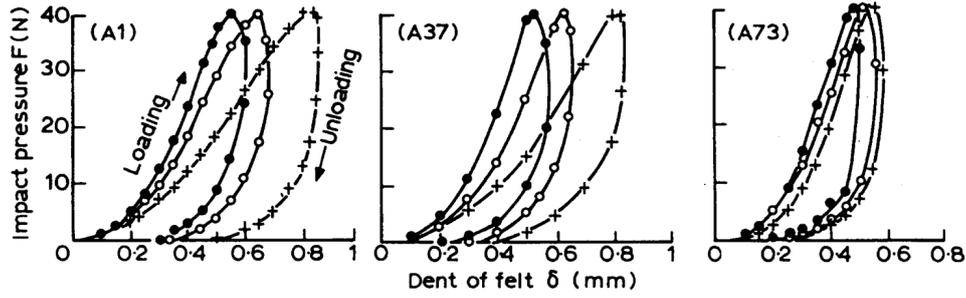


FIGURE I.34 – Force en fonction de l'écrasement du feutre pour différentes harmonisation des marteaux des notes A1, A37 et A73. ● hard ; ○ medium ; + soft. Extrait de [Yanagisawa et Nakamura, 1982]

L'hysteresis témoigne de la mémoire du matériau, c'est à dire du fait que l'état du matériau dépend de son passé. Plusieurs mécanismes sont avancés pour expliquer ce comportement, comme un glissement irréversible des fibres de feutre les unes sur les autres, ou encore la propagation d'ondes à l'intérieur du feutre, qui ont un effet retardé lorsqu'elles se reflètent sur l'âme du marteau et qu'elles reviennent à la surface (voir [Giordano et II, 2000]). Peu de modèles prennent en compte cet effet. On trouve dans [Boutillon, 1988] l'idée de changer la valeur de p selon que le marteau est en phase d'écrasement ou de décompression, mais ce modèle s'éloigne d'une modélisation physique plus qu'il ne s'en approche, en rajoutant des coefficients artificiels au modèle. Une dérivation physique d'un modèle à mémoire est faite dans [Stulov, 1995], il obtient une force qui dépend de l'état du marteau depuis le début de l'expérience et reproduit avec minutie les mesures physiques. L'auteur montre dans [Stulov, 2003] que pour des vitesses de marteau inférieures à $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, ce qui est tout à fait réaliste en situation de jeu, son modèle à mémoire se simplifie pour donner un modèle à trois paramètres :

$$F^{\mathcal{H}} = K^{\mathcal{H}} e^p + R^{\mathcal{H}} \frac{d(e^p)}{dt} \quad (\text{I.2.2})$$

où le troisième paramètre $R^{\mathcal{H}}$ est également un réel positif. Intuitivement, on comprend bien que le terme $R^{\mathcal{H}} \frac{d(e^p)}{dt}$ permette de rendre compte de l'hysteresis : si le marteau est en compression, l'écrasement croît, donc ce terme aura un signe positif, donc $F^{\mathcal{H}}$ sera supérieur à $K^{\mathcal{H}} e^p$. Dans le cas contraire, l'écrasement décroît, donc ce terme aura un signe négatif, donc $F^{\mathcal{H}}$ sera inférieur à $K^{\mathcal{H}} e^p$. Ceci permet donc de modéliser le cycle chargement / déchargement que l'on observe en figure I.34. C'est ce modèle simplifié que nous utiliserons dans la suite.

I.2.2 Interaction avec la corde

Lorsque le marteau est lancé vers la corde, nous supposons qu'il suit une trajectoire rectiligne orthogonale à la corde. Ceci est évidemment très schématisé étant donné que le marteau est en rotation autour du pivot, mais suffisant si l'on ne s'intéresse qu'au contact avec la corde et pas à la modélisation de la mécanique (voir [Hall et Askenfelt, 1988]). On appelle

$$\xi(t) \quad (\text{I.2.3})$$

l'inconnue scalaire qui représente la position d'un point choisi du marteau sur l'axe vertical de son déplacement. Le choix de ce point de référence ne modifie pas le modèle du moment qu'il se situe loin de la zone d'écrasement (typiquement, sur l'âme). La figure I.35 indique ce point en orange et l'inconnue $\xi(t)$ qui paramètre la position du marteau sur son axe. La distance entre le sommet du marteau au repos et le point de référence est notée ξ . L'interaction du marteau avec la corde est un contact unilatéral en ce sens que la seule force qui apparaît est une force de répulsion lorsque les deux objets entrent en contact. Tant que la corde est éloignée du point de référence d'une distance supérieure à ξ , les objets ne se touchent pas. Dans le cas contraire, il y a contact et il faut être capable de déterminer l'écrasement du marteau afin de calculer la force résultant du contact (en appliquant la loi (I.2.2) du paragraphe précédent). On suppose que le marteau n'est soumis qu'à cette force de contact, ce qui nous permet d'écrire en appliquant la loi fondamentale de la mécanique :

$$M^{\mathcal{H}} \frac{d^2 \xi}{dt^2}(t) = -F^{\mathcal{H}}(t). \quad (\text{I.2.4})$$

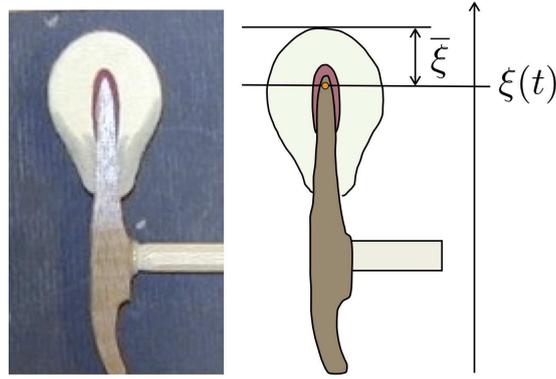


FIGURE I.35 – Photographie et schéma d'un marteau : le point de référence est dessiné en orange, son ordonnée sur l'axe est notée $\xi(t)$ et permet de connaître la position du marteau. Si la distance entre la corde et le point orange est inférieure à $\bar{\xi}$, il y a contact.

La masse $M^{\mathcal{H}}$ est une masse équivalente qui doit rendre compte de la tête du marteau mais aussi du manche et du fait que le marteau est en rotation autour du pivot (voir [Boutillon, 1988] qui trouve des valeurs de masse équivalente entre 5 et 8 g). L'équation de corde est alors soumise à un second membre qui dépend de la même force $F^{\mathcal{H}}(t)$. Bien qu'en théorie, la surface de contact s'accroisse avec l'écrasement du marteau, nous supposons un comportement simplifié : on introduit une fonction de répartition $\delta^{\mathcal{H}}$ qui peut tout aussi bien être une masse de Dirac ou une fonction régulière, et un point central de contact $x^{\mathcal{H}}$. La polarisation transversale de la corde sera alors sollicitée par $F^{\mathcal{H}}(t) \delta^{\mathcal{H}}(x - x^{\mathcal{H}})$. Afin de garder l'unification des notations d'équations de corde, on note \mathbf{e}_u le vecteur de \mathbb{R}^N dont toutes les composantes sont nulles sauf celle correspondant à la vibration transversale qui vaut 1. Alors, l'équation de corde s'écrit :

$$\partial_t^2 \mathbf{M} \mathbf{q} + \partial_t (\mathbf{R} \mathbf{q} - \partial_x (\mathbf{H} \partial_x \mathbf{q})) - \partial_x (\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q})) + {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{C} \mathbf{q} = F^{\mathcal{H}}(t) \delta^{\mathcal{H}}(x - x^{\mathcal{H}}) \mathbf{e}_u \quad (\text{I.2.5})$$

Il reste enfin à calculer la force d'interaction, c'est à dire à déterminer l'écrasement du marteau à partir de la connaissance de la position du marteau et de la corde. L'écrasement $e(t)$ doit vérifier les conditions suivantes :

- Si la corde et le marteau ne sont pas en contact, l'écrasement est nul,
- Si il y a contact, l'écrasement est la distance entre le haut du marteau s'il était au repos et le haut du marteau qui touche la corde, voir figure I.36.

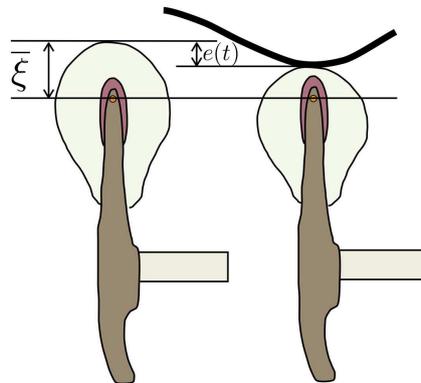


FIGURE I.36 – Vue schématique de l'écrasement du marteau $e(t)$ sur une corde.

On introduit donc une quantité $\langle u \rangle(t)$ qui désigne la position de la corde au point de contact, ou moyennée sur la surface de contact. Plus précisément, on définit :

$$\langle u \rangle(t) = \int_0^L u(x, t) \delta^{\mathcal{H}}(x - x^{\mathcal{H}}) dx \quad (\text{I.2.6})$$

Alors, on exprime l'écrasement comme une fonction de $\langle u \rangle(t) - \xi(t)$ de la façon suivante, qui est la même que [Chaigne et Askenfelt, 1994a] :

$$e(t) = \left(\bar{\xi} - d(t) \right)^+, \quad \text{où } d(t) = \langle u \rangle(t) - \xi(t). \quad (\text{I.2.7})$$

La notation $(\cdot)^+$ désigne la partie positive, c'est à dire le maximum de 0 et de la quantité. Elle permet d'assurer la nullité de l'écrasement lorsque la distance $d(t)$ entre la corde et le marteau est supérieure à $\bar{\xi}$. On utilise alors la loi (I.2.2) pour écrire :

$$F^{\mathcal{H}}(t) = K^{\mathcal{H}} \Phi(\langle u \rangle(t) - \xi(t)) + R^{\mathcal{H}} \frac{d}{dt} \Phi(\langle u \rangle(t) - \xi(t)), \quad \text{où } \Phi(d) = \left[\left(\bar{\xi} - d \right)^+ \right]^p \quad (\text{I.2.8})$$

La fonction Φ est globalement décroissante, illustrant que plus le marteau est loin de la corde, moins la force est grande. Le système complet de couplage corde / marteau s'écrit alors :

$$\left(\mathcal{S}_{m,c} \right) \begin{cases} M^{\mathcal{H}} \frac{d^2 \xi}{dt^2}(t) = -F^{\mathcal{H}}(t) & (\text{I.2.9a}) \\ F^{\mathcal{H}}(t) = K^{\mathcal{H}} \Phi(\langle u \rangle(t) - \xi(t)) + R^{\mathcal{H}} \frac{d}{dt} \Phi(\langle u \rangle(t) - \xi(t)) & (\text{I.2.9b}) \\ \partial_t^2 \mathbf{M} \mathbf{q} + \partial_t (\mathbf{R} \mathbf{q} - \partial_x (\mathbf{H} \partial_x \mathbf{q})) - \partial_x (\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q})) + {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{C} \mathbf{q} & (\text{I.2.9c}) \\ = F^{\mathcal{H}}(t) \delta^{\mathcal{H}}(x - x^{\mathcal{H}}) \mathbf{e}_u \end{cases}$$

Les conditions initiales que nous considérerons sont une corde au repos et un marteau lancé avec une vitesse initiale à une certaine distance ξ_0 sous la corde :

$$\mathbf{q}(x, t = 0) = 0, \quad \dot{\mathbf{q}}(x, t = 0) = 0, \quad (\text{I.2.10})$$

$$\xi(0) = -\xi_0, \quad \dot{\xi}(0) = v_0^{\mathcal{H}}. \quad (\text{I.2.11})$$

Enfin, les conditions aux bords pour la corde n'ont pas changé depuis le paragraphe précédent : on impose à chaque inconnue soit des conditions de Dirichlet homogène, soit Neumann homogène en partitionnant $[1, N]$ en deux sous ensembles \mathcal{I}_D et \mathcal{I}_N tels que :

$$q_i(x = 0, t) = q_i(x = L, t) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_D, \quad (\text{I.2.12})$$

$$\partial_x q_i(x = 0, t) = \partial_x q_i(x = L, t) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}_N. \quad (\text{I.2.13})$$

THÉORÈME I.2.1 (Conservation ou décroissance de l'énergie du système marteau / corde)

Toute solution de (I.2.9) vérifie :

$$\frac{d\mathcal{E}_{m,c}}{dt}(t) = - \int_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}} \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}} + R^{\mathcal{H}} \Phi'(\langle u \rangle(t) - \xi(t)) [\partial_t \langle u \rangle(t) - \dot{\xi}(t)]^2 \leq 0 \quad (\text{I.2.14})$$

où l'énergie du système marteau / corde est définie ci dessous, avec $\Psi(d) = \int_d^{+\infty} \Phi(s) ds$:

$$\mathcal{E}_{m,c}(t) = \mathcal{E}_c(t) + K^{\mathcal{H}} \Psi(\langle u \rangle(t) - \xi(t)) + \frac{M^{\mathcal{H}}}{2} \left| \dot{\xi}(t) \right|^2 \quad (\text{I.2.15})$$

où $\mathcal{E}_c(t)$ est l'énergie de la corde définie en (II.1.5)

DÉMONSTRATION. On utilise le théorème I.1.9 donnant la dissipation d'énergie sur un système de corde soumis à un second membre pour écrire d'une part que :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_c(t) = F^{\mathcal{H}}(t) \partial_t \langle u \rangle(t) - \int_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}} \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{I.2.16})$$

D'autre part, multiplions (I.2.9a) par $\dot{\xi}$:

$$M^{\mathcal{H}}\ddot{\xi}(t)\dot{\xi}(t) = -F^{\mathcal{H}}(t)\dot{\xi}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} M^{\mathcal{H}} \left| \dot{\xi}(t) \right|^2 = -F^{\mathcal{H}}(t)\dot{\xi}(t) \quad (\text{I.2.17})$$

Additionnons alors les résultats en remplaçant $F^{\mathcal{H}}(t)$ par son expression en fonction des inconnues de corde et de marteau pour démontrer l'égalité (I.2.14). De plus, Φ étant décroissante, la seconde quantité du second membre est bien négative. On remarque que l'énergie se conserve dès lors que les matrices \mathbf{R} et \mathbf{H} et le réel $R^{\mathcal{H}}$ sont nuls.

□

REMARQUE I.2.1 (*Existence et propriétés de solutions*)

La thèse de Leila Rhaouti concernant la modélisation de la timbale [Rhaouti et al., 1999] aborde (entre autres) l'interaction entre la mailloche et la membrane de la timbale de la même façon, en introduisant une fonction Φ qui va prendre en argument l'écrasement de la mailloche et venir en second membre à l'équation du déplacement de la mailloche et à l'équation de membrane. Elle étudie de façon très poussée le "problème du commissaire priseur" qui écrase la mailloche contre une surface rigide. Si l'on adapte ses résultats à notre cas où la corde est remplacée par une surface rigide, on se pose le problème, où ξ_0 se trouve égal à $\bar{\xi}$:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}(t) = F(t), \\ F(t) = K^{\mathcal{H}}\Phi(\xi(t)) + R^{\mathcal{H}} \frac{d}{dt} \Phi(\xi(t)), \\ \xi(0) = -\xi_0, \quad \dot{\xi}(0) = v_0^{\mathcal{H}}. \end{cases} \quad (\text{I.2.18})$$

Alors, elle montre que la fonction $\xi(t)$ est croissante avant d'atteindre une valeur maximale ξ_m , puis de repartir dans la direction opposée. Ensuite deux scenarii sont possibles : soit $\xi(t)$ tend vers $-\infty$ de façon linéaire en temps après un certain instant, soit $\xi(t)$ tend vers $-\xi_0$ sans jamais dépasser cette valeur. C'est la valeur du paramètre $R^{\mathcal{H}}$ qui détermine dans quel scenario on se trouvera. En particulier, si $R^{\mathcal{H}} = 0$, on peut montrer que $\Psi(\xi_m) = v_0^{\mathcal{H}}/2K^{\mathcal{H}}$ et que l'on se trouve dans le premier scenario. Si par contre $R^{\mathcal{H}} \neq 0$, on montre que ξ_m dépend de façon décroissante de $R^{\mathcal{H}}$, et que si $R^{\mathcal{H}}$ est assez petit, on est dans le premier scenario.

Concernant l'interaction avec la membrane, elle arrive à étudier l'existence et même le comportement de la solution en exploitant le caractère linéaire de la membrane qu'elle suppose dégénérée à la dimension 1 (donc une équation de corde linéaire) et infinie. Nous ne pouvons pas appliquer ces derniers résultats en raison des non linéarités impliquées dans la corde de piano.

I.2.3 Position d'attaque du marteau

Note	D#1	C2	F3	C#5	G6	C7
$x^{\mathcal{H}}$ (m)	0,25	0,2	0,115	0,051	0,015	-
L (m)	1,945	1,600	0,973	0,332	0,126	0,088
$x^{\mathcal{H}}/L$	0,128	0,125	0,118	0,154	0,079	-

TABLE I.5 – Valeurs numériques concernant les notes témoin du Steinway D de l'IRCAM. Le paramètre $x^{\mathcal{H}}$ indique la distance entre l'agrafe et le point d'attaque du marteau.

Le point de contact du marteau sur la corde a été l'objet de nombreuses discussions. Au 18^{ème} siècle, le consensus communément admis était que la corde devait être frappée entre 1/7 et 1/9 de sa longueur, fourchette aujourd'hui violée dans la plupart des pianos surtout dans les aigus ([Conklin, 1996a]). Il est montré dans [Hall, 1987] et [Conklin, 1996a] que la position d'attaque du marteau influence les niveaux relatifs des *partiels* de corde entre eux. En effet, considérons une corde idéale, linéaire. Si la position d'attaque coïncide avec le nœud d'un mode, la fréquence associée sera absente du spectre du déplacement de la corde et donc du son. En réalité, le partiel associé est fortement atténué lorsque la position d'attaque

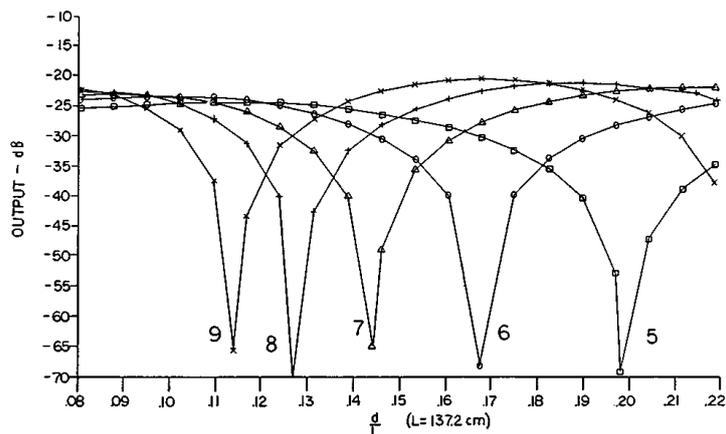


FIGURE I.37 – Niveau des partiels 5 à 9 dans le son de la note A_0 en fonction de la position d'attaque exprimée en relatif (x^H/L). Extrait de [Conklin, 1996a]

s'approche du nœud, comme le montre la figure I.37. Pour avoir un ordre d'idée, la figure I.38 montre le rapport entre la position d'attaque du marteau et la longueur de la corde pour toute la tessiture, pour un piano moderne (ronds) et le piano de 1720 de Christofori (carrés). On voit qu'il est aujourd'hui globalement décroissant entre 0,12 et 0,08 des graves aux aigus. Cette tendance se confirme dans les valeurs mesurées sur le Steinway D de l'IRCAM, voir le tableau I.5. Concrètement, les marteaux sont tous alignés sur la « ligne des marteaux », pour des raisons pratiques liées à la complexité de la mécanique, qui reflète l'alignement des touches. En conséquence, on modifie la position d'attaque du marteau en modifiant les points d'attache des cordes. Or, le point d'attache au chevalet est choisi pour optimiser la transmission des vibrations à la table d'harmonie. C'est donc la position de l'agrafe qui permettra de jouer sur la position d'attaque du marteau, modifiant par là la longueur de la corde, et donc ayant une répercussion sur les tensions mises en jeu. Ceci nous permet d'imaginer toute la difficulté d'effectuer un « plan de cordes » !

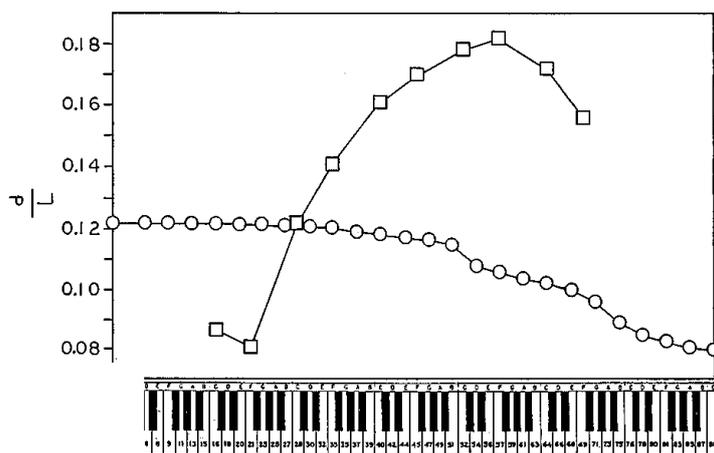


FIGURE I.38 – Rapport entre la position d'attaque du marteau et la longueur de la corde pour toute la tessiture, pour un piano moderne (ronds) et le piano de 1720 de Christofori (carrés). Extrait de [Conklin, 1996a]

I.3

La table d’harmonie et son rayonnement dans l’air

La table d’harmonie est une structure fine en bois (le plus souvent en épicéa) de forme variable selon les types de piano (rectangulaire pour les pianos droits et de forme arrondie pour les pianos à queue). Ses dimensions varient d’un piano à l’autre, et son épaisseur est de l’ordre de 6 à 9 millimètres. Cette épaisseur n’est pas constante, la table étant plus épaisse en son centre. Elle est raidie par des traverses de bois appelées raidisseurs (en épicéa également) collées à contre-fil sur sa face inférieure, et comporte de l’autre côté un ou plusieurs chevalets, en bois plus épais et plus dur (usuellement de l’érable ou du hêtre). La figure I.39 montre les deux côtés d’une table d’harmonie de piano à queue.



FIGURE I.39 – Deux faces de la table d’harmonie : face supérieure avec le chevalet (gauche) et face inférieure avec les raidisseurs (droite). Extrait de fazioli.com

La fonction première des raidisseurs est de rétablir une certaine isotropie dans ce matériau foncièrement orthotrope qu’est le bois. Cet objectif est acquis pour les premiers modes (voir [Ege, 2010]) mais n’est plus valide pour les hautes fréquences. Le rôle du chevalet est de supporter et transmettre la vibration des cordes à la table d’harmonie.

Le choix du matériau utilisé pour la facture des tables d’harmonies de piano repose sur un grand nombre de critères acoustiques et psycho-acoustiques, souvent contradictoires, parmi lesquels on peut citer l’homogénéité, le volume sonore, la durée du son . . . D’un point de vue mécanique, trois coefficients paraissent pertinents : le module d’Young E , la densité ρ et le facteur de pertes η . On trouve un résumé exhaustif dans [Brémaud, 2006] des critères quantitatifs existant dans la littérature, qui combinent essentiellement ces trois coefficients. Pour la table d’harmonie du piano, un critère est souvent retenu : maximiser le coefficient de rayonnement $R = \sqrt{E}/\rho^3$ tout en minimisant le facteur de pertes η (que l’on définira plus précisément dans la partie dédiée à l’amortissement). On peut visualiser sur le diagramme logarithmique I.40 le coefficient R en fonction de η pour différents matériaux, sachant que le bois, matériau orthotrope, possède un module d’Young différent selon la direction considérée. On remplace alors dans les calculs le module d’Young par la moyenne géométrique : $\sqrt{E_x E_y}$. Le balsa serait un choix idéal s’il n’était pas trop fragile pour supporter la tension des cordes. Ce sont deux espèces d’épicéa qui emportent l’unanimité des facteurs : l’épicéa de Norvège et l’épicéa de Sitka, ce dernier étant géographiquement situé sur la côte ouest de l’Amérique du Nord, et donc préféré des facteurs américains, en particulier de Steinway. On trouve dans [Ege, 2010] un comparatif des valeurs typiques (statistiques) des coefficients mécaniques des espèces sélectionnées pour les tables d’harmonie. L’épicéa de Norvège apparaît comme moins dissipatif, mais ayant un coefficient de rayonnement plus faible.

Du point de vue de la fabrication, la table d’harmonie d’un piano est composée de plusieurs planches de bois, la largeur de ces dernières étant limitée par la taille du tronc de l’épicéa. Les planches sont découpées en quartiers (découpe radiale), comme le montre l’image I.41(a), et collées bord contre bord comme le

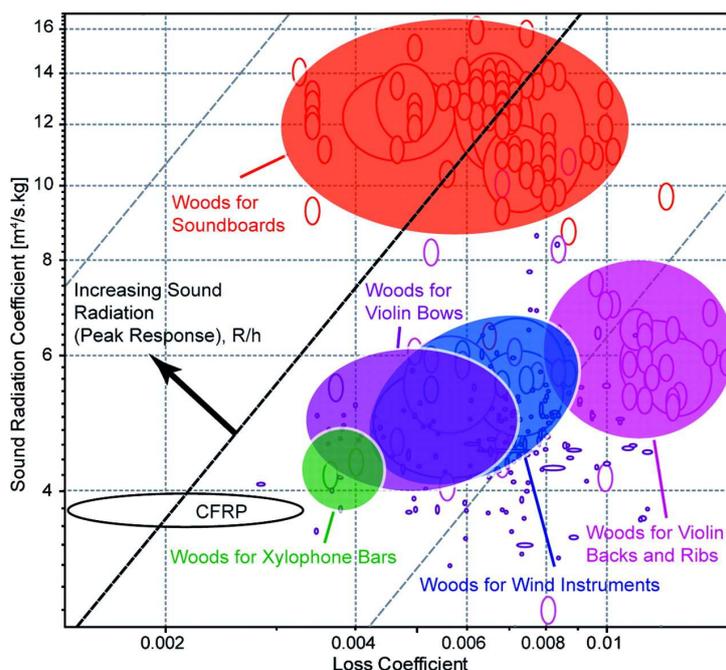


FIGURE I.40 – Diagramme montrant le coefficient de rayonnement en fonction du facteur de pertes. Extrait de [Wegst, 2006].

montre la figure I.41(b), ce qui implique que les directions d'orthotropie de la table sont les directions longitudinale et radiale du bois. Les fils du bois forment un angle d'environ 30 à 50° par rapport au petit côté de la table, comme on le voit sur la figure I.39. Quantité de secrets de fabrication interviennent à ce moment de la facture : orientation du fil du bois, épaisseur de chaque planche, mais aussi densité des anneaux annuels comme le précise [Bucur, 2007]

« The width of annual ring growth, 0.7 - 3 mm (Holz 1967b), is an important factor in the selection of the raw material. Closer-ringed soundboards are used under treble strings and wider-ringed boards under the bass. For acoustical considerations, the change in annual ring width should be gradual in adjacent soundboards. » [Bucur, 2007]

La table d'harmonie reste ensuite plusieurs mois voire plusieurs années dans une pièce contrôlée tant en température qu'en humidité, afin de la stabiliser avant de lui coller les raidisseurs puis de l'intégrer au piano. Elle est en fait collée à la ceinture interne grâce à un procédé assez mystérieux. Les conditions aux limites associées sont loin d'être idéales, et semblent se situer entre des conditions simplement supportées et des conditions encastrées (voir [Suzuki et Nakamura, 1990]).

Dans l'optique de notre future modélisation, donnons dorénavant quelques valeurs des paramètres physiques correspondant à la description que l'on vient de faire de la table d'harmonie. Le bois étant un matériau vivant, changeant, unique, imparfait, ses caractéristiques n'ont de sens que statistiquement. Non seulement, la variabilité est grande d'un échantillon à l'autre, mais aussi au sein d'un même arbre. De plus, l'humidité, la température, la pression ambiante ont une grande influence sur le comportement du bois, ce qui doit être pris en compte lors de la mesure des paramètres. L'objet n'est pas ici de rentrer dans le détail des méthodes expérimentales de mesure des paramètres physiques, mais il est intéressant de garder à l'esprit que ces méthodes comportent toutes des limitations (en particulier, fréquentielles) et qu'elles s'appuient sur la comparaison entre l'expérience et les prévisions d'un modèle. On trouve dans [Lambourg, 1997] un résumé des méthodes usuelles, divisées en trois catégories, ainsi qu'une nouvelle méthode tombant dans la seconde catégorie : les **méthodes statiques ou quasi-statiques** qui consistent à mettre en regard les contraintes et les déformations d'un échantillon auquel on impose une excitation (du type échelon ou du type harmonique en temps), les **méthodes modales** qui consistent à mesurer les modes de vibration de la structure et à le comparer avec les valeurs analytiques prévues par des théories du type Euler Bernoulli (pour les poutres) ou Kirchhoff Love (pour les plaques), et

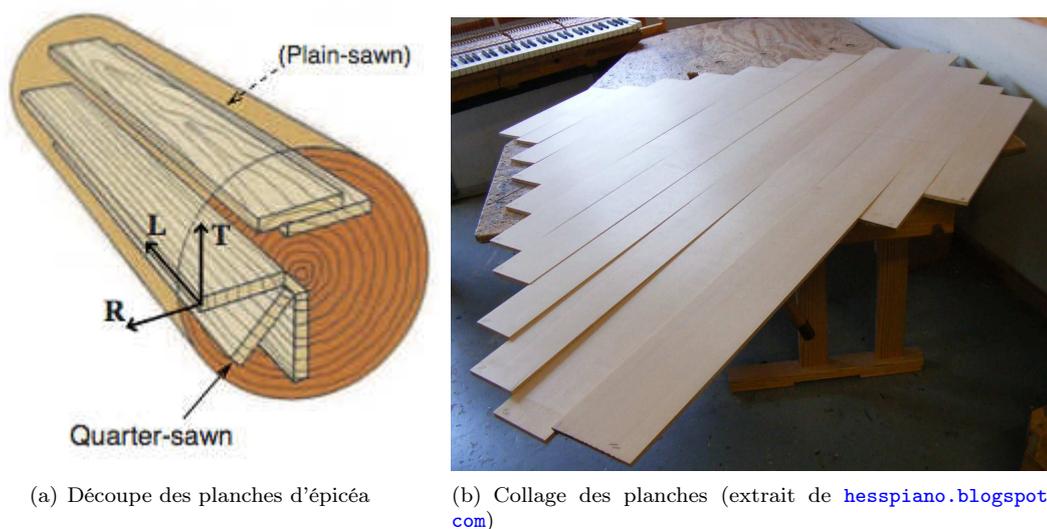


FIGURE I.41 – Planches d'épicéa pour la table d'harmonie

ρ kg.m ⁻³	E_x GPa	E_y GPa	E_z GPa	G_{xy} GPa	G_{xz} GPa	G_{yz} GPa	ν_{xy} -	ν_{xz} -	ν_{yz} -
390	11,6	0,9	0,5	0,75	0,72	0,039	0,37	0,47	0,43

TABLE I.6 – Valeurs typiques de paramètres mécaniques pour la table d'harmonie en épicéa de Sitka. Extrait de [Ege, 2010]

enfin les **méthodes ultrasonores** qui consistent à mesurer la vitesse de propagation des ondes dans les échantillons. La seconde est la plus attractive selon lui, en particulier car elle est valide dans la gamme de fréquences sollicitée dans la pratique instrumentale.

I.3.1 La table d'harmonie comme une plaque bidimensionnelle

Il est flagrant que la table d'harmonie comporte une dimension bien plus petite que les deux autres, étant donné son épaisseur inférieure au centimètre, pour une longueur et une largeur supérieures au mètre (pouvant aller jusqu'à 2.5 mètres pour les grands pianos). Nous avons donc fait le choix de tirer partie de cette observation pour écrire notre modèle de table d'harmonie. En toute généralité, la table d'harmonie est bien représentée par les équations de l'élastodynamique linéaire⁸ en trois dimensions, la table occupant au repos un domaine $\omega_{3D} \subset \mathbb{R}^3$. On peut alors se demander comment se comportent les équations lorsque l'une des dimensions devient petite devant les deux autres, et si il est justifié d'écrire un problème uniquement sur la surface médiane que l'on note ω (en deux dimensions) de la table d'harmonie.

C'est l'objet de la théorie des plaques et des coques, qui a et continue à inspirer une littérature abondante, et pour lequel trois grand types d'approches peuvent être discernées :

- la **dérivation physique** des équations, qui consiste à faire des hypothèses cinématiques, géométriques, ou constitutives sur le système qui permettent de réduire le nombre d'inconnues ou la dimension du problème (voir par exemple [Reissner, 1945]),
- l'**analyse asymptotique** qui consiste à se demander comment se comporte la solution quand un paramètre adimensionné estimé petit dans le problème d'origine, tend vers 0, et à en déduire un ou des problèmes limites portant sur des nouvelles inconnues (voir par exemple [Ciarlet et Destuynder, 1979] et [Dauge, 1996, Dauge, 1998]),

8. pourvu que ses déformations restent petites, ce que l'on va supposer par la suite

- et les **modèles hiérarchiques** qui consistent à se donner un ensemble de sous espaces et d'opérateurs approchés vérifiant certaines propriétés par rapport à l'opérateur d'origine, et à en déduire une famille de problèmes approchés (voir [Szabo et Babuska, 1991]).

Les deux dernières techniques visent à obtenir des estimations d'erreur permettant de s'assurer que la solution du problème approché tend vers la solution du problème posé en trois dimensions, quand l'épaisseur tend vers 0. Ce sont des questions compliquées, dont la réponse dépend beaucoup du problème (matériau isotrope, anisotrope, laminé; type de chargement; type de conditions aux limites) et des difficultés apparaissent en particulier à cause de la présence d'une couche limite près des bords de la plaque.

On appelle plaque une structure mince dont la surface médiane appartient à un plan. Les deux modèles de plaque les plus utilisés en ingénierie, dont nous présentons une dérivation physique en annexe E, sont le modèle de **Kirchhoff Love** (réputé pour les plaques minces) et le modèle de **Reissner-Mindlin** (réputé pour les plaques épaisses). Le modèle de Kirchhoff Love apparait en analyse asymptotique comme le problème que résout le premier terme du développement. Le modèle de Reissner Mindlin peut être obtenu avec la méthode des modèles hiérarchiques, il consiste en effet à supposer que le champ de déplacement est polynomial dans l'épaisseur : plus précisément, linéaire pour les composantes membranaires, et constant pour la composante en flexion. Il est intéressant de noter que pour obtenir une convergence entre la solution du modèle de Kirchhoff Love ou de Reissner Mindlin et la solution du problème d'origine, la forme bilinéaire élastique doit être modifiée, ce qui revient à modifier la loi de Hooke du matériau.

Nous avons choisi de travailler avec le modèle de Reissner-Mindlin, qui est un système de trois équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre deux couplées, faisant intervenir l'élévation de la plaque u_p et deux angles θ_p . Considérons pour l'instant des conditions aux limites encastées, c'est à dire de Dirichlet. Le modèle s'écrit, pour une plaque orthotrope quelconque soumise à un second membre f en flexion :

Trouver $(u_p, \theta_p) : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\begin{cases} \rho \frac{\delta^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_p}{\partial t^2} - \frac{\delta^3}{12} \text{Div}(\mathbf{C} \varepsilon(\theta_p)) + \delta \underline{\kappa}^2 \cdot \underline{G} \cdot (\nabla u_p + \theta_p) = 0 & \text{(I.3.1a)} \\ \rho \delta \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} - \delta \text{div}(\underline{\kappa}^2 \cdot \underline{G} \cdot (\nabla u_p + \theta_p)) = f & \text{(I.3.1b)} \\ u_p = \theta_p = 0 \quad \text{sur } \partial\omega & \text{(I.3.1c)} \end{cases}$$

$$\text{avec } \mathbf{C} \varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & -\frac{E_y\nu_{xy}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ -\frac{E_x\nu_{yx}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \text{ pour tout } \varepsilon \text{ symétrique,}$$

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} G_{xz} \\ G_{yz} \end{pmatrix}, \quad \underline{\kappa}^2 = \begin{pmatrix} \kappa_x^2 \\ \kappa_y^2 \end{pmatrix}.$$

- δ est l'épaisseur
- ρ est la densité
- E_x et E_y sont les modules d'Young dans les deux directions principales
- où : G_{xy} et \underline{G} sont les modules de cisaillement dans les trois directions principales
- $\underline{\kappa}$ est le coefficient de correction de cisaillement dans les deux directions principales
- ν est le coefficient de Poisson dans les deux directions principales
- ε est le tenseur des déformation linéarisé (voir l'annexe E)

Il convient de préciser que tous ces paramètres peuvent varier dans l'espace, c'est à dire être vus comme des fonctions de $(x, y) \in \omega$, c'est d'ailleurs ce qui nous permettra de modéliser la présence des raidisseurs et des chevalets, voir I.3.4.

On procède à des intégrations par parties, les conditions aux limites permettent d'annuler les termes de bords et on obtient bien la formulation recherchée (I.3.9).

□

REMARQUE I.3.2 (*Conditions aux limites de la table d'harmonie*)

Nous avons jusqu'ici supposé des conditions de Dirichlet (conditions encastrées) pour la table d'harmonie. Or, la méthode de fixation de la table (collée sur une encoche de la ceinture interne) suggère que les conditions aux limites se situent plutôt « entre » des conditions encastrées et des conditions simplement supportées, comme nous l'avons souligné précédemment. Ainsi, il sera utile d'introduire \mathcal{J}_D , l'ensemble des indices des inconnues sur lesquelles on supposera la condition de Dirichlet, à savoir :

$$\begin{cases} \mathcal{J}_D = [1, 2, 3] \text{ pour les conditions encastrées} \\ \mathcal{J}_D = \{1\} \text{ pour les conditions simplement supportées} \end{cases} \quad (\text{I.3.14})$$

Les inconnues non concernées par \mathcal{J}_D seront supposées répondre à une condition de Neumann. Bien entendu, les résultats d'existence, et d'énergie restent vrais pour ces nouvelles conditions aux limites.

I.3.2 Décomposition modale

Le système de Reissner Mindlin entre dans le cadre des oscillateurs harmoniques présentés en introduction, et à ce titre, possède des modes propres de vibrations comme le statue ce théorème très classique.

THÉORÈME I.3.3 (*Base hilbertienne de modes propres de l'opérateur de Reissner Mindlin*)

Il existe une suite $(w_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de \mathcal{D}_{RM} et une suite croissante de réels positifs $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ qui tend vers l'infini, telles que :

- la famille $\{w_n, n \geq 1\}$ est une base hilbertienne de $[L^2(\omega)]^3$ qui est également complète pour $[H_0^1(\omega)]^3$, en particulier

$$\langle w_n, w_m \rangle_{L^2} = \delta_{n,m}, \quad \forall n, m \geq 1 \quad (\text{I.3.15})$$

- la famille $\{w_n, n \geq 1\}$ diagonalise l'opérateur $\mathbb{M}^{-1} \mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}w_n = \lambda_n \mathbb{M} w_n, \quad \forall n \geq 1 \quad (\text{I.3.16})$$

Il est très intéressant de faire le lien avec la physique. En effet, on peut visualiser les modes propres de vibration grâce à la réalisation de figures de Chladni, qui matérialisent les nœuds des modes⁹, ou en utilisant un vibromètre laser qui balaie la surface de la plaque pendant la vibration. D'autre part, on retrouve les fréquences propres de vibration f_n en Hz en utilisant la formule

$$f_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} \quad (\text{I.3.17})$$

On trouve dans la littérature quelques études montrant certaines déformées modales de la table d'harmonie du piano droit (avec et sans la tension des cordes dans [Moore et Zietlow, 2006], avec la tension des cordes dans [Ege, 2010]) ou pour le piano à queue (sans cordes dans [Suzuki, 1986], sans cordes ni chevalet dans [Askenfelt et Jansson, 1990]). La figure I.42 montre des figures de Chladni obtenue dans [Conklin, 1996b] sur la table d'harmonie d'un piano à queue préalablement dénudée des cordes et de son chevalet.

À notre connaissance, il n'est pas possible de calculer analytiquement les modes d'une plaque de Reissner Mindlin, même isotrope carrée, nous perdons donc tout espoir dans le cas de la table d'harmonie. Il sera

9. Un matériau de type sable est disposé équitablement sur la surface de la plaque, qui est mise en vibration par un pot vibrant, ou un haut parleur, à une fréquence propre de vibration. Le mode correspondant se met alors à vibrer, et les grains de sable viennent se replacer aux seuls endroits immobiles de la plaque : les lignes de niveau zéro du mode (aussi appelés nœuds de vibration).

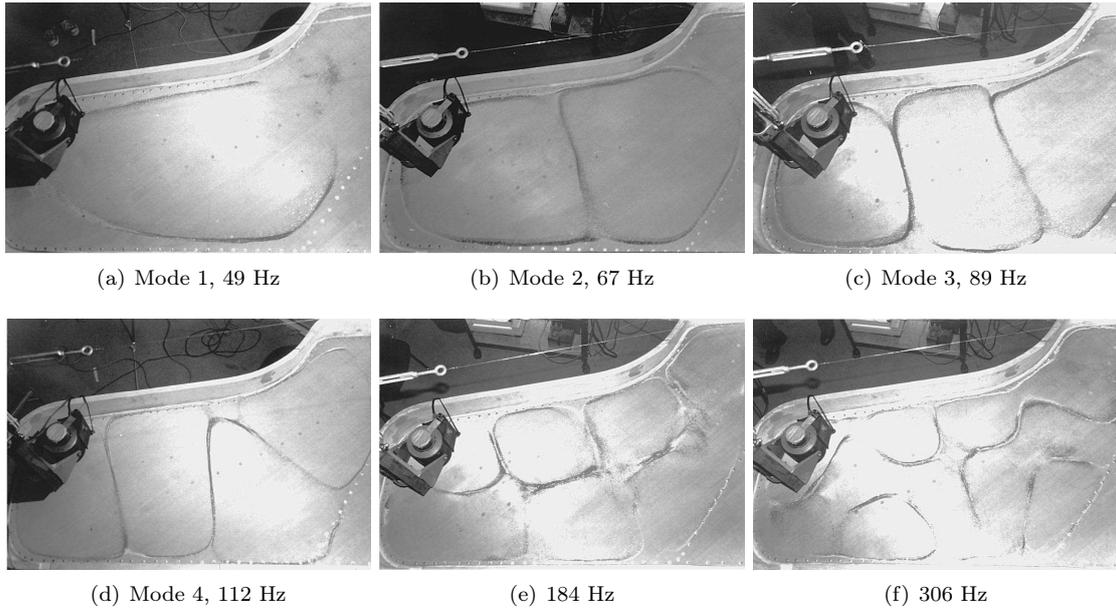


FIGURE I.42 – Figures de Chladni sur la table d’harmonie d’un piano de 2,74 mètres auquel on a retiré les cordes et le chevalet. Extrait de [Conklin, 1996b]

cependant possible au paragraphe II.3.1 de mener un calcul numérique qui nous permettra de comparer les modes du modèle suivi de sa discrétisation avec les modes expérimentaux.

Il est intéressant de disposer des modes à plusieurs titres. D’une part, ils fournissent une base naturelle à l’opérateur, qui permet de transformer l’EDP en un ensemble (infini) d’EDO découplées. En effet, on peut à présent décomposer l’inconnue Λ_p sur la base des modes propres de l’opérateur $\mathbb{M}^{-1}\mathbb{R}$, et écrire les équations qui régissent le mouvement de chaque amplitude modale : partons de (I.3.5), et écrivons

$$\Lambda_p(x, y, t) = \sum_{n \geq 1} \Lambda_{p,n}(t) w_n(x, y).$$

Alors, en posant

$$F = \sum_{n \geq 1} \mathbb{M} F_n(t) w_n(x, y)$$

les amplitudes modales $\Lambda_{p,n}$ sont soumises à un ensemble d’EDO découplées (rappelons que $\lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$) :

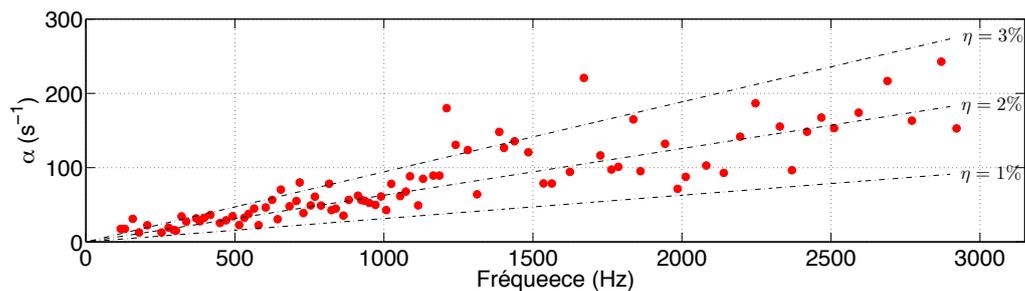
$$\frac{d^2 \Lambda_{p,n}}{dt^2} + \lambda_n \Lambda_{p,n} = F_n \quad (\text{I.3.18})$$

On peut alors, en anticipant un peu, imaginer une méthode numérique qui consiste simplement à tronquer à N_m le nombre de modes pris en compte, et dont les inconnues deviendraient les N_m amplitudes modales régies par N_m EDO découplées de la forme (I.3.18). Cette manipulation est susceptible de détériorer fortement le transitoire, en mettant de côté les composantes aiguës du signal. Cependant, l’excitation étant limitée en bande passante, et le bois ayant la particularité d’amortir plus fortement les aigus, il est raisonnable de penser que ce sont les premiers modes qui contribuent majoritairement à la vibration. La difficulté d’une telle méthode vient du fait que les modes ne sont pas connus, *a priori*, et nécessitent un calcul numérique qui s’avère coûteux. C’est quand même sur ce principe que nous baserons la méthode numérique développée en paragraphe II.3.1, en particulier à cause de la forme que l’on souhaitera donner à l’amortissement. En effet, nous allons voir dans le paragraphe suivant que chaque mode ne suit pas la même constante d’amortissement, ce qui est facilement pris en compte en généralisant une écriture sous la forme (I.3.18), alors qu’une écriture EDP introduirait des termes non usuels qui engendrent de grandes difficultés numériques.

I.3.3 Amortissement

Tout structure mécanique est susceptible d'être le siège de phénomènes dissipatifs, soit intrinsèques à cette structure, soit liés à sa disposition et ses couplages éventuels avec d'autres structures. En ce qui concerne le cas particulier des plaques, on se réfère à [Lambourg, 1997] qui passe en revue les phénomènes physiques potentiellement à l'origine de dissipation dans les plaques. Les pertes internes sont de deux types : les pertes intrinsèques que vise à décrire la théorie de la viscoélasticité et qui sont prépondérantes dans les matériaux non conducteurs de la chaleur (polymères, bois), et les pertes thermiques décrites par la thermoélasticité, prépondérantes dans les matériaux conducteurs de la chaleur (métaux). Les pertes par couplage externe peuvent être dues à la transmission acoustique (liée au couplage plaque - air et semble prépondérant pour les hautes fréquences), à la frottement fluide (qui semble apparaître uniquement pour de très grandes amplitudes) et à la transmission mécanique (aux supports de la plaque). Nous négligerons ce dernier par manque d'informations concernant les conditions aux limites. Notre modèle de piano étant destiné à prendre en compte les couplages de façon physique (à travers les équations de la vibroacoustique), les pertes par couplage avec l'air seront naturellement prises en compte lors de la résolution du système complet, nous n'écrirons donc pas de modèle d'amortissement approché pour rendre en compte ce couplage.

En ce qui concerne les pertes internes, il semble que les pertes thermoélastiques, qui sont induites par la conversion des ondes de flexion en chaleur, soient négligeables (voir [Lambourg, 1997]) pour les plaques en bois épaisses. Les pertes viscoélastiques représentent un effet mémoire du matériau, selon lequel la contrainte est liée à la déformation à travers un opérateur linéaire intégral (faisant intervenir le passé). C'est ce phénomène que nous prendrons en compte pour la table d'harmonie du piano.



(a) Facteur d'amortissement en fonction de la fréquence. Extrait de [Ege, 2010]

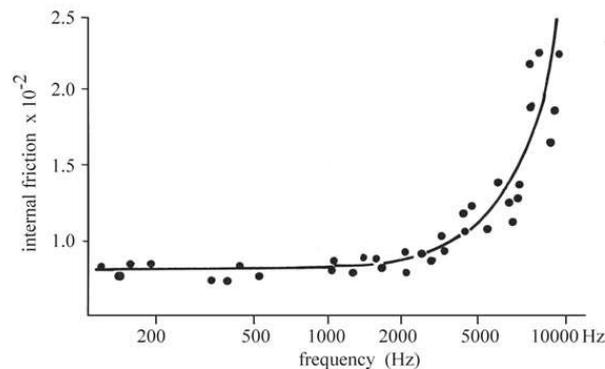


Fig. 7.2. Resonance spruce: internal friction versus frequency. (Holz 1967b)

(b) Frottement interne en fonction de la fréquence. Extrait de [Bucur, 2007]

FIGURE I.43 – Facteurs d'amortissement en fonction de la fréquence. Une approximation linéaire semble suffisante jusqu'aux moyennes fréquences (en dessous de 3000 Hz), puis il semble nécessaire de prendre en compte un comportement quadratique. La disparité des mesures vient du fait que pour un matériau orthotrope, les modes ne sont pas forcément amortis de la même façon selon leur direction d'orthotropie, ni selon leur nature (modes en flexion, mode en torsion, mode en cisaillement...).

La mesure de l'amortissement est une opération délicate étant donné qu'on peut difficilement en dis-

socier les différentes origines physiques. La caractérisation de l'amortissement passe par l'évaluation de paramètres qui portent dans la littérature des noms variés mais décrivent la même quantité : le temps caractéristique de décroissance d'une vibration oscillant à la fréquence f . On peut les mettre en regard par les relations :

$$\lambda(= \delta_{\log}) = \eta\pi = \frac{\pi}{Q} = \pi \tan(\delta) = \frac{\alpha}{f}, \text{ où}$$

λ est le décrément logarithmique,

η est le coefficient de perte,

Q est le facteur de qualité,

δ est l'angle de perte,

α est le facteur d'amortissement, aussi appelé constante de décroissance (en s^{-1}).

Force est de constater que l'amortissement dépend de la fréquence, comme en témoignent les figures I.43(a) pour des fréquences jusqu'à 3000 Hz (moyennes fréquences) et I.43(b) jusqu'à 10000 Hz, où l'on a mis en vibration un mode particulier (grâce à un pot vibrant ou un haut parleur) pour en mesurer le temps caractéristique de décroissance. Cette opération peut être également faite dans le domaine fréquentiel, suite à une excitation de type bruit blanc, en évaluant la largeur à mi-hauteur de chaque « pic » reflétant le mode correspondant.

Les modèles constitutifs décrivant l'amortissement interne sont très complexes, et peuvent mener à des systèmes intégraux différentiels, très lourds à traiter numériquement en domaine temporel. Il existe des modèles approchés qui permettent d'exprimer le système entièrement grâce à des EDP, comme le modèle rhéologique de Wiechert, mais cette approche reste assez lourde, étant donné l'ordre des dérivées en temps qui interviennent. Nous nous contenterons dans notre cas de reproduire les courbes expérimentales grâce à des modèles d'amortissement très simplifiés, et basés sur l'approche modale.

Pour chaque mode w_n de l'opérateur $\mathbb{M}^{-1}\mathbb{R}$, on écrit la nouvelle équation obtenue à partir de (I.3.18) en ajoutant la prise en compte d'un amortissement que l'on suppose intrinsèque à chacun des modes (amortissement que nous appellerons « diagonal » et dont l'amortissement dit proportionnel est un cas particulier¹⁰) :

$$\partial_t^2 \Lambda_{p,n} + f_{ve}(\lambda_n) \partial_t \Lambda_{p,n} + \lambda_n \Lambda_{p,n} = F_n, \quad (\text{I.3.19})$$

où $f_{ve} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction positive non nécessairement nulle à l'origine.

Les choix les plus simples de fonction f_{ve} , que l'on trouve par exemple dans [Derveaux, 2002], sont

- $f_{ve}(\lambda) = r \in \mathbb{R}^+$, qui correspond à un amortissement « fluide » et permet d'assurer un amortissement minimal à basses fréquences,
- $f_{ve}(\lambda) = \zeta\lambda$, où $\zeta \in \mathbb{R}^+$, qui correspond à un amortissement « visqueux » et dépend de façon quadratique de la fréquence (elle même se comportant comme la racine de la valeur propre, voir (I.3.17)),
- $f_{ve}(\lambda) = a\lambda + b\sqrt{\lambda} + c$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^+$, qui reflète plutôt les figures expérimentales I.43 selon lesquelles l'amortissement n'est pas nul à basses fréquences, a un comportement linéaire jusqu'à un certain seuil et un comportement quadratique à l'infini.

Nous introduisons alors l'opérateur linéaire $f_{ve}(\mathbb{R}) : \mathcal{D}_{RM} \rightarrow [L^2(\omega)]^3$ (qui sera non local) en définissant son action sur chaque mode de la base de $H_0^1(\omega)$:

$$\forall w_n, \quad f_{ve}(\mathbb{R}) w_n = f_{ve}(\lambda_n) \mathbb{M} w_n \quad (\text{I.3.20})$$

Cela nous permet d'écrire l'expression générale abstraite du système de Reissner-Mindlin avec amortissement diagonal.

$$\partial_t^2 \mathbb{M} \Lambda_p + \partial_t f_{ve}(\mathbb{R}) \Lambda_p + \mathbb{R} \Lambda_p = F \quad (\text{I.3.21})$$

¹⁰. Les modèles viscoélastiques standards ne permettent pas *a priori* d'écrire un système totalement découplé, une hypothèse supplémentaire doit être faite, qui se trouve justifiée expérimentalement dans le cas d'un amortissement faible.

THÉORÈME I.3.4 (*Dissipation de l'énergie du système de Reissner Mindlin*)

Toute solution Λ_p au système (I.3.21) vérifie

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dt}(t) = \int_{\omega} F \cdot \frac{\partial \Lambda_p}{\partial t} - \left\| \frac{\partial \Lambda_p}{\partial t} \right\|_{f_{ve}(\mathbb{R})}^2 \quad (\text{I.3.22})$$

où l'énergie du système n'a pas changé et peut s'écrire en fonction des nouvelles notations

$$\mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \Lambda_p}{\partial t} \right\|_{\mathbb{M}}^2 + \frac{1}{2} \|\Lambda_p\|_{\mathbb{R}}^2 \quad (\text{I.3.23})$$

REMARQUE I.3.3 (*Forme d'amortissement suggérée par les mesures*)

Comme λ représente tout réel inclus dans le spectre de \mathbb{R} , il se comporte comme le carré de la fréquence. Ainsi, si l'on souhaite modéliser le comportement linéaire de la figure I.43(a), il faut prendre $f_{ve}(\lambda) = r + \eta \sqrt{\lambda}$, ce qui correspond en temporel à considérer un système d'équations faisant intervenir la racine de l'opérateur \mathbb{R} .

I.3.4 **Prise en compte des raidisseurs et du chevalet**

Le chevalet a comme fonction principale de transmettre la vibration des cordes à la table d'harmonie. Pour des raisons pratiques liées au croisement du plan de cordes (les cordes graves passent au dessus des cordes aiguës), l'épaisseur du chevalet peut aller de 2 cm pour les aigus jusqu'à 6cm dans les graves. Il est parfois scindé en deux morceaux ou plus, selon les contraintes matérielles de la facture instrumentale.



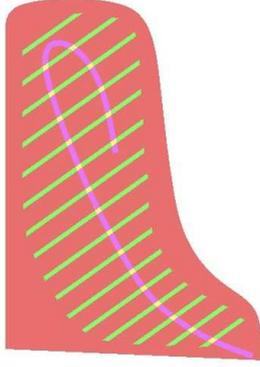
(a) Table d'harmonie d'un piano à queue à laquelle on colle ses chevalets. Extrait de www.fazioli.com.



(b) Table d'harmonie d'un piano à queue à laquelle on colle ses raidisseurs non encore taillés. Extrait de www.fazioli.com.

FIGURE I.44 – Table d'harmonie munie de ses chevalets et de ses raidisseurs.

Les raidisseurs de la table d'harmonie ont une fonction double : ils permettent d'améliorer la résistance de la table à la tension des cordes ainsi que de rétablir une certaine isotropie dans les basses fréquences (voir [Conklin, 1996b]), sans trop alourdir la structure. Nous avons mesuré la taille (épaisseur et largeur)



Zone	Bois	Angle	Épaisseur
Rouge	Epicéa	-40	9 mm
Vert	Epicéa	54	34 mm
Rose	Hêtre	-40	29 mm
Jaune	Hêtre	-40	54 mm

FIGURE I.45 – Représentation d'une table d'harmonie en deux dimensions, dont les différentes zones seront modélisées comme des matériaux différents.

des raidisseurs du Steinway D de l'IRCAM : nous avons compté 17 raidisseurs de largeur comprise entre 2 cm et 2,6 cm (de l'aigu vers le grave) et d'épaisseur comprise entre 1,9 cm et 2,6 cm. Leur espacement n'était pas constant non plus, les raidisseurs étant plus rapprochés vers l'aigu.

La plaque mesurant entre 6 et 9 mm, les raidisseurs et le chevalet ne peuvent en aucun cas être vus comme une perturbation de la plaque. La figure I.44 montre en effet de profil les raidisseurs et les chevalets, prépondérants par rapport à l'épaisseur de la table. En conséquence, nous avons fait le choix de considérer que l'épaisseur δ de la table d'harmonie dans le système (I.3.1) était variable en espace, ainsi que le matériau utilisé (la direction d'orthotropie des raidisseurs est orthogonale à celle de la plaque, et le chevalet est composé d'un bois plus dur). La figure I.45 montre comment la table est décomposée, chaque couleur correspondant à un matériau différent (bois, orthotropie) mais aussi une épaisseur différente.

I.3.5 Formulation variationnelle

Dans l'optique de la discrétisation numérique du système de plaque de Reissner Mindlin, écrivons dès à présent sa formulation variationnelle. L'espace fonctionnel naturel est l'espace suivant

$$\mathcal{L}_D = \left\{ \Lambda_p = {}^t(u_p, \underline{\theta}_p) \in (H^1(\omega))^3, \quad (\Lambda_p)_k = 0 \text{ sur } \partial\omega \quad \forall k \in \mathcal{J}_D \right\} \quad (\text{I.3.24})$$

Nous introduisons les formes bilinéaires associées à l'opérateur : pour tous $(\Lambda_p, \Lambda_p^*) \in \mathcal{L}_D$

$$m(\Lambda_p, \Lambda_p^*) = \int_{\omega} \rho \frac{\delta^3}{12} \underline{\theta}_p \cdot \underline{\theta}_p^* + \int_{\omega} \rho \delta u_p u_p^* \quad (\text{I.3.25})$$

$$r(\Lambda_p, \Lambda_p^*) = \int_{\omega} \frac{\delta^3}{12} \mathbf{C} \varepsilon(\underline{\theta}_p) : \varepsilon(\underline{\theta}_p^*) + \int_{\omega} \delta \kappa^2 \cdot \underline{\mathbf{G}} \cdot (\nabla u_p + \underline{\theta}_p) \cdot (\nabla u_p^* + \underline{\theta}_p^*) \quad (\text{I.3.26})$$

Tous les couples (w_n, λ_n) de vecteurs - valeurs propres définis conformément au théorème I.3.3, vérifient donc, du point de vue variationnel,

$$r(w_n, \Lambda_p^*) = \lambda_n m(w_n, \Lambda_p^*), \quad \forall \Lambda_p^* \in \mathcal{L}_D \quad (\text{I.3.27})$$

On définit alors pour tout w_n vecteur propre associé à la valeur propre λ_n ,

$$a_{ve}(w_n, \Lambda_p^*) = f_{ve}(\lambda_n) m(w_n, \Lambda_p^*), \quad \forall \Lambda_p^* \in \mathcal{L}_D \quad (\text{I.3.28})$$

La formulation variationnelle associée au système (I.3.21) s'écrit :

Trouver $\Lambda_p \in \mathcal{L}_D$ tel que

$$\partial_t^2 m(\Lambda_p, \Lambda_p^*) + \partial_t a_{ve}(\Lambda_p, \Lambda_p^*) + r(\Lambda_p, \Lambda_p^*) = \int_{\omega} F \cdot \Lambda_p^*, \quad \forall \Lambda_p^* \in \mathcal{L}_D \quad (\text{I.3.29})$$

I.3.6 Couplage vibroacoustique avec l'air

Afin de modéliser le rayonnement de la table d'harmonie dans l'air environnant, et bien sûr le son émis par le piano, nous utilisons les équations de la vibroacoustique linéaire instationnaire, qui couplent au cours du temps l'équation des ondes acoustiques avec un modèle de structure mince de type membrane, plaque ou coque. D'après les choix que nous avons fait pour la table d'harmonie, nous nous intéresserons au couplage avec les équations de Reissner Mindlin amorties. Le critère physique qui permet d'écrire le couplage est de dire que la vitesse mécanique de la plaque est égale à la composante normale de la vitesse acoustique à proximité de la plaque.

Introduisons l'espace $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\omega, \Omega_c\}$ a priori non borné dans lequel nous considérerons la propagation du son dans l'air. La notation Ω_c désigne l'espace occupé par les ceintures interne et externe, que nous supposons immobiles et constituant donc un obstacle au son. Nous écrivons une condition de vitesse normale nulle sur les bords de Ω_c , pour cela nous appellerons symboliquement \underline{n}_c sa normale (qui varie dans l'espace). Nous orientons \mathbb{R}^3 par trois vecteurs $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ tels que la plaque ω appartienne au plan engendré par $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$. On appelle Ω^+ le demi espace situé au dessus de ce plan, et Ω^- le demi espace situé en dessous. En conséquence, le vecteur \underline{e}_z est normal à la plaque. On fait le choix (arbitraire) de prendre \underline{e}_z dans le sens du déplacement positif de la plaque. Nous verrons que le couplage fait intervenir le saut de pression, définissons dès à présent la notation de saut à travers la plaque comme

$$[p]_\omega = p|_{\omega^-} - p|_{\omega^+} \quad (\text{I.3.30})$$

pour toute fonction $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et où ω^\pm désignent la frontière de Ω au dessus et en dessous de la plaque.

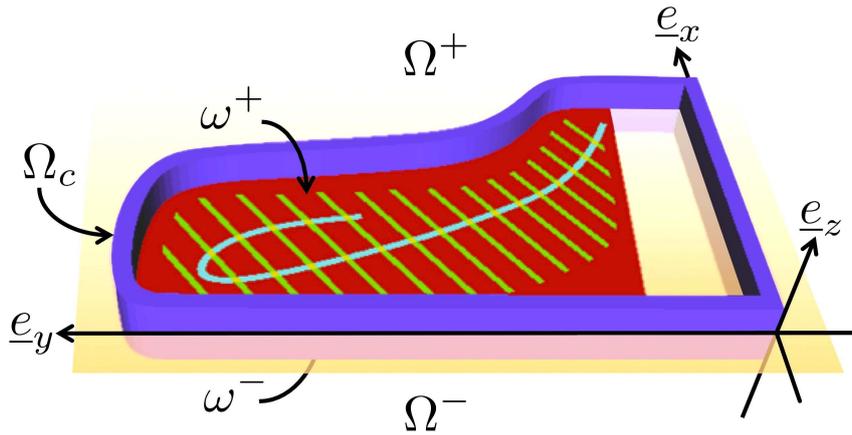


FIGURE I.46 – Vue schématique des volumes et des surfaces.

On suppose (comme dans la modélisation de la guitare [Derveaux, 2002]) que l'air ambiant est un gaz parfait, homogène, isotrope, divariant, initialement au repos. On suppose de plus que la loi de comportement du fluide est celle d'un fluide adiabatique de densité ρ_a et enfin, que les perturbations induites par la propagation des ondes sonores sont suffisamment faibles pour pouvoir linéariser les équations. On considère les inconnues suivantes : la vitesse acoustique \underline{V}_a et la pression p , sur lesquelles on écrit le système d'équations d'Euler linéarisé en vitesse - pression, à vitesse c_a , valide dans le domaine Ω :

$$\begin{cases} \rho_a \frac{\partial \underline{V}_a}{\partial t} + \nabla p = 0 \\ \mu_a \frac{\partial p}{\partial t} + \text{Div } \underline{V}_a = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega, \quad \underline{V}_a \cdot \underline{n}_c = 0 \text{ sur } \partial\Omega_c \quad (\text{I.3.31})$$

où $\mu_a = 1/(\rho_a c_a^2)$ est le coefficient de compressibilité adiabatique. En éliminant \underline{V}_a dans ces équations, on pourrait se ramener à une équation d'ondes. Il est cependant beaucoup plus simple d'écrire le système de la vibroacoustique en gardant cette formulation, puisque la continuité des vitesses acoustique et mécanique s'écrit naturellement dans les inconnues présentes¹¹.

11. Le choix est beaucoup moins innocent qu'il n'y paraît, et est surtout motivé par la facilité d'écriture de couches absorbantes PML pour cette formulation, qui nous permettront de restreindre le domaine de calcul à un domaine fini tout en évitant efficacement les réflexions sur le bord (artificiel) de ce domaine. Nous reviendrons sur ce point en II.5.3.

Comme précédemment, le couplage doit être écrit de sorte que l'énergie du système { plaque, air } soit conservée. Cette contrainte nous conduit à poser le système suivant, dans lequel la plaque est soumise à une force en flexion répartie sur une zone déterminée par la fonction de répartition normalisée $\chi_\omega(x, y)$ (voir une représentation graphique de cette fonction de répartition pour les notes témoin en figure I.47 ainsi que les valeurs numériques en tableau I.7) et dont la dépendance en temps $f(t)$ sera plus tard destinée à provenir du couplage avec la corde.

$$\mathcal{S}_{p,a} \begin{cases} \partial_t^2 \mathbb{M} \Lambda_p + \partial_t f_{ve}(\mathbb{R}) \Lambda_p + \mathbb{R} \Lambda_p = \begin{pmatrix} f(t) \chi_\omega(x, y) + [p]_\omega \\ 0 \end{pmatrix} & \text{sur } \omega & \text{(I.3.32a)} \\ \begin{cases} \rho_a \frac{\partial V_a}{\partial t} + \nabla p = 0 \\ \mu_a \frac{\partial p}{\partial t} + \text{Div} V_a = 0 \end{cases} & \text{dans } \Omega & \text{(I.3.32b)} \\ V_a \cdot \underline{n}_c = 0 & \text{sur } \partial\Omega_c & \text{(I.3.32c)} \\ V_a \cdot \underline{e}_z = \frac{\partial u_p}{\partial t} & \text{sur } \omega & \text{(I.3.32d)} \end{cases}$$

THÉORÈME I.3.5 (Énergie du système { plaque , air })

Toute solution au système (I.3.32) vérifie

$$\frac{d\mathcal{E}_{p,a}}{dt} = f(t) \int_\omega \dot{u}_p \chi_\omega - \left\| \frac{\partial \Lambda_p}{\partial t} \right\|_{f_{ve}(\mathbb{R})}^2 \quad \text{(I.3.33)}$$

$$\text{où } \mathcal{E}_{p,a}(t) = \mathcal{E}_p(t) + \mathcal{E}_a(t), \text{ avec} \quad \text{(I.3.34)}$$

$$\mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \Lambda_p}{\partial t} \right\|_{\mathbb{M}}^2 + \frac{1}{2} \|\Lambda_p\|_{\mathbb{R}}^2, \quad \mathcal{E}_a(t) = \frac{\rho_a}{2} \|V_a\|_{\Omega}^2 + \frac{\mu_a}{2} \|p\|_{\Omega}^2 \quad \text{(I.3.35)}$$

DÉMONSTRATION. Décrivons les transferts internes. D'une part, on peut appliquer le théorème I.3.2 au sous-système { plaque } pour établir que

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dt}(t) = f(t) \int_\omega \dot{u}_p \chi_\omega + \int_\omega [p]_\omega \dot{u}_p - \left\| \frac{\partial \Lambda_p}{\partial t} \right\|_{f_{ve}(\mathbb{R})}^2 \quad \text{(I.3.36)}$$

D'autre part, effectuons une formulation variationnelle sur le système (I.4.3b), en divisant l'espace en deux au niveau de la plaque : Ω^+ désigne la partie supérieure, et Ω^- la partie inférieure.

$$\begin{cases} \int_{\Omega^+} \rho_a \frac{\partial V_a}{\partial t} \cdot \underline{W}_a^+ + \int_{\Omega^+} \nabla p \cdot \underline{W}_a^+ = 0 \\ \int_{\Omega^+} \mu_a \frac{\partial p}{\partial t} q^+ + \int_{\Omega^+} \text{Div} V_a q^+ = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \int_{\Omega^-} \rho_a \frac{\partial V_a}{\partial t} \cdot \underline{W}_a^- + \int_{\Omega^-} \nabla p \cdot \underline{W}_a^- = 0 \\ \int_{\Omega^-} \mu_a \frac{\partial p}{\partial t} q^- + \int_{\Omega^-} \text{Div} V_a q^- = 0 \end{cases} \quad \text{(I.3.37)}$$

$$\begin{cases} \int_{\Omega^+} \rho_a \frac{\partial V_a}{\partial t} \cdot \underline{W}_a^+ + \int_{\Omega^+} \nabla p \cdot \underline{W}_a^+ = 0 \\ \int_{\Omega^+} \mu_a \frac{\partial p}{\partial t} q^+ - \int_{\Omega^+} V_a \cdot \nabla q^+ + \int_\omega V_a \cdot \underline{n}|_{\omega^+} q^+|_{\omega^+} = 0 \end{cases} \quad \text{(I.3.38)}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \int_{\Omega^-} \rho_a \frac{\partial V_a}{\partial t} \cdot \underline{W}_a^- + \int_{\Omega^-} \nabla p \cdot \underline{W}_a^- = 0 \\ \int_{\Omega^-} \mu_a \frac{\partial p}{\partial t} q^- - \int_{\Omega^-} V_a \cdot \nabla q^- + \int_\omega V_a \cdot \underline{n}|_{\omega^-} q^-|_{\omega^-} = 0 \end{cases} \quad \text{(I.3.39)}$$

où l'on a utilisé la condition de vitesse normale nulle sur le bord de Ω_c . Or la normale sortante de Ω^+ est $-\underline{e}_z$ et celle de Ω^- est \underline{e}_z donc :

$$V_a \cdot \underline{n}|_{\omega^+} = -V_a \cdot \underline{e}_z \text{ et } V_a \cdot \underline{n}|_{\omega^-} = V_a \cdot \underline{e}_z \quad \text{(I.3.40)}$$

et d'autre part on sait que

$$\underline{V}_a \cdot \underline{e}_z = \frac{\partial u_p}{\partial t} \quad (\text{I.3.41})$$

La formulation variationnelle sur tout le domaine s'écrit donc

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho_a \frac{\partial \underline{V}_a}{\partial t} \cdot \underline{W}_a + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \underline{W}_a = 0 \\ \int_{\Omega} \mu_a \frac{\partial p}{\partial t} q - \int_{\Omega} \underline{V}_a \cdot \nabla q + \int_{\omega} \frac{\partial u_p}{\partial t} [q]_{\omega} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.3.42})$$

Si l'on choisit $q = p$ et $\underline{W}_a = \underline{V}_a$, on obtient :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho_a \frac{\partial \underline{V}_a}{\partial t} \cdot \underline{V}_a + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \underline{V}_a = 0 \\ \int_{\Omega} \mu_a \frac{\partial p}{\partial t} p - \int_{\Omega} \underline{V}_a \cdot \nabla p + \int_{\omega} \frac{\partial u_p}{\partial t} [p]_{\omega} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.3.43})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_a |\underline{V}_a|^2 + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu_a |p|^2 = - \int_{\omega} \frac{\partial u_p}{\partial t} [p]_{\omega} \quad (\text{I.3.44})$$

On pose alors

$$\mathcal{E}_f = \frac{\rho_a}{2} \|\underline{V}_a\|_{\Omega}^2 + \frac{\mu_a}{2} \|p\|_{\Omega}^2 \quad (\text{I.3.45})$$

et on obtient

$$\frac{d\mathcal{E}_f}{dt}(t) = - \int_{\omega} \dot{u}_p [p]_{\omega} \quad (\text{I.3.46})$$

Il reste à sommer ce résultat avec le premier pour constater que les transferts internes s'annulent et qu'il ne reste que le terme provenant de la source extérieure et les pertes internes à la plaque.

□

La formulation variationnelle du problème de vibroacoustique se base sur la définition des espaces variationnels suivants

$$\mathcal{L}_D = \left\{ \Lambda_p = {}^t(u_p, \underline{\theta}_p) \in (H^1(\omega))^3, \quad (\Lambda_p)_k = 0 \text{ sur } \partial\omega \forall k \in \mathcal{J}_D \right\} \quad (\text{I.3.47})$$

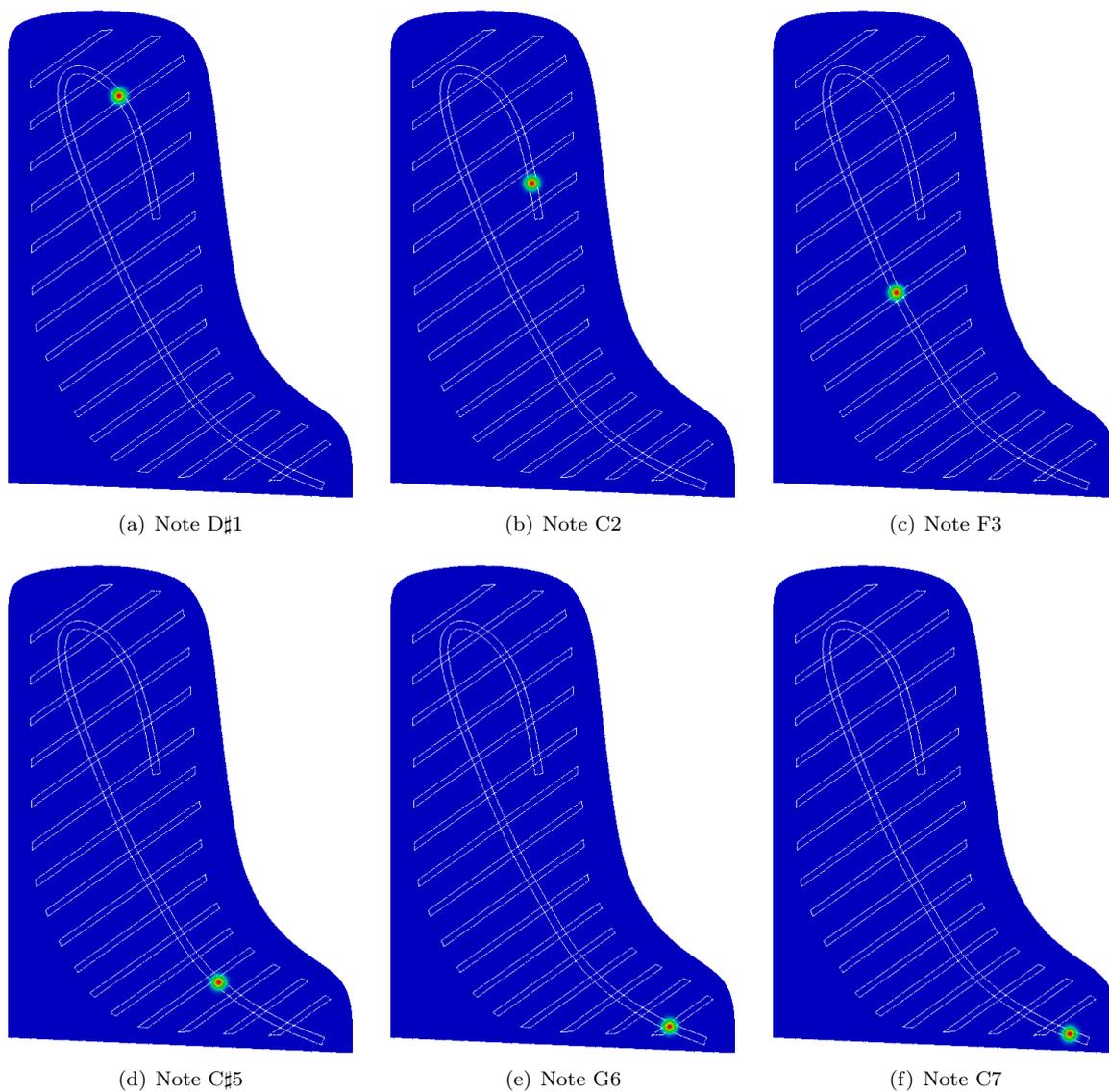
$$\mathcal{P} = H^1(\Omega), \quad \mathcal{V} = L^2(\Omega) \quad (\text{I.3.48})$$

et s'écrit :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Trouver :} \\ \Lambda_p : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}_D \\ p : [0, T] \rightarrow \mathcal{P} \\ \underline{V}_a : [0, T] \rightarrow \mathcal{V} \end{array} \right\} \quad (\text{I.3.49a})$$

$$\left. \begin{array}{l} \partial_t^2 m(\Lambda_p, \Lambda_p^*) + \partial_t a_{ve}(\Lambda_p, \Lambda_p^*) + r(\Lambda_p, \Lambda_p^*) \\ = f(t) \int_{\omega} \chi_{\omega}(x, y) u_p^* + \int_{\omega} [p]_{\omega} u_p^*, \quad \forall \Lambda_p^* \in \mathcal{L}_D \end{array} \right\} \quad (\text{I.3.49b})$$

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \partial_t \int_{\Omega} \rho_a \underline{V}_a \cdot \underline{V}_a^* + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \underline{V}_a^* = 0, \right. \\ \left. \left\{ \partial_t \int_{\Omega} \mu_a p p^* - \int_{\Omega} \underline{V}_a \cdot \nabla p^* + \int_{\omega} \partial_t u_p [p^*]_{\omega} = 0, \right. \right. \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \forall \underline{V}_a^* \in \mathcal{V} \\ \forall p^* \in \mathcal{P} \end{array} \quad (\text{I.3.49c})$$

FIGURE I.47 – Fonctions de répartition $\chi_\omega(x, y)$ pour les notes témoin du Steinway D de l'IRCAM

Note	D#1	C2	F3	C#5	G6	C7
x_0 (m)	0,47	0,59	0,54	0,88	1,14	1,24
y_0 (m)	1,63	1,26	0,83	0,25	0,04	0,02

TABLE I.7 – Valeurs numériques concernant les notes témoin du Steinway D de l'IRCAM dans le référentiel indiqué dans l'introduction générale. Les paramètres (x_0, y_0) indiqués pour chaque note correspondent au point d'accroche des cordes, nous faisons en sorte que la fonction de répartition χ_ω soit centrée en ce point.

I.4 Couplage au chevalet

La raison d'être du chevalet est de transmettre l'énergie des cordes à la table d'harmonie. Il s'agit d'une ou plusieurs pièces de bois dur (hêtre ou érable, parfois recouvert d'une calotte mélaminée), de quelques centimètres d'épaisseur et allant de 2 à plus de 6 cm de hauteur selon la tessiture des cordes accrochées. En effet, le plan de corde est croisé, c'est à dire que les cordes des notes graves passent au dessus des cordes plus aiguës afin de permettre une plus grande longueur de cordes pour un meuble donné, mais aussi un point d'attache des graves plus central à la table d'harmonie. Les cordes passent « à cheval » en effectuant une trajectoire de « zig-zag » (voir les figures I.48) caractéristique autour des pointes, des pièces de métal (en acier plaqué de cuivre) enfoncées en biais dans le bois du chevalet. Les facteurs prêtent une attention toute particulière à cette partie de l'instrument, qui a une influence considérable sur le son du piano :

« *The design of the soundboard bridges affects profoundly the tone of a piano. [...] By adjusting the design of the bridges, the designer of a piano can change the loudness, the duration, and the quality of the tone, within a certain range, in order to suit the intended use of the instrument.* » [Conklin, 1996b]



(a) Chevalet des graves (b) Chevalet des aigus

FIGURE I.48 – Géométrie au chevalet

La géométrie est donc très complexe et l'objet de notre étude n'est pas de reproduire fidèlement les méandres des cordes en cette zone de l'instrument. L'important pour nous est d'extraire de cette réalité la fonction mécanique première et fondamentale, la raison d'être du chevalet, afin de modéliser son effet sur la transmission de la vibration des cordes à la table d'harmonie. En particulier, nous souhaitons rendre compte de la transmission manifeste de la vibration longitudinale, dont nous avons parlé dans le paragraphe I.1.3. Nous nous intéressons aussi dans cette section à la modélisation des chœurs de cordes, c'est à dire le fait que chaque note peut être produite par la vibration de une, deux ou trois cordes. Nous aborderons également la modélisation du jeu *una corda* qui consiste à empêcher le marteau de frapper l'une de ces cordes grâce à l'actionnement d'une pédale. Le système des cordes aliquotes sera également présenté et pris en compte, et nous montrerons enfin que notre modèle permet de modéliser la présence d'échelles duplex, aussi appelées longueurs mortes des cordes.

I.4.1 Charge des cordes et angle au chevalet

Afin de maintenir le contact entre les cordes et le chevalet au fil du temps et des vibrations des cordes, ces dernières présentent un léger angle par rapport au plan horizontal, de telle sorte que le chevalet, et la table par suite, sont soumis à un chargement statique appelé la charge. Ce chargement tend à maintenir le chevalet écrasé sur la table d'harmonie, de telle sorte que son mouvement prépondérant est le déplacement vertical, qui sera le seul que nous modéliserons¹². La géométrie des chevalets (le plus grave étant plus épais, et donc plus haut que celui des aigus) confirme que les cordes ne sont pas horizontales étant donnée la différence de hauteur entre l'agrafe ou le sillet, et le haut du chevalet :

« *Un taux de charge adéquat des cordes sur le chevalet est crucial pour la qualité du timbre. La hauteur des points de support de la corde (sillet, agrafes, zones de pointes d'accroche sur le cadre) par rapport à la hauteur des chevalets détermine le taux de charge. Un excès de charge entraîne un son fort, mais de courte durée. Une charge insuffisante donne un son plus soutenu, mais plus faible. Une charge excessive sur le chevalet des basses peut gêner suffisamment la vibration de la table pour assourdir le timbre dans l'extrême aigu.* » [Reblitz, 2005]

12. Nous reviendrons sur l'effet de ce chargement sur la table d'harmonie dans les perspectives en I.6.2.a.

Le réglage de la charge semble donc être motivé majoritairement par des problématiques liées au timbre de l'instrument, mais la présence de cet angle permet d'expliquer l'apparition d'un précurseur au chevalet dû à la non linéarité de la corde. En effet, le marteau frappe la corde à proximité de l'agrafe. Un déplacement transversal vertical en résulte, donnant naissance par couplage non linéaire à un déplacement longitudinal. Ce dernier se propage 10 à 20 fois plus vite le long de la corde, et arrive donc au chevalet bien avant le déplacement transversal. Or, la variation de tension qui s'exerce lors de l'arrivée de l'onde longitudinale au chevalet est orientée dans la direction de la corde encore identique à celle au repos (l'onde longitudinale est une onde de compression). Elle a donc une projection non nulle (bien que petite) sur la direction du chevalet, en raison de l'angle entre les deux, comme l'illustre la figure I.49, ce qui contribue à une force de couplage avec la table d'harmonie. Bien entendu, lorsque la vibration transversale arrivera ensuite au chevalet, la variation de tension en résultant au chevalet aura une grande composante dans la direction du chevalet, et contribuera majoritairement à la force de couplage transmise à la table d'harmonie. C'est pourquoi la transmission de la vibration longitudinale devrait permettre une meilleure représentation des phénomènes d'attaque présents dans le piano¹³.

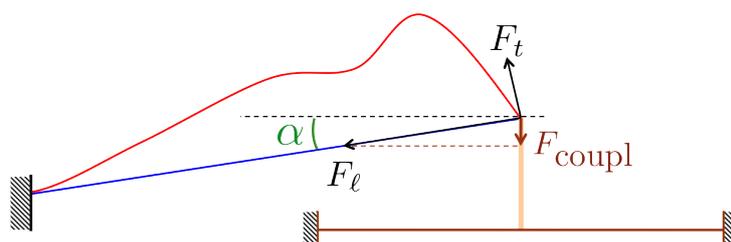


FIGURE I.49 – Modèle simplifié de la configuration au chevalet : corde au repos (en bleu), corde en mouvement (en rouge), chevalet (en ocre) et table d'harmonie (en marron).

Ce mécanisme (déplacement vertical du chevalet et angle des cordes) n'est pas la seule hypothèse permettant de modéliser la transmission des ondes longitudinales à la composante transversale du chevalet. En effet, [Giordano et Korty, 1996] suggèrent qu'un mécanisme lié au coefficient de Poisson soit à l'origine de la conversion des ondes longitudinales en ondes transversales au chevalet. Comme de plus la condition de couplage n'est pas symétrique vis à vis des polarisations de corde, leurs mesures sont expliquées par ces arguments. Il n'y a pas eu de confirmation expérimentale depuis lors de cette hypothèse. On trouve pourtant dans [Giordano, 1998] l'idée selon laquelle c'est un mouvement de torsion qui permet aux ondes longitudinales d'exciter la table d'harmonie. Un possible mouvement de rotation autour d'un axe horizontal orthogonal aux cordes est aussi évoqué dans [Conklin, 1996b], mais le même auteur réfère trois ans plus tard à la présence d'un angle comme un « mécanisme probable » pour expliquer la transmission des ondes longitudinales au chevalet dans [Conklin, 1999], mais on regrette encore l'absence de confirmation expérimentale de ces hypothèses.

Le manque de mesures, de données et la complexité de la géométrie au chevalet nous ont incité à utiliser un modèle très simple, et facilement alimentable, basé sur la présence d'un angle entre les cordes et le chevalet dont seuls les mouvements verticaux sont modélisés. Nous ne prétendons en aucun cas bien représenter la physique ayant lieu en cette partie de l'instrument, et il serait très intéressant de mener une campagne de mesures afin de distinguer les phénomènes prépondérants au chevalet et les quantifier précisément. En particulier, y a-t-il un mouvement dans le plan parallèle à la table d'harmonie ? Y a-t-il un mouvement de rotation massif du chevalet ? Un mouvement de torsion ? Est-il justifié de le considérer comme un corps rigide ?

Ce modèle très simple permet toutefois de transmettre à la table d'harmonie les deux composantes de la vibration de la corde, qui contribuent sans aucun doute au timbre du piano, comme l'illustre cette citation :

« [...] motion normal to the soundboard appeared to be responsible for much of the « body » of the tone, but amplification of the output of the “normal” accelerometer did not seem to give a convincingly realistic piano tone no matter how the spectrum was shaped. In contrast, the output of the longitudinal accelerometer, while lacking

13. Le contenu spectral des deux ondes transversales et longitudinales étant assez différent, sauf « heureux » hasard, leur discrimination est encore possible à l'oreille pendant la suite, mais elle est délicate.

« body », seemed to contain an essential ingredient of airborne piano tone that was missing from the other one. The tonal importance of the ingredient missing in the « normal » signal appeared greater in the treble part of the scale, where the strings form quite a large angle with the direction of the bridge. » [Conklin, 1996b]

I.4.2 Condition de contact

Soit α l'angle mesurant la déviation des cordes à l'horizontale, comme illustré dans la figure I.50, tel qu'il soit nul si les cordes sont parfaitement horizontales, et légèrement positif dans la configuration réelle du piano.

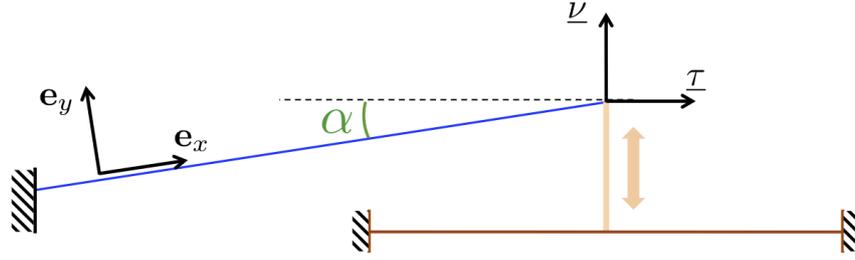


FIGURE I.50 – Schéma représentant les vecteurs \underline{u} et $\underline{\tau}$ au chevalet.

Introduisons deux vecteurs orthogonaux, \underline{u} et $\underline{\tau}$, tels que le premier soit orienté dans la direction du chevalet. Si on appelle \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y les vecteurs de l'espace physique orientant la corde (tels que u_c soit dans la direction de \mathbf{e}_y , voir figure I.50), on peut écrire \underline{u} et $\underline{\tau}$ dans la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ grâce à l'angle α :

$$\underline{u} = \cos(\alpha) \mathbf{e}_y + \sin(\alpha) \mathbf{e}_x, \quad \underline{\tau} = \sin(\alpha) \mathbf{e}_y - \cos(\alpha) \mathbf{e}_x \quad (\text{I.4.1})$$

Dans un but pédagogique, oublions dans un premier temps le marteau et considérons le couplage entre la table d'harmonie qui rayonne et une corde. La corde est soumise à une équation du type (I.1.144a), mais son extrémité paramétrée par $x = L$ n'est plus soumise aux mêmes conditions qu'à l'agrafe.

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 \mathbf{M} \mathbf{q} + \partial_t (\mathbf{R} \mathbf{q} - \partial_x (\mathbf{H} \partial_x \mathbf{q})) - \partial_x (\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q})) + \mathbf{C} \mathbf{q} + {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} = \mathbf{S}(x, t) \\ q_k(x=0, t) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{I}_D, \quad \partial_x q_k(x=0, t) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{I}_N, \\ \mathbf{q}(x, t=0) = \mathbf{q}_0(x), \quad \partial_t \mathbf{q}(x, t=0) = \mathbf{q}_1(x). \end{array} \right. \quad (\text{I.4.2a})$$

$$q_k(x=0, t) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{I}_D, \quad \partial_x q_k(x=0, t) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{I}_N, \quad (\text{I.4.2b})$$

$$\mathbf{q}(x, t=0) = \mathbf{q}_0(x), \quad \partial_t \mathbf{q}(x, t=0) = \mathbf{q}_1(x). \quad (\text{I.4.2c})$$

La plaque couplée avec l'air avoisinant est quant à elle soumise à la même équation que précédemment, au détail près que la force imposée en flexion provient maintenant de la corde, on l'appelle dorénavant $-F^{\mathcal{P}}(t)$ (on rappelle que $\chi_\omega(x, y)$ est une fonction de répartition de cette force sur la plaque) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 \mathbb{M} \Lambda_p + \partial_t f_{ve}(\mathbb{R}) \Lambda_p + \mathbb{R} \Lambda_p = \begin{pmatrix} -F^{\mathcal{P}}(t) \chi_\omega(x, y) + [p]_\omega \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sur } \omega \end{array} \right. \quad (\text{I.4.3a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_a \frac{\partial V_a}{\partial t} + \nabla p = 0 \\ \mu_a \frac{\partial p}{\partial t} + \text{Div} V_a = 0 \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{I.4.3b})$$

$$V_a \cdot \underline{n}_c = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_c \quad (\text{I.4.3c})$$

$$V_a \cdot \underline{e}_z = \frac{\partial u_p}{\partial t} \quad \text{sur } \omega \quad (\text{I.4.3d})$$

Il reste donc à préciser l'expression de $F^{\mathcal{P}}(t)$ en fonction des inconnues des cordes, ainsi que d'écrire une condition de bord à imposer à l'extrémité $x = L$ de la corde. Nous allons voir que la force va jouer le

rôle d'un multiplicateur de Lagrange associé à la condition de bord. Dans l'objectif d'écrire une condition de couplage entre les cordes et la table d'harmonie qui permette la conservation (ou la dissipation, si les éléments sont considérés dissipatifs) d'une énergie globale, ce couplage doit être réciproque, et permettre que l'énergie « circule » entre les sous systèmes. Autrement dit, toute perte énergétique d'un sous système liée au couplage doit être compensée par un gain énergétique de la même valeur par l'autre sous système. Écrivons donc les pertes de chaque sous système. Concernant la table et l'air, on utilise le théorème I.3.5 pour écrire que l'énergie du sous système { plaque - air } $\mathcal{E}_{p,a}$ vérifie¹⁴

$$\frac{d\mathcal{E}_{p,a}}{dt} = -F^{\mathcal{P}}(t) \int_{\omega} \dot{u}_p \chi_{\omega} - \left\| \frac{\partial \Lambda_p}{\partial t} \right\|_{f_{ve}(\mathbb{R})}^2 \quad (\text{I.4.4})$$

Concernant la corde, il faut adapter le théorème I.1.9 au cas d'une extrémité mobile. On montre facilement que l'énergie de la corde \mathcal{E}_c vérifie à présent :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_c(t) = \underbrace{\left[\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla U(\partial_x \mathbf{q}) + \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}} \right]}_{\mathbf{T}_L} \cdot \dot{\mathbf{q}}|_{x=L} - \int_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}} \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}} + \int_0^L \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{I.4.5})$$

où \mathbf{T}_L est un vecteur de tension généralisée au dernier point de la corde. Les transferts entre sous systèmes se compensent si et seulement si

$$F^{\mathcal{P}}(t) \int_{\omega} \dot{u}_p \chi_{\omega} = \mathbf{T}_L \cdot \dot{\mathbf{q}}|_{x=L} \quad (\text{I.4.6})$$

La description de la cinématique du chevalet intervient alors : nous ne considérons que les mouvements verticaux du chevalet. Autrement dit, la corde est bloquée dans la direction (physique) du vecteur $\underline{\tau}$, tandis qu'il y a continuité des « mouvements » entre la corde et le chevalet dans la direction du vecteur $\underline{\nu}$. L'équation (I.4.6) nous indique que cette continuité doit se faire du point de vue des vitesses si l'on souhaite écrire une conservation d'énergie globale¹⁵.

Si l'équation de corde considérée est le MGE, les inconnues sont $\mathbf{q} = (u_c, v_c)$. Alors, on écrit que la corde est bloquée dans la direction $\underline{\tau}$ et que les vitesses sont continues dans la direction $\underline{\nu}$ ainsi :

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_c(x=L) \\ \dot{v}_c(x=L) \end{pmatrix} \cdot \underline{\nu} = \int_{\omega} \dot{u}_p \chi_{\omega}, \quad \begin{pmatrix} \dot{u}_c(x=L) \\ \dot{v}_c(x=L) \end{pmatrix} \cdot \underline{\tau} = 0 \quad (\text{I.4.7})$$

Si toutefois l'équation considérée est le système de corde raide non linéaire, alors les inconnues sont $\mathbf{q} = (u_c, v_c, \varphi_c)$. Dans ce cas, l'inconnue φ_c n'ayant pas de direction physique particulière (elle est d'ailleurs sans dimension), la continuité des vitesses s'écrit toujours (I.4.7). Ce système n'impose pas de condition à la limite pour l'inconnue φ_c , qui doit donc être précisée en plus. Nous garderons la condition de Neumann homogène, qui signifie que le moment est nul aux extrémités de la corde.

Afin d'uniformiser les écritures pour tous les modèles de corde, nous introduisons des nouveaux vecteurs de taille \mathbb{R}^N (N étant le nombre d'inconnues du système) que nous appellerons $\underline{\nu}$ et $\underline{\tau}$, définis tels que le système suivant signifie toujours la continuité des vitesses dans la direction physique du chevalet, et un blocage dans la direction orthogonale :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(x=L, t) \cdot \underline{\nu} = \int_{\omega} \dot{u}_p(x, y, t) \chi_{\omega}(x, y) dx dy & (\text{I.4.8a}) \\ \dot{\mathbf{q}}(x=L, t) \cdot \underline{\tau} = 0 & (\text{I.4.8b}) \end{cases}$$

Par exemple, pour le système posé sur (u_c, v_c, φ_c) , les vecteurs généralisés s'écrivent

$$\underline{\nu} = {}^t(\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0), \quad \underline{\tau} = {}^t(-\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0) \quad (\text{I.4.9})$$

On appelle alors \mathcal{I}_a l'ensemble des indices des inconnues dont la condition à la limite n'est pas définie par (I.4.8), et on pose des conditions de Neumann homogène sur toutes les inconnues de cet ensemble (destiné à contenir surtout φ_c).

14. on rappelle que la notation \dot{X} signifie $\partial_t X$

15. ce qui fait écho à la continuité des vitesses acoustique et mécanique pour l'établissement d'un système conservatif de vibroacoustique en section précédente.

Enfin, pour réaliser l'égalité (I.4.6), il reste à définir $F^{\mathcal{P}}(t)$, ce que l'on fait en posant :

$$F^{\mathcal{P}}(t) = \left[\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla U(\partial_x \mathbf{q}) + \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}} \right]_{x=L} \cdot \underline{\nu} \quad (\text{I.4.10})$$

Cette définition caractérise $F^{\mathcal{P}}(t)$ comme la composante dirigée selon $\underline{\nu}$ du vecteur tension généralisée \mathbf{T}_L . On peut se demander pourquoi la composante selon $\underline{\tau}$ n'intervient pas, la remarque I.4.1 reviendra sur ce point. Le système couplé de corde, table et air s'écrit donc :

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \partial_t^2 \mathbf{M} \mathbf{q} + \partial_t (\mathbf{R} \mathbf{q} - \partial_x (\mathbf{H} \partial_x \mathbf{q})) - \partial_x (\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla U(\partial_x \mathbf{q})) + \mathbf{C} \mathbf{q} \\ & \qquad \qquad \qquad + {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} = \mathbf{S}(x, t) \end{aligned} \right. \quad (\text{I.4.11a}) \\ & \left\{ \begin{aligned} & q_k(x=0, t) = 0, \forall k \in \mathcal{I}_D \\ & \partial_x q_k(x=0, t) = 0, \forall k \in \mathcal{I}_N \\ & \partial_x q_k(x=L, t) = 0, \forall k \in \mathcal{I}_a \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} & \dot{\mathbf{q}}(x=L) \cdot \underline{\nu} = \int_{\omega} \dot{u}_p \chi_{\omega} \\ & \dot{\mathbf{q}}(x=L) \cdot \underline{\tau} = 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{I.4.11b}) \\ & F^{\mathcal{P}}(t) = \left[\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla U(\partial_x \mathbf{q}) + \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}} \right]_{x=L} \cdot \underline{\nu} \quad (\text{I.4.11c}) \\ & \partial_t^2 \mathbb{M} \Lambda_p + \partial_t f_{ve}(\mathbb{R}) \Lambda_p + \mathbb{R} \Lambda_p = \begin{pmatrix} -F^{\mathcal{P}}(t) \chi_{\omega}(x, y) + [p]_{\omega} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sur } \omega \quad (\text{I.4.11d}) \\ & \left\{ \begin{aligned} & \rho_a \frac{\partial V_a}{\partial t} + \nabla p = 0 \\ & \mu_a \frac{\partial p}{\partial t} + \text{Div } \underline{V}_a = 0 \end{aligned} \right. \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{I.4.11e}) \\ & \underline{V}_a \cdot \underline{n}_c = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega_c \quad (\text{I.4.11f}) \\ & \underline{V}_a \cdot \underline{e}_z = \frac{\partial u_p}{\partial t} \quad \text{sur } \omega \quad (\text{I.4.11g}) \end{aligned} \right. \quad (\mathcal{S}_{c,p,a})$$

THÉORÈME I.4.1 (*Énergie du système couplé { cordes, table, air }*)

Toute solution du système (I.4.11) vérifie :

$$\frac{d\mathcal{E}_{c,p,a}}{dt} = - \left\| \frac{\partial \Lambda_p}{\partial t} \right\|_{f_{ve}(\mathbb{R})}^2 - \int_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}} \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}} + \int_0^L \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{I.4.12})$$

où $\mathcal{E}_{c,p,a}(t) = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_p(t) + \mathcal{E}_a(t)$, avec $\mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \Lambda_p}{\partial t} \right\|_{\mathbb{M}}^2 + \frac{1}{2} \|\Lambda_p\|_{\mathbb{R}}^2$, $\mathcal{E}_a(t) = \frac{\rho_a}{2} \|\underline{V}_a\|_{\Omega}^2 + \frac{\mu_a}{2} \|p\|_{\Omega}^2$, et $\mathcal{E}_c(t)$ défini par (II.1.5).

DÉMONSTRATION. Les termes de couplage ont été écrits tels que les transferts internes se compensent entre les systèmes, voir (I.4.5) et (I.4.4). □

REMARQUE I.4.1 (*Force associée à la contrainte dans la direction $\underline{\tau}$*)

Pour être tout à fait complet, il existe une force $G^{\mathcal{P}}(t)$ associée à la contrainte cinématique dans la direction de $\underline{\tau}$, qui est le pendant de $F^{\mathcal{P}}(t)$, force associée à la contrainte dans la direction $\underline{\nu}$. Cette force n'apparaît pas car elle ne travaille pas, la vitesse dans la direction $\underline{\tau}$ étant nulle. Nous verrons qu'elle deviendra indispensable au paragraphe I.5 lors de l'écriture d'une formulation variationnelle basée sur un choix particulier : celui de traiter les conditions de couplages de façon duale, en utilisant

les forces comme des multiplicateurs de Lagrange associés.

REMARQUE I.4.2 (Condition de contact et polarisations des cordes)

Nous avons évoqué en paragraphe (I.1.4) le fait que les cordes pouvaient se mettre en mouvement non planaire, et que ce phénomène devait être modélisé à la fois par une équation de cordes non planaire, mais aussi par une condition de contact rendant compte de la transmission non symétrique de ce mouvement au chevalet. Nous voyons que la condition proposée ici ne permet pas de remplir ce dernier objectif. L'utilisation d'un modèle de corde non planaire devra être précédée d'une étude plus poussée, débouchant sur l'écriture d'une condition de contact plus réaliste pour cette configuration. On trouve par exemple dans [Cuenca, 2006] et [Cuenca et Caussé, 2007] l'idée de considérer le chevalet comme un solide tridimensionnel avec sa loi de comportement orthotrope, puis d'écrire avec les équations de l'élastodynamique tridimensionnelle la relation entre la force exercée par les cordes sur le chevalet et les contraintes résultant dans le solide, et enfin de ramener cette relation à une condition d'impédance ponctuelle.

I.4.3 Transmission de la vibration longitudinale, partiels fantômes

En l'absence de dissipation, la force transmise entre les cordes et la table d'harmonie s'écrit donc :

$$F^{\mathcal{P}}(t) = \left[\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q}) \right]_{x=L} \cdot \underline{\nu} \quad (\text{I.4.13})$$

Cette force sera propagée par la table d'harmonie et l'air à travers le couplage vibroacoustique, qui agiront comme des filtres sur le signal de la force. Par linéarité du système (I.3.32), le contenu fréquentiel ne sera cependant pas changé entre la force au chevalet et le son, la propagation changera seulement les amplitudes relatives des composantes déjà présentes dans le signal de force. Développons son expression pour les différents modèles de corde et intéressons nous à sa composition spectrale.

I.4.3.a Equation de corde vibrante

Les inconnues étant simplement u_c , on peut choisir de prendre en compte la présence d'un angle ou pas, mais cela n'aura comme effet qu'un coefficient de proportionnalité égal à $\cos(\alpha)$:

$$F^{\mathcal{P}}(t) = \cos(\alpha) T_0 \partial_x u_c(x = L, t) \quad (\text{I.4.14})$$

On retrouve bien l'expression proposée par [Derveaux et al., 2003] pour la modélisation de la guitare pour laquelle une corde vibrante était considérée, ou, d'après notre interprétation, par [Giordano et Jiang, 2004] qui utilisent une corde linéaire pour le piano, bien que peu de détails soient donnés (« This force [...] is proportionnal to the component of the string tension perpendicular to the plane of the board »).

Par linéarité de cette équation, le contenu spectral de $F^{\mathcal{P}}$ sera le même que celui de u_c . En effet, rappelons nous que dans le cas de la corde vibrante, toute solution s'écrit¹⁶

$$u_c(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(t) \sin(n\pi x/L) \quad (\text{I.4.15})$$

où les amplitudes modales $u_n(t)$ oscillent aux fréquences propres égales à $f_n = n\sqrt{T_0}/2L\sqrt{\rho A}$. La force s'écrit alors :

$$F^{\mathcal{P}}(t) = \cos(\alpha) T_0 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(t) \frac{n\pi(-1)^n}{L} \quad (\text{I.4.16})$$

On retrouvera donc les fréquences propres de corde dans la force transmise au chevalet. Par linéarité de la table d'harmonie et de la propagation dans l'air, ce sont ces fréquences que l'on retrouvera dans le son de piano, à savoir en ce qui concerne la corde vibrante, un spectre presque harmonique.

16. La décomposition sur ces modes propres n'est plus valide, en toute rigueur, étant donnés qu'ils sont obtenus en supposant l'extrémité immobile. Cependant, le déplacement du chevalet étant très faible par rapport à celui de la corde, considérer les modes et fréquences propres du problème immobile aux extrémités permet de donner une bonne idée des modes et des fréquences du problème mobile.

I.4.3.b Système de Timoshenko précontraint

Ici les inconnues sont (u_c, φ_c) , donc $\underline{\nu} = {}^t(\cos(\alpha), 0)$ et $\underline{\tau} = {}^t(0, 0)$. La force s'exprime comme

$$F^{\mathcal{P}}(t) = \cos(\alpha) \left[T_0 \partial_x u_c + AG\kappa(\partial_x u_c - \varphi_c) \right] (x = L, t) \quad (\text{I.4.17})$$

Par linéarité, on peut faire la même remarque que précédemment, pour conclure que le spectre trouvé pour la première branche du système de Timoshenko (ondes de flexion) se transmettra au son de piano, qui aura donc un spectre inharmonique.

I.4.3.c Modèle Géométriquement Exact

Les inconnues sont (u_c, v_c) donc les vecteurs $\underline{\nu}$ et $\underline{\tau}$ sont donnés par (I.4.1). On obtient une combinaison linéaire des deux premières lignes :

$$\begin{aligned} F^{\mathcal{P}}(t) = & \cos(\alpha) \left[EA \partial_x u_c - (EA - T_0) \frac{\partial_x u_c}{\sqrt{(\partial_x u_c)^2 + (1 + \partial_x v_c)^2}} \right] (x = L, t) \\ & + \sin(\alpha) \left[EA \partial_x v_c + (EA - T_0) \left(1 - \frac{1 + \partial_x v_c}{\sqrt{(\partial_x u_c)^2 + (1 + \partial_x v_c)^2}} \right) \right] (x = L, t) \end{aligned} \quad (\text{I.4.18})$$

Dans ce cas, il est difficile de dire quoi que ce soit concernant le contenu spectral de la force. En effet, nous n'avons pas pu donner d'expression des fréquences de la corde, et même si on les suppose proches des fréquences du linéarisé (qui n'est autre que deux équations de corde vibrante), on voit que l'expression ci dessus fait intervenir un terme non linéaire dont il n'est pas évident de prédire l'aspect après transformée de Fourier. Nous utiliserons donc le modèle approché (I.1.84) pour essayer de donner une idée, pour une sollicitation petite, des fréquences présentes dans la force au chevalet, et donc transmises par linéarité jusqu'au son de piano.

I.4.3.d Modèle non linéaire approché

On est dans le même cas que précédemment, et la force s'écrit :

$$\begin{aligned} F^{\mathcal{P}}(t) = & \cos(\alpha) \left[T_0 \partial_x u_c + (EA - T_0) \partial_x u_c \partial_x v_c + (EA - T_0) \frac{(\partial_x u_c)^3}{2} \right] (x = L, t) \\ & + \sin(\alpha) \left[EA \partial_x v_c + (EA - T_0) \frac{(\partial_x u_c)^2}{2} \right] (x = L, t) \end{aligned} \quad (\text{I.4.19})$$

Si on reprend les idées de la démonstration du théorème I.1.5 qui permet de justifier l'utilisation du modèle approché pour une petite sollicitation transversale de taille ε , on se souvient que la solution se développe en puissances de ε , et qu'on obtient, à $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ près (voir l'équation (I.1.97) de la démonstration) :

$$\begin{cases} u^\varepsilon = \varepsilon u_1 + \varepsilon^3 u_3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\ v^\varepsilon = \varepsilon^2 v_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \end{cases} \quad (\text{I.4.20})$$

où u_1 et u_3 sont les solutions de deux équations d'onde linéaires à vitesse $T_0/\rho A$ tandis que v_2 est solution d'une équation d'onde linéaire à vitesse E/ρ . On peut donc exprimer $F^{\mathcal{P}}(t)$ à $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ près, en ayant posé $U_1(t) = \partial_x u_1(x = L, t)$, $U_3(t) = \partial_x u_3(x = L, t)$ et $V_2(t) = \partial_x v_2(x = L, t)$:

$$\begin{aligned} F^{\mathcal{P}}(t) = & \cos(\alpha) \left[T_0 (\varepsilon U_1 + \varepsilon^3 U_3) + (EA - T_0) \varepsilon^3 U_1 V_2 + (EA - T_0) \frac{\varepsilon^3 (U_1)^3}{2} \right] \\ & + \sin(\alpha) \left[EA \varepsilon^2 V_2 + (EA - T_0) \frac{\varepsilon^2 (U_1)^2}{2} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\ = & \varepsilon \left[\cos(\alpha) T_0 U_1 \right] + \varepsilon^2 \left[\sin(\alpha) EA V_2 + \sin(\alpha) (EA - T_0) \frac{(U_1)^2}{2} \right] + \\ & \varepsilon^3 \left[\cos(\alpha) T_0 U_3 + \cos(\alpha) (EA - T_0) \left[U_1 V_2 + \frac{(U_1)^3}{2} \right] \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (\text{I.4.21})$$

On aura donc d'une part une contribution linéaire des termes U_1 , V_2 et U_3 qui transmettront leurs pulsations au reste de la structure. D'autre part, en ce qui concerne les termes non linéaires, on sait d'après le théorème I.1.2 que u_1 , u_3 et v_2 , sont solutions d'équations d'ondes linéaires, et donc s'écrivent sous la forme :

$$u_1(x, t) = \sum_{n \geq 1} u_{1,n}(t) e_n(x), \quad u_3(x, t) = \sum_{m \geq 1} u_{3,m}(t) e_m(x), \quad v_2(x, t) = \sum_{j \geq 1} v_{2,j}(t) e_j(x) \quad (\text{I.4.22})$$

où $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (\sin(n\pi x/L))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la base hilbertienne de $L^2([0, L])$ donnée en (I.1.5) des modes propres du Laplacien¹⁷. Les amplitudes modales $u_{1,n}$ et $u_{3,n}$ oscillent à une pulsation ω_n , tandis que les amplitudes modales $v_{2,n}$ oscillent à une pulsation $\tilde{\omega}_n$ qui sont données par

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} \frac{n\pi}{L}, \quad \tilde{\omega}_n = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{n\pi}{L} \quad (\text{I.4.23})$$

On peut donc écrire les variables d'intérêt U_1 , U_3 et V_2 comme :

$$U_1 = \sum_{n \geq 1} \alpha_n (A_n e^{i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t}), \quad U_3 = \sum_{m \geq 1} \alpha_m (C_m e^{i\omega_m t} + D_m e^{-i\omega_m t}), \quad V_2 = \sum_{j \geq 1} \alpha_j (E_j e^{i\tilde{\omega}_j t} + F_j e^{-i\tilde{\omega}_j t})$$

$$\text{où} \quad \alpha_n = \partial_x e_n(L) = \frac{n\pi}{L} \cos(n\pi) = \frac{n\pi}{L} (-1)^n \quad (\text{I.4.24})$$

On peut alors développer les expressions non linéaires intervenant dans (I.4.21) :

$$(U_1)^2 = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \alpha_n (A_n e^{i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t}) \alpha_m (A_m e^{i\omega_m t} + B_m e^{-i\omega_m t})$$

$$= \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \alpha_n \alpha_m \left[A_n A_m e^{i(\omega_n + \omega_m)t} + A_n B_m e^{i(\omega_n - \omega_m)t} + A_m B_n e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} + B_n B_m e^{-i(\omega_n + \omega_m)t} \right]$$

ce qui traduit un comportement oscillatoire de $(U_1)^2$ aux pulsations $\omega_n + \omega_m$ et $|\omega_n - \omega_m|$ pour tous n, m . De même,

$$U_1 V_2 = \sum_{n \geq 1} \sum_{j \geq 1} \alpha_n (A_n e^{i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t}) \alpha_j (E_j e^{i\tilde{\omega}_j t} + F_j e^{-i\tilde{\omega}_j t})$$

$$= \sum_{n \geq 1} \sum_{j \geq 1} \alpha_n \alpha_j \left[A_n E_j e^{i(\omega_n + \tilde{\omega}_j)t} + B_n E_j e^{i(\tilde{\omega}_j - \omega_n)t} + A_n F_j e^{-i(\tilde{\omega}_j - \omega_n)t} + B_n F_j e^{-i(\omega_n + \tilde{\omega}_j)t} \right]$$

traduisant un comportement vibratoire de $U_1 V_2$ aux pulsations $\omega_n + \tilde{\omega}_j$ et $|\tilde{\omega}_j - \omega_n|$. Enfin,

$$(U_1)^3 = U_1 \times (U_1)^2$$

$$= \sum_{\ell \geq 1} \alpha_\ell (A_\ell e^{i\omega_\ell t} + B_\ell e^{-i\omega_\ell t})$$

$$\times \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \alpha_n \alpha_m \left[A_n A_m e^{i(\omega_n + \omega_m)t} + A_n B_m e^{i(\omega_n - \omega_m)t} + A_m B_n e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} + B_n B_m e^{-i(\omega_n + \omega_m)t} \right]$$

$$= \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \sum_{\ell \geq 1} \alpha_n \alpha_m \alpha_\ell \left[A_\ell A_n A_m e^{i(\omega_n + \omega_m + \omega_\ell)t} + A_\ell A_n B_m e^{i(\omega_n - \omega_m + \omega_\ell)t} + A_\ell A_m B_n e^{-i(\omega_n - \omega_m + \omega_\ell)t} \right.$$

$$\left. + A_\ell B_n B_m e^{-i(\omega_n + \omega_m + \omega_\ell)t} + B_\ell A_n A_m e^{i(\omega_n + \omega_m - \omega_\ell)t} + B_\ell A_n B_m e^{i(\omega_n - \omega_m - \omega_\ell)t} \right.$$

$$\left. + B_\ell A_m B_n e^{-i(\omega_n - \omega_m - \omega_\ell)t} + B_\ell B_n B_m e^{-i(\omega_n + \omega_m - \omega_\ell)t} \right]$$

traduisant un comportement vibratoires de $(U_1)^3$ aux pulsations $|\omega_n \pm \omega_m \pm \omega_\ell|$.

Pour résumer, si on néglige ε^4 , on se rend compte que la force au chevalet issue des forces a un contenu fréquentiel composé au premier ordre (en facteur de ε) des pulsations de U_1 , au second ordre de celles de

17. en toute rigueur, l'extrémité étant autorisée à bouger ici et non pas lors de la définition des modes en (I.1.5), il faudrait considérer des nouveaux modes ce qui conduirait également à des nouvelles fréquences. Cependant, on utilise le même argument que précédemment : le déplacement du chevalet étant très faible par rapport à celui de la corde, considérer les modes et les fréquences du problème immobile aux extrémités permet de donner une idée qualitative des phénomènes que par ailleurs on observera dans des mesures. . .

V_2 , mais aussi des sommes et différences de pulsations de U_1 , et enfin au troisième ordre des pulsations de U_3 mais aussi des sommes et différences de pulsations de U_1 et V_2 et de triples combinaisons de pulsations de U_1 . Les pulsations de vibration de U_1, U_3 étant harmoniques puisque les inconnues u_1 et u_3 sont régies par une équation de corde vibrante, les sommes ou différences de deux pulsations $\omega_n \pm \omega_m$ retombent sur une autre pulsations du spectre ω_p . Ainsi, malgré les combinaisons variées, seule la combinaison qui apparaît comme un phénomène du troisième ordre $\omega_n + \tilde{\omega}_j$ peut conduire à une pulsations non initialement dans le spectre linéaire. Cela est dû au fait que l'on a supposé la corde non linéaire mais infiniment fine, ce que l'on corrige en introduisant de la raideur dès à présent.

I.4.3.e Modèle non linéaire approché raide

Les inconnues sont (u_c, v_c, φ_c) donc on écrit les vecteurs selon la définition (I.4.9). La force s'écrit :

$$F^P(t) = \cos(\alpha) \left[T_0 \partial_x u_c + AG\kappa(\partial_x u_c - \varphi_c) + (EA - T_0) \partial_x u_c \partial_x v_c + (EA - T_0) \frac{(\partial_x u_c)^3}{2} \right] (x = L, t) \\ + \sin(\alpha) \left[EA \partial_x v_c + (EA - T_0) \frac{(\partial_x u_c)^2}{2} \right] (x = L, t) \quad (\text{I.4.25})$$

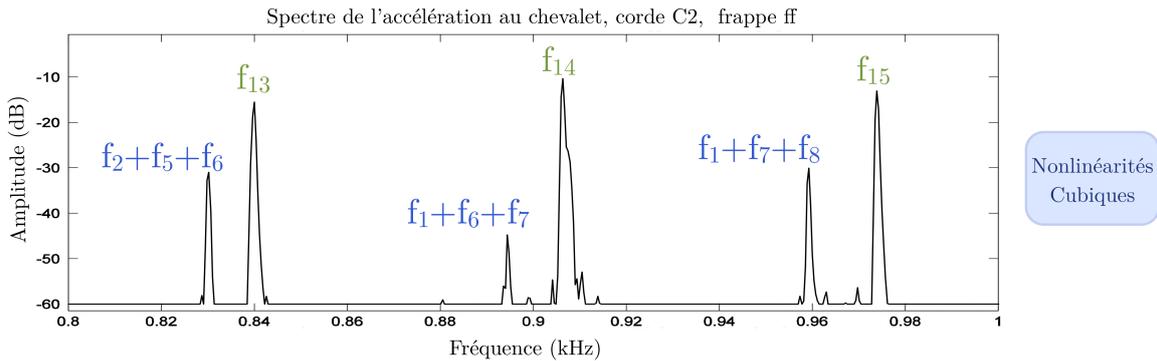
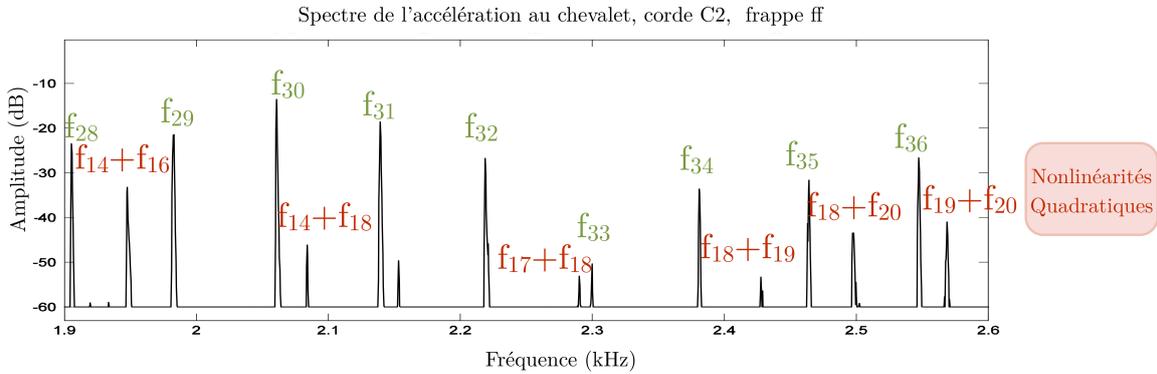


FIGURE I.51 – Spectres de l'accélération au chevalet mesurée sur la corde C2. Les fréquences naturelles de la corde raide sont indiquées en vert avec leur numéro de partiel. Certains partiels apparaissent à des combinaisons de fréquences provenant du terme quadratique $(U_1)^2$, et d'autres apparaissent à des combinaisons provenant du terme cubique $(U_1)^3$.

On peut reprendre le raisonnement précédent, au changement près que u_1, u_3 et v_2 sont solutions de systèmes linéaires de Timoshenko et non plus d'une simple équations de corde vibrante. En conséquence, leurs pulsations ne sont plus harmoniques, mais sont décrites par le théorème¹⁸ I.1.4, ou son développe-

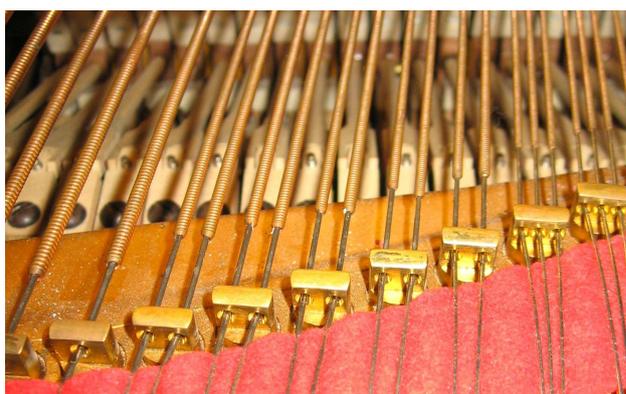
18. en prenant toujours la même précaution concernant les conditions aux limites immobiles ...

ment à basses fréquences donné par (I.1.76). En conséquence, les relations du type somme ou différence de pulsations $\omega_n \pm \omega_m$ ne retombent plus sur d'autres pulsations déjà contenues dans le spectre, mais donnent naissance à des nouveaux partiels, ce qui rend le spectre de la force au chevalet très riche, comme l'illustre la figure I.51.

C'est un phénomène que l'on retrouve dans la littérature du piano sous le nom de « partiels fantômes » dans le son de piano ou dans le signal de l'accélération au chevalet. Ils ont été baptisés par [Conklin, 1997], où l'auteur divise les fantômes en deux catégories, les partiels pairs situés au double d'une fréquence naturelle de corde (qu'il appelle fréquence normale) et les partiels impairs situés à une somme et parfois une différence de deux fréquences normales. Le même auteur précise dans [Conklin, 1999] qu'ils apparaissent préférentiellement à des sommes et différences des fréquences normales adjacentes. Une explication de l'apparition de ces fantômes est donnée dans [Bank et Sujbert, 2005], reposant sur l'équation de corde raide non linéaire approchée, dans laquelle seul le couplage transversal \rightarrow longitudinal est pris en compte, c'est pourquoi les combinaisons $\omega_n + \tilde{\omega}_j$ et $\omega_n \pm \omega_m \pm \omega_\ell$ ne sont pas évoquées. Il semble encore difficile de prédire analytiquement pourquoi certains partiels fantômes apparaissent et pas d'autres. De plus, il faut préciser que lorsque l'on considère l'ensemble des fréquences générées par les sommes, différences de fréquences normales, ainsi que les triples combinaisons de fréquences normales et enfin les sommes et différences de fréquences transversales et longitudinales, on se rend compte qu'il couvre de façon assez dense toutes les fréquences possibles dans la fourchette de fréquences considérée. Attribuer l'origine d'un partiel fantôme mesuré à l'une ou l'autre de ces combinaisons semble alors toujours possible, au Hertz près. L'explication n'est donc pas suffisante, il faudrait pousser l'étude plus loin afin de comprendre en détail, quantitativement, quels partiels fantômes vont être significatifs dans le spectre. L'amplitude relative des partiels de corde (qui dépend essentiellement de l'excitation du marteau) va bien sûr rentrer en compte, mais il faudra également considérer la réponse du chevalet, de la table et de son rayonnement, et non pas s'en tenir à la description de la force au chevalet, qui n'est jamais perçue en tant que telle. On a ici un exemple flagrant illustrant tout l'intérêt de mener une synthèse complète du piano : la simulation nous permettra de naturellement visualiser les fantômes résultants de la prise en compte des phénomènes physiques par les équations associées.

I.4.4 Les chœurs de cordes

Sur tous les pianos et depuis le début de la conception de l'instrument, on trouve plus d'une corde par note. Plus précisément, selon le registre engagé, une, deux ou trois cordes se partagent l'énergie du marteau (voir la figure I.52).



(a) Photographie des premières cordes du piano, à proximité de l'agrafe, illustrant la présence des chœurs de cordes (une, deux ou trois cordes passent dans la même agrafe).



(b) Photographie des premières cordes du piano, au niveau du chevalet, illustrant la présence de duplets et de triplets (les cordes appartenant à la même note sont accrochées en des points très proches).

FIGURE I.52 – Chœurs de cordes

Bien que l'on pourrait penser que cette configuration n'a pour objectif que d'augmenter le volume sonore, il semble que la présence des chœurs de cordes serve un but bien plus complexe. En effet, des mesures sur un piano bien accordé montrent que les différentes cordes d'un même triplet ne vibrent pas exactement

à la même fréquence, d'une façon qui peut paraître aléatoire selon [Kirk, 1959]. Selon [Weinreich, 1977], ce désaccord provoque des battements entre les cordes d'un même chœur, d'autant plus rapides que les cordes sont désaccordées (voir figure I.53). Cet effet est recherché par l'accordeur de piano car il contribue également à la double décroissance dans le son de piano, dont nous avons déjà parlé lors du paragraphe sur les deux polarisations de la corde I.1.4, qui permet d'obtenir à la fois une attaque sonore et un soutien du son. Toute la difficulté réside dans le fait que le désaccord des cordes d'un chœur est ajusté par rapport à l'irrégularité du marteau qui les frappe, au couplage des polarisations de chaque corde, au couplage des cordes à travers l'attache au chevalet, afin d'assurer une homogénéité du timbre tout au long de la tessiture, malgré des configurations très différentes de note à note...

Nous modélisons les chœurs de cordes en supposant qu'un même marteau frappe N_c cordes à la fois, dont la tension diffère (les cordes d'un même chœur sont toujours constituées du même diamètre et de la même longueur). La force subie par le marteau est donc la somme des N_c forces de couplage du marteau avec chaque corde. Nous indiquerons par l'indice i chaque corde du chœur, et adaptons très naturellement le système (I.2.9) au cas d'un chœur :

$$\left(\mathcal{S}_{m,c} \right) \begin{cases} M^{\mathcal{H}} \frac{d^2 \xi}{dt^2}(t) = - \sum_i F_i^{\mathcal{H}}(t) & \text{(I.4.26a)} \\ F_i^{\mathcal{H}}(t) = K_i^{\mathcal{H}} \Phi(\langle u_i \rangle(t) - \xi(t)) + R_i^{\mathcal{H}} \frac{d}{dt} \Phi(\langle u_i \rangle(t) - \xi(t)) & \text{(I.4.26b)} \\ \partial_t^2 \mathbf{M} \mathbf{q}_i + \partial_t (\mathbf{R} \mathbf{q}_i - \partial_x (\mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}}_i)) - \partial_x (\mathbf{A}_i \partial_x \mathbf{q}_i + \mathbf{B} \mathbf{q}_i + \nabla \mathcal{U}_i(\partial_x \mathbf{q}_i)) \\ + {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q}_i + \mathbf{C} \mathbf{q}_i = F_i^{\mathcal{H}}(t) \delta^{\mathcal{H}}(x - x^{\mathcal{H}}) \mathbf{e}_u, \quad \forall i & \text{(I.4.26c)} \end{cases}$$

On complète ce système d'équations avec les données initiales : cordes au repos et vitesse $v_0^{\mathcal{H}}$ imposée au marteau depuis une position $-\xi_0$:

$$\begin{cases} \xi(t=0) = -\xi_0, & \partial_t \xi(t=0) = v_0^{\mathcal{H}}, & \text{(I.4.27a)} \\ \mathbf{q}_i(x, t=0) = \partial_t \mathbf{q}_i(x, t=0) = 0, & \forall i & \text{(I.4.27b)} \end{cases}$$

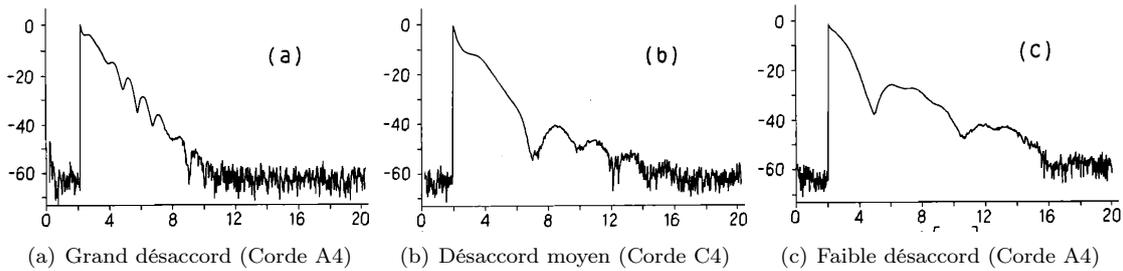


FIGURE I.53 – Niveau de déplacement transversal vertical relatif d'une corde d'un triplet en fonction du temps. Le désaccord de la corde observée par rapport aux autres cordes est progressivement diminué entre les figures (a), (b) et (c), ce qui entraîne des battements de moins en moins rapides. Extrait de [Weinreich, 1977].

Enfin, on considèrera lorsqu'il faudra écrire le système complet que le point d'attache au chevalet est commun à toutes les cordes d'un même chœur (ce qui n'est pas loin de la réalité, voir figure I.52(b)), et qu'en ce point, chaque corde vérifie la condition de contact avec la table d'harmonie à travers le chevalet développée en I.4.2. En attendant, et pour écrire le théorème suivant concernant l'énergie du chœur de cordes, supposons des conditions idéales comme au chapitre réservé aux cordes, à savoir

$$q_{i,k}(x=0, t) = q_{i,k}(x=L, t) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{I}_D, \quad \text{(I.4.28)}$$

$$\partial_x q_{i,k}(x=0, t) = \partial_x q_{i,k}(x=L, t) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{I}_N. \quad \text{(I.4.29)}$$

THÉORÈME I.4.2 (Énergie du système {chœur de corde , marteau })

Toute solution au système (I.4.26) vérifie

$$\frac{d\mathcal{E}_{m,c}}{dt}(t) = \sum_{i=0}^{N_c} \left[- \int_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i - \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}}_i + R_i^{\mathcal{H}} \Phi'(\langle u_i \rangle(t) - \xi(t)) [\partial_t \langle u_i \rangle(t) - \partial_t \xi(t)]^2 \right] \leq 0 \quad (\text{I.4.30})$$

où

$$\mathcal{E}_{m,c}(t) = \sum_{i=1}^{N_c} \left[\mathcal{E}_{c,i}(t) + K_i^{\mathcal{H}} \Psi(\langle u_i \rangle(t) - \xi(t)) \right] + \frac{M^{\mathcal{H}}}{2} \left| \dot{\xi}(t) \right|^2 \quad (\text{I.4.31})$$

où $\mathcal{E}_{c,i}(t)$ est l'énergie définie par (II.1.5) évaluée pour la corde numéro i .

DÉMONSTRATION. Ecrivons les transferts entre sous systèmes. En vertu du théorème I.1.9 appliqué à l'équation de chaque corde du chœur, on obtient d'une part que

$$\frac{d\mathcal{E}_{c,i}}{dt} = F_i^{\mathcal{P}}(t) \langle \dot{u}_i \rangle - \int_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i - \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}}_i \quad (\text{I.4.32})$$

D'autre part, on multiplie la ligne du marteau par $\dot{\xi}$ pour obtenir :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{M^{\mathcal{H}}}{2} (\dot{\xi})^2 = - \sum_{i \leq N_c} F_i^{\mathcal{P}}(t) \dot{\xi}(t) \quad (\text{I.4.33})$$

Il ne reste plus qu'à exprimer les $F_i^{\mathcal{P}}(t)$ en fonction des inconnues et le résultat s'obtient en sommant toutes les contributions.

□

I.4.5 Jeu *una corda* et cordes aliquotes

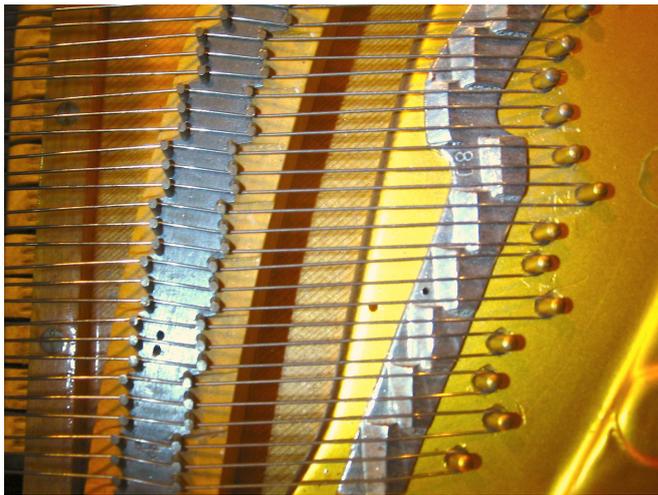
La pédale *una corda* permet de translater la mécanique du piano à queue de quelques centimètres, de telle sorte que les marteaux frappent les cordes de façon différente de la configuration habituelle. En ce qui concerne les cordes seules, le contact entre la corde et le marteau se fait sur une zone peu utilisée du marteau. C'est surtout au niveau des chœurs de cordes que le changement est spectaculaire, puisque l'une des cordes n'est alors plus frappée par le marteau. Ainsi, cette corde non frappée n'est mise en vibration que par son couplage au chevalet (par sympathie). Cette pédale a pour effet un son beaucoup plus doux et donne à l'instrument un **timbre** feutré très différent du timbre habituel.

Le système de cordes aliquotes élargit le principe de la pédale *una corda* de façon permanente à certaines notes : il s'agit d'une corde ajoutée au chœur habituel, mais qui n'est pas frappée par le marteau. Elle constitue donc, d'un point de vue formel, une quatrième corde au sein d'un chœur, qui n'est jamais frappée. Elle est accordée à la hauteur d'un partiel des autres cordes (pas forcément le fondamental) et est réputée donner un son soyeux, chantant au piano.

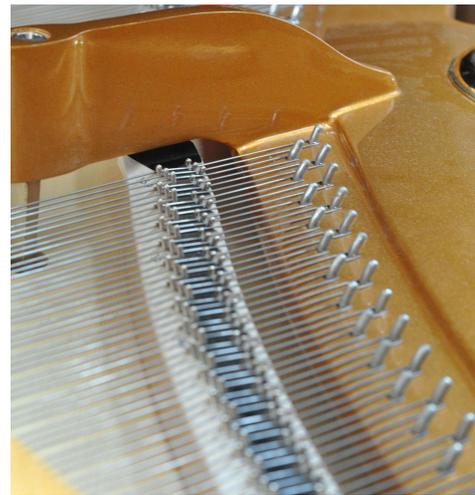
Ces deux situations seront prises en compte dans notre modèle, en autorisant ou pas le marteau à interagir avec telle ou telle corde du chœur. Ceci est réalisé lorsque, dans le système d'équations (I.4.26), on attribue une valeur réaliste à $K_i^{\mathcal{H}}$ et $R_i^{\mathcal{H}}$ pour les cordes frappées par le marteau, mais on les assigne artificiellement à 0 pour les cordes non frappées (soit à cause de la pédale *una corda*, soit parce que la corde est aliquote et donc jamais frappée). Insistons sur le fait que cette configuration est très différente de la situation obtenue en enlevant les cordes non frappées, puisque celles ci vont se mettre en vibration par sympathie grâce à leur couplage au chevalet, et donc contribuer aux vibrations de l'instrument et au son final.

I.4.6 Échelles duplex

Dans certains pianos, parfois uniquement dans l'aigu, la portion de corde située derrière le chevalet (duplex arrière) est accordée à un certain partiel du reste du chœur grâce à la disposition de « maisonnettes » comme illustré sur la figure I.54(a), ce qui peut même s'étendre à la portion de corde située entre le sillet et le bord du cadre (duplex avant). Certains facteurs de piano en font un argument commercial



(a) Duplex accordé par les maisonnettes individuelles à chaque corde sur le Steinway D de l'IRCAM.



(b) Duplex non accordé : c'est la pointe d'accroche qui termine l'échelle duplex.

FIGURE I.54 – Portion de corde située derrière le chevalet : échelle duplex.

comme on le voit dans la citation suivante, vantant les mérites de l'accord des duplex avant et arrières, extraite du site internet de Schimmel :

« La gamme complète des pianos à queue Schimmel ainsi que les pianos de concert K 132 et K 125 intègrent une spécificité notable : le plan de cordes Triplex Schimmel. La cohésion parfaite de trois segments vibrants des cordes optimise la qualité de restitution des sonorités qui s'enrichissent d'une coloration exceptionnelle des notes fondamentales et de leurs harmoniques, déployant ainsi une belle longueur de son. [...] Les plans de cordes Triplex sont des modèles de précision exceptionnelle. Dans le système Triplex du plan de cordes de Schimmel, la partie des cordes située au-delà des cordes vibrantes résonne à l'octave par sympathie avec la partie attaquée des cordes. Ces harmoniques enrichissent le son fondamental, accentuant la coloration harmonique et donnant à la sonorité son identité typique, ce qui explique que les pianos à queue Schimmel brillent par leur son incomparable. » schimmel-piano.de

Même si elles ne sont pas accordées, les échelles duplex sont laissées libres de vibrer dans l'aigu sur la plupart des pianos (comme sur la figure I.54(b)). Des mesures sur cette portion de corde montrent que la vibration est faible mais pas inexistante, et lorsque l'échelle duplex est accordée à un partiel de la corde, les amplitudes modales sur cette fréquence sont comparables.

« The nominal frequency ratios for the far tail end relative to the main string were found to be 4 :1. [...] The peak string amplitude on the tail end was typically only about 1/10 compared to that of the main string. The waveform was quite different, however, and the tail end fundamental was as strong as the corresponding partial on the main string. When the tail end was damped, the corresponding partial of the bridge vibrations increased by about 3 dB, while the spectra of the main string vibrations remained unchanged. These results give no clear answer to the question of the influence of the duplex scaling on tone quality. The one conclusion which can be drawn is that the tail string vibrates strongly at a frequency close to the corresponding partial of the main string. A further study would preferably include a perceptual valuation of the difference between resonating and damped tail string. » [Askenfelt, 1993a]

Il sera intéressant de considérer ces échelles duplex dans notre modèle, ce que nous ferons en les considérant comme des cordes supplémentaires au chœur, non frappées par le marteau, ayant un angle différent (proche de 180°) et la même condition de contact au chevalet que les autres cordes (continuité des vitesses dans

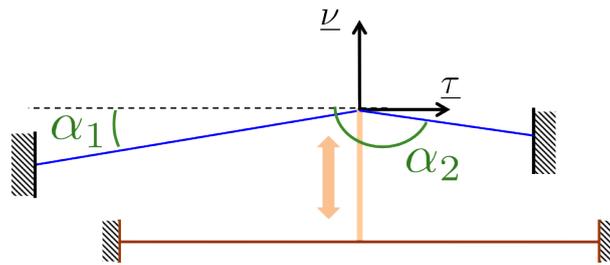


FIGURE I.55 – Schéma représentant le couplage au chevalet en présence d'une échelle duplex.

la direction ν).

I.5

Modèle complet de piano

Nous sommes désormais en mesure d'écrire un modèle complet de piano, prenant en compte tous les éléments que nous avons passé en revue jusqu'ici. Rappelons brièvement les hypothèses faites sur chacun, ainsi que des valeurs typiques prises par les coefficients du modèle :

- ▷ le **marteau** suit une trajectoire rectiligne orthogonale à la corde au repos, et n'est soumis qu'à la somme des forces issues de son interaction avec les cordes. On calcule ces forces comme une fonction non linéaire de l'écrasement, qui représente l'hysteresis grâce à un terme dissipatif.
- ▷ les **cordes** sont régies par une équation que l'on peut choisir en fonction des phénomènes physiques que l'on souhaite représenter. Le choix se fait parmi l'équation de corde vibrante, l'équation de corde raide (Timoshenko précontraint), le modèle géométriquement exact prenant en compte les non linéarités géométriques, et un modèle alliant non linéarités et raideur. Elles sont chacune soumises à la force issue du couplage avec le marteau et subissent un amortissement fluide.
- ▷ la **table d'harmonie** est supposée plane, nous la modélisons par un modèle de plaque à coefficients variables (afin de représenter les raidisseurs et les chevalets comme une variation d'épaisseur et de matériau), subissant un amortissement considéré diagonal. La table est soumise à la somme des forces de tension provenant des cordes, dirigée dans la direction de flexion de la plaque. Enfin, elle rayonne dans l'air à travers les équations de la vibroacoustique que l'on formule à l'ordre un.
- ▷ le **contact** au chevalet suppose que chaque corde forme un angle par rapport à l'horizontale, et consiste à écrire que la vitesse des cordes dans la direction $\underline{\nu}$ du chevalet est égale à une moyenne de la vitesse de la plaque en flexion, tandis que leur vitesse dans la direction orthogonale $\underline{\tau}$ est nulle.

Paramètres de cordes et marteaux

	Note	D#1	C2	F3	C#5	G6	C7
L	(m)	1,945	1,600	0,961	0,326	0,124	0,094
d	(mm)	1,4833	1,1227	1,0525	0,93122	0,86705	0,82463
ρ	(kg·m ⁻³)	44983	24085	7850	7850	7850	7850
T_0	(N)	1781	1046	774	702	706	658
f_0	(Hz)	38,89	65,41	174,61	554,36	1567,98	2093,00
p		1,8	2,3	2,4	2,6	2,8	3,1
$K^{\mathcal{H}}$	(N·m ^{-p})	$3,0 \times 10^8$	5×10^9	$1,0 \times 10^9$	$1,0 \times 10^{10}$	$1,0 \times 10^{11}$	$4,8 \times 10^{11}$
$M^{\mathcal{H}}$	(kg)	$1,2 \times 10^{-2}$	$9,8 \times 10^{-3}$	$9,0 \times 10^{-3}$	$8,0 \times 10^{-3}$	$7,0 \times 10^{-3}$	$6,4 \times 10^{-3}$
$x^{\mathcal{H}}$	(m)	0,25	0,2	0,115	0,051	0,015	0,011
x_0	(m)	0,47	0,59	0,54	0,88	1,14	1,24
y_0	(m)	1,63	1,26	0,83	0,25	0,04	0,02

$$A = \frac{\pi d^2}{4}, \quad I = \frac{\pi d^4}{64}, \quad E = 2,02 \times 10^{11} \text{ Pa}, \quad G = 8 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

Paramètres d'Épicéa

ρ	E_x	E_y	E_z	G_{xy}	G_{xz}	G_{yz}	ν_{xy}	ν_{xz}	ν_{yz}
kg·m ⁻³	GPa	GPa	Gpa	Gpa	GPa	Gpa	-	-	-
390	11,6	0,9	0,5	0,75	0,72	0,039	0,37	0,47	0,43
380	11,0	0,650	-	0,66	1,2	0,042	0,26	-	-

Paramètres de Hêtre

ρ	E_x	E_y	E_z	G_{xy}	G_{xz}	G_{yz}	ν_{xy}	ν_{xz}	ν_{yz}
kg·m ⁻³	GPa	GPa	Gpa	Gpa	GPa	Gpa	-	-	-
750	13,7	2,24	-	1,61	1,06	0,46	0,3	-	-

Paramètres pour l'acoustique

$$\rho_a = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^3, \quad c_a = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \mu_a = 6,71 \times 10^{-6} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$$

Le système de piano s'écrit :

$$\begin{cases}
 M^{\mathcal{H}} \frac{d^2 \xi}{dt^2}(t) = - \sum_i F_i^{\mathcal{H}}(t) & \text{(I.5.1a)} \\
 F_i^{\mathcal{H}}(t) = K_i^{\mathcal{H}} \Phi(\langle u_i \rangle(t) - \xi(t)) + R_i^{\mathcal{H}} \frac{d}{dt} \Phi(\langle u_i \rangle(t) - \xi(t)) & \text{(I.5.1b)} \\
 \partial_t^2 \mathbf{M} \mathbf{q}_i + \partial_t (\mathbf{R} \mathbf{q}_i - \partial_x (\mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}}_i)) - \partial_x (\mathbf{A}_i \partial_x \mathbf{q}_i + \mathbf{B} \mathbf{q}_i + \nabla \mathcal{U}_i(\partial_x \mathbf{q}_i)) \\
 \quad + {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q}_i + \mathbf{C} \mathbf{q}_i = F_i^{\mathcal{H}}(t) \delta^{\mathcal{H}}(x - x^{\mathcal{H}}) \mathbf{e}_u, \quad \forall i & \text{(I.5.1c)} \\
 \left\{ \begin{array}{l} q_{i,k}(x=0,t) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{I}_D \\ \partial_x q_{i,k}(x=0,t) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{I}_N \\ \partial_x q_{i,k}(x=L,t) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{I}_a \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{q}}_i(x=L) \cdot \underline{\nu} = \int_{\omega} \dot{u}_p \chi_{\omega} \\ \dot{\mathbf{q}}_i(x=L) \cdot \underline{\tau} = 0 \end{array} \right. \quad \forall i & \text{(I.5.1d)} \\
 F_i^{\mathcal{P}}(t) = \underline{\nu} \cdot [\mathbf{A}_i \partial_x \mathbf{q}_i + \mathbf{B} \mathbf{q}_i + \nabla \mathcal{U}_i(\partial_x \mathbf{q}_i) + \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}}_i](x=L,t) & \text{(I.5.1e)} \\
 \partial_t^2 \mathbb{M} \Lambda_p + \partial_t f_{ve}(\mathbb{R}) \Lambda_p + \mathbb{R} \Lambda_p = \begin{pmatrix} (- \sum_i F_i^{\mathcal{P}}(t)) \chi_{\omega}(x,y) + [p]_{\omega} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sur } \omega & \text{(I.5.1f)} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \rho_a \frac{\partial V_a}{\partial t} + \nabla p = 0 \\ \mu_a \frac{\partial p}{\partial t} + \text{Div } V_a = 0 \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega & \text{(I.5.1g)} \\
 V_a \cdot \underline{n}_c = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega_c & \text{(I.5.1h)} \\
 V_a \cdot \underline{e}_z = \frac{\partial u_p}{\partial t} \quad \text{sur } \omega & \text{(I.5.1i)}
 \end{cases}$$

THÉORÈME I.5.1 (Énergie du système complet)

Toute solution $(\xi, (\mathbf{q}_i)_i, \Lambda_p, p, V_a)$ suffisamment régulière au système (I.5.1) vérifie :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{E}_{m,c,p,a}}{dt} = \sum_{i=1}^{N_c} \left[- \int_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i - \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}}_i \right. \\
 \left. + R_i^{\mathcal{H}} \Phi'(\langle u_i \rangle(t) - \xi(t)) [\partial_t \langle u_i \rangle(t) - \partial_t \xi(t)]^2 \right] - \left\| \dot{\Lambda}_p \right\|_{f_{ve}(\mathbb{R})}^2 & \text{(I.5.2)}
 \end{aligned}$$

$$\text{où } \mathcal{E}_{m,c,p,a}(t) = \mathcal{E}_{m,c}(t) + \mathcal{E}_p(t) + \mathcal{E}_a(t) & \text{(I.5.3)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{m,c}(t) = \sum_{i=1}^{N_c} \left[\mathcal{E}_{c,i}(t) + K_i^{\mathcal{H}} \Psi(\langle u_i \rangle(t) - \xi(t)) \right] + \frac{M^{\mathcal{H}}}{2} |\dot{\xi}(t)|^2 \\ \mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} \left\| \dot{\Lambda}_p \right\|_{\mathbb{M}}^2 + \frac{1}{2} \left\| \Lambda_p \right\|_{\mathbb{R}}^2 \\ \mathcal{E}_a(t) = \frac{\rho_a}{2} \left\| V_a \right\|_{\Omega}^2 + \frac{\mu_a}{2} \|p\|_{\Omega}^2 \end{array} \right. & \text{(I.5.4)}$$

où $\mathcal{E}_{c,i}(t)$ est l'énergie définie par (II.1.5) pour la corde numéro i .

DÉMONSTRATION. On peut calculer les transferts d'énergie entre les sous systèmes marteau / corde et plaque, en utilisant la condition de contact et respectivement les théorèmes 1.4.2 adapté au cas d'une extrémité mobile, 1.4.1 et 1.3.5 :

$$\frac{d\mathcal{E}_{m,c}}{dt}(t) = \sum_i^{N_c} \left[F_i^{\mathcal{P}}(t) \int_{\omega} \dot{u}_p \chi_{\omega} - \int_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i - \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}}_i + R_i^{\mathcal{H}} \Phi'(\langle u_i \rangle(t) - \xi(t)) [\partial_t \langle u_i \rangle(t) - \partial_t \xi(t)]^2 \right] \quad (\text{I.5.5})$$

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dt}(t) = - \sum_i^{N_c} F_i^{\mathcal{P}}(t) \int_{\omega} \dot{u}_p \chi_{\omega} + \int_{\omega} [p]_{\omega} \dot{u}_p - \left\| \dot{\Lambda}_p \right\|_{f_{ve}(\mathbb{R})}^2 \quad (\text{I.5.6})$$

$$\frac{d\mathcal{E}_a}{dt}(t) = - \int_{\omega} \dot{u}_p [p]_{\omega} \quad (\text{I.5.7})$$

On obtient le résultat en sommant les différentes contributions. □

Afin d'écrire la formulation variationnelle associée à ce problème couplé, multidimensionnel, parfois non linéaire, revenons un instant sur les problématiques numériques qui vont survenir au moment de la discrétisation. Nous avons en effet affaire au couplage de trois modèles de nature et de dimension différentes :

- un problème monodimensionnel { marteau - cordes } non linéaire,
- un problème bidimensionnel { table d'harmonie } avec amortissement diagonal,
- un problème tridimensionnel { air } en domaine non borné.

Si nous traiterons la discrétisation spatiale à chaque fois par la méthode des éléments finis d'ordre élevé, la méthode de discrétisation en temps sera en revanche très différente d'un modèle à l'autre, ce que nous aborderons en détails dans le chapitre suivant. Cependant, notre désir de garantir la stabilité du schéma numérique complet nous conduira à écrire un schéma dont on sache démontrer qu'il dissipe, d'un pas de temps à l'autre, une quantité, l'énergie discrète, consistante avec l'énergie continue (1.5.3). La positivité de cette quantité nous permettra d'écrire des estimations a priori sur les inconnues du système discret, et donc d'en garantir la stabilité, même en présence des différents couplages. Une difficulté majeure est qu'il n'existe pas de schéma standard conservant une énergie discrète pour notre système non linéaire de cordes, nous serons donc amenés à développer un schéma spécial, qui malheureusement sera implicite. La résolution d'un système non linéaire devra donc être réalisée à chaque pas de temps. Nous verrons aussi que les couplages seront traités de façon centrée, donc implicite, afin de garantir un simple transfert d'énergie entre les sous systèmes, à l'instar du modèle continu, sans introduction artificielle de dissipation, ou pire, d'instabilités. Il est souhaitable, afin de garantir l'efficacité numérique, de mettre à jour de façon découpée les inconnues des différents modèles. Pour cela, il convient d'être attentif au moment de discrétiser les conditions de contact, qui, en toute généralité, se divisent en conditions essentielles du type Dirichlet (traduisant des contraintes cinématiques) et conditions naturelles du type Neumann (traduisant une continuité de force). On s'aperçoit que si l'on choisit de traiter les conditions cinématiques exactement, à l'intérieur des espaces d'approximations, il semble très difficile de réaliser le découplage souhaité. C'est pourquoi nous ferons le choix de traiter ces conditions de façon duale (faible) en introduisant des multiplicateurs de Lagrange qui en pratique tiendront la place des forces transmises au chevalet, et de traiter les conditions de contact comme une contrainte sur ces nouvelles inconnues¹⁹. Il sera alors possible d'effectuer un double complément de Schur et de découpler numériquement les résolutions 1D, 2D et 3D. Mais ceci est l'objet du prochain chapitre...

Revenons donc à l'écriture d'une formulation variationnelle pour le problème du piano complet. Commençons par écrire les espaces fonctionnels qui interviendront :

¹⁹. Cette vision du système est d'ailleurs cohérente avec l'approche constructive suivie.

Système de cordes :

$$\mathcal{Q}_D = \left\{ \mathbf{q} \in (H^1([0, L]))^N, \quad q_k(0) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{I}_D \right\}$$

Système de plaque :

$$\mathcal{L}_D = \left\{ \Lambda_p = {}^t(u_p, \underline{\theta}_p) \in (H^1(\omega))^3, \quad (\Lambda_p)_k = 0 \text{ sur } \partial\omega \quad \forall k \in \mathcal{J}_D \right\}$$

Système de l'acoustique :

$$\mathcal{P} = H^1(\Omega), \quad \mathcal{V} = L^2(\Omega)$$

Nous voyons qu'avec ce choix d'espaces variationnels, rien ne contraint les mouvements du dernier point des cordes dans la direction $\underline{\tau}$. Il en découle que pour les fonctions tests, on ne pourra plus avancer l'argument de la remarque 1.4.1 selon laquelle la composante de la tension généralisée de la corde, au dernier point, dirigée selon $\underline{\tau}$ ne travaille pas. En conséquence, deux multiplicateurs de Lagrange sont introduits par corde, $F_i^{\mathcal{P}}(t)$ et $G_i^{\mathcal{P}}(t)$, pour les deux composantes de la tension généralisée selon les deux vecteurs $\underline{\nu}$ et $\underline{\tau}$.

La formulation variationnelle du problème $(\mathcal{S}_{m,c,p,a})$ s'écrit :

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{Trouver :} \\
 & \quad \xi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\
 & \quad \mathbf{q}_i : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}_D \\
 & \quad \Lambda_p : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}_D \\
 & \quad p : [0, T] \rightarrow \mathcal{P} \\
 & \quad \underline{V}_a : [0, T] \rightarrow \mathcal{V} \\
 & \quad F_i^{\mathcal{P}}, G_i^{\mathcal{P}} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\
 & \\
 & M^{\mathcal{H}} \frac{d^2 \xi}{dt^2}(t) = - \sum_i F_i^{\mathcal{H}}(t) \\
 & \\
 & F_i^{\mathcal{H}}(t) = K_i^{\mathcal{H}} \Phi(\langle u_i \rangle(t) - \xi(t)) + R_i^{\mathcal{H}} \frac{d}{dt} \Phi(\langle u_i \rangle(t) - \xi(t)) \\
 & \\
 & \int_0^L \partial_t^2 \mathbf{M} \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i^* + \int_0^L \partial_t \mathbf{R} \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i^* + \int_0^L \partial_t \mathbf{H} \partial_x \mathbf{q}_i \cdot \partial_x \mathbf{q}_i^* + \int_0^L \mathbf{A}_i \partial_x \mathbf{q}_i \cdot \partial_x \mathbf{q}_i^* + \int_0^L \nabla \mathbf{u}_i(\partial_x \mathbf{q}_i) \cdot \partial_x \mathbf{q}_i^* \\
 & \quad + \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{q}_i \cdot \partial_x \mathbf{q}_i^* + \int_0^L {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i^* + \int_0^L \mathbf{C} \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i^* - F_i^{\mathcal{P}}(t) \left[\mathbf{q}_i^*(x=L, t) \cdot \underline{\nu} \right] \\
 & \quad - G_i^{\mathcal{P}}(t) \left[\mathbf{q}_i^*(x=L, t) \cdot \underline{\tau} \right] = F_i^{\mathcal{H}}(t) \langle \mathbf{q}_i^* \rangle(t) \cdot \mathbf{e}_u, \quad \forall i, \forall \mathbf{q}_i^* \in \mathcal{Q}_D \\
 & \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \dot{\mathbf{q}}_i(x=L) \cdot \underline{\nu} = \int_{\omega} \dot{u}_p \chi_{\omega} \\
 & \dot{\mathbf{q}}_i(x=L) \cdot \underline{\tau} = 0
 \end{aligned} \right. \\
 & \\
 & \partial_t^2 m(\Lambda_p, \Lambda_p^*) + \partial_t a_{ve}(\Lambda_p, \Lambda_p^*) + r(\Lambda_p, \Lambda_p^*) \\
 & \quad = - \sum_i F_i^{\mathcal{P}}(t) \int_{\omega} \chi_{\omega}(x, y) u_p^* + \int_{\omega} [p]_{\omega} u_p^*, \quad \forall \Lambda_p^* \in \mathcal{L}_D \\
 & \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \partial_t \int_{\Omega} \rho_a \underline{V}_a \cdot \underline{V}_a^* + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \underline{V}_a^* = 0, \\
 & \partial_t \int_{\Omega} \mu_a p p^* - \int_{\Omega} \underline{V}_a \cdot \nabla p^* + \int_{\omega} \partial_t u_p [p^*]_{\omega} = 0,
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned}
 & \forall \underline{V}_a^* \in \mathcal{V} \\
 & \forall p^* \in \mathcal{P}
 \end{aligned} \tag{I.5.8g}$$

REMARQUE I.5.1 (*Contraintes associées aux multiplicateurs de Lagrange*)

Les conditions de contact (I.5.8e) constituent à présent des contraintes associées aux multiplicateurs de Lagrange F_i^P et G_i^P , qui représentent respectivement les forces exercées par les cordes sur la table d'harmonie dans les directions $\underline{\nu}$ et $\underline{\tau}$ du chevalet.

REMARQUE I.5.2 (*Espaces variationnels et multiplicateurs de Lagrange*)

Notre choix d'espace variationnel sur la corde a pour conséquence que le terme de bord qui jusqu'ici était identifié à la force au chevalet, à savoir :

$$\underline{\nu} \cdot \left[\mathbf{A}_i \partial_x \mathbf{q}_i + \mathbf{B} \mathbf{q}_i + \nabla \mathcal{U}_i(\partial_x \mathbf{q}_i) + \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}}_i \right] (x = L, t)$$

est formellement la trace d'un élément de $L^2([0, L])$, ce qui n'a pas de sens. On voit que l'introduction des multiplicateurs de Lagrange, qui avaient pour motivation initiale le découplage des problèmes d'un point de vue numérique, permet aussi de donner un sens à la formulation variationnelle posée sur des espaces standard.

I.6

Discussion du modèle et quelques pistes

Le modèle de piano complet ($\mathcal{S}_{m,c,p,a}$) auquel nous sommes arrivés rassemble l'essentiel des connaissances actuelles concernant le fonctionnement de l'instrument. Il permet de prendre en compte non seulement un grand nombre de phénomènes physiques, mais aussi leur couplage réciproque. Il est toutefois le fruit d'un ensemble de compromis ou schématisations d'une réalité bien plus complexe et soumise à des impératifs concrets que nous avons parfois dû simplifier. Ceci nous a permis de rendre compte de la fonction vibratoire et acoustique de l'instrument, et d'écrire un modèle dont nous pouvons envisager la simulation numérique en un temps raisonnable. Cependant, il est intéressant de revenir dès à présent sur les points faibles du modèles et de proposer quelques pistes qui permettront dans le futur de prendre en compte certains phénomènes physiques pour l'instant mis de côté.

I.6.1 Couplage au chevalet

Le modèle proposé ici est basé sur la présence d'un angle entre le plan horizontal et les cordes au repos. Cet angle existe en raison de la charge, mais est en réalité très faible, beaucoup plus faible que l'angle que nous serons amenés à utiliser pour nos simulations numériques. Cet écart est certainement dû au fait que nous avons considéré que le chevalet n'était mobile que selon un axe vertical, c'est à dire dans la direction de flexion de la table d'harmonie. Cette hypothèse nous a permis d'écrire un modèle qui couplait directement les cordes à la table, grâce à une condition de continuité des vitesses de corde et de table dans la direction du chevalet. Or, il est possible que le chevalet entame un mouvement de rotation (voir [Conklin, 1996b]), ou de torsion (voir [Giordano, 1998]) lors de la sollicitation dans la direction des ondes longitudinales de corde. Dans ce cas, nous pourrions tirer partie du choix du modèle de plaque de Reissner Mindlin pour soumettre les inconnues θ_p (modélisant l'angle des segments droits à la normale de la surface moyenne) à la force provenant justement de la direction longitudinale de la corde. Une autre approche certainement plus réaliste est de considérer le chevalet comme un élément mécanique à part entière, possédant ses propres couplages d'une part avec les cordes et d'autre part avec la table. Nous reparlerons de ce point de vue dans le paragraphe suivant visant à une modélisation plus réaliste de la table d'harmonie. Enfin, un nouveau modèle de chevalet et des conditions aux limites (les pointes) permettant de rendre compte de la transmission asymétrique des deux polarisations verticale et horizontale des cordes est indispensable pour augmenter notre niveau de réalisme. Nous pensons que les deux approches proposées pourraient permettre de remplir cet objectif, en envisageant les mouvements latéraux du chevalet. Des résultats expérimentaux sont indispensables pour faire le jour sur ces phénomènes, avant de pouvoir imaginer les modéliser.

I.6.2 Table d'harmonie

I.6.2.a Galbe et charge

Le couplage entre les cordes et la table d'harmonie a une grande influence sur la table elle-même, qui est soumise à une force statique provenant de la tension des cordes. Pour compenser ce chargement, la table possède une légère courbure, telle que, une fois les cordes montées, la courbure originale de la table compense la courbure induite par la charge des cordes. La table reprend alors une configuration presque plate. La citation ci dessous témoigne du fait que la courbure a un effet indéniable sur le son du piano.

« To support the bearing force, the soundboard, ribs, and bridges are usually given a curvature or "crown", of the order of 15 to 50 m radius, varying with the manufacturer and method used. The amount of soundboard curvature affects the balance between low and high-frequency tone. Low-frequency output is generally maximized when the amount of bearing is sufficient to make the soundboard approximately flat. The amount of bearing affects to a degree the rate of energy transfer from the strings to the soundboard. Too much bearing can cause poor tone, but pianos sometimes work best when the soundboard, under load, is essentially flat. In any case, the amount of

crown and the amount of bearing vary seasonally with the moisture content of the wood. » [Conklin, 1996b]

Le galbe de la table en fait, du point de vue du modèle, non pas une plaque mais une coque. L'un des phénomènes physiques qui permet de les discriminer est la présence ou non de mouvement membranaire lors d'une sollicitation en flexion. En effet, comme il est démontré dans l'annexe E, la dérivation d'un modèle de plaque (purement plane) permet de découpler complètement les mouvements de flexion des mouvements membranaires. Or, il semble que les mesures présentes dans [Giordano et Korty, 1996] sur la table d'harmonie mettent en évidence la présence d'un mouvement membranaire significatif, dans lequel on reconnaît la forme d'onde précédée d'un précurseur (dont ils précisent qu'il est généré par la présence d'une onde longitudinale). Il est difficile à l'heure actuelle d'attribuer l'origine de ce mouvement à une cause précise, en raison du manque de données expérimentales. Deux hypothèses sont certainement les plus probables : la table se comporte comme une coque en raison de son galbe, ou bien le chevalet induit une force dans la direction membranaire de la table d'harmonie. On peut également imaginer que ces deux causes s'ajoutent. Quoiqu'il en soit, il serait intéressant de remplacer le modèle de plaque par un modèle de coque, et d'observer les différences de comportement vibratoire induites par ce changement.

D'autre part, comme nous l'avons dit, la table d'harmonie est soumise à la tension des cordes, ce qui induit un champ de contraintes dans la table qu'il faudrait idéalement prendre en compte. Ce champ de contrainte a pour conséquence d'augmenter le rayonnement de la table d'harmonie (voir [Ege, 2010]), et de la rigidifier, ce qui modifie les fréquences propres de vibration (pour les rendre plus aiguës). [Mamou-Mani et al., 2008] montre l'influence du galbe et de la charge sur les fréquences propres et les modes propres de la structure par une simulation numérique éléments finis de la table d'harmonie munie de ses raidisseurs, vue comme une plaque de Kirchhoff Love précontrainte, ce qui est un point de vue intéressant. Le processus de fabrication qui conduit à donner le galbe à la table est assez mystérieux, de sorte qu'il est cependant difficile d'établir si le galbe est uniquement une déformation géométrique, ou s'il induit également un champ de contraintes dans la table qui seront compensées par la mise en tension des cordes. Il est clair que la réponse à ces interrogations aura une influence sur le choix d'un nouveau modèle de table, et qu'ajouter un terme de précontrainte au modèle de Reissner Mindlin serait une amélioration par rapport à la situation actuelle, la difficulté venant bien sûr de la calibration des coefficients physiques associés.

Il ne faut toutefois pas oublier que la raison d'être de ce galbe est d'augmenter la résistance de la table d'harmonie face au chargement des cordes, dont l'utilité est d'assurer un bon contact entre les cordes et la table au chevalet. D'un point de vue numérique, nous n'avons pas cette problématique : le contact est toujours parfait. C'est pourquoi nous ne souhaitons pas forcément modéliser ce galbe et cette charge, mais seulement l'effet qu'ils ont sur le comportement vibratoire et acoustique de l'instrument. De ce point de vue, c'est la prise en compte d'une précontrainte et non pas d'un modèle de coque qui semble le plus prioritaire.

I.6.2.b Raidisseurs et chevalet

Le modèle que nous proposons simule la présence des raidisseurs et des chevalets comme une variation de matériau et d'épaisseur dans le modèle de plaque de Reissner Mindlin aux emplacements de ces derniers. Cependant, lors de la dérivation du modèle de plaque, cette dernière est considérée d'épaisseur constante, symétrique par rapport à sa surface moyenne (dite équilibrée) et composée du même matériau dans son épaisseur (dite non laminée). Notre solution est donc abusive vis à vis des hypothèses du modèle. Évoquons plusieurs modèles qu'il serait intéressant d'étudier afin de comprendre dans quelle mesure ils nous permettraient de rendre compte de la géométrie de la table d'harmonie munie de ses raidisseurs et de son chevalet :

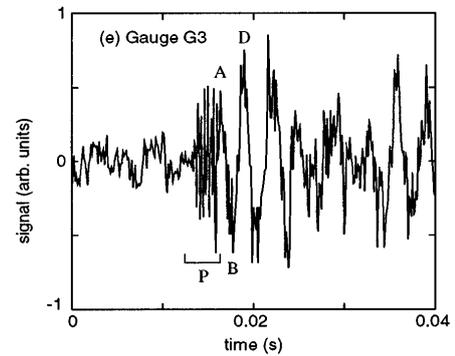


FIGURE I.56 – Jauge de contraintes dans une direction membranaire de la table d'harmonie. Extrait de [Giordano et Korty, 1996]

- ▷ une plaque de Reissner Mindlin d'épaisseur variable, voir [Quintana et Nallim, 2010]
- ▷ une plaque de Reissner Mindlin laminée, voir [Sanhueza, 2010]
- ▷ une plaque non symétrique, voir [Alvarez-Vázquez et Viaño, 1997]

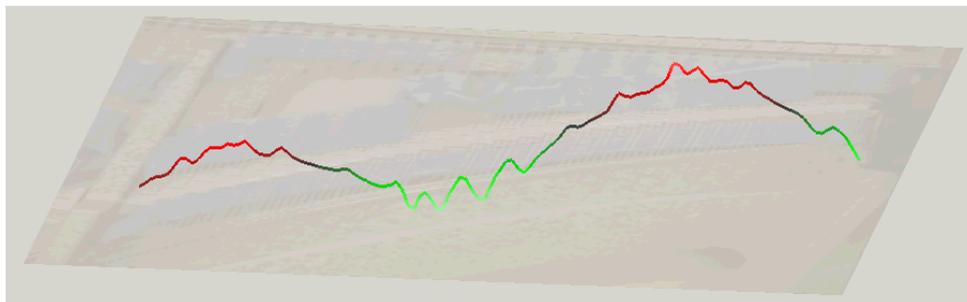


FIGURE I.57 – Mesure du déplacement en différents points du chevalet d'un piano droit Pleyel excité à 2,5 kHz.

Les mesures que nous avons faites de façon très exploratoire sur le chevalet suggèrent cependant que ce dernier possède ses propres modes de flexion (voir la figure I.57), d'où l'idée de considérer le chevalet et pourquoi pas, les raidisseurs, comme des poutres couplées au chevalet. La table d'harmonie deviendrait alors, du point de vue du modèle, une plaque raidie. Citons par exemple [Sanhueza, 2010] qui considère une plaque de Reissner Mindlin couplée à des poutres de Timoshenko, et développe des méthodes numériques permettant de traiter de ce couplage. Il serait très intéressant d'adapter ce cas à une plaque, ou peut-être une coque, raidie des deux côtés, et d'écrire une nouvelle condition de contact entre l'une de ces poutres avec les cordes. Ceci nous permettrait par la même occasion de mettre en œuvre certaines des hypothèses formulées en I.6.1.

I.6.3 Plateau de touches et ceinture



FIGURE I.58 – Structure du piano : plateau de touche, ceintures et barrage. Extrait de www.saintpiano.com

La structure solide du piano constituée du plateau de touches et des deux ceintures (voir figure I.58) semble jouer un rôle dans la transmission du son. D'une part, ces structures subissent certainement un couplage vibroacoustique avec le champ de pression présent tout autour du piano. Mais plus étonnamment, il semble qu'elles soient le vecteur d'une propagation très rapide du signal généré par le marteau jusqu'à la génération d'un son caractéristique appelé le « précurseur de touche » (voir [Boutillon, 1988] et [Askenfelt, 1993b]), qui contribue d'après eux au timbre du piano lorsqu'il est joué très fort. Une campagne de mesures serait indispensable afin de comprendre les mécanismes de cette transmission, et dans quelle mesure la structure du piano est impliquée.

I.6.4 Marteau, interaction avec les cordes

I.6.4.a La mécanique du marteau

Notre modèle de piano considère que le marteau attaque les cordes de façon orthogonale, avec une vitesse initiale donnée. On lui donne une masse équivalente afin de rendre compte de sa propre masse, mais aussi de la masse de son manche et de son âme. Par contre, on a totalement négligé les vibrations de type « poutre » du manche auquel il est attaché. Or, comme évoqué dans la section I.2 concernant la modélisation du marteau, les oscillations du manche sont considérées cruciales dans le toucher pianistique, au sens où elles influencent l'angle d'attaque du marteau par rapport aux cordes (ce qui utilise une partie différente du feutre selon le toucher), mais peuvent aussi résulter en un mouvement de rotation de la tête du marteau, qui exercerait alors une force dirigée selon l'élongation de la corde, excitant peut-être les vibrations longitudinales des cordes de façon différentes selon la *nuance* employée. Enfin, les vibrations du manche pendant le contact marteau corde semblent contribuer à la force transmise aux cordes et donc au reste du piano. C'est un sujet passionnant (qui lève un coin du voile permettant de comprendre comment un pianiste peut influencer sur le timbre de son instrument), on réfère à [Suzuki, 1987], [Boutillon, 1988], [Askenfelt et Jansson, 1991] pour des mesures sur des pianos en condition de jeu et à [Izadbakhsh et al., 2008] et [Vyasarayani et al., 2009] pour des simulations numériques mettant en évidence l'effet de cette flexion sur la force générée, voir figure I.59.

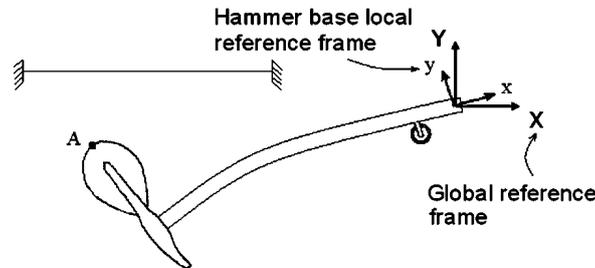


FIGURE I.59 – Manche de marteau considéré flexible dans [Izadbakhsh et al., 2008]

Afin de prendre en compte ce manche flexible dans notre modèle, il suffirait d'introduire une poutre (par exemple une poutre de Timoshenko) au bout de laquelle se situerait le marteau que nous considérons actuellement. Au lieu de donner une vitesse initiale au marteau, on conférerait un couple à l'extrémité de la poutre opposée au marteau, ainsi lors du contact avec les cordes, le manche resterait en vibration et contribuerait à la force donnée aux cordes. Toute la difficulté proviendrait alors de l'écriture du couplage marteau - corde. En effet, si la zone de contact n'est plus toujours au même endroit du marteau, les coefficients doivent en dépendre. De plus, il faudrait être capable de rendre compte du « massage » du marteau dans la direction longitudinale des cordes. Encore une fois, c'est une campagne de mesures qui nous permettrait certainement d'écrire un modèle abouti de marteau au bout d'un manche flexible.

I.6.4.b Modèle de marteau à mémoire

La relation force - écrasement que nous utilisons vise à modéliser le comportement à la fois non linéaire et viscoélastique du feutre qui entoure le marteau. Nous avons utilisé un modèle approché proposé par [Stulov, 1995], qui est dérivé d'un modèle plus complexe dit « à mémoire » qui relie l'écrasement $e(t)$ à la force $F(t)$ par :

$$F(t) = F_0 \left[(e(t))^p - \frac{\varepsilon}{\tau_0} \int_0^t e^{\frac{\xi-t}{\tau_0}} (e(\xi))^p d\xi \right] \quad (\text{I.6.1})$$

D'après l'auteur, le modèle approché est correct pour des vitesses de marteau inférieures à $5 - 10 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui correspond aux vitesses réalistes en situation de jeu. Il serait cependant intéressant d'implémenter cette relation plus générale et d'observer les changements sur les formes d'ondes. D'un point de vue théorique, il faudrait s'intéresser au comportement énergétique d'un tel modèle, afin de montrer qu'il s'agit bien d'un terme dissipatif.

I.6.4.c Zone de contact variable

Pour l'instant, nous avons considéré que le marteau était « plat », au sens où tout au long du contact avec les cordes, la zone de contact est la même. En fait, cette configuration représente assez bien les marteaux très usés, comme l'illustre la figure I.60(a). En revanche, les marteaux neufs sont bien ronds (voir la figure I.60(b)), et on peut imaginer que lors du contact avec la corde, la zone de contact commence par un point et s'élargit au fur et à mesure que le marteau s'écrase, pour diminuer ensuite lorsque le marteau s'éloigne de la corde. Il s'agit par définition d'un contact unilatéral sans pénétration, qui s'écrit comme un problème sous contrainte que l'on peut traiter de façon classique par une méthode variationnelle avec multiplicateurs de Lagrange ou pénalisation. L'intérêt majeur d'une telle amélioration serait certainement de mieux reproduire l'effet du couplage marteau-corde sur le contenu spectral de la corde et donc du son de piano.

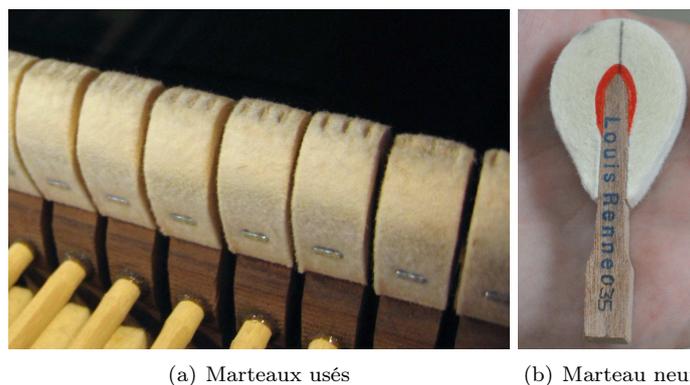


FIGURE I.60 – Zone de contact et forme générale selon l'usure du marteau.

I.6.5 Réalisme du jeu pianistique

I.6.5.a Étouffoirs

Les étouffoirs sont des pièces constituées majoritairement de feutre, plus dense dans les graves et plus aéré dans les aigus, destinées à empêcher la vibration des cordes non sollicitées. Seules les cordes les plus aiguës en sont dépourvues. Lorsque le pianiste enfonce une touche, l'étouffoir correspondant se lève en même temps que le marteau est lancé, et lorsqu'il relâche la touche, l'étouffoir retombe sur les cordes, éteignant leurs vibrations.

Il serait intéressant d'intégrer au modèle un élément en feutre qui vient se poser sur la corde quelques instants après le lancement du marteau, en fonction de la durée de la note et du toucher (staccato, lié, ...). Le modèle d'écrasement du feutre pourrait être repris du modèle de marteau, et il faudrait certainement rajouter la prise en compte de la gravité. Toute la difficulté viendrait alors de l'alimentation du modèle avec des paramètres réalistes, tout comme dans le cas du marteau.

I.6.5.b Polyphonie

Il va sans dire qu'un pianiste joue souvent plusieurs notes à la fois. Notre modèle ne considère qu'une seule note, et c'est bien entendu ridicule si l'on souhaite modéliser un morceau entier. Cependant, en condition normale de jeu, la plupart des cordes sont rendues muettes par les étouffoirs (à deux exceptions près : les cordes très aiguës qui n'en possèdent pas, et l'actionnement de pédales dont nous reparlerons juste après). Si on considère dans un premier temps que seules les cordes correspondant aux touches enfoncées sont libres de vibrer, il est possible d'écrire un modèle de piano prenant en compte les N_a notes de l'accord joué. On commence par considérer les N_a marteaux, et pour chaque note n de l'accord, les

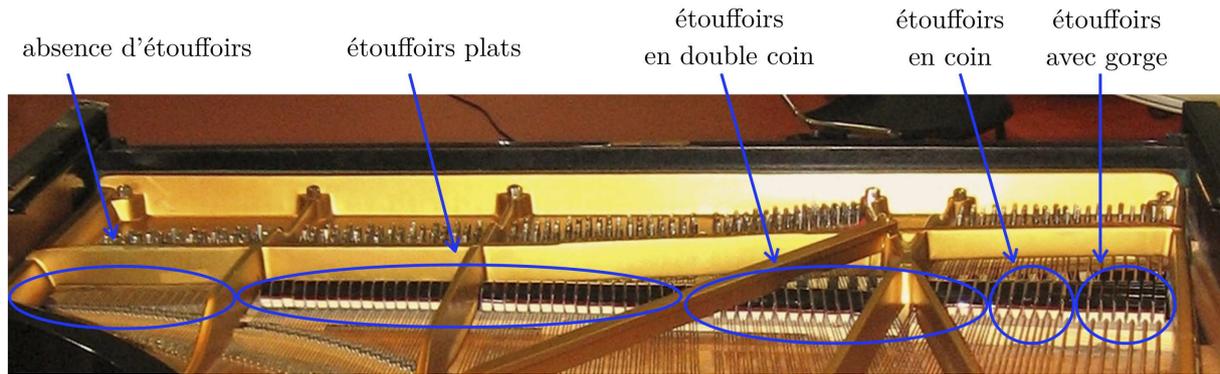


FIGURE I.61 – Vue depuis l'arrière du Steinway D de l'IRCAM muni de ses étouffoirs. Les étouffoirs des cordes les plus graves (à droite) sont « avec gorge », ceux des doublets sont « en coin », deux des cordes triples sont d'abord « en double coin » puis deviennent plats et plus moelleux. Enfin, les cordes les plus aiguës sont dépourvues d'étouffoirs.

$N_{c,n}$ cordes du chœur associé (dans lequel on prend éventuellement en comptes les échelles duplex). On compte donc au total $\sum_{n \leq N_a} N_{c,n}$ cordes. Chaque chœur de cordes correspondant à la note n est attaché au chevalet en un point (x_n, y_n) , on modélisera donc le contact entre chaque chœur de cordes et la table d'harmonie grâce à une fonction de répartition $\chi_{\omega, n}$ centrée autour de (x_n, y_n) . On aura donc autant de multiplicateurs de Lagrange que de cordes, et la table d'harmonie sera soumise à la somme de ces forces distribuées sur les fonctions de répartition. Le couplage vibroacoustique est, lui, inchangé.

En fait, la grande difficulté de la polyphonie ne provient pas de l'écriture du modèle continu, mais de l'implémentation numérique de ce modèle. En effet, nous verrons que le calcul sur les cordes sera assez coûteux en raison de son caractère non linéaire. Tant que l'on considère une seule note (au pire, les six cordes correspondant aux trois cordes du triplet et à leurs échelles duplex, voire huit si on a une corde aliquote), ce coût reste marginal par rapport à la résolution tridimensionnelle de la propagation du son. Par contre, si on souhaite prendre en compte les 88 notes, cela ne sera plus vrai. D'autre part, les techniques de complément de Schur que nous développerons dans la suite de ce manuscrit devraient être complètement réécrites. Tout ceci n'est pas une limitation en soi, étant données les techniques de parallélisme qui permettraient de répartir les notes sur différents processeurs, mais demanderait un travail conséquent.

I.6.5.c Pédale *sostenuto* et *forte*

Nous avons déjà parlé de la pédale *una corda* dont nous pouvons déjà modéliser l'effet. Deux autres pédales ont un effet crucial dans le jeu pianistique : la pédale *sostenuto* et la pédale *forte*. La pédale *sostenuto* a pour effet de maintenir en position haute les étouffoirs qui sont levés au moment de l'actionnement de la pédale, c'est à dire ceux des notes vraiment jouées à ce moment précis. La pédale *forte* a simplement pour effet de lever tous les étouffoirs. Dans les deux cas, certaines cordes vont être autorisées à vibrer et à interagir avec le chevalet jusqu'au relâchement de la pédale.

La modélisation de leur action rejoint celle du paragraphe précédent : il faudrait prendre en compte toutes les notes non étouffées, et les coupler à la table d'harmonie avec chacune leur chœur, leurs multiplicateurs de Lagrange, et leur fonction de répartition individuelle. Certaines, non frappées, se mettraient en vibration par sympathie grâce au couplage réciproque provenant de la table d'harmonie, et contribueraient de cette façon au son général du piano. Encore une fois, la limitation n'est pas tant au niveau du modèle continu que du point de vue pragmatique de l'implémentation numérique.

CHAPITRE

II

DISCRÉTISATION DU MODÈLE

Prélude

Abordons à présent la discrétisation du modèle complet de piano proposé au chapitre I. Il s'agit d'un problème complexe qui fait intervenir le couplage de plusieurs modèles posés sur des domaines de dimension différentes, comportant chacun des difficultés particulières sur lesquelles nous reviendrons. D'un point de vue général, nos aspirations sont les suivantes :

- ▷ **Respecter l'aspect réciproque et conservatif des couplages.** Au niveau continu, en effet, les couplages entre le marteau et les cordes, les cordes et la table, mais aussi la table et l'air, sont des couplages réciproques, au sens où si un objet transmet son mouvement à un autre objet, le contraire est vrai aussi. Ainsi, si l'on place une source acoustique dans l'air, la table d'harmonie sera mise en mouvement, et par suite les cordes également. Cette caractéristique est intimement liée au fait que ces couplages n'induisent aucune perte d'énergie : si un sous système perd de l'énergie par couplage, un autre sous système la gagne forcément. D'un point de vue physique, il sera intéressant de garantir l'aspect réciproque des couplages au niveau numérique, ce qui apportera une richesse par rapport à beaucoup de simulations existantes. Quant à l'aspect conservatif, nous verrons qu'il nous permettra, en plus du réalisme physique, de garantir *a priori* la stabilité numérique du problème.
- ▷ **Assurer une certaine efficacité numérique.** Étant donnée la taille du problème, surtout concernant la propagation acoustique, les paramètres de discrétisation devront être choisis très petits. En effet, il est classique de disposer d'au moins 10 points par longueurs d'ondes¹ pour s'assurer que le signal est bien représenté par la discrétisation. Ainsi, par exemple, si l'on souhaite modéliser la propagation d'un signal acoustique dont le contenu fréquentiel monte jusqu'à 10 000 Hz, pour lequel les plus petites longueur d'onde sont de 3,4 cm, il faudra considérer un pas de maillage de 3 mm. Sachant qu'un grand piano peut mesurer jusqu'à presque 2 mètres par 3 mètres, et que l'on considérera 40 cm d'épaisseur, le maillage atteindra régulièrement 60 millions de degrés de liberté, associé pour des raisons de stabilité du schéma numérique à un pas de temps très petit (de l'ordre de 10^{-6} secondes). Dès lors, il est impossible d'imaginer résoudre le problème sur une simple machine. Il sera nécessaire de paralléliser massivement le code de calcul, et de faire attention aux étapes coûteuses qui, répétées à chaque pas de temps, pourront dégrader de façon significative le temps de calcul global. Nous verrons que suite à nos efforts, le temps de

1. un peu moins si l'on monte en ordre avec les éléments finis

calcul pour une seconde du piano complet précis jusqu'à environ 10000 Hz sera de l'ordre d'une journée, en utilisant quelques 300 cœurs de calcul.

- ▷ **Garantir la stabilité numérique du problème couplé.** Face à l'aspect non linéaire d'une partie du problème (interaction marteau corde, vibration de corde), aux nombreux couplages mais aussi aux coûts et temps de calcul assez conséquents, il est crucial de pouvoir garantir *a priori* la stabilité du calcul à long terme (une seconde représente souvent un million de pas de temps). Dans le contexte des équations d'onde, une technique classique et efficace pour réaliser cet objectif est de concevoir des schémas numériques qui conservent, ou dissipent, une énergie discrète, voir par exemple [Rhaouti, 1999] ou [Derveaux, 2002] dans le contexte de l'acoustique musicale. Cette quantité est souvent consistante avec l'énergie continue du système physique, ce qui présente un intérêt supplémentaire. Il est alors parfois possible d'établir des estimations *a priori* sur les inconnues du problème, qui conduisent à la stabilité de la méthode sous réserve que l'énergie discrète soit positive. Cette condition est parfois respectée automatiquement, ou parfois se traduit comme une restriction sur les paramètres de discrétisation, par exemple comme une borne supérieure sur le pas de temps.

Or, nous verrons dans ce chapitre que notre volonté de conserver une énergie discrète nous conduira forcément à considérer des schémas implicites sur la corde qui est régie par une équation non linéaire. De plus, nous ferons le choix (le plus naturel) de considérer les couplages de façon centrée et implicite, ce qui rendra globalement implicite le schéma posé sur toutes les inconnues des sous systèmes. À ces constatations s'ajoute la difficulté particulière de l'équation de la table d'harmonie, pour laquelle on souhaite modéliser un amortissement diagonal, posé dans le domaine modal, ce qui comme nous l'avons vu au paragraphe 1.3.3 rend les couplages non locaux. La spécificité de chaque équation nous conduira à utiliser des méthodes temporelles très différentes. En effet, la résolution du schéma 1D, qui sera non linéaire, fera appel à une méthode de Newton modifiée assez coûteuse, la résolution du problème de table d'harmonie sera faite par une méthode analytique après décomposition sur les modes numériques, et la propagation acoustique sera résolue de façon explicite et en parallèle vus les ordres de grandeur en nombre d'inconnues à prendre en compte. À première vue, tout ceci viendra s'opposer à l'efficacité numérique souhaitée, puisque le schéma numérique sera certes stable, mais globalement implicite, non local pour la table d'harmonie, et utilisant des méthodes très différentes sur chaque sous système. Nous proposerons cependant des algorithmes permettant de résoudre le problème couplé en mettant à jour de façon séparée les inconnues de chaque sous système grâce à des techniques de multiplicateurs de Lagrange et de complément de Schur.

L'objectif de ce chapitre sera donc de proposer des schémas numériques performants qui conservent ou dissipent une énergie discrète, consistante avec l'énergie physique du modèle. Rappelons que le modèle continu avait été construit dans cet optique. Pour chaque sous système ou système couplé écrit sous la forme : « Trouver \mathbf{u} telle que $E(\mathbf{u}) = \mathbf{d}(\mathbf{u}) + \mathbf{s}(\mathbf{u})$ », où $\mathbf{d}(\mathbf{u})$ est un terme de dissipation et $\mathbf{s}(\mathbf{u})$ un terme source, nous nous étions attachés à démontrer une identité du type :

$$\text{Toute solution assez régulière } \mathbf{u} \text{ au problème vérifie : } \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = \mathcal{D}(\mathbf{u}) + \mathcal{S}(\mathbf{u}) \quad (\text{II.0.1})$$

où $\mathcal{D}(\mathbf{u}) \leq 0$ est un terme de dissipation négatif, dépendant des inconnues du problème, tandis que $\mathcal{S}(\mathbf{u})$ est un terme dépendant également des inconnues mais provenant d'une éventuelle source extérieure au système, sans signe *a priori*. Par exemple, pour les équations d'onde formulées à l'ordre deux, cette identité avait été obtenue en multipliant directement l'équation par la dérivée en temps des inconnues (ou de façon équivalente, en testant la formulation variationnelle par cette dérivée). Formellement, le raisonnement pratiqué se résume ainsi :

$$\left\{ E(\mathbf{u}) - \mathbf{d}(\mathbf{u}) - \mathbf{s}(\mathbf{u}) \right\} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} - \mathcal{D}(\mathbf{u}) - \mathcal{S}(\mathbf{u}) \quad (\text{II.0.2})$$

Pour \mathbf{u} solution de l'équation, le membre de gauche est nul, conduisant à la conclusion II.0.1. Pour les équations formulées à l'ordre un, c'est en multipliant directement par l'inconnue que

l'on obtient une identité du type II.0.1. C'est une version discrète de ces raisonnements que nous allons chercher à reproduire dans notre recherche de schémas conservatifs. La nature variationnelle des équations considérées permettra de transmettre naturellement la conservation, ou dissipation, de l'énergie au système semi discret obtenu après discrétisation en espace par éléments finis. C'est lors de la discrétisation en temps qu'il conviendra de s'assurer qu'une quantité se conservera ou sera dissipée d'un pas de temps au suivant. Pour reprendre l'exemple des équations d'onde formulées à l'ordre deux, imaginons que l'on souhaite écrire un schéma numérique à trois pas de temps, sur une grille temporelle régulière $t^n = n \Delta t$. Les inconnues $(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n-1})$ seront obtenues en résolvant le schéma

$$E_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n-1}) = \mathbf{d}_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n-1}) + \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n-1}) \quad (\text{II.0.3})$$

où chaque terme possède des bonnes propriétés par rapport à son homologue continu, parmi lesquelles on trouve au moins la consistance, à savoir que pour tout \mathbf{u} , $E_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) \equiv E(\mathbf{u})$, $\mathbf{d}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) \equiv \mathbf{d}(\mathbf{u})$ et $\mathbf{s}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) \equiv \mathbf{s}(\mathbf{u})$. La recherche de schémas conservatifs passe par la contrainte supplémentaire selon laquelle E_h , \mathbf{d}_h et \mathbf{s}_h vérifient :

$$\begin{aligned} & \left\{ E_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n-1}) - \mathbf{d}_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n-1}) - \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n-1}) \right\} \cdot \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t} \\ & = \frac{\mathcal{E}_h^{n+1/2} - \mathcal{E}_h^{n-1/2}}{\Delta t} - \mathcal{D}_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n-1}) - \mathcal{S}_h(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n-1}) \quad (\text{II.0.4}) \end{aligned}$$

avec $\mathcal{E}_h^{n+1/2}$ consistant avec $\mathcal{E}(t^{n+1/2})$, $\mathcal{D}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) \equiv \mathcal{D}(\mathbf{u})$ et $\mathcal{S}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) \equiv \mathcal{S}(\mathbf{u})$.

C'est une propriété qui est naturelle à des schémas classiques, comme les θ -schémas dont nous montrerons en II.1.2 la stabilité par une technique énergétique. Nous verrons que cette démarche appliquée au système d'équations des cordes non linéaire nous amènera à considérer des schémas innovants, implicites, d'ordre deux, en section II.1.4. D'autre part, c'est une propriété qui est mise en péril par les couplages qui apparaissent par exemple dans le problème complet du piano. Ces couplages doivent faire l'objet d'un traitement spécifique permettant de s'assurer que le couplage numérique n'introduit pas d'instabilité. Plusieurs choix sont alors possibles. On peut soit introduire des couplages explicites, mais qui feront apparaître un terme supplémentaire dans l'énergie, qui tend vers zéro avec les paramètres de discrétisation, et qui s'apparente à une introduction artificielle de dissipation numérique. On peut sinon faire en sorte que les termes de couplage numérique s'annulent lors du calcul de l'énergie, comme dans le cas continu, mais alors ils donneront lieu à des schémas couplant les inconnues des différents sous systèmes de façon implicite. Nous ferons le second choix qui nous a paru plus physique et plus naturel, associé à un ensemble d'algorithmes permettant de découpler artificiellement la mise à jour des inconnues dans un objectif de performance numérique.

Ce chapitre présentera successivement les choix de discrétisation adoptés pour chaque sous système (corde en II.1, marteau en II.2, table d'harmonie en II.3) ainsi que leurs propriétés respectives, en insistant sur la stabilité numérique. L'accent sera mis sur les difficultés pratiques d'implémentation et leurs conséquences sur les choix de discrétisation ou des méthodes de résolution. Puis nous aborderons la question des couplages, en traitant d'une part le couplage des cordes avec la table d'harmonie en II.4 puis le couplage de la table avec l'air avoisinant en II.5, et enfin le problème du piano complet en II.6. À chaque fois, le schéma sera introduit, suivi d'une démonstration de la propriété de dissipation discrète de l'énergie, puis nous présenterons un algorithme de résolution pratique permettant le découplage artificiel des problèmes. La conservation de l'énergie en l'absence de dissipation physique et après l'extinction de toute source sera illustrée par des expériences numériques reflétant les difficultés qui apparaîtront lors d'expériences réalistes d'un point de vue physique, tant du point de vue de la géométrie que des paramètres employés. Enfin, nous discuterons des choix faits au cours du chapitre, en proposant éventuellement des alternatives ou des pistes. Quelques perspectives de travail seront évoquées afin d'améliorer la précision et l'efficacité numérique générale.

Sommaire

II.1 Équations de cordes	119
II.1.1 Approximation numérique en espace	120
II.1.2 Les theta-schémas pour les équations d'ondes linéaires	123
II.1.3 Des theta-schémas à plusieurs theta pour le système de Timoshenko	131
II.1.4 Des nouveaux schémas préservant une énergie pour un système d'équations d'ondes non linéaires	140
II.1.5 Deux schémas numériques pour la corde de piano	163
II.2 Marteau et chœurs de cordes	169
II.2.1 Propriétés du schéma	170
II.2.2 Implémentation et résolution numérique	171
II.3 Table d'harmonie	174
II.3.1 Calcul numérique des modes	174
II.3.2 Décomposition sur les modes numériques	184
II.3.3 Résolution analytique en temps	184
II.3.4 Schéma en temps pour la table d'harmonie	188
II.4 Couplage au chevalet	190
II.4.1 Schéma pour le système couplé	190
II.4.2 Résolution séparée sur les cordes et sur la table	193
II.4.3 Illustration numérique	194
II.5 Vibroacoustique	197
II.5.1 Discrétisation spatiale de l'acoustique	197
II.5.2 Schéma temporel pour l'acoustique	198
II.5.3 Troncature artificielle du domaine acoustique	199
II.5.4 Schéma couplé pour la vibroacoustique	201
II.5.5 Résolution séparée sur la table et dans l'air	203
II.5.6 Illustration numérique	204
II.6 Piano complet	209
II.6.1 Schéma discret pour le piano	209
II.6.2 Résolution séparée sur chaque sous système	211
II.6.3 Illustration numérique	213
II.7 Discussion de la discrétisation	217
II.7.1 Discrétisation spatiale du modèle de plaque	217
II.7.2 Choix de la méthode modale	217
II.7.3 Traitement des couplages	218
II.7.4 Résolution des équations de l'acoustique	218
II.7.5 Schémas pour résoudre l'équation de corde	218
II.7.6 Dictature de l'énergie	219

II.1

Équations de cordes

L'objet de ce paragraphe est de proposer une discrétisation du système d'équations de cordes et d'en étudier quelques propriétés, en s'attardant sur la conservation d'une énergie discrète, la stabilité numérique et les difficultés pratiques de résolution. Nous avons proposé au premier chapitre une écriture unifiée permettant de considérer différentes équations pour la corde selon les phénomènes physiques pris en compte. Toutes les équations ou systèmes d'équations modélisant la corde s'écrivent sous la forme unifiée du système à N lignes suivant

$$\partial_t^2 \mathbf{M} \mathbf{q} + \partial_t (\mathbf{R} \mathbf{q} - \partial_x (\mathbf{H} \partial_x \mathbf{q})) - \partial_x (\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q})) + \mathbf{C} \mathbf{q} + {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} = \mathbf{S}(x, t) \quad (\text{II.1.1})$$

où $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}(x, t)$ est l'inconnue à valeurs dans \mathbb{R}^N , \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{H} et \mathbf{R} sont des matrices $N \times N$ et $\mathcal{U} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle non linéaire représentant les phénomènes « d'ordre deux » du modèle. Dans tout ce paragraphe, nous considérerons la discrétisation d'un système écrit sous cette forme, pour lequel on supposera les hypothèses $(\mathcal{H}1)$ à $(\mathcal{H}7)$ concernant les matrices et fonctionnelles impliquées. L'ensemble des schémas proposés seront donc applicables directement aux équations modélisant la corde, mais ne s'arrêteront pas à cette application particulière.

Dans le cadre de la simulation d'un piano complet, notre volonté est d'assurer la stabilité numérique des schémas proposés, par une technique énergétique qui a déjà fait ses preuves dans d'autres modélisations de systèmes couplés, par exemple [Rhaouti, 1999] ou [Derveaux, 2002] dans le contexte de l'acoustique musicale. En ce qui concerne particulièrement le système d'équations de cordes, une nouvelle difficulté vient du caractère non linéaire de l'équation, accentuée par le fait qu'il s'agit d'un système. Nous traiterons la discrétisation spatiale en II.1.1 de façon très classique et efficace par l'application d'éléments finis d'ordre élevé. Nous étudierons la conservation d'une énergie discrète par cette technique de semi discrétisation, ainsi que son effet sur les valeurs propres associées au problème. Nous aborderons ensuite la question de la discrétisation temporelle du système d'équations. Il n'existe pas, à notre connaissance, de méthode classique de discrétisation en temps permettant de garantir la conservation, ou dissipation, d'une énergie discrète pour le système non linéaire considéré en (II.1.1). En revanche, quand la fonctionnelle \mathcal{U} est nulle, la méthode des θ -schémas est une technique de discrétisation classique qui permet d'atteindre cet objectif. Nous présenterons donc cette méthode, ainsi que ses propriétés en terme d'énergie, de stabilité mais aussi de dispersion numérique en II.1.2, le tout étant illustré par des simulations numériques. Nous verrons que la valeur $\theta = 1/12$ permet d'augmenter la précision et de réduire la dispersion numérique mais conduit, pour le système de corde de Timoshenko précontraint, à un schéma stable pour des très petites valeurs de Δt qui sont en pratique disqualifiantes. Les valeurs de $\theta \geq 1/4$ conduisent à des schémas toujours stables, mais assez dispersifs. Pour faire face à cette difficulté, nous présenterons en II.1.3 une variante de ce schéma pour les systèmes faisant intervenir deux ondes se propageant à des vitesses très différentes, comme le système de Timoshenko, et permettant d'utiliser deux valeurs différentes de θ sur deux parties du système. Typiquement, on utilisera la valeur $\theta = 1/12$ sur l'onde la plus lente et la valeur $\theta = 1/4$ sur l'onde rapide, ce qui limitera la dispersion numérique tout en garantissant une stabilité numérique que nous montrerons par technique énergétique. Une étude de la dispersion numérique sera également menée et illustrée par des simulations numériques. Le paragraphe II.1.4 abordera la discrétisation en temps de la partie non linéaire du système, en menant une recherche méthodique d'un schéma permettant la conservation d'une énergie discrète consistante avec l'énergie continue. Nous introduirons une définition d'un schéma conservatif en accord avec l'approche intuitive présentée en introduction, et nous montrerons que les idées naturelles sont impossibles avant de proposer un schéma. D'une part, le schéma explicite le plus intuitif ne peut être conservatif que si le système d'origine est linéaire. Les schémas partiellement implicites basés sur une approximation directionnelle du gradient $\nabla \mathcal{U}$ ne peuvent être conservatifs que dans des cas très restrictifs, typiquement si le système d'origine ne couple les inconnues que deux par deux. Nous donnerons alors une version complètement implicite basée également sur un gradient approché, qui permette une conservation d'énergie discrète quelle que soit la fonctionnelle \mathcal{U} . Cette version n'étant précise qu'à l'ordre un, le schéma est enrichi afin d'obtenir un schéma d'ordre deux. Une variante utilisant les demi pas de temps est également proposée. Ces deux schémas, lorsqu'appliqués à un système d'équations linéaires, dégénèrent en des θ -schémas avec respectivement $\theta = 1/2$ et $\theta = 1/4$. Enfin, le paragraphe II.1.5 introduit les schémas que nous utiliserons par la suite pour discrétiser les cordes du piano, utilisant le schéma à deux θ pour la partie linéaire de l'équation et nos schémas innovants pour la partie non linéaire.

On montre la dissipation d'une énergie discrète, consistante avec la dissipation continue. Les difficultés liées à l'implémentation et la résolution du schéma sont enfin abordées et illustrées par des expériences numériques.

II.1.1 Approximation numérique en espace

La discrétisation spatiale de l'équation de corde est faite par une technique variationnelle, afin de conserver la structure énergétique de l'équation continue pour l'équation semi discrète. Rappelons tout d'abord la formulation variationnelle de l'équation continue établie en (I.1.176) :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{q} \in \mathcal{Q}_D \text{ tel que } \forall \mathbf{q}^* \in \mathcal{Q}_D, \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_0^L \mathbf{M} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^* + \frac{d}{dt} \int_0^L \mathbf{R} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^* + \frac{d}{dt} \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \mathbf{q} \cdot \partial_x \mathbf{q}^* + \int_0^L (\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{q} + \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q})) \cdot \partial_x \mathbf{q}^* \\ + \int_0^L {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^* + \int_0^L \mathbf{C} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^* = \int_0^L \mathbf{S} \cdot \mathbf{q}^*. \end{aligned} \quad (\text{II.1.2})$$

$$\text{où l'on rappelle que } \mathcal{Q}_D = \left\{ \mathbf{q} \in (H^1([0, L]))^N, \quad q_k(0) = q_k(L) = 0 \forall k \in \mathcal{I}_D \right\}$$

II.1.1.a Formulation variationnelle semi-discrète

Considérons alors une famille $\{\mathcal{Q}_h, h > 0\}$ de sous espaces vectoriels de \mathcal{Q}_D vérifiant la propriété d'approximation classique

$$\forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}_D, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\mathbf{q}_h \in \mathcal{Q}_h} \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_h\| = 0.$$

Cette famille pourra être dans la suite par exemple la discrétisation de \mathcal{Q}_D par éléments finis \mathbb{P}_r sur un maillage régulier de taille h de $[0, L]$, où l'ordre r est un entier non nul, ou encore l'espace vectoriel engendré par les premiers modes propres de l'opérateur spatial linéarisé. On note N_h la dimension de \mathcal{Q}_h : $N_h = \dim \mathcal{Q}_h$. Le problème semi-discrétisé provient de la formulation variationnelle écrite sur le sous espace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{q}_h \in \mathcal{Q}_h \text{ tel que, pour tout } \mathbf{q}_h^* \text{ dans l'espace éléments finis } \mathcal{Q}_h, \\ \frac{d^2}{dt^2} \oint_0^L \mathbf{M} \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h^* + \frac{d}{dt} \oint_0^L \mathbf{R} \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h^* + \oint_0^L {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h^* + \oint_0^L \mathbf{C} \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h^* \\ + \frac{d}{dt} \oint_0^L \mathbf{H} \partial_x \mathbf{q}_h \cdot \partial_x \mathbf{q}_h^* + \oint_0^L (\mathbf{A} \partial_x \mathbf{q}_h + \mathbf{B} \mathbf{q}_h + \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q}_h)) \cdot \partial_x \mathbf{q}_h^* = \oint_0^L \mathbf{S} \cdot \mathbf{q}_h^*, \\ \mathbf{q}_h(x, t = 0) = \mathbf{q}_{h,0}(x), \quad \partial_t \mathbf{q}_h(x, t = 0) = \mathbf{q}_{h,1}(x) \end{array} \right. \quad (\text{II.1.3})$$

où \oint signifie que l'intégration est faite sur chaque élément par des techniques de quadrature numérique de Gauss-Legendre ou Gauss-Lobatto (voir [Quarteroni et al., 2007] pour les définitions et les propriétés) : l'ordre de la méthode d'intégration numérique est choisi de façon à préserver l'ordre de précision fourni par l'espace d'approximation, dans le cas linéaire. D'autre part, $\mathbf{q}_{h,0}$ et $\mathbf{q}_{h,1}$ sont des approximations de \mathbf{q}_0 et \mathbf{q}_1 dans l'espace \mathcal{Q}_h qui sont également choisies de manière à ne pas dégrader la précision fournie par l'espace d'approximation, par exemple les images des données initiales et du second membre continus par l'opérateur de projection elliptique induit par la partie linéaire de l'équation.

II.1.1.b Energie semi-discrète

Il est possible de montrer la stabilité du problème semi discret grâce à l'identité de décroissance de l'énergie suivante, qui conduit à des estimations sur la norme de la solution semi discrète indépendantes des paramètres d'approximation.

THÉORÈME II.1.1 (Décroissance de l'énergie semi-discrète du système de corde)

Soit \mathbf{q}_h une solution assez régulière de (II.1.3). Alors on a

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{h,c}(t) = \oint_0^L \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{q}}_h - \oint_0^L \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}}_h \cdot \dot{\mathbf{q}}_h - \oint_0^L \mathbf{H} \partial_x \dot{\mathbf{q}}_h \cdot \partial_x \dot{\mathbf{q}}_h. \quad (\text{II.1.4})$$

où l'énergie semi-discrète du système de corde est définie comme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{h,c}(t) = & \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_h \cdot \dot{\mathbf{q}}_h + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{A} \partial_x \mathbf{q}_h \cdot \partial_x \mathbf{q}_h + \int_0^L \mathbf{U}(\partial_x \mathbf{q}_h) + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{C} \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{q}_h \cdot \partial_x \mathbf{q}_h + \frac{1}{2} \int_0^L {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h. \end{aligned} \quad (\text{II.1.5})$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est tout à fait analogue au cas continu. Elle consiste à choisir comme fonction test $\mathbf{q}_h^* = \frac{d}{dt} \mathbf{q}_h$ dans la formulation variationnelle semi-discrète (II.1.3), ce qui est possible car il s'agit bien d'un élément de \mathcal{Q}_h .

□

II.1.1.c Formulation matricielle

Soient alors \mathbf{Q}_h et $\mathbf{Q}_h^* \in \mathbb{R}^{N_h}$ les coordonnées de \mathbf{q}_h et $\mathbf{q}_h^* \in \mathcal{Q}_h$ dans une certaine base de \mathcal{Q}_h . On définit les matrices M_h , R_h , A_h , B_h et C_h , l'application $\mathring{\nabla} \mathbf{U} : \mathbb{R}^{N_h} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$ et le vecteur S_h en utilisant le théorème de représentation de Riesz pour les définir tels que, $\forall \mathbf{Q}_h^* \in \mathbb{R}^{N_h}$:

$$\begin{aligned} M_h \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h^* &= \int_0^L \mathbf{M} \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h^*, & A_h \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h^* &= \int_0^L \mathbf{A} \partial_x \mathbf{q}_h \cdot \partial_x \mathbf{q}_h^*, & B_h \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h^* &= \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{q}_h \cdot \partial_x \mathbf{q}_h^*, \\ C_h \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h^* &= \int_0^L \mathbf{C} \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h^*, & R_h \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h^* &= \int_0^L \mathbf{R} \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h^* + \int_0^L \mathbf{H} \partial_x \mathbf{q}_h \cdot \partial_x \mathbf{q}_h^*, \\ \mathring{\nabla} \mathbf{U}(\mathbf{Q}_h) \cdot \mathbf{Q}_h^* &:= \int_0^L \nabla \mathbf{U}(\partial_x \mathbf{q}_h) \cdot \partial_x \mathbf{q}_h^*, & S_h \cdot \mathbf{Q}_h^* &= \int_0^L \mathbf{S} \cdot \mathbf{q}_h^*. \end{aligned} \quad (\text{II.1.6})$$

Le problème semi-discrétisé s'écrit à présent matriciellement :

$$\partial_t^2 M_h \mathbf{Q}_h + \partial_t R_h \mathbf{Q}_h + A_h \mathbf{Q}_h + B_h \mathbf{Q}_h + \mathring{\nabla} \mathbf{U}(\mathbf{Q}_h) + C_h \mathbf{Q}_h + {}^t B_h \mathbf{Q}_h = S_h \quad (\text{II.1.7})$$

En posant finalement $K_h = A_h + B_h + C_h + {}^t B_h$, le problème de corde semi-discrétisé est

$$\begin{cases} \partial_t^2 M_h \mathbf{Q}_h + \partial_t R_h \mathbf{Q}_h + K_h \mathbf{Q}_h + \mathring{\nabla} \mathbf{U}(\mathbf{Q}_h) = S_h \\ \mathbf{Q}_h(t=0) = \mathbf{Q}_{h,0}, \quad \partial_t \mathbf{Q}_h(t=0) = \mathbf{Q}_{h,1} \end{cases} \quad (\text{II.1.8})$$

Grâce aux hypothèses (H1) à (H7) concernant les matrices A , B , C , R et M , et aux propriétés des formules de quadrature, on montre que :

M_h est symétrique définie positive

R_h est symétrique semi définie positive

K_h est la somme d'une matrice $K_{h,coupl}$ symétrique semi définie positive et d'une matrice $K_{h,stab}$ telle que

$$K_{h,stab} \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h + \mathring{\nabla} \mathbf{U}(\mathbf{Q}_h) \cdot \mathbf{Q}_h \geq 0, \quad \forall \mathbf{Q}_h \in \mathbb{R}^{N_h}$$

En particulier, si \mathbf{U} est nulle, la matrice K_h est symétrique semi définie positive.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathbf{q}_h \in \mathcal{Q}_h$ représenté par le vecteur de coordonnées $\mathbf{Q}_h \in \mathbb{R}^{N_h}$. Alors,

$$M_h \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h = \int_0^L M \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h > 0 \text{ car } M \text{ est définie positive par (H2).}$$

$$R_h \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h = \int_0^L R \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h \geq 0 \text{ car } R \text{ est positive par (H3)}$$

$$\begin{aligned} K_h \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h &= A_h \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h + B_h \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h + C_h \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h + {}^t B_h \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h \\ &= \int_0^L \mathbf{A} \partial_x \mathbf{q}_h \cdot \partial_x \mathbf{q}_h + \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{q}_h \cdot \partial_x \mathbf{q}_h + \int_0^L \mathbf{C} \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h + \int_0^L \mathbf{q}_h \cdot {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q}_h \end{aligned}$$

Or, la matrice \mathbf{A} se décompose comme $\mathbf{A}_{stab} + \mathbf{A}_{coupl}$ ce qui nous incite à définir $K_{h,coupl}$ et $K_{h,stab}$ comme

$$K_h \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h = \underbrace{\int_0^L \mathbf{A}_{stab} \partial_x \mathbf{q}_h \cdot \partial_x \mathbf{q}_h}_{K_{h,stab} \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h} + \underbrace{\int_0^L \mathbf{A}_{coupl} \partial_x \mathbf{q}_h \cdot \partial_x \mathbf{q}_h + \int_0^L \mathbf{C} \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h + \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{q}_h \cdot \partial_x \mathbf{q}_h + \int_0^L {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h}_{K_{h,coupl} \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h}$$

en posant :

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \partial_x \mathbf{q} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & {}^t \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}_{coupl} \end{pmatrix}$$

la partie $K_{h,coupl} \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h$ se réécrit $\int_0^L \mathbb{K} U \cdot U$ et c'est la condition (75) qui en assure la positivité. D'autre part,

$$K_{h,stab} \mathbf{Q}_h \cdot \mathbf{Q}_h + \mathring{\nabla} \mathcal{U}(\mathbf{Q}_h) \cdot \mathbf{Q}_h = \int_0^L \mathbf{A}_{stab} \partial_x \mathbf{q}_h \cdot \partial_x \mathbf{q}_h + \int_0^L \nabla \mathcal{U}(\partial_x \mathbf{q}_h) \cdot \partial_x \mathbf{q}_h \geq 0 \quad (\text{II.1.9})$$

grâce à l'hypothèse (76). □

II.1.1.d Dispersion en domaine borné : convergence de valeurs propres

Dans le cas continu linéaire, la solution pouvait être écrite comme une somme infinie de fonctions oscillantes dont les fréquences d'oscillations avaient un lien direct avec les valeurs propres de l'opérateur spatial associé. Dans le cas semi discret, il existe une formule analogue, où la somme devient finie et les fréquences approchées. Une façon de mesurer la qualité d'une approximation numérique est de s'enquérir de la façon dont les valeurs propres du problème discret approchent les valeurs propres du problème continu, c'est une mesure de la dispersion numérique induite par la méthode. D'un point de vue de l'acoustique musicale, il est particulièrement important de s'en préoccuper puisque une infime déviation de fréquence est entendue par l'oreille humaine : le son deviendra d'autant plus disgracieux que les valeurs propres discrètes seront éloignées des valeurs propres continues.

On rappelle dans ce paragraphe les propriétés de convergence de la discrétisation par éléments finis des problèmes aux valeurs propres pour un opérateur linéaire elliptique (voir les sections 7.3 et 7.4 de [Allaire, 2007] pour plus de détails).

THÉORÈME II.1.2 (Convergence éléments finis des valeurs propres d'un problème elliptique)

On considère une famille $\{\mathcal{Q}_h, h > 0\}$ de sous espaces vectoriels de \mathcal{Q}_D , où chaque \mathcal{Q}_h est issu de la discrétisation de dimension N_h par éléments finis \mathbb{P}_r . On appelle $(\lambda_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ les solutions du problème :

$$\text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u \in \mathcal{Q}_D \setminus \{0\} \text{ tels que } a(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle_{H^1}, \quad \forall v \in \mathcal{Q}_D$$

où a est une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur \mathcal{Q}_D . On appelle de la même façon $(\lambda_{k,h}, u_{k,h})_{0 \leq k \leq N_h}$ les solutions du problème :

$$\text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u \in \mathcal{Q}_h \setminus \{0\} \text{ tels que } a(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle_{H^1}, \quad \forall v \in \mathcal{Q}_h \quad (\text{II.1.10})$$

Alors pour tout $k \geq 1$ fixé, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\lambda_k - \lambda_{k,h}| = 0.$$

Il existe une famille de vecteurs propres $(u_{k,h})_{1 \leq k \leq N_h}$ de (II.1.10) telle que, si λ_k est une valeur propre simple,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_k - u_{k,h}\|_{H^1} = 0$$

De plus, si le sous espace engendré par (u_1, \dots, u_k) est inclus dans H^{r+1} , on a

$$|\lambda_k - \lambda_{k,h}| \leq C_k h^{2r}$$

où C_k ne dépend pas de h , et si λ_k est une valeur propre simple, on a

$$\|u_k - u_{k,h}\|_{H^1} \leq C_k h^r$$

REMARQUE II.1.1 (Divergence de la constante quand $k \rightarrow \infty$)

La constante C_k tend vers l'infini quand $k \rightarrow \infty$, ce qui signifie qu'il n'y a aucune garantie que les plus grandes valeurs propres discrètes approchent bien les valeurs propres exactes associées.

REMARQUE II.1.2 (Monotonie des valeurs propres discrètes)

On cite souvent le résultat selon lequel les valeurs propres discrètes sont supérieures aux valeurs propres exactes lorsque l'on utilise la méthode des éléments finis. Cette propriété vient du théorème de Courant Fischer qui caractérise les valeurs propres comme le « min » sur les sous espaces de \mathcal{Q}_D du « max » sur les éléments du sous espace du quotient de Rayleigh. Lorsque la discrétisation par éléments finis utilise une formule de quadrature qui intègre exactement les polynômes, la caractérisation des valeurs propres est toujours vraie au niveau discret, en remplaçant \mathcal{Q}_D par \mathcal{Q}_h , ce qui montre que les valeurs propres discrètes sont nécessairement supérieures (le min est fait sur un espace strictement inclus). Par contre, lorsque l'on utilise une méthode de quadrature du type Gauss-Lobatto, on n'utilise plus exactement les mêmes fonctionnelles, et ce résultat n'est plus vrai.



La discrétisation du système d'équations de la corde de piano est faite par une méthode de Galerkin classique qui respecte la structure variationnelle du problème. Une méthode de quadrature est choisie, afin de réaliser l'intégration numérique. On montre la dissipation d'une énergie semi discrète qui s'obtient en évaluant l'énergie continue en la solution semi discrète. Un résultat de dispersion en domaine borné, c'est à dire un résultat de convergence des valeurs propres, est donné pour la méthode particulière des éléments finis, qui sera utilisée en pratique.

II.1.2 Les θ -schémas pour les équations d'ondes linéaires

Dans ce paragraphe, nous considérerons la partie linéaire de l'équation semi-discrétisée (II.1.11), autrement dit nous supposons que la partie non linéaire $\nabla \mathcal{U}$ est nulle :

$$\partial_t^2 M_h \mathbf{Q}_h + \partial_t R_h \mathbf{Q}_h + K_h \mathbf{Q}_h = S_h, \quad (\text{II.1.11})$$

et nous nous attacherons à rappeler quelques propriétés très classiques de la discrétisation temporelle de cette équation par les θ -schémas.

Les schémas de Newmark sont très populaires dans la communauté mécanique pour mener la discrétisation en temps des systèmes d'EDO d'ordre deux (voir le chapitre XX de [Dautray et al., 2000]). Ils dépendent de deux paramètres positifs usuellement notés δ et θ . Pour tout $\delta \neq 1/2$, ces schémas sont dissipatifs et d'ordre un, alors que pour $\delta = 1/2$ ils sont d'ordre au moins deux, conservent une énergie et dépendent uniquement du paramètre θ . C'est ce qu'on appelle les θ -schémas.

Dans le cadre des équations d'ondes, les θ -schémas n'ont pas un grand succès, probablement car dès que θ est non nul, le schéma est implicite, et il faut alors résoudre un système linéaire non trivial à chaque itération en temps, ce qui est considéré comme trop coûteux par rapport aux avantages apportés (meilleure condition de stabilité, meilleure précision). Dans le contexte du problème ici traité, c'est à dire la corde du piano, nous verrons au paragraphe II.1.4 que le traitement conservatif de la partie non linéaire nous obligera à considérer des schémas implicites et non linéaires. Dès lors, traiter la partie linéaire avec des schémas implicites ne présente absolument pas un surcoût, et devient même intéressant si ce choix permet de réduire la dispersion numérique. Étudions donc les θ -schémas ainsi que leurs propriétés de conservation d'énergie, de stabilité et de dispersion numérique.

Le θ -schéma appliqué au problème (II.1.11) dans lequel on considère que R_h est nul (pas d'amortissement) s'écrit :

$$M_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - 2\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h \{\mathbf{Q}\}_\theta^n = \mathbf{S}_h^n \quad (\text{II.1.12})$$

où la θ -approximation de \mathbf{Q}^n est une moyenne pondérée centrée à trois pas de temps qui s'écrit

$$\{\mathbf{Q}\}_\theta^n = \theta \mathbf{Q}^{n-1} + (1 - 2\theta) \mathbf{Q}^n + \theta \mathbf{Q}^{n+1} \quad (\text{II.1.13})$$

et qui vérifie en particulier,

$$\{\mathbf{Q}\}_\theta^n = (\theta - \frac{1}{4})\Delta t^2 [\mathbf{Q}]_{\Delta t^2}^n + \frac{\mathbf{Q}^{n+1} + 2\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{4} \quad (\text{II.1.14})$$

où l'on a noté

$$[\mathbf{Q}]_{\Delta t^2}^n = \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - 2\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (\text{II.1.15})$$

Remarquons que le θ -schéma peut être réécrit comme un schéma explicite avec une nouvelle matrice de masse :

$$\overline{M}_{h,\theta} \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - 2\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h \mathbf{Q}^n = \mathbf{S}_h^n \quad \text{avec} \quad \overline{M}_{h,\theta} = M_h + \theta \Delta t^2 K_h \quad (\text{II.1.16})$$

II.1.2.a Étude de stabilité

La stabilité de ce schéma peut se démontrer par des techniques d'énergie. Montrons que toute solution numérique satisfait une propriété de conservation d'énergie, puis déterminons sous quelles conditions cette énergie est positive. Finissons par démontrer que le schéma est stable si l'énergie est positive.

THÉORÈME II.1.3 (Énergie du θ -schéma)

Toute solution numérique au schéma (II.1.12) vérifie

$$\frac{\mathcal{E}_\theta^{n+1/2} - \mathcal{E}_\theta^{n-1/2}}{\Delta t} = \mathbf{S}_h^n \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (\text{II.1.17})$$

où l'énergie discrète est définie comme

$$\mathcal{E}_\theta^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \right\|_{M_h}^2 + (\theta - \frac{1}{4}) \frac{\Delta t^2}{2} \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \right\|_{K_h}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} + \mathbf{Q}^n}{2} \right\|_{K_h}^2 \quad (\text{II.1.18})$$

DÉMONSTRATION. On multiplie scalairement (II.1.12) par une approximation centrée de la dérivée en temps de \mathbf{q} à savoir $\frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t}$. Le premier terme devient :

$$\begin{aligned} M_h [\mathbf{Q}]_{\Delta t^2}^n \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} &= \frac{1}{2\Delta t^3} \left[M_h \mathbf{Q}^{n+1} \cdot \mathbf{Q}^{n+1} - 2M_h \mathbf{Q}^n \cdot \mathbf{Q}^{n+1} + M_h \mathbf{Q}^{n-1} \cdot \mathbf{Q}^{n+1} \right. \\ &\quad \left. - M_h \mathbf{Q}^{n+1} \cdot \mathbf{Q}^{n-1} + 2M_h \mathbf{Q}^n \cdot \mathbf{Q}^{n-1} - M_h \mathbf{Q}^{n-1} \cdot \mathbf{Q}^{n-1} \right] \\ &= \frac{1}{2\Delta t^3} \left[M_h \mathbf{Q}^{n+1} \cdot \mathbf{Q}^{n+1} - M_h \mathbf{Q}^n \cdot \mathbf{Q}^{n+1} - M_h \mathbf{Q}^{n+1} \cdot \mathbf{Q}^n \right. \\ &\quad \left. + M_h \mathbf{Q}^n \cdot \mathbf{Q}^n - M_h \mathbf{Q}^n \cdot \mathbf{Q}^n + M_h \mathbf{Q}^n \cdot \mathbf{Q}^{n-1} + M_h \mathbf{Q}^{n-1} \cdot \mathbf{Q}^n - M_h \mathbf{Q}^{n-1} \cdot \mathbf{Q}^{n-1} \right] \\ &= \frac{1}{2\Delta t} \left[M_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} - M_h \frac{\mathbf{Q}^n - \mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t} \cdot \frac{\mathbf{Q}^n - \mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t} \right] \end{aligned}$$

et d'autre part, en utilisant (II.1.14), le second terme devient :

$$\begin{aligned} K_h \{\mathbf{Q}\}_\theta^n \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} &= (\theta - \frac{1}{4})\Delta t^2 K_h [\mathbf{Q}]_{\Delta t^2}^n \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} + K_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} + 2\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{4} \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \\ &= (\theta - \frac{1}{4}) \frac{\Delta t^2}{2\Delta t} \left[K_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} - K_h \frac{\mathbf{Q}^n - \mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t} \cdot \frac{\mathbf{Q}^n - \mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta t} \left[K_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} + \mathbf{Q}^n}{2} \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} + \mathbf{Q}^n}{2} - K_h \frac{\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{2} \cdot \frac{\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{2} \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[\mathcal{E}_{\theta-1/4, K_h}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{\theta-1/4, K_h}^{n-1/2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad \mathcal{E}_{\theta-1/4, K_h}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\theta - \frac{1}{4}) \Delta t^2 K_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} K_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} + \mathbf{Q}^n}{2} \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} + \mathbf{Q}^n}{2} \quad (\text{II.1.19})$$

En sommant les deux résultats précédents, et en prenant en compte le second membre, on obtient bien le résultat attendu. \square

THÉORÈME II.1.4 (Positivité de l'énergie du θ -schéma)

L'énergie (II.1.18) est positive si et seulement si la matrice $\widetilde{M}_{h,\theta} = M_h + (\theta - \frac{1}{4})\Delta t^2 K_h$ est positive, autrement dit :

- si $\theta \geq 1/4$, l'énergie est positive pour tout $\Delta t > 0$,
- si $\theta < 1/4$, l'énergie est positive si et seulement si

$$\Delta t^2 \rho\left((M_h)^{-1}K_h\right) \leq \frac{4}{1-4\theta} \quad (\text{II.1.20})$$

$$\text{où } \rho\left((M_h)^{-1}K_h\right) = \sup_{\mathbf{v} \neq 0} \frac{(M_h)^{-1}K_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sup_{\mathbf{v} \neq 0} \frac{K_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{M_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

DÉMONSTRATION. Étant donné que la matrice K_h est semi définie positive, l'énergie potentielle discrète est automatiquement positive. Il ne reste qu'à vérifier la positivité de l'énergie cinétique discrète, ce qui conduit au résultat. \square

THÉORÈME II.1.5 (Stabilité du θ -schéma)

Si l'énergie est positive, le schéma est stable au sens où il existe $M^- > 0$ tel que toute solution numérique vérifie les inégalités suivantes :

$$\sqrt{\mathcal{E}_\theta^{n+1/2}} \leq \sqrt{\mathcal{E}_\theta^{1/2}} + \frac{\Delta t}{\sqrt{2M^-}} \sum_{\ell=0}^n \|\mathbf{S}_h^\ell\| \quad (\text{II.1.21})$$

$$\|\mathbf{Q}^{n+1}\| \leq t^{n+1} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_\theta^{1/2}}{M^-}} + \frac{\Delta t^2}{M^-} \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{\ell} \|\mathbf{S}_h^k\| \quad (\text{II.1.22})$$

DÉMONSTRATION. Nous démontrons ici le résultat dans le cas où la matrice $M_h + \Delta t^2(\theta - \frac{1}{4})K_h$ est définie positive (et non pas seulement semi définie positive). La remarque II.1.4 revient sur le cas limite et mentionne des techniques permettant une estimation uniforme de la norme de la solution par rapport à cette positivité.

On part de (II.1.17) et on utilise Cauchy-Schwarz puis l'inégalité triangulaire sur son second membre :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_\theta^{n+1/2} - \mathcal{E}_\theta^{n-1/2}}{\Delta t} &= \mathbf{S}_h^n \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \Rightarrow \frac{1}{\Delta t} |\mathcal{E}_\theta^{n+1/2} - \mathcal{E}_\theta^{n-1/2}| \leq \|\mathbf{S}_h^n\| \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{S}_h^n\| \left[\left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \right\| + \left\| \frac{\mathbf{Q}^n - \mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t} \right\| \right] \end{aligned}$$

Or, la positivité de l'énergie potentielle discrète mène à la majoration suivante :

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \right\|_{\widetilde{M}_{\theta,h}}^2 \leq \mathcal{E}_\theta^{n+1/2} \Rightarrow \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \right\|_{\widetilde{M}_{\theta,h}} \leq \sqrt{2\mathcal{E}_\theta^{n+1/2}} \quad (\text{II.1.23})$$

Le caractère défini de $\widetilde{M}_{h,\theta}$ implique qu'il existe une constante $M^- > 0$ telle que

$$\sqrt{M^-} \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \right\| \leq \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \right\|_{\widetilde{M}_{h,\theta}} \quad (\text{II.1.24})$$

On peut donc majorer le second membre ci dessus :

$$\frac{1}{\Delta t} |\mathcal{E}_\theta^{n+1/2} - \mathcal{E}_\theta^{n-1/2}| \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{S}_h^n\| \left[\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_\theta^{n+1/2}}{M^-}} + \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_\theta^{n-1/2}}{M^-}} \right] \quad (\text{II.1.25})$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\sqrt{\mathcal{E}_\theta^{n+1/2}} + \sqrt{\mathcal{E}_\theta^{n-1/2}} \right] \left[\sqrt{\mathcal{E}_\theta^{n+1/2}} - \sqrt{\mathcal{E}_\theta^{n-1/2}} \right] \leq \frac{1}{\sqrt{2M^-}} \|\mathbf{S}_h^n\| \left[\sqrt{\mathcal{E}_\theta^{n+1/2}} + \sqrt{\mathcal{E}_\theta^{n-1/2}} \right] \quad (\text{II.1.26})$$

$$\sqrt{\mathcal{E}_\theta^{n+1/2}} \leq \sqrt{\mathcal{E}_\theta^{n-1/2}} + \frac{\Delta t}{\sqrt{2M^-}} \|\mathbf{S}_h^n\| \quad (\text{II.1.27})$$

On peut sommer cette inégalité depuis l'itéré 0, et la somme étant télescopique, on obtient :

$$\sqrt{\mathcal{E}_\theta^{n+1/2}} \leq \sqrt{\mathcal{E}_\theta^{1/2}} + \frac{\Delta t}{\sqrt{2M^-}} \sum_{\ell=0}^n \|\mathbf{S}_h^\ell\| \quad (\text{II.1.28})$$

On majore à présent la norme de \mathbf{Q}^{n+1} en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|\mathbf{Q}^{n+1}\| \leq \Delta t \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \right\| + \|\mathbf{Q}^n\| \quad (\text{II.1.29})$$

$$\leq \Delta t \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_\theta^{n+1/2}}{M^-}} + \|\mathbf{Q}^n\| \quad (\text{II.1.30})$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}\Delta t}{\sqrt{M^-}} \left[\sqrt{\mathcal{E}_\theta^{1/2}} + \frac{\Delta t}{\sqrt{2M^-}} \sum_{\ell=0}^n \|\mathbf{S}_h^\ell\| \right] + \|\mathbf{Q}^n\| \quad (\text{II.1.31})$$

que l'on peut à nouveau sommer depuis l'itéré 0 pour obtenir $\|\mathbf{Q}^{n+1}\| \leq t^{n+1} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_\theta^{1/2}}{M^-}} + \frac{\Delta t^2}{M^-} \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^{\ell} \|\mathbf{S}_h^k\|$.

□

REMARQUE II.1.3 (*Divergence des estimations quand M^- tend vers 0*)

Ce défaut des estimations présentées ci dessus n'est pas un défaut intrinsèque à la méthode numérique, mais un défaut de la preuve proposée. Nous avons quand même donné cette preuve pour son caractère proche de la démonstration continue. La remarque II.1.4 présente les idées d'une preuve plus robuste proposée dans [Imperiale, 2012].

REMARQUE II.1.4 (*Estimation a priori discrète dans le cas limite*)

Dans le cas où la matrice $\widetilde{M}_{h,\theta}$ est singulière, on ne peut plus contrôler la norme canonique par la norme induite par $\widetilde{M}_{h,\theta}$. Ce cas limite arrive quand l'inégalité (II.1.20) est une égalité, c'est à dire :

$$\rho_h := \rho\left((M_h)^{-1}K_h\right) = \frac{4\Delta t^2}{1-4\theta} \quad (\text{II.1.32})$$

Une technique spectrale introduite dans [Imperiale, 2012] permet d'obtenir une estimation a priori sur l'inconnue discrète dans ce cas. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_h}) \subset [0, \rho_h]$ l'ensemble des valeurs propres de $(M_h)^{-1}K_h$ classées dans l'ordre croissant. On part du constat que la matrice K_h peut être singulière (en particulier si on impose des conditions de Neumann homogènes au bord du domaine), donc il existe s valeurs propres nulles :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{s-1} = \lambda_s = 0. \quad (\text{II.1.33})$$

Elles nous empêchent de contrôler la norme usuelle de leurs vecteurs propres associés par la norme induite par K_h . D'autre part, on suppose qu'il existe \bar{s} tel que

$$\lambda_{N_h-\bar{s}} = \dots = \lambda_{N_h-1} = \lambda_{N_h} = \frac{4\Delta t^2}{1-4\theta}, \quad (\text{II.1.34})$$

ce qui nous empêche de contrôler la norme usuelle de leurs vecteurs propres associés par la norme induite par $\widetilde{M}_{h,\theta}$.

L'idée est donc de diviser le spectre en deux (typiquement de part et d'autre de $\rho_h/2$), et d'écrire la solution selon les projections sur les deux sous espaces hautes et basses fréquences qui découlent de cette division. On contrôle alors la norme des composantes hautes fréquences de la solution par la norme induite par K_h et celle des basses fréquences de la solution par la norme induite par $\widetilde{M}_{h,\theta}$, ce qui permet de remonter à une majoration par l'énergie dans les deux cas.

II.1.2.b Étude de dispersion

La dispersion numérique, c'est à dire la déviation des fréquences propres du problème discret par rapport aux fréquences propres du problème continu, est un défaut inhérent à tout schéma numérique, sauf très rares exceptions. Il est intéressant de pouvoir quantifier cette déviation, qui donne une indication sur la qualité de l'approximation.

Considérons une onde plane numérique en temps :

$$\mathbf{Q}^n = e^{in\omega_h \Delta t} \mathbf{Q}^0 \quad (\text{II.1.35})$$

avec \mathbf{Q}^0 non nul. Alors

$$\frac{\mathbf{Q}^{n+1} - 2\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{e^{i\omega_h \Delta t} - 2 + e^{-i\omega_h \Delta t}}{\Delta t^2} \mathbf{Q}^n \quad (\text{II.1.36})$$

$$= \frac{(r - 1/r)^2}{\Delta t^2} \mathbf{Q}^n, \quad \text{où } r = e^{i\frac{\omega_h \Delta t}{2}} \quad (\text{II.1.37})$$

$$= -\frac{4}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega_h \Delta t}{2}\right) \mathbf{Q}^n \quad (\text{II.1.38})$$

On pose donc

$$\Omega^2 = \frac{4}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega_h \Delta t}{2}\right) \in \left[0, \frac{4}{\Delta t^2}\right] \quad (\text{II.1.39})$$

Le θ -schéma, sans second membre, appliqué à cette onde plane numérique donne, en choisissant l'expression (II.1.16) :

$$-\Omega^2 \overline{M}_{h,\theta} \mathbf{Q}^n + K_h \mathbf{Q}^n = 0, \quad \text{avec } \overline{M}_{h,\theta} = M_h + \theta \Delta t^2 K_h \quad (\text{II.1.40})$$

soit, en développant,

$$-\Omega^2 M_h \mathbf{Q}^n + (1 - \theta \Delta t^2 \Omega^2) K_h \mathbf{Q}^n = 0 \quad (\text{II.1.41})$$

Alors, si on connaît les valeurs propres $\lambda_{h,i}$ des matrices de discrétisation spatiale, telles que, en appelant $\mathbf{e}_{h,i}$ les vecteurs propres associés

$$K_h \mathbf{e}_{h,i} = \lambda_{h,i} M_h \mathbf{e}_{h,i}, \quad (\text{II.1.42})$$

on retrouve le fait qu'il n'existe qu'un nombre fini de pulsations propres du système totalement discrétisé possibles, et on les explicite en inversant la relation

$$\Omega_i^2 = (1 - \theta \Delta t^2 \Omega_i^2) \lambda_{h,i} \Leftrightarrow (1 + \theta \Delta t^2 \lambda_{h,i}) \Omega_i^2 = \lambda_{h,i} \quad (\text{II.1.43})$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\omega_{h,i} \Delta t}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta t^2 \lambda_{h,i}}{1 + \theta \Delta t^2 \lambda_{h,i}}} \quad (\text{II.1.44})$$

$$\Leftrightarrow \omega_{h,i} = \frac{2}{\Delta t} \text{Asin}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta t^2 \lambda_{h,i}}{1 + \theta \Delta t^2 \lambda_{h,i}}}\right) \quad (\text{II.1.45})$$

Pour calculer enfin les fréquences propres et non pas les pulsations, on divise par 2π :

$$f_{h,i} = \frac{1}{\pi \Delta t} \text{Asin}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta t^2 \lambda_{h,i}}{1 + \theta \Delta t^2 \lambda_{h,i}}}\right) \quad (\text{II.1.46})$$

REMARQUE II.1.5 (Valeur maximale des fréquences numériques)

En particulier, comme l'arcsinus est à valeurs dans $[-\pi/2, \pi/2]$, on prévoit une borne supérieure sur les fréquences propres observables suite à toute discrétisation par un θ -schéma :

$$\forall i, \quad f_{h,i} \leq \frac{1}{2\Delta t} \quad (\text{II.1.47})$$

Cette valeur coïncide avec la valeur maximale du théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon, qui dit que pour observer un signal oscillant à une fréquence de F Hz, ce signal doit être échantillonné au moins toutes les $F/2$ secondes.

On peut effectuer un développement de Taylor pour Δt petit, et l'on obtient alors :

$$f_{h,i} = \frac{\sqrt{\lambda_{h,i}}}{2\pi} + \frac{\lambda_{h,i}^{3/2}}{4\pi} \left(\frac{1}{12} - \theta\right) \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (\text{II.1.48})$$

Si la discrétisation en espace est faite avec des éléments finis de taille h , on se place à $\frac{\Delta t}{h}$ constant, et l'on peut utiliser le théorème II.1.2 sur la convergence des valeurs propres par la méthode des éléments finis d'ordre p pour dire que

$$\lambda_{h,i} = \lambda_i + \mathcal{O}(h^{2p}) = \lambda_i + \mathcal{O}(\Delta t^{2p}) \quad (\text{II.1.49})$$

Alors, comme les fréquences continues sont obtenues comme $f_i = \sqrt{\lambda_i}/(2\pi)$, on a, dès lors que p est assez grand :

$$f_{h,i} = f_i + \frac{f_i^3}{2} \left(\frac{1}{12} - \theta \right) \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (\text{II.1.50})$$

REMARQUE II.1.6 (Valeur $\theta = 1/12$)

Cette équation nous indique que $\theta = 1/12$ joue un rôle particulier, et permet de limiter la dispersion numérique à l'ordre 4. Malheureusement, cette valeur étant inférieure à $1/4$, elle conduit à un schéma stable sous condition CFL (voir le théorème II.1.4).

REMARQUE II.1.7 (Discrétisation sur les modes propres)

Au lieu de procéder à une discrétisation par éléments finis, on aurait pu envisager une autre approximation où les espaces vectoriels \mathcal{Q}_h seraient les espaces engendrés par les N_h premiers modes propres de l'opérateur spatial. Alors, les valeurs propres $\lambda_{h,i}$ seraient directement égales aux valeurs propres λ_i du problème continu et la formule (II.1.46) serait valide jusqu'à la fréquence numéro N_h .

REMARQUE II.1.8

On retrouve la condition de stabilité, exprimée en fonction des valeurs propres, en établissant que l'argument de l'Arcsinus doit être inférieur à 1.

II.1.2.c Illustration numérique

Illustrons ce résultat par deux expériences numériques sur deux équations linéaires : l'équation de corde vibrante, et le système de Timoshenko. La corde utilisée est la corde D#1 du Steinway D de l'IRCAM, homogénéisée par la technique donnée en I.1.5, ses paramètres sont donnés en tableau II.1. La discrétisation spatiale est faite avec des éléments finis d'ordre 5 sur un maillage de 300 points, afin de mettre hors de cause une éventuelle dispersion numérique due à la discrétisation spatiale. On prend $\theta = 0,25$ et $\Delta t = 1e^{-4}$. La corde est soumise à une force localisée à 12,7 cm de l'agrafe, et on mémorise au cours du temps (pendant une seconde) le mouvement d'un point situé à 6 cm de l'agrafe. Les figures II.5 et II.2 montrent la transformée de Fourier discrète du mouvement de ce point pour les deux équations, ainsi que les fréquences théoriques de l'équation en rouge (conformément aux résultats du chapitre précédent) et les fréquences théoriques données par (II.1.46) pour le θ -schéma en magenta. La figure II.5 montre plus précisément les premiers partiels dans la gamme de fréquences de 0 à 600 Hz, on voit la déviation des fréquences à cause de la dispersion numérique dès le 12^e partial. La figure II.2 se concentre sur la gamme de fréquences de 1700 à 2700 Hz. Enfin, la figure II.3 se concentre sur la gamme de fréquences entre 3300 et 3700 Hz. On peut voir que la formule théorique (II.1.46) représente très bien le comportement numérique observé, que ce soit en basses ou hautes fréquences.

Étant donnée la remarque II.1.6, il est tentant d'utiliser $\theta = 1/12$ pour répéter les expériences numériques et observer l'effet bénéfique de cette valeur sur la dispersion. Or, elle conduit à un schéma stable sous condition CFL, qui est assez pénalisante : si on conserve les 300 points sur la corde D#1, à l'ordre 5, le pas de temps doit être inférieur à environ 5×10^{-6} secondes pour l'équation de corde vibrante, et inférieur à environ $3,5 \times 10^{-7}$ secondes pour le système de Timoshenko. Le système de Timoshenko est plus restrictif car on a ajouté l'onde de cisaillement qui se propage, pour cette corde particulière, environ 14 fois plus vite que l'onde transversale. Le pas de temps autorisé est donc divisé d'autant. Les simulations numériques avec $\theta = 1/12$ et donc ces valeurs de pas de temps montrent un très bon agrément entre les fréquences obtenues numériquement et les fréquences prévues par la théorie.

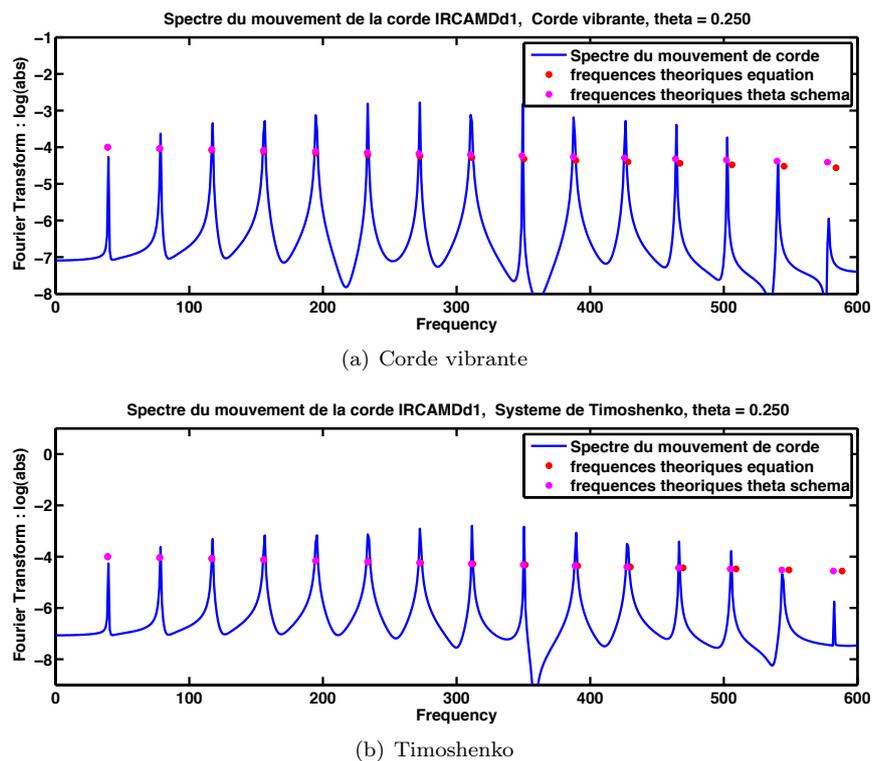


FIGURE II.1 – Spectre du mouvement d’un point de la corde D#1 discrétisée par un θ -schéma. Zoom de 0 à 600 Hz

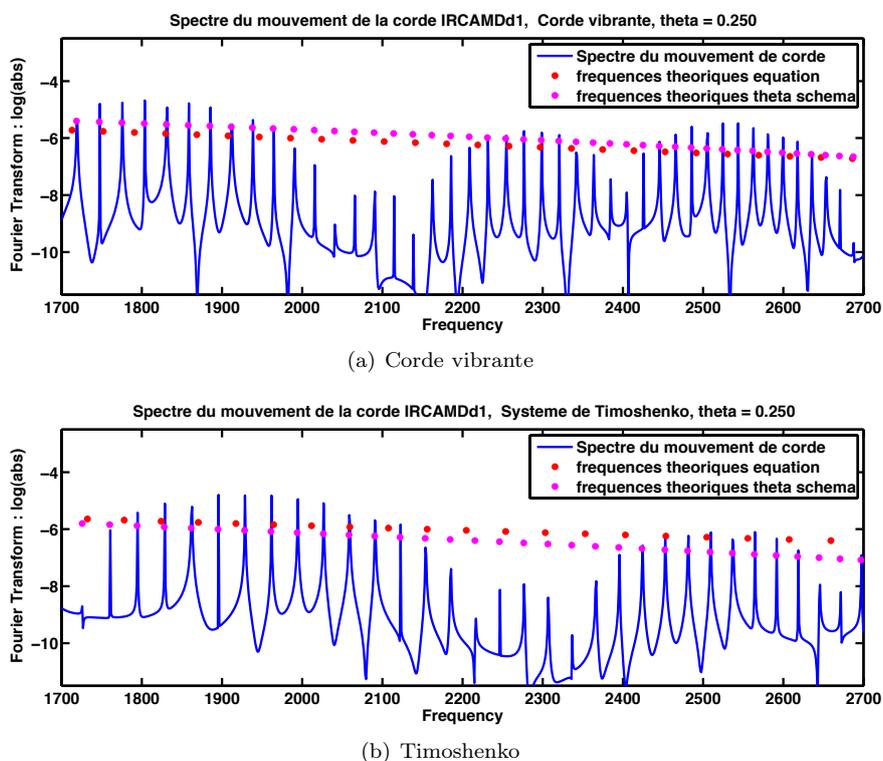


FIGURE II.2 – Spectre du mouvement d’un point de la corde D#1 discrétisée par un θ -schéma. Zoom de 1700 à 2700 Hz

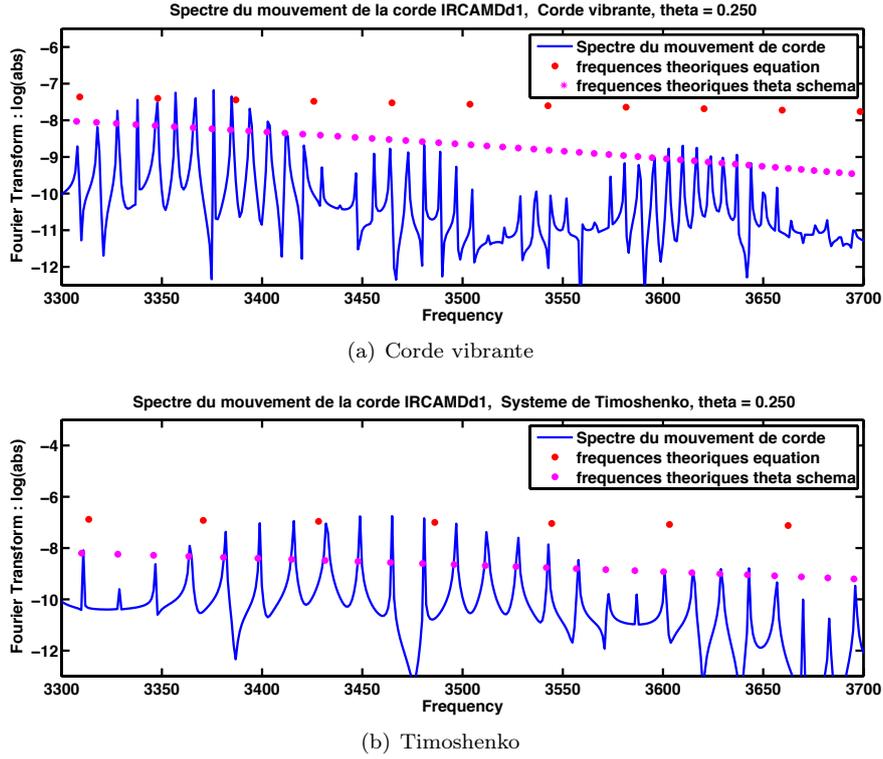


FIGURE II.3 – Spectre du mouvement d'un point de la corde D#1 discrétisée par un θ -schéma. Zoom de 3300 3700 Hz

L	A	ρ	T_0	E	I	G	κ
m	m ²	kg·m ⁻³	N	Pa	m ⁴	Pa	-
1,945	$1,31 \times 10^{-6}$	44290	1328	$2,02 \times 10^{11}$	$1,78 \times 10^{-14}$	$1,00 \times 10^{10}$	0,95
N_x	Δt	θ	ordre				
300	10^{-4}	1/4	5				

TABLE II.1 – Valeurs des paramètres utilisés pour les simulations

II.1.2.d Adaptation au cas dissipatif

Le θ -schéma s'adapte très bien au cas dissipatif (lorsque la matrice R_h est non nulle), et dans ce cas, l'énergie discrète décroît de façon consistante avec l'énergie continue. Le schéma s'écrit :

$$M_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - 2\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t^2} + R_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} + K_h \{\mathbf{Q}\}_\theta^n = \mathbf{S}_h^n \quad (\text{II.1.51})$$

THÉORÈME II.1.6 (Énergie du θ -schéma dissipatif)

Toute solution numérique au schéma (II.1.93) vérifie

$$\frac{\mathcal{E}_\theta^{n+1/2} - \mathcal{E}_\theta^{n-1/2}}{\Delta t} = \mathbf{S}_h^n \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} - R_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (\text{II.1.52})$$

où l'énergie discrète n'a pas changé depuis le paragraphe précédent.

L'expression de l'énergie n'ayant pas changé, sa positivité est acquise sous la même condition que précédemment. De plus, on peut toujours majorer le terme en R_h du second membre par zéro et reprendre toutes les démonstrations de stabilité et d'estimations du paragraphe précédent.



La famille des θ -schémas constitue un ensemble de méthodes de discrétisation en temps très classiques pour les équations d'ondes. Nous avons rappelé ici leurs propriétés de conservation d'énergie, ainsi que le fait qu'ils sont stables sous condition que cette énergie soit positive. Ceci est toujours vrai pour $\theta \geq 1/4$, et conduit à une restriction sur le pas de temps Δt pour $\theta < 1/4$. Nous avons étudié la dispersion induite par les schémas, et donné une formule analytique des fréquences qui apparaîtront dans la solution numérique. Ces fréquences seront nécessairement inférieures à $1/2\Delta t$. La valeur $\theta = 1/12$ joue un rôle charnière et minimise la dispersion numérique. Des expériences numériques montrent que la formule représente très précisément le comportement numérique observé, que ce soit en basses ou hautes fréquences. Nous avons enfin adapté le schéma à une équation amortie, de telle sorte que l'énergie discrète soit dissipée.

II.1.3 Des θ -schémas à plusieurs θ pour le système de Timoshenko

Dans le système de Timoshenko précontraint que nous utilisons pour modéliser la raideur de la corde du piano, les deux ondes (vibration transversale et cisaillement) se propagent à des vitesses très différentes. Comme nous venons de le voir en remarque II.1.6, pour des raisons de précision et de dispersion, la valeur $\theta = 1/12$ est souhaitable, mais conduit à un schéma stable sous condition CFL, qui dépend de la vitesse de l'onde concernée. Dans le cas de Timoshenko, cela signifie que le pas de temps va être limité par l'onde la plus rapide (l'onde de cisaillement), et l'onde la plus lente (vibration transversale) devra aussi se plier à cette condition alors qu'à priori un pas de temps plus grand lui conviendrait. C'est pourquoi nous proposons un schéma adapté où l'on introduit deux valeurs de θ , l'une étant destinée à l'onde lente et sera en pratique $1/12$, l'autre étant destinée à l'onde rapide et sera en pratique $1/4$ afin d'éviter la condition de stabilité.

L'écriture d'un schéma différent sur les deux ondes passe par une réécriture du système continu qui met en valeur la séparation effective de ces ondes. Dans le cas du système précontraint de Timoshenko, cette séparation sera faite en considérant que la matrice A se décompose en deux sous matrices :

$$A = \begin{pmatrix} T_0 + AG\kappa & 0 \\ 0 & EI \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\bar{A}} + \underbrace{\begin{pmatrix} AG\kappa & 0 \\ 0 & EI \end{pmatrix}}_{\underline{A}}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -AG\kappa \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & AG\kappa \end{pmatrix}.$$

On définit alors les matrices \underline{K}_h et \bar{K}_h comme dans (II.1.6), en séparant d'un côté la contribution de \underline{A} , B et C pour \underline{K}_h et de l'autre celle de \bar{A} pour \bar{K}_h .

Considérons à présent un cas général où la matrice K_h s'écrit comme la somme $\underline{K}_h + \bar{K}_h$, et considérons le schéma :

$$M_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - 2\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t^2} + \underline{K}_h \{\mathbf{Q}\}_\theta^n + \bar{K}_h \{\mathbf{Q}\}_{\bar{\theta}}^n = \mathbf{S}_h^n \quad (\text{II.1.53})$$

Étudions comme pour le schéma précédent les conditions de sa stabilité, avant d'estimer la dispersion numérique qu'il induit, et de proposer quelques illustrations numériques.

II.1.3.a Étude de stabilité

La stabilité se montre comme précédemment grâce à des techniques d'énergie.

THÉORÈME II.1.7 (Énergie du schéma à deux θ)

Toute solution numérique au schéma (II.1.53) vérifie

$$\frac{\mathcal{E}_{\theta, \bar{\theta}}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{\theta, \bar{\theta}}^{n-1/2}}{\Delta t} = \mathbf{S}_h^n \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (\text{II.1.54})$$

où l'énergie discrète est définie comme

$$\mathcal{E}_{\theta, \bar{\theta}}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \right\|_{\widetilde{M}_{h, \theta, \bar{\theta}}}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} + \mathbf{Q}^n}{2} \right\|_{K_h}^2 \quad (\text{II.1.55})$$

avec

$$\widetilde{M}_{h, \theta, \bar{\theta}} = M_h + \left(\theta - \frac{1}{4}\right) \Delta t^2 \underline{K}_h + \left(\bar{\theta} - \frac{1}{4}\right) \Delta t^2 \overline{K}_h \quad (\text{II.1.56})$$

DÉMONSTRATION. On réécrit la θ -approximation selon l'expression (II.1.14), et on multiplie scalairement le schéma par l'approximation centrée d'ordre deux de la dérivée en temps de \mathbf{q} , puis la démonstration suit celle du théorème II.1.9. □

THÉORÈME II.1.8 (Positivité de l'énergie du schéma à deux θ)

L'énergie (II.1.55) est positive si et seulement si la matrice

$$\widetilde{M}_{h, \theta, \bar{\theta}} = M_h + \left(\theta - \frac{1}{4}\right) \Delta t^2 \underline{K}_h + \left(\bar{\theta} - \frac{1}{4}\right) \Delta t^2 \overline{K}_h \quad (\text{II.1.57})$$

est une matrice positive. Autrement dit,

- Si $\min(\theta, \bar{\theta}) > 1/4$, l'énergie est positive pour tout $\Delta t > 0$,
- Sinon, l'énergie est positive sous la condition que

$$\Delta t^2 \sup_{\mathbf{v} \neq 0} \frac{\left[\left(\frac{1}{4} - \theta\right) \underline{K}_h + \left(\frac{1}{4} - \bar{\theta}\right) \overline{K}_h \right] \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{M_h \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \leq 1 \quad (\text{II.1.58})$$

On montre par les mêmes méthodes qu'au paragraphe précédent que le schéma est stable si l'énergie est positive, et on obtient les mêmes estimations d'erreur en considérant cette nouvelle énergie.

REMARQUE II.1.9 (Stabilité pour $\theta = 1/4$)

Dans le cas particulier où $\theta = 1/4$, la condition de stabilité obtenue est celle que l'on obtiendrait en effectuant un θ -schéma classique sur la partie de l'équation décrite par la matrice \overline{K}_h .

II.1.3.b Étude de la dispersion numérique pour le système de Timoshenko

Considérons une onde plane numérique en temps :

$$\mathbf{Q}^n = e^{in\omega_h \Delta t} \mathbf{Q}^0 \quad (\text{II.1.59})$$

Alors en posant comme précédemment

$$\Omega^2 = \frac{4 \sin^2\left(\frac{\omega_h \Delta t}{2}\right)}{\Delta t^2} \in \left[0, \frac{4}{\Delta t^2}\right] \quad (\text{II.1.60})$$

Le schéma sans second membre appliqué à l'onde plane se réécrit :

$$-\Omega^2 M_h \mathbf{Q}^n + (1 - \theta \Delta t^2 \Omega^2) \underline{K}_h \mathbf{Q}^n + (1 - \bar{\theta} \Delta t^2 \Omega^2) \overline{K}_h \mathbf{Q}^n = 0$$

L'astuce du paragraphe précédent ne s'applique plus ici, puisque les deux matrices \underline{K}_h et \overline{K}_h ne sont pas, *a priori*, diagonalisables dans la même base.

Nous proposons de repasser au système semi-discret en temps afin de faire l'étude de dispersion du système de Timoshenko par la discrétisation à deux θ par la même méthode que dans le cas continu. Le schéma s'écrit alors :

$$M[\mathbf{q}]_{\Delta t^2}^n - \partial_x \left(\underline{A} \partial_x \{\mathbf{q}\}_{\theta}^n + \overline{A} \partial_x \{\mathbf{q}\}_{\bar{\theta}}^n + B \{\mathbf{q}\}_{\theta}^n \right) + C \{\mathbf{q}\}_{\theta}^n + {}^t B \partial_x \{\mathbf{q}\}_{\bar{\theta}}^n = 0 \quad (\text{II.1.61})$$

où les matrices M , B et C sont celles du système de Timoshenko, tandis qu'on sépare la matrice A en :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et } \underline{A} = \begin{pmatrix} AG\kappa & 0 \\ 0 & EI \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.62})$$

REMARQUE II.1.10 (*Caractère mal posé du schéma semi discret.*)

Ce schéma conduit à un problème mal posé pour certaines valeurs des paramètres θ et $\bar{\theta}$. Il reste intéressant de s'y pencher afin de comprendre l'effet de la discrétisation en temps sur les fréquences propres du système, en gardant à l'esprit qu'une discrétisation spatiale rétablira le caractère bien posé et ne modifiera pas beaucoup les valeurs propres de l'opérateur en espace (soit grâce à la convergence des éléments finis, soit parce que l'on discrétisera sur les premiers modes propres, conservant alors exactement les N_h premières valeurs propres).

Revenons alors à la formulation de ce problème à l'ordre un, en procédant à la même écriture des inconnues qu'au paragraphe I.1.4 :

$$Y' + \mathbb{A}Y = 0 \quad (\text{II.1.63})$$

où la matrice \mathbb{A} est cependant différente, modifiée par le schéma numérique de discrétisation en temps :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ a(\Omega) & 0 & 0 & d(\Omega) \\ 0 & b(\Omega) & c(\Omega) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.64})$$

avec

$$a(\Omega) = \frac{\rho A \Omega^2}{c_1(\Omega)}, \quad b(\Omega) = \frac{\rho I \Omega^2}{c_2(\Omega)} - \frac{AG\kappa}{c_2(\Omega)}(1 - \theta \Delta t^2 \Omega^2), \quad c(\Omega) = \frac{AG\kappa}{EI}, \quad d(\Omega) = -\frac{AG\kappa c_2(\Omega)}{EI c_1(\Omega)} \quad (\text{II.1.65})$$

$$c_1(\Omega) = (1 - \theta \Delta t^2 \Omega^2)AG\kappa + (1 - \bar{\theta} \Delta t^2 \Omega^2)T_0, \quad (\text{II.1.66})$$

$$c_2(\Omega) = (1 - \theta \Delta t^2 \Omega^2)EI \quad (\text{II.1.67})$$

Les valeurs propres de cette matrice sont les complexes λ tels que

$$\det(\mathbb{A} - \lambda I_4) = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 + \lambda^2 [a(\Omega) + b(\Omega) - c(\Omega)d(\Omega)] + a(\Omega)b(\Omega) = 0 \quad (\text{II.1.68})$$

En posant $\Lambda = \lambda^2$ et $\Phi = \Omega^2$, on cherche à annuler

$$\begin{aligned} f_\Phi(\Lambda) &= \Lambda^2 c_1(\Phi)c_2(\Phi) \\ &+ \Lambda [\rho A \Phi c_2(\Phi) + \rho I \Phi c_1(\Phi) - AG\kappa(1 - \theta \Delta t^2 \Phi)c_1(\Phi) + (AG\kappa)^2(1 - \theta \Delta t^2 \Phi)^2] \\ &+ \rho A \Phi [\rho I \Phi - (1 - \theta \Delta t^2 \Phi)AG\kappa] \end{aligned} \quad (\text{II.1.69})$$

Les seules solutions de cette équation qui nous intéressent sont les $\Lambda(\Phi) \in \mathbb{R}^-$, en effet, elles sont associées à des λ imaginaires purs qui conduisent à des solutions propagatives. Supposons (voir remarque II.1.11) qu'il existe une ou deux solution(s) $\Lambda^-(\Phi) < 0$ à l'équation (II.1.69). Alors en répétant le raisonnement fait dans le cas continu, l'imposition des conditions aux limites entraîne l'existence d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\Lambda^-(\Phi) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (\text{II.1.70})$$

et il s'agit à présent d'inverser cette relation pour trouver les Φ_n associés.

REMARQUE II.1.11 (*Étude de l'équation (II.1.69)*)

Cette équation du second degré en Λ admet un discriminant $\Delta_f(\Phi)$ qui est lui même un polynôme de degré 4 en Φ dont l'étude n'est pas simple. On peut toutefois donner quelques propriétés sur les coefficients intervenant dans $f_\Phi(\Lambda)$, et donc sur les solutions de $f_\Phi(\Lambda) = 0$.

D'une part, le signe de $c_1(\Phi)c_2(\Phi)$ n'est pas constant pour tout $\Phi \geq 0$. En effet, introduisons $\theta^- =$

$\min(\theta, \bar{\theta})$ et $\theta^+ = \max(\theta, \bar{\theta})$. Alors le produit $c_1(\Phi)c_2(\Phi)$ est positif en dehors de l'intervalle $[H_-, H_+]$ avec

$$H_{\pm} = \frac{\theta AG\kappa + \theta^{\pm} T_0}{\Delta t^2 \theta (\theta AG\kappa + \bar{\theta} T_0)} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t^2 \theta} & \text{si } \theta^{\pm} = \bar{\theta} \\ \frac{AG\kappa + T_0}{\Delta t^2 (\theta AG\kappa + \bar{\theta} T_0)} & \text{si } \theta^{\pm} = \theta \end{cases} \quad (\text{II.1.71})$$

D'autre part, $f_{\Phi}(0)/\Phi$ est affine en Φ , croissante, et s'annule en

$$H_0 = \frac{1}{\frac{\rho I}{AG\kappa} + \Delta t^2 \theta}$$

En conséquence, $f_{\Phi}(0)$ est négatif pour tout $0 \leq \Phi \leq H_0$ et positif ensuite. Représentons les cas possibles dans la configuration $\theta < \bar{\theta}$ qui mène au classement suivant des valeurs seuil :

	0	H_0	H_-	H_+	$+\infty$
$f_{\Phi}(0)$	-	+	+	+	+
$f''_{\Phi}(0)$	+	+	-	+	+
	Cas 4	Cas 1, 2 ou 5	Cas 3	Cas 1, 2 ou 5	

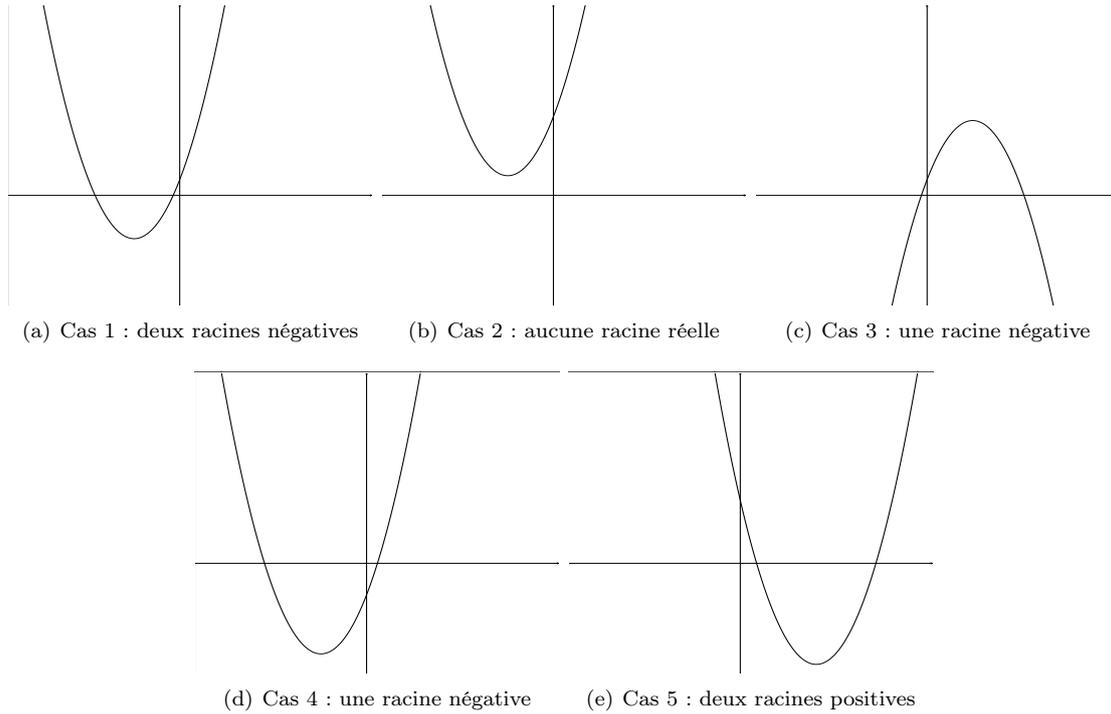


FIGURE II.4 – Configurations typiques de la parabole $f_{\Phi}(\Lambda)$ selon les valeurs de Φ

A l'instar du cas continu, nous réinjectons l'expression ainsi trouvée de $\Lambda^-(\Phi)$ dans l'équation (II.1.69) que nous ré-exprimons comme une équation portant sur Φ :

$$\alpha_n \Phi^2 + \beta_n \Phi + \gamma_n = 0, \quad \text{où} \quad (\text{II.1.72})$$

$$\begin{cases} \alpha_n &= \Delta t^4 \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \theta EI(\theta AG\kappa + \bar{\theta} T_0) + \Delta t^2 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left[\rho I(\theta EA + \theta AG\kappa + \bar{\theta} T_0) + \right. \\ &\quad \left. \Delta t^2 AG\kappa T_0 \bar{\theta} \right] + \rho A \left[\rho I + \Delta t^2 \theta AG\kappa \right] \\ \beta_n &= -\Delta t^2 \frac{n^4 \pi^4}{L^4} EI(2\theta AG\kappa + (\theta + \bar{\theta}) T_0) - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left[\rho I(EA + AG\kappa + T_0) + \Delta t^2 (\theta + \bar{\theta}) T_0 AG\kappa \right] - \rho A(AG\kappa) \\ \gamma_n &= \frac{n^4 \pi^4}{L^4} EI(AG\kappa + T_0) + AG\kappa T_0 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \end{cases}$$

Posons alors

$$\Delta_n = \beta_n^2 - 4\alpha_n \gamma_n \quad (\text{II.1.73})$$

Ce discriminant a une expression assez compliquée, mais on peut donner quelques uns de ses comportements dans des cas particuliers.

▷ **Comportement à l'infini.** En prenant un équivalent pour n grand, on trouve, si $\theta \neq \bar{\theta}$:

$$\Delta_n \sim \Delta t^4 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^8 (EI)^2 (\theta - \bar{\theta})^2 T_0^2 \geq 0 \quad (\text{II.1.74})$$

▷ **Lorsque $\bar{\theta} = \theta$.** Alors, le discriminant se simplifie beaucoup pour devenir

$$\Delta_n(\theta = \bar{\theta}) = n^4 \frac{\rho^4 \pi^4 I^4}{L^4} (EA - T_0 - AG\kappa)^2 + n^2 \frac{2\pi^2 \rho^2 A^2 G\kappa I}{L^2} (AG\kappa + EA - T_0) + \rho^2 A^4 G^2 \kappa^2 \quad (\text{II.1.75})$$

Il ne dépend plus de Δt ni de θ et est toujours positif.

▷ **Lorsque $\theta \neq \bar{\theta}$.** Alors, le logiciel de calcul formel trouve l'expression des racines de Δ_n vu comme une fonction de Δt paramétrée par toutes les constantes, par θ et $\bar{\theta}$ et par n :

$$\Delta t_n^\pm = \frac{L\sqrt{\rho}}{\pi(n^2\pi^2 EI + AG\kappa L^2)\sqrt{T_0}\sqrt{|\theta - \bar{\theta}|}} \sqrt{R_n^\pm} \quad (\text{II.1.76})$$

$$R_n^\pm = X_n n^4 + Y_n^\pm n^2 + Z_n, \quad X_n = \pi^4 EI^2 (EA - T_0 - AG\kappa), \quad Z_n = L^4 A^3 G^2 \kappa^2 \quad (\text{II.1.77})$$

$$Y_n^\pm = IL(AG\kappa)\pi^2 (\pm 2i\sqrt{U_n} + L(2EA + AG\kappa - T_0)), \quad (\text{II.1.78})$$

$$U_n = \pi^2 EI(T_0 + AG\kappa) n^2 + L^2 T_0 AG\kappa \quad (\text{II.1.79})$$

Ces racines sont donc complexes, et vu le comportement à l'infini, on en déduit que Δ_n reste toujours positif.

Si on fait confiance au logiciel de calcul formel, Δ_n est toujours positif, il y a donc deux racines réelles au problème, qui s'écrivent :

$$\Phi_n^+ = \frac{-\beta_n + \sqrt{\Delta_n}}{2\alpha_n} > \Phi_n^- = \frac{-\beta_n - \sqrt{\Delta_n}}{2\alpha_n} \quad (\text{II.1.80})$$

Or on rappelle que

$$\Phi = \Omega^2 = \frac{4 \sin^2\left(\frac{\omega_h \Delta t}{2}\right)}{\Delta t^2} \in \left[0, \frac{4}{\Delta t^2}\right],$$

ce qui ajoute une nouvelle condition nécessaire pour que ce problème admette une solution à n fixé. Pour résumer :

$$\begin{cases} \beta_n^2 - 4\alpha_n \beta_n \geq 0 & \text{qui selon le logiciel de calcul formel est toujours vraie, (II.1.81a)} \\ \frac{8\alpha_n}{\Delta t^2} + \beta_n \pm \sqrt{\Delta_n} \geq 0 & \text{qui constitue deux conditions du type CFL. (II.1.81b)} \end{cases}$$

La seconde ligne est également compliquée, mais on peut donner quelques comportements comme pour l'étude de Δ_n . Les deux conditions associées aux deux signes (+ et -) doivent être remplies, or si la condition avec le signe - est remplie, celle avec le signe + l'est aussi car $\sqrt{\Delta_n} > 0$. Il suffit donc de s'intéresser à la plus restrictive des deux, c'est à dire celle au signe -.

▷ **Expression simplifiée.** Tirons parti du fait que $\alpha_n \geq 0$ pour écrire que

$$\frac{8\alpha_n}{\Delta t^2} + \beta_n - \sqrt{\Delta_n} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8\alpha_n}{\Delta t^2} + \beta_n \geq \sqrt{\Delta_n} \geq 0 \quad (\text{II.1.82})$$

$$\Leftrightarrow \frac{64\alpha_n^2}{\Delta t^4} + \frac{16\alpha_n\beta_n}{\Delta t^2} + \beta_n^2 \geq \beta_n^2 - 4\alpha_n\gamma_n \quad (\text{II.1.83})$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{16\alpha_n + 4\Delta t^2\beta_n + \Delta t^4\gamma_n}_{\Gamma_n} \geq 0 \quad (\text{II.1.84})$$

Cette expression est un polynôme en n qui s'écrit $\Gamma_n = A_n n^4 + B_n n^2 + C_n$, où :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n = \frac{\Delta t^4 \pi^4 EI}{L^4} (4\theta - 1) [AG\kappa(4\theta - 1) + T_0(4\bar{\theta} - 1)], \\ B_n = \frac{\Delta t^2 \pi^2}{L^2} (D_n \Delta t^2 + E_n), \text{ avec } \begin{cases} D_n = AG\kappa T_0 (4\theta - 1)(4\bar{\theta} - 1), \\ E_n = 4\rho I [EA(4\theta - 1) + AG\kappa(4\theta - 1) + T_0(4\theta - 1)] \end{cases} \\ C_n = 4\rho A [4\rho I + \Delta t^2 AG\kappa(4\theta - 1)], \end{array} \right. \quad (\text{II.1.85})$$

▷ **Lorsque** $\min(\theta, \bar{\theta}) \geq 1/4$. Alors le polynôme Γ_n est toujours positif, ce qui signifie que la condition est toujours réalisée, sans condition sur Δt .

▷ **Lorsque** $\theta = 1/4$. Alors l'expression de Γ_n se simplifie beaucoup pour donner

$$\Gamma_n(\theta = \frac{1}{4}) = \frac{4\Delta t^2 \pi^2}{L^2} \rho I T_0 (4\bar{\theta} - 1) n^2 + 16\rho A \rho I \quad (\text{II.1.86})$$

On retrouve le fait que si $\bar{\theta} \geq \frac{1}{4}$, la condition est automatiquement satisfaite, en revanche, si $\bar{\theta} < \frac{1}{4}$, on doit avoir :

$$\Delta t^2 \leq \frac{4\rho A L^2}{\pi^2 T_0 (1 - 4\bar{\theta}) n^2} \quad (\text{II.1.87})$$

▷ **Cas général.** Il est difficile d'exhiber une condition du type $\Delta t \leq ?$. L'étude du polynôme Γ_n conduit à considérer son déterminant Δ_Γ qui est lui-même une fonction de Δt et s'écrit

$$\Delta_\Gamma = \Delta t^4 [F\Delta t^4 + G\Delta t^2 + H], \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} F = \frac{\pi^2 (AG\kappa)^2 T_0^2 (4\bar{\theta} - 1)^2 (4\theta - 1)^2}{L^4} \geq 0 \\ G = -\frac{8\pi^4 \rho I AG\kappa (4\theta - 1)}{L^4} [-T_0^2 (4\bar{\theta} - 1)^2 + T_0 (EA - AG\kappa) (4\bar{\theta} - 1) (4\theta - 1) + 2EA^2 G\kappa (4\theta - 1)^2] \\ H = \frac{16\pi^4 (\rho I)^2 [AG\kappa(1 - 4\theta) + T_0(1 - 4\bar{\theta}) + EA(4\theta - 1)]^2}{L^4} \geq 0 \end{array} \right.$$

Le discriminant est donc lui-même proportionnel à une parabole en Δt^2 , tournée vers le haut et positive à l'origine, qui a elle-même comme discriminant la quantité

$$\frac{256\pi^8}{L^8} (\rho I)^2 EA (AG\kappa)^3 (4\theta - 1)^4 [AG\kappa(4\theta - 1) + T_0(4\bar{\theta} - 1)] [EA(4\theta - 1) + T_0(1 - 4\bar{\theta})] \quad (\text{II.1.88})$$

dont le signe n'est pas évident. Comme nous avons systématiquement ramené l'étude des polynômes de degré 4 à l'étude des paraboles associées, seul le comportement pour les valeurs positives de la variable nous intéresse. Cela signifie que même si les discriminants sont positifs, il peut ne pas y avoir de problème si les racines associées sont négatives. Il y a en fait de nombreuses configurations sous lesquelles le polynôme Γ_n est positif pour tout $n \in [1, N_h]$, où N_h est destiné à devenir la dimension de l'espace d'approximation. Nous ne détaillons pas ici les différents cas possibles.

Sous les conditions (II.1.81), on obtient les deux branches discrètes de fréquences propres :

$$f_{h,n}^\pm = \frac{1}{\pi \Delta t} \text{Asin} \left(\sqrt{\frac{\Delta t^2 \Phi_n^\pm}{4}} \right) \leq \frac{1}{2\Delta t} \quad (\text{II.1.89})$$

On peut procéder à un développement de Taylor pour n petit, afin de comparer cette formule à son analogue continu :

$$\begin{cases} f_{h,n}^- = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} + G^-(\Delta t)n^3 + \mathcal{O}(n^5), & \text{(II.1.90a)} \\ f_{h,n}^+ = \frac{1}{\pi \Delta t} A \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta t^2 A G \kappa}{\rho I + \Delta t^2 \theta A G \kappa}}\right) + G^+(\Delta t)n^2 + \mathcal{O}(n^3) & \text{(II.1.90b)} \end{cases}$$

$$\text{où } \begin{cases} G^-(\Delta t) = \frac{\pi^2}{4L^3} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} \frac{EI}{T_0} \left[1 - \frac{T_0}{EA}\right] - \Delta t^2 \frac{\pi^2}{4L^3} \left(\bar{\theta} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{T_0}{\rho A}\right)^{3/2} & \text{(II.1.91a)} \\ G^+(\Delta t) = \frac{\pi \rho I^2 (E + G \kappa)}{(\rho I + \Delta t^2 \theta A G \kappa) \sqrt{A G \kappa L^2} \sqrt{4\rho I + (4\theta - 1)\Delta t^2 A G \kappa}} & \text{(II.1.91b)} \end{cases}$$

REMARQUE II.1.12 (Conditions nécessaires)

Deux conditions sont nécessaires pour que les formules ci dessus aient un sens :

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta t^2 A G \kappa}{\rho I + \Delta t^2 \theta A G \kappa}} \leq 1 \text{ et } 4\rho I + (4\theta - 1)\Delta t^2 A G \kappa \geq 0$$

Elles sont en fait équivalentes entre elles, mais aussi à la positivité du terme C_n de Γ_n dans (II.1.85). En particulier, elles sont vérifiées automatiquement si $\theta \geq 1/4$, et conduisent à une majoration sur le pas de temps si $\theta < 1/4$:

$$\Delta t^2 \leq \frac{4\rho I}{A G \kappa (1 - 4\theta)} \quad \text{(II.1.92)}$$

REMARQUE II.1.13 (Valeur $\bar{\theta} = 1/12$)

On remarque que prendre $\bar{\theta} = 1/12$ dans le schéma permet d'obtenir pour les fréquences propres discrètes de la vibration transversale exactement le développement continu pour n petit, jusqu'au terme en $\mathcal{O}(n^5)$. D'ailleurs, jusqu'à ce terme, cette branche n'a pas l'air de dépendre de la valeur choisie pour θ .

REMARQUE II.1.14 (Conditions de stabilité)

Les conditions de stabilité (II.1.81) doivent, pour le problème semi discret, être respectées pour tout n . Or, plus n est grand et si $\min(\theta, \bar{\theta}) < 1/4$, plus elles sont restrictives sur Δt (voir par exemple (II.1.87)), illustrant le fait que le problème est en fait mal posé tant que l'on a pas discrétisé en espace. La discrétisation aura pour effet de tronquer la suite des valeurs propres, en fournissant des valeurs propres soit égales soit s'approchant des valeurs propres continues.

II.1.3.c Adaptation au cas dissipatif

Ce schéma s'adapte très bien au cas dissipatif (lorsque la matrice R_h est non nulle), et dans ce cas, l'énergie discrète décroît de façon consistante avec l'énergie continue. Le schéma s'écrit :

$$M_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - 2\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t^2} + R_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} + \underline{K}_h \{\mathbf{Q}\}_\theta^n + \overline{K}_h \{\mathbf{Q}\}_\theta^n = \mathbf{S}_h^n \quad \text{(II.1.93)}$$

THÉORÈME II.1.9 (Énergie du schéma dissipatif à deux θ)

Toute solution numérique au schéma (II.1.93) vérifie

$$\frac{\mathcal{E}_{\theta, \bar{\theta}}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{\theta, \bar{\theta}}^{n-1/2}}{\Delta t} = \mathbf{S}_h^n \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} - R_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \quad \text{(II.1.94)}$$

où l'énergie discrète n'a pas changé depuis le paragraphe précédent.

II.1.3.d Illustration numérique

Illustrons ce résultat par une expérience numérique sur une corde régie par les équations de Timoshenko. Nous prenons comme précédemment la corde D \sharp 1 du Steinway D de l'IRCAM, homogénéisée. Ses paramètres sont rappelés en tableau II.2. On utilise une discrétisation spatiale suffisamment fine pour négliger son effet sur la dispersion numérique (300 intervalles à l'ordre 5). Les deux θ sont $\theta = 1/2$ et $\bar{\theta} = 1/4$, de façon à obtenir un schéma inconditionnellement stable, ce qui nous permet de choisir $\Delta t = 10^{-4}$ secondes. On mémorise le déplacement d'un point de la corde situé à 6 cm de l'agrafe, et on trace sa transformée de Fourier discrète sur un échantillon d'une seconde. On trace également en rouge les fréquences théoriques du système et en magenta les fréquences théoriques issues de la discrétisation par le double θ , conformément à (II.1.89). On voit que la formule représente très bien les observations numériques, en basses et hautes fréquences.

L	A	ρ	T_0	E	I	G	κ
m	m ²	kg·m ⁻³	N	Pa	m ⁴	Pa	-
1,945	$1,31 \times 10^{-6}$	44290	1328	$2,02 \times 10^{11}$	$1,78 \times 10^{-14}$	$1,00 \times 10^{10}$	0,95
N_x	Δt	θ	$\bar{\theta}$	ordre			
300	10^{-4}	1/2	1/4	5			

TABLE II.2 – Valeurs des paramètres utilisés pour les simulations

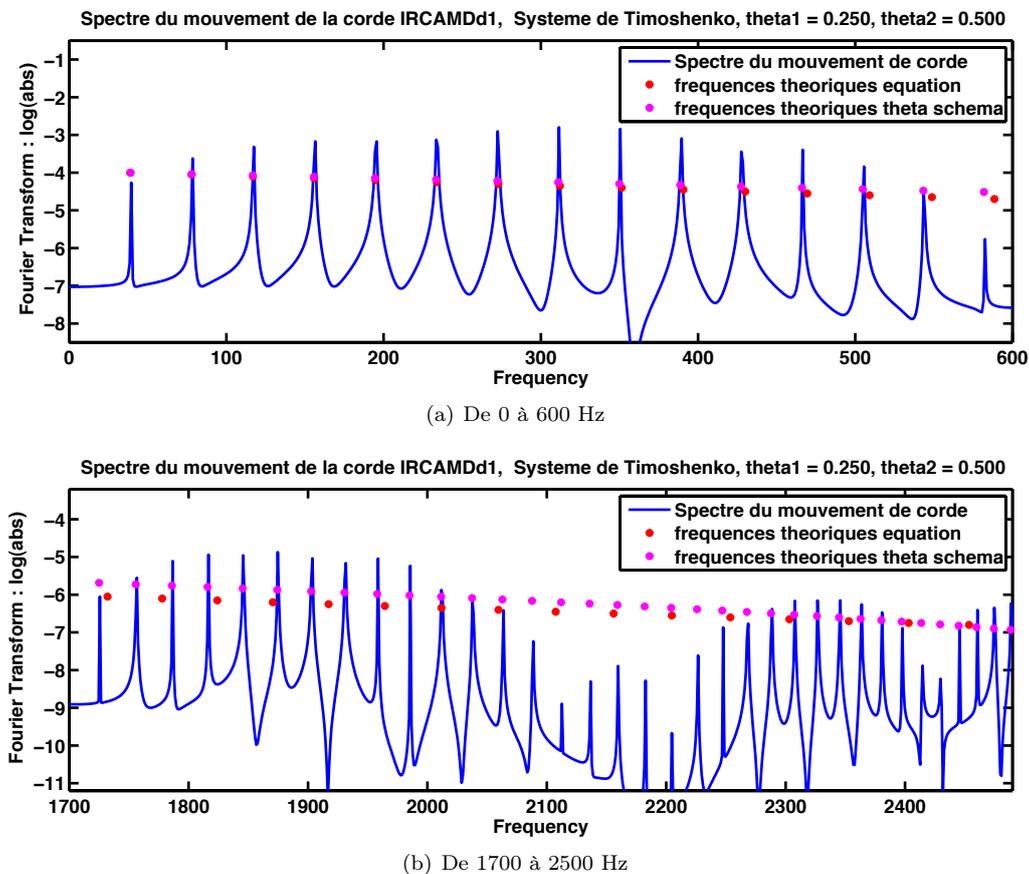


FIGURE II.5 – Spectre du mouvement d'un point de la corde D \sharp 1 régie par le système de Timoshenko discrétisée par un double θ -schéma, avec $\theta = 1/4$ et $\bar{\theta} = 1/2$.

L'intérêt de ce schéma était d'imaginer prendre un θ diminuant la dispersion numérique sur la partie de l'équation correspondant à l'onde « lente », et un θ assurant la stabilité numérique sur la partie correspondant à l'onde « rapide ». Concrètement, nous prenons dans une deuxième expérience numérique $\theta = 1/4$ et $\bar{\theta} = 1/12$, tous les autres paramètres restant les mêmes sauf, bien sûr, le pas de temps qui doit s'adapter à la nouvelle condition de stabilité. Cette condition est la même que lorsque nous utilisons un θ -schéma sur l'équation de corde vibrante, à savoir pour 300 points à l'ordre 5, $\Delta t \leq 5 \times 10^{-6}$. La figure II.6 montre le spectre de la solution numérique accompagné des fréquences théoriques du système continu en rouge, et de la discrétisation par le double θ -schéma, en magenta. La plage de fréquences indiquées (de 5500 à 6500 Hz) montre que l'on commence à ressentir la dispersion numérique très loin dans le spectre avec ces valeurs de paramètres : une déviation d'environ 0,1 % à 5000 Hz.

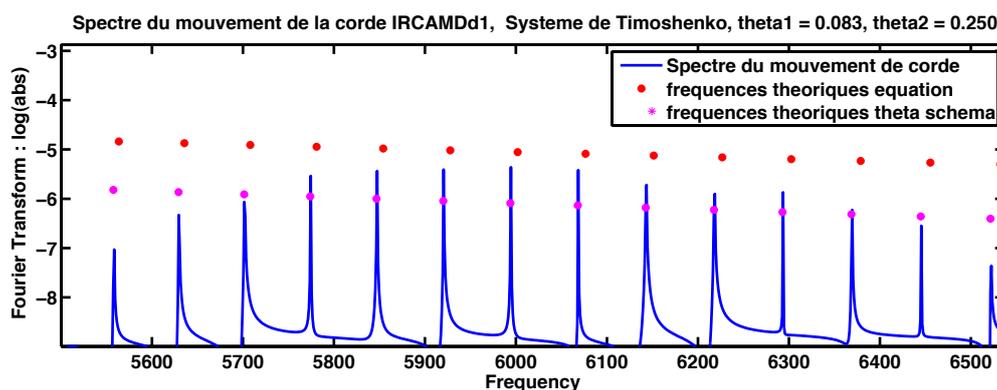


FIGURE II.6 – Spectre du mouvement d'un point de la corde D#1 régie par le système de Timoshenko discrétisée par un double θ -schéma, avec $\theta = 1/4$ et $\bar{\theta} = 1/12$.

Le schéma à deux θ que nous avons étudié dans ce paragraphe s'écrit en toute généralité

$$M_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - 2\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t^2} + R_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} + \underline{K}_h \{\mathbf{Q}\}_\theta^n + \overline{K}_h \{\mathbf{Q}\}_{\bar{\theta}}^n = \mathbf{S}_h^n \quad (\text{II.1.95})$$

On peut montrer qu'il possède une énergie naturelle

$$\mathcal{E}_{\theta, \bar{\theta}}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \right\|_{\widetilde{M}_{h, \theta, \bar{\theta}}}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} + \mathbf{Q}^n}{2} \right\|_{\underline{K}_h + \overline{K}_h}^2 \quad (\text{II.1.96})$$

avec

$$\widetilde{M}_{h, \theta, \bar{\theta}} = M_h + \left(\theta - \frac{1}{4}\right) \Delta t^2 \underline{K}_h + \left(\bar{\theta} - \frac{1}{4}\right) \Delta t^2 \overline{K}_h \quad (\text{II.1.97})$$

qui est dissipée si la matrice R_h est non nulle :

$$\frac{\mathcal{E}_{\theta, \bar{\theta}}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{\theta, \bar{\theta}}^{n-1/2}}{\Delta t} = \mathbf{S}_h^n \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} - R_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (\text{II.1.98})$$

La stabilité de ce schéma est acquise si la matrice $\widetilde{M}_{h, \theta, \bar{\theta}}$ est semi définie positive.

Dans le cas particulier du système de Timoshenko, on peut étudier la dispersion numérique induite par l'utilisation d'un tel schéma en temps pour lequel on choisit un θ différent pour les deux ondes du système, et donner une formule exacte qui se développe, pour les premières fréquences discrètes de chaque branche (onde de flexion et onde de cisaillement) :

$$\begin{cases} f_{h,n}^- = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}} + G^-(\Delta t) n^3 + \mathcal{O}(n^5), \end{cases} \quad (\text{II.1.99a})$$

$$\begin{cases} f_{h,n}^+ = \frac{1}{\pi \Delta t} A \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta t^2 A G \kappa}{\rho I + \Delta t^2 \theta A G \kappa}}\right) + G^+(\Delta t) n^2 + \mathcal{O}(n^3) \end{cases} \quad (\text{II.1.99b})$$

$$\text{où } \begin{cases} G^-(\Delta t) = \frac{\pi^2}{4L^3} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A} \frac{EI}{T_0}} \left[1 - \frac{T_0}{EA}\right] - \Delta t^2 \frac{\pi^2}{4L^3} \left(\bar{\theta} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{T_0}{\rho A}\right)^{3/2} \end{cases} \quad (\text{II.1.100a})$$

$$\begin{cases} G^+(\Delta t) = \frac{\pi \rho I^2 (E + G \kappa)}{(\rho I + \Delta t^2 \theta A G \kappa) \sqrt{A G \kappa} L^2 \sqrt{4 \rho I + (4\theta - 1) \Delta t^2 A G \kappa}} \end{cases} \quad (\text{II.1.100b})$$

Des expériences numériques montrent que la formule théorique représente très bien le comportement de la solution numérique.

II.1.4 Des nouveaux schémas préservant une énergie pour un système d'équations d'ondes non linéaires

Jusqu'à présent, nous avons considéré la partie linéaire de l'équation, en supposant que \mathbf{U} était nul. Nous avons déployé des schémas à trois points du type

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}^{n+1}, \mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1}) = 0 \quad (\text{II.1.101})$$

tels que

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}^{n+1}, \mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1}) \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\mathcal{E}^{n+1/2} - \mathcal{E}^{n-1/2}}{\Delta t} - \mathcal{S}(\mathbf{Q}^{n+1}, \mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1}) - \mathcal{D}(\mathbf{Q}^{n+1}, \mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1})$$

où \mathcal{S} provient de la présence du terme source et \mathcal{D} est un terme de dissipation négatif. Nous souhaitons à présent construire des schémas pour l'équation comportant une composante non linéaire, qui élargissent cette propriété de conservation d'énergie. Pour cela, utilisons la décomposition de la matrice A en la somme de deux matrices $A_{stab} + A_{coupl}$ telles que les hypothèses (H5), (H6) et (H7) sont vérifiées, et posons la fonctionnelle :

$$H(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} A_{stab} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{U}(\mathbf{p}), \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^N \quad (\text{II.1.102})$$

D'après l'hypothèse (H7), cette fonctionnelle majore une parabole :

$$\exists K > 0, \quad H(\mathbf{p}) \geq K |\mathbf{p}|^2, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^N \quad (\text{II.1.103})$$

Nous avons choisi d'étudier tout d'abord de façon séparée la partie non linéaire de l'équation (II.1.3), c'est à dire de s'intéresser à la discrétisation en temps du système semi discret suivant :

Trouver $\mathbf{q}_h \in \mathcal{Q}_h$ tel que, pour tout \mathbf{q}_h^* dans l'espace éléments finis \mathcal{Q}_h ,

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\oint_0^L \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h^* \right] + \oint_0^L \nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h) \cdot \partial_x \mathbf{q}_h^* = 0, \quad (\text{II.1.104})$$

par une méthode aux différences finies à trois pas de temps, dont on puisse prouver la stabilité numérique grâce à la conservation d'une énergie.

La recherche de schémas conservatifs aux différences finies en temps pour les équations et les systèmes non linéaires n'est pas un sujet nouveau, et a déjà inspiré beaucoup de littérature. Le cas des équations scalaires est beaucoup traité, d'une part dans le contexte des équations différentielles ordinaires scalaires [Greenspan, 1984, Mickens, 2001, Mickens, 2005], mais aussi dans le contexte de certaines équations aux dérivées partielles scalaires, en particulier les équations d'onde semi linéaires [Strauss et Vazquez, 1978, Li et Vu-Quoc, 1995, Furihata, 2001]. Le cas des systèmes est plutôt moins abordé, et la plupart des résultats sont restreints à des systèmes très particuliers : voir par exemple [Gonzalez et Simo, 1996] qui traite du mouvement d'une particule dans un champ, ou [Chin et Quint, 1989] pour un problème à trois corps dans le contexte de systèmes d'EDO, et [Hughes et al., 1978, Gonzalez, 2000] pour l'élasticité non linéaire ou [Bilbao, 2005] pour les cordes de piano non linéaires dans le contexte de systèmes d'EDP. Il est intéressant de noter que mis à part les quelques tentatives originales [Hughes et al., 1978, Chin et Quint, 1989], on retrouve dans tous les papiers le traitement d'un terme continu du type $G'(u)$ comme un gradient directionnel basé sur les pas de temps successifs :

$$\frac{G(u_h^{n+1}) - G(u_h^n)}{u_h^{n+1} - u_h^n} \quad (\text{II.1.105})$$

Dans les cas où la non linéarité est considérée polynomiale, l'expression se simplifie et il est possible d'exploiter sa forme particulière pour écrire des schémas plus efficaces comme dans [Mickens, 2001, Bilbao, 2005].

La méthode des différences finies en temps n'est bien sûr pas l'unique choix possible, on réfère par exemple à [Betsch et Steinmann, 2000, Betsch et Steinmann, 2001, Gross et al., 2005] qui s'intéressent aux méthodes d'éléments finis en temps conservatives pour le problème à N corps, l'élastodynamique et leur extension à des problèmes plus généraux et aux ordres supérieurs. Ces méthodes très intéressantes s'appuient sur la recherche d'une bonne règle de quadrature, et peuvent dégénérer dans certains cas à des méthodes aux différences finies.

La problématique des schémas conservatifs peut être mise en parallèle de la problématique des schémas symplectiques (voir [Sanz-Serna, 1991] pour une introduction très pédagogique sur le sujet) qui s'attache à discrétiser des systèmes sous forme hamiltonienne tout en conservant certains invariants de nature géométrique. Malheureusement, il est démontré dans [Zhong et Marsden, 1988] qu'il est impossible pour un schéma symplectique à pas de temps constants de conserver le hamiltonien du système, soit autrement dit, l'énergie².

Face à cette situation manichéenne, il est naturel de se demander, au moment de construire un schéma de discrétisation en temps pour un système hamiltonien, laquelle de ces deux propriétés on désire conserver au détriment de l'autre. La réponse à cette question dépend fortement du problème considéré, et de ce que l'on cherche à représenter avec la simulation numérique. Il semble que les schémas symplectiques soient bien adaptés à des problèmes non amortis, sous forme hamiltonienne, et en temps très long, typiquement les mouvements des planètes pendant des milliards d'années. [Gonzalez et Simo, 1996, Gonzalez, 2000, de Frutos et Sanz-Serna, 1997] ont comparé des schémas symplectiques avec des schémas conservatifs pour des problèmes en temps moins longs, et qualifient les derniers de « plus précis ». Or, dans cette étude, nous nous intéressons au transitoire, c'est à dire à reproduire précisément les formes d'ondes au

2. La déviation est cependant petite, comme le montrent [Hairer, 1994, Hairer et Lubich, 1997, Reich, 1999] par des analyses a posteriori en temps long.

cours du temps, y compris dans les premières millisecondes. De plus, la dissipation joue un rôle essentiel dans l'acoustique musicale et il sera crucial de bien la représenter. Enfin, nous souhaitons être capables de garantir la stabilité numérique des problèmes pris un par un, mais aussi du problème couplé. Pour cela, les méthodes basées sur la conservation d'une énergie ont montré à plusieurs reprises leur robustesse.

Notre objectif, dans ce contexte, est d'écrire un schéma aux différences finies en temps, conservatif, généralisant les θ -schémas à des systèmes non linéaires sous la forme (II.1.104). Les schémas que nous proposerons ont une grande similarité avec les « discrete gradient methods » de [Quispel et Turner, 1996], travaux dont nous n'avons pas connaissance au moment de développer nos schémas.

Notre démarche sera constructive, et basée sur la recherche d'un gradient approché qui sera destiné à remplacer le gradient exact par une approximation à trois pas de temps dans (II.1.104). Nous commencerons dans II.1.4.a par proposer une définition d'un gradient approché conservatif ainsi que quelques propriétés désirables de ce gradient. Le gradient approché le plus naturel étant le gradient exact, nous montrerons dans II.1.4.b que le schéma qui en découle ne peut être conservatif que si le système d'origine est linéaire. Le cas scalaire abordé en II.1.4.c rend la propriété de conservativité triviale, et incite à considérer comme gradient approché une différence finie de l'énergie potentielle. Nous essaierons d'étendre le concept de gradient approché par différence finie directionnelle aux systèmes de taille supérieure, et nous verrons en II.1.4.d que les schémas obtenus en souhaitant conserver un caractère partiellement implicite ne peuvent être conservatifs que pour des systèmes très particuliers, typiquement couplant les inconnues uniquement deux par deux. C'est pourquoi nous proposerons des schémas complètement conservatifs en II.1.4.e, pour lesquels nous présenterons des variantes permettant d'atteindre le second ordre de précision en temps.

II.1.4.a Gradient approché conservatif

Pour cela, nous nous proposons de construire un gradient approché dépendant de trois pas de temps :

$$\nabla H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \quad (\text{II.1.106})$$

$$(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) \mapsto \nabla H(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) \quad (\text{II.1.107})$$

où $\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}$ signifient « suivant », « courant » et « précédent » et sont remplacés par $\partial_x \mathbf{q}^{n+1}$, $\partial_x \mathbf{q}^n$ et $\partial_x \mathbf{q}^{n-1}$ pour l'écriture du schéma totalement discrétisé :

Trouver $\mathbf{q}_h^{n+1} \in \mathcal{Q}_h$ tel que, pour tout \mathbf{q}_h^* dans l'espace éléments finis \mathcal{Q}_h ,

$$\oint_0^L \frac{\mathbf{q}_h^{n+1} - 2\mathbf{q}_h^n + \mathbf{q}_h^{n-1}}{\Delta t^2} \cdot \mathbf{q}_h^* + \oint_0^L \nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h^{n+1}, \partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^{n-1}) \cdot \partial_x \mathbf{q}_h^* = 0. \quad (\mathcal{S}_{grad-appro})$$

THÉORÈME II.1.10 (Propriétés du schéma ($\mathcal{S}_{grad-appro}$))

Le schéma ($\mathcal{S}_{grad-appro}$) est

- **consistant** si $\nabla H(\mathbf{c}, \mathbf{c}, \mathbf{c}) = \nabla H(\mathbf{c})$, $\forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$, ($\mathcal{P}_{consist}$)
- **consistant au second ordre** si de plus $\nabla H(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) = \nabla H(\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{s})$, ($\mathcal{P}_{2dordre}$)
- **explicite** si $\nabla H(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p})$ ne dépend pas de \mathbf{s} . (\mathcal{P}_{expl})

DÉMONSTRATION. Montrons les deux premières propriétés, la dernière étant évidente. Soit $\mathbf{e}(\mathbf{q}_h^*)$ l'erreur de troncature pour le schéma ($\mathcal{S}_{grad-appro}$) évalué en $\mathbf{q}_h^n = \mathbf{q}_h(t^n)$, où \mathbf{q}_h est solution du problème semi discret (II.1.104) :

$$\mathbf{e}(\mathbf{q}_h^*) = \oint_0^L \frac{\mathbf{q}_h^{n+1} - 2\mathbf{q}_h^n + \mathbf{q}_h^{n-1}}{\Delta t^2} \cdot \mathbf{q}_h^* + \oint_0^L \nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h^{n+1}, \partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^{n-1}) \cdot \partial_x \mathbf{q}_h^* \quad (\text{II.1.108})$$

On effectue un développement de Taylor sur le premier terme pour écrire :

$$\frac{\mathbf{q}_h^{n+1} - 2\mathbf{q}_h^n + \mathbf{q}_h^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{d^2 \mathbf{q}_h}{dt^2}(t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (\text{II.1.109})$$

et sur le second terme pour écrire (D_j dénotant la dérivée par rapport à la j ème variable) :

$$\begin{aligned} \nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h^{n+1}, \partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^{n-1}) &= \nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^n) + D_1 \nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h^{n+1}, \partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^{n-1}) \cdot \partial_x [\mathbf{q}_h^{n+1} - \mathbf{q}_h^n] \\ &\quad + D_3 \nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h^{n+1}, \partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^{n-1}) \cdot \partial_x [\mathbf{q}_h^{n-1} - \mathbf{q}_h^n] + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned}$$

Si la propriété ($\mathcal{P}_{consist}$) est respectée, on a la consistance à l'ordre un. Si de plus, on a ($\mathcal{P}_{2dordre}$), on peut la différencier par rapport à \mathbf{s} pour obtenir :

$$D_1 \nabla H(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) = D_3 \nabla H(\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{s}), \quad \forall (\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N$$

Alors la relation précédente s'écrit

$$\nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h^{n+1}, \partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^{n-1}) = \nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + D_1 \nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h^{n+1}, \partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^{n-1}) \cdot \partial_x [\mathbf{q}_h^{n+1} - 2\mathbf{q}_h^n + \mathbf{q}_h^{n-1}]$$

Or, $\mathbf{q}_h^{n+1} - 2\mathbf{q}_h^n + \mathbf{q}_h^{n-1} = \mathcal{O}(\Delta t^2)$, d'où en remplaçant dans (II.1.108)

$$\mathbf{e}(\mathbf{q}_h^*) = \oint_0^L \left[\frac{d^2 \mathbf{q}_h}{dt^2}(t^n) + \nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \right] \cdot \mathbf{q}_h^* \quad (\text{II.1.110})$$

On utilise enfin le fait que \mathbf{q}_h est solution de l'équation semi discrète pour conclure :

$$\mathbf{e}(\mathbf{q}_h^*) = \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (\text{II.1.111})$$

□

REMARQUE II.1.15 (*Caractère explicite des schémas satisfaisant (\mathcal{P}_{expl})*)

On dira qu'un schéma est explicite même si il requiert l'inversion de la matrice de masse, étant donné qu'un choix judicieux de formule de quadrature permet de la rendre diagonale, donc triviale à inverser.

Introduisons à présent la définition naturelle selon laquelle le gradient approché conduit à un schéma conservatif.

DÉFINITION II.1.1 (*Gradient approché conservatif*)

Le gradient approché ∇H est dit "conservatif" si il existe une fonction scalaire

$$\begin{aligned} \mathbb{H} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{s}, \mathbf{c}) &\mapsto \mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) \end{aligned}$$

telle que $\forall (\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N$,

$$\nabla H(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) \cdot \frac{\mathbf{s} - \mathbf{p}}{2} = \mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) - \mathbb{H}(\mathbf{c}, \mathbf{p}) \quad (\mathcal{P}_{conserv})$$

REMARQUE II.1.16 (*Propriétés de \mathbb{H}*)

On note que :

- la relation ($\mathcal{P}_{conserv}$) implique la symétrie de la fonction \mathbb{H} :

$$\forall (\mathbf{s}, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) = \mathbb{H}(\mathbf{c}, \mathbf{s}) \quad (\text{II.1.112})$$

- la fonction \mathbb{H} est consistante avec H si :

$$\forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbb{H}(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = H(\mathbf{c}) \quad (\text{II.1.113})$$

- la relation ($\mathcal{P}_{conserv}$) appliquée à $\mathbf{s} = \partial_x \mathbf{q}_h^{n+1}$, $\mathbf{c} = \partial_x \mathbf{q}_h^n$, $\mathbf{p} = \partial_x \mathbf{q}_h^{n-1}$ est un équivalent discret de la dérivation des fonctions composées suivante :

$$\begin{aligned} \nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h^{n+1}, \partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^{n-1}) \cdot \frac{\partial_x \mathbf{q}_h^{n+1} - \partial_x \mathbf{q}_h^{n-1}}{2\Delta t} &= \frac{\mathbb{H}(\partial_x \mathbf{q}_h^{n+1}, \partial_x \mathbf{q}_h^n) - \mathbb{H}(\partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^{n-1})}{\Delta t} \\ &\quad \Updownarrow \\ \nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h) \cdot \partial_{xt}^2 \mathbf{q}_h &= \frac{\partial}{\partial t} H(\partial_x \mathbf{q}_h) \end{aligned}$$

THÉORÈME II.1.11 (Énergie du schéma non linéaire)

Si le gradient approché ∇H du schéma ($\mathcal{S}_{grad-appro}$) est conservatif (au sens de la définition II.1.1) pour une fonction \mathbb{H} , toute solution numérique au schéma vérifie

$$\mathcal{E}_{NL}^{n+1/2} = \mathcal{E}_{NL}^{n-1/2} \quad (\text{II.1.114})$$

où

$$\mathcal{E}_{NL}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \int_0^L \left| \frac{\mathbf{q}_h^{n+1} - \mathbf{q}_h^n}{\Delta t} \right|^2 + \int_0^L \mathbb{H}(\partial_x \mathbf{q}_h^{n+1}, \partial_x \mathbf{q}_h^n) \quad (\text{II.1.115})$$

DÉMONSTRATION. Prenons comme fonction test dans ($\mathcal{S}_{grad-appro}$) l'approximation de la dérivée en temps de \mathbf{q}_h centrée en t^n :

$$\mathbf{q}_h^* = \frac{\mathbf{q}_h^{n+1} - \mathbf{q}_h^{n-1}}{2\Delta t} \quad (\text{II.1.116})$$

et intégrons sur le domaine. Des manipulations standards et l'application de la troisième propriété de la remarque II.1.16 conduit au résultat. □

REMARQUE II.1.17 (Énergie potentielle discrète)

Vue l'expression (II.1.115), on appelle la fonction \mathbb{H} l'énergie potentielle discrète si elle est consistante avec l'énergie potentielle continue H .

THÉORÈME II.1.12 (Stabilité du schéma non linéaire conservatif)

Si l'énergie potentielle discrète \mathbb{H} est positive :

$$\forall (\mathbf{s}, \mathbf{c}), \quad \mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) \geq 0 \quad (\text{II.1.117})$$

le schéma ($\mathcal{S}_{grad-appro}$) est inconditionnellement stable. En effet, toute solution numérique $\{\mathbf{q}_h^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

$$\|\mathbf{q}_h^n\|^2 \leq t^n \sqrt{2\mathcal{E}^{1/2}} \quad (\text{II.1.118})$$

DÉMONSTRATION. La démonstration suit les étapes de la démonstration du théorème II.1.5, mis à part qu'ici, la matrice de masse modifiée est en fait directement la matrice de masse et est donc définie positive. □

REMARQUE II.1.18

Ce résultat n'est pas optimal, en effet on peut avoir stabilité sous des hypothèses plus faibles, avec par exemple une condition de stabilité sur le pas de temps. Il suffit de considérer le cas du θ -schéma pour s'en convaincre.

REMARQUE II.1.19 (Système linéaire et θ -schéma)

Dans le cas linéaire, $H(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} A_{stab} \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$, le θ -schéma s'écrit sous la forme ($\mathcal{S}_{grad-appro}$) en posant :

$$\nabla H(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) = A_{stab} [\theta \mathbf{s} + (1 - 2\theta) \mathbf{c} + \theta \mathbf{p}], \quad (\text{II.1.119})$$

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} A_{stab} \frac{\mathbf{s} + \mathbf{c}}{2} \cdot \frac{\mathbf{s} + \mathbf{c}}{2} + \frac{1}{2} (\theta - \frac{1}{4}) A_{stab} (\mathbf{s} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{c}) \quad (\text{II.1.120})$$

et l'on retrouve que le schéma est inconditionnellement stable pour $\theta \geq 1/4$.

II.1.4.b Recherche de schémas conservatifs explicites

Lorsque l'on considère le schéma ($\mathcal{S}_{grad-appro}$), la résolution d'un système non linéaire s'impose, à moins de pouvoir construire un gradient approché explicite. C'est à cette tâche que s'attelle ce paragraphe, malheureusement sans succès. Tout d'abord, considérons la généralisation la plus simple du schéma saute mouton :

THÉORÈME II.1.13 (*Schéma généralisant le schéma saute mouton*)

Le schéma

$$\oint_0^L \frac{\mathbf{q}_h^{n+1} - 2\mathbf{q}_h^n + \mathbf{q}_h^{n-1}}{\Delta t^2} \cdot \mathbf{q}_h^* + \oint_0^L \nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h^n) \cdot \partial_x \mathbf{q}_h^* = 0 \quad (\mathcal{S}_{saute-mouton})$$

est conservatif au sens de la définition II.1.1 si et seulement si le système d'origine est linéaire.

DÉMONSTRATION. Supposons l'existence d'une fonction \mathbb{H} telle que, si l'on pose $F(\mathbf{c}) := \nabla H(\mathbf{c})$,

$$\forall (\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) - \mathbb{H}(\mathbf{c}, \mathbf{p}) = F(\mathbf{c}) \cdot \frac{\mathbf{s} - \mathbf{p}}{2}, \quad (\text{II.1.121})$$

Dérivons cette expression par rapport à \mathbf{s} :

$$D_1 \mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} F(\mathbf{c}), \quad \forall (\mathbf{s}, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^N \quad (\text{II.1.122})$$

Mais aussi par rapport à \mathbf{c} :

$$D_2 \mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) - D_1 \mathbb{H}(\mathbf{c}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} DF(\mathbf{c})^* \cdot \frac{\mathbf{s} - \mathbf{p}}{2} \quad (\text{II.1.123})$$

où $DF(\mathbf{c})$ représente la différentielle de $F(\mathbf{c})$ et $DF(\mathbf{c})^*$ son adjoint par rapport au produit scalaire usuel de \mathbb{R}^N . On injecte alors la première expression dans la seconde, en décalant les arguments comme il se doit :

$$D_2 \mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} F(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} DF(\mathbf{c})^* \cdot \frac{\mathbf{s} - \mathbf{p}}{2}, \quad \forall (\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N \quad (\text{II.1.124})$$

que l'on dérive par rapport à \mathbf{p} :

$$0 = \frac{1}{2} DF(\mathbf{p})^* - \frac{1}{2} DF(\mathbf{c})^*, \quad \forall (\mathbf{c}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N \quad (\text{II.1.125})$$

Cette identité montre que DF ne dépend pas de son argument, et donc que F est linéaire. Comme $F = \nabla H$, ceci termine la preuve. □

THÉORÈME II.1.14 (*Schéma explicite*)

Tout schéma construit à partir d'un gradient approché explicite, c'est à dire de la forme

$$\nabla H(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) = \nabla H(\mathbf{c}, \mathbf{p}) \quad (\text{II.1.126})$$

tel que ∇H soit consistant avec ∇H , est conservatif au sens de la définition II.1.1 si et seulement si le système d'origine est linéaire. On a alors, $\nabla H(\mathbf{c}, \mathbf{p}) = \nabla H(\mathbf{c})$.

DÉMONSTRATION. Supposons l'existence d'une fonction \mathbb{H} telle que, si l'on pose $F(\mathbf{c}, \mathbf{p}) := \nabla H(\mathbf{c}, \mathbf{p})$,

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) - \mathbb{H}(\mathbf{c}, \mathbf{p}) = F(\mathbf{c}, \mathbf{p}) \cdot \frac{\mathbf{s} - \mathbf{p}}{2} \quad (\text{II.1.127})$$

Dérivons cette expression par rapport à \mathbf{s} puis par rapport à \mathbf{p} :

$$0 = \frac{1}{2} D_2 F(\mathbf{c}, \mathbf{p}) \quad (\text{II.1.128})$$

où $D_2 F(\mathbf{c}, \mathbf{p})$ représente la différentielle de $\mathbf{p} \mapsto F(\mathbf{c}, \mathbf{p})$. Cette identité indique que $F(\mathbf{c}, \mathbf{p})$ ne dépend pas de son second argument, et que donc on a $F(\mathbf{c}, \mathbf{p}) \equiv F(\mathbf{c})$. Le fait que ∇H soit consistant implique que $F(\mathbf{c}) = \nabla H(\mathbf{c})$ et l'on peut alors appliquer le théorème II.1.13 pour conclure que nécessairement, l'équation d'origine est linéaire. □

II.1.4.c Recherche de schémas conservatifs pour une équation scalaire

Lorsque l'équation est scalaire, $N = 1$, l'inconnue \mathbf{q}_h^n n'a plus qu'une composante q_1^n et les vecteurs $(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p})$ de \mathbb{R}^N sont simplement des scalaires que l'on notera symboliquement (s_1, c_1, p_1) . De même, le gradient approché est à valeurs dans \mathbb{R} , ce qui fait dégénérer la relation de conservativité ($\mathcal{P}_{conserv}$) en :

$$\nabla H(s_1, c_1, p_1) \times \frac{s_1 - p_1}{2} = \mathbb{H}(s_1, c_1) - \mathbb{H}(c_1, p_1) \quad (\text{II.1.129})$$

On voit que pour toute fonction \mathbb{H} positive, symétrique et consistante avec H , la relation (II.1.129) définit de façon unique un gradient approché associé à cette fonction. Ce gradient approché conduit à un schéma consistant et conservant une énergie discrète. Il existe une infinité de fonctions \mathbb{H} positives, symétriques et consistantes avec H , les choix les plus naturels pour \mathbb{H} sont certainement les deux suivants :

$$\mathbb{H}_{ari}(s_1, c_1) = \frac{H(s_1) + H(c_1)}{2} \quad (\text{II.1.130})$$

$$\mathbb{H}_{geo}(s_1, c_1) = H\left(\frac{s_1 + c_1}{2}\right) \quad (\text{II.1.131})$$

qui conduisent respectivement aux schémas :

$$\forall q_1^* \in \mathcal{Q}_h, \quad \oint_0^L \frac{q_1^{n+1} - 2q_1^n + q_1^{n-1}}{\Delta t^2} q_1^* + \oint_0^L \frac{H(\partial_x q_1^{n+1}) - H(\partial_x q_1^{n-1})}{\partial_x q_1^{n+1} - \partial_x q_1^{n-1}} \partial_x q_1^* = 0 \quad (\mathcal{S}_{1/2})$$

$$\forall q_1^* \in \mathcal{Q}_h, \quad \oint_0^L \frac{q_1^{n+1} - 2q_1^n + q_1^{n-1}}{\Delta t^2} q_1^* + \oint_0^L \frac{H(\partial_x q_1^{n+1/2}) - H(\partial_x q_1^{n-1/2})}{\partial_x q_1^{n+1/2} - \partial_x q_1^{n-1/2}} \partial_x q_1^* = 0 \quad (\mathcal{S}_{1/4})$$

$$\text{où } q_1^{n+1/2} = \frac{q_1^{n+1} + q_1^n}{2}$$

Pour donner un sens rigoureux à ces expressions qui font intervenir un dénominateur, définissons le "taux d'accroissement" de toute fonction d'une variable :

DÉFINITION II.1.2 (Taux d'accroissement d'une fonction)

Soit une fonction dérivable $\Phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On définit $\delta\Phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ comme

$$\delta\Phi(a, b) = \begin{cases} \frac{\Phi(a) - \Phi(b)}{a - b} & \text{si } a \neq b \\ \Phi'(a) & \text{si } a = b \end{cases} \quad (\text{II.1.132})$$

Les deux schémas se réécrivent alors :

$$\forall q_1^* \in \mathcal{Q}_h, \quad \oint_0^L \frac{q_1^{n+1} - 2q_1^n + q_1^{n-1}}{\Delta t^2} q_1^* + \oint_0^L \delta H(\partial_x q_1^{n+1}, \partial_x q_1^{n-1}) \partial_x q_1^* = 0 \quad (\mathcal{S}_{1/2})$$

$$\forall q_1^* \in \mathcal{Q}_h, \quad \oint_0^L \frac{q_1^{n+1} - 2q_1^n + q_1^{n-1}}{\Delta t^2} q_1^* + \oint_0^L \delta H(\partial_x q_1^{n+1/2}, \partial_x q_1^{n-1/2}) \partial_x q_1^* = 0 \quad (\mathcal{S}_{1/4})$$

et toute solution numérique à l'un ou l'autre vérifie la conservation de l'énergie (II.1.115) en prenant l'énergie potentielle correspondante.

REMARQUE II.1.20 (Schéma ($\mathcal{S}_{1/2}$) dans la littérature)

Le schéma ($\mathcal{S}_{1/2}$) (ou des formes proches) est souvent utilisé dans la littérature pour traiter des équations d'onde semi linéaires du type Klein Gordon non linéaire ([Strauss et Vazquez, 1978], [Li et Vu-Quoc, 1995], [Furihata, 2001]) ou des EDO à non linéarité polynomiale ([Greenspan, 1984], [Mickens, 2001], [Kevrekidis, 2003]) ou provenant de problèmes de mécanique ([Gonzalez et Simo, 1996]).

REMARQUE II.1.21 (Lien avec les θ -schémas)

Il est facile de vérifier que lorsque l'on applique les schémas $(\mathcal{S}_{1/2})$ et $(\mathcal{S}_{1/4})$ à une équation linéaire, ils correspondent aux θ -schémas avec respectivement $\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = \frac{1}{4}$.

II.1.4.d Recherche de schémas conservatifs partiellement implicites pour un système

Bien que le théorème II.1.14 nous empêche d'espérer construire des schémas conservatifs explicites, nous pouvons essayer de construire des schémas conservatifs qui ne soient implicites que par rapport à une variable à la fois. En effet, si l'on considère à présent un système et non plus une équation scalaire, on note $\mathbf{q}_h = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ les différentes composantes de l'inconnue et le système semi discret est constitué de N lignes qui s'écrivent, pour tout $\ell \in [1, N]$,

Trouver $q_\ell \in \mathcal{Q}_\ell$ tel que, pour tout q_ℓ^* dans l'espace éléments finis \mathcal{Q}_ℓ ,

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\int_0^L q_\ell \times q_\ell^* \right] + \int_0^L \partial_\ell H(\partial_x q_\ell, \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}) \times \partial_x q_\ell^* = 0. \quad (\text{II.1.133})$$

où $\mathcal{Q}_h = \Pi_\ell \mathcal{Q}_\ell$, $\partial_\ell H$ dénote la dérivée partielle de H par rapport à sa ℓ ème variable (c'est à dire la ℓ ème ligne du gradient), et pour n'importe quel vecteur $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$, on appelle $\mathbf{c}_{j \neq \ell} := (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{\ell-1}, \mathbf{c}_{\ell+1}, \dots, \mathbf{c}_N)$ le vecteur contenant toutes ses composantes sauf la ℓ ème³.

Si pour chaque ℓ on suppose $\mathbf{q}_{j \neq \ell}$ connu lors de la résolution de ce sous problème, alors q_ℓ résout une équation scalaire très similaire à celles du paragraphe précédent. On peut donc essayer de généraliser le schéma $(\mathcal{S}_{1/2})$ au système de la façon suivante :

$$\forall \ell \in [1, N], \quad \forall q_\ell^* \in \mathcal{Q}_\ell, \\ \int_0^L \frac{q_\ell^{n+1} - 2q_\ell^n + q_\ell^{n-1}}{\Delta t^2} q_\ell^* + \int_0^L \delta_\ell H(\partial_x q_\ell^{n+1}, \partial_x q_\ell^{n-1}; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^n) \partial_x q_\ell^* = 0 \quad (\mathcal{S}_{part-impl})$$

où l'on a introduit le taux d'accroissement directionnel qui généralise le taux d'accroissement de la définition II.1.2 aux fonctions de plusieurs variables :

DÉFINITION II.1.3 (Taux d'accroissement directionnel)

Soit une fonction $\Phi : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ dérivable selon sa ℓ ème variable. On définit $\delta_\ell \Phi : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto \mathbb{R}$ comme

$$\delta_\ell \Phi(a_\ell, b_\ell; \mathbf{c}_{j \neq \ell}) = \begin{cases} \frac{\Phi(a_\ell, \mathbf{c}_{j \neq \ell}) - \Phi(b_\ell, \mathbf{c}_{j \neq \ell})}{a_\ell - b_\ell} & \text{si } a_\ell \neq b_\ell \\ \partial_\ell \Phi(a_\ell, \mathbf{c}_{j \neq \ell}) & \text{si } a_\ell = b_\ell \end{cases} \quad (\text{II.1.134})$$

REMARQUE II.1.22 (Propriété du taux d'accroissement directionnel)

Le taux d'accroissement directionnel satisfait en particulier

$$\delta_\ell \Phi(a_\ell, b_\ell; \mathbf{c}_{j \neq \ell})(a_\ell - b_\ell) = \Phi(a_\ell, \mathbf{c}_{j \neq \ell}) - \Phi(b_\ell, \mathbf{c}_{j \neq \ell}) \quad (\text{II.1.135})$$

Ce schéma est très attractif étant donné que son caractère implicite est restreint à une seule inconnue à la fois, ce qui permettra l'utilisation d'algorithmes de résolution non linéaire monodimensionnels relativement peu coûteux. Une question reste à trancher : **est-il conservatif**? Il est clairement de la forme $(\mathcal{S}_{grad-appro})$, en posant

$$\nabla H(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) := \left(\delta_\ell H(s_\ell, p_\ell; \mathbf{c}_{j \neq \ell}) \right)_{\ell \in [1, N]} \quad (\text{II.1.136})$$

3. Nous abuserons de la notation qui consiste à permuter les arguments des fonctions du type H ou ∇H , l'indice des arguments permettant alors de s'y retrouver.

Nous nous demandons alors s'il est toujours (pour tout N) possible de trouver une fonction \mathbb{H} consistante avec H et satisfaisant la relation ($\mathcal{P}_{\text{conserv}}$), ce qui revient ici à

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) - \mathbb{H}(\mathbf{c}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [H(s_k, \mathbf{c}_{\ell \neq k}) - H(p_k, \mathbf{c}_{\ell \neq k})], \quad \forall (\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N \quad (\text{II.1.137})$$

Nous allons répondre à cette question pédagogiquement, graduellement en la taille du système considéré. Commençons par l'équation scalaire, pour laquelle nous savons déjà qu'il existe une fonction consistante \mathbb{H} qui permet de satisfaire (II.1.137). Nous allons en fait voir que c'est la seule.

Forme nécessaire pour l'équation scalaire Dans le cas scalaire, c'est à dire $N = 1$, le problème (II.1.137) devient : Trouver une fonction $\mathbb{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ consistante avec H telle que :

$$\mathbb{H}(s_1, c_1) - \mathbb{H}(c_1, p_1) = \frac{H(s_1) - H(p_1)}{2} \quad \forall (s_1, c_1, p_1) \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{II.1.138})$$

THÉORÈME II.1.15 (Schéma partiellement implicite : forme nécessaire de \mathbb{H} pour $N = 1$)

Le gradient approché (II.1.136) est conservatif au sens de la définition II.1.1, et l'énergie potentielle discrète associée s'écrit nécessairement

$$\mathbb{H}(s_1, c_1) = \frac{1}{2} [H(s_1) + H(c_1)] \quad (\text{II.1.139})$$

DÉMONSTRATION. Supposons l'existence d'une telle fonction. Nous pouvons alors dériver l'expression (II.1.138) par rapport à s_1 :

$$\partial_1 \mathbb{H}(s_1, c_1) = \frac{1}{2} H'(s_1) \Rightarrow \text{Il existe une fonction } \phi \text{ et } m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{H}(s_1, c_1) = \frac{1}{2} H(s_1) + \phi(c_1) + m$$

Sachant que si \mathbb{H} existe, elle doit être sous cette forme, nous l'injectons dans (II.1.138) :

$$\left[\frac{1}{2} H(s_1) + \phi(c_1) + m \right] - \left[\frac{1}{2} H(c_1) + \phi(p_1) + m \right] = \frac{H(s_1) - H(p_1)}{2} \quad \forall (s_1, c_1, p_1) \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{II.1.140})$$

Le second membre ne dépendant pas de c_1 , on a : $\phi(c_1) = \frac{1}{2} H(c_1)$. Alors la fonction \mathbb{H} est de la forme

$$\mathbb{H}(s_1, c_1) = \frac{1}{2} [H(s_1) + H(c_1)] + m \quad (\text{II.1.141})$$

Il est évident que (II.1.138) est bien satisfaite. La seule fonction \mathbb{H} qui soit consistante avec H correspond à $m = 0$ et donc à l'expression (II.1.130). □

Forme nécessaire pour un système à deux lignes Le problème (II.1.137) devient : Trouver une fonction $\mathbb{H} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ consistante avec H telle que, $\forall (s_1, s_2, c_1, c_2, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^6$,

$$\mathbb{H}(s_1, s_2; c_1, c_2) - \mathbb{H}(c_1, c_2; p_1, p_2) = \frac{H(s_1, c_2) - H(p_1, c_2) + H(c_1, s_2) - H(c_1, p_2)}{2} \quad (\text{II.1.142})$$

THÉORÈME II.1.16 (Schéma partiellement implicite : forme nécessaire de \mathbb{H} pour $N = 2$)

Le gradient approché (II.1.136) est conservatif au sens de la définition II.1.1, et l'énergie potentielle discrète associée s'écrit nécessairement

$$\mathbb{H}(s_1, s_2, c_1, c_2) = \frac{1}{2} [H(s_1, c_2) + H(s_2, c_1)] \quad (\text{II.1.143})$$

DÉMONSTRATION. La contrainte devant être vraie pour toutes les valeurs de ses arguments, on peut prendre en particulier $s_2 = c_2 = p_2 = \lambda$, et on obtient :

$$\mathbb{H}(s_1, \lambda; c_1, \lambda) - \mathbb{H}(c_1, \lambda; p_1, \lambda) = \frac{H(s_1, \lambda) - H(p_1, \lambda) + \cancel{H(c_1, \lambda)} - \cancel{H(c_1, \lambda)}}{2}$$

Certains de ces termes se compensent, et l'équation dégénère en un problème similaire à (II.1.138). On peut donc appliquer le résultat du paragraphe précédent pour établir qu'il existe nécessairement une fonction $m_1(\lambda)$ telle que :

$$\mathbb{H}(s_1, \lambda; c_1, \lambda) = \frac{H(s_1, \lambda) + H(c_1, \lambda)}{2} + m_1(\lambda) \quad (\text{II.1.144})$$

De la même façon, on prend en particulier $s_1 = c_1 = p_1 = \mu$ dans (II.1.142) et on obtient :

$$\mathbb{H}(\mu, s_2; \mu, c_2) - \mathbb{H}(\mu, c_2; \mu, p_2) = \frac{\overbrace{H(\mu, c_2)} - \overbrace{H(\mu, c_2)} + H(\mu, s_2) - H(\mu, p_2)}{2}$$

Le même argument mène à l'existence d'une fonction $m_2(\mu)$ telle que :

$$\mathbb{H}(\mu, s_2; \mu, c_2) = \frac{H(\mu, s_2) + H(\mu, c_2)}{2} + m_2(\mu)$$

À présent on prend $s_1 = c_1 = \mu$ dans la première conclusion, et $s_2 = c_2 = \lambda$ dans la seconde, pour trouver que $m_1(\lambda) = m_2(\mu)$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, donc $m_1(\lambda) = m_2(\mu) = m \in \mathbb{R}$.

Dérivons alors (II.1.142) selon s_2 :

$$\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial s_2}(s_1, s_2; c_1, c_2) = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial s_2}(c_1, s_2)$$

Introduisons $\lambda \in \mathbb{R}$ et intégrons l'expression précédente entre λ et s_2 :

$$\mathbb{H}(s_1, s_2; c_1, c_2) - \mathbb{H}(s_1, \lambda; c_1, c_2) = \frac{1}{2} [H(c_1, s_2) - H(c_1, \lambda)]$$

Choisissons à présent⁴ $\lambda = c_2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(s_1, s_2; c_1, c_2) &= \mathbb{H}(s_1, c_2; c_1, c_2) + \frac{1}{2} [H(c_1, s_2) - H(c_1, c_2)] \\ &= \overbrace{\frac{1}{2} [H(s_1, c_2) - H(c_1, c_2)] + m} + \frac{1}{2} [H(c_1, s_2) - H(c_1, c_2)] \end{aligned}$$

en utilisant (II.1.144). On peut alors simplifier l'expression et conclure que toute fonction \mathbb{H} satisfaisant (II.1.142) doit être sous la forme

$$\mathbb{H}(s_1, s_2; c_1, c_2) = \frac{1}{2} [H(s_1, c_2) + H(c_1, s_2)] + m \quad (\text{II.1.145})$$

La consistance avec H impose enfin que $m = 0$. Vérifions a posteriori, pour terminer, que toute fonction sous cette forme vérifie bien (II.1.142) :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(s_1, s_2; c_1, c_2) - \mathbb{H}(c_1, c_2; p_1, p_2) &= \left[\frac{H(s_1, c_2) + H(c_1, s_2)}{2} \right] - \left[\frac{H(c_1, p_2) + H(p_1, c_2)}{2} \right] \\ &= \frac{H(s_1, c_2) - H(p_1, c_2) + H(c_1, s_2) - H(c_1, p_2)}{2} \end{aligned}$$

qui est la relation attendue.

□

Condition restrictive sur le système à trois lignes Le problème (II.1.137) devient : Trouver une fonction $\mathbb{H} : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ consistante avec H telle que, $\forall (s_1, s_2, s_3, c_1, c_2, c_3, p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^9$,

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(s_1, s_2, s_3; c_1, c_2, c_3) - \mathbb{H}(c_1, c_2, c_3; p_1, p_2, p_3) &= \frac{H(s_1, c_2, c_3) - H(p_1, c_2, c_3)}{2} \\ &+ \frac{H(c_1, s_2, c_3) - H(c_1, p_2, c_3)}{2} \\ &+ \frac{H(c_1, c_2, s_3) - H(c_1, c_2, p_3)}{2} \end{aligned} \quad (\text{II.1.146})$$

THÉORÈME II.1.17 (*Schéma partiellement implicite : condition restrictive pour $N = 3$*)

Le gradient approché (II.1.136) est conservatif au sens de la définition II.1.1 si et seulement si le système original ne couple les inconnues que deux à deux, c'est dire

$\exists \{H_{1,2}, H_{1,3}, H_{2,3} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}\}$ telles que

$$H(\mathbf{c}) = H_{1,2}(c_1, c_2) + H_{1,3}(c_1, c_3) + H_{2,3}(c_2, c_3) \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{II.1.147})$$

4. Une façon astucieuse de trouver la première ligne dans avoir besoin de dériver est de considérer $\mathbb{H}(s_1, s_2; c_1, c_2) - \mathbb{H}(s_1, c_2; c_1, c_2)$ comme $[\mathbb{H}(s_1, s_2; c_1, c_2) - \mathbb{H}(c_1, c_2; s_1, c_2)] + [\mathbb{H}(c_1, c_2; s_1, c_2) - \mathbb{H}(s_1, c_2; c_1, c_2)]$ et d'utiliser (II.1.142) dans chaque crochet.

Alors, l'énergie potentielle discrète \mathbb{H} s'écrit :

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) = \frac{H_{1,2}(c_1, s_2) + H_{1,2}(s_1, c_2)}{2} + \frac{H_{1,3}(c_1, s_3) + H_{1,3}(s_1, c_3)}{2} + \frac{H_{2,3}(s_2, c_3) + H_{2,3}(c_2, s_3)}{2} \quad (\text{II.1.148})$$

DÉMONSTRATION. La contrainte devant être vraie pour toutes les valeurs de ses arguments, on peut prendre en particulier $s_3 = c_3 = p_3 = \lambda$, et on obtient

$$\mathbb{H}(s_1, s_2, \lambda; c_1, c_2, \lambda) - \mathbb{H}(c_1, c_2, \lambda; p_1, p_2, \lambda) = \frac{H(s_1, c_2, \lambda) - H(p_1, c_2, \lambda)}{2} + \frac{H(c_1, s_2, \lambda) - H(c_1, p_2, \lambda)}{2} + \frac{H(c_1, c_2, \lambda) - H(c_1, c_2, \lambda)}{2}$$

Certains de ces termes se compensent, et l'équation dégénère comme précédemment en un problème similaire à (II.1.142). On peut donc appliquer le résultat précédent pour établir qu'il existe nécessairement une fonction $m_1(\lambda)$ telle que :

$$\mathbb{H}(s_1, s_2, \lambda; c_1, c_2, \lambda) = \frac{1}{2} [H(s_1, c_2, \lambda) + H(c_1, s_2, \lambda)] + m_1(\lambda) \quad (\text{II.1.149})$$

De la même façon, on prend en particulier $s_2 = c_2 = p_2 = \mu$ et $s_1 = c_1 = p_1 = \nu$, pour obtenir l'existence de deux fonctions $m_2(\mu)$ and $m_3(\nu)$ telles que :

$$\mathbb{H}(s_1, \mu, s_3; c_1, \mu, c_3) = \frac{1}{2} [H(s_1, \mu, c_3) + H(c_1, \mu, s_3)] + m_2(\mu) \quad (\text{II.1.150})$$

et

$$\mathbb{H}(\nu, s_2, s_3; \nu, c_2, c_3) = \frac{1}{2} [H(\nu, s_2, c_3) + H(\nu, c_2, s_3)] + m_3(\nu) \quad (\text{II.1.151})$$

Si on prend à présent $s_3 = c_3 = p_3 = \lambda$, $s_2 = c_2 = p_2 = \mu$ et $s_1 = c_1 = p_1 = \nu$ dans (II.1.149), (II.1.150) et (II.1.151), on obtient que $m_1(\lambda) = m_2(\mu) = m_3(\nu)$, $\forall (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$, d'où $m_1(\lambda) = m_2(\mu) = m_3(\nu) = m \in \mathbb{R}$. Dérivons alors (II.1.146) selon s_1 :

$$\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial s_1}(s_1, s_2, s_3; c_1, c_2, c_3) = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial s_1}(s_1, c_2, c_3) \quad (\text{II.1.152})$$

Introduisons $\nu \in \mathbb{R}$ et intégrons l'expression précédente entre ν et s_1 :

$$\mathbb{H}(s_1, s_2, s_3; c_1, c_2, c_3) = \mathbb{H}(\nu, s_2, s_3; c_1, c_2, c_3) + \frac{1}{2} [H(s_1, c_2, c_3) - H(\nu, c_2, c_3)]$$

Choisissons à présent⁵ $\nu = c_1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(s_1, s_2, s_3; c_1, c_2, c_3) &= \mathbb{H}(c_1, s_2, s_3; c_1, c_2, c_3) + \frac{1}{2} [H(s_1, c_2, c_3) - H(c_1, c_2, c_3)] \\ &= \frac{1}{2} [H(c_1, s_2, c_3) + H(c_1, c_2, s_3)] + m + \frac{1}{2} [H(s_1, c_2, c_3) - H(c_1, c_2, c_3)] \end{aligned}$$

en utilisant (II.1.151). On conclut alors que toute fonction \mathbb{H} satisfaisant (II.1.146) doit être sous la forme :

$$\mathbb{H}(s_1, s_2, s_3; c_1, c_2, c_3) = \frac{1}{2} [H(c_1, s_2, c_3) + H(c_1, c_2, s_3) + H(s_1, c_2, c_3) - H(c_1, c_2, c_3)] + m \quad (\text{II.1.153})$$

La consistance avec H impose enfin que $m = 0$. Vérifions a posteriori, pour terminer, que toute fonction sous cette forme vérifie bien (II.1.146). On a, d'une part

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(s_1, s_2, s_3; c_1, c_2, c_3) - \mathbb{H}(c_1, c_2, c_3; p_1, p_2, p_3) &= \frac{H(c_1, s_2, c_3) + H(c_1, c_2, s_3)}{2} + \frac{H(s_1, c_2, c_3) - H(c_1, c_2, c_3)}{2} + \cancel{m} \\ &\quad - \left(\frac{H(p_1, c_2, p_3) + H(p_1, p_2, c_3)}{2} + \frac{H(c_1, p_2, p_3) - H(p_1, p_2, p_3)}{2} + \cancel{m} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.1.154})$$

qui doit être égal à :

$$\frac{H(s_1, c_2, c_3) - H(p_1, c_2, c_3)}{2} + \frac{H(c_1, s_2, c_3) - H(c_1, p_2, c_3)}{2} + \frac{H(c_1, c_2, s_3) - H(c_1, c_2, p_3)}{2}$$

Une condition nécessaire sur H afin qu'il existe une fonction \mathbb{H} qui satisfasse (II.1.146) est donc que :

$$\begin{aligned} -H(c_1, c_2, c_3) - H(p_1, c_2, p_3) - H(p_1, p_2, c_3) - H(c_1, p_2, p_3) + H(p_1, p_2, p_3) = \\ -H(p_1, c_2, c_3) - H(c_1, p_2, c_3) - H(c_1, c_2, p_3) \end{aligned}$$

qui se réécrit :

$$\begin{aligned} H(c_1, c_2, c_3) + H(p_1, c_2, p_3) + H(p_1, p_2, c_3) + H(c_1, p_2, p_3) = \\ H(p_1, p_2, p_3) + H(p_1, c_2, c_3) + H(c_1, p_2, c_3) + H(c_1, c_2, p_3) \end{aligned} \quad (\text{II.1.155})$$

5. Une façon astucieuse de trouver la première ligne sans avoir besoin de dériver est de considérer $\mathbb{H}(s_1, s_2, s_3; c_1, c_2, c_3) - \mathbb{H}(c_1, s_2, s_3; c_1, c_2, c_3)$ comme $[\mathbb{H}(s_1, s_2, s_3; c_1, c_2, c_3) - \mathbb{H}(c_1, c_2, c_3; c_1, s_2, s_3)] + [\mathbb{H}(c_1, c_2, c_3; c_1, s_2, s_3) - \mathbb{H}(c_1, s_2, s_3; c_1, c_2, c_3)]$ et d'utiliser (II.1.146) dans chaque crochet.

Cette condition devant être vraie pour tous $(c_1, c_2, c_3; p_1, p_2, z_3) \in \mathbb{R}^6$, elle est vraie en particulier pour $p_1 = c_1 + h_1$, $p_2 = c_2 + h_2$, $p_3 = c_3 + h_3$ avec $(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} & H(c_1, c_2, c_3) + H(c_1 + h_1, c_2, c_3 + h_3) + H(c_1 + h_1, c_2 + h_2, c_3) + H(c_1, c_2 + h_2, c_3 + h_3) = \\ & H(c_1 + h_1, c_2 + h_2, c_3 + h_3) + H(c_1 + h_1, c_2, c_3) + H(c_1, c_2 + h_2, c_3) + H(c_1, c_2, c_3 + h_3) \end{aligned}$$

On regroupe les termes de même couleur, et on divise par h_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{H(c_1, c_2, c_3) - H(c_1 + h_1, c_2, c_3)}{h_1} + \frac{H(c_1 + h_1, c_2, c_3 + h_3) - H(c_1, c_2, c_3 + h_3)}{h_1} + \\ & \frac{H(c_1 + h_1, c_2 + h_2, c_3) - H(c_1, c_2 + h_2, c_3)}{h_1} + \\ & \frac{H(c_1, c_2 + h_2, c_3 + h_3) - H(c_1 + h_1, c_2 + h_2, c_3 + h_3)}{h_1} = 0 \end{aligned}$$

Prenons alors la limite quand $h_1 \rightarrow 0$:

$$-\partial_1 H(c_1, c_2, c_3) + \partial_1 H(c_1, c_2, c_3 + h_3) + \partial_1 H(c_1, c_2 + h_2, c_3) - \partial_1 H(c_1, c_2 + h_2, c_3 + h_3) = 0$$

Divisons à présent par h_2 :

$$\frac{\partial_1 H(c_1, c_2 + h_2, c_3) - \partial_1 H(c_1, c_2, c_3)}{h_2} + \frac{\partial_1 H(c_1, c_2, c_3 + h_3) - \partial_1 H(c_1, c_2 + h_2, c_3 + h_3)}{h_2} = 0$$

et prenons la limite quand $h_2 \rightarrow 0$:

$$\partial_{2,1}^2 H(c_1, c_2, c_3) - \partial_{2,1}^2 H(c_1, c_2, c_3 + h_3) = 0$$

Enfin, divisons par h_3 :

$$\frac{\partial_{2,1}^2 H(c_1, c_2, c_3 + h_3) - \partial_{2,1}^2 H(c_1, c_2, c_3)}{h_3} = 0$$

et prenons la limite⁶ quand $h_3 \rightarrow 0$:

$$\partial_{3,2,1}^3 H(c_1, c_2, c_3) = 0 \quad (\text{II.1.156})$$

Nous pouvons désormais intégrer selon c_3 , il existe une fonction $\phi(c_1, c_2)$ telle que :

$$\partial_{2,1}^2 H(c_1, c_2, c_3) = \phi(c_1, c_2)$$

Intégrons alors selon c_2 , il existe une fonction $\psi(c_1, c_3)$ telle que :

$$\begin{aligned} \partial_1 H(c_1, c_2, c_3) &= \underbrace{\int_0^{c_2} \phi(c_1, s) ds}_{\tilde{\phi}(c_1, c_2)} + \psi(c_1, c_3) \\ &= \tilde{\phi}(c_1, c_2) + \psi(c_1, c_3) \end{aligned}$$

Enfin, intégrons selon c_1 , il existe une fonction $\xi(c_2, c_3)$ telle que :

$$H(c_1, c_2, c_3) = \int_0^{c_1} \tilde{\phi}(s, c_2) ds + \int_0^{c_1} \psi(s, c_3) ds + \xi(c_2, c_3)$$

Pour résumer, une conditions nécessaire pour que (II.1.146) puisse être satisfaite est qu'il existe trois fonctions $H_{1,2}$, $H_{1,3}$ et $H_{2,3}$ telles que :

$$H(c_1, c_2, c_3) = H_{1,2}(c_1, c_2) + H_{2,3}(c_2, c_3) + H_{1,3}(c_1, c_3) \quad (\text{II.1.157})$$

On peut alors vérifier que toute fonction de cette forme satisfait (II.1.155) :

$$\begin{aligned} & \cancel{H_{1,2}(s_1, c_2)} + \cancel{H_{1,3}(s_1, c_3)} + \cancel{H_{2,3}(c_2, c_3)} + \cancel{H_{1,2}(c_1, s_2)} + \cancel{H_{1,3}(c_1, c_3)} + \cancel{H_{2,3}(s_2, c_3)} \\ & + \cancel{H_{1,2}(c_1, c_2)} + \cancel{H_{1,3}(c_1, s_3)} + \cancel{H_{2,3}(c_2, s_3)} + \cancel{H_{1,2}(s_1, s_2)} + \cancel{H_{1,3}(s_1, s_3)} + \cancel{H_{2,3}(s_2, s_3)} \\ & = \cancel{H_{1,2}(c_1, c_2)} + \cancel{H_{1,3}(c_1, c_3)} + \cancel{H_{2,3}(c_2, c_3)} + \cancel{H_{1,2}(c_1, s_2)} + \cancel{H_{1,3}(c_1, s_3)} + \cancel{H_{2,3}(s_2, s_3)} \\ & + \cancel{H_{1,2}(s_1, c_2)} + \cancel{H_{1,3}(s_1, s_3)} + \cancel{H_{2,3}(c_2, s_3)} + \cancel{H_{1,2}(s_1, s_2)} + \cancel{H_{1,3}(s_1, c_3)} + \cancel{H_{2,3}(s_2, c_3)} \end{aligned} \quad (\text{II.1.158})$$

Maintenant, si on suppose que (II.1.157) est bien respectée, toute fonction \mathbb{H} satisfaisant (II.1.146) doit être de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(s_1, s_2, s_3; c_1, c_2, c_3) &= \frac{1}{2} \left[\cancel{H_{1,2}(c_1, s_2)} + \cancel{H_{1,3}(c_1, c_3)} + H_{2,3}(s_2, c_3) + \cancel{H_{1,2}(c_1, c_2)} \right. \\ & \quad + H_{1,3}(c_1, s_3) + H_{2,3}(c_2, s_3) + H_{1,2}(s_1, c_2) + H_{1,3}(s_1, c_3) \\ & \quad \left. + \cancel{H_{2,3}(c_2, c_3)} - \cancel{H_{1,2}(c_1, c_2)} - \cancel{H_{1,3}(c_1, c_3)} - \cancel{H_{2,3}(c_2, c_3)} \right] + c \end{aligned} \quad (\text{II.1.159})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(s_1, s_2, s_3; c_1, c_2, c_3) &= \frac{H_{1,2}(c_1, s_2) + H_{1,2}(s_1, c_2)}{2} + \frac{H_{1,3}(c_1, s_3) + H_{1,3}(s_1, c_3)}{2} \\ & \quad + \frac{H_{2,3}(s_2, c_3) + H_{2,3}(c_2, s_3)}{2} + m \end{aligned} \quad (\text{II.1.160})$$

grâce à (II.1.153) et (II.1.157). Pour finir, la consistance avec H impose que $m = 0$.

□

6. Le même résultat peut être trouvé en dérivant directement l'expression (II.1.155)

REMARQUE II.1.23

La condition (II.1.147) est une restriction forte sur le modèle. Par exemple, le modèle géométriquement exact pour la vibration non plane de la corde ne satisfait pas cette condition. Les trois inconnues sont les deux polarisations de la vibration transversale (u_1, u_2) et la vibration longitudinale v . La fonction H s'écrit pour ce modèle :

$$H(u_1, u_2, v) = EA \frac{u_1^2}{2} + EA \frac{u_2^2}{2} + EA \frac{v^2}{2} - (EA - T_0) \left[\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + (1+v)^2} - (1+v) \right]$$

Et l'on peut calculer

$$\partial_{3,2,1}^3 H(u_1, u_2, v) = -3(EA - T_0) u_1 u_2 (1+v) \left(u_1^2 + u_2^2 + (1+v)^2 \right)^{-3/2}$$

qui n'est pas nul si $(EA - T_0) \neq 0$, ce qui est contradictoire avec la condition (II.1.147).

Condition restrictive sur le système à plus de trois lignes Ce résultat négatif peut être généralisé par récurrence à tout système de plus de trois lignes comme l'énonce ce théorème.

THÉORÈME II.1.18 (Schéma partiellement implicite : condition restrictive pour $N \geq 3$)

Le gradient approché (II.1.136) est conservatif au sens de la définition II.1.1 si et seulement si le système original ne couple les inconnues que deux à deux, c'est dire

$$\exists \{H_{ij} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, i < j\} \text{ telles que } H(\mathbf{c}) = \sum_{i < j} H_{ij}(c_i, c_j) \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{II.1.161})$$

Alors, l'énergie potentielle discrète s'écrit :

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} [H_{ij}(s_i, c_j) + H_{ij}(s_j, c_i)] \quad (\text{II.1.162})$$

DÉMONSTRATION. La démonstration se fait en trois étapes.

• Étape 1 : Forme nécessaire pour \mathbb{H}

Soit la propriété suivante :

$$(\mathcal{P}_N) \left\{ \begin{array}{l} \text{Toute fonction } \mathbb{H} \text{ vérifiant (II.1.137) peut être écrite, avec } m \in \mathbb{R} : \\ \mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N H(s_k, \mathbf{c}_{\ell \neq k}) - (N-2)H(\mathbf{c}) \right] + m \end{array} \right. \quad (\mathcal{P}_N)$$

Nous allons montrer que la propriété (\mathcal{P}_N) est vraie pour tout $N \geq 3$ par **récurrence**.

Le paragraphe précédent montre que (\mathcal{P}_N) est vraie pour $N = 3$, ce qui initie la récurrence.

Supposons que la propriété (\mathcal{P}_N) est vraie pour un certain $N \geq 3$. Nous supposons à présent qu'il existe une fonction $\mathbb{H} : \mathbb{R}^{2(N+1)} \mapsto \mathbb{R}$ qui vérifie II.1.137 pour $N+1$. Cette propriété est aussi vraie en particulier pour $s_{N+1} = c_{N+1} = p_{N+1} = \lambda$:

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}_{\ell \neq N+1}, \lambda; \mathbf{c}_{\ell \neq N+1}, \lambda) - \mathbb{H}(\mathbf{c}_{\ell \neq N+1}, \lambda; \mathbf{p}_{\ell \neq N+1}, \lambda) = \sum_{k=1}^N \left[H(s_k, \mathbf{c}_{\ell \neq k}) - H(p_k, \mathbf{c}_{\ell \neq k}) \right] + \left[\cancel{H(\lambda, \mathbf{c}_{\ell \neq k})} - \cancel{H(\lambda, \mathbf{c}_{\ell \neq k})} \right]$$

Alors la propriété II.1.137 est vraie pour la fonction \mathbb{H} restreinte à N de ses arguments. On peut alors utiliser (\mathcal{P}_N) sur cette forme restreinte pour écrire que :

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}_{\ell \neq N+1}, \lambda; \mathbf{c}_{\ell \neq N+1}, \lambda) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N H(s_k, \mathbf{c}_{\ell \neq \{k, N+1\}}, \lambda) - (N-2)H(\mathbf{c}_{\ell \neq N+1}, \lambda) \right] + m_{N+1}(\lambda)$$

Le même argument permet de prendre $s_i = c_i = p_i = \lambda_i$ pour $i = 1, \dots, N$, et d'en déduire pour chaque i l'existence d'une fonction $m_i(\lambda_i)$. Prenons ensuite dans toutes les lignes $s_i = c_i = p_i = \lambda_i$, ce qui nous permet de montrer que tous les m_i sont constants, égaux à $m \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}_{\ell \neq N+1}, \lambda; \mathbf{c}_{\ell \neq N+1}, \lambda) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N H(s_k, \mathbf{c}_{\ell \neq \{k, N+1\}}, \lambda) - (N-2)H(\mathbf{c}_{\ell \neq N+1}, \lambda) \right] + m \quad (\text{II.1.163})$$

Dérivons alors (\mathcal{P}_N) selon s_{N+1} : $\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial s_{N+1}}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial s_{N+1}}(s_{N+1}, \mathbf{c}_{\ell \neq N+1})$. Intégrons cette relation entre λ et s_{N+1} : $\mathbb{H}(\mathbf{s}; \mathbf{c}) - \mathbb{H}(s_{\ell \neq N+1}, \lambda; \mathbf{c}) = \frac{1}{2} [H(s_{N+1}, \mathbf{c}_{\ell \neq N+1}) - H(\lambda, \mathbf{c}_{\ell \neq N+1})]$. Prenons $\lambda = c_{N+1}$ et utilisons (II.1.163) :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\mathbf{s}; \mathbf{c}) &= \mathbb{H}(s_{\ell \neq N+1}, c_{N+1}; \mathbf{c}) + \frac{1}{2} [H(s_{N+1}, \mathbf{c}_{\ell \neq N+1}) - H(c_{N+1}, \mathbf{c}_{\ell \neq N+1})] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N H(s_k, \mathbf{c}_{\ell \neq \{k, N+1\}}, c_{N+1}) - (N-2)H(\mathbf{c}_{\ell \neq N+1}, c_{N+1}) \right] + m + \frac{1}{2} [H(s_{N+1}, \mathbf{c}_{\ell \neq N+1}) - H(c_{N+1}, \mathbf{c}_{\ell \neq N+1})] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{N+1} H(s_k, \mathbf{c}_{\ell \neq k}) - (N-1)H(\mathbf{c}) \right] + m \end{aligned}$$

Alors on a montré la récurrence de \mathcal{P}_N au rang $N+1$. Elle est donc vraie pour tout $N \geq 3$.

◆ **Étape 2 : Condition restrictive sur H**

Si \mathbb{H} existe, le paragraphe précédent a montré qu'elle était forcément sous la forme (\mathcal{P}_N) . Nous allons voir qu'il faut que le système original, à travers H , remplisse certaines conditions afin que (II.1.137) puisse être respectée par \mathbb{H} . Écrivons (II.1.137) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N H(s_k, \mathbf{c}_{\ell \neq k}) - (N-2)H(\mathbf{c}) \right] + \gamma \mathfrak{R} - \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N H(c_k, \mathbf{p}_{\ell \neq k}) - (N-2)H(\mathbf{p}) \right] - \gamma \mathfrak{R} \\ = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N H(s_k, \mathbf{c}_{\ell \neq k}) - \sum_{k=1}^N H(p_k, \mathbf{c}_{\ell \neq k}) \right] \end{aligned}$$

Donc, nécessairement,

$$(N-2)H(\mathbf{c}) + \sum_{k=1}^N H(c_k, \mathbf{p}_{\ell \neq k}) - (N-2)H(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^N H(p_k, \mathbf{c}_{\ell \neq k})$$

Choisissons trois indices distincts k_1^* , k_2^* et k_3^* , et appelons $\{k_1^*, k_2^*, k_3^*\} = \mathcal{I}_*$. L'ensemble des autres indices est noté \mathcal{I}_*^c , de sorte que bien sur, $\mathcal{I}_* + \mathcal{I}_*^c = [1, N]$. Dans l'expression précédente, on prend $s_k = c_k = p_k = \lambda_k$ pour tous $k \in \mathcal{I}_*^c$:

$$\begin{aligned} (N-2)H(\mathbf{c}_{k \in \mathcal{I}_*}, \mathbf{c}_{l \in \mathcal{I}_*^c}) + \sum_{k \in \mathcal{I}_*} H(c_k, \mathbf{p}_{l \neq k}) + \sum_{k \in \mathcal{I}_*^c} H(c_k, \mathbf{p}_{l \neq k}) \\ - (N-2)H(\mathbf{p}_{k \in \mathcal{I}_*}, \mathbf{p}_{k \in \mathcal{I}_*^c}) = \sum_{k \in \mathcal{I}_*} H(p_k, \mathbf{c}_{l \neq k}) + \sum_{k \in \mathcal{I}_*^c} H(p_k, \mathbf{c}_{l \neq k}) \quad (\text{II.1.164}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (N-2)H(c_{k_1^*}, c_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) + H(c_{k_1^*}, p_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) \\ + H(p_{k_1^*}, c_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) + H(p_{k_1^*}, p_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) + \sum_{k \in \mathcal{I}_*^c} H(p_{k_1^*}, p_{k_2^*}, p_{k_3^*}, c_k, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}, \lambda_{l \neq k}) \\ - (N-2)H(p_{k_1^*}, p_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) = H(p_{k_1^*}, c_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \neq k}) + H(c_{k_1^*}, p_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \neq k}) \\ + H(c_{k_1^*}, c_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \neq k}) + \sum_{k \in \mathcal{I}_*^c} H(c_{k_1^*}, c_{k_2^*}, c_{k_3^*}, p_k, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}, \lambda_{l \neq k}) \end{aligned}$$

Le premier terme en rouge est multiplié par $(N-2)$, tandis que le second terme en rouge est le même terme sommé $N-3$ fois. Il n'en reste donc plus qu'un. Le même phénomène a lieu avec les termes en bleu. On obtient :

$$\begin{aligned} H(c_{k_1^*}, c_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) + H(c_{k_1^*}, p_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) \\ + H(p_{k_1^*}, c_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) + H(p_{k_1^*}, p_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) - H(p_{k_1^*}, p_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) \\ = H(p_{k_1^*}, c_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) + H(c_{k_1^*}, p_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) + H(c_{k_1^*}, c_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) \end{aligned}$$

Prenons à présent $p_k = c_k + h_k$ pour tous $k \in \mathcal{I}_*$, regroupons les termes semblables et divisons par $h_{k_1^*}$:

$$\begin{aligned} - \frac{H(p_{k_1^*}, c_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) - H(c_{k_1^*}, c_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c})}{h_{k_1^*}} - \frac{H(p_{k_1^*}, p_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) - H(c_{k_1^*}, p_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c})}{h_{k_1^*}} \\ + \frac{H(p_{k_1^*}, c_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) - H(c_{k_1^*}, c_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c})}{h_{k_1^*}} + \frac{H(p_{k_1^*}, p_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) - H(c_{k_1^*}, p_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c})}{h_{k_1^*}} = 0 \end{aligned}$$

Passons à la limite quand $h_{k_1^*} \rightarrow 0$, pour obtenir :

$$-\partial_{k_1^*} H(c_{k_1^*}, c_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) - \partial_{k_1^*} H(c_{k_1^*}, p_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) + \partial_{k_1^*} H(c_{k_1^*}, c_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) + \partial_{k_1^*} H(c_{k_1^*}, p_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) = 0$$

Divisons par $h_{k_2^*}$ et regroupons les termes semblables :

$$\frac{\partial_{k_1^*} H(c_{k_1^*}, p_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) - \partial_{k_1^*} H(c_{k_1^*}, c_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c})}{h_{k_2^*}} - \frac{\partial_{k_1^*} H(c_{k_1^*}, p_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c}) - \partial_{k_1^*} H(c_{k_1^*}, c_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \lambda_{l \in \mathcal{I}_*^c})}{h_{k_2^*}} = 0$$

Passons à la limite quand $h_{k_2^*} \rightarrow 0$, pour obtenir :

$$\partial_{k_2^*, k_1^*}^2 H(c_{k_1^*}, c_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \boldsymbol{\lambda}_{l \in \mathcal{I}_\varepsilon^*}) - \partial_{k_2^*, k_1^*}^2 H(c_{k_1^*}, c_{k_2^*}, p_{k_3^*}, \boldsymbol{\lambda}_{l \in \mathcal{I}_\varepsilon^*}) = 0$$

Divisons enfin par $h_{k_3^*}$, et passons à la limite pour $h_{k_3^*} \rightarrow 0$. On obtient :

$$\partial_{k_3^*, k_2^*, k_1^*}^3 H(c_{k_1^*}, c_{k_2^*}, c_{k_3^*}, \boldsymbol{\lambda}_{l \in \mathcal{I}_\varepsilon^*}) = 0 \quad (\text{II.1.165})$$

Puisque ceci est vrai pour tout triplet d'indices k_1^*, k_2^*, k_3^* distincts, toute dérivée d'ordre trois croisée est nulle. c'est à dire que H est une somme de fonctions de deux variables :

$$H((s_k)_{1 \leq k \leq N}) = \sum_{k_1 < k_2} H_{k_1, k_2}(s_{k_1}, s_{k_2}) \quad (\text{II.1.166})$$

On peut alors simplifier l'expression de \mathbb{H} :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\mathbf{s}; \mathbf{c}) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N H(s_k, c_{l \neq k}) - (N-2)H(\mathbf{c}) \right] + m \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N \left[\sum_{\substack{k_1 < k_2 \\ k_1 = k}} H_{k_1, k_2}(s_{k_1}, c_{k_2}) + \sum_{\substack{k_1 < k_2 \\ k_2 = k}} H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, s_{k_2}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\substack{k_1 < k_2 \\ k_1 \neq k \\ k_2 \neq k}} H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, c_{k_2}) \right] - (N-2) \sum_{k_1 < k_2} H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, c_{k_2}) \right] + m \end{aligned} \quad (\text{II.1.167})$$

Introduisons la fonction $\alpha(k_1, k_2, k)$:

$$\alpha(k_1, k_2, k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k_1 = k \\ 0 & \text{si } k_2 = k \\ 1 & \text{si } k_1 \neq k \text{ et } k_2 \neq k \end{cases}$$

On arrive alors à l'expression suivante pour \mathbb{H} , où $\delta_{a,b}$ représente le symbole de Kronecker :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\mathbf{s}; \mathbf{c}) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N \left[\sum_{k_1 < k_2} \delta_{k_1, k} H_{k_1, k_2}(s_{k_1}, c_{k_2}) + \sum_{k_1 < k_2} \delta_{k_2, k} H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, s_{k_2}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^N \sum_{k_1 < k_2} \alpha(k_1, k_2, k) H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, c_{k_2}) - (N-2) \sum_{k_1 < k_2} H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, c_{k_2}) \right] + m \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k_1 < k_2} \left[H_{k_1, k_2}(s_{k_1}, c_{k_2}) \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N \delta_{k_1, k} \right)}_1 + H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, s_{k_2}) \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N \delta_{k_2, k} \right)}_1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k_1 < k_2} H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, c_{k_2}) \underbrace{\sum_{k=1}^N \alpha(k_1, k_2, k)}_{N-2} - (N-2) \sum_{k_1 < k_2} H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, c_{k_2}) \right] + m \\ &\quad \text{puisque } \alpha = 1 \text{ dès que } k \text{ est différent de } k_1 \text{ ou } k_2. \end{aligned} \quad (\text{II.1.168})$$

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}; \mathbf{c}) = \sum_{k_1 < k_2} \frac{H_{k_1, k_2}(s_{k_1}, c_{k_2}) + H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, s_{k_2})}{2} + m$$

La consistance impose $m = 0$.

• Étape 3 : Vérification de (II.1.137) a posteriori

On peut enfin vérifier que cette expression vérifie (II.1.137). Le membre de gauche est :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\mathbf{s}; \mathbf{c}) - \mathbb{H}(\mathbf{c}; \mathbf{p}) &= \sum_{k_1 < k_2} \frac{H_{k_1, k_2}(s_{k_1}, c_{k_2}) + H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, s_{k_2})}{2} \\ &\quad - \sum_{k_1 < k_2} \frac{H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, p_{k_2}) + H_{k_1, k_2}(p_{k_1}, c_{k_2})}{2} \end{aligned} \quad (\text{II.1.169})$$

Tandis que le membre de droite est :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [H(s_k, \mathbf{c}_{\ell \neq k}) - H(p_k, \mathbf{c}_{\ell \neq k})] &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left[\sum_{\substack{k_1 < k_2 \\ k_1 = k}} H_{k_1, k_2}(s_{k_1}, c_{k_2}) + \sum_{\substack{k_1 < k_2 \\ k_2 = k}} H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, s_{k_2}) + \sum_{\substack{k_1 < k_2 \\ k_1 \neq k \\ k_2 \neq k}} H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, c_{k_2}) \right] \\
&\quad - \left[\sum_{\substack{k_1 < k_2 \\ k_1 = k}} H_{k_1, k_2}(p_{k_1}, c_{k_2}) + \sum_{\substack{k_1 < k_2 \\ k_2 = k}} H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, p_{k_2}) + \sum_{\substack{k_1 < k_2 \\ k_1 \neq k \\ k_2 \neq k}} H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, c_{k_2}) \right] \\
&= \sum_{k_1 < k_2} \frac{H_{k_1, k_2}(s_{k_1}, c_{k_2}) \sum_{k=1}^N \delta_{k_1, k} + H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, s_{k_2}) \sum_{k=1}^N \delta_{k_2, k}}{2} \\
&\quad - \sum_{k_1 < k_2} \frac{H_{k_1, k_2}(p_{k_1}, c_{k_2}) \sum_{k=1}^N \delta_{k_1, k} + H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, p_{k_2}) \sum_{k=1}^N \delta_{k_2, k}}{2} \\
\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [H(s_k, \mathbf{c}_{\ell \neq k}) - H(p_k, \mathbf{c}_{\ell \neq k})] &= \sum_{k_1 < k_2} \frac{H_{k_1, k_2}(s_{k_1}, c_{k_2}) + H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, s_{k_2})}{2} - \sum_{k_1 < k_2} \frac{H_{k_1, k_2}(c_{k_1}, p_{k_2}) + H_{k_1, k_2}(p_{k_1}, c_{k_2})}{2}
\end{aligned}$$

qui coïncide bien avec (II.1.169).

□

II.1.4.e Recherche de schémas conservatifs complètement implicites pour un système

Puisqu'il est impossible (sauf pour des problèmes couplant les inconnues seulement deux à deux) de construire un schéma conservatif implicite selon une seule variable à la fois, essayons de construire un schéma sur le principe de l'**algorithme de Gauss-Seidel**. L'idée est de considérer le système de haut en bas. Pour résoudre la ℓ^e ligne du système, on ne s'autorise à utiliser l'inconnue j au temps t^{n+1} que si la ligne j a déjà été résolue (donc, est au dessus dans le système). Ceci conduit au schéma suivant :

$$\forall \ell \in [1, N], \quad \forall q_\ell^* \in \mathcal{Q}_\ell,$$

$$\oint_0^L \frac{q_\ell^{n+1} - 2q_\ell^n + q_\ell^{n-1}}{\Delta t^2} q_\ell^* + \oint_0^L \delta_\ell H(\partial_x q_\ell^{n+1}, \partial_x q_\ell^{n-1}; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^{n+\sigma_\ell(j)}) \partial_x q_\ell^* = 0 \quad (\mathcal{S}_{Gauss})$$

$$\text{où l'on définit } \sigma_\ell : [1, N] \setminus \{\ell\} \mapsto \{-1, +1\} \text{ qui vaut } \sigma_\ell(j) = \begin{cases} +1 & \text{si } j < \ell \\ -1 & \text{si } j > \ell \end{cases} \quad (\text{II.1.170})$$

REMARQUE II.1.24 (Illustration du schéma (\mathcal{S}_{Gauss}) avec $N = 2$)

Si l'on applique ce schéma à un système à deux lignes, il s'écrit :

$$\begin{cases} \oint_0^L \frac{q_1^{n+1} - 2q_1^n + q_1^{n-1}}{\Delta t^2} q_1^* + \oint_0^L \delta_1 H(\partial_x q_1^{n+1}, \partial_x q_1^{n-1}; \partial_x q_2^{n-1}) \partial_x q_1^* = 0, \quad \forall q_1^* \in \mathcal{Q}_1, \\ \oint_0^L \frac{q_2^{n+1} - 2q_2^n + q_2^{n-1}}{\Delta t^2} q_2^* + \oint_0^L \delta_2 H(\partial_x q_2^{n+1}, \partial_x q_2^{n-1}; \partial_x q_1^{n+1}) \partial_x q_2^* = 0, \quad \forall q_2^* \in \mathcal{Q}_2. \end{cases}$$

qui se réécrit moins rigoureusement (mais avec plus de clarté)

$$\begin{cases} \oint_0^L \frac{q_1^{n+1} - 2q_1^n + q_1^{n-1}}{\Delta t^2} q_1^* + \oint_0^L \frac{H(\partial_x q_1^{n+1}, \partial_x q_2^{n-1}) - H(\partial_x q_1^{n-1}, \partial_x q_2^{n-1})}{\partial_x q_1^{n+1} - \partial_x q_1^{n-1}} \partial_x q_1^* = 0, \quad \forall q_1^* \in \mathcal{Q}_1, \\ \oint_0^L \frac{q_2^{n+1} - 2q_2^n + q_2^{n-1}}{\Delta t^2} q_2^* + \oint_0^L \frac{H(\partial_x q_1^{n+1}, \partial_x q_2^{n+1}) - H(\partial_x q_1^{n+1}, \partial_x q_2^{n-1})}{\partial_x q_2^{n+1} - \partial_x q_2^{n-1}} \partial_x q_2^* = 0, \quad \forall q_2^* \in \mathcal{Q}_2. \end{cases}$$

On remarque que dans la première ligne, la seconde variable est considérée à l'instant t^{n-1} (puisqu'encore indéterminée par l'algorithme), tandis que dans la deuxième ligne, la première variable est considérée à l'instant t^{n+1} (puisque déjà calculée grâce à la première ligne).

Le schéma (\mathcal{S}_{Gauss}) est clairement de la forme ($\mathcal{S}_{grad-appro}$) en posant :

$$\nabla H(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) = \left(\delta_\ell H(s_\ell, p_\ell; \mathbf{s}_{j < \ell}, \mathbf{p}_{j > \ell}) \right)_{\ell \in [1, N]} \quad (\text{II.1.171})$$

THÉORÈME II.1.19 (Énergie du schéma (\mathcal{S}_{Gauss}))

Le schéma (\mathcal{S}_{Gauss}) est conservatif au sens de la définition II.1.1 et l'énergie potentielle discrète associée est donnée par

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} [H(\mathbf{s}) + H(\mathbf{c})] \quad (\text{II.1.172})$$

De plus, cette énergie potentielle discrète est positive, ce qui mène à la stabilité du schéma (\mathcal{S}_{Gauss}).

DÉMONSTRATION. En utilisant (II.1.171), on écrit

$$\begin{aligned} \nabla H(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) \cdot \frac{\mathbf{s} - \mathbf{p}}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^N \delta_\ell H(s_\ell, p_\ell; \mathbf{s}_{j < \ell}, \mathbf{p}_{j > \ell}) \times (s_\ell - p_\ell) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^N [H(s_1, s_2, \dots, s_\ell, p_{\ell+1}, \dots, p_N) - H(s_1, s_2, \dots, s_{\ell-1}, p_\ell, \dots, p_N)], \text{ en utilisant (II.1.135)} \end{aligned}$$

Cette somme est en fait télescopique, donc seuls les deux extrêmes ne se simplifient pas. Ceci donne :

$$\nabla H(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) \cdot \frac{\mathbf{s} - \mathbf{p}}{2} = \frac{1}{2} H(s_1, \dots, s_N) - \frac{1}{2} H(p_1, \dots, p_N) \quad (\text{II.1.173})$$

$$= \mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) - \mathbb{H}(\mathbf{c}, \mathbf{p}) \quad \text{où } \mathbb{H} \text{ est donnée par (II.1.172)} \quad (\text{II.1.174})$$

La propriété (II.1.103) permet de montrer que \mathbb{H} est positive, en tant que somme de termes positifs. On conclut en utilisant le théorème II.1.12. □

Bien que ce résultat soit très encourageant, le schéma (\mathcal{S}_{Gauss}) possède un défaut majeur : il dépend de la façon (arbitraire) dont on a ordonné les inconnues. En fait, à chaque façon de classer ces inconnues, on peut associer un schéma différent du type (\mathcal{S}_{Gauss}). Plus concrètement, soit Π_N l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, N\}$. Pour tout $\pi \in \Pi_N$, le schéma associé s'écrit

$$\forall \ell \in [1, N], \quad \forall q_\ell^* \in \mathcal{Q}_\ell, \quad \oint_0^L \frac{q_\ell^{n+1} - 2q_\ell^n + q_\ell^{n-1}}{\Delta t^2} q_\ell^* + \oint_0^L \delta_\ell H(\partial_x q_\ell^{n+1}, \partial_x q_\ell^{n-1}; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^{n+\sigma_\ell^\pi(j)}) \partial_x q_\ell^* = 0 \quad (\mathcal{S}_\pi)$$

$$\text{où l'on définit } \sigma_\ell^\pi : [1, N] \setminus \{\ell\} \mapsto \{-1, +1\} \text{ qui vaut } \sigma_\ell^\pi(j) = \begin{cases} +1 & \text{si } \pi(j) < \pi(\ell) \\ -1 & \text{si } \pi(j) > \pi(\ell) \end{cases} \quad (\text{II.1.175})$$

qui correspond au gradient approché

$$\nabla H(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) = \nabla H^{(\pi)}(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) := \left(\delta_\ell H(s_\ell, p_\ell; \mathbf{s}_{\pi(j) < \pi(\ell)}, \mathbf{p}_{\pi(j) > \pi(\ell)}) \right)_{\ell \in [1, N]} \quad (\text{II.1.176})$$

Seule la numérotation des inconnues ayant changé, le théorème reste vrai : tout schéma (\mathcal{S}_π) est conservatif au sens de la définition (II.1.1) et l'énergie potentielle discrète est donnée par la même formule (II.1.172).

Tous ces schémas ont le même défaut, de dépendre de la permutation π choisie pour classer les inconnues. Une conséquence importante de ce fait est que les schémas ne sont précis qu'à l'ordre un en temps. Afin de construire des schémas d'ordre deux en temps, l'idée la plus naturelle est de prendre une "moyenne" de tous ces schémas, en prenant comme gradient approché la moyenne de tous les gradients approchés issus des permutations. Ce schéma s'écrit :

$$\forall \ell \in [1, N], \quad \forall q_\ell^* \in \mathcal{Q}_\ell, \\ \oint_0^L \frac{q_\ell^{n+1} - 2q_\ell^n + q_\ell^{n-1}}{\Delta t^2} q_\ell^* + \frac{1}{N!} \sum_{\pi \in \Pi_N} \oint_0^L \delta_\ell H(\partial_x q_\ell^{n+1}, \partial_x q_\ell^{n-1}; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^{n+\sigma_\ell^\pi(j)}) \partial_x q_\ell^* = 0 \quad (\mathcal{S}_{permut})$$

Il correspond au gradient approché

$$\nabla H(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) = \nabla H^{permut}(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) := \frac{1}{N!} \sum_{\pi \in \Pi_N} \nabla H^{(\pi)}(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) \quad (\text{II.1.177})$$

THÉORÈME II.1.20 (*Énergie du schéma* (\mathcal{S}_{permut}))

Le schéma (\mathcal{S}_{permut}) est conservatif au sens de la définition II.1.1 et l'énergie potentielle discrète associée est encore donnée par

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} [H(\mathbf{s}) + H(\mathbf{c})] \quad (\text{II.1.178})$$

De plus, il est stable et précis à l'ordre deux en temps.

DÉMONSTRATION. Le caractère conservatif est immédiat puisque chaque terme de la somme conduit à la conservation de la même énergie. Montrons que ce schéma est d'ordre deux en montrant que son gradient approché est symétrique en \mathbf{s} et \mathbf{p} (en utilisant ($\mathcal{P}_{2dordre}$)).

$$\nabla H^{permut}(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) = \frac{1}{N!} \sum_{\pi \in \Pi_N} \left(\delta_\ell H(s_\ell, p_\ell; \mathbf{s}_{\pi(j) < \pi(\ell)}, \mathbf{p}_{\pi(j) > \pi(\ell)}) \right)_{\ell \in [1, N]}$$

Introduisons la bijection \mathcal{B} de Π_N qui à tout $\pi \in \Pi_N$ associe sa permutation "contraire" définie par

$$\mathcal{B}(\pi)(j) = \pi(N + 1 - j)$$

En particulier, cette bijection renverse les inégalités au sens où :

$$\pi(j) < \pi(\ell) \Rightarrow \mathcal{B}(\pi)(j) > \mathcal{B}(\pi)(\ell) \quad \text{et} \quad \pi(j) > \pi(\ell) \Rightarrow \mathcal{B}(\pi)(j) < \mathcal{B}(\pi)(\ell)$$

Donc la somme se réécrit

$$\nabla H^{permut}(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) = \frac{1}{N!} \sum_{\pi \in \Pi_N} \left(\delta_\ell H(s_\ell, p_\ell; \mathbf{p}_{\pi(j) < \pi(\ell)}, \mathbf{s}_{\pi(j) > \pi(\ell)}) \right)_{\ell \in [1, N]}$$

La symétrie de $\delta_\ell H$ par rapport à ses deux premiers arguments permet enfin d'écrire

$$\begin{aligned} \nabla H^{permut}(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{N!} \sum_{\pi \in \Pi_N} \left(\delta_\ell H(p_\ell, s_\ell; \mathbf{p}_{\pi(j) < \pi(\ell)}, \mathbf{s}_{\pi(j) > \pi(\ell)}) \right)_{\ell \in [1, N]} \\ &= \nabla H^{permut}(\mathbf{p}, \mathbf{c}, \mathbf{s}) \end{aligned}$$

La propriété (II.1.103) permet enfin de montrer que \mathbb{H} est positive, en tant que somme de termes positifs. On conclut en utilisant le théorème II.1.12. □

REMARQUE II.1.25 (*Illustration du schéma* (\mathcal{S}_{permut}) avec $N = 2$)

Si l'on applique ce schéma à un système à deux lignes, il s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_0^L \frac{q_1^{n+1} - 2q_1^n + q_1^{n-1}}{\Delta t^2} q_1^* + \oint_0^L \left[\delta_1 H(\partial_x q_1^{n+1}, \partial_x q_1^{n-1}; \partial_x q_2^{n-1}) \right. \\ \quad \left. + \delta_1 H(\partial_x q_1^{n+1}, \partial_x q_1^{n-1}; \partial_x q_2^{n+1}) \right] \partial_x q_1^* = 0, \quad \forall q_1^* \in \mathcal{Q}_1, \\ \oint_0^L \frac{q_2^{n+1} - 2q_2^n + q_2^{n-1}}{\Delta t^2} q_2^* + \oint_0^L \left[\delta_2 H(\partial_x q_2^{n+1}, \partial_x q_2^{n-1}; \partial_x q_1^{n+1}) \right. \\ \quad \left. + \delta_2 H(\partial_x q_2^{n+1}, \partial_x q_2^{n-1}; \partial_x q_1^{n-1}) \right] \partial_x q_2^* = 0, \quad \forall q_2^* \in \mathcal{Q}_2. \end{array} \right.$$

Le schéma (\mathcal{S}_{permut}) est donc très intéressant puisqu'il est conservatif et d'ordre deux. Cependant, son écriture est un peu lourde étant donnés les $N!$ taux d'accroissement directionnels qui interviennent (dès le système à trois lignes, il faut en considérer six). C'est pourquoi nous proposons dans le théorème suivant une écriture équivalente qui permet de réduire la somme à seulement 2^{N-1} termes.

THÉORÈME II.1.21 (*Écriture simplifiée de (\mathcal{S}_{permut})*)

Le schéma (\mathcal{S}_{permut}) est équivalent au schéma suivant

$$\forall \ell \in [1, N], \quad \forall q_\ell^* \in \mathcal{Q}_\ell, \\ \oint_0^L \frac{q_\ell^{n+1} - 2q_\ell^n + q_\ell^{n-1}}{\Delta t^2} q_\ell^* + \sum_{\sigma \in \Sigma_\ell} \zeta(\sigma) \oint_0^L \delta_\ell H(\partial_x q_\ell^{n+1}, \partial_x q_\ell^{n-1}; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^{n+\sigma(j)}) \partial_x q_\ell^* = 0 \quad (\mathcal{S}_{permut})$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_\ell = [1, N] \setminus \{\ell\}, \quad \ell \in [1, N] \\ \Sigma_\ell = \{\sigma : J_\ell \mapsto \{-1, +1\}\} \\ \mu(\sigma) = \#\{j \in J_\ell, \sigma(j) = +1\} = \#\sigma^{-1}(+1) \\ \zeta(\sigma) = \frac{1}{N!} \mu(\sigma)! [N - 1 - \mu(\sigma)]! \end{array} \right.$$

DÉMONSTRATION. Introduisons l'application surjective

$$\Phi_\ell : \Pi_N \rightarrow \Sigma_\ell$$

$$\pi \mapsto \Phi_\ell(\pi) = \sigma_\ell^\pi \text{ défini par (II.1.175), c'est à dire : } \sigma_\ell^\pi : J_\ell \rightarrow \{-1, +1\}$$

$$j \mapsto \sigma_\ell^\pi(j) = \begin{cases} +1 & \text{si } \pi(j) < \pi(\ell) \\ -1 & \text{si } \pi(j) > \pi(\ell) \end{cases}$$

On peut donc découper Π_N en sous ensembles de "courbes de niveau" de Φ_ℓ :

$$\begin{aligned} \Phi_\ell^{-1}(\sigma) &= \{\pi \in \Pi_N, \text{ tels que } \Phi_\ell(\pi) = \sigma\} \\ &= \{\pi \in \Pi_N, \text{ tels que } \sigma_\ell^\pi = \sigma\} \end{aligned}$$

Réécrivons alors le schéma (\mathcal{S}_{permut}) en utilisant ce partitionnement qui va nous permettre de regrouper les permutations qui donnent les mêmes termes :

$$\forall \ell \in [1, N], \quad \forall q_\ell^* \in \mathcal{Q}_\ell,$$

$$\oint_0^L \frac{q_\ell^{n+1} - 2q_\ell^n + q_\ell^{n-1}}{\Delta t^2} q_\ell^* + \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \Sigma_\ell} \sum_{\pi \in \Phi_\ell^{-1}(\sigma)} \oint_0^L \delta_\ell H(\partial_x q_\ell^{n+1}, \partial_x q_\ell^{n-1}; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^{n+\Phi_\ell(\pi)(j)}) \partial_x q_\ell^* = 0$$

$$\oint_0^L \frac{q_\ell^{n+1} - 2q_\ell^n + q_\ell^{n-1}}{\Delta t^2} q_\ell^* + \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \Sigma_\ell} \sum_{\pi \in \Phi_\ell^{-1}(\sigma)} \oint_0^L \delta_\ell H(\partial_x q_\ell^{n+1}, \partial_x q_\ell^{n-1}; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^{n+\sigma_\ell^\pi(j)}) \partial_x q_\ell^* = 0$$

$$\oint_0^L \frac{q_\ell^{n+1} - 2q_\ell^n + q_\ell^{n-1}}{\Delta t^2} q_\ell^* + \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \Sigma_\ell} \sum_{\pi \in \Phi_\ell^{-1}(\sigma)} \underbrace{\oint_0^L \delta_\ell H(\partial_x q_\ell^{n+1}, \partial_x q_\ell^{n-1}; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^{n+\sigma(j)}) \partial_x q_\ell^*}_{\text{cette somme est en fait } \zeta(\sigma) \text{ fois le même terme,}} = 0$$

où $\zeta(\sigma)$ est le cardinal de $\Phi_\ell^{-1}(\sigma)$

Il reste donc à compter le cardinal de chaque $\Phi_\ell^{-1}(\sigma)$. Étant donné $\sigma \in \Sigma_\ell$, partitionnons $[1, N]$ en deux sous ensembles :

$$\mathcal{I}_+ = \{j \in J_\ell \mid \sigma(j) = +1\}$$

$$\text{et } \mathcal{I}_- = \{j \in J_\ell \mid \sigma(j) = -1\}$$

$$\mathcal{I}_+ = \sigma^{-1}(+1)$$

$$\mathcal{I}_- = \sigma^{-1}(-1)$$

Alors, si on note $m = \mu(\sigma) = \#\mathcal{I}_+$, on a :

$$(i) \quad \Phi_\ell(\pi) = \sigma \iff (ii) \quad \begin{cases} \pi(\ell) = m + 1 \\ \pi|_{\mathcal{I}_+} \text{ est une bijection de } \mathcal{I}_+ \text{ dans } [1, m] \\ \pi|_{\mathcal{I}_-} \text{ est une bijection de } \mathcal{I}_- \text{ dans } [m + 2, N] \end{cases} \quad (\text{II.1.179})$$

En effet, $\Phi_\ell(\pi) = \sigma$ signifie que lorsque j parcourt \mathcal{I}_+ (respectivement \mathcal{I}_-), $\pi(j)$ prend m valeurs strictement supérieures à ℓ (respectivement $N - 1 - m$ valeurs strictement inférieures à ℓ). Ainsi, il est nécessaire que $\pi(\mathcal{I}_+) = [1, m]$, que $\pi(\ell) = m + 1$ et que $\pi(\mathcal{I}_-) = [m + 2, N]$, ce qui prouve que (i) \Rightarrow (ii). La réciproque est évidente.

Alors, pour compter le nombre d'antécédents de σ par Φ_ℓ , il suffit de multiplier le nombre de bijections d'un ensemble à m éléments avec le nombre de bijections d'un ensemble à $N - 1 - m$ éléments, ce qui termine la preuve. \square

REMARQUE II.1.26 (*Illustration de l'écriture simplifiée de $(\mathcal{S}_{\text{permut}})$ avec $N = 3$*)

Si l'on écrit la forme simplifiée de $(\mathcal{S}_{\text{permut}})$ pour un système à trois lignes, il s'écrira :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (q_1^{n+1}, q_2^{n+1}, q_3^{n+1}) \in \mathcal{Q}_h \text{ tels que pour tous } (q_1^*, q_2^*, q_3^*) \in \mathcal{Q}_h, \\ \int_0^L \frac{q_1^{n+1} - 2q_1^n + q_1^{n-1}}{\Delta t^2} q_1^* + \frac{1}{6} \int_0^L \left[2\delta_1 H(\partial_x q_1^{n+1}, \partial_x q_1^{n-1}; \partial_x q_2^{n+1}, \partial_x q_3^{n+1}) + \right. \\ \qquad \qquad \qquad 2\delta_1 H(\partial_x q_1^{n+1}, \partial_x q_1^{n-1}; \partial_x q_2^{n-1}, \partial_x q_3^{n-1}) + \\ \qquad \qquad \qquad \delta_1 H(\partial_x q_1^{n+1}, \partial_x q_1^{n-1}; \partial_x q_2^{n+1}, \partial_x q_3^{n-1}) + \\ \qquad \qquad \qquad \left. \delta_1 H(\partial_x q_1^{n+1}, \partial_x q_1^{n-1}; \partial_x q_2^{n-1}, \partial_x q_3^{n+1}) \right] \partial_x q_1^* = 0, \\ \int_0^L \frac{q_2^{n+1} - 2q_2^n + q_2^{n-1}}{\Delta t^2} q_2^* + \frac{1}{6} \int_0^L \left[2\delta_2 H(\partial_x q_2^{n+1}, \partial_x q_2^{n-1}; \partial_x q_1^{n+1}, \partial_x q_3^{n+1}) + \right. \\ \qquad \qquad \qquad 2\delta_2 H(\partial_x q_2^{n+1}, \partial_x q_2^{n-1}; \partial_x q_1^{n-1}, \partial_x q_3^{n-1}) + \\ \qquad \qquad \qquad \delta_2 H(\partial_x q_2^{n+1}, \partial_x q_2^{n-1}; \partial_x q_1^{n+1}, \partial_x q_3^{n-1}) + \\ \qquad \qquad \qquad \left. \delta_2 H(\partial_x q_2^{n+1}, \partial_x q_2^{n-1}; \partial_x q_1^{n-1}, \partial_x q_3^{n+1}) \right] \partial_x q_2^* = 0, \\ \int_0^L \frac{q_3^{n+1} - 2q_3^n + q_3^{n-1}}{\Delta t^2} q_3^* + \frac{1}{6} \int_0^L \left[2\delta_3 H(\partial_x q_3^{n+1}, \partial_x q_3^{n-1}; \partial_x q_1^{n+1}, \partial_x q_2^{n+1}) + \right. \\ \qquad \qquad \qquad 2\delta_3 H(\partial_x q_3^{n+1}, \partial_x q_3^{n-1}; \partial_x q_1^{n-1}, \partial_x q_2^{n-1}) + \\ \qquad \qquad \qquad \delta_3 H(\partial_x q_3^{n+1}, \partial_x q_3^{n-1}; \partial_x q_1^{n+1}, \partial_x q_2^{n-1}) + \\ \qquad \qquad \qquad \left. \delta_3 H(\partial_x q_3^{n+1}, \partial_x q_3^{n-1}; \partial_x q_1^{n-1}, \partial_x q_2^{n+1}) \right] \partial_x q_3^* = 0. \end{array} \right.$$

qui, comme attendu, ne demande pour chaque ligne l'évaluation que de quatre taux d'accroissement directionnels et non pas six comme l'aurait demandé l'écriture originale du schéma.

Pour terminer, on remarque que la preuve du théorème II.1.20 utilise l'application \mathcal{B} qui à toute permutation $\pi \in \Pi_N$ associe la permutation "contraire" : $\mathcal{B}(\pi)(j) = \pi(N + 1 - j)$, et c'est en utilisant le fait que $\mathcal{B}(\Pi_N) = \Pi_N$ que l'on mène la démonstration. On peut en fait imaginer d'autres schémas d'ordre deux en n'utilisant pas tout Π_N dans la somme mais seulement un sous ensemble qui soit stable pour \mathcal{B} . Typiquement, pour toute permutation $\pi \in \Pi_N$, sommer sur le sous ensemble $\{\pi, \mathcal{B}(\pi)\}$ donne un schéma conservatif, du second ordre, qui s'écrit :

$$\forall \ell \in [1, N], \quad \forall q_\ell^* \in \mathcal{Q}_\ell,$$

$$\oint_0^L \frac{q_\ell^{n+1} - 2q_\ell^n + q_\ell^{n-1}}{\Delta t^2} q_\ell^* + \oint_0^L \frac{1}{2} \left[\delta_\ell H(\partial_x q_\ell^{n+1}, \partial_x q_\ell^{n-1}; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^{n+\sigma_\ell^\pi(j)}) \right. \\ \left. + \delta_\ell H(\partial_x q_\ell^{n+1}, \partial_x q_\ell^{n-1}; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^{n-\sigma_\ell^\pi(j)}) \right] \partial_x q_\ell^* = 0 \quad (\mathcal{S}_{\pi, AR})$$

Ce schéma correspond au gradient approché

$$\nabla H(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left(\delta_\ell H(s_\ell, p_\ell; \mathbf{s}_{\pi(j) < \pi(\ell)}, \mathbf{p}_{\pi(j) > \pi(\ell)}) + \delta_\ell H(s_\ell, p_\ell; \mathbf{p}_{\pi(j) < \pi(\ell)}, \mathbf{s}_{\pi(j) > \pi(\ell)}) \right)_{\ell \in [1, N]} \quad (\text{II.1.181})$$

THÉORÈME II.1.22 (Énergie du schéma $(\mathcal{S}_{\pi, AR})$)

Le schéma $(\mathcal{S}_{\pi, AR})$ est conservatif au sens de la définition II.1.1 et l'énergie potentielle discrète associée est encore donnée par

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} [H(\mathbf{s}) + H(\mathbf{c})] \quad (\text{II.1.182})$$

De plus, il est stable et précis à l'ordre deux en temps.

DÉMONSTRATION. Le caractère conservatif découle directement du caractère conservatif de chaque terme de la somme. On montre qu'il est d'ordre deux avec les mêmes arguments que dans la démonstration du théorème II.1.20, en constatant que la seule différence réside dans l'ensemble sur lequel on somme, et qu'ici, cet ensemble est $\{\pi, \mathcal{B}(\pi)\}$ (et non plus Π_N tout entier) qui est aussi stable par \mathcal{B} . La propriété (II.1.103) permet enfin de montrer que \mathbb{H} est positive, en tant que somme de termes positifs. On conclue en utilisant le théorème II.1.12. □

Pour illustrer cette section, voici une courbe de convergence des trois schémas (\mathcal{S}_π) , $(\mathcal{S}_{\text{permut}})$ et $(\mathcal{S}_{\pi, AR})$ qui montre clairement que le premier est d'ordre un tandis que les deux autres sont d'ordre deux. Les courbes ont été réalisées en considérant le système géométriquement exact à trois polarisations, la discrétisation spatiale utilise des éléments finis d'ordre cinq. Seules les erreurs sur les deux polarisations verticales sont montrées ici.

REMARQUE II.1.27 (Variante des schémas aux demi pas de temps)

On peut écrire une variante de chacun des trois schémas (\mathcal{S}_π) , $(\mathcal{S}_{\pi, AR})$ et $(\mathcal{S}_{\text{permut}})$, en s'inspirant de la façon dont on a construit le schéma $(\mathcal{S}_{1/4})$ par rapport au schéma $(\mathcal{S}_{1/2})$. Pour cela, au lieu d'évaluer les gradients approchés en

$$\mathbf{s} = \mathbf{q}_h^{n+1}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{q}_h^n \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \mathbf{q}_h^{n-1}$$

on les évalue aux demi pas de temps. On pose pour cela $\mathbf{q}_h^{n+1/2} = \frac{\mathbf{q}_h^{n+1} + \mathbf{q}_h^n}{2}$ et on prend

$$\mathbf{s} = \mathbf{q}_h^{n+1/2}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{q}_h^n \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \mathbf{q}_h^{n-1/2}$$

Ces schémas sont conservatifs pour une nouvelle énergie potentielle. Remarquons en effet que

$$\frac{\mathbf{q}_h^{n+1} - \mathbf{q}_h^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\mathbf{q}_h^{n+1/2} - \mathbf{q}_h^{n-1/2}}{\Delta t}$$

L'énergie potentielle associée à ces nouveaux schémas est alors donnée par

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) = H \left(\frac{\mathbf{s} + \mathbf{c}}{2} \right)$$

et est donc positive, ce qui montre que ces variantes sont également des schémas stables.

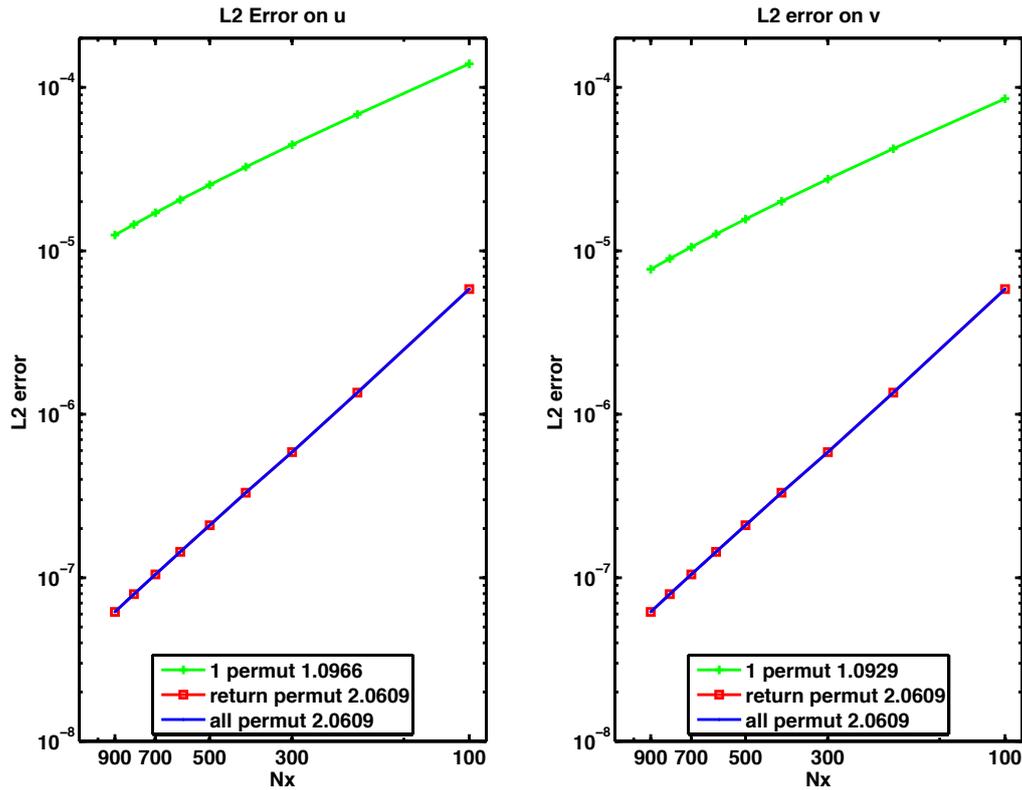


FIGURE II.7 – Courbes de convergence des trois schémas (\mathcal{S}_π) en vert, (\mathcal{S}_{permut}) en bleu et ($\mathcal{S}_{\pi,AR}$) en rouge.

REMARQUE II.1.28 (*Dégénérescence des schémas appliqués à un système linéaire*)

Si l'on applique les schémas (\mathcal{S}_π), ($\mathcal{S}_{\pi,AR}$) et (\mathcal{S}_{permut}) à un système d'équations linéaires couplées,

- ils seront tous d'ordre deux,
- ils seront tous confondus,
- ils reviendront en fait tous à appliquer un θ -schéma avec $\theta = \frac{1}{2}$.

Le même phénomène peut se démontrer pour les variantes aux demi pas de temps de ces trois schémas, au détail près qu'elles correspondront à prendre $\theta = \frac{1}{4}$. On peut donc s'attendre à ce que les variantes des schémas induisent moins de dispersion numérique, y compris quand on les applique à des systèmes non linéaires.



es nouveaux schémas ont été construits dans ce paragraphe, pour la discrétisation conservative de systèmes d'équations semi discrets non linéaires de la forme

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\oint_0^L \mathbf{q}_h \cdot \mathbf{q}_h^* \right] + \oint_0^L \nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h) \cdot \partial_x \mathbf{q}_h^* = 0.$$

Les schémas sont cherchés sous la forme

$$\oint_0^L \frac{\mathbf{q}_h^{n+1} - 2\mathbf{q}_h^n + \mathbf{q}_h^{n-1}}{\Delta t^2} \cdot \mathbf{q}_h^* + \oint_0^L \nabla H(\partial_x \mathbf{q}_h^{n+1}, \partial_x \mathbf{q}_h^n, \partial_x \mathbf{q}_h^{n-1}) \cdot \partial_x \mathbf{q}_h^* = 0. \quad (\mathcal{S}_{grad-appro})$$

où ∇H est une approximation discrète de ∇H . On dit qu'un gradient approché est conservatif si il existe une fonction scalaire $\mathbb{H} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall (\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N$,

$$\nabla H(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) \cdot \frac{\mathbf{s} - \mathbf{p}}{2} = \mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) - \mathbb{H}(\mathbf{c}, \mathbf{p}) \quad (\mathcal{P}_{conserv})$$

Alors, on peut montrer que le schéma ($\mathcal{S}_{grad-appro}$) conserve l'énergie

$$\mathcal{E}_{NL}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \oint_0^L \left| \frac{\mathbf{q}_h^{n+1} - \mathbf{q}_h^n}{\Delta t} \right|^2 + \oint_0^L \mathbb{H}(\partial_x \mathbf{q}_h^{n+1}, \partial_x \mathbf{q}_h^n)$$

et que cette conservation mène à la stabilité du schéma si $\mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) \geq 0, \forall (\mathbf{s}, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^{2N}$.

Nous avons montré que tout schéma explicite sous la forme ($\mathcal{S}_{grad-appro}$) ne pouvait pas être conservatif à moins que le système d'origine ne soit linéaire. Nous avons ensuite montré que tout schéma de la forme

$$\forall \ell \in [1, N], \quad \oint_0^L \frac{q_\ell^{n+1} - 2q_\ell^n + q_\ell^{n-1}}{\Delta t^2} q_\ell^* + \oint_0^L \delta_\ell H(\partial_x q_\ell^{n+1}, \partial_x q_\ell^{n-1}; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^n) \partial_x q_\ell^* = 0 \quad (\mathcal{S}_{part-impl})$$

(où $\delta_\ell H$ est un taux d'accroissement dans la direction ℓ) n'était conservatif que si le système d'origine ne couplait les inconnues que deux par deux. Enfin, nous avons développé des schémas conservatifs pour n'importe quelle fonction H décrivant le système. Ces schémas sont basés sur une permutation π de l'ensemble $[1, N]$ et s'écrivent

$$\forall \ell \in [1, N], \quad \oint_0^L \frac{q_\ell^{n+1} - 2q_\ell^n + q_\ell^{n-1}}{\Delta t^2} q_\ell^* + \oint_0^L \delta_\ell H(\partial_x q_\ell^{n+1}, \partial_x q_\ell^{n-1}; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^{n+\sigma_\ell^\pi(j)}) \partial_x q_\ell^* = 0 \quad (\mathcal{S}_\pi)$$

où σ_ℓ^π est défini par (II.1.175). Ces schémas n'étant que d'ordre un, nous avons proposé deux variantes qui rétablissent l'ordre deux, à savoir une version symétrisée :

$$\forall \ell \in [1, N], \quad \oint_0^L \frac{q_\ell^{n+1} - 2q_\ell^n + q_\ell^{n-1}}{\Delta t^2} q_\ell^* + \oint_0^L \left[\delta_\ell H(\partial_x q_\ell^{n+1}, \partial_x q_\ell^{n-1}; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^{n+\sigma_\ell^\pi(j)}) \right. \\ \left. + \delta_\ell H(\partial_x q_\ell^{n+1}, \partial_x q_\ell^{n-1}; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^{n-\sigma_\ell^\pi(j)}) \right] \partial_x q_\ell^* = 0 \quad (\mathcal{S}_{\pi,AR})$$

et une version complètement sommée : $\forall \ell \in [1, N]$,

$$\oint_0^L \frac{q_\ell^{n+1} - 2q_\ell^n + q_\ell^{n-1}}{\Delta t^2} q_\ell^* + \frac{1}{N!} \sum_{\pi \in \Pi_N} \oint_0^L \delta_\ell H(\partial_x q_\ell^{n+1}, \partial_x q_\ell^{n-1}; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^{n+\sigma_\ell^\pi(j)}) \partial_x q_\ell^* = 0 \quad (\mathcal{S}_{permut})$$

Les trois schémas (\mathcal{S}_π), ($\mathcal{S}_{\pi,AR}$) et (\mathcal{S}_{permut}) conservent l'énergie discrète énoncée ci dessus, avec

$$\mathbb{H}(\mathbf{s}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} [H(\mathbf{s}) + H(\mathbf{c})]$$

Des courbes de convergence obtenues par des expériences numériques donnent les taux de convergence attendus théoriquement.

II.1.5 Deux schémas numériques pour la corde de piano

Étudions à présent la discrétisation du système complet de corde de piano. Nous souhaitons tirer parti des qualités des θ -schéma (stabilité, dispersion) et appliquer nos nouveaux schémas sur la partie non linéaire du système. Soient comme précédemment \mathbf{Q}_h et $\mathbf{Q}_h^* \in \mathbb{R}^{N_h}$ les coordonnées de \mathbf{q}_h et $\mathbf{q}_h^* \in \mathcal{Q}_h$ dans une certaine base de \mathcal{Q}_h . Nous cherchons à discrétiser en temps le problème semi discret suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 M_h \mathbf{Q}_h + \partial_t R_h \mathbf{Q}_h + K_h \mathbf{Q}_h + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{Q}_h) = S_h \\ \mathbf{Q}_h(t=0) = \mathbf{Q}_{h,0}, \quad \partial_t \mathbf{Q}_h(t=0) = \mathbf{Q}_{h,1} \end{cases} \quad (\text{II.1.183})$$

Nous considérons que la matrice K_h est la somme de deux matrices semi définies positives \underline{K}_h et \overline{K}_h , dans l'idée du paragraphe précédent, afin d'utiliser un θ différent sur les deux ondes (transversale et cisaillement) du problème, en raison de leurs deux vitesses très différentes. Nous allons alors appliquer le schéma à deux θ sur la partie linéaire, et l'une des deux variantes des schémas conservatifs proposés au paragraphe précédent sur la partie non linéaire.

- ▷ Soient θ et $\bar{\theta}$ deux réels positifs,
- ▷ Soit \mathcal{P} un ensemble de permutations de $[1, N]$, de cardinal $N_{\mathcal{P}}$, qui peut être :
 - une seule permutation π pour écrire (\mathcal{S}_{π}) (alors $N_{\mathcal{P}} = 1$),
 - une permutation π et sa permutation contraire $\mathcal{B}(\pi)$ pour écrire $(\mathcal{S}_{\pi, AR})$ (alors $N_{\mathcal{P}} = 2$),
 - toutes les permutations Π_N pour écrire (\mathcal{S}_{permut}) (alors $N_{\mathcal{P}} = N!$).
- ▷ Soit enfin $\gamma \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ qui permettra de choisir entre les schémas non linéaires cités ci dessus ou leurs variantes écrites aux demi pas de temps (voir remarque II.1.27).

Introduisons à présent l'application $\overline{\nabla}^{\mathcal{P}} \mathbf{u} : \mathbb{R}^{N_h} \times \mathbb{R}^{N_h} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$ définie $\forall \mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-, \mathbf{Q}_h^* \in (\mathbb{R}^{N_h})^3$ par

$$\overline{\nabla}^{\mathcal{P}} \mathbf{u}(\mathbf{Q}^+, \mathbf{Q}^-) \cdot \mathbf{Q}_h^* = \int_0^L \frac{1}{N_{\mathcal{P}}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}} \left\{ \delta_{\ell} \mathbf{u}(\partial_x q_{\ell}^+, \partial_x q_{\ell}^-; \partial_x \mathbf{q}_{j \neq \ell}^{\sigma_{\ell}^{\pi}(j)}) \right\}_{\ell \in [1, N]} \cdot \partial_x \mathbf{q}_h^* \quad (\text{II.1.184})$$

$$\text{où l'on définit } \sigma_{\ell}^{\pi} : [1, N] \setminus \{\ell\} \mapsto \{-, +\} \text{ qui vaut } \sigma_{\ell}^{\pi}(j) = \begin{cases} + & \text{si } \pi(j) < \pi(\ell) \\ - & \text{si } \pi(j) > \pi(\ell) \end{cases}$$

La famille de schémas que l'on considère pour le système de corde est :

$$M_h [\mathbf{Q}]_{\Delta t^2}^n + R_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} + \underline{K}_h \{\mathbf{Q}\}_{\theta}^n + \overline{K}_h \{\mathbf{Q}\}_{\bar{\theta}}^n + \overline{\nabla}^{\mathcal{P}} \mathbf{u}(\mathbf{Q}^{n+\gamma}, \mathbf{Q}^{n-\gamma}) = \mathbf{S}_h^n \quad (\text{II.1.185})$$

Cette famille de schémas offre plusieurs choix, en particulier θ , $\bar{\theta}$ et γ mais aussi l'ensemble \mathcal{P} sur lequel on fait la somme pour le gradient approché.

II.1.5.a Propriétés des schémas

L'étude de stabilité par techniques énergétique demande un travail supplémentaire sur l'équation, il faut en effet décomposer la matrice K_h non plus en deux mais en quatre matrices, afin de pouvoir regrouper les différents termes intervenant dans l'équation en termes positifs, malgré un choix de schéma assez compliqué. Nous considérons donc que la matrice K_h est la somme de quatre matrices semi définies positives : $K_h = \underline{K}_{h,S} + \underline{K}_{h,T} + \overline{K}_{h,S} + \overline{K}_{h,T}$ telles que $\forall \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{N_h}$, on ait

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\underline{K}_{h,S}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} + \frac{1}{2}\overline{K}_{h,S}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{u}(\mathbf{Q}) \geq 0, & \text{où on a posé } \mathbf{u}(\mathbf{Q}) = \mathbf{u}(\partial_x \mathbf{q}), \\ \underline{K}_{h,T}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} + \overline{K}_{h,T}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} \geq 0. \end{cases}$$

THÉORÈME II.1.23 (*Énergie du schéma complet du système de corde*)

Toute solution numérique à (II.1.185) vérifie

$$\frac{\mathcal{E}_c^{n+1/2} - \mathcal{E}_c^{n-1/2}}{\Delta t} = \mathbf{S}_h^n \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} - R_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (\text{II.1.186})$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c^{n+1/2} &= \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \right\|_{\widetilde{M}_{h,\theta,\bar{\theta},\gamma}}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} + \mathbf{Q}^n}{2} \right\|_{\underline{K}_{h,T} + \overline{K}_{h,T}}^2 + \\ &\begin{cases} \frac{1}{4} \left[\|\mathbf{Q}^{n+1}\|_{\underline{K}_{h,S} + \overline{K}_{h,S}}^2 + \|\mathbf{Q}^n\|_{\underline{K}_{h,S} + \overline{K}_{h,S}}^2 \right] + \int_0^L \frac{\mathbf{u}(\mathbf{Q}^{n+1}) + \mathbf{u}(\mathbf{Q}^n)}{2} & \text{si } \gamma = 1 \\ \frac{1}{2} \|\mathbf{Q}^{n+1/2}\|_{\underline{K}_{h,S} + \overline{K}_{h,S}}^2 + \int_0^L \mathbf{u}(\mathbf{Q}^{n+1/2}) & \text{si } \gamma = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{II.1.187}) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \widetilde{M}_{h,\theta,\bar{\theta},\gamma} = M_h + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(\theta - \frac{\gamma}{2})\underline{K}_{h,S} + (\bar{\theta} - \frac{\gamma}{2})\overline{K}_{h,S} + (\theta - \frac{1}{4})\underline{K}_{h,T} + (\bar{\theta} - \frac{1}{4})\overline{K}_{h,T} \right] \quad (\text{II.1.188})$$

DÉMONSTRATION. Nous multiplions scalairement (II.1.185) par l'approximation centrée en t^n de la dérivée en temps de \mathbf{Q} , et nous appliquons les règles de calcul développées précédemment. Notons que l'on peut décomposer $\{\mathbf{Q}\}_\theta^n$ en un terme proportionnel à $[\mathbf{Q}]_{\Delta t^2}^n$ et un reste de plusieurs façons :

$$\{\mathbf{Q}\}_\theta^n = \begin{cases} (\theta - \frac{1}{4})\Delta t^2 [\mathbf{Q}]_{\Delta t^2}^n + \frac{\mathbf{Q}^{n+1} + 2\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{4} \\ (\theta - \frac{1}{2})\Delta t^2 [\mathbf{Q}]_{\Delta t^2}^n + \frac{\mathbf{Q}^{n+1} + \mathbf{Q}^{n-1}}{2} \end{cases}$$

On utilisera l'une ou l'autre décomposition selon la valeur de γ , afin de regrouper judicieusement le reste avec les termes en \mathbf{u} venant de la multiplication de $\overline{\nabla}^P \mathbf{u}(\mathbf{Q}^{n+\gamma}, \mathbf{Q}^{n-\gamma})$ par $\frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t}$.

□

THÉORÈME II.1.24 (*Stabilité du schéma complet du système de corde*)

Le schéma (II.1.185) est stable si la matrice $\widetilde{M}_{h,\theta,\bar{\theta},\gamma}$ est définie positive. En particulier, si $\gamma = \frac{1}{2}$, le schéma est inconditionnellement stable pour tout $(\theta, \bar{\theta})$ supérieurs à $\frac{1}{4}$.

DÉMONSTRATION. On reprend exactement les idées de la démonstration du théorème II.1.5. En effet, on a décomposé K_h en quatre matrices telles que précisément, $\forall \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{N_h}$,

$$\frac{1}{2}\underline{K}_{h,S}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} + \frac{1}{2}\overline{K}_{h,S}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{u}(\mathbf{Q}) \geq 0$$

ce qui permet d'écrire, quelle que soit la valeur de γ , que $\frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^n}{\Delta t} \right\|_{\widetilde{M}_{h,\theta,\bar{\theta},\gamma}}^2 \leq \mathcal{E}^{n+1/2}$. À partir de cet argument, la démonstration de II.1.5 s'adapte sans difficulté ici.

□

II.1.5.b Implémentation et résolution numérique

Les schémas décrits par (II.1.185) présentent plusieurs difficultés d'un point de vue pratique. Il faut tout d'abord écrire l'expression du schéma de façon concrète. On se place pour cela du point de vue des définitions vectorielles (voir (II.1.6) et (II.1.184)), en choisissant comme vecteur test le vecteur $\Phi_{j,k}$ de chaque fonction de base $\varphi_{j,k}$ de la méthode éléments finis associée au nœud j et appliquée dans la k ème variable du système (ce vecteur sera donc composé d'un seul 1, les autres coordonnées étant nulles). La ligne associée au nœud j , direction k du schéma s'écrira donc :

$$M_h[\mathbf{Q}]_{\Delta t^2}^n \cdot \Phi_{j,k} + R_h \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \Phi_{j,k} + \underline{K}_h \{\mathbf{Q}\}_\theta^n \cdot \Phi_{j,k} + \overline{K}_h \{\mathbf{Q}\}_\theta^n \cdot \Phi_{j,k} + \int_0^L \frac{1}{N_{\mathcal{P}}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}} \left\{ \delta_\ell \mathbf{u}(\partial_x q_\ell^{n+\gamma}, \partial_x q_\ell^{n-\gamma}; \partial_x \mathbf{q}_{\ell \neq \ell}^{n+\sigma_\ell^x}(\tilde{\ell})) \right\}_{\ell \in [1,N]} \cdot \partial_x \varphi_{j,k} = \mathbf{S}_h^n \cdot \Phi_{j,k} \quad (\text{II.1.189})$$

Singularité des taux d'accroissement directionnels. La définition de la fonction $\overline{\nabla}^{\mathcal{P}} \mathbf{u}$ passe par celle des taux d'accroissement directionnels (voir la définition II.1.3) qui introduit un quotient prolongeable par continuité lorsque deux quantités deviennent proches. Ce type de définitions parfaitement rigoureuses au niveau continu deviennent dangereuses au niveau discret, et doivent faire l'objet d'un traitement particulier. Dans certains cas, il est possible de mettre analytiquement le dénominateur du quotient en facteur de son numérateur. Il reste alors une expression qui ne diverge plus lorsque les deux quantités deviennent proches, que l'on peut implémenter alors sans danger. L'annexe F montre comment cette manipulation peut être faite pour le modèle géométriquement exact.

Méthode de résolution du problème non linéaire. D'autre part, à chaque pas de temps, il faut résoudre le schéma qui s'écrit plus généralement

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}^{n+1}, \mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1}) = 0 \quad (\text{II.1.190})$$

où $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{N_h} \times \mathbb{R}^{N_h} \times \mathbb{R}^{N_h} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$ est une fonction non linéaire. Au moment de calculer \mathbf{Q}^{n+1} , \mathbf{Q}^n et \mathbf{Q}^{n-1} sont connus, on les considère donc comme des paramètres et on introduit $F : \mathbb{R}^{N_h} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$ la fonction non linéaire à annuler. Pour cela nous avons choisi d'utiliser la méthode itérative de Newton-Raphson, dont la convergence dépend à la fois de la régularité de la fonction à annuler et au choix du point de départ de la méthode. Elle s'écrit, avec x_0 donné :

$$\nabla F(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -F(x_k) \quad (\text{II.1.191})$$

où la Jacobienne ∇F est une matrice $N_h \times N_h$ dont chaque entrée (n, m) est la dérivée de la ligne numéro n du schéma par rapport à l'inconnue (à l'instant t^{n+1}) numéro m .

• Une première difficulté provient du test d'arrêt de la méthode itérative. Les tests standards sont liés à la définition d'une constante ε , et s'écrivent au choix

$$\|F(x_k)\| \leq \varepsilon; \|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon; \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k\|} \leq \varepsilon \quad (\text{II.1.192})$$

Le test que nous proposons est assez similaire. Il consiste à s'arrêter lorsque l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

$$\|F(x_{k+1})\| \geq \|F(x_k)\| \text{ ou } \|F(x_k)\| \leq \varepsilon \|F(x_0)\| \quad (\text{II.1.193})$$

Pour traiter les cas de non convergence, on impose de plus un nombre maximal d'itérations à la méthode.

• Une seconde difficulté vient de l'évaluation de cette Jacobienne. Pour l'évaluer, on réécrit le schéma en décomposant la solution sur les fonctions de base $(\varphi_{p,l})_{p,l}$ (pour le nœud p et direction l), dont les

vecteurs de coordonnées sont les $(\Phi_{p,l})_{p,l}$. Cela s'écrit :

$$\begin{aligned}
& M_h \sum_{p,l} \frac{Q_{p,l}^{n+1} - 2Q_{p,l}^n + Q_{p,l}^{n-1}}{\Delta t^2} \Phi_{p,l} \cdot \Phi_{j,k} + R_h \sum_{p,l} \frac{Q_{p,l}^{n+1} - Q_{p,l}^{n-1}}{2\Delta t} \Phi_{p,l} \cdot \Phi_{j,k} \\
& + \underline{K}_h \sum_{p,l} [\theta Q_{p,l}^{n+1} + (1-2\theta)Q_{p,l}^n + \theta Q_{p,l}^{n-1}] \Phi_{p,l} \cdot \Phi_{j,k} + \bar{K}_h \sum_{p,l} [\theta Q_{p,l}^{n+1} + (1-2\theta)Q_{p,l}^n + \theta Q_{p,l}^{n-1}] \Phi_{p,l} \cdot \Phi_{j,k} \\
& + \int_0^L \frac{1}{N_{\mathcal{P}}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}} \delta_k \mathbf{u} \left(\sum_p Q_{p,k}^{n+\gamma} \partial_x \varphi_{p,k}, \sum_p Q_{p,k}^{n-\gamma} \partial_x \varphi_{p,k}; \sum_{p,\bar{k} \neq k} Q_{p,\bar{k}}^{n+\sigma_{\bar{k}}^{\pi}(\bar{k})} \partial_x \varphi_{p,\bar{k}} \right) \cdot \partial_x \varphi_{j,k} - \mathbf{S}_h^n \cdot \Phi_{j,k}
\end{aligned} \tag{II.1.194}$$

Alors, le calcul de la Jacobienne passe par la dérivation de cette expression par $Q_{p,l}^{n+1}$, pour tout (p,l) . Si on choisit une façon particulière de classer les inconnues, appelons n l'indice de $Q_{j,k}$ dans ce classement, et m celui de $Q_{p,l}$. L'expression précédente est alors $F_n(\mathbf{Q}^{n+1})$, et on veut écrire $\frac{\partial F_n}{\partial \mathbf{Q}_m}$ pour tous n et m . Si \mathbf{u} est nulle (système linéaire), la Jacobienne prend une forme très simple, et s'écrit comme une combinaison linéaire des matrices éléments finis :

$$\nabla F = \frac{1}{\Delta t^2} M_h + \frac{1}{2\Delta t} R_h + \theta \underline{K}_h + \bar{\theta} \bar{K}_h \tag{II.1.195}$$

En ce qui concerne la partie non linéaire, l'expression est beaucoup moins plaisante. Elle fait intervenir des termes correspondant à

$$\frac{\partial \delta_k \mathbf{u}}{\partial s_{p,l}}(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) \tag{II.1.196}$$

En effet, d'une part si $l = k$, le terme correspondant au nœud p sera

$$\gamma \int_0^L \frac{1}{N_{\mathcal{P}}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}} \frac{\partial \delta_k \mathbf{u}}{\partial s_k} \left(\sum_p Q_{p,k}^{n+\gamma} \partial_x \varphi_{p,k}, \sum_p Q_{p,k}^{n-\gamma} \partial_x \varphi_{p,k}; \sum_{p,\bar{k} \neq k} Q_{p,\bar{k}}^{n+\sigma_{\bar{k}}^{\pi}(\bar{k})} \partial_x \varphi_{p,\bar{k}} \right) \partial_x \varphi_{p,k} \cdot \partial_x \varphi_{j,k}$$

et si $l \neq k$, il faut alors se demander pour chaque $\pi \in \mathcal{P}$ si $\sigma_{\bar{k}}^{\pi}(l) = \gamma$ ou $-\gamma$. Dans le second cas, aucune contribution ne doit être ajoutée, mais dans le premier cas, on doit ajouter le terme. Cela donne pour chaque nœud p ,

$$\gamma \int_0^L \frac{1}{N_{\mathcal{P}}} \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P} \\ \sigma_{\bar{k}}^{\pi}(l) = \gamma}} \frac{\partial \delta_k \mathbf{u}}{\partial s_l} \left(\sum_p Q_{p,k}^{n+\gamma} \partial_x \varphi_{p,k}, \sum_p Q_{p,k}^{n-\gamma} \partial_x \varphi_{p,k}; \sum_{p,\bar{k} \neq k} Q_{p,\bar{k}}^{n+\sigma_{\bar{k}}^{\pi}(\bar{k})} \partial_x \varphi_{p,\bar{k}} \right) \partial_x \varphi_{p,l} \cdot \partial_x \varphi_{j,k}$$

Les mêmes problèmes que précédemment apparaissent dans les fonctions $\partial \delta_k \mathbf{u} / \partial s_{p,l}$ du fait de la présence du dénominateur, mais il peuvent être évités dans le cas particulier du modèle géométriquement exact comme expliqué dans l'annexe (F). Cependant, cela n'empêche pas que cette évaluation soit coûteuse en temps.

☛ Une troisième difficulté vient de l'inversion de cette matrice. Elle est évidemment creuse, mais la façon dont les inconnues et le schéma sont stockés va influencer la structure de cette matrice. Le solveur devra alors être adapté à la structure choisie. De plus, elle est très mal conditionnée du fait des coefficients physiques qui interviennent dans le problème, malgré un préconditionnement par la somme des termes de chaque ligne de la matrice.

Les deux derniers points (Jacobienne longue à évaluer et difficile à inverser) nous ont motivé à utiliser une quasi-méthode de Newton, au sens où nous ne ré-évaluons pas la Jacobienne à chaque itération de la méthode. Cette méthode s'écrit en toute généralité :

$$B_k \cdot (x_{k+1} - x_k) = -F(x_k) \tag{II.1.197}$$

où B_k est censée approcher $\nabla F(x_k)$ tout en étant plus simple à évaluer ou à inverser. Un choix classique est de poser

$$B_k = \nabla F(x_0) \tag{II.1.198}$$

et de procéder par exemple à une factorisation LU à la première itération de la méthode. On réutilise alors cette factorisation à toutes les itérations, ce qui donne déjà des résultats satisfaisants. Nous sommes même allés plus loin en ne demandant pas la réévaluation systématique de $\nabla F(x_0)$ à chaque pas de temps, mais uniquement lorsque le critère de convergence de la méthode itérative n'est pas atteint après le nombre maximal d'itérations autorisé.

• Enfin, le choix du point de départ est important car il conditionne la convergence de la méthode. Nous avons observé que l'itéré précédent à savoir \mathbf{Q}^n constituait un bon choix dès lors que Δt est assez petit.

Conséquence sur le schéma : un résidu numérique sur l'énergie. Lorsque le test d'arrêt est vérifié par l'itéré de Newton, la méthode s'arrête. Alors, $\mathcal{F}(\mathbf{Q}^{n+1}, \mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1}) \equiv F(\mathbf{Q}^{n+1}) \neq 0$. Or nous avons conçu les schémas tels que

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}^{n+1}, \mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1}) \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\mathcal{E}^{n+1/2} - \mathcal{E}^{n-1/2}}{\Delta t} - \mathcal{S}(\mathbf{Q}^{n+1}, \mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1}) - \mathcal{D}(\mathbf{Q}^{n+1}, \mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1})$$

où \mathcal{S} provient de la présence du terme source et \mathcal{D} est un terme de dissipation négatif. Nous en avons conclu que le schéma possédait une énergie qui, en l'absence de source et de dissipation, était conservée. Avec les considérations pragmatiques concernant la méthode de Newton, nous pouvons écrire qu'en fait, l'énergie est alors conservée à un terme d'erreur numérique près, noté $\mathcal{N}(\mathbf{Q}^{n+1}, \mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1})$:

$$\frac{\mathcal{E}^{n+1/2} - \mathcal{E}^{n-1/2}}{\Delta t} = \mathcal{S}(\mathbf{Q}^{n+1}, \mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1}) + \mathcal{D}(\mathbf{Q}^{n+1}, \mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1}) + \mathcal{N}(\mathbf{Q}^{n+1}, \mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1})$$

$$\text{où } \mathcal{N}(\mathbf{Q}^{n+1}, \mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1}) = F(\mathbf{Q}^{n+1}) \cdot \frac{\mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t} \text{ est de signe indéterminé.}$$

D'autre part, pour la factorisation LU et les résolutions par descente / remontée, nous utilisons deux solveurs numériques pour systèmes creux : PASTIX [Hénon et al., 2002] ou MUMPS [Amestoy et al., 2000], qui permettent d'inverser le système aux erreurs numériques près. Le choix de l'un ou l'autre aura certainement une influence sur ce terme d'erreur numérique. Cet argument a une grande importance lorsque le schéma est appliqué à un problème linéaire, auquel cas la méthode de Newton converge en une seule itération, ce qui n'empêche pas les erreurs numériques provenant de l'inversion du système linéaire (qui est alors toujours le même).

II.1.5.c Illustration numérique : conservation de l'énergie discrète

La figure II.8 montre des exemples numériques de ces phénomènes. L'expérience numérique consiste à prendre une donnée initiale sinusoïdale dans la direction verticale, nulle dans les autres (voir le tableau II.3 pour les valeurs numériques des paramètres). L'amortissement est nul ainsi que le second membre. Si le schéma était parfaitement résolu, l'énergie serait parfaitement conservée. On applique le schéma à un système d'équations linéaires (système de Timoshenko) en utilisant respectivement MUMPS et PASTIX pour la factorisation LU, et on observe la déviation relative de l'énergie Δ_n , définie par (II.1.199), en fonction du temps jusqu'à un temps final de 0.04 secondes correspondant à 4×10^4 pas de temps (figures II.8(a) et II.8(b)). Les énergies discrètes présentent une déviation standard normalisée de l'ordre de 10^{-15} pour MUMPS et de 10^{-12} pour PASTIX, et on observe deux comportements non corrélés qui ne semblent donc pas refléter autre chose qu'une erreur numérique lors de la factorisation LU et des étapes de résolution. Cependant, la suprématie de MUMPS en terme de précision mais aussi de rapidité sur ce cas test nous a incité à le choisir à long terme. La figure II.8(c) montre la déviation standard normalisée de l'énergie obtenue pour un système d'équations non linéaires (modèle géométriquement exact avec $N = 2$), qui est de l'ordre de 10^{-9} .

$$\Delta_n = \frac{\mathcal{E}^{n+1/2} - \bar{\mathcal{E}}}{\bar{\mathcal{E}}}, \quad \text{où } \bar{\mathcal{E}} = \sqrt{\sum_n (\mathcal{E}^{n+1/2})^2} \quad (\text{II.1.199})$$

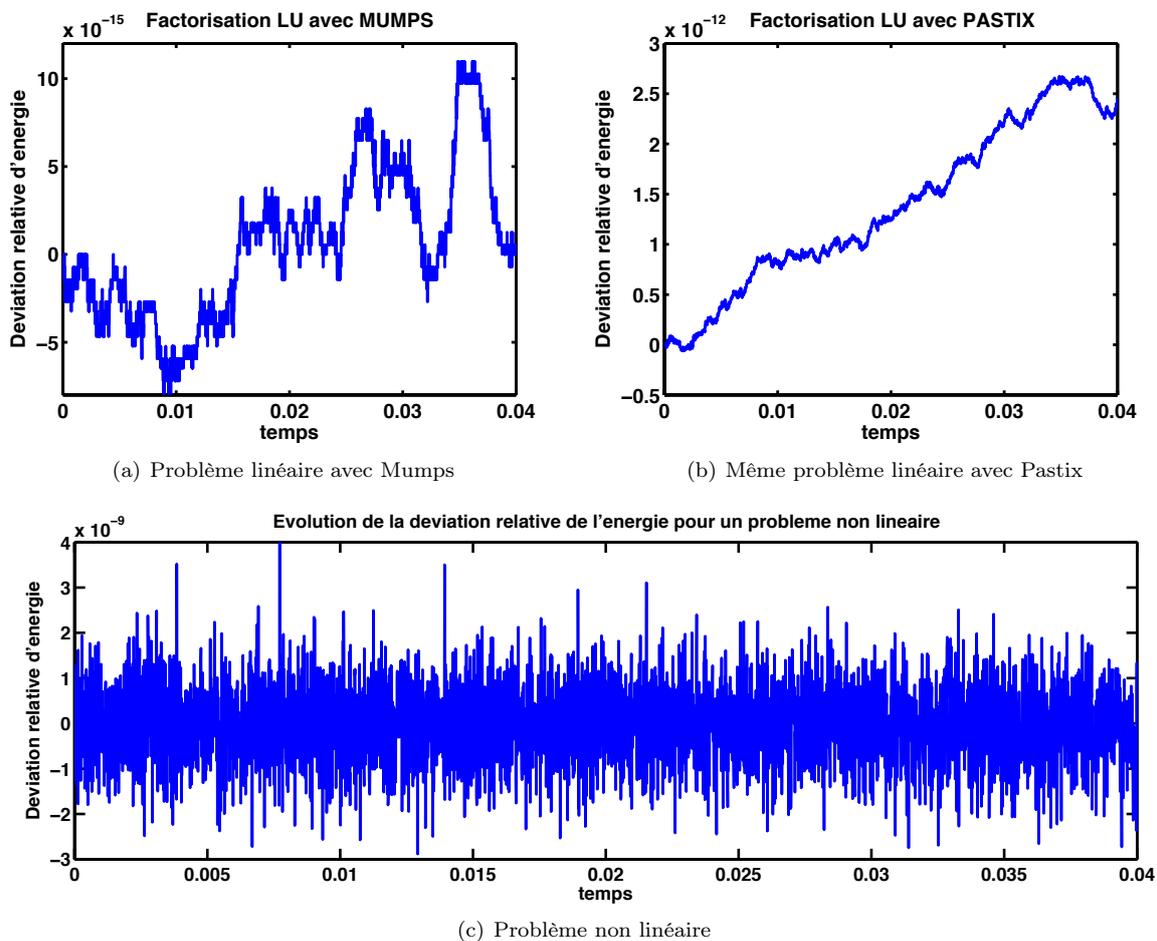


FIGURE II.8 – Influence du terme d'erreur numérique sur la conservation de l'énergie

L	A	ρ	T_0	E	I	G	κ	u_0
m	m^2	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	N	Pa	m^4	Pa	-	m
1,05	$9,8 \times 10^{-7}$	7850	800	2×10^{11}	$7,6 \times 10^{-14}$	$7,8 \times 10^{10}$	0,85	10^{-3}
N_x	Δt	θ	$\bar{\theta}$	\mathcal{P}	γ	ordre		
60	10^{-6}	1/4	1/4	Π_N	1/2	5		

TABLE II.3 – Valeurs des paramètres utilisés pour les simulations

II.2

Marteau et chœurs de cordes

Nous nous intéressons dans cette partie à la discrétisation du système (I.4.26) constitué d'un marteau caractérisé par son ordonnée $\xi(t)$ sur un axe vertical, et d'un choeur de N_c cordes, soumises à l'un des systèmes d'équations du paragraphe I.1.7.b choisi selon les phénomènes physiques considérés. On rappelle le système continu pour faciliter la lecture :

$$\begin{cases} M^{\mathcal{H}} \frac{d^2 \xi}{dt^2}(t) = - \sum_i F_i^{\mathcal{H}}(t) & \text{(II.2.1a)} \\ F_i^{\mathcal{H}}(t) = K_i^{\mathcal{H}} \Phi(\langle u_i \rangle(t) - \xi(t)) + R_i^{\mathcal{H}} \frac{d}{dt} \Phi(\langle u_i \rangle(t) - \xi(t)) & \text{(II.2.1b)} \\ \partial_t^2 \mathbf{M} \mathbf{q}_i + \partial_t (\mathbf{R} \mathbf{q}_i - \partial_x (\mathbf{H} \partial_x \mathbf{q}_i)) - \partial_x (\mathbf{A}_i \partial_x \mathbf{q}_i + \mathbf{B} \mathbf{q}_i + \nabla \mathbf{U}_i(\partial_x \mathbf{q}_i)) \\ \quad + {}^t \mathbf{B} \partial_x \mathbf{q}_i + \mathbf{C} \mathbf{q}_i = F_i^{\mathcal{H}}(t) \delta^{\mathcal{H}}(x - x^{\mathcal{H}}) \mathbf{e}_u, \quad \forall i & \text{(II.2.1c)} \end{cases}$$

La fonction d'interaction Φ entre le marteau et les cordes étant non linéaire (voir (I.2.8)), on ne peut pas facilement isoler la résolution des cordes et celle du marteau tout en conservant une énergie. En conséquence (et car l'inconnue scalaire du marteau ne constitue pas vraiment un coût supplémentaire par rapport aux cordes), on rajoute une inconnue au problème des cordes, et l'on traite l'interaction avec le marteau de façon centrée en temps, comme une nouvelle ligne dans le schéma. De plus, on prend en compte les choeurs de cordes en indiquant chaque corde par $i \in [1, N_c]$.

Introduisons la notation $\langle \cdot \rangle$ au niveau discret de façon analogue à la définition continue (I.2.6), et portant sur la composante u_i qui désigne le déplacement transversal de chaque corde :

$$\langle U_{i,h} \rangle = \oint_0^L u_{i,h}(x) \delta^{\mathcal{H}}(x - x^{\mathcal{H}}) dx \quad \text{(II.2.2)}$$

où $U_{i,h}$ est le vecteur des coordonnées de $u_{i,h}$ dans une base choisie de \mathcal{Q}_h , typiquement la base des fonctions de base éléments finis, et où le symbole de l'intégrale fait référence à l'utilisation d'une formule de quadrature pour l'intégration numérique. Définissons⁷ alors le vecteur $\langle \Delta_h \rangle$ permettant de traduire au niveau discret la répartition du couplage avec le marteau sur une zone de la corde :

$$\langle \Delta_h \rangle \cdot \mathbf{Q}^* := \langle U^* \rangle, \quad \forall \mathbf{q}^* \in \mathcal{Q}_h \quad \text{(II.2.3)}$$

où U^* représente la composante de vibration transversale de \mathbf{Q}^* , lui-même vecteur des coordonnées de \mathbf{q}^* dans la même base de \mathcal{Q}_h que précédemment.

On se rappelle que la fonction Ψ , primitive de Φ , intervient dans l'expression de l'énergie continue du système couplé (voir (I.2.15)). Nous aurons besoin ici de son taux d'accroissement (voir la définition II.1.2), qui s'écrit dans ce cas particulier :

$$\delta \Psi(a, b) = \begin{cases} \frac{\Psi(a) - \Psi(b)}{a - b} & \text{si } a \neq b \\ -\Phi(a) & \text{si } a = b \end{cases} \quad \text{(II.2.4)}$$

et qui vérifie en particulier

$$\delta \Psi(a, b) \times (a - b) = \Psi(a) - \Psi(b) \quad \text{(II.2.5)}$$

⁷ grâce au théorème de représentation de Riesz

Le schéma s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} M^{\mathcal{H}} [\xi]_{\Delta t^2}^n - \sum_{i=1}^{N_c} (F_i^{\mathcal{H}}) = 0 \quad (\text{II.2.6a}) \\ F_i^{\mathcal{H}} = K_i^{\mathcal{H}} \delta \Psi \left(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}, \langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1} \right) - \\ R_i^{\mathcal{H}} \frac{\Phi(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}) - \Phi(\langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1})}{2\Delta t} \quad (\text{II.2.6b}) \\ M_h [\mathbf{Q}_{i,h}]_{\Delta t^2}^n + R_h \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} + \underline{K}_{i,h} \{\mathbf{Q}_{i,h}\}_{\theta}^n + \overline{K}_h \{\mathbf{Q}_{i,h}\}_{\theta}^n \\ + \overline{\nabla}^{\mathcal{P}} \mathcal{U}_i(\mathbf{Q}_{i,h}^{n+\gamma}, \mathbf{Q}_{i,h}^{n-\gamma}) + (F_i^{\mathcal{H}}) \langle \Delta_h \rangle = \mathbf{S}_{i,h}^n \quad (\text{II.2.6c}) \end{array} \right.$$

On le complète avec des données initiales, qui concernent les deux premiers pas de temps :

$$\xi^0 = -\xi_0, \quad \xi^1 = -\xi_0 + v_0^{\mathcal{H}} \Delta t \quad (\text{II.2.7})$$

$$\mathbf{Q}_{i,h}^0 = \mathbf{Q}_{i,h}^1 = 0 \quad (\text{II.2.8})$$

II.2.1 Propriétés du schéma

THÉORÈME II.2.1 (*Énergie du schéma { marteau , chœur de cordes }*)

Toute solution numérique au système (II.2.6) vérifie la décroissance d'énergie suivante :

$$\frac{\mathcal{E}_{m,c}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{m,c}^{n-1/2}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N_c} \frac{R_i^{\mathcal{H}}}{4\Delta t^2} \left[\Phi(d_i^{n+1}) - \Phi(d_i^{n-1}) \right] \left[d_i^{n+1} - d_i^{n-1} \right] \\ - \sum_{i=1}^{N_c} \left\| \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_{R_h}^2 + \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{S}_{i,h}^n \cdot \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (\text{II.2.9})$$

$$\text{avec } \mathcal{E}_{m,c}^{n+1/2} = \sum_{i=1}^{N_c} \left[\mathcal{E}_{c,i}^{n+1/2} + K_i^{\mathcal{H}} \frac{\Psi(d_i^{n+1}) + \Psi(d_i^n)}{2} \right] + \frac{M^{\mathcal{H}}}{2} \left| \frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} \right|^2 \quad (\text{II.2.10})$$

où $\mathcal{E}_{c,i}^{n+1/2}$ est l'énergie (II.1.186) pour la corde numéro i et

$$d_i^{n+1} = \langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}, \quad d_i^n = \langle U_{i,h}^n \rangle - \xi^n, \quad d_i^{n-1} = \langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1}$$

DÉMONSTRATION. Étudions les transferts d'énergie entre les sous systèmes. Commençons par multiplier l'équation du marteau (II.2.6a) par $\frac{\xi^{n+1} - \xi^{n-1}}{2\Delta t}$, ce qui donne :

$$\frac{\mathcal{E}_{m,pot}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{m,pot}^{n-1/2}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N_c} (F_i^{\mathcal{H}}) \frac{\xi^{n+1} - \xi^{n-1}}{2\Delta t}, \quad \text{où } \mathcal{E}_{m,pot}^{n+1/2} = \frac{M^{\mathcal{H}}}{2} \left| \frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} \right|^2 \quad (\text{II.2.11})$$

D'autre part, multiplions l'équation de corde par $\frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t}$ et utilisons le théorème II.1.23 pour écrire que :

$$\frac{\mathcal{E}_{c,i}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{c,i}^{n-1/2}}{\Delta t} = -(F_i^{\mathcal{H}}) \frac{\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \langle U_{i,h}^{n-1} \rangle}{2\Delta t} - R_h \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} + \mathbf{S}_{i,h}^n \cdot \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (\text{II.2.12})$$

Sommons le premier résultat avec la somme sur toutes les cordes du second, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{m,pot}^{n+1/2} + \sum_i \mathcal{E}_{c,i}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{m,pot}^{n-1/2} - \sum_i \mathcal{E}_{c,i}^{n-1/2}}{\Delta t} + \sum_i (F_i^{\mathcal{H}}) \frac{(d_i^{n+1}) - (d_i^{n-1})}{2\Delta t} \\ = - \sum_{i=1}^{N_c} \left\| \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_{R_h}^2 + \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{S}_{i,h}^n \cdot \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \end{aligned}$$

Or d'après l'équation définissant $(F_i^{\mathcal{H}})$, et la propriété de $\delta\Psi$, on a :

$$(F_i^{\mathcal{H}}) \frac{(d_i^{n+1}) - (d_i^{n-1})}{2\Delta t} = \frac{K_i^{\mathcal{H}}}{2\Delta t} [\Psi(d_i^{n+1}) - \Psi(d_i^{n-1})] - R_i^{\mathcal{H}} \frac{\Phi(d_i^{n+1}) - \Phi(d_i^{n-1})}{4\Delta t^2} [(d_i^{n+1}) - (d_i^{n-1})]$$

On définit alors l'énergie du système complet par (II.2.10), et on obtient bien la relation escomptée. De plus, il s'agit bien d'une décroissance d'énergie car le second membre est négatif. En effet, Φ est décroissante, donc $\Phi(a) - \Phi(b)$ a le signe opposé à $a - b$. Leur produit est donc de signe négatif. Il suffit de prendre $a = \langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}$ et $b = \langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1}$.

□

THÉORÈME II.2.2 (*Stabilité du schéma marteau / cordes*)

Le schéma (II.2.6) est stable si et seulement si le schéma de corde est stable, c'est à dire sous les hypothèses du théorème II.1.24.

DÉMONSTRATION. La décroissance de l'énergie (II.2.10) dont chaque terme est positif (si le schéma de corde est stable) permet de montrer une borne supérieure sur l'énergie cinétique du marteau, qui permet de remonter à une borne sur l'inconnue ξ^n de la même façon que pour le théorème II.1.5.

□

REMARQUE II.2.1 (*Consistance du schéma*)

Ce système est consistant à l'ordre deux avec le système continu puisque $\Psi' = -\Phi$, ainsi :

$$\begin{aligned} K_i^{\mathcal{H}} \frac{\Psi(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}) - \Psi(\langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1})}{(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}) - (\langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1})} &= K_i^{\mathcal{H}} \Psi'(\langle U_{i,h}^n \rangle - \xi^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) = -K_i^{\mathcal{H}} \Phi(\langle U_{i,h}^n \rangle - \xi^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ R_i^{\mathcal{H}} \frac{\Phi(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}) - \Phi(\langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1})}{2\Delta t} &= R_i^{\mathcal{H}} \frac{d}{dt} \Phi(\langle U_{i,h}^n \rangle - \xi^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned}$$

II.2.2 Implémentation et résolution numérique

L'implémentation de ce schéma se base très largement sur l'implémentation des schémas (II.1.185). Elle passe par l'écriture du schéma sous la forme d'une fonctionnelle à annuler $F(\mathbf{X}^{n+1})$, où \mathbf{X}^{n+1} est un vecteur contenant toutes les inconnues du problème à l'instant t^{n+1} . En raison du couplage non linéaire entre le marteau et les cordes, et du comportement non linéaire des cordes elles-mêmes, il n'est pas possible d'effectuer un complément de Schur afin de découpler la résolution numérique sur les cordes. Ceci dit, le fait de résoudre de façon couplée le système marteau / cordes ne constituera pas vraiment un sur-coût par rapport à la résolution séparée sur les cordes, étant donné que le marteau représente une seule inconnue scalaire, lorsque les cordes sont représentées par un nombre d'inconnues de l'ordre de mille par corde.

On considère donc que la fonctionnelle à annuler est la concaténation de la fonctionnelle de chaque corde (couplée au marteau) et d'une ligne supplémentaire contenant la ligne (II.2.6a) du schéma, où la force est écrite directement en fonction des inconnues du problème. On annule alors cette fonctionnelle avec la méthode de quasi-Newton décrite au paragraphe II.1.5.b, pour laquelle il faut savoir évaluer la Jacobienne.

II.2.2.a Calcul de la Jacobienne

Les cordes n'étant couplées qu'au travers indirect du marteau, chaque corde est indépendante au sens où le schéma écrit sur une corde ne dépend pas des inconnues d'une autre corde, ce qui conduit à une

L	A	ρ	T_0	E	I	G	κ
m	m ²	kg·m ⁻³	N	Pa	m ⁴	Pa	-
1,05	$9,8 \times 10^{-7}$	7850	800	2×10^{11}	$7,6 \times 10^{-14}$	$7,8 \times 10^{10}$	0.85
$M^{\mathcal{H}}$	$x^{\mathcal{H}}$	$\Delta \delta^{\mathcal{H}}$	$v_0^{\mathcal{H}}$	p	$K^{\mathcal{H}}$		
kg	m	m	m·s ⁻¹	-	N·m ^{-p}		
0,066	0,127	0,02	1	2,1	10^7		
N_x	Δt	θ	$\bar{\theta}$	\mathcal{P}	γ	ordre	
60	$10^{-5,-6}$	1/4	1/4	Π_N	1/2	5	

TABLE II.4 – Valeurs des paramètres utilisés pour les simulations

matrice Jacobienne globalement diagonale par bloc (sauf pour les dernières ligne et colonne qui concernent le marteau). Il faut par contre calculer la dérivée du terme de couplage par rapport aux inconnues de marteau et de cordes. D'une part,

$$\frac{\partial F_i^{\mathcal{H}}}{\partial \xi^{n+1}} = -K_i^{\mathcal{H}} \frac{\partial \delta \Psi}{\partial a} \left(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}, \langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1} \right) + \frac{R_i^{\mathcal{H}}}{2\Delta t} \Phi' \left(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1} \right) \quad (\text{II.2.13})$$

et d'autre part, on se souvient de la définition de $\langle \cdot \rangle$ et du fait que le schéma est constitué de la ligne (II.2.6c) prise contre les fonctions test étant chaque fonction de base. La force $F_i^{\mathcal{H}}$ ne dépend que des inconnues de la corde numéro i . Notons $s_{i,p,l}$ l'inconnue correspondant à la corde numéro i , au nœud p et à la direction l , où les indices (p,l) font référence à la même décomposition des inconnues que dans II.1.5.b, tandis que la lettre « s » fait référence au fait que l'on dérive par rapport aux inconnues à l'instant t^{n+1} , conformément aux notations du paragraphe II.1.4. On calcule :

$$\frac{\partial \left[(F_i^{\mathcal{H}}) \langle \Phi_{j,k} \rangle \right]}{\partial s_{i,p,l}} (\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{p}) = - \frac{\partial F_i^{\mathcal{H}}}{\partial \xi^{n+1}} \langle \Phi_{p,l} \rangle \langle \Phi_{j,k} \rangle \quad (\text{II.2.14})$$

II.2.2.b Difficulté liée au quotient $\delta \Psi$

Une difficulté numérique provient de l'implémentation du taux d'accroissement $\delta \Psi$ qui intervient dans le système discret. En effet, la forme de la fonction Ψ ne nous permet plus d'utiliser la factorisation analytique du dénominateur que nous avons utilisé pour les taux d'accroissement directionnels apparaissant dans les schémas non linéaires de corde. Numériquement, nous sommes donc forcés d'introduire un paramètre de seuil $\varepsilon^{\mathcal{H}}$ et de calculer une version discrète de $\delta \Psi$:

$$\delta_h \Psi(a, b) = \begin{cases} \frac{\Psi(a) - \Psi(b)}{a - b} & \text{si } |a - b| > \varepsilon^{\mathcal{H}} \\ -\Phi(a) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.2.15})$$

Cette approximation ne sera pas sans effet sur la conservation de l'énergie, étant donné que le schéma que nous résolvons alors n'est plus exactement le schéma (II.2.6).

La figure II.9 montre l'influence de ce paramètre sur la conservation discrète de l'énergie. On lance un marteau vers une corde (voir le tableau II.4 qui donne les valeurs des paramètres physiques utilisés), qui est régie par un système d'équations soit linéaires (Timoshenko) soit non linéaire (modèle géométriquement exact). Nous répétons la même expérience pour deux pas de temps différents : 10^{-5} et 10^{-6} secondes. On voit que le choix du paramètre a effectivement une grande influence sur la qualité de la conservation de l'énergie. Il semble en fait que choisir le paramètre très petit (en dessous de 10^{-10}) permette une conservation de très bonne qualité, malgré la division par un très petit quotient. La figure II.10 montre la déviation relative d'énergie pour un paramètre $\varepsilon^{\mathcal{H}} = 10^{-16}$, et l'on peut voir l'effet des erreurs numériques liées au calcul du quotient tant que le marteau touche la corde (jusqu'à environ 0.01 secondes).

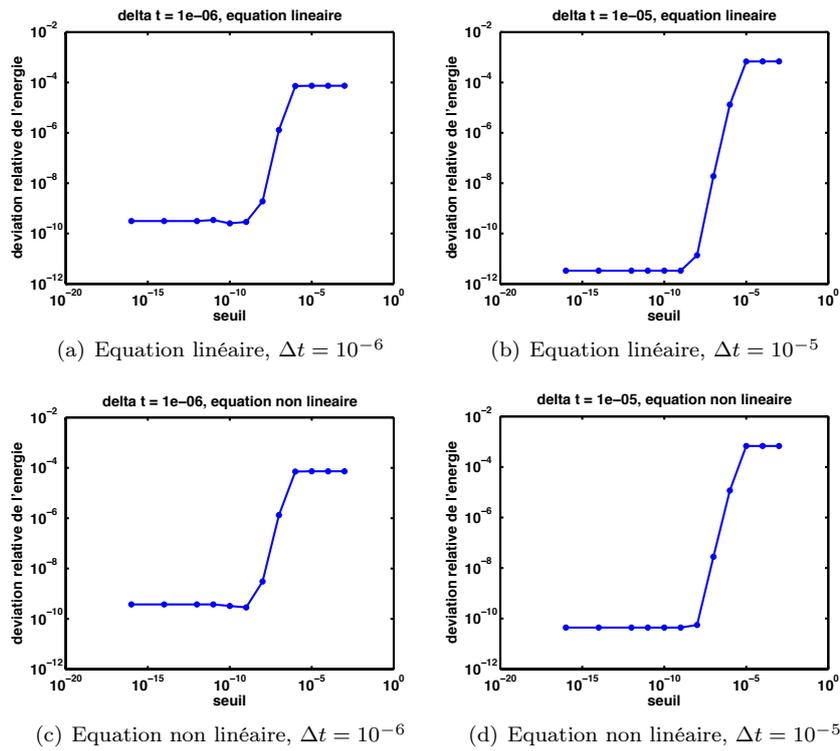


FIGURE II.9 – Déviation relative de l'énergie en fonction du paramètre de seuil du marteau

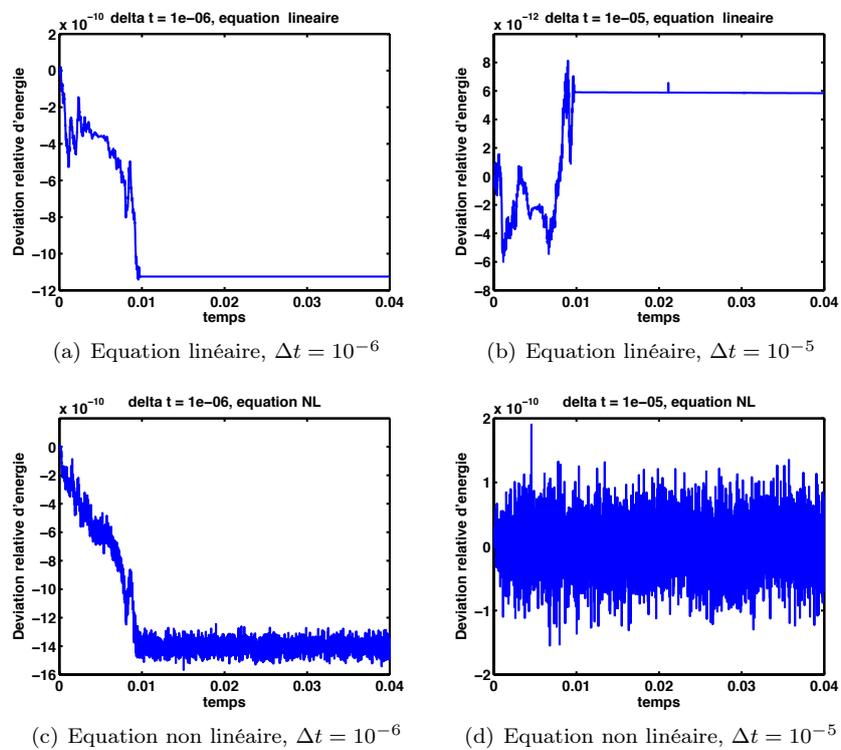


FIGURE II.10 – Déviation relative de l'énergie pour le plus petit paramètre de seuil du marteau : 10^{-16}

II.3

Table d'harmonie

Le modèle de table d'harmonie que nous avons écrit reposait sur le modèle de Reissner Mindlin auquel nous avons ajouté un terme de dissipation. Nous avons vu qu'il était possible d'écrire le système d'EDP sous la forme d'un ensemble d'EDO découplées en écrivant la solution dans la base des modes de l'opérateur, et que la forme d'amortissement que nous avons choisie (amortissement diagonal) conservait cette structure d'EDO découplées : chaque amplitude modale est solution d'une EDO amortie forcée :

$$\partial_t^2 \Lambda_{p,n} + f_{ve}(\lambda_n) \partial_t \Lambda_{p,n} + \lambda_n \Lambda_{p,n} = F_n \quad (\text{II.3.1})$$

où les couples (λ_n, w_n) sont les valeurs propres - vecteurs propres de $\mathbb{M}^{-1}\mathbb{R}$ (voir I.3.16) et on a décomposé la solution sur les modes :

$$\Lambda_p(x, y, t) = \sum_{n \geq 1} \Lambda_{p,n}(t) w_n(x, y) \quad (\text{II.3.2})$$

L'opérateur linéaire $f_{ve}(\mathbb{R})$ défini par I.3.20 qui permet de ré-exprimer ces EDO amorties comme une EDP peut alors être un opérateur non local, donc très difficile à discrétiser avec des méthodes classiques. C'est le cas si par exemple la fonction $f_{ve}(\lambda)$ est choisie en accord avec les mesures : elle comportera un terme en $\sqrt{\lambda}$ comme le suggère la remarque I.3.3.

Si l'on disposait analytiquement des valeurs propres et des vecteurs propres, on pourrait imaginer une méthode numérique qui consisterait à exprimer la solution sur un nombre fini de modes, ce qui reviendrait à tronquer la série (II.3.2). Il serait alors possible d'actualiser la valeur de chaque amplitude modale à un instant donné à partir de la connaissance de cette même amplitude modale et de sa dérivée à un instant antérieur, ainsi bien sûr que celle du second membre au cours du temps. Cette résolution analytique présenterait plusieurs intérêts. D'une part, elle sera très peu coûteuse, de plus, de par son caractère exact, elle n'introduirait pas d'amortissement numérique, ce qui est très appréciable dans un contexte d'acoustique musicale. Enfin, aucune condition particulière ne serait nécessaire à la stabilité de la méthode.

La difficulté majeure vient donc du fait que l'on ne dispose pas des vecteurs propres de l'opérateur continu de Reissner Mindlin. À notre connaissance, il n'est pas possible de les calculer analytiquement même sur une plaque carrée isotrope. Nous nous proposons, en adaptant l'approche de [Derveaux, 2002] qui avait considéré une équation de Kirchhoff Love appliquée à la table d'harmonie de la guitare, de les calculer numériquement, c'est à dire de procéder à une discrétisation spatiale du problème aux valeurs propres, grâce à la méthode des éléments finis d'ordre élevé, puis de chercher les vecteurs propres du système discret. Nous utiliserons ensuite ces vecteurs propres comme base de décomposition de la solution pour écrire les EDO découplées amorties mode par mode, procéder à leur résolution analytique en temps et tirer parti de tous les avantages cités ci dessus.

II.3.1 Calcul numérique des modes

L'objectif est de trouver une solution numérique au problème (I.3.27), à savoir :

$$\text{Trouver } w_n \in \mathcal{L}_D \text{ et } \lambda_n \in \mathbb{R}, \text{ tel que pour tout } \Lambda_p^* \in \mathcal{L}_D, \quad r(w_n, \Lambda_p^*) = \lambda_n m(w_n, \Lambda_p^*) \quad (\text{II.3.3})$$

$$\text{où } \mathcal{L}_D = \left\{ \Lambda_p = {}^t(u_p, \underline{\theta}_p) \in (H^1(\omega))^3, \quad (\Lambda_p)_k = 0 \text{ sur } \partial\omega \forall k \in \mathcal{J}_D \right\} \quad (\text{II.3.4})$$

La discrétisation en espace des modèles de plaque est un sujet délicat. Les méthodes usuelles souffrent d'un phénomène appelé verrouillage numérique, qui se traduit par le fait que leurs constantes d'erreur explosent quand l'épaisseur de la plaque tend vers zéro. Plusieurs phénomènes sont à l'origine de ce comportement, on peut en distinguer deux principaux : le « shear locking » et la présence de couches limites, dont nous essayons ici de donner une intuition.

D'une part, rappelons l'expression de r donnée en I.3.26 : pour tous $(\Lambda_p, \Lambda_p^*) \in \mathcal{L}_D$,

$$r(\Lambda_p, \Lambda_p^*) = \int_{\omega} \frac{\delta^3}{12} \mathbf{C} \varepsilon(\underline{\theta}_p) : \varepsilon(\underline{\theta}_p^*) + \int_{\omega} \delta \kappa^2 \cdot \underline{G} \cdot (\underline{\nabla} u_p + \underline{\theta}_p) \cdot (\underline{\nabla} u_p^* + \underline{\theta}_p^*)$$

où δ est l'épaisseur de la plaque, petite devant les autres dimensions. On voit formellement que si on considère que δ tend vers zéro, le terme prépondérant sera le second terme. On peut interpréter le problème de Reissner Mindlin comme un problème variationnel auquel on cherche à imposer la contrainte $\kappa^2 \cdot \underline{G} \cdot (\nabla u_p + \underline{\theta}_p) = 0$ par pénalisation, l'épaisseur de la plaque jouant le rôle du paramètre de pénalisation. Un soin particulier doit alors être apporté à la recherche d'une famille d'espaces variationnels discrets, qui ne dégénère pas lorsque l'épaisseur tend vers zéro. On qualifie alors la discrétisation de « robuste ». De nombreuses méthodes numériques ont été développées pour éviter ce verrouillage, souvent basées sur une formulation mixte du problème [Arnold et Brezzi, 1997, Chapelle, 1998].

D'autre part, la convergence peut être gênée par la présence de couches limites dans le modèle de Reissner Mindlin, c'est à dire des composantes de la solution à décroissance exponentielle dans un voisinage des bords de la plaque, dont la dimension est de l'ordre de l'épaisseur de la plaque (voir l'article d'encyclopédie de [Dauge et al., 2004]). Ainsi, tant que le maillage est trop grossier pour capter ce phénomène, on n'observe pas de convergence de la solution numérique vers la solution de référence, effectuée sur un maillage très fin. On peut cependant s'affranchir de coûts inutiles en pratiquant un raffinement de maillage de taille optimale au voisinage du bord, voir [Dauge et al., 2004].

Dans la suite, nous avons choisi d'utiliser simplement des éléments finis H^1 d'ordre élevé, dans un premier temps. Il semble en effet que cette technique, bien que sujette au verrouillage numérique, permette de réduire son apparition, voir [Cohen et Grob, 2007]. Il serait bien sûr très intéressant d'étudier dans quelle mesure il serait possible d'adopter une méthode non verrouillante, en gardant à l'idée que l'objectif ultime est de réaliser un couplage conservatif avec non seulement l'acoustique mais aussi les cordes.

II.3.1.a Éléments finis H^1 d'ordre élevé

La méthode des éléments finis repose sur la construction d'un maillage ω_h de ω de taille $h > 0$, c'est à dire une partition constituée d'une famille de N_e quadrangles $\{K_i, 1 \leq i \leq N_e\}$ tels que :

$$\omega = \bigcup_i^{N_e} K_i \quad \text{et} \quad K_i \cap K_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j, \quad h = \max_i \text{diam}(K_i) \quad (\text{II.3.5})$$

où $\text{diam}(K_i)$ est le diamètre du quadrangle, défini par exemple dans [Durufflé et al., 2009]. On aura besoin des transformations F_j qui associent au carré unité $[0, 1]^2$ le quadrangle K_j . Ces transformations, en toute généralité, ne sont pas affines. Considérons alors la famille $\{\mathcal{L}_h, h > 0\}$ de sous espaces vectoriels de \mathcal{L}_D définis par

$$\mathcal{L}_h = \{\Lambda_h \in \mathcal{L}_D, \quad \Lambda_h|_{K_i} \circ F_i \in [\mathbb{Q}_r]^3\} \quad (\text{II.3.6})$$

où \mathbb{Q}_r est l'espace engendré par $\{x^i y^j, \quad 1 \leq i, j \leq r\}$. Ces espaces vérifient la propriété d'approximation

$$\forall \Lambda_p \in \mathcal{L}_D, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{\Lambda_h \in \mathcal{L}_h} \|\Lambda_p - \Lambda_h\| = 0 \quad (\text{II.3.7})$$

On choisit enfin la position des degrés de liberté sur le carré unité, chaque degré de liberté étant associé à une fonction de base qui est un polynôme d'interpolation de Lagrange sur ces points. Le choix des points de Gauss-Lobatto permet d'obtenir une convergence exponentielle de l'erreur L^2 entre une fonction et son interpolée, quand l'ordre r tend vers l'infini, contrairement au choix de points régulièrement espacés, pour lesquels on voit apparaître le phénomène d'oscillations de Runge. Les points de Gauss-Lobatto sur le carré unité sont obtenus comme le produit tensoriel des points de Gauss-Lobatto sur le segment $[0, 1]$. Pour une méthode d'ordre r , on aura $(r+1)^2$ points notés $(\hat{\xi}_\ell, 1 \leq \ell \leq (r+1)^2)$, auxquels sont associées $(r+1)^2$ fonctions de base $(\hat{\varphi}_\ell, 1 \leq \ell \leq (r+1)^2)$ vérifiant

$$\hat{\varphi}_\ell(\hat{\xi}_k) = \delta_{\ell,k} \quad (\text{où } \delta \text{ désigne le symbole de Kronecker}) \quad (\text{II.3.8})$$

On définit alors les fonctions de base sur tout élément K_e comme la transformée des fonctions de base définies sur le carré unité :

$$\varphi_{e,\ell} = \hat{\varphi}_\ell \circ F_e^{-1} \quad (\text{II.3.9})$$

Sur chaque élément K_e , la restriction de toute solution numérique s'écrit comme une combinaison linéaire des fonctions de base :

$$\Lambda_h|_{K_e} = \sum_{\ell=1}^{(r+1)^2} \Lambda_{e,\ell} \varphi_{e,\ell} \quad (\text{II.3.10})$$

On notera Λ_h^{EF} le vecteur des composantes de Λ_h dans la base des éléments finis composée de l'ensemble des fonctions de base de tous les éléments $\{\varphi_{e,i}, 1 \leq e \leq N_e, 1 \leq i \leq (r+1)^2\}$. Soulignons que le nombre total de degrés de liberté n'est pas $N_e \times (r+1)^2$ car certains degrés de liberté qui sont situés sur les arêtes sont communs à plusieurs éléments et n'apparaissent donc pas dupliqués dans le vecteur global de composantes, ce qui assure la continuité en conformité avec (II.3.6).

II.3.1.b Résolution numérique du problème aux valeurs propres

Le problème aux valeurs propres approché écrit sur \mathcal{L}_h est le suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } w_{h,n} \in \mathcal{L}_h \text{ et } \lambda_{h,n} \in \mathbb{R}, \text{ tel que pour tout } \Lambda_h^* \in \mathcal{L}_h, \\ &r(w_{h,n}, \Lambda_h^*) = \lambda_{h,n} m(w_{h,n}, \Lambda_h^*) \end{aligned} \quad (\text{II.3.11})$$

En prenant dans cette formulation variationnelle $\Lambda_p^* = \varphi_{e,i}$ pour tout élément et pour tout degré de liberté, et en appelant $W_{h,n}$ le vecteur des composantes de $w_{h,n}$ dans la base éléments finis, on peut définir deux matrices \mathbb{M}_h et \mathbb{R}_h telles que le problème s'écrive sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbb{R}_h W_{h,n} = \lambda_{h,n} \mathbb{M}_h W_{h,n} \quad (\text{II.3.12})$$

REMARQUE II.3.1 (*Quadrature numérique*)

La quadrature numérique prend toute son importance à ce niveau du problème. Le choix particulier de la quadrature de Gauss-Lobatto sur les quadrangles permet en effet de réaliser la condensation de masse (voir [Cohen, 2004]) qui rend la matrice de masse \mathbb{M}_h diagonale sans perte de précision sur la méthode numérique.

Or, la matrice symétrique réelle \mathbb{R}_h est diagonalisable dans une base \mathbb{M}_h -orthogonale. Il existe une matrice diagonale \mathbb{D}_h , et une matrice de changement de base \mathbb{P}_h , orthogonale pour le produit scalaire engendré par \mathbb{M}_h telles que

$$\begin{cases} {}^t\mathbb{P}_h \mathbb{R}_h \mathbb{P}_h = \mathbb{D}_h \\ {}^t\mathbb{P}_h \mathbb{M}_h \mathbb{P}_h = \mathbb{I}_d \end{cases} \quad (\text{II.3.13})$$

REMARQUE II.3.2 (*Résolution du problème aux valeurs propres*)

En pratique, nous chercherons à résoudre numériquement le problème (II.3.12) et non pas la diagonalisation complète (II.3.13). Nous nous sommes servis de la bibliothèque ARPACK (<http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK/>) qui permet de résoudre des problèmes aux valeurs propres pour systèmes creux de grande taille, avec une méthode itérative. Ce solveur est cependant moins robuste si la matrice \mathbb{M}_h n'est pas diagonale. En effet, il faut d'abord procéder à une factorisation de Cholesky, puis résoudre un problème satellite avant de revenir aux solutions désirées. C'est la raison de notre choix de la quadrature numérique de Gauss-Lobatto associée à un maillage quadrangulaire, qui permet de rendre la matrice de masse diagonale.

Les solutions à (II.3.12) sont les couples $(W_{h,n}, \lambda_{h,n})$ constitués de la n^e colonne de \mathbb{P}_h et du n^e élément de la matrice diagonale \mathbb{D}_h :

$$\mathbb{D}_h = \text{diag}((\lambda_{h,n})_n) \quad (\text{II.3.14})$$

L'ensemble des $(W_{h,n})_n$ constitue une nouvelle base de vecteurs propres discrets dans laquelle on peut exprimer tout élément Λ_h de \mathcal{L}_h . Notons Λ_h^{mod} le vecteur de ses composantes dans cette nouvelle base (rappelons que le vecteur de ses composantes dans la base éléments finis était Λ_h^{EF}). Alors on peut exprimer le changement de base de la façon suivante :

$$\begin{cases} \Lambda_h^{EF} &= \mathbb{P}_h \Lambda_h^{mod} \\ \Lambda_h^{mod} &= {}^t\mathbb{P}_h \mathbb{M}_h \Lambda_h^{EF} \end{cases} \quad (\text{II.3.15})$$

II.3.1.c Validation numérique

Nous ne disposons pas de solutions analytiques au problème continu (II.3.3), c'est pourquoi nous avons choisi de procéder à une validation numérique par comparaison à un modèle élastodynamique 3D et à l'expérience.

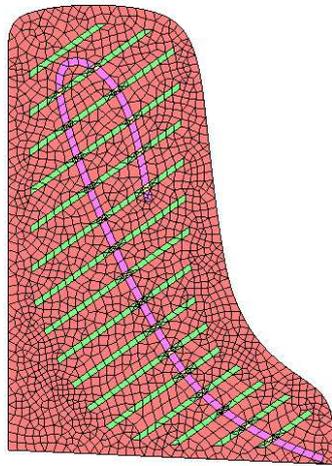
La première comparaison est faite avec les modes propres du problème d'élastodynamique sur la table d'harmonie vue comme un objet tridimensionnel. Un maillage volumique est réalisé par extrusion du maillage surfacique, comme l'illustre la figure II.11. L'extrusion permet de préciser différents matériaux au fur et à mesure de l'épaisseur, de façon à représenter la configuration réelle, à savoir que les matériaux sont collés les uns aux autres. On applique la méthode des éléments finis d'ordre cinq à la recherche de valeurs propres de l'opérateur de l'élastodynamique linéaire (voir l'annexe et en particulier l'équation (E.1.2)), en prenant le tenseur de rigidité correspondant à chaque matériau orthotrope selon les formules (E.1.4). D'autre part, on applique la méthode des éléments finis d'ordre cinq au problème de recherche des valeurs propres de l'opérateur de plaque de Reissner Mindlin, comme précisé ci dessus. La table d'harmonie est constituée d'une plaque d'épicéa épaisse de 9 mm orientée à -40 degrés par rapport aux axes cartésiens, de seize chevalets épais de 25 mm constitués également d'épicéa mais orientés à $54,4$ degrés, et d'un chevalet épais de 20 mm constitué de hêtre orienté à -40 degrés. Les valeurs des paramètres physiques utilisés sont rappelés en table II.5

bois	ρ	E_x	E_y	E_z	G_{xy}	G_{xz}	G_{yz}	ν_{xy}	ν_{xz}	ν_{yz}
	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	GPa	GPa	GPa	GPa	GPa	GPa	-	-	-
Épicéa	390	11,6	0,9	0,5	0,75	0,72	0,039	0,37	0,47	0,43
Hêtre	750	13,7	2,24	1,114	1,61	1,06	0,46	0,3	0,3	0,3

TABLE II.5 – Valeurs des paramètres mécaniques utilisés pour la table d'harmonie

La figure II.12 montre la comparaison des fréquences propres obtenues par le modèle de l'élastodynamique tridimensionnelle (rond bleus) et le modèle de Reissner Mindlin (carrés rouges). On peut tout d'abord remarquer une très bonne concordance à basses fréquences. A hautes fréquences, le modèle de Reissner Mindlin semble surestimer les fréquences propres par rapport au modèle de l'élastodynamique. En addition à l'erreur de modèle inhérente, on peut argumenter que le modèle tridimensionnel possède des modes orientés dans les directions orthogonales à la direction de flexion, en particulier dans l'épaisseur. Il se peut que certains de ces modes se soient intercalés parmi les modes de flexion, se traduisant par une sous estimation des fréquences propres lors de la comparaison avec le modèle de plaque, qui lui ne voit pas les modes tridimensionnels. Seule une étude précise de chacun des (mille deux cent) modes permettrait de lever cette difficulté.

La figure II.13 montre les vingt premières déformées modales pour les deux modèles : on choisit de comparer les modes selon la direction de u_p pour le modèle de Reissner Mindlin avec les modes selon la direction u_3 projetés sur le plan moyen pour le modèle de l'élastodynamique. Les modes sont classés par fréquences propres associées croissantes, et sont mis en vis à vis. La comparaison est très satisfaisante. On a pu remarquer sur la figure II.12(a) que certains modes présentent un écart de fréquence plus important entre le 2D et le 3D que les autres, en particulier les modes 5, 8 et 11. Les déformées modales nous enseignent qu'il s'agit de modes ayant des nœuds horizontaux, faisant donc intervenir un mouvement de flexion du chevalet. Or, le modèle de plaque n'est pas laminé, au sens où pour écrire le modèle, on considère que la plaque a un matériau constant sur toute l'épaisseur. Ainsi, lorsque nous précisons le matériau du chevalet sur la zone adéquate, le modèle de plaque se représente que le matériau traverse toute la plaque et non pas seulement la partie supérieure. Il en résulte un apparent raidissement de la plaque, qui se traduit par une sous-estimation des fréquences associées à des modes sollicitant cette direction. On s'aperçoit enfin que quelques modes ont été échangés (15 - 16 ou 19 - 20), ce que nous expliquons par le fait que leurs fréquences propres associées dans le modèle de l'élastodynamique sont très proches (voir figure II.12(a)).



(a) maillage surfacique de la table



(b) maillage volumique de la table : dessus



(c) maillage volumique de la table : côté



(d) maillage volumique de la table : dessous

FIGURE II.11 – Maillages de la table d'harmonie prenant en compte le chevalet et les raidisseurs. Un maillage volumique est réalisé par extrusion du maillage surfacique.

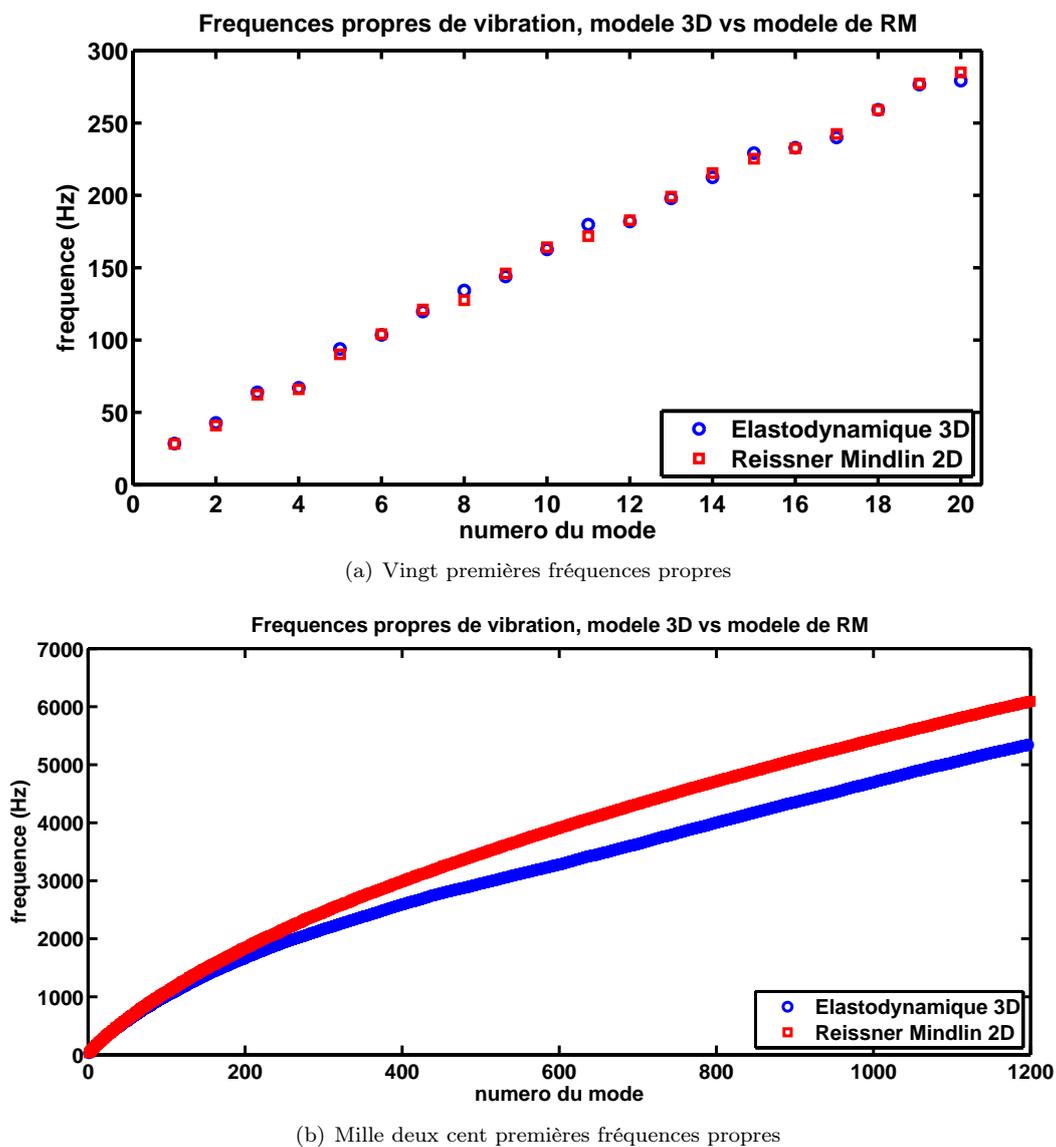


FIGURE II.12 – Premières fréquences propres de la table d'harmonie, obtenues par la recherche de valeurs propres sur le modèle d'élastodynamique tridimensionnelle (ronds bleus) et par le modèle de Reissner Mindlin (carrés rouges).

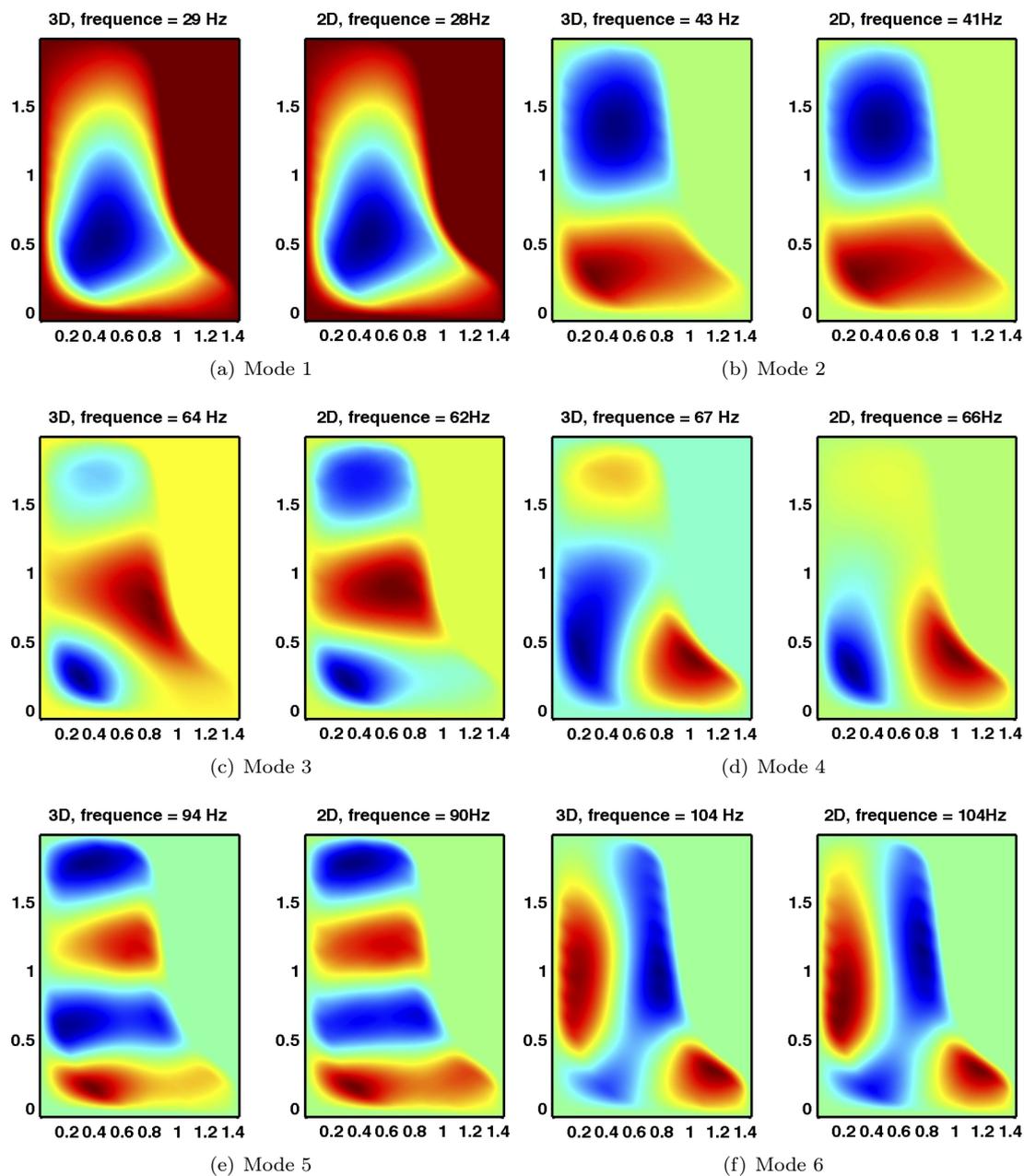


FIGURE II.13 – Comparaison des premières déformées modales obtenues avec le modèle de l'élastodynamique (à gauche) et le modèle de Reissner Mindlin (à droite).

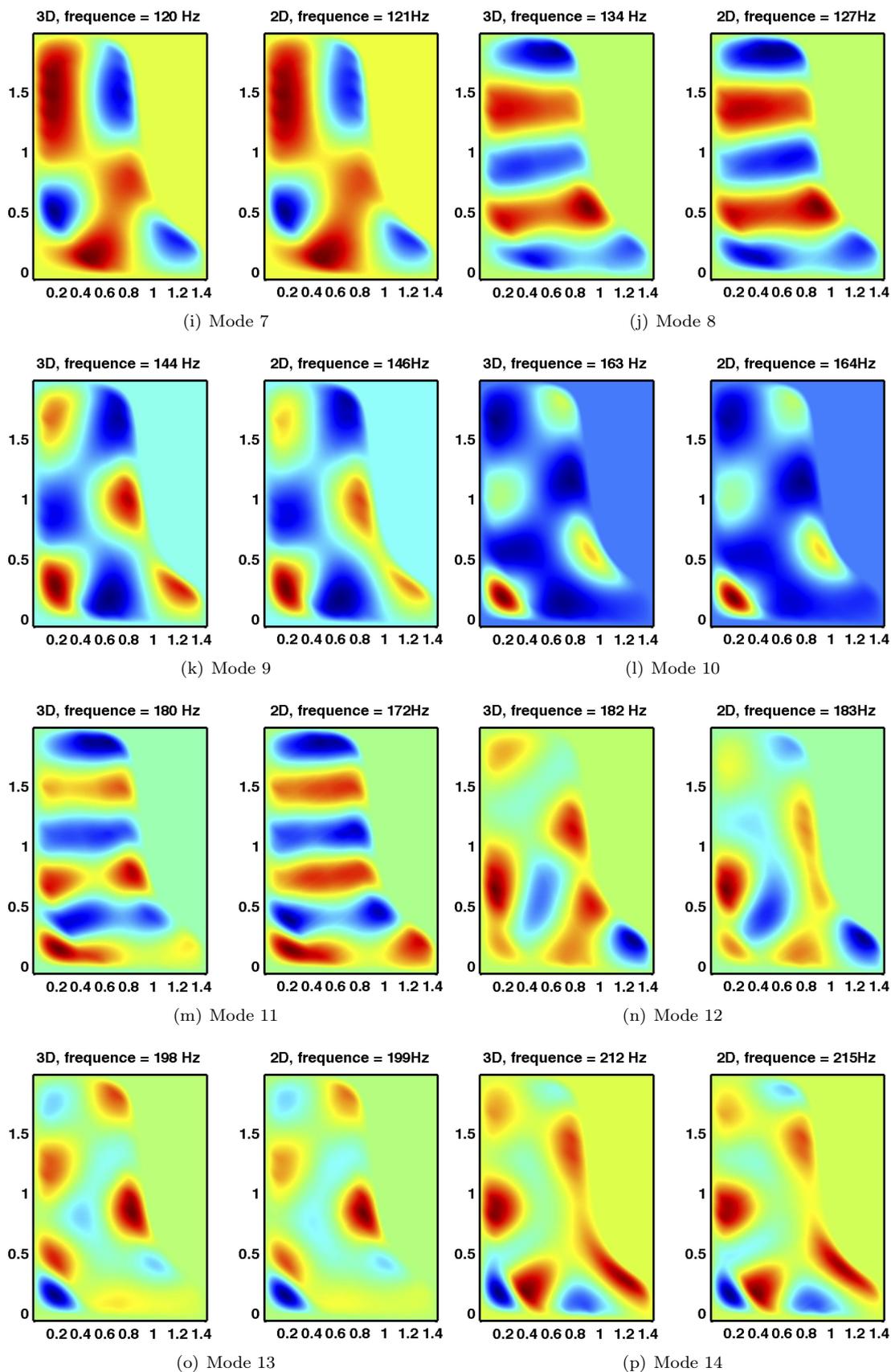


FIGURE II.13 – Comparaison des premières déformées modales obtenues avec le modèle de l'élastodynamique (à gauche) et le modèle de Reissner Mindlin (à droite) : suite.

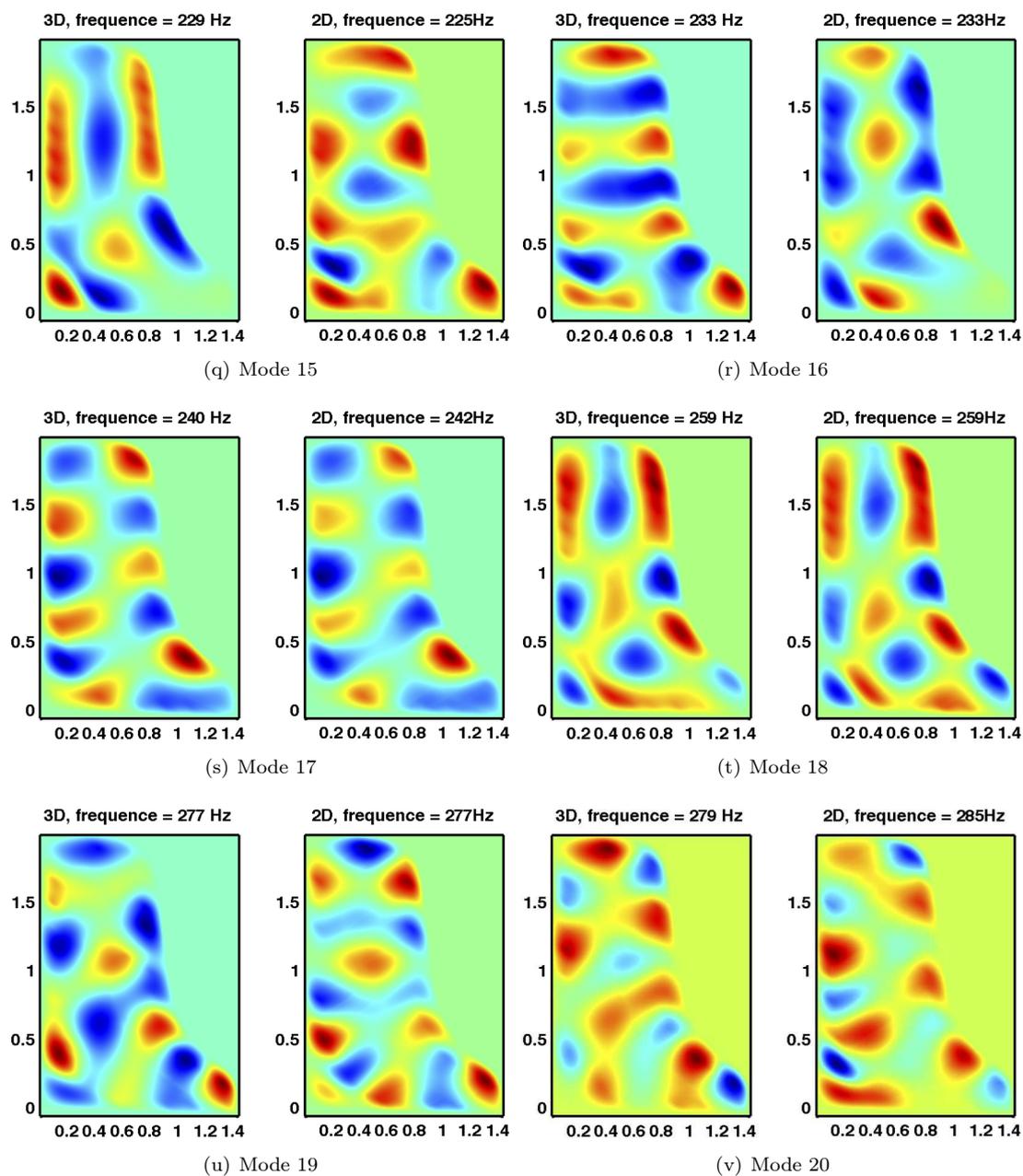


FIGURE II.13 – Comparaison des premières déformées modales obtenues avec le modèle de l'élastodynamique (à gauche) et le modèle de Reissner Mindlin (à droite) : fin.

La deuxième comparaison que nous proposons se base sur la thèse de [Lambourg, 1997] dans laquelle l’auteur caractérise de façon très précise les paramètres des plaques dont il mesure les fréquences propres. Nous avons choisi deux cas nommés a1 et b1 dans le mémoire : une plaque isotrope en aluminium et une plaque orthotrope en épicea, pour laquelle les axes d’orthotropie coïncident avec les directions de la plaque.

ρ	E_x	ν_{xy}	l_x	l_y	l_z
kg.m ⁻³	GPa	-	mm	mm	mm
2660	69,64	0,332	304	192	2

TABLE II.6 – Valeurs des paramètres physiques pour la plaque a1 (aluminium isotrope)

ρ	E_x	E_y	G_{xy}	G_{xz}	G_{yz}	ν_{xy}	l_x	l_y	l_z
kg.m ⁻³	GPa	GPa	Gpa	Gpa	GPa	-	mm	mm	mm
388	12,1	0,64	0,66	<i>1,2</i>	<i>0,042</i>	0,26	515	412,5	4,8

TABLE II.7 – Valeurs des paramètres physiques pour la plaque b1 (épicea orthotrope)

Le protocole expérimental consiste à suspendre la plaque au plafond, à l’exciter soit avec un haut parleur, soit un marteau d’impact, et à recueillir un signal de vibration soit avec un vibromètre laser, soit un couple de microphones. L’extraction des paramètres modaux est faite par une analyse paramétrique basée sur la méthode ESPRIT, dont les fréquences propres de vibration. Cette extraction permet également de remonter aux paramètres physiques de la plaque. Les paramètres physiques proposés par l’expérimentateur sont rappelés dans les tables II.6 et II.7. Seuls les paramètres en italique sont issus de la littérature, les autres sont retrouvés par cette méthode de caractérisation.

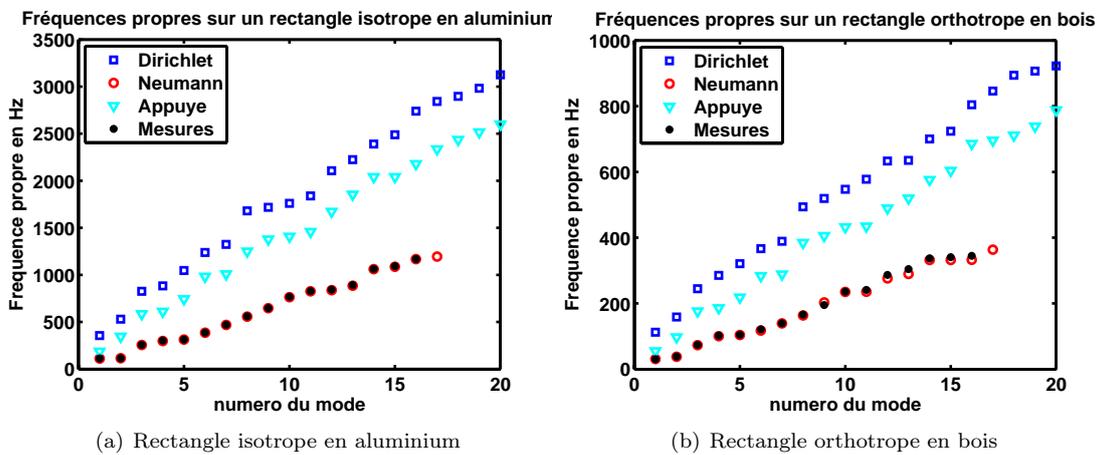


FIGURE II.14 – Comparaison expérience - simulation : fréquences propres de vibration de deux plaques. Les résultats de simulation sont montrés pour différents types de conditions aux limites : carré bleu pour Dirichlet, cercle rouge pour Neumann, triangle cyan pour appuyé. Les résultats de mesure sont issus de [Lambourg, 1997] et représentés en noir.

Les simulations numériques sont faites sur un maillage régulier de tailles respectives 1,5 cm pour la plaque a1 et 2,55 cm pour la plaque b1. On utilise des éléments finis d’ordre 3, ce qui fait un calcul avec 7320 degrés de liberté pour la plaque a1 et 8967 pour la plaque b1. On répète le calcul pour chaque plaque pour trois conditions aux limites différentes : conditions de Dirichlet homogène, conditions de Neumann homogène et conditions simplement supportées (ou encore appuyées) qui consistent à imposer des conditions de Dirichlet homogène à l’inconnue en flexion (u_p) et des conditions de Neumann homogène

aux autres inconnues. Pour revenir à la notation de la définition de l'espace variationnel (II.3.4), ces trois choix correspondent à changer l'ensemble \mathcal{J}_D : pour Dirichlet homogène, $\mathcal{J}_D = \{1, 2, 3\}$, pour Neumann homogène, $\mathcal{J}_D = \emptyset$ et pour les conditions appuyées, $\mathcal{J}_D = \{1\}$.

La comparaison des simulations avec les expériences est très concluante, les conditions aux limites de la configuration suspendue semblent être très bien représentées par les conditions de Neumann homogène. Le cas de la plaque orthotrope est un peu moins satisfaisant, mais certains paramètres avaient été pris de la littérature, ce qui peut induire un biais.

II.3.2 Décomposition sur les modes numériques

Rappelons la formulation variationnelle continue non amortie :

Trouver $\Lambda_p \in \mathcal{L}_D$ tel que

$$\partial_t^2 m(\Lambda_p, \Lambda_p^*) + r(\Lambda_p, \Lambda_p^*) = \int_{\omega} F \cdot \Lambda_p^*, \quad \forall \Lambda_p^* \in \mathcal{L}_D \quad (\text{II.3.16})$$

$$\text{où } \mathcal{L}_D = \left\{ \Lambda_p = {}^t(u_p, \theta_p) \in (H^1(\omega))^3, \quad (\Lambda_p)_k = 0 \text{ sur } \partial\omega \quad \forall k \in \mathcal{J}_D \right\} \quad (\text{II.3.17})$$

Le problème approché non amorti s'écrit donc :

Trouver $\Lambda_h \in \mathcal{L}_h$ tel que

$$\partial_t^2 m(\Lambda_h, \Lambda_h^*) + r(\Lambda_h, \Lambda_h^*) = \int_{\omega} F \cdot \Lambda_h^*, \quad \forall \Lambda_h^* \in \mathcal{L}_D \quad (\text{II.3.18})$$

ou encore, sous forme matricielle,

$$\partial_t^2 \mathbb{M}_h \Lambda_h^{EF} + \mathbb{R}_h \Lambda_h^{EF} = F_h \quad (\text{II.3.19})$$

Multiplions à présent cette équation à gauche par ${}^t\mathbb{P}_h$, on peut alors utiliser les relations (II.3.13) et (II.3.15) pour obtenir :

$$\partial_t^2 \Lambda_h^{mod} + \mathbb{D}_h \Lambda_h^{mod} = {}^t\mathbb{P}_h F_h \quad (\text{II.3.20})$$

Il s'agit d'un ensemble d'EDO découplées soumises à un second membre, à l'image de ce que nous avons obtenu après décomposition modale sur le système continu. On réalise alors au niveau discret l'analogie de l'amortissement diagonal au niveau continu, c'est à dire que l'on va imposer un amortissement inhérent à chaque mode numérique, en utilisant la fonction f_{ve} issue des mesures : on introduit la matrice \mathbb{A}_h qui est une matrice diagonale définie comme

$$\mathbb{A}_h = f_{ve}(\mathbb{D}_h) = \text{diag}((f_{ve}(\lambda_{h,n}))_n) \quad (\text{II.3.21})$$

Le système semi discret à amortissement diagonal s'écrit :

$$\partial_t^2 \Lambda_h^{mod} + \partial_t \mathbb{A}_h \Lambda_h^{mod} + \mathbb{D}_h \Lambda_h^{mod} = {}^t\mathbb{P}_h F_h \quad (\text{II.3.22})$$

REMARQUE II.3.3 (Troncature des modes numériques)

Le raisonnement présenté ici est toujours valide si on tronque la matrice de changement de base \mathbb{P}_h aux N_m premiers vecteurs propres (la rendant rectangulaire), ce qui revient à ne considérer que les N_m premières valeurs propres de la matrice \mathbb{D}_h . Ce choix mène à un ensemble découplé de N_m EDO amorties (et non pas le nombre de degrés de liberté du maillage), qui régissent la dynamique des amplitudes modales sur les premiers modes numériques. Cette approche est intéressante car d'une part, elle réduit le coût de calcul, et d'autre part elle permet de se débarrasser des derniers modes issus de la méthode éléments finis, qui de toute façon n'ont plus vraiment de signification physique (voir la remarque II.1.1).

II.3.3 Résolution analytique en temps

La résolution de (II.3.22) sera faite d'un pas de temps à l'autre comme dans la thèse [Derveaux, 2002], avec une méthode exacte. La solution est la somme des solutions du problème homogène à données initiales et du problème à second membre, que l'on peut expliciter en commençant par le cas scalaire.

II.3.3.a Résolution analytique d'une EDO scalaire

Le système (II.3.22) est un système d'EDO découplées que l'on peut voir de façon générale comme des équations scalaires de la forme suivante, avec $(\alpha, \lambda) \in (\mathbb{R}^+)^2$:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + 2\alpha \dot{u}(t) + \lambda^2 u(t) = f(t), \\ u(t_0) = u_0, \dot{u}(t_0) = u_1. \end{cases} \quad (\text{II.3.23})$$

On les considère depuis un instant t_0 non nul en prévision du fait que de la méthode numérique utilisera les résultats suivants à chaque intervalle de temps, pour calculer la solution à l'instant $t^{n+1/2}$ en la connaissant à l'instant $t^{n-1/2}$. Par linéarité, on peut exprimer la solution de cette équation comme

$$u(t) = u_H(t - t_0) + u_f(t) \quad (\text{II.3.24})$$

où u_H et u_f sont respectivement solutions de :

$$\begin{cases} \begin{cases} \ddot{u}_H(t) + 2\alpha \dot{u}_H(t) + \lambda^2 u_H(t) = 0, \\ u_H(0) = u_0, \dot{u}_H(0) = u_1. \end{cases} & (\text{II.3.25a}) \\ \begin{cases} \ddot{u}_f(t) + 2\alpha \dot{u}_f(t) + \lambda^2 u_f(t) = f(t), \\ u_f(t_0) = 0, \dot{u}_f(t_0) = 0. \end{cases} & (\text{II.3.25b}) \end{cases}$$

① La résolution de la première EDO est classique, on considère deux cas différents selon le signe du discriminant de l'équation du second degré $r^2 + 2\alpha r + \lambda^2 = 0$:

→ Si $|\alpha| < \lambda$, on pose $\tilde{\lambda} = \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}$. Les racines du polynôme sont complexes, on peut donc exprimer la solution $u_H(t)$ de la façon suivante :

$$u_H(t) = e^{-\alpha t} \left[u_0 \cos(\tilde{\lambda} t) + \frac{u_1 + \alpha u_0}{\tilde{\lambda}} \sin(\tilde{\lambda} t) \right] \quad (\text{II.3.26})$$

→ Si $|\alpha| \geq \lambda$, on pose $\tilde{\lambda} = \sqrt{\alpha^2 - \lambda^2}$. Les racines du polynôme sont réelles, on peut donc exprimer la solution $u_H(t)$ de la façon suivante :

$$u_H(t) = e^{-\alpha t} \left[u_0 \cosh(\tilde{\lambda} t) + \frac{u_1 + \alpha u_0}{\tilde{\lambda}} \sinh(\tilde{\lambda} t) \right] \quad (\text{II.3.27})$$

② La résolution de la seconde EDO peut passer par la méthode élégante de la détermination d'une fonction de Green. En effet, si l'on introduit $G_{\alpha, \lambda}$ la solution de

$$\begin{cases} \ddot{G}_{\alpha, \lambda}(t) + 2\alpha \dot{G}_{\alpha, \lambda}(t) + \lambda^2 G_{\alpha, \lambda}(t) = 0, \\ G_{\alpha, \lambda}(0) = 0, \dot{G}_{\alpha, \lambda}(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{II.3.28})$$

alors (en multipliant (II.3.25b) pris en une variable s par $G_{\alpha, \lambda}(t - s)$ à t constant, en intégrant sur la variable s entre t_0 et t , et en effectuant plusieurs intégrations par parties) la solution $u_f(t)$ peut être exprimée comme une convolution :

$$u_f(t) = \int_{t_0}^t f(s) G_{\alpha, \lambda}(t - s) ds = \int_0^{t-t_0} f(s + t_0) G_{\alpha, \lambda}(t - t_0 - s) ds. \quad (\text{II.3.29})$$

La détermination de $G_{\alpha, \lambda}$ est aussi simple que celle de $u_H(t)$ (on prend simplement $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$) :

→ Si $|\alpha| < \lambda$, on pose $\tilde{\lambda} = \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}$.

$$G_{\alpha, \lambda}(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\tilde{\lambda}} \sin(\tilde{\lambda} t) \quad (\text{II.3.30})$$

→ Si $|\alpha| \geq \lambda$, on pose $\tilde{\lambda} = \sqrt{\alpha^2 - \lambda^2}$.

$$G_{\alpha,\lambda}(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\tilde{\lambda}} \sinh(\tilde{\lambda}t) \quad (\text{II.3.31})$$

Nous introduisons les opérateurs $s_{\alpha,\lambda}$ et r_{α,λ,t_0} qui associent respectivement à (u_0, u_1) et à f les solutions des équations décrites par (II.3.25) :

$$\begin{cases} s_{\alpha,\lambda}[u_0, u_1](t) = u_H(t) & \text{telle que (II.3.25a)} \\ r_{\alpha,\lambda,t_0}[f](t) = u_f(t) & \text{telle que (II.3.25b)} \end{cases} \quad (\text{II.3.32})$$

II.3.3.b Résolution analytique d'un système diagonal

$$\text{Considérons le système diagonal } \begin{cases} \ddot{U}(t) + \mathbb{A} \dot{U}(t) + \mathbb{D} U(t) = F(t), \\ U(t_0) = U_0, \dot{U}(t_0) = U_1. \end{cases} \quad (\text{II.3.33})$$

Soit $\mathcal{S}_t(U_0, U_1)$ la solution du problème homogène à données initiales U_0 et U_1 , et $\mathcal{R}_{t,t_0}(F)$ la solution du problème entre t_0 et t à données initiales nulles et second membre F . On a, puisque le système est diagonal,

$$\begin{cases} \mathcal{S}_t : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \left(\mathcal{S}_t(U_0, U_1) \right)_i = s_{\alpha_i, \lambda_i}[(U_0)_i, (U_1)_i](t) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{R}_{t,t_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \left(\mathcal{R}_{t,t_0}(F) \right)_i = r_{\alpha_i, \lambda_i, t_0}[(F)_i](t) \end{cases} \quad \forall i \in [1, n] \quad (\text{II.3.34})$$

où l'on a introduit les α_i et λ_i tels que $\mathbb{A} = \text{diag}(2\alpha_i)$ et $\mathbb{D} = \text{diag}(\lambda_i^2)$. Vu les expressions donnés plus haut, on voit que l'on peut exprimer $\mathcal{S}_t(U_0, U_1)$ matriciellement comme

$$\mathcal{S}_t(U_0, U_1) = \mathcal{S}_t^0 U_0 + \mathcal{S}_t^1 U_1, \quad \text{avec } \mathcal{S}_t^0 \text{ et } \mathcal{S}_t^1 \text{ diagonales :} \quad (\text{II.3.35})$$

$$\begin{cases} \mathcal{S}_t^0 = \text{diag}\left(e^{-\alpha_i t} \left[\cos(\tilde{\lambda}_i t) + \frac{\alpha_i}{\tilde{\lambda}_i} \sin(\tilde{\lambda}_i t) \right]\right) & \text{ou } \text{diag}\left(e^{-\alpha_i t} \left[\cosh(\tilde{\lambda}_i t) + \frac{\alpha_i}{\tilde{\lambda}_i} \sinh(\tilde{\lambda}_i t) \right]\right) \end{cases} \quad (\text{II.3.36a})$$

$$\begin{cases} \mathcal{S}_t^1 = \text{diag}\left(\frac{e^{-\alpha_i t}}{\tilde{\lambda}_i} \sin(\tilde{\lambda}_i t)\right) & \text{ou } \text{diag}\left(\frac{e^{-\alpha_i t}}{\tilde{\lambda}_i} \sinh(\tilde{\lambda}_i t)\right) \end{cases} \quad (\text{II.3.36b})$$

(selon le signe de $|\alpha_i| - \lambda_i$) tandis que \mathcal{R}_{t,t_0} est un opérateur qui agit diagonalement mais est non local en temps :

$$\left(\mathcal{R}_{t,t_0}(F) \right)_i = \int_{t_0}^t F_i(s) G_{\alpha_i, \lambda_i}(t-s) ds \quad (\text{II.3.37})$$

Alors, la solution vectorielle $U(t)$ du problème (II.3.33) s'écrit

$$U(t) = \mathcal{S}_t^0 U_0 + \mathcal{S}_t^1 U_1 + \mathcal{R}_{t,t_0}(F). \quad (\text{II.3.38})$$

II.3.3.c Cas d'un second membre constant

Le second membre du système de table d'harmonie est, dans le contexte du piano, destiné à provenir de l'interaction avec les cordes et avec l'air avoisinant. Il s'agira donc de quantités discrètes, qui d'un pas de temps à l'autre, seront considérées constantes. Il est donc intéressant de préciser l'expression de l'opérateur \mathcal{R}_{t,t_0} dans ce cas particulier, qui se simplifie beaucoup. En effet, F ne dépendant plus du temps, la convolution (II.3.29) devient une simple multiplication. Détaillons le calcul pour le cas scalaire :

$$u_f(t) = f \int_0^{t-t_0} G_{\alpha,\lambda}(t-t_0-s) ds = f \underbrace{\int_0^{t-t_0} G_{\alpha,\lambda}(s) ds}_{\tilde{G}_{\alpha,\lambda}(t-t_0)} \quad (\text{II.3.39})$$

L'opérateur $\mathcal{R}_{t,t_0}(F)$ devient alors une simple multiplication matricielle $\mathcal{R}_{t-t_0}F$ où $\mathcal{R}_{t-t_0} = \text{diag}(\tilde{G}_{\alpha_i, \lambda_i}(t-t_0))$. On peut alors exprimer simplement ces termes :

→ Si $|\alpha| < \lambda$,

$$\tilde{G}_{\alpha, \lambda}(t) = \frac{1}{\tilde{\lambda}\lambda^2} \left[\tilde{\lambda}(1 - e^{-\alpha t} \cos(\tilde{\lambda}t)) - \alpha e^{-\alpha t} \sin(\tilde{\lambda}t) \right] \quad (\text{II.3.40})$$

→ Si $|\alpha| \geq \lambda$,

$$\tilde{G}_{\alpha, \lambda}(t) = \frac{1}{\tilde{\lambda}\lambda^2} \left[\tilde{\lambda}(1 - e^{-\alpha t} \cosh(\tilde{\lambda}t)) - \alpha e^{-\alpha t} \sinh(\tilde{\lambda}t) \right] \quad (\text{II.3.41})$$

II.3.3.d Actualisation des dérivées

De même, il est possible de calculer explicitement la dérivée de la solution en introduisant les opérateurs de résolution

$$\dot{\mathcal{S}}_t^0 = \frac{d\mathcal{S}_t^0}{dt}, \quad \dot{\mathcal{S}}_t^1 = \frac{d\mathcal{S}_t^1}{dt} \quad \text{et} \quad \dot{\mathcal{R}}_t = \frac{d\mathcal{R}_t}{dt} \quad (\text{II.3.42})$$

Alors,

$$\partial_t U(t) = \dot{\mathcal{S}}_{t-t_0}^0 U_0 + \dot{\mathcal{S}}_{t-t_0}^1 U_1 + \dot{\mathcal{R}}_{t-t_0} F. \quad (\text{II.3.43})$$



Considérons le problème

$$\begin{cases} \ddot{U}(t) + \mathbb{A} \dot{U}(t) + \mathbb{D} U(t) = F, \\ U(t_0) = U_0, \quad \dot{U}(t_0) = U_1. \end{cases} \quad (\text{II.3.44})$$

où $\mathbb{A} = \text{diag}(2\alpha_i)$ et $\mathbb{D} = \text{diag}(\lambda_i^2)$. La solution et sa dérivée s'écrivent comme

$$U(t) = \mathcal{S}_{t-t_0}^0 U_0 + \mathcal{S}_{t-t_0}^1 U_1 + \mathcal{R}_{t-t_0} F \quad (\text{II.3.45})$$

$$\partial_t U(t) = \dot{\mathcal{S}}_{t-t_0}^0 U_0 + \dot{\mathcal{S}}_{t-t_0}^1 U_1 + \dot{\mathcal{R}}_{t-t_0} F \quad (\text{II.3.46})$$

où les opérateurs sont des matrices diagonales et s'écrivent, avec $\tilde{\lambda}_i = \sqrt{|\alpha_i^2 - \lambda_i^2|}$

	Si $ \alpha_i < \lambda_i$	Si $ \alpha_i \geq \lambda_i$
$(\mathcal{S}_t^0)_{i,i}$	$e^{-\alpha_i t} \left[\cos(\tilde{\lambda}_i t) + \frac{\alpha_i}{\tilde{\lambda}_i} \sin(\tilde{\lambda}_i t) \right]$	$e^{-\alpha_i t} \left[\cosh(\tilde{\lambda}_i t) + \frac{\alpha_i}{\tilde{\lambda}_i} \sinh(\tilde{\lambda}_i t) \right]$
$(\mathcal{S}_t^1)_{i,i}$	$\frac{e^{-\alpha_i t}}{\tilde{\lambda}_i} \sin(\tilde{\lambda}_i t)$	$\frac{e^{-\alpha_i t}}{\tilde{\lambda}_i} \sinh(\tilde{\lambda}_i t)$
$(\mathcal{R}_t)_{i,i}$	$\frac{1}{\tilde{\lambda}_i \lambda_i^2} \left[\tilde{\lambda}_i (1 - e^{-\alpha_i t} \cos(\tilde{\lambda}_i t)) - \alpha_i e^{-\alpha_i t} \sin(\tilde{\lambda}_i t) \right]$	$\frac{1}{\tilde{\lambda}_i \lambda_i^2} \left[\tilde{\lambda}_i (1 - e^{-\alpha_i t} \cosh(\tilde{\lambda}_i t)) - \alpha_i e^{-\alpha_i t} \sinh(\tilde{\lambda}_i t) \right]$
$(\partial_t \mathcal{S}_t^0)_{i,i}$	$-\alpha_i (\mathcal{S}_t^0)_{i,i} + e^{-\alpha_i t} \left[-\tilde{\lambda}_i \sin(\tilde{\lambda}_i t) + \alpha_i \cos(\tilde{\lambda}_i t) \right]$	$-\alpha_i (\mathcal{S}_t^0)_{i,i} + e^{-\alpha_i t} \left[\tilde{\lambda}_i \sinh(\tilde{\lambda}_i t) + \alpha_i \cosh(\tilde{\lambda}_i t) \right]$
$(\partial_t \mathcal{S}_t^1)_{i,i}$	$-\alpha_i (\mathcal{S}_t^1)_{i,i} + e^{-\alpha_i t} \cos(\tilde{\lambda}_i t)$	$-\alpha_i (\mathcal{S}_t^1)_{i,i} + e^{-\alpha_i t} \cosh(\tilde{\lambda}_i t)$
$(\partial_t \mathcal{R}_t)_{i,i}$	$\frac{e^{-\alpha_i t}}{\tilde{\lambda}_i} \sin(\tilde{\lambda}_i t)$	$\frac{e^{-\alpha_i t}}{\tilde{\lambda}_i} \sinh(\tilde{\lambda}_i t)$

II.3.4 Schéma en temps pour la table d'harmonie

Comme nous l'avons souligné depuis le début de ce chapitre concernant la discrétisation du système général de piano, notre vœu sera de garantir la stabilité numérique par une technique énergétique. Pour cela, nous traiterons les couplages de telle sorte qu'ils n'introduisent aucune dissipation numérique, c'est à dire que toute énergie perdue par un sous système en raison d'un couplage sera gagnée par un autre. En anticipant un peu sur le couplage avec les cordes qui fera l'objet du paragraphe suivant II.4, nous verrons que le choix qui nous permettra de réaliser un couplage non dissipatif sera de décaler la grille de temps sur la table d'harmonie par rapport à celle des cordes. Ainsi, l'énergie des cordes comme celle de la table seront centrées autour des instants $t^{n+1/2}$, et les termes de couplage seront écrits de façon à ce qu'ils se compensent lors du calcul global de l'énergie.

Le second membre $F_h(t)$ imposé à la table d'harmonie est, comme nous l'avons dit, destiné à provenir du couplage avec les cordes et avec l'air avoisinant. Après discrétisation du système des cordes et de la propagation du son, cette quantité ne dépendra plus continuellement du temps, mais sera échantillonnée à intervalles réguliers. Nous verrons dès le paragraphe suivant II.4 que nous ferons le choix de le considérer constant sur les intervalles du type $[t^{n-1/2}, t^{n+1/2}]$ et égal à $f_h(t^n)$. Montrons ici comment les méthodes développées ci dessus s'appliquent à notre équation soumise à un second membre constant par morceaux. Il convient d'écrire l'équation sur le laps de temps pendant lequel le second membre est constant, soit entre $t^{n-1/2}$ et $t^{n+1/2}$, et de résoudre le problème aux données initiales et second membre :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \Lambda_h^{mod} + \partial_t \mathbb{A}_h \Lambda_h^{mod} + \mathbb{D}_h \Lambda_h^{mod} = {}^t \mathbb{P}_h F_h(t^n), & \forall t \in [t^{n-1/2}, t^{n+1/2}] \\ \Lambda_h^{mod}(t = t^{n-1/2}) = \Lambda_h^{mod, n-1/2}, & \partial_t \Lambda_h^{mod}(t = t^{n-1/2}) = \partial_t \Lambda_h^{mod, n-1/2} \end{cases} \quad (\text{II.3.47})$$

La solution et sa dérivée s'expriment au temps $t^{n+1/2}$ en fonction de leurs valeurs à l'instant $t^{n-1/2}$ et de la valeur du second membre, grâce aux matrices précisées précédemment :

$$\begin{cases} \Lambda_h^{mod}(t^{n+1/2}) = \mathcal{S}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod, n-1/2} + \mathcal{S}_{\Delta t}^1 \partial_t \Lambda_h^{mod, n-1/2} + \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h F_h(t^n) \\ \partial_t \Lambda_h^{mod}(t^{n+1/2}) = \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod, n-1/2} + \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}^1 \partial_t \Lambda_h^{mod, n-1/2} + \dot{\mathcal{R}}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h F_h(t^n) \end{cases} \quad (\text{II.3.48})$$

THÉORÈME II.3.1 (Énergie du système modal de plaque)

Toute solution à (II.3.47) vérifie

$$\frac{\mathcal{E}_p^{n+1/2} - \mathcal{E}_p^{n-1/2}}{\Delta t} = {}^t \mathbb{P}_h F_h(t^n) \cdot \frac{\Lambda_h^{mod}(t^{n+1/2}) - \Lambda_h^{mod}(t^{n-1/2})}{\Delta t} - \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \|\partial_t \Lambda_h^{mod}\|_{\mathbb{A}_h}^2 \quad (\text{II.3.49})$$

$$\text{où} \quad \mathcal{E}_p^{n+1/2} = \frac{1}{2} \|\partial_t \Lambda_h^{mod, n+1/2}\|^2 + \frac{1}{2} \|\Lambda_h^{mod, n+1/2}\|_{\mathbb{D}_h}^2 \quad (\text{II.3.50})$$

$$= \frac{1}{2} \|\partial_t \Lambda_h^{EF, n+1/2}\|_{\mathbb{M}_h}^2 + \frac{1}{2} \|\Lambda_h^{EF, n+1/2}\|_{\mathbb{R}_h}^2 \quad (\text{II.3.51})$$

DÉMONSTRATION. Prenons le produit scalaire de (II.3.47) par $\partial_t \Lambda_h^{mod}(t)$ et intégrons en temps entre $t^{n-1/2}$ et $t^{n+1/2}$:

$$\int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} (\partial_t^2 \Lambda_h^{mod} + \partial_t \mathbb{A}_h \Lambda_h^{mod} + \mathbb{D}_h \Lambda_h^{mod} - {}^t \mathbb{P}_h F_h(t^n)) \cdot \partial_t \Lambda_h^{mod} = 0$$

$$\int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \partial_t^2 \Lambda_h^{mod} \cdot \partial_t \Lambda_h^{mod} + \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \mathbb{D}_h \Lambda_h^{mod} \cdot \partial_t \Lambda_h^{mod} = \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} ({}^t \mathbb{P}_h F_h(t^n) \cdot \partial_t \Lambda_h^{mod} - \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \mathbb{A}_h \partial_t \Lambda_h^{mod} \cdot \partial_t \Lambda_h^{mod})$$

$$\int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\partial_t \Lambda_h^{mod}\|^2 \right) + \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\Lambda_h^{mod}\|_{\mathbb{D}_h}^2 \right) = {}^t \mathbb{P}_h F_h(t^n) \cdot \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \partial_t \Lambda_h^{mod} - \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \|\partial_t \Lambda_h^{mod}\|_{\mathbb{A}_h}^2$$

$$\frac{1}{2} \left(\|\partial_t \Lambda_h^{mod, n+1/2}\|^2 - \|\partial_t \Lambda_h^{mod, n-1/2}\|^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\|\Lambda_h^{mod, n+1/2}\|_{\mathbb{D}_h}^2 - \|\Lambda_h^{mod, n-1/2}\|_{\mathbb{D}_h}^2 \right) =$$

$${}^t \mathbb{P}_h F_h(t^n) \cdot (\Lambda_h^{mod, n+1/2} - \Lambda_h^{mod, n-1/2}) - \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \|\partial_t \Lambda_h^{mod}\|_{\mathbb{A}_h}^2$$

On a utilisé le fait que $F_h(t^n)$ est constant sur l'intervalle $[t^{n-1/2}, t^{n+1/2}]$. En posant

$$\mathcal{E}_p^{n+1/2} = \frac{1}{2} \|\partial_t \Lambda_h^{mod, n+1/2}\|^2 + \frac{1}{2} \|\Lambda_h^{mod, n+1/2}\|_{\mathbb{D}_h}^2 \quad (\text{II.3.52})$$

on a l'identité :

$$\frac{\mathcal{E}_p^{n+1/2} - \mathcal{E}_p^{n-1/2}}{\Delta t} = {}^t \mathbb{P}_h F_h(t^n) \cdot \frac{\Lambda_h^{mod, n+1/2} - \Lambda_h^{mod, n-1/2}}{\Delta t} - \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \|\partial_t \Lambda_h^{mod}\|_{\mathbb{A}_h}^2 \quad (\text{II.3.53})$$

La réinterprétation dans la base éléments finis se fait à travers les formules (II.3.15).

□

II.4

Couplage au chevalet

L'objet de ce paragraphe est de réaliser la discrétisation du système couplé de marteau, cordes et table d'harmonie. Pour cela, nous nous appuyons sur les trois paragraphes précédents, qui traitent respectivement de la discrétisation des cordes, du système { marteau - cordes }, et de la table d'harmonie. Nous avons dans ces paragraphes fait des choix concernant la discrétisation de chaque sous système, en lien avec les difficultés particulières qui apparaissent dans chaque cas : non-linéarité des équations de corde, du couplage entre le marteau et les cordes, mais aussi volonté de reproduire un amortissement diagonal pour la table d'harmonie. En conséquence, des méthodes très différentes ont été proposées pour la discrétisation en temps de chacun des sous systèmes : un schéma à trois points non linéaire pour le système { marteau - cordes }, un schéma aux demis pas de temps avec résolution analytique pour la table d'harmonie. Un point commun de ces méthodes est leur capacité à préserver ou dissiper une énergie discrète d'un pas de temps à l'autre, de façon consistante avec la dissipation de l'énergie physique du système. Nous avons fait en sorte que ces énergies soient centrées aux pas de temps du type $t^{n+1/2}$, dans l'optique anticipée du problème couplé. Dans ce paragraphe, nous allons proposer une méthode qui garantit la conservation d'une énergie globale et l'efficacité en temps de calcul, au sens où les mises à jour des inconnues sur les différents sous-systèmes seront faites de façon séparée. Ce n'est pas une propriété immédiate, car la volonté de dissiper une énergie discrète nous amènera à écrire les conditions de couplage entre les cordes et la table d'harmonie de façon centrée, reliant implicitement les inconnues des différents sous systèmes. Nous allons voir que c'est l'introduction de multiplicateurs de Lagrange suivie de l'exécution d'un complément de Schur qui nous permettra de réaliser le découplage numérique souhaité.

Le couplage entre les cordes et la table d'harmonie passe par la condition cinématique traduisant d'une part la continuité des vitesses de cordes et de table dans la direction du chevalet, et d'autre part la nullité des vitesses de cordes dans la direction orthogonale au chevalet. Du point de vue continu, rappelons que cette condition s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{q}}_i(x=L, t) \cdot \underline{\nu} = \int_{\omega} \dot{u}_p(x, y, t) \chi_{\omega}(x, y) dx dy \\ \dot{\mathbf{q}}_i(x=L, t) \cdot \underline{\tau} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.4.1a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{q}}_i(x=L, t) \cdot \underline{\nu} = \int_{\omega} \dot{u}_p(x, y, t) \chi_{\omega}(x, y) dx dy \\ \dot{\mathbf{q}}_i(x=L, t) \cdot \underline{\tau} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.4.1b})$$

où $\underline{\nu}$ et $\underline{\tau}$ sont les vecteurs généralisés⁸ introduits en 1.4.2, et $\chi_{\omega}(x, y)$ est la fonction de répartition sur la table d'harmonie.

Cette condition de couplage fait partie des conditions dites essentielles, traduisant une contrainte cinématique, par opposition aux conditions dites naturelles qui traduisent une continuité de force. Les conditions essentielles peuvent être traitées de différentes façons, l'une d'entre elles étant de les imposer dans les espaces d'approximation. Dans ce cas, le découplage numérique, souhaité en vue de l'efficacité en temps de calcul, rend peu naturelle l'implémentation. Un autre approche consiste à introduire comme nouvelles inconnues au problème des multiplicateurs de Lagrange qui matérialiseront les forces associées aux conditions de couplage, et de considérer ces conditions comme des équations supplémentaires. C'est cette méthode que nous avons choisie. Voyons à quel système elle conduit avant de montrer comment la résolution peut se faire de manière séparée sur les différents sous systèmes grâce à un complément de Schur.

II.4.1 Schéma pour le système couplé

Le choix de traiter du couplage des cordes et de la table d'harmonie au chevalet avec des multiplicateurs de Lagrange permet de considérer comme espace variationnel continu pour les cordes l'espace suivant⁹

$$\mathcal{Q}_D = \left\{ \mathbf{q} \in (H^1([0, L]))^N, \quad q_k(0) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{I}_D \right\} \quad (\text{II.4.2})$$

8. Ils sont introduits de telle sorte que (II.4.1) signifie bien la continuité des vitesses dans la direction du chevalet et la nullité de la vitesse de corde dans la direction orthogonale, pour tous les modèles de corde envisagés.

9. qui est différent de l'espace considéré au paragraphe II.1 qui imposait des conditions aux limites immobiles aux deux extrémités.

Or, comme nous l'avons souligné lors de l'écriture de la formulation variationnelle du problème de piano complet I.5, ce choix d'espace variationnel ne contraint pas les mouvements du dernier point de la corde dans la direction $\underline{\tau}$, en particulier pour les fonctions tests. Cela reste vrai après discrétisation de l'espace \mathcal{Q}_D par la méthode des éléments finis d'ordre élevé de façon analogue à II.1.1.a, donnant lieu à une famille d'espaces d'approximation $\{\mathcal{Q}_h, h > 0\}$. Il devient dès lors nécessaire de considérer le travail de la force associée à cette direction, en plus du travail de la force associée au mouvement dans la direction du chevalet. Nous avons appelé $F_i^P(t)$ et $G_i^P(t)$ les multiplicateurs de Lagrange continus associés aux conditions cinématiques dans les directions respectives $\underline{\nu}$ et $\underline{\tau}$, qui constituent des nouvelles inconnues du système global. Leur discrétisation sera faite en les considérant constants sur les intervalles de temps du type $[t^{n-1/2}, t^{n+1/2}]$.

Afin d'adopter la notation matricielle proposée en II.1.1.c, introduisons d'ores et déjà les vecteurs $\underline{\nu}_h$ et $\underline{\tau}_h$ définis par :

$$\forall \mathbf{q}_h^* \in \mathcal{Q}_h, \quad \underline{\nu}_h \cdot \mathbf{Q}_h^* = \underline{\nu} \cdot \mathbf{q}_h^*(L), \quad \underline{\tau}_h \cdot \mathbf{Q}_h^* = \underline{\tau} \cdot \mathbf{q}_h^*(L) \quad (\text{II.4.3})$$

où \mathbf{Q}_h^* est le vecteur des coordonnées de \mathbf{q}_h^* dans une base choisie de \mathcal{Q}_h , typiquement la base des fonctions de base éléments finis.

Les équations permettant de déterminer ces nouvelles inconnues sont une version discrète des équations (II.4.1). Or, la discrétisation choisie pour la table d'harmonie consiste à l'envisager dans le domaine modal (c'est à dire de décomposer la solution sur les modes propres du problème discrétisé en espace, voir (II.3.47)), afin de pouvoir réaliser numériquement un amortissement dit « diagonal ». Il est donc nécessaire de réécrire ces conditions de couplage en faisant intervenir le vecteur d'inconnues Λ_h^{mod} (coordonnées de Λ_h dans la base des modes propres) et non pas Λ_h^{EF} (coordonnées de Λ_h dans la base des fonctions de base éléments finis), ce qui fait intervenir la matrice de changement de base \mathbb{P}_h , qui est rectangulaire car on projette la solution sur les premiers modes propres, voir la remarque II.3.3. Commençons par introduire le vecteur J_h permettant de traduire au niveau discret la répartition du couplage sur la table d'harmonie, défini par :

$$\Lambda_h^{EF*} \cdot \begin{pmatrix} J_h \\ 0 \end{pmatrix} = \oint u_{p,h}^*(x, y, t) \chi_\omega(x, y) dx dy, \quad \forall \Lambda_h^* = {}^t(u_{p,h}^*, \theta_{p,h}^*) \in \mathcal{L}_h \quad (\text{II.4.4})$$

Ainsi, au niveau semi discret, la condition de couplage se traduit sur les inconnues modales par :

$$\partial_t \mathbf{Q}_{i,h} \cdot \underline{\nu}_h = \partial_t \Lambda_h^{EF} \cdot \begin{pmatrix} J_h \\ 0 \end{pmatrix} = (\mathbb{P}_h \partial_t \Lambda_h^{mod}) \cdot \begin{pmatrix} J_h \\ 0 \end{pmatrix} = \partial_t \Lambda_h^{mod} \cdot {}^t \mathbb{P}_h \begin{pmatrix} J_h \\ 0 \end{pmatrix} = \partial_t \Lambda_h^{mod} \cdot {}^t \mathbb{P}_h^U J_h \quad (\text{II.4.5})$$

où l'on a introduit la matrice \mathbb{P}_h^U qui est une troncature de la matrice des vecteurs propres pour n'en extraire que les composantes en flexion : on a $\Lambda_h^{EF} = \mathbb{P}_h \Lambda_h^{mod}$, donc

$$\Lambda_h^{EF} = \begin{pmatrix} U_{p,h} \\ \Theta_{p,h}^1 \\ \Theta_{p,h}^2 \end{pmatrix} = \mathbb{P}_h \Lambda_h^{mod} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_h^U \\ \mathbb{P}_h^{\Theta 1} \\ \mathbb{P}_h^{\Theta 2} \end{pmatrix} \Lambda_h^{mod}, \quad \text{et } {}^t \mathbb{P}_h = \begin{pmatrix} {}^t \mathbb{P}_h^U & {}^t \mathbb{P}_h^{\Theta 1} & {}^t \mathbb{P}_h^{\Theta 2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.4.6})$$

On définit \mathbb{P}_h^U comme la partie supérieure de cette matrice, de telle sorte que seule la composante en flexion sorte du produit $\mathbb{P}_h^U \Lambda_h^{mod}$ afin de prendre son produit scalaire avec J_h . L'opération transposée permet à partir d'un vecteur déplacement $U_{p,h}$, de rendre le vecteur modal :

$$\Lambda_h^{mod} = {}^t \mathbb{P}_h \begin{pmatrix} U_{p,h} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv {}^t \mathbb{P}_h^U U_{p,h}$$

Le couplage avec l'acoustique portera également sur les composantes en flexion de la table d'harmonie, nous réutiliserons donc cette matrice à cette occasion.

Nous proposons de traiter les conditions de couplage de façon centrée, nous verrons lors de la démonstration de la dissipation de l'énergie discrète que ce choix est le plus naturel, puisque les termes de couplage issus des cordes et de la table d'harmonie se compensent tout simplement :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \underline{\nu}_h = \frac{\Lambda_h^{mod,n+1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2}}{\Delta t} \cdot {}^t\mathbb{P}_h^U J_h \\ \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \underline{\tau}_h = 0 \end{cases} \quad (\text{II.4.7})$$

Le problème totalement discrétisé { marteau - cordes - table } s'écrit, centré au temps t^n :

$$\left\{ \begin{array}{l} M^{\mathcal{H}} [\xi]_{\Delta t^2}^n = - \sum_{i=1}^{N_c} (F_i^{\mathcal{H}}) \quad (\text{II.4.8a}) \\ (F_i^{\mathcal{H}}) = K_i^{\mathcal{H}} \delta \Psi \left(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}, \langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1} \right) - \\ \quad R_i^{\mathcal{H}} \frac{\Phi(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}) - \Phi(\langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1})}{2\Delta t} \quad (\text{II.4.8b}) \\ M_h [\mathbf{Q}_{i,h}]_{\Delta t^2}^n + R_h \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} + \underline{K}_{i,h} \{ \mathbf{Q}_{i,h} \}_\theta^n + \overline{K}_h \{ \mathbf{Q}_{i,h} \}_\theta^n \\ \quad + \overline{\nabla}^{\mathcal{P}} \mathbf{u}_i(\mathbf{Q}_{i,h}^{n+\gamma}, \mathbf{Q}_{i,h}^{n-\gamma}) + (F_i^{\mathcal{H}}) \langle \Delta_h \rangle = F_i^{\mathcal{P}} \underline{\nu}_h + G_i^{\mathcal{P}} \underline{\tau}_h \quad (\text{II.4.8c}) \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \underline{\nu}_h = \frac{\Lambda_h^{mod,n+1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2}}{\Delta t} \cdot {}^t\mathbb{P}_h^U J_h \\ \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \underline{\tau}_h = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.4.8d}) \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 \Lambda_h^{mod} + \partial_t \mathbb{A}_h \Lambda_h^{mod} + \mathbb{D}_h \Lambda_h^{mod} = \left(- \sum_i F_i^{\mathcal{P}} \right) {}^t\mathbb{P}_h^U J_h, \quad \forall t \in [t^{n-1/2}, t^{n+1/2}] \\ \Lambda_h^{mod}(t = t^{n-1/2}) = \Lambda_h^{mod,n-1/2}; \quad \partial_t \Lambda_h^{mod}(t = t^{n-1/2}) = \partial_t \Lambda_h^{mod,n-1/2} \end{array} \right. \quad (\text{II.4.8e}) \end{array} \right.$$

THÉORÈME II.4.1 (Énergie du système couplé { marteau - cordes - table })

Toute solution au système (II.4.8e) vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{m,c,p}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{m,c,p}^{n-1/2}}{\Delta t} &= - \sum_{i=0}^{N_c} \left\| \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_{R_h}^2 - \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \|\partial_t \Lambda_h^{mod}\|_{\mathbb{A}_h}^2 \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N_c} \frac{R_i^{\mathcal{H}}}{4\Delta t^2} \left[\Phi(d_i^{n+1}) - \Phi(d_i^{n-1}) \right] \left[(d_i^{n+1}) - (d_i^{n-1}) \right] \quad (\text{II.4.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \mathcal{E}_{m,c,p}^{n+1/2} &= \sum_{i=1}^{N_c} \left[\mathcal{E}_{c,i}^{n+1/2} + K_i^{\mathcal{H}} \frac{\Psi(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}) + \Psi(\langle U_{i,h}^n \rangle - \xi^n)}{2} \right] \\ &\quad + \frac{M^{\mathcal{H}}}{2} \left| \frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} \right|^2 + \mathcal{E}_p^{n+1/2} \quad (\text{II.4.10}) \end{aligned}$$

où $\mathcal{E}_{c,i}^{n+1/2}$ est l'énergie (II.1.186) pour la corde numéro i , $\mathcal{E}_p^{n+1/2}$ est l'énergie de la table (II.3.50), et

$$d_i^{n+1} = \langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}, \quad d_i^n = \langle U_{i,h}^n \rangle - \xi^n, \quad d_i^{n-1} = \langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1}$$

DÉMONSTRATION. Utilisons d'une part le théorème II.2.1 qui donne le comportement énergétique du sous système { marteau - cordes }, pour lequel le second membre $\mathbf{S}_{i,h}^n$ est ici donné par $F_i^{\mathcal{P}} \underline{\nu}_h + G_i^{\mathcal{P}} \underline{\tau}_h$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{m,c}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{m,c}^{n-1/2}}{\Delta t} &= \sum_{i=1}^{N_c} \frac{R_i^{\mathcal{H}}}{4\Delta t^2} [\Phi(d_i^{n+1}) - \Phi(d_i^{n-1})] [d_i^{n+1} - d_i^{n-1}] \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N_c} \left\| \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_{R_h}^2 + \sum_{i=1}^{N_c} \underbrace{\left(F_i^{\mathcal{P}} \underline{\nu}_h + G_i^{\mathcal{P}} \underline{\tau}_h \right) \cdot \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t}}_{\textcircled{1}} \\ &\quad \underbrace{+ \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t}}_{\textcircled{2}} \end{aligned} \quad (\text{II.4.11})$$

D'autre part, utilisons le théorème II.3.49 qui donne le comportement énergétique du sous système table d'harmonie, pour lequel le second membre ${}^t\mathbb{P}_h F_h(t^n)$ est ici donné par $\left(-\sum_i F_i^{\mathcal{P}} \right) {}^t\mathbb{P}_h^U J_h$:

$$\frac{\mathcal{E}_p^{n+1/2} - \mathcal{E}_p^{n-1/2}}{\Delta t} = \left(-\sum_i F_i^{\mathcal{P}} \right) \underbrace{{}^t\mathbb{P}_h^U J_h \cdot \frac{\Lambda_h^{mod}(t^{n+1/2}) - \Lambda_h^{mod}(t^{n-1/2})}{\Delta t}}_{\textcircled{3}} - \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \|\partial_t \Lambda_h^{mod}\|_{\mathbb{A}_h}^2 \quad (\text{II.4.12})$$

On voit bien se dégager les termes de dissipation par couplage $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ et $\textcircled{3}$, on peut utiliser les conditions de couplage centrées qui dès lors apparaissent comme naturelles puisqu'elles permettent d'annuler tout simplement ces termes. La fin de la démonstration consiste à sommer les deux lignes. □

REMARQUE II.4.1 (*Caractère non local du couplage pour la table d'harmonie*)

Le vecteur J_h défini par (II.4.4) est assez creux, car il profite de la nature localisée des fonctions de base éléments finis, dont peu ont un support qui coïncide avec le support de χ_ω , qui est une fonction localisée aussi. Le passage des équations et des conditions de couplage en écriture modale pour la table d'harmonie a rompu ce caractère, car le vecteur ${}^t\mathbb{P}_h^U J_h$ n'est plus creux du tout. Cette constatation reflète un désavantage majeur de la méthode modale, qui brise le caractère local de la méthode éléments finis pour devenir une méthode non locale.

Il est intéressant de remarquer que le vecteur ${}^t\mathbb{P}_h^U J_h$ n'est pas la représentation de J_h dans la base des modes propres numériques, puisque cette dernière s'écrirait $\text{tr} \mathbb{P}_h^U \mathbb{M}_h^U J_h$, où \mathbb{M}_h^U serait définie comme \mathbb{P}_h^U .

II.4.2 Résolution séparée sur les cordes et sur la table

Il est classique, dans les problèmes linéaires dans lesquels on introduit un multiplicateur de Lagrange, de déterminer ce dernier préalablement aux autres inconnues du problème. En effet, par linéarité, l'on peut effectuer des opérations sur chacune des lignes du problème pour éliminer les autres inconnues et se ramener à une équation portant sur ce multiplicateur seulement. Dans notre cas, à cause des non-linéarités des cordes, il est impossible de procéder ainsi. La linéarité du problème de plaque va tout de même nous permettre de découpler la résolution sur la plaque de la résolution sur les cordes, mais les multiplicateurs $F_i^{\mathcal{P}}$ vont devoir être ajoutés comme nouvelles inconnues à la résolution des cordes (ce qui n'est pas un gros surcoût puisqu'il s'agit d'une inconnue scalaire par corde, dans le cadre d'un problème qui compte déjà plusieurs centaines d'inconnues par corde.).

L'idée est la suivante : on utilise le fait que l'on peut écrire la solution de (II.4.8e) comme la superposition de plusieurs solutions élémentaires (voir (II.3.48)). Alors la condition de couplage (II.4.8e) peut être réécrite :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \underline{\nu}_h &= \frac{\mathcal{S}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \mathcal{S}_{\Delta t}^1 \partial_t \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \left[-\sum_i (F_i^{\mathcal{P}}) \right] \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t\mathbb{P}_h^U J_h}{\Delta t} \\ &\quad - \frac{\Lambda_h^{mod,n-1/2}}{\Delta t} \cdot {}^t\mathbb{P}_h^U J_h \end{aligned} \quad (\text{II.4.13})$$

Dans cette équation, on peut préalablement calculer

$$\mathcal{S}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2}, \mathcal{S}_{\Delta t}^1 \partial_t \Lambda_h^{mod,n-1/2} \text{ et } \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U J_h$$

sans connaître les valeurs des inconnues de cordes, marteau ni les multiplicateurs de Lagrange aux instants ultérieurs. Ensuite, on peut résoudre le sous-problème (bien plus petit) portant sur le marteau, les cordes et les multiplicateurs de Lagrange F_i^P , en ajoutant les équations de couplage formulées sur ces inconnues seulement. Une fois les multiplicateurs de Lagrange évalués, on utilise (II.4.8e) pour actualiser les inconnues de plaque. Cette méthode conduit à l'algorithme suivant :

Algorithme 1 (Résolution pratique du système { marteau - cordes - table })

On résout d'abord le sous système { marteau - cordes - multiplicateurs de Lagrange } :

$$\left\{ \begin{array}{l} M^{\mathcal{H}} [\xi]_{\Delta t^2}^n - \sum_{i=1}^{N_c} (F_i^{\mathcal{H}}) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.4.14a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (F_i^{\mathcal{H}}) = K_i^{\mathcal{H}} \frac{\Psi(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}) - \Psi(\langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1})}{(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}) - (\langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1})} - \\ R_i^{\mathcal{H}} \frac{\Phi(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}) - \Phi(\langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1})}{2\Delta t} \end{array} \right. \quad (\text{II.4.14b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_h [\mathbf{Q}_{i,h}]_{\Delta t^2}^n + R_h \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} + \underline{K}_{i,h} \{\mathbf{Q}_{i,h}\}_{\theta}^n + \overline{K}_h \{\mathbf{Q}_{i,h}\}_{\theta}^n \\ + \overline{\nabla}^P \mathbf{u}_i(\mathbf{Q}_{i,h}^{n+\gamma}, \mathbf{Q}_{i,h}^{n-\gamma}) + (F_i^{\mathcal{H}}) \langle \Delta_h \rangle = F_i^P \underline{\nu}_h + G_i^P \underline{\tau}_h, \quad \forall i \end{array} \right. \quad (\text{II.4.14c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \underline{\nu}_h = \frac{\mathcal{S}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \mathcal{S}_{\Delta t}^1 \partial_t \Lambda_h^{mod,n-1/2}}{\Delta t} \\ + \left[- \sum_i (F_i^P) \right] \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U J_h - \Lambda_h^{mod,n-1/2} \cdot {}^t \mathbb{P}_h^U J_h \end{array} \right. \quad (\text{II.4.14d})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \underline{\tau}_h = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.4.14e})$$

puis on actualise les valeurs des inconnues de la table d'harmonie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_h^{mod}(t^{n+1/2}) = \mathcal{S}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \mathcal{S}_{\Delta t}^1 \partial_t \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \left(- \sum_i (F_i^P) \right) \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U J_h \\ \partial_t \Lambda_h^{mod}(t^{n+1/2}) = \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}^1 \partial_t \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \left(- \sum_i (F_i^P) \right) \dot{\mathcal{R}}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U J_h \end{array} \right. \quad (\text{II.4.15})$$

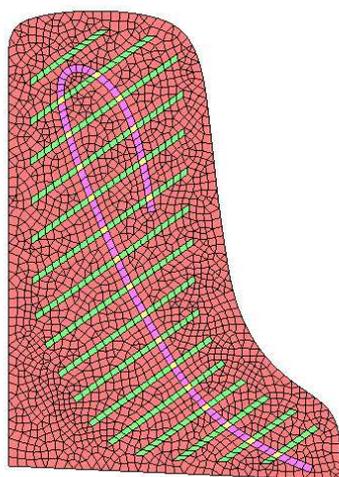
Cet algorithme étant simplement une méthode de calcul de la solution du schéma, l'énergie est inchangée.

II.4.3 Illustration numérique

Pour illustrer ce paragraphe, montrons l'évolution des transferts d'énergie entre les sous systèmes pour un cas non amorti. Nous prenons un marteau et une corde raide non linéaire planaire dont les caractéristiques sont résumées en tableau II.8, ainsi qu'une table d'harmonie constituée d'épicéa et de hêtre dont les paramètres sont résumés en tableau II.9. La corde est attachée à la table d'harmonie au point (0, 59 ; 1, 26), en prenant l'origine en bas à gauche de la table. L'angle au chevalet est fixé à cinq degrés. On prend sur la table d'harmonie des éléments finis d'ordre trois, pour calculer les 200 premiers modes avec des conditions aux limites simplement supportées. Tous les paramètres d'amortissement sont fixés à zéro afin de vérifier que le schéma préserve, à l'erreur d'annulation du schéma près, l'énergie (II.4.10).

L	A	ρ	T_0	E	I	G	κ
m	m ²	kg·m ⁻³	N	Pa	m ⁴	Pa	-
1,60	$9,9 \times 10^{-7}$	24085	1045	$2,02 \times 10^{11}$	$7,8 \times 10^{-14}$	$8,0 \times 10^{10}$	0,85
$M^{\mathcal{H}}$	$x^{\mathcal{H}}$	$\Delta\delta^{\mathcal{H}}$	$v_0^{\mathcal{H}}$	p	$K^{\mathcal{H}}$		
kg	m	m	m·s ⁻¹	-	N·m ^{-p}		
$9,8 \times 10^{-3}$	0,2	0,02	1,5	2,3	2×10^9		
N_x	Δt	θ	$\bar{\theta}$	\mathcal{P}	γ	ordre	
200	10^{-6}	1/4	1/12	Π_N	1/2	5	

TABLE II.8 – Valeurs des paramètres de corde et de marteau utilisés pour les simulations

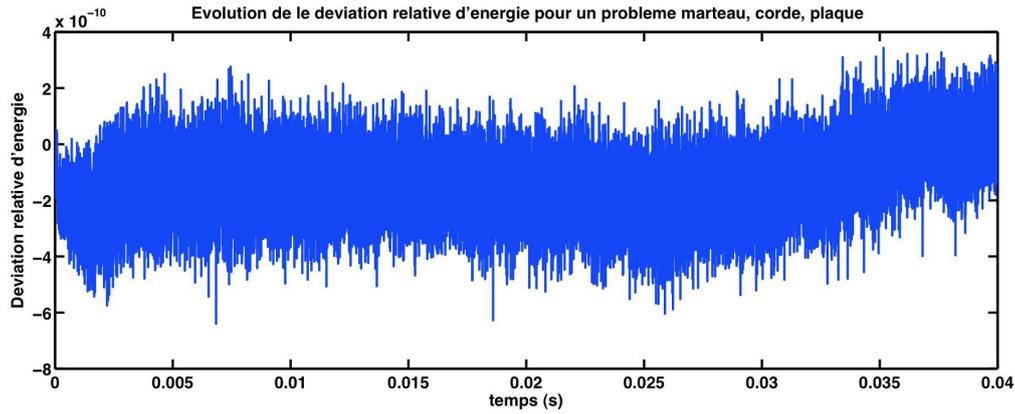


Zone	Bois	Angle	Epaisseur
Rouge	Epicéa	-40	9 mm
Vert	Epicéa	54	34 mm
Rose	Hêtre	-40	29 mm
Jaune	Hêtre	-40	54 mm

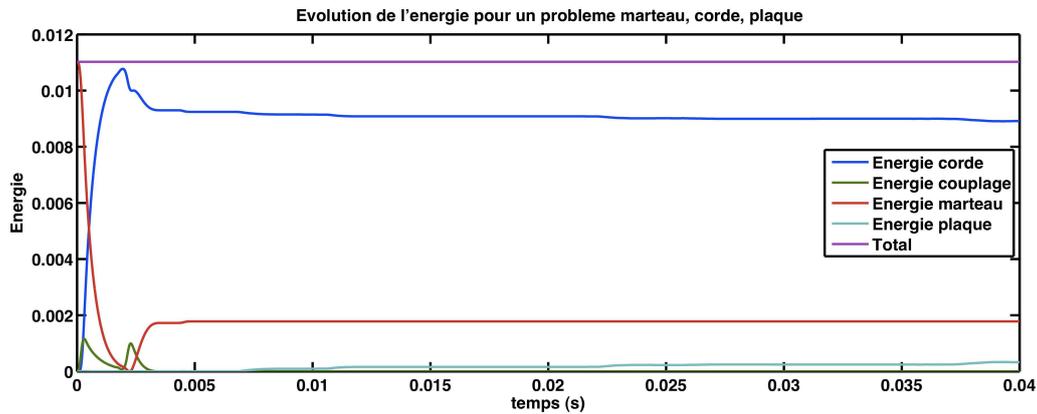
FIGURE II.15 – Maillage de la table d'harmonie du Steinway D, et ses quatre zones.

bois	ρ	E_x	E_y	G_{xy}	G_{xz}	G_{yz}	ν_{xy}
	kg·m ⁻³	GPa	GPa	GPa	GPa	GPa	-
Épicéa	380	11,0	0,650	0,66	1,2	0,042	0,26
Hêtre	750	13,7	2,24	1,61	1,06	0,46	0,3

TABLE II.9 – Valeurs des paramètres pour la table d'harmonie utilisés pour les simulations



(a) Déviation relative d'énergie au cours du temps



(b) Transferts d'énergie au cours du temps

FIGURE II.16 – Transferts internes et déviation relative d'énergie au cours du temps.

La figure II.16(a) montre que la conservation est très bonne, on note que l'introduction du couplage avec la table d'harmonie n'a pas dégradé la qualité de cette conservation, en comparaison avec le système { marteau - cordes }. La figure II.16(b) montre comment l'énergie se transfère entre le marteau, la corde et la table d'harmonie. Au début de la simulation, le marteau est le seul élément en mouvement, on lui a conféré une énergie cinétique grâce à sa vitesse initiale de $1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Cette énergie initiale est égale à

$$\frac{M^{\mathcal{H}}}{2} (v_0^{\mathcal{H}})^2 \approx 1,1 \times 10^{-2} \quad (\text{II.4.16})$$

qui est la valeur constatée sur la figure. Le marteau entre en couplage avec la corde, donnant lieu à une partie de l'énergie qui couple non linéairement la corde et le marteau, dénommée dans la figure « énergie couplage » et qui correspond au terme commençant par $K_i^{\mathcal{H}}$ dans l'expression (II.4.10). Il a la même allure que la force issue du couplage, et retombera à zéro lorsque le contact sera terminé. En parallèle, les cordes voient de leur côté leur énergie croître, jusqu'à un point où la vitesse du marteau s'annule (il rebrousse chemin). Les cordes lui confèrent une certaine vitesse par réaction, le marteau part alors dans la direction opposée. Étant donné qu'aucun mécanisme n'est simulé pour rattraper le marteau ou l'amortir dans sa course, il continuera à vitesse constante jusqu'à la fin de la simulation, ne gênant en rien les vibrations de la corde et de la table d'harmonie. Le couplage entre la corde et la table se fait à partir du moment où les ondes présentes sur la corde ont atteint le chevalet, et on peut voir que l'énergie passe doucement de la corde vers la table.

II.5

Vibroacoustique

Considérons à présent la discrétisation du sous système { table d'harmonie - air }, c'est à dire des équations de la vibroacoustique formulées dans la base modale de la table et à l'ordre un (en vitesse - pression) pour l'acoustique, dont la formulation variationnelle est donnée en I.3.49. La partie tridimensionnelle, c'est à dire la propagation du son, sera de loin la partie la plus coûteuse en temps de calcul lors du calcul complet du piano. C'est pourquoi nous nous attacherons à choisir une méthode numérique efficace et se prêtant bien à la parallélisation : les éléments finis spectraux d'ordre élevé. La taille du problème élimine d'office toute méthode de discrétisation implicite en temps, c'est pourquoi nous utiliserons le schéma saute-mouton, c'est à dire un θ -schéma avec $\theta = 0$, qui permet d'écrire une conservation d'énergie et donc la stabilité de la méthode sous une condition (assez restrictive) sur le pas de temps et le pas d'espace. Une difficulté majeure, que nous n'avons pas abordée jusqu'ici, est le caractère non borné du domaine Ω dans lequel se fait la propagation du son, nous utiliserons donc des PML (Perfectly Matched Layers) afin de tronquer artificiellement le domaine pour se ramener à un calcul borné, tout en évitant les réflexions parasites. Nous en viendrons alors au cœur de notre sujet, à savoir écrire un schéma conservant ou dissipant une énergie discrète pour le système couplé de la vibroacoustique. Nous verrons que cette volonté nous amènera, comme précédemment, à écrire les couplages de façon centrée, ce qui formellement conduira à un schéma globalement implicite. Un complément de Schur nous permettra cependant de mettre à jour séparément les inconnues de la table d'harmonie, et celles de l'air. Nous terminerons avec quelques illustrations numériques permettant de mettre en évidence la conservation de l'énergie discrète en l'absence d'amortissement, et de comparer notre approche avec l'approche de [Grob, 2006].

II.5.1 Discrétisation spatiale de l'acoustique

En anticipant sur le couplage avec la table d'harmonie, considérons tout d'abord les équations d'Euler linéarisées en vitesse - pression régissant la propagation du son dans le domaine Ω soumise à un second membre sur l'équation de pression, qui proviendra plus tard du couplage avec la table d'harmonie. En attendant ce couplage, nous supposons des conditions de Neumann pour les inconnues de Ω au contact de la table d'harmonie. Rappelons la formulation variationnelle ainsi que les espaces variationnels associés :

$$\text{Trouver } p : [0, T] \rightarrow \mathcal{P} \text{ et } \underline{V}_a : [0, T] \rightarrow \mathcal{V} \quad (\text{II.5.1})$$

$$\begin{cases} \partial_t \int_{\Omega} \mu_a p p^* - \int_{\Omega} \underline{V}_a \cdot \nabla p^* = F, & \forall p^* \in \mathcal{P} \\ \partial_t \int_{\Omega} \rho_a \underline{V}_a \cdot \underline{V}_a^* + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \underline{V}_a^* = 0, & \forall \underline{V}_a^* \in \mathcal{V} \end{cases} \quad (\text{II.5.2})$$

$$\text{où } \mathcal{P} = H^1(\Omega), \quad \mathcal{V} = L^2(\Omega) \quad (\text{II.5.3})$$

Le domaine Ω est décomposé en un maillage hexaédral de taille $h > 0$, c'est à dire en une famille de N_e hexaèdres $\{K_i, 1 \leq i \leq N_e\}$ telle que :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_e} K_i \quad \text{et } K_i \cap K_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j, \quad h = \max_i \text{diam}(K_i) \quad (\text{II.5.4})$$

où $\text{diam}(K_i)$ désigne le diamètre de l'hexaèdre, défini par exemple dans [Duruffé et al., 2009]. Pour chaque hexaèdre K_i , on considère la transformation F_i qui transforme le cube unité $[0, 1]^3$ en K_i . Considérons alors les espaces d'approximation définis par :

$$\mathcal{P}_h = \{p_h \in \mathcal{P}, \quad p_h|_{K_i} \circ F_i \in \mathbb{Q}_r\} \quad (\text{II.5.5})$$

$$\mathcal{V}_h = \{\underline{V}_h \in \mathcal{V}, \quad \underline{V}_h|_{K_i} \circ F_i \in [\mathbb{Q}_r]^3\} \quad (\text{II.5.6})$$

où \mathbb{Q}_r est l'espace engendré par $\{x^i y^j z^k, \quad 1 \leq i, j, k \leq r\}$. On choisit enfin la position des degrés de liberté sur le cube unité comme étant le triple produit tensoriel des points de Gauss-Lobatto sur le segment

$[0, 1]$, chaque degré de liberté étant associé à une fonction de base qui est un polynôme d'interpolation de Lagrange sur ces points.

En pratique, comme $\mathcal{P} = H^1(\Omega)$ et $\mathcal{V} = L^2(\Omega)$, les degrés de liberté des arêtes des hexaèdres sont communs aux hexaèdres contigus pour P_h , mais sont dupliqués pour \mathcal{V}_h de sorte que l'approximation de \mathcal{V} soit discontinue.

On définit les matrices de masse \mathcal{M}_h et \mathcal{B}_h , et de rigidité \mathcal{R}_h^s et \mathcal{R}_h^V comme :

$$\mathcal{M}_h P_h \cdot P_h^* = \oint_{\Omega} \mu_a p_h p_h^*, \quad \forall (p_h, p_h^*) \in \mathcal{P}_h \quad (\text{II.5.7})$$

$$\mathcal{B}_h V_h \cdot V_h^* = \oint \rho_a \underline{V}_h \cdot \underline{V}_h^*, \quad \forall (\underline{V}_h, \underline{V}_h^*) \in \mathcal{V}_h \quad (\text{II.5.8})$$

$$\mathcal{R}_h^s V_h \cdot P_h^* = - \oint \underline{V}_h \cdot \nabla p_h^*, \quad \forall (\underline{V}_h, p_h^*) \in \mathcal{V}_h \times P_h \quad (\text{II.5.9})$$

$$\mathcal{R}_h^V P_h \cdot V_h^* = \oint \nabla p_h \cdot \underline{V}_h^*, \quad \forall (p_h, \underline{V}_h^*) \in P_h \times \mathcal{V}_h \quad (\text{II.5.10})$$

où l'on a choisi une base de P_h et de \mathcal{V}_h (par exemple la base des fonctions de base éléments finis), et on a appelé P_h, V_h, P_h^* et V_h^* les vecteurs des coordonnées respectives de $p_h, \underline{V}_h, p_h^*$ et \underline{V}_h^* dans cette base.

Le symbole \oint signifie que l'intégration numérique est faite grâce à une méthode de quadrature. Nous choisissons d'utiliser la méthode de quadrature de Gauss-Lobatto, ce qui conduit à des matrices de masse diagonales sans aucune perte de précision de la méthode numérique. Leur inversion sera donc triviale et permettra un gain significatif sur le coût de calcul. Les matrices \mathcal{M}_h et \mathcal{B}_h sont donc diagonales et définies positives. Les matrices de rigidité \mathcal{R}_h^s et \mathcal{R}_h^V vérifient :

$$\mathcal{R}_h^s = -{}^t \mathcal{R}_h^V \quad (\text{II.5.11})$$

II.5.2 Schéma temporel pour l'acoustique

La discrétisation en temps est faite en considérant des pas de temps décalés pour l'inconnue de pression et l'inconnue de vitesse. On peut montrer que ce choix est équivalent à utiliser des éléments finis \mathbb{Q}_r conformes H^1 associé à un schéma saute mouton centré sur l'équation de l'acoustique formulée uniquement sur la pression, à l'ordre deux, voir [Fauqueux, 2003].

En anticipant encore un peu sur le couplage, on fait le choix de centrer l'équation de pression autour de l'instant t^n , ce qui nous permettra ultérieurement d'écrire des termes de couplage centrés qui se compensent dans l'écriture de l'énergie. L'inconnue P_h est donc considérée à tous les demi pas de temps, tandis que l'inconnue V_h est considérée à tous les pas de temps. Le schéma s'écrit :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_h \frac{P_h^{n+1/2} - P_h^{n-1/2}}{\Delta t} + \mathcal{R}_h^s V_h^n = F_h^n \\ \mathcal{B}_h \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} + \mathcal{R}_h^V P_h^{n+1/2} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.5.12})$$

THÉORÈME II.5.1 (Conservation de l'énergie du saute mouton sur l'acoustique)

Toute solution numérique à (II.5.12) vérifie

$$\frac{\mathcal{E}_a^{n+1/2} - \mathcal{E}_a^{n-1/2}}{\Delta t} = F_h^n \cdot \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2} \quad (\text{II.5.13})$$

où

$$\mathcal{E}_a^{n+1/2} = \frac{1}{2} \|P_h^{n+1/2}\|_{\mathcal{M}_h}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{B}_h V_h^{n+1} \cdot V_h^n \quad (\text{II.5.14})$$

DÉMONSTRATION. Effectuons les trois opérations suivantes : on multiplie la ligne de l'équation de pression par $(P_h^{n+1/2} +$

$P_h^{n-1/2})/2$, on multiplie la ligne de l'équation de vitesse prises à deux instants consécutifs par V_h^n :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_h \frac{P_h^{n+1/2} - P_h^{n-1/2}}{\Delta t} \cdot \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2} + \mathcal{R}_h^s V_h^n \cdot \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2} = F_h^n \cdot \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2} \\ \mathcal{B}_h \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} \cdot V_h^n + \mathcal{R}_h^V P_h^{n+1/2} \cdot V_h^n = 0 \\ \mathcal{B}_h \frac{V_h^n - V_h^{n-1}}{\Delta t} \cdot V_h^n + \mathcal{R}_h^V P_h^{n-1/2} \cdot V_h^n = 0 \end{cases} \quad (\text{II.5.15})$$

On somme alors la première ligne avec la moyenne des deux suivantes : les termes de couplage entre P_h et V_h se compensent car $\mathcal{R}_h^V = -{}^t \mathcal{R}_h^s$. Il reste :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{2} \|P_h^{n+1/2}\|_{\mathcal{M}_h}^2 - \frac{1}{2} \|P_h^{n-1/2}\|_{\mathcal{M}_h}^2 \right] + \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{2} \mathcal{B}_h V_h^{n+1} \cdot V_h^n - \frac{1}{2} \mathcal{B}_h V_h^n \cdot V_h^n \right] \\ + \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{2} \mathcal{B}_h V_h^n \cdot V_h^n - \frac{1}{2} \mathcal{B}_h V_h^{n-1} \cdot V_h^n \right] = F_h^n \cdot \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2} \end{aligned} \quad (\text{II.5.16})$$

Posons alors

$$\mathcal{E}_a^{n+1/2} = \frac{1}{2} \|P_h^{n+1/2}\|_{\mathcal{M}_h}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{B}_h V_h^{n+1} \cdot V_h^n \quad (\text{II.5.17})$$

On obtient bien l'expression attendue. \square

Comme dans les cas précédents, c'est la positivité de l'énergie qui garantira la stabilité du schéma numérique. Ici, cette positivité se traduit par une condition sur le pas de temps en rapport avec la discrétisation spatiale adoptée, comme le statue le théorème suivant :

THÉORÈME II.5.2 (Positivité de l'énergie de l'acoustique)

L'énergie $\mathcal{E}_a^{n+1/2}$ est positive si et seulement si la matrice

$$\mathcal{M}_h + \frac{\Delta t^2}{4} \mathcal{R}_h^s (\mathcal{B}_h^{-1}) \mathcal{R}_h^V \text{ est positive.} \quad (\text{II.5.18})$$

DÉMONSTRATION. Partons de l'expression de l'énergie :

$$\mathcal{E}_a^{n+1/2} = \frac{1}{2} \|P_h^{n+1/2}\|_{\mathcal{M}_h}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{B}_h V_h^{n+1} \cdot V_h^n \quad (\text{II.5.19})$$

$$= \frac{1}{2} \|P_h^{n+1/2}\|_{\mathcal{M}_h}^2 + \frac{1}{8} \|V_h^{n+1} + V_h^n\|_{\mathcal{B}_h}^2 - \frac{1}{8} \|V_h^{n+1} - V_h^n\|_{\mathcal{B}_h}^2 \quad (\text{II.5.20})$$

or on peut utiliser les équations du schéma pour écrire que :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h (V_h^{n+1} - V_h^n) &= -\Delta t \mathcal{R}_h^V P_h^{n+1/2} \\ V_h^{n+1} - V_h^n &= -\Delta t (\mathcal{B}_h^{-1}) \mathcal{R}_h^V P_h^{n+1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \|V_h^{n+1} - V_h^n\|_{\mathcal{B}_h}^2 &= \mathcal{B}_h (V_h^{n+1} - V_h^n) \cdot (V_h^{n+1} - V_h^n) \\ &= \Delta t^2 \mathcal{R}_h^V P_h^{n+1/2} \cdot (\mathcal{B}_h^{-1}) \mathcal{R}_h^V P_h^{n+1/2} \\ &= -\Delta t^2 P_h^{n+1/2} \cdot \mathcal{R}_h^s (\mathcal{B}_h^{-1}) \mathcal{R}_h^V P_h^{n+1/2} \end{aligned}$$

que l'on peut réinjecter dans l'expression de l'énergie :

$$\mathcal{E}_a^{n+1/2} = \frac{1}{2} \mathcal{M}_h P_h^{n+1/2} \cdot P_h^{n+1/2} + \frac{1}{2} \left\| \frac{V_h^{n+1} + V_h^n}{2} \right\|_{\mathcal{B}_h}^2 + \frac{\Delta t^2}{8} P_h^{n+1/2} \cdot \mathcal{R}_h^s (\mathcal{B}_h^{-1}) \mathcal{R}_h^V P_h^{n+1/2} \quad (\text{II.5.21})$$

\square

II.5.3 Troncature artificielle du domaine acoustique

Dans de nombreuses applications physiques faisant intervenir une propagation d'ondes, le domaine considéré est par nature non borné, ou tellement grand par rapport au phénomène modélisé qu'on le considère infini (aéronautique, géosismique, imagerie médicale, ...). Il est alors indispensable de ramener

le domaine de calcul de la solution numérique à un domaine borné, tout en s'assurant autant que possible que la solution calculée est proche de la restriction sur ce domaine de la solution physique, c'est à dire que l'introduction artificielle de la frontière n'a pas, ou a peu changé la solution. En particulier, on veut minimiser les réflexions des ondes sur cette frontière qui n'a pas de réalité physique. Cette problématique est une question vivante en analyse numérique, et il n'y a pas, pour l'instant, de réponse universelle à donner. Il existe une grande variété de méthodes, mais deux d'entre elles permettent spécifiquement de conserver le caractère creux de la méthode éléments finis utilisée dans le domaine : les conditions aux limites absorbantes (CLA) et les couches parfaitement adaptées (PML : Perfectly Matched Layers). Notre choix s'étant porté sur la seconde méthode, on renvoie à [Duprat, 2011] pour une revue de la littérature sur les CLA. La technique des PML consiste à entourer le domaine de calcul d'une couche absorbante, telle que l'onde soit transmise sans réflexion du domaine physique à la couche. L'équation posée dans la couche est une version amortie de l'équation posée dans le domaine physique, basée sur un changement de variable fait sur l'équation en régime harmonique. Une des difficultés de la méthode est de garantir la stabilité numérique lors du passage à l'équation en régime temporel. On renvoie à [Imperiale, 2012] pour une revue de la littérature sur les PML et une approche originale menant à l'écriture de PML stables pour l'acoustique anisotrope et certains problèmes d'élastodynamique orthotrope. On y trouve en particulier une formulation « splittée », que l'auteur couple avec les équations de l'acoustique formulées à l'ordre deux par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange. Nous adopterons un point de vue plus simple (mais moins performant), en considérant la formulation à l'ordre un des équations de l'acoustique même dans le domaine physique.

On décompose la pression en trois composantes que l'on mettra en regard des trois composantes de la vitesse :

$$p = p_x + p_y + p_z, \quad \underline{V} = {}^t(\underline{V}_x, \underline{V}_y, \underline{V}_z) \quad (\text{II.5.22})$$

On réécrit alors les équations de l'acoustique en ajoutant à chaque terme un amortissement directionnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p_x}{\partial t} + \sigma_x p_x + \frac{\partial \underline{V}_x}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.5.23a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p_y}{\partial t} + \sigma_y p_y + \frac{\partial \underline{V}_y}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.5.23b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p_z}{\partial t} + \sigma_z p_z + \frac{\partial \underline{V}_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.5.23c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \underline{V}_x}{\partial t} + \sigma_x \underline{V}_x + \frac{\partial(p_x + p_y + p_z)}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.5.23d})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \underline{V}_y}{\partial t} + \sigma_y \underline{V}_y + \frac{\partial(p_x + p_y + p_z)}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.5.23e})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \underline{V}_z}{\partial t} + \sigma_z \underline{V}_z + \frac{\partial(p_x + p_y + p_z)}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.5.23f})$$

Les termes d'amortissement σ_x , σ_y et σ_z sont respectivement des fonctions de x , y et z , nulles dans le domaine physique et destinées à amortir l'onde dans la couche PML. Nous faisons le choix d'une dépendance parabolique (voir [Tsogka, 1999]), qui s'écrit pour la direction x :

$$\sigma_x = \frac{3 c \log(R) v_\sigma (x - x_{min})^2}{2a^3}, \quad \text{pour } x < x_{min} \quad (\text{II.5.24})$$

où x_{min} désigne l'abscisse où commence la couche PML, et a est l'épaisseur de la couche. Le coefficient de réflexion du à la couche PML se comporte comme l'inverse du coefficient R . En spécifiant $R = 10^3$, on s'attend à une réflexion artificielle (parasite) de l'ordre de 0,1% de l'onde. Le coefficient v_σ permet d'ajuster cet amortissement afin de minimiser la réflexion, on prendra typiquement $v_\sigma = 2$.

Afin d'utiliser les mêmes équations dans le domaine physique et dans la couche PML, nous procédons à un changement de variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = p_x + p_y + p_z \quad (\text{II.5.25a}) \\ p^* = p_x - p_y \quad (\text{II.5.25b}) \\ p^\diamond = p_x - p_z \quad (\text{II.5.25c}) \end{array} \right.$$

que l'on peut inverser :

$$\begin{cases} p_x = \frac{p + p^* + p^\diamond}{3} & \text{(II.5.26a)} \\ p_y = \frac{p + p^\diamond - 2p^*}{3} & \text{(II.5.26b)} \\ p_z = \frac{p + p^* - 2p^\diamond}{3} & \text{(II.5.26c)} \end{cases}$$

Les équations (II.5.23) s'écrivent, dans cette nouvelle base :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} p + \frac{\sigma_x - 2\sigma_y + \sigma_z}{3} p^* + \frac{\sigma_x + \sigma_y - 2\sigma_z}{3} p^\diamond + \operatorname{div} \underline{V} = 0 & \text{(II.5.27a)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \sigma \underline{V} + \nabla(p_x + p_y + p_z) = 0 & \text{(II.5.27b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p^*}{\partial t} + \frac{\sigma_x + 2\sigma_y}{3} p^* + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{3} (p + p^\diamond) + \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) = 0 & \text{(II.5.27c)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p^\diamond}{\partial t} + \frac{\sigma_x + 2\sigma_z}{3} p^\diamond + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{3} (p + p^*) + \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0 & \text{(II.5.27d)} \end{cases}$$

où le tenseur σ est défini par $\operatorname{diag}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, et est donc nul en dehors de la couche PML. Les deux premières équations coïncident donc avec les équations de l'acoustique dans le domaine physique. C'est pourquoi les inconnues p et \underline{V} seront considérées dans le domaine complet (physique + PML) associées aux deux premières équations, tandis que les inconnues p^* et p^\diamond ne seront rajoutées que dans la couche PML, associées aux deux dernières équations additionnelles.

On procède alors à la discrétisation par éléments finis (H^1, L^2) en suivant la même démarche que pour le cas du domaine infini. On appelle P_h le vecteur des coordonnées de (p, p^*, p^\diamond) dans une base de l'espace d'approximation obtenu, et V_h celles de \underline{V} . On obtient alors un système qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{M}_h P_h + \mathcal{S}_h^s P_h + \mathcal{R}_h^s V_h = F_h \\ \partial_t \mathcal{B}_h V_h + \mathcal{S}_h^V V_h + \mathcal{R}_h^V P_h = 0 \end{cases} \quad \text{(II.5.28)}$$

Les matrices \mathcal{S}_h^s et \mathcal{S}_h^V sont diagonales par bloc, et sont semi-définies positives. Les matrices de masse restent diagonales et définies positives. Enfin, les matrices \mathcal{R}_h^s et \mathcal{R}_h^V sont telles que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R}_h^s \\ \mathcal{R}_h^V & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(II.5.29)}$$

n'ait que des valeurs propres imaginaires pures. La discrétisation en temps proposée précédemment est adaptée à ce cas amorti :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_h \frac{P_h^{n+1/2} - P_h^{n-1/2}}{\Delta t} + \mathcal{S}_h^s \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2} + \mathcal{R}_h^s V_h^n = F_h^n \\ \mathcal{B}_h \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} + \mathcal{S}_h^V \frac{V_h^{n+1} + V_h^n}{2} + \mathcal{R}_h^V P_h^{n+1/2} = 0 \end{cases} \quad \text{(II.5.30)}$$

L'écriture d'une décroissance d'une énergie discrète positive pour un milieu comportant une couche PML est un problème ouvert, c'est pourquoi dans la suite de ce mémoire nous nous continuerons à présenter l'acoustique en domaine non borné, même si concrètement, des PML seront utilisées pour tronquer artificiellement le domaine de calcul.

II.5.4 Schéma couplé pour la vibroacoustique

Le couplage des équations de l'acoustique avec les équations de vibration de la table d'harmonie fait intervenir le saut de pression à la traversée de la table. En s'appuyant sur la formulation variationnelle proposée en (I.3.49), on définit la matrice de couplage

$$\underline{\mathcal{C}}_h P_h \cdot \Lambda_h^* = \oint_{\omega} [p_h]_{\omega} u_{p,h}^*, \quad \forall p_h \in \mathcal{P}_h, \quad \forall \Lambda_h^* = {}^t(u_{p,h}^*, \underline{\theta}_{p,h}^*) \in \mathcal{L}_h \quad \text{(II.5.31)}$$

Écrivons à présent le problème semi discret de la vibroacoustique, pour lequel on anticipe le futur couplage avec les cordes en imposant à la table d'harmonie un second membre supplémentaire, réparti selon la fonction $\chi_\omega(x, y)$, et constant sur les intervalles de temps du type $[t^{n-1/2}, t^{n+1/2}]$ (voir le paragraphe précédent). La discrétisation de la table d'harmonie est faite par décomposition sur les N_m premiers modes numériques de la table d'harmonie, tandis que la discrétisation de l'acoustique est faite comme décrit ci dessus. On a, pour tout $t \in [t^{n-1/2}, t^{n+1/2}]$

$$\begin{cases} \partial_t^2 \Lambda_h^{mod} + \partial_t \mathbb{A}_h \Lambda_h^{mod} + \mathbb{D}_h \Lambda_h^{mod} = F_h(t^n) {}^t \mathbb{P}_h^U J_h + {}^t \mathbb{P}_h^U \underline{\mathcal{C}}_h P_h, & \text{(II.5.32a)} \\ \Lambda_h^{mod}(t = t^{n-1/2}) = \Lambda_h^{mod, n-1/2}; \quad \partial_t \Lambda_h^{mod}(t = t^{n-1/2}) = \partial_t \Lambda_h^{mod, n-1/2} & \text{(II.5.32b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{M}_h P_h + \mathcal{R}_h^s V_h + {}^t \underline{\mathcal{C}}_h \partial_t U_{p,h} = 0 \\ \partial_t \mathcal{B}_h V_h + \mathcal{R}_h^V P_h = 0 \end{cases} \quad \text{(II.5.32c)}$$

où la matrice \mathbb{P}_h^U a été définie en (II.4.6), et le vecteur $U_{p,h}$ désigne les composantes en flexion du vecteur Λ_h^{mod} exprimé dans la base éléments finis, que l'on exprimera par la suite $\mathbb{P}_h^U \Lambda_h^{mod}$.

La volonté d'écrire des termes de couplage qui se compensent dans l'écriture de l'énergie discrète, à l'instar du cas continu, nous a naturellement dicté le schéma suivant, couplant la méthode analytique en temps pour la table d'harmonie décrite au paragraphe II.3.4 avec le schéma saute-mouton décrit précédemment pour l'acoustique :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \Lambda_h^{mod} + \partial_t \mathbb{A}_h \Lambda_h^{mod} + \mathbb{D}_h \Lambda_h^{mod} = F_h^n {}^t \mathbb{P}_h^U J_h + {}^t \mathbb{P}_h^U \underline{\mathcal{C}}_h \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2}, & \text{(II.5.33a)} \\ \Lambda_h^{mod}(t = t^{n-1/2}) = \Lambda_h^{mod, n-1/2}; \quad \partial_t \Lambda_h^{mod}(t = t^{n-1/2}) = \partial_t \Lambda_h^{mod, n-1/2} & \text{(II.5.33b)} \end{cases}$$

$$\left(\mathcal{S}_{p,a} \right) \begin{cases} \left\{ \mathcal{M}_h \frac{P_h^{n+1/2} - P_h^{n-1/2}}{\Delta t} + \mathcal{R}_h^s V_h^n + {}^t \underline{\mathcal{C}}_h \mathbb{P}_h^U \frac{\Lambda_h^{mod, n+1/2} - \Lambda_h^{mod, n-1/2}}{\Delta t} = 0 \right. \\ \left. \left\{ \mathcal{B}_h \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} + \mathcal{R}_h^V P_h^{n+1/2} = 0 \right. \right. \end{cases} \quad \text{(II.5.33c)}$$

Un des avantages majeurs de traiter les conditions de couplages de cette façon est que la condition de stabilité du problème couplé est la même condition que celle du problème d'acoustique en l'absence de couplage. En effet, l'énergie du système couplé est simplement la somme des énergies des sous systèmes, comme l'exprime ce théorème :

THÉORÈME II.5.3 (Conservation de l'énergie du système { table - air })

Toute solution au système (II.5.33) vérifie :

$$\frac{\mathcal{E}_{p,f}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{p,f}^{n-1/2}}{\Delta t} = F_h^n {}^t \mathbb{P}_h^U J_h \cdot \frac{\Lambda_h^{mod, n+1/2} - \Lambda_h^{mod, n-1/2}}{\Delta t} - \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \|\partial_t \Lambda_h^{mod}\|_{\mathbb{A}_h}^2 \quad \text{(II.5.34)}$$

où l'énergie du système { table - air } est définie par

$$\mathcal{E}_{p,a}^{n+1/2} = \mathcal{E}_p^{n+1/2} + \mathcal{E}_a^{n+1/2} \quad \text{(II.5.35)}$$

$$\text{où } \begin{cases} \mathcal{E}_p^{n+1/2} = \frac{1}{2} \|\partial_t \Lambda_h^{mod, n+1/2}\|^2 + \frac{1}{2} \|\Lambda_h^{mod, n+1/2}\|_{\mathbb{D}_h}^2 \\ \mathcal{E}_a^{n+1/2} = \frac{1}{2} \|P_h^{n+1/2}\|_{\mathcal{M}_h}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{B}_h V_h^{n+1} \cdot V_h^n \end{cases} \quad \text{(II.5.36)}$$

DÉMONSTRATION. D'une part, on utilise le théorème II.3.1 concernant la dissipation de l'énergie de la table :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_p^{n+1/2} - \mathcal{E}_p^{n-1/2}}{\Delta t} &= F_h^n {}^t\mathbb{P}_h^U J_h \cdot \frac{\Lambda_h^{mod,n+1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2}}{\Delta t} \\ &\quad + {}^t\mathbb{P}_h^U \mathcal{C}_h \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2} \cdot \frac{\Lambda_h^{mod,n+1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2}}{\Delta t} - \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \|\partial_t \Lambda_h^{mod}\|_{\mathbb{A}_h}^2 \end{aligned} \quad (\text{II.5.37})$$

D'autre part, on utilise le théorème II.5.1 pour établir que

$$\frac{\mathcal{E}_a^{n+1/2} - \mathcal{E}_a^{n-1/2}}{\Delta t} = -{}^t\mathcal{C}_h \mathbb{P}_h^U \frac{\Lambda_h^{mod,n+1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2}}{\Delta t} \cdot \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2} \quad (\text{II.5.38})$$

On obtient bien l'égalité recherchée en sommant (II.5.37) et (II.5.38). \square

II.5.5 Résolution séparée sur la table et dans l'air

Le schéma que nous avons proposé constitue, si on le considère tel quel, un problème implicite posé sur le domaine { table d'harmonie - air }. Or, pour des raisons de performance numérique, il est souhaitable d'écrire une méthode permettant de mettre à jour de façon découplée les inconnues de chaque sous système. En effet, les méthodes numériques adoptées sont très différentes, et l'on souhaite de plus procéder à une parallélisation de la résolution acoustique, en raison de la grande taille du problème.

Pour cela, l'idée est de procéder à un complément de Schur, et de trouver une équation posée que $\Lambda_h^{mod,n+1/2}$ qui ne dépend pas de $P_h^{n+1/2}$. Nous verrons au paragraphe suivant que nous pourrons adapter cette méthode afin d'exploiter la technique de résolution avec multiplicateurs de Lagrange pour le système { marteau - cordes - table } décrite au paragraphe précédent. La solution complète est alors calculée grâce à l'algorithme suivant :

Algorithme 2 (Résolution pratique du système { table - air })

On commence par calculer $\Lambda_h^{mod,n+1/2}$ grâce à un complément de Schur sur le système couplé écrit à l'ordre un que l'on calcule de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\left(\mathbb{I} + \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t\mathbb{P}_h^U \mathcal{C}_h (\mathcal{M}_h^{-1})^t \mathcal{C}_h \mathbb{P}_h^U \right)}_{\mathcal{S}_p} \Lambda_h^{mod,n+1/2} = F_f + F_\Lambda + F_h^n F_J \end{array} \right. \quad (\text{II.5.39a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_f = \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t\mathbb{P}_h^U \mathcal{C}_h \left[2P_h^{n-1/2} - \Delta t (\mathcal{M}_h^{-1}) \mathcal{R}_h^s V_h^n \right] \end{array} \right. \quad (\text{II.5.39b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_\Lambda = \mathcal{S}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \mathcal{S}_{\Delta t}^1 \partial_t \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t\mathbb{P}_h^U \mathcal{C}_h (\mathcal{M}_h^{-1})^t \mathcal{C}_h \mathbb{P}_h^U \Lambda_h^{mod,n-1/2} \end{array} \right. \quad (\text{II.5.39c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_J = \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t\mathbb{P}_h^U J_h \end{array} \right. \quad (\text{II.5.39d})$$

puis on actualise les inconnues acoustiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_h^{n+1/2} = P_h^{n-1/2} - \Delta t (\mathcal{M}_h^{-1}) \mathcal{R}_h^s V_h^n - (\mathcal{M}_h^{-1})^t \mathcal{C}_h \mathbb{P}_h^U [\Lambda_h^{mod,n+1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2}] \end{array} \right. \quad (\text{II.5.40a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_h^{n+1} = V_h^n - \Delta t (\mathcal{B}_h^{-1}) \mathcal{R}_h^V P_h^{n+1/2} \end{array} \right. \quad (\text{II.5.40b})$$

et enfin la dérivée de l'inconnue de la table :

$$\begin{aligned} \partial_t \Lambda_h^{mod}(t^{n+1/2}) &= \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}^1 \partial_t \Lambda_h^{mod,n-1/2} \\ &\quad + F_h^n \dot{\mathcal{R}}_{\Delta t} {}^t\mathbb{P}_h^U J_h + \dot{\mathcal{R}}_{\Delta t} {}^t\mathbb{P}_h^U \mathcal{C}_h \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2} \end{aligned} \quad (\text{II.5.41})$$

DÉMONSTRATION. Les formules de résolution exacte sur la table donnent, au vu de (II.5.33a) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_h^{mod}(t^{n+1/2}) = \mathcal{S}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \mathcal{S}_{\Delta t}^1 \partial_t \Lambda_h^{mod,n-1/2} \\ \quad + F_h^n \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U J_h + \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U \underline{\mathcal{C}}_h \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2} \quad (\text{II.5.42a}) \\ \partial_t \Lambda_h^{mod}(t^{n+1/2}) = \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}^1 \partial_t \Lambda_h^{mod,n-1/2} \\ \quad + F_h^n \dot{\mathcal{R}}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U J_h + \dot{\mathcal{R}}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U \underline{\mathcal{C}}_h \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2} \quad (\text{II.5.42b}) \end{array} \right.$$

On utilise la première ligne du système (II.5.33c) pour exprimer $P_h^{n+1/2}$ en fonction des inconnues du passé, et on injecte cette expression dans (II.5.42a). En introduisant les variables auxiliaires F_f , F_Λ et F_J comme définies dans (II.5.39b), (II.5.39c) et (II.5.39d), c'est à dire ne dépendant que du passé, on exprime le complément de Schur sur $\Lambda_h^{mod,n+1/2}$. Enfin, on réutilise le système (II.5.33c) pour actualiser la dérivée de l'inconnue de plaque. □

REMARQUE II.5.1 (Multiplication par la matrice de changement de base)

La matrice \mathbb{P}_h de « changement de base » (à la troncature près aux N_m premiers modes propres) est une matrice pleine qui peut être assez grande, suivant le nombre de modes considérés. En pratique, nous irons jusqu'à considérer 2 400 modes afin de couvrir une étendue spectrale jusqu'à 9 920 Hz. Les étapes de multiplication par cette matrice ou sa transposée sont donc des étapes très coûteuses qu'il conviendra d'éviter. L'algorithme présenté ici fait intervenir quatre multiplications par pas de temps (si on ne compte pas les matrices et vecteurs qui sont calculés une fois pour toute et stockés). On peut réduire ce nombre à deux multiplications, en regroupant les termes de façon moins thématique que ne le fait la factorisation (II.5.39) : le dernier terme de (II.5.39c) peut être regroupé dans la parenthèse de (II.5.39b), et le produit $\mathbb{P}_h^U \Lambda_h^{mod,n+1/2}$ calculé lors de (II.6.17a) peut être stocké pour être réutilisé au pas de temps suivant pour le nouveau terme inclus dans la parenthèse de (II.5.39b).

REMARQUE II.5.2 (Choix du complément de Schur)

On constate que, pour une matrice A donnée, la matrice ${}^t \underline{\mathcal{C}} A \underline{\mathcal{C}}$ est, aux zéros près, de taille $2N \times 2N$ alors que la matrice $\underline{\mathcal{C}} A {}^t \underline{\mathcal{C}}$ est de taille $N \times N$ (où N est le nombre de degrés de liberté sur la table). La manipulation présentée ici fait intervenir le second produit. Une autre idée serait d'injecter $\Lambda_h^{mod,n+1/2}$ dans la première ligne de (II.5.33c), mais ceci conduit à une matrice du type du premier produit, plus grosse à inverser.

REMARQUE II.5.3 (Factorisation de Cholesky de \mathcal{S}_p)

La matrice \mathcal{S}_p étant invariante au cours des pas de temps, nous l'inversons une fois pour toute au début du calcul. Une factorisation de Cholesky n'est pas possible en l'état car \mathcal{S}_p n'est pas symétrique, mais s'écrit $\mathcal{S}_p = \mathbb{I} + \mathcal{R}_{\Delta t} S$ où S est symétrique. On applique alors une astuce pour contourner le problème : on introduit l'inconnue

$$\tilde{\Lambda} = \mathcal{R}_{\Delta t}^{-1/2} \Lambda_h^{mod,n+1/2}$$

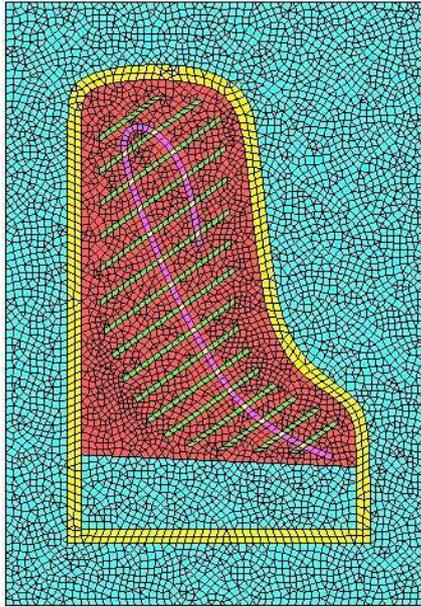
et l'on résout

$$\mathcal{S}_p \Lambda_h^{mod,n+1/2} = Y \quad \text{comme} \quad \underbrace{\mathcal{R}_{\Delta t}^{-1/2} \mathcal{S}_p \mathcal{R}_{\Delta t}^{1/2}}_{\tilde{\mathcal{S}}_p} \tilde{\Lambda} = \mathcal{R}_{\Delta t}^{-1/2} Y$$

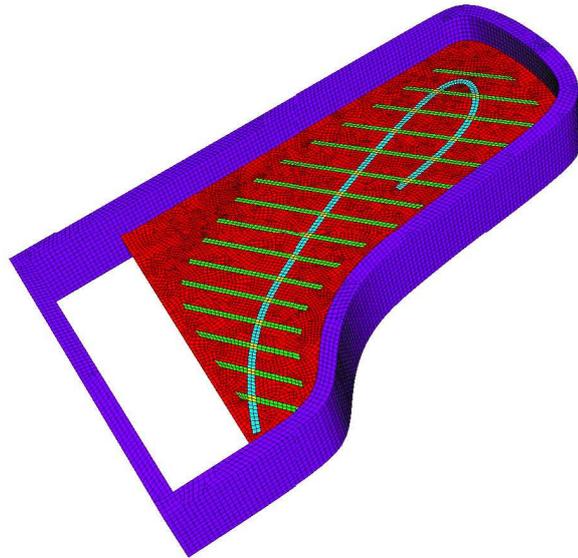
et $\tilde{\mathcal{S}}_p = \mathcal{R}_{\Delta t}^{-1/2} (\mathbb{I} + \mathcal{R}_{\Delta t} S) \mathcal{R}_{\Delta t}^{1/2} = \mathbb{I} + \mathcal{R}_{\Delta t}^{1/2} S \mathcal{R}_{\Delta t}^{1/2}$ qui est symétrique. C'est de cette matrice que l'on prend la factorisation de Cholesky, et l'on calcule $\Lambda_{f,\Lambda}$ et Λ_J en passant par les inconnues intermédiaires décrites à l'instant, puis l'on résout le problème (II.5.39). Le calcul de $\mathcal{R}_{\Delta t}^{1/2}$ et de son inverse est très simple car $\mathcal{R}_{\Delta t}$ est diagonale.

II.5.6 Illustration numérique

Le maillage tridimensionnel est réalisé par quatorze mailles d'extrusion du maillage de table d'harmonie auquel on a rajouté une boîte destinée à générer le domaine de calcul pour l'acoustique, présenté



(a) Maillage surfacique de la table d'harmonie du Steinway D munie de la ceinture et de la boîte destinée à l'air.



(b) Maillage extrudé de la table d'harmonie du Steinway D.

FIGURE II.17 – Maillages surfacique et extrudé utilisés pour les simulations

bois	ρ kg·m ⁻³	E_x GPa	E_y GPa	G_{xy} GPa	G_{xz} GPa	G_{yz} GPa	ν_{xy} -
Épicéa	380	11,0	0,650	0,66	1,2	0,042	0,26
Hêtre	750	13,7	2,24	1,61	1,06	0,46	0,3

TABLE II.10 – Valeurs des paramètres pour la table d'harmonie utilisés pour les simulations

en image II.17(a). Ainsi, les deux maillages (surfacique et volumique) sont conformes. On considère pour la simulation 400 modes sur la table d'harmonie, qui sont calculés avec des éléments finis d'ordre deux et des conditions aux limites simplement supportées. Une boîte de calcul est définie autour de la table d'harmonie, et la ceinture du piano est considérée comme un obstacle (voir la figure II.17(b) dans laquelle on a ôté les éléments volumiques afin de faciliter la visualisation) sur lequel on impose des conditions de Neumann pour l'acoustique. La table d'harmonie est placée à hauteur de 20 cm, dans la boîte de coordonnées en mètres :

$$[x_{min} = -0,4 ; x_{max} = 1,8] \times [y_{min} = -0,8 ; y_{max} = 2,4] \times [z_{min} = 0 ; z_{max} = 0,4] \quad (\text{II.5.43})$$

La ceinture s'étend en épaisseur de 0,05 à 0,35 m. La propagation a lieu dans l'air, qui possède une vitesse de propagation de 340 m·s⁻¹ et une densité de 1,29 kg·m⁻³. La discrétisation est réalisée avec des éléments finis d'ordre deux. Le pas de temps est choisi à $\Delta t = 10^{-6}$ secondes, la seule condition de stabilité étant imposée par l'acoustique. On place une source acoustique au point (0,59 ; 1,26 ; 0,35), de répartition spatiale gaussienne au rayon de 2 cm, qui suit la dépendance temporelle suivante :

$$S(t) = -\frac{f_0 t - 1}{f_0} e^{-\pi^2 (f_0 t - 1)^2}, \quad \text{avec } f_0 = 340 \text{ Hz} \quad (\text{II.5.44})$$

Dans l'optique de vérifier numériquement la conservation de l'énergie discrète, on fixe les paramètres d'amortissement à zéro pour la table d'harmonie, et on impose des conditions aux limites de Neumann au bord de la boîte de calcul, ce qui reviendrait à enfermer le piano (démuni de ses cordes) dans une pièce très petite comportant des parois parfaitement réfléchissantes¹⁰.

10. , ce qui n'est pas courant.

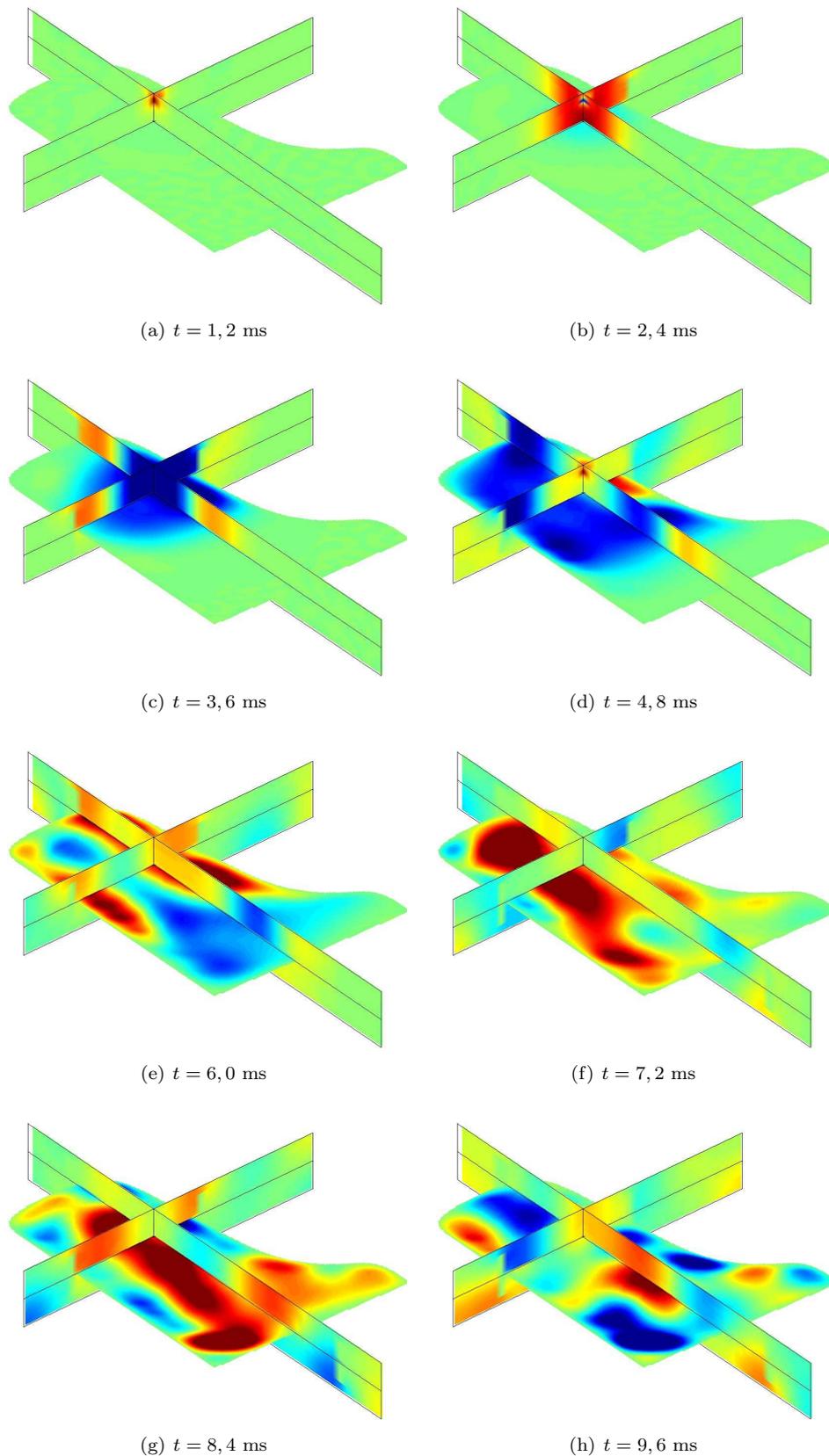
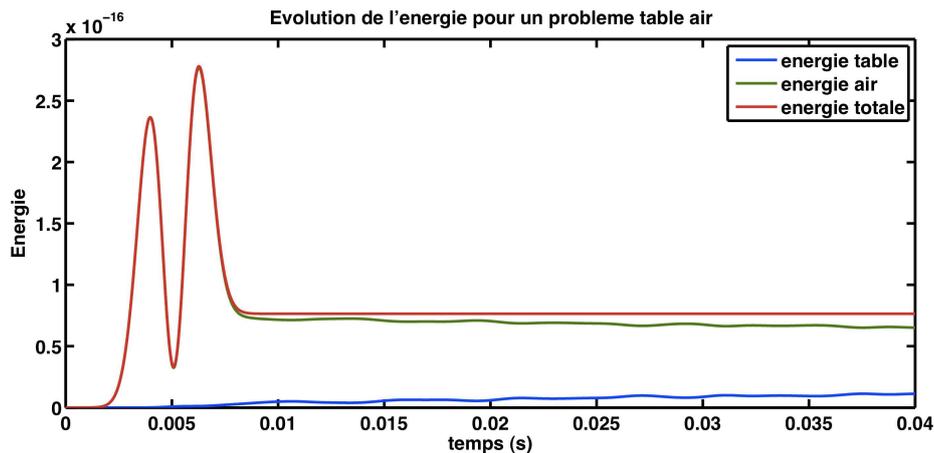


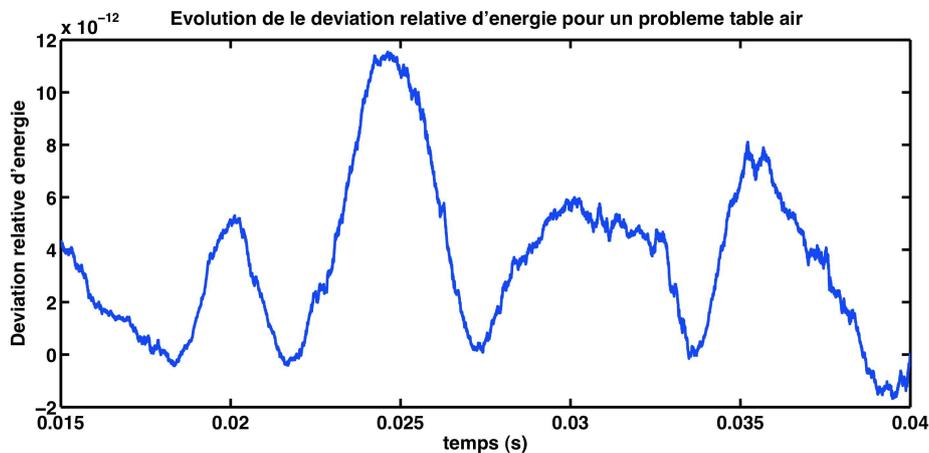
FIGURE II.18 – Évolution des inconnues au cours du temps. On représente dans le plan horizontal en échelle de couleurs le déplacement de la table d'harmonie. Dans les deux plans verticaux, qui correspondent à $x = 0,59$ m et $y = 1,26$ m, on représente des coupes de la pression dans une autre échelle de couleur. Un film est mis en ligne à l'adresse <http://dl.dropbox.com/u/3984954/THESE/FILMS/VibroNeumann.avi>.

La figure II.18 présente les résultats de simulations à divers instants, en montrant horizontalement le déplacement de la table d'harmonie en échelle de couleurs, et verticalement deux plans de coupe de la pression, paramétrés par $x = 0,59$ m et $y = 1,26$ m, dans une autre échelle de couleurs (les échelles ne sont pas précisées en raison du caractère artificiel du cas présenté, mais on signifie que les nuances bleues révèlent des valeurs négatives tandis que les nuances rouges révèlent des valeurs positives, sur la table d'harmonie comme sur les coupes de pression).

La figure II.19(a) montre l'évolution des transferts de l'énergie au cours du temps. On voit que la source confère de l'énergie aux inconnues de l'acoustique dans les dix premières millisecondes, puis s'éteint. On visualise le transfert d'énergie de l'air à la table d'harmonie, tandis que l'énergie totale est invariante. La déviation relative de l'énergie totale est tracée en figure II.19(b) après l'arrêt de la source, montrant une déviation relative de l'ordre de 10^{-12} , c'est à dire de l'ordre de l'erreur numérique.



(a) Évolution des transferts de l'énergie entre l'acoustique et la table d'harmonie



(b) Évolution de la déviation relative de l'énergie totale

FIGURE II.19 – Évolution des transferts et de la déviation relative de l'énergie au cours du temps.

Nous avons choisi de nous comparer avec un code de calcul développé au cours de la thèse de [Grob, 2006], consacrée à la discrétisation des équations de la vibroacoustique (plaque de Reissner Mindlin et acoustique) par la méthode des éléments finis d'ordre élevé. Le maillage est choisi exactement identique à ci dessus, ainsi que la source et l'ordre des éléments qui est égal à deux. Le pas de temps souffre en revanche de la condition de stabilité drastique imposée par le schéma explicite mené sur la table d'harmonie. En effet, les vitesses de propagation présentes dans la table d'harmonie sont beaucoup plus élevées que la vitesse de propagation dans l'air. Le pas de temps doit donc être choisi à $\Delta t = 2 \times 10^{-7}$ secondes, ce qui pénalise le temps de calcul. La comparaison est faite sur des sismogrammes acoustiques, c'est à dire des enregistrements virtuels de la pression en fonction du temps, pour différents points de l'espace. Les points

Point	2	3	6	10
x (m)	0,0	1,3	0,85	1,5
y (m)	1,0	1,7	1,459	2,0
z (m)	0,05	0,35	0,3	0,2
d (m)	0,711	0,835	0,331	1,182

TABLE II.11 – Coordonnées des points d'enregistrement virtuel de la pression, et distance de ces points au point central de la source.

retenus sont les points numérotés 2, 3, 6 et 10, dont les coordonnées sont données en table II.11. Tous les points sont du même côté de la table d'harmonie que la source qui est située en $(0,59 ; 1,26 ; 0,35)$, sauf le point 2, pour lequel la table transmet le son par couplage. Le point le plus proche de la source est le point 6, on voit d'ailleurs bien sur la figure II.20 que le signal y commence beaucoup plus tôt que ceux des autres points. Le point le plus éloigné est le point 10, il est à la même hauteur que la table mais de l'autre côté de la ceinture. On voit que le signal arrive en effet beaucoup plus tard à ce point. La concordance entre les deux méthodes est excellente, y compris pour le point 2 qui se situe du côté de la table d'harmonie opposé à la source.

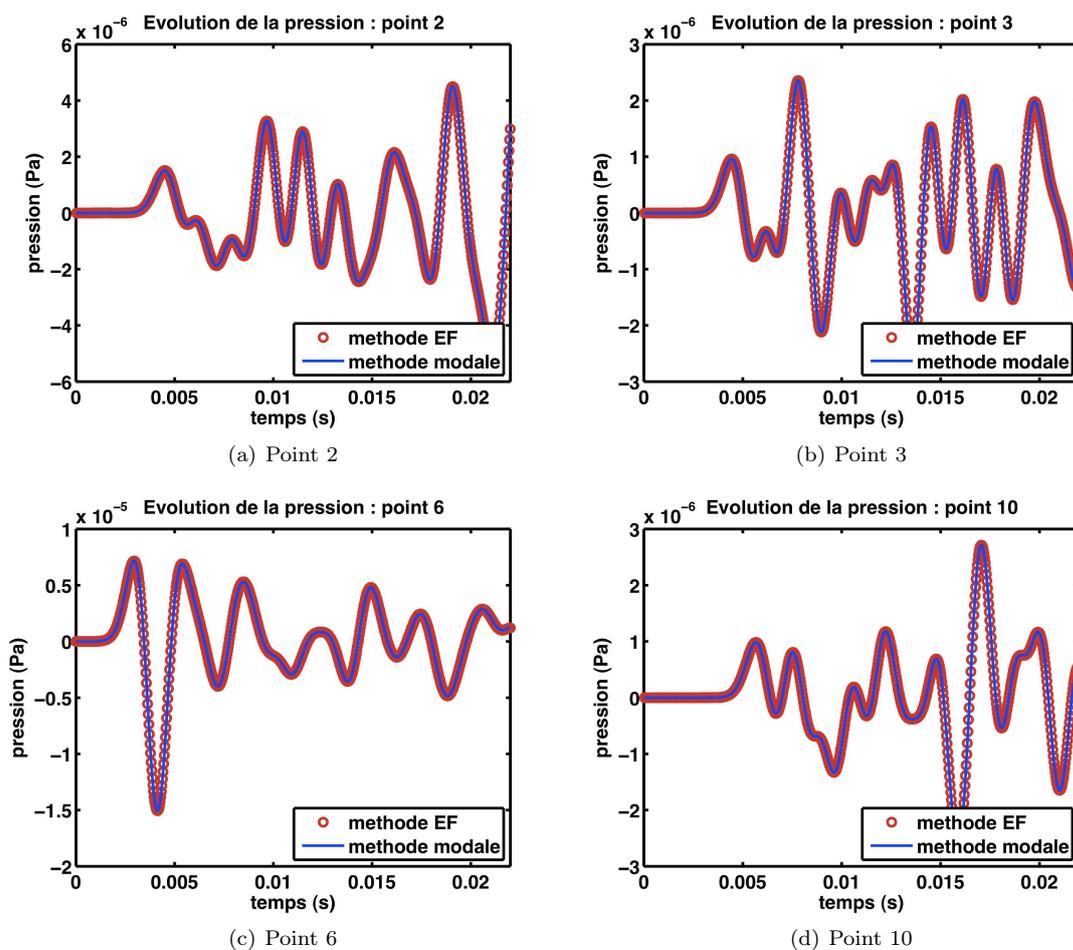


FIGURE II.20 – Evolution de la pression en fonction du temps pour différents points de l'espace.

II.6

Piano complet

Nous sommes enfin prêts pour aborder la discrétisation du modèle complet de piano. Dans le modèle complet de piano, la table d'harmonie est soumise à deux couplages, l'un venant des cordes et l'autre de l'acoustique. Nous allons utiliser les méthodes de discrétisation décrites dans les deux paragraphes précédents, consacrés successivement au couplage { marteau - cordes - table d'harmonie } puis au couplage { table d'harmonie - air }. Rappelons brièvement que notre vœu de garantir la stabilité numérique par des techniques d'énergie nous a conduit à écrire les couplages de façon centrée. C'est en effet l'écriture la plus naturelle, qui reproduit au niveau discret le comportement continu, selon lequel les termes de couplage s'annulent pendant le calcul de l'énergie. Ce choix assure que les couplages numériques n'introduisent aucune dissipation artificielle, ni n'influent sur la condition de stabilité de la méthode, qui est alors la même que celle des sous systèmes considérés indépendamment. L'inconvénient majeur est cependant que le problème écrit couple de façon implicite les inconnues de chaque sous système. Or, les méthodes numériques utilisées sur les cordes, la table d'harmonie et pour l'acoustique sont très différentes et demandent, dans une optique de performance des calculs, d'être traitées séparément. Pour cela, nous avons proposé d'utiliser des multiplicateurs de Lagrange et de procéder à un complément de Schur pour calculer de façon séparée les inconnues des cordes et de la table d'harmonie dans le couplage au chevalet. De même, un complément de Schur a été proposé pour décorrélérer les mises à jour des inconnues de l'acoustique de celles de la table d'harmonie dans le couplage vibroacoustique. Lors de l'écriture d'un schéma discret pour le problème de piano complet, nous souhaitons mettre en pratique ces deux méthodes. Écrivons dans un premier temps le schéma, et montrons qu'il dissipe une énergie discrète. Nous reviendrons alors sur la méthode permettant de résoudre ce schéma de façon séparée sur chaque sous système, et montrerons quelques résultats de simulation mettant en lumière les propriétés évoquées précédemment.

II.6.1 Schéma discret pour le piano

Le problème totalement couplé consiste à considérer les équations de la vibroacoustique (II.5.33), dans lesquelles la force répartie sur la table d'harmonie vient du couplage avec les cordes, ce qui s'écrit :

$$F_h^n = - \sum_i (F_i^{\mathcal{P}}) \quad (\text{II.6.1})$$

où les $(F_i^{\mathcal{P}})$ sont les multiplicateurs de Lagrange liés à ce couplage, voir le paragraphe consacré à ce sujet II.4.1. On écrit toujours la condition de couplage entre les cordes et la table d'harmonie de façon centrée, comme :

$$\frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \underline{\nu}_h = \frac{\Lambda_h^{mod,n+1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2}}{\Delta t} \cdot {}^t\mathbb{P}_h^U J_h \quad (\text{II.6.2})$$

et l'on considère la discrétisation proposée en II.4 pour le sous système { marteau - cordes }.

Résumons brièvement les choix de discrétisation sur chaque sous système. La discrétisation en espace est faite systématiquement avec des éléments finis d'ordre élevé. Concernant la discrétisation en temps, les méthodes sont très différentes :

- ▷ on utilise sur les N_c **cordes**, un double θ -schéma pour la partie linéaire, et un schéma développé pour l'occasion sur la partie non linéaire, basée sur la construction d'un gradient approché,
- ▷ les **forces au chevalet** sont considérées constantes sur les intervalles de temps du type $[t^{n-1/2}, t^{n+1/2}]$,
- ▷ on utilise sur la **table d'harmonie**, une décomposition sur les premiers modes numériques, suivie d'une méthode analytique permettant de mettre à jour les inconnues et leurs dérivées en temps aux instants interlacés du type $t^{n+1/2}$,
- ▷ l'**acoustique** est mise à jour par un schéma saute mouton aux pas de temps interlacés, la pression étant évaluée aux instants $t^{n+1/2}$ tandis que la vitesse est évaluée aux instants t^n .

$$\left(\mathcal{S}_{m,c,p,a} \right) \left\{ \begin{array}{l}
M^{\mathcal{H}} [\xi]_{\Delta t^2}^n = - \sum_{i=1}^{N_c} (F_i^{\mathcal{H}}) \quad (\text{II.6.3a}) \\
(F_i^{\mathcal{H}}) = K_i^{\mathcal{H}} \delta \Psi \left(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}, \langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1} \right) - \\
R_i^{\mathcal{H}} \frac{\Phi(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}) - \Phi(\langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1})}{2\Delta t} \quad (\text{II.6.3b}) \\
M_h[\mathbf{Q}_{i,h}]_{\Delta t^2}^n + R_h \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} + \underline{K}_{i,h} \{\mathbf{Q}_{i,h}\}_{\theta}^n + \overline{K}_h \{\mathbf{Q}_{i,h}\}_{\bar{\theta}}^n \\
+ \overline{\nabla}^{\mathcal{P}} \mathcal{U}_i(\mathbf{Q}_{i,h}^{n+\gamma}, \mathbf{Q}_{i,h}^{n-\gamma}) + (F_i^{\mathcal{H}}) \langle \Delta_h \rangle = F_i^{\mathcal{P}} \underline{\nu}_h + G_i^{\mathcal{P}} \underline{\tau}_h \quad (\text{II.6.3c}) \\
\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \underline{\nu}_h = \frac{\Lambda_h^{mod,n+1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2}}{\Delta t} \cdot {}^t \mathbb{P}_h^U J_h \\
\frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \underline{\tau}_h = 0
\end{array} \right. \quad (\text{II.6.3d}) \\
\partial_t^2 \Lambda_h^{mod} + \partial_t \mathbb{A}_h \Lambda_h^{mod} + \mathbb{D}_h \Lambda_h^{mod} = - \sum_{i=1}^{N_c} (F_i^{\mathcal{P}}) {}^t \mathbb{P}_h^U J_h + {}^t \mathbb{P}_h^U \underline{\mathcal{C}}_h \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2} \quad (\text{II.6.3e}) \\
\Lambda_h^{mod}(t = t^{n-1/2}) = \Lambda_h^{mod,n-1/2}; \quad \partial_t \Lambda_h^{mod}(t = t^{n-1/2}) = \partial_t \Lambda_h^{mod,n-1/2} \quad (\text{II.6.3f}) \\
\left\{ \begin{array}{l}
\mathcal{M}_h \frac{P_h^{n+1/2} - P_h^{n-1/2}}{\Delta t} + \mathcal{R}_h^s V_h^n + {}^t \underline{\mathcal{C}}_h \mathbb{P}_h^U \frac{\Lambda_h^{mod,n+1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2}}{\Delta t} = 0 \\
\mathcal{B}_h \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} + \mathcal{R}_h^V P_h^{n+1/2} = 0
\end{array} \right. \quad (\text{II.6.3g})
\end{array} \right.$$

THÉORÈME II.6.1 (Énergie du système discret de piano)

Toute solution numérique à (II.6.3) vérifie

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{E}_{m,c,p,a}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{m,c,p,a}^{n-1/2}}{\Delta t} &= - \sum_{i=0}^{N_c} \left\| \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_{R_h}^2 - \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \|\partial_t \Lambda_h^{mod}\|_{\mathbb{A}_h}^2 \\
&\quad + \sum_{i=0}^{N_c} \frac{R_i^{\mathcal{H}}}{4\Delta t^2} [\Phi(d_i^{n+1}) - \Phi(d_i^{n-1})] [(d_i^{n+1}) - (d_i^{n-1})] \quad (\text{II.6.4})
\end{aligned}$$

$$\text{avec } \mathcal{E}_{m,c,p,a}^{n+1/2} = \sum_{i=1}^{N_c} \left[\mathcal{E}_{c,i}^{n+1/2} + K_i^{\mathcal{H}} \frac{\Psi(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}) + \Psi(\langle U_{i,h}^n \rangle - \xi^n)}{2} \right] \\
+ \frac{M^{\mathcal{H}}}{2} \left| \frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} \right|^2 + \mathcal{E}_p^{n+1/2} + \mathcal{E}_a^{n+1/2} \quad (\text{II.6.5})$$

où $\mathcal{E}_{c,i}^{n+1/2}$ est l'énergie (II.1.186) pour la corde numéro i ,

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mathcal{E}_p^{n+1/2} = \frac{1}{2} \|\partial_t \Lambda_h^{mod,n+1/2}\|^2 + \frac{1}{2} \|\Lambda_h^{mod,n+1/2}\|_{\mathbb{D}_h}^2 \\
\mathcal{E}_a^{n+1/2} = \frac{1}{2} \|P_h^{n+1/2}\|_{\mathcal{M}_h}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{B}_h V_h^{n+1} \cdot V_h^n
\end{array} \right. \quad (\text{II.6.6})$$

$$\text{et } d_i^{n+1} = \langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}, \quad d_i^n = \langle U_{i,h}^n \rangle - \xi^n, \quad d_i^{n-1} = \langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1}$$

DÉMONSTRATION. Utilisons d'une part le théorème II.2.1 qui donne le comportement énergétique du sous système { marteau - cordes }, pour lequel le second membre $\mathbf{S}_{i,h}^n$ est ici donné par $F_i^{\mathcal{P}} \underline{\nu}_h + G_i^{\mathcal{P}} \underline{\tau}_h$:

$$\frac{\mathcal{E}_{m,c}^{n+1/2} - \mathcal{E}_{m,c}^{n-1/2}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N_c} \frac{R_i^{\mathcal{P}}}{4\Delta t^2} \left[\Phi(d_i^{n+1}) - \Phi(d_i^{n-1}) \right] \left[d_i^{n+1} - d_i^{n-1} \right] - \sum_{i=1}^{N_c} \left\| \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \right\|_{R_h}^2 + \sum_{i=1}^{N_c} \left(F_i^{\mathcal{P}} \underline{\nu}_h + G_i^{\mathcal{P}} \underline{\tau}_h \right) \cdot \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (\text{II.6.7})$$

On utilise ensuite le théorème II.3.1 concernant la dissipation de l'énergie de la table :

$$\frac{\mathcal{E}_p^{n+1/2} - \mathcal{E}_p^{n-1/2}}{\Delta t} = - \sum_{i=1}^{N_c} \left(F_i^{\mathcal{P}} \right) {}^t \mathbb{P}_h^U J_h \cdot \frac{\Lambda_h^{mod,n+1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2}}{\Delta t} + {}^t \mathbb{P}_h^U \underline{\mathcal{C}}_h \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2} \cdot \frac{\Lambda_h^{mod,n+1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2}}{\Delta t} - \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} \|\partial_t \Lambda_h^{mod}\|_{\mathbb{A}_h}^2 \quad (\text{II.6.8})$$

D'autre part, on utilise le théorème II.5.1 concernant la dissipation de l'énergie acoustique pour établir que

$$\frac{\mathcal{E}_a^{n+1/2} - \mathcal{E}_a^{n-1/2}}{\Delta t} = - {}^t \underline{\mathcal{C}}_h \mathbb{P}_h^U \frac{\Lambda_h^{mod,n+1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2}}{\Delta t} \cdot \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2} \quad (\text{II.6.9})$$

On obtient bien l'égalité recherchée en sommant (II.6.7), (II.6.8) et (II.6.9) et en utilisant les conditions de couplage (II.6.3d). □

REMARQUE II.6.1 (*Positivité de l'énergie discrète du piano*)

L'énergie (II.6.5) est positive si et seulement l'énergie de chaque sous système est positive. La condition de stabilité du problème couplé est donc la condition la plus restrictive de tous les sous systèmes considérés indépendamment.

II.6.2 Résolution séparée sur chaque sous système

Afin de mettre à jour de façon séparée les inconnues des différents sous systèmes, on souhaite toujours écrire la condition de couplage au chevalet indépendamment des inconnues aux temps ultérieurs, en passant par les multiplicateurs de Lagrange. On peut réécrire que

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\left(\mathbb{I} + \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U \underline{\mathcal{C}}_h (\mathcal{M}_h^{-1}) {}^t \underline{\mathcal{C}}_h \mathbb{P}_h^U \right)}_{S_p} \Lambda_h^{mod,n+1/2} = F_f + F_\Lambda - \sum_i (F_i^{\mathcal{P}}) F_J \end{array} \right. \quad (\text{II.6.10a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_f = \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U \underline{\mathcal{C}}_h \left[2P_h^{n-1/2} - \Delta t (\mathcal{M}_h^{-1}) \mathcal{R}_h^s V_h^n \right] \end{array} \right. \quad (\text{II.6.10b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_\Lambda = \mathcal{S}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \mathcal{S}_{\Delta t}^1 \partial_t \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U \underline{\mathcal{C}}_h (\mathcal{M}_h^{-1}) {}^t \underline{\mathcal{C}}_h \mathbb{P}_h^U \Lambda_h^{mod,n-1/2} \end{array} \right. \quad (\text{II.6.10c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_J = \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U J_h \end{array} \right. \quad (\text{II.6.10d})$$

Autrement dit, on peut exprimer $\Lambda_h^{mod,n+1/2}$ comme une fonction linéaire des $F_i^{\mathcal{P}}$:

$$\Lambda_h^{mod,n+1/2} = \underbrace{\mathcal{S}_p^{-1} (F_f + F_\Lambda)}_{\Lambda_{f,\Lambda}} + \left(- \sum_i (F_i^{\mathcal{P}}) \right) \underbrace{\mathcal{S}_p^{-1} F_J}_{\Lambda_J} \quad (\text{II.6.11})$$

où $\Lambda_{f,\Lambda}$ peut être calculée uniquement à partir des inconnues aux instants précédents, tandis que Λ_J peut être calculée une fois pour toutes avant les itérations en temps. La condition de couplage (II.6.3d) peut alors être écrite :

$$\frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \underline{\nu}_h = \frac{\Lambda_{f,\Lambda} + \left(- \sum_i (F_i^{\mathcal{P}}) \right) \Lambda_J - \Lambda_h^{mod,n-1/2}}{\Delta t} \cdot {}^t \mathbb{P}_h^U J_h \quad (\text{II.6.12})$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\Delta t} (\Lambda_{f,\Lambda} - \Lambda_h^{mod,n-1/2}) \cdot {}^t \mathbb{P}_h^U J_h}_{\alpha} - \sum_i (F_i^{\mathcal{P}}) \underbrace{\frac{1}{\Delta t} \Lambda_J \cdot {}^t \mathbb{P}_h^U J_h}_{\beta} \quad (\text{II.6.13})$$

Algorithme 3 (Résolution pratique pour le couplage complet)

On commence par résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_p \Lambda_{f,\Lambda} = F_f + F_\Lambda \end{array} \right. \quad (\text{II.6.14a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_f = \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U \mathcal{C}_h \left[2P_h^{n-1/2} - \Delta t (\mathcal{M}_h^{-1}) \mathcal{R}_h^s V_h^n \right] \end{array} \right. \quad (\text{II.6.14b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_\Lambda = \mathcal{S}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \mathcal{S}_{\Delta t}^1 \partial_t \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U \mathcal{C}_h (\mathcal{M}_h^{-1}) {}^t \mathcal{C}_h \mathbb{P}_h^U \Lambda_h^{mod,n-1/2} \end{array} \right. \quad (\text{II.6.14c})$$

$$(\text{II.6.14d})$$

ce qui nous permet d'accéder aux valeurs actualisées de α et β dans (II.6.13). On résout alors

$$\left\{ \begin{array}{l} M^{\mathcal{H}} [\xi]_{\Delta t^2}^n - \sum_{i=1}^{N_c} (F_i^{\mathcal{H}}) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.6.15a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (F_i^{\mathcal{H}}) = K_i^{\mathcal{H}} \frac{\Psi(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}) - \Psi(\langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1})}{(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}) - (\langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1})} - \\ R_i^{\mathcal{H}} \frac{\Phi(\langle U_{i,h}^{n+1} \rangle - \xi^{n+1}) - \Phi(\langle U_{i,h}^{n-1} \rangle - \xi^{n-1})}{2\Delta t} \end{array} \right. \quad (\text{II.6.15b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_h [\mathbf{Q}_{i,h}]_{\Delta t^2}^n + R_h \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} + \underline{K}_{i,h} \{\mathbf{Q}_{i,h}\}_\theta^n + \overline{K}_h \{\mathbf{Q}_{i,h}\}_\theta^n \\ + \overline{\nabla}^P \mathbf{u}_i(\mathbf{Q}_{i,h}^{n+\gamma}, \mathbf{Q}_{i,h}^{n-\gamma}) + (F_i^{\mathcal{H}}) \langle \Delta_h \rangle = F_i^P \underline{\nu}_h + G_i^P \underline{\tau}_h, \quad \forall i \end{array} \right. \quad (\text{II.6.15c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \underline{\nu}_h = \alpha - \left(\sum_i (F_i^P) \right) \beta \end{array} \right. \quad (\text{II.6.15d})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{Q}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,h}^{n-1}}{2\Delta t} \cdot \underline{\tau}_h = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.6.15e})$$

On peut alors actualiser $\Lambda_h^{mod,n+1/2}$ en résolvant

$$\mathcal{S}_p \Lambda_h^{mod,n+1/2} = F_f + F_\Lambda - \sum_i (F_i^P) F_J \quad (\text{II.6.16})$$

On actualise ensuite les inconnues acoustiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_h^{n+1/2} = P_h^{n-1/2} - \Delta t (\mathcal{M}_h^{-1}) \mathcal{R}_h^s V_h^n - (\mathcal{M}_h^{-1}) {}^t \mathcal{C}_h \mathbb{P}_h^U [\Lambda_h^{mod,n+1/2} - \Lambda_h^{mod,n-1/2}] \end{array} \right. \quad (\text{II.6.17a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_h^{n+1} = V_h^n - \Delta t (\mathcal{B}_h^{-1}) \mathcal{R}_h^V P_h^{n+1/2} \end{array} \right. \quad (\text{II.6.17b})$$

et enfin la dérivée de l'inconnue de la table :

$$\begin{aligned} \partial_t \Lambda_h^{mod}(t^{n+1/2}) &= \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}^0 \Lambda_h^{mod,n-1/2} + \dot{\mathcal{S}}_{\Delta t}^1 \partial_t \Lambda_h^{mod,n-1/2} \\ &\quad - \sum_i (F_i^P) \dot{\mathcal{R}}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U J_h + \dot{\mathcal{R}}_{\Delta t} {}^t \mathbb{P}_h^U \mathcal{C}_h \frac{P_h^{n+1/2} + P_h^{n-1/2}}{2} \end{aligned} \quad (\text{II.6.18})$$

II.6.3 Illustration numérique

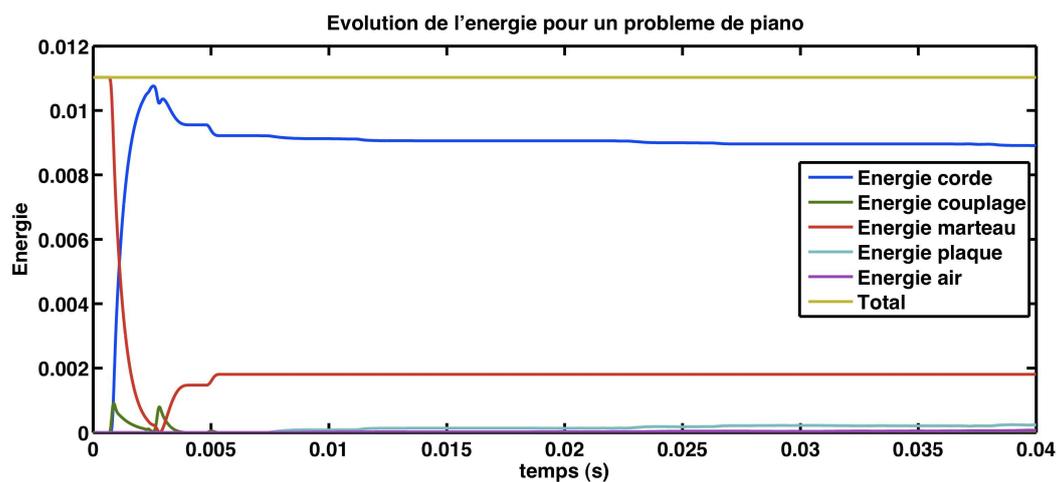
La maillage volumique est, comme dans le paragraphe précédent, obtenu par extrusion du maillage surfacique de la table d'harmonie II.17(a). On utilise la même boîte de calcul autour de la table et de la ceinture du piano, aux bords de laquelle on impose des conditions non réalistes de Neumann homogène, afin de vérifier la conservation de l'énergie du système complet en l'absence d'amortissement. Les éléments finis sur la table et pour l'acoustique sont choisis d'ordre trois. Les paramètres mécaniques pour la table et l'air sont les mêmes que dans le paragraphe précédent. La méthode modale est utilisée avec les 800 premiers modes. On considère une corde et un marteau de type C2, dont les paramètres sont rappelés en table II.12. Le point d'attache entre la corde et la table d'harmonie est le point d'attache de la corde C2 sur le Steinway : (0, 59 ; 1, 26), et l'on impose un angle de 2 degrés entre la corde et l'horizontale.

L	A	ρ	T_0	E	I	G	κ
m	m ²	kg·m ⁻³	N	Pa	m ⁴	Pa	-
1,60	$9,9 \times 10^{-7}$	24085	1046	$2,02 \times 10^{11}$	$7,8 \times 10^{-14}$	$7,0 \times 10^{10}$	0,85
$M^{\mathcal{H}}$	$x^{\mathcal{H}}$	$\Delta\delta^{\mathcal{H}}$	$v_0^{\mathcal{H}}$	p	$K^{\mathcal{H}}$		
kg	m	m	m·s ⁻¹	-	N·m ^{-p}		
$9,8 \times 10^{-3}$	0,2	0,02	1,5	2,3	5×10^9		
N_x	Δt	θ	$\bar{\theta}$	\mathcal{P}	γ	ordre	
200	10^{-6}	1/4	1/12	Π_N	1/2	5	

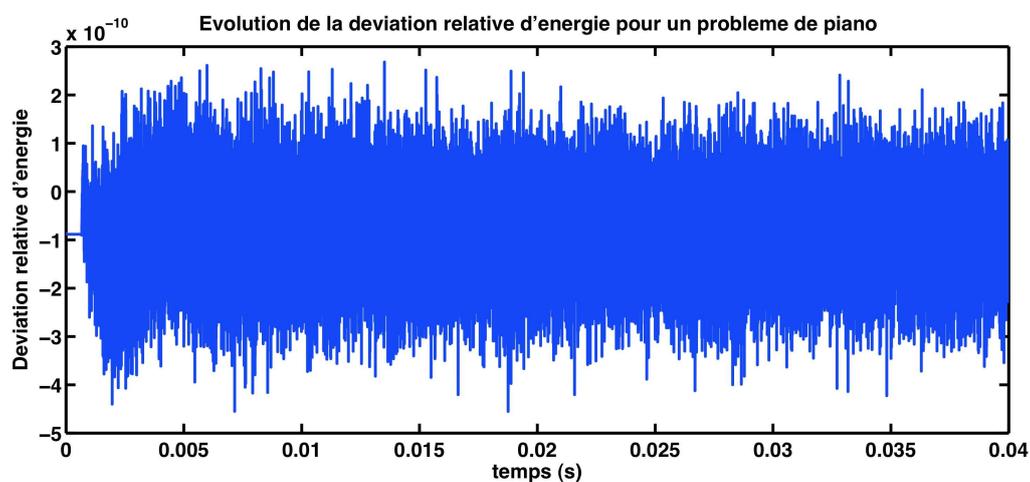
TABLE II.12 – Valeurs des paramètres de corde et de marteau utilisés pour les simulations

La figure II.21(a) montre les transferts d'énergie entre les différents sous systèmes du piano au cours du temps. L'énergie est délivrée par le marteau à la corde lors du contact, puis le marteau atteint un point d'énergie cinétique nulle. Il rebrousse alors chemin, poussé par les cordes, jusqu'à ce que le contact soit perdu. Le marteau part alors avec une vitesse constante dans le sens opposé à son attaque. La corde commence pendant ce temps à perdre peu à peu son énergie au profit de la table d'harmonie, qui rayonne à son tour dans l'air. Les deux courbes d'énergie de la table et de l'air montrent une augmentation assez lente qui se reflète, à cause du couplage, dans la décroissance de l'énergie de corde. L'énergie totale est quant à elle très bien conservée comme le montre la figure II.21(b) qui trace la déviation relative de l'énergie en fonction du temps. Cette déviation est de l'ordre de celle que nous avons obtenu sur le sous système { corde }, le bruit numérique étant dû à la difficulté d'annuler le schéma pour la corde non linéaire.

La figure II.22 montre le résultat de la simulation à différents instants, dans le même formalisme qu'au chapitre précédent. Dans ce cas, cependant, on fait varier l'échelle de couleurs d'un instant à l'autre afin de pouvoir visualiser les phénomènes qui ont des dynamiques très différentes. On indique ici une échelle de couleurs en unités arbitraires mais qui permet de montrer les ordres de grandeur entre le début et la fin de la simulation. La corde est en fait attachée au croisement des deux plans. On voit qu'à 1,2 millisecondes, une vibration est transmise par la corde à la table, qui tire la table vers le bas (la couleur bleue indiquant toujours que les valeurs sont négatives). Il s'agit en fait de la vibration longitudinale qui est arrivée au chevalet, en comprimant la corde, ce qui induit une force au chevalet. L'angle entre la corde et la table étant petit mais non nul, la table d'harmonie ressent la projection de cette force sur la direction du chevalet, et est tirée vers le bas. Elle l'est de plus en plus jusqu'à ce que l'onde transversale arrive à son tour au chevalet, à 7,4 millisecondes, annulant presque les vibrations de la table puisque la tirant vers le haut. La pression rayonnée devient alors beaucoup plus grande, c'est pourquoi l'échelle de couleur doit être adaptée drastiquement. Il s'en suit une oscillation entretenue pendant laquelle les ondes voyagent sur la corde, sur la table d'harmonie mais aussi dans le domaine acoustique.



(a) Évolution des transferts de l'énergie entre l'acoustique et la table d'harmonie



(b) Évolution de la déviation relative de l'énergie totale

FIGURE II.21 – Évolution des transferts et de la déviation relative de l'énergie au cours du temps.

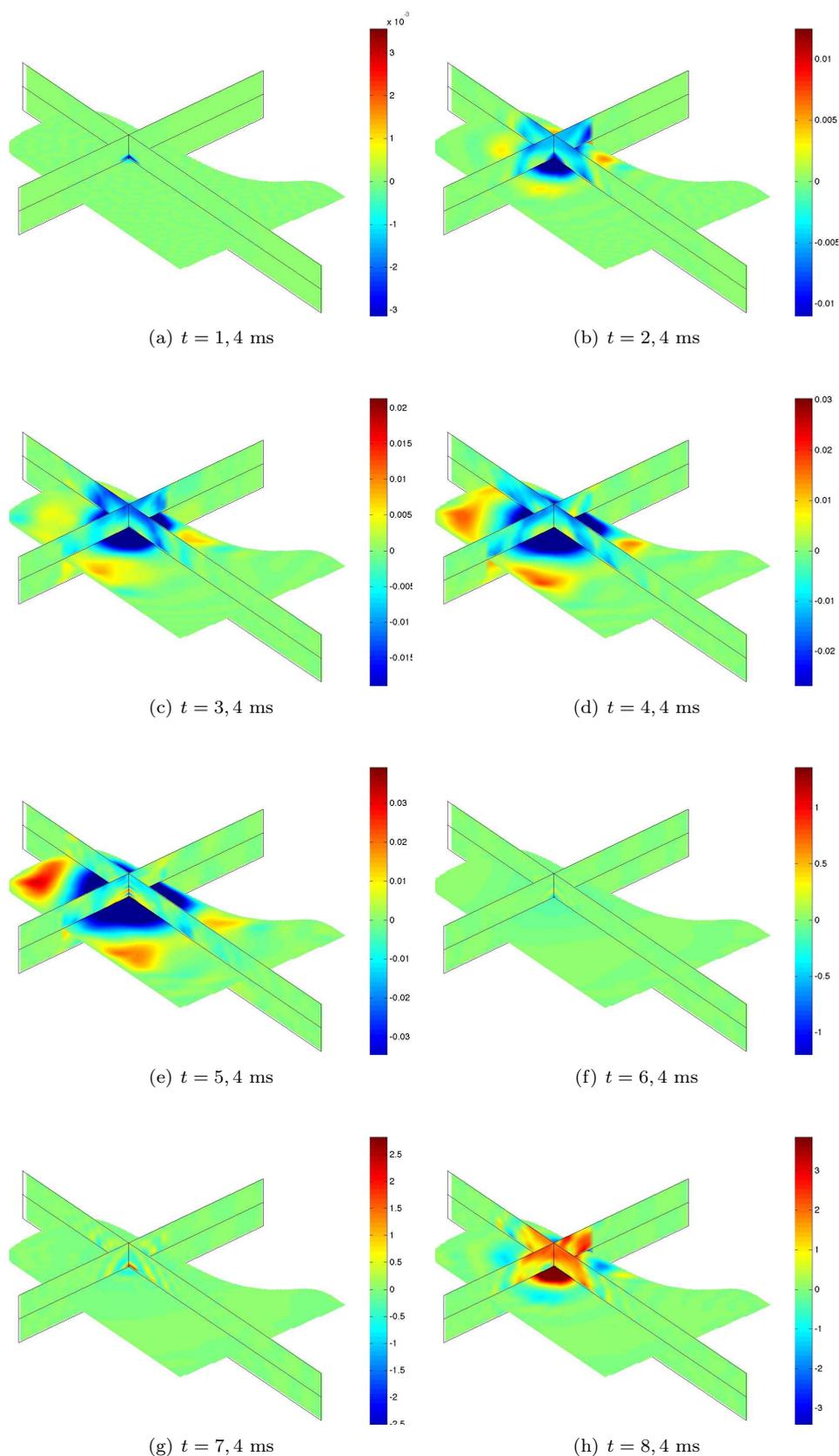


FIGURE II.22 – Évolution des inconnues au cours du temps. On représente dans le plan horizontal en échelle de couleurs le déplacement de la table d’harmonie. Dans les deux plans verticaux, qui correspondent à $x = 0,59$ m et $y = 1,26$ m, on représente des coupes de la pression dans une autre échelle de couleur. Un film est mis en ligne à l’adresse <http://dl.dropbox.com/u/3984954/THESE/FILMS/FilmPianoEner.avi>.

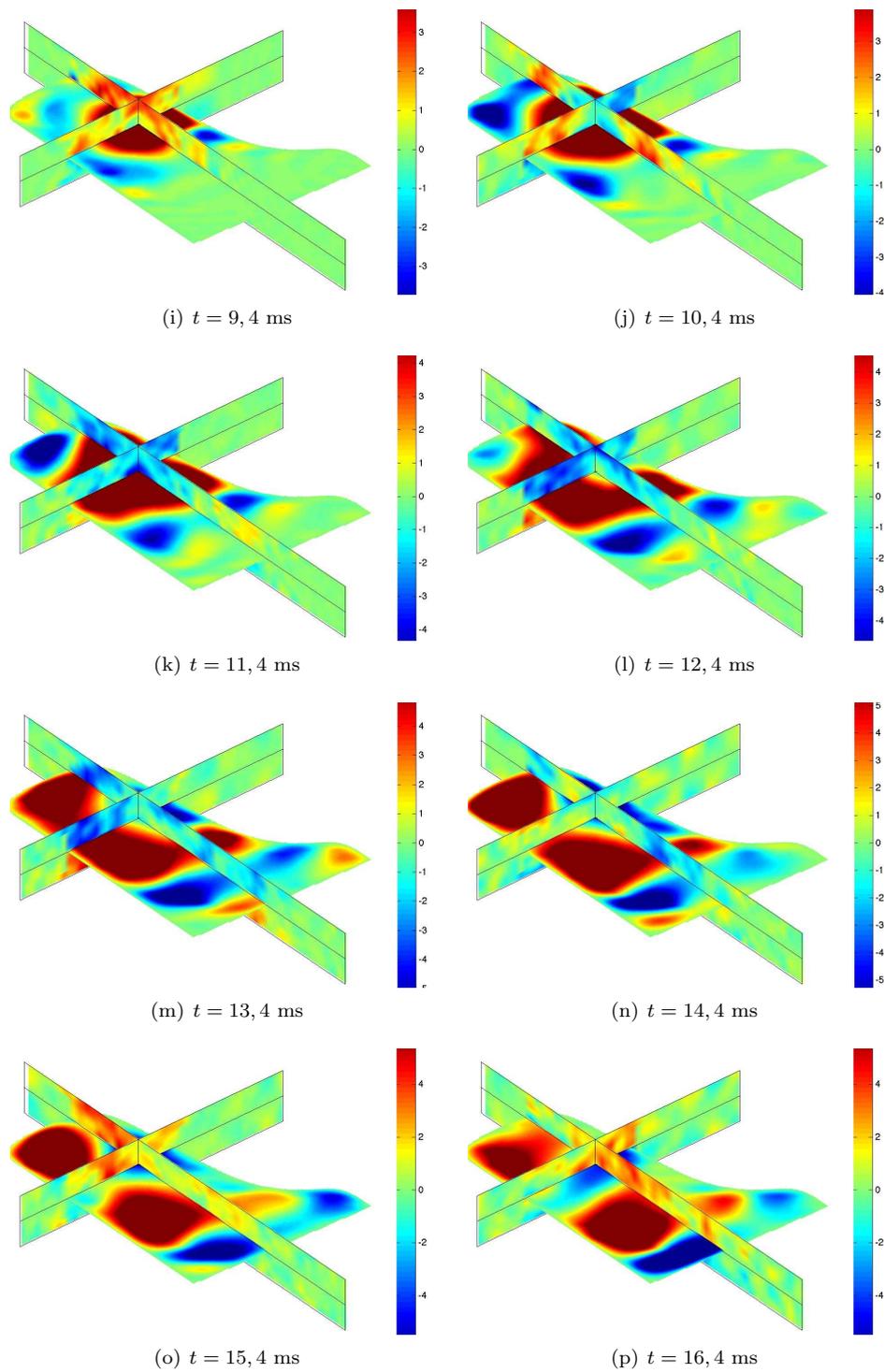


FIGURE II.22 – (Suite)

II.7

Discussion de la discrétisation

Les schémas numériques que nous avons proposés dans ce chapitre pour traiter de la discrétisation de chaque partie du piano séparément, avant d’aborder la question des couplages, étaient tous guidés par la volonté de garantir *a priori* leur stabilité numérique, par une technique énergétique. Pour cette raison, et afin de s’adapter aux difficultés spécifiques de chaque problème, les choix de discrétisation sont assez variés et conduisent à un schéma général pour le piano innovant et original. Il est cependant intéressant de remettre en question certains de ces choix, qui ont pu conduire à des difficultés numériques, et de discuter de leurs avantages ou inconvénients par rapport à d’éventuelles alternatives.

II.7.1 Discrétisation spatiale du modèle de plaque

Comme nous l’avons souligné en II.3.1, la méthode des éléments finis H^1 d’ordre élevé permet de réduire l’apparition du verrouillage numérique, mais n’en est pas exempte. En conséquence, plus l’épaisseur de la plaque (ici la table d’harmonie) est petite, plus il faudra fournir d’efforts en terme de nombre d’inconnues afin d’atteindre une certaine précision. La présence de couches limites dans le modèle de Reissner Mindlin rend nécessaire un raffinement du maillage de la taille de l’épaisseur à proximité des bords, tandis que le verrouillage dû au « shear locking » rend nécessaire un raffinement sur toute la plaque. Ces raffinements sont bien sûr possibles, mais assez problématiques dans le contexte du piano, dans la mesure où l’on génère le maillage tridimensionnel par extrusion du maillage de plaque. On risque alors d’hériter d’éléments tridimensionnels beaucoup plus petits que nécessaire (du point de vue de la précision) pour la résolution de l’équation acoustique, avec pour conséquence une dégradation du pas de temps autorisé par la condition de stabilité, nous reviendrons sur ce point dans la suite. De nombreuses méthodes non verrouillantes existent pour les modèles de plaque, et l’implémentation d’une de ces méthodes permettrait de s’affranchir d’un raffinement généralisé. En revanche, il ne semble pas que ces méthodes pallient au manque de précision lié aux couches limites, un raffinement local semblant inévitable.

Dans le cas de la table d’harmonie, le maillage suit naturellement la géométrie, qui comporte des raidisseurs et des chevalets assez peu larges (de quelques centimètres), de telle sorte que le maillage utilisé pour appliquer les éléments finis d’ordre élevé est déjà relativement fin. Les expériences numériques suggèrent qu’un effort supplémentaire devrait sûrement être apporté aux interfaces des différents matériaux et aux bords.

II.7.2 Choix de la méthode modale

L’utilisation des premiers modes de la table d’harmonie comme espace de discrétisation spatial était principalement motivée par la volonté de reproduire fidèlement l’amortissement mesuré, qui a la particularité de dépendre du mode de vibration. En conséquence, la dynamique de la table d’harmonie est décrite dans une base modale, alors que l’acoustique est toujours décrite dans une base d’éléments finis. Afin d’écrire le couplage vibroacoustique, il est nécessaire de procéder régulièrement (deux fois par pas de temps) à un produit matrice pleine - vecteur, correspondant au changement de base pour la table d’harmonie, ce qui constitue une part non négligeable du temps de calcul global, typiquement (pour les exemples mentionnés dans ce chapitre) de 10 à 30 %. L’utilisation de cette méthode requiert également le calcul numérique des modes, qui est fait une fois pour toutes au début de la simulation, mais peut s’avérer très coûteux lorsque beaucoup de modes sont demandés (il faut plus de quatre heures pour calculer 2 400 modes sur 4 cœurs). Il est donc légitime de se demander si un schéma plus classique aurait pu être choisi. On pense par exemple à rester dans la base éléments finis avant d’utiliser un schéma saute mouton, ou plus généralement, un θ -schéma. Étant données les vitesses de propagation dans les solides, en particulier dans les deux directions orthotropes du bois, les conditions de stabilité imposées par l’utilisation d’un θ -schéma avec $\theta < 1/4$ seraient bien inférieures à la condition de stabilité imposée par le schéma saute-mouton utilisé pour la résolution de l’acoustique, et seraient en pratique vraiment pénalisantes (à moins d’adopter un pas de temps différent sur la table et dans l’air, auquel cas il faudrait repenser tout le schéma). Il faudrait donc inéluctablement utiliser un θ -schéma avec $\theta \geq 1/4$, qui présenterait alors deux désavantages majeurs : un coût de résolution accru, et l’introduction de dispersion numérique en temps (phénomène

inexistant avec la méthode de résolution analytique proposée ici). Si on ajoute le fait que l'amortissement devra être simplifié afin de s'écrire naturellement dans le contexte des EDP (voir le paragraphe 1.3.3), il n'est pas clair que le bilan penche en la défaveur de la méthode modale, ce bilan dépendant beaucoup de l'importance que l'on accorde à diminuer la dispersion numérique ou à bien représenter les phénomènes d'amortissement. A notre sens, ces deux aspects sont particulièrement importants dans le contexte de la synthèse sonore, et justifient les éventuels efforts demandés par l'utilisation de la méthode modale.

II.7.3 Traitement des couplages

Lors de la dérivation des schémas numériques, la volonté de conserver un équivalent discret de l'énergie continue nous a naturellement conduit à traiter les couplages (cordes - table d'harmonie ou table d'harmonie - acoustique) de façon implicite, de telle sorte que les termes artificiels liés aux couplages disparaissent lors de l'écriture de l'énergie, à l'image du cas continu. Nous avons ensuite été amenés à effectuer des opérations du type complément de Schur afin de permettre la mise à jour séparée des inconnues des différents problèmes impliqués dans le couplage. Il est tout à fait possible, sans perte de précision, de traiter les couplages de façon explicite (comme par exemple dans [Diaz, 2005]), afin d'éviter cette étape somme toute assez coûteuse. La contrepartie de cette démarche est l'apparition d'un nouveau terme dans l'énergie discrète, pénalisant la condition de stabilité de la méthode, qui n'est alors plus la condition la plus restrictive des différents problèmes pris un par un. Une étude plus poussée de tels schémas serait nécessaire afin de mettre en balance leur effet sur la condition de stabilité avec les simplifications algorithmiques qu'ils engendreraient.

II.7.4 Résolution des équations de l'acoustique

Comme nous l'avons mentionné à plusieurs reprises, la résolution des équations de l'acoustique est de loin l'étape la plus coûteuse lors de la résolution du schéma proposé pour le piano, à cause simplement de la taille du problème. On peut toutefois remarquer que le maillage tridimensionnel est obtenu par extrusion d'un maillage surfacique contenant en particulier la table d'harmonie, et reproduisant donc la géométrie très particulière de cette dernière. On comprend bien la nécessité de capter la géométrie et les changements de matériaux pour le maillage de la table d'harmonie et en particulier le calcul de ses modes, mais reproduire ce maillage pour la propagation acoustique ne paraît pas vraiment adapté. La méthode numérique actuelle ne nous permet pas de procéder autrement, le maillage volumique pour l'acoustique devant être conforme au maillage surfacique de la table d'harmonie. En développant une méthode non conforme, nous pourrions utiliser un maillage plus régulier et monter en ordre sur un maillage plus grossier pour l'acoustique, augmentant par là l'efficacité de la résolution, et donc de la méthode complète. Une autre idée serait de coupler la vibration de plaque directement avec une méthode de potentiels retardé, comme le propose [Grob, 2006]. Ce point de vue serait particulièrement intéressant dans le cas où les simulations sont menées dans l'objectif d'obtenir le son en différents points de la pièce, même lointains, tandis qu'il serait certainement avantageux de conserver le point de vue précédent si l'on souhaite visualiser la propagation du son dans des plans de coupe.

II.7.5 Schémas pour résoudre l'équation de corde

Encore une fois, c'est la volonté de conserver une énergie discrète qui a guidé nos choix quant à la discrétisation en temps du système d'équations de corde. Nous avons choisi de traiter différemment la partie linéaire du système de sa partie non linéaire. Des θ -schémas sont utilisés sur la partie linéaire pour limiter la dispersion numérique et contrôler la condition de stabilité, tandis qu'un ensemble de schémas innovants sont proposés pour traiter la partie non linéaire. Le schéma résultant est résolu à chaque pas de temps avec une méthode itérative de quasi-Newton, dont la convergence s'avère en pratique assez sensible aux paramètres de discrétisation. En fait, même si l'on utilise des paramètres qui garantissent une stabilité inconditionnelle du schéma, il est malgré tout nécessaire de prendre un pas de temps relativement petit pour assurer la convergence de la méthode itérative. Ce comportement est encore plus flagrant durant l'interaction marteau - corde, au cours duquel le problème est assez raide en raison des non linéarités impliquées, et des temps caractéristiques très courts (quelques millisecondes). Il serait probablement intéressant de pouvoir utiliser un pas de temps inférieur pendant cette durée d'interaction, et de reprendre un pas de temps plus grand pour simuler la résonance de la corde, qui peut durer encore plusieurs secondes.

D'autre part, il est naturel de penser aux schémas de Runge Kutta qui sont des candidats naturels face à la discrétisation d'un problème non linéaire. Étant données les difficultés rencontrées pour la convergence de la méthode de Newton, notre intuition nous porte à croire que l'utilisation de schémas implicites serait inévitable pour éviter une condition de stabilité absolument disqualifiante si elle devait s'imposer à la méthode complète, et donc en particulier à l'acoustique. Ces schémas de Runge Kutta implicites conduiraient d'une part à des systèmes assez raides (pas forcément plus faciles à résoudre que notre schéma actuel) et d'autre part à une absence d'énergie discrète, avec comme conséquence aucune garantie sur la stabilité du problème une fois couplé à la table d'harmonie et l'acoustique.

II.7.6 Dictature de l'énergie

Être capable de garantir *a priori* la stabilité d'un schéma numérique est très rassurant lorsque l'on envisage des simulations de plusieurs millions de pas de temps, représentant plusieurs jours de calcul haute performance. Mais cette garantie se paye, au prix fort, à travers les contraintes qu'elle impose lors de la construction du schéma. Le jeu en vaut-il la chandelle ? De nombreux schémas numériques sans preuve de stabilité montrent un très bon comportement en temps long, remettant en question la « dictature de l'énergie » pratiquée au cours de ce manuscrit. Nous avons d'ailleurs nous-mêmes fait le choix d'utiliser des couches PML sous forme splittées, pour lesquelles aucune preuve, à notre connaissance, ne montre qu'elles conduisent à dissiper l'énergie du domaine, mais qui se comportent remarquablement bien. Outre le confort théorique qu'elle apporte, la conservation d'une énergie présente ceci dit un intérêt pratique assez inattendu : il s'agit d'un test relativement simple et performant permettant de se convaincre que le code de calcul que l'on a programmé résout effectivement le schéma désiré.

CHAPITRE

III

SIMULATIONS ET RÉSULTATS PHYSIQUES

Prélude

Ce chapitre est consacré à l'utilisation du code de calcul dans un contexte réaliste. Nous ne souhaitons pas ici être exhaustifs mais plutôt à constituer une vitrine montrant les possibilités du code de calcul, à travers quelques simulations choisies.

Grâce à la structure orientée objet du code de calcul MONTJOIE de Marc Duruflé¹ écrit en C++ auquel nous avons intégré les schémas pour la résolution du piano, nous utilisons toujours les mêmes « briques » fondamentales qui s'assemblent en cas de couplage. De plus, grâce à la technologie des « templates », l'équation suivie par la corde est elle même indépendante de sa discrétisation et des méthodes de résolution utilisées. Ainsi, nous sommes assurés que le changement d'un de ces aspects (discrétisation, équation, couplage ou non) se fait indépendamment des autres, de sorte qu'il est parfaitement justifié d'attribuer les différences observées dans les résultats de simulation à la seule variante effectuée. Il est beaucoup plus difficile d'en être parfaitement convaincu lorsque l'on utilise des codes de calcul différents ou même issus du commerce, or il s'agit d'un point central si l'on veut être certain de discriminer les causes physiques et non pas les méthodes de résolution numériques.

Lorsque l'on prend en compte les ceintures autour du piano, la boîte de calcul dans laquelle on doit résoudre les équations de l'acoustique mesure environ 2 mètres par 3 mètres par 40 cm. Or, il faut s'assurer, pour simuler avec précision un signal, que la discrétisation en espace fournisse au moins 10 points par longueur d'onde de ce signal. Si l'on souhaite modéliser des signaux dont le contenu fréquentiel atteint 10 000 Hz, donc dont les plus petites longueurs d'onde sont de l'ordre de 3,4 cm, ceci signifie que le maillage du domaine comprend plus de 25 millions de degrés de liberté, auxquels on doit rajouter les degrés de liberté associés aux couches PML. Un tel calcul est totalement inenvisageable sur un ordinateur ordinaire, pour des raisons de performance mais aussi de mémoire. La recherche des modes propres de la table d'harmonie peut également s'avérer extrêmement coûteuse (il faut 2 400 modes pour couvrir jusqu'à 9 920 Hz). C'est pourquoi la parallélisation du code de calcul a été une étape inéluctable en vue de simulations réalistes. En particulier, les points suivants sont à présent menés en parallèle :

▷ la recherche des modes propres de la table d'harmonie

1. Voir <http://montjoie.gforge.inria.fr>

- ▷ le produit matrice pleine - vecteur qui doit être fait deux fois à chaque pas de temps, pour exprimer le couplage entre la table d'harmonie et l'acoustique (il faut changer de base entre la base éléments finis et la base modale, sur la table d'harmonie)
- ▷ la résolution du schéma pour l'acoustique
- ▷ le calcul du schéma sur les cordes (qui doit être répété plusieurs fois par pas de temps, car une méthode itérative est utilisée pour résoudre ce problème non linéaire)

Après ces efforts, nous sommes en mesure de proposer des simulations dont les paramètres de discrétisation sont à la hauteur des exigences d'un problème physique réaliste. Pour se faire une idée, la résolution du schéma complet pour une seconde (un million de pas de temps), avec l'utilisation de 2 400 modes et la prise en compte des ceintures avec des éléments finis d'ordre 4 prend environ 24 h de calcul en utilisant 300 cœurs sur un centre de calcul comme le Mésocentre de Calcul Intensif Aquitain².

La recherche de réalisme passe également par l'ajustement précis des paramètres physiques, qui est une tâche longue, difficile et ingrate, et cependant cruciale. La plupart des paramètres qui alimentent notre modèle sont classiques et il est aisé d'en trouver un ordre de grandeur, en particulier lorsqu'il s'agit de mesures simples (longueurs, diamètres) ou de paramètres mécaniques standard (module d'Young, densité) qui sont souvent tabulés. Ce caractère physique, intrinsèque, des paramètres faisait d'ailleurs partie de notre « cahier des charges » dans un souci de simplicité. Il reste cependant d'autres paramètres difficiles à quantifier, notamment en ce qui concerne les coefficients d'amortissement (dans la corde comme dans la table d'harmonie), le comportement viscoélastique du marteau, la valeur du désaccord entre les cordes d'un même cœur, ou même la vitesse initiale du marteau. Pour ces paramètres, nous devons passer par une étape de test où l'on propose au modèle des jeux de paramètres avant de choisir ceux qui reproduisent au mieux les mesures, lorsqu'elles sont disponibles, la littérature, ou encore qui semblent le plus plausible (après observation des résultats ou écoute du son généré). Étant donnés les temps de calcul, on peut se rendre compte à quelle point cette étape peut être longue et fastidieuse.

Dans la suite, nous proposons quelques résultats de simulations choisies pour leur caractère innovant, ou pour démontrer l'étendue des possibilités de notre approche :

- ▷ Les cinq premières notes « témoin » que nous avons pris en exemple au premier chapitre de ce manuscrit ont été simulées une par une, montrant que le modèle de piano permet de restituer les particularités de chaque registre, même si un gros travail de calibration reste à terminer,
- ▷ On montrera l'effet de la prise en compte de certains phénomènes physiques dans la corde sur le comportement vibratoire global du piano, dans le domaine temporel aussi bien que fréquentiel, en insistant sur l'existence d'un précurseur non linéaire et la présence de partiels fantômes,
- ▷ On observera l'effet de la dynamique de jeu sur le contenu fréquentiel de la vibration de la table d'harmonie,
- ▷ Des diagrammes de directivité seront présentés, en présence ou non des ceintures,
- ▷ Enfin, nous évoquerons un ensemble de simulations possibles à réaliser dans l'état actuel du code, et qui seront certainement réalisées dans les prochaines semaines.

Il est enfin utile de préciser quelques définitions concernant la transformée de Fourier qui sera utilisée pour illustrer certains résultats de calculs dans le domaine fréquentiel. Nous

2. www.mcia.univ-bordeaux.fr

choisissons d'appeler transformée de Fourier d'un signal temporel $s(t)$ la quantité

$$\hat{s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} s(t) dt \quad (\text{III.0.1})$$

Lorsque les signaux sont tronqués avant leur extinction totale, nous les multiplierons par une fenêtre du type hanning pour éviter des artéfacts numériques. Enfin, la fft sera normalisée afin de ne pas dépendre du nombre de points utilisés, ni de la taille d'intervalle de temps qui intervient. L'oreille ayant une sensibilité logarithmique, les spectres seront dans la suite représentés en décibels, ramenés (sauf précision contraire) à leur valeur maximale : soit un signal temporel $s(t)$, et $\hat{s}(\omega)$ sa transformée de Fourier obtenue numériquement par fft (fast Fourier transform), nous tracerons

$$\omega \mapsto 20 \log_{10} \left[\frac{|\hat{s}(\omega)|}{\max |\hat{s}(\omega)|} \right] \quad (\text{III.0.2})$$

et nous donnerons systématiquement la valeur $\hat{s}_{\text{ref}} := \max |\hat{s}(\omega)|$, qui correspondra au « 0 dB » du graphique.

Nous montrerons également des spectrogrammes en décibels (échelle logarithmique) et en relatif. La fonction « specgram » de MALTAB fournit une matrice temps - fréquence y dont chaque colonne $y(n, :)$ correspond au module de la fft (fast Fourier transform) d'un échantillon du signal temporel fenêtré autour d'un instant t^n . Nous prendrons alors comme valeur de référence le maximum de cette matrice, et nous tracerons en couleurs la quantité

$$(k, n) \mapsto Y(n, k) = 20 \log_{10} \left[\frac{y(n, k)}{\max y} \right] \quad (\text{III.0.3})$$

Sommaire

III.1 Notes témoin du Steinway D	224
III.1.1 Note Dd1	224
III.1.2 Note C2	226
III.1.3 Note F3	227
III.1.4 Note Cd5	228
III.1.5 Note G6	230
III.2 Effet du couplage avec l'air	232
III.3 Précurseurs et transitoire	235
III.3.1 Déplacement de corde	236
III.3.2 Accélération de la table d'harmonie	240
III.3.3 Signal de pression	244
III.4 Enrichissement spectral et partiels fantômes	247
III.4.1 Contenu spectral lors des étapes de la vibration	247
III.4.2 Effet de l'augmentation de la vitesse du marteau	248
III.4.3 Effet de l'équation sur les partiels	251
III.5 Diagrammes de directivité	254
III.6 Et bien d'autres possibilités	258

III.1

Notes témoin du Steinway D

Afin de tester notre programme de simulation, nous avons souhaité reproduire les cinq premières notes « témoin » du Steinway D que nous avons cité en exemple dans le premier chapitre. Ces cinq notes sont en effet représentatives de la tessiture du piano, allant du [grave](#) à l'[aigu](#) en passant par le [medium](#). Nous souhaitons illustrer ici le fait que le modèle physique de piano que nous avons construit permet de retrouver dans toute la tessiture les particularités de chaque registre (un son dominé par la vibration de corde dans le grave, un son de choc provenant de la table dans l'aigu. . .).

La table d'harmonie utilisée est celle que nous avons présentée en [II.4.3](#) ; elle sera également utilisée pour réaliser le maillage tridimensionnel constitué de 16 mailles dans la direction verticale, obtenues par extrusion sur un maillage comportant en plus de la table, les ceintures et une boîte destinée à l'air, conformément à la démarche suivie dans [II.5.6](#). La géométrie suit celle du Steinway D, et les raidisseurs ainsi que le chevalet sont représentés, comme précédemment, par une variation d'épaisseur et de matériau dans le modèle de plaque. Les simulations utiliseront les 2 400 premiers modes de la table d'harmonie, correspondant à une fréquence maximale d'environ 10 000 Hz. Les paramètres mécaniques du bois et de l'air seront inchangés par rapport aux exemples numériques du chapitre précédent (voir la table [II.10](#)), et le caractère non borné du domaine de propagation sera simulé par l'utilisation de couches PML (voir [II.5.3](#)) tout autour de la boîte de calcul. Sauf précision contraire, les éléments finis utilisés en 2D et 3D sont d'ordre quatre.

La nouveauté de ces simulations par rapport aux précédentes réside dans l'introduction de l'amortissement intrinsèque des cordes et de la table d'harmonie. Les coefficients d'amortissement viscoélastiques des cordes sont choisis empiriquement de façon à reproduire au mieux les mesures et/ou à résulter en un son convaincant. L'amortissement de la table d'harmonie est choisi pour correspondre en basses fréquences à un « coefficient de perte » $\eta = 2\%$ comme suggéré par les mesures (voir la figure [I.43\(a\)](#)), et augmenter légèrement l'amortissement en hautes fréquences : pour chaque mode associé à une fréquence propre f , le terme d'amortissement s'écrit :

$$f_{ve}(f) = 2 \times 10^{-5} f^2 + 0,07 f \quad (\text{III.1.1})$$

Le point d'observation dans les simulations sera toujours le point (1,50 ; 2,91 ; 0,60) situé 40 cm au dessus de la table d'harmonie, à l'emplacement habituel d'un musicien ou d'un chanteur. Afin d'éviter de mailler un domaine incluant ce point, relativement lointain de la table d'harmonie, nous avons utilisé le module de potentiels retardés du code MONTJOIE : étant données la pression et sa dérivée en temps sur tous les points d'une surface fermée Γ , et sous réserve que le fluide extérieur à cette surface soit homogène, il est possible de calculer la pression en un point lointain x à l'instant t grâce à une formule de représentation basée sur la fonction de Green :

$$p(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{n_y \cdot (x - y)}{|x - y|^2} \left[\frac{p(y, \tau)}{|x - y|} + \frac{1}{c} \dot{p}(y, \tau) \right] dy - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x - y|} \frac{\partial p}{\partial n_y}(y, \tau) dy \quad (\text{III.1.2})$$

où c est la vitesse de propagation autour de Γ , n_y est la normale extérieure à Γ au point y , et τ est le temps retardé $\tau = t - \frac{|x-y|}{c}$.

Les comparaisons avec l'expérience sont faites lorsque la mesure est disponible (pour toutes les notes sauf C2 et F3, pour lesquelles le microphone était utilisé à d'autres fins). Le microphone ayant été déplacé à de nombreuses reprises lors de la campagne de mesures pour des raisons pratiques, son emplacement n'a pas été repéré et ne peut donc pas être précisé ici. On montrera d'une part la pression en fonction du temps, sur un intervalle de temps plus ou moins long selon la simulation (rappelons qu'une seconde de simulation demande environ une journée de calcul parallèle sur 300 cœurs), et d'autre part un [spectrogramme](#) de cette même pression, qui permet de visualiser l'évolution du contenu fréquentiel au cours du temps.

III.1.1 Note D \sharp 1

Cette note très grave, dont la fréquence fondamentale est de 39 Hz, est produite par une seule corde, qui est filée. Ses paramètres, récapitulés en table [III.1](#), sont évalués grâce à la méthode empirique présentée

en I.1.5 qui permet de calculer les paramètres d'une corde homogène ayant un comportement vibratoire identique à la corde filée. La corde est attachée à la table d'harmonie au point (0,47 ; 1,63), en faisant un angle de quatre degrés par rapport à l'horizontale. On dispose pour cette note d'une comparaison expérimentale, bien qu'il ne s'agisse pas du même point de l'espace. Les signaux de pression en fonction du temps ainsi que les spectrogrammes sont tracés en figure III.1 pour le signal expérimental et pour le signal simulé. Une comparaison auditive du son expérimental³ et du son simulé⁴ est disponible en ligne. Il faut toutefois garder à l'esprit que dans la simulation, la pièce est supposée infinie, tandis qu'elle était assez petite lors de la campagne expérimentale. La réverbération du son sur les murs de la pièce joue un rôle très important dans la perception du timbre, surtout dans le grave. Pour rendre la comparaison plus égalitaire, il faudrait appliquer un filtre au signal synthétisé, ou encore procéder à une simulation dans un domaine de la taille de la pièce en imposant des conditions aux limites réalistes, mais ceci demanderait des temps de calcul faramineux.

L	A	ρ	T_0	E	I	G	κ
m	m ²	kg·m ⁻³	N	Pa	m ⁴	Pa	-
1,945	$1,7280 \times 10^{-6}$	44983	1781	$2,02 \times 10^{11}$	$2,3762 \times 10^{-13}$	$8,0 \times 10^{10}$	0,85
R_u	R_v	R_φ	η_u	η_v	η_φ		
s ⁻¹	s ⁻¹	s ⁻¹	s	s	s		
0,05	0,25	0,05	7×10^{-9}	7×10^{-9}	7×10^{-9}		
$M^{\mathcal{H}}$	$x^{\mathcal{H}}$	$\Delta\delta^{\mathcal{H}}$	$v_0^{\mathcal{H}}$	p	$K^{\mathcal{H}}$	$R^{\mathcal{H}}$	
g	m	m	m·s ⁻¹	-	N·m ^{-p}	N·m ^{-p} ·s ⁻¹	
12,0	0,25	0,02	4,0	1,8	3×10^8	1×10^6	
N_x	Δt (s)	θ	$\bar{\theta}$	\mathcal{P}	γ	ordre	
200	10^{-6}	1/4	1/12	Π_N	1/2	5	

TABLE III.1 – Valeurs des paramètres de corde et de marteau utilisés pour la simulation de D \sharp 1

L'observation des courbes conduit aux remarques suivantes :

- La courbe simulée a une allure très semblable à la courbe expérimentale, bien que l'amplitude soit quatre fois inférieure. Cet écart peut provenir de la position du microphone, situé plus près de la table dans la mesure.
- On distingue dans les deux spectrogrammes la présence forte des harmoniques de la vibration transversale de corde, mais aussi la série harmonique de la vibration longitudinale, légèrement moins amortie, contribuant au son de « cloche » résonnant après une seconde de son.
- Le profil d'amortissement de la simulation est très réaliste, même si la simulation révèle plus d'aigus dans le spectrogramme que l'expérience. Ceci peut traduire un léger biais dans le calibrage des paramètres d'amortissement, mais peut aussi provenir de la différence de point d'observation.

3. <http://dl.dropbox.com/u/3984954/THESE/SONS/Dd1/pressionexpe.wav>

4. <http://dl.dropbox.com/u/3984954/THESE/SONS/Dd1/pressionsimu.wav>

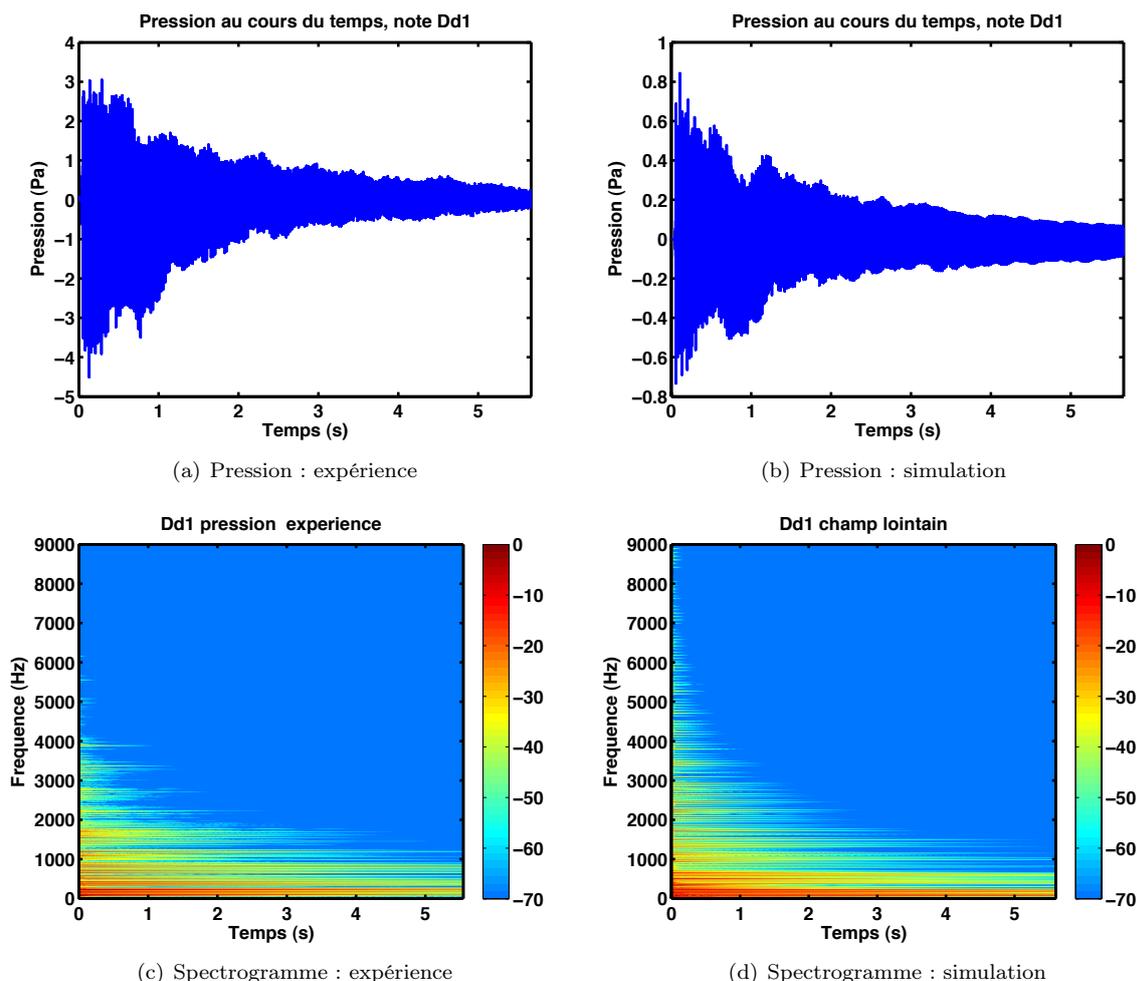


FIGURE III.1 – Note D#1 : comparaison entre expérience et simulation

III.1.2 Note C2

Cette note grave est constituée de trois cordes, ce qui introduit une difficulté supplémentaire : il faut quantifier le degré de désaccord entre les trois cordes. Ce désaccord a une grande importance dans la perception du son de piano, puisqu'il induit des battements (d'autant plus rapides que les cordes sont désaccordées) qui contribuent au phénomène de double décroissance dont nous avons parlé à plusieurs reprises dans ce manuscrit. Les cordes étant filées, ses paramètres équivalents sont établis conformément à la méthode du paragraphe I.1.5. Pour les désaccorder, nous attribuerons à l'une des cordes la valeur de tension de 914 N prévue par la méthode, et aux deux autres une valeur légèrement différente : 912 N et 915 N. Les cordes sont attachées au chevalet au point (0, 59 ; 1, 26) en faisant un angle de quatre degrés par rapport au plan horizontal.

La figure III.2 montre la pression en fonction du temps ainsi qu'un spectrogramme pour la simulation numérique. Le son simulé⁵ est disponible en ligne. La comparaison expérimentale est malheureusement indisponible pour ce piano particulier.

Les graphes obtenus montrent une allure plus parsemée que celle de D#1, on distingue très clairement les harmoniques de la vibration transversale des cordes, mais aussi les « trainées » caractérisant la série harmonique de la vibration longitudinale des cordes. L'écoute du son n'est pas très convaincante, sûrement à cause d'un biais dans les paramètres d'amortissement de corde, mais peut-être également dans le désaccord. L'absence de son de référence expérimental sur ce piano rend la tâche de calibration des paramètres encore plus ardue.

L	A	ρ	T_0	E	I	G	κ
m	m ²	kg·m ⁻³	N	Pa	m ⁴	Pa	-
1,6	$8,6559 \times 10^{-7}$	24085	914	$2,02 \times 10^{11}$	$5,9623 \times 10^{-14}$	$8,0 \times 10^{10}$	0,85
R_u	R_v	R_φ	η_u	η_v	η_φ		
s ⁻¹	s ⁻¹	s ⁻¹	s	s	s		
0,07	0,5	0,07	2×10^{-9}	1×10^{-9}	1×10^{-9}		
$M^{\mathcal{H}}$	$x^{\mathcal{H}}$	$\Delta\delta^{\mathcal{H}}$	$v_0^{\mathcal{H}}$	p	$K^{\mathcal{H}}$	$R^{\mathcal{H}}$	
g	m	m	m·s ⁻¹	-	N·m ^{-p}	N·m ^{-p} ·s ⁻¹	
9,8	0,2	0,02	4,0	2,3	2×10^9	5×10^5	
N_x	Δt (s)	θ	$\bar{\theta}$	\mathcal{P}	γ	ordre	
200	10^{-6}	1/4	1/12	Π_N	1/2	5	

TABLE III.2 – Valeurs des paramètres de corde et de marteau utilisés pour la simulation de C2

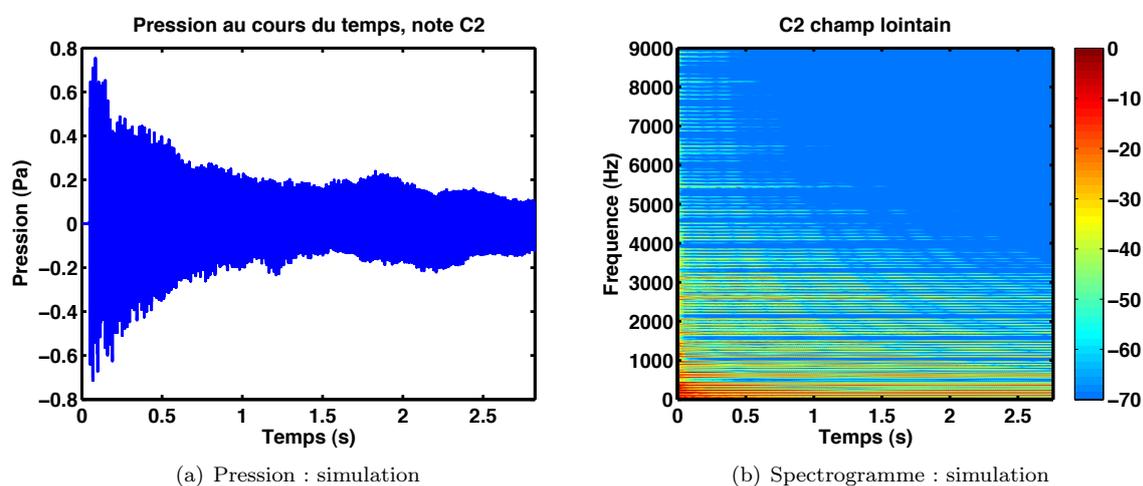


FIGURE III.2 – Note C2 : simulation

III.1.3 Note F3

Cette note entre grave et medium est constituée de trois cordes en acier non filées, que nous avons désaccordées de façon ssymétrique (-0,5 Hz et +1 Hz par rapport à la valeur théorique). Les cordes sont attachées à la table d'harmonie au point (0,54 ; 0,83) en formant un angle de deux degrés par rapport à l'horizontale.

La figure III.3 montre la pression en fonction du temps ainsi qu'un spectrogramme pour la simulation numérique. Le son simulé⁶ est disponible en ligne. Comme pour la note précédente, la comparaison expérimentale est malheureusement indisponible pour ce piano particulier.

On perçoit sur le graphe de la pression en fonction du temps l'ébauche de la double décroissance qui se met en place, visible plus clairement à d'autres points d'observation. Le spectrogramme montre d'une part clairement la série quasi harmonique de la vibration transversale des cordes et la série harmonique de la vibration longitudinale, mais également un halo en basses fréquences caractéristique de la réponse de la table d'harmonie, qui continuera à prendre de l'importance vers l'aigu.

5. <http://dl.dropbox.com/u/3984954/THESE/SONS/C2/pressionsimu.wav>

6. <http://dl.dropbox.com/u/3984954/THESE/SONS/F3/pressionsimu.wav>

L	A	ρ	T_0	E	I	G	κ
m	m ²	kg·m ⁻³	N	Pa	m ⁴	Pa	-
0,961	$8,7003 \times 10^{-7}$	7850	774	$2,02 \times 10^{11}$	$6,0236 \times 10^{-14}$	$8,0 \times 10^{10}$	0,85
R_u	R_v	R_φ	η_u	η_v	η_φ		
s ⁻¹	s ⁻¹	s ⁻¹	s	s	s		
0,25	0,5	0,25	6×10^{-9}	4×10^{-9}	4×10^{-9}		
$M^{\mathcal{H}}$	$x^{\mathcal{H}}$	$\Delta\delta^{\mathcal{H}}$	$v_0^{\mathcal{H}}$	p	$K^{\mathcal{H}}$	$R^{\mathcal{H}}$	
g	m	m	m·s ⁻¹	-	N·m ^{-p}	N·m ^{-p} ·s ⁻¹	
9,0	0,115	0,02	3,0	2,4	1×10^9	1×10^6	
N_x	Δt (s)	θ	$\bar{\theta}$	\mathcal{P}	γ	ordre	
100	10^{-6}	1/4	1/12	Π_N	1/2	5	

TABLE III.3 – Valeurs des paramètres de corde et de marteau utilisés pour la simulation de F3

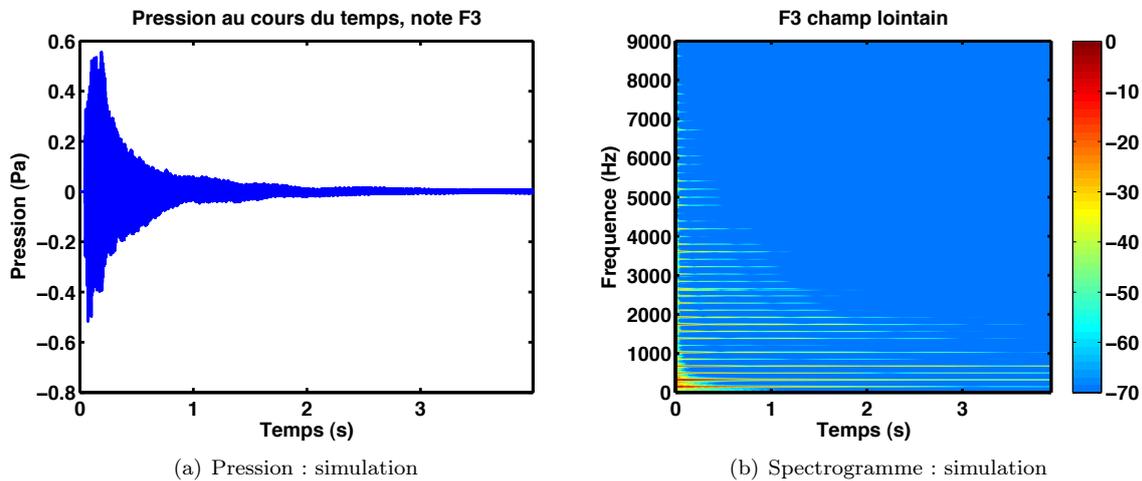


FIGURE III.3 – Note F3 : simulation

III.1.4 Note C \sharp 5

La note medium C \sharp 5 est constituée de trois cordes que l'on désaccorde asymétriquement de -1 Hz et +2 Hz par rapport à la valeur théorique de la tension. Les cordes sont attachées au point (0,88 ; 0,25) en formant un angle de quatre degrés par rapport à l'horizontale.

La figure III.4 montre la pression en fonction du temps pour le signal mesuré et pour le signal simulé, ainsi que les spectrogrammes de ces signaux. Le son mesuré⁷ et le son simulé⁸ sont disponibles en ligne.

Les signaux de pression en fonction du temps ont une allure très similaire, on distingue très nettement un premier régime de décroissance, suivi d'un second régime de battements entraînant une rémanence du son. Les spectrogrammes montrent également une très bonne concordance, non seulement dans la façon dont les partiels s'amortissent mais aussi dans l'excitation de la table d'harmonie, donnant au son ce choc caractéristique à l'attaque. Enfin, l'écoute du son généré est beaucoup plus convaincante que pour les notes précédentes, et l'on perçoit bien ce son de choc à l'attaque.

7. <http://dl.dropbox.com/u/3984954/THESE/SONS/Cd5/pressionexpe.wav>

8. <http://dl.dropbox.com/u/3984954/THESE/SONS/Cd5/pressionsimu.wav>

L	A	ρ	T_0	E	I	G	κ
m	m ²	kg·m ⁻³	N	Pa	m ⁴	Pa	-
0,326	$6,8107 \times 10^{-7}$	7850	702	$2,02 \times 10^{11}$	$3,6913 \times 10^{-14}$	$8,0 \times 10^{10}$	0,85
R_u	R_v	R_φ	η_u	η_v	η_φ		
s ⁻¹	s ⁻¹	s ⁻¹	s	s	s		
1,0	0,3	1,0	4×10^{-9}	2×10^{-9}	4×10^{-9}		
$M^{\mathcal{H}}$	$x^{\mathcal{H}}$	$\Delta\delta^{\mathcal{H}}$	$v_0^{\mathcal{H}}$	p	$K^{\mathcal{H}}$	$R^{\mathcal{H}}$	
g	m	m	m·s ⁻¹	-	N·m ^{-p}	N·m ^{-p} ·s ⁻¹	
8,0	0,051	0,02	3,0	2,6	4×10^{10}	1×10^6	
N_x	Δt (s)	θ	$\bar{\theta}$	\mathcal{P}	γ	ordre	
100	10^{-6}	1/4	1/12	Π_N	1/2	5	

TABLE III.4 – Valeurs des paramètres de corde et de marteau utilisés pour la simulation de C#5

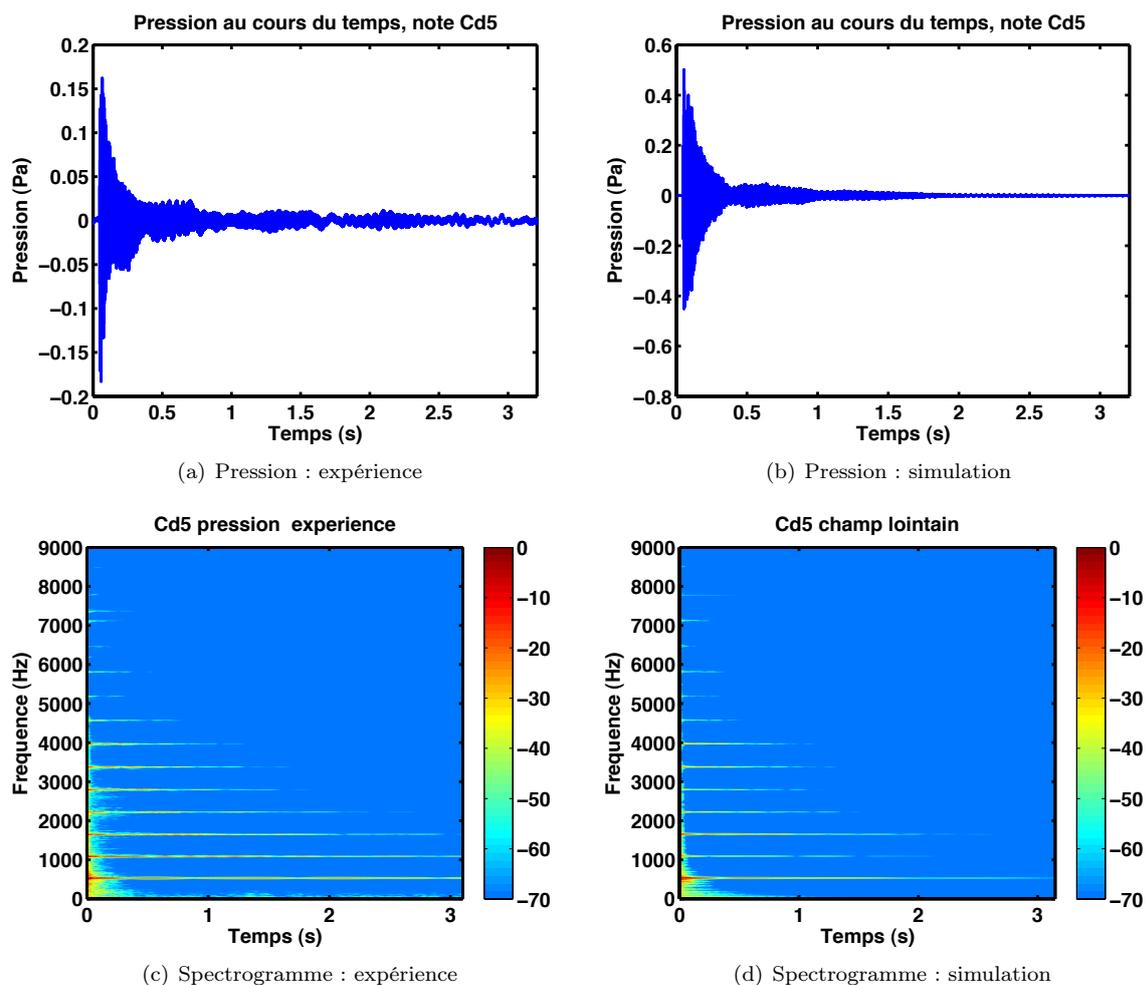


FIGURE III.4 – Note C#5 : comparaison entre expérience et simulation

III.1.5 Note G6

Cette note aiguë est également composée de trois cordes, que nous avons désaccordées de façon asymétrique de -1 Hz et +2 Hz par rapport à la valeur théorique de tension. Les cordes sont attachées au point (1,14 ; 0,04) en formant un angle de quatre degrés par rapport à l'horizontale. Pour cette simulation, en raison des hautes fréquences présentes dans le signal, l'ordre des éléments finis a été fixé à 5 pour la table d'harmonie et la propagation du son. En conséquence, le pas de temps a été adapté pour respecter la condition CFL du schéma saute mouton utilisé pour l'acoustique. Il faut donc environ deux jours pour calculer une seconde de vibrations, au lieu d'une journée pour les autres notes (en parallèle sur 300 cœurs).

La figure III.5 montre la pression en fonction du temps pour le signal mesuré et pour le signal simulé, ainsi que les spectrogrammes de ces signaux. Le son mesuré⁹ et le son simulé¹⁰ sont disponibles en ligne.

L	A	ρ	T_0	E	I	G	κ
m	m ²	kg·m ⁻³	N	Pa	m ⁴	Pa	-
0,124	$5,9044 \times 10^{-7}$	7850	706	$2,02 \times 10^{11}$	$2,7743 \times 10^{-14}$	$8,0 \times 10^{10}$	0,85
R_u	R_v	R_φ	η_u	η_v	η_φ		
s ⁻¹	s ⁻¹	s ⁻¹	s	s	s		
2,0	4,0	2,0	4×10^{-9}	2×10^{-9}	4×10^{-9}		
$M^{\mathcal{H}}$	$x^{\mathcal{H}}$	$\Delta\delta^{\mathcal{H}}$	$v_0^{\mathcal{H}}$	p	$K^{\mathcal{H}}$	$R^{\mathcal{H}}$	
g	m	m	m·s ⁻¹	-	N·m ^{-p}	N·m ^{-p} ·s ⁻¹	
2,5	0,015	0,02	3,0	3,2	1×10^{12}	2×10^6	
N_x	Δt (s)	θ	$\bar{\theta}$	\mathcal{P}	γ	ordre	
50	5×10^{-7}	1/4	1/12	Π_N	1/2	5	

TABLE III.5 – Valeurs des paramètres de corde et de marteau utilisés pour la simulation de G6

Les courbes sont très similaires, on distingue toujours très bien les deux régimes de décroissance. Dans le signal simulé, le régime de battements montre une allure complexe, peut-être due à une mauvaise calibration du désaccord entre les cordes. Le spectrogramme montre que l'attaque sourde de ce son aigu est bien représentée par notre simulation, en revanche, on ne retrouve pas dans celle-ci la richesse spectrale du son mesuré, qui semble venir des partiels fantômes de la corde non linéaire. Ceci provient d'après nous de la vitesse de frappe du marteau, qui est dans ce cas trop faible, correspondant à une nuance piano et non pas forte (cette remarque semble être vraie également pour F3 et C#5 qui ne montrent pas beaucoup de partiels fantômes à -70 dB). Le fondamental longitudinal étant situé à plus de 20 000 Hz, il est normal de ne pas le distinguer dans ce spectrogramme. Enfin, la comparaison des sons mesuré et généré est très convaincante et nous porte à croire que des efforts supplémentaires dans le médium et le grave nous mèneront également à des résultats satisfaisants.

9. <http://dl.dropbox.com/u/3984954/THESE/SONS/G6/pressionexpe.wav>

10. <http://dl.dropbox.com/u/3984954/THESE/SONS/G6/pressionsimu.wav>

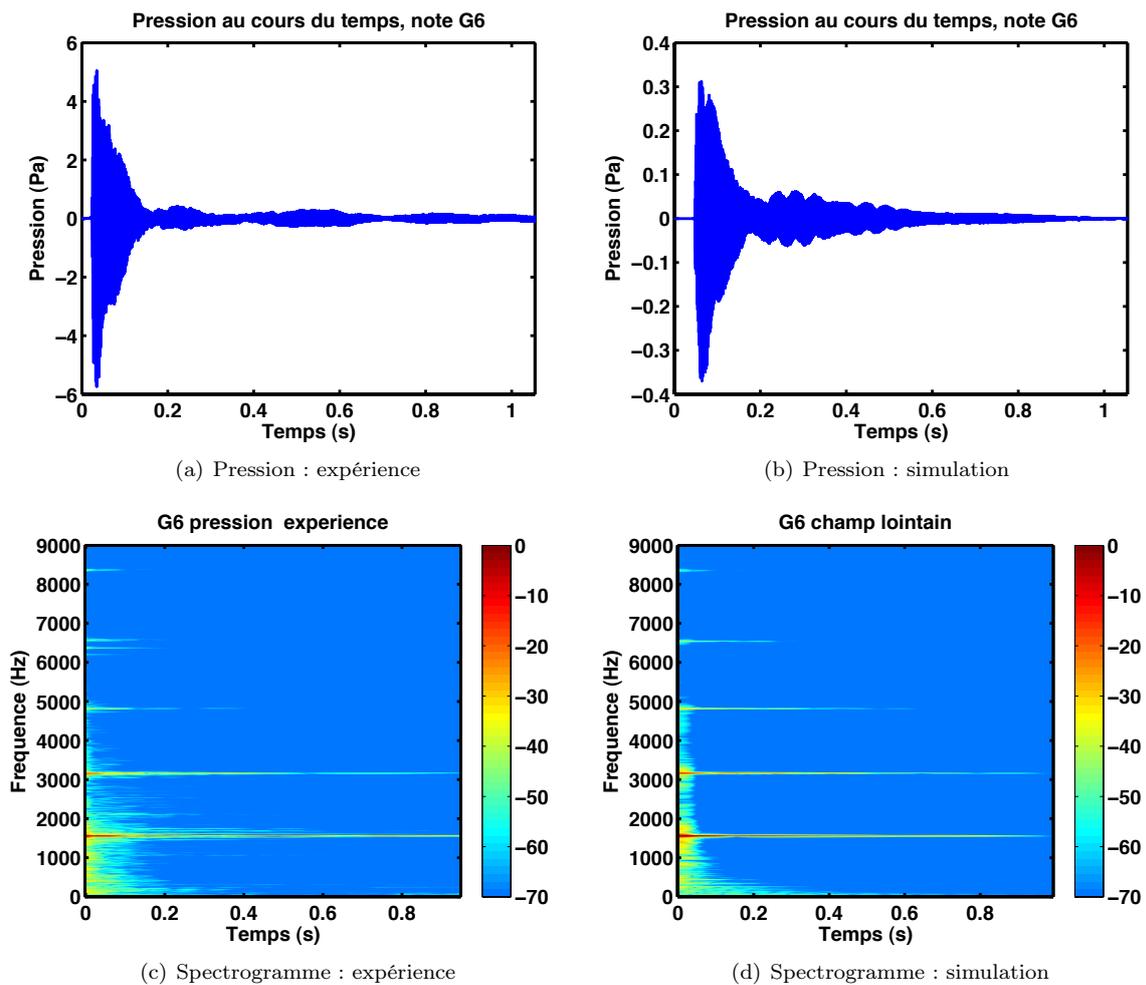


FIGURE III.5 – Note G6 : comparaison entre expérience et simulation

III.2

Effet du couplage avec l'air

Le bois étant un matériau vivant, ses paramètres ont une grande variabilité, en raison de la disparité d'origines possibles (espèce, environnement de croissance, altitude ...) mais aussi de la sensibilité des paramètres aux conditions expérimentales (humidité, température ...). Il est néanmoins possible de trouver dans la littérature des valeurs moyennes, typiques, pour les modules d'Young, de cisaillement, de Poisson, et autres coefficients physiques, pour certaines espèces particulières vouées à des utilisations précises, comme par exemple l'épicéa utilisé pour les tables d'harmonie de piano. Il est en revanche beaucoup plus difficile de se procurer les paramètres concernant l'amortissement intrinsèque dans le bois. En effet, la méthode utilisée habituellement, afin de discriminer l'amortissement intrinsèque de l'amortissement par rayonnement, est de faire le vide autour de l'échantillon avant de procéder à des mesures. C'est en particulier très efficace pour le métal, mais se révèle tout à fait inadapté dans le cas du bois qui se déshydrate totalement dans de telles circonstances, ce qui modifie radicalement toutes ses propriétés mécaniques.

Notre modèle permet, puisqu'il ne prend pas en compte l'effet de l'humidité ou de la température sur la table d'harmonie, de dissocier les différentes sources d'amortissement de la table d'harmonie sans en supporter les conséquences sur les paramètres physiques. Il est en particulier possible de mener la même simulation, en présence ou non d'air avoisinant, et d'observer l'effet de ce changement sur les vibrations de la table d'harmonie, et en particulier son amortissement, ce qui semble impossible, ou très difficile, à observer par des mesures.

De plus, étant donné que la propagation acoustique est de loin l'élément le plus coûteux dans la résolution du modèle de piano, il est parfois tentant de mener des simulations en l'absence de rayonnement afin d'obtenir des résultats numériques en un temps raisonnable, par exemple lorsque l'on s'intéresse à l'influence d'un paramètre particulier du modèle. Il est alors intéressant de pouvoir anticiper l'effet du rayonnement sur la solution, même grossièrement, pour en tirer des conclusions ayant une validité physique.

Montrons ici cette expérience numérique dans le cas de la note F3. La table d'harmonie ainsi que le domaine tridimensionnel de propagation du son n'ont pas changé par rapport aux expériences numériques de la section précédente, ainsi que le profil d'amortissement intrinsèque de la table.

La note F3 étant produite par un triplet de cordes, nous utilisons pour la simulation trois cordes légèrement désaccordées, en faisant varier la tension, tous les autres paramètres étant égaux aux valeurs données en tableau III.6. Les tensions utilisées ont été choisies pour refléter le désaccord observé sur les mesures faites sur la note F3 : la corde centrale est tendue à 774 N pour réaliser la fréquence fondamentale de F3, et les deux autres sont tendues à 773,5 N et 775 N. Les cordes sont attachées au point (0, 54 ; 0, 83) de la table d'harmonie, et forment un angle de deux degrés par rapport à l'horizontale. Les simulations utilisent les 2 400 premiers modes de la table, permettant de monter jusqu'à environ 10 000 Hz. On utilise des éléments finis d'ordre quatre sur la table et dans l'air le cas échéant.

La figure III.6 montre le déplacement $u_p(t)$, au cours du temps, au point (0, 17 ; 1, 49) de la table d'harmonie, dans les deux configurations de simulation : avec et sans le rayonnement acoustique. Conformément à nos attentes, la courbe obtenue en présence de rayonnement possède une amplitude inférieure à l'autre, la différence entre les deux courbes montrant exactement la part d'amortissement subie par la table en raison du couplage avec l'air. On observe toutefois que la courbe obtenue en présence de rayonnement a une allure très similaire à la courbe obtenue sans rayonnement.

La figure III.7 montre les diagrammes temps - fréquence ([spectrogramme](#)) de l'accélération de la table d'harmonie obtenue pour les deux simulations, en décibels, relativement à la valeur de référence dont la définition est précisée en introduction de ce chapitre. Cette représentation permet de visualiser les variations au cours du temps du contenu fréquentiel d'un signal, d'un point de vue relatif.

La première remarque est qu'en présence ou non du rayonnement, on peut visualiser sur les spectrogrammes le fait que l'amortissement dépend fortement de la fréquence. Les aigus sont beaucoup plus amortis que les graves, conformément aux observations et à ce que l'on cherchait à modéliser. La deuxième remarque est que les deux spectrogrammes sont assez semblables. L'allure globale est très similaire, même

L	A	ρ	T_0	E	I	G	κ
m	m ²	kg·m ⁻³	N	Pa	m ⁴	Pa	-
0,961	$8,7003 \times 10^{-7}$	7850	774	$2,02 \times 10^{11}$	$6,0236 \times 10^{-14}$	$8,0 \times 10^{10}$	0,85
R_u	R_v	R_φ	η_u	η_v	η_φ		
s ⁻¹	s ⁻¹	s ⁻¹	s	s	s		
0,25	0,5	0,25	6×10^{-9}	4×10^{-9}	4×10^{-9}		
$M^{\mathcal{H}}$	$x^{\mathcal{H}}$	$\Delta\delta^{\mathcal{H}}$	$v_0^{\mathcal{H}}$	p	$K^{\mathcal{H}}$	$R^{\mathcal{H}}$	
g	m	m	m·s ⁻¹	-	N·m ^{-p}	N·m ^{-p} ·s ⁻¹	
9,0	0,115	0,02	3,0	2,4	1×10^9	1×10^6	
N_x	Δt (s)	θ	$\bar{\theta}$	\mathcal{P}	γ	ordre	
100	10^{-6}	1/4	1/12	Π_N	1/2	5	

TABLE III.6 – Valeurs des paramètres de corde et de marteau utilisés pour les simulations

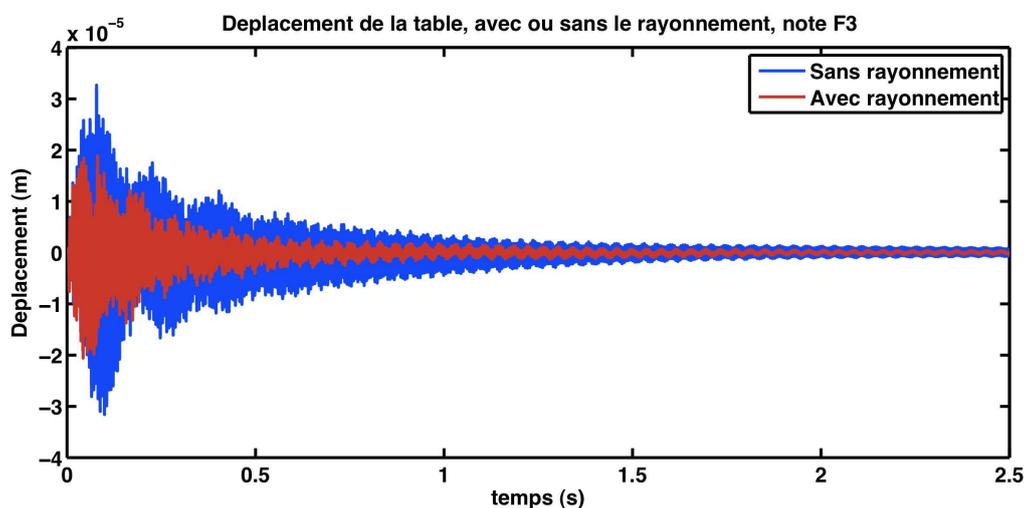
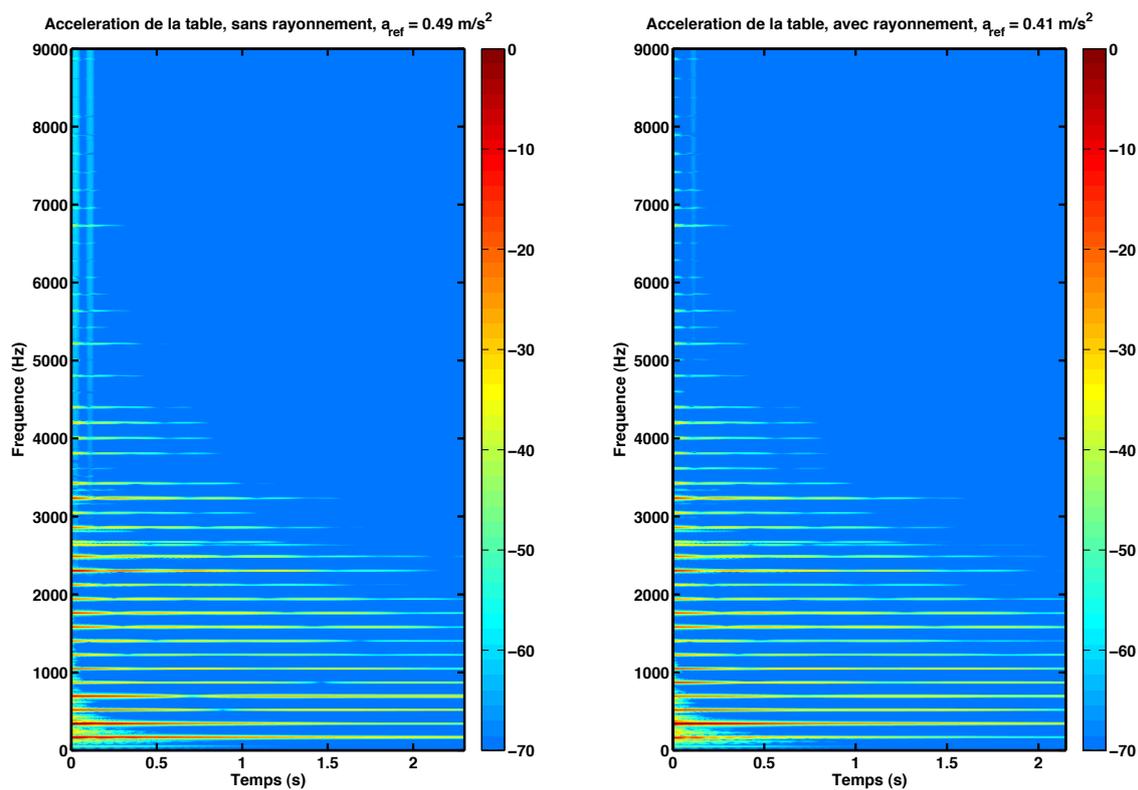


FIGURE III.6 – Comparaison du déplacement d'un point de la table obtenue par simulations de la note F3 avec et sans rayonnement.

si on peut observer que le couplage avec l'air n'a pas la même influence sur tous les modes de table, ce qui se traduit par le fait que certains partiels subissant un amortissement plus fort en présence du couplage (par exemple le fondamental), et d'autres non.

Pour résumer, les expériences numériques menées sur la note F3 en présence ou non de rayonnement acoustique nous ont montré trois points principaux :

- Les phénomènes d'amortissement de cordes et de table sont bien représentés par le modèle,
- Le rayonnement acoustique a pour effet majoritaire de diminuer l'amplitude de vibration de la table d'harmonie,
- D'un point de vue qualitatif, une simulation numérique sans rayonnement peut déjà donner une bonne idée des mécanismes ayant lieu dans le piano.



(a) Sans rayonnement, valeurs en dB par rapport à la valeur de référence $\hat{a}_{ref} = 0,49 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

(b) Avec rayonnement, valeurs en dB par rapport à la valeur de référence $\hat{a}_{ref} = 0,41 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

FIGURE III.7 – Comparaison des spectrogrammes de l'accélération d'un point de la table obtenus par simulations de la note F3 avec et sans rayonnement.

III.3

Précurseurs et transitoire

L'un des intérêts majeurs de notre modèle de piano, mis à part sa capacité à modéliser la chaîne complète de génération du son, est la prise en compte d'un modèle de corde très élaboré. Il est cependant naturel de se demander si, et dans quelle mesure, un tel modèle de corde permet de mieux représenter la réalité physique. Plus quantitativement, il est toujours intéressant d'observer quelles conséquences peuvent avoir les différentes hypothèses formulées pour la corde sur les comportements vibratoires engendrés dans les différentes parties du piano, conformément ou non avec les hypothèses formulées dans la littérature, voir par exemple le paragraphe I.1.3.

Ce paragraphe s'attache à montrer l'influence des phénomènes physiques pris en compte dans la corde sur le comportement vibratoire du piano en domaine temporel. En particulier, nous souhaitons observer le rôle des non linéarités géométriques de la corde ainsi que le rôle de la raideur sur le profil temporel des vibrations, et sur la présence d'un ou de plusieurs précurseurs dans les toutes premières millisecondes qui suivent le départ du marteau. Pour cela, nous avons choisi la note C2 dont les paramètres sont rappelés dans le tableau III.7. Nous réalisons le désaccord du triplet en choisissant trois tensions légèrement différentes : 912 N, 914 N et 915 N. Les cordes sont attachées au point (0, 59 ; 1, 26) de la table d'harmonie, en formant un angle de deux degrés par rapport à l'horizontale. Les paramètres d'amortissement de la corde, qui ne jouent pas un rôle très décisif dans les premiers instants de la simulation, sont fixés très simplement à $R_u = 0,2 \text{ s}^{-1}$, $R_v = 1,3 \text{ s}^{-1}$, $R_\varphi = \eta_u = \eta_v = \eta_\varphi = 0$. On garde les paramètres du paragraphe précédent pour la table d'harmonie et le nombre de modes pris en compte, ainsi que les paramètres de l'acoustique. L'amortissement sur la table est pris linéaire en fonction de la fréquence, pour correspondre à un coefficient de pertes $\eta = 2\%$. L'extrusion du maillage est cependant différente, puisque dans cette simulation, on ne prend pas en compte les ceintures. En conséquence, l'extrusion tridimensionnelle du maillage est faite sur quatre mailles verticales (deux de part et d'autre de la table), ce qui permet de réduire le coût de calcul.

L	A	ρ	T_0	E	I	G	κ
m	m ²	kg·m ⁻³	N	Pa	m ⁴	Pa	-
1,60	$8,6559 \times 10^{-7}$	24085	914	$2,02 \times 10^{11}$	$5,9623 \times 10^{-14}$	$8,0 \times 10^{10}$	0,85
$M^{\mathcal{H}}$	$x^{\mathcal{H}}$	$\Delta\delta^{\mathcal{H}}$	$v_0^{\mathcal{H}}$	p	$K^{\mathcal{H}}$	$R^{\mathcal{H}}$	
kg	m	m	m·s ⁻¹	-	N·m ^{-p}	N·m ^{-p} ·s ⁻¹	
$9,8 \times 10^{-3}$	0,2	0,02	3,0	2,2	2×10^9	0	
N_x	Δt (s)	θ	$\bar{\theta}$	\mathcal{P}	γ	ordre	
200	10^{-6}	1/4	1/12	Π_N	1/2	5	

TABLE III.7 – Valeurs des paramètres de corde et de marteau utilisés pour les simulations

Nous procédons à trois expériences numériques, avec les paramètres décrits ci dessus. La seule différence entre les trois simulations est le système d'équations de corde choisi, tous les autres paramètres (discrétisation, méthode numérique, table d'harmonie, marteau, rayonnement) étant strictement inchangés. Les trois équations de cordes sont les suivantes :

- Système d'équations issues du modèles géométriquement exact. Il comporte deux inconnues : le déplacement transversal $u_c(x, t)$ et le déplacement longitudinal $v_c(x, t)$, qui sont couplés par une description fidèle de la géométrie (qui ne passe pas par la linéarisation du tenseur des déformations). Les cordes forment un angle avec l'horizontale au chevalet, de sorte qu'aussi bien les vibrations transversales que longitudinales se transmettent à la table d'harmonie. Nous qualifierons ce système de **non linéaire**.
- Système précédent auquel on ajoute la prise en compte de la raideur par l'introduction d'une nouvelle inconnue $\varphi_c(x, t)$ mesurant la déviation des sections droites à la normale de la corde, à

travers un modèle de Timoshenko. Nous qualifierons ce système de **raide et non linéaire**.

- Système issu de la linéarisation du système précédent. Les trois inconnues (u_c, v_c, φ_c) sont donc encore considérées, mais les déplacements u_c et v_c ne sont plus couplées que par le fait que leur mouvement est lié au chevalet. Nous qualifierons ce système de **raide linéaire**.

Observons à présent l'influence du modèle de corde sur les vibrations mises en jeu dans le piano, depuis le déplacement d'un point de la corde, jusqu'à la pression en un point de l'espace, en passant par l'accélération en un point de la table d'harmonie. Les points de la corde et de la table ont été choisis conformément aux points utilisés pour mener les mesures expérimentales, si bien qu'une comparaison est possible pour ces deux signaux.

III.3.1 Déplacement de corde

Les figures III.8, III.9 et III.10 montrent le déplacement transversal du point situé à 1,54 m de l'agrafe, pour chaque modèle de corde ainsi que la mesure effectuée avec un microphone sans membrane non calibré. On montre d'abord le signal sur une longue échelle de temps (1,2 secondes), puis une échelle moyenne (150 millisecondes, soit une dizaine de périodes) et enfin les deux premières périodes.

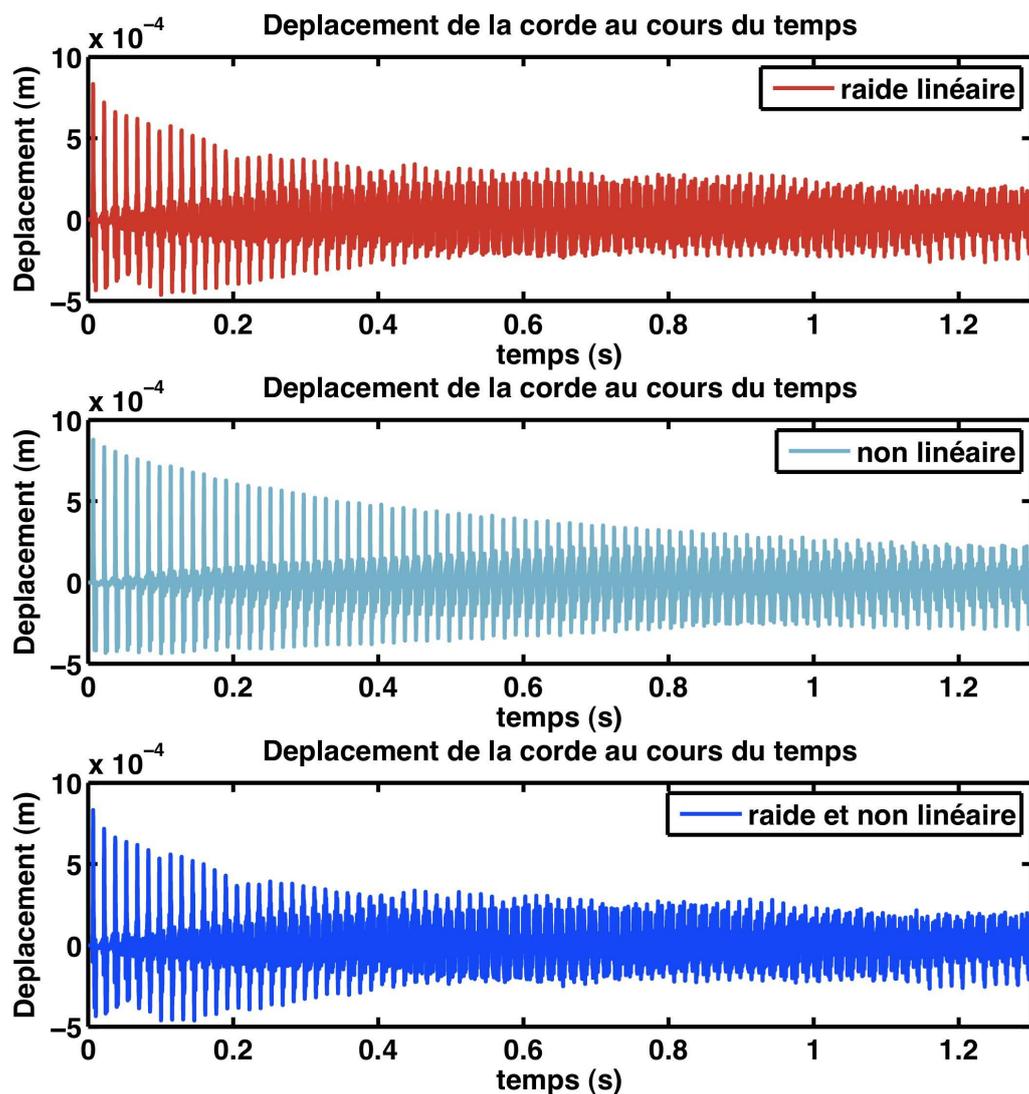
On voit sur les trois figures que le modèle de corde influence beaucoup l'aspect temporel du déplacement de la corde. Pour être plus précis, il y a une grande différence entre les cas où la raideur est présente (haut et bas) et le cas où elle n'est pas prise en compte (au milieu). C'est l'effet dispersif de la raideur qui intervient ici, déformant l'onde et donc le profil temporel. On remarque sur la figure III.8 que des battements apparaissent lorsque la raideur est prise en compte dans le triplet de cordes, modulant la décroissance d'une façon assez conforme à l'expérience. Cette modulation est souvent attribuée au désaccord du triplet, or ce désaccord est réalisé dans nos trois expériences numériques, dont l'une, ignorant la raideur, ne montre pas de modulation. Il semble donc que cette modulation reflète plutôt les battements entre les partiels inharmoniques des cordes du triplet qu'entre les fréquences fondamentales.

La figure III.9 permet de se rendre compte de la déformation de l'onde transversale sous l'effet de la dispersion. On peut noter que la corde purement non linéaire se déforme en effet beaucoup moins que les deux cordes possédant une raideur. En présence de raideur, les pics principaux marquant le passage de l'onde transversale au point d'observation sont précédés d'une sorte de précurseur d'amplitude croissante, caractéristique de ce phénomène. On remarque également l'existence d'oscillations entre les passages de l'onde dans le cas non linéaire, de nature très différente des oscillations dues à la raideur. Formulons des hypothèses quant à leur origine :

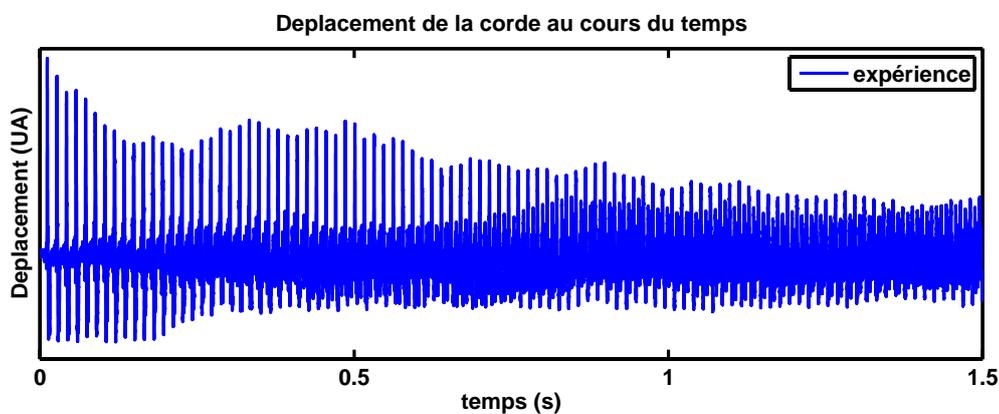
- le couplage entre les ondes longitudinales et transversales au cours de la propagation, par non linéarité (souvent appelé transfert longitudinal \rightarrow transversal dans la littérature),
- le couplage entre les ondes longitudinales et transversales à l'extrémité de la corde, en raison de l'angle au chevalet : même si le déplacement longitudinal est nul sur toute la corde, la présence d'un angle au chevalet va mettre en mouvement l'extrémité de la corde dans les deux directions si une onde transversale arrive en ce point, ce qui va créer une onde longitudinale voyageant (beaucoup plus vite que l'onde transversale) dans la corde. Le phénomène contraire se passera lorsqu'elle aura parcouru un aller retour dans la corde, engendrant des oscillations transversales décorréées de l'onde principale.

Ces deux hypothèses sont discriminées par le fait que la première n'est valide qu'en présence de non linéarités, tandis que la seconde est valide même pour un modèle linéaire tant qu'il prend en compte la propagation (linéaire) des ondes longitudinales. Or en observant plus précisément les formes d'onde de la figure III.9, on observe ces oscillations dans tous les modèles de corde, ce qui va en faveur de notre seconde hypothèse.

Enfin, la figure III.10 montre les deux premières formes d'onde pour chaque modèle de corde ainsi que pour la mesure réalisée. On constate que la présence de la raideur modifie beaucoup le profil de la première forme d'onde. Ceci témoigne du fait que l'interaction avec le marteau dépend beaucoup de la réaction de la corde par rapport à la sollicitation du marteau. La comparaison avec l'expérience montre que la prise en compte de la raideur dans la corde permet de mieux représenter cette interaction.

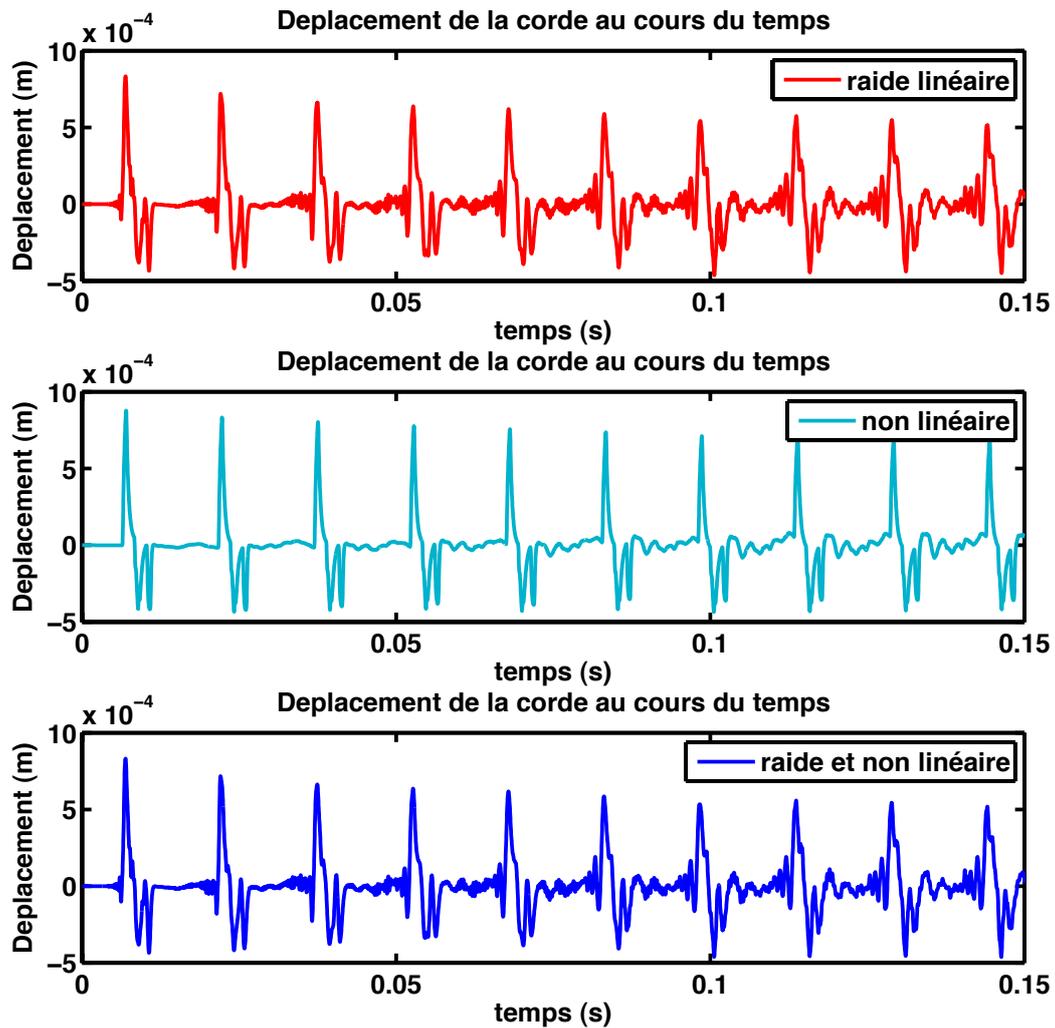


(a) simulations avec une corde non linéaire mais sans raideur (en haut), avec raideur mais sans non linéarités (au milieu) et avec raideur et non linéarités (en bas).

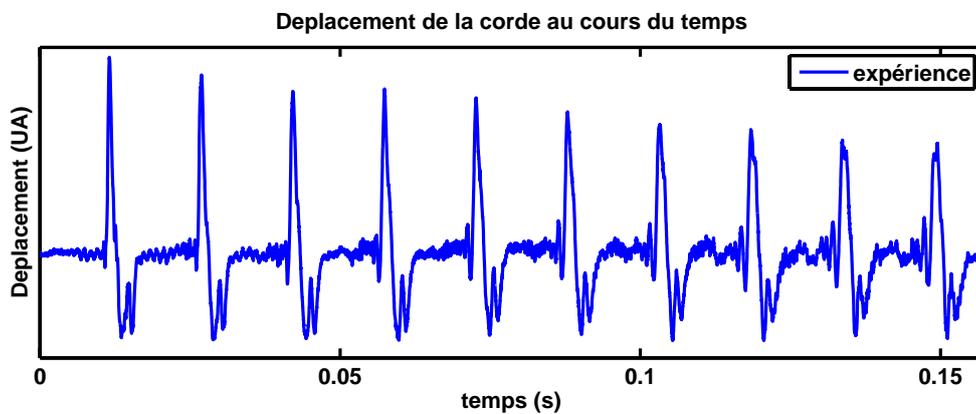


(b) mesure.

FIGURE III.8 – Déplacement de la corde au point d’observation, temps long.

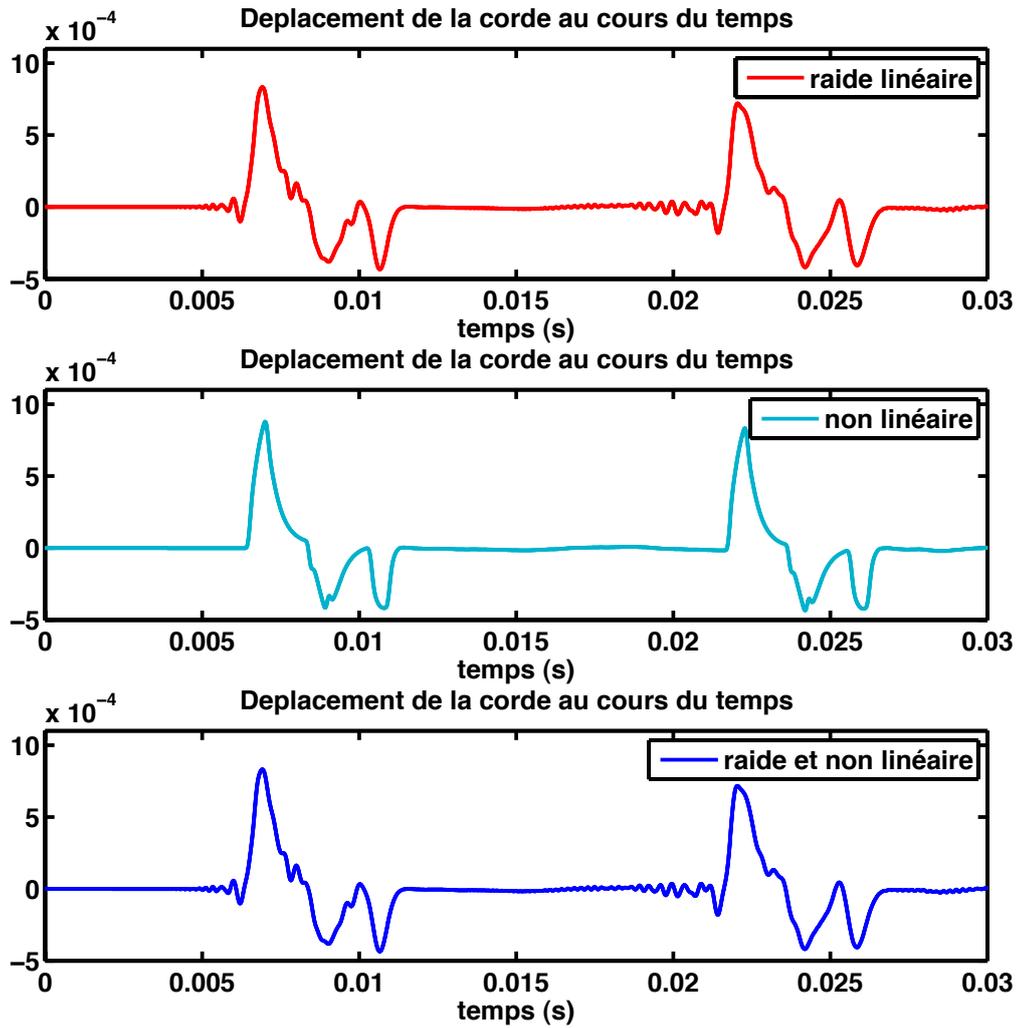


(a) simulations avec une corde raide linéaire (en haut), non linéaire mais sans raideur (au milieu) et avec raideur et non linéarités (en bas).

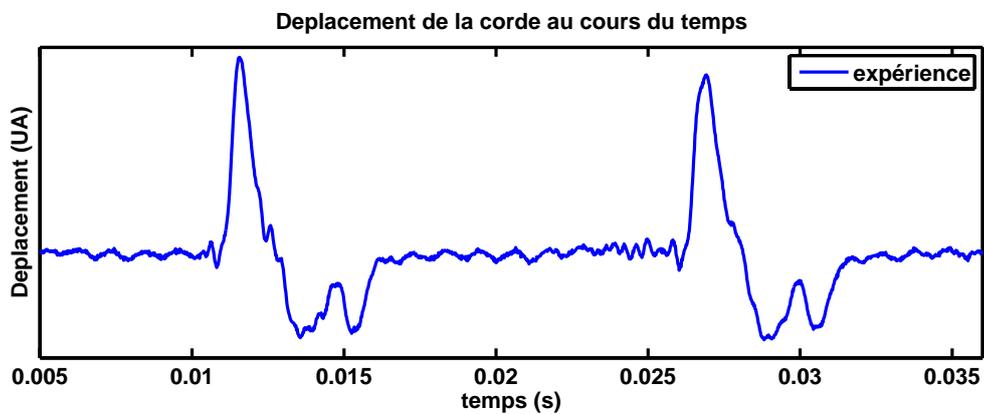


(b) mesure.

FIGURE III.9 – Déplacement de la corde au point d'observation, temps moyen.



(a) simulations avec une corde raide linéaire (en haut), non linéaire mais sans raideur (au milieu) et avec raideur et non linéarités (en bas).



(b) mesure.

FIGURE III.10 – Déplacement de la corde au point d’observation, temps court.

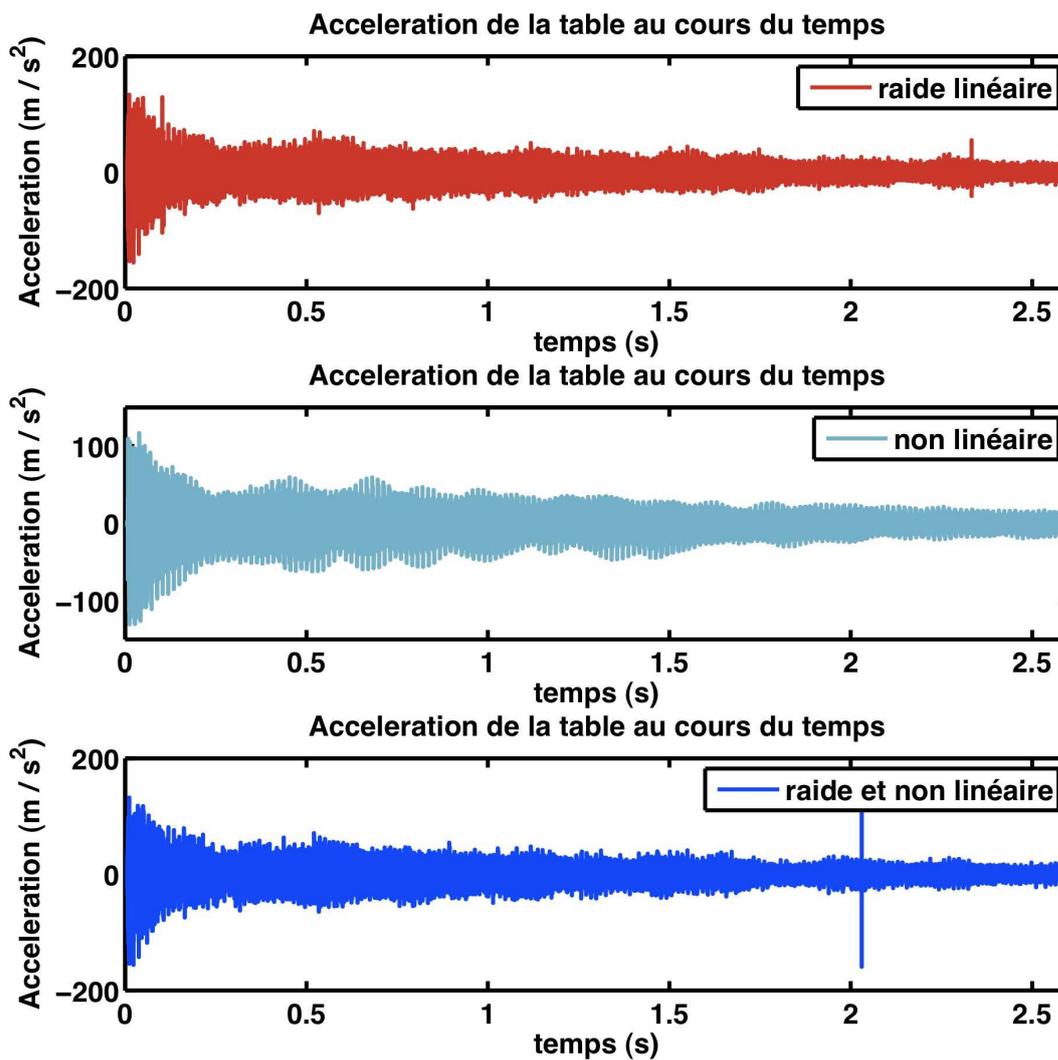
III.3.2 Accélération de la table d'harmonie

Les figure III.11, III.12 et III.13 montrent l'accélération au cours du temps du point $(0, 17 ; 1, 49)$ de la table d'harmonie, issue des trois simulations correspondant aux trois modèles de corde, ainsi que de la mesure.

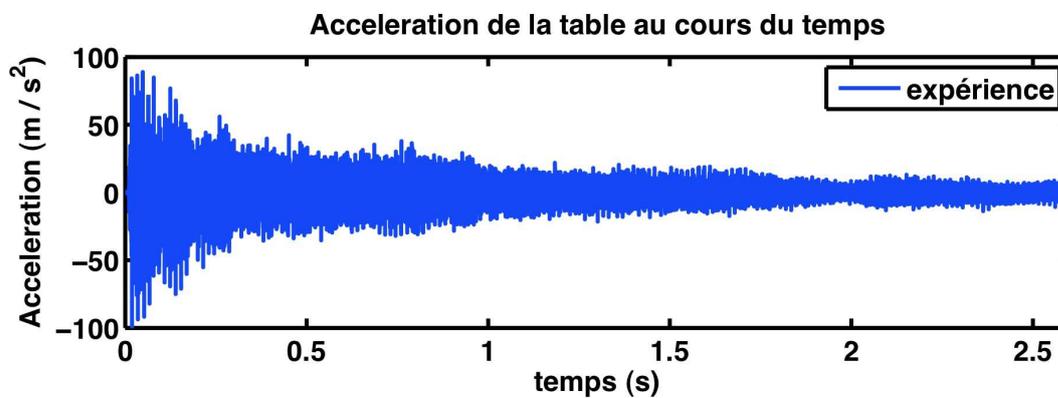
La première figure montre l'aspect de la courbe en temps long, on peut remarquer une allure assez réaliste pour les trois courbes, mettant en évidence la validité de nos choix de paramètres d'amortissement sur la table. Quantitativement, les simulations montrent des ordres de grandeur de $100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, en très bon accord avec la courbe expérimentale. Contrairement aux observations faites sur les déplacements de corde, la courbe d'accélération correspondant au modèle de corde non linéaire sans raideur montre plus de battements que les autres courbes. L'allure générale des courbes faisant intervenir la raideur étant plus proche de la courbe expérimentale.

La figure III.12 montre les mêmes courbes, mais sur un intervalle de temps beaucoup plus court (de 0 à 15 millisecondes) afin d'observer les attaques obtenues avec chacun des modèles de corde et de les comparer à la mesure. Les trois courbes présentent des ordres de grandeur très comparables, bien que la courbe obtenue avec le modèle sans raideur se distingue des deux autres, non seulement par l'absence des oscillations croissantes caractéristiques, mais aussi par la forme d'onde générale. Encore une fois, la comparaison avec l'expérience est en faveur de la prise en compte du phénomène de raideur dans la corde.

Enfin, la figure III.13 montre les mêmes courbes que III.12, sur lesquelles on a agrandi l'échelle de représentation. On distingue clairement un précurseur dû à la non linéarité, qui correspond à l'arrivée précoce de l'onde longitudinale qui naît dans la corde par couplage non linéaire avec l'onde transversale (transfert transversal \rightarrow longitudinal), mais se propage beaucoup plus vite, et arrive donc bien en avance au chevalet par rapport à l'onde transversale. On voit très bien sur cette figure que le modèle de corde raide et non linéaire cumule dans son transitoire les deux effets que l'on voit apparaître séparément sur les transitoires liés au modèle raide linéaire (oscillations croissantes : précurseur de raideur) et au modèle non linéaire (précurseur longitudinal). D'autre part, on retrouve sur le signal mesuré un précurseur d'amplitude semblable au précurseur non linéaire, mais d'une durée d'environ 20 millisecondes, soit beaucoup plus que la durée du précurseur non linéaire observé numériquement qui durait environ 4 millisecondes. Il est possible que le précurseur observé dans les mesures reflète non seulement le précurseur non linéaire dû à la présence des ondes longitudinales, mais aussi la transmission du choc de la touche sur le lit de touche (précurseur de touche, voir le paragraphe I.6.3), qui pourrait anticiper le précurseur non linéaire sans qu'il soit facile de les distinguer.

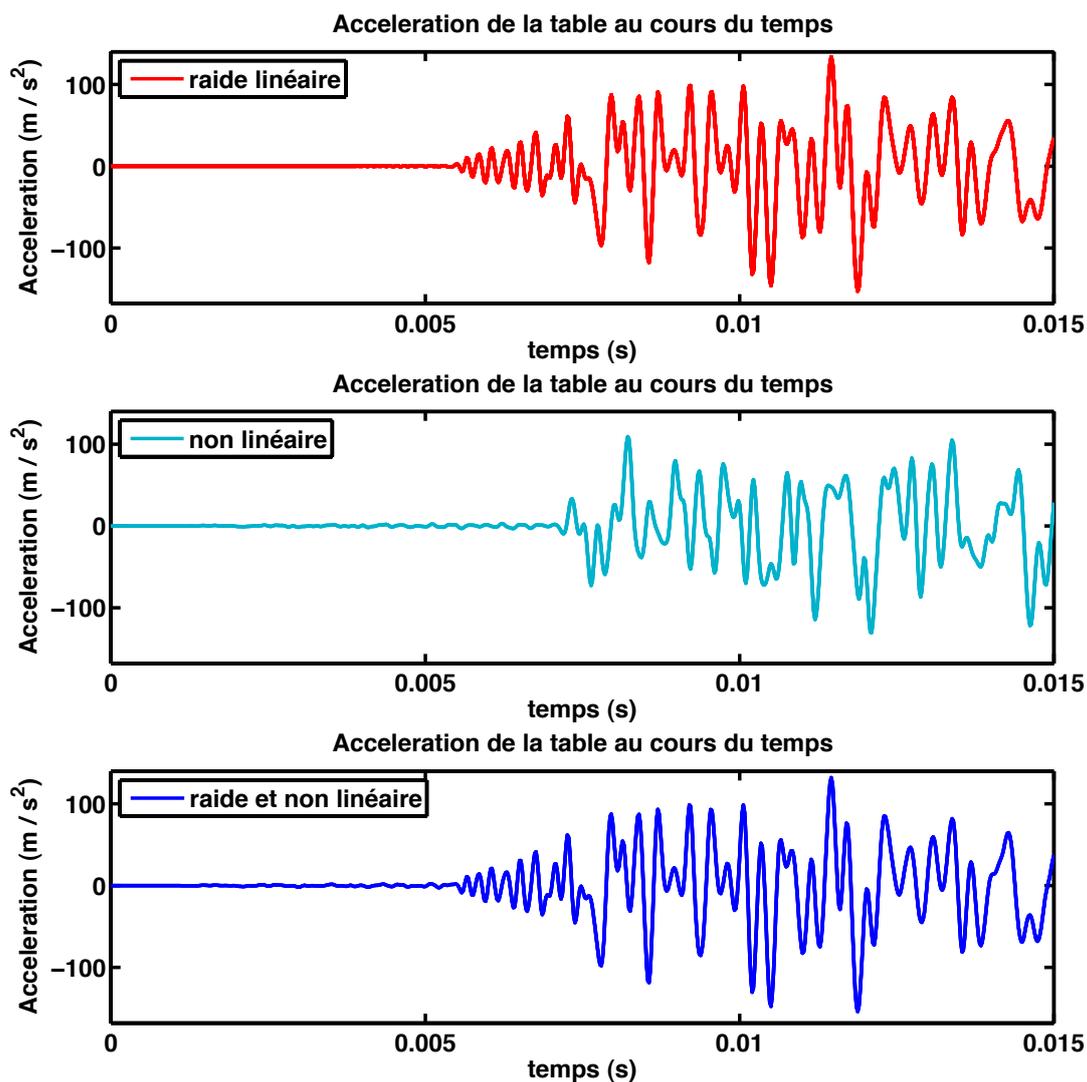


(a) simulations avec une corde raide linéaire (en haut), non linéaire mais sans raideur (au milieu) et avec raideur et non linéarités (en bas).

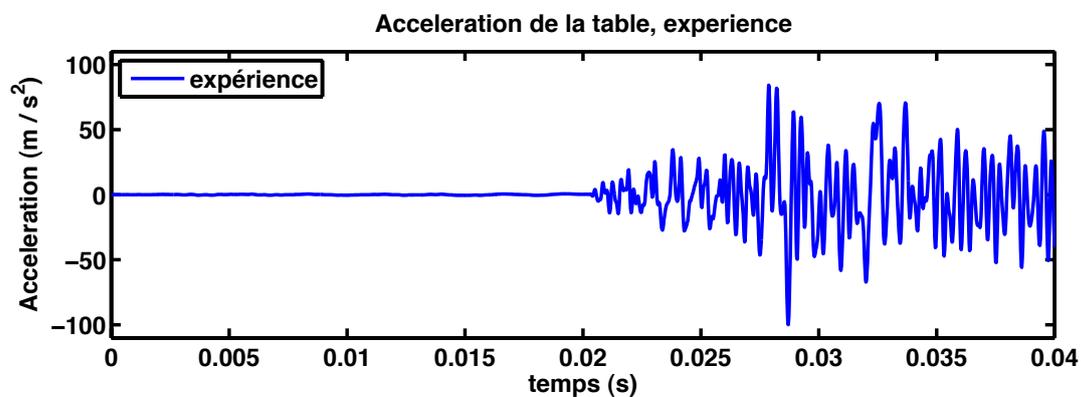


(b) mesure.

FIGURE III.11 – Accélération de la table d'harmonie au point d'observation, temps long.

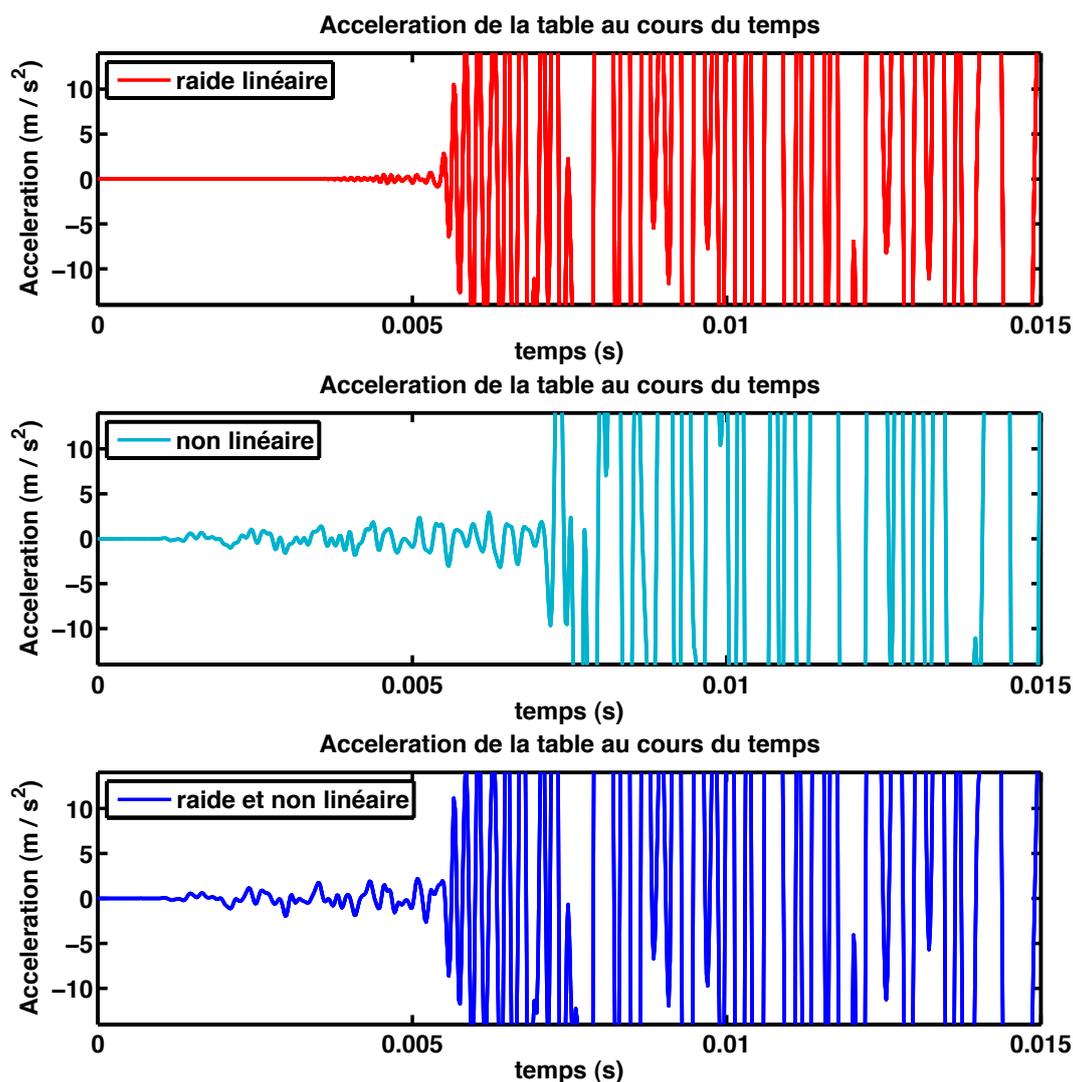


(a) simulations avec une corde raide linéaire (en haut), non linéaire mais sans raideur (au milieu) et avec raideur et non linéarités (en bas).

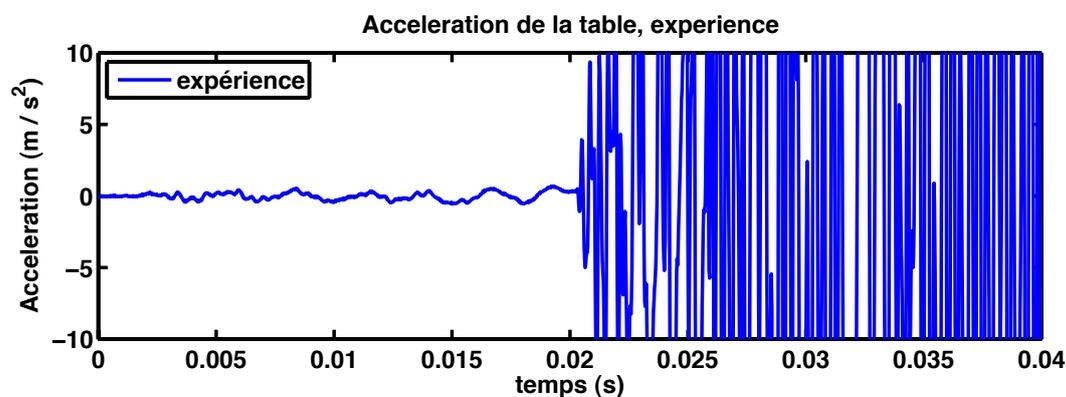


(b) mesure.

FIGURE III.12 – Accélération de la table d'harmonie au point d'observation, temps moyen.



(a) simulations avec une corde raide linéaire (en haut), non linéaire mais sans raideur (au milieu) et avec raideur et non linéarités (en bas).



(b) mesure.

FIGURE III.13 – Accélération de la table d’harmonie au point d’observation, temps moyen.

III.3.3 Signal de pression

Il est intéressant de savoir si les remarques précédentes concernant l'accélération de la table d'harmonie sont toujours valables pour le signal de pression, c'est à dire le son. En particulier, on peut se demander si le précurseur non linéaire se transmet bien à l'acoustique, et pourrait, comme il est suggéré à plusieurs reprises dans la littérature, contribuer à la *brillance* de l'attaque du piano dans les nuances fortissimo. Les figure III.14, III.15 et III.16 montrent successivement le signal de la pression sonore au point (0 ; 1 ; 0,23), soit 3 cm au dessus de la table d'harmonie, en temps long puis en temps court, avec et sans agrandissement de l'échelle de représentation. On peut voir que le précurseur non linéaire est également présent dans le signal de pression, et donc contribue certainement au timbre et en particulier à l'attaque du son de piano.

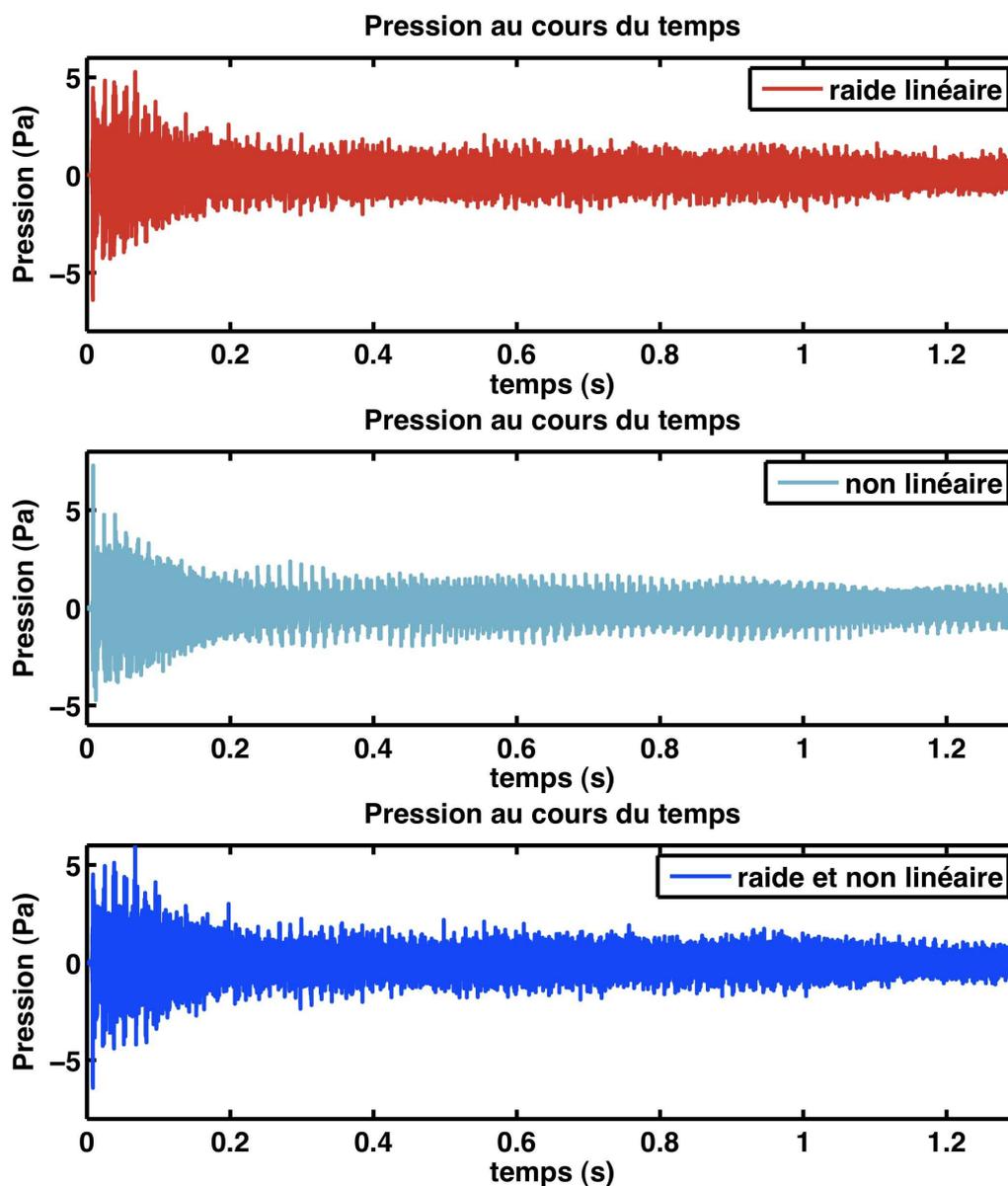


FIGURE III.14 – Pression au cours du temps pour un point de l'espace. Simulations avec une corde raide linéaire (en haut), non linéaire mais sans raideur (au milieu) et avec raideur et non linéarités (en bas).

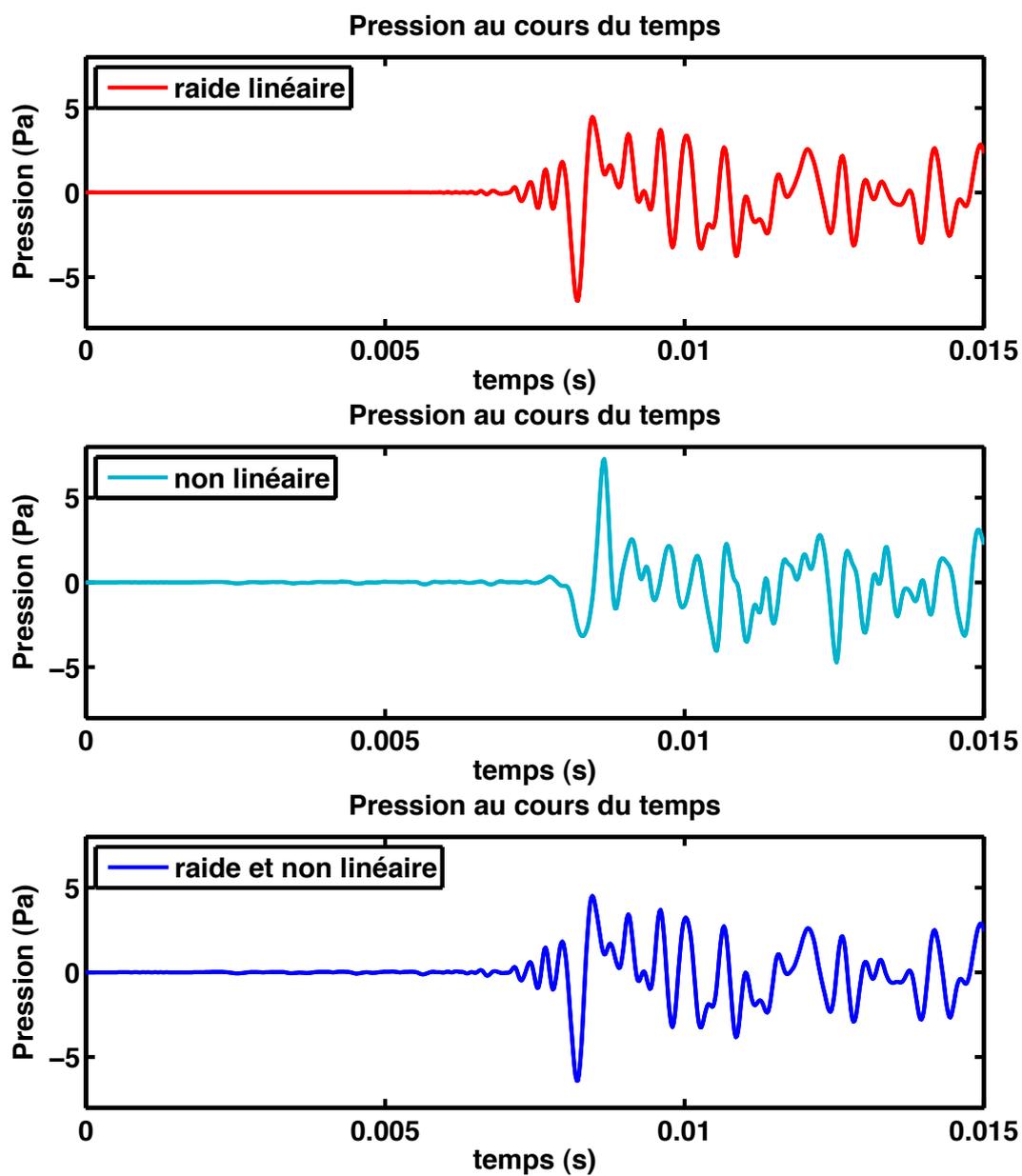


FIGURE III.15 – Pression au cours du temps pour un point de l'espace. Simulations avec une corde raide linéaire (en haut), non linéaire mais sans raideur (au milieu) et avec raideur et non linéarités (en bas).

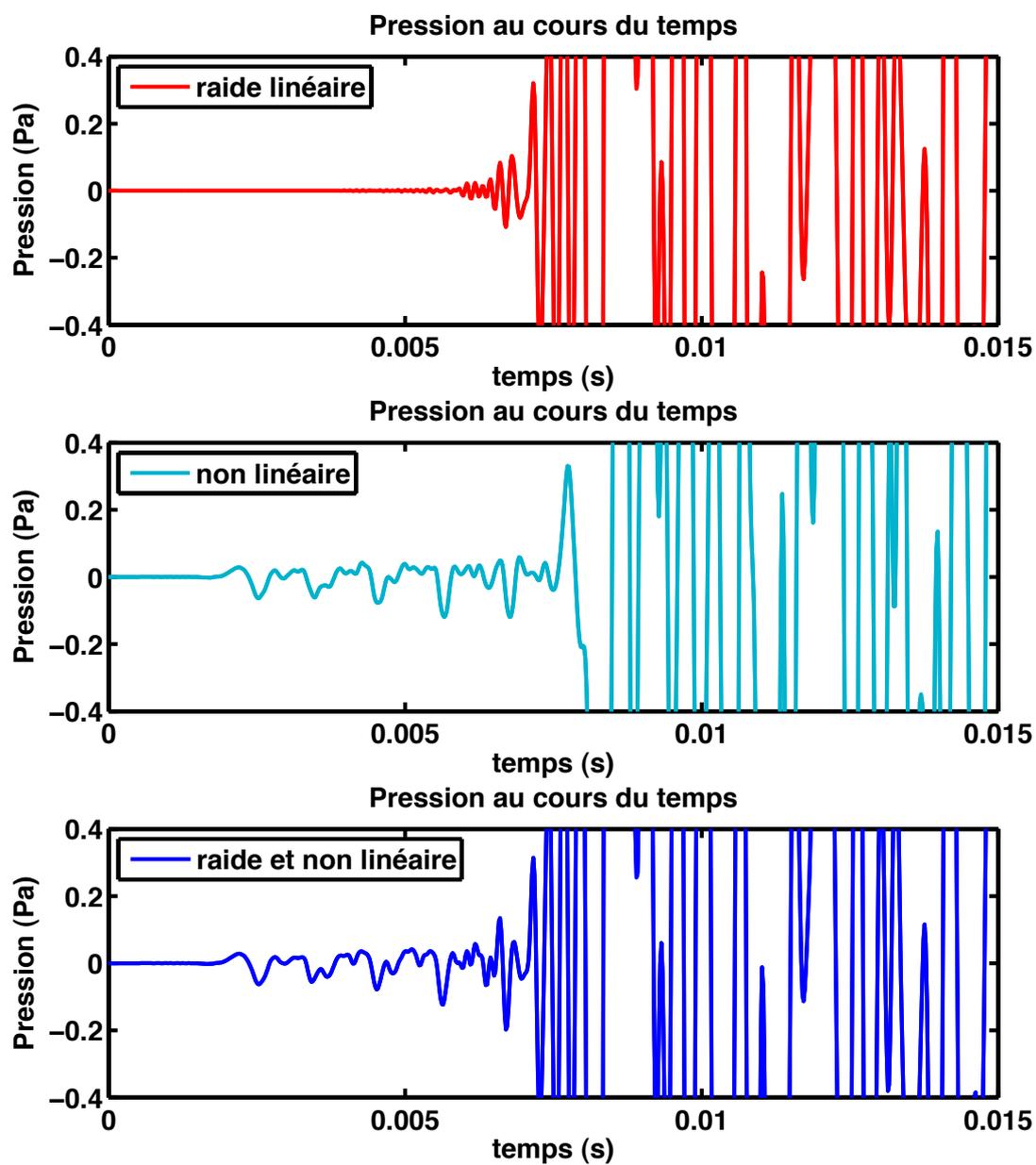


FIGURE III.16 – Pression au cours du temps pour un point de l'espace. Simulations avec une corde raide linéaire (en haut), non linéaire mais sans raideur (au milieu) et avec raideur et non linéarités (en bas).

III.4

Enrichissement spectral et partiels fantômes

Nous nous intéressons dans ce paragraphe au contenu fréquentiel des solutions numériques obtenues. Il s'agit en effet d'une méthode de visualisation très adaptée à l'acoustique musicale, l'oreille étant très sensible aux niveaux relatifs des composantes spectrales contenues dans le son. Nous souhaitons par exemple observer dans le domaine spectral l'influence des phénomènes physiques pris en compte dans la corde, en particulier sur l'apparition des partiels fantômes (voir le paragraphe I.4.3), mais aussi le phénomène d'enrichissement spectral lors de l'augmentation de la vitesse de frappe. Pour commencer, visualisons les variations du contenu spectral dans les différentes parties du piano qui sont mises en vibration après la frappe du marteau.

III.4.1 Contenu spectral lors des étapes de la vibration

Il est possible de visualiser le spectre du mouvement d'un point de chaque partie vibrante du piano (corde, table, acoustique), mettant en évidence l'influence de chaque élément sur le contenu spectral. La figure III.17 montre le spectre de la vitesse d'un point de la corde, de la vitesse d'un point de la table d'harmonie et de la pression en un point de l'espace pour l'expérience numérique décrite au paragraphe précédent III.3 sur la note C2, avec le modèle de corde non linéaire et raide. Les valeurs de références ont été choisies conformément aux définitions de l'introduction : pour chaque signal, la valeur 0 dB correspond au maximum du spectre. Pour la corde, $\hat{v}_{\text{ref}} = 3,42 \times 10^{-2}$ m-s, pour la table d'harmonie, $\hat{v}_{\text{ref}} = 9,2 \times 10^{-4}$ m-s et pour la pression, $\hat{p}_{\text{ref}} = 1,8 \times 10^{-1}$ Pa. Le spectre de la vitesse de la corde est constitué de partiels dont l'écartement grandit avec le rang des partiels, montrant une légère inharmonicité. Certains partiels (le huitième, le seizième, et tous les multiples de huit) sont manquants ou très atténués, reflétant la position de frappe du marteau à environ 1/8 de la corde (voir le paragraphe I.2.3). Le spectre de la vitesse de la table d'harmonie est plus fourni que celui de la vitesse de corde, en partie grâce à la contribution des partiels venant de la vibration longitudinale (voir les exemples numériques suivants), mais également grâce à la vibration de la table elle-même (visible surtout en très basses fréquences). Enfin, le spectre de la pression montre la même richesse que le spectre de l'accélération, avec cependant un rééquilibrage des partiels lié au fait que les modes ne rayonnent pas tous de la même façon.

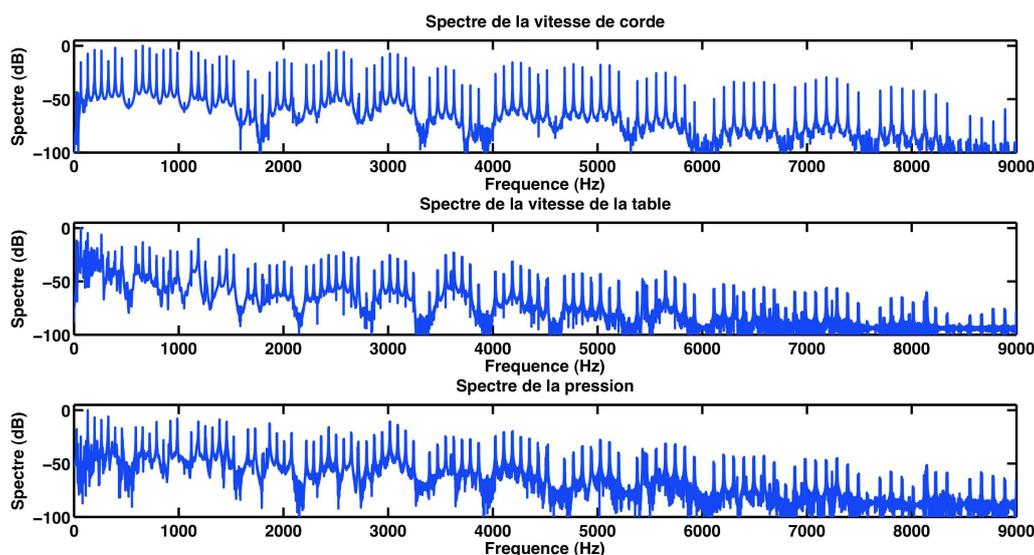


FIGURE III.17 – Contenu spectral de différentes parties vibratoires du piano, note C2.

III.4.2 Effet de l'augmentation de la vitesse du marteau

Nous avons procédé à une expérience numérique sans rayonnement, sur la note C2, afin d'observer l'effet de l'augmentation de la vitesse du marteau sur le spectre de l'accélération de la table d'harmonie. Mis à part le rayonnement et la vitesse du marteau, tous les paramètres sont les mêmes que dans le paragraphe III.3. Trois simulations de 7 secondes chacune sont menées avec trois vitesses initiales différentes de marteau : $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (nuance piano), $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (nuance mezzo-forte) et $3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (nuance forte), et on trace les spectres de l'accélération du même point de la table d'harmonie que précédemment, obtenus avec chaque vitesse de marteau, normalisés tous les trois par rapport au maximum du signal le plus ample, c'est à dire associé à la plus grande vitesse de marteau. On représente en rouge, turquoise et bleu les graphes correspondant respectivement à des vitesses de frappe de 3, 2 et $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Les figures III.18, III.19(a) et III.19(b) correspondent à la visualisation de différentes étendues fréquentielles du même graphique.

La comparaison sur l'étendue 0 à 9 000 Hz en figure III.18 montre que l'augmentation de la vitesse du marteau a pour effet une représentation plus importante des aigus dans le signal, donnant lieu d'un point de vue musical à un son plus brillant. On observe également un enrichissement apparent du spectre, en particulier entre 6 000 et 8 000 Hz. Ces effets peuvent provenir de deux origines non linéaires : l'interaction marteau - corde, et l'équation de corde elle même, et il est *a priori* difficile de les discriminer. Pour étudier plus en détail l'influence de la nonlinéarité de la corde, nous étudions dans le paragraphe suivant l'influence de l'équation de corde choisie sur le contenu fréquentiel.

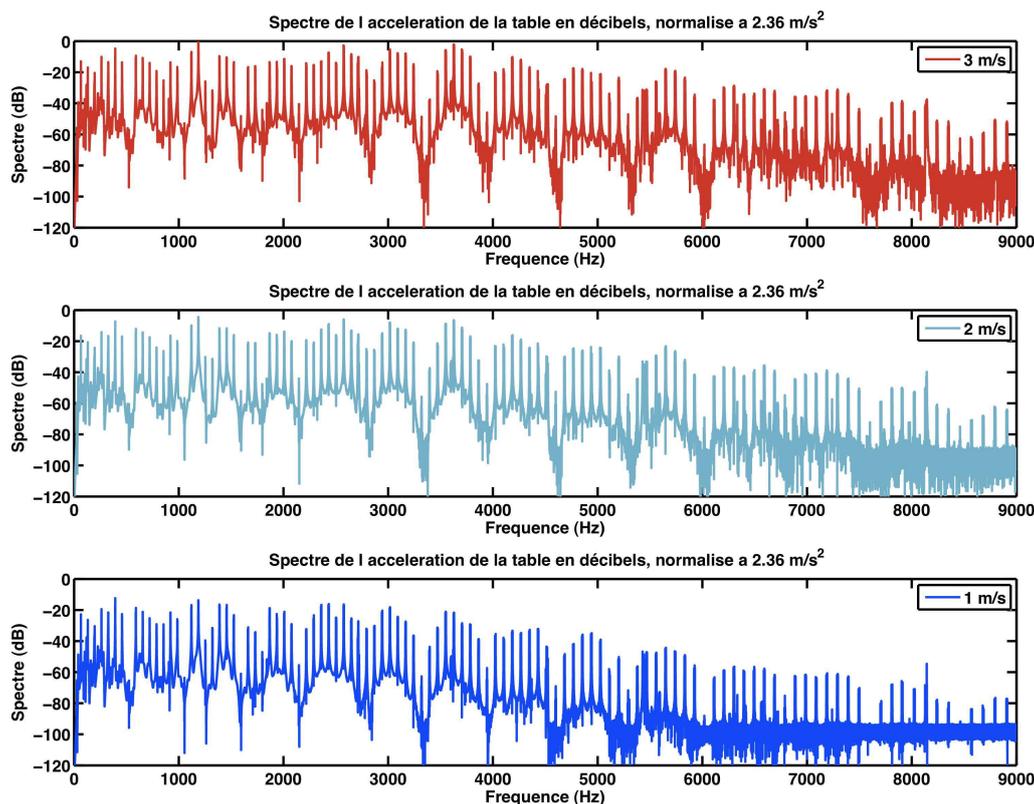
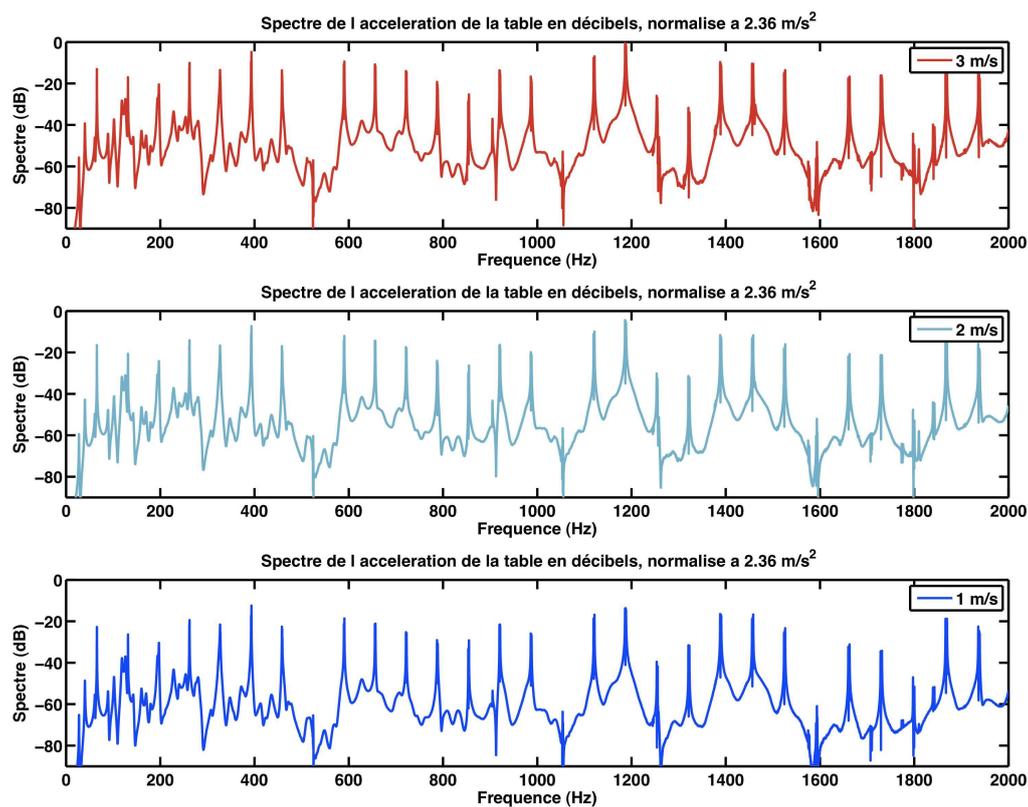
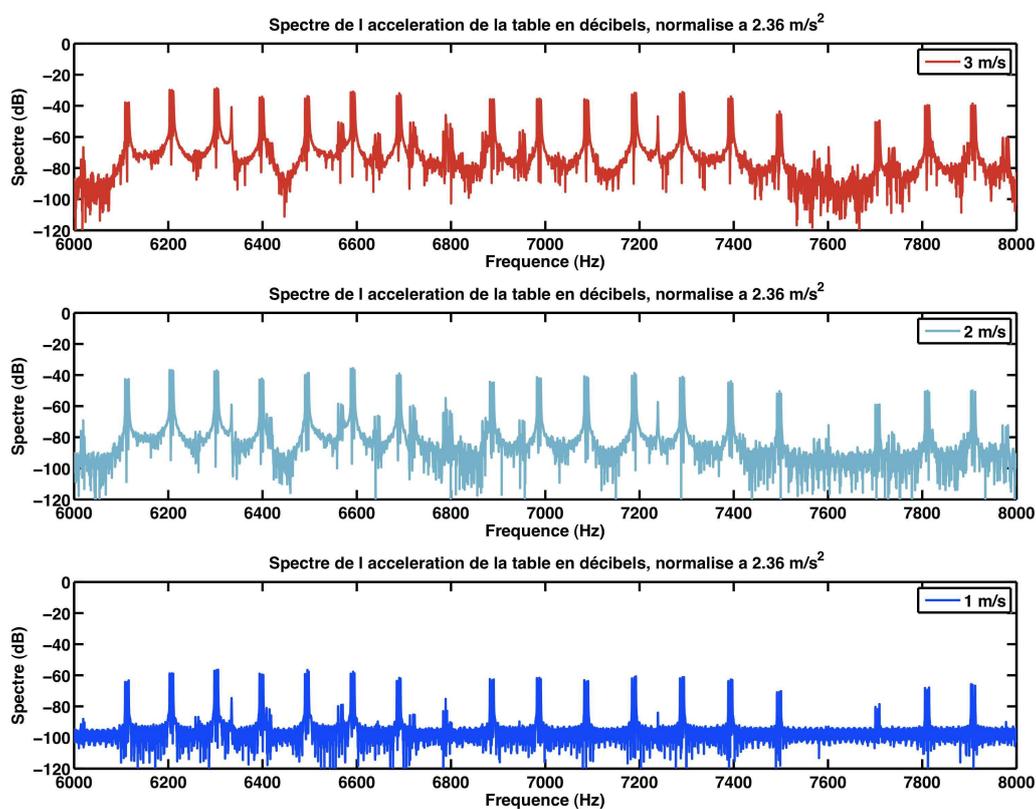


FIGURE III.18 – Enrichissement spectral lors de l'augmentation de la vitesse de frappe, note C2.

L'observation de l'étendue spectrale entre 0 et 2 000 Hz en figure III.19(a) permet de visualiser l'importance relative croissante, avec la vitesse de marteau, d'un partiel longitudinal vers 905 Hz et de son premier harmonique vers 1810 Hz dans le signal d'accélération de table. On constate que la série inharmo-nique provenant de la vibration transversale de la corde voit l'amplitude relative des partiels se modifier selon la vitesse d'attaque, contribuant à une modification perceptive du timbre. Notons également la



(a) Étendue spectrale de 0 à 2 000 Hz



(b) Étendue spectrale de 6 000 à 8 000 Hz

FIGURE III.19 – Enrichissement spectral lors de l'augmentation de la vitesse de frappe, note C2.

contribution des premiers modes de la table d'harmonie, qui donne une richesse en très basses fréquences à chacun des trois signaux.

L'observation de l'étendue spectrale entre 6 000 et 8 000 Hz en figure [III.19\(b\)](#) montre que la contribution des partiels aigus est croissante avec la vitesse de frappe du marteau, et montre l'apparition de partiels « fantômes » entre les partiels de la série inharmonique de la vibration transversale de la corde, dont l'amplitude relative augmente avec la vitesse de frappe.

III.4.3 Effet de l'équation sur les partiels

Nous avons vu en paragraphe III.3 que la prise en compte ou non des phénomènes de raideur et de la non linéarité géométrique dans la corde conduisait à des formes d'onde très différentes dans le domaine temporel. Étudions ici l'influence de ces phénomènes sur l'aspect fréquentiel du signal de pression (c'est à dire, sur le son) obtenu par simulation.

Les signaux sont obtenus par les simulations décrites au paragraphe III.3, sur la note C2, constitué d'un triplet de cordes légèrement désaccordées. La figure III.20 montre le spectre du signal de pression au même point que précédemment, sur l'étendue de 0 à 9 000 Hz, pour les trois équations de corde. L'encadré inférieur de la figure représente donc la même chose que l'encadré inférieur de la figure III.17, il contient donc la richesse spectrale dont nous avons parlé ainsi qu'une certaine inharmonicité. L'encadré supérieur, issu de la simulation qui ne prend pas en compte les nonlinéarités géométriques de la corde, montre un spectre beaucoup moins riche, très similaire au spectre du déplacement des cordes que nous avons pu observer jusqu'ici. En revanche, il présente bien un éloignement progressif des partiels, caractéristique de la prise en compte de la raideur. L'encadré du milieu correspond à la simulation ignorant la raideur mais prenant en compte les nonlinéarités géométriques. On observe une richesse spectrale, mais aucune inharmonicité, conformément à nos attentes.

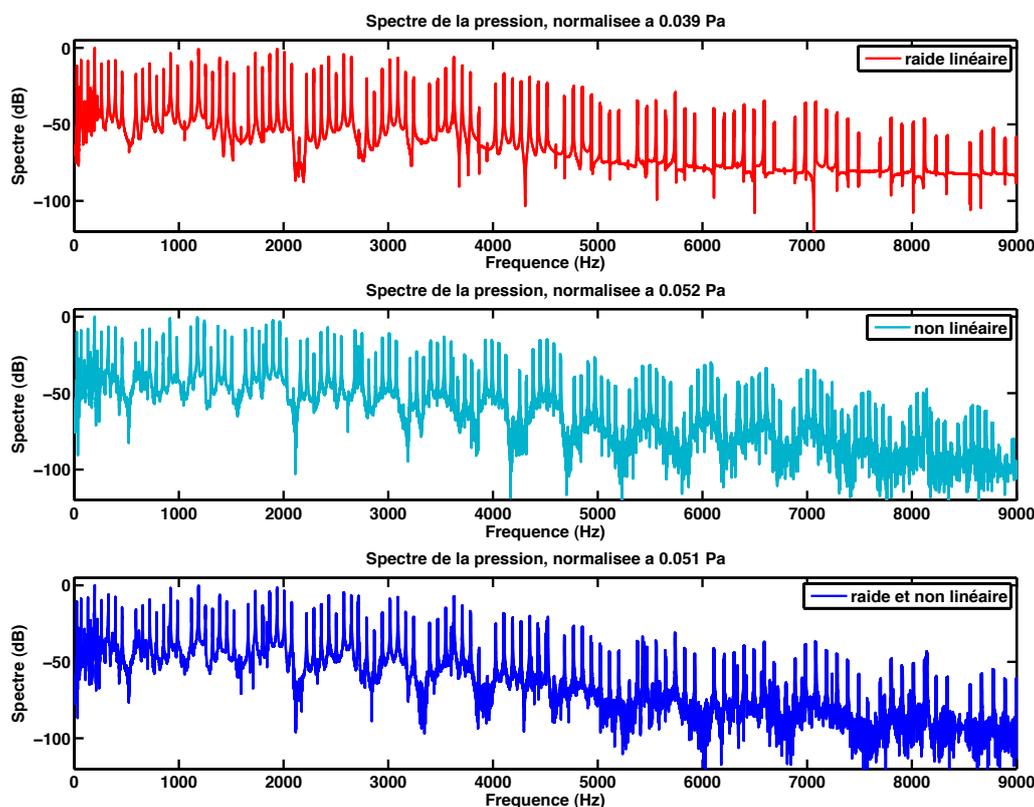


FIGURE III.20 – Spectre du signal de pression pour différents modèles de cordes, note C2.

Les figures III.21 et III.22 montrent des détails du spectre : entre 0 et 2 000 Hz puis entre 6 000 et 8 000 Hz. Pour les premiers partiels, on note une grande similitude entre les trois simulations. On remarque cependant les pics correspondant à la vibration longitudinale à 905 Hz et sa première harmonique, 1 810 Hz, dans les simulations prenant en compte le caractère non linéaire. On aperçoit également des harmoniques supérieures dans la figure III.22, à 6 335 Hz et 7 240 Hz. Dans cette même figure, on observe très clairement que les partiels se détripent car les cordes sont légèrement désaccordées, et ce pour les trois modèles de corde. C'est enfin dans cette figure que l'on met en évidence l'apparition des partiels fantômes pour la simulation qui prend en compte à la fois la raideur et les non linéarités. En effet, conformément à

l'explication donnée en paragraphe I.4.3, ces deux phénomènes doivent être présents afin que les partiels non seulement apparaissent par non linéarité mais aussi se distinguent des partiels « linéaires » grâce à l'inharmonicité induite par la raideur. Notons enfin que les partiels fantômes se détriplettent à l'image des partiels linéaires, en raison du désaccord.

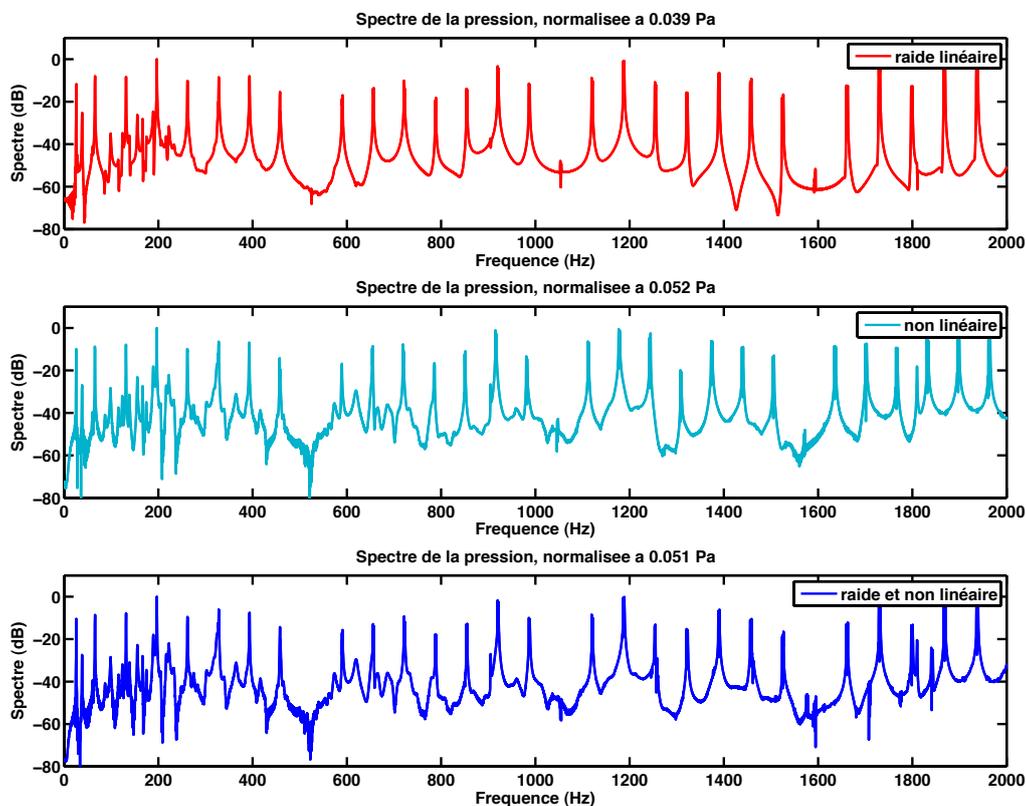


FIGURE III.21 – Spectre du signal de pression pour différents modèles de cordes, note C2.

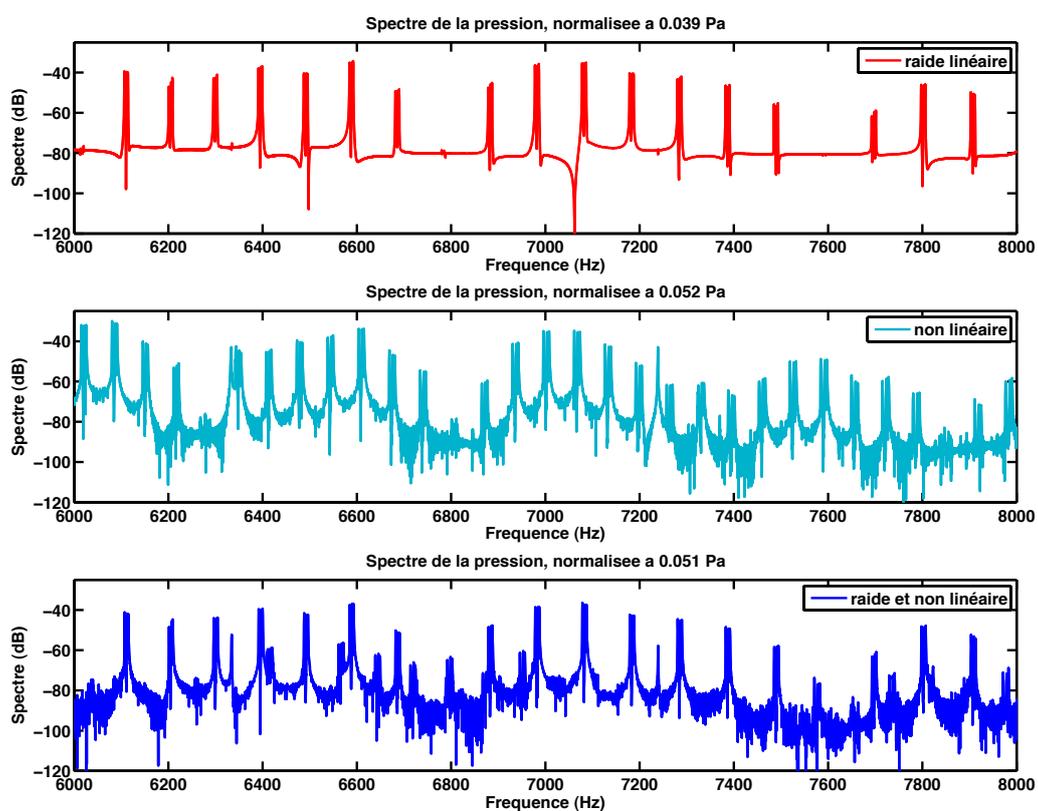


FIGURE III.22 – Spectre du signal de pression pour différents modèles de cordes, note C2.

III.5

Diagrammes de directivité

Autour d'un piano comme autour de tout instrument de musique, le rayonnement n'est pas équitable selon la direction ou la fréquence : on parle de « directivité ». La caractérisation de cette dépendance donne des informations sur l'instrument, et sur sa qualité.

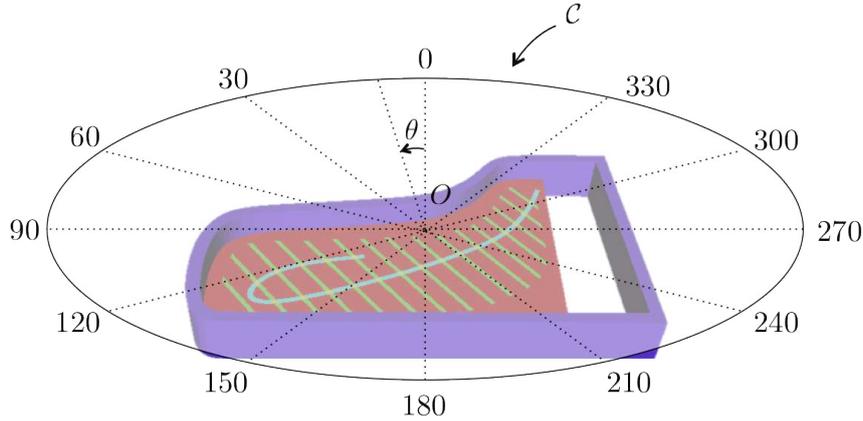


FIGURE III.23 – Vue schématique du cercle utilisé pour les diagrammes de directivité.

La mesure de la directivité d'une source sonore placée en un point O est faite le long d'un cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon R fixé, grand devant les longueurs d'onde considérées. On mesure entre l'instant t_0 et l'instant T la « pression efficace », qui est la moyenne quadratique de la pression, en un point du cercle repéré par l'angle θ :

$$p_{\text{eff}}(\theta) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t=t_0}^{t=t_0+T} p^2(\theta, t) dt} \quad (\text{III.5.1})$$

Afin de rendre compte graphiquement de la sensibilité naturelle de l'oreille humaine, on s'intéresse plutôt à la quantité normalisée en décibels :

$$\varphi(\theta) = p_{dB} + 20 \log_{10} \left[\frac{p_{\text{eff}}(\theta)}{\max_{\theta} p_{\text{eff}}(\theta)} \right] \quad (\text{III.5.2})$$

où p_{dB} est une constante permettant d'assurer la positivité de φ . La courbe tracée en coordonnées polaires $(\theta, \varphi(\theta))$ s'appelle le « diagramme de directivité » de la source.

Afin de mettre en évidence la façon dont le rayonnement dépend de la fréquence, on place sur la table d'harmonie une source harmonique, c'est à dire oscillant en temps à une pulsation donnée, et dont la répartition spatiale est une gaussienne de rayon 12 cm et de centre $(0, 5 ; 1, 18)$ (reproduisant typiquement un pot vibrant). Le but étant de caractériser le système d'amplification du piano, c'est à dire l'ensemble { table - air } nous étouffons les cordes, ce qui revient à ne pas les prendre en compte dans la simulation, comme dans le paragraphe II.5.

Les paramètres physiques sont les paramètres de la table d'harmonie utilisés tout au long de ce manuscrit. Nous avons souhaité comparer les diagrammes de directivité obtenus en prenant ou non en compte les ceintures, afin de visualiser leur effet éventuel. Dans cet objectif, nous réalisons deux maillages différents de l'air avoisinant : l'un avec les ceintures, formant la boîte décrite en II.5 de 40 cm d'épaisseur avec 16 mailles ; et l'autre provenant simplement de l'extrusion de la table d'harmonie, de 20 cm d'épaisseur (ou plus, selon la longueur d'onde étudiée) avec 12 mailles.

Avant de présenter les résultats de simulation, remarquons qu'il est délicat de réaliser des mesures reproduisant ces simulations. Il faut en effet s'assurer de bien mesurer le seul rayonnement de l'instrument, en

s'affranchissant au maximum des réflexions avoisinantes. Cette situation est en général bien réalisée en chambre anéchoïque. Or, pour des raisons pratiques, il est très difficile de placer un piano à queue dans une chambre anéchoïque de dimensions modestes, et les résultats expérimentaux sont assez rares.

Nous calculons la pression, grâce à la méthode des potentiels retardés, un cercle d'observation horizontal¹¹ centré au point $(0, 5 ; 1, 18 ; 0, 6)$ (donc 40 cm au dessus de la source) de rayon 2 m. Un point d'observation est placé tous les degrés autour de ce cercle. La moyenne (III.5.1) est faite après l'établissement du régime stationnaire, nous avons choisi de procéder à l'intégration à partir de $t_0 = 30$ millisecondes, même si le régime est établi bien avant en hautes fréquences. L'échantillonnage est de 2×10^{-5} secondes, et les diagrammes de directivité sont réalisés avec $T = 400$ millisecondes.

Les fréquences d'excitation choisies permettent de représenter la large gamme de fréquences impliquées dans la production du son de piano :

$$175 \text{ Hz}, \quad 554 \text{ Hz}, \quad 1\,568 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad 2\,093 \text{ Hz}.$$

La comparaison des figures III.24 et III.25 montre que les ceintures jouent un grand rôle dans la directivité de l'instrument, surtout dans l'aigu. On peut remarquer que dans les deux configurations, on a une plus grande directivité dans l'aigu que dans le grave, conformément aux observations expérimentales citées dans [Suzuki et Nakamura, 1990].

11. En effet, la symétrie parfaite supposée dans notre modèle par rapport au plan de la table d'harmonie conduit à un champ acoustique infime dans ce plan. Cette symétrie n'est pas vraiment réaliste étant donnée non seulement la géométrie du meuble du piano, du cadre, mais aussi la présence du sol qui réverbère le son vers le haut...

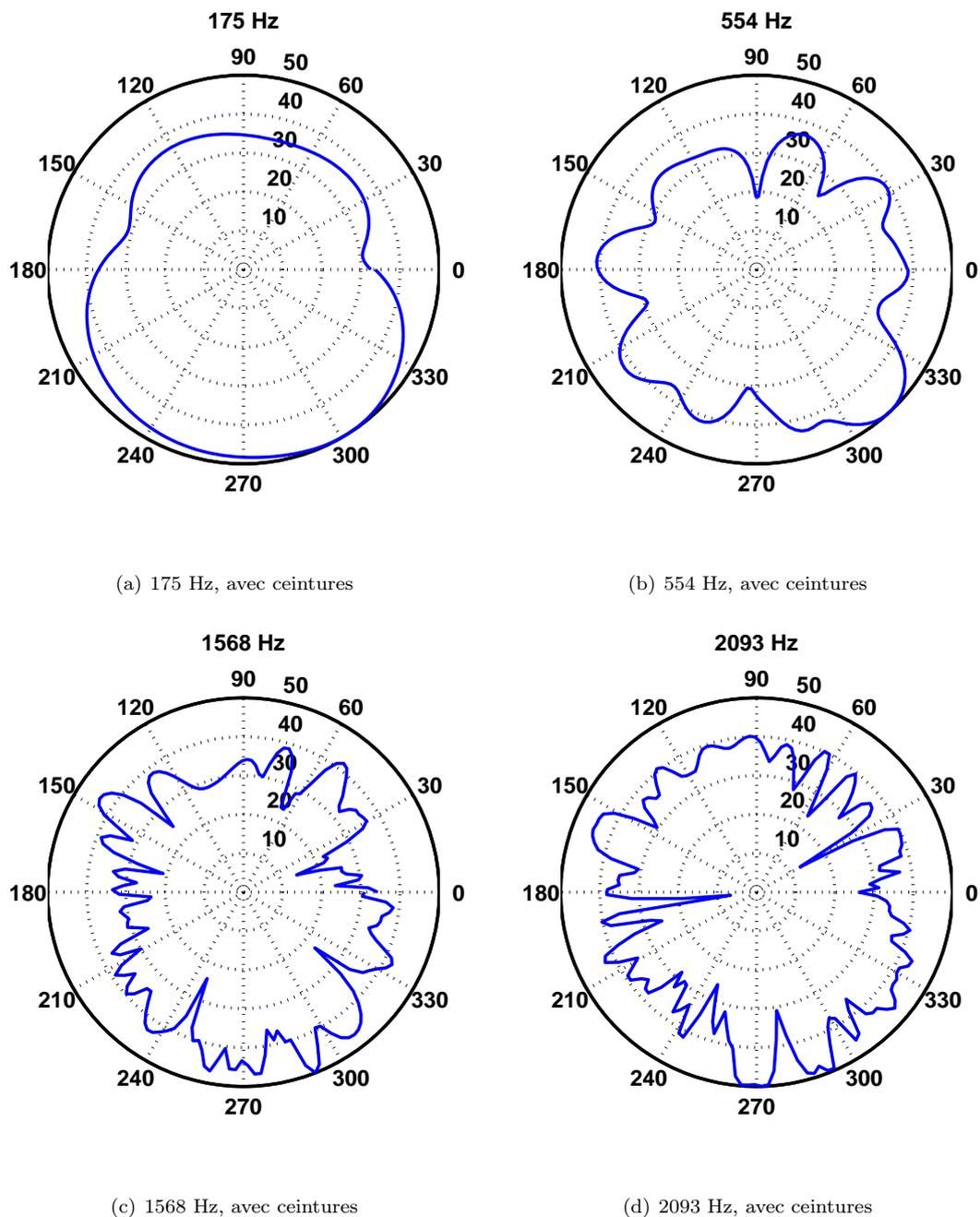
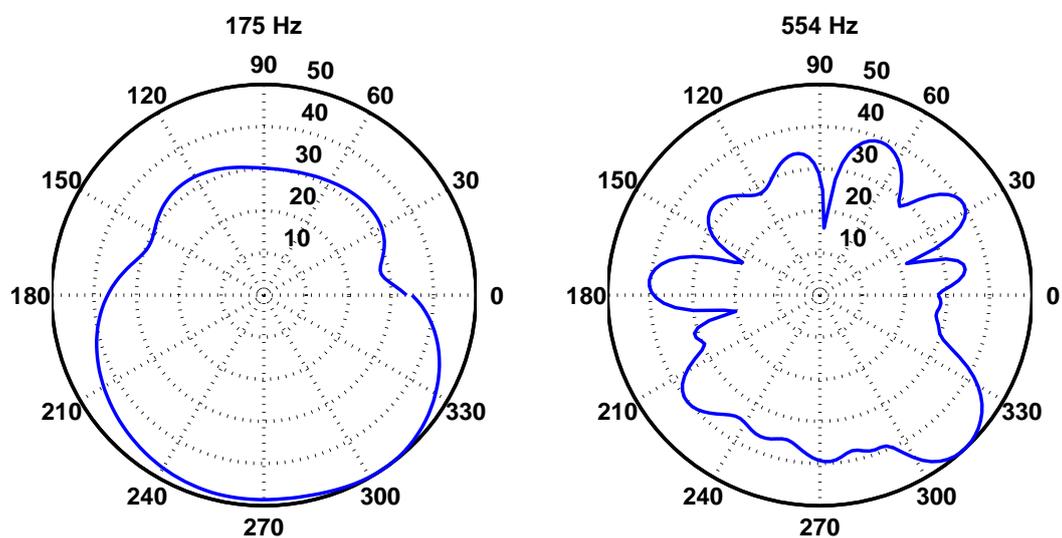
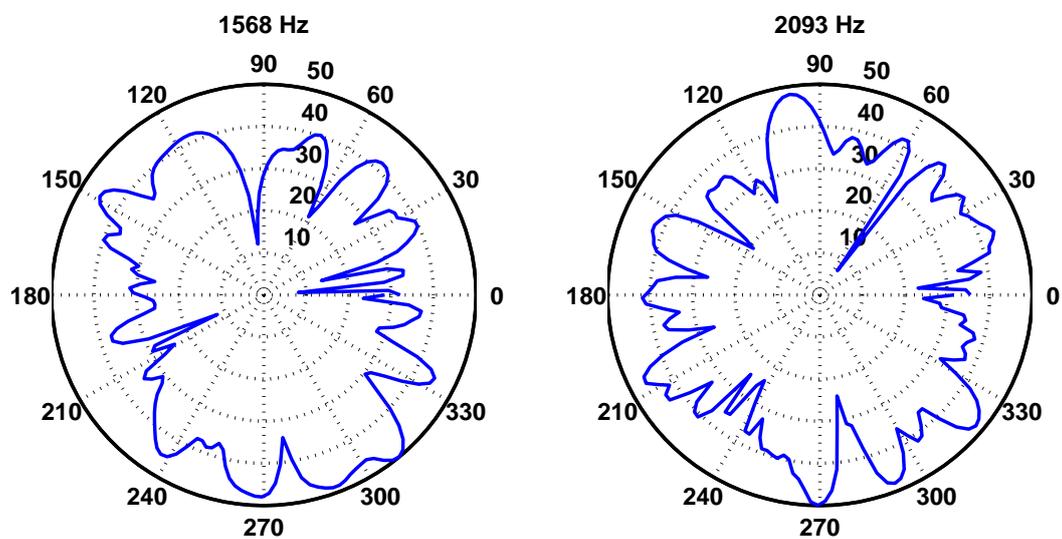


FIGURE III.24 – Diagrammes de directivité, avec les ceintures



(a) 175 Hz, sans ceintures

(b) 554 Hz, sans ceintures



(c) 1568 Hz, sans ceintures

(d) 2093 Hz, sans ceintures

FIGURE III.25 – Diagrammes de directivité, sans les ceintures

III.6

Et bien d'autres possibilités

Notre modèle de piano a permis d'effectuer des simulations numériques tout à fait passionnantes, permettant de simuler toutes les vibrations ayant lieu dans le piano en ne donnant comme impulsion initiale qu'une vitesse au marteau, le reste étant mis en mouvement par des couplages réalistes et réciproques, mais aussi de mettre en lumière l'effet de certains phénomènes physiques sur le comportement vibratoire de l'instrument, ce qui est impossible à réaliser expérimentalement. Un long travail de calibration a cependant été nécessaire afin d'atteindre ce niveau de réalisme sur les notes présentées ici, et qui pourra certainement être encore amélioré dans les prochaines semaines. Il sera également intéressant d'explorer d'autres possibilités offertes par notre modèle, comme en premier lieu :

- ▷ Observer l'effet d'un changement du plan de cordes sur le transitoire, le précurseur, les partiels fantômes. Cette investigation paraît particulièrement novatrice et intéressante du point de vue de la facture instrumentale.
- ▷ Observer l'effet des échelles duplex et des cordes aliquotes sur les vibrations mises en jeu, et le son résultant.
- ▷ Observer l'effet du désaccord, en présence de non linéarités des cordes et du couplage vibroacoustique, qui rendent l'interprétation des battements plus délicate d'un point de vue théorique mais se prête très bien à des simulations numériques.
- ▷ Observer effet de l'ajustement des paramètres de marteau sur le comportement vibratoire général du piano. Cette étape est également réalisée au quotidien sur les pianos du monde, et reste assez délicate du point de vue de la simulation étant donné que les paramètres demandés par le modèle n'ont pas de signification physique simple (contrairement aux paramètres du type masse volumique du bois, ou longueur de corde. . .). Faire la lumière sur ce point serait d'une grande valeur pour le futur de la simulation du piano par modèles physiques, étant donné que l'on ne dispose pas (encore ?) de modèles plus faciles à calibrer pour le feutre des marteaux.
- ▷ Observer l'effet de changements opérés sur la table d'harmonie, comme l'utilisation de nouveaux matériaux, de géométries différentes, ou de changements moins radicaux comme la variation de l'épaisseur, de l'emplacement des raidisseurs ou de leur nombre. . . D'un point de vue pratique, cette étape peut être extrêmement simple à mettre en œuvre si les changements sont dans le sens d'une simplification (si on désire une table d'harmonie ronde en aluminium, par exemple), mais peut se révéler vraiment fastidieuse si la géométrie doit être re-dessinée à chaque nouvelle configuration (typiquement lorsque l'on souhaite déplacer les raidisseurs).
- ▷ Plonger les résultats de simulation dans un contexte musical, par exemple en générant une mélodie par juxtaposition ou mélange des sons simulés, afin de se replacer dans le cadre habituel où tout un chacun a l'occasion d'écouter des sons de piano. C'est une étape importante car elle permet de vraiment se rendre compte du réalisme des simulations, mais également une étape difficile (surtout dans le cas du piano où chaque note est une autre histoire!) du point de vue de la recherche des paramètres de simulation, étant donné que nous ne disposons de mesures que pour quelques notes parsemées.

CONCLUSIONS & PERSPECTIVES

Modéliser un piano est une problématique passionnante et riche, mais également un défi aussi bien du point de vue de l'acoustique musicale que de l'analyse numérique. En effet, il s'agit d'un système mécanique complexe dont tous les rouages ne sont pas encore bien compris, impliquant des comportements non linéaires et des couplages multidimensionnels.

Le modèle de piano (I.5.1) que nous avons proposé dans cette thèse rassemble l'essentiel des connaissances actuelles concernant le fonctionnement vibratoire et acoustique de l'instrument. C'est en nous basant sur une vaste littérature mais aussi sur nos propres mesures que nous avons pu écrire le premier ¹² modèle physique, en domaine temporel, complet de piano incluant des cordes en grande déformation (non linéaires) présentant un couplage réciproque avec la table d'harmonie qui elle-même rayonne dans l'air avoisinant. Un tel modèle est issu de compromis et de schématisations permettant d'extraire de la réalité, fort complexe, les phénomènes physiques que nous souhaitons reproduire. Ceci nous a permis de rendre compte de la fonction vibratoire et acoustique de l'instrument, et d'écrire un modèle dont nous pouvons envisager la simulation numérique en un temps raisonnable. Nous sommes revenus en détails sur les points faibles du modèle continu en I.6, et nous avons donné quelques pistes :

- ▷ le modèle de chevalet mériterait d'être amélioré en se basant sur des mesures précises qui feraient la lumière sur la nature précise de son mouvement sous la charge des cordes. De telles mesures permettraient sûrement d'éclaircir la question de la conversion de polarisation des cordes, pour l'instant en suspens,
- ▷ le modèle de table d'harmonie serait plus réaliste s'il prenait en compte la précontrainte et le galbe qui lui sont attribués afin de résister à la tension des cordes,
- ▷ les hypothèses inhérentes au modèle de plaque utilisé pour la table d'harmonie et ses raidisseurs vont à l'encontre de la plus brutale observation, c'est pourquoi un modèle de plaque d'épaisseur variable, laminée ou encore non symétrique permettrait un meilleur réalisme,
- ▷ une campagne de mesures permettrait de déterminer à quel point les vibrations du plateau de touches et des ceintures contribuent au son du piano (surtout à l'attaque), et si il est pertinent de les prendre en compte,
- ▷ le modèle de marteau peut être amélioré en changeant la loi de comportement, ou encore en lui intégrant un manche flexible et une zone de contact variable,
- ▷ dans un souci de réalisme musical, il est indispensable d'aborder la modélisation des étouffoirs, de

12. à notre connaissance

la polyphonie et de la pédale forte.

Cependant, un compromis doit être trouvé entre l'effort fourni pour modéliser un nouveau phénomène, et le gain apporté par cette modélisation sur les effets que l'on souhaite observer. En particulier, certains objectifs pragmatiques ne doivent pas être perdus de vue, comme le fait qu'un modèle, aussi réaliste soit-il, doit pouvoir être calibré facilement, si possible avec des paramètres directement liés à la géométrie ou aux matériaux. Dans certains cas, il est pourtant indispensable de manquer à cette règle comme dans le cas des modèles d'amortissement, sans lesquels on ne peut prétendre reproduire ne serait-ce que le timbre du piano, et dont il faut pour chaque note régler les paramètres empiriquement. C'est pourquoi il semble impossible de dissocier l'activité de modélisation d'un certain nombre de mesures, qui permettent de placer le curseur entre un modèle remplissant complètement ces objectifs, et un modèle très réaliste mais extrêmement difficile à manipuler.

Du point de vue de l'analyse, les problèmes mathématiques apparaissant dans le cadre de cette modélisation sont d'une grande variété et vont du cas d'école au problème ouvert. De nombreuses idées ont été soulevées au cours de ce manuscrit afin d'améliorer la compréhension mathématique ou le réalisme de la modélisation :

- ▷ utiliser des techniques d'homogénéisation pour trouver les paramètres équivalents dans le cas des cordes filées,
- ▷ appliquer la théorie des modes normaux non linéaires à l'équation de corde,
- ▷ écrire un modèle de plaque laminée ou non équilibrée par des méthodes asymptotiques,
- ▷ aborder le couplage d'un problème de poutre avec un problème de plaque, du point de vue asymptotique...

Les schémas numériques que nous avons proposés dans ce chapitre pour traiter de la discrétisation de chaque partie du piano séparément, avant d'aborder la question des couplages, étaient tous guidés par la volonté de garantir a priori leur stabilité numérique, par une technique énergétique. Pour cette raison, et afin de s'adapter aux difficultés spécifiques de chaque problème, les choix de discrétisation sont assez variés et conduisent à un schéma général pour le piano innovant et original donné en (II.6.3). Un algorithme de résolution de ce schéma permet d'optimiser sa résolution en permettant la mise à jour séparée des inconnues sur chaque partie du piano (cordes, table et air), visant à l'efficacité du calcul qui sera ensuite mené en parallèle. Ces choix sont discutés et comparés à d'éventuelles alternatives en II.7.

L'exploitation du code de calcul pour obtenir des simulations réalistes nous fait pleinement réaliser l'ampleur du problème résolu : malgré une parallélisation intensive, il faut une journée de calcul sur 300 cœurs pour simuler les vibrations du piano pendant la seconde qui suit la frappe du marteau, c'est à dire la vibration des cordes, celle de la table d'harmonie, et la propagation dans l'air. Les possibilités offertes par notre programme de simulation sont très vastes, et seront pleinement exploitées dans le futur. Les résultats présentés ici permettent d'une part d'illustrer le bon comportement du modèle face à une sollicitation réaliste : on reconnaît par exemple dans les simulations la dominance de la vibration de corde dans le grave, la présence d'un choc du à la table d'harmonie dans l'aigu, on constate également un enrichissement spectral lorsque la vitesse du marteau augmente, il est possible de présenter des diagrammes de directivité. Le programme offre d'autre part la possibilité de mener des expériences numériques impossibles à réaliser en pratique, et qui permettent de mieux comprendre l'influence de certains phénomènes physiques sur le comportement vibratoire général de l'instrument. Nous avons illustré ici l'influence du modèle de corde sur le transitoire, afin de montrer que prendre en compte la non linéarité des cordes permet d'expliquer la présence d'un précurseur dans le son de piano, mais aussi sur le contenu spectral, dans la mesure où l'on voit l'apparition de partiels fantômes dès lors que l'on prend en compte simultanément la raideur et la non linéarité des cordes.

Bien que la génération de sons de synthèse ne soit pas notre objectif final, elle n'en reste pas moins un des nombreux produits du programme de simulation. L'écoute de ces sons est un indicatif précieux, l'oreille ayant une précision et une sensibilité que ne fournit pas toujours l'analyse des signaux. En l'état actuel, on reconnaît le timbre du piano dans les sons de synthèse, avec un réalisme meilleur dans l'aigu. La recherche empirique de certaines valeurs de paramètres (en particulier les paramètres d'amortissement) est une tâche longue, fastidieuse, mais néanmoins nécessaire dans l'objectif d'approcher toujours plus

le son du piano. En ceci, ces ajustements fins font écho à la démarche des facteurs de piano, qui ont perfectionné leur instrument depuis des décennies et continueront à le faire dans le futur, peut-être grâce à un outil numérique comme celui-ci.

ANNEXE

A

RAPPELS SUR L'ÉQUATION DES ONDES

Prélude

Nous rappelons dans cette annexe quelques résultats théoriques abstraits, concernant l'équation des ondes, utilisés dans le manuscrit. L'intégralité de ces rappels est reprise du document de cours [Joly, 2001] et les preuves complètes peuvent y être trouvées. Nous nous contentons ci après de donner des éléments de preuve lorsqu'elles figurent dans le polycopié, et des preuves plus poussées dans le cas contraire.

Sommaire

A.1	Problème général, existence de solutions fortes	264
A.2	Identité d'énergie	265
A.3	Domaine borné et décomposition modale	266

A.1

Problème général, existence de solutions fortes

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N de frontière \mathcal{C}^1 par morceaux. On cherche $u(x, t) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$(A.1.1) \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \nabla u) = f, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ & (A.1.1a) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega & (A.1.1b) \\ \partial_t u(x, 0) = u_1(x) & x \in \Omega & (A.1.1c) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 & (A.1.1d) \end{cases}$$

où les fonction ρ et μ sont des fonctions de l'espace mesurables et bornées inférieurement et supérieurement, qui représentent le milieu physique de propagation.

On pose :

$$\left| \begin{array}{l} 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+ < +\infty, \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N \\ 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ < +\infty, \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N \\ (u, v)_\alpha = \int_\Omega \alpha(x) u(x) v(x) dx \quad \Rightarrow \|u\|_\alpha = \int_\Omega \alpha(x) u(x)^2 dx, \quad \text{pour } \alpha \equiv \rho \text{ ou } \mu. \end{array} \right. \quad (A.1.2)$$

et on introduit les notations abstraites :

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{H} = L^2(\Omega), \quad V = H_0^1(\Omega), \\ (u, v)_\mathcal{H} = \int_\Omega \rho u v dx \quad (\equiv (u, v)_\rho), \quad (u, v)_V = \int_\Omega \{u v + \nabla u \cdot \nabla v\} dx, \\ a(u, v) = \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v dx \quad (\equiv (\nabla u, \nabla v)_\mu), \\ \forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \mathcal{A}u = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mu \nabla u), \text{ avec } \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \Delta_\mu u := \operatorname{div}(\mu \nabla u) \in L^2(\Omega)\}. \end{array} \right. \quad (A.1.3)$$

THÉORÈME A.1.1 (*Solution forte*)

Si $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \times H_0^1(\Omega)$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$, alors il existe une unique solution forte u au problème (A.1.1) telle que :

$$u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat découle de la reformulation de (A.1.1) au premier ordre en temps, et de l'application du théorème de Hille-Yosida au système ainsi trouvé. □

A.2

Identité d'énergie

Soit u la solution forte de (A.1.1). On appelle énergie de u à l'instant t la quantité :

$$\mathcal{E}(u, t) = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{\rho}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{\mu}^2 \quad (\text{A.2.1})$$

Il est clair que l'énergie est bien définie pour tout temps, et qu'il s'agit d'une fonction dérivable du temps.

THÉORÈME A.2.1 (*Identité de l'énergie*)

Soit u la solution forte de (A.1.1). On a :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(u, t) = \int_{\Omega} f(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx. \quad (\text{A.2.2})$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de dériver l'expression (A.2.1), d'appliquer la formule de Green et d'utiliser le fait que u est solution forte de (A.2.1). □

THÉORÈME A.2.2 (*Estimations a priori*)

Soit u la solution forte de (A.1.1). Pour tout temps $t > 0$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{\rho} \leq (2\mathcal{E}_0)^{1/2} + \int_0^t \|f(s)\|_{1/\rho} ds \\ \|\nabla u(\cdot, t)\|_{\mu} \leq (2\mathcal{E}_0)^{1/2} + \int_0^t \|f(s)\|_{1/\rho} ds \\ \|u(\cdot, t)\|_{\rho} \leq \frac{C_{\Omega} \sqrt{\rho_+}}{\sqrt{\mu_-}} \left[(2\mathcal{E}_0)^{1/2} + \int_0^t \|f(s)\|_{1/\rho} ds \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.2.3a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\nabla u(\cdot, t)\|_{\mu} \leq (2\mathcal{E}_0)^{1/2} + \int_0^t \|f(s)\|_{1/\rho} ds \\ \|u(\cdot, t)\|_{\rho} \leq \frac{C_{\Omega} \sqrt{\rho_+}}{\sqrt{\mu_-}} \left[(2\mathcal{E}_0)^{1/2} + \int_0^t \|f(s)\|_{1/\rho} ds \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.2.3b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u(\cdot, t)\|_{\rho} \leq \frac{C_{\Omega} \sqrt{\rho_+}}{\sqrt{\mu_-}} \left[(2\mathcal{E}_0)^{1/2} + \int_0^t \|f(s)\|_{1/\rho} ds \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.2.3c})$$

où $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \|u_1\|_{\rho}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_0(t)\|_{\mu}^2$, et C_{Ω} est la constante de Poincaré.

DÉMONSTRATION. Les deux premiers résultats découlent de l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (A.2.2), puis de la constatation, à partir de la définition de l'énergie, que

$$\left. \begin{array}{l} \|\partial_t u(\cdot, t)\|_{\rho} \\ \|\nabla u(\cdot, t)\|_{\mu} \end{array} \right\} \leq \sqrt{2} \sqrt{E(u, t)}$$

Le troisième résultat est obtenu grâce à l'inégalité de Poincaré étant donné que $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{\rho}^2 &\leq C_{\Omega}^2 \|\nabla u(\cdot, t)\|_{\rho}^2 \quad \text{en appliquant Poincaré} \\ &\leq \frac{C_{\Omega}^2 \rho_+}{\mu_-} \|\nabla u(\cdot, t)\|_{\mu}^2 \quad \text{par définition de la norme à poids et grâce aux encadrements de } \rho \text{ et } \mu \end{aligned}$$

et l'on conclut grâce à (A.2.3b). □

A.3

Domaine borné et décomposition modale

Supposons à présent que l'ouvert Ω est borné.

THÉORÈME A.3.1 (*Diagonalisation de l'opérateur \mathcal{A}*)

Il existe une suite $(e_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ et une suite croissante de réels positifs $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ qui tend vers l'infini, telles que :

- la famille $\{e_n, n \geq 1\}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ qui est également complète pour $V = H_0^1(\Omega)$. On a en particulier,

$$(e_n, e_m)_{\mathcal{H}} = \delta_{m,n}, \quad \forall m, n \geq 1.$$

- la famille $\{e_n, n \geq 1\}$ diagonalise l'opérateur \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}e_n = \lambda_n e_n \Leftrightarrow a(e_n, v) = \lambda_n (e_n, v)_{\mathcal{H}}, \quad \forall v \in V$$

DÉMONSTRATION. On applique la théorie spectrale à l'opérateur \mathcal{A} qui est auto-adjoint à résolvante compacte (puisque l'injection canonique de V dans \mathcal{H} est compacte). La positivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ donne de plus la positivité des valeurs propres. □

THÉORÈME A.3.2 (*Décomposition modale*)

La solution forte u du problème (A.1.1) s'écrit, pour tout $t > 0$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) e_n(x) \tag{A.3.1}$$

avec

$$u_n(t) = (u_0, e_n)_{\mathcal{H}} \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + (u_1, e_n)_{\mathcal{H}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}} + \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(t-s))}{\sqrt{\lambda_n}} (f(\cdot, s), e_n)_{\mathcal{H}} ds \tag{A.3.2}$$

DÉMONSTRATION. La famille $\{e_n, n \geq 1\}$ étant une base hilbertienne de $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, on peut effectuer la décomposition (A.3.1) pour tout $t > 0$. En injectant cette décomposition dans (A.1.1), et en prenant le produit scalaire avec e_n , on obtient pour tout $n \geq 1$ une équation différentielle ordinaire non homogène et à données initiales. Sa résolution donne la formule (A.3.2). □

REMARQUE A.3.1 (*Propriétés utiles*)

$$(\nabla e_n, \nabla e_k)_{\mu} = a(e_n, e_k) = \lambda_n (e_n, e_k)_{\mathcal{H}} = \lambda_n \delta_{n,k} \tag{A.3.3}$$

$$\|\nabla u(\cdot, t)\|_{\mu}^2 = \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \nabla e_n \right\|_{\mu}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n(t)^2 \tag{A.3.4}$$

Pour l'instant, la décomposition modale n'a lieu que pour tout temps $t > 0$. Nous allons à présent nous attacher à démontrer, lorsque la source f est à support compact en temps, que la somme partielle vue comme une fonction du temps à valeurs dans $L^2(\Omega)$ converge vers u dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^+; L^2)$.

THÉORÈME A.3.3 (Convergence de la décomposition modale dans les distributions tempérées)

Soit $T_f \geq 0$ le maximum du support de f . Alors, la solution forte $u(\cdot, t)$ ainsi que les sommes partielles $\bar{u}_N(\cdot, t)$ sont des éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^+; L^2)$. De plus,

$$\bar{u}_N(\cdot, t) := \sum_{n=1}^N u_n(t)e_n \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^+; L^2)} u(\cdot, t). \quad (\text{A.3.5})$$

DÉMONSTRATION.

◇ Montrons tout d'abord que la solution forte $u(\cdot, t)$ ainsi que les sommes partielles $\bar{u}_N(\cdot, t)$ sont des éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^+; L^2)$. La majoration (A.2.3c) permet d'écrire, puisque f est désormais à support compact, pour tout $t > 0$,

$$\bar{u}(t) := \|u(\cdot, t)\|_\rho \leq \frac{C_\Omega \sqrt{\rho^+}}{\sqrt{\mu^-}} \left[(2\mathcal{E}_0)^{1/2} + \int_0^{T_f} \|f(s)\|_{1/\rho} ds \right] =: C_\rho \quad (\text{A.3.6})$$

De même, l'expression explicite (A.3.2) permet d'écrire pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} \bar{u}_N(t)^2 &:= \|\bar{u}_N(\cdot, t)\|_\rho^2 = \left\| \sum_{n=1}^N u_n(t)e_n \right\|_\rho^2 = \sum_{n=1}^N |u_n(t)|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^N \left[|(u_0, e_n)_\mathcal{H}| + |(u_1, e_n)_\mathcal{H}| + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{T_f} |(f(\cdot, s), e_n)_\mathcal{H}| ds \right]^2 =: C_{\rho, N}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.3.7})$$

Ainsi, $\bar{u}(t)$ et tous les $\bar{u}_N(t)$ sont des fonctions bornées du temps, ce qui en font des distributions tempérées.

◇ Montrons à présent que pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, $\mathcal{I}_N(\phi) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, où

$$\mathcal{I}_N(\phi) = \left\| \left\langle \sum_{n=1}^N u_n(t)e_n, \phi(t) \right\rangle_{\mathcal{S}'} - \langle u(\cdot, t), \phi(t) \rangle_{\mathcal{S}'} \right\|_\rho$$

Commençons par remarquer que, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N u_n(t)e_n - u(\cdot, t) \right\|_\rho^2 &= \left\| \sum_{n>N} u_n(t)e_n \right\|_\rho^2 \\ &= \sum_{n>N} |u_n(t)|^2 && \text{par orthogonalité des modes dans } L^2 \text{ muni de } \|\cdot\|_\rho \\ &= \sum_{n>N} \frac{\lambda_n}{\lambda_N} |u_n(t)|^2 && \text{or les } \lambda_n \text{ sont classés par ordre croissant} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_N} \sum_{n>N} \lambda_n |u_n(t)|^2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda_N} \sum_{n \geq 1} \lambda_n |u_n(t)|^2 && \text{or, comme l'indique (A.3.4), } \sum_{n \geq 1} \lambda_n |u_n(t)|^2 = \|\nabla u(\cdot, t)\|_\mu^2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda_N} \|\nabla u(\cdot, t)\|_\mu^2 && \text{or on a la majoration (A.2.3b)} \\ &\leq \frac{(C_\mu)^2}{\lambda_N} && \text{où } C_\mu = (2\mathcal{E}_0)^{1/2} + \int_0^{T_f} \|f(s)\|_{1/\rho} ds \end{aligned}$$

L'objet

$$\left[\sum_{n=1}^N u_n(t)e_n - u(\cdot, t) \right] \phi(t)$$

est donc un produit entre une fonction continue bornée en temps en norme L^2 et une fonction intégrable en temps (puisque ϕ étant dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, elle est intégrable). On peut donc écrire :

$$\mathcal{I}_N(\phi) = \left\| \int_0^{+\infty} \left[\sum_{n=1}^N u_n(t)e_n - u(\cdot, t) \right] \phi(t) dt \right\|_\rho \leq \int_0^{+\infty} \left\| \sum_{n=1}^N u_n(t)e_n - u(\cdot, t) \right\|_\rho |\phi(t)| dt \leq \frac{C_\mu}{\sqrt{\lambda_N}} \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}$$

Comme la suite des λ_N tend vers l'infini avec N , on obtient :

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+), \mathcal{I}_N(\phi) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

ce qui montre la convergence de la somme partielle vers la solution forte dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$.

□

ANNEXE

B

EXISTENCE DE SOLUTION FORTE AU SYSTÈME DE TIMOSHENKO

Nous nous intéressons dans cette annexe à la démonstration par le théorème de Hille Yosida de l'existence et unicité d'une solution forte au système linéaire de Timoshenko précontraint donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (AG\kappa + T_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + AG\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} = S(x, t) \\ \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - AG\kappa \frac{\partial u}{\partial x} + AG\kappa \varphi = 0 \end{array} \right. \quad x \in [0, L], \quad t > 0 \quad (\text{B.1a}) \\ u(0) = u(L) = 0, \quad \partial_x \varphi(0) = \partial_x \varphi(L) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.1b})$$

Les conditions initiales sont supposées nulles. Posons

$$U = {}^t(u, \varphi), \quad \bar{U} = {}^t(\bar{u}, \bar{\varphi}) \quad (\text{B.2})$$

et l'espace

$$\mathcal{U}_0 = \{U \in H_0^1([0, L]) \times H^1([0, L])\} \quad (\text{B.3})$$

THÉORÈME B.0.4

La forme bilinéaire symétrique définie pour tous $(U, \bar{U}) \in \mathcal{U}_0^2$ par

$$\langle U, \bar{U} \rangle_{\mathcal{U}_0} = \int_0^L T_0 \partial_x u \partial_x \bar{u} + \int_0^L EI \partial_x \varphi \partial_x \bar{\varphi} + \int_0^L AG\kappa (\varphi - \partial_x u) (\bar{\varphi} - \partial_x \bar{u}) \quad (\text{B.4})$$

est un produit scalaire sur \mathcal{U}_0 qui induit une norme équivalente à la norme usuelle, ce qui fait de \mathcal{U}_0 muni de cette norme un espace de Hilbert.

DÉMONSTRATION. La symétrie et la bilinéarité sont triviales. La positivité est acquise facilement car

$$\langle U, U \rangle_{\mathcal{U}_0} = \int_0^L T_0 \partial_x u \partial_x u + \int_0^L EI \partial_x \varphi \partial_x \varphi + \int_0^L AG\kappa (\varphi - \partial_x u) (\varphi - \partial_x u) \quad (\text{B.5})$$

$$= \int_0^L T_0 (\partial_x u)^2 + \int_0^L EI (\partial_x \varphi)^2 + \int_0^L AG\kappa (\varphi - \partial_x u)^2 \geq 0 \quad (\text{B.6})$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\langle U, U \rangle_{\mathcal{U}_0} = 0 &\Rightarrow \int_0^L T_0 (\partial_x u)^2 + \int_0^L EI (\partial_x \varphi)^2 + \int_0^L AG\kappa (\varphi - \partial_x u)^2 = 0 \\
&\Rightarrow T_0 \int_0^L (\partial_x u)^2 = 0 \text{ et } EI \int_0^L (\partial_x \varphi)^2 = 0 \text{ et } AG\kappa \int_0^L (\varphi - \partial_x u)^2 = 0 \\
&\Rightarrow |u|_{H^1} = 0 \text{ et } |\varphi|_{H^1} = 0 \text{ et } \|\varphi - \partial_x u\|_{L^2} = 0 \\
&\Rightarrow u = 0 \text{ car } u \in H_0^1, \text{ et } \varphi = \partial_x u = 0
\end{aligned}$$

ce qui montre le caractère défini.

L'équivalence à la norme usuelle se montre en deux temps. Soit

$$\|U\|^2 = \|u\|_{H^1}^2 + \|\varphi\|_{H^1}^2 \text{ et } \|U\|_{\mathcal{U}_0}^2 = \langle U, U \rangle_{\mathcal{U}_0} \quad (\text{B.7})$$

On a d'une part, grâce à l'inégalité de Cauchy Schwarz appliquée au développement du troisième terme,

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{U}_0}^2 &= T_0 \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + EI \|\partial_x \varphi\|_{L^2}^2 + AG\kappa \|\varphi - \partial_x u\|_{L^2}^2 \\
&\leq T_0 \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + EI \|\partial_x \varphi\|_{L^2}^2 + 2AG\kappa \|\varphi\|_{L^2}^2 + 2AG\kappa \|\partial_x u\|_{L^2}^2 \\
&\leq (T_0 + 2AG\kappa) \underbrace{\|\partial_x u\|_{L^2}^2}_{\leq \|u\|_{H^1}^2} + \max(EI, 2AG\kappa) \|\varphi\|_{H^1}^2 \\
&\leq \underbrace{\max(T_0 + 2AG\kappa, \max(EI, 2AG\kappa))}_{C_1} \|U\|^2
\end{aligned}$$

et d'autre part, en minorant le terme croisé $AG\kappa(\varphi, \partial_x u)_{L^2}$ par des termes carrés pondérés par un réel $\alpha > 0$ que l'on choisira ultérieurement,

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{U}_0}^2 &= T_0 \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + EI \|\partial_x \varphi\|_{L^2}^2 + AG\kappa \|\varphi - \partial_x u\|_{L^2}^2 \\
&= T_0 \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + EI \|\partial_x \varphi\|_{L^2}^2 + AG\kappa \|\varphi\|_{L^2}^2 - 2AG\kappa (\varphi, \partial_x u)_{L^2} + AG\kappa \|\partial_x u\|_{L^2}^2 \\
&\geq (T_0 + AG\kappa) \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + EI \|\partial_x \varphi\|_{L^2}^2 + AG\kappa \|\varphi\|_{L^2}^2 - AG\kappa \alpha \|\varphi\|_{L^2}^2 - \frac{AG\kappa}{\alpha} \|\partial_x u\|_{L^2}^2 \\
&\geq (T_0 + AG\kappa - \frac{AG\kappa}{\alpha}) \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + EI \|\partial_x \varphi\|_{L^2}^2 + (1 - \alpha) AG\kappa \|\varphi\|_{L^2}^2 \\
&\geq (T_0 + AG\kappa(1 - \frac{1}{\alpha})) (1 + C_P) \|u\|_{H^1}^2 + \min(EI, (1 - \alpha) AG\kappa) \|\varphi\|_{H^1}^2 \\
&\geq \underbrace{\min\left((T_0 + AG\kappa(1 - \frac{1}{\alpha})) (1 + C_P), \min(EI, (1 - \alpha) AG\kappa)\right)}_{C_2} \|U\|^2
\end{aligned}$$

En choisissant alors α afin que les deux contributions soient positives, c'est à dire en respectant

$$T_0 + AG\kappa(1 - \frac{1}{\alpha}) > 0 \text{ et } 1 - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in]\frac{AG\kappa}{T_0 + AG\kappa}, 1[\neq \emptyset \quad (\text{B.8})$$

on arrive à montrer que C_2 comme C_1 sont strictement positives, ce qui conduit à l'équivalence des deux normes. \square

Introduisons à présent la notation associée à l'opérateur en espace du système de Timoshenko (B.1a) :

$$\mathcal{T}(U) = \mathcal{T}(u, \varphi) = \begin{pmatrix} T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - AG\kappa \frac{\partial}{\partial x} (\varphi - \frac{\partial u}{\partial x}) \\ EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - AG\kappa (\varphi - \frac{\partial u}{\partial x}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

et l'espace fonctionnel découlant naturellement :

$$D(\mathcal{T}) = \left\{ U \in \mathcal{U}_0, \text{ tels que } \mathcal{T}(U) \in (L^2([0, L]))^2 \right\} \quad (\text{B.10})$$

Nous allons maintenant interpréter le système de Timoshenko précontraint comme une équation différentielle ordinaire d'ordre un, dont la solution est une fonction du temps à valeurs dans un espace de Hilbert bien choisi, afin de rentrer dans le cadre du théorème de Hille Yosida. Introduisons pour cela l'espace

$$W_0 = \left\{ W = {}^t(U, V), \text{ tels que } U \in \mathcal{U}_0, V \in (L^2([0, L]))^2 \right\}, \quad D(A) = D(\mathcal{T}) \times \mathcal{U}_0 \quad (\text{B.11})$$

que l'on munit du produit scalaire naturel

$$\langle W, \bar{W} \rangle_{W_0} = \langle U, \bar{U} \rangle_{\mathcal{U}_0} + \langle V, \bar{V} \rangle_{L^2} \quad (\text{B.12})$$

et l'opérateur non borné :

$$\begin{cases} A : D(A) \subset \mathcal{W}_0 \mapsto \mathcal{W}_0 \\ W \rightarrow AW = \begin{pmatrix} -V \\ -\mathcal{T}(U) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

On pose alors

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S \end{pmatrix} \text{ et } \gamma = \begin{pmatrix} \rho A \\ \rho I \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Alors le problème de trouver $U \in \mathcal{U}_0$ remplissant le système (B.1a) muni de ses conditions aux limites (B.1b) est équivalent au problème d'ordre un suivant :

$$\text{Trouver } W \in D(A) \text{ tel que } \begin{cases} \gamma \cdot \frac{dW}{dt} + AW = F \\ \partial_x \varphi(0) = \partial_x \varphi(L) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

THÉORÈME B.0.5

L'opérateur $A + \lambda I$ est maximal monotone pour tout λ positif.

DÉMONSTRATION. La positivité consiste à montrer que $\forall W \in D(A)$, $\langle AW, W \rangle_{\mathcal{W}_0} \geq 0$, ce qui s'écrit :

$$\langle AW, W \rangle_{\mathcal{W}_0} = \langle -V, U \rangle_{\mathcal{U}_0} + \langle -\mathcal{T}(U), V \rangle_{L^2} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^L T_0 \partial_x v \partial_x u - \int_0^L EI \partial_x \psi \partial_x \varphi - \int_0^L AG\kappa(\psi - \partial_x v)(\varphi - \partial_x u) \\ &\quad - \int_0^L \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - AG\kappa \frac{\partial}{\partial x} (\varphi - \frac{\partial u}{\partial x}) \right] v - \int_0^L \left[EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - AG\kappa (\varphi - \frac{\partial u}{\partial x}) \right] \psi \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

où l'on a posé $V = {}^t(v, \psi)$. Des intégrations par partie et l'utilisation des conditions aux limites permet de conclure que

$$\langle AW, W \rangle_{\mathcal{W}_0} = 0 \Rightarrow \langle (A + \lambda I)W, W \rangle_{\mathcal{W}_0} = \lambda \|W\|_{\mathcal{W}_0}^2 \quad (\text{B.18})$$

qui est bien positif pour tout λ positif.

La surjectivité de $(A + \lambda I) + I$ consiste à montrer que pour tout $F = {}^t(g, h) \in \mathcal{W}_0$, il existe $W \in D(A)$ tel que

$$\begin{cases} AW + (\lambda + 1)W = F \\ \partial_x \varphi(0) = \partial_x \varphi(L) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

ce qui est équivalent au système

$$\begin{cases} -V + (\lambda + 1)U = g, & \text{avec } g \in \mathcal{U}_0 \\ -\mathcal{T}(U) + (\lambda + 1)V = h, & \text{avec } h \in (L^2([0, L]))^2 \end{cases} \quad (\text{B.20a})$$

On peut facilement éliminer V dans ce système et se ramener à l'équation

$$-\mathcal{T}(U) + (\lambda + 1)^2 U^2 = h + (\lambda + 1)g \quad (\text{B.21})$$

dont la formulation variationnelle est

$$\langle U, V \rangle_{\mathcal{U}_0} + (\lambda + 1)^2 \langle U, V \rangle_{L^2} = \langle h + (\lambda + 1)g, V \rangle_{L^2}, \quad \forall V \in \mathcal{U}_0 \quad (\text{B.22})$$

Or le théorème B.0.4 montre que ce problème vérifie les hypothèses du théorème de Lax Milgram, et admet donc une unique solution $U \in \mathcal{U}_0$. De plus l'équation (B.20b) montre que $\mathcal{T}(U) \in (L^2([0, L]))^2$ et donc que $U \in D(\mathcal{T})$. Concernant V , l'équation (B.20a) le définit de manière unique et montre qu'il appartient à \mathcal{U}_0 . Ainsi l'élément associé W appartient à $D(A)$, ce qui achève la preuve. □

THÉORÈME B.0.6 (Hille Yosida)

Si $S \in \mathcal{C}^1(0, T; L^2([0, L]))$, alors le problème (B.1) admet une unique solution forte

$$(u^*, \varphi^*) \in \mathcal{C}^2(0, T; (L^2([0, L]))^2) \cap \mathcal{C}^1(0, T; \mathcal{U}_0) \cap \mathcal{C}^0(0, T; D(\mathcal{T})) \quad (\text{B.23})$$

ANNEXE

C

DÉRIVATION PHYSIQUE DU MODÈLE GÉOMÉTRIQUEMENT EXACT

Nous considérons les mouvements dans un plan d'une corde droite, soumise aux forces de tension issues de son allongement. La corde est fixée à ses deux extrémités, où son déplacement est donc nul.

Dans ce qui suit :

- $x \in \Omega$ désigne l'abscisse curviligne le long de la corde, Ω est un segment de \mathbb{R} ou \mathbb{R} tout entier (corde infinie),
- $t > 0$ désigne le temps,
- $u(x, t)$ désigne la composante transverse du déplacement de la corde (selon \mathbf{e}_y),
- $v(x, t)$ désigne la composante longitudinale du déplacement de la corde (selon \mathbf{e}_x),
- E est le module d'Young de la corde,
- A est l'aire de la section droite,
- μ est la masse linéique de la corde,
- T_0 est la tension à laquelle est soumise la corde au repos.

On suppose que E , A , μ et T_0 sont indépendantes de x , bien qu'on pourrait imaginer une dépendance de telle nature dans un modèle plus complexe.

Le vecteur qui donne la position du point d'abscisse x vaut :

$$\mathbf{R}(x, t) = (v(x, t) + x)\mathbf{e}_x + u(x, t)\mathbf{e}_y = x\mathbf{e}_x + \mathbf{U}(x, t)$$

en ayant posé $\mathbf{U}(x, t)$ le vecteur $(u(x, t), v(x, t))$.

On définit $\mathbf{s}(x, t)$ comme le vecteur unitaire tangent à la corde au point x :

$$\mathbf{s}(x, t) = \frac{\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}}{\left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \right|} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} + 1 \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y}{\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x} + 1 \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}}$$

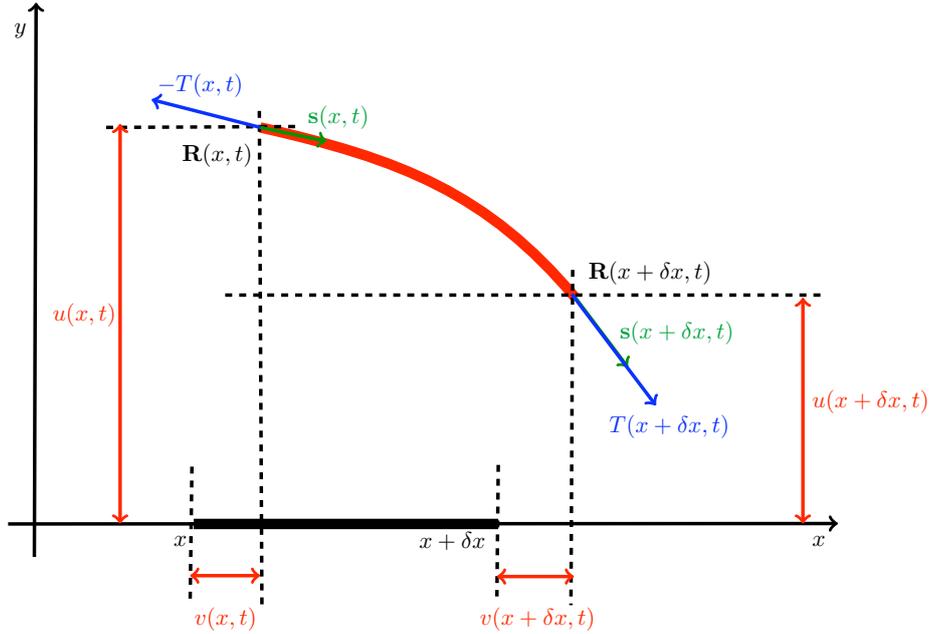


FIGURE C.1 – Schéma d'une corde, vibration transversale et longitudinale

La seconde loi de Newton appliquée au segment infinitésimal de corde $[x, x + \delta x]$ peut s'écrire :

$$\frac{1}{\delta x} \mu \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_x^{x+\delta x} \mathbf{R}(y, t) dy \right) = \frac{1}{\delta x} [T(x + \delta x, t) \mathbf{s}(x + \delta x, t) - T(x, t) \mathbf{s}(x, t)]$$

soit, en passant à la limite, puis, en développant l'expression de \mathbf{R} ,

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [T \mathbf{s}] \quad (\text{C.1})$$

Une loi de comportement nous donne l'expression de la tension T , qui varie tout au long de la corde en fonction de l'allongement relatif $\delta a(x, t)$. La longueur de l'élément passe de δx à $|\mathbf{R}(x + \delta x, t) - \mathbf{R}(x, t)|$, d'où l'allongement relatif, après développement de Taylor, en négligeant $\mathcal{O}(\delta x^2)$:

$$\delta a(x, t) = \frac{|\mathbf{R}(x + \delta x, t) - \mathbf{R}(x, t)|}{\delta x} - \frac{\delta x}{\delta x} \simeq \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \right| - 1 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} = \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}$$

Dans le cas général, la loi comportement s'écrit :

$$T(x, t) = \phi(\delta a(x, t)) = \phi\left(\left|\mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, t)\right| - 1\right) \quad (\text{C.2})$$

$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ étant une fonction plus ou moins sympathique, à priori croissante, positive pour $x > 0$ et s'annulant en 0. Le système s'écrit alors :

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\phi\left(\left|\mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, t)\right| - 1\right) \frac{\mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}}{\left|\mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right|} \right] = 0$$

soit, en notant $d : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ les fonctions suivantes,

$$d(\mathbf{v}) = \left|\mathbf{e}_x + \mathbf{v}\right| - 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \phi \circ d(\mathbf{v}) \frac{\mathbf{e}_x + \mathbf{v}}{\left|\mathbf{e}_x + \mathbf{v}\right|}$$

$$\boxed{\mu \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right) = 0} \quad (\text{C.3})$$

Cette structure de système est connue sous le nom de structure hamiltonienne si cette fonction $\mathbf{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est le gradient d'une autre fonction, dénommée alors hamiltonien du système. Soit $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors on peut montrer que

$$\nabla_{\mathbf{U}} \left[\Phi \circ d \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) \right] = \mathbf{F} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) \quad (\text{C.4})$$

En effet,

$$\nabla_{\mathbf{U}} \left[\Phi \circ d \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) \right] = \nabla_{\mathbf{U}} \left[d \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) \right] \Phi' \circ d \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)$$

Or, on peut écrire que

$$d \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) = \left| \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, t) \right| - 1 = \sqrt{\left| \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, t) \right|^2} - 1 = \sqrt{1 + 2\mathbf{e}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)^2} - 1$$

D'où son gradient :

$$\nabla_{\mathbf{U}} \left[d \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) \right] = \frac{\mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, t)}{\left| \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, t) \right|}$$

On en conclut que si $\Phi' = \phi$, la formule (C.4) est correcte. Quelle que soit la loi de comportement du matériau dépendant de l'allongement relatif, on a donc montré que le système mécanique obtenu était toujours hamiltonien.

Dans le cas où la loi de comportement Φ est affine, la loi de comportement est la loi de Hooke, qui s'écrit :

$$\phi(\tau) = T_0 + EA \tau \quad \text{soit} \quad T(x, t) = T_0 + EA \left(\left| \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, t) \right| - 1 \right) \quad (\text{C.5})$$

Ainsi en posant $\Phi(\tau) = T_0 \tau + EA \frac{\tau^2}{2}$, le système s'écrit sous sa forme hamiltonienne :

$$\boxed{\mu \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \nabla_{\mathbf{U}} \left[\Phi \circ d \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) \right] = 0}$$

En utilisant alors les expressions des fonctions, on a :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0 \frac{\mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, t)}{\left| \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, t) \right|} + EA \left(\left| \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, t) \right| - 1 \right) \frac{\mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, t)}{\left| \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, t) \right|} \right) &= 0 \\ \mu \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \left(\mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, t) \right) + (T_0 - EA) \frac{\mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, t)}{\left| \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(x, t) \right|} \right) &= 0 \end{aligned}$$

En projetant sur les deux axes et en développant remarquant que \mathbf{e}_x ne dépend pas de x , on obtient le système :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial u}{\partial x} - (EA - T_0) \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}} \right], & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial v}{\partial x} - (EA - T_0) \frac{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}} \right], & x \in \Omega, \quad t > 0, \end{cases}$$

Enfin, il convient de rajouter les données initiales (en $t = 0$) pour u et v mais aussi pour $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$; ainsi que des conditions aux limites sur le bord de la corde. Si la corde est un segment $\Omega = [0, L]$ alors on impose dans un premier temps que la corde soit fixée à ses extrémités, autrement dit, $u(x = 0, t) = u(x = L, t) = 0$ et $v(x = 0, t) = v(x = L, t) = 0$.

ANNEXE

D

SYSTÈMES HYPERBOLIQUES ET THÉORÈME DE LI TA TSIEN

Les définitions et les principaux résultats mathématiques concernant les systèmes hyperboliques de lois de conservation se trouvent dans [Godlewski et Raviart, 1991]. Nous en rappelons ici quelques définitions. Ensuite, nous rappelons le résultat d'existence global de [Ta-Tsien, 1994].

D.1

Systèmes hyperboliques

DÉFINITION D.1.1 (SYSTÈME HYPERBOLIQUE)

Considérons le système d'équations

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0 \quad (\text{D.1})$$

où $\mathbf{F} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{D}$.

On définit

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial u_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

la matrice Jacobienne de \mathbf{F} . Le système (D.1) est dit hyperbolique si, pour tout $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$, la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ possède n valeurs propres réelles $\mu_1(\mathbf{u}) \leq \dots \leq \mu_k(\mathbf{u}) \leq \dots \leq \mu_n(\mathbf{u})$ et n vecteurs propres associés linéairement indépendants $\mathbf{r}_1(\mathbf{u}), \dots, \mathbf{r}_k(\mathbf{u}), \dots, \mathbf{r}_n(\mathbf{u})$, i.e.

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) \mathbf{r}_k(\mathbf{u}) = \mu_k(\mathbf{u}) \mathbf{r}_k(\mathbf{u}).$$

Si, de plus, les valeurs propres $\mu_k(\mathbf{u})$ sont distinctes, le système (D.1) est dit strictement hyperbolique.

Le système est dit localement (strictement) hyperbolique si les propriétés nécessaires sont vraies non pas pour $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ mais pour \mathbf{u} appartenant à un voisinage d'un certain point \mathbf{u}_0 .

DÉFINITION D.1.2 (CHAMP VRAIMENT NON LINÉAIRE)

Le couple $(\mu_k(\mathbf{u}), \mathbf{r}_k(\mathbf{u}))$ est dit vraiment non linéaire ou V.N.L. si

$$\nabla \mu_k(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{u}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{D}$$

DÉFINITION D.1.3 (CHAMP LINÉAIREMENT DÉGÉNÉRÉ)

Le couple $(\mu_k(\mathbf{u}), \mathbf{r}_k(\mathbf{u}))$ est dit linéairement dégénéré ou L.D. si

$$\nabla \mu_k(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}_k(\mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{D}$$

D.2**Théorème de Li Ta-Tsien**

La théorie des systèmes hyperboliques montre qu'en général, même si les conditions initiales sont très régulières, la régularité de la solution peut être perdue après un certain intervalle de temps, en raison de la création de chocs. Cependant, le résultat énoncé page 89 de [Ta-Tsien, 1994] garantit l'existence de solutions au sens classique sous certaines restrictions sur le système.

Dans [Ta-Tsien, 1994], on considère le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x) \end{array} \right. \quad (\text{D.1})$$

où l'on suppose que $A(\mathbf{U})$ est une matrice $n \times n$, et que dans un voisinage de $\mathbf{U} = 0$, le système (D.1) est strictement hyperbolique :

$$\lambda_1(0) < \lambda_2(0) < \dots < \lambda_n(0).$$

De plus, on suppose que \mathbf{U}_0 est une fonction \mathcal{C}^1 de x à support compact :

$$\text{Supp}(\mathbf{U}_0) \subseteq [\alpha_0, \beta_0]$$

THÉORÈME D.2.1 (Li Ta-tsien)

Supposons que $A(\mathbf{U})$ est \mathcal{C}^2 dans un voisinage de $\mathbf{U} = 0$. Supposons de plus que le système (D.1) est linéairement dégénéré (au sens de la définition (D.1.3)). Alors, en posant

$$\theta = (\beta_0 - \alpha_0) \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathbf{U}'_0(x)|,$$

il existe $\theta_0 > 0$ tel que pour tout $\theta \in [0, \theta_0]$, le problème de Cauchy (D.1) admet une unique solution globale $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

REMARQUE D.2.1

Ce résultat est montré dans le livre pour des systèmes possédant la propriété d'être "faiblement linéairement dégénéré", qui est immédiate si le système est linéairement dégénéré au sens de Lax. Nous avons énoncé le théorème ici sous cette forme car elle suffit à montrer l'existence globale pour le modèle géométriquement exact. Le corollaire (4.1) du livre [Ta-Tsien, 1994], page 90, fait référence à cette simplification. Cependant, la propriété d'être "faiblement linéairement dégénéré" est mieux adaptée au problème, puisque il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante. Dans le cas où elle n'est pas respectée, la solution "explose" pour toute taille de données initiales. Il est intéressant de remarquer qu'un système V.N.L. ne respecte pas cette condition, et donc exhibe forcément une explosion en temps fini.

ANNEXE

E

MODÈLES DE PLAQUES

Nous allons construire deux modèles de plaque en partant de l'élastodynamique linéaire 3D et en faisant des hypothèses sur la forme du champ de déplacements, de plus en plus restrictives afin de limiter le nombre d'inconnues considérées, et surtout leur domaine de définition. En effet, dans le modèle 3D, le déplacement recherché est une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 . Pour un modèle de plaque, on cherche à se ramener à un certain nombre de fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , ce qui, numériquement, sera moins coûteux, même si le nombre de fonctions recherchées a augmenté. L'épaisseur de la plaque est la quantité supposée petite devant les deux autres dimensions, on l'appelle δ dans toute la suite. Enfin, on appelle "plan neutre" un plan matériel de référence.

E.1

Modèle élastodynamique linéaire 3D

Soit Ω une plaque d'épaisseur δ de plan neutre ω situé au repos dans le plan $z = 0$ du repère cartésien $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On note, au repos, $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, la position d'un point quelconque de la plaque. Les vecteurs déplacement sont définis comme :

$$\begin{cases} \vec{M_0M_0^t} = u_x^0(x, y)\vec{e}_x + u_y^0(x, y)\vec{e}_y + U(x, y)\vec{e}_z & \text{pour un point du plan neutre,} \\ \vec{MM^t} = u_x(x, y, z)\vec{e}_x + u_y(x, y, z)\vec{e}_y + u_z(x, y, z)\vec{e}_z & \text{pour un point quelconque de la plaque} \end{cases}$$

Les équations du mouvement de la plaque vont à présent être obtenues en écrivant la Loi Fondamentale de la Dynamique (LFD) qui relie les déplacements au tenseur des contraintes σ :

$$\text{On cherche } \mathbf{u} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ telle que } \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \text{div}(\sigma(\mathbf{u})). \quad (\text{E.1.1})$$

Cette relation peut être écrite sous forme variationnelle, avec $\mathcal{V}^{3D} = (H^1(\Omega))^3$, F les forces volumiques, g les forces surfaciques :

$$\begin{aligned} &\text{On cherche } \mathbf{u} \in \mathcal{V}^{3D} \text{ telle que, pour tous } \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}^{3D}, \\ &\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}^*) d\Omega = \int_{\Omega} F \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} g \cdot \mathbf{u}^* d\omega, \end{aligned} \quad (\text{E.1.2})$$

où l'on exprime le tenseur des déformations linéarisé en fonction des déplacements de la plaque :

$$\varepsilon_{i,j}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right], \quad \forall \{i,j\} \in \{x,y,z\} \quad (\text{E.1.3})$$

Le tenseur des contraintes σ peut être exprimé en fonction du tenseur des déformations linéarisé ε grâce à la relation dite "loi de Hooke" : $\sigma(\mathbf{u}) = \underline{\underline{C}}\varepsilon(\mathbf{u})$; où $\underline{\underline{C}}$ est appelé tenseur de rigidité. Dans le cas orthotrope, c'est la relation ε en fonction de σ que l'on peut écrire facilement en toute généralité sous forme de tenseur de souplesse grâce aux modules de Young E_x, E_y et E_z , aux modules de cisaillement G_{ij} et aux coefficients de Poisson ν_{ij} . Une formulation matricielle est possible :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{yz}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{E.1.4})$$

Pour résoudre le problème 3D, il convient d'inverser cette relation, suite à quoi on utilise (E.1.3) pour obtenir un système portant uniquement sur \mathbf{u} . Les formules pour l'inverse sont moins agréables :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\nu_{yz}\nu_{zy}}{E_y E_z \Delta} & \frac{\nu_{yx} + \nu_{zx}\nu_{yz}}{E_y E_z \Delta} & \frac{\nu_{zx} + \nu_{yx}\nu_{zy}}{E_y E_z \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy}}{E_z E_x \Delta} & \frac{1 - \nu_{zx}\nu_{xz}}{E_z E_x \Delta} & \frac{\nu_{zy} + \nu_{zx}\nu_{xy}}{E_z E_x \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{xz} + \nu_{xy}\nu_{yz}}{E_x E_y \Delta} & \frac{\nu_{yz} + \nu_{xz}\nu_{yx}}{E_x E_y \Delta} & \frac{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}{E_x E_y \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{yz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{E.1.5})$$

$$\text{avec } \Delta = \frac{1 - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{zx}\nu_{xz} - \nu_{yz}\nu_{zy} - 2\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx}}{E_x E_y E_z}.$$

E.2

Modèle de Reissner Mindlin

La simplification du problème 3D en un problème de plaque 2D est basée sur la formulation d'hypothèses sur les déplacements considérés. Le modèle de Reissner Mindlin consiste à restreindre la formulation variationnelle 3D à un sous espace de déplacements admissibles \mathcal{V}^{RM} que nous précisons plus tard : on cherche $\mathbf{u} \in \mathcal{V}^{RM}$ telle que, pour tous $\mathbf{u}^* \in \mathcal{V}^{RM}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{acc}(\mathbf{u}^*) = P_{int}(\mathbf{u}^*) + P_{ext}(\mathbf{u}^*) \end{array} \right. \quad (\text{E.2.1a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} P_{acc}(\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \mathbf{u}^* d\Omega \\ P_{int}(\mathbf{u}^*) = - \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) \varepsilon(\mathbf{u}^*) d\Omega \\ P_{ext}(\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} F \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} g \mathbf{u}^* d\omega \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{E.2.1b})$$

L'espace des déplacements admissibles est défini par des hypothèses cinématiques et physiques :

HYPOTHÈSE 1 : Des points alignés perpendiculairement au plan neutre au repos restent alignés lors de la déformation.

HYPOTHÈSE 2 : Il n'y a pas de déformation transversale, i.e. $\varepsilon_{zz} = 0$,

HYPOTHÈSE 3 : La contrainte transversale est négligeable : $\sigma_{zz} \approx 0$.

E.2.1 Détermination d'une écriture simplifiée des déplacements.

À chaque point $M_0(x, y)$ du plan neutre, on associe $\mathcal{S}(x, y) = \{M(x, y, z), z \in [-\delta/2, \delta/2]\}$ le segment géométrique des points étant à sa verticale au repos. Soit la notation X' pour désigner les coordonnées d'un point X après déformation. L'hypothèse 1 signifie que pour (x, y) fixés, $\mathcal{S}(x, y)'$ est encore un segment. Autrement dit, pour tout point M' de cet ensemble, le vecteur M'_0M' est colinéaire à un vecteur fixe (par rapport à z). Ainsi, il existe un vecteur $(a(x, y), b(x, y), c(x, y))$ tel que pour tous les z ,

$$M'_0M'(z) // \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \\ c(x, y) \end{pmatrix}$$

En conséquence, il existe un paramétrage $t : [-\delta/2, \delta/2] \rightarrow [t_0, t_1]$ tel que :

$$M'_0M'(z) = t(z) \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \\ c(x, y) \end{pmatrix}.$$

Alors, on utilise la définition des déplacements et la relation de Chasles pour écrire que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M'_0M'} &= \overrightarrow{M'_0M_0} + \overrightarrow{M_0M} + \overrightarrow{MM'} = - \begin{pmatrix} u_x^0(x, y) \\ u_y^0(x, y) \\ U(x, y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} u_x(x, y, z) - u_x^0(x, y) \\ u_y(x, y, z) - u_y^0(x, y) \\ z + u_z(x, y, z) - U(x, y) \end{pmatrix} = t(z) \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \\ c(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.2.2})$$

On utilise alors l'hypothèse $\varepsilon_{zz} = 0$ pour obtenir, dès lors que $c(x, y)$ n'est pas nul (i.e. en supposant que la plaque ne devient pas localement verticale) :

$$\partial_z u_z(x, y, z) = 0 = \partial_z [U(x, y) - z + t(z) c(x, y)] \Rightarrow c(x, y) \partial_z t(z) = 1 \Rightarrow t(z) = \frac{z}{c(x, y)} + \text{cste} \quad (\text{E.2.3})$$

La constante est nulle car pour $z = 0$ on doit retrouver $u_z(x, y, 0) = U(x, y)$. On introduit alors les deux fonctions $\beta_x(x, y) = a(x, y)/c(x, y)$ et $\beta_y(x, y) = b(x, y)/c(x, y)$. Les déplacements des points peuvent donc s'écrire de la forme suivante¹ :

$$\mathbf{u}^{RM}(x, y, z) = \begin{cases} u_x(x, y, z) = u_x^0(x, y) + z \beta_x(x, y) \\ u_y(x, y, z) = u_y^0(x, y) + z \beta_y(x, y) \\ u_z(x, y, z) = U(x, y) \end{cases} \quad (\text{E.2.4})$$

Ce système conduit à définir l'espace des déplacements admissibles \mathcal{V}^{RM} comme l'ensemble des déplacements écrits ci dessus tels que (E.2.1) ait un sens :

DÉFINITION E.2.1 (Espace des déplacements admissibles de Reissner Mindlin)

On définit l'espace des déplacements admissibles de Reissner Mindlin \mathcal{V}^{RM} comme

$$\mathcal{V}^{RM} = \left\{ \mathbf{u}^{RM} \text{ sous la forme (E.2.4) } \mid (u_x^0, u_y^0, \beta_x, \beta_y, U) \in (H^1(\omega))^5 \right\}$$

accompagné de conditions aux limites (Dirichlet, Neumann ou simplement supportées).

1. L'hypothèse $\varepsilon_{zz} = 0$ implique que le segment s'étend puisqu'il pivote mais les déplacements transversaux sont les mêmes pour tous les points du segment.

REMARQUE E.2.1

On peut interpréter (β_x, β_y) comme les sinus des angles selon x et y formés entre \vec{e}_z et le segment $\mathcal{S}(x, y)'$ (voir figure (E.1)).

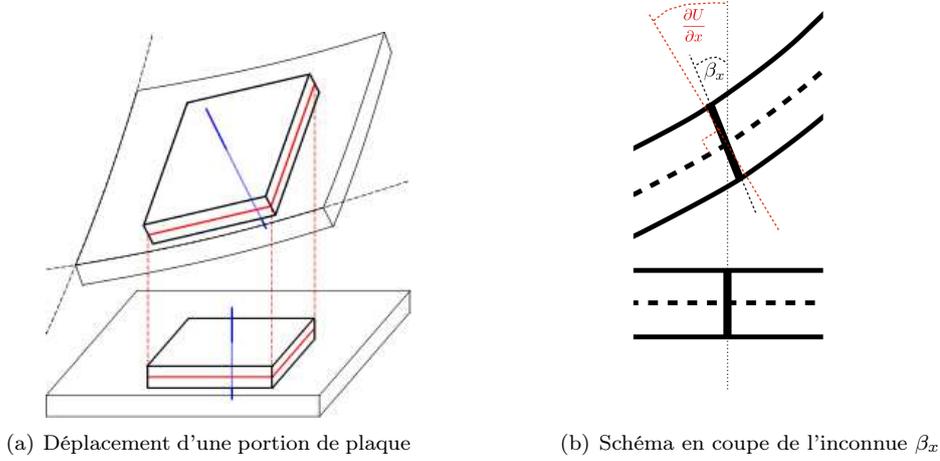


FIGURE E.1 – Schémas des déplacements admissibles considérés.

REMARQUE E.2.2

À présent, le mouvement de tout point de la plaque est paramétré par un mouvement tridimensionnel plus deux angles associés au projeté du point au repos sur le plan neutre. On a remplacé un problème de $\Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ par un problème de $\omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$, ce qui est déjà intéressant d'un point de vue numérique.

Le champ de déplacements recherché ici conduit aux formules suivantes pour ε , qui est symétrique :

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x^0}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_x^0}{\partial y} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y^0}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right] \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left[\beta_x + \frac{\partial U}{\partial x} \right] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y^0}{\partial y} + z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left[\beta_y + \frac{\partial U}{\partial y} \right] \\ \varepsilon_{zz} = 0 \end{array} \right) \quad (\text{E.2.5})$$

En introduisant $\varepsilon_m(\mathbf{u})$ le tenseur de déformations linéarisé restreint au plan neutre $(0, x, y)$, on remarque que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_m(\mathbf{u}) = \varepsilon_m(\underline{u}^0) + z \varepsilon_m(\underline{\beta}) \\ \varepsilon_{.,z}(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,z} \\ \varepsilon_{y,z} \end{pmatrix}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} [\underline{\beta} + \nabla U] \end{array} \right. \quad (\text{E.2.6a})$$

$$(\text{E.2.6b})$$

E.2.2 Loi de comportement pour les déplacements admissibles de Reissner Mindlin.

Utilisons à présent l'hypothèse 3 selon laquelle σ_{zz} est négligeable. Alors, la loi de Hooke (E.1.4) se réécrit, en posant carrément $\sigma_{zz} = 0$:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

puisque $\varepsilon_{zz} = 0$ par hypothèse. Pour compenser cette approximation, nous introduisons les coefficients correcteurs κ_x et κ_y^2 qui viennent pondérer les modules de cisaillement, et l'on peut à présent exprimer σ en fonction de ε en introduisant la matrice de rigidité de plaque \mathbf{C} :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = 12 \underbrace{\begin{pmatrix} D_1 & \frac{D_2}{2} & 0 \\ \frac{D_2}{2} & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D_4}{2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}, \quad \sigma_{xz} = 2\kappa_x^2 G_{xz} \varepsilon_{xz}, \quad \sigma_{yz} = 2\kappa_y^2 G_{yz} \varepsilon_{yz}.$$

où l'on a introduit les coefficients élastiques

$$D_1 = \frac{E_x}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})}, \quad D_2 = \frac{E_x\nu_{yx}}{6(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} (\equiv 2D_1\nu_{yx}),$$

$$D_3 = \frac{E_y}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})}, \quad D_4 = \frac{G_{xy}}{3}. \quad (\text{E.2.7})$$

E.2.3 Formulation variationnelle pour les déplacements admissibles de Reissner Mindlin.

En reprenant l'équation (E.2.1), on exprime $P_{int}(\mathbf{u}^*)$ de la façon suivante :

$$-P_{int}(\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) \varepsilon(\mathbf{u}^*) d\Omega \quad (\text{E.2.8})$$

$$= \int_{\omega} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left[\sigma_m(\mathbf{u}) \varepsilon_m(\mathbf{u}^*) + 2\sigma_{.,z}(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon_{.,z}(\mathbf{u}^*) \right] dz d\omega \quad (\text{E.2.9})$$

$$= \int_{\omega} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left[\sigma_m(\mathbf{u}) \left[\varepsilon_m((\underline{u}^0)^*) + z\varepsilon_m(\underline{\beta}) \right] + 2\sigma_{.,z}(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon_{.,z}(\mathbf{u}^*) \right] dz d\omega \quad (\text{E.2.10})$$

$$= \int_{\omega} \varepsilon_m((\underline{u}^0)^*) \underbrace{\int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_m(\mathbf{u}) dz d\omega}_{\mathcal{N}_m} + \int_{\omega} \varepsilon_m(\underline{\beta}) \underbrace{\int_{-\delta/2}^{\delta/2} z \sigma_m(\mathbf{u}) dz d\omega}_{\mathcal{M}_m} +$$

$$2 \int_{\omega} \varepsilon_{.,z}(\mathbf{u}^*) \cdot \underbrace{\int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{.,z}(\mathbf{u}) dz d\omega}_{\mathcal{Q}} \quad (\text{E.2.11})$$

2. Leur valeur fait l'objet d'un débat vif dans la communauté ingénierie. On peut s'y intéresser du point de vue de l'analyse asymptotique, en l'ajustant de façon à améliorer d'un ordre la convergence de la solution du modèle de Reissner Mindlin vers la solution du problème d'élastodynamique tridimensionnelle lorsque l'épaisseur tend vers 0, voir [Rössle, 1999].

On calcule les matrices 2×2 symétriques \mathcal{M}_m et \mathcal{N}_m :

$$\mathcal{M}_m = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} z \sigma_m(\mathbf{u}) dz = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} z \mathbf{C} \varepsilon_m(\mathbf{u}) dz \quad \text{par définition de } \mathbf{C} \quad (\text{E.2.12})$$

$$= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} z \mathbf{C} \left[\varepsilon_m(\underline{u}^0) + z \varepsilon_m(\underline{\beta}) \right] dz \quad \text{grâce à la remarque E.2.6} \quad (\text{E.2.13})$$

$$= \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{u}^0) \underbrace{\int_{-\delta/2}^{\delta/2} z dz}_0 + \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{\beta}) \underbrace{\int_{-\delta/2}^{\delta/2} z^2 dz}_{\delta^3/12} \quad (\text{E.2.14})$$

$$= \frac{\delta^3}{12} \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{\beta}) \quad (\text{E.2.15})$$

$$\mathcal{N}_m = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_m(\mathbf{u}) dz = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \mathbf{C} \varepsilon_m(\mathbf{u}) dz \quad (\text{E.2.16})$$

$$= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \mathbf{C} \left[\varepsilon_m(\underline{u}^0) + z \varepsilon_m(\underline{\beta}) \right] dz \quad (\text{E.2.17})$$

$$= \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{u}^0) \underbrace{\int_{-\delta/2}^{\delta/2} 1 dz}_{\delta} + \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{\beta}) \underbrace{\int_{-\delta/2}^{\delta/2} z dz}_0 \quad (\text{E.2.18})$$

$$= \delta \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{u}^0) \quad (\text{E.2.19})$$

Ainsi que le vecteur à deux éléments \mathcal{Q} :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_{.,z}(\mathbf{u}) dz = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} 2 \underline{\kappa}^2 \cdot \underline{G} \cdot \varepsilon_{.,z}(\mathbf{u}) dz = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} 2 \underline{\kappa}^2 \cdot \underline{G} \cdot \frac{1}{2} [\underline{\beta} + \nabla U] dz \\ &= \delta \underline{\kappa}^2 \cdot \underline{G} \cdot [\underline{\beta} + \nabla U] \end{aligned} \quad (\text{E.2.20})$$

REMARQUE E.2.3 (Découplage des inconnues dans le cas d'une plaque équilibrée)

Les déplacements longitudinaux u_x^0 et u_y^0 n'interviennent pas dans l'expression de \mathcal{M}_m ni de \mathcal{Q} , puisqu'ils sont constants selon z , et que l'intégrale est symétrique en $\pm\delta/2$. De la même façon, les inconnues U et $\underline{\beta}$ n'interviennent pas dans l'écriture de \mathcal{N}_m . Ceci n'est plus le cas dès lors que la plaque n'est plus équilibrée, conduisant à un couplage entre les trois inconnues de flexion $\{\beta_x, \beta_y, U\}$ et les deux déplacements membranaires $\{u_x^0, u_y^0\}$.

L'expression devient alors :

$$\begin{aligned} -P_{int}(\mathbf{u}^*) &= \delta \int_{\omega} \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{u}^0) \varepsilon_m((\underline{u}^0)^*) d\omega + \frac{\delta^3}{12} \int_{\omega} \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{\beta}) \varepsilon_m(\underline{\beta}^*) d\omega + \\ &2 \delta \int_{\omega} \underline{\kappa}^2 \cdot \underline{G} \cdot [\underline{\beta} + \nabla U] \cdot \frac{1}{2} [\underline{\beta}^* + \nabla U^*] d\omega \end{aligned} \quad (\text{E.2.21})$$

On exprime à présent $P_{acc}(\mathbf{u}^*)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P_{acc}(\mathbf{u}^*) &= \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} u_x^0 + z \beta_x \\ u_y^0 + z \beta_y \\ U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (u_x^0)^* + z \beta_x^* \\ (u_y^0)^* + z \beta_y^* \\ U^* \end{pmatrix} d\Omega \\ &= \delta \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 \underline{u}^0}{\partial t^2} \cdot (\underline{u}^0)^* d\omega + \delta \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} U^* d\omega + \frac{\delta^3}{12} \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 \underline{\beta}}{\partial t^2} \cdot \underline{\beta}^* d\omega \end{aligned} \quad (\text{E.2.22})$$

Et, enfin, $P_{ext}(\mathbf{u}^*)$:

$$\begin{aligned} P_{ext}(\mathbf{u}^*) &= \int_{\Omega} F \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} g \mathbf{u}^* d\omega \\ &= \int_{\omega} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} F \begin{pmatrix} (u_x^0)^* + z \beta_x^* \\ (u_y^0)^* + z \beta_y^* \\ U^* \end{pmatrix} dz d\omega + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} g \begin{pmatrix} (u_x^0)^* \pm \delta/2 \beta_x^* \\ (u_y^0)^* \pm \delta/2 \beta_y^* \\ U^* \end{pmatrix} d\omega \end{aligned} \quad (\text{E.2.23})$$

$$\text{Soient : } f_i = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} F_i dz + g_i^+ + g_i^- \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{E.2.24})$$

$$\text{et } \mu_{\alpha} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} z F_{\alpha} dz + \frac{\delta}{2} [g_{\alpha}^+ - g_{\alpha}^-] \quad \forall \alpha \in \{1, 2\} \quad (\text{E.2.25})$$

$$\text{alors, } P_{ext}(\mathbf{u}^*) = \int_{\omega} f \cdot \begin{pmatrix} (u_x^0)^* \\ (u_y^0)^* \\ U^* \end{pmatrix} d\omega + \int_{\omega} \mu \cdot \underline{\beta}^* d\omega \quad (\text{E.2.26})$$

En regroupant tous les termes, on obtient la formulation variationnelle complète pour le modèle de plaque de Reissner Mindlin : On cherche $\mathbf{u} = (\underline{u}^0, U, \underline{\beta}) \in \mathcal{V}^{RM}$ tel que pour tous $\mathbf{u}^* = ((\underline{u}^0)^*, U^*, \underline{\beta}^*) \in \mathcal{V}^{RM}$

$$\begin{aligned} \delta \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 \underline{u}^0}{\partial t^2} (\underline{u}^0)^* d\omega + \delta \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} U^* d\omega + \frac{\delta^3}{12} \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 \underline{\beta}}{\partial t^2} \underline{\beta}^* d\omega + \delta \int_{\omega} \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{u}^0) \varepsilon_m((\underline{u}^0)^*) d\omega + \\ \frac{\delta^3}{12} \int_{\omega} \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{\beta}) \varepsilon_m(\underline{\beta}^*) d\omega + \delta \int_{\omega} \underline{\kappa}^2 \cdot \underline{\mathbf{G}} \cdot [\underline{\beta} + \nabla U] \cdot [\underline{\beta}^* + \nabla U^*] d\omega = \\ \int_{\omega} f \cdot \begin{pmatrix} (u_x^0)^* \\ (u_y^0)^* \\ U^* \end{pmatrix} d\omega + \int_{\omega} \mu \cdot \underline{\beta}^* d\omega \end{aligned} \quad (\text{E.2.27})$$

On peut réécrire cette formulation variationnelle en remarquant que les mouvements membranaires (\underline{u}^0) sont découplés des mouvements de flexion $(\underline{\beta}$ et $U)$:

$$\begin{cases} \delta \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 \underline{u}^0}{\partial t^2} (\underline{u}^0)^* d\omega + \delta \int_{\omega} \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{u}^0) \varepsilon_m((\underline{u}^0)^*) d\omega = \int_{\omega} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \cdot (\underline{u}^0)^* d\omega \\ \delta \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} U^* d\omega + \delta \int_{\omega} \underline{\kappa}^2 \cdot \underline{\mathbf{G}} \cdot [\underline{\beta} + \nabla U] \cdot \nabla U^* d\omega = \int_{\omega} f_3 U^* d\omega \\ \frac{\delta^3}{12} \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 \underline{\beta}}{\partial t^2} \underline{\beta}^* d\omega + \frac{\delta^3}{12} \int_{\omega} \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{\beta}) \varepsilon_m(\underline{\beta}^*) d\omega + \delta \int_{\omega} \underline{\kappa}^2 \cdot \underline{\mathbf{G}} \cdot [\underline{\beta} + \nabla U] \cdot \underline{\beta}^* d\omega = \int_{\omega} \mu \cdot \underline{\beta}^* d\omega \end{cases}$$

On peut procéder aux intégrations par partie en remarquant que l'adjoint de ε est $\underline{\text{Div}}$ et que l'adjoint de ∇ est div . Les conditions aux limites sont naturelles (Dirichlet, Neumann ou simplement supporté) et permettent d'éliminer les termes de bord. On cherche $\mathbf{u} = (\underline{u}^0, U, \underline{\beta}) \in \mathcal{V}^{RM}$ tel que pour tous $\mathbf{u}^* = ((\underline{u}^0)^*, U^*, \underline{\beta}^*) \in \mathcal{V}^{RM}$,

$$\left\{ \begin{aligned} \delta \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 \underline{u}^0}{\partial t^2} (\underline{u}^0)^* d\omega + \delta \int_{\omega} \underline{\text{Div}}(\mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{u}^0)) (\underline{u}^0)^* d\omega &= \int_{\omega} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \cdot (\underline{u}^0)^* d\omega & (\text{E.2.28a}) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} U^* d\omega + \delta \int_{\omega} \text{div}(\underline{\kappa}^2 \cdot \underline{\mathbf{G}} \cdot [\underline{\beta} + \nabla U]) U^* d\omega &= \int_{\omega} f_3 U^* d\omega & (\text{E.2.28b}) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\delta^3}{12} \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 \underline{\beta}}{\partial t^2} \underline{\beta}^* d\omega + \frac{\delta^3}{12} \int_{\omega} \underline{\text{Div}}(\mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{\beta})) \underline{\beta}^* d\omega + \delta \int_{\omega} \underline{\kappa}^2 \cdot \underline{\mathbf{G}} \cdot [\underline{\beta} + \nabla U] \cdot \underline{\beta}^* d\omega &= \int_{\omega} \mu \cdot \underline{\beta}^* d\omega & (\text{E.2.28c}) \end{aligned} \right.$$

REMARQUE E.2.4

- Un chargement purement perpendiculaire au plan de la plaque ($F_1 = F_2 = g_1^\pm = g_2^\pm = 0$) donne un second membre nul à la ligne (E.2.28a), et ne va donc pas engendrer de déplacement membranaire (\underline{u}^0).
- En revanche, un chargement purement membranaire ($F_3 = g_3^\pm = 0$) donne un second membre non nul à la ligne (E.2.28a) (comme attendu) mais aussi à la ligne (E.2.28c) si le chargement n'est pas symétrique. En effet, μ pourra être non nul (voir sa définition (E.2.25)), et exciter en conséquence $\underline{\beta}$, et donc également U par couplage.

On supposera dans la suite que le chargement est en flexion seulement (comme le premier cas) : $F_1 = F_2 = g_1^\pm = g_2^\pm = 0$.

La réinterprétation au sens fort des formulations variationnelles ci dessus conduit au problème suivant :

Système de Reissner Mindlin pour les plaques orthotropes :

$$\begin{cases} \rho \frac{\delta^3}{12} \frac{\partial^2 \underline{\beta}}{\partial t^2} - \frac{\delta^3}{12} \text{Div}(\mathbf{C} \varepsilon(\underline{\beta})) + \delta \underline{\kappa}^2 \cdot \underline{G} \cdot (\nabla U + \underline{\beta}) = \mu & \text{(E.2.29a)} \\ \rho \delta \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \delta \text{div}(\underline{\kappa}^2 \cdot \underline{G} \cdot (\nabla U + \underline{\beta})) = f & \text{(E.2.29b)} \end{cases}$$

$$\text{avec } \mathbf{C} \varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & -\frac{E_y\nu_{xy}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{E_x\nu_{yx}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \text{ pour tout } \varepsilon \text{ symétrique,}$$

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} G_{xz} \\ G_{yz} \end{pmatrix}, \quad \underline{\kappa}^2 = \begin{pmatrix} \kappa_x^2 \\ \kappa_y^2 \end{pmatrix}.$$

E.3**Modèle de Kirchhoff Love**

Le modèle de Kirchhoff Love consiste, comme dans le cas du modèle de Reissner Mindlin, à restreindre la formulation variationnelle 3D à un sous espace de déplacements admissibles \mathcal{V}^{KL} que nous précisons plus tard : on cherche $\mathbf{u} \in \mathcal{V}^{KL}$ telle que, pour tous $\mathbf{u}^* \in \mathcal{V}^{KL}$,

$$\begin{cases} P_{acc}(\mathbf{u}^*) = P_{int}(\mathbf{u}^*) + P_{ext}(\mathbf{u}^*) & \text{(E.3.1a)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{avec } \begin{cases} P_{acc}(\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega \\ P_{int}(\mathbf{u}^*) = - \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}^*) d\Omega \\ P_{ext}(\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} F \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} g \mathbf{u}^* d\omega \end{cases} & \text{(E.3.1b)} \end{cases}$$

Cet espace de déplacements admissibles est basé principalement sur des nouvelles hypothèses qui permettent de se ramener à la seule inconnue $U(x, y)$:

HYPOTHÈSE 4 : Toute section droite reste normale à la médiane au cours du déplacement.

HYPOTHÈSE 5 : On néglige l'effet de l'inertie de rotation.

E.3.1 Détermination d'une écriture simplifiée des déplacements.

On a alors, comme l'illustre le schéma E.1(b), $\nabla U = -\underline{\beta}$. Dans ce cas, les déplacements des points peuvent s'écrire de la forme suivante :

$$\mathbf{u}^{KL}(x, y, z) = \begin{cases} u_x(x, y, z) = u_x^0(x, y) - z \frac{\partial U}{\partial x} \\ u_y(x, y, z) = u_y^0(x, y) - z \frac{\partial U}{\partial y} \\ u_z(x, y, z) = U(x, y) \end{cases} \quad (\text{E.3.2})$$

À la vue de cette forme de déplacements, on peut définir \mathcal{V}^{KL} comme l'ensemble des déplacements écrits ci dessus, tels que (E.3.1) ait un sens :

DÉFINITION E.3.1 (Espace des déplacements admissibles de Kirchhoff Love)

On définit l'espace des déplacements admissibles de Kirchhoff Love \mathcal{V}^{KL} comme

$$\mathcal{V}^{KL} = \left\{ \mathbf{u}^{KL} \text{ sous la forme (E.3.2)} \mid (u_x^0, u_y^0, U) \in (H^1(\omega))^2 \times H^2(\omega) \right\}$$

accompagné de conditions aux limites (Dirichlet, Neumann ou simplement supportées).

En conséquence, le tenseur des déformations devient :

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_x^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_y^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right] \quad \varepsilon_{xz} = 0 \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \varepsilon_{yz} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = 0 \end{array} \right)$$

On peut donc considérer sa restriction au plan, qui s'écrit :

$$\varepsilon_m(\mathbf{u}) = \varepsilon_m(\underline{u}^0) - z \varepsilon_m(\nabla U) \quad (\text{E.3.3})$$

E.3.2 Loi de comportement pour les déplacements admissibles de Kirchhoff Love.

On remarque qu'une conséquence de ce choix de déplacements admissibles est que $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, puisqu'ils sont proportionnels à ε_{xz} et ε_{yz} . En rajoutant l'hypothèse de contrainte transversale nulle, on a $\sigma_{.,z} = 0$. En conséquence, la loi de comportement n'est plus la loi donnée en (E.1.4), en effet $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy})$ peuvent être exprimés seulement avec $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy})$. On peut donner cette relation uniquement dans le plan :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{E.3.4})$$

L'inverse de cette relation conduit à la même relation que précédemment :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \underbrace{12}_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} D_1 & \frac{D_2}{2} & 0 \\ \frac{D_2}{2} & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D_4}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

avec toujours

$$D_1 = \frac{E_x}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})}, \quad D_2 = \frac{E_x\nu_{yx}}{6(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} (\equiv 2D_1\nu_{yx}),$$

$$D_3 = \frac{E_y}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})}, \quad D_4 = \frac{G_{xy}}{3}. \quad (\text{E.3.5})$$

E.3.3 Formulation variationnelle pour les déplacements admissibles de Kirchhoff Love.

Nous pouvons alors reprendre l'étude menée précédemment dans le cas du modèle de Kirchhoff Love :

$$\begin{aligned} -P_{int}(\mathbf{u}^*) &= \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u})\varepsilon(\mathbf{u}^*) d\Omega \\ &= \int_{\omega} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_m(\mathbf{u})\varepsilon_m(\mathbf{u}^*) dz d\omega \\ &= \int_{\omega} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_m(\mathbf{u}) \left[\varepsilon_m((\underline{u}^0)^*) - z \varepsilon_m(\underline{\nabla}U^*) \right] dz d\omega \\ &= \int_{\omega} \varepsilon_m((\underline{u}^0)^*) \underbrace{\int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_m(\mathbf{u}) dz}_{\mathcal{N}_m} d\omega + \int_{\omega} \varepsilon_m(\underline{\nabla}U^*) \underbrace{\int_{-\delta/2}^{\delta/2} -z \sigma_m(\mathbf{u}) dz}_{\mathcal{M}_m} d\omega \end{aligned} \quad (\text{E.3.6})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_m &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} -z \sigma_m(\mathbf{u}) dz = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} -z \mathbf{C} \varepsilon_m(\mathbf{u}) dz = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} -z \mathbf{C} \left[\varepsilon_m(\underline{u}^0) - z \varepsilon_m(\underline{\nabla}U) \right] dz \\ &= \frac{\delta^3}{12} \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{\nabla}U) \end{aligned} \quad (\text{E.3.7})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_m &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_m(\mathbf{u}) dz = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \mathbf{C} \varepsilon_m(\mathbf{u}) dz = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \mathbf{C} \left[\varepsilon_m(\underline{u}^0) - z \varepsilon_m(\underline{\nabla}U) \right] dz \\ &= \delta \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{u}^0) \end{aligned} \quad (\text{E.3.8})$$

$$\begin{aligned} P_{acc}(\mathbf{u}^*) &= \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \mathbf{u}^* d\Omega = \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} u_x^0 - z \frac{\partial U}{\partial x} \\ u_y^0 - z \frac{\partial U}{\partial y} \\ U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (u_x^0)^* - z \frac{\partial U^*}{\partial x} \\ (u_y^0)^* - z \frac{\partial U^*}{\partial y} \\ U^* \end{pmatrix} d\Omega \\ &= \delta \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 \underline{u}^0}{\partial t^2} (\underline{u}^0)^* d\omega + \delta \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} U^* d\omega + \frac{\delta^3}{12} \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 \underline{\nabla}U}{\partial t^2} \underline{\nabla}U^* d\omega \end{aligned} \quad (\text{E.3.9})$$

L'hypothèse (5) nous indique que l'on néglige le troisième terme devant les deux autres, ce qui semble raisonnable, l'épaisseur δ étant petite. Enfin, en reprenant les mêmes notations que précédemment,

$$P_{ext}(\mathbf{u}^*) = \int_{\omega} f \cdot \begin{pmatrix} (u_x^0)^* \\ (u_y^0)^* \\ U^* \end{pmatrix} d\omega - \int_{\omega} \mu \cdot \underline{\nabla}U^* d\omega \quad (\text{E.3.10})$$

La formulation variationnelle devient : on cherche $\mathbf{u} \in \mathcal{V}^{KL}$ telle que, pour tous $\mathbf{u}^* \in \mathcal{V}^{KL}$,

$$\delta \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 \underline{u}^0}{\partial t^2} (\underline{u}^0)^* d\omega + \delta \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} U^* d\omega + \delta \int_{\omega} \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{u}^0) \varepsilon_m((\underline{u}^0)^*) d\omega + \quad (\text{E.3.11})$$

$$\frac{\delta^3}{12} \int_{\omega} \mathbf{C} \varepsilon_m(\nabla U) \varepsilon_m(\nabla U^*) d\omega = \int_{\omega} f \cdot \begin{pmatrix} (u_x^0)^* \\ (u_y^0)^* \\ U^* \end{pmatrix} d\omega - \int_{\omega} \mu \cdot \nabla U^* d\omega \quad (\text{E.3.12})$$

On est ramené à la même remarque que pour le modèle de Reissner Mindlin : on peut écrire séparément une formulation variationnelle pour \underline{u}^0 et pour U :

$$\begin{cases} \delta \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 \underline{u}^0}{\partial t^2} (\underline{u}^0)^* d\omega + \delta \int_{\omega} \mathbf{C} \varepsilon_m(\underline{u}^0) \varepsilon_m((\underline{u}^0)^*) d\omega = \int_{\omega} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (u_x^0)^* \\ (u_y^0)^* \end{pmatrix} d\omega & (\text{E.3.13a}) \\ \delta \int_{\omega} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} U^* d\omega + \frac{\delta^3}{12} \int_{\omega} \mathbf{C} \varepsilon_m(\nabla U) \varepsilon_m(\nabla U^*) d\omega = \int_{\omega} f_3 U^* d\omega - \int_{\omega} \mu \cdot \nabla U^* d\omega & (\text{E.3.13b}) \end{cases}$$

Une sollicitation purement perpendiculaire au plan de la plaque ne va pas engendrer de déplacement membranaire (\underline{u}^0). En revanche, un chargement purement membranaire mais dissymétrique pourra engendrer un déplacement transversal à travers μ . Posons à présent $f = f_3 + \text{div}(\mu)$, et considérons que $f_1 = f_2 = 0$.

La plaque est donc entièrement définie par l'inconnue $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ selon l'équation suivante :

Équation de Kirchhoff Love pour les plaques orthotropes :

$$\rho \delta \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\delta^3}{12} \text{div Div } \mathbf{C} \varepsilon(\nabla U) = f \quad (\text{E.3.14})$$

avec par exemple $\mathbf{C} \varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & -\frac{E_y\nu_{xy}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ -\frac{E_x\nu_{yx}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$ pour tout ε symétrique.

E.4

Modèle abstrait général

Ces deux modèles de plaque entrent dans le contexte général suivant, avec \mathcal{A} et \mathcal{B} deux opérateurs autoadjoints.

$$\begin{cases} c_{\theta} \frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial t^2} + \mathcal{A} \underline{\theta} + \mathcal{C} u = 0 & (\text{E.4.1a}) \\ c_u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{B} u + \mathcal{C}^* \underline{\theta} = f & (\text{E.4.1b}) \end{cases}$$

En effet, on retrouve les modèles précédents en considérant :

MODÈLE	c_{θ}	c_u	$\mathcal{A} \underline{\theta}$	$\mathcal{B} u$	$\mathcal{C} u$	$\mathcal{C}^* \underline{\theta}$
Reissner Mindlin	$\rho \frac{\delta^3}{12}$	$\rho \delta$	$-\frac{\delta^3}{12} \text{Div}(\underline{\underline{\underline{C}}}\varepsilon(\underline{\theta})) + \delta G \underline{\theta}$	$-\delta \text{div}(G \nabla u)$	$\delta G \nabla u$	$-\delta G \text{div } \underline{\theta}$
Kirchhoff Love	0	$\rho \delta$	0	$\frac{\delta^3}{12} \text{div Div } \mathbf{C} \varepsilon(\nabla u)$	0	0

ANNEXE

F

GRADIENT APPROCHÉ ET TRAITEMENT DE LA SINGULARITÉ

Dans cette annexe nous appellerons H la fonctionnelle provenant du modèle géométriquement exact et dont on désire calculer le gradient approché avec un schéma du type (\mathcal{S}_{permut}).

F.1 Expression

Nous nous plaçons dans le cas d'un système de $N \geq 2$ lignes, c'est à dire que $\mathbf{q} \equiv \mathbf{u}$ a N composantes. Nous les noterons $(u_k)_{1 \leq k \leq N}$ et nous noterons u_N , la dernière composante, par la lettre v qui, en pratique, est la vibration longitudinale. De plus, pour le modèle géométriquement exact, $N = 2$ si le mouvement est considéré planaire, ou 3 sinon. Ecrivons l'expression de H en introduisant un paramètre d'adimensionalisation $\alpha = \frac{EA-T_0}{EA}$:

$$H(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + \frac{1}{2} v^2 - \alpha \left[\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2} - (1+v) \right]$$

F.2

Dérivées d'ordre un

Précisons les dérivées directionnelles de H selon les directions $(u_k)_{1 \leq k \leq N}$. La notation $\partial_k H$ désignera la dérivée directionnelle de H par rapport à la variable u_k .

$$\begin{cases} \partial_k H(\mathbf{u}) = u_k - \alpha \frac{u_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2}} & \forall k \neq N, \\ \partial_N H(\mathbf{u}) = v - \alpha \left[\frac{1+v}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2}} - 1 \right]. \end{cases}$$

F.3

Dérivées d'ordre deux

Précisons les dérivées directionnelles de H d'ordre deux. La notation $\partial_{k,l} H$ désignera la dérivée directionnelle de H par rapport à la variable u_k puis u_l .

$$\begin{cases} \partial_{k,l}^2 H(\mathbf{u}) = \alpha \frac{u_k u_l}{[\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2]^{3/2}} & \forall k \text{ et } l \neq N, \\ \partial_{k,k}^2 H(\mathbf{u}) = 1 - \alpha \left[\frac{1}{[\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2]^{1/2}} - \frac{u_k^2}{[\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2]^{3/2}} \right] & \forall k \neq N, \\ \partial_{k,N}^2 H(\mathbf{u}) = \alpha \frac{(1+v) u_k}{[\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2]^{3/2}} & \forall k \neq N, \\ \partial_{N,N}^2 H(\mathbf{u}) = 1 - \alpha \left[\frac{1}{[\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2]^{1/2}} - \frac{(1+v)^2}{[\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2]^{3/2}} \right]. \end{cases}$$

F.4

Différences finies directionnelles

La dérivée directionnelle d'ordre un est définie de la façon suivante :

$$\delta_k H(u_k, \tilde{u}_k; u_{l \neq k}) = \begin{cases} \frac{H(u_k, u_{l \neq k}) - H(\tilde{u}_k, u_{l \neq k})}{u_k - \tilde{u}_k} & \text{si } u_k \neq \tilde{u}_k \\ \partial_k H(\mathbf{u}) & \text{si } u_k = \tilde{u}_k \end{cases}$$

Quelques calculs montrent que lorsque l'on connaît l'écriture analytique de H , on peut parfois se débarrasser de la singularité au dénominateur lorsque u_k et \tilde{u}_k deviennent proches, qui pose un problème de programmation. Cette remarque est vraie en particulier pour l'expression de la fonctionnelle H qui provient du modèle géométriquement exact. En effet, on peut écrire cette quantité de la façon suivante :

$$\begin{cases} \delta_k H(u_k, \tilde{u}_k; u_{l \neq k}) = \frac{1}{2}(u_k + \tilde{u}_k) - \alpha \frac{u_k + \tilde{u}_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_k^2 + (1+v)^2}} & \forall k \neq N, \\ \delta_N H(v, \tilde{v}; u_{l \neq N}) = \frac{1}{2}(v + \tilde{v}) + \alpha - \alpha \frac{2+v+\tilde{v}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+\tilde{v})^2}}. \end{cases}$$

Chacune de ces expressions tendent bien vers la dérivée partielle directionnelle lorsque \tilde{u}_k tend vers u_k , ce qui évite d'avoir à programmer plusieurs cas pour les expressions correspondantes du schéma.

F.5

Dérivées des différences finies directionnelles

On peut utiliser les formules précédentes pour écrire une expression des dérivées des différences finies directionnelles, utilisées dans le schéma proposé dans ce rapport, qui ne diverge pas numériquement quand les termes se rapprochent.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \partial_j \delta_k H(u_k, \tilde{u}_k; u_{l \neq k}) = \alpha \frac{(u_k + \tilde{u}_k) u_j \left[\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_k^2 + (1+v)^2}} \right]}{\left[\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_k^2 + (1+v)^2} \right]^2} \quad \forall k \text{ et } j \neq N, \\
 \partial_k \delta_k H(u_k, \tilde{u}_k; u_{l \neq k}) = \frac{1}{2} - \alpha \left[\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_k^2 + (1+v)^2}} - \frac{(u_k + \tilde{u}_k) u_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2} \left[\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_k^2 + (1+v)^2} \right]^2} \right] \quad \forall k \neq N, \\
 \partial_N \delta_k H(u_k, \tilde{u}_k; u_{l \neq k}) = \alpha \frac{(u_k + \tilde{u}_k)(1+v) \left[\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_k^2 + (1+v)^2}} \right]}{\left[\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_k^2 + (1+v)^2} \right]^2} \quad \forall k \neq N, \\
 \partial_j \delta_N H(v, \tilde{v}; u_{l \neq N}) = \alpha \frac{(2+v+\tilde{v}) u_j \left[\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+\tilde{v})^2}} \right]}{\left[\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+\tilde{v})^2} \right]^2} \quad \forall k \neq N, \\
 \partial_N \delta_N H(v, \tilde{v}; u_{l \neq N}) = \frac{1}{2} - \alpha \left[\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+\tilde{v})^2}} - \frac{(2+v+\tilde{v})(1+v)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2} \left[\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+v)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} u_k^2 + (1+\tilde{v})^2} \right]^2} \right]
 \end{array} \right.$$

On vérifie alors bien les propriétés de consistance :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \partial_j \delta_k H(u_k, \tilde{u}_k; u_{l \neq k}) \longrightarrow_{\tilde{u}_k \rightarrow u_k} \partial_{j,k}^2 H \quad \forall k \text{ et } j \neq N, \\
 \partial_k \delta_k H(u_k, \tilde{u}_k; u_{l \neq k}) \longrightarrow_{\tilde{u}_k \rightarrow u_k} \frac{1}{2} \partial_{k,k}^2 H \quad \forall k \neq N, \\
 \partial_N \delta_k H(u_k, \tilde{u}_k; u_{l \neq k}) \longrightarrow_{\tilde{u}_k \rightarrow u_k} \partial_{j,N}^2 H \quad \forall k \neq N, \\
 \partial_j \delta_N H(v, \tilde{v}; u_{l \neq N}) \longrightarrow_{\tilde{v} \rightarrow v} \partial_{j,N}^2 H \quad \forall k \neq N \\
 \partial_N \delta_N H(v, \tilde{v}; u_{l \neq N}) \longrightarrow_{\tilde{v} \rightarrow v} \frac{1}{2} \partial_{N,N}^2 H
 \end{array} \right.$$

GLOSSAIRE

accord dans ce document, on utilisera ce mot dans deux contextes : la combinaison de plusieurs notes jouées simultanément, et la modification de la tension d'une corde afin qu'elle délivre la **hauteur** de note souhaitée, aussi appelée accordage. 9, 22, 27, 39, 288

battement manifestation temporelle d'un phénomène d'interférence entre les différentes composantes périodiques d'un signal. 27

couleur qualité perceptive attribuée à un son. On trouve des qualificatifs comme brillant, sombre, clair, sourd, ouvert, fermé, lumineux, terne, nasillard, rond, chaud, doux, métallique. . . qui font pour la plupart référence à l'intuition quotidienne reliant les sons générés aux objets sonores possédant ces qualités. 40, 75, 288, 289 242. 27.

facture désigne le processus de fabrication d'un instrument de musique, mais aussi l'industrie qui y est associée. 9

fréquence nombre de fois qu'un signal périodique se répète identique à lui même pendant une seconde. Cette quantité est exprimée en Hz, et permet de mesurer la **hauteur** d'un son périodique. 10, 25, 27, 287, 288

gamme suite de notes conjointes, dont la dernière est à l'**octave** de la première. Dans la musique tonale, la gamme est constituée de sept degrés : tonique, sus-tonique, médiane, sous-dominante, dominante, sus-dominante, sensible, qui correspondent par exemple aux notes *do, ré, mi, fa, sol, la* et *si* pour la gamme de « do majeur ». 10, 288

harmonique on qualifie d'harmonique un **spectre** composé de **partiels** exactement multiples d'une **fréquence** fondamentale. Par extension, on appelle harmonique un partiel appartenant à un spectre harmonique. 14, 22, 23, 27, 39

hauteur un son périodique est caractérisé par sa période, plus petit intervalle de temps après lequel le son se répète identique à lui-même. Sa hauteur se mesure en comptant le nombre de fois que la période se répète en une seconde, quantité exprimée en Hertz (Hz), et proportionnelle à l'inverse de la période. On l'appelle fréquence fondamentale du son. Plus le son se répète en une seconde, plus il paraîtra aigu (haute fréquence), et à l'inverse, moins il se répète, plus il paraîtra grave (basse fréquence). L'oreille humaine est capable d'entendre des sons compris entre 20 Hz et 20 kHz (un peu moins ou un peu plus selon les individus et l'âge). 27, 39, 287, 288

inharmonicité on qualifie d'inharmonique un **spectre** composé de **partiels** proches d'être multiples d'une **fréquence** fondamentale. 14, 22, 59

nuance terme musical qualifiant l'intensité d'un son. On trouve, du moins fort au plus fort, les nuances pianissimo (pp), mezzo-piano (mp), mezzo-forte (mf), forte (f) et fortissimo (ff). On appelle « crescendo » le fait d'augmenter la nuance, et « decrescendo » le fait de la diminuer. 9, 14, 74, 118, 289

octave un son est l'octave d'un autre si leurs **fréquences** fondamentales sont le double l'une de l'autre. Les deux sons paraissent alors tellement semblables à l'oreille qu'on appelle les deux notes par le même nom. 287, 288

partiel fréquence d'une des composantes périodiques qui composent un signal. 15, 27, 39, 80, 287, 288
précurseur partie d'un signal temporel ayant lieu avant le commencement théorique. 29, 40

spectre ce mot sera utilisé dans ce manuscrit dans deux contextes, précisons ici notre pensée. 22, 25, 287, 288

Oscillateurs harmoniques. En toute généralité, la plupart des systèmes que nous rencontrerons dans ce document rentrent dans le contexte plus abstrait des oscillateurs harmoniques :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \mathcal{A}u = 0$$

avec \mathcal{A} un opérateur de V dans \mathcal{H} autoadjoint à résolvante compacte, avec V et \mathcal{H} deux espaces de Hilbert tels que V s'injecte de façon compacte dans \mathcal{H} . Le théorème spectral (voir [?]) permet de montrer que l'opérateur \mathcal{A} possède un ensemble de valeurs propres et vecteurs propres $(\lambda_n, w_n) \in \mathbb{C} \times V$ tels que

$$\mathcal{A}w_n = \lambda_n w_n$$

Les valeurs propres constituent une suite de réels positifs $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui tend vers l'infini, tandis que la famille des $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de \mathcal{H} . Dans ce contexte, on appelle spectre l'ensemble des valeurs propres. 14.

Transformée de Fourier. Lorsque l'on parle d'un signal temporel $s(t)$ comme par exemple un son, ou un déplacement de corde, ou encore une accélération du chevalet, alors on qualifie de spectre le graphe du module de sa transformée de Fourier : $f \mapsto |\hat{s}(f)|$, où $2\pi f = \omega$, avec ω la variable de Fourier. Dans le cadre d'un signal musical, le signal est constitué d'une somme de signaux périodiques dont les **fréquence** sont proches d'être multiples d'une fréquence de référence que l'on appelle « fondamentale ». Ceci se matérialise dans le spectre par des pics prononcés dont l'abscisse est égale à ces fréquences. Par exemple, formellement, le signal $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ a pour spectre la somme de deux distributions de Dirac situées en $\pm f_0$. En pratique, les signaux sont amortis, ce qui a pour effet de transformer les distributions de Dirac en fonctions usuelles centrées presque au même point, et de plus la transformée de Fourier n'est pas exacte. En effet, d'une part l'intégration qui intervient dans la définition de la transformée est faite sur un intervalle de temps fini et non pas l'ensemble \mathbb{R} tout entier, et d'autre part on utilise pour le calcul un ensemble discret de valeurs du signal qui est en fait échantillonné. L'effet de ces approximations sera négligé dans la suite, le lecteur intéressé pourra se référer à [?] pour plus de précisions. On pourra, par abus de langage, parler du spectre d'un signal temporel pour désigner l'ensemble des fréquences auxquelles apparaissent des maximums locaux désignant l'une des composantes périodiques du signal. 14.

spectrogramme diagramme temps fréquence d'un signal temporel, effectué avec une transformée de Fourier à fenêtre, et permettant de visualiser l'évolution spectrale du signal. Aussi appelé sonagramme ou sonogramme. 14, 231

tempérament règle de calcul qui permet de répartir les degrés d'un **gamme** au sein de l'**octave**. Il existe beaucoup de tempéraments construits depuis les débuts de la musique tonale, mais le tempérament aujourd'hui en vigueur pour l'**accord** des instruments à clavier comme le piano est le « tempérament égal » qui consiste à diviser l'octave en 12 parties égales qu'on appelle demi-tons. Les degrés sont alors séparés respectivement d'un ton, un ton, un demi-ton, un ton, un ton, un ton, un ton, un demi-ton. 22, 27

tessiture étendue des notes d'un instrument. Elle est divisée en trois grandes parties. 32, 39, 75, 80
 L'aigu contient les notes ayant les fréquences les plus hautes, à droite sur le clavier du piano. 9, 254.
 Le grave contient les notes ayant les fréquences les plus basses, à gauche sur le clavier du piano. 10.
 Le médium contient les notes ayant des fréquences médianes, au milieu sur le clavier du piano. 254.

timbre ensemble des éléments qui permettent de discriminer deux instruments de musique ou deux chanteurs à **hauteur** et intensité égales. L'enveloppe temporelle (la façon dont le son commence, est soutenu, et s'éteint), l'enveloppe spectrale (la façon dont les **partiels** sont répartis dans le **spectre**), le vibrato, contribuent par exemple au timbre d'un instrument. Lorsqu'un même instrument génère des sons différents, on parle plutôt de **couleurs** de son au sein d'un même timbre. 10, 22, 27, 40, 107

toucher capacité d'un pianiste à générer différentes **nuances** ou **couleurs** en jouant de son instrument. 9, 74

RÉFÉRENCES DU PREMIER CHAPITRE (MODÉLISATION)

- [Alvarez-Vázquez et Viaño, 1997] Alvarez-Vázquez, L. J. et Viaño, J. M. (1997). Modeling and optimization of non-symmetric plates. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 31(6) :733–763.
- [Anand, 1969] Anand, G. (1969). Large-amplitude damped free vibration of a stretched string. *J Acoust Soc Am*, 45(5) :1089–1096.
- [Anderssen et Stuart, 2007] Anderssen, R. et Stuart, W. (2007). The challenge for the piano maker. *Math. Scientist*, 32 :71–82.
- [Askenfelt, 1993a] Askenfelt, A. (1993a). Observations on the transient components of the piano tone. *Proceedings of the Stockholm Music Acoustics Conference*, 79 :297–301.
- [Askenfelt, 1993b] Askenfelt, A. (1993b). Observations on the transient components of the piano tone. KTH.
- [Askenfelt et Jansson, 1990] Askenfelt, A. et Jansson, E. V. (1990). From touch to string vibrations. *Five lectures on the acoustics of the piano*.
- [Askenfelt et Jansson, 1991] Askenfelt, A. et Jansson, E. V. (1991). From touch to string vibrations. ii : The motion of the key and hammer. *J Acoust Soc Am*, 90 :2383.
- [Bank et al., 2003] Bank, B., Avanzini, F., Borin, G., Poli, G. D., Fontana, F., et Rocchesso, D. (2003). Physically informed signal processing methods for piano sound synthesis : a research overview. *EUR-ASIP J. Appl. Signal Process.*, 2003 :941–952.
- [Bank et Sujbert, 2005] Bank, B. et Sujbert, L. (2005). Generation of longitudinal vibrations in piano strings : From physics to sound synthesis. *J Acoust Soc Am*, 117 :2268–2278.
- [Bensa et al., 2003] Bensa, J., Bilbao, S., et Kronland-Martinet, R. (2003). The simulation of piano string vibration : from physical models to finite difference schemes and digital waveguides. *J Acoust Soc Am*.
- [Bilbao, 2005] Bilbao, S. (2005). Conservative numerical methods for nonlinear strings. *J Acoust Soc Am*, 118(5) :3316–3327.
- [Boutillon, 1988] Boutillon, X. (1988). Model for piano hammers : Experimental determination and digital simulation. *J Acoust Soc Am*.
- [Brémaud, 2006] Brémaud, I. (2006). Diversité des bois utilisés ou utilisables en facture d’instruments de musique. *Thèse de Doctorat*, pages 1–321.
- [Bucur, 2007] Bucur, V. (2007). Acoustics of wood. *Springer*, pages 1–399.
- [Carrier, 1945] Carrier, G. F. (1945). On the non-linear vibration problem of the elastic string. *Q Appl Math*, 3(2) :157–165.

- [Chaigne et Askenfelt, 1994a] Chaigne, A. et Askenfelt, A. (1994a). Numerical simulation of piano strings. i. a physical model for a struck string using finite-difference methods. *J Acoust Soc Am*, 95(2) :1112–1118.
- [Chaigne et Askenfelt, 1994b] Chaigne, A. et Askenfelt, A. (1994b). Numerical simulations of piano strings. ii. comparisons with measurements and systematic exploration of some hammer string parameters. *J Acoust Soc Am*.
- [Chumnantas et al., 1994] Chumnantas, P., Greated, C. A., et Parks, R. (1994). Inharmonicity of nonuniform overwound strings. *J. Phys. IV France*, 04(C5) :C5–649–C5–652.
- [Ciarlet et Destuynder, 1979] Ciarlet, P. G. et Destuynder, P. (1979). A justification of the two-dimensional linear plate model. *J. Mécanique*, 18(2) :315–344.
- [Conklin, 1970] Conklin, H. A. (1970). Longitudinal mode tuning of stringed instruments. *United States Patent*, pages 1–8.
- [Conklin, 1996a] Conklin, H. A. (1996a). Design and tone in the mechanoacoustic piano. part i. piano hammers and tonal effects. *J Acoust Soc Am*, 99(6) :3286–3296.
- [Conklin, 1996b] Conklin, H. A. (1996b). Design and tone in the mechanoacoustic piano. part ii. piano structure. *J Acoust Soc Am*, 100(2) :695–708.
- [Conklin, 1996c] Conklin, H. A. (1996c). Design and tone in the mechanoacoustic piano. part iii. piano strings and scale design. *J Acoust Soc Am*, 100 :1286–1298.
- [Conklin, 1997] Conklin, H. A. (1997). Piano strings and “phantom” partials. *J Acoust Soc Am*.
- [Conklin, 1999] Conklin, H. A. (1999). Generation of partials due to nonlinear mixing in a stringed instrument. *J Acoust Soc Am*, 105 :536–545.
- [Cowper, 1966] Cowper, G. (1966). The shear coefficient in timoshenko’s beam theory (shear coefficient in timoshenko beam theory). *ASME*.
- [Cuenca, 2006] Cuenca, J. (2006). Modélisation du couplage corde - chevalet - table d’harmonie dans le registre aigu du piano. *JJCAAS 2006*, pages 1–1.
- [Cuenca et Caussé, 2007] Cuenca, J. et Caussé, R. (2007). Three-dimensional interaction between strings, bridge and soundboard in modern piano’s treble range. *19th international congress on acoustics*.
- [Dauge, 1996] Dauge, M. (1996). Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate, i. optimal error estimates. *Asymptotic Analysis*.
- [Dauge, 1998] Dauge, M. (1998). Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate. ii : Analysis of the boundary layer terms. *Asymptotic Analysis*.
- [Derveaux, 2002] Derveaux, G. (2002). Modélisation numérique de la guitare acoustique. *Thèse de Doctorat*, pages 1–393.
- [Derveaux et al., 2003] Derveaux, G., Chaigne, A., Joly, P., et Bécache, E. (2003). Time-domain simulation of a guitar : Model and method. *J Acoust Soc Am*, 114 :3368.
- [Donkin, 1870] Donkin, W. (1870). *Acoustics*. Oxford Clarendon Press Series.
- [Ege, 2010] Ege, K. (2010). La table d’harmonie du piano – études modales en basses et moyennes fréquences. *Thèse de Doctorat*, pages 1–190.
- [Fletcher, 1964] Fletcher, H. (1964). Normal vibration frequencies of a stiff piano string. *J Acoust Soc Am*, 36 :203.
- [Fletcher et Blackham, 1962] Fletcher, H. et Blackham, E. (1962). Quality of piano tones. *J Acoust Soc Am*.
- [Forss, 2010] Forss, C. (2010). La réparation du piano. *L’entretemps*.
- [Galembo et al., 2004] Galembo, A., Askenfelt, A., Cuddy, L., et Russo, F. (2004). Perceptual significance of inharmonicity and spectral envelope in the piano bass range. *Psychology Publications and Research*, page 6.
- [Giordano, 1998] Giordano, N. (1998). Sound production by a vibrating piano soundboard : Experiment. *J Acoust Soc Am*, 104 :1648.
- [Giordano, 2011] Giordano, N. (2011). Interview de giordano. *Discovery News*, pages 1–1.
- [Giordano et II, 2000] Giordano, N. et II, J. W. (2000). Piano hammers and their force compression characteristics : does a power law make sense? *J Acoust Soc Am*, 107 :2248.

- [Giordano et Jiang, 2004] Giordano, N. et Jiang, M. (2004). Physical modeling of the piano. *EURASIP J. Appl. Signal Process.*, 2004(7) :926–933.
- [Giordano et Korty, 1996] Giordano, N. et Korty, A. J. (1996). Motion of a piano string : Longitudinal vibrations and the role of the bridge. *J Acoust Soc Am*, 100(6) :3899–3908.
- [Grob, 2006] Grob, P. (2006). *Méthodes numériques de couplage pour la vibroacoustique instationnaire : Eléments finis spectraux d'ordre élevé et potentiels retardés*. PhD thesis, Paris IX Dauphine. reissner mindlin.
- [Guillaume, 2005] Guillaume, P. (2005). *Musique et acoustique : de l'instrument à l'ordinateur*. Hermès Lavoisier.
- [Hall, 1987] Hall, D. (1987). Piano string excitation ii : General solution for a hard narrow hammer. *J Acoust Soc Am*, 81 :535.
- [Hall et Askenfelt, 1988] Hall, D. et Askenfelt, A. (1988). Piano string excitation v : Spectra for real hammers and strings. *J Acoust Soc Am*, 83 :1627.
- [Han et al., 1999] Han, S., Benaroya, H., et Wei, T. (1999). Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5) :935–988.
- [Hanson et al., 1994] Hanson, R., Anderson, J., et Macomber, H. (1994). Measurements of nonlinear effects in a driven vibrating wire. *J Acoust Soc Am*, 96 :1549.
- [Harrison, 1948] Harrison, H. (1948). Plane and circular motion of a string. *J Acoust Soc Am*, 20 :874.
- [Hart et Fuller, 1934] Hart, H. et Fuller, M. (1934). A precision study of piano touch and tone. *J Acoust Soc Am*.
- [Hundley et al., 1978] Hundley, T., Benioff, H., et Martin, D. (1978). Factors contributing to the multiple rate of piano tone decay. *J Acoust Soc Am*, 64 :1303.
- [Izadbakhsh et al., 2008] Izadbakhsh, A., McPhee, J., et Birkett, S. (2008). Dynamic modeling and experimental testing of a piano action mechanism with a flexible hammer shank. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 3 :031004.
- [Kirk, 1959] Kirk, R. (1959). Tuning preferences for piano unison groups. *J Acoust Soc Am*, 31 :1644.
- [Knoblauch, 1944] Knoblauch, A. (1944). The clang tone of the pianoforte. *J Acoust Soc Am*, 16(1).
- [Kurmyshev, 2003] Kurmyshev, E. V. (2003). Transverse and longitudinal mode coupling in a free vibrating soft string. *Phys. Lett*, 310(2-3) :148–160.
- [Lambourg, 1997] Lambourg, C. (1997). Modèle temporel pour la simulation numérique de plaques vibrantes - application à la synthèse sonore. *Thèse de Doctorat*, pages 1–299.
- [le Rond D'Alembert, 1761] le Rond D'Alembert, J. (1761). *Opuscules mathématiques ou mémoires sur différents sujets de géométrie, de mécanique, d'optique, d'astronomie, etc. Tome premier*. David, Paris.
- [Legge et Fletcher, 1984] Legge, K. et Fletcher, N. (1984). Nonlinear generation of missing modes on a vibrating string. *J Acoust Soc Am*.
- [Mamou-Mani et al., 2008] Mamou-Mani, A., Frelat, J., et Besnainou, C. (2008). Numerical simulation of a piano soundboard under downbearing. *J Acoust Soc Am*, 123 :2401.
- [Moore et Zietlow, 2006] Moore, T. et Zietlow, S. (2006). Interferometric studies of a piano soundboard. *J Acoust Soc Am*, 119 :1783.
- [Morse et Ingard, 1968] Morse, P. et Ingard, K. (1968). *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press.
- [Murthy et Ramakrishna, 1965] Murthy, G. et Ramakrishna, B. (1965). Nonlinear character of resonance in stretched strings. *J Acoust Soc Am*, 38 :461.
- [Nakamura et Iwaoka, 1986] Nakamura, I. et Iwaoka, S. (1986). Piano tone synthesis using digital filters by computer simulation. *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP'86.*, 11 :1293–1296.
- [Narasimha, 1968] Narasimha, R. (1968). Non-linear vibration of an elastic string. *Journal of Sound and Vibration*.
- [Oplinger, 1960] Oplinger, D. (1960). Frequency response of a nonlinear stretched string. *J Acoust Soc Am*.
- [O'Reilly et Holmes, 1992] O'Reilly, O. et Holmes, P. J. (1992). Non-linear, non-planar and non-periodic vibrations of a string. *Journal of Sound and Vibration*, 153(3) :413–435.

- [Podlesak et Lee, 1988] Podlesak, M. et Lee, A. R. (1988). Dispersion of waves in piano strings. *J Acoust Soc Am*, 83 :305–317.
- [Quintana et Nallim, 2010] Quintana, M. V. et Nallim, L. G. (2010). A variational approach to free vibration analysis of shear deformable polygonal plates with variable thickness. *Applied Acoustics*, 71(5) :393–401.
- [Railsback, 1937] Railsback, O. (1937). Scale temperament as applied to piano tuning. *18th meeting of the acoustical society of america*, 9 :1–1.
- [Rayleigh, 1877] Rayleigh, J. (1877). *The Theory of Sound. Vol One*. Dover Publications, New York.
- [Reblitz, 2005] Reblitz, A. (2005). *Le piano. Entretien, accord et restauration*. L’entretemps.
- [Reissner, 1945] Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 12 :69–77.
- [Rhaouti et al., 1999] Rhaouti, L., Chaigne, A., et Joly, P. (1999). Time-domain modeling and numerical simulation of a kettledrum. *J Acoust Soc Am*, 105 :3545.
- [Rosenberg, 1966] Rosenberg, R. (1966). On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics*.
- [Sanhueza, 2010] Sanhueza, F. (2010). Métodos de elementos finitos para estructuras delgadas. *Thèse de Doctorat*, pages 1–122.
- [Schuck et Young, 1943] Schuck, O. H. et Young, R. (1943). Observations on the vibrations of piano strings. *J Acoust Soc Am*, 15(1) :1–11.
- [Shaw et Pierre, 1993] Shaw, S. et Pierre, C. (1993). Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*.
- [Stulov, 1995] Stulov, A. (1995). Hysteretic model of the grand piano hammer felt. *J Acoust Soc Am*, 97 :2577.
- [Stulov, 2003] Stulov, A. (2003). Experimental and theoretical studies of piano hammer. *Proceedings of the Stockholm Music Acoustics Conference*.
- [Suzuki, 1986] Suzuki, H. (1986). Vibration and sound radiation of a piano soundboard. *J Acoust Soc Am*.
- [Suzuki, 1987] Suzuki, H. (1987). Vibration analysis of a hammerhead system. *J Acoust Soc Am*.
- [Suzuki et Nakamura, 1990] Suzuki, H. et Nakamura, I. (1990). Acoustics of pianos. *Applied Acoustics*, 30(2-3) :147–205.
- [Szabo et Babuska, 1991] Szabo, B. et Babuska, I. (1991). Finite element analysis. *books.google.com*.
- [Ta-Tsien, 1994] Ta-Tsien, L. (1994). *Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems*. Wiley.
- [Tanaka et al., 1996] Tanaka, H., Nagai, K., et Mizutani, K. (1996). Two-dimensional motion of a single piano string. *J Acoust Soc Am*, 100(4).
- [Timoshenko, 1921] Timoshenko, S. (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine*, 744.
- [Touze, 2004] Touze, C. (2004). Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1-2) :77–101.
- [Touze et Thomas, 2003] Touze, C. et Thomas, O. (2003). Modes normaux non-linéaires de systèmes continus. *Actes du 16^{ème} Congrès Français de Mécanique*, pages 1–6.
- [Vyasarayani et al., 2009] Vyasarayani, C., Birkett, S., et McPhee, J. (2009). Modeling the dynamics of a compliant piano action mechanism impacting an elastic stiff string. *J Acoust Soc Am*, 125 :4034.
- [Watzky, 1992] Watzky, A. (1992). Non-linear three-dimensional large-amplitude damped free vibration of a stiff elastic stretched string. *Journal of Sound and Vibration*, 153(1) :125–142.
- [Weinreich, 1977] Weinreich, G. (1977). Coupled piano strings. *J Acoust Soc Am*, 62 :1474.
- [Young, 1954] Young, R. (1954). Inharmonicity of piano bass strings. *J Acoust Soc Am*, 26(144).

RÉFÉRENCES DU SECOND CHAPITRE (DISCRÉTISATION)

- [Allaire, 2007] Allaire, G. (2007). Numerical analysis and optimization : an introduction to mathematical modelling and numerical simulation. *Oxford Science Publications*.
- [Amestoy et al., 2000] Amestoy, P., Duff, I., et L'Excellent, J.-Y. (2000). Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184(2-4) :501 – 520.
- [Arnold et Brezzi, 1997] Arnold, D. N. et Brezzi, F. (1997). Locking-free finite element methods for shells. *Mathematics of Computation*.
- [Betsch et Steinmann, 2000] Betsch, P. et Steinmann, P. (2000). Conservation properties of a time fe method. part i : time-stepping schemes for n-body problems. *Int J Numer Meth Eng*, 49(5) :599–638.
- [Betsch et Steinmann, 2001] Betsch, P. et Steinmann, P. (2001). Conservation properties of a time fe method - part ii : Time-stepping schemes for non-linear elastodynamics. *Int J Numer Meth Eng*, 50(8) :1931–1955.
- [Bilbao, 2005] Bilbao, S. (2005). Conservative numerical methods for nonlinear strings. *J Acoust Soc Am*, 118(5) :3316–3327.
- [Chapelle, 1998] Chapelle, D. (1998). An optimal low-order locking-free finite element method for reissner-mindlin plates. *Math. Models Methods Appl. Sci*.
- [Chin et Quint, 1989] Chin, Y. et Quint, C. (1989). Explicit energy-conserving schemes for the three-body problem. *J. Comput. Phys*, 83(2) :485–493.
- [Cohen, 2004] Cohen, G. (2004). *Higher Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*.
- [Cohen et Grob, 2007] Cohen, G. et Grob, P. (2007). Mixed higher order spectral finite elements for reissner-mindlin equations. *Siam J Sci Comput*, 29 :986.
- [Dauge et al., 2004] Dauge, M., Faou, E., et Yosibash, Z. (2004). Plates and shells : Asymptotic expansions and hierarchical models. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, pages 1–49.
- [Dautray et al., 2000] Dautray, R., Lions, J., Bardos, C., Cessenat, M., Lascaux, P., Kavenoky, A., Mercier, B., Pironneau, O., Scheurer, B., et Sentis, R. (2000). Mathematical analysis and numerical methods for science and technology - vol. 6. *Springer*.
- [de Frutos et Sanz-Serna, 1997] de Frutos, J. et Sanz-Serna, J. M. (1997). Accuracy and conservation properties in numerical integration : the case of the korteweg-de vries equation. *Numerische Mathematik*, 75(4) :421–445.
- [Derveaux, 2002] Derveaux, G. (2002). Modélisation numérique de la guitare acoustique. *Thèse de Doctorat*, pages 1–393.

- [Diaz, 2005] Diaz, J. (2005). Approches analytiques et numériques de problèmes de transmission en propagation d'ondes en régime transitoire. *Thèse de Doctorat*, pages 1–422.
- [Duprat, 2011] Duprat, V. (2011). Conditions aux limites absorbantes enrichies pour l'équation des ondes et l'équation de helmoltz. *Thèse de Doctorat*.
- [Duruflé et al., 2009] Duruflé, M., Grob, P., et Joly, P. (2009). Influence of gauss and gauss-lobatto quadrature rules on the accuracy of a quadrilateral finite element method in the time domain. *Numer Meth Part D E*, 25(3) :526–551.
- [Fauqueux, 2003] Fauqueux, S. (2003). Eléments finis mixtes spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes élastiques en régime transitoire. *Thèse de Doctorat*, pages 1–289.
- [Furihata, 2001] Furihata, D. (2001). Finite-difference schemes for nonlinear wave equation that inherit energy conservation property. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 134(1-2) :37–57.
- [Gonzalez, 2000] Gonzalez, O. (2000). Exact energy and momentum conserving algorithms for general models in nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :1763–1783.
- [Gonzalez et Simo, 1996] Gonzalez, O. et Simo, J. (1996). On the stability of symplectic and energy-momentum algorithms for non-linear hamiltonian systems with symmetry. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134 :197–222.
- [Greenspan, 1984] Greenspan, D. (1984). Conservative numerical methods for $\ddot{x} = f(x)$. *J. Comput. Phys*, 56 :28–41.
- [Grob, 2006] Grob, P. (2006). *Méthodes numériques de couplage pour la vibroacoustique instationnaire : Eléments finis spectraux d'ordre élevé et potentiels retardés*. PhD thesis. reissner mindlin.
- [Gross et al., 2005] Gross, M., Betsch, P., et Steinmann, P. (2005). Conservation properties of a time fe method. part iv : Higher order energy and momentum conserving schemes. *Int J Numer Meth Eng*, 63(13) :1849–1897.
- [Hairer, 1994] Hairer, E. (1994). Backward analysis of numerical integrators and symplectic methods. *Ann. Numer. Math.*, 1(1-4) :107–132.
- [Hairer et Lubich, 1997] Hairer, E. et Lubich, C. (1997). The life-span of backward error analysis for numerical integrators. *Numerische Mathematik*, 76 :441–462.
- [Hénon et al., 2002] Hénon, P., Ramet, P., et Roman, J. (2002). Pastix : A high-performance parallel direct solver for sparse symmetric definite systems. *Parallel Computing*, 28(2) :301–321.
- [Hughes et al., 1978] Hughes, T., Caughey, T., et Liu, W. (1978). Finite-element methods for nonlinear elastodynamics which conserve energy. *J. Appl. Mech.*, 45(2) :366–370.
- [Imperiale, 2012] Imperiale, S. (2012). Modélisation mathématique et numérique de capteurs piézoélectriques. *Thèse de Doctorat*.
- [Kevrekidis, 2003] Kevrekidis, P. (2003). On a class of discretizations of hamiltonian nonlinear partial differential equations. *Physica. D*, 183(1-2) :68–86.
- [Lambourg, 1997] Lambourg, C. (1997). Modèle temporel pour la simulation numérique de plaques vibrantes - application à la synthèse sonore. *Thèse de Doctorat*, pages 1–299.
- [Li et Vu-Quoc, 1995] Li, S. et Vu-Quoc, L. (1995). Finite difference calculus invariant structure of a class of algorithms for the nonlinear klein-gordon equation. *SIAM J Numer Anal*, pages 1839–1875.
- [Mickens, 2001] Mickens, R. (2001). A non-standard finite-difference scheme for conservative oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, 240(3) :587–591.
- [Mickens, 2005] Mickens, R. (2005). A numerical integration technique for conservative oscillators combining nonstandard finite-difference methods with a hamilton's principle. *Journal of Sound and Vibration*, 285(1-2) :477–482.
- [Quarteroni et al., 2007] Quarteroni, A., Sacco, R., et Saleri, F. (2007). *Méthodes Numériques*.
- [Quispel et Turner, 1996] Quispel, G. R. W. et Turner, G. S. (1996). Discrete gradient methods for solving odes numerically while preserving a first integral. *J. Phys. A*, 29(13) :L341–L349.
- [Reich, 1999] Reich, S. (1999). Backward error analysis for numerical integrators. *SIAM J Numer Anal*, 36(5) :1549–1570.
- [Rhaouti, 1999] Rhaouti, L. (1999). Domaines fictifs pour la modélisation d'un problème d'interaction fluide - structure : simulation de la timbale. *Thèse de Doctorat*.

- [Sanz-Serna, 1991] Sanz-Serna, J. M. (1991). Symplectic integrators for hamiltonian problems : an overview. *Acta Numerica*.
- [Strauss et Vazquez, 1978] Strauss, W. et Vazquez, L. (1978). Numerical solution of a nonlinear klein-gordon equation. *J. Comput. Phys*, 28(2) :271–278.
- [Tsogka, 1999] Tsogka, C. (1999). Modélisation mathématique et numérique de la propagation d’ondes élastiques 3d dans un milieu complexe avec défauts. *Thèse de Doctorat*.
- [Zhong et Marsden, 1988] Zhong, G. et Marsden, J. E. (1988). Lie-poisson hamilton-jacobi theory and lie-poisson integrators. *Phys. Lett*, 133(3) :134–139.

AUTRES RÉFÉRENCES

- [Askenfelt et al., 1990] Askenfelt, A., Conklin, H. A., Jansson, E. V., Hall, D., Weinreich, G., et Wogram, K. (1990). Five lectures on the acoustics of the piano. *Edited by Anders Askenfelt*.
- [Askenfelt et Jansson, 1993] Askenfelt, A. et Jansson, E. (1993). From touch to string vibrations. iii : String motion and spectra. *The Journal of the Acoustical Society of . . .*
- [Bilbao, 2005] Bilbao, S. (2005). Conservative numerical methods for nonlinear strings. *J Acoust Soc Am*, 118(5) :3316–3327.
- [Bucur, 2007] Bucur, V. (2007). Acoustics of wood. *Springer*, pages 1–399.
- [Conklin, 1996a] Conklin, H. A. (1996a). Design and tone in the mechanoacoustic piano. part i. piano hammers and tonal effects. *J Acoust Soc Am*, 99(6) :3286–3296.
- [Conklin, 1996b] Conklin, H. A. (1996b). Design and tone in the mechanoacoustic piano. part ii. piano structure. *J Acoust Soc Am*, 100(2) :695–708.
- [Conklin, 1996c] Conklin, H. A. (1996c). Design and tone in the mechanoacoustic piano. part iii. piano strings and scale design. *J Acoust Soc Am*, 100 :1286–1298.
- [Derveaux et al., 2003] Derveaux, G., Chaigne, A., Joly, P., et Bécache, E. (2003). Time-domain simulation of a guitar : Model and method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 114 :3368.
- [Ege, 2010] Ege, K. (2010). La table d’harmonie du piano – études modales en basses et moyennes fréquences. *Thèse de Doctorat*, pages 1–190.
- [Giordano, 2011] Giordano, N. (2011). Evolution of music wire and its impact on the development of the piano. *161st ASA Meeting Proceedings*, pages 1–3.
- [Giordano et Korty, 1996] Giordano, N. et Korty, A. J. (1996). Motion of a piano string : Longitudinal vibrations and the role of the bridge. *J Acoust Soc Am*, 100(6) :3899–3908.
- [Godlewski et Raviart, 1991] Godlewski, E. et Raviart, P. (1991). *Hyperbolic systems of conservation laws*.
- [Han et al., 1999] Han, S., Benaroya, H., et Wei, T. (1999). Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5) :935–988.
- [Harrison, 1948] Harrison, H. (1948). Plane and circular motion of a string. *Acoustical Society of America Journal*, 20 :874.
- [Hart et Fuller, 1934] Hart, H. et Fuller, M. (1934). A precision study of piano touch and tone. *J Acoust Soc Am*.
- [Hundley et al., 1978] Hundley, T., Benioff, H., et Martin, D. (1978). Factors contributing to the multiple rate of piano tone decay. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 64 :1303.
- [Izadbakhsh et al., 2008] Izadbakhsh, A., McPhee, J., et Birkett, S. (2008). Dynamic modeling and experimental testing of a piano action mechanism with a flexible hammer shank. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 3 :031004.

- [Joly, 2001] Joly, P. (2001). Analyse et approximation de modèles de propagation d'ondes. *Cours de l'Ecole polytechnique*.
- [Lambourg, 1997] Lambourg, C. (1997). Modèle temporel pour la simulation numérique de plaques vibrantes - application à la synthèse sonore. *PhDThesis*, pages 1–299.
- [Murthy et Ramakrishna, 1965] Murthy, G. et Ramakrishna, B. (1965). Nonlinear character of resonance in stretched strings. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 38 :461.
- [Oplinger, 1960] Oplinger, D. (1960). Frequency response of a nonlinear stretched string. *The Journal of the Acoustical Society of America*.
- [Podlesak et Lee, 1988] Podlesak, M. et Lee, A. R. (1988). Dispersion of waves in piano strings. *J Acoust Soc Am*, 83 :305–317.
- [Reblitz, 2005] Reblitz, A. (2005). *Le piano. Entretien, accord et restauration*.
- [Rhaouti et al., 1999] Rhaouti, L., Chaigne, A., et Joly, P. (1999). Time-domain modeling and numerical simulation of a kettledrum. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 105 :3545.
- [Rössle, 1999] Rössle, A. (1999). On the derivation of an asymptotically correct shear correction factor for the reissner-mindlin plate model. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 328(3) :269–274.
- [Schuck et Young, 1943] Schuck, O. H. et Young, R. (1943). Observations on the vibrations of piano strings. *J Acoust Soc Am*, 15(1) :1–11.
- [Suzuki et Nakamura, 1990] Suzuki, H. et Nakamura, I. (1990). Acoustics of pianos. *Applied Acoustics*, 30(2-3) :147–205.
- [Ta-Tsien, 1994] Ta-Tsien, L. (1994). *Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems*.
- [Valette et Cuesta, 1993] Valette, C. et Cuesta, C. (1993). *Mécanique de la corde vibrante*.
- [Wegst, 2006] Wegst, U. (2006). Wood for sound. *American Journal of Botany*, 93(10) :1439.
- [Weinreich, 1977] Weinreich, G. (1977). Coupled piano strings. *J Acoust Soc Am*, 62 :1474.
- [Yanagisawa et Nakamura, 1982] Yanagisawa, T. et Nakamura, K. (1982). Dynamic compression characteristics of piano hammer. *Transactions of Musical Acoustics Technical Group Meeting of Acoustic Society of Japan*.

MODÉLISATION ET SIMULATION NUMÉRIQUE D'UN PIANO PAR MODÈLES PHYSIQUES.

Cette étude porte sur la modélisation et la simulation numérique d'un piano, en domaine temporel, par modèles physiques. Nous souhaitons rendre compte du comportement vibratoire et acoustique du piano, en prenant en compte les éléments principaux qui contribuent à la production du son. La table d'harmonie est modélisée par une équation bidimensionnelle de plaque épaisse, le système de Reissner Mindlin, pour un matériau orthotrope et hétérogène, dont l'amortissement dépend de la fréquence. Grâce aux équations de la vibroacoustique, la table rayonne dans l'air, dans lequel on souhaite calculer le champ acoustique complet autour de la ceinture du piano, que l'on suppose rigide. La table d'harmonie est d'autre part sollicitée par les cordes, à travers le chevalet où elles présentent un léger angle par rapport au plan horizontal. Chaque corde est modélisée par un système d'équations monodimensionnelles amorties dans lequel on prend en compte non seulement les ondes transversales excitées par le marteau, mais aussi la raideur à travers les ondes de cisaillement, ainsi que le couplage avec les ondes longitudinales provenant de la prise en compte des non linéarités géométriques. Le marteau est lancé avec une vitesse initiale vers un chœur de cordes, contre lequel il s'écrase avant d'être repoussé par les cordes. La force d'interaction dépend de façon non linéaire de l'écrasement du marteau.

Le modèle complet de piano, que l'on souhaite résoudre numériquement, consiste donc en un système couplé d'équations aux dérivées partielles, dont chacune revêt des difficultés de nature différente : la corde est régie par un système d'équations non linéaires, la table d'harmonie est soumise à un amortissement dépendant de la fréquence, la propagation acoustique requiert un très grand nombre d'inconnues ; auxquelles s'ajoute la difficulté inhérente aux couplages. D'une part, la stabilité numérique du schéma discret peut être compromise par la présence d'équations non linéaires et de nombreux couplages. Une méthode efficace pour garantir cette stabilité a priori est de construire un schéma qui conserve, ou dissipe, un équivalent discret de l'énergie physique d'un pas de temps au suivant. Une contribution majeure de ce travail a été de développer des schémas préservant une énergie discrète pour une classe de systèmes non linéaires dans laquelle s'inscrit le modèle de corde. D'autre part, afin d'augmenter l'efficacité de la méthode et de réduire le coût des calculs numériques, il est souhaitable de mettre à jour de façon découplée les inconnues liées aux différentes parties du problème, sur lesquelles la discrétisation en temps est faite de façon différente, afin de s'adapter aux spécificités de chacune. L'introduction de multiplicateurs de Lagrange nous permet de réaliser ce découplage artificiel grâce à des compléments de Schur adaptés.

L'utilisation du code de calcul en situation réaliste montre le potentiel d'une telle modélisation d'un piano complet en domaine temporel. Au delà de très bien reproduire les mesures, il est possible d'étudier l'influence de certains phénomènes physiques (corde raide, non linéaire), de la géométrie ou encore des matériaux utilisés sur le comportement vibratoire général du piano, et sur le son en particulier. L'enrichissement spectral, ainsi que l'apparition des « partiels fantômes » et du précurseur non linéaire sont clairement mis en évidence pour les grandes amplitudes de jeu, soulignant l'intérêt de notre approche dans la compréhension du fonctionnement de l'instrument.

Mots-clés : piano, schémas préservant l'énergie, stabilité numérique, éléments finis d'ordre élevé, précurseur non linéaire et partiels fantômes, phénomènes d'amortissement.

MODELING AND NUMERICAL SIMULATION OF A PIANO.

The purpose of this study is the time domain modeling and numerical simulation of a piano. We aim at explaining the vibratory and acoustical behavior of the piano, by taking into account the main elements that contribute to sound production. The soundboard is modeled as a bidimensional thick, orthotropic, heterogeneous, frequency dependant damped plate, using Reissner Mindlin equations. The vibroacoustics equations allow the soundboard to radiate into the surrounding air, in which we wish to compute the complete acoustical field around the perfectly rigid rim. The soundboard is also coupled to the strings at the bridge, where they form a slight angle from horizontal. Each string is modeled by a one dimensional damped system of equations, taking into account not only the transversal waves excited by the hammer, but also the stiffness thanks to shear waves, as well as the longitudinal waves arising from geometric nonlinearities. The hammer is given an initial velocity that projects it towards a choir of strings, before being repelled. The interacting force is a nonlinear function of the hammer compression.

The final piano model that will be discretized is a coupled system of partial differential equations, each of them exhibiting specific difficulties (nonlinear nature of the string system of equations, frequency dependant damping of the soundboard, great number of unknowns required for the acoustic propagation), in addition to couplings' inherent difficulties. On the one hand, numerical stability of the discrete scheme can be compromised by nonlinear and coupling terms. A very efficient way to guarantee this stability is to construct a numerical scheme which ensures the conservation (or dissipation) of a discrete equivalent of the continuous energy, across time steps. A major contribution of this work has been to develop energy preserving schemes for a class of nonlinear systems of equations, in which enters the string model. On the other hand, numerical efficiency and computation time reduction require that the unknowns of each problem's part, for which time discretization is specific, hence different, be updated separately. To achieve this artificial decoupling, adapted Schur complements are performed after Lagrange multipliers are introduced.

The potential of this time domain piano modeling is emphasized by realistic numerical simulations. Beyond greatly replicating the measurements, the program allows us to investigate the influence of physical phenomena (string stiffness or nonlinearity), geometry or materials on the general vibratory behavior of the piano, sound included. Spectral enrichment, « phantom partials » and nonlinear precursors are clearly revealed when large playing amplitudes are involved, highlighting how this approach can help better understand how a piano works.

Keywords : piano, energy preserving schemes, numerical stability, high order finite elements, nonlinear precursor and phantom partials, damping mechanisms.