



**HAL**  
open science

# Réalisation et caractérisation de mesures quantiques non-destructives en optique .

Jean-Philippe Poizat

► **To cite this version:**

Jean-Philippe Poizat. Réalisation et caractérisation de mesures quantiques non-destructives en optique .. Optique [physics.optics]. Université Paris Sud - Paris XI, 1993. Français. NNT : . pastel-00714222

**HAL Id: pastel-00714222**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00714222>**

Submitted on 3 Jul 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY  
n° d'ordre

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD  
CENTRE D'ORSAY

# THÈSE

présentée pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

par

Jean-Philippe POIZAT

RÉALISATION ET CARACTÉRISATION  
DE MESURES QUANTIQUES NON-DESTRUCTIVES  
EN OPTIQUE

Soutenue le 10 juin 1993 devant la commission d'examen

M. A. ASPECT (Président)

M. A. BRILLET

Mme E. GIACOBINO

M. P. GRANGIER

M. J.M. RAIMOND

M. D.F. WALLS

11. 11. 11

## Abstract

The topic of this thesis is the theoretical analysis and experimental realization of quantum nondemolition measurements in optics.

A quantum measurement usually perturbs the quantity being measured by adding noise in the system under study. The purpose of a quantum nondemolition measurement is to control this back-action noise, by feeding it back exclusively into the observable complementary to the one being measured. We discuss here a set of quantitative criteria developed to evaluate the performance of a light intensity measuring device. These criteria allow us to distinguish clearly between a classical and a quantum domain of operation.

The first experiment that we have realized is based on the coupling of two light beams using the cross-Kerr effect in a non-linear medium. This medium consists of a sodium atomic beam located in a doubly-resonant optical cavity. In this system, a three level structure in a cascade configuration couples the intensity of the signal beam to the phase of the meter beam. We present here a detailed theoretical analysis of the quantum noise properties of this system. We have identified a range of parameters in which light-shift effects allow efficient transfer of information from the input beam to the measurement channel, without degradation of the signal. These theoretical predictions were confirmed by the experiments.

We have also implemented a second measurement scheme using detection by a photodiode followed by reemission by a light emitting diode. We have shown that when the photon-to-electron conversion rate for photodiodes and the electron-to-photon rate for light emitting diodes are close to unity, this system is able to measure and to reproduce the quantum fluctuations of the input beam. This experiment demonstrates possible applications of this type of device to ultra low noise optical telecommunication networks.



## Remerciements

Ce travail a été réalisé à l'Institut d'Optique Théorique et Appliquée. Je remercie Christian Imbert de m'avoir accueilli dans son laboratoire.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Philippe Grangier. La qualité et la précision de son encadrement, aussi bien dans le domaine expérimental que théorique, ont été décisifs dans la réalisation de ce travail. Je tiens à le remercier de la confiance qu'il m'a faite tout au long de cette thèse.

Je remercie également Dan Walls d'avoir dirigé la partie théorique de ce travail, en me faisant bénéficier de l'atmosphère stimulante et détendue de l'Université d'Auckland. Je le remercie de l'honneur qu'il me fait en venant participer à ce jury.

Je remercie tous les membres du *Physics Department* de l'Université d'Auckland pour avoir contribué à faire de mon séjour en Nouvelle Zélande une année exceptionnelle. Il m'a en particulier été très agréable et très profitable de travailler avec Klaus Gheri.

Je remercie Jean-François Roch pour les nombreuses discussions que nous avons eues. Merci aussi aux membres du groupe *femto* et du groupe *optique atomique* pour leur "bon voisinage".

Merci également à Luigi Lugiato et à son groupe de m'avoir accueilli à Milan en m'offrant la possibilité d'utiliser leurs programmes informatiques.

Je remercie Elisabeth Giacobino et Jean-Michel Raimond, qui ont bien voulu être les rapporteurs de ce mémoire. J'apprécie aussi l'intérêt pour ce travail qu'ont témoigné Alain Aspect et Alain Brillet, en acceptant de faire partie du jury.

L'informatisation du système d'acquisition des données par Michel Allain a grandement facilité le travail expérimental. Je le remercie également pour les nombreux dépannages. Merci aussi à Francis Contet et Gérard Roger pour la conception et la réalisation des pièces mécaniques de la "manip LED". Merci également aux électroniciens Alain Aide, Jean-Claude Rodier et André Villing pour leur aide et leurs conseils.

Merci à Mme Delmotte qui a assuré le tirage et la reliure de ce mémoire avec efficacité et gentillesse.

Je remercie également l'Ambassade de France en Nouvelle-Zélande pour le financement de ma coopération à l'Université d'Auckland.



# Table des Matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Mesures Quantiques Non-Destructives</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction aux mesures quantiques	9
1.1.1 La réduction du paquet d'onde	9
1.1.2 Mesures directes et indirectes	10
1.2 Mesures quantiques non-destructives	12
1.2.1 Définition générale	12
1.2.2 Définition pratique	13
1.3 Différents régimes de mesures QND en optique	17
1.3.1 Le bruit de photon en optique	17
1.3.2 Régimes à faibles nombre de quanta	17
1.3.3 Régimes linéarisés	18
1.4 Duplicateurs quantiques	19
<b>2 Critères QND</b>	<b>21</b>
2.1 Présentation	21
2.2 Les critères QND	21
2.2.1 Introduction	21
2.2.2 Coefficients de corrélations	22
2.2.3 Bruits équivalents	23
2.2.4 Coefficients de transfert	25
2.2.5 Comparaison des différents critères	26
2.3 Discussion	28
2.3.1 La lame séparatrice	28
2.3.2 Inégalités de Heisenberg et limites classiques	29
2.3.3 Indépendances des trois critères	31
2.3.4 Importance du gain sur la voie signal	34
2.4 Conclusion	35
<b>3 Théorie</b>	<b>37</b>
3.1 Introduction et présentation	37
3.2 Modèle paramétrique	38
3.2.1 Cadre du calcul	38
3.2.2 Equations de Langevin	40
3.2.3 Stabilité du système	42



3.2.4	Relations entrée-sortie . . . . .	43
3.2.5	Critères QND . . . . .	44
3.3	Calcul complet à trois niveaux . . . . .	46
3.3.1	Cadre général . . . . .	46
3.3.2	Méthode NZ . . . . .	51
3.3.3	Méthode IOTA-ENS . . . . .	57
3.3.4	Lien entre les deux méthodes . . . . .	59
3.3.5	Conclusion . . . . .	61
3.4	Discussion des résultats numériques . . . . .	62
3.4.1	QND avec deux faisceaux d'intensités similaires . . . . .	62
3.4.2	Mesures QND utilisant des transitions fantômes . . . . .	65
3.4.3	Atomes en $\Lambda$ . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Mesures QND avec un jet atomique de sodium</b>	<b>77</b>
4.1	Introduction . . . . .	77
4.2	Dispositif expérimental . . . . .	78
4.2.1	L'atome de sodium . . . . .	78
4.2.2	Le jet atomique . . . . .	78
4.2.3	Les lasers . . . . .	81
4.2.4	La cavité optique . . . . .	81
4.2.5	Montage expérimental . . . . .	83
4.3	Conditions expérimentales . . . . .	85
4.3.1	Recherche d'un point de fonctionnement . . . . .	85
4.3.2	Comparaison avec les prévisions théoriques . . . . .	86
4.4	Résultats . . . . .	89
4.4.1	Résultats expérimentaux . . . . .	89
4.4.2	Comparaison avec les prévisions théoriques . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Dispositif de mesure à semi-conducteurs</b>	<b>99</b>
5.1	Introduction . . . . .	99
5.2	Principe de l'expérience . . . . .	100
5.2.1	Cadre général . . . . .	100
5.2.2	Cas d'un faisceau incident sub-Poissonien . . . . .	104
5.3	Résultats expérimentaux . . . . .	105
5.3.1	Description du montage expérimental . . . . .	105
5.3.2	Résultats . . . . .	109
5.4	Conclusion . . . . .	115
	<b>Conclusion</b>	<b>119</b>
	<b>Annexes</b>	<b>125</b>
	<b>A Exemple de cas pathologiques pour les critères QND</b>	<b>125</b>
	<b>B Corrélation expérimentale</b>	<b>131</b>

---

<b>C</b>	<b>Dérivation des équations de Langevin quantiques</b>	<b>133</b>
C.1	Pour un mode d'une cavité couplé à un bain extérieur . . . . .	133
C.2	Pour un atome couplé aux modes vides du champ . . . . .	134
C.3	Cas général . . . . .	136
<b>D</b>	<b>Expressions entrée-sortie du modèle paramétrique pour <math>\alpha</math> arbitraire</b>	<b>137</b>
<b>E</b>	<b>Modèle à deux niveaux effectifs</b>	<b>139</b>
<b>F</b>	<b>Matrice de corrélation de bruit G</b>	<b>147</b>
<b>G</b>	<b>Exemples de calcul de corrélation à deux temps</b>	<b>149</b>
G.1	Corrélation sortie-sortie . . . . .	149
G.2	Corrélation entrée-sortie . . . . .	150
<b>H</b>	<b>Les détecteurs</b>	<b>151</b>
<b>I</b>	<b>Bruit thermique</b>	<b>155</b>
<b>J</b>	<b>Chaîne d'amplificateurs</b>	<b>157</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>161</b>

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34
35	36
37	38
39	40
41	42
43	44
45	46
47	48
49	50
51	52
53	54
55	56
57	58
59	60
61	62
63	64
65	66
67	68
69	70
71	72
73	74
75	76
77	78
79	80
81	82
83	84
85	86
87	88
89	90
91	92
93	94
95	96
97	98
99	100

# Introduction

Les problèmes d'une limitation quantique sur la précision d'une mesure sont connus, sur le plan théorique, depuis les débuts de la mécanique quantique. Ces conséquences, quelque peu dérangementes, du formalisme quantique ont été discutées, autour des années 1930, par les pères fondateurs comme Bohr, Heisenberg ou von Neumann [Wheeler 83]. Mais ce n'est que dans le milieu des années 70 que les physiciens ont été réellement confrontés de façon concrète avec cette limitation. Il était question, à l'époque, de construire des détecteurs à ondes gravitationnelles utilisant des résonateurs mécaniques (barres de Weber). Compte-tenu des ordres de grandeurs recherchés, un tel résonateur peut être modélisé, en première approximation, comme un oscillateur harmonique quantique. Or les effets attendus, extrêmement faibles, étaient de l'ordre, voire inférieurs, aux fluctuations quantiques de cet oscillateur. Il a alors été remarqué par Braginsky [Braginsky 74] qu'il était en fait possible de contourner cette limite par ce qui a été appelé des mesures Quantiques Non-Destructives (QND). Ce nouveau type de mesure concernait d'abord la mesure non-destructive de la position ou de l'impulsion d'un oscillateur mécanique et s'est tout naturellement généralisé à n'importe quel type d'oscillateur harmonique, et en particulier au cas du champ électromagnétique [Braginsky 77]. Plusieurs formalisations théoriques des mesures QND ont alors été développées à la fin des années 70, en particulier par Caves, Thorne ou Unruh [Thorne 78][Unruh 79][Caves 80] (voir aussi [Braginsky 80]). Devant les difficultés expérimentales concernant l'utilisation des barres de Weber, les projets de détection des ondes gravitationnelles se sont alors tournés vers des antennes gravitationnelles interférométriques [Brillet 85a][Brillet 85b].

Parallèlement, le développement de l'optique quantique, aussi bien sur le plan théorique [Walls 83], que expérimental [Slusher 85], a rendu possible l'accès à un contrôle des propriétés de la lumière au niveau de son bruit quantique (pour une revue voir [special 87a][special 87b][special 92]). Le bruit quantique, considéré auparavant comme une limite fondamentale pour la détection des ondes lumineuses, ne devenait alors plus qu'une limite technologique. Et c'est dans le domaine optique que les premières tentatives de réalisation de mesures QND ont été réalisées [Levenson 86][LaPorta 89][Grangier 91b], en utilisant le couplage établi par un milieu non-linéaire entre deux modes du champ électromagnétique, l'un étant pris comme signal à mesurer, et l'autre comme faisceau de mesure. Cependant, ces premières expériences n'ont en fait caractérisé rigoureusement que les corrélations quantiques entre ces deux faisceaux à leur sortie du dispositif de mesure. Les propriétés de "non-dégradation du signal" et de qualité de la mesure, faisant intervenir le faisceau

signal entrant n'étaient pas évaluées de façon très claire. L'introduction de critères quantitatifs [Holland 90][Grangier 92a], permettant de chiffrer les différentes qualités requise pour un système de mesure QND, puis de les comparer à un dispositif classique [Roch 92b], a considérablement clarifié cette situation. Mais jusqu'à présent aucune expérience n'avait jamais effectué de mesures directes de ces "critères QND".

L'objectif de ce mémoire est de présenter une analyse théorique et la réalisation expérimentale de deux dispositifs de mesure, sur lesquels nous avons pu mettre en évidence, de façon directe, le caractère non-classique de l'ensemble des propriétés de mesure du système. Nous essayerons également de faire ressortir les applications potentielles de tels dispositifs dans le domaine des réseaux de télécommunication optique à très bas niveau de bruit.

La première expérience utilise un milieu non-linéaire composé d'un jet atomique d'atomes de sodium placé dans une cavité optique. Une structure atomique à trois niveaux permet alors de coupler les fluctuations quantiques du faisceau signal, à celles d'un deuxième faisceau appelé faisceau de mesure. Pour un régime de paramètres adéquats, cette interaction effectue un transfert relativement efficace d'information du signal vers le faisceau de mesure, sans pour autant modifier de façon significative le signal.

Nous décrirons ensuite une deuxième expérience utilisant des matériaux semi-conducteurs, dans laquelle les fluctuations quantiques de la lumière sont d'abord transformées en fluctuations de courant électrique, mesurées et éventuellement amplifiées, puis reconverties en lumière.

## Organisation de la thèse

### Chapitre 1

Ce premier chapitre est consacré à une introduction sur les mesures quantiques en général et les mesures quantiques non-destructives en particulier.

Nous présenterons, dans un premier temps, les principales idées de la théorie orthodoxe de la mesure en mécanique quantique, développée, entre autres, par von Neumann [von Neumann 32]. Nous introduirons ensuite le concept de mesures quantiques non-destructives idéales, tel qu'il a été défini par Braginsky [Braginsky 92]. Nous illustrerons ceci par des exemples, et donnerons une définition plus pratique des mesure QND [Caves 80].

### Chapitre 2

Les définitions formelles des mesures QND idéales, introduites au chapitre précédent, ne permettent pas de chiffrer les performances en tant que système de mesure QND, d'un dispositif de mesure réel, donc non-idéal. L'objectif de ce chapitre est donc d'établir et de discuter des "critères QND" quantitatifs [Holland 90], mesurables expérimentalement [Grangier 92a].

### Chapitre 3

Nous développerons, dans ce chapitre, un modèle théorique de calcul des propriétés de bruit quantique de deux champs électromagnétiques couplés dans un système atomique à trois niveaux. Nous étudierons, plus particulièrement, les propriétés de ce système en tant que système de mesure QND.

Nous présenterons deux méthodes de calcul. La première de ces méthodes s'appuie sur le formalisme quantique standard "input-output" [Gardiner 85] développé principalement par l'école Néo-Zélandaise. La seconde méthode [Courty 91] s'inspire des résultats de la théorie de la réponse linéaire pour décrire le comportement des fluctuations quantique de la lumière en présence d'un milieu atomique. Nous démontrerons, pour conclure, l'équivalence de ces deux points de vue.

Nous discuterons ensuite les résultats numériques donnés par ces calculs dans différents régimes de paramètres.

### Chapitre 4

Nous décrirons, dans ce chapitre, le montage expérimental utilisé pour la réalisation de mesures QND utilisant un jet atomique de sodium dans une cavité optique doublement résonnante. Puis nous présenterons les résultats que nous avons obtenus et effectuerons une comparaison chiffrée avec les résultats théoriques, présentés dans le chapitre précédent.

### Chapitre 5

Nous présenterons, dans ce dernier chapitre, une expérience de mesure quantique basée sur la fidélité de la transmission du bruit quantique de la lumière par des dispositifs récepteurs et émetteurs de lumière à semi-conducteur (diodes électro-luminescentes et photodiodes). Le principe de cette expérience sera d'abord discuté théoriquement, puis nous exposerons les différents résultats expérimentaux obtenus.



# Chapitre 1

## Mesures Quantiques Non-Destructives

### 1.1 Introduction aux mesures quantiques

Le problème de la mesure en mécanique quantique est un sujet délicat, qui a été abondamment discuté dans la littérature depuis les débuts de la théorie quantique dans les années 1930, et l'est toujours de nos jours. Ceci doit vraisemblablement être attribué aux fortes implications philosophiques, donc non objectives, de ce problème, telles que par exemple la capacité de la physique quantique à décrire le monde réel. Nous n'allons certainement pas ici rentrer dans ce débat. Nous allons simplement résumer les concepts essentiels de la théorie de la mesure orthodoxe tels qu'ils ont été introduit par von Neumann [von Neumann 32].

#### 1.1.1 La réduction du paquet d'onde

Soit  $|\psi\rangle$  le vecteur d'état normé décrivant un système  $\mathcal{S}$  sur lequel on veut faire une mesure de l'observable  $\hat{A}$ . On suppose le spectre de  $\hat{A}$  discret. Le vecteur d'état  $|\psi\rangle$  se décompose alors dans une base propre de  $\hat{A}$  suivant

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle, \quad (1.1)$$

où les  $|\psi_i\rangle$  forment une base d'états propre de  $\hat{A}$ , dont les valeurs propres sont  $a_i$ , c'est-à-dire que  $\hat{A}|\psi_i\rangle = a_i|\psi_i\rangle$ . On supposera, pour simplifier les notations, que les valeurs propres  $a_i$  sont non-dégénérées.

Les postulats de base de la mécanique quantique nous disent alors que le résultat d'une mesure de l'observable  $\hat{A}$ , sera une des valeurs propres  $a_i$ , et que la probabilité  $P(a_i)$  d'obtenir la valeur  $a_i$  est donnée par

$$P(a_i) = |c_i|^2. \quad (1.2)$$

Le postulat de réduction du paquet d'onde de von Neumann stipule que l'état du système  $\mathcal{S}$  après une mesure de l'observable  $\hat{A}$  ayant donnée la valeur  $a_m$ , est décrit par le vecteur propre  $|\psi_m\rangle$ . On dit alors que le paquet d'onde, initialement



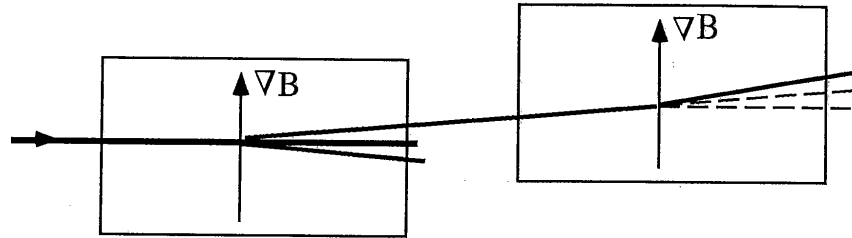


Figure 1.1: Deux dispositifs de Stern et Gerlach en série. Si le premier dispositif aiguille l'atome vers le haut, alors le deuxième en fera autant. Tous les angles sont supposés petits.

réparti sur la base des  $|\psi_i\rangle$  selon l'équation (1.1), est réduit (ou projeté) sur le vecteur d'état propre  $|\psi_m\rangle$  correspondant à la valeur  $a_m$  mesurée. Ceci correspond bien à notre intuition classique, si l'on considère, comme le fait Feynman [Feynman 79], deux dispositifs de Stern et Gerlach montés en série (voir figure (1.1)). Il semble alors clair, qu'une fois qu'on a mesuré la composante  $J_z$  d'un moment cinétique  $\vec{J}$ , c'est-à-dire dire que l'atome a été aiguillé dans une des voies du premier dispositif, le résultat donné par la deuxième mesure sera identique, c'est-à-dire que l'atome sera à nouveau aiguillé dans la même voie. Ce postulat est par contre moins intuitif lorsqu'il porte sur des systèmes spatialement étendus, et en particulier sur des systèmes à plusieurs particules.

Mis à part le cas dans lequel le système  $S$  est déjà dans un état propre de l'observable  $\hat{A}$ , la mesure modifie l'état quantique du système de façon indéterminée, et la projection du paquet d'onde apparaît donc comme un phénomène fondamentalement irréversible.

Il est à noter que ce postulat n'est pas toujours considéré dans la littérature comme un postulat de base, puisqu'il peut se déduire dans la plupart des cas des postulats fondamentaux [Hartle 68].

### 1.1.2 Mesures directes et indirectes

La distinction entre ces deux types de mesure a été introduite par von Neumann [von Neumann 32]. Nous allons nous inspirer ici des présentations de Wigner [Wigner 71], et de Braginsky [Braginsky 92].

#### Mesures directes

Une mesure directe est une mesure au cours de laquelle le système quantique  $S$  est annihilé ou voit son état quantique changé de manière arbitraire. Ceci se produit en particulier dès que le système interagit avec un dispositif classique, donc macroscopique, c'est-à-dire ayant un très grand nombre de degré de liberté ( $\sim 10^{23}$ ). Le paquet d'onde initial est alors complètement "dilué" dans la taille macroscopique du détecteur, et de ce fait irrémédiablement perdu. Ce processus est donc irréversible. L'exemple type d'un dispositif de mesure directe en optique est un

photomultiplicateur, pour lequel on a une absorption (donc destruction) du photon, puis amplification du signal électrique, pour passer à l'échelle macroscopique.

Les mesures directes sont, en fait, la façon usuelle de faire passer de l'information du niveau quantique microscopique vers le niveau classique macroscopique qui est celui de l'expérimentateur.

### Mesures indirectes

On considère maintenant que la mesure de l'observable  $\hat{A}$  sur le système  $\mathcal{S}$  se fait via un couplage avec un dispositif de mesure  $\mathcal{M}$ , qui est un objet quantique dont le vecteur d'état avant la mesure est  $|\beta\rangle$ . L'état du système  $\mathcal{S} + \mathcal{M}$  avant la mesure est donc décrit par le vecteur d'état  $|\psi\rangle \otimes |\beta\rangle$ , produit tensoriel des deux vecteurs d'états. La première étape de la mesure est alors d'établir des corrélations entre les deux objets quantiques  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{M}$ . La deuxième étape consiste ensuite, une fois que  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{M}$  ont fini d'interagir, à effectuer une mesure directe de l'état quantique de  $\mathcal{M}$ .

Considérons, dans un premier temps, le cas où le système  $\mathcal{S}$  avant la mesure est déjà dans un état propre<sup>1</sup>  $|\psi_m\rangle$  de valeur propre  $a_m$  de l'observable  $\hat{A}$ , la première étape du processus de la mesure indirecte peut se représenter de la façon suivante :

$$|\psi_m\rangle \otimes |\beta\rangle \rightarrow |\psi_m\rangle \otimes |\beta_m\rangle, \quad (1.4)$$

où  $|\beta_m\rangle$  est un état du système  $\mathcal{M}$  dont la mesure directe va ensuite permettre à l'expérimentateur de conclure que le résultat de la mesure est  $a_m$ .

Dans le cas plus courant où l'état initial du système  $\mathcal{S}$  n'est pas un état propre de  $\hat{A}$ , la première étape du processus de mesure peut alors se représenter par

$$|\psi\rangle \otimes |\beta\rangle \rightarrow |\chi_{\mathcal{S},\mathcal{M}}\rangle, \quad (1.5)$$

où  $|\chi_{\mathcal{S},\mathcal{M}}\rangle$  est un état non-factorisable décrivant l'ensemble  $\mathcal{S} + \mathcal{M}$  après la mesure. Ce nouvel état traduit le fait que le processus de mesure a fait naître des corrélations entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{M}$ . Il faut bien noter que dans cette première étape aucune réduction du paquet d'onde n'a encore eu lieu, que ce soit pour  $\mathcal{S}$  ou pour  $\mathcal{M}$ , puisque il ne s'est rien passé d'autre qu'une interaction Hamiltonienne entre deux systèmes quantiques. La réduction du paquet d'onde de  $\mathcal{S}$  n'intervient que lors de la mesure directe de  $\mathcal{M}$ , qui permet de transcrire l'information acquise par  $\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{S}$  sous une forme macroscopique pour la rendre intelligible à un expérimentateur.

Une illustration expérimentale de ce fait a été apportée par A. Aspect *et al* [Aspect 82] en réalisant des mesures de corrélations de polarisation sur des paires de photons émis par une cascade radiative. La mesure directe de la polarisation

<sup>1</sup>Cet état propre n'est cependant pas forcément connu de l'expérimentateur, qui sait seulement que l'état de  $\mathcal{S}$  avant la mesure est un état propre quelconque de  $\hat{A}$ . Dans ce cas, l'état est en fait décrit par une matrice densité diagonale, et (1.4) devient

$$\sum_m p_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m| \otimes |\beta\rangle \rightarrow \sum_m p_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m| \otimes |\beta_m\rangle \langle \beta_m|. \quad (1.3)$$

La mesure est alors simplement un "tirage au sort" classique.

de l'un des photons réduit alors le paquet d'onde de l'ensemble des deux photons, garantissant ainsi le résultat de la mesure de la polarisation du deuxième photon.

Il est important de noter à ce stade que, dans le cas général, l'information acquise par  $\mathcal{M}$  et donc par l'expérimentateur, ne concerne que l'état du système  $\mathcal{S}$  juste après l'interaction, c'est-à-dire avant qu'il ait eu le temps d'évoluer librement, et ne préjuge en rien de l'état de  $\mathcal{S}$  au moment où la mesure directe sur  $\mathcal{M}$  sera faite, ou à un temps ultérieur.

### Discussion

Voyons d'abord dans quelle catégorie de mesures se place le dispositif de Stern et Gerlach, considéré comme un système de mesure du spin d'un jet d'atomes. L'action du dispositif est de coupler les degrés de liberté externes de l'atome (impulsion, position) à son moment magnétique. Il existe alors à la sortie du dispositif des corrélations très fortes entre l'impulsion de l'atome et la valeur de son spin. Le système de mesure a donc établi des corrélations entre des grandeurs quantiques initialement indépendantes, ce qui correspond à la première étape d'une mesure indirecte. Il reste ensuite à détecter la déviation des atomes. Ceci peut être fait soit par une mesure directe au moyen d'un détecteur de position approprié, soit en ajoutant une étape supplémentaire avant la détection directe, en établissant de nouvelles corrélations entre l'impulsion ou la position de l'atome et un photon par exemple, ne faisant pas intervenir son spin. Remarquons également que tant que la mesure de position n'a pas été effectuée, il est possible en principe<sup>2</sup> de recombinaison les différents faisceaux au moyen d'un second Stern et Gerlach [Feynman 79], de façon à reconstruire l'état initial. Ceci démontre bien le caractère Hamiltonien, et donc réversible, de la première étape de la mesure.

On peut également se demander si cette classification des mesures quantiques en deux catégories n'est pas un peu restrictive. En effet, nous décrivons, à la fin de ce mémoire, une expérience dans laquelle nous avons détecté "directement" des photons en les absorbant dans une photodiode, pour ensuite les recréer dans un état propre du nombre de photon, correspondant au résultat lu de la mesure (aux efficacités quantiques près), et ceci grâce à une diode électro luminescente (cf. chapitre 5). Sur cet exemple, on s'aperçoit que l'information acquise lors d'une détection directe, peut également permettre de recréer un état quantique dans un état propre connu de l'observable mesurée. L'état propre dans lequel a été projeté le système  $\mathcal{S}$  n'est donc pas toujours irrémédiablement perdu.

## 1.2 Mesures quantiques non-destructives

### 1.2.1 Définition générale

La définition de Braginsky [Braginsky 92] pour les mesures quantiques non-destructives (QND) classe ce type de mesure dans les mesures indirectes. Soit  $\hat{A}$

<sup>2</sup>En pratique, cette recombinaison est presque impossible à réaliser dans un Stern et Gerlach, mais peut par contre facilement être réalisée pour des mesures de polarisation sur des photons.

l'observable que l'on veut mesurer, et soit  $\hat{U}$  l'opérateur d'évolution de l'ensemble du système  $\mathcal{S}$  soumis à la mesure, et du dispositif de mesure  $\mathcal{M}$ , entre le début  $t_0$  et la fin  $t_f$  de la mesure. Cet opérateur est défini par :

$$|\xi_f\rangle = \hat{U}|\xi_0\rangle, \quad (1.6)$$

où  $|\xi_0\rangle$  et  $|\xi_f\rangle$  sont les vecteurs d'états de l'ensemble  $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ , respectivement au commencement et à la fin de la mesure.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la mesure de l'observable  $\hat{A}$  soit une mesure quantique non-destructive est que :

$$[\hat{U}, \hat{A}] = 0. \quad (1.7)$$

Cette condition impose que l'observable  $\hat{A}$  mesurée ait la même valeur au temps  $t_f$  de la fin de la mesure, qu'à l'instant  $t_0$  du début de la mesure, mais ne garantit en rien la valeur de cette observable à un instant autre, ce qui autorise des mesures QND "stroboscopiques" [Caves 80].

On peut préciser ici, que le seul cas pour lequel une mesure QND ne modifie pas l'état du système  $\mathcal{S}$  mesuré est lorsque le système  $\mathcal{S}$  est dans un état propre de  $\hat{A}$  avant la mesure, et ne subit alors pas de réduction du paquet d'onde.

Remarquons que si l'opérateur d'évolution  $\hat{U}$  est l'identité, c'est-à-dire si  $\hat{A}$  est une constante du mouvement, et si on n'agit pas sur le système  $\mathcal{S}$ , les conditions (1.7) pour une mesure QND sont remplies. Il est bien évident que la meilleure façon de ne pas perturber un système est de ne rien faire ! Ceci fait apparaître un problème important de cette définition, qui ne donne aucune condition sur la qualité de la mesure, et ne s'intéresse en fait qu'à la non-dégradation du système  $\mathcal{S}$ . L'évaluation de l'efficacité de la mesure sera une de nos préoccupations dans le chapitre 2 suivant sur les critères QND.

Cette définition s'avère (1.7), en fait, plus générale que nécessaire pour la plupart des situations expérimentales réelles, et ce sont ces conditions pratiques que nous allons maintenant présenter, en distinguant l'évolution propre de l'observable  $\hat{A}$  de son évolution couplée à  $\mathcal{M}$ . Cette distinction va nous amener à une condition sur l'évolution propre, permettant de définir des variables QND, puis à une deuxième condition portant sur l'interaction.

### 1.2.2 Définition pratique

On va introduire ici, deux conditions dont la conjonction est suffisante pour satisfaire la condition générale (1.7). La première de ces conditions porte sur l'évolution libre du système  $\mathcal{S}$  qu'on désire mesurer. La deuxième porte sur le couplage entre  $\mathcal{S}$  et le dispositif de mesure  $\mathcal{M}$ .

#### Variables QND

Une observable  $\hat{A}$  sera appelée *variable QND* si son évolution propre en représentation de Heisenberg la laisse inchangée, c'est-à-dire si

$$[H_0, \hat{A}] = 0, \quad (1.8)$$

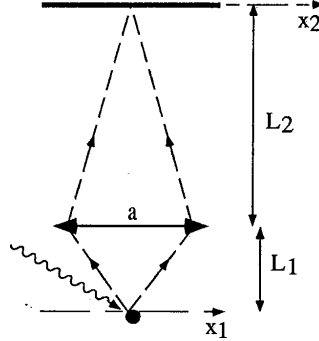


Figure 1.2: Microscope de Heisenberg.

où  $H_o$  est l'Hamiltonien du système  $S$  seul.  $\hat{A}$  est alors une constante du mouvement.

L'idée physique qui est derrière cette condition, est que l'excès de bruit sur l'observable canoniquement conjuguée de  $\hat{A}$ , imposé par l'inégalité de Heisenberg suite à la mesure de  $A$ , ne doit pas se retrouver impliqué dans l'évolution libre de  $\hat{A}$ . Nous allons illustrer ce point sur deux exemples, pris dans le livre de Braginsky [Braginsky 92].

#### Le microscope de Heisenberg

L'idée de Heisenberg pour mettre en évidence les limites quantiques sur la précision d'une mesure de la position d'un objet, macroscopique ou non, est la suivante. Imaginons que l'on veuille voir la position  $x_1$  d'une particule de masse  $m$  en l'éclairant avec un photon de longueur d'onde  $\lambda$ , et en collectant le photon réfléchi avec une lentille de diamètre  $a$  située à une distance  $L_1$  de l'objet, faisant une image sur une plaque photographique située à une distance  $L_2$  de la lentille (cf. figure 1.2). Le grandissement de l'objectif ainsi réalisé est alors  $L_2/L_1$ , et peut être choisi aussi grand que l'on veut, conduisant ainsi à une précision  $\Delta x_2 = (L_2/L_1)\Delta x_1$  arbitrairement grande sur la détection du photon sur la plaque photographique, et ne sera donc pas une limite fondamentale. La précision, elle aussi arbitraire, avec laquelle on va mesurer la position  $x_1$  de la particule est imposée par la diffraction due à l'ouverture angulaire  $\theta = a/L_1$  de la lentille de collection, supposée petite pour simplifier les calculs, et est donnée par

$$\Delta x_{1_{mes}} = \frac{\lambda L_1}{4\pi a}. \quad (1.9)$$

Par contre, lors de la détection du photon sur la plaque photographique, on ne pourra pas savoir avec quelle impulsion il a quitté la particule, si ce n'est qu'il est passé par la lentille et a donc été réémis par la particule avec une incertitude sur

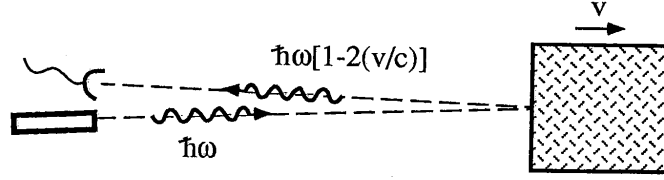


Figure 1.3: Velocimètre à effet Doppler de von Neumann.

la composante selon  $x$  de son impulsion

$$\Delta p_1 = \frac{\hbar}{\lambda} \theta = \frac{\hbar}{2\Delta x_1}. \quad (1.10)$$

Or on a bien sûr conservation de l'impulsion lors de la réémission du photon, et l'objet encaisse alors un recul dont la valeur moyenne non nulle va dépendre de manière tout à fait classique de l'angle d'arrivée des photons incidents, et dont l'incertitude fondamentalement quantique sera  $\Delta p_{1\text{perturb}} = \Delta p_1$ . Et conformément à la relation de dispersion de Heisenberg, on a bien

$$\Delta p_{1\text{perturb}} \cdot \Delta x_{1\text{mes}} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.11)$$

Mais, et c'est ce qui est important pour les mesures QND, l'incertitude sur l'impulsion va devenir une incertitude sur la position ultérieure de la particule, puisque

$$x(t + \tau) = x(t) + \frac{p}{m} \tau. \quad (1.12)$$

La précision de la mesure de la position à l'instant  $t$  est aussi grande que l'on veut, mais l'incertitude sur l'impulsion, inversement proportionnelle d'après la relation de Heisenberg, va, lors de l'évolution libre faisant suite à la mesure, contaminer progressivement l'information sur la position de l'objet.

La conclusion de tout ceci est que la position d'une particule, n'est pas une observable QND, au sens où nous l'avons défini en (1.8), puisque l'évolution libre de la position dépend de l'impulsion, son observable conjuguée.

#### *Le velocimètre à effet Doppler de von Neumann*

Ce deuxième exemple est une expérience de pensée qui illustre une mesure quantique de la vitesse non-relativiste d'un objet macroscopique, utilisant l'effet Doppler. Le principe de ce dispositif est représenté sur la figure 1.3. On dispose d'une source d'états à un seul photon ayant une fréquence  $\omega$  définie avec une précision  $\Delta\omega$  arbitraire. Ces photons sont réfléchis à incidence quasi-normale sur un objet de masse  $m$ , en mouvement à la vitesse  $v$ , non-relativiste, selon cette direction. Afin de simplifier le calcul de cinématique classique, on suppose que l'impulsion  $mv$  de l'objet est arbitrairement grande par rapport à l'impulsion  $\hbar\omega/c$  du photon, de telle sorte que la modification de la vitesse  $v \sim 2\hbar\omega/(mc)$  puisse être rendue aussi petite que l'on veut par rapport aux fluctuations quantiques. On

admet qu'on peut ensuite détecter l'énergie des photons réfléchis de façon aussi précise que l'on veut. L'incertitude sur la mesure de la vitesse  $v$  de l'objet va donc être déterminée uniquement par l'incertitude initiale  $\Delta\omega$  sur la fréquence des photons. On aura

$$\Delta v_{mes} = \frac{c}{2} \frac{\Delta\omega}{\omega} . \quad (1.13)$$

Il faut noter ici que, pour  $m$  suffisamment grand, la variation de vitesse  $2\hbar\omega/(mc)$  de la masse  $m$  due au rebond du photon pourra bien être rendue inférieure à cette incertitude  $\Delta v_{mes}$ , et on aura bien  $\Delta v_{mes} \gg 2\hbar\omega/(mc)$ , comme annoncé plus haut. Mais le transfert classique d'impulsion, dû au rebond du photon, va se faire à un instant  $t$  dont l'incertitude est donnée par la moitié de la longueur temporelle minimum  $\tau = 1/\Delta\omega$  du photon incident. La perturbation associée sur la position de la masse  $m$ , est alors donnée par

$$\Delta x_{perturb} = \frac{2\hbar\omega}{mc} \frac{\tau}{2} = \frac{\hbar}{mc} \frac{\omega}{\Delta\omega} , \quad (1.14)$$

et on retrouve bien la relation de dispersion de Heisenberg :

$$(m\Delta v_{mes}) \cdot \Delta x_{perturb} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.15)$$

Mais la différence essentielle avec l'exemple précédent est que, dans ce cas, la perturbation sur la position, apportée par la mesure, n'est pas couplée à l'évolution libre de l'observable mesurée, puisque l'impulsion est une constante du mouvement d'une particule libre. L'impulsion d'une particule est donc une variable QND. On pourra ainsi connaître l'impulsion de la particule dans le futur, avec la précision de la mesure, qui est, du moins en principe, arbitrairement bonne car uniquement soumise à des contraintes techniques.

Dans la suite de ce mémoire, nous allons nous intéresser à des oscillateurs harmoniques, qui seront en pratique des modes du champ électro-magnétique, plutôt qu'à des masses libres. L'opérateur "nombre de quanta"  $\hat{N} = a^\dagger a$  est alors un exemple simple de variable QND.

### Interaction QND

Il nous faut maintenant compléter la définition de variable QND que nous venons de donner, par une condition pratique portant sur l'interaction entre le système  $\mathcal{S}$  et le dispositif de mesure  $\mathcal{M}$ .

Une condition suffisante pour que la mesure d'une variable QND, notée  $\hat{A}$  (cf. Eq. (1.8)), soit qualifiée de QND, est que cette mesure soit de type indirecte (cf. section 1.1.2), et que l'Hamiltonien d'interaction  $H_{int}$  entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{M}$ , ne perturbe pas l'observable  $\hat{A}$  mesurée, c'est-à-dire que

$$[H_{int}, \hat{A}] = 0 . \quad (1.16)$$

En conclusion, la mesure d'une observable  $\hat{A}$  sera dite QND, si  $\hat{A}$  commute à la fois avec l'Hamiltonien  $H_0$  d'évolution libre de  $\mathcal{S}$ , et avec l'Hamiltonien  $H_{int}$

de couplage entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{M}$ . Cette définition demeure cependant très formelle, car l'interaction  $\mathcal{S}$ - $\mathcal{M}$  peut en pratique faire intervenir des degrés de liberté d'autres systèmes physiques. On doit alors se contenter d'essayer d'approcher cette définition idéalisée. Nous discuterons ceci plus en détail dans la suite de ce travail (*cf.* chapitre 2), en étudiant le cas particulier de deux modes du champ ( $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{M}$ ), couplés par des non-linéarités optiques obtenues dans des milieux atomiques ayant leurs propres degrés de liberté. On introduira alors des "critères QND" permettant de chiffrer expérimentalement l'écart entre l'expérience réelle et le modèle idéalisé décrit ci-dessus. Ces critères permettront, de plus, une évaluation de la qualité de la mesure, chose que les conditions que nous venons de décrire (générale ou pratique) ne prennent pas du tout en compte.

## 1.3 Différents régimes de mesures QND en optique

### 1.3.1 Le bruit de photon en optique

Le bruit de photon, dont l'origine est souvent faussement attribuée par les opticiens classiques à un processus aléatoire lors de la photodétection, est en fait une propriété intrinsèque de la lumière due à sa nature quantique.

Ce bruit est dû au fait que pour de la lumière naturelle ou laser, les quanta d'énergie de la lumière, ou photons, ne sont pas du tout corrélés entre eux, conduisant ainsi à un "bruit" lors de la détection de ces photons. Du fait de ce caractère complètement aléatoire de la distribution temporelle des photons, ce bruit a une statistique Poissonienne, c'est-à-dire que le nombre  $N$  de photons détectés pendant une fenêtre temporelle de durée  $T$  est une variable aléatoire ayant une statistique de Poisson. On a alors

$$\langle \delta N^2 \rangle = \langle N \rangle . \quad (1.17)$$

La variance du nombre de photon détectés est donc égale à sa moyenne.

Il apparaît donc que si on a à faire à de faibles nombre de photons, de l'ordre de quelques dizaines par exemple, les fluctuations relatives  $\sqrt{\langle \delta N^2 \rangle} / \langle N \rangle = 1 / \sqrt{\langle N \rangle}$  ne permettent certainement pas de traiter ces fluctuations dans une approximation linéarisée. En revanche, si l'on effectue des mesures sur des faisceaux intenses, ce qui sera le cas dans ce mémoire, cette approximation sera tout à fait justifiée, et d'une grande utilité dans les calculs (*cf.* chapitre 3). Pour les mesures QND du nombre de photon, qui est bien une variable QND d'après la condition donnée en (1.8), on peut donc distinguer deux régimes très différents suivant la valeur moyenne du nombre de photons  $\langle N \rangle$  que l'on mesure.

### 1.3.2 Régimes à faibles nombre de quanta

Une expérience de mesure QND du nombre de photons microondes (de l'ordre de 10) stockés dans une cavité de très grande finesse a été proposé par Brune *et al* [Brune 91][Brune 92] et est actuellement en cours de réalisation à l'ENS dans le



groupe de S. Haroche. L'intensité du champ électromagnétique dans la cavité est sondé par un jet d'atomes de Rydberg préparés dans une superposition cohérente d'états  $|f\rangle + |e\rangle$ . La cavité est accordée au voisinage d'une transition auxiliaire  $|e\rangle - |i\rangle$ , et l'état  $|e\rangle$  est déphasé, au cours du passage de l'atome à travers la cavité, d'une quantité proportionnelle au nombre de photon  $N$  stocké dans la cavité. Ce déphasage est alors mesuré sur la transition  $|f\rangle - |e\rangle$  par la technique des franges de Ramsey. L'information acquise par un seul atome ne permet qu'une estimation incomplète du nombre de photon, et ne conduit donc qu'à une réduction partielle du paquet d'onde. Mais l'information cumulée, apportée par une succession d'atomes traversant le même champ, conduit à une évolution progressive du paquet vers un état propre du nombre de photons.

On peut également mentionner une proposition d'expérience similaire par Holland *et al* [Holland 91], dans laquelle l'analyse de la figure de diffraction des atomes par l'onde électromagnétique stationnaire existant dans la cavité permet de remonter au nombre de photons contenus dans la cavité.

Ce type de mesure QND est très proche de l'idée originale de mesures quantiques non-destructives du nombre de quanta d'excitation d'un oscillateur harmonique [Caves 80], et fait ressortir de manière très fondamentale le processus d'une mesure en mécanique quantique. De plus, le faible nombre de quanta permet de se placer dans un espace de dimension raisonnable, autorisant de ce fait un calcul quantique exact, ne nécessitant pas de linéarisation.

### 1.3.3 Régimes linéarisés

Jusqu'à présent toutes les réalisations expérimentales de mesure QND ont été obtenues sur des faisceaux laser intenses [Levenson 86][LaPorta 89][Grangier 91b]. Le nombre de photons caractéristique de ce type d'expérience est de  $3 \times 10^{10}$  (Puissance de 1 mW pour une bande d'analyse de 100 kHz), ce qui donne des fluctuations relatives de  $1/\sqrt{N} = 5 \times 10^{-6}$ , qui autorisent alors, et on ne sait pas faire autrement, leur traitement dans une approximation linéarisée autour d'une valeur moyenne stationnaire. Les fluctuations de l'opérateur nombre de photons peuvent alors s'écrire,

$$\delta\hat{N} = \delta(\hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hat{a}^\dagger\delta\hat{a} + \delta\hat{a}^\dagger\hat{a} . \quad (1.18)$$

A l'ordre zéro de fluctuations, on confond les opérateurs et leur valeur moyenne, que l'on peut de plus prendre réelle (*i.e.*  $\langle\hat{a}\rangle = \langle\hat{a}^\dagger\rangle$ ) par un choix de l'origine des phases. On obtient ainsi,

$$\delta\hat{N} = \langle\hat{a}\rangle(\delta\hat{a} + \delta\hat{a}^\dagger), \quad (1.19)$$

qui peut encore s'écrire

$$\delta\hat{N} = \langle\hat{a}\rangle\delta\hat{X} \quad (1.20)$$

où  $\delta\hat{X} = \delta\hat{a} + \delta\hat{a}^\dagger$  est la quadrature amplitude du champ électro-magnétique. Les fluctuations de l'opérateur nombre de photon deviennent alors proportionnelle à celle de l'opérateur amplitude. Dans le cadre de cette approximation linéarisée, la quantité  $\delta Y = -i(\delta\hat{a} - \delta\hat{a}^\dagger)$  correspond à la phase.

Une autre différence importante de ce type d'expériences QND par rapport à celles dont on a parlé plus haut, est que les mesures sont effectuées sur des ondes

progressives et non pas sur des ondes stationnaires. On peut alors parler de faisceau entrant et de faisceau sortant, et raisonner en termes de lecture non-destructive d'une information transportée par une onde lumineuse. Cette vision des choses est donc assez proche de la problématique des limitations imposées par le bruit quantique dans un réseau de télécommunication optique. Et c'est plutôt dans cet esprit que nous considérerons les mesures QND tout au long de ce mémoire. En particulier l'expérience utilisant l'effet Kerr dans un jet atomique de sodium (*cf.* chapitre 4) s'inscrit dans ce cadre.

## 1.4 Duplicateurs quantiques

Nous faisons ici un paragraphe à part sur ce que nous avons appelé des duplicateurs quantiques. Ces systèmes s'inscrivent directement dans une logique de réseau de télécommunication à bas niveau de bruit. Leur caractéristique est de mesurer un faisceau signal entrant tout en produisant une copie amplifiée de ce faisceau. Cette caractéristique est bien entendu rédhibitoire pour espérer être classé comme système de mesure QND au sens original de Braginsky (*cf.* Eq.(1.7)). L'amplification optique est également soumise à des contraintes imposées par la mécanique quantique, mais il est cependant possible d'amplifier sans bruit une composante de quadrature, en utilisant un amplificateur dépendant de la phase (*cf.* Ref.[Caves 82]). La quadrature ainsi amplifiée sera alors bien moins sensible, lors de sa propagation, ultérieure à des pertes éventuelles [Yuen 86], et le transport de l'information sera de ce fait rendu plus robuste.

Un tel système, réalisant à la fois la mesure, et une amplification sans bruit d'un faisceau signal entrant a récemment été réalisé au Centre National d'Etude des Télécommunications par J.A. Levenson *et al* [Levenson 99]. Leur expérience, utilisant l'amplification paramétrique de type II dans un cristal de KTP en régime pulsé, a permis en fait d'obtenir deux copies amplifiées du signal entrant, l'une étant prise comme mesure, et l'autre comme signal sortant.

L'expérience, présentée à la fin de ce mémoire (chapitre 5), utilisant la détection par une photodiode, puis la réémission de la lumière via une diode électroluminescente, après amplification du courant intermédiaire, peut être aussi classée dans cette rubrique.

En outre, on peut mentionner que les duplicateurs quantiques satisfont tous les critères QND quantitatifs introduits dans la littérature [Holland 90][Grangier 92a], et présentés dans le chapitre suivant. Dans ce contexte, un dispositif QND selon la définition de Braginsky apparaît comme un cas particulier de duplicateur quantique, ayant un gain unité sur la voie signal, et un gain arbitraire sur la voie de mesure. On reviendra plus en détail et de manière plus quantitative sur ce point (*cf.* section 2.3.4).

1  
2  
3  
4  
5

6  
7  
8  
9  
10

# Chapitre 2

## Critères QND

### 2.1 Présentation

Si la mécanique quantique autorise en principe la mesure parfaitement non-destructive d'une observable, la réalisation concrète d'une telle mesure doit se plier au caractère non-idéal de toute situation expérimentale réelle. Il est donc nécessaire de définir des critères quantitatifs permettant de chiffrer l'efficacité d'un dispositif expérimental donné en tant que système de mesure QND.

De tels critères ont été proposés pour la première fois en 89 par Holland *et al* [Holland 90]. Dans cet article, trois propriétés caractérisant une mesure QND sont clairement identifiées et chiffrées au moyen de coefficients de corrélation. Mais nous montrerons que certaines de ces quantités, bien que calculables théoriquement à partir d'un modèle, ne sont pas directement mesurables expérimentalement. Aussi, Grangier *et al* [Grangier 92a] ont proposé en 92 une caractérisation de ces mêmes propriétés au moyen de bruits équivalents ramenés à l'entrée, qui ont l'avantage d'être accessibles à l'expérimentateur.

Nous commencerons par présenter les résultats de ces deux articles pour ensuite décrire les critères effectivement utilisés dans ce mémoire pour la caractérisation des mesures QND, qui sont en fait une synthèse des deux résultats précédents. Nous détaillerons enfin les différences qui peuvent apparaître entre ces systèmes de caractérisation dans des situations particulières.

### 2.2 Les critères QND

#### 2.2.1 Introduction

L'objectif d'une mesure QND en optique est de mesurer les variations  $\delta X_s^{in}$  d'une composante de quadrature d'un faisceau signal (indice  $s$ ), sans les modifier, en les couplant par exemple à une composante de quadrature  $\delta Y_m^{out}$  d'un deuxième faisceau (appelé faisceau de mesure) via un milieu non-linéaire. Ces variations peuvent être soit des fluctuations quantiques soit une modulation classique. Dans la limite de fluctuations faibles devant les valeurs moyennes, on peut linéariser le problème, et les fluctuations d'amplitude se confondent alors avec les fluctuations

d'intensité.

La première des "qualités" requises pour un système de mesure QND est d'abord d'effectuer une mesure précise du signal entrant. Il faut ensuite veiller à ce que le signal se soit pas trop dégradé par le processus de mesure. On doit enfin s'assurer d'une bonne corrélation entre le résultat de la mesure et le signal sortant de l'appareil de mesure. On pourra alors caractériser un dispositif de mesure QND par ces trois critères.

On va ici présenter trois systèmes différents de tels critères. Les différences conceptuelles entre ces systèmes sont importantes, car on va voir que l'évaluation des performances d'un dispositif de mesure QND, conçu pour mesurer un composant de quadrature  $\delta X_s^{in}$ , dépend en fait, dans la cas le plus général, de l'état complet du faisceau signal entrant, c'est-à-dire non seulement de  $\delta X_s^{in}$ , mais aussi de sa quadrature conjuguée  $\delta Y_s^{in}$ , et de leurs corrélations  $\langle \delta X_s^{in} \delta Y_s^{in} \rangle$ . Ceci apparaît comme un problème de fond, que nous présenterons en détail, puis que nous éliminerons, en imposant une condition sur l'état d'entrée, qui sera satisfaite dans toute la suite. Nous expliciterons un contre-exemple de manière plus précise dans l'annexe A.

Les quantités correspondant à ces critères seront définies ici de manière générale, et les détails techniques nécessaires au calcul explicite de ces coefficients seront donnés dans le chapitre 3 de calcul théorique. Remarquons en particulier que toutes les quantités définies ci-dessous sont des variances et des covariances spectrales, correspondant à la notion de spectre de bruit utilisée usuellement en optique quantique. On peut également mentionner que le caractère complexe de certaines quantités sera le plus souvent oublié, ceci pour ne pas alourdir la notation.

### 2.2.2 Coefficients de corrélations

Ces coefficients de corrélation ont été introduit par Holland *et al* [Holland 90]. Comme nous l'avons évoqué plus haut, la première qualité d'un dispositif de mesure est d'effectivement transférer de l'information du faisceau signal vers le faisceau de mesure. Une évaluation de l'efficacité de ce transfert est donnée par le coefficient de corrélation normalisé entre le signal entrant et le faisceau de mesure, défini de la façon suivante :

$$C^2(X_s^{in} Y_m^{out}) = \frac{|\langle \delta X_s^{in} \delta Y_m^{out} \rangle_{sym}|^2}{\langle \delta X_s^{in^2} \rangle \langle \delta Y_m^{out^2} \rangle}, \quad (2.1)$$

où l'indice *sym* signifie une moyenne symétrisée

$$\langle \delta X_s^{in} \delta Y_m^{out} \rangle_{sym} = \frac{1}{2} (\langle \delta X_s^{in} \delta Y_m^{out} \rangle + \langle \delta Y_m^{out} \delta X_s^{in} \rangle). \quad (2.2)$$

On a  $C^2(X_s^{in} Y_m^{out}) \in [0, 1]$ . Une mesure parfaite correspond à  $C^2(X_s^{in} Y_m^{out}) = 1$ , et l'absence de mesure à  $C^2(X_s^{in} Y_m^{out}) = 0$ .

Le second critère évalue le caractère non-destructif de la mesure, c'est-à-dire le degré de dégradation subit par le faisceau signal au cours de l'interaction. Ce critère est donné par le coefficient de corrélation normalisé entre les fluctuations

du signal entrant et celle du signal sortant,

$$C^2(X_s^{in} X_s^{out}) = \frac{|\langle \delta X_s^{in} \delta X_s^{out} \rangle_{sym}|^2}{\langle \delta X_s^{in^2} \rangle \langle \delta X_s^{out^2} \rangle}. \quad (2.3)$$

De la même façon on a  $C^2(X_s^{in} X_s^{out}) \in [0, 1]$ . Une mesure parfaitement non-destructive correspond à  $C^2(X_s^{in} X_s^{out}) = 1$ , tandis que la valeur 0 correspond à une destruction totale du signal.

Enfin, le troisième et dernier critère indique le degré de corrélation existant entre les fluctuations quantiques du faisceau signal sortant et celles du faisceau de mesure au moyen d'une variance conditionnelle. La variance conditionnelle du faisceau signal sortant, connaissant le résultat donné par la lecture du faisceau de mesure, est la valeur minimum de la variance des fluctuations quantiques du signal sortant que l'on obtiendrait en corrigeant de façon optimale ces fluctuations au moyen de l'information récoltée sur le faisceau de mesure. Cette variance conditionnelle est donnée par :

$$V(X_s^{out} | Y_m^{out}) = \langle \delta X_s^{out^2} \rangle (1 - C^2(X_s^{out} Y_m^{out})), \quad (2.4)$$

dans laquelle  $C^2(X_s^{out} Y_m^{out})$  est défini par

$$C^2(X_s^{out} Y_m^{out}) = \frac{|\langle \delta X_s^{out} \delta Y_m^{out} \rangle_{sym}|^2}{\langle \delta X_s^{out^2} \rangle \langle \delta Y_m^{out^2} \rangle}. \quad (2.5)$$

Pour simplifier l'écriture, la variance conditionnelle  $V(X_s^{out} | Y_m^{out})$  sera notée  $V_{s/m}$ . Dans le cas d'une corrélation parfaite entre les deux faisceaux de sortie, on a  $C^2(X_s^{out} Y_m^{out}) = 1$ , donc  $V_{s/m} = 0$ , alors que  $V_{s/m} = 1$  correspond au bruit de photon, et que  $V_{s/m} < 1$  indique que les deux faisceaux de sortie sont corrélés à mieux que le bruit de photon, c'est-à-dire qu'ils sont corrélés quantiquement. Le système peut alors être considéré comme un préparateur d'états quantiques [Heidmann 87].

Ces trois critères donnent les trois propriétés caractérisant un dispositif de mesure QND. Mais à part la variance conditionnelle qui peut s'obtenir expérimentalement en mesurant les corrélations des deux faisceaux de sortie (cf chapitre experimental et annexe B), les deux premiers critères, qui impliquent le faisceau signal entrant ne sont pas directement mesurables expérimentalement. En effet, pour connaître les fluctuations du faisceau entrant il faudrait soit les mesurer, ce qui changerait ces mêmes fluctuations si l'on ne dispose pas pour ce faire d'un appareil parfaitement QND, soit avoir préparé le faisceau signal entrant dans un état propre de  $X_s^{in}$  au moyen d'un préparateur d'état quantique parfait ! Et même si on disposait d'un tel dispositif, les fluctuations infinies de la quadrature conjuguée pourraient engendrer d'autres types de problèmes. Il est donc nécessaire de trouver une méthode pour évaluer expérimentalement ces deux propriétés.

### 2.2.3 Bruits équivalents

L'idée d'une caractérisation expérimentale d'un système de mesure QND a été introduite en 92 par Grangier *et al* [Grangier 92a] en utilisant le concept, bien

connu des électroniciens, de bruit équivalent ramené à l'entrée. L'idée est, en fait, de considérer le dispositif de mesure QND comme un amplificateur avec le faisceau signal entrant comme signal d'entrée, et avec deux voies de sorties, la voie de mesure d'une part, et le faisceau signal sortant d'autre part, puis de s'intéresser aux caractéristiques de bruit de ces amplificateurs. On va utiliser, dans toute la suite de ce mémoire, des modèles linéarisés de systèmes de mesure. Les amplificateurs considérés seront donc des amplificateurs linéaires.

Pour évaluer la qualité de la mesure, on considère l'amplificateur mesure, *i.e.* celui ayant la voie de mesure comme voie de sortie. En utilisant les mêmes notations que dans la section précédente, on peut alors écrire,

$$\delta Y_m^{out} = g_m \delta X_s^{in} + B_m^{aj} , \quad (2.6)$$

où  $g_m$  est le gain en amplitude de l'amplificateur mesure et  $B_m^{aj}$  le bruit ajouté. Ce bruit ajouté peut lui-même se décomposer en deux termes,

$$B_m^{aj} = f_m \delta Y_s^{in} + B_m \quad (2.7)$$

où le premier terme provient de la quadrature conjuguée du signal, qui peut éventuellement être corrélée à  $\delta X_s^{in}$ . En effet, dans le cas d'un faisceau incident comprimé selon une direction  $\theta$  différente de ces deux quadratures (*i.e.*  $\theta \neq 0, \pi/2$ ), les corrélations  $\langle \delta X_s^{in} \delta Y_s^{in} \rangle_{sym}$  sont différentes de zéro. La valeur de  $f_m$  dépend du système de mesure étudié, et est évidemment nulle en principe pour un dispositif idéal. Le deuxième terme  $B_m$  est du bruit non corrélé au signal incident. L'équation (2.6) peut également s'écrire, en ramenant tout au niveau du signal d'entrée  $\delta X_s^{in}$ ,

$$\frac{\delta Y_m^{out}}{g_m} = \delta X_s^{in} + \frac{B_m^{aj}}{g_m} , \quad (2.8)$$

Le bruit équivalent mesure, ramené à l'entrée<sup>1</sup> est alors défini par

$$N_m^{eq} = \frac{\langle \delta Y_m^{out^2} \rangle}{|g_m^2|} - \langle \delta X_s^{in^2} \rangle . \quad (2.9)$$

On peut remarquer que cette quantité est différente de la variance de  $B_m^{aj}/g_m$ , dans le cas où  $B_m^{aj}$  est corrélé avec  $\delta X_s^{in}$ , c'est-à-dire lorsque  $f_m \langle \delta X_s^{in} \delta Y_s^{in} \rangle_{sym} \neq 0$ . Pour un système de mesure parfait, on a  $N_m^{eq} = 0$ .

L'évaluation de la dégradation du signal se fait quant à elle en considérant les caractéristiques de bruit de l'amplificateur ayant le signal comme voie de sortie. De la même façon, on a

$$\frac{\delta X_s^{out}}{g_s} = \delta X_s^{in} + \frac{B_s^{aj}}{g_s} , \quad (2.10)$$

où  $g_s$  est le gain de l'amplificateur sur la voie signal, et

$$B_s^{aj} = f_s \delta Y_s^{in} + B_s , \quad (2.11)$$

<sup>1</sup>Nous omettrons dans toute la suite de préciser *ramené à l'entrée* et parlerons simplement de bruit équivalent mesure (idem pour le bruit équivalent signal).

comme précédemment (Eq.2.7). Le bruit équivalent ramené à l'entrée est alors défini de la même façon par

$$N_s^{eq} = \frac{\langle \delta X_s^{out^2} \rangle}{|g_s^2|} - \langle \delta X_s^{in^2} \rangle. \quad (2.12)$$

Pour un système parfaitement non-destructif, on a  $N_s^{eq} = 0$ .

Il est à noter que lorsque le terme  $f_{s,m} \langle \delta X_s^{in} \delta Y_s^{in} \rangle_{sym} \neq 0$ , les bruits équivalents peuvent devenir négatifs. Une étude détaillée de ce problème est présentée dans le §2.2.5, et un exemple est étudié dans l'annexe A.

Ces deux bruits équivalents sont mesurables expérimentalement, comme pour les amplificateurs en électronique, c'est-à-dire en appliquant une petite modulation classique à l'entrée et en regardant ce que devient son rapport signal sur bruit pour les différentes sorties. C'est la raison d'être des coefficients de transfert introduits dans la section suivante, au cours de laquelle le principe de la procédure expérimentale est expliqué plus en détail.

### 2.2.4 Coefficients de transfert

Les coefficients de transfert présentés dans cette section sont une synthèse des deux systèmes de critères introduit dans les sections précédentes. Ils sont égaux aux coefficients de corrélation, dans des conditions discutées dans le paragraphe suivant 2.2.5, tout en étant directement liés aux bruits équivalents, et de ce fait, adaptés à une évaluation expérimentale.

Ces coefficients  $T_{m,s}$  caractérisent le transfert du rapport signal sur bruit (RSB, ou  $R$  dans les équations) du signal entrant vers la voie de mesure pour  $T_m$ , et vers la voie de sortie du signal pour  $T_s$ . Ils sont définis par

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{R_m^{out}}{R_s^{in}} \\ T_s &= \frac{R_s^{out}}{R_s^{in}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ces coefficients sont en fait les inverses des facteurs de bruit  $F$  habituellement utilisés en électronique. Le rapport signal sur bruit d'une composante de quadrature  $X$  est défini de la façon suivante. Le signal est une petite<sup>2</sup> modulation classique, lente devant la fréquence optique (typiquement quelques MHz), appliquée sur la composante de quadrature considérée, et le bruit est le bruit quantique de cette même quadrature en l'absence de modulation. Cela s'écrit, dans l'espace de Fourier,

$$R(\omega) = \left| \frac{\langle X(\omega) \rangle^2}{\langle \delta X(\omega)^2 \rangle} \right| \quad (2.14)$$

où  $\omega$  est mesurée dans le repère tournant à la fréquence optique.  $T_m$  et  $T_s$  sont donc des nombres compris entre 0 et 1. Il existe cependant des cas pathologiques,

<sup>2</sup>L'amplitude de cette modulation est petite devant la valeur moyenne de la quadrature.



pour lesquels ils peuvent être supérieurs à 1. Ces cas sont étudiés de façon générale dans le paragraphe 2.2.5, et illustré sur un exemple concret dans l'annexe A.

Ces coefficients de transfert sont reliés aux bruits équivalents par une formule très simple. On a, en effet

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{\langle \delta X_s^{in^2} \rangle}{\langle \delta X_s^{in^2} \rangle + N_m^{eq}}, \\ T_s &= \frac{\langle \delta X_s^{in^2} \rangle}{\langle \delta X_s^{in^2} \rangle + N_s^{eq}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dans le cas où le faisceau signal entrant est au bruit de photons, on a  $\langle \delta X_s^{in^2} \rangle = 1$ , et le système précédent devient

$$T_m = \frac{1}{1 + N_m^{eq}}, \quad (2.16)$$

$$T_s = \frac{1}{1 + N_s^{eq}}. \quad (2.17)$$

Ces équations font apparaître les  $T_{m,s}$  comme des quantités rigoureusement équivalentes aux  $N_{m,s}^{eq}$ , lorsque l'on connaît la variance de l'état d'entrée. On peut remarquer que les cas où  $N_{m,s}^{eq} < 0$  correspondent à des valeurs de  $T_{m,s} > 1$ .

L'intérêt des coefficients de transfert est de pouvoir être mesurés expérimentalement de façon très directe. En effet, un rapport signal sur bruit en dB se visualise, sans manipulations particulières, sur l'écran d'un analyseur de spectres (cf chapitre expérimental). On peut alors comparer les rapports signal sur bruit sur la voie de mesure et sur la voie de sortie du signal avec le rapport signal sur bruit du faisceau signal incident et ainsi en déduire directement les coefficients de transfert  $T_m$  et  $T_s$ .

Il est donc possible de caractériser expérimentalement les propriétés quantiques d'un système de mesure au moyen de ces coefficients de transfert et de la variance conditionnelle.

Nous allons maintenant comparer de façon plus précise les différents systèmes de critères que nous avons introduits.

### 2.2.5 Comparaison des différents critères

Nous allons faire apparaître dans ce paragraphe les différences qui existent entre les coefficients de corrélation (§2.2.2) et les coefficients de transfert (§2.2.4).

Avec des notations analogues à celles de l'équation (2.6), les coefficients de transfert s'écrivent

$$\begin{aligned} T_m &= |g_m^2| \frac{\langle \delta X_s^{in^2} \rangle}{\langle \delta Y_m^{out^2} \rangle}, \\ T_s &= |g_s^2| \frac{\langle \delta X_s^{in^2} \rangle}{\langle \delta X_s^{out^2} \rangle}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Avec ces mêmes notations, on obtient pour les coefficients de corrélation,

$$\begin{aligned} C^2(X_s^{in} Y_m^{out}) &= \frac{\langle \delta X_s^{in2} \rangle}{\langle \delta Y_m^{out2} \rangle} \left| g_m + f_m \frac{\langle \delta X_s^{in} \delta Y_s^{in} \rangle_{sym}}{\langle \delta X_s^{in2} \rangle} \right|^2 \\ C^2(X_s^{in} X_s^{out}) &= \frac{\langle \delta X_s^{in2} \rangle}{\langle \delta X_s^{out2} \rangle} \left| g_s + f_s \frac{\langle \delta X_s^{in} \delta Y_s^{in} \rangle_{sym}}{\langle \delta X_s^{in2} \rangle} \right|^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En comparant ces deux système d'équations, la différence entre les coefficients de transfert et les coefficients de corrélation apparaît donc clairement comme étant le fait de prendre en compte ou non les termes provenant des corrélations entre les deux quadratures du signal incident  $\langle \delta X_s^{in} \delta Y_s^{in} \rangle_{sym}$ .

Il apparaît donc ici un problème de fond, qui est le fait que la caractérisation d'un système de mesure QND réel par les systèmes de critères que nous avons présentés, n'est pas intrinsèque à l'appareil de mesure, mais peut dépendre de l'état quantique du faisceau sur lequel on fait la mesure. En effet, si une des imperfections du dispositif de mesure est de coupler la quadrature  $\delta Y_s^{in}$ , conjuguée de celle  $\delta X_s^{in}$  mesurée, à l'une des deux voies de sortie, *i.e.*  $f_s$  ou  $f_m$  différent de zéro, alors le système de mesure sera sensible aux corrélations éventuelles entre  $\delta X_s^{in}$  et  $\delta Y_s^{in}$ . Ces corrélations sont non-nulles lorsque le faisceau signal incident est comprimé selon une direction  $\theta$  différente de  $\delta X_s^{in}$  ou  $\delta Y_s^{in}$ , *i.e.*  $\theta \neq 0, \pi/2$ . Le système de mesure ne mesure alors plus uniquement la quadrature  $\delta X_s^{in}$  prévue, et la mesure est contaminée par la quadrature conjuguée  $\delta Y_s^{in}$ . Cette situation peut, de plus, comme nous l'avons déjà mentionné, conduire à des bruits équivalents  $N_s^{eq}, N_m^{eq}$  négatifs ou, ce qui revient rigoureusement au même, des coefficients de transfert  $T_m, T_s$  plus grand que 1. Ces cas pathologiques n'ont en fait rien de spécialement quantique, et peuvent également survenir dans le cas d'un faisceau signal incident présentant un excès de bruit classique mais dépendant de la phase. Mais, on peut remarquer ici que les coefficients de corrélation  $C_s^2, C_m^2$  sont, par construction, toujours compris entre 0 et 1 (*cf.* Eqs.(2.1),(2.3)).

Cependant, on s'aperçoit, en comparant les équations (2.18) et (2.19), que si on se limite à des faisceaux entrants pour lesquels on a  $\langle \delta X_s^{in} \delta Y_s^{in} \rangle_{sym} = 0$ , on évite tous ces problèmes. Cette condition n'est, en pratique, pas trop restrictive, et elle est en particulier vérifiée pour des états cohérents, et des états comprimés auxquels on aura fait subir une rotation des quadratures adéquate<sup>3</sup> pour amener la direction de squeezing le long d'une des quadratures  $\delta X_s^{in}$  ou  $\delta Y_s^{in}$ . Dans toute la suite de ce mémoire on se placera dans ce cas  $\langle \delta X_s^{in} \delta Y_s^{in} \rangle_{sym} = 0$ , et on pourra parler indifféremment des coefficients de corrélation ou des coefficients de transfert, puisqu'on aura alors  $T_s = C_s^2$ , et  $T_m = C_m^2$ . Un cas concret, en dehors de cette condition, sera cependant examiné en détail dans l'annexe A.

Dans les conditions dans lesquelles nous venons de nous placer, les bruits équivalents sont des quantités indépendantes de l'état d'entrée, puisqu'on a alors  $N_{s,m}^{eq} = \langle B_{s,m}^{aj2} \rangle / |g_{s,m}^2|$  (*cf.* §2.2.3). Or la formule reliant les coefficients de transfert (et donc les coefficients de corrélation) aux bruits équivalents (Eq.(2.15)) fait

<sup>3</sup>Cette rotation des quadratures peut s'effectuer au moyen d'une simple cavité optique hors résonance.

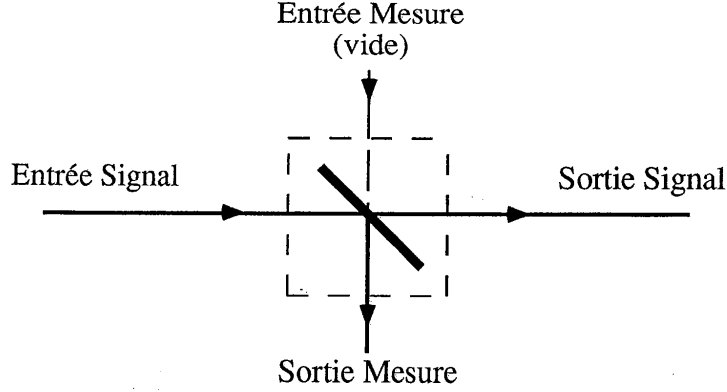


Figure 2.1: lame séparatrice utilisées comme système de mesure

intervenir la variance  $\langle X_s^{in^2} \rangle$  du signal d'entrée. Donc seuls les bruits équivalents sont des quantités complètement indépendantes de l'état du champ soumis à la mesure.

## 2.3 Discussion

### 2.3.1 La lame séparatrice

Examinons maintenant en détail le cas élémentaire d'une lame séparatrice utilisée comme système de mesure (*cf.* figure 2.1). On note respectivement  $r^2$  et  $t^2$  les coefficients de réflexion et de transmission pour les intensités (*i.e.*  $r^2 + t^2 = 1$ ). Les relations entrée-sortie s'écrivent,

$$\begin{aligned} \delta X_s^{out} &= t \delta X_s^{in} + \sqrt{1-t^2} X_b \\ \delta X_m^{out} &= r \delta X_s^{in} - \sqrt{1-r^2} X_b, \end{aligned} \quad (2.20)$$

où  $X_b$  est l'opérateur amplitude du mode vide du champ entrant par l'entrée mesure. Il vient alors immédiatement,

$$\begin{aligned} N_s^{eq} &= \frac{1-t^2}{t^2} \\ N_m^{eq} &= \frac{1-r^2}{r^2}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

et on a alors,

$$N_s^{eq} N_m^{eq} = 1. \quad (2.22)$$

Si le faisceau entrant est au bruit de photon, on peut écrire,

$$\begin{aligned} C_s^2 &= T_s = t^2 \\ C_m^2 &= T_m = r^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

c'est-à-dire que l'on a

$$T_s + T_m = 1. \quad (2.24)$$

Il apparaît donc que pour une lame séparatrice, la qualité de la mesure s'obtient aux dépens de la dégradation du signal. Cet exemple fait bien ressortir l'objectif des mesures QND, qui est entre autres, de satisfaire ces deux critères à la fois, c'est-à-dire de réaliser une mesure de bonne qualité, sans pour autant dégrader le signal.

Pour la variance conditionnelle, on trouve,

$$V_{s|m} = \frac{\langle \delta X_s^{in^2} \rangle}{r^2 \langle \delta X_s^{in^2} \rangle + t^2}. \quad (2.25)$$

Dans le cas d'un faisceau entrant limité par le bruit de photon, la variance conditionnelle vaut 1.

### 2.3.2 Inégalités de Heisenberg et limites classiques

Nous allons montrer, dans ce paragraphe, quelles sont les limitations imposées par les inégalités de Heisenberg sur un système de mesure, et faire apparaître une limite classique permettant de définir les conditions pour qu'un système de mesure puisse être classé comme système de mesure QND. On va pour ce faire établir des relations entre les bruits équivalents des différentes transformations.

De manière générale, les relations entrée-sortie pour un système de mesure s'écrivent (après une éventuelle rotation des quadratures signal en sortie),

$$\begin{aligned} \delta X_s^{out} &= g_s \delta X_s^{in} + \mathcal{F} \\ \delta Y_s^{out} &= f_s \delta Y_s^{in} + \mathcal{H} \\ \delta Y_m^{out} &= g_m \delta X_s^{in} + f_m \delta Y_s^{in} + \mathcal{G}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

où on n'a pas écrit l'expression de  $\delta X_m^{out}$  dont on n'aura pas besoin dans la suite. Les quantités  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{H}$ , et  $\mathcal{G}$  sont des opérateurs de valeur moyenne nulle. On suppose, comme nous l'avons posé plus haut, que  $\langle \delta X_s^{in} \delta Y_s^{in} \rangle_{sym} = 0$ . Les bruits ajoutés  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{H}$ , et  $\mathcal{G}$  qui dépendent éventuellement de la quadrature conjuguée (*cf.* Eq. 2.7), ne sont alors pas corrélés avec le signal entrant.

Dans le cadre d'un calcul complètement quantique, il est nécessaire que les opérateurs de sortie vérifient les mêmes relations de commutation que les opérateurs d'entrée, à savoir

$$[\delta X_i^{out}, \delta Y_j^{out}] = 2i\delta_{ij}, \quad (2.27)$$

où  $i$  et  $j$  sont égaux à  $s$  ou  $m$ . On déduit alors de (2.26) les deux égalités suivantes,

$$\begin{aligned} [\delta X_s^{out}, \delta Y_m^{out}] &= 0 = 2ig_s f_m + [\mathcal{F}, \mathcal{G}] \\ [\delta Y_s^{out}, \delta Y_m^{out}] &= 0 = -2if_s g_m + [\mathcal{H}, \mathcal{G}], \end{aligned} \quad (2.28)$$

qui imposent les relations de dispersion suivantes [Cohen 77]

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^2 \rangle \langle \mathcal{G}^2 \rangle &\geq |g_s f_m|^2 \\ \langle \mathcal{H}^2 \rangle \langle \mathcal{G}^2 \rangle &\geq |f_s g_m|^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

D'autre part, puisqu'on a supposé  $\langle \delta X_s^{in} \delta Y_s^{in} \rangle_{sym} = 0$ , et que les bruits ajoutés  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{H}$ , et  $\mathcal{G}$  ne sont pas corrélés avec le signal entrant, les bruits équivalents des transformations  $\delta X_s^{in} \rightarrow \delta X_s^{out}$  et  $\delta Y_s^{in} \rightarrow \delta Y_s^{out}$  s'écrivent

$$\begin{aligned} N^{eq}(\delta X_s^{in} \rightarrow \delta X_s^{out}) &= \frac{\langle \mathcal{F}^2 \rangle}{|g_s^2|} \\ N^{eq}(\delta Y_s^{in} \rightarrow \delta Y_s^{out}) &= \frac{\langle \mathcal{H}^2 \rangle}{|f_s^2|}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

On a également,

$$\begin{aligned} N^{eq}(\delta X_s^{in} \rightarrow \delta Y_m^{out}) &= \frac{1}{|g_m^2|} (|f_m^2| \langle \delta Y_s^{in^2} \rangle + \langle \mathcal{G}^2 \rangle) \\ N^{eq}(\delta Y_s^{in} \rightarrow \delta X_m^{out}) &= \frac{1}{|f_m^2|} (|g_m^2| \langle \delta X_s^{in^2} \rangle + \langle \mathcal{G}^2 \rangle). \end{aligned} \quad (2.31)$$

En multipliant les deux équations de (2.30) entre elles, et en utilisant l'inégalité (2.29), on obtient,

$$N^{eq}(\delta X_s^{in} \rightarrow \delta X_s^{out}) N^{eq}(\delta Y_s^{in} \rightarrow \delta Y_m^{out}) \geq \frac{\langle \mathcal{F}^2 \rangle \langle \mathcal{G}^2 \rangle}{|g_s^2| |f_m^2|} \geq 1. \quad (2.32)$$

On constate donc qu'une bonne transmission de  $\delta X_s^{in}$ , *i.e.*  $N^{eq}(\delta X_s^{in} \rightarrow \delta X_s^{out})$  petit, se fait nécessairement aux dépends de la mesure de la quadrature complémentaire  $\delta Y_s^{in}$ , puisque  $N^{eq}(\delta Y_s^{in} \rightarrow \delta Y_m^{out}) \geq 1/N^{eq}(\delta X_s^{in} \rightarrow \delta X_s^{out})$  devient alors très grand. Cette situation correspond en fait à une situation dans laquelle on pourrait mesurer à la fois  $\delta X_s^{in}$ , en plaçant un détecteur sur la voie de sortie du signal, et sa quadrature conjuguée  $\delta Y_s^{in}$  sur la voie de mesure. Il est donc naturel d'avoir une inégalité de ce type. De la même façon, on obtient l'inégalité "symétrique",

$$N^{eq}(\delta Y_s^{in} \rightarrow \delta Y_s^{out}) N^{eq}(\delta X_s^{in} \rightarrow \delta Y_m^{out}) \geq 1, \quad (2.33)$$

qui dit qu'une bonne mesure de  $\delta X_s^{in}$  se fait aux dépends de la transmission de sa quadrature conjuguée  $\delta Y_s^{in}$ , et qui s'interprète de la même façon que (2.32).

Dans le cas d'un dispositif de mesure indépendant de la phase, on a,

$$N^{eq}(\delta X_s^{in} \rightarrow \delta X_s^{out}) = N^{eq}(\delta Y_s^{in} \rightarrow \delta Y_s^{out}), \quad (2.34)$$

c'est-à-dire que la qualité de la transmission est la même sur les deux quadratures conjuguées. On peut alors remplacer  $N^{eq}(\delta Y_s^{in} \rightarrow \delta Y_s^{out})$  par  $N^{eq}(\delta X_s^{in} \rightarrow \delta X_s^{out})$  dans (2.33), et on obtient alors une inégalité devant être vérifiée par tout dispositif indépendant de la phase,

$$N^{eq}(\delta X_s^{in} \rightarrow \delta X_s^{out}) N^{eq}(\delta X_s^{in} \rightarrow \delta Y_m^{out}) \geq 1, \quad (2.35)$$

où  $N^{eq}(\delta X_s^{in} \rightarrow \delta X_s^{out})$  correspond au bruit équivalent  $N_s^{eq}$  sur la voie signal, et  $N^{eq}(\delta X_s^{in} \rightarrow \delta Y_m^{out})$  à  $N_m^{eq}$ . Cette limite sera prise comme la définition de la limite classique standard pour un système de mesure. Elle s'applique, en particulier, à

toutes combinaisons de lames séparatrices et d'amplificateurs indépendants de la phase, comme les amplificateurs laser par exemple.

Dans le cas d'un faisceau signal entrant limité par le bruit de photon, l'inégalité (2.35) s'écrit de façon très simple avec les coefficients de transfert, en utilisant leurs expressions en fonction des bruits équivalents (*cf.* Eq.(2.17)). Un calcul élémentaire conduit à

$$T_s + T_m \leq 1. \quad (2.36)$$

Pour un dispositif QND parfait, on aurait  $T_s = T_m = 1$ , c'est-à-dire  $T_s + T_m = 2$ .

### 2.3.3 Indépendances des trois critères

Nous avons jusqu'à présent surtout insisté sur les deux premiers critères de qualité de la mesure, et de non-dégradation du signal. Le troisième critère de corrélation quantique entre les deux voies de sortie du système de mesure pourrait sembler redondant avec les deux premiers, mais on peut montrer sur un exemple qu'il n'en est rien, et que ces trois critères apportent des informations différentes sur le système de mesure.

En effet, dans le cas d'un amplificateur paramétrique non-dégénéré (modes 1 et 2), produisant des faisceaux jumeaux [*Heidmann 87*] (*cf.* figure 2.2(a)), les relations entrée-sortie pour une quadrature donnée, peuvent s'écrire,

$$\begin{aligned} X_1^{out} &= gX_1^{in} + (g^2 - 1)^{1/2} X_2^{in} \\ X_2^{out} &= gX_2^{in} + (g^2 - 1)^{1/2} X_1^{in} . \end{aligned} \quad (2.37)$$

où  $g \geq 1$  est un coefficient de gain. En considérant la quadrature  $X_1$  comme le signal, et la quadrature  $X_2$  comme la mesure, il vient,

$$T_s + T_m = \frac{g^2}{2g^2 - 1} + \frac{g^2 - 1}{2g^2 - 1} = 1, \quad (2.38)$$

c'est-à-dire qu'on ne dépasse pas la limite quantique standard (*cf.* Eq.(2.36)) pour les critères entrée-sortie, alors que la variance conditionnelle s'écrit

$$V_{s/m} = \frac{1}{2g^2 - 1}, \quad (2.39)$$

et peut donc être aussi proche de zéro que l'on veut, pour un gain  $g$  assez élevé.

Inversement, on peut également trouver des systèmes ayant des corrélations entrée-sortie dans le domaine quantique, et dont la variance conditionnelle ne descend pas en-dessous de l'unité. Si on considère un amplificateur sans bruit, donc dépendant de la phase [*Caves 82*], de gain  $g$  suivi d'une lame semi-réfléchissante ordinaire (*cf.* figure 2.2(b)), les relations entrée-sorties pour la quadrature amplifiée s'écrivent,

$$\begin{aligned} X_s^{out} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (gX_s^{in} + B^{in}) \\ X_m^{out} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (gX_s^{in} - B^{in}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

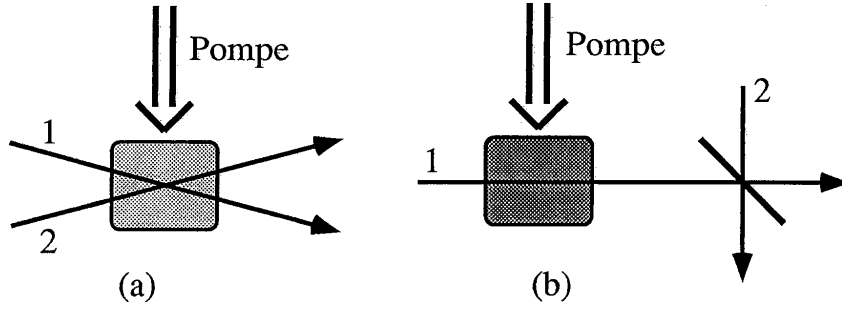


Figure 2.2: En (a), schéma d'un générateur de faisceau jumeaux, et en (b) schéma d'un amplificateur sans bruit suivi d'une lame séparatrice.

où  $B^{in}$  est le bruit du vide rentrant par la voie inutilisée de la lame semi-réfléchissante, et les autres notations usuelles. On a alors, pour un faisceau entrant au bruit de photon,

$$T_s = T_m = \frac{g^2}{g^2 + 1}, \quad (2.41)$$

c'est-à-dire que les coefficients de corrélations entrée-sorties peuvent être rendus aussi proche de l'unité que l'on veut, en prenant un gain  $g$  suffisamment élevé, sans que la variance conditionnelle soit inférieure à l'unité. Remarquons que, dans ce cas, le signal sortant est en fait une copie amplifiée du signal entrant; ce point est abordé plus en détail dans la section 2.3.4 suivante.

Ces deux exemples montrent bien que la variance conditionnelle apporte une information sur le système de mesure, qui n'est pas contenue dans les deux premiers critères.

Dans le cas d'un faisceau signal au bruit de photon, on peut résumer et visualiser ces propriétés sur un diagramme dans lequel la quantité  $T_s + T_m$  est portée en abscisse et la variance conditionnelle en ordonnée (figure 2.3). Le point  $V_{s/m} = 1$  et  $T_s + T_m = 1$  représente la lame séparatrice, le point  $V_{s/m} = 0$  et  $T_s + T_m = 2$  le dispositif QND parfait. Le diagramme se divise en quatre régions. Un système se trouvant dans la région  $V_{s/m} > 1$  et  $T_s + T_m < 1$  est donc un système purement classique. Dans la région  $V_{s/m} < 1$  et  $T_s + T_m < 1$ , seule la variance conditionnelle est dans le domaine quantique, on a donc uniquement un préparateur d'état quantique. Un générateur de faisceaux jumeaux parfait serait par exemple situé dans cette région, et exactement au point (1,0). Dans la région  $V_{s/m} > 1$  et  $T_s + T_m > 1$ , on trouve des systèmes de mesure quantique non-destructifs ne présentant pas de corrélations quantiques entre les deux faisceaux de sortie, qui peuvent être assimilés à des amplificateurs sans bruit. Un amplificateur sans bruit, suivi d'une lame séparatrice, serait situé au point (2,1), à la limite des grands gains  $g$ . La quatrième région, pour laquelle  $V_{s/m} < 1$  et  $T_s + T_m > 1$ , est celle dans laquelle toutes les propriétés d'un système de mesure QND sont satisfaites. Seuls les dispositifs de mesure se trouvant dans cette région méritent donc le label QND, le système de mesure QND parfait se trouvant au point (2,0).

On a donc illustré à travers ces exemples, l'indépendance de ces trois critères de

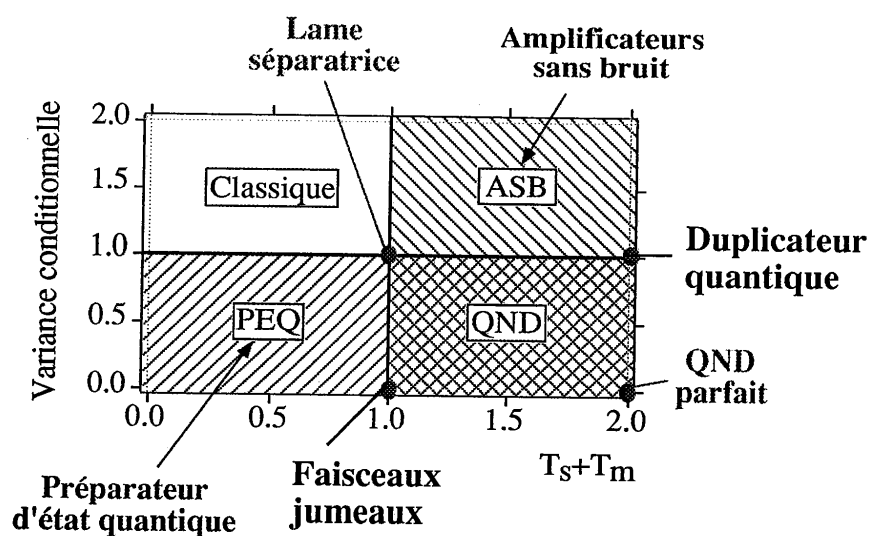


Figure 2.3: Diagramme mettant en évidence les différentes propriétés utilisées pour caractériser un système de mesure. On a noté respectivement  $T_s$  et  $T_m$  les coefficients de corrélation sur la voie signal, et sur la voie de mesure.



caractérisation de système de mesure QND, et ainsi montré qu'il n'existe donc pas, dans le cas général, de relation triangulaire entre ces critères. Nous allons maintenant montrer que le nombre de paramètres indépendants décrivant les propriétés de bruit d'un système de mesure est en fait égal à quatre.

### 2.3.4 Importance du gain sur la voie signal

Notre propos est ici de montrer que la description d'un système de mesure quantique par les trois critères de qualité de la mesure, de non-dégradation du signal, et de corrélation quantique entre la mesure et le signal sortant passe sous silence une caractéristique importante d'un dispositif de mesure, à savoir le gain sur la voie signal. Cette discussion va permettre de définir de façon plus précise la notion de duplicateur quantique que nous avons introduite dans la section 1.4.

En effet, en reprenant les notations de la section 2.2.3, on peut modéliser le système de mesure de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\delta X_s^{out} &= g_s(\delta X_s^{in} + B_s^{aj}) \\ \delta Y_m^{out}/g_m &= \delta X_s^{in} + B_m^{aj}.\end{aligned}\quad (2.42)$$

Le gain  $g_m$  sur la voie de mesure n'est qu'un facteur d'échelle sur une quantité qui est toujours détectée, et n'intervient plus par la suite en tant qu'objet quantique, mais seulement en tant que mesure lue. Sa valeur ne joue donc aucun rôle dans la caractérisation quantique d'un dispositif de mesure. On suppose également, pour simplifier la discussion, que les bruits ajoutés  $B_{s,m}^{aj}$  ne sont pas corrélés à  $\delta X_s^{in}$  (cf. Eq.(2.7))<sup>4</sup>.

Le nombre de paramètres indépendants décrivant le système de mesure est alors égal à quatre : la variance des bruits ajoutés  $\langle B_s^{aj^2} \rangle$ ,  $\langle B_m^{aj^2} \rangle$ , leur corrélation  $\langle B_s^{aj} B_m^{aj} \rangle$ , et le gain  $g_s$  sur la voie signal. Or nous n'avons défini que trois critères quantitatifs pour caractériser un tel système, d'où l'existence d'un degré de liberté non pris en compte par ces trois critères. On rappelle que la qualité de la mesure est déterminée par la variance

$$N_m^{eq} = \langle B_m^{aj^2} \rangle \quad (2.43)$$

du bruit ajouté sur la voie de mesure, la non-dégradation du signal par celle

$$N_s^{eq} = \langle B_s^{aj^2} \rangle \quad (2.44)$$

du bruit ajouté sur la voie signal, et la variance conditionnelle par

$$\begin{aligned}V_{s|m} &= g_s^2 \left( \langle \delta X_s^{in^2} \rangle + \langle B_s^{aj^2} \rangle \right) \left[ 1 - \frac{\left( \langle \delta X_s^{in^2} \rangle + \langle B_s^{aj} B_m^{aj} \rangle \right)^2}{\left( \langle \delta X_s^{in^2} \rangle + \langle B_s^{aj^2} \rangle \right) \left( \langle \delta X_s^{in^2} \rangle + \langle B_m^{aj^2} \rangle \right)} \right] \\ &= \langle \delta X_s^{out^2} \rangle \left( 1 - T_s T_m \frac{\left( \langle \delta X_s^{in^2} \rangle + \langle B_s^{aj} B_m^{aj} \rangle \right)^2}{\langle \delta X_s^{in^2} \rangle^2} \right).\end{aligned}\quad (2.45)$$

<sup>4</sup>On rappelle que cette hypothèse est, en particulier, toujours vérifiée dans le cas le plus courant où les faisceaux entrants sont soit dans un état cohérent, soit dans un état comprimé selon la direction de la quadrature  $X_s^{in}$ .

Voyons maintenant quelle information supplémentaire sur le système de mesure apporte le gain  $g_s$  sur la voie signal. Si le faisceau entrant est comprimé selon la direction de la quadrature  $X_s^{in}$  et qu'on est concerné par la conservation de ce squeezing entrant sur le signal sortant, alors le gain  $g_s$  joue un rôle primordial. En effet la relation entre le squeezing entrant  $V^{in} = \langle \delta X_s^{in^2} \rangle$  et le squeezing sortant  $V^{out} = \langle \delta X_s^{out^2} \rangle$  est,

$$V^{out} = g_s^2(V^{in} + N_s^{eq}). \quad (2.46)$$

On s'aperçoit donc que, pour un bruit équivalent donné, le taux de squeezing du faisceau sortant ne pourra pas être meilleur que  $g_s^2 N_s^{eq}$  (obtenu lorsque  $V^{in} = 0$ ), et dépendra donc directement du gain sur la voie signal. Par contre, pour des valeurs données des trois critères précédents, le fait que le signal sortant soit amplifié ( $g_s > 1$ ) est un gage de robustesse vis-à-vis des pertes en aval du système de mesure. En effet si ce qui était le bruit de photon du signal entrant est fortement amplifié, tout en conservant un bon coefficient de transfert  $T_s$  du rapport signal-sur-bruit sur la voie signal, alors le bruit du signal sortant se retrouve largement au dessus du bruit de photon, et est alors bien moins sensible au bruit amené par des pertes éventuelles sur la ligne (voir [Yuen 86]), puisque le bruit tend alors à se comporter comme un bruit classique. Ce point sera illustré expérimentalement dans le chapitre 5 rendant compte d'un dispositif de mesure utilisant des matériaux semi-conducteurs.

Ces considérations nous amènent donc à proposer le coefficient de gain  $g_s$  sur la voie signal comme quatrième critère quantitatif d'évaluation des performances d'un système de mesure quantique. Les dispositifs de mesure vérifiant les trois premiers critères, et ayant un gain  $g_s > 1$  seront appelés des *duplicateurs quantiques*.

## 2.4 Conclusion

Les différents systèmes de critères pour la caractérisation de dispositifs de mesures QND non-idéaux, qui ont été présentés dans cette partie, se réfèrent tous aux trois propriétés fondamentales introduites par Holland *et al* [Holland 90]. Un dispositif de mesure quantique non-destructive se doit d'effectuer une mesure efficace (évalué par  $C^2(X_s^{in} Y_m^{out})$ ,  $N_m^{eq}$  ou  $T_m$ ), qui ne dégrade pas trop le signal ( $C^2(X_s^{in} X_s^{out})$ ,  $N_s^{eq}$  ou  $T_s$ ), et qui corrèle le faisceau de mesure, à mieux que le bruit quantique standard, à la sortie du faisceau signal mesuré (estimé par la variance conditionnelle  $V_{s/m}$ ). Ces différents systèmes de critères sont équivalents dans la plupart des configurations usuelles, en particulier lorsque le faisceau signal est dans un état cohérent, mais il existe cependant des situations, dont un exemple est donné dans l'annexe A, pour lesquelles il apparait des différences qui peuvent être importantes. Et, si tous ces critères peuvent se calculer théoriquement d'après les modèles décrivant le système physique, seuls les bruits équivalents et les coefficients de transfert sont mesurables expérimentalement.

Nous avons défini une limite classique standard pour les systèmes de mesure, dont le franchissement est la signature d'un dispositif QND.

Nous avons également mis en évidence la nécessité d'un quatrième critère pour une description plus complète d'un système de mesure quantique, en faisant ap-

paraître l'importance du gain sur la voie signal pour des propriétés comme la conservation du taux de squeezing entrant, et la robustesse vis-à-vis des pertes ultérieures.

# Chapitre 3

## Théorie

### 3.1 Introduction et présentation

Les calculs présentés dans ce chapitre traitent de façon complètement quantique l'interaction entre un ensemble d'atomes à trois niveaux fermés et deux modes distincts du champ électromagnétique (*cf.* figure 3.1), dans des régimes de paramètres (désaccords, intensités, constantes de temps *etc.*) complètement arbitraires. On va s'intéresser aux propriétés de bruits quantique dans un tel système, et plus particulièrement au transfert du bruit quantique d'un faisceau sur l'autre.

Les deux modes du champ électromagnétique en interaction sont chacun un mode propre d'une cavité optique dans laquelle sont situés les atomes. Chaque mode intracavité est donc alimenté par un champ entrant, et alimente un champ sortant. Ces champs entrants et sortants sont en fait les quantités accessibles expérimentalement sur lesquelles les mesures sont effectuées. Les quantités qui nous intéressent sont les variances des fluctuations quantiques des différents champs sortants, les corrélations quantiques entrée-sortie et entre les champs sortants. Les fluctuations ou bruits quantiques étant nos principales préoccupations, il est évidemment capital (et c'est même la raison d'être du calcul) de prendre en compte toutes les sources de bruits du dispositif. Les sources de bruit du système sont d'une part le couplage de chaque mode du champ au réservoir de modes extérieur par l'intermédiaire du miroir d'entrée (partiellement réfléchissant), et d'autre part le couplage des atomes aux modes latéraux vides du champs, conduisant au bruit

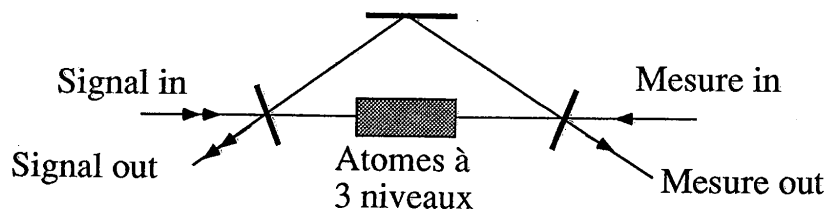


Figure 3.1: Schéma de principe du modèle théorique.

d'émission spontanée.

Les deux traitements quantiques complets présentés dans la section 3.3 de ce chapitre utilisent le minimum d'approximations. Néanmoins, la modélisation mathématique d'une situation physique comportant  $N \simeq 10^7$  atomes et une infinité de modes du champ nécessite un certain nombre d'approximations dont l'influence n'est pas toujours facile à évaluer. La discussion des simplifications mathématiques introduites par le modèle se fera au début de la section 3.3, tandis que les approximations plus physiques (plus directement liées à l'expérience) seront discutées à la fin du chapitre 4, dans la section 4.4.2.

La section 3.2 de ce chapitre expose un modèle simple ayant l'avantage de bien mettre en avant les phénomènes physiques principaux. Ce modèle paramétrique décrit le système par un couplage phénoménologique entre les deux champs, en ignorant la nature atomique du milieu non-linéaire, rendant ainsi compte du principe de base de l'interaction qui est l'effet Kerr croisé. On peut mentionner qu'un modèle intermédiaire entre le modèle paramétrique et le calcul à trois niveaux, utilisant un Hamiltonien effectif à deux niveaux, est présenté dans l'annexe E.

Les deux calculs quantiques avec des atomes à trois niveaux développés dans ce chapitre sont strictement équivalents mais abordent le problème de façon différente et ont chacun leurs avantages respectifs. La section 3.3.2 présente la méthode Neo-Zélandaise (NZ), qui traite le système atome+champs globalement dans l'espace des temps utilisant la technique input-output développée par Gardiner et Collett [Gardiner 85], tandis que la section 3.3.3 expose la méthode IOTA-ENS [Courty 91] [Courty 92] qui utilise la théorie de la réponse linéaire pour décrire les atomes sous la forme d'une susceptibilité vue par les champs, et ceci dans l'espace des fréquences.

## 3.2 Modèle paramétrique

### 3.2.1 Cadre du calcul

Ce modèle décrit le milieu non-linéaire à l'aide de coefficients "macroscopiques" de couplage non-linéaire entre les deux champs. Il représente une approximation en principe valide lorsque les désaccords atomes-lasers sont très grands, ce qui permet d'avoir un milieu non-linéaire uniquement dispersif, sans absorption ni fluctuations. Cette approximation sera évidemment reconsidérée lors de l'étude des modèles "microscopiques", que nous introduirons dans la suite de ce chapitre. Le modèle paramétrique est discuté dans les références [Grangier 91b][Grangier 89a], et en détail dans la thèse de J.-F. Roch. Nous en donnerons ici une présentation plus formelle, à l'aide d'équations de Langevin pour des opérateurs décrivant les modes des champs en interaction. Cette présentation permet en effet d'établir un lien direct avec les modèles microscopiques qui seront décrits par la suite.

Le système que l'on décrit est un milieu à effet Kerr croisé placé dans une cavité optique dont deux modes propres, de fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$  très différentes, sont excités chacun par un champ laser de fréquence  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2$ ).

On considère donc deux modes du champ électromagnétique de fréquences respectives  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , représentés par les opérateurs bosoniques  $a_1$  ( $a_1^\dagger$ ) et  $a_2$  ( $a_2^\dagger$ ),

interagissant dans un milieu à effet Kerr croisé. Ces modes sont chacun un mode propre d'une cavité optique de finesse suffisamment grande pour que les champs laser excitateurs n'excitent de façon appréciable qu'un seul mode propre chacun. Cette approximation est dite "de bonne cavité". Chaque cavité est une cavité en anneau n'ayant qu'un seul miroir de sortie.

L'Hamiltonien décrivant cette situation peut être décomposé en une somme de quatre termes:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_{\text{réservoir}}. \quad (3.1)$$

Le premier terme

$$\mathcal{H}_1 = \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2 \quad (3.2)$$

correspond aux deux modes du champ oscillant librement à l'intérieur de la cavité, et

$$\mathcal{H}_2 = -\hbar f a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 \quad (3.3)$$

est le couplage Kerr entre les deux champs ( $f$  est le coefficient de couplage). Le terme suivant,

$$\mathcal{H}_3 = i\hbar \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega C_\omega^j [b_\omega^j a_j^\dagger - a_j b_\omega^{j\dagger}] \quad (3.4)$$

décrit l'interaction des deux modes à l'intérieur de la cavité avec le milieu extérieur, qui est un réservoir de modes  $b_\omega^j$ , pour  $j=1,2$ , et  $\omega$  prenant toutes les valeurs de fréquences des modes vides du champ. Le coefficient de couplage entre le réservoir extérieur et chaque mode intra-cavité est noté  $C_\omega^j$ . Enfin,

$$\mathcal{H}_{\text{réservoir}} = \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hbar\omega b_\omega^{j\dagger} b_\omega^j d\omega \quad (3.5)$$

est l'Hamiltonien d'évolution libre du réservoir extérieur.

Chacun des champs ( $j=1,2$ ) est traité de façon indépendante, c'est la raison pour laquelle les opérateurs  $b_\omega^j$ ,  $b_\omega^{j\dagger}$  et le coefficient  $C_\omega^j$  sont indicés par  $j$ . Il faut noter que tous les opérateurs  $a_j$ ,  $b_\omega^j$  dépendent en fait du temps  $t$ , que l'on omet le plus souvent dans les notations lorsque cela ne porte pas à confusion. Remarquons que  $b_\omega^j$  et  $C_\omega^j$  sont des fonctions de  $\omega$  (qu'on pourra donc intégrer par rapport à  $\omega$ ), et que leur dépendance en  $\omega$  est notée en indice pour ne pas porter à confusion avec une transformée de Fourier pour laquelle la dépendance en  $\omega$  sera notée  $(\omega)$ .

Les relations de commutation des différents opérateurs s'écrivent

$$[a_j, a_{j'}^\dagger] = \delta_{jj'} \quad (3.6)$$

et

$$[b_\omega^j, b_{\omega'}^{j'\dagger}] = \delta_{jj'} \delta(\omega - \omega'), \quad (3.7)$$

où  $\delta_{jj'} = 1$  si  $j=j'$  et  $\delta_{jj'} = 0$  si  $j \neq j'$ , et  $\delta$  est la fonction de Dirac habituelle.

On définit le champ entrant  $a_j^{\text{in}}(t)$ , pour  $t > t_0$ , par

$$a_j^{\text{in}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t_0)} b_\omega^{j(o)}. \quad (3.8)$$

où  $b_\omega^{(o)} = b_\omega^j(t_o)$ , où  $t_o$  est un temps initial, loin dans le passé. On a les relations de commutation non nulles suivantes :

$$[a_j^{in}(t), a_{j'}^{in\dagger}(t')] = \delta_{jj'}\delta(t-t'). \quad (3.9)$$

La fréquence du champ laser  $j$  entrant est notée  $\Omega_j^L$ . Dans le repère tournant à  $\Omega_j^L$ , dans lequel les opérateurs sont (provisoirement) notés

$$\begin{aligned} \tilde{a}_j^{in}(t) &= a_j^{in}(t)e^{-i\Omega_j^L t} \\ \tilde{b}_\omega^j(t) &= b_\omega^j(t)e^{-i\Omega_j^L t}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

on a alors aussi,

$$\tilde{a}_j^{in}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t_o)} \tilde{b}_\omega^{j(o)}. \quad (3.11)$$

A partir de maintenant, on se placera toujours dans les repères tournant aux fréquences  $\Omega_j$  en notant  $a_j(t)$  et  $(b_\omega^j)(t)$  sans les tilde ( $\sim$ ).

On fait l'hypothèse d'un bruit quantique blanc : c'est l'hypothèse de Markov [Gardiner 85] qui stipule que, concernant les échanges avec le réservoir extérieur, ce qui se passe à l'instant  $t$  est indépendant de tous les événements antérieurs à  $t$ . Les coefficients  $C_\omega^j$  ( $j=1,2$ ) ne dépendent alors plus de  $\omega$  et on a

$$\forall \omega, \quad C_\omega^j = \sqrt{\kappa_j/\pi}. \quad (3.12)$$

où  $\kappa_j$  est le taux d'amortissement de la cavité correspondant au mode  $a_j$ .

### 3.2.2 Equations de Langevin

On en déduit alors le système d'équations de Langevin, dont une dérivation détaillée est présentée dans l'annexe C,

$$\begin{aligned} \frac{da_j}{dt} &= -\kappa_j(1 + i\phi_j)a_j + ifa_{3-j}^\dagger a_{3-j}a_j - \sqrt{2\kappa_j} a_j^{in}, \\ \frac{da_j^\dagger}{dt} &= -\kappa_j(1 - i\phi_j)a_j^\dagger - ifa_{3-j}^\dagger a_{3-j}a_j^\dagger - \sqrt{2\kappa_j} a_j^{in\dagger}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

où  $\phi_j = (\omega_j - \Omega_j)/\kappa_j$  est le désaccord normalisé de la cavité par rapport au champ entrant (pour  $j=1,2$ ). L'interprétation de ces équations est très claire : Le premier terme représente l'amortissement d'un mode  $j$  désaccordé de  $\phi_j$ . Le deuxième terme décrit le couplage non-linéaire entre les deux champs, qui apparaît ici, dans le cas d'un effet Kerr croisé, comme un terme de déphasage non-linéaire. Le dernier terme est le terme source fluctuant, provenant du bain extérieur, et relié à l'amortissement par le théorème de fluctuation-dissipation.

De manière analogue aux champs entrants (cf. Eq.3.8), on peut également définir un champ sortant, pour  $t < t_1$  (où  $t_1$  est un temps loin dans le futur), par

$$a_j^{out}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t_1)} b_\omega^{j(o)}. \quad (3.14)$$

On peut alors écrire un nouveau système d'équations de Langevin en fonction cette fois des  $a_j^{out}$ . En combinant le système d'équations de Langevin avec les champs entrants, et celui faisant intervenir les champs sortants, on obtient les conditions aux limites sur le miroir de sortie de la cavité  $j$ , reliant entre eux les champs  $j$  entrant, sortant et intra-cavité :

$$a_j^{out} - a_j^{in} = \sqrt{2\kappa_j} a_j. \quad (3.15)$$

Cette équation traduit simplement la relation habituelle entre les champs sur le miroir de couplage.

On se limite ici aux cas où les deux champs moyens intra-cavité pour les deux modes, ont la même valeur, c'est-à-dire  $\langle a_1 \rangle = \langle a_2 \rangle$ .<sup>1</sup> Les valeurs moyennes semi-classiques des champs intra-cavité, qui sont les solutions stationnaires du système d'équations précédent (3.13) s'écrivent alors en fonction des valeurs moyennes des champs entrants,

$$\langle a_j \rangle = \frac{-\sqrt{2\kappa_j} \langle a_j^{in} \rangle}{\kappa_j(1 + i(\phi_j - \lambda/\kappa_j))}, \quad (3.16)$$

ou en fonction des valeurs moyennes des champs sortants,

$$\langle a_j \rangle = \frac{-\sqrt{2\kappa_j} \langle a_j^{out} \rangle}{\kappa_j(-1 + i(\phi_j - \lambda/\kappa_j))}, \quad (3.17)$$

où  $\lambda = f |\langle a_1 \rangle|^2 = f |\langle a_2 \rangle|^2$  est la force de l'interaction entre les deux champs, qui ne dépend pas de  $j$  puisque les deux champs ont une valeur moyenne égale, et  $\lambda/\kappa_j$  représente le déphasage non-linéaire (en unité de largeur de cavité) introduit dans le mode  $j$  par le changement d'indice causé par le couplage Kerr. La différence de phase  $\theta_j^\circ$  entre le champ intra-cavité et le champ entrant  $j$ , définie par

$$\frac{\langle a_j^{in} \rangle}{|\langle a_j^{in} \rangle|} = \frac{\langle a_j \rangle}{|\langle a_j \rangle|} e^{-i\theta_j^\circ}, \quad (3.18)$$

s'écrit donc

$$\theta_j^\circ = \arctan(-\alpha_j), \quad (3.19)$$

dans lequel  $\alpha_j = \phi_j - \lambda/\kappa_j$  est le désaccord total.

Nous sommes en fait intéressés par le comportement des fluctuations quantiques des différents champs. En supposant ces fluctuations très petites par rapport aux valeurs moyennes, ce qui est justifié lorsque l'on considère de grands nombres de photons, et qu'on se place dans des régions suffisamment éloignées des points tournants de bistabilité, on peut faire un développement au premier ordre des opérateurs de champs ( $j=1,2$ ),

$$a_j = \langle a_j \rangle + \delta a_j \quad (3.20)$$

Dans notre situation expérimentale, cette approximation est justifiée. En effet, les puissances que nous utilisons sont de l'ordre du  $mW$ , dans le visible et le

<sup>1</sup>La différence de phase entre  $\langle a_1 \rangle$  et  $\langle a_2 \rangle$  ne jouant aucun rôle, elle est prise, pour des raisons de simplicité, égale à zéro.



proche infra-rouge, ce qui représente un nombre de photons par seconde, intégré spatialement sur toute la section du faisceau d'environ  $3 \times 10^{15}$ , et les bandes de fréquence avec lesquelles on analyse le bruit sont de l'ordre de 100 kHz, ce qui donne un nombre de photons caractéristique de  $3 \times 10^{10}$ , d'où des fluctuations relatives de l'ordre de  $1/\sqrt{3 \times 10^{10}} = 6 \times 10^{-6}$ . Les bruits détectés ne dépassent jamais la dizaine en unité de bruit de photon, car on évite de s'approcher trop près des zones d'instabilité (voir plus loin).

Utilisant cette linéarisation, on peut alors réécrire le système d'équations (3.13) pour les parties fluctuantes, en utilisant un formalisme matriciel. Pour nous permettre d'obtenir des solutions analytiques de taille raisonnable, nous nous limiterons, à partir de maintenant, aux situations pour lesquelles  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$  et  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ . On obtient alors, dans l'espace de Fourier,

$$\mathbf{A}(\omega)\delta\mathbf{a}(\omega) + \mathbf{d}(\omega) = \mathbf{0}, \quad (3.21)$$

dans lequel les transformées de Fourier des opérateurs sont définies de la façon suivante,

$$\begin{aligned} \delta a_j(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta a_j(t) e^{i\omega t} dt \\ \delta a_j^\dagger(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta a_j^\dagger(t) e^{i\omega t} dt, \end{aligned} \quad (3.22)$$

et où

$$\delta\mathbf{a}(\omega) = \begin{pmatrix} \delta a_1(\omega) \\ \delta a_1^\dagger(\omega) \\ \delta a_2(\omega) \\ \delta a_2^\dagger(\omega) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}(\omega) = \begin{pmatrix} \sqrt{2\kappa}\delta a_1^{in}(\omega) \\ \sqrt{2\kappa}\delta a_1^{in\dagger}(\omega) \\ \sqrt{2\kappa}\delta a_2^{in}(\omega) \\ \sqrt{2\kappa}\delta a_2^{in\dagger}(\omega) \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

et

$$\mathbf{A}(\omega) = \begin{pmatrix} \kappa(1+i\alpha) + i\omega & 0 & -i\lambda & -i\lambda \\ 0 & \kappa(1-i\alpha) + i\omega & i\lambda & i\lambda \\ -i\lambda & -i\lambda & \kappa(1+i\alpha) + i\omega & 0 \\ i\lambda & i\lambda & 0 & \kappa(1-i\alpha) + i\omega \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

### 3.2.3 Stabilité du système

Les systèmes présentant de l'effet Kerr ont souvent des régions de paramètres dans lesquels ils sont bistables [Gibbs 85][Agrawal 80]. Pour la réalisation de mesures QND, nous chercherons toujours à nous placer autour de points de fonctionnement stable [Grangier 89a][Roch 92a]. Le critère de stabilité de système est que les parties réelles des valeurs propres de la matrice d'évolution temporelle, qui n'est rien d'autre que  $-\mathbf{A}(0)$  (cf. équations (3.13)), soient strictement négatives.

Les valeurs propres de la matrice d'évolution temporelle, *i.e.* de  $-\mathbf{A}(0)$  sont:

$$v_1 = -\kappa \left( 1 + i\sqrt{\alpha(\alpha + 2\lambda/\kappa)} \right)$$

$$\begin{aligned}
v_2 &= -\kappa \left( 1 - i\sqrt{\alpha(\alpha + 2\lambda/\kappa)} \right) \\
v_3 &= -\kappa \left( 1 + \sqrt{\alpha(-\alpha + 2\lambda/\kappa)} \right) \\
v_4 &= -\kappa \left( 1 - \sqrt{\alpha(-\alpha + 2\lambda/\kappa)} \right).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

On en déduit les conditions de stabilité du système:

$$\diamond \quad |\alpha| > 2\lambda/\kappa \tag{3.26}$$

$$\text{ou } \diamond \quad \begin{cases} 0 < \alpha < 2\lambda/\kappa \\ \text{et } \alpha(-\alpha + 2\lambda/\kappa) < 1 \end{cases} \tag{3.27}$$

$$\text{ou } \diamond \quad \begin{cases} -2\lambda/\kappa < \alpha < 0 \\ \text{et } -\alpha(\alpha + 2\lambda/\kappa) < 1 \end{cases} \tag{3.28}$$

Pratiquement, on ne se place jamais très loin de la résonance de la cavité. On aura donc presque toujours  $|\alpha| < 2\lambda/\kappa$ , et uniquement les deux dernières conditions seront à surveiller. On supposera, dans toute la suite, que l'on est dans une région stable. Une discussion plus détaillée de ces problèmes de stabilité est faite dans la thèse de J.-F. Roch.

### 3.2.4 Relations entrée-sortie

On peut maintenant exprimer  $\delta \mathbf{a}^{\text{out}}(\omega)$  en fonction de  $\delta \mathbf{a}^{\text{in}}(\omega)$  en transformant l'équation (3.21), au moyen de la relation (3.15). On obtient alors,

$$\delta \mathbf{a}^{\text{out}}(\omega) = [\mathbf{I} - 2\kappa \mathbf{A}^{-1}(\omega)] \delta \mathbf{a}^{\text{in}}(\omega), \tag{3.29}$$

dans laquelle  $\mathbf{I}$  est la matrice identité.

Passons maintenant dans la base des quadratures amplitude et phase des champs sortants,  $\delta \mathbf{c}^{\text{out}} = (p_1^{\text{out}}, q_1^{\text{out}}, p_2^{\text{out}}, q_2^{\text{out}})^T$ , définis par la transformation suivante à partir des opérateurs  $a_{1,2}^{\text{out}}$ , et  $a_{1,2}^{\text{out}\dagger}$ :

$$\delta \mathbf{c}^{\text{out}}(\omega) = \begin{pmatrix} \delta p_1^{\text{out}}(\omega) \\ \delta q_1^{\text{out}}(\omega) \\ \delta p_2^{\text{out}}(\omega) \\ \delta q_2^{\text{out}}(\omega) \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{\text{out}} \begin{pmatrix} \delta a_1^{\text{out}}(\omega) \\ \delta a_1^{\text{out}\dagger}(\omega) \\ \delta a_2^{\text{out}}(\omega) \\ \delta a_2^{\text{out}\dagger}(\omega) \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

avec

$$\mathbf{T}^{\text{out}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta_0} & e^{i\theta_0} & 0 & 0 \\ -ie^{-i\theta_0} & ie^{i\theta_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta_0} & e^{i\theta_0} \\ 0 & 0 & -ie^{-i\theta_0} & ie^{i\theta_0} \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

et, de façon analogue, on définit  $\delta \mathbf{c}^{\text{in}} = (p_1^{\text{in}}, q_1^{\text{in}}, p_2^{\text{in}}, q_2^{\text{in}})^T$  pour les champs entrants, avec

$$\mathbf{T}^{\text{in}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\theta_0} & e^{-i\theta_0} & 0 & 0 \\ -ie^{i\theta_0} & ie^{-i\theta_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_0} & e^{-i\theta_0} \\ 0 & 0 & -ie^{i\theta_0} & ie^{-i\theta_0} \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

On obtient alors,

$$\delta \mathbf{c}^{\text{out}}(\omega) = \mathbf{T}^{\text{out}}[\mathbf{I} - 2\kappa \mathbf{A}^{-1}(\omega)](\mathbf{T}^{\text{in}})^{-1} \delta \mathbf{c}^{\text{in}}(\omega). \quad (3.33)$$

Cette équation matricielle permet d'obtenir des équations analytiques explicites, dont les expressions complètes sont donnés dans l'annexe D.

Il faut rappeler ici que nous nous sommes limité à des solutions symétriques pour les deux champs (même désaccord non-linéaire  $\alpha$ , et même valeur moyenne de l'amplitude pour les deux champs). Il apparaît alors que le cas  $\alpha = 0$  est le plus favorable aux mesures QND. Cette condition est en fait indispensable pour le faisceau signal, afin d'éviter que les quadratures amplitude et phase ne se mélangent. L'utilisation du faisceau de mesure hors résonance de la cavité peut en revanche être adéquate pour convertir les modulations de phase en modulations d'intensité, si l'on ne dispose pas d'une détection homodyne. Des détails sur cette dernière configuration sont donnés par Grangier et Roch [Grangier 91a], et les résultats expérimentaux correspondants sont publiés dans la référence [Roch 92b]. Dans le cas où  $\alpha = 0$  (on a alors également  $\theta_o = 0$ ), c'est-à-dire que les champs sont à résonance des cavités non-linéaires, les expressions deviennent particulièrement simples. On a alors,

$$\begin{aligned} \delta p_1^{\text{out}}(\omega) &= \left( \frac{\kappa - i\omega}{\kappa + i\omega} \right) \delta p_1^{\text{in}}(\omega) \\ \delta q_1^{\text{out}}(\omega) &= \left( \frac{\kappa - i\omega}{\kappa + i\omega} \right) \delta q_1^{\text{in}}(\omega) + \frac{4\kappa\lambda}{(\kappa + i\omega)^2} \delta p_2^{\text{in}}(\omega) \end{aligned} \quad (3.34)$$

et des expressions exactement symétriques pour  $\delta p_2^{\text{out}}(\omega)$  et  $\delta q_2^{\text{out}}(\omega)$ , puisque le modèle paramétrique est symétrique par rapport aux champs 1 et 2. La première de ces équations montre que l'amplitude du signal est inchangée, à un facteur de phase près, dépendant de la fréquence d'analyse. La seconde équation indique que la quadrature phase de la mesure contient de l'information sur l'amplitude du signal, et permet donc, ce qui est l'effet recherché, d'en faire une mesure.

### 3.2.5 Critères QND

On rappelle que dans le cas de faisceaux entrants cohérents, qui est le cas de ce calcul, les coefficients de corrélations entrée-sortie s'identifient aux coefficients de transfert des rapports signal-sur-bruit. On peut ainsi exprimer directement les deux coefficients de corrélation correspondant aux critères de mesure et de non dégradation, ainsi que la variance conditionnelle afin d'estimer l'efficacité du dispositif en tant que système de mesure QND. Pour ce faire, on peut définir une matrice de corrélation entrée-sortie  $\mathcal{W}(\omega)$ , par

$$\mathcal{W}_{i,j}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (1/2) \langle c_i^{\text{in}}(\omega) c_j^{\text{out}T}(\omega') + c_j^{\text{out}}(\omega') c_i^{\text{in}T}(\omega) \rangle d\omega' \quad (3.35)$$

et une matrice de corrélation en sortie  $\mathcal{S}(\omega)$ , par

$$\mathcal{S}_{i,j}^{\text{out}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (1/2) \langle c_i^{\text{out}}(\omega') c_j^{\text{out}T}(\omega) + c_i^{\text{out}}(\omega') c_j^{\text{out}T}(\omega) \rangle d\omega' \quad (3.36)$$

Dans le cas où tous les faisceaux entrants sont dans des états cohérents, la matrice de corrélation en entrée est:

$$\mathcal{S}^{in}(\omega) = \mathbf{I} \quad (3.37)$$

En prenant l'amplitude du champ 1 comme signal, et la phase du champ 2 comme mesure, on obtient, pour le coefficient de mesure  $C_{mes}^2(\omega)$

$$C_{mes}^2(\omega) = \frac{|\mathcal{W}_{4,1}(\omega)|^2}{\mathcal{S}_{1,1}^{in}(\omega)\mathcal{S}_{4,4}^{out}(\omega)}, \quad (3.38)$$

ce qui donne, dans le cas où  $\alpha = 0$  (d'après les équations (3.34))

$$C_{mes}^2(\omega) = \frac{(4\kappa\lambda)^2}{(4\kappa\lambda)^2 + (\kappa^2 + \omega^2)^2} \quad (3.39)$$

Le coefficient de dégradation du signal s'écrit

$$C_{sig}^2(\omega) = \frac{|\mathcal{W}_{1,1}(\omega)|^2}{\mathcal{S}_{1,1}^{in}(\omega)\mathcal{S}_{1,1}^{out}(\omega)}. \quad (3.40)$$

Il vaut 1 (pas de dégradation du tout), dans ce modèle quand  $\alpha = 0$ . Et enfin, la variance conditionnelle se met sous la forme

$$V_{s|m}(\omega) = \mathcal{S}_{1,1}^{out}(\omega) \left( 1 - \frac{\mathcal{S}_{1,4}^{out}(\omega)}{\mathcal{S}_{1,1}^{out}(\omega)\mathcal{S}_{4,4}^{out}(\omega)} \right). \quad (3.41)$$

Et elle vaut, toujours pour  $\alpha = 0$ ,

$$V_{s|m}(\omega) = \frac{(\kappa^2 + \omega^2)^2}{(\kappa^2 + \omega^2)^2 + (4\kappa\lambda)^2}. \quad (3.42)$$

On peut remarquer que, puisque  $C_{sig} = 1$  et que le gain sur la voie signal est unité (cf. Eq.(3.34)), on a  $V_{s|m}(\omega) = 1 - C_{mes}^2(\omega)$ .

On observe qu'à fréquence nulle, tous les critères QND sont satisfaits d'une façon qui tend vers la perfection lorsque le couplage  $\lambda$  devient grand, et que dès que  $\lambda > \kappa/4$ , le coefficient de mesure est supérieur à 0.5, et donc la variance conditionnelle inférieure à 0.5. On a représenté ces critères sur la figure 3.2 pour un déphasage non-linéaire  $\lambda$  égal à une largeur de cavité  $\kappa$ . La bande de fréquence pour laquelle ce système permet de réaliser des mesures QND est de l'ordre de  $\kappa$  (valeur expérimentale typique de 50 MHz). Il faut cependant rappeler que les basses fréquences (inférieures au MHz) sont expérimentalement interdites à cause du bruit technique des lasers à colorants dans cette gamme de fréquence. Mis à part le cas mentionné plus haut pour lequel le faisceau de mesure est accordé en dehors de la résonance de la cavité pour faire tourner les quadratures [Grangier 91a], le rôle de la cavité est essentiellement de créer une surtension de l'intensité des champs, qui augmente le couplage non-linéaire entre les deux faisceaux, et de permettre une amplification résonante des fluctuations.

L'approximation paramétrique, appelées aussi limite dispersive, est assez sommaire, et n'est valable, lorsqu'on a à faire à des atomes, que dans le cas où les désaccords entre les champs et les atomes sont grands devant la largeur naturelle des niveaux rendant négligeable les effets dus à l'émission spontanée. Cependant, ce modèle a l'avantage d'être simple et de bien mettre en évidence les mécanismes essentiels du couplage QND par effet Kerr croisé.

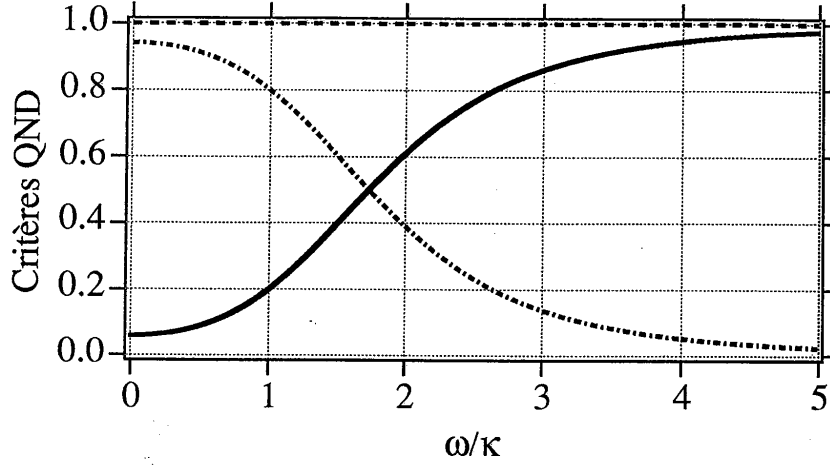


Figure 3.2: Critères QND en fonction de la fréquence de bruit normalisée. La courbe en trait plein représente la variance conditionnelle, celle en tirets-pointillés le coefficient de corrélation de mesure, et celle en tirets le coefficient de corrélation sur la voie signal. Pour ces courbes on a pris  $\lambda = \kappa$ .

### 3.3 Calcul complet à trois niveaux

#### 3.3.1 Cadre général

##### Préliminaires et notations

Nous arrivons maintenant à la méthode présentant le moins d'approximations [Courty 91][Poizat 92] pour décrire les fluctuations quantiques de deux champs lumineux de fréquences différentes  $\Omega_1^L$  et  $\Omega_2^L$  en interaction avec un système d'atomes à trois niveaux, chacun des champs interagissant avec une transition atomique différente. Néanmoins, certaines approximations apparaissent comme quasi inévitables pour la modélisation d'un tel système physique. Nous nous plaçons, en effet toujours dans l'approximation dite "de bonne cavité", pour laquelle on suppose les modes de la cavité suffisamment bien définis pour que l'on puisse considérer un seul mode par champ [Lugiato 90]. De plus, on considère des cavités en anneau n'ayant qu'un seul miroir de sortie. Nous ne tenons pas compte non plus du mouvement des atomes, des collisions et interactions entre les atomes. Cependant, ces dernières approximations seront discutées dans le chapitre 4 (section 4.4.2), et des corrections seront proposées pour essayer d'obtenir une description s'approchant le plus près possible des réalités expérimentales.

Nous présentons ici les calculs pour une configuration atomique à trois niveaux en échelle notés 1,2,3 (cf. figure 3.3), mais cette méthode est immédiatement transposable pour des configurations en  $V$  ou en  $\Lambda$ . La configuration en  $\Lambda$  [Gheri 92] sera d'ailleurs discutée dans la section 3.4.3.

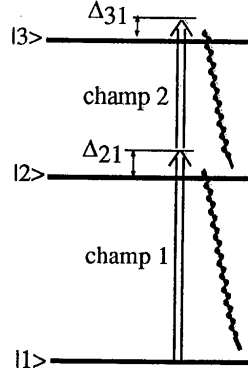


Figure 3.3: Schéma de niveaux d'un atome à trois niveaux en échelle.

L'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  décrivant ce système peut s'écrire sous la forme d'une somme de six termes:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \mathcal{H}_{res\ champs} + \mathcal{H}_{res\ atomes}. \quad (3.43)$$

Le premier terme

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{\mu=1}^N \sum_{i=1,2,3} \hbar \epsilon_i \sigma_{ii}^{\mu} + \sum_{j=1,2} \hbar \omega_j a_j^{\dagger} a_j \quad (3.44)$$

correspond à l'évolution libre des champs et des atomes. Le second terme

$$\mathcal{H}_2 = i\hbar g_1 \sum_{\mu=1}^N (a_1^{\dagger} \sigma_{12}^{\mu} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}^{\mu}} - h.c.) + i\hbar g_2 \sum_{\mu=1}^N (a_2^{\dagger} \sigma_{23}^{\mu} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}^{\mu}} - h.c.) \quad (3.45)$$

décrit l'interaction des champs avec les  $N$  atomes dans l'approximation du champ tournant. Le terme suivant

$$\mathcal{H}_3 = i\hbar \sum_{j=1,2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega C_{\omega}^j (b_{j\omega}^{\dagger} a_j - h.c.) \quad (3.46)$$

rend compte de l'amortissement des champs dans la cavité dû au couplage avec le réservoir extérieur, et

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_4 = & i\hbar \sum_{\mu=1}^N \int_{(1)} d^3\mathbf{k} (c_k b_k^{\dagger} \sigma_{12}^{\mu} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}^{\mu}} - h.c.) \\ & + i\hbar \sum_{\mu=1}^N \int_{(2)} d^3\mathbf{k} (c_k b_k^{\dagger} \sigma_{23}^{\mu} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}^{\mu}} - h.c.) \end{aligned} \quad (3.47)$$

décrit la relaxation de chacun des  $N$  atomes par émission spontanée, due au couplage avec les modes vides du champ. L'indice ( $j$ ) des intégrales ( $j = 1, 2$ ) signifie

que seules vont contribuer les valeurs de  $k$  dont la fréquence associée est voisine de la fréquence de résonance de la transition atomique  $j$ . Les fréquences des transitions atomiques 1, 2 sont respectivement notées  $\epsilon_2 - \epsilon_1$ ,  $\epsilon_3 - \epsilon_2$ ; et  $\omega_j$  est la fréquence du mode  $j$  de la cavité ( $j = 1, 2$ ). Les opérateurs  $a_j$  et  $a_j^\dagger$  sont les opérateurs bosoniques habituels pour le mode  $j$ . L'opérateur  $\sigma_{ij}^\mu$  est, lorsque  $i = j$ , la population du niveau  $i$  ou, lorsque  $i \neq j$ , la cohérence entre les niveaux  $i$  et  $j$ , et ceci pour le  $\mu^{\text{ème}}$  atome. Les règles de multiplication entre ces différents opérateurs sont données par

$$\sigma_{ij}^\mu(t)\sigma_{kl}^\mu(t) = \delta_{jk}\sigma_{il}^\mu(t), \quad (3.48)$$

Le coefficient de couplage atome-champ pour la transition  $j$  ( $j = 1, 2$ ) est noté  $g_j$ . Les facteurs de phase du type  $e^{-ik_\alpha \cdot r^\mu}$ , où  $k_\alpha$  est soit le vecteur d'onde du mode  $j$  (lorsque  $\alpha = j$ ), soit le vecteur d'onde du mode latéral vide  $l_j$  (lorsque  $\alpha = l_j$ ), sont là pour tenir compte de la phase des champs vue par l'atome  $\mu$  situé en  $r^\mu$ . Le coefficient  $C_\omega^j$  est le coefficient de couplage du mode  $j$  de la cavité avec le bain extérieur, et  $c_k$  est le coefficient de couplage d'un atome au mode latéral vide. La dépendance en  $\omega$  et en  $k$  des différents modes des réservoirs ainsi que de leurs coefficients de couplage avec les opérateurs du système est notée en indice pour marquer la différence avec une transformée de Fourier. On omettra également assez souvent d'écrire la dépendance en  $t$  des diverses quantités

Comme dans la section précédente, et pour les mêmes raisons, on suppose  $C_\omega^j$  indépendant de  $\omega$  autour des fréquences  $\omega_j$  ( $j = 1, 2$ ), et on a

$$C_\omega^j = \sqrt{\frac{\kappa_j}{\pi}}, \quad (3.49)$$

où  $\kappa_j$  est le taux d'amortissement du mode  $j$  de la cavité. Ceci nous permet d'obtenir les équations de Bloch-Langevin quantiques pour les champs. Le calcul est fait en détail dans l'annexe C et dans la référence [Gardiner 85].

On se place ici dans l'approximation dite "de couplage faible", dans laquelle on suppose que la présence de la cavité ne modifie pas l'émission spontanée d'un atome. Quantitativement, cette condition est justifiée lorsque la coopérativité  $\mathcal{C}_j$  de la cavité qui contiendrait un seul atome est très petite devant 1, c'est-à-dire [Kimble 90],

$$\mathcal{C}_j = \frac{g_j^2}{\kappa_j \gamma_j} \ll 1, \quad (3.50)$$

ce qui est réalisé dans notre montage expérimental (on a typiquement  $\mathcal{C} = 10^{-3}$ ). Le mode de la cavité se comporte alors comme tous les autres modes, et on est alors ramené au cas où il n'y a pas de cavité, qui est traité dans la deuxième partie de l'annexe C, pour lequel tous les  $c_k$  sont égaux, et on a,

$$\forall k, \quad c_k = \sqrt{\frac{\gamma_j}{(2\pi)^3}}, \quad (3.51)$$

où  $2\pi/\gamma_j$  est la durée de vie du niveau  $j + 1$  d'un atome seul dans le vide, qui apparaît dans le calcul fait en annexe. On peut alors comme nous l'avons fait pour les champs dans l'annexe C (Eqs. (C.7) et suivantes), obtenir les équations de

Bloch-Langevin pour les opérateurs atomiques, dans lesquelles on aura introduit pour chaque atome  $\mu$ , la quantité

$$\beta_j^{\mu in}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{(j)} d^3k e^{-i(t-t_0)\omega_k} b_k^{(o)} e^{-ik \cdot r^\mu} \quad (3.52)$$

où  $b_k^{(o)}$  est la valeur de  $b_k$  pour  $t = t_0$  très éloigné dans le passé.

On suppose, de plus, que les atomes sont indépendants les uns des autres vis-à-vis de l'émission spontanée, c'est-à-dire que chacun d'entre eux voit un champ du vide différent du fait de sa position différente à l'échelle de la longueur d'onde optique. Par conséquent, les opérateurs  $\beta_j^{\mu in}(t)$  et  $\beta_j^{\mu' in}(t)$  seront supposés non corrélés pour  $\mu \neq \mu'$ . Cette condition est remplie, lorsque la densité atomique est telle que le nombre d'atomes par  $(\lambda/(2\pi))^3$  est petit devant 1 ( $\lambda$  est la longueur d'onde optique), c'est-à-dire dire que l'effet des facteurs de phase  $e^{-ik \cdot r^\mu}$  dans  $\mathcal{H}_4$  (Eq. (3.47)) est suffisamment important pour que chaque atome  $\mu$ , situé en  $r^\mu$  voie un bain différent. C'est bien le cas dans le jet atomique utilisé dans notre expérience, où la densité est de  $5 \times 10^{-4}$  atomes par  $(\lambda/(2\pi))^3$ . Les relations de commutation non nulles entre les "champs du vide" vus par les atomes bénéficient donc de cette hypothèse simplificatrice. On peut montrer, que, sous ces conditions, les commutateurs entre les opérateurs du type  $\beta_j^{\mu in}(t)$  sont nuls si ils concernent des atomes différents, *i.e.* pour  $\mu \neq \mu'$ , à cause des termes de phase  $e^{-ik \cdot r^\mu}$ . Les seuls commutateurs non nuls s'écrivent alors,

$$[\beta_j^{\mu in}(t), \beta_{j'}^{\mu' in \dagger}(t')] = \delta_{\mu\mu'} \delta_{jj'} \delta(t-t'). \quad (3.53)$$

On peut faire remarquer ici que les calculs seraient beaucoup plus compliqués, si on ne se plaçait pas dans le cadre de cette approximation !

### Equations de Bloch-Langevin

Le système d'équations d'évolution de tous les opérateurs s'obtient en écrivant les équations d'Heisenberg pour chaque opérateur atomique individuel, dans un repère tournant à la fréquence  $\Omega_j^l$  du champ laser entrant  $j$ . Pour alléger la notation, on définit des opérateurs atomiques globaux pour l'ensemble du milieu atomique par

$$\begin{aligned} S_{ii} &= \sum_{\mu=1}^N \sigma_{ii}^\mu, \\ S_{12} &= \sum_{\mu=1}^N \sigma_{12}^\mu e^{-ik_1 \cdot r^\mu}, \\ S_{23} &= \sum_{\mu=1}^N \sigma_{23}^\mu e^{-ik_2 \cdot r^\mu}, \\ S_{13} &= \sum_{\mu=1}^N \sigma_{23}^\mu e^{-i(k_1+k_2) \cdot r^\mu}, \end{aligned} \quad (3.54)$$



et des définitions évidentes pour  $S_{21}$ ,  $S_{32}$ , et  $S_{31}$ . On obtient alors, avec  $j = 1, 2$  indiquant le mode du champ considéré,

$$\frac{da_j}{dt} = -\kappa_j(1 + i\Phi_j)a_j + g_j S_{jj+1} - \sqrt{2\kappa_j} a_j^{in} \quad (3.55)$$

$$\frac{dS_{11}}{dt} = \gamma_1 S_{22} + g_1(S_{21}a_1 + a_1^\dagger S_{12}) + \sqrt{\gamma_1} \sum_{\mu=1}^N (\sigma_{21}^\mu \beta_1^{\mu in} + \beta_1^{\mu in \dagger} \sigma_{12}^\mu) \quad (3.56)$$

$$\frac{dS_{33}}{dt} = -\gamma_2 S_{33} - g_2(S_{32}a_2 + a_2^\dagger S_{23}) - \sqrt{\gamma_2} \sum_{\mu=1}^N (\sigma_{32}^\mu \beta_2^{\mu in} + \beta_2^{\mu in \dagger} \sigma_{23}^\mu) \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_{12}}{dt} = & -\frac{\gamma_1}{2}(1 + i\Delta_{21})S_{12} + g_1 a_1(S_{22} - S_{11}) + g_2 a_2^\dagger S_{13} \\ & + \sqrt{\gamma_1} \sum_{\mu=1}^N (\sigma_{22}^\mu - \sigma_{11}^\mu) \beta_1^{\mu in} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}^\mu} + \sqrt{\gamma_2} \sum_{\mu=1}^N \beta_2^{\mu in \dagger} \sigma_{13}^\mu e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}^\mu} \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_{23}}{dt} = & -\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)(1 + i\Delta_{32})S_{23} - g_1 a_1^\dagger S_{13} + g_2 a_2(S_{33} - S_{22}) \\ & - \sqrt{\gamma_1} \sum_{\mu=1}^N \beta_1^{\mu in \dagger} \sigma_{13}^\mu e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}^\mu} + \sqrt{\gamma_2} \sum_{\mu=1}^N (\sigma_{33}^\mu - \sigma_{22}^\mu) \beta_2^{\mu in} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}^\mu} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_{13}}{dt} = & -\frac{\gamma_2}{2}(1 + i\Delta_{31})S_{13} + g_1 a_1 S_{23} - g_2 a_2 S_{12} \\ & + \sqrt{\gamma_1} \sum_{\mu=1}^N \sigma_{23}^\mu \beta_1^{\mu in} e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}^\mu} - \sqrt{\gamma_2} \sum_{\mu=1}^N \sigma_{12}^\mu \beta_2^{\mu in} e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}^\mu} \end{aligned} \quad (3.60)$$

et l'équation de conservation de la population

$$S_{11} + S_{22} + S_{33} = N. \quad (3.61)$$

Dans ces équations, les désaccords atomiques sont définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Delta_{21} &= [(\epsilon_2 - \epsilon_1) - \Omega_1^L]/[\gamma_1/2], \\ \Delta_{32} &= [(\epsilon_3 - \epsilon_2) - \Omega_2^L]/[(\gamma_1 + \gamma_2)/2], \\ \text{et } \Delta_{31} &= [(\epsilon_3 - \epsilon_2) - (\Omega_1^L + \Omega_2^L)]/[\gamma_2/2]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

$\phi_j = (\omega_j - \Omega_j^L)/\kappa_j$  est le désaccord entre le mode  $j$  de la cavité vide et le champ laser  $j$ . Nous n'avons pas écrit les équations pour  $S_{21}$ ,  $S_{32}$ , et  $S_{31}$ , qui se déduisent de façon immédiate des équations pour  $S_{12}$ ,  $S_{23}$ , et  $S_{13}$ .

Ces équations ont la même structure que les équations de Langevin obtenues dans le modèle paramétrique, à savoir un terme d'amortissement, un terme de couplage, et un terme de bruit.

Les valeurs moyennes semi-classiques des différents opérateurs dans l'état stationnaire sont les solutions du système (3.55-3.60) dans lequel les dérivées sont prises égales à zéro et les termes de bruits atomiques sont supprimés. La résolution complète de ce système de 12 équations non-linéaires couplées à partir des valeurs des champs entrant est un problème numérique difficile traité en collaboration avec le groupe de L. Lugiato à Milan et qui sera abordé dans la section 4.3.2 du chapitre

suivant. Nous supposons ici les intensités des champs dans la cavité connues, et il ne reste alors plus qu'à trouver les valeurs moyennes des opérateurs atomiques en résolvant le système linéaire des 8 équations correspondant aux atomes, ce qui est numériquement facile à faire.

D'autre part, il est utile de connaître la relation de phase qui existe entre les valeurs moyennes des champs à l'extérieur de la cavité (entrant et sortant) et la valeur moyenne du champ à l'intérieur de la cavité pour chaque champ  $j$ , afin de bien définir les différentes quadratures. Pour les champs entrant, on a

$$\langle a_j^{in} \rangle = -[\kappa_j(1 + i\Phi_j)\langle a_j \rangle - g_j\langle S_{jj+1} \rangle] / \sqrt{2\kappa_j}. \quad (3.63)$$

On définit alors la différence de phase  $\theta_j^{in}$  entre la valeur moyenne du champ  $j$  entrant et du champ  $j$  dans la cavité par

$$\frac{\langle a_j^{in} \rangle}{|\langle a_j^{in} \rangle|} = \frac{\langle a_j \rangle}{|\langle a_j \rangle|} e^{i\theta_j^{in}}. \quad (3.64)$$

En utilisant la condition aux limites de la théorie input-output de Gardiner et Collett [Gardiner 85],

$$a_j^{out} - a_j^{in} = \sqrt{2\kappa_j} a_j, \quad (3.65)$$

qui est, en fait, la condition aux limites habituelle pour une cavité de bonne finesse, on a, de la même façon, pour les champs sortant,

$$\langle a_j^{out} \rangle = -(\kappa_j(-1 + i\Phi_j)\langle a_j \rangle - g_j\langle S_{jj+1} \rangle) / \sqrt{2\kappa_j} \quad (3.66)$$

et on définit  $\theta_j^{out}$  par,

$$\frac{\langle a_j^{out} \rangle}{|\langle a_j^{out} \rangle|} = \frac{\langle a_j \rangle}{|\langle a_j \rangle|} e^{-i\theta_j^{out}}. \quad (3.67)$$

On peut remarquer que la phase relative du champ 1 par rapport au champ 2 n'intervient pas dans les calculs, si l'on néglige les contributions non-résonantes aux fréquences du type  $\Omega_1^L \pm \Omega_2^L$  et harmoniques. On peut alors prendre réelles les valeurs moyennes des deux champs dans la cavité. Dans la situation expérimentale envisagée, les fréquences des deux lasers sont très différentes (589.0 nm et 819.5 nm), et cette approximation est justifiée.

Comme nous l'avons fait dans les sections précédentes, nous linéarisons chaque variable autour de sa valeur moyenne semi-classique,

$$\begin{aligned} a_j &= \langle a_j \rangle + \delta a_j \quad \text{pour } j = 1, 2 \\ S_{kl} &= \langle S_{kl} \rangle + \delta S_{kl} \quad \text{pour } k, l = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Cette approximation se justifie lorsque les fluctuations des divers opérateurs sont faibles devant leur valeur moyenne, ce qui est normalement le cas dans notre expérience.

Toutes ces définitions préliminaires et les approximations effectuées jusqu'à présent sont communes aux deux méthodes présentées par la suite, et définissent le cadre général des deux calculs.

### 3.3.2 Méthode NZ

#### Equations pour les fluctuations

Cette méthode s'inspire de la méthode quantique standard, développée essentiellement en Nouvelle-Zélande par Collett, Drummond, Gardiner, Reid, et Walls ([Collett 84][Collett 85][Drummond 80][Drummond 81][Gardiner 85][Reid 88] et références citées). Elle a été adaptée au présent problème en collaboration avec K. M. Gheri [Gheri 93].

On poursuit maintenant les calculs commencés ci-dessus. On réécrit le système (3.55-3.60), en ne considérant plus que les fluctuations. On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \delta a_j &= -\kappa_j (1 + i\Phi_j) \delta \dot{a}_j + g_j \delta S_{jj+1} + \sqrt{2\kappa_j} \delta a_j^{in} \\
\frac{d}{dt} \delta S_{11} &= \gamma_1 \delta S_{22} + g_1 (\langle S_{21} \rangle \delta a_1 + \langle a_1 \rangle \delta S_{21} + h.c.) \\
&\quad + \sqrt{\gamma_1} \sum_{\mu=1}^N (\sigma_{21}^\mu \beta_1^{\mu in} + \beta_1^{\mu in \dagger} \sigma_{12}^\mu) \\
\frac{d}{dt} \delta S_{33} &= -\gamma_2 \delta S_{33} - g_2 (\langle S_{32} \rangle \delta a_2 + \langle a_2 \rangle \delta S_{32} + h.c.) \\
&\quad - \sqrt{\gamma_2} \sum_{\mu=1}^N (\sigma_{32}^\mu \beta_2^{\mu in} + \beta_2^{\mu in \dagger} \sigma_{23}^\mu) \\
\frac{d}{dt} \delta S_{12} &= -\frac{\gamma_1}{2} (1 + i\Delta_{21}) \delta S_{12} + g_1 \langle a_1 \rangle (\delta S_{22} - \delta S_{11}) + g_1 (\langle S_{22} \rangle - \langle S_{11} \rangle) \delta a_1 \\
&\quad + g_2 \langle a_2^\dagger \rangle \delta S_{13} + g_2 \langle S_{13} \rangle \delta a_2^\dagger \\
&\quad + \sqrt{\gamma_1} \sum_{\mu=1}^N (\sigma_{22}^\mu - \sigma_{11}^\mu) \beta_1^{\mu in} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}^\mu} + \sqrt{\gamma_2} \sum_{\mu=1}^N \beta_2^{\mu in \dagger} \sigma_{13}^\mu e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}^\mu} \\
\frac{d}{dt} \delta S_{23} &= -\frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) (1 + i\Delta_{32}) \delta S_{23} - g_1 \langle a_1^\dagger \rangle \delta S_{13} - g_1 \langle S_{13} \rangle \delta a_1^\dagger \\
&\quad + g_2 \langle a_2 \rangle (\delta S_{33} - \delta S_{22}) + g_2 (\langle S_{33} \rangle - \langle S_{22} \rangle) \delta a_2 \\
&\quad - \sqrt{\gamma_1} \sum_{\mu=1}^N \beta_1^{\mu in \dagger} \sigma_{13}^\mu e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}^\mu} + \sqrt{\gamma_2} \sum_{\mu=1}^N (\sigma_{33}^\mu - \sigma_{22}^\mu) \beta_2^{\mu in} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}^\mu} \\
\frac{d}{dt} \delta S_{13} &= -\frac{\gamma_2}{2} (1 + i\Delta_{31}) \delta S_{13} + g_1 \langle a_1 \rangle \delta S_{23} + g_1 \langle S_{23} \rangle \delta a_1 \\
&\quad - g_2 \langle a_2 \rangle \delta S_{12} - g_2 \langle S_{12} \rangle \delta a_2 \\
&\quad + \sqrt{\gamma_1} \sum_{\mu=1}^N \sigma_{23}^\mu \beta_1^{\mu in} e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}^\mu} - \sqrt{\gamma_2} \sum_{\mu=1}^N \sigma_{12}^\mu \beta_2^{\mu in} e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}^\mu} \quad (3.69)
\end{aligned}$$

et

$$\delta S_{11} + \delta S_{22} + \delta S_{33} = 0. \quad (3.70)$$

Ce système d'équations différentielles stochastiques quantiques peut s'écrire sous la forme de matrices ( $12 \times 12$ ) en termes d'équation différentielle de Ito [Gardiner 91].

$$dv(t) = \mathbf{A} v(t) dt + dB(t), \quad (3.71)$$

où  $\mathbf{v}$  est le vecteur défini par

$$\mathbf{v}^T = (\delta\mathbf{a}_1, \delta\mathbf{a}_1^\dagger, \delta\mathbf{a}_2, \delta\mathbf{a}_2^\dagger, \delta\mathbf{S}_{22}, \delta\mathbf{S}_{33}, \delta\mathbf{S}_{12}, \delta\mathbf{S}_{21}, \delta\mathbf{S}_{23}, \delta\mathbf{S}_{32}, \delta\mathbf{S}_{13}, \delta\mathbf{S}_{31}), \quad (3.72)$$

où  $\mathbf{A}$  est la matrice d'évolution du système global atomes+champs, et où  $d\mathbf{B}(t)$  est le vecteur de bruit dont la matrice de corrélation  $\mathbf{G}$  est définie par

$$\langle d\mathbf{B}(t)d\mathbf{B}^T(t') \rangle = \mathbf{G} dt \delta(t - t'). \quad (3.73)$$

On peut remarquer que, à cause de l'hypothèse d'indépendance du champ du vide vu par les différents atomes (cf. eq.3.53), les coefficients de la matrice  $\mathbf{G}$  sont proportionnels à  $N$  et non pas à  $N^2$ , puisque les termes croisés ( $\mu \neq \mu'$ ) sont alors tous nuls. Cette hypothèse apparaît donc clairement comme un hypothèse d'incohérence de l'émission spontanée entre les différents atomes. La matrice  $\mathbf{G}$  est écrite explicitement dans l'annexe F.

### Matrices de corrélations

Les quantités qui nous intéressent pour calculer les spectres de squeezing et des coefficients QND sont les corrélations à deux temps entre les différents opérateurs de champs. En intégrant formellement (3.71) à partir de  $-\infty$ , pour être en régime stationnaire, ces corrélations sont contenues dans la matrice

$$\langle \mathbf{v}(t + \tau)\mathbf{v}^T(t) \rangle = \int_{t_0=-\infty}^{t_0=t+\tau} \int_{t'_0=-\infty}^{t'_0=t} e^{A(t+\tau-t_0)} \langle d\mathbf{B}(t_0)d\mathbf{B}^T(t'_0) \rangle e^{A^T(t-t'_0)}. \quad (3.74)$$

Cette matrice 12 x 12 contient en plus également toutes les corrélations entre les opérateurs atomiques, utiles pour les spectres de fluorescence, mais dont nous ne nous servirons pas ici. Essayons de trouver une expression pour cette matrice, qui nous permettra de la calculer.

La matrice d'évolution  $\mathbf{A}$  peut s'écrire comme la somme des projecteurs  $\mathbf{P}_i$  sur chacun de ses vecteurs propres (de valeur propre  $\lambda_i$ ),

$$\mathbf{A} = \sum_i \lambda_i \mathbf{P}_i. \quad (3.75)$$

En se servant de (3.73), l'équation (3.74) s'écrit alors,<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}(t + \tau)\mathbf{v}^T(t) \rangle &= \int_{t_0=-\infty}^{t_0=t+\tau} \int_{t'_0=-\infty}^{t'_0=t} \sum_{i,k} e^{\lambda_i(t+\tau-t_0)} \mathbf{P}_i \mathbf{G} \mathbf{P}_k^T e^{\lambda_k(t-t'_0)} \delta(t_0 - t'_0) dt_0 dt'_0 \\ &= \int_{t_0=-\infty}^{t_0=\min(t+\tau,t)} \sum_{i,k} e^{(\lambda_i(t+\tau)+\lambda_k t)} \mathbf{P}_i \mathbf{G} \mathbf{P}_k^T e^{-(\lambda_i+\lambda_k)t_0} dt_0 \\ &= - \sum_{i,k} \mathbf{P}_i \mathbf{G} \mathbf{P}_k^T \frac{\exp(\lambda_i(t+\tau) + \lambda_k t - (\lambda_i + \lambda_k) \min(t+\tau, t))}{\lambda_i + \lambda_k} \\ &= - \sum_{i,k} \mathbf{P}_i \mathbf{G} \mathbf{P}_k^T \frac{1}{\lambda_i + \lambda_k} [\Theta(\tau) e^{\lambda_i \tau} + \Theta(-\tau) e^{-\lambda_k \tau}], \quad (3.76) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>On rappelle les propriétés suivantes des projecteurs :  $\sum_i \mathbf{P}_i = \mathbf{I}$ , et  $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_k = \delta_{ik} \mathbf{P}_i$ . Il s'ensuit que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(\sum_i \lambda_i \mathbf{P}_i)^n = \sum_i \lambda_i^n \mathbf{P}_i$ .

On en déduit que  $e^{(\sum_i \lambda_i \mathbf{P}_i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sum_i \lambda_i \mathbf{P}_i)^n}{n!} = \sum_i e^{\lambda_i \mathbf{P}_i}$ .

où  $\Theta(x) = 0$  pour  $x < 0$ ,  $\Theta(x) = 1$  pour  $x > 0$ , et  $\Theta(0) = 1/2$ . On définit la matrice  $C_o$  des corrélations à un temps, en régime stationnaire par

$$C_o = \langle v(t)v^T(t) \rangle = - \sum_{j,k} \frac{P_j \mathbf{G} P_k^T}{\lambda_j + \lambda_k}. \quad (3.77)$$

La dernière équation de (3.76) s'écrit alors, en utilisant la propriété d'orthogonalité des  $P_i$ , et l'équation précédente (3.77) :

$$C(\tau) = \langle v(t+\tau)v^T(t) \rangle = e^{A\tau} C_o \Theta(\tau) + C_o e^{-A^T \tau} \Theta(-\tau), \quad (3.78)$$

Tous les coefficients nécessaires au calcul des spectres de squeezing et de coefficients QND sont contenus dans la sous-matrice  $C_{j,l}(\tau)$  pour  $j = 1, 4$  et  $l = 1, 4$ .

On peut relier la matrice  $C_o$  à la matrice de corrélation  $\mathbf{G}$  de la façon suivante,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} C_o &= \left( \mathbf{A} \int_{-\infty}^t e^{\mathbf{A}(t-t_o)} \mathbf{G} e^{\mathbf{A}^T(t-t_o)} dt_o \right) \\ &= \left( - \int_{-\infty}^t \frac{d e^{\mathbf{A}(t-t_o)}}{dt_o} \mathbf{G} e^{\mathbf{A}^T(t-t_o)} dt_o \right) \\ &= - \left[ e^{\mathbf{A}(t-t_o)} \mathbf{G} e^{\mathbf{A}^T(t-t_o)} \right]_{t_o=-\infty}^{t_o=t} - \int_{-\infty}^t e^{\mathbf{A}(t-t_o)} \mathbf{G} \mathbf{A}^T e^{\mathbf{A}^T(t-t_o)} dt_o \\ &= -(\mathbf{G} + C_o \mathbf{A}^T). \end{aligned} \quad (3.79)$$

On en déduit donc,

$$\mathbf{A} C_o + C_o \mathbf{A}^T = -\mathbf{G} \quad (3.80)$$

Cette relation sera utile pour le calcul des spectres de squeezing.

On supposera, dans tous les calculs formels suivants, que le système est stable, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  ont une partie réelle strictement négative. Cette condition sera vérifiée, sauf mention explicite, dans tous les exemples numériques présentés.

### Spectres de squeezing

Le spectre de squeezing (ou variance normalisée au bruit de photons) d'une composante de quadrature  $X_\alpha$  définie par

$$\delta X_\alpha(t) = \delta a^{out}(t) e^{-i\alpha} + \delta a^{out\dagger}(t) e^{i\alpha} \quad (3.81)$$

est donné par

$$V(\alpha, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \langle \delta X(\alpha, t+\tau) \delta X(\alpha, t) \rangle d\tau. \quad (3.82)$$

Dans la suite, on se placera toujours en régime stationnaire, et le temps  $t$ , qui ne joue, de ce fait, plus aucun rôle, sera omis dans la notation. On omettra aussi pour alléger l'écriture le symbole  $\delta$  devant les opérateurs de fluctuation.

En combinant les deux équations précédentes, on obtient

$$V(\alpha, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} (\langle a_j^{\text{out}\dagger}(\tau) a_j^{\text{out}\dagger} \rangle e^{2i\alpha} + \langle a_j^{\text{out}}(\tau) a_j^{\text{out}} \rangle e^{-2i\alpha} + \langle a_j^{\text{out}\dagger}(\tau) a_j^{\text{out}} \rangle + \langle a_j^{\text{out}}(\tau) a_j^{\text{out}\dagger} \rangle) d\tau. \quad (3.83)$$

Il nous faut donc maintenant relier ces corrélations entre opérateurs de sortie, à la matrice de corrélation  $\mathbf{G}$  qui contient les corrélations entre les opérateurs intracavité. Ceci se fait de manière relativement aisée en utilisant le formalisme input-output de Gardiner et Collett [Gardiner 85], qui donne pour des champs ( $j = 1, 2$ ) entrants pris dans un état cohérent,

$$\langle a_j^{\text{out}\dagger}(\tau) a_j^{\text{out}} \rangle = 2\kappa_j \langle a_j^\dagger(\tau) a \rangle \quad (3.84)$$

$$\langle a_j^{\text{out}}(\tau) a_j^{\text{out}\dagger} \rangle = 2\kappa_j \langle a_j(\tau) a^\dagger \rangle + \delta(\tau) \quad (3.85)$$

$$\langle a_j^{\text{out}}(\tau) a_j^{\text{out}} \rangle = 2\kappa_j (\Theta(\tau) \langle a_j(\tau) a_j \rangle + \Theta(-\tau) \langle a_j a_j(\tau) \rangle). \quad (3.86)$$

$$\langle a_j^{\text{out}\dagger}(\tau) a_j^{\text{out}\dagger} \rangle = 2\kappa_j (\Theta(\tau) \langle a_j^\dagger(\tau) a_j^\dagger \rangle + \Theta(-\tau) \langle a_j^\dagger a_j^\dagger(\tau) \rangle). \quad (3.87)$$

Tous ces termes sont alors facilement calculables en utilisant la formule (3.78). On a, par exemple,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \langle a_j^{\text{out}}(\tau) a_j^{\text{out}} \rangle d\tau &= 2\kappa_j \left( \int_0^{\infty} e^{(\mathbf{A}-i\omega)\tau} \mathbf{C}_o d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{-(\mathbf{A}+i\omega)\tau} \mathbf{C}_o d\tau \right)_{2j-1, 2j-1} \\ &= 2\kappa_j \left( -(\mathbf{A} - i\omega\mathbf{I})^{-1} \mathbf{C}_o - (\mathbf{A} + i\omega\mathbf{I})^{-1} \mathbf{C}_o \right)_{2j-1, 2j-1} \\ &= -2\kappa_j [(\mathbf{A}^2 + \omega^2\mathbf{I})^{-1} 2\mathbf{A}\mathbf{C}_o]_{2j-1, 2j-1} \end{aligned} \quad (3.88)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \langle a_j^{\text{out}\dagger}(\tau) a_j^{\text{out}} \rangle d\tau &= 2\kappa_j \left( \int_0^{\infty} e^{(\mathbf{A}-i\omega)\tau} \mathbf{C}_o d\tau + \int_{-\infty}^0 \mathbf{C}_o e^{-(\mathbf{A}^T+i\omega)\tau} d\tau \right)_{2j, 2j-1} \\ &= 2\kappa_j \left( -(\mathbf{A} - i\omega\mathbf{I})^{-1} \mathbf{C}_o - \mathbf{C}_o (\mathbf{A}^T + i\omega\mathbf{I})^{-1} \right)_{2j, 2j-1} \\ &= 2\kappa_j \left( -(\mathbf{A} - i\omega\mathbf{I})^{-1} \mathbf{C}_o (\mathbf{A}^T + i\omega\mathbf{I}) (\mathbf{A}^T + i\omega\mathbf{I})^{-1} \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{A} - i\omega\mathbf{I})^{-1} (\mathbf{A} - i\omega\mathbf{I}) \mathbf{C}_o (\mathbf{A}^T + i\omega\mathbf{I})^{-1} \right)_{2j, 2j-1} \end{aligned} \quad (3.89)$$

ce qui peut encore s'écrire, en utilisant l'équation (3.80),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \langle a_j^{\text{out}\dagger}(\tau) a_j^{\text{out}} \rangle d\tau = 2\kappa_j [(\mathbf{A} - i\omega\mathbf{I})^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{A}^T + i\omega\mathbf{I})^{-1}]_{2j, 2j-1} \quad (3.90)$$

Les indices des membres de gauche des trois équations précédentes correspondent au coefficient de la matrice considérée.

Le squeezing de la quadrature d'angle  $\alpha$  du champ  $j$  à la fréquence  $\omega$  a alors pour expression,

$$\begin{aligned} V_j(\alpha, \omega) &= 1 + 2\kappa_j \left( [(\mathbf{A} - i\omega\mathbf{I})^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{A}^T + i\omega\mathbf{I})^{-1} + (\mathbf{A} + i\omega\mathbf{I})^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{A}^T - i\omega\mathbf{I})^{-1}]_{2j, 2j-1} \right. \\ &\quad \left. - e^{2i\alpha} [2\mathbf{C}_o \mathbf{A}^T (\mathbf{A}^T + \omega^2\mathbf{I})^{-1}]_{2j, 2j} - e^{-2i\alpha} [(\mathbf{A}^2 + \omega^2\mathbf{I})^{-1} 2\mathbf{A}\mathbf{C}_o]_{2j-1, 2j-1} \right). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Le spectre du meilleur squeezing, qui donne, pour chaque fréquence, la variance de la quadrature la plus squeezée, s'écrit

$$V_j^B(\omega) = 1 + 2\kappa_j \left( \left| \left[ (\mathbf{A} - i\omega\mathbf{I})^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{A}^T + i\omega\mathbf{I})^{-1} + (\mathbf{A} + i\omega\mathbf{I})^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{A}^T - i\omega\mathbf{I})^{-1} \right]_{2j,2j-1} \right|^2 - 4 \left| \left[ \mathbf{C}_o \mathbf{A}^T (\mathbf{A}^{T^2} + \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \right]_{2j,2j} \right|^2 \right) \quad (3.92)$$

### Coefficients QND

On se propose de calculer les coefficients de corrélation, caractérisant l'efficacité d'une mesure QND [Holland 90], définis dans la section 2.2.2. Pour des états entrant cohérents, ce qui est le cas dans ce calcul, ces coefficients de corrélation  $C_{s,m}^2$  sont égaux aux coefficients de transfert  $T_{s,m}$  des rapports signal-sur-bruit. Ces coefficients  $C_{s,m}^2$  sont en fait des corrélations normalisées entre deux quadratures des différents champs entrant et sortant. De manière générale, si on appelle  $p(t)$  et  $q(t)$  les opérateurs Hermitiens décrivant les deux quadratures en question, on cherchera à calculer des quantités du type

$$C^2(\omega) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \langle p(\tau)q + qp(\tau) \rangle d\tau \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau_p} \langle p(\tau_p)p \rangle d\tau_p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau_q} \langle q(\tau_q)q \rangle d\tau_q} \quad (3.93)$$

Le calcul du coefficient de mesure

$$C^2(X_s^{in} Y_m^{out}) = \frac{|\langle \delta X_s^{in} \delta Y_m^{out} \rangle_{sym}|^2}{\langle \delta X_s^{in^2} \rangle \langle \delta Y_m^{out^2} \rangle} \quad (3.94)$$

fait intervenir les corrélations entre la sortie du faisceau de mesure  $Y_m^{out}$ , et l'entrée du signal  $X_s^{in}$ . On a alors besoin des quantités suivantes.

$$\begin{aligned} \langle a_m^{out}(\tau) a_s^{in} \rangle &= 0, \\ \langle a_m^{out\dagger}(\tau) a_s^{in\dagger} \rangle &= -2\sqrt{\kappa_s \kappa_m} \Theta(\tau) \langle [a_m^\dagger(\tau), a_s^\dagger] \rangle, \\ \langle a_m^{out\dagger}(\tau) a_s^{in} \rangle &= 0, \\ \langle a_m^{out}(\tau) a_s^{in\dagger} \rangle &= -2\sqrt{\kappa_s \kappa_m} \Theta(\tau) \langle [a_m(\tau), a_s^\dagger] \rangle. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Le degré de dégradation du signal est évalué par

$$C^2(X_s^{in} X_s^{out}) = \frac{|\langle \delta X_s^{in} \delta X_s^{out} \rangle_{sym}|^2}{\langle \delta X_s^{in^2} \rangle \langle \delta X_s^{out^2} \rangle}, \quad (3.96)$$

utilisant les corrélations suivantes:

$$\begin{aligned} \langle a_s^{out}(\tau) a_s^{in} \rangle &= 0, \\ \langle a_s^{out\dagger}(\tau) a_s^{in\dagger} \rangle &= -2\kappa_s \Theta(\tau) \langle [a_s^\dagger(\tau), a_s^\dagger] \rangle, \\ \langle a_s^{out\dagger}(\tau) a_s^{in} \rangle &= 0, \\ \langle a_s^{out}(\tau) a_s^{in\dagger} \rangle &= \delta(\tau) - 2\kappa_s \Theta(\tau) \langle [a_s(\tau), a_s^\dagger] \rangle. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Le troisième critère de préparation d'état quantique est évalué par la variance conditionnelle

$$V(X_s^{out}|Y_m^{out}) = \langle \delta X_s^{out^2} \rangle (1 - C^2(X_s^{out} Y_m^{out})), \quad (3.98)$$

dans laquelle  $C^2(X_s^{out} Y_m^{out})$  est défini par

$$C^2(X_s^{out} Y_m^{out}) = \frac{|\langle \delta X_s^{out} \delta Y_m^{out} \rangle_{sym}|^2}{\langle \delta X_s^{out^2} \rangle \langle \delta Y_m^{out^2} \rangle}, \quad (3.99)$$

et fait appel à

$$\begin{aligned} \langle a_s^{out}(\tau) a_m^{out} \rangle &= 2\sqrt{\kappa_s \kappa_m} (\Theta(\tau) \langle a_s(\tau) a_m \rangle + \Theta(-\tau) \langle a_m a_s(\tau) \rangle), \\ \langle a_s^{out\dagger}(\tau) a_m^{out} \rangle &= 2\sqrt{\kappa_s \kappa_m} \langle a_s^\dagger(\tau) a_m \rangle, \\ \langle a_s^{out}(\tau) a_m^{out\dagger} \rangle &= 2\sqrt{\kappa_s \kappa_m} \langle a_m^\dagger a_s(\tau) \rangle, \\ \langle a_s^{out\dagger}(\tau) a_m^{out\dagger} \rangle &= 2\sqrt{\kappa_s \kappa_m} (\Theta(\tau) \langle a_m^\dagger a_s^\dagger(\tau) \rangle + \Theta(-\tau) \langle a_s^\dagger(\tau) a_m^\dagger \rangle) \end{aligned} \quad (3.100)$$

On peut alors, à l'aide de toutes ces quantités, calculer les spectres des critères QND, du moins numériquement en utilisant, comme pour le calcul des spectres de squeezing, l'expression (3.78) de la matrice de corrélation à deux temps. Des exemples de calculs explicites de ces quantités sont présentés dans l'annexe G.

Le calcul présenté ici n'est pas bien adapté au calcul direct des bruits équivalents, qui demandent un formalisme dans lequel les opérateurs de champs de sortie sont exprimés en fonction des opérateurs de champs entrants sans l'intermédiaire des champs intra-cavité. La méthode IOTA-ENS présentée dans la section suivante est un exemple permettant de le faire.

### 3.3.3 Méthode IOTA-ENS

L'idée de cette méthode [Courty 91] est de considérer le milieu atomique comme un système répondant linéairement aux fluctuations (classiques ou quantiques) des champs par l'intermédiaire d'une susceptibilité calculée d'après les valeurs moyennes stationnaires des opérateurs atomiques. Mais les fluctuations propres du milieu atomique, *i.e.* l'émission spontanée, vont, bien sûr, ajouter du bruit, caractérisé par une matrice de corrélation, obtenue elle aussi d'après les valeurs semi-classiques.

On se place dans l'espace de Fourier. On définit le vecteur à quatre éléments  $\delta\mathcal{E}(\omega)$ , comme la restriction aux opérateurs de champs de la transformée de Fourier<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Les transformées de Fourier sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} a(t) dt \\ a^\dagger(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} a^\dagger(t) dt (= a(-\omega)^\dagger). \end{aligned}$$



du vecteur  $\mathbf{v}(t)$  (cf. eq (3.72)) :

$$\delta\mathcal{E}(\omega) = \begin{pmatrix} \delta a_1(\omega) \\ \delta a_1^\dagger(\omega) \\ \delta a_2(\omega) \\ \delta a_2^\dagger(\omega) \end{pmatrix}. \quad (3.101)$$

De même, on définit la polarisation atomique totale

$$\mathcal{P}(\omega) = \sum_{\mu=1}^N \mathcal{P}^\mu(\omega) = \begin{pmatrix} S_{12}(\omega) \\ S_{21}(\omega) \\ S_{23}(\omega) \\ S_{32}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (3.102)$$

On peut alors écrire

$$\delta\mathcal{P}(\omega) = \sum_{\mu=1}^N [\chi^\mu(\omega) \begin{pmatrix} e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}^\mu} \delta a_1(\omega) \\ e^{-i\mathbf{k}_1\mathbf{r}^\mu} \delta a_1^\dagger(\omega) \\ e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}^\mu} \delta a_2(\omega) \\ e^{-i\mathbf{k}_2\mathbf{r}^\mu} \delta a_2^\dagger(\omega) \end{pmatrix} + \delta\mathcal{F}^\mu(\omega)] = \chi(\omega)\delta\mathcal{E}(\omega) + \delta\mathcal{F}(\omega), \quad (3.103)$$

où  $\chi(\omega)$  est une matrice ( $4 \times 4$ ) représentant la susceptibilité du système total, et  $\delta\mathcal{F}(\omega)$  un vecteur colonne décrivant les fluctuations "spontanées" du milieu atomique. Les facteurs de phase  $e^{i\mathbf{k}_j\mathbf{r}^\mu}$  sont les mêmes que ceux définis dans l'équation 3.45 lors de la définition des Hamiltoniens. Lors de la sommation sur les atomes (repérés par l'indice  $\mu$ ), les susceptibilités individuelles de chaque atome sont additionnées de manière cohérente, de sorte que la susceptibilité totale est proportionnelle au nombre  $N$  d'atomes, alors que leurs fluctuations le sont de façon incohérente, si bien que les fluctuations totales  $\delta\mathcal{F}(\omega)$  croissent en  $\sqrt{N}$ . Ces propriétés apparaissent clairement dans la définition de ces quantités (cf. Eqs.(3.104)(3.106)). La matrice  $\chi(\omega)$  est obtenue, d'après les formules de la théorie de la réponse linéaire [Kubo 66],[Courty 90], comme transformée de Fourier de quantités faisant intervenir les valeurs semi-classiques des opérateurs atomiques. On a, pour  $k, l = 1, ..4$  :

$$\chi_{kl}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \chi_{kl}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} i\Theta(t) \langle [\mathcal{P}_k(t), \mathcal{P}_l(0)^\dagger] \rangle e^{i\omega t} dt \quad (3.104)$$

Le vecteur  $\delta\mathcal{F}(\omega)$  de bruit atomique est défini par sa matrice de corrélation, pour  $k, l = 1, ..4$ ,

$$\langle \delta\mathcal{F}_k(\omega) \delta\mathcal{F}_l^\dagger(\omega') \rangle = \delta(\omega + \omega') \xi_{kl}(\omega) \quad (3.105)$$

où

$$\xi_{kl}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \xi_{kl}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta\mathcal{P}_k(t) \delta\mathcal{P}_l(0)^\dagger \rangle e^{i\omega t} dt \quad (3.106)$$

Ces quantités se calculent en utilisant le théorème de régression quantique, comme en théorie de fluorescence de résonance [Courty 90]. Les hypothèses faites ci-dessus,

d'indépendance du champ du vide vu par chaque atome<sup>4</sup>, entraînent que les matrices  $\chi(\omega)$  et  $\xi(\omega)$  sont toutes deux proportionnelles au nombre  $N$  d'atomes couplés à la cavité.

On définit le vecteur de fluctuations des champs entrants  $\delta\mathcal{E}^{in}(\omega)$ , et celui des champs sortants  $\delta\mathcal{E}^{out}(\omega)$  comme nous l'avons fait pour les champs intra-cavités (cf. eq.(3.101)). On définit également les matrices ( $4 \times 4$ ) diagonales  $\mathbf{K}$ , et  $\Phi$ , dont les termes diagonaux sont respectivement  $\sqrt{2\kappa_1}, \sqrt{2\kappa_1}, \sqrt{2\kappa_2}, \sqrt{2\kappa_2}$ , et  $\Phi_1, -\Phi_1, \Phi_2, -\Phi_2$ . Les fluctuations des champs sortants s'écrivent alors comme la somme d'un terme venant des fluctuations des champs entrants et d'un terme venant des fluctuations émises par le milieu atomique. On obtient,

$$(\mathbf{K}^2/2 - i\Phi - i\omega\mathbf{I}) \delta\mathcal{E}^{out}(\omega) = (\mathbf{K}^2/2 + i\Phi + i\omega\mathbf{I}) \delta\mathcal{E}^{in}(\omega) + i\epsilon\mathbf{K}\delta\mathcal{P}(\omega) \quad (3.108)$$

où  $\epsilon$  est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont 1, -1, 1, -1. D'autre part, les champs intra-cavité intervenant dans l'expression de  $\delta\mathcal{P}(\omega)$  sont reliés aux champs entrants par la relation suivante [?]:

$$\delta\mathcal{E}(\omega) = (\mathbf{K}^2/2 - i\Phi - i\omega\mathbf{I})^{-1}[\mathbf{K}\delta\mathcal{E}^{in}(\omega) + i\epsilon\delta\mathcal{P}(\omega)]. \quad (3.109)$$

En notant

$$\alpha(\omega) = \epsilon\mathbf{K}\chi(\omega)\mathbf{K}^{-1} \quad (3.110)$$

le déphasage non-linéaire dû aux atomes, on arrive, en utilisant les équations (3.103), (3.108), et (3.109), à la transformation entrée-sortie suivante :

$$[\mathbf{K}^2/2 - i\Phi - i\omega\mathbf{I} - i\alpha(\omega)]\delta\mathcal{E}^{out}(\omega) = [\mathbf{K}^2/2 + i\Phi + i\omega\mathbf{I} + i\alpha(\omega)]\delta\mathcal{E}^{in}(\omega) + i\epsilon\mathbf{K}\delta\mathcal{F}(\omega). \quad (3.111)$$

La partie réelle du terme de couplage  $\alpha(\omega)$  conduit à un terme de déphasage. Sa partie imaginaire rend compte de l'absorption atomique à laquelle la théorie de la réponse linéaire fait correspondre des fluctuations atomiques, satisfaisant ainsi le théorème de fluctuation-dissipation, et conservant les relations de commutation.

Cette dernière équation (3.111), permet ainsi de calculer les spectres de squeezing, les corrélations et bruits équivalents de toutes natures, connaissant l'état des faisceaux incidents.

En définissant des matrices de corrélation pour les champs entrants et pour les champs sortants de la façon suivante,

$$\langle \delta\mathcal{E}^{in,out}(\omega) [\delta\mathcal{E}^{in,out}(\omega')]^T \rangle = \delta(\omega + \omega')\mathcal{S}^{in,out}(\omega), \quad (3.112)$$

on peut relier ces deux matrices par

$$\mathcal{S}^{out}(\omega) = (\mathbf{I} - \mu(\omega))\mathcal{S}^{in}(\omega)(\mathbf{I} - \mu(\omega)^\dagger) + \mu(\omega)\mathcal{S}^{at}(\omega)\mu(\omega)^\dagger, \quad (3.113)$$

<sup>4</sup>Cette hypothèse se traduit ici par,

$$\langle \delta\mathcal{F}_k^\mu(\omega)\delta\mathcal{F}_l^{\mu'\dagger}(\omega') \rangle = \delta_{\mu\mu'}\delta(\omega + \omega')\xi_{kl}^\mu(\omega), \quad (3.107)$$

où  $\mu$  et  $\mu'$  repèrent deux atomes différents.

où  $\mu(\omega) = (\mathbf{K}^2/2 - i\Phi - i\omega\mathbf{I} - i\alpha(\omega))^{-1}\mathbf{K}^2$ , et  $\mathcal{S}^{at}(\omega) = \mathbf{K}^{-1}\epsilon\xi(\omega)\epsilon\mathbf{K}^{-1}$ . Le premier terme de cette équation est la transformation du bruit entrant par le système cavité + atomes, tandis que le deuxième terme, proportionnel à  $\mathcal{S}^{at}$ , correspond au bruit ajouté par le système atomique et filtré par la cavité.

Il faut noter à ce point, une différence de notation entre cette méthode et la méthode NZ précédente. En effet, si on compare la définition de matrices de corrélation donnée dans la section 3.2 en (3.36), et la définition (3.113) ci-dessus, on s'aperçoit d'une différence qui se traduit en fait par une disposition différente des coefficients dans ces deux matrices. Le passage rigoureux de l'un à l'autre de ces deux systèmes de notation est assez long et fastidieux, et ne présente pas d'intérêt particulier. Le résultat final est, bien entendu, indépendant du système de notation adopté.

### 3.3.4 Lien entre les deux méthodes

Pour relier les deux méthodes, on décompose la matrice d'évolution du système total  $\mathbf{A}$  (cf. eq (3.71)) en sous-matrices, distinguant les opérateurs de champs et les opérateurs atomiques. On écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{ch} & \mathbf{V} \\ \mathbf{U} & \mathbf{A}_{at} \end{pmatrix}, \quad (3.114)$$

dans laquelle  $\mathbf{A}_{ch}$  est de dimension  $(4 \times 4)$ ,  $\mathbf{A}_{at}$   $(8 \times 8)$ ,  $\mathbf{V}$   $(4 \times 8)$ ,  $\mathbf{U}$   $(8 \times 4)$ . On définit  $\delta\mathbf{S}(\omega)$  comme la restriction aux opérateurs atomiques du vecteur  $\mathbf{v}(t)$  (cf. eq (3.72)).  $\delta\mathbf{S}(\omega)$  a 8 éléments. On peut alors réécrire l'équation (3.71) dans l'espace de Fourier de la façon suivante [Reid 88] :

$$(\mathbf{A} - i\omega\mathbf{I}) \begin{pmatrix} \delta\mathcal{E}(\omega) \\ \delta\mathbf{S}(\omega) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{ch}(\omega) \\ \mathbf{B}_{at}(\omega) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.115)$$

où les corrélations de bruit sont :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{ch}(\omega) \\ \mathbf{B}_{at}(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{ch}(\omega') \\ \mathbf{B}_{at}(\omega') \end{pmatrix}^T = \delta(\omega + \omega')\mathbf{G} \quad (3.116)$$

$\mathbf{G}$  est la matrice introduite dans la section précédente (eq (3.73)), et définie dans l'annexe F. Si on se restreint aux opérateurs atomiques, on a alors,

$$\delta\mathbf{S}(\omega) = -(\mathbf{A}_{at} - i\omega\mathbf{I})^{-1}\mathbf{U}\delta\mathcal{E}(\omega) - (\mathbf{A}_{at} - i\omega\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}_{at}(\omega) \quad (3.117)$$

On peut remarquer que la restriction de cette dernière équation aux quatre opérateurs de polarisation, permet de retrouver l'équation (3.103), avec pour expression de la susceptibilité,

$$\chi(\omega) = -\Pi_{pol}(\mathbf{A}_{at} - i\omega\mathbf{I})^{-1}\mathbf{U}, \quad (3.118)$$

où  $\Pi_{pol}$  est le projecteur sur l'espace de dimension quatre des opérateurs de polarisation. Les éléments de la matrice partielle d'évolution  $\mathbf{U}$  sont les commutateurs obtenus d'après les équations de Heisenberg, et s'identifient avec les coefficients

donnés par la théorie de la réponse linéaire et le théorème de régression quantique à partir de l'équation (3.104). La matrice de corrélation de bruit est donnée par

$$\xi(\omega) = \Pi_{pol}(\mathbf{A}_{at} - i\omega\mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}_{at}(\omega) [(\mathbf{A}_{at} + i\omega\mathbf{I})^{-1}]^T \Pi_{pol}^T. \quad (3.119)$$

Comme nous l'avons fait, dans la section 3.3.2 pour déduire l'égalité (3.90) de l'équation (3.89), en utilisant la relation 3.80, mais dans le sous-espace relatif aux opérateurs atomiques, on peut écrire la matrice de corrélation de bruit sous la forme (voir aussi [Courty 92])

$$\xi(\omega) = \Pi_{pol} \left( -(\mathbf{A}_{at} - i\omega\mathbf{I})^{-1} \mathbf{C}_{at_o} - \mathbf{C}_{at_o}(\mathbf{A}_{at}^T + i\omega\mathbf{I})^{-1} \right) \Pi_{pol}^T, \quad (3.120)$$

où  $\mathbf{C}_{at_o}$  est la restriction de  $\mathbf{C}_o$  au sous-espace atomique. Cette dernière équation s'identifie bien à celle donnée par le théorème de régression quantique pour le calcul de  $\xi$ , à partir de l'équation (3.106) dans la méthode IOTA-ENS.

L'équation (3.115) projetée cette fois dans l'espace des champs, permet d'écrire :

$$(\mathbf{A}_{ch} - i\omega\mathbf{I})\mathcal{E}(\omega) = -\mathbf{V}\delta\mathcal{S}(\omega) - \mathbf{B}_{ch}(\omega). \quad (3.121)$$

Or le système d'équations de Langevin (3.69) relie le bruit des champs  $\mathbf{B}_{ch}(\omega)$  aux fluctuations des champs entrants,

$$\mathbf{B}_{ch}(\omega) = \begin{pmatrix} \sqrt{2\kappa_1}\delta a_1^{in}(\omega) \\ \sqrt{2\kappa_1}\delta a_1^{in\dagger}(\omega) \\ \sqrt{2\kappa_2}\delta a_2^{in}(\omega) \\ \sqrt{2\kappa_2}\delta a_2^{in\dagger}(\omega) \end{pmatrix} = \mathbf{K}\mathcal{E}^{in}(\omega), \quad (3.122)$$

L'équation (3.121) devient donc

$$(\mathbf{A}_{ch} - i\omega\mathbf{I})\mathcal{E}(\omega) = -\mathbf{V}\delta\mathcal{S}(\omega) - \mathbf{K}\mathcal{E}^{in}(\omega). \quad (3.123)$$

Un calcul algébrique simple permet alors d'arriver, à partir des équations (3.65), (3.121), et (3.123), à une relation reliant les champs sortants  $\delta\mathcal{E}^{out}(\omega)$ , aux champs entrants  $\delta\mathcal{E}^{in}(\omega)$ ,

$$\delta\mathcal{E}^{out}(\omega) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}^2\mathbf{M}(\omega))\delta\mathcal{E}^{in}(\omega) + \mathbf{K}\mathbf{M}(\omega)\mathbf{V}(\mathbf{A}_{at} - i\omega\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}_{at}. \quad (3.124)$$

où

$$\mathbf{M}(\omega) = [-\mathbf{V}(\mathbf{A}_{at} - i\omega\mathbf{I})^{-1}\mathbf{U} + (\mathbf{A}_{ch} - i\omega\mathbf{I})]^{-1}. \quad (3.125)$$

La relation (3.124) s'identifie avec l'équation (3.111) de la méthode IOTA-ENS, et permet ainsi de faire le lien entre les deux méthodes<sup>5</sup>. Nous avons donc démontré l'équivalence des méthodes NZ et IOTA-ENS, telles qu'elles ont été présentées dans cette partie, c'est-à-dire dans le cadre des approximations d'atomes indépendants, de couplage faible et de calcul linéarisé.

<sup>5</sup>L'identification des matrices doit se faire en prenant en compte la disposition différente des éléments des matrices de covariance.

### 3.3.5 Conclusion

On peut, en partant du formalisme NZ, séparer les variables de champs et les variables atomiques et retrouver une formulation de type entrée-sortie pour les champs analogue à celle de la méthode IOTA-ENS. La différence technique principale entre les deux méthodes réside alors dans le calcul des matrices de susceptibilité  $\chi(\omega)$  et de corrélation de bruit  $\xi(\omega)$ . La méthode IOTA-ENS utilise les résultats de la théorie de la réponse linéaire (Eqs (3.104) et (3.106)), alors que la méthode NZ les obtient à partir de transformations algébriques de matrices (Eqs (3.118) et (3.120)).

La différence essentielle entre ces deux méthodes est le fait que la technique de calcul IOTA-ENS traite de façon distincte les champs et les atomes, alors que la méthode NZ considère le système champs + atomes de manière globale. Cette différence de philosophie entraîne cependant une petite perte de généralité de la technique IOTA-ENS par rapport à la technique NZ en ce qui concerne par exemple les problèmes de stabilité du système global. Le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  d'évolution du système total donne, en effet des indications sur la stabilité du système global qui sont plus difficiles à obtenir dans la méthode IOTA-ENS. Mais, du point de vue du temps de calcul, la méthode IOTA-ENS, moins lourde, s'avère être environ 10 fois plus rapide que la méthode NZ. Remarquons enfin, qu'il a été très satisfaisant que ces deux méthodes, relativement complexes, élaborées indépendamment de chaque côté de la planète, et suivant des chemins très différents pour calculer les mêmes quantités à partir du même Hamiltonien, donnent finalement des résultats identiques.

## 3.4 Discussion des résultats numériques

Nous allons d'abord discuter un régime de paramètres dans lequel les deux champs ont des intensités de même ordre de grandeur. Cette situation apparaît alors comme une extension du modèle paramétrique (*cf.* section 3.2), tenant compte de l'émission spontanée. Nous présenterons ensuite un deuxième régime de paramètres, qui est celui de l'expérience présentée dans le chapitre 4 suivant, où l'intensité du faisceau de mesure est très faible par rapport à celle du faisceau signal. Cette configuration nous permettra, en outre, d'obtenir des expressions analytiques approchées des critères QND.

Lors de ces discussions, nous adopterons les notations usuelles de fréquence de Rabi, définie par

$$\Omega_j = g_j \langle a_j \rangle, \quad (3.126)$$

et de coopérativité, définie par

$$\mathcal{C}_j = \frac{2Ng_j^2}{\kappa_j \gamma_j}. \quad (3.127)$$

On rappelle que lorsque les champs entrant sont dans des états cohérents, ce qui sera le cas dans toutes ces discussions, les différentes familles de critères QND sont strictement équivalentes, et en particulier les coefficients de corrélation sont égaux aux coefficients de transfert (*cf.* section 2.2.5).

### 3.4.1 QND avec deux faisceaux d'intensités similaires

Nous allons présenter maintenant des résultats numériques sur les performances du système que nous avons précédemment introduit en tant que dispositif de mesure QND. Nous nous attacherons, dans cette section, à des configurations dans lesquelles les puissances des deux champs laser sont du même ordre de grandeur [Poizat 92]. Ceci correspond aux situations expérimentales étudiées dans la thèse de J.F. Roch [Roch 92a], et dans les références [Grangier 91b][Roch 92b].

Ce sont ces configurations, symétriques par rapport aux deux champs, que nous avons décrites dans le cadre du modèle paramétrique (3.2). A la limite dispersive, les deux champs ont d'ailleurs des rôles tout à fait interchangeables vis-à-vis des performances QND (cf. Eq. (3.34)), alors que dans un système atomique à trois niveaux en échelle, cette symétrie est a priori brisée. Les deux situations qu'on va analyser sont d'une part la configuration 1 dans laquelle le signal est l'amplitude du champ correspondant à la transition atomique du bas, et la mesure, la phase du champ correspondant à la transition du haut, et d'autre part la configuration inverse 2 dans laquelle le signal est l'amplitude du champ de la transition du haut, et la mesure, la phase du champ de la transition du bas. Comme on va le voir, on peut trouver des régimes de paramètres pour lesquelles les propriétés QND restent symétriques pour le calcul complet à trois niveaux.

#### Faisceau de mesure résonnant

On se place, dans un premier temps, dans une situation où les deux champs sont accordés à résonance des cavités non-linéaires, c'est-à-dire que  $\Phi_j^{tot} = 0$ , où

$$\Phi_j^{tot} = \Phi_j - \text{Im}[g_j S_{jj+1}/(\kappa_j \langle a_j \rangle)] . \quad (3.128)$$

Cette situation correspond à  $\alpha = 0$  dans le modèle paramétrique. Le désaccord à un photon est à peu près 10 fois supérieur au désaccord à deux photons, lui-même égal à  $100(\gamma_2/2)$ . Les fréquences de Rabi  $\Omega_j^R = g_j \langle a_j \rangle / \gamma_j$  sont égales pour les deux champs. Le niveau fondamental, forcément le plus peuplé, rendra la transition du bas inévitablement plus bruyante à cause de l'absorption à un photon. Pour limiter l'effet de cette absorption, et ainsi rétablir la symétrie entre les deux transitions, on peut donc choisir une cavité moins fine pour le champ correspondant à la transition du bas. Pour les courbes présentées, on a  $\kappa_1 = 4\kappa_2$ .

A fréquence nulle, la somme des deux coefficients de corrélation  $T_s + T_m$  est de 1.85, et la variance conditionnelle théorique de 0.12. En pratique, les fréquences inférieures à 3 MHz (ce qui correspond à  $1.2\kappa_2$  sur les figures 3.4) sont interdites expérimentalement, à cause de l'excès de bruit basse fréquence d'origine technique. Mais même à  $2\kappa_2$  (5 MHz), les résultats restent encore tout à fait acceptables, puisqu'on a  $T_s + T_m = 1.6$  et  $V_{s|m} = 0.35$

#### Faisceau de mesure hors-résonance

Les situations, décrites ci-dessus, où  $\Phi_j^{tot} = 0$  pour  $j = 1, 2$ , nécessitent une détection interférométrique, par exemple une détection homodyne, pour pouvoir

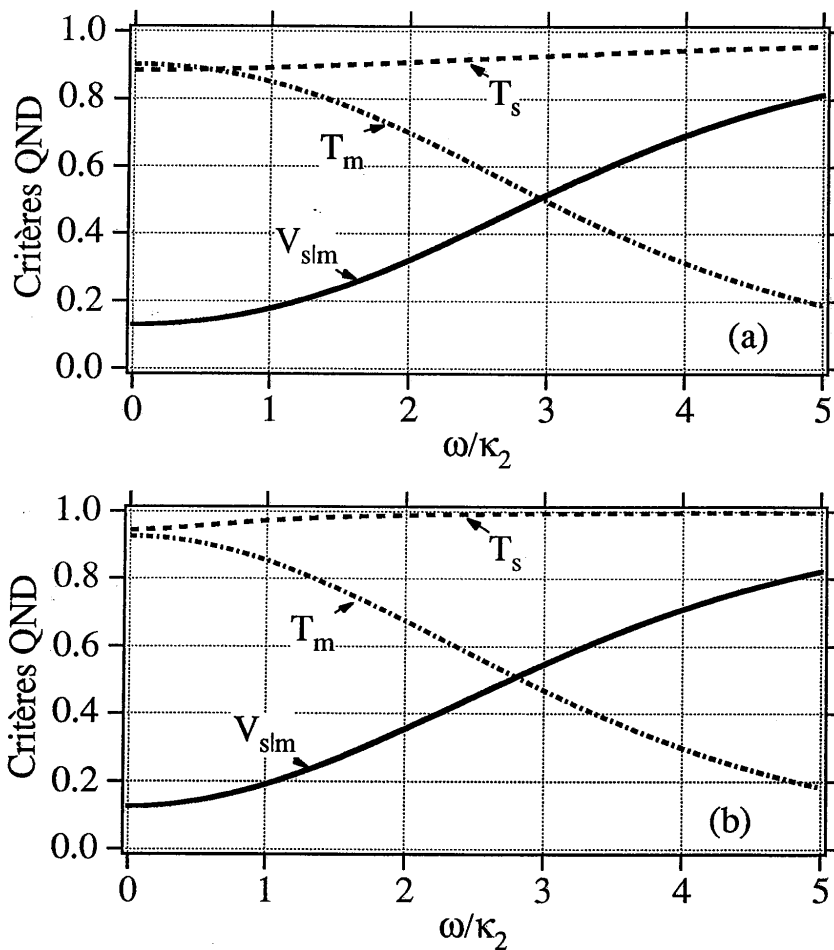


Figure 3.4: Le diagramme du haut (a) correspond à la configuration 1 (signal sur la transition du bas), et le diagramme du bas (b) à la configuration 2 (signal sur la transition du haut). Les paramètres sont  $N = 5 \times 10^7$ ,  $\kappa_1 = 4\kappa_2 = 6.13 \times 10^7$ ,  $\gamma_1 = 6.13 \times 10^7$ ,  $\gamma_2 = 5.03 \times 10^7$ ,  $\Omega_1/\gamma_1 = 20$ ,  $\Omega_2/\gamma_2 = 30.9$ ,  $C_1 = 26600$ ,  $C_2 = 130000$ ,  $\Delta_{31} = -120(\gamma_2/2)$ , and  $\Delta_{21} = 1000(\gamma_1/2)$ .

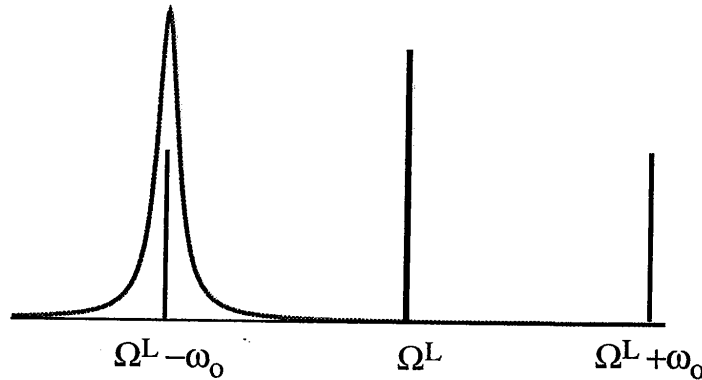


Figure 3.5: Sur cette figure, c'est la bande latérale à  $\Omega^L - \omega_0$  qui est en résonance avec la cavité.

avoir accès à l'information transportée par la phase du faisceau de mesure. Une façon d'éviter ce problème est de s'arranger pour que la cavité Fabry-Pérot contenant le milieu non-linéaire convertisse elle-même la phase en amplitude en utilisant les propriétés "dispersives" d'une cavité optique. En effet si on se place en dehors du pic de résonance de la cavité pour le faisceau de mesure, le champ moyen et les composantes de bruit à une fréquence  $\omega_0$  différente de zéro vont subir des déphasages différents, et une détection directe de l'intensité en sortie pourra donner des informations sur la quadrature qui était la phase de la composante de bruit, dans la cavité. En pratique, on peut choisir un désaccord  $\Phi^{tot}$  de la cavité égal à la fréquence de bruit analysé  $\omega_0$ ; l'une des deux bandes latérales à  $\pm\omega_0$  est alors en résonance avec la cavité (cf. figure 3.5). Dans ce cas, la détection directe du faisceau de mesure donne accès aussi bien à l'amplitude  $a(\omega_0) + a^\dagger(-\omega_0)$  qu'à la phase  $i[a(\omega_0) - a^\dagger(-\omega_0)]$  de la composante de bruit à  $\omega_0$  dans la cavité, puisque seule une des bandes latérales (celle à  $\omega_0$  par exemple sur la figure 3.5) a résonné dans la cavité et contient donc de l'information sur le faisceau signal. De plus, l'information sur la phase dans la cavité pourra être lue indifféremment sur l'amplitude ou la phase du faisceau de mesure à l'extérieur de la cavité, comme on peut le constater sur la figure 3.6. La cavité correspondant au faisceau signal est, quant à elle, accordée à résonance et devra être suffisamment large pour que la fréquence d'analyse de bruit  $\omega_0$  soit incluse dans son pic de résonance. On remarque sur la figure 3.6 que les corrélations QND maximales ont bien lieu autour de la fréquence  $\omega_0 = \phi^{tot}$ . Les courbes (a) et (b) correspondent respectivement à la détection de la phase et de l'amplitude du faisceau de mesure en sortie. On rappelle que les phases sont prises par rapport au champ moyen. La courbe (b) correspond donc à ce qui sera obtenu au moyen d'une détection directe. On peut remarquer qu'à  $\omega = \omega_0 (= 3\kappa_2)$ , les trois critères QND ont la même valeur dans les deux quadratures. La principale différence entre les deux courbes apparaît à fréquence nulle. En effet, à  $\omega = 0$  les quadratures ne subissent pas de rotation par rapport aux champs moyens au passage du miroir de couplage de la cavité, si bien que les quadratures de sortie



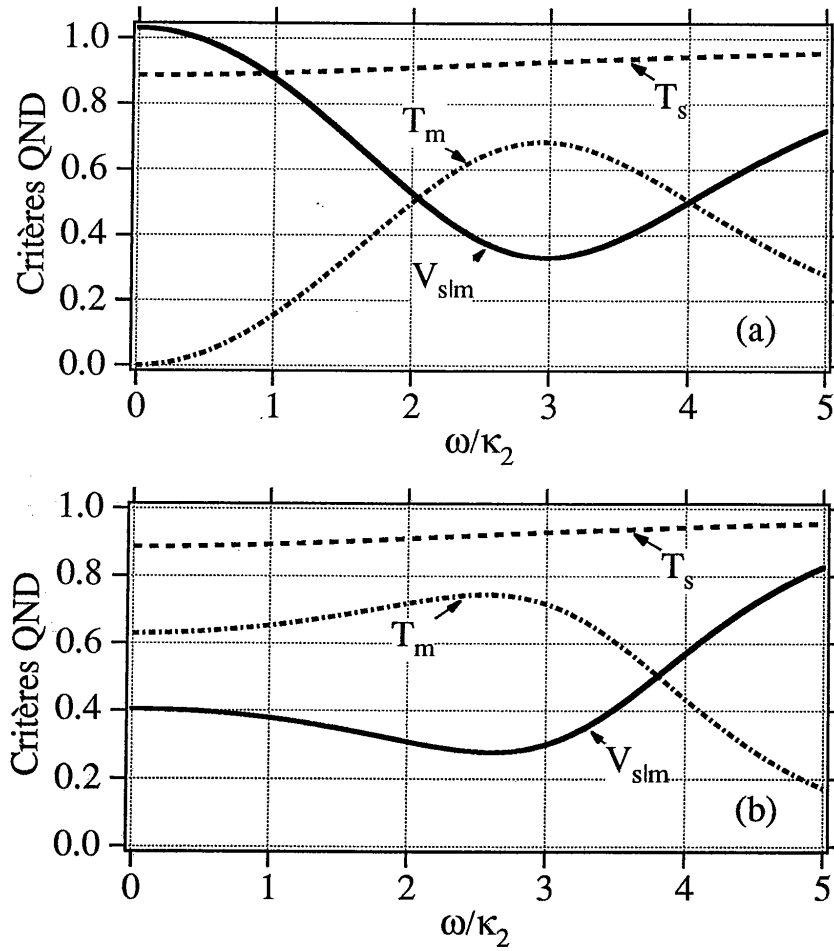


Figure 3.6: Critères QND, lorsque la cavité est désaccordée de  $\Phi_{tot}^2 = 3\kappa_2$ . Sur le diagramme (a), l'information de mesure est prise sur l'amplitude du faisceau de mesure (détection directe), alors qu'elle est prise sur la phase sur le diagramme (b). Les paramètres identiques à ceux de la figure 3.4. Le signal est sur la transition du bas (configuration 1).

correspondent aux quadratures dans la cavité. Or, dans la cavité, seule la phase contient de l'information sur le signal, d'où l'existence de corrélations à fréquence nulle uniquement pour cette quadrature.

On peut conclure cette première discussion, en disant que ce régime, dans lequel les deux faisceaux ont une intensité similaire, nécessite des valeurs élevées des coopérativités ( $\sim 10^5$ ) pour avoir des effets intéressants. Pour ne pas multiplier les courbes, nous ne présenterons pas d'exploration du domaine (très vaste) des paramètres. Concernant les effets des désaccords, on peut résumer la situation de la façon suivante : une diminution du désaccord à deux photons augmente le couplage non-linéaire, et finit par rajouter du bruit si on se rapproche trop de la résonance, tandis qu'une diminution du désaccord à un photon  $\Delta_{21}$  entraîne principalement une augmentation de l'absorption sur la transition du bas, qui est surtout gênante pour la non-dégradation du signal en configuration 1.

### 3.4.2 Mesures QND utilisant des transitions fantômes

Le régime de paramètres que l'on va étudier en détail dans cette section correspond à celui effectivement utilisé dans l'expérience [Poizat 99] que nous allons décrire dans la suite de ce mémoire (cf. chapitre 4). L'idée est d'appliquer un signal fort sur la transition du haut, induisant des déplacements lumineux qui vont modifier la dispersion du milieu pour un faisceau de mesure peu intense appliqué sur la transition du bas. La polarisation de cette dernière sera en effet sensible à la position des niveaux habillés, et donc à l'amplitude du signal, qui pourra ainsi être lue très efficacement par la phase du faisceau de mesure. La faiblesse du champ de la transition inférieure permet à la population atomique de rester quasiment exclusivement dans le niveau fondamental, ce qui rend la transition supérieure presque transparente pour le signal, qui sera donc très peu altéré. Le système atomique arrive ainsi à voir le signal, sans être vu par lui, d'où le nom de transition fantôme [Gheri 92].

Nous allons d'abord effectuer un calcul analytique approché des critères QND, que le régime de paramètres considéré nous autorise à faire. Nous discuterons ensuite les résultats dans une situation claire nous permettant de bien faire ressortir les caractéristiques principales de cette configuration, puis nous présenterons des résultats avec des paramètres proches de ceux de l'expérience que nous avons réalisée. Nous mentionnerons enfin, la possibilité d'une situation très similaire, utilisant également le principe des transitions fantômes, dans des systèmes atomiques à trois niveaux en  $\Lambda$ .

#### Calcul approché

Ce régime de paramètres, dans lequel l'intensité du faisceau de mesure est faible devant celle du faisceau signal, permet d'obtenir des résultats analytiques approchés, qui aident à la compréhension du rôle des différentes quantités.

Le champ 1, correspondant à la transition du bas est le faisceau de mesure, et a une fréquence de Rabi  $\Omega_1$  faible devant celle du signal  $\Omega_2$  appliqué sur la transition du haut. À l'ordre zéro en  $\epsilon = \Omega_1/\Omega_2$ , c'est-à-dire lorsque  $\Omega_1 = 0$ , le seul effet des

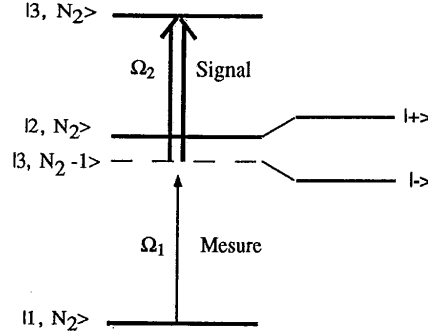


Figure 3.7: Déplacement lumineux du niveau intermédiaire (vue très partielle du diagramme de l'atome habillé). Les niveaux  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$  sont le résultat du déplacement lumineux induit par le fort champ signal  $\Omega_2$ . Ces niveaux sont alors sondés par le faible faisceau de mesure.  $N_2$  est le nombre de photons dans le mode 2.

champs sur les atomes est de déplacer les niveaux de l'atome habillé, dont l'écart par rapport au niveau atomique nu devient (cf. figure 3.7),

$$\delta = \frac{\Delta_{32}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta_{32}}{2}\right)^2 + \Omega_2^2}. \quad (3.129)$$

A l'ordre un en  $\epsilon$ , une cohérence non nulle apparaît pour la transition du bas. Cette cohérence va déterminer les propriétés d'absorption et de dispersion du faisceau de mesure. On a

$$S_{12}^{(1)} = \Omega_1 \left( \frac{1}{-\Delta_{21} + i(\gamma_1/2) + \frac{\Omega_2^2}{\Delta_{31} - i(\gamma_2/2)}} \right). \quad (3.130)$$

Le terme proportionnel à  $\Omega_2^2$  au dénominateur correspond à la modification de la polarisation de la transition inférieure, induite par le fort champ signal appliqué sur la transition supérieure.

On a représenté sur la figure 3.8, en fonction du désaccord  $\Delta_{21}$  du champ 1, la partie imaginaire et la partie réelle de  $S_{12}^{(1)}$ , correspondant respectivement à l'absorption et à la dispersion pour le faisceau de mesure, pour un désaccord  $\Delta_{32}$  du champ 2 donné. On remarque les deux résonances, autour des deux niveaux habillés de l'étage intermédiaire. L'absorption passe par un minimum autour de la résonance à deux photons (lorsque  $\Delta_{21} + \Delta_{32} = \Delta_{31} = 0$ ).

Les meilleurs résultats en matière de QND dans des milieux atomiques sont toujours obtenus à la limite dispersive, c'est-à-dire dans des régions où les effets dispersifs l'emportent sur les effets d'absorption. On cherchera donc à avoir

$$|\eta| \ll 1 \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{\text{Im}(S_{12}^{(1)})}{\text{Re}(S_{12}^{(1)})} = \frac{\Omega_2^2 \left(\frac{\gamma_2}{2}\right) + \Delta_{31}^2 \left(\frac{\gamma_1}{2}\right) + \frac{\gamma_1 \gamma_2^2}{8}}{\Delta_{31} D - \Delta_{21} \left(\frac{\gamma_2}{2}\right)^2} \quad (3.131)$$

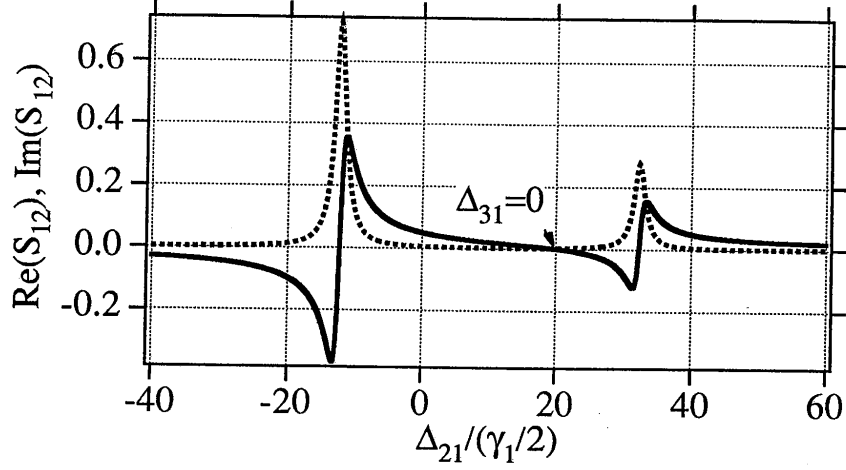


Figure 3.8: Courbes représentant l'absorption (en pointillés) et la dispersion (en trait plein) du faisceau de mesure, donnés par l'équation (3.130), en fonction de son désaccord  $\delta_{21}$ . Les paramètres sont :  $\gamma_1 = \gamma_2$ ,  $\delta_{32} = -20(\gamma_1/2)$ ,  $\Omega_2 = 20(\gamma_1/2)$ .

où

$$\begin{aligned}
 D &= |\Omega_2|^2 - \Delta_{31}\Delta_{21} \\
 &= -\left(\Delta_{21} + \frac{\Delta_{32}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta_{32}}{2}\right)^2 + \Omega_2^2}\right)\left(\Delta_{21} + \frac{\Delta_{32}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\Delta_{32}}{2}\right)^2 + \Omega_2^2}\right). \quad (3.132)
 \end{aligned}$$

$D$  est en fait le produit des désaccords du champ laser 1 avec les niveaux habillés.

En adoptant la façon de procéder de la méthode IOTA-ENS (cf. section 3.3.3), on relie les fluctuations des cohérences atomiques  $\delta\mathcal{P}(\omega)$  aux fluctuations des quadratures intra-cavité  $\delta\mathcal{Q}(\omega)$  via une susceptibilité  $\chi(\omega)$ , plus un terme  $\delta\mathcal{F}(\omega)$  dû aux fluctuations propres des atomes, et on écrit

$$\delta\mathcal{P}(\omega) = \chi(\omega)\delta\mathcal{Q}(\omega) + \delta\mathcal{F}(\omega) \quad (3.133)$$

où

$$\delta\mathcal{Q}(\omega) = \begin{pmatrix} \delta a_1 + \delta a_1^\dagger \\ i(-\delta a_1 + \delta a_1^\dagger) \\ \delta a_2 + \delta a_2^\dagger \\ i(-\delta a_2 + \delta a_2^\dagger) \end{pmatrix}. \quad (3.134)$$

En effectuant un développement au premier ordre, à fréquence de bruit nulle ( $\omega = 0$ ), et à résonance de la cavité non-linéaire, on obtient les expressions analy-

tiques suivantes,

$$\chi = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q+b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \xi = \langle \delta \mathcal{F} \delta \mathcal{F}^T \rangle = \begin{pmatrix} 2a & -2ia & 0 & b \\ 2ia & 2a & 0 & ib \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -ib & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (3.135)$$

Le coefficient  $q$  apparaît donc comme le coefficient de couplage QND par l'effet Kerr croisé, et  $b$  est un terme d'excès de bruit par rapport au modèle paramétrique. Le coefficient  $a$  décrit l'absorption du faisceau de mesure. On retrouve dans la matrice de corrélation de bruit les termes de fluctuation correspondant aux termes de dissipation de la matrice  $\chi$ . Le coefficient  $p$  est un excès de bruit de phase du signal dû aux atomes. Le fait que les quantités  $a$ ,  $b$  et  $p$  soient différentes de zéro est un écart par rapport au modèle paramétrique. Les expressions des différents paramètres sont :

$$\begin{aligned} a &= \frac{C_1 \gamma_1}{4D^2} (\gamma_2 \Omega_2^2 + \gamma_1 \Delta_{31}^2) \\ q &= -\sqrt{C_1 C_2} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \frac{\Omega_1 \Omega_2 \Delta_{31}}{D^2} \\ b &= -\frac{\sqrt{C_1 C_2} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{\gamma_1 ((\gamma_1 + \gamma_2) \Omega_2^2 + \gamma_2 \Delta_{32}^2)} \frac{\gamma_2^2 \Delta_{32} \Omega_1 \Omega_2^3}{D^2} \\ p &= C_2 \frac{\gamma_2^2 \Omega_1^2 \Omega_2^4}{4\gamma_1^2 D^2} \frac{(\gamma_1 (\gamma_1 + \gamma_2) \Omega_2^2 + \gamma_2^2 \Delta_{32}^2)}{((\gamma_1 + \gamma_2) \Omega_2^2 + \gamma_2 \Delta_{32}^2)^2} \end{aligned} \quad (3.136)$$

Dans tous ces paramètres,  $C_1$  et  $C_2$  sont les coopérativités définies au début de cette section 3.4. On peut remarquer que si  $\Delta_{21} \Delta_{31} \gg \Omega_2^2$ , alors le coefficient d'absorption devient  $a = (C_1 \gamma_1^2) / (4\Delta_{21}^2)$ , et  $q = -\sqrt{C_1 C_2} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} (\Omega_1 \Omega_2) / (\Delta_{21}^2 \Delta_{31})$  qui sont les résultats obtenus à la limite  $\chi^{(3)}$  dans la thèse de J-F. Roch. Tous ces calculs analytiques, ainsi que ceux qui vont suivre, ont été fait en utilisant un logiciel de calcul symbolique.

On peut alors établir les expressions pour les critères QND. Le coefficient de mesure de l'amplitude du signal  $X_2^{in}$  par la phase du faisceau de mesure  $Y_1^{out}$  est donné par,

$$T_m = C^2 \langle X_2^{in} Y_1^{out} \rangle = \frac{|\langle X_2^{in} Y_1^{out} \rangle_{sym}|^2}{\langle X_2^{in^2} \rangle \langle Y_1^{out^2} \rangle} = \frac{4q^2}{4q^2 + (a+1)^2} \quad (3.137)$$

et le bruit équivalent ramené à l'entrée,

$$N_m^{eq} = \frac{1}{T_m} - 1 = \frac{(a+1)^2}{4q^2}. \quad (3.138)$$

Dans l'approximation, sous laquelle nous avons fait ces calculs, le signal n'est pas du tout dégradé, c'est-à-dire qu'on a

$$T_s = C^2 \langle X_2^{in} X_2^{out} \rangle = 1, \quad (3.139)$$

ce qui correspond à

$$N_s^{eq} = 0. \quad (3.140)$$

La variance conditionnelle, quant à elle, est donnée par

$$\begin{aligned} V(X_2^{out}|Y_1^{out}) &= \frac{(a+1)^2}{4q^2 + (a+1)^2} \\ & (= 1 - C^2(X_s^{in} Y_p^{out})) \end{aligned} \quad (3.141)$$

On peut alors en déduire que la condition pour avoir une mesure QND de bonne qualité est  $q \gg \max(a, 1)$ , ce qui reflète bien le compromis, habituel dans les milieux atomiques, entre la force du couplage et l'absorption.

On va maintenant s'intéresser à la perturbation apportée par la mesure sur la phase du faisceau signal. La perturbation minimum introduite par la détermination de  $X_s^{in}$  via la détection de  $Y_m^{out}$  (que cette détection soit effectivement faite ou pas, ne change rien) est donnée par l'inégalité de Heisenberg,

$$\begin{aligned} V_{Heis}(Y_2^{out}) &= V_{Heis}(Y_2^{out}|Y_1^{out}) = \frac{1}{V(X_2^{out}|Y_1^{out})} \\ &= 1 + \frac{4q^2}{(a+1)^2}, \end{aligned} \quad (3.142)$$

alors que la variance de la phase après ce dispositif de mesure est donnée par

$$V(Y_2^{out}) = 1 + 2p + 4q \frac{b+q}{a+1} \quad (3.143)$$

qui peut être supérieure à la valeur minimum  $V_{Heis}(Y_2^{out})$ , et on observe que le coefficient  $p$  traduit bien un excès de bruit sur la phase du signal. Ceci signifie donc que le dispositif utilisé ajoute du bruit sur la phase du signal, si bien que le système signal+mesure ne se trouve plus dans un état minimum, contrairement à ce qui se passe dans le modèle paramétrique.

Comme on peut s'y attendre dans un régime de paramètres très dissymétrique, la symétrie entre les deux faisceaux vis-à-vis des performances QND est brisée. En effet, si on voulait inverser les rôles et mesurer l'amplitude du champ 1 avec la phase du champ 2, on obtiendrait alors un coefficient de dégradation du signal diminué par les pertes subies par le champ 1 (paramètre  $a$ ),

$$T'_s = C^2(X_1^{in} X_1^{out}) = \left( \frac{1-a}{1+a} \right)^2, \quad (3.144)$$

et un coefficient de mesure et une variance conditionnelle rendus moins bon, à cause des divers excès de bruit, décrits par les paramètres  $p$  et  $b$ ; on trouve

$$\begin{aligned} T'_m &= C^2(X_1^{in} Y_2^{out}) = 4 \left( \frac{b+q}{1+a} \right)^2 \left( 1 + 2p + 4q \frac{b+q}{1+a} \right)^{-1}, \\ V(X_1^{out}|Y_2^{out}) &= 1 - \frac{4q^2}{(1+a)^2} \left( 1 + 2p + 4q \frac{b+q}{1+a} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.145)$$

On a donc, dans ce calcul approché, une dissymétrie entre les deux faisceaux, qui n'est pas décrite par le modèle paramétrique (section 3.2).

### Discussion des résultats

Nous allons discuter dans ce paragraphe, les résultats numériques correspondant à la configuration utilisant les transitions fantômes. Nous comparerons à cette occasion les résultats donnés par le calcul analytique approché que nous venons d'exposer, et ceux donnés par le programme numérique utilisant le modèle complet à trois niveaux.

Nous présenterons, dans un premier temps, des résultats utilisant des paramètres analogues à ceux de la référence [Gheri 92], qui illustrent mieux le principe des transitions fantômes, tout en étant réalistes. Nous exposerons ensuite des résultats utilisant des paramètres très proches de ceux de notre expérience (cf. section 4.3.2).

**Paramètres explicatifs** Le principe de la configuration de mesure QND dans laquelle nous nous plaçons, est d'habiller la transition supérieure du système à trois niveaux, avec un signal intense, puis de venir sonder avec le faisceau de mesure les déplacements lumineux induits par le champ signal intense.

Nous avons représenté sur la figure 3.9 les critères QND à fréquence d'analyse nulle ( $\omega = 0$ ), obtenus d'une part d'après les expressions analytiques approchées, d'autre part par le calcul numérique complet, en fonction du désaccord  $\Delta_{21}/(\gamma_1/2)$  du faisceau de mesure par rapport à la transition du bas. Tous ces résultats restent qualitativement valables pour des fréquences d'analyse  $\omega \neq 0$ , tant que  $\omega \leq \min(\kappa_1, \kappa_2)$ . On peut d'abord remarquer qu'il se passe des choses à deux endroits distincts, correspondant à la position des deux niveaux intermédiaires habillés par le faisceau signal intense. C'est dans ces deux régions que l'efficacité QND est la meilleure, mais il existe, au centre de chacune de ces régions, une bande étroite (en grisé sur la figure 3.9) à l'intérieur de laquelle le système est instable. En effet, dans ces bandes étroites, une au moins des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  d'évolution du système global atomes+champs (cf. Eq.(3.71)) a une partie réelle positive, conduisant à alors une divergence qui rend les calculs, tels que nous les avons faits, non valables dans cette zone. Cette instabilité peut s'interpréter en disant qu'il apparaît un gain sur une bande latérale, et qu'un mode jusqu'à présent vide du champ peut alors s'amplifier. On s'aperçoit, en comparant les deux graphes inférieures de la figure 3.9, que les zones d'instabilité correspondent aux zones d'absorption du faisceau de mesure. On peut également remarquer sur les deux graphes du haut de la figure 3.9 que, dans les domaines stables juste autour de ces régions d'instabilité, la structure quelque peu chahutée donnée par le calcul numérique complet n'est pas reproduite par le calcul analytique approché qui n'est valable que pour  $|\eta| \ll 1$ , c'est-à-dire en dehors des zones d'absorption du faisceau de mesure (cf. Eq.(3.131)). La présence d'une structure en double pic autour de chaque zone d'instabilité peut être attribuée au dédoublement de chaque niveau dû à la fréquence de Rabi du faisceau de mesure. Par ailleurs, on constate qu'à la résonance à deux photons ( $\Delta_{31} = 0$ ), toutes les corrélations quantiques sont à zéro, ce qui peut se voir dans le calcul analytique approché où le coefficient  $q$  de gain QND, proportionnel à  $\Delta_{31}$  est nul (eq.(3.136)). On rappelle que le coefficient de transmission sur la voie signal donné par le calcul approché vaut toujours 1.

Les différences principales entre les paramètres utilisés dans cette section et nos

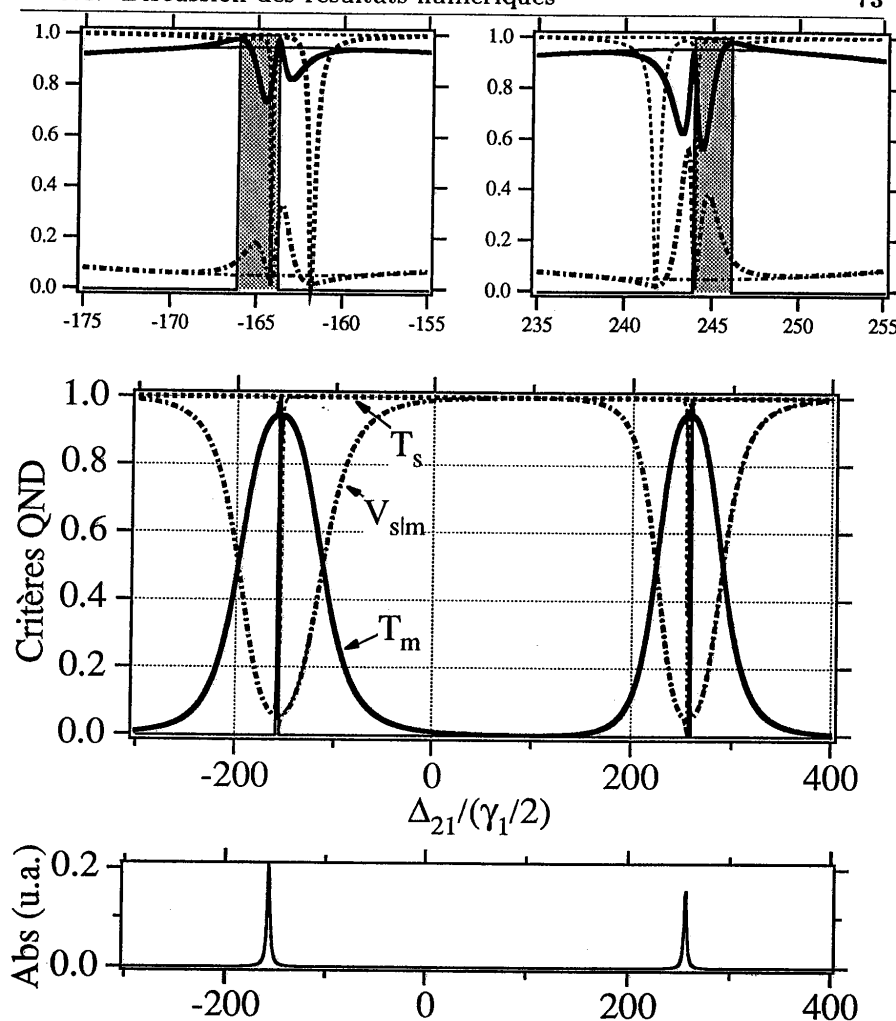


Figure 3.9: Sur le graphe du milieu, on a représenté, à  $\omega = 0$ , la variance conditionnelle (en tirets pointés), la transmission  $T_m$  sur la voie de mesure (en trait plein), et la transmission  $T_s$  sur la voie signal (en tirets) en fonction du désaccord  $\Delta_{21}/(\gamma_1/2)$  du faisceau de mesure. Les courbes épaisses correspondent aux résultats donnés par le calcul analytique approché, tandis que les courbes en trait fin ont été obtenues par le calcul numérique complet. Les zones grisées correspondent à des régions instables, pour lesquelles les calculs effectués ne sont plus valables (cf. texte). Les deux graphes du haut sont des agrandissements autour de ces zones. Lorsque  $\Delta_{21}/(\gamma_1/2) = -\Delta_{32}/(\gamma_1/2) (= 100)$ , le désaccord à deux photons  $\Delta_{31}$  est nul, et on a aucun effet QND. Sur le graphe du bas, on a représenté l'absorption du faisceau de mesure correspondante (calculée par les équations de Bloch à trois niveaux). Paramètres :  $\kappa_1 = \kappa_2 = 3 \times 10^7$ ,  $\gamma_1 = 10^7$ ,  $\gamma_2 = 0.8 \times 10^7$ ,  $C_1 = 500$ ,  $C_2 = 2000$ ,  $\Omega_1 = 1(\gamma_1/2)$ ,  $\Omega_2 = 200(\gamma_1/2)$ ,  $\Delta_{32} = -100(\gamma_1/2)$ .



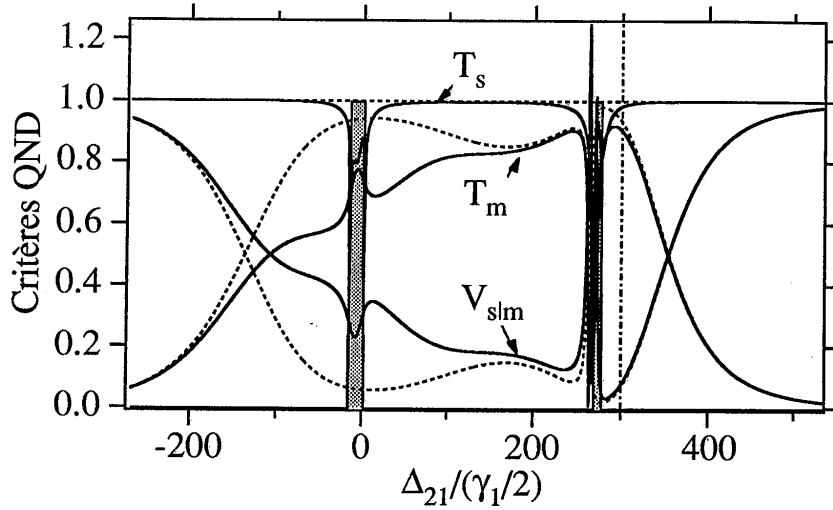


Figure 3.10: Critères QND à  $\omega = 0$  en fonction du désaccord  $\Delta_{21}/(\gamma_1/2)$  du faisceau de mesure. Les courbes en traits pleins correspondent aux résultats obtenus par le calcul complet, alors que les courbes en pointillés sont ceux donnés par le calcul approché. Les paramètres sont assez proches de ceux de notre expérience, et on a  $\kappa_1 = \kappa_2 = 3 \times 10^8$ ,  $\gamma_1 = 10^8$ ,  $\gamma_2 = 0.8 \times 10^8$ ,  $C_1 = C_2 = 5000$ ,  $\Omega_1 = 6.08(\gamma_1/2)$ ,  $\Omega_2 = 45(\gamma_1/2)$ ,  $\Delta_{32} = -264(\gamma_1/2)$ . Le trait vertical (en tirets pointés) indique le désaccord  $\Delta_{21}/(\gamma_1/2) = 300$  effectivement choisi au cours de l'expérience.

paramètres expérimentaux discutés dans la section suivante, sont les valeurs des coopérativités, qui sont plus élevées ( $C_{1,2} = 5000$ ) dans notre expérience. Ceci montre que ce dispositif peut donner des résultats convenables avec des coopérativités ne nécessitant pas un très grand nombre d'atomes, ce qui peut s'avérer intéressant si on désire, par exemple, diminuer la largeur Doppler en utilisant un jet atomique mieux collimaté, ou en utilisant des pièges à atomes froids.

**Paramètres de notre expérience** Nous avons représenté sur la figure 3.10 un graphe analogue à celui discuté dans la section précédente (figure 3.9), mais avec des paramètres plus proches de ceux de notre expérience<sup>6</sup>. On s'aperçoit que la situation n'est pas aussi claire que dans la figure 3.9. Les régions correspondant à chaque niveau habillé, toujours repérées par une zone d'instabilité ne sont plus clairement séparées en ce qui concerne les performances de mesure QND. Ces performances apparaissent nettement meilleures autour du niveau déplacé qui est le plus près de la résonance à deux photons. C'est d'ailleurs dans cette région (à  $\Delta_{21}/(\gamma_1/2) = 300$  que nous nous sommes placé lors de notre expérience.

La figure 3.11 est un détail de la figure 3.10 autour de la valeur de  $\Delta_{21}/(\gamma_1/2)$  expérimentale. On peut remarquer que les deux pics correspondant à une forte

<sup>6</sup>Nous reviendrons sur la façon dont nous avons obtenu ces paramètres, dans le chapitre 4.

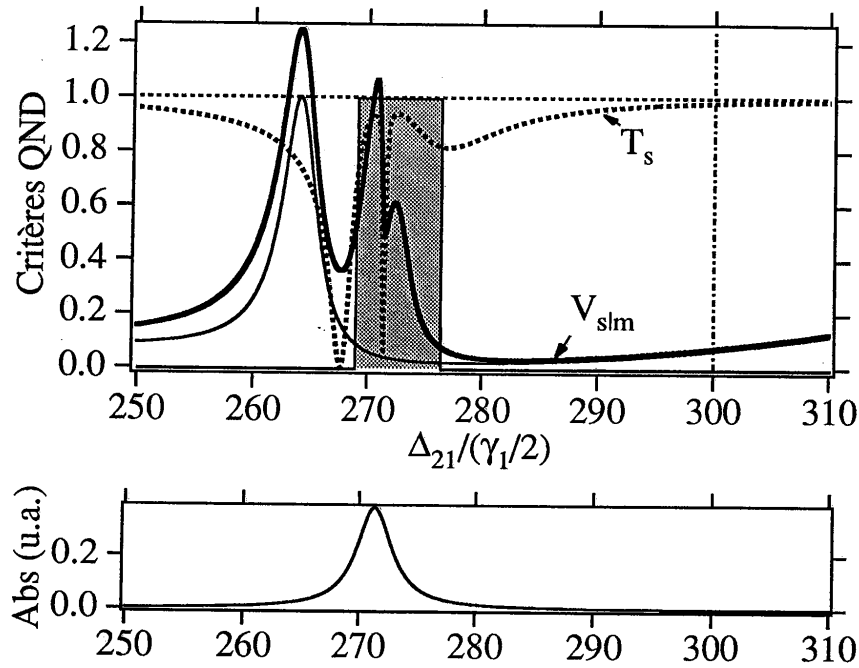


Figure 3.11: Le graphe du haut représente un détail de la figure 3.10, où seuls le coefficient de transfert sur la voie signal  $T_s$  (en pointillés), et la variance conditionnelle  $V_{s|m}$  (en trait plein) sont représentés, avec chaque fois le résultat donné par le calcul approché (en trait fin) et celui donné par le calcul numérique complet (en trait épais). Le graphe du bas donne l'absorption correspondante pour le faisceau de mesure. Les paramètres sont les mêmes que sur la figure 3.10.

diminution de l'efficacité QND aussi bien pour la variance conditionnelle  $V_{s|m}$  que pour le coefficient de transfert sur la voie signal  $T_s$  (l'un des deux pics se trouve dans la zone d'instabilité), sont séparés d'une quantité correspondant à la fréquence de Rabi  $\Omega_1$  du faisceau de mesure. En comparant les deux graphes de la figure 3.11, on constate que ces deux pics correspondent bien à la zone d'absorption du faisceau de mesure, et que cette dernière est un petit peu décentrée par rapport à la zone d'instabilité en grisé. On peut préciser ici que la demi-largeur Doppler du jet atomique de sodium utilisé est de 100 MHz ( $= 20(\gamma_1/2)$ ), et qu'on reste à l'extérieur de la zone d'instabilité, lorsqu'on opère, comme c'est le cas dans notre expérience, à  $\Delta_{21}/(\gamma_1/2) = 300$ .

### 3.4.3 Atomes en $\Lambda$

Le principe des transitions fantômes, que nous venons de discuter sur des atomes à trois niveaux en échelle, peut s'appliquer de façon très similaire sur des atomes à trois niveaux en  $\Lambda$  (cf. figure 3.12). Les calculs se transposent facilement

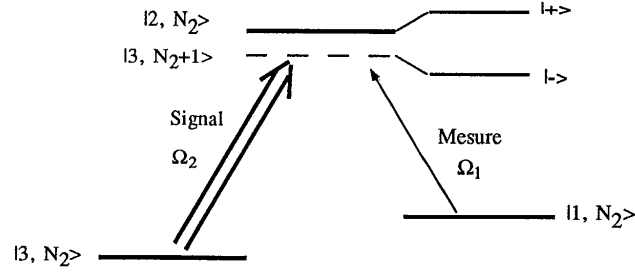


Figure 3.12: Déplacements lumineux dans un atome à trois niveaux en  $\Lambda$  (vue partielle du diagramme de l'atome habillé).  $N_2$  est le nombre de photon dans le mode 2.

d'un modèle à l'autre. Pour le calcul analytique approché, la structure est la même, et seules les expressions de certains des coefficients  $a$ ,  $q$ ,  $b$ ,  $p$  sont différentes. On trouve en effet pour ceux qui présentent une différence,

$$\begin{aligned}
 a &= c_1 \frac{\gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2)\Delta_{31}^2}{4D^2} \\
 b &= -\sqrt{c_1 c_2} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \frac{\Omega_1/\gamma_1}{\Omega_2/\gamma_2} \frac{\Delta_{32}\Delta_{31}^2}{D^2} \\
 p &= 4c_1 \left( \frac{\Omega_1/\gamma_1}{\Omega_2/\gamma_2} \right)^2 \frac{\Delta_{31}^2}{(\gamma_1 + \gamma_2)} \frac{\gamma_1 \Omega_2^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\Delta_{32}^2}{D^2}.
 \end{aligned} \tag{3.146}$$

L'expression du coefficient  $q$  est la même que dans le modèle en échelle (cf. Eqs.(3.136)). La principale différence qualitative est le fait que l'absorption du faisceau de mesure, proportionnelle au coefficient  $a$ , s'annule lors de la résonance à deux photons, *i.e.* pour  $\Delta_{31} = 0$ . On a alors le phénomène de piégeage cohérent de population, c'est-à-dire que l'atome se retrouve pompé dans une superposition des états inférieurs  $|1\rangle$  et  $|3\rangle$ , qui est non couplée avec le champ électromagnétique, et l'atome ne voit alors plus les champs.

Une discussion détaillée des résultats obtenus avec un modèle en  $\Lambda$ , et en particulier en présence de relaxation entre les deux états inférieurs  $|1\rangle$  et  $|3\rangle$ , est présentée dans la référence [Gheri 92].

## Chapitre 4

# Mesures QND avec un jet atomique de sodium

### 4.1 Introduction

Nous allons, dans ce chapitre, présenter l'expérience de mesure QND utilisant l'effet Kerr croisé dans un système atomique à trois niveaux en échelle, que nous avons décrit théoriquement, et analysé numériquement dans le chapitre précédent.

Nous avons vu qu'une population suffisamment dense "d'atomes à trois niveaux", réalise, en première approximation, c'est-à-dire à la limite dispersive (section 3.2), un milieu Kerr permettant d'établir des corrélations quantiques entre l'intensité d'un faisceau laser et la phase d'un deuxième. Nous avons montré que, pour des régimes de paramètres réalistes se situant clairement en-dehors de la limite dispersive (*cf.* section 3.4.2), on peut néanmoins réaliser des mesures quantiques non-destructives avec une bonne efficacité.

Il reste maintenant à trouver un atome réel ayant une structure se rapprochant le plus possible de celle d'un système à trois niveaux fermé. D'après le schéma de niveau de l'atome de sodium, représenté sur la figure 4.1, cet atome constitue un bon candidat. Le système à trois niveaux le plus favorable est le système de transitions  $3s_{1/2} - 3p_{3/2} - 3d_{5/2}$ . L'écart principal avec un "vrai" système à trois niveaux vient de la présence de la structure hyperfine du niveau fondamental qui va provoquer un phénomène de pompage hyperfin pouvant être gênant. Nous avons néanmoins utilisé l'atome de sodium, sous la forme d'un jet atomique.

Nous allons commencer par décrire les différents éléments constituant le dispositif expérimental (section 4.2). Nous préciserons ensuite les conditions et la procédure expérimentale, et effectuerons des ajustements de paramètres à l'aide d'une modélisation numérique de l'état stationnaire (section 4.3). Nous exposerons enfin (section 4.4) les résultats expérimentaux, et nous les confronterons aux résultats donnés par les modèles théoriques que nous avons développés (*cf.* chapitre précédent), en utilisant ces paramètres déduits de l'état stationnaire.

## 4.2 Dispositif expérimental

### 4.2.1 L'atome de sodium

Les considérations de physique atomique sur l'atome de sodium, discutées ici sont tirées de la thèse de J.-F. Roch [Roch 92a], dans laquelle une étude beaucoup plus détaillée de ces problèmes est présentée. Nous avons utilisé dans le sodium une structure à trois niveaux en échelle. Le diagramme d'énergie des niveaux intervenant dans cette structure est représenté sur la figure 4.1. La transition, représentée en trait plein, est nettement plus intense que les autres, et constitue donc un système quasi fermé<sup>1</sup>. La principale différence avec un système fermé à trois niveaux, est causée par la structure hyperfine du niveau fondamental, pouvant induire un phénomène de pompage hyperfin qui pourra être gênant si on ne dispose pas d'un laser de prépompage (cf. section 4.4.2). L'écart entre les deux sous-niveaux hyperfins  $F = 1$  et  $F = 2$  du niveau fondamental (1.77 GHz) étant bien plus grand que la largeur Doppler du jet atomique (200 MHz de largeur totale à mi-hauteur), on peut, en négligeant les effets de pompage hyperfin, traiter ces deux sous-niveaux de manière indépendante. Les intensités relatives de raies entre ces deux sous-niveaux et le niveau intermédiaire sont dans le rapport de leurs dégénérescences, c'est-à-dire de 5/3 en faveur du sous-niveau  $F=2$ . On peut ajouter que, de manière à se tenir le plus à l'écart possible du niveau  $3d_{3/2}$ , nous choisirons plutôt un désaccord à deux photons négatif.

### 4.2.2 Le jet atomique

Le jet atomique utilisé est un jet effusif collimaté par une galette de micro-canaux. Une description détaillée du four, ainsi qu'une discussion approfondie des caractéristiques du jet sont présentées dans la thèse de J.-F. Roch [Roch 92a]. On ne fera, dans cette section que rappeler les résultats principaux.

Un schéma simplifié du four est représenté sur la figure 4.2. La température à l'intérieur du four est de l'ordre de  $300^{\circ}\text{C}$ . Le libre parcours moyen des atomes dans le four est d'environ 1 cm, ce qui est grand par rapport au diamètre de 0.33 mm des microtubes, et de l'ordre de leur longueur.

La densité des atomes dans la zone d'interaction est déterminée par une mesure des variations de l'indice du jet atomique en fonction du désaccord laser-atome. On fait passer un bras d'un interféromètre de Michelson par le jet d'atomes. La technique consiste alors à compter le nombre de franges qui défilent, lorsqu'on balaye la fréquence d'une sonde de faible intensité (par rapport à l'intensité de saturation) autour de la résonance de la transition inférieure (589 nm). Une analyse détaillée et quantitative de cette méthode est faite dans la thèse de J.F. Roch [Roch 92a]. La densité atomique typique est de  $3 \times 10^{11}$  atomes/cm<sup>3</sup>, ce qui donne

<sup>1</sup>Nous n'avons représenté, sur la figure 4.1, que la structure fine, et nous avons omis tous les sous-niveaux hyperfins. En tenant compte de ces sous-niveaux, on s'aperçoit que la transition la plus à droite, qui est bien fermée, est encore la plus intense. Les arguments donnés dans le texte tiennent donc toujours.

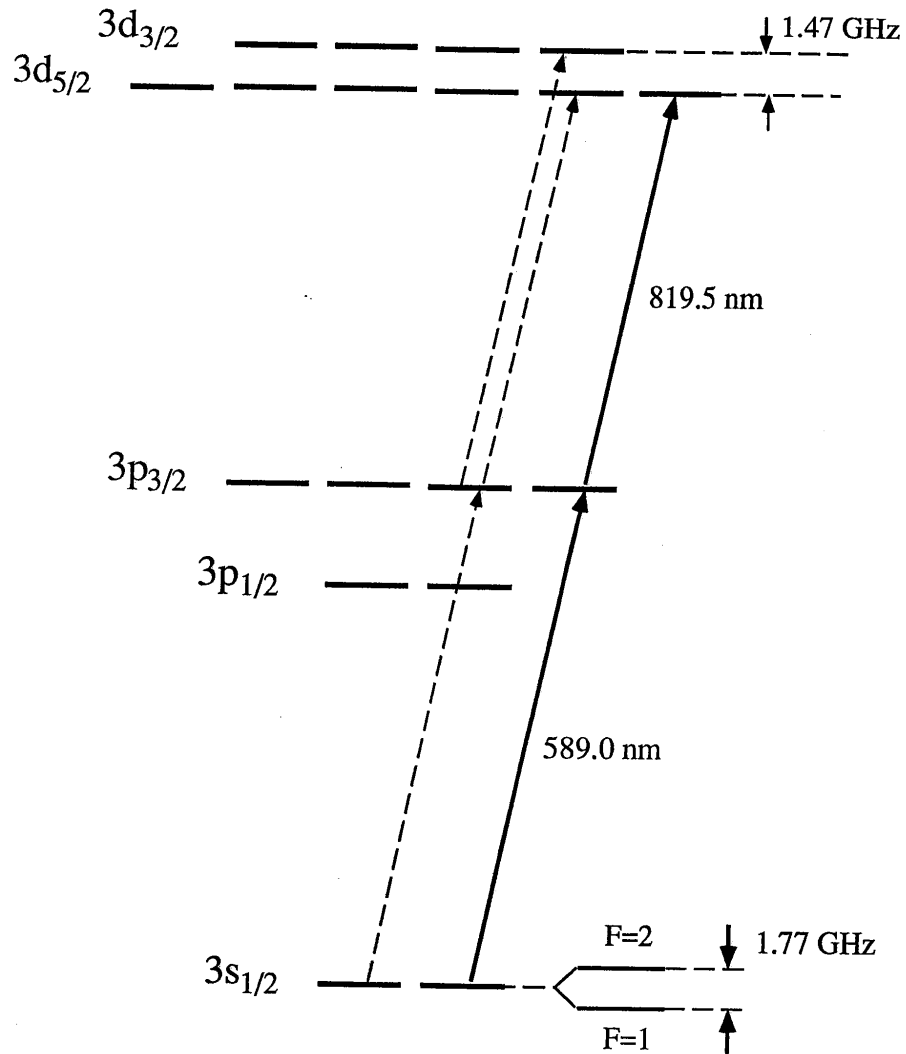


Figure 4.1: schéma restreint de la structure fine du sodium, et de la structure hyperfine du niveau fondamental. Les transitions à deux photons représentées par des tirets sont environ 10 fois moins intenses que la transition représentée par des traits pleins. Seul le processus représenté par des traits pleins comporte un vrai système fermé à trois niveaux. Pour les autres processus, l'émission spontanée couple des niveaux n'appartenant pas au système à trois niveaux envisagé. Le niveau  $3p_{1/2}$  est trop loin ( $519 \text{ GHz}$ ) du niveau  $3p_{3/2}$  pour avoir à être pris en considération.

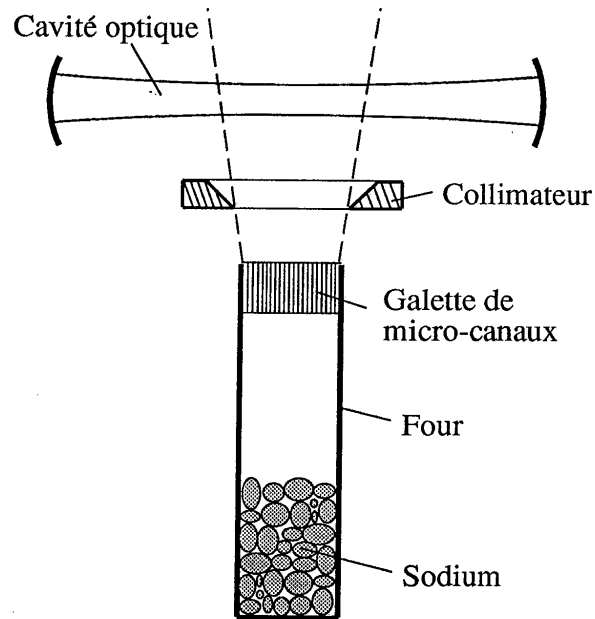


Figure 4.2: Schéma du four. L'ensemble du système est à symétrie cylindrique. Le four est chauffé par une résistance chauffante bobinée à l'extérieur de celui-ci. La galette de micro-canaux est constituée de 300 petits tubes en acier inoxydable de diamètres internes et externes respectivement 0.33 mm et 0.55 mm et de longueur 5 mm. Le diamètre total de la galette est de 1 cm. Le collimateur est refroidi à l'azote liquide de sorte que les atomes de sodium qui le touchent s'y collent.

$5 \times 10^7$  atomes dans la zone d'interaction, déterminée par la largeur du jet atomique (1 cm) et le waist ( $w_0 = 80 \mu\text{m}$ ) des faisceaux lasers dans la cavité (cf. section 4.2.4).

La largeur Doppler totale à mi-hauteur est de l'ordre de 200 MHz pour le jet atomique utilisé, ce qui correspond à une température transverse de l'ordre de 3K. La vitesse des atomes est de l'ordre de 1000 m/s.

### 4.2.3 Les lasers

On utilise deux lasers à colorants continus monomodes asservis en fréquence, pompés par un même laser Argon (Coherent Innova 200) La longueur d'onde correspondant à la transition du bas (589.0 nm) est obtenue par un laser en anneau Spectra Physics 380 D utilisant de la Rhodamine 6G, tandis que la transition du haut (819.5 nm) est excitée par un laser linéaire Coherent 599.21 fonctionnant avec du Styryl 9 (LDS 821).

La puissance de pompe est d'environ 5 W par laser, pour une puissance de sortie monomode de quelques dizaines de mW. L'asservissement électronique conduit à une stabilité en fréquence de l'ordre du MHz. L'utilisation d'un lambdamètre construit au laboratoire permet de se caler autour de la longueur d'onde souhaitée avec une précision relative de  $10^{-5}$ , c'est-à-dire à  $\pm 3$  GHz de la raie atomique. On repère ensuite cette raie au moyen d'un balayage de 10 GHz de la fréquence du laser. Les réglages fins des désaccords, de l'ordre du GHz, sont effectués grâce à des Fabry-Pérot confocaux d'intervalle spectral libre 750 MHz.

### 4.2.4 La cavité optique

La cavité optique est un élément crucial du dispositif expérimental. Elle permet en effet, par la surtension qu'elle crée pour l'intensité des champs lorsqu'ils sont à résonance, d'augmenter considérablement le couplage non-linéaire entre le faisceau signal et le faisceau de mesure. Mais plus le facteur de surtension, ou finesse, de la cavité est élevé (de l'ordre de 100), plus la lumière fait d'aller-retour dans la cavité. Les pertes sur les miroirs vont alors avoir un effet cumulatif qui pourra vite devenir rédhibitoire.

Pour une cavité de bonne finesse, les différents modes sont suffisamment séparés pour pouvoir être traité de façon indépendantes. Pour des désaccords à résonance  $\phi$  petits devant l'intervalle entre deux modes successifs, on peut alors approximer chaque pic de la fonction d'Airy par une Lorentzienne. L'intensité intracavité dans une cavité à un seul miroir de sortie s'écrit alors, pour  $\phi \ll 2\pi$ ,

$$\frac{I}{I^{\text{in}}} = \frac{T}{\left(\frac{T+P}{2}\right)^2 + \phi^2}, \quad (4.1)$$

où  $I$  est l'intensité intracavité,  $I^{\text{in}}$  l'intensité incidente,  $T$  la transmission en intensité du miroir de couplage et  $P$  les pertes en intensité sur un tour de cavité <sup>2</sup> (cf.

<sup>2</sup> $T$  et  $P$  sont reliés à la finesse  $\mathcal{F}$  par la formule

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{T+P} \quad (4.2)$$



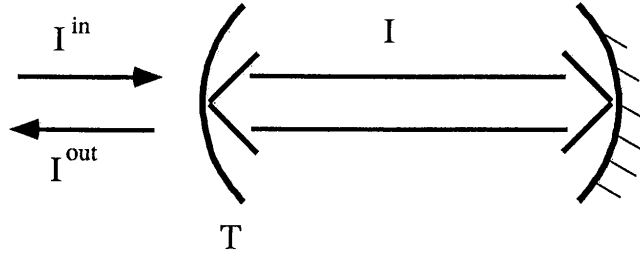


Figure 4.3: Représentation schématique d'une cavité.

figure 4.3). Ces pertes sont composées d'une part des pertes par diffusion sur les miroirs, et d'autre part des fuites par le miroir supposé totalement réfléchissant. Une mesure de ce coefficient de pertes  $P$  peut se faire en comparant l'intensité de la lumière sortante à l'intensité de la lumière incidente lorsqu'on balaye la cavité sur une résonance. On a en effet,

$$\frac{I^{out}}{I^{in}} = \frac{\left(\frac{T-P}{2}\right)^2 + \phi^2}{\left(\frac{T+P}{2}\right)^2 + \phi^2} \quad (4.3)$$

La valeur de la réflexion à résonance  $[(T-P)/(T+P)]^2$  permet donc, connaissant la transmission  $T$  de remonter au coefficient de pertes  $P$ . D'autre part, le meilleur couplage QND étant obtenu lorsque les deux faisceaux (signal et mesure) sont accordés à la résonance de la cavité, la réflexion à résonance donne une évaluation des pertes sèches contribuant directement à la dégradation des corrélations quantiques.

Dans notre expérience, la cavité optique est composée de miroirs à traitement diélectrique multicouche<sup>3</sup> permettant d'avoir, pour la longueur d'onde de chacun des faisceaux (589 nm et 820 nm), une cavité à une seule porte de sortie, cette sortie s'effectuant d'un côté différent suivant la longueur d'onde. Les caractéristiques de ces miroirs sont les suivantes :  $T_{fuites} = 7 \times 10^{-4}$  dans le jaune, et  $T = 7 \times 10^{-2}$  dans l'infra-rouge, pour le miroir de couplage infra-rouge, et  $T_{fuites} = 5 \times 10^{-4}$  dans l'IR, et  $T = 7 \times 10^{-2}$  dans le jaune, pour le miroir de couplage jaune. Les coefficients de réflexion à résonance sont de 0.95 à 820nm, et 0.90 à 589nm, ce qui est relativement élevé compte tenu de la valeur de la finesse  $\mathcal{F} = 90$ .

Le rayon de courbure des miroirs est de  $R = 5$  cm. La distance  $L$  entre les miroirs est choisie de manière à avoir une configuration stable proche d'une cavité confocale, afin que le mode de la cavité ait une longueur de Rayleigh  $z_R$  qui soit plus grande que la section transverse du jet atomique qui est de  $\sim 1$  cm. On a pris  $L = 5.2$  cm, alors que la configuration confocale correspond à  $L = R = 5$  cm. On a alors une longueur de Rayleigh

$$z_R = \left( \left( R - \frac{L}{2} \right) \frac{L}{2} \right)^{1/2} = 2.5 \text{ cm} , \quad (4.4)$$

<sup>3</sup>Achetés chez Layertec en Allemagne.

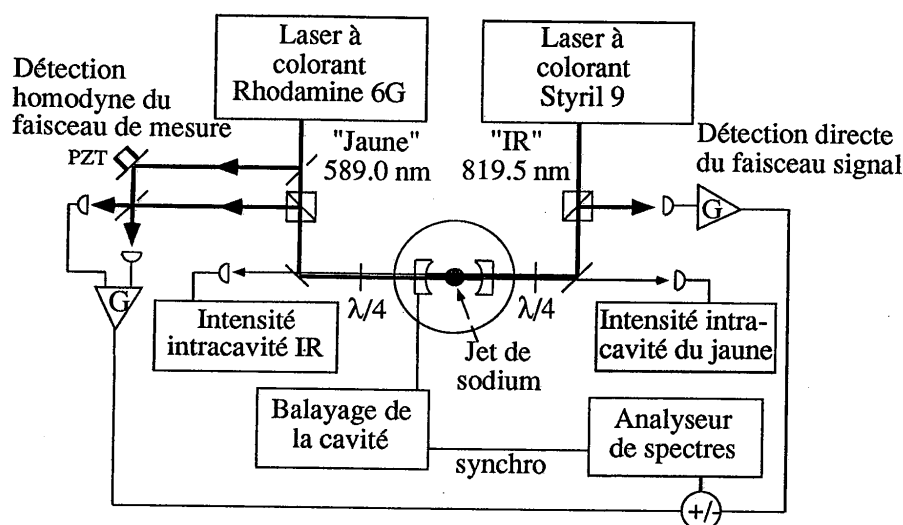


Figure 4.4: Schéma expérimental. Chaque laser traverse un prisme polariseur, est ensuite polarisé circulairement par une lame quart d'onde, résonne dans la cavité, puis ressort en repassant par la lame quart d'onde, et est finalement réfléchi par le prisme polariseur. Le miroir de gauche de la cavité est le miroir de couplage pour le jaune,  $t^2 = 7 \times 10^{-2}$ , et réflecteur pour l'IR,  $t^2 = 5 \times 10^{-4}$ , alors que c'est le contraire pour le miroir de droite  $t^2 = 7 \times 10^{-4}$  pour le jaune, et  $t^2 = 7 \times 10^{-2}$  pour l'IR. Les intensités intra cavité sont mesurées par les fuites des miroirs à haut coefficient de réflexion. La phase de l'oscillateur local servant à la détection homodyne du jaune peut être balayée par la cale piezo-électrique PZT.

et un waist<sup>4</sup>

$$w_o = \left( \frac{\lambda z_R}{\pi} \right)^{1/2} = 70 \mu m \text{ (pour le jaune)} \\ = 80 \mu m \text{ (pour l'IR)}. \quad (4.5)$$

#### 4.2.5 Montage expérimental

Un schéma du dispositif expérimental est donné sur la figure 4.4. L'information sur l'amplitude du faisceau signal (IR) est lue sur la phase du faisceau de mesure (jaune). La détection de ce dernier se fait donc par l'intermédiaire d'une détection homodyne pour laquelle on peut balayer la phase de l'oscillateur local au moyen d'une cale piezo-électrique (PZT). Le signal est lui détecté de façon directe, mais on a également installé une détection homodyne de manière à avoir accès, si nécessaire, à la phase du signal pour avoir la possibilité d'en contrôler le bruit.

<sup>4</sup>Le profil transverse du faisceau en intensité est donné par  $P(r) \propto \exp[-2(r/w)^2]$  où  $r$  est la distance à l'axe du faisceau.

Le taux d'extinction de l'ensemble prisme polariseur - lame quart d'onde est de  $10^{-2}$ .

Les photodétecteurs utilisées sont des photodiodes rapides au silicium de type p-i-n (Centronic BPX 65) d'efficacité quantique 0.78 à 589 nm, et 0.93 à 820 nm, suivies de préamplificateurs à bas niveaux de bruit construits autour de l'amplificateur OEI AH0013. Une description électronique détaillée des systèmes de photodétection est présentée en annexe H. Les fluctuations des courants issus des détecteurs sont ensuite soit visualisées directement sur un analyseur de spectre, soit après avoir été combinées linéairement par un "power combiner" 0-180°.

L'intensité intracavité de chacun des faisceaux est contrôlée en permanence grâce aux fuites des miroirs R max de la cavité. Un des miroirs de cette dernière est monté sur une cale piezo-électrique (non représentée sur la figure 4.4), ce qui permet de balayer, ou d'ajuster la longueur de la cavité, afin de l'accorder sur la résonance d'un des deux lasers.

La difficulté principale de tout ce montage expérimental est l'adaptation des modes spatiaux (mode matching). En effet tout écart est irrémédiablement sanctionné par des pertes de corrélations quantiques. Il faut d'abord adapter très soigneusement le mode de chacun des deux lasers avec le mode fondamental  $TEM_{00}$  de la cavité, en veillant à ce que les modes transverses soient le moins excités possible (globalement, moins de 5% de l'intensité lumineuse). Il faut ensuite maximiser le contraste des franges de la détection homodyne, en superposant au mieux le mode de l'oscillateur local avec celui du faisceau revenant de la cavité. Nous avons obtenu une visibilité des franges de  $v = 0.92$ , dont l'écart à l'unité est vraisemblablement dû à une absence de filtrage spatial sur l'oscillateur local. On rappelle que l'efficacité quantique de la détection homodyne est égale à l'efficacité quantique des photodiodes multipliée par  $v^2$ .

### 4.3 Conditions expérimentales

#### 4.3.1 Recherche d'un point de fonctionnement

Le régime de paramètres dans lequel nous nous plaçons correspond à celui des "transitions fantômes" [Gheri 92] analysées dans la partie théorique 3.4.2. La procédure expérimentale pour y arriver est la suivante. Pendant la première phase de réglage, la cavité optique est continuellement balayée, ce qui permet d'en observer les modes. Après avoir trouver les deux raies de la transition du bas correspondant aux deux sous-niveaux hyperfins  $F=2$  et  $F=1$  du niveau fondamental (cf. figure 4.1), on désaccorde le laser jaune négativement par rapport à la raie  $F=2$  jusqu'à ce que la valeur de l'intensité jaune dans la cavité soit environ 75% de la valeur à très grand désaccord, et on verrouille l'asservissement du laser. La valeur du désaccord pour le jaune est alors de  $-1.5$  GHz. Le signe du désaccord est choisi de manière à profiter du couplage plus important (d'un facteur  $5/3$ ) du sous-niveaux  $F=2$  avec le niveau intermédiaire. On cherche alors la résonance à deux photons avec le laser IR, en observant son absorption par les atomes dans la cavité. Mais lorsque les deux lasers ont une intensité de même

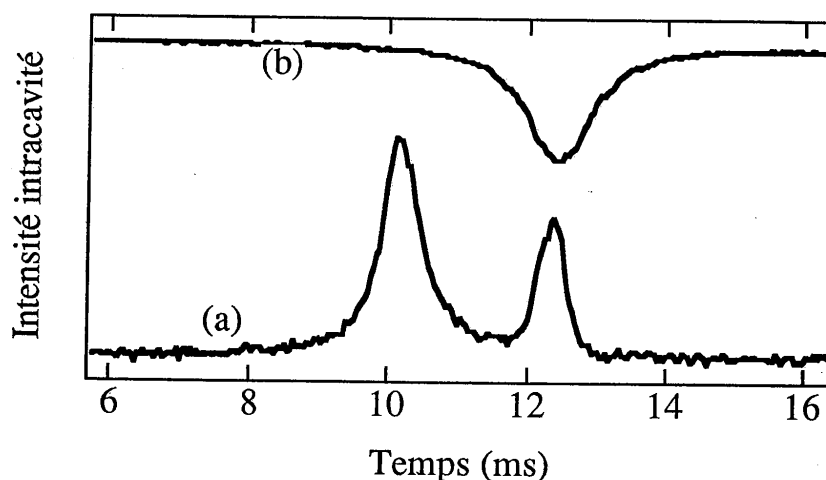


Figure 4.5: Intensité intracavité du faisceau jaune de mesure (a), et du faisceau signal IR (b), inversée pour raison de clarté, en fonction du balayage de la longueur de la cavité. La puissance des faisceaux avant d'entrer dans la cavité est de  $5 \mu W$  pour le faisceau signal jaune, et de  $265 \mu W$  pour le signal IR. Le désaccord atomique du jaune est de  $-1.5$  GHz, et le désaccord à deux photons est d'environ  $-1$  GHz.

ordre de grandeur, les effets indésirables de bistabilité à deux photons sont très importants [Roch 92a][Grangier 92b]. On atténue alors le laser jaune, comme indiqué par les prévisions théoriques des "transitions fantômes", ce qui diminue du même coup les effets de bistabilité et on cherche, en balayant à la main la fréquence du laser IR, un point de fonctionnement stable pour lequel les deux lasers résonnent en même temps dans la cavité. Une telle situation est représentée sur la figure 4.5. Le faisceau signal (courbe (b) sur la figure), intense et correspondant à la transition du haut n'est pas affecté par la présence dans la cavité du champ jaune de mesure, peu intense. La forme du mode est en effet celle, usuelle, de la fonction d'Airy pour une cavité vide. Le faisceau de mesure (courbe (a)), d'intensité faible, et correspondant à la transition du bas, est lui, par contre, fortement perturbé par le champ signal. A la position du pic de gauche de la courbe (a), l'intensité du champ du faisceau signal IR dans la cavité est négligeable. Ce pic n'est donc pas modifié par la présence du champ IR. La position de ce pic est fixée par la dispersion atomique linéaire à un photon, c'est-à-dire l'indice du jet atomique, qui conduit à un décalage de l'ordre de plusieurs dizaines de largeurs de cavité, et la hauteur du pic dépend de l'absorption à un photon du faisceau jaune (de l'ordre de 25%). Pour comprendre l'existence du deuxième pic, il faut se rappeler, qu'à l'ordre le plus bas, l'effet non-linéaire est un couplage par effet Kerr croisé entre les deux champs, c'est-à-dire dire que l'indice vu par le faisceau de mesure dépend de l'intensité du faisceau signal. La position des résonances de la cavité pour le faisceau jaune de mesure dépend donc de l'intensité du faisceau signal dans la

cavité, et donc de la position de son pic de résonance. Sur la figure 4.5, l'intensité intracavité à résonance de l'IR, correspond à une intensité conduisant à une valeur de l'indice vu par le jaune telle qu'une résonance du jaune se produit justement à l'endroit du pic de l'IR. Le jaune est ainsi "attiré" à résonance par l'IR. Les deux champs sont alors résonants simultanément dans la cavité, offrant ainsi un couplage maximum des fluctuations des deux faisceaux, ce qui est la situation recherchée. La distance entre les deux pics est une mesure de l'intensité du couplage entre les deux champs, tandis que la diminution de la hauteur du pic induit par rapport à celle du pic "ordinaire" est due à l'absorption à deux photons.

On s'efforce donc d'obtenir une situation similaire à celle de la figure 4.5, en jouant principalement sur le désaccord du laser IR, et la puissance des deux lasers, et en cherchant à rendre la distance entre les deux pics la plus grande possible, pour bénéficier d'un couplage maximum, et à faire de telle sorte que le pic "induit" soit le moins absorbé possible. Une fois cette situation trouvée, on arrête le balayage de la cavité et on se place au point pour lequel les deux champs résonnent en même temps. Le dispositif est ainsi réglé en position de dispositif de mesure QND, et il ne reste alors plus qu'à évaluer son efficacité.

### 4.3.2 Comparaison avec les prévisions théoriques

La modélisation numérique de l'état stationnaire de ce système de deux modes du champ électromagnétique couplés par un milieu atomique à trois niveaux, étant donné les valeurs des intensités des champs incidents, n'est pas un problème facile, puisqu'elle nécessite la résolution d'un système de 12 équations différentielles non-linéaires couplées. Ce système est constitué des équations (3.55-3.60), obtenues au début du chapitre 3, auxquelles on aura enlevé les termes de bruits. Ce calcul numérique a été réalisé en collaboration avec F. Castelli et A. Sinatra du groupe de L.A. Lugiato à l'Université de Milan. Afin de trouver un couple de valeurs de l'intensité de chacun des deux champs, le programme informatique explore un maillage à deux dimensions (une pour chaque champ) avec une succession de différentes fonctions permettant un repérage progressif des solutions.

Nous avons superposé, sur la figure 4.6, la courbe expérimentale de la figure 4.5 avec le résultat du calcul numérique après un ajustage "à la main" des paramètres. Un fois les largeurs de cavité et les durées de vie des niveaux fixés, les différents paramètres sont les désaccords à un et à deux photons ( $\Delta_{21}$  et  $\Delta_{31}$ ), les deux coopérativités  $C_1$ ,  $C_2$ , et les deux fréquences de Rabi  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ . Le désaccord à un photon  $\Delta_{21}$  est connu de façon assez fiable en comptant le nombre d'intervalle spectral libre d'un Fabry-Pérot balayés depuis la résonance. Le rapport des fréquences de Rabi est également connu de façon acceptable par la mesure de l'intensité de chacun des faisceaux. Enfin, la connaissance des largeurs de cavité et des paramètres atomiques permet d'en déduire les valeurs relatives des coopérativités, et on a  $C_1 = C_2$ . La stratégie de recherche des autres paramètres expérimentaux a été la suivante : La hauteur relative des deux pics est ajustée par le désaccord à deux photons  $\Delta_{31}$ , ainsi que par la valeur des coopérativités; et la distance entre les deux pics, qui est une mesure de l'intensité du couplage non-linéaire, est ensuite ajustée en jouant sur les fréquences de Rabi. Ces valeurs sont compatibles avec l'ordre

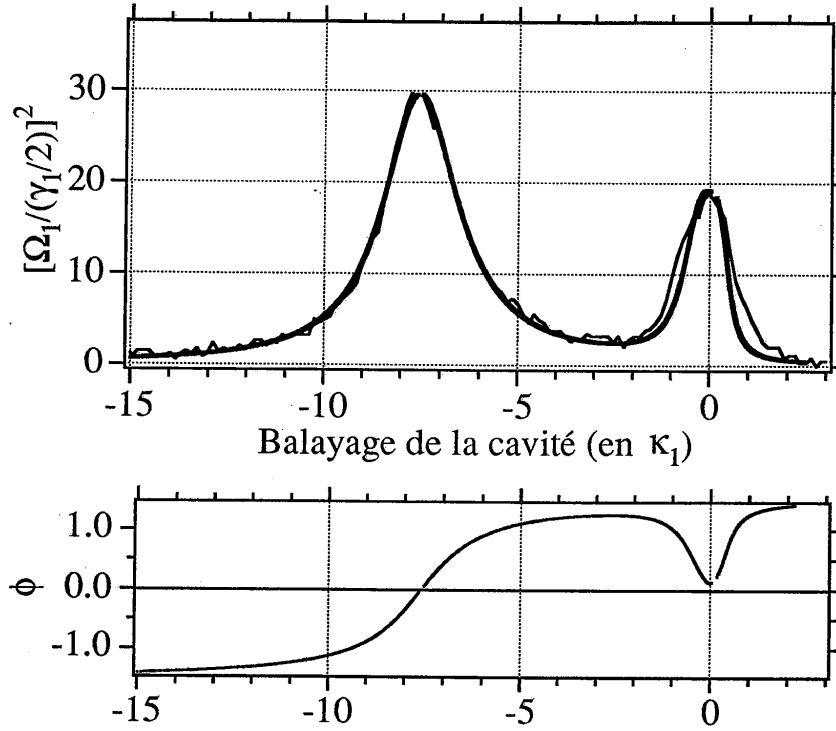


Figure 4.6: Le graphe du haut compare la courbe expérimentale de l'intensité intra-cavité du faisceau de mesure de la figure 4.5 avec le résultat du calcul numérique (en gras). La pleine échelle de l'axe des ordonnées correspond à l'intensité intra-cavité résonnante lorsqu'il n'y a pas d'absorption. L'axe des abscisses correspond à une variation de la longueur de la cavité, et est gradué en largeur de cavité  $\kappa_1$ . Le zéro correspond à la résonance cavité pour le faisceau signal IR. Le graphe du bas représente le déphasage  $\phi$  entre le champ à l'extérieur de la cavité et le champ dans la cavité. Les paramètres pour ces deux courbes sont :  $\kappa_1 = \kappa_2 = 3 \times 10^7$  MHz,  $\gamma_1 = 10^7$  MHz,  $\gamma_2 = 0.8 \times 10^7$  MHz,  $C_1 = C_2 = 5000$ ,  $\Delta_{21} = 300(\gamma_1/2)$ ,  $\delta_{31} = 36(\gamma_1/2)$ ,  $\Omega_1 = 6.08(\gamma_1/2)$ , et  $\Omega_2 = 45(\gamma_1/2)$ .

de grandeur des valeurs calculées directement, qui sont entachées de l'imprécision due au fait que l'onde stationnaire Gaussienne dans l'expérience devient une onde plane progressive dans la théorie.

Le graphe du bas de la figure 4.6 représente le déphasage  $\phi$  subi par le faisceau de mesure au passage du miroir de couplage de la cavité. Lorsqu'on est en-dehors de toute résonance, on  $\phi = \pm\pi/2$ . Au passage de la résonance ordinaire,  $\phi$  passe de  $-\pi/2$  à  $+\pi/2$  et vaut 0 au sommet du pic de résonance. Le comportement du déphasage  $\phi$  autour de la résonance induite est différent. Le déphasage avant et après la résonance a le même signe, ce qui est en fait naturel, puisque ce pic induit peut être considéré comme une perturbation.

La série de graphes numériques de la figure 4.7 représente les intensités intracavité des deux champs, comme on les voit sur l'oscilloscope quand on balaye la longueur de la cavité, lorsqu'on se trouve autour du point de fonctionnement adéquat pour les mesures QND, représenté ici sur le graphe (3). Expérimentalement, le passage d'une courbe à l'autre se fait par un changement de la fréquence d'un des lasers. Le point de fonctionnement QND optimum nécessite une intensité maximum des deux champs dans la cavité, c'est-à-dire que les deux doivent être résonants en même temps et avec une intensité la plus grande possible, pour des puissances incidentes données. Sur les deux premiers graphes, on a bien une résonance simultanée des deux champs, mais l'intensité du faisceau de mesure n'est pas maximale. Sur les trois dernières courbes par contre, la résonance du signal induit un "creux" entre deux pics pour l'intensité de la mesure, qui n'est alors pas suffisamment importante. La position optimum (3) correspond en fait à la limite où le pic induit sur le faisceau de mesure se dédouble. Si on avait poursuivi la série de graphes au-delà de la courbe (6), jusqu'au moment où les deux pics principaux de chaque faisceau se rejoignent, on aurait alors pu observer l'apparition de bistabilité pour le faisceau de mesure. Nous ne nous étendrons pas sur ce sujet, qui a été discuté en détail dans la thèse de J.-F. Roch. On peut également remarquer sur toute cette série de courbes, que le faible faisceau de mesure ne perturbe pas la "forme de la résonance" du faisceau signal intense, ce qui est, ici, directement relié à la non-dégradation souhaitée des fluctuations quantiques d'intensité de ce dernier.

Ces résultats numériques reproduisent en fait très bien les observations expérimentales faites lors des recherches pour les meilleures conditions de mesures QND, voir par exemple la figure 4.8. Mais, malheureusement, nous n'avons pas fait d'acquisition systématique d'une telle série de courbes en cours de manipulation, car notre préoccupation principale était surtout de trouver le "point de fonctionnement QND" optimal, qui était alors le seul à être enregistré.

## 4.4 Résultats

### 4.4.1 Résultats expérimentaux

Ces résultats ont été publiés dans la référence [Poizat 93].

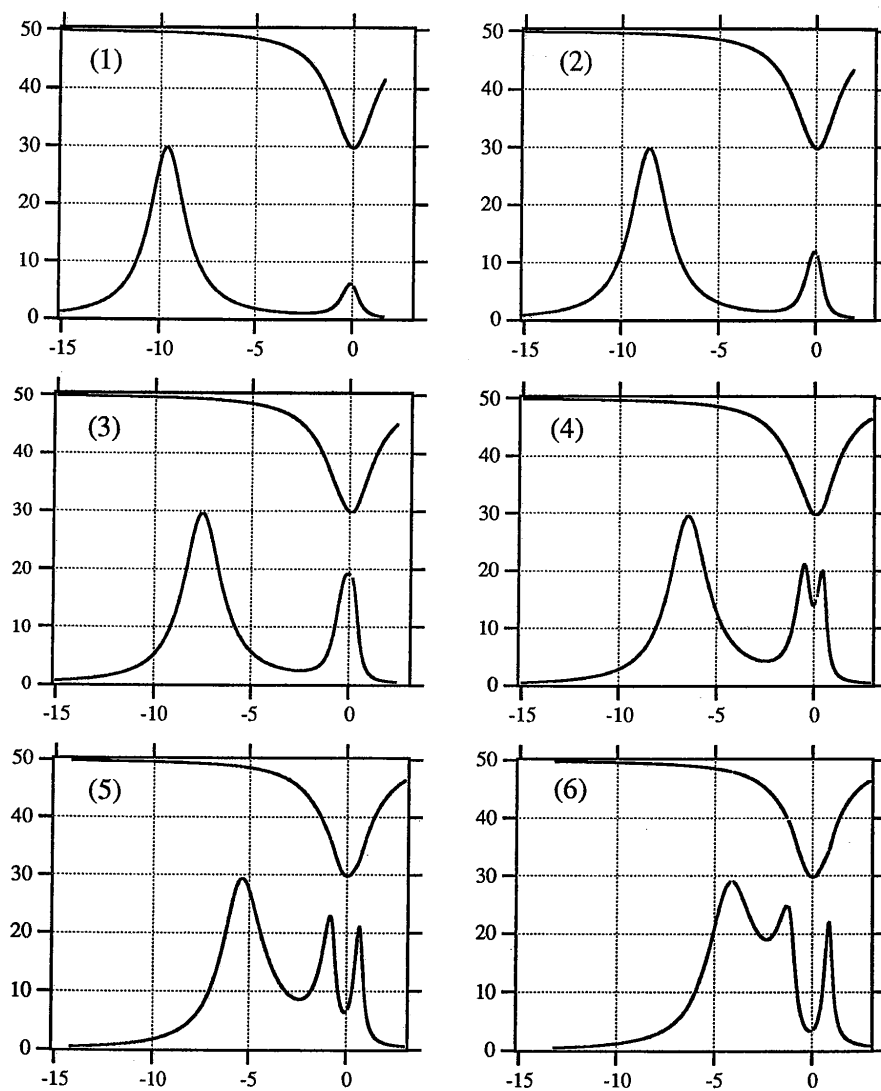


Figure 4.7: Sur tous ces graphes, la courbe du bas est l'intensité intra-cavité de la mesure, et la courbe du haut, l'intensité intra-cavité du signal a été divisé par 100 et inversé pour plus de clarté. Ces résultats sont des résultats numériques. L'axe des ordonnées est gradué en  $[\Omega_1/(\gamma_1)]^2$  comme sur la figure 4.6. L'axe des abscisses représente un balayage de la longueur de la cavité, comme sur la figure 4.6, et est gradué en largeur de cavité  $\kappa_1$ . Le zéro correspond à la résonance cavité du signal. En partant d'un décalage de  $2\kappa_1$  (courbe (1)), par rapport à la situation optimale de la courbe (3), on diminue le décalage d'une largeur de cavité  $\kappa_1$  par graphe pour terminer avec un décalage de  $-3\kappa_1$  sur la courbe (6).



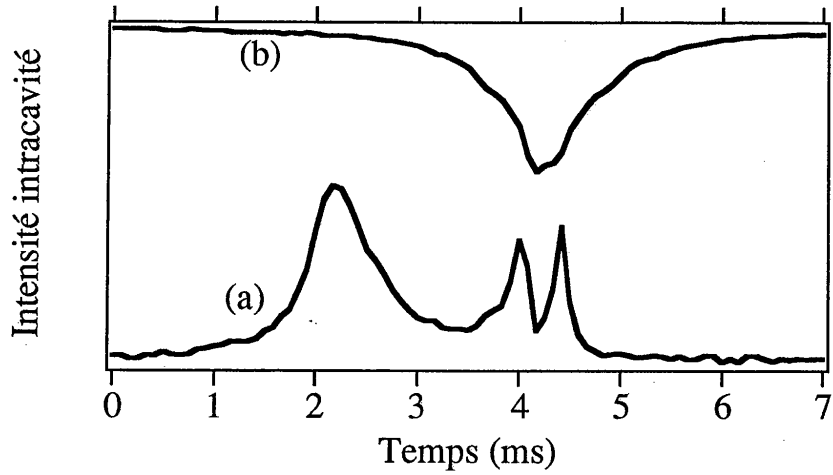


Figure 4.8: Exemple d'une courbe expérimentale correspondant à la série de courbes théoriques de la figure 4.7. En abscisse, on a le balayage de la longueur de la cavité. La courbe (a) correspond au faisceau de mesure (jaune), et la courbe (b) au faisceau signal (IR).

#### Coefficients de transfert

Pour la mesure des coefficients de transfert, on module l'amplitude du signal au-dessus du bruit quantique, grâce à un modulateur électro-optique, et on évalue la fidélité du transfert de ce rapport signal sur bruit (RSB) incident vers la voie de mesure, et vers la sortie du signal. Les résultats sont présentés sur la figure 4.9. La valeur du RSB du signal incident est mesurée sur la voie de sortie du signal, lorsque celui-ci ne résonne pas dans la cavité et est donc simplement réfléchi par le miroir de couplage de la cavité. La valeur ainsi obtenue est plus faible que le véritable RSB incident, puisque le faisceau signal subit alors les pertes des éléments optiques à partir du premier passage dans le prisme polariseur inclus jusqu'au détecteur également inclus. Ces pertes sont de 5% pour les éléments optiques, et de 7% pour le détecteur. On sous-estime donc le RSB du signal entrant d'environ 12%. L'information inscrite sur l'amplitude du faisceau signal est alors transférée sur la phase du faisceau de mesure. La détection de ce dernier se fait donc via une détection homodyne dont on balaye continuellement la phase, et c'est ce qui donne les franges sur la courbe (b) de la figure 4.9. On a d'autre part vérifié, en comparant ces franges à celles données par les interférences entre l'oscillateur local et le faisceau de mesure, que l'enveloppe supérieure de la courbe (b) correspond bien à la quadrature phase du faisceau de mesure. Les franges en dehors du pic sont dues au transfert des fluctuations quantiques du signal sur la phase du faisceau de mesure. Le fait qu'elles ne redescendent pas jusqu'au niveau du bruit de photon du faisceau de mesure (qui est le même que celui du signal sur la figure 4.9) est dû à un excès de bruit du système atomique, ainsi qu'à un petit couplage entre l'amplitude du signal et l'amplitude du faisceau de mesure, causé d'une part par

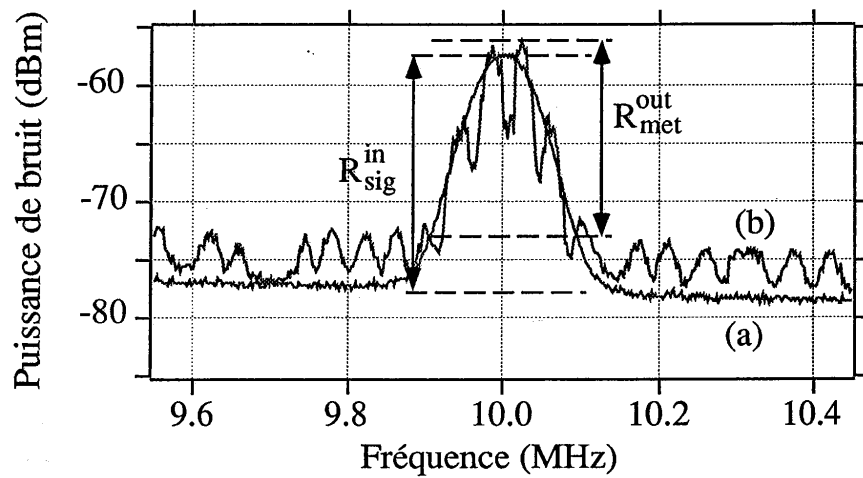


Figure 4.9: Transfert d'une modulation classique à 10 MHz. Les paramètres expérimentaux sont ceux de la figure 4.5. La courbe (a) représente le spectre de bruit du signal réfléchi sur la cavité désaccordé, pris comme valeur du RSB pour le signal entrant. On a  $R_{sig}^{in} = 20$  dB. La courbe (b) représente le spectre de bruit du faisceau de mesure. Les franges sont dues au balayage de la phase de l'oscillateur local de la détection homodyne, pendant que l'analyseur de spectre parcourt le spectre des fréquences. La hauteur du pic de l'enveloppe supérieure de cette courbe donne le RSB du faisceau de mesure. On trouve  $R_{met}^{out} = 17$  dB, ce qui donne un transfert brut de  $-3$  dB. Les bruits de photon des deux faisceaux ont été mis au même niveau.

le réglage imparfait de la détection homodyne, et d'autre part par un transfert parasite effectif des fluctuations de l'amplitude du signal vers l'amplitude de la mesure par le milieu atomique.

Le transfert brut du RSB incident vers la voie de mesure est de  $-3$  dB. Après correction du bruit électronique, qui est  $8$  dB en-dessous des bruits de photon, et les corrections dues à la sous-estimation du RSB entrant, on obtient pour le coefficient de transfert pour la mesure,

$$T_m = 0.40 . \quad (4.6)$$

Cette valeur n'est, par contre, pas corrigée de l'efficacité quantique globale de la détection homodyne, qui est considéré comme partie intégrante du système de mesure. Cette correction consisterait alors à diviser la valeur obtenue par le produit de l'efficacité quantique des photodiodes  $\eta = 0.78$ , et par le facteur de visibilité de la détection homodyne  $v^2 = 0.85$ . On obtiendrait alors un  $T_m$  avant détection de  $0.6$ .

Par ailleurs, on ne peut pas déceler de dégradation du RSB sur la voie de sortie du signal, lorsque le faisceau signal voit les atomes dans la cavité résonante. Le coefficient de transfert sur la voie signal est donc estimé à

$$T_s = 0.90 , \quad (4.7)$$

d'après les pertes à résonance de la cavité, environ  $5\%$ , et les pertes dues à l'imperfection des éléments optique, également  $5\%$ . En revanche, on ne prend pas en compte ici l'efficacité de détection du signal, puisque cette détection est seulement un contrôle, mais ne fait pas partie du dispositif de mesure.

La somme de ces deux coefficients, qui est inférieure à  $1$  pour n'importe quel dispositif classique donc indépendant de la phase, et vaut  $2$  dans le cas idéal d'un duplicateur quantique parfait, est, dans notre expérience, égale à

$$T_s + T_m = 1.30 . \quad (4.8)$$

Ce résultat peut également être considéré comme une amélioration de  $1.15$  dB du transfert total d'information par rapport à n'importe quel dispositif classique, comme par exemple une lame séparatrice.

### Variance conditionnelle

Le troisième critère QND caractérise l'efficacité du système en tant que préparateur d'état quantique, et est mesuré par la variance conditionnelle du signal sortant connaissant le résultat de la mesure. L'évaluation de cette quantité se fait en corrigeant le bruit du photocourant de détection du signal  $\delta i_s^{out}$  par soustraction des fluctuations du photocourant de mesure  $\delta i_m$  convenablement atténué (cf. annexe B). On regarde ensuite la réduction du bruit par rapport au niveau du bruit de photon du signal seul.

Dans notre expérience, le faisceau de mesure est détecté au moyen d'une détection homodyne. Comme on va le montrer, la phase de l'oscillateur local a une influence sur la phase RF du photocourant issu de cette détection différentielle.

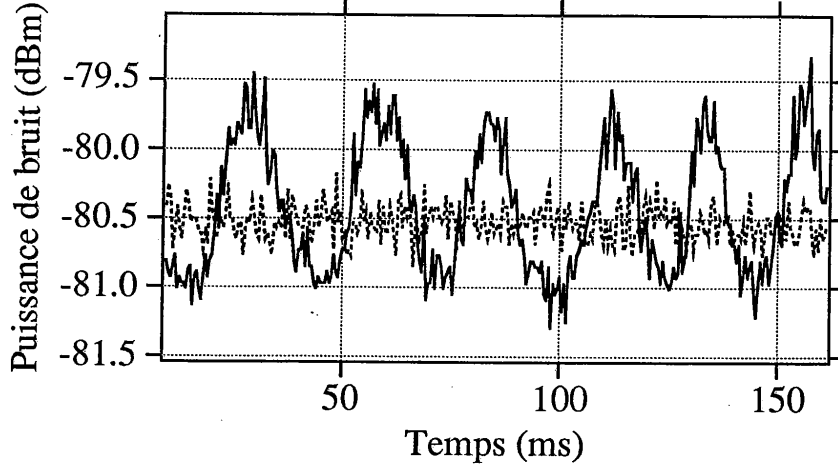


Figure 4.10: Variance conditionnelle correspondant aux mêmes paramètres expérimentaux que dans les figures 4.5 et 4.9. La courbe en pointillés est le bruit de photon du signal seul. La courbe en trait plein est la recombinaison du photocourant du signal avec le photocourant venant du faisceau de mesure atténué de 12 dB. Le balayage de la phase de l'oscillateur local de la détection homodyne permet d'observer successivement l'addition et la soustraction des deux photocourants. On observe une réduction du bruit de 0.5 dB en-dessous du bruit de photon.

En effet, en notant respectivement  $a = \langle a \rangle + \delta a$  et  $b = \langle b \rangle + \delta b$  les opérateurs bosoniques du faisceau de mesure, et de l'oscillateur local de la détection homodyne, la différence des variations des photocourants  $\delta i_m = \delta i_1 - \delta i_2$  des deux photodiodes de la détection homodyne s'écrit

$$\delta i_m = \delta i_1 - \delta i_2 = \delta a^\dagger \langle b \rangle + \langle a^\dagger \rangle \delta b + \delta b^\dagger \langle a \rangle + \langle b^\dagger \rangle \delta a. \quad (4.9)$$

Mais le champ moyen de l'oscillateur local  $\langle b \rangle$  est bien plus intense que celui du faisceau de mesure  $\langle a \rangle$ , et on obtient alors :

$$\delta i_m = (\delta a^\dagger) \langle b \rangle + \langle b^\dagger \rangle (\delta a). \quad (4.10)$$

Seule la différence de phase  $\Phi = \Phi_b - \Phi_a$  entre les deux champs  $a$  et  $b$  a une importance physique. On peut donc choisir  $\Phi_a = 0$ , et on a alors

$$\delta i_m = b_o [\delta a_o^\dagger e^{i\Phi_b} + \delta a_o e^{-i\Phi_b}], \quad (4.11)$$

où  $\langle b \rangle = b_o e^{i\Phi_b}$  avec  $b_o$  réel. Lorsqu'on change  $\Phi_b$  en  $\Phi_b + \pi$ , on change le signe de  $\delta i_m$ . Le balayage de la phase de la détection homodyne permet donc d'alterner la somme et la différence du photocourant du signal sortant et de celui de la mesure, comme on peut le voir sur la figure 4.10.

Pratiquement, on additionne les courants  $\delta i_s$  et  $\delta i_m$  à l'aide d'un "power combiner". L'atténuation du courant de mesure avant le "power combiner" est faite

à l'aide d'un atténuateur variable dont on choisit la valeur empiriquement en essayant d'optimiser la réduction de bruit. On peut observer sur la figure 4.10, que la réduction brute du bruit du signal sortant est de 0.5 dB en-dessous de son bruit de photon. Après correction du bruit électronique, la valeur est de 0.6 dB, conduisant à une variance conditionnelle de

$$W = 0.87 . \quad (4.12)$$

#### 4.4.2 Comparaison avec les prévisions théoriques

Nous allons maintenant confronter ces résultats expérimentaux avec les prévisions théoriques utilisant le modèle complet à trois niveaux que nous avons développé dans le chapitre 3.

Les paramètres utilisés dans le calcul quantique sont ceux qui reproduisent le mieux les aspects classiques du problème, c'est-à-dire en fait la courbe de la figure 4.5 donnant l'intensité intra-cavité moyenne du faisceau de mesure en fonction du désaccord entre le laser et la cavité. Cet ajustage de paramètres a été fait dans la section 4.3.2 et visualisé sur la figure 4.6. Ce sont ces mêmes valeurs que l'on va utiliser pour le calcul numérique des effets quantiques dans ce système.

Les prévisions théoriques concernant les trois critères d'efficacité de mesure QND sont représenté sur la figure 4.11 en fonction du décalage de la cavité pour des fréquences données des lasers. Comme prévu, les "performances QND" les meilleures sont obtenues lorsque les deux champs résonnent en même temps dans la cavité. La dégradation du signal est effectivement très faible ( $T_s \sim 1$ ), et on peut remarquer que, sur les flanc du pic de résonance, le signal est contaminé par l'excès de bruit de phase du à la mesure. Les valeurs théoriques du coefficient de transfert  $T_m$  sur la voie de mesure, et de la variance conditionnelle  $V_{s|m}$  sont respectivement  $T_m = 0.68$  et  $V_{s|m} = 0.36$ . Ces valeurs sont, bien sûr, à corriger des pertes de transmission et de détection. Ces pertes sont réparties de la façon suivante : le coefficient de réflexion à résonance (cf. eq.4.3) est  $\alpha_{res}^m = 0.90$  pour le faisceau de mesure, et  $\alpha_{res}^s = 0.95$  pour le faisceau signal; les pertes de propagation, de la cavité jusqu'aux détecteurs, sont évaluées à  $\beta_{prop} = 0.95$  pour les deux faisceaux; l'efficacité de détection du faisceau signal IR a été mesurée à  $\epsilon^s = 0.93$ , tandis que l'efficacité de la détection homodyne du faisceau de mesure doit prendre en compte le recouvrement des modes de l'oscillateur local et du faisceau venant de la cavité (visibilité des franges  $v = 0.92$ ) ainsi que l'efficacité des photodiodes dans le jaune  $\epsilon^m = 0.78$ . Les pertes totales sur la voie de mesure sont donc estimées à ,

$$P^m = \alpha_{res}^m \beta_{prop} v^2 \epsilon^m = 0.56 , \quad (4.13)$$

et tandis que celles sur la voie signal sont,

$$P^s = \alpha_{res}^s \beta_{prop} \epsilon^s = 0.84 . \quad (4.14)$$

Les prévisions théoriques, tenant compte de ces réalités expérimentales, sont donc de

$$T_m^{th} = P^m T_m = 0.38 \pm 0.03 \quad (4.15)$$

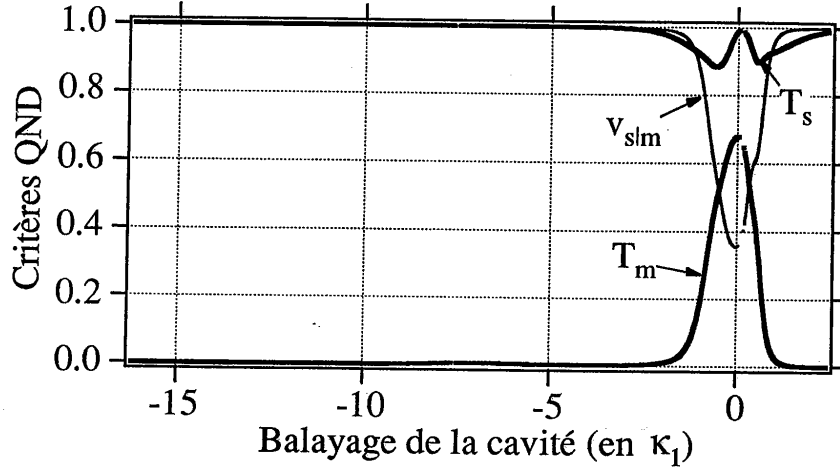


Figure 4.11: Les trois critères QND, à la fréquence d'analyse  $f = 10$  MHz, sont représentés en fonction du balayage de la cavité. Les paramètres de ce diagramme théorique sont ceux définis par le fit de la figure 4.6.

et de

$$1 - V_{s|m}^{th} = P^m P^s (1 - V_{s|m})$$

*i.e.*

$$V_{s|m}^{th} = 0.70 \pm 0.03. \quad (4.16)$$

La valeur expérimentale du coefficient de transfert  $T_m$  sur la voie de mesure ( $T_m^{exp} = 0.4$ ) correspond assez bien au résultat théorique attendu, mais l'accord est moins bon pour la variance conditionnelle ( $V_{s|m}^{exp} = 0.85$ ). Nous allons donc discuter les raisons possibles de ce désaccord, en considérant divers effets non pris en compte dans le calcul théorique. Tout d'abord, les calculs ont été fait pour un système atomique fermé à trois niveaux, alors que les transitions du sodium envisagées ont quelques écarts à cette structure idéale. En effet, la principale différence entre le système réel considéré et un ensemble d'atomes à trois niveaux est la présence de deux sous-niveaux hyperfins séparés de 1.77 GHz dans le niveau fondamental (cf. figure 4.1). Cette structure hyperfine rend possible un phénomène de pompage hyperfin qui accumule les atomes dans le sous-niveaux le moins couplé, et diminue ainsi les corrélations entre les deux faisceaux. La constante de temps caractéristique intervenant pour décrire ce pompage est le temps de transit des atomes à travers les faisceaux dans la cavité ( $\tau = 10^{-7}$  s). Ceci est dû au fait que la probabilité de transition  $\mathcal{P}$  d'un atome, de son niveau fondamental vers le niveau intermédiaire  $|2\rangle$ , est très faible. On a, en effet,  $\mathcal{P} \sim \gamma_1 P_2 \tau$ , où  $P_2$  est la population du niveau  $|2\rangle$  dans l'état stationnaire, qui est, d'après les équations de Bloch, inférieure à  $10^{-3}$ . On trouve alors  $\mathcal{P} < 5 \times 10^{-3}$ . Les atomes n'ont donc pas le temps d'être pompés dans un autre sous-niveaux hyperfin durant le temps de traversée des faisceaux, et  $\tau$  est alors le temps de "renouvellement" des atomes. Ceci correspond à une

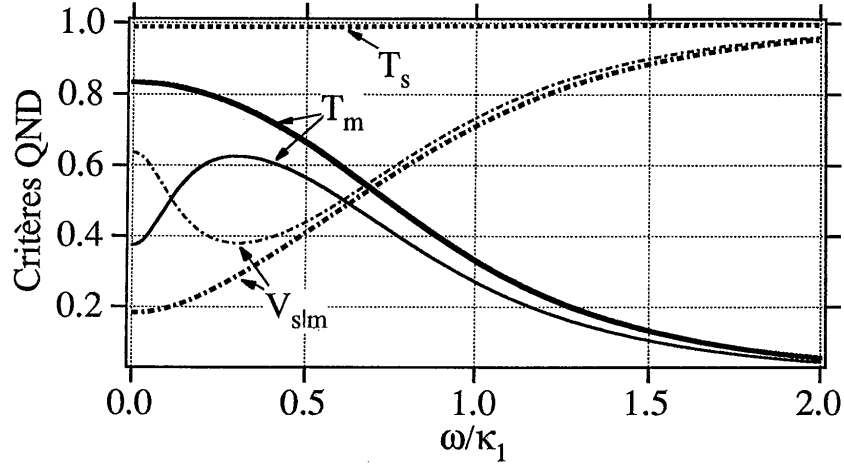


Figure 4.12: Spectres des critères QND en fonction de la fréquence d'analyse de bruit normalisée à la largeur de la cavité. Les courbes en trait gras représentent le résultat donné par le calcul à trois niveaux présenté dans la chapitre 3. Les courbes en trait fin représentent le résultat donné par un modèle à quatre niveaux prenant en compte la structure hyperfine du niveau fondamental (cf. texte). L'écart entre les deux sous-niveaux est pris égal à 1.77 GHz, et le taux de relaxation est de 1.6 MHz. Les autres paramètres sont ceux définis dans la figure 4.6.

fréquence de  $f_{Hy} = 1/(2\pi\tau) = 1.6$  MHz. Pour des fréquences d'analyse du bruit  $f < f_{Hy}$ , cet effet détruit complètement les corrélations quantiques, et peut même rajouter du bruit. Pour des fréquences d'analyse supérieures à  $f_{Hy}$ , ce qui est notre cas ( $f = 10$  MHz), on n'est en principe plus très sensible à cette dégradation. On a représenté sur la figure 4.12 les résultats théoriques donnés par un modèle à quatre niveaux utilisant la même méthode que celle présentée au chapitre 3, mais dans laquelle on a deux niveaux fondamentaux séparés de 1.77 GHz, chacun couplé au niveau intermédiaire, et ayant un taux de relaxation mutuel correspondant à  $f_{Hy}$ . La fréquence d'analyse de 10 MHz correspond à  $\kappa_1/3$ . On constate sur la figure 4.12 qu'on est bien dans les ailes du pic d'excès de bruit centré sur la fréquence nulle. En fait, le seul moyen pour s'affranchir totalement de l'effet du pompage optique aurait été de prépomper tous les atomes dans le bon sous-niveau hyperfin à l'aide d'un laser auxiliaire, ce qui aurait alourdi considérablement le montage expérimental.

D'autres éléments, non pris en compte dans le calcul théorique, sont également susceptibles de faire dévier les valeurs expérimentales des prédictions numériques. Nous avons déjà mentionné les ordres de grandeur concernant l'effet Doppler au cours de la discussion numérique au chapitre précédent. Citons aussi la fluctuation du nombre d'atomes, le profil Gaussien des faisceaux laser, ainsi que le fait que l'on a une onde stationnaire dans la cavité plutôt qu'une onde progressive. Les essais que nous avons effectués pour tenter d'inclure numériquement des effets

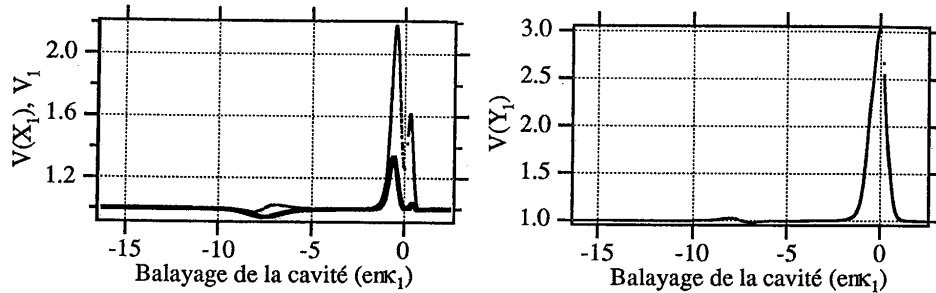


Figure 4.13: Sur le graphe de gauche, sont représentés le meilleur squeezing (en trait épais), et le squeezing de l'amplitude (en trait fin) du faisceau de mesure à  $f = 10$  MHz. Le graphe de droite représente le squeezing de la phase du faisceau de mesure. La valeur 1 correspond au bruit de photon. Les paramètres du calcul sont ceux de la figure 4.6.

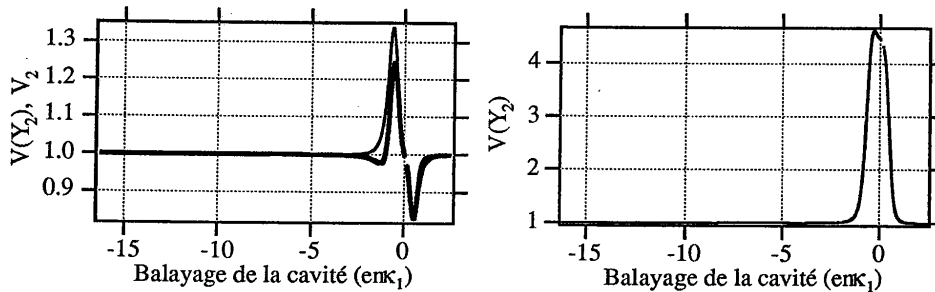


Figure 4.14: Sur le graphe de gauche, sont représentés le meilleur squeezing (en trait épais), et le squeezing de l'amplitude (en trait fin) du faisceau signal à  $f = 10$  MHz. Le graphe de droite représente le squeezing de la phase du signal. Les paramètres du calcul sont ceux de la figure 4.6.

n'ont cependant pas donné de résultats parfaitement concluants, et ne seront donc pas présentés ici.

On peut, enfin, commenter les résultats du calcul numérique concernant les propriétés de bruit propre de chaque faisceau. Conformément à ce que l'on s'attend, et à l'observation expérimentale (*cf.* figure 4.9), la variance de la phase du faisceau de mesure, représentée sur la figure 4.13 est bien au dessus du bruit de photon, puisque la raison d'être de tout ce système est justement de transférer le bruit d'amplitude du signal vers la phase du faisceau de mesure. On a cependant un peu d'excès de bruit, par rapport au seul effet de ce transfert, dont on a déjà parlé lors de la discussion numérique (section 3.4.2). Le bruit de phase du signal observé sur la figure 4.14 est supérieur à la valeur minimum imposée par les relations de dispersion de Heisenberg, et est supérieur à celui du faisceau de mesure. Concernant le meilleur squeezing du faisceau de mesure, on peut constater que l'on a des petits effets de squeezing dûs à la bistabilité à un photon autour de chacun des deux pics du faisceau de mesure.



Un effet plus surprenant, que nous avons observé expérimentalement, est le fait que le bruit de l'amplitude du faisceau signal est en-dessous du bruit de photon lorsqu'on est sur l'un des flancs du pic de résonance. L'origine de cet effet est un mélange complexe des quadratures qui se produit lorsque les deux faisceaux sont désaccordés de la cavité. Cet effet est bien reproduit par les simulations numériques (figure 4.14), et subsiste dans un modèle purement paramétrique. Il peut être interprété comme une rétroaction optique directe du faisceau de mesure sur le faisceau signal, et suggère donc la possibilité d'utiliser le résultat de la mesure QND pour réagir directement sur l'amplitude du signal, sans utiliser d'asservissement électronique. Une étude plus détaillée de ce problème est en cours.

# Chapitre 5

## Dispositif de mesure à semi-conducteurs

### 5.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre, une deuxième expérience, satisfaisant aux critères de caractérisation d'une mesure QND optique présentés dans le chapitre 2. Elle utilise des récepteurs et des émetteurs de lumière à semi-conducteur.

On sait depuis les travaux de Glauber [Glauber 65] que les fluctuations du courant fourni par une photodiode peuvent reproduire les fluctuations quantiques d'intensité de la lumière incidente, et que le "bruit de photon" est une propriété intrinsèque de la lumière, mise en évidence lors du processus de photodétection. En effet, si chaque photon incident est converti en un électron, le rendement quantique  $\eta$  de la photodiode est parfait, *i.e.*  $\eta = 1$ , et le bruit du photocourant reproduit alors fidèlement le bruit quantique d'intensité de la lumière incidente, dans la limite de la bande passante de la photodiode. Les efficacités quantiques des photodiodes actuelles peuvent dépasser  $\eta = 0.9$ , et ont permis de confirmer expérimentalement cette propriété par l'observation de bruit de photodétection inférieur au bruit de photon habituel [Slusher 85][special 87a][special 87b].

Les premières publications sur l'étude des propriétés quantiques de la transformation courant électrique-lumière, relatent la prédiction théorique [Teich 83], puis l'observation expérimentale [Teich 83] de lumière sub-Poissonnienne émise dans une cellule de Franck et Hertz, par un courant électrique autorégulé par un régime de charge d'espace qui garantit une certaine "distance" entre les électrons. Ces travaux préliminaires ont permis de montrer qu'il est possible de contrôler à mieux que le bruit de photon les fluctuations de la lumière émise par un processus de conversion électron-photon. Yamamoto et ses collaborateurs ont ensuite montré que les diodes laser permettent d'émettre de la lumière dont le bruit est inférieur au bruit de photon en les pilotant par un courant sans bruit [Machida 86][Machida 87], et ceci de manière très efficace [Richardson 91]. On peut également mentionner des travaux sur l'émission de lumière sub-Poissonnienne par des diodes électro-luminescentes (LED) réalisés par Tapster *et al* [Tapster 87].

En effet, le bruit d'un courant électrique est, après élimination de toutes sources

de bruit technique, dominé par le bruit thermique (Johnson-Nyquist) [Johnson 28] [Nyquist 28] à des fréquences d'analyse et à des températures usuelles [Callen 51] [Koch 82]. Le bruit quantique d'un courant électrique ne se manifeste que pour des températures très basses (inférieures à 1mK), pour des fréquences d'analyse de l'ordre du MHz (cf. annexe I). Or par un choix convenable des paramètres électriques (résistances, courants, tensions...), il est possible de rendre ce bruit thermique très inférieur au niveau du bruit de photon pour un courant moyen donné. Le bruit de photon pour un courant électrique apparaît donc comme un bruit classique sur ce courant, et n'est donc plus soumis aux contraintes fondamentales imposées par l'optique quantique, vis-à-vis de la mesure, de la duplication, ou de l'amplification.

On peut donc imaginer un dispositif de mesure optique, dans lequel on convertit l'intensité lumineuse en un courant électrique à l'aide d'une photodiode, puis on mesure et éventuellement on amplifie ce courant électrique avant de le "reconvertir en lumière" au moyen d'une LED. Si les deux conversions lumière-courant et courant-lumière avaient une efficacité quantique unité, ce système serait un système de mesure QND parfait. Pour des rendements quantiques de  $\eta$  pour la photodiode, et de  $\epsilon$  pour la LED réémettrice, les coefficients de transfert du rapport signal-sur-bruit sont  $T_s = \eta\epsilon$  sur la voie signal, et  $T_m = \eta$  sur la voie de mesure, tandis que la variance conditionnelle est donnée par  $V_{s|m} = 1 - \epsilon$  (voir section 5.2.1). Or les meilleures valeurs d'efficacité quantique que nous ayons trouvées sont de  $\eta = 0.90$  pour une photodiode, et de  $\epsilon = 0.28$  pour une LED, ce qui conduirait à  $T_s + T_m = 1.18$ , et  $V_{s|m} = 0.72$ . Le point faible de ce dispositif expérimental apparaît donc comme étant la relative faiblesse du rendement de conversion des LED. Cependant, il est possible de s'affranchir partiellement de cette limitation. En effet, si on amplifie le courant sortant de la photodiode avant de l'envoyer sur la LED, les fluctuations du courant pilotant la LED seront alors largement au dessus du bruit de photon, et de ce fait bien moins sensible aux fluctuations du vide introduites par le taux de conversion non-idéal de cette dernière [Yuen 86]. Cette amplification intermédiaire va permettre d'améliorer considérablement la fidélité du transfert sur la voie signal, en conservant cependant une variance conditionnelle  $V_{s|m} = 1 - \epsilon$ , toujours limitée par le rendement quantique du dispositif photo-émetteur.

Nous allons commencer par une présentation théorique de ce dispositif en établissant les expressions analytiques pour les différents critères QND (section 5.2), nous exposerons ensuite les résultats expérimentaux (section 5.3), pour enfin conclure (section 5.4).

## 5.2 Principe de l'expérience

### 5.2.1 Cadre général

Un schéma de principe du montage expérimental est représenté sur la figure 5.1. Le dispositif QND lui-même est constitué d'une photodiode ( $\text{PhD}_1$ ), d'un amplificateur électronique de faible bruit, ayant un gain alternatif  $g$ , et un gain continu  $G$ , et d'une diode électroluminescente réémettrice ( $\text{LED}_2$ ). La lumière dont

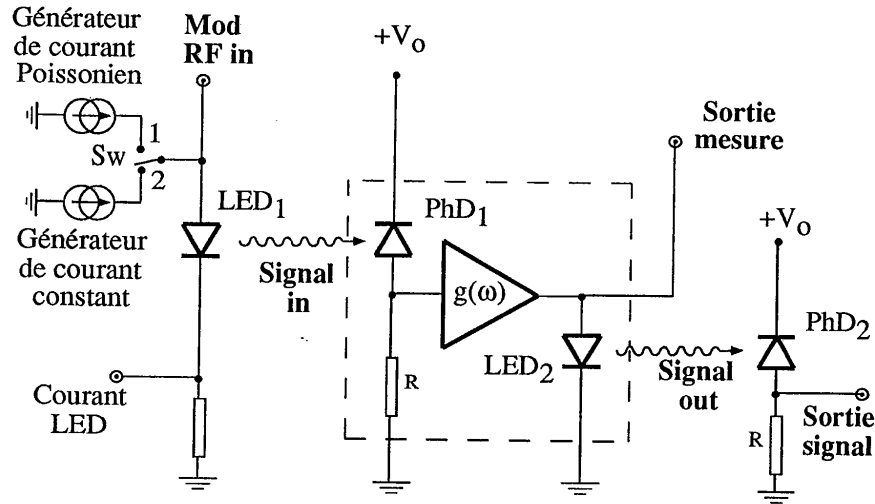


Figure 5.1: Représentation schématique du montage expérimental

on mesure l'intensité est issue de la LED<sub>1</sub>, et la lumière sortante est détectée par la photodiode PhD<sub>2</sub>. L'efficacité quantique de chaque photodiode est  $\eta$ , et le rendement de conversion courant-courant<sup>1</sup> des LED est  $\epsilon$ .

La voie signal se compose donc d'une photodiode (PhD<sub>1</sub>), dont le courant est amplifié avant d'être appliqué à la LED<sub>2</sub> réémettrice. La voie de mesure se compose, quant à elle, de la photodiode PhD<sub>1</sub> et de l'amplificateur. Nous allons maintenant évaluer les performances de ce système en tant que dispositif de mesure QND, en utilisant les critères QND expérimentaux, bruits équivalents [Grangier 92a] ou les coefficients de transfert [Poizat 93], introduits dans le chapitre 2.

Pour le calcul de la dégradation du signal, on peut considérer le dispositif global sur la voie signal comme une chaîne de trois éléments (photodiode - amplificateur - LED), chacun de ces éléments étant caractérisé par son gain et par le bruit qu'il introduit. Il est alors commode de raisonner en terme de bruits équivalents ramenés à l'entrée, en se servant de la propriété, bien connue en électronique, qui dit que chaque maillon de la chaîne contribue au bruit équivalent du système global, en rajoutant un terme égal à son propre bruit équivalent divisé par le gain de la chaîne amplificatrice située à son amont. Une démonstration de cette propriété est présentée dans l'annexe J.

On peut supposer, sans perte de généralité, que le faisceau signal incident est issu d'un dispositif ayant un rendement de conversion électron-photon égal à l'unité. Le courant pilotant cette source est  $i_o = I_o + \delta i_o$ , et on a  $\langle \delta i_o^2 \rangle = 2eI_o B \Delta X_o^2$ ,

<sup>1</sup>Le calcul du rendement de conversion  $\epsilon$  d'une LED se fait en divisant le courant moyen délivré par la photodiode éclairée par la LED, par le courant moyen pilotant la LED. Il inclut donc l'efficacité quantique de la photodiode et les pertes géométriques de collection de la lumière de la LED.

où  $\Delta X_o^2$  vaut 1 pour le bruit de photon. On note  $i_1 = I_1 + \delta i_1$  le courant débité par la photodiode  $PhD_1$  et  $\Delta X_1^2$  son bruit normalisé au bruit de photon  $2eI_1B$ . On a alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \eta I_o \\ \langle \delta i_1^2 \rangle &= \eta^2 \langle \delta i_o^2 \rangle + 2eI_1B(1 - \eta) \\ &= 2eI_1B \left( \eta \frac{\langle \delta i_o^2 \rangle}{2eI_oB} + (1 - \eta) \right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

donc

$$\Delta X_1^2 = \eta \Delta X_o^2 + 1 - \eta. \quad (5.2)$$

Le gain de cette photodiode, considérée comme un amplificateur est  $\eta$ , et son bruit équivalent ramené à l'entrée est

$$N_{PhD}^{eq} = \frac{1 - \eta}{\eta}. \quad (5.3)$$

On note  $g$  le gain alternatif et  $G$  le gain continu de l'amplificateur électronique, c'est-à-dire qu'on a  $\delta i_2 = g\delta i_1$  et  $I_2 = GI_1$ , où  $i_2 = I_2 + \delta i_2$  est le courant de sortie de cet amplificateur. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} I_2 &= GI_1 \\ \langle \delta i_2^2 \rangle &= g^2 \langle \delta i_1^2 \rangle + \beta_{ampli} \\ &= 2eI_2B \left( \frac{g^2 \langle \delta i_1^2 \rangle}{G 2eI_1B} + \frac{\beta_{ampli}}{2eI_2B} \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

et donc

$$\Delta X_2^2 = \frac{g^2}{G} \Delta X_1^2 + \frac{\beta_{ampli}}{2eI_2B} \quad (5.5)$$

où  $\beta_{ampli}$  est le bruit de l'amplificateur électronique. Le gain effectif de cet étage d'amplification est donc  $g_{eff} = g^2/G$  et son bruit équivalent est

$$N_{ampli}^{eq} = \frac{\beta_{ampli}}{2eI_2B g_{eff}}. \quad (5.6)$$

Le dernier élément de la chaîne est la  $LED_2$  de rendement de conversion  $\epsilon$ . On note  $i_3 = I_3 + \delta i_3$  le courant débité par la photodiode  $PhD_2$ . Comme pour une photodiode (cf. eq.5.2), c'est un élément passif avec des pertes, et on a donc,

$$\begin{aligned} I_3 &= \epsilon I_2 \\ \langle \delta i_3^2 \rangle &= \epsilon^2 \langle \delta i_2^2 \rangle + 2eI_3B(1 - \epsilon) \\ &= 2eI_3B \left( \epsilon \frac{\langle \delta i_2^2 \rangle}{2eI_2B} + (1 - \epsilon) \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

et

$$\Delta X_3^2 = \epsilon \Delta X_2^2 + 1 - \epsilon \quad (5.8)$$

Le gain de cet étage est  $\epsilon$  et son bruit équivalent est

$$N_{LED}^{eq} = \frac{1 - \epsilon}{\epsilon}. \quad (5.9)$$

Le bruit équivalent ramené à l'entrée pour l'ensemble de la voie signal s'écrit alors, d'après la propriété énoncée plus haut,

$$N_s^{eq} = N_{PhD}^{eq} + \frac{1}{\eta} N_{ampli}^{eq} + \frac{1}{\eta g_{eff}} N_{LED}^{eq}. \quad (5.10)$$

Expérimentalement, on travaille toujours à des niveaux de bruit qui sont au moins 20dB au dessus du bruit de l'amplificateur, ce qui permet de négliger le terme  $N_{ampli}^{eq}$  dans l'expression (5.10), qui devient alors, en utilisant les équations (5.3) et (5.9),

$$N_s^{eq} = \frac{(1 - \eta)}{\eta} + \frac{1}{\eta g_{eff}} \frac{(1 - \epsilon)}{\epsilon}, \quad (5.11)$$

ce qui donne pour le coefficient de transfert  $T_s$ , pour le cas d'un faisceau incident limité par le bruit de photon,

$$T_s = \eta \frac{1}{1 + \frac{1}{g_{eff}} \frac{(1 - \epsilon)}{\epsilon}}. \quad (5.12)$$

On se rend bien compte, à la vue de ces expressions, du rôle du gain effectif  $g_{eff}$ , qui permet, lorsqu'il est suffisamment élevé, de rendre aussi petite que l'on veut la contribution de la LED<sub>2</sub> au bruit équivalent global. A la limite des grands gains ( $g_{eff} \rightarrow +\infty$ ), la dégradation du signal n'est plus limitée que par la l'efficacité quantique  $\eta$  de la première photodiode PhD<sub>1</sub>.

On peut remarquer que le fait de pouvoir contrôler de façon indépendante le gain continu  $G$ , et le gain alternatif  $g$ , est une liberté autorisée en électronique, qui n'est matériellement pas facile à réaliser en optique, où on a généralement  $g = G$ . Remarquons que dans notre expérience, le codage du signal sur le faisceau entrant se fait au moyen d'une modulation petite devant la valeur du champ moyen, alors que le niveau de bruit de fond est déterminé par la valeur du courant moyen. Par conséquent, à intensité de modulation égale, une diminution de l'intensité du champ moyen conduit à une augmentation du rapport signal sur bruit. On comprend ainsi pourquoi le gain continu  $G$  est au dénominateur de l'expression du gain effectif  $g_{eff} = g^2/G$ , puisque le champ moyen ne fait qu'apporter du bruit. Cependant, cette conclusion un peu déroutante ne tient plus si on considère un codage de l'information digital du type tout ou rien, comme c'est, en fait, le cas dans les télécommunications. En effet, on ne peut plus, dans ce cas, séparer l'intensité du champ moyen de celle de la modulation, et on a alors  $G = g$  par construction.

La voie de mesure se réduit à une simple photodiode (PhD<sub>1</sub>) d'efficacité quantique  $\eta$ . Le bruit équivalent ramené à l'entrée, s'écrit donc (cf. Eq.(5.3))

$$N_m^{eq} = \frac{1 - \eta}{\eta}, \quad (5.13)$$

ce qui conduit à un coefficient de transfert

$$T_m = \frac{1}{1 + \frac{1-\eta}{\eta}} = \eta, \quad (5.14)$$

dans le cas d'un état entrant Poissonnien. La qualité de la mesure ne repose donc que sur la qualité de la photodiode utilisée.

La variance conditionnelle  $V_{s|m}$  s'obtient directement à partir de l'équation (5.8). On a

$$\begin{aligned} V_{s|m} &= \langle \delta i_3^2 \rangle \left( 1 - \frac{|\langle \delta i_2 i_3 \rangle|^2}{\langle i_2^2 \rangle \langle i_3^2 \rangle} \right) \\ V_{s|m} &= 1 - \epsilon. \end{aligned} \quad (5.15)$$

On s'aperçoit donc que  $V_{s|m}$  ne dépend pas du gain électronique  $g_{\text{eff}}$ , et est entièrement déterminée par la contrainte technologique du rendement quantique de la LED<sub>2</sub> réémettrice.

Il faut noter que suivant la position de l'interrupteur Sw, le courant d'alimentation de la LED<sub>1</sub> peut être soit Poissonnien (position 1), soit constant (position 2), ce qui permet d'avoir un faisceau entrant Poissonnien ou sub-Poissonnien. Dans toute la suite, sauf mention explicite, les mesures des coefficients de transfert sont toujours faites sur un état entrant Poissonnien.

### 5.2.2 Cas d'un faisceau incident sub-Poissonnien

La lumière éclairant notre système de mesure étant issue d'une LED, il est également possible de bénéficier d'un faisceau incident sub-Poissonnien, et d'en faire une mesure QND. Le fait que le signal sortant soit sub-Poissonnien n'est en aucun cas une condition garantissant le caractère QND d'un dispositif de mesure. En effet, un système de mesure constitué d'une simple lame séparatrice vérifierait cette propriété puisque le squeezing du signal sortant serait simplement dégradé d'une quantité correspondant à la transmission de cette lame. D'un autre côté, le fait que le système de mesure vérifie les critères QND présentés dans le chapitre 2, n'est pas non plus une garantie suffisante pour avoir un faisceau signal sortant sub-Poissonnien. Pour notre système de mesure, par exemple, il est bien évident qu'avec un gain effectif  $g_{\text{eff}}$  élevé, le bruit du faisceau signal sortant sera largement au-dessus du bruit de photon. Le gain sur la voie signal apparaît donc comme étant un paramètre important, lorsqu'on est intéressé par le degré de squeezing de la sortie du signal, qui n'est pas pris en compte en tant que tel par les trois critères QND habituels.

On note  $V_s^{\text{in}}$  la variance du faisceau incident normalisée au bruit de photon (ou squeezing). Les squeezing  $V_s^{\text{out}}$ , et  $V_m^{\text{out}}$  respectivement sur la sortie du signal et la voie de mesure, s'écrivent alors, d'après la définition des bruits équivalents (cf. Eqs.(2.9)-(2.12)),

$$\begin{aligned} V_s^{\text{out}} &= g_s^2 (V_s^{\text{in}} + N_s^{\text{eq}}) \\ V_m^{\text{out}} &= g_m^2 (V_s^{\text{in}} + N_m^{\text{eq}}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

où  $g_s^2 = \eta \epsilon g_{\text{eff}}$  est le gain sur la voie signal, et  $g_m^2 = \eta$  le gain sur la voie de mesure.<sup>2</sup> Le bruit du signal en sortie dépend donc directement du gain  $g_s$ , et donc de  $g_{\text{eff}}$ . Dans le cas d'un faisceau incident parfaitement sub-Poissonien, *i.e.*  $V_s^{\text{in}} = 0$ , la condition pour que le faisceau signal sortant soit encore sub-Poissonien est  $g_s^2 N_s^{\text{eq}} < 1$ . On peut remarquer que dans le cas de système purement passifs, c'est-à-dire n'ayant que des pertes, comme une photodiode, une LED, ou une lame séparatrice, le gain  $g^2 \leq 1$  est relié de façon biunivoque au bruit équivalent par  $N_s^{\text{eq}} = (1 - g^2)/g^2$ . Mais, dans le cas général, il n'y a pas de relation entre ces deux quantités qui sont alors deux paramètres indépendants, dont seul le bruit équivalent est considéré comme un critère QND [Grangier 92a].

Connaissant la valeur des gains par la mesure du transfert d'une modulation classique, et la variance du signal entrant, il est alors possible, d'après les équations (5.16), de déduire les bruits équivalents par une mesure des taux de squeezing  $V_s^{\text{out}}$  et  $V_m^{\text{out}}$  en sortie.

## 5.3 Résultats expérimentaux

### 5.3.1 Description du montage expérimental

#### Choix des composants

Le schéma de principe du montage expérimental a été donné dans la figure 5.1 de la section précédente. Le choix de la LED et de la photodiode a été guidé par la maximisation du transfert du courant de la LED vers le courant de la photodiode. On a donc cherché à avoir une LED et une photodiode ayant des rendements quantiques<sup>3</sup> élevés à la même longueur d'onde. Il a aussi fallu tenir compte de facteurs géométriques, afin que la plus grande partie du cône de lumière émis par la LED soit capté par la photodiode, placée le plus près possible. Il faut donc pour ceci, une LED relativement directive, et surtout une photodiode ayant une grande surface sensible. Un troisième critère de choix réside dans les propriétés électroniques de ces composants, et en particulier de leur bande passante, qui doit être la plus étendue possible. D'autres critères plus matériels, comme l'encombrement spatial afin de rentrer dans le cryostat, ou la résistance mécanique à la température de l'azote liquide<sup>4</sup> ont également été à prendre en considération. Notre choix s'est finalement porté sur le modèle Hamamatsu L2656 pour les LED, et le modèle EG&G C30809E pour les photodiodes.

Nous avons estimé l'efficacité quantique de la photodiode à  $\eta = 0.9 \pm 0.05$  par comparaison avec un mesureur de puissance calibré. La mesure de l'efficacité  $\epsilon$  des LED se fait en mesurant le taux de conversion entre le courant pilotant la LED et le courant débité par la photodiode précédente en réduisant au minimum la distance

<sup>2</sup>Les gains  $g_s$  et  $g_m$  sont pour les amplitudes.

<sup>3</sup>Pour une LED, on veut une grande puissance lumineuse émise pour un courant donné, et pour une photodiode, un fort courant débité pour une puissance lumineuse incidente donnée.

<sup>4</sup>Les variations brutales de courant dans les photodiodes refroidies à T=80K peuvent réduire en miettes la plaque de silicium, à cause de la différence de dilatation thermique entre le boîtier et le silicium.



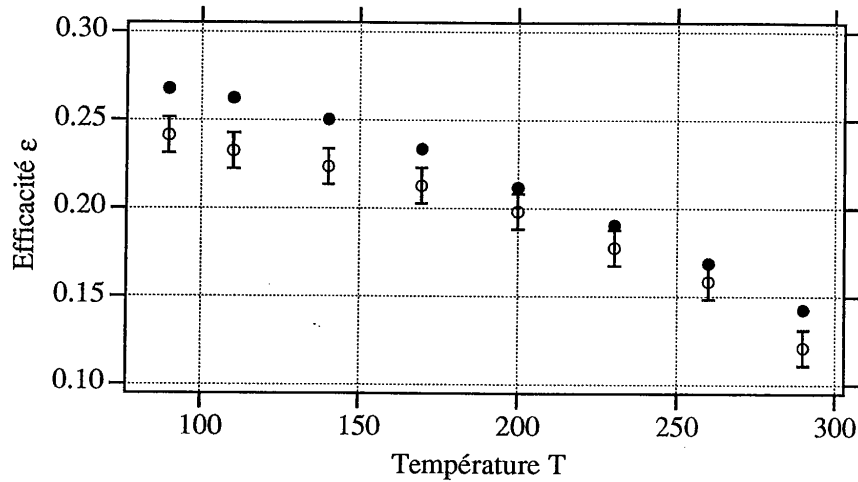


Figure 5.2: Efficacité  $\epsilon$  en fonction de la température en K. Les ronds noirs représentent le rendement continu, calculé en faisant le rapport des courants moyens mesurés. Les ronds blancs représentent le rendement calculé d'après le squeezing mesuré ( $1 - \epsilon$ ) à 200kHz.

entre les deux composants. L'efficacité  $\eta$  de la photodiode est donc incluse dans le taux de conversion  $\epsilon$ . A température ambiante, on trouve  $\epsilon = 0.16$ , et à basse température ( $T=100\text{K}$ ), on trouve  $\epsilon = 0.28$ . Cette amélioration du rendement de conversion à basse température est due à la diminution des pertes par recombinaisons non-radiatives avec des phonons optiques, dont la densité dépend fortement de la température [Tapster 87]. On a représenté sur la figure 5.2 la dépendance en température du taux de conversion  $\epsilon$ . On s'aperçoit sur cette figure d'une différence entre le taux de conversion continu, calculé en faisant le rapport des courants moyens, et le le taux de conversion à 200 kHz, déduit du taux de squeezing mesuré à cette fréquence. Cette différence peut être attribuée en partie à un filtrage du bruit à 200 kHz par les éléments de filtrage de la voie d'alimentation DC de la LED (cf. figure 5.1). Mais ceci n'explique pas complètement cet écart. On a également représenté sur la figure 5.3 l'évolution de  $\epsilon$  en fonction du courant pilotant la LED.

L'amplificateur électronique intermédiaire est l'amplificateur à bas niveau de bruit utilisé dans toutes les expériences décrites dans ce mémoire, c'est-à-dire le modèle EOI AH0013 (cf. annexe H).

### Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est composé de deux paires LED-photodiode, plongées dans un cryostat à azote liquide. Chacune de ces paires est placée dans un boîtier cylindrique en turcrite,<sup>5</sup> de taille adaptée au volume réduit du cryostat. La température du cryostat est asservie à 100K, et oscille entre 99 et 101K.

<sup>5</sup>Matière plastique, isolant électrique ayant une bonne résistance mécanique.

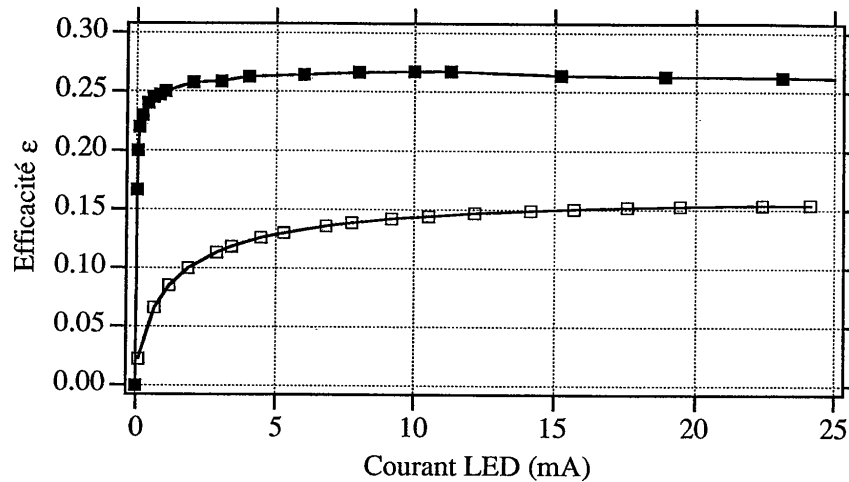


Figure 5.3: Rendement de conversion courant-courant  $\epsilon$  en fonction du courant dans la LED. Les carrés noirs ont été relevés à  $T=100\text{K}$ , et les carrés blancs à  $T=290\text{K}$ . Les courants de travail sont situés entre 20 et 25 mA.

Le schéma électronique de l'alimentation des LED est représenté sur la figure 5.4. En ce qui concerne l'alimentation de la LED proprement dite, la principale difficulté est de s'assurer que ce qui doit être filtré le soit, et que ce qui ne le doit pas l'être ne le soit pas. La résistance de charge  $R_c$  doit être choisie suffisamment élevée pour que son bruit thermique propre en tension ( $\propto \sqrt{R_c}$ ) soit négligeable ( $-20\text{dB}$ ) par rapport au bruit sur la tension à ces bornes correspondant au bruit de photon du courant circulant dans la LED ( $\propto R_c$ ). Ce point est expliqué plus en détail dans l'annexe H. Le câblage de l'amplificateur se fait, d'après les instructions du constructeur en calculant les valeurs des composants pour obtenir la bande passante, et le gain désiré. La coupure haute de l'ensemble du montage ( $\sim 400\text{kHz}$ ) est imposée par le temps de réponse fini de la LED, tandis que la coupure basse ( $\sim 100\text{kHz}$ ) dépend des paramètres de l'amplificateur.

Les amplificateurs bas bruit suivant chaque photodiode ressemblent fortement à ceux utilisés pour les LED. Leur schéma électronique détaillé est présenté dans l'annexe H. Comme pour les montages amplificateurs des circuits LED, les résistances de charge  $R_c$  aux bornes desquelles chaque amplificateur mesure la tension d'entrée sont prises suffisamment élevées pour que le bruit électronique des photodiodes soit au moins  $20\text{dB}$  en-dessous du niveau du bruit de photon des courants utilisés (*cf.* annexe H).

#### Calibration du bruit de photon

Une référence de bruit de photon est obtenue en éclairant la photodiode par de la lumière issue d'une LED alimentée par un courant Poissonien. Ce courant

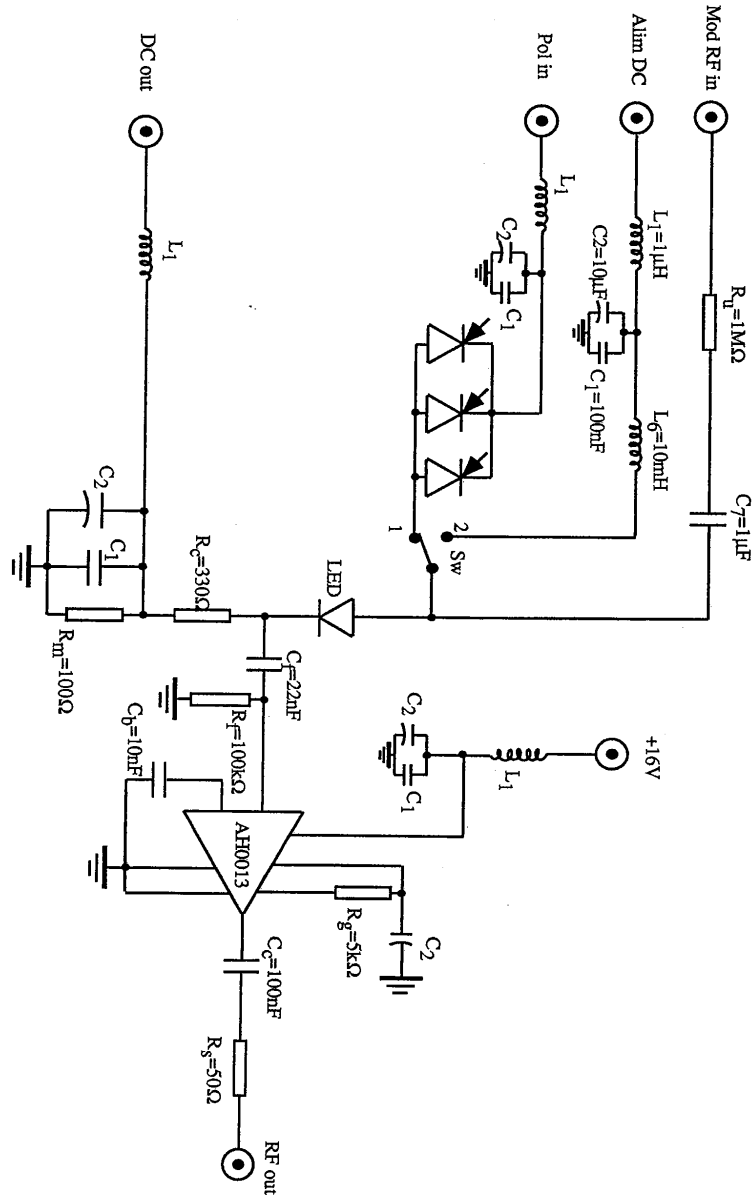


Figure 5.4: Schéma électronique du circuit d'alimentation d'une LED et de l'amplificateur bas bruit permettant de mesurer les fluctuations du courant la pilotant.

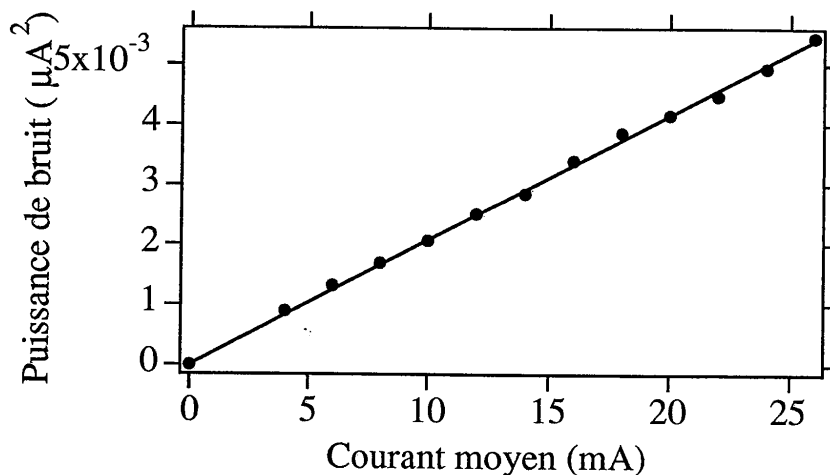


Figure 5.5: Puissance de bruit du courant à 350kHz généré par deux photodiodes en parallèles en fonction de son courant moyen. Le bruit est corrigé du bruit électronique, la largeur de bande d'analyse est de 10kHz.

est fourni par trois photodiodes connectées en parallèles et éclairées par des lampes blanches à halogène (*cf.* figure 5.5). Des caches, disposés sur chacune des trois photodiodes, permettent d'éviter que l'anneau de garde de chacune de ces photodiodes ne soit éclairé. La capacité plus importante de l'anneau de garde conduirait à un filtrage du bruit aux fréquences de travail, et donc à une saturation effective. L'utilisation de cette batterie de trois photodiodes s'est avérée nécessaire, pour disposer d'un courant d'intensité suffisamment élevée, tout en maintenant chaque photodiode en dessous de son seuil de saturation (10 mA par photodiode).

D'autre part, on a vérifié que le niveau de bruit ainsi obtenu correspondait bien au bruit du courant de la même photodiode éclairée directement par une lampe blanche, à courant moyen identique.

### 5.3.2 Résultats

#### Squeezing et corrélations

Avant de faire fonctionner les deux paires LED-photodiode en même temps, une première étape consiste à vérifier les propriétés de réduction de bruit d'un seul ensemble, pour retrouver les résultats des références [Edwards 92][Bachor 92][Goobar 93].

On a représenté sur la figure 5.6 les spectres de squeezing et de corrélations à température ambiante, et à  $T=100\text{K}$ . Les courbes de squeezing et leur référence de bruit de photon sont observées simplement en commutant l'interrupteur Sw qui permet de choisir entre un courant d'alimentation de la LED Poissonien ou constant. Le courant constant (au moins 20dB en dessous du bruit de photon) est obtenu par filtrage d'une alimentation stabilisée ordinaire, avec des bobines

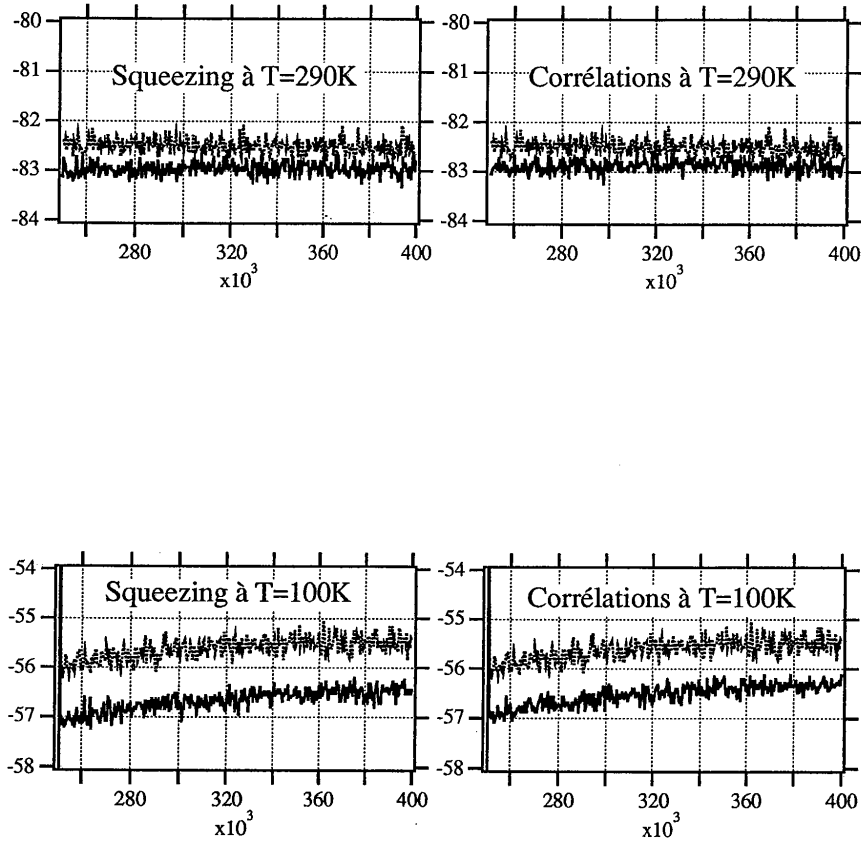


Figure 5.6: Spectres de squeezing et de corrélation à température ambiante, et à  $T=100\text{K}$ . Sur toutes ces figures, l'ordonnée est la puissance de bruit en dB, l'abscisse la fréquence en Hz; la courbe du haut, en pointillés, est le niveau du bruit de photon. La différence de niveau entre les courbes à  $T = 100\text{ K}$  et  $T = 290\text{ K}$  est simplement due à l'utilisation non nécessaire d'un amplificateur pour les spectres à  $T = 100\text{ K}$ . A température ambiante, on a  $I_{LED} = 20.3\text{ mA}$  et  $I_{PhD} = 3.0\text{ mA}$ , ce qui donne un rendement de conversion continu  $\epsilon = 0.15$ , et on observe une réduction du bruit, par rapport au bruit de photon, de  $0.7\text{dB}$ . A  $T=100\text{K}$ , on a  $I_{LED} = 19.6\text{ mA}$  et  $I_{PhD} = 5.64\text{ mA}$ , i.e.  $\epsilon = 0.29$ , et on observe une réduction du bruit de  $1.2\text{dB}$ .

et des condensateurs. A température ambiante, la valeur attendue de la variance normalisée au bruit de photon est de  $1 - \epsilon = 0.85$ , pour une valeur observée de  $0.89 \pm 0.02$ , et à  $T=100\text{K}$ , la valeur attendue est de  $1 - \epsilon = 0.71$ , alors que la valeur observée est de  $0.76 \pm 0.02$ . Les résultats expérimentaux sont donc un petit peu en-deça des prévisions théoriques se basant sur le taux de conversion  $\epsilon$  en continu, pour des raisons que nous ne sommes pas arrivés à expliquer complètement, comme nous l'avons déjà vu sur la figure 5.2.

Les spectres de corrélation sont obtenus en alimentant la LED par un courant  $i_{LED}$  Poissonnien, puis en corrigeant le courant  $i_{PhD}$  issu de la photodiode par ce courant  $i_{LED}$ , qu'on prélève aux bornes d'une résistance en série avec la LED (sortie *courant LED* sur la figure 5.1). Les courants  $i_{LED}$  et  $i_{PhD}$  sont amplifiés, puis combinés avec un "power combiner" 0-180°. Sans correction, le courant  $i_{PhD}$  est au bruit de photon. En ajustant d'abord les phases relatives des deux courants, puis le gain de la correction au moyen d'un atténuateur variable (*cf.* annexe B), on arrive alors à diminuer le bruit du courant  $i_{PhD}$  en-dessous du bruit de photon, jusqu'au niveau que l'on aurait en alimentant directement la LED par un courant constant. Ce niveau, de variance  $1 - \epsilon$ , traduit, en fait, le degré de corrélation quantique entre le courant  $i_{LED}$  et le courant  $i_{PhD}$ , et sera également la valeur optimale de la variance conditionnelle.

### Coefficients de transfert

La mesure des coefficients de transfert d'un rapport signal sur bruit du faisceau incident vers la sortie du signal et la voie de mesure, se fait en imposant une petite modulation sur l'intensité du faisceau incident. On estime ensuite les coefficients de transfert sur les deux voies de sortie, en évaluant la fidélité avec laquelle ce signal est reproduit sur la voie de mesure, et transmis sur la voie de sortie du spectre. Pour toutes les mesures de cette section, le bruit du signal sera un bruit de photon Poissonnien (interrupteur Sw en position 1), et on utilisera les coefficients de transfert.

Expérimentalement, une façon simple de moduler le faisceau signal est d'ajouter une petite modulation RF au courant pilotant la LED<sub>1</sub>, par l'entrée *Mod RF in*. Cette modulation se retrouve alors sur l'intensité du faisceau signal entrant, et le rapport signal sur bruit incident est déduit de la valeur lue sur la voie de mesure, qui n'est autre qu'une photodiode d'efficacité  $\eta$ , comme on le fait habituellement avec des photodétecteurs non-idéaux, c'est-à-dire dire en utilisant l'équation (5.13) ou  $T_m = \eta = 0.90 \pm 0.05$ . La qualité de la transmission du rapport signal-sur-bruit entrant sur le signal sortant dépend donc, comme nous l'avons montré dans la partie précédente (Eq.(5.12)), du gain avec lequel on amplifie le courant intermédiaire avant la LED<sub>2</sub> réémettrice. L'expression du gain effectif  $g_{\text{eff}} = g^2/G$  fait intervenir le gain alternatif  $g$  et le gain continu  $G$  (*cf.* Eq. (5.5)). Le gain alternatif  $g$  est celui de l'amplificateur AC intermédiaire ( $g \approx 20$ ), tandis que le gain continu  $G$  est en fait le rapport entre le courant moyen pilotant la LED<sub>2</sub>, qui est arbitrairement fixé par une alimentation indépendante, et le courant moyen délivré par la photodiode PhD<sub>1</sub>. Avec un gain effectif  $g_{\text{eff}}$  de l'ordre de 100, on ne voit pas de différence

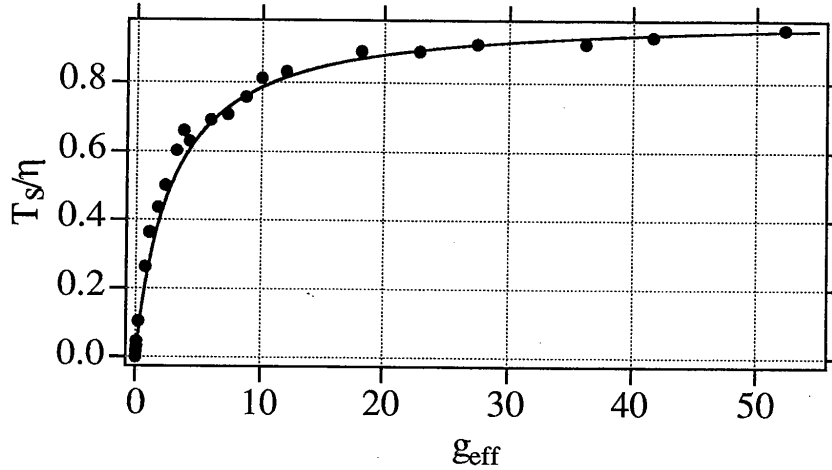


Figure 5.7: Variation du coefficient de transmission du signal  $T_s/\eta$ , en fonction du gain effectif  $g_{\text{eff}}$ . Les points expérimentaux sont comparés à la prévision théorique donnée par l'équation (5.12).

entre le rapport signal sur bruit de la voie de mesure de celui du signal sortant, à la précision (de l'ordre de 3%) de nos mesures, ce qui conduit à une valeur du coefficient de transfert  $T_s = T_m = 0.90 \pm 0.05$ . On obtient donc pour la somme de ces deux coefficients,

$$T_s + T_m = 1.80 \pm 0.10 . \quad (5.17)$$

On rappelle qu'une somme de ces deux coefficients égale à 1 correspond à une lame séparatrice ordinaire, tandis qu'un duplicateur quantique parfait donnerait une valeur maximum de 2.

On a, de plus, la possibilité de faire varier le gain alternatif  $g$  et donc la valeur de  $g_{\text{eff}}$ , en plaçant un pont diviseur de tension avec une résistance variable entre l'amplificateur intermédiaire et la LED<sub>2</sub>. On a alors accès, de façon continue, à toutes les valeurs de  $g_{\text{eff}}$  comprise entre 0 et 100. On a représenté sur la figure 5.7 l'évolution du transfert  $T_s$  sur la voie signal en fonction du gain effectif  $g_{\text{eff}}$ . L'accord avec la courbe théorique est bon, si on prend en compte les incertitudes expérimentales.

### Variance conditionnelle

L'évaluation de la variance conditionnelle se fait en mesurant la réduction de bruit, par rapport au bruit de photon, que l'on peut obtenir sur le courant de la photodiode PhD<sub>2</sub> détectant la sortie du signal, en le corrigeant avec le courant issu de la voie de mesure, comme nous l'avons fait pour les mesures de corrélation dans la section 5.3.2. Il apparaît cependant une difficulté supplémentaire par rapport aux

simples corrélations, car le niveau de bruit du signal sortant est très au-dessus du bruit de photon, lorsque le gain effectif  $g_{\text{eff}}$  est très supérieur à un. Pour  $g_{\text{eff}} = 100$ , le bruit du signal sortant est  $10 \log(g_{\text{eff}}) = 20\text{dB}$  au-dessus du bruit de photon. Il est alors indispensable que le taux de réjection en mode commun de la soustraction soit meilleur que 20dB. Il faut donc, d'une part, équilibrer très précisément les niveaux relatifs de bruit des deux courants à soustraire, à l'aide d'atténuateurs RF variables, et, d'autre part, veiller à ce qu'ils soient bien en phase à la fréquence d'analyse, en ajustant leur phase relative avec une ligne à retard variable. Les résultats sont représentés sur la figure 5.8. La correction apportée par le courant de mesure sur le courant de photodétection du signal sortant permet de diminuer le bruit de ce dernier 1.2dB en-dessous de son bruit de photon. Cela conduit à une variance conditionnelle expérimentale de

$$W = 0.76 \pm 0.02, \quad (5.18)$$

alors que la valeur théorique  $W_{\text{théo}} = 1 - \epsilon$  est de 0.72. Ce petit désaccord est du même type que celui mentionné pour le taux expérimental de squeezing (cf. section 5.3.2), puisque, comme on peut le voir sur la figure 5.8, le niveau de réduction de la variance conditionnelle rejoint le niveau de squeezing obtenu en pilotant la diode LED<sub>2</sub> avec un courant constant, qui est le niveau de corrélation quantique optimale.

Remarquons que le niveau du bruit de photon du signal sortant est pris en alimentant directement la LED<sub>2</sub> réémettrice par le générateur de courant Poissonnien.

### Mesure QND d'un faisceau sub-Poissonnien

Comme nous l'avons annoncé dans la section 5.2.2, il nous est possible, en pilotant la LED<sub>1</sub> avec un courant constant, d'obtenir de la lumière sub-Poissonnienne à l'entrée du système de mesure. Les conditions expérimentales donnant les critères QND les plus favorables sont obtenues, comme nous l'avons vu précédemment, avec un gain effectif sur la voie signal  $g_{\text{eff}}$  le plus élevé possible. Or, d'après la section 5.2.2, le caractère sub-Poissonnien du faisceau de sortie est d'autant meilleur que ce même gain  $g_{\text{eff}}$  est petit. D'où un compromis à trouver pour effectivement réaliser une mesure QND d'un faisceau sub-Poissonnien, tout en conservant une partie de ce squeezing sur le signal sortant. On s'aperçoit, d'après les équations (5.12) et (5.16), qu'un bon compromis est trouvé pour des valeurs de  $g_{\text{eff}}$  voisines de l'unité, ce qui correspond à la situation dans laquelle la LED<sub>2</sub> serait simplement branchée en série avec la photodiode PhD<sub>1</sub> de mesure. On rappelle que, pour  $g_{\text{eff}} = 1$  on a alors les critères QND théoriques suivants :  $W = 1 - \epsilon = 0.72$ ,  $N_s^{eq} = 3.0$  d'après l'équation (5.11), et  $N_m^{eq} = 0.1$ , si bien que  $N_s^{eq} N_m^{eq} = 0.3$  (seul  $N_s^{eq}$  dépend de  $g_{\text{eff}}$ ). On emploie ici de préférence les bruits équivalents, qui, contrairement aux coefficients de transfert, ne dépendent pas de l'état du faisceau incident (cf. Eq.(2.15)).

Les résultats expérimentaux sont récapitulés sur la figure 5.9. Pour un bruit du faisceau entrant 1.2dB en-dessous du bruit de photon, le faisceau sortant est encore 0.25dB au-dessous du bruit de photon. La variance conditionnelle mesurée n'est que de  $0.79 \pm 0.02$ , ce qui est attribué à un ajustement imparfait des phases relatives, puisqu'elle devrait être de  $0.76 \pm 0.02$  comme précédemment. Par ailleurs, comme



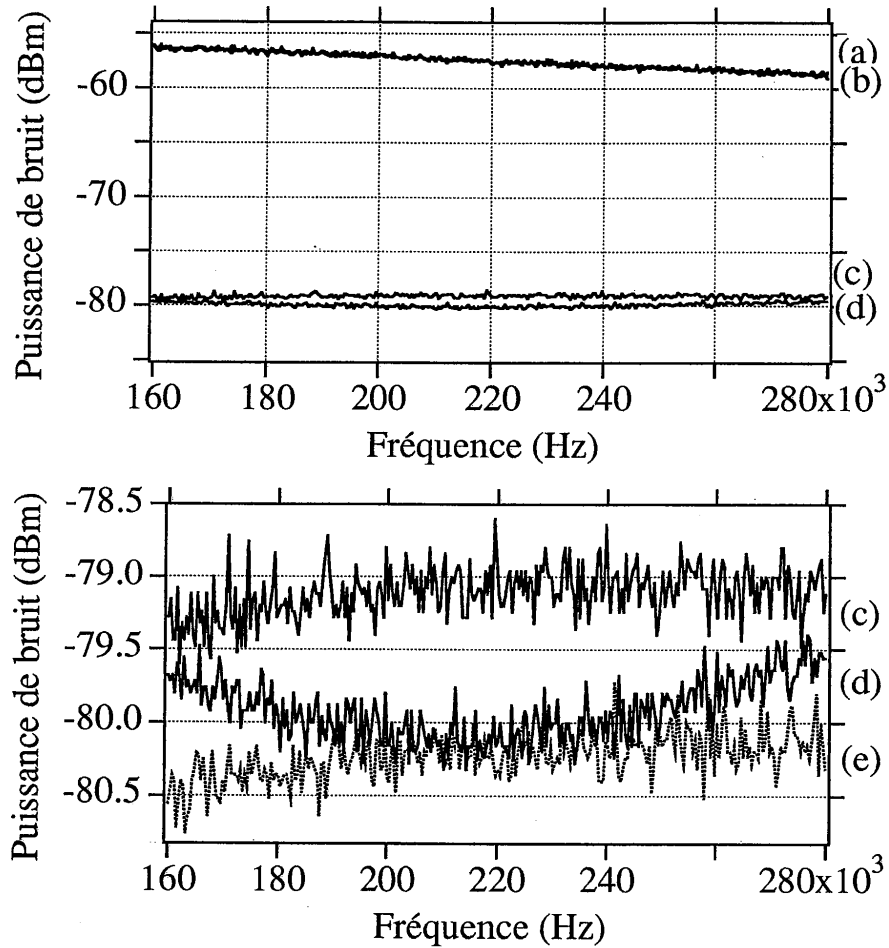


Figure 5.8: Détermination de la variance conditionnelle. Sur le diagramme du haut, on a représenté le niveau des deux bruits que l'on soustrait, à savoir la sortie du signal (courbe (a)), et le courant de mesure (b) après ajustement de son niveau, qui sont 20dB au-dessus du niveau du bruit de photon de la sortie du signal. Celui-ci est représenté par la courbe (c), avec la réduction de 1.2dB (courbe (d)) obtenue après soustraction de (a) et (b). Le diagramme du bas est un grossissement autour du niveau du bruit de photon. La courbe (e) est le spectre de squeezing obtenu en pilotant la LED<sub>2</sub> avec un courant constant.

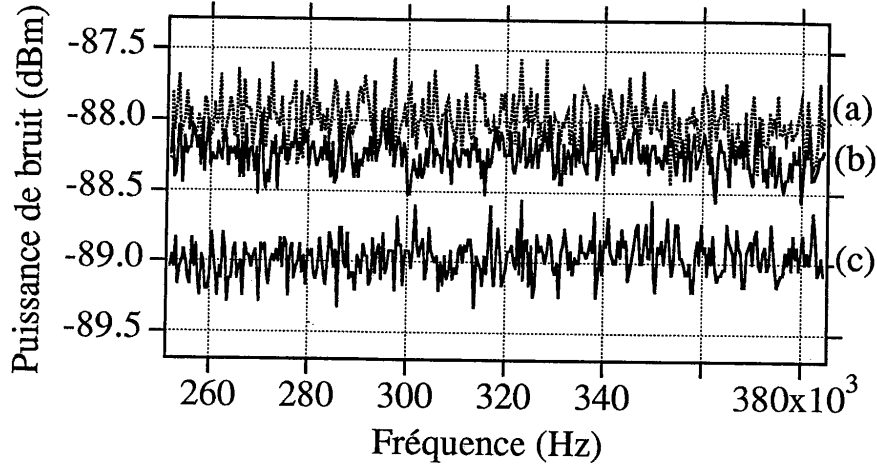


Figure 5.9: Mesure QND d'un état sub-Poissonien. La courbe (a) est le bruit de photon du signal sortant. (b) est le spectre de bruit du faisceau signal sortant, qui est 0.25dB en-dessous de (a) ( $V_s^{out} = 0.94$ ), pour une réduction de bruit sur la voie de mesure de 1.2dB par rapport au bruit de photon, conduisant à un squeezing entrant de  $V_s^{in} = 0.73$ . La courbe (c) est la variance conditionnelle qui est 1dB en-dessous du bruit de photon.

on peut le voir sur la figure 5.10, le coefficient de transfert pour le signal mesuré par la méthode habituelle est  $T_s = 0.23 \pm 0.01$  pour un faisceau incident au bruit de photon, ce qui conduit à un bruit équivalent ramené à l'entrée pour la voie signal de  $N_s^{eq} = 3.4$ . Ces valeurs sont cohérentes avec les autres résultats expérimentaux faisant intervenir les corrélations quantiques entre le courant pilotant la LED<sub>2</sub> et celui débité par la photodiode PhD<sub>2</sub>, c'est-à-dire dire le squeezing et la variance conditionnelle (la valeur mesurée de  $0.76 \pm 0.02$ ). Enfin, on obtient à partir des valeurs expérimentales de  $V_s^{in}$  et  $V_s^{out}$ , en utilisant la formule (5.16) avec  $g_s^2 = \eta\epsilon = 0.23$ , la valeur du bruit équivalent sur la voie signal  $N_s^{eq} = V_s^{out}/g_s^2 - V_s^{in} = 3.4$ , qui redonne la valeur trouvée par mesure du coefficient de transfert.

## 5.4 Conclusion

Nous avons démontré, dans cette expérience, la possibilité de réaliser des systèmes de mesure optique satisfaisant aux critères QND, à l'aide de photodétecteurs et de photoémetteurs à semiconducteur. On transforme, par l'intermédiaire d'une photodiode, la lumière en un courant électrique, qu'on mesure, qu'on amplifie éventuellement avant de le reconvertir en lumière, en utilisant une diode électroluminescente. L'amplification électronique intermédiaire rend le système relativement insensible à l'imperfection de la LED réémittrice, ainsi qu'aux pertes en aval, en ce qui concerne la fidélité de la transmission du signal. Mais le rendement de conversion non-idéal du photo-réémetteur reste une limitation incontournable pour

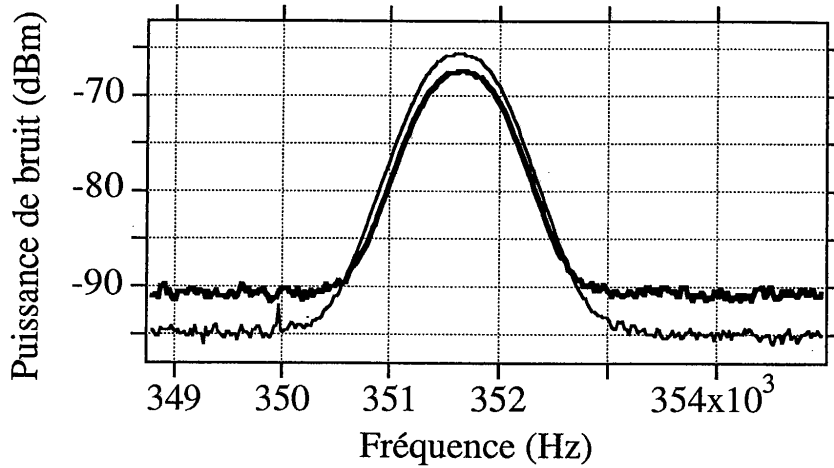


Figure 5.10: Mesure du coefficient de transfert, pour des conditions analogues à celles de la figure 5.9, c'est-à-dire avec  $g_{\text{eff}} = 1$ , effectué avec un bruit du signal entrant Poissonnien. La courbe en trait fin est le rapport signal sur bruit vue sur la voie de mesure, et la courbe en trait épais est ce même rapport vu sur la sortie du signal (photodiode  $\text{PhD}_2$ ). On trouve  $T_s/\eta = 0.25$ , d'où  $T_s = 0.23 \pm 0.01$ .

l'efficacité du dispositif de mesure en tant que préparateur d'état quantique.

Nous avons également eu la possibilité d'envoyer de la lumière sub-Poissonnienne dans notre dispositif de mesure. Le gain sur la voie signal joue alors un rôle essentiel pour la conservation du squeezing entrant sur le faisceau signal sortant, et apparaît ainsi comme une caractérisation supplémentaire des performances d'un système de mesure, non pris en compte par les trois critères habituels du chapitre 2.

Mais la limitation principale de l'efficacité de ce type de système de mesure reste le faible rendement de conversion  $\epsilon$  du composant réémetteur. Ce rendement fixe de façon directe la variance conditionnelle ( $V_{s|m} = 1 - \epsilon$ ), et impose l'utilisation d'un gain intermédiaire pour relativiser l'importance du bruit du vide, et obtenir ainsi une bonne transmission sur la voie signal. Mais il est clair que si on veut à la fois un gain unité sur la voie signal, et une transmission parfaite (à l'efficacité quantique  $\eta$  de la photodiode près), il faut  $\epsilon = 1$ , et c'est aussi la condition pour avoir une variance conditionnelle nulle. Une autre limitation pour l'application pratique de tels dispositifs est le caractère multimode, à la fois spatial et temporel, de la lumière émise par les LED. En effet, le transport de la lumière sur des longues distances, qui se fait principalement par fibre optique, nécessite une bonne définition des modes spatiaux, ceci afin d'éliminer les pertes sur les coupleurs aux extrémités de la fibre. La multiplicité des modes temporels peut poser des problèmes dans les fibres à cause des phénomènes de dispersion. Une deuxième limitation pratique, spécifique aux LED, est leur bande passante limitée ( $< 1$  MHz).

Le problème de l'amélioration du rendement quantique des composants à semi-conducteur émetteurs de lumière fait actuellement l'objet d'importants efforts de recherche. Le groupe de Y. Yamamoto au NTT a réalisé des diodes lasers à très faible seuil, pour lesquelles le facteur d'émission spontanée<sup>6</sup>  $\beta$  vaut 0.01 [Matinaga 93]. On peut également mentionner les 8.3 dB de squeezing obtenus par Richardson *et al* au NTT [Richardson 91] en utilisant une diode laser de courant de seuil 0.45 mA. Le groupe de E. Yablonovitch vient de réaliser des LED, pour l'instant pompées optiquement, avec des rendements de conversion supérieurs à 95% [Schnitzer 93]. On peut également évoquer la recherche de matériaux ayant une structure géométrique telle que certains modes de propagation de la lumière sont interdits ("photonic band gap") [Yablonovitch 87][Yablonovitch 91a] [Yablonovitch 91b], comme le sont certains modes de propagation des électrons dans les cristaux semi-conducteurs (bandes de conduction). L'émission spontanée dans ces modes est alors rigoureusement interdite, et la lumière émise peut être ainsi concentrée dans un seul mode satisfaisant aux conditions de propagation. En fait, tous ces objectifs se rejoignent, puisque une diode laser sans seuil ne paraît pas être fondamentalement différente d'une LED monomode, et la perspective de l'utilisation effective de tels systèmes dans des réseaux de télécommunication à très bas niveau de bruit ne semble pas hors de portée de la technologie des prochaines années.

---

<sup>6</sup> $\beta$  est le rapport entre le taux d'émission spontanée dans le mode laser par le taux d'émission spontanée totale. Pour un laser conventionnel on a  $\beta = 10^{-5}$ .



## Conclusion

Nous avons, dans ce mémoire, décrit deux expériences dans lesquelles toutes les caractéristiques d'un dispositif de mesure QND ont été clairement mises en évidence. Les trois critères QND ont été évalués de façon quantitative, et se sont révélés être dans le domaine non-classique, et un quatrième critère, prenant en compte le gain sur la voie signal a été proposé.

La première expérience utilise une non-linéarité à deux photons de type Kerr croisé dans un jet d'atomes de sodium. Nous avons commencé par faire une analyse théorique détaillée des effets de bruit quantique dans un système atomique à trois niveaux, en présentant deux méthodes différentes, dont nous avons montré l'équivalence. Les résultats de cette expérience ont été confrontés aux prévisions théoriques, en se basant sur un ajustage "classique" des paramètres au moyen d'un programme calculant l'état stationnaire du système, pour une intensité donnée des champs incidents. L'accord est satisfaisant, mis à part un écart que nous ne sommes pas arrivés à expliquer, pour la variance conditionnelle.

Nous avons démontré, dans la deuxième expérience, la faisabilité d'un dispositif de mesure performant, vérifiant l'ensemble des critères QND, utilisant des matériaux semi-conducteurs. Les récents progrès, concernant le rendement quantique des LED et des diodes laser, laissent présager des applications possibles de ce type de dispositif dans le domaine des télécommunications, et devraient également permettre aux mesures QND de combler leur retard, en matière d'efficacité, par rapport aux 10 dB de réduction de bruit du squeezing.

La voie atomique peut, cependant, encore prétendre à d'importantes améliorations, en bénéficiant des récentes techniques de piègeage et de refroidissement des atomes par laser. En disposant de sources atomiques pour lesquelles l'effet Doppler est pratiquement supprimé, il est alors possible d'ajuster les désaccords atomes-lasers avec une bien meilleure précision. De plus, le contrôle quasi parfait des degrés de liberté externes des atomes leur permet d'être sensibles à l'impulsion transportée par la lumière, et même à celle de photons individuels [Holland 91]. Ceci nécessite alors des champs par photon extrêmement élevés, obtenus dans des supercavités de très grande finesse.

Enfin, on peut résumer les résultats expérimentaux obtenus dans cette thèse, en les disposant sur un diagramme de "performances QND" (figure 5.11), sur lequel nous avons également placé les autres réalisations publiées de mesure QND. D'autres expériences [Bachor 88][Levenson 91][Friberg 92], situées dans le domaine classique, n'ont pas été représentées sur ce diagramme.

On peut remarquer que les expériences représentées par les points (e) et (g)

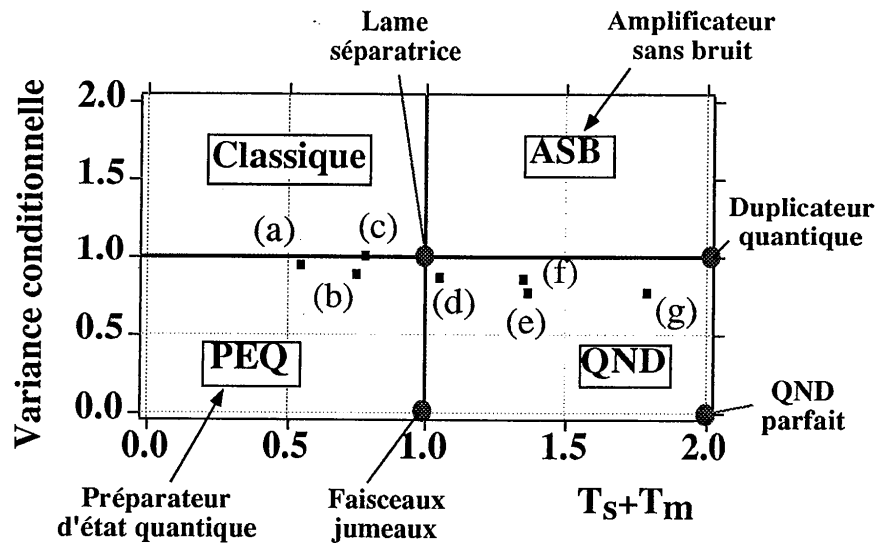
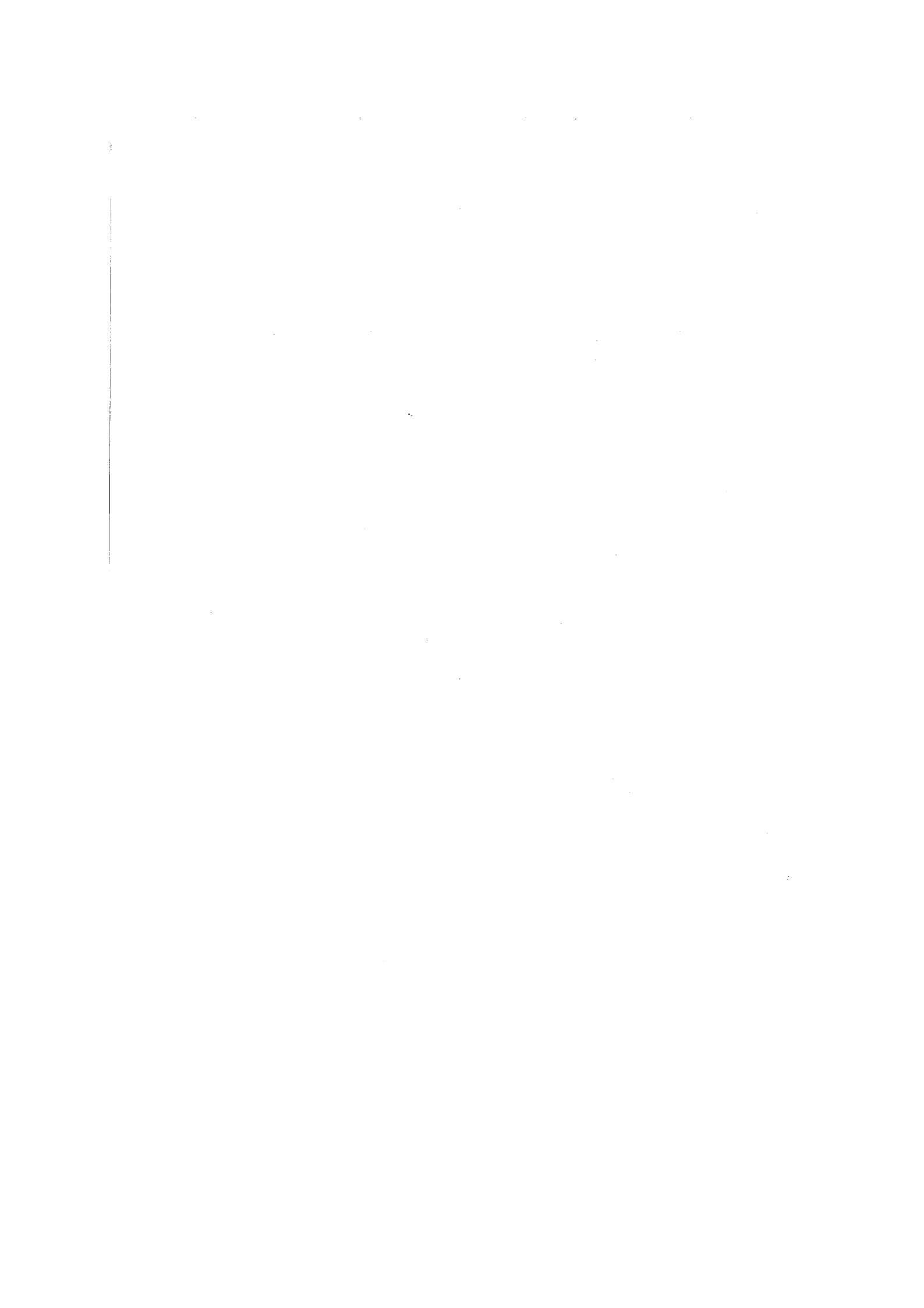


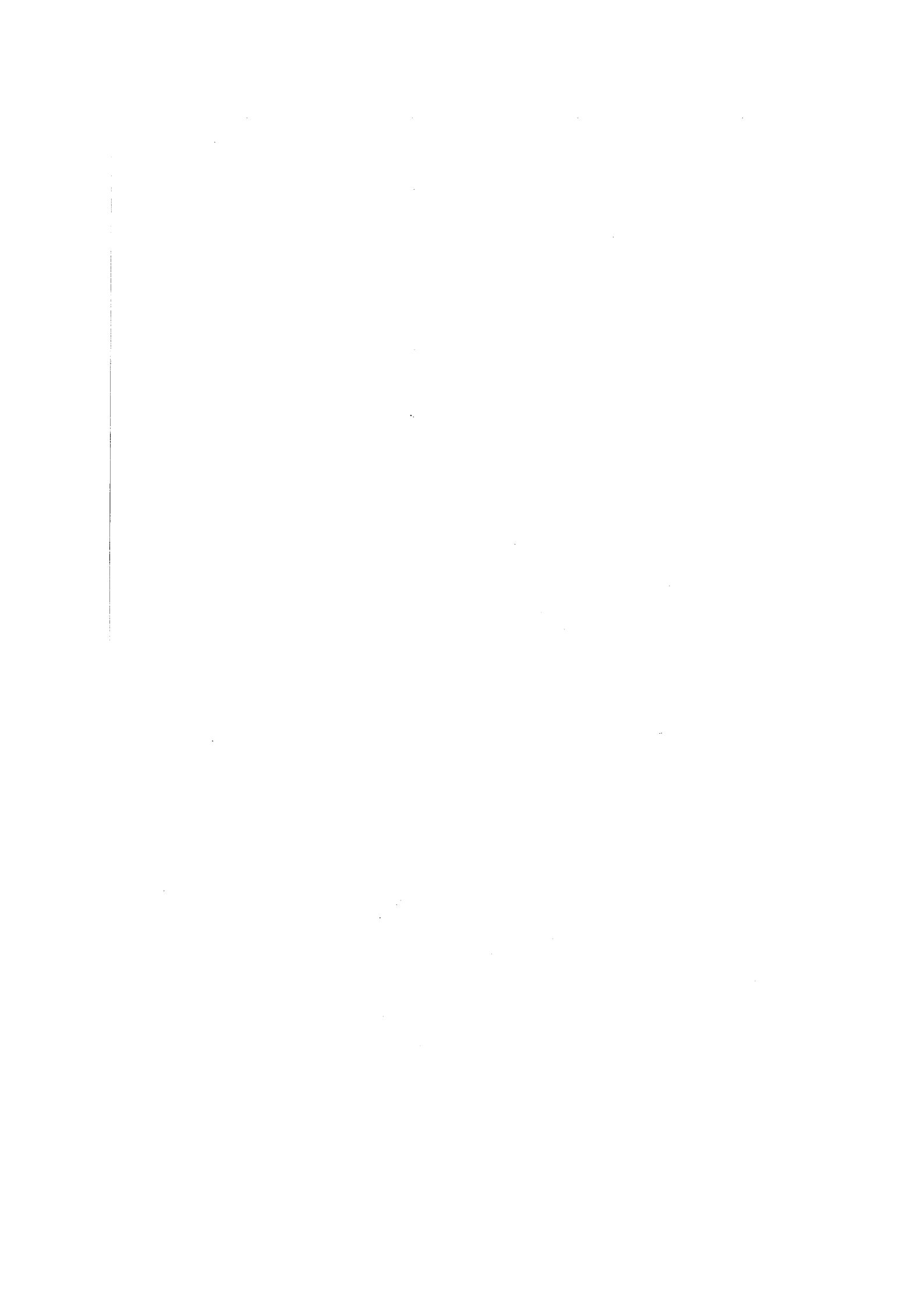
Figure 5.11: Les différents domaines du diagramme sont discutés dans la section 2.3.3. Le point (a) correspond à la référence [Levenson 86], le point (b) à [LaPorta 89], (c) à [Grangier 91b], (d) à [Roch 92b], (e) à [Levenson 93], (f) correspond au résultat de l'expérience sodium [Poizat 93], et (g) à celui de l'expérience LED.

ne correspondent pas à des mesures QND “vraies”, puisqu’elles ont un gain sur la voie signal supérieur à l’unité (*cf.* section 2.3.4). L’expérience sodium apparaît donc comme le meilleur dispositif QND au sens original de Braginsky [*Braginsky 92*], tandis que l’expérience LED détient le record d’efficacité en tant que répéteur ou duplicateur quantique. Cependant, pour une comparaison équitable, il faudrait également tenir compte de la bande de fréquence sur laquelle ces effets ont été obtenus, et dans ce cas, les expériences en régime impulsionnel (points (b) et (e)) ont un net avantage. On peut finalement observer que les progrès ont surtout été réalisés pour la propriété de duplicateur quantique ( $T_s + T_m$ ), et qu’une diminution significative de la variance conditionnelle restent encore à obtenir.





## **Annexes**



## Annexe A

### Exemple de cas pathologiques pour les critères QND

Nous allons nous intéresser dans cette annexe aux cas pathologiques, pour lesquels les termes du types  $f_{s,m} \langle \delta X_s^{in} \delta Y_s^{in} \rangle$  sont différents de zéro, et qui conduisent à des différences entre les coefficients de corrélation et les coefficients de transfert, pouvant même aller jusqu'à des  $T_{m,s}$  supérieurs à 1.

Ces pathologies apparaissent donc lorsqu'il y a des corrélations entre la quadrature du signal que l'on désire mesurer et sa quadrature conjuguée (c'est-à-dire que le faisceau est comprimé selon une direction  $\theta \neq 0, \pi/2$ ), et que cette dernière est de plus couplée à la quadrature du faisceau de mesure qui est effectivement détectée.

Cette condition peut s'illustrer en considérant uniquement la dégradation d'un signal inscrit sur un faisceau comprimé traversant une cavité optique vide éventuellement hors résonance.

Soit  $X^{in} = (a^{in} + a^{in\dagger})/\sqrt{2}$  l'amplitude du signal entrant que l'on désire mesurer,  $Y^{in} = i(-a^{in} + a^{in\dagger})/\sqrt{2}$  sa quadrature conjuguée,  $X_\theta = (a^{in} e^{i\theta} + a^{in\dagger} e^{-i\theta})/\sqrt{2}$  la composante de quadrature dans la direction  $\theta$  et  $Y_\theta = X_{\theta+\pi/2}$  sa quadrature conjuguée. On suppose, qu'à la fréquence non-nulle d'analyse, le faisceau incident est squeezé selon la direction  $\theta$ , c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{aligned} \langle X_\theta^{in} X_\theta^{in} \rangle &= \frac{v}{2}, & \langle X_\theta^{in} Y_\theta^{in} \rangle &= \frac{i}{2} \\ \langle Y_\theta^{in} X_\theta^{in} \rangle &= -\frac{i}{2}, & \langle X_\theta^{in} X_\theta^{in} \rangle &= \frac{1}{2v} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

On omet d'écrire les dépendances en fréquence de ces quantités pour alléger la notation, et ceci dans toute cette section. On déduit du système précédent les covariances symétrisées suivantes

$$\begin{aligned} \langle X^{in} X^{in} \rangle_{sym} &= \frac{1}{2} \left( v \cos^2 \theta + \frac{1}{v} \sin^2 \theta \right) \\ \langle X^{in} Y^{in} \rangle_{sym} &= \frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta \left( v - \frac{1}{v} \right) \\ \langle Y^{in} Y^{in} \rangle_{sym} &= \frac{1}{2} \left( v \sin^2 \theta + \frac{1}{2v} \cos^2 \theta \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

On fait passer ce champ dans une cavité vide sans pertes qui, du fait de la fréquence non nulle de travail, fait tourner les quadratures considérées par rapport au champ moyen lorsque l'on n'est pas à résonance. On appelle  $\alpha$  l'angle de rotation des quadratures entre l'entrée et la sortie. On a donc, à la fréquence de travail,

$$\begin{cases} X^{out} = X^{in} \cos \alpha + Y^{in} \sin \alpha \\ Y^{out} = -X^{in} \sin \alpha + Y^{in} \cos \alpha \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

On se propose maintenant de comparer les valeurs des coefficients de corrélation et des coefficients de transfert en fonction de  $\theta$  et de  $\alpha$ , d'abord dans des cas particuliers, puis dans le cas général.

Il est évident que si  $\alpha = 0$  on a  $C^2(X_s^{out} X_s^{in}) = T_s = 1$ , puisque tout se passe comme si la cavité n'était pas là. Si l'on a maintenant  $\theta = 0$ , c'est-à-dire que le faisceau entrant est comprimé dans la direction  $X^{in}$ , mais que l'analyse de la quadrature  $X^{out}$  en sortie se fait selon une direction  $\alpha \neq 0$ , le coefficient de corrélation s'écrit<sup>1</sup>,

$$C^2(X_s^{out} X_s^{in}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{v^2} \tan^2 \alpha}. \quad (\text{A.4})$$

Le calcul de  $T_s$  se fait de la façon suivante. L'intensité du signal inscrit sur le faisceau incident selon la quadrature  $X^{in}$  est multipliée par  $\cos^2 \alpha$ . La puissance du bruit (ou sa variance) dans la quadrature considérée passe de  $v/2$  à l'entrée à  $\frac{v}{2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2v} \sin^2 \alpha$  à la sortie, on retrouve alors

$$T_s = C^2(X_s^{out} X_s^{in}). \quad (\text{A.5})$$

Prenons maintenant le cas  $\theta = -\alpha$ , dans lequel la rotation des quadratures, due au désaccord de la cavité, compense l'angle de squeezing du champ incident. Le coefficient de corrélation est toujours donné par la formule (A.4). Pour le calcul du coefficient de transfert, l'intensité du signal est toujours multipliée par  $\cos^2 \alpha$ , mais le bruit passe maintenant, de  $\frac{v}{2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2v} \sin^2 \alpha$  à l'entrée à  $v/2$  à la sortie, ce qui donne,

$$T_s = \cos^4 \theta \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) \neq C^2(X_s^{out} X_s^{in}). \quad (\text{A.6})$$

De plus, le coefficient de transfert  $T_s$  peut avoir des valeurs supérieures à l'unité. En effet, en prenant par exemple  $\theta = \pi/4$ , la formule précédente devient

$$T_s = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{v^2}\right), \quad (\text{A.7})$$

c'est-à-dire que si  $1/v^2 > 3$ , on a,

$$T_s > 1. \quad (\text{A.8})$$

Il ne faut pas en conclure que la cavité vide a créé de l'information ! Cela vient simplement du fait que le signal et le bruit ne se comportent pas de la même façon vis-à-vis d'une rotation des quadratures (cf. figure A.1). Le signal, d'intensité  $S_o$ ,

<sup>1</sup>Il est rappelé que les coefficients de corrélation sont calculés à l'aide des corrélations symétrisées.

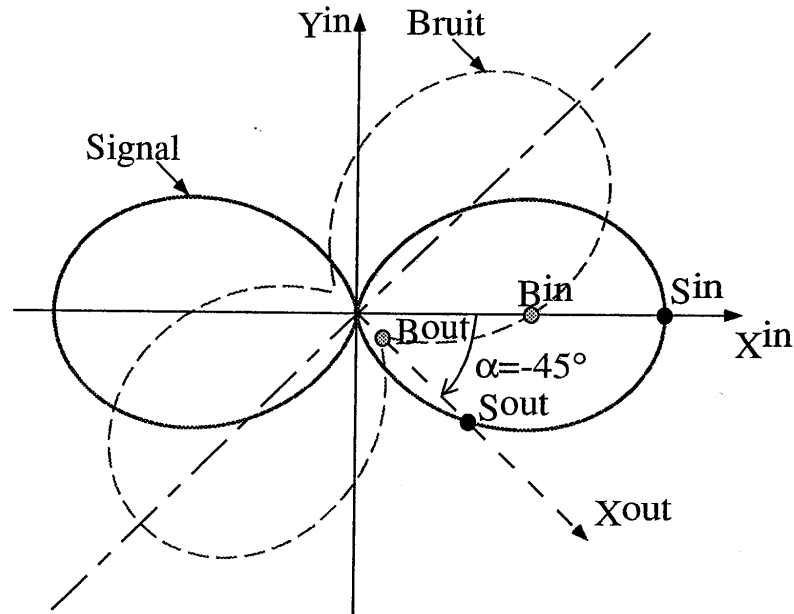


Figure A.1: Illustration d'un cas, dans lequel  $T_s$  est supérieur à un. La courbe en trait plein représente en polaire, l'intensité  $S(\theta)$  du signal inscrit sur la quadrature  $X^{in}$ , avec  $S_o = 1.5$ , en fonction de l'angle  $\theta$  de la quadrature selon laquelle il est mesuré. La courbe en pointillés représente la variance du bruit  $B_{45}(\theta)$ . Sur cette figure, le faisceau initial est squeezé selon  $\theta' = 45^\circ$  avec une variance  $v/2 = 3$  pour cette quadrature. La direction d'analyse de la quadrature de sortie  $X^{out}$  fait un angle  $\alpha$  avec la direction de  $X^{in}$ . Le rapport signal sur bruit *in* ou *out* est donné par le rapport d'homothétie par rapport à l'origine entre  $S^{in,out}$  et  $B^{in,out}$ . Il apparaît alors clairement que lorsque  $\alpha = -45^\circ$ , le rapport signal sur bruit en sortie est supérieur au rapport signal sur bruit à l'entrée, *i.e.*  $T_s > 1$ .

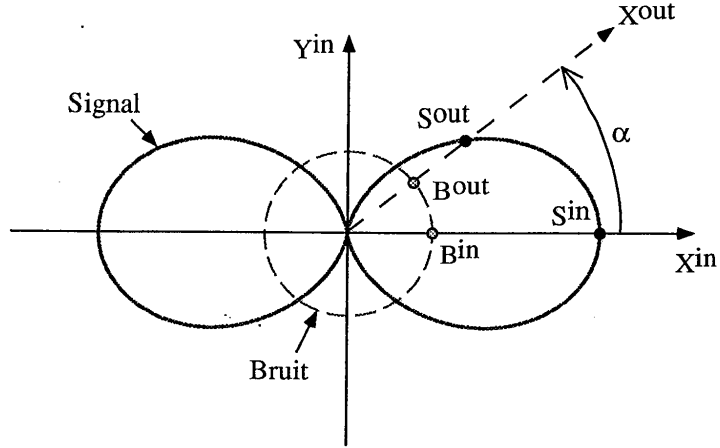


Figure A.2: Cette figure représente le même signal  $S(\theta)$  que sur la figure précédente, mais inscrit cette fois sur un faisceau non squeezé, c'est-à-dire que  $B(\theta)$  est maintenant un cercle de rayon  $1/2$ . On voit alors que le rapport signal sur bruit selon la direction  $\alpha$  d'analyse en sortie est toujours inférieur au rapport signal sur bruit entrant.

est codé selon la quadrature dans la direction du champ moyen. Si l'on regarde quelle est l'intensité  $S(\theta)$  du signal dans la quadrature de direction  $\theta$ , on obtient

$$S(\theta) = S_o \cos^2 \theta . \quad (\text{A.9})$$

C'est la courbe en trait plein de la figure A.1. Pour la puissance de bruit  $B(\theta)$  dans la quadrature  $\theta$ , on a pour un faisceau incident squeezé selon la direction  $\theta'$ , ayant une variance de  $v/2$  selon cette même direction,

$$B_{\theta'}(\theta) = \frac{v}{2} \cos^2(\theta - \theta') + \frac{1}{2v} \sin^2(\theta - \theta') . \quad (\text{A.10})$$

Cette fonction est représentée en pointillés sur la figure A.1, pour  $\theta' = \pi/4$ .

On peut remarquer, aux vues des formules (A.9) et (A.10) et de la figure A.1 que si

$$v \rightarrow +\infty, \text{ alors } \frac{B_0(\theta)}{v} \rightarrow S(\theta), \text{ (pour } S_o = \frac{1}{2}). \quad (\text{A.11})$$

Cela montre qu'un signal classique, inscrit sur une composante de quadrature, correspond à un squeezing (classique) infini selon la direction de cette même quadrature.

On a illustré sur la figure A.2, ce qui se passe pour les coefficients de transfert lorsque le faisceau entrant n'est pas squeezé. On voit alors que dans ce cas on a toujours  $T_s \leq 1$ .

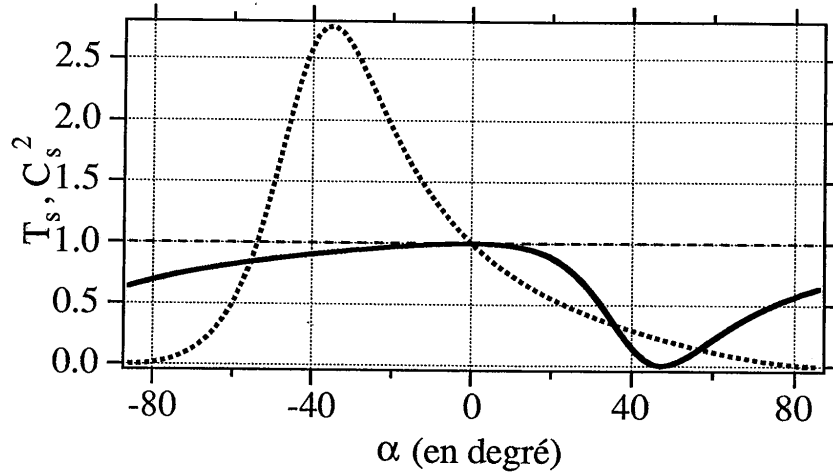


Figure A.3: Coefficients de corrélation (en trait plein) et de transfert (en pointillés) en fonction de l'angle  $\alpha$  de rotation des quadratures, pour une direction de squeezing à l'entrée fixée à  $45^\circ$ .  $T_s$  devient bien plus grand que 1 aux alentours de  $\alpha = -45^\circ$ , ce qui se comprend bien à l'aide de la figure lemniscate. Le coefficient de corrélation, toujours inférieur à 1 par construction, s'annule, quant à lui, dans la région  $\alpha \simeq 45^\circ$ .

De manière générale, on a pour le coefficient de corrélation  $C^2(X_s^{out} X_s^{in})$ , l'expression suivante :

$$C^2(X_s^{out} X_s^{in}) = \frac{(\langle X^{in} X^{in} \rangle \cos \alpha + \langle X^{in} Y^{in} \rangle_{sym} \sin \alpha)^2}{\langle X^{in} X^{in} \rangle \langle X^{out} X^{out} \rangle} \quad (\text{A.12})$$

avec

$$\langle X^{in} X^{in} \rangle = \frac{v}{2} \cos^2 \theta' + \frac{1}{2v} \sin^2 \theta' \quad (\text{A.13})$$

$$\langle X^{in} Y^{in} \rangle_{sym} = \left( \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \right) \cos \theta' \sin \theta' \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \langle X^{out} X^{out} \rangle &= \left( \frac{v}{2} \cos^2 \theta' + \frac{1}{2v} \sin^2 \theta' \right) \cos^2 \alpha + \left( \frac{v}{2} \sin^2 \theta' + \frac{1}{2v} \cos^2 \theta' \right) \sin^2 \theta' \\ &\quad + 2 \cos \alpha \sin \alpha \cos \theta' \sin \theta' \left( \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

On a représenté sur la figure A.3,  $C^2(X_s^{out} X_s^{in})(\alpha)$ . On peut remarquer que cette quantité s'annule pour  $\alpha = \alpha_o$ , avec

$$\begin{aligned} \tan \alpha_o &= - \frac{\langle X^{in} X^{in} \rangle}{\langle X^{in} Y^{in} \rangle_{sym}} \\ &= - \frac{\frac{v}{2} \cos^2 \theta' + \frac{1}{2v} \sin^2 \theta'}{\left( \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \right) \cos \theta' \sin \theta'} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$



Lorsqu'on n'a pas de squeezing, *i.e.*  $v = 1$ , on a  $\alpha_o = \pm\pi/2$ , c'est-à-dire que pour un état cohérent une quadrature n'est pas corrélée avec sa quadrature conjuguée. Pour un état squeezé avec une variance  $v/2 > 1/2$  dans la direction  $\theta'$ ,  $\alpha_o$  tend vers  $\pi/2 - \theta'$  lorsque  $v$  tend vers l'infini.

Le coefficient de transfert s'exprime, de manière générale, selon la formule suivante

$$T_s = \cos^2 \alpha \frac{\frac{v}{2} \cos^2 \theta' + \frac{1}{2v} \sin^2 \theta'}{\frac{v}{2} \cos^2(\theta' + \alpha) + \frac{1}{2v} \sin^2(\theta' + \alpha)} \quad (\text{A.17})$$

Cette fonction est représentée sur la figure A.3. Lorsque  $v \neq 1$ , et  $\theta' \neq 0, \pi/2$ , il existe des valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles  $T_s > 1$ .

On peut remarquer, pour terminer, que si on prend comme définition du rapport signal-sur-bruit d'un faisceau lumineux, la valeur de ce rapport sur la quadrature donnant le meilleur résultat, alors il n'est plus possible d'avoir des valeurs des coefficients de transmission supérieure à un. Cependant une telle définition obligerait à considérer globalement l'état quantique entrant, et s'écarterait de la notion usuelle qui veut qu'une mesure soit relative à une observable particulière (ici une composante de quadrature), qui doit donc être spécifiée au départ.

## Annexe B

### Corrélation expérimentale

On va déterminer, dans cette annexe, la façon optimale de corriger un bruit par la connaissance d'un autre bruit qui lui est partiellement corrélé.

On considère deux quantités  $\delta i_1$  et  $\delta i_2$ , de valeur moyenne nulle. On suppose, par ailleurs, qu'à une fréquence donnée, une fraction  $\alpha$  des fluctuations de  $\delta i_2$  est corrélée avec  $\delta i_1$ . C'est-à-dire qu'on a,

$$\frac{\langle \delta i_1 \delta i_2 \rangle^2}{\langle \delta i_1^2 \rangle \langle \delta i_2^2 \rangle} = \alpha . \quad (\text{B.1})$$

On suppose pour simplifier les quantités  $\delta i_1$  et  $\delta i_2$  réelles, c'est-à-dire dire qu'on les a auparavant mis en phase. On veut, pour mettre en évidence cette corrélation, corriger les fluctuations de  $\delta i_1$ , le plus efficacement possible, en combinant linéairement ces deux quantités. On cherche, en fait, à trouver la valeur de  $\beta$  qui minimise la variance de  $\delta i_1 - \beta \delta i_2$ . Cette variance s'écrit,

$$\langle (\delta i_1 - \beta \delta i_2)^2 \rangle = \langle \delta i_1^2 \rangle + \beta^2 \langle \delta i_2^2 \rangle - 2\beta \delta i_1 \delta i_2 , \quad (\text{B.2})$$

et est minimale pour

$$\beta = \frac{\langle \delta i_1 \delta i_2 \rangle}{\langle \delta i_2^2 \rangle} . \quad (\text{B.3})$$

On peut remarquer que les deux quantités  $\delta i_1$  et  $\delta i_2$  jouent un rôle symétrique, et que l'on aurait trouvé exactement le même résultat en cherchant à minimiser la variance de  $\delta i_1 - \beta \delta i_2$ . Si les variances initiales de ces deux courants ont été rendues égales, on a alors

$$\beta = \alpha^{1/2} . \quad (\text{B.4})$$

Donc, lorsque deux quantités de mêmes variances ont une corrélation normalisée de  $\alpha$ , la meilleure correction des fluctuations de l'une de ces quantités est obtenue en retranchant l'autre atténuée d'un facteur  $\beta = \sqrt{\alpha}$ .



## Annexe C

# Dérivation des équations de Langevin quantiques

### C.1 Pour un mode d'une cavité couplé à un bain extérieur

On va établir dans cette section les équations de Bloch-Langevin quantiques correspondant à l'évolution d'un mode propre d'une (bonne) cavité couplé à un réservoir extérieur. Ce calcul est directement tiré de la référence [Gardiner 85]. Le Hamiltonien décrivant cette situation est le point de départ du calcul du modèle paramétrique (Eqs. (3.1-3.4)), où on ne considère qu'un seul mode, c'est-à-dire qu'on omet l'indice  $j$ . On rappelle l'expression du Hamiltonien  $\mathcal{H}_3$  (Eq; (3.4)) de couplage du mode  $a$  à l'ensemble des modes  $b_\omega$  du réservoir.

$$\mathcal{H}_3 = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} d\omega C_\omega [b_\omega a^\dagger - ab_\omega^\dagger] \quad (\text{C.1})$$

Les équations de Heisenberg pour les  $b_\omega(t)$  sont,

$$\dot{b}_\omega = -i\omega b_\omega - C_\omega a, \quad (\text{C.2})$$

où on a omis d'écrire la dépendance en  $t$ , comme dans tout ce qui va suivre. En intégrant ces équations, on obtient:

$$b_\omega = e^{-i\omega(t-t_0)} b_\omega^{(0)} - C_\omega \int_{t_0}^t e^{-i\omega(t-t')} a(t') dt' \quad (\text{C.3})$$

où  $b_\omega^{(0)}$  est la valeur de  $b_\omega$  à  $t = t_0$ , considérée comme une valeur initiale, loin dans le passé.

On définit le champ entrant  $a^{in}(t)$ , pour  $t > t_0$ , par

$$a^{in}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t_0)} b_\omega^{(0)}. \quad (\text{C.4})$$

Ces opérateurs vérifient les relations de commutations

$$[a^{in}(t), a^{in\dagger}(t')] = \delta(t - t') \quad (\text{C.5})$$

On se place maintenant dans le repère tournant à la fréquence  $\Omega^L$  du champ laser entrant, sans, pour autant, changer les notations.

L'équation d'Heisenberg qui régit l'évolution d'un opérateur  $u$  quelconque du système s'écrit:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[u, \mathcal{H}] \quad (\text{C.6})$$

Il vient dans notre cas, pour  $a$ ,

$$\dot{a} = \frac{1}{i\hbar}[a, \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2] - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega C_\omega (b_\omega^\dagger[a, a^\dagger] - [a, a]b_\omega) . \quad (\text{C.7})$$

Le premier commutateur se calcule simplement. Pour le calcul de l'intégrale, on suppose maintenant que  $C_\omega$  est constant autour de la fréquence  $\Omega^L$  du champ laser entrant, avec la valeur  $C_\omega = \sqrt{\kappa}/\pi$ , où  $\kappa$  sera le taux d'amortissement de la cavité correspondant au mode  $a$ . C'est l'hypothèse du bruit quantique blanc ou première hypothèse de Markov [Gardiner 85] qui stipule que, concernant les échanges avec le réservoir extérieur, ce qui se passe à l'instant  $t$  est indépendant de tous les événements antérieurs à  $t$ . En remplaçant ensuite  $b_\omega$  par son expression donnée par la formule (C.3), puis en utilisant la définition de  $a^{in}(t)$  (eq (C.4)), on arrive alors<sup>1</sup> à une équation de Langevin quantique qui s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{i\hbar}[a, \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2] + ([a, a^\dagger](-\kappa a + \sqrt{2\kappa} a^{in}) - (-\kappa a^\dagger + \sqrt{2\kappa} a^{in\dagger})[a, a]) \\ &= \frac{1}{i\hbar}[a, \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2] + (-\kappa a + \sqrt{2\kappa} a^{in}) . \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

## C.2 Pour un atome couplé aux modes vides du champ

On se propose d'établir maintenant les équations d'évolution de Bloch-Langevin pour un atome couplé aux modes vides du champ, lorsqu'il n'y a pas de cavité optique. Ces équations vont donc décrire le phénomène d'émission spontanée. On utilise le Hamiltonien suivant (avec les mêmes notations que dans la section 3.3, ou évidentes),

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{sys}} &= \hbar\Omega^a \sigma_{22} \\ \mathcal{H}_{\text{int}} &= i\hbar \int d^3\mathbf{k} (c_k b_k^\dagger \sigma_{12} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - h.c.) \\ \mathcal{H}_{\text{res atomes}} &= \hbar \int d^3\mathbf{k} \omega_k b_k b_k^\dagger \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

L'équation d'évolution du mode  $b_k$  (qui est une fonction du temps), à l'emplacement  $\mathbf{r}$  de l'atome est

$$\frac{db_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{dt} = -i\omega_k b_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - c_k \sigma_{12} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} . \quad (\text{C.10})$$

<sup>1</sup>On utilise les propriétés suivantes  
 $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} = 2\pi\delta(t-t')$   
 et  
 $\int_{t_0}^t a(t')\delta(t-t') = \frac{1}{2}a(t)$

En intégrant cette équation, il vient

$$b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t_0)} b_{\mathbf{k}}^o e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - c(\mathbf{k}) \int_{t_0}^t e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t')} \sigma_{12}(t') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dt' \quad (\text{C.11})$$

où  $b_{\mathbf{k}}^o e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  est la valeur de  $b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  à  $t = t_0$ , considérée comme une valeur initiale, loin dans le passé.

On définit le champ entrant  $\beta^{in}(t)$ , pour  $t > t_0$ , par

$$\beta^{in}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t_0)} b_{\mathbf{k}}^{(o)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (\text{C.12})$$

vérifiant les relations de commutation suivante

$$[\beta^{in}(t, \mathbf{r}), \beta^{in}(t', \mathbf{r}')] = \delta(t-t') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (\text{C.13})$$

On se place maintenant dans le repère tournant à la fréquence  $\Omega$  du champ laser entrant, sans pour autant changer les notations.

L'équation d'évolution de l'opérateur  $\sigma_{12}(t)$  est,

$$\dot{\sigma}_{12} = \frac{1}{i\hbar} [\sigma_{12}, \mathcal{H}_{\text{sys}}] - \int d^3\mathbf{k} c_{\mathbf{k}} \left( b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} [\sigma_{12}, \sigma_{21}] - [\sigma_{12}, \sigma_{12}] b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right). \quad (\text{C.14})$$

On fait comme dans le paragraphe précédent l'approximation de Markov, et on fait également une hypothèse d'isotropie du couplage de l'atome avec les différents modes du champ, si bien que les  $c_{\mathbf{k}}$  ne dépendent alors plus de  $\mathbf{k}$ , et on pose

$$\forall \mathbf{k}, \quad c_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\gamma}{(2\pi)^3}}. \quad (\text{C.15})$$

Cette dernière hypothèse, permettant en fait d'éviter l'intégration spatiale sur  $\mathbf{k}$  pour le calcul de  $\gamma$ , conduit cependant à des valeurs des corrélations entre les termes de bruit, proportionnelles à  $\gamma$  identiques à ce que l'on trouve lorsqu'on ne fait pas cette approximation [Cohen 88].

De la même façon que précédemment on arrive alors à l'équation de Bloch-Langevin suivante<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{12} &= \frac{1}{i\hbar} [\sigma_{12}, \mathcal{H}_{\text{sys}}] + [\sigma_{12}, \sigma_{21}] \left( (-\gamma/2)\sigma_{12} + \sqrt{\gamma} \beta^{in}(\mathbf{r}) \right) \\ &\quad - \left( -\gamma/2\sigma_{21} + \sqrt{\gamma} \beta^{in\dagger}(\mathbf{r}) \right) [\sigma_{12}, \sigma_{12}]. \\ &= \frac{1}{i\hbar} [\sigma_{12}, \mathcal{H}_{\text{sys}}] - (\gamma/2)\sigma_{12} \sqrt{\gamma} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \beta^{in}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

<sup>2</sup>On utilise ici les propriétés  
 $\int d^3\mathbf{k} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t')} = (2\pi)^3 \delta(t-t')$ ,  
 et  
 $\int_{t_0}^t \sigma_{12}(t') \delta(t-t') = \frac{1}{2} \sigma_{21}(t)$ .

### C.3 Cas général

Pour un Hamiltonien décrivant l'interaction entre un système et un réservoir, s'écrivant de la façon suivante

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{sys} + \mathcal{H}_B + \mathcal{H}_{int} , \quad (\text{C.17})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_B &= \hbar \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega b_{\omega}^{\dagger} b_{\omega} \\ \mathcal{H}_{int} &= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} d\omega C_{\omega} [b_{\omega}^{\dagger} c - c^{\dagger} b_{\omega}] . \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

où les  $b_{\omega}$  sont les opérateurs bosonique du bain, et  $c$  est un opérateur du système.

En procédant comme exactement comme précédemment on arrive l'équation de Langevin quantique suivante pour un opérateur  $a$  arbitraire du système. Cette équation s'écrit

$$\dot{a} = -\frac{i}{\hbar} [a, \mathcal{H}_{sys}] - \left( [a, c^{\dagger}] \left( \gamma c - \sqrt{2\gamma} a^{in}(t) \right) - \left( \gamma c^{\dagger} - \sqrt{2\gamma} a^{in\dagger}(t) \right) [a, c] \right) , \quad (\text{C.19})$$

avec les mêmes notations que celles introduites ci-dessus.

## Annexe D

### Expressions entrée-sortie du modèle paramétrique pour $\alpha$ arbitraire

On donne dans cette annexe les expressions analytiques explicites de l'équation matricielle (3.33), qui relie les quadratures sortantes aux quadratures entrantes pour un désaccord  $\alpha$  quelconque. On a

$$\begin{aligned}\delta p_1^{out}(\omega) &= \left(\frac{2\kappa}{D}q(q^2 + (\kappa\alpha)^2) - 1\right) \delta p_1^{in}(\omega) \\ &\quad + 2\frac{\kappa^2\alpha}{D}(q^2 + (\kappa\alpha)^2)\delta q_1^{in}(\omega) \\ &\quad + \frac{4\kappa^2\alpha\lambda q}{D}\delta p_2^{in}(\omega) + \frac{4\kappa^3\alpha^2\lambda}{D}\delta q_2^{in}(\omega) \\ \delta q_1^{out}(\omega) &= \frac{2\kappa}{D}(4\kappa\alpha\lambda^2 - ((\kappa\alpha)^2 + q^2)) \delta p_1^{in}(\omega) \\ &\quad + \left(\frac{2\kappa}{D}q(q^2 + (\kappa\alpha)^2) - 1\right) \delta q_1^{in}(\omega) \\ &\quad + \frac{4\kappa q^2\lambda}{D}\delta p_2^{in}(\omega) + \frac{4\kappa^2\alpha\lambda q}{D}\delta q_2^{in}(\omega)\end{aligned}\tag{D.1}$$

avec

$$D = q^2(q^2 + (\kappa\alpha)^2) + (\kappa\alpha)^2(q^2 + (\kappa\alpha)^2 + 4\lambda^2)\tag{D.2}$$

et

$$q = \kappa + i\omega.\tag{D.3}$$

Pour  $\alpha = 0$ , on retrouve le système d'équations 3.34.





## Annexe E

### Modèle à deux niveaux effectifs

Nous présentons dans cette annexe un calcul modélisant l'interaction de deux modes distincts du champ avec un système atomique à trois niveaux en échelle. Son degré d'approximation, ainsi que sa complexité, sont intermédiaires entre le modèle paramétrique (section 3.2) et le calcul complet à trois niveaux (section 3.3). Le système atomique est modélisé par un ensemble d'atomes à deux niveaux effectifs, ce qui revient en fait à négliger le niveau intermédiaire du système en échelle [Poizat 91]. La transition entre les deux niveaux extrêmes sera alors une transition à deux photons.

Il apparaît donc une nouvelle source de bruit par rapport au modèle paramétrique, qui est le bruit atomique lié à l'émission spontanée depuis le niveau du haut. L'émission spontanée du niveau intermédiaire est, quant à elle, négligée. Cette approximation sera donc valide lorsque le niveau intermédiaire sera excité loin de résonance.

On utilise un ensemble d'opérateurs de Pauli ( $\sigma_\mu^+, \sigma_\mu^-, \sigma_\mu^z$ ) pour décrire les atomes à deux niveaux, où  $\mu$  repère chacun des  $N$  atomes. Les  $N$  atomes sont supposés indépendants vis-à-vis de l'émission spontanée (cf. discussion au début du calcul complet à trois niveaux (section 3.3)). Les relations de commutation entre ces opérateurs sont alors les suivantes:

$$\begin{aligned} [\sigma_\mu^+, \sigma_\mu^-] &= 2 \sigma_\mu^z \\ [\sigma_\mu^\pm, \sigma_\mu^z] &= \mp \sigma_\mu^\pm. \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

L'Hamiltonien contient alors un terme d'évolution libre supplémentaire, par rapport au modèle paramétrique, pour le système atomique, et un terme de bruit supplémentaire décrivant l'interaction des atomes avec un réservoir. Les deux champs laser sont donc maintenant couplés via la transition atomique à deux niveaux.

L'Hamiltonien se décompose en une somme de six termes:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 + \mathcal{H}_{res\ champs} + \mathcal{H}_{res\ atomes} \quad (\text{E.2})$$

où

$$\mathcal{H}_1 = \hbar\omega_0 S^z + \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2 \quad (\text{E.3})$$

décrit l'évolution libre du système, le deuxième terme

$$\mathcal{H}_2 = i\hbar g \sum_{\mu=1}^N (\sigma_{\mu}^{-} a_1^{\dagger} a_2^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{r}^{\mu}} - h.c.) \quad (\text{E.4})$$

rend compte de l'interaction des deux champs avec les atomes,

$$\mathcal{H}_3 = i\hbar \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega C_j(\omega) (b_j(\omega) a_j^{\dagger} - a_j b_j^{\dagger}(\omega)) \quad (\text{E.5})$$

est le couplage des champs avec le réservoir, et

$$\mathcal{H}_4 = i\hbar \sum_{\mu=1}^N \int d^3\mathbf{k} (c_{\mathbf{k}} \sigma_{\mu}^{-} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}^{\mu}} - h.c.) . \quad (\text{E.6})$$

décrit le couplage de chaque atome avec le réservoir, et sera responsable du bruit d'émission spontanée.  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde d'un mode latéral vide du champ, et  $\mathbf{k}_{12}$  est la somme des vecteurs d'onde des deux champs. Le coefficient de couplage effectif à deux photons  $g$  est de l'ordre de  $g \sim g_1 g_2 / \delta$  où  $g_1$  et  $g_2$  sont les coefficients de couplage des deux transitions à un photon, et  $\delta$  le désaccord du niveau intermédiaire (supposé grand par rapport au désaccord à deux photons).

Comme dans la section 3.2, l'hypothèse de Markov nous permet d'écrire

$$\forall \omega, \quad C_{\omega}^j = \sqrt{\frac{\kappa_j}{\pi}}, \quad (\text{E.7})$$

et l'approximation de couplage faible (*cf.* section 3.3), ajoutée à l'hypothèse d'isotropie des modes (*cf.* annexe C) nous conduit à

$$\forall \mathbf{k}, \quad c_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\gamma}{(2\pi)^3}} . \quad (\text{E.8})$$

Comme dans les sections 3.2 et 3.3, on introduit les champs entrants  $a_j^{\text{in}}(t)$  (*cf.* Eq. 3.8), et les fluctuations atomiques entrantes  $\beta_j^{\text{in}}(t)$  (*cf.* Eq. 3.52).  $S^{-}$ ,  $S^{+}$ , et  $S^z$  sont des opérateurs atomiques pour le système tout entier définis par:

$$\begin{aligned} S^{-} &= \sum_{\mu=1}^N \sigma_{\mu}^{-} e^{i\mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{r}^{\mu}} \\ S^{+} &= \sum_{\mu=1}^N \sigma_{\mu}^{+} e^{-i\mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{r}^{\mu}} \\ S^z &= \sum_{\mu=1}^N \sigma_{\mu}^z . \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

L'évolution de ce système, régie par les équations de Heisenberg, conduit, en utilisant la méthode input-output de Gardiner et Collett [*Gardiner 85*], au système

suisant d'équations de Langevin :

$$\begin{aligned}
\frac{da_j}{dt} &= -\kappa_j(1 + i\Phi_j)a_j + ga_{3-j}^\dagger S^- + \sqrt{2\kappa_j} a_j^{in} \\
\frac{da_j^\dagger}{dt} &= -\kappa_j(1 - i\Phi_j)a_j^\dagger + ga_{3-j} S^+ + \sqrt{2\kappa_j} a_j^{in\dagger} \\
\frac{dS^-}{dt} &= -\frac{\gamma}{2}(1 + i\Delta)S^- + 2gS^z a_1 a_2 + 2\sqrt{\gamma} \sum_{\mu=1}^N \sigma_\mu^z \beta^{\mu in} e^{i\mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{r}^\mu} \\
\frac{dS^+}{dt} &= -\frac{\gamma}{2}(1 - i\Delta)S^+ + 2gS^z a_1^\dagger a_2^\dagger + 2\sqrt{\gamma} \sum_{\mu=1}^N \beta^{\mu in\dagger} \sigma_\mu^z e^{i\mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{r}^\mu} \\
\frac{dS^z}{dt} &= -\frac{\gamma}{2}(2S^z + N) - g(S^- a_1^\dagger a_2^\dagger + S^+ a_1 a_2) - \sqrt{\gamma} \sum_{\mu=1}^N (\beta^{\mu in\dagger} \sigma_\mu^- + \sigma_\mu^+ \beta^{\mu in}),
\end{aligned} \tag{E.10}$$

dans lequel  $\Delta = 2(\omega_o - \Omega_1 - \Omega_2)/\gamma$  est le désaccord atomique normalisé,  $\Phi_j = (\omega_j - \Omega_j)/\kappa_j$  est le désaccord normalisé par rapport à la cavité vide et  $\beta^{\mu in} e^{-i\mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{r}^\mu}$  correspond au champ du vide vu par le  $\mu^{\text{ème}}$  atome.

Les solutions stationnaires du système précédent donnent les valeurs moyennes (semi-classiques) des différents opérateurs. On obtient:

$$\begin{aligned}
\langle S^- \rangle &= V^- = \frac{2g}{\gamma(1 + i\Delta)} \langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle D \\
\langle S^+ \rangle &= V^+ = \frac{2g}{\gamma(1 - i\Delta)} \langle a_1^\dagger \rangle \langle a_2^\dagger \rangle D \\
2\langle S^z \rangle &= D = \frac{-N(1 + \Delta^2)}{1 + \Delta^2 + I_1 I_2}
\end{aligned} \tag{E.11}$$

où pour  $j = 1, 2$

$$I_j = \frac{g\sqrt{8}}{\gamma} \langle a_j^\dagger a_j \rangle \tag{E.12}$$

et

$$\langle a_j \rangle = \frac{\sqrt{2\kappa_j}(1 + \Delta^2)\sqrt{2}\langle a_j^{in} \rangle}{\kappa_j\sqrt{2}(1 + \Delta^2) - gI_j D + i(\kappa_j\sqrt{2}(1 + \Delta^2)\Phi_j + gI_j D\Delta)} \tag{E.13}$$

Cette dernière équation permet d'exprimer le déphasage  $\theta_j^{in}$  entre le champ intracavité et le champ entrant:

$$\theta_j^{in} = \arctan \left( \frac{\kappa_j\sqrt{2}(1 + \Delta^2)\Phi_j + gI_j D\Delta}{\kappa_j\sqrt{2}(1 + \Delta^2) - gI_j D} \right). \tag{E.14}$$

De même, en réécrivant le système d'équations de Langevin (Eq.(E.10)) en fonction des champs sortants, on en déduit, de façon analogue, le déphasage  $\theta_j^{out}$  entre le champ intra-cavité et le champ sortant:

$$\theta_j^{out} = \arctan \left( \frac{\kappa_j\sqrt{2}(1 + \Delta^2)\Phi_j + gI_j D\Delta}{\kappa_j\sqrt{2}(1 + \Delta^2) + gI_j D} \right). \tag{E.15}$$

On peut remarquer, d'après l'expression de  $\langle S^z \rangle$  dans l'équation (E.11), que le modèle paramétrique (ou dispersif) présenté dans la section 3.2, qui n'est valable que dans la mesure où les niveaux excités sont très faiblement peuplés, correspond ici à la limite  $\Delta^2 \gg I^2$ . Cette limite sera appelée par la suite limite paramétrique ou dispersive<sup>1</sup>.

On linéarise autour des valeurs moyennes les opérateurs de champ (cf Eq.3.20), ainsi que les opérateurs atomiques,

$$S^- = V^- + \delta V^-, \quad S^+ = V^+ + \delta V^+, \quad 2S^z = D + \delta D. \quad (\text{E.16})$$

Les équations du mouvement pour les parties fluctuantes des opérateurs s'écrivent alors, pour  $j=1, 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta a_j &= -\kappa_j(1 + i\Phi_j) \delta a_j + g\delta(S^- a_{3-j}^\dagger) + \sqrt{2\kappa_j} \delta a_j^{in} \\ \frac{d}{dt} \delta a_j^\dagger &= -\kappa_j(1 - i\Phi_j) \delta a_j^\dagger + g\delta(S^+ a_{3-j}) + \sqrt{2\kappa_j} \delta a_j^{in\dagger} \\ \frac{d}{dt} \delta V^- &= -\frac{\gamma}{2}(1 + i\Delta) \delta V^- + 2g\delta(S^z a_1 a_2) + 2\sqrt{\gamma} \sum_{\mu=1}^N \sigma_\mu^z \beta^{\mu in} e^{ik_{12} \cdot r^\mu} \\ \frac{d}{dt} \delta V^+ &= -\frac{\gamma}{2}(1 - i\Delta) \delta V^+ + 2g\delta(S^z a_1^\dagger a_2^\dagger) + 2\sqrt{\gamma} \sum_{\mu=1}^N \beta^{\mu in\dagger} \sigma_\mu^z e^{ik_{12} \cdot r^\mu} \\ \frac{d}{dt} \delta D &= -\gamma \delta D - 2g\delta(S^- a_1^\dagger a_2^\dagger + S^+ a_1 a_2) - 2\sqrt{\gamma} \sum_{\mu=1}^N (\beta^{\mu in\dagger} \sigma_\mu^- + \sigma_\mu^+ \beta^{\mu in}). \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

L'hypothèse d'indépendance des atomes vis-à-vis du champ du vide va assurer que les corrélations entre les différents termes de bruit seront proportionnelles au nombre  $N$  d'atomes et non à  $N^2$ , puisque tous les termes croisés entre atomes différents seront nuls à cause des termes de phase  $e^{ik_{12} \cdot r^\mu}$ .

Nous nous intéressons ici surtout à l'évolution des opérateurs de champs. On envisage, pour simplifier, le cas où la durée de vie  $1/\gamma$  du niveau atomique supérieur est plus courte que la durée de vie  $1/\kappa_j$  d'un photon dans la cavité optique<sup>2</sup>. On peut alors considérer que les atomes répondent quasi instantanément aux variations de champs, c'est-à-dire qu'ils suivent adiabatiquement l'évolution des champs. Cela nous permet d'éliminer les variations des opérateurs atomiques en prenant  $\frac{d}{dt} \delta V^- = \frac{d}{dt} \delta V^+ = \frac{d}{dt} \delta D = 0$  dans les équations du mouvement (Eq.(E.17)): C'est l'approximation adiabatique.

On peut alors exprimer  $\delta V^+$  et  $\delta V^-$  en fonction des fluctuations des champs  $\delta a_1$  et  $\delta a_2$  en utilisant les trois dernières équations de (Eq.(E.17)). On obtient

$$g\delta V^- = F_v - \mathcal{E}(\langle a_2 \rangle \delta a_1 + \langle a_1 \rangle \delta a_2) - \psi(\langle a_2^\dagger \rangle \delta a_1^\dagger + \langle a_1^\dagger \rangle \delta a_2^\dagger), \quad (\text{E.18})$$

<sup>1</sup>La condition rigoureuse est  $1 + \Delta^2 \gg I^2$ , mais comme de toutes façons, les désaccords considérés seront toujours supérieurs à 10 pour des raisons expérimentales (largeur Doppler), et cela revient en fait au même.

<sup>2</sup>Il faut mentionner que cette condition n'est, en pratique, pas réalisée dans notre expérience.

où

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{2g^2 N}{\gamma \Pi^2 (1 + i\Delta)} \\ \psi &= \frac{2g^2 N}{\gamma \Pi^2 (1 + i\Delta)} \frac{I_1 I_2}{(1 + \Delta^2)},\end{aligned}\quad (\text{E.19})$$

avec

$$\Pi = \frac{1 + \Delta^2 + I_1 I_2}{1 + \Delta^2} \quad (\text{E.20})$$

et

$$\begin{aligned}F_v &= \frac{-I\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma N}} \frac{[(1 - i\Delta)S^- + I\sqrt{2}S^z]}{[1 + \Delta^2 + I^2]} B^{in\dagger} \\ &+ \frac{4}{\sqrt{\gamma N}} \frac{\left[-\frac{I}{\sqrt{8}}(1 - i\Delta)S^+ + \left((1 - i\Delta) + \frac{I^2}{8}\right)S^z\right]}{[1 + \Delta^2 + I^2]} B^{in},\end{aligned}\quad (\text{E.21})$$

où  $B^{in} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^N \beta^{\mu in} e^{-ikr_\mu}$ .

De même que dans le modèle paramétrique, on prend  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ ,  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$  et on fixe la condition de symétrie  $I_1 = I_2 = I$ . On se place alors dans l'espace de Fourier pour écrire le système d'équations (Eq.(E.17)) sous une forme matricielle:

$$\mathbf{A}(\omega)\delta\mathbf{a}(\omega) = \mathbf{d}(\omega) \quad (\text{E.22})$$

où

$$\delta\mathbf{a}(\omega) = \begin{pmatrix} \delta a_1(\omega) \\ \delta a_1^\dagger(\omega) \\ \delta a_2(\omega) \\ \delta a_2^\dagger(\omega) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}(\omega) = \mathbf{d}_a(\omega) + \mathbf{d}_{ch}(\omega), \quad (\text{E.23})$$

avec

$$\mathbf{d}_a(\omega) = \begin{pmatrix} \langle a_2^\dagger \rangle F_v \\ \langle a_2 \rangle F_v^\dagger \\ \langle a_1^\dagger \rangle F_v \\ \langle a_1 \rangle F_v^\dagger \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_{ch}(\omega) = \begin{pmatrix} \sqrt{2\kappa} \delta a_1^{in}(\omega) \\ \sqrt{2\kappa} \delta a_1^{in\dagger}(\omega) \\ \sqrt{2\kappa} \delta a_2^{in}(\omega) \\ \sqrt{2\kappa} \delta a_2^{in\dagger}(\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{E.24})$$

correspondant respectivement au bruit atomique et aux fluctuations des champs entrants. On a également,

$$\mathbf{A}(\omega) = \begin{pmatrix} a + i\omega & b & G & G + b \\ b^* & a^* + i\omega & G^* + b^* & G^* \\ G & G + b & a + i\omega & b \\ G^* + b^* & G^* & b^* & a^* + i\omega \end{pmatrix} \quad (\text{E.25})$$

dans laquelle

$$\begin{aligned}a &= \kappa \left( 1 + i\Phi + \frac{2CI(1 - i\Delta)}{(1 + \Delta^2 + I^2)\Pi} \right) \\ b &= \frac{2\kappa CI^3(1 - i\Delta)}{(1 + \Delta^2 + I^2)^2} \\ G &= \frac{2\kappa CI}{(1 + i\Delta)\Pi^2},\end{aligned}\quad (\text{E.26})$$

avec  $C = \frac{gN}{\kappa\sqrt{\delta}}$ .

On peut comparer la matrice  $\mathbf{A}$  donnée par ce modèle à deux niveaux effectifs (Eq.(E.25)) avec la matrice  $\mathbf{A}$  du modèle paramétrique (Eq.(3.24)). L'amortissement de la cavité qui était de  $\kappa$  dans le modèle paramétrique est augmenté ici d'un facteur  $(1 + C)$  et l'on a maintenant un amortissement effectif qui s'écrit

$$\kappa \rightarrow \kappa(1 + C) \quad (\text{E.27})$$

avec

$$C = \frac{2CI}{(1 + \Delta^2 + I^2)\Pi} \quad (\text{E.28})$$

Cette augmentation de l'amortissement effectif de la cavité est due aux pertes par absorption à deux photons par les atomes (qui réémettent ensuite spontanément dans toutes les directions de l'espace).

Le terme de couplage correspondant à  $\lambda$  est quant à lui, maintenant décrit par l'interaction des deux champs avec les atomes, et l'on a

$$\lambda \rightarrow \kappa C(\Delta + i) \quad (\text{E.29})$$

La partie imaginaire de ce couplage est due au fait que tout phénomène de dispersion est nécessairement accompagné d'absorption.

Le désaccord de la cavité non-linéaire, noté  $\alpha$  dans le modèle paramétrique, devient

$$\alpha = \kappa\Phi - \lambda \rightarrow \kappa\Phi - \kappa C\Delta \quad (\text{E.30})$$

On peut remarquer que, en remplaçant  $\lambda$  dans l'expression de  $\alpha$  par le nouveau terme de couplage donné par l'équation (E.29), on retrouve la nouvelle expression du désaccord de la cavité non-linéaire en ne considérant que la partie réelle du couplage; la partie imaginaire correspond, quant à elle, à l'absorption atomique qui conduit à l'augmentation de l'amortissement effectif de la cavité discuté précédemment (*cf.* Eq.(E.27)). Autrement dit, il suffit de remplacer  $\lambda$  dans les termes diagonaux  $\kappa \pm i(\phi + \lambda)$  de la matrice  $\mathbf{A}$  par sa nouvelle expression, pour obtenir les nouveaux termes diagonaux correspondant au présent modèle à deux niveaux effectifs. D'autre part, on retrouve bien que le coefficient  $b$  (qui est nul dans le modèle paramétrique) tend vers zéro lorsque  $I^2/\Delta^2$  tend vers zéro (limite paramétrique).

Comme dans la section précédente, on passe de la base des  $a$  et  $a^\dagger$  à la base des quadratures amplitude et phase à l'aide des matrices  $\mathbf{T}^{\text{in}}$  et  $\mathbf{T}^{\text{out}}$  définies par les équations (3.32) et (3.31),

$$\delta\mathbf{c}(\omega) = \mathbf{T}\delta\mathbf{a}(\omega) \quad (\text{E.31})$$

On peut alors exprimer, dans cette nouvelle base, les fluctuations des champs sortants en fonction des champs entrants. On obtient:

$$\delta\mathbf{c}^{\text{out}}(\omega) = \mathbf{T}^{\text{out}} \left[ 2\kappa \mathbf{A}^{-1}(\omega) \mathbf{T}^{\text{in}-1} - \mathbf{I} \right] \mathbf{T}^{\text{in}-1} \delta\mathbf{c}^{\text{in}}(\omega) + \left[ \sqrt{2\kappa} \mathbf{T}^{\text{out}} \mathbf{A}^{-1}(\omega) \right] \mathbf{d}_a(\omega) \quad (\text{E.32})$$

En comparant cette relation avec l'équation (3.33), on peut remarquer que l'on a maintenant un terme supplémentaire du à la contribution des atomes aux fluctuations des champs. Ce nouveau terme de bruit ne peut, bien entendu, que dégrader les corrélations entre les différents champs.

On peut ensuite, exactement comme nous l'avons fait dans le modèle paramétrique, calculer la matrice  $\mathcal{W}(\omega)$  des corrélations entrée-sortie et la matrice  $\mathcal{S}^{\text{out}}(\omega)$  des corrélations des champs en sortie, pour pouvoir calculer les différents critères QND.

Nous avons représenté, sur la figure E.1, des spectres de squeezing de la différence (figure E.1(a)) et de la somme (figure E.1(b)) des deux modes [Poizat 91]. Nous avons comparé, pour des valeurs différentes du désaccord  $\Delta$  à deux photons, les résultats obtenus avec ce modèle à deux niveaux effectifs et le modèle paramétrique, pour un même couplage effectif entre les deux modes ( $g \propto NI/\Delta$ ). On note une dégradation d'ensemble du degré de squeezing lorsqu'on se rapproche de la résonance à deux photons, due à l'augmentation du bruit d'émission spontanée apporté par le niveau du haut. Il faut cependant noter qu'une variation du désaccord  $\Delta$  à deux photons fait également tourner les quadratures, si bien qu'à fréquence nulle, par exemple, le degré de squeezing de l'amplitude peut se trouver amélioré par une diminution de  $\Delta$ . On peut également remarquer que le meilleur squeezing de la différence n'est pas altéré par une augmentation de l'émission spontanée, étant donné que celle-ci concerne deux photons (un par mode), qui sont émis de façon parfaitement corrélée puisque l'étape intermédiaire que constitue le niveau relai n'est pas prise en compte dans ce modèle. Enfin, les prédictions de ce modèle sont très proches du modèle paramétrique pour  $\Delta \geq 100$ .



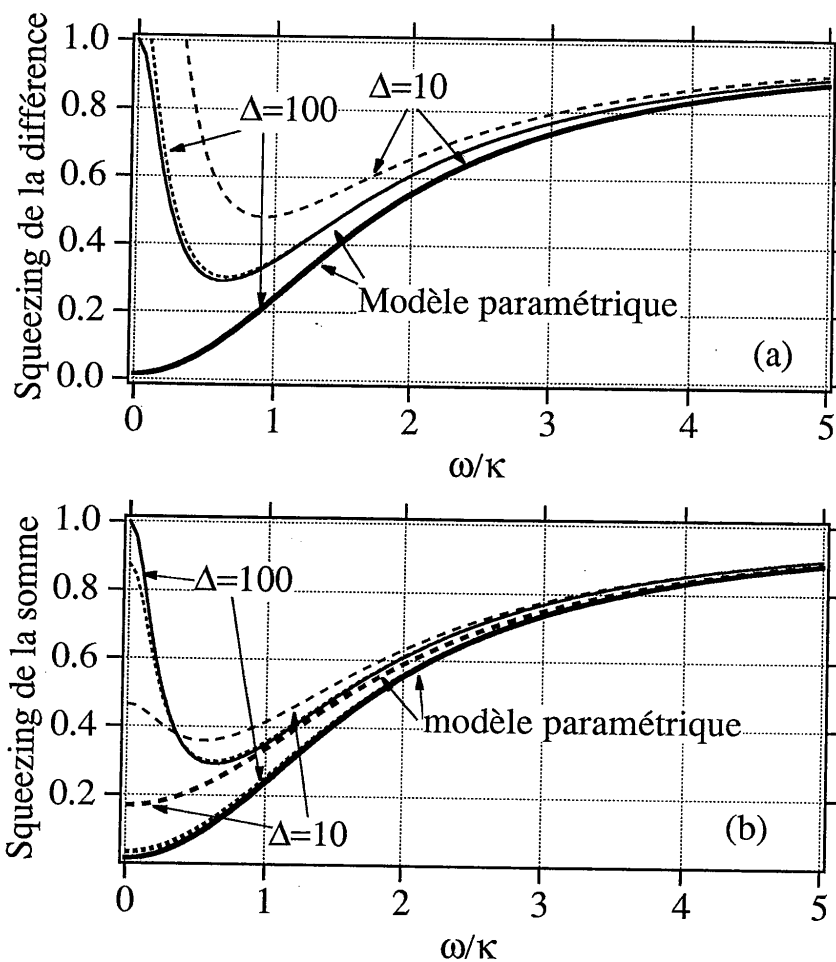


Figure E.1: Spectres de squeezing de la différence (a), et de la somme (b) des deux modes en fonction de la fréquence de bruit  $\omega/\kappa$  normalisée. Sur ces deux courbes, les courbes en trait épais représentent les spectres du meilleur squeezing (quadrature optimale à chaque fréquence), et les courbes en trait fin les spectres du squeezing de l'amplitude. Les courbes en trait plein sont le résultat du modèle paramétrique, les courbes en pointillés serrés ont été obtenues pour  $\Delta = 100$ , et les courbes en pointillés plus espacés pour  $\Delta = 10$ . Lorsqu'on change la valeur de  $\Delta$  une valeur identique du couplage  $\propto NI/\Delta$  est garantie par une compensation adéquate du produit  $NI$ . Les paramètres sont  $\kappa = 7 \times 10^6$ ,  $g = 50$ , et  $N = 5 \times 10^7$ ,  $I = 0.32$  pour  $\Delta = 100$  et  $N = 10^7$ ,  $I = 0.16$  pour  $\Delta = 10$ . Le déphasage  $\Phi$  est pris égal à  $\Phi = 0.2$  pour les spectres de la différence, et  $\Phi = 1.4$  pour la somme. Ces valeurs correspondent à  $\alpha = \pm 0.59$ , et  $\lambda/\kappa = 0.81$  pour le modèle paramétrique.

## Annexe F

### Matrice de corrélation de bruit $G$

La matrice de corrélation de bruit  $G$  se calcule en utilisant les règles de multiplication des opérateurs atomiques individuels (eq.(3.48)), et l'hypothèse d'indépendance du champ du vide vu par des atomes différents, matérialisée par l'équation (3.53). On trouve,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix}
 0 & 2\kappa_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2\kappa_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & (\gamma_2 \langle S_{33} \rangle + \gamma_1 \langle S_{22} \rangle) & -\gamma_2 \langle S_{33} \rangle & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_2 \langle S_{33} \rangle & \gamma_2 \langle S_{33} \rangle & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 \langle S_{12} \rangle & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 \langle S_{33} \rangle & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_2 \langle S_{23} \rangle & \gamma_2 \langle S_{23} \rangle & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 \langle S_{32} \rangle & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_2 \langle S_{13} \rangle & \gamma_2 \langle S_{13} \rangle & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \gamma_1 \langle S_{21} \rangle & \gamma_1 \langle S_{23} \rangle & -\gamma_2 \langle S_{32} \rangle & 0 & -\gamma_2 \langle S_{31} \rangle & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \gamma_2 \langle S_{32} \rangle & 0 & \gamma_2 \langle S_{31} \rangle & 0 & 0 & 0 \\
 \gamma_1 (\langle S_{22} \rangle + \langle S_{11} \rangle) & \gamma_1 \langle S_{13} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \gamma_2 (\langle S_{33} \rangle + \langle S_{22} \rangle) & 0 & \gamma_2 \langle S_{21} \rangle & 0 & 0 & 0 \\
 \gamma_1 \langle S_{31} \rangle & \gamma_1 \langle S_{33} \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \gamma_2 \langle S_{12} \rangle & 0 & (\gamma_1 \langle S_{22} \rangle + \gamma_2 \langle S_{11} \rangle) & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \quad (F.1)$$



## Annexe G

### Exemples de calcul de corrélation à deux temps

On donne ici deux exemples de calcul de corrélation à deux temps dans le cadre de la théorie input-output de Gardiner et Collett [*Gardiner 85*]. Ces corrélations sont utilisées pour le calcul du squeezing à deux modes (Eqs.(3.87)) et des critères QND (Eqs.(3.95),(3.97),(3.100)) dans le modèle complet à trois niveaux. Tous les champs entrant sont pris dans des états cohérents.

#### G.1 Corrélation sortie-sortie

On commence, comme exemple, par le calcul de la corrélation sortie-sortie  $\langle a_s^{out}(\tau)a_m^{out} \rangle$ . On utilise d'abord la condition aux limites (3.15) pour faire apparaître les champs entrants et les champs intra-cavité dont on connaît les corrélations. Celles des champs entrant sont supposées connues, et celles des champs dans la cavité sont données par l'équation (3.78). On écrit,

$$\begin{aligned} \langle a_s^{out}(\tau)a_m^{out} \rangle &= \langle (a_s^{in}(\tau) + \sqrt{2\kappa_s}a_s(\tau))(a_m^{in} + \sqrt{2\kappa_m}a_m) \rangle \\ &= \langle a_s^{in}(\tau)a_m^{in} \rangle + \sqrt{2\kappa_m}\langle a_s^{in}(\tau)a_m \rangle \\ &\quad + \sqrt{2\kappa_s}\langle a_s(\tau)a_m^{in} \rangle + 2\sqrt{\kappa_s\kappa_m}\langle a_s(\tau)a_m \rangle \end{aligned} \quad (G.1)$$

Le premier terme est nul car les deux champs entrants sont pris indépendants. Les deuxième et troisième termes peuvent s'écrire,

$$\begin{aligned} \langle a_s^{in}(\tau)a_m \rangle &= -\langle [a_s^{in}(\tau), a_m] \rangle \\ \langle a_s(\tau)a_m^{in} \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (G.2)$$

puisque les champs intra-cavité sont a priori des fonctions des opérateurs de champ entrant, et que parmi les commutateurs entre les opérateurs de champ entrant, seuls sont non nuls,

$$[a_i^{in}(t), a_j^{in\dagger}(t')] = \delta_{ij}\delta(t-t') \quad (G.3)$$

pour  $i = s, m$ . Mais les champs intra-cavité  $a_i(0)$  ne dépendent pas des champs entrants  $a_i^{in}(\tau)$  lorsque  $\tau > 0$  (qui sont dans leur futur), et des champs sortants

$a_i^{out}(\tau)$  lorsque  $\tau < 0$  (dans leur passé). On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \langle [a_s^{in}(\tau), a_m] \rangle &= \Theta(-\tau) \langle [a_s^{out}(\tau) - \sqrt{2\kappa_s} a_s(\tau), a_m] \rangle \\ &= -\sqrt{2\kappa_s} \Theta(-\tau) \langle [a_s(\tau), a_m] \rangle \end{aligned} \quad (G.4)$$

On a donc finalement

$$\langle a_s^{out}(\tau) a_m^{out} \rangle = 2\sqrt{\kappa_s \kappa_m} \Theta(\tau) \langle a_m a_s(\tau) \rangle, \quad (G.5)$$

qui est bien le résultat donné dans la première équation de (3.100).

## G.2 Corrélation entrée-sortie

On va maintenant donner en exemple le calcul de la corrélation entrée-sortie  $\langle a_i^{out}(\tau) a_j^{in\dagger} \rangle$ . Comme précédemment, on exprime  $a_i^{out}(\tau)$  en fonction de  $a_i^{in}(\tau)$  et de  $a_i(\tau)$  au moyen de la relation (3.15). On obtient alors, en utilisant l'équation (G.3), puis les mêmes astuces que ci-dessus,

$$\begin{aligned} \langle a_i^{out}(\tau) a_j^{in\dagger} \rangle &= \delta_{ij} \delta(\tau) + \sqrt{2\kappa_i} \langle a_i(\tau) a_j^{in\dagger} \rangle \\ &= \delta_{ij} \delta(\tau) + \sqrt{2\kappa_i} \langle [a_i(\tau), a_j^{in\dagger}] \rangle \\ &= \delta_{ij} \delta(\tau) + \sqrt{2\kappa_i} \Theta(\tau) \langle [a_i(\tau), a_j^{out\dagger} - \sqrt{2\kappa_j} a_j^\dagger] \rangle \\ &= \delta_{ij} \delta(\tau) - 2\sqrt{\kappa_i \kappa_j} \Theta(\tau) \langle [a_i(\tau), a_j^\dagger] \rangle \end{aligned} \quad (G.6)$$

ce qui redonne bien la dernière équation de (3.95) et de (3.97).

Toutes les autres corrélations sont calculées sur le même principe.

## Annexe H

### Les détecteurs

Dans des expériences dont le but est de voir, puis de contrôler le bruit de photon de différents faisceaux laser, un soin tout particulier se doit d'être porté aux caractéristiques de bruit des photodétecteurs et du premier étage d'amplification des signaux, dans la bande de fréquences où les mesures de bruit sont effectuées.

Lorsqu'on mesure des flux de photons relativement élevés, on utilise des photodiodes plutôt que des photomultiplicateurs. La qualité première d'une photodiode utilisée pour mesurer les fluctuations quantiques de la lumière est d'avoir une efficacité quantique (c'est-à-dire un taux de conversion photon-électron) aussi proche de 1 que possible. Pour les longueurs d'onde qui nous concernent, on utilise des photodiodes en silicium. Il faut ensuite que celles-ci soit suffisamment rapides pour permettre d'observer le bruit aux fréquences qui nous intéressent (de l'ordre du MHz), ce qui conduit à utiliser des photodiodes de type  $p-i-n$  caractérisées par de faibles capacités  $C_d$  (figure H.1) et donc un temps de montée court, lorsqu'elles sont polarisées en inverse. Il faut enfin que le bruit propre de la photodiode soit aussi faible que possible, c'est-à-dire que le courant de bruit  $i_b$  soit le plus faible possible.

Pour l'expérience utilisant le jet de sodium, les fréquences de mesure du bruit sont de l'ordre de 10 MHz, afin d'être au-delà du bruit technique des lasers qui ne devient négligeable qu'au-dessus de 3 MHz. Notre choix s'est porté sur le modèle Centronic BPX 65.

Dans l'expérience utilisant les diodes électro-luminescentes, il fallait une photodiode de grande surface ( $60 \text{ mm}^2$ ) pour des fréquences de mesure de bruit de l'ordre du MHz. De plus, les photodiodes étant portées à des températures de l'ordre de 80K, une bonne résistance mécanique due aux contraintes thermiques est indispensable. Nous avons finalement utilisé le modèle EG&G C30809E.

Une précaution importante pour une bonne utilisation des photodiodes est de les éclairer le plus uniformément possible, afin de s'assurer qu'il n'y ait pas d'effet de saturation locale, tout en évitant d'éclairer l'anneau de garde (lorsqu'il y en a un), lequel a une capacité plus importante que celle de la surface sensible de la photodiode elle-même, et contribue ainsi au courant moyen sans pour autant détecter les fluctuations de la lumière, ce qui revient à une saturation effective. La zone de linéarité d'une photodiode correspond à la zone pour laquelle la puissance du bruit de photon est bien proportionnelle à l'intensité moyenne de la lumière,

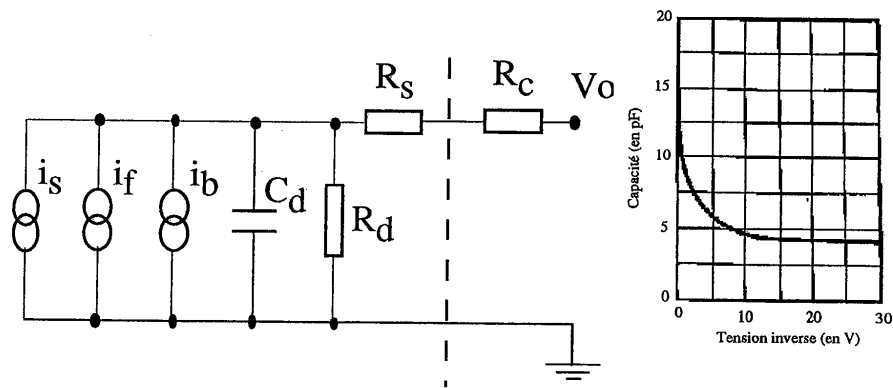


Figure H.1: (a) Schéma équivalent d'une photodiode.  $i_s$  est le courant signal généré par la lumière éclairant la photodiode.  $i_f$  est le courant de fuite qui traverse la photodiode quand elle est polarisée en inverse (appelé aussi courant d'obscurité).  $i_b$  est le courant de bruit.  $R_s$  est la résistance série (faible en général),  $R_d$  la résistance de shunt (plusieurs  $M\Omega$ ), et  $C_d$  est la capacité de la photodiode.  $R_c$  est le résistance de charge.  $(R_s + R_c)C_d$  détermine la coupure haute de l'ensemble. (b) Variation de la capacité de la photodiode BPX 65 (Centronic), en fonction de la tension de polarisation inverse.

comme cela doit être le cas pour une statistique Poissonnienne. Le courant de saturation pour la photodiode BPX 65, éclairée correctement, a été mesuré à 0.6 mA.

Il nous faut ensuite amplifier le signal de bruit de photon dans la bande de fréquence utile en rajoutant le minimum de bruits parasites. Les deux principales sources d'excès de bruit sont le bruit thermique de la résistance de charge de la photodiode, et le bruit propre de l'amplificateur. Un schéma de principe du montage est présenté sur la figure H.2. L'amplificateur bas-bruit utilisé est le modèle AH0013 de la marque OEI. La quantité amplifiée est la partie alternative de la tension  $R_c i$ . Le bruit thermique, en tension, de cette résistance  $R_c$  est donné par la formule de Johnson-Nyquist:

$$v_{th} = \sqrt{4kTBR_c} \quad (\text{H.1})$$

dans laquelle  $k$  est la constante de Boltzman,  $T$  la température et  $B$  la bande d'analyse. Il croît donc en  $\sqrt{R_c}$ , alors que la tension aux bornes de  $R_c$  croît en  $R_c$ . On a donc intérêt à prendre  $R_c$  le plus grand possible pour minimiser la contribution relative du bruit thermique. Mais si  $R_c$  est trop grand, la puissance dissipée dans cette résistance devient élevée, et la chute de tension à ses bornes en continu, trop importante, pourra dépolariser la photodiode. C'est donc l'intensité en continu du courant débité par la photodiode qui va déterminer le choix de  $R_c$ .

Un schéma de principe du montage amplificateur est donné sur la figure H.2. La résistance  $R_g$  fixe le gain  $g$  de l'amplificateur, qui est donné par la formule  $g = \delta R_g$  (avec  $R_g$  en  $k\Omega$ ). Le capacité  $C_b$  fixe, quant à elle fixe la coupure basse de l'ampli par  $1.6 \times 10^{-4}/C_b$  (avec  $C_b$  en pF). La coupure haute est donnée par le produit gain-bande qui est de 100 MHz pour l'amplificateur utilisé.



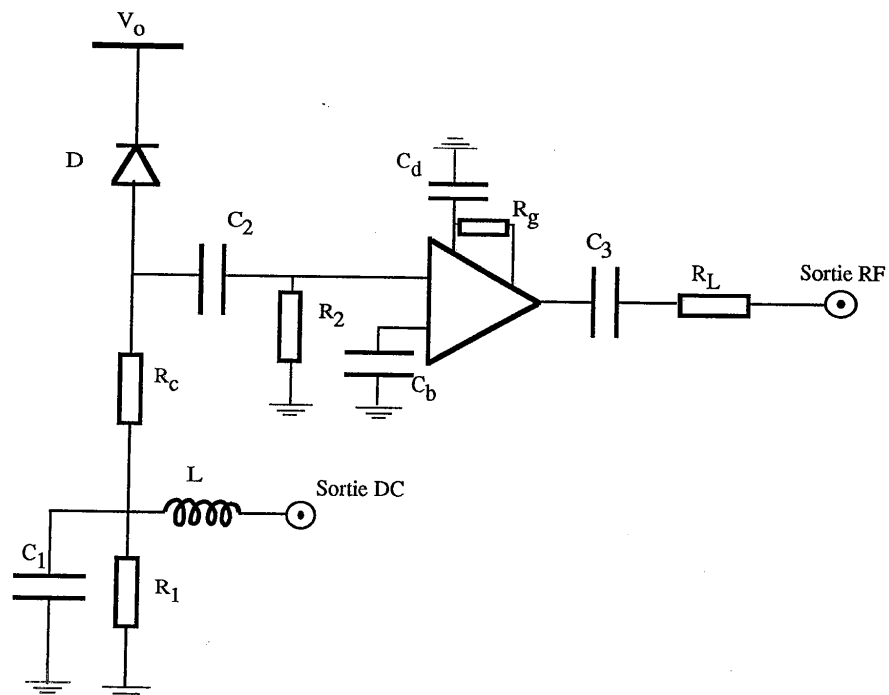


Figure H.2: Schéma de principe du montage amplificateur pour les photodiodes. Pour la photodiode BPX 65 utilisée dans l'expérience avec le jet atomique de sodium, les valeurs sont les suivantes :  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_c = 2.2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_g = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_L = 50 \text{ }\Omega$ ,  $C_1 = 1 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 10 \text{ pF}$ ,  $C_3 = 1 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_b = 100 \text{ pF}$ ,  $C_d = 1 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $L = 1 \text{ }\mu\text{H}$ . Les valeurs utilisées dans l'expérience avec les LED, sont données dans le chapitre 5 correspondant.

# Annexe I

## Bruit thermique

Nous explicitons, dans cette annexe, les ordres de grandeur relatifs du bruit thermique et du bruit quantique dans une résistance.

La densité spectrale du bruit en courant, à la fréquence  $\nu$  généré par une résistance  $R$ , à la température  $T$ , est donné par Callen et Welton [Callen 51] :

$$\langle \delta i_{th}^2 \rangle = \frac{4h\nu}{R} \left( \frac{1}{\exp \frac{h\nu}{k_B T} - 1} + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{I.1})$$

où  $h$  est la constante de Planck, et  $k_B$  la constante de Boltzmann. Le premier terme de la parenthèse représente le bruit thermique, tandis que le deuxième terme (constant) décrit les fluctuations quantiques du courant. On peut visualiser les variations de cette fonction suivant la température  $T$ , pour différentes fréquences d'analyse sur la figure I.2. Lorsque  $h\nu \ll k_B T$ , la contribution du bruit quantique est négligeable devant celle du bruit thermique. Les fluctuations du courant sont alors des fluctuations thermiques, classiques, dont la densité spectrale est donnée par :

$$\langle \delta i_{th}^2 \rangle = \frac{4k_B T}{R}. \quad (\text{I.2})$$

On retrouve ainsi la formule du bruit Johnson-Nyquist [Johnson 28][Nyquist 28].

Le bruit thermique étant un bruit classique, les fluctuations thermiques  $\delta i_1$ ,  $\delta i_2$  vérifient les mêmes lois de Kirchhoff que les valeurs moyennes, *i.e.*  $\delta i = \delta i_1 + \delta i_2$  (*cf.* figure I.1). Les fluctuations  $\delta i_1$ ,  $\delta i_2$  sur les deux voies sont alors parfaitement corrélées. Il ne s'introduit donc pas de bruit de partition, contrairement à ce qui se passe pour une onde électromagnétique arrivant sur une lame séparatrice, où les photons sont aiguillés aléatoirement dans les deux voies de sortie, introduisant de ce fait un bruit sur ces deux voies.

Les conditions typiques de température de notre expérience, sont  $T = 100\text{K}$  pour les composants situés dans le cryostat (LEDs et photodiodes), et  $T = 290\text{K}$  pour tous les circuits électroniques. La fréquence d'analyse est de l'ordre de  $200\text{kHz}$ , si bien que le bruit thermique est, comme on peut le voir sur la figure I.2, au moins  $70\text{dB}$  au-dessus du bruit quantique, que l'on peut donc négliger sans états d'âme.

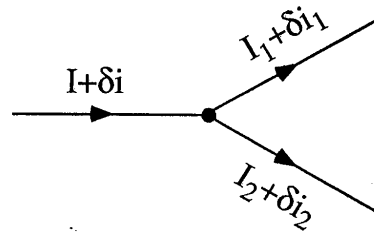


Figure I.1: Partage des fluctuations de courant à un noeud de courant.

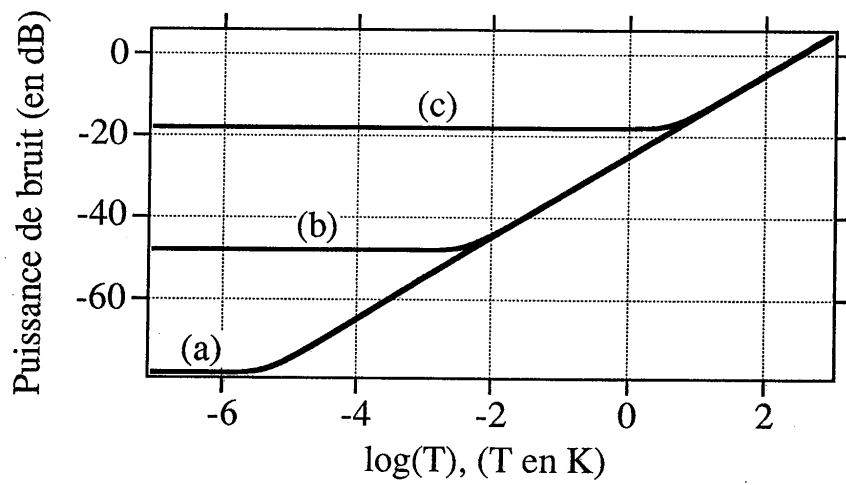


Figure I.2: Représentation de la puissance de bruit en courant en dB,  $10 \log(\langle \delta i_{th}^2 \rangle)$  généré par une résistance  $R = 100\Omega$ , en fonction de la température  $T$ , pour une fréquence d'analyse de 200kHz (courbe(a)), de 200MHz (courbe (b)), et de 200GHz (courbe(c)). Le niveau de référence (0 dB) correspond au niveau du bruit thermique à 300 K.

## Annexe J

### Chaîne d'amplificateurs

On se propose dans cette annexe de calculer le bruit équivalent ramené à l'entrée d'une chaîne d'amplificateurs. On considère deux amplificateurs, connectés en série, ayant respectivement un gain  $g_{1,2}$ , et un bruit équivalent ramené à l'entrée  $N_{1,2}^{eq}$  à la fréquence  $\omega$  de travail.

On note  $V_o$  la variance du signal d'entrée à  $\omega$ , et  $V_1$  la variance après le premier amplificateur, et  $V_2$  celle après le second. Un schéma de principe est représenté sur la figure J.1. D'après la définition des bruits équivalents (*cf.* section 2.2.3), on a, pour chaque amplificateur

$$\begin{aligned} V_1 &= g_1^2(V_o + N_1^{eq}) \\ V_2 &= g_2^2(V_1 + N_2^{eq}). \end{aligned} \quad (J.1)$$

On obtient alors immédiatement, en exprimant  $V_2$  en fonction de  $V_o$ ,

$$V_2 = g_1^2 g_2^2 \left( V_o + N_1^{eq} + \frac{N_2^{eq}}{g_1^2} \right). \quad (J.2)$$

Le gain de la chaîne ainsi constituée est donc le produit des gains. Le bruit équivalent ramené à l'entrée  $N^{eq}$  de l'ensemble s'écrit

$$N^{eq} = N_1^{eq} + \frac{N_2^{eq}}{g_1^2}. \quad (J.3)$$

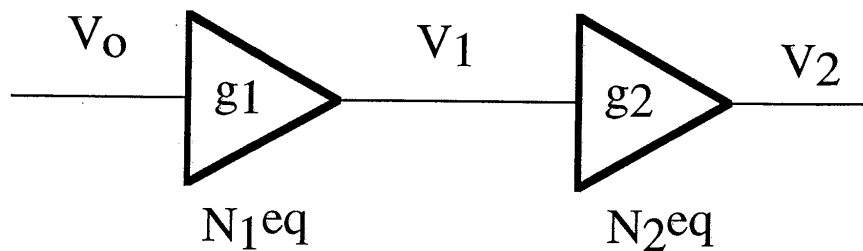


Figure J.1: Chaîne d'amplificateurs

La contribution du deuxième amplificateur au bruit équivalent ramené à l'entrée de l'ensemble, est donc l'addition du bruit équivalent propre de ce deuxième amplificateur divisé par le gain du premier amplificateur.

Cette propriété se généralise facilement à une chaîne composée d'un nombre quelconque d'amplificateurs, et s'énonce de la façon suivante:

-Le gain  $g$  d'une chaîne de  $n$  amplificateurs est égal au produit des gains de chaque élément de cette chaîne,

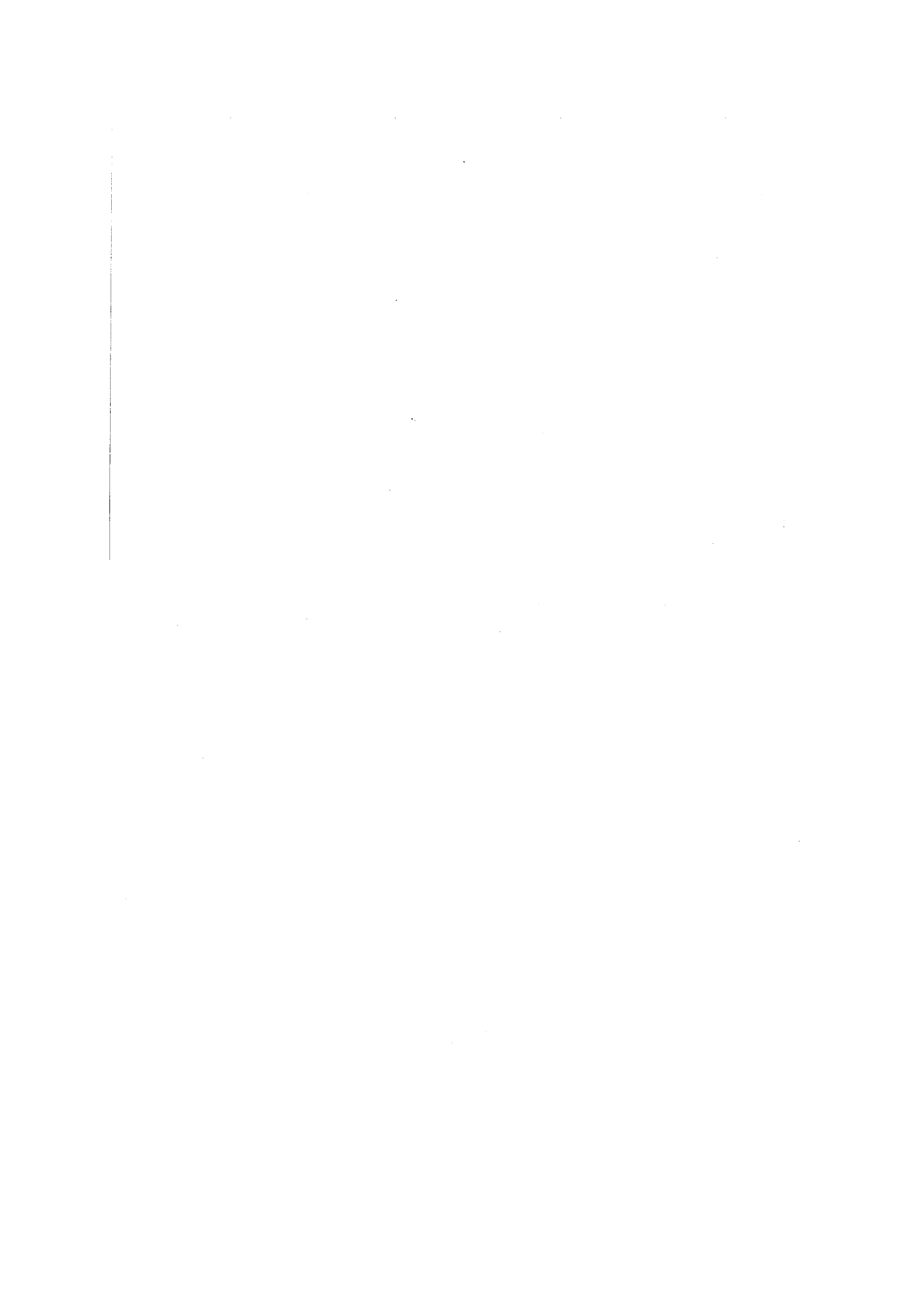
$$g = \prod_{i=1}^n g_i. \quad (\text{J.4})$$

-Chaque élément de la chaîne contribue au bruit équivalent ramené à l'entrée de l'ensemble par l'addition de son propre bruit équivalent divisé par le gain de la chaîne à son amont,

$$N^{eq} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^{eq}}{\left(\prod_{j=1}^{i-1} g_j^2\right)} \quad (\text{J.5})$$

Cette propriété est en fait bien connue en électronique, où l'on sait bien que le bruit et le gain du premier étage d'une chaîne d'amplificateurs (étage de préamplification) déterminent de façon cruciale le bruit de toute la chaîne.

## **Bibliographie**



## Bibliographie

- [Agrawal 80] G. P. Agrawal, et C. Flytzanis, Phys. Rev. Lett. **44** 1058 (1980).
- [Alsing 88] P. Alsing, G.J.Milburn, et D.F.Walls Phys. Rev. A **37** 2970 (1988).
- [Aspect 82] A. Aspect, P. Grangier, et G. Roger, Phys. Rev. Lett **49**, 91 (1982).
- [Bachor 88] H. A. Bachor, M. D. Levenson, D. F. Walls, S. H. Perlmutter, et R. M. Shelby Phys. Rev. A **38**, 180 (1988).
- [Bachor 89] H. A. Bachor, et P. T. H. Fisk, Applied Phys. B **B49**, 291 (1989).
- [Bachor 92] H.-A. Bachor, P. Rottengatter, et C. M. Savage, Appl. Phys. B **55**, 258 (1992).
- [Blockley 90] C. A. Blockley, et D. F. Walls, Optics Comm. **79**, 241 (1990).
- [Boone 89] A. W. Boone, et S. Swain Quantum Opt. **1**, 27 (1989).
- [Braginsky 74] V. B. Braginsky et Yu. I. Vorontsov, Usp. Fiz. Nauk **114**, 41 (1974) [Sov. Phys. Usp. **17**, 644 (1975)].
- [Braginsky 77] V. B. Braginsky, Yu. I. Vorontsov, et F. Ya. Khalili, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **73**, 1340 (1977) [Sov. Phys. JETP **46**, 705 (1977)].
- [Braginsky 80] V. B. Braginsky, Y. L. Vorontsov, et K. S. Thorne, Science, **209**, 547 (1980).
- [Braginsky 92] V. B. Braginsky et F. Y. Khalili, *Quantum Measurement*, K. P. Thorne ed., (Cambridge University Press,1992).
- [Brillet 85a] A. Brillet, T. Damour, et Ph. Tourenc, Ann. Phys. Fr. **10**, 201 (1985).
- [Brillet 85b] A. Brillet, Ann. Phys. Fr. **10**, 219 (1985).
- [Brune 91] M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J.M. Raimond, et N. Zagury, Phys. Rev. Lett. **65**, 976 (1990).



- [Brune 92] M. Brune, L. Davidovitch, S. Haroche, et J.M. Raimond, *Phys. Rev. A* **45**, 8190 (1992).
- [Callen 51] H. B. Callen et T. A. Welton, *Phys. Rev. A*, **83**, 34 (1951).
- [Capasso 86] F. Capasso et M. C. Teich, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1417 (1986).
- [Caves 80] C. M. Caves, K. S. Thorne, R. W. P. Drever, V. D. Sandberg, et M. Zimmermann, *Rev. Mod. Phys.* **52** 341 (1980).
- [Caves 82] C. M. Caves, *Phys. Rev. D* **26**, 1817 (1982).
- [Cohen 77] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, et F. Laloë, *Mécanique Quantique*, Tome 1, Hermann (1977).
- [Cohen 88] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, et G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, InterEditions-Editions du CNRS (Paris) (1988).
- [Collett 84] M. J. Collett, et C. W. Gardiner, *Phys. Rev. A* **30**, 1386 (1984).
- [Collett 85] M. J. Collett, et D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **32**, 2887 (1985).
- [Courty 90] J. M. Courty, Thèse de l'Université Paris VI, (non publiée), (1990).
- [Courty 91] J. M. Courty, P. Grangier, L. Hilico, et S. Reynaud, *Optics Communications* **83**, 251 (1991).
- [Courty 92] J. M. Courty, et S. Reynaud, *Phys. Rev. A* **46**, 2766 (1992).
- [Drummond 80] P. D. Drummond et C. W. Gardiner, *J. Phys. A* **13**, 2353 (1980).
- [Drummond 81] P. D. Drummond et D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **23**, 2563 (1981).
- [Edwards 91] P. J. Edwards, *Int. J. Optoelectronics* **6**, 23 (1991).
- [Edwards 92] P. J. Edwards et G. H. Pollard, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1757 (1992).
- [Feynman 79] R. P. Feynman, Leighton, et M. Sands *Le cours de physique de Feynman*, Vol 3, Interditions (1979).
- [Friberg 92] S. R. Friberg, S. Machida, et Y. Yamamoto, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3165 (1992).
- [Gardiner 85] C. W. Gardiner, et M. J. Collett, *Phys. Rev. A* **31**, 3761 (1985).
- [Gardiner 91] C. W. Gardiner, *Quantum noise* (Springer Verlag, Berlin, 1991).

- [Gibbs 85] H. M. Gibbs *Optical Bistability: Controlling light with Light* Academic Press (1985).
- [Glauber 65] R. J. Glauber, in *Ecole d'Eté des Houches 1964*, C. De Witt, A. Blandin, et C. Cohen-Tannoudji eds., (Gordon and Breach, 1965).
- [Goobar 93] E. Goobar, A. Karlsson, G. Björk, et P.-J. Rigole, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 437 (1993).
- [Grangier 89a] P. Grangier, et J. F. Roch, *Quantum Opt.* **1**, 17 (1989).
- [Grangier 89b] P. Grangier, J. F. Roch, et S. Reynaud, *Optics Comm.* **72**, 387 (1989).
- [Grangier 91a] P. Grangier, et J. F. Roch, *Opt. Commun.* **83**, 269 (1991).
- [Grangier 91b] P. Grangier, J. F. Roch, et G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1418 (1991).
- [Grangier 92a] P. Grangier, J. M. Courty, et S. Reynaud, *Opt. Comm.* **89** 99 (1992).
- [Grangier 92b] P. Grangier, J. F. Roch, G. Roger, L. A. Lugiato, E. M. Pessina, G. Scandroglio, et P. Galatola, *Phys. Rev. A.* **46**, 2735 (1992).
- [Gheri 93] K. M. Gheri *PhD thesis*, University of Auckland (NZ), non publiée.
- [Gheri 92] K. M. Gheri, P. Grangier, J. Ph. Poizat, et D. F. Walls, *Phys. Rev. A.* **46**, 4276 (1992).
- [Hartle 68] J. B. Hartle, *Am. J. Phys.* **36**, 704 (1968).
- [Heidmann 87] A. Heidmann, R. J. Horowicz, S. Reynaud, E. Giacobino, C. Fabre, et G. Camy, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2555 (1987).
- [Holland 90] M. J. Holland, M. J. Collett, et D. F. Walls; M. D. Levenson, *Phys. Rev. A* **42**, 2995 (1990).
- [Holland 91] M. J. Holland, D. F. Walls, et P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1716 (1991).
- [Imoto 85] N. Imoto, H. A. Haus, et Y. Yamamoto, *Phys. Rev. A* **32**, 2287 (1985).
- [Imoto 89] N. Imoto, et S. Saito, *Phys. Rev. A*, **39** 675 (1989).
- [Johnson 28] J. B. Johnson, *Phys. Rev.* **32**, 97 (1928).
- [Kimble 90] H. J. Kimble, dans *Les Houches (1990)*, 543, North Holland Ed.

- [Kimble 77] H. J. Kimble, M. Dagenais, et L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 691 (1977).
- [Koch 82] R. H. Koch, D. J. Van Harlingen, et J. Clarke, *Phys. Rev. B* **26** 74 (1982).
- [Kubo 66] R. Kubo, *Reports in Progress in Physics*, **29**, 255, (1966).
- [LaPorta 89] A. La Porta, R. E. Slusher, et B. Yurke *Phys Rev Lett* **62** 28 (1989).
- [Levenson 86] M. D. Levenson, R. M. Shelby, M. Reid, et D. F. Walls, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2473 (1986).
- [Levenson 91] M. D. Levenson, M. J. Holland, D. F. Walls, P. J. Manson, P. T. H. Fisk, et H. A. Bachor, *Phys. Rev. A* **44**, 2023 (1991).
- [Levenson 93] J. A. Levenson, I. Abram, T. Rivera, P. Fayolle, J. C. Garreau, et P. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 267 (1993).
- [Loudon 80] R. Loudon, *Rep. Prog. Phys.* **43**, 913 (1980).
- [Lugiato 90] L. A. Lugiato et L. M. Narducci, dans *Les Houches* (1990), 941, North Holland Ed.
- [Machida 86] S. Machida et Y. Yamamoto, *Optics Comm.* **57**, 290 (1986).
- [Machida 87] S. Machida, Y. Yamamoto, et Y. Itaya, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1000 (1987).
- [Matinaga 93] F. M. Matinaga, A. Karlsson, S. Machida, Y. Yamamoto, T. Suzuki, Y. Kadota, et M. Ikeda, *Appl. Phys. Lett.* **62**, 443 (1993).
- [Milburn 83] G. J. Milburn, et D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **28**, 2055 (1983).
- [Nyquist 28] H. Nyquist, *Phys. Rev.* **32**, 110 (1928).
- [Poizat 91] J. P. Poizat, M. J. Collett, et D. F. Walls *Opt. Comm.* **84**, 409 (1991).
- [Poizat 92] J. Ph. Poizat, M. J. Collett, et D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **45**, 5171 (1992).
- [Poizat 93] J. Ph. Poizat et P. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 271 (1993).
- [Reid 88] M. D. Reid, *Phys. Rev. A* **37**, 4792 (1988).
- [Reynaud 90] S. Reynaud, *Ann. Phys. (Paris)*, **15**, 63, (1990).
- [Richardson 91] W. H. Richardson, S. Machida, et Y. Yamamoto, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2867 (1991).

- [Roch 92a] J. F. Roch, Thèse de l'Université Paris XI, (non publiée), (1992).
- [Roch 92b] J. F. Roch, G. Roger, P. Grangier, J. M. Courty, et S. Reynaud, *Applied Phys. B* **55**, 291 (1992).
- [Schnitzer 93] I. Schnitzer, E. Yablonovitch, C. Caneau, et T. J. Gmitter, *Appl. Phys. Lett.* **62** 131 (1993).
- [Shapiro 80] J. H. Shapiro, *Opt. Lett* **5** 351 (1980).
- [Shelby 87] R. M. Shelby et M. D. Levenson *Opt. Comm.* **64** 553 (1987).
- [Slusher 85] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz, et J. F. Valley, *Phys. Rev. Lett.* **55** 2409 (1985)
- [Solvay 92] Compte-rendu du congrès de Solvay, Quantum Optics, *Phys. Rep.* **219** 77-348 (1992),
- [special 87a] Special issue on squeezed light, *J. Opt. Soc. Am. B*, **4** 1450 (1987).
- [special 87b] Special issue on squeezed light, *J. Mod. Optics*, **34** 709 (1987),
- [special 92] Numéro spécial: Quantum noise reduction in optical system - Experiments, *Appl. Phys. B* **55** 189-303 (1992).
- [Tapster 87] P. R. Tapster, J. G. Rarity, et J. S. Satchell, *Europhys. Lett.* **4**, 293 (1987).
- [Teich 83] M. C. Teich et B. E. A. Saleh, *J. Opt. Soc. Am B* **2**, 275 (1985).
- [Teich 83] M. C. Teich, B. E. A. Saleh, et D. Stoler, *Optics Comm.* **46**, 244 (1983).
- [Thorne 78] K. S. Thorne, R. W. P. Drever, C. M. Caves, M. Zimmermann, et V. D. Sandberg, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 667 (1978)
- [Unruh 79] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **19** 2888 (1979).
- [von Neumann 32] J. von Neumann, *Die Mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin, (1932). Traduction en anglais, *Mathematical foundations of Quantum mechanics*, Princeton University Press (1955).
- [Walls 83] D. F. Walls, *Nature* **306**, 141 (1983).
- [Wheeler 83] *Quantum theory and measurement*, J. A. Wheeler et W. H. Zurek Eds., Princeton University Press (1983).
- [Wigner 71] E. Wigner, *Foundations of Quantum Mechanics*, Edité par B. d'Espagnat, Academic Press, (1971).

- [Yablonovitch 87] E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987).
- [Yablonovitch 91a] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, et K. M. Leung, Phys. Rev. Lett. **67**, 2295 (1991).
- [Yablonovitch 91b] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, R. D. Meade, A. M. Rappe, K. D. Brommer, et J. D. Joannopoulos, Phys. Rev. Lett. **67**, 3380 (1991).
- [Yamamoto 90] Y. Yamamoto, The Transaction of the IEICE, **E73**, 1598 (1990).
- [Yamamoto 86] Y. Yamamoto, S. Machida, et O. Nilsson, Phys. Rev. A **34**, 4025 (1986).
- [Yuen 86] H. P. Yuen, Phys. Rev. Lett. **56**, 2176 (1986).
- [Yurke 85] B. Yurke, J. Opt. Soc. Am. B **2**, 732 (1985).

## Résumé

Le sujet de ce mémoire est l'étude théorique et la réalisation expérimentale des mesures quantiques non-destructives (QND) dans le domaine optique.

L'objectif d'un dispositif de mesure QND est de contrôler l'action en retour, imposée par la mécanique quantique, qui se produit sur un système soumis à une mesure. Il est, en effet, possible de rejeter cette perturbation entièrement sur l'observable complémentaire de celle mesurée, laissant cette dernière inchangée. Nous présentons ici, de manière détaillée, un ensemble de critères quantitatifs permettant d'évaluer les performances d'un dispositif mesurant l'intensité d'un faisceau lumineux. Ces critères permettent en particulier de séparer clairement des domaines "classique" et "quantique" de fonctionnement d'un tel dispositif.

La première expérience réalisée utilise le couplage par effet Kerr croisé de deux faisceaux laser dans un milieu non-linéaire. Ce milieu est composé d'un jet atomique de sodium placé dans une cavité optique doublement résonnante. La structure à trois niveaux en échelle que nous avons choisie permet de coupler l'intensité du faisceau signal à la phase du faisceau de mesure. Nous avons effectué une analyse théorique complète des propriétés de bruit quantique d'un tel système. Nous avons identifié un régime de paramètres, basé sur des effets de déplacement lumineux, pour lequel il existe un transfert efficace d'information du faisceau incident vers la voie de mesure, sans dégradation appréciable du signal. Ces prévisions théoriques ont ensuite été vérifiées dans notre expérience.

Nous présentons également une deuxième expérience utilisant la détection puis la réémission de la lumière par des composants optoélectroniques à semi-conducteur. Nous montrons que lorsque les taux de conversion photon-électron pour les photodiodes et électron-photon pour les diodes électro-luminescentes sont proches de l'unité, ce dispositif permet de mesurer puis de recréer les fluctuations quantiques du faisceau incident. La démonstration de principe que nous avons réalisée laisse présager des applications possibles dans le domaine des réseaux de télécommunication optique.

## Mots Clés

Optique quantique  
Mesure quantique  
Bruit de photon  
Équations de Langevin  
Atome de sodium  
Télécommunications optiques

