



**HAL**  
open science

# Homogénéisation et analyse numérique d'équations elliptiques et paraboliques dégénérées.

Gilles Thouroude

► **To cite this version:**

Gilles Thouroude. Homogénéisation et analyse numérique d'équations elliptiques et paraboliques dégénérées.. Analyse numérique [math.NA]. Ecole Polytechnique X, 2012. Français. NNT : . pastel-00717274

**HAL Id: pastel-00717274**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00717274v1>**

Submitted on 12 Jul 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Homogénéisation et analyse numérique d'équations elliptiques et paraboliques dégénérées.

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 18 juin 2012

pour l'obtention du

**Doctorat de l'École Polytechnique**  
(spécialité mathématiques)

par

Gilles Thouroude

### Composition du jury

*Directeur de thèse :* Antonin Chambolle

*Rapporteurs :* Pierre Cardaliaguet  
Enrico Valdinocci

*Examineurs :* Regis Monneau  
Matteo Novaga  
Hasnaa Zidani



## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Antonin Chambolle, qui m'a guidé depuis mon stage de master dans le monde de la recherche. Je vous suis reconnaissant pour toute l'aide que vous m'avez apportée durant toutes ces années, et pour vos conseils avisés.

Je suis reconnaissant à Pierre Cardaliaguet et Enrico Valdinocci d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Je remercie Hasnaa Zidani des nombreux conseils qu'elle m'a donnés durant mes années de recherches et d'avoir accepté d'être membre de mon jury de thèse. Je remercie également Régis Monneau d'avoir accepté d'être dans mon jury ainsi que de l'intérêt qu'il a porté à mes travaux. Je remercie Matteo Novaga pour sa participation à mon jury.

Merci beaucoup à Adina Ciomaga pour le travail accompli ensemble. Je tiens aussi à remercier Khaled Jalalzai et Michaël Goldman pour toutes les discussions mathématiques que j'ai eues avec eux. Merci aussi à Jean Louet pour l'organisation du groupe de travail de calcul des variations durant cette dernière année.

Merci à tous les doctorants du CMAP avec qui il a été agréable de partager des repas et des discussions sur le RER, le café, la répartition des copies et le barème du DM. Merci tout particulièrement à mes co-bureaux qui ont accepté de répondre à toutes mes questions. Merci au personnel administratif du CMAP qui a toujours répondu avec efficacité et gentillesse à mes besoins. Je me dois aussi de remercier Olivier, Ivan et Cyrille pour avoir réussi à me supporter pendant 3 ans. Merci aussi à mes amis qui m'ont accompagnés pendant ces années.

Je veux aussi remercier mes parents, Joachim et Laurence, Anne-Lise et Sylvain sans qui je n'en serais pas là, Gaspard sans qui j'en serais là quand même. Merci enfin à Anne d'avoir été là toutes ses années.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Problème de minimisation de périmètre : . . . . .	3
1.1.1	Fonctions à variation bornée et ensembles de Caccioppoli : . .	3
1.2	Solutions de viscosités : . . . . .	6
1.2.1	Définition : . . . . .	6
1.2.2	Conditions au bord : . . . . .	6
1.2.3	Stabilité et principe de comparaison : . . . . .	7
1.2.4	Méthode de Perron : . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Planelike minimizers</b>	<b>9</b>
2.1	Introduction . . . . .	9
2.2	Homogenization of the interfacial energy . . . . .	12
2.2.1	Proof of (2.8) . . . . .	12
2.2.2	Proof of the inequality (2.9) . . . . .	17
2.3	A new construction for the plane-like minimizers . . . . .	17
2.4	Elimination of the external field and weaker coercivity . . . . .	22
2.4.1	The coercive case is equivalent to the case $g = 0$ . . . . .	22
2.4.2	Weaker coercivity . . . . .	23
2.4.3	A simple example . . . . .	27
2.5	Proof of (2.6) and some more general statements . . . . .	29
2.6	A pinning result for planelike minimizer . . . . .	32
2.6.1	A sufficient condition . . . . .	33
2.6.2	An example . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Mean curvature motion</b>	<b>39</b>
3.1	Introduction . . . . .	39
3.2	Assumptions . . . . .	40
3.3	Function minimization problem . . . . .	41
3.4	Perimeter minimization problem . . . . .	46
3.5	Study of a radial problem . . . . .	51
3.6	Convergence of the discrete scheme . . . . .	53
3.7	Numerics . . . . .	61

<b>4</b>	<b>Un schéma numérique pour le Laplacien Infini</b>	<b>65</b>
4.1	Introduction . . . . .	65
4.2	Notations . . . . .	67
4.3	Cas périodique . . . . .	67
4.3.1	Rappels : . . . . .	68
4.3.2	Extension du résultat : . . . . .	68
4.3.3	Résultats sur les $u^T$ . . . . .	71
4.4	Problème stationnaire avec données au bord . . . . .	72
4.4.1	Démonstration de la convergence . . . . .	74
4.4.2	Une nouvelle preuve . . . . .	78
4.5	Cas convexe . . . . .	78
4.5.1	Démonstration de la convergence . . . . .	78
4.5.2	une nouvelle preuve . . . . .	86
4.6	Méthodes numériques . . . . .	87
4.7	Exemple : . . . . .	88
4.7.1	Algorithmes : . . . . .	88
4.7.2	Dans le cadre non-périodique : . . . . .	89
4.7.3	Cadre périodique . . . . .	95
4.7.4	Lorsque $H(p) = p^2$ : . . . . .	97
4.7.5	Dépendance de $H$ par rapport à l'espace : . . . . .	97
	<b>Bibliographie</b>	<b>99</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>99</b>

# Table des figures

3.1	Evolution for $F = x^2$ , for small times on the first figure, and long times for the second one . . . . .	62
3.2	Evolution for $F = x^2$ , $F = x^3$ , $F = x^4$ . . . . .	63
4.1	La solution approchée pour $N = 31$ et $T = 0,03$ lorsque la fonction au bord vaut $x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}}$ . . . . .	89
4.2	La solution exacte, $x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}}$ . . . . .	90
4.3	Erreur par rapport à la solution exacte quand $N = 31$ et $T = 0,03$ . . . . .	90
4.4	Estimation d'erreur pour différentes discrétisation de l'espace ( $N$ ) lorsqu'on utilise le schéma LLF (Local lax Friedrich). . . . .	91
4.5	Evolution de l'erreur en fonction du nombre d'itération pour $N = 10$ , $N = 31$ et $N = 61$ et $T = 0,03$ . . . . .	91
4.6	Estimation d'erreur pour différentes discrétisation de l'espace ( $N$ ) lorsqu'on utilise le schéma LLF2. . . . .	92
4.7	Evolution de l'erreur lorsque le paramètre $T$ (temps auquel on arrête les équations d'évolutions) diminue. . . . .	93
4.8	Estimation d'erreur pour différentes discrétisation de l'espace ( $N$ ) lorsqu'on utilise le schéma LLF (Local lax Friedrich). . . . .	94
4.9	Estimation d'erreur pour différentes discrétisation de l'espace ( $N$ ) lorsqu'on utilise le schéma LLF2. . . . .	95
4.10	Evolution de l'erreur lorsque le paramètre $T$ (temps auquel on arrête les équations d'évolutions) diminue pour la fonction $g(x, y) = x - y$ . . . . .	95
4.11	La solution approchée pour $N = 31$ et $T = 0,03$ lorsque la fonction au bord vaut $x - y$ . . . . .	96
4.12	Erreur par rapport à la solution exacte quand $N = 31$ et $T = 0,03$ . . . . .	96
4.13	Convergence vers une constante dans le cadre périodique avec l'algorithme LLF. . . . .	97
4.14	Evolution de l'erreur lorsque le paramètre $T$ change. . . . .	98
4.15	Représentation de la solution approchée lorsque $B = \sqrt{x^2 + y^2}$ $H(p) =  p $ et $g(x, y) = xy$ . . . . .	98





# Chapitre 1

## Introduction

Cette thèse s'organise en 4 chapitres. Le premier est un chapitre introductif dans lequel on présentera tout d'abord les problèmes de minimisation de périmètre, les ensembles à périmètre fini et les fonctions à variation bornée. Puis nous présenterons la notion de solution de viscosité, et les principaux résultats de cette théorie qui nous seront utiles. Ensuite, je présenterai un résultat lié à la recherche de minimiseurs globaux dans le cadre d'un problème de type :

$$\min \mathcal{J}(E) := \text{Per}(E) + \int_E g(x)dx$$

avec  $g$  une fonction périodique à moyenne nulle.

On appellera  $E$  un minimiseur global de  $\mathcal{J}$  un ensemble tel que, pour tout ouvert borné  $\Omega$ , et pour tout ensemble  $F \subset \mathbb{R}^N$  tel que  $F \Delta E = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) \Subset \Omega$  :

$$\text{Per}(E, \Omega) + \int_{E \cap \Omega} g(x)dx \leq \text{Per}(F, \Omega) + \int_{F \cap \Omega} g(x)dx.$$

Ceci revient à dire que toute perturbation compacte de l'ensemble  $E$  augmente l'énergie  $\mathcal{J}$ . Un résultat de Caffarelli et De la Llave [CdLL01] montre que selon toute direction  $\nu \in \mathbb{R}^N$  il existe des minimiseurs globaux quasi-plan. C'est à dire que l'ensemble  $E$  vérifiera en outre le fait d'être proche d'un hyperplan : il existe un réel  $a$  et une constante  $M$ , indépendante de  $\nu$ , telle que :

$$\begin{aligned} E &\subset \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \nu \geq -M|\nu| + a\} \\ E &\supset \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \nu \leq M|\nu| + a\} \end{aligned}$$

Nous donnons une démonstration un peu plus simple de ce résultat, basée sur la théorie de l'homogénéisation périodique. Ces ensembles sont en effet les "correcteurs" qui permettent d'établir la  $\Gamma$ -convergence de l'énergie :

$$\mathcal{E}_\epsilon(E) = \text{Per}(E; \Omega) + \frac{1}{\epsilon} \int_{E \cap \Omega_\epsilon} g\left(\frac{x}{\epsilon}\right)dx.$$

Nous lierons ensuite cela à d'autres résultats de  $\Gamma$ -convergence pour cette fonctionnelle. En outre, ces ensembles permettent de construire des solutions stationnaires pour des problèmes d'évolution d'interface où la vitesse normale est donnée par :

$$V = \mathcal{K} + g \tag{1.1}$$

où  $\mathcal{K}$  est la courbure moyenne. L'intérêt de ces surfaces stationnaires est qu'il existe des principes de comparaisons pour cette équation. Ainsi, on construit des surfaces

bloquantes pour ces équations, ce qui permet de localiser les solutions : tout ensemble reste contenu dans une “quasi-enveloppe convexe”.

Ensuite, nous étudierons ce qu’il se passe lorsque que l’on ajoute une constante  $\epsilon$  au problème, c’est à dire, lorsqu’on étudiera :

$$\min(\text{Per}(E) + \int_E g(x) + \epsilon dx).$$

On voudra savoir si les mêmes résultats d’existence de minimiseurs globaux quasi-plan existent lorsque l’on perturbe une peu la fonction, et s’il existe un phénomène de pinning et depinning identique à celui étudié dans [DY06].

Dans le chapitre suivant, on construira un algorithme permettant de calculer l’évolution d’un ensemble où la frontière de l’ensemble qui suit une lui du type :  $V = f(\mathcal{K})$ , avec  $f$  une fonction croissante, et  $\mathcal{K}$  la courbure de la frontière de l’ensemble. Pour cela, on voudra utiliser le fait que les ensembles qui minimisent un problème de périmètre vérifient :  $\mathcal{K} + g = 0$  sur le bord de l’ensemble. Cette fois ci, on ne travaillera plus dans un milieu périodique, et le but sera de bien choisir la fonction  $g$  pour pouvoir calculer le mouvement. Etant donné un ensemble initiale  $E_0$ , on va prendre pour  $g$  la fonction  $f^{-1}(\frac{1}{h}\text{sdist}(\cdot, \partial E_0))$ , avec  $\text{sdist}(\cdot, \partial E_0) = \text{dist}(\cdot, E_0) - \text{dist}(\cdot, \Omega \setminus E_0)$ , on va donc résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\min_E \left( \mathcal{F}_h(E; E_0) = \text{Per}(E) + \int_E f^{-1}\left(\frac{1}{h}\text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) \right)$$

Il faut voir  $h$  comme la discrétisation en temps de notre problème. Cette énergie à en outre une attache aux données de part la présence dans le terme d’énergie de la distance signée  $E_0$ . Ainsi en presque tout point du bord d’un minimiseur du problème la courbure moyenne vaut :  $\mathcal{K} = -f^{-1}(\frac{1}{h}\text{sdist}(\cdot, \partial E_0))$ . Ainsi  $\frac{1}{h}\text{sdist}(\cdot, \partial E_0)$  apparaîtra comme une approximation de la vitesse normale du bord.

On va construire la suite  $E_h^n$  :

$$E_h^n = \text{argmin}_E \left\{ \int_{\Omega} |D\chi_E| + \int_{\Omega} f^{-1}\left(\frac{1}{h}\text{sdist}(\cdot, \partial E_h^{n-1})\right)\chi_E \right\}. \quad (P_h^n)$$

qui va être une approximation de l’évolution par courbure moyenne de l’ensemble  $E_0$ . Ceci est une variante d’un schéma du à Luckhaus-Sturzenhecker [LS95] et Almgren-Taylor-Wang [ATW93]. Cette étude va être menée dans le cadre des solutions de viscosité, et on fera le lien entre ses évolutions d’ensembles et les solutions de l’équation :

$$\begin{aligned} u_t + |Du|f\left(\text{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right)\right) &= 0 \\ u(0, x) &= u_0(x). \end{aligned}$$

En fait, si on prend une fonction  $u_0$  telle que :  $\{x, u_0(x) > 0\} = E_0$ , alors on a, avec  $u$  solution de viscosité de l’équation précédente, que pour tout temps  $t > 0$ ,  $\{x, u(x, t) > 0\} = E_t$  avec  $E_t$  l’évolué de  $E_0$  par le mouvement par courbure moyenne.

L’opérateur de courbure moyenne  $|Du|\text{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right)$  est l’opérateur 1-laplacien,  $\Delta_1$  il est dégénéré dans la direction orthogonale aux surfaces de niveaux . Dans le chapitre suivant on s’intéressera à un autre opérateur, le laplacien infini,  $\Delta_{\infty}$  qui lui dégénère le long des surfaces de niveaux. Ces deux opérateurs sont liées par la formule suivante :

$$\Delta_{\infty} = \Delta - \Delta_1.$$

Le laplacien infini est défini par :

$$\Delta_\infty = \frac{1}{|Du|^2} \sum_{i,j} u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j}.$$

Le but de cette dernière partie sera de trouver un algorithme approchant les solutions de viscosité du problème suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta_\infty u &= 0 \text{ sur } \Omega \\ u &= \phi \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

avec  $\phi$  une fonction donnée. Le principe de construction de cet algorithme reposera sur les équations de Aronsson, en effet, si on regarde les équations d'évolutions suivantes :

$$[\text{Principe de décomposition}] \begin{cases} v_t + |Dv| = 0 & (t > 0) \\ w_t - |Dw| = 0 & (t > 0) \\ v = w = u_0 & (t = 0), \end{cases} \quad (1.2)$$

Alors, si on suppose avoir des solutions suffisamment régulières, on obtient :

$$\begin{cases} v(., t) = u - t|Du_0| + \frac{t^2}{2} \Delta_\infty u_0 + o(t^2) \\ w(., t) = u + t|Du_0| + \frac{t^2}{2} \Delta_\infty u_0 + o(t^2) \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{v+w}{2} = u_0 + \frac{t^2}{2} \Delta_\infty u_0 + o(t^2), \quad (1.3)$$

Ainsi, par un procédé itératif on tombera sur un point fixe qui vérifiera  $\Delta_\infty u = 0$ . On verra par la suite qu'on pourra étendre le procédé à d'autres fonctionnelles  $H(x, p)$ . En effet, si on remplace, dans les équations d'évolutions,  $|Dv|$  par  $H(x, Dv)$  on trouvera que  $v$  vérifie :

$$v(., t) = u - tH(x, Du_0) + \frac{t^2}{2} A_H[u_0] + o(t^2)$$

où  $A_H$  est l'opérateur de Aronsson, donné par la formule suivante :

$$A_H[u] = H_{x_i} H_{p_i} + H_{p_i} H_{p_j} u_{x_i x_j}.$$

## 1.1 Problème de minimisation de périmètre :

Une partie de cette thèse reposera sur l'étude de problème où l'on cherchera à minimiser des énergies de la forme :  $\text{Perimètre}(E) + \int_E g$ . Nous allons donc d'abord définir le périmètre, les ensembles à périmètre fini et certaines propriétés de ces ensembles et des solutions de ces problèmes.

### 1.1.1 Fonctions à variation bornée et ensembles de Caccioppoli :

**Définition 1.1.1.** Soit  $N > 0$ , soit  $E$  un ensemble inclu dans  $\mathbb{R}^N$ , soit  $\Omega \in \mathbb{R}^N$ . Nous noterons  $\text{Per}(E, \Omega)$  le périmètre de l'ensemble  $E$  dans  $\Omega$ , et on le calculera selon la formule suivante :

$$\text{Per}(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E \text{div}(g(x)) dx; g \in C_0^1(\Omega), \|g\|_\infty \leq 1 \right\} \quad (1.4)$$

Un ensemble est dit de Caccioppoli (ou de périmètre fini) si  $\text{Per}(E, \Omega) < \infty$ .

Cette notion de périmètre est cohérente, en effet, si l'ensemble est  $C^2$  alors :  $\text{Per}(E, \Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega)$ . Elle est à lié à la notion de variation totale pour les fonctions.

**Définition 1.1.2.** Soit  $f \in L^1(\Omega)$ . Nous appellerons variation totale la quantité :

$$\int_{\Omega} |Df| = \sup \left\{ \int_{\Omega} f \text{div}(g(x)); g \in C_0^1 \text{ et } |g(x)| \leq 1 \text{ pour } x \in \Omega \right\}. \quad (1.5)$$

On dit que  $f$  est à variation bornée dans  $\Omega$  si  $\int_{\Omega} |Df| < \infty$ .

On définit  $BV(\Omega)$  l'espace constitué des fonctions  $L^1(\Omega)$  à variation bornée.

**Remarque 1.1.1.** Soit  $E$  un ensemble à frontière  $C^2$ , soit  $\varphi_E$  la fonction caractéristique de  $E$ , c'est à dire :

$$\varphi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus E. \end{cases} \quad (1.6)$$

Alors, par définition  $\int_{\Omega} |D\varphi_E| = \text{Per}(E, \Omega)$ .

On munit  $BV(\Omega)$  de la norme définie par

$$\|f\|_{BV(\Omega)} = \|f\|_{L^1} + \int_{\Omega} |Df|. \quad (1.7)$$

Muni de cette norme c'est un espace de Banach.

Nous allons maintenant rapidement rappeler quelques résultats importants sur ces ensembles. Pour être précis, nous allons regarder des propriétés de semi-continuité, de compacité et de densité.

**Théorème 1.1.1** (Semi-continuité). *Soit  $\Omega$  un ouvert et  $\{f_j\}$  une suite de fonction  $BV(\Omega)$  qui converge dans  $L^1_{loc}(\Omega)$  vers une fonction  $f$ , alors :*

$$\int_{\Omega} |Df| \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Df_j|.$$

Cela implique bien sûr un résultat équivalent pour les périmètres d'ensembles, la convergence des ensembles étant vu comme la convergence  $L^1$  des fonctions caractéristiques.

Nous allons maintenant voir deux autres propriétés de ces espaces.

**Théorème 1.1.2.** *Soit  $f \in BV(\Omega)$ , alors il existe une suite de fonctions  $\{f_j\} \in C^\infty(\Omega)$  qui converge vers  $f$  dans  $L^1$  et dont la variation totale converge vers celle de  $f$ , c'est à dire :*

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_j - f| dx &= 0 \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Df_j| dx &= \int_{\Omega} |Df| \end{aligned}$$

*Il existe un résultat équivalent pour les ensembles : Soit  $E$  un ensemble de Caccioppoli, alors il existe une suite d'ensemble  $\{E_j\}$ , à frontière  $C^\infty$  dans  $\Omega$ , qui converge vers  $E$  dans  $L^1$  et dont le périmètre converge vers celui de  $E$ , c'est à dire :*

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_{E_j} - \varphi_E| dx &= 0 \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \text{Per}(E_j, \Omega) &= \text{Per}(E, \Omega) \end{aligned}$$

Ce théorème dit que l'on peut approcher les fonctions  $BV$  (ou les ensembles de Caccioppoli) par des fonctions régulières (ou des ensembles réguliers), ce résultat est important car il veut dire que l'on peut en partie travailler sur des fonctions régulières et voir si les propriétés désirées passent à la limite. De plus, pour les ensembles, on peut aussi approcher un ensemble  $E$  par une suite d'ensembles polynomiaux.

**Théorème 1.1.3** (Compacité pour les fonctions). *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  à frontière Lipschitz. Alors toute ensemble de fonctions uniformément bornées dans la norme  $BV$  est relativement compact dans  $L^1(\Omega)$ .*

**Théorème 1.1.4** (Compacité pour les ensembles). *Soit  $E_j$  une suite d'ensemble de Caccioppoli dont le périmètre est uniformément borné. Alors, il existe une sous-suite qui converge vers un ensemble de Caccioppoli  $E$ .*

Nous allons maintenant présenter deux inégalités importantes pour ces fonctions, ces inégalités permettent de contrôler les normes  $L^1$  par rapport aux variations de la fonction

**Théorème 1.1.5** (Formule de la co-aire). *Soit  $f \in BV(\Omega)$ , soit*

$$F_t = \{x \in \Omega; f(x) > t\}.$$

Alors :

$$\int_{\Omega} |Df| = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\Omega} |D\varphi_{F_t}|.$$

Et :

**Théorème 1.1.6** (inégalité de Sobolev). *Soit  $f \in BV(\mathbb{R}^N)$ , alors il existe  $c_1$  ne dépendant que de  $N$  tel que :*

$$\left( \int |f|^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \leq c_1 \int |Df|.$$

Soit  $\rho$  positif, soit :

$$f_{\rho} = \frac{1}{|B_{\rho}|} \int_{B_{\rho}} f dx,$$

alors il existe  $c_2$  ne dépendant que de  $N$  tel que :

$$\left( \int_{B_{\rho}} |f - f_{\rho}|^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \leq c_2 \int_{B_{\rho}} |Df|.$$

Ce théorème à un équivalent pour les ensembles :

**Théorème 1.1.7** (inégalités isopérimétriques). *Soit  $E$  un ensemble borné de Caccioppoli, alors :*

$$|E|^{\frac{N-1}{N}} \leq c_1 \int |D\varphi_E|,$$

et :

$$\min(|E \cap B_{\rho}|, |(\mathbb{R}^N \setminus E) \cap B_{\rho}|)^{\frac{N-1}{N}} \leq c_2 \int_{B_{\rho}} |D\varphi_E|.$$

## 1.2 Solutions de viscosités :

### 1.2.1 Définition :

Nous utiliserons aussi régulièrement la notion de solution de viscosité, nous allons donc rappeler rapidement la définition de solution de viscosité, et les principaux résultats concernant ces solutions.

Soit  $H(x, t, p, X) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times N} \rightarrow \mathbb{R}$  un Hamiltonien elliptique, c'est à dire que :

$$H(x, t, p, X) \leq H(x, t, p, Y) \quad \text{si } X \geq Y$$

Nous souhaitons résoudre l'équation :

$$H(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (1.8)$$

avec  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ .

Considérons tout d'abord que cette équation à une solution régulière  $u$ . Soit  $\phi$  une autre fonction régulière, alors si  $x_0$  est un point de maximum local de  $u - \phi$ , on a que  $\nabla u(x_0) = \nabla \phi(x_0)$  et  $D^2u(x_0) \leq D^2\phi(x_0)$ . Ceci implique que :

$$0 = H(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0)) \geq H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)).$$

On a, de même, si  $x_0$  est un point de minimum local de  $u - \phi$  :

$$0 = H(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0)) \leq H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)).$$

L'idée des solutions de viscosité est d'utiliser cette propriété des solutions régulières pour pouvoir caractériser des solutions irrégulières (car on regardera l'Hamiltonien pour des solutions régulières).

**Définition 1.2.1.** –  $u$  est une sous-solution de viscosité de (1.8) si et seulement si pour toute fonction  $\phi$  régulière, et tout point  $x_0$  minimum local de  $u - \phi$ , on a :

$$0 \leq H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)). \quad (1.9)$$

–  $u$  est une sur-solution de viscosité de (1.8) si et seulement si pour toute fonction  $\phi$  régulière, et tout point  $x_0$  maximum local de  $u - \phi$ , on a :

$$0 \geq H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)). \quad (1.10)$$

–  $u$  est une solution de viscosité de (1.8) si et seulement si  $u$  est une sous-solution et une sur-solution de viscosité.

On peut donc voir que dans la définition de solution de viscosité, les dérivées de  $u$  n'entre pas en compte, on n'a donc pas besoin d'avoir de régularité sur  $u$ . Bien évidemment, cette définition est cohérente, c'est à dire qu'une solution régulière de l'équation est aussi une solution de viscosité.

### 1.2.2 Conditions au bord :

La façon dont on traite les conditions aux bord est elle même modifiée, en effet, supposons que l'on veuille résoudre un problème du type :

$$\begin{cases} u_t + H(x, u, Du, D^2u) = 0 & \forall x \in \Omega, \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \times [0, T], \\ u = u_0 & \text{on } \bar{\Omega} \times \{0\}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Dans le cadre des solutions de viscosité on ne demande pas à ce que la condition au bord soit vérifiée point par point, on ne demande pas à ce que  $u = g$  en tout point de  $\partial\Omega$ . On relaxe les conditions et elles deviennent :

$$\min\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, t, Du), u - g\right\} \leq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times ]0, T] \quad (1.12)$$

et

$$\max\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, t, Du), u - g\right\} \geq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times ]0, T] \quad (1.13)$$

On retrouve donc le principe de comparaison dans ces équations.

Au temps  $t = 0$  la condition devient :

$$\min\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, t, Du), u - g, u - u_0\right\} \leq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times ]0, T] \quad (1.14)$$

et

$$\max\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, t, Du), u - g, u - u_0\right\} \geq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times ]0, T] \quad (1.15)$$

Ainsi, avec une telle condition il n'est pas nécessaire que  $g$  et  $u_0$  coïncident sur  $\partial\Omega$ .

Un exemple où la condition au bord n'est pas vérifiée de façon exacte mais où il existe une solution au sens de viscosité, par exemple la solution de :

$$\begin{aligned} |u'| &= 1 \quad \text{sur } [0, 1], \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 2. \end{aligned}$$

Un avantage qui apparaît lors de la formulation au sens de viscosité, c'est qu'il n'est plus nécessaire que la condition initiale corresponde à la condition au bord au temps 0, c'est à dire que l'on peut avoir  $g \neq u_0$  sur  $\partial\Omega$ .

### 1.2.3 Stabilité et principe de comparaison :

Un autre résultat important de la théorie des solutions de viscosité est un résultat de stabilité.

**Théorème 1.2.1.** *Soit  $H_\epsilon$  une suite d'Hamiltoniens convergant vers l'Hamiltonien  $H$  dans  $C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S^N)$ . Soit  $u_\epsilon$  solution de viscosité de :*

$$H_\epsilon(x, u_\epsilon, Du_\epsilon, D^2u_\epsilon) = 0.$$

Alors, si  $u_\epsilon \rightharpoonup u$ ,  $u$  est solution de viscosité de :

$$H(x, u, Du, D^2u) = 0.$$

Ce résultat permet d'obtenir des résultats par perturbation de l'équation initiale. Une application classique de ce résultat et la méthode de viscosité évanescence (d'où les solutions de viscosité disent leur nom), elle correspond à étudier le problème :

$$-\epsilon\Delta u_\epsilon + H(x, u_\epsilon, Du_\epsilon) = 0.$$

On a des résultats d'existence et d'unicité pour les  $u_\epsilon$ . Si de plus on peut montrer que  $u_\epsilon$  est borné dans  $L^\infty$  et dans un espace de Hölder  $W^{0,\alpha}$ , alors on peut, en utilisant le théorème d'Ascoli, montrer la convergence d'une sous-suite vers une fonction  $u$  solution de :

$$H(x, u, Du) = 0.$$



L'unicité de la solution à cette dernière équation ne peut pas être montrée par une telle méthode, mais si on connaît l'unicité par un autre résultat, on peut alors montrer la convergence de toute la suite vers  $u$ .

La plupart des résultats de la théorie de viscosité tiennent sur l'existence d'un principe de comparaison. Ces principes consistent à dire que si  $u$  et  $v$  sont deux solutions de viscosités de la même équation (ou respectivement une sous et une sur-solution), et que les conditions aux bords (ou initiales) de  $u$  sont plus petites que celles de  $v$ , alors  $u$  est plus petit que  $v$ .

C'est à dire que l'on veut trouver des conditions sur  $H$  pour que si  $u|_{\partial\Omega} \leq v|_{\partial\Omega}$  avec  $u$  une sous-solution et  $v$  une sur-solution, alors  $u \leq v$ .

De même, si on essaye de résoudre :

$$u_t + H(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.16)$$

on aimerait avoir que si  $u$  est une sous-solution et  $v$  est une sur-solution, avec  $u(x, 0) \leq v(x, 0)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , alors  $u \leq v$ .

Le but de ce principe est de pouvoir comparer les solutions entre elles, de plus ces principes sont utiles pour essayer de montrer l'existence et l'unicité de solutions de viscosités.

#### 1.2.4 Méthode de Perron :

L'une des méthodes traditionnellement utilisée pour montrer l'existence de solution de viscosité est la méthode de Perron, cette méthode consiste à définir une sous-solution  $u$  et une sur-solution  $v$  avec  $u \leq v$ . Puis, on regarde la fonction

$$w(x) := \sup\{\tilde{u}(x) \text{ telles que } \tilde{u} \text{ sous-solution et } \tilde{u} \leq v\}.$$

Ensuite, on montre que cette fonction est une sous-solution (comme borne supérieure d'un ensemble de sous-solution) et une sur-solution (ceci se montre par contradiction en montrant que sinon on pourrait construire une sous-solution supérieure à  $w$ ), ce qui implique que c'est une solution de viscosité.

# Chapitre 2

## Planelike minimizers

### 2.1 Introduction

In this section, we consider the homogenization of a periodic interfacial energy, such as studied in a recent paper of L. Caffarelli and R. de la Llave [CdLL01]. We will show that after appropriate rescaling into  $\varepsilon$ -periodic energies, and sending  $\varepsilon$  to zero, we get convergence to an anisotropic perimeter (in the sense of  $\Gamma$ -convergence), with an interfacial energy simply characterized by the energies of plane-like minimizers in balls of large volume. In [DLN06], a similar study has been performed, however there the perimeter itself is replaced with a two-phase singular perturbation problem (as in the seminal papers of Modica and Motorla [MM77a, MM77b]), with some parameter  $\delta > 0$  representing the width of the interface. Then,  $\delta$  and  $\varepsilon$  are sent simultaneously to zero, however, also the ratio  $\delta/\varepsilon \rightarrow 0$  so that in spirit the problem is the same as ours, and the limit is of course the same. See also [BZ08].

We provide here a direct proof of this homogenization result. It is quite standard. It turns out, though, that in most cases it is “useless” (and probably in all cases), in the sense that thanks to the coarea formula for  $BV$  functions, our problem can be cast into a more standard homogenization problem in the space of functions with bounded variation [Bou87, Ama98, BCP95]. An interesting point, though, is the fact that the interfacial energy in both point of views is not given by the same formula : so that we deduce an equality between two problems, which is at first glance not completely obvious (however this identity is already observed, in some cases and up to minor changes, by Braides and Chiadò Piat in [BCP95]).

Another interesting consequence is that we can use the cell problem in [Bou87, Ama98, BCP95] in order to derive a new proof of Caffarelli and de la Llave’s result, with a quite different construction. This approach can probably generalized to other, similar problems where quasi-periodic sets satisfying some kind of maximum principle are to be built (such as minimizers for nonlocal or degenerate perimeters, which are restrictions to sets of a functional satisfying some co-area formula, see for instance [CGL]), although, in some sense, the situation here is among the simplest.

In what follows,  $Q = [0, 1]^d$ , and by  $Q^\sharp$  we denote the  $d$ -dimensional torus  $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ . Functions or measures over  $Q^\sharp$  will implicitly be identified with  $Q$ -periodic functions or measures in  $\mathbb{R}^d$  (some care though has to be taken with periodic measures which weigh  $\partial Q$ ). We consider here  $g \in L^d(Q^\sharp)$  with  $\int_Q g = 0$ , and  $F(x, p) : Q^\sharp \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$ , continuous (periodic) in  $x$ , convex and one-homogeneous in  $p$ , with

$$c_*|p| \leq F(x, p) \leq c^*|p| \tag{2.1}$$

for any  $p$ , for some positive constants  $c_*, c^*$ .

We assume the existence of  $\delta > 0$  such that for any  $E \subset Q$  with finite perimeter,<sup>1</sup>

$$\mathcal{J}_Q(E) := \int_{Q \cap \partial^* E} F(x, \nu_E(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{Q \cap E} g(x) dx \geq \delta \text{Per}(E, Q), \quad (2.2)$$

where here and in the whole paper,  $\nu_E$  is the inner normal to  $\partial^* E$ . Here  $\text{Per}(E, Q) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E \cap Q)$  is the part of the perimeter of  $E$  inside  $Q$ , including the possible trace on  $\partial Q \cap Q$ . The inequality (2.2) holds (as observed in [DLN06]) for instance if  $\|g\|_d = \|g\|_{L^d(Q)}$  is small enough, indeed, we have in this case

$$\begin{aligned} \int_{Q \cap E} g(x) dx &= - \int_{Q \setminus E} g(x) dx \\ &\leq \|g\|_d \min\{|Q \cap E|, |Q \setminus E|\}^{\frac{d-1}{d}} \leq C \|g\|_d \text{Per}(E, Q) \end{aligned} \quad (2.3)$$

for some constant  $C$  depending only on the dimension (see for instance [AFP00]), hence as soon as  $\|g\|_d < c_*/C$  we can find  $\delta > 0$  such that (2.2) holds.

Let us observe that a quite deep result of Bourgain and Brézis [BB02, BB03] shows that if  $g \in L^d(Q)$ , there is a vector field  $\sigma \in C^0(Q^\#, \mathbb{R}^d)$  (we can assume moreover that  $\sigma = 0$  on  $\partial Q$ ) with  $\text{div } \sigma = g$ , hence

$$\begin{aligned} \int_{Q \cap \partial^* E} F(x, \nu_E(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{Q \cap E} g(x) dx \\ = \int_{Q \cap \partial^* E} F(x, \nu_E(x)) - \sigma(x) \cdot \nu_E(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x). \end{aligned}$$

We see that letting  $F'(x, p) := F(x, p) - \sigma(x) \cdot p$ , we can get rid of the external field  $g$  (and  $F'$  will satisfy (2.1) if  $\|g\|_d$  is small enough). We discuss this in detail in Section 2.4 : in fact, we actually show that (2.2) yields the existence of such a  $\sigma$ . We also show that (2.2) can be a bit weakened, thanks to the results in [BB02, BB03]. There exist other works on the subject. Some recent results can be found on [DPT11].

We consider in this paper a first problem, quite standard, which regards the  $\Gamma$ -limit of the energies

$$\mathcal{E}_\varepsilon(E) = \int_{\partial^* E \cap \Omega} F\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nu_E(x)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon \cap E} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx, \quad (2.4)$$

defined on finite perimeter subsets  $E \subset \Omega$  where  $\Omega$  is a bounded open subset of  $\mathbb{R}^d$ , with Lipschitz boundary. Here  $\Omega_\varepsilon$  is the union of all cubes  $\varepsilon(k + Q)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^d$ , which are contained in  $\Omega$ . Considering also the integral of  $g$  over  $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$  would produce annoying boundary effects.

The result we show (which is not new, see [DLN06] where a similar issue is addressed in the framework of a singular perturbation problem, and the discussion below, but we give a direct proof for the reader's convenience) relies on a theorem of L. Caffarelli and R. de la Llave [CdLL01], that we now quote. Consider the functional

$$\mathcal{J}(E) = \int_{\partial^* E} F(x, \nu_E) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_E g(x) dx \quad (2.5)$$

(which is a priori finite only for sets  $E$  with compact boundary). Following [CdLL01] we introduce the following definition of a global minimizer in  $\mathbb{R}^d$  :

<sup>1</sup>. We refer for instance to [Giu84a, EG92] for the definition and properties of sets of finite perimeter (a.k.a. Caccioppoli sets), and of their reduced boundary  $\partial^* E$ .

**Definition 2.1.1.** We say that  $E \subset \mathbb{R}^d$  with locally finite perimeter is a class A minimizer for  $\mathcal{J}$  if for any bounded set  $B \subset \mathbb{R}^d$  and any  $E' \subset \mathbb{R}^d$  with  $E \triangle E' = (E \setminus E') \cup (E' \setminus E) \Subset B$ , we have

$$\begin{aligned} \int_{B \cap \partial^* E} F(x, \nu_E) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{B \cap E} g(x) dx \\ \leq \int_{B \cap \partial^* E'} F(x, \nu_{E'}) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{B \cap E'} g(x) dx. \end{aligned}$$

The theorem of Caffarelli and De La Llave [CdLL01, Theorem 4.1] is as follows.

**Theorem 2.1.1.** For any  $\nu \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , we can find a connected set  $E_\nu$  (depending only on  $\nu/|\nu|$ ) such that

(i) For some  $M$  independent of  $\nu$ , depending only on  $c_*, c^*$  and  $g$ , we have

$$\begin{aligned} \partial E_\nu &\subset \{x \in \mathbb{R}^d : |x \cdot \nu| \leq M|\nu|\}, \\ E_\nu &\supset \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot \nu \geq M|\nu|\}, \\ E_\nu &\subset \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot \nu \geq -M|\nu|\}. \end{aligned}$$

(ii)  $E_\nu$  is a class A minimizer for  $\mathcal{J}$ .

(iii)  $\partial E_\nu$  is “quasi-periodic”.

(For practical reasons we choose here to have  $\nu$  pointing towards the interior of the set  $E_\nu$  rather than the exterior.) The point (iv) of Theorem 4.1 in [CdLL01], which claims that the projection of  $\partial E_\nu$  onto  $Q^\sharp$  laminates the torus, also follows from the new proof (quite different from Caffarelli and de la Llave’s—though relying essentially on the same properties) which we will give in Section 2.3, however we did not particularly investigate this point, so that we prefer not to mention it. In general, we do not expect this lamination to be a foliation (i.e., to be dense in the torus), see Remark 2.3.1 below. This is clearly not the case, for instance, when the direction is “rational”, that is, if  $\nu = p/|p|$  for some  $p \in \mathbb{Z}^d$ , since in that case the set  $E_\nu$  can be shown to be periodic, which improves statement (iii). When the direction is not rational, the set is “quasi-periodic” in the following sense : for any integer  $p$  with  $p \cdot \nu > 0$ , then  $E_\nu + p \subset E_\nu$ , whereas if  $p \cdot \nu < 0$ ,  $E_\nu + p \supset E_\nu$ . If  $p_n$  is a sequence of integer vectors with  $p_n \cdot \nu \rightarrow 0$ , then  $E_\nu + p_n$  converges (locally in  $L^1$ ) to  $E_\nu$ . These statements are true provided  $E_\nu$  is minimal or maximal in some sense, we will not discuss this issue in this paper anymore since the proofs would be the same as in [CdLL01].

A fundamental point in this result is the fact that  $M$  is independent on the direction : letting  $I_\nu = \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot \nu > 0\}$ , the theorem provides given any direction  $\nu \in \mathbb{S}^{d-1}$  a minimizer  $E_\nu$  such that the Hausdorff distance between the surfaces  $\partial E_\nu$  and  $\partial I_\nu = \{x \cdot \nu = 0\}$  is bounded by the uniform bound  $M$ .

Another important result in [CdLL01] is Proposition 10.1 (and Equation (10.2)) which states that for any  $\nu \in \mathbb{S}^{d-1}$ , the limit

$$\phi(\nu) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega_{d-1} L^{d-1}} \left( \int_{B(0,L) \cap \partial E_\nu} F(x, \nu_{E_\nu}) d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{B(0,L)_1 \cap E_\nu} g(x) dx \right) \quad (2.6)$$

exists and defines, after one-homogeneous extension, a convex function in  $\mathbb{R}^d$ . Here  $\omega_{d-1}$  is the volume of the unit ball in  $\mathbb{R}^{d-1}$ , and  $B(0,L)_1 = \bigcup \{z + Q : z \in \mathbb{Z}^N, z + Q \subset B(0,L)\}$  so that  $g$  is integrated only on “complete” cells. The result, in our case, needs be a bit more precise, see section 2.5.

Using these results, we show in Section 2.2 the  $\Gamma$ -convergence of the energies  $\mathcal{E}_\varepsilon$  of (2.4), as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , to the anisotropic perimeter

$$\mathcal{E}(E) = \int_{\partial^* E} \phi(\nu_E(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x). \quad (2.7)$$

defined for any finite-perimeter set  $E \subset \Omega$ .

Using the coarea formula for functions with bounded variation [EG92, AFP00], it is easy to relate this  $\Gamma$ -convergence to more classical results on the homogenization of functionals with growth 1 (see [Ama98, BCP95]), for which the limit density  $\phi$  is known to be given by a cell problem. This observation actually leads us to consider the cell problem for functional  $\mathcal{J}$ , and give (in Section 2.3) a new proof of Theorem 2.1.1, which might be not simpler than the one in [CdLL01] (it shares some common steps), but we believe has its own interest.

Eventually, in Section 2.4, we discuss the possibility of integrating out the external field  $g$  in the surface tension  $F$ , and show that the results in this paper still hold under coercivity assumptions that are slightly milder than (2.2).

## 2.2 Homogenization of the interfacial energy

Our goal in this section is to show the following. We assume here that the functionals  $\mathcal{E}_\varepsilon$  and  $\mathcal{E}$  are extended to all Borel sets in  $\Omega$  by letting  $\mathcal{E}_\varepsilon(E) = \mathcal{E}(E) = +\infty$  if  $E$  does not have finite perimeter. It will be also convenient to introduce the “localized” version of  $\mathcal{E}_\varepsilon$ , denoted by  $\mathcal{E}_\varepsilon(E, A)$  for  $A$  an open set, which is given by (2.4) with  $\Omega$  replaced with  $A$ . In this localized version the second integral is also, by convention, on the set  $A_\varepsilon$  which is the union of the cubes  $z + \varepsilon Q$ ,  $z \in \varepsilon\mathbb{Z}^d$ , such that  $z + \varepsilon Q \subset A$ . Then, we have (assuming, still, that  $\partial\Omega$  is Lipschitz) :

**Theorem 2.2.1.**  *$\mathcal{E}_\varepsilon$   $\Gamma$ -converges to  $\mathcal{E}$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , where the convergence is in the space of Borel sets endowed with the topology of the  $L^1$ -convergence of their characteristic functions.*

This means that given  $\varepsilon_n \downarrow 0$ , for any Borel set  $E \subset \Omega$  we have :

– for any  $(E_n)_{n \geq 1}$  sequence of Borel sets with  $|E_n \Delta E| \rightarrow 0$ ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_n}(E_n) \geq \mathcal{E}(E); \quad (2.8)$$

– there exists  $(E_n)_{n \geq 1}$ , with  $|E_n \Delta E| \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ , and

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_n}(E_n) \leq \mathcal{E}(E). \quad (2.9)$$

Here,  $E_n \Delta E = (E_n \setminus E) \cup (E \setminus E_n)$  (the symmetric difference).

**Remark 2.2.1.** We also prove the following compactness property : if  $(E_n)_{n \geq 1}$  is a sequence of sets such that  $\sup_n \mathcal{E}_{\varepsilon_n}(E_n) < +\infty$ , then, up to a subsequence,  $E_n$  converges to a finite-perimeter set  $E \subset \Omega$ , in the sense that  $|E_n \Delta E| \rightarrow 0$ .

**Remark 2.2.2.** We used here an argument of homogenization by blow up. This is also done by Braides Maslennikov and Sigaloti in [BMS08].

### 2.2.1 Proof of (2.8)

Consider  $(E_n)_{n \geq 1}$  a sequence of sets. Up to the extraction of a subsequence we may assume that  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_n}(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_n}(E_n)$ , and without loss of generality we assume it is finite (otherwise, there is nothing to prove). We will show both (2.8) and the statement in Remark 2.2.1, that is, that  $E_n$  converges (up to a subsequence) to some set  $E$  if the energies  $\mathcal{E}_{\varepsilon_n}(E_n)$  are uniformly bounded.

Let us define the measures  $\mu_n$  by

$$\begin{aligned} \mu_n = & \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ \varepsilon_n(k+Q) \subset \Omega}} \left( \int_{\partial^* E_n \cap \varepsilon_n(k+Q)} F\left(\frac{x}{\varepsilon_n}, \nu_{E_n}(x)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(x) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\varepsilon_n} \int_{E_n \cap \varepsilon_n(k+Q)} g\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) dx \right) \delta_{\varepsilon_n k}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

It is actually defined as a sum of Dirac masses on the points  $\varepsilon_n k$  of  $\varepsilon_n \mathbb{Z}^d \cap \Omega$ , such that  $\varepsilon_n(k+Q) \subset \Omega$ . It is important here that  $Q$  is defined as  $[0, 1)^d$  (containing 0 and not 1), as the first integral is on a singular measures that might weight  $(d-1)$ -dimensional surfaces, and we do not want some to be counted twice (or never) in the sum.

We have  $\mathcal{E}_{\varepsilon_n}(E_n) \geq \mu_n(\Omega)$ . By (2.2) and the definition (2.10) of  $\mu_n$ , we have that  $\mu_n(\Omega) \geq \delta \text{Per}(E_n, \Omega_{\varepsilon_n})$ . By (2.1), we also get a bound on  $\text{Per}(E_n, \Omega \setminus \Omega_{\varepsilon_n})$ : hence we have that  $(\chi_{E_n})_{n \geq 1}$  is equibounded in  $BV(\Omega)$ , and that the  $\mu_n$  are nonnegative measures, which are uniformly bounded. Hence, up to a subsequence we may assume there exists some measure  $\mu$  and some finite-perimeter set  $E$  such that  $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$  as measures, and that  $\chi_{E_n} \rightarrow \chi_E$  (in  $L^1(\Omega)$ ): hence the compactness property in Remark 2.2.1 is shown). We have

$$\mu(\Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_n}(E_n)$$

so that (2.8) follows if we show that  $\mu \geq \phi(\nu_E) \mathcal{H}^{d-1} \llcorner \partial^* E$ .

A way to show such an inequality is to estimate the Radon-Nikodým derivative of the measure  $\mu$  with respect to  $\mathcal{H}^{d-1} \llcorner \partial^* E$ , and to show that it is actually larger than  $\phi(\nu_E)$ . By the Besicovitch derivation theorem (see for instance [AFP00, Theorem 5.52]), it is given for  $\mathcal{H}^{d-1}$ -a.e.  $x \in \partial^* E$  by

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{\mathcal{H}^{d-1}(B(x, r) \cap \partial^* E)}$$

In particular, at a regular point  $x_0$  (where  $\partial^* E$  has  $(d-1)$ -density 1, a normal vector  $\nu_E(x_0)$ , and the blow-up sequences of  $E$  converge to  $\{(x-x_0) \cdot \nu_E(x_0) > 0\}$ ) the limit becomes

$$\ell = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x_0, r))}{\omega_{d-1} r^{d-1}}. \quad (2.11)$$

where  $\omega_{d-1}$  is the volume of the unit ball in  $\mathbb{R}^{d-1}$ .

Let us now show that  $\ell \geq \phi(\nu)$ , where  $\nu = \nu_E(x_0)$  is the inner normal to  $\partial^* E$  at  $x_0$ . Notice that since  $x_0$  is regular, we also have

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{B(x_0, 2r)} |\chi_{\{(x-x_0) \cdot \nu_E(x_0) > 0\}} - \chi_E(x)| dx}{r^N} = 0.$$

For a.e.  $r > 0$  (small), we have

$$\mu(B(x_0, r)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B(x_0, r)),$$

and

$$\begin{aligned} & \int_{B(x_0, 2r)} |\chi_{\{(x-x_0) \cdot \nu_E(x_0) > 0\}} - \chi_E(x)| dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B(x_0, 2r)} |\chi_{\{(x-x_0) \cdot \nu_E(x_0) > 0\}}(x-x_0) - \chi_{E_n}(x)| dx. \end{aligned}$$

Hence, using a diagonal argument, there exist subsequences  $n_m$  and  $r_m$  such that  $\varepsilon'_m = \varepsilon_{n_m}/r_m \rightarrow 0$ ,

$$\ell = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n_m}(B(x_0, r_m))}{\omega_{d-1} r_m^{d-1}} \quad (2.12)$$

and

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{B(x_0, 2r_m)} |\chi_{\{(x-x_0) \cdot \nu_E(x_0) > 0\}} - \chi_{E_{n_m}}(x)| dx}{r_m^d} = 0. \quad (2.13)$$

We let as before  $I_\nu = I_{\nu_E(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^N, x \cdot \nu_E(x_0) > 0\}$ . We now make for each  $m$  the change of variable  $x = x_0 + r_m y$ , and we define  $E'_m = (E_{n_m} - x_0)/r_m \subset (\Omega - x_0)/r_m$ . It follows from (2.13) that

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B(0,2)} |\chi_{E'_m}(y) - \chi_{I_\nu}(y)| dy = 0. \quad (2.14)$$

Letting  $B_m = \bigcup \{\varepsilon_{n_m}(k+Q) : \varepsilon_{n_m}k \in \varepsilon_{n_m}\mathbb{Z}^d \cap B(x_0, r_m)\}$  and  $B'_m = (B_m - x_0)/r_m$ , we have, on the other hand :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{n_m}(B(x_0, r_m))}{r_m^{d-1}} &= \\ &= \frac{1}{r_m^{d-1}} \left( \int_{\partial^* E_{n_m} \cap B_m} F\left(\frac{x}{\varepsilon_{n_m}}, \nu_{E_{n_m}}(x)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \frac{1}{\varepsilon_{n_m}} \int_{E_{n_m} \cap B_m} g\left(\frac{x}{\varepsilon_{n_m}}\right) dx \right) \\ &= \int_{\partial^* E'_m \cap B'_m} F\left(\frac{x_0}{\varepsilon_{n_m}} + \frac{y}{\varepsilon'_m}, \nu_{E'_m}(y)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(y) + \frac{1}{\varepsilon'_m} \int_{E'_m \cap B'_m} g\left(\frac{x_0}{\varepsilon_{n_m}} + \frac{y}{\varepsilon'_m}\right) dy. \end{aligned}$$

Let now  $\theta_m \in [0, 1]^d$  be the fractionary part of  $x_0/\varepsilon_{n_m}$ , that is, the vector  $((\theta_m)_i)_{i=1}^d$  whose  $i$ th component is  $(\theta_m)_i = (x_0)_i/\varepsilon_{n_m} - [(x_0)_i/\varepsilon_{n_m}]$  (where  $[\cdot]$  is the integer part, and  $(x_0)_i$  is the  $i$ th component of  $x_0$ ). By periodicity, we may clearly replace the argument  $x_0/\varepsilon_{n_m} + y/\varepsilon'_m$  in the two last integrals above with  $(\varepsilon'_m \theta_m + y)/\varepsilon'_m$ . Alternatively, we can change again variables and define  $E''_m = E'_m + \varepsilon'_m \theta_m$  and  $B''_m = B'_m + \varepsilon'_m \theta_m$  : we find

$$\frac{\mu_{n_m}(B(x_0, r_m))}{r_m^{d-1}} = \int_{\partial^* E''_m \cap B''_m} F\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}, \nu_{E''_m}(y)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(y) + \frac{1}{\varepsilon'_m} \int_{E''_m \cap B''_m} g\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}\right) dy.$$

and it follows from (2.12) that

$$\omega_{d-1} \ell = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\partial^* E''_m \cap B''_m} F\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}, \nu_{E''_m}(y)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(y) + \frac{1}{\varepsilon'_m} \int_{E''_m \cap B''_m} g\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}\right) dy, \quad (2.15)$$

moreover, it also follows from (2.14) that

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B(0,3/2)} |\chi_{E''_m}(y) - \chi_{I_\nu}(y)| dy = 0. \quad (2.16)$$

Since  $B_m = (B(x_0, r_m) \cap \varepsilon_{n_m}\mathbb{Z}^d) + \varepsilon_{n_m}Q$ , the sets  $B'_m, B''_m$  above are given exactly by,

$$B'_m = \left( B(0, 1) \cap \left\{ \varepsilon'_m k - \frac{x_0}{r_m} : k \in \mathbb{Z}^d \right\} \right) + \varepsilon'_m Q$$

and

$$B''_m = \left( (B(0, 1) + \varepsilon'_m \theta_m) \cap \varepsilon'_m \mathbb{Z}^d \right) + \varepsilon'_m Q, \quad (2.17)$$

Observe that for any  $s < 1$ ,  $B(0, s) \subset B''_m$  for  $m$  large enough.

Let  $\eta > 0$ . Let  $E_\nu$  be the set provided by Theorem 2.1.1, and for  $s \in (1-2\eta, 1-\eta)$  which will be chosen later on, define

$$\hat{E}_m = (\varepsilon'_m E_\nu \setminus B(0, s)) \cup (E''_m \cap B(0, s)).$$

Then, by the minimality of  $E_\nu$ , we have

$$\begin{aligned} & \int_{\partial^* \hat{E}_m \cap B''_m} F\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}, \nu_{\hat{E}_m}(y)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(y) + \frac{1}{\varepsilon'_m} \int_{\hat{E}_m \cap B''_m} g\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}\right) dy, \\ & \geq \int_{\partial^*(\varepsilon'_m E_\nu) \cap B''_m} F\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}, \nu_{(\varepsilon'_m E_\nu)}(y)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(y) + \frac{1}{\varepsilon'_m} \int_{(\varepsilon'_m E_\nu) \cap B''_m} g\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}\right) dy, \end{aligned}$$

which converges (see (2.6), and details in the appendix) to  $\mathcal{H}^{d-1}(\partial I_\nu \cap B_1)\phi(\nu) = \omega_{d-1}\phi(\nu)$  as  $m \rightarrow \infty$ . Hence the inequality  $\ell \geq \phi(\nu)$  will follow from (2.15) if we show that (for a suitable choice of  $s$ ) the difference

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{\varepsilon'_m}(E''_m, B''_m) - \mathcal{E}_{\varepsilon'_m}(\hat{E}_m, B''_m) \\ & = \int_{\partial^* E''_m \cap B''_m} F\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}, \nu_{E''_m}(y)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(y) + \frac{1}{\varepsilon'_m} \int_{E''_m \cap B''_m} g\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}\right) dy \\ & \quad - \int_{\partial^* \hat{E}_m \cap B''_m} F\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}, \nu_{\hat{E}_m}(y)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(y) + \frac{1}{\varepsilon'_m} \int_{\hat{E}_m \cap B''_m} g\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}\right) dy \quad (2.18) \end{aligned}$$

is bounded from below, as  $m \rightarrow \infty$ , by some quantity which modulus is arbitrarily small.

Call  $R_m$  the region made of all cubes  $z + \varepsilon'_m Q$ ,  $z \in \varepsilon'_m \mathbb{Z}^d$ , which intersect  $\partial B(0, s)$  (we denote by  $\mathcal{N}_m$  the number of such cubes),  $S_m = (B''_m \setminus B(0, s)) \cup R_m$ ,  $R'_m = S_m \setminus R_m$  (so that  $S_m = R_m \cup R'_m$ ). In  $B''_m \setminus S_m$ , the sets  $E''_m$  and  $\hat{E}_m$  coincide, so that the difference in (2.18) is also given by

$$\mathcal{E}_{\varepsilon'_m}(E''_m, S_m) - \mathcal{E}_{\varepsilon'_m}(\hat{E}_m, S_m).$$

If we develop, we find

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{\varepsilon'_m}(E''_m, S_m) - \mathcal{E}_{\varepsilon'_m}(\hat{E}_m, S_m) \\ & = \int_{\partial^* E''_m \cap (R_m \cup R'_m)} F\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}, \nu_{E''_m}(y)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(y) + \int_{E''_m \cap (R_m \cup R'_m)} g\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}\right) dy \\ & \quad - \mathcal{E}_{\varepsilon'_m}(\varepsilon'_m E_\nu, R'_m) \\ & \quad - \int_{\partial^*(\varepsilon'_m E_\nu) \cap (R_m \setminus B(0, s))} F\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}, \nu_{(\varepsilon'_m E_\nu)}(y)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(y) \\ & \quad - \int_{\partial B(0, s) \cap \partial^* \hat{E}_m} F\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}, \nu_{\hat{E}_m}(y)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(y) \\ & \quad - \int_{\partial^* E''_m \cap (R_m \cap B(0, s))} F\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}, \nu_{E''_m}(y)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(y) - \int_{\hat{E}_m \cap R_m} g\left(\frac{y}{\varepsilon'_m}\right) dy \quad (2.19) \end{aligned}$$

which is larger than (using (2.1) and (2.2))

$$\begin{aligned} & - \mathcal{E}_{\varepsilon'_m}(\varepsilon'_m E_\nu, R'_m) \\ & \quad - c^* \text{Per}(\varepsilon'_m E_\nu, R_m \setminus B(0, s)) - c^* \mathcal{H}^{d-1}(\partial B(0, s) \cap (E''_m \Delta (\varepsilon'_m E_\nu))) \\ & \quad + \frac{1}{\varepsilon'_m} \int_{R_m} g\left(\frac{x}{\varepsilon'_m}\right) (\chi_{E''_m} - \chi_{\hat{E}_m})(x) dx. \quad (2.20) \end{aligned}$$



Denote respectively by  $-A_m^i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  the four terms of this expression. By (2.53),

$$\limsup_{m \rightarrow 0} A_m^1 \leq \phi(\nu) \mathcal{H}^{d-1}(\partial I_\nu \cap (B(0, 1) \setminus B(0, s))) \leq C(1-s) \leq 2C\eta. \quad (2.21)$$

Observe that the number  $\mathcal{N}_m$  of cubes  $z + \varepsilon'_m Q$ ,  $z \in \varepsilon'_m \mathbb{Z}^d$ , which compose the set  $R_m$  is (at most) of order  $(1/\varepsilon'_m)^{d-1}$ . (Indeed,  $R_m \subset B(O, s + \sqrt{d}\varepsilon'_m) \setminus B(O, s - \sqrt{d}\varepsilon'_m)$  so that  $\varepsilon'_m{}^d \mathcal{N}_m \leq C\varepsilon'_m$ .) Moreover, the number of such cubes which intersect  $\partial(\varepsilon'_m E_\nu)$  (which is at distance  $M$  from  $\partial I_\nu$  by Theorem 2.1.1) is at most of order  $(1/\varepsilon'_m)^{d-2}$  (using the same argument). Since the perimeter of  $\varepsilon'_m E_\nu$  in each such cube is of order  $\varepsilon'_m{}^{d-1}$ ,  $A_m^2$  is of order  $\varepsilon'_m$  hence

$$\lim_{m \rightarrow 0} A_m^2 = 0. \quad (2.22)$$

Since both sets  $E_m''$  and  $\varepsilon'_m E_\nu$  converge to  $I_\nu$  as  $m \rightarrow \infty$ , up to a subsequence we know that for a.e. choice of  $s \in (1-2\eta, 1-\eta)$ ,  $\mathcal{H}^{d-1}(\partial B(0, s) \cap (E_m'' \Delta (\varepsilon'_m E_\nu))) \rightarrow 0$ . Hence, if we choose well  $s$ ,

$$\lim_{m \rightarrow 0} A_m^3 = 0. \quad (2.23)$$

It remains to bound  $A_m^4$ . We have, for any cube  $z + \varepsilon'_m Q$  which intersects  $\partial B(0, s)$  ( $z \in \varepsilon'_m \mathbb{Z}^d$ ),

$$\frac{1}{\varepsilon'_m} \int_{z + \varepsilon'_m Q} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (\chi_{E_m''} - \chi_{\hat{E}_m})(x) dx \leq \|g\|_d \left( \int_{z + \varepsilon'_m Q} |\chi_{E_m''} - \chi_{\hat{E}_m}| dx \right)^{1-1/d}$$

so that (summing on all such cubes and recalling  $\mathcal{N}_m$  is the number of cubes which constitute  $R_m$ )

$$\begin{aligned} A_m^4 &\leq \mathcal{N}_m^{1/d} \|g\|_d \left( \int_{R_m} |\chi_{E_m''} - \chi_{\hat{E}_m}| dx \right)^{1-1/d} \\ &\leq C \left( \frac{1}{\varepsilon'_m} \int_{B(0, s + \sqrt{d}\varepsilon'_m) \setminus B(0, s - \sqrt{d}\varepsilon'_m)} |\chi_{E_m''} - \chi_{\hat{E}_m}| dx \right)^{1-1/d} \end{aligned} \quad (2.24)$$

where we have used the fact that  $\mathcal{N}_m \leq C\varepsilon'_m{}^{1-d}$  and  $R_m \subset B(0, s + \sqrt{d}\varepsilon'_m) \setminus B(0, s - \sqrt{d}\varepsilon'_m)$ . Since (by Fubini's theorem)

$$\begin{aligned} &\int_{1-2\eta}^{1-\eta} \left( \frac{1}{\varepsilon'_m} \int_{B(0, t + \sqrt{d}\varepsilon'_m) \setminus B(0, t - \sqrt{d}\varepsilon'_m)} |\chi_{E_m''} - \chi_{\hat{E}_m}| dx \right) dt \\ &\leq 2\sqrt{d} \int_{B(O, 1-\eta + \sqrt{d}\varepsilon'_m) \setminus B(O, 1-2\eta - \sqrt{d}\varepsilon'_m)} |\chi_{E_m''} - \chi_{\hat{E}_m}| dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

as  $m \rightarrow \infty$ , up to a subsequence we find that for almost any choice of  $s \in (1-2\eta, 1-\eta)$ , the right-hand side of (2.24) goes to zero, hence :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m^4 = 0. \quad (2.25)$$

Collecting (2.21), (2.22), (2.23) and (2.25) we deduce that

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon'_m}(E_m'', B_m'') - \mathcal{E}_{\varepsilon'_m}(\hat{E}_m, B_m'') \geq -2C\eta$$

for some constant  $C$ . It follows (from (2.6) and (2.15)) that  $\ell \geq \phi(\nu) - 2C\eta/\omega_{d-1}$ , and since  $\eta$  is arbitrary we get  $\ell \geq \phi(\nu)$ , which was our claim. Hence (2.8) holds.

### 2.2.2 Proof of the inequality (2.9)

The proof of (2.9) in the particular case of polyhedral limit set is given in the section 2.5 (Corollary 2.5.3), where several “simple” limits of  $\mathcal{E}_\varepsilon$  are investigated. We deduce here (2.9) in the general case.

Let  $E \subset \Omega$  is an arbitrary set with finite perimeter. Here we need to assume that  $\partial\Omega$  is Lipschitz. In this case, it is standard that it is possible to approximate  $E$  with sets  $E_n$  which are the intersection of  $\Omega$  with a polyhedron, and such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{d-1}(\partial E_n \cap \Omega) = \text{Per}(E, \Omega)$ . The Reshetnyak continuity Theorem (see [AFP00, Theorem 2.39]), together with the continuity of  $\phi$  (Corollary 2.5.4) show that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(E_n) = \mathcal{E}(E)$ . By corollary 2.5.3 and a diagonal argument, we therefore can find sets  $(E_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  such that  $|E_\varepsilon \Delta E| \rightarrow 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  and  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(E_\varepsilon) \leq \mathcal{E}(E)$ . We deduce (2.9).

## 2.3 A new construction for the plane-like minimizers

The coarea formula for  $BV$  functions shows that if  $u \in BV(\Omega)$  (the space of functions with bounded variation in  $\Omega$  [EG92, AFP00]), then

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u) := \int_{\Omega} F\left(\frac{x}{\varepsilon}, Du\right) + \int_{\Omega_\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_\varepsilon(\{u > s\}) ds$$

and it is not difficult to deduce from Theorem 2.2.1 that  $\mathcal{F}_\varepsilon$  (extended by the value  $+\infty$  to functions  $u \in L^1(\Omega) \setminus BV(\Omega)$ )  $\Gamma$ -converges to

$$\mathcal{F}(u) := \begin{cases} \int_{\Omega} \phi(Du) & \text{if } u \in BV(\Omega), \\ +\infty & \text{if } u \in L^1(\Omega) \setminus BV(\Omega). \end{cases}$$

See for instance [CGL, Prop. 3.5].

On the other hand, it is well-known (at least when  $g = 0$ , see [Ama98, BCP95]) that  $\mathcal{F}_\varepsilon$   $\Gamma$ -converges, as  $\varepsilon \rightarrow 0$ , to  $\mathcal{F}$  if the convex one-homogeneous function  $\phi$  is replaced with the solution  $\psi$  of the following cell problem : for each  $p \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\psi(p) = \min_{u \in BV(Q^\sharp)} \int_{Q^\sharp} F(x, p + Du) + \int_Q g(x)(p \cdot x + u(x)) dx \quad (2.26)$$

where  $BV(Q^\sharp)$  denotes the space of  $BV$  functions which are integer-periodic in  $\mathbb{R}^d$ . Here, the important result is that the  $\Gamma$ -limit is independent of the *class*  $A$  minimizer define in the theorem 2.1.1.

It is a priori quite important in the first integral here to consider the variation of the (periodic) measure  $F(x, p + Du)$  on  $Q^\sharp$  (rather than just  $Q$ , since it may be positive on  $\partial Q$ ), however, for a given  $p$  and a minimizer  $u$  for (2.26), if  $|Du|(\partial Q) > 0$ , we might translate slightly  $u$  and  $g$  ( $u \rightarrow u(\cdot - \tau)$ ,  $g \rightarrow g(\cdot - \tau)$ , or equivalently  $\tau \rightarrow \tau + Q$ ,  $\tau \in \mathbb{R}^d$ ) to get a new problem with the same value and such that  $|Du|(\partial Q) = 0$ . Hence in what follows we will not bother about this issue and implicitly consider that the derivatives of our functions do not charge  $\partial Q$  (and by periodicity,  $k + \partial Q$ ,  $k \in \mathbb{Z}^d$ ). Observe also that by standard regularization arguments [Giu84a], the min in (2.26) is also the infimum over smooth, periodic functions  $u$  — for which integrating over  $Q$  or  $Q^\sharp$  does not make any difference.

It is clear that (2.26) defines a convex, one-homogeneous function  $\psi$ . Letting  $u = 0$  in the problem yields

$$\psi(p) \leq (c^* + \|g\|_d)|p|. \quad (2.27)$$

On the other hand, provided as before that assumption (2.2) holds (for instance, if  $\|g\|_d$  is small enough), we have that the functional which is minimized in (2.26) is coercive in  $BV$ , so that the problem is well-posed and admits actually a minimizer. Indeed, given a function  $u$  and letting  $v(x) = p \cdot x + u(x)$ , we have (using  $\int_Q g = 0$ ) in view of (2.2)

$$\int_{Q^\sharp} F(x, p + Du) + \int_Q g(x)(p \cdot x + u(x)) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_Q(\{v > s\}) ds \geq \delta |Dv|(Q), \quad (2.28)$$

in particular we deduce that

$$\psi(p) \geq \delta |p|. \quad (2.29)$$

Fix now  $p \in \mathbb{R}^d$ , and let  $u$  be a minimizer in (2.26). Let  $v(x) = p \cdot x + u(x)$  (which is in  $BV_{loc}(\mathbb{R}^d)$ ). For any  $s > 0$ , let  $E_s = \{v > s\}$ . Then we show the following :

**Proposition 2.3.1.** *The set  $E_s$  is a class A minimizer for  $\mathcal{J}$ .*

*Proof:* The proof relies on convex duality and a calibration argument.

**Step 1.** *Existence of a “calibrating field”.* First of all, we have that for any  $p \in \mathbb{R}^d$  and  $u \in BV(Q^\sharp)$ ,

$$\begin{aligned} H_p(u) &:= \int_{Q^\sharp} F(x, p + Du) \\ &= \sup \left\{ p \cdot \int_Q \sigma(x) dx - \int_Q u(x) \operatorname{div} \sigma(x) dx : \right. \\ &\quad \left. \sigma \in C^\infty(Q^\sharp; \mathbb{R}^d), \sigma(x) \in C(x) \forall x \in Q^\sharp \right\} \quad (2.30) \end{aligned}$$

where for each  $x$ ,  $C(x)$  is the convex set

$$C(x) = \{q \in \mathbb{R}^d : q \cdot p \leq F(x, p) \forall p \in \mathbb{R}^d\},$$

such that  $\sup_{q \in C(x)} q \cdot p = F(x, p)$ . This representation is found for instance in [BV88, BV89], and is not too difficult to show. The key point is the fact that — thanks to the continuity of  $F$  — for any  $\theta < 1$ , there exists  $\eta > 0$  such that  $|x - y| \leq \eta$  yields  $\theta C(y) \subseteq C(x)$ , so that building fields satisfying the constraint at each point, or regularizing these fields, is relatively easy. Given  $u \in BV(Q^\sharp)$ , a Besicovitch covering argument allows to build a measurable field  $\sigma$ , constant in balls, and such that  $\sigma(x) \in C(x)$  a.e. and  $\int_{Q^\sharp} \sigma \cdot (p + Du) \approx \int_{Q^\sharp} F(x, p + Du)$ . Then for any  $\theta < 1$ , a mollification of  $\theta \sigma$  will provide a  $C^\infty$  field with the same properties.

On the other hand, if  $u \in L^{d/(d-1)}(Q^\sharp) \setminus BV(Q^\sharp)$ , then the right-hand side of (2.30) is  $+\infty$ , and we also set  $H_p(u) = +\infty$  in this case.

Let  $K_0$  be the convex subset of  $L^d(Q^\sharp)$  :

$$K_0 = \{-\operatorname{div} \sigma : \sigma \in C^\infty(Q^\sharp; \mathbb{R}^d), \sigma(x) \in C(x) \forall x \in Q^\sharp\}.$$

and  $K = \overline{K}^{L^d(Q^\sharp)}$  its closure in  $L^d$ . For  $h \in K_0$ , let

$$\begin{aligned} G_p(h) &:= \inf \left\{ -p \cdot \int_Q \sigma(x) dx : \sigma \in C^\infty(Q^\sharp; \mathbb{R}^d), \right. \\ &\quad \left. \sigma(x) \in C(x) \forall x \in Q^\sharp, h = -\operatorname{div} \sigma \right\}, \end{aligned}$$

and let  $G_p(h) = +\infty$  if  $h \in L^d(Q^\sharp) \setminus K_0$ . One checks that this defines a convex function of  $h$ , so that, in particular, its lower semicontinuous envelope (in  $L^d$ ) is a convex function with domain  $K$ , which coincides with its convex lower semicontinuous envelope  $G_p^{**}$ . Then (2.30) expresses that

$$H_p(u) = G_p^*(u) = \sup_{h \in L^d(Q^\sharp)} \langle h, u \rangle_{L^d, L^{d/(d-1)}} - G_p(h)$$

is the Legendre-Fenchel conjugate of  $G_p$  (in the duality  $(L^d, L^{d/(d-1)})$ , see [ET99]) so that and  $H_p^* = G_p^{**}$ . Now,  $u$  is a minimizer for (2.26) if and only if

$$-g \in \partial H_p(u)$$

(this is obvious from the definition of the subdifferential  $\partial H_p(u)$ , which is the set of  $h$  such that  $H_p(v) \geq H_p(u) + \int_Q h(v-u) dx$ ). The Legendre-Fenchel's identity shows that it is equivalent to

$$-\int_Q g(x)u(x) dx = H_p(u) + G_p^{**}(-g).$$

Since there must exist  $h_n \in K_0$  such that  $h_n \rightarrow -g$  and  $G_p^{**}(-g) = \lim_n G_p(h_n)$ , it shows the existence of a sequence  $\sigma_n \in C^\infty(Q^\sharp)$ , such that  $\operatorname{div} \sigma_n \rightarrow g$  in  $L^d(Q)$ ,  $-p \cdot \int_Q \sigma_n dx \rightarrow G_p^{**}(-g)$  and

$$-\int_Q \operatorname{div} \sigma_n(x)u(x) dx + p \cdot \int_Q \sigma_n(x) dx \rightarrow H_p(u) \quad (2.31)$$

as  $n \rightarrow \infty$ . Observe that since  $u$  has bounded variation (and is periodic), and  $\sigma_n$  is smooth and periodic, the integrals can be written  $\int_{Q^\sharp} \sigma_n(x) \cdot (p + Du)$ .

**Step 2.** *Proof of the minimality of  $E_s$ .* The sequence  $\sigma_n$  built in the previous step, seen as a periodic field over  $\mathbb{R}^d$ , is now used to show the minimality of the level sets  $E_s$ . Consider a large ball  $B$  and denote  $B' = \cup_{k+Q \cap B \neq \emptyset} k + Q$  where  $k \in \mathbb{Z}^d$ . Let  $v(x) = u(x) + p \cdot x$ , where  $u$  is as before. The co-area formula for  $BV$  functions yields

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{B' \cap \partial^* E_s} F(x, \nu_{E_s}(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x) ds \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{B' \cap \partial^* E_s} \sigma_n(x) \cdot \nu_{E_s}(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) ds \end{aligned}$$

and since  $\sigma_n(x) \cdot \nu_{E_s}(x) \leq F(x, \nu_{E_s}(x))$  we deduce that up to a subsequence, we have for a.e.  $s \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B' \cap \partial^* E_s} \sigma_n(x) \cdot \nu_{E_s}(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) = \int_{B' \cap \partial^* E_s} F(x, \nu_{E_s}(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x).$$

Fix  $s$  such that this is true, and let now  $E'$  be a set with  $E' \Delta E_s \Subset B$ . We have, as  $\sigma_n \rightarrow g$

$$\begin{aligned} & \int_{B' \cap \partial^* E'} F(x, \nu_{E'}) d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{B' \cap E'} g dx \\ \geq & \int_{B'} \sigma_n \cdot D\chi_{E'} + \int_{B' \cap E'} g dx = \int_{B'} \sigma_n \cdot D\chi_{E_s} + \int_{B'} \sigma_n \cdot D(\chi_{E'} - \chi_{E_s}) + \int_{B' \cap E'} g dx \\ & = \int_{B'} \sigma_n \cdot D\chi_{E_s} - \int_{B'} \operatorname{div} \sigma_n (\chi_{E'} - \chi_{E_s}) + \int_{B' \cap E'} g dx \\ & \rightarrow \int_{B' \cap \partial^* E_s} F(x, \nu_{E_s}) d\mathcal{H}^{d-1} ds + \int_{B' \cap E_s} g dx \end{aligned}$$

as  $n \rightarrow \infty$ , showing the minimality of  $E_s$ . We deduce easily that for a.e.  $s$ ,  $E_s$  is a class A minimizer for  $\mathcal{J}$ . The proof that  $E_s$  is a minimizer for all  $s$  follows from the fact that  $E_s$  is the limit of any sequence  $E_{s_j}$  with  $s_j \downarrow s$  ( $s_j > s$ ),  $s_j$  such that  $E_{s_j}$  is a class A minimizer, and the stability of class A minimizer, see [CdLL01, Sec. 9].<sup>2</sup>  $\square$

The next lemma is classical, and shown for instance in [CdLL01]. For the reader's convenience we include a very quick proof of the first inequality, the second being analogous.

**Lemma 2.3.2.** *There exists  $r_0 > 0$  and  $\gamma > 0$  such that for any  $x \in \mathbb{R}^d$  :*

- if  $|B(x, r) \cap E_s| > 0$  for any  $r > 0$  then for  $r \leq r_0$ ,  $|B(x, r) \cap E_s| \geq \gamma r^d$ ,
- if  $|B(x, r) \setminus E_s| > 0$  for any  $r > 0$  then for  $r \leq r_0$ ,  $|B(x, r) \setminus E_s| \geq \gamma r^d$ .

where  $E_s$  is a minimizer.

*Proof:* This is quite standard : letting  $B_r = B(x, r)$ , the idea is to compare the energy of  $E_s$  and the energy of  $E_s \setminus B_r$  for  $r > 0$ , small. The minimality of  $E_s$  yields for a.e.  $r > 0$  :

$$\int_{B_r \cap \partial^* E_s} F(x, \nu_E) d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{E_s \cap B_r} g(x) dx \leq \int_{\partial B_r \cap E_s} F(x, -\nu_{B_r}) d\mathcal{H}^{d-1}$$

hence, using (2.1) and Hölder's inequality,

$$c_* \mathcal{H}^{d-1}(B_r \cap \partial^* E_s) \leq c^* \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_r \cap E_s) + \|g\|_{L^d(B_r)} |E_s \cap B_r|^{\frac{d-1}{d}}.$$

Letting  $f(r) = |E_s \cap B_r| > 0$  for all  $r > 0$ , and using the isoperimetric inequality in  $\mathbb{R}^d$ , we find

$$\begin{aligned} c_d f(r)^{\frac{d-1}{d}} &\leq \text{Per}(E_s \cap B_r) = \mathcal{H}^{d-1}(B_r \cap \partial^* E_s) + \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_r \cap E_s) \\ &\leq \frac{c_* + c^*}{c_*} \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_r \cap E_s) + \frac{1}{c_*} \|g\|_{L^d(B_r)} f(r)^{\frac{d-1}{d}}. \end{aligned}$$

Since  $\mathcal{H}^{d-1}(\partial B_r \cap E_s) = f'(r)$  for all  $r$  but a finite or countable number, and choosing  $r_0$  such that if  $r < r_0$ ,  $\|g\|_{L^d(B_r)}/c_* \leq c_d/2$  (which is possible since  $g$  is periodic and  $|g|^d \in L^1(Q^\#)$  is equi-integrable), we deduce that if  $r < r_0$ ,

$$\frac{c_d}{2} f(r)^{1-\frac{1}{d}} \leq \frac{c_* + c^*}{c_*} f'(r).$$

Then, the conclusion follows from Gronwall's lemma, and the constant  $\gamma$  depends only on  $c_*$ ,  $c^*$ , and the dimension  $d$  — while  $r_0$  depends on  $c_*$  and  $g$ . The proof of the second inequality is done in the same way, comparing this time  $E_s$  with the sets  $E_s \cup B_r$ .  $\square$

It follows that  $E_s$  (which a priori is “just” a Caccioppoli set) is a closed set with rectifiable boundary.

**Corollary 2.3.3.** *The sets of points of Lebesgue density, respectively, 1 and 0 of  $E_s$  are both open, hence we may consider  $E_s$  as a closed set (the complement of points of density 0), whose topological boundary coincides with the measure-theoretical boundary (which is the set of points of density neither 0 nor 1), hence, up to a  $\mathcal{H}^{d-1}$ -negligible set, to the reduced boundary  $\partial^* E$  [AFP00, EG92, Giu84a].*

2. Although the proof there is only sketched, but taking any competitor  $E'$  with  $E_s \Delta E' \in B$ , for  $B$  a big ball, one easily shows that one finds competitors  $E'_j \rightarrow E'$  (of the form  $(E' \cap (1+t)B) \cup (E_{s_j} \setminus (1+t)B)$  for a well-chosen  $t \in (0, 1/2)$ , such that  $\mathcal{H}^{d-1}(\partial(1+t)B \cap (E_{s_j} \Delta E_s)) \rightarrow 0$  with  $E_{s_j} \Delta E'_j \in 2B$  and  $\text{Per}(E'_j, 2B) \rightarrow \text{Per}(E', 2B)$  as  $j \rightarrow \infty$ , from which the minimality of  $E_s$  is easily deduced.

The density estimates, together with the coarea formula, yield an estimate on the oscillation of  $v$  (where  $v$  is define by :  $v(x) = u(x) + p \cdot x$  with  $p$  is a given vector and  $u$  is the minimizer in (2.26)) :

**Corollary 2.3.4.** *There exists  $C > 0$  (depending on  $c^*, c_*, g$ , but not on  $p$ ) such that  $\text{osc}_Q(v) \leq C|p|$ . (Equivalently,  $\text{osc}_Q(u) \leq C|p|$ .)*

(Here  $\text{osc}_Q(f) = \text{ess sup}_Q f - \text{ess inf}_Q f$ .)

*Proof:* If  $x \in \partial E_s$ , it follows from Lemma 2.3.2 that  $|B(x, r_0) \cap E_s| \geq \gamma r_0^d$  and  $|B(x, r_0) \setminus E_s| \geq \gamma r_0^d$ . In particular, if  $x \in \partial E_s \cap Q$ , we have (assuming  $r_0 < 1$ )  $\min\{|(-1, 2)^d \cap E_s|, |(-1, 2)^d \setminus E_s|\} \geq \gamma r_0^d$ . We deduce that  $\text{Per}(E_s, (-1, 2)^d) \geq C\gamma^{\frac{d-1}{d}} r_0^{d-1}$  for a constant  $C$  depending only on the dimension. Hence,

$$\int_{(-1, 2)^d} |Dv| \geq Cr_0^{d-1} |\{s \in \mathbb{R} : \partial E_s \cap Q \neq \emptyset\}|,$$

and we observe that  $|\{s \in \mathbb{R} : \partial E_s \cap Q \neq \emptyset\}| = \text{ess sup}_Q v - \text{ess inf}_Q v$ . On the other hand, using (2.27) and (2.28),

$$\int_{(-1, 2)^d} |Dv| = 3^d \int_Q |Dv| \leq C|p|$$

where  $C$  depends on  $d, c^*$  and  $\|g\|_d$  (and  $\delta$ , which depends on the properties of  $g$ ). We deduce that there exists  $C > 0$ , depending on  $c_*, c^*$  and  $g$  such that  $|\text{ess sup}_Q v - \text{ess inf}_Q v| \leq C|p|$ , which shows the corollary. Of course the oscillation of  $u = v - p \cdot x$  on  $Q$  is bounded by  $(C + \sqrt{d})|p|$ .  $\square$

**Corollary 2.3.5.** *There exists  $M$  which does not depend on  $p$  such that, if  $s$  is such that  $\partial E_s \cap Q \neq \emptyset$  : then  $\partial E_s \subset \{x : |x \cdot p| \leq M|p|\}$ , more precisely  $\{x : x \cdot p \geq M|p|\} \subset E_s \subset \{x : x \cdot p \geq -M|p|\}$ .*

*Proof:* Just let  $M = C + 2\sqrt{d}$  where  $C$  is the constant in the previous proof. Indeed, if  $x \in E_s$ , that is,  $v(x) = u(x) + p \cdot x > s$ , we have  $p \cdot x > s - u(x)$ . But since  $\partial E_s \cap Q \neq \emptyset$ , there is  $x'$  with  $|x'| \leq \sqrt{d}$  and  $u(x') + p \cdot x' \leq s$ , hence  $s \geq u(x') - |p|\sqrt{d}$ . We deduce  $p \cdot x > -\text{osc}_Q u - \sqrt{d}|p| \geq -(C - 2\sqrt{d})|p|$ .  $\square$

To get a full proof of Theorem 2.1.1, it remains to show that the sets  $E_s$  are connected. In fact, we would just repeat here arguments similar to what is found in [CdLL01] (see in particular Proposition 7.3), which show that not only  $E_s$ , but also  $\mathbb{R}^d \setminus E_s$ , must be connected if  $E_s$  is a class A minimizer. Hence we admit this point, and this achieves our new proof of Theorem 2.1.1.

**Remark 2.3.1.** If  $\nu$  is a rational direction, that is, if  $\nu = p/|p|$  with  $p \in \mathbb{Z}^d$ , then the corresponding set  $E_s$  is clearly periodic : indeed, assuming for instance  $p_d \neq 0$  and denoting by  $(e_i)_{i=1}^d$  the canonical basis, there exist  $d - 1$  independent integer vectors  $q_i = p_d e_i - p_i e_d$  such that  $q_i \cdot p = 0$  so that  $E_s + q_i = \{v(\cdot - q_i) > s\} = E_s$ . In particular, it is expected that  $v$  is, in general, flat with a concentrated gradient. On the other hand, if  $\nu$  is irrational, one could expect that  $Dv$  is not singular and  $\partial E_s$  might foliate the torus (i.e., its nonintersecting leaves might be dense in the torus), but this is not always true : for instance, if  $g = 0$ ,  $F(x, p) = a(x)|p|$  with  $a$  continuous,  $a = 1$  outside of a ball in  $Q$  and  $a \gg 1$  in the ball half smaller, then the region where  $a$  is large will be avoided by  $\partial E_s$  for any direction  $\nu$ , including irrational. See [Ban87] for similar results in the classical context of KAM theory.

A consequence of this analysis is the following identity, which is already proved in [BCP95, Theorem 5.1] (at least for  $g = 0$  but if  $g \neq 0$ , we refer to the discussion in the next section where it is shown how to “eliminate”  $g$ ).

**Corollary 2.3.6.**  $\phi = \psi$  : the limits in (2.6) and (2.26) coincide on  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

## 2.4 Elimination of the external field and weaker coercivity

We show in this section that, thanks to a recent result of Bourgain and Brézis [BB03], the external field  $g$  can be removed in our formulation, in the sense that it can be integrated by part into the surface tension as soon as the global energy is coercive. Pushing further this remark (Sec. 2.4.2) allows then to weaken a little the coerciveness assumption which is necessary for Theorems 2.1.1 and 2.2.1. A simple two-dimensional example illustrates the differences between these various hypotheses, see Section 2.4.3. A similar result was also prove by De Pauw in [DPT11, DP09]

### 2.4.1 The coercive case is equivalent to the case $g = 0$

**Proposition 2.4.1.** *Assume (2.2) holds : then there exists  $F'(x, p)$ , continuous and periodic in  $x$ , convex and one-homogeneous in  $p$ , with*

$$c'_*|p| \leq F'(x, p) \leq c^{*'}|p| \quad (2.32)$$

( $c^{*' > c'_* > 0$ ) for any  $p \in \mathbb{R}^d$  and such that for any  $E \subset Q$  with finite perimeter,

$$\mathcal{J}_Q(E) = \int_{Q \cap \partial^* E} F'(x, \nu_E(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x). \quad (2.33)$$

*Proof:* Since (2.2) holds and  $g \in L^d(Q)$  with  $\int_Q g dx = 0$  we have (2.3), so we can find  $\epsilon \in (0, 1)$ , small, such that for any finite-perimeter set  $E \subset Q$  (using Hölder's inequality and the relative isoperimetric inequality in  $Q$ ),

$$-\epsilon \int_E g(x) dx = \epsilon \int_{Q \setminus E} g(x) dx \leq \frac{\delta}{2} Per(E, Q)$$

so that

$$\int_Q F(x, Du) + \int_Q (1 + \epsilon)g(x)u(x) dx \geq \frac{\delta}{2}|Du|(Q), \quad (2.34)$$

for any  $u \in BV(Q)$ .

Thanks to (2.34), the problem

$$\min_{u \in BV(Q)} \int_Q F(x, Du) + \int_Q (1 + \epsilon)g(x)u(x) dx$$

has a unique solution ( $u = 0$ ). As in the previous section (but now we consider a functional defined for functions  $u \in BV(Q)$ , and *not* as in (2.26) for periodic functions defined on the torus  $Q^\sharp$ ), there is the representation

$$\int_Q F(x, Du) = \sup \left\{ - \int_Q u(x) \operatorname{div} \sigma(x) dx : \sigma \in C_c^\infty(Q; \mathbb{R}^d), \sigma(x) \in C(x) \forall x \in Q \right\}.$$

Hence, using similar convex analysis arguments, we deduce the existence of a sequence of compactly supported vector fields  $\sigma_n \in C_c^\infty(Q; \mathbb{R}^d)$  such that as  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\operatorname{div} \sigma_n \rightarrow (1 + \epsilon)g$$

in  $L^d(Q)$ , while  $\sigma_n(x) \in C(x)$  for any  $x \in Q$ . Letting  $\sigma'_n = \sigma_n/(1 + \epsilon)$ , we find smooth, compactly supported vector fields with  $\operatorname{div} \sigma'_n \rightarrow g$  as  $n \rightarrow \infty$ , while  $\sigma'_n \in C(x)/(1 + \epsilon)$  for all  $x$ .

Now, thanks to [BB03, Theorem 3] and the fact that  $\int_Q g - \operatorname{div} \sigma'_n dx = 0$ , there exist  $\sigma''_n \in C^0 \cap W_0^{1,d}(Q)$  with  $\operatorname{div} \sigma''_n = g - \operatorname{div} \sigma'_n$ , and

$$\|\sigma''_n\|_\infty \leq C \|g - \operatorname{div} \sigma'_n\|_d \rightarrow 0$$

as  $n \rightarrow \infty$ .

Choose  $n$  large enough, in order to have  $\|\sigma''_n\|_\infty \leq c_* \epsilon / 2$ , and let  $\sigma = \sigma'_n + \sigma''_n$ . We have  $\operatorname{div} \sigma = g$ , and  $\sigma = 0$  on  $\partial Q$ , so that

$$\int_Q F(x, Du) + \int_Q g(x)u(x) dx = \int_Q F(x, Du) - \sigma(x) \cdot Du = \int_Q F'(x, Du), \quad (2.35)$$

where we have let  $F'(x, p) = F(x, p) - \sigma(x) \cdot p$  for any  $x \in Q$  and  $p \in \mathbb{R}^d$ . The function  $F'$ , extended by periodicity to  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , is still continuous in  $x$  (since  $\sigma$  vanishes on  $\partial Q$ ), 1-homogeneous and convex in  $p$ . Moreover we have for any  $x$

$$\sigma(x) \cdot p = \sigma'_n(x) \cdot p + \sigma''_n(x) \cdot p \leq \frac{1}{1+\epsilon} F(x, p) + \frac{c_* \epsilon}{2} |p|$$

so that

$$\begin{aligned} F'(x, p) = F(x, p) + \sigma(x) \cdot (-p) &\leq F(x, p) + \frac{1}{1+\epsilon} F(x, -p) \frac{c_* \epsilon}{2} |p| \\ &\leq \left( \frac{2+\epsilon}{1+\epsilon} + 1 \right) c^* |p|, \end{aligned}$$

and

$$F'(x, p) = F(x, p) - \sigma(x) \cdot p \geq \frac{\epsilon}{1+\epsilon} F(x, p) - \frac{c_* \epsilon}{2} |p| \geq \left( \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \right) \frac{c_* \epsilon}{2} |p|,$$

hence the new  $F'$  satisfies (2.32) with new constants  $c'_* \leq c_*$ ,  $c^{*'} \geq c^*$ . Observe that (2.35) is equivalent to (2.33).  $\square$

Returning to the functional  $\mathcal{E}_\epsilon$  in (2.4), we see that it is expressed as

$$\mathcal{E}_\epsilon(E) = \int_{\partial^* E \cap (\Omega \setminus \Omega_\epsilon)} F\left(\frac{x}{\epsilon}, \nu_E(x)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{\partial^* E \cap \Omega_\epsilon} F'\left(\frac{x}{\epsilon}, \nu_E(x)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(x)$$

and its  $\Gamma$ -limit can be deduced from classical results.

## 2.4.2 Weaker coercivity

Let us now assume that, instead of (2.2),  $F, g$  are such that for any finite-perimeter set  $E$  in the torus  $Q^\sharp = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ ,

$$\int_{Q^\sharp \cap \partial^* E} F(x, \nu_E(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{Q^\sharp \cap E} g(x) dx \geq \delta \operatorname{Per}(E, Q^\sharp). \quad (2.36)$$

This assumption is weaker than (2.2) — it is simple to see that it is implied by (2.2), see Section 2.4.3 for an example where it is not equivalent. On the other hand, it is much more natural, since it does not depend on the “origin” of the periodicity cell. Now, the same proof as above (still using convex duality and the result of Bourgain and Brézis, this time in the torus [BB03, Theorem 1']) shows the existence of a periodic field  $\sigma \in C^0 \cap W^{1,d}(Q^\sharp)$  such that  $\operatorname{div} \sigma = g$ , and  $F'(x, p) = F(x, p) - \sigma(x) \cdot p$ .



$p \geq c'_* |p|$  for any  $(x, p) \in Q^\# \times \mathbb{R}^d$ , for some constant  $c'_* > 0$ . In particular, for any  $p \in \mathbb{R}^d$  and  $u \in BV(Q^\#)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{Q^\#} F(x, p + Du) + \int_Q g(x)(p \cdot x + u(x)) dx \\ &= \int_{\partial Q} (p \cdot x) \sigma(x) \cdot n_Q(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{Q^\#} F'(x, p + Du) \\ &= \hat{\sigma} \cdot p + \int_{Q^\#} F'(x, p + Du), \end{aligned}$$

where the vector  $\hat{\sigma} \in \mathbb{R}^d$  is defined by

$$\hat{\sigma}_i = \int_{\partial Q \cap \{x_i=1\}} \sigma_i(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x)$$

for  $i = 1, \dots, d$ . Here,  $n_Q = -\nu_Q$  denotes the outer normal to  $Q$ . Hence the cell problem (2.26) can be restated as

$$\psi(p) = \hat{\sigma} \cdot p + \min_{u \in BV(Q^\#)} \int_{Q^\#} F'(x, p + Du), \quad (2.37)$$

and, again, it admits a solution. Clearly, again, one can construct the plane-like minimizers as before : it is enough to build them considering only the surface energy  $F'$ , then, if  $E_\nu$  is such a minimizer and  $E \subset \mathbb{R}^N$  is such that  $E_\nu \triangle E \Subset B$ ,

$$\begin{aligned} \int_{B \cap \partial E_\nu} F(x, \nu_{E_\nu}(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{B \cap E_\nu} g(x) dx \\ &= \int_{B \cap \partial E_\nu} F'(x, \nu_{E_\nu}(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{\partial B \cap E_\nu} \sigma(x) \cdot n_B(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\ &\leq \int_{B \cap \partial^* E} F'(x, \nu_E(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{\partial B \cap E} \sigma(x) \cdot n_B(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\ &= \int_{B \cap \partial^* E} F(x, \nu_E(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{B \cap E} g(x) dx. \end{aligned}$$

so that  $E_\nu$  is also a class A minimizer for  $\mathcal{J}$ . We have shown the following :

**Proposition 2.4.2.** *Theorem 2.1.1 still holds under assumption (2.36). Moreover, the limit (2.6) also exists (and the more precise results in Section 2.5).*

Hence, one could expect again the  $\Gamma$ -convergence of the energies  $\mathcal{E}_\varepsilon$ , defined in (2.4), to  $\int_\Omega \phi(D\chi_E) = \int_\Omega \psi(D\chi_E)$ . The situation is slightly more complicated. In the limit case  $\delta = 0$  in (2.2), we can still conclude :

**Proposition 2.4.3.** *Assume (2.36) holds. Assume moreover that for any  $E \subset Q$ ,*

$$\mathcal{J}_Q(E) = \int_{Q \cap \partial^* E} F(x, \nu_E(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{Q \cap E} g(x) dx \geq 0. \quad (2.38)$$

*Then the thesis of Theorem 2.2.1 still holds :  $\mathcal{E}_\varepsilon$   $\Gamma$ -converges to  $\mathcal{E}$ .*

We will discuss in the end what happens whenever (2.38) is not satisfied.

*Proof:* In fact, there is almost nothing to prove. The proof of Theorem 2.2.1 only uses (2.2) for essentially two purposes : (i) to show that the measures  $\mu_n$  defined in (2.10) are nonnegative, or, similarly, when one needs to know that the energy decreases if computed on “less cubes”, and (ii) to show that if  $(E_n)$  are sets with

$\sup_n \mathcal{E}_{\varepsilon_n}(E_n) < +\infty$ , then they are uniformly bounded in  $BV(\Omega)$ . In cases (i), assumption (2.38) is enough. To show (ii), that is, that the  $(E_n)$  converge up to a subsequence to a finite-perimeter set  $E$ , one just notices that, after integrating by part  $(1/\varepsilon_n)g(x/\varepsilon_n) = \operatorname{div}(\sigma(x/\varepsilon_n))$ , we have

$$\mathcal{E}_{\varepsilon_n}(E_n) \geq c_* \operatorname{Per}(E_n, \Omega \setminus \Omega_{\varepsilon_n}) + c'_* \operatorname{Per}(E_n, \Omega_{\varepsilon_n}) + \int_{\partial\Omega_{\varepsilon_n}} \chi_{E_n} \sigma\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \cdot n_{\Omega_{\varepsilon_n}} d\mathcal{H}^{d-1},$$

however, the last boundary integral is uniformly bounded as  $n \rightarrow \infty$  (by some constant times  $\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)$ ), so that still, the perimeters  $\operatorname{Per}(E_n, \Omega)$  are uniformly bounded.  $\square$

Now, what happens if (2.36) still holds but not (2.38)? The example in Section 2.4.3 shows that the  $\Gamma$ -limit of  $\mathcal{E}_\varepsilon$  could be strictly lower than  $\mathcal{E}$ . However, it is not a very natural counterexample. In fact, it still holds :

**Proposition 2.4.4.** *Assume (2.36) holds. Let  $E_n, E$  be finite perimeter sets such that*

$$E_n \rightarrow E, \text{ that is, } |E_n \Delta E| \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Per}(E_n, \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}) \right) = 0, \quad (2.39)$$

that is, the measures  $\mathcal{H}^{d-1} \llcorner \partial E_n$  do not accumulate on the boundary as  $n \rightarrow \infty$ . Then, there holds (2.8).

On the other hand, (2.9) holds under the weaker assumption (2.36), see section 2.5. A consequence (which in fact is simpler to prove than Proposition (2.4.4)) is that if  $B \Subset \Omega$  is a subdomain of  $\Omega$ , then  $\mathcal{E}_\varepsilon$  still  $\Gamma$ -converges to  $\mathcal{E}$  on the restricted class of finite-perimeter sets with support in  $B$ . A more general result is a  $\Gamma$ -convergence of  $\mathcal{E}_\varepsilon$  to  $\mathcal{E}$  with “well prepared” Dirichlet boundary conditions :

**Corollary 2.4.5.** *Let  $E^0 \subset \Omega$  be a finite-perimeter set, and  $B \Subset \Omega$  an open set. Let  $E_\varepsilon^0$  be a recovery sequence for  $E^0$ , as provided by (2.9). Let  $\mathcal{E}_\varepsilon^0(E) := \mathcal{E}_\varepsilon(E)$  if  $E$  is a finite-perimeter set in  $\Omega$  with  $E \Delta E_\varepsilon^0 \subset B$ , and  $+\infty$  else, and let  $\mathcal{E}^0(E) := \mathcal{E}(E)$  if  $E \Delta E^0 \subset B$  and  $+\infty$  else. Assume (2.36) holds. Then  $\mathcal{E}_\varepsilon^0$   $\Gamma$ -converges to  $\mathcal{E}^0$ .*

Of course, the “most natural” convergence result in this paper is this one, since both Theorem 2.2.1 and Proposition 2.4.3 treat the boundary of the integral on  $g$  in a quite arbitrary way, which in particular depends on the “origin” of the cell of periodicity, see the discussion in Section 2.4.3. All these results should coincide for compactly supported sets.

*Proof of Proposition 2.4.4* We first show that the identity  $\phi = \psi$  (Cor. 2.3.6) still holds under (2.36). Denote respectively  $\phi'$  and  $\psi'$  the interfacial energies corresponding to  $F'(x, p) = F(x, p) - \sigma(x) \cdot p$ , given by equations (2.6) and (2.26). By Corollary 2.3.6,  $\phi' = \psi'$ , and by (2.37),  $\psi(p) = \psi'(p) + \hat{\sigma} \cdot p$ . Hence we must just show that for any  $\nu \in \mathbb{S}^{d-1}$ ,

$$\phi(\nu) = \phi'(\nu) + \hat{\sigma} \cdot \nu. \quad (2.40)$$

Let  $E_\nu$  be a class A minimizer (for  $\mathcal{J}$  or the surface tension  $F'$ , it is of course equivalent) as provided by Theorem 2.1.1. We have

$$\begin{aligned} & \int_{B(0,L) \cap \partial E_\nu} F(x, \nu_{E_\nu}) d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{B(0,L)_1 \cap E_\nu} g(x) dx \\ &= \int_{B(0,L) \cap \partial E_\nu} F'(x, \nu_{E_\nu}) d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\partial B(0,L)_1} \chi_{E_\nu}(x) \sigma(x) \cdot n_{B(0,L)_1}(x) dx \end{aligned} \quad (2.41)$$

but since, by definition,  $B(0, L)_1 = \bigcup\{z + Q : z \in \mathbb{Z}^d, z + Q \subset B(0, L)\}$ , the last integral is an integral on a finite union of facets of translated unit cubes, and in particular the unit normal  $n_{B(0, L)_1}$  is at each point an element of the canonical basis  $(e_i)_{i=1}^d$  of  $\mathbb{R}^d$  (or its opposite). We denote by  $\langle \chi_{E_\nu} \rangle$  the function on  $\partial B(0, L)_1$  which is equal, on each facet of a cube  $z + Q$ ,  $z \in \mathbb{Z}^d$  to the average of  $\chi_{E_\nu}$  on the same facet (and, more precisely, of the trace of  $\chi_{E_\nu}$  on the boundary of  $B(0, L)_1$ ). Then, we observe that since this new function is constant on each facet, we have

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0, L)_1} \langle \chi_{E_\nu} \rangle(x) \sigma(x) \cdot n_{B(0, L)_1}(x) dx \\ &= \int_{\partial B(0, L)_1} \langle \chi_{E_\nu} \rangle(x) \hat{\sigma} \cdot n_{B(0, L)_1}(x) dx \\ &= \int_{\partial B(0, L)_1} \chi_{E_\nu}(x) \hat{\sigma} \cdot n_{B(0, L)_1}(x) dx = \int_{B(0, L)_1} \hat{\sigma} \cdot D\chi_{E_\nu}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Combining (2.41) and (2.42), we find

$$\begin{aligned} \int_{B(0, L) \cap \partial E_\nu} F(x, \nu_{E_\nu}) d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{B(0, L)_1 \cap E_\nu} g(x) dx \\ &= \int_{B(0, L) \cap \partial E_\nu} F'(x, \nu_{E_\nu}) + \hat{\sigma} \cdot \nu_{E_\nu} d\mathcal{H}^{d-1} \\ &\quad + \int_{\partial B(0, L)_1} (\chi_{E_\nu}(x) - \langle \chi_{E_\nu} \rangle(x)) \sigma(x) \cdot n_{B(0, L)_1}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.43)$$

The last integral in (2.43) is zero except in a  $M$ -neighborhood of  $\partial I_\nu$  on the boundary  $\partial B(0, L)_1$ , hence on a set of measure of order  $\sim CML^{d-2}$ . Hence, dividing (2.43) by  $\omega_{d-1}L^{d-1}$  and sending  $L$  to infinity, we find (2.40), which shows that  $\phi = \psi$ .

Now, let  $E_n, E$  be as in the thesis of Proposition 2.4.4. We have

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\varepsilon_n}(E_n) &\geq \int_{\Omega_{\varepsilon_n} \cap \partial^* E_n} F' \left( \frac{x}{\varepsilon_n}, \nu_{E_n}(x) \right) d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\ &\quad + \int_{\partial \Omega_{\varepsilon_n}} \chi_{E_n}(x) \sigma \left( \frac{x}{\varepsilon_n} \right) \cdot n_{\Omega_{\varepsilon_n}}(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x). \end{aligned} \quad (2.44)$$

By Theorem 2.2.1 (or standard results [Bou87, Ama98, BCP95]),

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{\varepsilon_n} \cap \partial^* E_n} F' \left( \frac{x}{\varepsilon_n}, \nu_{E_n}(x) \right) d\mathcal{H}^{d-1}(x) \geq \int_{\partial^* E} \phi'(\nu_E(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x). \quad (2.45)$$

On the other hand, introducing as before the functions  $\langle \chi_{E_n} \rangle$ , average of  $\chi_{E_n}$  on the faces of the cubes  $\varepsilon_n(z + Q)$ ,  $z \in \mathbb{Z}^d$  which constitute  $\partial \Omega_{\varepsilon_n}$  (while  $\pm \hat{\sigma}_i$  is still the average of  $\sigma(x/\varepsilon_n) \cdot n_{\Omega_{\varepsilon_n}}$  on the facets with  $n_{\Omega_{\varepsilon_n}} = \pm e_i$ ), we find

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega_{\varepsilon_n}} \chi_{E_n}(x) \sigma \left( \frac{x}{\varepsilon_n} \right) \cdot n_{\Omega_{\varepsilon_n}}(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\ &= \int_{\partial \Omega_{\varepsilon_n}} (\chi_{E_n}(x) - \langle \chi_{E_n} \rangle(x)) \sigma \left( \frac{x}{\varepsilon_n} \right) \cdot n_{\Omega_{\varepsilon_n}}(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} \hat{\sigma} \cdot D\chi_{E_n} \end{aligned}$$

We claim that assumption (2.39) yields

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial \Omega_{\varepsilon_n}} (\chi_{E_n}(x) - \langle \chi_{E_n} \rangle(x)) \sigma \left( \frac{x}{\varepsilon_n} \right) \cdot n_{\Omega_{\varepsilon_n}}(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) = 0, \quad (2.46)$$

so that we deduce from (2.44) and (2.45) that

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_n}(E_n) \geq \int_{\partial^* E} \phi'(\nu_E(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{\Omega} \hat{\sigma} \cdot D\chi_E,$$

which reduces to (2.8) by (2.40). Hence the proposition holds if we show (2.46). In fact, let  $z \in \mathbb{Z}^d$  such that  $\varepsilon_n(z + Q) \subset \Omega_{\varepsilon_n}$ , and assume  $\varepsilon_n(z + \partial Q) \cap \partial\Omega_{\varepsilon_n} \neq \emptyset$ . Standard estimates show that there exists  $C > 0$  (depending only on  $d$ ) with

$$\int_{\varepsilon_n(z + \partial Q) \cap \partial\Omega_{\varepsilon_n}} |\chi_{E_n}(x) - \langle \chi_{E_n} \rangle(x)| d\mathcal{H}^{d-1}(x) \leq C |D\chi_{E_n}|(\varepsilon_n(z + Q)),$$

so that

$$\int_{\partial\Omega_{\varepsilon_n}} |\chi_{E_n}(x) - \langle \chi_{E_n} \rangle(x)| d\mathcal{H}^{d-1}(x) \leq C \text{Per}(E_n, \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq 2\sqrt{d}\varepsilon_n\}).$$

Hence we deduce (2.46) from (2.39).  $\square$

### 2.4.3 A simple example

Consider now the two-dimensional case ( $d = 2$ ). We consider  $F(x, \nu) = 1$  and define  $g \in L^d(Q^\sharp)$  as follows : for  $a > 0$  we let  $g(x) = -a$  if  $0 < x_1 < 1/2$  and  $g(x) = a$  if  $1/2 < x_1 < 1$ . Observe that  $g = \text{div } \sigma$ , where for any  $x = (x_1, x_2) \in Q$ ,

$$\sigma(x) = \begin{cases} (-ax_1, 0)^T & \text{if } 0 < x_1 < \frac{1}{2}, \\ (a(x_1 - 1), 0)^T & \text{if } \frac{1}{2} < x_1 < 1. \end{cases}$$

Hence if  $E \subset Q$ ,

$$\text{Per}(E, Q) + \int_E g(x) dx = \int_{\partial^* E} (1 - \sigma \cdot \nu_E(x)) d\mathcal{H}^1(x) \geq (1 - \frac{a}{2}) \text{Per}(E, Q).$$

Hence we see that if  $a < 2$ , (2.2) holds, while if  $a = 2$ , (2.38) holds. On the other hand, as soon as  $a > 2$ , neither (2.2) nor (2.38) do hold, as shown by the set  $E = \{x \in Q : x_1 < 1/2\}$  : we have  $\text{Per}(E, Q) + \int_E g(x) dx = 1 - a/2 < 0$ .

Now, what about (2.36)? If we show that it holds for some  $a > 2$ , then, for instance, Proposition (2.4.2) applies and  $\mathcal{E}_\varepsilon$   $\Gamma$ -converges to  $\mathcal{E}$  also when  $a = 2$ . Notice, in this case, that  $\phi(-1, 0) = 0$ , the class A minimizer corresponding to this direction being given by  $E_{(-1,0)} = \{x_1 < 1/2\} \subset \mathbb{R}^2$ .

We have the following relative isoperimetric inequality in the torus  $Q^\sharp = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  :

**Lemma 2.4.6.** *For any  $E \subset Q^\sharp$  with  $|E| \leq 1/2$ ,*

$$|E| \leq \frac{1}{8} \text{Per}(E, Q^\sharp)^2 \tag{2.47}$$

and the constant  $1/8$  is optimal.

Hence : one has for any  $E \subset Q^\sharp$

$$\begin{aligned} \text{Per}(E, Q^\sharp) + \int_E g(x) dx \\ \geq \text{Per}(E, Q^\sharp) - a \min\{|E|, |Q^\sharp \setminus E|\} &\geq \left(1 - \frac{a}{8} \text{Per}(E, Q^\sharp)\right) \text{Per}(E, Q^\sharp) \end{aligned}$$

If  $a < 4$ , choosing  $a'$  with  $a < a' < 4$ , we can find  $\delta > 0$  such that  $\text{Per}(E, Q^\sharp) - a \min\{|E|, |Q^\sharp \setminus E|\} \geq \text{Per}(E, Q^\sharp) - a'/2 \geq \delta \text{Per}(E, Q^\sharp)$  whenever  $\text{Per}(E, Q^\sharp) \geq$

$a'/2$ . On the other hand, if  $Per(E, Q^\sharp) < a'/2$ , we have  $(1 - aPer(E, Q^\sharp)/8) > 1 - aa'/16 > 0$ , hence possibly choosing a smaller  $\delta$  we get that (2.36) holds. If  $a = 4$ , it clearly does not hold since the set  $E = \{0 < x_1 < 1/2\}$  has zero energy, while if  $a > 4$ , its energy is  $2 - a/2 < 0$ . Hence the bound 4 is optimal. In particular, we can conclude that actually for  $a = 2$ , Proposition (2.4.2) is true.

*Proof of Lemma 2.4.6* Let  $E_n$  be a minimizing sequence for  $Per(E, Q^\sharp)/\sqrt{|E|}$  under the constraint  $|E| \leq 1/2$ . If  $|E_n| \rightarrow 0$ , also  $Per(E_n, Q^\sharp) \rightarrow 0$ , however in this case one can check for instance after an appropriate blow-up that the limit set should satisfy the isoperimetric equality in  $\mathbb{R}^2$ , hence it is a disc, and the ratio goes to  $2\sqrt{\pi}$ . If  $|E_n|$  does not go to zero, we may assume  $E_n$  converges to some set  $E$  (in  $L^1$ ) and we find that  $Per(E, Q^\sharp)/\sqrt{|E|}$  is optimal (in particular, standard regularity results show that  $\partial E$  is analytic). Assume there exists  $s, t \in (0, 1)$  such that  $\partial E$  does not cross neither  $\{x_1 = s\}$  nor  $\{x_2 = t\}$ . Then,  $(E - (s, t)) \cap Q$  is a subset of  $\mathbb{R}^2$  which is optimal for the isoperimetric ratio, hence a disc. In the other case, we have for instance that  $\{x_1 = s\} \cap \partial E$  for any  $s$ , and for a.e.  $s$ , this contains at least two points. Hence, integrating over  $s \in (0, 1)$  we get  $Per(E, Q^\sharp) \geq 2$ . But in this case, the optimal set is a strip of width  $1/2$  (for instance  $E = \{0 < x_1 < 1/2\}$ ), and the ratio is  $2\sqrt{2}$  (which is less than  $2\pi$ ). This proves the Lemma.  $\square$

Now, we consider the case where  $2 < a < 4$ , so that (2.36) holds and not (2.2). Let us explain why the  $\Gamma$ -limit of  $\mathcal{E}_\varepsilon$  might be strictly below  $\mathcal{E}$  in this case. In fact, this is very simple : let  $\Omega = (0, 1)^2$  and  $E \subset \Omega$  a finite perimeter set with smooth boundary. Let  $\varepsilon_n = 1/n$  and  $E_n$  be the recovery sequence in (2.9). In this case, we can choose  $\Omega_{\varepsilon_n} = \Omega$  for each  $n$  (although strictly speaking, with our definition, it should be  $[1/n, 1) \times [1/n, 1)$ ). Set now  $\hat{E}_n = E_n \cup ((0, 1/(2n)) \times (0, 1))$  : we add to  $E_n$  a little strip where  $g = -a$ . Then, each time a cube  $(0, 1/n) \times (k/n, (k+1)/n)$  does not meet  $E_n$ , the additional energy is  $1/n - n \times (a/(2n^2))$ . Hence, if we let  $\Sigma = \{s \in (0, 1) : (0, s) \in \bar{E}\}$ , we get for  $n$  large enough

$$\mathcal{E}_{\varepsilon_n}(\hat{E}_n) \approx \mathcal{E}_{\varepsilon_n}(E_n) + (1 - |\Sigma|) \left(1 - \frac{a}{2}\right)$$

So that  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_n}(\hat{E}_n) < \mathcal{E}(E)$  as soon as  $|\Sigma| < 1$ . Of course, in some sense our sets  $\hat{E}_n$  now converge to  $E \cup \{0\} \times (0, 1)$  rather than  $E$  : this shows that in order to get still the convergence of  $\mathcal{E}_\varepsilon$  to  $\mathcal{E}$ , one actually needs to impose some kind of Dirichlet boundary conditions on the sets (Cor. 2.4.5).

Of course, all this is a bit artificial : if we translate now  $g$  by  $(1/4, 0)$  :  $g(x) = a$  if  $0 < x_1 < 1/4$  or  $3/4 < x_1 < 1$ , and  $-a$  if  $1/4 < x_1 < 3/4$ , and let now  $\sigma = (ax_1, 0)^T$  if  $0 < x_1 < 1/4$ ,  $(-a(x_1 - 1/2), 0)^T$  if  $1/4 < x_1 < 3/4$ ,  $(a(x_1 - 1), 0)^T$  if  $3/4 < x_1 < 1$ , then again  $g = \operatorname{div} \sigma$ , but now if  $E \subset Q$

$$Per(Q, E) + \int_E g(x) dx = \int_{Q \cap \partial^* E} (1 - \sigma(x) \cdot \nu_E(x)) d\mathcal{H}^1(x) \geq \left(1 - \frac{a}{4}\right) Per(Q, E)$$

so that now the optimal  $a$  is the same for (2.2) and (2.36) (the latter is of course more natural, since independent on the (arbitrary) origin of the period which is chosen for defining  $\mathcal{E}_\varepsilon$ ).

A question which is natural, is whether there exists (still for  $F(x, p) = |p|$ ) a periodic  $g \in L^d(Q^\sharp)$  such that (2.36) holds, while (2.2) never holds for any translation  $g(\cdot - y)$ ,  $y \in Q$  : that is, whether there is really a difference between conditions (2.2) and (2.36). We do not know the answer, although it is likely to be true.

## 2.5 Proof of (2.6) and some more general statements

In this section, we prove (2.6), under the assumption that the set  $E_\nu$  (which in fact may vary with  $L$ ) is a class A minimizers whose boundary is contained in a strip of width  $2M$ . In fact, neither (2.1) nor (2.2) are really necessary for this section : as long as the minimizers exist and satisfy  $\partial E_\nu \subset \{|x \cdot \nu| \leq M\}$ , we just use the fact that  $F(x, p) \leq c^*|p|$  for any  $x$  and  $p$ , and  $g \in L^d(Q)$  with  $\int_Q g dx = 0$ . (Hence (2.6) also holds with the milder assumption (2.36), see Section 2.4.2.)

For each  $\nu \in \mathbb{S}^{d-1}$ , we let  $Q^\nu$  be the unit open cube  $(-1/2, 1/2)^d$  rotated in a way such that  $\nu$  is orthogonal to one face, and  $Q_\varepsilon^\nu$ , as before, is the union of all cubes  $z + \varepsilon Q \subset Q^\nu$  with  $z \in \varepsilon \mathbb{Z}^d$ . As before,  $I_\nu = \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot \nu > 0\}$ .

Let us first show the following lemma, which is quite standard (a variant is proven in [CdLL01]) :

**Lemma 2.5.1.** *We consider  $g \in L^d(Q)$  with  $\int_Q g dx = 0$ , and  $F(x, p)$  an interfacial energy (continuous, periodic in  $x$  and convex, one-homogeneous in  $p$ ) with  $F(x, p) \leq c^*|p|$  for any  $x, p \in \mathbb{R}^d$ . We assume that for each  $\nu \in \mathbb{S}^{d-1}$ , there exists a class A minimizer  $E_\nu$  for  $\mathcal{J}$  which satisfies point (i) of Theorem 2.1.1.*

*Then, there exists  $\phi(\nu)$  a bounded function, such that for any  $\varepsilon_k \downarrow 0$  and any sequence of class A minimizers  $E_\nu^k$  for  $\mathcal{J}$  with  $\partial E_\nu^k \subset \{|x \cdot \nu| \leq M\}$  for each  $k$  (so that, in particular,  $\varepsilon_k E_\nu^k \rightarrow I_\nu$  as  $k \rightarrow \infty$ ),*

$$\phi(\nu) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial^*(\varepsilon_k E_\nu^k) \cap Q^\nu} F\left(\frac{x}{\varepsilon_k}, \nu_{(\varepsilon_k E_\nu^k)}(x)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \frac{1}{\varepsilon_k} \int_{Q_{\varepsilon_k}^\nu \cap (\varepsilon_k E_\nu^k)} g\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right) dx. \quad (2.48)$$

*Proof:* We follow [CdLL01] and a similar proof in [CGL]. Observe first that for any  $E \subset \mathbb{R}^d$  which is a class A minimizer of  $\mathcal{J}$ , by definition if  $Q'$  is any translate of  $Q = [0, 1)^d$  we have, comparing  $E$  with  $E \setminus Q'$ ,

$$\mathcal{E}_1(E, \overline{Q'}) \leq \int_{\partial Q' \cap E} F(x, n_{Q'}(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x) \leq c^* \text{Per}(Q),$$

(where here,  $n_{Q'} = -\nu_{Q'}$  is the outer normal to  $\partial Q'$ ) so that

$$\int_{\overline{Q'} \cap \partial^* E} F(x, \nu_E(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x) \leq 2dc^* + \|g\|_d \quad (2.49)$$

is bounded by a universal constant which depends only on  $g$  and the dimension.

We first prove that the limit (if it exists) must be bounded. The integrals in (2.48) can be written as a sum of integrals on small cubes  $\varepsilon_k(z + Q)$ ,  $z \in \mathbb{Z}^d$  of volume  $\varepsilon_k^d$ . Most of these contributions are zero, the only which may have a positive or negative contribution lie in the strip  $\mathcal{S}_k = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(x, Q_\nu \cap \partial I_\nu) \leq \varepsilon_k(M + \sqrt{d})\}$ . When non zero, the contribution is (by (2.49)) between  $-\varepsilon_k^{d-1}\|g\|_d$  and  $\varepsilon_k^{d-1}(2dc^* + \|g\|_d)$ . Hence,

$$-\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k^{-1} \|g\|_d |\mathcal{S}_k| \leq \phi(\nu) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k^{-1} (2dc^* + \|g\|_d) |\mathcal{S}_k|$$

and since  $|\mathcal{S}_k| = 2\varepsilon_k(M + \sqrt{d}) + o(\varepsilon_k)$  as  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , we deduce

$$-2\|g\|_d(M + \sqrt{d}) \leq \phi(\nu) \leq 2(2dc^* + \|g\|_d)(M + \sqrt{d}). \quad (2.50)$$

Now, consider  $\varepsilon > \varepsilon' > 0$  such that  $\varepsilon' \ll \varepsilon$ , and let  $E_\nu, E'_\nu$  be two class A minimizers of  $\mathcal{E}$  with  $\partial E_\nu \cup \partial E'_\nu \subset \{|x \cdot \nu| \leq M\}$ . We make the following construction. First of all, we can cover  $\partial I_\nu \cap (1/\varepsilon')Q^\nu$  with  $N = [(\varepsilon/\varepsilon')/(1 + 2\varepsilon\sqrt{d})]^{d-1}$  disjoint translates of  $(2\sqrt{d} + 1/\varepsilon)Q^\nu$ , each centered on  $\partial I_\nu$  (here,  $[\cdot]$  denotes the integer part). Strictly inside each of these cubes (meaning at positive distance from the boundary), there is at least a translate of  $(1/\varepsilon)Q^\nu$  which is centered on an point of  $\mathbb{Z}^d$ . We denote by  $(Q_i)_{i=1}^N$  these translates. We also denote by  $E_i \subset Q_i$  the corresponding translate of  $E_\nu \cap (1/\varepsilon)Q^\nu$ , and let

$$E' = \left( E'_\nu \setminus \bigcup_{i=1}^N Q_i \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^N E_i \right).$$

Then (observing that  $E'_\nu$  and  $E'$  are identical on all cubes  $z + Q$ ,  $z \in \mathbb{Z}^d$ , which are not contained in  $(1/\varepsilon')Q^\nu$ ), we have by class A minimality of  $\mathcal{E}'_\nu$  :

$$\mathcal{E}_1(E'_\nu, \frac{1}{\varepsilon'}Q^\nu) \leq \mathcal{E}_1(E', \frac{1}{\varepsilon'}Q^\nu).$$

That is, denoting  $R = \bigcup_{i=1}^N Q_i$  and  $S$  the union of the cubes  $z + Q$ ,  $z \in \mathbb{Z}^d$ , with  $z + Q \subset (1/\varepsilon')Q^\nu$  and  $z + Q \not\subset R$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(E'_\nu, \frac{1}{\varepsilon'}Q^\nu) &\leq N\mathcal{E}_1(E_\nu, \frac{1}{\varepsilon}Q^\nu) \\ &\quad + \int_{\partial E' \cap (1/\varepsilon')Q^\nu \setminus R} F(x, \nu_{E'}(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{S \cap E'} g(x) dx. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Let us decompose the “rest” in the previous estimate as follows :

$$\begin{aligned} &\int_{\partial E' \cap (1/\varepsilon')Q^\nu \setminus R} F(x, \nu_{E'}(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_{S \cap E'} g(x) dx \\ &\leq \int_{\partial E'_\nu \cap (1/\varepsilon')Q^\nu \setminus \bar{R}} F(x, \nu_{E'_\nu}(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + c^* \mathcal{H}^{d-1}(\partial R \cap \partial E') \\ &\quad + \int_{S \cap E'} g(x) dx = (I) + (II) + (III). \end{aligned} \quad (2.52)$$

By (2.49), (I) is bounded by a constant ( $C$ ) times the number of cubes  $z + Q$ ,  $z \in \mathbb{Z}^d$ , which intersect  $\partial E'_\nu \subset \{|x \cdot \nu| \leq M\}$ . Hence,

$$\begin{aligned} (I) &\leq C(M + \sqrt{d}) \times \left\{ \left( \frac{1}{\varepsilon'} + 2\sqrt{d} \right)^{d-1} - N \left( \frac{1}{\varepsilon} - 2\sqrt{d} \right)^{d-1} \right\} \\ &= \frac{C(M + \sqrt{d})}{\varepsilon'^{d-1}} \left\{ \left( 1 + 2\varepsilon'\sqrt{d} \right)^{d-1} - \left( \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \left[ \frac{\varepsilon}{\varepsilon' 1 + 2\varepsilon\sqrt{d}} \right] (1 - 2\varepsilon\sqrt{d}) \right)^{d-1} \right\} \\ &= \frac{A_I(\varepsilon', \varepsilon)}{\varepsilon'^{d-1}} \end{aligned}$$

where  $A_I(\varepsilon', \varepsilon) \rightarrow 0$  if  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon' \rightarrow 0$  and  $\varepsilon'/\varepsilon \rightarrow 0$ .

On the other hand, (II) is bounded by the total surface of  $\partial R \cap \{|x \cdot \nu| \leq M + 2\sqrt{d}\}$  :

$$(II) \leq c^* N \frac{M + 2\sqrt{d}}{\varepsilon^{d-2}} \leq c^* \varepsilon \frac{M + 2\sqrt{d}}{\varepsilon'^{d-1}} \left( \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \left[ \frac{\varepsilon}{\varepsilon' 1 + 2\varepsilon\sqrt{d}} \right] \right)^{d-1} = \frac{A_{II}(\varepsilon', \varepsilon)}{\varepsilon'^{d-1}}$$

where again,  $A_{II}(\varepsilon', \varepsilon) \rightarrow 0$  if  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon' \rightarrow 0$  and  $\varepsilon'/\varepsilon \rightarrow 0$ .

Then,  $(III) = \int_{S \cap E'} g(x) dx$  is bounded by  $\|g\|_d$  times the number of cubes  $z+Q$  ( $z \in \mathbb{Z}^d$ ) in  $S$  which meet  $\partial E'$ : again, since by construction  $\partial E' \subset \{|x \cdot \nu| \leq M + \sqrt{d}\}$ , all these cubes lie in the strip  $\{|x \cdot \nu| \leq M + 2\sqrt{d}\}$  and since they must not meet  $R = \bigcup_{i=1}^N Q_i$  we find

$$\begin{aligned} (III) &\leq \|g\|_d (M + 2\sqrt{d}) \left\{ \frac{1}{\varepsilon'^{d-1}} - N \frac{1}{\varepsilon^{d-1}} \right\} \\ &= \frac{\|g\|_d (M + 2\sqrt{d})}{\varepsilon'^{d-1}} \left\{ 1 - \left( \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \left[ \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \frac{1}{1 + 2\varepsilon\sqrt{d}} \right] \right)^{d-1} \right\} = \frac{A_{III}(\varepsilon', \varepsilon)}{\varepsilon'^{d-1}}, \end{aligned}$$

where as before,  $A_{III}(\varepsilon', \varepsilon)$  goes to zero if  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'/\varepsilon$  go to zero.

Hence, letting  $A(\varepsilon', \varepsilon) = A_I(\varepsilon', \varepsilon) + A_{II}(\varepsilon', \varepsilon) + A_{III}(\varepsilon', \varepsilon)$ , we find that the ‘‘rest’’ in (2.51), that is, (2.52), is less than  $A(\varepsilon', \varepsilon)/\varepsilon'^{d-1}$  where  $A(\varepsilon', \varepsilon)$  goes to zero if  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'/\varepsilon$  go to zero.

Consider now two possible limits  $a$  and  $a'$  of (2.48), along two different sequences  $\varepsilon_k$  and  $\varepsilon'_k$  (and  $E_\nu^k, E_\nu'^k$  the corresponding sequences of minimizers). Upon extracting a subsequence (and relabelling appropriately), we may assume that  $\varepsilon'_k/\varepsilon_k \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$ . Then, after an appropriate rescaling, (2.51) shows that

$$\mathcal{E}_{\varepsilon'_k}(\varepsilon'_k E_\nu'^k, Q^\nu) \leq \left( \frac{\varepsilon'_k}{\varepsilon_k} \right)^{d-1} N_k \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(\varepsilon_k E_\nu^k, Q^\nu) + A(\varepsilon'_k, \varepsilon_k)$$

where  $N_k = [(\varepsilon_k/\varepsilon'_k)/(1 + 2\varepsilon_k\sqrt{d})]^{d-1}$ . As  $k \rightarrow \infty$ , we deduce  $a' \leq a$ . This shows the lemma.  $\square$

It then follows :

**Corollary 2.5.2.** *Let  $A \subset \mathbb{R}^d$  be an open set and let  $I_\nu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon E_\nu) = \{x : x \cdot \nu \geq 0\}$ . Then,*

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}^{d-1}(\partial I_\nu \cap A) \phi(\nu) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial^*(\varepsilon E_\nu) \cap A} F\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nu_{(\varepsilon E_\nu)}(x)\right) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{A_\varepsilon \cap (\varepsilon E_\nu)} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \end{aligned} \quad (2.53)$$

Observe that after a suitable rescaling, (2.6) follows from (2.53) taking  $A = B(0, 1)$  and  $\varepsilon = 1/L$ .

*Proof:* For any  $n \geq 1$ , we simply cover  $\partial I_\nu \cap A$  by finitely many disjoint translates of  $(1/n)Q^\nu$ , centered on  $\partial I_\nu$ , so that (denoting by  $R_n$  the union of all these cubes),  $\mathcal{H}^{d-1}(\partial I_\nu \cap (A \setminus R_n)) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . Then, we estimate the error as in the proof of boundedness of  $\phi$  in the previous lemma, to deduce from (2.48) show that both

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(\varepsilon E_\nu, A) \geq \phi(\nu) \mathcal{H}^{d-1}(\partial I_\nu \cap R_n) - C \mathcal{H}^{d-1}(\partial I_\nu \cap (A \setminus R_n))$$

and

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(\varepsilon E_\nu, A) \leq \phi(\nu) \mathcal{H}^{d-1}(\partial I_\nu \cap R_n) + C \mathcal{H}^{d-1}(\partial I_\nu \cap (A \setminus R_n))$$

for any  $n$ , where  $C$  is some constant. Sending  $n \rightarrow \infty$ , we deduce (2.53).  $\square$

**Corollary 2.5.3.** *Let  $E \subset \Omega$  be a polyhedral set, that is, such that  $\partial E \cap \Omega$  is made of finitely many subsets of  $x_i + \partial I_{\nu_i}$ , for  $x_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $\nu_i \in \mathbb{S}^{d-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$  (and where  $\nu_i$  coincides with  $\nu_E$ ). Then, there exist sets  $E_\varepsilon \rightarrow E$  such that*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(E_\varepsilon) \leq \mathcal{E}(E) \quad (2.54)$$



*Proof:* We sketch the proof. First, for any  $\eta > 0$ , we can cover  $\partial E$  with disjoint cylinders  $A_i = \omega_i + (-\eta', \eta')\nu_i \subset \Omega$ ,  $\eta' > 0$  small, where  $\omega_i \subset (x_i + \partial I_{\nu_i}) \cap \partial E$ ,  $\nu_i = \nu_E$  on  $\omega_i$ , and  $\mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap (\partial E \setminus \bigcup_{i=1}^N \omega_i)) \leq \eta$ .

Then, we let for  $\varepsilon > 0$  small enough (in particular, than  $\eta'/M$ )

$$E_\varepsilon = \left( E \setminus \bigcup_{i=1}^N A_i \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^N (x_i + \varepsilon E_{\nu_i}) \cap A_i \right)$$

where each  $E_{\nu_i}$  is a class A minimizer of  $\mathcal{J}$  which satisfies (ii) in Theorem 2.1.1. Then, an accurate estimate of the error as in the previous proofs will show that

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(E_\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^N \phi(\nu_i) \mathcal{H}^{d-1}(\omega_i) + C\eta$$

so that Corollary 2.5.3 follows from a diagonal argument.  $\square$

If we assume that (2.2) holds, it now follows from Corollary 2.5.3 and the estimate (2.8) that  $\mathcal{E}_\varepsilon$   $\Gamma$ -converge to  $\mathcal{E}$  in the class of polyhedral sets (in particular, the limsup in (2.54) is a limit). We deduce in particular (using quite standard semicontinuity arguments) the following :

**Corollary 2.5.4.** *The function  $\phi$ , extended to  $\mathbb{R}^d$  by one-homogeneity, that is letting  $\phi(p) = |p|\phi(p/|p|)$  if  $p \neq 0$  and  $\phi(0) = 0$ , is convex (hence Lipschitz-continuous).*

In fact, still assuming “only” the same assumptions as in Lemma 2.5.1, Corollary 2.5.4 still holds. The proof is identical to the proof of [CdLL01, Lem. 10.2] whose idea is as follows : we choose  $\nu_1, \nu_2$ ,  $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/|\nu_1 + \nu_2|$ , and for any  $\delta > 0$  we compare the energy in  $Q_\nu$  of the “plane”  $\varepsilon \partial E_\nu$ , with the energy of the approximation  $E_\varepsilon$  provided by Corollary 2.5.3 of a polyhedron  $E$  such that  $\partial E \subset \{|x \cdot \nu| \leq \delta\}$  and  $\nu_E = \nu_1$  on half of  $\partial E \cap Q_\nu$ , and  $\nu_2$  on the other half. Letting  $\varepsilon \rightarrow 0$  we find  $\phi(\nu) \leq (\phi(\nu_1) + \phi(\nu_2))/|\nu_1 + \nu_2| + C\delta$ , and letting  $\delta \rightarrow 0$  we deduce the convexity of the one-homogeneous extension of  $\phi$ .

## 2.6 A pinning result for planelike minimizer

This existence of planelike minimizer also gives us the existence of stationary solutions to the problem

$$V(x) = H(x) + g(x) \quad x \in \Gamma \tag{2.55}$$

where  $\Gamma$  is the evolving hypersurface,  $V$  is the normal speed,  $H$  is the mean curvature, and  $g$  is a periodic, of mean zero, potential.

This evolution is given by the solution of viscosity of :

$$\begin{cases} u_t = |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + g \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{2.56}$$

Indeed, if  $u_0$  is such that  $\{x, u_0(x) < 0\} = E_\nu$ , then, the level set 0 will not move, that is to say, for all  $t > 0$ ,  $\{x, u(x, t) < 0\} = E_\nu$ . Then, some blocking interface will appear. Indeed, the equation (2.56) have a comparison principle. So, if the initial condition  $u_0$  is such that :  $\{x, u_0(x) < 0\} \subset E_\nu$ , then, for all  $t > 0$ ,  $\{x, u(x, t) < 0\} \subset E_\nu$ . We have a similar result if the level set contains  $E_\nu$ .

Our goal is to know if there is a pinning-depinning effect, as the one study in [DY06]. We will look for the solutions of :

$$H(x) + g(x) + \eta = 0 \quad \forall x \in \partial E^\nu. \quad (2.57)$$

We first want to know if for each direction  $\nu$  there is a constant  $\eta_c$  such that, for all  $\eta < \eta_c$ , there is a planelike minimizer in the direction  $\nu$  solution of (2.57). This constant will give the existence of blocking interface for :

$$\begin{cases} u_t = |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + g + \eta \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

In a first part, we give a sufficient condition for which that the result is true.

### 2.6.1 A sufficient condition

**Theorem 2.6.1.** *Let  $\nu \in \mathbb{R}^d$ , suppose there is a ball  $B_\rho \Subset Q$ , with  $\rho > 0$ , such that, for all planelike minimizer on the direction  $\nu$ ,  $E$ ,  $\partial E / \mathbb{Z}^d \cap B_\rho = \emptyset$ , then, there is  $\eta_c > 0$  such that for all  $0 \leq \eta \leq \eta_c$  there is a planelike minimizer for the function  $g + \eta$  in the direction  $\nu$ .*

**Remark 2.6.1.** This condition can be difficult to establish. We can give an exemple in the next section.

*Proof:* First, suppose that  $\nu$  is rational, so, we can suppose that  $E$  is periodic.

The idea is to construct a function  $g_\eta$  satisfying the conditions of 2.1.1 :

$$g_\eta(x) = \begin{cases} g(x) + \eta & \text{if } x \in Q \setminus B_{\frac{\rho}{2}} \\ g(x) - c\eta & \text{if } x \in B_{\frac{\rho}{2}} \end{cases} \quad (2.58)$$

With  $c$  such that  $\int_Q g_\eta = 0$

Let  $\mathcal{J}_\eta$  the energy :

$$\mathcal{J}_\eta(E) = \int_{\partial^* E} F(x, \nu_E) d\mathcal{H}^{d-1}(x) + \int_E g_\eta(x) dx \quad (2.59)$$

So, for  $\eta$  small enough, there is some planelike minimizer in the direction  $\nu$  for the potential  $g_\eta$ . Now, we show that for  $\eta$  small enough there is a planelike minimizer  $E_\eta$  such that :  $\partial E_\eta \cap B_{\frac{\rho}{2}} = \emptyset$ , and to prove this we will argue by contradiction.

Let  $E_\eta$  a periodic minimizer for the functional  $\mathcal{J}_\eta$ . We have :  $|\mathcal{J}_\eta(E) - \mathcal{J}(E)| \leq C\eta|Q|$ , so the sequence  $E_\eta$  is a minimizing sequence for the functional  $\mathcal{J}$ . Moreover, the perimeter is bounded so, thanks to 1.1.4, there is a subsequence  $E_\eta$  which goes to a Caccioppoli set  $E$  in norm  $L^1$ , with  $E$  a minimizer of  $\mathcal{J}$ .

The sets  $E_\eta$  have to ensure the density inequality 2.3.2 and this fact will gives us the contradiction in our proof. Suppose there is  $x_\eta \in \partial E_\eta \cap B_{\frac{\rho}{2}}$ . So there is  $0 \leq r \leq \frac{\rho}{2}$  such that

$$|B(x_\eta, r) \cap E_\eta| \geq Cr^d$$

and

$$|B(x_\eta, r) \setminus E_\eta| \geq Cr^d.$$

However  $|E \cap B(x_\eta, r)| = 0$  or 1 which implies :

$$|E \Delta E_\eta| \geq Cr^d. \quad (2.60)$$

So, this is in contradiction with  $E_\eta \rightarrow E$  in  $L^1$ . Which implies that there is a planelike minimizer in the direction  $\nu$  for  $g_\eta$  if  $\eta$  is small enough. Moreover, as  $\partial E_\eta \cap B_{\frac{\rho}{2}} = \emptyset$ , we have that  $E_\eta$  will give a stationnary solution for 2.6.

Now, suppose that  $\nu$  is irrational.

The argument will be slightly different, as the minimizer won't be periodic, so we'll have to localize the intersection between the boundary of  $E_{\eta_n}$  and  $B_{\frac{\rho}{2}}$ .

Suppose there is a subsequence  $\eta_n \rightarrow 0$  such that, for every  $\eta_n$  :

$$\partial E_{\eta_n} / \mathbb{Z}^d \cap B_{\frac{\rho}{2}} \neq \emptyset.$$

That is to say,  $\partial E_{\eta_n}$  intersects  $B_{\frac{\rho}{2}}$  in the torus.

Moreover, if  $E_{\eta_n}$  is a planelike minimizer, every integer translation is also one, that is to say, for every  $p$ ,  $\{x, x - p \in E_{\eta_n}\}$  is a planelike minimizer. So, for every  $\eta_n$ , there is an integer translation  $\mathcal{T}_{p_n}$  such that :

$$\mathcal{T}_{p_n} \partial E_{\eta_n} \cap B_{\frac{\rho}{2}} \neq \emptyset.$$

Now, the intersection is between  $\tilde{E}_{\eta_n}$  and  $B_{\frac{\rho}{2}}$  in the plane (and not the torus). So we can work on a compact set.

Indeed, the sequence  $\tilde{E}_{\eta_n}$  is convergent in  $L^1_{loc}$ , let be  $E$  the limit.  $E$  is also a planelike minimizer, so :

$$\tilde{E}_{\eta_n} \cap B_{\frac{\rho}{2}} = \emptyset.$$

Moreover, as previously, the convergence in  $L^1_{loc}$  implies, thanks to the density estimate, a local convergence for the Hausdorff distance. This imply that for  $\eta_n$  small enough :

$$\partial \tilde{E}_{\eta_n} \cap B_{\frac{\rho}{2}} = \emptyset.$$

This is a contradiction. □

Unfortunately, this theorem is based on a hypothesis which is difficult to check. We will exhibit some functions where the hypothesis is false, and then, we will exhibit some which verify the hypothesis. Let :

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{if } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.61)$$

Let  $\nu = e_2$ , and  $E^{e_2}$  a planelike minimizer in the direction  $e_2$ , so for all  $a \in \mathbb{R}$ ,  $E^{e_2} + ae_2$  is also a plane-like minimizer (at distance  $M + a$  of the hyperplane reference). So, for the direction  $e_2$  there is no ball such that every planelike minimizer avoids it.

## 2.6.2 An example

We will now construct a function  $g$  satisfying the previous hypotheses. Let  $F(x, p) = |p|$ .

Denote  $B_\rho$  a ball of radius  $\rho$ . Given  $\lambda > 0$  we will look for a  $g$  such that :

1.  $\forall x \in B_\rho \quad g(x) \geq \lambda$ .
2.  $\int_Q g = 0$ .
3.  $g \in L^\infty$ .
4. For every Caccioppoli set  $E$  on the torus  $Q^\sharp = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ ,

$$Per(E, Q^\sharp) + \int_{Q^\sharp \cap E} g(x) dx \geq \delta Per(E, Q^\sharp). \quad (2.62)$$

Hypothesis 4 ensures the existence of a plane-like global minimizer ([CT09]) for every direction  $\nu$ . Remark that

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^d \setminus B_\rho) = d\omega_d \rho^{d-1} - \lambda \omega_d \rho^d,$$

And if  $\lambda \geq \frac{d}{\rho}$  then  $\mathcal{J}(\mathbb{R}^d \setminus B_\rho) \leq 0$  which contradict the coercivity hypothesis. Therefore we must choose  $\lambda < \frac{d}{\rho}$ . We will show that for any  $0 \leq \lambda \leq \frac{d}{\rho}$ , such a  $g$  can be built. The reminder of the construction of  $g$  will be organized as follows. First, lemma 2.6.1 will guarantee the existence of the exclusion ball of theorem 2.6.1 under conditions on  $\lambda$  and  $\rho$ . Then, we will prove in lemma 2.6.4 that for  $\rho$  small enough the condition to have coercivity is  $\lambda < \frac{d}{\rho}$ . And so, we can find  $(\lambda, \rho)$  such that lemma 2.6.1 and lemma 2.6.4 are true.

**Lemma 2.6.1.** *For any  $\rho > 0$  sufficiently small there exists  $\lambda_\rho$  such that for every  $\lambda_\rho < \lambda < \frac{d}{\rho}$ , for every  $\nu \in \mathbb{R}^d$  and for every plane-like minimizer  $E_\nu$ ,  $(\partial E_\nu / \mathbb{Z}^d) \cap B_{\frac{\rho}{2}} = \emptyset$ .*

*Proof:* Let  $\nu \in \mathbb{R}^d$ . Let  $\Sigma$  be a global minimizer such that  $\Sigma \cap B_\rho \neq \emptyset$  and  $B_\rho \setminus \Sigma \neq \emptyset$ . Our aim is to find a condition on  $\lambda$  to know that  $|B_\rho \cap \Sigma|$  is small. To do that, we will find a condition on  $\lambda$  and  $|B_\rho \cap \Sigma|$  that implies :

$$\mathcal{J}(\Sigma \setminus B_\rho) < \mathcal{J}(\Sigma), \quad (2.63)$$

which will contradict the global minimizer condition.

We rewrite this inequality as :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_\rho \cap \Sigma) + \mathcal{H}^{d-1}(\Sigma \cap B_\rho^c) + \int_{\Sigma \cap B_\rho^c} g(x) &< \mathcal{H}^{d-1}(\partial \Sigma \cap B_\rho) + \mathcal{H}^{d-1}(\Sigma \cap B_\rho^c) \\ &+ \int_{\Sigma \cap B_\rho^c} g(x) + \int_{\Sigma \cap B_\rho} g(x), \end{aligned}$$

That is :

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial B_\rho \cap \Sigma) < \mathcal{H}^{d-1}(\partial \Sigma \cap B_\rho) + \int_{\Sigma \cap B_\rho} g(x).$$

Since  $g \geq \lambda \chi_{B_\rho}$ , we will have this if we find a condition on  $\lambda$  such that :

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial B_\rho \cap \Sigma) < \mathcal{H}^{d-1}(\partial \Sigma \cap B_\rho) + \lambda |\Sigma \cap B_\rho|. \quad (2.64)$$

First, we will prove the following lemma :

**Lemma 2.6.2.** *Let  $\Sigma$  a global minimizer, let  $0 < \lambda < \frac{d}{\rho}$ . There is  $0 < r_\lambda < 1$  such that  $|\Sigma \cap B_\rho| = 0$  or  $|\Sigma \cap B_\rho| \geq r_\lambda |B_\rho|$ . Moreover  $r_\lambda$  goes to 1 when  $\lambda$  goes to  $\frac{d}{\rho}$ .*

*Proof:* Let  $V = |\Sigma \cap B_\rho|$ .

Using the isoperimetric inequality on  $B_\rho \setminus \Sigma$  gives us :

$$\| |B_\rho| - V \|^{\frac{d-1}{d}} \leq C(\mathcal{H}^{d-1}(\partial \Sigma \cap B_\rho) + |\partial B_\rho| - \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_\rho \cap \Sigma)) \quad (2.65)$$

with  $C = \frac{1}{d\omega^{\frac{1}{d}}}$ . This implies :

$$\left( |B_\rho| - V \right)^{\frac{d-1}{d}} \leq C(\mathcal{H}^{d-1}(\partial \Sigma \cap B_\rho) - \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_\rho \cap \Sigma)) + |B_\rho|^{\frac{d-1}{d}} \quad (2.66)$$

Hence,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_\rho \cap \Sigma) &\leq \mathcal{H}^{d-1}(\partial \Sigma \cap B_\rho) + d\omega_d^{\frac{1}{d}}(|B_\rho|^{\frac{d-1}{d}} - (|B_\rho| - V)^{\frac{d-1}{d}}) \\ &\leq \mathcal{H}^{d-1}(\partial \Sigma \cap B_\rho) + d\omega_d \rho^{d-1} \left(1 - \left(1 - \frac{V}{|B_\rho|}\right)^{\frac{d-1}{d}}\right) \end{aligned} \quad (2.67)$$

So we must find  $\lambda$  such that :

$$d\omega_d \rho^{d-1} \left(1 - \left(1 - \frac{V}{|B_\rho|}\right)^{\frac{d-1}{d}}\right) \leq \lambda V \quad (2.68)$$

Dividing by  $|B_\rho|$  and denoting  $r = \frac{V}{|B_\rho|}$ , we get

$$(1 - (1 - r)^{\frac{d-1}{d}}) \leq \lambda \frac{\rho}{d} r \quad (2.69)$$

We can check that for all  $0 < \lambda < \frac{d}{\rho}$  there is  $r_\lambda < 1$  such that for all  $r > r_\lambda$  :

$$(1 - (1 - r)^{\frac{d-1}{d}}) < \frac{\lambda \rho}{d} r,$$

and for  $r$  smaller than  $r_\lambda$  we have the opposite inequality. Moreover the function  $\lambda \rightarrow r_\lambda$  is continuous and  $r_\lambda \rightarrow 1$  when  $\lambda$  goes to  $\frac{d}{\rho}$ .

Thus if  $r \leq r_\lambda$  we have (2.69). Putting together (2.67) and (2.68) gives us a sufficient condition for (2.64) which implies (2.63). Thereby there is a contradiction with the fact that  $\Sigma$  is a planelike minimizer of our problem, which conclude the proof of lemma 2.6.2.  $\square$

We have proved that in order to be a planelike minimizer,  $\Sigma$  must satisfy

$$|\Sigma \cap B_\rho| \geq r_\lambda |B_\rho| \text{ or } \Sigma \cap B_\rho = \emptyset.$$

Now we will prove this implies, for  $\lambda$  high enough, that :  $B_{\frac{\rho}{2}} \cap \partial \Sigma = \emptyset$ .

This result is given by the following density estimate, similar to the lemma 2.3.2.

**Lemma 2.6.3.** *There exist a constant  $\gamma$  depending on the dimension  $d$  and  $\|g\|_\infty$ , such that for every global minimizer  $\Sigma$ .*

1. If  $|B(\frac{\rho}{2}) \cap \Sigma| > 0$  then  $|B(\rho) \cap \Sigma| \geq \gamma \rho^d$ ,
2. If  $|B(\frac{\rho}{2}) \setminus \Sigma| > 0$  then  $|B(\rho) \setminus \Sigma| \geq \gamma \rho^d$ .

*Proof of lemma 2.6.3* Let  $f(r) = |B(r) \setminus \Sigma|$ . Define  $\mu$  such that  $\|g\|_\infty \leq \mu$ . As in lemma 2.3.2 we compare the energy of  $E_s$  and the energy of  $E_s \setminus B_r$  for  $r > 0$  and find :

$$d\omega_d^{\frac{1}{d}} f(r)^{\frac{d-1}{d}} \leq 2f'(r) + \mu f(r)$$

Define  $h(r)$  by :

$$h(r) = f(r)e^{\mu \frac{r}{2}}. \quad (2.70)$$

Then :

$$\begin{aligned} h'(r) &= (f'(r) + \frac{\mu}{2} f(r)) e^{\mu \frac{r}{2}} \\ &\geq \frac{d}{2} \omega_d^{\frac{1}{d}} f(r)^{\frac{d-1}{d}} e^{\mu \frac{r}{2}} \\ &\geq \frac{d}{2} \omega_d^{\frac{1}{d}} h(r)^{\frac{d-1}{d}} e^{\mu \frac{r}{2} \frac{1-d}{d}} e^{\mu \frac{r}{2}} \\ &\geq \frac{d}{2} \omega_d^{\frac{1}{d}} h(r)^{\frac{d-1}{d}} e^{\mu \frac{r}{2a}} \end{aligned}$$

So :

$$\left(h^{\frac{1}{d}}(r)\right)' \geq \frac{d}{2}\omega_d^{\frac{1}{d}}e^{\mu\frac{r}{2d}}$$

So, suppose that  $h(\frac{\rho}{2}) > 0$ , then :

$$h(\rho) \geq \omega_d \left(\frac{d}{\mu}\right)^d \left[e^{\mu\frac{\rho}{2d}} - e^{\mu\frac{\rho}{4d}}\right]^d.$$

So :

$$f(\rho) \geq \omega_d \left(\frac{d}{\mu}\right)^d \left[1 - e^{-\mu\frac{\rho}{4d}}\right]^d.$$

Which implies :

$$\frac{f(\rho)}{\omega_d\rho^d} \geq \left(\frac{d}{\rho\mu}\right)^d \left[1 - e^{-\mu\frac{\rho}{4d}}\right]^d. \quad (2.71)$$

□

Suppose that  $\partial\Sigma \cap B_{\frac{\rho}{2}} \neq \emptyset$ . Then, we have (2.71). The second term of the equation is independent of  $\lambda$  which implies a contradiction, indeed, by lemma 2.6.2,  $\frac{f(\rho)}{\omega_d\rho^d}$  goes to 0 when  $\lambda$  goes to 1. This completes the proof of lemma 2.6.1.

□

**Proof of the coercivity :** We have constructed a class of functions  $g$  where

$$\partial E/\mathbb{Z}^d \cap B_{\frac{\rho}{2}} = \emptyset$$

for all planelike minimizer, we now have to prove that, in this class of functions, there is a least one which respects the coercivity hypothesis which implies the existence of those planelike minimizers.

**Lemma 2.6.4.** *Let  $0 \leq \lambda < \frac{d}{\rho}$  Let  $0 < \rho < 1/2$ ,  $B_\rho \subset [\frac{1}{2}, 1]^d$  and  $B'_\rho \subset [0, \frac{1}{2}]^d$ . Define  $\tilde{g}$  by :*

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \lambda & \text{if } x \in B_\rho \\ -\lambda & \text{if } x \in B'_\rho \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

*Then if  $\rho$  is small enough,  $\tilde{g}$  respects the coercivity inequality.*

*Proof:* The isoperimetric inequality in the torus gives us  $C_{\sharp}$  such that :

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial E) \geq C_{\sharp}|E|^{\frac{d-1}{d}} \quad (2.72)$$

for all sets  $E$ .

We are looking for a constant  $\alpha < 1$  such that :

$$\alpha\mathcal{H}^{d-1}(\partial E) + \int_E g(x) > 0$$

Which is implied by :

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial E) \geq \frac{\lambda}{\alpha}|E \cap B'_\rho|$$

So, using (2.72), a sufficient condition is that :

$$C_{\sharp}|E|^{\frac{d-1}{d}} \geq \frac{\lambda}{\alpha}|E \cap B_\rho|$$

Suppose that this isn't true, then :

$$|E|^{\frac{d-1}{d}} \leq \frac{\lambda}{C_{\sharp}\alpha} |E \cap B_{\rho}|$$

So  $|E|$  can be as small as we want. In [Kir07], the author proves that for small volume, the minimizer of the isoperimetric problem is the ball, so, for small volumes, the constant  $C_{\sharp}$  is equal to  $d\omega_d^{\frac{1}{d}}$ . Then :

$$\begin{aligned} |E \cap B'_{\rho}| &\leq |E| \\ &\leq \mathcal{H}^{d-1}(\partial E)^{\frac{d}{d-1}} \frac{1}{d^{\frac{d}{d-1}} \omega_d^{\frac{1}{d-1}}} \\ &\leq \mathcal{H}^{d-1}(\partial E) \left[ \frac{\mathcal{H}^{d-1}(\partial E)}{d^d \omega_d} \right]^{\frac{1}{d-1}} \\ &\leq \mathcal{H}^{d-1}(\partial E) \left[ \lambda \left( \frac{\rho}{d} \right)^d \right]^{\frac{1}{d-1}} \end{aligned}$$

So :

$$\lambda |E \cap B'_{\rho}| \leq \mathcal{H}^{d-1}(\partial E) \text{ if } \lambda \leq \frac{d}{\rho}, \quad (2.73)$$

which gives us the desired result. Indeed, suppose now that :  $\lambda < \frac{d}{\rho}$ , then, there is  $\delta > 0$  such that  $\lambda + \delta \leq \frac{d}{\rho}$ . Applying 2.73 to  $\lambda + \delta$  gives us :

$$(\lambda + \delta) |E \cap B'_{\rho}| \leq \mathcal{H}^{d-1}(\partial E).$$

So :

$$\begin{aligned} \lambda |E \cap B'_{\rho}| &\leq \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \mathcal{H}^{d-1}(\partial E), \\ \int_E g(x) &\leq \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \mathcal{H}^{d-1}(\partial E). \end{aligned}$$

□

So, we have constructed a function of mean curvature zero, which respects the coercivity inequality. Hence, for  $\rho$  small enough and for all  $\lambda < \frac{d}{\rho}$ , we can apply proposition 2.4.2. Moreover, the hypotheses of lemma 2.6.1 are satisfied, so there exists  $\rho$  and  $\lambda < \frac{d}{\rho}$  such that there exists an exclusion ball. At last, we can apply lemma 2.6.1.

**Proposition 2.6.5.** *Let  $g$  built as in lemmas 2.6.1 and 2.6.4. Then, there exists  $\eta_c > 0$  such that for any direction  $\nu$  and any  $\eta < \eta_c$ , there is a planelike stationary solution of  $\| = g + \eta$  in the direction  $\nu$ .*

Indeed, we can construct these surfaces by perturbing  $\tilde{g}$ . Define :

$$\tilde{g}_{\eta}(x) = \begin{cases} g(x) + \eta & \text{if } x \in Q \setminus B_{\frac{\rho}{2}} \\ g(x) - \frac{1}{|B_{\frac{\rho}{2}}|} \eta & \text{if } x \in B_{\frac{\rho}{2}} \end{cases}$$

This function is of mean value zero. Moreover, there is  $\eta_0$  such that, for every  $\eta \leq \eta_0$ ,  $\tilde{g}_{\eta}(x) \geq \lambda_{\rho}$  for every  $x \in B_{\rho}$  and such that  $\tilde{g}_{\eta}$  verifies the coercivity inequality. So, we can apply proposition 2.4.2 and lemma 2.6.1 to prove the existence of global minimizers whose boundary avoids  $B_{\frac{\rho}{2}}$ . So we have proved the same result but, moreover, on this example, the limit constant  $\eta_c$  for the pinning effect is independent of the direction  $\nu$ .

# Chapitre 3

## Mean curvature motion

### 3.1 Introduction

In this section, we want to build an algorithm for motions depending on the mean curvature of  $E$ . A way to do this is to use a level set approach. We construct a function  $u_0$  such that  $\{u = 0\} = \partial E$  and we calculate the solution of :

$$u_t + |Du|g \left( \operatorname{div} \left( \frac{Du}{|Du|} \right) \right) = 0$$
$$u(0, x) = u_0(x)$$

and, for each  $t > 0$ ,  $\{x, u(x, t) = 0\} = \partial E_t$  where  $E_t$  is the evolution of  $E$  by the motion ( $g$  here will be an increasing function, the others properties need for this function will be given later). The mean curvature motion ( $g(x) = x$ ) is well known, and there are numerous way to calculate it. We can mention finite difference scheme ([Obe04], [MBO92], [Wal96]). Another method is to used a variational approach (see [ATW93, Cha04, LS95]) . We will here extend this method to another cases, and made the link between the mean curvature motion and some perimeter minimization problems.

We will work here with the viscosity solution theory. Indeed, the equation is well defined with this theory, moreover, our approach will be based on comparison with test function. A reference for this theory is [CIL92a]. The level set method for the mean curvature motion was for present in [OS88] and [MBO92]. Later, some work was done to study the viscosity solution of the equation [ES91, ES92a, ES92b, ES95] (in which they present results on the existence of the viscosity solution of the mean curvature motion, moreover they establish the link between this movement and the PDE for the level set), [GG92]. Moreover, in [IS95] we have a result which prove that the level set approach will be relevant in our case :

**Theorem 3.1.1.** *Let  $u_1$  and  $u_2$  such that  $\{u_1 > 0\} = \{u_2 > 0\}$  and  $\{u_1 < 0\} = \{u_2 < 0\}$  Let  $v_1, v_2 \in BUC(\Omega)$  be the solutions (3.13), respectively, with  $u_1$  and  $u_2$  in place of  $u_0$ . Then  $\{v_1 > 0\} = \{v_2 > 0\}$  and  $\{v_1 < 0\} = \{v_2 < 0\}$*

This is relevant because we want to characterize the evolution of a surface (represented by the level set of a function). This result proves that this evolution is independent of the value of the function outside the level line. This article give us existence and uniqueness for our equation. Moreover, the equation written above is not well define when  $|Du| = 0$ . Before this article, previous results were assuming that  $g$  was small enough (when the term on  $|Du|$  control the term  $g(\operatorname{div} \left( \frac{Du}{|Du|} \right))$ ). The



works in [IS95] change the definition of viscosity solution (there is others condition to be a test function) and, with this, we can consider more function  $g$ , for exemple  $g(x) = x^p$  with  $p > 0$ .

Our method will consist to construct a function  $u_0$  and then, in a theoretical point of view at least, to move all the level set of the function independently. We will minimize the energy :

$$\mathcal{F}(E; E_0) = \int_{\Omega} |\nabla \chi_E| + \int_{\Omega} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) \chi_E \quad (3.1)$$

$$= \text{Per}(E) + \int_E f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) \quad (3.2)$$

where  $h$  will a parameter wich will correspond to the time discretization of our algorithm. Moreover  $\text{sdist}(\cdot, \partial E_0)$  is the signed distance to the boundary of  $E_0$  :

$$\text{sdist}(\cdot, \partial E) = \text{dist}(\cdot, E) - \text{dist}(\cdot, \Omega \setminus E).$$

We know that a property of a minimizer  $E$  of this problem is that for all point of the boundary of  $E$  have for mean curvature :  $-f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right)$ . And  $\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)$  is an approximation of the normal speed of the boundary.

We will construct the set sequence  $E_h^n$

$$E_h^n = \text{argmin}_E \left\{ \int_{\Omega} |D\chi_E| + \int_{\Omega} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_h^{n-1})\right) \chi_E \right\}. \quad (P_h^n)$$

this permits to construct a function  $u_h$  such that for  $n \in \mathbb{N}$

$$u_h(\cdot, hn) = \chi_{E_h^n}(\cdot)$$

and this will be an approximation of the mean curvature motion. In some sense, this algorithm is an Euler semi-implicit algorithm where the variable is the level line. The first part of the article will be on the equivalence of two problems

$$(P) \quad \min_{u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u| + \int_{\Omega} F(u(x) - d_{\{u_0 > s\}}(x)) \right\} \quad (3.3)$$

and

$$(P_s) \quad \min_{E \in \mathcal{P}(\Omega)} \left\{ \text{Per}(E; \Omega) + \int_E f(s - d_{E_0}(x)) dx \right\}.$$

This will be useful because the algorithm is based on the resolution of minimization problems on sets. And this equivalence will permit to solve problems on functions. Then, in a second part, we'll study the fundamental properties of the solutions of the minimizing perimeter problems. Some references on these issues are [Giu84b] wich present in this book some properties of perimeter minimization problems, [CRS10] wich study the regularity of minimal sets, [LS95] wich study the case describe above with  $f = Id$ . Then, we'll present our algorithm and a special case which will be useful to the proof of convergence of the algorithm. At last, we'll present some numerical tests.

## 3.2 Assumptions

(H1) The function  $F$  is  $C^1$  symmetric with respect to the origin :  $F(-s) = F(s)$ ,  $\forall s \geq 0$ . (and so, the function  $f = F'$  is odd)

(H2) There exist some constants  $p, q > 0$  and  $C_p, \tilde{C}_p, C_q$  and  $\tilde{C}_q$  such that :

$$C_p r^p + \tilde{C}_p \leq f(r) \leq C_q r^q + \tilde{C}_q$$

where  $f(x) = F'(x)$ .

(H3)  $F$  is convex.

Moreover, we'll use the concept of viscosity solution. The problem is that the equation is not well defined if  $\nabla\phi(x_0) = 0$ . Indeed we can't be sure that  $|\nabla\phi|$  could control  $f^{-1}(\operatorname{div} \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|})$  depending on  $f^{-1}$ . To do that, we'll use the definition given on [IS95]. In fact, we can use specific test function :

$\phi$  is an admissible test function if there is  $l$  and  $g$  such that :

$$|\phi(x, t) - \phi(x_0, t_0) - \phi_t(x_0)(t - t_0)| \leq l(|x - x_0|) + g(t - t_0)$$

and :

$$\frac{l'(|p|)}{|p|} F(p, I) = \frac{f'(|p|)}{|p|} |p| f^{-1}(\operatorname{div} (\frac{p}{|p|})) \rightarrow 0.$$

**Définition 3.2.1.** –  $u$  is a viscosity sub-solution of (1.8) if and only if for all regular function  $\phi$  and for all local minimizer  $x_0$  of  $u - \phi$ , we have :

$$\begin{cases} \phi_t(x_0, t_0) \geq |\nabla\phi| f^{-1}(\operatorname{div} \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|})(x_0, t_0) & \text{if } |\nabla\phi| \neq 0, \\ \phi_t(x_0, t_0) \geq 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

–  $u$  is a viscosity super-solution of (1.8) if and only if for all regular function  $\phi$  and for all local maximizer  $x_0$  of  $u - \phi$ , we have :

$$\begin{cases} \phi_t(x_0, t_0) \leq |\nabla\phi| f^{-1}(\operatorname{div} \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|})(x_0, t_0) & \text{if } |\nabla\phi| \neq 0, \\ \phi_t(x_0, t_0) \leq 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

–  $u$  is a viscosity solution of (1.8) if and only if  $u$  is a sub-solution and a super-solution

Then,  $u$  is a super-solution if for all admissible function  $\phi$

### 3.3 Function minimization problem

Consider  $\Omega \in \mathbb{R}^N$  a bounded domain with Lipschitz boundary (we'll need here this regularity, however, we will work then in  $\mathbb{R}^N$ , see 3.4.2) and denote by  $\mathcal{P}(\Omega)$  the family of subsets of  $\Omega$  with finite perimeter. We are interested in the level set minimization problem

$$(P_s) \quad \min_{E \in \mathcal{P}(\Omega)} \left\{ \operatorname{Per}(E; \Omega) + \int_E f(s - d_{E_0}(x)) dx \right\}$$

where  $E_0$  is a closed set of finite perimeter,  $h > 0$  and  $d_{E_0}$  is the signed distance function to the set  $E_0$  :

$$d_{E_0}(x) = \operatorname{dist}(x, E_0) - \operatorname{dist}(x, \Omega \setminus E_0).$$

In the following we denote the energy functional by

$$\mathcal{F}^s(E; E_0) = \operatorname{Per}(E; \Omega) + \int_E f(s - d_{E_0}(x)) dx.$$

We show that the variational problem  $(P_s)$  is equivalent to the total variation minimization problem

$$(P) \quad \min_{u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u| + \int_{\Omega} F(u(x) - d_{\{u_0 > s\}}(x)) \right\}$$

in the sense that the level set of the minimizer  $u$  of  $(P)$  are minimizer of problems  $(P_s)$ , and conversely.

**Theorem 3.3.1** (Equivalence of problems). *Suppose  $F$  satisfy the assumption (H1) and that  $F$  is strictly convex. The function  $u \in BV(\Omega)$  is a minimizer of the strictly convex problem  $(P)$  if and only if for any  $s \in \mathbb{R}$  the level set  $\{u > s\}$  minimizes  $(P_s)$ .*

The proof of this result will be done in two part. First, we will prove that if we create a function with all the minimizer, then it will be a minimizer of our problem. And, then, we'll conclude of the equivalence by using the uniqueness of the solution on the functional problem.

**Lemma 3.3.1** (Existence of minimizer). *Suppose  $F$  satisfy the assumption (H1) and that  $F$  is strictly convex, so  $f$  is continuous and strictly increasing then, for every  $s \in \mathbb{R}$ , there exists a minimizer  $E_s$  of problem  $(P_s)$ .*

*Proof:* Fix arbitrary  $s \in \mathbb{R}$ . Consider a minimizing sequence of sets  $E_s^n \subset \Omega$

$$\mathcal{F}^s(E_s^n; E^0) \rightarrow \min_{E \in \mathcal{P}(\Omega)} \mathcal{F}^s(E; E^0), \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Then sets  $E_s^n$  have finite perimeter, uniformly bounded : there exists some  $\Omega' \in \mathcal{P}(\Omega)$  such that for  $n$  large

$$\mathcal{E}^s(E_s^n) \leq \mathcal{E}^s(\Omega') \leq \text{Per}(\Omega'; \Omega) + \|f(s - d_{E_0}(\cdot))\|_{L^1(\Omega')} < \infty.$$

which implies

$$\|\chi_{E_s^n}\|_{BV(\Omega)} = \text{Per}(E_s^n; \Omega) \leq \mathcal{E}^s(\Omega') + \|f(s - d_{E_0}(\cdot))\|_{L^1(\Omega)}.$$

From Rellich's compactness theorem it follows that up to a subsequence  $(\chi_{E_s^{n_k}})_{k \geq 1}$

$$\chi_{E_s^{n_k}} \rightarrow w, \text{ in } L^1(\Omega) \text{ as } k \rightarrow \infty.$$

with  $w \in BV(\Omega)$ . Subtracting, if necessary a sequence we actually have  $\chi_{E_s^{n_k}} \rightarrow w$ , a.e. in  $\Omega$  and therefore there exists  $E_s$  such that  $w = \chi_{E_s}$ ,  $E_s \subset \Omega$ .

We show in the sequel that

$$\mathcal{E}^s(E_s) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}^s(E_s^{n_k}) = \min_{E \in \mathcal{P}(\Omega)} \mathcal{F}^s(E; E^0).$$

in order to conclude that  $\mathcal{E}^s(E_s) = \min_{E \in \mathcal{P}(\Omega)} \mathcal{F}^s(E; E^0)$ . Since total variation is lower semi-continuous

$$\text{Per}(\chi_{E_s}; \Omega) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \text{Per}(\chi_{E_s^{n_k}}; \Omega).$$

and from Lebesgue's dominated convergence theorem

$$\int_{E_s} f(s - d_{E^0}(x)) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{E_s^{n_k}} f(s - d_{E^0}(x)) dx.$$

Summing up the two inequalities we obtain the inequality for the energy. Consequently, we have prove there exists a minimizer  $E_s$  of the problem  $(P_s)$ .  $\square$

**Lemma 3.3.2** (Minimal solution). *Let  $E_0$  a set of finite perimeter. let  $E$  and  $L$  two minimizer of  $\mathcal{F}(\cdot, E_0)$ . Then,  $E \cap L$  and  $E \cup L$  are also minimizer.*

*Proof:* As :

$$\text{Per}(E; \Omega) + \text{Per}(L; \Omega) \geq \text{Per}(E \cap L; \Omega) + \text{Per}(E \cup L; \Omega)$$

and :

$$\begin{aligned} \int_{E \cap L} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) + \int_{E \cup L} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) = \\ \int_E f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) + \int_L f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right). \end{aligned}$$

There is the inequality :

$$\mathcal{F}(E \cap L; E_h^n) + \mathcal{F}(E \cup L; E_h^n) \leq \mathcal{F}(E; E_h^n) + \mathcal{F}(L; E_h^n)$$

So,  $E \cap L$  and  $E \cup L$  are minimizer.  $\square$

**Remark 3.3.1.** This lemma allows to define the minimal and maximal solutions. Indeed,  $E_* = \bigcap_{E \text{ minimizer}} E$  is also a minimizer. This intersection is well defined if we identify the sets with their set of point of density 1.

**Remark 3.3.2.** Clearly, this result is true for all level line  $s$ .

**Lemma 3.3.3** (Comparison Principle).

$$\forall s' > s, \quad E_{s'} \subset E_s.$$

*Proof:* The sets  $E_s$  and  $E_{s'}$  are minimizer of the problems  $(P_s)$  and  $(P_{s'})$ , therefore

$$\text{Per}(E_s; \Omega) + \int_{E_s} f(s - d_{E^0}(x)) \leq \text{Per}(E_s \cup E_{s'}; \Omega) + \int_{E_s \cup E_{s'}} f(s - d_{E^0}(x)) dx$$

$$\text{Per}(E_{s'}; \Omega) + \int_{E_{s'}} f(s' - d_{E^0}(x)) \leq \text{Per}(E_s \cap E_{s'}; \Omega) + \int_{E_s \cap E_{s'}} f(s' - d_{E^0}(x)) dx$$

Adding the two terms and using that

$$\text{Per}(E_s \cup E_{s'}; \Omega) + \text{Per}(E_s \cap E_{s'}; \Omega) \leq \text{Per}(E_s; \Omega) + \text{Per}(E_{s'}; \Omega)$$

we get that

$$\int_{E_{s'}} f(s' - d_{E^0}(x)) - \int_{E_s \cap E_{s'}} f(s' - d_{E^0}(x)) dx \leq \int_{E_s \cup E_{s'}} f(s - d_{E^0}(x)) dx - \int_{E_s} f(s - d_{E^0}(x)) dx.$$

The latter inequality is actually

$$\int_{E_{s'} \setminus E_s} f(s' - d_{E^0}(x)) dx \leq \int_{E_{s'} \setminus E_s} f(s - d_{E^0}(x)) dx$$

Since  $f$  is increasing we get that  $|E_{s'} \setminus E_s| = 0$  which further implies  $E_{s'} \subset E_s$  almost everywhere.  $\square$

**Lemma 3.3.4.** Let  $E_s^-$  be the smallest solution (with respect to the geometrical inclusion) of  $(P_s)$ . The function  $u$  defined by

$$u(x) = \sup\{s | x \in E_s^-\}$$

is a minimizer of  $(P)$  in the space  $BV(\Omega)$ .

*Proof:* In order to deduce the minimality of  $u$  we consider any  $v \in BV(\Omega)$  and show that  $\mathcal{E}(u) \leq \mathcal{E}(v)$ . To this end, we write down the perimeter inequalities for the minimizer  $E_s^- = \{u > s\}$  (almost everywhere) and integrate on  $[-M, M]$

$$\int_{-M}^M \text{Per}(\{u > s\}; \Omega) ds + \int_{-M}^M \int_{\{u > s\}} f(s - d_{\{u > s\}}(x)) dx ds \leq \int_{-M}^M \text{Per}(\{v > s\}; \Omega) ds + \int_{-M}^M \int_{\{v > s\}} f(s - d_{\{v > s\}}(x)) dx ds.$$

From the co-area formula, we have for  $M \rightarrow \infty$

$$\int_{-M}^M \text{Per}(\{u > s\}; \Omega) ds \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \text{Per}(\{u > s\}; \Omega) ds = \int_{\Omega} |\nabla u(x)| dx.$$

For the second integral we apply Fubini's theorem to see that

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M \int_{\{u > s\}} f(s - d_{u > s}(x)) dx ds &= \int_{\Omega} \int_{-M}^M \chi_{\{u > s\}} f(s - d_{u > s}(x)) ds dx = \\ &= \int_{\Omega} (F(\min(u(x), M) - d_{\{u > s\}}(x)) - F(\min(u(x), -M) - d_{\{u > s\}}(x))) dx. \\ &= \int_{\Omega} F(\min(u(x), M) - d_{\{u > s\}}(x)) dx - \int_{\Omega} F(-M - d_{\{u > s\}}(x)) dx + R(u, M). \end{aligned}$$

with  $R(u, M)$  given by

$$R(u, M) = \int_{\Omega} (F(-M - d_{\{u > s\}}(x)) - F(\min(u(x), -M) - d_{\{u > s\}}(x))) dx.$$

As  $u$  is in  $L^p$ ,  $R(u, M) \rightarrow 0$  when  $M \rightarrow \infty$ . Inserting the previous relation into the energy inequality we have

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M \text{Per}(\{u > s\}; \Omega) ds + \int_{\Omega} F(\min(u(x), M) - d_{\{u > s\}}(x)) dx + R(u, M) &\leq \\ \int_{-M}^M \text{Per}(\{v > s\}; \Omega) ds + \int_{\Omega} F(\min(v(x), M) - d_{\{v > s\}}(x)) dx + R(v, M) \end{aligned}$$

and letting  $M \rightarrow \infty$  we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u(x)| dx + \int_{\Omega} F(u(x) - d_{\{u > s\}}(x)) dx &\leq \\ \int_{\Omega} |\nabla v(x)| dx + \int_{\Omega} F(v(x) - d_{\{v > s\}}(x)) dx. \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.3.5.** *Let  $u_0$  be a  $BV$  function, let  $F$  be a strictly convex and  $C^2$  function. Then there exist only one minimizer to the problem (P).*

*Proof:* The energy :

$$\int_{\Omega} |\nabla u| + \int_{\Omega} F(u(x) - d_{\{u > s\}}(x))$$

is strictly convex by the strict convexity of  $F$ . Which implies the uniqueness of the minimizer. □

*Equivalence of problems* The equivalence is given by the uniqueness of the solution of the problem  $(P)$ . Let be  $u$  the solution of problem  $(P)$ . Indeed, by lemmas 3.3.1 and 3.3.4, we can construct a function  $\tilde{u}$  which is a minimizer of problem  $(P)$ , so, by uniqueness of the solution,  $\tilde{u} = u$  and the levelsets of the function  $u$  are minimizer of  $(P_s)$ .  $\square$

**Remark 3.3.3.** In this proof, we don't prove directly that the  $\{u > s\}$  is a solution of the problem of minimization  $(P_s)$ . We have this result only because we can construct a solution of  $(P)$  with solutions  $(P_s)$ , and using the uniqueness result by the strict convexity of  $F$ . So, which is important here to have the equivalence is the uniqueness of solutions of  $(P)$ . But, in fact, we can show a similar result if  $F$  is not strictly convex.

**Theorem 3.3.2** (Equivalence of problems). *Let  $F$  be a convex function. Let  $u \in BV(\Omega)$  be a minimizer of the convex problem  $(P)$  if and only if for any  $s \in \mathbb{R}$  the level set  $\{u > s\}$  minimizes  $(P_s)$ .*

*Proof:* We only have to prove that  $u$  is a minimizer of  $(P)$  implies that  $\{u > s\}$  is a minimizer of  $(P_s)$ . The reciprocity is proved by precedent lemmas. The proof will consist to change the problem  $(P)$  and apply the precedent result.

Let  $u$  be a solution of  $(P)$ . As  $u$  is in  $(BV)$ ,  $u$  is in  $L^{\frac{n}{n-1}}$ . We will introduce the minimization problem :

$$(\tilde{P}^\epsilon) \quad \min_{v \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v| + \int_{\Omega} F(v(x) - d_{\{u_0 > s\}}(x)) + \epsilon \int_{\Omega} (v(x) - u(x))^{\frac{n}{n-1}} \right\} \quad (3.4)$$

Then, this problem is strictly convex and the solution is  $u$ . So, over-level lines of  $u$  are solutions of the minimizing problem :

$$(\tilde{P}_s^\epsilon) \quad \min_{E \in \mathcal{P}(\Omega)} \left\{ \text{Per}(E; \Omega) + \int_E f(s - d_{E_0}(x)) dx + \epsilon \frac{n}{n-1} \int_E \text{sgn}(s - u(x)) (s - u(x))^{\frac{1}{n-1}} dx \right\}$$

and this, for all  $\epsilon > 0$ . Therefore, for every set  $E$  and for every  $\epsilon > 0$  :

$$\begin{aligned} \text{Per}(\{u > s\}; \Omega) + \int_{\{u > s\}} f(s - d_{E_0}(x)) dx &\leq \text{Per}(E; \Omega) + \int_E f(s - d_{E_0}(x)) dx \\ &\quad + \epsilon \frac{n}{n-1} \int_E \text{sgn}(s - u(x)) (s - u(x))^{\frac{1}{n-1}} dx \end{aligned}$$

So, for each  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\{u > s\}$  minimize :

$$(P_s) \quad \min_{E \in \mathcal{P}(\Omega)} \left\{ \text{Per}(E; \Omega) + \int_E f(s - d_{E_0}(x)) dx. \right\}$$

To prove this, we only have to use a reductio ad absurdum proof. Indeed if we suppose that  $\{u > s\}$  doesn't minimize  $(P_s)$ , then let be  $E$  this minimizer. Then, we have that :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s^\epsilon(\{u > s\}, E_0) &\leq \mathcal{F}_s^\epsilon(E, E_0) \\ \mathcal{F}_s^\epsilon(E, E_0) &< \mathcal{F}_s^\epsilon(\{u > s\}, E_0). \end{aligned}$$

As  $\int_E (s - u(x)) dx$  and  $\int_{\{u > s\}} (s - u(x)) dx$  are bounded,  $\mathcal{F}_s^\epsilon(\{u > s\}, E_0)$  goes to  $\mathcal{F}_s(\{u > s\}, E_0)$  when  $\epsilon$  goes to zero. We have the same thing for  $\mathcal{F}_s^\epsilon(E, E_0)$ , which implies a contradiction.  $\square$

### 3.4 Perimeter minimization problem

The aim of this part is to present some results on the solutions of the minimizer problem. This result will be on regularity and on localization. This will permit to control the evolution, and have some bounds on the velocity of the evolution.

The underlying setting is the space of functions of bounded variation. Therefore we consider equivalence-classes of sets and hereafter we deal only with sets  $E$  which satisfy

$$E = \left\{ x \in \Omega; \frac{|E \cap B_\rho(x)|}{\rho^n} > 0 \text{ for all } \rho > 0 \right\}.$$

This ensures that the sdist-term in the definition of the energy functional is well defined.

**Lemma 3.4.1** (Equivalent energy functional). *An equivalent definition of the energy functional (3.1) is*

$$\tilde{\mathcal{F}}(E; E_0) = \int_{\Omega} |D\chi_E| + \int_{E \Delta E_0} f\left(\frac{1}{h} \text{dist}(\cdot, \partial E_0)\right) \quad (3.5)$$

which agrees up to a constant with (3.1).

*Proof:* Let  $E$  be a minimizer of the energy functional  $\tilde{\mathcal{F}}$ , starting from  $E_0$ . Remark that by (H1)

$$\begin{aligned} \int_{E \Delta E_0} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) &= \int_{\Omega} |\chi_E - \chi_{E_0}| f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) \\ &= \int_{E_0} (1 - \chi_E) f\left(-\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) + \int_{\Omega \setminus E_0} \chi_E f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) \\ &= \int_{\Omega} \chi_E f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) - \int_{E_0} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right). \end{aligned}$$

□

Now, we'll give some properties of those minimizers, and prove first at all that this sequence is define.

Now, we will prove some geometric properties of those minimizers. First at all, we will give some localization principles. Then, we'll seek some bounds and properties on the solution.

**Proposition 3.4.2** (A priori estimates). *Let  $E_0 \subset \mathbb{R}^N$  and  $E$  be minimizer of Problem (P), starting at  $E_0$ . Then  $E$  is included in the convex hull of  $E_0$ .*

*Proof:* The convex hull of a set is given as the intersection of all halfspaces containing the set. Therefore it is enough to show that the minimizer  $E$  lies in all halfspaces  $\Pi$  containing the initial set  $E_0$ . Cutting the set  $E$  by halfspaces  $\Pi$  containing  $E_0$  and comparing the energy of  $E$  with that of  $E \cap \Pi$  we have that

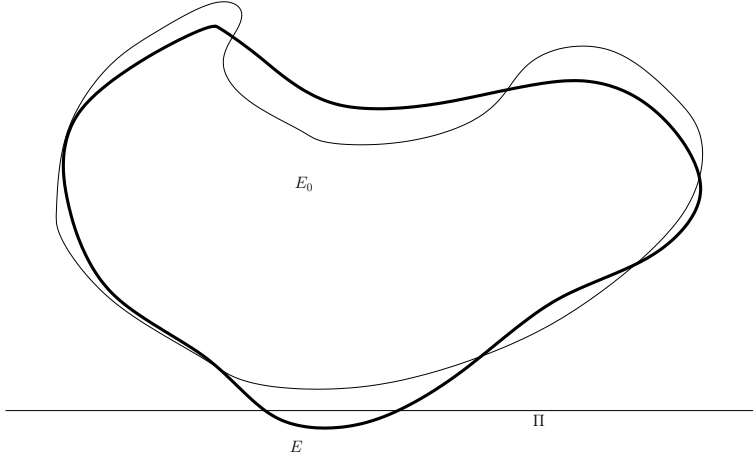
$$\int_{E \setminus E \cap \Pi} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) \leq \text{Per}(E \cap \Pi; \mathbb{R}^N) - \text{Per}(E; \mathbb{R}^N).$$

On one hand  $\text{Per}(E; \mathbb{R}^N) \geq \text{Per}(E \cap \Pi; \mathbb{R}^N)$ . At the same time  $\text{sdist}(x, \partial E_0) \geq 0$  for all  $x \in E \setminus \Pi$  which implies by the monotonicity of  $\partial F$  that

$$0 \leq \int_{E \setminus \Pi} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) = \int_{E \setminus E \cap \Pi} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right).$$

Therefore equality holds and  $|E \setminus \Pi| = 0$ , thus  $E \subseteq \Pi$ .

□



**Remark 3.4.1.** This result ensures that the boundedness of  $\Omega$  has no effect on the geometry of the minimizing sets. One can solve the minimizing problem either on  $\mathbb{R}^N$  or locally in  $\Omega = B(0, \text{diam}(E_0))$ , with the diameter of  $E_0$  defined as  $\text{diam}(E_0) = \sup_{x, y \in \Omega} |x - y|$ .

We can prove that, if  $\Omega$  is large enough, the boundedness has no effect on the geometry of the minimizing sets. Indeed, suppose  $\text{dist}(E_0, \partial\Omega) \geq \delta > 0$ , then, if  $h$  is small enough we can prove that  $\text{dist}(E, \partial\Omega) > 0$ . For the simplicity of the argument, we assume that  $\Omega$  is a ball  $B(0, R)$ . We will take the ball  $B(0, R - \frac{\delta}{2})$ . We have that  $E \Subset B(0, R - \frac{\delta}{2})$ . Moreover, we can compute the evolution of this ball (it will be done in the next section). We will prove that the solution is radial. Moreover, if  $h$  is small enough,

$$\int_{B(0, R) \setminus B(0, R - \frac{\delta}{2})} f\left(\frac{\text{sdist}(x, B(0, R - \frac{\delta}{2}))}{h}\right) > \text{Per}(B(0, R - \frac{\delta}{2})).$$

This implies that the minimizer is not  $B(0, R)$ , so,  $E \cap \partial B(0, R) = \emptyset$ .

Now, if we suppose that  $\Omega \supset B(0, R)$  we also have that the minimizer doesn't touch the boundary of  $\Omega$ . Indeed, let  $F$  be the minimizer of :

$$\min_E \text{Per}(E, \Omega) + \int_{E \cap \Omega} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right)$$

Let  $G$  be the minimizer of :

$$\min_{E \Subset B(0, R)} \text{Per}(E, \Omega) + \int_{E \cap \Omega} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right)$$

Indeed, we have that :

$$\mathcal{F}(F, E_0) \leq \mathcal{F}(G, E_0)$$

. Moreover :

$$\text{Per}(E, B(0, R)) + \int_{E \cap B(0, R)} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) \leq \text{Per}(F, \Omega) + \int_{F \cap \Omega} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right)$$

and :

$$\text{Per}(G, B(0, R)) + \int_{G \cap B(0, R)} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) \leq \text{Per}(G, \Omega) + \int_{G \cap \Omega} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right)$$

So  $F$  is a minimizer of :

$$\min_E \text{Per}(E, B(0, R)) + \int_{E \cap B(0, R)} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right)$$



By the previous result, we have that  $F \cap \partial B(0, R) = \emptyset$ , and then, we have that  $F \cap \Omega \setminus B(0, R) = \emptyset$ .

**Lemma 3.4.3** (Inclusion Principle). *Let  $E_0, E'_0$  be two sets of finite perimeter ordered by inclusion :*

1. *If  $E_0 \Subset E'_0$  then  $E \subset E'$ .*
2. *If  $E_0 \subset E'_0$  then the minimal solution  $E$  is include in the minimal solution  $E'$  (we have the same inclusion for maximal solutions).*

*Proof:* Consider as comparison sets for the minimizers  $E$  and  $E'$  respectively  $E \cap E'$  and  $E \cup E'$ . Then

$$\begin{aligned} \text{Per}(E; \Omega) + \int_E f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) &\leq \text{Per}(E \cap E'; \Omega) + \int_{E \cap E'} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) \\ \text{Per}(E'; \Omega) + \int_{E'} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E'_0)\right) &\leq \text{Per}(E \cup E'; \Omega) + \int_{E \cup E'} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E'_0)\right) \end{aligned}$$

Adding the two terms and taking into account that

$$\text{Per}(E; \Omega) + \text{Per}(E'; \Omega) \geq \text{Per}(E \cap E'; \Omega) + \text{Per}(E \cup E'; \Omega)$$

we are further lead to the following inequality

$$\int_{E \setminus E'} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) \leq \int_{E \setminus E'} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E'_0)\right)$$

On the other hand, since the initial sets are ordered we have  $\text{sdist}(\cdot, \partial E_0) \geq \text{sdist}(\cdot, \partial E'_0)$ . This implies by the monotonicity of the subgradient of a convex function that

$$f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E_0)\right) \geq f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(\cdot, \partial E'_0)\right)$$

Hence we have  $|E \setminus E'| = 0$  and subsequently  $E \subset E'$  if  $E_0 \Subset E'_0$ .  $\square$

**Remark 3.4.2.** This lemma will be important. Indeed, this permit to bound the evolution, knowing as each step only some bounds on the minimizing set.

**Lemma 3.4.4** (Uniform bound on the perimeter). *Let  $E_h^n$  the iterative minimizers of the energy functional  $\mathcal{F}$ , starting at  $E_0$ . Then*

$$\text{Per}(E_h^n; \Omega) \leq \text{Per}(E_0; \Omega).$$

*Proof:* Take  $E_h^{n-1}$  as comparison set for the minimization problem  $(P_h^n)$ . Then

$$\int_{\Omega} |\nabla \chi_{E_h^n}| \leq \int_{\Omega} |\nabla \chi_{E_h^{n-1}}| + \int_{E_h^n \Delta E_h^{n-1}} f\left(\frac{1}{h} \text{dist}(\cdot, E_h^{n-1})\right) \leq \int_{\Omega} |\nabla \chi_{E_h^{n-1}}|$$

which by induction implies  $\text{Per}(E_h^n; \Omega) \leq \text{Per}(E_0; \Omega)$ .  $\square$

The minimizing sets  $E_h^n$  satisfy a strong geometric property, namely that their density volume in small balls is uniformly bounded. This property is extremely useful for many comparison arguments, because it gives estimates of the changes in the energy functional when we cut out or fill up minimizers. We state the result in the next lemma. Denote by

$$\oint_{B_\rho(x)} \chi_E := \frac{1}{\omega_N \rho^N} \int_{B_\rho(x)} \chi_E.$$

**Lemma 3.4.5** (Density estimate of minimizing sets). *Let  $g \in L^\infty(\Omega)$  and assume  $E \subset \Omega$  minimizes the functional  $\mathcal{F}(E)$  among all measurable subsets of  $\Omega$ . Then the density estimate*

$$\theta \leq \int_{B_\rho(x)} \chi_E \leq 1 - \theta$$

holds for all  $x \in \partial E$  and for all  $0 < \rho < \frac{\gamma_N}{2\omega_N^{1/N}\|g\|_{L^\infty}} := \rho_0$  with  $\theta = (\frac{1}{4})^N$ .

*Proof:* We show in the following the lower density bound. Similar arguments hold for the upper bound, replacing  $E$  by its complementary  $E^c$ .

For any  $\rho < \rho_0$  and  $x \in \partial E$ , take as comparison set for the functional energy  $E' = E \setminus B_\rho(x)$ . Then As before, we obtain

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial^* E \cap B_\rho(x)) \leq \mathcal{H}^{N-1}(\partial^* B_\rho(x) \cap E) + \|f\|_{L^\infty} \int_{B_\rho(x)} \chi_E. \quad (3.6)$$

Denote by  $V(\rho) = |B_\rho(x) \cap E|$  and recall that  $V'(\rho) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_\rho(x) \cap E)$  for a.e  $\rho$ . From the isoperimetric inequality for

$$\text{Per}(E \cap B_\rho(x); \Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial^* E \cap B_\rho(x)) + \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_\rho(x) \cap E)$$

we get equivalently

$$\gamma_N V(\rho)^{\frac{N-1}{N}} \leq 2V'(\rho) + \|f\|_{L^\infty} V(\rho). \quad (3.7)$$

But

$$V(\rho) \leq \rho^N \omega_N \leq \left( \frac{\gamma_N}{2\|f\|_{L^\infty}} \right)^N$$

which implies that

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2} V(\rho)^{-\frac{1}{N}} \gamma_N.$$

Therefore equation (3.7) can be translated into the following differential inequality

$$V'(\rho) \geq \frac{1}{4} \gamma_N V(\rho)^{\frac{N-1}{N}}.$$

for which we apply Gronwall to further get

$$\int_{B_\rho(x)} \chi_E = V(\rho) \geq \left( \frac{\gamma_N}{4N} \right)^N \rho^N = \theta \rho^N \omega_N.$$

□

**Remark 3.4.3.** Proceeding as before, one sees that the density estimates hold for interior and exterior points

$$\begin{aligned} \theta &\leq \int_{B_\rho(x)} \chi_E, & \text{for } x \in E \\ \int_{B_\rho(x)} \chi_E &\leq 1 - \theta, & \text{for } x \in E^c. \end{aligned}$$

**Remark 3.4.4.** For  $x \in E$  or  $x \in \partial E$  and  $\rho \geq 0$ , if  $f \geq 0$  in  $B_\rho(x)$  then

$$\theta \leq \int_{B_\rho(x)} \chi_E$$

without any restriction on  $\rho$ . In addition,  $f$  may not necessarily be in  $L^\infty(\Omega)$ .

Our aim is to pass to the limit  $h \rightarrow 0$ . For this, it is necessary to get estimates on the discrete velocity

$$f_h^n(x) := f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(x, \partial E_h^{n-1})\right). \quad (3.8)$$

**Lemma 3.4.6** (Estimate on the discrete velocity). *Assume  $f$  satisfies (H1) and (H2). For  $h$  small, there exists a large constant  $C > 0$  such that the following holds uniformly with respect to  $n$*

$$\|f_h^n\|_{L^\infty(E_h^n \Delta E_h^{n-1})} < f(Ch^{\alpha-1}), \quad (3.9)$$

where  $\alpha = \frac{p}{p+1}$ , with  $p$  given by (H2).

*Proof:* We use the standard technique of cutting out balls to exclusively treat regions of high discrete velocity, i.e. regions where  $|f_h^n| > f(Ch^{-\frac{1}{p+1}})$  holds.

We argue by contradiction. Suppose (3.9) does not hold and let  $x_0 \in E_h^n \Delta E_h^{n-1}$  such that

$$\text{dist}(x_0, E_h^{n-1}) \geq 2Ch^\alpha.$$

for which, by the lower semicontinuity of  $f$ , the following would hold

$$|f_h^n(x)| = f\left(\frac{1}{h} \text{dist}(x, E_h^{n-1})\right) \geq f(Ch^{\alpha-1}).$$

for all  $x \in B_\rho(x_0)$ , with  $\rho = Ch^\alpha$ , for a fixed  $n$  and  $C$  a constant yet to be determined. Assume that  $x_0 \in E_h^n \setminus E_h^{n-1}$ , a similar argument being true on the complementary set.

From a comparison of  $E_h^n$  with the cut out set  $E' = E_h^n \setminus B_\rho(x_0)$  we obtain

$$\text{Per}(E'; \Omega) - \text{Per}(E_h^n; \Omega) \geq \int_{E_h^n \setminus E'} f_h^n.$$

Since the left hand side term can be rewritten as

$$\text{Per}(E'; \Omega) - \text{Per}(E_h^n; \Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial^* B_\rho(x); E_h^n) - \mathcal{H}^{N-1}(\partial E_h^n; B_\rho(x)),$$

we have

$$N\omega_N \rho^{N-1} \geq f(Ch^{\alpha-1}) \int_{B_\rho(x_0)} \chi_{E_h^n}.$$

The density lemma gives us a lower estimate for the right hand side term and hence

$$N\omega_N \rho^{N-1} \geq f(Ch^{\alpha-1}) \theta \omega_N \rho^N.$$

Since  $f_h^n$  is positive on the considered set, no bound is required on the radius  $\rho$ . Hence, by (H2) the following inequality would hold

$$N \geq \theta Ch^\alpha f(Ch^{\alpha-1}) \geq \theta C^{p+1} h^{\alpha(p+1)-p} = \theta C^{p+1}$$

leading thus to a contradiction, if  $C$  is sufficiently large.  $\square$

### 3.5 Study of a radial problem

We will now study the evolution of a ball by our algorithm, and look at the hypothesis giving us some control on this evolution. This study will be useful, combined with the comparison principle, to control the evolution of more general sets.

**Lemma 3.5.1** (radial solution). *If  $E^0$  is radial, then, the problem :*

$$\min_E \left( \text{Per}(E) + \int_E f\left(\frac{\text{sdist}(x, \partial E^0)}{h}\right) dx \right)$$

*have a radial solution.*

*Proof:* To prove the existence of a minimal solution, we will apply rotations to the minimal solution of the problem. Let be  $E$  the minimal solution of the problem (as seen in the lemma 3.3.2). Let be  $R$  a rotation. We clearly have that  $R(E)$  is also a solution of the minimization problem. Moreover, as,  $E$  is the minimal solution,  $E \subset R(E)$ , and this, for all rotation  $R$ . This imply that  $E$  is radial as  $E = \bigcap_R R(E)$ . Indeed, if  $E$  is not radial, there exist  $x$  and  $y$  such that  $|x| = |y|$ ,  $x \in E$  and  $y \notin E$ .  $\square$

Now, we want to study the evolution of a cone. For that, it suffices to know the evolution of all balls which compose the cone.

**Lemma 3.5.2.** *If  $E^0 = B_R$ , the solution of the minimization problem is  $B_r$  with  $r$  satisfying :  $r - R \in hf^{-1}\left(-\frac{N-1}{r}\right)$ .*

*Proof:* We will now consider that  $E^0 = B_R$ . We want to find the evolution of the ball. As the solution is a ball, the problem is equivalent to :

$$\min_r \left( N\omega_N r^{N-1} + \int_0^r N\omega_N s^{N-1} f\left(\frac{s-R}{h}\right) ds \right).$$

Let  $g$  be :

$$g(r) = r^{N-1} + \int_0^r s^{N-1} f\left(\frac{s-R}{h}\right) ds.$$

If the function is differentiable, the minimizer satisfies :

$$(N-1)r^{N-2} + r^{N-1} f\left(\frac{r-R}{h}\right) = 0.$$

$\square$

The evolution of a ball by our algorithm consist consequently at studying a sequence  $r_n$  defined by :

$$r_{n+1} \in r_n + hf^{-1}\left(-\frac{N-1}{r_{n+1}}\right)$$

But, this sequence is not necessarily unique, so we'll have to find another condition to choose  $r_{n+1}$ .

**Lemma 3.5.3.** *let be  $R > 0$  There exist  $r$  such that :*

$$\min_r \left( N\omega_N r^{N-1} + \int_0^r N\omega_N s^{N-1} f\left(\frac{s-R}{h}\right) ds \right), \quad (3.10)$$

$$r = R + hf^{-1}\left(-\frac{N-1}{r}\right)$$

*and  $r \geq r_q$ , where  $r_q$  is the solution of the problem with  $f_q = Cx|x|^{q-1}$ .*

To prove this result, we have to check before the result for  $f_q = Cx|x|^{q-1}$ .

**Lemma 3.5.4.** *Let  $f$  be  $f = Cx|x|^{q-1}$ , then*

$$r_q = \max\left(r, r = R + hf^{-1}\left(-\frac{N-1}{r}\right)\right)$$

is the argument of the following problem :

$$\min_{r \geq 0} (N\omega_N r^{N-1} + \int_0^r N\omega_N s^{N-1} f\left(\frac{s-r_n}{h}\right) ds),$$

or the minimizer 0.

*Proof:* We clearly have that  $r_q \leq R$  because  $f^{-1}\left(-\frac{N-1}{r}\right) \leq 0$ . As,  $-\frac{N-1}{r} \leq 0$ , we have that :  $f^{-1}\left(-\frac{N-1}{r}\right) = -\frac{1}{C}\left|-\frac{N-1}{r}\right|^{\frac{1}{q}}$ . We will now prove that  $r_q$  is the minimizer of our problem. The equation becomes :

$$r_q - R + h\left|-\frac{N-1}{r_q}\right|^{\frac{1}{q}} = 0$$

$$r_q^{1+\frac{1}{q}} - r_q^{\frac{1}{q}}R + h| -N + 1|^{\frac{1}{q}} = 0 = g'(r_q)$$

We derive again this equation and find

$$g''(r_q) = \left(\frac{1}{q} + 1\right)r_q^{\frac{1}{q}} - \frac{1}{q}Rr_q^{\frac{1}{q}-1}$$

This function have only two zero, and one is zero (if  $0 < q < 1$ , there is only one zero for  $q > 1$ ) and the other  $\frac{1}{\frac{1}{q}+1}r_n$ . So, the function  $g'$  have only two positive zero, and only one greater than  $\frac{q}{q+1}R$ . Moreover, the function is increasing on 0 and on  $R$ , so the minimizer of the problem is effectively  $r_q$  for  $R$  large enough, and 0 otherwise.  $\square$

**Lemma 3.5.5.** *Suppose that  $|f(x)| \geq C|x|^q$ , then  $r \geq r_q$  with  $r_q$*

*Proof:* Let  $r_q$  the minimizer of the problem. Then, for each  $0 < s \leq r_q$  (as we have  $t - R \leq 0$ ) :

$$s^{N-1} - \int_0^s t^{N-1} C \left|\frac{t-R}{h}\right|^q - r_q^{N-1} + \int_0^{r_q} t^{N-1} C \left|\frac{t-R}{h}\right|^q \geq 0$$

$$s^{N-1} - r_q^{N-1} + \int_s^{r_q} t^{N-1} C \left|\frac{t-R}{h}\right|^q \geq 0$$

And we obtain, if  $-f\left(\frac{t-R}{h}\right) = |f\left(\frac{t-R}{h}\right)| \geq C|x|^q$ ,

$$s^{N-1} - r_q^{N-1} - \int_s^{r_q} t^{N-1} f\left(\frac{t-R}{h}\right) \geq 0$$

So :

$$s^{N-1} + \int_0^s t^{N-1} f\left(\frac{t-R}{h}\right) \geq r_q^{N-1} + \int_0^{r_q} t^{N-1} f\left(\frac{t-R}{h}\right) \quad \forall s \leq r_q.$$

Then, the minimizer of our problem is greater or equal to  $r_q$   $\square$

We are interested in estimating the discrete velocity for a given ball of radius  $R$ . Thus in finding a necessary condition on the number of iterations  $n$  and the approximation step  $h$  such that the evolution stays inside the ball  $B_{R/2}$ . The precedent result prove that we will only have to work with polynomial function. Therefore, we consider the implicit discrete scheme :

$$r_{n+1} = \sup\{r \in [R/2, r_k]; (r - hf_q^{-1}(-\frac{N-1}{r})) \leq r_k\} = \max(r, r \in r_n + hf_q^{-1}(-\frac{N-1}{r}))$$

starting at  $R$ .

**Lemma 3.5.6.** *Let  $R > 0$ . If  $n, h$  satisfy  $nh < -\frac{R}{2f_q^{-1}(-\frac{2(N-1)}{R})}$  then there exist a sequence  $\{r_k\}_k$  such that  $r_k \in [R/2, R]$ , for  $k \leq n$ .*

*Proof:* Denote  $C_R = f_q^{-1}(-\frac{2(N-1)}{R})$ . We claim that for  $r_k \geq R/2 - C_R h$  there exists  $r_{k+1} \in [R/2, r_k)$  such that

$$r_{k+1} \leq r_k + hf^{-1}(-\frac{N-1}{r_{k+1}}).$$

Indeed, one can take

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= \sup\{r \in [R/2, r_k]; (r - hf_q^{-1}(-\frac{N-1}{r})) \leq r_k\} \\ &\geq \sup\{r \in [R/2, r_k]; (r - hC_R) \leq r_k\} = r_k + hC_R. \end{aligned}$$

One can check by recurrence that for  $k < n$ ,  $r_k \geq R/2 - C_R h$ .

□

**Lemma 3.5.7.** *Let be  $R > 0$ , if  $h$  is small enough the minimum of the problem (3.10) is not achieve at 0. That is to say there is  $0 < r < R$  such that :*

$$r^n - \int_0^r s^{N-1} f(\frac{R-s}{h}) ds < 0$$

*Proof:* This proof consist in fact to say that  $f(\frac{R-s}{h})$  goes to infinity when  $h$  goes to 0. Let be  $0 < a < b < R$ , then :

$$\begin{aligned} b^n - \int_0^b s^{N-1} f(\frac{R-s}{h}) ds &\leq b^n - \int_a^b s^{N-1} f(\frac{R-s}{h}) ds \\ &\leq b^n - (b-a)a^{N-1} f(\frac{R-b}{h}) \end{aligned}$$

which is negative for  $h$  small enough. Moreover, if  $\tilde{R} \geq R$ , and if  $r$  is such that  $r^n - \int_0^r s^{N-1} f(\frac{R-s}{h}) ds < 0$ , then  $r^n - \int_0^r s^{N-1} f(\frac{\tilde{R}-s}{h}) ds < 0$ . □

### 3.6 Convergence of the discrete scheme

In this section, we will give the proof of convergence of the algorithm moreover, we will prove that the function built by the algorithm is a solution of the mean curvature motion.

Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  be an open, bounded domain, with Lipschitz boundary. Denote by  $\mathcal{B}(\Omega)$  the family of all subsets of  $\Omega$  with finite perimeter. For  $h = T/n$ , with  $n \in \mathbb{N}$  we define the *monotone set operator*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_h : \mathcal{B}(\Omega) &\rightarrow \mathcal{B}(\Omega) \\ E^0 &\mapsto E^h \end{aligned}$$

with

$$E^h = \operatorname{argmin}\left\{ \int_{\Omega} |D\chi_E| + \int_{E\Delta E^0} f\left(\frac{1}{h} \operatorname{dist}(\cdot, E^0)\right) \right\}. \quad (3.11)$$

A real valued function is completely described by its level sets (see Appendix A). This allows one to process a function  $u_0$  by processing separately its level sets  $\{E_\lambda^0\}_\lambda$ . The function  $u_0$  is thus decomposed into the stack of its level sets. Each level set is then processed independently by the monotone set operator  $T_h$ . This yields a new stack of level sets, preserving the geometrical inclusion and a new function can be defined by the superposition principle :

$$T_h u_0(x) = \sup\{\lambda : x \in E_\lambda^h\}. \quad (3.12)$$

We have thus a *monotone function operator*

$$\begin{aligned} T_h : BV(\Omega) &\rightarrow BV(\Omega) \\ u_0 &\mapsto T_h u_0 \end{aligned}$$

In addition, the operator  $T$  is translation invariant and commutes with constants ( $Tc = c$  for any constant function  $c$ .)

Given a function  $u_0 \in BV(\Omega)$  and some parameter  $h > 0$ , we can construct a time-discrete family of functions by minimizing iteratively the energy functional given by (3.11) and reconstructing at each step  $n$ ,  $u_h(nh, \cdot)$  by formula (3.12)

$$\begin{aligned} u_h &: (h\mathbb{N}) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ u_h(nh, x) &= (T_h^n u_0)(x). \end{aligned}$$

The functions  $u_h$  are only defined on  $(h\mathbb{N}) \times \Omega$ . However, we are interested in their limit on  $[0, \infty) \times \Omega$ .

In the following we show that the discrete evolutions converge to a viscosity solution of :

$$u_t = f^{-1}\left(|Du| \operatorname{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right)\right). \quad (3.13)$$

Before stating the main result, let us give some useful definitions and lemmas. We start with several properties of the function operator  $T_h$  that will basically establish the uniform continuity of the time discrete approximations  $u_h(nh, x)$ .

A straightforward consequence of the monotonicity and translation invariant properties of  $T_h$  is the fact that Lipschitz constants might decrease with time.

**Lemma 3.6.1** (Continuity in space). *Assume that  $u_0$  is  $L$ -Lipschitz continuous. Then  $T_h u_0$  is  $L$ -Lipschitz.*

*Proof:* Suppose that  $\Omega = \mathbb{R}^N$  and that  $\{u_0 > s\}$  is bounded for all  $s$ . For any  $x, y \in \mathbb{R}^N$  and  $z$  such that  $x + z, y + z \in \mathbb{R}^N$  we have

$$u_0(y + z) - L|x - y| \leq u_0(x + z) \leq u_0(y + z) + L|x - y|$$

Since  $T_h$  is a monotone operator we have

$$T_h(u_0(\cdot + y) - L|x - y|) \leq T_h(u_0(\cdot + x)) \leq T_h(u_0(\cdot + y) + L|x - y|).$$

In addition,  $T_h$  is translation invariant and commutes with constants and hence

$$(T_h u_0)(\cdot + y) - L|x - y| \leq (T_h u_0)(\cdot + x) \leq T_h u_0(\cdot + y) + L|x - y|.$$

Taking the values of these functions at 0 yields

$$T_h u_0(y) - L|x - y| \leq T_h u_0(x) \leq T_h u_0(y) + L|x - y|,$$

which is exactly the  $L$ -Lipschitz condition for  $u_h(h, x)$ . Arguing by induction we get the desired result.

Now, we have prove that for all level lines wich does'nt touch the boundary of  $\partial\Omega$ , the evolution of this level line is same in  $\Omega$  and in  $\mathbb{R}^N$  for  $h$  small enough.  $\square$

Monotonicity is actually a strong tool in establishing the converging result, as it allows comparison of the solutions with cones.

**Lemma 3.6.2** (Continuity in time). *Assume there exists a time discrete-modulus of continuity  $\omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  with  $\omega(0) = 0$  such that for  $nh \leq t$*

$$(T_h^n)(L|x|)(0) \leq L\omega(t) \text{ and } (T_h^n)(-L|x|)(0) \geq -L\omega(t).$$

Then for every  $L$ -Lipschitz function  $u_0$  one has

$$-L\omega(t) \leq T_h^n u_0(x) - u_0(x) \leq L\omega(t).$$

*Proof:* Since the operator  $T_h$  is translation invariant, it is enough to check the statements for  $x = 0$ . For  $u_0$  a function  $L$ -Lipschitz continuous

$$-L|x| \leq u_0(x) - u_0(0) \leq L|x|$$

we apply iteratively the operator  $T_h$  and use its invariance properties to get for  $nh \leq t$

$$-L\omega(t) \leq T_h^n(-L|x|)(0) \leq T_h^n(u_0)(0) - u_0(0) \leq T_h^n(L|x|)(0) \leq L\omega(t).$$

$\square$

It is thus enough to control the speed of evolution for cones in order to obtain bounds of the iterated filters acting on Lipschitz functions.

**Lemma 3.6.3.** *Let  $u_0(x) = L|x|$ . Then, if  $nh \leq t$*

$$(T_h^n u_0)(0) \leq L\omega(t) \text{ and } (T_h^n(-u_0))(0) \geq -L\omega(t)$$

with  $\omega(t) = Ct^{\frac{1}{1+p}}$ .

To prove this, we'll use the study on the evolution of cones.

*Proof of lemma 3.6.3* Lemma 3.5.6 give us that : if  $R$  is such that  $nh \leq -\frac{R}{2f^{-1}(-\frac{2(N-1)}{R})}$ , then the evolution of the ball of radius  $R$  include the ball of radius  $\frac{R}{2}$ .

So, when  $nh \rightarrow t$  and, using the hypothesis  $(H_2)$ , the evolution is bounded by all ball of radius  $R$  satisfying  $t \leq C.R^{1+p}$  with  $C = \frac{1}{2(2(N-1))^p}$ . So,  $(T_h^n u_0)(0) \leq Ct^{\frac{1}{1+p}}$  (which is a convex function).  $\square$

**Remark 3.6.1.** In reality, here, the hypothesis  $(H_2)$  is too strong, there is only the necessity that  $\frac{R}{2f^{-1}(-\frac{2(N-1)}{R})}$  is defined and bounded.

**Definition 3.6.1.** We say that the time-discrete functions  $u_h$  converge uniformly on compact sets to a function  $u$  defined on  $\Omega \times [0, T]$  if for every compact subset  $K$  of  $\Omega \times [0, T]$  and every  $\varepsilon > 0$  there exists  $h_0$  such that

$$|u(x, t) - u_h(x, t)| < \varepsilon \text{ for all } h \leq h_0 \text{ and all } (t, x) \in K \cap (h\mathbb{N}) \times \Omega.$$



**Lemma 3.6.4.** *Let  $u_0 \in Lip(\Omega)$ . Then the time discrete functions  $u_h$  are uniformly equicontinuous on  $(h\mathbb{N}) \times \Omega$ , i.e. for all  $n, m \in \mathbb{N}$  and for all  $x, y \in \Omega$*

$$|u_h(nh, x) - u_h(mh, y)| \leq L|x - y| + L\omega(|n - m|h).$$

where  $\omega$  is a continuous real function, concave near the origin and  $\omega(0) = 0$ . Moreover, we can extend  $u_h$  into functions  $\tilde{u}_h$  on  $[0, \infty) \times \Omega$  which are uniformly equicontinuous.

*Proof:* The result is a direct consequence of the two continuity lemmas.

$$\begin{aligned} |u_h(nh, x) - u_h(mh, y)| &\leq |u_h(nh, x) - u_h(nh, y)| + |u_h(nh, y) - u_h(mh, y)| \\ &\leq L|x - y| + L\omega(|n - m|h). \end{aligned}$$

We extend the time discrete functions  $u_h$  into functions  $\tilde{u}_h$  defined on the whole space by linear interpolation

$$\tilde{u}_h(t, x) = \frac{t - nh}{h} u_h((n + 1)h, x) + \frac{(n + 1)h - t}{h} u_h(nh, x).$$

□

**Lemma 3.6.5.** *There is a subsequence of  $\{\tilde{u}_h\}_h$  which converge uniformly to  $u$ .*

*Proof:* This is a consequence of the previous result. As the function  $\tilde{u}_h$  are equicontinuous on a compact and bounded, we can apply the Arzela-Ascoli theorem. And then, there is a uniformly convergent subsequence.

Moreover, as  $\{\tilde{u}_h\}_h$  by construction, we have that :

$$|\tilde{u}_h(t, x) - u_h(nh, x)| = \frac{t - nh}{h} |u_h((n + 1)h, x) - u_h(nh, x)| \leq L\omega(h)$$

with  $h > nh - t > 0$ . So, we also have that  $u_h$  converge uniformly to  $u$ .

□

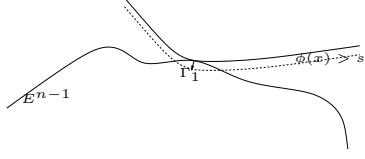
**Lemma 3.6.6.** *Let  $\{u_h\}_h$  be a family of time discrete continuous functions converging uniformly on compact sets to a function  $u$ . Assume that  $(x, t)$  is a strict global maximum of  $u$ . Then there exists a subsequence  $\{u_{h'}\}_{h'}$  of the sequence  $\{u_h\}_h$  and a sequence of points  $(x_{h'}, h'n_{h'})_{h'}$  such that for all  $h'$  the point  $(x_{h'}, h'n_{h'})_{h'}$  is a global maximum of  $u_{h'}$ ,  $(x_{h'}, h'n_{h'})_{h'}$  converges to  $(x, t)$  and  $u_{h'}(x_{h'}, h'n_{h'}) \rightarrow u(x, t)$ .*

*Proof:* Let be  $(x_0, t_0)$  such that  $u$  reaches a maximum here. We can suppose that  $u(x_0, t_0) = 0$ . Moreover, let be  $R > 0$ , there is  $A < 0$  such that  $u(x, t) \leq A \quad \forall (x, t) \in B((x_0, t_0), R)^c$ . Using the uniform convergence of  $\tilde{u}_h$ , we can extract the desired subsequence.

indeed, let be  $-A/2 > \epsilon > 0$ . By the convergence of  $\tilde{u}_h$  we have that, for  $h$  small enough,  $\tilde{u}_h \leq A + \epsilon < 0$  on  $B((x_0, t_0), R)^c$ . Moreover, as  $u$  is continuous, there is a ball  $B((x_0, t_0), r)$  such that  $\tilde{u}_h \geq \epsilon$  on  $B((x_0, t_0), r)$  for  $h$  small enough. Thus, the function  $\tilde{u}_h$  reaches its maximum in  $B((x_0, t_0), R)$ . Thereby we construct the sequence  $(x_h, t_h)$  by iterations with  $R$  tending to 0.

□

**Theorem 3.6.1.** *Let  $u_0 \in Lip(\Omega) \cap BV(\Omega)$ . Consider all the level sets  $E_s$  of  $u_0$  and for each  $s$  solve the perimeter minimization problem with initial data  $E_s$ . Construct then as a stack filter a sequence of time -discrete evolutions  $u_h(x, nh)$  and assume it converges uniformly on every compact set to a function  $u$  as  $h \rightarrow 0$ . Then  $u$  is a viscosity solution of (3.13).*



*Proof:* Let  $\phi$  be an admissible test function touching  $u$  from above at some point  $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, t)$

We distinguish two cases.

*Case 1 :*  $\nabla\phi(x_0, t_0) \neq 0$ .

From Lemma 3.6.6 we can find a sequence of maximum points for  $u_h - \phi$  (where  $u_h$  are the discrete evolutions). By continuity  $\nabla\phi(x_h, t_h) \neq 0$ . Consider then the upper level sets of  $u_h$  and  $\phi$ .

$$E^n = \{x \in \Omega; u(x, hn_h) > u(x_h, hn_h)\} \quad (3.14)$$

and

$$F = \{x \in \Omega; \phi(x, hn_h) > \phi(x_h, hn_h)\} \quad (3.15)$$

From the maximum condition :

$$u(x, t) - u(x_h, t_h) \leq \phi(x, t) - \phi(x_h, t_h), \text{ for all } (x, t) \in [0, \infty) \times \Omega. \quad (3.16)$$

it follows that the sets are ordered by inclusion :

$$E^n \subset F \quad (3.17)$$

Since the time discrete evolutions have been reconstructed as stack filters of level sets whose topological boundaries are essential boundaries (in the *BV* sens), we have :

$$x_h \in \partial^* E^n. \quad (3.18)$$

On the other hand,  $x_h \in \overline{F}$  as  $\phi$  is continuous and, hence,  $x_h \in \partial F$ . Since in addition,  $\nabla\phi(x_h, t_h) \neq 0$ ,  $x_h \in \partial^* F$ ,  $\partial F$  being locally a  $C^1$  graph. Translate there the level set  $F$  in the normal direction  $\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$  with a small amount  $\varepsilon$ . Namely, define the set :

$$F^\varepsilon = \{x + \varepsilon \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}(x_h, hn_h); x \in E_\phi\}. \quad (3.19)$$

Take then the set  $E' = E^n \cap F^\varepsilon$  as a comparison set for the energy functional. We thus have :

$$\mathcal{E}(E^n) \leq \mathcal{E}(E')$$

or, equivalently :

$$\begin{aligned} \text{Per}(E^n; \Omega) - \text{Per}(E_\phi^\varepsilon \cap E^n; \Omega) &\leq \int_\Omega f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(x, \partial E^{n-1})\right) (\chi_{F^\varepsilon \cap E^n} - \chi_{E^n}) \\ &= - \int_\Omega f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(x, \partial E_h^{n-1})\right) (\chi_{E^n \setminus F^\varepsilon}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

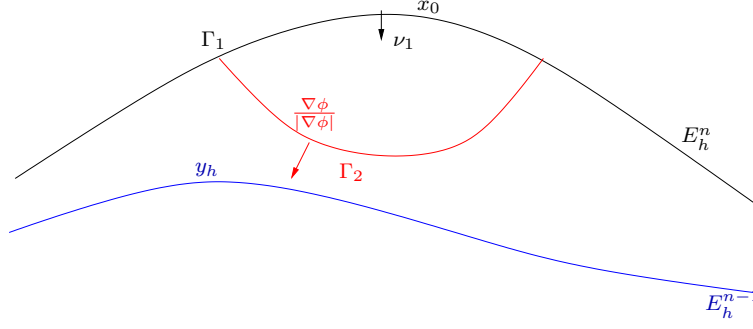
From the generalized Gauss-Green formula for sets of finite perimeter in  $\Omega$  we have :

$$\text{Per}(E^n; \Omega) - \text{Per}(E'; \Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_1) - \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_2).$$

where :

$$\Gamma_1 := \partial^* E^n \cap (F^\varepsilon)^c \text{ and } \Gamma_2 := \partial^* F^\varepsilon \cap E^n.$$

Let  $\nu_1, \nu_2$  be respectively the generalized inner normal vector fields with respect



to  $E^n$  and  $F^\varepsilon$ .

By the Besicovitch derivation theorem

$$D\chi_{E^n} = \nu_1 |D\chi_{E^n}|$$

as  $|D\chi_{E^n}|$  is concentrated on the reduced boundary

$$\text{supp} D\chi_{E^n} \subset \partial^* E^n.$$

Therefore, we have

$$\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_1) \geq \int_{\Gamma_1} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}(\cdot, hn_h) \nu_1 d\mathcal{H}^{n-1} \quad (3.21)$$

At the same time, for  $\varepsilon$  small enough  $\Gamma_2$  is locally a graph around  $x_h$ . Hence  $\nu_2 = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$  and :

$$\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_2) = \int_{\Gamma_2} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}(\cdot, hn_h) \nu_2 d\mathcal{H}^{N-1} \quad (3.22)$$

Plugging (3.21) and (3.22) into (3.21) we got that :

$$\text{Per}(E^n; \Omega) - \text{Per}(E'; \Omega) \geq \int_{\Gamma_1} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}(\cdot, hn_h) \nu_1 d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Gamma_2} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}(x_h, hn_h) \nu_2 d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Remark now that  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  are the boundaries of  $E^n \setminus E_\phi^\varepsilon$ . In addition  $\nu_1$  is the inner normal of  $\Gamma_1$  with respect to  $E^n \setminus F^\varepsilon$  and  $\nu_2$  the outer normal of  $\Gamma_2$  with respect to  $E^n \setminus F^\varepsilon$ .

Applying Gauss-Ostrogradski's formula to  $E^n \setminus F^\varepsilon$  we get that

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}(\cdot, hn_h) (-\nu_1) d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\Gamma_2} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}(x_h, hn_h) \nu_2 d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\chi_{E^n \setminus F^\varepsilon}} \text{div}\left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}\right)(x_h, hn_h). \quad (3.23)$$

From (3.20), (3.23) and (3.23) we deduce that :

$$\int_{\chi_{E^n \setminus F^\varepsilon}} \text{div}\left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}\right) \geq \int_{E^n \setminus F^\varepsilon} f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(x, \partial E_h^{n-1})\right)$$

Letting  $\varepsilon \rightarrow 0$  in (3.6) we get the pointwise inequality :

$$\text{div}\left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}\right)(x_h, hn_h) \geq f\left(\frac{1}{h} \text{sdist}(x_h, \partial E_h^{n-h})\right). \quad (3.24)$$

We then need to pass to the limits as  $h \rightarrow 0$ . Consider  $y_h \in \partial^* E^{n-1}$  s.t.

$$y_h = x_h + \text{sdist}(x_h, \partial E^{n-1}) \cdot \nu + o(h^{\bar{\alpha}}) \quad (3.25)$$

for some unit vector  $\nu$ .

**Remark 3.6.2.** Note that  $\text{sdist}(x_h, \partial E^{n-1}) \cdot \nu$  is always pointing in the same direction as  $\nabla \phi$ .

From Lemma 3.8 we have an upper bound of the discrete velocities which gives for  $\bar{\alpha} = \alpha = \frac{p}{p+1}$

$$|y_h - x_h| \leq |\text{dist}(x_h, \partial E^n)| + C|h|^{\bar{\alpha}} \quad (3.26)$$

$$\leq 2C|h|^\alpha \quad (3.27)$$

We take into account that  $y_h \in \partial E^{n-1}$  implies  $u_h(y_h, (n-1)h) = u_h(x_h, nh)$  and evaluate the inequality (3.16) at point  $(y_h, (n-1)h)$ . Therefore :

$$0 \leq \phi(y_h, h(n_h - 1)) - \phi(x_h, hn_h).$$

Using Taylor expansion at point  $(x_h, n-h)$  we have :

$$\phi(y_h, h(n_h - 1)) - \phi(x_h, hn_h) = -\phi_t(x_h, hn_h)h + \nabla \phi(x_h, hn_h)(y_h - x_h) + o(h^2) + O(|y_h - x_h|^2).$$

We then use (3.25) and (3.26) to get that

$$\phi_t(x_h, hn_h) \leq \frac{1}{h} \text{sdist}(x_h, \partial E_h^{n_h - h}) \nabla \phi(x_h, hn_h) \nu + o(h^2) + O(|h|^{2\alpha}). \quad (3.28)$$

Since  $\text{sdist}(x_h, \partial E^{n-1}) \cdot \nu$  is pointing inwards,  $\text{sdist}(x_h, \partial E^{n-1}) \nu \cdot \nabla \phi(x_h, nh)$  changes sign, but  $\nu \cdot \nabla \phi(x_h, nh) \geq 0$ .

Therefore, (3.28) gives :

$$\phi_t(x_h, hn_h) \leq \frac{1}{h} \text{sdist}(x_h, \partial E_h^{n_h - h}) \{|\nabla \phi(x_h, hn_h)| + Ch^\alpha\} + o(h). \quad (3.29)$$

Remark that for  $h$  small enough,  $|\nabla \phi(x_h, hn_h)| + Ch^\alpha \rightarrow |\nabla \phi(x_0, t_0)| > 0$ . On the other hand, from (3.24) and the monotonicity and regularity of  $f$  we get :

$$\frac{1}{h} \text{sdist}(x_h, \partial E^{n-1}) \leq f^{-1}(\text{div} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|})(x_h, nh). \quad (3.30)$$

Plugging (3.30) into (3.29) we further have :

$$\phi_t(x_h, t_h) \leq |\nabla \phi| f^{-1}(\text{div} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|})(x_h, t_h) \{|\nabla \phi(x_h, hn_h)| + Ch^\alpha\} + o(|h|).$$

Letting now  $h \rightarrow 0$  we get :

$$\phi_t(x_0, t_0) \leq |\nabla \phi| f^{-1}(\text{div} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|})(x_0, t_0).$$

Now, we will assume that  $\nabla \phi(x_h, t_h) = 0$ . As before, we can construct a sequence  $(x_h, t_h)$  of maximum of  $u_h - \phi$  going to  $(x_0, t_0)$  when  $h$  goes to 0. We suppose that  $\nabla \phi(x_h, t_h) \neq 0$ . Using what we have done before, we have that :

$$s_h \leq f^{-1}(\text{div}(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|})(x_h, hn_h)).$$

And then, we obtain that :

$$\phi_t(x_h, t_h) \leq |\nabla \phi| f^{-1}(\text{div} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|})(x_h, t_h).$$

Moreover, we can use a function  $\phi$  (as done in [IS95]) such that there is a function  $f$  such that :

$$|\phi(x, t) - \phi(x_0, t_0) - \phi_t(x_0)(t - t_0)| \leq l(|x - x_0|) + g(t - t_0)$$

and :

$$\frac{l'(|p|)}{|p|} F(p, I) = \frac{l'(|p|)}{|p|} |p| f^{-1}(\operatorname{div}(\frac{p}{|p|})) \rightarrow 0$$

Moreover, we have that :

$$|\phi(x, t) - \phi(x_0, t_0) - \phi_t(x_0)(t - t_0)| \leq |\nabla\phi| \operatorname{sdist}(x, t) + o(\operatorname{sdist}(x, t))$$

So, using this equations, we found that :

$$\phi_t(x_0, t_0) \leq 0$$

Now, we will assume that  $\nabla\phi(x_h, t_h) = 0$  for  $h$  small enough. Then, let  $\beta > \beta_0$ , and :

$$\psi_\beta(x, t) = \phi(x, t) + |x - x_0|^\beta. \quad (3.31)$$

This function is  $C^\infty$ , moreover  $u - \psi_\beta$  have a maximum in  $(x_0, t_0)$ . We also have that :  $D\psi_\beta(x_0, t_0) = \nabla\phi(x_0, t_0) = 0$  and  $D^2\psi_\beta(x_0, t_0) = D^2\phi(x_0, t_0)$ .

At last :

$$|\phi(x, t) - \phi(x_0, t_0) - \phi_t(x_0)(t - t_0) + |x - x_0|^\beta| \leq l(|x - x_0|) + |x - x_0|^\beta + g(t - t_0)$$

Then, if we take  $l(\tilde{r}) = l(r) + r^\beta$ , we have that :

$$l(\tilde{r})' = l'(r) + \beta r^{\beta-1}$$

And then, if  $\beta \geq \frac{1}{\alpha}$ , :

$$|p|^{\beta-1} f^{-1}(\operatorname{div}(\frac{p}{|p|})) \geq C |p|^{\beta-1} (\operatorname{div}(\frac{p}{|p|}))^{\frac{1}{\alpha}} \rightarrow 0.$$

So :

$$\frac{l'(|p|)}{|p|} |p| f^{-1}(\operatorname{div}(\frac{p}{|p|})) + \frac{\beta |p|^{\beta-1}}{|p|} |p| f^{-1}(\operatorname{div}(\frac{p}{|p|})) \rightarrow 0$$

We can construct a sequence  $(x_{\beta,h}, t_{\beta,h})$  of maximum of  $u_h - \psi_\beta$ . There is, now, two possibilities, or  $D\psi_\beta(x_{\beta,h}, t_{\beta,h}) \neq 0$  for, at least, a subsequence and then we can use the previous result, or  $D\psi_\beta(x_{\beta,h}, t_{\beta,h}) = 0$  for  $h$  small enough. In this case, we can construct the function  $\psi_{\beta+1}$  then we will have the same possibilities.

Then, by iteration, we have two possible cases. Whether there exist  $\beta > \beta_0$  such that there is a subsequence  $(x_{\beta,h}, t_{\beta,h})$  of maximum of  $u_h - \psi_\beta$  such that  $D\psi_\beta(x_{\beta,h}, t_{\beta,h}) \neq 0$ . By applying the previous result to  $\psi_\beta$ , we found that  $\phi_t(x_0, t_0) = \psi_\beta(x_0, t_0) \leq 0$ .

Whether for all  $\beta > \beta_0$ , the sequence of  $(x_{\beta,h}, t_{\beta,h})$  is such that :

$$D\psi_\beta(x_{\beta,h}, t_{\beta,h}) = 0.$$

So :

$$D\psi_\beta(x_{\beta,h}, t_{\beta,h}) = \beta x_{\beta,h} |x_{\beta,h} - x_0|^{\beta-2}, \quad (3.32)$$

and this, for all  $\beta > \beta_0$ .

This will imply a contradiction with the fact that  $\psi$  is regular. Let  $k_0$  the first non zero differential of  $\psi$ . That is to say  $D^{k_0}\psi_{x_0, t_0} \neq 0$ , and for all  $k < k_0$ ,  $D^k\psi_{x_0, t_0} = 0$ . Then, using the Taylor formula, we have that :

$$\nabla\phi(x, t) = \sum_{\alpha, |\alpha|=k_0} \frac{1}{k_0!} \frac{\partial^\alpha(\nabla\phi)}{\partial x^\alpha}(x_0, t_0) + o(x - x_0, t - t_0).$$

Then, we will have a contradiction using  $\beta > k_0$ . Indeed, we then have :

$$\nabla\phi(x_{\beta,h}, t_{\beta,h}) = \beta x_{\beta,h} |x_{\beta,h} - x_0|^{\beta-2}$$

and :

$$\frac{\beta x_{\beta,h} |x_{\beta,h} - x_0|^\beta}{\sum_{\alpha, |\alpha|=k_0} \frac{1}{k_0!} \frac{\partial^\alpha(\nabla\phi)}{\partial x^\alpha}(x_0, t_0) + o(x - x_0, t - t_0)} \rightarrow 0$$

So, for all  $k$ ,  $D^k\psi_{x_0, t_0} = 0$ , and then (also by the Taylor formula) :

$$\nabla\phi(x) = o(|x - x_0|^k) \quad \forall k > 0.$$

Let  $k$  high enough, and  $\beta = k + 2$ , then for  $(x_{\beta,h}, t_{\beta,h})$  we have (3.32), and then :

$$\left| \frac{\beta x_{\beta,h} |x_{\beta,h} - x_0|^{\beta-2}}{|x - x_0|^{\beta-2}} \right| \rightarrow \beta |x_0|,$$

which imply a contradiction. □

## 3.7 Numerics

I implement this algorithm for the motion of set. In order to implement the algorithm, one need to implement successively :

1. the computation of the signed distance function to the level set 0 of a function  $w$
2. The resolution of problem  $P$ .

The first part is done by using the fast marching method. I take the algorithm developed by Gabriel Peyré.

The second part is based on an algorithm written in [CP11].

Our problem is :

$$(P) \quad \min_{u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u| + \int_{\Omega} F(u(x) - d_{\{u_0 > s\}}(x)) \right\}$$

By definition, we have that :

$$\int_{\Omega} |Du| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\xi); |\xi(x)| \leq 1 \forall x \in \Omega \right\}$$

So, we have to resolve :

$$\min_{u \in BV(\Omega)} \left\{ \max_{|\xi| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\xi) \right\} + \int_{\Omega} F(u(x) - d_{\{u_0 > s\}}(x)) \right\}.$$

this is a primal-dual formulation of a non-linear problem.

This problem is a generic saddle point problem :

$$\min_x \max_y \langle Kx, y \rangle + G(x) - H^*(y) \quad (3.33)$$

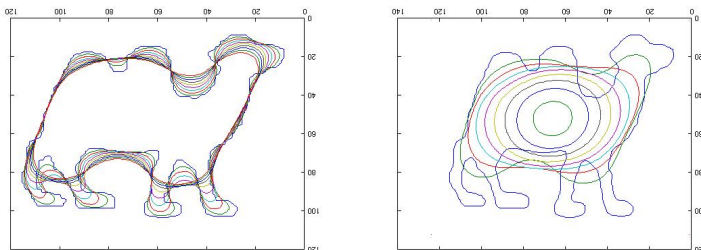


FIGURE 3.1 – Evolution for  $F = x^2$ , for small times on the first figure, and long times for the second one

The idea of this algorithm is to alternate gradient decrease in the two spaces (that is to say, alternatively search the minimum and the maximum). In fact, a step is define like this :

$$\xi^{n+1} = (I + \sigma \partial H^*)^{-1}(\xi^n + \sigma K \bar{u}^n) \quad (3.34)$$

$$u^{n+1} = (I + \tau \partial G)^{-1}(u^n - \tau K \xi^n) \quad (3.35)$$

$$\bar{u}^{n+1} = u^{n+1} + \theta(u^{n+1} - u^n) \quad (3.36)$$

Let :

$$\tilde{\xi} = \xi^n + \sigma K \bar{u}^n$$

and :

$$\tilde{u} = u^n - \tau K \xi^n$$

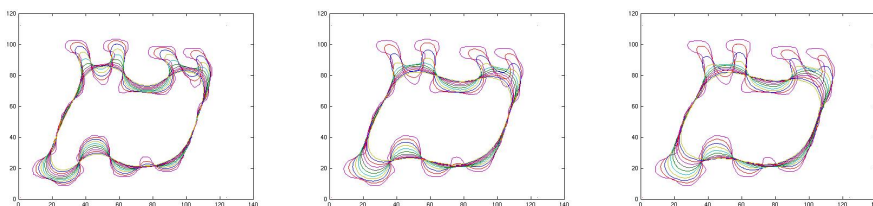
The algorithm is :

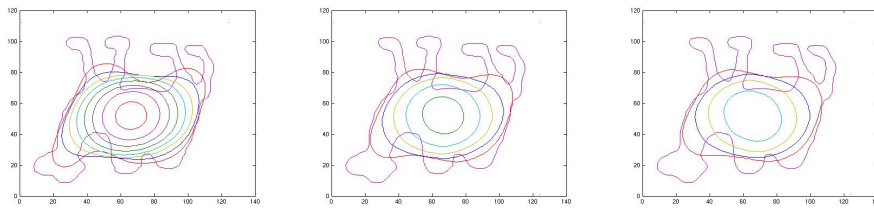
$$\xi_{i,j} = \frac{\tilde{\xi}_{i,j}}{\max(1, \tilde{\xi}_{i,j})}$$

And

$$(I + \tau \partial G)^{-1}(\xi) = \operatorname{argmin} \left\{ \int F(u - \xi) - \langle u, \operatorname{div} \xi \rangle \right\}$$

So, this minimization can be done by a simple Newton algorithm. We will represent now some images os those evolutions.



FIGURE 3.2 – Evolution for  $F = x^2$ ,  $F = x^3$ ,  $F = x^4$





# Chapitre 4

## Un schéma numérique pour le Laplacien Infini

### 4.1 Introduction

Le but de ce travail est de construire un algorithme de résolution du problèmes du Laplacien infini. Le laplacien infini est un opérateur qui apparaît dans différentes application en mécanique ou en imagerie. Il est défini comme suit :

$$-\Delta_\infty u = \sum_{i,j=1}^n u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j}. \quad (4.1)$$

pour une fonction  $u \in C^2$  où  $u_{x_i}$  représente la dérivée première dans la direction  $x_i$  et  $u_{x_i x_j}$  est la dérivée seconde.

Certains auteurs donnent une définition légèrement différente, dans laquelle l'expression est divisée par  $|Du|^2$ . C'est à dire qu'ils écrivent :

$$-\Delta_\infty u = \frac{1}{|Du|^2} \sum_{i,j=1}^n u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j}. \quad (4.2)$$

Dans la mesure où on cherche à résoudre des équations du type :

$$-\Delta_\infty u = 0, \quad (4.3)$$

les deux équations sont équivalentes, mais dans le cas de problèmes non-homogène la définition utilisée aura une importance particulière. Dans le cadre de cet article nous utiliserons la première définition.

Les propriétés du Laplacien infini ont commencé à être étudié par Aronsson à la fin des années 1960. Les études sont motivés par des applications variées. Par exemple, le laplacien infini intervient dans le calcul des variations, et plus précisément dans le relèvement de fonctions Lipschitz. En effet, un problème classique est d'étendre une fonction Lipschitz à un domaine plus grand sans pour autant changer sa constante de Lipschitz. Ce problème a de nombreuses solutions, on peut alors essayer de caractériser une solution "optimale". Aronsson [Aro67, Aro68, Aro84] a cherché l'extensions qui "minimise" la constante de Lipschitz, c'est à dire, si on considère  $U$  un ouvert, et  $g$  une fonction défini sur  $\partial U$ , on cherche la fonction  $u$  définie sur  $U$ , qui étend  $g$  et telle que  $\|Du\|_{L^\infty(U)} \leq \|Dv\|_{L^\infty(U)}$  pour toute extension  $v$  de  $g$ . la détermination de la solution optimale à cette extension revient à la

résolution d'un problème de laplacien infini.

$$-\Delta_\infty u = 0 \text{ sur } \Omega \quad (4.4)$$

$$u = g \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.5)$$

Un autre domaine d'application où l'utilisation de cet opérateur est pertinente est l'imagerie, et plus précisément dans la détection des bords des images. une référence sur ce sujet peut être trouver dans [CCMS00]. Enfin citons des applications du laplacien infini dans la modélisation de certains problème de calcul des forces dans les matériaux.

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème suivant : Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $g$  une fonction :  $\partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . On cherche une fonction  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  solution de (4.4,4.5).

Comme dans la plupart des problèmes d'EDP, la difficulté majeure vient du fait que ce problème n'a pas forcément de solution classique. La théorie des solutions de viscosité permet d'avoir un cadre théorique pour étudier l'existence et l'unicité des solutions de (4.4). Ceci a été introduit et étudié par Jensen [Jen93]. Puis par Barles et Busca [BB01] et par Aronsson, Crandall et Juutinen [ACJ04].

Le but de ce travail est d'étudier une nouvelle approche de la résolution du problème de Dirichlet (4.4). l'approche que l'on proposera ici est basée sur l'utilisation de l'opérateur de Aronsson  $A_H$ . Si on considère un hamiltonien régulier  $H(x, p)$ , alors l'opérateur de Aronsson associé est donné par :

$$A_H[u] = H_{p_i} H_{p_j} u_{x_i, x_j} + H_{x_i} H_{p_j} \quad (4.6)$$

par exemple, dans la cas où  $H(p) = |p|$  alors l'opérateur de Aronsson coïnciderait avec le laplacien infini ( $A_H[u] = \Delta_\infty u$ ), si  $H(p) = \frac{|p|^2}{2}$  alors  $A_{\frac{|p|^2}{2}}[u] = |Du|^2 u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i, x_j} = |Du|^2 \Delta_\infty u$ .

Or, si on se place dans  $\mathbb{R}^n$ , qu'on se donne une fonction  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et qu'on introduit les équations eikonaes :

$$[\text{Principe de décomposition}] \begin{cases} v_t + H(x, Dv) = 0 & (t > 0) \\ w_t - H(x, Dw) = 0 & (t > 0) \\ v = w = u_0 & (t = 0), \end{cases} \quad (4.7)$$

où  $H$  est un hamiltonien régulier. Alors, si on suppose avoir des solutions suffisamment régulières, on obtient (voir l'article de Barron, Evans et Jensen [BEJ08]) :

$$\begin{cases} v(., t) = u - tH(Du_0) + \frac{t^2}{2} A_H[u_0] + o(t^2) \\ w(., t) = u + tH(Du_0) + \frac{t^2}{2} A_H[u_0] + o(t^2) \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{v + w}{2} = u_0 + \frac{t^2}{2} A_H[u_0] + o(t^2), \quad (4.8)$$

ce qui permet de calculer le laplacien infini.

Cette approche qui a été introduite dans [BEJ08] pour traiter de problèmes sans conditions aux bords va être analysée dans ce papier pour un problème de Dirichlet associé au laplacien infini. Nous allons construire un algorithme basé sur le principe de décomposition et on va vérifier la convergence de l'algorithme global.

On va étudier deux cas, tout d'abord on va analyser ce qui se passe dans un cadre périodique homogène. Dans ce cas le principe de décomposition est déjà donné dans [BEJ08] et notre objectif sera d'étudier et d'analyser les algorithmes numériques qui s'en suivent.

Ensuite on va étendre le formalisme précédent (théorique et numérique) pour étudier le cas de Laplacien infini avec des conditions de type Dirichlet.

## 4.2 Notations

Nous allons introduire ici quelques notations qui nous seront utiles pour plus tard. nous dirons qu'une fonction  $u$  est  $Q$ -périodique si pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , et tout  $z \in \mathbb{Z}^n$ ,  $u(x+z) = u(x)$ . Nous noterons  $BUC(\Omega)$  l'espace des fonctions bornées et uniformément continues dans  $\Omega$ . De plus, la norme infini que nous utiliserons sera toujours une norme infini en espace, c'est à dire que :

$$\|u\|_\infty = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Nous noterons  $\mathcal{B}(x, t)$  la boule de centre  $x$  et de rayon  $t$ . De même que précédemment, nous allons faire des recherches de minimum et de maximum dans la suite. Nous noterons alors :

$$m_{x,t}u = \min_{z \in \mathcal{B}(x,t)} u(z)$$

$$M_{x,t}u = \max_{z \in \mathcal{B}(x,t)} u(z)$$

De plus, on cherchera les enveloppes convexe supérieure et inférieure des fonctions, nous noterons alors :

$$\phi^*(x) = \limsup_{z \rightarrow x} \phi(z)$$

$$\phi_* = \liminf_{z \rightarrow x} \phi(z)$$

## 4.3 Cas périodique

Soit  $u \in C(\mathbb{R}^n)$  et  $Q$ -périodique . Considérons les problèmes suivants :

$$\begin{cases} v_t + |Dv| = 0 & (t > 0) \text{ sur } Q \\ v = u & (t = 0) \text{ sur } Q \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} w_t - |Dw| = 0 & (t > 0) \text{ sur } Q \\ w = u & (t = 0) \text{ sur } Q \end{cases} \quad (4.10)$$

La théorie des solutions de viscosités fournit un cadre théorique complet pour l'existence et l'unicité de solutions de viscosités continues et périodiques à ces deux problèmes, voir par exemple [CIL92b]

On sait que si  $u \in BUC(Q)$ , alors les solutions de viscosité  $v$  et  $w$  des problèmes (4.9) et (4.10) sont définies de manières uniques et sont continues. De plus, elles sont données par la formule suivante :

$$v(x, t) = \min_{\{y/|y-x| \leq t\}} (u(y)) \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \quad (4.11)$$

$$w(x, t) = \max_{\{y/|y-x| \leq t\}} (u(y)) \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \quad (4.12)$$

Cette formule montre la continuité de  $v$  et  $w$ . De plus, les fonctions  $v$  et  $w$  sont définies de manière unique ce qui va nous être utile pour plus tard.

Introduisons les semi-groupes non linéaires suivants, pour  $t > 0$ ,

$$R(t) : \quad BUC(Q) \rightarrow BUC(Q)$$

$$u \rightarrow R(t)u = v(x, t) = \min_{\{y/|y-x| \leq t\}} (u(y))$$

$v(x, t)$  est donc ici la solution du problème (4.9) pris au temps  $t$ .

et :

$$\begin{aligned} S(t) : \quad & BUC(Q) \rightarrow BUC(Q) \\ u \rightarrow S(t)u &= w(x, t) = \max_{\{y/|y-x|\leq t\}} (u(y)) \end{aligned}$$

où, cette fois ci,  $w(x, t)$  est la solution du problème (4.10) pris au temps  $t$ .

Dans la suite nous serons amenés aussi à utiliser l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned} F(t) : \quad & BUC(Q) \rightarrow BUC(Q) \\ u \rightarrow & \frac{R(t)u + S(t)u}{2}. \end{aligned}$$

### 4.3.1 Rappels :

Dans toute cette section nous allons fixer une fonction  $u_0 \in BUC(Q)$  et nous allons examiner des algorithmes itératifs de la forme :

$$u_{n+1} = F(t_n)u_n \quad n > 0 \quad (4.13)$$

avec  $t_n$  une suite qui sera précisée ultérieurement.

Dans [BEJ08], on a la démonstration du résultat suivant :

**Théorème 4.3.1.** *Soit  $u_0$  une fonction continue, alors :  $u = \lim F(\frac{t^2}{n})^n u_0$  existe et  $u$  est l'unique solution de viscosité de :*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta_\infty u &= 0 \quad \text{sur } [0, T] \times Q \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{sur } Q \end{aligned}$$

### 4.3.2 Extension du résultat :

Dans le théorème 4.3.1 nous avons considéré la limite de la suite d'opérateur  $F(\frac{t^2}{n})^n$ . Pour illustrer l'importance du terme en  $\frac{t^2}{n}$  on va étudier la convergence de  $F(T)^n$  et on va voir que la limite obtenue est très différente de la précédente.

**Théorème 4.3.2.** *Soit  $u_0$  une fonction  $Q^n$ -périodique et continue. Soit  $T > 0$ . Soit  $u_n$  la suite de fonctions  $Q^n$ -périodiques et continues définie par :*

$$u_n = F(T)u_{n-1} = F(T)^n u_0 \quad n \geq 1. \quad (4.14)$$

Alors il existe une constante, notée  $\bar{u}^T$  telle que :  $u_n \rightarrow \bar{u}^T$  dans  $L^\infty$ .

Pour  $t > 0$ , introduisons les suites de fonctions  $v_n$  et  $w_n$  suivantes :

$$\begin{cases} v_n(x, t) &= R(t)(u_n) \\ w_n(x, t) &= S(t)(u_n) \\ u_{n+1}(x) &= \frac{R(t)(u_n) + S(t)(u_n)}{2} = F(t)(u_n) \end{cases} \quad (4.15)$$

**Remarque 4.3.1.** Nous pouvons remarquer que les fonctions constantes sont invariantes par l'algorithme présenté. En effet, si la fonction  $u_0$  est constante, alors  $|Du_0| = 0$ , d'où  $v_t = w_t = 0$  donc rien ne bouge. De plus, si on décale la fonction  $u_0$  d'une constante  $a$ , c'est à dire on pose  $\tilde{u}_0 = u_0 + a$ . Alors on trouve  $R(t)(\tilde{u}_0) = R(t)(u_0) + a$  et  $S(t)(\tilde{u}_0) = S(t)(u_0) + a$ , d'où  $F(t)(\tilde{u}_0) = F(t)(u_0) + a$  (l'algorithme est invariant par rapport aux translations).

Sans perte de généralité on peut considérer que la fonction  $u_0$  est positive (dans le cas contraire on peut la décaler d'une constante  $C$  qui la rend positive).

Avant de donner la preuve du théorème 4.3.2 nous avons besoin de quelques lemmes préliminaires. Tout d'abord nous savons que par définition des opérateurs  $R$  et  $S$  on a :

$$v_n(x, t) = \min_{\{y/|y-x|\leq t\}} (u_n(y)) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.16)$$

$$w_n(x, t) = \max_{\{y/|y-x|\leq t\}} (u_n(y)) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.17)$$

$u_n$  étant périodique, la notion de maximum et minimum de la fonction est bien définie (et ils sont atteints dans  $\Omega$ ). Ceci permet d'affirmer que :

Ce résultat permet facilement d'avoir les lemmes suivant :

**Lemme 4.3.3.** *Soit  $u_0$  une fonction continue, alors  $R(T)(u_0)$  et  $S(T)(u_0)$  le sont aussi.*

De plus on a :

**Lemme 4.3.4.** *Soit  $u_0$  une fonction continue, alors on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\begin{aligned} \|v_n(\cdot, t)\|_{L^\infty(Q)} &\leq \|u_0\|_{L^\infty(Q)} \\ \|w_n(\cdot, t)\|_{L^\infty(Q)} &\leq \|u_0\|_{L^\infty(Q)} \\ \|u_n\|_{L^\infty(Q)} &\leq \|u_0\|_{L^\infty(Q)} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Ce résultat découle de la définition de  $R$  et  $S$ . En effet, pour  $n \geq 0$ , on a :

$$\min_Q u_n(y) \leq \min_{\{y/|y-x|\leq t\}} (u_n(y)) \leq \max_Q (u_n(y)).$$

Ce qui implique que :  $\|v_n\|_\infty \leq \|u_n\|_\infty$ . On applique le même raisonnement pour avoir le résultat pour la fonction  $w_n$ . Enfin, une simple inégalité triangulaire nous permet de conclure pour  $u_{n+1}$ . En effet :

$$\|u_{n+1}\|_\infty = \left\| \frac{v_n + w_n}{2} \right\|_\infty \leq \frac{1}{2} (\|v_n\|_\infty + \|w_n\|_\infty) \leq \|u_n\|_\infty.$$

Un raisonnement par récurrence nous permet alors d'avoir le résultat désiré.  $\square$

Du lemme précédent on voit que les opérateurs  $R$  et  $S$  sont contractants. En général on peut aussi se convaincre que  $R$  et  $S$  ne sont pas strictement contractants, comme le prouve l'exemple suivant : prenons  $u_0$  une fonction qui vaut zéro sur  $\partial B(0, 2)$ , 1 sur  $B(0, 1)$ , qui est  $C^\infty$  et borné pas 1, on s'aperçoit que pour  $t$  suffisamment faible ( $t \leq 1$ ),  $v(0, t) = 1 = w(0, t)$  et ainsi :  $\|R(t)u\|_\infty = \|u\|_\infty = \|S(t)u\|_\infty$ , même si on a :  $R(t)u_0 \neq u_0$ .

Supposons que  $u_0$  ne soit pas une fonction constante (sinon il est clair que  $u_0$  est de laplacien infini nul).

**Lemme 4.3.5.** *Pour toute fonction  $u_0$  non-constante, pour tout  $T > 0$  il existe  $n_T > 0$  (indépendant de  $u_0$ ) tel que, si  $u_0$  n'est pas constante,*

$$\max_Q (u_{n_T}) < \max_Q (u_0) \quad \forall 0 < \epsilon < \epsilon_T$$

*Démonstration.* Soit  $T > 0$ , soit  $x \in \Omega$  tel que  $u_0(x) = m_{x,t}(u_0) < \max_{\mathbb{R}^n}(u_1)$ . Alors, on a :

$$w(\cdot, t) = m_{x,t}(u_0) < M_{x,t}(u_0) \text{ sur } B(x, t),$$

d'où :

$$u_1(\cdot) < \max_{\mathbb{R}^n}(u_0) \text{ sur } B(x, T).$$

En réitérant on obtient :  $u_2(\cdot) < \max_{\mathbb{R}^n}(u_0)$  sur  $B(x, 2T)$ . Et donc, pour  $n_T$  tel que  $n_T T \geq \text{diam}(Q)$  :

$$\max(u_{n_T})_Q = \max(u_{n_T})_{B(x, n_T T)} < \max_{B(x, n_T T)}(u_0) \leq \max_Q(u_0).$$

□

**Remarque 4.3.2.** De la même façon on peut justifier que  $\min(u_{n_T})_{\Omega_\epsilon} > \min(u_0)$ . Ce qui induit une propriété de contraction stricte dans  $\Omega_\epsilon$  en norme  $L^\infty$  (et ceci pour tout  $\epsilon > 0$ ).

**Remarque 4.3.3.** Soulignons ici que le résultat précédent repose sur la notion d'ensembles atteignables. Si on appelle  $X^k = \{x/u_k(x) < \max(u_k)\}$  et si on appelle  $V_T^k = \{x/v_k(x, T) < \max(u_0)\}$  on a la relation suivante entre les deux ensembles :  $V_T^k \subset (X^k + B(0, T))$ . Ce qui implique que  $X^k \subset (X^{k-1} + B(0, T))$ , d'où :  $X^k \subset (X^0 + B(0, kT))$ . Ainsi, pour  $k$  tel que  $kT \leq \text{diam}(\Omega)$ ,  $\|u_k\|_\infty < \|u_0\|_\infty$ .

Ainsi, on obtient une propriété de type "contraction stricte", mais on ne peut pas trouver une constante  $C < 1$  tel que  $\|u_{n_t}\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \leq C\|u_0\|_\infty$  pour tout  $u$  (ce qui aurait permis, en utilisant le théorème de point fixe de Banach de conclure à la convergence de l'algorithme vers un point fixe). En effet, il suffit de regarder des fonctions  $u$  comme précédemment, mais qui ont comme valeur au bord  $2 - \epsilon$ . Le fait que la transformation borne  $u$  entre son maximum et son minimum montre que l'existence du  $C$  est impossible. Mais nous avons tout de même le résultat suivant :

**Lemme 4.3.6.** Soit  $n_t$  défini dans le lemme précédent, alors :

$$\max(F^{n_t}(t)u_0) \leq \frac{(2^{n_t} - 1) \max(u_0) + \min(u_0)}{2^{n_t}}$$

et

$$\min(F^{n_t}(t)u_0) \geq \frac{(2^{n_t} - 1) \min(u_0) + \max(u_0)}{2^{n_t}}.$$

*Démonstration.* La preuve se fait par récurrence. Soit  $x \in Q$  tel que  $u_0$  atteint son minimum en  $x$ . Alors, sur  $\mathcal{B}(t, x)$ , on a  $w_0(y) = m_{y,t}(u_0)$  et  $v_0(y) \leq \max(u_0)$  d'où  $u_1(y, t) \leq \frac{\max_Q(u_0) + \min_Q(u_0)}{2}$ .

Montrons maintenant que :

$$u_2(z, t) \leq \frac{\max_Q(u_0) + \frac{\max_Q(u_0) + \min_Q(u_0)}{2}}{2} = \frac{3 \max_Q(u) + \min_Q(u)}{4} \text{ pour } z \in B(x, 2t).$$

Soit  $z \in B(x, 2t)$ . Il existe  $y \in B(x, t)$  tel que  $|y - x| \leq t$ . Or :

$$u_1(y) \leq \frac{\max_Q(u_0) + \min_Q(u_0)}{2}$$

d'où :

$$w_1(z) \leq \frac{\max_Q(u_0) + \min_Q(u_0)}{2}.$$

On a de plus  $v_1(z) \leq \max(u_0)$  d'où le résultat sur  $u_2$ . Ainsi, par récurrence, on a le résultat annoncé. □

*Preuve du théorème 4.3.2.* Dans la suite, fixons  $n_T$  comme défini dans le lemme 4.3.5 Nous allons maintenant étudier la suite  $(u_{k.n_T})_k$  et montrer la convergence de

cette suite vers une constante (ce qui entraînera la convergence de l'intégralité de la suite.) Soit :

$$\begin{aligned} M_k &= \max_{x \in Q} (u_{k.n_T}(x)) \\ m_k &= \min_{x \in Q} (u_{k.n_T}(x)) \end{aligned}$$

Nous avons déjà montré que les suites  $M_k$  et  $m_k$  sont respectivement décroissantes et croissantes et bornées respectivement par  $m_0$  et  $M_0$  (et même  $M_k \geq m_k$ ).

Ce qui implique la convergence de  $M_k$  et  $m_k$  vers  $M$  et  $m$  qui vérifient  $M \geq m$ . De plus, le lemme précédent donne que :

$$M_{k+1} \leq \frac{(2^{n_t} - 1)M_k + m_k}{2^{n_t}}$$

et

$$m_{k+1} \geq \frac{(2^{n_t} - 1)m_k + M_k}{2^{n_t}}$$

Nous avons donc que les limites  $M$  et  $m$  vérifient :

$$\begin{aligned} M &\leq \frac{(2^{n_t} - 1)M + m}{2^{n_t}} \\ M &\leq m \end{aligned}$$

D'où  $M = m$ .

Ainsi, les fonctions  $u_{k.n_T}$  convergent vers une fonction constante,  $\bar{u}^T$ , dans  $L^\infty$ . Ceci implique donc que, quel que soit  $\epsilon > 0$ , il existe  $k > 0$  tel que :

$$\bar{u}^T - \epsilon \leq \min_Q u_{k.n_T} \leq \max_Q u_{k.n_T} \leq \bar{u}^T + \epsilon.$$

Ensuite, les propriétés de contraction de l'opérateur  $F(T)$  permettent de conclure que  $u_n \rightarrow \bar{u}^T$ . En effet pour tout  $n \geq k.n_T$ , on a :

$$c - \epsilon \leq \min_Q u_{k.n_T} \leq \min_Q u_n \leq \max_Q u_n \leq \max_Q u_{k.n_T} \leq c + \epsilon.$$

Il est clair que la fonction constante est à Laplacien infini nul. Ainsi, pour chaque  $T$ ,  $F(T)^n(u_0) \rightarrow u^T$ .  $\square$

### 4.3.3 Résultats sur les $u^T$

On peut se poser plusieurs questions sur  $\bar{u}^T$  :

- (i) Quel est la dépendance en  $T$  de  $\bar{u}^T$  ?
- (ii) Que se passe-t-il lorsque  $T \rightarrow 0$  ?
- (iii) Existe-t-il des fonctions périodiques et de laplacien infini nul non constante ?
- (iv) Que se passe-t-il lorsqu'on se place non pas dans un milieu périodique, mais dans un ouvert borné  $\Omega$  avec une donnée au bord  $g$  pour les équations d'évolutions ?

**Lemme 4.3.7.** *Soit  $u_0$  une fonction  $K$  – Lipschitz, alors la fonction :*

$$\begin{aligned} &]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ &T \rightarrow u^T \end{aligned} \quad (4.18)$$

*est continue.*



*Démonstration.* La démonstration de ce résultat se base sur des arguments directs.

Cela repose sur le fait, que toutes les fonctions  $u_n$  donnés par l'algorithme sont  $K$ -Lipschitz. En effet, étant donné que  $R(T)u_0(x) = \min_{B(x,T)}(u_0(z))$ , il y a conservation du caractère Lipschitz. Il en est de même pour l'application  $S(T)$ , et donc pour  $F(T)$ .

D'autre part, pour tout  $T > 0$  et  $\delta > 0$ . Si  $t \leq \frac{\delta}{K}$  alors  $\|F(T)u_0 - F(T-t)u_0\|_\infty \leq \delta$ .  $\square$

On peut alors se demander si on peut calculer  $u^T$  a priori et si  $\lim_{T \rightarrow 0}(u^T)$  existe. (On a facilement qu'il existe une sous suite de  $u^T$  qui converge car ce sont des fonctions constantes et bornées). De plus, si la limite existe, comme limite de fonction constante elle est constante

Pour répondre à la dernière question on énonce le Lemme suivant :

$$-\Delta_\infty u = 0 \text{ sur } Q \quad (4.19)$$

**Lemme 4.3.8** (Les fonctions à laplacien infini nul et périodiques sont les fonctions constantes). *Les solutions  $Q$ -périodique du problème :*

$$-\Delta_\infty u = 0. \quad (4.20)$$

sont les fonctions constantes.

*Démonstration.* En effet, la caractérisation des fonctions à laplacien infini nul dans [ACJ04] dit que la fonction  $g_x(r) = \max_{B(x,r)} u(z)$  est convexe pour tout  $x$ . Ceci implique que la fonction  $u$  est constante. En effet, soit  $x_0$  un point de maximum de  $u$  sur  $Q$  et soit  $y_0$  un point de minimum. Alors pour  $r$  suffisamment grand ( $r > |x_0 - y_0|$ ) on a  $g$  constante. Or, la seule fonction croissante et constante à l'infini est la fonction constante. On a donc que  $g_{y_0}(r) = u(x_0)$  pour tout  $r > 0$ . ce qui implique, par la continuité de  $u$  que  $u(y_0) = u(x_0)$ . Donc  $u$  est une fonction constante.  $\square$

On peut alors se dire que si on travaille dans un ouvert borné, et que l'on donne des conditions aux bords aux équations d'évolutions, et qu'on arrive de nouveau à construire des points fixe à notre algorithme et si ces points fixes convergent vers une fonction  $u$ , alors cette fonction est à laplacien infini nul, en effet, formellement, dans ce cas on trouve, en utilisant (4.8) et le fait qu'on construit  $u$  comme étant la limite de notre algorithme :

$$\frac{u + u}{2} = u + \Delta_\infty u.$$

Soit,  $\Delta_\infty u = 0$ .

## 4.4 Problème stationnaire avec données au bord

Considérons maintenant le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta_\infty u = 0 & \text{sur } \mathcal{B}_R \\ u = g & \text{sur } \partial\mathcal{B}_R \end{cases} \quad (4.21)$$

où  $g$  va être une fonction Lipschitz sur  $\mathcal{B}_R$ . Pour adapter le travail précédent, on va considérer les équations eikonales avec des données au bord suivantes :

$$\begin{cases} v_t + |Dv| = 0 & x \in \mathbb{R}^n \ (t > 0) \\ v(\cdot, 0) = u(\cdot, 0) & x \in \mathcal{B}_R \ (t = 0) \\ v(x, t) = g(x) & x \in \partial\mathcal{B}_R \ t > 0 \end{cases} \quad (\tilde{R})$$

et

$$\begin{cases} w_t - |Dw| = 0 & x \in \mathbb{R}^n \ (t > 0) \\ w(\cdot, t) = u(\cdot, t) & x \in \mathcal{B}_R \ (t = 0) \\ w(x, \cdot) = g(x) & x \in \partial\mathcal{B}_R \ t > 0 \end{cases} \quad (\tilde{S})$$

Il est connu que ces équations n'admettent pas nécessairement des solutions de viscosité continues. On s'intéresse donc à l'existence et l'unicité de solutions de viscosités discontinues. Selon [Bla01], on a que si  $(u_0^*)_* = (u_0)_*$ , alors  $\tilde{R}$  admet une unique solution s.c.i (et toutes les solutions de viscosités ont la même enveloppe s.c.i). Avec la condition inverse  $((u_0^*)^* = u_0^*)$  on a un résultat similaire pour  $\tilde{S}$ . Ceci prouve clairement qu'on ne peut pas espérer l'unicité de solution pour  $(\tilde{R})$  et  $(\tilde{S})$

Ceci dit, les travaux d'Alain-Philippe Blanc [Bla01] nous permettent de caractériser les solutions de la manière suivante, considérons les fonctions valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \max \left( \max_{\{|y| \leq 1\} \cap \Omega} u_{0*}(x + ty); \max_{\{|y| \leq 1\} \cap \partial\Omega} g(x + ty) \right) \\ v(x, t) &= \min \left( \min_{\{|y| \leq 1\} \cap \Omega} u_0^*(x + ty); \min_{\{|y| \leq 1\} \cap \partial\Omega} g(x + ty) \right) \end{aligned}$$

$v$  est solution de  $(\tilde{R})$  et  $w$  est une solution de  $(\tilde{S})$ . De plus, toute solution de  $\tilde{R}$  admet une enveloppe sci égale à  $v$ , et toute solution de  $\tilde{S}$  admet une enveloppe scs égale à  $w$ .

On peut alors définir, pour l'instant de façon simplement formelle, des semi-groupes comme on l'avait fait précédemment.

$$\tilde{R}(t) : u \rightarrow \tilde{R}(t)u = v(x, t) = \min \left( \min_{\{|y| \leq 1\} \cap \Omega} u^*(x + ty); \min_{\{|y| \leq 1\} \cap \partial\Omega} g(x + ty) \right)$$

et :

$$\tilde{S}(t) : u \rightarrow \tilde{S}(t)u = w(x, t) = \max \left( \max_{\{|y| \leq 1\} \cap \Omega} u_*(x + ty); \max_{\{|y| \leq 1\} \cap \partial\Omega} g(x + ty) \right).$$

Je n'indique pas pour l'instant dans quels espaces ces opérateurs sont définis (cela sera précisé plus tard). Il faut simplement remarquer que, comme précédemment,  $\tilde{R}(t)u$  est une fonction ne dépendant que de l'espace ( $t$  est fixé).

Pour  $u_0$  Lipschitz et  $T > 0$  considérons la suite : (pour  $n \geq 1$ ) :

**Définition 4.4.1.**

$$\begin{aligned} v_n(x, T) &= \tilde{R}(T)(u_n) \\ w_n(x, T) &= \tilde{S}(T)(u_n) \\ u_{n+1}(x) &= \frac{\tilde{R}(T)(u_n) + \tilde{S}(T)(u_n)}{2} =: \tilde{F}(T)(u_n) \end{aligned}$$

On veut établir le lien entre la limite d'un tel algorithme (quand elle existe) et la solution du problème (4.21).

Tout d'abord, on établit que :

**Lemme 4.4.1** (Régularité par rapport aux résultats). *Soit  $u$  Lipschitz et soit  $\tilde{u}(\cdot) = u(\cdot) + \delta(\cdot)$  avec  $\delta$  une petite perturbation régulière. Soit  $\tilde{v} = \tilde{R}(T)(\tilde{u})$  et  $\tilde{w} = \tilde{S}(T)(\tilde{u})$  et  $v = \tilde{R}(T)(u)$  et  $w = \tilde{S}(T)(u)$ . Alors,  $\|v - \tilde{v}\|_\infty \leq \|\delta\|_\infty$  et  $\|w - \tilde{w}\|_\infty \leq \|\delta\|_\infty$*

*Démonstration.* Les arguments sont directs et se basent sur les définitions de  $\tilde{R}$  et  $\tilde{S}$   $\square$

### 4.4.1 Démonstration de la convergence

Dans cette partie nous allons montrer les résultats suivants : Pour tout  $T > 0$  et pour  $u_0$  Lipschitz.

1. La suite de fonctions  $F(T)^n u_0$  converge vers une fonction  $u^T$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.
2.  $u^T$  converge uniformément vers une fonction  $\bar{u}$  lorsque  $T$  tend vers 0.
3.  $\bar{u}$  est solution de viscosité de (4.21)

#### Existence de la limite $u^T$

Rappelons que nous plaçons dans le cas où le domaine est une boule. Signalons dès à présent que cette hypothèse est importante dans notre étude. En effet, les solutions de  $\tilde{R}$  et  $\tilde{S}$  sont discontinues est nous avons besoin de localiser ces discontinuités. Cette localisation est plus compliqué pour des domaines quelconques.

**Définition 4.4.2.** Soit  $V_T$  l'ensemble de fonctions suivant :

$$V_T = \{v : \mathcal{B}_R \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } v|_{B(r-kT) \setminus B(r-(k+1)T)} \in C(B(r-kT) \setminus B(r-(k+1)T)), k \in \mathbb{N}\} \quad (4.22)$$

Ainsi,  $V_T$  est l'ensemble des fonctions continues sur les couronnes de taille  $T$ . Nous allons noter le temps de la démonstration :

$$\mathcal{C}_{k,T} = B(r-kT) \setminus B(r-(k+1)T) \quad \text{pour } k \geq 1. \quad (4.23)$$

**Lemme 4.4.2.** Soit  $T$  positif. Soit  $K > 0$ , soit  $u_0 \in V_T$  telle que pour tout  $k \geq 0$ ,  $u_0|_{\mathcal{C}_{k,T}}$  est  $K$ -lipschitz .

Soit  $u_n, v_n$  et  $w_n$  définis par :

$$\begin{cases} v_n = \tilde{R}(T)u_n \\ w_n = \tilde{S}(T)u_n \\ u_{n+1} = \tilde{F}(T)u_n = \frac{\tilde{R}(T)u_n + \tilde{S}(T)u_n}{2} \end{cases}$$

On a alors que  $u_n, v_n$  et  $w_n$  sont dans  $V_T$ . De plus, pour tout  $k \geq 0$ ,  $u_n|_{\mathcal{C}_{k,T}}$  est  $K$ -lipschitz.

*Démonstration.* On peut montrer ce résultat par récurrence. Supposons que  $u_n$  soit un element de  $V_T$ . Soit  $x \in \Omega$ . Alors il existe  $k$  tel que  $x \in \mathring{\mathcal{C}}_{k,T}$ . Supposons que  $x$  ne soit pas sur le bord de cet ensemble.

Or, nous savons que :

$$v_n = \min \left( \min_{B(x,T) \cap \mathcal{C}_k} (u_n(z)); \min_{B(x,T) \cap \mathcal{C}_{k-1}} (u_n(z)); \min_{B(x,T) \cap \mathcal{C}_{k+1}} (u_n(z)) \right)$$

De plus, on a que tous les ensembles de minimisations sont de taille non nulles et évoluent de manière "continues" par rapport à  $x$ . Ainsi, la fonction  $v_n$  prend le minimum de trois fonctions continues sur des ensembles qui bougent de façon continue, donc la fonction  $v_n$  est continue. On peut l'écrire de façon propre :

Soit  $\epsilon > 0$ , soit  $y \in \mathcal{C}_k$  Soit  $z_x$  et  $z_y$  les points du minimum. Il existe  $l$  tel que :  $z_x \in \mathcal{C}_l$ , alors, il existe un point  $a \in \mathcal{C}_l$  tel que :  $|a - z_x| \leq \eta$  et  $a \in \mathcal{B}(y, T)$ . Or, la fonction  $u_n$  est continue sur  $\mathcal{C}_l$  et à la constante de continuité voulue, donc :  $|u_n(z_x) - u_n(a)| \leq \epsilon$ . De même, on peut trouver  $b \in \mathcal{B}(x, T)$  tel que :  $|u_n(z_y) - u_n(b)| \leq \epsilon$ . Or, comme  $u_n(a) \geq u_n(z_y)$  et  $u_n(b) \geq u_n(z_x)$  on obtient :

$$\begin{aligned} u_n(a) - u_n(z_x) \leq \epsilon &\Rightarrow u_n(z_y) - u_n(z_x) \leq \epsilon \\ u_n(b) - u_n(z_y) \leq \epsilon &\Rightarrow u_n(z_x) - u_n(z_y) \leq \epsilon \\ \Rightarrow |u_n(z_x) - u_n(z_y)| &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

De plus, on garde le même module de continuité!

Les fonctions sont alors localement  $K$ -lipschitzienne.  $\square$

**Remarque 4.4.1.** Ce résultat permet de démontrer que les applications  $\tilde{R}(T)$ ,  $\tilde{S}(T)$  et  $\tilde{F}(T)$  envoient des fonctions de  $V_T$  dans  $V_T$

**Lemme 4.4.3.** *L'application  $\tilde{F}(T)$  est une application contractante en norme  $L^\infty$  de  $V_T$  dans  $V_T$ .*

*Démonstration.* Ce résultat vient de la définition de  $\tilde{R}(T)(u)$  (qui est une recherche de minimum) et de  $\tilde{S}(T)(u)$  (qui est une recherche de maximum).  $\square$

**Lemme 4.4.4.** *Il existe une fonction  $u \in V_T$  telle que  $\tilde{F}(T)u = u$ .*

*Démonstration.*  $\tilde{F}(T)$  est une application contractante de  $V_T$  dans  $V_T$ . On peut alors appliquer le théorème de point fixe de Schauder.  $\square$

**Remarque 4.4.2.** Nous n'avons pas montré ici l'unicité de l'existence d'un point fixe, mais cela ne sera pas nécessaire dans la suite de la preuve.

Nous pouvons maintenant montrer que la suite de fonction  $u_n$  est convergente et qu'elle converge vers un point fixe de l'algorithme.

**Lemme 4.4.5.** *Il existe une fonction  $u^T \in V_T$  telle que  $u_n \rightarrow u^T$  uniformément et  $u^T$  est un point fixe de l'algorithme.*

*Démonstration.* La preuve se base sur 4 arguments :

- (i)  $\tilde{F}(T)$  admet un point fixe (pas forcément unique).
- (ii) La suite  $u_n$  admet une sous-suite qui converge vers une fonction  $u^T$ .
- (iii)  $u^T$  est un point fixe de  $\tilde{F}(T)$ .
- (iv) La suite  $u_n$  converge vers  $u^T$ .

La preuve se divise en 4 points. Tout d'abord on montre l'existence d'au moins un point fixe à l'algorithme. Ensuite on montre qu'il y a une sous-suite  $u_n$  qui converge vers une fonction  $u^T$ . Puis on montre que  $u^T$  est point fixe de l'algorithme, et enfin on montre qu'alors toute la suite  $u_n$  converge vers  $u^T$ .

(i) Ceci est donné par le lemme 4.4.5

(ii) Comme montré dans le lemme précédent, les fonctions  $u_n$  sont équi-continues sur  $C_k$ . Donc, en appliquant le théorème d'Ascoli-Arzelà, on peut faire un procédé d'extraction diagonale et extraire une sous-suite qui converge vers une fonction  $u^T$  sur chaque  $C_k$ .

Explicitons ce procédé diagonal. Les fonctions  $u_n$  sont équi-continues sur  $C_0$ , et elles sont bornées. Ainsi, on peut appliquer le théorème d'Ascoli-Arzelà, et il existe donc une sous-suite  $u_{\varphi_0(n)}$  qui converge uniformément vers une fonction  $f_0$  dans  $C_0$ . Maintenant, les fonctions  $u_{\varphi_0(n)|_{C_1}}$  sont équi-continues et bornées, donc en appliquant à nouveau le théorème d'Ascoli-Arzelà on peut extraire une sous-suite  $u_{\varphi_1(n)}$  (de  $u_{\varphi_0(n)}$ ) qui converge vers une fonction  $f_1$  dans  $C_1$  (et toujours vers  $f_0$  dans  $C_0$ ). En répétant ce processus  $R/T$  fois. Soit  $u^T$  la fonction défini par  $u^T|_{C_k} = f_k$ .

On a donc que la sous-suite  $u_{\varphi_{\frac{R}{T}}}$  qui converge uniformément vers  $u^T$ .

(iii) Cette assertion s'obtient en utilisant exactement les mêmes arguments que dans [[LGA98], Th 3.5] (il suffit d'adapter les constantes qui apparaissent dans cette preuve).

Le principe de la démonstration est le suivant :

- Les suites  $\Delta_n^+ = \sup_x(u_n(x) - u_{n-1}(x))$  et  $\Delta_n^- = \sup_x(u_{n-1}(x) - u_n(x))$  sont décroissantes.

– Il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $n$  et pour tout  $p > 0$  :

$$\Delta_{n+p}^{\pm} \leq 2^{-p} ((2^p - p)\Delta_n^{\pm} + \delta).$$

Ceci implique que  $\Delta_n^{\pm} \rightarrow 0$ .

– Si  $u_{n_k}$  tend vers  $u^T$ , alors  $u_{n_{k+1}}$  tend lui aussi vers  $u^T$ , ce qui montre que  $u^T$  est point fixe de l'algorithme.

(iv) On veut maintenant montrer que toute la suite converge vers  $u^T$ , et pas seulement une sous-suite bien choisie. Ce résultat repose que le fait que l'application  $\tilde{F}$  est contractante. On a donc que :

$$\|u_{n+1} - u^T\|_{\infty} = \|\tilde{F}(T)u_n - u^T\|_{\infty} = \|\tilde{F}(T)u_n - \tilde{F}(T)u^T\|_{\infty} \leq \|u_n - u^T\|_{\infty}. \quad (4.24)$$

Donc, la suite  $\Delta_n = \|u_n - u^T\|_{\infty}$  est décroissante. Or, il y a une sous-suite qui converge uniformément vers  $u^T$ , d'où pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N$  suffisamment grand tel que,  $\Delta_{\varphi_{\frac{R}{T}}(N)} \leq \epsilon$ , et pour tout  $n \geq \varphi_{\frac{R}{T}}(N)$ ,  $\|u_n - u^T\|_{\infty} \leq \epsilon$ .  $\square$

### Convergence des $u^T$

**Théorème 4.4.6.** *Avec les hypothèses précédentes, la suite de fonctions  $u^T$  converge uniformément vers une fonction  $\bar{u}$  solution du problème (4.21) lorsque  $T$  tend vers 0.*

*Démonstration.* Pour cette preuve, comme précédemment, on commence par montrer qu'une sous-suite converge vers la fonction  $u$ . Puis on montre que la fonction  $u$  est solution de viscosité du problème (4.4), et on utilise l'unicité de la solution pour montrer que toute les fonctions convergent.

*Étape (i) :* Les difficultés proviennent du fait que les fonctions  $u^T$  sont des fonctions continues par morceaux sur les couronnes  $C_{k,T}$ , donc, principalement, elles ne sont pas continues sur le même support. On ne peut donc pas espérer appliquer les arguments basés sur le théorème d'Ascoli-Arzelà aux fonctions  $u^T$ . Notre but va donc de créer des fonctions  $\tilde{u}^T$  qui sont continues et même équi-continues et qui sont proches de  $u^T$  dans un sens qui sera défini. On appliquera alors le théorème d'Ascoli-Arzelà sur la famille  $\tilde{u}^T$  et on obtiendra ainsi la fonction  $u$  recherchée.

Pour cela, on va construire la fonction  $\tilde{u}^T$  de la façon suivante : Soit  $x \in \Omega$ , alors il existe  $k$  tel que  $x \in C_{k,T}$ , alors on pose  $\tilde{u}^T(x) = d(x, C_{k,T})u^T(\frac{x}{|x|}(R - kT)) + d(x, C_{k+1,T})u^T(\frac{x}{|x|}(R - (k+1)T))$ .

Cette fonction est elle aussi lipschitzienne. Cela provient du fait que les sauts sont de tailles  $CT$  avec  $C > 0$  indépendant de  $T$  et de la couronne  $k$  dans laquelle on se trouve.

Ainsi, soit la "pente" d'une droite est :

$$\begin{aligned} |u^T(\frac{x}{|x|}(R - (k+1)T)) - u^T(\frac{x}{|x|}(R - kT))| \\ \leq |\lim_{l \rightarrow k+1} (u^T(\frac{x}{|x|}(R - lT)) - u^T(\frac{x}{|x|}(R - kT)))| + CT \\ \leq K|R - (k+1)T - R - kT| + CT \\ \leq (K + C)T. \end{aligned}$$

Les pentes des droites étant toutes bornées par  $C + K$  on peut en déduire le caractère Lipschitz. Donc une sous-suite converge vers  $u$ . Et, comme  $\|u^T - \tilde{u}^T\|_{\infty} \leq CT$  on a le résultat désiré.  $\square$

**Remarque 4.4.3.** On voit apparaître ici la principale différence entre cette démonstration et celle de A. Oberman avec son algorithme [Obe05]. En effet, il se contente d'interpoler une fonction sur une grille, ce qui fait qu'il peut prendre des fonctions continues. Ici, on travaille avec des fonctions définies totalement, et il se trouve qu'elles ne sont malheureusement pas continues. Bien qu'elles soient proches de fonctions continues et Lipschitz.

*Étape (ii) :* Nous allons maintenant montrer que la fonction  $u$  est solution du problème 4.21. Nous allons tout d'abord présenter une preuve adaptée de l'article de [BEJ08], cette démonstration utilisera simplement les formules de représentations des solutions de  $\tilde{R}$  et  $\tilde{S}$ .

Soit  $x \in \mathring{B}_R$ , nous savons que pour  $T$  suffisamment petit,  $\mathcal{B}(x, T) \in B_R$ , donc la fonction  $u^T$  vérifie (dans un voisinage de  $x$ ) :

$$u^T = \frac{1}{2} \left( \max_{|y| \leq 1} (u^T(x + Ty)) + \min_{|z| \leq 1} (u^T(x + Tz)) \right) \quad (4.25)$$

*Démonstration.* Posons

$$\mathcal{H}(\epsilon, x, p, M, w) = \langle w, p \rangle + \frac{\epsilon}{2} \langle w, Mw \rangle \quad (4.26)$$

Et soit :

$$H(T, x, p, M) = \max_{|w| \leq 1} \mathcal{H}(T, x, p, M, w) \quad (4.27)$$

Soit  $w_T \in \operatorname{argmax} \mathcal{H}(T, x, p, M, w)$ , alors :

$$D_p H = w_T, \quad D_T H = \frac{1}{2} \langle w_T, M w_T \rangle.$$

Soit  $\varphi$  une fonction régulière telle que  $u - \varphi$  a un maximum strict en  $x_0 \in \Omega$ . Alors,  $u^T - \varphi$  admet un maximum en  $x_T$ . On obtient alors que :

$$\varphi(x_T) \leq \frac{1}{2} \left( \max_{|y| \leq 1} (\varphi(x_T + Ty)) + \min_{|z| \leq 1} (\varphi(x_T + Tz)) \right) \quad (4.28)$$

Or, en utilisant la formule de Taylor, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \max_y (T \langle y, D\varphi \rangle + \frac{T^2}{2} \langle y, D^2\varphi y \rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2} \min_z (-T \langle y, D\varphi \rangle + \frac{T^2}{2} \langle y, D^2\varphi y \rangle) + o(T^2) \\ &\leq \frac{1}{2} (TH(T, x_T, D\varphi, D^2\varphi) - TH(-T, x_T, D\varphi, D^2\varphi)) + o(T^2) \\ &\leq T^2 \frac{H(T, x_T, D\varphi, D^2\varphi) - H(-T, x_T, D\varphi, D^2\varphi)}{2T} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2T} \int_{-T}^T D_T H(s, x_T, D\varphi(x_T), D^2\varphi(x_T)) ds \\ &= \frac{1}{4T} \int_{-T}^T \langle w_T^s, D^2\varphi w_T^s \rangle ds \geq o(1) \end{aligned}$$

En faisant tendre  $T$  vers 0 on obtient donc que :

$$\langle \hat{w}, D^2\varphi(x_0)\hat{w} \rangle \geq 0$$

Où :  $\hat{w} \in \operatorname{argmax}\{\langle w, D\varphi(x_0)/|w| \leq 1 \rangle\}$

Soit,  $w = \frac{D\varphi}{|D\varphi|}$ , d'où :  $-\Delta_\infty \varphi(x_0) \leq 0$

Nous savons de plus que les sauts des fonctions sont plus petits que  $CT$ , donc, pour  $x \in \partial B_R$ ,  $|g(x) - u^T(x)| \leq CT$ . Donc  $\bar{u}|_{\partial B_R} = g$ .  $\square$

#### 4.4.2 Une nouvelle preuve

Nous allons ici présenter une autre preuve, qui découle directement de l'idée de l'équation de Aronsson, qui utilisera cette fois ci directement le fait qu'on calcule les solutions exactes de  $\tilde{R}$  et  $\tilde{S}$ , et qui n'utilisera pas les formules de représentations de ces solutions.

Soit  $\varphi$  une fonction  $C^\infty$ . Soit  $x_0$  un point de maximum de  $u - \varphi$ . Alors, il existe une suite  $x_T \rightarrow x_0$  telle que  $x_T$  soit un maximum de  $u^T - \varphi$ . Donc, on a :

$$u^T(x) - \varphi(x) \leq u^T(x_T) - \varphi(x_T). \quad (4.29)$$

Or,  $u^T$  est un point fixe de  $\tilde{F}(T)$ , donc :

$$\begin{aligned} u^T(x_T) &= \frac{1}{2}(R(T)(u) + S(T)(u)) \\ &\leq u^T(x_T) - \varphi(x_T) + \frac{1}{2}(R(T)(\varphi) + S(T)(\varphi)) \end{aligned}$$

On a donc que :

$$\varphi(x_T) \leq \frac{1}{2}(R(T)(\varphi) + S(T)(\varphi)) = \varphi(x_T) + T^2 \Delta_\infty \varphi(x_T) + o(T^2).$$

D'où :

$$-\Delta_\infty \varphi(x_T) + o(1) \leq 0 \quad (4.30)$$

En faisant tendre  $T$  vers 0 on obtient le résultat voulu.

On a la même chose en regardant des minimums.

Nous remarquons que cette démonstration de convergence n'utilise que les résultats sur les équations de Aronsson, on peut alors se demander ce qui se passe lorsque l'on change les équations d'évolution. C'est à dire, que se passe-t-il si lors de l'algorithme on résout plutôt le système :

$$\begin{cases} v_t + H(Dv) = 0 & (t > 0) \\ w_t - H(Dw) = 0 & (t > 0) \\ v = w = u & (t = 0), \end{cases} \quad (4.31)$$

avec un Hamiltonien  $H$  plus général. C'est ce que l'on va étudier dans la partie suivante.

## 4.5 Cas convexe

### 4.5.1 Démonstration de la convergence

Dans cette partie nous allons étudier les problèmes suivants :

$$\begin{cases} v_t + H(Dv) = 0 & (t > 0) \\ v(\cdot, 0) = u(\cdot) & (t = 0) \\ v(x, \cdot) = g(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (\tilde{R})$$

et

$$\begin{cases} w_t - H(Dw) = 0 & (t > 0) \\ w(\cdot, 0) = u(\cdot) & (t = 0) \\ w(x, \cdot) = g(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (\tilde{S})$$

dans le but de calculer une solution au problème :

$$\begin{cases} A_H[u] = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.32)$$

où  $A_H[u]$  est l'opérateur d'Aronsson. Il est égale à :

$$A_H[u] = H_{x_i} H_{p_j} + H_{p_i} H_{p_j} u_{x_i x_j}.$$

Comme précédemment, on va résoudre les deux problèmes d'évolutions, puis faire la moyenne et recommencer et montrer que l'on converge vers un point fixe du problème.

Il va y avoir quelques modifications à la preuve précédente. En effet, cette fois-ci on va tout d'abord prouver que l'on peut bien définir les fonctions  $v_n$  et  $w_n$  de façon unique (et trouver des conditions sur  $H$  pour avoir ce résultat). Ensuite, on va encore utiliser les formules de représentations des solutions des équations d'évolutions pour obtenir la convergence. Cependant, cette fois-ci, la formule sera :

$$v_n(x, T) = \min \left( \min_{z \in \Omega} ((u_{n-1})_*(z) + H^*(\frac{z-x}{t})); \min_{z \in \partial\Omega} (g(z) + H^*(\frac{z-x}{t})) \right),$$

où  $H^*$  est la transformée de Legendre de l'opérateur, c'est à dire que :

$$H^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (p \cdot x - H(x)). \quad (4.33)$$

et :

$$w_n(x, T) = \max \left( \max_{z \in \Omega} ((u_{n-1})_*(z) - H^*(\frac{z-x}{t})); \max_{z \in \partial\Omega} (g(z) - H^*(\frac{z-x}{t})) \right),$$

Maintenant le minimum sur tout l'espace et non sur simplement une petite boule, ce qui ajoutera des propriétés de continuité des solutions (sauf sur le bord de l'ensemble). En outre, le contrôle de la fonction  $H^*(p)$  permettra à nouveau de chercher le minimum dans une boule dont le rayon sera fixé seulement par la fonction  $u_0$  de départ, et nous aurons toujours un contrôle sur la constante de Lipschitz des solutions.

La démonstration de la convergence de l'algorithme se déroulera selon les étapes suivantes :

1. Les fonctions  $v_n$  et  $w_n$  sont bien définis (de manière unique).
2. La suite de fonction  $F(T)^n u_0$  converge vers une fonction  $u^T$ .
3.  $u^T$  converge uniformément vers une fonction  $u$ .
4.  $u$  est solution de viscosité de (4.21).

Nous allons avoir les hypothèses suivantes :

(H1) Le domaine  $\Omega$  est Lipschitz.

(H2) La fonction  $g$  définie sur  $\partial\Omega$  est Lipschitz.

(H3) La fonction  $p \rightarrow H(p)$  est une fonction convexe. De plus,  $\frac{H(p)}{|p|} \rightarrow \infty$  quand  $|p| \rightarrow \infty$ .

(H3) La croissance de  $H$  est bornée, c'est à dire que :

$$\frac{dH(p)}{dp} \leq C \cdot |p|^n.$$



- (H4)  $|\frac{\partial H}{\partial x}| \leq C(1 + |p|)$ .  
 (H5) La fonction distance au bord du domaine, notée  $d(\cdot)$ , est  $C^{1,1}$  dans un voisinage de  $\partial\Omega$ .  
 (H6) La fonction  $\lambda \rightarrow H(x, p - \lambda n(x))$  est croissante dès que  $\lambda > A(1 + |p|)$  pour tout  $(x, p) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^N$ , avec  $n(x) = -Dd(x)$  le vecteur normal extérieur à  $\partial\Omega$

### Unicité des enveloppes s.c.i des solutions des équations d'évolutions

Nous voulons démontrer le résultat suivant : Si  $u$  et  $v$  sont respectivement sous-solution et sur-solution du problème : Étant donné  $u_0$  et  $g$  et  $\Omega$ , trouver une fonction telle que :

$$\begin{cases} v_t + H(Dv) = 0 & (t > 0) \\ v(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & (t = 0) \\ v(x, \cdot) = g(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.34)$$

alors

$$u_* \leq v_* \text{ dans } \Omega \times ]0, T[. \quad (4.35)$$

Pour cela, nous allons reprendre une démonstration donné par Alain-Philippe Blanc.

Cette démonstration repose sur le principe de solution de Barron-Jensen.

**Définition 4.5.1.** Une fonction  $u$  bornée est une solution de Barron Jensen de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, t, Du) = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \quad (4.36)$$

si elle satisfait la condition suivante :

$\forall \phi \in C^1(\Omega \times ]0, T[)$ , en tout point de minimum  $(x_0, t_0) \in \Omega \times ]0, T[$  de  $u_* - \phi$ , on a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x_0, t_0) + H(x_0, t_0, D\phi)(x_0, t_0) = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[,$$

Ces solutions sont aussi appelés solutions bilatérales.

La principale différence entre ces solutions et les solutions de viscosités classiques est la disparition de la condition de sous-solution au profit d'un renforcement de la condition de sur-solution.

Nous allons alors démontrer le théorème suivant :

**Théorème 4.5.1.** *Supposons que les hypothèses (H1) à (H6) soient vérifiées. Soit  $u$  une solution de Barron-Jensen du problème (4.36) telle que :*

$$\begin{aligned} \liminf_{(y,s) \rightarrow (x,t)} u(y, s) &\leq g_*(x, t) \quad (x, t) \in \partial\Omega \times ]0, T[, \\ \liminf_{(y,s) \rightarrow (x,0)} u(y, s) &\leq \min\{g_*(x, 0), (u_0)_*(x)\} \quad (x, t) \in \partial\Omega \\ \liminf_{(y,s) \rightarrow (x,0)} u(y, s) &\leq (u_0)_*(x, t) \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

*Soit  $v$  une sur-solution de (4.34). Alors :*

$$u_* \leq v_*$$

Nous pouvons alors avoir en corrolaire que :

**Corollaire 4.5.2.** *Soit  $u$  une sous-solution de (4.34) et soit  $v$  une sur-solution de (4.34), alors :*

$$u_* \leq v_*$$

La démonstration de ce lemme reposera sur l'introduction de la fonction suivante :

$$u^{\alpha,\beta}(x,t) = \inf_{y,s} \left\{ u_*(y,s) + e^{-Kt} \phi_\alpha(x,y) + C(d(x) - d(y)) + \frac{|t-s|^2}{\beta} \right\} \quad (4.37)$$

Avec :

$$\phi_\alpha(x,y) = \frac{|x-y|^4}{\alpha} + L \frac{|x-y|^3}{\alpha} (d(x) - d(y)) + M \frac{|d(x) - d(y)|^4}{\alpha} \quad (4.38)$$

et  $d$  la fonction distance à  $\partial\Omega$ . Nous avons pour cette fonction les propriétés suivantes :

**Lemme 4.5.3.** *Il existe des constantes  $C, K, L, M$  telles que, pour  $\alpha$  suffisamment petit :*

1. Les fonctions  $u^{\alpha,\beta}$  sont Lipschitz dans  $\Omega \times ]0, T[$ .
2. Les fonctions  $u^{\alpha,\beta}$  sont sous-solution de viscosité de :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + H(x, Dw) - F \sqrt[4]{\alpha} = 0 \quad (4.39)$$

où  $F$  est une constante indépendante de  $\alpha$  et  $\beta$ .

3.  $u^{\alpha,\beta} \leq g_*$  sur  $\partial\Omega \times [0, T]$  et  $u^{\alpha,\beta} \leq (u_0)_*$  sur  $\bar{\Omega} \times \{0\}$ .

Pour démontrer ce lemme, on va passer par l'étude de la fonction suivante :

$$u^{\alpha,\beta,\gamma}(x,t) = \inf_{y,s} \left\{ u_*(y,s) + e^{-Kt} \phi_\alpha(x,y) + C(d(x) - d(y)) + \frac{|t-s|^2}{\beta} + \frac{\gamma}{s} + \frac{\gamma}{d(y)} \right\} \quad (4.40)$$

Le but va être d'obtenir des résultats similaires pour  $u^{\alpha,\beta,\gamma}$  (les résultats sont écrits dans le lemme suivant), puis de faire tendre  $\gamma$  vers zéro pour obtenir les résultats voulus pour  $u^{\alpha,\beta}$ .

**Lemme 4.5.4.** 1. Les fonctions  $u^{\alpha,\beta,\gamma}$  sont Lipschitz dans  $\Omega \times ]0, T[$ .

2. Les fonctions  $u^{\alpha,\beta,\gamma}$  sont sous-solution de viscosité de :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + H(Dw) - F \sqrt{E_\gamma(x,t)} \sqrt[4]{\alpha} - 4C \frac{\gamma}{d(x)^2} = 0 \quad (4.41)$$

$$\text{avec } E_\gamma(x,t) = \sqrt{2\|u\|_\infty + 2\bar{C}\|d\|_\infty + \frac{\gamma}{t} + \frac{\gamma}{d(x)}}$$

Pour montrer cela, nous allons avoir besoin de deux lemmes :

**Lemme 4.5.5.** *Pour  $L$  suffisamment grand, et pour  $M \gg L$  et pour tout  $(x,t) \in \Omega \times ]0, T]$ , nous avons les propriétés suivantes :*

1.  $u^{\alpha,\beta,\gamma}(x,t) \leq u_*(x,t) + \frac{\gamma}{d(x)} + \frac{\gamma}{t}$ .
2. Si  $(y_\gamma, s_\gamma)$  est un point tel que :

$$\begin{aligned} u^{\alpha,\beta,\gamma}(x,t) &= u_*(y_\gamma, s_\gamma) + e^{-Kt} \phi_\alpha(x, y_\gamma) + C(d(x) - d(y_\gamma)) \\ &\quad + \frac{|t - s_\gamma|^2}{\beta} + \frac{\gamma}{s_\gamma} + \frac{\gamma}{d(y_\gamma)} \end{aligned}$$

alors nous avons :

$$|x - y_\gamma| \leq e^{\frac{KT}{4}} \sqrt{E_\gamma(x,t)} \sqrt[4]{\alpha}$$

et

$$|t - s_\gamma| \leq E_\gamma(x,t) \sqrt{\beta}.$$

3. Si  $x$  est dans un voisinage du bord, si on écrit :  $Du^{\alpha,\beta,\gamma}(x,t) = p_\gamma - \lambda_\gamma n(x)$  avec  $n(x) = -Dd(x)$  est la normale au bord  $\partial\Omega$ , et si on a en plus que :  $d(x) \geq d(y_\gamma)$  alors :

$$\lambda_\gamma \geq C(1 + |p_\gamma|).$$

4. Il existe une constante  $\bar{K}$  ne dépendant que de  $\alpha$  et de  $K$  telle que :

$$|Du^{\alpha,\beta,\gamma}(x,t)| |x - y_\gamma| \leq \bar{K}(|x - y_\gamma| + e^{-Kt} \phi_\alpha(x, y_\gamma)).$$

Nous allons démontrer les lemmes les uns après les autres dans le sens inverse.

*Lemme 4.5.5.* La démonstration de ce lemme ne repose que sur des calculs.  $\square$

*Lemme 4.5.4. Preuve du point 1 :* Nous avons que :

$$u^{\alpha,\beta,\gamma}(x,t) - u^{\alpha,\beta,\gamma}(z,t) \leq e^{-Kt} \sup_{y \in \bar{\Omega}} \{\phi_\alpha(x,y) - \phi_\alpha(z,y)\} + C(d(x) - d(y)).$$

Or, on se trouve sur un compact et on travail avec des fonctions Lipschitz, on trouve donc que :

$$u^{\alpha,\beta,\gamma}(x,t) - u^{\alpha,\beta,\gamma}(z,t) \leq \frac{C}{\alpha} |x - z|$$

On obtient donc que  $u^{\alpha,\beta,\gamma}$  est une fonction Lipschitz en espace (et la constante de Lipschitz ne dépend pas de  $\gamma$ ). On a de même qu'elle est Lipschitz en temps.

*Preuve du point 2 :*

Le théorème de Rademacher permet alors de dire que les fonctions  $u^{\alpha,\beta,\gamma}$  sont différentiable presque partout et que si  $(y_\gamma, s_\gamma)$  vérifie :

$$u^{\alpha,\beta,\gamma}(x,y) = u_*(y_\gamma, s_\gamma) + e^{-Kt} \phi_\alpha(x, y_\gamma) + C(d(x) - d(y_\gamma)) + \frac{|t - s_\gamma|^2}{\beta} + \frac{\gamma}{s_\gamma} + \frac{\gamma}{d(y_\gamma)}$$

alors on a :

$$Du^{\alpha,\beta,\gamma}(x,t) = e^{-Kt} D_x \phi_\alpha(x, y_\gamma) - Cn(x)$$

et

$$\frac{\partial u^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial t}(x,t) = \frac{2(t - s_\gamma)}{\beta} - K e^{-Kt} \phi_\alpha(x, y_\gamma)$$

Nous allons maintenant fixer  $(x,t)$  et chercher des résultats sur les dérivées de cette fonction par rapport à  $y_\gamma, s_\gamma$ .

Soit  $(x_0, t_0) \in \Omega \times ]0, T[$  un point où  $u^{\alpha,\beta,\gamma}$  est différentiable. Soit  $(y_\gamma, s_\gamma)$  tel que défini précédemment, alors  $(y_\gamma, s_\gamma)$  est un point de minimum de la fonction :  $u_* - \psi$  avec :

$$\psi(y, s) = -e^{-Kt_0} \phi_\alpha(x_0, y) - C(d(x_0) - d(y)) - \frac{|t_0 - s|^2}{\beta} - \frac{\gamma}{s} - \frac{\gamma}{d(y)}$$

Or,  $u$  est une solution de Barron-Jensen, d'où :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(y_\gamma, s_\gamma) + H(y_\gamma, s_\gamma, D\psi(y_\gamma, s_\gamma)) = 0. \quad (4.42)$$

Avec, comme  $n(y) = -Dd(y)$  :

$$D\psi(y_\gamma, s_\gamma) = -e^{-Kt_0} D_y \phi_\alpha(x_0, y_\gamma) - Cn(y_\gamma) - \frac{\gamma}{d(y_\gamma)^2} n(y_\gamma)$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(y_\gamma, s_\gamma) = \frac{2(t_0 - s_\gamma)}{\beta} + \frac{\gamma}{s_\gamma^2}$$

Nous allons alors avoir besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.5.6.** *Nous avons que :*

$$H(y_\gamma, s_\gamma, -e^{-Kt_0} D_y \phi_\alpha(x_0, y_\gamma) - Cn(y_\gamma)) \leq H(y_\gamma, s_\gamma, D\psi(y_\gamma, s_\gamma)) + 4C \left( \frac{\gamma}{d(x_0)^2} \right)^n.$$

Grâce à ce lemme nous obtenons, en utilisant en outre le lemme 4.5.5 et l'hypothèse (H4) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{\alpha, \beta, \gamma}}{\partial t}(x_0, t_0) + H(x_0, t_0, Du^{\alpha, \beta, \gamma}(x_0, t_0)) \\ \leq C(1 + |Du^{\alpha, \beta, \gamma}(x_0, t_0)|)|x_0 - y_\gamma| + C|\lambda_\gamma||n(x_0) - n(y_\gamma)| \\ + 4C \left( \frac{\gamma}{d(x_0)^2} \right)^n - Ke^{-Kt_0} \phi_\alpha(x_0, y_\gamma). \end{aligned}$$

Enfin, le lemme 4.5.5 donne que :

$$|\lambda_\gamma||n(x_0) - n(y_\gamma)| \leq \|Dn\|_\infty |Du^{\alpha, \beta, \gamma}||x_0 - y_\gamma|.$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial u^{\alpha, \beta, \gamma}}{\partial t}(x_0, t_0) + H(x_0, t_0, Du^{\alpha, \beta, \gamma}(x_0, t_0)) \leq B\sqrt{E_\gamma} \sqrt[4]{\alpha} + 4C \left( \frac{\gamma}{d(x_0)^2} \right)^n$$

Donc  $u^{\alpha, \beta, \gamma}$  vérifie l'équation (4.41) en  $(x_0, t_0)$ .  $u^{\alpha, \beta, \gamma}$  étant différentiable presque partout, l'équation (4.41) est vérifiée presque partout, donc dans le sens de viscosité. Donc  $u^{\alpha, \beta, \gamma}$  est une sous-solution de viscosité de notre problème, les conditions au bord étant vérifiées.  $\square$

*Lemme 4.5.6.* L'hypothèse (H3) donne que :

$$\begin{aligned} H(y_\gamma, s_\gamma, p_\gamma - \lambda_\gamma n(y_\gamma)) &\leq H\left(y_\gamma, s_\gamma, p_\gamma - \lambda_\gamma n(y_\gamma) - \frac{\gamma}{d(y_\gamma)^2} n(y_\gamma)\right) \\ &+ C \left( \frac{\gamma}{d(y_\gamma)^2} \right)^n. \end{aligned}$$

Si on a  $d(x_0) \leq d(y_\gamma)$  alors on a le résultat désiré. Supposons maintenant que :  $d(x_0) > d(y_\gamma)$

On remarque que les hypothèses (H5) et (H6) sont vérifiées dans un voisinage de  $\partial\Omega$  qui est inclut dans :

$$\Omega_\delta = \{x \in \bar{\Omega} \text{ tel que : } d(x) < \delta\}$$

pour  $\delta$  suffisamment petit. Pour simplifier les notations, on va supposer que :

$$\max_{x \in \bar{\Omega}}(d(x)) \leq 2\delta$$

en redéfinissant la fonction distance en dehors de  $\Omega_\delta$  si nécessaire.

Si  $y_\gamma \notin \Omega_\delta$  alors  $d(y_\gamma) \geq \delta$  et  $d(x_0) \leq 2\delta$  d'où :

$$\frac{1}{d(y_\gamma)} \leq \frac{1}{\delta} \leq \frac{1}{d(x_0)}.$$

Et si  $y_\gamma \in \Omega_\delta$ , alors, par le lemme 4.5.5, on a que :  $\lambda_\gamma \geq C(1 + |p_\gamma|)$  d'où, par (4.5.1) :

$$H\left(y_\gamma, s_\gamma, p_\gamma - \lambda_\gamma n(y_\gamma) - \frac{\gamma}{d(y_\gamma)^2} n(y_\gamma)\right) \geq H(y_\gamma, s_\gamma, p_\gamma - \lambda_\gamma n(y_\gamma))$$

$\square$

*Lemme 4.5.3.* Nous avons que :  $u^{\alpha,\beta,\gamma}$  tend vers  $u^{\alpha,\beta}$  quand  $\gamma$  tend vers 0. (en norme infini), ce qui implique que  $u^{\alpha,\beta}$  est Lipschitz. De plus, comme on a que :  $u^{\alpha,\beta,\gamma} \leq u^{\alpha,\beta,\gamma'}$  si  $\gamma \leq \gamma'$ , on a que :

$$\limsup u^{\alpha,\beta,\gamma}(y, s) = u^{\alpha,\beta}(x, t)$$

Ainsi, par des résultats de stabilité pour la théorie de viscosité on a que  $u^{\alpha,\beta}$  est une sous-solution de viscosité de (4.39).  $\square$

Maintenant, on va comparer  $u^{\alpha,\beta}$  à une sur-solution au problème d'évolution  $(\tilde{R})$   $v$ . Nous avons que :

$$u^{\alpha,\beta} - v_* \leq F\sqrt[4]{\alpha}T \text{ dans } \Omega \times ]0, T].$$

En faisant tendre  $\alpha$  et  $\beta$  vers 0 on obtient :

$$u_* \leq v_*$$

$\square$

*Corrolaire 4.5.2.* La démonstration repose sur la proposition suivante :

**Proposition 4.5.7.** *Supposons que  $u$  est une sous-solution scs de  $(\tilde{R})$ , alors  $u_*$  est une sur-solution de :*

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - H(Du) = 0. \quad (4.43)$$

Ceci impliquerait que  $(u^*)_*$  est presque une solution de Barron-Jensen du problème (au lieu d'avoir l'égalité pour les points de minimums, on a inférieure ou égale dans l'équation (4.42), ce qui suffit pour la démonstration), qui nous permettrait d'avoir le principe de comparaison (les autres conditions du théorème étant assuré par la notion de sous-solution de viscosité).  $\square$

*Proposition 4.5.7.* La proposition repose sur une démonstration présente dans le livre de Guy Barles. Elle va consister à approcher la fonction  $u$  par des inf-convolutions (ou assimilé) et des noyaux de régularisation pour travailler avec des fonctions  $C^1$  et ainsi pouvoir travailler directement sur les fonctions.

Nous avons précédemment montré que les fonctions  $u^{\alpha,\beta}$  sont solutions de viscosités de :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + H(Dw) - F\sqrt[4]{\alpha} = 0 \quad (4.44)$$

Soit alors  $\rho$  un noyau de convolution (c'est à dire une fonction  $C^\infty$  à support dans la boule unité et telle que :  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) dy = 1$ ). On pose :  $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \rho(\frac{x}{\epsilon})$  et :

$$u_\epsilon^{\alpha,\beta}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u^{\alpha,\beta}(y) \rho_\epsilon(x - y) dy. \quad (4.45)$$

Nous travaillons sur les  $u^{\alpha,\beta}$  car ce sont des fonctions Lipschitz, et donc continue, ce qui nous permet d'avoir plus de régularité pour les  $u_\epsilon^{\alpha,\beta}$ . On obtient principalement que :

$$\frac{\partial u_\epsilon^{\alpha,\beta}}{\partial t} + H(x, u_\epsilon^{\alpha,\beta}, Du_\epsilon^{\alpha,\beta}) \leq o(1) \quad (4.46)$$

dans l'ouvert  $\Omega_\epsilon$

Or,  $u_\epsilon^{\alpha,\beta}$  est une fonction  $C^1$ , ainsi, c'est une sur-solution de viscosité de :

$$-\frac{\partial u_\epsilon^{\alpha,\beta}}{\partial t} - H(x, u_\epsilon^{\alpha,\beta}, Du_\epsilon^{\alpha,\beta}) \geq o(1) \quad (4.47)$$

$$H(x, u_\epsilon^{\alpha,\beta}, Du_\epsilon^{\alpha,\beta}) \leq o(1) \quad (4.48)$$

On obtient alors que  $u^{\alpha,\beta}$  est une sur-solution de :

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - H(Du) + F\sqrt[\alpha]{\alpha} = 0 \quad (4.49)$$

On fait alors tendre  $\alpha$  et  $\beta$  vers 0. Et en utilisant le fait que :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\lim_{\beta \rightarrow 0} u^{\alpha,\beta}(x)) = u_*(x)$$

On obtient que :  $u_*$  est une sur-solution de viscosité de :

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - H(Du) = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T]. \quad (4.50)$$

□

### Existence de $u^T$

**Lemme 4.5.8.** *Soit  $T$  positif. Soit  $u_0$   $K$ -Lipschitz.*

*Soit  $u_n, v_n$  et  $w_n$  définis par :*

$$\begin{cases} v_n = R(T)u_n \\ w_n = S(T)u_n \\ u_{n+1} = F(T)u_n = \frac{R(T)u_n + S(T)u_n}{2} \end{cases}$$

*On a alors que  $u_n, v_n$  et  $w_n$  sont  $K$ -lipschitz (avec  $K$  dépendant de  $T$ ).*

La fonction  $v_n$  est donné par la formule suivante :

$$v_n(x, T) = \min \left( \min_{z \in \Omega} ((u_{n-1})_*(z) + H^*(\frac{z-x}{t})); \min_{z \in \partial\Omega} (g(z) + H^*(\frac{z-x}{t})) \right). \quad (4.51)$$

Or, on a clairement que  $\min_{z \in \Omega} ((u_{n-1})_*(z) + H^*(\frac{z-x}{t}))$  est une fonction Lipschitz si  $u_{n-1}$  l'est. De plus, comme on cherche un minimum, on sait que si  $H^*(\frac{z-x}{t})$  est supérieur à  $2\|g\|_\infty$  alors on obtient pas le minimum en ce point  $z$ , ainsi, on cherche le minimum non pas sur  $\Omega$ , mais dans une boule.  $H^*$  étant convexe, on peut ne regarder que dans une boule centré en  $x$ . Il se trouve alors que  $H$  est Lipschitz dans cette boule, avec une constant de Lipschitz  $K'(T)$ . On a alors que  $u_n$  est  $\max(K, K'(T))$ -Lipschitz. On peut alors procéder par itération pour prouver le caractère Lipschitz de toute les fonctions, avec une constante de Lipschitz ne dépendant que de  $u_0, g$  et  $T$ .

**Lemme 4.5.9.** *L'application  $F(T)$  est une application contractante en norme  $L^\infty$  des fonctions  $K$ -Lipschitz.*

*Démonstration.* Le caractère contractant vient du fait que l'on cherche des minima et des maxima de la fonction plus un terme pénalisant. □

**Lemme 4.5.10.** *Il existe une fonction  $u^T$  telle que  $F(T)u^T = u^T$ .*

*Démonstration.*  $F(T)$  est une application contractante de  $V_T$  dans  $V_T$ . On peut alors appliquer le théorème de point fixe de Schauder. □

Nous pouvons maintenant montrer que la suite de fonction  $u_n$  est convergente.

**Lemme 4.5.11.** *Il existe une fonction  $u^T \in V_T$  telle que  $u_n \rightarrow u^T$  uniformément et  $u^T$  est un point fixe de l'algorithme.*

*Démonstration.* La preuve se divise en 4 points. Tout d'abord on montre l'existence d'au moins un point fixe à l'algorithme. Ensuite on montre qu'il y a une sous-suite  $u_n$  qui converge vers une fonction  $u^T$ . Puis on montre que  $u^T$  est point fixe de l'algorithme, et enfin on montre qu'alors toute la suite  $u_n$  converge vers  $u^T$ .

*Existence d'un point fixe :*

On se place sur l'ensemble des fonctions  $\{v \in V_T; \|v\|_{-\infty}\}$ . L'opérateur  $F(T)$  est contractant, c'est à dire que :  $\|F(T)u - F(T)v\|_{\infty} \leq \|u - v\|_{\infty}$ . De plus,  $\|F(T)u\|_{\infty} \leq \max(\|g\|_{\infty}, \|u\|_{\infty})$ . Ainsi, par le théorème du point fixe de Schauder, il existe un point fixe à l'opérateur  $F(T)$ .

*Convergence d'une sous-suite de  $u_n$  :*

Comme montré dans le lemme précédent, les fonctions  $u_n$  sont équi-continues sur  $C_k$ . Donc, on peut faire un procédé d'extraction diagonale et extraire une sous-suite qui converge vers une fonction  $u^T$ .

Je vais maintenant expliciter ce procédé diagonal. Les fonctions  $u_n$  sont équi-continues sur  $C_0$ , et elles sont bornées. Ainsi, on peut appliquer le théorème d'Ascoli-Arzelà, et il existe donc une sous-suite  $u_{\varphi_0(n)}$  qui converge uniformément vers une fonction  $f_0$  dans  $C_0$ . Maintenant, les fonctions  $u_{\varphi_0(n)|_{C_1}}$  sont équi-continues et bornées, donc en appliquant à nouveau le théorème d'Ascoli-Arzelà on peut extraire une sous-suite  $u_{\varphi_1(n)}$  (de  $u_{\varphi_0(n)}$ ) qui converge vers une fonction  $f_1$  dans  $C_1$  (et toujours vers  $f_0$  dans  $C_0$ ). En répétant ce processus  $R/T$  fois. Soit  $u^T$  la fonction défini par  $u^T|_{C_k} = f_k$ . On a donc que la sous-suite  $u_{\varphi_{\frac{R}{T}}}$  qui converge uniformément vers  $u^T$ .

*$u^T$  est point fixe de l'algorithme :*

La démonstration de ce point est longue est fastidieuse. Il faut la réécrire, mais il faut et il suffit de reprendre la démonstration écrite dans [LGA98] (*Harmonious extension* par Le-Gruyer et Archer). L'idée de la démonstration est qu'en appliquant le même résultat que précédemment, une sous-suite de  $u_{\varphi_{\frac{R}{T}+1}}$  converge vers une fonction  $\tilde{u}^T$ . Il faut alors montrer que  $\tilde{u}^T = u^T$ . Pour montrer cela il suffit que montrer que :  $\|u_{n+1} - u_n\|_{\infty}$  tend vers 0 (on a déjà facilement que c'est une fonction décroissante).

Plusieurs pages de calculs permettent d'avoir ce résultat.

*$u_n$  converge vers  $u^T$  :*

Ce résultat repose que le fait que l'application  $F$  est contractante. On a donc que :

$$\|u_{n+1} - u^T\|_{\infty} = \|F(T)u_n - u^T\|_{\infty} = \|F(T)u_n - F(T)u^T\|_{\infty} \leq \|u_n - u^T\|_{\infty}. \quad (4.52)$$

Donc, la suite  $\Delta_n = \|u_n - u^T\|_{\infty}$  est décroissante. Or, il y a une sous-suite qui converge uniformément vers  $u^T$ , donc, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N$  suffisamment grand tel que,  $\Delta_{\varphi_{\frac{R}{T}(N)}} \leq \epsilon$ , donc, pour tout  $n \geq \varphi_{\frac{R}{T}(N)}$ ,  $\|u_n - u^T\|_{\infty} \leq \epsilon$ .  $\square$

### Convergence des $u^T$

Supposons pour l'instant que  $u^T \rightarrow u$ .

#### 4.5.2 une nouvelle preuve

Soit  $\varphi$  une fonction  $C^\infty$ . Soit  $x_0$  un point de maximum de  $u - \varphi$ . Alors, il existe une suite  $x_T \rightarrow x_0$  telle que  $x_T$  soit un maximum de  $u^T - \varphi$ . Donc, on a :

$$u^T(x) - \varphi(x) \leq u^T(x_T) - \varphi(x_T). \quad (4.53)$$

Or,  $u^T$  est un point fixe de  $F(T)$ , donc :

$$\begin{aligned} u^T(x_T) &= \frac{1}{2}(R(T)(u) + S(T)(u)) \\ &\leq u^T(x_T) - \varphi(x_T) + \frac{1}{2}(R(T)(\varphi) + S(T)(\varphi)) \end{aligned}$$

On a donc que :

$$\varphi(x_T) \leq \frac{1}{2}(R(T)(\varphi) + S(T)(\varphi)) = \varphi(x_T) + T^2 A_H[\varphi](x_T) + o(T^2).$$

D'où :

$$-A_H[\varphi](x_T) + o(1) \leq 0 \quad (4.54)$$

En faisant tendre  $T$  vers 0 on obtient le résultat voulu.

On a la même chose en regardant des minimums.

## 4.6 Méthodes numériques

Le but de cette section va être de parler des schémas numériques pour résoudre les équations  $(\tilde{R})$  et  $(\tilde{S})$ . Pour cela, étant donné  $\Delta x > 0$  et  $\Delta t > 0$ , nous allons considérer le maillage suivant :

$$\mathcal{G} = \{i\Delta x, i \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Les points seront notés  $(x_i, t_n)$  avec  $x_i = i\Delta x$  et  $t_n = n\Delta t$ . L'approximation de la solution de l'équation au point  $(x_i, t_n)$  sera notée  $v(x_i, t_n)$  ou  $v_i^n$ . On va se donner un hamiltonien numérique  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  (une approximation consistante de  $H$ ). On va alors considérer les schémas suivants :

$$\begin{cases} \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = \mathcal{H}(x_i, D^+(v^n(x_i)), D^-(v^n(x_i))) = 0 \\ v_i^0 = \tilde{u}_0(x_i) \end{cases} \quad (4.55)$$

où  $\tilde{u}_0(x_i)$  est une approximation de  $u_0$  et :

$$\begin{aligned} D^+(v^n(x_i)) &= (D_{x_1}^+ v^n(x_i), \dots, D_{x_d}^+ v^n(x_i)) \\ D^-(v^n(x_i)) &= (D_{x_1}^- v^n(x_i), \dots, D_{x_d}^- v^n(x_i)) \end{aligned}$$

sont les gradients discrets de la fonction  $v^n$  au point  $x_i$ , définis, pour une fonction  $w$ , par :

$$D_{x_k}^\pm(w(x_i)) = \pm \frac{w(x_{i^{k,\pm}}) - w(x_i)}{\Delta x}$$

où  $i^{k,\pm}$  désigne :  $(i_1, \dots, i_{k-1}, i_k \pm 1, i_{k+1}, \dots, i_d)$

Nous allons tout d'abord supposer les hypothèses suivantes :

(H1) Il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que pour tout  $x_i \in \mathcal{G}$ ,  $(P^+, P^-) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  :

$$|\mathcal{H}(x_i, P^+, P^-)| \geq C_1(|P^+| + |P^-|)$$

(H2) Il existe  $C_2 > 0$  telle que pour tout  $x_i \in \mathcal{G}$ ,  $P^+, P^-, Q^+, Q^- \in \mathbb{R}^d$  :

$$|\mathcal{H}(x_i, P^+, P^-) - \mathcal{H}(x_i, Q^+, Q^-)| \geq C_2(|P^+ - Q^+| + |P^- - Q^-|)$$

(H3)  $\mathcal{H}$  vérifie l'hypothèse de monotonie suivante : Pour tout  $(x, P^+, P^-) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_k^+}(x, P^+, P^-) \leq 0 \text{ et } \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_k^-}(x, P^+, P^-) \geq 0$$

(H4) Consistence : Il existe  $C_3 > 0$  telle que, pour tout  $x_i \in \mathcal{G}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $P \in \mathbb{R}^d$  :

$$|\mathcal{H}(x_i, P, P) - H(x, P)| \leq C_3|x_i - x|$$



**Théorème 4.6.1.** *Supposons (H1) à (H4), et que les fonctions  $u_0$  et  $g$  sont Lipschitz continues et bornées. Soit  $T > 0$ , il existe une constante  $K$  telle que si on choisit  $\Delta x$  et  $\Delta t$  suffisamment petit, et telle que la condition CFL tienne, et :*

$$\left(\sqrt{T}(\Delta x + \Delta t)^{\frac{1}{2}} + \sup_{\mathcal{G}} |u_0 - \tilde{u}_0|\right) \frac{1}{K} \leq 1.$$

Alors, l'erreur entre la solution de l'équation et la solution discrète du schéma satisfait :

$$\sup_{0 \leq n \leq N_T} \sup_{\mathcal{G}} |v(\cdot, t_n) - v^n| \leq K \left( \max(T, \sqrt{T})(\Delta x + \Delta t)^{\frac{1}{2}} + \sup_{\mathcal{G}} |u_0 - \tilde{u}_0| \right)$$

L'un des schémas que l'on peut utiliser, en deux dimensions, respectant ses conditions est le schéma de Lax-Friedrich, dans lequel :

$$\mathcal{H}(x, P^+, P^-) = H\left(x, \frac{P^+ + P^-}{2}\right) - \frac{C_1(x)}{2}(P_1^+ - P_1^-) - \frac{C_2(x)}{2}(P_2^+ - P_2^-). \quad (4.56)$$

Où  $C_i(x)$  sont choisis tels que  $\max \left| \frac{\partial H}{\partial P_i} \right| \leq C_i(x)$ . Alors, sous la condition CFL  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_x (C_1(x) + C_2(x)) \leq 1$  le schéma est monotone et satisfait (H1) – (H7).

Dans le cas où  $H(x, P) = |P|$ , on peut prendre  $C_1(x) = 1 = C_2(x)$ .

Nous pouvons sinon travailler dans le cadre de la théorie de Barles et Souganidis [BS90]. Sans changer les notations, on obtient que :

**Théorème 4.6.2.** *En considérant que les hypothèses sont réalisées, alors lorsque  $\rho$  tends vers 0, les solutions  $u^\rho$  du système discret convergent vers la solution de  $(\tilde{S})$*

Dans l'article original, ils ont besoins de la régularité de la continuité de la solution, en fait, il me semble que ce n'est pas réellement nécessaire.

*Démonstration.* Soit  $\bar{u}(x) := \limsup u^\rho(y)$  et  $\underline{u}(x) := \liminf u^\rho(y)$ . □

Nous allons montrer que  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$  sont respectivement sous-solutions et sur-solutions de viscosité.

Nous allons montrer le résultat que pour  $\bar{u}$ . Soit  $x_0$  un point de maximum local du  $\bar{u} - \phi$  avec  $\phi$  une fonction régulière. On peut supposer que c'est un maximum local strict et que  $\bar{u}(x_0) = \phi(x_0)$ .

Il existe une suite  $\rho_n, y_n$  tels que :  $\rho_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow x_0$  et  $u^{\rho_n}(y_n) \rightarrow \bar{u}(x_0)$ . où  $y_n$  est un maximum global de  $u^{\rho_n} - \phi$ . De plus, en notant  $\xi_n = u^{\rho_n}(y_n) - \phi(y_n)$ , on a que  $\xi_n \rightarrow 0$  et  $u^{\rho_n}(x) \geq \phi(x) + \xi_n$ . Par la définition de  $u^\rho$ , on obtient que :

$$\mathcal{H}(\rho_n, y_n, \phi(y_n) + \xi_n, \phi + \xi_n) \leq 0$$

En passant à la limite on obtient que :

$$0 \geq F_*(D\phi(x_0), \phi(x_0), x_0)$$

## 4.7 Exemple :

### 4.7.1 Algorithmes :

Dans cette partie, on va utiliser deux algorithmes différents pour approcher les équations d'évolutions. Nous allons regarder l'algorithme LLF et l'algorithme LLF2, le deuxième étant censé être plus précis mais plus long à calculer, et un peu moins stable.

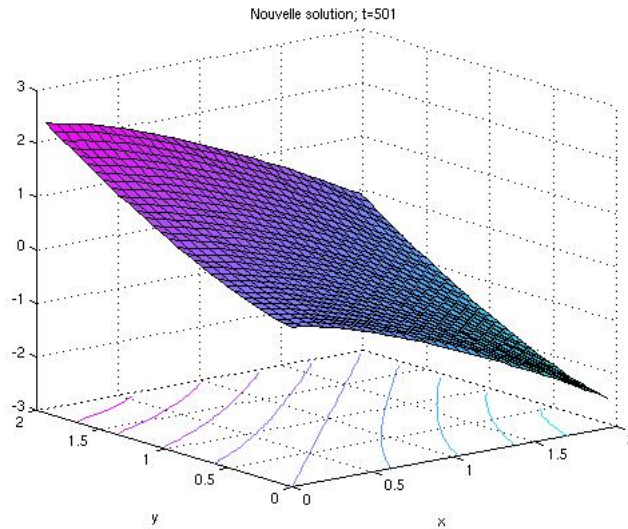


FIGURE 4.1 – La solution approchée pour  $N = 31$  et  $T = 0,03$  lorsque la fonction au bord vaut  $x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}}$

#### 4.7.2 Dans le cadre non-périodique :

Nous allons nous placer en deux dimension. Nous voulons trouver un exemple de fonction à Laplacien infini nul dans le carré. Il faut donc trouver une fonction  $u$  telle que :

$$u_x^2 u_{xx} + u_y^2 u_{yy} + 2u_x u_y u_{xy} = 0.$$

Pour vérifier cela, il existe tout d'abord des fonctions simples tels que  $u_x = 0$  et  $u_y = 0$ , c'est à dire des fonctions constantes, on peut aussi prendre des fonctions linéaires ( $u(x, y) = \alpha x + \beta y$ ) (où les dérivées secondes sont nulles).

Il existe d'autres fonctions vérifiant cette équation. Par exemple, la fonction  $u(x, y) = x^{4/3} - y^{4/3}$ . Nous prendre une fonction  $v$  dans le cube tel que :

$$v(x, y) = x^{4/3} - y^{4/3} \text{ pour } (x, y) \in \partial Q.$$

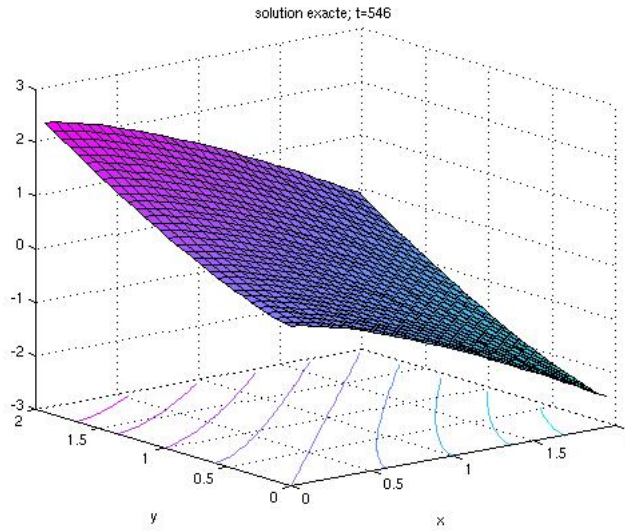
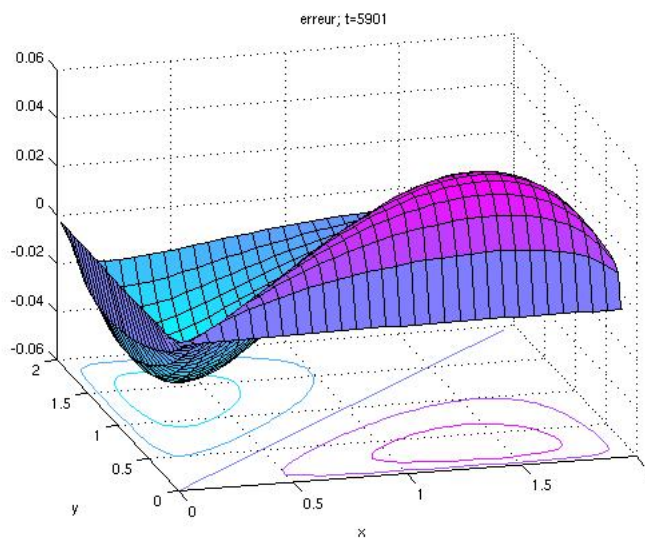
et appliquer l'algorithme pour regarder le taux de convergence.

Nous allons ensuite regarder le même algorithme pour  $v(x, y) = x + y$

**Schéma LLF et  $g(x, y) = x^{4/3} - y^{4/3}$**  Nous allons tout d'abord fixer le temps  $T$ , et regarder la convergence de l'algorithme vers la solution du problème. On va prendre  $g(x) = x^{4/3} - y^{4/3}$ . On va nommer  $N = \frac{1}{\Delta x}$  l'inverse du pas de discrétisation en espace de l'algorithme, dans un premier temps on va utiliser l'algorithme LLF pour calculer les solutions des équations d'évolutions, on étudiera ensuite les résultats avec LLF2.

En étudiant les tableaux on peut s'apercevoir de plusieurs choses, tout d'abord, pour tout  $N$  on s'aperçoit que la convergence se fait au début, avant de stagner. De plus, à  $T$  constant, plus on affine la discrétisation de l'espace, plus l'erreur commise est importante si  $T$  est relativement grand. On va donc vouloir regarder ce qu'il se passe lorsque  $T$  tend vers 0.

En outre lorsque l'on regarde l'erreur commise par l'algorithme, on remarque que l'erreur se situe principalement au bord, ce qui indique que les principales raisons de l'erreur se situe du fait que l'on commet trop d'imprecision dans la gestion du bord du domaine, sans doute du au fait que les solutions  $v_n$  et  $w_n$  des problèmes

FIGURE 4.2 – La solution exacte,  $x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}}$ FIGURE 4.3 – Erreur par rapport à la solution exacte quand  $N = 31$  et  $T = 0,03$ .

$N$	Nombre d'itérations	Erreur point fixe	Erreur $L^\infty$	Erreur $L^1$	T cpu
10	1	5.43	2.2	0.53	0.09
	51	0.017	$9.8 * 10^{-2}$	$2.2 * 10^{-2}$	0.37
	101	$1.45 * 10^{-3}$	$6.8 * 10^{-2}$	$1.5 * 10^{-2}$	0.58
	151	$1.3 * 10^{-4}$	$6.6 * 10^{-2}$	$1.5 * 10^{-2}$	0.76
	201	$10^{-5}$	$6.6 * 10^{-2}$	$1.5 * 10^{-2}$	0.94
	251	$2 * 10^{-6}$	$6.6 * 10^{-2}$	$1.5 * 10^{-2}$	1.11

$N$	Nombre d'itérations	Erreur point fixe	Erreur $L^\infty$	Erreur $L^1$	T cpu
31	1	11.4	2.6	0.23	0.10
	101	$2.3 * 10^{-2}$	0.10	$9.7 * 10^{-3}$	1.76
	201	$2.3 * 10^{-3}$	$8.7 * 10^{-2}$	$8.9 * 10^{-3}$	3.40
	301	$2.4 * 10^{-4}$	$8.7 * 10^{-2}$	$8.9 * 10^{-3}$	5.01
	401	$3 * 10^{-5}$	$8.6 * 10^{-2}$	$8.9 * 10^{-3}$	6.58
	501	$2 * 10^{-6}$	$8.6 * 10^{-2}$	$8.9 * 10^{-3}$	8.21

$N$	Nombre d'itérations	Erreur point fixe	Erreur $L^\infty$	Erreur $L^1$	T cpu
61	1	19.8	2.8	0.12	0.17
	101	$6.0 * 10^{-2}$	0.14	$6.2 * 10^{-3}$	8.08
	201	$1.2 * 10^{-2}$	0.10	$5.7 * 10^{-3}$	15.93
	301	$2.5 * 10^{-3}$	$9.8 * 10^{-2}$	$5.6 * 10^{-3}$	23.69
	401	$5.3 * 10^{-4}$	$9.8 * 10^{-2}$	$5.6 * 10^{-3}$	31.53
	501	$1.1 * 10^{-4}$	$9.8 * 10^{-2}$	$5.6 * 10^{-3}$	39.49
	601	$2 * 10^{-5}$	$9.8 * 10^{-2}$	$5.6 * 10^{-3}$	47.31
	701	$10^{-6}$	$9.8 * 10^{-2}$	$5.6 * 10^{-3}$	55.13
	801	$10^{-6}$	$9.8 * 10^{-2}$	$5.6 * 10^{-3}$	63.08

FIGURE 4.4 – Estimation d'erreur pour différentes discrétisation de l'espace ( $N$ ) lorsqu'on utilise le schéma LLF (Local lax Friedrich).

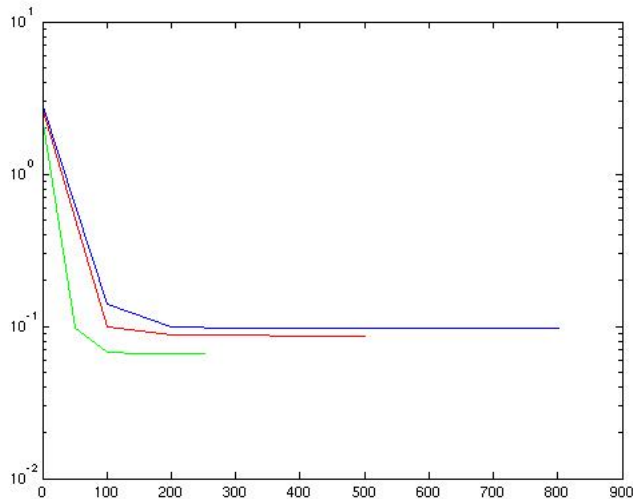


FIGURE 4.5 – Evolution de l'erreur en fonction du nombre d'itération pour  $N = 10$ ,  $N = 31$  et  $N = 61$  et  $T = 0,03$ .

que l'on cherche à résoudre ne sont pas continues au bord de l'ensemble. Enfin, le programme tourne en moins d'une minute dans ces cas.

$N$	Nombre d'itérations	Erreur point fixe	Erreur $L^\infty$	Erreur $L^1$	T cpu
10	1	5.4	2.2	0.57	0.11
	101	$7.8 * 10^{-3}$	0.25	$5.0 * 10^{-2}$	1.91
	201	$1.7 * 10^{-3}$	0.23	$5.6 * 10^{-3}$	3.67
	301	$3.1 * 10^{-4}$	0.22	$5.7 * 10^{-2}$	5.43
	401	$5 * 10^{-5}$	0.22	$5.7 * 10^{-2}$	7.21
	501	$1 * 10^{-5}$	0.22	$5.7 * 10^{-2}$	9.00
	601	$1 * 10^{-6}$	0.22	$5.7 * 10^{-2}$	10.80

$N$	Nombre d'itérations	Erreur point fixe	Erreur $L^\infty$	Erreur $L^1$	T cpu
31	1	11.4	2.7	0.24	0.13
	201	$1.1 * 10^{-2}$	0.11	$1.1 * 10^{-2}$	6.19
	401	$3.1 * 10^{-3}$	$5.5 * 10^{-2}$	$4.7 * 10^{-3}$	11.87
	601	$4.4 * 10^{-4}$	$5.3 * 10^{-2}$	$4.8 * 10^{-2}$	17.52
	801	$5 * 10^{-5}$	$5.3 * 10^{-2}$	$4.8 * 10^{-2}$	23.34
	1001	$1 * 10^{-5}$	$5.3 * 10^{-2}$	$4.8 * 10^{-2}$	29.04
	1101	$10^{-6}$	$5.3 * 10^{-2}$	$4.8 * 10^{-2}$	31.90

$N$	Nombre d'itérations	Erreur point fixe	Erreur $L^\infty$	Erreur $L^1$	T cpu
61	1	20.8	2.9	0.13	0.19
	151	$4.1 * 10^{-2}$	0.16	$6.6 * 10^{-3}$	16.01
	301	$6.8 * 10^{-2}$	$5.4 * 10^{-2}$	$2.3 * 10^{-3}$	31.81
	451	$4.3 * 10^{-3}$	$4.6 * 10^{-2}$	$1.7 * 10^{-3}$	47.41
	601	$1.4 * 10^{-3}$	$4.2 * 10^{-2}$	$2.0 * 10^{-3}$	62.96
	751	$3.2 * 10^{-4}$	$4.1 * 10^{-2}$	$2.0 * 10^{-3}$	78.68
	901	$6 * 10^{-5}$	$4.0 * 10^{-2}$	$2.0 * 10^{-3}$	92.24
	1051	$1 * 10^{-5}$	$4.0 * 10^{-2}$	$2.0 * 10^{-3}$	109.80
	1201	$10^{-6}$	$4.0 * 10^{-2}$	$2.0 * 10^{-3}$	125.74

FIGURE 4.6 – Estimation d'erreur pour différentes discrétisation de l'espace ( $N$ ) lorsqu'on utilise le schéma LLF2.

**Schéma LLF2 et  $g(x) = x^{4/3} - y^{4/3}$**  Dans le cas de LLF2 on remarque que, comme précédemment, la convergence se fait au début. Dans le cas  $N = 10$  l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée est très grande, dans les autres cas, on a tendance à obtenir une meilleure convergence. De plus, cette fois ci, plus  $N$  augmente, plus le schéma est précis, ce qui semble logique.

$N$	T horizon	Nombre d'itération total	Erreur $L^\infty$	Erreur $L^1$	T cpu
31	0.5	68	0.470	0.101	7
	0.1	545	0.0864	0.0240	10
	0.05	1217	0.0565	0.0137	13
	0.03	2286	0.0514	0.00949	8.97
	0.01	5905	0.0522	0.00571	72.44
	0.005	11220	0.0518	0.00475	153.53
	0.001	47093	0.0517	0.00401	458

FIGURE 4.7 – Evolution de l'erreur lorsque le paramètre  $T$  (temps auquel on arrête les équations d'évolutions) diminue.

**Schema LLF et  $g(x, y) = x - y$  :** On va maintenant faire les mêmes tableaux, mais avec la fonction  $g(x, y) = x - y$ , on peut remarquer que la plupart que l'on a des résultats équivalents, si ce n'est que lorsque  $T$  tend vers 0 on a l'erreur infini qui est vraiment très proche de zéros, ce résultat est lié au fait que l'erreur est lié à des imprécisions au bord, qui sont beaucoup moins importante si la fonction est linéaire.

$N$	Nombre d'itérations	Erreur point fixe	Erreur $L^\infty$	Erreur $L^1$	T cpu
10	1	4.6	1.7	0.49	0.09
	51	0.012	$5.0 * 10^{-2}$	$1.4 * 10^{-2}$	0.35
	101	$9.0 * 10^{-4}$	$3.2 * 10^{-2}$	$1.1 * 10^{-2}$	0.57
	151	$6.3 * 10^{-5}$	$3.2 * 10^{-2}$	$1.1 * 10^{-2}$	0.77
	201	$4.4 * 10^{-6}$	$3.2 * 10^{-2}$	$1.1 * 10^{-2}$	0.97

$N$	Nombre d'itérations	Erreur point fixe	Erreur $L^\infty$	Erreur $L^1$	T cpu
31	1	10	2.2	0.19	0.08
	101	$2.2 * 10^{-2}$	$6.7 * 10^{-2}$	$6.2 * 10^{-3}$	1.26
	201	$2.0 * 10^{-3}$	$5.4 * 10^{-2}$	$5.4 * 10^{-3}$	2.42
	301	$1.9 * 10^{-4}$	$5.4 * 10^{-2}$	$5.4 * 10^{-3}$	3.63
	401	$1.8 * 10^{-5}$	$5.4 * 10^{-2}$	$5.3 * 10^{-3}$	4.90
	501	$1.7 * 10^{-6}$	$5.4 * 10^{-2}$	$5.3 * 10^{-3}$	6.23

$N$	Nombre d'itérations	Erreur point fixe	Erreur $L^\infty$	Erreur $L^1$	T cpu
61	1	17.2	2.3	0.10	0.10
	101	$5.7 * 10^{-2}$	0.12	$5.2 * 10^{-3}$	3.78
	201	$1.0 * 10^{-2}$	$6.7 * 10^{-2}$	$3.5 * 10^{-3}$	7.50
	301	$1.9 * 10^{-3}$	$6.7 * 10^{-2}$	$3.5 * 10^{-3}$	11.11
	401	$3.7 * 10^{-4}$	$6.6 * 10^{-2}$	$3.4 * 10^{-3}$	15.13
	501	$7.2 * 10^{-4}$	$6.6 * 10^{-2}$	$3.4 * 10^{-3}$	19.04
	601	$1.3 * 10^{-4}$	$6.6 * 10^{-2}$	$3.4 * 10^{-3}$	23.80
	701	$2.6 * 10^{-5}$	$6.6 * 10^{-2}$	$3.4 * 10^{-3}$	27.64

FIGURE 4.8 – Estimation d'erreur pour différentes discrétisation de l'espace ( $N$ ) lorsqu'on utilise le schéma LLF (Local lax Friedrich).

**Schéma LLF2 et  $g(x, y) = x - y$**

$N$	Nombre d'itérations	Erreur point fixe	Erreur $L^\infty$	Erreur $L^1$	T cpu
10	1	4.8	1.8	0.50	0.11
	201	$1.5 * 10^{-3}$	0.14	$3.3 * 10^{-2}$	2.35
	401	$7.4 * 10^{-5}$	0.13	$3.4 * 10^{-2}$	4.51
	601	$3.6 * 10^{-6}$	0.13	$3.4 * 10^{-3}$	6.67
$N$	Nombre d'itérations	Erreur point fixe	Erreur $L^\infty$	Erreur $L^1$	T cpu
31	1	10.1	2.3	0.20	0.13
	201	$1.0 * 10^{-2}$	$7.7 * 10^{-2}$	$7.2 * 10^{-2}$	5.97
	401	$1.5 * 10^{-3}$	$4.4 * 10^{-2}$	$4.3 * 10^{-2}$	11.95
	601	$2.4 * 10^{-4}$	$4.3 * 10^{-2}$	$4.4 * 10^{-3}$	18.08
	801	$3.6 * 10^{-5}$	$4.3 * 10^{-2}$	$4.4 * 10^{-3}$	24.15
	1001	$5.3 * 10^{-6}$	$4.3 * 10^{-2}$	$4.4 * 10^{-2}$	29.74
$N$	Nombre d'itérations	Erreur point fixe	Erreur $L^\infty$	Erreur $L^1$	T cpu
61	1	17.9	2.4	0.11	0.20
	301	$7.7 * 10^{-3}$	$5.6 * 10^{-2}$	$2.9 * 10^{-3}$	32
	601	$6.8 * 10^{-4}$	$5.3 * 10^{-2}$	$3.0 * 10^{-3}$	65
	901	$6.2 * 10^{-5}$	$5.2 * 10^{-2}$	$3.0 * 10^{-3}$	97
	1201	$5.6 * 10^{-6}$	$5.2 * 10^{-2}$	$3.0 * 10^{-3}$	128

FIGURE 4.9 – Estimation d'erreur pour différentes discrétisations de l'espace ( $N$ ) lorsqu'on utilise le schéma LLF2.

### 4.7.3 Cadre périodique

Dans le cadre périodique, pour toute fonction  $u_0$  initiale, l'algorithme devrait tendre vers une constante, on va vérifier ce résultat numériquement, et essayer de trouver empiriquement vers quelle constante on converge.

$N$	T horizon	Nombre d'itération total	Erreur $L^\infty$	Erreur $L^1$	T cpu
31	0.5	65	0.34	0.86	7
	0.1	526	0.055	0.0205	6
	0.08	698	0.039	0.0163	6
	0.05	1198	0.020	0.0102	7
	0.03	2286	0.015	0.00615	9
	0.01	5927	0.0035	0.00210	43
	0.008	7299	0.0027	0.00169	45
	0.005	11243	0.0017	0.00106	65
	0.003	17836	0.0010	0.000635	95
	0.001	47078	0.00048	0.000209	250

FIGURE 4.10 – Evolution de l'erreur lorsque le paramètre  $T$  (temps auquel on arrête les équations d'évolutions) diminue pour la fonction  $g(x, y) = x - y$ .



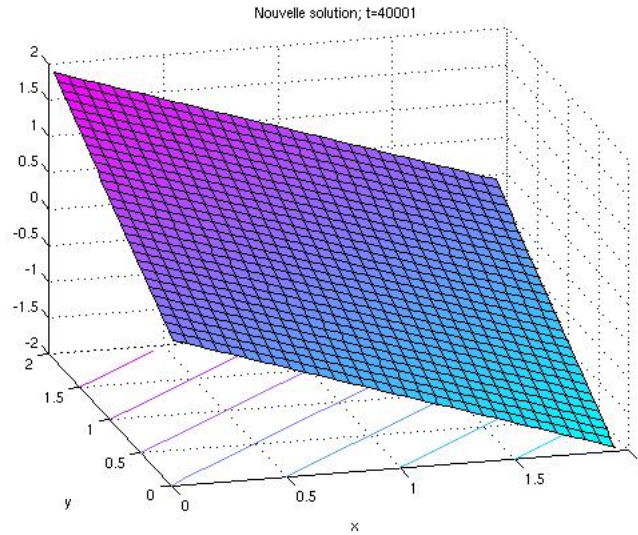


FIGURE 4.11 – La solution approchée pour  $N = 31$  et  $T = 0,03$  lorsque la fonction au bord vaut  $x - y$

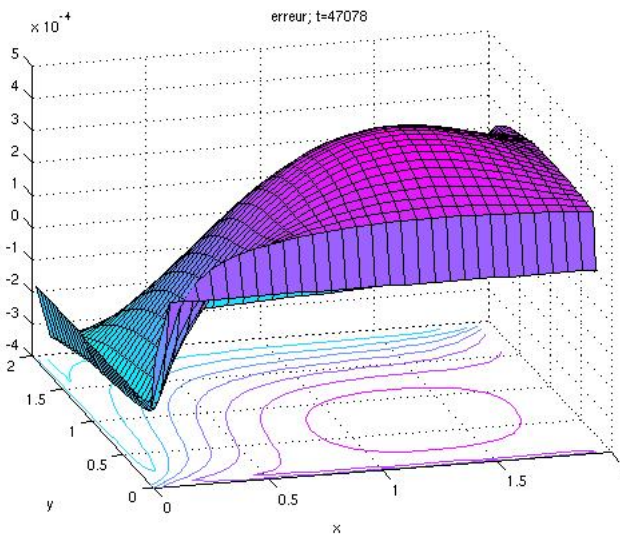


FIGURE 4.12 – Erreur par rapport à la solution exacte quand  $N = 31$  et  $T = 0,03$ .

$N$	T horizon	$\max(u) - \min(u)$	Valeur moyenne
31	0.8	$3.6 * 10^{-7}$	0.30
	0.5	$8.1 * 10^{-7}$	0.34
	0.3	$2.0 * 10^{-6}$	0.37
	0.1	$9.3 * 10^{-6}$	0.43
	0.08	$1.3 * 10^{-5}$	0.45
	0.05	$2.3 * 10^{-5}$	0.48

FIGURE 4.13 – Convergence vers une constante dans le cadre périodique avec l’algorithme LLF.

#### 4.7.4 Lorsque $H(p) = p^2$ :

Si on prend  $H(p) = p^2$ . Alors :

$$\begin{aligned}
 A_H[u] &= \sum_{k,j} H_{p_k}(Du) H_{p_j}(Du) u_{x_k x_j} \\
 &= \sum_{k,j} 2u_{x_k} Du 2u_{x_j} Du u_{x_k x_j} \\
 &= \sum_{k,j} 4u_{x_k} u_{x_j} u_{x_k x_j} |Du|^2 \\
 &= 4|Du|^2 \Delta_\infty u.
 \end{aligned}$$

Nous trouvons donc à nouveau le même opérateur, et nous allons essayer avec les mêmes fonctions l’algorithme.

#### 4.7.5 Dépendance de $H$ par rapport à l’espace :

Nous allons maintenant regarder le cas où l’hamiltonien est de la forme :

$$H(x, p) = |p| + B(x),$$

avec  $B$  un champs extérieur.

Dans ce cas, l’opérateur de Aronsson est le suivant :

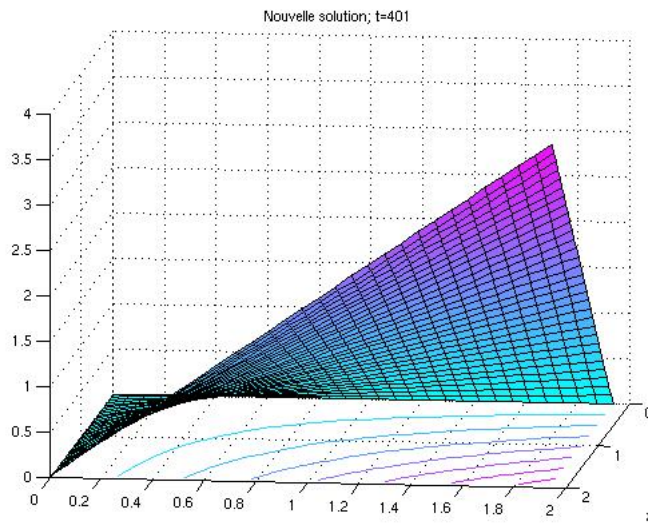
$$\begin{aligned}
 A_H[u] &= \frac{1}{|\nabla u|} \sum_i B_{x_i} u_{x_i} + \frac{1}{|\nabla u|^2} \sum_{i,j} u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} \\
 &= \nabla B \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} - \frac{1}{|\nabla u|^2} \Delta_\infty u.
 \end{aligned}$$

Pour pratiquer les tests numériques nous allons utiliser une solution particulière adéquate. En effet, si on se place en 2 dimensions, et que l’on pose  $B(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $u(x, y) = xy$  (avec  $x$  et  $y$  positifs), alors on a :

$$A_H[u] = 0.$$

Nous avons utiliser un schéma LLF pour faire les test numériques dont les résultats sont maintenant présentés :

$N$	T horizon	Nombre d'itération total	Erreur $L^\infty$	Erreur $L^1$	T cpu
31	0.01	216	$2.0 * 10^{-3}$	$4.6 * 10^{-3}$	170
	0.005	409	$1.2 * 10^{-3}$	$2.4 * 10^{-3}$	140
	0.001	1787	$1.25 * 10^{-3}$	$5.3 * 10^{-4}$	180
	0.0005	3355	$1.3 * 10^{-3}$	$2.7 * 10^{-4}$	115
	0.0001	14238	$1.3 * 10^{-3}$	$7.7 * 10^{-5}$	1024

FIGURE 4.14 – Evolution de l'erreur lorsque le paramètre  $T$  change.FIGURE 4.15 – Représentation de la solution approchée lorsque  $B = \sqrt{x^2 + y^2}$   
 $H(p) = |p|$  et  $g(x, y) = xy$ .

# Bibliographie

- [ACJ04] Gunnar Aronsson, Michael G. Crandall, and Petri Juutinen. A tour of the theory of absolutely minimizing functions. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 41(4) :439–505, 2004.
- [ADS05] G. Alberti and A. De Simone. Wetting of a rough surfaces : a homogenisation approach. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 461(2053) :79–97, 2005.
- [AFP00] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.
- [Ama98] M. Amar. Two-scale convergence and homogenization on  $BV(\Omega)$ . *Asymptot. Anal.*, 16(1) :65–84, 1998.
- [Aro67] Gunnar Aronsson. Extension of functions satisfying Lipschitz conditions. *Ark. Mat.*, 6 :551–561 (1967), 1967.
- [Aro68] Gunnar Aronsson. On the partial differential equation  $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$ . *Ark. Mat.*, 7 :395–425 (1968), 1968.
- [Aro84] Gunnar Aronsson. On certain singular solutions of the partial differential equation  $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$ . *Manuscripta Math.*, 47(1-3) :133–151, 1984.
- [ATW93] Fred Almgren, Jean E. Taylor, and Lihe Wang. Curvature-driven flows : a variational approach. *SIAM J. Control Optim.*, 31(2) :387–438, 1993.
- [Ban87] V. Bangert. The existence of gaps in minimal foliations. *Aequationes Math.*, 34(2-3) :153–166, 1987.
- [BB01] G. Barles and J. Busca. Existence and comparison results for fully non-linear degenerate elliptic equations without zeroth-order term. *Comm. Partial Differential Equations*, 26(11-12) :2323–2337, 2001.
- [BB02] J. Bourgain and H. Brézis. Sur l'équation  $\operatorname{div} u = f$ . *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(11) :973–976, 2002.
- [BB03] J. Bourgain and H. Brézis. On the equation  $\operatorname{div} Y = f$  and application to control of phases. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(2) :393–426 (electronic), 2003.
- [BCP95] A. Braides and V. Chiadò Piat. A derivation formula for convex integral functionals defined on  $BV(\Omega)$ . *J. Convex Anal.*, 2(1-2) :69–85, 1995.
- [BEJ08] E. N. Barron, L. C. Evans, and R. Jensen. The infinity Laplacian, Aronsson's equation and their generalizations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(1) :77–101, 2008.
- [BG95] Guy Barles and Christine Georgelin. A simple proof of convergence for an approximation scheme for computing motions by mean curvature. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32(2) :484–500, 1995.

- [Bla01] A.P. Blanc. Comparison principle for the cauchy problem for hamilton-jacobi equations with discontinuous data. *Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications*, 45(8) :1015–1038, 2001.
- [BMS08] A. Braides, M. Maslennikov, and L. Sigalotti. Homogenization by blow-up. *Applicable Analysis*, 87(12) :1341–1356, 2008.
- [Bou87] G. Bouchitté. Convergence et relaxation de fonctionnelles du calcul des variations à croissance linéaire. Application à l’homogénéisation en plasticité. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5)*, 8(1) :7–36, 1986/87.
- [BP87] G. Barles and B. Perthame. Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 21(4) :557–579, 1987.
- [BP88] G. Barles and B. Perthame. Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method. *SIAM J. Control Optim.*, 26(5) :1133–1148, 1988.
- [BP90] G. Barles and B. Perthame. Comparison principle for Dirichlet-type Hamilton-Jacobi equations and singular perturbations of degenerated elliptic equations. *Appl. Math. Optim.*, 21(1) :21–44, 1990.
- [Bra02] A. Braides.  $\Gamma$ -convergence for beginners, volume 22 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [BS90] G. Barles and P.E. Souganidis. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. In *Decision and Control, 1990., Proceedings of the 29th IEEE Conference on*, pages 2347–2349. IEEE, 1990.
- [BS91] G. Barles and P. M. Souganidis. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. *Asymptotic Analysis*, 4 :271–283, 1991.
- [BV88] G. Bouchitté and M. Valadier. Integral representation of convex functionals on a space of measures. *J. Funct. Anal.*, 80(2) :398–420, 1988.
- [BV89] G. Bouchitté and M. Valadier. Multifonctions s.c.i. et régularisée s.c.i. essentielle. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 6(suppl.) :123–149, 1989. Analyse non linéaire (Perpignan, 1987).
- [BZ08] A. Braides and C. I. Zeppieri. Multiscale analysis of a prototypical model for the interaction between microstructure and surface energy. *Interfaces Free Bound.*, 2008. to appear.
- [CC93] Luis A. Caffarelli and Antonio Córdoba. An elementary regularity theory of minimal surfaces. *Differential Integral Equations*, 6(1) :1–13, 1993.
- [CC06] Vicent Caselles and Antonin Chambolle. Anisotropic curvature-driven flow of convex sets. *Nonlinear Anal.*, 65(8) :1547–1577, 2006.
- [CCMS00] F. Cao, V. Caselles, J.-M. Morel, and C. Sbert. An axiomatic approach to image interpolation. In *Partial differential equations (Prague, 1998)*, volume 406 of *Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math.*, pages 74–88. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.
- [CdL01] L. A. Caffarelli and R. de la Llave. Planelike minimizers in periodic media. *Comm. Pure Appl. Math.*, 54(12) :1403–1441, 2001.
- [CGG91] Yun Gang Chen, Yoshikazu Giga, and Shun’ichi Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *J. Differential Geom.*, 33(3) :749–786, 1991.
- [CGL] A. Chambolle, A. Giacomini, and L. Lussardi. On the generalized co-area formula and applications. in preparation.

- [Cha04] Antonin Chambolle. An algorithm for mean curvature motion. *Interfaces Free Bound.*, 6(2) :195–218, 2004.
- [CIL92a] Michael G. Crandall, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27(1) :1–67, 1992.
- [CIL92b] Michael G. Crandall, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27(1) :1–67, 1992.
- [CLS09] P. Cardaliaguet, P.L. Lions, and P.E. Souganidis. A discussion about the homogenisation of moving interfaces. *J. Math. Pur. Appl.*, 2009. to appear.
- [CM] Adina Ciomaga and Jean-Michel Morel. A proof of equivalence between level lines shortening and curvature motion in image processing. *arXiv :1102.1244v1*.
- [CM07] L. A. Caffarelli and A. Mellet. Capillary drops : Contact angle hysteresis and sticking drops. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 29(2) :141–160, 2007.
- [CP11] Antonin Chambolle and Thomas Pock. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *J. Math. Imaging Vision*, 40(1) :120–145, 2011.
- [CRS10] L. Caffarelli, J.-M. Roquejoffre, and O. Savin. Nonlocal minimal surfaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 63(9) :1111–1144, 2010.
- [CT09] A. Chambolle and G. Thouroude. Homogenization of interfacial energies and construction of plane-like minimizers in periodic media through a cell problem. *Networks Homogeneous Media*, 4(1) :127–152, 2009.
- [DKY08] N. Dirr, G. Karali, and N.K. Yip. Pulsating wave for mean curvature flow in inhomogeneous medium. *European J. Appl. Math.*, 19(6) :661–699, 2008.
- [DLN06] N. Dirr, M. Lucia, and M. Novaga.  $\Gamma$ -convergence of the Allen-Cahn energy with an oscillating forcing term. *Interfaces Free Bound.*, 8(1) :47–78, 2006.
- [DM93] G. Dal Maso. *An introduction to  $\Gamma$ -convergence*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 8. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.
- [DP09] T. De Pauw. Size minimizing surfaces. In *Annales Scientifiques de l’Ecole Normale Supérieure*, volume 42, pages 37–101, 2009.
- [DPT11] T. De Pauw and M. Torres. On the distributional divergence of vector fields vanishing at infinity. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 141(1), 2011.
- [DY06] N. Dirr and N.K. Yip. Pinning and depinning phenomena in front propagation in heterogeneous media. *Interfaces Free Bound.*, 8(1) :79–109, 2006.
- [EG92] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [ES91] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. I. *J. Differential Geom.*, 33(3) :635–681, 1991.
- [ES92a] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 330(1) :321–332, 1992.
- [ES92b] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. III. *J. Geom. Anal.*, 2(2) :121–150, 1992.

- [ES95] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature. IV. *J. Geom. Anal.*, 5(1) :77–114, 1995.
- [ET99] I. Ekeland and R. Témam. *Convex analysis and variational problems*, volume 28 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, english edition, 1999. Translated from the French.
- [GG92] Yoshikazu Giga and Shun'ichi Goto. Motion of hypersurfaces and geometric equations. *J. Math. Soc. Japan*, 44(1) :99–111, 1992.
- [Giu84a] E. Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, volume 80 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.
- [Giu84b] Enrico Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, volume 80 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.
- [GM00] F. Guichard and J.-M. Morel. Image iterative smoothing and P.D.E.'s. Book in preparation, 2000.
- [Got94] Shun'ichi Goto. Generalized motion of hypersurfaces whose growth speed depends superlinearly on the curvature tensor. *Differential Integral Equations*, 7(2) :323–343, 1994.
- [IS95] Hitoshi Ishii and Panagiotis Souganidis. Generalized motion of noncompact hypersurfaces with velocity having arbitrary growth on the curvature tensor. *Tohoku Math. J. (2)*, 47(2) :227–250, 1995.
- [Jen93] R. Jensen. Uniqueness of lipschitz extensions minimizing the sup-norm of the gradient. *Arch. Rational Mech. Analysis*, 123 :51–74, 1993.
- [Kir07] S Kirsch. *Courbure moyenne et interfaces*. PhD thesis, Paris VI, 2007.
- [LGA98] E. Le Gruyer and J. C. Archer. Harmonious extensions. *SIAM J. Math. Anal.*, 29(1) :279–292 (electronic), 1998.
- [LS95] Stephan Luckhaus and Thomas Sturzenhecker. Implicit time discretization for the mean curvature flow equation. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 3(2) :253–271, 1995.
- [MBO92] B. Merriman, J. Bence, and S. Osher. Diffusion generated motion by mean curvature. *J. E. Taylor, Editor, Computational Crystal Growers Workshop*, pages 73–83, 1992.
- [MM77a] L. Modica and S. Mortola. Il limite nella  $\Gamma$ -convergenza di una famiglia di funzionali ellittici. *Boll. Un. Mat. Ital. A (5)*, 14(3) :526–529, 1977.
- [MM77b] L. Modica and S. Mortola. Un esempio di  $\Gamma^-$ -convergenza. *Boll. Un. Mat. Ital. B (5)*, 14(1) :285–299, 1977.
- [Obe04] Adam M. Oberman. A convergent monotone difference scheme for motion of level sets by mean curvature. *Numer. Math.*, 99(2) :365–379, 2004.
- [Obe05] Adam M. Oberman. A convergent difference scheme for the infinity Laplacian : construction of absolutely minimizing Lipschitz extensions. *Math. Comp.*, 74(251) :1217–1230 (electronic), 2005.
- [OS88] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79(1) :12–49, 1988.
- [Sme03] Peter Smereka. Semi-implicit level set methods for curvature and surface diffusion motion. *J. Sci. Comput.*, 19(1-3) :439–456, 2003. Special issue in honor of the sixtieth birthday of Stanley Osher.
- [Wal96] Noel J. Walkington. Algorithms for computing motion by mean curvature. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(6) :2215–2238, 1996.

## Résumé

Cette thèse comporte deux parties. Dans un premier temps, nous allons faire un lien entre des solutions stationnaires de problèmes d'évolutions de frontières par courbure moyenne avec des champs extérieurs et l'existence de minimiseurs globaux d'un problème de minimisation de périmètre avec une énergie. Ces solutions stationnaires permettent en outre de fournir des bornes pour les solutions non stationnaires du problème. De plus, en modifiant l'énergie, on montre que les résolutions successives des problèmes de périmètre permettent de calculer l'évolution d'un ensemble par courbure moyenne. Enfin, on présentera un algorithme permettant de calculer les solutions de viscosité d'un problème de Dirichlet portant sur le Laplacien Infini grâce aux équations d'Aronsson.

## Abstract

This thesis is about two topics. In a first part, we look at the existence of stationary solutions of mean curvature problem with an external fields thanks to the existence of global minimizers to some perimeter problem. This problem is the minimization of an energy on sets with a term of perimeter, and an external energy. Those stationary solutions give bounds to the evolution of others solutions. Moreover if we change the external energy of the perimeter problem we can approach a solution of the evolution of an interface by mean curvature. In a second part, we present an algorithm which calculate the solution of a Dirichlet problem for the Infinity Laplacian thanks to Aronsson's equation.



