



HAL
open science

Modélisation et caractérisation de réseaux holographiques ; étude de composants optiques holographiques en gélatine bichromatée

Nicolas Chateau

► **To cite this version:**

Nicolas Chateau. Modélisation et caractérisation de réseaux holographiques ; étude de composants optiques holographiques en gélatine bichromatée. Optique [physics.optics]. Université Paris Sud - Paris XI, 1993. Français. NNT : . pastel-00715993

HAL Id: pastel-00715993

<https://pastel.hal.science/pastel-00715993>

Submitted on 9 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Orsay
n° d'ordre

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée pour obtenir
le titre de DOCTEUR EN SCIENCE
par

Nicolas CHATEAU

Sujet:

**Modélisation et caractérisation de réseaux holographiques ;
étude de composants optiques holographiques en gélatine
bichromatée.**

A soutenir le 21 juillet 1993, devant la commission d'examen composée de:

M. S. Lowenthal	Président
M. D. Maystre	Rapporteur
M. A. Walker	Rapporteur
M. P. Chavel	Examineur
M. D. J. Lougnot	Examineur
M. J. Taboury	Examineur

ABSTRACT

In modern optical systems, the importance of holographic elements is still increasing. Among available holographic materials, dichromated gelatin stands out because of the very high quality holograms obtained.

The current thesis describes the development of techniques for fabrication and characterization of dichromated gelatin holograms. The interpretation of measurements is based on a thorough modelling of diffraction by periodic structures. A new solving method with improved numerical stability is proposed for the coupled-wave theory. Moreover, the theory of grating diffraction is extended to important cases of grating replay using quasi-monochromatic light.

The experimental set-ups allowed the realisation of four new types of holograms : grating for temporal compression of ultra-short pulses, computer generated hologram for laser beam splitting and shaping, holographic lens for collimating an infrared laser diode, and in-line hologram for global duplication of compact-discs.

Je remercie le Professeur C.Imbert de m'avoir accueilli dans les laboratoires de l'Institut d'Optique, et Monsieur C.Deverdun d'avoir financé ces travaux dans le cadre d'une convention CIFRE avec la société COHERENT .

J'exprime ma plus vive reconnaissance à Monsieur le Professeur S.Lowenthal, qui m'a accueilli dans son groupe de Physique des Images, et qui a accepté de quitter sa Normandie pour venir présider le jury de ma thèse.

Messieurs les Professeurs A.Walker et D.Maystre ont bien voulu juger ce mémoire. Je les remercie de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je remercie le Professeur D.J.Lougnot, qui a accepté de faire partie du jury. Notre collaboration sur l'étude des propriétés holographiques des photopolymères m'a beaucoup apporté, et j'espère que nos échanges à propos de ces matériaux se poursuivront.

Pierre Chavel, malgré un emploi du temps très chargé, s'est toujours rendu disponible lorsque je lui ai demandé conseil: les discussions que nous avons eues ont grandement aidé l'avancement de ma recherche. Je lui exprime toute ma reconnaissance.

Jean Taboury a dirigé, pendant presque trois ans, mes travaux. Je le remercie de la confiance qu'il m'a accordée.

Gisèle Roger, Madame Allain, Messieurs Chauvineau, Marioges, Mulot et Bernstein m'ont apporté une aide efficace dans diverses circonstances. Je les en remercie, ainsi que les membres de l'atelier d'optique et de l'atelier de mécanique de l'IOTA. L'encadrement des TP à l'ESO restera pour moi, grâce à Marithé et au véritable Thierry, un excellent souvenir.

Je remercie Monsieur Liégeois (X-IAL) de nous avoir fourni plusieurs plaques de gélatine sur support en silice, et Monsieur Mainfray (CEA Saclay) pour les tests de tenue au flux des hologrammes.

J'ai grandement bénéficié de la compétence de Jean-Paul Hugonin, mathématicien et physicien. Je le remercie de son aide fructueuse. Daniel Phalippou a supervisé l'installation de la salle blanche et en a sans cesse contrôlé le bon fonctionnement. Je le remercie d'avoir, avec autant de vigueur, entretenu un espace indispensable à la réalisation d'hologrammes de bonne qualité. Je remercie Jean-Claude Saget, tant pour son aide expérimentale dans la fabrication et la caractérisation des hologrammes que pour ses talents de photographe. Merci à Nathalie et à Madame Delmotte qui m'ont aidé à réaliser ce tapuscrit. Mes remerciements vont à tous les membres du groupe Physique des Images, anciens ou nouveaux-venus, grâce auxquels j'ai travaillé dans une ambiance chaleureuse et sympathique. Je remercie particulièrement Philippe d'avoir épousé Dominique, Line et Denis

de l'avoir laissé faire, Nicole d'avoir acheté un bateau, Madeleine d'avoir appris la poterie, Iyad d'avoir vaincu le bureau de la Main-d'Œuvre Etrangère, Jan d'avoir troqué sa Wachtsburg contre un boeuf, Dominique Baude d'avoir autant d'énergie, mes parents et mon frère en général, et enfin Monsieur et Madame Dentan d'avoir eu trois filles, surtout Véronique.

TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS	13
CHAPITRE I - FABRICATION D'HOLOGRAMMES EN GELATINE	
BICHROMATEE	19
A - De la photogravure à l'holographie	21
B - La gélatine: généralités et propriétés	22
B.1 - Obtention à partir du collagène	22
B.2 - Rappels sur la constitution chimique de la gélatine	23
B.3 - Structure de la gélatine	23
B.4 - Propriétés physiques	25
B.5 - Action photosensible de l'ion bichromate.....	26
C - Préparation du support holographique	28
C.1 - Adaptation de plaques photographiques du commerce	28
C.2 - Préparation directe de couches de gélatine.....	29
C.3 - Tannage	31
C.4 - Sensibilisation.....	32
D - Enregistrement des hologrammes	33
D.1 - Longueur d'onde d'exposition.....	33
D.2 - Energie d'exposition	34
D.3 - Montage interférométrique pour l'enregistrement d'hologrammes épais	36
D.4 - Montage de copie contact pour l'enregistrement d'hologrammes minces.....	43
D.5 - Constitution de l'image latente d'un hologramme	43
E - Développement et traitements ultérieurs	44
E.1 - Développement	44
E.2 - Redéveloppement.....	48
E.2 - Cuisson.....	48
E.3 - Protection des hologrammes.....	49
F - Récapitulation: influence de divers paramètres	50
F.1 - Dureté initiale.....	50
F.2 - Fréquence spatiale.....	50
F.3 - Epaisseur du film	50
F.4 - Humidité relative.....	51
F.5 - Température	51
F.6 - pH.....	51
F.7 - Durée des bains	52
G - Processus détaillé utilisant les plaques Kodak 649F	52

CHAPITRE II - CARACTERISATION DE RESEAUX EN GELATINE

BICHROMATEE	55
A - Introduction -----	57
B - Réseaux épais holographiques -----	58
B.1 - Généralités sur les réseaux épais.....	58
B.2 - Réponses angulaires.....	66
B.3 - Spectre de l'efficacité de diffraction sous Bragg.....	72
B.4 - Réponse énergétique.....	75
B.5 - Mesures profilométriques.....	76
B.6 - Propriétés en temps réel de la gélatine bichromatée.....	78
C - Réseaux minces -----	89
C.1 - Généralités sur les réseaux minces.....	89
C.2 - Réseaux minces à profil en créneau.....	91
C.3 - Mesures d'efficacité de diffraction: détermination du déphasage photoinduit.....	92
C.4 - Réponse énergétique du matériau.....	93
C.5 - Mesures profilométriques: nature de la modulation.....	94
CHAPITRE III - ETUDE DE COMPOSANTS OPTIQUES	
HOLOGRAPHIQUES EN GELATINE BICHROMATEE	97
A - Réseaux pour la compression temporelle d'impulsions -----	99
A.1 - Génération d'impulsions ultra-brèves par la technique cpa.....	99
A.2 - Etude et réalisation de réseaux en gbc sans pertes par réflexion ...	104
B - Élément séparateur et uniformiseur de faisceau laser -----	120
C - Lentille holographique collimatrice pour diode laser -----	125
C.1 - Généralités sur les lentilles holographiques.....	125
C.2 - Lentilles holographiques conçues pour une restitution avec changement de longueur d'onde.....	125
C.3 - Etude d'une lentille holographique à pupille rectangulaire pour l'infrarouge proche.....	127
C.4 - Conclusions.....	132
D - Réplication holographique de disques optiques -----	133
D.1 - Introduction.....	133
D.2 - Technique de l'holographie en ligne.....	134
D.3 - Etude des conditions d'enregistrement.....	135
D.4 - Expériences.....	136
D.5 - Perspectives.....	139

CHAPITRE IV - THEORIE DIFFERENTIELLE DE LA DIFFRACTION PAR DES RESEAUX DE CONDUCTIVITE FINIE	141
A - Introduction -----	143
B - Définitions et notations -----	145
B.1 - Repères	145
B.2 - Caractéristiques du réseau	145
B.3 - Champ électromagnétique	146
C - Approche modale -----	146
D - Formalisme matriciel de la théorie d'ondes couplées -----	148
D.1 - Développement fondamental du champ électromagnétique	149
D.2 - Equations d'ondes couplées	149
D.3 - Modèle rigoureux à ondes multiples	150
D.4 - Modèle approché à deux ondes	153
D.5 - Généralisation du formalisme	157
D.6 - Conditions aux limites.....	161
D.7 - Efficacités de diffraction	163
E - Algorithme de résolution numériquement stable -----	164
F - Propriétés du modèle d'ondes couplées -----	167
F.1 - Conservation de l'énergie	167
F.2 - Retour inverse de la lumière	169
F.3 - Réciprocité énergétique.....	170
G - Extension du modèle en lumière quasi-monochromatique -----	174
G.1 - Détermination de la réflexivité et de la transmissivité d'une lame à faces planes et parallèles.....	175
G.2 - Détermination des edqms d'un réseau déposé sur un substrat épais par le calcul des intensités totales des ordres diffractés dans le substrat.....	180
ANNEXES	187
ANNEXE A - Diffraction plane en polarisation transverse magnétique ---	189
A.1 - Notations	189
A.2 - Modèle à ondes multiples.....	189
A.3 - Modèle à deux ondes.....	190
ANNEXE B - Compléments sur l'algorithme de résolution -----	193
ANNEXE C - Diffraction en éclairage quasi-monochromatique -----	227
BIBLIOGRAPHIE	249

TABLE DES FIGURES

1.1 - structure du collagène.....	24
1.2 - gélatine amorphe séchée à chaud (à gauche)	24
1.3 - influence de la concentration en bichromate et de la durée	33
1.4 - spectre en transmission d'une plaque de gbc.....	34
1.5 - évolution temporelle de la transmission.....	34
1.6 - variations de l'efficacité de diffraction de réseaux holographiques en gbc en fonction de l'énergie d'exposition	35
1.7 - schéma du montage interférométrique d'enregistrement d'hologrammes	38
1.8 - fluctuations des franges.....	39
1.9 - troncature de la répartition d'intensité gaussienne du faisceau laser	41
1.10 - évolution temporelle de l'efficacité	41
1.11 - montage de copie-contact.....	43
1.12 - spectres en transmission avant et après exposition	44
1.13 - modèle des molécules-ressorts	46
2.1 - Interférences de deux ondes planes.....	59
2.2 - Condition d'interférences constructive.....	60
2.3 - Diffraction par une strate du réseau	61
2.4 - efficacité de diffraction d'un réseau en transmission fonction du paramètre	64
2.5 - montage expérimental pour la caractérisation de réseaux épais	66
2.6 - réponses angulaires d'un réseau holographique	67
2.7 - réponses angulaires d'un réseau holographique fortement modulé.....	68
2.8 - fit des réponses angulaires d'un réseau moyennement modulé.....	70
2.9 - fit des réponses angulaires d'un réseau fortement modulé.....	71
2.10 - sebs expérimentaux d'un réseau holographique	73
2.11 - variations de l'amplitude de modulation d'indice.....	75
2.12 - relief d'un réseau holographique fortement modulé observé	76
2.13 - relief d'un réseau holographique fortement modulé.....	77
2.14 - montage de mesure de l'évolution temporelle des coefficients de transmission ..	79
2.15 - évolution temporelle des transmissions à $\lambda_e=488\text{nm}$ et à $\lambda_r=633\text{nm}$ d'une plaque de gélatine bichromatée à 10% exposée par un faisceau uniforme	79
2.16 - évolution temporelle des coefficients de transmission énergétique - comparaison théorie / expérience avec optimisation des paramètres g et g	82
2.17 - variations des coefficients d'absorption suivant la profondeur du film à la fin de l'exposition (courbes théoriques)	82
2.18 - évolution temporelle des coefficients de transmission énergétique - comparaison théorie / expérience sans optimisation	83

2.19 - mesure de la diffraction d'un réseau holographique en cours d'enregistrement ...	83
2.21 - profils théoriques d'absorption en amplitude à la surface du film pour différentes durées d'exposition - intensité $6,5\text{mW/cm}^2$, $\nu F=1,1 \cdot 10^{-3}\text{frange.s}^{-1}$ et $m=2,3 \cdot 10^{-7}\text{m}^{-1}$	87
2.22 - profils théoriques d'absorption en amplitude au début de l'exposition pour différentes profondeurs intensité $6,5\text{mW/cm}^2$, $\nu F=1,1 \cdot 10^{-3}\text{frange.s}^{-1}$ et $m=2,3 \cdot 10^{-7}\text{m}^{-1}$	88
2.23 - différents types de réseaux minces	90
2.24 - détail du masque (densité optique binaire sur Kodak 1A).....	91
2.25 - représentation schématique du profil de phase photoinduit dans la gélatine	91
2.26 - montage de restitution pour les réseaux minces	92
2.27 - variations de l'intensité mesurée dans l'ordre 1	93
2.28 - variation du déphasage photoinduit en fonction de la durée d'exposition.....	94
2.29 - courbes profilométriques issues d'un rugosimètre mécanique Talistep	94
3.1 - schéma d'un compresseur à réseaux métalliques TAP92	101
3.2 - représentation des trajets optiques dans un compresseur à réseaux fonctionnant en transmission.....	103
3.3 - géométrie de l'enregistrement.....	127
3.4 - géométrie de la restitution	128
3.5 - spot-diagram angulaire du faisceau restitué	130
3.6 - variations de la phase du faisceau restitué en fonction des coordonnées pupillaires.....	130
3.7 - tache focale observée sur un capteur CCD.....	131
3.8 - enregistrement d'un.....	134
3.9 - restitution d'un hologramme	134
3.10 - enregistrement	135
3.11 - hologramme d'une seule cuvette du disque	136
3.12 - montage d'enregistrement des hologrammes en ligne	137
3.13 - microcuvettes du cd-maître observées au microscope à contraste de phase	138
3.14 - restitution d'un hologramme de Gabor observée au microscope.....	138
4.1 - géométrie du réseau	145
4.2 - vecteurs d'onde diffractés	150
4.3 - condition de Bragg.....	154
4.4 - représentation d'un réseau.....	158
4.5 - réseau généralisé.....	160
4.6 - retour inverse de la lumière dans un réseau.....	170
4.7 - rectangle d'intégration	171
4.8 - lame à faces planes et parallèles.....	175
4.9 - réflexions multiples	177

4.10 - intensités totales	178
4.11 - efficacités de diffractions monochromatiques du réseau	181
4.12 - efficacités du composant en lumière quasi-monochromatique	182

AVANT-PROPOS

L'holographie est surtout connue pour sa capacité à produire des images tridimensionnelles*. Pour ne pas la restreindre à cette possibilité certes remarquable, on peut définir plus généralement l'holographie comme une technique d'enregistrement et de restitution de l'ensemble des informations contenues dans les ondes lumineuses.

Avec les techniques classiques comme la photographie, on enregistre une image plane d'une scène tridimensionnelle sur une surface photosensible. La grandeur physique mémorisée est la répartition de l'intensité lumineuse dans la scène originale. Toutes les informations concernant les distances optiques relatives des différents endroits de la scène, ou, en d'autres termes, les phases relatives des ondes lumineuses, sont perdues.

Le caractère unique de l'holographie provient de sa capacité à enregistrer intégralement les fronts d'ondes, c'est à dire à retenir à la fois l'amplitude et la phase des ondes lumineuses diffusées par un objet. Pour cela, comme les matériaux photosensibles existants répondent seulement à l'intensité, il est nécessaire de convertir l'information de phase en des variations d'intensité. Cet effet est obtenu en utilisant une illumination cohérente, et en superposant à l'onde diffusée par l'objet une onde de référence plane ou sphérique. On réalise ainsi une photographie de la figure d'interférence de deux ondes. L'intensité en un point de cette figure dépend à la fois de la phase et de l'amplitude de l'onde objet originale. Aussi l'image photographique enregistrée, que l'on appelle hologramme, contient les informations à la fois de phase et d'amplitude de l'onde objet. Ces informations sont inscrites sous une forme codée: à priori, l'hologramme ne présente pas de ressemblance avec l'objet. L'intérêt de l'holographie réside dans la possibilité de recréer l'onde objet initiale à partir de l'hologramme, simplement en l'illuminant à nouveau avec l'onde de référence qui a servi à l'enregistrer. Pour un observateur, l'onde reconstruite est identique à l'onde objet originale: il voit une image tridimensionnelle, avec les mêmes effets de perspectives et de profondeur de champ que pourrait présenter l'objet, s'il était encore présent.

Le principe de l'holographie a été inventé par Gabor ^{GAB48} en 1948, qui cherchait à améliorer la résolution de ses expériences de microscopie électronique. Pour réaliser l'hologramme d'un objet transparent, Gabor l'éclairait avec un faisceau parallèle monochromatique, et photographiait les interférences entre l'onde directement transmise et

* Définitions du dictionnaire Petit Larousse illustré (1991)

Hologramme n.m. Image obtenue par holographie.

Holographie n.f. Méthode de photographie permettant la restitution en relief d'un objet, en utilisant les interférences produites par deux faisceaux laser, l'un provenant directement de l'appareil producteur, l'autre diffusé par l'objet.

l'onde diffusée par l'objet. Pendant une quinzaine d'années, la technique s'est peu développée à cause de la mauvaise qualité des images obtenues: à la restitution, une image défocalisée et un fond uniforme parasites se superposaient inévitablement à l'image utile. Cet inconvénient a été balayé par l'invention de l'holographie hors-axe par Leith et Upatnieks ^{LEI62, LEI63}: leur technique utilise une onde de référence séparée de l'onde objet, d'un angle assez grand pour garantir une restitution séparée de l'onde utile et des ondes indésirables. Ce progrès a été suivi de près par le développement des sources laser, dont la cohérence et la puissance ont rendu possible l'enregistrement d'hologrammes d'objets diffus avec une grande profondeur ^{LEI64}. A peu près au même moment, une autre technique importante était proposée par Denisjuk ^{DEN62}: en amenant les ondes objet et de référence en incidence sur les côtés opposés de la plaque holographique, on enregistre des franges d'interférences pratiquement parallèles à la surface de l'émulsion. De tels hologrammes, éclairés en lumière blanche, sélectionnent une bande spectrale étroite et reconstruisent une image monochromatique. Ces avancées décisives ont rendu l'holographie très attrayante, et les travaux sur cette technique se sont rapidement multipliés au cours des années 60; l'holographie optique a vite trouvé plusieurs applications scientifiques: imagerie d'aérosols avec une haute résolution ^{THO67}, imagerie à travers des milieux diffusants et aberrants ^{KOG65}, enregistrement d'images multiples, hologrammes synthétisés par ordinateur ^{LOH67}, contrôle et correction d'éléments optiques ^{UTP66}, reconnaissance de forme, etc... L'application qui a pris le plus d'importance est sans doute l'interférométrie holographique ^{COL65, POW65}, qui a rendu possible la mesure des microdéplacements de surfaces accidentées avec une précision d'une fraction de micromètre. Dans le domaine de la visualisation tridimensionnelle, l'holographie a progressé avec les inventions de l'hologramme arc-en-ciel par Benton ^{BEN69}, qui sacrifie la parallaxe verticale à la possibilité de restitution en lumière blanche, et du stéréogramme holographique de Cross ^{BEN75}, qui est une superposition d'hologrammes arc-en-ciel représentant différentes vues d'un objet.. Ces deux derniers types d'hologrammes peuvent être estampés en grande série à très faible coût, et profitent actuellement d'un marché important.

D'énormes progrès ont également été réalisés dans le domaine des matériaux d'enregistrement. Un travail considérable a été accompli pour améliorer les performances des émulsions argentiques à grain fin, qui demeurent les supports les plus utilisés. D'autres matériaux ^{HAR84}, comme la gélatine bichromatée, les photopolymères, les photothermoplastiques, les photoréfractifs, etc., sont de plus en plus répandus, dans des applications spécifiques où ils apportent des avantages déterminants.

Au moment où commence ce travail de thèse, l'holographie n'est plus une nouveauté: c'est une technique bien établie, qui possède plusieurs applications importantes. Beaucoup d'efforts restent cependant à fournir pour connaître et améliorer les caractéristiques des matériaux, pour mieux maîtriser les procédés de fabrication, pour définir de nouvelles applications, et

pour modéliser la diffraction de la lumière par les hologrammes. Ces différents aspects du travail en holographie se retrouvent dans ce manuscrit. L'objectif initial de ce travail est la réalisation de réseaux holographiques ultra-efficaces pour le domaine infrarouge proche, pour une application à la compression temporelle d'impulsions laser. Le premier chapitre de cette thèse décrit une technologie de fabrication des hologrammes dans un matériau particulier, la gélatine bichromatée: divers développements et essais visant à optimiser l'enregistrement et le traitement des hologrammes sont rapportés. Le chapitre II présente plusieurs méthodes pour caractériser les réseaux holographiques: ces mesures et leur interprétation permettent de préciser les propriétés du matériau, et de chiffrer les performances des hologrammes. Le chapitre III décrit l'étude et la réalisation d'hologrammes pour différentes applications. Enfin, le chapitre IV consiste en une étude théorique approfondie de la diffraction par des structures périodiques: un nouvel algorithme de résolution des équations de Maxwell dans un réseau est proposé, ainsi que des approches originales pour modéliser la diffraction d'un réseau en illumination quasi-monochromatique. Ces apports théoriques ont permis une interprétation précise des mesures de diffraction, et la détermination de plusieurs paramètres physiques des hologrammes.

CHAPITRE I

**FABRICATION D'HOLOGRAMMES
EN GELATINE BICHROMATEE**

A - De la photogravure à l'holographie

Depuis le début du XIX^e siècle, on sait^{GLA76} que divers **colloïdes** tels que la gélatine, la gomme, la colle de poisson ou l'albumine deviennent photosensibles quand on les imprègne de **bichromate** de potassium ou d'ammonium. Soumis à l'action de la lumière, l'ion bichromate semble donner lieu à un composé chromique qui insolubilise localement le colloïde. En éliminant par lavage les zones demeurées solubles, on obtient une image transparente constituée par le relief du colloïde: la gélatine a un comportement de photorésine. Cette image peut ensuite être rendue visible par teinture, au carbone par exemple. De nombreuses variantes de ce procédé ont été testées lors des premières expériences photographiques. Pendant plus d'un siècle, l'industrie de l'imprimerie a utilisé les colloïdes bichromatés.

Parmi les différents colloïdes, **la gélatine** est le plus utilisé pour diverses raisons: elle peut absorber beaucoup d'eau rapidement, ce qui facilite les traitements chimiques; elle peut être couchée en films uniformes d'épaisseur comprise entre 1 μ m et 500 μ m avec une bonne qualité optique; enfin on peut contrôler ses propriétés mécaniques en prédurcissant les films. Pour sensibiliser la gélatine, on emploie de préférence **le bichromate d'ammonium**.

En 1968, malgré la faible sensibilité de la gélatine bichromatée (GBC), Shankoff^{SHA68} commence l'étude des propriétés holographiques de ce matériau. **En éclairant une couche de GBC par une figure d'interférence issue d'un laser Argon, Shankoff enregistre des hologrammes.** Il découvre alors le processus qui fera de la GBC un matériau holographique exceptionnel: au lieu de développer la couche exposée dans un bain unique (le plus souvent d'eau), **il la plonge successivement dans deux liquides, le premier un solvant de la gélatine à petites molécules comme l'eau, le second un alcool à molécules plus grosses comme l'isopropanol.** Grâce à ce traitement, il obtient des efficacités de diffraction décuplées dans des hologrammes parfaitement transparents.

Avec le procédé de Shankoff, les transformations photoinduites affectent à la fois le volume et la densité locale de la couche. En travaillant avec **une gélatine prédurcie**^{LIN69}, on peut limiter les variations de l'épaisseur locale et obtenir **un hologramme constitué d'un profil d'indice de réfraction.**

L'absence de grain des hologrammes en GBC, qui permet une résolution supérieure à 6000mm⁻¹^{LIN69}, les très fortes variations d'indice que l'on peut atteindre (plus de 0,15), ainsi que les faibles taux d'absorption et de diffusion permettent d'obtenir **des efficacités de diffraction proches des 100% théoriques** pour les hologrammes de volume épais. Signalons enfin que la sensibilité de la GBC peut être étendue spectralement vers le rouge en ajoutant

certains colorants à la solution de bichromate, au prix cependant d'une baisse des performances **GRA73, KUB76, CHA89**. Le principal défaut de la GBC en holographie réside dans la difficulté à obtenir des résultats reproductibles.

Ces caractéristiques, dont certaines restent à ce jour inégalées **HAR80, TRI92** (par exemple l'amplitude de modulation d'indice), font que la GBC s'est imposée pour diverses applications: combineurs holographiques pour viseur tête-haute **CLO75**, autres composants optiques holographiques de hautes performances **CLO75, CHA80, RED89, ROB90, BLA91, BAH92, KOB92**, archivage de pièces de musée, holographie décorative. Dans de nombreux laboratoires, l'étude de ses propriétés et l'amélioration des processus de fabrication se poursuivent...

Après quelques rappels sur les propriétés de la gélatine, nous consacrons cette première partie aux aspects pratiques de l'holographie sur GBC: préparation du matériau, dispositifs d'enregistrement, exposition, développement et autres traitements. Au cours de la description, nous tentons d'expliquer les phénomènes physico-chimiques qui interviennent dans la fabrication des hologrammes. En récapitulation, nous commentons l'influence des divers paramètres physiques sur les résultats. Nous donnons un processus détaillé de réalisation d'hologrammes à partir de plaques Kodak 649F. Enfin, nous comparons les caractéristiques holographiques de la GBC à celles des autres supports holographiques de phase.

B - La gélatine: généralités et propriétés

Protéine issue du collagène, la gélatine constitue depuis plus d'un siècle un élément essentiel des émulsions photographiques. Comme liant qui maintient les halogénures d'argent et qui assure leur dispersion régulière, la gélatine possède des propriétés exceptionnelles qui l'ont rendue irremplaçable. Une étude détaillée se trouve dans l'ouvrage de Glafkidès ^{GLA76}. Ce chapitre est une revue sommaire de ces propriétés, utile pour la compréhension des phénomènes observés en holographie.

B.1 - Obtention à partir du collagène

La gélatine provient de la transformation du collagène, protéine naturelle constituant le tissu cellulaire de la peau et des os. On utilise du collagène de porc ou de veau.

La fabrication de la gélatine se fait par hydrolyse du collagène, soit par voie alcaline (chaulage), soit par voie acide. Cette réaction provoque la rupture de liaisons transversales amidiques, d'où le passage en solution de peptides et d'acides aminés de nature très diverse. Il se produit également un raccourcissement global des chaînes peptidiques. L'extraction finale de la gélatine se fait par cuisson du collagène après hydrolyse.

La conduite de l'hydrolyse est déterminante pour la structure de la gélatine. Certaines propriétés physiques sont également liées au type de collagène utilisé: par exemple la gélatine d'os est d'une structure plus légère et moins flexible que la gélatine issue de la peau.

B.2 - Rappels sur la constitution chimique de la gélatine

B.2.a - Aminoacides

A la base de la constitution des protéines, et par conséquent de la gélatine, se trouvent les aminoacides. Ces composés organiques possèdent deux fonctions fixées sur le même carbone: la fonction amine $-NH_2$ basique et une fonction acide $-CO_2H$: ce sont des corps amphotères. La gélatine contient une très grande variété d'acides aminés.

B.2.b - Peptides

Les groupes aminoacides élémentaires s'associent en longues chaînes de polypeptides. Le groupement $-CONH-$, caractéristique de la fonction amide, se répète chaque fois qu'une nouvelle molécule d'acide aminé s'ajoute à la chaîne peptidique (les peptides sont des polyamides). Les peptides sont solubles dans l'eau, les acides et les bases, insolubles dans l'alcool. La chaîne peptidique possède toujours la propriété d'amphotère à cause des groupes $-CO_2$ et $-NH_2$ fixés aux extrémités.

B.2.c - Protéines

A un niveau de polymérisation plus élevé, souvent en association avec des groupements divers, on obtient des protéines complexes naturelles. Les protéines sont constituées par un nombre plus ou moins important de chaînes peptidiques orientées ou pelotonnées, souvent reliées entre elles par des valences secondaires unissant certains $-CO-$ d'une chaîne à des $-NH-$ d'une autre. La diversité des acides aminés de départ donne lieu à un nombre infini de combinaisons possibles. Ces systèmes complexes forment des micelles colloïdales. Lorsque des groupes de chaînes protéiques de différents micelles s'unissent entre eux par des chaînes latérales, ils constituent un réseau solide qui produit un gel.

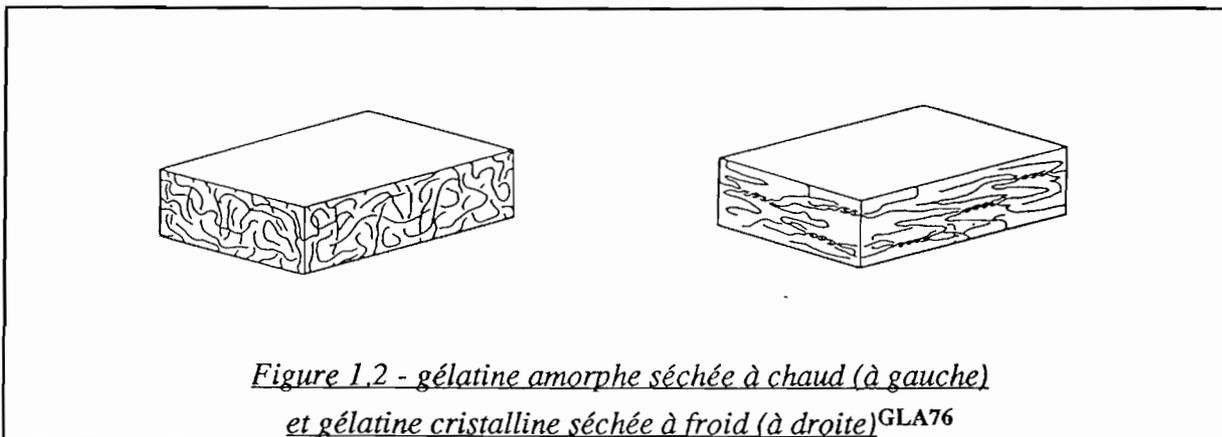
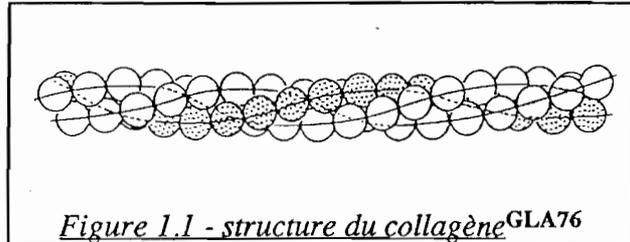
B.3 - Structure de la gélatine

B.3.a - Gel de gélatine

Dans le processus de fabrication, la gélatine est d'abord obtenue sous forme de solution aqueuse dans laquelle les molécules existent à l'état de chaînes simples entourées de

molécules d'eau. Quand on la refroidit en dessous de 30°C, une solution de gélatine concentrée à plus de 1% devient rigide et présente des propriétés mécaniques qui rappellent celles du caoutchouc: on obtient ainsi un gel dans lequel il faut distinguer deux phases: l'une solide constituée par un réseau de micelles soudées, l'autre liquide amorphe. Une concentration plus forte et une température plus basse favorisent la gélification.

Dans les pellicules de gélatine, la phase solide est un réseau tridimensionnel de molécules partiellement alignées et liées entre elles de façon lâche. Les cristallites sont des hélices triples rappelant le collagène de départ (figure 1.1), qui se connectent par liaisons hydrogènes intermoléculaires ou interchaînes quand on refroidit la solution de gélatine. Plus la température de séchage de la gélatine est basse, plus sa cristallinité est élevée (figure 1.2) et plus la dimension moyenne des cristaux est petite. Les cristallites subissent un gonflement important en présence d'eau.



La phase liquide baigne le réseau et le maintient tendu par sa pression osmotique. Elle représente environ 10% du total de matière^{GLA76}. La gélatine amorphe pourrait se dissoudre à froid, si elle n'en était empêchée par les cristallites qui l'entourent.

B.3.b - Gélatine commerciale

La gélatine disponible commercialement est un mélange de plusieurs gélatines élémentaires de masses moléculaires très différentes échelonnées entre 15000 et 250000^{GLA76}. La répartition de ces gélatines élémentaires dépend de la nature des matières premières et du traitement qu'elles ont subi. Une gélatine commerciale peu dégradée possède une masse moléculaire moyenne relativement élevée d'environ 55000 (environ 300000 pour le collagène de départ). L'étude aux rayons X a mis en évidence des chaînes peptidiques de longueur moyenne environ 100nm formées de 500 à 1000 groupes aminoacides élémentaires.

Ce mélange complexe de protéines est accompagné de produits de dégradation et d'impuretés diverses provenant de déchets animaux. Dans le cas des gélatines photographiques et holographiques, ces produits secondaires influent considérablement sur la qualité des émulsions obtenues. Les propriétés d'une gélatine rendue photosensible dépendent non seulement du traitement que celle-ci a subi en cours de fabrication, mais aussi de la nature et de la provenance des matières de départ: **la préparation de deux lots de gélatines rigoureusement identiques est pratiquement impossible.**

B.4 - Propriétés physiques

B.4.a - Solvant

Le solvant de la gélatine est l'eau tiède. On peut aussi la dissoudre à froid dans certaines solutions, par exemple l'acide acétique.

L'eau de Javel détruit les molécules de gélatine: ce n'est donc pas un solvant, mais un moyen très efficace de dissoudre la gélatine de plaques photographiques sans en endommager le verre.

B.4.b - Point isoélectrique

La gélatine est un corps amphotère: suivant le pH, elle se comporte comme un acide ou comme une base. Le point d'équilibre entre les deux phases, où s'annulent également les propriétés électriques, est le point isoélectrique caractérisé par un pH entre 4,5 et 5,2 (cette valeur dépend du mode de préparation).

B.4.c - Point de fusion

Les liaisons qui maintiennent le gel sont relativement faibles: elles peuvent être brisées par chauffage. S'il est porté à une température supérieure à un point de fusion bien défini, le gel redevient solution. Le point de fusion dépend de la microstructure de la gélatine, et par conséquent du passé du gel. Il est en général un peu supérieur à 30°C, et atteint sa valeur maximum au point isoélectrique.

B.4.d - Viscosité

La viscosité d'une solution de gélatine dépend de la longueur de chaîne moléculaire (et sa force en gelée de la densité de ponts hydrogènes). La viscosité augmente avec le temps à cause de la structure chimique très facilement variable, et elle diminue par agitation. Les

variations de viscosité sont plus importantes à basse température. Si l'on fait varier le pH, la viscosité passe par un minimum au point isoélectrique.

B.4.e - Gonflement

L'adsorption d'eau est due à la différence des pressions osmotiques interne et externe: l'appel d'eau à l'intérieur de la gélatine rétablit l'équilibre. Le gonflement est donc plus important si la pression interne est élevée, or cette pression augmente quand on s'éloigne du point isoélectrique. On peut diminuer le gonflement par l'addition d'un sel neutre (sulfate de sodium). Le poids d'eau absorbé augmente avec la température, mais diminue si la température de séchage de la gélatine augmente. Une gélatine séchée à froid peut absorber jusqu'à 20 fois sa masse d'eau. **Cette propriété a une grande importance car elle permet des traitements chimiques efficaces.**

B.4.f - Dureté

Les gélatines servant à la préparation des supports photographiques ou holographiques sont classées en gélatines dures et en gélatines tendres: les variétés dures sont formées de matière peu altérée par rapport au collagène de départ, alors que les variétés tendres ont subi une hydrolyse plus énergique.

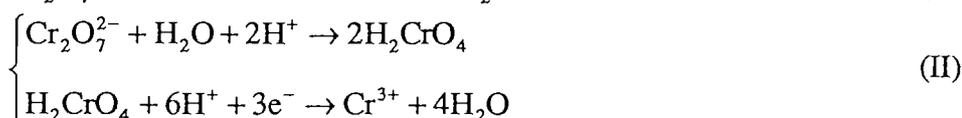
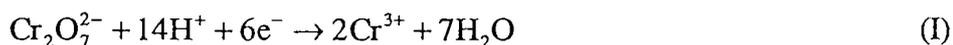
En toute rigueur, la dureté d'une couche de gélatine se mesure mécaniquement par l'impact d'un plongeur en acier sur le film; cependant, on prête couramment un sens plus large au mot dureté, englobant diverses propriétés étroitement liées. **Ainsi une gélatine tendre désigne une gélatine très soluble, peu rigide mécaniquement et capable d'absorber beaucoup d'eau; une gélatine plus dure est moins soluble, plus rigide et possède un degré de gonflement plus faible.** Cette assimilation fait que la dureté est la caractéristique importante d'un film de gélatine. Dans la suite, on verra comment modifier la dureté en doucissant ou en tannant la gélatine.

B.5 - Action photosensible de l'ion bichromate

B.5.a - Tannage photoinduit de la gélatine

Dès 1832, G.Suckow^{GLA76} a étudié l'action du bichromate de potassium sur les substances organiques. Sa sensibilité à la lumière a été observée en 1839 par Mungo-Ponton^{GLA76}. Il est admis que **le tannage local de la GBC** sous l'influence de la lumière est dû à une polymérisation résultant de la formation de liaisons latérales entre les chaînes moléculaires. Cependant on ne connaît toujours pas avec précision le mécanisme de cette réaction.

En sensibilisant le gel par le bichromate d'ammonium $(\text{NH}_4)_2\text{Cr}_2\text{O}_7$, ou par un autre bichromate, on introduit l'ion chrome hexavalent Cr^{6+} (de couleur jaune-orangé). Cet ion est déposé à partir d'une solution aqueuse et ne réagit pas directement avec la gélatine. Par exposition à un rayonnement actinique, **l'ion Cr^{6+} est réduit en chrome trivalent Cr^{3+}** (d'aspect brun), soit directement, soit indirectement en passant par l'acide chromique H_2CrO_4 ou par d'autres espèces intermédiaires. Les détails de la réaction ne sont pas connus avec exactitude, mais on peut donner à titre d'exemple les équations suivantes:



L'ion Cr^{3+} réagit ensuite avec deux groupes carboxyles $-\text{COO}^-$ de molécules voisines et les relie: on obtient ainsi un tannage local qui constitue une image latente.

B.5.b - Réaction dans l'obscurité

Il faut savoir que le tannage de la gélatine par les bichromates est un phénomène qui se produit même dans l'obscurité par une réaction supposée un peu différente de celle photoinduite, et qui semble même varier avec la nature du liant quand on utilise d'autres colloïdes. En atmosphère normale, un film sensibilisé par du bichromate devient inutilisable au bout d'une semaine et complètement durci après une vingtaine de jours. Quand elle se produit avant l'exposition, cette réaction diminue la capacité à la photoréaction des plaques sensibles. Nécessitant la présence de groupes polaires $-\text{OH}$ ou $-\text{COOH}$, elle est favorisée par un pH faible, par un fort taux d'humidité et par une température élevée. **Le facteur déterminant est l'humidité:** les couches sensibles se conservent plusieurs semaines sous une humidité relative de 40%, voire des mois si en plus la température est inférieure à 10°C .

B.5.c - Domaine spectral de sensibilité

L'efficacité des radiations lumineuses sur le bichromate est maximale dans l'ultraviolet et décroît jusqu'à 550nm environ; au delà, la GBC est transparente (voir le spectre en transmission présenté en D.1). On peut chromatiser la gélatine au vert par incorporation à la solution de bichromate de colorants comme le rose Bengale, la violamine R ou la rhodamine SGLA76. La sensibilisation au rouge s'obtient en général grâce au bleu ou au vert de méthylène^{KUB76,CHA89}. Ces techniques ne permettent malheureusement pas d'obtenir des variations d'indice aussi importantes qu'un enregistrement à longueur d'onde plus faible (typiquement à $\lambda=488\text{nm}$).

C - Préparation du support holographique

Les couches de GBC destinées à l'holographie peuvent être réalisées par deux méthodes principales: transformer des couches existantes, en général des émulsions photographiques du commerce, ou fabriquer directement des couches de gélatine sur des substrats. Nous détaillons ici les deux techniques.

C.1 - Adaptation de plaques photographiques du commerce

C.1.a - Les étapes de la préparation

Les plaques photographiques les plus couramment utilisées pour l'holographie sur GBC sont les **plaques spectroscopiques Kodak 649F**, depuis les premiers essais réalisés sur ces plaques par Lin^{LIN69} en 1969: nous avons employé ce type de plaques pour réaliser la plus grande partie de nos hologrammes. Les plaques Kodak 649F possèdent la couche de gélatine la plus épaisse disponible commercialement pour ce type d'émulsion (environ 13 μ m après développement). Les plaques Agfa 8E75 et 8E56 sont également employées^{OLI84}.

Le prétraitement de couches photographiques, pour une utilisation en GBC, consiste principalement à **éliminer les halogénures d'argent de la gélatine**. On utilise en général un fixateur du commerce, suivi d'un lavage à l'eau pour supprimer les microcristaux d'argent encore présents sur la couche.

La préparation des plaques comporte également **une optimisation de la dureté**. Pour donner de bons résultats en ce qui concerne la modulation d'indice, les plaques Kodak nécessitent un prédurcissement^{LIN69} (voir les méthodes de tannage en C.3 et le processus détaillé dans la partie G pour les 649F), alors que les plaques Agfa doivent être doucies par un bain d'eau tiède^{OLI84}.

Pour une bonne transparence, il faut également retirer de la couche divers additifs tels que colorants et couches anti-halo. Sur les Kodak 649F, l'anti-halo déposé sur le côté verre des plaques est gênant: si on ne le retire pas avant le fixage, il finit par se détacher en morceaux et par polluer la couche de gélatine. Nous le supprimons efficacement dans une solution aqueuse de sulfite de sodium à 10%. Les additifs divers qui subsistent après le lavage à l'eau sont éliminés par des bains de méthanol.

Un procédé assez courant, introduit par Milton Chang^{CHA71} en 1971, consiste à effectuer ce lavage avec une température croissante pour renforcer le gel et éviter les risques de rupture du gel dans les traitements ultérieurs. Cette méthode est détaillée au paragraphe suivant.

C.1.b - Renforcement du gel

Quand on réalise des hologrammes qui comportent des zones peu exposées, surtout dans le cas de faibles fréquences spatiales, on rencontre fréquemment le problème suivant: après développement, ces zones deviennent progressivement diffusantes et un peu opaques, d'une apparence laiteuse. Initialement, Lin^{LIN69} attribuait ce phénomène à la présence d'ions chrome hexavalents du bichromate dans la gélatine au moment du développement. Graube^{GRA77} l'expliquait par une précipitation de la phase amorphe de la gélatine. En fait il semble que le gel, sévèrement contraint par le développement, craque en produisant de multiples fissures le long des franges^{CHA71}.

On comprend que ces fissures se produisent plus facilement dans les zones qui n'ont pas été beaucoup exposées, où la gélatine est plus tendre. On peut aussi expliquer la sensibilité du phénomène à la fréquence spatiale: les mesures rugosimétriques du chapitre 2 montrent que les déformations mécaniques du film sont importantes pour les faibles fréquences spatiales. En effet, si le passage d'une frange à l'autre met en jeu un nombre très grand de molécules reliées entre elles, la souplesse du réseau permet de fortes déformations, et les contraintes mécaniques peuvent rompre les liaisons entre molécules. Au contraire quand l'interfrange est du même ordre que la longueur d'une molécule, la rigidité des cristallites limite les déformations, rendant le craquage moins probable.

Cependant les propriétés mécaniques de la gélatine ne sont pas définitives et peuvent être modifiées en réarrangeant au préalable les molécules. M.Chang^{CHA71} applique au bain de lavage qui suit le fixage une rampe de température débutant à la température ambiante et s'achevant en dessous du point de fusion. La température relativement élevée permet d'éliminer du gel les cristallites de petite taille au profit de cristaux plus grands qui donnent un gel plus résistant. L'élévation lente de la température évite la réticulation que provoquerait un échauffement brutal. Cette méthode est applicable à des films initialement assez durs, comme ceux des plaques Kodak 649F. Combinée au tannage supplémentaire après exposition proposé par Lin^{LIN69}, cette technique nous a permis d'obtenir des hologrammes à large spectre spatial parfaitement transparents même dans les zones peu exposées. Le traitement est effectué avant le tannage pour éviter des complications dues aux liaisons interchaînes. Il faut cependant signaler que les plus fortes modulations d'indice ont été obtenues sans employer cette méthode.

C.2 - Préparation directe de couches de gélatine

La réalisation directe de couches de gélatine à partir de la poudre brute est plus délicate, mais elle permet de contrôler à la fois l'épaisseur et la dureté des couches. Cela est important quand on a besoin de couches d'épaisseur supérieure à 15 μm , qui ne sont pas disponibles

commerciallement. Maîtriser le dépôt de films de bonne qualité optique demande un investissement très important en temps et en personnel, peu envisageable dans notre laboratoire. Aussi nous limitons-nous dans cette étude à décrire les différentes techniques de fabrication existantes.

Les couches de gélatine peuvent être produites par trempage, par aplanissement mécanique, par étalement dû à la gravité, par dépôt à la tournette ou par encastrement entre deux plaques. Les films réalisés par l'une ou l'autre de ces méthodes nécessitent d'être durcis (voir quelques techniques de tannage décrites au paragraphe suivant).

C.2.a - Dépôt par trempage

Utilisé par Shankoff^{SHA68}, il consiste à sortir le substrat de verre d'une solution de gélatine en contrôlant vitesse et inclinaison; l'inconvénient connu de cette méthode est de produire des films légèrement prismatiques.

C.2.b - Aplanissement mécanique

Cette méthode revient à déposer en excès la gélatine sur une plaque horizontale et à déplacer rapidement une barre parallèle au substrat (il peut s'agir d'une bande de caoutchouc), afin d'enlever la partie supérieure de la gélatine et de ne laisser qu'une couche uniforme sur la plaque.

C.2.c - Etalement par gravité

Employé par Lin^{LIN69}, ce dépôt se fait en ne déposant qu'une quantité mesurée de gélatine sur la plaque; la couche sèche, et on obtient un film plan dans une zone centrale jusqu'à environ 1cm des bords du substrat. En modifiant la concentration et en déposant des couches multiples, on peut obtenir des films d'épaisseur comprise entre 1 et 20 μm .

C.2.d - Dépôt à la tournette

La solution de gélatine est versée au centre d'un substrat qui tourne rapidement et entraînée vers les bords par la force centrifuge. La gélatine tend à s'amonceler sur les bords: ils sont éliminés ou simplement inutilisés. Cette technique convient seulement pour déposer des films de faible épaisseur (au plus quelques μm).

C.2.e - Encastrement

On coule la gélatine entre deux plaques planes et parallèles positionnées avec précision. Le substrat doit adhérer fortement à la gélatine, ce qui peut être obtenu par un nettoyage très soigneux. Pour permettre la libération de la plaque de base, on utilise une graisse silicone tel que le diméthyl dichlorosilane concentré^{RED89}.

C.3 - Tannage

Les propriétés de l'hologramme dépendent beaucoup du prédurcissement, ou tannage de la gélatine. Le tannage rend la gélatine moins soluble et élève le point de fusion. On sait que dans une gélatine tendre se forment des images en relief: les parties peu exposées restent solubles et sont éliminées au lavage. Dans une couche dure, on n'élimine pas de matière et on peut obtenir des variations de l'indice de réfraction.

En pratique, la gélatine peut être insoluble mais encore trop douce, donnant lieu à des hologrammes très diffusants (le gel peu résistant se fissure au développement). Elle peut aussi être trop dure, ce qui diminue la sensibilité à la lumière.

Le durcissement d'une couche de gélatine s'obtient par lavage à l'eau tiède. Pour le durcissement, plusieurs techniques existent; dans tous les cas, il s'agit de relier plus solidement entre elles les chaînes moléculaires.

C.3.a - Cuisson et ultraviolets

On peut durcir la gélatine de façon similaire au tannage du cuir, par cuisson à une température de l'ordre de 100°C ou par exposition à des rayonnements ultraviolets: ces opérations ont pour effet de briser certaines liaisons en permettant le réarrangement d'un réseau tridimensionnel plus stable. Cependant, on effectue le plus souvent un tannage chimique.

C.3.b - Tannants inorganiques

Une méthode de durcissement de la gélatine consiste à utiliser l'action tannante des oxydes de chrome provenant de la décomposition des bichromates sous l'influence de la lumière. Ce processus, déjà évoqué en B.5, durcit la gélatine par formation de liaisons complexes principalement entre groupes carboxyles $-COO^-$ de molécules voisines. La cuisson de couches ainsi traitées leur confère immédiatement une bonne stabilité. On a de plus l'avantage d'obtenir directement des couches photosensibles. Il est cependant évident que le

prédurcissement par les oxydes de chrome peut diminuer la capacité de la gélatine à être durcie à nouveau par les mêmes oxydes lors de l'exposition.

D'autres sels inorganiques sont utilisés, le plus fréquemment des sels d'aluminium. Ils réalisent également des liaisons entre groupes -COO^- et peuvent se trouver incorporés à des fixateurs tannants (le fixateur tannant Kodak F5, que nous employons, contient de l'alun de potassium).

Citons l'action tannante des sels de métaux nobles comme l'acide chloroplatinique $\text{H}_2\text{PtCl}_6 \cdot \text{H}_2\text{O}$ ^{RED89}, susceptibles de créer des ponts entre groupes amines plutôt que carboxyles, laissant ces derniers disponibles pour la réaction photochimique. Leur utilisation peut donner des couches à la fois plus stables et plus sensibles. Cette solution reste à expérimenter car il n'existe pas d'essais répertoriés de ces sels pour des applications holographiques.

C.3.c - Tannants organiques

Il existe également des agents tannants organiques comme les aldéhydes et les quinones. Le meilleur est le formol, longtemps utilisé dans l'industrie photographique, et dont les propriétés d'insolubilisation sont employées pour la conservation d'animaux. Les tannants organiques nécessitent un pH inférieur à 5 pour être efficaces et relient entre eux les groupes -NH_2 ; cependant la réaction de durcissement par ces agents est très longue (plusieurs mois), ce qui peut rendre plus difficile l'obtention de résultats reproductibles.

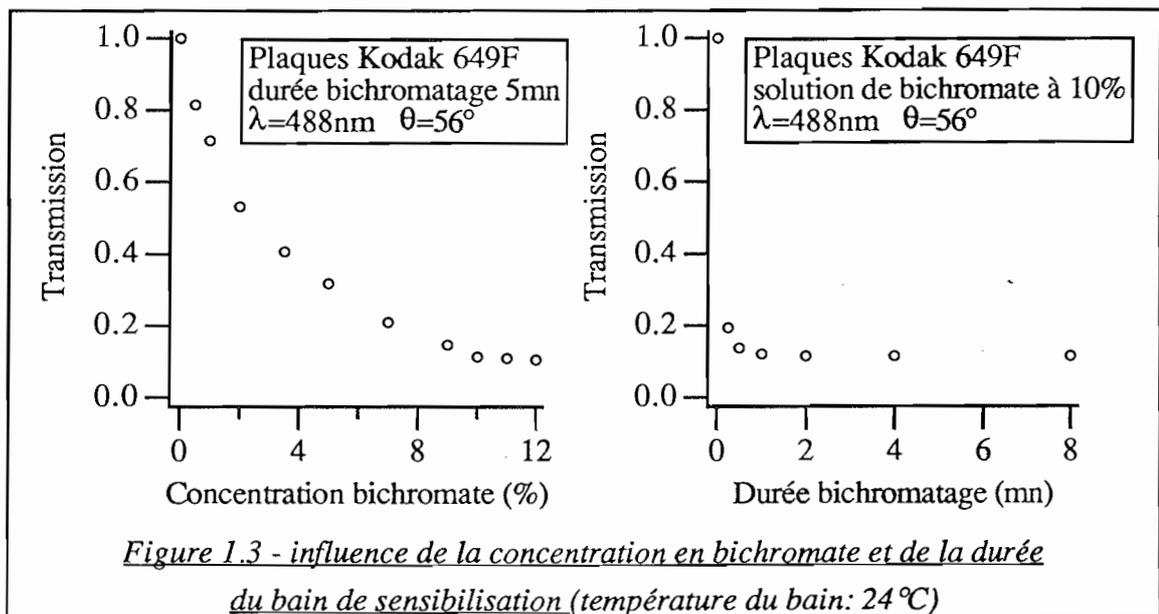
C.4 - Sensibilisation

Les colloïdes bichromatés sont peu sensibles: il est donc souvent souhaitable d'imprégner la gélatine par une forte concentration de bichromate. On emploie de préférence le bichromate d'ammonium dont la solubilité élevée limite les risques de cristallisation lors du séchage de la couche. Le bichromate de pyridine peut produire des couches plus sensibles, mais qui s'avèrent instables et en pratique peu utilisables^{GLA76}.

En pratique, on sensibilise la gélatine par quelques minutes d'immersion dans un bain de bichromate d'ammonium de concentration entre 2 et 10%, suivant la sensibilité désirée (dans le cas de films réalisés par l'utilisateur, le bichromate peut être introduit pendant la préparation des couches). Un peu d'agent mouillant ajouté à la solution améliore l'uniformité et facilite le séchage.

Il est important de connaître l'influence de la concentration et de la durée du bain de sensibilisation. Pour cela, nous avons mesuré la transmission énergétique de plaques

bichromatées avec différentes valeurs de ces paramètres. Nous avons utilisé un laser collimaté à 488nm, longueur d'onde à laquelle le bichromate présente de l'absorption (voir spectre en D.1). Les courbes obtenues, présentées en figure 1.3, montrent que la gélatine des plaques 649F est saturée si la concentration de la solution sensibilisante dépasse 10% et si la durée du bain excède quelques minutes. On voit que la courbe située à gauche, fonction de la concentration, possède une pente plus régulière que l'autre courbe, fonction de la durée: pour contrôler le degré de sensibilisation, il est donc plus facile de jouer sur la concentration du bain.



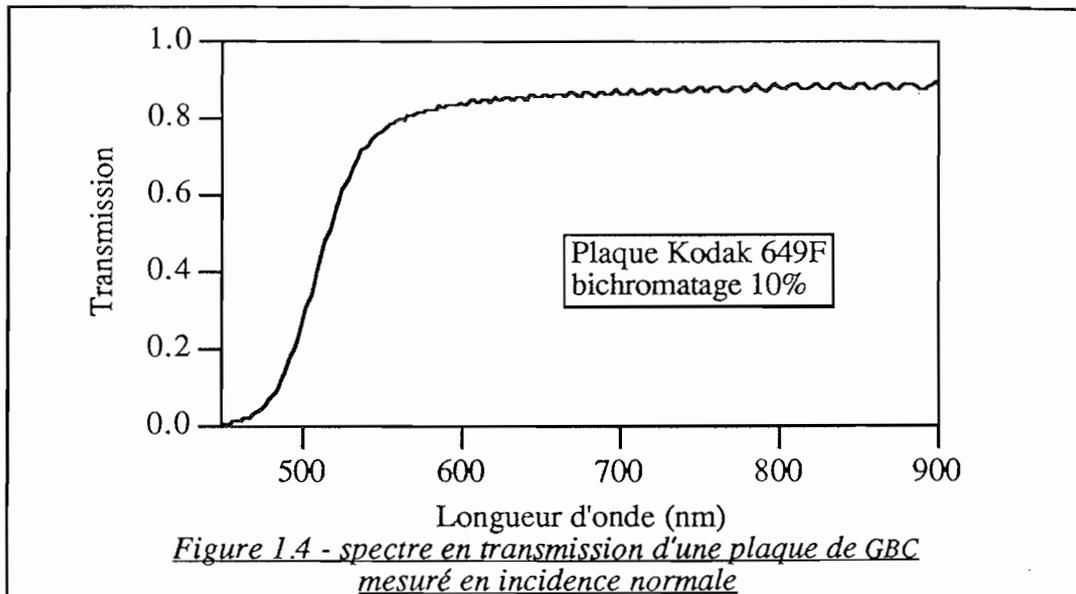
Dans le cas de fortes concentrations (de 8 à 10%), la solution qui demeure à la surface de la gélatine présente des risques de cristallisation: on élimine cette couche superficielle par un passage à la tournette immédiatement après la sortie du bain. Un séchage à l'étuve à 40°C limite également le danger de cristallisation. On conserve ensuite le film en atmosphère sèche avant d'exposer.

D - Enregistrement des hologrammes

D.1 - Longueur d'onde d'exposition

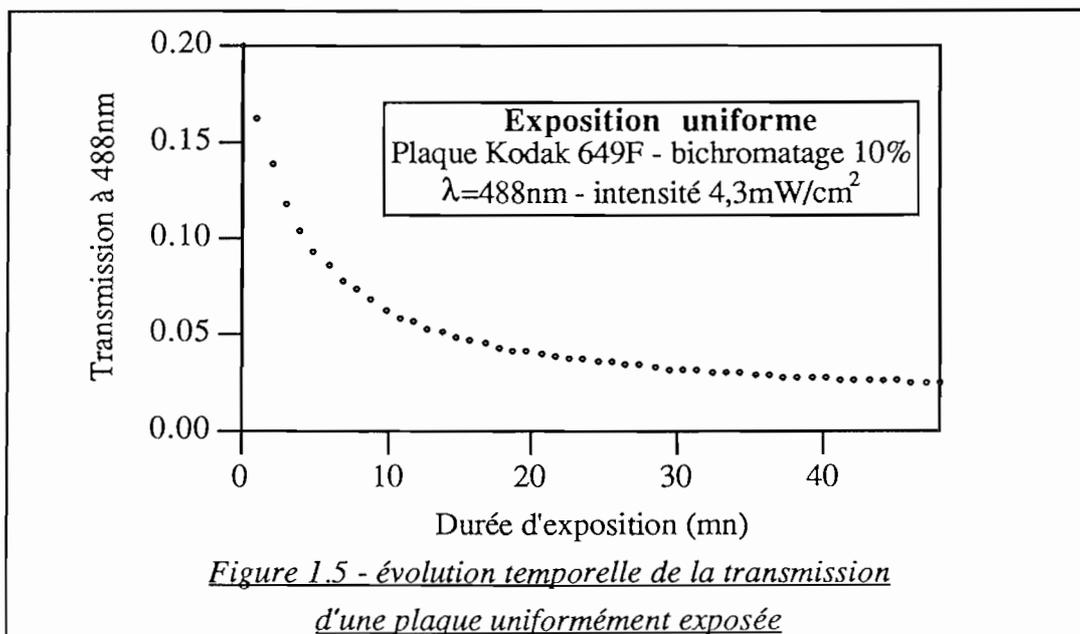
Le spectre en transmission (figure 1.4 ci-dessous) d'une plaque 649F sensibilisée au bichromate d'ammonium laisse prévoir une sensibilité maximale dans l'ultraviolet, qui décroît ensuite vers le visible pour s'annuler autour de 550nm. Au delà, la GBC est transparente; c'est pourquoi l'on utilise de préférence en holographie visible la raie à 488nm d'un laser Argon, et parfois celle à 514nm. Ce domaine de sensibilité restreint est particulièrement contraignant quand on réalise des hologrammes destinés à une utilisation dans le rouge ou l'infrarouge: un

hologramme enregistré dans le bleu présente en général des aberrations géométriques importantes lorsqu'il est restitué dans le rouge.



D.2 - Energie d'exposition

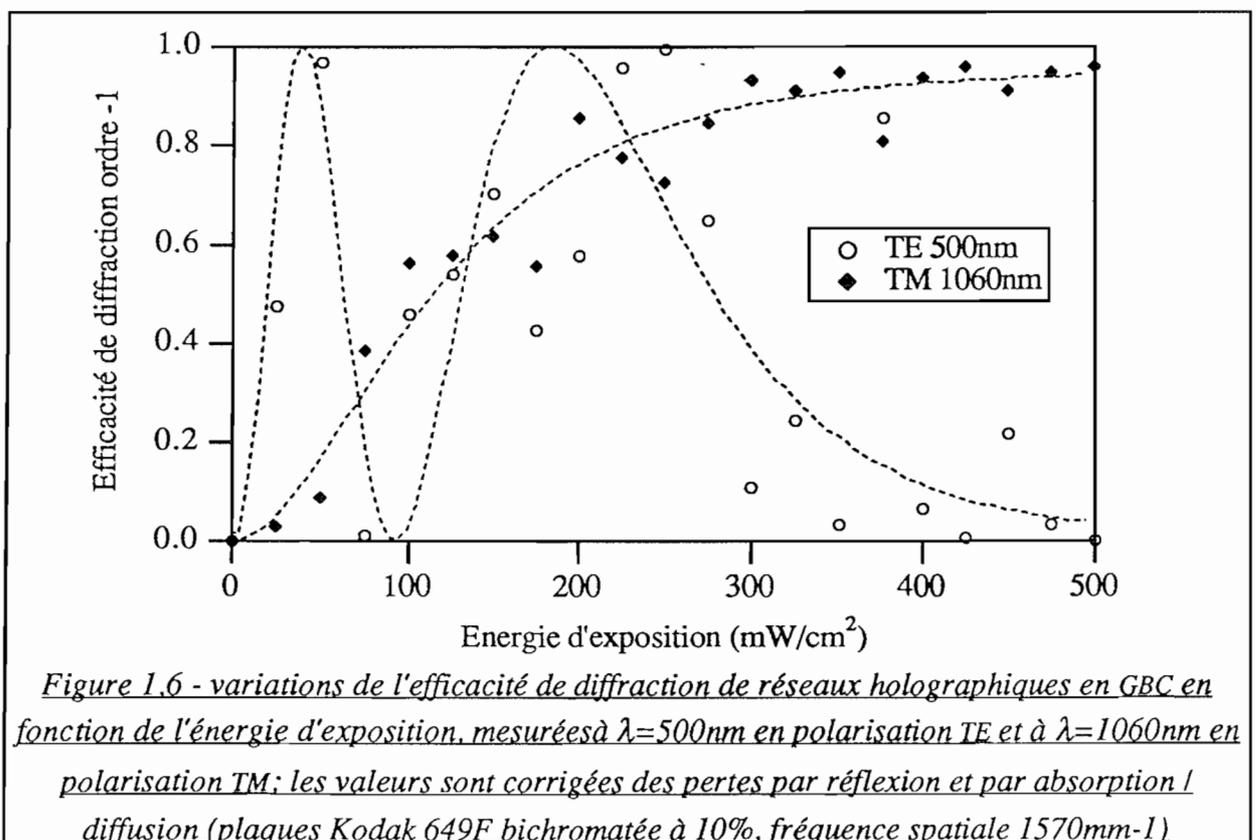
L'amplitude des variations d'indice obtenues dans un hologramme dépend de l'énergie d'exposition. La sensibilité énergétique de la GBC est faible: pour réaliser un hologramme performant en exposant à $\lambda=488\text{nm}$, il faut typiquement une densité d'énergie lumineuse de l'ordre de 50 à 300mJ/cm².



On peut confirmer cet ordre de grandeur en observant l'évolution temporelle de la transmission d'une plaque holographique illuminée par un faisceau d'intensité spatialement

uniforme. La courbe de la figure 1.5 a été obtenue à partir d'une plaque Kodak 649F illuminée par une onde plane d'intensité $4,3\text{mW/cm}^2$. Le changement d'absorption que traduit la courbe est directement lié à la vitesse de réaction photochimique de l'ion Cr^{6+} . Notre mesure montre que quelques minutes (ou quelques centaines de mJ/cm^2) sont nécessaires pour obtenir une transformation importante.

La valeur optimale de l'énergie d'exposition dépend de nombreux paramètres: type d'hologramme (transmission ou réflexion), fréquence spatiale, conditions de température et d'humidité, dureté et taux de sensibilisation initiaux du film de gélatine, processus de développement employé, polarisation et longueur d'onde de restitution, etc... Pour une configuration d'enregistrement, un ensemble de traitements et des conditions atmosphériques donnés, on doit effectuer des essais d'exposition avec des énergies échelonnées. La figure 1.6 montre l'étalonnage que nous avons réalisé pour des réseaux holographiques épais fonctionnant en transmission, de période spatiale 1570mm^{-1} . Les deux séries de points représentent les variations en fonction de l'énergie d'exposition de l'efficacité de diffraction des réseaux, restitués sous incidence de Bragg respectivement à $\lambda=500\text{nm}$ en polarisation transverse électrique (TE) et à $\lambda=1060\text{nm}$ en polarisation transverse magnétique (TM): ces résultats montrent que l'énergie optimale est de l'ordre de 50mJ dans le premier cas, et de 300mJ dans le second cas de restitution. Les courbes en pointillés ont été calculées de la façon suivante: l'amplitude de modulation de chaque réseau a été obtenue par la méthode du



spectre sous Bragg expliquée au chapitre II (§B.3). L'étude de la réponse énergétique de la GBC sera reprise au chapitre II.

D.3 - Montage interférométrique pour l'enregistrement d'hologrammes épais

Au début de ce travail de thèse, un premier montage pour l'enregistrement d'hologrammes, utilisant un laser Argon, a été réalisé dans un laboratoire à conditions atmosphériques non contrôlées. La fabrication de réseaux n'était absolument pas reproductible en ce qui concerne l'efficacité de diffraction et l'uniformité de modulation. Ce problème ne nous a pas trop surpris, car la sensibilité de la GBC à la température et surtout à l'humidité ambiantes avait déjà été signalée dans plusieurs études. Depuis, notre groupe s'est équipé d'une salle blanche de classe 10000 à faible taux d'humidité et à température contrôlée, dans laquelle nous avons effectué les enregistrements dans les conditions suivantes: température de 20°C et humidité relative (HR) de 40%.

En salle blanche, un nouveau montage a été réalisé, qui a tiré profit de nos premières expériences. Ce montage est schématisé par la figure 1.7. Nous nous sommes efforcés d'apporter des solutions aux problèmes suivants: stabilité des franges pendant l'exposition, réglage du rapport d'intensité entre les faisceaux, uniformité des faisceaux, suivi de l'exposition, élimination des réflexions parasites susceptibles de générer des interférences gênantes (enregistrement d'hologrammes parasites), et possibilité d'adaptation du montage à l'enregistrement de divers types d'hologrammes.

D.3.a - Fluctuations des franges d'interférences

Pendant l'enregistrement d'un hologramme, un déplacement de la figure d'interférence a pour effet un brouillage de l'image photoinduite. En théorie, si le déplacement se produit à une vitesse v supposée constante pendant la durée T de l'exposition, le profil de l'image enregistrée résulte de la convolution du profil périodique des franges par une fonction rectangle de largeur vT . Si vT est proche de la période spatiale des franges, aucune modulation n'est enregistrée. Il est donc prudent de vérifier la stabilité de la figure d'interférence, surtout quand on doit effectuer des expositions de plusieurs minutes.

Pour visualiser les fluctuations de la position des franges, nous utilisons le dispositif suivant (figure 1.7): un microscope équipé d'un objectif de fort grandissement vise par l'arrière le plan d'enregistrement; dans le plan image de l'objectif, l'extrémité d'une fibre optique de diamètre $25\mu\text{m}$ est éclairée par l'image agrandie des interférences; la lumière recueillie par la fibre est détectée par un photomultiplicateur, lui-même relié à un enregistreur. Les courbes obtenues, dont la figure 1.8 donne un exemple, représentent la

variation temporelle de l'intensité lumineuse sur le bout de la fibre. Si le diamètre de la fibre est inférieur à la demi-période de l'image des franges, ces courbes montrent directement le défilement des franges. Ce système est utilisable pour des fréquences spatiales n'excédant pas 2500mm^{-1} ; au-delà, la répartition d'intensité est trop moyennée sur la surface de la fibre. Il permet d'observer deux types distincts de fluctuations:

- les vibrations mécaniques: provenant du sol ou de l'air par voie acoustique, elles se transmettent à divers éléments du montage et créent des microdéplacements rapides des franges. Elles se traduisent par une apparence "bruiteuse" sur les courbes enregistrées. Pour combattre ces vibrations, nous nous sommes équipé d'une table isolée mécaniquement du sol par des pieds à coussin d'air; la structure en nids d'abeilles de son plateau a un effet d'amortissement très efficace. Dans le choix ou la conception des divers supports et montures d'optiques, nous avons privilégié les pièces massives et stables. Quand un élément du montage persiste à vibrer, notre ultime recours est de disposer contre la pièce rebelle un bloc métallique lourd (en acier par exemple), et de rigidifier le contact par un point de colle cyanolite. En salle blanche, la climatisation qui renouvelle l'air avec un débit important constitue une source supplémentaire de vibrations. Pour minimiser leur effet, nous avons bâti un couvercle en Plexiglas autour du montage. De plus, avant chaque exposition, nous commutons la climatisation en vitesse lente.

- Les fluctuations d'origine thermique: dues à des dilatations ou à des variations de température différentes sur les deux bras de l'interféromètre, ces fluctuations relativement lentes étaient très contraignantes dans notre premier montage. Suivant l'heure dans la journée, le défilement pouvait atteindre plus de dix franges par heure, ce qui était incompatible avec les pauses de plusieurs minutes requises en GBC; pour enregistrer avec une vitesse de fluctuation tolérable, il fallait attendre le moment propice.

La salle blanche thermostatée a apporté un confort de manipulation évident: les fluctuations thermiques existent toujours, mais de façon beaucoup plus limitée et prévisible. Elles sont en partie dues à la présence d'un opérateur dans la salle. Nos mesures du défilement des franges d'interférence ont montré l'effet important de la dilatation des miroirs aluminés, lorsqu'ils sont directement placés sur le faisceau laser (de l'ordre de 500mW sur un diamètre de $1,2\text{mm}$). On utilise donc ces miroirs seulement quand le faisceau est étalé; dans le cas contraire, on emploie de préférence des prismes ou des miroirs diélectriques. On peut aussi se préoccuper de la dilatation de la plaque holographique pendant l'exposition, due à l'absorption de la couche bichromatée; I.Redmond ^{RED89} a mesuré que les variations d'épaisseur restent inférieure à $\lambda/20$ pour une densité de puissance limitée à $5\text{mW}/\text{cm}^2$; les dimensions des hologrammes que nous avons enregistrés ne nous ont pas permis de disposer de densités de puissance aussi importantes.

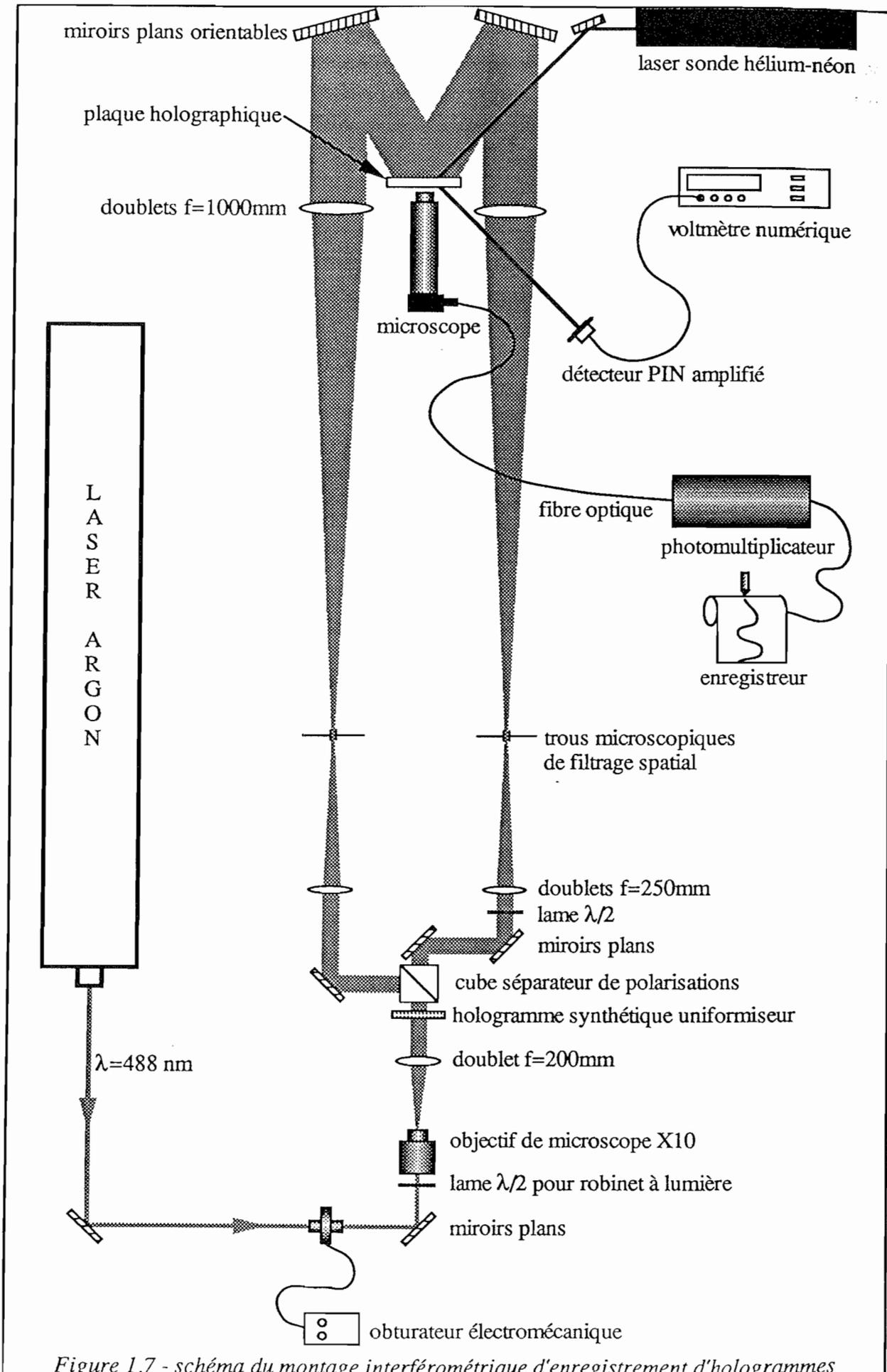


Figure 1.7 - schéma du montage interférométrique d'enregistrement d'hologrammes

La figure 1.8 montre un enregistrement en salle blanche du déplacement des franges effectué avant une séance d'enregistrement de réseaux holographiques: au début de la mesure, les fenêtres du couvercle viennent d'être refermées, et la climatisation est passée en vitesse lente; le trait vertical représente le moment où l'opérateur quitte la salle, qui ensuite reste vide jusqu'à la fin de l'enregistrement. On voit que la vitesse de déplacement de la figure d'interférence se stabilise à un peu plus d'une frange par heure au bout d'une heure: ce défilement est acceptable pour effectuer une exposition durant 10mn ou moins. Si l'on attend environ 4 heures, la vitesse des franges est beaucoup plus faible et autorise des pauses très longues.

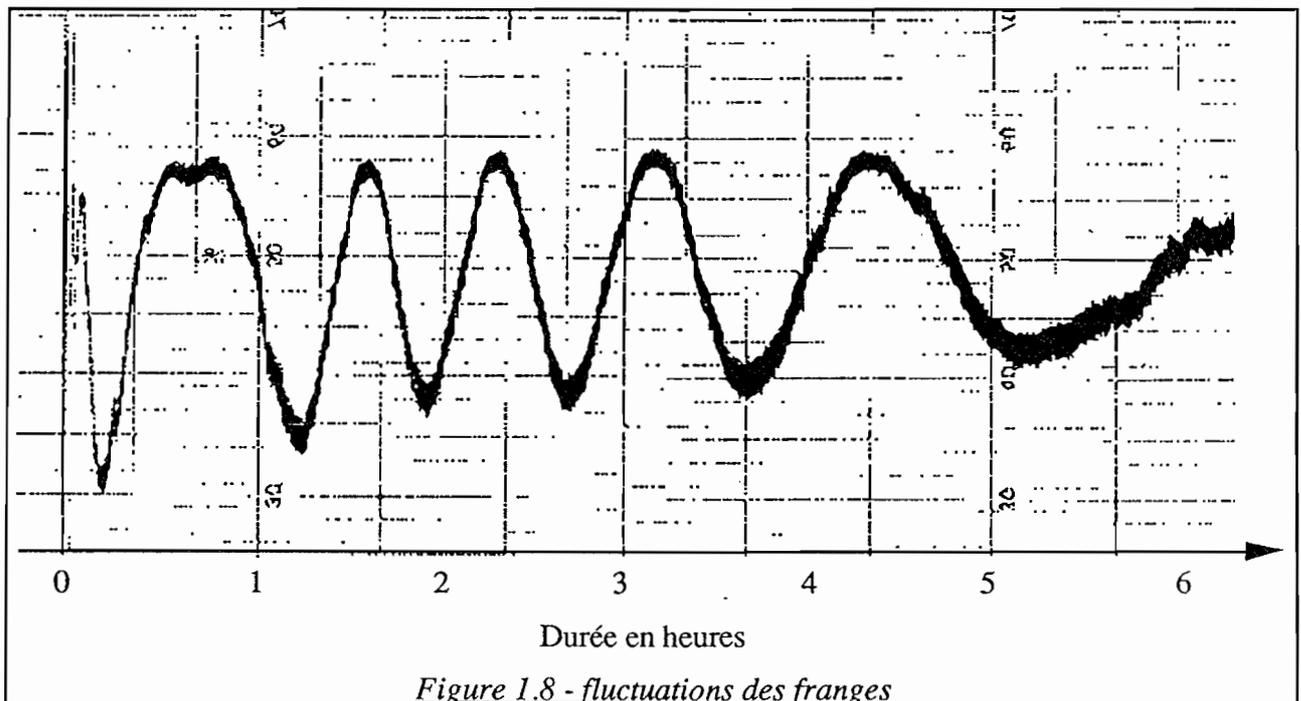


Figure 1.8 - fluctuations des franges

D.3.b - Réglage du rapport d'intensité entre les faisceaux

Il est nécessaire de pouvoir régler le rapport d'intensité entre les deux faisceaux d'enregistrement. Nous utilisons le principe très pratique du robinet à lumière (figure 1.7): la séparation en deux du faisceau laser est réalisée par un cube séparateur de polarisation (Glan-Thompson); en amont du cube, une lame $\lambda/2$ permet de modifier la direction de polarisation incidente sur le cube, et de régler ainsi le rapport entre les deux intensités émergent du séparateur. Le faisceau sortant à angle droit de la direction incidente est polarisé transverse électrique. Pour donner au faisceau non dévié la même polarisation, on utilise une autre lame $\lambda/2$.

D.3.b - Uniformisation des faisceaux d'enregistrement

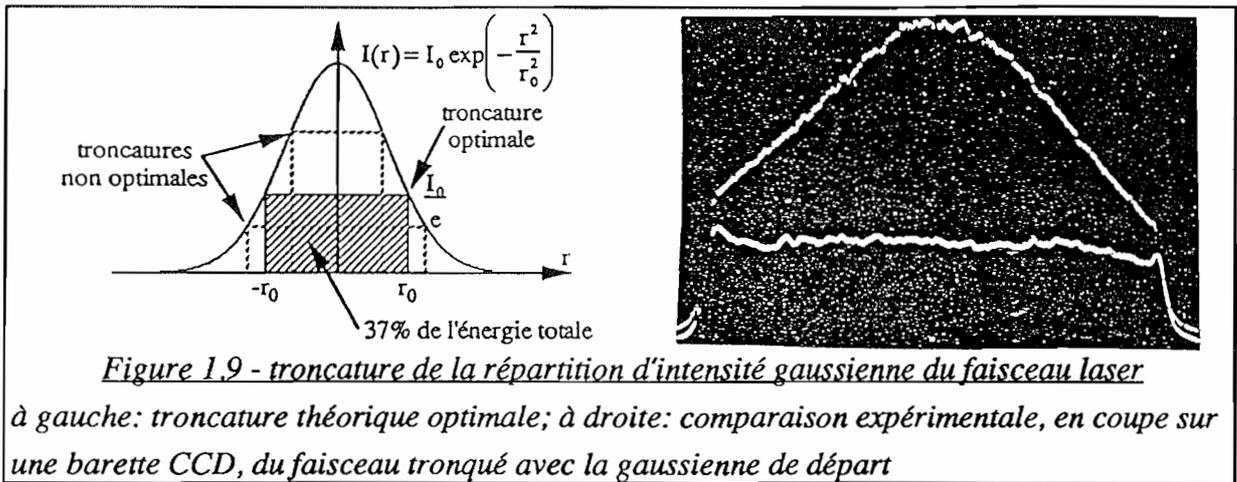
Une modulation uniforme sur toute la surface de l'hologramme est souvent requise. Il faut pour cela que la répartition d'intensité de chacun des faisceaux d'enregistrement soit uniforme. Nous avons envisagé différents moyens d'uniformiser la distribution d'intensité initialement gaussienne du faisceau laser.

La technique la plus courante pour obtenir une uniformité convenable consiste à étaler très largement le faisceau, par exemple au moyen d'un objectif de microscope de fort grossissement, et de n'utiliser que la partie centrale de l'éclairement obtenu pour exposer les hologrammes. Cette méthode a l'avantage de la simplicité, mais elle entraîne un gaspillage important de l'énergie lumineuse: on peut montrer^{BEL75} qu'une uniformité de X% s'obtient au prix d'une efficacité énergétique réduite à la même valeur X%. Lors de l'enregistrement d'hologrammes, ces pertes énergétiques allongent les durées d'exposition.

Une autre façon énergétiquement plus efficace d'uniformiser un faisceau gaussien est d'utiliser un masque qui compense la forme gaussienne de la répartition d'intensité. On peut imaginer la fabrication d'un tel masque sous la forme d'une photographie en négatif du faisceau laser. Pour mener à bien cette opération, il faudrait un film produisant des niveaux de gris parfaitement contrôlés, ce qui est très difficile.

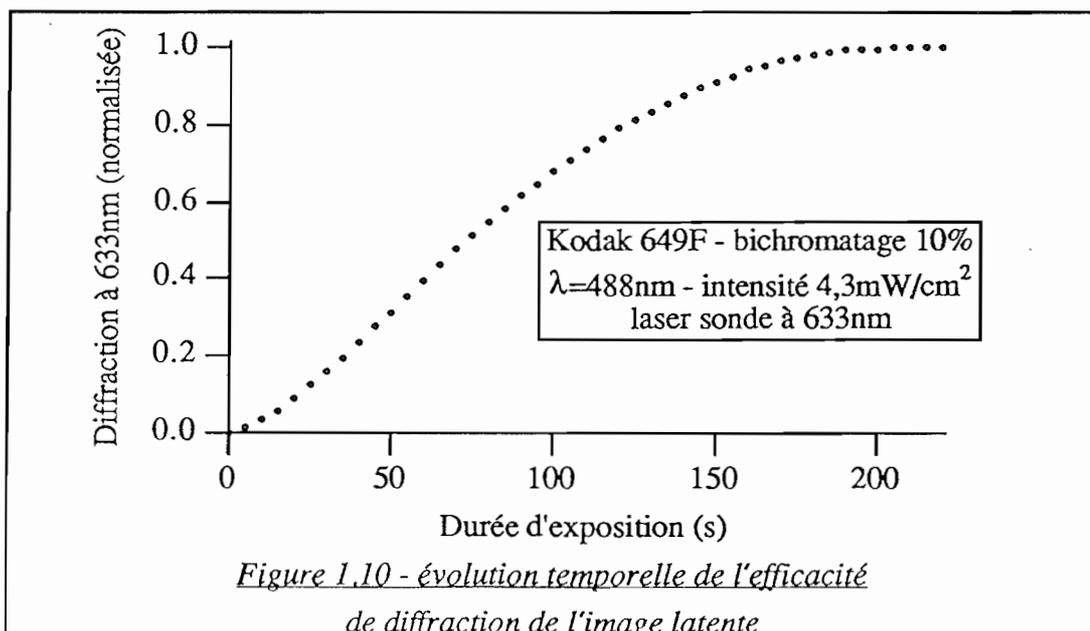
Nous avons donc entrepris la fabrication d'un masque binaire décrit dans une publication^{BEL75} de notre groupe antérieure à cette étude. Il s'agit d'un hologramme synthétisé par ordinateur formé de fenêtres transparentes sur fond opaque régulièrement espacées et d'aire inversement proportionnelle à l'intensité locale gaussienne. La pupille de ce masque tronque le support de la gaussienne; l'atténuation, nulle au bord de la pupille, augmente jusqu'à un maximum au centre de l'hologramme. En tronquant l'intensité gaussienne à 1/e de sa valeur maximale, on obtient théoriquement le meilleur rendement, égal à 37% (voir figure 1.9 ci-dessous). On trouvera plus de précisions à propos de ce composant dans la référence^{BEL75}. Avec un hologramme synthétique de ce type, dessiné à l'encre de chine par table traçante puis photoréduit sur plaque Kodak 1A, une uniformité meilleure que 15% sur toute la surface est obtenue expérimentalement avec une efficacité d'environ 30%. Une fabrication par inscription électronique sur masque au chrome permettrait d'améliorer ces performances.

Au cours de ce travail de thèse, nous avons proposé un autre type de masque, qui réalise la troncature de la gaussienne d'une manière différente: il s'agit d'un hologramme synthétique de phase fabriqué par copie d'un masque photographique binaire sur GBC. Ce composant divise un faisceau laser gaussien incident en deux faisceaux uniformes. On en trouvera l'étude dans une publication^{CHA92} présentée au chapitre III (partie B).



D.3.c - Suivi de l'exposition

Notre montage d'enregistrement permet de surveiller la formation de l'image latente d'un hologramme (c'est-à-dire l'image non développée), par l'observation de la diffraction d'un laser sonde à 633nm. Pendant l'exposition, le faisceau rouge est dirigé sur la plaque holographique suivant l'incidence de Bragg, et l'intensité diffractée par l'image latente est recueillie par une photodiode PIN amplifiée et reliée à un voltmètre (voir figure 1.7). Cette mesure en temps réel permet d'arrêter l'exposition avant la saturation du film. La figure 1.10 ci-dessous montre une mesure de l'efficacité de diffraction de l'image latente en fonction de la durée d'exposition. Il s'agit ici d'un réseau de fréquence 1500mm^{-1} , enregistré avec deux ondes planes symétriques d'intensité totale $3\text{mW}/\text{cm}^2$. Au début de l'exposition, le film est transparent à 633nm; la réaction photochimique rend ensuite la GBC progressivement absorbante et diffractante pour le faisceau sonde. Ce type de courbe sera étudié plus en détail



au chapitre II, lors de l'étude des propriétés en temps réel de la GBC.

D.3.d - Elimination des hologrammes parasites

Quand on enregistre un hologramme sans précautions particulières, les réflexions sur les faces internes du support holographique créent des interférences parasites qui s'inscrivent sur le film. Ce phénomène provoque des diffractions indésirables de l'hologramme, et nuit à son aspect et à son efficacité. On peut résoudre ce problème en plaquant, à l'aide d'un liquide d'indice adapté, une forte densité optique sur la face arrière de l'hologramme: on évite ainsi tout retour de lumière dans le film. Si l'on veut suivre l'enregistrement par la mesure de la diffraction d'un faisceau sonde à 633nm, comme décrit au paragraphe précédent, on remplace la densité par un filtre rouge.

Comme une densité ou un filtre rouge de dimensions convenables fait parfois défaut, nous avons également essayé plusieurs vernis anti-reflets. Le vernis doit être appliqué au dos de la plaque holographique, au moyen d'un pinceau, plusieurs heures avant l'exposition (>4H). Après l'enregistrement, il faut retirer la couche de vernis. Les vernis retirables par dissolution dans l'alcool, comme le vernis Jacquemin, doivent être évités: il est en effet peu commode d'immerger la face arrière d'une plaque holographique, tout en préservant le film de gélatine. Les vernis pelliculables, comme le vernis photographique Pellimask, sont plus pratiques, mais moins efficaces contre les réflexions.

D.3.e - Polyvalence du montage

Il serait vain de chercher à concevoir un montage parfaitement polyvalent, adapté à l'enregistrement de toutes les catégories d'hologrammes. Il est cependant souhaitable de limiter le travail de réorganisation du montage nécessaire pour passer à la réalisation d'un nouveau type d'hologramme. Aussi certains détails du montage de la figure 1.7 ont-ils leur importance: le robinet à lumière décrit précédemment, et les grands miroirs plans orientables qui permettent de changer à volonté l'angle d'enregistrement tout en conservant deux trajets optiques de même longueur. Pour obtenir des faisceaux plus concentrés, on choisira des focales plus courtes pour les doublets les plus proches du support holographique. Le montage, tel qu'il est présenté dans la figure 1.7, se prête à l'enregistrement de réseaux, mais il permet aussi de réaliser l'hologramme d'un objet transparent quelconque: il suffit d'interposer cet objet sur un des bras de l'interféromètre.

D.4 - Montage de copie contact pour l'enregistrement d'hologrammes minces

Pour la réalisation de réseaux minces, étudiés au chapitre II, et de l'hologramme de phase synthétisé par ordinateur ^{CHA92} décrit au chapitre III, nous avons utilisé le procédé suivant:

- calcul sur PC et dessin de l'hologramme à l'aide d'une table traçante Hewlett Packard (format A0, incrément de position du stylo: 30 μ m); nos essais de différentes combinaisons stylo-calque nous ont amené à choisir des pointes tubulaires à encre de chine en carbure de tungstène, et un calque polypropylène de grain 90 μ m: ce matériel permet de réaliser des tracés de grand format, avec un bon encrage et sans usure prématurée du stylo;
- photoréduction du tracé, avec un rapport compris entre 10 et 50, sur plaque Kodak 1A: ces plaques possèdent une résolution et un contraste élevés; la qualité du masque obtenu est contrôlée au microdensitomètre;
- copie-contact sur une plaque de GBC avec le montage schématisé sur la figure 1.11. Dans ce dispositif, un faisceau collimaté issu d'une lampe à rayonnement ultra-violet (UV) se trouve en incidence normale sur le masque. Pour réussir la copie, il est important d'éviter la présence de poussière et d'assurer un pressage efficace entre les deux plaques.

Ce procédé présente l'avantage d'être peu couteux par rapport à l'utilisation de masques au chrome réalisés par gravure électronique.

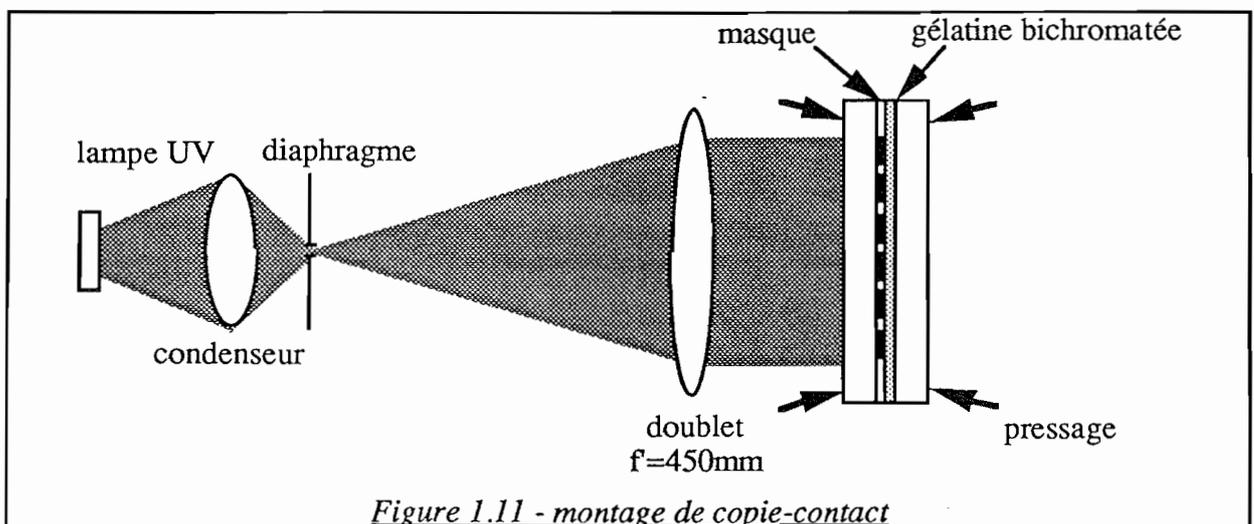


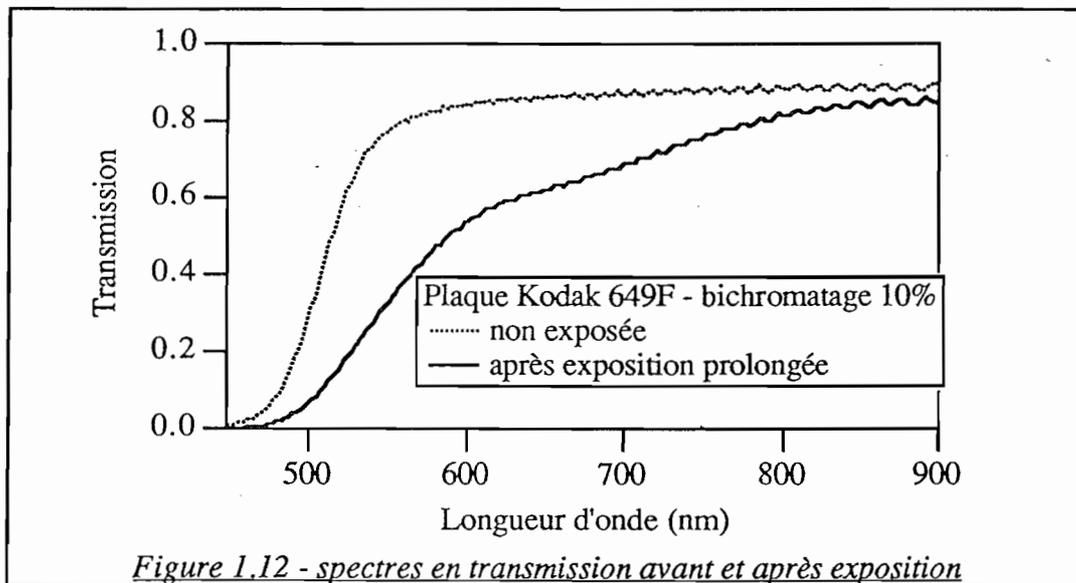
Figure 1.11 - montage de copie-contact

D.5 - Constitution de l'image latente d'un hologramme

D'après les mesures du paragraphe D.2 (figure 1.3), nous savons que l'exposition uniforme d'une couche de GBC induit une augmentation de l'absorption dans le bleu liée à la réduction de Cr^{6+} (jaune-orangé) en Cr^{3+} (brun). Nous avons vu également que, pendant l'enregistrement interférométrique d'un réseau, son image latente absorbe et diffracte le faisceau rouge qui sert au contrôle de l'exposition. Ces observations sont confirmées par la

comparaison du spectre en transmission d'une plaque Kodak 649F bichromatée avec celui de la même plaque après exposition (figure 1.12); pour ce second spectre, une exposition uniforme de la plaque a été prolongée de façon à obtenir une transformation totale des espèces photoréactives. Ces courbes laissent penser que l'image latente d'un hologramme est constituée de variations d'absorption. En fait, l'exposition seule (sans développement) induit également de faibles variations d'indice^{CUR70} dans l'image latente (de l'ordre de 10^{-3}), et a pour effet secondaire une légère diminution de l'épaisseur de la gélatine.

Après l'exposition, il peut être bénéfique de laisser s'écouler un certain temps (typiquement une nuit) avant de développer: on laisse ainsi le temps à l'acide chromique de se transformer en chrome Cr^{3+} qui crée de nouvelles liaisons. Dans ce cas la réaction dans l'obscurité évoquée précédemment renforce la modulation de l'image latente, et par conséquent celle de l'hologramme final.



E - Développement et traitements ultérieurs

E.1 - Développement

E.1.a - Méthode de Shankoff

Les variations d'indice de l'image latente après l'exposition sont très faibles, et ne peuvent pas constituer directement un hologramme efficace. De plus, un film de GBC exposé reste absorbant et sensible à la lumière. Si l'on effectue un lavage à l'eau, à l'instar du traitement photorésist, on peut observer dans l'eau une forte efficacité de diffraction due au gonflement différentiel de la couche de gélatine (elle gonfle jusqu'à atteindre 3 à 4 fois son volume

initial^{MEY77}). Au séchage, le gonflement disparaît et on peut espérer un rendement de quelques pour-cent seulement.

Les applications de la GBC à l'holographie de volume ont été rendues réellement performantes par le procédé de Shankoff qui permet d'amplifier le profil d'indice photoinduit. Cette technique commence par un rinçage classique à l'eau suivi d'une déshydratation rapide de la gélatine par immersion dans un bain d'isopropanol. L'eau a une action double: éliminer les ions chrome (Cr^{6+} et Cr^{3+}) qui n'ont pas réagi et faciliter la pénétration de l'isopropanol. L'alcool remplace l'eau en s'y mélangeant, ce qui a pour effet de sécher très vite la couche, car l'isopropanol ne dissout pas la gélatine et donc ne la mouille pas. Enfin l'alcool s'évapore rapidement dans l'air. Ce type de développement permet d'atteindre des variations d'indice de plus de 0,15, et des efficacités de diffraction très proches de 100%.

E.1.b - Explication du phénomène

Comme dans le cas de la réaction photochimique, on ne sait pas parfaitement expliquer le mécanisme du développement. Plusieurs théories ont été avancées.

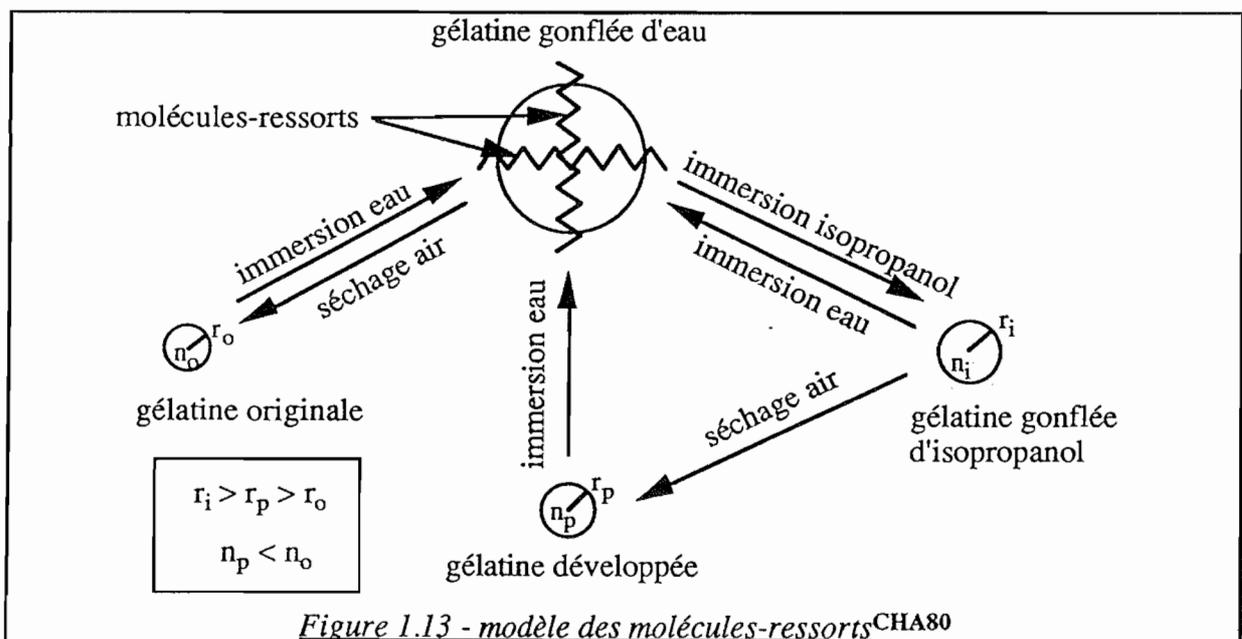
Curran et Shankoff^{CUR70} ont constaté que l'efficacité de leurs hologrammes pouvait être réversiblement annulée par immersion dans certains liquides d'indice proche de celui de la gélatine. Ils ont déduit de ces expériences d'immersion et d'observations au microscope électronique que le séchage rapide contraint la gélatine au point de créer des craquelures le long des franges. D'après eux, la différence d'indice entre l'air de ces fissures et la gélatine serait responsable de la modulation de phase; les fissures deviennent plus profondes si l'énergie d'exposition augmente.

Les conclusions de Curran et Shankoff n'expliquent pas correctement toutes leurs expériences: il leur a été impossible de réaliser l'immersion par le côté extérieur des couches sans les imbiber au préalable de méthanol, alors que des couches séparées du substrat en verre s'imprégnaient facilement sans préparation. Cette observation laisse penser que les fissures ne s'étendent pas jusqu'à la surface extérieure des couches, ce qui va à l'encontre des mesures de bande passante des mêmes auteurs, qui montrent que la modulation occupe toute l'épaisseur. De plus, de telles fissures, dont les dimensions sont comparables aux longueurs d'ondes optiques, devraient causer une diffusion importante; or les hologrammes obtenus sont très transparents.

Meyerhofer^{MEY72} explique l'apparition de la forte modulation d'indice par l'addition de molécules d'isopropanol aux atomes de chrome sur les sites des liaisons latérales. Cela n'explique pas la possibilité d'observer de fortes efficacités dans le bain de lavage, avant même la déshydratation.

Case et Alferness^{CAS76} ont proposé une variante de la théorie de Curran et Shankoff. Ils ont envisagé la formation dans la gélatine d'un grand nombre de petites vacuoles de dimensions très inférieures à la longueur d'onde. Cette explication élude la question de la faible diffusion, et autorise des variations continues de l'indice, mais ne rend pas parfaitement compte du problème de l'immersion.

Dans des publications plus récentes^{CHA79, CHA80} B.J.Chang et Leonard expliquent que le gonflement différentiel de la gélatine dans l'eau crée des variations de densité; dans le bain d'isopropanol, la gélatine se déshydrate sans avoir le temps de relaxer: les contraintes mécaniques qui s'exercent provoquent un réarrangement des chaînes moléculaires, "gelant" ainsi les variations de densité de matière. On peut considérer les molécules de gélatine comme des ressorts, très souples dans l'eau et très rigides une fois la couche déshydratée: la constante de raideur de ces ressorts dépend de la quantité d'eau présente dans le film. Après le développement, la gélatine se rétracte en séchant, mais elle ne peut revenir à sa taille initiale car elle a déjà perdu sa souplesse dans l'alcool. Ce phénomène est illustré par la figure 1.13.



E.1.c - Améliorations du développement

Le séchage des plaques est une étape très délicate: il est parfois difficile d'obtenir une efficacité de diffraction uniforme. Ces défauts proviennent de vitesses de séchages différentes, qui créent des variations de l'amplitude de modulation du film. Dans le pire des cas, comme nous l'avons déjà évoqué, le gel peut aussi subir une transformation qui le rend très diffusant. Plusieurs précautions utiles pour mener à bien le développement et obtenir une uniformité correcte sont détaillées dans les lignes qui suivent.

Nous avons vu au paragraphe C.1.b que le phénomène de fissuration du gel peut être limité par la préparation des plaques suivant la méthode de M.Chang. On peut également intervenir juste après l'exposition par un post-durcissement dans une solution de bichromate faiblement concentrée et dans un fixateur tannant. Le gel ainsi traité devient plus résistant. Pour limiter les contraintes subies par le gel, on effectue une déshydratation progressive dans plusieurs bains d'isopropanol de concentration croissante.

L'opération la plus délicate du développement est la sortie des plaques du dernier bain d'alcool: pour obtenir une modulation d'indice uniforme, il est primordial que le séchage s'effectue à la même vitesse sur toute la surface de l'hologramme. Nous avons constaté qu'un aspect uniforme est d'autant plus difficile à obtenir que la modulation est forte. Nous avons expérimenté plusieurs techniques de séchage pour améliorer l'uniformité de nos échantillons:

- séchage énergétique: on peut évacuer rapidement l'alcool en plaçant le film dans un four à 100°C JEO⁹¹ ou dans un flux d'air chaud issu d'un séchoir à cheveux; avec cette dernière méthode, on peut accélérer encore le processus par une rotation rapide de la plaque entraînée par une tournette. Sauf pour quelques hologrammes faiblement modulés, les résultats que nous avons obtenus par séchage rapide ont été désastreux du point de vue de l'uniformité, et nous avons envisagé des solutions plus progressives;

- séchage avec inclinaison: cette méthode a été proposée par C.Bainier BAI⁷⁴: on sort délicatement les plaques du dernier bain d'isopropanol et on les laisse sécher légèrement inclinées par rapport à l'horizontale (15°), de préférence sous une hotte à flux laminaire. Nous avons utilisé cette méthode pour fabriquer plusieurs séries d'hologrammes. Du point de vue de l'uniformité, le taux de réussite est variable suivant le type d'hologrammes, et reste inférieur à 1 sur 3 (cette proportion a été évaluée d'après une observation visuelle sur environ 90 hologrammes enregistrés en plusieurs séries et à diverses époques);

- siphonnage: les plaques sont développées en position verticale dans une cuve d'alcool fermée hermétiquement. Le dernier bain est évacué en siphonnant très lentement la cuve (goutte à goutte). Ainsi, l'isopropanol se retire du film de façon très progressive, laissant le film dans une atmosphère saturée d'alcool. Environ 40% des échantillons obtenus par cette nouvelle technique présentent une uniformité convenable (statistique sur 15 hologrammes);

- séchage "sandwiché" BAH⁹²: dans le dernier bain d'alcool, on superpose une plaque de verre à l'hologramme. On forme ainsi un sandwich, que l'on retire en bloc du bain pour le séchage à l'air chaud issu d'un séchoir à cheveux. L'alcool s'évapore doucement par les bords du sandwich. La plaque protectrice n'est enlevée qu'après séchage complet. Cette méthode permet d'obtenir une bonne uniformité sur plus de 50% des échantillons traités (statistique sur 30 échantillons).

On doit noter qu'un hologramme "réussi" du point de vue de l'uniformité ne l'est pas forcément quant à son efficacité globale de diffraction.

E.2 - Redéveloppement

La GBC possède une caractéristique unique: elle offre la possibilité de redévelopper les hologrammes. La reproductibilité relativement mauvaise des résultats confère un grand intérêt au redéveloppement, qui permet de réajuster la modulation d'indice et ainsi de "rattraper" un hologramme surexposé ou mal développé.

Lin ^{LIN69}, qui le premier a expérimenté le redéveloppement, n'a observé aucune dégradation des hologrammes. Cependant il semble que les hologrammes traités plusieurs fois deviennent plus diffusants.

B.J.Chang ^{CHA76} a effectué des essais systématiques de redéveloppement. Pour accroître la modulation d'indice, il préconise d'augmenter la température des bains par rapport au premier traitement: la déshydratation devient plus rapide.

En pratique, on obtient en général une baisse de modulation si l'on redéveloppe l'hologramme sans rien changer au traitement. Pour sauver certains échantillons qui s'étaient opacifiés en séchant, nous avons répété l'opération de développement en omettant le dernier bain d'isopropanol: cette manœuvre a permis plusieurs fois d'aboutir à des hologrammes transparents et assez peu diffusants: dans l'eau les molécules se réarrangent, revenant pratiquement à l'état post-exposition; le second développement, au séchage moins brutal, n'entraîne pas de ruptures visibles dans le gel, mais aboutit à des hologrammes moins efficaces et plus sensibles à l'humidité.

E.2 - Cuisson

Pour diminuer la modulation d'indice, B.J.Chang ^{CHA80} mentionne également la technique qui consiste à cuire l'hologramme à haute température (supérieure à 80°C).

La cuisson est une méthode qui s'avère difficile à contrôler, car il faut laisser l'hologramme refroidir pendant plusieurs heures pour observer l'effet réel de la cuisson, puis recommencer si cet effet est insuffisant. De plus cette technique provoque une diminution de l'épaisseur du film: son effet est un peu destructeur. Nous l'avons cependant employée pour diminuer la modulation d'indice d'hologrammes surexposés. La cuisson a été utilisée de façon systématique par I.Redmond ^{RED89} pour "régler" l'efficacité de ses hologrammes.

E.3 - Protection des hologrammes.

Nous avons pu observer, sur une durée de deux ans, que l'efficacité des hologrammes en GBC ne se dégrade pas lorsqu'ils sont conservés à 20°C et 40%HR. Le séjour dans une atmosphère à fort taux d'humidité (>80% H.R.) diminue leur modulation d'indice et augmente leur épaisseur.

On peut protéger un hologramme en le scellant sous une plaque de verre à l'aide d'une colle optique non poreuse. Le collage doit être effectué sous humidité faible afin d'emprisonner le moins d'eau possible. Pour réaliser cette condition, Chang et Leonard ^{CHA79} dessèchent l'hologramme en le mettant sous vide avant de le sceller; l'inconvénient est que la gélatine réabsorbe de l'eau dès la sortie de l'enceinte à vide. I.Redmond ^{RED89} préchauffe à haute température l'hologramme et la plaque de protection, puis les colle sans qu'ils aient refroidi. Quand on utilise cette méthode, des modifications de l'hologramme sont à craindre.

Nous avons mis au point une technique apparemment plus sûre, utilisant une colle polymérisable sous rayonnement ultraviolet (Norland n°61): on commence par une courte exposition de l'hologramme et de la plaque de verre séparés pour les sécher. Pour éviter la formation de bulles d'air dans la colle, on peut réaliser le collage de la manière suivante: on commence par recouvrir l'hologramme de sa plaque protectrice, et on les solidarise sur un bord seulement par une bande adhésive. On dispose ensuite l'ensemble avec l'adhésif dirigé vers le bas, et on écarte un peu en haut la plaque de l'hologramme. On obtient ainsi un V au fond duquel on dépose quelques gouttes de colle. On referme alors le V en retournant l'ensemble et en pressant les plaques l'une sur l'autre, en commençant par le côté de l'adhésif. Une deuxième et courte exposition démarre la polymérisation; on peut alors nettoyer les surfaces et éliminer les excès de colle. Une troisième illumination assure le collage définitif. Appliquée à des hologrammes à hautes fréquences spatiales, cette méthode ne modifie pas leur efficacité de diffraction.

Si l'on veut protéger les hologrammes sans les sceller, on peut leur adjoindre une plaque de protection au moyen d'un ruban adhésif métallique. Cette opération doit se faire également sous humidité faible, et les hologrammes devront être conservés autant que possible en atmosphère sèche.

F - Récapitulation: influence de divers paramètres

F.1 - Dureté initiale

Les effets de ce paramètre essentiel sur la structure des hologrammes sont détaillés dans les paragraphes consacrés à la préparation des films. Retenons que la gélatine doit être suffisamment dure pour éviter les fluctuations d'épaisseur, les risques de craquage et la diffusion, mais assez tendre pour permettre d'importantes modulations d'indice.

F.2 - Fréquence spatiale

La réaction photochimique ne nécessite qu'un petit nombre d'ions chromes et deux molécules de gélatine voisines. La résolution spatiale est donc très haute: on peut enregistrer des fréquences spatiales de plus de 6000 traits/mm ^{LIN69}.

Nous verrons au chapitre II que la période des franges de la figure d'interférences qui expose la GBC exerce une influence sur la structure des hologrammes. La limitation des variations d'épaisseur au profit de celles de l'indice de réfraction est plus difficile dans le cas de franges plus larges. Le processus détaillé à la fin de ce chapitre ne donne qu'une faible modulation d'épaisseur résiduelle pour des périodes inférieures ou égales au micron: la mesure rugosimétrique de ces fluctuations indique environ $\lambda/20$ (voir chapitre 2), et les hologrammes immergés dans du décahydronaphtalène, d'indice adapté à celui de la gélatine, conservent leur efficacité. D'après l'étude de Filmore et Tynan ^{FIL71}, il semble que les résultats sont inchangés jusqu'à un pas d'environ 10 μm . Quand on utilise le même traitement pour un pas supérieur à 50 μm , la modulation d'épaisseur devient principalement responsable de l'efficacité de diffraction: la mesure profilométrique donne des valeurs de l'ordre de λ (chapitre II), et l'immersion annule pratiquement l'efficacité.

F.3 - Epaisseur du film

Un hologramme épais présente en général d'importantes non-uniformités de la modulation suivant la profondeur dans le film, qui peuvent se créer à plusieurs stades de la fabrication.

Dans une couche très épaisse la diffusion du bichromate peut être très longue et il devient difficile d'obtenir une sensibilité uniforme dans toute l'épaisseur (ce n'est pas le cas des plaques Kodak 649F: la figure 1.3 montre que l'on parvient rapidement à les saturer en bichromate).

Pendant l'enregistrement, les faisceaux lumineux sont progressivement absorbés par le bichromate dans l'épaisseur de la gélatine, et la surface est globalement plus exposée que les zones profondes: dans les plaques Kodak 649F bichromatées à 10%, la surface du film reçoit une exposition 4 à 5 fois plus forte que sa face arrière (voir spectre en transmission de la figure 1.4).

Enfin, le développement est susceptible de créer un gradient de modulation lors de la déshydratation: ce phénomène est plus difficile à mettre en évidence que les précédents. On peut imaginer que la déshydratation se produit d'abord en surface, créant une barrière sans eau qui nuit ensuite à la pénétration d'alcool. La déshydratation demeure alors moins complète en profondeur, et la modulation plus faible.

F.4 - Humidité relative

L'humidité favorise la réduction dans l'obscurité du chrome hexavalent: avant l'exposition, elle diminue la capacité à la photoréaction des plaques sensibilisées. Au contraire, une fois les plaques exposées, la réaction dans l'obscurité accroît la modulation de l'image latente.

D'une façon générale, l'humidité rend les séchages moins complets; dans le cas du séchage qui suit le développement, cela diminue la modulation d'indice finale.

F.5 - Température

On peut utiliser la température pour modifier la structure de la gélatine non prédurcie: on a décrit précédemment la méthode de M.Chang qui permet d'obtenir une couche plus résistante.

Lors de la sensibilisation et du séchage qui la suit, élever la température permet d'augmenter la solubilité du bichromate: on peut ainsi rendre la cristallisation pratiquement impossible.

Une température élevée accélère les séchages. Après le développement, il ne faut cependant pas sécher à trop haute température afin d'éviter le craquage de la gélatine.

On a vu, dans le paragraphe consacré à la cuisson, que les hautes températures (supérieures à 80°) diminuent la modulation d'indice et l'épaisseur de l'hologramme.

F.6 - pH

Au point isoélectrique (pH entre 4,6 et 5,2), la température de fusion est maximale, alors que la viscosité et le gonflement passent par un minimum. La sensibilité est également plus

forte, c'est pourquoi certains utilisent un acide organique ou son sel (citrate de potassium) pour maintenir un pH suffisamment faible. Un traitement à l'acide chlorhydrique effectué avant le développement permet d'améliorer la reproductibilité au détriment de la linéarité NAK75.

Il est surtout important d'éviter les variations de pH d'un traitement à l'autre, ce que l'on obtient par l'utilisation d'eau désionisée et de produits chimiques de départ très purs.

F.7 - Durée des bains

Dans le processus détaillé qui suit, les durées qui ont été adoptées permettent aux diffusions et aux réactions souhaitées dans la gélatine de s'effectuer de la façon la plus complète possible.

G - Processus détaillé utilisant les plaques Kodak 649F

Les indications en italiques ne font pas partie de notre procédure standard. Ces techniques optionnelles sont recommandées quand un gel résistant est nécessaire.

Notre salle blanche ne dispose ni d'une tournette, ni d'une étuve, c'est pourquoi la préparation des plaques est effectuée dans un autre local propre, à température et taux d'humidité ambiants (pas de contrôle).

Préparation

<i>Méthode de M.Chang:</i>		Eclairage inactinique
<i>Fixateur non tannant (Ilford Hypam, Agfa g334 ou Kodak Rapid Fixer)</i>	<i>15mn</i>	T et H.R. ambiants
<i>Lavage eau distillée avec rampe de température de 20 à 40°C à 1°C/mn</i>	<i>1H</i>	<i>(voir C.1, C.2 et C.3)</i>
Sulfite de sodium 10%	5 mn	
Fixateur tannant (habituellement Kodak F5)	15mn	
Lavage eau courante puis eau désionisée	1H	Eclairage normal
2 bains de méthanol	2×10mn	
séchage sous flux laminaire	> 12H	

Sensibilisation

bichromate d'ammonium $(\text{NH}_4)_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ concentration 10% + 1 goutte de Kodak photo-flo pour 100ml de solution	5mn	Eclairage inactinique (rouge)
tournette à 2000t/mn + essuyage des bords et du côté verre	20s	T et H.R. ambiants
séchage air chaud (séchoir à cheveux ou étuve à 40°)	1H	(voir C.4)
séchage sous flux laminaire à température ambiante	12H	

Exposition

de l'ordre de $100\text{mJ}/\text{cm}^2$ avec laser Argon à 488nm		Eclairage inactinique T=20°, H.R.=40% (voir D)
--	--	--

Développement

<u>Post-durcissement:</u>		Eclairage inactinique
<i>bichromate d'ammonium $(\text{NH}_4)_2\text{Cr}_2\text{O}_7$</i> <i>concentration 0,5%</i>	8mn	T=20°, HR=40%
Fixateur tannant	15mn	(voir E.1)
Lavage eau courante puis eau désionisée	4H	Eclairage normal
isopropanol 50%	5mn	
isopropanol 90%	5mn	
isopropanol 100%	10mn	
séchage sous flux laminaire à température ambiante, inclinaison 10° par rapport à l'horizontale <u>ou</u> séchage en "sandwich" sous une plaque de verre <u>ou</u> séchage en cuve verticale, en siphonnant le dernier bain d'alcool	4H	

Redéveloppement

idem développement ci-dessus		Eclairage normal T=20°, HR=40% (voir E.2)
------------------------------	--	---

Scellement

exposition de l'hologramme et de la plaque de verre séparés non encollés sous lampe UV	10mn	Eclairage normal
encoller avec par exemple colle optique Norland n°61 et presser les deux plaques		T et H.R. ambiants
exposition UV	2mn	(voir E.3)
nettoyage des excédents de colle avec lame ou chiffon + alcool		
exposition UV finale	5mn	

CHAPITRE II

**CARACTERISATION DE RESEAUX
EN GELATINE BICHROMATEE**

A - Introduction

L'hologramme le plus simple que l'on puisse concevoir résulte de l'interférence d'une onde objet plane avec une onde de référence plane également: il s'agit d'un réseau périodique. Les applications des réseaux de diffraction sont très nombreuses ^{GAY85}, dans des domaines variés: spectroscopie, traitement optique de l'information, optique intégrée, etc... (au chapitre III, nous décrivons l'utilisation de réseaux pour la compression d'impulsions laser ultra-brèves). En plus de ces applications spécifiques, la fabrication et la caractérisation de réseaux permettent l'investigation des propriétés d'un matériau holographique.

Dans le présent chapitre, nous décrivons plusieurs méthodes expérimentales de caractérisation des réseaux, et nous présentons les résultats de mesures effectuées sur des réseaux en gélatine, enregistrés suivant les techniques décrites au chapitre I. Pour alléger l'exposé, nous n'expliquons pas ici tous les aspects théoriques qui interviennent dans l'interprétation des mesures de diffraction, et nous évoquons seulement les descriptions les plus simples de la diffraction par les réseaux. Les modèles de diffraction plus sophistiqués, utilisés pour l'ajustement théorique de certaines courbes expérimentales, sont exposés en détail au chapitre IV.

Cette étude est divisée en deux parties. La première, de loin la plus importante, est consacrée aux réseaux dits épais, enregistrés de façon interférométrique. Les réseaux épais ont pour propriété de diffracter la lumière suivant seulement deux directions ^{KOG69} (régime de Bragg); ils sont sélectifs angulairement et spectralement et permettent d'obtenir de très fortes efficacités de diffraction. La seconde partie traite des réseaux dits minces, fabriqués par copie-contact d'un masque binaire. Contrairement aux réseaux épais, les réseaux minces ^{RAM35}, ^{RAM36} diffractent la lumière dans un grand nombre d'ordres (régime de Raman-Nath); ils sont peu sélectifs, et d'une efficacité de diffraction limitée.

Les propriétés très différentes des deux types de réseaux imposent des méthodes de caractérisation optique différentes. Les paramètres physiques d'un réseau épais seront déduits de la dépendance angulaire ou spectrale de son rendement énergétique dans un ou deux ordres diffractés; ceux d'un réseau mince proviendront de la mesure des efficacités diffractées dans plusieurs ordres, à angle d'incidence et longueur d'onde fixes. Pour les deux types de réseaux, des mesures profilométriques sont utiles pour mettre en valeur d'éventuelles modulations d'épaisseur.

Des mesures complémentaires, telles que les mesures d'indice de réfraction et d'épaisseur optique, sont indispensables. Comme les techniques que nous avons employées sont

classiques (réfractomètre d'Abbe, microscope interférentiel), nous ne les décrivons pas dans cet exposé.

B - Réseaux épais holographiques

Après quelques généralités sur ces réseaux, nous présentons les méthodes expérimentales de caractérisation suivantes:

- mesures de réponses angulaires en intensité dans les directions transmise, réfléchi et diffractée: l'interprétation des courbes par la théorie d'ondes couplées permet la détermination de divers paramètres;
- mesure du spectre de l'efficacité de diffraction sous Bragg: moins précise que la mesure de réponses angulaires, cette méthode a l'avantage de donner en une seule courbe les performances les plus importantes de l'hologrammes;
- mesures profilométriques par un rugosimètre mécanique et par microscopie à force atomique: estimation de l'amplitude de la modulation d'épaisseur résiduelle.
- mesure de l'évolution temporelle de l'efficacité de diffraction de l'image latente d'un hologramme en cours d'enregistrement, pour un meilleur contrôle de l'exposition; nous proposons de plus un modèle qui décrit la formation de l'image latente;

B.1 - Généralités sur les réseaux épais

B.1.a - Interférences de deux ondes planes dans un support holographique épais

Lors de l'enregistrement holographique ^{HUI88} d'un réseau, deux ondes planes, notées O comme objet et R comme référence, de longueur d'onde λ_e dans le vide, interfèrent dans un film photosensible d'épaisseur d et d'indice n . Les amplitudes complexes de ces deux ondes dans un repère (x,z) (voir figure 2.1) s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} A_O(\vec{r}) = a_O \exp(j\vec{k}_O \cdot \vec{r}) \\ A_R(\vec{r}) = a_R \exp(j\vec{k}_R \cdot \vec{r}) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec les notations:

$$\vec{r} \begin{matrix} x \\ z \end{matrix}$$

$$\vec{k}_0 \begin{matrix} \frac{2\pi n}{\lambda_e} \sin \theta_0 \\ \frac{2\pi n}{\lambda_e} \cos \theta_0 \end{matrix}$$

$$\vec{k}_r \begin{matrix} \frac{2\pi n}{\lambda_e} \sin \theta_r \\ \frac{2\pi n}{\lambda_e} \cos \theta_r \end{matrix}$$

où θ_0 et θ_r sont les angles d'incidence dans le matériau des ondes O et R respectivement.

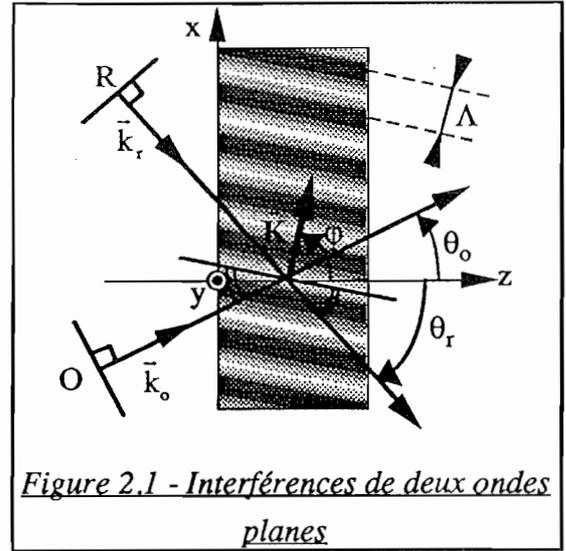


Figure 2.1 - Interférences de deux ondes planes

L'intensité résultant de l'interférence des deux ondes s'exprime de la façon suivante:

$$I(\vec{r}) = a_0^2 + a_r^2 + 2a_0 a_r \cos[(\vec{k}_0 - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}] \quad (2.2)$$

soit encore :

$$I(\vec{r}) = I_0 [1 + V \cos(\vec{K} \cdot \vec{r})] \quad (2.3)$$

avec les notations :

$$I_0 = a_0^2 + a_r^2, \text{ intensité moyenne} \quad (2.4)$$

$$V = \frac{2a_0 a_r}{a_0^2 + a_r^2}, \text{ visibilité des franges} \quad (2.5)$$

$$\vec{K} \begin{matrix} \frac{2\pi n}{\lambda_e} (\sin \theta_0 - \sin \theta_r) \\ \frac{2\pi n}{\lambda_e} (\cos \theta_0 - \cos \theta_r) \end{matrix} \quad (2.6)$$

\vec{K} est le vecteur d'onde spatial (ou vecteur caractéristique) du réseau, perpendiculaire aux strates.

On peut déduire des formules (2.3) et (2.6):

- la période spatiale suivant x de la figure d'interférence:

$$\Lambda_x = \frac{2\pi}{K_x} = \frac{\lambda_e}{n(\sin \theta_0 - \sin \theta_r)} \quad (2.7)$$

- la période suivant z:

$$\Lambda_z = \frac{2\pi}{K_z} = \frac{\lambda_e}{n(\cos \theta_0 - \cos \theta_r)} \quad (2.8)$$

- la distance entre deux franges consécutives:

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{K}\|} = \frac{\lambda_e}{2n \left| \sin\left(\frac{\theta_0 - \theta_r}{2}\right) \right|} \quad (2.9)$$

• l'angle entre l'axe Oz et le vecteur \vec{K} :

$$\varphi = \frac{\theta_0 + \theta_r}{2} + \frac{\pi}{2} \quad (2.10)$$

On voit que le plan des strates est le plan bissecteur des vecteurs d'onde \vec{k}_0 et \vec{k}_r .

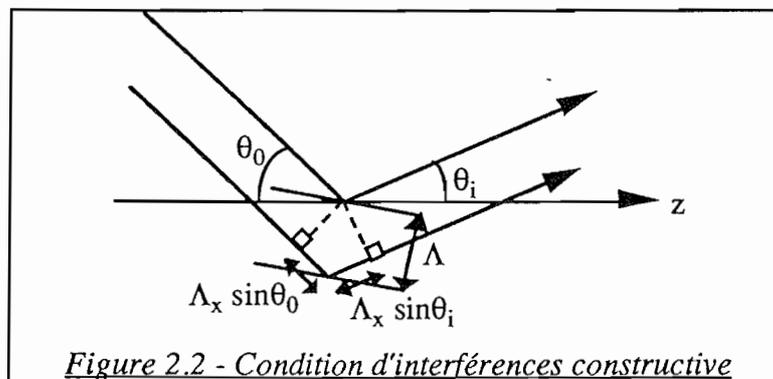
En première approximation, on suppose que la modulation d'indice complexe photoinduite (après développement dans le cas de la GBC) est proportionnelle à l'intensité $I(\vec{r})$. Le réseau holographique est donc constitué de strates planes d'égal indice, que l'on peut représenter par l'expression:

$$n(\vec{r}) = n_0 + n_1 \cos \vec{K} \cdot \vec{r} \quad (2.11)$$

B.1.b - Diffraction par la structure photoinduite

Loi des réseaux

Nous considérons maintenant la restitution du réseau par une onde plane, de longueur d'onde λ_r dans le vide, et d'angle d'incidence θ_0 à l'intérieur du film. La lumière ne peut être diffractée que dans les directions θ_i où les interférences entre deux ondes planes élémentaires issues de deux traits consécutifs du réseau sont constructives : pour cela, la différence de leur trajet optique doit être multiple de la longueur d'onde (voir figure 2.2).



Cette condition donne la loi des réseaux; pour l'ordre $n^{\circ}i$ diffracté en transmission, cette loi s'exprime de la manière suivante:

$$\Lambda_x (\sin \theta_i - \sin \theta_0) = i \frac{\lambda_r}{n_0} \quad (2.12)$$

L'ordre $n^{\circ}i$ réfléchi se propage avec l'angle $-\theta_i$.

Remarque: la loi des réseaux, comme la relation de dispersion qui en découle, est valable indépendamment du type de réseau (épais ou mince).

Dispersion chromatique

Si la source de restitution possède une largeur spectrale $\delta\lambda_r$, centrée sur λ_r , on trouve en différentiant la relation (2.12) que l'ordre i est diffracté avec une largeur angulaire $\delta\theta_i$ autour de θ_i , donnée par:

$$\frac{\delta\theta_i}{\delta\lambda_r} = \frac{1}{\Lambda_x \cos\theta_i} \tag{2.13}$$

Remarque: quelle que soit la largeur spectrale de la source de restitution, la dispersion est nulle pour un réseau dont les strates sont parallèles à la surface ($\Lambda_x = 0$); dans ce cas, la loi des réseaux (2.12) ne peut être vérifiée que pour $i=0$: un tel réseau diffracte uniquement dans les ordres 0 transmis et réfléchi.

Modèle des petits miroirs.

Considérons la diffraction par une seule strate du réseau (figure 2.3): on peut comparer celle-ci à un petit miroir plan, partiellement réfléchissant, de longueur infinie suivant y et de largeur $\frac{d}{\sin\varphi}$.

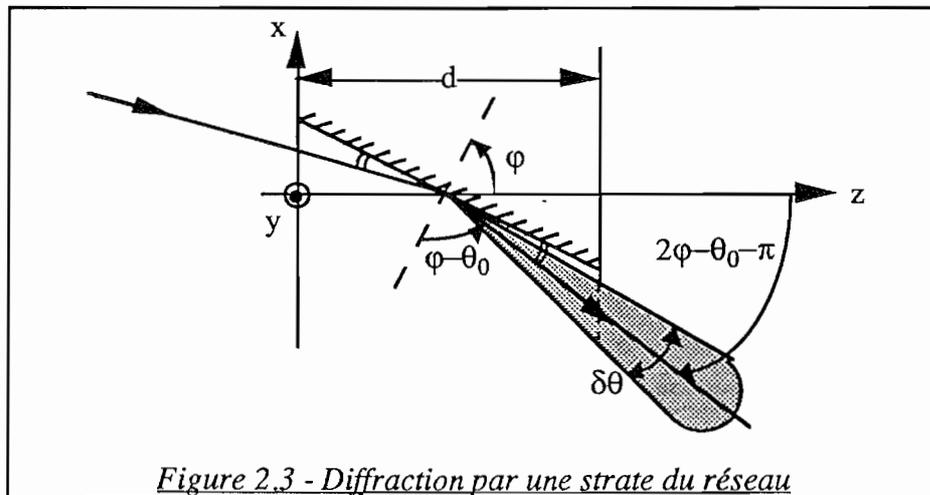


Figure 2.3 - Diffraction par une strate du réseau

La strate transmet une partie de la lumière incidente et diffracte la partie restante dans un cône centré sur la direction du faisceau réfléchi: $2\varphi - \theta_0 - \pi$ (en toute rigueur, il ne s'agit pas d'un cône, mais d'un volume compris entre deux demi-plans). La largeur apparente de la strate vue dans la direction diffractée vaut $\frac{d \cos(\varphi - \theta_0)}{\sin\varphi}$. La largeur angulaire du cône est donc:

$$\delta\theta = 2 \frac{\lambda_r}{n_0} \frac{\sin\varphi}{d \cos(\varphi - \theta_0)} \tag{2.14}$$

La diffraction dans une direction θ_i donnée par la loi des réseaux a lieu de façon significative seulement si θ_i appartient au cône de diffraction de ce petit miroir. On voit donc que ce cône de diffraction réalise une sélection parmi tous les ordres diffractés possibles.

Réseaux épais et réseaux minces^{GAY81b}

Si le cône est assez étroit, et si les directions diffractées, données par (2.12), sont suffisamment espacées, un ordre au plus est sélectionné. Seuls cet ordre, et l'ordre 0 partiellement transmis, émergent du réseau: on dit alors que la diffraction a lieu dans le régime de Bragg. **Un réseau qui diffracte dans le régime de Bragg est communément appelé un réseau épais.** Nous donnerons plus loin un critère définissant le régime de Bragg de façon plus précise.

A l'inverse, un réseau est dit mince lorsque l'ouverture angulaire du cône autorise la diffraction dans un grand nombre d'ordres. Un tel réseau diffracte dans le **régime de Raman-Nath** (voir notre étude des réseaux minces en partie C).

Condition de Bragg

Dans un réseau épais de modulation d'indice n_1 (voir équation (2.7)) assez faible, la situation la plus favorable pour la diffraction dans l'ordre i est obtenue quand θ_i se trouve au centre du cône :

$$\theta_i = 2\varphi - \theta_0 - \pi \quad (2.15)$$

Pour une modulation d'indice plus forte, les réflexions multiples sur les plans des franges interviennent, et on ne peut plus évaluer aussi simplement la configuration qui donne la meilleure efficacité de diffraction.

En introduisant l'égalité (2.15) dans la loi des réseaux (2.12), on obtient pour l'onde incidente la condition de Bragg d'ordre i :

$$2\Lambda \cos(\theta_0 - \varphi) = -i \frac{\lambda_r}{n_0} \quad (2.16)$$

Sélectivité des réseaux épais

En première approximation, on obtient une expression simple de la sélectivité angulaire d'un réseau épais peu modulé en combinant les relations (2.14) et (2.16):

$$\delta\theta = \frac{1}{i} \sin\varphi \frac{\Lambda}{d} \quad (2.17)$$

On peut remarquer que $\delta\theta$ est indépendant de la longueur d'onde de restitution.

De la même manière, la sélectivité spectrale $\delta\lambda$ s'exprime sous la forme:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda_r} = \frac{2}{i} \frac{\Lambda}{d} \sin\varphi \operatorname{tg}(\theta_0 - \varphi) \quad (2.18)$$

Dans le cas où les franges sont orthogonales à la face d'entrée ($\varphi = \pi/2$), la relation (2.17) se réduit dans l'ordre 1 (ou dans l'ordre -1) à la formule connue:

$$\delta\theta = \frac{\Lambda}{d} \quad (2.19)$$

Pour caractériser un réseau épais ^{MOH80a}, il arrive que l'on choisisse comme critère la sélectivité: le réseau est dit épais s'il vérifie:

$$\frac{\Lambda}{d} > 10 \quad (2.20)$$

Théorie d'ondes couplées: formules de Kogelnik^{KOG69}

Le calcul des caractéristiques des ondes diffractées par un réseau épais (amplitude et phase) nécessite une analyse électromagnétique de la diffraction. La théorie la plus utilisée est la théorie d'ondes couplées, dont le principe est le suivant: le champ électromagnétique dans le réseau est exprimée comme la somme de plusieurs ondes planes inhomogènes, chacune en accord de phase avec un des ordres diffractés par le réseau. Ce développement est introduit dans les équations de Maxwell qui régissent la propagation du champ électromagnétique, et on aboutit à un système d'équations différentielles couplées. La résolution de ce système, qui fait intervenir les conditions aux limites, donne les amplitudes complexes des ondes diffractées par le réseau. On trouvera, au chapitre IV, une étude détaillée et assez générale de ce modèle, auquel nous avons apporté des compléments originaux.

Nous rappelons simplement ici les résultats obtenus par Kogelnik^{KOG69}, qui utilise un modèle d'ondes couplées du premier ordre à deux ondes. Cette analyse a l'avantage de donner des formules simples pour décrire la diffraction par un réseau épais, modulé en indice et/ou en absorption, et présentant une inclinaison arbitraire φ des strates d'égale modulation.

La théorie de Kogelnik repose sur les hypothèses suivantes :

- la modulation est sinusoïdale,
- le réseau diffracte uniquement dans deux ordres (0 et, par exemple, -1),
- l'absorption moyenne est faible,
- l'amplitude de modulation est faible,
- l'effet des faces du réseau (réflexion et diffraction) est négligeable.

Les trois dernières conditions permettent de négliger les dérivées secondes du champ dans l'équation de propagation; cela donne la possibilité de représenter le champ par la somme de deux ondes planes seulement, l'une correspondant à l'ordre 0 transmis, l'autre à l'ordre diffracté. L'équation de propagation est alors transformée en un système de deux équations différentielles du premier ordre, dont les inconnues sont les amplitudes des deux ondes. On résout ce système en imposant les conditions aux limites.

La prise en compte par ce modèle d'une seule onde diffractée impose une distinction, suivant les paramètres géométriques de la reconstruction, entre un réseau en réflexion, où l'onde diffractée émerge par la face d'entrée, et un réseau qui fonctionne en transmission par l'autre face. Dans l'analyse de Kogelnik, ces deux types de comportement se caractérisent par des conditions aux limites différentes.

Le rendement (ou l'efficacité) de diffraction η est défini comme le rapport entre l'intensité diffractée et l'intensité totale incidente. Pour un réseau diélectrique fonctionnant en transmission, en lumière polarisée transverse électrique (TE), Kogelnik obtient:

$$\eta = \frac{\sin^2 \sqrt{v^2 + \xi^2}}{1 + \xi^2/v^2} \quad (2.21)$$

où v est le déphasage introduit par le réseau:

$$v = \frac{\pi n_1 d}{\lambda_r \sqrt{c_R c_S}} \quad (2.22)$$

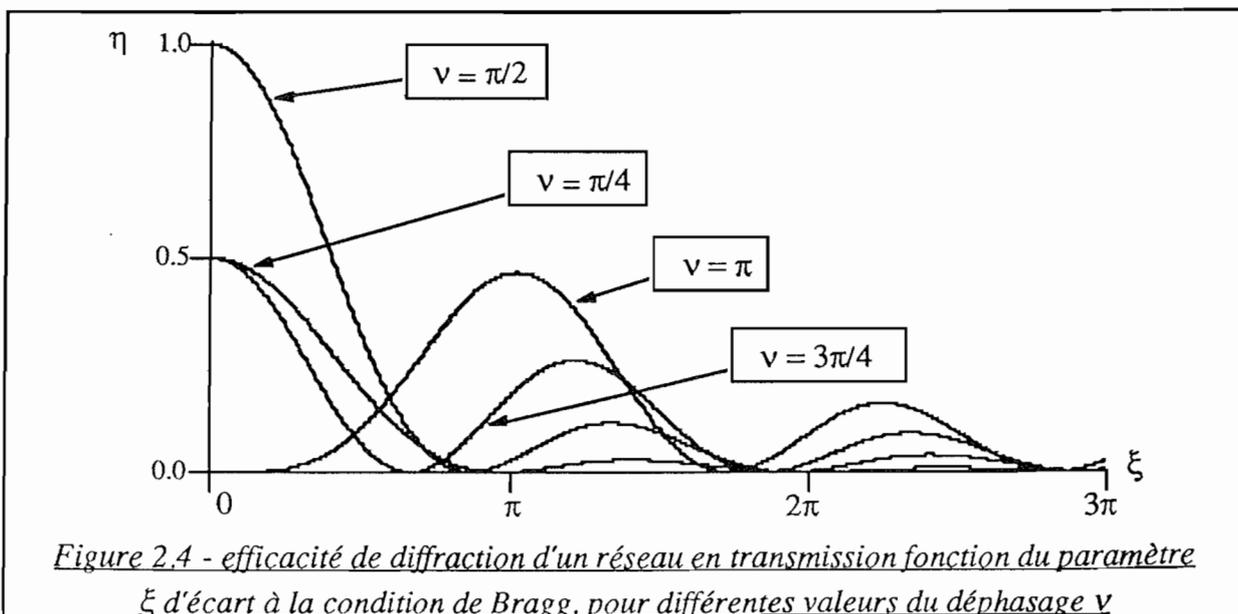
ξ représente l'écart à la condition de Bragg d'ordre -1:

$$\xi = \frac{\pi d}{\Lambda c_S} \left[\cos(\varphi - \theta_0) - \frac{\lambda_r}{2 n_0 \Lambda} \right] \quad (2.23)$$

et c_R et c_S sont les facteurs d'inclinaison des deux ondes:

$$\begin{cases} c_R = \cos \theta_0 \\ c_S = \cos \theta_0 - \frac{\lambda_r}{n_0 \Lambda} \cos \varphi \end{cases} \quad (2.24)$$

L'efficacité de diffraction donnée par (2.21) atteint sa valeur maximale égale à 1 pour $\xi=0$ et $v=\pi/2+N\pi$, où N est un entier positif quelconque. La figure 2.4 montre les variations de η en fonction de ξ , pour plusieurs valeurs de v .



D'après les formules précédentes, on peut voir que le rendement de diffraction à l'incidence de Bragg est donné par la relation:

$$\eta = \sin^2 \left(\frac{\pi n_1 d}{\lambda_r \cos \theta_0} \right) \quad (2.25)$$

En polarisation transverse magnétique (TM), le couplage entre les deux ondes est plus faible. Les formules de Kogelnik (2.22) à (2.25) restent vraies, à condition de remplacer n_1 par $n_1 \cos(2\theta_0)$.

Critère de validité

Il a été montré ^{MOH80a} que les approximations de diffraction à deux ondes et de couplage faible de Kogelnik sont justifiées si:

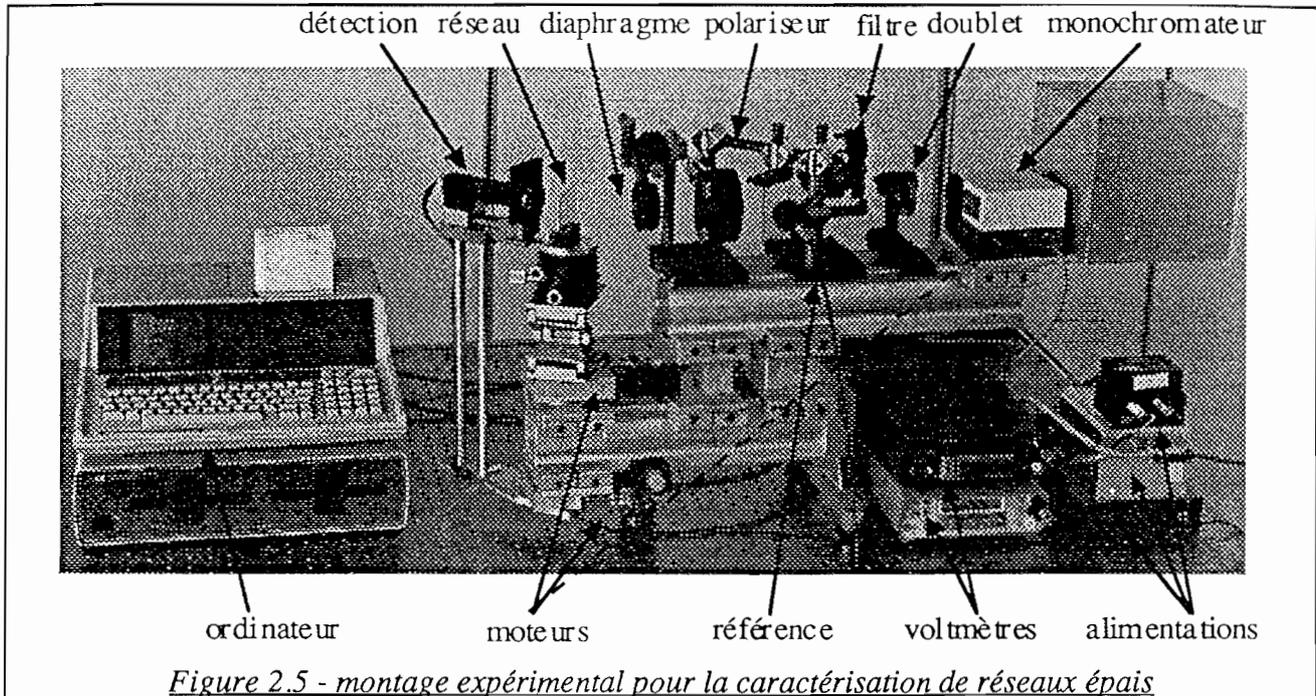
$$\frac{\lambda_r^2}{n_0 n_1 \Lambda^2} \geq 10 \text{ en polarisation TE} \quad (2.26)$$

$$\frac{\lambda_r^2}{n_0 n_1 \Lambda^2 \cos(2\theta_0)} \geq 10 \text{ en polarisation TM} \quad (2.27)$$

Ce critère assure que la proportion d'énergie diffractée dans les ordres autres que 0 et -1 est inférieure à 1%: il définit la limite du régime de Bragg, caractéristique des réseaux épais au sens de la diffraction. Paradoxalement, on peut remarquer que les conditions (2.26)-(2.27) ne font pas intervenir l'épaisseur du film.

B.2 - Réponses angulaires

B.2.a - Dispositif expérimental



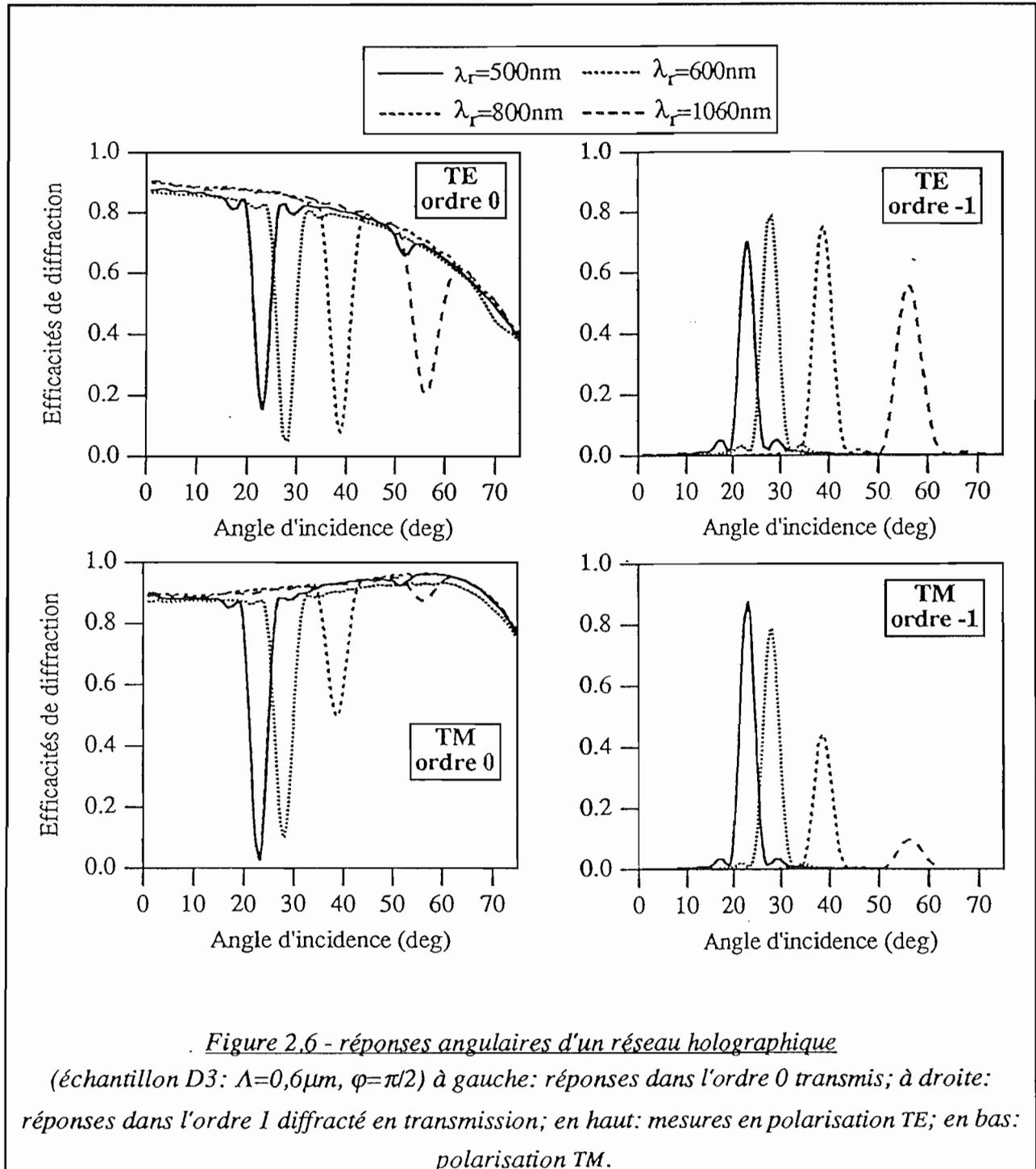
Nous avons mis au point un montage automatisé (figure 2.5), destiné en premier lieu à mesurer la réponse angulaire en intensité de réseaux épais dans les ordres transmis, réfléchi et -1 diffracté. Nous décrirons plus loin une autre fonctionnalité de ce dispositif, qui consiste à mesurer le spectre d'efficacité sous condition de Bragg.

La source est un monochromateur de longueur d'onde réglable entre 400 et 1100nm, et de dispersion 16nm/mm dans le plan de la fente de sortie (largeur de fente: 0,5mm). La lumière issue du monochromateur est collimatée par un doublet, et polarisée linéairement. On éclaire ainsi le réseau, monté sur une platine tournante motorisée pas à pas qui permet de faire varier l'angle d'incidence. Le bloc de détection, constitué d'un doublet et d'une photodiode amplifiée, peut tourner autour du même axe que l'échantillon. Les deux rotations sont contrôlées par programme via une unité de commande de moteurs pas à pas, ainsi que l'acquisition par l'intermédiaire de deux voltmètres numériques.

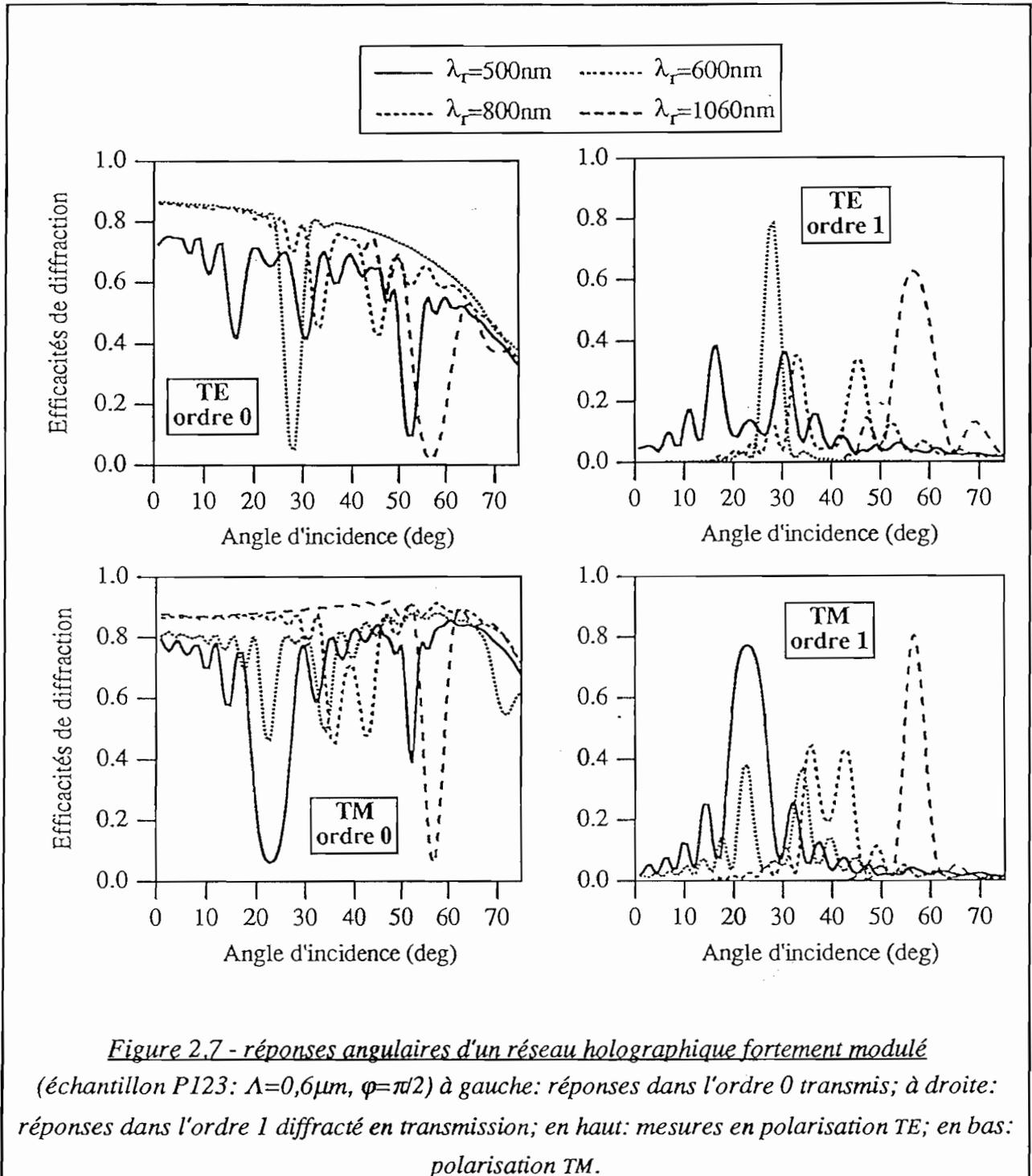
Lors d'une mesure de réponse angulaire, le réseau tourne avec un incrément angulaire inversement proportionnel à la pente de la courbe mesurée: cela permet une bonne représentation des ondulations et des pics même très pentus. Si l'on mesure l'intensité transmise par un réseau, le détecteur reste fixe et centré sur l'axe optique. Pour la mesure de l'intensité réfléchie, le détecteur effectue une rotation double de celle du réseau. Pour suivre le faisceau diffracté dans l'ordre -1, la position théorique du détecteur est calculée par la loi des

réseaux (2.12); sa position réelle est asservie à l'intensité maximale recherchée dans un intervalle autour de l'angle théorique: cet asservissement améliore la précision des mesures quand la fréquence spatiale des réseaux est connue d'une façon imprécise, ou quand le faisceau est décalé de façon importante dans l'épaisseur de la plaque holographique. Nous avons évalué l'erreur sur la mesure de l'efficacité de diffraction à 0,5%.

B.2.b - Exemples de mesures



Les courbes de la figure (2.6) révèlent une bonne efficacité de diffraction dans le domaine visible. Le rendement devient plus faible dans l'infrarouge; un réseau de modulation plus forte (figure 2.7) donne de meilleurs résultats dans ce domaine.



B.2.c - Interprétation des réponses angulaires

Interprétation "directe" des courbes expérimentales

Les courbes de réponses angulaires sont riches en informations sur les paramètres physiques du réseau:

- l'abscisse du pic principal, s'il existe, indique la valeur de l'angle de Bragg θ_{0B} ; la condition de Bragg (2.16) donne alors une relation entre Λ et φ . Dans le cas d'un réseau en transmission enregistré dans une configuration symétrique ($\varphi=\pi/2$), la mesure de θ_{0B} permet d'obtenir directement la période spatiale: $\Lambda = \frac{\lambda_r}{2n_0 \sin \theta_{0B}}$. Cette méthode s'applique facilement aux réseaux de modulation faible ou moyenne (voir mesures de la figure 2.6); la détermination de θ_{0B} est moins évidente avec des réseaux fortement modulés, dont les courbes de réponses angulaires oscillent fortement: on peut observer plusieurs pics, et l'efficacité n'est pas forcément maximale à l'angle de Bragg (voir par exemple la figure 2.7);
- la largeur $\delta\theta$ du pic de Bragg, quand on peut la mesurer, représente la sélectivité angulaire du réseau; d'après l'expression (2.17) de la sélectivité, valable pour un réseau faiblement modulé, nous en déduisons une évaluation de l'épaisseur du film: $d \approx \frac{\Lambda}{\delta\theta} \sin \varphi$ (si $\varphi=\pi/2$, $d \approx \frac{\Lambda}{\delta\theta}$);
- la hauteur du pic de la réponse dans l'ordre -1 indique l'efficacité de diffraction η du réseau;
- sur certaines courbes, la présence d'un second pic de Bragg, d'ordre -2, est visible sur la réponse angulaire dans l'ordre 0 transmis (voir les mesures à $\lambda=500\text{nm}$ dans les figures 2.6 et 2.7). Ce pic indique que le profil d'indice n'est pas sinusoïdal, et renseigne sur la première harmonique de ce profil.

Ces considérations très simples permettent une interprétation plutôt qualitative des mesures. Pour préciser les paramètres du réseau, nous avons recours à des simulations numériques.

Ajustement par des courbes théoriques

Nous avons mis au point un programme qui ajuste des courbes théoriques aux résultats expérimentaux (dans la suite, nous employons le mot anglais "fit" pour désigner ces ajustements). L'écart entre les réponses angulaires mesurées et les résultats numériques est minimisé par l'optimisation des valeurs de plusieurs paramètres: modulation d'indice, épaisseur et absorption du film de gélatine. Nous avons utilisé la théorie de Kogelnik pour nos premiers fits, car ce modèle présente l'avantage d'une programmation très simple. Les résultats du modèle de Kogelnik ne sont satisfaisants que pour des réseaux assez peu modulés (la figure 2.8 montre un exemple de fit pour ce type de réseau); plus la modulation est forte, et

plus l'intervalle où les courbes sont en bon accord se restreint autour de l'angle de Bragg (voir figure 2.9). De plus, comme l'effet des interfaces est négligé dans l'analyse de Kogelnik, ce modèle ne donne pas une bonne représentation des pertes par réflexion. Enfin, le modèle de Kogelnik traite seulement les réseaux à profil d'indice (complexe) sinusoïdal, et par conséquent ignore l'effet de distorsion du profil (visible sur la figure 2.8).

Pour une meilleure interprétation des réponses angulaires, nous avons développé un modèle de diffraction électromagnétique plus rigoureux et plus complet, à partir de l'approche d'ondes couplées "rigoureuse" (AOCR) proposée par Gaylord et Moharam^{GAY85}. Notre AOCR, présentée au chapitre IV, prend en compte de façon rigoureuse les caractéristiques et les effets suivants:

- réflexion et diffraction aux interfaces du réseau;
- forte amplitude de modulation;
- modulation périodique non sinusoïdale;
- modulation non uniforme dans la profondeur du réseau;
- présence de traitements multicouches (anti-reflets, par exemple);
- éclairage quasi-monochromatique en présence d'un substrat épais par rapport à la longueur de cohérence.

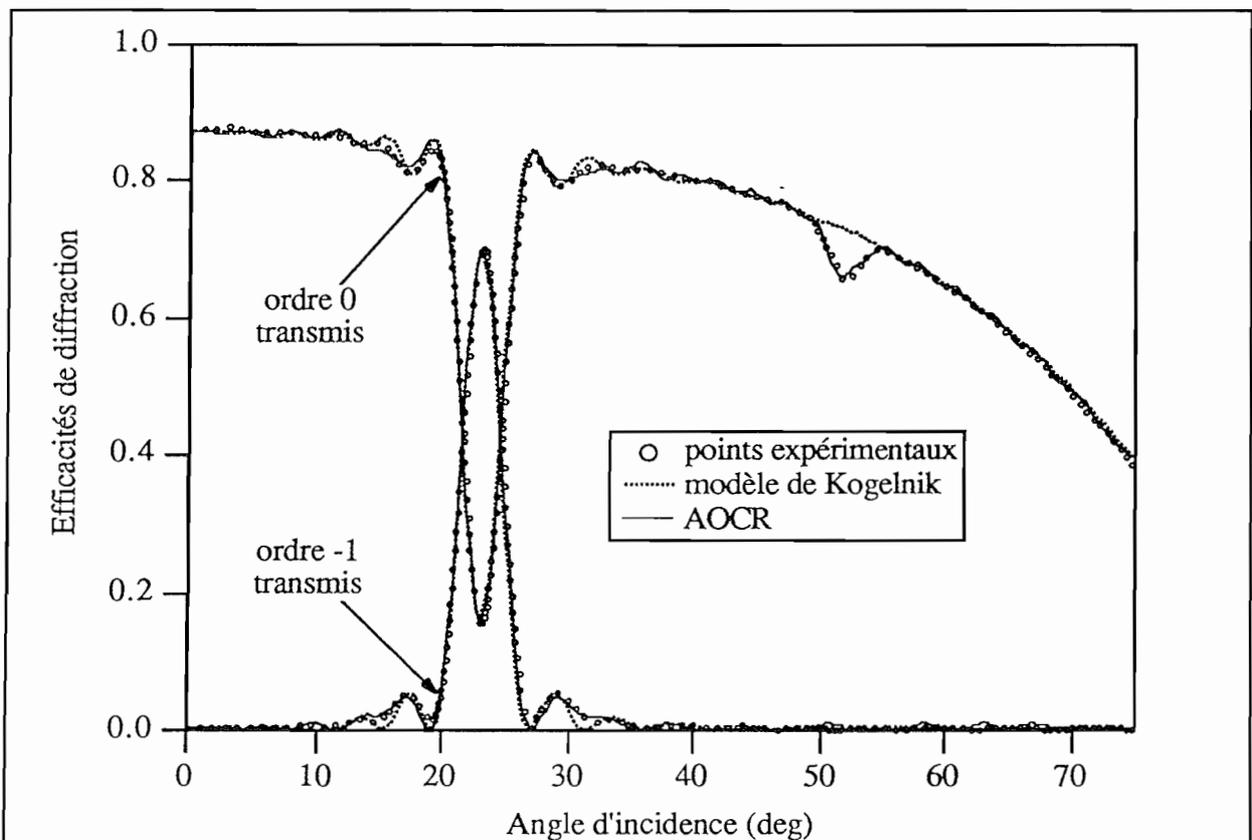
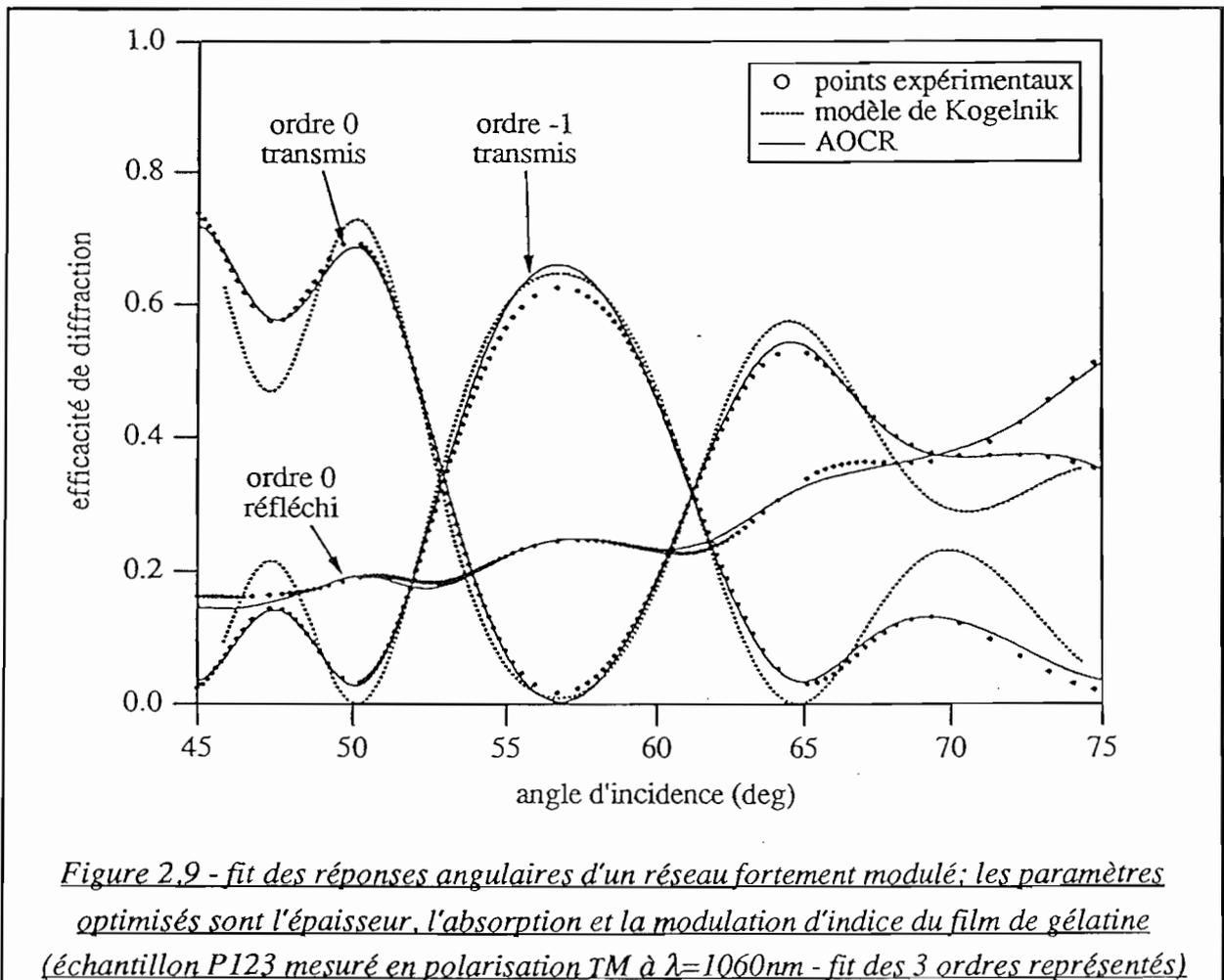


Figure 2.8 - fit des réponses angulaires d'un réseau moyennement modulé; les paramètres optimisés sont l'épaisseur, l'absorption et la modulation d'indice du film de gélatine (échantillon D3 mesuré en polarisation TE à $\lambda=500\text{nm}$ - fit de l'ordre 0 transmis).

La figure 2.8 montre un très bon accord entre l'expérience et les deux modèles théoriques autour de l'angle de Bragg d'ordre -1. On voit que l'AOCR donne une bonne représentation sur tout l'intervalle angulaire de la mesure, alors que le modèle de Kogelnik ignore l'effet Bragg d'ordre -2. Le désaccord faible, mais visible, entre les mesures et Kogelnik sur les lobes secondaires du pic de Bragg d'ordre -1 révèle que la modulation n'est pas uniforme dans toute la profondeur du film. L'introduction de ces non-uniformités dans l'AOCR permet d'obtenir une meilleure représentation de ces lobes (dans ce cas, les différentes valeurs de l'amplitude de modulation suivant la profondeur dans le réseau sont déterminées par l'optimisation numérique).

L'effet des non-uniformités de la modulation sur les réponses angulaires est plus important dans la figure 2.9, où les lobes secondaires mesurés paraissent brouillés par rapport à ceux prédits par le modèle de Kogelnik: les oscillations secondaires sont plus faibles que dans le cas d'un réseau uniforme. Dans la même figure, nous observons un bon accord entre l'expérience et l'AOCR pour les trois ordres mesurés.



D'autres exemples de traitement numérique de réponses angulaires expérimentales sont présentés au chapitre III §A, où cette méthode est utilisée pour caractériser l'effet de traitements anti-reflets déposés sur les films de gélatine.

Les réponses angulaires ont l'avantage de donner accès à diverses caractéristiques des réseaux. Elles permettent de déterminer assez finement leur structure physique, au prix de simulations et d'optimisations que l'on peut trouver un peu lourdes. Aussi avons-nous mis au point une autre méthode de caractérisation, présentée dans la section suivante, qui permet de déterminer l'amplitude de modulation d'un réseau pratiquement sans calcul de diffraction.

B.3 - Spectre de l'efficacité de diffraction sous Bragg

B.3.a - Expérience

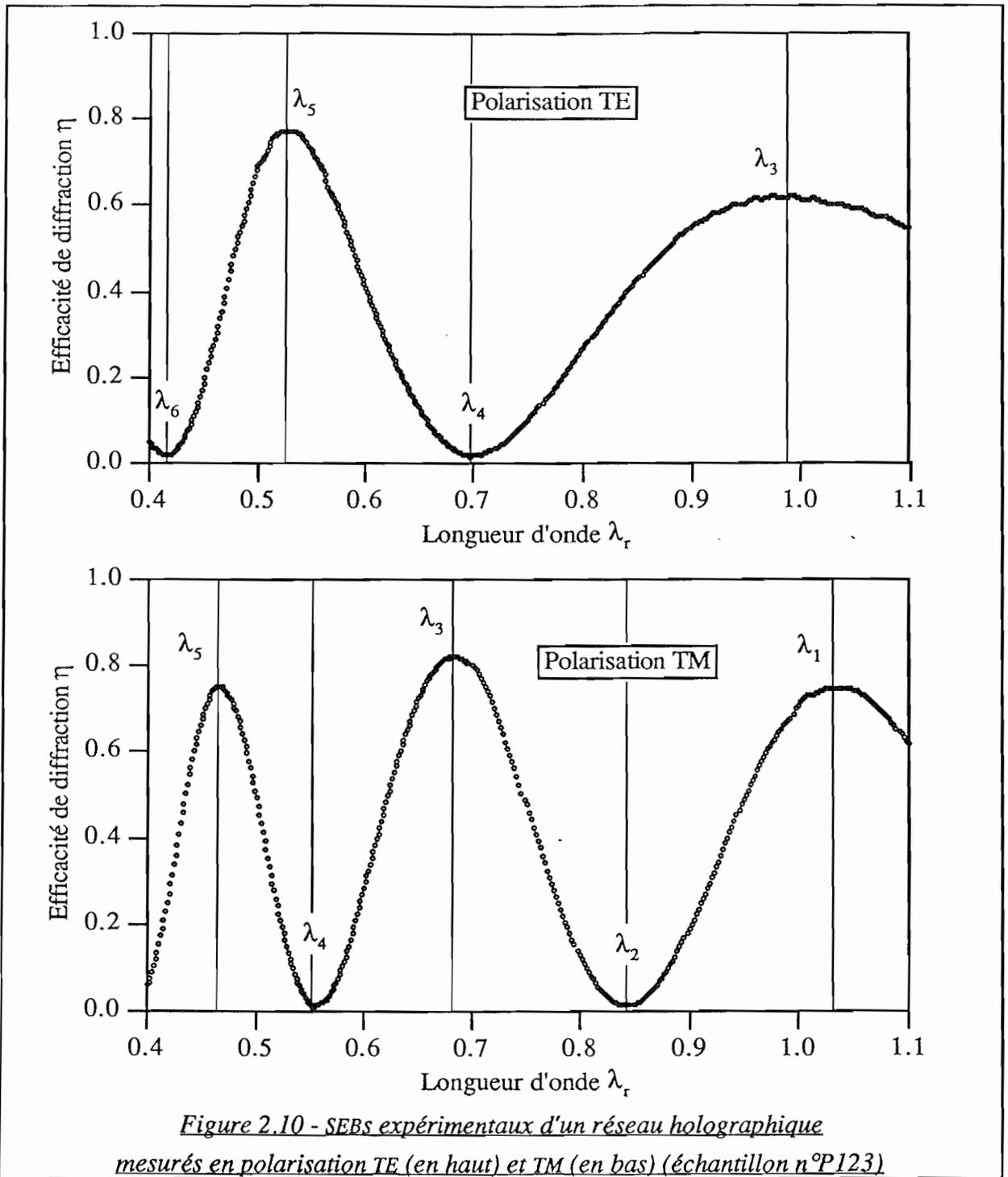
Dans le montage expérimental utilisé pour la mesure des réponses angulaires (figure 2.5), nous avons ajouté une motorisation pas à pas du monochromateur: l'ordinateur commande ainsi la longueur d'onde λ_r de restitution. Ce perfectionnement nous permet d'effectuer un nouveau type de caractérisation: **nous mesurons, en fonction de λ_r , les variations de l'efficacité de diffraction du réseau maintenu à l'incidence de Bragg.** Pour chaque valeur de λ_r , le réseau est placé à l'angle de Bragg calculé par la relation (2.16), et le détecteur suit la direction du faisceau diffracté, obtenue par la loi des réseaux (2.12). Les spectres d'efficacité sous Bragg (SEB) obtenus respectivement en polarisation TE et TM avec un réseau fortement modulé sont représentés dans la figure (2.10).

L'intérêt de la mesure du SEB est de mettre en évidence, sur une seule courbe expérimentale, l'efficacité de diffraction maximale du réseau et la longueur d'onde de restitution optimale correspondante. Au paragraphe suivant, nous montrons que cette mesure permet également une évaluation facile de l'amplitude de modulation du réseau. La précision des résultats expérimentaux est toutefois plus faible que dans le cas des réponses angulaires, à cause de l'erreur de positionnement du réseau à l'incidence de Bragg.

D'après la condition de Bragg (2.16), l'angle de Bragg pour l'ordre -1 est donné par:

$$\theta_0 = \varphi + \text{Arc cos} \left(\frac{\lambda_r}{2n_0 \Lambda} \right) \quad (2.28)$$

Pour un réseau donné, nous supposons que les pertes d'énergie (réflexion sur les interfaces, absorption et diffusion dans le matériau) sont représentées par un facteur $P(\lambda_r)$ à l'incidence de Bragg. A l'aide des relations (2.25) et (2.28), on peut alors exprimer l'efficacité de



diffraction sous Bragg de la manière suivante:

$$\eta(\lambda_r) = P(\lambda_r) \sin^2 \left(\frac{\pi n_1 d}{\lambda_r \cos \left[\varphi + \text{Arc cos} \left(\frac{\lambda_r}{2 n_0 \Lambda} \right) \right]} \right) \quad (2.29)$$

B.3.b - Détermination rapide de l'amplitude de modulation du réseau

Nous avons vu que le fit des courbes expérimentales de réponse angulaire permettait de déterminer, entre autres paramètres, l'amplitude de modulation du réseau. **A partir du SEB d'un réseau, il est possible d'évaluer le produit $n_1 d$ (n_1 étant supposé uniforme), d'une façon plus immédiate, sans calcul d'efficacité ni optimisation numérique.** La méthode que nous utilisons pour cela repose sur l'hypothèse suivante: dans la formule (2.29), les variations de $P(\lambda_r)$ sur l'excursion spectrale de la mesure sont lentes par rapport aux oscillations de la fonction sinus carré.

Sur la courbe du SEB, nous relevons les abscisses λ_i ($i \in \{0, \dots, N\}$) des extrema locaux (les λ_i sont représentés par des traits verticaux dans la figure 2.10). D'après notre hypothèse, les extrema de $\eta(\lambda_r)$ correspondent à ceux du sinus carré; les λ_i vérifient par conséquent la relation:

$$\frac{\pi n_1 d}{\lambda_i \cos \left[\varphi + \text{Arc cos} \left(\frac{\lambda_i}{2 n_0 \Lambda} \right) \right]} = \frac{\pi}{2} (i + i_0) \quad i \in \{0, \dots, N\} \quad (2.30)$$

où nous définissons l'entier $i+i_0$ comme le degré de modulation correspondant à l'extremum n°i. $(i+i_0)$ représente ainsi le degré de modulation du premier extremum accessible sur la courbe expérimentale.

Si l'on connaît i_0 , on peut calculer de façon immédiate la valeur de $n_1 d$ sous la forme:

$$n_1 d = \frac{i + i_0}{2} \lambda_i \cos \left[\varphi + \text{Arc cos} \left(\frac{\lambda_i}{2 n_0 \Lambda} \right) \right] \quad (2.31)$$

Théoriquement, cette valeur ne doit pas dépendre de l'ordre i considéré; cette propriété évidente est mise à profit pour déterminer i_0 : c'est l'entier pour lequel les valeurs de $n_1 d$ trouvées par (2.31) avec $i \in \{0, \dots, N\}$ sont le moins dispersées.

Le programme d'analyse des SEB que nous avons mis au point fonctionne de la manière suivante:

- détermination automatique des N extrema locaux λ_i
- pour différentes valeurs de i_0 (de 0 à 20), calcul des formules (2.31) pour tous les extrema, détermination de la valeur moyenne et de l'écart-type des résultats donnés par la formule (2.31);
- on retient la valeur de i_0 qui donne le plus faible écart-type; le produit $n_1 d$ est déterminé par la valeur moyenne correspondante.

Précision de la méthode

La précision de ce calcul est limitée par la précision de la mesure du SEB d'une part, et par les hypothèses de départ d'autre part. Comme la modulation d'indice est supposée sinusoïdale

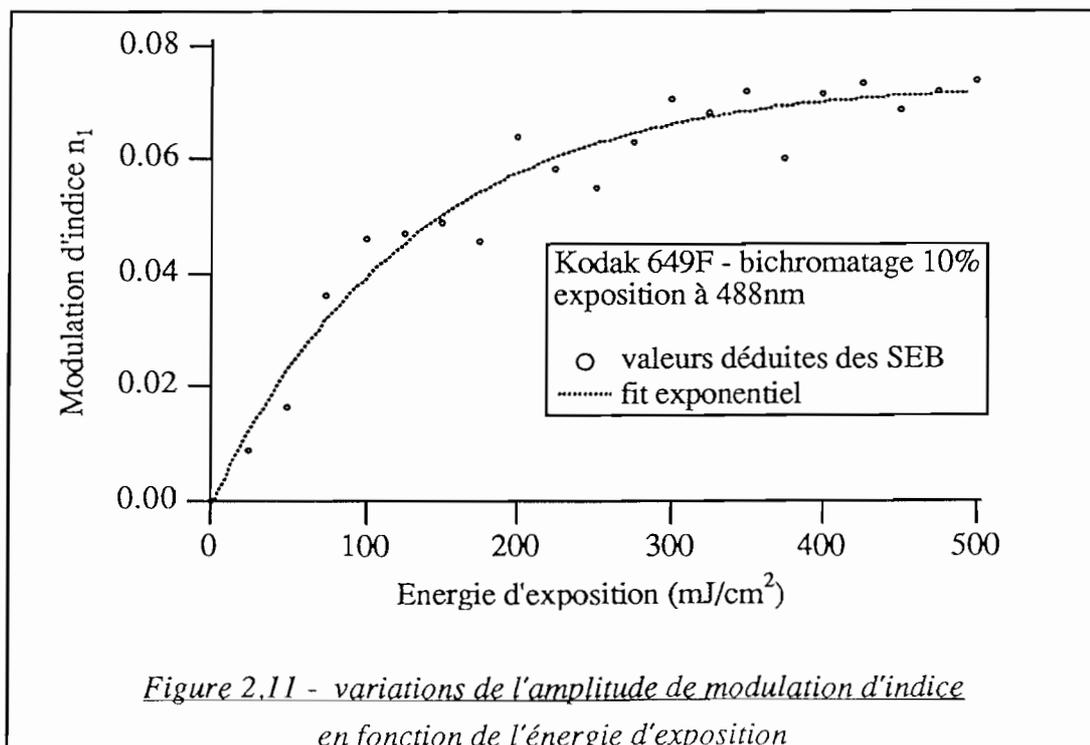
et d'amplitude n_1 uniforme, la méthode ne renseigne pas sur les distorsions du profil d'indice ni sur les non-uniformités de la modulation. De plus, pour de grandes longueurs d'onde, la condition de Bragg impose une forte incidence et les variations de $P(\lambda_r)$ ne sont plus négligeables: nous avons pu remarquer que les valeurs de $n_1 d$ obtenues pour les grands λ_i s'écartent plus de la valeur moyenne.

Pour chiffrer la précision, nous avons appliqué notre méthode aux SEB de la figure 2.10 (le calcul dans le cas TM tient compte du couplage plus faible). Nous avons trouvé les valeurs $n_1 d = 1,26 \mu\text{m}$ ($\sigma = 0,013 \mu\text{m}$) en TE et $n_1 d = 1,27 \mu\text{m}$ ($\sigma = 0,016 \mu\text{m}$) en TM. Le fit des réponses angulaires à $\lambda = 1060 \text{nm}$ du même réseau a donné $n_1 d = 1,30 \mu\text{m}$. Les mêmes vérifications effectuées sur 4 autres échantillons ont donné des accords comparables.

Ainsi la mesure du SEB permet de déterminer très simplement l'amplitude de modulation d'un réseau holographique, avec une précision de l'ordre de 2 à 3%. Nous avons utilisé cette méthode pour évaluer la réponse énergétique en amplitude de modulation de la GBC.

B.4 - Réponse énergétique

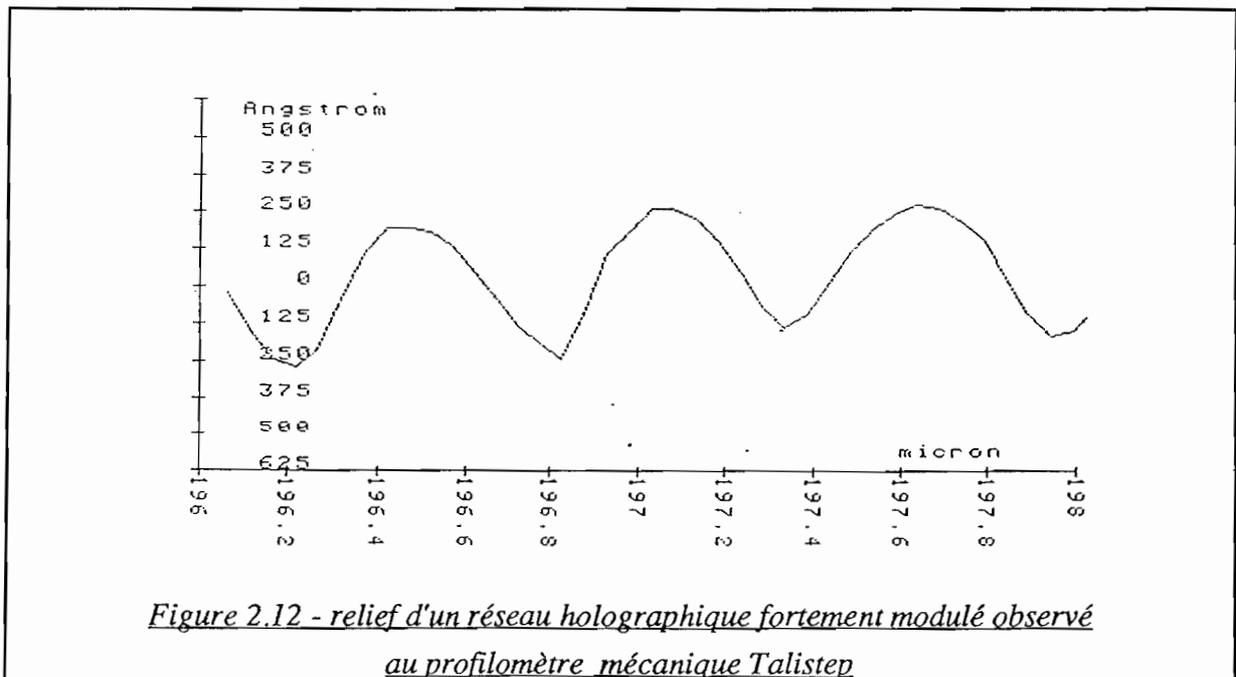
Pour connaître la réponse énergétique du matériau, nous avons enregistré 20 réseaux de fréquence spatiale 1570mm^{-1} , répartis sur plusieurs plaques de gélatine dérivées de Kodak 649F et bichromatées à 10%, avec des durées d'exposition différentes. Les 5 échantillons ont été traités ensemble dans les mêmes bains et dans les mêmes conditions de température et d'humidité. Le développement de chaque échantillon a été suivi d'un séchage "sandwiché" sous une plaque de verre (voir chapitre I §E.1.c). Nous avons ensuite mesuré les réponses



angulaires (figure 1.6 du chapitre I) et les SEB des réseaux; ces mesures ont permis de déduire les amplitudes de modulation (composantes fondamentales des profils d'indice), représentées en fonction de l'énergie d'exposition dans la figure 2.11. On voit que l'amplitude de modulation d'indice sature après 300mJ/cm^2 à 0.075 environ. Avec d'autres réseaux séchés à l'air libre après leur développement, nous avons pu observer des modulations plus fortes, mais avec des non uniformités importantes suivant la surface des réseaux.

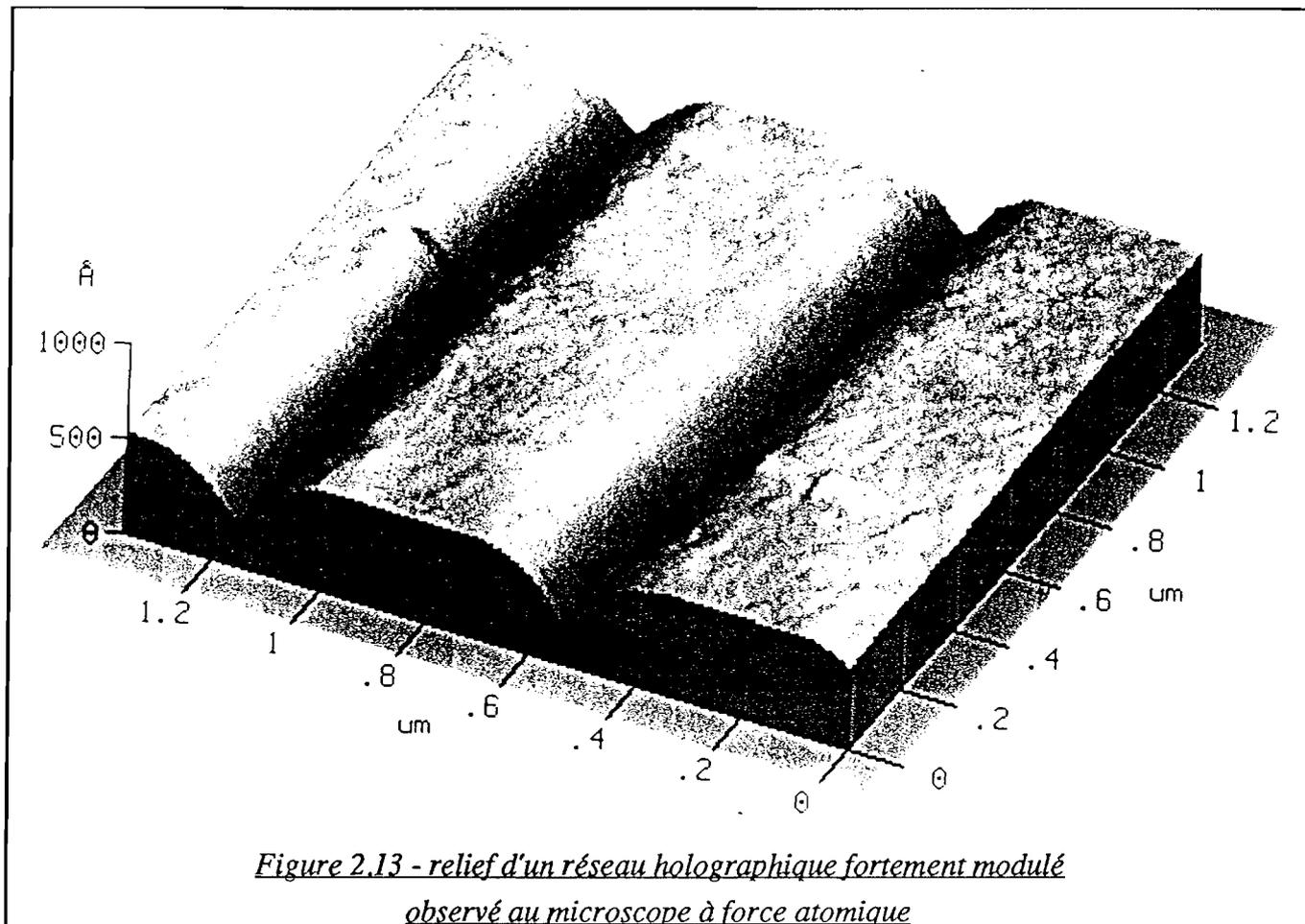
B.5 - Mesures profilométriques

L'observation du relief d'un réseau de phase permet de préciser la nature de sa modulation (indice et/ou épaisseur). Sur quelques échantillons de haute fréquence spatiale (1570mm^{-1}), nous avons mesuré les variations de l'épaisseur avec deux instruments différents: un rugosimètre mécanique Talistep (figure 2.12), et un microscope à force atomique (figure 2.13). Les profils représentés dans les figures (2.12) et (2.13) proviennent d'un réseau très fortement modulé en phase.



Au Talistep, le profil paraît plus "sinusoïdal" qu'au microscope à force atomique: on peut penser que le stylet du Talistep suit mal les parties pentues, à cause de son extrémité arrondie; de plus, la force exercée par le stylet est susceptible de déformer au passage le matériau. Les deux courbes concordent quant à l'ordre de grandeur des variations d'épaisseur: on mesure une amplitude crête à crête d'environ 35nm. Si le réseau est placé dans l'air, la différence de chemin optique créée par cette modulation d'épaisseur est de l'ordre de $\lambda/30$ dans le domaine visible. Cette amplitude est la plus grande que nous ayons observée: nous en déduisons que l'effet de la modulation de relief des réseaux de haute fréquence spatiale est négligeable dans

le phénomène de diffraction. Cette propriété est confirmée par nos expériences d'immersion: si l'on plonge un hologramme dans une cuve d'isopropanol, ou si on le scelle avec une colle optique (voir chapitre I), il conserve son efficacité. Les réseaux en GBC de haute fréquence spatiale sont donc purement des réseaux d'indice.



B.6 - Propriétés en temps réel de la gélatine bichromatée

L'observation des propriétés de transmission et de diffraction en temps réel du matériau holographique présente plusieurs intérêts: elle donne un meilleur contrôle de l'exposition (on peut ainsi espérer améliorer la reproductibilité des résultats finaux); de plus, elle permet de progresser dans la compréhension du mécanisme de formation des hologrammes dans la gélatine.

Pour mesurer l'efficacité de diffraction d'un hologramme pendant son enregistrement, nous connaissons deux techniques:

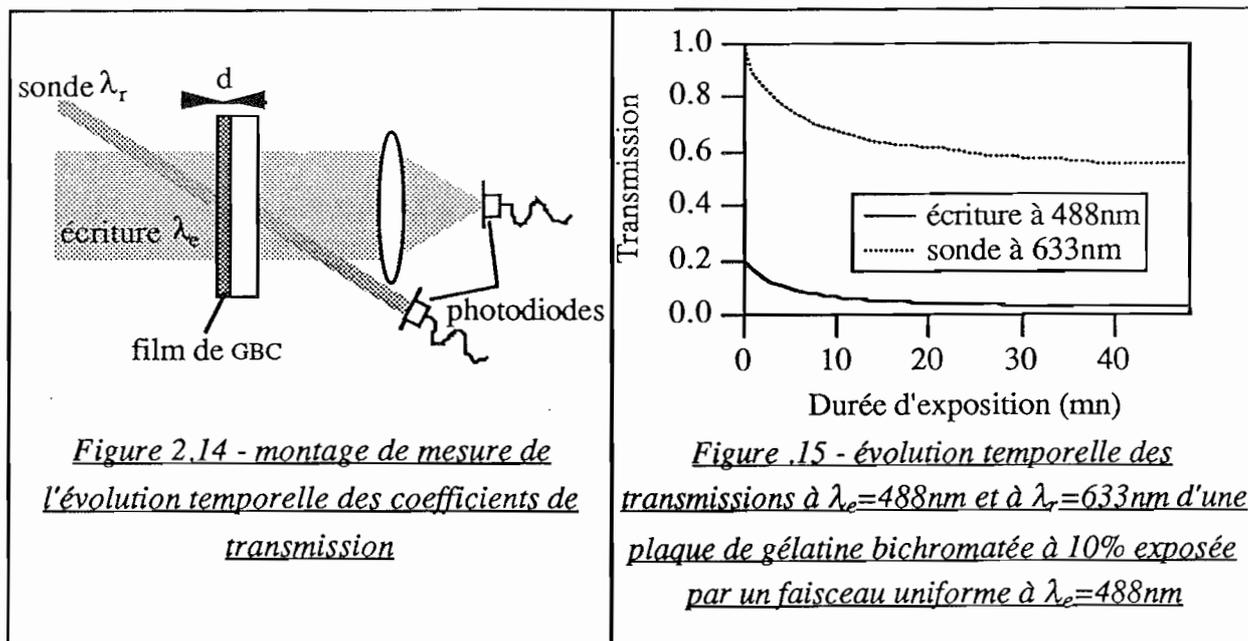
- **mesure à la longueur d'onde d'enregistrement:** cette méthode a été employée par Newell et Solymar ^{NEW85}. Elle nécessite d'obturer temporairement un des deux faisceaux d'enregistrement, pendant que l'on mesure la diffraction de l'autre faisceau par le réseau. On peut pour cela utiliser un obturateur à répétition (chopper). Pendant chaque mesure, la figure d'interférence des deux faisceaux est remplacée par un fond lumineux uniforme, qui contribue aussi à exposer le film: cette technique est donc susceptible de perturber l'enregistrement;
- **mesure à une longueur d'onde inactinique:** nous avons choisi cette méthode, non destructive et pour nous plus simple à mettre en œuvre que la précédente. Elle consiste à utiliser une seconde source pour la restitution, de longueur d'onde de longueur d'onde inactinique pour le matériau holographique. Cette technique est parfois appelée spectroscopie holographique ^{JOS93}. Dans le cas de la GBC, un laser Hélium-Néon émettant à 633nm convient.

Nous avons vu au chapitre I que l'image latente d'un hologramme est formée principalement de variations de l'absorption du film. Avant d'étudier les propriétés de diffraction en temps réel de cette image latente, certains paramètres liés à la réaction photochimique peuvent être précisés en observant et en modélisant l'évolution de la transparence d'une plaque exposée de façon uniforme.

B.6.a - Exposition uniforme: évolution temporelle de la transmission

Mesures de transmission

Nous exposons une plaque de GBC à l'aide d'un faisceau à $\lambda_e=488\text{nm}$ d'intensité uniforme; simultanément, la plaque est traversée par un faisceau sonde à $\lambda_r=633\text{nm}$ (voir figure 2.14). Nous mesurons en fonction du temps les intensités transmises par la plaque à 488nm et à 633nm. La figure 2.15 montre les courbes obtenues avec une plaque dérivée de Kodak 649F, bichromatée à 10%, exposée avec une intensité lumineuse de $4,5\text{mW/cm}^2$. La puissance du faisceau sonde est de $0,5\text{mW}$.



Modèle d'évolution en temps réel de l'absorption

En nous inspirant de l'étude de Newell et Solymar ^{NEW85}, nous avons développé un modèle qui décrit l'évolution temporelle de l'absorption dans le film de gélatine bichromatée. Notre cas présente une complication supplémentaire, due à la présence de deux longueurs d'onde différentes.

A cause de l'atténuation progressive du faisceau d'exposition dans le matériau, la vitesse de la réaction photochimique varie dans l'épaisseur du film. Les paramètres de la réaction dépendent donc à la fois de la variable temporelle t et de la coordonnée z de profondeur dans le matériau. Pour simplifier l'analyse, nous avançons les hypothèses suivante:

- seules deux espèces absorbantes coexistent dans le matériau, les ions Cr^{3+} et Cr^{6+} , auxquels nous nous référons respectivement par les indices 3 et 6; ainsi $c_3(z,t)$ et $c_6(z,t)$ représentent les concentrations (en $\text{mol}\cdot\text{m}^{-3}$) des deux espèces dans la gélatine à la profondeur z et à l'instant t ;
- la réaction photoinduite peut être décrite par l'équation-bilan: $\text{Cr}^{6+} + 3e^- \rightarrow \text{Cr}^{3+}$
- aucun ion Cr^{6+} ne se transforme en Cr^{3+} avant l'exposition; à l'instant $t=0$ du début de l'exposition, on a donc: $c_3(z,t)=0$ pour $z \in [0, d]$;
- pour une durée d'exposition assez longue, la réaction est totale: $c_6(z,+\infty)=0$ pour $z \in [0, d]$.

La propriété de conservation de la matière par la réaction photochimique se traduit par la relation:

$$c_3(z,t) + c_6(z,t) = c_6(z,0) = c_3(z,+\infty) \quad (2.32)$$

Le coefficient d'absorption linéique $\alpha_\lambda(z, t)$ (m^{-1}) en amplitude du matériau pour une longueur d'onde d'illumination λ dépend linéairement des concentrations des espèces absorbantes; on peut donc écrire:

$$\alpha_\lambda(z, t) = \sigma_{3,\lambda} c_3(z, t) + \sigma_{6,\lambda} c_6(z, t) \quad (2.33)$$

où $\sigma_{3,\lambda}$ et $\sigma_{6,\lambda}$ sont les sections efficaces d'absorption molaire (en $\text{m}^2 \text{mol}^{-1}$) du matériau à la longueur d'onde λ .

Avant l'exposition, on considère que la concentration en Cr^{3+} est uniforme dans le film de gélatine; de même, après transformation totale des ions Cr^{3+} , la concentration en Cr^{6+} est uniforme. Les coefficients d'absorption aux instants 0 et $+\infty$ donnés par (2.33) sont donc indépendants de z ; nous utilisons par conséquent les notations: $\alpha_{6,\lambda} = \alpha_\lambda(z, t = 0)$ et $\alpha_{3,\lambda} = \alpha_\lambda(z, t = +\infty)$.

En combinant les relations (2.32) et (2.33), on obtient:

$$c_3(z, t) = \frac{\alpha_\lambda(z, t) - \alpha_{6,\lambda}}{\sigma_{3,\lambda} - \sigma_{6,\lambda}} \quad (2.34)$$

Si l'on écrit la relation (2.34) pour les longueurs d'onde λ_e d'exposition et λ_r de lecture, on peut éliminer $c_3(z, t)$ entre les deux équations obtenues; on trouve alors:

$$\alpha_r(z, t) = a \alpha_e(z, t) + b \quad (2.35)$$

Les indices e et r désignent les coefficients relatifs respectivement aux longueurs d'onde d'écriture et de restitution; les constantes a et b sont données par:

$$\begin{cases} a = \frac{\sigma_{3,r} - \sigma_{6,r}}{\sigma_{3,e} - \sigma_{6,e}} = \frac{\alpha_{3,r} - \alpha_{6,r}}{\alpha_{3,e} - \alpha_{6,e}} \\ b = \alpha_{6,r} - a \alpha_{6,e} \end{cases} \quad (2.36)$$

On a donc **une relation linéaire indépendante des concentrations entre les coefficients d'absorption aux longueurs d'onde λ_e et λ_r** . A partir de mesures de coefficients de transmission (par exemple en utilisant les spectres de la figure 1.12 du chapitre I), on peut calculer les coefficients d'absorption initiaux et finaux et en déduire les valeurs des constantes a et b .

La loi d'évolution temporelle s'obtient en écrivant que la vitesse de transformation des espèces dépend de l'intensité d'exposition $I_e(z, t)$ et est proportionnelle au nombre d'ions Cr^{6+} qui n'ont pas encore réagi JOS93:

$$\frac{\partial c_3(z, t)}{\partial t} = \gamma [I_e(z, t)]^g c_6(z, t) \quad (2.37)$$

où γ et g sont des paramètres qu'il faudra déterminer en confrontant le modèle aux résultats expérimentaux. En introduisant les relations (2.32) et (2.34) dans (2.37), on obtient l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\partial \alpha_e(z, t)}{\partial t} = \gamma [I_e(z, t)]^g [\alpha_{3,e} - \alpha_e(z, t)] \quad (2.38)$$

Par définition de $\alpha_e(z, t)$, les variations suivant z sont déterminées par la relation:

$$\frac{\partial I_e(z, t)}{\partial z} = -\frac{2\alpha_e(z, t) I_e(z, t)}{\cos \theta_e} \quad (2.39)$$

où θ_e représente l'angle de propagation du faisceau d'exposition à l'intérieur du film.

Les équations (2.38) et (2.39) constituent un système de deux équations différentielles du premier ordre, à deux inconnues $\alpha_e(z, t)$ et $I_e(z, t)$ et à deux variables z et t . La connaissance de l'intensité d'exposition $I_e(0, t)$ (constante) à la surface du film et des répartitions initiales $\alpha_e(z, 0)$ ($= \alpha_{6,e}$) et $I_e(z, 0)$ de l'absorption et de l'intensité dans le film permet la résolution numérique du système.

Calcul des coefficients de transmission énergétique

Nous avons adopté la méthode de résolution suivante: le problème est discrétisé sur les instants t_i ($i \in \{0, \dots, N_t\}$), espacés de Δt sur l'intervalle $[0, N_t \Delta t]$, et sur les profondeurs z_j ($j \in \{0, \dots, N_z\}$), distantes de Δz sur l'intervalle $[0, N_z \Delta z]$ ($N_t \Delta t$ est la durée totale de la mesure, et $N_z \Delta z = d$ l'épaisseur du film); à chaque itération temporelle, les nouvelles valeurs (à $t=t_i$) de $\alpha_e(z, t)$ sont calculées à partir des valeurs précédentes (à $t=t_{i-1}$) de $\alpha_e(z, t)$ et de $I_e(z, t)$ en appliquant la méthode des différences finies à l'équation (2.38). Les valeurs de l'intensités sont alors obtenues en intégrant (2.39) numériquement ^{PRE87} entre $z=0$ et chaque valeur de z_j (avec $I_e(0, t)$ égale à l'intensité d'exposition), puis on passe à l'itération temporelle suivante.

L'intensité du faisceau d'écriture transmise en fonction du temps est donnée par $I_e(N_z \Delta z, t)$. L'intensité du faisceau sonde transmise $I_r(N_z \Delta z, t)$ est calculée par une formule similaire à (2.39), où intervient le coefficient d'absorption donné par les relations (2.35) et (2.36). Cette formule, intégrée entre $z=0$ et $N_z \Delta z$ pour chaque itération temporelle (avec $I_r(0, t) = 1$), donne l'intensité $I_r(N_z \Delta z, t)$ de la sonde à la sortie du film.

Comparaison entre théorie et expérience

A partir de mesures de coefficients de transmission, nous avons obtenu les valeurs numériques suivantes pour les coefficients d'absorption linéique:

$$\begin{cases} \alpha_{6,e} = 5,5 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1} & \alpha_{6,r} = 0 \text{ m}^{-1} \\ \alpha_{3,e} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1} & \alpha_{3,r} = 2,6 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1} \end{cases}$$

Nous en déduisons les valeurs de a et de b :

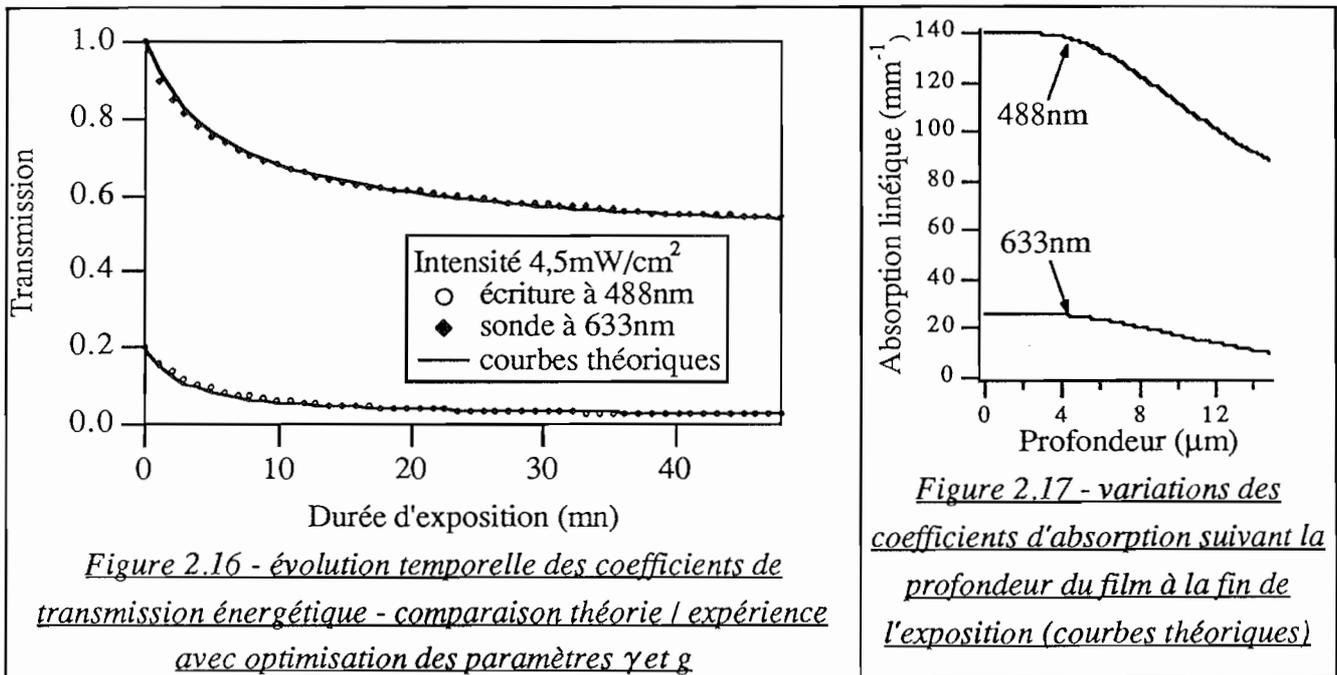
$$\begin{cases} a = 0,31 \\ b = -1,7 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1} \end{cases}$$

Nous avons optimisé les valeurs de γ et de g , à l'aide de l'algorithme de minimisation du simplex, de façon à ajuster les résultats numériques de notre modèle aux mesures d'efficacité. La figure 2.16 reprend les résultats expérimentaux de la figure 2.15 (intensité d'écriture

4,5mW/cm²) et montre les courbes théoriques les plus proches, qui correspondent aux valeurs:

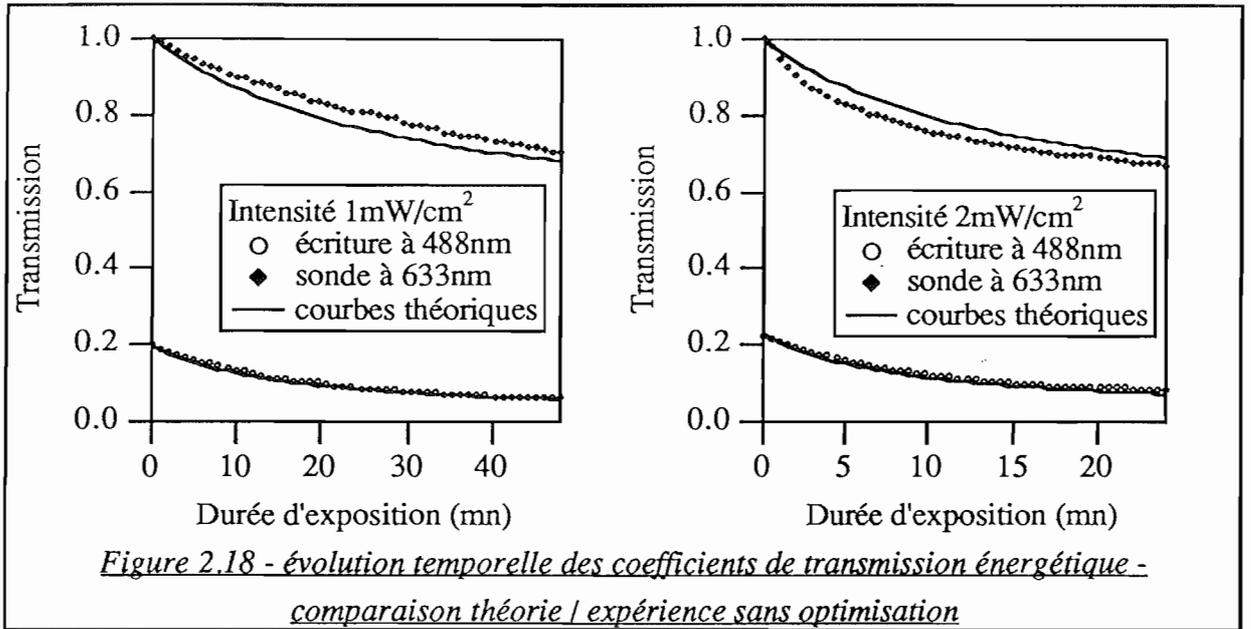
$$\begin{cases} \gamma = 0,82 \text{ W}^{-1}\text{cm}^2\text{s} \\ g = 0,99 \end{cases}$$

On voit sur la figure 2.16 que les courbes théoriques sont en bon accord avec les mesures. Pour le même échantillon, la figure 2.17 montre la répartition théorique des coefficients d'absorption dans l'épaisseur du film à la fin de l'exposition. Malgré la durée d'exposition très longue (t=50mn), on observe que le matériau n'est complètement saturé qu'en surface.



Pour évaluer les possibilités de prédiction du modèle, nous l'avons confronté à d'autres séries de mesures du même type, réalisées avec des intensités d'exposition différentes. Pour ces comparaisons, présentées dans la figure 2.18, nous n'avons pas effectué de nouvelles optimisations, mais gardé les mêmes valeurs de γ et de g .

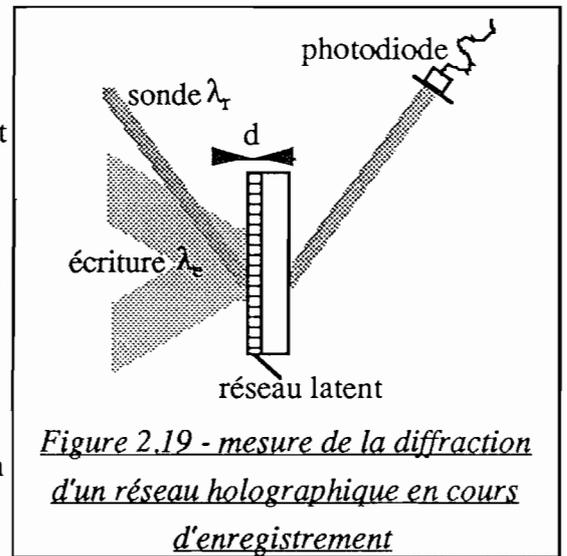
Les valeurs données par le modèle restent très proches des résultats expérimentaux en ce qui concerne la transmission du faisceau d'écriture. L'accord est nettement moins bon pour le faisceau sonde. Comme l'absorption à λ_r est calculée à partir de celle à λ_e par la formule (2.35), nous pensons que le désaccord observé peut provenir du caractère trop approché de (2.35). Dans ce cas, la relation entre les absorptions à λ_r et à λ_e n'est pas linéaire: cela signifie qu'**au moins trois espèces absorbantes prennent part à la réaction photochimique**. Bien sûr, nous n'avançons pas cette interprétation avec certitude, ne disposant pas pour le moment de confirmations issues d'autres types de mesures.



B.6.b - Evolution temporelle de la diffraction d'un réseau latent

Mesures de diffraction

Nous étudions la diffraction par un réseau holographique en GBC pendant son enregistrement (voir le schéma global du montage d'enregistrement en figure 1.7 du chapitre I). Le réseau est photoinduit par deux faisceaux à $\lambda_e=488\text{nm}$ en incidence symétrique par rapport à la normale de la plaque holographique (figure 2.19). Le faisceau sonde à $\lambda_r=633\text{nm}$ est placé à l'incidence de Bragg. Pendant l'exposition, nous mesurons l'évolution temporelle de l'efficacité de diffraction à $\lambda_r=633\text{nm}$ du réseau. Un exemple de courbe expérimentale a déjà été présenté dans la figure 1.10 du chapitre I: cette courbe montre l'augmentation progressive de l'efficacité de diffraction du réseau latent, puis sa saturation.



Cette méthode de suivi de l'exposition nous a été utile pour la réalisation de réseaux holographiques destinés à une utilisation dans le domaine infrarouge en polarisation TM. Pour cette application, présentée en détail au chapitre III §A, nous avons cherché à obtenir la modulation d'indice la plus forte réalisable. L'observation de la diffraction pendant l'exposition nous a permis d'optimiser la durée de l'enregistrement, en stoppant l'exposition avant que l'effet de saturation n'atténue la modulation.

Sur un même lot de plaques enregistrées dans la même journée, nous avons pu observer une bonne reproductibilité des courbes mesurées; en revanche, après développement, les hologrammes présentent des différences d'efficacité de diffraction importantes, sur une plage de 25%. Cette observation confirme que les conditions de développement des plaques sont déterminantes pour la reproductibilité du procédé.

Modèle d'évolution en temps réel du profil d'absorption

On considère deux ondes planes d'égale amplitude, issues d'une source cohérente de longueur d'onde λ_e , qui interfèrent dans un film photosensible épais. Les angles de propagation sont symétriques par rapport à la normale au film, de valeur absolue θ_e à l'intérieur du matériau (et $\theta_{e,ext}$ à l'extérieur). La figure d'interférence des deux ondes induit progressivement une modulation périodique suivant x de l'absorption du matériau, avec la période $\Lambda_x = \frac{\lambda_0}{2 \sin \theta_{e,ext}}$.

La diffraction des faisceaux d'exposition par le réseau photoinduit donne naissance à des ondes planes diffractées. L'effet Bragg (ou effet d'épaisseur) restreint les directions possibles de diffraction aux seuls angles θ_e et $-\theta_e$. Ainsi, dans toute l'épaisseur du film, nous considérons que seules deux ondes planes se propagent, dont l'amplitude dépend de la profondeur z et du temps t écoulé depuis le début de l'exposition. La symétrie de la géométrie d'écriture (voir figure 2.19) permet d'ajouter que, pour un couple de coordonnées (z,t) donné, les deux ondes ont la même intensité $I_e(z,t)$. On peut donc représenter la répartition de l'intensité d'écriture sous la forme:

$$Y_e(x, z, t) = I_e(z, t) \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{\Lambda_x} \right) \quad (2.40)$$

La loi d'évolution temporelle du coefficient d'absorption linéique est similaire à celle donnée par (2.38) pour une exposition uniforme. Dans le cas présent, ce coefficient dépend en plus de la coordonnée x :

$$\frac{\partial \alpha_e(x, z, t)}{\partial t} = \gamma [Y_e(x, z, t)]^g [\alpha_{3,e} - \alpha_e(x, z, t)] \quad (2.41)$$

En introduisant (2.40) dans la relation précédente (2.41), on obtient:

$$\frac{\partial \alpha_e(x, z, t)}{\partial t} = \gamma [I_e(z, t)]^g \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{\Lambda_x} \right)^g [\alpha_{3,e} - \alpha_e(x, z, t)] \quad (2.42)$$

A z et t donnés, nous représentons la valeur moyenne suivant x du coefficient d'absorption dans la tranche de profondeur z du film par:

$$\langle \alpha_e \rangle_x(z, t) = \frac{1}{\Lambda_x} \int_0^{\Lambda_x} \alpha_e(x, z, t) dx \quad (2.43)$$

L'atténuation de chacun des deux faisceaux d'écriture dans l'épaisseur du film est décrite par l'équation:

$$\frac{\partial I_c(z,t)}{\partial z} = -\frac{2\langle\alpha_c\rangle_x(z,t) I_c(z,t)}{\cos\theta_c} \quad (2.44)$$

Le calcul des profils d'absorption suivant x du réseau latent, pour les différentes valeurs de z et de t , consiste donc à résoudre le système d'équations différentielles (2.42) et (2.44). Les valeurs initiales imposées sont les coefficients d'absorption à $t=0$ $\alpha_\lambda(x,z,0) = \alpha_{c,\lambda}$ et les intensités d'exposition à la surface du film $I_c(0,t)$.

Calcul de l'efficacité de diffraction du faisceau sonde

La connaissance de la répartition d'absorption à chaque instant de l'exposition permet de calculer la diffraction du faisceau sonde par le réseau. Nous utilisons pour cela le modèle d'ondes couplées du second ordre à deux ondes décrit au chapitre IV §D4. Dans ce modèle, le réseau d'absorption non uniforme est représenté comme un empilement de N_z réseaux élémentaires de modulation uniforme et de même période. Dans ces calculs de diffraction, seules les composantes continue $\langle\alpha_r\rangle_x(z,t)$ et fondamentale $\alpha_{rF}(z,t)$ du profil d'absorption de chaque sous-réseau à la longueur d'onde λ_r sont utilisées. D'après la relation (2.35), ces composantes sont données par :

$$\begin{cases} \langle\alpha_r\rangle_x(z,t) = a\langle\alpha_c\rangle_x(z,t) + b \\ \alpha_{rF}(z,t) = a\alpha_{cF}(z,t) \end{cases} \quad (2.45)$$

La composante fondamentale en cosinus du profil d'absorption à la profondeur z et à la longueur d'onde λ_c est obtenu par transformée de Fourier :

$$\alpha_{cF}(z,t) = \frac{1}{\Lambda_x} \int_0^{\Lambda_x} \alpha_c(x,z,t) \cos \frac{2\pi x}{\Lambda_x} dx \quad (2.46)$$

Dans notre méthode de résolution, le problème est discrétisé sur les subdivisions $\{t_i\}_{i \in \{0, \dots, N_t\}}$ ($t_i = i\Delta t$), $\{z_j\}_{j \in \{0, \dots, N_z\}}$ ($z_j = jd / N_z$) et $\{x_k\}_{k \in \{0, \dots, N_x\}}$ ($x_k = k\Delta / N_x$). On commence par initialiser les valeurs de l'absorption à $t=0$, puis les opérations suivantes sont effectuées pour chaque itération temporelle:

- calcul, à chaque niveau de profondeur z_j , de la valeur moyenne $\langle\alpha_c\rangle_x(z_j, t_i)$ et de l'amplitude de modulation fondamentale $\alpha_{cF}(z_j, t_i)$ par la transformée de Fourier (2.46);
- détermination et de l'intensité $I_c(z_j, t_i)$ par intégration numérique de (2.44);
- calcul des coefficients d'absorption à la longueur d'onde de lecture par les relations (2.45), puis calcul de l'efficacité de diffraction du faisceau sonde par la structure périodique (modèle d'onde couplées);
- calcul des valeurs de l'absorption $\alpha_c(x_k, z_j, t_i)$ à l'instant suivant par la méthode des différences finies appliquée à la formule (2.42), pour toutes les valeurs de z_j et de x_k ; on

obtient ainsi un tableau bidimensionnel contenant les profils d'absorption à différentes profondeurs dans le réseau, à l'instant t_i ; on passe alors à l'itération temporelle suivante.

Comparaison entre théorie et expérience

En reprenant les paramètres déterminés en B.6.a ($\alpha_{3,c}$, a , b , γ , g), nous avons simulé l'évolution temporelle de la diffraction d'un réseau en GBC pendant son écriture. Nos premiers résultats montrent un désaccord important avec les courbes expérimentales :

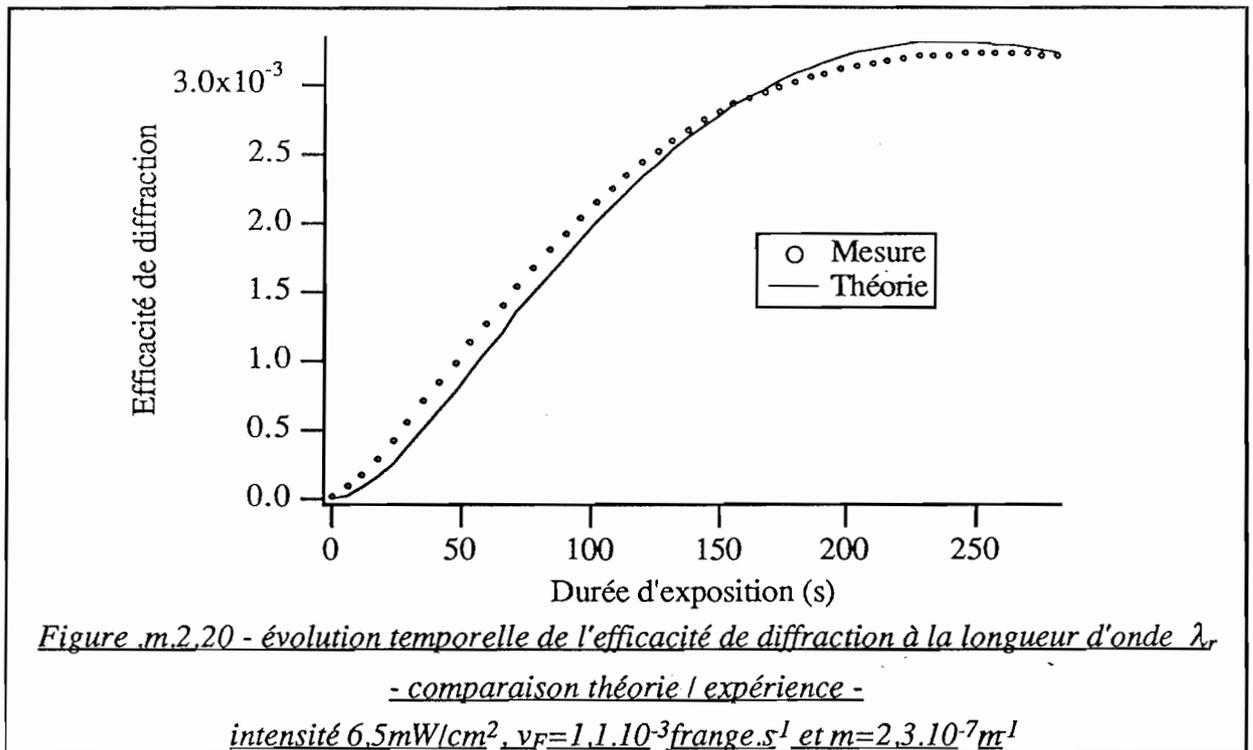
- l'efficacité théorique est beaucoup plus faible que le rendement mesuré. Pour une gélatine Kodak 649F bichromatée à 10%, les valeurs maximales de des efficacités de diffraction expérimentale et théorique sont respectivement 0,3% et 0,1%. Cette différence résulte de l'existence d'une modulation de l'indice de réfraction qui renforce la diffraction. Pour inclure ce phénomène dans notre modèle, nous supposons qu'une modulation d'indice $n_{rF}(z, t)$ s'inscrit au même rythme que la modulation d'absorption $\alpha_{rF}(z, t)$, avec un coefficient de proportionnalité m : $n_{rF}(z, t) = m\alpha_{rF}(z, t)$. Les variations d'indice sont faibles, et il est difficile d'obtenir la valeur de m par d'autres types de mesures ; c'est pourquoi nous évaluons ce paramètre par "fit" des courbes expérimentales.

- La saturation se produit plus tôt en pratique (3mn environ avec une densité de puissance de $6,5\text{mW/cm}^2$) qu'en théorie (autour de 6mn). Cet écart provient principalement d'un défaut de l'expérience: à l'époque de ces mesures, l'isolation thermique du montage d'enregistrement n'était pas très bonne (voir chapitre I §D.3.a), et les fluctuations de position des franges d'interférences pouvaient provoquer une saturation très prématurée de l'efficacité de diffraction. Pour tenir compte de cet effet dans notre modèle, nous introduisons une vitesse de défilement v_F des franges, supposée constante en première approximation. Dans l'analyse qui précède, seule l'équation (2.42) doit être modifiée et devient:

$$\frac{\partial \alpha_c(x, z, t)}{\partial t} = \gamma [I_c(z, t)]^g \left[1 + \cos\left(\frac{x}{\Lambda_x} + v_F t\right) \right]^g [\alpha_{3,c} - \alpha_c(x, z, t)] \quad (2.47)$$

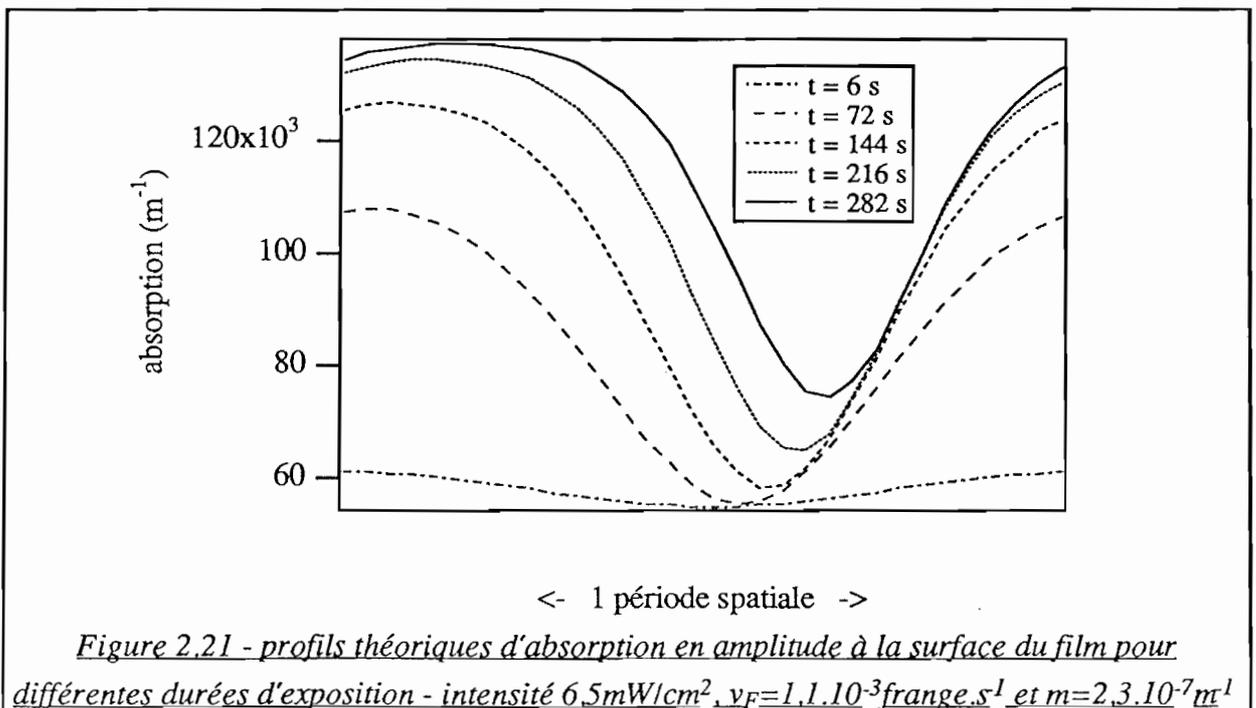
où v_F est exprimée en frange.s^{-1} . Nous mesurons la vitesse v_F à l'aide du dispositif de suivi des franges expliqué au chapitre I.

Ces perfectionnements du modèle mènent à des résultats proches des valeurs expérimentales : un exemple en est donné dans la figure 2.20. Dans toutes nos comparaisons, la pente de la courbe expérimentale au début de l'enregistrement reste supérieure à celle de la courbe théorique.

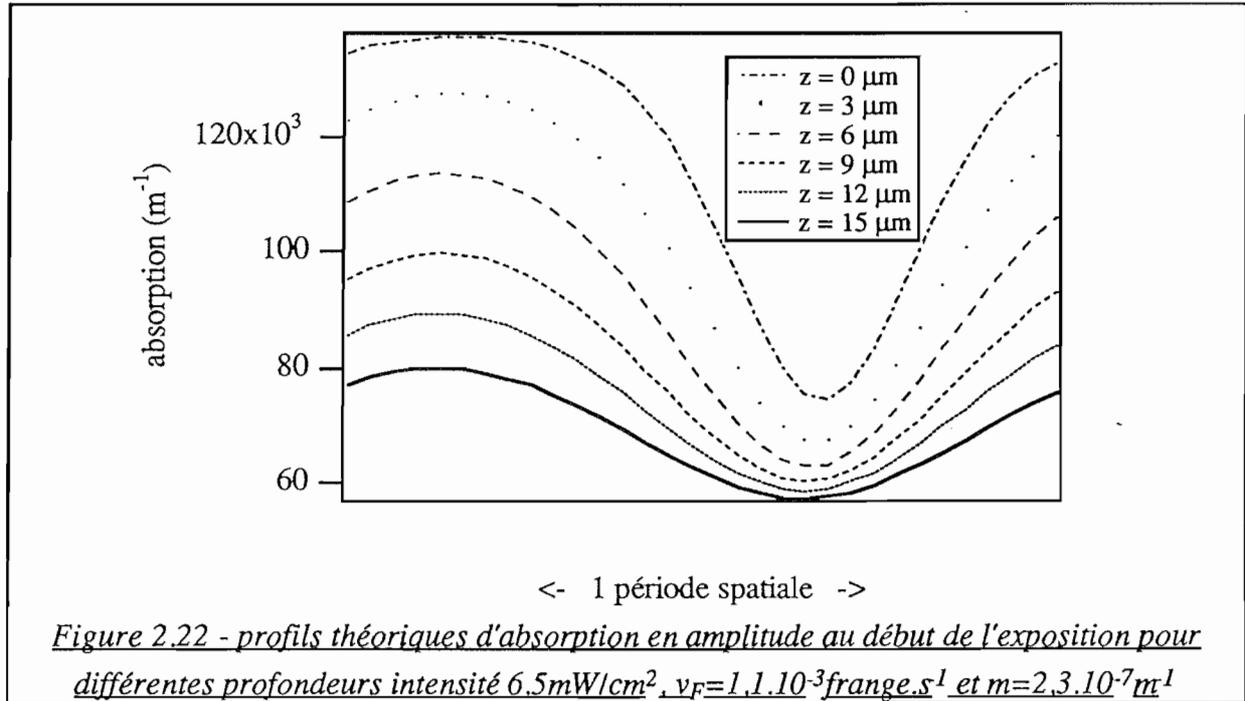


La figure 2.21 montre le profil d'absorption suivant x à la surface extérieure du film ($z=0$), calculé pour différentes durées t d'exposition. On voit que l'amplitude de modulation augmente puis commence à saturer ; le profil s'écarte de plus en plus de sa forme de départ sinusoidale, et se décale progressivement suivant x à cause du défilement des franges.

La figure 2.22 représente le profil d'absorption à la fin de l'exposition ($t=300\text{s}$), calculé pour différentes profondeurs z. On observe une amplitude de modulation et une saturation



beaucoup plus importante en surface, ainsi qu'un décalage dû au défilement un peu plus grand. Cette figure met bien en évidence les effets de l'atténuation du faisceau d'écriture. La durée d'exposition optimale qui correspond à une modulation globale maximale du film doit réaliser un compromis : exposer suffisamment les zones profondes du film sans saturer exagérément les régions proches de la surface.



C - Réseaux minces

Au début de ce travail de thèse, une collaboration avec la société Essilor nous a amené à étudier certaines propriétés des réseaux minces en gélatine bichromatée: dépendance du déphasage photoinduit en fonction de l'énergie d'exposition, et détermination de la nature de la modulation de ces réseaux. Après quelques généralités, nous présentons ici ces premiers essais, qui ont été utiles par la suite, lors de la réalisation de l'hologramme synthétique de phase décrit au chapitre IV.

C.1 - Généralités sur les réseaux minces

C.1.a - Critères de définition d'un réseau mince

Dans l'étude des réseaux épais de la partie B de ce chapitre, nous avons précisé la terminologie relative aux réseaux de diffraction. En particulier, nous savons qu'un réseau mince peut être défini comme un réseau très peu sélectif angulairement et spectralement: on considère^{MOH80b} que cette propriété est vérifiée si:

$$\frac{d}{\Lambda} < 10 \quad (2.48)$$

où d et Λ représentent respectivement l'épaisseur et la période spatiale du réseau (les notations de la partie B sont conservées). On peut également définir un réseau mince comme une structure qui diffracte dans le régime de Raman-Nath. Dans ce domaine, la lumière est diffractée dans toutes les directions données par la loi des réseaux. Contrairement à l'effet Bragg des réseaux épais, aucun ordre ne voit son intensité renforcée au détriment des autres ordres dans l'épaisseur de la zone modulée. On peut représenter les limites du régime de Raman-Nath par la condition^{MOH80b}:

$$\frac{2\pi^2 n_0 n_1 d^2}{\cos^2 \theta_0 \Lambda^2} \leq 1 \quad (2.49)$$

où n_0 représente encore l'indice de réfraction moyen du réseau, n_1 l'amplitude de modulation, et θ_0 l'angle d'incidence dans le réseau. Le critère (2.49) indique le domaine de validité de la théorie d'amplitude-transmittance que nous allons décrire au paragraphe suivant.

C.1.b - Théorie d'amplitude-transmittance^{GAY85, CHA88}

Déphasage d'une onde plane incidente sur un réseau mince

Dans ce modèle, un réseau mince modifie seulement la répartition de phase de l'onde incidente. Le déphasage local est calculé à partir de la longueur du chemin optique des rayons lumineux, qui sont supposés se propager en ligne droite à travers la zone modulée.

On considère un réseau périodique suivant x , de période Λ (figure 2.23). On représente par $\phi(x)$ le profil de phase induit par ce réseau sur une onde plane incidente de longueur d'onde λ_r . Si la grandeur périodiquement modulée est l'indice de réfraction $n(x)$ du réseau (figure 2.23-a), alors $\phi(x)$ s'écrit:

$$\phi(x) = 2\pi \frac{n(x)d}{\lambda_r \cos\theta_0} \quad (2.50)$$

Si la modulation affecte l'épaisseur $d(x)$ du réseau (figure 2.23-b), alors $\phi(x)$ vaut:

$$\phi(x) = 2\pi \frac{(n_0 - 1)d(x)}{\lambda_r \cos\theta_0} \quad (2.51)$$

(dans l'expression (2.51), nous avons supposé que le réseau d'indice n_0 est placé dans l'air d'indice 1).

Le profil de phase créé par un réseau mixte d'indice $n(x)$ et de relief $d(x)$ (figure 2.23-c) se déduit des formules (2.50) et (2.51) précédentes:

$$\phi(x) = 2\pi \frac{[n(x) - 1]d(x)}{\lambda_r \cos\theta_0} \quad (2.52)$$

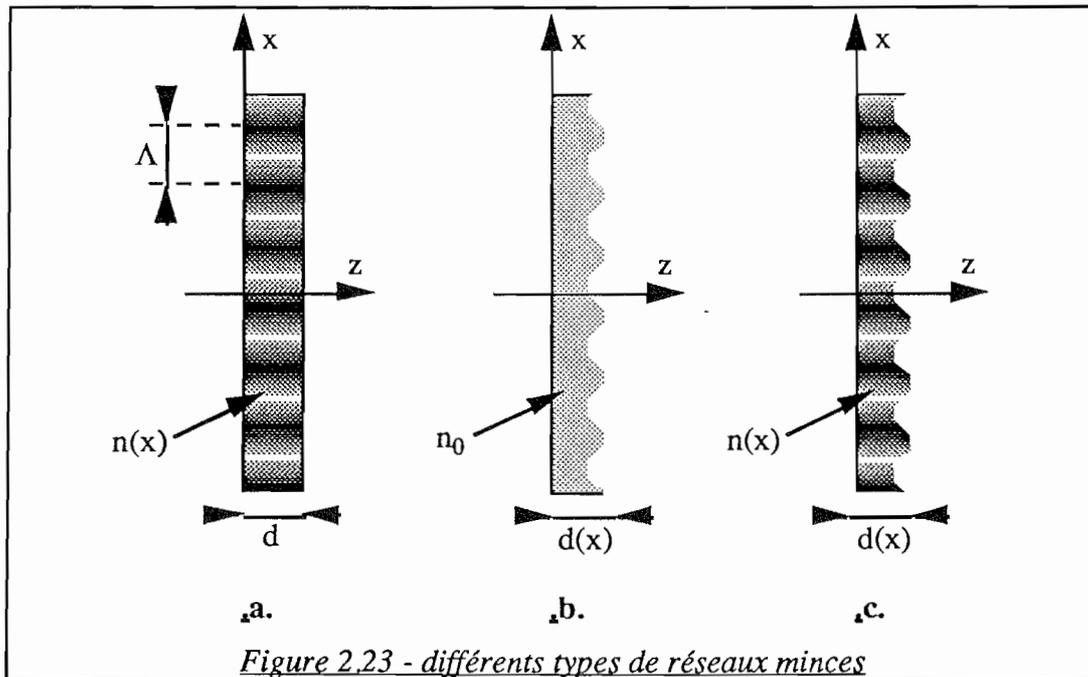


Figure 2.23 - différents types de réseaux minces

Amplitude et intensité des ondes diffractées

La fonction d'amplitude-transmittance (FAT) est définie comme le rapport entre l'amplitude du champ dans le plan de sortie du réseau et l'amplitude incidente dans le plan d'entrée. La FAT d'un réseau de profil de phase $\phi(x)$ s'écrit:

$$\tau(x) = \exp[-j\phi(x)] \quad (2.53)$$

Cette fonction est périodique suivant x , de période Λ ; on peut donc la décomposer en série de Fourier:

$$\tau(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \exp\left(2j\pi i \frac{x}{\Lambda}\right) \quad (2.54)$$

On reconnaît dans (2.54) un développement en ondes planes diffractées: le coefficient a_i est l'amplitude complexe de l'ordre i diffracté en transmission par le réseau. Par définition, ce coefficient peut être obtenu par la formule:

$$a_i = \frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} \exp[-j\phi(x)] \exp\left(-2j\pi i \frac{x}{\Lambda}\right) dx \quad (2.55)$$

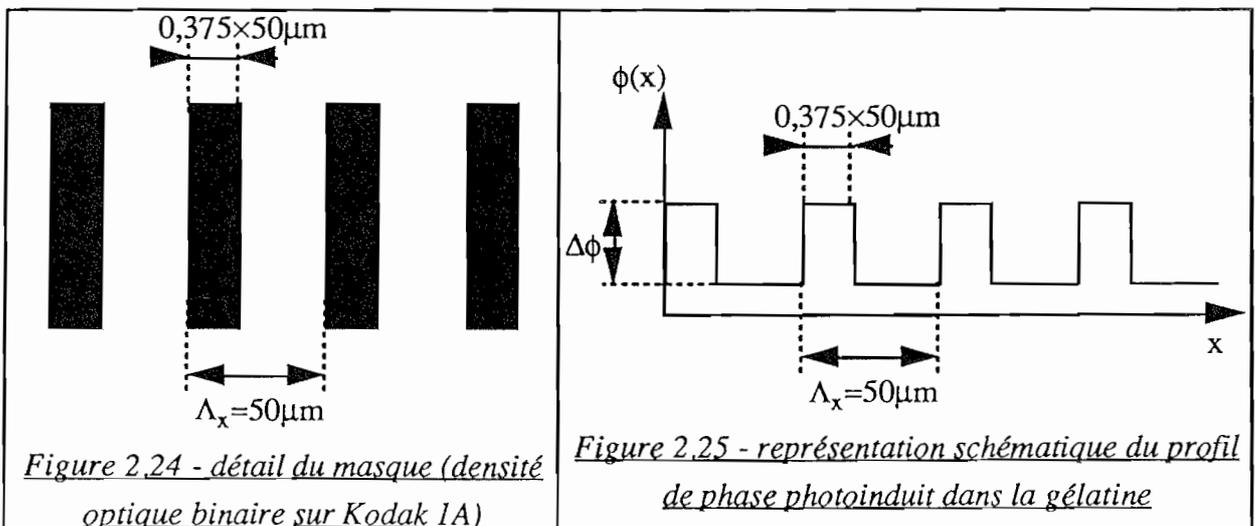
Si l'on connaît $\phi(x)$, les amplitudes diffractées sont calculées directement par l'intégrale (2.55). Les intensités diffractées sont alors obtenus en élevant au carré le module des amplitudes:

$$I_i = |a_i|^2 \quad (2.56)$$

Dans le cas particulier d'un profil de phase sinusoïdal d'amplitude ϕ_1 , la FAT peut s'écrire: $\tau(x) = \exp\left[-j\phi_1 \sin\left(2\pi \frac{x}{\Lambda}\right)\right]$; la formule (2.55) fait alors apparaître les fonctions de Bessel de la première espèce: $a_i = (-1)^i J_i(\phi_1)$. On obtient par (2.56) l'expression bien connue de l'intensité diffractée dans l'ordre i : $I_i = J_i^2(\phi_1)$.

C.2 - Réseaux minces à profil en créneau

En utilisant le montage de copie-contact décrit au chapitre I (voir figure 1.11), nous avons enregistré une série de réseaux de type créneau à partir d'un masque binaire (figure 2.24) de pas $50\mu\text{m}$ et de rapport cyclique 0,375, sur des plaques de gélatine bichromatée à 7,5% dérivées de Kodak 649F. Le même éclairage (de l'ordre de $1\text{mW}/\text{cm}^2$) a été utilisée pour toutes les expositions, avec différentes durées de pose. Le profil de phase $\phi(x)$ photoinduit pour une longueur d'onde de lecture donnée est représenté dans la figure 2.25.



Le paramètre de déphasage du réseau, noté $\Delta\phi$ sur la figure 2.25, dépend de la longueur d'onde λ de restitution et des variations de chemin optique photoinduites:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta[(n-1)d] \tag{2.57}$$

Dans la relation précédente, n et d représentent respectivement l'indice de réfraction et l'épaisseur du réseau.

C.3 - Mesures d'efficacités de diffraction: détermination du déphasage photoinduit

C.3.a - Dispositif de mesure et résultats expérimentaux

Avec le montage de restitution de la figure 2.26, nous éclairons les réseaux par une onde plane en incidence normale, issue d'un laser Hélium-Néon à 633nm, et nous mesurons les intensités diffractées dans les ordres -3 à +3. La figure 2.27 représente les variations de l'efficacité de diffraction mesurées dans l'ordre 1, en fonction de la durée de l'exposition UV qui a créé le réseau. Nous allons montrer dans la suite que les résultats de ces mesures permettent de déterminer le déphasage photoinduit.

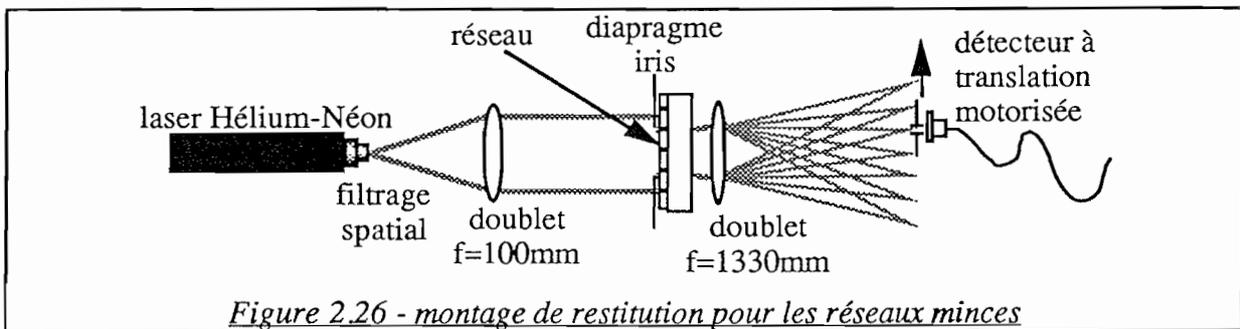


Figure 2.26 - montage de restitution pour les réseaux minces

C.3.b - Méthode de calcul du déphasage photoinduit

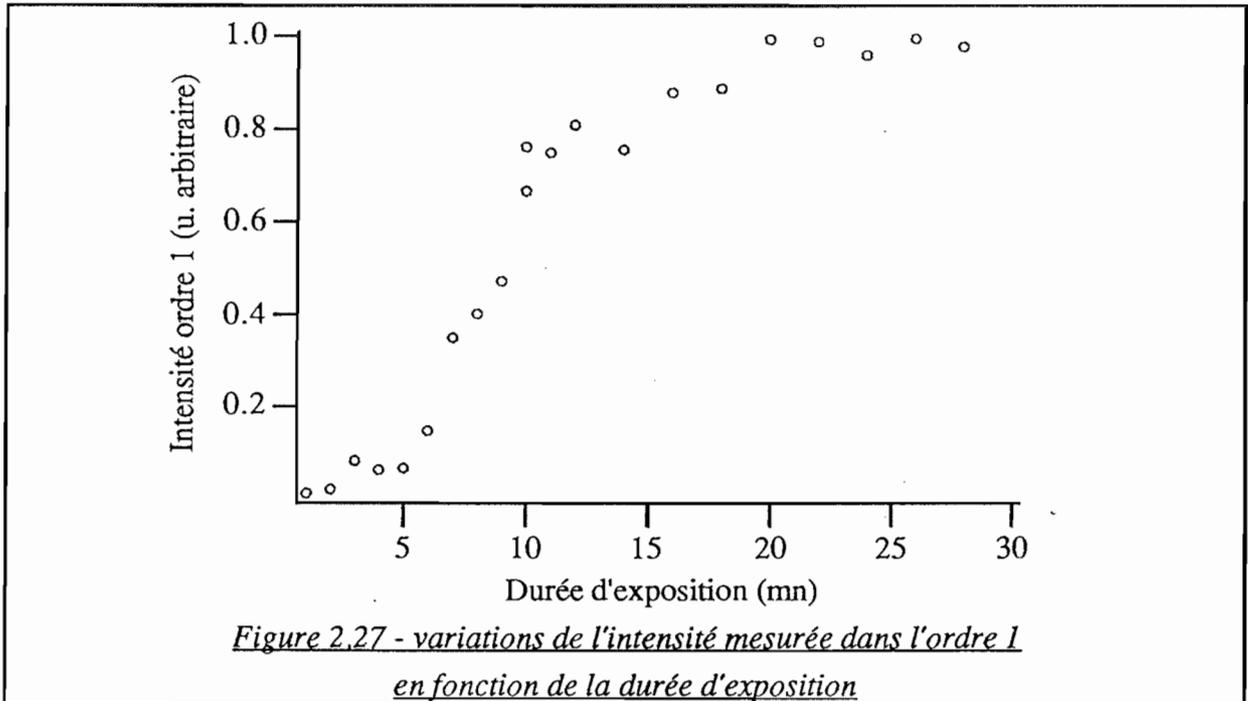
Dans nos conditions de restitutions, nous avons $\frac{2\pi^2 n_0 n_1}{\cos^2 \theta_0} \frac{d^2}{\Lambda^2} \leq 0.05$. Le critère (2.49) de

diffraction dans le régime de Raman-Nath est donc bien vérifié. Pour un réseau de type créneau de rapport cyclique ρ et de déphasage $\Delta\phi$, les formules (2.55) et (2.56) mènent aux expressions suivantes des intensités diffractées:

$$\begin{cases} I_0 = \alpha |1 + \rho(e^{j\Delta\phi} - 1)|^2 \\ k \neq 0: I_k = \alpha |\rho \text{sinc}(k\rho) (e^{j\Delta\phi} - 1)|^2 \end{cases} \tag{2.58}$$

où α est une constante de proportionnalité, introduite pour tenir compte des pertes par

réflexion, par absorption et par diffusion. Dans l'ordre $k=1$, on voit qu'une efficacité maximale égale à $\alpha \frac{4}{\pi^2} \sin^2(\pi\rho)$ est atteinte pour $\Delta\phi=\pi$.



Les formules (2.58) permettent d'exprimer le déphasage du réseau, en fonction du rapport entre l'intensité I_0 dans l'ordre 0 et l'intensité I_k diffractée dans un ordre $k \neq 0$, de la manière suivante:

$$\Delta\phi = 2 \operatorname{Arccot} \cot g \left[\sqrt{\frac{4 \sin^2(k\pi\rho) I_0}{k^2 \pi^2 I_k} - (2\rho - 1)^2} \right], \quad k \neq 0 \quad (2.59)$$

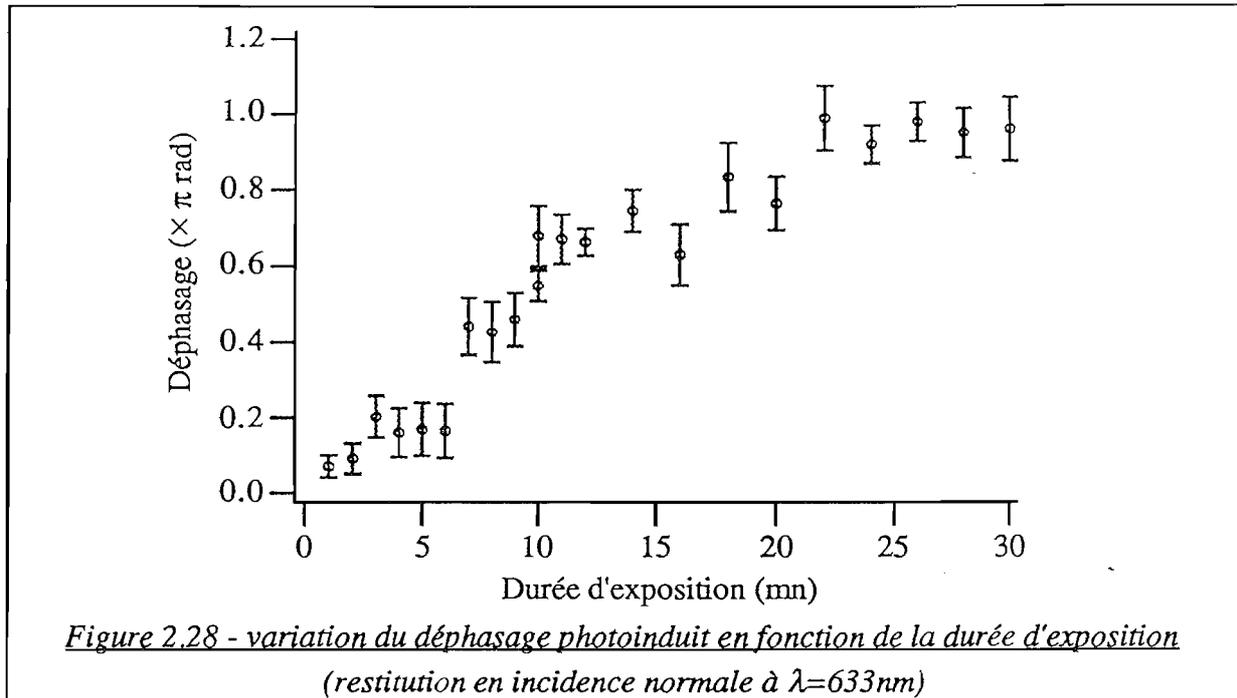
Pour chaque réseau, la mesure des intensités I_k ($k \in \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$) permet d'appliquer la formule (2.59) à 6 valeurs différentes de k . On retient alors comme valeur de $\Delta\phi$ du réseau la valeur moyenne des résultats, et on peut évaluer l'écart type.

C.4 - Réponse énergétique du matériau

La méthode décrite précédemment nous a permis de déterminer la courbe de réponse du matériau, présentée en figure 2.28, qui montre les variations du déphasage photoinduit à 633nm en fonction de la durée de l'exposition UV; les barres d'erreurs représentent l'écart type des 6 valeurs calculées pour chaque déphasage.

Sur le graphe 2.28, on voit que $\Delta\phi$ sature à π radians à partir de 20mn d'exposition. Pour réaliser des déphasages plus importants, il faudra utiliser une concentration en bichromate plus forte (>7,5%) lors de la sensibilisation des réseaux. Les résultats de la figure 2.28 ont été

mis à profit pour la fabrication de l'hologramme synthétique séparateur et uniformiseur de faisceaux gaussiens^{CHA92} décrit au chapitre III §B.



C.5 - Mesures profilométriques: nature de la modulation

Comme les mesures d'efficacité du paragraphe précédent ne permettent pas de préciser la nature de la modulation (indice et/ou épaisseur), nous avons examiné la surface de quelques échantillons à l'aide d'un rugosimètre mécanique Talistep. La figure 2.29 montre la courbe obtenue pour un réseau exposé durant 6mn dont le déphasage calculé est de $0,25\pi$ (par la méthode de calcul expliquée en C.3.b).



On remarque que le profil ne correspond pas au créneau auquel on s'attend, mais plutôt à une sinusoïde: cela peut s'expliquer par le fait que le stylet du Talistep n'est pas capable de suivre les pentes trop abruptes du relief. L'amplitude des variations d'épaisseur est d'environ 150nm; si l'on reporte cette valeur dans la formule (2.57), en supposant que l'indice est uniforme dans le matériau, on trouve: $\Delta\phi=0,24\pi$. Ce résultat signifie que **la modulation des réseaux minces est constituée essentiellement de variations d'épaisseur de la gélatine.** Cette propriété est confirmée par l'observation visuelle d'une diminution importante de l'efficacité de ces réseaux, quand on les immerge dans un liquide d'indice adapté à celui de la gélatine.

CHAPITRE III

**ETUDE DE COMPOSANTS OPTIQUES
HOLOGRAPHIQUES
EN GELATINE BICHROMATEE**

A - Réseaux pour la compression temporelle d'impulsions

Nous présentons ici l'étude de réseaux holographiques de haute efficacité pour le domaine infrarouge proche. L'application envisagée est la compression temporelle d'impulsions laser de très forte puissance MAI91, TAP92, dans les chaînes laser qui utilisent la technique d'élargissement du spectre appelée CPA (chirped pulse amplification). Cette application requiert des réseaux de diffraction à seuil de dommage laser élevé et très efficaces. Les réseaux en GBC présentent l'avantage d'une bonne tenue aux impulsions de forte puissance (de l'ordre de $1\text{J}/\text{cm}^2$ en régime picoseconde); il n'est cependant pas immédiat d'obtenir avec ce matériau une forte efficacité dans l'infrarouge. Nous avons donc concentré nos efforts sur les méthodes pour obtenir des réseaux sans pertes énergétiques. Ce travail est relaté dans l'article inclus dans cet exposé. Nous donnons auparavant une description de la technique CPA et du compresseur à réseaux qu'elle met en œuvre.

A.1 - Génération d'impulsions ultra-brèves par la technique CPA

Les puissances énormes des lasers à impulsions ultra-brèves offrent de nouvelles possibilités d'expériences pour l'étude des interactions lumière-matière BRU89, MAI91, MIG87. Pendant longtemps, l'amplification d'impulsions ultra-brèves (de l'ordre de la picoseconde) est restée peu efficace: la densité d'énergie était limitée au niveau du mJ/cm^2 pour maintenir la puissance en dessous du seuil de dommage des matériaux amplificateurs. La technique CPA permet de s'affranchir de ce problème de dommage: les impulsions brèves sont d'abord étirées temporellement (d'un facteur 1000 typiquement); on peut alors les amplifier tout en maintenant l'intensité en dessous du seuil critique; après amplification, les impulsions sont compressées jusqu'à une durée égale ou même inférieure à leur durée initiale. La CPA permet ainsi d'obtenir des impulsions ultra-brèves extrêmement puissantes (jusqu'à plusieurs dizaines de térawatts) avec des installations de dimensions assez réduites.

A.1.a - Les étapes de la CPA

- **Génération des impulsions** par un oscillateur (typiquement: puissance de quelques Watts, durée de quelques dizaines de picosecondes, largeur spectrale d'une fraction de nanomètre, longueur d'onde $\lambda=1,06\mu\text{m}$).
- **Injection dans une fibre optique**: le spectre des impulsions est élargi par le phénomène d'automodulation de phase, lié aux effets non linéaires dans la fibre. Cet élargissement spectral (typiquement d'un facteur 100) rend possible l'obtention, en fin de chaîne laser, d'impulsions plus brèves que les impulsions initiales. En général, la propagation dans la fibre s'accompagne également de dispersion de vitesse de groupe, qui provoque un étirement

temporel des impulsions (d'un facteur inférieur à 10 en général). Pour $\lambda < 1,3 \mu\text{m}$, la dispersion de vitesse de groupe dans la fibre est positive $\left(\frac{d^2n}{d\lambda^2} > 0\right)$: les longueurs d'onde "rouges" (côté du spectre correspondant aux longueurs d'onde élevées) se propagent plus vite que les longueurs d'ondes "bleues". A la sortie de la fibre optique, l'impulsion comporte une dérive temporelle de sa fréquence instantanée, appelée "chirp" (en Français "gazouillis": nous utiliserons le terme anglais).

- **Étirement temporel:** dans certains cas, la durée des impulsions en sortie de fibre est encore trop courte: un étage d'étirement à réseaux (dispersion de vitesse de groupe positive) est alors ajouté.

- **Amplification:** les impulsions élargies spectralement et temporellement ont une énergie très faible; elles sont d'abord introduites dans un amplificateur régénératif: il s'agit d'un barreau amplificateur (par exemple en verre dopé au néodyme) dans lequel une impulsion effectue un grand nombre d'allers et retours. L'énergie des impulsions passe ainsi de 1nJ à 1mJ typiquement; le reste de l'amplification, de 1mJ à 1J environ, est réalisé à l'aide d'amplificateurs classiques.

- **Compression temporelle:** pour réduire la durée des impulsions, il faut disposer d'un système capable de retarder les composantes "rouges" par rapport aux composantes "bleues" du spectre des impulsions. Les compresseurs à prismes ou à réseaux réalisent cette condition en faisant parcourir à la lumière une distance croissante avec la longueur d'onde.

A.1.b - Principe de la compression temporelle par des réseaux

Le principe du compresseur à réseaux, introduit par Treacy ^{TRE68}, est représenté dans la figure 3.1. Les réseaux utilisés habituellement, de fabrication holographique ou directement gravés dans du verre, sont recouverts d'une fine couche d'or et fonctionnent en réflexion. Les longueurs d'onde "rouges" sont diffractées par les réseaux avec un angle plus grand que les "bleues", ce qui permet de leur faire parcourir une distance $\Delta(\omega)$ plus longue dans le compresseur. On obtient ainsi un système à dispersion de vitesse de groupe négative. Afin de disposer en sortie d'un faisceau circulaire et spectralement homogène, le compresseur est parcouru en double passage: cela permet également de doubler le déphasage introduit. Nous proposons d'utiliser ces principes avec des réseaux en GBC fonctionnant en transmission.

La compression d'impulsions à dérive de fréquence a été analysée par Mac Mullen ^{MAC79} en termes de retard de phase introduit par le compresseur. Plus récemment, une approche équivalente mais conceptuellement plus simple, reposant sur des calculs de trajets optiques, a

été proposée par Brorson et Haus ^{BRO87}. Nous utilisons ici certains résultats de cette dernière approche.

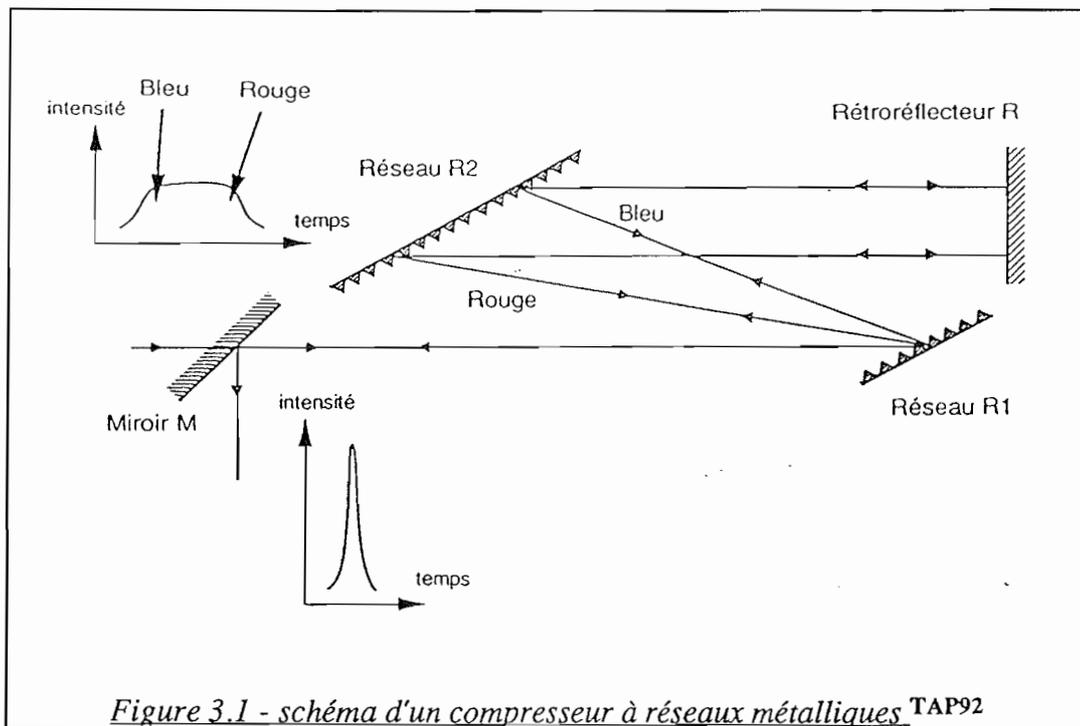


Figure 3.1 - schéma d'un compresseur à réseaux métalliques ^{TAP92}

On considère une impulsion de départ à dérive de fréquence linéaire, dont la pulsation instantanée s'écrit:

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{\delta\omega}{T} t \tag{3.1}$$

où ω_0 représente la fréquence porteuse moyenne, et $\delta\omega$ l'intervalle de fréquence couvert par le "chirp" pendant la durée T de l'impulsion. Le chirp a été créé par un système à dispersion de vitesse de groupe positive.

Cette impulsion est introduite dans un compresseur à réseaux. Les réseaux considérés sont des réseaux d'indice épais, fonctionnant en transmission (strates perpendiculaires aux faces), de période spatiale Λ . On suppose que ces réseaux sont parallèles entre eux et séparés par une distance D (voir figure 3.2). Pour une efficacité de diffraction optimale, le premier réseau est illuminé à l'incidence de Bragg θ_0 (dans l'air) qui correspond à la fréquence ω_0 ; cet angle est donné par la condition de Bragg:

$$\sin \theta_0 = \frac{\pi c}{\Lambda \omega_0} \tag{3.2}$$

La direction diffractée $\theta_{-1}(\omega)$ (dans l'air) à la fréquence ω est imposée par la loi des réseaux:

$$\sin[\theta_{-1}(\omega)] = \frac{\pi c}{\Lambda} \left(\frac{1}{\omega_0} - \frac{2}{\omega} \right) \tag{3.3}$$

Pour décrire le fonctionnement du compresseur à réseaux, la méthode la plus simple consiste à calculer la différence de trajet optique $\Delta(\omega)$ entre le rayon diffracté de fréquence ω et un rayon de référence, qui émergerait perpendiculairement aux deux réseaux. D'après la figure 3.2, on a:

$$\Delta(\omega) = \Delta_1(\omega) + \Delta_2(\omega) \quad (3.4)$$

Les distances $\Delta_1(\omega)$ et $\Delta_2(\omega)$ sont obtenues par des considérations géométriques simples:

$$\begin{cases} \Delta_1(\omega) = \frac{D}{\cos[\theta_{-1}(\omega)]} - D \\ \Delta_2(\omega) = -D \operatorname{tg}[\theta_{-1}(\omega)] \sin \theta_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Des relations (3.4) et (3.5), on déduit l'expression:

$$\Delta(\omega) = D \left[-1 + \frac{1 - \sin \theta_0 \sin[\theta_{-1}(\omega)]}{\cos[\theta_{-1}(\omega)]} \right] \quad (3.6)$$

Si la bande passante du "chirp" n'est pas trop large, on peut développer $\Delta(\omega)$ en série de Taylor:

$$\Delta(\omega) = D \left[p(\omega_0) + (\omega - \omega_0) p'(\omega_0) + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 p''(\omega_0) + o((\omega - \omega_0)^2) \right] \quad (3.7)$$

avec les coefficients:

$$\begin{cases} p'(\omega_0) = -\frac{4 \sin^2 \theta_0}{\omega_0 \cos^3 \theta_0} \\ p''(\omega_0) = \frac{12 \sin^2 \theta_0 (1 + \sin^2 \theta_0)}{\omega_0^2 \cos^5 \theta_0} \end{cases} \quad (3.8)$$

Nous avons ignoré le terme constant du développement (3.7), qui a pour seul effet de retarder l'ensemble de l'impulsion.

La compression maximale de l'impulsion est obtenue quand le terme linéaire du compresseur annule la dérive linéaire de fréquence. D'après (3.1) et (3.7), cette condition se traduit par:

$$\frac{L}{c} p'(\omega_0) + \frac{T}{\delta\omega} = 0 \quad (3.9)$$

Dans (3.8), on voit que $p'(\omega_0)$ est négatif; en ajustant les paramètres géométriques des réseaux, on pourra donc rendre égaux au premier ordre les instants de sortie des composantes spectrales de l'impulsion. En général, le terme quadratique du chemin optique (3.7) limite la compression à la durée minimale δt_{\min} ^{BRO87}:

$$\delta t_{\min} = \frac{L}{c} p''(\omega_0) \left(\frac{\delta\omega}{2} \right)^2 \quad (3.10)$$

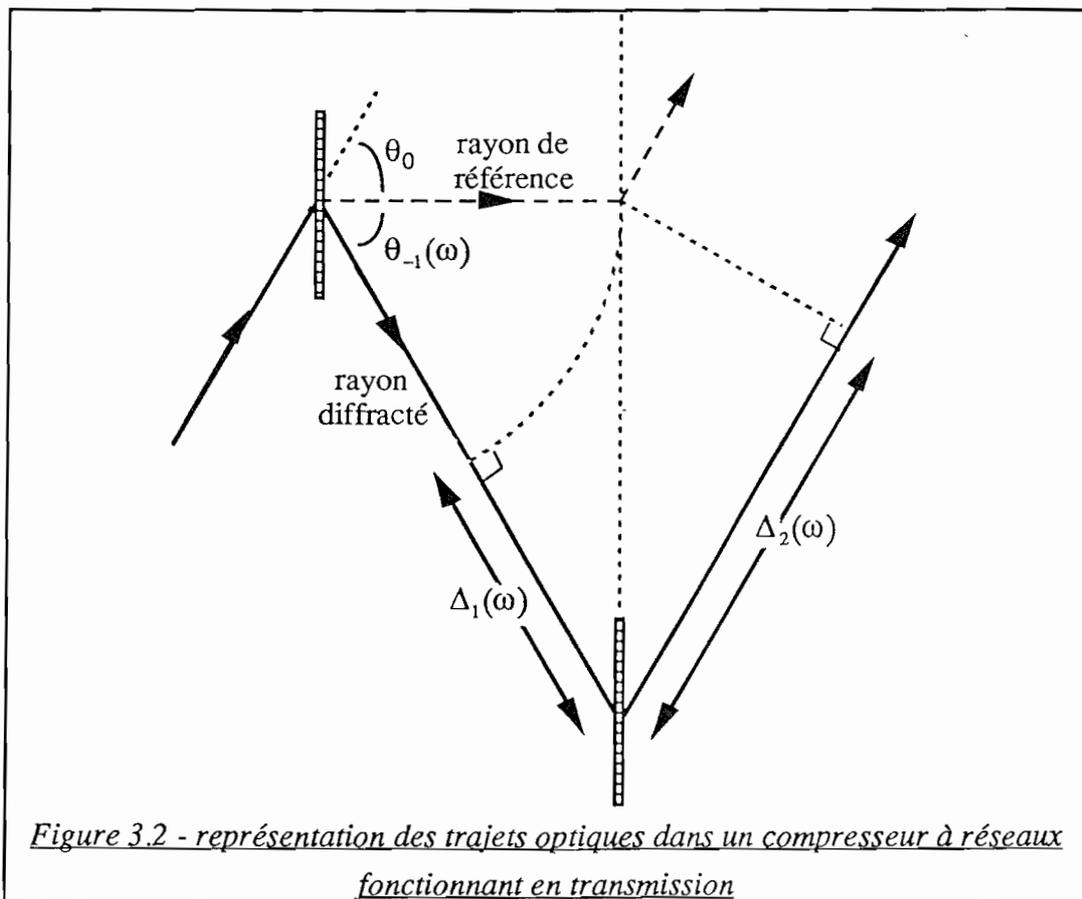
En combinant les relations (3.9) et (3.10), on obtient l'expression du rapport de compression minimal R_{\min} :

$$R_{\min} = \frac{\delta t_{\min}}{T} = \frac{cT}{4L} \frac{|p''(\omega_0)|}{[p'(\omega_0)]^2} \quad (3.11)$$

A l'aide des relation (3.8), on exprime R_{\min} en fonction des paramètres géométriques du compresseur:

$$R_{\min} = \frac{3}{16} \frac{cT}{L} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \theta_0} \right) \cos \theta_0 \quad (3.12)$$

Dans le cas d'un double passage, on doit remplacer L par $2L$ dans les formules précédentes. On voit que la compression est favorisée (R_{\min} petit) par une distance L importante entre les réseaux, et par un grand angle d'incidence de Bragg θ_0 (c'est-à-dire par une période spatiale Λ des réseaux peu supérieure à $\pi c / \omega_0$ d'après (3.2)). Par conséquent, la technique CPA requiert en général des réseaux de haute fréquence spatiale et de grandes dimensions (par exemple, pour compresser d'un facteur 500 en double passage une impulsion de 1 nanoseconde avec un angle d'incidence de 60° , il faut une distance de 16m environ entre les réseaux, et la taille du deuxième réseau doit atteindre 9cm).



Le double passage dans le compresseur tend à diminuer l'efficacité énergétique globale du système: si le rendement de diffraction de chaque réseau vaut x ($0 < x < 1$), alors le rendement global est égal à x^4 (par exemple, des réseaux efficaces à 80% donnent une efficacité globale de 41% seulement). La suite de l'exposé est consacrée à l'optimisation de l'efficacité des réseaux en GBC pour le domaine infrarouge.

A.2 - Etude et réalisation de réseaux en GBC sans pertes par réflexion

Diffraction analysis and experimental investigation of reflection-free holographic phase gratings

N Chateau, J C Saget and P Chavel

Institut d'Optique, Unité Associée au CNRS no 14, Université Paris-Sud, bâtiment 503, 91403 Orsay, France

Received 29 October 1992, in final form 7 January 1993

Abstract. The design of volume phase gratings for operation in the near-infrared domain is discussed. A second-order coupled-wave diffraction model of a non-uniform grating buried between multilayer coatings is explained. Two methods for obtaining transmission gratings without reflection losses are studied: one is based on an additional anti-reflection treatment, the other one makes use of E-mode polarization at Brewster incidence. In the latter case, two relations are derived which characterize a reflection-free grating for operation with E-mode polarized light. Both methods are tested on dichromated gelatin. The angular responses of the resulting gratings are measured and analysed, and their physical characteristics are obtained by numerical fitting. The effects of both techniques are compared.

1. Introduction

Since Shankoff [1] discovered a process for realizing dichromated gelatin (DCG) holograms with high index modulation, DCG has emerged as one of the best materials for the fabrication of holographic optical elements. Many investigations have dealt with the improvement of DCG holographic characteristics: published work [1-7] mainly consists of optimizing the chemical treatments and the recording process, in order to obtain lower diffusion and absorption, good uniformity and better control of layer thickness and of depth of modulation. In addition, new photosensitive materials such as photopolymers [8] have been developed that require simpler processes. Yet, to our knowledge, the problem of losses due to boundary reflections has not been studied. In many practical cases, for example in holograms reconstructed in the infrared (IR) [9], large incidence angles induce significant reflection losses that cannot be tolerated. The topic of this paper is the analysis and the realization of reflection-free gratings by two different techniques.

Our main objective is the fabrication of highly efficient and strongly dispersive dielectric diffraction gratings for use in the near-IR. Thus the following conditions must be met:

- (i) diffraction occurs in the Bragg (as opposed to the Raman-Nath) regime;
- (ii) reading geometry and grating characteristics verify the Bragg matching condition;
- (iii) the amplitude of index modulation is optimized to obtain maximum diffraction efficiency;
- (iv) the diffractive layer has very low scattering and absorption;
- (v) the glass *substrate also has very low scattering and absorption;*
- (vi) *reflection* losses are negligible;
- (vii) for strong dispersion, a modulation with determined spatial frequency must be recorded (about 1500 mm^{-1} for our application).

Dichromated gelatin appears as the best suited holographic material to satisfy

conditions (iii), (iv) and (vii). However, the methods for elimination of reflection losses presented in this study can be used with other phase recording materials. The limited sensitivity spectrum of dichromated gelatin implies that a wavelength shift exists between recording and replay (typically from $\lambda_w = 0.488 \mu\text{m}$ to $\lambda_r = 1.06 \mu\text{m}$). Since our problem involves only plane wave diffraction, this shift yields no optical aberration. As gelatin coatings with arbitrary thickness and good optical quality are neither easy to find nor to realise, we use layers derived from commercially available spectroscopic plates. The choice of Kodak 649F for the experiments reported in this paper is dictated by their relatively large thickness and by their generalized use in dichromated gelatin holography, since the first tests of Lin [2]. Yet we may not expect perfect results from these plates, because their glass substrate exhibits non-negligible absorption in the near-infrared region.

2. Discussion of grating efficiency

2.1. Notations (see figure 1)

- λ_w writing wavelength
- λ_r reading wavelength
- d grating thickness
- Λ fringe spacing
- x axis of the grating plane, perpendicular to the fringes
- z axis normal to the grating surface
- n_0 average refraction index
- n_1 depth of index modulation: $n(x) = n_0 + n_1 \cos(2\pi x/\Lambda)$
- θ_b internal (Bragg) refraction angle of incident light.

In this paper, diffraction efficiency (DE) is intended to mean the ratio between the first-order diffracted power and total incident power.

2.2. Grating geometry

In order to determine the most suitable configuration, we briefly investigate the simple schemes of plane unslanted reflection and transmission gratings (see figure 1(a) and

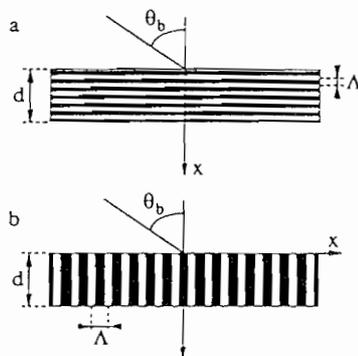


Figure 1. Grating geometries. (a) Reflection grating, (b) transmission grating.

(b)) and check for the Bragg condition (ii). In both cases, we suppose that a grating surrounded by air, recorded at $\lambda_w = 0.488 \mu\text{m}$, is replayed at $\lambda_r = 1.06 \mu\text{m}$. Snell's law gives the maximum value $\theta_c = \sin^{-1}(1/n_0)$ of the internal refraction angle, i.e.:

$$0 < |\theta_b| < \theta_c. \quad (1)$$

In the reflection grating, for a fixed free space wavelength λ , the fringe period and the refraction angle are related by the Bragg condition: $\cos(\theta_b) = \lambda/2n_0\Lambda$. The introduction of this equality into (1) leads to: $\lambda/2n_0 < \Lambda < \lambda/2n_0 \cos(\theta_c)$. Assuming $n_0 = 1.5$, at $\lambda_r = 1.06 \mu\text{m}$, we obtain: $0.35 < \Lambda < 0.47 \mu\text{m}$. The same relation applies to the recording geometry at wavelength $\lambda_w = 0.488 \mu\text{m}$, and shows that fringes with a period lying between $0.16 \mu\text{m}$ and $0.22 \mu\text{m}$ only can be recorded. A gap exists between the range of required spacings and the range of spacings achievable at λ_w , so we can conclude that reflection gratings are not well adapted to large wavelength shifts.

In the unslanted transmission grating case, the Bragg condition is:

$$\sin(\theta_b) = \lambda/2n_0\Lambda \quad (2)$$

The substitution in relation (1) gives: $\Lambda > \frac{1}{2}\lambda$. This condition shows that any transmission grating with fringe spacing $\Lambda > \frac{1}{2}\lambda_w$ can be recorded at λ_w , and that any grating period $\Lambda = \frac{1}{2}\lambda_r$ can diffract a Bragg matched wave at λ_r . Thus requirement (ii) leads to the use of transmission gratings, because their geometry allows recording and Bragg matched replay with a large wavelength shift.

Spatial frequency of the transmission grating may be tuned by accurate choice of the recording angle. Better control should be expected in an unslanted structure, where fringe planes are perpendicular to the interfaces. In this kind of grating, the spatial period is not affected by possible thickness variations of the photosensitive layer, in particular swelling and shrinking during chemical processing. We therefore concentrate our study on unslanted transmission gratings.

2.3. Diffraction efficiency

Two classes may be distinguished among the conditions for obtaining a global diffraction efficiency of 100%: suppression of losses (conditions (iv)–(vi)), and extinction of the direct wave in favour of the diffracted wave ((i)–(iii)). We now turn to condition (iii). According to the two-wave coupled-wave diffraction theory of Kogelnik [10], a total energy transfer into the first order may be obtained in a thick grating if the index modulation is equal to an optimal value given by:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

where γ represents the grating strength parameter:

$$\gamma = (\pi n_1 d)/(\lambda_r \cos(\theta_b)) \quad (4)$$

in H-mode (or HE) polarization, and

$$\gamma = (\pi n_1 d \cos(2\theta_b))/(\lambda_r \cos(\theta_b)) \quad (5)$$

in E-mode (or TM) polarization.

These conditions show that it is increasingly difficult to obtain a high diffraction efficiency when the replay wavelength increases since the required modulation is

proportional to λ_r . Near-IR wavelengths correspond to the practical limit of DCG. For fixed wavelength and fringe period (i.e. fixed Bragg angle), relation (3) only determines the product $n_1 d$. In our practical case, $n_1 d$ should exceed $0.4 \mu\text{m}$ if H-mode polarization is used, and E-mode would require $n_1 d$ even greater than $1 \mu\text{m}$. Since dichromated gelatin allows a known maximum index modulation of about 0.07, a film thickness of about $10 \mu\text{m}$ is convenient in the H-mode case. Kodak 649F plates offer such a thickness ($d = 12 \mu\text{m}$ after processing) with acceptable optical quality.

We have to ensure that diffraction occurs in Bragg regime (i), or two-wave regime, i.e. that all other orders are negligible compared to the zero and first orders and that the grating behaviour is well described by a two-wave model such as that of Kogelnik [10] or of Vasnetsov *et al* [11]. Gaylord and Moharam [12, 13] gave two conditions for obtaining a Bragg regime diffraction:

$$Q'/2\gamma \geq 10 \tag{6}$$

and

$$Q' > 1 \tag{7}$$

where $Q' = (2\pi\lambda_r d)/(n_0 \Lambda^2 \cos(\theta_b))$. In our application, using $12 \mu\text{m}$ thick films, Q' is greater than 100 and γ should be equal to $\frac{1}{2}\pi$, so conditions (6) and (7) are met. Thus, in our case, diffraction efficiencies can be calculated by the two-wave diffraction theories, with an accuracy better than 1% (see [12]).

3. Diffraction model

To account for antireflection coatings, we derive a coupled-wave model for the diffraction of a plane wave in a thick grating embedded between several homogeneous layers, as represented in figure 2. Our study of grating diffraction is based on the Vasnetsov *et al* [11] second-order two-wave description. This theory provides an analytic formulation of the problem in a more rigorous manner than the Kogelnik theory: because second-order field derivatives are not neglected, the Vasnetsov *et al* [11] model also takes into account the boundary reflections. We modified the published formulation [11] to obtain a convenient matrix form that allows easier field matching on boundaries. For modelling thin optical coatings, we used the Abelès [14, 15] theory of light propagation in stratified media. In this paper, we shall develop only the case of H-mode polarization; the case of E-mode may be treated in a similar manner.

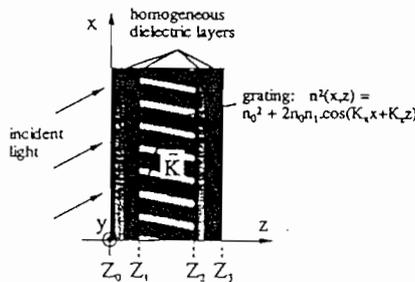


Figure 2. Representation of a grating buried between two stacks of homogeneous layers.

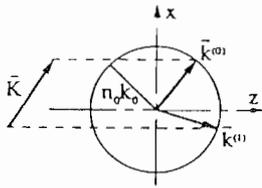


Figure 3. Geometry of grating vector and wavevectors.

3.1. Additional notations (see figure 2)

\vec{K} , grating vector ($\|\vec{K}\| = 2\pi/\Lambda$); in the present study, \vec{K} is assumed to be in the plane of incidence and may be slanted, thus the model applies to both transmission and reflection gratings.

z , axis perpendicular to the grating boundary. x , axis intersection between the grating plane and the plane of incidence. $n^2(x, z) = n_0^2 + 2n_0n_1 \cos(K_x x + K_z z)$ describes the modulation; $n(x, z)$ represents the complex refractive index (an absorbing or absorption modulated grating may also be treated).

θ , internal refraction angle of the transmitted wave (not necessarily the Bragg angle). λ_0 , free space wavelength. $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ and $\vec{h} = \mu c \vec{H}$, modified magnetic field vector, introduced for more simplicity in the notation.

3.2. Grating diffraction

Vasnetsov *et al* used the following two-wave expansion of the electric field:

$$E_y(x, z) = E_y^{(0)}(z) \exp(jk_x^{(0)}x) + E_y^{(1)}(z) \exp(jk_x^{(1)}x) \quad (8)$$

where the refracted and the transmitted wavevectors $k^{(0)}$ and $k^{(1)}$ illustrated in figure 3 are given by:

$$\left. \begin{aligned} k_x^{(0)} &= n_0 k_0 \sin(\theta) \\ k_x^{(1)} &= k_x^{(0)} - K_x \\ k_z^{(l)} &= \sqrt{n_0^2 k_0^2 - k_x^{(l)2}} \quad l \in \{0, 1\} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Transverse electric field propagation is governed by the Helmholtz equation:

$$\nabla^2 E_y(x, z) + k_0^2 n^2(x, z) E_y(x, z) = 0. \quad (10)$$

Substituting expansion (8) into (10) leads to a system of two second-order differential equations. Vasnetsov *et al* found the solution in the form:

$$\left. \begin{aligned} E_y^{(0)}(z) &= \sum_{i=0}^3 r_i \exp(j\varphi_i z) \\ E_y^{(1)}(z) &= \frac{1}{k_0^2 n_0 n_1} \sum_{i=1}^3 r_i (\varphi_i^2 - k_z^{(0)2}) \exp(j(\varphi_i - K_z)z) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

where coefficients φ_i , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ are the four solutions of the quartic equation: $(\varphi^2 - k_z^{(0)2})[(\varphi - K_z)^2 - k_z^{(1)2}] = k_0^4 n_0^2 n_1^2$ (a detailed resolution may be found in [11]). Coefficients r_i , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ may be determined by boundary field matching conditions.

We prefer to eliminate coefficients r_i by introducing other unknowns, namely the tangential components of the modified magnetic field \mathbf{h} . The Maxwell equation $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\mu(\partial\mathbf{H}/\partial t)$ yields $h_x(x, z) = (j/k_0) \partial E_y(x, z)/\partial z$. Thus component $h_x(x, z)$ may be expanded as:

$$h_x(x, z) = h_x^{(0)}(z) \exp(jk_x^{(0)}x) + h_x^{(1)}(z) \exp(jk_x^{(1)}x) \quad (12)$$

with:

$$\left. \begin{aligned} h_x^{(0)}(z) &= \frac{-1}{k_0} \sum_{i=0}^3 r_i \varphi_i \exp(j\varphi_i z) \\ h_x^{(1)}(z) &= \frac{-1}{k_0^3 n_0 n_1} \sum_{i=0}^3 r_i (\varphi_i - K_z) (\varphi_i^2 - k_z^{(0)2}) \exp(j(\varphi_i - K_z)z) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Relations (11) and (13) may be rewritten as the matrix equation:

$$\begin{bmatrix} E_y^{(0)}(z) \\ h_x^{(0)}(z) \\ E_y^{(1)}(z) \\ h_x^{(1)}(z) \end{bmatrix} = [M(z)] \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

where the coefficients of the 4×4 matrix M are given by:

$$\begin{aligned} m_{0,i}(z) &= \exp(j\varphi_i z) & m_{1,i}(z) &= \frac{-1}{k_0} \varphi_i \exp(j\varphi_i z) \\ m_{2,i}(z) &= \frac{1}{k_0^2 n_0 n_1} (\varphi_i^2 - k_z^{(0)2}) \exp(j(\varphi_i - K_z)z) & i \in \{0, 1, 2, 3\} \\ m_{3,i}(z) &= \frac{-1}{k_0^3 n_0 n_1} (\varphi_i - K_z) (\varphi_i^2 - k_z^{(0)2}) \exp(j(\varphi_i - K_z)z). \end{aligned}$$

Applying the preceding matricial relation to coordinates z and z' , which represent the positions of grating boundaries, and eliminating vector $[r_i]$ between the two resulting equations, we obtain:

$$\begin{bmatrix} E_y^{(0)}(z') \\ h_x^{(0)}(z') \\ E_y^{(1)}(z') \\ h_x^{(1)}(z') \end{bmatrix} = [V(z' - z)] \begin{bmatrix} E_y^{(0)}(z) \\ h_x^{(0)}(z) \\ E_y^{(1)}(z) \\ h_x^{(1)}(z) \end{bmatrix} \quad (14)$$

where the 4×4 characteristic matrix $[V(z' - z)]$ is obtained by the matrix product: $[V(z' - z)] = [M(z')][M(z)]^{-1}$. Equation (14) relates the tangential components of incident and exiting fields.

The continuity of these components on interfaces makes easier the modelling of a grating with non-uniform modulation (i.e. n_1 depends on z). As was initially suggested by Kermish [16] and later described by Solymar and Cook [17] and by Au *et al* [18], such a grating may be represented by a stack of elementary uniformly modulated slices.

The partial characteristic matrix $[V_i(z_{i+1} - z_i)]$ of each slab i may be calculated as we described earlier, and the global grating characteristic matrix may be simply obtained by the product: $[V(z_n - z_0)] = \prod_{i=0}^{n-1} [V_i(z_{i+1} - z_i)]$.

3.3. Propagation in optical coatings

The tangential components of wavevectors are continuous on every boundary, thus expansions (8) and (12) may be used in every medium of the stack represented in figure 2. The characteristic matrix of a layer with uniform index of refraction, bounded by planes of coordinates z and z' , may be written as:

$$\begin{bmatrix} E_y^{(0)}(z') \\ H_x^{(0)}(z') \\ E_y^{(1)}(z') \\ H_x^{(1)}(z') \end{bmatrix} = [A(z' - z)] \begin{bmatrix} E_y^{(0)}(z) \\ H_x^{(0)}(z) \\ E_y^{(1)}(z) \\ H_x^{(1)}(z) \end{bmatrix} \quad (15)$$

where the 4×4 matrix $[A(z' - z)]$ may be expressed as the block matrix:

$$[A(z' - z)] = \begin{bmatrix} [A^{(0)}(z' - z)] & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & [A^{(1)}(z' - z)] \end{bmatrix}$$

The zero block matrices signify that there is no coupling between the transmitted and the diffracted waves; each 2×2 matrix $[A^{(l)}(z' - z)]$, $l \in \{0, 1\}$ is directly deduced from Abelès [12, 13] characteristic matrix formulation:

$$[A^{(l)}(z' - z)] = \begin{bmatrix} \cos(k_z^{(l)}(z' - z)) & -(jk_0/k_z^{(l)}) \sin(k_z^{(l)}(z' - z)) \\ -(jk_z^{(l)}/k_0) \sin(k_z^{(l)}(z' - z)) & \cos(k_z^{(l)}(z' - z)) \end{bmatrix}, l \in \{0, 1\}.$$

In the preceding relation, wavevector components $k_z^{(l)}$ are given by:

$$k_z^{(l)} = (n^2 k_0^2 - k_x^{(l)2})^{1/2} \quad l \in \{0, 1\} \quad (16)$$

where n is the layer refractive index; because of phase matching, components $k_x^{(l)}$ are continuous on boundaries: their values are the same as those calculated inside the grating by relation (9).

Since the field components involved in relation (15) are continuous on each interface, the characteristic matrix of a stack constituted by m optical layers may be written in the following form:

$$[A(z_m - z_0)] = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m-1} [A_i^{(0)}(z_{i+1} - z_i)] & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \prod_{i=0}^{m-1} [A_i^{(1)}(z_{i+1} - z_i)] \end{bmatrix}$$

3.4. Half-space interface

When applying boundary conditions, we need to distinguish between forward and backward propagating waves; thus we shall use the Rayleigh field expansion in both external half-spaces:

$$E_y(x, z) = \sum_{l=0}^1 I^{(l)} \exp[j(k_x^{(l)}x + k_z^{(l)}z)] + R^{(l)} \exp[j(k_x^{(l)}x - k_z^{(l)}z)].$$

In the preceding expansion, components $k_z^{(l)}$ are calculated by applying relation (16) in the considered half-spaces (components $k_x^{(l)}$ are still deduced from relation (9)). We see that the fields may be described either by components $E_y^{(0)}$, $h_x^{(0)}$, $E_y^{(1)}$, $h_x^{(1)}$, which are more convenient to describe wave propagation inside the stack, or by parameters $I^{(0)}$, $R^{(0)}$, $I^{(1)}$, $R^{(1)}$, which are more intuitive and should allow a simpler writing of the boundary conditions. We thus derive a matrix that acts as an interface between both representations:

$$\begin{bmatrix} E_y^{(0)}(z) \\ h_x^{(0)}(z) \\ E_y^{(1)}(z) \\ h_x^{(1)}(z) \end{bmatrix} = [B(z)] \begin{bmatrix} I^{(0)} \\ R^{(0)} \\ I^{(1)} \\ R^{(1)} \end{bmatrix}$$

where the 4×4 external boundary interface matrix $[B(z)]$ may be expressed as the block matrix:

$$[B(z)] = \begin{bmatrix} [B^{(0)}(z)] & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & [B^{(1)}(z)] \end{bmatrix}.$$

The coefficients of matrices $[B^{(l)}(z)]$, $l \in \{0, 1\}$ are obtained by identifying the two kinds of field expansions:

$$[B^{(l)}(z)] = \begin{bmatrix} \exp(jk_z^{(l)}z) & \exp(-jk_z^{(l)}z) \\ (-k_z^{(l)}/k_0) \exp(jk_z^{(l)}z) & -(k_z^{(l)}/k_0) \exp(-jk_z^{(l)}z) \end{bmatrix}, l \in \{0, 1\}.$$

3.5. Global characteristic matrix

From the preceding, we may deduce a matrix relation between initial and final Rayleigh coefficients:

$$\begin{bmatrix} I_f^{(0)} \\ R_f^{(0)} \\ I_f^{(1)} \\ R_f^{(1)} \end{bmatrix} = [C] \begin{bmatrix} I_i^{(0)} \\ R_i^{(0)} \\ I_i^{(1)} \\ R_i^{(1)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

where $[C]$ is obtained by the product:

$$[C] = [B(Z_3)]^{-1}[A(Z_3 - Z_2)][V(Z_2 - Z_1)][A(Z_1 - Z_0)][B(Z_0)]$$

(see figure 2 for the notation). $[C]$ is the characteristic matrix of a possibly non-uniform grating buried between two stacks of homogeneous layers.

3.6. Boundary conditions

The classical boundary conditions of the whole component may be expressed as follows: only one wave with known complex amplitude (say 1) is incident in the entrance half-space, and reverse propagating waves are not allowed in the exit half-space. In terms of Rayleigh coefficients, we get: $I_i^{(0)} = 1$, $I_i^{(1)} = R_f^{(0)} = R_f^{(1)} = 0$.

The introduction of these values into matrix equation (17) leads to a linear system of four equations easy to solve for the four unknowns $I_f^{(0)}$, $I_f^{(1)}$, $R_i^{(0)}$, $R_i^{(1)}$. Then the corresponding energy efficiencies, respectively designated as $\eta_I^{(0)}$, $\eta_I^{(1)}$, $\eta_R^{(0)}$, $\eta_R^{(1)}$ may be calculated as follows:

$$\left. \begin{aligned} \eta_I^{(l)} &= (k_{3z}^{(l)}/k_{0z}^{(0)})|I_f^{(l)}|^2 \\ \eta_R^{(l)} &= (k_{3z}^{(l)}/k_{0z}^{(0)})|R_i^{(l)}|^2 \end{aligned} \right\} l \in \{0, 1\}.$$

In this relation, $k_{0z}^{(0)}$ and $k_{3z}^{(l)}$ respectively represent wave vector components along z axis in the entrance and the exit half-spaces.

When computing the model, the 2×2 block diagonal form of matrices $[A]$ and $[B]$ must be taken into account to reduce the required memory storage and speed up matrix products. Some numerical results are presented in the last section.

4. Grating characterization

4.1. Experimental set-up

We constructed a computerized set-up able to record the angular response of a chosen diffraction order. As illustrated in figure 4, the grating placed on a controlled rotating platform is illuminated by a plane wave produced by a monochromator. For measuring the diffracted power, the computer also controls the rotation of a photodiode around the same axis. At each angular step of the grating, the detection angle corresponding to the new incidence angle is calculated; then the detector searches for the maximum light intensity near its new theoretical position, and the result is recorded. Moreover, the angular displacement of the grating between two measurements automatically gets smaller when the curve slope increases: this feature allows better representation of peaks and side-lobes.

4.2. Analysis of angular response

Our computer program calculates grating parameters by fitting a theoretical curve to the angular zero-order response measured experimentally. The numerical characterisation of the grating is carried out in the following manner: at first the structure is supposed

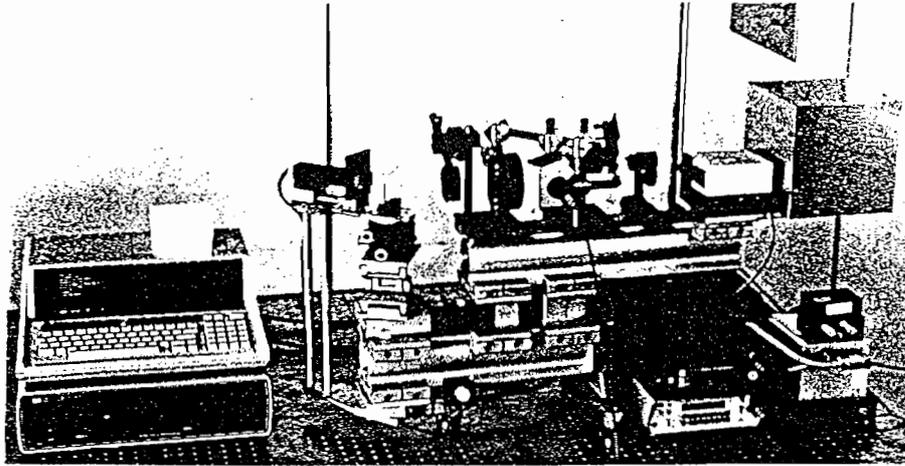


Figure 4. Angular response measuring set-up. From right to left: monochromator, collimating lens, reference, polarizer, grating and detector on rotating platforms, computer.

to be uniformly modulated, and the optimization involves parameters n_1 , d and the coefficient α of energy attenuation in the glass substrate. Most of the time, after determining these parameters, we obtain an acceptable fit of Bragg dips and peaks, but the whole experimental curves are not perfectly represented: our theoretical results exhibit greater secondary oscillations in off-Bragg incidences. We know that the recording beams suffer absorption losses, inducing an attenuation of the index modulation with increasing depth [17, 18]. Then we run more accurate calculations, dividing each grating into N slices with equal thickness d/N ($N \leq 10$ in practice). $N + 2$ parameters are optimized: $n_1^{(i)}$ ($i \in \{0, \dots, N - 1\}$), d , α . We thus obtain the shape of index modulation variations versus z . As illustrated in the next section, this method generally leads to a good agreement between the complete theoretical and experimental curves.

5. Elimination of reflection losses

In a high spatial frequency grating replayed with an infrared plane wave, Bragg condition (2) leads to a large incidence angle (about 60° in our case). Significant losses then occur, due to boundary reflections. We propose two different approaches for solving this problem, depending on the reading beam polarization.

5.1. Solution for H-mode polarization

As has been seen, the design of a grating for replay with H-mode polarization offers the advantage of requiring much lower index modulation than in the other polarization case. In a $12 \mu\text{m}$ thick gelatin layer, n_1 should be about 0.035, which is an achievable value in 649F plates.

Yet a significant fraction of the readout light is lost in specular reflections: an (external)

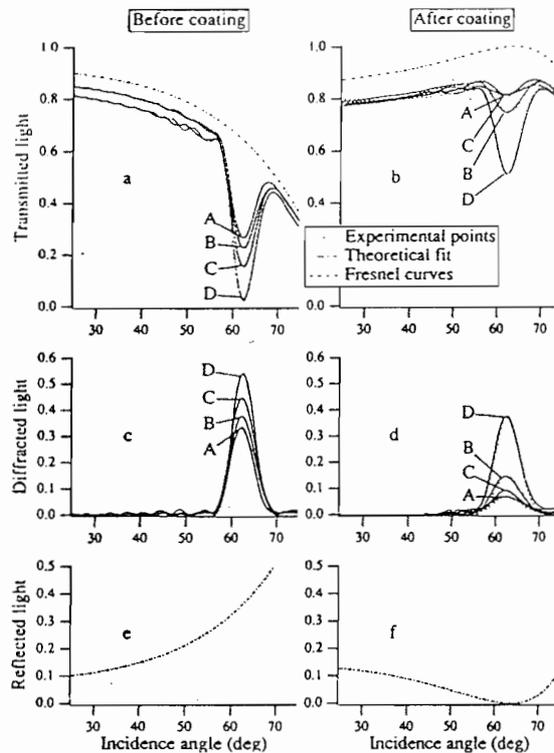


Figure 5. Angular dependence of output beams before and after coating (H-mode).

incidence angle of 62° and $n_0 = 1.5$ leads to Fresnel losses of 36%. This problem may be overcome by depositing an appropriate antireflection (AR) coating on each side of the plate. The unslanted structure of the grating yields a symmetric replay geometry, with exactly opposite incidence and exit angle. Thus, provided that the substrate index is equal to the average grating index n_0 , the same AR coating is required on both faces.

5.1.1. Experiment. We fabricated four dichromated gelatin transmission gratings, respectively labelled as A, B, C, D, with spatial frequency $1/\Lambda = 1670 \text{ mm}^{-1}$. We followed a standard chemical process derived from [3–7]. We applied a two-layer AR coating deposited by vacuum evaporation directly on the gelatin film and on the glass substrate face. The first layer (closer to the grating) is made of TiO_2 with index 2.00 and thickness 15 \AA , the second one is MgF_2 with index 1.38 and thickness 25 \AA . We recorded and analysed angular scans of the four samples before (figure 5(a)) and after (figure 5(b)–(d)) the AR treatment.

5.1.2. Results and discussion. Comparing angular scans of figure 5(a) with the theoretical Fresnel transmission curve (upper chain curve), we see that our gratings initially have non-negligible absorption at $1.06 \mu\text{m}$. Sample D is made on a thicker glass substrate than A, B, C, and exhibits greater absorption. Further verifications, including an angular

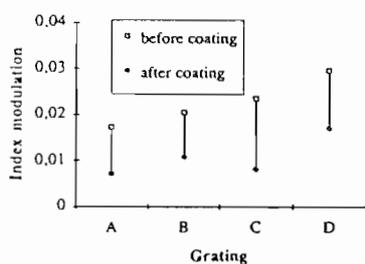


Figure 6. Modification of index modulation due to AR coating process (H-mode).

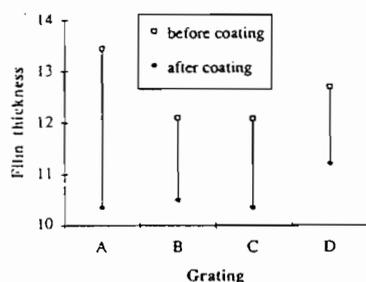


Figure 7. Modification of film thickness due to AR coating process (H-mode).

scan of a 649F glass plate without gelatin and consultation of Kodak glass documentation, lead to the conclusion that only the glass, and not the gelatin layer, is responsible for IR absorption. The numerical fitting of angular scans (5(a)) gives an energy attenuation coefficient $\alpha = 67 \text{ m}^{-1}$ in the glass plate.

Gratings A, B, C, D initially exhibit increasing diffraction efficiencies (figure 5(c)) increasing from A to D up to 55%. From the theoretical angular dependence of the reflection coefficient figure (5(e)), common to the four samples, we see that 36% of the light energy is reflected at Bragg incidence. If these reflection losses were suppressed without changing other characteristics, calculations indicate that the efficiency of grating D could reach 84% (95% on a non-absorbing substrate).

The global shapes of angular scans of figure 5(b) show the desired effect of the AR coating: if we abstract the Bragg peaks, we see that the transmission coefficient would increase up to a maximum at Bragg incidence. Figure 5(f) exhibits the corresponding calculated variations of reflection coefficient. Complementary measurements of reflection losses at Bragg angle gave values within 2% of incident energy.

An undesired sequence of the AR treatment clearly appears in angular scans of first-order energy (figure 5(d)): despite the suppression of reflection losses, we observe that the diffraction efficiency of each grating has decreased. The slight increase in absorption revealed by fitting of figure 5(b) has practically negligible effect: it appears that first-order power (figure 5(d)) has dropped down at the benefit of directly transmitted light (figure 5(b)). We notice that the relative positions of curves B and C have been inverted: the decrease is not monotonic with respect to the initial efficiency.

Following the method described in section 4, we calculated from the measurements presented in figure 5 the values of index modulation amplitude (figure 6) and layer thickness (figure 7) before and after the AR treatment. It appears that the drop in efficiency results from a decrease in both modulation and thickness, and that modulation has a greater contribution to this effect.

The heat radiated by evaporation crucibles has baked our gratings with a temperature

about 150°C for almost one hour. The baking of dichromated gelatin holograms has been experimented with in the past, in order to make layers more resistant to high temperatures [5] or to realize fine control of diffraction efficiency in intentionally overexposed hologram [7]. It has been established that baking a hologram at a temperature higher than 80°C partially melts the gelatin, inducing shrinkage of the layer and diminution of index modulation. Moreover, the visible loss of accuracy in the theoretical fits of coated gratings (figure 5(b)) also tends to indicate that some degradation occurred in the grating structure.

We may expect much better efficiency results from gratings that are initially overexposed to compensate for the further drop in modulation. Yet, the compared evolutions of samples B and C tend to show that the vacuum evaporation set-up does not produce reproducible baking. A solution would consist of preparing strongly modulated gratings so that they remain overexposed even after coating; a final baking would allow the tuning of diffraction efficiency. We are also thinking of experimenting with a low temperature coating technique on gelatin.

5.2. Solution for E-mode polarization

Dielectric gratings are usually replayed with light polarized in H-mode, because this polarization induces greater energy coupling between refracted and diffracted light. In other words, E-mode requires much higher values for n_1 , according to relations (3)–(5). Yet E-mode offers the benefit of lower reflection losses.

These losses can even be tuned to zero by a convenient geometry that allows replay at the Brewster incidence angle. Such a configuration implies: $\tan(\theta_{b,ext}) = n_0$, where $\theta_{b,ext}$ is the external incidence angle. Combining this relation with Bragg (2) and with optimal modulation (3), (5) conditions, we obtain:

$$\Lambda = \lambda_r (n_0^2 + 1)^{1/2} / 2n_0 \quad (18)$$

and

$$n_1 = \frac{\lambda_r n_0 (n_0^2 + 1)^{1/2}}{d \cdot 2(n_0^2 - 1)}. \quad (19)$$

These relations give the expressions for fringe period and optimal index modulation amplitude of a reflection-free transmission grating for use with E-mode polarization. In a given recording medium, we see that both these parameters only depend linearly on the desired replay wavelength.

In some applications, the imposition of a determined value for spatial frequency may appear as a drawback. Applied to our practical conditions, formula (18) leads to $1/\Lambda \approx 1570$ line mm, which may fully satisfy our need for strong dispersion (vii). In a 12 μm thick plate, relation (19) implies that the depth of index modulation n_1 should be equal to 0.095.

5.2.1. Experiment. We recorded several transmission gratings with a geometry dictated by relation (17). In order to achieve as strong a modulation as possible, our plates were sensitized in a 10% ammonium dichromate solution, and all water baths were processed at room temperature. The recording was monitored in time by an He-Ne laser probe under Bragg incidence at $\lambda = 633$ nm: we observed the diffraction by the latent image

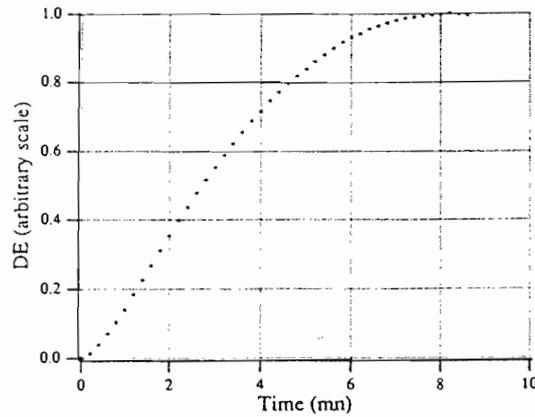


Figure 8. Recording of the diffraction efficiency of an He-Ne probe plotted against exposure time (E-mode).

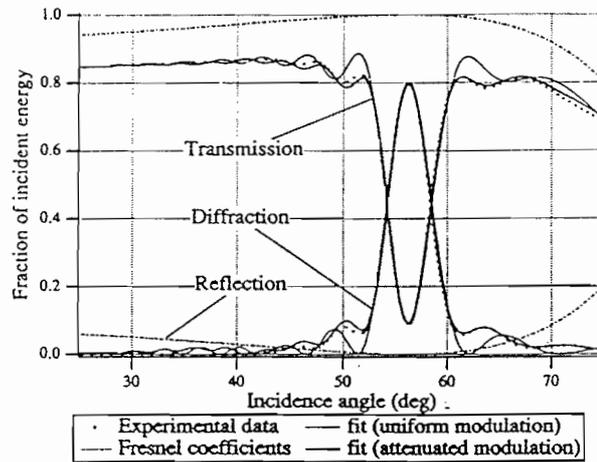


Figure 9. Angular dependence of output beams (E-mode).

of the grating (figure 8) and stopped the exposure when saturation occurred. This control is expected to ensure optimal recording time. After processing, we recorded angular scans of refracted and first-order diffracted powers and performed the same theoretical fits as we described earlier.

5.2.2. Results and comments. Our best results consist of several gratings with about 80% efficiency and less than 0.5% reflectivity at $\lambda_r = 1.06 \mu\text{m}$. Angular scans of such a grating are represented in figure 9, together with calculated curves resulting from simple and sliced-grating models. A first theoretical fit led to a grating with thickness $d = 14.3 \mu\text{m}$ and with effective depth of modulation $n_1 = 0.064$. The thickness is greater than expected, so an optimal value for n_1 would be only 0.08.

A second fit, using the sliced-grating model with six slabs, resulted in $d = 16.8 \mu\text{m}$ and the elementary index modulations of figure 10. We notice that n_1 is extremely high near the external face (0.1, i.e. a peak-to-peak variation of 0.2), and rapidly decreases

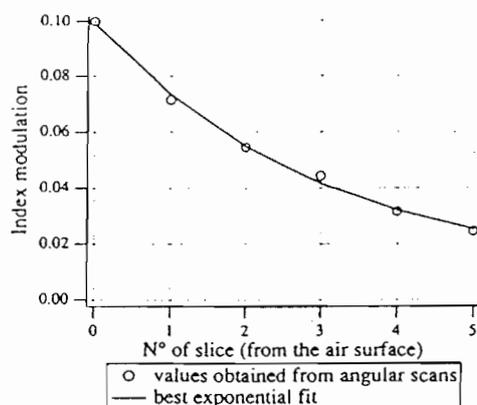


Figure 10. Estimated variation of modulation with depth (E-mode).

with increasing depth. We think that this is mainly due to the strong attenuation of the recording waves, induced by the high sensitizer concentration. We observe a good fit between the experimental values of figure 10 and a decaying exponential (if z is expressed in μm : $n_1(z) = 0.01 + 0.91 \exp(-0.12z)$). This property is not systematically verified in our other gratings.

We have calculated that the diffraction efficiency of our grating would reach 88% if the glass substrate was transparent: the maximum depth of modulation that we are able to achieve is not large enough to ensure a total energy transfer into the first order. Thus it seems necessary to use thicker gelatin films deposited on a glass plate with good IR transparency to really get close to 100%.

6. Conclusion

We discussed the consequences of a large positive wavelength shift between the recording and the replay of thick phase gratings. We presented a diffraction model for gratings coated by multiple homogeneous layers. We realized DCG holographic transmission gratings for operation in the IR domain with very low reflections using two techniques: the deposition of an AR coating by vacuum evaporation, and the design for E-mode polarization at Brewster incidence. The former method requires lower index modulation, but baking effects modify the grating structure: this process seems to have poor reproducibility. The latter technique constraints the spatial frequency to a fixed value depending on the replay wavelength; it involves fewer processing steps and, in our experiments, it leads to better results in terms of diffraction efficiency.

References

- [1] Shankoff T A 1968 *Appl. Opt.* 7 2101
- [2] Lin H 1969 *Appl. Opt.* 8 963
- [3] Bainier C 1974 *Thèse de Doctorat* Université de Besançon
- [4] Chang B J and Leonard D 1979 *Appl. Opt.* 18 2407
- [5] Chang B J 1980 *Opt. Engng* 19 642

- [6] Georgekutty T G and Liu H K 1987 *Appl. Opt.* 26 372
- [7] Redmond I R 1989 *PhD thesis* Heriot-Watt University, Edinburgh
- [8] Hariharan P 1980 *Opt. Engng* 19 636
- [9] Yang T-S, Ho P-P, Katz A, Alfano R R and Ferrante R A 1985 *Appl. Opt.* 24 2021
- [10] Kogelnik H 1969 *Bell System Tech. J.* 48 2909
- [11] Vasnetsov M V, Soskin M S and Taranenkov V B 1985 *Opt. Acta* 32 891
- [12] Gaylord T K and Moharam M G 1981 *Appl. Opt.* 20 3271
- [13] Gaylord T K and Moharam M G 1985 *Proc. IEEE* 73 894
- [14] Abélès F 1950 *Ann. Phys., Paris* 5 596, 706
- [15] Born M and Wolf E 1987 *Principles of Optics* 6th edn (New York: Pergamon) pp 51-70
- [16] Kermisch D 1969 *J. Opt. Soc. Am* 59 1409
- [17] Solymar L and Cooke D J 1981 *Volume Holography and Volume Gratings* (London: Academic) pp 98-1
- [18] Au L B, Newell J C W and Solymar L 1987 *J. Mod. Opt.* 34 1211

B - Élément séparateur et uniformiseur de faisceau laser

Dans les pages qui suivent, nous décrivons l'étude et la réalisation d'un hologramme de phase synthétisé par ordinateur et copié sur gélatine bichromatée, qui réalise deux fonctions: la séparation en deux d'un faisceau laser incident, et l'uniformisation de la répartition d'intensité de chacun des deux faisceaux sortants. Cet hologramme peut être considéré localement comme un réseau périodique mince fonctionnant dans les ordres -1 et $+1$; le rapport cyclique ε de ce réseau est variable suivant sa surface, de façon à ce que l'efficacité de diffraction locale, qui dépend de ε , compense la forme gaussienne de l'intensité incidente. Nous comparons cet hologramme à un autre formeur de faisceau holographique ^{BEL75}, proposé précédemment par d'autres chercheurs de l'Institut d'Optique.

Optics Communications 88 (1992) 33–36
North-Holland

OPTICS
COMMUNICATIONS

A method for splitting a gaussian laser beam into two coherent uniform beams

N. Château, D. Phalippou and P. Chavel

Institut d'Optique, Unité Associée au C.N.R.S., B.P. 147, 91403 Orsay cedex, France

Received 3 July 1991

We describe a computer generated phase hologram that converts a gaussian laser beam into two uniform collimated beams, and we compare it to another beam-shaper that was previously suggested.

1. Introduction

In many applications, the non-uniformity of the beam appears as a severe drawback. For instance when a hologram is recorded using laser beams, the combined effect of the gaussian energy distribution and of the response of the material may forbid the achievement of a high global diffraction efficiency.

Several methods have been suggested in order to produce a coherent and uniform laser illumination. The simplest solution is to expand the beam using a high power microscope objective and to utilise only a small central part of the resulting wide-angle illumination. Of course this method exhibits a very low energy efficiency when a good uniformity is required. Rhodes and Sheally [1] proposed an optical system made of two aspherical lenses that converts a gaussian laser beam into a uniform collimated beam with a very high efficiency, but this component is rather difficult to make.

Holographic solutions lead to systems much easier to build than aspherical surfaces. Belvaux and Viridi [2] suggested a very simple computer generated holographic amplitude mask giving a good uniformity with an energy efficiency of nearly 30%. We still use this component in some of our holographic recording setups, and in this paper we compare it to our new realization.

In order to achieve a very high energy efficiency with a holographic system, amplitude holograms should be avoided and only phase holograms should

be used. At least two papers [3,4] proposed holographic beam-shapers based on a scheme using two phase holograms: the first hologram uniformly distributes the beam energy in the plane of the second one, which re-establishes the phase of the collimated wave. Although these systems could theoretically lead to very high efficiencies, the best experimental results they achieved hardly reached 30%. The main reason for this rather low value seems to be the difficulty to control the recording material.

Therefore we consider that single-hologram components are still competitive: while they may be easily processed and quickly set up in any experiment, their performance is not drastically lower than that of more complicated two-hologram systems. Thus we propose a computer generated thin phase hologram able to form two collimated uniform waves when it is illuminated by a gaussian laser beam. This component may prove convenient in a holographic setup where at least two coherent uniform beams are required.

2. Discussion

Considering the beam expansion method, Belvaux and Viridi noticed that if a uniformity better than x percent is desired, then the gaussian shape of the beam prevents the efficiency of exceeding x percent. They showed that leveling the gaussian distribution could give better results, allowing efficiencies more

than ten times greater than the previous method. The maximum amount of energy left in the truncated uniform beam is theoretically 37% of the total incident light energy, when the gaussian curve is leveled at its 1/e value (see fig. 1). To achieve this truncation, they used a computer generated amplitude mask with apertures proportional to the inverse light amplitude modulus of the incident gaussian laser beam. After filtering and retaining only the center of the diffraction pattern, a uniform beam was obtained.

Our component flattens the gaussian distribution in a different way. Let us first consider a thin pure phase binary grating. This grating may be characterized by its dephasing $\Delta\phi$, its period p and the grating ratio ϵ (see fig. 2); in the direction of the first (-1 or +1) diffraction order, the diffraction efficiency only depends on $\Delta\phi$ and ϵ :

$$\eta(r) = \frac{4}{\pi^2} \sin^2(\pi\epsilon) \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right).$$

We see that when $\epsilon = 1/2$ and $\Delta\phi = \pi$, the efficiency reaches its maximum of 41%.

Our beam-shaper may be described as a phase grating where the grating ratio ϵ varies in such a manner that the efficiency η compensates the gaussian intensity distribution designated by

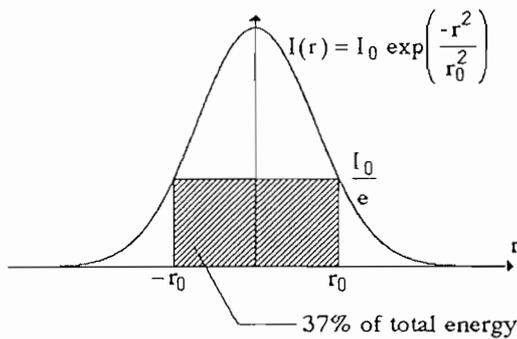


Fig. 1. Energy efficiency of the amplitude mask.

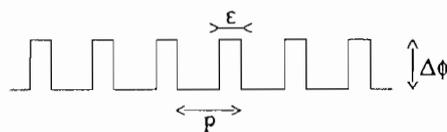


Fig. 2. Representation of a binary phase grating.

$$I(r) = I_0 \exp(-r^2/r_0^2).$$

Thus ϵ is equal to 1/2 on the edges of the hologram, where the maximum efficiency is required, and decreases towards the center (see fig. 3). The local value of ϵ is given by the condition $\eta(r)I(r) = \text{constant}$. This leads to the relation

$$\epsilon(r) = (1/\pi) A \sin\{\exp[(r^2 - r_0^2)/2r_0^2]\}.$$

The theoretical energy efficiency of this system may be simply calculated as the product of the maximum grating efficiency 41% (assuming $\Delta\phi = \pi$) with the result of the truncation 37%. We obtain 15% maximum theoretical efficiency in both orders +1 and -1. It appears that this system may act as a beam-

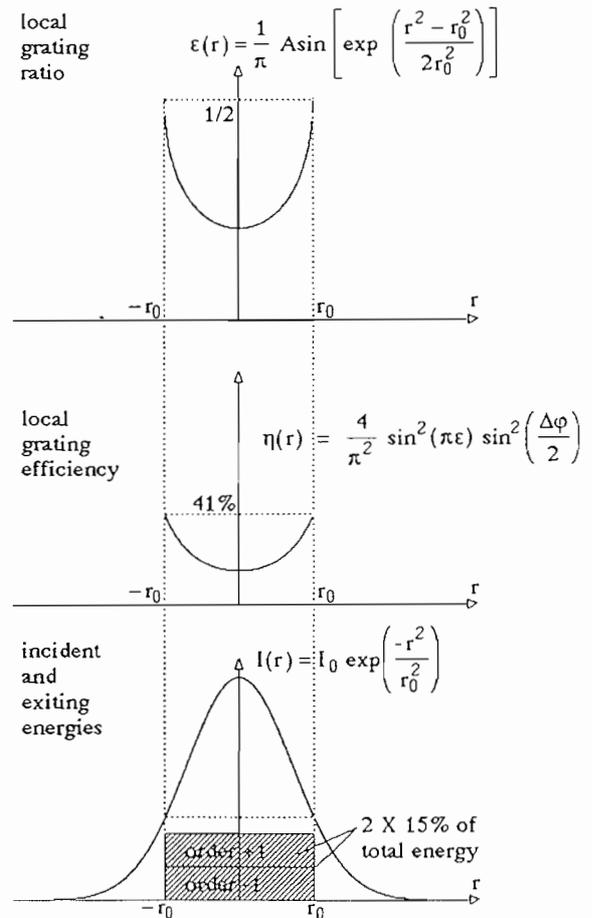


Fig. 3. Characteristics of the phase binary hologram.

Volume 88, number 1

OPTICS COMMUNICATIONS

1 March 1992

splitter which makes the beams energy uniform with 30% global efficiency.

3. Experiments

We first plotted the computer generated hologram on a pen-plotter. We drew a 50 cm large plot made of 100 parallel fringes, with the number of achievable values of ϵ limited to 47 by the plotter resolution. The pattern was photoreduced to 1/50 on a Kodak 1A photographic plate (the same process allowed us to produce some copies of the former amplitude holographic beam-shaper for comparison). Then the photograph was contact printed on dichromated gelatin plates using a uv source.

We tested the phase hologram and compared it to the amplitude one using the filtering setup illustrated in fig. 4. The next figure (fig. 5) exhibits photographs of oscilloscope screen, showing the response given by a detector array located in the image plane.

We measured 9% efficiency in both +1 and -1 diffraction order of the phase hologram, while the most uniform energy distribution obtained with the amplitude hologram contained 26% of incident energy. The 18% overall efficiency of our phase hologram is lower than theoretical prediction. This is mainly due to the difficulty of achieving $\Delta\phi$ equal to π in dichromated gelatin without precise room temperature and humidity control.

In both cases, we evaluated the ratio between the amplitude of the non-uniformities and the main value of the signal. We found about 20% for the amplitude hologram, but this value should improve using anti-reflection coated optics and a better initial gaussian curve. The ratio rises to 32% for the phase hologram: the reason has to be found in the additional step of the fabrication, and we still have to verify if a binary amplitude contact-printed on dichromated gelatin really turns into a binary phase.

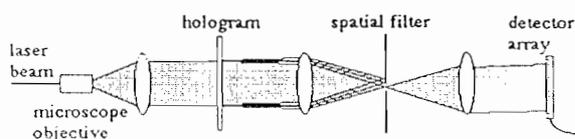


Fig. 4. Measuring setup.

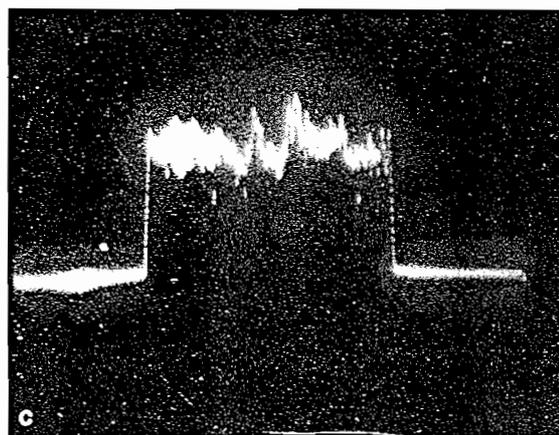
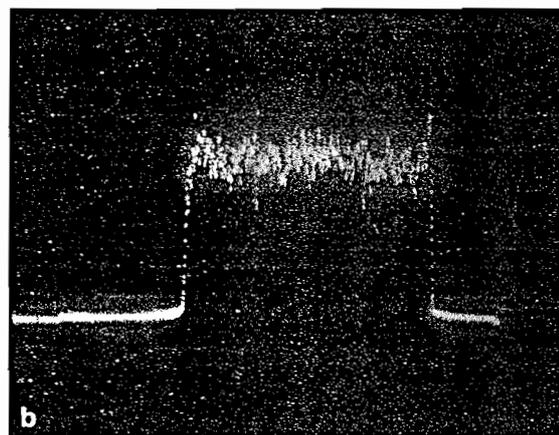
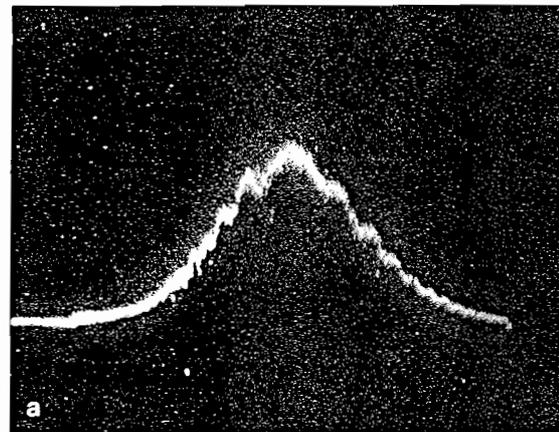


Fig. 5. Experimental beam shapes. (a) Initial gaussian beam, (b) uniformization using amplitude hologram, (c) uniformization using phase hologram.

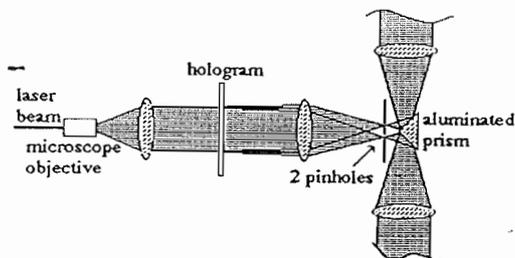


Fig. 6. Typical setup using the phase hologram.

4. Conclusion

We have demonstrated a simple holographic com-

ponent able to produce two reasonably uniform laser beams with about 20% efficiency. Used for instance as shown in fig. 6 to complete physical separation of the beams, this component may replace the traditional beam-splitter in a holographic recording setup and thus improve holograms quality.

References

- [1] P.W. Rhodes and D.L. Shealy, *Appl. Optics* 19 (1980) 3545.
- [2] Y. Belvaux and S.P.S. Viridi, *Optics Comm.* 15 (1975) 193.
- [3] C-Y Han, Y. Ishii and K. Murata, *Appl. Optics* 22 (1983) 3644.
- [4] M.T. Eismann, A.M. Tai and J.N. Cederquist, *Appl. Optics* 28 (1989) 2641.

C - Lentille holographique collimatrice pour diode laser

C.1 - Généralités sur les lentilles holographiques

On peut concevoir une lentille holographique (LH) comme l'enregistrement holographique d'une lentille conventionnelle (LC). En effet, quand on illumine une telle LH avec une onde identique à la référence qui a servi à l'enregistrer, elle restitue le même front d'onde que la LC.

Cependant, des différences importantes existent entre les LC et les LH, dues aux phénomènes physiques différents qui régissent leur fonctionnement. Une LC utilise la réfraction de la lumière à travers des dioptres, décrite par la loi de réfraction de Snell-Descartes. Une LH fonctionne par la diffraction de microstructures périodiques, suivant la loi des réseaux.

Les optiques diffractives sont par nature beaucoup plus dispersives que les optiques réfractives. C'est pourquoi elles trouvent la plupart de leurs applications dans des systèmes à source monochromatique (laser), où leurs performances leur permettent de rivaliser avec les optiques conventionnelles. Dans ce type de configuration, une LH offre parfois des avantages décisifs, en particulier la compacité. On peut fabriquer assez facilement des LH de dimensions pupillaires entre 100 μm et plusieurs cm, de grande ouverture et limitées principalement par la diffraction. Ces composants sont enregistrés dans des films épais de quelques μm déposés sur des supports transparents.

Bien sûr, les aberrations d'une LH sont en théorie nulles seulement lorsque les conditions de restitution sont identiques à celles de l'enregistrement, en termes de géométrie et de longueur d'onde. La minimisation des aberrations dans des conditions de restitution non idéales est en général plus difficile que pour les LC: dans les configurations hors-axe habituelles, les aberrations des LH sont plus importantes. De plus, il faut tenir compte des propriétés de la diffraction dans le régime de Bragg des LH : le plus souvent, l'efficacité de diffraction d'une LH est maximale si elle est restituée dans sa configuration d'enregistrement, et se dégrade si l'on s'écarte de ces conditions idéales.

C.2 - Lentilles holographiques conçues pour une restitution avec changement de longueur d'onde.

Avec le développement des diodes lasers, le besoin de composants optiques pour le proche infrarouge (IR) est de plus en plus important. Divers composants holographiques ont déjà été conçus pour ce domaine spectral.

La GBC, à cause de sa sensibilité limitée spectralement à l'ultra-violet et au domaine bleu-vert, ne permet pas d'enregistrer un hologramme directement dans le proche IR (c'est aussi le cas de la plupart des matériaux photopolymères et des photorésists).

Le changement de longueur d'onde entre l'enregistrement et la restitution d'une LH entraîne l'apparition d'aberrations dûes à la dispersion. L'importance de ces aberrations dépend du décalage de longueur d'onde, de l'angle de diffraction moyen, de l'ouverture numérique et des dimensions physiques de la LH. Pour préciser cette dernière caractéristique, il faut remarquer que les aberrations géométriques sont à l'échelle des dimensions du système: si une LH de diamètre 100 μm peut focaliser la lumière sur une tache de diamètre proche de la limite imposée par la diffraction, une LH de diamètre 10 mm et de même ouverture donne une tâche d'aberration 100 fois plus grande.

Le changement de longueur d'onde pour la restitution d'une LH a un autre effet indésirable: la condition de Bragg ne peut plus être satisfaite en tout point de l'hologramme. En général, il existe une incidence qui maximise l'efficacité de diffraction globale, mais l'efficacité varie d'un point à l'autre de la LH, et sa valeur moyenne reste plus faible que pour une LH restituée à sa longueur d'onde d'enregistrement. Le degré d'accord de Bragg que l'on peut obtenir dépend des techniques utilisées pour la conception de la LH.

Suivant les applications envisagées, une LH est conçue pour des aberrations minimales ou pour un accord de Bragg optimal. On peut également vouloir un compromis : on définira dans ce cas une fonction de mérite qui fait intervenir les 2 caractéristiques et l'on cherchera à la minimiser.

Plusieurs techniques ont été proposées pour minimiser les aberrations d'hologrammes reconstruits avec un changement de longueur d'onde ou de géométrie. Certaines méthodes sont fondées sur l'utilisation d'hologrammes synthétisés par ordinateur (HSO). L'utilisation d'un HSO interposé sur un bras d'un montage d'enregistrement interférométrique a été décrite pour la réalisation d'hologrammes optimisés de haute efficacité dans des matériaux de phase tels que la GBC. Amitai et Friesem **AMI87**, **AMI88** ont décrit une technique récursive analytique pour générer des fronts d'ondes asphériques à partir d'hologrammes enregistrés avec des ondes sphériques. Cette méthode a été appliquée avec succès à la réalisation de lentilles holographiques **ASS88**.

L'approche que nous avons retenue dans ce travail consiste à optimiser l'enregistrement holographique en utilisant seulement des fronts d'ondes sphériques. Cette méthode, présentée au paragraphe suivant, est plus simple que la génération d'ondes asphériques, et peut mener à des performances suffisantes pour notre application.

C.3 - Etude d'une lentille holographique à pupille rectangulaire pour l'infrarouge proche

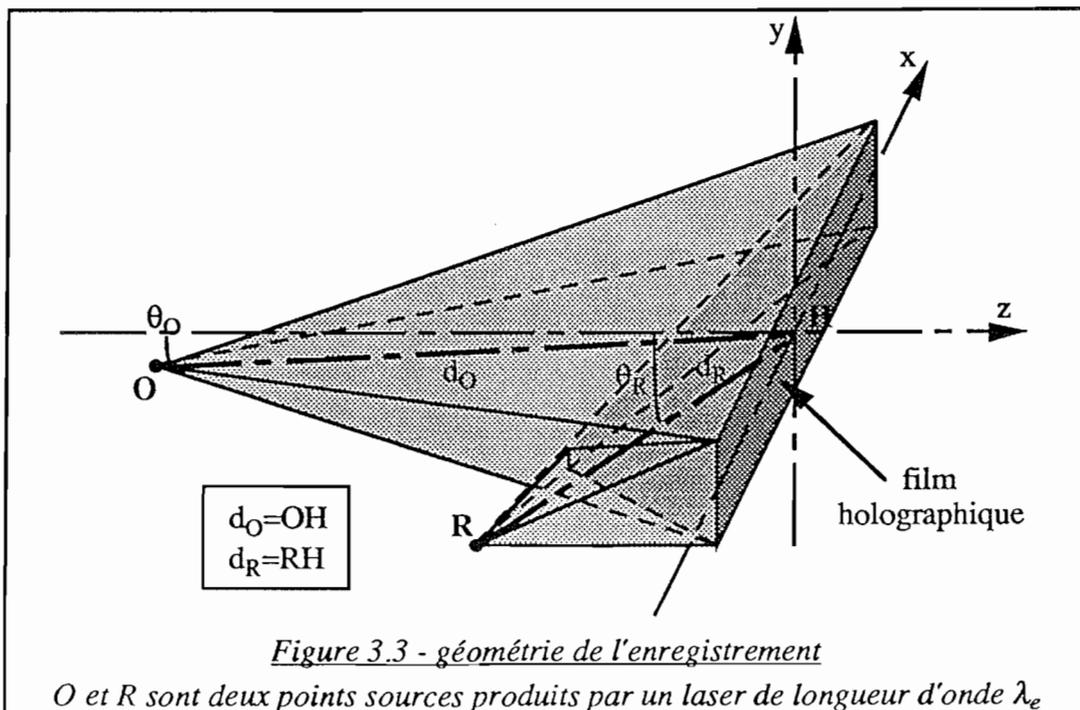
Lors d'une collaboration avec la société SODENA, nous avons étudié une LH destinée à la collimation d'un faisceau IR issu d'une diode laser, pour la réalisation d'un dispositif d'éclairage compact dans un corrélateur à acousto-optique (AO).

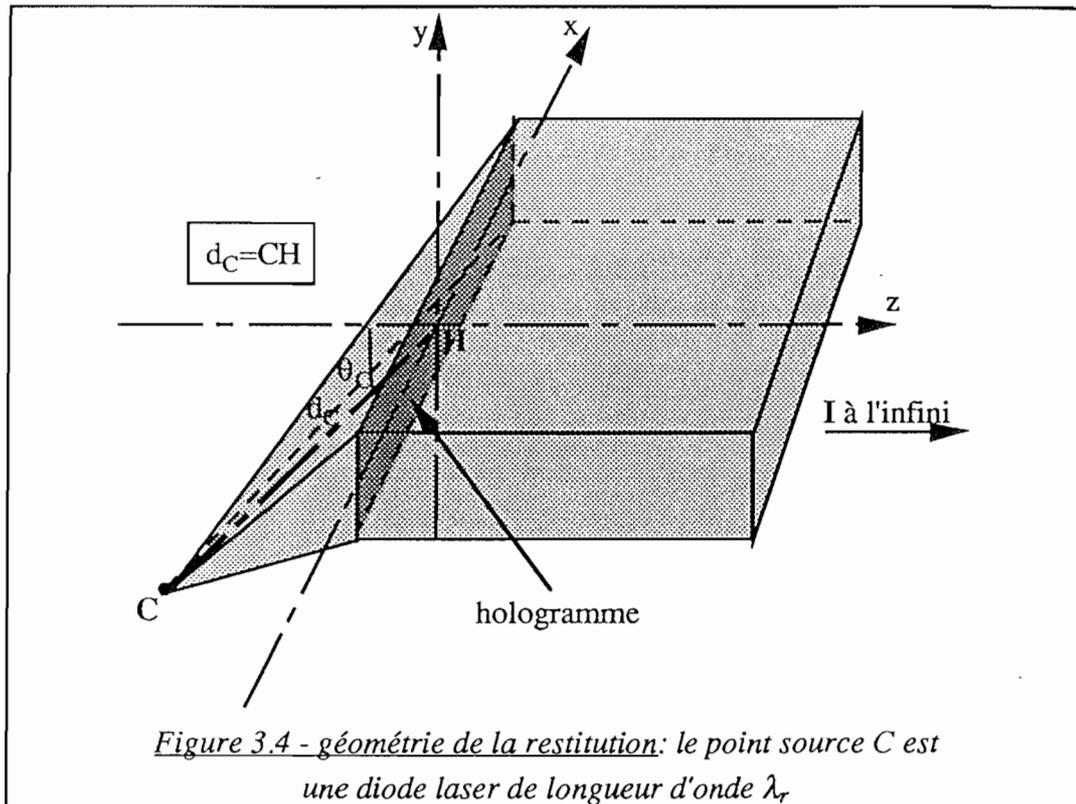
Les exigences du système sont les suivantes:

- longueur d'onde de restitution $\lambda_r=850\text{nm}$;
- la géométrie du cristal impose une forme rectangulaire allongée ($30\times 1\text{mm}$) à la pupille;
- l'écart angulaire entre un rayon issu de la LH et la direction principale du faisceau diffracté reste inférieur à $0,3^\circ$; cette condition est imposée par l'effet Bragg dans le cristal AO, et définit la limite des aberrations tolérables;
- encombrement réduit: la diode laser de restitution est placée le plus près possible de la LH.
- le choix de la GBC comme matériau holographique impose la longueur d'onde d'enregistrement $\lambda_e=488\text{nm}$.

C.3.a - Calcul de la lentille

Pour décrire les ondes lumineuses d'enregistrement (figure 3.3) et de restitution (figure 3.4), nous utilisons les notations suivantes: O pour Objet, R pour Référence, I pour Image et C pour incident. Nous définissons un repère (H,x,y,z), où H est le centre de la pupille, (Hx) est l'axe parallèle au grand côté de la pupille, (Hy) est parallèle au petit côté et (Hz) est perpendiculaire au plan de la LH (voir figures 3.3 et 3.4).





Dans notre approche, les points sources d'enregistrement et de restitution sont situés dans le plan (Hxy). Les données du calcul de la LH sont les paramètres suivants:

- les longueurs d'onde λ_e et λ_r ;
- la géométrie de la restitution (figure 3.3): distance $d_C (=CH)$ entre le point source et le centre de la pupille, angle θ_C d'incidence au centre, point image à l'infini ($d_I = IH = +\infty$), faisceau image perpendiculaire à l'hologramme ($\theta_I = 0$).

A partir de ces données, nous déterminons la géométrie d'enregistrement qui permet de réaliser une LH dont la restitution, conforme aux données précédentes, vérifie aussi la condition de Bragg au centre de la pupille et est entachée d'un minimum d'aberrations. Les paramètres de l'enregistrement, qu'il faut déterminer, sont les angles d'incidence au centre θ_O et θ_R et les distances sources $d_O = OH$ et $d_R = RH$.

Au centre de la pupille, la condition de restitution sous Bragg peut s'écrire:

$$\theta'_I + \theta'_C = \theta'_O + \theta'_R \quad (3.13)$$

où les "prime" indiquent que les angles sont pris à l'intérieur de la LH (ils sont reliés aux angles externes par la loi de Snell-Descartes). Une autre relation entre ces angles peut être déduite de la loi des réseaux:

$$\frac{\sin \theta'_I - \sin \theta'_C}{\lambda_r} = \frac{\sin \theta'_O - \sin \theta'_R}{\lambda_e} \quad (3.14)$$

A partir des relations (3.13) et (3.14), on obtient les angles θ'_O et θ'_R , et donc les angles d'enregistrement θ_O et θ_R .

Les distances d_O et d_R sont optimisées de façon à minimiser les aberrations de la LH. Plus précisément, notre méthode consiste à minimiser les variations sur la pupille de l'angle $\alpha_1(x, y)$ restitué localement par la LH (au centre, $\alpha_1(x, y) = \theta_1 = 0$). En un point (x, y) de la pupille, on peut déduire $\alpha_1(x, y)$ des coordonnées du vecteur d'onde diffracté local $\vec{k}_1(x, y)$. Ces coordonnées sont déterminées par la loi des réseaux, qui donne les relations:

$$\begin{cases} k_{1x}(x, y) = k_{Cx}(x, y) + k_{Ox}(x, y) - k_{Rx}(x, y) \\ k_{1y}(x, y) = k_{Cy}(x, y) + k_{Oy}(x, y) - k_{Ry}(x, y) \\ k_{1z}(x, y) = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\lambda_r}\right)^2 - k_{1x}^2(x, y) - k_{1y}^2(x, y)} \end{cases} \quad (3.15)$$

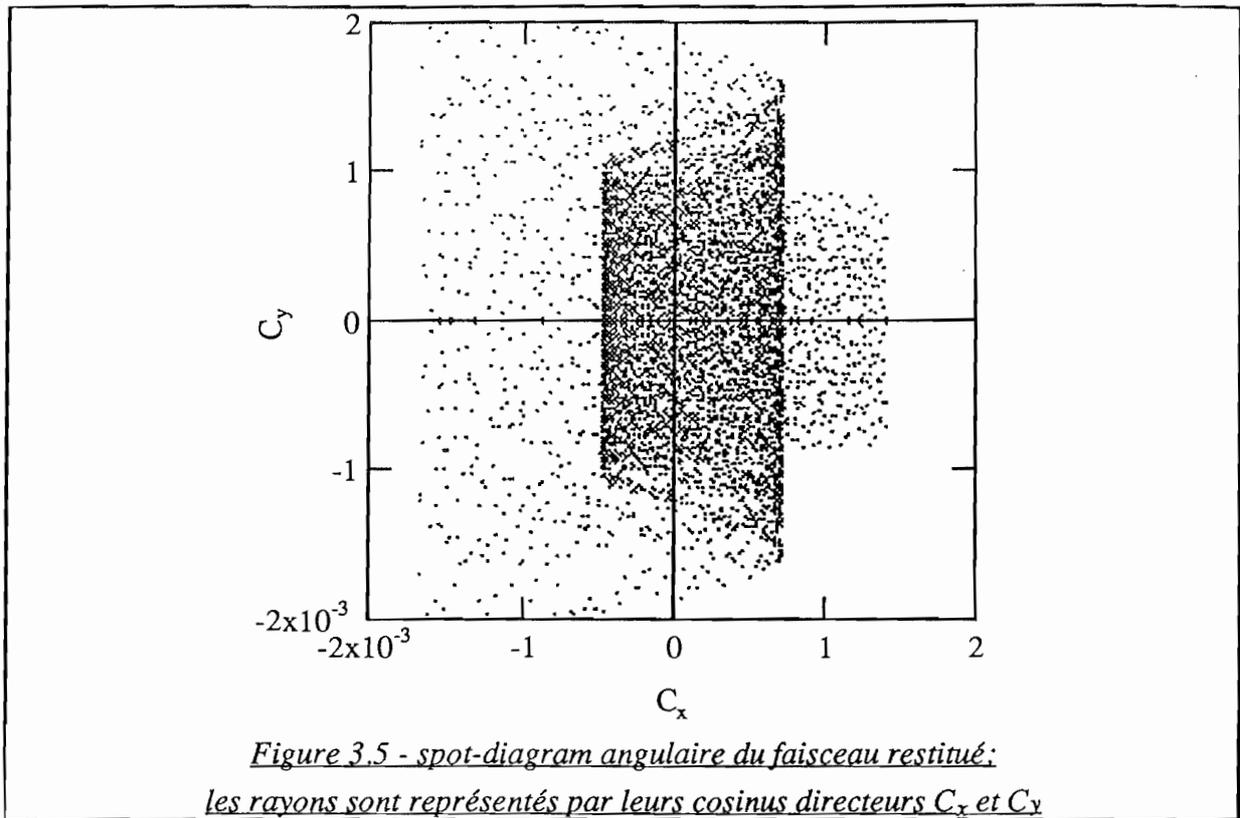
Dans les formules (3.15), le vecteur d'onde local $\vec{k}_O(x, y)$ de l'onde objet est calculé par:

$$\begin{cases} k_{Ox}(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda_c} \frac{x + d_O \sin \theta_O}{\sqrt{(x + d_O \sin \theta_O)^2 + y^2 + d_O^2 \cos^2 \theta_O}} \\ k_{Oy}(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda_c} \frac{y}{\sqrt{(x + d_O \sin \theta_O)^2 + y^2 + d_O^2 \cos^2 \theta_O}} \\ k_{Oz}(x, y) = \sqrt{\left(\frac{2\pi n}{\lambda_c}\right)^2 - k_{Ox}^2(x, y) - k_{Oy}^2(x, y)} \end{cases} \quad (3.16)$$

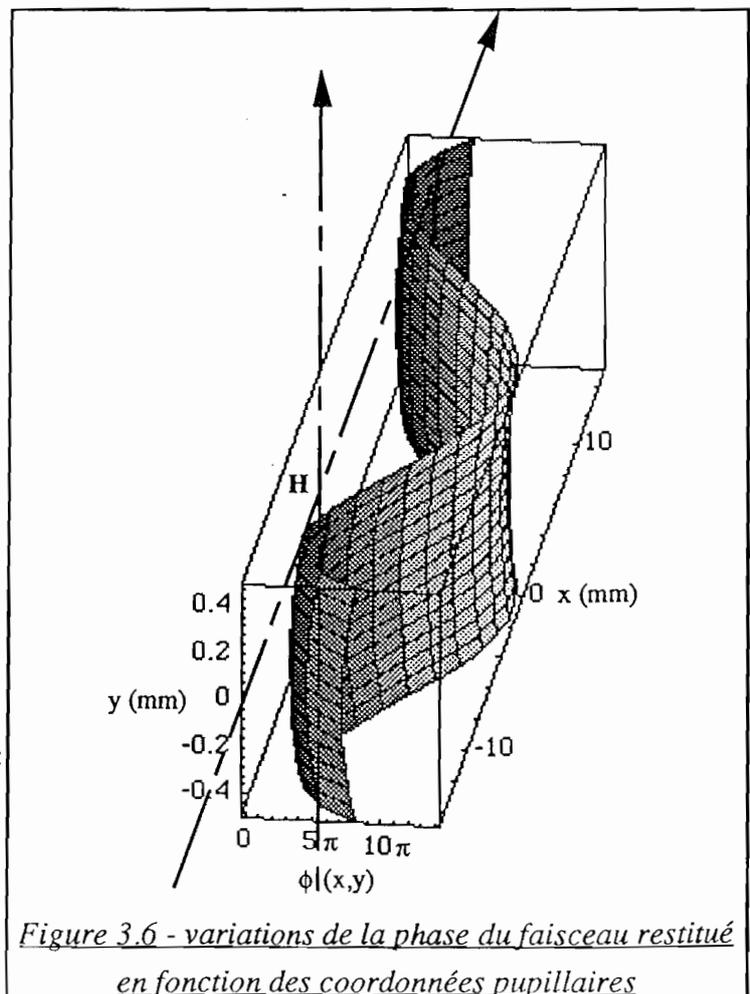
Les vecteurs d'onde locaux $\vec{k}_R(x, y)$ et $\vec{k}_C(x, y)$ sont obtenus par des relations similaires. On voit ainsi que $\alpha_1(x, y)$ dépend des coordonnées pupillaires et des données de départ. Les valeurs de d_O et de d_R sont optimisées numériquement à l'aide de l'algorithme du Simplex, afin de minimiser la valeur moyenne de $\alpha_1(x, y)$ sur la surface pupillaire.

En appliquant cette méthode de calcul à plusieurs géométries de restitution (θ_C, d_C) , on observe que les aberrations augmentent quand la distance d_C ou quand l'angle θ_C augmente. Il faut donc trouver un compromis entre la compacité du système et la qualité de la collimation. Nous avons choisi une configuration qui donne un encombrement réduit, tout en restant théoriquement conforme au cahier des charges en ce qui concerne les aberrations: $\theta_C=50^\circ$ et $d_C=60\text{mm}$. Le calcul de la géométrie d'enregistrement à partir de ces données a abouti aux valeurs suivantes:

$$\begin{cases} \theta_O = 9,9^\circ & d_O = 84,2\text{mm} \\ \theta_R = 37,8^\circ & d_R = 286\text{mm} \end{cases}$$



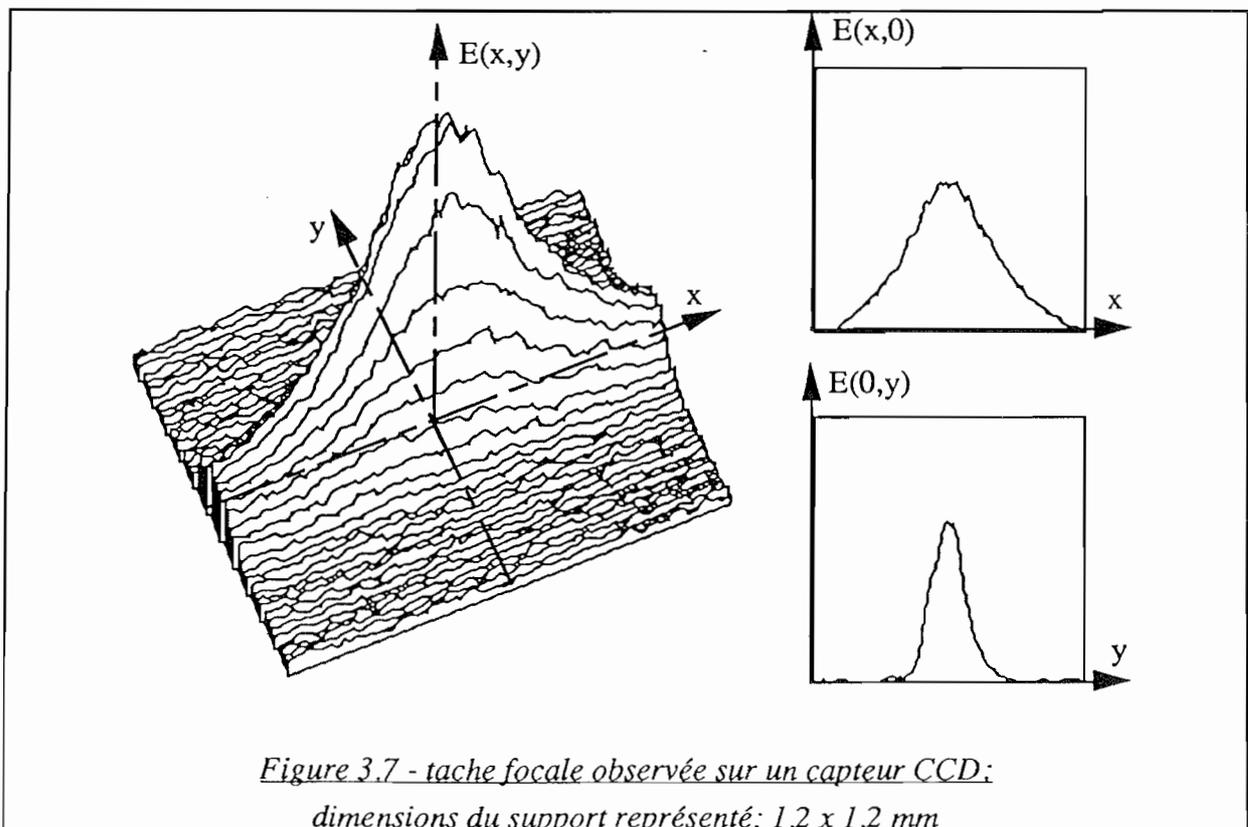
La figure 3.5 montre le spot-diagram angulaire de la LH: les coordonnées des points sont les cosinus directeurs suivant x et y des rayons diffractés. On voit que l'écart maximal est de l'ordre de $1,5 \cdot 10^{-3}$ en valeur absolue, ce qui correspond à un écart angulaire de $0,1^\circ$ environ. La figure 3.6 représente les variations sur la pupille de la phase du faisceau diffracté. L'écart maximal est inférieur à 15π ; en comparaison, l'aberration sphérique d'une lentille conventionnelle de focale 60mm et de diamètre 30mm produit un déphasage d'environ 120π entre le centre et le bord de la pupille.



C.3.b - Résultats expérimentaux

Avec la géométrie déterminée par le calcul, nous avons enregistré une série de dix échantillons sur GBC, avec différents temps de pose. Pour visualiser les aberrations des LH, nous les avons restituées à l'envers à l'aide d'une onde plane produite par une diode laser placée au foyer d'un triplet. Des dimensions des taches focales observées, le principe de retour inverse de la lumière permet de déduire les aberrations angulaires du faisceau collimaté lorsque les LH sont restituées dans le sens normal. Nous avons détecté la répartition d'éclairement du plan focal à l'aide d'un capteur CCD; la tache donnée par une des LH est représentée dans la figure 3.7: les dimensions à mi-hauteur de la tache dans les directions x et y sont respectivement 400 et 180 μm . Ces valeurs correspondent respectivement à des écarts angulaires de 0,4° et 0,18° en utilisation dans le sens normal. L'aberration transversale suivant la direction x est plus importante que la valeur donnée par le spot-diagram. Cet élargissement est vraisemblablement dû à un léger décalage du faisceau objet à l'enregistrement (la tolérance angulaire est de l'ordre de 0,1°).

L'efficacité de diffraction de cette lentille est de 57% sans tenir compte des pertes par réflexion (on peut envisager de recouvrir le film de gélatine par une plaque de verre mince traitée anti-reflets). L'efficacité n'est pas uniforme sur la pupille: elle varie de 35% environ. Ce défaut n'est pas étonnant, car nous n'avons pas cherché à minimiser le degré d'écart à Bragg. Le maximum d'efficacité est obtenu à environ 10mm du bord de la pupille le plus



proche de la source de restitution; en jouant sur l'orientation de la diode laser, on peut limiter les variations de l'intensité du faisceau à environ 30%.

C.4 - Conclusions

Nous avons étudié et réalisé une lentille holographique qui peut s'insérer dans un dispositif d'éclairage très compact. La qualité optique de cette lentille n'est pas exceptionnellement bonne, mais ses performances de focalisation sont supérieures à celles d'une lentille simple conventionnelle de focale et d'ouverture équivalentes. La lentille holographique a été enregistrée dans le bleu, et est utilisée dans le domaine infrarouge: ces conditions ont nécessité une optimisation de la configuration d'enregistrement, afin de limiter les aberrations liées au changement de longueur d'onde. La mise en œuvre plus compliquée de méthodes d'optimisation d'hologrammes utilisant des fronts d'onde asphériques pour l'enregistrement permettrait certainement d'améliorer la qualité de focalisation du composant.

D - Réplication holographique de disques optiques

D.1 - Introduction

Durant les années 80, le disque compact (CD) numérique a révolutionné le monde de la haute fidélité sonore. Il s'est également imposé dans le domaine de l'informatique, comme support de grande capacité pour le stockage de bases de données. Les CDs du commerce sont obtenus par l'estampage d'un disque-maître en nickel sur des disques de plastique, suivi du dépôt d'une couche métallique: leur coût de fabrication est très faible. Contrairement aux idées les plus répandues, leur durée de vie est limitée: on l'estime maintenant comprise entre 15 et 25 ans ^{DUF92}. L'apparition de disfonctionnements des CDs provient de l'altération de leur couche métallique: la qualité de l'accrochage du métal sur le plastique se dégrade.

La société DIGIPRESS fabrique des CDs de longue durée à support en verre. Ces disques sont destinés à l'archivage de données, et aux éditions musicales "de collection". Pour l'instant, la fabrication de ces disques est très coûteuse. La dureté du verre interdit l'estampage: **on ne possède pas actuellement de moyen de réplication globale de ces disques**. Pour le moment, chaque CD est enregistré séquentiellement, avec un coût de fabrication très élevé (environ 500FF).

En 1990, G.Brousseau ^{BRO89, BRO90} a proposé une méthode de duplication holographique des disques optiques. La reproduction globale des motifs micrométriques gravés sur le disque, inaccessible aux instruments d'optiques classiques, est en principe rendue possible par le recours à l'holographie: on enregistre d'abord un hologramme d'un disque-maître, lui-même fabriqué séquentiellement, puis l'image de ce disque restituée par l'hologramme sert à réaliser les disques-copies.

L'exigence d'une haute résolution impose une distance relativement faible entre disque-maître et hologramme, et la géométrie du faisceau de référence est problématique. Consultés par DIGIPRESS, nous avons rejeté la configuration proposée par G. Brousseau, qui prévoit d'amener un faisceau de référence en incidence rasante sur l'hologramme: une telle géométrie est très difficile à réaliser expérimentalement. Nous avons envisagé deux solutions: l'holographie en ligne ^{GAB48} (ou holographie de Gabor) et la méthode de "total internal reflection" (TIR) ^{STE67, DÂN89, EHB92}. Selon le choix de Digipress, nous avons étudié plus particulièrement les possibilités de l'holographie en ligne.

L'exposé qui suit comprend quelques rappels de principe sur l'holographie de Gabor, une évaluation théorique des conditions optimales d'enregistrement, une description des

expériences réalisées dans notre laboratoire, et enfin une discussion sur d'autres aspects du problème de la reproduction globale des disques.

D.2 - Technique de l'holographie en ligne

Cette technique date des tous premiers essais holographiques, réalisés par Gabor en 1948 ^{GAB48}. Elle est utilisable pour des objets relativement transparents. Si l'on éclaire un tel objet par un faisceau cohérent, une petite partie de la lumière est diffusée (onde objet), et la partie restante est directement transmise (onde de référence). En enregistrant derrière l'objet les interférences de ces deux ondes, on obtient un

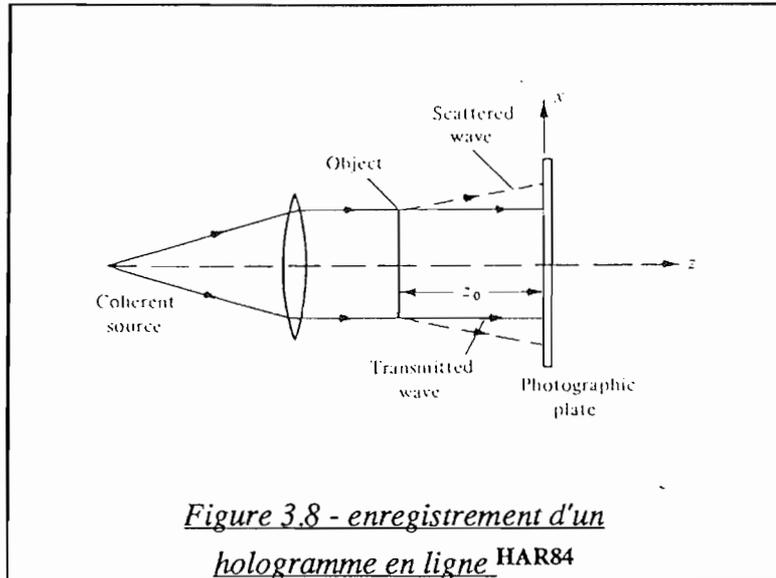


Figure 3.8 - enregistrement d'un hologramme en ligne HAR84

hologramme en ligne (ou de Gabor) de l'objet. Les schémas d'enregistrement et de restitution d'un hologramme en ligne sont représentés respectivement dans les figure 3.8 et 3.9. Cette technique présente deux intérêts majeurs:

- les montages très simples emploient peu de composants optiques
- la disposition suivant un même axe de l'onde objet et du faisceau de référence permet d'avoir une distance disque-hologramme réduite, et d'accéder ainsi à une très bonne résolution.

Les principales contraintes dont il faut tenir compte sont les suivantes:

- linéarité du film: il faut utiliser le matériau holographique dans son domaine de linéarité, pour obtenir une transmittance de l'hologramme proportionnelle à l'intensité des interférences.
- transparence de l'objet: pour éviter un bruit d'intermodulation trop important, on considère que l'énergie lumineuse diffusée

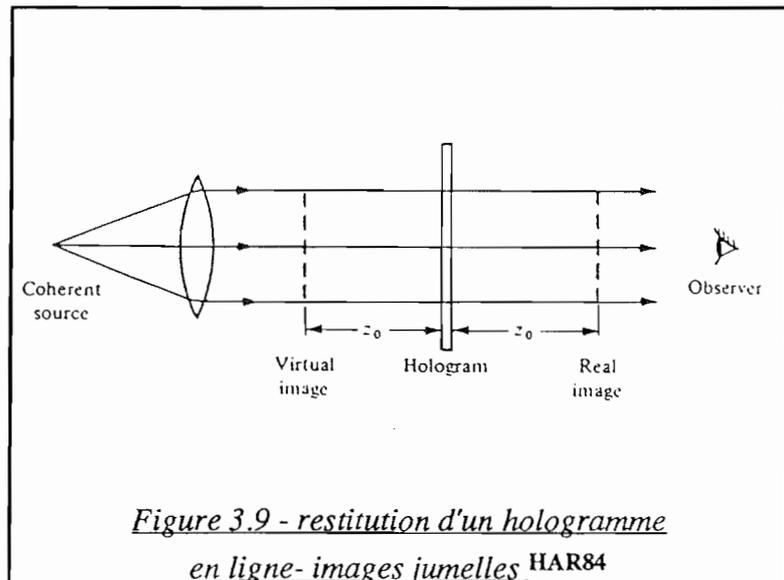


Figure 3.9 - restitution d'un hologramme en ligne- images jumelles HAR84

(onde objet) ne doit pas excéder 20% de l'énergie totale incidente sur l'objet.

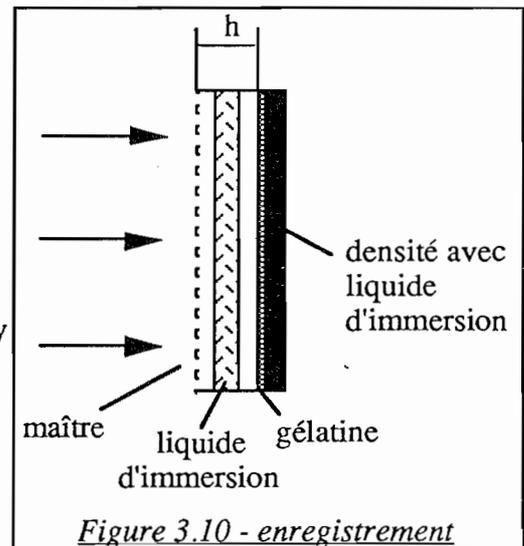
Le défaut principal de l'holographie de Gabor, inhérent à la disposition en ligne, est le **bruit** dans l'image restituée, dû en majeure partie à la superposition de deux images parasites:

- un fond continu provenant de la transmission du faisceau de reconstruction
- une image défocalisée de l'objet appelée image jumelle (voir figure 3.9).

D.3 - Etude des conditions d'enregistrement

D.3.a - Immersion

Pour éviter des interférences parasites dont l'effet sur l'image enregistrée serait désastreux, il faut supprimer toutes les réflexions parasites. Pour cela, il est nécessaire d'immerger avec un liquide d'indice adapté toutes les faces concernées par ces réflexions, y compris la surface photosensible (figure 3.10). Nous utilisons le décahydronaphtalène, qui a l'avantage de ne pas pénétrer dans la gélatine.



D.4.b - Choix du matériau:

Pour les premiers essais au moins, la gélatine bichromatée est le matériau retenu plutôt qu'une résine photosensible pour les raisons suivantes:

- bonne imperméabilité et résistance à l'immersion;
- meilleure efficacité de diffraction.

D.4.c - Profondeur des cuvettes

Ce paramètre détermine la proportion de lumière diffusée par le disque. La profondeur doit être ajustée, en fonction du taux de remplissage de la surface, de façon à obtenir environ 20% d'énergie diffractée.

D.4.d - Distance disque-hologramme

L'hologramme de Gabor d'une seule cuvette (figure 3.11) est un réseau zoné. Le rayon total de ce réseau est donné par la formule: $e = \frac{\lambda h}{nr}$ avec:

- e largeur de la cuvette,
- h distance disque-hologramme
- λ longueur d'onde d'enregistrement,
- n indice du milieu.

Le nombre de franges N du réseau vérifie la relation: $N \frac{\lambda}{n} = \frac{r^2}{2h}$. D'après des expériences précédentes effectuées dans notre groupe de recherche, il est préférable que l'hologramme de chaque cuvette contiennent plus de 50 franges d'interférences. L'enregistrement se fait alors en champ très lointain. En utilisant les deux formules précédentes, on traduit cette condition par $h \gg 50 \times \frac{2ne^2}{\lambda}$, ce qui donne numériquement: $h \gg 3,5\text{mm}$.

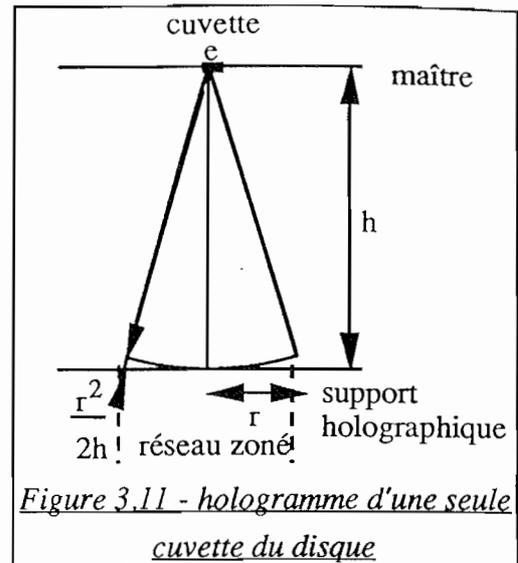


Figure 3.11 - hologramme d'une seule cuvette du disque

D.4.e - Energie d'exposition:

On doit réaliser un hologramme avec le meilleur rendement de diffraction possible tout en restant dans la zone linéaire de réponse. Dans un hologramme d'épaisseur d dont l'amplitude de modulation d'indice vaut Δn , cette condition peut se traduire par l'inégalité: $\frac{\pi \Delta n d}{\lambda \cos \theta} < \frac{1}{2}$, où θ est l'angle d'incidence interne des rayons lumineux (voir les formules de Kogelnik ^{KOG69} rappelées au chapitre II, §B.1.b). Cette condition de linéarité limite à environ 25% le rendement de diffraction que l'on doit obtenir.

D.4 - Expériences

Les expériences d'enregistrement ont été réalisées en salle blanche à partir de 4 disques verre+résine fournis par Digipress, avec les caractéristiques suivantes:

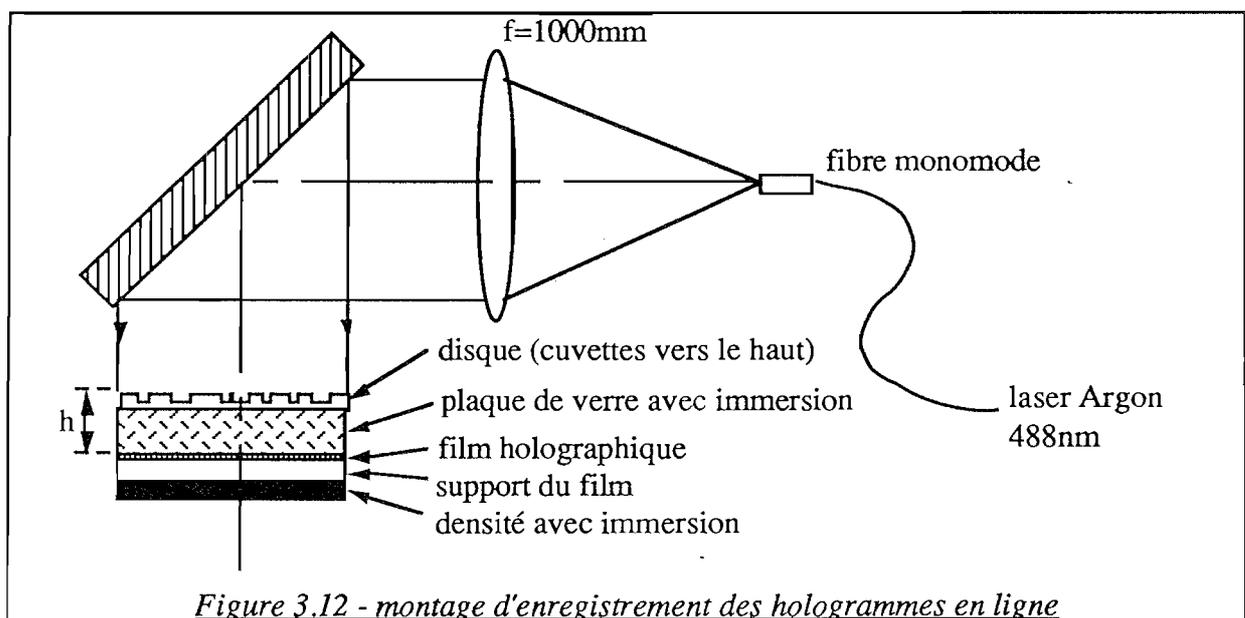
- microcuvettes largeur $0,6\mu$, longueur de $0,9$ à $3,3\mu$ (incrément de $0,3\mu$),
- profondeur de cuvettes $0,4\mu$,
- écart entre 2 cuvettes voisines 2μ ,
- proportion de surface gravée 20%.

Un disque se comporte localement comme un réseau. En éclairant directement les disques avec le faisceau issu du laser Argon, on mesure les efficacités de diffractions suivantes:

- 20% ordre 1
- 20 % ordre -1
- 60% ordre 0

On a donc 40% d'énergie diffractée: cette valeur est trop élevée à cause de l'intermodulation, mais convient pour de premiers essais.

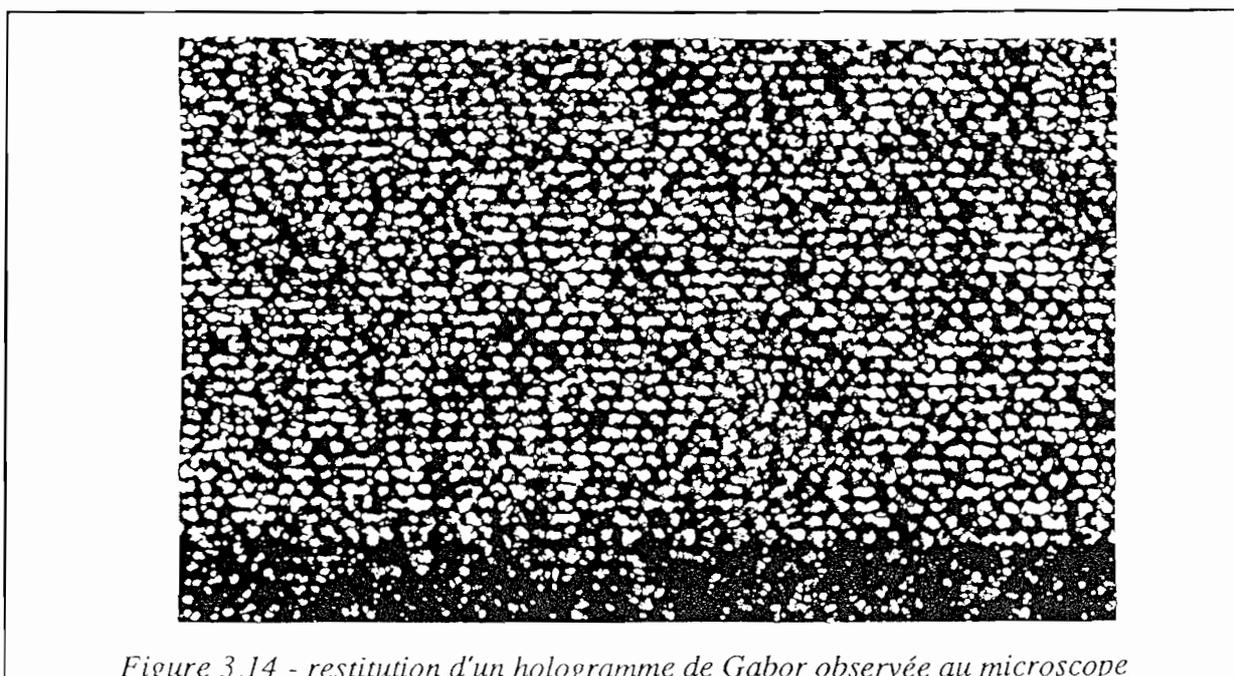
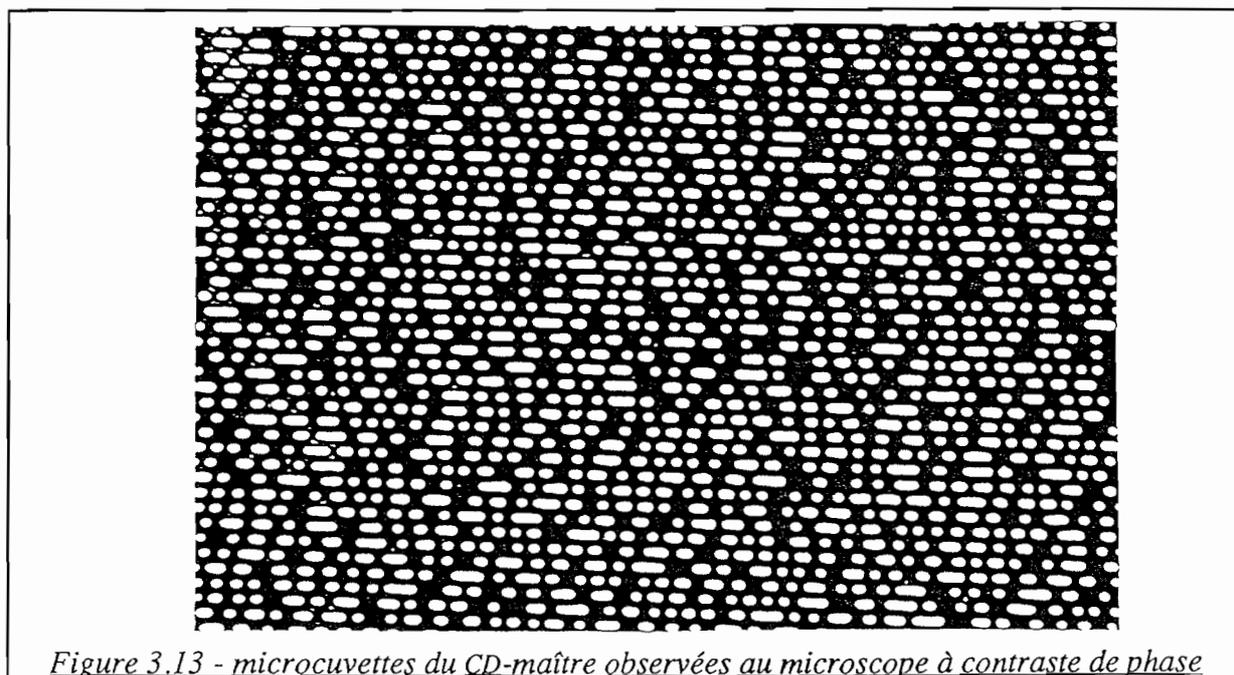
Les hologrammes (en tout 25) ont été fabriqués sur des plaques dérivées de Kodak 649F microflat, de bonne qualité optique. Le montage optique utilisé pour l'enregistrement est représenté par la figure 3.12. Pour chaque série de 5 échantillons enregistrés, une échelle de différents temps d'exposition a été appliquée. A l'issue de la première série, les hologrammes développés étaient trop diffusants: la présence de fréquences spatiales de différents ordres de grandeur sur l'hologramme a été supposée responsable du craquage qui s'est produit dans la gélatine lors du développement. Nous avons modifié le traitement chimique initial des plaques pour obtenir un gel plus résistant (méthode de M.Chang ^{CHA71} décrite au chapitre I, et bain de fixateur tannant après l'exposition). Ce renforcement a permis d'éviter les problèmes de diffusion excessive dans les séries suivantes.



Après développement des plaques, leur restitution a été observée au microscope. Les premiers essais (15 plaques) utilisaient une distance disque-hologramme h égale à 12mm: avec cette distance, seule les images de détails assez grossiers, comme les lettres gravées au centre du disque, ont pu être reconstruites et visualisées. Les essais suivants, effectués avec $h=6$ mm, ont permis la reconstruction des microcuvettes du disque. Cependant, les images obtenues sont très bruitées (photos des figures 3.13 et 3.14).

Pour $h=6$ mm, les paramètres géométriques de l'hologramme d'une cuvette prise isolément sont représentés dans le tableau suivant (on donne les valeurs correspondant aux dimensions extrêmes des cuvettes):

e largeur de cuvette	0,6 μ m	3,3 μ m
angle d'ouverture	33°	6°
r rayon réseau zoné	3,3mm	0,6mm
N nombre de franges	2600	90



Après ces premiers tests, il est difficile de conclure quant à la faisabilité de la méthode. Nous pensons qu'une amélioration de la qualité d'image reconstruite est possible au prix d'essais systématiques portant sur deux paramètres: profondeur des cuvettes et distance d'enregistrement.

D.5 - Perspectives

La focalisation d'une image nette des microcuvettes sur le disque-copie constitue une difficulté majeure de la reproduction globale **BRO89, HAS89** des CDs. Dans les lignes qui suivent, nous récapitulons les idées que nous avons proposées pour résoudre ce problème.

Solutions holographiques

- Au lieu d'effectuer une restitution globale de l'hologramme sur la copie, on balaye sa surface par un faisceau de section raisonnable (de l'ordre de 1 cm) avec un asservissement de la mise au point. Cette technique serait applicable aux deux types de solution holographique (Gabor et TIR).
- Pour l'holographie en ligne: à la restitution, une lame de verre épaisse est intercalée entre l'hologramme et le disque-copie, afin de les maintenir à la juste distance. Pour rattraper les défauts de surface de la copie, il est possible de la presser contre l'intercalaire en verre.

Solution pour la copie contact

La copie contact a été expérimentée par Digipress à partir de masques au chrome dont la fabrication est contraignante. En principe, il est également possible de réaliser la copie contact à l'aide de disques-mâtres en résine (transparents). Pour cela, le faisceau d'exposition doit être suffisamment incliné à l'intérieur du maître pour se trouver en réflexion totale sur la surface. Au niveau de chaque cuvette, le relief perturbe l'effet de réflexion totale: une partie de la lumière est transmise et expose la copie.

CHAPITRE IV

**THEORIE DIFFERENTIELLE
DE LA DIFFRACTION PAR
DES RESEAUX PERIODIQUES**

A - Introduction

Au chapitre II, nous avons présenté sommairement la théorie d'ondes couplées du premier ordre à deux ondes de Kogelnik pour la modélisation des réseaux épais de volume, et la théorie d'amplitude-transmittance à propos des réseaux minces. Pour la caractérisation fine des réseaux holographiques, en particulier pour l'interprétation des mesures de réponses angulaires, nous avons voulu utiliser un modèle de diffraction plus complet que celui de Kogelnik, et pouvoir ainsi prendre en compte dans nos calculs divers effets importants: diffraction et réflexions aux interfaces, non uniformités de la modulation, profils non sinusoïdaux, présence de couches anti-reflets, influence de l'épaisseur du substrat et de la cohérence temporelle de la source de restitution. Ces besoins ont motivé initialement l'étude que nous présentons dans ce chapitre: ils nous ont amenés à l'investigation de la théorie d'ondes couplées dite rigoureuse, à la modélisation d'empilements de structures périodiques, et à l'extension du modèle à certains cas de cohérence temporelle réduite. De plus, l'observation d'instabilités numériques dans les calculs d'ondes couplées nous a poussés à approfondir les aspects algorithmiques de cette méthode, pour aboutir à une méthode de résolution stable du modèle.

L'étude de la diffraction par des réseaux a commencé dans les années 30 avec les travaux de Raman et de Nath [RAM35](#), [RAM36](#) sur la diffraction de la lumière par des ondes acoustiques. Depuis, le nombre croissant d'applications dans ce domaine a entraîné de multiples recherches sur la modélisation. On trouvera une bonne revue de ce sujet dans le livre de R. Petit [PET80](#). Pour l'analyse de la diffraction par des réseaux de volume, qui consiste à résoudre les équations de Maxwell dans une structure périodique, les deux approches les plus courantes sont la théorie modale [BUR66](#), [CHU77](#) et la théorie des ondes couplées [KOG69](#), [GAY85](#). Dans la littérature, l'approche modale est indifféremment appelée théorie des modes propres, des modes caractéristiques, ou des modes couplés. Parfois, l'expression modes couplés est également utilisée pour désigner un modèle d'ondes couplées, ce qui peut prêter à confusion. Dans leur forme la plus rigoureuse, les deux approches sont équivalentes [MAG79](#). Elles utilisent des développements différents du champ électromagnétique, ce qui conduit à des méthodes de résolution différentes.

Les études théoriques publiées proposent des modèles du premier ou du second ordre: dans une approche au premier ordre [KOG69](#), [SOL81](#), [RED89](#) les dérivées secondes spatiales du champ électromagnétique sont négligées dans les équations de propagation; cette approximation restreint l'analyse aux couplages énergétiques faibles, et ne permet pas en général de représenter correctement l'effet des interfaces dans le phénomène de diffraction.

Nous utilisons dans cette étude seulement des approches du second ordre, où toutes les dérivées des champs sont prises en compte.

Une autre distinction est faite dans la littérature entre les modèles à deux ondes et ceux dits à ondes multiples. Les modèles à deux ondes ^{KOG69, KON77, VAS85} s'appliquent aux réseaux épais fonctionnant dans le régime de Bragg, où la diffraction s'effectue suivant deux ordres seulement (l'ordre 0 transmis et un ordre diffracté). Les approches à ondes multiples ^{PET80, GAY85} ont un domaine de validité plus étendu: elles prennent en compte un nombre plus grand d'ordres diffractés dans la résolution des équations de Maxwell, et permettent la modélisation de structures périodiques d'épaisseur arbitraire.

Dans ce chapitre, nous étudions la diffraction d'une onde plane dans un réseau limité par deux interfaces planes et parallèles. Pour simplifier l'exposé, nous retenons le cas de la diffraction plane (le plan des franges est orthogonal au plan d'incidence) d'une onde polarisée transverse électrique (TE). La polarisation transverse magnétique (TM) est traitée dans l'annexe A. Après un aperçu de l'approche modale, nous présentons un modèle d'ondes couplées à ondes multiples qui s'applique aux structures suivantes:

- réseau de volume avec modulation périodique de l'indice complexe (indice de réfraction et absorption); le profil d'une période de l'indice et l'inclinaison des plans d'égal indice (franges) sont quelconques
- réseau de surface avec modulation périodique de l'épaisseur, suivant un profil arbitraire
- couche optique uniforme (substrat) et revêtement multi-couches
- empilement d'éléments des types précédents, avec une période spatiale commune à tous les réseaux présents dans la pile; un réseau d'amplitude de modulation non uniforme .

Nous proposons **une formulation matricielle** pratique pour la résolution numérique des équations d'ondes couplées multiples, et pour la résolution analytique du même problème réduit à deux ordres diffractés. Nous décrivons **un nouvel algorithme qui élimine les difficultés numériques rencontrées habituellement dans les calculs d'ondes couplées**, dues à l'existence de modes non propagatifs divergents à l'intérieur des structures périodiques. Nous démontrons ensuite **plusieurs propriétés importantes de la diffraction qui découlent directement du modèle**: retour inverse, réciprocité énergétique, conservation de l'énergie; nous discutons de l'intérêt de ces propriétés comme critères de validation du modèle. Nous donnons enfin **un complément original à la théorie d'ondes couplées en modélisant les cas où interviennent des couches optiques d'épaisseur supérieure à la longueur de cohérence de la source**.

B - Définitions et notations

Le réseau, schématisé par la figure 4.1, est une structure périodique suivant une direction et comprise entre deux interfaces planes. On suppose que son extension parallèlement aux interfaces est infinie. Les zones d'égal modulation du réseau constituent des franges planes régulièrement espacées.

B.1 - Repères

On définit un système d'axes orthogonaux (x,y,z):

- z est l'axe orthogonal aux dioptrés d'entrée et de sortie du réseau
- y est l'intersection entre le plan des dioptrés et le plan des franges
- x appartient au plan des dioptrés et est orthogonal à y

On utilise également un repère (x',y',z') lié à la géométrie du réseau (voir figure 4.1).

B.2 - Caractéristiques du réseau

Λ désigne l'écart entre franges, mesuré suivant la direction perpendiculaire aux franges;
 ϕ représente l'angle d'inclinaison des franges dans le plan (x,z);
 Le réseau est rigoureusement périodique suivant l'axe x, car c'est dans cette direction seulement que la périodicité s'étend à l'infini; la période spatiale (suivant x) s'écrit: $\Lambda_x = \frac{\Lambda}{\sin \phi}$;

\vec{K} est le vecteur caractéristique du réseau, orthogonal

au plan des franges: $\vec{K} = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} = \frac{2\pi}{\Lambda} \begin{bmatrix} \sin \phi \\ 0 \\ \cos \phi \end{bmatrix}$; la norme de ce vecteur est notée K ($K = 2\pi / \lambda$);

$n(x,z)$ est l'indice **complexe** périodique du réseau; on suppose connu le développement en série de Fourier du carré de $n(x,z)$:

$$n^2(x,z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{n}_i \exp[ji(K_x x + K_z z)] \quad (4.1)$$

On désigne par n_0 la valeur moyenne spatiale de l'indice de réfraction.

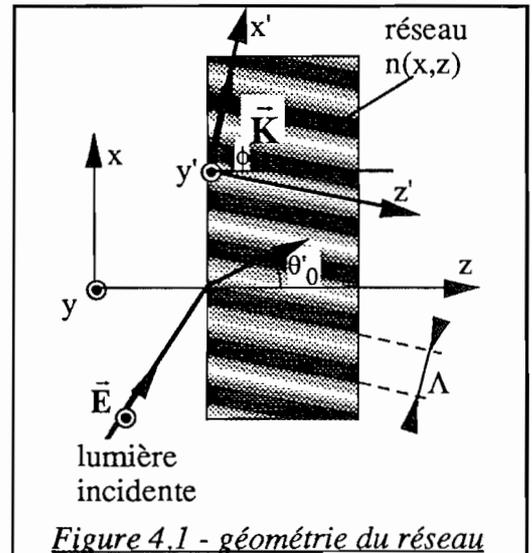


Figure 4.1 - géométrie du réseau

B.3 - Champ électromagnétique

On définit les caractéristiques de l'onde plane incidente:

θ'_0 désigne l'angle de réfraction **interne** de l'onde transmise dans le réseau (ordre 0), obtenu en l'absence de modulation;

λ_0 est la longueur d'onde dans le vide;

ω et $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$ représentent la pulsation et le nombre d'onde correspondants;

$\bar{h} = \mu c \bar{H}$ définit le champ magnétique modifié, homogène au champ électrique, introduit pour simplifier les notations. Dans notre étude, μ est supposé spatialement uniforme.

On suppose que la dépendance temporelle du champ électromagnétique est en $\exp(-j\omega t)$.

Rappelons que nous traitons le cas de la diffraction plane: le plan d'incidence est le plan (x,z) de section principale du réseau, qui contient la normale aux interfaces et le vecteur \bar{K} orthogonal aux strates du réseau. Dans cette situation, on peut montrer qu'il n'existe pas de couplage entre les polarisations TE et TM: il est donc possible de traiter séparément les deux cas. La diffraction plane d'une onde de polarisation quelconque se calcule simplement par projection du champ sur les directions TE et TM.

En polarisation TE, le champ électrique est parallèle à l'axe y , et l'équation de propagation de Helmholtz s'écrit:

$$\nabla^2 E_y(x,z) + k_0^2 n^2(x,z) E_y(x,z) = 0 \quad (4.2)$$

L'équation de Maxwell $\bar{\nabla} \wedge \bar{E} = j\omega \mu \bar{H}$, utile pour la suite, entraîne:

$$h_x(x,z) = \frac{j}{k_0} \frac{\partial E_y(x,z)}{\partial z} \quad (4.3)$$

C - Approche modale

Nous expliquons ici le principe de la théorie modale de la diffraction par un réseau de volume, qui a été le sujet de plusieurs études ^{BUR66, CHU77}. Un des intérêts de cet exposé est de montrer comment la loi des réseaux peut se déduire des équations électromagnétiques.

Dans l'approche modale, le champ électromagnétique est exprimé comme une somme de modes propres du réseau: chacun de ces modes est une solution des équations de Maxwell dans le réseau, et correspond à un ensemble particulier de conditions aux limites. En introduisant le développement modal du champ dans l'équation de propagation, on obtient les équations dites modales. Le problème est alors ramené à leur résolution.

En utilisant le repère (x', y', z') du réseau, le développement du champ polarisé TE en modes propres peut s'écrire de la façon suivante:

$$E_y(x, z) = \hat{E}_y(x', z') = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \hat{E}_{yv}(x', z') \quad (4.4)$$

On suppose que chaque mode peut se décomposer en un produit de la forme:

$$\hat{E}_{yv}(x', z') = A_v X_v(x') Z_v(z') \quad (4.5)$$

En introduisant cette expression dans l'équation de Helmholtz (4.2), puis en divisant par $\hat{E}_{yv}(x', z')$, on obtient la séparation des variables dans l'équation de propagation:

$$\frac{1}{X_v(x')} \frac{d^2 X_v(x')}{dx'^2} + k_0^2 n^2(x') = -\frac{1}{Z_v(z')} \frac{d^2 Z_v(z')}{dz'^2} \quad (4.6)$$

Les deux membres de l'équation précédente sont donc égaux à une même constante que l'on appelle ξ_v^2 .

Pour la variable z' , on obtient l'équation $\frac{d^2 Z_v(z')}{dz'^2} + \xi_v^2 Z_v(z') = 0$ qui a pour solution:

$$Z_v(z') = B_v \exp(-j\xi_v z') \quad (4.7)$$

L'équation en x' (eq.4.6) qui résulte de la séparation des variables s'écrit:

$$\frac{d^2 X_v(x')}{dx'^2} + [k_0^2 n^2(x') - \xi_v^2] X_v(x') = 0 \quad (4.8)$$

Si le nombre de strates du réseau interceptées par l'axe x' est assez grand, c'est à dire si

$$\frac{d}{\Lambda \cos \phi} > 10 \quad (4.9)$$

alors on peut considérer que $n(x')$ est une fonction périodique de période Λ . Les solutions de l'équations différentielle (4.8), à coefficients périodiques, ont été trouvées par Floquet: la solution générale s'écrit comme le produit d'un terme de phase et d'une fonction périodique de même période que le coefficient $[k_0^2 n^2(x') - \xi_v^2]$. On a donc, en exprimant la fonction périodique par son développement en série de Fourier:

$$X_v(x') = \exp(j\beta_v x') \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_{vi} \exp(jiKx') \quad (4.10)$$

En utilisant la rotation qui transforme le repère (x, y, z) lié aux interfaces en (x', y', z') repère lié au réseau

$$\begin{cases} x' = +x \sin \phi + z \cos \phi \\ z' = -x \cos \phi + z \sin \phi \end{cases} \quad (4.11)$$

le mode $\hat{E}_{yv}(x', z')$ devient $E_{yv}(x, y)$ avec:

$$E_{yv}(x, z) = A_v B_v \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_{vi} \exp\{j[(\beta_v + iK) \sin \phi + \xi_v \cos \phi]x\} \exp\{j[(\beta_v + iK) \cos \phi - \xi_v \sin \phi]z\} \quad (4.12)$$

La composante sur x du vecteur d'onde incident à l'intérieur du réseau est $k_0 n_0 \sin \theta'_0$.

L'accord de phase de cette onde incidente avec l'ordre $i=0$ du mode sur la première interface

($z=0$) donne une relation entre β_v et ξ_v :

$$k_0 n_0 \sin \theta'_0 = \beta_v \sin \phi + \xi_v \cos \phi \quad (4.13)$$

On peut ici remarquer que le théorème de Floquet apporte une justification mathématique à la loi des réseaux. En effet, en introduisant (4.13) dans (4.12), on montre que la dépendance en x d'un ordre i quelconque peut s'écrire:

$$\exp[j(n_0 k_0 \sin \theta'_0 + iK_x)x] \quad (4.14)$$

Cette expression correspond à la direction de propagation θ'_i donnée par la loi des réseaux:

$$\sin \theta'_i = \sin \theta'_0 + \frac{iK_x}{n_0 k_0} \quad (4.15)$$

Pour une incidence donnée, ce sont donc uniquement **la période spatiale suivant x** (i.e.

$\Lambda_x = \frac{2\pi}{K_x}$) et **la longueur d'onde dans le vide** qui **déterminent les directions diffractées**,

indépendamment de l'angle d'inclinaison des franges et des autres caractéristiques du réseau.

En introduisant l'expression (4.10) dans l'équation différentielle (4.8), on obtient les équations modales:

$$\left[k_0^2 \tilde{n}_0 - \xi_v^2 - (\beta_v + iK)^2 \right] C_{vi} + \sum_{\substack{\ell=-\infty \\ \ell \neq i}}^{+\infty} \tilde{n}_{i-\ell} C_{v(i-\ell)} = 0, \quad (i, v) \in \mathbf{Z}^2 \quad (4.16)$$

Les solutions des équations modales sont souvent représentées par des diagrammes de dispersion ($\beta_v + iK$ fonction de ξ_v) qui donnent un bon aperçu physique de la diffraction.

Cependant, leur résolution est difficile, et n'a été réalisée que dans le cadre d'hypothèses simplificatrices^{BUR66, CHU77}. Pour cette raison, nous concentrons notre étude sur la théorie des ondes couplées, qui utilise des méthodes de résolution plus simples et offre de vastes possibilités de généralisation.

D - Formalisme matriciel de la théorie d'ondes couplées

Contrairement à l'approche décrite précédemment, la théorie d'ondes couplées ne distingue pas les différents modes propres du réseau. **Le champ électromagnétique est décomposé sur un ensemble d'ondes planes inhomogènes correspondant chacune à une direction diffractée.** Sur les interfaces, ces ondes sont en accord de phase avec les ordres diffractés. On introduira ce développement du champ dans l'équation de propagation pour obtenir un système d'équations différentielles couplées, que l'on résoudra en tenant compte des conditions aux limites.

D.1 - Développement fondamental du champ électromagnétique

Le champ est solution de l'équation de Helmholtz (4.2). A une profondeur z donnée dans le réseau, cette équation est à coefficients périodiques suivant x , de période Λ_x . L'application du théorème de Floquet et de la condition d'accord de phase avec l'onde incidente aboutit à la décomposition suivante du champ:

$$E_y(x, z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E_y^{(i)}(z) \exp(jk_x^{(i)}x) \quad (4.17)$$

avec les notations:

$$\begin{cases} k_x^{(0)} = k_0 n_0 \sin \theta'_0 \\ k_x^{(i)} = k_x^{(0)} + iK_x, \quad i \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad (4.18)$$

Il faut remarquer qu'aucune condition sur la géométrie du réseau (du type (4.9)) n'est nécessaire pour écrire le développement (4.17): **l'indice de réfraction est rigoureusement périodique suivant x** , donc le théorème de Floquet s'applique dans tous les cas. Le développement (4.17), appelé parfois développement fondamental du champ électrique en ondes couplées, est le point de départ de notre analyse. Nous utilisons aussi le développement fondamental de la composante tangentielle du champ magnétique:

$$h_x(x, z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_x^{(i)}(z) \exp(jk_x^{(i)}x) \quad (4.19)$$

Les composantes $E_y(x, z)$ et $h_x(x, z)$ du champ électromagnétique sont continues aux interfaces, ainsi que les composantes $(k_x^{(i)})_{i \in \mathbf{Z}}$ des vecteurs d'ondes diffractés (accord de phase). Par conséquent, **les sous-composantes $E_y^{(i)}(z)$ et $h_x^{(i)}(z)$ sont également continues aux interfaces**. On verra dans la suite que cette propriété des développements (4.17) et (4.19) facilite l'analyse de structures périodiques décomposées en plusieurs sous-structures empilées.

D.2 - Equations d'ondes couplées

Dans l'équation de Helmholtz (4.2), on remplace $E_y(x, z)$ et $n^2(x, z)$ par les développements (4.1) et (4.17), puis on projette la relation obtenue sur la base de fonctions $(x \rightarrow e^{jk_x^{(i)}x})_{i \in \mathbf{Z}}$; on trouve alors les équations suivantes:

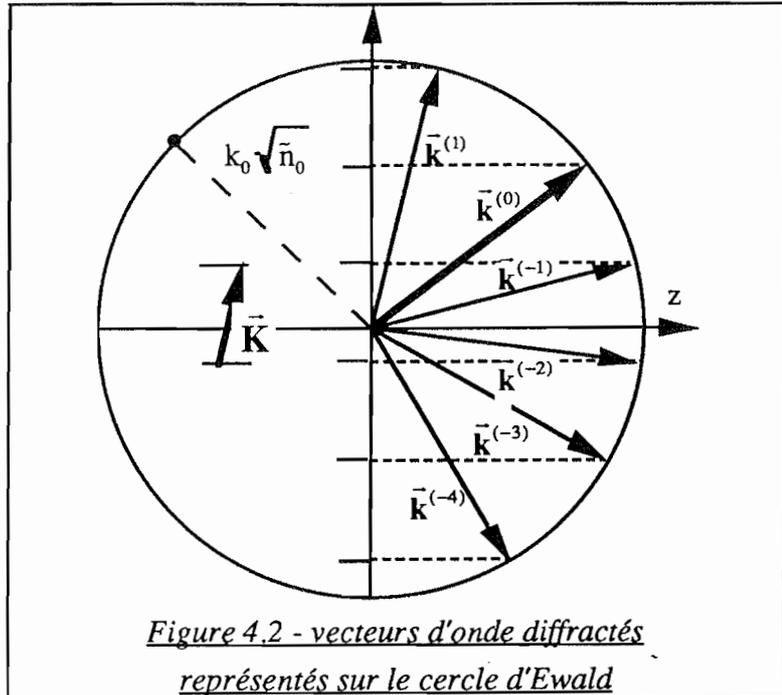
$$\frac{d^2 E_y^{(i)}(z)}{dz^2} + k_z^{(i)2} E_y^{(i)}(z) + k_0^2 \sum_{\ell \neq i} \tilde{n}_{i-\ell} e^{j(i-\ell)K_x z} E_y^{(\ell)}(z) = 0, \quad i \in \mathbf{Z} \quad (4.20)$$

où l'on a défini:

$$k_z^{(i)} = \sqrt{k_0^2 \tilde{n}_0 - k_x^{(i)2}}, \quad i \in \mathbf{Z} \quad (4.21)$$

(dans ce type de relation, nous choisissons toujours $k_z^{(i)}$ tel que sa partie réelle soit positive; si elle est nulle, l'indétermination est levée en imposant une partie imaginaire positive).

Les vecteurs $\vec{k}^{(i)}$ définis par (4.18) et (4.21) sont représentés dans le diagramme d'Ewald ci-contre: d'après (4.18), leurs composantes sur x sont séparées par des multiples de K_x ; la relation (4.21) impose une même norme à ces vecteurs, d'où leur représentation sur un cercle de rayon $k_0\sqrt{\tilde{n}_0}$ (voir figure 4.2). Dans la suite, nous les appelons un peu abusivement vecteurs d'onde diffractés dans le réseau.



Les équations d'ondes couplées (4.20) décrivent la propagation des ondes et le couplage de leurs amplitudes dans la structure périodique; elles constituent un système infini d'équations différentielles du second ordre en z . Pour leur résolution par ordinateur, il est nécessaire de tronquer le système: on retient un nombre fini N d'ordres diffractés, qui correspondent à N équations différentielles. En pratique, N dépend de la précision souhaitée et son choix est conditionné par le régime de diffraction (Bragg ou Raman-Nath). Nous présentons d'abord une méthode numérique de résolution dite rigoureuse parce qu'elle est applicable quelle que soit la valeur de N . Nous exposons ensuite une méthode analytique qui impose $N=2$, valable seulement dans le régime de diffraction de Bragg, propre aux réseaux épais.

D.3 - Modèle rigoureux à ondes multiples

L'approche du second-ordre à ondes multiples de la diffraction par des réseaux de conductivité finie a été proposée dans les travaux de Nevière et al. ^{NEV73a, NEV73b, NEV75}. Depuis, plusieurs études ont apporté différentes méthodes de résolution. Moharam et Gaylord ^{MOH81} ont appelé ce modèle la théorie rigoureuse des ondes couplées, et ont proposé une méthode de résolution efficace qui se résume à la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice. Nous présentons ici une approche équivalente, mais sous une formulation matricielle différente, adaptée à l'utilisation d'un nouvel algorithme dépourvu d'instabilités numériques (voir §E).

D.3.a - Résolution numérique des équations d'ondes couplées

En substituant $E_y(x, z)$ et $h_x(x, z)$ par les développements (4.17) et (4.19) dans l'équation de Maxwell (4.3), puis en projetant sur la base $\left(x \rightarrow e^{jk_x^{(i)}x}\right)_{i \in \mathbf{Z}}$, on obtient:

$$\frac{dE_y^{(i)}(z)}{dz} = -jk_0 h_x^{(i)}(z) \quad , i \in \mathbf{Z} \quad (4.22)$$

Dans l'équation d'ondes couplées (4.20), on introduit la relation (4.22) afin d'éliminer les dérivées secondes du champ électrique. On trouve:

$$\frac{dh_x^{(i)}(z)}{dz} = -j \left(\frac{k_z^{(i)2}}{k_0} E_y^{(i)}(z) + k_0 \sum_{\ell \neq i} \tilde{n}_{i-\ell} e^{j(i-\ell)K_z z} E_y^{(\ell)}(z) \right) \quad , i \in \mathbf{Z} \quad (4.23)$$

Nous avons remplacé le système de N équations du second ordre (4.20) par les $2N$ équations différentielles du premier ordre (4.22) et (4.23). Dans ces équations, on introduit les facteurs $e^{-jK_z z}$, $i \in \mathbf{Z}$ afin d'obtenir **un système de $2N$ équations différentielles à coefficients constants** dont les inconnues sont les fonctions de z ($z \rightarrow E_y^{(i)}(z)e^{-jK_z z}$) et ($z \rightarrow h_x^{(i)}(z)e^{-jK_z z}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(h_x^{(i)}(z) e^{-jK_z z})}{dz} = -j \left(iK_z h_x^{(i)}(z) e^{-jK_z z} + \frac{k_z^{(i)2}}{k_0} E_y^{(i)}(z) e^{-jK_z z} + k_0 \sum_{\ell \neq i} \tilde{n}_{i-\ell} E_y^{(\ell)}(z) e^{-jK_z z} \right) \\ \frac{d(E_y^{(i)}(z) e^{-jK_z z})}{dz} = -j (iK_z E_y^{(i)}(z) e^{-jK_z z} + k_0 h_x^{(i)}(z) e^{-jK_z z}) \quad , i \in \mathbf{Z} \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Le système tronqué à N ordres peut s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{U}}(z)}{dz} = [\mathbf{M}] \cdot \tilde{\mathbf{U}}(z) \quad (4.25)$$

avec:

$$\tilde{\mathbf{U}}(z) \text{ vecteur de dimension } 2N \text{ donné par } \tilde{\mathbf{U}}(z) = \begin{bmatrix} \vdots \\ E_y^{(i-v)}(z) e^{-j(i-v)K_z z} \\ \vdots \\ h_x^{(i-v)}(z) e^{-j(i-v)K_z z} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

La première composante de chaque sous-vecteur à N éléments correspond à $i=0$, la seconde à $i=1$, etc... v est le nombre d'ordres négatifs retenus; si l'on choisit un ensemble d'ordres diffractés centrés sur l'ordre 0, alors v est égal à la partie entière de $\frac{N}{2}$.

$[\mathbf{M}]$ est une matrice $2N \times 2N$ à coefficients constants:

$$[\mathbf{M}] = -j \begin{bmatrix} K_z[\Delta] & \vdots & k_0[\mathbf{I}_N] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_0[\Omega] & \vdots & K_z[\Delta] \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Dans l'expression de $[\mathbf{M}]$ précédente, les sous-matrices $N \times N$ sont définies de la manière suivante:

$[\mathbf{I}_N]$ est la matrice identité de dimension N

$[\Delta]$ est une matrice diagonale avec les éléments: $\Delta_{i,i} = i - \nu$, $i \in \{0, \dots, N-1\}$ (4.28)

$$[\Omega] \text{ est définie par: } \begin{cases} \Omega_{i,i} = \frac{k_z^{(i-\nu)^2}}{k_0^2} & (i, \ell) \in \{0, \dots, N-1\}^2 \\ i \neq \ell : \Omega_{i,\ell} = \tilde{n}_{i-\ell} \end{cases} \quad (4.29)$$

La résolution du système (4.25) entre deux coordonnées quelconques z_2 and z_1 ($z_2 > z_1$) implique le calcul d'une exponentielle de matrice:

$$\tilde{\mathbf{U}}(z_1) = e^{-(z_2-z_1)[\mathbf{M}]} \cdot \tilde{\mathbf{U}}(z_2) \quad (4.30)$$

Cette fonction peut se calculer simplement si l'on connaît les valeurs propres et les vecteurs propres de $[\mathbf{M}]$. La diagonalisation de $[\mathbf{M}]$ donne:

$$[\mathbf{M}] = [\tilde{\mathbf{P}}][\mathbf{D}][\tilde{\mathbf{P}}]^{-1} \quad (4.31)$$

où:

les colonnes de la matrice $[\tilde{\mathbf{P}}]$ ($2N \times 2N$) sont les **vecteurs propres** de $[\mathbf{M}]$

et $[\mathbf{D}]$ est la matrice diagonale des **valeurs propres** de $[\mathbf{M}]$:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} e_0 & & & 0 \\ & e_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_{2N-1} \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

En utilisant la définition de l'exponentielle de matrice (comme somme de la série de terme général $\frac{[\mathbf{M}]^n}{n!}$) et l'associativité du produit matriciel, on transforme la relation (4.25) en:

$$\tilde{\mathbf{U}}(z_1) = [\tilde{\mathbf{P}}] e^{-(z_2-z_1)[\mathbf{D}]} [\tilde{\mathbf{P}}]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{U}}(z_2) \quad (4.33)$$

D.3.b - Matrice caractéristique

A partir des coefficients de la matrice des vecteurs propres $[\tilde{\mathbf{P}}]$, on définit une nouvelle matrice $2N \times 2N$ $[\mathbf{P}(z)]$:

$$\begin{cases} i \in \{0, \dots, N-1\} : P_{i,j}(z) = e^{j(i-\nu)k_z z} \tilde{P}_{i,j} \\ i \in \{N, \dots, 2N-1\} : P_{i,j}(z) = e^{j(i-N-\nu)k_z z} \tilde{P}_{i,j} \end{cases}, \quad z \in \mathfrak{R} \quad (4.34)$$

En introduisant les définitions (4.32) et (4.34) aux points z_1 et z_2 dans la relation (4.33), on

obtient:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ E_y^{(i-v)}(z_1) \\ \vdots \\ h_x^{(i-v)}(z_1) \\ \vdots \end{bmatrix} = [\mathbf{P}(z_1)] \begin{bmatrix} e^{-c_0(z_2-z_1)} & & & 0 \\ & e^{-c_1(z_2-z_1)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{-c_{2N-1}(z_2-z_1)} \end{bmatrix} [\mathbf{P}(z_2)]^{-1} \begin{bmatrix} \vdots \\ E_y^{(i-v)}(z_2) \\ \vdots \\ h_x^{(i-v)}(z_2) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

On définit ainsi une matrice $2N \times 2N$ caractéristique de la propagation et de la diffraction des ondes dans le réseau: $[\mathbf{P}(z_1)]e^{-(z_2-z_1)[\mathbf{D}]}[\mathbf{P}(z_2)]^{-1}$. Cette matrice donne les relations entre les valeurs initiales et finales des composantes tangentielle des champs dans les différents ordres. Pour résoudre entièrement le problème, il reste à imposer des conditions aux limites: c'est l'objet du paragraphe D.6.

Dans l'expression (4.35), certains des termes exponentiels de la matrice diagonale, correspondants à des modes inhomogènes divergents du réseau, peuvent devenir très grands et poser des difficultés numériques (instabilités ou overflows du programme). Dans la partie E, nous décrivons un algorithme qui résout ce problème à partir de la formulation (4.35), où interviennent deux matrices carrées ($\mathbf{P}(z_1)$ et $\mathbf{P}(z_2)$) bien conditionnées et une matrice diagonale à termes exponentiels dont certains peuvent prendre des valeurs dépassant la capacité d'un ordinateur.

D.4 - Modèle approché à deux ondes

Quand le réseau est suffisamment épais, la diffraction a lieu dans le régime de Bragg: toutes les amplitudes diffractées deviennent négligeables, hormis celles de l'ordre 0 transmis, de l'ordre diffracté utile et des deux ordres réfléchis correspondants. Dans ce cas, un modèle réduit à deux ondes permet de résoudre plus simplement le problème, tout en conservant une bonne précision. Les conditions de diffraction dans le régime de Bragg sont détaillées plus loin.

La théorie à deux ondes la plus connue, proposée par Kogelnik^{KOG69} (voir chapitre II), mène à des résultats analytiques très simples mais souffre de nombreuses approximations. Kogelnik néglige les dérivées secondes du champ électromagnétique, et cette approximation au premier ordre a deux effets:

- on se restreint aux cas où l'échange d'énergie entre les deux ordres est très lent (en fonction de z), donc aux faibles amplitudes de modulation;
- on obtient un système de deux équations différentielles du premier ordre. Comme l'ensemble des solutions est un espace de dimension 2, on ne peut imposer que deux conditions aux limites pour résoudre l'ensemble du problème. Pour cette raison, seule la

continuité du champ électrique est vérifiée dans l'analyse de Kogelnik. Comme le champ magnétique ne peut pas être représenté correctement, la continuité de sa composante tangentielle n'est pas assurée aux interfaces: Kogelnik est donc obligé de négliger l'effet des interfaces.

Cependant, il est souvent important d'estimer les intensités des ordres correspondant aux directions réfléchies des deux ordres principaux, qui peuvent représenter des pertes d'énergie utile et créer de la lumière parasite. Autrement dit, il est utile de considérer qu'un réseau fonctionne à la fois en transmission et en réflexion. De plus, des matériaux tels que la gélatine bichromatée permettent d'atteindre les limites de l'hypothèse de faible modulation. Nous préférons donc utiliser **un modèle à deux ondes du second ordre**. Kong^{KON77} puis Vasnetsov et al.^{VAS85} ont montré que ce type de modèle peut également se résoudre de façon analytique. Le début de l'étude qui suit reprend l'analyse de Vasnetsov et al.; ensuite, nous formulons différemment la résolution, afin de représenter la diffraction par une matrice caractéristique similaire à celle du cas multi-ondes (équation 4.35).

D.4.a - Ordre diffracté utile

Dans une approche à deux ondes, il faut déterminer l'ordre diffracté utile. En général, on choisit **l'ordre le plus proche de la condition de Bragg**. Si cette condition est vérifiée pour un ordre n° quelconque, alors la direction de cet ordre correspond à celle de la réflexion de l'ordre 0 sur le plan des franges (voir figure 4.3). Comme les vecteurs d'ondes $(\vec{k}^{(i)})_{i \in \mathbb{Z}}$, définis par les relations (4.18) et (4.22) ont tous la

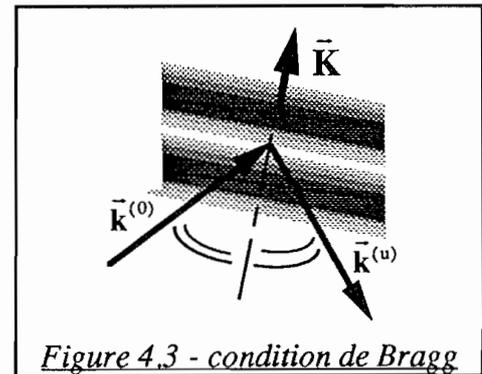


Figure 4.3 - condition de Bragg

même norme, on voit que la condition de Bragg pour l'ordre u , peut s'exprimer par la relation:

$$(\vec{k}^{(u)} + \vec{k}^{(0)}) \cdot \vec{K} = 0 \quad (4.36)$$

Il est fréquent qu'aucun ordre diffracté ne vérifie exactement la condition précédente; l'ordre utile est alors défini comme l'ordre n° tel que le module $\left| (\vec{k}^{(u)} + \vec{k}^{(0)}) \cdot \vec{K} \right|$ soit minimal.

D.4.b - Résolution analytique des équations d'ondes couplées

Le développement fondamental du champ électrique (4.17) prend alors la forme:

$$E_y(x, z) = E_y^{(0)}(z) \exp(jk_x^{(0)}x) + E_y^{(u)}(z) \exp(jk_x^{(u)}x) \quad (4.37)$$

Le développement du champ magnétique s'écrit de façon similaire:

$$h_x(x, z) = h_x^{(0)}(z) \exp(jk_x^{(0)}x) + h_x^{(u)}(z) \exp(jk_x^{(u)}x) \quad (4.38)$$

Dans ce cas, le système (4.20) se réduit à seulement **2 équations couplées qui décrivent la propagation et le couplage des deux ordres principaux 0 et u**, les amplitudes des autres

ordres diffractés étant négligées:

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_y^{(0)}(z)}{dz^2} + k_z^{(0)2} E_y^{(0)}(z) + k_0^2 \tilde{n}_{-u} e^{-juK_z z} E_y^{(u)}(z) = 0 \\ \frac{d^2 E_y^{(u)}(z)}{dz^2} + k_z^{(u)2} E_y^{(u)}(z) + k_0^2 \tilde{n}_u e^{juK_z z} E_y^{(0)}(z) = 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

Pour que cette approximation à deux ondes soit justifiée, il faut que le réseau soit suffisamment épais, donc sélectif, pour ne laisser émerger qu'un seul ordre u diffracté en plus de l'ordre 0 transmis. De plus, comme on néglige tout couplage d'énergie, même local, avec d'autres ordres, il est préférable que les harmoniques de $n^2(x, z)$ autres que u et $-u$ soient négligeables. Autrement dit, **le modèle à deux ondes convient surtout aux réseaux de volume épais avec modulation quasi-sinusoïdale de la permittivité complexe.**

Si l'on cherche les solutions de (4.39) sous la forme

$$\begin{cases} E_y^{(0)} = r^{(0)} e^{j\phi z} \\ E_y^{(u)} = r^{(u)} e^{j(\phi + uK_z)z} \end{cases} \quad (4.40)$$

on trouve que ϕ est donné par les solutions de l'équation quartique:

$$(\phi^2 - k_z^{(0)2})[(\phi + uK_z)^2 - k_z^{(u)2}] = k_0^2 \tilde{n}_{-u} \tilde{n}_u \quad (4.41)$$

et que $r^{(0)}$ et $r^{(u)}$ vérifient l'égalité:

$$r^{(u)} = r^{(0)} \frac{\phi^2 - k_z^{(0)2}}{k_0^2 \tilde{n}_{-u}} \quad (4.42)$$

La résolution de l'équation (4.41) n'est pas détaillée ici. On trouve dans l'article de Vasnetsov et al. une méthode analytique pour déterminer les quatre racines $\phi_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$. On obtient ainsi une base de l'ensemble des solutions du système (4.39), dont une solution quelconque peut s'écrire, compte tenu de la relation (4.42):

$$\begin{cases} E_y^{(0)}(z) = \sum_{i=0}^3 r_i^{(0)} \exp(j\phi_i z) \\ E_y^{(u)}(z) = \frac{1}{k_0^2 \tilde{n}_{-u}} \sum_{i=0}^3 r_i^{(0)} (\phi_i^2 - k_z^{(0)2}) \exp[j(\phi_i + uK_z)z] \end{cases} \quad (4.43)$$

Dans l'étude de Vasnetsov et al., les coefficients $r_i^{(0)}, i \in \{0, 1, 2, 3\}$ sont déterminés en exprimant la continuité sur les interfaces du champ électrique et de sa dérivée par rapport à z et en imposant les conditions aux limites habituelles (une seule onde incidente dans le premier demi-espace, pas d'ondes réfléchies dans le dernier).

Remarque: pour le calcul des racines $\phi_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$ de l'équation (4.41), nous avons obtenu une meilleure stabilité en utilisant la méthode numérique dite de Laguerre, plutôt que la méthode analytique donnée par Vasnetsov et al.

D.4.c - Matrice caractéristique

Afin d'obtenir une formulation matricielle similaire à celle du modèle multi-ondes (4.35), nous préférons introduire ici les composantes du champ magnétique. L'équation de Maxwell (4.3), après les substitutions et projections d'usage, entraîne:

$$\begin{cases} h_x^{(0)}(z) = -\frac{1}{k_0} \sum_{i=0}^3 r_i^{(0)} \varphi_i \exp(j\varphi_i z) \\ h_x^{(u)}(z) = \frac{-1}{k_0^3 \tilde{n}_{-u}} \sum_{i=0}^3 r_i^{(0)} (\varphi_i + uK_z) (\varphi_i^2 - k_z^{(0)2}) \exp[j(\varphi_i + uK_z)z] \end{cases} \quad (4.44)$$

On peut réécrire les équations (4.43) et (4.44) sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} E_y^{(0)}(z) \\ E_y^{(u)}(z) \\ h_x^{(0)}(z) \\ h_x^{(u)}(z) \end{bmatrix} = [\mathbf{P}(z)] \begin{bmatrix} e^{j\varphi_0 z} & & & 0 \\ & e^{j\varphi_1 z} & & \\ & & e^{j\varphi_2 z} & \\ 0 & & & e^{j\varphi_3 z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

où la matrice carrée $[\mathbf{P}(z)]$ est définie par:

$$\begin{cases} P_{0,i}(z) = 1 \\ P_{1,i}(z) = \frac{\varphi_i^2 - k_z^{(0)2}}{k_0^2 \tilde{n}_{-u}} \cdot e^{juK_z z} \\ P_{2,i}(z) = -\frac{\varphi_i}{k_0} \\ P_{3,i}(z) = -\frac{(\varphi_i + uK_z)(\varphi_i^2 - k_z^{(0)2})}{k_0^3 \tilde{n}_{-u}} \cdot e^{juK_z z} \end{cases} \quad i \in \{0,1,2,3\} \quad (4.46)$$

Si l'on écrit l'équation matricielle (4.45) pour deux coordonnées arbitraires z_1 et z_2 , on peut éliminer les coefficients r_i et déduire la relation:

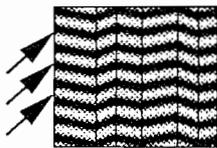
$$\begin{bmatrix} E_y^{(0)}(z_1) \\ E_y^{(u)}(z_1) \\ h_x^{(0)}(z_1) \\ h_x^{(u)}(z_1) \end{bmatrix} = [\mathbf{P}(z_1)] \begin{bmatrix} e^{-j\varphi_0(z_2-z_1)} & & & 0 \\ & e^{-j\varphi_1(z_2-z_1)} & & \\ & & e^{-j\varphi_2(z_2-z_1)} & \\ 0 & & & e^{-j\varphi_3(z_2-z_1)} \end{bmatrix} [\mathbf{P}(z_2)]^{-1} \begin{bmatrix} E_y^{(0)}(z_2) \\ E_y^{(u)}(z_2) \\ h_x^{(0)}(z_2) \\ h_x^{(u)}(z_2) \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

On obtient donc **une matrice caractéristique semblable à celle du modèle multi-ondes** (voir l'équation 4.35). Pour déterminer les amplitudes et les intensités diffractées, il reste à appliquer les conditions aux limites (voir le paragraphe D.6). Mathématiquement, la ressemblance entre les deux résolutions est importante: dans le cas multi-ondes, on diagonalise la matrice (4.31) des équations couplées; dans la résolution à deux ondes, on détermine en fait les racines du polynôme caractéristique (4.41), et les relations (4.42) permettent d'éviter un calcul de vecteurs propres. On pourrait donner ici une expression de la matrice caractéristique un peu plus simple que dans (4.47); nous conservons cependant la formulation (4.47), car elle est adaptée à l'utilisation de l'algorithme de la section E.

D.5 - Généralisation du formalisme

Nous montrons ici que la formulation matricielle de notre modèle, suivant les équations caractéristiques (4.35) (cas général) et (4.47) (cas à deux ondes), permet sa généralisation à différents types de réseaux et à des structures périodiques lamellaires.

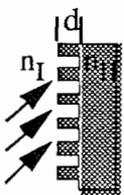
D.5.a - Réseaux de volume empilés de même période spatiale



Le formalisme des matrices caractéristiques est particulièrement bien adapté à la modélisation d'un empilement de réseaux de volumes plans de même période spatiale (en fait, il suffit que les périodes soient commensurables). En effet, si la valeur de K_x est commune à tous les réseaux de la pile, alors les composantes $k_x^{(i)}$ des vecteurs d'ondes diffractés données par les relations (4.18) sont les mêmes partout. Les composantes correspondantes $E_y^{(i)}(z)$ et $h_x^{(i)}(z)$ du champ électromagnétique, qui interviennent dans les relations (4.35) et (4.47), sont continues sur les diverses interfaces. La matrice caractéristique globale de l'empilement s'exprime donc simplement comme le produit des matrices de chacun des réseaux élémentaires. Ce traitement s'inspire de la théorie proposée par Abéles pour les milieux diélectriques stratifiés.

Un réseau dont la modulation n'est pas uniforme suivant la profondeur peut se représenter par un empilement d'un nombre suffisamment grand de réseaux uniformes de même période. La matrice caractéristique se calcule alors conformément au cas précédent. Cette catégorie de réseaux comprend les réseaux dits atténués (amplitude de modulation décroissante à partir de la surface d'exposition), que l'on rencontre fréquemment en holographie de volume.

D.5.b - Réseaux diélectriques de surface



Considérons tout d'abord le cas simple d'un réseau de surface de type créneau, de profondeur d et d'indice n_{II} , placé dans un milieu d'indice n_I . Cette structure est rigoureusement équivalente à un réseau de volume d'épaisseur d , limité par deux dioptries plans, de profil d'indice périodique binaire prenant les valeurs n_I et n_{II} , situé dans un milieu d'indice n_I . On peut donc envisager d'utiliser une des méthodes présentées précédemment pour déterminer la matrice caractéristique du réseau en créneaux. Comme le réseau d'indice binaire équivalent est en général très fortement modulé (l'indice varie entre les valeurs typiques $n_I=1$ et $n_{II} = 1,5$), plusieurs harmoniques supérieures du développement en série de Fourier du carré de l'indice (4.1) sont non-négligeables et créent un couplage d'énergie important dans divers ordres de diffraction. On peut donc rarement employer la méthode à deux ondes; en revanche le modèle multi-ondes paraît bien adapté à ce problème.



Passons maintenant au réseau de surface de profil périodique quelconque. On peut diviser spatialement ce réseau en tranches planes que l'on considère comme des réseaux d'indice binaires. On obtient ainsi un empilement de structures périodiques élémentaires du type précédent, de même période spatiale et de rapports cycliques différents. Comme dans le cas des réseaux de volumes cascades, la matrice caractéristique est donnée par le produit des matrices calculées pour chaque tranche. Ce modèle s'applique de façon rigoureuse aux composants optiques diffractifs binaires multi-niveaux (profil en marches d'escalier). Pour des profils plus quelconques, le modèle est approché dans la mesure où l'on suppose que dans chaque tranche élémentaire les bords des sillons sont perpendiculaires à la surface. Pour obtenir une bonne représentation, il faut veiller à choisir des tranches suffisamment fines.

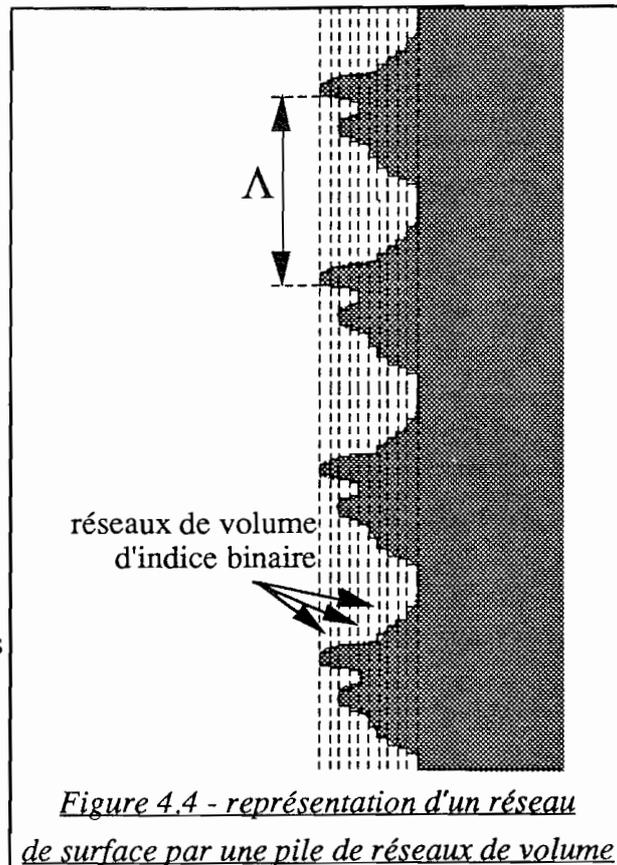


Figure 4.4 - représentation d'un réseau de surface par une pile de réseaux de volume

D.5.c - Couches uniformes



En pratique, un réseau est souvent lié à un substrat homogène; l'ensemble est parfois recouvert de couches minces optiques constituant par exemple un revêtement anti-reflet. Pour pouvoir tenir compte de ces éléments dans le calcul de diffraction, nous déterminons ici la matrice caractéristique d'une couche optiquement homogène d'indice n , limitée par les plans de coordonnées z_1 et z_4 . On suppose que cette couche fait partie d'une structure périodique qui comprend au moins un réseau d'un des types décrits précédemment. L'étude qui suit adapte la théorie d'Abèles au cas où plusieurs ondes diffractées se propagent dans les couches.

Dans un milieu homogène, il n'existe pas de couplage entre les différentes directions de propagation (pas de modulation). On peut donc traiter indépendamment la propagation de chacune des ondes diffractées. D'après l'étude d'Abèles, on peut décrire la propagation d'un ordre donné i par la formulation matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} E_y^{(i)}(z_1) \\ h_x^{(i)}(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_z^{(i)}(z_1 - z_2)) & -\frac{jk_0}{k_z^{(i)}} \sin(k_z^{(i)}(z_1 - z_2)) \\ -\frac{jk_z^{(i)}}{k_0} \sin(k_z^{(i)}(z_1 - z_2)) & \cos(k_z^{(i)}(z_1 - z_2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y^{(i)}(z_2) \\ h_x^{(i)}(z_2) \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

où la composante $k_z^{(i)}$ du vecteur d'onde sur z est définie par

$$k_z^{(i)} = \sqrt{n^2 k_0^2 - k_x^{(i)2}} \quad (4.49)$$

et les composantes $k_x^{(i)}$, continues sur les interfaces, sont toujours obtenues par les relations (4.18) dans l'un quelconque des réseaux faisant partie de la structure étudiée.

Pour retrouver une formulation semblable aux expressions (4.35) et (4.47) que nous avons données pour une structure périodique, on isole les termes exponentiels dans une matrice diagonale (rappelons que cette formulation trouve son intérêt dans l'algorithme de résolution expliqué dans la partie E):

$$\begin{bmatrix} E_y^{(i)}(z_1) \\ h_x^{(i)}(z_1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{k_0}{k_z^{(i)}} \\ -\frac{k_z^{(i)}}{k_0} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-k_z^{(i)}(z_2 - z_1)} & 0 \\ 0 & e^{k_z^{(i)}(z_2 - z_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{k_0}{k_z^{(i)}} \\ -\frac{k_z^{(i)}}{k_0} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y^{(i)}(z_2) \\ h_x^{(i)}(z_2) \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

On en déduit alors la matrice caractéristique $2N \times 2N$ qui décrit la propagation de N ordres diffractés, dont ν ordres négatifs, incidents simultanément sur la couche:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ E_y^{(i-\nu)}(z_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ h_x^{(i-\nu)}(z_1) \\ \vdots \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\mathbf{P}] \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & e^{-jk_z^{(i-\nu)}(z_2 - z_1)} & \\ 0 & & \ddots \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & e^{jk_z^{(i-\nu)}(z_2 - z_1)} \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} [\mathbf{P}] \begin{bmatrix} \vdots \\ E_y^{(i-\nu)}(z_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ h_x^{(i-\nu)}(z_2) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

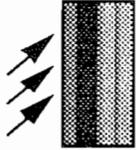
Dans la relation précédente, $[\mathbf{P}]$ est une matrice $2N \times 2N$ diagonale par blocs définie par les coefficients:

$$\begin{cases} P_{i,i} = 1 \\ P_{i,i+N} = -\frac{k_0}{k_z^{(i-\nu)}} \\ P_{i+N,i} = -\frac{k_z^{(i-\nu)}}{k_0} \\ P_{i+N,i+N} = -1 \end{cases} \quad i \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (4.52)$$

(tous les autres coefficients de $[\mathbf{P}]$ sont nuls).

Ainsi nous avons déterminé une matrice caractéristique de la couche homogène, parfaitement compatible avec celle du modèle d'ondes couplées multi-ondes. Ici l'absence de couplage rend évidente la détermination des valeurs propres caractéristiques, qui sont de la

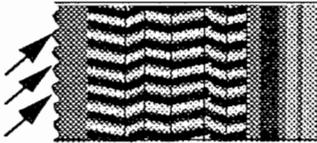
forme $\pm j\sqrt{k_0^2 n^2 - k_x^{(i)}}$. La matrice caractéristique d'une couche homogène en polarisation TM est définie dans l'annexe A.



En raison de la continuité aux interfaces des composantes intervenant dans la relation caractéristique (4.51), la matrice caractéristique d'un empilement de strates uniformes s'obtient très simplement: comme dans le cas des réseaux cascades, il suffit de calculer le produit des matrices de chacune des strates.

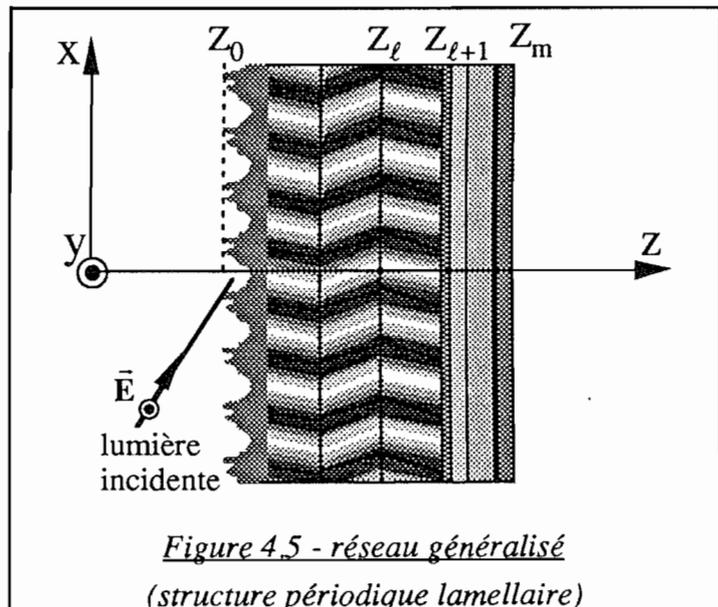
Plus généralement, pour tenir compte de la présence de couches homogènes dans une structure spatialement périodique, il suffit de faire intervenir sa matrice caractéristique dans le produit des matrices élémentaires.

D.5.d - Empilement hétéroclite



On peut dégager de ce qui précède le type de structure périodique le plus général que notre modèle peut traiter: il s'agit d'un empilement qui peut contenir des couches homogènes, des réseaux de volume (d'indice réfractif et d'absorption), et des réseaux de relief, à condition que les périodes spatiales des réseaux soient commensurables. L'inclinaison des franges, l'angle d'incidence, la longueur d'onde et la polarisation de l'onde incidente peuvent être fixés arbitrairement.

Dans la suite, on considère une structure périodique lamellaire formée de m sous-structures appartenant aux catégories précitées (figure 4.5). On désigne par $(z_k)_{k \in \{0,1,\dots,m\}}$ les positions des diverses interfaces ($z_0 < z_1 < \dots < z_m$). On a vu que la diffraction et la propagation dans la sous-structure $n^\circ \ell$, comprise entre les plans de coordonnées z_ℓ et $z_{\ell+1}$ peut être décrite par une matrice caractéristique de la forme:



$$[\mathbf{P}_\ell(z_\ell)] e^{-(z_{\ell+1}-z_\ell)[\mathbf{D}_\ell]} [\mathbf{P}_\ell(z_{\ell+1})]^{-1} \quad (4.53)$$

Par conséquent, la relation caractéristique du réseau généralisé s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ E_y^{(i-v)}(z_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ h_x^{(i-v)}(z_0) \\ \vdots \end{bmatrix} = \prod_{\ell=0}^{m-1} \left([\mathbf{P}_\ell(z_\ell)] e^{-(z_{\ell+1}-z_\ell)[\mathbf{D}_\ell]} [\mathbf{P}_\ell(z_{\ell+1})]^{-1} \right) \begin{bmatrix} \vdots \\ E_y^{(i-v)}(z_m) \\ \vdots \\ \vdots \\ h_x^{(i-v)}(z_m) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

D.6 - Conditions aux limites

D.6.a - Représentation des ondes à l'extérieur du réseau

On suppose que les deux milieux extérieurs à la structure périodique sont homogènes, d'indices complexes n_F pour le premier demi-espace (F comme First) et n_L pour le dernier (L comme Last). Pour appliquer des conditions aux limites, on doit distinguer dans ces milieux les ondes suivant leur sens de propagation: vers les z positifs ou vers les z négatifs. On désigne donc par $f_F^{(i)}$ (forward) et $b_F^{(i)}$ (backward) les coefficients de Rayleigh des ondes incidentes et réfléchies dans le premier demi-espace, et on utilise ces notations dans les développements de Rayleigh suivants:

$$\begin{cases} E_y(x, z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_F^{(i)} \exp[j(k_x^{(i)}x + k_{Fz}^{(i)}z)] + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_F^{(i)} \exp[j(k_x^{(i)}x - k_{Fz}^{(i)}z)] \\ h_x(x, z) = -\frac{1}{k_0} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_{Fz}^{(i)} f_F^{(i)} \exp[j(k_x^{(i)}x + k_{Fz}^{(i)}z)] + \frac{1}{k_0} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_{Fz}^{(i)} b_F^{(i)} \exp[j(k_x^{(i)}x - k_{Fz}^{(i)}z)] \end{cases} \quad (4.55)$$

Les composantes sur x des vecteurs d'ondes, qui ont la même valeur dans tous les milieux, sont toujours définies par les relations (4.18); les composantes sur z sont données par:

$$k_{Fz}^{(i)} = \sqrt{k_0^2 n_F^2 - k_x^{(i)2}} \quad (4.56)$$

De la même manière, dans le dernier demi-espace, on désigne les coefficients de Rayleigh des ondes transmises par $f_L^{(i)}$ et ceux des ondes se propageant vers les z négatifs par $b_L^{(i)}$. Les développements de Rayleigh du champ électromagnétique dans le dernier milieu s'écrivent alors:

$$\begin{cases} E_y(x, z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_L^{(i)} \exp[j(k_x^{(i)}x + k_{Lz}^{(i)}z)] + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_L^{(i)} \exp[j(k_x^{(i)}x - k_{Lz}^{(i)}z)] \\ h_x(x, z) = -\frac{1}{k_0} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_{Lz}^{(i)} f_L^{(i)} \exp[j(k_x^{(i)}x + k_{Lz}^{(i)}z)] + \frac{1}{k_0} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_{Lz}^{(i)} b_L^{(i)} \exp[j(k_x^{(i)}x - k_{Lz}^{(i)}z)] \end{cases} \quad (4.57)$$

avec:

$$k_{Lz}^{(i)} = \sqrt{k_0^2 n_L^2 - k_x^{(i)2}} \quad (4.58)$$

Ainsi, dans les milieux extérieurs, on voit que le champ électromagnétique est représenté soit par le développement fondamental en $E_y^{(i)}$ et $h_x^{(i)}$, que nous avons utilisé précédemment pour décrire la diffraction et la propagation à l'intérieur de la structure, soit par le développement de Rayleigh (4.55)-(4.57), plus intuitif et qui permet une écriture simple des conditions aux limites.

D.6.b - Formulation matricielle des conditions aux limites

Dans le premier demi-espace, limité par le plan d'équation $z=z_0$, la relation entre les deux représentations du champ est donnée par la matrice de passage suivante:

$$[C(z_0)] = \begin{bmatrix} \ddots & & & 0 \\ & e^{jk_{Fz}^{(i-v)}z_0} & & \\ & 0 & \ddots & \\ \ddots & & & 0 \\ & -\frac{k_{Fz}^{(i-v)}}{k_0} e^{jk_{Fz}^{(i-v)}z_0} & & \\ 0 & & \ddots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & & & 0 \\ & e^{-jk_{Fz}^{(i-v)}z_0} & & \\ & 0 & \ddots & \\ \ddots & & & 0 \\ & \frac{k_{Fz}^{(i-v)}}{k_0} e^{-jk_{Fz}^{(i-v)}z_0} & & \\ 0 & & \ddots & \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

La transformation entre les deux représentations s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ E_y^{(i-v)}(z_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ h_x^{(i-v)}(z_0) \\ \vdots \end{bmatrix} = [C(z_0)] \begin{bmatrix} \vdots \\ f_F^{(i-v)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_F^{(i-v)} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

On peut donner une relation similaire à (4.60) pour le dernier milieu. On note $[C(z_m)]$ la matrice de passage dans le plan d'équation $z=z_m$. En introduisant les coefficients de Rayleigh et les deux matrices de passage dans la relation caractéristique (4.54), on obtient:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ f_F^{(i-v)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_F^{(i-v)} \\ \vdots \end{bmatrix} = [C(z_0)]^{-1} \cdot \prod_{\ell=0}^{m-1} \left([P_\ell(z_\ell)] e^{-(z_{\ell+1}-z_\ell)[D_\ell]} [P_\ell(z_{\ell+1})]^{-1} \right) \cdot [C(z_m)] \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ f_L^{(i-v)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_L^{(i-v)} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

On peut maintenant imposer les conditions aux limites d'une façon très simple:

une seule onde d'amplitude unitaire est incidente sur le réseau depuis le premier demi-espace:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{f}_F^{(i-v)} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

et aucune onde ne se propage vers les z négatifs dans le dernier demi-espace:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{b}_L^{(i-v)} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

En substituant ces vecteurs dans la relation (4.61), on obtient un système de $2N$ équations dont les $2N$ inconnues sont les amplitudes diffractées en réflexion et en transmission $\mathbf{b}_F^{(i-v)}$ et $\mathbf{f}_L^{(i-v)}$.

D.6.c - Résolution finale et difficultés numériques

Quand la matrice caractéristique ne pose pas de problèmes numériques, les termes diagonaux exponentiels ne prennent pas des valeurs trop grandes: on peut alors résoudre le système (4.61) simplement par des techniques d'inversion classiques. En général, dans chaque sous-structure, plusieurs valeurs propres ont une partie réelle négative, ce qui révèle l'existence de modes inhomogènes divergents dont l'amplitude croît suivant z ; nous avons déjà souligné que, dans un réseau suffisamment épais, les termes exponentiels correspondant à ces modes dépassent souvent les limites du calculateur et provoquent des instabilités numériques ou des débordements de capacité. Une solution de facilité consiste à négliger les modes évanescents en réduisant le nombre N d'ordres diffractés retenus pour le calcul. Cette solution n'est satisfaisante que dans certains cas limités; le plus souvent, pour obtenir une bonne précision, il faut tenir compte d'un certain nombre d'ordres évanescents. L'algorithme que nous proposons dans le paragraphe E permet d'éliminer ces difficultés de calcul.

D.7 - Efficacités de diffraction

Après avoir déterminé les amplitudes diffractée $\mathbf{f}_L^{(i-v)}$ dans le dernier milieu et rétro-diffractée $\mathbf{b}_F^{(i-v)}$ dans le premier demi-espace, on obtient les efficacités de diffraction en intensité correspondantes $\eta_L^{(i-v)}$ et $\eta_F^{(i-v)}$ par les formules suivantes:

$$\begin{cases} \eta_L^{(i-v)} = \frac{k_{Lz}^{(i-v)}}{k_{Fz}^{(0)}} |\mathbf{f}_L^{(i-v)}|^2 \\ \eta_F^{(i-v)} = \frac{k_{Fz}^{(i-v)}}{k_{Fz}^{(0)}} |\mathbf{b}_F^{(i-v)}|^2 \end{cases} \quad (4.64)$$

E - Algorithme de résolution numériquement stable

Dans plusieurs études, il apparaît que le modèle d'ondes couplées souffre d'instabilités numériques lorsque l'épaisseur de la structure modulée dépasse certaines valeurs. Nous avons pu constater ce problème en appliquant le modèle rigoureux présenté précédemment à la diffraction de lumière visible par des réseaux de volume d'une épaisseur de plus de 10 ou 20 fois la longueur d'onde. L'origine de ces instabilités a été expliquée en D.6.c; nous présentons ici un nouvel algorithme qui les élimine complètement, en séparant dans les calculs les modes inhomogènes évanescents et divergents. Le lecteur désireux de plus de détails les trouvera dans l'annexe B, où sont donnés, en plus du principe théorique de l'algorithme, des exemples et des comparaisons numériques

Dans cette partie, nous utilisons les notations vectorielles suivantes: ondes incidentes

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ondes réfléchies } \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{b}_F^{(i-v)} \\ \vdots \end{bmatrix}, \text{ ondes transmises } \bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{f}_L^{(i-v)} \\ \vdots \end{bmatrix}, \text{ ondes se propageant}$$

vers les z négatifs dans le dernier demi-espace $\bar{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$. Ainsi les $2N$ inconnues du problème

sont représentées par $\bar{\mathbf{R}}$ et $\bar{\mathbf{T}}$, et les $2N$ conditions aux limites imposées par $\bar{\mathbf{I}}$ et $\bar{\mathbf{O}}$, de dimension N . Nous dirons qu'une valeur propre a une partie réelle négative critique si le nombre $\exp(-\text{valeur propre} \times \text{épaisseur})$ est trop grand pour être calculé ou utilisé par la machine et une partie réelle positive critique si $\exp(+\text{valeur propre} \times \text{épaisseur})$ est trop grand.

Notre algorithme met à profit l'observation suivante: pour une matrice caractéristique donnée, le nombre de valeurs propres à partie réelle négative critique est inférieur à N . De même, le nombre de valeurs propres à partie réelle positive critique est majoré par N . Une démonstration de cette propriété est donnée dans l'appendice de l'annexe B dans le cas d'un réseau parfaitement transparent. Ce résultat a de plus été vérifié dans toutes nos simulations numériques, même pour des réseaux absorbants: on se reportera aux exemples numériques donnés dans l'annexe B (en table 1). En modifiant l'arrangement des colonnes de la matrice des vecteurs propres dans la relation (4.18), on parvient à disposer les valeurs propres en ordre croissant sur la diagonale de la matrice $[\mathbf{D}]$. Nous supposons dorénavant ces permutations effectuées sur chaque matrice caractéristique intervenant dans la relation (4.61).

Cette dernière relation peut alors s'écrire sous la forme:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}} \\ \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix} = \prod_{k=0}^{m'-1} [\mathbf{A}_k] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{O}} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

où $m' = 3m + 2$ est le nombre total de matrices dans (4.61). Chaque matrice $[\mathbf{A}_k]$ est soit une matrice bien conditionnée comme $[\mathbf{P}_\ell(z_{\ell+1})]$, $[\mathbf{P}_\ell(z_\ell)]^{-1}$ ($\ell \in \{0, 1, \dots, m-1\}$), $[\mathbf{C}(z_0)]$ et $[\mathbf{C}(z_m)]^{-1}$, soit une matrice diagonale du type $e^{-(z_{\ell+1}-z_\ell)[D_\ell]}$ à termes exponentiels. Parmi les éléments diagonaux, seuls les N premiers peuvent atteindre des valeurs trop grandes, et seuls les N derniers des valeurs trop faibles.

Nous partageons chaque matrice $[\mathbf{A}_k]$ en 4 sous-matrices:

$$[\mathbf{A}_k] = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}_k^{00}] & [\mathbf{A}_k^{01}] \\ [\mathbf{A}_k^{10}] & [\mathbf{A}_k^{11}] \end{bmatrix}, \quad k \in \{0, 1, \dots, m'-1\} \quad (4.66)$$

et nous définissons deux familles de vecteurs $\bar{\mathbf{X}}_k$ et $\bar{\mathbf{Y}}_k$ de dimension N:

$$\left\{ \begin{array}{l} k \in \{0, 1, \dots, m'-1\} : \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_k \\ \bar{\mathbf{Y}}_k \end{bmatrix} = \left(\prod_{\ell=k}^{m'-1} [\mathbf{A}_\ell] \right) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{O}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_{m'} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{m'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{O}} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.67)$$

Les relations (4.66) et (4.67) mènent immédiatement aux relations de récurrence:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{X}}_{k-1} = [\mathbf{A}_{k-1}^{00}] \cdot \bar{\mathbf{X}}_k + [\mathbf{A}_{k-1}^{10}] \cdot \bar{\mathbf{Y}}_k \\ \bar{\mathbf{Y}}_{k-1} = [\mathbf{A}_{k-1}^{10}] \cdot \bar{\mathbf{X}}_k + [\mathbf{A}_{k-1}^{11}] \cdot \bar{\mathbf{Y}}_k \end{array} \right., \quad k \in \{1, 2, \dots, m'\} \quad (4.68)$$

Nous recherchons maintenant deux familles de matrices $N \times N$, $[\mathbf{P}_k]$ et $[\mathbf{Q}_k]$, qui vérifient:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{P}_k] \cdot \bar{\mathbf{X}}_k = \bar{\mathbf{Y}}_k \\ [\mathbf{Q}_k] \cdot \bar{\mathbf{X}}_k = \bar{\mathbf{T}} \end{array} \right., \quad k \in \{0, 1, \dots, m'\} \quad (4.69)$$

En introduisant $[\mathbf{P}_k]$ et $[\mathbf{Q}_k]$ dans les relations (4.68) et en éliminant $\bar{\mathbf{X}}_k$ et $\bar{\mathbf{Y}}_k$, on obtient deux ensembles de relations qui sont à eux deux suffisants pour vérifier les égalités (4.69):

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{P}_{k-1}] = ([\mathbf{A}_{k-1}^{10}] + [\mathbf{A}_{k-1}^{11}][\mathbf{P}_k])([\mathbf{A}_{k-1}^{00}] + [\mathbf{A}_{k-1}^{01}][\mathbf{P}_k])^{-1} \\ [\mathbf{Q}_{k-1}] = [\mathbf{Q}_k]([\mathbf{A}_{k-1}^{00}] + [\mathbf{A}_{k-1}^{01}][\mathbf{P}_k])^{-1} \end{array} \right., \quad k \in \{1, 2, \dots, m'\} \quad (4.70)$$

Les relations précédentes définissent $[\mathbf{P}_k]$ et $[\mathbf{Q}_k]$ par récurrence décroissante. Les termes initiaux de la récurrence sont donnés par (4.67) et (4.69):

$$\left. \begin{array}{l} [\mathbf{P}_{m'}] = \text{matrice nulle } N \times N \\ [\mathbf{Q}_{m'}] = \text{matrice identité } N \times N \end{array} \right\} \quad (4.71)$$

Si $[\mathbf{A}_{k-1}]$ est une matrice bien conditionnée, on ne rencontre aucun problème en calculant $[\mathbf{P}_{k-1}]$ et $[\mathbf{Q}_{k-1}]$ à partir des relations de récurrence (4.70). Si $[\mathbf{A}_{k-1}]$ est une matrice

diagonale de termes exponentiels, les relations (4.70) se simplifient:

$$\begin{cases} [\mathbf{P}_{k-1}] = [\mathbf{A}_{k-1}^{11}] [\mathbf{P}_k] [\mathbf{A}_{k-1}^{00}]^{-1} \\ [\mathbf{Q}_{k-1}] = [\mathbf{Q}_k] [\mathbf{A}_{k-1}^{00}]^{-1} \end{cases}, k \in \{1, 2, \dots, m'\} \quad (4.72)$$

Le calcul de la matrice $[\mathbf{A}_{k-1}^{11}]$ (partie inférieure droite de $[\mathbf{A}_{k-1}]$) n'est pas problématique, puisque les éléments éventuellement trop grands sont rangés dans la sous-matrice supérieure gauche $[\mathbf{A}_{k-1}^{00}]$. $[\mathbf{A}_{k-1}^{00}]$ est une matrice diagonale, et ses éléments sont des exponentielles de nombres réels positifs possiblement très grands; dans (4.72), la matrice $[\mathbf{A}_{k-1}^{00}]^{-1}$ est donc aussi diagonale, et ses éléments sont les inverses des précédents. Grâce au réagencement des valeurs propres, les éléments des deux matrices $[\mathbf{A}_{k-1}^{11}]$ et $[\mathbf{A}_{k-1}^{00}]^{-1}$ ne dépassent pas les capacités du calculateur.

On peut donc calculer sans problème les relations de récurrence (4.70) pour toute valeur de k . En partant des valeurs initiales avec $k=m'$, leur itération mène à la détermination des matrices $[\mathbf{P}_0]$ et $[\mathbf{Q}_0]$. Les relations (4.67) et (4.69) appliquées à $k=0$ permettent de trouver les $2N$ inconnues:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{R}} = [\mathbf{P}_0] \cdot \bar{\mathbf{I}} \\ \bar{\mathbf{T}} = [\mathbf{Q}_0] \cdot \bar{\mathbf{I}} \end{cases} \quad (4.73)$$

En résumé, notre algorithme fonctionne de la manière suivante: d'abord, on initialise $[\mathbf{P}_k]$ et $[\mathbf{Q}_k]$ pour $k=m'$ à l'aide des relations (4.71). Ensuite, les relations de récurrence (4.70) sont appliquées m' fois en "remontant" à travers l'empilement. Dans le cas où la matrice $[\mathbf{A}_{k-1}]$ est bien conditionnée, les équations (4.70) sont calculées simplement en utilisant une routine mathématique standard d'inversion de matrices. Si $[\mathbf{A}_{k-1}]$ est une matrice diagonale à termes exponentiels, une routine spéciale est nécessaire: les coefficients de $[\mathbf{A}_{k-1}^{00}]^{-1}$ doivent être calculés directement en utilisant les nombres opposés aux valeurs propres critiques, sans calculer les éléments de $[\mathbf{A}_{k-1}^{00}]$. Après la détermination de $[\mathbf{P}_0]$ et de $[\mathbf{Q}_0]$, les valeurs des amplitudes réfléchies et transmises sont obtenues par les relations (4.73), et les efficacités de diffraction dans tous les ordres sont données par les formules (4.30).

Les exemples de l'annexe B montrent que cet algorithme résout totalement le problème des dépassements de capacité liés à l'épaisseur des réseaux, et qu'il permet d'utiliser la théorie d'ondes couplées pour modéliser des structures périodiques d'épaisseur et de profil arbitraires. Dans le cas des réseaux de relief, les calculs d'ondes couplées publiés se limitent, à notre connaissance, à des profondeurs de sillons de l'ordre de quelques longueurs d'ondes seulement; notre algorithme nous a permis de poursuivre ce type de calcul jusqu'à des profondeurs énormes ($> 1000\lambda$), au-delà de ce qui est physiquement réalisable actuellement. Son

utilisation ne requiert pas plus de capacité mémoire, et ne ralentit pratiquement pas les calculs (la durée de calcul rajoutée est négligeable comparée à celle des diagonalisations).

F - Propriétés du modèle d'ondes couplées

Cette partie est consacrée à la démonstration et à la discussion de propriétés importantes de la diffraction par un réseau: la conservation de l'énergie, le retour inverse de la lumière et la réciprocité énergétique. Nous montrons que les résultats du modèle d'ondes couplées du second ordre exposé dans la partie D vérifient ces propriétés, quelle que soit la troncature choisie N du système d'équations couplées (4.20).

F.1 - Conservation de l'énergie

Dans diverses analyses de la diffraction par des réseaux diélectriques, on considère que la vérification de la loi de conservation de l'énergie (somme des intensités transmise, réfléchi et diffractés égale à l'intensité incidente) constitue une validation des résultats. Cependant, nous allons voir que ce critère est mal adapté à la validation de modèles qui s'appuient sur la théorie d'ondes couplées du second ordre, et qu'il permet tout au plus de donner un minorant de l'erreur liée aux méthodes numériques de résolution. Nous nous inspirons d'une démonstration proposée par Nevière^{NEV75} dans une étude sur les réseaux travaillant en réflexion, où la lumière est diffractée uniquement du côté de l'onde incidente. Nous montrons ici, **dans le cas d'un réseau purement diélectrique** (les ordres diffractés existent de part et d'autre du réseau), que les résultats de notre modèle vérifient toujours la conservation de l'énergie, quel que soit le nombre N d'ordres retenus pour le calcul. Autrement dit, on trouvera égale à 1 la somme des efficacités de diffraction calculées même si, à cause du choix d'une valeur de N trop faible, chacune de ces valeurs est erronée.

Nous considérons un réseau purement diélectrique (éventuellement du type généralisé décrit précédemment) bordé par deux milieux diélectriques semi-infinis. L'intensité de l'onde incidente est supposée égale à 1. A partir du développement fondamental (4.17) du champ électrique, tronqué à N termes pour la résolution, on définit le Wronskien:

$$W(z) = \text{Im} \left[\sum_{i=-v}^{N-v} E_y^{(i)*}(z) \frac{dE_y^{(i)}(z)}{dz} \right] \quad (4.74)$$

W(z) peut également s'écrire sous la forme:

$$W(z) = \frac{1}{2j} \sum_{i=-v}^{N-v} \left[E_y^{(i)*}(z) \frac{dE_y^{(i)}(z)}{dz} - E_y^{(i)}(z) \frac{dE_y^{(i)*}(z)}{dz} \right] \quad (4.75)$$

Nous cherchons l'expression de $W(z)$ sur les interfaces entre le réseau et les milieux extérieurs. Pour calculer $W(z_0)$, où z_0 est désigné toujours la coordonnée de la première interface, on introduit dans (4.74) les coefficients de Rayleigh du champ électrique, en utilisant les relations (4.55); on trouve alors:

$$W(z_0) = \text{Im} \left\{ \sum_{i=-v}^{N-v} jk_{Fz}^{(i)} \left[\underbrace{\left| f_F^{(i)} e^{jk_{Fz}^{(i)} z_0} \right|^2}_{\text{réel pur}} - \underbrace{\left(f_F^{(i)*} \left(e^{jk_{Fz}^{(i)} z_0} \right)^* b_F^{(i)} e^{-jk_{Fz}^{(i)} z_0} - \text{c.c.} \right)}_{\text{imaginaire pur}} \right] \right\} \quad (4.76)$$

(la notation c.c. désigne le complexe conjugué du terme qui la précède).

En imposant les conditions aux limites, en particulier (4.62), on obtient:

$$W(z_0) = \text{Im} \left(jk_{Fz}^{(0)} \right) - \sum_{i=-v}^{N-v} \text{Im} \left\{ jk_{Fz}^{(i)} \underbrace{\left| b_F^{(i)} e^{-jk_{Fz}^{(i)} z_0} \right|^2}_{\text{réel pur}} \right\} - \text{Im} \left\{ jk_{Fz}^{(0)} \underbrace{\left(e^{jk_{Fz}^{(0)} z_0} \right)^* b_F^{(0)} e^{-jk_{Fz}^{(0)} z_0} - \text{c.c.} \right\} \quad (4.77)$$

Comme l'indice de réfraction du milieu est réel, les composantes $k_{Fz}^{(i)}$ des vecteurs d'ondes données par (4.56) sont soit réelles, soit imaginaires pures. On appelle U_F l'ensemble des entiers i tels que $k_{Fz}^{(i)}$ soit réel. L'onde incidente est propagative, donc $k_{Fz}^{(0)} \in U_F$: cela implique que le dernier terme de l'expression de $W(z_0)$ (4.77) est nul. Dans la sommation qui constitue le deuxième terme de (4.77), tous les termes correspondant aux $k_{Fz}^{(i)}$ imaginaires sont également nuls. Il reste:

$$W(z_0) = k_{Fz}^{(0)} - \sum_{i \in U_F} k_{Fz}^{(i)} |b_F^{(i)}|^2 \quad (4.78)$$

Le raisonnement précédent peut être répété pour le dernier milieu; on trouve alors l'expression de $W(z)$ sur la dernière interface:

$$W(z_m) = \sum_{i \in U_L} k_{Lz}^{(i)} |f_L^{(i)}|^2 \quad (4.79)$$

Montrons maintenant que $W(z)$ est constant: pour cela, nous calculons sa dérivée à partir de l'expression (4.75):

$$\frac{dW(z)}{dz} = \frac{1}{2j} \sum_{i=-v}^{N-v} \left[E_y^{(i)*}(z) \frac{d^2 E_y^{(i)}(z)}{dz^2} - E_y^{(i)}(z) \frac{d^2 E_y^{(i)*}(z)}{dz^2} \right] \quad (4.80)$$

Dans l'expression précédente, on supprime les dérivées secondes en introduisant les équations couplées (4.20):

$$\frac{dW(z)}{dz} = \frac{k_0^2}{2j} \left[- \sum_{i=-v}^{N-v} \sum_{\ell=-v}^{N-v} E_y^{(i)*}(z) \tilde{n}_{i-\ell} e^{j(i-\ell)K_z z} E_y^{(\ell)}(z) + \sum_{i=-v}^{N-v} \sum_{\ell=-v}^{N-v} E_y^{(i)}(z) \tilde{n}_{i-\ell}^* e^{-j(i-\ell)K_z z} E_y^{(\ell)*}(z) \right] \quad (4.81)$$

Si l'on intervertit les indices i et ℓ dans la dernière double somme de (4.81), on obtient après factorisation:

$$\frac{dW(z)}{dz} = \frac{jk_0^2}{2} \sum_{i=-v}^{N-v} \sum_{\ell=-v}^{N-v} \left[E_y^{(i)}(z) E_y^{(\ell)*}(z) e^{j(i-\ell)K_z z} (\tilde{n}_{i-\ell} - \tilde{n}_{\ell-i}^*) \right] \quad (4.82)$$

Dans un réseau diélectrique, $n(x,z)$ est réel; les coefficients de Fourier du carré de l'indice vérifient donc:

$$\tilde{n}_i = \tilde{n}_{-i}^* \quad , i \in \mathbf{Z} \quad (4.83)$$

Dans l'expression (4.82), on a donc $\tilde{n}_{i-l} - \tilde{n}_{l-i}^* = 0$; par conséquent la dérivée de $W(z)$ est nulle et $W(z)$ est constant. En particulier, les expressions (4.78) et (4.79) sont égales, ce qui mène à la relation:

$$k_{Fz}^{(0)} = \sum_{i \in U_F} k_{Fz}^{(i)} |b_F^{(i)}|^2 + \sum_{i \in U_L} k_{Lz}^{(i)} |f_L^{(i)}|^2 \quad (4.84)$$

En divisant les termes de (4.84) par $k_{Fz}^{(0)}$, on fait apparaître les efficacités de diffraction en réflexion et en transmission définies par les formules (4.64); on obtient la relation de conservation de l'énergie:

$$1 = \sum_{i \in U_F} \eta_F^{(i)} + \sum_{i \in U_L} \eta_L^{(i)} \quad (4.85)$$

On démontre ainsi que, pour un nombre N quelconque d'ordres retenus dans un réseau diélectrique, la somme des efficacités de diffraction calculées par le modèle d'ondes couplées du second ordre est égale à l'unité. En calculant avec $N=2$ des cas de réseaux pour lesquels une précision inférieure à 1% requiert $N \geq 10$, nous avons constaté en effet que la l'énergie se conservait avec une précision meilleure que 0,001%. Cela signifie que **la conservation de l'énergie n'est pas un critère de validité des résultats pour ce type de modèle.** Si le bilan énergétique présente une erreur de $x\%$, on peut seulement affirmer que l'erreur sur l'efficacité de diffraction dans chaque ordre est supérieure à $\frac{x}{2N}\%$. Le critère de conservation de l'énergie est toutefois utile pour vérifier le fonctionnement correct des programmes informatiques lors de leur mise au point.

F.2 - Retour inverse de la lumière

On considère un réseau semblable au type précédemment décrit (réseau simple ou structure périodique lamellaire) éclairé par une onde plane avec l'incidence θ_0 dans le premier demi-espace. Cette situation est schématisée par la figure 4.6, en haut. Dans les deux milieux extérieurs, le champ électrique $E(x,z)$ produit par cette onde est décrit par les développements de Rayleigh (4.55) et (4.57). Si l'on tient compte dans ces développements des conditions aux limites (4.62) et (4.63), on obtient dans le premier milieu:

$$E(x,z) = \exp[j(k_x^{(0)} x + k_{Fz}^{(0)} z)] + \sum_{l=-v}^{N-v} b_F^{(l)} \exp[j(k_x^{(l)} x - k_{Fz}^{(l)} z)] \quad (4.86)$$

et dans le dernier milieu:

$$E(x,z) = \sum_{l=-v}^{N-v} f_L^{(l)} \exp[j(k_x^{(l)} x - k_{Lz}^{(l)} z)] \quad (4.87)$$

On suppose maintenant que le même réseau est éclairé par une onde plane incidente dans la direction de l'ordre $n^{\circ}i$ de la configuration précédente. Il peut s'agir de l'ordre $n^{\circ}i$ d'un côté ou de l'autre du réseau: dans les deux cas, le sens de propagation dans cette direction est inversé et la composante sur x du nouveau vecteur d'onde incident est:

$$k_x^{(0)'} = -k_x^{(i)} \quad (4.88)$$

La figure 4.6 (en bas) représente le cas où le réseau est éclairé dans la direction de l'ordre i rétrodiffraité de la configuration précédente. Les composantes sur x des vecteurs d'onde diffractés dans la nouvelle configuration sont donnés par des relations de Floquet analogues à (4.18):

$$k_x^{(\ell)'} = k_x^{(0)'} + \ell K_x \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (4.89)$$

De (4.88) et (4.89), on déduit:

$$k_x^{(\ell)'} = -k_x^{(i-\ell)} \quad (4.90)$$

En particulier pour $\ell = i$, on voit que la composante sur x du vecteur d'onde diffracté est égal à $-k_x^{(0)}$: la lumière est diffractée dans la direction θ_0 . Les directions des ordres de diffraction, déduites du théorème de Floquet (ou de la loi des réseaux), respectent donc la condition de "retour inverse" de la lumière.

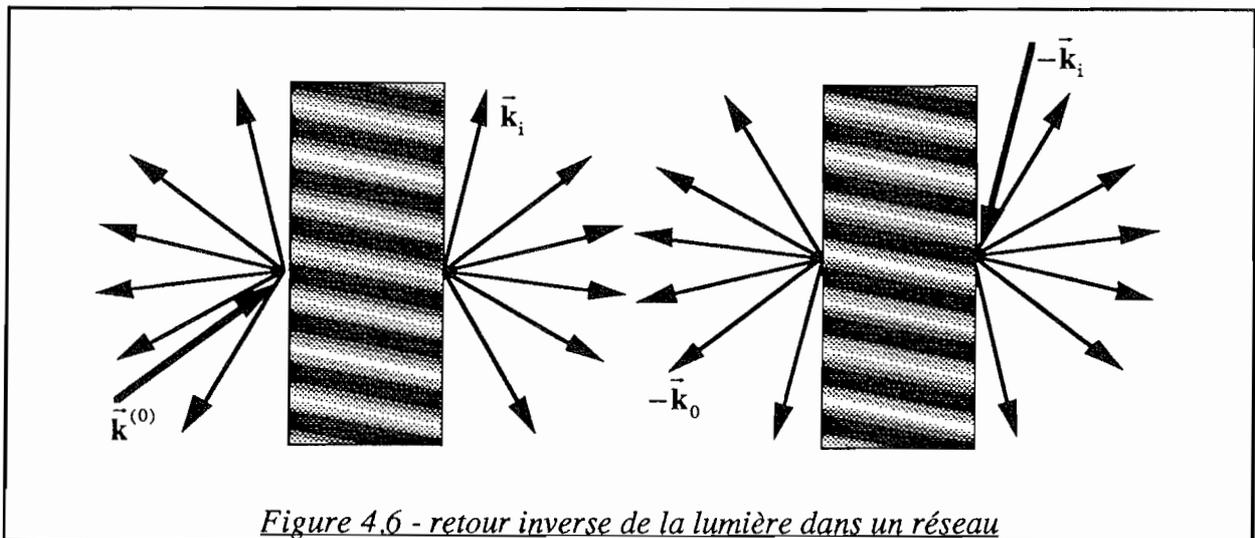


Figure 4.6 - retour inverse de la lumière dans un réseau

F.3 - Réciprocité énergétique

Dans les réseaux, la propriété géométrique de "retour inverse" de la lumière s'accompagne d'une propriété énergétique appelée réciprocité. Le théorème de réciprocité stipule l'égalité des efficacités de diffractions obtenues dans les configurations suivantes (qui correspondent à celles du retour inverse représentées dans la figure 4.6):

- pour une onde incidente avec un angle θ_0 sur le réseau, efficacité dans l'ordre $n^{\circ}i$ de direction θ_i ,

- pour une onde de sens de propagation opposé incidente avec l'angle θ_i , efficacité dans la direction θ_0 .

Ce théorème a été démontré pour des réseaux de conductivité finie fonctionnant en réflexion par Maystre et McPhedran ^{MAY74}. A partir de cette étude, nous étendons la démonstration à notre modèle, où la lumière peut être diffractée des deux côtés du réseau.

Comme pour le critère de conservation de l'énergie, nous montrons que la réciprocité est vérifiée pour une troncature arbitraire de l'ensemble des ordres diffractés. Nous utilisons ici les définitions et les résultats du paragraphe précédent à propos du retour inverse. On suppose que l'onde incidente d'angle θ_0 crée la répartition de champ électrique $E(x,z)$, et que l'onde de sens opposé induit la répartition $E'(x,z)$. Pour le calcul, les champs électriques $E(x,z)$ et $E'(x,z)$ sont décomposés sur les mêmes N directions diffractées, suivant le développement fondamental (4.17); chacune des répartitions de champ vérifie l'équation de Helmholtz (4.2). On peut en déduire la relation:

$$E'(x, z) \Delta E(x, z) - E(x, z) \Delta E'(x, z) = 0 \tag{4.91}$$

On définit dans le plan d'incidence (x,z) le rectangle **R** représenté dans la figure (4.7) ci-contre. Dans la direction x , **R** est limité par les droites d'équation $x=0$ et $x = \Lambda_x \left(= \frac{2\pi}{K_x} \right)$; sa largeur est d'une période spatiale suivant x du réseau. Dans la direction z , **R** est borné par les interfaces du réseau $z = z_0$ et $z = z_m$.

En intégrant l'expression (4.91) sur la surface du rectangle **R** et en appliquant la formule de Green, on obtient l'intégrale suivante sur le contour du rectangle:

$$\int_{\mathbf{R}} (E' \frac{dE}{dn} - E \frac{dE'}{dn}) d\ell = 0 \tag{4.92}$$

où $d\ell$ désigne un élément différentiel d'abscisse curviligne et où la normale \vec{n} est orientée vers l'intérieur du rectangle **R**.

On s'intéresse dans un premier temps aux côtés de **R** parallèles à l'axe z , donc à l'intégrale:

$$\int_{z_m}^{z_0} \left[E'(0, z) \frac{dE(x, z)}{dx} \Big|_0 - E(0, z) \frac{dE'(x, z)}{dx} \Big|_0 \right] dz + \int_{z_0}^{z_m} \left[E'(\Lambda_x, z) \frac{dE(x, z)}{dx} \Big|_{\Lambda_x} - E(\Lambda_x, z) \frac{dE'(x, z)}{dx} \Big|_{\Lambda_x} \right] dz \tag{4.93}$$

D'après le développement fondamental (4.17) et les relations (4.18) qui définissent les composantes sur x des vecteurs d'ondes diffractés, le champ $E(x,z)$ est pseudo-périodique

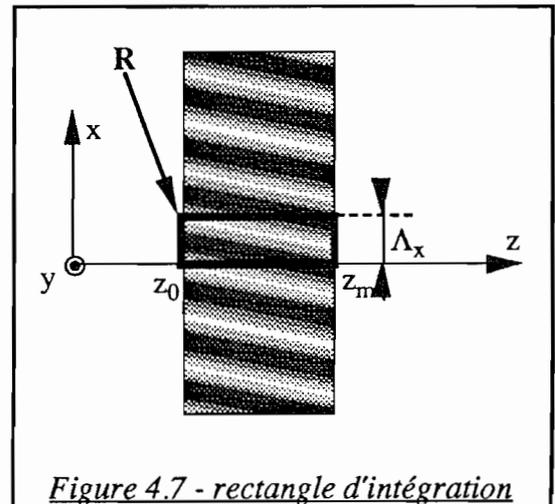


Figure 4.7 - rectangle d'intégration

suivant x et s'écrit:

$$E(x, z) = \exp(jk_x^{(0)} x) \sum_l E_y^{(i)} \exp(jk_z^{(l)} z) \exp(jl K_x x) \quad (4.94)$$

D'après la relation précédente, on voit:

$$E(\Lambda_x, z) = E(0, z) \cdot \exp(j k_x^{(0)} \Lambda_x) \quad (4.95)$$

En dérivant (4.94), on peut aussi montrer facilement:

$$\left. \frac{dE(x, z)}{dx} \right|_{\Lambda_x} = \left. \frac{dE(x, z)}{dx} \right|_0 \cdot \exp(j k_x^{(0)} \Lambda_x) \quad (4.96)$$

D'après les relations de retour inverse (4.88) et (4.89), le champ $E'(x, z)$ peut s'écrire:

$$E'(x, z) = \exp(-jk_x^{(0)} x) \sum_l E_y^{(i)'}(z) \exp(jk_z^{(l)} z) \exp(jl K_x x) \quad (4.97)$$

Par conséquent, $E'(x, z)$ vérifie:

$$E'(\Lambda_x, z) = E'(0, z) \cdot \exp(-jk_x^{(0)} \Lambda_x) \quad (4.98)$$

et:

$$\left. \frac{dE'(x, z)}{dx} \right|_{\Lambda_x} = \left. \frac{dE'(x, z)}{dx} \right|_0 \cdot \exp(-jk_x^{(0)} \Lambda_x) \quad (4.99)$$

Dans les relations (4.95) et (4.99), on élimine $\exp(2\pi j \frac{k_x^{(0)}}{K_x})$ et on trouve:

$$E(0, z) \left. \frac{dE'(x, z)}{dx} \right|_0 = E(\Lambda_x, z) \left. \frac{dE'(x, z)}{dx} \right|_{\Lambda_x} \quad (4.100)$$

La même opération avec (4.96) et (4.98) donne:

$$E'(0, z) \left. \frac{dE(x, z)}{dx} \right|_0 = E'(\Lambda_x, z) \left. \frac{dE(x, z)}{dx} \right|_{\Lambda_x} \quad (4.101)$$

Si l'on introduit les égalités précédentes (4.100) et (4.101) dans (4.93), on trouve que la contribution (4.93) des côtés de \mathbf{R} parallèles à z dans l'intégrale (4.92) est nulle. La relation (4.92) implique alors que l'intégrale sur les côtés de \mathbf{R} parallèles à Ox est également nulle:

$$\int_0^{\Lambda_x} \left[E'(x, z_0) \left. \frac{dE(x, z)}{dz} \right|_{z_0} - E(x, z_0) \left. \frac{dE'(x, z)}{dz} \right|_{z_0} \right] dz + \int_{\Lambda_x}^0 \left[E'(x, z_m) \left. \frac{dE(x, z)}{dz} \right|_{z_m} - E(x, z_m) \left. \frac{dE'(x, z)}{dz} \right|_{z_m} \right] dz = 0 \quad (4.102)$$

Pour trouver une expression de la somme (4.102), on utilise les développements de Rayleigh (4.86) et (4.87) du champ $E(x, z)$ qui tiennent compte des conditions aux limites. Les relations (4.88) et (4.89) définissant les vecteurs d'ondes du champ $E'(x, z)$ permettent de donner des développements similaires de $E'(x, z)$ dans les milieux externes:

premier milieu:

$$E'(x, z) = \exp[-j(k_x^{(i)} x - k_{F_x}^{(i)} z)] + \sum_l b_F^{(i-l)'} \exp[-j(k_x^{(l)} x + k_{F_x}^{(l)} z)] \quad (4.103)$$

dernier milieu:

$$E'(x, z) = \sum_l f_L^{(-l)'} \exp[-j(k_x^{(l)} x - k_{z_L}^{(l)} z)] \quad (4.104)$$

En écrivant ces relations, nous considérons une onde incidente dans l'ordre i de $E(x, z)$ dans le **premier** demi-espace.

Si on introduit les développements (4.86), (4.87), (4.103) et (4.104) et leurs développements dérivés par rapport à z dans la relation (4.102), on trouve que la contribution du côté $z = z_m$ est nulle et on obtient, après simplification:

$$2j\Lambda_x \left[k_z^{(0)} b^{(i)'} - k_z^{(i)} b^{(i)} \right] = 0 \quad (4.105)$$

En utilisant l'égalité (4.90), on peut déduire de (4.105) les relations:

$$\frac{k_{z_F}^{(i)'}}{k_{z_F}^{(0)'}} \left| b_F^{(i)'} \right|^2 = \frac{k_{z_F}^{(i)}}{k_{z_F}^{(0)}} \left| b_F^{(i)} \right|^2 \quad (4.106)$$

On reconnaît dans (4.106) les efficacités de diffraction définies en (4.64). La relation montre que **l'efficacité ne dépend pas du sens de propagation**.

Cette propriété de réciprocité reste vraie et la démonstration est similaire pour une onde incidente depuis le **dernier** milieu. Dans ce cas de fonctionnement en transmission, on trouve:

$$\frac{k_{z_F}^{(i)'}}{k_{z_L}^{(0)'}} \left| b_F^{(i)'} \right|^2 = \frac{k_{z_L}^{(i)}}{k_{z_F}^{(0)}} \left| f_L^{(i)} \right|^2 \quad (4.107)$$

Nous avons démontré la réciprocité pour une valeur de N quelconque. Comme nous l'avons discuté pour la conservation de l'énergie, cela signifie que **la réciprocité n'est pas un critère suffisant de validité des résultats du modèle d'ondes couplées du second ordre**. Elle constitue cependant un autre moyen pour tester le fonctionnement des programmes de calcul. Elle permet aussi, pour certains calculs de dépendance angulaire de l'efficacité, de réduire le nombre de calculs nécessaires pour obtenir la totalité de la courbe.

G - Extension du modèle en lumière quasi-monochromatique

Dans cette section, nous étudions la modélisation de la diffraction en illumination quasi-monochromatique d'une structure périodique qui comporte des couches homogènes d'épaisseur supérieure à la longueur de cohérence.

De nombreux composants optiques diffractifs sont constitués d'un **substrat transparent épais** supportant **une structure (localement) périodique relativement mince**: cette description s'applique aux éléments holographiques enregistrés sur plaques photosensibles, et aux composants diffractifs directement gravés dans des matériaux transparents (dans ces derniers cas, l'épaisseur de la structure périodique correspond à la profondeur de gravure). Certains de ces éléments comportent également une plaque de protection: la couche périodique est alors prise en sandwich entre deux plaques transparentes épaisses. Le modèle d'ondes couplées que nous avons présenté permet de décrire avec précision la diffraction de lumière **monochromatique** par ces divers composants.

Cependant, plusieurs applications importantes utilisent de la lumière **quasi-monochromatique**: on peut citer par-exemple les combineurs holographiques pour viseur tête-haute. Un de nos montages expérimentaux, conçu pour la caractérisation de réseaux holographiques épais, comporte également une source quasi-monochromatique (il s'agit d'un monochromateur; le montage est décrit au chapitre II). L'interprétation théorique des courbes d'efficacité obtenues nécessite **une extension du modèle aux cas de cohérence temporelle réduite**. La manière la plus générale de déterminer les efficacités de diffraction quasi-monochromatiques (EDQMs) consiste à additionner toutes les efficacités monochromatiques (EDMs) liées aux différentes longueurs d'ondes de la source. Cette méthode d'**intégration spectrale** est simple à mettre en œuvre, mais donne lieu à des temps de calcul très longs: on se reportera aux essais numériques décrits dans l'annexe C.

La disproportion entre l'épaisseur des couches diffractives (quelques μm ou dizaines de μm au plus) et celle de leurs supports transparent (quelques mm typiquement) a souvent pour conséquence, en illumination quasi-monochromatique, la situation suivante: **la longueur de cohérence lumineuse est supérieure à l'épaisseur de la couche périodique, et très inférieure à celle du substrat**. On peut alors considérer la lumière comme cohérente dans le réseau, et comme incohérente dans la plaque transparente. Dans ces conditions particulières mais fréquentes en pratique, nous avons envisagé trois manières différentes d'obtenir les EDQMs d'un réseau déposé sur une plaque épaisse transparente: l'**intégration spectrale** déjà évoquée (voir annexe C), **la somme d'une série de réflexions et de rediffractions multiples** (méthode détaillée en annexe C), et **la détermination directe de l'intensité totale de chaque ordre diffracté dans le substrat**.

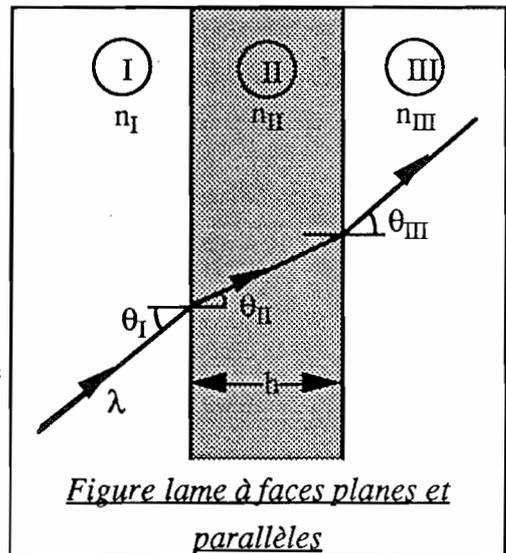
Ces trois approches théoriques nous ont été inspirées par l'étude de la transmission et de la réflexion de lumière incohérente par une lame à faces planes et parallèles. Nous commençons donc notre étude par l'analyse de ce cas simple.

G.1 - Détermination de la réflectivité et de la transmissivité d'une lame à faces planes et parallèles

On considère une lame à faces planes et parallèles homogène d'épaisseur h , d'indice n_{II} , bordée par deux milieux semi-infinis d'indices de réfraction respectifs n_I and n_{III} . Cette lame est schématisée dans la figure 4.8 ci-dessous.

G.1.a - Illumination monochromatique: quelques rappels utiles

La plaque est éclairée depuis le milieu I par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ dans l'espace libre, avec un angle d'incidence θ_I (voir figure 4.8). On représente par θ_{II} et θ_{III} les angles de réfraction respectivement dans les milieux II et III: ces angles se déduisent de θ_I par la loi géométrique de la réfraction de Descartes. On définit R_{I-II} et T_{I-II} respectivement comme la réflectivité et la transmissivité de l'onde sur le dioptré plan séparant les milieux I et II. De la même manière, on définit R_{II-III} et T_{II-III} comme les coefficients correspondant à l'interface II-III. Ces coefficients sont déterminés par les formules de



Fresnel: ils dépendent des angles de propagation, des indices de réfractifs des milieux adjacents aux dioptrés, et de la polarisation. La conservation de l'énergie aux interfaces donne les relations:

$$\begin{cases} R_{I-II} + T_{I-II} = 1 \\ R_{II-III} + T_{II-III} = 1 \end{cases} \quad (4.108)$$

On définit β comme le déphasage dû à un aller-et-retour à travers la plaque:

$$\beta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_{II} h \cos \theta_{II} \quad (4.109)$$

Si l'illumination est monochromatique, les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude $t_c(\beta)$ et $r_c(\beta)$ sont obtenus par sommation cohérente des amplitudes dues aux réflexions multiples ou par résolution de l'équation de Helmholtz; de leurs expressions, on peut déduire les réflectivité et transmissivité monochromatiques de la plaque:

$$\begin{cases} T_c(\beta) = |t_c(\beta)|^2 \frac{n_{III} \cos \theta_{III}}{n_I \cos \theta_I} = \frac{T_{I-II} T_{II-III}}{1 + R_{I-II} R_{II-III} + 2\sqrt{R_{I-II} R_{II-III}} \cos \beta} \\ R_c(\beta) = |r_c(\beta)|^2 = \frac{R_{I-II} + R_{II-III} + 2\sqrt{R_{I-II} R_{II-III}} \cos \beta}{1 + R_{I-II} R_{II-III} + 2\sqrt{R_{I-II} R_{II-III}} \cos \beta} \end{cases} \quad (4.110)$$

Notons que la conservation de l'énergie $T_c(\beta) + R_c(\beta) = 1$ peut être vérifiée en introduisant les relations (4.108) dans les expressions (4.110).

G.1.b - Illumination quasi-monochromatique

Les formules précédentes ont été obtenues dans l'hypothèse d'une illumination strictement monochromatique. Nous considérons maintenant la même plaque éclairée sous la même incidence, mais avec une cohérence temporelle réduite: la source possède une largeur spectrale $\Delta\lambda$ autour de la longueur d'onde centrale λ_0 . Nous supposons que l'épaisseur h est très supérieure à la longueur de cohérence L de la source, donnée par $L = \lambda_0^2 / \Delta\lambda$. Nous négligeons la dispersion des matériaux dans l'intervalle spectral $\Delta\lambda$, et dans un premier temps nous considérons que le matériau de la plaque est parfaitement transparent (le cas d'un matériau absorbant sera envisagé en G.1.c). Sous ces hypothèses, les paragraphes qui suivent décrivent trois approches pour déterminer les réflexivités et transmissivités incohérentes de la lame.

Méthode n°1: intégration spectrale

En lumière non monochromatique, l'intensité dans les directions réfléchiée ou transmise est la somme des intensités dues à chaque composante monochromatique de la source dans les mêmes directions. Comme h est très grand devant L , le terme non constant $\cos \beta$ des coefficients (4.110) oscille très rapidement entre -1 et +1 quand λ varie dans l'intervalle spectral $\Delta\lambda$. On peut par conséquent calculer la somme des transmissivités monochromatiques par l'intégrale suivante:

$$T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} T_c(\beta) d\beta \quad (4.111)$$

La primitive de $T_c(\beta)$ est analytique; l'intégration de (4.111) mène à l'expression de la transmissivité incohérente:

$$T = \frac{T_{I-II} T_{II-III}}{1 - R_{I-II} R_{II-III}} \quad (4.112)$$

En utilisant la même méthode pour déterminer la réflexivité incohérente, on obtient:

$$R = \frac{R_{I-II} + R_{II-III} - 2R_{I-II} R_{II-III}}{1 - R_{I-II} R_{II-III}} \quad (4.113)$$

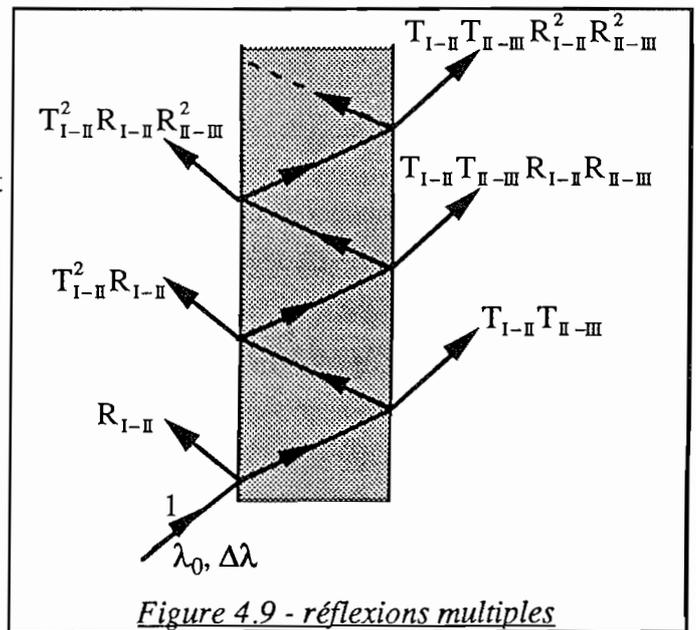
Les expressions (4.112) et (4.113) ne dépendent pas de l'épaisseur de la lame; l'introduction

des relations (4.108) dans (4.112) et (4.113) permet de vérifier la loi de conservation de l'énergie: $R+T=1$.

Dans l'article qui constitue l'annexe C, nous avons utilisé la même approche pour déterminer les EDQMs d'un réseau situé sur un substrat transparent épais: **les EDMs pour chaque longueur d'onde sont calculées par le modèle d'ondes couplées, et leur intégration sur $\Delta\lambda$ donne les EDQMs**. Comme la dépendance des EDMs en fonction de la longueur d'onde est compliquée, l'intégration spectrale est effectuée numériquement. La mise en œuvre de cette méthode ne demande qu'une adaptation très simple d'un programme d'ondes couplées existant. Elle a aussi l'avantage d'être valable pour une cohérence temporelle arbitraire: aucune hypothèse sur la longueur de cohérence n'est nécessaire. Les fonctions $EDM(\lambda)$ sont fortement oscillantes: pour obtenir une bonne précision, l'échantillonnage du spectre nécessaire à l'intégration doit être d'autant plus fin que la plaque-substrat est épaisse (voir les exemples numériques de l'annexe C). Cette condition implique souvent des durées d'exécution excessives: la lenteur de ces calculs nous a amené à rechercher des méthodes plus efficaces.

Méthode n°2: addition incohérente des réflexions multiples

La deuxième approche est similaire à une méthode utilisée en éclairage cohérent. On sait qu'il est possible de déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de la lame par la sommation d'une série infinie d'amplitudes obtenues par réflexions multiples; on peut appliquer le même principe en éclairage incohérent: dans ce cas les ondes multiples n'interfèrent pas, et la sommation s'effectue sur leurs intensités. Les intensités multiples transmises à travers la plaque sont:



$T_{I-II} T_{II-III}, T_{I-II} T_{II-III} R_{I-II} R_{II-III}, T_{I-II} T_{II-III} R_{I-II}^2 R_{II-III}^2, \dots, T_{I-II} T_{II-III} R_{I-II}^n R_{II-III}^n, \dots$

Les premiers termes de la série sont représentés dans la figure 4.9 ci-contre. La sommation de toutes ces contributions donne directement la même expression de la transmisivité T que dans la relation (4.112). Les intensités multiples réfléchies sont:

$R_{I-II}, T_{I-II}^2 R_{II-III}, T_{I-II}^2 R_{I-II} R_{II-III}^2, \dots, T_{I-II}^2 R_{I-II}^n R_{II-III}^{n+1}, \dots$

La série des termes précédents converge vers:

$$R = R_{I-II} + \frac{T_{I-II}^2 R_{II-III}}{1 - R_{I-II} R_{II-III}} \tag{4.114}$$

L'introduction de la première des équations (4.108) dans (4.114) mène à la même expression de R que dans la relation (4.113).

Dans l'annexe D, nous avons utilisé la même méthode pour déterminer les EDQMs d'un réseau situé sur un substrat transparent épais: **quand un réseau est déposé sur la plaque, les intensités multiples proviennent à la fois des réflexions sur l'interface avec l'extérieur et des rétrodiffractions sur le réseau.** Chaque nouvelle diffraction sur le réseau crée de nouvelles contributions en intensité, calculées par le modèle d'ondes couplées, qui s'ajoutent dans toutes les directions diffractées. Ce modèle utilise donc l'hypothèse de cohérence parfaite dans le réseau et d'incohérence totale dans le substrat. La sommation des séries infinies d'intensités multiples est compliquée (voir l'appendice de l'annexe C); dans le cas de diffraction à deux ondes (réseau de Bragg), elle mène cependant à **des expressions très simples des QMDEs**, qui permettent des calculs rapides et précis. Dans l'annexe C, des comparaisons numériques montrent que les résultats de ce modèle sont semblables à ceux de l'intégration spectrale effectuée avec un échantillonnage très fin du spectre.

A cause de la complexité de la sommation des séries, cette analyse paraît difficile à généraliser à la diffraction avec un nombre arbitraire d'ordres de diffraction. La simplicité des formules obtenues nous a poussés à rechercher un modèle plus simple qui aboutirait aux mêmes résultats. Ce modèle est présenté au paragraphe suivant et traité en détail en §G.2.

Méthode n°3: détermination de l'intensité totale réfractée

Une analyse différente permet de retrouver les mêmes expressions pour les coefficients d'une lame à faces planes et parallèles. On désigne par X l'intensité totale de l'onde réfractée dans le milieu II (voir figure 4.10). La plaque étant considérée comme parfaitement transparente, l'intensité totale de l'onde réfléchie sur l'interface II-III est $R_{II-III}X$. L'intensité X est la somme de deux contributions: la transmission de l'onde incidente d'intensité unitaire du milieu I, et la réflexion de l'onde rétropropagative d'intensité $R_{II-III}X$ sur l'interface I-II dans le milieu II. Comme ces deux contributions

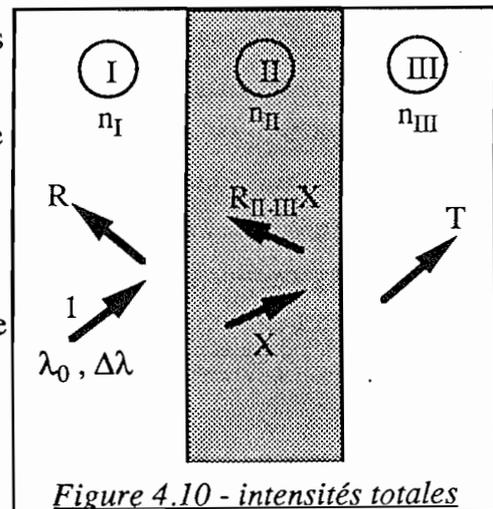


Figure 4.10 - intensités totales

n'interfèrent pas, l'expression de X peut être obtenue à partir de la relation suivante:

$$X = T_{I-II} + R_{I-II}R_{II-III}X \quad (4.115)$$

(puisque l'intensité incidente est choisie unitaire, X est sans dimension)

On trouve:

$$X = \frac{T_{I-II}}{1 - R_{I-II}R_{II-III}} \quad (4.116)$$

La transmissivité de la plaque s'obtient simplement en multipliant X par la transmissivité du dioptre II-III. Cette opération donne à nouveau l'expression (4.112) obtenue par les autres approches. L'intensité totale réfléchie dans le milieu I est la somme de l'intensité réfléchie de l'onde incidente et de l'intensité transmise par l'onde rétropropagative $R_{II-III}X$ du milieu II:

$$R = R_{I-II} + R_{II-III}X \quad (4.117)$$

L'introduction de (4.108) et de (2.116) dans (4.117) mène à une expression de la réflexivité semblable à la formule (4.113) trouvée par les autres méthodes.

Du point de vue algébrique, cette approche est plus simple que les précédentes: la résolution se résume à trouver la racine d'une équation du premier degré en X. Cette simplicité permet **une adaptation facile au cas du réseau déposé sur un substrat épais**, en utilisant l'hypothèse de cohérence parfaite dans le réseau et d'incohérence totale dans le substrat: la résolution consiste à **déterminer les inconnues X_i , intensités totales dans les directions diffractées à l'intérieur du substrat**, à partir des EDMs du réseau et des coefficients de réflexions du dernier dioptre. Les calculs se résument à la résolution d'un système linéaire et à un produit matrice-vecteur. On verra dans la partie G.2 qu'**il est facile d'appliquer cette analyse à la diffraction suivant un nombre d'ordres N arbitraire**, et que la restriction à deux ondes de ce modèle donne les mêmes formules que celles trouvées par réflexions et diffractions multiples dans l'annexe C.

G.1.c - Cas d'un substrat absorbant

Nous avons considéré jusqu'ici que le substrat était parfaitement transparent. Supposons maintenant qu'il soit absorbant: nous représentons par A l'atténuation de l'intensité lors d'une traversée de la plaque; en introduisant ce facteur dans l'une quelconque des trois approches décrites, on peut montrer que les expressions (4.112) et (4.113) de la transmissivité et de la réflexivité deviennent:

$$\begin{cases} T = \frac{AT_{I-II}T_{II-III}}{1 - A^2R_{I-II}R_{II-III}} \\ R = R_{I-II} + \frac{A^2T_{I-II}^2R_{II-III}}{1 - A^2R_{I-II}R_{II-III}} \end{cases} \quad (4.118)$$

Pour $A < 1$, on trouve bien sûr $R+T < 1$: la quantité $1-R-T$ représente l'énergie perdue par absorption dans la plaque. On remarque que les coefficients (4.118) peuvent être obtenus directement de (4.112) et de (4.113) en remplaçant T_{II-III} et R_{II-III} respectivement par AT_{II-III} et par A^2R_{II-III} .

G.2 - Détermination des EDOMs d'un réseau déposé sur un substrat épais par le calcul des intensités totales des ordres diffractés dans le substrat

Les deux premières approches théoriques de la diffraction quasi-monochromatique par un réseau situé sur une plaque transparente épaisse, l'intégration spectrale et les séries d'intensités multiples, sont décrites dans l'annexe C. Nous expliquons ici la méthode qui consiste à déterminer directement les intensités totales qui se propagent dans les directions diffractées à l'intérieur de la plaque.

G.2.a - Description préliminaire

On considère un élément diffractif constitué d'un réseau plan périodique limité d'un côté par un substrat épais et homogène, similaire à la plaque transparente de la partie G.1 (épaisseur h et indice n_{II}). Le réseau est caractérisé par son épaisseur d . Les indices des milieux extérieurs sont toujours représentés par n_I et n_{III} . Comme précédemment, le composant est éclairé par une onde plane quasi-monochromatique d'intensité unitaire, de largeur spectrale $\Delta\lambda$ centrée sur la longueur d'onde λ_0 . La lumière est polarisée suivant une direction arbitraire. L'angle d'incidence dans le milieu I est $\theta_I^{(0)}$. Notre hypothèse principale stipule que la longueur de cohérence $L = \lambda_0^2 / \Delta\lambda$ est très inférieure à l'épaisseur h du substrat, mais assez grande par rapport à l'épaisseur d du réseau pour assurer sa diffraction cohérente. De plus, nous supposons en premier lieu que le substrat est parfaitement transparent et que les ordres de diffraction considérés sont propagatifs.

Dans le cas le plus général (cf. modèle d'ondes couplées multi-ondes décrit en D.3), N ordres diffractés émergent de part et d'autre du réseau. Les ondes diffractées dans le milieu II (substrat) sont partiellement réfléchies dans le milieu II à l'interface II-III, et partiellement transmises dans le milieu III. Des ondes rétropropagatives existent donc dans le milieu II, qui sont diffractées à nouveau par le réseau vers les milieux I et II. D'après la loi des réseaux, ces diffractions n'engendrent pas de nouvelles directions de propagation, mais elles ont une influence sur l'intensité de chacun des ordres diffractés existants. L'effet du réseau est de coupler l'énergie de chaque onde incidente dans toutes les ondes émergentes; l'effet du substrat épais est la sommation en intensité des contributions à un même ordre.

Pour toutes les incidences possibles sur le réseau, nous avons besoin de connaître les EDOMs à la longueur d'onde λ_0 , calculées en supposant le substrat semi-infini du côté des z positifs (voir figure 4.11). On suppose que ces efficacités sont obtenus par le modèle d'ondes couplées du second ordre présenté précédemment. On définit ainsi les EDOMs:

- pour l'onde plane incidente dans le milieu I avec l'angle $\theta_I^{(0)}$, $\eta_{I-I}^{(0)(i)}$ et $\eta_{I-II}^{(0)(i)}$ sont les EDOMs dans l'ordre i diffracté respectivement dans les milieux I et II;
- pour une onde plane rétropropagative d'ordre ℓ dans le milieu II incidente sur le réseau,

$\eta_{II-I}^{(\ell)(i)}$ et $\eta_{II-II}^{(\ell)(i)}$ sont les EDMs dans l'ordre i diffracté respectivement dans les milieux I et II. Dans notre hypothèse principale, nous considérons que la lumière est monochromatique à l'intérieur du réseau; par conséquent, les EDMs $\eta_{I-I}^{(0)(i)}$, $\eta_{I-II}^{(0)(i)}$, $\eta_{II-I}^{(\ell)(i)}$ et $\eta_{II-II}^{(\ell)(i)}$ restent constantes quand la longueur d'onde varie dans l'intervalle $\Delta\lambda$. Si le réseau est non absorbant, la loi de conservation de l'énergie incidente, démontrée en D.1, implique:

$$\begin{cases} \sum_{i=-v}^{N-v-1} \eta_{I-I}^{(0)(i)} + \sum_{i=-v}^{N-v-1} \eta_{I-II}^{(0)(i)} = 1 \\ \sum_{i=-v}^{N-v-1} \eta_{II-I}^{(\ell)(i)} + \sum_{i=-v}^{N-v-1} \eta_{II-II}^{(\ell)(i)} = 1 \quad \ell \in \{-v, -v+1, \dots, N-v-1\} \end{cases} \quad (4.119)$$

(l'hypothèse d'un réseau non absorbant n'est pas nécessaire pour notre analyse; les relations précédentes serviront seulement à des vérifications).

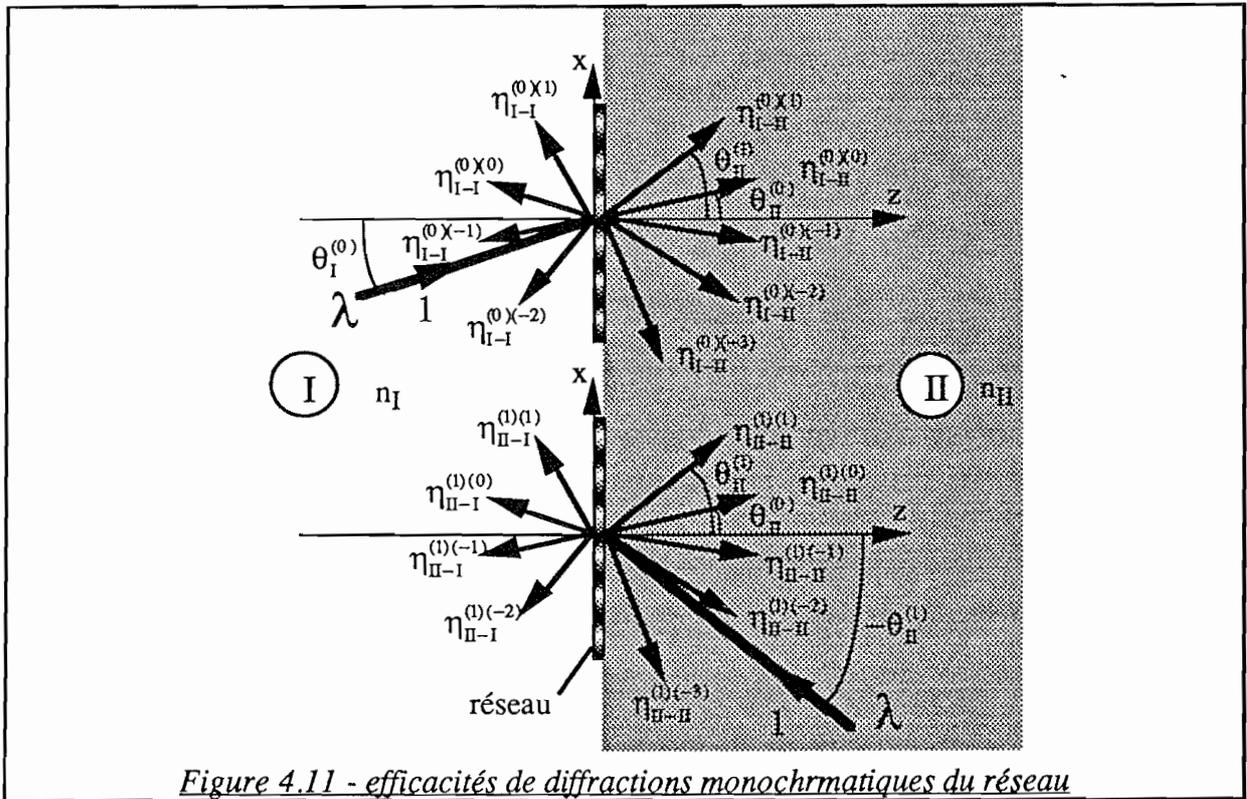


Figure 4.11 - efficacités de diffractions monochromatiques du réseau

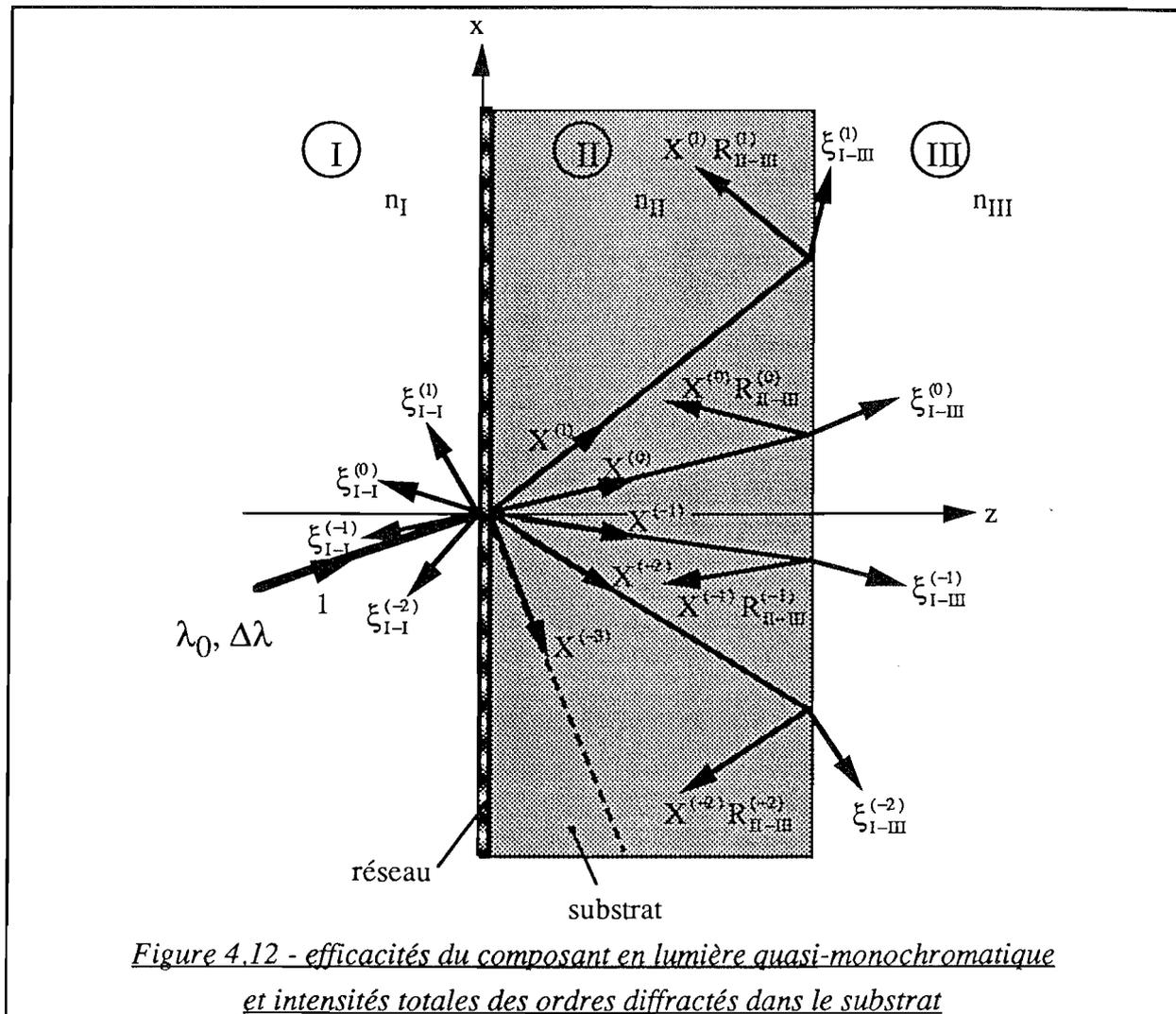
Il nous faut définir également la réflexivité $R_{II-III}^{(i)}$ et la transmissivité $T_{II-III}^{(i)}$ d'un ordre diffracté $n^o i$ sur l'interface entre les milieux II et III. On a la relation:

$$R_{II-III}^{(i)} + T_{II-III}^{(i)} = 1 \quad (4.120)$$

G.2.b - Détermination des EDQMs

Nous cherchons maintenant à déterminer les coefficients $\xi_{I-III}^{(i)}$ et $\xi_{I-I}^{(i)}$, qui désignent les EDQMs respectivement dans l'ordre i diffracté par l'ensemble du composant vers le milieu III,

et dans l'ordre i rétrodiffracté vers le milieu I. Les notations $\xi_{I-III}^{(i)}$ et $\xi_{I-I}^{(i)}$ sont représentées dans la figure 4.12.



Nous utilisons la notation $X^{(i)}$ pour représenter l'intensité totale dans la direction de l'ordre $n^{\circ}i$ se propageant vers les z positifs à l'intérieur du substrat. Après réflexion de $X^{(i)}$ sur le dernier dioptre, l'intensité dans la direction de l'ordre i rétropropagatif est $R_{II-III}^{(i)} X^{(i)}$. Chaque ordre ℓ dans le milieu II est diffracté par le réseau et apporte une contribution $R_{II-III}^{(\ell)} X^{(\ell)} \eta_{II-II}^{(\ell)(i)}$ à l'intensité $X^{(i)}$ de l'ordre i . L'onde incidente du milieu I diffracte également dans la direction de $X^{(i)}$, avec l'efficacité $\eta_{I-II}^{(0)(i)}$. Comme l'épaisseur du substrat est très supérieure à la longueur de cohérence, ces contributions n'interfèrent pas; $X^{(i)}$ est donc égal à la somme des intensités:

$$X^{(i)} = \sum_{\ell=-v}^{N-v-1} R_{II-III}^{(\ell)} X^{(\ell)} \eta_{II-II}^{(\ell)(i)} + \eta_{I-II}^{(0)(i)} \quad i \in \{-v, -v+1, \dots, N-v-1\} \quad (4.121)$$

Les relations (4.) forment un système linéaire de N équations à N inconnues $X^{(i)}$. Les intensités $X^{(i)}$ sont donc calculées à l'aide d'une routine classique d'inversion de systèmes

linéaires. La connaissance des intensités diffractées $X^{(i)}$ permet la détermination des EDQM du composant diffractif. Si on considère la transmission de la $i^{\text{ème}}$ intensité $X^{(i)}$ du milieu II dans le milieu III, on obtient:

$$\xi_{\text{I-III}}^{(i)} = T_{\text{II-III}}^{(i)} X^{(i)} \quad i \in \{-v, -v+1, \dots, N-v-1\} \quad (4.122)$$

Les intensités diffractées dans le milieu I par l'onde incidente du milieu I et par les ondes rétropropagatives du milieu II contribuent à chaque efficacité rétrodiffractée dans le milieu I. Les EDQMs dans le milieu I sont données par:

$$\xi_{\text{I-I}}^{(i)} = \eta_{\text{I-I}}^{(0)(i)} + \sum_{\ell=-v}^{N-v-1} R_{\text{II-III}}^{(\ell)} X^{(\ell)} \eta_{\text{II-I}}^{(\ell)(i)} \quad i \in \{-v, -v+1, \dots, N-v-1\} \quad (4.123)$$

On voit que les relations (4.121), (4.122) et (4.123) fournissent un moyen simple de déterminer les EDQMs du composant. Si le réseau, comme le substrat, est parfaitement transparent, l'introduction des relations (4.119) et (4.120) dans (4.121), (4.122) et (4.123) permet de vérifier algébriquement la conservation de l'énergie:

$$\sum_{i=-v}^{N-v-1} \xi_{\text{I-I}}^{(i)} + \sum_{i=-v}^{N-v-1} \xi_{\text{I-III}}^{(i)} = 1 \quad (4.124)$$

Cette propriété constitue pour nous une première vérification du calcul.

G.2.c - Cas d'un substrat absorbant

La description précédente était initialement restreinte au cas d'un substrat parfaitement transparent dans lequel tous les ordres considérés sont propagatifs. Nous considérons maintenant que le substrat est absorbant, et/ou que certains des N ordres retenus dans l'analyse sont évanescents. Dans tous les cas, la notation $A^{(i)}$ est choisie pour représenter l'atténuation de l'intensité due à une traversée de la plaque dans la direction $\theta_{\text{II}}^{(i)}$. Comme pour la lame à face plane et parallèle traitée en G.1.b, on peut montrer que les formules (4.121), (4.122) et (4.123) sont encore vraies en présence d'absorption et/ou d'ordres évanescents, à condition de remplacer dans ces expressions les coefficients $T_{\text{II-III}}^{(i)}$ et $R_{\text{II-III}}^{(i)}$ respectivement par $A^{(i)} T_{\text{II-III}}^{(i)}$ et $A^{(i)2} R_{\text{II-III}}^{(i)}$.

G.2.d - Cas de la diffraction à deux ondes

Si la diffraction par le réseau s'effectue dans le régime de Bragg (réseau épais), nous avons vu en IV.4 qu'elle peut être correctement décrite par un modèle à deux ondes. Si seulement les deux ordres de diffraction 0 et u sont considérés, les relations (4.121), (4.122) et (4.123) mènent aux formules suivantes pour les EDQM dans le milieu III:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{I-III}^{(0)} = T^{(0)} \frac{\eta_{I-II}^{(0)(0)} (1 - R^{(u)} \eta_{II-II}^{(u)(u)}) + \eta_{I-II}^{(0)(u)} R^{(u)} \eta_{II-II}^{(u)(0)}}{D} \\ \xi_{I-III}^{(u)} = T^{(u)} \frac{\eta_{I-II}^{(0)(u)} (1 - R^{(0)} \eta_{II-II}^{(0)(0)}) + \eta_{I-II}^{(0)(0)} R^{(0)} \eta_{II-II}^{(0)(u)}}{D} \end{array} \right. \quad (4.125)$$

et pour les EDQM dans le milieu I:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{I-I}^{(0)} = \eta_{I-I}^{(0)} + R^{(0)} \eta_{II-I}^{(0)(0)} \frac{\eta_{I-II}^{(0)(0)} (1 - R^{(u)} \eta_{II-II}^{(u)(u)}) + \eta_{I-II}^{(0)(u)} R^{(u)} \eta_{II-II}^{(u)(0)}}{D} \\ \quad + R^{(u)} \eta_{II-I}^{(u)(0)} \frac{\eta_{I-II}^{(0)(u)} (1 - R^{(0)} \eta_{II-II}^{(0)(0)}) + \eta_{I-II}^{(0)(0)} R^{(0)} \eta_{II-II}^{(0)(u)}}{D} \\ \xi_{I-I}^{(-1)} = \eta_{I-I}^{(u)} + R^{(u)} \eta_{II-I}^{(u)(u)} \frac{\eta_{I-II}^{(0)(u)} (1 - R^{(0)} \eta_{II-II}^{(0)(0)}) + \eta_{I-II}^{(0)(0)} R^{(0)} \eta_{II-II}^{(0)(u)}}{D} \\ \quad + R^{(0)} \eta_{II-I}^{(0)(u)} \frac{\eta_{I-II}^{(0)(0)} (1 - R^{(u)} \eta_{II-II}^{(u)(u)}) + \eta_{I-II}^{(0)(u)} R^{(u)} \eta_{II-II}^{(u)(0)}}{D} \end{array} \right. \quad (4.126)$$

Dans les expressions précédentes, D est défini par

$$D = (1 - R^{(0)} \eta_{II-II}^{(0)(0)}) (1 - R^{(u)} \eta_{II-II}^{(u)(u)}) - R^{(0)} \eta_{II-II}^{(u)(0)} R^{(u)} \eta_{II-II}^{(0)(u)} \quad (4.127)$$

Ces formules sont identiques à celles trouvées en annexe C par le modèle des réflexions et diffractions multiples. Ainsi, comme dans le cas de la lame à faces planes et parallèles, les deux méthodes aboutissent aux mêmes expressions: cela constitue une validation supplémentaire de notre analyse. Dans l'annexe D, la sommation des séries d'intensités multiples est compliquée, et n'a été réalisée que pour la diffraction à deux ondes; la détermination directe des intensités totales des ordres diffractés dans le substrat fait intervenir des calculs beaucoup plus simples, même pour une diffraction dans un nombre d'ordres N arbitraire: en ce sens, cette dernière approche est la plus puissante, car elle peut se généraliser facilement.

G.2.e - Récapitulation

La mise en œuvre du modèle que nous avons présenté s'effectue de la façon suivante: N+1 ensembles différents de conditions aux limites, correspondant à l'incidence $\theta_1^{(0)}$ dans le milieu I et aux N incidences $-\theta_{II}^{(i)}$ dans le substrat, sont appliqués dans le modèle d'ondes couplées afin de déterminer les EDMs du réseau $\eta_{I-I}^{(0)(i)}$, $\eta_{I-II}^{(0)(i)}$, $\eta_{II-I}^{(\ell)(i)}$ et $\eta_{II-II}^{(\ell)(i)}$; les coefficients de réflexion et de transmission en intensité du dioptré II-III sont calculés par les formules de Fresnel; ensuite, les intensités $X^{(i)}$ sont obtenues par la résolution du système (4.121), et les EDQMs sont calculées par les relations (4.122) et (4.123). Les essais numériques en diffraction à deux ondes, présentés dans l'annexe C, montrent que cet algorithme est beaucoup plus rapide, à précision équivalente, que la méthode d'intégration spectrale.

L'intérêt de ce modèle ne se limite pas au calcul de la diffraction par un réseau holographique déposé sur un substrat épais. L'analyse précédente est adaptable à divers types de composants diffractifs, et peut se généraliser facilement à des structures périodiques "encastrées" où plusieurs couches d'épaisseur supérieure à la longueur de cohérence sont présentes. Nous avons également envisagé une application de ce modèle à des calculs de diffusion et de piégeage optique dans des cellules solaires multicouches à interfaces rugueuses à base de silicium amorphe **LEB93**.

ANNEXES

ANNEXE A

Diffraction plane en polarisation transverse magnétique

A.1 - Notations

La diffraction plane d'un réseau en polarisation TE a été étudiée en détail au chapitre Z. En polarisation TM, nous appliquons la même méthode de résolution. Aussi traitons-nous le cas TM d'une façon plus concise, mais en donnant toutes les formules nécessaires au calcul.

On suppose connu le développement en série de Fourier de l'inverse du carré de l'indice complexe:

$$\frac{1}{n^2(x,z)} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{n}_i \exp[ji(K_x x + K_z z)] \quad (\text{A.1})$$

Le vecteur champ magnétique de l'onde polarisée TM est parallèle à l'axe y ; l'équation de propagation s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{n^2(x,z)} \frac{\partial h_y(x,z)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{n^2(x,z)} \frac{\partial h_y(x,z)}{\partial z} \right) + k_0^2 h_y(x,z) = 0 \quad (\text{A.2})$$

L'équation de Maxwell $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = -j\omega\epsilon\vec{E}$, utile dans la suite de l'exposé, donne:

$$E_x(x,z) = \frac{-j}{k_0 n^2(x,z)} \frac{\partial h_y(x,z)}{\partial z} \quad (\text{A.3})$$

A.2 - Modèle à ondes multiples

Comme dans le cas TE, on utilise les développements fondamentaux des composantes tangentielles des champs:

$$\begin{cases} h_y(x,z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_y^{(i)}(z) \exp(jk_x^{(i)} x) \\ E_x(x,z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E_x^{(i)}(z) \exp(jk_x^{(i)} x) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

où les dépendances en x sont imposées par le théorème de Floquet (formules (Z.18)).

En introduisant les développements (Z.1), (A.1) et (A.4) dans les équations (A.2) et (A.3), on obtient après projection sur la base $(x \rightarrow e^{jk_x^{(i)} x})_{i \in \mathbb{Z}}$ (cf. cas TE) les équations d'ondes couplées suivantes:

$$\begin{cases} \frac{dE_x^{(i)}(z)}{dz} = \frac{j}{k_0} \left(k_z^{(i)2} h_y^{(i)}(z) - k_x^{(i)} \sum_{\ell \neq i} k_x^{(\ell)} \hat{n}_{i-\ell} e^{j(i-\ell)K_x z} h_y^{(\ell)}(z) \right) \\ \frac{dh_y^{(i)}(z)}{dz} = jk_0 \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \tilde{n}_{i-\ell} e^{j(i-\ell)K_x z} E_x^{(\ell)}(z) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

où l'on a noté:

$$k_z^{(i)} = \sqrt{k_0^2 - \hat{n}_{i-\ell} k_x^{(i)2}}, \quad i \in \mathbf{Z} \quad (\text{A.6})$$

Si l'on introduit dans les équations (A.5) les facteurs $e^{jk_x z}$ ($i \in \mathbf{Z}$), on peut obtenir un système d'équations différentielles à coefficients constants dont les inconnues sont les fonctions de z ($z \rightarrow E_x^{(i)}(z)e^{-jk_x z}$) et ($z \rightarrow h_y^{(i)}(z)e^{-jk_x z}$):

$$\begin{cases} \frac{d(E_x^{(i)}(z)e^{-jk_x z})}{dz} = -j \left(iK_z E_x^{(i)}(z)e^{-jk_x z} - \frac{k_z^{(i)2}}{k_0} h_y^{(i)}(z)e^{-jk_x z} + \frac{k_x^{(i)}}{k_0} \sum_{\ell \neq i} k_x^{(\ell)} \hat{n}_{i-\ell} h_y^{(\ell)}(z)e^{-jk_x z} \right) \\ \frac{d(h_y^{(i)}(z)e^{-jk_x z})}{dz} = -j \left(iK_z h_y^{(i)}(z)e^{-jk_x z} - k_0 \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \tilde{n}_{i-\ell} E_x^{(\ell)}(z)e^{-jk_x z} \right) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

A l'instar du cas TE (voir équations (Z.23) à (Z.34), un nombre fini N d'ordres diffractés sont retenus et la résolution numérique des équations couplées nécessite la diagonalisation de la matrice $[\mathbf{M}]$ formée par les coefficients du système (A.7). Ici $[\mathbf{M}]$ est définie par:

$$[\mathbf{M}] = -j \begin{bmatrix} K_z[\Delta] & k_0[\Phi] \\ k_0[\Psi] & K_z[\Delta] \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

où $[\Delta]$ est donnée par la relation (Z.27); $[\Phi]$ et $[\Psi]$ sont déterminés par les coefficients:

$$\begin{cases} \Phi_{i,i} = -\frac{k_z^{(i-v)2}}{k_0^2} \\ i \neq \ell : \Phi_{i,\ell} = \frac{k_x^{(i-v)} k_x^{(\ell-v)}}{k_0^2} \hat{n}_{i-\ell} & (i, \ell) \in \{0, 1, \dots, N-1\}^2 \\ \Psi_{i,\ell} = -\tilde{n}_{i-\ell} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

v est le nombre d'ordres négatifs retenus pour le calcul.

La suite de la résolution, jusqu'à l'expression de la matrice caractéristique, est semblable au cas TE déjà traité. On se reportera donc aux relations (Z.29) à (Z.34) pour obtenir finalement la formulation:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ E_x^{(i-v)}(z_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ h_y^{(i-v)}(z_1) \\ \vdots \end{bmatrix} = [\mathbf{P}(z_1)] \begin{bmatrix} e^{-e_0(z_2-z_1)} & & & 0 \\ & e^{-e_1(z_2-z_1)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{-e_{2N-1}(z_2-z_1)} \end{bmatrix} [\mathbf{P}(z_2)]^{-1} \begin{bmatrix} \vdots \\ E_x^{(i-v)}(z_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ h_y^{(i-v)}(z_2) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

A.3 - Modèle à deux ondes

Dans l'approximation à deux ondes, on considère que seules les amplitudes transmise et diffractée dans un ordre utile u sont non négligeables. La détermination de l'ordre utile est discutée au chapitre Z. On utilise les développements à deux ondes suivants:

$$\begin{cases} h_y(x, z) = h_y^{(0)}(z) \exp(jk_x^{(0)}x) + h_y^{(u)}(z) \exp(jk_x^{(u)}x) \\ E_x(x, z) = E_x^{(0)}(z) \exp(jk_x^{(0)}x) + E_x^{(u)}(z) \exp(jk_x^{(u)}x) \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

En introduisant l'expression précédente du champ magnétique dans l'équation de Helmholtz (A.2) et en effectuant les projections usuelles, on obtient le système d'équations différentielles couplées:

$$\begin{cases} \hat{n}_0 \frac{d^2 h_y^{(0)}}{dz^2} + k_z^{(0)2} h_y^{(0)} + \hat{n}_{-u} e^{-juK_z z} \left(\frac{d^2 h_y^{(u)}}{dz^2} - juK_z \frac{dh_y^{(u)}}{dz} - k_x^{(0)} k_x^{(u)} h_y^{(u)} \right) = 0 \\ \hat{n}_0 \frac{d^2 h_y^{(u)}}{dz^2} + k_z^{(u)2} h_y^{(u)} + \hat{n}_u e^{juK_z z} \left(\frac{d^2 h_y^{(0)}}{dz^2} + juK_z \frac{dh_y^{(0)}}{dz} - k_x^{(0)} k_x^{(u)} h_y^{(0)} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

où $k_z^{(0)}$ et $k_z^{(u)}$ sont donnés par la relation (A.6).

On cherche les solutions sous la forme:

$$\begin{cases} h_y^{(0)} = r^{(0)} e^{j\varphi z} \\ h_y^{(u)} = r^{(u)} e^{j(\varphi + uK_z)z} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

On peut alors montrer que φ est solution de l'équation

$$\hat{n}_0^2 (\varphi^2 - k_z^{(0)2}) [(\varphi + uK_z)^2 - k_z^{(u)2}] = \hat{n}_{-u} \hat{n}_u [k_x^{(0)} k_x^{(u)} + \varphi(\varphi + uK_z)]^2 \quad (\text{A.14})$$

et que $r^{(0)}$ et $r^{(u)}$ vérifient:

$$r^{(u)} = r^{(0)} \frac{\hat{n}_0}{\hat{n}_{-u}} \frac{k_z^{(0)2} - \varphi^2}{k_x^{(0)} k_x^{(u)} + \varphi(\varphi + uK_z)} \quad (\text{A.15})$$

On appelle $\varphi_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$ les racines du polynôme (A.14). Les solutions du système (A.12) s'écrivent:

$$\begin{cases} h_y^{(0)}(z) = \sum_{i=0}^3 r_i^{(0)} \exp(j\varphi_i z) \\ h_y^{(u)}(z) = \sum_{i=0}^3 r_i^{(0)} c_i \exp(j(\varphi_i + uK_z)z) \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

avec:

$$c_i = \frac{\hat{n}_0}{\hat{n}_u} \frac{k_z^{(0)2} - \varphi_i^2}{k_x^{(0)} k_x^{(u)} + \varphi_i(\varphi_i + uK_z)}, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (\text{A.17})$$

L'équation de Maxwell (A.3) entraîne:

$$\begin{cases} E_x^{(0)}(z) = \frac{1}{k_0} \sum_{i=0}^3 r_i^{(0)} [\hat{n}_0 \varphi_i + \hat{n}_{-u} c_i (\varphi_i + uK_z)] \exp(j\varphi_i z) \\ E_x^{(u)}(z) = \frac{1}{k_0} \sum_{i=0}^3 r_i^{(0)} [\hat{n}_u \varphi_i + \hat{n}_0 c_i (\varphi_i + uK_z)] \exp(j(\varphi_i + uK_z)z) \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

On définit la matrice $[\mathbf{P}(z)]$ à partir des coefficients de (A.16) et de (A.18):

$$\begin{cases} P_{0,i}(z) = \frac{\hat{n}_0 \varphi_i + \hat{n}_{-u} c_i (\varphi_i + uK_z)}{k_0} \\ P_{1,i}(z) = \frac{\hat{n}_u \varphi_i + \hat{n}_0 c_i (\varphi_i + uK_z)}{k_0} \cdot e^{juK_z} , i \in \{0,1,2,3\} \\ P_{2,i}(z) = 1 \\ P_{3,i}(z) = c_i \cdot e^{juK_z} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

De la même manière que dans le cas TE à deux ondes, entre deux coordonnées arbitraires z_1 et z_2 , on peut alors trouver la relation:

$$\begin{bmatrix} E_x^{(0)}(z_1) \\ E_x^{(u)}(z_1) \\ h_y^{(0)}(z_1) \\ h_y^{(u)}(z_1) \end{bmatrix} = [\mathbf{P}(z_1)] \begin{bmatrix} e^{-j\varphi_0(z_2-z_1)} & & & 0 \\ & e^{-j\varphi_1(z_2-z_1)} & & \\ & & e^{-j\varphi_2(z_2-z_1)} & \\ 0 & & & e^{-j\varphi_3(z_2-z_1)} \end{bmatrix} [\mathbf{P}(z_2)]^{-1} \begin{bmatrix} E_x^{(0)}(z_2) \\ E_x^{(u)}(z_2) \\ h_y^{(0)}(z_2) \\ h_y^{(u)}(z_2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

ANNEXE B:

Compléments sur l'algorithme de résolution

Cet annexe est un article consacré à l'algorithme de résolution des équations d'ondes couplées que nous avons déjà présenté (en Français) au chapitre IV. Les trois premières sections de l'article (introduction, formalisme des matrices caractéristiques, algorithme) sont redondantes; leur lecture n'est donc pas indispensable. La quatrième section présente des tests et des résultats numériques que nous avons obtenus pour différents types de réseaux, et met en évidence la stabilité de l'algorithme dans les divers cas traités. Enfin l'appendice de cet article consitue une démonstration, pour un réseau diélectrique, de la possibilité de répartir convenablement les valeurs propres des matrices caractéristique.

(L'article a été soumis pour publication à la revue J. Opt. Soc. Am. -A).

A NEW ALGORITHM FOR THE RIGOROUS COUPLED-WAVE ANALYSIS OF GRATING DIFFRACTION

Nicolas CHATEAU and Jean-Paul HUGONIN

Institut d'Optique Théorique et Appliquée - Unité Associée au C.N.R.S. n°14

Université de PARIS-Sud - BP 147 91403 ORSAY Cedex

ph. n°: (33) (1) 69 41 68 28

We propose a new algorithm, based on the rigorous coupled-wave theory, for calculating the diffraction of light by a grating. The algorithm overcomes numerical difficulties due to evanescent modes that usually represent a practical limitation of the rigorous model. The stability is obtained by distinguishing in the computation the growing and the decaying inhomogeneous modes. The method is particularly useful in the case of a stack of gratings with the same period; this includes for example surface relief gratings and depth modulated gratings. We give numerical examples and comparisons with former results.

I - INTRODUCTION

Volume gratings have found applications¹ in various areas such as integrated optics, optical data processing and computing, holography and spectroscopy. Their diffraction characteristics have stimulated many investigations¹⁻²⁰ over more than two decades (the references²⁻³ provide an excellent review of grating modelisation). Since the analysis of Kogelnik⁴, the coupled-wave approach has been extensively studied. This theory has raised a wide interest because of its good physical insight and of the simplicity of its mathematical resolution. The Kogelnik model⁴ has the advantage of an analytic formulation, but its accuracy is limited by several approximations. Further research on the coupled-wave model resulted in more rigorous formulations⁵⁻⁷ in new solving methods and algorithms⁵⁻⁸, and in a generalisation to numerous physical cases. The coupled-wave theory was extended to a variety of periodically modulated structures: planar transmission and transmission volume gratings⁴⁻¹¹ (possibly slanted and absorbing), surface relief gratings¹²⁻¹⁵, gratings with multiple coating layers¹⁶, non-uniform (or attenuated) gratings¹⁷, multiple superimposed gratings¹⁸, anisotropic gratings¹⁹. The model can be applied to structures of arbitrary profile and thickness, illuminated at any incidence angle and with any polarization.

Moharam and Gaylord⁶ proposed a rigorous multiwave coupled-wave model easily implementable on a computer. The mathematical resolution involves two main steps:

- calculation of the eigenvalues and eigenvectors of a constant coefficient matrix that characterises the diffracted wave propagation and coupling (the eigenvectors represent the grating characteristic modes)
- resolution of a linear system deduced from the boundary conditions. The system coefficients contain exponential functions of the products: " - eigenvalue \times thickness " .

Although this method gives accurate results in various cases^{6,9-11,15}, it becomes numerically unstable as the grating thickness increases: the linear system coefficients corresponding to the eigenvalues with a negative real part become too large and produce erratic results or overflows. In practice, these numerical difficulties restrict the field of applications of the general coupled-wave theory. Recently, Pai and Awada²⁰ proposed a stable method for gratings of any thickness; they found the solutions in the form of an iterative one-way wave multiple reflection series. The computation is simple, but the calculation of the terms in the series (typically 30) is time consuming.

In this paper, we propose a rigorous and efficient method for calculating the coupled-wave diffraction of gratings with arbitrary thickness without numerical problems. In the first section, we derive an analysis of grating diffraction that is equivalent, but not identical, to that of Moharam and Gaylord. We present a different matrix formulation that is required in the second section for the explanation of an original and stable algorithm. This new algorithm allows the resolution of the boundary field matching equations without calculating exponential values of large positive numbers. It applies to cascaded gratings with equal fringe spacing, to gratings embedded between multilayer coatings and to surface relief gratings. Furthermore, the algorithm is easy to compute, and its execution time is quite small compared to that of the eigenvalue searching routines. In the last section, we present numerical results for surface relief gratings and for non-uniform slanted volume gratings.

II - CHARACTERISTIC MATRIX FORMALISM OF WAVE DIFFRACTION INSIDE A GRATING

We consider a planar volume grating with arbitrary index profile. For simplicity, we suppose that the incident light has transverse electric (TE) polarization and a known internal incidence angle, and we assume that the fringe planes are perpendicular to the plane of incidence. In addition, we suppose that the grating has finite conductivity, thus we neglect all surface currents. At the moment, we make no hypothesis about the media that surround the grating.

II.a - Notations (see fig.1)

$$j = \sqrt{-1}$$

z axis normal to the grating surface

x axis intersection between the grating surface and the plane of incidence

y axis perpendicular to x and z

Λ grating fringe spacing

\vec{K} grating vector $\left(\|\vec{K}\| = \frac{2\pi}{\Lambda} \right)$ perpendicular to the fringe plane, thus laying in the

plane of incidence.

θ' internal incidence angle

n_0 average refractive index

λ wavelength in free space

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ corresponding wave number (time dependence: $\exp(-j\omega t)$)

$\vec{h} = \mu c \vec{H}$ defines the modified magnetic field, introduced to simplify the notations.

the following Fourier expansion represents the periodic modulation:

$$n^2(x, z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{n}_i \exp[ji(K_x x + K_z z)] \quad (2.1)$$

II.b - Derivation of the coupled-wave equations

We analyse the propagation of waves inside the grating using the tangential components $E_y(x, z)$ and $h_x(x, z)$. These components of the electromagnetic field are continuous on the boundaries. We introduce the fundamental coupled-wave expansions:

$$\begin{cases} E_y(x, z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E_y^{(i)}(z) \exp(jk_x^{(i)} x) \\ h_x(x, z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_x^{(i)}(z) \exp(jk_x^{(i)} x) \end{cases} \quad (2.2)$$

where the x components of wavevectors are obtained as follows:

$$\text{phase matching with the incident wave yields: } k_x^{(0)} = k_0 n_0 \sin(\theta') \quad (2.3)$$

$$\left(k_x^{(i)} \right)_{i \in \mathbf{Z}} \text{ is given by the Floquet condition: } k_x^{(i)} = k_x^{(0)} + iK_x, \quad i \in \mathbf{Z} \quad (2.4)$$

Phase matching along boundaries implies that components $\left(k_x^{(i)} \right)_{i \in \mathbf{Z}}$ are continuous; thus the field sub-components $E_y^{(i)}(z)$ and $h_x^{(i)}(z)$ also are continuous on the grating boundaries.

The Maxwell equation $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = j\omega\mu\vec{H}$ yields:

$$h_x(x, z) = \frac{j}{k_0} \frac{\partial E_y(x, z)}{\partial z} \quad (2.5)$$

The substitution of the fields expansions (2.1) and (2.2) into equation (2.5) and the projection of the resulting relation on the basis of functions of variable x ($x \rightarrow \exp(jk_x^{(i)}x)$) _{$i \in \mathbf{Z}$} give:

$$\frac{dE_y^{(i)}(z)}{dz} = -jk_0 h_x^{(i)}(z) \quad , \quad i \in \mathbf{Z} \quad (2.6)$$

In the equation of Helmholtz

$$\nabla^2 E_y(x, z) + k_0^2 n^2(x, z) E_y(x, z) = 0 \quad (2.7)$$

after substitution of the index modulation and of the electric field by expansions (2.1) and (2.2), we introduce expression (2.6) to eliminate the derivatives of $E_y(x, z)$, and we project

the resulting equation on ($x \rightarrow \exp(jk_x^{(i)}x)$) _{$i \in \mathbf{Z}$} . We obtain:

$$\frac{dh_x^{(i)}(z)}{dz} = -j \left(\frac{k_z^{(i)2}}{k_0} E_y^{(i)}(z) + k_0 \sum_{\ell \neq i} \tilde{n}_{i-\ell} \exp[j(i-\ell)K_z z] E_y^{(\ell)}(z) \right) \quad , \quad i \in \mathbf{Z} \quad (2.8)$$

where:

$$k_z^{(i)2} = k_0^2 \tilde{n}_0 - k_x^{(i)2} \quad , \quad i \in \mathbf{Z} \quad (2.9)$$

In equations (2.8), we introduce the factors $e^{jk_z z}$, $i \in \mathbf{Z}$ to obtain a differential system with constant coefficients where the unknowns are the functions of variable z

($z \rightarrow E_y^{(i)}(z) \exp(-jiK_z z)$) and ($z \rightarrow h_x^{(i)}(z) \exp(-jiK_z z)$):

$$\begin{aligned} \frac{d[h_x^{(i)}(z) \exp(-jiK_z z)]}{dz} = -j \left[iK_z h_x^{(i)}(z) \exp(-jiK_z z) + \frac{k_z^{(i)2}}{k_0} E_y^{(i)}(z) \exp(-jiK_z z) \right. \\ \left. + k_0 \sum_{\ell \neq i} \tilde{n}_{i-\ell} E_y^{(\ell)}(z) \exp(-j\ell K_z z) \right] \quad (i \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

(2.10)

the same operation performed in (2.6) gives:

$$\frac{d[E_y^{(i)}(z) \exp(-jiK_z z)]}{dz} = -j [iK_z E_y^{(i)}(z) \exp(-jiK_z z) + k_0 h_x^{(i)}(z) \exp(-jiK_z z)] \quad , \quad (i \in \mathbf{Z}) \quad (2.11)$$

II.c - Algebraic resolution

Equations (2.10) and (2.11) define a infinite system of first-order differential equations. For the numerical resolution, we must retain a finite number N of diffracted orders. The method is rigorous at the limit $N=+\infty$; practically, N can be chosen sufficiently large for obtaining a good precision.

Then the truncated resulting system may be written in the following matrix form:

$$\frac{d\bar{\mathbf{U}}(z)}{dz} = [\mathbf{M}].\bar{\mathbf{U}}(z) \quad (2.12)$$

where:

$$\text{the } 2N \text{ vector } \bar{\mathbf{U}}(z) \text{ is given by: } \bar{\mathbf{U}}(z) = \begin{bmatrix} \vdots \\ E_y^{(i-v)}(z) \exp[-j(i-v)K_z z] \\ \vdots \\ h_x^{(i-v)}(z) \exp[-j(i-v)K_z z] \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

the first component of each N sub-vector corresponds to $i=0$, the second one to $i=1$, etc... v is the number of negative orders retained; if we choose a set of diffracted orders centred on the zero order, v is equal to the integer part of $\frac{N}{2}$

$[\mathbf{M}]$ is a $2N \times 2N$ matrix with constant coefficients that may be expressed as:

$$[\mathbf{M}] = -j \begin{bmatrix} K_z[\Delta] & k_0[\mathbf{I}_N] \\ k_0[\Omega] & K_z[\Delta] \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

In the preceding expression, the $N \times N$ submatrices are defined as follows:

$[\mathbf{I}_N]$ is the $N \times N$ identity matrix

$[\Delta]$ is a diagonal matrix with elements given by: $\Delta_{i,i} = i - v$, $i \in \{0, \dots, N-1\}$

(2.15)

$$[\Omega] \text{ is defined by: } \begin{cases} \Omega_{i,i} = \frac{k_z^{(i-v)^2}}{k_0^2} & (i, \ell) \in \{0, \dots, N-1\}^2 \\ i \neq \ell : \Omega_{i,\ell} = \bar{n}_{i-\ell} \end{cases} \quad (2.16)$$

The solution of the shift-invariant system (2.12) between two arbitrary coordinates z_2 and z_1 ($z_2 > z_1$) involves a matrix exponential function:

$$\bar{\mathbf{U}}(z_1) = \exp\{-(z_2 - z_1)[\mathbf{M}]\}.\bar{\mathbf{U}}(z_2) \quad (2.17)$$

We shall express the matrix exponential in terms of eigenvectors and eigenvalues of $[\mathbf{M}]$.

Diagonalizing matrix $[\mathbf{M}]$, we obtain:

$$[\mathbf{M}] = [\tilde{\mathbf{P}}][\mathbf{D}][\tilde{\mathbf{P}}]^{-1} \quad (2.18)$$

where:

the columns of matrix $[\tilde{\mathbf{P}}]$ are the eigenvectors of $[\mathbf{M}]$

and $[\mathbf{D}]$ is the diagonal matrix of the eigenvalues of $[\mathbf{M}]$:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} e_0 & & & 0 \\ & e_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & & & e_{2N-1} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Using the definition of the matrix exponential and the associativity of the matrix product, we change relation (2.17) into:

$$\bar{\mathbf{U}}(z_1) = [\tilde{\mathbf{P}}] \exp\{-(z_2 - z_1)[\mathbf{D}]\} [\tilde{\mathbf{P}}]^{-1} \cdot \bar{\mathbf{U}}(z_2) \quad (2.20)$$

II.d - Characteristic matrix

From the coefficients of the eigenvector matrix $[\tilde{\mathbf{P}}]$ we define a new $2N \times 2N$ matrix

$$[\mathbf{P}(z)]: \begin{cases} i \in \{0, \dots, N-1\} : P_{i,\ell}(z) = \exp[j(i - \nu)K_z z] \tilde{P}_{i,\ell} \\ i \in \{N, \dots, 2N-1\} : P_{i,\ell}(z) = \exp[j(i - N - \nu)K_z z] \tilde{P}_{i,\ell} \end{cases} \quad \ell \in \{0, \dots, 2N-1\}, z \in \mathfrak{R} \quad (2.21)$$

Introducing definitions (2.19) and (2.21) at coordinates z_1 and z_2 into relation (2.20), we obtain:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ E_y^{(i-\nu)}(z_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ h_x^{(i-\nu)}(z_1) \\ \vdots \end{bmatrix} = [\mathbf{P}(z_1)] \begin{bmatrix} \exp[-e_0(z_2 - z_1)] & & & 0 \\ & \exp[-e_1(z_2 - z_1)] & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp[-e_{2N-1}(z_2 - z_1)] \end{bmatrix} [\mathbf{P}(z_2)]^{-1} \begin{bmatrix} \vdots \\ E_y^{(i-\nu)}(z_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ h_x^{(i-\nu)}(z_2) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

We define a $2N \times 2N$ characteristic matrix of wave propagation inside the grating by the product: $[\mathbf{P}(z_1)] \exp\{-(z_2 - z_1)[\mathbf{D}]\} [\mathbf{P}(z_2)]^{-1}$. The characteristic matrix relates the initial and final values of electromagnetic field sub-components that are continuous on the boundaries.

II.e - Generalisation of the formalism

We have derived our analysis in the case of the plane diffraction of a TE polarized wave. The rigorous multiwave coupled-wave theory was also used to describe the plane diffraction of a transverse magnetic (TM) incident field¹⁰, the more general conical diffraction of an arbitrarily polarised wave¹¹ and the diffraction by anisotropic gratings¹⁹. These cases were shown to require the resolution of differential systems similar to (2.12), thus they may be represented by a characteristic matrix formulation such as (2.22).

The characteristic matrix formalism is particularly convenient for the modelisation of cascaded gratings with equal spatial period (i.e. same K_x): since the field components in relation (2.22) are continuous on the boundaries, the matrix of the whole stack is simply obtained by multiplying the elementary grating matrices. The case of a grating with non-uniform modulation versus depth is derived in the same manner: as was initially proposed by

Kermish¹⁷, such a grating can be represented by several uniformly modulated slices with same fringe period.

A surface relief dielectric grating may be considered as a particular stack of planar volume gratings¹⁵, where each slice has a binary periodic index. Such a grating is depicted in figure 2. The spatial frequency K_x is common to every slice, but the grating duty cycle may vary through the stack. Thus the representation of a surface relief grating also leads to the case of multiple cascaded gratings with equal period.

Our formalism also applies to the propagation in uniform layer coatings surrounding the grating. In this case, there is no coupling between the diffracted orders. By adapting the Abelès²¹ formalism of wave propagation in stratified media to the case of N propagating waves, it is straightforward to derive a multiwave characteristic matrix similar to (2.22) (in a uniform layer, the eigenvalues are directly found in the form $\pm j\sqrt{k_0^2 n_0^2 - k_x^{(i)}}$).

A generalised characteristic matrix of a spatially periodic structure including m sub-structures (surface gratings, volume gratings and uniform layer coatings, as illustrated in figure 3) is thus expressed in the following form:

$$\prod_{\ell=0}^{m-1} \left([P_\ell(z_\ell)] \exp\{-(z_{\ell+1} - z_\ell)[D_\ell]\} [P_\ell(z_{\ell+1})]^{-1} \right) \quad (2.23)$$

where $(z_k)_{k \in \{0,1,\dots,m\}}$ are the coordinates of the interfaces ($z_0 < z_1 < \dots < z_m$).

II.f - Boundary conditions

We suppose that both external media are homogeneous. When applying the boundary conditions, we need to distinguish between forward and backward propagating waves. We thus designate by $f_F^{(i)}$ and $b_F^{(i)}$ the electric field complex amplitudes of the incident and reflected waves in the first half-space, and we use the Rayleigh field expansions:

$$\begin{cases} E_y(x, z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_F^{(i)} \exp[j(k_x^{(i)}x + k_{Fz}^{(i)}z)] + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_F^{(i)} \exp[j(k_x^{(i)}x - k_{Fz}^{(i)}z)] \\ h_x(x, z) = -\frac{1}{k_0} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_{Fz}^{(i)} f_F^{(i)} \exp[j(k_x^{(i)}x + k_{Fz}^{(i)}z)] + \frac{1}{k_0} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_{Fz}^{(i)} b_F^{(i)} \exp[j(k_x^{(i)}x - k_{Fz}^{(i)}z)] \end{cases} \quad (2.24)$$

where the x components of wavevectors are still defined by relations (2.3) and (2.4) (since these components are constant on the boundaries) and the z components are given by: $k_{Fz}^{(i)} = \sqrt{k_0^2 n_F^2 - k_x^{(i)}}$; n_F is the complex refractive index of the first medium.

We see that the fields in external half-spaces are described either by components $E_y^{(i)}$ and $h_x^{(i)}$, that are more convenient to describe wave propagation inside the modulated structure, or by parameters $f_F^{(i)}$ and $b_F^{(i)}$, that are more intuitive and, as we shall see in the following, allow

a simple writing of the boundary conditions. We derive a $2N \times 2N$ matrix which acts as an interface between both representations at coordinate z_0 (first boundary):

$$[C(z_0)] = \begin{bmatrix} \ddots & & & 0 \\ & \exp(jk_{Fz}^{(i-v)}z_0) & & \\ 0 & & \ddots & 0 \\ \ddots & & & 0 \\ & -\frac{k_{Fz}^{(i-v)}}{k_0} \exp(jk_{Fz}^{(i-v)}z_0) & & \\ 0 & & \ddots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & & & 0 \\ & \exp(-jk_{Fz}^{(i-v)}z_0) & & \\ 0 & & \ddots & 0 \\ \ddots & & & 0 \\ & \frac{k_{Fz}^{(i-v)}}{k_0} \exp(jk_{Fz}^{(i-v)}z_0) & & \\ 0 & & \ddots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

and we get the relation:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ E_y^{(i-v)}(z_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ h_x^{(i-v)}(z_0) \\ \vdots \end{bmatrix} = [C(z_0)] \begin{bmatrix} \vdots \\ f_F^{(i-v)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_F^{(i-v)} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Similar relations can be derived in the last half-space; we denote $f_L^{(i)}$ and $b_L^{(i)}$ the complex amplitudes of the forward and backward propagating waves of the Rayleigh field expansion in the last medium, and $[C(z_m)]$ the interface matrix at coordinate z_m (last boundary).

Introducing the Rayleigh coefficients and the interface matrices in the characteristic matrix relation, we obtain the $2N \times 2N$ matrix relation:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ f_F^{(i-v)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_F^{(i-v)} \\ \vdots \end{bmatrix} = [C(z_0)]^{-1} \cdot \prod_{\ell=0}^{m-1} \left([P_\ell(z_\ell)] \exp\{-(z_{\ell+1} - z_\ell)[D]\} [P_\ell(z_{\ell+1})]^{-1} \right) \cdot [C(z_m)] \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ f_L^{(i-v)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_L^{(i-v)} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

It is now straightforward to apply the usual boundary conditions:

one incident wave is incident in the first half-space with amplitude equal to 1:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ f_F^{(i-v)} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

and there are no backward propagating waves in the last half-space:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ b_L^{(i-v)} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Substituting these vectors into (2.27), we obtain a linear system of $2N$ equations with the $2N$ unknowns $b_F^{(i-v)}$ and $f_L^{(i-v)}$.

When the characteristic matrix is numerically well-behaved (without huge coefficients), system (2.27) is easily solved by classical inversion methods. Generally, several eigenvalues exhibit a negative real part, revealing the existence of growing inhomogeneous modes in the structure; if the grating layer is thick enough, the exponential terms in (2.22) become too large, yielding numerical instabilities or overflows. One solution is to neglect the most inhomogeneous modes of propagation by reducing the number of diffracted orders involved in the calculus: this solution is not satisfactory, except in some limiting cases, because it may induce a significant loss of accuracy. In section III, we propose a general and rigorous method for solving the problem without numerical difficulties.

II.g - Diffraction efficiencies

After the determination of the reflected and transmitted amplitudes $b_F^{(i-v)}$ and $f_L^{(i-v)}$, the reflection and transmission diffraction efficiencies respectively denoted $\eta_F^{(i-v)}$ and $\eta_B^{(i-v)}$ are obtained by the following formulas:

$$\begin{cases} \eta_B^{(i-v)} = \frac{k_{Fz}^{(i-v)}}{k_{Fz}^{(0)}} |b_F^{(i-v)}|^2 \\ \eta_F^{(i-v)} = \frac{k_{Lz}^{(i-v)}}{k_{Fz}^{(0)}} |f_L^{(i-v)}|^2 \end{cases} \quad (2.30)$$

III - ALGORITHM

In this section, we use the following vector notations: incident waves $\vec{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, reflected

waves $\vec{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ b_F^{(i-v)} \\ \vdots \end{bmatrix}$, transmitted waves $\vec{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ f_L^{(i-v)} \\ \vdots \end{bmatrix}$, backward propagating waves in last half-

space $\vec{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$. Thus the $2N$ unknowns of the problem are represented by $\vec{\mathbf{R}}$ and $\vec{\mathbf{T}}$. We

recall that the dimension of all these vectors is N . An eigenvalue has a critical negative real part if the number $\exp(-\text{eigenvalue} \times \text{thickness})$ is too large to be correctly handled, and a critical positive real part if $\exp(+\text{eigenvalue} \times \text{thickness})$ is too large.

Our algorithm makes use of the following property: in a given characteristic matrix, the number of the eigenvalues with critical negative real part is smaller than N , and the maximum number of eigenvalues with critical positive real part is also restricted to N . A demonstration is given in appendix for the case of a non-absorbing grating. In our numerical investigations, this property was always verified even in absorbing gratings (see last example in section IV). By rearranging the position of the eigenvector matrix columns in relation (2.18), it is possible to put the eigenvalues in growing order on the diagonal of matrix $[\mathbf{D}]$. We now suppose that such permutations are performed in each elementary characteristic matrix of relation (2.27).

Relation (2.27) may be rewritten in the following form:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}} \\ \bar{\mathbf{R}} \end{bmatrix} = \prod_{k=0}^{m'-1} [\mathbf{A}_k] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{O}} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

where $m' = 3m + 2$ is the total number of matrices in (2.27); each matrix $[\mathbf{A}_k]$ is either a well-behaved matrix such as $[\mathbf{P}_\ell(z_{\ell+1})]$, $[\mathbf{P}_\ell(z_\ell)]^{-1}$ ($\ell \in \{0, 1, \dots, m-1\}$), $[\mathbf{C}(z_0)]$ and $[\mathbf{C}(z_m)]^{-1}$, or a diagonal matrix of exponential terms. Among these diagonal elements, the first N ones only may be critically large and the N last ones only may be very small.

We divide each matrix $[\mathbf{A}_k]$ in four submatrices:

$$[\mathbf{A}_k] = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}_k^{00}] & [\mathbf{A}_k^{01}] \\ [\mathbf{A}_k^{10}] & [\mathbf{A}_k^{11}] \end{bmatrix}, \quad k \in \{0, 1, \dots, m'-1\} \quad (3.2)$$

and we define two sets of vectors $\bar{\mathbf{X}}_k$ and $\bar{\mathbf{Y}}_k$ of dimension N :

$$\left\{ \begin{array}{l} k \in \{0, 1, \dots, m'-1\} : \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_k \\ \bar{\mathbf{Y}}_k \end{bmatrix} = \left(\prod_{l=k}^{m'-1} [\mathbf{A}_l] \right) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{O}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_{m'} \\ \bar{\mathbf{Y}}_{m'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}} \\ \bar{\mathbf{O}} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

From (3.2) and (3.3), we immediately derive the recurrence relations:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{X}}_{k-1} = [\mathbf{A}_{k-1}^{00}] \cdot \bar{\mathbf{X}}_k + [\mathbf{A}_{k-1}^{10}] \cdot \bar{\mathbf{Y}}_k \\ \bar{\mathbf{Y}}_{k-1} = [\mathbf{A}_{k-1}^{01}] \cdot \bar{\mathbf{X}}_k + [\mathbf{A}_{k-1}^{11}] \cdot \bar{\mathbf{Y}}_k \end{cases}, \quad k \in \{1, 2, \dots, m'\} \quad (3.4)$$

We now seek for two families of $N \times N$ matrices $[\mathbf{P}_k]$ and $[\mathbf{Q}_k]$ that verify:

$$\begin{cases} [\mathbf{P}_k] \cdot \bar{\mathbf{X}}_k = \bar{\mathbf{Y}}_k \\ [\mathbf{Q}_k] \cdot \bar{\mathbf{X}}_k = \bar{\mathbf{T}} \end{cases}, \quad k \in \{0, 1, \dots, m'\} \quad (3.5)$$

We introduce $[\mathbf{P}_k]$ and $[\mathbf{Q}_k]$ into relations (3.4) and eliminate $\bar{\mathbf{X}}_k$ and $\bar{\mathbf{Y}}_k$; we obtain two sets of relations that are together sufficient for equalities (3.4) to be verified:

$$\begin{cases} [\mathbf{P}_{k-1}] = ([\mathbf{A}_{k-1}^{10}] + [\mathbf{A}_{k-1}^{11}][\mathbf{P}_k])([\mathbf{A}_{k-1}^{00}] + [\mathbf{A}_{k-1}^{01}][\mathbf{P}_k])^{-1} \\ [\mathbf{Q}_{k-1}] = [\mathbf{Q}_k]([\mathbf{A}_{k-1}^{00}] + [\mathbf{A}_{k-1}^{01}][\mathbf{P}_k])^{-1} \end{cases}, \quad k \in \{1, 2, \dots, m'\} \quad (3.6)$$

The preceding relations are a descending recurrence definition for $[P_k]$ and $[Q_k]$. The initial terms of the recurrence are obtained from (3.3) and (3.5):

$$\left. \begin{aligned} [P_{m'}] &= N \times N \text{ null matrix} \\ [Q_{m'}] &= N \times N \text{ identity matrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

If $[A_{k-1}]$ is a well behaved matrix, the calculation of $[P_{k-1}]$ and $[Q_{k-1}]$ by the recurrence equations (3.6) yields no problem. If $[A_{k-1}]$ is a diagonal matrix of exponential terms, relations (3.6) simplify into:

$$\left\{ \begin{aligned} [P_{k-1}] &= [A_{k-1}^{11}] [P_k] [A_{k-1}^{00}]^{-1} \\ [Q_{k-1}] &= [Q_k] [A_{k-1}^{00}]^{-1} \end{aligned} \right., \quad k \in \{1, 2, \dots, m'\} \quad (3.8)$$

The calculation of matrix $[A_{k-1}^{11}]$ (the lower-right part of $[A_{k-1}]$) is not problematic, since the large elements belong to the upper-left submatrix $[A_{k-1}^{00}]$. $[A_{k-1}^{00}]$ is a diagonal matrix, and its elements are exponentials of possibly large positive real numbers; thus matrix $[A_{k-1}^{00}]^{-1}$ is diagonal, and its elements are the exponentials of the opposites of the same numbers. Because of the convenient eigenvalue redistribution, the elements of both matrices $[A_{k-1}^{11}]$ and $[A_{k-1}^{00}]^{-1}$ remain of tractable magnitude.

For any value of k , recurrence relations (3.6) are calculated without numerical problems. Starting from the initial values at $k=m'$, their repetition leads to the determination of matrices $[P_0]$ and $[Q_0]$. Then relations (3.3) and (3.5) applied to $k=0$ allow the determination of the $2N$ unknowns:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{R} &= [P_0] \cdot \bar{I} \\ \bar{T} &= [Q_0] \cdot \bar{I} \end{aligned} \right. \quad (3.9)$$

To summarise, the algorithm proceeds as follows: first, $[P_k]$ and $[Q_k]$ are initialized at $k=m'$ using relations (3.7). Then, recurrence relations (3.6) are applied m' times downward through the stack. When matrix $[A_{k-1}]$ is well behaved, equations (3.6) are simply calculated with the help of standard mathematical routines. When $[A_{k-1}]$ is a diagonal matrix of exponential terms, a special matrix inversion routine is required: the coefficients of $[A_{k-1}^{00}]^{-1}$ must be directly calculated by using the opposites of the critical eigenvalues, without calculating $[A_{k-1}^{00}]$. After determining $[P_0]$ and $[Q_0]$, the values of the reflected and transmitted amplitudes are directly obtained by relations (3.9), and the diffraction efficiencies in all the diffracted orders are given by formulas (2.30).

IV - NUMERICAL RESULTS

IV.1 - Surface relief-gratings

Our algorithm is particularly convenient for the coupled-wave modelisation of surface-relief gratings. In the analysis, we saw that such a grating might be simply considered as a stack of cascaded planar volume gratings with binary index. Because of the non-sinusoidal modulation of these elementary index gratings, and because of the possibly large difference between the internal and the external indices, several higher-order harmonics of the index profile are non-negligible and induce a significant coupling involving several higher diffraction orders. Thus an accurate calculation of the diffraction efficiencies has to account for these orders, including the evanescent ones. Beyond a critical groove depth, the classical methods become unstable, while our algorithm still gives stable results with high accuracy.

For comparison, we treat two examples that were presented by Moharam and Gaylord¹⁵. In both cases, the first medium is air, the grating substrate extends to infinity on the positive z side and has a real index $n_0 = \sqrt{2.5}$, and the wavelength in the air is assumed to be equal to the groove spacing ($\lambda = \Lambda$); d represents the groove depth. A plane wave with TE polarization is incident on the grating at the first Bragg angle ($\theta_B = 30^\circ$).

IV.1.a - Rectangular grating (square-wave)

In the first example, the grating has a rectangular groove shape, as shown in figure 4, thus we treat it as a single planar binary index grating with thickness d . We plot on figure 5 the diffracted intensity in order -1 as a function of the groove depth expressed in wavelength units. We compare the results of our algorithm using $N=8$ diffracted orders with the standard 3-waves and 5-waves calculations. The 3-waves results exhibit poor agreement with the two other curves, and become erratic for $\frac{d}{\Lambda} \geq 7.4$ because of too large exponential values. The beginning of the standard 5-waves curve is almost exactly superimposed with the results of our algorithm, but numerical problems occur for $\frac{d}{\Lambda} \geq 3$. Figure 6 represents the efficiency variations of transmitted, reflected and diffracted orders calculated using our new algorithm. These curves are similar to those presented in ref.¹⁵ for groove depths $\frac{d}{\Lambda} \leq 4$. In order to demonstrate good stability, we extended the curves up to $\frac{d}{\Lambda} = 10$. Our algorithm remains stable for much larger values $\left(\frac{d}{\Lambda} > 1000\right)$, that do not correspond to common physical situations. In the analysis, we explained that our formulation and our method of resolution also applied to TM polarization: this is illustrated in figure 7, where we plotted the diffraction efficiencies as functions of the groove depth for the TM case.

IV.1.b - Stairstep grating

The second example is a grating with stairstep profile, that we represent as two cascaded binary gratings with thickness $\frac{d}{2}$. In figure 8, we distinguish two geometries, respectively denoted A and B, corresponding to opposite profiles or incidence angles. The variations of diffraction efficiencies versus the groove depth, with TE polarization, are represented for the two opposite profiles in figure 9. Again, our results are in good agreement with those of ref.¹⁵, and our calculation can be extended to very large values of $\frac{d}{\Lambda}$ without any numerical difficulty.

IV.2 - Holographic volume gratings

In this section, we present numerical results for slanted volume gratings with attenuated index modulation. Both index and absorption gratings are considered. The recording medium is a holographic film with thickness $d=13.5\mu\text{m}$ and refractive index $n_0 = 1.53$, deposited on a glass substrate with index $n_s = 1.5$. The incidence medium is air. At recording, the photosensitive layer is illuminated by two uniform and coherent plane waves with wavelength $\lambda = 500\text{nm}$ and with respective angles of incidence in the air $\theta_1 = -45^\circ$ and $\theta_2 = +30^\circ$. (see fig. 10) The corresponding angles inside the film, $\theta'_1 = -27.5^\circ$ and $\theta'_2 = +19.1^\circ$, define a slanted interference pattern. For greater similarity with a real grating, we account in our model for the absorption of the recording light by the holographic material: the exposure intensity exponentially decays from the surface to the second interface, and we assume that the residual amplitude on the film-substrate interface is half the amplitude on the air-film face. Thus, we write the expression of the recording light intensity inside the film as follows:

$$E(x, z) = 2^{-\frac{z}{d}} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi n_0}{\lambda} (x(\sin \theta'_1 + \sin \theta'_2) + z(\cos \theta'_1 + \cos \theta'_2)) \right] \right\} \quad (4.1)$$

Depending on the material that is used, either an index or an absorption grating is obtained. In both cases, we assume that the energy response of the material is linear, thus the modulation amplitude is exponentially attenuated in the film depth. In our computation, we treat the attenuated grating as a stack of ten cascaded elementary gratings with uniform modulation, and we retain $N=5$ diffracted orders.

IV.2.a - Phase grating

In a holographic material such as photopolymers or dichromated gelatin, the exposition by the interference pattern induces variations of the real part of refractive index. In our simulation, we discretize the modulation over the ten slices assuming the following index response:

$$n(x, z) = n_0 - 0.02 E(x, z) \quad (4.2)$$

Figure 11 represents the angular response of the attenuated index grating, replayed at $\lambda = 500\text{nm}$ with TE polarization, in the -1 and +1 diffracted orders. Figure 12 shows the corresponding results obtained with TM polarization. For a fixed incidence angle of $\theta = -30^\circ$, we printed the eigenvalues of the first characteristic matrix, that corresponds to the closest grating to the air surface. Table 1 contains these values ordered with growing real part. As predicted in the appendix, the opposite of the complex conjugate of each eigenvalue in table 1 is also an eigenvalue.

IV.2.b - Absorption grating

In this case, as for instance in a silver halide photographic plate, variations of the imaginary part of refractive index are obtained. The final index is assumed to be given by:

$$n(x, z) = n_0 + 0.01 j E(x, z) \quad (4.3)$$

Figure 13 shows the angular variations of diffraction efficiency of the attenuated absorption grating, reconstructed at $\lambda = 500\text{nm}$ with TE polarization, in the -1 and +1 diffracted orders. The results for TM polarization are represented in figure 14. As previously, we give an example of eigenvalue distribution in table 1. Confirming the initial assumption of section III, we observe five eigenvalues with negative real part and five with positive real part. Only three pairs of eigenvalues corresponding to non-propagating modes have opposite real parts, and the imaginary parts are all different.

V - CONCLUSION

We derived a characteristic formalism for the rigorous coupled-wave theory of grating diffraction, that applies to planar volume gratings, to surface relief gratings and to stacks of planar gratings with equal period. With the help of this formalism, we proposed a new algorithm that overcomes the usual numerical limitations of the coupled-wave diffraction calculations. We presented numerical results for surface relief gratings and for phase and amplitude nonuniform volume holographic gratings. These results reveal the very good stability of our algorithm. The method allows accurate calculation of diffraction by gratings of arbitrary profile and thickness; it contributes to extend the field of application of the coupled-wave theory.

APPENDIX: JUSTIFICATION OF THE EIGENVALUE REDISTRIBUTION IN THE CASE OF A PURE DIELECTRIC GRATING

In our description of the algorithm (section III), we made the following hypothesis about the matrix $[\mathbf{M}]$ given by relation (2.14): the numbers of eigenvalues with critical negative real part and of those with critical positive real part are smaller than N . We now demonstrate this property in the case of a non-absorbing grating. In this appendix, complex conjugation is represented by a star, and matrix transposition is denoted by symbol T .

We consider an arbitrary eigenvalue x of matrix $[\mathbf{M}]$ and its complex conjugate x^* . We know that x is a root of the characteristic polynomial $p(X)$ of matrix $[\mathbf{M}]$:

$$p(x) = \det([\mathbf{M}] - x[\mathbf{I}_{2N}]) = 0 \quad (\text{A.1})$$

we now calculate the value of $p(X)$ at $X = -x^*$:

$$p(-x^*) = \det([\mathbf{M}] + x^*[\mathbf{I}_{2N}]) = \det \left(\begin{array}{c|c} -jK_z[\Delta] + x^*[\mathbf{I}_N] & -jk_0[\mathbf{I}_N] \\ \hline -jk_0[\mathbf{I}_N] & -jK_z[\Delta] + x^*[\mathbf{I}_N] \end{array} \right) \quad (\text{A.2})$$

If we transpose the matrix in (A.2), the diagonal sub-matrices $-jK_z[\Delta] + x^*[\mathbf{I}_N]$ are not affected and the determinant remains unchanged:

$$p(-x^*) = \det \left(\begin{array}{c|c} -K_z j[\Delta] + x^*[\mathbf{I}_N] & -jk_0[\mathbf{I}_N]^T \\ \hline -jk_0[\mathbf{I}_N]^T & -jK_z[\Delta] + x^*[\mathbf{I}_N] \end{array} \right) \quad (\text{A.3})$$

Since the modulated index is real, the Fourier coefficients of expansion (2.1) verify:

$$\tilde{n}_{-i} = \tilde{n}_i^* \quad (i \in \mathbf{Z}) \quad (\text{A.4})$$

this implies that the $N \times N$ matrix $[\mathbf{I}_N]$ defined by (2.16) is hermitian:

$$[\mathbf{I}_N]^T = [\mathbf{I}_N]^* \quad (\text{A.5})$$

Introducing equality (A.5) in (A.3), and using the fact that both matrices $[\Delta]$ and $[\mathbf{I}_N]$ are real, we obtain:

$$p(-x^*) = \det \left(\begin{array}{c|c} (jK_z[\Delta])^* + x^*[\mathbf{I}_N]^* & (jk_0[\mathbf{I}_N])^* \\ \hline (jk_0[\mathbf{I}_N])^* & (jK_z[\Delta])^* + x^*[\mathbf{I}_N]^* \end{array} \right) \quad (\text{A.6})$$

The permutations between the first and the last N lines, and between the first and the last N columns yield:

$$p(-x^*) = (-1)^{2N} \det \left(\begin{array}{c|c} (jK_z[\Delta])^* + x^*[\mathbf{I}_N]^* & (jk_0[\mathbf{I}_N])^* \\ \hline (jk_0[\mathbf{I}_N])^* & (jK_z[\Delta])^* + x^*[\mathbf{I}_N]^* \end{array} \right) \quad (\text{A.7})$$

thus we recognize the opposite of the complex conjugate of $p(x)$:

$$p(-x^*) = -p(x)^* = 0 \quad (\text{A.8})$$

We have demonstrated that if x is an eigenvalue of matrix $[\mathbf{M}]$, then the opposite of its complex conjugate is also an eigenvalue of $[\mathbf{M}]$. In other words, either the eigenvalue x is pure imaginary, or another eigenvalue exists with same imaginary part and opposite real part.

Thus the numbers of eigenvalues with critical negative real part and of those with critical positive real part are equal.

REFERENCES

1. T.K.Gaylord and M.G.Moharam, "Analysis and applications of optical diffraction by gratings", *proc. IEEE* **73**, 894-937 (1985).
2. R.Petit, ed., *Electromagnetic theory of gratings* (Springer-Verlag, Berlin, 1980).
3. L.Solymar and D.J.Cooke, *Volume holography and volume gratings* (Academic Press, London, 1981).
4. H.Kogelnik, "Coupled wave theory for thick hologram gratings", *Bell System Tech. J.* **48**, 2909-2947 (1969).
5. J.A.Kong, "Second-order coupled-mode equations for spatially periodic media", *J.Opt.Soc.Am.* **67**, 825-829 (1977).
6. M.G.Moharam and T.K.Gaylord, "Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction", *J.Opt.Soc.Am.* **71**, 811-818 (1981).
7. M.V.Vasnetsov, M.S.Soskin and V.B.Taranenko, "Grazing diffraction by volume phase gratings", *Optica Acta* **32**, 891-899 (1985).
8. X.Y.Chen, "Using the finite element method to solve coupled wave equations in volume holograms", *J. Modern Opt.* **35**, 1383-1391 (1988).
9. T.K.Gaylord and M.G.Moharam, "Coupled-wave analysis of reflection gratings", *Appl. Opt.* **20**, 240-244 (1981).
10. M.G.Moharam and T.K.Gaylord, "Rigorous coupled-wave analysis of grating diffraction - E-mode polarization and losses", *J.Opt.Soc.Am.* **72**, 1385-1392 (1982).
11. M.G.Moharam and T.K.Gaylord, "Three-dimensional vector coupled-wave analysis of planar grating diffraction", *J.Opt.Soc.Am.* **73**, 1105-1112 (1983).
12. M.Nevière, *Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille* (1975).
13. D.E.Tremain and K.K.Mei, "Application of the unimoment method to scattering from periodic dielectric structures", *J.Opt.Soc.Am.* **68**, 775-783 (1978).

14. K.C.Chang, V.Shah and T.Tamir, "Scattering and guiding of waves by dielectric gratings with arbitrary profiles", *J.Opt.Soc.Am.* **70**, 804-813 (1980).
15. M.G.Moharam and T.K.Gaylord, "Diffraction analysis of dielectric surface-relief gratings", *J.Opt.Soc.Am.* **72**, 1385-1392 (1982).
16. A.K.Cousins and S.C.Gottschalk, "Application of the impedance formalism to diffraction gratings with multiple coating layers", *Appl.Opt.* **29**, 4268-4271 (1990).
17. D.Kermisch, "Nonuniform sinusoidally modulated dielectric gratings", *J.Opt.Soc.Am.* **59**, 1409-1413 (1969).
18. I.R.Redmond, Ph.D. thesis, Heriot-Watt University, Edimburgh (1989).
19. E.N.Glytsis and T.K.Gaylord, "Three-dimensional (vector) rigorous coupled-wave analysis of anisotropic grating diffraction", *J.Opt.Soc.Am.A* **7**, 1399-1420 (1990).
20. D.M.Pai and K.A.Awada, "Analysis of dielectric gratings of arbitrary profiles and thicknesses", *J.Opt.Soc.Am.A* **8**, 755-762 (1991).

TABLE AND FIGURE CAPTIONS

Table 1: example of eigenvalue distribution, ordered with growing real part, for phase and absorption volume gratings, retaining 5 orders, with wavelength $\lambda=500\text{nm}$ and incidence angle $\theta=-30^\circ$.

Figure 1: grating and incident wave geometry.

Figure 2: representation of a surface relief grating as a stack of planar volume elementary gratings with binary index.

Figure 3: example of compound periodic structure that can be represented by characteristic matrix formalism, including surface-relief gratings, volume gratings and uniform optical layers.

Figure 4: surface relief grating with rectangular profile; the spatial period is equal to the incident wavelength, the angle of incidence is $\theta=30^\circ$.

Figure 5: comparison between the standard and the new algorithm for rectangular surface profile: variations of the -1 order diffraction efficiency as a function of the groove depth in wavelengths, with polarization TE.

Figure 6: variations of the main diffracted orders as functions of the groove depth in wavelengths, for the rectangular surface profile with polarization TE.

Figure 7: variations of the main diffracted orders as functions of the groove depth in wavelengths, for the rectangular surface profile with polarization TM.

Figure 8: two possible geometries for a staircase surface profile; the spatial period is equal to the incident wavelength, the angle of incidence is $\theta=30^\circ$.

Figure 9: variations of the main diffracted orders as functions of the groove depth in wavelengths, for two staircase surface profiles with polarization TE. The zero reflected order for case B is superimposed with that for case A, the other orders for case B are recognizable by their similarity with case A.

Figure 10: holographic recording geometry of a planar volume grating.

Figure 11: angular variations of diffraction efficiencies in +1 and -1 orders for the phase volume grating, with polarization TE.

Figure 12: angular variations of diffraction efficiencies in +1 and -1 orders for the phase volume grating, with polarization TM.

Figure 13: angular variations of diffraction efficiencies in +1 and -1 orders for the absorption volume grating, with polarization TE.

Figure 14: angular variations of diffraction efficiencies in +1 and -1 orders for the absorption volume grating, with polarization TM.

	Phase grating		Absorption grating	
	real	imaginary	real	imaginary
1	-2.4921071	-0.2187540	-2.4802980	-0.2093668
2	-1.1757074	0.1436834	-1.1504568	0.1543284
3	-0.7951013	-0.1281361	-0.7574917	-0.1065848
4	0.0000000	-1.4637870	-0.0158833	1.4090277
5	0.0000000	1.3775048	-0.0052835	1.4090145
6	0.0000000	-1.2813433	0.0102463	-1.4827499
7	0.0000000	1.3987121	0.0109204	-1.3046831
8	0.7951013	-0.1281361	0.7574917	-0.1457060
9	1.1757074	0.1436834	1.1504568	0.1285696
10	2.4921071	-0.2187540	2.4802980	-0.2231450

Table 1

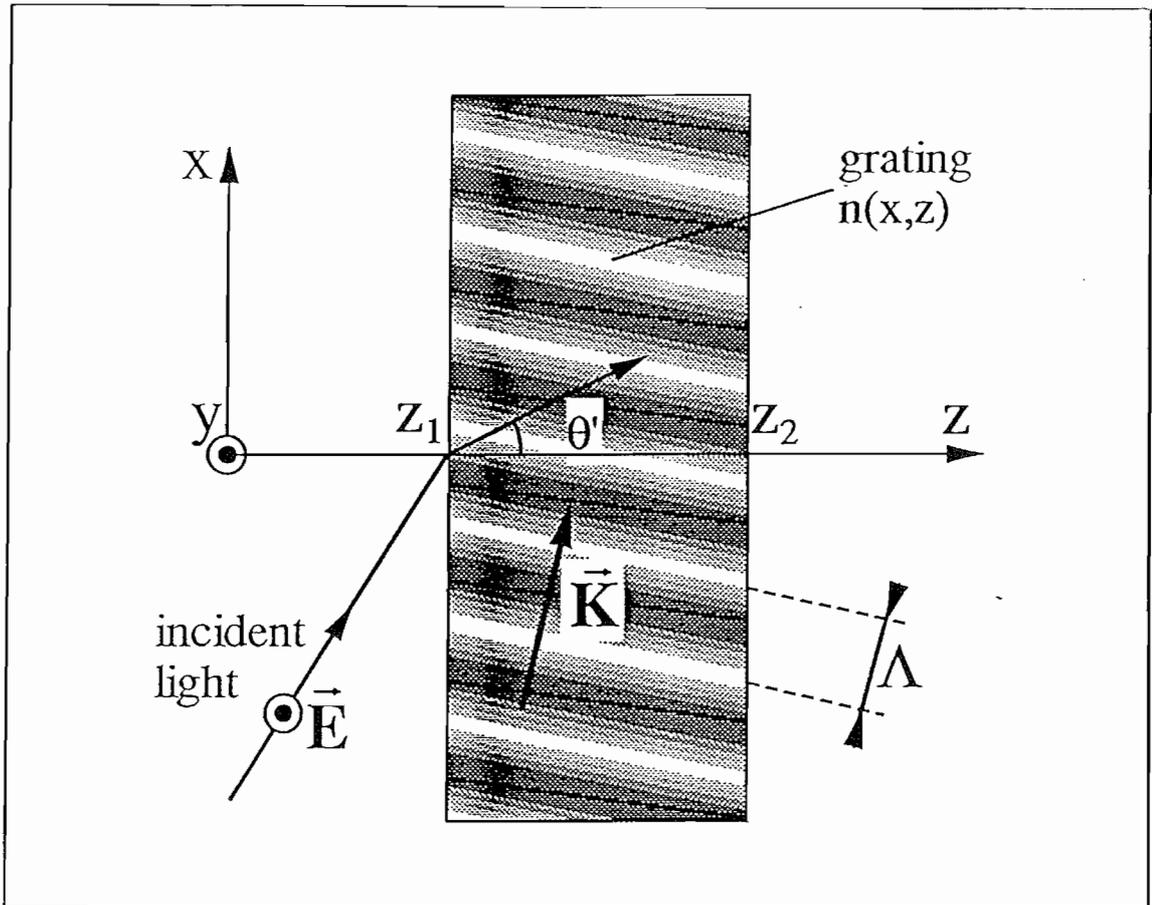


Figure 1

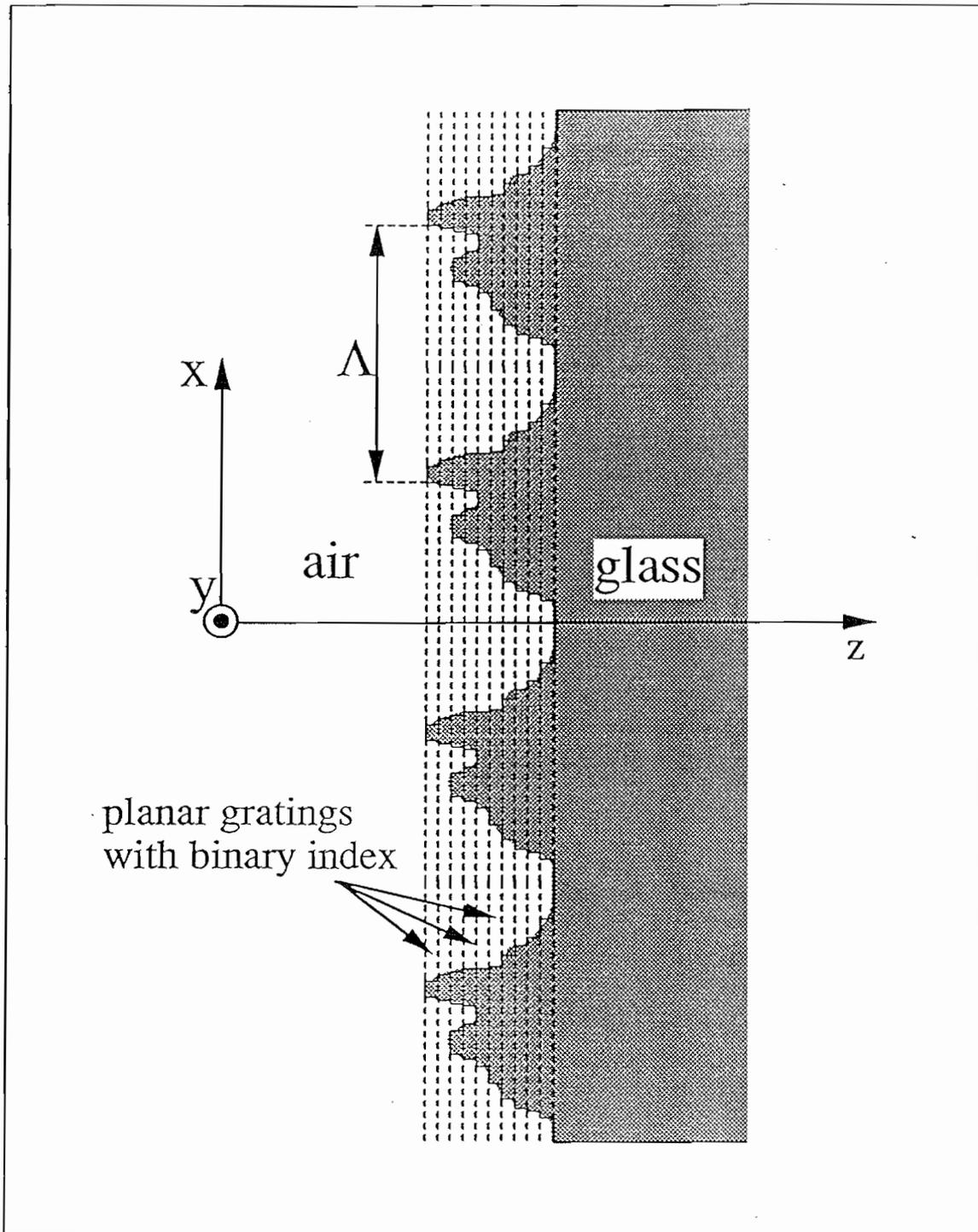


Figure 2

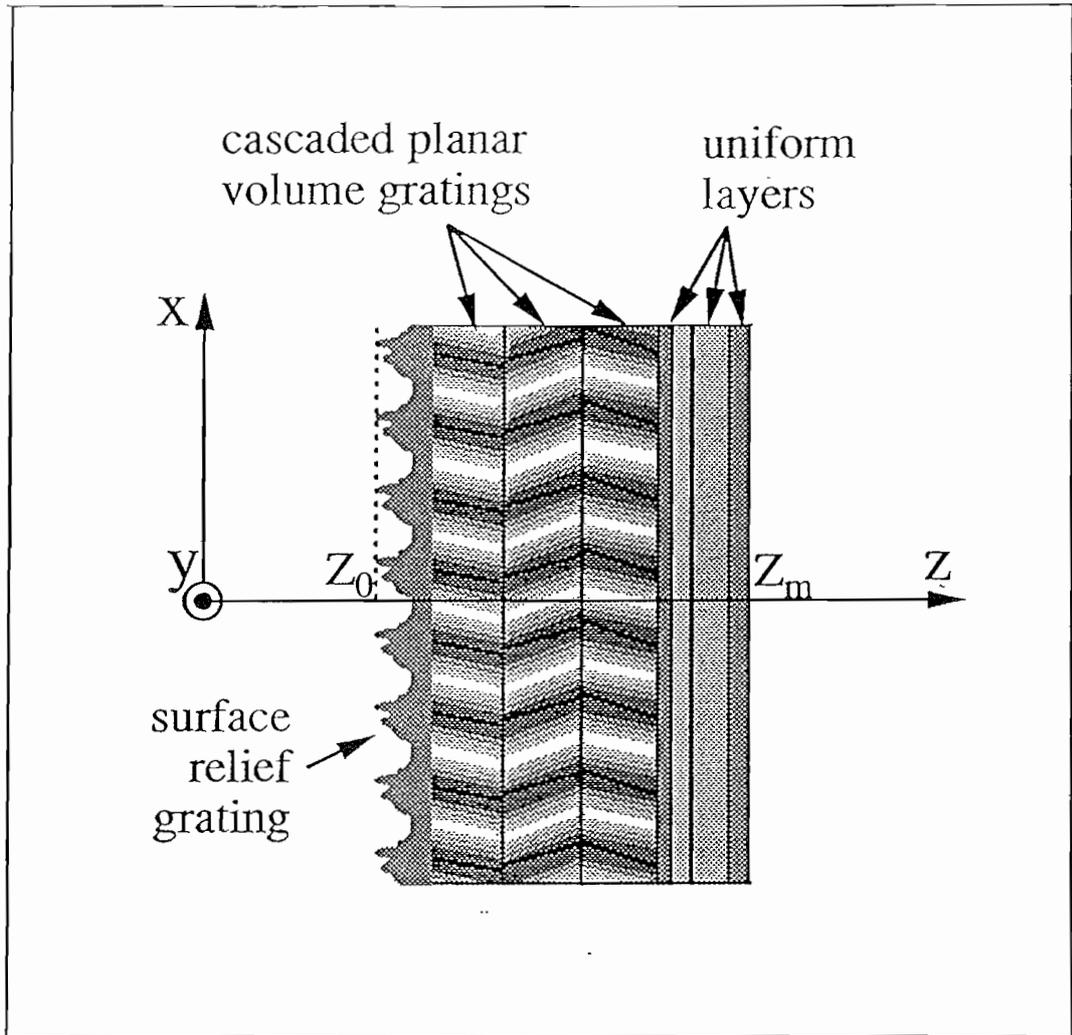


Figure 3

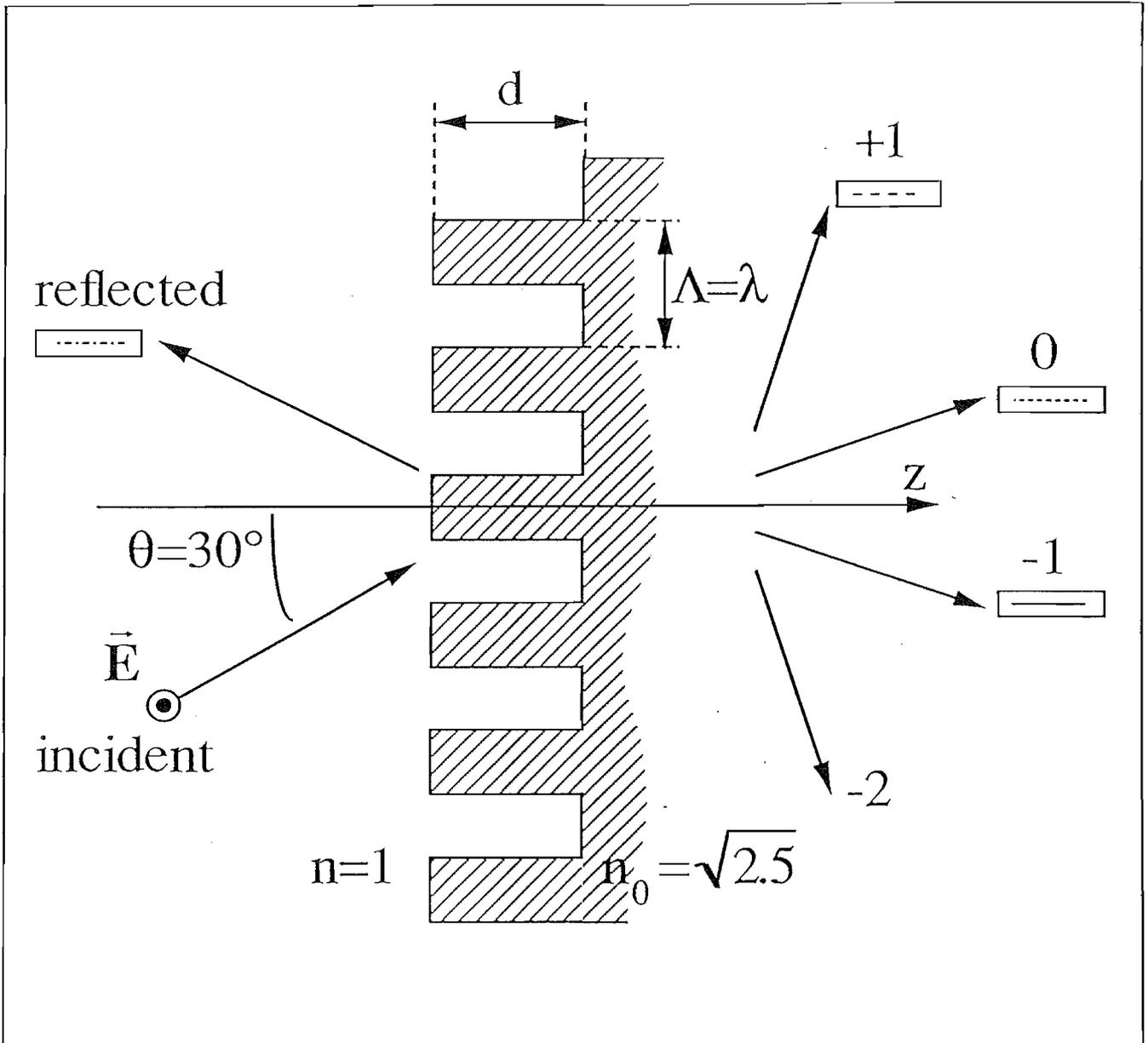


Figure 4

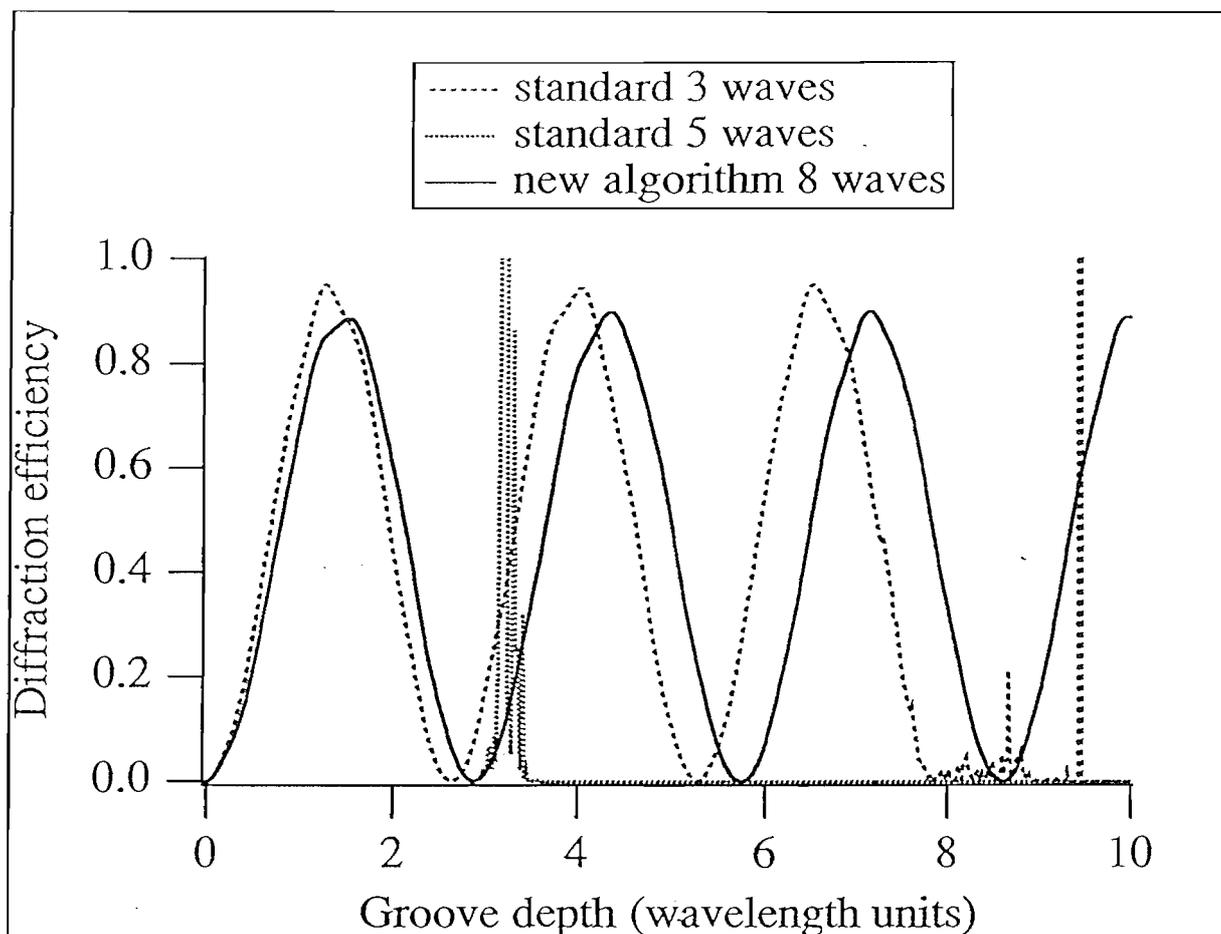


Figure 5

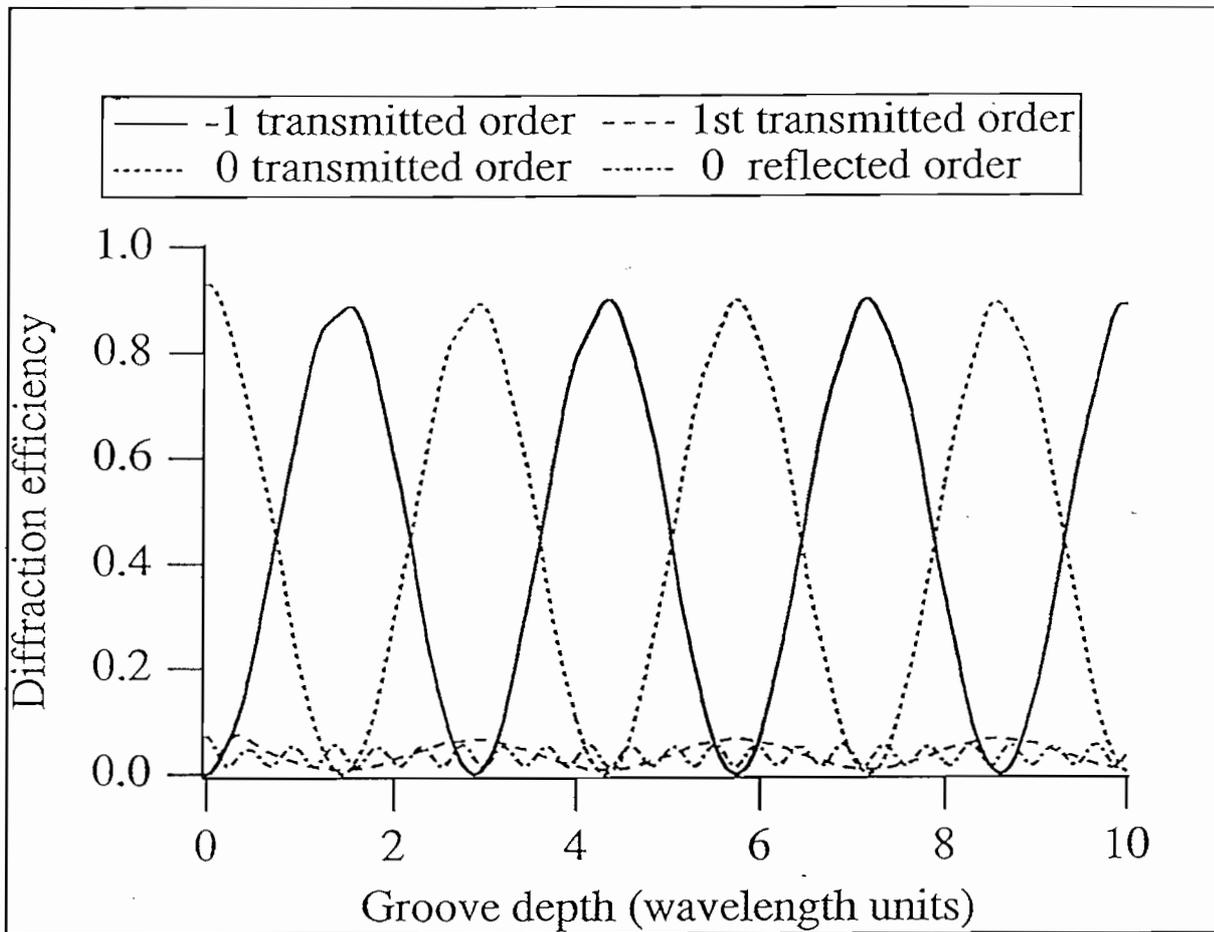


Figure 6

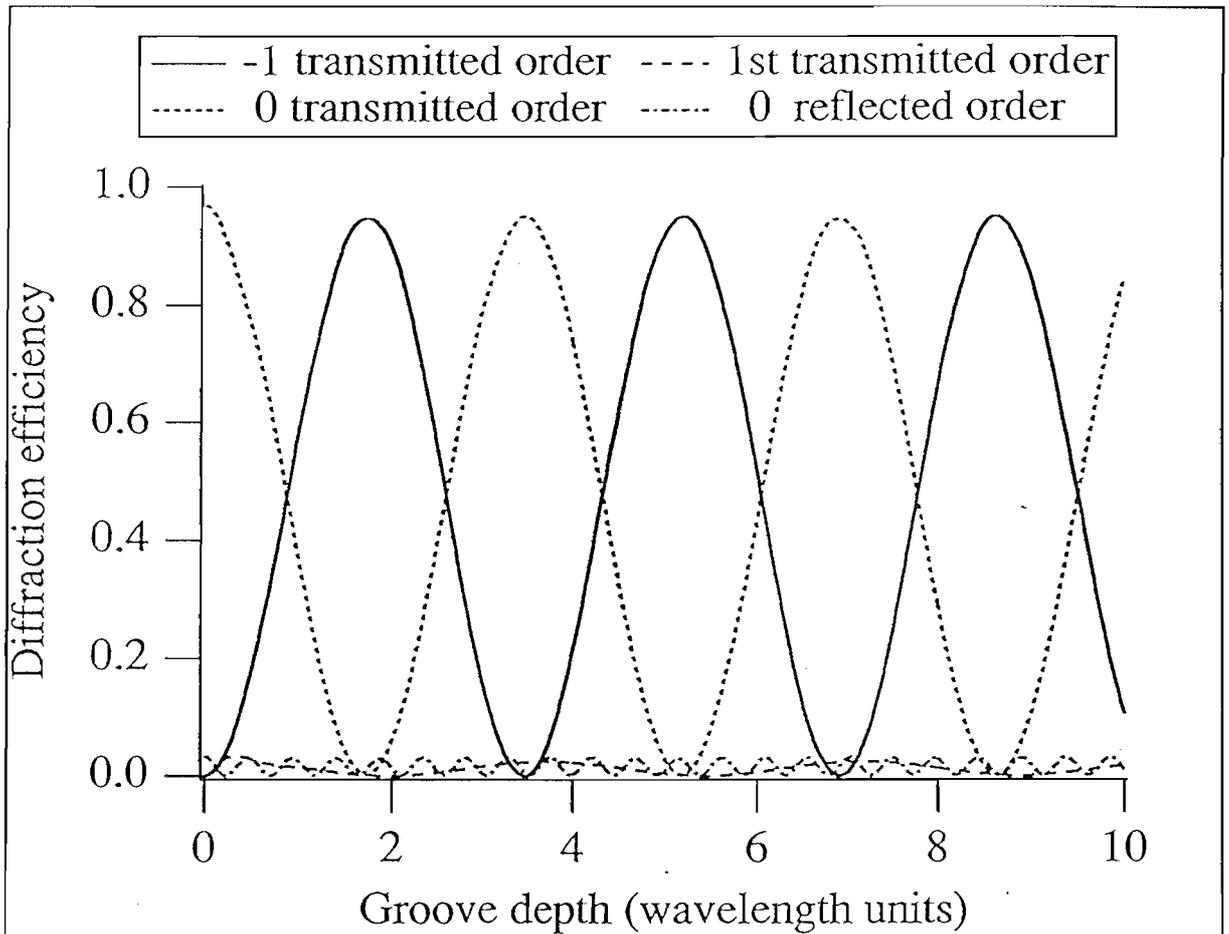


Figure 7

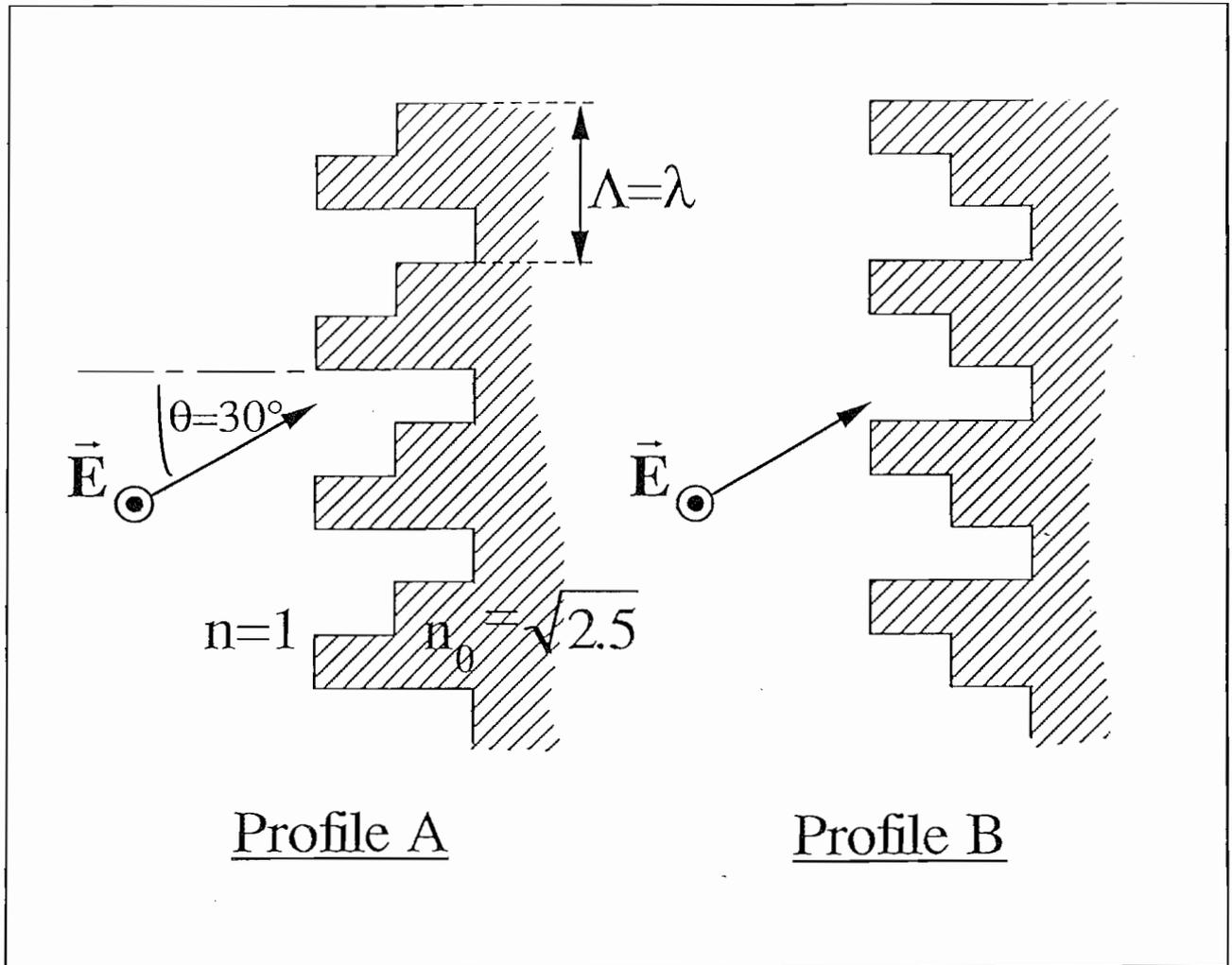


Figure 8

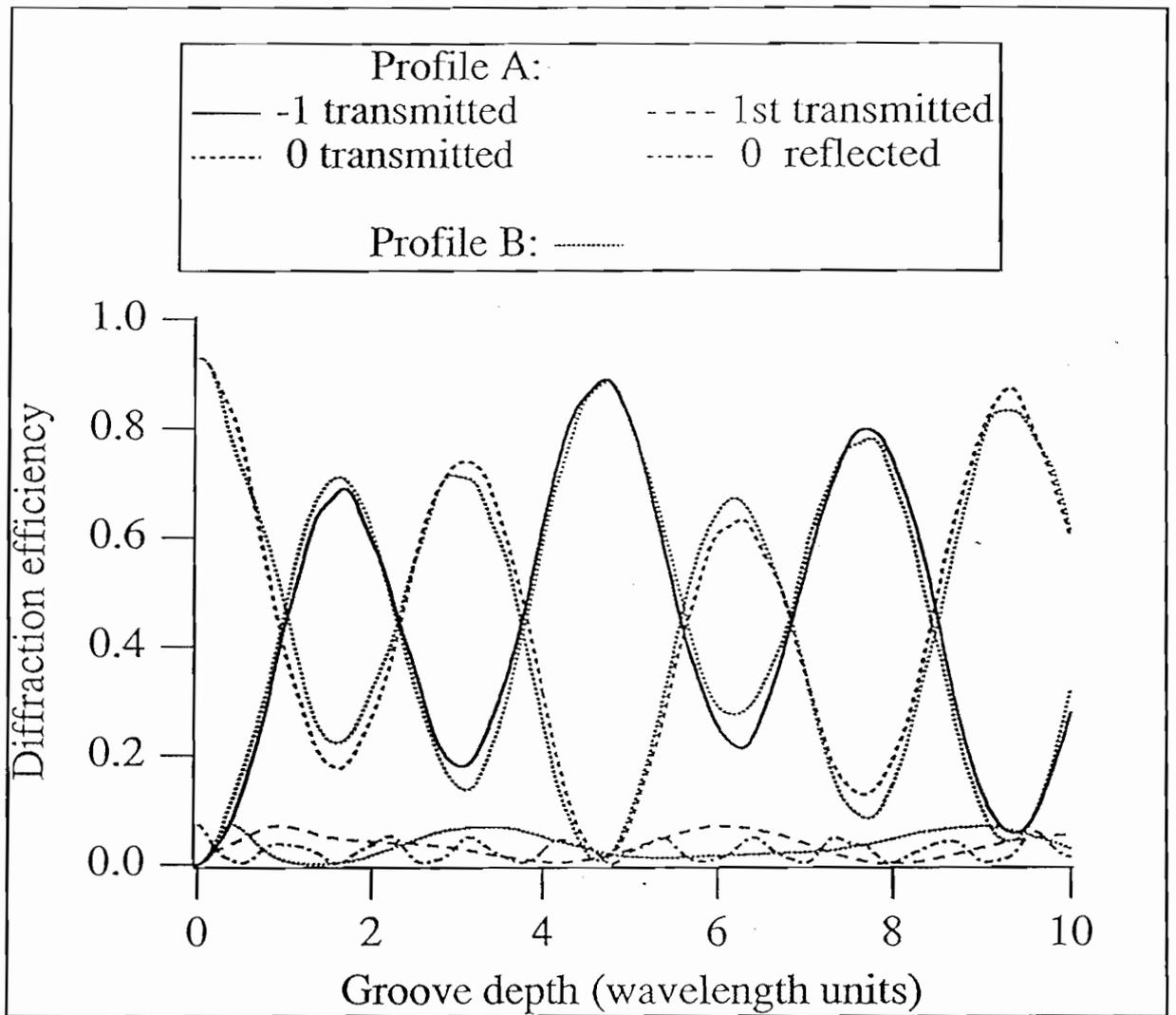


Figure 9

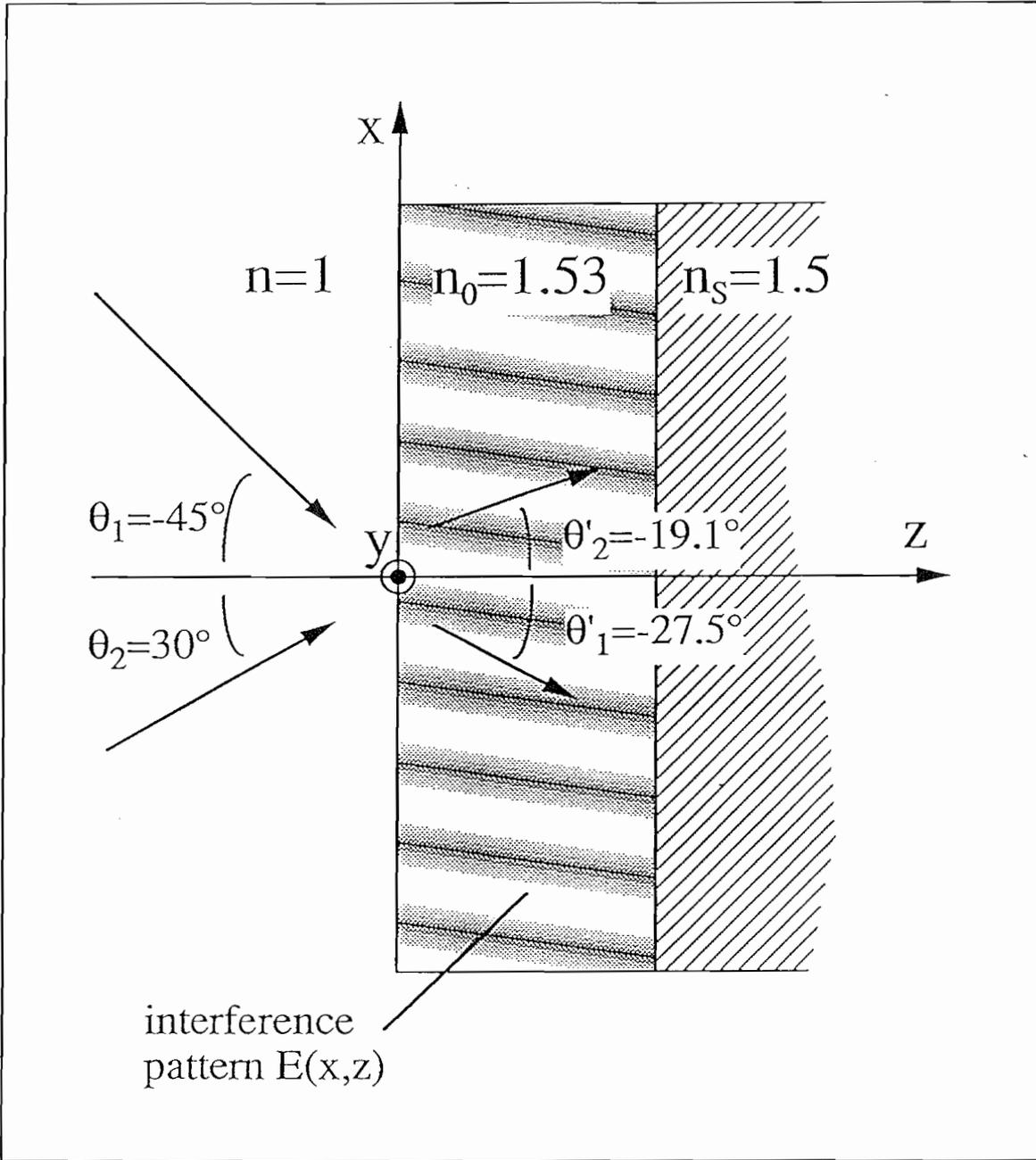


Figure 10

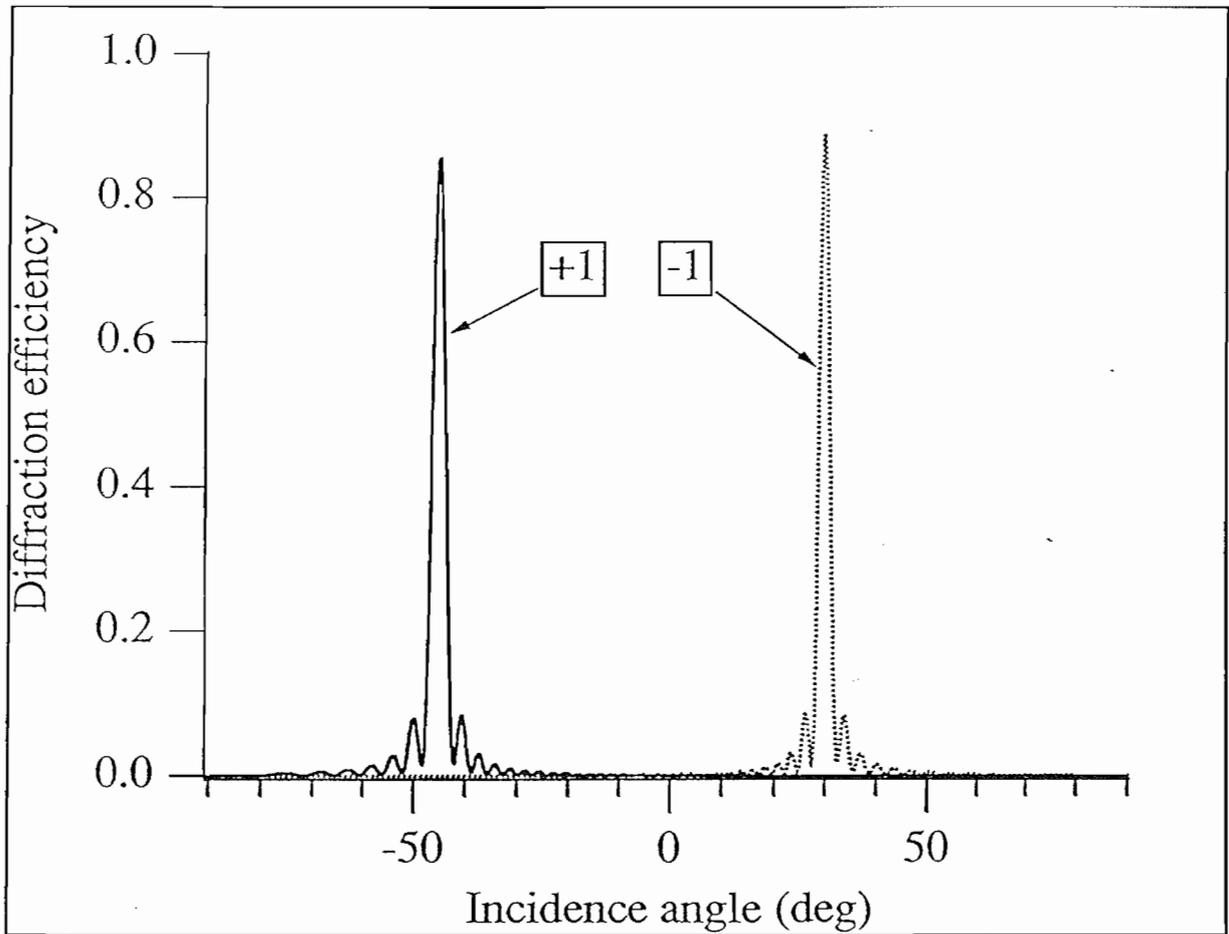


Figure 11

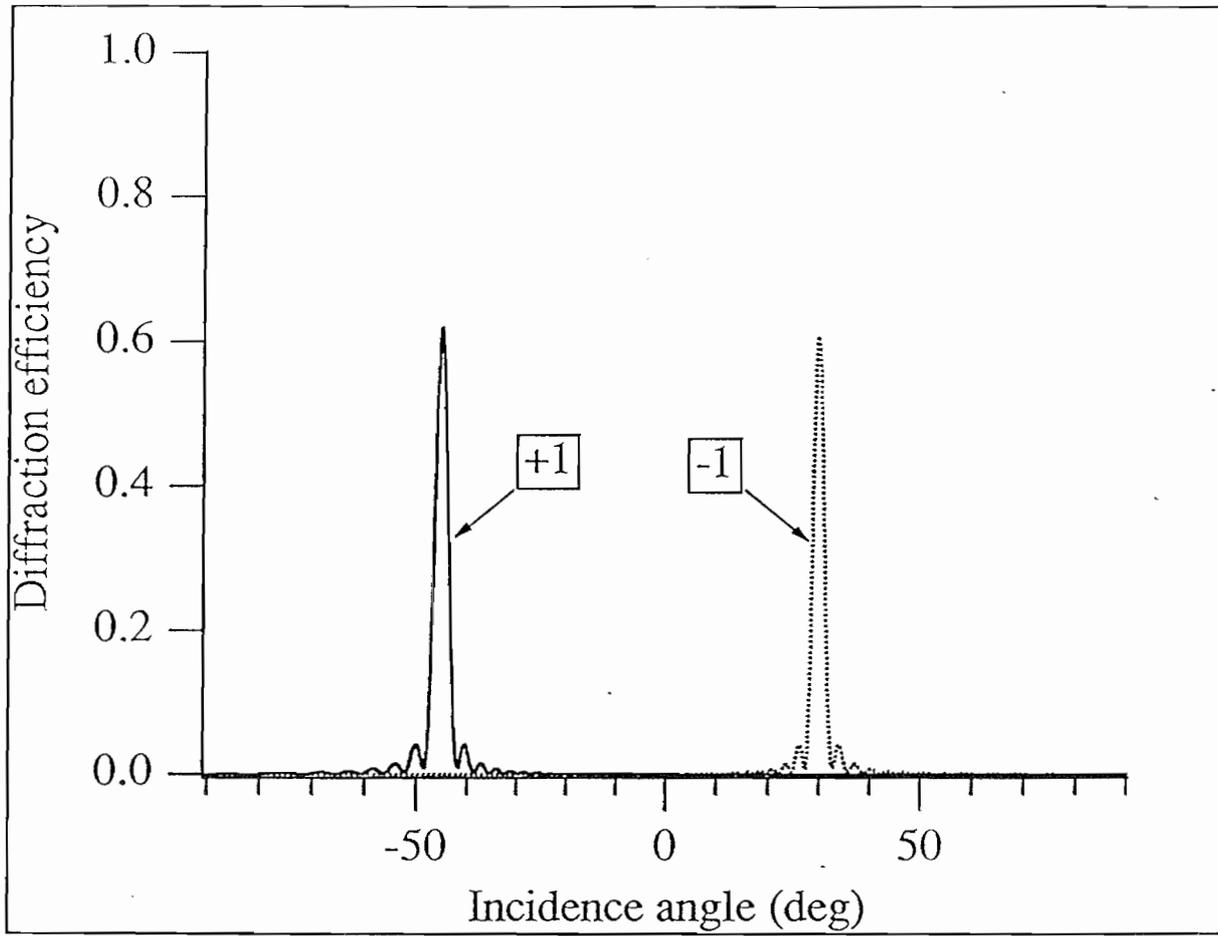


Figure 12

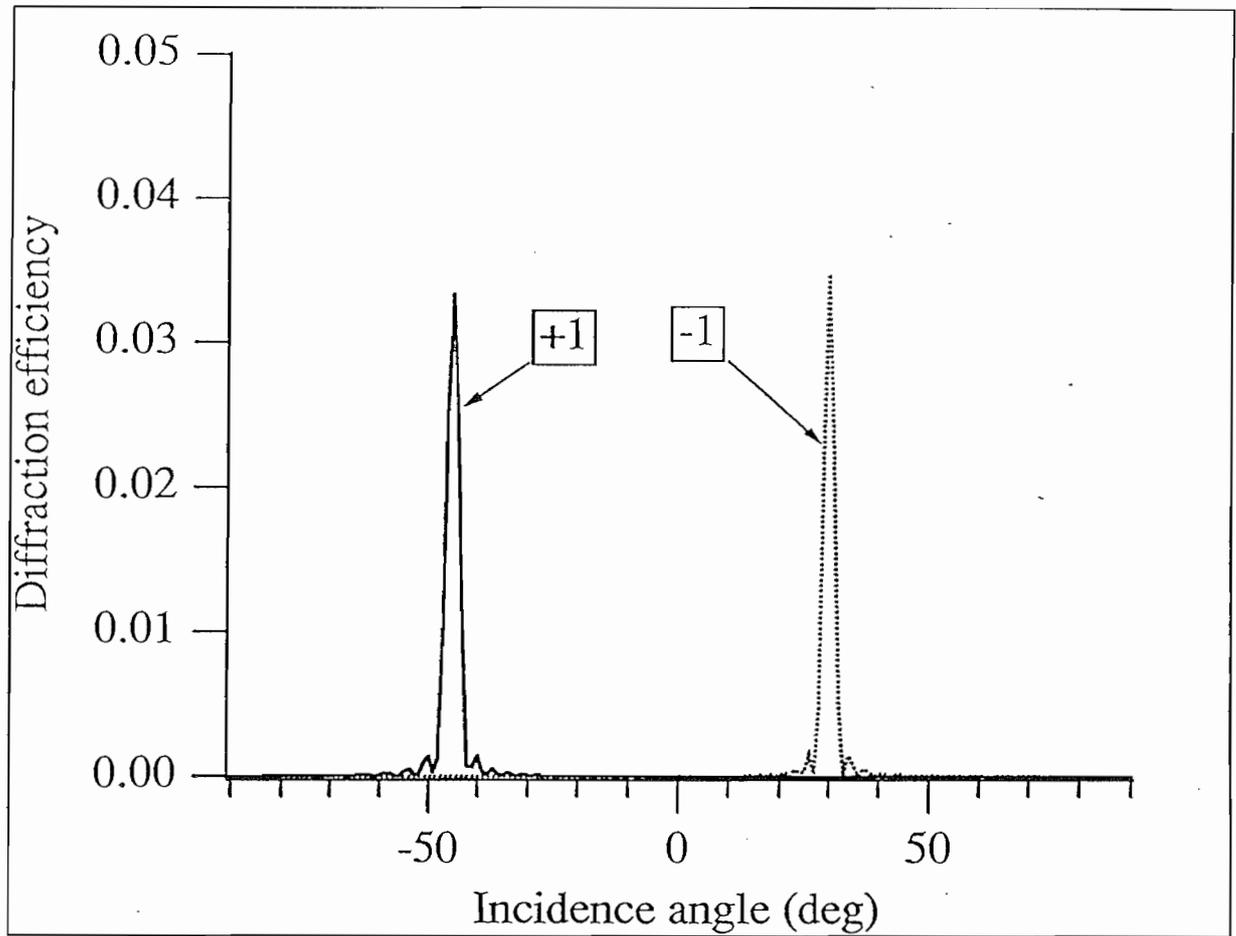


Figure 13

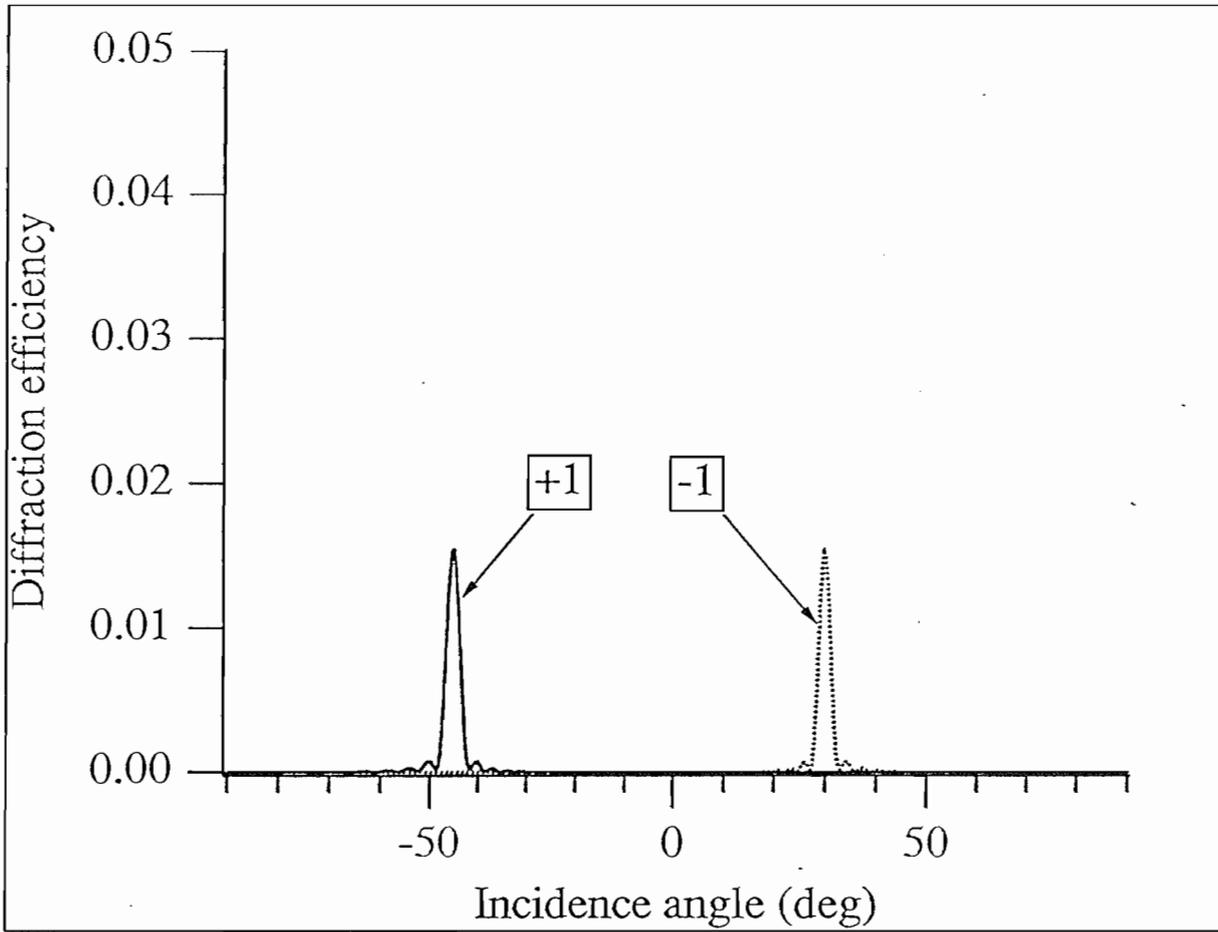


Figure 14

ANNEXE C:

Diffraction en éclairage quasi-monochromatique: présence de couches d'épaisseur supérieure à la longueur de cohérence

Cette annexe, complément du chapitre IV §G, est constituée par un article. Nous y présentons une analyse de la diffraction d'un faisceau de lumière quasi-monochromatique par un réseau de Bragg situé sur une lame transparente épaisse à faces planes et parallèles. Si la couche modulée est d'épaisseur plus petite, et le substrat d'épaisseur plus grande que la longueur de cohérence de la source, nous montrons que la sommation d'une série de réflexions multiples donne des expressions analytiques simples des efficacités de diffraction du composant. Les termes de la série font intervenir les coefficients de diffraction en lumière cohérente du réseau, mais la sommation s'effectue de façon incohérente sur les intensités multiples réfléchies et rétrodiffractées dans le substrat.

Les résultats de ce modèle sont comparés à ceux de la méthode d'intégration spectrale, et confrontés à des réponses angulaires mesurée sur des réseaux holographiques (cf chapitre II §B.2). De plus, les expressions des efficacités de diffraction obtenues dans cette analyse sont identiques à celles données par une troisième approche, présentée au chapitre IV, lorsque cette dernière est réduite à deux ondes (rappelons que cette dernière approche consiste à calculer, par un méthode matricielle, l'intensité totale dans chaque direction de propagation à l'intérieur du substrat). Ces formules donnent une bonne représentation de la répartition de l'énergie lumineuse dans les différents ordres diffractés, et sont particulièrement utiles pour déterminer avec précision les pertes d'énergie par réflexion des composants holographiques.

(L'article a été accepté pour publication à la revue Optics Communications).

TWO-WAVE DIFFRACTION OF QUASI-MONOCHROMATIC LIGHT BY A VOLUME GRATING DEPOSITED ON A THICK TRANSPARENT PLATE

N. Chateau, J.P. Hugonin, B. Guldemann and P. Chavel

Institut d'Optique Théorique et Appliquée - Unité Associée au C.N.R.S. n°14

Université de PARIS-Sud - BP 147 91403 ORSAY Cedex

ph. n°: (33) (1) 69 41 68 28

The diffraction by a Bragg volume grating deposited on a transparent parallel plate is analysed in the case of reduced temporal coherence. When the grating is thinner, and the substrate is thicker than the coherence length, the summation of multiple beam series, involving coherent diffraction coefficients of the periodic film and incoherent multiple reflected intensities inside the plate, is shown to give simple analytic expressions of the diffraction efficiencies of the device. Numerical results of the model are compared with those obtained by spectral integration, and an experimental verification is given by matching theoretical curves to data measured from holographic index gratings. The model provides an accurate representation of the energy balance between the diffracted orders, and is particularly useful for determining the energy losses due to spurious reflections.

I - INTRODUCTION

The increasing number of applications in the field of holography has fostered many studies on the diffraction of coherent light by volume gratings¹⁻⁶. In Bragg volume gratings, also called thick gratings, diffraction occurs in the Bragg regime: all the incoming energy is coupled into two diffracted orders. The most commonly used theory for analysing the diffraction properties of thick gratings was introduced by Kogelnik¹. In his first-order coupled-wave model, the energy coupling is assumed to be weak, and boundary effects are neglected. Kong² and later Vasnetsov et al.⁵ proposed second-order coupled-wave approaches, where the wave equation is solved within rigorous boundary conditions. In their analysis, two forward and two backward diffracted orders are considered. The boundary reflection and diffraction are accurately represented, even in the case of grazing diffraction. Kong's method only applies to unslanted fringe gratings, while the Vasnetsov et al. theory allows the grating to be arbitrarily slanted. Moharam and Gaylord⁶ proposed a more rigorous second-order coupled-wave model, where several higher orders of diffraction are considered; for Bragg volume gratings, they found results similar to those of the two-wave approach.

Many holographic optical elements are constituted by a volume hologram superimposed on a thick transparent plate. This description holds for holographic optical elements fabricated in photopolymers, in dichromated gelatin or in silver halide plates. The diffraction of coherent light by such components can be analysed by suitably adapting one of the models evoked previously.

Yet, in some important applications such as holography for head-up displays,⁷ the holographic component is illuminated by quasi-monochromatic light. Our interest for these conditions of diffraction originates from experimental measurements for thick hologram characterization, realized in our laboratory using a monochromator. In general, the quasi-monochromatic diffraction efficiencies (QMDEs) of the holographic component can be obtained by numerical integration of its monochromatic diffraction efficiencies (MDEs) over the spectral interval of the source. Since a fine spectral sampling is often necessary for obtaining accurate results, the method is rather time consuming.

In practise, the thickness of the volume grating is often inferior to the coherence length of the source, while the substrate is thicker: the light may then be considered as coherent inside the grating, and as incoherent inside the plate. The aim of the current paper is to propose a theoretical model of this particular but frequent situation, that leads to simple formula for the QMDEs. These analytic expressions are obtained by introducing the MDEs of the periodic film in an incoherent summation of the multiple reflected and diffracted intensities inside the plate.

II - THEORETICAL ANALYSIS

In this section, we consider that modelling the coherent diffraction by a Bragg volume grating is a well-known problem¹⁻⁶: we shall use the MDE coefficients of a volume periodic structure without explaining their derivation, assuming that they are obtained from a suitable model such as the Vasnetsov et al. theory⁵.

II.1 - Preliminary description

As depicted in figure 1, we consider a holographic component made of a volume grating bounded on one side by a thick homogeneous parallel plate of thickness h and of refractive index n_{II} . The component is surrounded by two half-infinite media of indices n_I and n_{III} . Two axes of coordinates, Ox and Oz , define a plane perpendicular to the grating fringe plane: Ox is parallel, and Oz is perpendicular to the boundaries. The grating is characterized by its spatial period Λ_x along Ox , and by its thickness d .

The holographic component is illuminated by a quasi-monochromatic plane wave with unit intensity, of spectral width $\Delta\lambda$ centred on wavelength λ_0 . For simplicity, the incident wave is supposed to propagate in the plane (Ox,Oz), with angle θ_I in medium I. The plane of incidence is thus perpendicular to the grating fringe plane. Our main assumption is that the coherence length $L = \lambda_0^2 / \Delta\lambda$ is much shorter than the substrate thickness h , but large enough compared to the grating thickness to ensure its temporally coherent diffraction.

The two-wave coupled-wave theory^{2,5} predicts the diffraction into only two non negligible orders. We thus suppose that the light energy is coupled into orders 0 and -1. According to the second-order approaches, four plane waves emerge from the Bragg volume grating:

- two waves diffracted backward into medium I, with propagation angles $-\theta_I^{(0)}$ and $-\theta_I^{(-1)}$; $-\theta_I^{(0)}$ is the direction of specular reflection, and $-\theta_I^{(-1)}$ is given by the grating law:

$$\sin \theta_I^{(-1)} - \sin \theta_I^{(0)} = -\frac{\lambda_0}{n_I \Lambda_x};$$

- two waves diffracted forward into medium II, with propagation angles $\theta_{II}^{(0)}$ and $\theta_{II}^{(-1)}$; $\theta_{II}^{(0)}$ is the direction of refraction into the plate, obtained from the Snell-Descartes law, and $\theta_{II}^{(-1)}$ is

$$\text{given by: } \sin \theta_{II}^{(-1)} - \sin \theta_{II}^{(0)} = -\frac{\lambda_0}{n_{II} \Lambda_x}.$$

The propagation angles $\theta_{III}^{(0)}$ and $\theta_{III}^{(-1)}$ of the output waves transmitted into medium III can be expressed by similar relations. We define $\xi_{I-I}^{(0)}$ and $\xi_{I-I}^{(-1)}$ as the QMDEs of the whole component (grating plus substrate) in the backward propagating orders 0 and -1 in medium I. $\xi_{I-III}^{(0)}$ and $\xi_{I-III}^{(-1)}$ represent the QMDEs of the corresponding forward propagating orders in medium III. These coefficients can be determined in two different manners: the spectral integration of the MDEs of the whole component, or the incoherent summation of multiple beam intensity series.

II.2 - Spectral integration

The spectral integration method has the advantage of simplicity; we present here its principle, because its numerical results are used in section III for validating those of the model presented in II.3.

The second-order coupled-wave model⁵ can easily be adapted to the coherent diffraction by the holographic component described previously. We thus consider that the calculation of the MDEs of the whole component is possible at any wavelength λ in the range $\Delta\lambda$. We represent by $\chi_{I-I}^{(0)}(\lambda)$ and $\chi_{I-I}^{(-1)}(\lambda)$ the backward MDEs of order 0 and -1 in medium I, at wavelength λ . $\chi_{I-III}^{(0)}(\lambda)$ and $\chi_{I-III}^{(-1)}(\lambda)$ are the corresponding forward MDEs in medium III. The integration of these monochromatic coefficients over $\Delta\lambda$ leads to the QMDEs:

$$\begin{cases} \xi_{I-III}^{(i)} = \frac{1}{\Delta\lambda} \int_{\Delta\lambda} \chi_{I-III}^{(i)}(\lambda) d\lambda \\ \xi_{I-I}^{(i)} = \frac{1}{\Delta\lambda} \int_{\Delta\lambda} \chi_{I-I}^{(i)}(\lambda) d\lambda \end{cases} \quad i \in \{-1, 0\} \quad (1)$$

In the preceding formula, for the sake of simplicity, the spectral intensity of the source is supposed to be uniform over $\Delta\lambda$. If the conservation of energy is verified for each wavelength λ , i.e. if $\chi_{I-I}^{(0)}(\lambda) + \chi_{I-I}^{(-1)}(\lambda) + \chi_{I-III}^{(0)}(\lambda) + \chi_{I-III}^{(-1)}(\lambda) = 1$, then the sum of all integrals (1) is also equal to unity: the property still holds true for the QMDEs.

Since the dependence of the MDE coefficients on wavelength is rather complicated, the integrals of expressions (1) have to be calculated numerically. The achievement of a good precision often requires a fine sampling of spectrum $\Delta\lambda$: the thicker the substrate plate, the stronger the spectral efficiencies oscillations, and the finer the required wavelength sampling. As pointed out in section III, the calculation and the summation of many MDEs induce long execution times of the computer program.

II.3 - Multiple-beam model

We present here a new model that leads to more efficient calculations. The forward propagating waves in medium II are partly transmitted into medium III, partly reflected back into medium II at the interface II-III. Thus, backward propagating waves also exist in medium II, that are diffracted again by the volume grating into media I and II. The new forward diffracted waves created in medium II are reflected again, and the phenomenon repeats to infinity. Fortunately, since all the interfaces are parallel, the grating law implies that the light is still coupled in the same four directions. The total intensity of each order propagating inside the plate appears as the incoherent addition of multiple-beam intensities, due to both reflection at interface between media II and III and retrodiffraction at the volume grating. We shall thus derive the QMDEs as summations of multiple-beam series.

The derivation requires the knowledge of the MDEs of the volume grating, at central wavelength λ_0 , under the assumption that medium II extends to infinity in the positive z direction (see figure 2). Three sets of monochromatic coefficients have to be defined, associated to the three existing directions of incidence on the grating:

- direction $\theta_I^{(0)}$ in medium I: for the original input wave, the backward MDEs of the volume grating in orders 0 and -1 are respectively represented by $\eta_{I-I}^{(0)(0)}$ and $\eta_{I-I}^{(0)(-1)}$; the corresponding forward efficiencies in medium II are $\eta_{I-II}^{(0)(0)}$ and $\eta_{I-II}^{(0)(-1)}$;
- direction $\theta_{II}^{(\ell)}$ in medium II ($\ell \in \{-1, 0\}$): for a backward propagating wave incident on the grating from medium II with angle $\theta_{II}^{(\ell)}$, the backward and forward MDEs of the grating are $\eta_{II-I}^{(\ell)(0)}$, $\eta_{II-I}^{(\ell)(-1)}$, $\eta_{II-II}^{(\ell)(0)}$ and $\eta_{II-II}^{(\ell)(-1)}$.

The twelve MDE coefficients just defined are illustrated in figure 2. As explained before, they are supposed to be obtained from the second-order coupled wave theory⁵. They depend on various physical parameters of the grating, of media II and III, and of the illuminating light (including the polarisation). Since considering the light monochromatic inside the grating is part of our main hypothesis, the grating MDEs are supposed to remain unchanged when the wavelength varies within $\Delta\lambda$. This means that the strongly oscillating behaviour discussed in II.2 is attributed only to the presence of the thick substrate plate, and not to spectral changes in the grating diffraction properties. If the grating material is perfectly transparent (but such a restriction is not necessary in our analysis), the MDEs satisfy the law of energy conservation:

$$\begin{cases} \eta_{I-I}^{(0)(0)} + \eta_{I-I}^{(0)(-1)} + \eta_{I-II}^{(0)(0)} + \eta_{I-II}^{(0)(-1)} = 1 \\ \eta_{II-I}^{(\ell)(0)} + \eta_{II-I}^{(\ell)(-1)} + \eta_{II-II}^{(\ell)(0)} + \eta_{II-II}^{(\ell)(-1)} = 1 \quad \ell \in \{-1, 0\} \end{cases} \quad (2)$$

We also define $R^{(0)}$ and $R^{(-1)}$ as the respective Fresnel reflectivities⁸ at interface II-III of the orders 0 and -1 forward propagating in medium II. $T^{(0)}$ and $T^{(-1)}$ represent the corresponding transmissivities. The conservation of the light energy yields:

$$\begin{cases} R^{(0)} + T^{(0)} = 1 \\ R^{(-1)} + T^{(-1)} = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Primarily, we suppose that the substrate plate is perfectly transparent. The first terms of the QMDE series, shown in figure 3, are obtained in the following manner: the diffraction of the unit intensity wave incident from medium I creates two elementary intensities in each medium surrounding the grating: $\eta_{I-I}^{(0)(0)}$ and $\eta_{I-I}^{(0)(-1)}$ in medium I, $\eta_{I-II}^{(0)(0)}$ and $\eta_{I-II}^{(0)(-1)}$ in medium II. The transmission of $\eta_{I-II}^{(0)(0)}$ and $\eta_{I-II}^{(0)(-1)}$ into medium III results in two contributions $\eta_{I-II}^{(0)(0)}T^{(0)}$ and $\eta_{I-II}^{(0)(-1)}T^{(-1)}$ to the total efficiencies $\xi_{I-III}^{(0)}$ and $\xi_{I-III}^{(-1)}$. The reflection of elementary intensities $\eta_{I-II}^{(0)(0)}$ and $\eta_{I-II}^{(0)(-1)}$ on interface II-III creates in medium II two backward propagating elementary waves of intensities $\eta_{I-II}^{(0)(0)}R^{(0)}$ and $\eta_{I-II}^{(0)(-1)}R^{(-1)}$ respectively. These two waves are incident on the grating, and their diffraction results in new elementary intensities in each diffracted direction. The new contributions to the QMDEs are:

- In medium I, contributions $\eta_{I-II}^{(0)(0)}R^{(0)}\eta_{II-I}^{(0)(0)}$ and $\eta_{I-II}^{(0)(-1)}R^{(-1)}\eta_{II-I}^{(-1)(0)}$ to efficiency $\xi_{I-I}^{(0)}$, $\eta_{I-II}^{(0)(0)}R^{(0)}\eta_{II-I}^{(0)(-1)}$ and $\eta_{I-II}^{(0)(-1)}R^{(-1)}\eta_{II-I}^{(-1)(-1)}$ to efficiency $\xi_{I-I}^{(-1)}$
- in medium III, after transmission through interface II-III, contributions $\eta_{I-II}^{(0)(0)}R^{(0)}\eta_{II-II}^{(0)(0)}T^{(0)}$ and $\eta_{I-II}^{(0)(-1)}R^{(-1)}\eta_{II-II}^{(-1)(0)}T^{(-1)}$ to efficiency $\xi_{I-III}^{(0)}$, $\eta_{I-II}^{(0)(0)}R^{(0)}\eta_{II-II}^{(0)(-1)}T^{(-1)}$ and $\eta_{I-II}^{(-1)(-1)}R^{(-1)}\eta_{II-II}^{(-1)(-1)}T^{(-1)}$ to efficiency $\xi_{I-III}^{(-1)}$.

As depicted in figure 3, all these last contributions correspond to a double pass through the substrate.

As demonstrated in appendix through a rather complicated derivation, the series converge to simple expressions of the QMDEs; for backward coefficients, we get:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{I-I}^{(0)} = \eta_{I-I}^{(0)} + R^{(0)}\eta_{II-I}^{(0)(0)} \frac{\eta_{I-II}^{(0)(0)}(1 - R^{(-1)}\eta_{II-II}^{(-1)(-1)}) + \eta_{I-II}^{(0)(-1)}R^{(-1)}\eta_{II-II}^{(-1)(0)}}{D} \\ \quad + R^{(-1)}\eta_{II-I}^{(-1)(0)} \frac{\eta_{I-II}^{(0)(-1)}(1 - R^{(0)}\eta_{II-II}^{(0)(0)}) + \eta_{I-II}^{(0)(0)}R^{(0)}\eta_{II-II}^{(0)(-1)}}{D} \\ \xi_{I-I}^{(-1)} = \eta_{I-I}^{(-1)} + R^{(-1)}\eta_{II-I}^{(-1)(-1)} \frac{\eta_{I-II}^{(0)(-1)}(1 - R^{(0)}\eta_{II-II}^{(0)(0)}) + \eta_{I-II}^{(0)(0)}R^{(0)}\eta_{II-II}^{(0)(-1)}}{D} \\ \quad + R^{(0)}\eta_{II-I}^{(0)(-1)} \frac{\eta_{I-II}^{(0)(0)}(1 - R^{(-1)}\eta_{II-II}^{(-1)(-1)}) + \eta_{I-II}^{(0)(-1)}R^{(-1)}\eta_{II-II}^{(-1)(0)}}{D} \end{array} \right. \quad (4)$$

and the forward coefficients are given by:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{I-III}^{(0)} = T^{(0)} \frac{\eta_{I-II}^{(0)(0)}(1 - R^{(-1)}\eta_{II-II}^{(-1)(-1)}) + \eta_{I-II}^{(0)(-1)}R^{(-1)}\eta_{II-II}^{(-1)(0)}}{D} \\ \xi_{I-III}^{(-1)} = T^{(-1)} \frac{\eta_{I-II}^{(0)(-1)}(1 - R^{(0)}\eta_{II-II}^{(0)(0)}) + \eta_{I-II}^{(0)(0)}R^{(0)}\eta_{II-II}^{(0)(-1)}}{D} \end{array} \right. \quad (5)$$

In formula (4) and (5), D is defined by:

$$D = (1 - R^{(0)}\eta_{II-II}^{(0)(0)})(1 - R^{(-1)}\eta_{II-II}^{(-1)(-1)}) - R^{(0)}\eta_{II-II}^{(-1)(0)}R^{(-1)}\eta_{II-II}^{(0)(-1)} \quad (6)$$

When both the grating and the substrate are perfectly transparent, the introduction of relations (2) and (3) into expressions (4), (5) and (6) leads to the following equality:

$$\xi_{I-I}^{(0)} + \xi_{I-I}^{(-1)} + \xi_{I-III}^{(0)} + \xi_{I-III}^{(-1)} = 1 \quad (7)$$

We see that if the condition of energy conservation is verified by the volume grating efficiencies (relations (2)), then it is also satisfied by the QMDEs of the whole component.

The preceding description of the multiple-beam model was primarily restricted to a perfectly transparent substrate. If the plate has some absorption, we use notations $A^{(0)}$ and $A^{(-1)}$ to represent the intensity attenuation due to one pass through the plate in respective directions $\theta_{II}^{(0)}$ and $\theta_{II}^{(-1)}$; it can be shown that expressions (4), (5) and (6) are still valid for an absorbing substrate, provided that coefficients $R^{(0)}$, $R^{(-1)}$, $T^{(0)}$ and $T^{(-1)}$ are replaced by $A^{(0)2}R^{(0)}$, $A^{(-1)2}R^{(-1)}$, $A^{(0)}T^{(0)}$ and $A^{(-1)}T^{(-1)}$ respectively.

III - RESULTS

We computed both the spectral integration method and the multiple beam model, in combination with a second-order two-wave coupled-wave model. In section II, the multiple-beam model was shown to respect the conservation of energy when all materials are perfectly transparent. We provide here further confirmation of the new model through numerical

comparison to the spectral integration approach, and by matching theoretical curves to experimental results.

III.1 - Comparison of numerical results

We consider here a holographic index grating recorded in a dielectric material, placed on a thick transparent substrate (see figure 1 for geometry and notations). The grating thickness is $15\mu\text{m}$, and its index profile is defined by:

$$n(x) = 1.5 + 0.02 \sin \frac{x}{\Lambda_x} \quad (8)$$

The fringes are thus perpendicular to the surface; their spacing is $\Lambda_x = 0.4\mu\text{m}$. The refractive index of the substrate is $n_{\text{II}} = 1.5$ and its thickness $h=950\mu\text{m}$. The holographic component is bounded by air on both sides ($n_{\text{I}} = n_{\text{III}} = 1$). It is illuminated by a transverse electric polarized plane wave of partially monochromatic light. The intensity is supposed to be uniform in the wavelength range $\Delta\lambda=.008\mu\text{m}$ centred on mean wavelength λ_0 . The angle of incidence in air is $\theta_{\text{I}} = 60^\circ$.

The dependence on λ_0 of QMDE $\xi_{\text{I-III}}^{(-1)}$ in the -1 transmitted order, calculated from the multiple-beam model, is represented in figure 4, 5 and 6. When λ_0 varies between 0.55 and $0.75\mu\text{m}$, the coherence length L is comprised between 38 and $70\mu\text{m}$; L thus remains larger than the grating thickness and smaller than the substrate thickness. In figure 4, the wavelength dependence of $\xi_{\text{I-III}}^{(-1)}$ is compared to that of the corresponding MDE $\chi_{\text{I-III}}^{(-1)}(\lambda_0)$ calculated for perfectly coherent illumination. Due to the thick substrate, the fringes in the coherent representation are too numerous to be distinguished on the whole curve; the magnification of a small portion of the curves appears in the inset in figure 4. In figure 5, for each wavelength λ_0 , the efficiency obtained from the multiple-beam model is compared to the integration of 10 monochromatic efficiencies $\chi_{\text{I-III}}^{(-1)}(\lambda)$ over interval $\Delta\lambda$. As could be expected, the mismatch observed between the two curves is smaller than in figure 4. The curve obtained by spectral integration still exhibits many oscillations of non-negligible amplitude, thus revealing that the sampling of $\Delta\lambda$ is not sufficiently fine. Figure 6 is similar to figure 5, but the integration is calculated over 100 distinct wavelengths in spectrum $\Delta\lambda$. The two curves of figure 6 are almost superimposed: their difference remains smaller than 0.01. Magnification shows that the oscillations are practically removed by the better precision of integration.

From these numerical comparisons, we retain that the results from the multiple-beam model are very close to those obtained by spectral integration with very fine wavelength sampling. In addition, the execution time for the multiple-beam model is more than 50 times shorter than for the spectral integration over 100 wavelengths. The new model therefore provides an accurate and efficient method for calculating diffraction efficiencies in quasi-monochromatic illumination.

III.2 - Experimental verification

We fabricated dichromated gelatin holographic transmission gratings on Kodak 649F plates. Using an argon laser at 488nm, the interference pattern of two symmetrically incident plane waves was recorded. As in the preceding example, the fringes of equal index, spaced by $\Lambda_x = 0.637\mu\text{m}$, are perpendicular to the grating surface. The substrate thickness is still $h=950\mu\text{m}$. With the experimental set-up sketched in figure 7, we measured the angular dependence of the transmissivity, of the specular reflectivity and of the diffraction efficiency in the -1 forward diffracted order of the gratings. The light source is a monochromator with spectral width $\Delta\lambda=.008\mu\text{m}$. Figure 8 shows the angular responses of a grating around the Bragg angle, measured in transverse electric polarization with fixed main wavelength $\lambda_0=1.06\mu\text{m}$. A slight absorption of the substrate in the infrared domain led to the introduction of an imaginary part in the refractive index: $n_{II} = 1.5 + j6.7 \cdot 10^{-6}$. Using a multidimensionnal minimization algorithm, we optimized the values of the layer thickness and of the modulation amplitude in the total intensity model, in order to find the best agreement with experimental data. The best fit between experiment and theory in the three measured orders was obtained with the grating considered as non uniformly modulated, and described as a superposition of several uniformly modulated elementary gratings⁴. The theoretical curves in figure 8 characterize a grating with thickness $14.7\mu\text{m}$, divided in four sub-gratings with respective amplitudes of index modulation 0.049, 0.089, 0.12 and 0.11. Except for a little discordance in the diffracted order near the Bragg incidence, these values give a satisfactory agreement in the three angular response curves.

IV - CONCLUSION

We described a new theoretical model for the two-wave diffraction of quasi-monochromatic light by a volume grating deposited on a thick substrate. The model applies when the coherence length of the light source is comprised between the grating and the substrate thicknesses: such conditions are often met in the holographic applications where quasi-monochromatic illumination is used. The QMDEs are derived through the summation of multiple reflected and diffracted beam series, that involve MDE coefficients obtained from a complementary second-order coupled-wave model. The series are shown to converge towards simple analytic expressions of the QMDEs. In an example of diffraction by a thick index grating, we numerically compared the model to another approach, namely the spectral integration of MDEs. Similar results were found when the numerical integration was calculated over a fine sampling of the spectrum, but the execution time of the new model was much shorter. We also found a good agreement between the model and experimental curves

of efficiency response measured from thick index transmission gratings. In conclusion, the proposed model is easy to compute, and gives reliable results with short execution times.

APPENDIX: SUMMATION OF THE MULTIPLE-BEAM SERIES

This appendix is a complement to paragraph II.3.

For conciseness, we focus the analysis on the determination of $\xi_{I-III}^{(0)}$ (the derivation of the three other QMDEs can be done in a similar manner). After a number N_T of double passes through the plate, an elementary intensity that contributes to $\xi_{I-III}^{(0)}$ can be written in the following form:

$$\eta_{I-II}^{(0)(i)} \left(R^{(0)} \eta_{II-II}^{(0)(0)} \right)^k \left(R^{(0)} \eta_{II-II}^{(0)(1)} \right)^\ell \left(R^{(-1)} \eta_{II-II}^{(-1)(-1)} \right)^m \left(R^{(-1)} \eta_{II-II}^{(-1)(0)} \right)^n T^{(0)} \quad (A.1)$$

where $i \in \{-1, 0\}$ and $k + \ell + m + n = N_T$.

For $i=0$, the preceding expression describes a beam that is first diffracted into the 0 order in medium II (with coefficient $\eta_{I-II}^{(0)(0)}$), and that finally emerges into the 0 order in medium III (coefficient $T^{(0)}$). The number of the deviations of the beam from the 0 to the -1 order (with coefficient $R^{(0)} \eta_{II-II}^{(0)(-1)}$) is thus equal to the number of opposite deviations (coefficient $R^{(-1)} \eta_{II-II}^{(-1)(0)}$). We obtain the condition $\ell=n$ in expression (A.1). Consequently, for $i=0$ in (A.1), we derive the contribution $P_{k,\ell,m}^{(0)}$ to $\xi_{I-III}^{(0)}$ of a beam that accomplished N_T double traversals as follows:

$$P_{k,\ell,m}^{(0)} = \eta_{I-II}^{(0)(0)} \left(R^{(0)} \eta_{II-II}^{(0)(0)} \right)^k \left(R^{(0)} \eta_{II-II}^{(0)(-1)} \right)^\ell \left(R^{(-1)} \eta_{II-II}^{(-1)(-1)} \right)^m \left(R^{(-1)} \eta_{II-II}^{(-1)(0)} \right)^\ell T^{(0)} \quad (A.2)$$

where k, ℓ and m verify: $k + 2\ell + m = N_T$.

For $i=-1$ in (A.1), it can be deduced in the same way that $n=\ell+1$; thus the contribution to $\xi_{I-III}^{(0)}$ is written in the form:

$$P_{k,\ell,m}^{(-1)} = \eta_{I-II}^{(0)(-1)} \left(R^{(0)} \eta_{II-II}^{(0)(0)} \right)^k \left(R^{(0)} \eta_{II-II}^{(0)(-1)} \right)^\ell \left(R^{(-1)} \eta_{II-II}^{(-1)(-1)} \right)^m \left(R^{(-1)} \eta_{II-II}^{(-1)(0)} \right)^{\ell+1} T^{(0)} \quad (A.3)$$

with: $k + 2\ell + 1 + m = N_T$

It must be noticed that two different combinations of reflections and diffractions may give the same $P_{k,\ell,m}^{(i)}$ if they involve, in a different order, the same number of each kind of interaction with the grating and with the interface. We designate by $N_{k,\ell,m}^{(i)}$ the number of different combinations that correspond to the same coefficient $P_{k,\ell,m}^{(i)}$. Using these definitions, the efficiency $\xi_{I-III}^{(0)}$ may be expressed as:

$$\xi_{I-III}^{(0)} = T^{(0)} \sum_{i=-1}^0 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \eta_{I-II}^{(0)(i)} N_{k,\ell,m}^{(i)} P_{k,\ell,m}^{(i)} \quad (A.4)$$

We now seek an expression of $N_{k,\ell,m}^{(0)}$. If we follow the path of one elementary beam, we can deduce some characteristics of the corresponding expansion of $P_{k,\ell,m}^{(0)}$:

- the undeviated terms in the -1 diffracted order $(R^{(-1)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(-1)(-1)})$ are necessarily situated between a term of deviation from the 0 to the -1 order $(R^{(0)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(0)(-1)})$ and a term of deviation from the -1 back to the 0 order $(R^{(-1)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(-1)(0)})$. The m coefficients $(R^{(-1)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(-1)(-1)})$ are thus distributed into ℓ sets; the number of different possible distributions is $C_{m+\ell-1}^m$.
- the same kind of consideration shows that undeviated terms in the zero order $(R^{(0)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(0)(0)})$ are distributed into $\ell+1$ sets in the expansion of $P_{k,\ell,m}^{(0)}$. The number of different distributions of these terms is $C_{k+\ell}^k$.

From the preceding observations, we obtain:

$$N_{k,\ell,m}^{(0)} = C_{m+\ell-1}^m C_{k+\ell}^k \tag{A.5}$$

In a similar manner, we can derive the expression of $N_{k,\ell,m}^{(1)}$:

$$N_{k,\ell,m}^{(1)} = C_{m+\ell}^m C_{k+\ell}^k \tag{A.6}$$

The substitution by expressions (A.2), (A.3), (A.5) and (A.6) in the expansion (A.4) of $\xi_{I-III}^{(0)}$ leads to:

$$\begin{aligned} \xi_{I-III}^{(0)} = T^{(0)} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ (R^{(0)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(0)(0)})^k (R^{(0)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(0)(-1)} R^{(-1)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(-1)(0)})^\ell (R^{(0)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(-1)(-1)})^m \right. \\ \left. \times C_{k+\ell}^k \left[\eta_{I-\Pi}^{(0)(0)} C_{m+\ell-1}^m + \eta_{I-\Pi}^{(0)(-1)} (R^{(-1)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(-1)(0)}) C_{m+\ell}^m \right] \right\} \end{aligned} \tag{A.7}$$

If ℓ is a positive integer and x an arbitrary real in interval $] -1, 1[$, we know the relation

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+\ell}^k x^k = \frac{1}{(1-x)^{\ell+1}} \tag{A.8}$$

Introducing twice (A.8) into (A.7), we get:

$$\xi_{I-III}^{(0)} = T^{(0)} \frac{\eta_{I-\Pi}^{(0)(0)} (1 - R^{(-1)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(-1)(-1)}) + \eta_{I-\Pi}^{(0)(-1)} R^{(-1)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(-1)(0)}}{(1 - R^{(0)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(0)(0)}) (1 - R^{(-1)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(-1)(-1)}) - R^{(0)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(-1)(0)} R^{(-1)}\eta_{\Pi-\Pi}^{(0)(-1)}} \tag{A.9}$$

We thus obtain a simple expression for $\xi_{I-III}^{(0)}$. The same kind of derivation may be repeated for the determination of QMDEs $\xi_{I-III}^{(-1)}$, $\xi_{I-I}^{(0)}$ and $\xi_{I-I}^{(-1)}$. The resulting formulae are given in III.2.c, in relations (4),(5) and (6).

REFERENCES

1. H.Kogelnik, "Coupled wave theory for thick hologram gratings", Bell System Tech. J. **48**, 2909-2947 (1969).
2. J.A.Kong, "Second-order coupled-mode equations for spatially periodic media", J.Opt.Soc.Am. **67** 825-833 (1977).
3. R.Petit, ed., *Electromagnetic theory of gratings* (Springer-Verlag, Berlin, 1980).
4. L.Solymar and D.J.Cooke, *Volume holography and volume gratings* (Academic Press, London, 1981).
5. M.V.Vasnetsov, M.S.Soskin and V.B.Taranenko, "Grazing diffraction by volume phase gratings", Optica Acta **32**, 891-899 (1985).
6. T.K.Gaylord and M.G.Moharam, "Analysis and applications of optical diffraction by gratings", proc. IEEE **73**, 894-937 (1985).
7. D.H.Close, "Holographic optical components", Optical Engineering **14**, 408-419 (1975).
8. M.Born and E.Wolf, *Principles of Optics* sixth edition (Pergamon Press, New York, 1987) 36-51.

FIGURE CAPTIONS

Figure 1: Geometry of the diffraction of quasi-monochromatic light by a volume grating placed upon a thick transparent substrate. Wave directions are calculated from the grating law: the distance between horizontal dashed lines is proportional to λ_0 / Λ_x , and the radii of the circles are proportional to the refractive indices of the media with the same constant of proportionality. The QMDEs $\xi_{I-III}^{(i)}$ and $\xi_{I-I}^{(i)}$ are represented respectively in media I and III.

Figure 2: Representation of the MDEs of the volume grating, supposing it is isolated between two half-infinite media of refractive indices n_I and n_{II} . In the upper-left figure, the diffraction of the wave incoming from medium I with angle $\theta_I^{(0)}$ is depicted. Upper-right: a backward propagating wave is incident on the grating from medium II, with direction $-\theta_{II}^{(0)}$. Lower-left: a backward propagating wave is incident with direction $-\theta_{II}^{(-1)}$. The lower-right figure shows the reflectivities and the transmissivities of the interface between half-infinite media II and III, for incidences $\theta_{II}^{(0)}$ and $\theta_{II}^{(-1)}$.

Figure 3: First terms of the multiple reflected and diffracted beam series. These terms contribute to the QMDEs $\xi_{I-III}^{(0)}$, $\xi_{I-III}^{(-1)}$, $\xi_{I-I}^{(0)}$ and $\xi_{I-I}^{(-1)}$.

Figure 4: Holographic index transmission grating: dependence on the main wavelength λ_0 of the diffraction efficiency in the -1 transmitted order, in quasi-monochromatic light ($\xi_{I-III}^{(-1)}$ calculated from the multiple beam model, in plain line), and in perfectly coherent light ($\chi_{I-III}^{(-1)}(\lambda_0)$ calculated from the coupled-wave model, in dotted line). The inset shows a magnified portion of the curves.

Figure 5: Holographic index transmission grating: dependence on the main wavelength λ_0 of the QMDE $\xi_{I-III}^{(-1)}$ in the -1 transmitted order calculated from the multiple beam model (plain line), and from spectral integration over 10 monochromatic components (dots). The inset shows a magnified portion of the curves.

Figure 6: Holographic index transmission grating: dependence on the main wavelength λ_0 of the QMDE $\xi_{I-III}^{(-1)}$ in the -1 transmitted order calculated from the multiple beam model (plain line), and from spectral integration over 100 monochromatic components (dots). The inset shows a magnified portion of the curves.

Figure 7: Experimental set-up for measuring the angular response of a grating successively in the 0 transmitted ($\xi_{I-III}^{(0)}$), the 0 reflected ($\xi_{I-I}^{(0)}$), and the -1 diffracted ($\xi_{I-III}^{(-1)}$) orders. The source is a monochromator with spectral width set to 8nm. Between two consecutive measurements, the incidence angle is incremented by rotation of the grating, and the detector rotates around the same axis with an angle calculated from the grating law.

Figure 8: Best fit of the total intensity model (plain line) to experimental data (markers). The curves represent the angular efficiency response of dichromated gelatin transmission holographic grating measured in the 0 transmitted, the 0 reflected and the -1 transmitted orders.

ACKNOWLEDGEMENTS

Thanks are due to V.Dentan and to F.Lebanc for helpful discussions, and to S.Mallick for correcting the script. N.Chateau gratefully acknowledges company COHERENT for the delivery of a CIFRE scholarship.

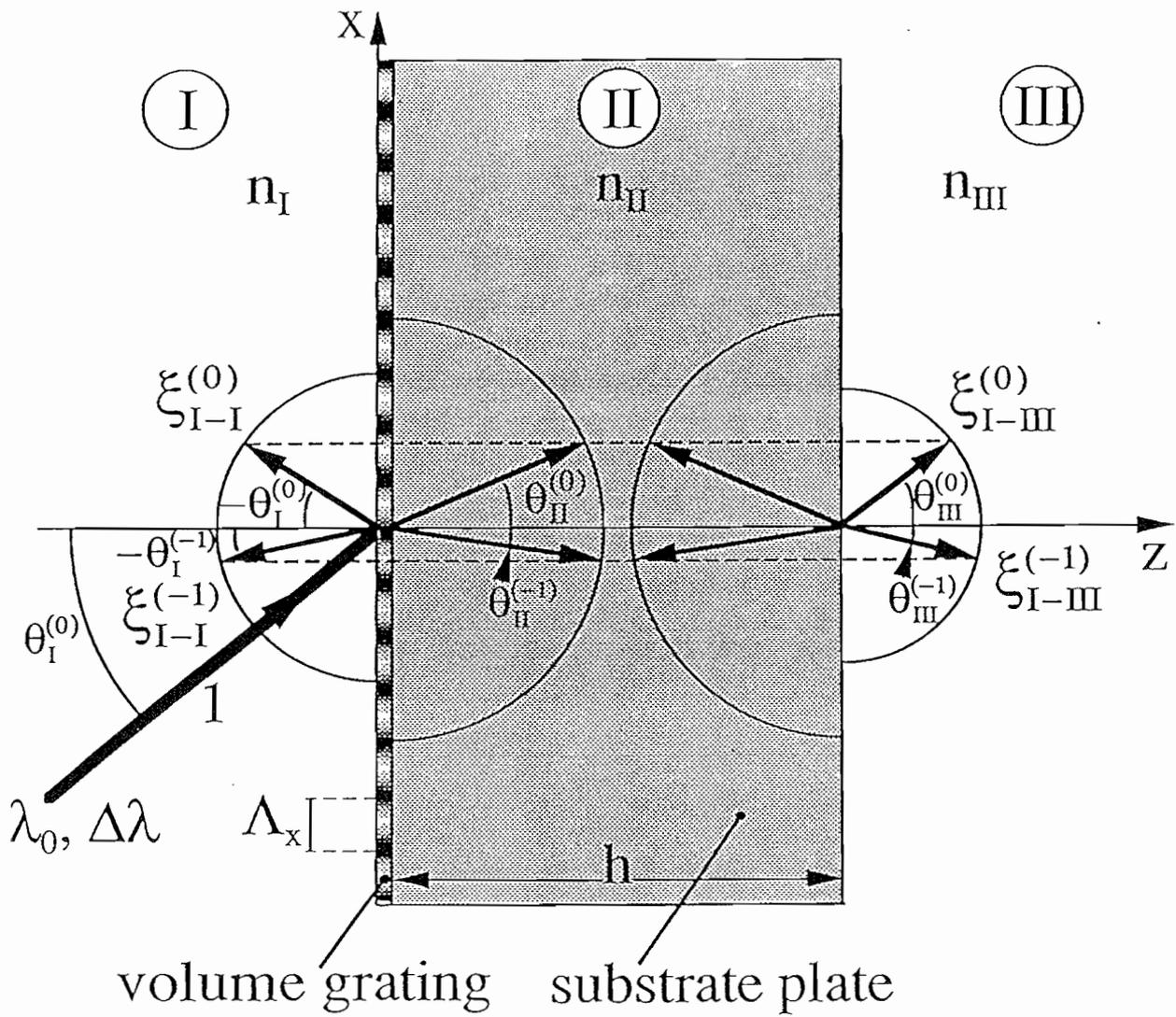


Figure 1

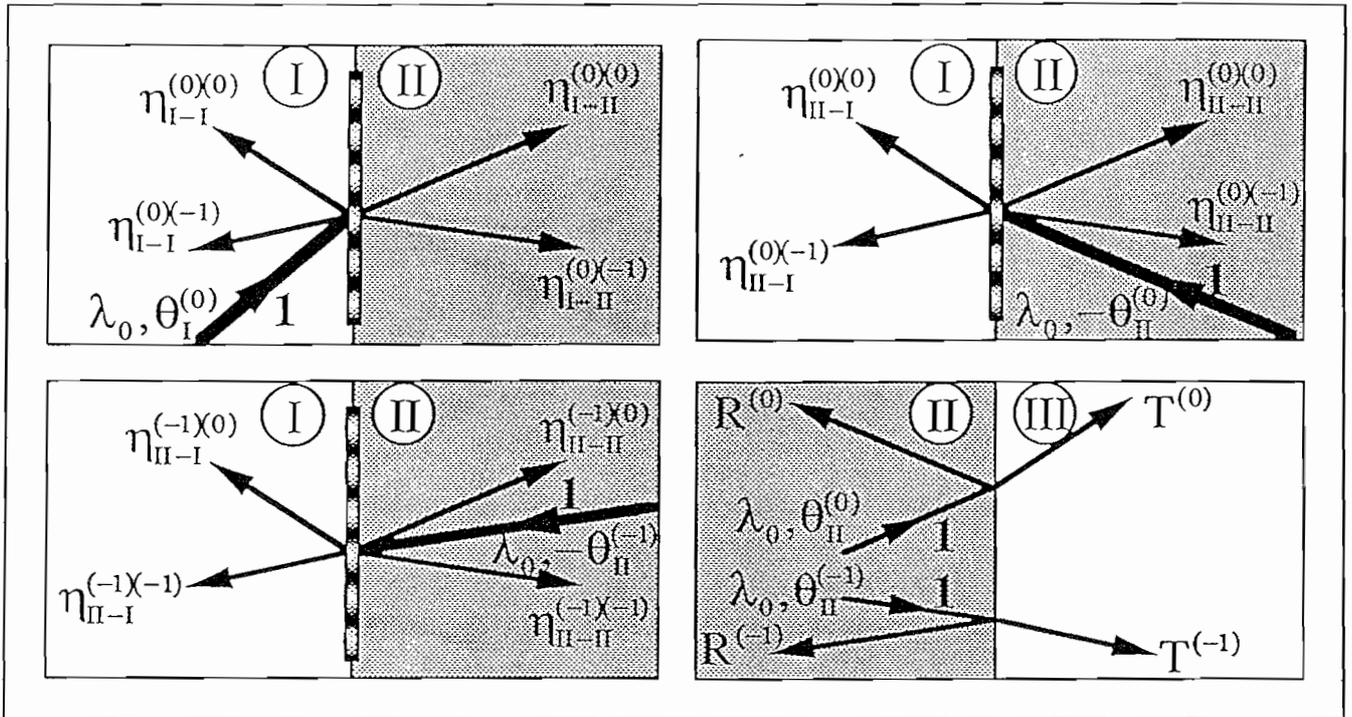


Figure 2

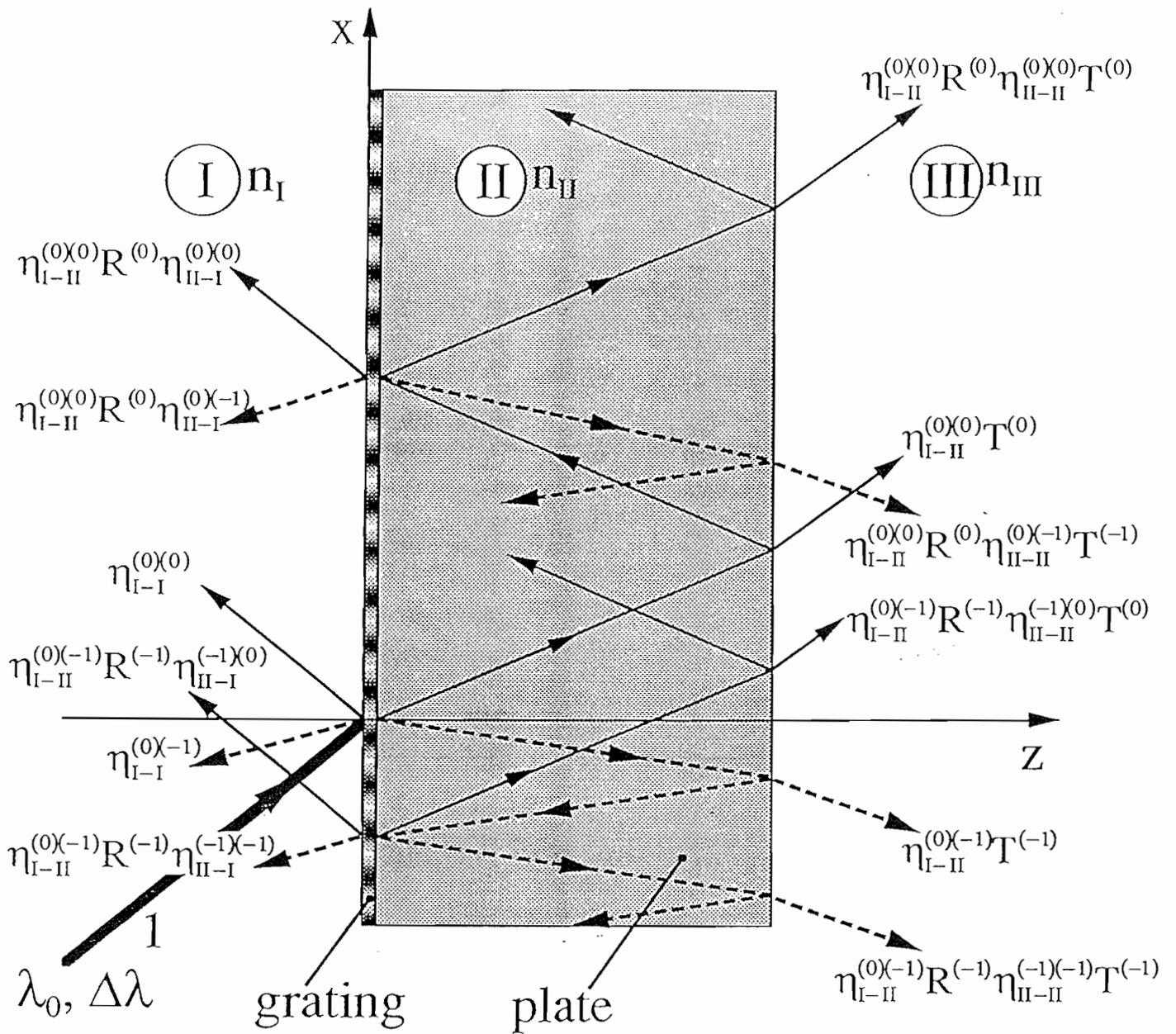


Figure 3

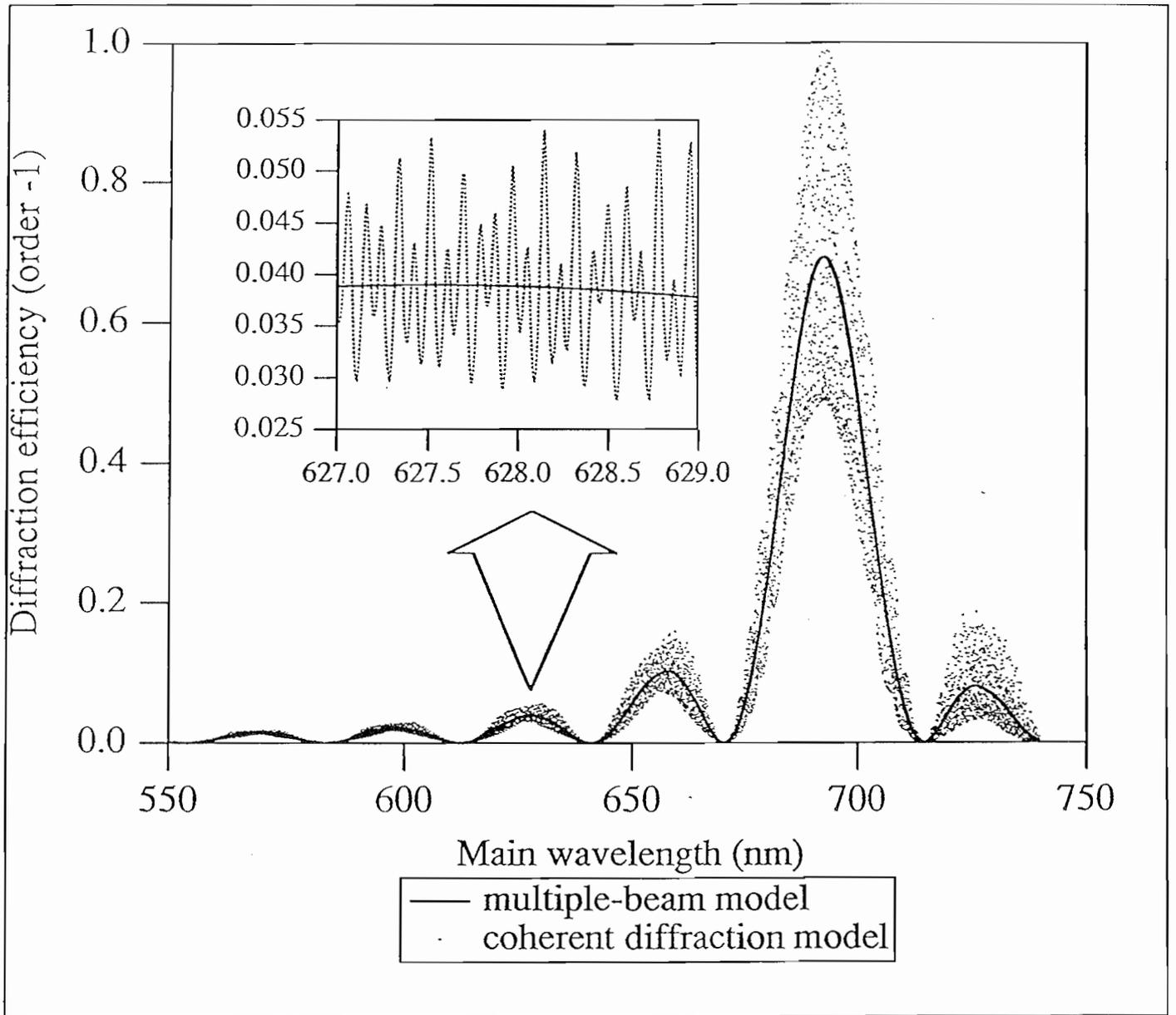


Figure 4

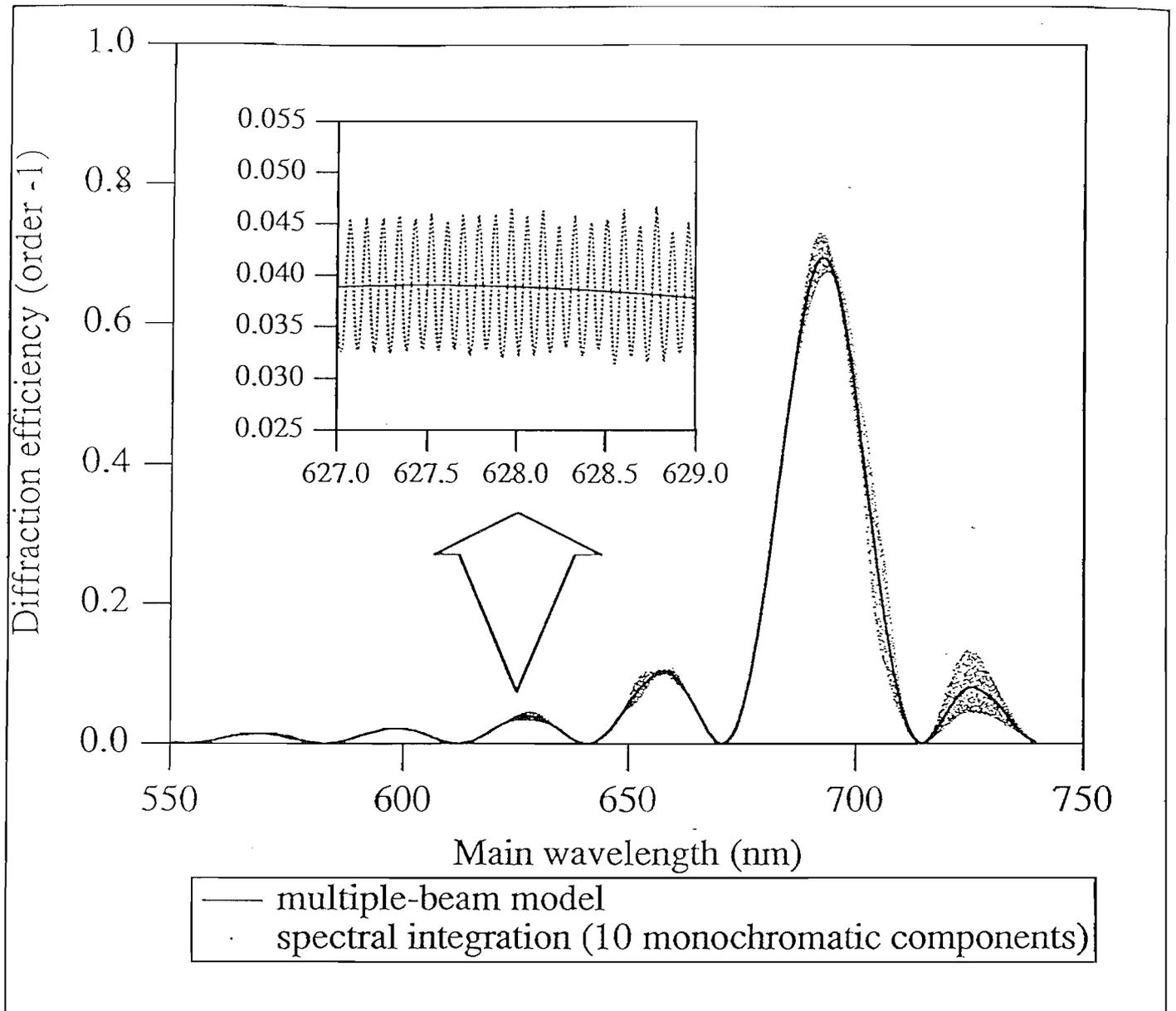


Figure 5

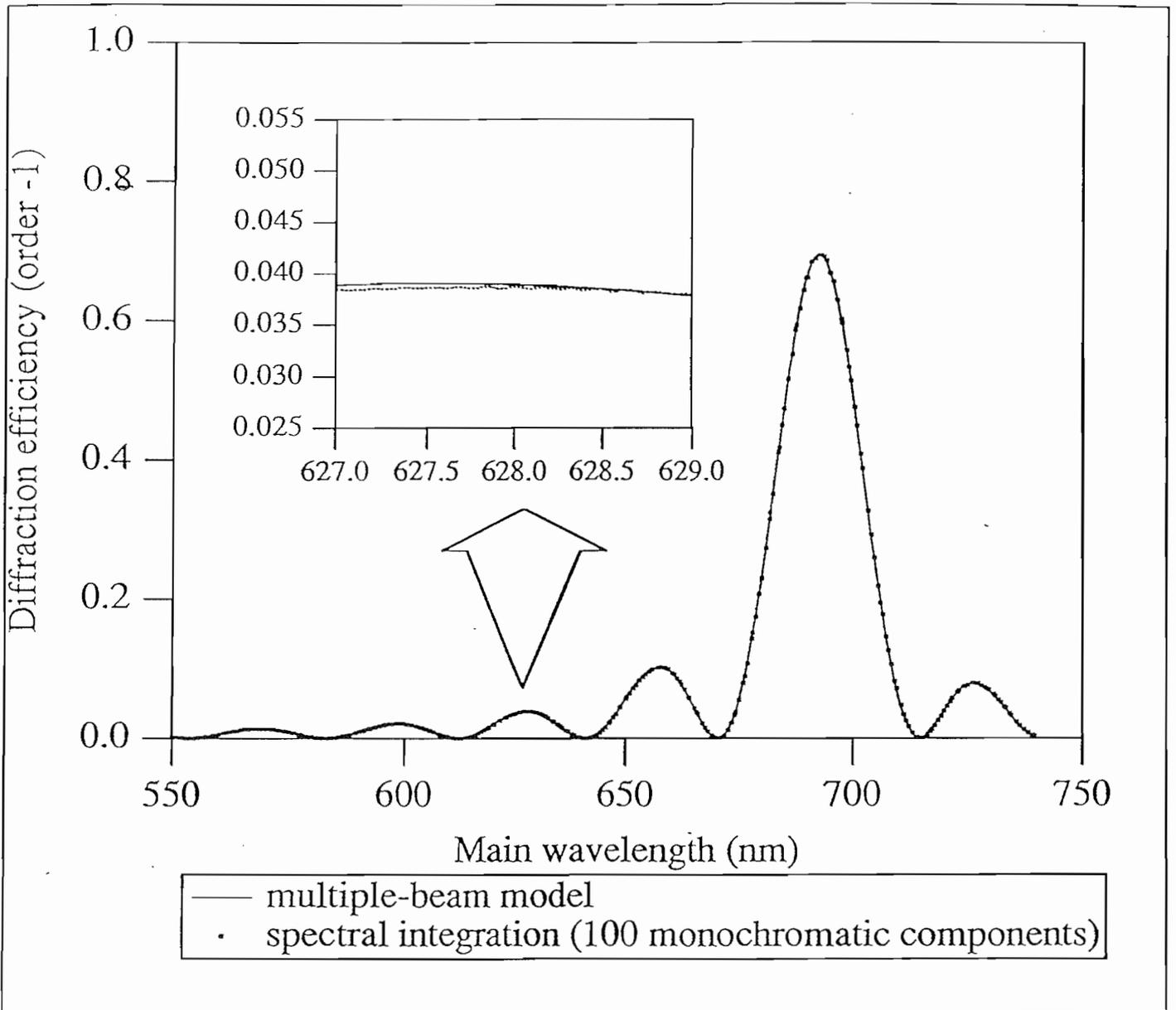


Figure 6

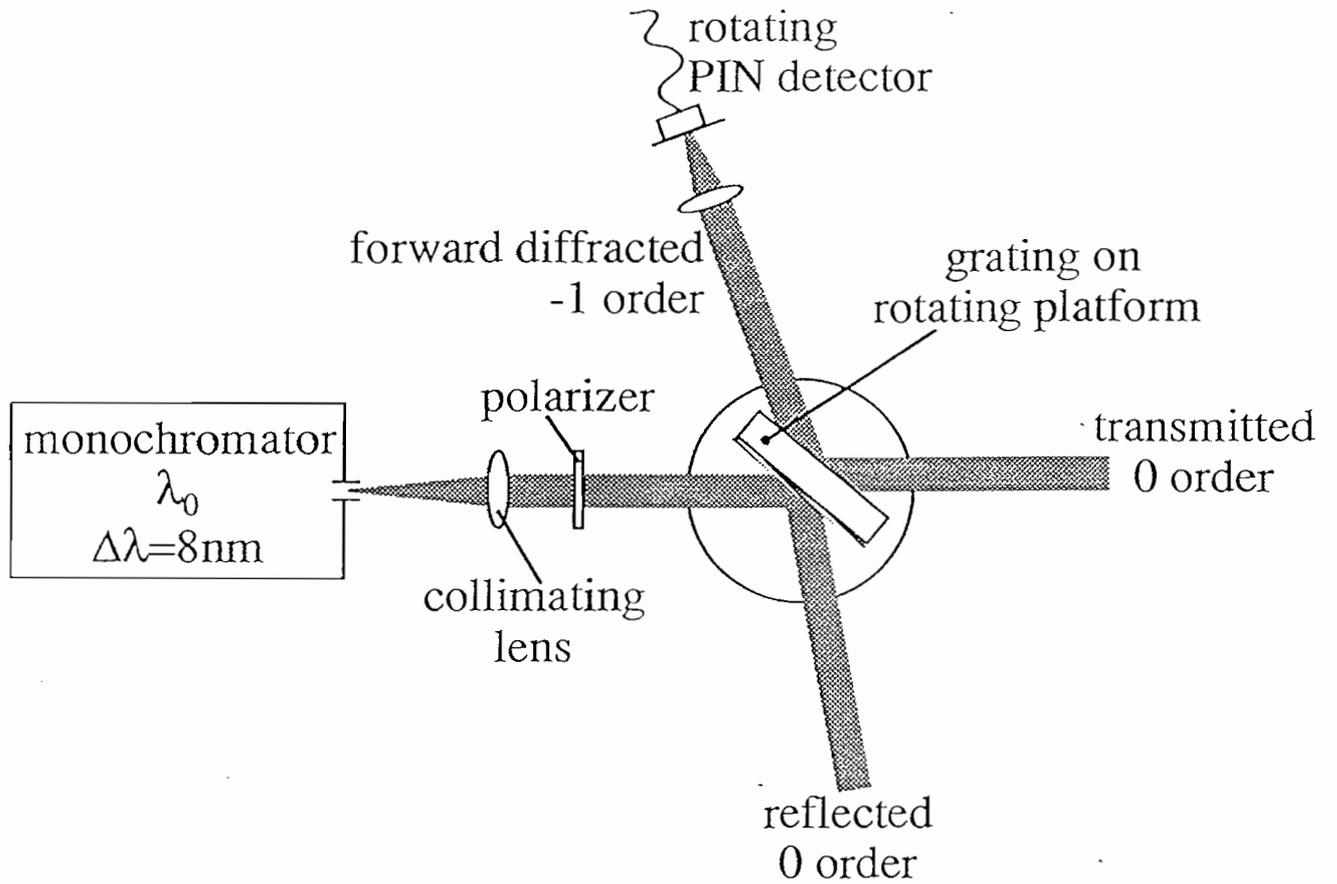


Figure 7

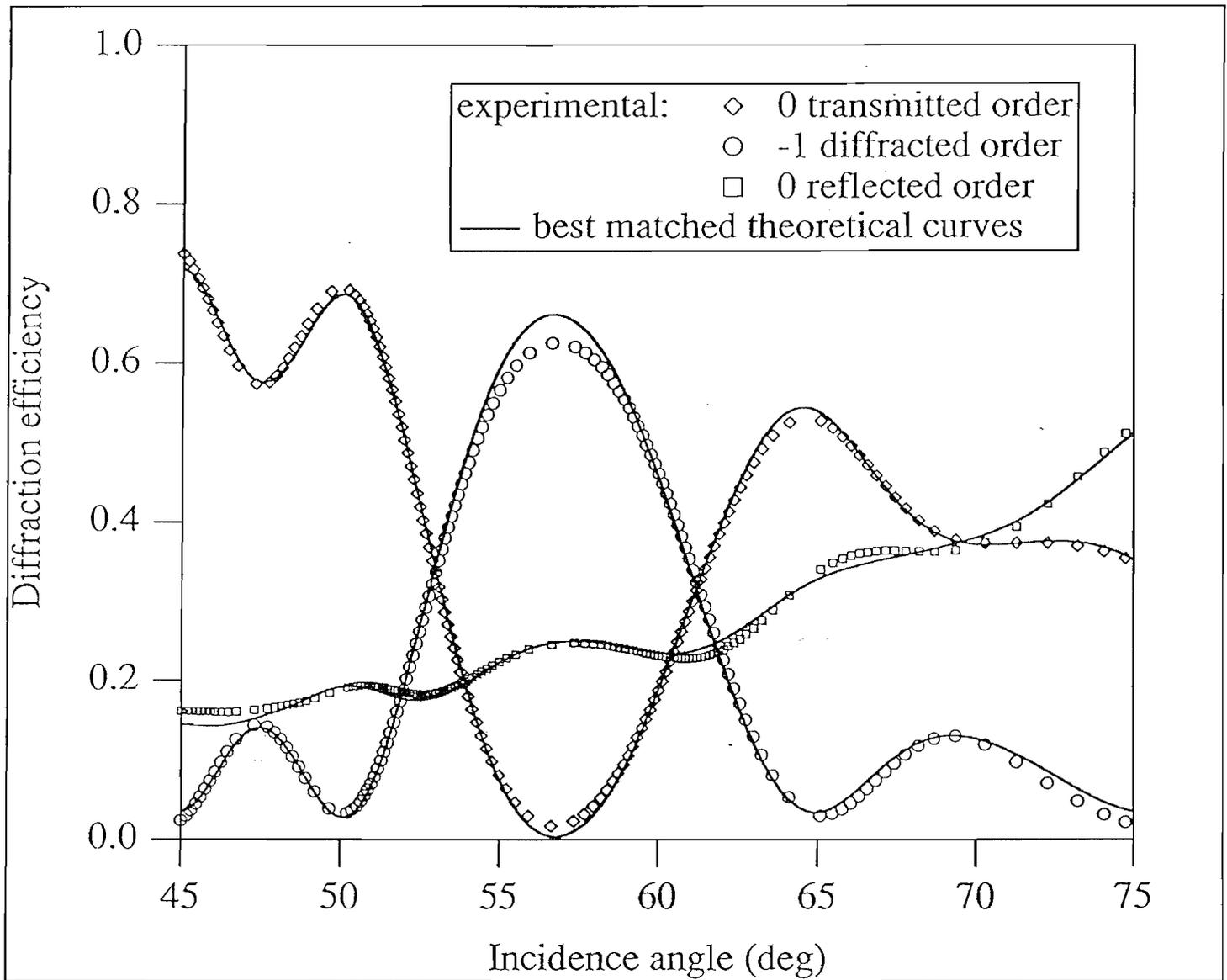


Figure 8

BIBLIOGRAPHIE

- ABE50 F. Abelès, *Annales de physique* **5**, 596 et 706 (1950).
- ABR70 M. Abramowitz et I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions* ninth edition, 78 et 721 (Dover Publications, New York, 1970).
- AU-87 L.B. Au, J.C. Newell et L. Solymar, "Non-uniformities in thick dichromated gelatin transmission gratings", *J. Modern Optics* **34**, 1211 (1987).
- AMI87 Y. Amitai et A. A. Friesem, "Recursive design techniques for Fourier transform holographic lenses", *Optical Engineering* **25**, 1133 (1987).
- AMI88 Y. Amitai et A. A. Friesem, "Design of holographic optical elements using recursive techniques", *J. Opt. Soc. Am.* **5**, 702 (1988).
- ASS88 Y. Amitai et A. A. Friesem, "Recursive design for an efficient HOE with different recording and readout wavelengths", *Applied Optics* **27**, 4747 (1988).
- BAH92 R.D. Bahuguna, J. Beaulieu et H. Arteaga, "Reflection display holograms on dichromated gelatin", *Applied Optics* **31**, 6181 (1992).
- BAI74 C. Bainier, Thèse de Doctorat, Université de Besançon (1974).
- BEL75 Y. Belvaux et S. P. S. Viridi, *Optics Communications* **15**, 193 (1975).
- BEN69 S. A. Benton, "Hologram reconstructions with extended incoherent sources", *J. Opt. Soc. Am.* **61**, 649 (1971).
- BEN75 S. A. Benton, "Holographic displays - a review", *Optical Engineering* **14**, 402-407 (1975).
- BLA90 L.T. Blair et L. Solymar, "Grating profiles in dichromated gelatin", *Optics Communications* **77**, 365 (1990).
- BLA91 L.T. Blair et L. Solymar, "Double exposure planar transmission holograms recorded in nonlinear dichromated gelatin", *Applied Optics* **30**, 775 (1991).
- BOR87 M. Born et E. Wolf, *Principles of Optics* sixth edition, 36-70 et 323-329 (Pergamon Press, New York, 1987).
- BOZ88 I. Bozhevol'nyi et P.S. Rad'ko, "Bragg diffraction of light by rectangular phase gratings", *Opt. Quant. Electron.* **20**, 475-483 (1988).
- BRO89 G. Brousseau, "Duplication holographique de disques optiques", rapport interne DIGIPRESS (1989).

- BRO90** G. Brousseau, "Système holographique de duplication d'objets plans capable d'un pouvoir de résolution élevé", mémoire descriptif déposé à l'appui d'une demande de brevet en France, 1990.
- BRU89** A. Brun, P. Georges, G. Le Saux, G. Roger et F. Salin, "Les impulsions lumineuses ultra-brèves", *Pour la Science* **135**, 46-54 (1989).
- BUR66** C.B.Burckhart, "Diffraction of a plane wave at a sinusoidally stratified dielectric grating", *J. Opt. Soc. Am.* **56**, 1502-1509 (1966).
- CAL84** S.Calixto et R.A.Lessard, "Real-time holography with undeveloped dichromated gelatin films", *Applied Optics* **23**, 1989 (1984).
- CAL88** S.Calixto, "Infrared recording with gelatin films", *Applied Optics* **28**, 340 (1988).
- CAS76** S.K.Case et R.Alferness, "Index modulation and spatial harmonic generation in dichromated gelatin films", *Applied Physics* **10**, 41 (1976).
- CHA71** M.Chang, "Dichromated gelatin of improved optical quality", *Applied Optics* **10**, 2551 (1971).
- CHA76** B.J.Chang, "Post-processing of developed dichromated gelatin holograms", *Optics Communications* **17**, 270 (1976).
- CHA79** B.J.Chang et C.D.Leonard, "Dichromated gelatin for the fabrication of holographic optical elements", *Applied Optics* **18**, 2407 (1979).
- CHA80a** B.J.Chang, "Dichromated gelatin holograms and their applications", *Optical Engineering* **19**, 642 (1980).
- CHA80b** K.C.Chang, V.Shah et T.Tamir, "Scattering and guiding of waves by dielectric gratings with arbitrary profiles", *J. Opt. Soc. Am.* **70**, 804-813 (1980).
- CHA86** R.Changkakoti et S.V.Pappu, "Study on the pH dependance of diffraction efficiency of phase holograms in dye sensitized dichromated gelatin", *Applied Optics* **25**, 798 (1986).
- CHA89a** R.Changkakoti et S.V.Pappu, "Methylene blue sensitized dichromated gelatin holograms: a study of their storage life and reprocessibility", *Applied Optics* **28**, 340 (1989).
- CHA89b** F. Chataux, N. Chateau, J.P.Hugonin, J.C.Saget et J.Taboury, "High diffraction efficiency gratings in dichromated gelatin for near infrared wavelengths", communication au congrès ECO2 à Paris (1989).

- CHA92 N. Chateau, D.Philippou et P.Chavel, "A method for splitting a gaussian laser beam into two coherent uniform beams", *Optics Communications* **88**, 33 (1992).
- CHA93a N. Chateau, J.C.Saget et P.Chavel, "Diffraction analysis and experimental investigation of reflection-free holographic phase gratings", article accepté pour publication dans *J.Eur.Opt.Soc.A* (1993).
- CHA93b N. Chateau et J. P. Hugonin, "A new algorithm for the rigorous coupled-wave analysis of grating diffraction", article soumis pour publication à *J. Opt. Soc. Am. A* (1993).
- CHA93c N. Chateau, J. P. Hugonin, B. Guldemann et P. Chavel, "Two-wave diffraction of quasi-monochromatic light by a thick grating deposited on a thick transparent plate", article soumis pour publication à *Optics Communications* (1993).
- CHE88a X.Y.Chen, "Using the finite element method to solve coupled wave equations in volume holograms", *J. Modern Opt.* **35**, 1383-1391 (1988).
- CHE88b X.Y.Chen, "The beam ratio in volume holography", *J. Modern Opt.* **35**, 1393-1398 (1988).
- CHU77 R-S.Chu et J.A.Kong, "Modal theory of spatially periodic media", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **MTT-25**, 18-24 (1977).
- CLO75 D.H.Close, "Holographic optical components", *Optical Engineering* **14**, 408-419 (1975).
- COL65 R. J. Collier, E. T. Doherty et K. S. Permington, "Application of moiré techniques to holography", *Appl. Phys. Lett.* **7**, 1091-1095 (1965).
- CUR70 R.K.Curran et T.A.Shankoff, "The mechanism of hologram formation in dichromated gelatin", *Applied Optics* **9**, 1651 (1970).
- DÄN87 R. Dändliker and J. Brook, "Holographic photolithography for submicron VLSI structures", *IEE Second International Conference on Holographic Systems, Components and Applications*, University of Bath (1989).
- DEN62 Y.N.Denisyuk, "Photographic reconstruction of the optical properties of an object by the wave field of its scattered radiation", *Soviet Physics - Doklady* **7**, 543-545 (1962).
- DEN87 Y.N.Denisyuk, N.A.Savostyanenko et V.I.Zubritskas, "Effect of partial image reconstruction in thick holograms due to variation in the reading beam incidence angle", *Opt. Spectrosc.* **63**, 648-651 (1987).

- DUF92 M. Dufresnes, DIGIPRESS, communication personnelle (mai 1992)
- EHB92 P.Ehbets, M.P.Herzig et R.Dänliker, "TIR holography analyzed with coupled wave theory", *Opt. Commun.* **89**, 5-11 (1992).
- EWA65 P.P.Ewald, "Cristal optics for visible light and X-rays", *Review of Modern Physics* **37** (1965).
- FARN92 M.W.Farn, "Binary gratings with increased efficiency", *Appl. Opt.* **31**, 4453-4458 (1992).
- FIL71 G.L.Filmore et R.F.Tynan, "Sensitometric characteristics of hardened dichromated gelatin films", *J.Optical Society America* **61**, 199 (1971).
- FLO83 G.Floquet, "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques", *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* **12**, 47 (1983).
- GAB48 D. Gabor, "A new microscope principle", *Nature* **161**, 777 (1948).
- GAL90 N.C.Gallagher et A.J.Whang, "Solving slab lamellar grating problems by the singular-value-decomposition method", *J. Opt. Soc. Am. A.* **7**, 1701-1711 (1990).
- GAY81a T.K.Gaylord et M.G.Moharam, "Coupled-wave analysis of reflection gratings", *Appl. Opt.* **20**, 240 (1981).
- GAY81b T.K.Gaylord et M.G.Moharam, "Thin and thick gratings: terminology clarification", *Appl. Opt.* **20**, 3271 (1981).
- GAY85 T.K.Gaylord et M.G.Moharam, "Analysis and applications of optical diffraction by gratings", *proc. IEEE* **73**, 894 (1985).
- GEO87 T.G.Georgekutty et H.K.Liu, "Simplified dichromated gelatin hologram recording process", *Applied Optics* **26**, 372 (1987).
- GLA76 Glafkidès, "Physique et chimie des phénomènes photographiques" (1976).
- GLY88 E.N.Glytsis et T.K.Gaylord, "Antireflection surface structure: dielectric layer(s) over a high spatial-frequency surface-relief grating on a lossy substrate", *Appl. Opt.* **27**, 4288-4304 (1988).
- GLY90 E.N.Glytsis et T.K.Gaylord, "Three-dimensional (vector) rigorous coupled-wave analysis of anisotropic grating diffraction", *J. Opt. Soc. Am. A* **7**, 1399-1420 (1990).

- GRA73 A.Graube, "Holograms recorded with red light in dye sensitized dichromated gelatin", *Optics Communications* **8**, 251 (1973).
- GRA77 A.Graube, *J. Optical Society America* **67**, 1434 (1977).
- HAR80 P.Hariharan, "Holographic recording materials: recent developments", *Optical Engineering* **19**, 636 (1980).
- HAR84 P.Hariharan, *Optical holography - principles, techniques and applications*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1984).
- HAR91 J.Harthong, "Alternative theory of diffraction by modulated media", *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 3-10 (1991).
- HAR92 J.Harthong et A.Medjahed, "Thickness measurement for volume holograms by analysis of first-order diffraction", *Appl. Opt.* **31**, 1803-1809 (1992).
- HAS89 N.Hasegava, S.Okazaki, "Improvement of defocus tolerance in a half micron optical lithography by the focus latitude enhancement exposure method: simulation and experiment, H.Fukuda", *J.Vac.Sci.Technol. B* **7**, 667 (1989).
- HUI88 J.P.Huignard, *Cours d'Optoélectronique*, Ecole Supérieure d'Optique (1988).
- JAES7 P. Jaeglé, "Le laser à rayons X", *La Recherche* **184**, 16-25 (1987).
- JAS90 J.Jasinski, "Fresnel approximation in coupled-wave diffraction analysis for spatially periodic media", *J. Modern Opt.* **37**, 1987-1996 (1990).
- JEO91 M. H. Jeong, J.B.Song et I.W.Lee, "Simplified processing method of dichromated gelatin holographic recording material", *Applied Optics* **30**, 4172 (1991).
- JEO92 M. H. Jeong, J.B.Song et I.W.Lee, "Dichromated gelatin reflection holographic optical element derived from Kodak 649F plates", *Applied Optics* **31**, 161 (1992).
- JOS93 P. Jost, D. J. Lougnot, N. Chateau, P. Chavel et D. Joyeux, "Modelling of the phenomena occurring during holographic recording on photopolymers", *Communication aux conférences OPTO93* (1993).
- KEI88 T.Keinonen et Olli Salminen, "Influence of some development parameters on the reflection grating structure in dichromated gelatin", *Applied Optics* **27**, 2573 (1976).
- KER69 D.Kermisch, "Nonuniform sinusoidally modulated dielectric gratings", *J. Opt. Soc. Am.* **59**, 1409-1413 (1969).

- KOB92 H.Kobolla, J.Schmidt, J.T.Sheridan, N.Streibl et R.Völkel, "Holographic optical beam splitters in dichromated gelatin", *J. Modern Optics* **39**, 881 (1992).
- KOG65 H.Kogelnik, "Holographic image projection through inhomogeneous media", *Bell System Tech. J.* **44**, 2451-2455 (1965).
- KOG67 H.Kogelnik, "Hologram efficiency and response", *Microwaves* **6**, 68-73 (1967).
- KOG69 H.Kogelnik, "Coupled wave theory for thick hologram gratings", *Bell System Tech. J.* **48**, 2909-2947 (1969).
- KON77 J.A.Kong, "Second-order coupled-mode equations for spatially periodic media", *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 825 (1977).
- KUB76 T.Kubota, T.Ose, M.Sasaki et K.Honda, *Applied Optics* **14**, 556 (1976).
- KUB89 T.Kubota, "Control of the reconstruction wavelength of Lippmann holograms recorded in dichromated gelatin", *Applied Optics* **28**, 1845 (1989).
- LEI62 E. N. Leith. et J. Utpatnieks, "Reconstructed wavefronts and communication theory", *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 1123-1130 (1962).
- LEI63 E. N. Leith. et J. Utpatnieks, "Wavefront reconstruction with continuous tone objects", *J. Opt. Soc. Am.* **53**, 1377-1381 (1963).
- LEI64 E. N. Leith. et J. Utpatnieks, "Wavefront reconstruction with diffused illumination and three-dimensional objects", *J. Opt. Soc. Am.* **54**, 1295-1301 (1964).
- LIN69 H.Lin, "Hologram formation in hardened dichromated gelatin films". *Applied Optics* **8**, 963 (1969).
- LOH67 A. W. Lohmann et D. P. Paris, "Binary Fraunhofer holograms generated by computer". *Applied Optics* **6**, 1739-1748 (1967).
- MAG79 R.Magnusson et T.K.Gaylord, "Equivalence of multiwave coupled-wave theory and modal theory for periodic-media diffraction", *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 1777 (1979).
- MAI91 G. Mainfray, C. Manus, L. Lompré et A. L'Huillier, "Les lasers térawatts entrent en matière", *La Recherche* **238**, 1490-1492 (1991).
- MAT89 D. Matthews et M. Rosen, "Les lasers à rayons X mous", *Pour la Science* **136**, 70-76 (1989).

- MAT90** T.Matsuda et Y.Okuno, "Computer-aided algorithm based on the Yasuura method for analysis of diffraction by a grating", *J. Opt. Soc. Am. A.* **7**, 1693-1700 (1990).
- MAR84** P.Markowski, T.Todorov et N.Koleva, "Influence of the characteristic curve of the material on the diffraction efficiency of holographic volume phase gratings", *Opt. Quant. Electron.* **16** (1984) pp19-24.
- MEY72** D.Meyerhofer, *RCA Review* **33**, 110 (1972).
- MEY77** D.Meyerhofer, "Dichromated gelatin", chapter 3 in *Topics in Applied Physics* **20** (1977).
- MIG87** A. Migus, A. Antonetti et A. Orszag, "Les lasers ultra-rapides", *La Recherche* **187**, 432-442 (1987).
- MOH81** M.G.Moharam et T.K.Gaylord, "Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction", *J. Opt. Soc. Am.* **71**, 811-818 (1981).
- MOH82a** M.G.Moharam et T.K.Gaylord, "Chain-matrix analysis of arbitrary-thickness dielectric reflection gratings", *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 187-190 (1982).
- MOH82b** M.G.Moharam et T.K.Gaylord, "Diffraction analysis of dielectric surface-relief gratings", *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 1385-1392 (1982).
- MOH83** M.G.Moharam et T.K.Gaylord, "Rigorous coupled-wave analysis of grating diffraction - E-mode polarization and losses", *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 1385-1392 (1982).
- NAI90** G.M.Naik, A.Mathur et S.V.Pappu, "Dichromated gelatin holograms: an investigation of their environmental stability", *Applied Optics* **29**, 5292 (1990).
- NAI91** G.M.Naik, A.Mathur et S.V.Pappu, "Generation of phase conjugate waves in dichromated gelatin and related materials", *Applied Optics* **30**, 1890 (1991).
- NAK75** M.Nakashima, T.Inagaki et Y.Nashimura, "Highly reproducible hologram of hardened dichromated gelatin processed with HCl", *Japanese J. Applied Physics* **14** (1975).
- NEV73a** M.Nevière, P.Vincent, R.Petit et M.Cadilhac, "Systematic study of resonances of holographic thin film couplers", *Opt.Comm.* **9**, 48-53 (1973).
- NEV73b** M.Nevière, R.Petit et M.Cadilhac, "About the theory of optical grating coupler-waveguide systems", *Opt.Comm.* **8**, 113-117 (1973).
- NEV75** M.Nevière, Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille (1975).

- NEW85 J.C.Newell, L.Solymar et A.A.Ward, "Holograms in dichromated gelatin: real-time effects", *Applied Optics* **24**, 4460 (1985).
- NEW89 J.C.Newell et L.Solymar, "Non-uniformities in dichromated gelatin reflection gratings", *J. Modern Optics* **34**, 751 (1989).
- OLI84 J.Oliva, P.G.Boj, M.Pardo, "Dichromated gelatin holograms derived from Agfa 8E75 plates", *Applied Optics* **23**, 196 (1984)
- PAI91 D.M.Pai et K.A.Awada, "Analysis of dielectric gratings of arbitrary profiles and thicknesses", *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 755-762 (1991).
- PET80 R.Petit, ed., *Electromagnetic theory of gratings* first edition (Springer-Verlag, Berlin, 1980).
- POW65 R. L. Powell et K. A. Stetson, "Interferometric vibration analysis by wavefront reconstruction", *J. Opt. Soc. Am.* **55**, 1593-1598 (1965).
- RAM35 C.V.Raman et N.S.Nagendra Nath, "The diffraction of light by high frequency sound waves" parts 1-2, *Proc. Indian Academy Science* **A2**, 406-420 (1935).
- RAM36 C.V.Raman et N.S.Nagendra Nath, "The diffraction of light by high frequency sound waves" parts 3-4-5, *Proc. Indian Academy Science* **A3**, 75-84, 119-125, 459-65 (1936).
- RED89 I.R.Redmond, "Holographic optical elements in dichromated gelatin", Ph.D. Thesis, Heriot-Watt University, Edimburgh (1989).
- ROB90 B.Robertson, M.R.Taghizadeh, J. Turunen et A.Vasara, "Fabrication of space invariant fanout components in dichromated gelatin", *Applied Optics* **29**, 1134 (1990).
- SHA68 T.A.Shankoff, *Applied Optics* **7**, 2101 (1968).
- SHA88 P.Sharlandjiev, P.Markowski et T.Todorov, "Volume holographic gratings: modelling their optical properties", *J.Modern Opt.* **35**, 1409-1415 (1988).
- SHE92 J.T.Sheridan et L.Solymar, "Spurious beams in dielectric gratings of the reflection type: a solution in terms of boundary diffraction coefficients", *Opt.Commun.* **94**, 8-12 (1992).
- SJÖ84 S.Sjölander, "Bandwidth in dichromated gelatin filters", *Optica Acta* **31**, 1001 (1984).

- SKO85 A.F.Skochilov, "Diffraction of a plane electromagnetic TM wave by a transmitting phase hologram in the coupled-wave-theory approximation", *Opt.Spectrosc.* **58**, 415-417 (1985).
- SOL81 L.Solymar et D.J.Cooke, *Volume holography and volume gratings* first edition, 98-103 (Academic Press, London, 1981).
- STE67 K. Stetson, "Holography with totally internally reflected light", *Applied Physics Letters* **11**, 225 (1967).
- STE90 G.I.Stegeman et D.G.Hall, "Modulated index structures", *J. Opt. Soc. Am. A.* **7**, 1387-1398 (1990).
- SU75 S.F.Su et T.K.Gaylord, "Calculations of arbitrary-order diffraction efficiencies of thick gratings with arbitrary grating shape", *J. Opt. Soc. Am.* **65**, 59-65 (1975).
- TAP92 J.-L. Tapié, "Génération et amplification d'impulsions femtoseconde propres à 1,053 μm ", Thèse de doctorat, Univ. de Paris-Sud (1992).
- THO67 B. J. Thompson, J. H. Ward et W. R. Zinky, "Application of hologram techniques for particle size analysis", *Appl. Opt.* **6**, 519-526 (1967).
- TRE68 E. B. Treacy, "Compression of picosecond light pulses", *Phys. Lett.* **28A**, 34 (1968).
- TRE78 D.E.Tremain et K.K.Mei, "Application of the unimoment method to scattering from periodic dielectric structures", *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 775-783 (1978).
- TRI92 J.L.Tribillon, "Développements actuels des matériaux d'enregistrement pour l'holographie", *proc. OPTO* (1992).
- UTP66 J. Utpatnieks, A. Vander Lugt et E. Leith, "Correction of lens aberrations by means of holograms", *Appl. Opt.* **5**, 589-593 (1966).
- VAS85 M.V.Vasnetsov, M.S.Soskin et V.B.Taranenko, "Grazing diffraction by volume phase gratings", *Optica Acta* **32**, 891-899 (1985).

RESUME

Dans les systèmes optiques modernes, l'importance des composants holographiques ne cesse d'augmenter. Parmi les matériaux holographiques disponibles, la gélatine bichromatée se distingue par la très bonne qualité des hologrammes obtenus.

Cette thèse décrit la mise au point de techniques de fabrication et de caractérisation de composants holographiques en gélatine bichromatée. L'interprétation des mesures de caractérisation s'appuie sur une modélisation approfondie de la diffraction par des structures périodiques : une nouvelle méthode de résolution de la théorie d'ondes couplées, plus stable numériquement que les précédentes, est proposée. De plus, la théorie de la diffraction par des réseaux est étendue à des cas importants de restitution en lumière quasi-monochromatique.

Les dispositifs expérimentaux développés ont permis l'étude et la réalisation de quatre nouveaux types d'hologrammes : réseaux pour la compression temporelle d'impulsions ultra brèves, hologramme synthétique séparateur et uniformiseur de faisceau laser, lentille holographique pour diode laser infrarouge et hologramme en ligne pour la réplique globale de disques compacts.

MOTS-CLES

holographie

réseau de diffraction

ondes couplées

gélatine bichromatée

compression d'impulsions