



**HAL**  
open science

# Cohérence temporelle d'ordre supérieur d'un laser déclenché multimode

Francis Sanchez

► **To cite this version:**

Francis Sanchez. Cohérence temporelle d'ordre supérieur d'un laser déclenché multimode. Optique [physics.optics]. Université Paris Sud - Paris XI, 1975. Français. NNT: . pastel-00716257

**HAL Id: pastel-00716257**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00716257>**

Submitted on 10 Jul 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY  
Série A  
N° d'ordre  
1478

**T H E S E**

PRESENTEE

**A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD**

**CENTRE D'ORSAY**

POUR OBTENIR

**LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES**

par

**Francis SANCHEZ**

**COHERENCE TEMPORELLE D'ORDRE SUPERIEUR  
D'UN LASER DECLENCHE MULTIMODE**

Soutenu le 30 mai 1975, devant la Commission d'Examen

**MM. LOWENTHAL**

Président

**PICINBONO**

**MANUS**

Examineurs

**CAGNAC**

**LEVESQUE**



## RESUME

Les lasers se distinguent des sources thermiques non seulement par leur luminance spectrique incomparablement supérieure, mais aussi par leurs propriétés statistiques. Cependant, jusqu'à présent, seul le laser monomode continu a intéressé les statisticiens. Ce mémoire est consacré à l'étude statistique du rayonnement émis par un laser déclenché multimode axial.

Ce type de laser présente une largeur spectrale généralement très supérieure à l'inverse de la durée de l'impulsion géante. Donc l'intensité et (ou) la phase instantanées du champ varient rapidement au cours de l'impulsion. Nous nous intéressons exclusivement aux fluctuations rapides de l'intensité au cours d'un tir et d'une épreuve à l'autre.

Compte tenu de la bande passante des meilleurs systèmes de détection linéaire ( $\sim 1$  GHz), l'observation directe de ces fluctuations n'est possible qu'en réduisant la largeur spectrale au-dessous de cette valeur. Nous avons construit un laser déclenché de largeur spectrale variable, monomode transverse et polarisé rectilignement. La fluctuation d'intensité au cours d'un tir se révèle en bonne approximation périodique, indiquant qu'on peut assimiler le spectre à une suite discrète d'éléments équidistants (fréquences des modes axiaux de la cavité).

Le comportement stochastique du champ périodique associé est décrit par la loi de distribution des amplitudes complexes des modes. Le formalisme utilisé est classique, mais la jonction avec la théorie quantique du champ est immédiate par le biais de la P-représentation.

Les moments statistiques considérés sont ceux susceptibles d'être effectivement mesurables au moyen d'un système de détection sensible à la valeur intégrée de la k<sup>ième</sup> puissance de l'intensité. La section efficace du processus non-linéaire utilisé est éliminée par un étalonnage préalable au moyen d'un laser déclenché monomode.

Le phénomène utilisé est l'ionisation à 11 photons de l'atome xénon, par le laser au néodyme ( $\lambda = 1,06 \mu$ ). En l'absence de résonance sur des niveaux liés le nombre d'ions est donné par

$$N = \alpha \int I^k(t) dt$$

où k est l'entier immédiatement supérieur au rapport entre l'énergie d'ionisation de l'atome et l'énergie d'un photon. Dans la détermination de  $\alpha$  les physiciens ne peuvent en fait accéder qu'à une valeur apparente  $(\alpha)_{app}$ , car ils ne peuvent mesurer qu'une valeur moyenne de  $I(t)$  :

$$\bar{I}(t) = \frac{1}{\theta} \int_t^{t+\theta} I(t') dt'$$

Suivant la procédure expérimentale adoptée le rapport  $(\alpha)_{app}/\alpha$  est donné par l'un ou l'autre des moments suivants :

$$f_k = \left\langle \frac{\int I^k(t) dt}{\int \bar{I}^k(t) dt} \right\rangle$$

$$h_k = \frac{\langle \int I^k(t) dt \rangle}{\langle \int \bar{I}^k(t) dt \rangle}$$

Le but de cette étude est de déterminer ces moments pour un laser déclenché multimode. L'intérêt est double. D'une part on obtient des résultats caractérisant la cohérence d'ordre supérieur du champ, d'autre part ces résultats intéressent les utilisateurs pour connaître la correction à apporter lors d'une mesure de section efficace d'un phénomène non-linéaire du type ci-dessus.

Après une analyse critique de l'application de la théorie des fonctions aléatoires à la caractérisation pratique des propriétés statistiques d'un champ optique, nous étudions systématiquement les propriétés générales des effets de groupement  $f_k$  et  $h_k$  des champs périodiques, en identifiant le temps d'intégration  $\Theta$  avec la période  $T$  de l'intensité du champ. Pour un nombre  $M$  de modes donné, ces moments vérifient les inégalités :

$$1 \leq f_k \leq M^{k-1}$$

$$1 \leq h_k < \infty$$

Nous calculons ces moments pour divers modèles simples du champ. En particulier pour un champ thermique dont le spectre comporte  $M$  composantes de même poids statistique :

$$f_k = k! \frac{M^k (M-1)!}{(M+k-1)!}$$

$$h_k = k!$$

Nous montrons que, de manière générale, le moment  $f_k$  dépend de façon critique des relations de phase existant entre les modes. Par contre lorsque les phases sont indépendantes, les lois statistiques des intensités ainsi que la forme du spectre influent peu sur la valeur de  $f_k$ .

La mesure des moments d'ordre élevé du laser à spectre réduit au moyen de deux méthodes différentes (observation directe des pulses et utilisation de l'ionisation multiphotonique) permet de conclure que les phases des modes sont corrélées d'une manière qui diminue la valeur de  $f_k$  par rapport au cas d'indépendance.

Par contre, lorsque la largeur spectrale est ramenée progressivement à sa valeur naturelle, les résultats expérimentaux ne peuvent s'expliquer qu'en supposant que les phases de modes distants (en pratique appartenant à des raies distinctes) sont indépendantes. La variation de  $f_k$  en fonction du nombre de raies  $R$  est bien représentée par la formule :

$$f_k = k! \frac{(R \bar{M})^k \Gamma(R \bar{M})}{\Gamma(k + R \bar{M})}$$

où  $\bar{M}$  représente le nombre de modes indépendants équivalents par raie, et est inférieur au nombre effectif  $M$  de modes par raie. Pour le laser étudié  $M \simeq 10$  et  $\bar{M} \simeq 3$ . Pour une largeur spectrale de  $5 \text{ \AA}$  comportant une dizaine de raies, le moment  $f_{11}$  mesuré est  $10^{6,8 \pm 0,4}$ , c'est-à-dire proche de la valeur asymptotique  $11! = 10^{7,6}$ . Le moment  $h_{11}$  est de l'ordre de  $4 \times f_{11}$ .

Ces résultats permettent de corriger les mesures de section efficace d'ionisation multiphotonique obtenus au cours de ces dernières années. En particulier nous montrons que dans l'expérience effectuée sur l'hydrogène au moyen de l'harmonique deux ( $\lambda = 0,53 \mu$ ), le facteur correctif n'est pas  $k!$  mais  $(2k)!/2^k$ . Avec  $k=6$ , la correction correcte est de l'ordre de  $10^4$  fois plus importante que la correction inexacte  $6!$ .

En conclusion, la radiation émise par un laser déclenché multimode n'a pas les mêmes propriétés statistiques qu'une impulsion de lumière gaussienne de même spectre. Toutefois lorsque le spectre est large les moments de surintensité  $f_k$  de ces deux champs sont voisins.

## REMERCIEMENTS

Je remercie MM. MANUS et MAINFRAY pour la confiance qu'ils m'ont accordée et les moyens considérables qu'ils ont mis à ma disposition.

Je remercie M. PICINBONO de s'être intéressé à ce travail et d'avoir accepté d'être mon Directeur de Thèse.

Je remercie Mme ROUSSEAU pour la collaboration patiente et désintéressée qu'elle m'a apportée.

Je remercie M. AGOSTINI et M. THEBAULT pour leur disponibilité à discuter sur des questions scientifiques.

La partie expérimentale de ce travail n'aurait pu aboutir sans la compétence et l'aide technique apportées par M. MAINFRAY, M. FONDANT, Mlle LECOMPTE, ainsi que tous les ingénieurs, techniciens et stagiaires du service de Physique Atomique du C.E.N. Saclay.

Je dédie cette Thèse à mon épouse dont la patience et le dévouement ont, en dernier ressort, permis l'aboutissement de ce travail.





COHERENCE TEMPORELLE D'ORDRE SUPERIEUR  
D'UN LASER DECLENCHE.

	Page
AVANT-PROPOS .....	I
INTRODUCTION .....	1
Chapitre I : COHERENCE OPTIQUE .....	5
Introduction : Discussion sur les méthodes statistiques en optique .....	5
I.1. Notion de cohérence .....	8
I.2. Détection dans le domaine optique .....	9
I.3. Fonctions de corrélation .....	14
I.4. Spectre d'une fonction aléatoire .....	18
I.A. Appendice : Champs gaussiens .....	20
Chapitre II : EFFETS DE GROUPEMENT DES CHAMPS PERIODIQUES .....	29
Introduction .....	29
II.1. Définition des champs périodiques .....	30
II.2. Effets de groupement des champs périodiques .....	31
II.3. Champ à modulation de fréquence périodique .....	35
II.4. Modes à phases indépendantes .....	36
II.5. Modes à phases synchronisées .....	42
II.6. Conclusions .....	46
II.A. Appendice : Champs particuliers .....	47
Chapitre III : CONSTRUCTION D'UN LASER DECLENCHE A COHERENCE VARIABLE .....	50
III.1. Degrés de liberté d'un champ électromagnétique .....	50

	Page
III.2. Modes d'une cavité composée de deux miroirs sphériques	51
III.3. Sélection du mode transverse fondamental .....	57
III.4. Sélection des modes longitudinaux .....	59
III.5. Réalisation d'un laser déclenché à verre dopé au néo- dyme à nombre de modes axiaux variable .....	60
Article dans "Applied Optics" .....	60.1
III.6. Conclusions .....	61
 Chapitre IV : RESULTATS EXPERIMENTAUX .....	 65
IV.1. Résultats concernant l'ionisation multiphotonique .....	66
IV.1.a. Conditions expérimentales .....	67
IV.1.b. Procédure expérimentale .....	68
IV.1.c. Le problème des résonances intermédiaires .....	69
Publication dans "Physical Review Letters" .....	69.1
IV.1.d. Influence du nombre de modes du champ sur l'ioni- sation multiphotonique .....	70
Publication dans "Physical Review Letters" .....	70.1
Article dans "Physical Review A" .....	71.1
IV.2. Résultats concernant le champ laser .....	72
Article dans "Il Nuovo Cimento" .....	72.1
IV.2.a. Modèle statistique du champ multimode et justi- fication phénoménologique .....	73
IV.2.b. Discussion .....	75
IV.3. Intérêt des résultats obtenus .....	78
 CONCLUSION .....	 81
 APPENDICE : EXPERIENCES CONNEXES .....	 84
 BIBLIOGRAPHIE .....	 87

## AVANT-PROPOS

Avant d'aborder cette étude, il peut sembler utile de la situer dans le cadre actuel de la Physique. Ce travail relève à la fois de la Physique Statistique et de l'Optique. Dans le domaine commun à ces deux disciplines le seul type de champ étudié était, jusqu'à une époque récente, le champ gaussien émis par les sources naturelles. Pour un tel champ le problème de la détermination des moments d'ordre supérieur ne se pose pas car ceux-ci peuvent être déduits des moments d'ordre deux. Cette propriété, connue sous le nom de "théorème des moments" est utilisée par exemple en Spectrométrie de haute résolution et en Astronomie (mesure du diamètre apparent d'étoiles par la méthode de H. Brown et Twiss).

Actuellement on assiste à une course aux champs intenses produits par des sources laser, aux fins d'utilisations en Physique Atomique et Nucléaire. Dans ce contexte, il était nécessaire d'étudier les propriétés statistiques du champ émis par un laser déclenché.

En ce qui concerne la forme adoptée pour présenter cette thèse, nous aurions pu a priori nous contenter de relier la suite de nos publications. Cependant il nous a semblé utile d'adjoindre un certain nombre de rappels (début des chapitres I et III), de façon à intéresser des lecteurs de spécialités différentes. De plus, il nous a semblé indispensable de consacrer le chapitre II à un développement théorique sur les champs à amplitude périodique. Ceci afin de préciser sans ambiguïté les différents types de moments (ou "effets de groupement") qui interviennent dans notre étude.

Les principaux résultats originaux contenus dans cette thèse se résument ainsi :

1. Dans le cadre de la théorie des champs gaussiens d'intensité stationnaire, nous calculons l'effet de groupement absolu d'ordre quelconque d'un champ gaussien généralisé (formule I.A.35 page 27), ainsi que celui d'une classe plus générale encore, englobant les trois types principaux de champs gaussiens étudiés jusqu'ici (formule I.A.41 page 28).

2. Dans le cadre de la théorie des fonctions aléatoires, nous définissons et étudions plusieurs types d'effets de groupement des champs périodiques (résultats généraux page 46). En particulier nous calculons le moment de surintensité d'un champ périodique à spectre uniforme, gaussien complexe (formule II.77 page 46) ou gaussien réel (formule II.A.5 page 47).

3. Dans le domaine de la technologie laser, nous avons conçu et réalisé le premier laser déclenché à cohérence variable\* (page 60). L'étude expérimentale du rayonnement émis par ce laser nous a conduit à introduire le concept de surintensité (page 60.5).

4. En Physique Atomique, notre groupe d'expérimentateurs a mis en évidence pour la première fois l'influence de la cohérence du champ laser sur la section efficace apparente d'ionisation multiphotonique (pages 70 et suivantes).

5. En Optique Statistique Appliquée, nous avons mesuré pour la première fois des moments d'ordre élevé du champ émis par un laser déclenché multimode, par deux méthodes différentes (voir pages 72 et suivantes). Nous proposons un modèle statistique simple du champ multimode réel, reposant sur une interprétation phénoménologique simple mais quantitative du fonctionnement du laser déclenché à verre dopé au néodyme.

\* c'est-à-dire à nombre de modes axiaux variable.

## INTRODUCTION

Dans le domaine optique le champ électromagnétique est si rapidement variable comparé à nos moyens d'investigation les plus fins qu'il est avantageux de caractériser le champ par ses propriétés statistiques. Les moyennes statistiques pratiquement mesurables sont déterminées par les propriétés du système de détection utilisé.

La luminance spectrique des sources d'origine thermique est si faible que seul le phénomène de photo-émission à un photon est utilisable et que l'effet de grenaille électronique empêche en pratique de remonter aux propriétés statistiques de l'intensité instantanée du champ. En 1956, H. BROWN et TWISS [1] ont cependant réussi à mesurer des fonctions de corrélation d'ordre quatre du champ en utilisant deux photomultiplicateurs, de sorte que les bruits électroniques se moyennent à zéro. Leurs résultats confirment la nature gaussienne du rayonnement thermique.

L'apparition des sources lasers en 1960 a élargi considérablement les perspectives d'application de l'optique statistique et de l'optique non-linéaire. Toutefois ces deux branches se sont spécialisées, au cours de la dernière décade, dans des domaines différents. Les statisticiens se sont tout naturellement intéressés aux lasers à gaz continus monomodes, et ont développé des méthodes toujours plus élaborées de comptage, afin de vérifier les prévisions des théoriciens. Les physiciens ont été plutôt intéressés par les lasers à milieu actif dense, et en particulier les lasers déclenchés qui leur permettent d'obtenir des densités d'énergie considérables au foyer d'une lentille corrigée.

C'est ainsi qu'au cours des dernières années s'est développée l'étude du phénomène d'ionisation multiphotonique de gaz rares. Dans ce type d'expérience on mesure un nombre d'ions  $N$  relié à l'intensité instantanée  $I(t)$  du champ par la formule

$$N = \alpha \int I^k(t) dt \quad (1)$$

où  $k$  est l'ordre de non-linéarité. Dans la mesure de la constante  $\alpha$  les expérimentateurs se heurtent à la difficulté suivante. Les lasers déclenchés utilisés ont généralement une largeur spectrale supérieure à la bande passante des meilleurs systèmes de détection linéaire, et l'on ne peut accéder qu'à une valeur moyennée dans le temps de l'intensité :

$$\bar{I}(t) = \frac{1}{\theta} \int_t^{t+\theta} I(t') dt' \quad (2)$$

Par suite, les expérimentateurs mesurent une valeur apparente de  $\alpha$ , en moyennant sur un grand nombre d'expériences :

$$\alpha_{\text{app}} = \left\langle \frac{N}{\int \bar{I}^k(t) dt} \right\rangle \quad (3)$$

Cette mesure est entachée d'une erreur systématique

$$f_k = \frac{\alpha_{\text{app}}}{\alpha} = \left\langle \frac{\int I^k(t) dt}{\int \bar{I}^k(t) dt} \right\rangle \quad (4)$$

qui dépend des propriétés statistiques du champ.

L'objet de notre étude est ce type particulier de moment, caractérisant la radiation émise par un laser déclenché multimode. L'intérêt est double. D'une part la connaissance des moments  $f_k$  permettra de corriger les sections efficaces mesurées dans les conditions ci-dessus. D'autre part la comparaison des moments  $f_k$  avec ceux d'une lumière thermique de même spectre s'avèrera un moyen commode pour stigmatiser la différence de nature entre les deux types de radiation.

La partie expérimentale de ce travail (chapitre IV) consiste à utiliser le phénomène d'ionisation multiphotonique pour mesurer un moment  $f_k$  d'ordre élevé du champ ( $k = 11$ ). On élimine l'inconnue  $\alpha$  en opérant en deux temps. On réduit d'abord artificiellement la largeur spectrale du champ de manière à pouvoir mesurer  $I(t)$ , ce qui permet la mesure de  $f_k$  pour diverses valeurs de  $k$  à partir des oscillogrammes. Dans le même temps on teste l'appareillage utilisé pour l'ionisation

multiphonique, mis au point par l'équipe de MANUS et MAINFRAY à Saclay, ainsi que la validité de la relation (1). Dans un deuxième temps, on ramène la largeur spectrale à sa valeur naturelle, sans modifier les autres paramètres de l'expérience. En particulier les propriétés géométriques du faisceau sont maintenues constantes en ne permettant l'oscillation laser que sur le mode transverse fondamental de la cavité. De même toutes les expériences sont effectuées avec un faisceau laser polarisé rectilignement.

La partie technologique de ce travail (chapitre III) est consacrée à la réalisation d'un laser déclenché à largeur spectrale variable ainsi qu'à la mise sur pied d'un appareillage de contrôle spectrographique et d'un système de détection rapide. On observe que l'intensité instantanée  $I(t)$  peut, en bonne approximation, être considérée comme le produit d'une variation lente  $\bar{I}(t)$  par une fluctuation périodique  $i(t)$  dont la période  $T$  s'identifie avec la durée d'aller-retour de la lumière dans la cavité laser :

$$I(t) = \bar{I}(t) i(t) \quad (5)$$

Ceci permet de préciser la définition de  $\bar{I}(t)$  en identifiant  $\theta$  et  $T$  dans la relation (2). Le moment  $f_k$  s'écrit alors

$$f_k = \overline{i^k(t)} \quad (6)$$

et la surintensité  $i(t)$  vérifie

$$\overline{i(t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i(t') dt' = 1 \quad (7)$$

de sorte que  $f_1 = 1$ . Le caractère périodique de la fluctuation s'explique par le fait, vérifié expérimentalement, que le spectre du champ est composé d'éléments discrets équidistants (modes longitudinaux de la cavité laser). Le paramètre fondamental n'est donc pas la largeur spectrale totale du champ, mais plutôt le nombre de modes excités ( $M$ ). Ainsi pour un laser monomode ( $M = 1$ ),  $i(t) = 1$  et  $f_k = 1$ .

La partie théorique de ce travail (chapitre II) est consacrée au calcul des moments de surintensité  $f_k$ , ainsi que d'autres effets de groupement, pour des champs quasi-monochromatiques à amplitude périodi-



que. Plusieurs modèles simples sont considérés, parmi lesquels le cas du champ gaussien comportant M modes d'égale variance :

$$f_k = k! \frac{M^k (M-1)!}{(M+k-1)!} \quad (8)$$

Cette formule permettra de comparer les propriétés statistiques du champ délivré par un laser déclenché avec celles d'un flash de lumière gaussienne de même spectre, en ce qui concerne les moments de surintensité d'ordre élevé.

Le formalisme utilisé dans ce travail est celui de la description statistique classique des champs, dont l'équivalence avec la description quantique a été établie par SUDARSHAN [2] (1963). Nous rassemblons dans le chapitre I les principaux éléments de ce formalisme. L'appendice du chapitre I est consacré à un rappel des propriétés statistiques particulières des champs gaussiens, avec quelques résultats inédits.

Compte tenu des résultats obtenus, nous discutons en appendice les quelques expériences se rattachant à la présente étude. En particulier nous donnons une interprétation aux résultats, fort controversés, de SHIGA et IMAMURA [3].

## Chapitre I

### COHERENCE OPTIQUE

#### INTRODUCTION : DISCUSSION SUR LES METHODES STATISTIQUES EN OPTIQUE.

Dans la terminologie usuelle de l'optique, on associe l'idée de cohérence à la production d'un système de franges. On "sait par expérience", qu'on ne peut obtenir un tel système qu'en superposant deux champs issus d'une même source. Dans la région où la visibilité des franges est bonne, on dit que les deux champs sont "cohérents entre eux". On observe que les propriétés spatiales et spectrales de la source primaire ont une influence sur l'extension de la zone où les deux champs sont mutuellement cohérents. En fait, dans ce type d'expérience on compare le champ primaire avec lui-même décalé dans l'espace et le temps. Cela amène inévitablement au concept de cohérence absolue : le champ primaire sera d'autant plus "cohérent" que l'extension de la zone de franges de forte visibilité sera plus grande, pour un montage donné. Il est clair que dans cette interprétation le détecteur utilisé joue un rôle important. En fait, l'extension de la zone d'interférence est illimitée, et le détecteur sélectionne une région dans laquelle les franges ne sont pas trop serrées, ni trop rapidement fluctuantes.

Cette interprétation a le grave défaut de reposer sur un type d'expérience, certes très utilisé, mais en fait très particulier. On sait, en effet, qu'on peut obtenir un système de franges en utilisant deux sources indépendantes et un détecteur à faible temps d'intégration [4], qu'on peut réaliser une expérience de corrélation d'intensité entre deux champs [1] etc ... Il faut donc préciser ce que l'on entend par cohérence d'un champ.

Glauber en a donné une définition intéressante : "la cohérence d'un champ est l'aptitude de ce champ à prendre, en des points dif-

férents de l'espace et du temps, des valeurs corrélées". On considère donc le champ comme une fonction aléatoire de l'espace et du temps, et les diverses expériences possibles permettent de mesurer des moyennes portant sur ce champ. Ce point de vue est évidemment très général, mais il faut s'entendre sur la définition des moyennes considérées. Dans la théorie des fonctions aléatoires, on raisonne en terme de moyenne d'ensemble, alors que dans une expérience d'interférence on mesure une moyenne temporelle ou spatiale ne portant que sur une seule épreuve de la fonction aléatoire champ. Là encore, on sait "par expérience" qu'on obtiendra le même résultat lors d'épreuves successives, par exemple d'un jour à l'autre, pourvu que la source soit "stationnaire", qu'elle reste dans le même état macroscopique d'une épreuve à l'autre, et qu'on opère sur un temps très long à chaque épreuve. L'hypothèse que le champ est ergodique suffit alors à concilier la théorie et l'expérience. Une fonction aléatoire ne pouvant être ergodique que si elle est stationnaire, une telle interprétation passe par la définition du terme "stationnaire" : une fonction aléatoire est stationnaire si ses propriétés statistiques sont invariantes par translation de l'origine des coordonnées. En pratique la stationnarité se traduira par le fait que des valeurs moyennes faisant intervenir des points  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de l'espace-temps seront les mêmes que celles faisant intervenir les points  $(x_1 + h, x_2 + h, \dots, x_n + h)$ .

La situation est plus délicate si la source a un fonctionnement pulsé, comme par exemple un flash ou un laser déclenché. Dans ce cas où la source n'est pas stationnaire il faut bien préciser, pour chaque expérience, le type de moyenne utilisé. En fait, si l'expérimentateur veut utiliser la théorie des fonctions aléatoires pour interpréter ses expériences, il devra raisonner en terme de moyenne d'ensemble. Autrement dit il faudrait disposer d'un grand nombre de sources "identiques" et prendre la moyenne des résultats individuels donnés par chacune des sources. En pratique il est évidemment plus commode d'effectuer un grand nombre d'expériences avec la même source, ramenée au début de chaque épreuve dans les mêmes conditions macroscopiques initiales. Cette façon de procéder n'est licite que si la source utilisée n'a pas de particularité cachée par rapport à d'autres sources du même type. S'il en est ainsi les résultats expérimentaux (obtenus à l'aide d'une seule source) auront une portée générale (applicabilité des résultats pour

d'autres sources du même type). Une telle généralisation n'est possible que si tous les paramètres macroscopiques jouant un rôle dans les propriétés d'émission sont identifiés, et ce problème est grandement facilité si l'on peut trouver un modèle de fonctionnement pour la source. Evidemment, l'expérimentateur peut ne s'intéresser qu'à certaines propriétés particulières du champ - celles qui interviennent effectivement dans une classe limitée d'expériences -, et par suite la compréhension du fonctionnement de la source peut n'être que partielle. Ce point très important est en liaison avec les considérations fondamentales qui suivent.

L'utilisation de méthodes statistiques n'a vraiment d'intérêt que lorsqu'elles s'appliquent à des grandeurs non directement mesurables mais donnant lieu à des effets mesurables, ou lorsque ces grandeurs sont en si grand nombre ou si délicates à mesurer qu'il serait très fastidieux d'entreprendre ces mesures. Ainsi l'observateur d'un champ d'interférence ne se préoccupera pas des fluctuations lentes de l'intensité émise par la source primaire, attendu que, s'il le désire, il pourra aisément enregistrer ces variations ; par contre les variations rapides de l'amplitude complexe du champ sont habituellement hors de portée de ses moyens d'investigation, et il utilisera une méthode d'intégration statistique pour observer certains effets de telles fluctuations, à savoir la variation du contraste et de l'écartement des franges dans le champ d'interférence. De même, dans l'étude de l'émission d'une source pulsée, l'expérimentateur peut souvent enregistrer la variation de l'intensité moyennée  $\bar{I}(t)$  sur une durée  $T$ , de sorte que les lois statistiques régissant cette variation "macroscopique" ne seront que d'un intérêt secondaire par rapport aux lois régissant, par exemple, l'intensité vraie instantanée  $I(t)$  du champ. En fait ces dernières lois décrivent également le comportement de l'intensité moyenne  $\bar{I}(t)$ , et l'expérimentateur pourra se contenter d'étudier les lois statistiques de la "surintensité"  $i(t) = I(t)/\bar{I}(t)$ . Cette restriction du champ d'investigation est contrebalancée par le fait que l'expérimentateur devra mesurer à chaque épreuve la fonction  $\bar{I}(t)$ . Un photographe qui désire utiliser ce flash ne sera intéressé que par les fluctuations de  $\bar{I}(t)$  d'une épreuve à l'autre. Un physicien ne s'intéressera qu'aux fluctuations de la surintensité  $i(t)$ , s'il dispose d'un moyen permettant de les mettre en évidence et d'une technique pour les caractériser quantitativement. Un théoricien s'occupera des fluctuations de l'intensité vraie  $I(t)$  et au

vu de la position prise par l'expérimentateur posera la question de savoir si les fonctions aléatoires  $i(t)$  et  $\bar{I}(t)$  sont indépendantes, car dans ce cas les résultats du photographe joints à ceux du physicien détermineront complètement la loi de  $I(t)$ . A une telle question le physicien - qui a enregistré à chaque épreuve la fonction  $\bar{I}(t)$  - pourra répondre si oui ou non il existe une corrélation sensible entre  $i(t)$  et  $\bar{I}(t)$ . Si oui, le théoricien ne sera pas entièrement satisfait de la méthode utilisée, bien que les résultats du physicien suffisent dans le cadre d'une procédure expérimentale qu'il a déterminée. Sinon, les deux points de vue se rejoignent.

### I.1. Notion de cohérence.

L'onde la plus simple est l'onde plane sinusoidale scalaire d'amplitude et de fréquence certaines. Par exemple, en un point de l'espace le champ décrit une sinusoidale éternelle certaine. Partant, on peut caractériser l'incohérence temporelle d'une radiation par l'écart que celle-ci présente par rapport à la sinusoidale éternelle parfaite.

Il y a deux sortes d'écarts possibles, correspondant aux deux situations extrêmes suivantes. Dans la première, au cours d'une observation (épreuve) l'amplitude et/ou la fréquence instantanés du champ varient (cas n° 1). Dans la seconde, ces quantités ne varient pas au cours d'une observation, mais elles varient d'une épreuve à l'autre (cas n° 2).

Dans le cas n° 1, qui correspond à la situation ordinaire dans le domaine des radiations optiques, on peut caractériser la cohérence temporelle par une série de "moments" du champ, faisant intervenir des moyennes temporelles au cours d'une seule épreuve. Si l'on suppose que le champ est stationnaire ergodique, ces moyennes temporelles tendent, lorsque la durée d'observation tend vers l'infini, vers les moyennes d'ensemble correspondantes.

Dans le cas n° 2, le champ apparaît comme parfaitement sinusoidal pendant la durée d'une observation. Cependant l'amplitude et la fréquence de cette sinusoidale fluctuent d'une épreuve à l'autre, et il est nécessaire de raisonner directement en terme de moyennes d'ensemble.

Dans le cas général des effets du type 1 et du type 2 sont présents. On en conclut que :

Une méthode générale d'étude des propriétés de cohérence temporelle d'un champ scalaire (polarisé) consiste à associer au champ une fonction aléatoire réelle  $X(t)$  et à raisonner en termes de moyennes d'ensemble.

$X(t)$  peut représenter, par exemple, la valeur du champ électrique.

Ces considérations peuvent évidemment s'étendre au problème plus général de l'étude de la cohérence spatio-temporelle d'un champ non polarisé. Néanmoins, dans un souci de clarté, nous limiterons les considérations générales développées dans ce chapitre aux seuls phénomènes scalaires temporels. Nous nous limiterons également au cas des champs quasi-monochromatiques, c'est-à-dire pour lesquels la largeur spectrale totale de  $X(t)$  est très petite devant la fréquence moyenne  $\bar{\nu}$ . La fonction aléatoire  $X(t)$  s'écrit alors sous la forme :

$$X(t) = A(t) \cos [2\pi \bar{\nu} t + \phi(t)] \quad (\text{I.1})$$

où l'amplitude  $A(t)$  et la phase  $\phi(t)$  instantanées sont deux fonctions aléatoires réelles qui ne varient pratiquement pas pendant la durée  $(\bar{\nu})^{-1}$ . Le champ peut avantageusement être représenté par le signal analytique  $Z(t)$  associé à  $X(t)$  :

$$Z(t) = U(t) \exp(i 2\pi \bar{\nu} t) \quad (\text{I.2})$$

où  $U(t)$  est l'amplitude (complexe) du champ

$$U(t) = A(t) \exp[i \phi(t)] \quad (\text{I.3})$$

L'intérêt de l'utilisation de la fonction aléatoire complexe  $Z(t)$  plutôt que celle de  $X(t)$  apparaîtra dans le paragraphe suivant.

## I.2. Détection dans le domaine optique.

### I.2.a. Le rôle du temps de mesure.

Dans le domaine des radio-fréquences, on peut émettre et enregistrer intégralement le champ  $X(t)$  au moyen d'antennes [5]. Par contre, dans le domaine des fréquences optiques on ne peut, au mieux, obtenir que des informations partielles sur le champ. En effet, considérons un détecteur idéal dont le signal de sortie soit proportionnel à  $X^p(t)$ , avec  $p$  entier. Compte tenu de nos moyens de mesure actuels (principalement électroniques) nous ne pourrions mesurer en fait que la quantité

$\int_{\tau_m} X^p(t) dt$ , où le temps de mesure  $\tau_m$  est très grand devant  $(\bar{\nu})^{-1}$ .

Par suite, on voit d'après la formule (I.1) que si  $p$  est impair l'espérance mathématique du résultat de cette mesure sera identiquement nul. Si  $p$  est pair ( $p = 2k$ ), la quantité mesurée est proportionnelle à  $\int_{\tau_m} A^{2k}(t) dt$  et l'information contenue dans la phase  $\phi(t)$  est perdue.

En d'autres termes, on ne peut obtenir avec ce type de détecteur qu'une information sur l'intensité instantanée du champ :

$$I(t) = A^2(t) = Z(t) Z^*(t) \quad (I.4)$$

d'où l'intérêt du signal analytique. Nous désignerons par détecteur idéal d'ordre  $k$  tout détecteur dont le signal de sortie soit proportionnel à :

$$\int_{\tau_m} I^k(t) dt \quad (I.5)$$

En particulier, pour  $k=1$  le détecteur est souvent appelé "détecteur linéaire" bien qu'il soit en fait un détecteur quadratique du champ.

Il faut bien remarquer que c'est l'ordre de grandeur du temps de mesure (déterminé par les propriétés des circuits électroniques) qui détermine les quantités effectivement mesurables. Le temps de réponse du phénomène primaire de détection (déterminés par des propriétés atomiques) ne joue qu'un rôle secondaire dans ce problème, attendu qu'il est très petit par rapport au précédent.

#### I.2.b. Possibilité d'enregistrer la phase du champ.

D'autre part, il est intéressant de remarquer que, moyennant une complication expérimentale, on peut accéder avec un détecteur linéaire à la phase instantanée  $\phi(t)$  du champ. En effet, si l'on superpose au champ une onde sinusoïdale de même polarisation et de fréquence  $\nu_p$  le champ total avant détection est représenté par le signal analytique

$$Z'(t) = Z(t) + \exp(i 2\pi \nu_p t) \quad (I.6)$$

L'intensité détectée s'écrit :

$$I'(t) = 1 + I(t) + 2 A(t) \cos [2\pi (\bar{\nu} - \nu_p)t + \phi(t)] \quad (I.7)$$

Si la largeur spectrale totale de  $Z(t)$  est  $\Delta\nu$ , celle de  $I(t)$  est  $2\Delta\nu$ . Dans le cas où  $\bar{\nu} - \nu_p > 3/2 \Delta\nu$  le dernier terme de (I.7) n'a pas de composante spectrale commune avec les deux premiers, et par conséquent peut être isolé au moyen d'un filtre passe-haut. La situation est tout-à-fait analogue à l'enregistrement holographique de l'amplitude et de la phase d'une onde spatiale. Si  $\bar{\nu} - \nu_p < \tau_m^{-1}$  on pourra enregistrer les battements, dont le contraste est déterminé par l'amplitude  $A(t)$  et la fréquence instantanée est reliée directement à  $\phi(t)$ . A notre connaissance cette "holographie temporelle" n'a pas été expérimentée [6].

### I.2.c. Les expériences de comptage au moyen d'un détecteur linéaire.

Dans le domaine optique, le détecteur le plus sensible est le photomultiplicateur. Chaque électron, extrait par effet photo-électrique de la photocathode, donne naissance à un paquet comprenant un grand nombre d'électrons ( $10^6$ ), par amplification dynodique. Si le courant anodique est suffisamment faible, on peut enregistrer individuellement chaque paquet d'électrons, et compter le nombre  $n$  de photo-électrons émis par la photo-cathode pendant une durée fixée  $\tau_m$  (comptage relaxé). L'étude théorique montre que si le champ optique incident est une onde plane monochromatique, le processus ponctuel associé au phénomène est un processus de Poisson pur [7]. La probabilité  $p_n$  associée à  $n$  s'écrit :

$$p_n = \frac{1}{n!} \langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}, \quad (n \geq 0) \quad (\text{I.8})$$

d'où, en particulier

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle \equiv \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n \rangle \quad (\text{I.9})$$

Dans le cas d'un champ incident quelconque, le processus suit une loi de Poisson composée :

$$p_n(\tau_m, t) = \frac{1}{n!} \langle W^n(\tau_m, t) \exp[-W(\tau_m, t)] \rangle \quad (\text{I.10})$$

où  $W$  est proportionnelle à l'énergie véhiculée par le champ pendant la durée de mesure  $\tau_m$

$$W(\tau_m, t) = \alpha \int_t^{t+\tau_m} I(t') dt' \quad (\text{I.11})$$



le coefficient  $\alpha$  dépend de la nature de la photocathode. Si  $W$  est certain, on retombe sur la loi (I.8) avec  $\langle n \rangle = W$ . Par suite, la loi (I.8) n'est pas caractéristique de l'onde monochromatique, mais seulement de l'onde à intensité constante et certaine, sa fréquence instantanée pouvant être erratique. Dans le cas général, la relation (I.9) devient (les paramètres  $\tau_m$  et  $t$  étant sous-entendus) :

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle + \langle (\Delta W)^2 \rangle \quad (\text{I.12})$$

L'incohérence du champ se manifeste par une augmentation de la variance de  $n$ . Le terme additif - la variance de  $W$  - est souvent désignée dans la littérature anglo-saxonne par les termes "excess photon noise" ou "wave interaction noise", suivant que l'on traite le champ de manière quantique ou classique. En fait l'identité des deux conceptions a soulevé de nombreuses controverses lors de l'expérience de H. Brown et Twiss. La possibilité d'une corrélation entre les instants d'émission en deux points de la photocathode est apparue pour certains auteurs contraire aux principes de la mécanique quantique [8]. H. Brown et Twiss démontrèrent qu'il n'en était rien et que les deux points de vue se rejoignaient [9]. Ces auteurs soulignèrent que l'utilisation du concept de photon est particulièrement délicate car cette "particule" ne suit pas les lois d'une particule classique, mais celles de Bose-Einstein. Par contre l'utilisation du caractère ondulatoire du champ conduit à une interprétation très simple des résultats expérimentaux.

La relation (I.12) se généralise en considérant les "moments factoriels" de  $n$  :

$$\langle n^{(k)} \rangle \equiv \langle n (n-1) \dots (n-k+1) \rangle = \langle W^k \rangle \quad (\text{I.13})$$

et, en particulier, si le temps de mesure  $\tau_m$  est inférieur à l'inverse de la largeur spectrale totale  $\Delta\nu$  du champ, on pourra accéder aux moments du type  $\langle I^k \rangle$ . D'autre part si on limite les ordres  $k$  considérés à des valeurs telle que :

$$1 \leq k \ll \langle n \rangle \quad (\text{I.14})$$

on pourra assimiler  $\langle n^{(k)} \rangle$  et  $\langle n^k \rangle$ . Autrement dit, sous la restriction (I.14) le courant anodique sera correctement décrit par la relation :

$$n(t) = \alpha \int_t^{t+\tau_m} I(t') dt' \quad , \quad (\text{I.15})$$

en ce qui concerne les moments  $\langle n^k \rangle$ . Par exemple, pour  $n = 10^6$  et  $k = 10$  l'erreur relative sur  $\langle n^k \rangle$  est de  $4,5 \cdot 10^{-5}$ . Ainsi dans la limite des champs forts, on peut négliger l'effet de grenaille du courant électrique, et obtenir directement des informations sur l'intensité du champ. Evidemment la quantité d'informations sera maximale si  $\tau_m < (\Delta\nu)^{-1}$ . Pour des sources thermiques cette condition conduit à  $\langle n \rangle \ll 1$  et par suite l'effet de grenaille est prépondérant. H. Brown et Twiss ont tourné la difficulté en utilisant deux photomultiplicateurs dont les bruits se moyennent à zéro. On peut également simuler une source thermique au moyen d'un laser continu et d'un diffuseur mobile, de telle manière que  $\langle n \rangle \gg 1$ .

Dans le cas d'un laser solide déclenché, la luminance spectrique est telle que l'on a toujours  $n \gg 1$  pour  $\tau_m < (\Delta\nu)^{-1}$ . Néanmoins la largeur spectrale  $\Delta\nu$  est généralement importante, de sorte que la dernière condition nécessite l'emploi d'un détecteur et d'un oscillographe à grande bande passante ainsi qu'une réduction artificielle - par les méthodes de sélection de modes - de  $\Delta\nu$  (voir chapitre III).

#### I.2.d. Comptage de photo-électrons produits par absorption multiphotonique.

Avec l'apparition des sources de forte luminance que sont les lasers, la possibilité d'utiliser des détecteurs non-linéaires est apparue. En particulier le phénomène de photo-émission bi-photonique d'une photocathode a été utilisé par SHIGA et IMAMURA [3] pour étudier certains aspects de la radiation émise par un laser solide déclenché (voir Appendice). En focalisant cette radiation on obtient des puissances telles que l'on peut ioniser des atomes de gaz rares en mettant en jeu un phénomène d'ordre élevé (voir chapitre IV). Toutefois la brièveté du pulse d'un laser déclenché (quelques dizaines de ns) interdit les méthodes conventionnelles de comptage, et les lasers continus n'ont pas une puissance suffisante pour pouvoir étudier des processus d'ordre élevé.

En ce qui concerne les lasers déclenchés, il faut définir une procédure d'étude des propriétés statistiques du champ entièrement différente des méthodes conventionnelles de comptage : c'est un des buts de la présente thèse (voir la dernière partie du chapitre III).

Au sujet des lasers continus, il est possible que, dans l'avenir, par suite de progrès réalisés dans la construction de photocathodes non-linéaires, l'on puisse effectuer des expériences de comptage des photo-électrons produits par extraction multiphotonique. L'étude de BARASHEV [10] montre que si l'on suppose que le processus de multi-absorption ne perturbe pas le rayonnement incident, la seule modification à apporter au formalisme du chapitre précédent (absorption à 1 photon) est de remplacer la quantité  $W$  définie par (I.11) par la quantité

$$W_p(t) = \alpha_p \int_t^{t+\tau_m} I^p(t') dt' \quad (I.16)$$

où  $p$  est l'ordre de non-linéarité (absorption à  $p$  photons). Dans la limite où  $\langle n \rangle$  est très grand devant l'unité, on pourra assimiler  $n(t)$  à  $W(t)$ , de sorte qu'on retrouve le détecteur idéal d'ordre  $p$  défini en (I.5). Notons qu'un résultat récent de ROCCA [11], qui traite le problème de façon entièrement quantique, diffère des résultats de BARASHEV. Nous verrons au chapitre IV qu'aucun écart mesurable à la loi (I.16), dans le cas  $\langle n \rangle \gg 1$ , n'a pu être détecté. C'est pourquoi, dans la suite, nous ne considérerons que des détecteurs non-linéaires idéaux décrits par (I.5).

### I.3. Fonctions de corrélation.

La description statistique la plus complète du champ consisterait à déterminer la loi de la fonction aléatoire réelle  $X(t)$  associée au champ. En pratique on se limite à la considération de certains moments du champ. La fonction de corrélation la plus générale est définie par [12] :

$$\Gamma_Z^{(m,n)}(t_1, \dots, t_{m+n}) = \left\langle \prod_{i=1}^m Z(t_i) \prod_{j=m+1}^{m+n} Z^*(t_j) \right\rangle \quad (I.17)$$

où le symbole  $\langle \rangle$  indique une moyenne d'ensemble. Nous allons chercher quelles sont les fonctions de corrélation qui interviennent dans une expérience d'optique utilisant un ou plusieurs détecteurs non-linéaires idéaux. Nous ne considérerons pas ici le cas où une ou plusieurs ondes de référence sont utilisées (voir paragraphe I.2.b.).

\*En fin de rédaction nous apprenons que ces calculs sont erronés et que le traitement correct conduit au résultat de BARASHEV.

I.3.a. Interférence d'amplitude à F ondes.

L'onde primaire est séparée en F ondes secondaires qui présentent des décalages temporels. En un point de l'espace où ces ondes sont recombinaées, le signal analytique du champ résultant est de la forme :

$$Z' = \sum_{i=1}^F c_i Z(t_i) \quad (I.18)$$

où les  $c_i$  sont des coefficients certains, dépendant du montage utilisé. Si l'on place un détecteur parfait d'ordre k en ce point, les fonctions de corrélation du champ  $Z(t)$  qui vont intervenir dans le traitement statistique du signal sont celles qui interviennent dans le calcul de  $\langle |Z'|^{2k} \rangle$ . On montre qu'elles sont de la forme générale (I.17) avec la seule restriction  $m=n$ .

I.3.b. Corrélation d'intensité à F ondes.

Dans ce cas les F ondes secondaires sont détectées indépendamment par F détecteurs d'ordres  $r_1, r_2, \dots, r_F$  respectivement, et les F signaux délivrés par ces détecteurs sont multipliés dans un corrélateur. L'espérance mathématique du produit fait intervenir les quantités du type :

$$\langle \prod_{i=1}^F c_i I^{r_i}(t_i) \rangle \quad (I.19)$$

et les fonctions de corrélation du champ initial qui interviennent sont uniquement de la forme, avec  $\sum r_i = m$

$$\Gamma_Z^{(m,m)}(t_1, t_2, \dots, t_F; t_1, t_2, \dots, t_F) \quad (I.20)$$

Par exemple si  $F=2, r_1=r_2=1$  (expérience de H. Brown et Twiss), les moments concernés sont du type  $\Gamma_Z^{(2,2)}(t_1, t_2, t_1, t_2) \equiv \langle I(t_1) I(t_2) \rangle$ .

I.3.c. Détection directe d'ordre k. Cas du laser déclenché.

Si le champ étudié est directement détecté par un système non-linéaire idéal d'ordre k, les fonctions de corrélation qui interviennent sont de la forme (I.20) avec  $t_i = t$ . On désigne par effet de groupement la valeur normalisée de ce moment [13] :

$$h_k(t) = \frac{\langle I^k(t) \rangle}{\langle I(t) \rangle^k} \quad (\text{I.21})$$

Si le champ est d'intensité stationnaire,  $h_k$  ne dépend évidemment pas du temps. Mais  $h_k$  peut être constant sans que  $I(t)$  soit stationnaire. Il suffit pour cela que  $I(t)$  soit le produit d'une fonction certaine par une fonction aléatoire stationnaire. En supposant cette condition réalisée pour l'impulsion émise par un laser déclenché (voir chapitre III), le courant électronique délivré par le détecteur parfait a pour espérance mathématique :

$$\langle n(t) \rangle = h_k \alpha_k \int_t^{t+\tau_m} \langle I(t') \rangle^k dt' \quad (\text{I.22})$$

Si le temps de mesure est très grand devant la durée à mi-hauteur du pulse, on mesurera une charge électrique (régime impulsionnel) :

$$\langle N \rangle = h_k \alpha_k \int_0^{\infty} \langle I(t) \rangle^k dt \quad (\text{I.23})$$

La détermination de  $h_k$  nécessite la mesure de  $\alpha_k$  et de  $\langle I(t) \rangle$ . Pour déterminer  $\langle I(t) \rangle$  on peut enregistrer une série de tirs au moyen d'un détecteur linéaire associé à un circuit dont le temps de réponse soit inférieur à  $(\Delta\nu)^{-1}$  (ce détecteur peut être calibré au moyen d'un calorimètre). Mais, évidemment, si un tel enregistrement de l'intensité instantanée du champ est possible, on peut directement accéder à  $h_k$ , sans passer par l'utilisation d'un détecteur non-linéaire. Le cas intéressant est donc celui où  $\Delta\nu$  est trop grand pour qu'on puisse mesurer directement  $I(t)$ . On ne pourra alors qu'accéder à une intensité moyenne

$$\bar{I}(t) = \int_t^{t+\tau_m} \frac{1}{\tau_m} I(t') dt' \quad (\text{I.24})$$

qui ne décrira que partiellement chaque pulse. En supposant que  $I(t)$  s'écrive :

$$I(t) = G(t) \cdot I_M(t) \quad (\text{I.25})$$

où  $G(t)$  est certaine, normalisée à un à son maximum, et de variation très lente devant les variations de la fonction aléatoire  $I_M(t)$ , on peut supposer que  $G(t)$  ne varie pratiquement pas pendant la durée de mesure  $\tau_m$  et écrire :

$$\bar{I}(t) = \frac{G(t)}{\tau_m} \int_t^{t+\tau_m} I_M(t') dt' \quad (I.26)$$

d'où, en supposant  $I_M(t)$  stationnaire :

$$\langle \bar{I}(t) \rangle = G(t) \langle I_M \rangle \quad (I.27)$$

soit finalement, d'après (I.25) et (I.27) :

$$\langle I(t) \rangle = \langle \bar{I}(t) \rangle \quad (I.28)$$

La mesure de  $\alpha_k$  dans l'équation (I.23) peut être effectuée au moyen d'une expérience préliminaire où le spectre du champ  $\Delta V$  est réduit de telle manière que  $\Delta V (\tau_m) \ll 1$ , de sorte que  $I(t)$  soit enregistrable. On aura alors :

$$\alpha_k = \frac{N}{\int_0^\infty I^k(t) dt} \quad (I.29)$$

Notons que dans cette procédure, on détermine indépendamment les espérances  $\langle N \rangle$  et  $\langle I(t) \rangle$ . Cela correspond à une perte d'information par rapport à ce qu'on pourrait obtenir en reliant à chaque pulse les quantités  $N$  et  $I(t)$ . Effectivement, nous verrons dans le chapitre III qu'il existe une autre approche - plus naturelle - du problème, reposant sur le fait que la fonction aléatoire  $I_M(t)$  peut être approximée par une fonction périodique. Nous introduirons d'autres effets de groupement, et en particulier celui de la surintensité  $i(t) = \frac{I(t)}{\bar{I}(t)}$ . L'introduction de cette nouvelle quantité permet d'éliminer l'enveloppe  $G(t)$  - qui peut dès lors être aléatoire - et surtout sera un outil fondamental pour comparer la lumière émise par un laser déclenché avec la lumière gaussienne pulsée de même spectre.

I.4. Décomposition harmonique d'une fonction aléatoire.

Dans la dernière partie du présent chapitre nous rappelons quelques résultats fondamentaux de la théorie des fonctions aléatoires qui vont servir dans notre étude.

I.4.a. Décomposition rigoureuse.

Sous des hypothèses très larges, une fonction aléatoire  $Z(t)$  peut s'écrire [14] :

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \nu t} dx(\nu) \quad (\text{I.30})$$

où l'intégrale est définie en moyenne quadratique. La fonction aléatoire  $x(\nu)$  se déduit de  $Z(t)$  par la relation :

$$x(\nu) = \left[ F_{-\infty, \nu} [Z(t)] \right]_{t=0} \quad (\text{I.31})$$

où l'opérateur  $F_{\nu_1, \nu_2}$  est le filtre linéaire dont le gain est égal à l'unité à l'intérieur de la bande  $[\nu_1, \nu_2]$  et est nul à l'extérieur de cet intervalle.

I.4.b. Approximation par une série de Fourier.

La détermination expérimentale d'un spectre s'effectue toujours avec une résolution finie. Partant, il est souvent commode d'approximer  $Z(t)$  par une série du type :

$$Z_{\delta\nu}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\delta x)_n \exp[2\pi i n \delta\nu t] \quad (\text{I.32})$$

avec

$$(\delta x)_n = \int_{n\delta\nu}^{(n+1)\delta\nu} dx(\nu) \quad (\text{I.33})$$

Cette série converge en moyenne quadratique vers  $Z(t)$  quand  $\delta\nu$  tend vers zéro [14].

I.4.c. Cas d'une fonction aléatoire stationnaire.

Si  $Z(t)$  est stationnaire, c'est-à-dire si ses propriétés statistiques sont invariantes par translation de l'origine des temps, la fonction de corrélation spectrale la plus générale :

$$\Gamma_x^{(m,n)} = \left\langle \prod_{i=1}^m d x(v_i) \prod_{j=1}^n d x^*(v_j) \right\rangle \quad (\text{I.34})$$

ne peut être différente de zéro que si

$$\sum_{i=1}^m v_i - \sum_{j=1}^n v_j = 0 \quad (\text{I.35})$$

En particulier si  $Z(t)$  est quasi-monochromatique :  $\Gamma_x^{m \neq n} = 0$ . On montre que les fonctions de corrélation de  $\Gamma_z^{(k,k)}$  se déduisent des moments spectraux  $\Gamma_x^{(m,m)}$ , avec  $0 \leq m \leq k$ , au moyen de la relation (I.30) et de la restriction (I.35) par des opérations mathématiques formellement évidentes [14]. Autrement dit les propriétés statistiques d'un champ quasi-monochromatique stationnaire peuvent être décrites au moyen des fonctions de corrélation spectrales. En particulier, la fonction de corrélation la plus simple

$$\Gamma_x^{(1,1)}(v, v') \equiv \langle d x(v) d x(v') \rangle = \delta(v - v') S(v) dv dv' \quad (\text{I.36})$$

où  $S(v)$  représente la densité spectrale énergétique est reliée à la fonction de corrélation temporelle la plus simple :

$$\Gamma_z^{(1,1)}(\tau) = \langle Z(t) Z^*(t-\tau) \rangle \quad (\text{I.37})$$

par une relation de transformation de Fourier :

$$\Gamma_z^{(1,1)}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(v) \exp[2\pi i v \tau] dv \quad (\text{I.38})$$

Cette relation biunivoque montre que l'étude des phénomènes d'interférence observés avec un détecteur linéaire - qui ne fait intervenir que la fonction  $\Gamma_z^{(1,1)}(\tau)$  - est un problème équivalent à la détermination du spectre du champ. Ce fait est à la base de la spectrométrie par transformation de Fourier.



I.A. APPENDICE. CHAMPS GAUSSIENS.

I.A.1. Variable aléatoire réelle gaussienne.

Une variable aléatoire réelle gaussienne  $x$  est définie par la loi de distribution (dite de Laplace-Gauss) :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left[ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2 \sigma^2} \right] \quad (\text{I.A.1})$$

où l'écart quadratique moyen  $\sigma$  est donné par :

$$\sigma = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^{1/2} \equiv (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)^{1/2} \quad (\text{I.A.2})$$

La fonction caractéristique définie par

$$N(u) = \langle e^{iux} \rangle \equiv e^{iu\langle x \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} (iu)^n \frac{\langle (x - \langle x \rangle)^n \rangle}{n!} \quad (\text{I.A.3})$$

où  $u$  est la variable conjuguée de  $x$  par la relation de transformation de Fourier liant  $p(x)$  et  $N(u)$ , s'écrit dans le cas présent :

$$N(u) = e^{iu\langle x \rangle - 1/2 \sigma^2 u^2} \equiv e^{iu\langle x \rangle} \sum_{p=0}^{\infty} (iu)^{2p} \frac{\sigma^{2p}}{2^p} \quad (\text{I.A.4})$$

En identifiant les développements (I.A.3) et (I.A.4) on obtient :

$$\langle (x - \langle x \rangle)^n \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \sigma^n \frac{n!}{2^{n/2} (\frac{n}{2})!} \equiv \sigma^n (n-1)!! & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \quad (\text{I.A.5})$$

I.A.2. Variable aléatoire réelle gaussienne multidimensionnelle.

Soient  $m$  variables aléatoire réelles centrées  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Cette variable aléatoire à  $m$  dimensions est dite gaussienne si sa fonction caractéristique associée s'écrit :

$$N(u_1, u_2, \dots, u_m) \equiv \langle \exp i \sum_{p=1}^m u_p x_p \rangle = \exp \left[ \frac{-1}{2} \sum_{p,q=1}^m \langle x_p x_q \rangle u_p u_q \right] \quad (\text{I.A.6})$$

Les moments  $\langle x_p x_q \rangle$  définissent une matrice symétrique de dimensions  $m \times m$  (matrice de covariance). Les éléments de la matrice de corrélation, définis par :

$$\rho_{pq} = \frac{\langle x_p x_q \rangle}{\left[ \langle x_p^2 \rangle \langle x_q^2 \rangle \right]^{1/2}} = \frac{\langle x_p x_q \rangle}{\sigma_p \sigma_q} \quad (\text{I.A.7})$$

sont tels que (d'après l'inégalité de Schwarz) :

$$0 \leq |\rho_{pq}| \leq 1. \quad (\text{I.A.8})$$

Cette matrice est symétrique, et ses éléments diagonaux sont égaux à 1. Soit  $\delta$  le déterminant de cette matrice de corrélation et  $R_{pq}$  le coefficient de  $\rho_{pq}$  dans le développement de  $\delta$ . On montre que la densité de probabilité de la variable aléatoire  $(x_1, \dots, x_m)$  s'écrit :

$$p(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \left( \prod_{p=1}^m \sigma_p \right) \delta^{1/2}} \exp \left[ \frac{-1}{2\delta} \sum_{p,q=1}^m R_{pq} \frac{x_p x_q}{\sigma_p \sigma_q} \right] \quad (\text{I.A.9})$$

On démontre le "théorème des moments", qui permet d'exprimer tous les moments que l'on peut former avec les  $m$  variables aléatoires  $\{x_p\}$ , en fonction des covariances  $\langle x_p x_q \rangle$  :

$$\left\langle \prod_{i=1}^n x_{p_i} \right\rangle = 0 \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

$$\left\langle \prod_{i=1}^n x_{p_i} \right\rangle = \sum_{\pi_{i \neq j}} \prod \langle x_{p_i} x_{p_j} \rangle \quad \text{si } n \text{ est pair} \quad (\text{I.A.10})$$

où le symbole  $\sum_{\pi_{i \neq j}}$  signifie que la somme porte sur les  $(n-1)!!$  groupements distincts des  $n$  variables  $\{x_{p_i}\}$  par paires. Par exemple, pour  $n = 4$  on a :

$$\langle x_1 x_2 x_3 x_4 \rangle = \langle x_1 x_2 \rangle \langle x_3 x_4 \rangle + \langle x_1 x_3 \rangle \langle x_2 x_4 \rangle + \langle x_1 x_4 \rangle \langle x_2 x_3 \rangle \quad (\text{I.A.11})$$

Dans le cas où  $x_{p_i} \equiv x_p$ , c'est-à-dire qu'on ne considère les moments que d'une variable aléatoire à une dimension, on retrouve les relations (I.A.5) à partir des résultats (I.A.10).

Dans le cas où les  $m$  variables sont non-corrélées, c'est-à-dire que la matrice de corrélation s'identifie avec la matrice unité, la fonction caractéristique s'écrit :

$$N(u_1, \dots, u_m) = \exp \left[ \frac{-1}{2} \sum_{p=1}^m u_p^2 \sigma_p^2 \right] = \prod_{p=1}^m e^{-1/2 \sigma_p^2 u_p^2} \quad (\text{I.A.12})$$

c'est-à-dire qu'elle se factorise en un produit de  $m$  lois caractéristiques de variable gaussienne unidimensionnelle. Autrement dit les  $m$  variables aléatoires  $\{x_p\}$  sont indépendantes. Les seuls moments non nuls sont de la forme :

$$\left\langle \prod_{p=1}^m x_p^{2r_p} \right\rangle = \prod_{p=1}^m \langle x_p^{2r_p} \rangle = \prod_{p=1}^m (2r_p - 1)!! \sigma_p^{2r_p} \quad (\text{I.A.13})$$

où les coefficients  $r_p$  sont des entiers quelconques positifs ou nuls.

Toute combinaison linéaire, à coefficients certains, des  $m$  variables gaussiennes - corrélées ou non - est elle-même une variable aléatoire gaussienne. En effet la fonction caractéristique de la variable aléatoire

$$x = \sum_{p=1}^m \lambda_p x_p \quad (\text{I.A.14})$$

s'écrit :

$$\begin{aligned} N(u) &\equiv \left\langle \exp \left[ i u \sum_{p=1}^m \lambda_p x_p \right] \right\rangle = N(\lambda_1 u, \dots, \lambda_m u_m) \\ &\equiv \exp \left[ \frac{-u^2}{2} \sum_{p,q=1}^m \langle x_p x_q \rangle \lambda_p \lambda_q \right] \end{aligned} \quad (\text{I.A.15})$$

c'est-à-dire que  $x$  est gaussienne avec l'écart quadratique :

$$\sigma = \left[ \sum_{p,q=1}^m \langle x_p x_q \rangle \lambda_p \lambda_q \right]^{1/2} \quad (\text{I.A.16})$$

Les définitions et propriétés des variables gaussiennes centrées se généralisent sans difficulté au cas des variables non centrées ; il suffit de considérer les variables  $\{x_p - \langle x_p \rangle\}$ .

I.A.3. Variable aléatoire complexe gaussienne.

Une variable aléatoire  $z = x + iy$  est dite gaussienne si ses parties réelle et imaginaire forment une variable aléatoire réelle gaussienne bi-dimensionnelle. Dans ce cas la matrice de corrélation  $\{\rho_{pq}\}$  ne dépend que d'un paramètre  $\rho$  défini par (si  $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$ ) :

$$\rho \equiv \rho_{xy} = \frac{\langle x y \rangle}{\sigma_x \sigma_y} \quad (\text{I.A.17})$$

et s'écrit :

$$\{\rho_{pq}\} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.A.18})$$

Son déterminant est

$$\delta = 1 - \rho^2 \quad (\text{I.A.19})$$

et la matrice des coefficients  $R_{pq}$  est donnée par

$$\{R_{pq}\} = \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.A.20})$$

de sorte que la loi de probabilité de  $(x,y)$  s'écrit d'après (I.A.9) :

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{(-1)}{2(1-\rho^2)} \left[ \left( \frac{x}{\sigma_x} \right)^2 + \left( \frac{y}{\sigma_y} \right)^2 - 2 \frac{x y}{\sigma_x \sigma_y} \right] \right\} \quad (\text{I.A.21})$$

Dans le cas où  $x$  et  $y$  sont non-corrélées et de même écart quadratique moyen  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$  la variable aléatoire  $z$  est dite gaussienne circulaire. L'argument de  $z$  est alors équiparti entre 0 et  $2\pi$ , et le module de  $z$  suit la loi de Rayleigh :

$$R(|z|) = \frac{|z|}{\sigma^2} \exp \left[ \frac{-|z|^2}{2\sigma^2} \right] \quad (\text{I.A.22})$$

et le carré du module  $I = |z|^2$  suit la loi exponentielle :

$$q(I) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left[-\frac{I}{2\sigma^2}\right] \quad (\text{I.A.23})$$

Le coefficient  $\rho$  est modifié par la rotation  $z' = z e^{i\theta}$ . On démontre que  $|\rho|$  est maximal lorsque le choix des axes est tel que  $\sigma_x = \sigma_y$ , et qu'un tel choix est toujours possible [7].

#### I.A.4. Fonctions aléatoires gaussiennes.

Une fonction aléatoire réelle  $X(t)$ , centrée, est dite gaussienne si quels que soient l'entier  $m$  et les instants arbitraires  $t_1, t_2 \dots t_m$ , la variable aléatoire  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)$  est gaussienne. Ses propriétés statistiques sont entièrement définies par sa fonction de corrélation au deuxième ordre  $\langle X(t_1) X(t_2) \rangle$ . Si la fonction  $X(t)$  est de plus stationnaire, elle est caractérisée par la fonction de corrélation :

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \langle X(t) X(t-\tau) \rangle \quad (\text{I.A.24})$$

Une fonction aléatoire complexe  $Z(t) = X(t) + i Y(t)$ , centrée, est dite gaussienne si ses parties réelles et imaginaire  $X(t)$  et  $Y(t)$  sont des fonctions aléatoires réelles gaussiennes. Si  $Z(t)$  est stationnaire, elle est caractérisée par les trois fonctions de corrélation :

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(\tau) &= \langle X(t) X(t-\tau) \rangle \\ \Gamma_{yy}(\tau) &= \langle Y(t) Y(t-\tau) \rangle \\ \Gamma_{xy}(\tau) &= \langle X(t) Y(t-\tau) \rangle \end{aligned} \quad (\text{I.A.25})$$

et on démontre que

$$\Gamma_{yx}(\tau) = \Gamma_{xy}(-\tau) \quad (\text{I.A.26})$$

#### I.A.5. Champ thermique polarisé (champ gaussien stationnaire) (champ chaotique)

Par des considérations thermodynamiques très générales, on démontre que le rayonnement naturel d'un corps à l'équilibre thermique est soumis à des lois gaussiennes. En particulier, après traversée d'un po-

lariseur parfait, le champ peut être décrit par une fonction aléatoire réelle gaussienne stationnaire  $X(t)$ . Le caractère gaussien et la stationnarité se conservant par filtrage linéaire, la traversée d'un filtre coloré passif ne perturbe pas ces caractères, mais modifie simplement la fonction  $\Gamma_{xx}(\tau)$ . Le signal analytique  $Z(t) = X(t) + i Y(t)$  associé à  $X(t)$  est, pour les mêmes raisons, une fonction aléatoire complexe gaussienne et stationnaire.  $X(t)$  et  $Y(t)$  étant reliés (par la transformation de Hilbert), on démontre qu'en plus de la relation (I.A.26) on a :

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(0) &= \Gamma_{yy}(0) \\ \Gamma_{xy}(0) &= 0\end{aligned}\quad (\text{I.A.27})$$

De plus les seuls moments non nuls sont de la forme symétrique :

$$\left\langle \prod_{i=1}^n Z(t_i) \prod_{j=1}^n Z^*(t_j) \right\rangle = \sum_{\pi_j} \prod_{i=1}^n \langle Z(t_i) Z^*(t_j) \rangle \quad (\text{I.A.28})$$

où le symbole  $\sum_{\pi_j}$  signifie que la sommation porte sur les  $n!$  permutations des indices  $j$ . En particulier l'effet de groupement  $h_k = \langle I^k \rangle / \langle I \rangle^k$  vaut  $k!$

#### I.A.6. Champ gaussien quasi-stationnaire polarisé (champ gaussien généralisé).

Le champ quasi-monochromatique  $Z(t) = U(t) \exp 2\pi i \bar{\nu} t$  est dit gaussien quasi-stationnaire si l'amplitude complexe  $U(t)$  est gaussienne centrée et stationnaire. Comme cas particulier on rencontre le champ gaussien stationnaire quand  $Z(t)$  est lui-même stationnaire, mais en général  $U(t)$  n'a pas la forme d'un signal analytique et les relations (I.A.27) et (I.A.28) ne sont plus valables, alors que (I.A.26) demeure et s'écrit, en posant  $U(t) = x(t) + i y(t)$  :

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \Gamma_{yx}(-\tau) \quad (\text{I.A.29})$$

A un instant donné la loi de distribution de l'amplitude complexe est donnée par (I.A.21), et celle de l'intensité instantanée (stationnaire)  $I = x^2 + y^2$  s'en déduit [13] :

$$p(I) = \frac{1}{2 \sigma^2 (1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left[\frac{-I}{2 \sigma^2 (1-\rho^2)}\right] I_0\left[\frac{\rho I}{2 \sigma^2 (1-\rho^2)}\right] \quad (\text{I.A.30})$$

où  $I_0$  est la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre zéro, et où l'on a supposé le choix des axes tels que  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ . Lorsque  $\rho \rightarrow 0$  la loi (I.A.30) tend vers la loi de l'intensité d'un champ gaussien stationnaire, donnée par (I.A.23). Lorsque  $\rho \rightarrow 1$  (ou  $-1$ ) on a presque sûrement  $x = y$  (ou  $x = -y$ ), et par une rotation des axes de  $45^\circ$   $U(t)$  peut être rendue réelle. La loi de l'intensité de ce "champ gaussien réel" est :

$$p(I) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} \sigma \sqrt{I}} e^{-\frac{I}{4\sigma^2}} \quad (\text{I.A.31})$$

et  $\langle I \rangle = 2 \sigma^2$ . Les moments de ce champ se calculent en utilisant la relation (I.A.10). En particulier l'effet de groupement  $h_k = \langle I^k \rangle / \langle I \rangle^k$  vaut  $(2k-1)!!$

Dans le cas général ( $\rho$  quelconque) l'effet de groupement  $h_k$  peut se calculer à partir de la loi (I.A.30). Cependant il est plus simple d'introduire la fonction caractéristique  $N_\theta(u,v)$  de la variable aléatoire gaussienne bi-dimensionnelle  $(x,y)$ , en la faisant dépendre d'un paramètre  $\theta$ . Cette fonction est définie par :

$$N_\theta(u,v) = \langle \exp\left[ i(u^2+v^2)^{1/2} (x^2+y^2)^{1/2} \cos(\text{Arctg} \frac{y}{x} - \text{Arctg}(\frac{u}{v} + \theta)) \right] \rangle \quad (\text{I.A.32})$$

de sorte que  $\theta$  peut être considéré comme l'origine des angles dans le plan  $(u,v)$ . La variable  $(x,y)$  étant gaussienne,  $N_\theta(u,v)$  s'écrit aussi :

$$N_\theta(u,v) = \exp\left\{ \frac{-1}{4} (u^2+v^2) \langle (x^2+y^2) \rangle \left[ 1 + \rho \sin(2 \text{Arctg} \frac{u}{v} - 2\theta) \right] \right\} \quad (\text{I.A.33})$$

En identifiant terme à terme les développements de la fonction

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_\theta(u,v) d\theta$$

obtenus à partir des expressions (I.A.32) et (I.A.33), on obtient :

$$h_k = \frac{\langle I^k \rangle}{\langle I \rangle^k} = k! Y_k(\rho) \quad (\text{I.A.34})$$

avec

$$Y_k(\rho) = \langle (1 + \rho \sin \xi)^k \rangle \quad (\text{I.A.35})$$

où  $\xi$  est une variable aléatoire auxiliaire équipartie entre 0 et  $2\pi$ . Nous rencontrons cette fonction dans l'étude du champ bi-mode (chapitre II). En particulier, quand  $\rho$  est assez grand :

$$h_k \approx k! \left[ \frac{(2k-1)!!}{k!} \right]^\rho \quad (\text{I.A.36})$$

Notons également la forme exacte de  $h_2$  :

$$h_2 = 2 + \rho^2 \quad (\text{I.A.37})$$

En résumé l'effet de groupement des champs gaussiens généralisés croît de la valeur  $k!$  à la valeur  $(2k-1)!!$  lorsque le coefficient  $\rho$  varie de 0 à 1.

#### I.A.7. Champ naturel.

Le rayonnement naturel émis par une source thermique est en fait non-polarisé. Il peut être considéré comme la superposition de deux champs gaussiens stationnaires de même variance polarisés à angle droit. De plus chacun de ces deux champs peut être considéré comme la superposition de deux champs gaussiens réels de même variance, indépendants, et déphasés de  $\frac{\pi}{2}$ . L'intensité instantanée du champ naturel s'écrit donc :

$$I = \sum_{d=1}^4 I_d \quad (\text{I.A.38})$$

où les  $I_d$  sont des intensités indépendantes vérifiant la loi de répartition d'un champ gaussien réel, à savoir une loi de la forme

$$p(I_d) \propto \frac{1}{\sqrt{I_d}} e^{-I_d} \quad (\text{I.A.39})$$



Pour plus de généralité, en vue d'une application future, nous considérons au lieu de (I.A.38) la variable aléatoire :

$$I = \sum_{d=1}^D I_d \quad (\text{I.A.40})$$

La loi de I est le produit de convolution d'ordre D de p(I)

$$s(I) \propto p(I) * \dots * p(I) \propto I^{\frac{D}{2}-1} e^{-I}$$

d'où l'on déduit

$$s_k \equiv \int I^k s(I) dI \propto \Gamma(k + \frac{D}{2})$$

et

$$\langle I^k \rangle \equiv \frac{s_k}{s_0} = \frac{\Gamma(k + \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})}$$

d'où

$$h_k \equiv \frac{\langle I^k \rangle}{\langle I \rangle^k} = \frac{\Gamma(k + \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})} \left[ \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(1 + \frac{D}{2})} \right]^k \quad (\text{I.A.41})$$

Lorsque k est impair, cette expression devient :

$$h_k = \frac{(D+2k-2)!!!}{D^{k-1} D!!!} = \frac{(D+2k-1)! (\frac{D-1}{2})!}{(2K)^k (D-1)! (k + \frac{D-1}{2})!} \quad (\text{I.A.42})$$

et quand D est pair :

$$h_k = \frac{(\frac{D}{2} + k - 1)!}{(\frac{D}{2})^k (\frac{D}{2} - 1)!} \quad (\text{I.A.43})$$

Cette dernière expression nous servira ultérieurement. Remarquons simplement ici que la formule générale (I.A.41) permet de retrouver des résultats connus :

- D = 1 Champ gaussien réel :  $h_k = (2k-1)!!$  ( $h_2 = 3$ )
- D = 2 Champ gaussien stationnaire polarisé :  $h_k = k!$  ( $h_2 = 2$ )
- D = 4 Champ naturel :  $h_k = (k+1)!/2k$  ( $h_2 = 1,5$ )

## Chapitre II

### EFFETS DE GROUPEMENT DES CHAMPS PERIODIQUES

#### INTRODUCTION.

En vue d'une application ultérieure (voir chapitre III) nous étudions dans ce chapitre certaines propriétés statistiques des champs d'amplitude périodique (ou "champ périodique").

Les moments considérés sont de plusieurs types, mais ne font intervenir que l'intensité du champ. Le choix de ces moments est dicté par l'utilisation future (voir aussi l'Introduction).

Après mûre réflexion, il nous a semblé légitime de désigner ces moments par le vocable "effets de groupement". A l'origine cette dénomination a été introduite par Picke ("bunching effet") lors d'une analyse des propriétés de corrélation entre les photons émis par une source, les propriétés atomiques de celle-ci rentrant en jeu. En fait, comme le fait remarquer Mandel [7], l'effet de groupement peut être considéré comme une quantité purement descriptive des propriétés du champ, indépendamment des propriétés de la source : ce n'est qu'un moment particulier du champ.

Les champs que nous considérons ici ne sont pas ergodiques en général, aussi sommes-nous amenés à considérer plusieurs types d'effets de groupement. Cette distinction, purement mathématique, rejoint heureusement la distinction résultant des diverses procédures expérimentales possibles (voir la conclusion du chapitre III).

### II.1. Définition des champs périodiques.

Parmi les champs quasi-monochromatiques  $Z(t) = U(t) \exp(2\pi i \bar{\nu} t)$  nous nous intéressons aux champs dont l'amplitude  $U(t)$  est périodique, avec une période certaine  $T$  telle que  $\omega \equiv 2\pi/T \ll \bar{\nu}$ . Le nombre d'harmoniques est nécessairement limité d'après la définition même d'un champ quasi-monochromatique. L'amplitude  $U(t)$  s'écrira donc :

$$U(t) = \sum_{m=1}^M c_m e^{im\omega t} \quad (\text{II.1})$$

avec :

$$M \cdot \omega \ll \bar{\nu} \quad (\text{II.2})$$

Un tel champ sera entièrement défini par la loi de distribution de la variable aléatoire à  $M$  dimensions  $\{c_m\}$ .

La définition (II.1) correspond à la décomposition spectrale

$$Z(t) = \int e^{2\pi i \nu t} d c(\nu) \quad (\text{II.3})$$

avec

$$d c(\nu) = \sum_{m=1}^M c_m \delta(\nu - \nu_m) \quad (\text{II.4})$$

et

$$\nu_m = \bar{\nu} + m \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{II.5})$$

En général le champ défini par (II.1) n'est pas stationnaire. Mais on peut toujours lui associer le champ stationnaire d'amplitude :

$$U_e(t) = \sum_{m=1}^M a_m e^{im\omega t} \quad (\text{II.6})$$

avec

$$a_m = c_m e^{im\Theta} \quad (\text{II.7})$$

où  $\Theta$  est une variable aléatoire équirépartie entre 0 et  $2\pi$  et indépendante des  $\{c_m\}$ . Si, lors d'une expérience faisant intervenir une fonction aléatoire du type (I.1), l'origine des temps à chaque épreuve ne peut être définie qu'avec une imprécision supérieure à la période  $T$ ,

toutes les propriétés statistiques physiquement intéressantes seront celles du champ stationnaire équivalent défini par (II.6). Dans la suite nous nous placerons dans ce cas, mais pour des raisons de commodité d'ordre mathématique, ainsi que pour une plus grande généralité, nous définirons les champs considérés au moyen des coefficients  $c_m$  (équation (II.1)). Notons que le champ stationnaire (II.6) n'est généralement pas ergodique.

## II.2. Effets de groupement des champs périodiques.

Parmi toutes les propriétés statistiques des champs quasi-périodiques nous ne nous intéresserons qu'à certains types de moments, à savoir les moments susceptibles d'intervenir lors d'une détection directe avec un détecteur non-linéaire idéal d'ordre  $k$  (paragraphe I.3.c.).

### II.2.a. Effet de groupement absolu.

Nous appellerons effet de groupement absolu d'ordre  $k$  d'un champ à amplitude périodique le moment normalisé d'ordre  $k$  de l'intensité instantanée du champ stationnaire équivalent :

$$h_k = \frac{\langle I_e^k(0) \rangle}{\langle I_e(0) \rangle^k} \quad (\text{II.8})$$

où

$$I_e(t) = U_e(t) U_e^*(t) = I(t + \frac{\theta}{\omega}) \quad (\text{II.9})$$

Il résulte immédiatement de ces définitions que  $h_k$  peut aussi s'écrire :

$$h_k = \frac{\overline{\langle I^k \rangle}}{\langle \overline{I} \rangle^k} \quad (\text{II.10})$$

où :

$$\overline{\langle I^k \rangle} = \frac{1}{T} \int_{(T)} I^k(t) dt \quad (\text{II.11})$$

Notons que si le champ est stationnaire ergodique l'expression (II.10) rejoint la définition classique de l'effet de groupement :  $h_k = \frac{\langle I^k \rangle}{\langle I \rangle^k}$ .

II.2.b. Effet de groupement vertical.

Nous désignerons par effet de groupement vertical d'ordre  $k$  d'un champ périodique le moment normalisé d'ordre  $k$  de l'intensité moyenne  $\bar{I} = \bar{I}_e$  :

$$b_k = \frac{\langle (\bar{I})^k \rangle}{\langle \bar{I} \rangle^k} \quad (\text{II.12})$$

Contrairement au moment  $h_k$ , ce moment  $b_k$  ne décrit que des fluctuations d'une épreuve à l'autre, d'où la dénomination. Si le champ est stationnaire ergodique,  $b_k \equiv 1$ .

II.2.c. Moment de surintensité.

La surintensité d'un champ périodique d'intensité  $I(t)$  est définie par :

$$i(t) = \frac{I(t)}{\bar{I}} \quad (\text{II.13})$$

Nous désignerons par "moment de surintensité" d'ordre  $k$  d'un champ périodique le moment d'ordre  $k$  de la surintensité du champ stationnaire équivalent :

$$f_k = \langle i_e^k(0) \rangle \quad (\text{II.14})$$

Ce moment s'écrit également :

$$f_k = \langle \overline{i^k} \rangle \quad (\text{II.15})$$

Contrairement aux moments précédents la normalisation est automatique compte-tenu de la définition de la grandeur "sursintensité". En effet :

$$\langle i_e(0) \rangle = \bar{i} = 1 \quad (\text{II.16})$$

Le moment de surintensité  $f_k$  dépend des fluctuations à l'intérieur d'une épreuve et aussi d'une épreuve à l'autre, comme  $h_k$ . Cependant, en général  $h_k$  et  $f_k$  sont différents. Si le champ est stationnaire ergodique, on vérifie aisément que  $f_k = h_k$ .

II.2.d. Propriétés communes aux trois moments.

Les inégalités de Hölder [14] se traduisent par les inégalités suivantes, valables pour les trois types de moments (p et k étant supérieurs ou égaux à l'unité)

$$\alpha_{pk} \geq \alpha_k^p \geq 1 \quad (\alpha = f, b \text{ ou } h) \quad (\text{II.17})$$

et

$$f_{pk} b_{pk} \geq h_k^p \quad (\text{II.18})$$

En général ces trois types de moments ne se conservent pas lorsque le champ traverse un filtre linéaire.

II.2.e. Invariants par transparence aléatoire.

Considérons le champ  $Z'(t)$  déduit du champ périodique  $Z(t)$  par multiplication par une variable aléatoire  $Y$ , indépendante de  $Z(t)$  :

$$Z'(t) = Y \cdot Z(t) \quad (\text{II.19})$$

Désignons par  $y_k$  le moment normalisé d'ordre k de  $|Y|^2$ . Les trois effets de groupement du champ  $Z'(t)$  sont reliés à ceux du champ initial par les relations :

$$h_k' = y_k h_k \quad (\text{II.20})$$

$$b_k' = y_k b_k \quad (\text{II.21})$$

$$f_k' = f_k \quad (\text{II.22})$$

Seul le moment de surintensité se conserve. Un autre invariant est le rapport  $h_k/b_k$  (qu'on pourrait désigner par "effet de groupement horizontal"). En général ces invariants sont différents. Ils coïncident lorsque la loi de distribution des amplitudes complexes des modes  $C\{c_m\}$  se factorise en un produit de deux facteurs, l'un n'étant fonction que de  $\bar{I}$  et l'autre n'étant fonction que des amplitudes relatives des modes définies par :

$$\sigma_m = \frac{c_m}{(\bar{I})^{1/2}} \quad (\text{II.23})$$

avec

$$\bar{I} = \sum_{m=1}^M |c_m|^2 \quad (\text{II.24})$$

Notons que cette condition, qui se traduit mathématiquement par la factorisation :

$$C\{c_m\} = B(\bar{I}) F\{\gamma_m\} \quad (\text{II.25})$$

est une condition suffisante pour obtenir

$$h_k = b_k f_k \quad (\text{II.26})$$

mais n'est pas nécessaire (voir paragraphe II.3.).

Si la transparence aléatoire  $Y$  n'est pas indépendante des  $\{c_m\}$ , le rapport  $h_k/b_k$  n'est généralement plus un invariant, tandis que  $f_k$  le demeure. Ce dernier moment apparaît donc comme particulièrement utile pour caractériser les propriétés statistiques d'un champ périodique, soumis à des perturbations du type (II.19). Par exemple, si la sensibilité du détecteur utilisé pour étudier le champ fluctue d'une épreuve à l'autre cet effet ne modifiera pas la valeur de  $f_k$ . Par contre une dérive du zéro du détecteur, si elle n'est pas rattrapée à chaque épreuve, modifie les valeurs des trois types de moments.

#### II.2.f. Relations entre les effets de groupement d'un champ harmonique avec ceux de son fondamental.

Considérons l'harmonique  $p$  du champ  $Z(t)$ , défini par

$$Z'(t) = Z^p(t) \quad (\text{II.27})$$

Ce nouveau champ est aussi un champ à amplitude périodique, mais seul l'effet de groupement absolu s'exprime simplement en fonction de moments du champ fondamental  $Z(t)$  :

$$h_k' = \frac{h_{pk}}{h_p^k} \quad (\text{II.28})$$

Néanmoins, on peut approximer la valeur de  $f_k'$  par

$$f_k' = \left\langle \frac{i^{pk}(0)}{(\bar{I}^p)^k} \right\rangle \approx \frac{f_{pk}}{f_p^k} \quad (\text{II.29})$$

Cette approximation étant d'autant meilleure que la dispersion de la variable aléatoire  $i\bar{P}$  autour de sa valeur moyenne  $f_p$  est plus faible. Nous rencontrerons plusieurs cas où lorsque le nombre de modes tend vers l'infini,  $f_k \sim h_k$  et l'approximation (II.29) devient excellente.

### II.3. Champ à modulation de fréquence périodique.

Parmi tous les champs périodiques, cherchons ceux pour lesquels

$$f_k = 1$$

c'est-à-dire qui ne présentent pas de surintensité. Ces champs sont nécessairement de la forme :

$$Z(t) = \eta e^{2\pi i \bar{\nu} t} e^{i\phi(t)} \quad (\text{II.30})$$

où  $\phi(t)$  est une fonction aléatoire périodique réelle, et  $\eta$  une variable aléatoire quelconque. La loi  $C\{c_m\}$  s'écrit sous la forme fonctionnelle :

$$C\{c_m\} = \prod_m \delta [c_m - \eta \beta_m(\phi)] \quad (\text{II.31})$$

où les  $\beta_m$  sont les coefficients du développement en série de Fourier de  $\exp i\phi(t)$  :

$$e^{i\phi(t)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m e^{im\omega t} \quad (\text{II.32})$$

On voit sur cet exemple que, bien que la relation  $h_k = b_k f_k \left( = \frac{\langle |\eta|^{2k} \rangle}{\langle |\eta|^2 \rangle^k} \right)$  soit satisfaite, la loi  $C\{c_m\}$  ne s'écrit pas sous la forme (II.25).

En toute rigueur ce type de champ ne peut être rigoureusement quasi-monochromatique, car le nombre de modes n'est pas limité dans (II.32), sauf évidemment dans le cas monomode. Cependant, si  $\phi(t)$  est continue les coefficients  $\beta_m$  tendent rapidement vers zéro quand  $|m|$  tend vers l'infini. Par exemple pour  $\phi(t) = \delta \sin \omega t$ , le coefficient  $\beta_m$  s'identifie avec la valeur de la fonction de Bessel d'ordre  $m$  pour l'argument  $\delta$  [15]. Si celui-ci est inférieur à 2, et si on limite le nombre de modes en ne considérant que les modes d'intensité supérieure au centième du mode prépondérant, on trouve  $M = 8$ . En résumé la condition  $f_k = 1$  ne peut être qu'approchée si l'on considère un nombre fini de modes.



Notons que les coefficients  $\beta_m$  ne sont généralement pas réels (sauf si  $\vartheta(t)$  est impaire), ce qui signifie que les phases relatives des modes ne sont pas des multiples de  $\pi$ . Remarquons également que pour  $\vartheta(t) = \delta_1 \sin \omega t + \delta_2 \sin q \omega t$ , où  $q$  est un entier  $\gg 1$ , on obtient un spectre de raies, chacune d'elles ayant le même nombre de modes.

#### I.4. Modes à phases indépendantes.

La condition d'indépendance statistique des phases signifie que le champ est stationnaire. Nous incluons dans ce paragraphe l'étude du champ bi-mode compte tenu du fait que le moment  $f_k$  ne fait intervenir que le rapport d'intensité entre les deux modes.

##### I.4.a. Champs bi-modes.

Considérons le champ à deux modes

$$Z(t) = e^{2\pi i \bar{\nu} t} \left[ c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{2i\omega t} \right] \quad (\text{II.33})$$

L'intensité traduit le phénomène de battement entre les deux modes :

$$I(t) = \bar{I} \left[ 1 + V \cos(\omega t + \text{Arg } c_2 - \text{Arg } c_1) \right] \quad (\text{II.34})$$

où  $\bar{I} = |c_1|^2 + |c_2|^2$  et  $V = 2 \frac{|c_1 c_2|}{\bar{I}}$ . L'intensité du champ stationnaire associé est :

$$I_e(t) = \bar{I} \left[ 1 + V \cos(\omega t + \xi) \right] \quad (\text{II.35})$$

où  $\xi = \text{Arg } c_2 - \text{Arg } c_1 + 2\theta_2 - \theta_1$ , c'est-à-dire que  $\xi$  est équiparti entre 0 et  $2\pi$ , quel que soit la loi de  $(\text{Arg } c_2 - \text{Arg } c_1)$ . Le moment  $f_k$  s'écrit :

$$f_k = \langle (1 + V \cos \xi)^k \rangle \quad (\text{II.36})$$

où la moyenne porte à la fois sur les variables aléatoires indépendantes  $V$  et  $\xi$ . Compte-tenu de l'identité de Wallis

$$\langle \cos^p \xi \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ \frac{p!}{2^p \left[ \left( \frac{p}{2} \right)! \right]^2} & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases}$$

on obtient par des calculs simples :

$$f_k = k! \sum_{u=0}^{\leq k/2} \frac{1}{(u!)^2 (k-2u)!} \left\langle \left(\frac{V}{2}\right)^{2u} \right\rangle \quad (\text{II.37})$$

Dans le cas où  $V$  est certain,  $f_k$  prend la valeur 2, soit 100% d'augmentation par rapport au cas monomode quand  $V$  atteint la valeur  $V_0$  donnée approximativement par

$$V \simeq \frac{2}{k} \quad (k \gg 1) \quad (\text{II.38})$$

ce qui correspond pour  $k=10$  à un rapport d'intensité entre les deux modes de l'ordre de 100. Pour les fortes valeurs de  $V$ ,  $f_k$  peut être approximé par la formule ( $s = \frac{1-V}{1+V}$ ) :

$$f_k = \frac{1}{2^k (1+s)^k} \sum_{p=0}^k s^p C_{2p}^p C_{2k-2p}^{k-p} \approx \left[ \frac{(2k-1)!!!}{k!} \right]^V \quad (\text{II.39})$$

où  $(2k-1)!!! \equiv \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2}$ . Cette approximation devient rigoureuse pour  $V=1$ .

La figure 1 donne la variation de  $\log f_k$  en fonction de  $V$ , pour  $k=11$  et l'approximation (II.39) s'avère exacte à 10% près pour  $V > 0,4$ .

#### II.4.b. Champ gaussien périodique. (modes d'intensité de loi exp.)

Considérons le champ gaussien stationnaire polarisé à amplitude périodique. Ce champ peut être considéré comme le résultat du filtrage d'un rayonnement thermique par un polariseur et une cavité Fabry-Pérot de finesse infinie. Le caractère gaussien se conservant par filtrage linéaire la variable multi-dimensionnelle  $\{c_m\}$  est gaussienne. D'autre part la stationnarité impose (paragraphe I.4.c.)

$$\langle c_m c_{m'} \rangle = \delta_{mm'}, \quad \langle |c_m|^2 \rangle \quad (\text{II.40})$$

c'est-à-dire que la loi  $C\{c_m\}$  se factorise

$$C\{c_m\} = \prod_{m=1}^M \frac{1}{\pi \langle |c_m|^2 \rangle} \exp \left[ \frac{-|c_m|^2}{\langle |c_m|^2 \rangle} \right] \quad (\text{II.41})$$

La valeur de l'effet de groupement absolu est indépendante du nombre de modes et de la forme du spectre (voir l'appendice du chapitre I)

$$h_k = k!$$

Par contre le moment  $f_k$  dépend du nombre  $M$  ainsi que de la répartition des  $|c_m|^2$  (forme du spectre). Dans le cas où le spectre est uniforme, c'est-à-dire quand :

$$|c_m|^2 = \frac{\langle I \rangle}{M} \quad (\text{II.42})$$

la loi (II.41) s'écrit sous la forme (II.25)

$$C\{c_m\} = \left[ \frac{M}{\pi \langle I \rangle} \exp\left(-\frac{\bar{I}}{\langle I \rangle}\right) \right]^M \quad (\text{II.43})$$

c'est-à-dire que  $h_k = f_k b_k$ . Or l'effet vertical  $b_k$  peut être calculé en utilisant le fait que  $\bar{I}$  s'écrit :

$$\bar{I} = \sum_{m=1}^M \left( |c_{x_m}|^2 + |c_{y_m}|^2 \right) \quad (\text{II.44})$$

donc le résultat du paragraphe I.A.7. s'applique, avec  $D = 2M$  (formule (I.A.43))

$$b_k = \frac{\langle (\bar{I})^k \rangle}{\langle I \rangle^k} = \frac{(M + k - 1)!}{M^k (M-1)!} \quad (\text{II.45})$$

d'où

$$f_k = k! \frac{M^k (M-1)!}{(M+k-1)!} \quad (\text{II.46})$$

Cette formule est d'intérêt central dans notre étude. La variation de  $f_k$  avec le nombre de modes  $M$  peut être résumée comme suit.  $f_k$  part de la valeur 1 pour  $M=1$ , croît rapidement pour  $M \leq k$  puis tend lentement vers la valeur asymptotique  $k!$  quand  $M \rightarrow \infty$ . La figure 2 donne la variation de  $f_k$  pour  $k = 11$ .

Dans le cas où le spectre n'est pas uniforme, le calcul de  $b_k$  et de  $f_k$  (qui est alors différent de  $k!/b_k$ ) est très difficile. Néanmoins on démontre facilement que  $f_k < k!$ . Lorsque le nombre de modes tend vers l'infini, on peut envisager dans un premier temps le cas où le spectre est composé de deux groupes de modes, chacun d'eux ayant un spectre uni-

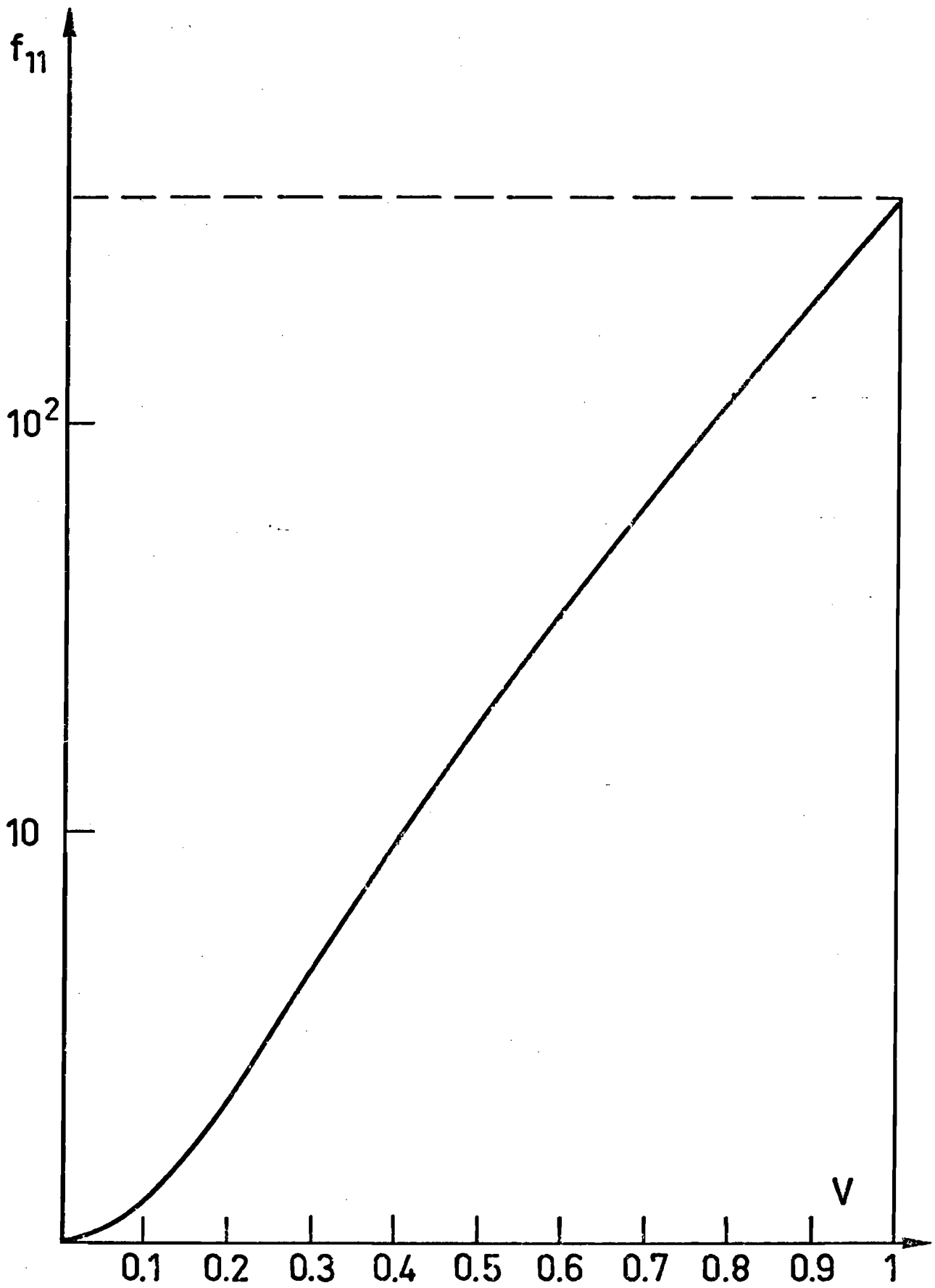


Fig. 1 Champ bimode  
Moment de surintensité d'ordre onze en fonction  
de la visibilité des battements.

MOMENT DE SURINTENSITE D'ORDRE ONZE  
 EN FONCTION DU NOMBRE DE MODES  
 (Spectre uniforme)

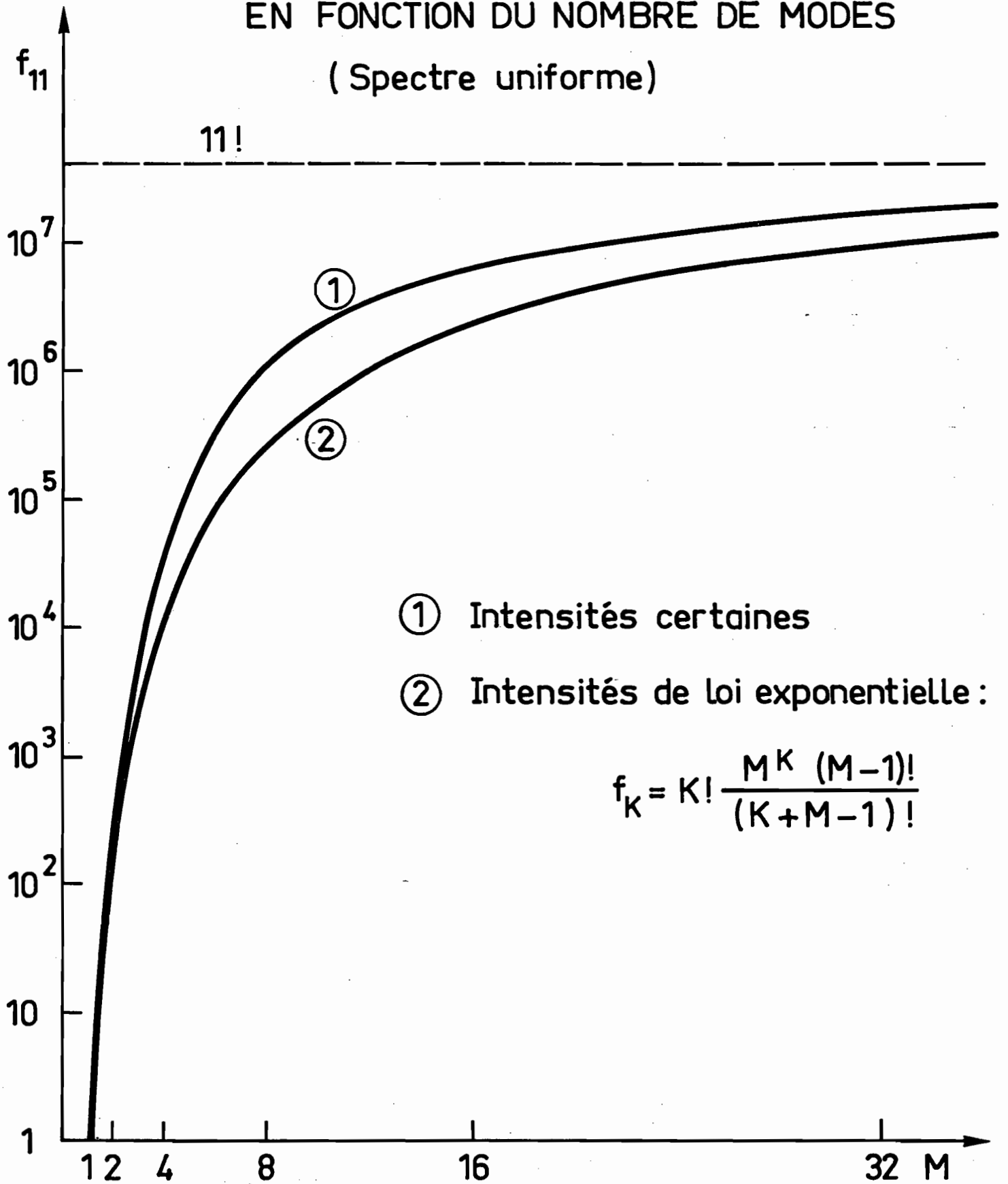


Fig. 2

forme. En désignant par  $\bar{I}_1$  et  $\bar{I}_2$  les intensités moyennes correspondantes,  $b_k$  s'écrit :

$$b_k = \frac{\langle (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)^k \rangle}{[\langle \bar{I}_1 \rangle + \langle \bar{I}_2 \rangle]^k} \quad (\text{II.47})$$

or d'après l'inégalité de Minkowski (réf. [14] p. 651), on a pour  $k > 1$  :

$$\langle (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)^k \rangle \leq [\langle (\bar{I}_1)^k \rangle^{1/k} + \langle (\bar{I}_2)^k \rangle^{1/k}]^k \quad (\text{II.48})$$

Quand  $M \rightarrow \infty$ , d'après (II.45),  $\langle \bar{I}_j \rangle^{k/1/k} \sim \bar{I}_j$  où  $j = 1$  ou  $2$ , donc d'après (II.47) et (II.48) on a  $b_k \leq 1$ . Or  $b_k$  ne peut être inférieur à 1 (voir (II.17)). Donc  $b_k \rightarrow 1$  quand  $M \rightarrow \infty$ . Ce résultat se généralise pour un spectre de forme quelconque (sans singularité). Il en résulte que dans tous les cas  $f_k$  tend vers  $k!$  quand  $M \rightarrow \infty$ , mais moins vite que lorsque le spectre est uniforme.

#### II.4.c. Modes d'intensités certaines.

Dans ce cas  $b_k = 1$  et  $h_k = f_k$ . Cette circonstance explique que la distinction entre les moments  $f_k$  et  $h_k$  n'ait pas été faite jusqu'ici. En développant  $I^k(0)$  suivant la formule du multinôme, et en moyennant sur les phases indépendantes, on obtient, en notant  $|c_m|^2 = 1_m$

$$f_k = h_k = \frac{(k!)^2}{\langle \bar{I} \rangle^k} \sum_{p_1 + \dots + p_M = k} \prod_{m=1}^M \frac{1_m^{p_m}}{(p_m!)^2} \quad (\text{II.49})$$

où  $\langle \bar{I} \rangle = \sum_{m=1}^M 1_m$  et où les  $p_j$  sont des entiers positifs ou nuls. Cette expression a été donnée en 1964 par DUCUING et BLOEMBERGEN [16], et retrouvée au moyen du formalisme quantique par DEBETHUNE [17].

Lorsque le spectre est uniforme, c'est-à-dire quand  $1_m = 1/M$ , on obtient :

$$f_k = h_k = P_k(M) = \frac{(k!)^2}{M^k} \sum_{p_1 + \dots + p_M = k} \prod_{m=1}^M \frac{1}{(p_m!)^2} \quad (\text{II.50})$$

Afin de calculer cette expression, considérons une expression polynomiale  $Q_k(x)$  plus générale dont le développement fait intervenir la quantité

$X_k = M^k P_k(M)$  ( $X_k$  est la somme des carrés des coefficients du multinôme à  $M$  termes de degré  $k$ )

$$Q_k(x) = \sum_{p_1 + \dots + p_M = k} x^{p_1} \left( \frac{k!}{\pi p_m!} \right)^2$$

Pour  $x = 1$ , on retrouve  $X_k(M)$  :

$$Q_k(1) = X_k(M)$$

Le monôme de degré  $r$  du polynôme  $Q_k(x)$  est :

$$x^r \sum_{r+p_2+\dots+p_M=k} \left( \frac{k!}{\pi p_m!} \right)^2 = x^r (C_k^r)^2 X_{k-r}(M-1)$$

par suite, en tenant compte des deux dernières relations on obtient la relation de récurrence :

$$X_k(M) = \sum_{r=0}^k (C_k^r)^2 X_{k-r}(M-1)$$

ou en posant  $p = k-r$

$$X_k(M) = \sum_{p=0}^k (C_k^p)^2 X_p(M-1) \quad (\text{II.51})$$

Cette formule permet d'écrire  $X_k(M)$  sous la forme remarquable

$$X_k(M) = \sum_{p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{M-1}} \left( \frac{k!}{(k-p_1)! (p_1-p_2)! \dots (p_{M-2}-p_{M-1})! p_{M-1}!} \right)^2$$

et de déduire la formule de double récurrence portant sur  $k$  et  $M$  :

$$X_k(M) = \sum_{p=0}^{k-1} (C_k^p)^2 \sum_{m=1}^{M-1} X_p(m)$$

laquelle permet de déduire  $X_k(M)$  lorsqu'on connaît  $X_p(M)$  pour tous les ordres  $p < k$ . Cette formule permet de déduire à partir de la base  $X_1(M) = 1$  les valeurs de  $X_k(M)$ . Elle montre que  $X_k(M)$  est un polynôme de degré  $M$ . Pour les premières valeurs de  $k$  on obtient :

$$\begin{aligned}
 X_0(M) &= 1 & (P_k(M) &= \frac{X_k(M)}{M^k}) \\
 X_1(M) &= M \\
 X_2(M) &= 2 M^2 - M \\
 X_3(M) &= 6 M^3 - 9 M^2 + 4 M \\
 X_4(M) &= 24 M^4 - 72 M^3 + 82 M^2 - 33 M \\
 X_5(M) &= 120 M^5 - 600 M^4 + 1250 M^3 - 1255 M^2 + 456 M \\
 X_6(M) &= 720 M^6 - 5400 M^5 + 17700 M^4 - 30600 M^3 + 27041 M - 9460 \\
 X_7(M) &= 5040 M^7 - 52920 M^6 + 249900 M^5 - 661500 M^4 \\
 &\quad + 1011017 M^3 - 826336 M^2 + 274800 M \quad (II.52)
 \end{aligned}$$

Notons que ces polynômes, jusqu'à l'ordre 6, ont été indépendamment trouvés par TOMOV et CHIRKIN [18]. Ces polynômes n'appartiennent semble-t-il à aucune famille connue, et nous n'avons pas réussi à trouver la forme générale de leurs coefficients, mis à part les trois premiers :

$$P_k(M) = \frac{1}{M^k} X_k(M) = k! \left[ 1 - \frac{k(k-1)}{4 M} + \frac{k(k-1)(9k^2 - 13k + 10)}{288 M^2} - \dots \right] \quad (II.53)$$

Ces coefficients sont calculés en différenciant l'expression (II.51), ce qui fait apparaître des relations de récurrence entre les coefficients. La formule (II.53) suffit pour calculer  $f_k(M)$  lorsque  $M \gg k$ . Dans le cas contraire il faut utiliser tous les termes du polynôme.

On peut résumer les résultats des précédents calculs en soulignant que pour un spectre uniforme composé de modes d'intensités certaines et dont les phases sont indépendantes et équiparties entre 0 et  $2\pi$  l'effet de groupement absolu  $h_k$  (qui est le même dans ce cas que l'effet relatif  $f_k$ ) est une fonction monotone croissante de  $M$ , qui part de la valeur 1 pour  $M = 1$ , augmente rapidement pour  $M \leq k$  et tend lentement vers la valeur asymptotique  $k!$  pour des valeurs de  $M$  supérieures à  $k$ .

Dans le cas où le spectre n'est pas uniforme les calculs de J.L. DEBETHUNE [17] montrent que si la forme du spectre reste la même quand  $M$  augmente, la valeur de  $h_k$  est diminuée surtout dans la zone  $M \leq k$ . Par contre si un groupe de modes contient une fraction constante



de l'énergie totale,  $h_k$  est diminué essentiellement dans la zone  $M > k$  (figure 3). Notons que si l'on considère deux groupes de modes comprenant respectivement  $M_1$  et  $M_2$  modes de même intensité  $l_1$  et  $l_2$  la formule (II.49) devient :

$$f_k(M_1 l_1; M_2 l_2) = \frac{1}{(M_1 l_1 + M_2 l_2)^k} \sum_{q=0}^k \left( \frac{k!}{q!(k-q)!} \right)^2 (M_1 l_1)^q (M_2 l_2)^{k-q} P_q(M_1) P_{k-q}(M_2) \quad (\text{II.54})$$

Cette formule nous servira ultérieurement.

Il est intéressant de comparer la valeur de  $f_k$  donnée par la formule (II.52) avec celle obtenue dans le paragraphe précédent (formule (II.46)). On constate que les valeurs données par les polynômes  $P_k(M)$  sont toujours plus grandes, mais que l'écart relatif est faible. Par exemple, pour  $k=11$ , on observe une différence maximale (pour la valeur  $M=11$ ) telle que  $\delta \ln f_k / \ln f_k < 10\%$  (voir figure 2). Pourtant les lois régissant les intensités des modes sont nettement différentes dans les deux cas. On en déduit finalement que dans le cas des phases indépendantes la valeur du logarithme du moment de surintensité est pratiquement insensible à la forme du spectre et aux lois statistiques des intensités des modes. Le paramètre essentiel est donc le nombre de modes dont l'intensité relative à celle du mode prépondérant est supérieure à une valeur  $\varepsilon$  donnée. Cette valeur sera, en pratique, déterminée par les propriétés du système de détection spectral utilisé.

## II.5. Modes à phases synchronisées.

Nous ne considérerons dans ce paragraphe que le cas de modes à intensités  $l_m$  certaines, c'est-à-dire que  $f_k = h_k$  et que la loi  $C\{c_m\}$  est de la forme

$$C\{c_m\} = L\{\varphi_m\} \prod_{m=1}^M \delta(|c_m| - \sqrt{l_m}) \frac{1}{2\pi \sqrt{l_m}} \quad (\text{II.55})$$

Dans le paragraphe précédent, nous avons  $L\{\varphi_m\} = 1$ . Nous allons considérer d'autres cas importants, où les phases ne sont plus indépendantes, mais soit totalement synchronisées, soit partiellement synchronisées. Le champ n'est alors pas strictement stationnaire, mais on peut raisonner sur le champ stationnaire équivalent, en remplaçant les moyennes dans le temps par des moyennes statistiques sur la variable  $\theta$  définie par l'équation (II.7).

II.5.a. Phases totalement synchronisées.

Considérons la loi de répartition des phases suivantes :

$$L\{\varphi_m\} = \prod_{m=1}^M \frac{1}{2\pi} \delta(\varphi_m) \quad (\text{II.56})$$

Le champ n'est pas stationnaire. L'intensité

$$I(t) = \left| \sum_{m=1}^M \sqrt{l_m} e^{im t} \right|^2 \quad (\text{II.57})$$

n'est pas non plus stationnaire. L'intensité du champ stationnaire équivalent s'écrit au point  $t=0$

$$I_e(0) = \left| \sum_{m=1}^M \sqrt{l_m} e^{im\theta} \right|^2 \quad (\text{II.58})$$

où  $\theta$  est équiparti entre 0 et  $2\pi$ . En développant cette expression par la formule du multinôme, on obtient avec  $\bar{l} = \sum l_m$  :

$$f_k = h_k = \frac{(k!)^2}{(\bar{l})^k} \sum_{p_1+\dots+p_M=k} \sum_{q_1+\dots+q_M=k} \prod_{m=1}^M \frac{l_m^{p_m+q_m}}{p_m! q_m!} \quad (\text{II.59})$$

Dans le cas d'un spectre uniforme, TOMOV et CHIRKIN [18] ont obtenu les développements polynominaux suivants :

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= \frac{1}{3} (2M + M^{-1}) \\ f_3 &= \frac{1}{60} (33M^2 + 15 + 12M^{-2}) \\ f_4 &= \frac{1}{315} (151M^3 + 70M + 49M^{-1} + 45M^{-3}) \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

Nous donnerons une approximation basée sur le fait que l'intensité présente un grand maximum par période (pour  $t=0$ ). Au voisinage de ce maximum l'intensité s'écrit :

$$I(t) = \bar{l} i_0 \left[ 1 - (\eta \omega t)^2 \right] \quad (\text{II.61})$$

où  $i_0$  représente la valeur maximale de la surintensité :

$$i_0 = \frac{(\sum \sqrt{1_m})^2}{\sum 1_m} \quad (\text{II.62})$$

et où le paramètre  $\eta$  dépend de la forme du spectre :

$$\eta^2 = \frac{\sum m^2 \sqrt{1_m}}{\sum \sqrt{1_m}} - \left( \frac{\sum m \sqrt{1_m}}{\sum \sqrt{1_m}} \right)^2 \quad (\text{II.63})$$

$f_k$  peut être approximé dans le cas  $M > 2$ ,  $k \gg 1$  par :

$$f_k = \frac{1}{(\bar{I})^k} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} I^k(t) dt \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - 2^{-1/k}} \frac{i_0^k}{\eta} \quad (\text{II.64})$$

On voit que pour un nombre de modes donné  $M$ ,  $f_k$  est maximal quand le spectre est uniforme ( $\eta$  minimal). On obtient alors

$$f_k \approx \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{1 - 2^{-1/k}} \frac{M^k}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (\text{II.65})$$

soit pour  $M \gg 1$

$$f_k \approx z_k M^{k-1} \quad (\text{II.66})$$

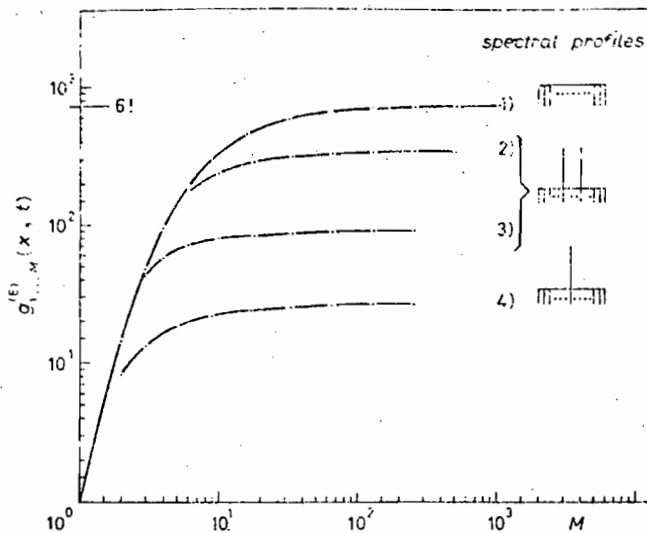
où  $z_k$  est un coefficient de l'ordre de grandeur de l'unité, qui décroît lentement quand  $k$  augmente. Pour  $k=4$ , cette formule est déjà une bonne approximation de (II.60).

Dans un cas particulier, l'effet de groupement peut être calculé exactement. Il s'agit du cas où les intensités  $1_m$  des modes sont données par [19]

$$\sqrt{1_m} = C_M^m = \frac{M!}{m! (M-m)!} \quad (\text{II.67})$$

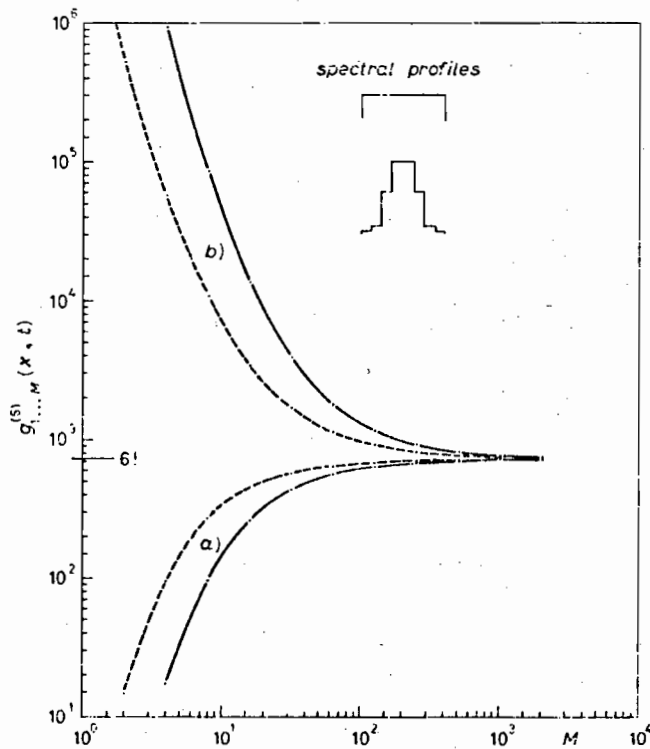
on a alors

$$I(t) = 2^{2M} \left[ \cos \frac{\omega t}{2} \right]^{2M} \quad (\text{II.68})$$



(A)

Fig. 4. - Sixth-order normalized correlation function  $g_{1...M}^{(6)}(x, t)$  vs. the number of modes  $M$  for a SIM laser field composed of two groups of modes.  $p\%$  of the total intensity is equally distributed in  $L$  principal modes and the remainder split up over secondary ones having the same amplitude. 1)  $L=0$ ,  $p=0\%$  (uniform spectrum); 2)  $L=2$ ,  $p=50\%$ ; 3)  $L=2$ ,  $p=80\%$ ; 4)  $L=1$ ,  $p=80\%$ .



(B)

Fig. 3. - Sixth-order normalized correlation function  $g_{1...M}^{(6)}(x, t)$  vs. the number of modes  $M$  for two different spectra: uniform spectrum, dashed lines; stair-shape spectrum with 0.001, 0.05, 0.5 and 1 amplitudes (arbitrary units), solid lines. Two SIM fields are considered: a) laser, b) harmonic.

Fig. 3 (A, B) Moment d'ordre six pour un champ à modes d'intensités certaines (Réf. 17)

N.B. Les courbes b de la figure 3 (B) ne sont pas à considérer. Elles correspondent à l'effet de groupement absolu d'un champ périodique composé de modes indépendants dont l'intensité est le carré d'une variable aléatoire de loi exponentielle (cas inintéressant).



d'où

$$h_k = \frac{(2Mk)!}{[(2M)!]^k} \frac{(M!)^{2k}}{[(Mk)!]^2} \quad (\text{II.69})$$

Lorsque  $M$  tend vers l'infini, on obtient en utilisant la formule de Stirling :  $x! = \sqrt{2\pi} x^{x+1/2} [\exp(-x + \beta/12x)]$ ,  $0 < \beta < 1$

$$h_k \approx \frac{(\sqrt{\pi})^{k-1}}{\sqrt{k}} M^{\frac{k-1}{2}} \quad (\text{II.70})$$

Ce résultat montre que dans le cas d'un spectre non uniforme, l'effet de groupement est beaucoup plus faible que pour un spectre uniforme.

### II.5.b. Phases presque synchronisées.

Dès que la distribution  $L\{\varphi_m\}$  s'écarte de la loi (II.56) l'effet de groupement diminue par rapport à la valeur précédente (II.59), que nous noterons  $f_k^{(0)}$ . Par exemple si  $L\{\varphi_m\}$  est de la forme

$$L\{\varphi_m\} = \prod_{m=1}^M \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-\varphi^2}{2\delta^2}\right] \quad (\text{II.71})$$

l'effet de groupement s'écrit, pour  $\delta \ll 2\pi$  :

$$f_k = f_k^{(0)} e^{-k\delta^2} \quad (\text{II.72})$$

Notons que le motif de surintensité voit son grand maximum diminuer, mais la largeur à mi-hauteur du pic n'est pas sensiblement modifiée, l'énergie perdue se répartissant uniformément dans la période  $T$ . Ce modèle est donc du type "signal plus bruit".

On peut à l'inverse imaginer une déviation systématique du type [20]

$$L\{\varphi_m\} = \prod_{m=1}^M \frac{1}{2\pi} \delta(\varphi_m - m^2 \beta) \quad (\text{II.73})$$

Le champ correspondant peut être considéré comme le filtré du champ défini par (II.56) à travers un filtre linéaire tel qu'un milieu dispersif. La constante  $\beta$  est reliée à la vitesse de groupe  $v$ , l'épaisseur traversée  $e$  et la pulsation centrale  $\bar{\omega}$  par  $\beta = e \frac{\bar{\omega}^2}{2} \frac{d}{d\bar{\omega}} \left(\frac{1}{v}\right)$ . La largeur du pic augmente et l'effet de groupement peut être approximé quand  $M \rightarrow \infty$  par

$$f_k \approx f_k^{(0)} \left[ 1 - \frac{38}{45} M^4 \beta^2 \right]^k \quad (\text{II.74})$$

approximation valable pour  $M^2 \beta \ll 1$ . Là encore l'écart à la synchronisation parfaite se traduit par une diminution de l'effet de groupement.

## II.6. Conclusions.

Quand les intensités des modes sont supposées certaines, il n'y a pas de distinction entre les moments  $h_k$  (effet de groupement absolu) et  $f_k$  (moment de surintensité). Pour un nombre de modes  $M$  donné leur valeur commune est comprise entre 1 et  $M^{k-1}$ .

Dans le cas général, cette limitation des valeurs possibles n'est valable que pour  $f_k$ . En effet, à chaque épreuve la valeur de  $i^k$  est inférieure à la valeur qu'elle aurait si les phases des modes étaient synchronisées, qui elle-même est inférieure à  $M^{k-1}$

$$1 \leq f_k \leq M^{k-1} \quad (\text{II.75})$$

Par contre \*

$$1 \leq h_k < \infty \quad (\text{II.76})$$

Quand les phases sont indépendantes la valeur de  $\ln f_k$  dépend peu de la forme exacte du spectre et des lois régissant les intensités des modes. Dans le cas où ces intensités sont indépendantes et de même loi exponentielle (champ gaussien périodique à spectre uniforme) la valeur de  $f_k$  est

$$f_k = k! \frac{M^k (M-1)!}{(M+k-1)!} \quad (\text{II.77})$$

$f_k$  croît d'abord rapidement quand  $M < k$  puis tend lentement vers la valeur asymptotique  $k!$  quand  $M \rightarrow \infty$ .

\* P. LAMBROPOULOS prépare actuellement un article intitulé "Photon statistics Effects on Multiphoton Ionization". Le résumé, très laconique, est ainsi rédigé : "It is shown that the effect of photon statistics on K-photon ionization can be much larger than the factor of K which has thus far been considered to represent the maximum effect".

II.A. APPENDICE. CHAMPS PARTICULIERS.

Nous considérons ici quelques types de champs périodiques particuliers, qui, bien que d'intérêt marginal dans le cadre de notre étude, sont intrinsèquement intéressants.

II.A.1. Champ gaussien réel périodique.

Examinons le cas du champ gaussien réel dont le spectre est composé d'éléments discrets équidistants. On a alors  $c_m = c_{-m}^*$ , et une moitié du spectre suffit à caractériser le champ. Cette moitié est comparée de modes gaussiens indépendants [21], et la loi  $C\{c_m\}$  s'écrit pour M pair (l'amplitude n'ayant pas de composante continue), avec  $p \geq 0$  :

$$C\{c_m\} = \prod_{p=1}^{M/2} \frac{1}{\pi \langle |c_{p+q}|^2 \rangle} \exp \frac{-|c_{p+q}|^2}{\langle |c_{p+q}|^2 \rangle} \delta(c_{p+q} - c_{-p-q}^*) \quad (\text{II.A.1})$$

Comme pour tout champ gaussien réel on a quel que soit M

$$h_k = (2k-1)!! \quad (\text{II.A.2})$$

Le calcul de  $f_k$  n'est simple que dans le cas du spectre uniforme, c'est-à-dire quand  $\langle |c_m|^2 \rangle = \langle I \rangle / M$ . La loi (II.A.1) se factorise sous la forme (II.25) :

$$C\{c_m\} = \frac{M}{M\langle I \rangle} \left[ \exp \frac{-\bar{I}}{I} \right]^{M/2} \prod_{q=1}^{M/2} \delta(\sigma_{p+q} - \sigma_{-p-q}) \quad (\text{II.A.3})$$

où  $\bar{I} = \sum |c_m|^2$  et  $\sigma_m = c_m / \sqrt{\bar{I}}$ . On a donc  $f_k = h_k / b_k$ . L'effet vertical  $b_k$  se calcule d'une manière analogue au paragraphe II.4.b. :

$$b_k = \frac{(M/2 + k-1)!}{(M/2)^k (M/2-1)!} \quad (\text{II.A.4})$$

d'où

$$f_k = (2k-1)!! \frac{(M/2)^k (M/2-1)!}{(M/2+k-1)!} \quad (\text{II.A.5})$$

Ce champ gaussien réel périodique peut être obtenu de la manière indiquée par PICINBONO et ROUSSEAU [13] en utilisant pour exciter le cristal biréfringent une tension de bruit traversant un filtre linéaire qui ne laisse passer que des fréquences équidistantes.



II.A.2. Champs à modes gaussiens dégénérés.

Considérons les champs à modes gaussiens qui ne dépendent que d'une variable aléatoire complexe gaussienne  $\eta$  :

$$U(t) = \eta \sum_m d_m e^{im\omega t} \quad (\text{II.A.6})$$

où les coefficients  $d_m$  sont certains. Les amplitudes complexes  $c_m = \eta d_m$  sont évidemment gaussiennes, mais elles sont fortement corrélées, et ces champs ne font pas partie en général de la classe des champs gaussiens généralisés. Par contre ils rentrent dans le cadre des champs à modes d'intensité relatives certaines, avec :

$$b_k = k! \langle (1 + \rho \sin \xi)^k \rangle \quad (\text{II.A.7})$$

où  $\rho$  désigne le coefficient de corrélation des parties réelle et imaginaire de  $\eta$  (voir (I.A.35) page 27).

En particulier, dans le cas où  $U(t)$  s'écrit :

$$U(t) = \eta e^{i\phi(t)} \quad (\text{II.A.8})$$

où  $\phi(t)$  est une fonction certaine périodique, on a pour tout  $M$  :

$$\begin{aligned} f_k &= 1 \\ h_k = b_k &= k! \langle (1 + \rho \sin \xi)^k \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.A.9})$$

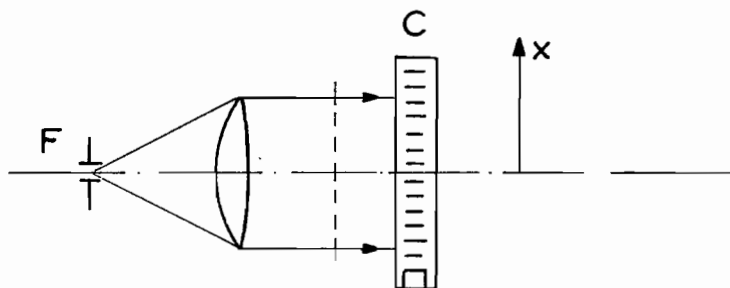
Dans le cas où  $U(t)$  s'écrit :

$$U(t) = \eta \sum_{m=1}^M e^{im\omega t} \quad (\text{II.A.10})$$

On obtient lorsque  $M$  tend vers l'infini (voir (II.66)) :

$$\begin{aligned} f_k &\sim z_k M^{k-1} \\ h_k = b_k f_k &\sim z_k M^{k-1} k! \langle (1 + \rho \sin \xi)^k \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.A.11})$$

Il est intéressant de remarquer que les deux champs (II.A.8) et (II.A.10) ont des équivalents simples dans le domaine spatial (en remplaçant le temps  $t$  par une variable d'espace). En effet considérons le montage suivant :



où  $F$  est une fente source de largeur inférieure à  $\lambda N$ ,  $N$  étant le nombre d'ouverture de la lentille, et où  $C$  représente un objet de phase certain périodique tel qu'une cuve à ultra-sons (en régime d'ondes stationnaire). Dans le plan de sortie de la cuve l'amplitude complexe du champ est de la forme (II.A.8) en remplaçant  $t$  par  $x$  :

$$U(x, t) = \eta(t) e^{i\phi(x)} \quad (\text{II.A.12})$$

et la fonction aléatoire  $\eta(t)$  dépend des propriétés de cohérence temporelle de la source. En particulier si la source est naturelle polarisée et le temps d'observation inférieur à l'inverse de sa largeur spectrale,  $\eta$  sera une variable aléatoire gaussienne complexe ( $\rho = 0$ ) d'où les valeurs des moments de groupement (spatiaux)  $f_k = 1$ ,  $h_k = b_k = k!$  Notons que (II.A.12) suppose que la cuve est suffisamment fine et les variations de densité suffisamment faibles pour qu'on puisse négliger les effets de courbure des rayons lumineux, car sinon on observe des variations d'intensité en fonction de  $x$ . Si l'on remplace la cuve par un réseau par transmission situé au foyer objet d'une lentille, on obtient dans le plan focal image un champ qui se ramène à (II.A.10) dans les mêmes conditions. Notons que par des raisonnements simples on peut retrouver par cette analogie la valeur asymptotique approximative de  $f_k$  quand le spectre est uniforme certain et les phases synchronisées :

$$f_k \sim M^{k-1}.$$

## Chapitre III

### CONSTRUCTION D'UN LASER DECLENCHE A COHERENCE VARIABLE

#### III.1. Degrés de liberté d'un champ électromagnétique.

Un champ électromagnétique, de largeur spectrale  $\Delta\nu$ , enfermé dans une cavité de volume  $V$  ne dépend que d'un nombre fini de degrés de liberté. Ce nombre est donné par la formule classique [22] :

$$\mathcal{M} = \frac{8\pi \nu^2 \Delta\nu}{c^3} V \equiv \frac{8\pi}{\lambda^3} \frac{\Delta\nu}{\nu} \quad (\text{III.1})$$

Dans le domaine optique, ce nombre est généralement très grand pour des cavités à notre échelle. Toutefois l'effet laser étant un phénomène à seuil on peut trouver des configurations de cavité pour lesquelles le nombre de degrés de liberté du champ est fortement réduit. Plus précisément, pour résoudre le problème du calcul du nombre effectif de degrés de liberté il faut :

- $\alpha$  - Trouver un ensemble d'ondes élémentaires (modes) formant une base complète, de sorte que le champ le plus général puisse être considéré comme une superposition de modes.
- $\beta$  - Définir et calculer le coefficient de perte pour chaque mode.
- $\gamma$  - Ne considérer que les modes pour lesquels le gain est supérieur aux pertes (modes effectifs) en régime dynamique.
- $\delta$  - Ecrire que le champ laser est la superposition de ces modes effectifs.

Notons que cette procédure ne préjuge en rien sur les éventuelles corrélations entre les amplitudes des modes.

### III.2. Modes d'une cavité composée de deux miroirs sphériques.

#### III.2.a. Définition de la cavité.

On obtient une première sélection du nombre de degrés de liberté effectifs en utilisant deux miroirs de dimension  $2a \gg \lambda$ , séparés par une distance  $L \gg a$ . La cavité ouverte ainsi formée peut être caractérisée par son nombre de zones de Fresnel (nombre de Fresnel)

$$N = \frac{a^2}{\lambda L} \quad (\text{III.2})$$

On obtient une réduction d'un facteur deux sur le nombre de degrés de liberté du champ en introduisant un polariseur dans la cavité. Dans la suite nous ne ferons intervenir que des champs scalaires.

#### III.2.b. Définition d'un mode.

La cavité ayant une dimension beaucoup plus grande que les deux autres, on sépare habituellement les notions de mode transverse et de mode longitudinal.

Un mode transverse est une configuration transversale du champ qui se conserve lors d'un aller-retour dans la cavité, à une constante complexe près. Le module de ce nombre complexe  $\gamma(\nu)$  définit le coefficient de perte.

A chaque mode transverse, il correspond une série infinie de modes longitudinaux dont chacun est caractérisé par une racine de l'équation en  $\nu$  :

$$\text{Arg } \gamma(\nu) = q.2\pi \quad (\text{III.3})$$

où  $q$  est un entier quelconque.

#### III.2.c. Faisceaux gaussiens.

Lorsque  $N \gg 1$  on peut définir une série de modes transverses qui forment une base orthogonale, qui dépendent de deux entiers  $m$  et  $n$ , et qui s'identifient avec les faisceaux gaussiens [23].

Ces faisceaux gaussiens sont des solutions particulières de l'équation de propagation libre, approximée en négligeant la dérivée seconde de l'amplitude du champ par rapport à la direction de propagation.

Dans un système de coordonnées rectangulaire, le champ électrique du faisceau gaussien d'ordre (m,n) s'écrit, à une constante près, (champ TEM<sub>mn</sub>) dans la région paraxiale :

$$E_{m,n}(x,y,z) = F_{m,n} \left[ \frac{x}{\omega(z)}, \frac{y}{\omega(z)}, z \right] \exp - i \left[ kz + k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi_{mn}(z) \right] \quad (\text{III.4})$$

avec :

$$F_{m,n} \left[ \frac{x}{\omega(z)}, \frac{y}{\omega(z)}, z \right] = \frac{\omega_0}{\omega(z)} H_m \left[ \sqrt{2} \frac{x}{\omega(z)} \right] H_n \left[ \sqrt{2} \frac{y}{\omega(z)} \right] \exp - \frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} \quad (\text{III.5})$$

où H<sub>a</sub>(b) est la valeur du polynôme d'Hermite d'ordre a pour l'argument b, et où :

$$\omega(z) = \omega_0 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right)^2 \right]^{1/2} \equiv \omega_0 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III.6})$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \equiv z + \frac{z_0^2}{z} \quad (\text{III.7})$$

$$\phi_{mn}(z) = -(m+n+1) \text{Arc tg} \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \equiv -(m+n+1) \text{Arctg} \frac{z}{z_0} \quad (\text{III.8})$$

On montre que ce champ obéit aux équations de Maxwell sous la restriction  $\omega_0 \gg \lambda$ .

La quantité  $\omega(z)$  représente la dimension du faisceau. La surface de flux représentée par l'équation (III.6) est un hyperboloïde dont le cône tangent (cône caractéristique) à un demi-angle au sommet donné par :

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi \omega_0} = \frac{\omega_0}{z_0} \ll 1 \quad (\text{III.9})$$

Cet angle ne peut définir la divergence du faisceau que lorsque m=n=0, car ce n'est que dans ce cas que lorsque  $z \rightarrow \infty$  l'énergie est presque totalement incluse dans le cône caractéristique. En effet la formule (III.5) montre que  $\omega$  représente le rayon du faisceau pris à  $\frac{1}{e}$  - c'est-à-dire à  $\frac{1}{2}$  en énergie -. Le rayon minimum  $\omega_0$  du faisceau TEM<sub>00</sub> est un paramètre fondamental d'une famille de faisceaux gaussiens TEM<sub>mn</sub>.

En fait une famille de faisceaux gaussiens  $TEM_{mn}$  est entièrement définie par :

- $\alpha$ ) la direction de propagation,
- $\beta$ ) le sommet P du cône caractéristique,
- $\gamma$ ) deux quelconques des quatre quantités  $(\omega_0, z_0, \lambda, \theta)$ , avec  $z_0 \gg \omega_0 \gg \lambda$  et  $\theta \ll 1$ .

Les surfaces d'onde sont les surfaces normales aux hyperboloïdes de flux définis par :

$$x^2 + y^2 - z^2 = \text{constante} \quad (\text{III.10})$$

Les surfaces d'ondes ne sont pas rigoureusement sphériques, mais dans la région paraxiale où l'énergie est concentrée on peut les approximer par les sphères osculatrices de rayon de courbure  $R(z)$ , comme cela est indiqué dans l'approximation (III.4). D'après (III.7)  $R(z)$  est infini quand  $z \rightarrow 0$  ou  $z \rightarrow \infty$ , et prend la valeur minimale  $2 z_0$  pour  $z = z_0$ . Le terme  $\phi_{mn}(z)$  représente l'écart de la propagation de la phase par rapport à l'onde plane.

#### III.2.d. Détermination des paramètres d'un faisceau gaussien.

Connaissant l'axe de propagation, la longueur d'onde  $\lambda$ , et les paramètres  $\omega$  et  $R$  en un point de l'axe, on peut remonter à la cote  $z$  de ce point par rapport au sommet P et aux paramètres  $\omega_0, z_0$  et  $\theta_0$ .

Remplaçons les variables  $\lambda$  et  $\omega$  par les variables intermédiaires  $\theta$  et  $Z$  définies par analogie avec la relation (III.9) :

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi\omega} = \frac{\varepsilon}{Z} \quad (\text{III.11})$$

On obtient immédiatement :

$$z = \frac{R}{1 + \left(\frac{R}{Z}\right)^2} \quad (\text{III.12})$$

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{Z}{R}\right)^2}} \quad (\text{III.13})$$

$$z_0 = \frac{Z}{1 + \left(\frac{Z}{R}\right)^2} \quad (\text{III.14})$$

$$\theta_o = \theta \sqrt{1 + \left(\frac{Z}{R}\right)^2} \quad (\text{III.15})$$

Notons l'identité :

$$\frac{z}{z_o} = \frac{Z}{R} = \frac{\pi \omega^2}{R} \quad (\text{III.16})$$

La condition de validité de ces formules est  $\omega_o \gg \lambda$ .

III.2.e. Propagation d'un faisceau gaussien.

Dans l'espace libre les formules précédentes peuvent se résumer considérablement en faisant intervenir la courbure complexe  $\frac{1}{Q}$  de l'onde, définie par :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{i}{Z} \quad (\text{III.17})$$

où  $Z = \frac{\pi \omega^2}{\lambda}$ . La propagation se traduit par :

$$Q(z + \Delta z) = Q(z) + \Delta z \quad (\text{III.18})$$

On remarque que cette loi est identique à celle qui traduit, en optique géométrique, la variation du rayon de courbure de l'onde sphérique issue d'un point de l'axe. De même la traversée d'une lentille se traduit par la relation classique :

$$\frac{1}{Q_+} = \frac{1}{Q_-} - \frac{1}{f'} \quad (\text{III.19})$$

où  $Q_-$  et  $Q_+$  sont respectivement le rayon de courbure complexe de l'onde immédiatement avant et après la lentille mince, et où  $f'$  est la distance focale image de la lentille.

Un système optique centré quelconque peut être décomposé en une suite de propagation libre et de traversée de lentille mince. Il en résulte qu'on peut appliquer les méthodes de l'optique paraxiale classique pour étudier le cheminement d'un faisceau gaussien à travers un système centré quelconque. En particulier si on connaît la matrice de transfert (ABCD) entre deux plans, on relie la courbure complexe  $q_2$  du faisceau gaussien dans le deuxième plan à la courbure  $q_1$  dans le premier plan par la relation :

$$q_2 = \frac{A q_1 + B}{C q_1 + D} \quad (\text{III.20})$$

Il faut pourtant remarquer que le sommet P' du faisceau gaussien dans l'espace de sortie n'est pas le conjugué (au sens de l'optique paraxiale) du sommet P du faisceau gaussien dans l'espace d'entrée. Par exemple dans le cas d'une lentille mince de focale f', de foyers F et F', on a

$$\pi' = - f'^2 \frac{\pi}{\pi^2 + z_0^2} \quad (\text{III.21})$$

$$z_0' = - f'^2 \frac{z_0}{\pi^2 + z_0^2} \quad (\text{III.22})$$

avec  $\pi = \overline{FP}$  et  $\pi' = \overline{F'P'}$ . La formule (III.21) ne se ramène à la loi de Newton  $\pi\pi' = - f'^2$  que dans la limite où  $z_0 \ll |\pi|$ .

### III.2.f. Détermination des modes d'une cavité.

Une base de modes à symétrie rectangulaire d'une cavité à grand nombre de Fresnel constituée de deux miroirs sphériques de rayons (positifs pour des miroirs concaves)  $R_1$  et  $R_2$  séparés par la distance (positive)  $L$  est fournie par la famille de faisceaux gaussiens précédente dont les surfaces d'ondes épousent les surfaces des deux miroirs. En fait une telle famille n'existe que si la "condition de stabilité" est remplie :

$$0 \leq \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) < 1 \quad (\text{III.23})$$

Pour la cavité confocale symétrique caractérisée par  $R_1=R_2=L$  il existe une infinité de telles familles. Cette particularité explique l'intérêt de Fabry-Pérot confocal, pour lequel la luminosité est proportionnelle à la résolution, tandis que pour les spectromètres usuels c'est le produit luminosité-résolution qui est constant. Dans le cas général on démontre qu'il n'existe qu'une seule famille dont le rayon minimal  $\omega_0$  est donné par :

$$\omega_0^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \frac{L(R_1-L)(R_2-L)(R_1+R_2-L)}{(R_1+R_2-2L)^2} \quad (\text{III.24})$$

à condition que  $\omega_0 \gg \lambda$ . La position du sommet P de la famille relativement aux sommets  $S_1$  et  $S_2$  des deux miroirs est donnée par :



$$\frac{\overline{S_1 P}}{S_2 P} = \frac{R_2 - L}{R_1 + R_2 - 2L} \quad (\text{III.25})$$

La condition de résonance longitudinale (III.3) s'écrit, si on néglige le terme de déphasage dû à la réflexion :

$$\text{Arg } \gamma_{mn}(\nu) = 2 \left[ \text{KL} + \phi_{mn}(L) \right] = q \cdot 2\pi \quad (\text{III.26})$$

avec, d'après (III.7) (III.9) et (III.24) :

$$\phi_{mn}(L) = - (m+n+1) \text{Arc tg } \frac{L}{z_0} = - (m+n+1) \text{Arc cos } \sqrt{\left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 - \frac{L}{R_2}\right)} \quad (\text{III.27})$$

d'où la série des fréquences de résonance associée au mode transverse d'ordre  $m, n$  :

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L} \left[ q + \frac{m+n+1}{\pi} \text{Arc tg } \frac{L}{z_0} \right] \quad (\text{III.28})$$

L'entier  $q$  représente le nombre de demi-longueurs d'onde incluses dans la cavité de longueur  $L$ . Dans le domaine optique ce nombre est très grand. Par contre les entiers  $m$  et  $n$  peuvent être petits. En particulier le mode le plus intéressant est le mode fondamental ( $m=n=0$ ) associé au faisceau gaussien fondamental  $\text{TEM}_{00}$ . Ce mode est celui pour lequel l'énergie est la plus concentrée autour de l'axe.

### III.2.g. Modes à symétrie cylindrique.

Parmi la famille des faisceaux gaussiens à symétrie rectangulaire, une superposition de faisceaux pour lesquels  $m+n$  est constant se propage sans se déformer, c'est-à-dire que la distribution  $f_z(x, y)$  sur la surface d'onde d'abscisse  $z$  de l'amplitude restera semblable à elle-même (voir les équations (III.4) et (III.8)) quel que soit  $z$ . En particulier sur la sphère à l'infini, rapportée à des coordonnées angulaires  $u$  et  $v$ , la distribution  $f_\infty(u, v)$  sera la même que la distribution sur le plan d'onde  $z=0$  :  $f_0(x, y)$ . Or d'après la théorie de la diffraction à l'infini, ces deux fonctions sont reliées par la transformation de Fourier. La fonction  $f(x, y)$  est donc semblable à sa transformée de Fourier. Certaines combinaisons  $f(x, y)$  sont à symétrie cylindrique et définissent lorsque  $m+n$  varie entre 0 et l'infini une base orthogonale différente de la précédente. Cette base fait encore intervenir deux

entiers  $p$  et  $l \geq 0$ . Un élément de cette base s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$E_{pl}(r, \varphi, z) = G_{p,l} \left[ \frac{z}{\omega(z)}, \varphi \right] \exp -i \left[ k z + k \frac{r^2}{2 R(z)} + \phi_{pl}(z) \right] \quad (\text{III.29})$$

avec

$$G_{pl} \left[ \frac{r}{\omega}, \varphi \right] = \frac{\omega_0}{\omega} \left( \frac{r}{\omega} \right)^l \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} l\varphi L_p^{(l)} \left( 2 \frac{r^2}{\omega^2} \right) \exp \left( - \frac{r^2}{\omega^2} \right) \quad (\text{III.30})$$

où  $L_p^{(l)}$  est le polynôme de Laguerre associé. L'écart de phase par rapport à l'onde plane est :

$$\phi_{pl}(z) = - (2p + l + 1) \text{Arc tg } \frac{z}{z_0} \quad (\text{III.31})$$

De la même façon que précédemment on peut trouver une base complète de modes dans une cavité donnée qui s'identifie avec une telle famille de faisceaux gaussiens à symétrie cylindrique.

### III.3. Sélection du mode transverse fondamental.

De façon générale les modes transverses qui oscillent effectivement sont déterminés par la géométrie de la cavité, les propriétés du milieu actif interposé entre les deux miroirs, et le mode de pompage utilisé. Par exemple, dans le cas d'un laser à gaz excité par une décharge électrique interne, l'inversion de population sera pratiquement homogène et par suite, pour une cavité parfaitement réglée, le mode fondamental sera prépondérant. Par contre dans le cas d'un laser solide pompé par un flash hélicoïdal externe, l'inversion de population sera beaucoup plus forte sur la zone périphérique du barreau et, pour une cavité bien réglée, le mode prépondérant sera un mode à symétrie cylindrique d'ordre élevé. Dans ce qui suit nous ne considérerons que le laser à milieu actif solide.

La solution la plus simple consiste à placer un diaphragme circulaire dans la cavité en regard d'une zone homogènement pompée du barreau, de sorte que le nombre de Fresnel de la cavité soit ramené autour de la valeur 1. Cette méthode a le désavantage de ne faire intervenir qu'une fraction du volume total du barreau, ce qui se traduit par une perte d'énergie. On peut, dans une certaine mesure, pallier à cet

inconvenient en utilisant une ou deux lentilles dans la cavité [24]. Il est avantageux de stabiliser la position du sommet du faisceau gaussien en utilisant un miroir plan (le sommet sera nécessairement sur ce plan). Le second miroir sera alors nécessairement concave pour que la condition de stabilité [23] soit satisfaite, son rayon de courbure devant être supérieur à la longueur  $L$  de la cavité. Ce rayon ne doit pas non plus être trop grand car sinon les effets de lentille à l'intérieur du barreau peuvent devenir prépondérants dans la détermination du paramètre  $\omega_0$  et dans ce cas ce paramètre variera avec la puissance de pompe, la cadence de tir, l'efficacité du système de refroidissement etc ... Un bon compromis consiste à prendre un rapport  $\frac{R}{L}$  de quelques unités. Les paramètres du faisceau gaussien seront donnés par la relation (III.24) ou plus simplement directement déduits des relations (III.7) et (III.9) :

$$z_0 = \sqrt{L(R-L)} \quad (\text{III.32})$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi} z_0} \quad (\text{III.33})$$

Un moyen commode de vérifier que le rayonnement est monomode transverse  $\text{TEM}_{00}$  consiste à comparer la valeur théorique du rayon de divergence  $\theta = \frac{\omega_0}{z_0}$  avec la valeur mesurée. Cette mesure consiste à déterminer le rayon  $\omega$  de la tache (à  $\frac{1}{2}$  de l'énergie centrale) à une distance  $D$  du miroir plan supérieure à  $z_0$ , de sorte que le rayon de divergence mesuré soit  $\theta = \frac{\omega}{D}$ . Notons que pour la détermination de  $\omega$  on peut s'affranchir de mesures photométriques délicates en utilisant un phénomène à seuil très marqué - tel que la brûlure d'un papier photographique vierge développé par double contact (type Polaroid) - et un jeu de densités étalonnées.

Les modes transverses d'une cavité ne s'identifient avec les faisceaux gaussiens que dans la limite  $N \gg 1$ . Toutefois l'expérience montre que pour  $N \approx 1$ , les formules précédentes donnent une bonne approximation des paramètres du faisceau fondamental. Notons qu'en raison du gain énorme que l'on peut obtenir avec des milieux actifs solides - plusieurs unités par passage - on a pu obtenir l'effet laser avec des cavités instables (ne satisfaisant pas à la condition (III.23)). Dans ce cas la théorie précédente ne s'applique pas.

### III.4. Sélection des modes longitudinaux.

#### III.4.a. Généralités.

Nous supposerons que le laser est monomode transverse. La série des fréquences de résonance possible est donnée par l'équation (III.26). Si on néglige les variations de la longueur optique de la cavité avec la fréquence, ces fréquences sont équidistantes, l'intervalle élémentaire étant :

$$\Delta\nu = \frac{1}{\Delta t} = \frac{c}{2L} \quad (\text{III.34})$$

où  $\Delta t$  est la durée d'un aller-retour dans la cavité. (En fait les fréquences sur lesquelles le laser oscille ne sont pas rigoureusement identiques aux fréquences de la cavité non excitée).

Parmi cette série de fréquences possibles, les seules qui oscilleront seront celles pour lesquelles le gain est supérieur aux pertes. La courbe spectrale de gain du milieu amplificateur opère donc une première sélection. Pour une longueur de cavité  $L = 1$  mètre, un laser à gaz oscillera sur quelques modes, un laser à rubis (milieu cristallin) sur quelques dizaines de modes, un laser à milieu vitreux sur quelques milliers de modes. Dans la suite nous ne nous intéresserons qu'à ce dernier type de laser (laser à verre dopé au néodyme).

#### III.4.b. Cas du laser à verre dopé au néodyme.

La largeur de la raie de fluorescence de la transition de l'ion  $\text{Nd}^{3+}$  dopant à quelques % une matrice vitreuse est de l'ordre de 100 Å. La valeur centrale de cette raie dépend légèrement de la composition du verre -  $\lambda_0 = 10580$  Å pour un verre Si-Ba-Rb (Schott),  $\lambda_0 = 10620$  Å pour un verre La-Al-Si (Owens-Illinois) -. La partie homogène de cette raie, c'est-à-dire l'élargissement dû aux vibrations des atomes est de l'ordre de 20 Å [25]. Le spectre de l'émission d'un laser à verre dopé au néodyme construit avec des miroirs à couches multidiélectriques a les propriétés suivantes :

α) il dépend du type de fonctionnement. En fonctionnement déclenché la largeur totale du spectre est plus faible qu'en fonctionnement relaxé (c'est-à-dire sans déclenchement).

β) il présente une structure, c'est-à-dire que certaines régions spectrales sont défavorisées. L'émission se produit sur des paquets de modes bien déterminés (raies).

γ) l'intensité relative des raies varie d'un tir à l'autre.

La non-uniformité du spectre provient pour une grande part du fait que le spectre est très sensible aux moindres variations spectrales des pertes dans la cavité. En particulier la deuxième face d'un miroir, même inclinée sous un angle de  $1^\circ$  joue un rôle sélectif, et provoque une structure périodique. Si plusieurs dioptres (même parfois extérieurs à la cavité) ont une faible inclinaison par rapport à l'axe; leurs effets combinés peuvent résulter en une structure non périodique. Le caractère aléatoire du spectre résulte du fait que le laser démarre sur l'émission spontanée (fluorescence), ce qui explique aussi pourquoi le train de pulses émis lors du fonctionnement relaxé a un spectre plus large que dans le cas du fonctionnement déclenché (un seul pulse géant).

On observe aussi que, pour un laser déclenché, la largeur totale du spectre ainsi que la largeur des raies dépend du système de déclenchement. Pour un système à déclenchement lent (temps d'ouverture beaucoup plus grand que le temps d'aller-retour dans la cavité) le nombre de modes est plus faible que pour un système à déclenchement rapide.

Ces remarques permettent de comprendre comment on peut construire un laser à nombre de modes variable. Le détail de sa réalisation ainsi que les résultats obtenus sont donnés dans l'article suivant.

### III.5. Réalisation d'un laser déclenché à verre dopé au néodyme à nombre de modes axiaux variable.

L'article ci-joint décrit un laser à verre dopé au néodyme, monomode transverse, déclenché par cellule de Pockels, pouvant fonctionner sur un nombre variable de modes axiaux de sa cavité. La réduction du spectre est obtenue au moyen d'un système thermostaté comprenant un miroir sélectif et un filtre biréfringent. Le nombre de modes axiaux, variable entre 1 et 10, est commandé par l'utilisation de sous-cavités et par un déclenchement en deux temps de la cellule de Pockels, l'énergie du pulse restant constante (10 mJ).

L'interprétation et les implications des résultats obtenus sont développées dans le paragraphe suivant.

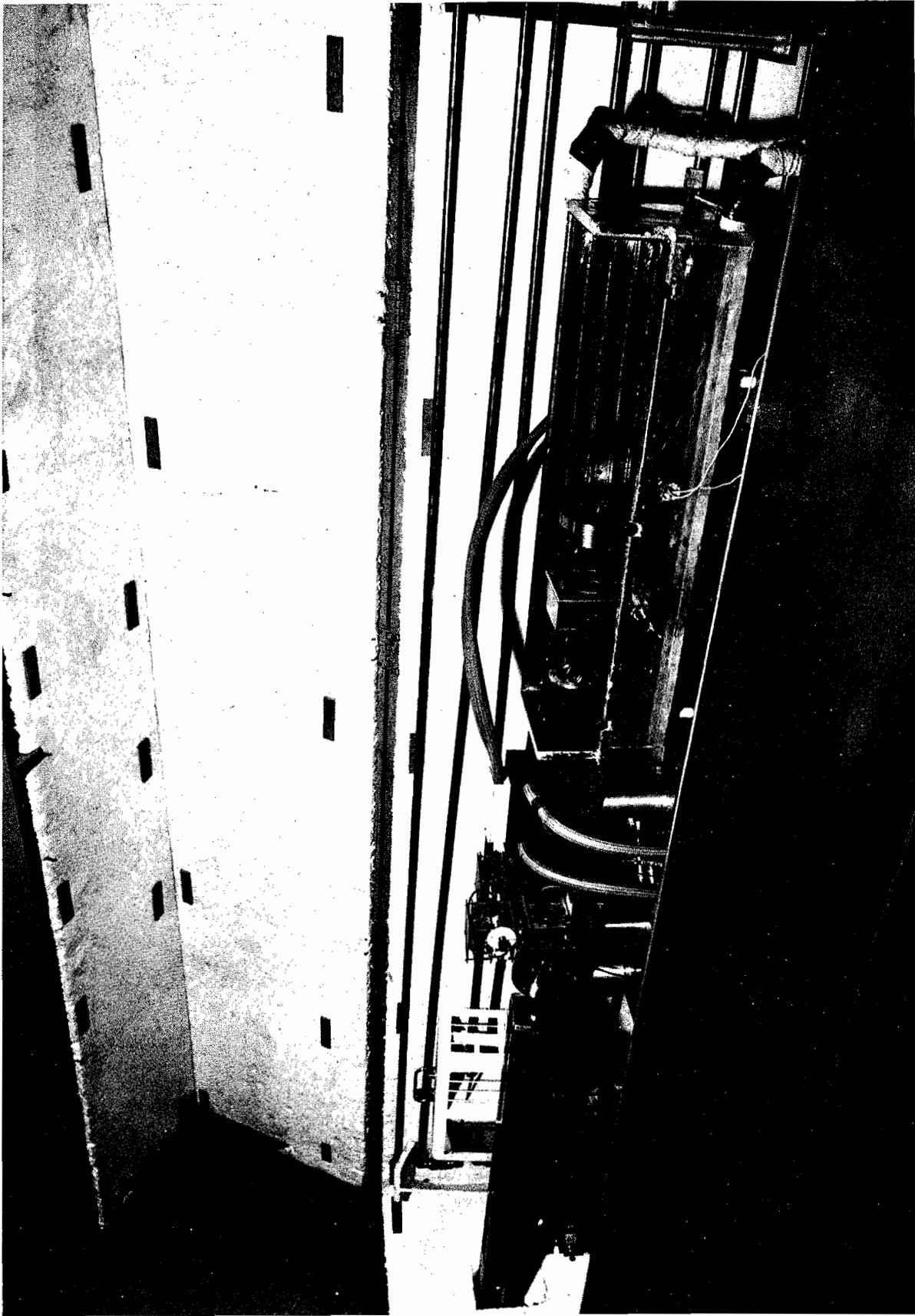


Photo n° 1. OSCILLATEUR A COHERENCE VARIABLE.

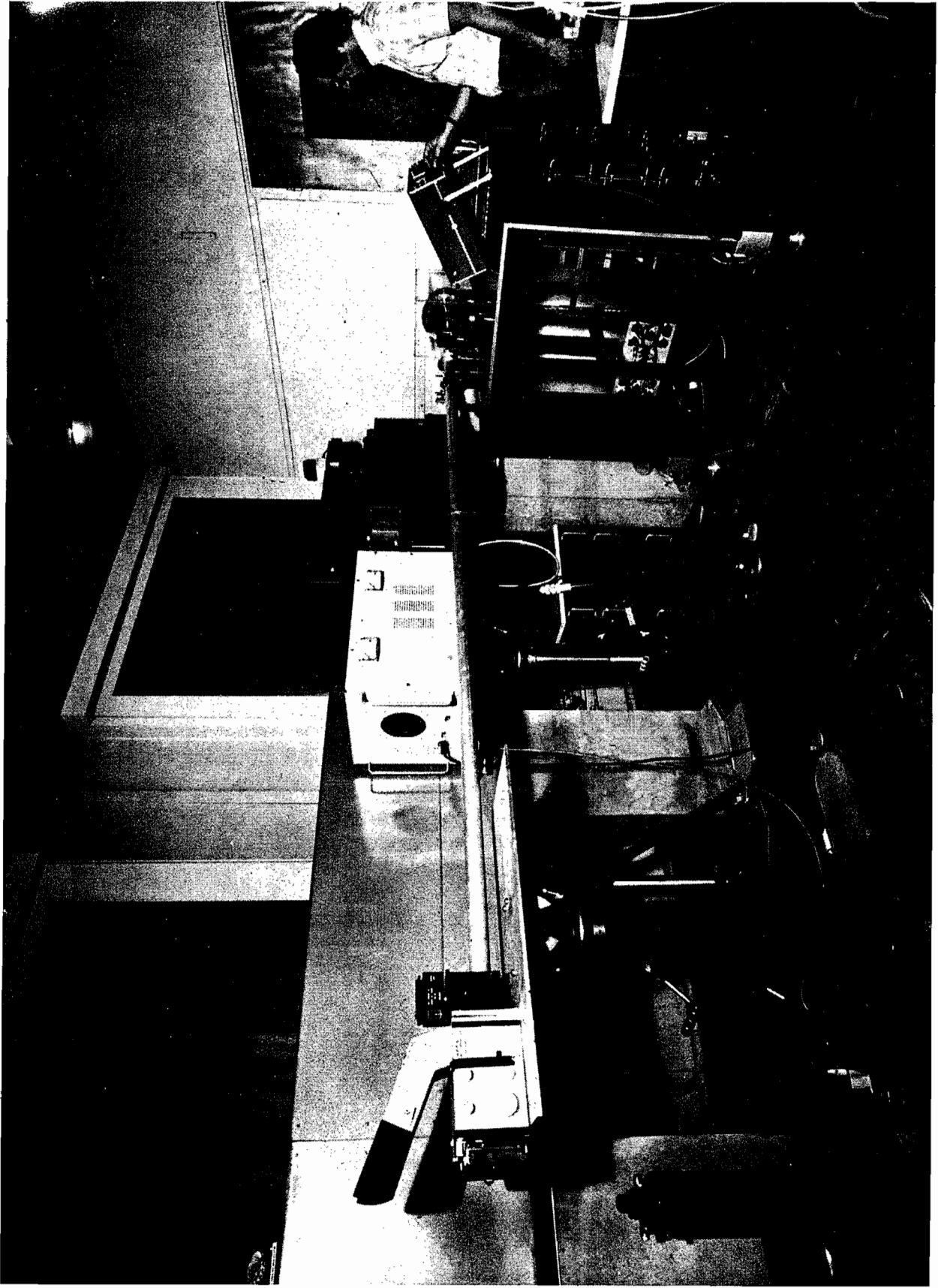


Photo n° 2. SYSTEMES DE CONTROLE. Oscilloscopes. Fabry-Pérot. Spectrographe.

# Q-Switched Nd<sup>3+</sup> Glass Laser of Variable Temporal Coherence

F. Sanchez and C. Lecompte

This paper describes a single transverse mode Q-switched Nd<sup>3+</sup> glass laser working on a few longitudinal adjacent modes. The narrowing of the spectral output is obtained by use of a resonant reflector and a birefringent filter under temperature control. The number of longitudinal modes is varied from one to ten with a constant energy output of 10 mJ by means of intracavity resonators and two-step Q-switching. Observations of the quasiperiodic intensity fluctuations during the 40-nsec pulse give information about the statistical character of multimode giant pulse laser emission.

## I. Introduction

Several investigations have been carried out to study the multiphoton ionization of rare gases and alkaline atoms by use of high power lasers.<sup>1-7</sup> The order  $K$  of this nonlinear process is generally high.

The particular case of atomic hydrogen allows a comparison between the theoretical and the experimental values of the multiphoton-ionization probability. An experiment<sup>8</sup> has already shown that the measured value is two or three orders of magnitude greater than the expected probability computed by several authors.<sup>9-11</sup>

It has been supposed<sup>8</sup> that this discrepancy may be explained by the multimode character of the lasers used in the experiment, whereas the theoretical calculations assume the exciting radiation to be single mode.

Therefore, it is of great interest to study the influence of temporal coherence on these multiphoton-ionization phenomena, while a narrow spectral bandwidth is kept free as far as possible of resonant processes.<sup>12</sup> This may be accomplished with a laser which can operate on a variable but limited number of adjacent longitudinal modes. Moreover, the intensity fluctuations of multimode laser light could be precisely monitored and give direct information about the statistical process involved.

The purpose of this paper is to describe a laser oscillator corresponding to these features.

## II. Description of the Laser

The experimental setup is shown in Fig. 1. The active media is a 9.52 mm diam  $\times$  120 mm long cylindrical rod of Owens-Illinois ED-2 glass, whose faces are 6° cut. It is pumped by two xenon heli-

coidal flashtubes. The total pumping energy available is of the order of 2000 J.<sup>13</sup>

The electro-optics Q-switching includes a polarizing set and a KD\*P Pockels cell. The polarizing set is composed of three 4 mm thick, Brewster angle tilted, high index glass plates. The z-cut 25.4 mm long KD\*P crystal is commanded by a longitudinal electric field, and the quarter wave value for  $\lambda = 1.06 \mu$  is 3400 V. A partial opening of the cell may be obtained by the use of a variable voltage (800–1500 V) during a step of variable duration (0.3 to 1.8  $\mu$ sec) before the total switching.

### II.A. Selection of the Fundamental Transverse Mode

The selection of the  $TEM_{00}$  mode is achieved by means of a 2.2 mm diam circular aperture, located at 20 cm from the back spherical mirror and precisely centered on the optical axis of the resonator. The Fresnel number of the cavity is of the order of unity.<sup>14,15</sup> The far-field intensity pattern was found to fit a Gaussian profile. The  $e^{-2}$  intensity half-angle beam divergence is  $0.43 \pm 0.03$  mrad.

The transverse mode selection was achieved with both the fast one-step Q-switching as well as the two-step one with the Pockels cell, the latter being obviously the more selective one.<sup>16-19</sup>

### II.B. Narrowing of the Spectral Width

The reduction of the spectral width is obtained by means of a birefringent filter and a resonant reflector. The former isolates one of the principal reflectivity maxima of the latter.

#### II.B.1. Resonant Reflector

The resonant reflector is a two parallel plate one, having 3.8 and 3.9 mm plate thicknesses and a 5 mm thick spacer of the same glass ( $n = 1.51$ ). With a thickness difference between the two plates of the order of 0.1 mm, it is expected that in the  $50 \text{ cm}^{-1}$

The authors are with Service de Physique Atomique, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, B.P. 2, Gif-sur-Yvette, France.

Received 20 July 1973.



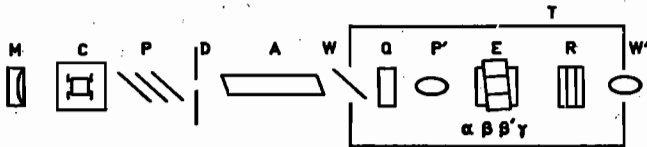


Fig. 1. Scheme of the oscillator. *M*, back spherical mirror; *C*, Pockels cell; *D*, circular aperture; *P* and *P'*, polarizing sets; *A*, active media; *Q*, quartz parallel plate; *E*, ensemble composed of four boundaries:  $\alpha, \beta, \beta', \gamma$ ; *R*, resonant reflector; *T*, temperature-controlled enclosure; *W* and *W'*, Brewster windows. The significant lengths are  $MR = 75$  cm,  $MD = 20$  cm,  $QR = 30$  cm,  $\gamma R = 7$  cm. The optical cavity length is  $L = 85$  cm.

central amplification spectral band of the active media, there exists a spectral region for which the multiple beams reflected by the two plates are simultaneously in constructive interference. In this limited spectral region, the resonant reflector can be regarded as a Fabry-Perot interferometer for which the intensity reflectivity ( $R_1$ ) of both the faces varies with the frequency, according to the law, deduced by classical calculations:

$$\frac{R_1}{1 - R_1} = \left( \frac{n^2 - 1}{2n} \right)^2 \sin^2 2\pi\sigma nb, \quad (1)$$

where  $nb$  is the mean optical length of the two plates and  $\sigma$  is the wavenumber. In the same spectral region the total reflectivity  $R$  of the resonant reflector will be given approximately by:

$$\begin{aligned} R/(1 - R) &\sim [(4R_1)/(1 - R_1)^2] \sin^2 2\pi\sigma B \\ &\approx \delta[(n^2 - 1)/n]^2 \cdot \sin^2 2\pi\sigma nb \cdot \sin^2 2\pi\sigma B, \quad (2) \end{aligned}$$

with

$$\delta = 1 + [(n^2 - 1)/2n]^2 \sin^2 2\pi\sigma nb, \quad (3)$$

where  $B$  is the spacer thickness. This approximation<sup>20</sup> is good only for large values of  $R$ . In particular, it gives its exact maximum value:<sup>21</sup>

$$R_M = \left[ \frac{(n^4 - 1)^2}{(n^4 + 1)} \right] \quad (4)$$

and the reflectivity variations with  $\sigma$  are essentially determined by the expression:

$$\begin{aligned} R/(1 - R) &\approx [(n^2 - 1)/(2n)]^2 [\cos 2\pi\sigma(B - nb) \\ &\quad - \cos 2\pi\sigma(B + nb)]^2. \quad (5) \end{aligned}$$

For  $B + nb \gg |B - nb|$  it can be schematized as a fast varying function of period  $\Delta\sigma_1$  (fine structure) which is modulated by a slow varying function of period  $\Delta\sigma_2$  (envelope structure) with:

$$\Delta\sigma_1 \approx 1/(B + nb); \Delta\sigma_2 \approx 1/(2|B - nb|). \quad (6)$$

The maximum temperature change necessary to tune these two structures, i.e., to cause a relative displacement equal to  $\frac{1}{2} \Delta\sigma_1$ , is, by differentiating Eq. (6):

$$\Delta T \approx |B - nb| / \{4\sigma Bnb[(1/n)(\partial n)/(\partial T)]\}. \quad (7)$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial T} = 1,3 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

one obtains  $\Delta T \approx 5$  °C. Such a resonant reflector is well designed for temperature setting. Figure 2 shows two spectra of free running laser emission without the birefringent filter for two different temperatures. In both cases the fine structure and the structure of the envelope are observable over the whole spectrum, with periods equal to  $\Delta\sigma_1 = 0.92$   $\text{cm}^{-1}$  and  $\Delta\sigma_2 = 6$   $\text{cm}^{-1}$ , respectively. These measurements are in agreement with Eq. (6). On Fig. 2(a), where the temperature is not properly set, there is no single line of predominant intensity, whereas in Fig. 2(b), where the temperature has been adjusted, several single lines appear. One can also notice the long period modulation due to the thickness difference of the plates. So for the bright single lines located around  $\lambda = 10610$  Å, the reflectivity approaches its maximal value  $R_M = 0.46$ . This point is confirmed by measurement of the threshold pumping energy.

When the laser is Q-switched with an energy pumping ratio above threshold of 1.6, the spectrum is reduced to the six single lines corresponding to the principal ones of Fig. 2(b). For one of them we may apply the formula (2) to calculate the relative change of the reflectivity for the adjacent fine structure maximum. One gets  $\Delta R/R \approx -7 \times 10^{-2}$ . This difference appears to be sufficient to suppress adjacent peaks in the Q-switched operation.

### 11.B.2. Birefringent Filter

In order to select one of these six lines mentioned above, a plane parallel quartz plate<sup>22</sup> and another

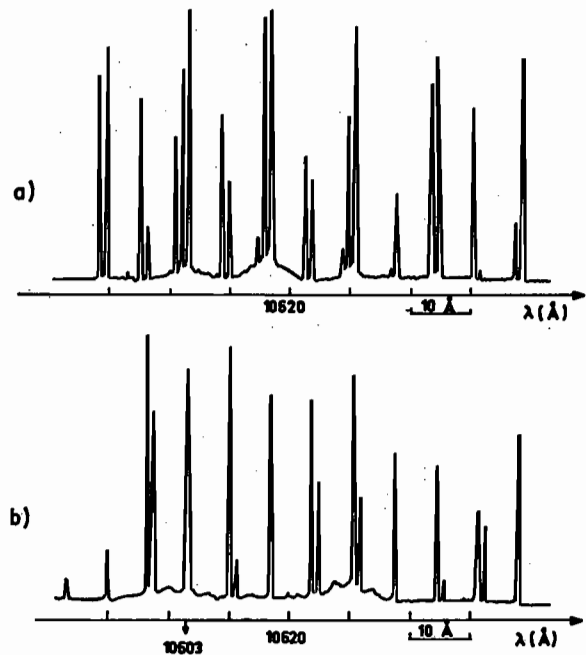


Fig. 2. Spectrum of the free-running laser emission, without quartz plate, for two different temperatures: (a)  $T = 27$  °C, (b)  $T = 32$  °C.

polarizing set are inserted inside the cavity. The quartz (birefringence  $\Delta n = 8.7 \times 10^{-3}$  at  $\lambda = 1.06 \mu$ ) is cut parallel to its optical axis, and this axis is oriented at  $45^\circ$  of the principal planes of the polarizing sets, in order to obtain the highest efficiency of the filter. The plate thickness  $d$  must be smaller than 5 mm if a single polarizer is used, or 10 mm with two polarizers, in order to realize a single maximum of transmission within the  $120 \text{ cm}^{-1}$  total spectral range of amplification. The two polarizer arrangement is better because the second polarizer may be oriented parallel or perpendicular to the first one and, therefore, permits one to choose, with the same quartz plate, any of the two maximum transmission positions. The distance between the two maxima is given by  $\Delta\sigma_3 = (2d \cdot \Delta n)^{-1}$ , e.g.,  $\Delta\sigma_3 \approx 60 \text{ cm}^{-1}$  for  $d = 10 \text{ mm}$ . For the quartz plate used, the crossed position gives the better result since it selects a single line ( $\lambda = 10603 \text{ \AA}$ ) located in the maximum reflectivity region of the resonant reflector [Fig. 2(b)].

### 11.B.3. Parallel Plate Filter

In addition to its birefringent properties, the quartz plate (the faces of which are parallel within a quarter fringe), introduces an important modulation of the cavity losses, due to the multiple beam interference between its faces.

For a small tilting angle ( $\theta$ ) for which the displacement of the partially double reflected ray from the principal one is insignificant with respect to the beam size, the transmission may be approximately represented by:

$$T \approx 1 - \left[ \frac{(m^2 - 1)}{(2m)} \right]^2 \cdot \sin^2[2\pi \sigma m d \cos(\theta/m)], \quad (8)$$

where  $m$  is the mean refractive index of quartz. This leads to a modulation ratio  $\Delta T/T \approx 16 \times 10^{-2}$  which is larger than the relative change of the reflectivity between two adjacent peaks of the resonant reflector fine structure  $(\Delta R)/R \approx 7 \times 10^{-2}$ .

Therefore, it is possible to select any one of the three adjacent components of the resonant reflector fine structure around the central wavelength of  $10603 \text{ \AA}$ , by starting from normal incidence and by tilting the quartz plate around the polarizing direction or around the direction perpendicular to it. Clearly, this causes no shift of the transmission maximum of the birefringent filter.

### 11.B.4. Width and Stability of the Selected Line

In Fig. 3(a), a densitometer scan of the reduced spectrum taken with a grating spectrograph is shown. At the resolution limit of this apparatus, the line width is measured to be less than  $0.08 \text{ \AA}$ . Within this narrow spectral band, a Fabry-Perot interferometer is used to give information on the mode structure. It has a finesse of 20 and a free spectral range  $\Delta\lambda = 7.5 \times 10^{-2} \text{ \AA}$ . We have observed seven to ten adjacent modes [Fig. 3(b)].

The stability of the central wavelength depends on the temperature control. For a thermoregulation ac-

curacy of  $\pm 0.2^\circ\text{C}$  and taking into account that the dilatation coefficient of the resonant reflector is  $8.7 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , calculations produce a wavelength stabilization precision of  $\pm 2 \times 10^{-2} \text{ \AA}$ , which is equal to three times the spacing between two adjacent longitudinal modes.

## 11.C. Mode Selection Devices

In order to reduce the mode number from the precedent value, two independent methods have been chosen. The first method is to add resonant conditions in the cavity, the second is to operate with a slow  $Q$ -switching.

### 11.C.1. Intracavity Resonators

Certain supplementary conditions of oscillation arise when intracavity resonators are added. In order to keep the central wavelength of the line a constant, the lengths of the additive resonators must be greater than the resonant reflector ones.

In practice, an empirical method was chosen, which consists of trying different intracavity resonators. The system  $E$  (Fig. 1) is composed of two prismatic plates, each with a  $2^\circ$  angle wedge, optically contacted, top and bottom, on a plane parallel 30 mm thick spacer. Different independent resonant conditions may be realized at will. First, strong resonant conditions can be introduced by collimation upon the two parallel surfaces  $\beta$  and  $\beta'$ . Second, collimation with any of the two external faces  $\alpha$  and  $\gamma$  gives weaker resonant conditions. The  $0.2^\circ$  residual angle of these planes prevents interference effects between them to occur, even at the case where one of them is collimated. The accuracy of the angular alignment of the different refracting surfaces ( $\sim 5 \times 10^{-5} \text{ rad}$ ) is sufficient to assure a good reproducibility. On the other hand, the tilting angle for which a boundary may be regarded as being off-axis is of the order of  $10^{-3} \text{ rad}$ .

The quartz plate, whose optical thickness is large enough, may be also collimated in the same way. Since its distance from the resonant mirror is equal to 30 cm (the same order of magnitude as the optical cavity length  $L = 85 \text{ cm}$ ), the feasibility of reaching the single mode operation with the quartz plate collimation may be investigated.



Fig. 3. Narrowed spectral output. (a) Densitometer scan of the spectrum recorded with a SOPRA spectrograph, 1200 grooves/mm grating, focal length 4 m, aperture 1/36. (b) Photograph of the spectrum recorded with a 7.5 cm thick Fabry-Perot interferometer. The focal length is 3 m, and the diameter of the image converter  $S_1$  photocathode is 30 mm.

Table I. Variation of Mode Number

Pump energy (J)	Quartz plate tilting angle	Face $\gamma$ tilting angle	First step Q-switching duration ( $\mu$ sec)	Number of contiguous modes
1750	$\theta_0$	$-0.5 \theta_0$	0	7 to 10
1750	$\theta_0$	$-0.5 \theta_0$	0.5	5 to 7
1750	$\theta_0$	$-0.5 \theta_0$	1	3 to 4
1600	$\theta_0$	0	0	3 to 4
1600	$\theta_0$	0	1	2
1500	0	0	1	1 (70%)

\* One can see the different mode numbers that can be reached by combination of the three parameters: quartz plate and boundary  $\gamma$  tilting angles and first step Q-switched duration. The photographic recording system allows detection of modes with intensity ratio of about  $10^{-2}$ .

### II.C.2. Two-Step Q-Switching

Such a technique was first introduced by Hanna.<sup>23</sup> By means of a partial cell opening, the number of loop transits in the cavity between the start of the giant pulse and the instant where it reaches its maximum may be varied. Thus, the Pockels cell may operate like a fast or a slow Q-switch. The lengthening of time for the pulse buildup increases the ratio between the strong and the weak mode intensities, thus leading to a reduction of the observed mode number.<sup>16-18</sup>

Applying Sooy's approximations<sup>16</sup> for two-step Q-switching, one gets the number of modes ( $N$ ) as a function of the number of transits during the first step ( $p$ ):

$$N \approx N_0 [p/q_0]^{1/2}, (p \gg q_0) \quad (9)$$

where  $N_0$  and  $q_0$  are, respectively, the number of modes and the number of transits in the case of one-step Q-switching.

### III. Results

For an energy pumping ratio above threshold of 1.6,  $q_0$  is about 30 and the observed mode number is around 10. The formula (9) gives a reasonably good representation of the mode number reduction, until  $q_1$  reaches the values 200, i.e. for a partial opening time of the order to 1  $\mu$ sec. The mode number is then reduced to 3 or 4.

The same mode number (3 or 4) is obtained in fast Q-switching when the boundary  $\gamma$  (located at 7 cm from the resonant reflector) is in the collimating position. One may also note that additional lines (nonadjacent modes) appear at a distance of several  $\text{cm}^{-1}$  from the principal one when the boundaries  $\alpha$  or  $\beta$ , or  $\beta'$  are collimated.

With the boundary  $\gamma$  in the collimating position as well as the two-step Q-switching, the laser oscillates on two adjacent modes only, with an intensity ratio which randomly varies from 0 to 100% from pulse to pulse. It has been supposed that these fluctuations are due to residual thermal effects which cause the

resonant mirror dilatation. Single mode operation, i.e., intensity ratio less than  $10^{-2}$ , is attained only on 5% of the shots.

So as to obtain the single mode operation on a larger number of shots, the quartz plate is collimated. With the two-step Q-switch, in order to suppress the weak side lines that would appear otherwise, the single mode operation is reached on 70% of the shots.

The different operations described above are summarized in Table I. In every case the output energy and the pulse duration are kept constant to 10 mJ and 40 nsec, respectively. Particularly, the pump energy must be decreased when an intracavity boundary is collimated. All the changes of mode number are carried out with the same line of the fine structure of the resonant reflector. In order to achieve this, the tilting angle  $\theta_0$  at the quartz plate is chosen to be the first value for which its peak transmission occurs at the same wavelength which is favored when the quartz plate is collimated. This value corresponds to an optical length variation of  $\lambda/2$  and is of the order of  $9 \cdot 10^{-3}$  rad [Eq. (8)].

Finally, to reduce the beam translation, as far as possible, the tilting angle of the boundary  $\gamma$  is chosen to be  $-0.5 \theta_0$ , since the ratio of the optical thicknesses of the ensemble  $E$  and the quartz plate is 2. Thus, it is only for the case of the two-mode operation that the beam will suffer a translation, of about 0.1 mm.

### IV. Observation of Intensity Fluctuations

As Hercher has done in the case of a ruby laser,<sup>24</sup> we have noticed the influence of the mode number on the shape of the giant pulse. The detection arrangement was made of a RTC XA1003 photodiode and a OZ 100 oscillograph, which produces a combined rise time of the order of 350 psec, and thereby permits precise study of intensity fluctuations in the limit of  $N = 20$ . Because of the total polarization of

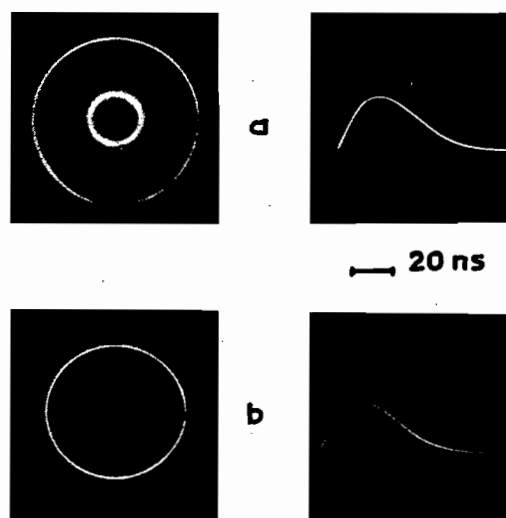


Fig. 4. Spectrum and corresponding pulse: (a) single mode emission, (b) two nonadjacent modes emission.

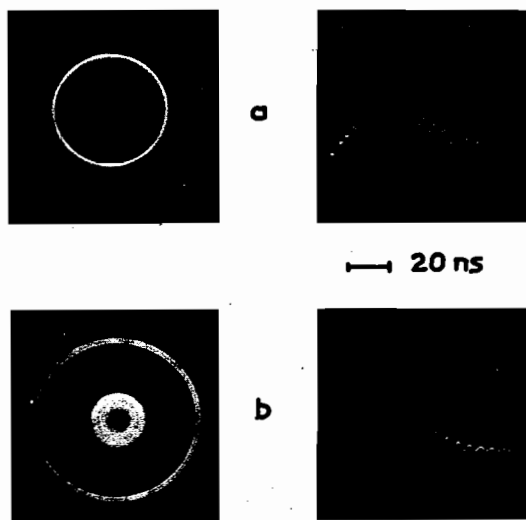


Fig. 5. Spectrum and corresponding pulse in bimode emission: (a) intensity ratio equal to  $5.10^{-3}$  at the pulse top, (b) intensity ratio equal to 0.2 at the pulse top.

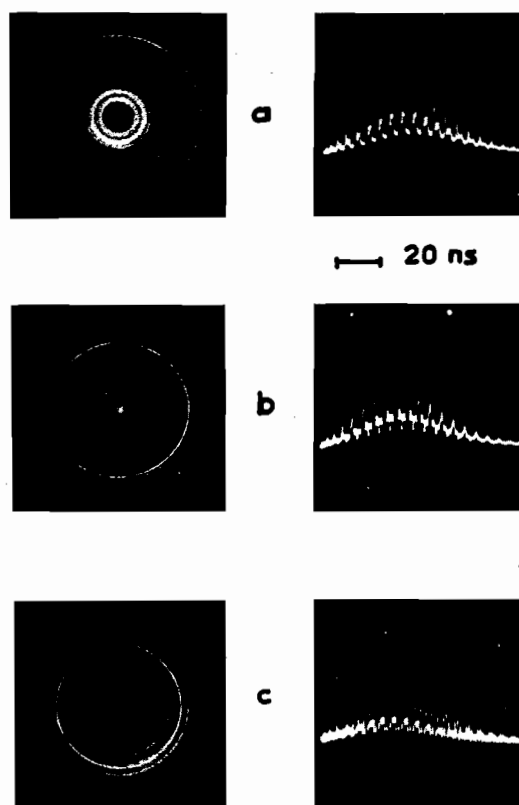


Fig. 6. Spectrum and corresponding pulse in multimode emission: (a) three modes, (b) five modes, (c) seven modes.

the laser beam the intensity fluctuations attain their maximal possible values.

With the single mode operation, no overmodulation appears [Fig. 4(a)]. One must notice that this is the same in the case of two modes 0.9 Å apart, since the detection system is unable to resolve the phenomena [Fig. 4(b)].

With two adjacent modes, the intensity time modulation is sinusoidal, with a period  $\Delta t = 5.7$  nsec, corresponding to one cavity transit time (Fig. 5). Therefore, the phase difference  $\varphi$  between the two vibrations remains constant during one pulse, but the modulation depth varies from shot to shot, according to the relation:

$$I(t) = I_0 + I_1 + 2(I_0 I_1)^{1/2} \cos 2\pi[t/(\Delta t)], \quad (10)$$

which gives the resultant intensity due to the superposition of two vibration modes having, respectively, the intensities  $I_0$  and  $I_1$ . Thus, when their ratio  $I_1/I_0$  is equal to  $10^{-2}$ , the modulation depth is  $\pm 20\%$ , which is easily resolvable on the oscillograph. It should be noted that the oscillograph allows a better detection of a weak intensity mode than the Fabry-Perot interferometer. More precisely Fig. 5(a) shows that the relative intensity of the weak mode is greater at the end of the pulse. This is in agreement with Sooy's theory since the weak mode tends to oscillate later than the principal one. Nevertheless, if one only considers the high part of the pulse, one can consider the ratio  $I_1/I_0$  to be a constant in the first approximation.

For the higher mode numbers, the intensity modulation has a quasi-periodic time variation of period  $\Delta t$  [Fig. 6(a), (b) and (c)]. This signifies that the mode phases remain constant during one pulse, and that, in the high part of the pulse, the mode intensities follow the same temporal variation. The mode-locking operation does not appear to be favored. A statistical study of these random parameters and of their influence on high order nonlinear experiments will be made in the near future.

## V. Conclusions

The intensity fluctuations of the output of this Q-switched single transverse mode laser are directly related to the longitudinal mode number. The intensity dependence  $I(t)$  in the highest part of the pulse may accurately be treated as the product of a reproducible slowly varying function  $G(t)$  and a periodic function  $i(t)$  (period  $\Delta t = (2L)/c$ ) which fluctuates from shot to shot. These results are in agreement with the theoretical work of Fleck.<sup>25</sup>

In conclusion, this oscillator will allow us to investigate the statistical behavior of a multimode Q-switched laser and to check the influence of coherence in the multiphoton-ionization experiments.

We gratefully acknowledge C. Manus and G. Mainfray for their constant encouragements in performing this work, and we are very indebted to D. Fondant for his technical assistance.

## References

1. G. S. Voronov and N. B. Delone, JETP Lett. 1, 66 (1965).
2. G. A. Delone and N. B. Delone, JETP Lett. 10, 265 (1969).
3. S. L. Chin, N. R. Isenor, and M. Young, Phys. Rev. 188, 7 (1969).
4. P. Agostini, G. Barjot, G. Mainfray, C. Manus, and J. Thebault, IEEE J. Quantum Electron. QE-6, 782 (1970).
5. R. A. Fox, R. M. Morgan, and E. J. Robinson, Phys. Rev. Lett. 26, 1416 (1971).
6. G. Baravian, R. Benattar, J. Bretagne, G. Callede, J. L. Godart, and G. Sultan, Appl. Phys. Lett. 18, 387 (1971).
7. B. Held, G. Mainfray, and J. Morellec, Phys. Lett. 39A, 57 (1972).
8. M. Lu Van, G. Mainfray, C. Manus, and I. Tugov, Phys. Rev. A7, 91 (1973).
9. H. B. Bebb and A. Gold, Phys. Rev. 143, 1 (1966).
10. V. M. Morton, Proc. Phys. Soc. Lond. 92, 301 (1967).
11. Y. Gontier and M. Trahin, Phys. Rev. A4, 1896 (1971).
12. B. Held, G. Mainfray, C. Manus, J. Morellec, and F. Sanchez, Phys. Rev. Lett. 30, 423 (1973).
13. Laser Head Quantel HH 312, commercially available.
14. A. G. Fox and T. Li, Bell Sys. Tech. J. 40, 453 (1961).
15. G. L. McAllister, M. M. Mann, and L. G. de Shazer, IEEE J. Quantum Electron. QE-6, 44 (1970).
16. W. R. Sooy, Appl. Phys. Lett. 7, 36 (1965).
17. V. Daneu, C. A. Sacchi, and O. Svelto, IEEE J. Quantum Electron. QE-2, 290 (1966).
18. J. M. McMahon, IEEE J. Quantum Electron. QE-5, 489 (1969).
19. E. O. Ammann and J. M. Yarborough, Appl. Phys. Lett. 20, 117 (1972).
20. For rigorous calculations, see H. F. Mahlein and G. Schollmeier, Appl. Opt. 8, 1197 (1969).
21. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon Press, Oxford, 1965), p. 51.
22. B. Soep, Opt. Commun. 1, 433 (1970).
23. D. C. Hanna, Opto-Electron. 3, 163 (1971).
24. M. Hercher, Appl. Phys. Lett. 7, 39 (1965).
25. J. A. Fleck, Jr., Phys. Rev. B1, 84 (1970).

### III.6. Conclusions.

Parmi les quatre points du programme établi au paragraphe III.1. nous n'avons jusqu'ici traité que du premier, à savoir la définition des modes. Les deuxième et troisième points ne peuvent être traités qu'en tenant compte des multiples paramètres intervenant dans le problème : propriétés du milieu amplificateur, disposition des divers éléments constituant le laser, états de surface des dioptrés etc ... Ce problème est évidemment extrêmement difficile et n'a qu'une portée limitée à un cas d'espèce particulier. En fait l'étude expérimentale précédente permet de sauter cette étape et nous amène au quatrième point, à savoir la description phénoménologique de la radiation du laser déclenché.

Le fait que l'impulsion exhibe une structure quasi-périodique signifie que l'intensité peut s'écrire :

$$I(t) = \left| \sum_{m=1}^M a_m(t) \exp(im\omega t) \right|^2 \quad (\text{III.35})$$

où l'amplitude complexe du  $m^{\text{ième}}$  mode  $a_m(t)$  est une fonction aléatoire qui ne varie pratiquement pas pendant la durée  $T = 2\pi/\omega$  d'un aller-retour dans la cavité.

Le fait que le motif de la structure périodique varie très lentement au cours de l'impulsion, de durée à mi-hauteur  $40 \text{ ns} \simeq 7 T$  ( $T$  étant la période des surintensités), signifie que l'on peut approximer le pulse par le pulse idéalisé défini par :

$$a_m(t) = a_m \cdot g(t) \quad (\text{III.36})$$

où  $a_m$  représente la valeur de  $a_m(t)$  dans la région du sommet du pulse et  $g(t)$  représente la variation temporelle normalisée du mode prépondérant. Pour ce pulse idéalisé les fonctions  $a_m(t)$  sont rigoureusement proportionnelles, et le motif de sa structure périodique ne dépend pas du temps. Ce motif s'identifie avec celui du pulse réel dans la région du sommet du pulse. En fait le motif d'un pulse réel varie dans la partie descendante de l'impulsion, mais les moments d'ordre élevés de l'intensité - quantités que nous allons mesurer - ne font pratiquement intervenir que le sommet du pulse, c'est pourquoi nous raisonnerons sur le pulse idéalisé associé à chaque pulse réel. L'intensité du pulse idéalisé s'écrit :

$$I(t) = G(t) \left| \sum_{m=1}^M a_m e^{im\omega t} \right|^2 \quad (\text{III.37})$$

où

$$G(t) = |g(t)|^2 \quad (\text{III.38})$$

La fonction  $G(t)$ , normalisée à un à son sommet, peut être déterminée à chaque tir au moyen d'un détecteur linéaire dont le temps de réponse est nettement inférieur à  $T$  (5,7 ns dans notre cas), le résidu de fluctuation devant être lissé dans une opération ultérieure.

Considérons la fonction périodique éternelle :

$$I_{\text{Max}}(t) = \frac{I(t)}{G(t)} = \left| \sum_{m=1}^M a_m e^{im t} \right|^2 \quad (\text{III.39})$$

Cette fonction aléatoire peut être considérée comme l'intensité d'un champ à amplitude périodique, ne dépendant que de  $M$  paramètres complexes  $a_m$ . On peut déterminer à chaque tir l'intensité moyenne :

$$\bar{I}_{\text{Max}} = \frac{1}{T} \int_{(T)} I_{\text{Max}}(t) dt = \sum_{m=1}^M |a_m|^2 \quad (\text{III.40})$$

de sorte que la quantité intéressante est la fonction surintensité :

$$i(t) = \frac{I_{\text{Max}}(t)}{\bar{I}_{\text{Max}}} \quad (\text{III.41})$$

Cette fonction ne peut être déterminée à chaque tir que si le temps de réponse du détecteur est nettement inférieur à  $T/M$ . Avec le système utilisé, cela conduit à la limitation  $M < 20$ . Cette condition est satisfaite dans le cas de notre laser, aussi sommes-nous dans un cas très particulier. Dans le cas général d'un laser déclenché on ne peut déterminer au mieux que  $G(t)$  et  $\bar{I}_{\text{Max}}$ , ou ce qui revient au même, l'intensité intégrée  $\bar{I}(t)$  :

$$\bar{I}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} I(t') dt' = \bar{I}_{\text{Max}} G(t) \quad (\text{III.42})$$

à chaque tir.

En ce qui concerne le spectre, l'étude précédente montre qu'on peut effectivement observer les composants discrets qui le constituent, au moyen d'un Fabry-Pérot de résolution suffisante. Autrement dit, la largeur spectrale d'un mode ( $\sim 10$  MHz) est très inférieure à la distance entre deux modes consécutifs ( $\sim 100$  MHz). De plus l'écart d'équidistance entre les fréquences des modes ( $\sim 1$  MHz), par exemple calculé en faisant intervenir la dispersion passive des éléments constituant le laser, est négligeable. Il est intéressant de signaler que dans le cas où la sélection du mode transverse fondamental n'est pas totale, l'aspect du spectre est inchangé, alors que la surintensité n'est plus périodique. Cela signifie alors que chaque composant spectral a une sous-structure indécélable par le Fabry-Pérot (résolution  $\sim 10$  MHz). Ceci est en accord avec la distance spectrale des fréquences de deux modes transverses consécutifs ( $\sim 1$  MHz).

Inversement, la structure temporelle observée décrit complètement le phénomène car aucune sous-structure n'est possible compte-tenu de la largeur totale du spectre. Ainsi les éléments utilisés pour l'étude du rayonnement de ce laser déclenché, à savoir un spectrographe de grande résolution, un Fabry-Pérot d'intervalle spectral libre adapté et un système de détection linéaire rapide constituent un ensemble indispensable pour l'étude en question. De plus cet ensemble est redondant, ce qui est évidemment satisfaisant pour le physicien.

Néanmoins la phase de l'amplitude complexe d'un mode  $a_m$ , ou plus exactement les différences de phase entre les  $a_m$  ne peuvent être déterminées par l'étude spectrométrique. On peut penser à décomposer l'intensité périodique  $I_{\text{Max}}(t)$  donnée par (III.39) en une série de Fourier, et tenir compte de la connaissance des modules  $|a_m|$  pour déduire les phases des  $a_m$ . Outre le fait que ce problème entraîne des difficultés mathématiques considérables - nous ne savons même pas s'il existe une solution unique - , son traitement nécessite un grand nombre d'opérations à partir des données  $I_{\text{Max}}(t)$  et  $\{|a_m|\}$ . C'est ici que, renonçant à une exploitation complète des données de l'expérience, nous nous tournons vers des méthodes statistiques. Le chapitre II était consacré au calcul de plusieurs types de moments d'ordre élevé de l'intensité d'un champ à amplitude périodique. Certains moments se révèlent très sensibles aux relations de phase entre les modes, donc nous permettrons d'accéder à une compréhension statistique du phénomène, et, en



particulier, ils nous permettront de comparer la surintensité du laser polarisé étudié avec celle que présenterait un flash de lumière naturelle polarisée de même spectre stochastique.

## Chapitre IV

### RESULTATS EXPERIMENTAUX

Nous avons effectué nos expériences au sein d'une équipe de chercheurs qui étudie depuis plusieurs années le phénomène d'ionisation multiphotonique d'atomes sous l'action d'un champ électromagnétique intense, obtenu en focalisant le faisceau d'un laser solide déclenché. En tant que spécialiste de l'optique il nous a été d'abord demandé de concevoir et de mettre au point un oscillateur à nombre de modes variable ainsi qu'un dispositif de contrôle spectrographique adapté (voir le chapitre précédent). Ce dispositif était destiné à étudier l'influence du nombre de modes sur la probabilité d'ionisation multiphotonique (voir l'introduction).

Il nous est apparu dès le départ que cette même expérience pouvait être envisagée sous un angle différent : utiliser l'ionisation multiphotonique pour mesurer un moment d'ordre élevé du champ. Nous avons réalisé que ce moment aurait la forme la plus simple possible si l'on pouvait considérer le dispositif d'ionisation multiphotonique comme un détecteur idéal d'ordre  $k$ , tel qu'il est défini au paragraphe I.2. Pour répondre à cette question il nous faut donc d'abord examiner l'état des connaissances en ce domaine et effectuer des expériences préliminaires.

Les résultats expérimentaux seront donc classés en deux catégories. La première a pour sujet principal le processus d'ionisation multiphotonique, tandis que la seconde porte sur les propriétés statistiques du champ.

#### IV.1. Résultats concernant l'ionisation multiphotonique.

Depuis les travaux de GOPPERT-MAYER en 1931 la possibilité théorique de transitions atomiques s'accompagnant d'absorption ou d'émission simultanée de plusieurs quanta a été mise en évidence. La relation de PLANCK-EINSTEIN relative à une transition monophotonique :

$$E_a - E_b = h\nu \quad (\text{IV.1})$$

peut donc se généraliser dans le cas d'une transition à  $k$  photons :

$$E_a - E_b = k h\nu \quad (\text{IV.2})$$

Toutefois la probabilité de transition à plusieurs photons décroît rapidement quand  $k$  augmente. Alors que la mise en évidence expérimentale de transitions à 2, 3 et 4 photons a été réalisée pour la première fois dans la gamme des ondes radio-électriques, il a fallu attendre l'apparition des lasers pour que de tels effets soient observés dans le domaine optique [26].

Dans l'approximation de la théorie des perturbations dépendantes du temps la probabilité par unité de temps d'absorption multiphotonique entre deux niveaux dont l'un au moins est très large devant la largeur spectrale du rayonnement incident s'écrit [27] :

$$\frac{dp}{dt} = \sigma I^k(t) \quad (\text{IV.3})$$

où  $I(t)$  est l'intensité instantanée du champ. Dans le cas de l'ionisation, où le niveau supérieur est le continuum, on se trouve évidemment dans ce cas. Cependant dans l'établissement de la formule précédente, il est supposé que toutes les transitions à  $k' < k$  photons sont hors résonance c'est-à-dire qu'elles correspondent à des probabilités négligeables. Nous verrons plus loin que ce n'est pas le cas, en général.

Supposons que la relation (IV.3) soit applicable. Dans un gaz d'atomes indépendants de densité volumique  $n_0$  l'espérance mathématique du nombre d'ions produit est (ici  $I(\vec{r}, t)$  est supposé certain) :

$$\langle N \rangle_a = n_0 \sigma \int I^k(\vec{r}, t) d\vec{r} dt \quad (\text{IV.4})$$

Si les variables de temps et d'espace se séparent (par exemple pour un champ laser monomode transverse), cette expression se ramène à :

$$\langle N \rangle_a = \alpha \int I^k(t) dt \quad (\text{IV.5})$$

Ici la moyenne  $\langle N \rangle_a$  fait intervenir l'indéterminisme atomique. Si le nombre d'atomes intéressés est grand on pourra remplacer cet indéterminisme atomique par un déterminisme macroscopique (loi des grands nombre) :

$$N = \alpha \int I^k(t) dt \quad (\text{IV.6})$$

c'est-à-dire que le gaz se comportera comme un détecteur idéal d'ordre  $k$  tel qu'il a été défini au paragraphe I.2.

#### IV.1.a. Conditions expérimentales.

Le claquage de l'air, qu'on observe au foyer d'une lentille de quelques centimètres de focale éclairée par un laser solide déclenché ne peut s'expliquer qu'en supposant que l'électron initial de l'avalanche est produit par ionisation multiphotonique. Depuis quelques années de nombreuses études ont été effectuées sur l'ionisation des gaz. Afin d'isoler le phénomène multiphotonique on montre qu'il est nécessaire de diminuer la pression du gaz ( $10^{-3}$  torr) de manière que le libre parcours moyen de l'électron (10 cm) soit très supérieur aux dimensions de la zone focale ( $10^{-2}$  cm).

L'équipe de Mainfray et Manus, du Service de Physique Atomique de Saclay, a ainsi étudié l'ionisation multiphotonique des gaz rares, en utilisant une chaîne laser à verre dopé au néodyme (l'énergie d'un photon valant 1,17 eV) [28]. Le dispositif expérimental utilisé est représenté sur la figure 4. Les ions produits au foyer de la lentille sont recueillis dans un collecteur blindé, après avoir été accélérés par un champ électrique transverse d'environ  $100 \text{ V cm}^{-1}$  établi entre les plaques  $P_1$  et  $P_2$ . La plaque  $P_2$  est mise à la masse et la plaque  $P_1$  est portée à un potentiel positif. Une des plus grandes difficultés expérimentales consiste à éliminer les ions émis à la surface des lentilles. En présence d'un champ de  $100 \text{ V cm}^{-1}$ , les ions produits en dehors de la zone focale tombent sur la plaque  $P_2$ .

IV.1.b. Procédure expérimentale.

Quelques résultats obtenus au moyen d'un laser déclenché par prisme tournant et sans sélection de modes (largeur spectrale de quelques Å) sont représentés sur la figure 5. En ordonnée les expérimentateurs portent le logarithme du nombre d'ions total  $N$  recueillis au cours d'un tir. En abscisse, ils portent le logarithme de l'éclairement moyen  $\Gamma$ . Cet éclairement moyen est défini comme étant le rapport entre l'énergie totale  $E$  du pulse (mesurée par un calorimètre étalonné) et le produit de la durée à mi-hauteur  $\tau$  de l'impulsion par la section minimale du faisceau  $S$  dans la zone focale

$$\Gamma = \frac{E}{\tau S} \quad (\text{W.cm}^{-2}) \quad (\text{IV.7})$$

L'énergie  $E$  est de l'ordre du Joule. La durée  $\tau$  est d'environ 30 ns. La section  $S$  au meilleur foyer dépend des propriétés du faisceau laser et de la lentille de focalisation. Pour une lentille corrigée ouverte à  $f/2$ , on observe que  $S \simeq 10^{-5} \text{ cm}^2$ . Ainsi l'éclairement moyen est de l'ordre de  $10^{12} \text{ W cm}^{-2}$ .

A partir des points expérimentaux (fig. 5) ces chercheurs déterminent l'ordre de non-linéarité apparent :

$$K_{\text{app}} = \frac{\partial \ln N}{\partial \ln \Gamma} \quad (\text{IV.8})$$

La rupture de pente observée dans la zone des champs forts s'explique par une saturation des atomes neutres présents dans le volume focal. Ce point est vérifié à partir de la connaissance de la densité  $n_0$  d'atomes et de la mesure du volume focal.

On compare la pente expérimentale  $K_{\text{app}}$  avec la pente calculée, définie par :

$$K_{\text{cal}} = \text{partie entière} \left( \frac{U}{h\nu} + 1 \right) \quad (\text{IV.9})$$

et correspondant à une ionisation multiphotonique directe d'un atome dont le potentiel d'ionisation est  $U$ . Dans la majorité des cas on observe que  $K_{\text{app}}$  est inférieur à  $K_{\text{cal}}$ .

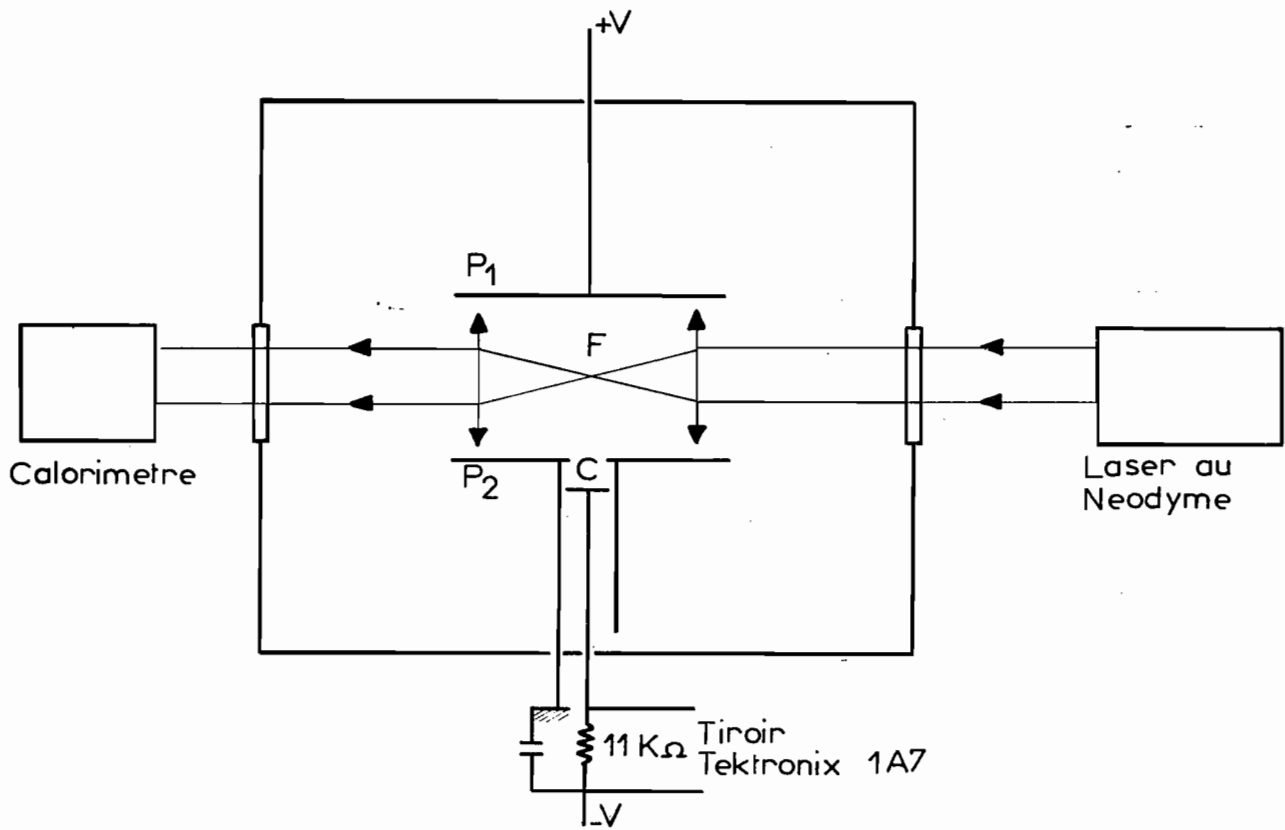


Fig. 4 Dispositif d'ionisation.

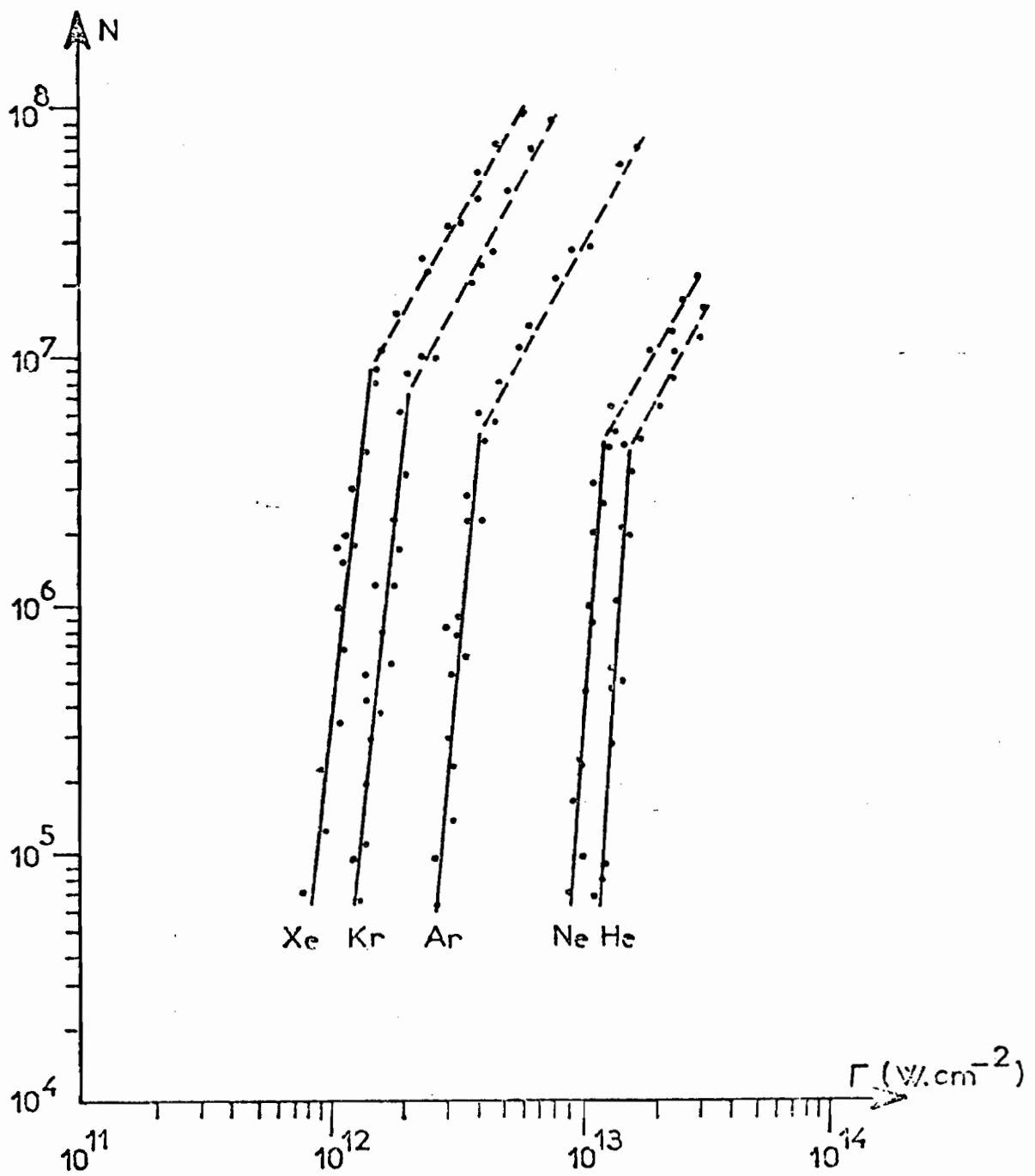


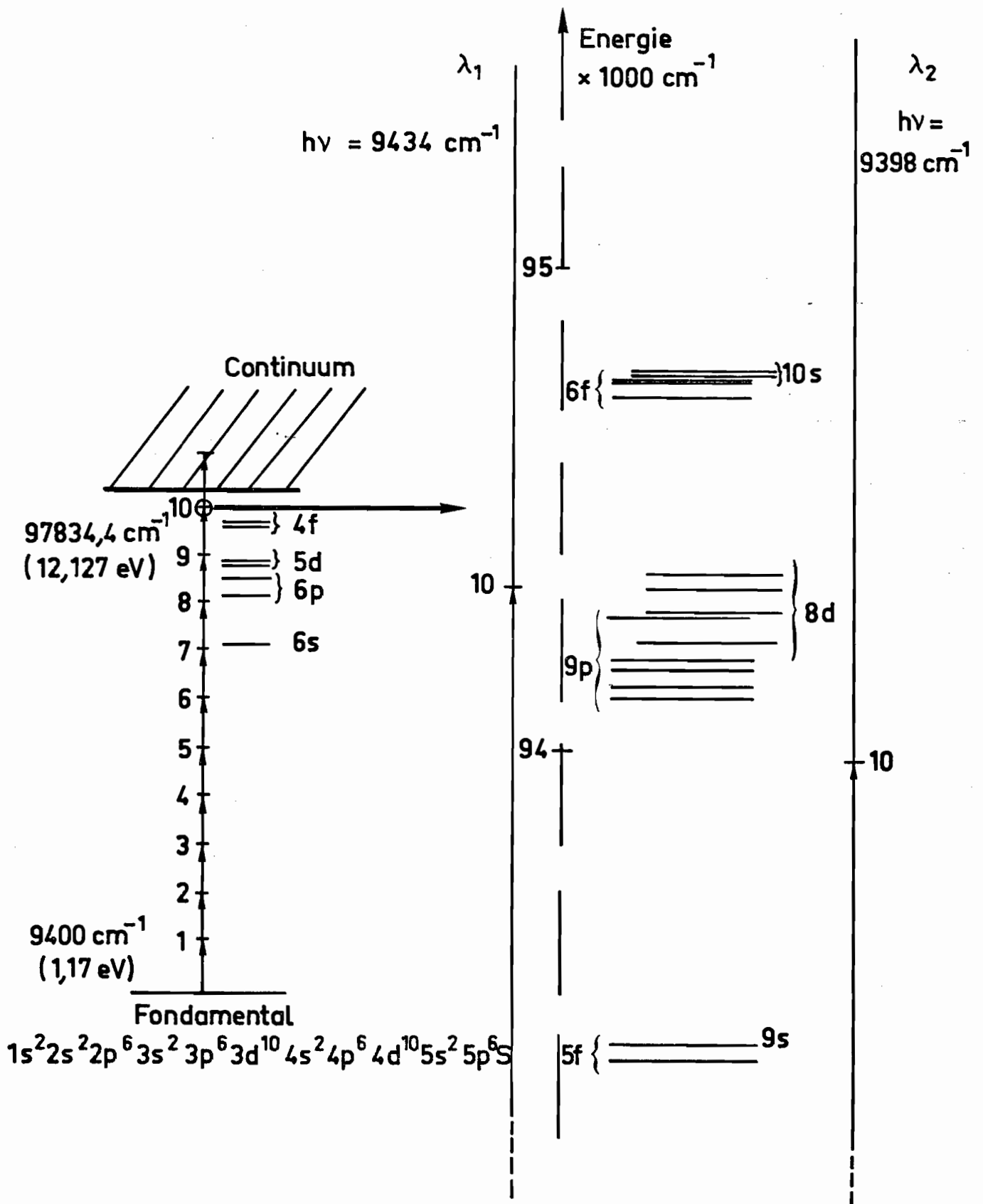
Fig. 5 Quelques résultats concernant l'ionisation multiphotonique de gaz rares (nombre d'ions en fonction de l'éclairement moyen).

IV.1.c. Le problème des résonances intermédiaires.

La disparité entre  $K_{app}$  et  $K_{th}$  peut être interprétée comme résultant d'une action des niveaux liés de l'atome. En effet la densité croissante de ces niveaux lorsqu'on se rapproche du continuum explique que la condition de résonance (IV.2) puisse être approchée pour une valeur de  $K$  inférieure à  $K_{cal}$ . Une telle résonance intermédiaire sera d'autant plus probable que la largeur spectrale du champ est élevée. Dans ce modèle l'ionisation se ferait en deux temps : d'abord l'atome serait excité sur l'état intermédiaire (avec éventuellement émission d'un photon de faible énergie si la résonance n'est pas parfaite), puis ionisé par absorption ultérieure d'un petit nombre de photons.

Afin de vérifier cette hypothèse nous avons participé à l'étude de l'ionisation d'un jet atomique de césium en utilisant un laser à spectre réduit et à longueur d'onde variable. L'influence d'un état intermédiaire sur le processus d'ionisation est mise en évidence (publication suivante). Il apparaît cependant un élément expérimental nouveau :  $K_{app}$  peut être supérieur à  $K_{cal}$ . L'explication de ce phénomène est probablement que les niveaux liés sont déplacés et (ou) élargis sous l'influence du champ.





IONISATION MULTIPHONIQUE DU XENON

Fig. 6

## Resonant Multiphoton Ionization of a Cesium Atomic Beam by a Tunable-Wavelength Q-Switched Neodymium-Glass Laser

B. Held, G. Mainfray, C. Manus, J. Morellec, and F. Sanchez

*Service de Physique Atomique, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, 91 Gif-sur-Yvette, France*

(Received 6 November 1972)

The narrow spectral bandwidth ( $0.4 \text{ \AA}$ ) of a Nd-glass laser was tuned over a range of  $40 \text{ \AA}$  to populate selectively the  $6f$  level of cesium atoms. The resulting variation of the multiphoton ionization probability was investigated as a function of the laser wavelength.

In a previous paper<sup>1</sup> we reported experimental results concerning multiphoton ionization of Cs atoms subjected to radiation from a Q-switched Nd-glass laser. The difference between the order of nonlinearity measured,  $k_{\text{exp}} = 3$ , and the theoretical value  $k_0 = 4$  was attributed to the contribution of a resonant multiphoton excitation of the  $6f$  atomic level, the difference between the  $6f$ -level energy ( $28\,329.7 \text{ cm}^{-1}$ ) and the energy of three quanta ( $28\,339 \text{ cm}^{-1}$ ) being smaller than the spectral band width ( $10 \text{ cm}^{-1}$ ) of the laser radiation previously used. Both the possibility of accurately tuning the laser wavelength and the better monochromaticity of the radiation now allow us to investigate the respective roles of the direct multiphoton ionization and the ionization via an intermediate excited state.

In the multiphoton-ionization experiment to be described, interaction takes place between the tunable-wavelength laser beam ( $10\,560 \text{ \AA} < \lambda_L < 10\,604 \text{ \AA}$ ) and a Cs atomic beam. When there is no correspondence between the energy of an integer number of photons and the level energies of the Cs spectrum, the atom may be ionized only by direct absorption of  $k_0$  photons, where  $k_0$  is the next integer greater than the ionization energy divided by the photon energy;  $k_0 = 4$  for the Cs atom. The ionization probability is proportional to the laser intensity raised to the power  $k_0$ , where  $k_0$  is the theoretical value of the order of nonlinearity of the interaction. On the other hand, if the laser wavelength is adjusted so that the energy of three photons exactly corresponds to the energy of the  $6f$  level, most of the ions are produced by a two-step ionization process: a three-photon excitation of the  $6f$  level with the probability  $W_{0-1}$ , followed by a one-photon ionization of the excited  $6f$  state with the probability  $W'_{1-2}$ . In such a process  $W_{1-2} \gg W_{0-1}$  and  $W_{\text{ioniz}} \approx W_{0-1}$ . The ionization probability is now proportional to the laser intensity raised to the power 3, and its value is much greater than in the case of direct multiphoton ionization which is a fourth-

order process. However, the lifetime of the excited state may decrease as a consequence of the high transition probability from this excited level to the continuum under the influence of the laser field. In these circumstances, an "instant" ionization of the excited state can take place, and a two-step ionization process considered as two successive processes is misleading.

The experimental apparatus is shown in Fig. 1. The Nd-glass laser consists of an oscillator Q switched by a rotating prism and one amplifier. It can deliver 6 J in 30 nsec. A birefringent filter is inserted in the oscillator cavity to select a spectral band in the fluorescence spectrum. Each element of the filter consists of a calcite plate, cut parallel to the optical axis, between two linearly polarizing plates.<sup>3-6</sup> Both polarizers are so oriented that their direction of polarization is  $45^\circ$  to the principal axes of the crystal. When the faces of the plate are normal to the laser axis, the transmission function of the filter is given by  $I = \cos^2(\pi e \Delta n / \lambda)$ , where  $\Delta n$  is the difference between the extraordinary and ordinary refractive indices,  $e$  is the thickness of the plate, and  $\lambda$  is the wavelength. Tilting the birefringent plate around the  $x_{\text{hor}}$  and  $y_{\text{vert}}$  axes ( $z$  being the laser axis) results simultaneously in a shift of the interference pattern and a reduction of the interval  $\Delta\lambda$  between two successive maxima. The laser line is narrowed by the multiple pass-

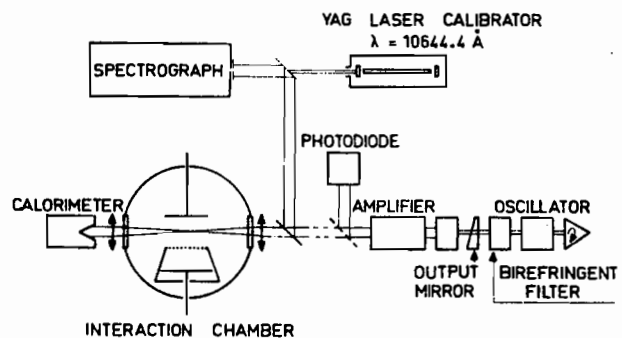


FIG. 1. Schematic diagram of the experimental apparatus.



FIG. 2. Bandwidth of the laser emission. (a) Without birefringent filter in the laser cavity; (b) with one calcite plate of thickness 1 mm; (c) with two calcite plates of thickness 1 and 4 mm.

es through the filter when inserted in the cavity. The first birefringent-plate thickness is chosen so that  $\Delta\lambda$  is large enough to obtain only one transmission maximum of the fluorescence spectrum. The second birefringent plate, several times thicker than the first one, reduces the spectral bandwidth of the laser radiation. Figure 2 represents the laser bandwidth with (a) no birefringent filter, (b) a one-element filter, and (c) a two-element filter. It is possible to obtain better monochromaticity by inserting a third element in the cavity, but temperature control and regulation have to be improved because of the large temperature dependence of the birefringence. The coherence effects of the radiation do not seem to depend on the laser tuning. The spectral linewidth of the laser radiation has been verified to be constant when the laser wavelength is tuned. The laser wavelength is measured by a diffraction-grating spectrograph and recorded on spectrographic plates simultaneously with an yttrium aluminum garnet (YAlG) laser beam whose reproducibility has been established and the wavelength calibrated with an iron arc:  $\lambda_{\text{YAlG}} = 10644.4 \pm 0.4 \text{ \AA}$ . Values of the Nd-glass laser wavelength are determined with a relative error of  $\pm 0.1 \text{ \AA}$ . The uncertainty of the absolute value of the laser wavelength is  $\pm 0.4 \text{ \AA}$ . The nonlinear interaction takes place between the laser beam focused by the same cylindrical lens as that employed in previous experiments<sup>1</sup> and a Cs atomic beam of rectangular cross section whose neutral density, measured by a surface ionization detector, is found to be  $8 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$ . Ions formed from the interaction are accelerated by a transverse electric field of  $750 \text{ V cm}^{-1}$ , separated in mass from other possible ionic species by a time-of-flight spectrometer, and then detected. The

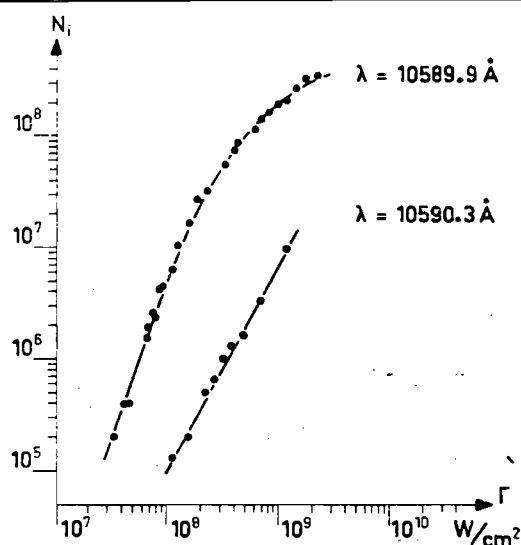


FIG. 3. Variation of the number  $N_i$  of Cs ions formed as a function of laser intensity  $\Gamma$  for two different laser wavelengths corresponding to a detuning from resonance of  $0.4 \text{ \AA}$ .  $k_{\text{expt}}$  values are derived from the linear portion of curves.  $k_{\text{expt}} = 2.9$  at  $\lambda = 10589.9 \text{ \AA}$ , and  $k_{\text{expt}} = 1.8$  at  $\lambda = 10590.3 \text{ \AA}$ .

energy is measured by a TRG calorimeter, the time distribution of the laser intensity by a photodiode, and the spatial distribution in the interaction volume by a photometric method described in a previous paper.<sup>7</sup>

The experiment consists of measuring the number of ions  $N_i$  formed as a function of the laser intensity. For each value of the laser wavelength, the experimental value of the order of nonlinearity of the interaction  $k_{\text{expt}}$  is determined by the slope of the linear portion of the curves  $N_i = f(\Gamma)$  in log-log coordinates, such as in Fig. 3. The multiphoton ionization probability is

$$W = N_i / n_0 V_k \tau_k,$$

where  $n_0$  is the neutral density of cesium atoms,  $V_k$  is the effective interaction volume for a  $k$ th-order process, and  $\tau_k$  is the effective interaction time for a  $k$ th-order process. For this form of  $W$ ,  $V_k$  and  $\tau_k$  are modified to take into account the variation of  $k_{\text{expt}}$  as a function of the laser wavelength. It should be pointed out that this procedure does not significantly change the law of variation of  $W$  as a function of the laser wavelength compared to the case of  $k = 4$  throughout. Experimental results are summarized in Fig. 4 by expressing the variation of  $k_{\text{expt}}$  as a function of the laser wavelength, and in Fig. 5 representing the variation of the multiphoton ionization

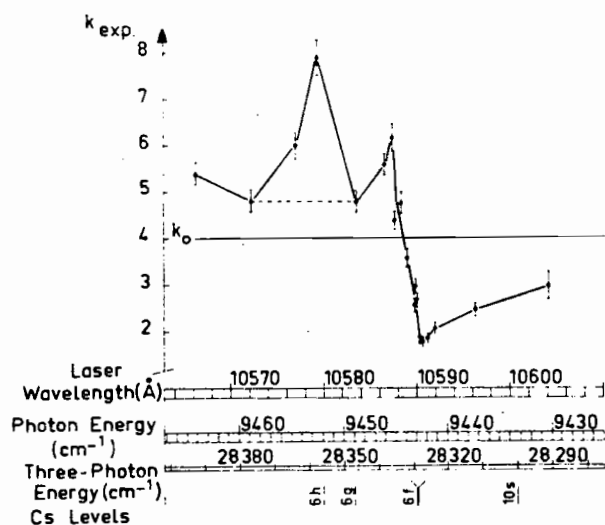


FIG. 4. Variation of the slope  $k$  as a function of the laser wavelength. The dashed line disregards the additional process which takes place at approximately 10579 Å.

probability  $W$  as a function of the laser wavelength for a given laser intensity  $\Gamma = 1.4 \times 10^8$  W/cm<sup>2</sup>. These two curves express the same resonant phenomenon; Fig. 4 displays the dispersion-like curve of the resonance, and Fig. 5 gives the absorption curve of the resonance. We find classical resonance curves, except for an additional process appearing at approximately 10579 Å, the origin of which is not well known at the present time. However, it should be pointed out that this process takes place close to the  $6h$  level. Considering these curves, one can make several observations. First, the curve  $W = f(\lambda)$  is marked by a strong asymmetry. The ionization probability slowly increases when the laser wavelength is tuned toward the wavelength of resonance ( $\lambda_R$ ) from the shorter-wavelength side, and sharply decreases for a small detuning of the laser wavelength toward longer wavelengths when  $\lambda_L = \lambda_R$ . The sharp variation of the ionization probability is illustrated by the two curves of Fig. 3, where the number of ions  $N_i$  is expressed as a function of the laser intensity for two values of  $\lambda_L$  separated by only 0.4 Å. It appears that an increase of wavelength of 0.4 Å induces a decrease of  $N_i$  of 1 to 2 orders of magnitude for a constant laser intensity. If we take into account the laser line-width, which is 0.4 Å, such a decrease in the number of ions looks like a discontinuity.

The second observation concerns the good agreement between the energy of three photons of the laser corresponding to the maximum ion-

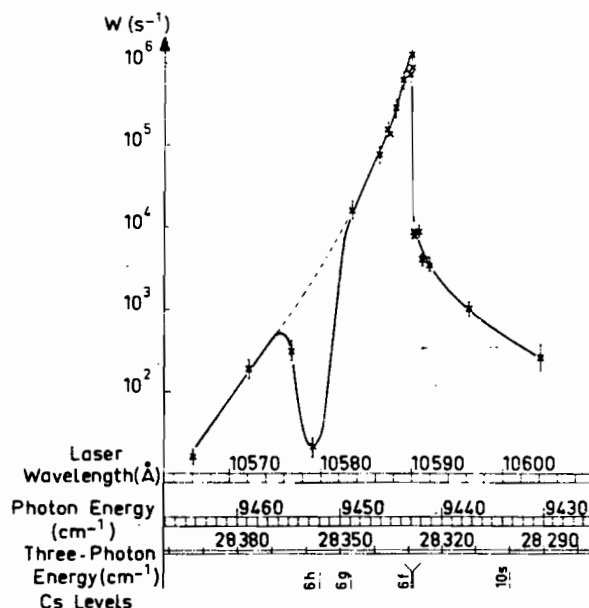


FIG. 5. Variation of the multiphoton ionization probability  $W$  as a function of the laser wavelength, for a given laser intensity  $\Gamma = 1.4 \times 10^8$  W/cm<sup>2</sup>. The abscissa axis is also displays the photon energy, the corresponding three-photon energy, and the positions of the atomic levels. The dashed line disregards the additional process which takes place at approximately 10579 Å.

ization probability, and the energy of the  $6f$  resonant level of the Cs atomic spectrum ( $\lambda_{6f} = 10589$  Å,  $\lambda_{\max W} = 10589.9 \pm 0.4$  Å). It may be assumed from this statement that, at this value  $\lambda_k$ , the Stark shift of the  $6f$  resonant level under the influence of the laser electric field is smaller than 0.4 Å. A similar observation has been reported for a resonant twelve-photon excitation of the  $11p_{3/2}$  level of the neon atom under the influence of cooled ruby-laser radiation.<sup>8</sup> Such a result contrasts with other experiments reporting on multiphoton ionization through resonance where resonant levels were assumed to be shifted over tenths of angstroms.<sup>9,10</sup> If the Stark shift of the  $6f$  level is unimportant at the exact resonant wavelength, it may be significant outside the resonance, and it suggests an interpretation of the observed asymmetry of the data in Fig. 5. On the short-wavelength side of the resonance, the sign of the Stark shift may improve the near resonance. Beyond the resonant wavelength, on the long-wavelength side, the  $6f$  level may be repelled drastically by the Stark level shift, cutting sharply into the resonance enhancement of the multiphoton ionization probability.

The third point is relative to the variation of

$k_{\text{expt}}$  as a function of the laser wavelength, illustrated in Fig. 4. Large discrepancies ( $\Delta k$ ) are observed between the value  $k_0 = 4$  and  $k_{\text{expt}}$  ( $k_{\text{expt max}} = 8$ ,  $k_{\text{expt min}} = 1.8$ ). The maximum value  $k = 8$  is correlated to the significant decrease of the probability observed at  $\lambda = 10579 \text{ \AA}$  in Fig. 5. In the vicinity of a resonance, the observed slope  $k$  no longer corresponds to the nonlinear order of interaction between the laser radiation and the atoms. The dip observed near  $10579 \text{ \AA}$  could be interpreted as an interference between the nearly resonant intermediate state and the nonresonant background. Such dips arise from cancelation effects of the contributions from the energy levels above and below the photon energy.<sup>11</sup> However, recent theoretical calculations carried out by Gontier and Trahin<sup>12</sup> concerning the resonant multiphoton ionization of hydrogen atoms lead to the conclusion that even a small shift of the level can explain large positive and negative values of  $\Delta k$ . This process can also induce a second resonance or antiresonance far from the first one. This process may be correlated to the decrease of multiphoton ionization probability  $W$  observed at  $10579 \text{ \AA}$ . It should be pointed out that this decrease of probability is clearer for a small number of ions formed. Inhomogeneities of the laser intensity in the interaction volume may be responsible for the total ionization of the atoms in some parts of the interaction volume although the total number  $N_i$  of ions formed is less than the saturation limit observed in the upper part of the curves  $N_i = f(I)$  in Fig. 3. A possible small shift of the resonant  $6f$  level may take place selectively in the regions of the interaction volume where the laser intensity is higher. In the near future, another set of experiments will be carried out without focusing of the laser beam. In these conditions of large interaction volume, small ion and excited-atom densities, and weak laser in-

tensity, better sharpness of resonance is expected, allowing an easier and more accurate interpretation.

The experimental study of multiphoton ionization of Cs atoms through resonance of the  $6f$  atomic level by interaction between a tunable-wavelength Nd-glass laser radiation of narrow linewidth ( $0.4 \text{ \AA}$ ) and Cs atomic beam has shown that the resonant level does not undergo a visible shift at the exact resonant wavelength under the influence of the laser electric field. However, outside the resonance, a Stark shift may take place, and this shift would explain the strong asymmetry in the law of variation of the multiphoton ionization probability as a function of the laser wavelength, in the resonance region. More experiments are needed to understand the meaning of the decrease of the multiphoton ionization probability  $W$  at approximately  $10579 \text{ \AA}$  and the correlated increase of the slope  $k$  reaching the value  $k = 8$ .

<sup>1</sup>B. Held, G. Mainfray, C. Manus, and J. Morellec, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 130 (1972).

<sup>2</sup>G. A. Delone and N. B. Delone, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **10**, 413 (1969) [*JETP Lett.* **10**, 265 (1969)].

<sup>3</sup>B. Lyot, *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **197**, 1593 (1933).

<sup>4</sup>B. H. Billings, *J. Opt. Soc. Amer.* **37**, 138 (1947).

<sup>5</sup>J. W. Evans, *J. Opt. Soc. Amer.* **39**, 229 (1949).

<sup>6</sup>H. Walther and J. L. Hall, *Appl. Phys. Lett.* **17**, 239 (1970).

<sup>7</sup>P. Agostini, G. Barjot, G. Mainfray, C. Manus, and J. Thebault, *IEEE J. Quantum Electron.* **6**, 782 (1970).

<sup>8</sup>G. Baravian, R. Benattar, J. Bretagne, J. L. Godart, and G. Sultan, *Appl. Phys. Lett.* **16**, 162 (1970).

<sup>9</sup>R. G. Evans and P. C. Thonemann, *Phys. Lett.* **39A**, 133 (1972).

<sup>10</sup>J. S. Bakos, *Phys. Lett.* **41A**, 163 (1972).

<sup>11</sup>J. L. Hall, *IEEE J. Quantum Electron.* **2**, 361 (1966).

<sup>12</sup>Y. Gontier and M. Trahin, *Phys. Rev. A* (to be published).

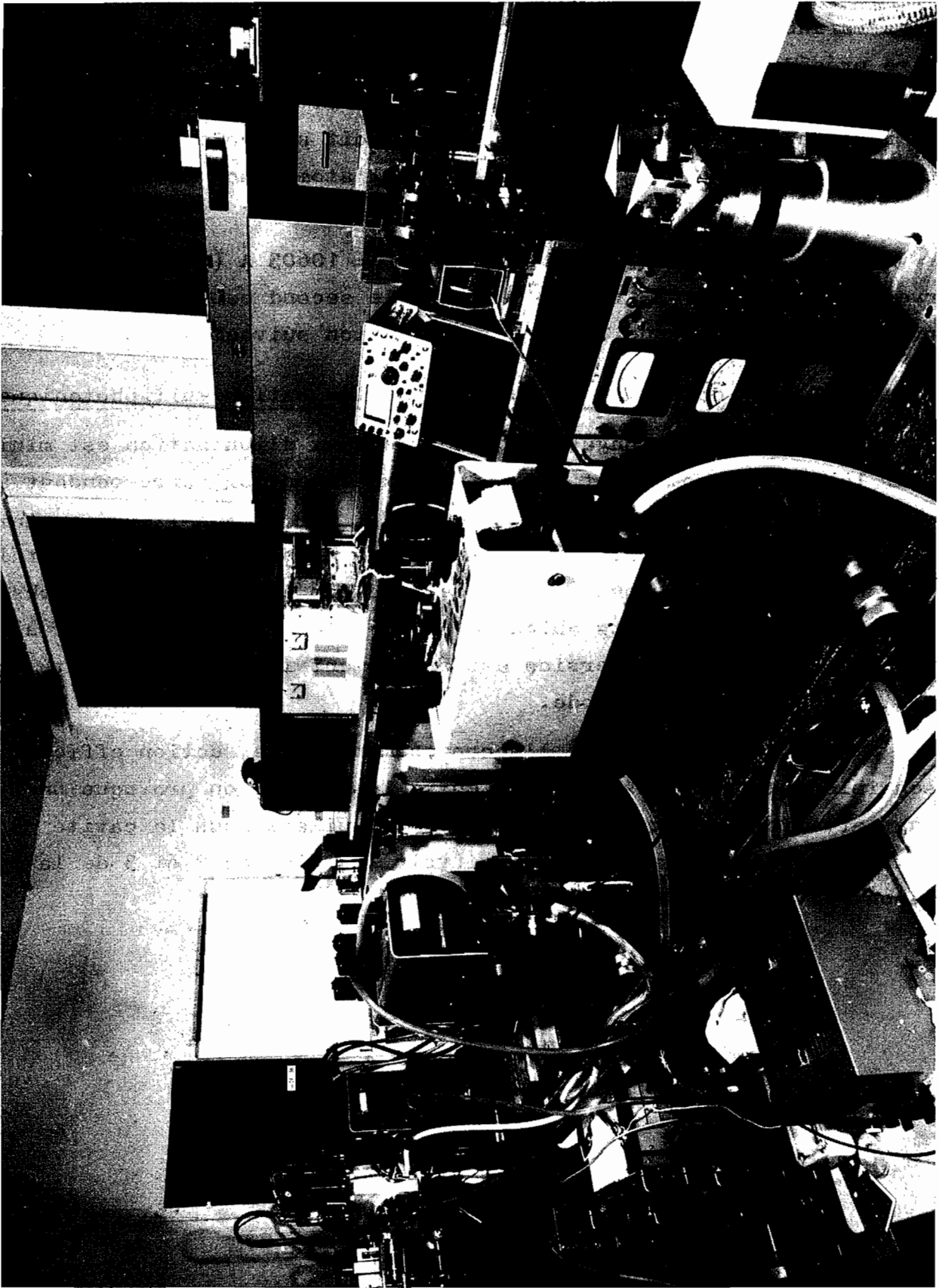


Photo n° 3. Chaîne d'amplificateurs. Oscillographes. Fabry-Pérot. Spectrographe.

Dans un deuxième temps nous utilisons l'oscillateur à nombre de modes variable (mais à très faible largeur spectrale) décrit dans le chapitre précédent pour ioniser l'atome de xénon ( $K_{cal} = 11$ ), pour deux valeurs de la longueur d'onde moyenne. L'une est choisie de telle sorte qu'une résonance sur un état intermédiaire soit possible, tandis que l'autre est telle que les états excités de l'atome (non perturbé) ne puissent être résonnants (voir figure 6).

Pour la première longueur d'onde  $\lambda = 10603 \text{ \AA}$  (dans l'air) on observe une pente  $22 \pm 3$ , tandis que dans le second cas  $\lambda = 10643 \text{ \AA}$  on observe la pente théorique 11 (voir publication suivante).

#### IV.1.d. Influence du nombre de modes sur l'ionisation multiphotonique.

Pour ces deux longueurs d'onde le taux d'ionisation est minimal pour le laser monomode et les points expérimentaux correspondant à ce cas sont remarquablement alignés (ce fait indique que l'indéterminisme atomique et les fluctuations de densité  $n_0$  ne sont pas expérimentalement perceptibles). Par contre, lorsque le champ est multimode on observe une dispersion des points autour d'une droite moyenne parallèle à la droite monomode. Cette dispersion est évidemment liée aux propriétés statistiques du champ multimode.

Afin de vérifier que l'accroissement de la section efficace est sensible aux relations de phase entre les modes, on provoque un couplage artificiel entre ces modes en introduisant dans la cavité de l'oscillateur un absorbant saturable (voir les figures 2 et 3 de la publication suivante).

# PHYSICAL REVIEW LETTERS

VOLUME 32

11 FEBRUARY 1974

NUMBER 6

## Experimental Demonstration of Laser Temporal Coherence Effects on Multiphoton Ionization Processes

C. Lecompte, G. Mainfray, C. Manus, and F. Sanchez

*Service de Physique Atomique, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, 91190 Gif-sur-Yvette, France*

(Received 29 October 1973)

A single-transverse-mode Q-switched Nd-glass laser, which can operate over a variable number of longitudinal modes, has been used to investigate the influence of the temporal nature of the laser pulse on the multiphoton ionization probability of xenon atoms. For a seven-mode laser pulse, the number of ions formed is increased by several orders of magnitude over that produced by a single-longitudinal-mode laser pulse.

Multiphoton ionization processes have been the subject of a considerable amount of recent theoretical and experimental work.<sup>1-7</sup> A significant disagreement has been observed between experimental and calculated multiphoton ionization probabilities. Thus, the experimental value of the six-photon ionization probability of atomic hydrogen has been found to be greater by 3 orders of magnitude than the corresponding probability calculated by several authors. This apparent discrepancy may be explained in terms of coherence of the laser radiation. It should be pointed out that theoretical calculations of the probability  $W$  assume the laser radiation to be a single-mode ideal laser source. However, the laser radiation used in previous experiments contains numerous oscillating modes. The instantaneous laser intensity seen by atoms may be much greater than the average laser intensity  $\bar{I}$  determined in these experiments. The multiphoton ionization probability is

$$W = \alpha g^{(K_0)} \bar{I}^{K_0}, \quad (1)$$

where  $\alpha$  is a factor depending on the atom considered and the polarization of the laser light.  $K_0$  is the next integer greater than the ionization energy of the atom divided by the photon energy.

Thus  $K_0 = 11$  for ionization of xenon atoms by a Nd-glass laser pulse.  $g^{(K_0)}$  is the  $K_0$ th-order normalized correlation function of the laser intensity.<sup>8</sup> This expression (1) is strictly valid for a single-transverse-mode laser pulse only, and when the atom is not ionized through any quasi-resonant intermediate excited states.

The purpose of the present paper is to describe an experiment in which the multiphoton ionization probability has been measured by using a single-transverse-mode Q-switched Nd-glass laser which can be operated with a variable number of adjacent longitudinal modes (from one to ten), thus keeping a narrow spectral linewidth. This laser has been described in detail elsewhere.<sup>9</sup> The laser is Q switched by a Pockels cell. This laser radiation is linearly polarized and can be centered at either 10 603 or 10 643 Å. The number of longitudinal modes is varied from ten to one by using resonant reflectors in the temperature-controlled cavity, and a two-step Q switching. The laser beam emerging from the master oscillator is expanded by a telescope with four-fold magnification for entering a five-stage amplifier. The experimental method is the same as that employed in previous work.<sup>6,10</sup>

To control the longitudinal-mode structure of



the laser radiation, the portion of the laser beam reflected from the window entrance of the interaction chamber passes through two beam splitters, and is then incident on the following:

(1) A Fabry-Perot interferometer which gives information on the longitudinal-mode structure. One to ten adjacent modes can be observed in its free spectral range  $\Delta\lambda = 7.5 \times 10^{-2} \text{ \AA}$ .

(2) A photodiode and an oscilloscope whose combined rise time is 350 psec. Laser intensity fluctuations can thus be recorded from the temporal distribution function  $G(t)$  of the laser intensity.

(3) A photodiode and an oscilloscope whose combined rise time is several nanoseconds. This detection setup is used to determine the duration of the laser pulse from the integrated function

$G(t)$ , and then to determine the average laser intensity  $\bar{I}$ .

(4) A diffraction grating spectrograph to record the laser wavelength.

The experiment consists of a measurement of the number of ions formed,  $N_i$ , as a function of the laser intensity  $\bar{I}$  for different values of the number of longitudinal modes of the laser radiation. Experimental results are summarized in Fig. 1, which represents, on a log-log plot, the variation of the number of ions formed,  $N_i$ , as a function of the laser intensity  $\bar{I}$ , for a laser wavelength  $\lambda = 10\,603 \text{ \AA}$ , when the laser operates successively on one mode, two modes of visibility  $v = 0.4$ , and seven modes. It should be pointed out that the observed slope  $K_{\text{expt}} = \partial \ln N_i / \partial \ln \bar{I} = 22 \pm 3$  is found to be higher than  $K_0 = 11$ . A previous experiment<sup>10</sup> has shown that  $K_{\text{expt}}$  can have values smaller or higher than  $K_0$ , depending on the laser wavelength, when there is a quasi-resonant multiphoton excitation of an atomic level. Here, quasiresonant ten-photon excitations of four  $8d$  states of xenon atoms are possible in a wavelength range of  $10 \text{ \AA}$  near the laser wavelength  $\lambda = 10\,603 \text{ \AA}$  used in this experiment. Moreover, the linewidth of the laser radiation is like a damping term in resonant multiphoton processes. The narrow linewidth corresponding to seven adjacent longitudinal modes of this laser is only  $5 \times 10^{-2} \text{ \AA}$ , and allows  $K_{\text{expt}}$  to have values far from  $K_0$ . An important point is that  $K_{\text{expt}}$  remains constant when the number of longitudinal modes is changed from one to seven. Figure 2 shows experimental results obtained with the laser wavelength  $\lambda = 10\,643 \text{ \AA}$ . This figure shows the variation of the number of ions formed,  $N_i$ , as a function of the laser intensity  $\bar{I}$  when the laser operates successively on one mode, two modes of visibility  $v = 0.6$ , seven modes, and seven modes which are locked. The observed slope is now  $K_{\text{expt}} = 11 \pm 1$  (no resonant effect appears in that case,  $K_{\text{expt}} = K_0$ ).

In both figures, a very significant enhancement of the number of ions  $N_i$  is observed when the number of modes is increased. This result has been predicted by many theoreticians.<sup>8,11,12</sup> It can be explained classically in terms of temporal peaks of the laser intensity. Figure 3 shows the temporal distribution function of the laser intensity when the laser operates in a single mode, two modes, seven modes, and seven modes which are locked. For ideal single-mode operation, no fluctuation occurs. For a two-mode laser pulse, the modulation of the temporal dis-

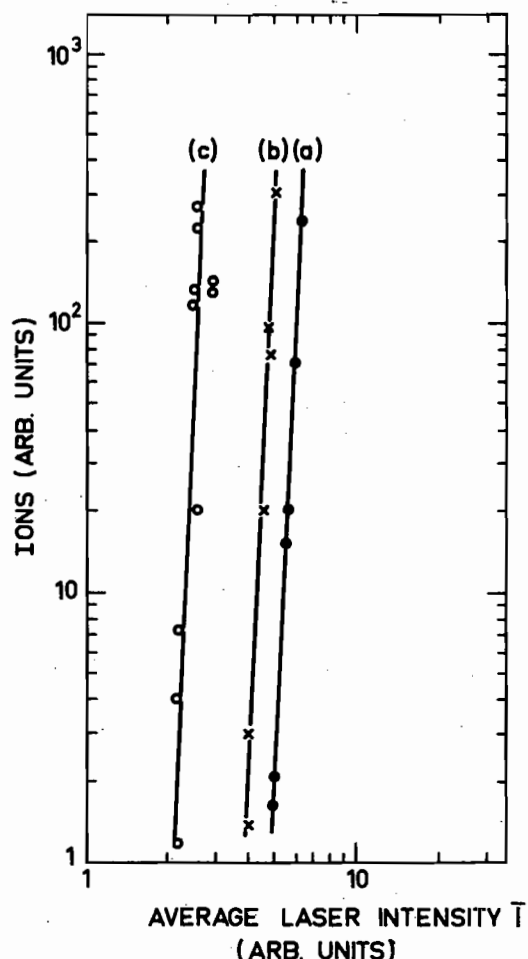


FIG. 1. Log-log plot of the variation of the number of ions  $N_i$  as a function of the average laser intensity  $\bar{I}$  (arbitrary units), when the laser operates in (a) one mode, (b) two modes with visibility  $v = 0.4$ , and (c) seven modes. The laser wavelength is  $\lambda = 10\,603 \text{ \AA}$ .

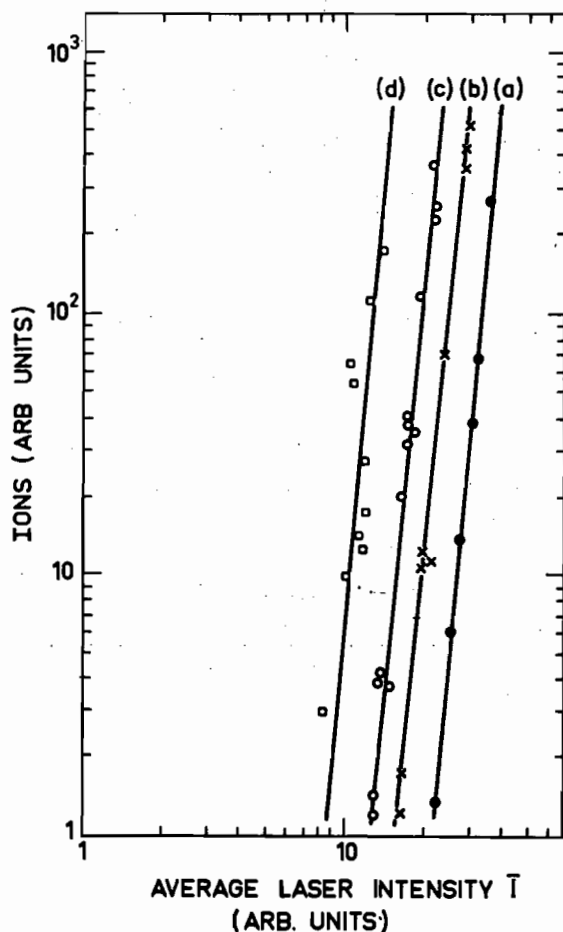


FIG. 2. Log-log plot of the variation of the number of ions  $N_i$  as a function of the average laser intensity  $\bar{I}$  (arbitrary units), when the laser operates in (a) one mode, (b) two modes with visibility  $\nu=0.6$ , (c) seven modes, and (d) seven modes when these modes are locked. The laser wavelength is  $\lambda=10\ 643\ \text{\AA}$ .

tribution function of intensity is sinusoidal, with a period (5.7 nsec) corresponding to a round-trip time in the oscillator cavity. The modulation depth, at the highest part of the pulse, varies from shot to shot. When the laser oscillates in three, or more than three, modes, the temporal distribution function of laser intensity exhibits a quasiperiodical structure, but its shape greatly varies from shot to shot.<sup>13</sup>

Considering the experimental curves in Figs. 1 and 2, several observations can be made. First, experimental points induced by a single-mode laser pulse are perfectly lined up. The number of ions induced by a single-mode laser pulse is found to be

$$N_i = \alpha(\lambda)I^{K(\lambda)} \quad (2)$$

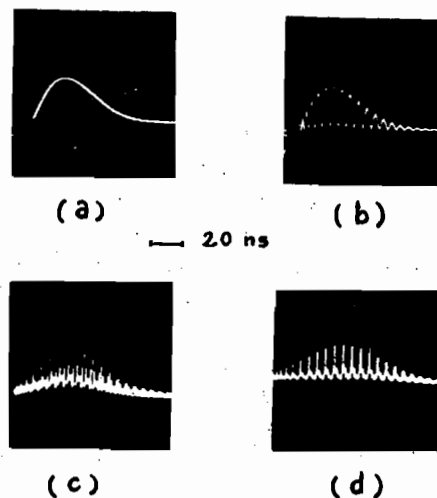


FIG. 3. Temporal distribution function of the laser intensity when the laser operates in (a) one mode, (b) two modes with visibility  $\nu=0.8$ , (c) seven modes, and (d) seven modes when these modes are locked (sub-pulses are due to electrical ringing in detector circuit).

in the laser intensity range used in the present experiment. The second observation concerns experimental results obtained with a multimode laser pulse. Experimental points are scattered. This scattering is due to the variation in both phases and relative intensities of modes from one laser shot to another one. The number of ions induced by a multimode laser pulse is found to be

$$N_i = N_1 g^{(k)} \quad (3)$$

for the same average intensity  $\bar{I}$ . This factor  $g^{(k)}$  seems to depend only on the statistical properties of the laser light, in the laser intensity range used in this experiment, and for a given laser wavelength  $\lambda$  which determines the value of  $k$ . Table I exhibits values of  $g^{(k)}$  deduced from experimental results at the laser wavelengths  $\lambda=10\ 603$  and  $10\ 643\ \text{\AA}$ , for two different laser

TABLE I. Enhancement factor  $g^{(k)}$  of the number of ions formed, normalized to unity for a single-mode laser pulse. This factor  $g^{(k)}$  is given for two different laser light patterns: a two-mode pulse, and a seven-mode pulse, at two different laser wavelengths.

No. of modes	$\lambda=10\ 603\ \text{\AA}$ $K=22 \pm 3$	$\lambda=10\ 643\ \text{\AA}$ $K=11 \pm 1$
2	$10^{2.1 \pm 0.3}$ ( $\nu=0.4$ )	$10^{1.6 \pm 0.2}$ ( $\nu=0.6$ )
7	$10^{8.2 \pm 1.7}$	$10^{2.6 \pm 0.3}$

light patterns: a two-mode pulse, and a seven-mode pulse.  $g^{(k)}$  values are given with a large error which is due to an uncertainty in the value of  $k$ , and an additional uncertainty in the position of the average straight line passing through scattered experimental points as shown in Figs. 1(c) and 2(c). When the number of modes becomes increasingly large, the value of the  $g^{(k)}$  has been calculated to be  $K!$ ,<sup>8,12</sup> i.e.,  $10^{7.5}$  for  $K = 11$ , and  $10^{20.8}$  for  $K = 22$ .

The third point is relative to the influence of mode locking of seven modes of the laser pulse. This experiment was carried out by placing in the oscillator cavity a solvent cell containing a dye to phase lock the seven modes [Fig. 2(d)], and without the dye [Fig. 2(c)]. The number of ions is found to be enhanced by a factor of  $10^2$  when the seven modes have the same phase in comparison with the same average laser intensity when the seven modes have random phase from 0 to  $2\pi$ . Thus the locking of modes by the dye very significantly changes the statistical properties of the laser pulse, and increases the temporal peaks of the laser intensity.

In conclusion, it seems that the multiphoton ionization probability for xenon atoms with a Nd-glass laser pulse is  $g^{(k)}$  times as large as that obtained when the excitation source is an ideal

single-mode laser pulse. Thus, in comparing calculated and experimental multiphoton ionization probabilities, a  $g^{(k)}$  correction factor has to be applied when experimental results are obtained with a multimode laser pulse.

<sup>1</sup>P. Agostini, G. Barjot, G. Mainfray, C. Manus, and J. Thebault, IEEE J. Quantum Electron. **6**, 782 (1970).

<sup>2</sup>G. A. Delone, N. B. Delonc, and G. K. Piskova, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **62**, 1272 (1972) [Sov. Phys. JETP **35**, 672 (1972)].

<sup>3</sup>H. B. Bebb and A. Gold, Phys. Rev. **143**, 1 (1966).

<sup>4</sup>Y. Gontier and M. Trahin, Phys. Rev. A **7**, 1899 (1973).

<sup>5</sup>C. S. Chang and P. Stehle, Phys. Rev. Lett. **30**, 1283 (1973).

<sup>6</sup>M. LuVan, G. Mainfray, C. Manus, and I. Tugov, Phys. Rev. A **7**, 91 (1973).

<sup>7</sup>D. T. Alimov, T. U. Arslanbekov, M. S. Belkin, N. B. Delone, and O. B. Monastyrski, P. N. Lebedev Physics Institute, Moscow, Report No. 2, 1973 (to be published).

<sup>8</sup>J. L. DeBethune, Nuovo Cimento **12E**, 101 (1972).

<sup>9</sup>F. Sanchez and C. Lecompte, to be published.

<sup>10</sup>B. Held, G. Mainfray, C. Manus, J. Morellec, and F. Sanchez, Phys. Rev. Lett. **30**, 423 (1973).

<sup>11</sup>G. S. Agarwal, Phys. Rev. A **1**, 1445 (1970).

<sup>12</sup>S. Carusotto and C. Strati, Nuovo Cimento **15B**, 159 (1973).

<sup>13</sup>P. Lambropoulos, Phys. Lett. **40A**, 199 (1972).

Dans une dernière étape nous modifions l'oscillateur (voir l'article suivant) de manière à élargir progressivement le spectre autour de la longueur d'onde non-résonnante ( $\lambda = 10643 \overset{\circ}{\text{Å}}$ ), en modifiant au minimum la géométrie de l'oscillateur. Le spectre du champ est alors formé d'un nombre variable de raies, chaque raie comportant une dizaine de modes. Nous notons une augmentation substantielle du facteur d'accroissement du taux d'ionisation par rapport au champ monomode. En particulier, quand le spectre comporte 10 raies (soit environ 100 modes) ce facteur est  $10^{6,8 \pm 0,4}$ , c'est-à-dire voisin de  $11! = 10^{7,6}$ .

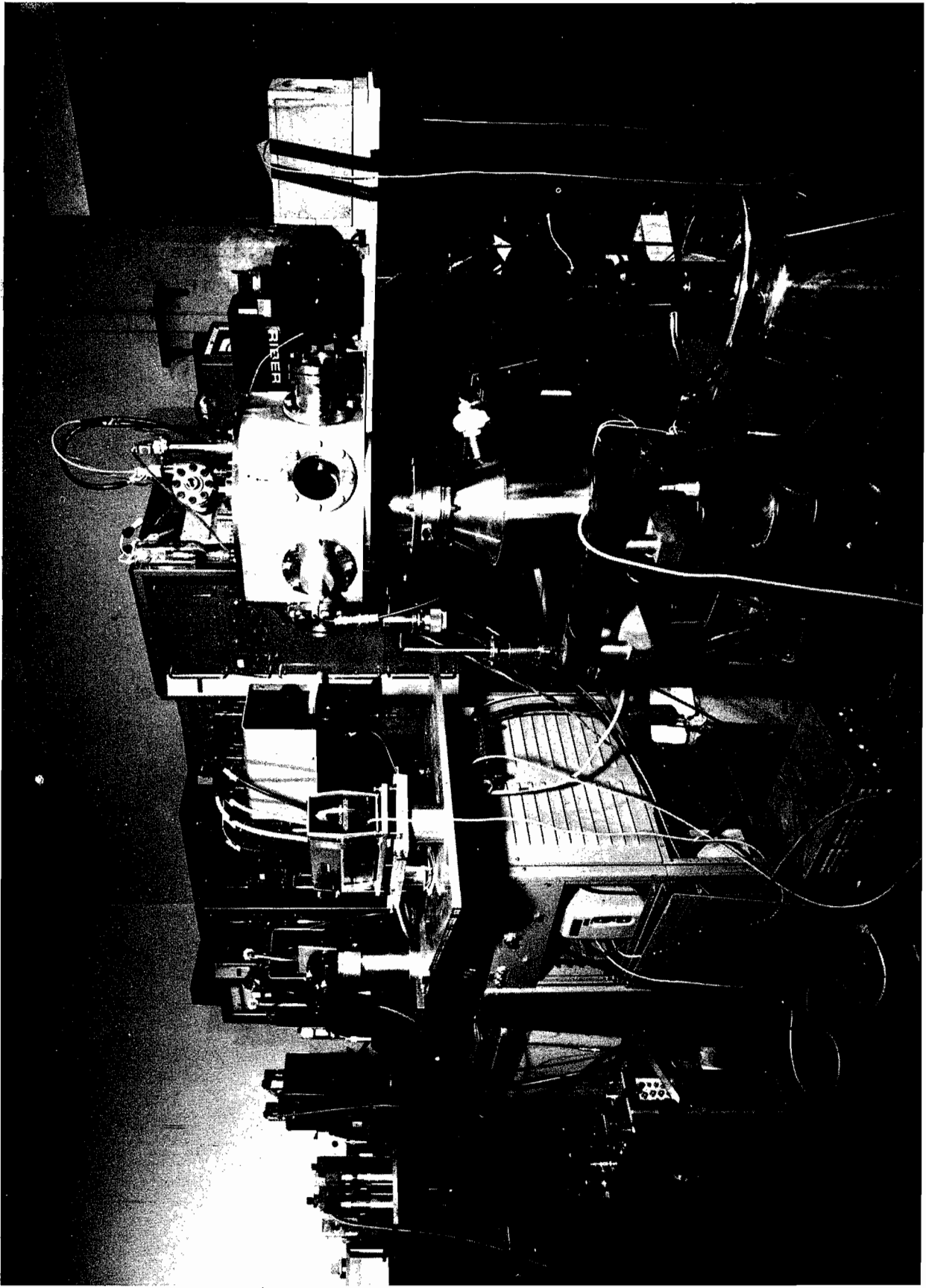


Photo n° 4. Chaîne d'amplificateurs. Baies d'électronique. Chambre d'ionisation. Calorimètre.

## Laser temporal-coherence effects on multiphoton ionization processes

C. Lecompte, G. Mainfray, C. Manus, and F. Sanchez

Centre d'Études Nucléaires de Saclay, Service de Physique Atomique, BP No 2-91190-Gif-sur-Yvette, France

(Received 30 July 1974)

A single-transverse-mode  $Q$ -switched Nd-glass laser, which can operate over a number of longitudinal modes variable from 1 to 100, has been used to investigate laser temporal-coherence effects on the 11-photon ionization of xenon atoms. When the laser pulse has an over-all bandwidth of  $4 \text{ cm}^{-1}$ , the number of ions formed is enhanced by  $10^{6.9 \pm 0.3}$  over that produced by a monomode laser pulse with the same average laser intensity. The observed enhancement in the number of ions due to the change in temporal coherence of the pulse is in good agreement with recent theoretical prediction.

### I. INTRODUCTION

Multiphoton ionization processes have been the subject of a considerable amount of recent theoretical and experimental works.<sup>1-5</sup> A significant disagreement has been observed between experimental and calculated multiphoton ionization probabilities of atoms in the past few years by several authors. Thus the experimental value of the six-photon ionization probability of atomic hydrogen has been found to be greater by three orders of magnitude than the corresponding probability calculated by different authors.<sup>1</sup> This apparent discrepancy can be explained in terms of coherence of the laser radiation.

A previous experiment has demonstrated the influence of laser temporal-coherence effects on multiphoton ionization of xenon atoms when the number of adjacent longitudinal modes is varied from one to seven.<sup>6</sup> The purpose of the present paper is to extend this investigation by increasing the number of longitudinal modes of the laser pulse up to about 100, corresponding to an over-all bandwidth of a few inverse centimeters.<sup>7</sup> This corresponds to the experimental conditions with which most multiphoton ionization experiments have been performed in the past few years with Nd-glass lasers.

It should be pointed out that the theoretical calculations of the multiphoton ionization probability of atoms assume the laser radiation to be a single-mode laser source. However, when the laser radiation contains numerous longitudinal modes (off-axial modes are not considered here), the interaction between these modes can modulate the temporal laser pulse. The laser intensity becomes more and more irregularly fluctuating as the number of longitudinal modes increases. Multiphoton ionization processes are very sensitive to the transient fields of large amplitude of the laser intensity, since the  $K$ -photon ionization probability is proportional to the  $K$  power of the

instantaneous laser intensity. It is the purpose of this paper to investigate the influence of the fluctuations of the laser intensity on multiphoton ionization processes by varying the mode-structure of the laser pulse.

### II. DEFINITIONS AND OBJECTIVE OF EXPERIMENT

The instantaneous laser intensity seen by atoms can be expressed in the form

$$I = \bar{I}_M G(t) i(t), \quad (2.1)$$

where  $\bar{I}_M$  is the maximum time-averaged intensity.  $G(t)$  is the normalized temporal distribution function of the laser intensity; this function is quasi-reproducible from one laser shot to another, and its duration is about  $10^{-8}$  sec for a  $Q$ -switched laser pulse.  $i(t)$  is a periodic function which fluctuates from shot to shot. It has a stochastic pattern which depends on both phases and relative amplitudes of the modes at the top of the laser pulse and corresponds to short-term peak intensities, as shown in Fig. 1. This figure gives some temporal laser pulses with corresponding spectral bandwidths. The duration of these peak intensities  $\Delta t$  is the coherence time of the laser pulse. It is the characteristic time of the most rapid variations of the laser intensity. It gets shorter and shorter as the number of modes increases, since  $\Delta t = \Delta\nu^{-1}$ , where  $\Delta\nu$  is the spectral bandwidth of the laser pulse. Two adjacent longitudinal modes are separated by  $1/2L$ , where  $L$  is the length of the oscillator cavity, i.e.,  $6 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$  for  $L = 85 \text{ cm}$ , with the laser used in the present experiment. Thus when this laser operates in ten adjacent modes  $\Delta\nu = 5 \times 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$  and the corresponding coherence time is 600 psec. The instantaneous laser intensity can be measured only if the time resolution of the experimental apparatus is better than the coherence time of the laser pulse. This is possible only when the number of modes is small. When the number of modes be-

comes large, the time dependence of the laser intensity is not explicitly known. This was the condition in which most multiphoton ionization experiments have been performed in the past few years with Nd-glass lasers.

Generally, only the time-averaged laser intensity is measured:

$$\bar{I} = \bar{I}_M G(t), \quad (2.2)$$

whereas multiphoton ionization of atoms is a highly nonlinear process which is very sensitive to peak-intensities functions  $i(t)$ , since the multiphoton ionization probability is

$$W = \alpha I^K, \quad (2.3)$$

where  $\alpha$  is a factor which depends on the atom considered as well as the polarization of the laser pulse.  $I$  is the instantaneous laser intensity.  $K$  is the next integer greater than the ionization energy of the atom divided by the photon energy. Thus  $K=11$  for ionization of xenon atoms by a Nd-glass laser pulse. This expression (2.3) is strictly valid only when the atom is not ionized through any quasisonant intermediate excited states.<sup>9</sup>

We can define a peak-intensity moment  $f_K$  for a  $K$ th-order process as

$$f_K = \langle i^K(t) \rangle, \quad (2.4)$$

where the symbol  $\langle \rangle$  means the ensemble average over several laser shots. This peak-intensity

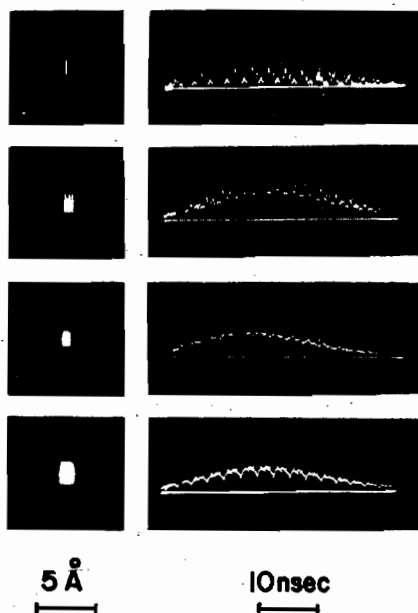


FIG. 1. Laser intensities and corresponding spectral linewidths when the Nd-glass laser operates successively, from top to bottom, in one spectral line (ten modes), three lines (30 modes), seven lines (70 modes), and ten lines (100 modes).

moment  $f_K$  can be related to a multiphoton ionization process. The number of ions induced by a multimode laser pulse is given by

$$N_i = \alpha \int I^K(t) dt. \quad (2.5)$$

The number of ions induced by a monomode laser pulse with the same average intensity would be

$$N = \alpha \int \bar{I}_M^K(t) dt. \quad (2.6)$$

Hence

$$f_K = \langle N_i/N \rangle. \quad (2.7)$$

Thus  $f_K$  is the expectation value of the enhancement of the number of ions due to the multimode character of the laser pulse. It reflects, at constant average laser intensity, the influence of the temporal coherence of the laser light on the multiphoton ionization process. This paper investigates the relationships between the eleventh-order moment  $f_{11}$  and the resultant enhancement in the number of ions formed through the 11-photon ionization of xenon atoms.

### III. EXPERIMENTAL METHOD

In the present experiment the multiphoton ionization probability of xenon atoms has been measured by using a single-transverse-mode Q-switched Nd-glass laser which can be operated with a variable number of longitudinal modes (1-100). This laser has been described in detail elsewhere.<sup>9</sup> The laser is Q switched by a Pockels cell. The number of longitudinal modes is varied by using two-step Q switching and resonant reflectors in the temperature-controlled cavity. The laser radiation is linearly polarized, and is centered at 10643 Å. This wavelength has been selected to investigate a direct 11-photon ionization of xenon atoms, i.e., without any resonant intermediate excited states.<sup>9,10-11</sup> This consideration is important because the enhancement factor in the number of ions is characteristic of the statistical properties of the laser pulse only when a nonresonant multiphoton ionization process occurs. Figure 2 shows a schematic diagram of the experimental arrangement. The laser beam emerges from the master oscillator, is expanded by a telescope with fourfold magnification and then enters a five-stage amplifier. The laser beam is then focused with an aspheric lens (focal length 80 mm) into a vacuum chamber into which the xenon gas has been released at a pressure of  $10^{-4}$  Torr. The average laser intensity at the focal point is about  $10^{12}$  W cm<sup>-2</sup>. The xenon ions resulting from the laser interac-

tion at the focal point are extracted with a transverse electric field of  $400 \text{ V cm}^{-1}$  and then detected with a magnetic electron multiplier (Bendix type 308).

The longitudinal-mode structure of the laser pulse is controlled in the following manner. A portion of the laser beam reflected from the entrance window of the interaction chamber passes through three beam splitters, and is incident on the following.

(i) A photodiode (Radiotechnique XA 1003) with 150-psec rise time; this photodiode is directly connected to the input of a Ferisol OZ 100B oscilloscope with 150-psec rise time and bandwidth of 2 GHz. The combined rise time of this apparatus is about 200 psec. Laser-intensity fluctuations can thus be recorded as long as the over-all spectral bandwidth  $\Delta\nu$  of the laser emission is less than  $0.1 \text{ cm}^{-1}$ .

(ii) A photodiode and an oscilloscope whose combined rise time is several nanoseconds; this detection setup is used to determine the average laser intensity  $\bar{I}_M$ .

(iii) A diffraction-grating spectrograph which has a dispersion of  $1.6 \text{ \AA/mm}$  and a resolution of  $0.08 \text{ cm}^{-1}$  at  $1.06 \text{ \mu m}$ ; a laser spectrum is recorded through an image converter. This apparatus is used to record laser emission spectra with a bandwidth  $\Delta\nu > 0.08 \text{ cm}^{-1}$ .

(iv) A Fabry-Perot interferometer which gives information on the laser mode content when the laser oscillates on few modes; one to ten adjacent modes can be observed in its free spectral range of  $7.5 \times 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ . Fabry-Perot rings are recorded through an image converter.

The experiment consists of a measurement of the number of ions formed as a function of the average laser intensity  $\bar{I}_M$  for different values of the number of longitudinal modes of the laser pulse. The experiment was performed in two stages. In the first stage the laser operated in a variable number of adjacent longitudinal modes (from one to seven) inside a single spectral line. In the second the laser operated on a variable number of spectral lines from one to ten; each spectral line contained about ten adjacent modes.

#### IV. EXPERIMENTAL RESULTS AND DISCUSSION

##### A. Single-line laser

Experimental results obtained when the number of longitudinal modes is varied from one to seven inside a single line have been published earlier<sup>6</sup> and will only be discussed here.

When the laser operates in two adjacent modes, the modulation of the temporal laser pulse is sinusoidal with a period  $T = 5.7 \text{ nsec}$  corresponding

to a round-trip time in the oscillator cavity. The visibility of the fringe pattern is defined as

$$v = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}). \quad (4.1)$$

The modulation depth, at the highest part of the pulse, varies from shot to shot, depending on the relative intensities of the two modes. A two-mode pulse is a special case for which the phase of the two modes does not play any role. The number of ions induced by a two-mode laser pulse with visibility  $v = 0.6$  has been found to be  $10^{1.6 \pm 0.2}$  times larger than those induced by a single-mode pulse of equal average intensity  $\bar{I}_M$ . The number of ions is proportional to the  $K$ th power of the instantaneous laser intensity  $I$  according to relation (2.5). This instantaneous laser intensity can be accurately recorded for a two-mode pulse, and is given by

$$I(t) = 1 + v \cos(2\pi t/T). \quad (4.2)$$

The experimental enhancement factor  $10^{1.6 \pm 0.2}$  in the number of ions corresponds to the  $K$ th-order moment  $f_K$  defined by (2.4). For a two-mode laser pulse

$$f_K = T^{-1} \int_0^T [1 + v \cos(2\pi t/T)]^K dt. \quad (4.3)$$

With  $k = 11$  and  $v = 0.6$ , this expression gives  $f_{11} = 10^{1.52}$ , which is in good agreement with the measured value  $10^{1.6 \pm 0.2}$ .

When the laser oscillates in three or more than three modes, the laser intensity exhibits a quasi-periodical structure, but its shape greatly varies from shot to shot, depending mainly on the phases

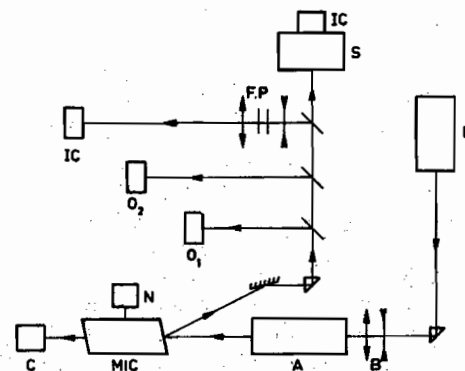


FIG. 2. Schematic diagram of the experimental setup. L: laser oscillator; B: beam-expanding telescope; A: amplifiers; MIC: multiphoton ionization chamber; N: measurement of the multiphoton ions; C: calorimeter; O<sub>1</sub>: temporal laser-pulse measurement with about 200-psec rise time; O<sub>2</sub>: temporal laser-pulse measurement with several-nanoseconds rise time; FP: Fabry-Perot interferometer; S: grating spectrograph; IC: image converter.



of the modes. The intensities of the modes can be measured, but no information on their relative phases can be obtained. Statistical considerations are then needed to interpret experimental results obtained with a multimode laser pulse. Most of the authors suppose that the phases are statistically independent and have a random distribution within the interval  $(0, 2\pi)$ . A simple expression of  $f_K$  can be derived by assuming that  $M$  modes have independent phases, and amplitudes  $G_m$  which obey a Gaussian law, i.e., the intensity  $I_m = |G_m|^2$  of the  $m$ th mode follows an exponential distribution law given by

$$P(I_m) = e^{-I_m}. \quad (4.4)$$

The instantaneous laser intensity is

$$I = \left| \sum_{m=1}^M G_m \right|^2, \quad (4.5)$$

while the time-averaged intensity  $\bar{I}_M$  is given by

$$\bar{I}_M = \sum_m |G_m|^2 = \sum_m I_m. \quad (4.6)$$

$f_K$  is defined by

$$f_K = \langle (I/\bar{I}_M)^K \rangle. \quad (4.7)$$

The special properties of the Gaussian law allow us to write

$$\langle I^K \rangle = \langle \bar{I}_M^K \rangle. \quad (4.8)$$

Equations (4.4) and (4.6) give

$$\langle \bar{I}_M^K \rangle = (K+M-1)! / (M-1)!. \quad (4.9)$$

It is easy to show that

$$\langle I^K \rangle = K! M^K. \quad (4.10)$$

We obtain from (4.8)–(4.10),

$$f_K = K! [M^K (M-1)! / (K+M-1)!]. \quad (4.11)$$

This relation characterizes the mode-number dependence of  $f_K$  for phase-independent modes. It should be pointed out that a previous calculation has been performed for  $K < 7$ ; it gave polynomial expressions.<sup>12</sup> For seven adjacent modes and  $K=11$ , expression (4.11) gives  $f_{11} = 10^{5.2}$ , which is much greater than the experimental value  $10^{2.6 \pm 0.3}$  corresponding to the enhancement in the number of ions induced by a seven mode pulse compared to that induced by a single-mode pulse of the same average intensity  $\bar{I}_M$ . This large difference cannot be explained in terms of different intensities of the modes. The present experiments have shown that  $f_K$  is relatively insensitive to the distribution of the intensities of the modes. However, the distribution of the phases is the determining factor. The assumption of statistical independence of the phases in a Q-switched Nd-glass laser is not ob-

vious, and call for additional investigations.<sup>13</sup> Several adjacent modes may have definite phase relationships that tend to decrease  $f_K$ . Such correlation properties of the phases can be taken into account by introducing an effective number of modes  $\bar{M}$  which would have equal intensities and independent phases. This assumption is supported by an investigation of the statistical properties of the laser modes deduced from direct measurements on temporal laser pulse patterns.<sup>14</sup> The preceding expression (4.11) can then be rewritten

$$f_K = K! [\bar{M}^K (\bar{M}-1)! / (K+\bar{M}-1)!]. \quad (4.12)$$

By introducing the effective number  $\bar{M}=2$  in this expression (4.12),  $f_K$  is calculated to be  $10^{2.3}$ , in good agreement with the experimental value  $10^{2.6 \pm 0.3}$  obtained with a seven mode laser pulse.

#### B. Multiline laser

In order to obtain a larger number of modes, we have changed the previous laser cavity used to obtain one to seven modes inside a single spectral line.<sup>8</sup> The resonant reflector has been replaced by a nonselective mirror, the 3-cm-thick interferometer has been removed, and the 10-mm-thick quartz plate has been replaced by a 1-mm-thick Brewster tilted-calcite birefringent filter. When this is done, the laser spectrum consists of a set of sharp lines equally spaced, with a period  $\delta\nu$  mainly determined by the thickness of the laser mirrors.  $\delta\nu$  equals  $0.42 \text{ cm}^{-1}$  for the laser used. Each spectral line has a width  $\leq 7 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ . The number of modes inside one of these spectral lines has been measured by using a narrow-band interference filter to isolate one of the emission lines. The mode structure of this line was observed with a Fabry-Perot interferometer. The number of modes, inside a line, is found to be ten, ranging from nine to 11 from one laser shot to another. The variation of the number of spectral lines is made by rotating the calcite plate around its geometrical axis. Up to ten lines, that is, 100 modes, have been obtained, giving an over-all laser spectral bandwidth of  $4 \text{ cm}^{-1}$ , that is, a coherence time of 5 psec.

The experiment consists of a measurement of the number of ions produced,  $N_i$ , as a function of the average laser intensity  $\bar{I}_M$  for different values of the number of laser spectral lines. Experimental results are summarized in Fig. 3, which represents on a log-log plot the variation of the number of ions formed,  $N_i$ , as a function of the average laser intensity  $\bar{I}_M$  when the laser operates successively on one line (10 modes), three lines (30 modes), seven lines (70 modes), and ten lines (100 modes). The reference curve (dashed line) corresponds to a previous result obtained with a

monomode laser pulse. Experimental points induced by a single-mode laser pulse are perfectly lined up, while experimental points obtained with a multimode laser pulse are scattered. This scatter is due to the variation of both phases and relative intensities of modes from one laser shot to another.

It is important to measure the slope  $K = \partial \ln N_i / \partial \ln \bar{I}_M = 11 \pm 1$ . When there is no resonant effect,  $K$  is the next integer greater than the ionization energy of the xenon atom divided by the photon energy. The slope  $K=11$  remains constant when the number of laser lines is changed from one to ten. Thus the eleventh-order moment  $f_{11}$  can be directly determined from the enhancement of the number of ions which is observed when the number of laser lines  $L$  is increased. Table I sums up the  $f_{11}$  experimental values for different number of modes ranging from one to 100. Experimental results obtained with a large number of modes (10–100) appear more explicitly in Fig. 4. This figure gives the experimental values of the  $f_{11}$  moment as a function of the number of spectral lines  $L$  and (short dashed lines) two curves which have been calculated with the following considerations. Phases of adjacent modes inside a spectral

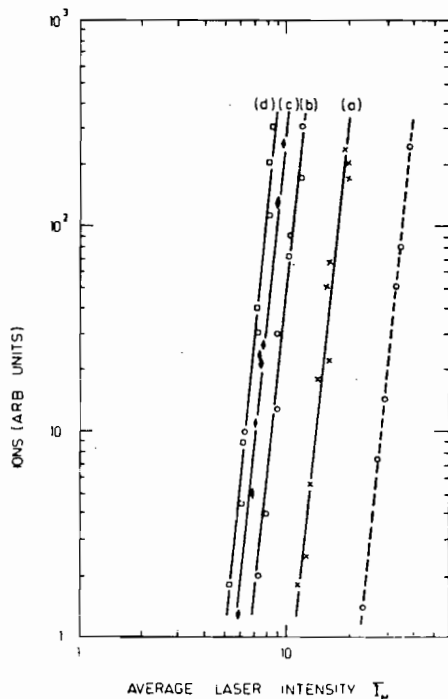


FIG. 3. Log-log plot of the variation of the number of ions as a function of the average laser intensity  $\bar{I}_M$  (arbitrary units), when the laser operates in (a) one spectral line (ten modes), (b) three lines (30 modes), (c) seven lines (70 modes), and (d) ten lines (100 modes). Dashed curve corresponds to a single-mode laser operation as given in Ref. 6.

line seem to be correlated in some manner such that  $f_K$  decreases, while modes of different spectral lines can be considered as having independent phases. The peak-intensity moment of a spectrum consisting of  $L$  lines depends on the correlation properties of the  $M$  modes inside a single line. The  $K$ th-order correlation properties of these  $M$  modes are taken into account here by replacing the number  $M$  of real modes which have correlated phases by  $\bar{M}$ , which represents an effective number of independent modes of equal intensity. The over-all peak-intensity moment, with these considerations, is approximated by -

$$f_K = K! [(L\bar{M})^K (L\bar{M} - 1)! / (K + L\bar{M} - 1)!], \quad (4.13)$$

deduced from (4.12) by replacing  $\bar{M}$  by  $L\bar{M}$ . In Fig. 4 experimental values obtained for  $f_{11}$  fit well on the calculated curve deduced from (4.13) with  $\bar{M}=3$ , but do not fit on the curve calculated with  $\bar{M}=10$ , as it should if the ten modes oscillating in a spectral line had independent phases.

Figure 4 shows that the experimental value  $f_{11}$  equals  $10^{6.9 \pm 0.3}$  when the emission spectrum of the laser pulse consists of ten spectral lines, that is, 100 modes, which gives an over-all bandwidth of  $4 \text{ cm}^{-1}$  and a coherence time of 5 psec.  $f_{11}$  tends slowly towards an asymptotic value for large  $L$ . In the limit of an infinite number of independent modes, this asymptotic value has been calculated to be  $K!$ ,<sup>15-17</sup> that is,  $4 \times 10^7$  for  $K=11$ . This asymptotic value can be simply explained. When the laser oscillates in a very large number of modes there will be a high probability that, for any pair of modes with a beat frequency  $f$ , there will be another pair of modes with the same beat frequency but in phase opposition. Therefore, the random character of the phase distribution will

TABLE I. Enhancement factor  $f_{11}$  of the number of ions formed, normalized to unity for a single-mode laser pulse.

Number of modes	$f_{11}$
1	1
2 (visibility $v = 0.6$ )	$10^{1.6 \pm 0.2}$
7	$10^{2.6 \pm 0.3}$
10 (1 line)	$10^{3.1 \pm 0.3}$
30 (3 lines)	$10^{5.6 \pm 0.3}$
70 (7 lines)	$10^{6.5 \pm 0.3}$
100 (10 lines)	$10^{6.9 \pm 0.3}$

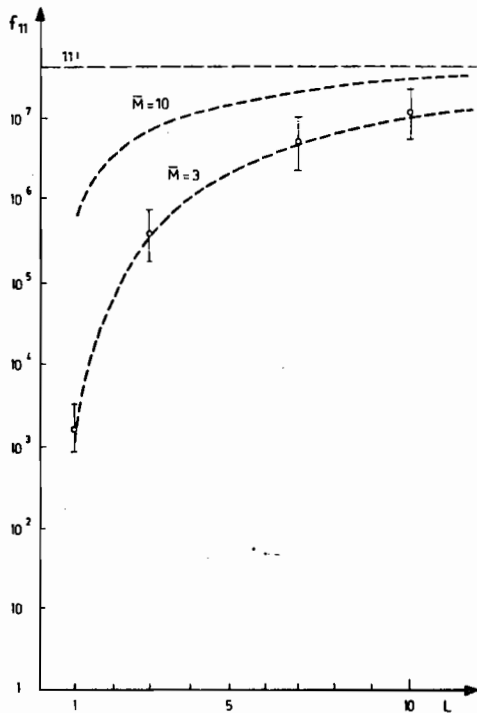


FIG. 4. Eleventh-peak intensity moment  $f_{11}$  as a function of the number of spectral lines  $L$ , each line containing ten modes. The calculated dashed curves are deduced from Eq. (4.13) for  $\bar{M} = 3$  and  $\bar{M} = 10$ .

tend to smooth out the beats.

Finally, we wish to emphasize the content of this experiment. We have studied here the relative efficiency of 11-photon ionization of xenon atoms by varying the number of laser longitudinal modes from one to 100, that is, a decrease of the coherence time from 40 nsec to 5 psec. But neither the case of single-mode pulse nor that of 100-mode pulse can be considered to be an ideal case. A single-mode pulse cannot be treated exactly as a pure coherent state in the Glauber sense; the laser used does not have a well-stabilized amplitude. On the other hand, a 100-mode laser pulse cannot be considered as being fully Gaussian as a chaotic light.

#### V. CONCLUSION

The dependence of the 11-photon ionization probability of xenon atoms on the statistical properties

of a  $Q$ -switched Nd-glass laser pulse has been investigated by varying the number of longitudinal modes from one to 100. The number of multiphoton ions is drastically enhanced when the statistical properties of the multimode laser pulse deviate more and more markedly from those of a single-mode pulse by progressively increasing the number of modes and therefore decreasing the coherence time of the laser pulse. For instance, when the laser spectrum consists of ten spectral lines, i.e., 100 modes, corresponding to an overall bandwidth of  $4 \text{ cm}^{-1}$  and a coherence time of 5 psec, the number of ions is  $10^{6.9 \pm 0.3}$  times larger than that induced with a single-mode laser pulse of the same average intensity. Most of the Nd-glass lasers which have been used in multiphoton ionization experiments in the past few years had spectral bandwidths of several inverse centimeters. Thus to do a meaningful check of experimental multiphoton ionization probabilities with corresponding theoretical data, a very significant correction factor has to be applied for experimental results obtained with a multimode laser pulse. It is highly desirable in the future that multiphoton ionization probability measurements be done, whenever possible, with a monomode laser. If this is not feasible, great care should be taken in using the correction factor due to coherence. This correction factor depends both on the order  $K$  of the nonlinear interaction and on the laser spectral bandwidth, ranging from 1 to  $K!$  depending on the number of modes.

Conversely, multiphoton ionization processes allow us to consider an atom under excitation by a laser pulse as an ideal detector of photons concerning the coherence of a laser pulse. The knowledge of the  $K$ th-order moment of the laser peak intensity is of special interest to characterize a laser field with respect to its nonlinear interaction with atoms.

#### ACKNOWLEDGMENTS

The authors wish to express their gratitude to Professor P. Lambropoulos, Dr. N. K. Rahman, Dr. Y. Gontier, and Dr. M. Trahin for helpful theoretical discussions. They are gratefully indebted to D. Fondant for assistance with the experiments.

<sup>1</sup>M. Lu Van, G. Mainfray, C. Manus, and I. I. Tugov, Phys. Rev. A **7**, 91 (1973).

<sup>2</sup>G. A. Delone, N. B. Delone, and G. K. Piskova, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **62**, 1272 (1972) [Sov. Phys.—JETP **35**, 672 (1972)].

<sup>3</sup>Y. Gontier and M. Trahin, Phys. Rev. A **7**, 1899 (1973).

<sup>4</sup>P. Lambropoulos, Phys. Rev. A **9**, 1992 (1974).

<sup>5</sup>C. S. Chang and P. Stehle, Phys. Rev. Lett. **30**, 1283 (1973).

<sup>6</sup>C. Lecompte, G. Mainfray, C. Manus, and F. Sanchez,

- Phys. Rev. Lett. 32, 265 (1974).
- <sup>7</sup>In this paper, following common practice, we shall frequently use  $\text{cm}^{-1}$  (wave number) as a unit of frequency equal to 30 GHz.
- <sup>8</sup>F. Sanchez and C. Lecompte, Appl. Opt. 13, 1071 (1974).
- <sup>9</sup>B. Held, G. Mainfray, C. Manus, J. Morellec, and F. Sanchez, Phys. Rev. Lett. 30, 423 (1973).
- <sup>10</sup>D. T. Alimov, N. K. Berezhetskaya, G. A. Delone, and N. B. Delone, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 64, 1178 (1973) [Sov. Phys.—JETP 37, 599 (1973)].
- <sup>11</sup>J. Bakos, A. Kiss, L. Szabo, and M. Tandler, Zh. Eksp. Teor. Fiz. Pis'ma Red. 18, 403 (1973) [Sov. Phys.—JETP Lett. 18, 237 (1973)].
- <sup>12</sup>I. V. Tomov and A. S. Chirkin, Kvant. Elektron. I, 110 (1971) [Sov. J. Quantum Electron. 1, 79 (1971)].
- <sup>13</sup>V. A. Babenko, B. Ya. Zeldovich, V. I. Malyshev, and A. A. Sychev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 61, 2270 (1972) [Sov. Phys.—JETP 34, 1216 (1972)].
- <sup>14</sup>F. Sanchez, Nuovo Cimento B (to be published).
- <sup>15</sup>J. Ducuing and N. Bloembergen, Phys. Rev. 133, A1493 (1964).
- <sup>16</sup>G. S. Agarwal, Phys. Rev. A 1, 1445 (1970).
- <sup>17</sup>J. L. DeBethune, Nuovo Cimento B 12, 101 (1972).

#### IV.2. Résultats concernant le champ laser.

Les publications précédentes étaient consacrées à l'étude expérimentale de l'influence de la longueur d'onde et du nombre de modes du champ sur le phénomène d'ionisation multiphotonique. Dans l'article suivant nous considérons le problème inverse : mesure de moments d'ordre supérieur du champ en utilisant le dispositif d'ionisation comme un détecteur non-linéaire idéal. Nous ne considérons donc ici que les résultats obtenus avec le xénon pour la longueur d'onde non-résonnante  $\lambda = 10643 \text{ \AA}$ , c'est-à-dire les valeurs du moment  $f_{11}$  en fonction du nombre de modes  $M$ .

Nous complétons ces résultats par une étude directe sur une série d'oscillogrammes agrandis du pulse laser à faible nombre de modes. La bonne correspondance entre le moment  $f_{11}$  ainsi mesuré avec la valeur obtenue par la méthode d'ionisation est un gage de la validité de la relation (IV.6) ainsi que du bon fonctionnement de l'ensemble de l'appareillage. Une telle vérification est rendue nécessaire par le nombre considérable de paramètres pouvant intervenir dans l'expérience (voir plus loin une discussion sur les difficultés expérimentales).

Article à paraître dans "Il Nuovo Cimento B"

Classification Physics Abstracts 2.660 - 1.650 - 2.634

Titre abrégé : HIGH-ORDER MULTIMODE RADIATION STATISTICS  
HIGH-ORDER MULTIMODE RADIATION STATISTICS OF  
A TEM<sub>00</sub> Q-SWITCHED NEODYMIUM LASER

Etude des propriétés statistiques d'ordre élevé de la lumière multimode émise par un laser au néodyme déclenché monomode transverse.

F. SANCHEZ

Service de Physique Atomique,

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, 91190 - Gif-sur-Yvette, France.

-----

#### RESUME

Nous interprétons nos récents résultats expérimentaux concernant l'influence du nombre de modes axiaux d'un laser déclenché sur la probabilité d'ionisation à onze photons du xénon. Nous montrons que, compte tenu de la méthode expérimentale utilisée, la grandeur statistique intéressante est le rapport entre l'intensité instantanée et la valeur moyenne de cette intensité pendant la durée d'un aller-retour dans la cavité laser. Le facteur d'accroissement de la probabilité d'ionisation par rapport au laser monomode est le onzième moment de cette surintensité. Les mesures montrent que les phases de modes axiaux voisins sont corrélées d'une manière telle que la radiation laser présente une modulation de fréquence, tandis que celles de modes axiaux lointains sont indépendantes. La radiation émise par notre laser à verre dopé au néodyme diffère par ses propriétés statistiques d'un champ gaussien pulsé, mais, quand le spectre est suffisamment étendu (quelques Å), le moment d'ordre  $k$  de la surintensité a la même valeur  $k!$  que pour une impulsion de lumière gaussienne de spectre étendu.

#### ABSTRACT

We interpret our recent experimental results concerning the dependence of the 11-photon Xe-ionization rate on the axial mode number of a Q-switched laser. Taking the experimental procedure into account, the stochastic quantity of interest is the ratio between the instan-

taneous intensity and the mean intensity averaged over a round-trip duration. The enhancement factor normalized to the monomode case is the eleventh moment of that overintensity. The measurements indicate that nearby longitudinal modes are FM-type phase-correlated, while distant modes are phase-independent. The radiation emitted by our  $\text{Nd}^{3+}$  glass laser have not the statistical properties of a pulsed Gaussian field, yet when the spectrum is sufficiently large (several  $\text{\AA}$ ) its k-th order overintensity moment has the same value  $k!$  as for a pulsed Gaussian field with a large spectrum.

## 1. INTRODUCTION.

The purpose of the present paper is the study of some high-order statistical temporal properties of a  $\text{TEM}_{00}$  Q-switched solid-state laser radiation, for different values of its number of longitudinal modes. Interest about this study arise from the rapid development of high-order processes using this kind of laser. Indeed, the measurement of the rate of an uniformly resonant <sup>1,2</sup>, non-saturated k-th order process needs the knowledge of the field intensity  $I(t)$  during the interaction <sup>3,4</sup>. But in most cases, broadband lasers are used, and the optical linewidth is greater than the detector bandwidth. So, information about statistical properties of light is required <sup>3,5</sup>. In particular one may define a k-th order relative efficiency which is related to a k-th order moment of the field intensity. For a stationary field this is the k-th order moment of the intensity :  $h_k = \bar{I}^k / (\bar{I})^k$ , where the averages are performed over a time very long in comparison with the coherence time of the field <sup>4,6</sup>. For pulsed field, care must be taken in the definition of the k-th order relative efficiency, because it may depend on the experimental procedure.

With pulsed field one must consider ensemble-averaged rather than time-averaged quantities. A practical difficulty of such a procedure lies in the fact that, from shot to shot, some parameters may vary during the time necessary to cool the laser and amplifier rods ( $\sim 1$  mm), and one is not sure to have exactly the same initial conditions at each shot. However, information may be obtained concerning the relevant effects of these fluctuations by registering at each shot the time-averaged intensity over a round-trip duration  $\bar{I}(t)$ . Non recognition of this point may lead to errors, as pointed out in Part 2.

Another feature of the pulsed regime is that the mode beating effect <sup>7</sup> is the principal source of noise, even if it is recognized that the complex amplitudes of the laser modes bear almost time-independent relationships during one pulse <sup>8, 9, 10</sup>. The reason for this is that these relationships vary from pulse to pulse in a random manner <sup>11, 9</sup>, due to the influence of spontaneous emission at the beginning of the pulse <sup>12</sup>. Experimental observations have shown that the wave interaction picture is sufficient to explain the periodical pulse substructure at the top of the pulse <sup>9</sup>. So, this particular kind of noise may be described by the shot to shot statistical properties of the complex amplitudes of the modes at the top of the pulse.

In the present paper, we are only concerned with this mode beating noise, and not with the fluctuations of the time-averaged intensity  $\bar{I}(t)$ . So, a natural way to describe the noisy character of a given pulse  $I(t)$  is what we call the "overintensity":  $i(t) = I(t)/\bar{I}(t)$ . In Part 2 we show that in experiments conducted with pulsed laser for which the function  $\bar{I}(t)$  is registered at each shot, the  $k$ -th order relative efficiency is the  $k$ -th order moment of the overintensity function:  $f_k = \langle i^k \rangle$  where the brackets mean that this is an ensemble-averaged quantity. Reciprocally one can use a  $k$ -th order process to measure the  $k$ -th order overintensity moment of a multimode laser, provided one knows what could be the result of the nonlinear interaction with a monomode laser having the same time-averaged intensity  $\bar{I}(t)$  and the same spatial properties. It is the reason why we have built an oscillator with a variable number of longitudinal modes, starting from unity, but with minimum variation in its geometry <sup>9</sup>. In particular, this laser oscillates always on its fundamental transverse mode, and so the spatial properties of the radiation are separated from the temporal ones and suffer a minimum of fluctuations. We have published the result obtained with a seven-mode case in the multiphoton ionization of xenon atoms for two values of the wavelength <sup>10</sup>. For one of these values ( $\lambda = 10643 \text{ \AA}$  measured in air), the observed non linear order  $k = 11 \pm 1$  was the one corresponding to direct photoionization i.e. without influence of intermediate levels <sup>13, 14</sup>. The enhancement factor was  $f_{11} = 10^{2.6 \pm 0.3}$ . Other measurements were made when a saturable absorber is inserted in the oscillator cavity, but we shall not consider them here because we wish to deal in this paper only with the statistics of a Q-switched laser with free-running modes.



Presently available Q-switched multimode laser theory<sup>12</sup> does not deal with the overintensity statistics. Most of the authors make the assumption of no correlation between the mode phases. In fact only second and third order moments have been measured<sup>15-17</sup>. Some authors studied the pulse modulation patterns, but they restricted their measurements to the fundamental of the modulation<sup>8, 18</sup>. To our knowledge only V.A. BABENKO et al.<sup>17</sup> have observed inconsistencies with the model of phase-independent modes.

In Part 1, we introduce the concept of overintensity and detail the experimental procedure that permits one to measure its k-th order moment with a k-th order process. In Part 2, we calculate this moment for different statistical models of the complex mode amplitudes, with emphasis on a new model of independent lines composed of correlated modes. In Part 3, we describe and discuss the experimental results recently obtained<sup>10, 19</sup> for an 11-th order process.

## 2. THE OVERINTENSITY FUNCTION AND ITS MOMENTS.

### 2.1. Definitions.

Consider a fully polarized TEM<sub>00</sub> Q-switched solid-state laser oscillating on several (M) longitudinal modes whose individual spectral widths ( $\sim 10$  MHz) are less than their mutual spectral separation ( $\sim 100$  MHz) i.e. the modes are well defined. During one shot the intensity is

$$I(t) = \left| \sum_{m=1}^M a_m(t) \exp(i\omega_m t) \right|^2 \quad (1)$$

where  $a_m(t)$  is the slowly-varying time-dependent complex amplitude of the m-th mode and  $\omega_m$  is its mean angular frequency. The departure ( $\sim 1$  MHz)<sup>20</sup> from equally spaced frequencies is negligible. Therefore, we may replace  $\omega_m$  in Eq. (1) by  $m\omega$ . The frequency separation is related to the quasi-period T of the pulse modulation by  $\omega \cdot T = 2\pi$ .

Consider now the associated idealized pulse, defined by :

$$a_m(t) = a_m g(t) \quad (2)$$

where  $a_m$  is the complex amplitude of the m-th mode at the top of the actual pulse and where  $g(t)$  describes the normalized temporal evolution of the complex amplitude of the strongest mode. This idealized pulse will be characterized by no time-variation of its modulation pattern. In fact, an actual pulse exhibits a noticeable pattern distortion in its trailing edge<sup>9</sup>, but as we are going to consider high-order effects we are only interested in the highest part of the pulse and so we shall deal with the idealized pulse defined by Eq. (2).

It is an essential point to note that, by means of a calibrated phototube with a risetime inferior to  $T$  (several ns), one can measure at each shot the round-trip time-averaged intensity  $\bar{I}(t)$  defined by :

$$\bar{I}(t) \equiv \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} I(t') dt' \equiv \bar{I}_M G(t) \quad (3)$$

The maximal mean intensity  $\bar{I}_M \equiv \sum_m |a_m|^2$ , as well as the normalized function  $G(t) \equiv |g(t)|^2$  may suffer unforeseen variations<sup>21, 22</sup> due to fluctuations of macroscopic parameters such as pumping power, rod cooling etc ... Fortunately  $\bar{I}(t)$  is easily recordable and one can eliminate these effects by considering only the periodic overintensity function  $i(t)$  defined by :

$$i(t) \equiv \frac{I(t)}{\bar{I}(t)} \quad (4)$$

This function has a stochastic pattern that depends only on the relative complex amplitudes  $\alpha_m$  at the top of the pulse :

$$i(t) \equiv \left| \sum_m \alpha_m e^{im\omega t} \right|^2 \quad (5)$$

with

$$\alpha_m \equiv \frac{a_m}{\left( \sum_m |a_m|^2 \right)^{1/2}} \quad (6)$$

It follows from the above definitions that the time-averaged value of  $i(t)$  is identically equal to unity :

$$\bar{i}(t) \equiv \sum_m |\alpha_m|^2 = 1 \quad (7)$$

Since the choice of a time origin is arbitrary at each shot, one may define the k-th order time-independent overintensity moment  $f_k$  by :

$$f_k \equiv \langle i^k \rangle \quad (8)$$

where the brackets stand for the ensemble average. The stationary function  $i(t)$  is not ergodic since the mean value of  $i^k(t)$  during one shot

$$\overline{i^k}(t) \equiv \frac{1}{T} \int_{(T)} i^k(t) dt \quad (9)$$

is, in general, different from  $f_k$ . But one deduces from Eqs. (8) and (9) that

$$\langle \overline{i^k} \rangle \equiv f_k \quad (10)$$

Therefore, one may equally well consider either the ensemble average of  $i^k$  for one instant chosen arbitrarily or the ensemble average of the mean value  $\overline{i^k}$ . It can be easily shown that the dispersion around the expectation value  $f_k$  is smaller in the second case.

## 2.2. Measurement of $f_k$ by using a k-th order process.

A physical interpretation of the overintensity moment is now given. Consider a nonlinear experiment for which the measured quantity, say a number of ions  $N$ , is given by

$$N = \sigma \int I^k(t) dt \quad (11)$$

where  $\sigma$  is some constant. The result that would be obtained for a mono-mode laser with the same macroscopic time evolution  $\bar{I}(t)$  is

$$N_1 = \sigma \int \bar{I}^k(t) dt \quad (12)$$

Hence, for every shot one obtain the basic relation :

$$N = N_1 \overline{i^k} \quad (13)$$

Thus,  $f_k$  is the expectation value of the enhancement of the ion signal due to the multimode operation of the laser

$$f_k = \left\langle \frac{N}{N_1} \right\rangle \quad (14)$$

This relation is useful to measure the overintensity moment of a multimode laser by means of a nonlinear process, provided that the time-integrated intensity  $\bar{I}(t)$  is recorded at each shot and that the monomode rate is known. This rate can be determined prealably by use of a monomode laser.

### 2.3. The case of independence between $\bar{I}(t)$ and $i(t)$

If it is assumed that the statistical properties of the  $\alpha_m$ 's are independent of the fluctuations of the function  $\bar{I}(t)$ , the quantities  $N_1$  and  $i^k$  in Eq. (13) will be independent. In that case :

$$\langle N \rangle = \langle N_1 \rangle f_k \quad (15)$$

However, since  $\bar{I}(t)$  is a measurable function at each shot, the fluctuations of  $N_1$  may be eliminated and one may consider only the conditional expectation value  $\langle N \rangle_{N_1}$ , i.e. the expectation value of  $N$  for a given value  $N_1$  instead of the "a priori" expectation value  $\langle N \rangle$ . One obtains

$$\langle N \rangle_{N_1} = N_1 f_k \quad (16)$$

Furthermore, the proportionality between  $\langle N \rangle_{N_1}$  and  $N_1$  is a sufficient condition to conclude that  $\bar{I}(t)$  and  $i(t)$  are statistically independent. Particularly, if the fluctuations of  $\int G^k(t) dt$  may be neglected but not the fluctuations of  $\bar{I}_M$  (which is generally the case), this sufficiency condition may be written

$$\partial \ln \langle N \rangle_{T_M} / \partial \ln \bar{I}_M = k \quad (17)$$

i.e. the measured slope <sup>10</sup> will be the same as in the monomode case. That is indeed what have been observed in our experiments <sup>10, 19</sup>.

From a mathematical point of view a sufficiency condition for the independence between  $\bar{I}(t)$  and  $i(t)$  may be formulated in terms of the probability distribution law  $A\{a_m\}$  of the  $a_m$ 's :

$$A\{a_m\} = B\left(\sum_m |a_m|^2\right) F\{\alpha_m\} \quad (18)$$

where  $B(I_M)$  and  $F\{\alpha_m\}$  are arbitrary normalized distribution functions. This remark will be useful to calculate the overintensity moment of a number of Gaussian independent modes with identical expectation intensities (Appendix B).

#### 2.4. Alternate choice of moments.

It seems useful to describe another experimental method, leading to another kind of k-th order moment. Return to the nonlinear experiment described by Eq. (11). Suppose that one measures independently the a priori expectation value  $\langle N \rangle$  and the time-dependent expectation function  $\langle \bar{I}(t) \rangle$ <sup>23</sup>. For simplicity let us suppose that the function  $G(t)$  is reproducible. The useful function is, in that case, the intensity at the top of the pulse  $I_M(t) = \left| \sum_m a_m e^{im\omega t} \right|^2$ . The statistics of the  $a_m$ 's are now of interest, while in the preceding considerations we were concerned only with the statistics of the  $\alpha_m$ 's.

From Eq. (11) it is easily shown that  $\langle N \rangle$  is proportional to  $h_k \langle \bar{I}_M \rangle^k$  where  $h_k$  is the k-th order normalized function of the top intensity :  $h_k = \langle I_M^k \rangle / \langle I_M \rangle^k$ . If the laser were monomode this moment would be identical to  $b_k = \langle \bar{I}_M^k \rangle / \langle \bar{I}_M \rangle^k$  and is generally different from unity due to the fluctuations of  $\bar{I}_M$ . In this paper, we choose to deal only with the  $I_M / \bar{I}_M$  - moment  $f_k$  in order to eliminate these fluctuations, since  $\bar{I}_M$  is measurable at each shot.

However, it may be noted that in usual experimental setups  $\bar{I}(t)$  and  $i(t)$  are practically independent and therefore, one gets :

$$h_k = f_k b_k \quad (18a)$$

So, one may independently measure the moments  $f_k$  and  $b_k$  to obtain the moment  $h_k$ . But only the moment  $f_k$  is connected with the phase correlation properties of the field. For instance, consider the case of a large number of phase-independent modes. The asymptotic limit<sup>3</sup> of  $f_k$  is  $k!$

(see Part. 3), but the value of  $h_k$  is generally larger than  $k!$  However, in the case of a single Gaussian mode <sup>2</sup> one has  $f_k = 1$ ,  $b_k = k!$  and  $h_k = k!$ .

### 3. STATISTICAL MODELS

In this section, we calculate the values of the overintensity moment in a number of simple cases. Emphasis is made on a new model characterized by independent groups (lines) of correlated modes.

#### 3.1. The two-mode case

The overintensity pattern has a sinusoidal form that depends on a real parameter only. A convenient choice of this parameter is the classical visibility of this two-wave interference phenomena. If the frequency separation is sufficiently small this visibility may be accurately measured by a square-law detector <sup>9</sup>. Obviously in this case there is no need of statistics and one obtains :

$$f_k(V) = \int_0^1 [1 + V \cos(2 \pi x)]^k dx \approx \left[ \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2} \right]^V \quad (19)$$

With  $k = 11$  the above approximation <sup>24</sup> give correct values within 10% for  $V > 0.4$ . With  $V = 0.6$  one finds  $f_{11} = 10^{1.52}$ , which is consistent with the measured value  $f_{11} = 10^{1.6 \pm 0.3}$ .

#### 3.2. Fixed mode intensities

In this case the overintensity moment is identical to the usual normalized correlation function of the top intensity  $I_M$ .

##### 3.2.1. The two limiting cases.

For a given number of modes  $M$ , the maximal value of  $f_k$  is attained when their relative phases are equal and when the spectrum is uniform. This is given by <sup>4, 24</sup>  $f_k = c_k M^{k-1}$ , where  $c_k$  is of the order of unity and is a slowly-varying function of  $k$ . On the other hand the minimal value  $f_k = 1$  can be attained for perfect frequency modulation <sup>24-26</sup> (F M).

### 3.2.2. Modes with independent phases

From Eq. (5) a straightforward integration on the uniformly distributed phases yields <sup>3, 27, 6</sup>

$$f_k = (k!)^2 \sum_{p_1 + \dots + p_M = k} \prod_{m=1}^M \frac{|\alpha_m|^{2 p_m}}{(p_m!)^2} \quad (20)$$

Polynomial forms of this expression have been given by I.V. TOMOV and A.S. CHIRKIN <sup>4</sup> in the case of uniform spectrum ( $|\alpha_m|^2 = M^{-1}$ ). The first ones are :

$$\begin{aligned} P_1(M) &= 1 \\ P_2(M) &= 2 - M^{-1} \\ P_3(M) &= 6 - 9 M^{-1} + 4 M^{-2} \end{aligned} \quad (21)$$

For higher values of k the coefficients of  $P_k$  increase rapidly but the general features of the variation of  $P_k$  with the mode number M may be described as follows <sup>6</sup>. It starts from unity for  $M = 1$  and sharply increases when  $M \ll k$ . For higher values of M,  $f_k$  slowly goes to its asymptotic value  $k!$ .

### 3.2.3. Independent lines

The Q-switched solid-state lasers usually oscillate on several distinct spectral lines because of their high degree of sensitivity to the spectral distribution of the cavity losses <sup>28</sup>. Each line normally contains several adjacent modes. In the present model we assume that, inside each line the mode phases are correlated in some way, but modes of different lines have independent phases. A similar model have been successfully applied by R.H. PICARD and P. SCHWEITZER <sup>29</sup> to the case of forced pulsing operation. However our "independent domain model" does not contain their "domain model" as a special case, because in the latter model some phase correlations exist between the mode groups.

It follows from the Central Limit Theorem <sup>27</sup> that whatever the phase-correlations may be inside a line, the moment  $f_k$  has the asymptotic value  $k!$  when an increasing number of nearly equal intensity lines with identical internal stochastic phase-correlation properties is considered. More precisely, if the overintensity moment  $f_k^{(M)}$  of a sin-

gle line composed of a number of equal intensity modes verify the following condition :

$$f_q^{(M)} \leq P_q(\bar{M}_1) \quad (q \leq k) \quad (22)$$

where  $P_q(\bar{M}_1)$  is the polynomial introduced above [Eq. (21)] and  $\bar{M}_1$  is a positive real integer, it is shown (Appendix A) that for R such lines the following inequality holds :

$$P_k(R) \leq f_k^{(R,M)} \leq P_k(R \bar{M}_1) \quad (23)$$

Therefore, the overall overintensity moment  $f_k^{(R,M)}$  as a function of the line number increases more rapidly than in the case of one mode per line but more slowly than in the case of  $\bar{M}_1$  independent equal intensity modes per line. In the case where Eq. (22) is not valid,  $f_k^{(R,M)}$  diminishes with increase of R towards the asymptotic magnitude  $k!$ .

An interesting case is encountered when the following condition is achieved

$$f_q^{(M)} \approx P_q(\bar{M}_1) \quad (q \leq k) \quad (24)$$

in this case the overall overintensity moment  $f_k^{(R,M)}$  may be approximated by

$$f_k^{(R,M)} \approx P_k(R \bar{M}_1) \quad (25)$$

Thus when  $\bar{M}_1 < k$ , the variation of the overintensity moment as a function of the number of lines R increases rapidly until R reaches the value  $k/\bar{M}_1$  and then saturates slowly towards the asymptotic value  $k!$  for higher values of R.

### 3.2. Fluctuating intensities

In practice the relative intensities of the modes (and of the lines) in a Q-switched laser spectrum are not reproducible from shot to shot <sup>30</sup>. However we show in this section that in the case of uncorrelated mode phases (or uncorrelated line phases), these intensity fluctuations are of little consequence on the value of the overintensity moment. Consider for instance the case of M independent Gaussian modes with iden-



tical intensity expectation value  $\langle |a_m|^2 \rangle$ . The surintensity moment is then given by (Appendix B)

$$f_k = k! \frac{M^k (M-1)!}{(k+M-1)!} \quad (26)$$

It appears that this function is close to the polynomials  $P_k$  and, in particular, has the same asymptotic value  $k!$  For instance, with  $k = 11$  one finds that the maximal relative difference  $\partial \ln f_k / \ln f_k$  is less than 10%. Therefore, the value of  $f_k$  is rather insensitive to the statistical laws of their relative intensities. Deviation from fixed uniform spectrum can be taken into account by using Eq. (26) instead of the polynomials<sup>21</sup>.

In the same manner one can take into account some random inequalities between the line energies and replace the condition (24) by

$$f_q^{(M)} \approx q! \frac{\bar{M}^q \Gamma(\bar{M})}{\Gamma(q + \bar{M})} \quad (q \leq k) \quad (27)$$

Where the symbol  $\Gamma(x)$  stands for the Gamma Function. When  $x$  is a positive integer  $\Gamma(x) = (x-1)!$  In this case the number  $\bar{M}$  defined by inverting Eq. (27) may be called the degree of freedom of a single line. A radiation composed of  $R$  such lines is characterized by a degree of freedom  $R\bar{M}$ , and the moment is given by :

$$f_q^{(R,M)} \approx k! \frac{(R\bar{M})^k \Gamma(R\bar{M})}{\Gamma(k + R\bar{M})} \quad (28)$$

#### 4. EXPERIMENTAL RESULTS AND INTERPRETATION

##### 4.1. Single-line laser

For the laser oscillating on a few adjacent longitudinal modes (6 to 8) a series of 50 pulse oscillograms was recorded by a 350 ps risetime detector circuitry. Fig. 7 a shows a sample of a complete oscillogram, while Fig. 7 b shows the overintensity patterns for six successive shots. For several  $k$  the values of  $i^k(t)$  have been measured (Eq. (9)) on the enlarged patterns and are plotted in Fig. 8. As the photographic recording system of the Fabry-Perot rings has a limited

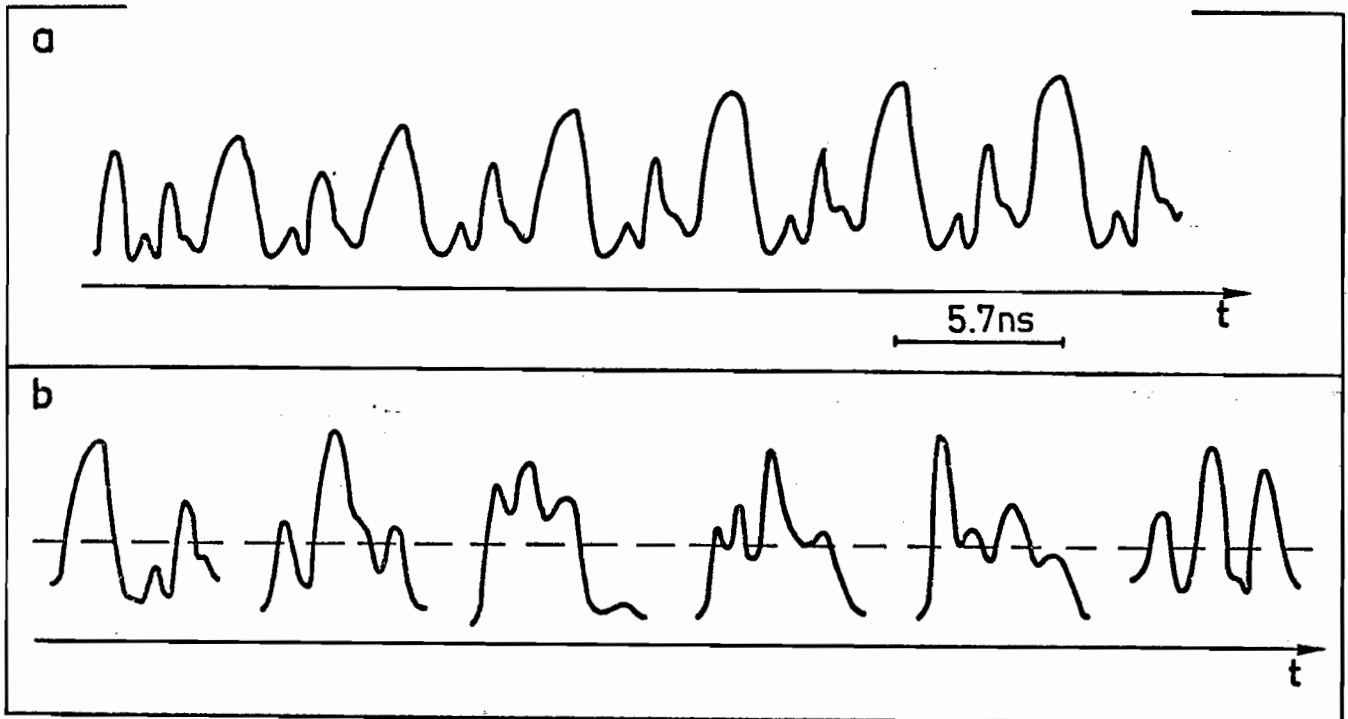


Fig. 7 (a) An example of pulse oscillogram when the laser oscillates on a small number of adjacent modes (6 to 8). The oscilloscope sweep speed varies during the first part of the oscillogram.

A sweep without signal gives the intensity origin.

Fig. 7 (b) Several examples of overintensity patterns exhibited by six successive shots.

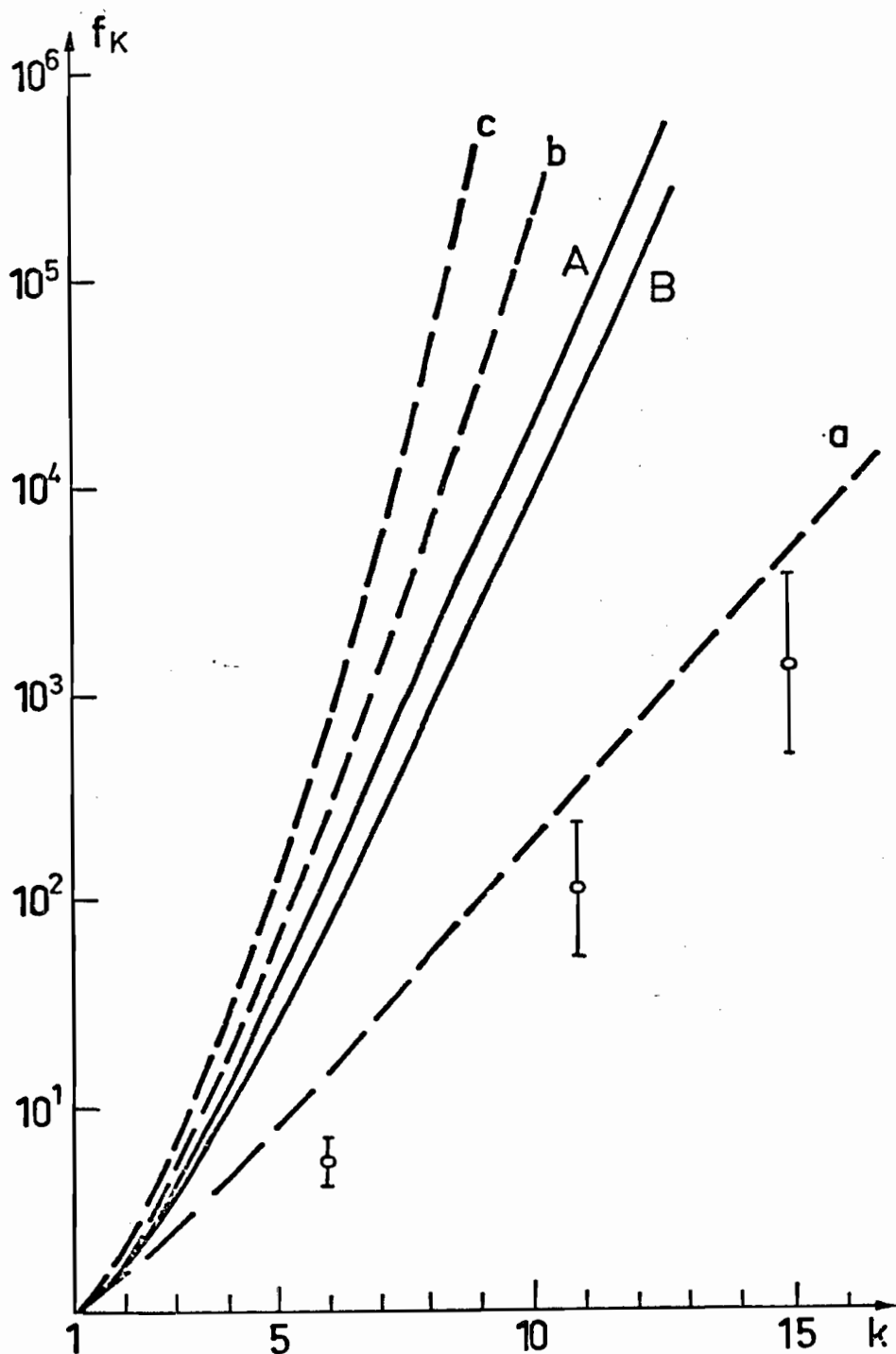


Fig. 8 Measured values of  $f_6$ ,  $f_{11}$  and  $f_{15}$  on series of 50 shots.

The bars indicate the normal dispersion of  $\overline{i^k}$  around  $f_k$ .

The curves have been computed from Eq. (20) and give the values of  $f_k$  in the case of phase-independent modes for different spectra.

A, ensemble-averaged spectrum of the laser. B, extremal observed spectral shape. a, b and c (dashed lines) two, eight and an infinite number of equal intensity modes respectively.

range of  $\sim 10^2$ , we have restricted our study to orders  $k \leq 15$ , since, for higher orders, very weak modes plays a substantial role<sup>24</sup>. For  $k = 11$ , the ensemble average  $f_{11} = \langle i^{11} \rangle$  was found to be  $f_{11} = 10^{2 \pm 0.3}$ , which is consistent with the result obtained previously by the 11-th order ionization of Xe atoms<sup>10</sup>. This shows that the amplifiers used in the latter experiment do not perturb significantly the overintensity statistics of the oscillator radiation<sup>24</sup>.

In Fig. 8, some computed curves corresponding to modes with fixed intensities and independent random phases have been represented. These curves are deduced from Eq. (20). The curve A corresponds to the average observed spectrum which is composed of two modes of intensity 1, two modes of intensity 0.5, two modes of intensity 0.1 and at the end two modes of intensity 0.01. The curve B corresponds to a minimal form, observed for some shots in which 80% of the total intensity comes from two modes and the four other modes share equally the rest of the energy. The other cases shown are 2, 8 and an infinity of equal intensity modes.

Since the experimental points are clearly under the curves A and B, in Fig. 8, a principal result of this study is that the modes are phase-correlated. With the exception of ref. 17 this is the first observation of a partial frequency self-modulation in a solid-state laser radiation. This effect could not have been observed in previous experiments for two reasons. First, only small order processes have been used so far. Second, such a drastic diminution of the spectral width is not commonly used. In relation with this second point it may be asked if the selective elements inserted in the laser cavity play any role in the observed phase-correlation effect. A negative answer to this question is deduced from the additional results described below. Let us note from Fig. 8 that the variation of the overintensity moment  $f_k$  of the seven phase-correlated modes as a function of  $k$  is close to the curve corresponding to two (phase-independent) equal intensity modes. So the relationships between the complex mode amplitudes for partial frequency self-modulation seem to be characterised merely by an effective number  $\bar{M}$  defined by Eq. (27). In this case  $\bar{M} \sim 2$ .

#### 4.2. Multi-line laser

In a second series of experiments, we have measured the 11-order overintensity moment of laser radiation as a function of the number of spectral lines. Each line was composed of 8 to 12 adjacent modes. The details of the experiments will be published in a forthcoming paper<sup>19</sup>. We only report here the final results (Fig. 9). In the same Fig. 9 the curves deduced from Eq. (28) for  $\bar{M} = 1, 3$  and 10 are plotted. The experimental points are close to the curve corresponding to  $\bar{M} = 3$ . Therefore, according to these results, the "independent domain model" seems to be adequate. Indeed the measured value of  $f_{11}$  in the case of ten lines  $0.4 \text{ \AA}$  apart which is equal to  $10^{6.8 \pm 0.4}$  is close to the value  $11! = 10^{7.6}$ . The fact that  $f_{11}$  exhibits a sharp increase for small value of  $R$  indicates that the ten modes inside each line are FM-type correlated. The observed degree of freedom  $\bar{M} \sim 3$  is less than the actual number of modes  $M \sim 10$ .

No presently available theory accounts for our phenomenological "independent domain model". We believe that progress in this field would be obtained more easily by developing the "time" approach<sup>12, 31</sup> rather than the "spectral" approach<sup>20</sup>. Indeed the results we have obtained may be interpreted in the following manner. At the beginning of the pulse, the broadband spontaneous field initiates the laser radiation. The active cavity operates a positive-gain linear filtering that does not perturb the initial independence of the high-Q mode phases<sup>17</sup>. When the field power reaches a sufficient value, nonlinear effects begin to appear. This may result in distortion of both the overintensity pattern and of the spectral distribution. Since in our case the former pattern is found to be constant<sup>9</sup> (during the growing part of the pulse), the predominant nonlinear effect may be the variation of the refractive index inside the active media. Indeed, this effect produces an increase of the spectral width (i.e. the number of modes) from the threshold value, but does not modify the overintensity pattern<sup>32</sup>. The relevant coefficient  $n_2 = \partial n / \partial |E|^2$  has been found to be one order of magnitude larger in the nanosecond range than in the picosecond one<sup>33</sup>. This may explain the observed distinction between nearby and distant modes. Indeed, with the value<sup>33</sup>  $n_2 = 2 \times 10^{-13}$  e.s.u for picosecond pulses and the electric field  $6 \times 10^6 \text{ V m}^{-1}$ , the frequency modulation between different lines is not sufficient to produce a relevant spectral width in-

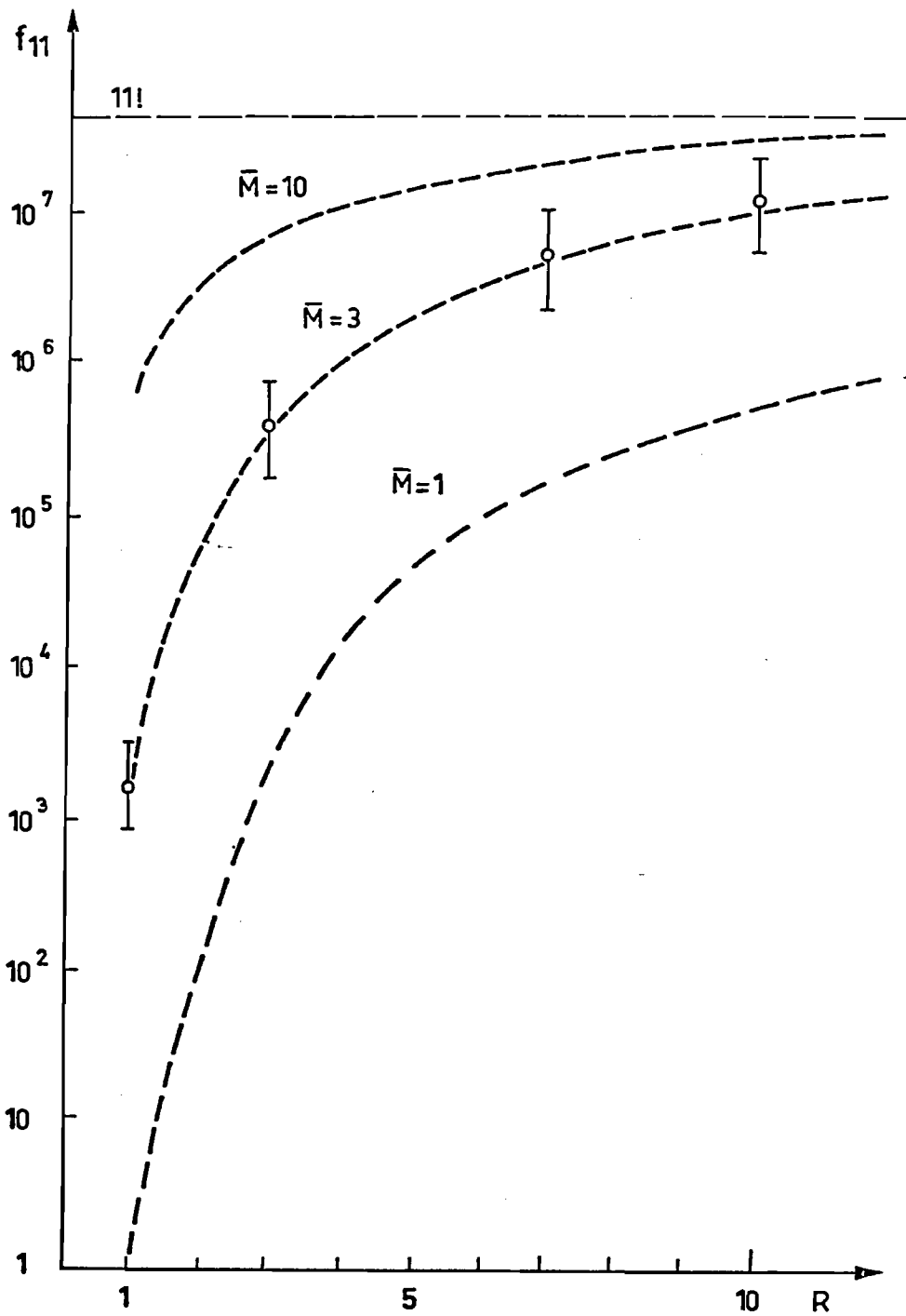


Fig. 9 11-th order overintensity moment as a function of the number of lines  $R$  present in the laser spectrum. Each line contains ten modes. The dashed curves are deduced from Eq. (28) for  $\bar{M} = 1$ , for  $\bar{M} = 3$  and for  $\bar{M} = 10$ .



crease, so the lines are phase independent<sup>24</sup>. On the other hand, the value of  $n_2$  in the nanosecond domain is sufficient to explain the difference between the observed number of modes per line  $M$  and the equivalent number  $\bar{M}$  introduced above<sup>24</sup>. Thus, this last parameter may be physically interpreted as the mean number of excited modes (inside a line) just above threshold.

## 5. CONCLUSIONS

In the measurement of a  $k$ -th order nonlinear rate with a pulsed field, the correction factor that takes into account the temporal coherence properties of the field depends on the experimental procedure. In particular if one eliminates the shot to shot fluctuations of the time-integrated intensity  $\bar{I}(t)$  by measuring it at each shot, the correction factor is the  $k$ -th order moment of the overintensity  $i(t) = I(t)/\bar{I}(t)$ . It is inferred on the basis of the experiments that the fluctuations of  $i(t)$  are not correlated with those of  $\bar{I}(t)$  and depend only on the stochastic properties of the relative complex amplitudes of the longitudinal modes of the top of the pulse.

When the Q-switched laser spectrum is reduced to a group of a few adjacent longitudinal modes, the direct measurements on pulse patterns as well as an 11-order multiphoton ionization experiment indicate that the overintensity moment is less than the value it would have with the assumption of phase-independent modes. It is concluded that the modes are phase-correlated by a self-FM modulation phenomena. This effect is probably due to a reactive nonlinear interaction in the  $\text{Nd}^{3+}$  doped glass rod during the giant pulse formation.

When the Q-switched laser spectrum is composed of a number of mode groups forming  $R$  distinct lines, the measured efficiency of the 11-order process as a function of  $R$  exhibits a sharp increase for small values of  $R$  followed by a tendency towards a value close to  $11!$  in the region of saturation. The results are again not explicable with the model of phase-independent modes but are consistent with the model of phase-independent lines composed of partial F-M phase-correlated modes.



The author would like to thank Dr. C. MANUS and Dr. G. MAINFRAY for initiating this work and is indebted to Professor B. PICINBONO and Dr M. ROUSSEAU for helpful discussions. He is also grateful for discussions with Professor P. LAMBROPOULOS and Dr. M. Ya. SCHELEV.

-----

## APPENDIX A

Consider R lines composed of M equal intensity modes. Denote the relative complex amplitude of the m-th mode belonging to the r-th line by  $\alpha_m$ . The instantaneous overintensity may be written as

$$i = \left| \sum_{r=1}^R \beta_r \right|^2 \quad (\text{A.1})$$

with

$$\beta_r = \sum_{m=1}^M \alpha_{rm} \quad (\text{A.2})$$

and

$$\alpha_m = (R M)^{-1} \exp(i \varphi_{rm}) \quad (\text{A.3})$$

With the assumption of phase-independence between modes of different lines, the following expression of the overall overintensity moment is derived :

$$f_k^{(R,M)} \equiv \langle i^k \rangle = (k!)^2 \sum_{p_1 + \dots + p_R = k} \prod_{r=1}^R (p_r!)^{-2} \langle |\beta_r|^{2p_r} \rangle \quad (\text{A.4})$$

Assume now that all the lines have the same individual overintensity moments  $f_q^{(M)}$  ; i.e. the statistics of the mode phases inside a line are identical for all the lines. These moments are defined by

$$f_q^{(M)} = R^q \langle |\beta_r|^{2q} \rangle \quad (\text{A.5})$$

In particular, if all the modes were independent, one would obtain :

$$f_q^{(M_{ind})} = P_q(M) \quad (\text{A.6})$$

and

$$f_k^{(R, M_{ind})} = P_k(R, M) \quad (A.7)$$

where  $P_q$  is the  $q$ -th polynomial introduced by Eqs (20) and (21).

Therefore, as the terms in the sum of Eq. (A.4) are all positive and because  $f_q^{(M)} \gg 1$ , the condition (22) is sufficient to derive Eq. (23).

-----

## APPENDIX B

Consider  $M$  independent Gaussian modes with identical average intensity  $\langle |a_m|^2 \rangle = 1$ . The distribution law of the  $M$ -fold random variable  $\{a_m\}$  is a function of  $\bar{I} = \sum_m a_m^2$ . Therefore Eq. (18) holds and we may write, with  $I \equiv \sum_m |a_m|^2 \equiv \bar{I} \cdot i$  :

$$\langle I^k \rangle = \langle \bar{I}^k \rangle \langle i^k \rangle \quad (B.1)$$

The distribution law of  $\bar{I}$  is given by the  $M$ -fold convolution product of the distribution law of one mode intensity, namely

$$\exp(-\bar{I}) * \dots * \exp(-\bar{I}) = \frac{\bar{I}^{M-1} \exp(-\bar{I})}{(M-1)!} \quad (B.2)$$

and the value of  $\langle \bar{I}^k \rangle$  is

$$\langle \bar{I}^k \rangle = \int_0^\infty \frac{\bar{I}^{k+M-1}}{(M-1)!} \exp(-\bar{I}) d\bar{I} = \frac{(k+M-1)!}{(M-1)!} \quad (B.3)$$

The value of  $I^k$  is given by the well-known result :

$$\langle I^k \rangle = k! \langle I \rangle^k = k! M^k \quad (B.4)$$

Therefore, from Eqs. (B.1), (B.3) and (B.4) the overintensity moment is given by :

$$f_k = \frac{\langle I^k \rangle}{\langle \bar{I}^k \rangle} = k! \frac{M^k (M-1)!}{(k+M-1)!} \quad (B.5)$$

REFERENCES

1. MOLLOW B.R.  
Phys. Rev. 175 (1968) 1555.
2. AGARWAL G.S.  
Phys. Rev. A 1 (1970) 1445.
3. DUCUING J. and BLOEMBERGEN N.  
Phys. Rev. A 133 (1964) 1493.
4. TOMOV I.V. and CHIRKIN A.S.  
Kvantovaya Electronica 1 (1971) 110.  
Sov. J. Quantum Electron. 1 (1971) 79.
5. The theoretical connexion between a nonlinear process and the coherence properties of the field inducing the process has been pointed out for the first time by LAMBROPOULOS P., KIKUCHI C. and OSBORN R.K. Phys. Rev. 144 (1966) 1081.  
However, in the present paper, we do not deal with the absolute coherence properties of the field but only with relative coherence properties. Indeed we consider the single-mode radiation as completely deterministic because we are able to measure the instantaneous intensity during the interaction.
6. DEBETHUNE J.L.  
Nuovo Cimento 12 B (1972) 101.
7. HODARA H. and GEORGE N.  
IEEE J. Quantum Electron. QE-2 (1966) 337.
8. MALYSHEV B.I., MARKIN A.S., MALASOV A.V. and SYCHEV A.A.  
Zh. Eksp Teor. Fiz. 57 (1969) 827.  
Sov. Phys. JETP 30 (1970) 453.
9. SANCHEZ F. and LECOMPTE C.  
Appl. Opt. 13 (1974) 1071.

10. LECOMPTE C., MAINFRAY G., MANUS C., and SANCHEZ F.  
Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 265.
11. KOROBKIN V.V. and SCHELEV M. Ya.  
Zh. Eksp. Teor. Fiz. 53 (1967) 1230.  
Sov. Phys. JETP 26 (1968) 721.
12. FLECK J.A. Jr.  
Phys. Rev. B 1 (1970) 84.
13. BARAVIAN G., BENATTAR R., BRETAGNE J., GODART J.L. and SULTAN G.  
Appl. Phys. Lett. 16 (1970) 162.
14. HELD B., MAINFRAY G., MANUS C., MORELLEC J. and SANCHEZ F.  
Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 423.
15. KURTZ S.K. and SHAPIRO S.L.  
Phys. Lett. A 28 (1968) 17.
16. WANG C.C. and BAARDSEN E.L.  
Appl. Phys. Lett. 15 (1969) 396.
17. BABENKO V.A., ZEL'DOVICH. Ya., MALYSHEV V.I. and SYCHEV A.A.  
Zh. Eksp. Teor. Fiz. 61 (1972) 61.  
Sov. Phys. JETP, 34 (1972) 1216.
18. CHERNOV V.A.  
Zh. Tekh. Fiz. 43 (1973) 884.  
Sov. Phys. Techn. Phys. 18 (1973) 562.
19. LECOMPTE C., MAINFRAY G., MANUS C. and SANCHEZ F.  
Phys. Rev. A to be published.
20. STATZ H. and BASS M.  
J. Appl. Phys. 40 (1969) 377.
21. BAUES P., HUNDELSHAUSEN U.V. and MOCKEL P.  
Appl. Phys. Lett. 21 (1972) 135.

22. NISHIYAMA Y. and TAKAGI K.  
J. Phys. Soc. Japan 35 (1973) 1723.
23. AUSTON D.H.  
IEEE J. Quantum Electron. (1971) 465.
24. For detailed calculation, see SANCHEZ F.  
Thèse de Doctorat, Université de Paris XI, Centre d'Orsay,  
to be published.
25. HARRIS S.E. and McDUFF O.P.  
IEEE J. Quantum Electron. QE-1 (1965) 245.
26. HARRISON E., ROWE and TINGYE L.I.  
IEEE J. Quantum Electron. QE-6 (1970) 49.
27. DERYUGIN I.A. and KURASOV V.N.  
Optika i Spektroskopiya 29 (1970) 345.  
Optics and Spectroscopy 29 (1970) 183.
28. PAKHOMYCHEVA L.A., SVIRIDENKOV E.A., SUCHKOV A.F. TITOVA L.V. and  
CHURILOV S.S.  
Zh ETF Pis. Red. 12 (1970) 60.  
JETP Lett. 12 (1970) 43.
29. PICARD R.H. and SCHWEITZER P.  
Phys. Rev. A 1 (1970) 1803.
30. MALYSHEV B.I., MALASOV A.V. and SYCHEV A.A.  
Zh. Eksp Teor. Fiz. 59 (1970) 48.  
Sov. Phys. JETP 32 (1971) 27.
31. CHERNOV V.A.  
Zh. Tekh. Fiz. 43 (1973) 797.  
Sov. Phys. Tech. Phys. 18 (1973) 500.

32. OSTROVSKII L.A.

Zh. Eksp Teor. Fiz., Pis'ma Red 6 (1967) 807.

JETP Lett. 6 (1967) 260.

33. GREENHOW R.C. and SCHMIDT A.J. GOODWIN

"Advances in Quantum Electronics" London Academic (1974) 247.



IV.2.a. Modèle statistique du champ multimode et justification phénoménologique.

Dans l'article ci-dessus nous interprétons les résultats expérimentaux (moment  $f_{11}$  en fonction de  $M$ ) en proposant un modèle statistique simple : des modes voisins auraient des phases corrélées, tandis que des modes lointains, c'est-à-dire appartenant à des raies distinctes, seraient indépendants. La corrélation entre les phases des modes à l'intérieur d'une raie serait telle que le moment de surintensité est diminué par rapport au cas d'indépendance entre ces phases. Mais les raies étant indépendantes la valeur asymptotique de  $f_k$  quand le nombre  $R$  de raies augmente est  $k!$ , en vertu du théorème central-limite.

Ce modèle nous a été fortement suggéré par nos résultats expérimentaux. Mais à ce stade ce n'était qu'un modèle et c'est pourquoi nous avons utilisé le conditionnel dans le paragraphe précédent. Cependant, nous découvrîmes après coup que deux résultats récents venaient entériner notre modèle.

L'étude expérimentale de V.A. BABENKO et al. [29] indique en effet que le moment de surintensité d'ordre deux d'un laser déclenché est plus faible que celui qu'on pourrait attendre en supposant les phases des modes indépendantes. Ces auteurs ne font cependant aucune distinction entre modes voisins et modes lointains. Ils interprètent leurs résultats en supposant que le phénomène non-linéaire qui couple les phases des modes est la variation d'indice du barreau laser en fonction du champ [30] :

$$n = n_0 + n_2 |E|^2 \quad (\text{IV.10})$$

D'autre part, PICARD et SCWEITZER interprètent certaines anomalies du champ émis par un laser solide à modes artificiellement synchronisés par un absorbant saturable en supposant que les modes se synchronisent par "domaines" ("domain model"), c'est-à-dire que des modes voisins se synchronisent mais que des modes lointains ne se synchronisent pas.

Notre modèle apparaît ainsi comme la réunion des deux idées précédentes (nous ignorions ces deux conceptions lorsque nous proposâmes notre modèle). Ainsi le phénomène non-linéaire responsable des corrélations entre modes voisins pourrait être celui décrit par la relation



(IV.10). Un autre phénomène non-linéaire dont il est fait souvent mention dans la théorie des lasers est la saturation du gain. Toutefois dans notre cas du laser déclenché la conservation du motif de surintensité dans la partie montante et le sommet du pulse semble exclure cette possibilité (nous avons observé que le motif était semblable à celui du sommet jusqu'à un niveau d'intensité égal à  $10^{-2}$ ). La saturation du gain ne se manifeste que par une distorsion du motif dans la partie descendante de l'impulsion.

Il reste à expliquer pourquoi l'effet (IV.10) n'implique pas une modification sensible du motif dans la zone observable montante de l'impulsion. Une explication plausible serait que le couplage des phases entre les modes ne se produirait que dans une zone d'intensité située en dehors des limites de l'observation au moyen d'une cellule rapide (cette observation ne peut en effet se faire que si l'intensité est suffisante). Cependant on peut également supposer que le motif de surintensité ne s'est pas modifié pendant la formation du pulse, mais que le spectre s'est élargi, dans la zone des fortes intensités, sous l'influence de l'effet non-linéaire (IV.10). Le champ d'amplitude  $E(t)$  devient après traversée d'une longueur  $l$  de verre :

$$E'(t) = E(t) \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda} n_2 l |E(t)|^2 \right] \quad (\text{IV.11})$$

Ainsi un champ bi-mode

$$E(t) = E_0 (1 + e^{i\omega t}) \quad (\text{IV.12})$$

devient, avec  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 l E_0^2$

$$E'(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\omega t} e^{im\pi/2} \left[ J_m(2\alpha) - iJ_{m-1}(2\alpha) \right] \quad (\text{IV.13})$$

Les battements entre modes voisins correspondent à une modulation temporelle dans le domaine de la nanoseconde, pour lequel  $n_2 = 2 \cdot 10^{-12}$  u.e.s. =  $2,2 \cdot 10^{-21}$  S.I. [32]. Compte tenu du champ électrique efficace dans le verre ( $n_0 = 1,5$ ) :  $E_0 = 6,5 \cdot 10^6$  V/m et de la longueur totale de verre traversée au sommet du pulse  $l = 0,84$  m, on obtient

$$\alpha \approx 0,5$$

Cette valeur conduit à un élargissement spectral tel que six modes ont une intensité relative supérieure à  $10^{-2}$ , c'est-à-dire qu'on retrouve un spectre analogue à celui effectivement observé. Par contre les battements entre les modes lointains correspondent à une modulation temporelle dans le domaine de la picoseconde, pour lequel  $n_2$  est environ dix fois moindre [32]. Cela explique l'indépendance observée entre les phases des modes lointains.

#### IV.2.b. Discussion.

Au terme de cette étude nous mettons l'accent sur les difficultés que nous avons dû surmonter. Difficultés conceptuelles d'abord pour définir exactement le sujet de l'étude, difficultés de communication ensuite pour faire accepter notre point de vue à la fois aux théoriciens et aux expérimentateurs (ceci explique certaines disparités de notations dans les diverses publications ci-dessus) et notamment pour faire ressortir l'importante notion de surintensité (traduit en anglais par "peak intensity" par l'équipe de Saclay, bien que j'utilise exclusivement le mot "overintensity"). Difficultés expérimentales enfin, que nous allons détailler maintenant car nous n'avons pu le faire dans les diverses publications ci-dessus, principalement pour des raisons de concision dans la rédaction.

La stabilité de l'oscillateur a posé d'importants problèmes mécaniques, le moindre dérèglement d'un miroir signifiant une perte considérable de puissance, voire un arrêt de fonctionnement. Nous avons été obligé de thermostatier le liquide réfrigérant du barreau et l'ensemble de l'oscillateur.

L'amplification a posé les problèmes suivants. Afin d'éviter la super-radiance il a été nécessaire de situer avec précision un diaphragme taillé dans un verre fortement absorbant, placé à l'entrée de la chaîne d'amplificateurs. Afin d'éviter des focalisations à l'intérieur des barreaux amplificateurs il a fallu traiter en anti-reflet les lentilles de l'afocal agrandisseur et faire fonctionner ces lentilles légèrement en dehors de leurs axes. Des variations de position du faisceau en bout de chaîne n'ont pu être rendues négligeables sur un intervalle de deux heures qu'en opérant à température fixe dans l'ensemble du laboratoire. D'autre part la cadence optimale de la chaîne d'amplification était environ trois fois plus longue que celle du pilote, ce qui posa des problèmes de synchronisation.

L'alignement de l'ensemble des appareils optiques était spécialement délicat et ne pouvait s'opérer que dans l'obscurité. Une série de prismes amovibles permettait d'envoyer le faisceau laser infrarouge sur les dispositifs de contrôle temporels et spectraux soit directement, soit après amplification. Dans ce dernier cas il fallait veiller à ce qu'aucune focalisation ne se produise, pouvant endommager le réseau, le Fabry-Pérot, les cellules ou les transformateurs d'image.

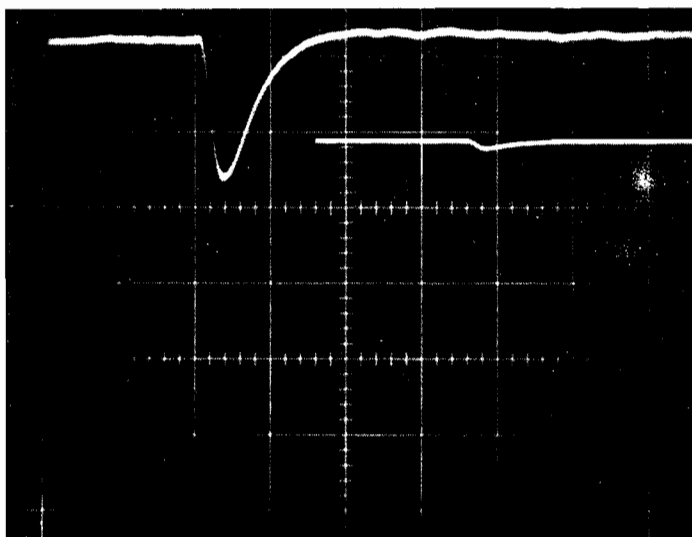
En cours d'expérience une équipe de cinq chercheurs était nécessaire. Le premier enregistre sur papier (à développement rapide) le signal d'ion (figure 10) et mesure l'énergie du pulse au calorimètre (branché sur un micro-voltmètre) le second enregistre sur papier les oscillogrammes de  $\bar{I}(t)$  (figure 11) et, quand c'est possible, de  $I(t)$ , (voir figure 12) puis il mesure la largeur à mi-hauteur  $\tau$  de  $\bar{I}(t)$ . Le troisième porte en échelle log-log, en abscisse le rapport  $E/\tau$  et en ordonnée la valeur maximale du signal d'ions. Le quatrième enregistre le spectre donné par le réseau. Le cinquième contrôle le laser et enregistre le spectre donné par le Fabry-Pérot.

Le phénomène étudié étant fortement non-linéaire ( $k = 11$ ) et la plage de mesure de  $N$  étant faible (2 ordres de grandeur) le domaine de variation de l'éclairement moyen est très faible :  $100^{1/11} \simeq 1,5$ . Lorsque les paramètres de la chaîne laser ne sont pas modifiés on observe une fluctuation de l'éclairement moyen tel qu'il correspond à un facteur d'environ 4 en nombre d'ions. Cette fluctuation provient essentiellement du pilote. Cela signifie que l'effet de groupement vertical du pilote est  $\sim 4$  pour  $k = 11$

$$b_{11} \sim 4 \quad (\text{IV.14})$$

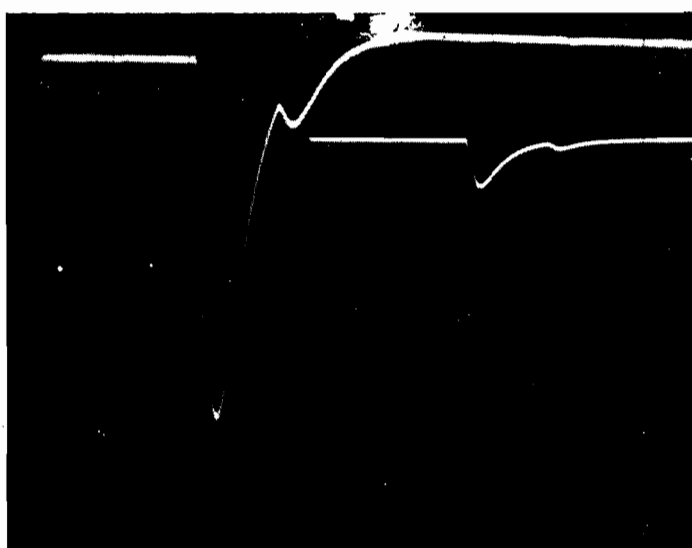
L'effet de groupement absolu est donc  $h_{11} \sim 4 f_{11}$ . Il est important de noter que les précautions prises pour stabiliser le fonctionnement de l'oscillateur (voir ci-dessus) influent directement sur la valeur de l'effet de groupement vertical. Celui-ci est donc caractéristique de l'ensemble du montage. Par contre le moment de surintensité fait intervenir un nombre plus restreint de paramètres, à savoir essentiellement ceux qui jouent un rôle dans la formation d'une liaison statistique entre les phases des modes (voir p. 74).

200  $\mu\text{V}$  |



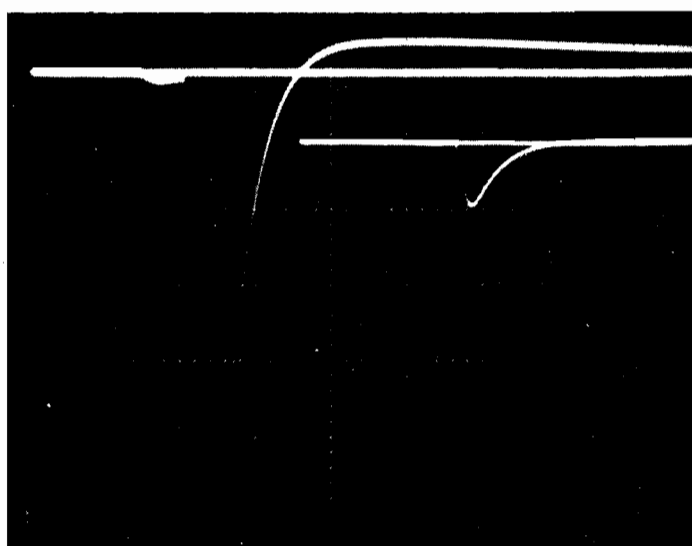
| 5 mV

500  $\mu\text{V}$  |



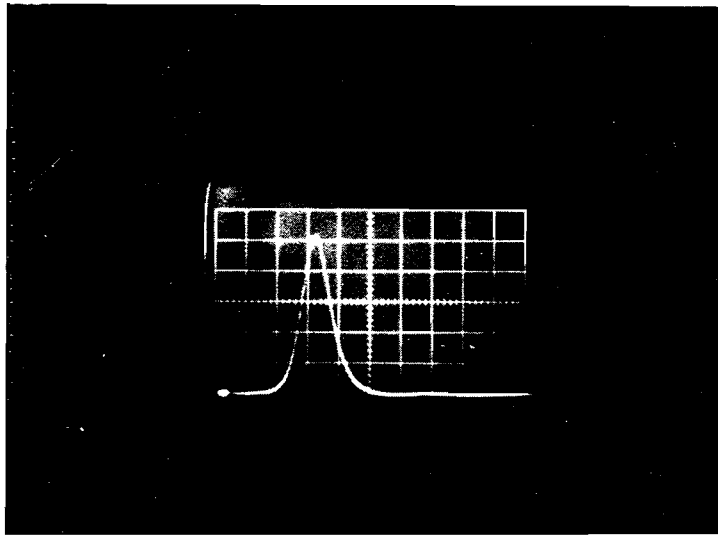
| 5 mV

5 mV |



| 50 mV

Fig. 10 Signal d'ions



100 ns  
—

Fig. 11 Oscillogramme donnant  $\bar{I}(t)$ . Le système de détection est à faible bande passante : les surintensités sont fortement intégrées.

Pour déterminer le spectre moyen nous avons procédé comme suit. Dans le cas d'un faible nombre de modes l'étude au Fabry-Pérot suffit (voir figures page 60.5). Pour un ordre de non-linéarité de 11 le résultat du paragraphe II.4.a. indique qu'on peut se limiter à la considération des modes dont l'intensité est supérieure au centième de celle du mode prépondérant. Quand le laser est bi-mode ce rapport d'intensité conduit à une modulation du pulse aisément mesurable. Quand le laser est multimode on détermine les rapports d'intensité en plaçant contre la photo-cathode du transformateur d'image un coin étalonné. Cette méthode permet de s'affranchir en partie des non-linéarités de la prise de vue photographique. Elle est cependant trop grossière pour que l'on puisse déterminer avec précision le spectre moyen. Cependant elle permet à tout le moins de déterminer une forme minimale du spectre (voir figure 8, la courbe B résultant de (II.54), et la courbe A étant calculée sur ordinateur à partir de (II.49)). Dans le cas de ce dernier spectre (répartition A) nous avons calculé sur ordinateur diverses formes du motif de surintensité correspondant à différentes répartitions des phases (voir figures 13 et 13 bis). Ceci illustre de façon frappante l'influence des relations de phase sur le motif de surintensité. Notre but essentiel étant de comparer le moment de surintensité réel avec celui calculé en supposant les phases des modes équiparties, nous savons (voir page 42) que la forme exacte du spectre n'importe pas. Dans le cas d'un grand nombre de modes (spectre de raies), on observe que les intensités des raies sont voisines, de sorte qu'on peut raisonner sur un spectre carré.

D'autres difficultés expérimentales concernant le dispositif d'ionisation ont été aplanies par l'équipe de Saclay. Par rapport aux expériences antérieures le fait nouveau est que, le laser étant monomode transverse, l'énergie est maximale au centre de la tache et le volume focal plus petit. Le système de collection a été repensé (figure 14). Sa sensibilité est améliorée en utilisant un multiplicateur à dynode continue, alimenté sous 1600 V. La résistance de charge sur l'oscilloscope est de 2,7 k $\Omega$  (régime impulsionnel). La tension de captage des ions est de 430 V/cm. La pompe ionique assure un vide limite dans l'enceinte de  $10^{-8}$  torr. Afin de ne pas perturber le multiplicateur d'électrons secondaires cette pompe ionique doit être coupée avant chaque tir laser. La pression de travail du xénon est de  $5 \cdot 10^{-5}$  torr.

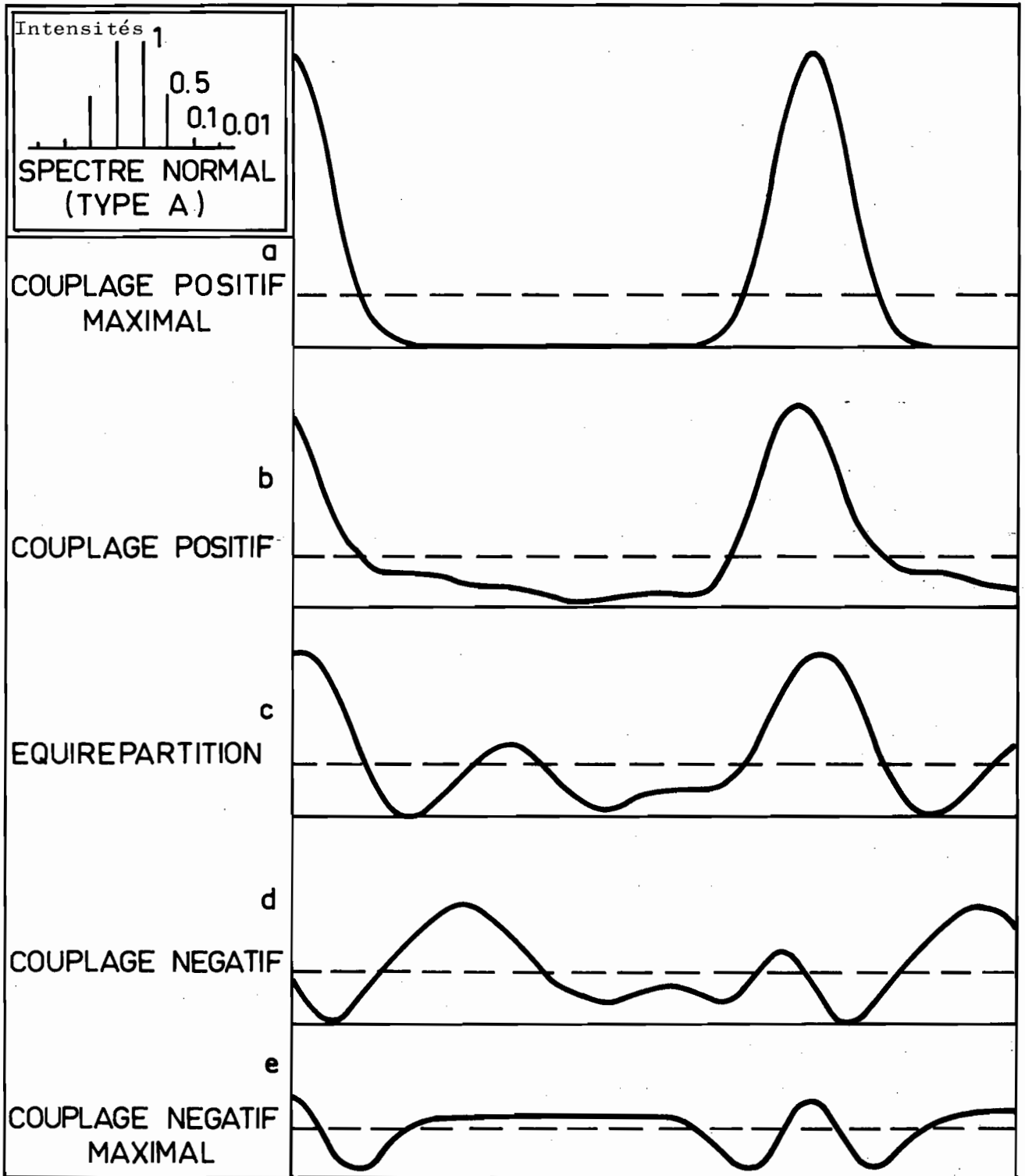


Fig. 13. Motifs de surintensité calculés (les phases des modes sont données dans la figure 13bis, page suivante).

	$\psi'_1$	$\psi'_2$	$\psi'_3$	$\psi'_4$	$\psi'_5$	$\psi'_6$	$\psi'_7$	$\psi'_8$
a	0	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	37	65	58	-4	130	27
c	0	0	214	78	75	-42	84	174
d	0	0	70	50	240	110	95	110
e	0	0	0	0	180	0	0	0

Fig. 13bis Phases réduites, en degré d'angle, correspondant à la figure 13.



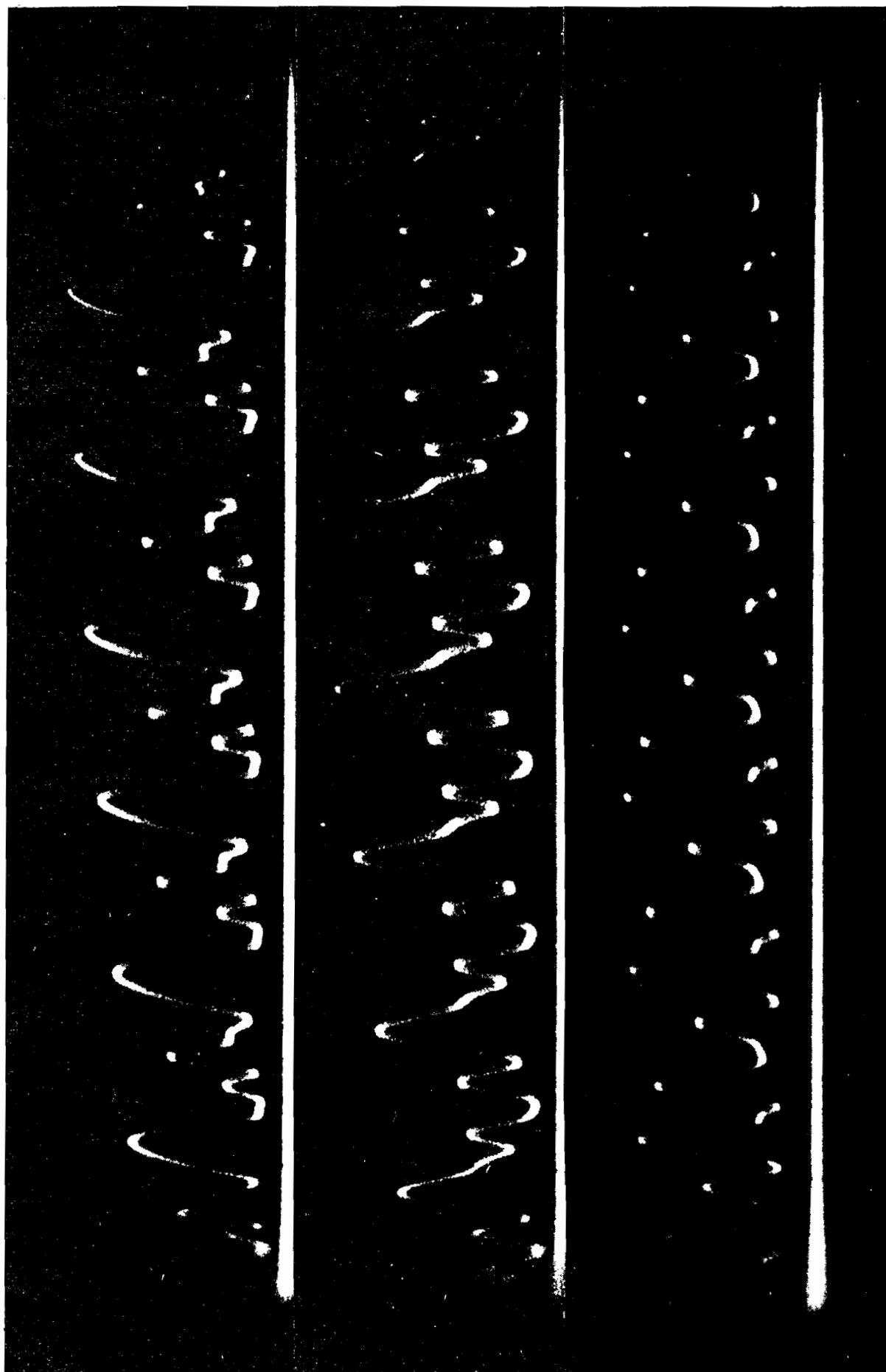


Fig. 12.3 Oscillogrammes de  $I(t)$

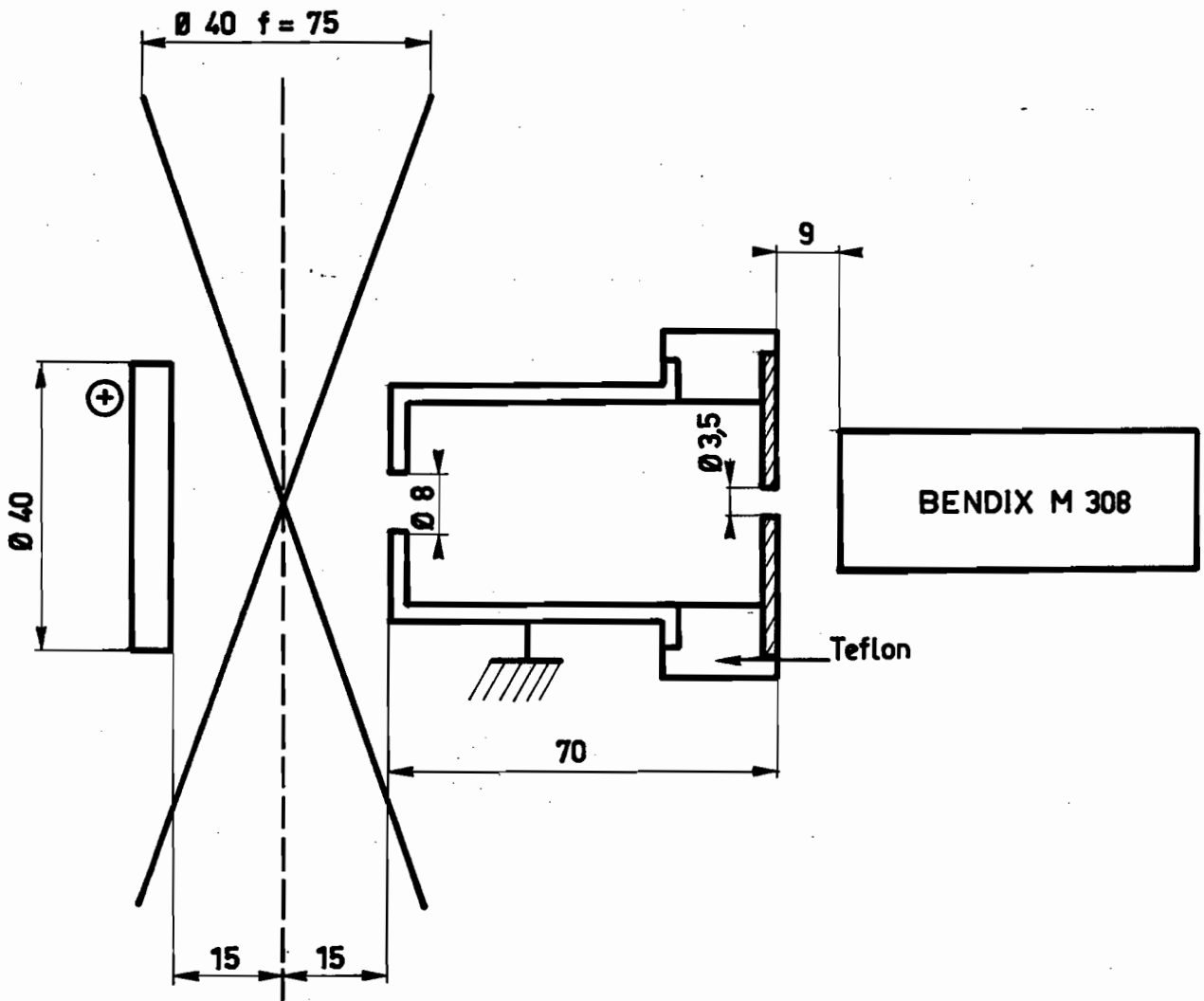


Fig. 14 Système de collection d'ions.

Il est intéressant de noter qu'une équipe de chercheurs russes a abordé récemment ce même problème de l'influence de la cohérence sur le taux d'ionisation multiphotonique. La méthode utilisée consistait à utiliser deux lasers différents : l'un étant monomode, l'autre multimode. Cependant la disparité entre les pentes observées dans les deux cas provoque une indétermination sur l'ordre  $k$  telle que cette expérience n'a débouché sur aucun résultat précis (ces chercheurs remarquent simplement que leur résultat n'est pas contradictoire avec la validité du facteur correctif  $k!$ ), et ce résultat n'a pas été publié [33]. Remarquons également que leur méthode nécessite la mesure séparée des deux volumes focaux, mesure toujours délicate et entachée d'une incertitude importante. Avec notre méthode, qui consiste à utiliser un pilote à nombre de modes variable, à longueur d'onde ajustable et à géométrie de faisceau fixée ( $TEM_{00}$ ), nous éliminons l'écueil des résonances et celui de la mesure du volume focal.

#### IV.3. Intérêt des résultats obtenus.

En ce qui concerne le problème des résonances intermédiaires nous n'avons obtenu que des résultats partiels. Une étude plus complète est en cours à Saclay, basée sur l'utilisation d'un laser monomode à longueur d'onde variable.

Le moment de surintensité du laser étudié est correctement décrit par la formule suivante, où  $k$  est l'ordre de non-linéarité,  $R$  le nombre de raies et  $\bar{M}$  un coefficient voisin de 3

$$f_k = k! \frac{(R \bar{M})^k \Gamma(R \bar{M})}{\Gamma(R \bar{M} + k)} \quad (\text{IV.12})$$

Le problème se pose maintenant de savoir si cette relation est générale pour les lasers déclenchés multimodes.

Nous avons vu qu'il existe une justification phénoménologique simple de (IV.12), basée sur l'effet de variation d'indice en fonction du champ (IV.11). Dans ce contexte on peut attribuer une certaine généralité à la relation (IV.12), tout au moins pour les lasers à néodyme, en fonctionnement déclenché.

Pour déterminer le facteur correctif qu'il convient d'appliquer aux mesures de section efficace d'ionisation multiphotoniques effectuées, au cours de ces dernières années, au moyen d'un laser au néodyme sans sélection de mode, et en supposant que (IV.12) soit applicable il convient :

1) de ne considérer que les ionisations directes, ce qui implique que la pente expérimentale doit être la pente théorique,

2) de connaître les nombres  $R$  et  $\bar{M}$  des lasers utilisés.

En fait il résulte de nos expériences que même dans le cas où on supprime apparemment toutes les sous-cavités dans la cavité de l'oscillateur, il est très difficile d'obtenir un spectre uniforme. En effet le spectre est tellement sensible aux moindres variations spectrales dans la cavité que des phénomènes de diffusion, diffraction etc ... peuvent intervenir pour produire une sélection. Le spectre se présente toujours sous forme d'un spectre de raies [34]. A plus forte raison lorsque le miroir de sortie du laser est constitué par une lame à faces parallèles on obtient inévitablement un spectre de raies équidistantes, dont l'intervalle spectral est proportionnel à l'inverse de l'épaisseur optique de la lame. Celle-ci étant de l'ordre du centimètre, il en résulte que les raies sont assez éloignées les unes des autres pour que, dans notre modèle, les raies soient indépendantes. Pour une largeur spectrale totale de quelques Å, on peut estimer à une dizaine le nombre de raies. Or d'après nos résultats  $\bar{M}$  varie peu avec le coefficient de surtension  $Q$  de la sous-cavité ( $\bar{M} \sim 2$  pour  $Q$  fort et  $\bar{M} \sim 3$  pour  $Q$  faible). La formule (IV.12) indique alors que pour  $k < 20$  la valeur du moment de surintensité du laser est inférieure, mais voisine de  $k!$ . En résumé :

Il est légitime de corriger, en divisant par  $k!$ , la section efficace d'ionisation multiphotonique directe mesurée au moyen d'un laser déclenché au néodyme ordinaire, c'est-à-dire sans sélection draconienne de mode.

A titre d'exemple nous allons calculer ce facteur correctif dans le cas de l'ionisation multiphotonique de l'hydrogène [35]. Cette expérience a été réalisée en utilisant l'harmonique deux  $\lambda = 0,53 \mu$  de façon à éviter une résonance intermédiaire. La pente observée est égale à la pente calculée  $k = 6$ . Cependant la correction n'est pas  $6! = 720$  car le doublément de fréquence modifie la valeur du moment de surintensité. Nous avons vu que le moment  $f_k^i$  de l'onde harmonique est

relié aux moments  $f_2$  et  $f_{2k}$  de l'onde fondamentale par la relation (II.29), qui s'écrit ici

$$f'_k \approx \frac{f_{2k}}{f_2^k} \approx \frac{(2k)!}{2^k} \quad (\text{IV.13})$$

soit pour  $k = 6$ ,  $f'_k = 7,5 \cdot 10^{6*}$ . Cette correction exacte est donc  $10^4$  fois plus importante que la correction inexacte  $6!$

Enfin, une conséquence importante de cette série d'expériences est que nous avons prouvé qu'il était pratiquement possible de sélectionner un seul mode transverse et un seul mode longitudinal dans un laser déclenché, ainsi que de faire varier la longueur d'onde à l'intérieur de la largeur de fluorescence du milieu amplificateur. Nous avons ainsi préparé le terrain pour la mise au point de cet outil fondamental qu'est le laser déclenché monomode à longueur d'onde variable. L'équipe de MM. MAINFRAY et MANUS a récemment mis au point un tel oscillateur (déclenché par absorbant saturable) et l'utilise afin d'étudier plus à fond le problème des résonances intermédiaires, le but final étant de remonter aux déplacements de niveaux des atomes sous l'influence de champs forts.

\*N.B. On peut objecter que les précédentes expériences d'ionisation multiphotonique furent effectuées au moyen de lasers polymodes transverses (déclenchés par prisme tournant). Cependant, dans la plupart des tirs, les pulses présentaient une structure erratique périodique et ceci suffit à justifier que la correction mentionnée concernant la cohérence temporelle est applicable. A ce sujet, signalons que les expérimentateurs commettaient l'erreur de tenir compte de ces fluctuations, puis appliquaient le facteur correctif  $k!$  (d'ailleurs erroné dans ce cas). Ils comptaient donc deux fois l'influence de l'incohérence temporelle, dont la première était malgré tout très affaiblie en raison de la faible bande passante du détecteur.

## CONCLUSION

La quantité statistique d'un champ intervenant dans la mesure de la section efficace d'un phénomène non-linéaire dépend de la procédure expérimentale utilisée. Lorsque le processus dépend de la puissance  $k$  de l'intensité instantanée du champ, cette quantité peut être soit le moment  $\langle I^k \rangle / \langle I \rangle^k$ , soit le moment  $\langle (I/\bar{I})^k \rangle = f_k$ . En général les expérimentateurs tirent le maximum d'information de leurs résultats (en ce qui concerne l'atome), et la procédure qu'ils utilisent fait intervenir le deuxième type (moment de surintensité). Par contre les statisticiens n'ont jusqu'ici considéré que les effets de groupement du premier type. Cette distinction, sans intérêt pour un champ stationnaire ergodique, est nécessaire pour un champ non-stationnaire, tel que celui émis par un laser déclenché.

Lorsqu'un laser fonctionne sur  $M$  fréquences de résonance de sa cavité le moment de surintensité vérifie l'inéquation, valable pour n'importe quel champ à amplitude périodique :

$$1 \leq f_k \leq M^{k-1}$$

Le moment de surintensité d'un champ gaussien polarisé comportant  $M$  fréquences équidistantes de même poids statistique est

$$f_k = k! \frac{M^k (M-1)!}{(M+k-1)!}$$

L'utilisation du phénomène d'ionisation multiphotonique du xénon par la radiation émise par une chaîne laser au verre dopé au néodyme a permis la mesure du moment  $f_{11}$  pour des valeurs de  $M$  comprises entre 1 et 100. Les résultats montrent que des modes distants ( $\Delta \lambda > 0,5 \text{ \AA}$ ) ont des phases indépendantes, mais des modes voisins ont des phases cor-

réelées. En cela ce champ se distingue d'un pulse de lumière gaussienne de même spectre.

Cependant lorsque le nombre de raies présentes dans le spectre du champ est supérieur à  $k$  le moment de surintensité est voisin de  $k!$  Nous avons ainsi mesuré dans le cas typique de 10 raies s'étendant sur 5 Å la valeur  $10^{6,8 \pm 0,4}$  proche de  $11! = 10^{7,6}$ . Les expérimentateurs sont donc fondés de corriger leurs résultats obtenus avec ce type de laser en divisant la section efficace mesurée par le facteur

$$f_k = k! \frac{(\overline{RM})^k \Gamma(\overline{RM})}{\Gamma(\overline{RM} + k)}$$

où  $R$  est le nombre de raies et  $\overline{M} \sim 3$ . Si l'expérience est effectuée en utilisant l'harmonique 2 de ce champ, le facteur correctif est voisin de  $f_{2k}/f_2^k$ .

Toutefois cette correction ne peut s'appliquer que si le processus d'ionisation ne fait pas intervenir de résonance intermédiaire, c'est-à-dire lorsque l'ordre de non-linéarité coïncide avec la valeur calculée pour l'ionisation directe. Nous avons en effet observé que ces deux valeurs peuvent différer notablement (dans les deux sens) lorsqu'une résonance entre en jeu.

La distinction entre le nombre réel de modes par raie  $M$  et le nombre de paramètres indépendants  $\overline{M}$  est expliquée quantitativement par l'effet de variation d'indice du barreau de verre dopé au néodyme en fonction de l'intensité du champ.  $\overline{M}$  apparaît alors comme le nombre de modes apparaissant juste au-dessus du seuil.

Négligeable dans notre cas, un effet de couplage entre les raies doit apparaître pour des lasers à plus forte densité de puissance : il faudrait alors dans la formule ci-dessus remplacer le nombre de raies  $R$  par un paramètre  $\overline{R} < R$ , que l'on peut calculer de la même façon.

Enfin, pour un réglage donné du laser aucune corrélation entre  $\overline{I}(t)$  et  $i(t)$  n'a été observée. En effet nous avons montré qu'une telle corrélation se serait manifesté par des "pentes locales" différant de la "pente d'ensemble" des points expérimentaux. L'effet de groupement absolu du champ périodique associé au laser est donc égal au produit de l'effet vertical  $b_k$  par le moment de surintensité  $f_k$  :

$$h_k = b_k f_k$$

Contrairement à  $f_k$ , la valeur de  $b_k$  dépend de paramètres non identifiés, mais elle peut être aisément mesurée dans tous les cas. Cette séparation des variables macroscopiques et microscopiques donne, s'il en était besoin, un surcroît d'intérêt au concept de surintensité. L'ensemble de ces résultats peut servir de guide pour l'établissement d'une théorie du laser déclenché multimode.

Nous nous sommes limités aux aspects temporels de la cohérence car le laser étudié est monomode transverse. Il serait intéressant d'étendre ce type d'étude aux phénomènes spatiaux. Nous n'avons pu faire cette étude car le déclenchement par cellule de Pockels impose un nombre de modes transverses très réduit. La notion de surintensité pourrait être étendue aux phénomènes spatiaux, mais cela nécessiterait une mesure du volume focal à chaque tir.

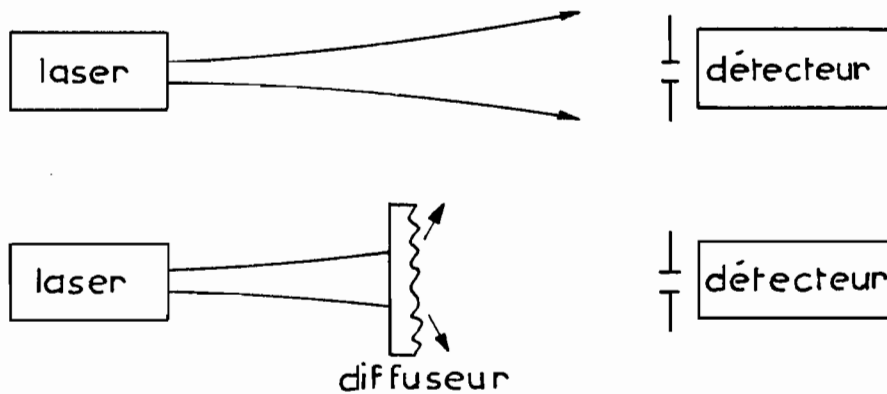


## APPENDICE

### EXPERIENCES CONNEXES

#### Expérience de Shiga et Imamura.

Dans cette expérience [3] les auteurs comparent la section efficace apparente d'absorption à deux photons pour deux types de champs. Le montage particulier qu'ils utilisent est destiné à minimiser les différences entre la géométrie macroscopique des faisceaux. En fait l'expérience peut se résumer ainsi. Dans le premier cas la photo-cathode non-linéaire  $Cs_3Sb$  intercepte une partie du faisceau direct, dans le deuxième cas elle reçoit le champ diffusé par un verre dépoli (figure ci-dessous)



Les auteurs observent que dans le domaine des flux forts, où l'effet bi-photonique l'emporte sur le phénomène résiduel à un photon, la section efficace apparente est supérieure dans le deuxième cas, le rapport étant voisin de 2.

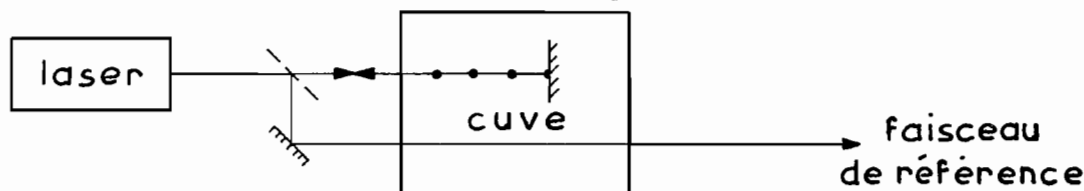
Le laser utilisé est un laser déclenché au néodyme, que les auteurs considèrent comme "purement cohérent" (!), sans qu'ils spéci-

fient le nombre de modes temporels et transverses excités. Le même type d'expérience a été repris par TEICH, ABRAMS et GANDRUD [36] avec un laser monofréquence TEM<sub>00</sub> au CO<sub>2</sub>, avec le même résultat (le phénomène à deux photons étant la génération d'harmonique dans un cristal de BaF<sub>2</sub>).

En fait, dans ce type d'expérience, on n'étudie pas le champ laser pour lui-même, mais plutôt l'influence du diffuseur sur ce champ. Plus précisément on étudie la granulation ("speckle") spatiale produite par le diffuseur dans le plan du détecteur [37]. Concernant les propriétés de cohérence spatiale du laser, cette expérience ne nous apprend rien de plus que ce qu'on peut déduire de la divergence du faisceau, à savoir l'aire de cohérence.

#### Excitation de fluorescence à deux photons.

Avec l'apparition des lasers à phases synchronisées [38] s'est développée une méthode originale pour mesurer la largeur d'impulsions dans le domaine de la picoseconde. Cette méthode consiste à faire interférer le champ avec lui-même réfléchi par un miroir à l'intérieur d'une cuve contenant un liquide à forte section efficace d'absorption à deux photons [39].



L'émission du laser dont les phases des modes sont synchronisées émet un train d'impulsions. Lorsque deux impulsions se rencontrent dans la cuve elles produisent une forte surintensité, c'est-à-dire une forte absorption à deux photons locale, c'est-à-dire une forte intensité de fluorescence. A partir de l'extension d'une zone de forte fluorescence on espérait remonter à la durée des impulsions.

En fait il s'avéra que les lasers déclenchés ordinaires (c'est-à-dire sans synchronisation artificielle au moyen d'un absorbant saturable) donnaient lieu au même type de phénomène, avec à peu près les mêmes dimensions de zones à forte intensité. Le critère important est le

contraste entre l'intensité maximale d'une zone brillante et l'intensité d'une zone intermédiaire. Ce contraste est théoriquement égal à 3 si les phases sont synchronisées, et vaut 1,5 si elles sont indépendantes [40]. Des mesures proches de ces valeurs ont été obtenues. Néanmoins dans le cas d'un laser déclenché ordinaire, une analyse précise de la figure de fluorescence ainsi que du spectre a conduit BABENKO et al. [29] à la conclusion que les phases ne sont pas indépendantes, mais corrélées d'une manière telle que l'importance des surintensités temporelles est diminuée, ce qui est en accord avec nos résultats. Une conclusion analogue se trouve également dans la thèse de BISSON (juin 1970), p. 91 (pour un laser à rubis), le phénomène non-linéaire étudié étant l'effet Raman stimulé dans le spath.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BROWN R.H. and TWISS R.Q.,  
"Correlation between Photons in two Coherent Beams of Light"  
Nature, 177 (1956), 27.
- [2] SUDARSHAN E.C.G.,  
"Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions  
of Statistical Light Beams". Phys. Rev. Lett., 10 (1963), 277.
- [3] SHIGA F. and IMAMURA S.,  
"Experiment on Relation between Two-Photon Absorption and Coherence  
of Light". Phys. Lett., 25 A (1967), 706.
- [4] MAGYAR G. and MANDEL L.,  
"An Interference Experiment with Two Independant Beams of Ruby  
Maser Light". Quantum Electronics (Proceedings of the Third  
International Congress), edited by N. Bloembergen and P. Grivet  
(Dunod et Cie, Paris ; Columbia University Press, New York).
- [5] KAHN F.D.,  
"On Photon Coïncidences and Hanbury Brown's Interferometer"  
Opt. Acta, 5 (1958) 93.
- [6] La méthode exposée dans la Lettre suivante s'apparente à l'"holographie temporelle" : BOILEAU E. Opt. Communications, 2 (1970) 49.  
"Principe d'une expérience de détermination de la fonction de co-  
hérence d'ordre deux d'un laser monomode".

- [7] MANDEL L. and WOLF E.,  
"Cohérence Properties of Optical Fields".  
Rev. of Modern Physics, 37 (1965) 231.
- [8] BRANNEN E. and FERGUSSON H.I.S.,  
"The Question of Correlation between Photons in Coherent Light  
Beams". Nature, 178 (1956) 481.
- [9] BROWN R.H. and TWISS R.Q.,  
"Interferometry of the Intensity Fluctuations in Light. I. Basic  
Theory : the correlation between photons in coherent beams of ra-  
diation". Proc. Roy. Soc. (London), A 242 (1957) 300.
- [10] BARASHEV P.P.,  
"The Multiquantum Photoemissive Effect in Condensed Media and  
Statistical Characteristics of the Multiquantum Photocurrent"  
(II). Phys. Stat. Sol., 9 (1972) 387.
- [11] ROCCA F.,  
"Photodetection Mechanism in the Multiabsorption Case" Talk pre-  
sented at the 6th International IMEKO Symposium on "Photon Detec-  
tors" Siofok (Hungary) 16-19 September 1974.
- [12] PICINBONO B. and BOILEAU E.,  
"Higher-Order Coherence Functions of Optical Fields and Phase  
Fluctuations" J. Opt. Soc. Am., 58 (1968) 784.
- [13] ROUSSEAU M., Thèse de Doctorat n° A.0 6745 (1972) "Etude des  
champs gaussiens généralisés" p. 43.  
Voir aussi BENDJABALLAH C. and PERROT F., Optics Comm., 3 (1971) 21.
- [14] BLANC-LAPIERRE A. et FORTET R.,  
"Theorie des Fonctions Aléatoires" (Masson) 1953.
- [15] ANGOT A.,  
"Compléments de Mathématiques" Editions de la Revue d'Optique,  
Paris, (1965), p. 411.

- [16] DUCUING J. and BLOEMBERGEN,  
"Statistical Fluctuations in Nonlinear Optical Processes".  
Phys. Rev., 133 (1964) 1493.
- [17] DEBETHUNE J.L.,  
"Quantum Correlation Functions for Radiation Fields with Stationary Independent Modes". Il Nuovo Cimento, 12 B (1972) 101.
- [18] TOMOV I.V. and CHIRKIN A.S.,  
"Efficiency of High-Order Optical Harmonic Generation and of Many-Quantum Processes in a Multimode Radiation Field".  
Sov. J. Quantum. Electron. 1 (1971) 79.
- [19] MEADORS J.G.,  
"Coherence Effects in Multiphoton Absorption Processes".  
IEEE J. Quantum Electron. 2 (1966) 638.
- [20] GRUTTER A.A., WEBER H.P. and DANDLIKER R.,  
"Imperfectly Mode-Locked Laser Emission and Its Effects on Non-linear Optics". Phys. Rev., 185 (1969) 629.
- [21] ROUSSEAU M.,  
"Harmonic Analysis and P-representation of Generalized Gaussian Fields". Journal de Physique, 35 (1974) 193.
- [22] YARIV A.,  
"Quantum Electronics" - Chapter 14 "Optical Resonators"  
1968. Ed. John Wiley and Sons, Inc. New-York.
- [23] KOGELNIK and LI T.,  
"Laser beams and resonators". Applied Optics, 5 (1966) 1550.
- [24] SMITH P.W.,  
"Mode Selection in Lasers". Proc. IEEE, 60 (1972) 422.
- [25] YOUNG C.G.,  
"Glass Lasers", Proc. IEEE, 57 (1969) 1267.

- [26] BONCH-BRUEVICH and KHODOVOI,  
"Multiphoton Processes". Soviet Phys. Usp. 8 (1965) 1.
- [27] ROUSSEAU M.,  
Thèse de Doctorat n° AO 6745. "Etude des champs optiques gaussiens généralisés". Chapitre VI "Absorption multiphotonique".
- [28] AGOSTINI P., BARJOT G., MAINFRAY G., MANUS C. and THEBAULT J.,  
"Multiphoton Ionization of Rare Gases at 1,06  $\mu$  and 0,53  $\mu$ ".  
IEEE J. Quantum Electronics Q E 6 (1970) 782.
- [29] BABENKO V.A., ZEL'DOVICH B. Ya, MALISHEV V.I. and SYCHEV A.A.,  
"Radiation Statistics of a Q-switched Neodymium Laser".  
Sov. Phys. JETP 34 (1972) 1216.
- [30] OSTROVSKII L.A.,  
"Frequency Spectrum of Self-Focusing Light Pulses".  
JETP Letters 6 (1967) 260.
- [31] PICARD R.H. and SCHWEITZER P.,  
"Theory of Intensity Correlation Measurements on Imperfectly Mode-Locked lasers". Phys. Rev. A 1 (1970) 1803.
- [32] GREENHOW R.C. and SCHMIDT A.J. GOODWIN,  
"Advances in Quantum Electronics" London Academic (1974) 247.
- [33] DELONE G.A. et al.,  
"Conference on Interaction of Electrons with Strong Electromagnetic Field". Balatonfüred 11-16 Sept. 1972. Hongrie.
- [34] PAKHOMYCHEVA L.A. et al.,  
"Line Structure of Generation Spectra of Lasers with Inhomogeneous Broadening of the Amplification Line". JETP Letters 12 (1970) 43.
- [35] LU-VAN M., MAINFRAY G., MANUS C. and TUGOV I.,  
"Multiphoton Ionization of Atomic and Molecular Hydrogen at 0,53  $\mu$ ".  
Phys. Rev. A 7 (1973) 91.

- [36] TEICH M.C., ABRAMS R.L. and GANDRUD W.B.,  
"Photon-Correlation Enhancement of SHG at 10,6  $\mu\text{m}$ ".  
Optics Comm. 2 (1970) 206.
- [37] ENLOE L.H.,  
"Noise-Like structure in the Image of Diffusely Reflecting Objects  
in Coherent Illumination". Bell. Syst. Tech. J. 46 (1967) 1479.
- [38] DEMARIA A.J., GLENN W.H., BRIENZA M.J. and MACK M.E.,  
"Picosecond laser pulses". Proc. IEEE 57 (1969) 2.
- [39] KLAUDER J.R., DUGUAY M.A., GIORDMAINE J.A. and SHAPIRO S.L.,  
"Correlation effects in the display of picosecond pulses by two-  
photon techniques". Appl. Phys. Letters 13 (1968) 174.
- [40] ROWE H.E. and LI T.,  
"Theory of Two-Photon Measurement of Laser Output".  
IEEE J. Quantum. Electron. 6 (1970) 49.



