HAL open science

Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique

Gabriel Dospinescu

To cite this version:

Gabriel Dospinescu. Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique. Théorie des représentations [math.RT]. Ecole Polytechnique X, 2012. Français. NNT : 0g417e03nq 4 . pastel-00725370

HAL Id: pastel-00725370

https://pastel.hal.science/pastel-00725370v1

Submitted on 25 Aug 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre:

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mathématiques

par

Gabriel Dospinescu

Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique

Soutenue le 13 Juin 2012 devant la Commission d'examen :

M.	Gaëtan Chenevier	(Directeur de thèse)
M.	Laurent Clozel	(Examinateur)
M.	Pierre Colmez	(Directeur de thèse)
M.	Matthew Emerton	(Rapporteur-absent à la soutenance)
M.	Guy Henniart	(Examinateur)
M.	Jean Lannes	(Examinateur)
Mme	Marie-France Vignéras	(Rapporteur)

Thèse préparée au
Centre de mathématiques Laurent Schwartz
UMR CNRS 7640
91 128 Palaiseau CEDEX

Table des matières

1 Introduction et présentation des résultats obtenus **10**

1.1 Le lemme de Schur p-adique 11

1.2 (φ, Γ)-modules et représentations p-adiques 12

1.3 Paires G-compatibles et la catégorie $\mathrm{Rep}_L(G)$ 13

1.4 Vecteurs localement analytiques 15

1.5 Actions infinitésimales 15

1.6 Vecteurs localement algébriques et représentations de de Rham 17

1.7 Représentations triangulines et modules de Jacquet analytiques 18

2 Endomorphismes des représentations p-adiques de groupes de Lie p-adiques **21**

2.1 Groupes uniformes 21

2.2 Coefficients de Mahler 22

2.3 L'algèbre de Fréchet-Stein $D(G, L)$ 23

2.4 Représentations de Banach et localement analytiques admissibles 23

2.5 Le lemme de Quillen p-adique d'Ardakov et Wadsley 24

2.6 Le cas absolument irréductible 25

2.7 Algèbres de Fréchet et algèbres à identité polynomiale 26

3 Théorie de Hodge p-adique et (φ, Γ)-modules **29**

3.1 Anneaux de fonctions analytiques 29

3.2 Anneaux de Fontaine 30

3.3 (φ, Γ)-modules 32

3.4 Morphismes de localisation et le module de Fontaine $D^+_{\mathrm{dif},n}$ 34

3.5 L'action infinitésimale de Γ 35

3.6 Traces de Tate normalisées 35

3.7 Dualité 36

3.8 Les modules D^{nr}, $D^\sharp$ et $D^\natural$ 38

4 Paires G-compatibles et foncteur de Montréal **40**

4.1 Paires G-compatibles et fonctorialité 40

4.2 Invariants sous $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ 43

4.3 Le sous-module $\tilde{D}^+$ de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ 45

4.4 Dualité 45

4.5 Presqu'exactitude de $D \to \Pi(D, \delta)$ 48

4.6 Le foncteur de Montréal 50

4.7 Reconstruction de Π 51

5 Vecteurs localement analytiques **54**

5.1 Préliminaires 54

5.2 Vecteurs localement analytiques et coefficients de Mahler 55

5.3 Vecteurs propres de ψ 57

5.4 L'action de G sur $T^a \mathscr{D}^{\dagger,b} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ 58

5.5 Le module $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et l'espace $\Pi(D, \delta)^{\mathrm{an}}$ 61

6 L'action infinitésimale de G **64**

6.1 Fonctions analytiques sur des couronnes et distributions sur K_m 64

6.2 Le $\mathfrak{gl}_2$-module $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ 67

6.3 Une question de Harris 69

7 Modules de Jacquet analytiques et série principale p-adique **71**

7.1 Un résultat de finitude 71

7.2 Finitude du module de Jacquet 72

7.3 Critère d'annulation en dimension 2 73

7.4 Le module de Jacquet dans le cas triangulin 74

7.5 L'involution w_D dans le cas triangulin 76

7.6 Dévissage de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ 77

8 Dualité et modèle de Kirillov **79**

8.1 Vecteurs U-finis et modèle de Kirillov 79

8.2 L'espace $\Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$ 80

8.3 Dualité et modèle de Kirillov 82

8.4 Densité des vecteurs analytiques U-finis 83

9 Vecteurs localement algébriques et représentations de de Rham **85**

9.1 Sorites sur les vecteurs localement algébriques 85

9.2 Représentations de Hodge-Tate et caractères infinitésimaux 86
9.3 Sous-modules divers et variés de $\check{\mathscr{D}}^{+}_{\mathrm{dif},n}$ 87
9.4 Dualité 89
9.5 Preuve du théorème 9.0.5 90

10 Extensions de représentations de de Rham et vecteurs localement algébriques 91

10.1 Caractérisation infinitésimale des extensions de Hodge-Tate 92
10.2 Structure de $\check{E}^{+}_{\mathrm{dif},n}$ 93
10.3 Décomposition de $\Pi(E)_c^{P-\mathrm{alg}}$ 95
10.4 Preuve du théorème 10.0.3 95

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la correspondance de Langlands locale p-adique, imaginée par Breuil [6] (au moins dans le cas potentiellement semi-stable) et établie par Colmez [12] pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, à la suite des travaux de Colmez [13], Berger-Breuil [4], Kisin [32]. Cette correspondance encode la correspondance de Langlands locale classique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. De plus, grâce au travail [38] de Paskunas, elle permet de décrire (provisoirement pour $p \geq 5$) les représentations de Banach unitaires, admissibles, de longueur finie et à caractère central de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, en termes de représentations p-adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$.

Soit p un nombre premier, L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et soit V une L-représentation irréductible[1] de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, de dimension 2. En utilisant la théorie des (φ, Γ)-modules de Fontaine [26], on associe [12] à V une $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-représentation de Banach $\Pi(V)$, unitaire, admissible, topologiquement irréductible. On donne une nouvelle preuve, nettement plus simple, d'un théorème de Colmez, qui permet de décrire les vecteurs localement analytiques $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$ de $\Pi(V)$ en fonction de V (plutôt du (φ, Γ)-module surconvergent attaché à V). La description est très indirecte, ce qui rend l'étude de $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$ un peu délicate : par exemple, on ne sait pas si $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$ est toujours de longueur finie.

Le résultat principal de cette thèse est une description simple de l'action infinitésimale de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$. En particulier, on montre que $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$ admet un caractère infinitésimal, que l'on peut calculer en fonction des poids de Hodge-Tate de V, ce qui répond à une question de Harris. En utilisant ces résultats, on montre aussi l'absence d'un analogue p-adique d'un théorème classique de Tunnell et Saito, répondant à une autre question de Harris (l'analogue pour les représentations modulaires a été établi par Morra [37]).

Nous étendons et précisons certains résultats de Colmez concernant le modèle de Kirillov des vecteurs U-finis de $\Pi(V)$ (ici U est l'unipotent supérieur de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$). En combinant cette étude avec la description de l'action infinitésimale de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, on obtient une démonstration simple d'un des résultats principaux de [12], caractérisant les représentations V telles que $\Pi(V)$ possède des vecteurs localement algébriques non nuls. Ce résultat permet de faire le pont avec la correspondance classique et est un des ingrédients clés de la preuve d'Emerton [22] de la conjecture de Fontaine-Mazur en dimension 2 (et dans la plupart des cas). On étend nos méthodes pour démontrer l'analogue de ce résultat pour les déformations infinitésimales de V. Cela répond à une question de Paskunas et a des applications à la conjecture de Breuil-Mézard.

Nous appliquons ces techniques différentielles à l'étude du module de Jacquet de $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$. On montre par exemple que ce module est non nul si et seulement si V est trianguline. Cela a des applications directes [14, 19, 35, 36] à des conjectures de Berger, Breuil [4] et Emerton [21], qui décrivent de manière précise l'espace $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$ quand V est trianguline.

Enfin, dans un travail en collaboration avec Benjamin Schraen, nous démontrons le lemme de Schur pour les représentations de Banach et localement analytiques topologiquement irréductibles d'un groupe de Lie p-adique. Ce résultat basique n'était connu que pour des groupes de Lie commutatifs et pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (sous certaines hypothèses techniques). La preuve repose sur des résultats récents d'Ardakov et Wadsley [1].

1. Pour les applications arithmétiques, il est important de considérer aussi des déformations artiniennes de V, de déterminant fixé, et c'est dans ce cadre plus général que l'on se place dans cette thèse.

Abstract

The subject of this thesis is the p-adic Langlands correspondence, imagined by Breuil [6] (at least in the potentially semi-stable case) and established by Colmez [12] for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, building on work by Colmez [13], Berger-Breuil [4], Kisin [32]. This correspondence gives a new insight in the classical local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Moreover, deep work of Paskunas [38] shows that the p-adic Langlands correspondence also gives a description (temporarily for $p \geq 5$) of the unitary, admissible, finite length Banach space representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ with a central character, in terms of p-adic Galois representations.

Let p be a prime number and let L be a finite extension of $\mathbf{Q}_p$. Let V be an irreducible [2], two-dimensional L-representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$. Using Fontaine's [26] theory of (φ, Γ)-modules, one associates to V a $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-Banach space representation $\Pi(V)$ (defined over L), which is unitary, admissible and topologically irreducible. We give a new proof, much easier, of a theorem of Colmez, which describes the locally analytic vectors $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$ of $\Pi(V)$ in terms of V (more precisely, in terms of the overconvergent (φ, Γ)-module attached to V). This description is however very indirect, making the study of $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$ rather delicate : for instance, it is not known if $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$ is (topologically) of finite length.

The main result of this thesis is a simple description of the infinitesimal action of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ on $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$. In particular, we show that $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$ has an infinitesimal character, which can be computed in terms of the Hodge-Tate weights of V, answering therefore a question of Harris. Using these results, we show that there is no p-adic analogue of a classical theorem of Saito and Tunnell, answering another question of Harris (the analogue for mod p representations was proved by Morra [37]).

We extend results of Colmez concerning the Kirillov model of the U-finite vectors of $\Pi(V)$ (here U is the upper unipotent of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$). Combining this study with the description of the infinitesimal action, we obtain a simple proof of one of the main results of [12], characterizing the representations V such that $\Pi(V)$ has nonzero locally algebraic vectors. This result is the first step in making the connection with the classical Langlands correspondence, and it is also a key ingredient in Emerton's proof [22] of the Fontaine-Mazur conjecture in dimension two (and in most cases). We extend our methods to prove the analogous result for infinitesimal deformations of V. This answers a question of Paskunas and has applications to the Breuil-Mézard conjecture.

We also apply differential methods to study the Jacquet module of $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$. We prove for instance that this module is nonzero if and only if V is trianguline. This has direct applications [14, 19, 35, 36] to conjectures of Berger, Breuil [4] and Emerton [21], describing the space $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$ when V is trianguline.

Finally, in joint work with Benjamin Schraen we prove Schur's lemma for topologically irreducible Banach and locally analytic representations of p-adic Lie groups. This basic result was previously known only for commutative Lie groups and for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (under technical hypotheses). The proof crucially uses recent results of Ardakov and Wadsley [1].

2. For the arithmetic applications, it is crucial to allow more flexibility, by including for instance deformations of V with appropriate determinant ; this is the approach taken in the body of the thesis.

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus profonds à mes directeurs de thèse, Gaëtan Chenevier et Pierre Colmez. Je remercie le premier d'avoir partagé avec moi, et de la manière la plus enthousiaste qu'il soit, ses immenses culture et intuition mathématiques : c'est en particulier grâce à lui que j'ai enfin compris quelque chose-bien que très peu- aux formes automorphes. Il sera plus qu'évident au lecteur combien cette thèse doit au travail monumental [12] de Pierre. Je lui dois quasiment toutes mes connaissances en "p-adique", et bien plus : par exemple, c'est grâce à lui que j'ai enfin compris le sens de l'expression "lord of the rings". Enfin, je les remercie tous les deux pour bon nombre de discussions éclairantes, pour leurs réponses précises à toutes mes questions de débutant [3], ainsi que pour l'indépendance qu'ils m'ont accordée et la motivation qu'ils ont su susciter.

Je tiens à remercier Matthew Emerton et Marie-France Vigneras pour avoir accepté la tâche peu gratifiante de rapporter ce travail et pour leur remarques qui m'ont grandement aidé à améliorer la présentation (et parfois même la compréhension) de ce travail, le tout avec une rapidité qui m'a laissé perplexe... De plus, leurs travaux fondamentaux sur la correspondance de Langlands (soit-elle complexe, l-adique ou p-adique) ont été une source constante d'inspiration et d'admiration.

Je suis très honoré que Laurent Clozel, Guy Henniart et Jean Lannes aient accepté de faire partie de mon jury, malgré un mois de juin épouvantable du point de vue des conférences... Laurent Clozel a beaucoup contribué à mon initiation à la théorie des nombres, à travers une série de cours qu'il a donnés à Orsay pendant mon DEA, mais aussi-et surtout- à travers sa vaste culture mathématique qu'il aime tant partager avec les autres. Merci à Guy Henniart pour ses immenses gentilesse et disponibilité, ainsi que pour ses exposés, qui restent pour moi un modèle de clarté. Et un grand merci à Jean Lannes, sans qui la vie aurait été bien plus dure lors du sprint final.

Cette thèse, tout comme beaucoup d'autres développements de ce sujet, n'aurait jamais existé sans les travaux de Jean-Marc Fontaine et Laurent Berger. A Jean-Marc Fontaine je dois d'ailleurs mon orientation vers ce domaine, grâce à un cours qu'il a donné à Orsay quand j'étais en DEA. A Laurent je dois beaucoup trop de choses pour les énumérer ici. Ses résultats fondamentaux et ses méthodes ont été pour moi une source inépuisable d'inspiration. Mais je le remercie aussi, et surtout, pour sa gentillesse et pour sa disponibilité constantes.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mon amitié à Benjamin Schraen, avec qui j'ai partagé pas mal de questions, et parfois même des réponses (comme en temoigne le premier chapitre de la thèse, qui est le fruit d'un travail commun).

La vie p-adique étant un peu dure [4], j'aimerais remercier ici mes amis pour l'avoir pas mal facilitée. Je vais certainement en oublier quelques-uns, mais je voudrais commencer par ceux qui ont "souffert" en même temps (ou presque) que moi : Ramla Abdellatif, Tony Ly, Stefano Morra, Olivier Taibi, Marco de Ieso, Arthur César le Bras, Raphael Beuzart Plessis, Eugen Hellmann. Je ne compte plus les discussions amusantes/déprimantes/éclairantes que l'on a eues ! Un grand merci à Ramla, pour avoir toujours pris le temps de répondre à mes questions, de m'aider avec la rédaction de la thèse (surtout dans sa forme finale) et pour tous ses conseils. Merci à Stefano pour sa politesse exemplaire ("si je peux me permettre") et son enthousiasme mathématique qui m'a permis de ne pas trop déprimer. D'ailleurs, un grand merci à Tony, Benjamin, Olivier, Raphael et Arthur, pour l'énorme travail fourni cette année dans le cadre d'un groupe de travail un peu délirant [5], mais pendant lequel j'ai appris un nombre incroyable

3. Au fil du temps, l'omniprésente réponse "c'est trivial" devient "ce n'est pas totalement stupide", ensuite "c'est intéressant", puis "je ne sais pas non plus". C'est plutôt rassurant...

4. Pas seulement à cause de l'absence d'une mesure de Haar...

5. C'est en grande partie de ma faute, je sais...

de choses.

Ces deux dernières années, j'ai profité des conditions de travail excellentes et de l'ambiance sympathique du laboratoire de mathématique du C.M.L.S. J'en remercie tous les membres, mais surtout Michèle Lavallette, sans qui la préparation de la soutenance de thèse aurait été nettement plus pénible.

Bon, comme je commence à écrire plus de remerciements que de mathématiques, je vais simplement terminer en remerciant tous ceux qui m'ont rendu la vie agréable ces dernières années, en acceptant notamment (avec parfois des sacrifices...) une cohabitation (au sens large...) inéluctable avec des anneaux de Fontaine.

Chapitre 1

Introduction et présentation des résultats obtenus

On fixe dans toute la suite un nombre premier p et une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$, ainsi qu'une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$, contenant L.

La correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ associe à toute représentation continue $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p) \to \mathrm{GL}_2(L)$ une représentation de Banach $\Pi(\rho)$, définie sur L et munie d'une action continue, unitaire [1] de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Ses propriétés les plus importantes peuvent être résumées en :

• $\Pi(\rho)$ détermine ρ à isomorphisme près.

• $\rho \to \Pi(\rho)$ est compatible avec les twists, la réduction modulo p, et se comporte bien en familles p-adiques (ce qui est fondamental pour les applications arithmétiques).

• $\rho \to \Pi(\rho)$ est compatible avec la correspondance de Langlands locale classique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, via le foncteur de passage aux vecteurs localement algébriques $\Pi \to \Pi^{\mathrm{alg}}$.

• La correspondance de Langlands locale p-adique est compatible avec la cohomologie étale complétée (objet introduit par Emerton).

La construction de cette correspondance est indirecte, passant par la théorie des (φ, Γ)-modules de Fontaine. Il s'agit d'espaces vectoriels D sur un corps un peu compliqué $\mathscr{E}$, et qui sont munis d'actions semi-linéaires d'un Frobénius φ et de $\Gamma = \mathbf{Z}_p^*$ (ces actions doivent commuter et satisfaire certaines conditions techniques). Il n'est souvent pas facile de lire les propriétés de $\Pi(\rho)$ sur ρ.

Le but d'une bonne partie de cette thèse est de faciliter le transfert de ces propriétés (de ρ vers $\Pi(\rho)$), en étudiant l'action de l'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur les vecteurs localement analytiques $\Pi(\rho)^{\mathrm{an}}$ de $\Pi(\rho)$. Même si cela perd pas mal d'information, il se trouve que c'est suffisant pour un certain nombre de résultats, dont les preuves originales étaient difficiles. Mais cette approche a aussi des défauts : elle ne permet pas de montrer la compatibilité avec la correspondance de Langlands locale classique. D'ailleurs, la seule démonstration connue pour l'instant (et due à Emerton) utilise la compatibilité avec la cohomologie complétée, et donc est de nature globale.

Même si notre approche n'est pas assez fine pour décrire $\Pi(\rho)^{\mathrm{alg}}$, elle permet de préciser exactement quand $\Pi(\rho)^{\mathrm{alg}} \neq 0$. La condition est que ρ est "géométrique" (il s'agit d'une notion

1. Cela signifie que $\Pi(\rho)$ admet une norme invariante sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et qui définit la topologie de $\Pi(\rho)$.

délicate de théorie de Hodge p-adique, due à Fontaine). Ce critère avait été démontré par Colmez [12] par voie très détournée et joue un rôle très important dans une généralisation des travaux de Wiles. Combiné à la compatibilité avec la cohomologie, il a permis à Emerton de démontrer un théorème de modularité très puissant, connu sous le nom de "conjecture de Fontaine-Mazur en dimension 2".

Dans la suite de cette introduction, nous allons présenter les résultats obtenus dans cette thèse.

Soit $\chi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{Z}_p^*$ *le caractère cyclotomique ; alors* χ *induit un isomorphisme de* $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$ *sur* $\mathbf{Z}_p^*$*, et on note* $a \mapsto \sigma_a$ *l'isomorphisme réciproque de* $\mathbf{Z}_p^*$ *sur* Γ *(on a donc* $\sigma_a(\zeta) = \zeta^a$ *pour tout* $\zeta \in \mu_{p^\infty}$*).*

1.1 Le lemme de Schur p-adique

Les résultats de cette partie ont été obtenus en collaboration avec Benjamin Schraen [20]. Soit G un groupe de Lie p-adique de dimension finie. Dans [42, 44, 45], Schneider et Teitelbaum ont défini de bonnes catégories de représentations de G sur des L-espaces vectoriels localement convexes et ont étudié certaines de leurs propriétés fonctorielles. Un des résultats basiques de la théorie qui n'était pas établi était le lemme de Schur pour les objets irréductibles de ces catégories. En utilisant la correspondance de Langlands locale p-adique, Paskunas [38] a démontré ce résultat pour $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et $p \geq 5$ (il y a d'autres hypothèses techniques, comme la présence d'un caractère central ou l'unitarité).

Notre but est de démontrer le lemme de Schur en toute généralité. Commençons par définir une des catégories de représentations introduite par Schneider et Teitelbaum. Il s'agit de la catégorie $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ des L-représentations de Banach admissibles de G. Par définition, un objet de cette catégorie est un L-espace de Banach Π muni d'une action continue de G, tel qu'il existe $n \geq 1$, un sous-groupe ouvert compact H de G et une immersion fermée H-équivariante de Π dans $\mathscr{C}(H, L)^n$. Ici $\mathscr{C}(H, L)$ est l'espace des fonctions continues sur H à valeurs dans L.

L'analogue localement analytique $\mathrm{LA}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ de $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ est nettement plus technique et nous renvoyons le lecteur au chapitre 2 pour les détails. Précisons seulement qu'il ne s'agit pas simplement de remplacer $\mathscr{C}(H, L)$ par l'espace des fonctions localement analytiques sur H, et que les constructions utilisent la théorie p-adique des algèbres de Fréchet-Stein et des modules coadmissibles sur ces algèbres [45]. L'exemple fondamental d'une telle algèbre est l'algèbre des distributions sur un groupe de Lie p-adique compact et l'application des constructions de [45] à cette algèbre permet de construire $\mathrm{LA}_L^{\mathrm{adm}}(G)$. Notre résultat principal s'énonce alors :

Théorème 1.1.1. *Soit* G *un groupe de Lie* p*-adique de dimension finie et soit* Π *un objet topologiquement irréductible de la catégorie* $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ *(resp.* $\mathrm{LA}_L^{\mathrm{adm}}(G)$*). Alors*

a) L'algèbre $\mathrm{End}_{\mathrm{L[G]}}(\Pi)$ *des endomorphismes continus* G*-équivariants de* Π *est une algèbre à division de dimension finie sur* L*.*

b) Π *est absolument irréductible (i.e.* $\Pi \otimes_L L'$ *est irréductible pour toute extension finie* L' *de* L*) si et seulement si* $\mathrm{End}_{\mathrm{L[G]}}(\Pi) = \mathrm{L}$*.*

c) Il existe une extension finie Galoisienne L'/L *et un nombre fini d'objets absolument irréductibles* $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_s$ *de* $\mathrm{Ban}_{L'}^{\mathrm{adm}}(G)$ *(resp.* $\mathrm{LA}_{L'}^{\mathrm{adm}}(G)$*) tels que* $\Pi \otimes_L L' \simeq \Pi_1 \oplus \Pi_2 \oplus ... \oplus \Pi_s$*.*

La preuve de ce résultat est assez détournée. L'ingrédient le plus délicat est une version p-adique du lemme de Quillen [40], due à Ardakov et Wadsley [1]. Combiné à l'étude des algèbres

des distributions des groupes p-adiques faite dans [45], cela nous permet de montrer que les éléments de $\mathrm{End}_{\mathrm{L[G]}}(\Pi)$ sont algébriques sur L. Pour démontrer la finitude de $\mathrm{End}_{\mathrm{L[G]}}(\Pi)$ sur L, nous montrons le résultat suivant, qui généralise le fait que les extensions algébriques et complètes de $\mathbf{Q}_p$ sont finies sur $\mathbf{Q}_p$.

Théorème 1.1.2. *Soit A une L-algèbre de Fréchet, dont tout élément est algébrique sur $\mathbf{Q}_p$. Si A est une algèbre à division, alors* $\dim_L(A) < \infty$.

1.2 (φ,Γ)-modules et représentations p-adiques

Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et soient $\mathscr{R}$ l'anneau de Robba [2], $\mathscr{E}^\dagger$ le sous-anneau de $\mathscr{R}$ des éléments bornés (c'est un corps) et $\mathscr{E}$ le complété de $\mathscr{E}^\dagger$ pour la valuation p-adique. On munit ces anneaux d'actions continues de Γ et d'un Frobenius φ, commutant entre elles, en posant $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$ et $\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1$ si $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

Soit V une L-représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, i.e. un L-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action L-linéaire continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$. La théorie de Fontaine [26], complétée par des travaux de Cherbonnier-Colmez [7], Berger [2] et Kedlaya [31], associe à V des modules $D = D(V)$, $D^\dagger$, D_{rig}, libres de rang $\dim_L(V)$ sur $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$, munis d'une action semi-linéaire de Γ et d'un Frobenius φ semi-linéaire, commutant à Γ (le module $D^\dagger$ n'a pas d'intérêt propre, mais il permet de passer de D à D_{rig} et vice-versa).

On dispose sur $\Delta \in \{D, D^\dagger, D_{\mathrm{rig}}\}$ d'un inverse à gauche ψ de φ qui commute à Γ et qui joue un rôle crucial dans toute la théorie. La définition utilise le fait que tout $z \in \Delta$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i \cdot \varphi(z_i)$, avec $z_i \in \Delta$, ce qui permet de poser $\psi(z) = z_0$.

Soient $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to O_L^*$ un caractère unitaire, V et D comme ci-dessus et soit $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Dans [12] on associe à la paire (D,δ) un faisceau G-équivariant $U \to D \boxtimes_\delta U$ sur la droite projective $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ (qui, elle, est munie de l'action usuelle de G, définie par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) z = \frac{az+b}{cz+d}$). La restriction de ce faisceau à $\mathbf{Z}_p$, munie de l'action du monoïde $P^+ = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ satisfait aux propriétés suivantes (qui la caractérisent) :

- Pour tous $n \geq 0$ et $a \in \mathbf{Z}_p$, on a

$$D \boxtimes_\delta (a + p^n \mathbf{Z}_p) = (1+T)^a \cdot \varphi^n(D) \subset D$$

et l'application de restriction $\mathrm{Res}_{a+p^n\mathbf{Z}_p} : D = D \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p \to D \boxtimes_\delta (a + p^n \mathbf{Z}_p)$ est

$$\mathrm{Res}_{a+p^n\mathbf{Z}_p} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^n \circ \psi^n \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),$$

$\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ agissant par multiplication par $(1+T)^a$ sur D.

- L'action de P^+ est donnée sur $D \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p$ par

$$\left(\begin{smallmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z = (1+T)^b \cdot \varphi^k(\sigma_a(z))$$

pour $z \in D$ et $k \geq 0$, $a \in \mathbf{Z}_p^*$, $b \in \mathbf{Z}_p$.

Les formules donnant l'action de G tout entier sont nettement plus compliquées que celles ci-dessus, mais sont en fait inutiles pour la plupart des applications. Un point important est que le centre de G agit à travers le caractère δ.

2. Il s'agit de l'anneau des séries de Laurent $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n T^n$ à coefficients dans L, qui convergent sur une couronne du type $0 < v_p(T) \leq r$, où r dépend de la série.

Soit $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in G$ et soit w_δ la restriction de w à $D \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$ (qui, lui, s'identifie à $D^{\psi=0}$). C'est une involution continue de $D \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$. Comme $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ est obtenu par recollement à partir de $\mathbf{Z}_p$ et $w \cdot \mathbf{Z}_p$ le long de $\mathbf{Z}_p^*$, on peut décrire l'espace des sections globales du faisceau attaché à (D, δ) par

$$D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in D \times D | \quad \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_2) = w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1))\}.$$

Si U est un ouvert compact de $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, on dispose d'une application de prolongement par 0 de $D \boxtimes_\delta U$ dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, ce qui permet en particulier de voir D comme un sous-module de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$.

1.3 Paires G-compatibles et la catégorie $\mathrm{Rep}_L(G)$

Le (φ, Γ)-module D admet, par définition, un[3] $O_{\mathscr{E}}$-réseau D_0, stable par φ et Γ. On montre [11, prop. II.6.3] qu'il existe un plus petit sous-$O_L[[T]]$-module compact $D_0^\natural$ de D_0 qui est stable par ψ et qui engendre D_0. Le module $D^\natural = L \otimes_{O_L} D_0^\natural$ ne dépend pas du choix de D_0 et permet de définir un sous-espace de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ par

$$D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \left\{ z \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \mid \quad \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\right) \in D^\natural, \quad \forall n \geq 0 \right\}.$$

Par construction, $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable sous l'action du Borel supérieur B de G et fermé dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. En utilisant les théorèmes d'Amice et Mahler (convenablement interprétés en termes d'anneaux de Fontaine, cf. [12]), il est facile de démontrer que $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G tout entier si D est de dimension 1 et si δ est quelconque. C'est loin d'être le cas en général.

Définition 1.3.1. On dit que la paire (D, δ) est *G-compatible* si $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G. Dans ce cas, on pose

$$\Pi(D, \delta) = (D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1).$$

Un point essentiel dans la théorie est la dualité. Soit $\check{D}$ l'objet attaché à $V^*(1)$ (rappelons que D est attaché à une L-représentation V de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$). Le résultat suivant est un des points clés du chapitre II de [12]. On en donne une preuve différente.

Théorème 1.3.2. *Si (D, δ) est une paire G-compatible, alors $(\check{D}, \delta^{-1})$ l'est aussi. De plus, on a un isomorphisme canonique de G-modules topologiques $\Pi(D, \delta)^* \simeq \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, et donc une suite exacte de G-modules topologiques*

$$0 \to \Pi(\check{D}, \delta^{-1})^* \to D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to \Pi(D, \delta) \to 0.$$

Soit $\mathrm{Rep}_L(G)$ la catégorie des L-espaces de Banach Π munis d'une action continue de G et ayant les propriétés suivantes :

- Π admet un caractère central.
- Il existe un O_L-réseau Θ de Π, ouvert, borné, stable sous l'action de G, et[4] tel que $\Theta/\pi_L\Theta$ soit une k_L-représentation de longueur finie de G.

Alors $\mathrm{Rep}_L(G)$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie des représentations de Banach unitaires et admissibles, au sens de Schneider et Teitelbaum.

3. $O_{\mathscr{E}}$ est l'anneau des entiers de $\mathscr{E}$ pour la norme de Gauss.
4. π_L est une uniformisante de L et k_L est le corps résiduel de L.

Proposition 1.3.3. *Si (D,δ) est une paire G-compatible, alors $\Pi(D,\delta)$ est un objet de $\mathrm{Rep}_L(G)$.*

Définition 1.3.4. a) On dit qu'un objet Π de $\mathrm{Rep}_L(G)$ est *ordinaire* si Π est un sous-quotient d'une induite parabolique d'un caractère unitaire.

b) Une représentation $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ est dite *supersingulière* si elle est absolument (topologiquement) irréductible et non ordinaire.

Par un théorème fondamental de Colmez [12] et Kisin [32], si V est absolument irréductible de dimension 2, alors[5] $(D, \chi^{-1}\det V)$ est une paire G-compatible et la représentation $\Pi(D,\chi^{-1}\det V)$ est supersingulière. De plus, les travaux de Paskunas [38] montrent qu'au moins pour $p \geq 5$ toute représentation supersingulière de $\mathrm{Rep}_L(G)$ est attachée à une unique (à isomorphisme près) représentation V comme ci-dessus.

Définition 1.3.5. Soit $\mathrm{Irr}_2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p))$ l'ensemble des L-représentations absolument irréductibles, de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$. Si $V \in \mathrm{Irr}_2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p))$ on note $\delta_V = \chi^{-1}\cdot\det V$ et on appelle $(D(V),\delta_V)$ la paire G-compatible associée à V. On note $\Pi(V) = \Pi(D(V),\delta_V)$.

On dispose [12, chap. IV] d'un foncteur contravariant exact $\Pi \to D(\Pi)$ de la catégorie $\mathrm{Rep}_L(G)$ dans la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}$ (qui, elle, est équivalente à la catégorie des L-représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ par un théorème de Fontaine [26]). Un point important[6] est que la paire $(D(\Pi),\delta^{-1})$ est G-compatible pour tout $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ de caractère central δ. Pour l'appliquer à l'étude de $\mathrm{Rep}_L(G)$, nous démontrons le résultat suivant, qui montre que $D(\Pi)$ contient presque toute l'information contenue dans Π. Notons que tous les résultats que nous prouvons n'ont pas de restriction sur p, car nous n'utilisons pas les résultats les plus profonds de la correspondance de Langlands locale p-adique (voir la discussion qui précède la définition 1.3.5), qui ont parfois des restrictions sur p.

Théorème 1.3.6. *Soit $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$, de caractère central δ. Il existe des $L[G]$-modules de dimension finie K_1 et K_2 tels que l'on ait une suite exacte de G-modules topologiques*

$$0 \to K_1 \to \Pi(\check{D}(\Pi),\delta) \to \Pi/\Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} \to K_2 \to 0.$$

Les espaces K_1 et K_2 sont en général nuls ; c'est par exemple le cas (au moins si $p \geq 5$) si les composantes de Jordan-Hölder de Π sont supersingulières. Une conséquence du théorème 1.3.6 et des résultats de [11] est alors le

Corollaire 1.3.7. *Tout objet de $\mathrm{Rep}_L(G)$ est un B-module topologiquement de longueur finie.*

Notons que si $p \geq 5$ et si Π est une G-représentation de Banach unitaire, admissible et topologiquement de longueur finie, alors $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ (le point à démontrer est que la réduction modulo p d'un réseau de Π est de longueur finie). Il s'agit d'un des résultats principaux du travail monumental [38] de Paskunas.

Une application des théorèmes 1.3.2 et 1.3.6 est le résultat suivant, qui n'est malheureusement pas optimal (dans [38], Paskunas a démontré que sous les hypothèses du corollaire et si $p \geq 5$, alors $D(\Pi)$ est de dimension 2). Par contre, il est vrai pour tout p et il permet déjà d'établir un certain nombre de résultats nontriviaux concernant $\mathrm{Rep}_L(G)$.

Corollaire 1.3.8. *Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ est supersingulière, alors $D(\Pi)$ est absolument irréductible, de dimension ≥ 2 et on a des isomorphismes de G-modules topologiques*

$$\Pi \simeq \Pi(\check{D}(\Pi),\delta), \quad \Pi^* \simeq D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 .$$

5. On note χ le caractère cyclotomique et on voit les caractères galoisiens comme des caractères de $\mathbf{Q}_p^*$ par la théorie locale du corps de classes.

6. Il s'agit d'un des résultats centraux du chapitre IV de [12].

1.4 Vecteurs localement analytiques

Le théorème suivant étend le résultat principal de [12, chap. V] à toutes les paires G-compatibles. Si (D, δ) est une telle paire, on note

$$D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = (D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \cap (D^\dagger \times D^\dagger),$$

que l'on munit de la topologie induite par l'inclusion dans $D^\dagger \times D^\dagger$ (et non par l'inclusion dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$).

Théorème 1.4.1. *Soit (D, δ) une paire G-compatible. Alors $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G et l'inclusion de $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ induit un isomorphisme de G-modules topologiques*

$$(D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \simeq \Pi(D, \delta)^{\mathrm{an}}.$$

La preuve de ce résultat est fort technique et suit, pour une bonne partie, les arguments de loc.cit. Il y a quand même des différences notables entre notre approche et celle de loc.cit : nous démontrons directement que les vecteurs localement analytiques se relèvent à $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et nous faisons l'étude de $\Pi(D, \delta)^{\mathrm{an}}$ à travers les coefficients de Mahler des applications orbite des vecteurs localement analytiques. Cela nous permet d'éviter les arguments de théorie de Hodge p-adique et dualité de [12]. Signalons un sous-produit de notre preuve, qui ne découle pas de l'approche de loc.cit, et qui ne semble pas être facile à démontrer directement :

Proposition 1.4.2. *Soit $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ supersingulière et soit $v \in \Pi$. Si les applications $x \to \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v$ et $x \to \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{smallmatrix}\right) v$ sont localement analytiques (de $\mathbf{Q}_p$ dans Π), alors $v \in \Pi^{\mathrm{an}}$.*

Soit (D, δ) une paire G-compatible. Il découle de la preuve du théorème 1.4.1 que l'involution w_δ de $D^{\psi=0} = D \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$ préserve $(D^\dagger)^{\psi=0}$ et agit continûment sur cet espace, ce qui permet d'étendre par continuité w_δ à $D_{\mathrm{rig}}^{\psi=0}$ (dans lequel $(D^\dagger)^{\psi=0}$ est dense). Cela permet de définir un faisceau G-équivariant sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, en représentations localement analytiques, dont les sections globales sont données par

$$D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in D_{\mathrm{rig}} \times D_{\mathrm{rig}} | \quad \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_2) = w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1))\}.$$

Nous obtenons le théorème suivant comme conséquence du théorème 1.4.1. Notons que notre approche est tout à fait orthogonale à celle de [12], qui prend le chemin inverse.

Théorème 1.4.3. *Soit (D, δ) une paire G-compatible. Alors on a une suite exacte canonique de G-modules topologiques*

$$0 \to (\Pi(\check{D}, \delta^{-1})^{\mathrm{an}})^* \to D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to \Pi(D, \delta)^{\mathrm{an}} \to 0.$$

1.5 Actions infinitésimales

Si (D, δ) est une paire G-compatible, on déduit des théorèmes 1.4.1 et 1.4.3 que $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est un module sous l'action de l'algèbre enveloppante [7] $U(\mathfrak{gl}_2)$ de $\mathrm{Lie}(G)$, et cette action stabilise $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta U$ pour tout ouvert compact U de $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$; en particulier, cette action stabilise le sous-module $D_{\mathrm{rig}} = D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p$.

Soit alors

$$h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \quad u^+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad u^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

7. C'est même un module sur l'algèbre des distributions sur un sous-groupe ouvert compact de G.

la base usuelle de $\mathfrak{sl}_2$, de sorte que $\mathrm{I}_2 = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, u^+, u^-, h forment une base de $\mathfrak{gl}_2$. L'élément de Casimir

$$C = u^+u^- + u^-u^+ + \frac{1}{2}h^2 \in U(\mathfrak{sl}_2),$$

qui engendre le centre de l'algèbre $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)$, joue un rôle essentiel dans la suite. C'est en effet cet élément qui nous permet de relier l'action infinitésimale de G sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ à l'action infinitésimale de Γ sur D_{rig}. Rappelons que, d'après Berger [2], cette action de Γ est donnée par la connexion

$$\nabla(z) = \lim_{a\to 1} \frac{\sigma_a(z) - z}{a-1}.$$

Si V est la représentation attachée à D, Sen [41] a défini un sous-espace D_{Sen} de $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ stable par Γ et sur lequel l'action de Γ s'étend en une action linéaire de ∇. Les valeurs propres de l'endomorphisme Θ_{Sen} de D_{Sen} ainsi défini sont les poids de Hodge-Tate généralisés de V. Par exemple, si $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to O_L^*$ est un caractère unitaire, le poids de Hodge-Tate généralisé du caractère galoisien attaché à δ par la théorie locale du corps de classes est $w(\delta) = \delta'(1)$. Enfin, si V est de Hodge-Tate, alors les poids de Hodge-Tate généralisés sont les poids usuels (avec la convention que le poids de $\mathbf{Q}_p(1)$ est 1). Un des nos résultats principaux est alors le suivant.

Théorème 1.5.1. *Soit (D, δ) une paire G-compatible.*

i) L'élément de Casimir C est un endomorphisme du (φ, Γ)-module D_{rig}.

ii) Si $\mathrm{End}(D) = L$, et si $\alpha \in L$ est le scalaire par lequel C agit sur D_{rig}, alors

$$(2\Theta_{\mathrm{Sen},D} - (1 + w(\delta)) \cdot \mathrm{id})^2 = (2\alpha + 1) \cdot \mathrm{id}.$$

Le premier point est une conséquence formelle du fait que C engendre le centre de $U(\mathfrak{sl}_2)$. La deuxième partie utilise la théorie de Hodge p-adique, en particulier les techniques différentielles de Berger et Fontaine [2, 27].

Soit $t = \log(1 + T) \in \mathscr{R}$ le $2i\pi$ p-adique de Fontaine. L'énoncé suivant admet une version pour toute paire G-compatible, mais pour simplifier on ne donne qu'un cas particulier, plus parlant. Il répond à une question de Harris [21, remark 3.3.8].

Corollaire 1.5.2. *Soit $V \in \mathrm{Irr}_2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p))$, à poids de Hodge-Tate a, b, et soit $(D(V), \delta_V)$ la paire G-compatible associée à V. Alors l'action de $\mathfrak{gl}_2$ sur $D(V)_{\mathrm{rig}}$ est donnée par $\mathrm{I}_2(z) = (a + b - 1)z$,*

$$u^-(z) = -\frac{(\nabla - a)(\nabla - b)(z)}{t}, \quad h(z) = 2\nabla(z) - (a + b - 1)z, \quad u^+(z) = tz.$$

De plus, l'élément de Casimir C agit par multiplication par $\frac{(a-b)^2-1}{2}$ sur $D(V)_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et donc sur $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$.

Si $a, b \in L$, l'espace des représentations V dont les poids de Hodge-Tate généralisés sont a, b est une variété de dimension 3. Les représentations de Banach attachées à ces représentations galoisiennes ont le même caractère infinitésimal d'après le corollaire 1.5.2, mais elles sont deux à deux non isomorphes (la correspondance de Langlands locale p-adique étant injective). On voit ainsi qu'il y a une infinité de représentations de Banach de G, absolument irréductibles, unitaires, admissibles, ayant le même caractère infinitésimal. Cela ne se produit pas dans la théorie classique des représentations unitaires des groupes réels (semi-simples, mais oublions cela pour un moment), d'après des résultats classiques de Harish-Chandra.

Si $p \geq 5$, la première partie du résultat suivant (obtenu en combinant le théorème 1.5.1 et le corollaire 1.3.8) est une conséquence immédiate des travaux de Paskunas [38].

Corollaire 1.5.3. *Si* $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ *est supersingulière, alors* $D(\Pi)$ *a au plus* 2 *poids de Hodge-Tate généralisés distincts. Plus précisément, si* $\alpha \in L$ *est le scalaire par lequel agit l'élément de Casimir sur* Π^{an}*, alors on a une égalité*

$$(2\Theta_{\mathrm{Sen},\check{D}(\Pi)} - (1 + w(\delta)) \cdot \mathrm{id})^2 = (2\alpha + 1) \cdot \mathrm{id}.$$

Le résultat suivant répond à une question de Harris. C'est la version localement analytique d'un résultat de Morra [37], qui démontre l'analogue de ce résultat pour les représentations modulo p de G.

Théorème 1.5.4. *Soit* E *une extension quadratique de* $\mathbf{Q}_p$*, et regardons* E^* *comme un sous-groupe de* G*. Si* $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ *est absolument irréductible et non ordinaire, alors pour tout caractère* $\delta : E^* \to L^*$ *on a* $\mathrm{Hom}_{E^*}(\Pi^{\mathrm{an}}, \delta) = 0$.

1.6 Vecteurs localement algébriques et représentations de de Rham

Les résultats de cette partie représentent le coeur de cette thèse et la motivation pour les autres résultats obtenus. Le premier est une nouvelle preuve d'un des résultats principaux de [12] (loc.cit, thm. VI.6.13 et VI.6.18).

Théorème 1.6.1. *Soit* $V \in \mathrm{Irr}_2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p))$ *et soit* $\Pi(V)$ *la représentation de* G *attachée à* V *par la correspondance de Langlands locale* p*-adique. Alors* $\Pi(V)$ *a des vecteurs localement algébriques non nuls si et seulement si* V *est de de Rham, à poids de Hodge-Tate distincts.*

Le théorème 1.6.1 joue un rôle crucial dans la preuve de la conjecture de Fontaine-Mazur en dimension 2 (sous certaines hypothèses faibles) par Emerton [22]. Il joue aussi un rôle important dans la preuve par Kisin [33] de la même conjecture (mais Kisin a besoin d'informations plus fines concernant les vecteurs localement algébriques).

Notre démonstration du théorème 1.6.1 est nettement plus directe que celle de [12], qui repose sur deux généralisations des lois de réciprocité explicites de Kato [30] et Perrin-Riou [39], [9]. L'ingrédient principal de la preuve est l'analyse de l'action infinitésimale de l'unipotent inférieur sur un sous-espace $\Pi(V)_c^{P-\mathrm{alg}}$, dont la construction est directement inspirée par la théorie classique du modèle de Kirillov.

La preuve du résultat suivant suit le même chemin, mais est techniquement plus compliquée. C'est d'ailleurs ce résultat qui a motivé l'extension aux paires G-compatibles des principaux résultats de [12].

Théorème 1.6.2. *Soit* D *un* (φ, Γ)*-module étale,* $E \in \mathrm{Ext}^1(D, D)$ *et* δ *un caractère unitaire tel que les paires* (D, δ) *et* (E, δ) *soient* G*-compatibles*[8]*. Supposons que* $\Pi(D, \delta)^{\mathrm{alg}} \neq 0$*. Alors* $\Pi(E, \delta)^{\mathrm{alg}}$ *est dense dans* $\Pi(E, \delta)$ *si et seulement si* E *est de de Rham, auquel cas on a une suite exacte de* G*-modules*

$$0 \to \Pi(D, \delta)^{\mathrm{alg}} \to \Pi(E, \delta)^{\mathrm{alg}} \to \Pi(D, \delta)^{\mathrm{alg}} \to 0.$$

En fait, l'hypothèse $\Pi(E)^{\mathrm{alg}} \neq \Pi(D)^{\mathrm{alg}}$ est suffisante pour montrer que E est de de Rham. Nous avons préféré l'énoncé plus faible ci-dessus, car c'est celui qui se généralise bien. En effet, dans une première étape on déduit des théorèmes 1.3.6, 1.6.2, des résultats de Paskunas [38] et du corollaire 1.3.8, le résultat suivant qui répond à une question de Paskunas. L'hypothèse $p \geq 5$ est due au fait que les résultats de [38] sont connus pour l'instant seulement dans ce cas.

8. Il suffit que (E, δ) le soit, car alors (D, δ) l'est automatiquement.

Corollaire 1.6.3. *Soit $p \geq 5$ et soit $0 \to \Pi \to B \to \Pi \to 0$ une suite exacte dans $\mathrm{Rep}_L(G)$, avec Π supersingulière. Supposons que $\Pi^{\mathrm{alg}} \neq 0$. Alors B^{alg} est dense dans B si et seulement si $V(B)$ est de de Rham, auquel cas on a une suite exacte de G-modules*

$$0 \to \Pi^{\mathrm{alg}} \to B^{\mathrm{alg}} \to \Pi^{\mathrm{alg}} \to 0.$$

Ensuite, en utilisant les résultats de [38], le corollaire ci-dessus entraîne le résultat général suivant :

Corollaire 1.6.4. *Soit $p \geq 5$ et $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$. Si Π^{alg} est dense dans Π, alors l'image de Π par le foncteur de Montréal est une représentation de de Rham.*

1.7 Représentations triangulines et modules de Jacquet analytiques

Soit $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Si π est une L-représentation localement analytique de G, on note $J(\pi)$ son module de Jacquet naïf, quotient de π par l'adhérence du sous-espace engendré par les vecteurs $(u-1)\cdot v$, où $u \in U$ et $v \in \pi$. Le dual[9] de $J(\pi)$ est $J^*(\pi) = (\pi^*)^U$ et c'est naturellement une représentation localement analytique du tore diagonal de G.

La preuve du résultat suivant un bon nombre de résultats énoncés ci-dessus.

Théorème 1.7.1. *Pour tout $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$, le L-espace vectoriel $J^*(\Pi^{\mathrm{an}})$ est de dimension finie.*

Pour préciser ce résultat, on va se placer dans une situation plus simple et nous aurons besoin de quelques préliminaires. Supposons dans la suite que $V \in \mathrm{Irr}_2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p))$ et que $(D,\delta) = (D(V), \delta_V)$ est la paire G-compatible qui lui est attachée. Rappelons que dans [10] est défini un espace $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$ de représentations irréductibles de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, appellées *triangulines*. Un point de $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$ est un triplet $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$, où $\delta_1, \delta_2 : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$ sont des caractères continus et $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(L)$ si $\delta_1 = x^k \chi \delta_2$ ($k \in \mathbf{N}$), ou $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^0(L) = \{\infty\}$ si $\delta_1 \notin \{x^k \chi \delta_2,\ k \in \mathbf{N}\}$. Si $s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$, on note $w(s) = w(\delta_1) - w(\delta_2)$, $V(s)$ la représentation associée et $D_{\mathrm{rig}}(s)$ son (φ, Γ)-module sur l'anneau de Robba. Par construction, on a une suite exacte

$$0 \to \mathscr{R}(\delta_1) \to D_{\mathrm{rig}}(s) \to \mathscr{R}(\delta_2) \to 0,$$

dont la classe d'isomorphisme est déterminée par $\mathscr{L}$.

Le résultat suivant est l'analogue p-adique d'un résultat classique de la théorie des représentations lisses, et confirme le principe selon lequel les représentations triangulines correspondent aux G-représentations de la série principale unitaire [13].

Théorème 1.7.2. *Soit $V \in \mathrm{Irr}_2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p))$. Alors $J^*(\Pi^{\mathrm{an}}(V))$ est un L-espace vectoriel de dimension au plus 2 et il est non nul si et seulement si V est trianguline.*

Ce théorème est aussi démontré dans [14, th. 0.1], en utilisant l'action de φ sur D_{rig}. Notre approche est orthogonale (elle utilise l'action infinitésimale de Γ au lieu de celle de φ) : le corollaire 1.5.2 montre que le noyau de u^+ sur $(\Pi^{\mathrm{an}}(V))^*$ s'identifie à l'espace des solutions de l'équation différentielle $(\nabla - a)(\nabla - b)z = 0$, où $z \in D_{\mathrm{rig}}$ et a et b sont les poids de Hodge-Tate généralisés de V. Cela ramène l'étude de $J^*(\Pi^{\mathrm{an}}(V))$ à la résolution de cette équation différentielle, ce qui se fait de manière plus ou moins directe.

9. Tous les duaux que l'on considère sont topologiques.

Pour énoncer le résultat que l'on obtient, rappelons que l'espace $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$ admet une partition $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}} = \mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}} \amalg \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}} \amalg \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$, où

- $\mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}} = \{s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}} | w(s) \in \mathbb{N}^*, w(s) > v_p(\delta_1(p)) \quad \text{et} \quad \mathscr{L} = \infty\}$.
- $\mathscr{S}_*^{\mathrm{st}} = \{s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}} | w(s) \in \mathbb{N}^*, w(s) > v_p(\delta_1(p)) \quad \text{et} \quad \mathscr{L} \neq \infty\}$.
- $\mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}} = \{s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}} | w(s) \notin \mathbb{N}^*\}$.

Par exemple, supposons que δ_1 est localement algébrique. Si $V \in \mathrm{Irr}_2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p))$, alors

- V correspond à un point de $\mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ si et seulement si V devient cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$;
- V correspond à un point de $\mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$ si et seulement si V est une tordue par un caractère d'ordre fini d'une représentation semi-stable non cristalline.

Soit enfin $\delta_1 \otimes \delta_2$ le caractère $(a, d) \to \delta_1(a)\delta_2(d)$ du tore diagonal T de G. Le résultat suivant précise le théorème 1.7.2 et correspond à [14, th. 0.6].

Théorème 1.7.3. *Soit $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$ et soit $\Pi(s) = \Pi(V(s))$.*

1) Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$ ou si $w(s) \notin \mathbf{Z}^*$, alors $J^*(\Pi(s)^{\mathrm{an}}) = \delta_1^{-1} \otimes \delta_2^{-1}\chi$.

2) Si $w(s) \in \{..., -2, -1\}$, alors $J^*(\Pi(s)^{\mathrm{an}}) = (\delta_1^{-1} \otimes \delta_2^{-1}\chi) \oplus (x^{w(s)}\delta_1^{-1} \otimes x^{-w(s)}\delta_2^{-1}\chi)$.

3) Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$, alors $J^*(\Pi(s)^{\mathrm{an}}) = (\delta_1^{-1} \otimes \delta_2^{-1}\chi) \oplus (x^{-w(s)}\delta_2^{-1} \otimes x^{w(s)}\delta_1^{-1}\chi)$ si s est non exceptionnel (i.e. si $\delta_1 \neq x^{w(s)}\delta_2$) et $J^*(\Pi(s)^{\mathrm{an}}) = (\delta_1^{-1} \otimes \delta_2^{-1}\chi) \otimes \begin{pmatrix} 1 & v_p(a/d) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans le cas contraire.

Comme nous l'avons mentionné, toutes les paires (D, δ), avec D de dimension 1, sont G-compatibles. Nous avons supposé partout que δ est un caractère unitaire. On vérifie que l'on peut construire (de la même manière) des G-modules topologiques $\mathscr{R} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ pour tout caractère continu $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$. Le théorème ci-dessous est un des résultats principaux du chapitre 7. On le démontre en explicitant l'involution w_{δ_V} sur $D_{\mathrm{rig}}^{\psi=0}$, ce qui utilise les résultats précédents concernant les modules de Jacquet analytiques (en fait, seulement le fait qu'ils sont non nuls dans le cas triangulin).

Théorème 1.7.4. *Soit $s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$. La suite exacte $0 \to \mathscr{R}(\delta_1) \to D_{\mathrm{rig}} \to \mathscr{R}(\delta_2) \to 0$ induit une suite exacte de G-modules topologiques (avec $\delta_D = \chi^{-1}\delta_1\delta_2$)*

$$0 \to (\mathscr{R} \boxtimes_{\delta_D \cdot \delta_1^{-2}} \mathbf{P}^1) \otimes \delta_1 \to D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\delta_D} \mathbf{P}^1 \to (\mathscr{R} \boxtimes_{\delta_D \cdot \delta_2^{-2}} \mathbf{P}^1) \otimes \delta_2 \to 0.$$

Ce résultat est démontré dans [14, th. 4.6], ainsi que dans [36] (prop. 6.8) par des méthodes différentes. Il permet de donner [14, th.07] une description complète de la représentation Π^{an}, confirmant ainsi des conjectures de Berger, Breuil et Emerton [4, 21]. Par exemple, une conséquence facile du théorème 1.7.4 est le fait que

$$(\Pi^{\mathrm{an}})^{\mathrm{ss}} = (\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \chi^{-1}\delta_2))^{\mathrm{ss}} \oplus (\mathrm{Ind}_B^G(\delta_2 \otimes \chi^{-1}\delta_1))^{\mathrm{ss}}$$

et que, pour s générique [10] on a une suite exacte de G-modules topologiques

$$0 \to \mathrm{Ind}^{\mathrm{an}}(\delta_2 \otimes \chi^{-1}\delta_1) \to \Pi^{\mathrm{an}} \to \mathrm{Ind}^{\mathrm{an}}(\delta_1 \otimes \chi^{-1}\delta_2) \to 0.$$

L'étude est plus délicate quand s est spécial, cf. [14].

10. Cela signifie que $\frac{\delta_1}{\chi\delta_2}$ n'est pas de la forme x^k, avec $k \in \mathbf{N}$; en particulier, $s \notin \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$.

On en déduit que $\Pi(D,\delta)^{\mathrm{an}}$ est de longueur finie dans le cas triangulin. Ceci devrait être vrai en général, mais nous ne savons pas le prouver. Notons que dans la théorie des groupes réels, ce résultat est une conséquence formelle du fait qu'il y a seulement un nombre fini de (classes de) représentations unitaires irréductibles ayant un caractère infinitésimal donné, mais comme on l'a remarqué ces résultats ne sont plus valables en p-adique.

Finissons une introduction avec un résultat de densité qui renforce un des résultats principaux de [45] dans le cas particulier $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et pour les représentations de $\mathrm{Rep}_L(G)$. Nous pensons qu'il est vrai en général, mais déjà pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ notre preuve est bien détournée. Si π est une représentation localement analytique de G, soit $\pi^{U-\mathrm{fini}}$ l'espace des vecteurs v qui sont tués par une puissance de l'opérateur u^+ (rappelons qu'il s'agit de l'action infinitésimale de l'unipotent supérieur). Il n'est nullement évident si cet espace est non nul en général. Cependant, on a le résultat suivant :

Théorème 1.7.5. *Soit* $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ *supersingulière.*

a) $(\Pi^{\mathrm{an}})^{U-\mathrm{fini}}$ *est un sous-espace dense de* Π.

b) Supposons[11] *que* $\dim_L V(\Pi) = 2$. *Alors* $(\Pi^{\mathrm{an}})^{U-\mathrm{fini}}$ *est dense dans* Π^{an} *si et seulement si* $V(\Pi)$ *n'est pas trianguline.*

On renvoie au chapitre 8 pour la preuve un peu acrobatique de ce résultat.

11. Cela est automatique pour $p \geq 5$, d'après [38].

Chapitre 2

Endomorphismes des représentations p-adiques de groupes de Lie p-adiques

Les résultats de ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec Benjamin Schraen [20]. On démontre le lemme de Schur pour les représentations de Banach et localement analytiques admissibles, topologiquement irréductibles d'un groupe de Lie p-adique. Les ingrédients principaux sont une version [1] p-adique du lemme de Quillen d'Ardakov et Wadsley [1], l'étude fine des algèbres de distributions sur un groupe de Lie p-adique, faite par Schneider et Teitelbaum [45] (en s'appuyant sur le travail monumental de Lazard [34]) et un résultat d'algèbre non commutative de Kaplansky [29]. Le lemme de Schur n'était connu que pour les représentations de Banach unitaires admissibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, avec $p \geq 5$, démontré par Paskunas (la preuve utilise pleinement la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$). Voir [3] pour ce que l'on sait (beaucoup moins...) concernant le lemme de Schur pour les représentations lisses irréductibles modulo p des groupes de Lie p-adiques.

Dans la suite "groupe de Lie p-adique" signifie "groupe localement $\mathbf{Q}_p$-analytique". Si G est compact, on note $\Lambda(G) = O_L[[G]]$ l'algèbre de groupe complétée de G (sur O_L), limite inverse des algèbres de groupe $O_L[G/N]$ selon les sous-groupes ouverts distingués N de G. Soit $\mathscr{C}(G, L)$ l'espace des fonctions continues sur G à valeurs dans L. Alors $\Lambda(G)[\frac{1}{p}] := L \otimes_{O_L} \Lambda(G)$ s'identifie au dual continu de $\mathscr{C}(G, L)$.

2.1 Groupes uniformes

On renvoie à [17] pour les preuves des résultats énoncés dans cette partie. Soit G un pro-p-groupe topologiquement de type fini. On note $q = p$ si $p > 2$ et $q = 4$ sinon. Si $n \geq 1$, on note G^n le sous-groupe de G engendré par les g^n, avec $g \in G$.

Définition 2.1.1. On dit que G est un groupe uniforme si $[G, G] \subset G^q$ et si la suite de terme général $[G^{p^i} : G^{p^{i+1}}]$ est constante.

Remarque 2.1.2. En présence des autres hypothèses (topologiquement de type fini et $[G, G] \subset G^q$), la dernière condition est équivalente à : G n'a pas d'élément d'ordre p.

Proposition 2.1.3. *Soit G un pro-p-groupe uniforme et notons $G_i = G^{p^i}$. Alors*

1. La preuve est nettement plus délicate que celle du lemme de Quillen...

a) Les G_i sont des sous-groupes normaux de G et ils forment un système fondamental de voisinages ouverts de 1.

b) Pour tout $i \geq 1$ on a $G_i = \{g^{p^i} | g \in G\}$ et l'application $x \to x^p$ induit une bijection de G_i/G_{i+1} sur G_{i+1}/G_{i+2}.

c) Pour tout i, j on a $[G_i, G_j] \subset G_{i+j+1}$. Si $p = 2$, on a même $[G_i, G_j] \subset G_{i+j+2}$.

d) Si $h_1, h_2, ..., h_d$ est un système minimal de générateurs topologiques de G, alors l'application $\mathbf{Z}_p^d \to G$ définie par $(x_1, x_2, ..., x_d) \to h_1^{x_1} h_2^{x_2} ... h_d^{x_d}$ est un homéomorphisme.

Soit G un pro-p groupe uniforme. Si $g \in G \backslash \{1\}$ satisfait $g \in G_{i-1} \backslash G_i$ et $p > 2$ (resp. $g \in G_{i-2} \backslash G_{i-1}$ et $p = 2$), on pose $\omega(g) = i$. La proposition 2.1.3 montre que ω est une p-valuation au sens de Lazard, i.e. (en posant $\omega(1) = \infty$)

- Pour tout $g \in G$ on a $\omega(g) > \frac{1}{p-1}$ et $\omega(g^p) = \omega(g) + 1$.
- Pour tous $g, h \in G$ on a $\omega(gh^{-1}) \geq \min(\omega(g), \omega(h))$ et $\omega(g^{-1}h^{-1}gh) \geq \omega(g) + \omega(h)$.

Si $h_1, h_2, ..., h_d$ est un système minimal de générateurs topologiques de G, alors $\omega(h_1) = ... = \omega(h_d) = 1$ si $p > 2$ (resp. $= 2$ si $p = 2$) et

$$\omega(h_1^{x_1} h_2^{x_2} ... h_d^{x_d}) = \min_{1 \leq i \leq d} (\omega(h_i) + v_p(x_i))$$

pour tous $x_1, ..., x_d \in \mathbf{Z}_p$. Enfin, ω satisfait l'hypothèse HYP de [45] (i.e. on a $\omega(h_i) + \omega(h_j) > \frac{p}{p-1}$ si $i \neq j$ et tout $g \in G$ tel que $\omega(g) > \frac{p}{p-1}$ est dans G_1).

2.2 Coefficients de Mahler

Soit G un pro-p-groupe uniforme et soit $(h_1, h_2, ..., h_d)$ un système minimal de générateurs topologiques de G. On utilise les notations standard pour les d-uplets : $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_i \binom{\alpha_i}{\beta_i}$, $h^\alpha = \prod_i h_i^{\alpha_i}$, etc. On écrit $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout i.

Si B est un $\mathbf{Z}_p$-module complet et si $f \in \mathscr{C}(G, B)$ est une fonction continue sur G, à valeurs dans B, on définit ses coefficients de Mahler $(a_\alpha(f))_{\alpha \in \mathbf{N}^d}$ par

$$a_\alpha(f) = (\Delta^\alpha f)(0) = \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{\alpha - \beta} \binom{\alpha}{\beta} f(h^\beta).$$

Le théorème de Mahler [34, th. III.1.2.4.] affirme alors que $\lim_{|\alpha| \to \infty} a_\alpha(f) = 0$ et que pour tout $x \in \mathbf{Z}_p^d$ on a

$$f(h^x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^d} \binom{x}{\alpha} \cdot a_\alpha(f).$$

Si B est un L-espace de Banach et v_B est une valuation sur B qui définit sa topologie, le théorème d'Amice [34, I.3.9] montre qu'une application $f \in \mathscr{C}(G, B)$ est localement analytique sur G si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $\lim_{|\alpha| \to \infty} v_B(a_\alpha(f)) - r|\alpha| = \infty$. Ainsi, en posant $b_i = h_i - 1$, le dual continu $D(G, L)$ de $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(G, L)$ est l'ensemble des séries $\lambda = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^d} c_\alpha b^\alpha$, avec $c_\alpha \in L$ et $\lim_{|\alpha| \to \infty} |c_\alpha|_p r^{|\alpha|} = 0$ pour tout $0 < r < 1$, l'action de λ sur f étant

$$\lambda(f) = \sum_\alpha c_\alpha a_\alpha(f).$$

2.3 L'algèbre de Fréchet-Stein $D(G, L)$

Gardons les notations ci-dessus. Pour tout $0 < r < 1$ on définit une norme sur $D(G, L)$ en posant [2]

$$|| \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^d} c_\alpha b^\alpha ||_r = \sup_\alpha |c_\alpha|_p \cdot r^{\omega(h_1)|\alpha|}.$$

C'est la norme utilisée dans [45]. La famille des normes $(|| \cdot ||_r)_{0<r<1}$ définit une topologie de Fréchet sur $D(G, L)$. Soit $D_r(G, L)$ la complétion de $D(G, L)$ par rapport à $|| \cdot ||_r$. C'est donc l'espace des séries $\lambda = \sum_\alpha c_\alpha b^\alpha$, avec $|c_\alpha|_p \cdot r^{\omega(h_1)|\alpha|} \to 0$ quand $|\alpha| \to \infty$. Alors $D(G, L)$ est naturellement isomorphe à la limite inverse des $D_r(G, L)$, pour $r \in]\frac{1}{p}, 1[\cap p^{\mathbf{Q}}$. On dispose alors du théorème fondamental suivant, dû à Schneider et Teitelbaum [45, chap. 4] et qui utilise pleinement le travail de Lazard [34] :

Théorème 2.3.1. *Soit G un pro-p-groupe uniforme et soient $r < r' \in]\frac{1}{p}, 1[\cap p^{\mathbf{Q}}$. Alors*

a) La norme $|| \cdot ||_r$ est multiplicative sur $D_r(G, L)$ et ne dépend pas du choix du système minimal de générateurs topologiques de G. De plus, $(D_r(G, L), || \cdot ||_r)$ est une L-algèbre de Banach noethérienne.

b) Les morphismes naturels $\Lambda(G)[\frac{1}{p}] \to D_r(G, L)$ et $D_{r'}(G, L) \to D_r(G, L)$ sont plats (à gauche et à droite).

c) Le morphisme naturel $\Lambda(G)[\frac{1}{p}] \to D(G, L)$ est fidèlement plat (à gauche et à droite).

On déduit du théorème précédent que $D(G, L)$ est une algèbre de Fréchet-Stein [45, chap. 3]. En utilisant le fait (dû à Lazard) que tout groupe de Lie p-adique compact admet un sous-groupe ouvert distingué qui est un pro-p-groupe uniforme, on obtient facilement [45, chap. 5] que ce résultat reste vrai quand G est un groupe de Lie p-adique compact arbitraire. On renvoie à [45, chap. 3] pour la notion de module coadmissible sur une algèbre de Fréchet-Stein. Par exemple, si G est un pro-p-groupe uniforme, tout $D(G, L)$-module coadmissible M est la limite projective d'une famille $(M_r)_{r \in p^{\mathbf{Q}} \cap]p^{-1}, 1[}$, où M_r est un $D_r(G, L)$-module et $M_r = D_r(G, L) \otimes_{D_{r'}(G,L)} M_{r'}$ pour $r < r'$. Dans ce cas on récupère les M_r par $M_r = D_r(G, L) \otimes_{D(G,L)} M$ et $M \to M_r$ est à image dense. Un module coadmissible a une topologie naturelle d'espace de Fréchet nucléaire. Si A est une algèbre de Fréchet-Stein, la catégorie des A-modules coadmissibles est abelienne et un sous-A-module N d'un A-module coadmissible M est coadmissible si et seulement si N est fermé dans M.

2.4 Représentations de Banach et localement analytiques admissibles

Soit G un groupe de Lie p-adique. *Une L-représentation de Banach de G* est un L-espace de Banach muni d'une action L-linéaire continue de G. On renvoie à [23, 44, 45] pour les preuves des résultats énoncés dans cette partie.

Définition 2.4.1. 1) Supposons que G est compact. Une L-représentation de Banach Π de G est dite admissible si une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

a) Le dual continu Π^* de Π est un $\Lambda(G)[\frac{1}{p}]$-module de type fini.

b) Il existe $n \geq 1$ tel que Π soit isomorphe à un sous-espace fermé de $\mathscr{C}(G, L)^n$.

2. Rappelons que $\omega(h_1) = ... = \omega(h_d)$ et il vaut 1 si $p > 2$ et 2 sinon.

c) Il existe un réseau G-invariant $\Theta \subset \Pi$ tel que $\Theta/\pi_L\Theta$ soit une k_L-représentation lisse admissible de G.

2) Si G n'est pas compact, on dit qu'une L-représentation de Banach Π de G est admissible si sa restriction à un sous-groupe ouvert compact de G l'est (cela est alors vrai pour n'importe quel sous-groupe ouvert compact de G).

3) On dit enfin que Π est unitaire si sa topologie est définie par une norme G-invariante.

Soit $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ la catégorie des L-représentations de Banach admissibles de G.

Théorème 2.4.2. *a) Soit G un groupe de Lie compact. Le foncteur $\Pi \to \Pi^*$ induit une anti-équivalence entre $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ et la catégorie des $\Lambda(G)[1/p]$-modules de type fini.*

b) $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ est abélienne et tout morphisme est strict, à image fermée.

Remarque 2.4.3. Le b) du théorème 2.4.2 combiné aux théorèmes du graphe fermé et de l'image ouverte montre que si $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ sont topologiquement irréductibles, alors tout $f \in \mathrm{Hom}_{L[G]}(\Pi_1, \Pi_2) - \{0\}$ est un isomorphisme, i.e. $\mathrm{Hom}_{L[G]}(\Pi_1, \Pi_2)$ est une L-algèbre à division. On verra bien plus loin qu'elle est de dimension finie sur L.

Définition 2.4.4. Une L-représentation localement analytique de G est un L-espace de type compact Π muni d'une action continue[3] de G, telle que les applications orbite $g \to g \cdot v$ (pour $v \in \Pi$) soient dans $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(G, \Pi)$. On dit qu'elle est admissible si, avec sa structure naturelle de $D(H, L)$-module, Π^* est un $D(H, L)$-module coadmissible pour un/tout sous-groupe ouvert compact H de G.

On note $\mathrm{LA}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ la catégorie des L-représentations localement analytiques admissibles de G. Si $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$, on note Π^{an} le sous-espace des vecteurs localement analytiques de Π, i.e. $v \in \Pi$ dont l'application orbite est dans $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(G, \Pi)$ et on le munit de la topologie induite par l'inclusion dans $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(G, L)$ (qui envoie v sur son application orbite). Noter que [23] utilise une autre topologie sur Π^{an}, mais pour les objets de $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ les deux topologies coïncident. Le résultat suivant est une conséquence formelle du théorème 2.3.1. Il jouera un rôle important dans la démonstration du lemme de Schur pour les objets de $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$.

Théorème 2.4.5. *Si $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$, alors $\Pi^{\mathrm{an}} \in \mathrm{LA}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ et pour tout sous-groupe ouvert compact H de G on a un isomorphisme de $D(H, L)$-modules coadmissibles*

$$(\Pi^{\mathrm{an}})^* \simeq D(H, L) \otimes_{\Lambda(H)[1/p]} \Pi^*.$$

2.5 Le lemme de Quillen p-adique d'Ardakov et Wadsley

Le résultat suivant est un cas particulier d'un profond théorème d'Ardakov et Wadsley [1] (voir le corollaire de la fin du chapitre 8 de loc.cit.), version p-adique du lemme de Quillen pour les algèbres enveloppantes [40].

Théorème 2.5.1. *Soit $(A, ||\cdot||)$ une L-algèbre de Banach et soit A^0 sa boule unité. On suppose que $A^0/\pi_L A^0$ est une algèbre de polynômes sur k_L. Soit M un A-module de type fini et soit $f \in \mathrm{End}_A(M)$. Si tout élément non nul de $L[f]$ est un automorphisme de M, alors f est algébrique sur L.*

Corollaire 2.5.2. *Soit H un pro-p-groupe uniforme et soit $r \in]\frac{1}{p}, 1[\cap p^{\mathbf{Q}}$. Soit M un $D_r(H, L)$-module de type fini et soit f un endomorphisme $D_r(H, L)$-linéaire de M. Si tout élément non nul de $L[f]$ est un automorphisme de M, alors f est algébrique sur L.*

3. Comme Π est de type compact, il suffit qu'elle soit séparément continue.

Démonstration. Soit L'/L une extension galoisienne finie, d'indice de ramification absolu e', tel que $r = p^{-\frac{a}{e'}}$ (resp. $r^2 = p^{-\frac{a}{e'}}$ si $p = 2$) pour un entier a. Soit $A = D_r(H, L')$ et, pour $s \geq 0$, soit $F^s A = \{\lambda \in A| \quad ||\lambda||_r \leq p^{-s}\}$. Comme $||\cdot||_r$ prend des valeurs dans $p^{\frac{1}{e'}\mathbf{Z}}$ sur A, on a $\cup_{s>0} F^s A = \pi_{L'} F^0(A)$, ce qui fait que $\mathrm{gr}^0(A)$ est isomorphe à $F^0 A/\pi_{L'} F^0 A$. Si $d = \dim H$, la preuve du lemme 4.8 de [45] montre que $\mathrm{gr}^0(A) \simeq k_{L'}[u_1, u_2, ..., u_d]$. Ainsi, A satisfait aux hypothèses du théorème 2.5.1.

Revenons maintenant à notre f, que l'on suppose trancendant sur L. Si $Q \in L'[X]$ est non nul, soit $P = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L'/L)} \sigma(Q) \in L[X]$. Alors P est non nul, donc $P(f)$ est un automorphisme de M, ce qui entraîne que $Q(f \otimes \mathrm{id})$ est un automorphisme de $M \otimes L'$. Le théorème 2.5.1 montre donc que $f \otimes \mathrm{id}$ est algébrique sur L', contradiction avec le fait que $Q(f \otimes \mathrm{id})$ est inversible pour tout $Q \neq 0$.

□

Corollaire 2.5.3. *Soit G un groupe de Lie et soit $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ (resp. $\Pi \in \mathrm{LA}_L^{\mathrm{adm}}(G)$) topologiquement irréductible. Alors tout $f \in \mathrm{End}_{L[G]}(\Pi)$ est algébrique sur L.*

Démonstration. On fixe un sous-groupe ouvert compact H de G qui est un pro-p-groupe uniforme et on voit $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ (resp. Π^*) comme un $D(H, L)$-module coadmissible. D'après le théorème 2.4.5 (resp. par définition) il existe $r \in]\frac{1}{p}, 1[\cap p^{\mathbf{Q}}$ tel que $(\Pi^{\mathrm{an}})^*_r \neq 0$ (resp. $\Pi^*_r \neq 0$). Pour simplifier les notations, on va poser aussi $\Pi^*_r = (\Pi^{\mathrm{an}})^*_r$. On dispose dans les deux cas d'un anti-homomorphisme $g \to g'_r$ de $\mathrm{End}_{L[G]}(\Pi)$ dans $\mathrm{End}_{D_r(H,L)}(\Pi^*_r)$ (si $\Pi \in \mathrm{LA}_L^{\mathrm{adm}}(G)$, cela est clair ; si $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$, le théorème 2.4.5 montre que $\Pi^*_r \simeq D_r(H, L) \otimes_{\Lambda(G)[1/p]} \Pi^*$, ce qui permet de conclure).

Soit maintenant $f \in \mathrm{End}_{L[G]}(\Pi)$ non nul et soit $A = L[f]$. La remarque 2.4.3 (et sa version localement analytique) montre que tout $g \in A$ non nul est un automorphisme de Π, donc g'_r est un automorphisme de Π'_r. Le corollaire 2.5.2 montre que f'_r est algébrique sur L. Si $P(f'_r) = 0$, alors $P(f) = 0$ (sinon $P(f)$ serait un automorphisme de Π, donc $P(f'_r) = 0$ serait aussi un automorphisme). Cela permet de conclure. □

2.6 Le cas absolument irréductible

Si $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$, alors toute suite décroissante de sous-représentations fermées est stationnaire (par dualité, cela suit du fait que $\Lambda(H)[1/p]$ est noetherien pour H compact). En particulier, tout $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ admet une sous-représentation fermée topologiquement irréductible. Nous ne savons pas si cela reste vrai pour la catégorie $\mathrm{LA}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ (il est probable que c'est faux). Cela explique le caractère un peu tordu de la preuve du résultat suivant, dans le cas des représentations localement analytiques. Nous devons beaucoup au chapitre 4 de [38] pour les arguments de cette partie.

Proposition 2.6.1. *Soit L'/L une extension galoisienne finie et soit $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ (resp. $\Pi \in \mathrm{LA}_L^{\mathrm{adm}}(G)$) topologiquement irréductible . Alors $\Pi_{L'} = \Pi \otimes L'$ est une somme directe finie de L'-représentations admissibles topologiquement irréductibles.*

Démonstration. On fera la preuve dans le cas localement analytique, qui est plus délicat (voir la preuve du lemme 4.2 de [38] pour les Banach). On fixe $r \in]p^{-1}, 1[\cap p^{\mathbb{Q}}$ tel que $\Pi'_r \neq 0$.

Lemme 2.6.2. *Si V est un sous-$L'[G]$-module fermé de $\Pi_{L'}$, alors $V^*_r \neq 0$.*

Démonstration. On suit les arguments du lemme 4.2 de [38]. Soit $\Gamma = \mathrm{Gal(L'/L)}$ et soit r_γ l'automorphisme topologique de $\Pi_{L'}$ donné par $r_\gamma(v \otimes c) = v \otimes \gamma(c)$. L'application $\oplus_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma(V) \to$

$\Pi_{L'}$ est alors surjective. En effet, son image X est fermée dans $\Pi_{L'}$ (par admissibilité) et stable par G, donc $X^\Gamma \subset \Pi$ est un sous-espace fermé et G-stable de Π. De plus, $X^\Gamma \neq 0$, car pour tout $v \in X - \{0\}$ on peut trouver $c \in L'$ tel que $\sum_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma(cv) \neq 0$ (indépendence linéaire des caractères). Ainsi, $X^\Gamma = \Pi$ et $X = \Pi_{L'}$, ce qui démontre la surjectivité. Ensuite, $\Pi^*_{L'}$ est un sous-module de $\oplus_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma(V^*)$, donc, par platitude de $D_r(H,L)$ sur $D(H,L)$, $\Pi^*_r \otimes L'$ est un sous-module de $\oplus_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma(V^*_r) \simeq \oplus_{\gamma\in\Gamma}(V^*_r \otimes_{L',\gamma} L')$. En particulier, $V^*_r \neq 0$. □

Lemme 2.6.3. *$\Pi^*_{L'}$ contient un sous-$D(H,L')$ module coadmissible, strict, stable par G et maximal pour ces propriétés.*

Démonstration. On fait la convention que sous-module coadmissible veut dire un sous $D(H,L')$-module coadmissible de $\Pi^*_{L'}$, stable par G. Le lemme précédent montre, par dualité, que $M_r \neq (\Pi_{L'})^*_r$ pour tout sous-module coadmissible strict M de $\Pi^*_{L'}$. Soit alors $(M_i)_{i\in I}$ une chaine de sous-modules coadmissibles stricts de $\Pi^*_{L'}$ et soit N l'adhérence dans $\Pi^*_{L'}$ de $\cup_i M_i$. Alors N est un sous-module coadmissible de $\Pi^*_{L'}$. On va montrer que $N \neq \Pi^*_{L'}$, ce qui permettra de conclure par le lemme de Zorn. Le $D(H,L')_r$-module $(\Pi_{L'})^*_r$ étant de type fini, la réunion des $(M_i)_r$ est un sous-module strict de $(\Pi_{L'})^*_r$. Mais $\cup_i (M_i)_r$ est un sous-$D_r(H,L)$-module de $(\Pi_{L'})^*_r$, donc il est fermé (les sous-modules d'un module de type fini sur une algèbre de Banach noethérienne sont fermés). Or, par définition $\cup_i (M_i)_r$ est dense dans N_r, donc $N_r \subset \cup_i (M_i)_r$ et $N_r \neq (\Pi_{L'})^*_r$. Ainsi $N \neq \Pi_{L'}$, ce qui permet de conclure.

□

Par dualité, le lemme 2.6.3 montre que $\Pi_{L'}$ contient un sous-$L'[G]$ module fermé topologiquement irréductible V. L'argument utilisé dans le lemme 2.6.2 montre que $\Pi_{L'}$ est un quotient de $\oplus_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma(V)$. Comme chacune des $r_\gamma(V)$ est admissible et irréducible, on peut conclure.

□

Corollaire 2.6.4. *Soit G un groupe de Lie p-adique et soit $\Pi \in \mathrm{Ban}^{\mathrm{adm}}_L(G)$ (resp. $\mathrm{LA}^{\mathrm{adm}}_L(G)$), topologiquement irréductible. Alors Π est absolument irréductible si et seulement si $\mathrm{End}_{L[G]}(\Pi) = L$.*

Démonstration. Si Π est absolument irréductible et $f \in \mathrm{End}_{L[G]}(\Pi)$, soit $P \in L[X]$ non nul tel que $P(f) = 0$ (il en existe, d'après le corollaire 2.5.3). Si L' est le corps de décomposition de P, alors il existe $c \in L'$ tel que $f \otimes 1 - c$ ne soit pas inversible sur $\Pi \otimes L'$, et donc nul (car $\Pi \otimes L'$ est irréductible). En faisant agir $\mathrm{Gal}(L'/L)$, on en déduit le résultat. L'autre implication est une conséquence de la proposition 2.6.1.

□

Corollaire 2.6.5. *1) Toute représentation de Banach admissible et topologiquement absolument irréductible d'un groupe de Lie p-adique admet un caractère central.*

2) Toute représentation localement analytique admissible et topologiquement absolument irréductible d'un groupe de Lie p-adique admet un caractère infinitésimal.

Remarque 2.6.6. Sans l'hypothèse d'admissibilité, ces résultats tombent en défaut.

2.7 Algèbres de Fréchet et algèbres à identité polynomiale

Il est bien connu qu'une extension algébrique de $\mathbf{Q}_p$ qui est complète pour la topologie p-adique est finie sur $\mathbf{Q}_p$. Le résultat suivant est une généralisation de ce résultat, mais la présence

d'algèbres non commutatives complique considérablement la situation. Pour s'en sortir, on utilise un théorème d'algèbre non commutative, dû à Kaplansky [29].

Théorème 2.7.1. *Soit A une L-algèbre de Fréchet, dont tout élément est algébrique sur $\mathbf{Q}_p$. Si A est une algèbre à division, alors* $\dim_L(A) < \infty$.

Remarque 2.7.2. Il est fort probable que l'hypothèse que A soit une algèbre à division est inutile, mais nous ne savons pas le démontrer.

Démonstration. Soit F_n l'ensemble des $a \in A$ qui sont tués par un polynôme $f \in L[X]$ de degré $\leq n$ et dont la norme de Gauss est dans $[1/n, n]$. Il est facile de voir que F_n est fermé dans A (c'est pour cela que l'on a imposé la condition sur la norme de Gauss). Par hypothèse on a $A = \cup_{n\geq 1} F_n$, donc par le lemme de Baire il existe n et une boule ouverte $B(x,r) \subset A$ contenue dans F_n. Si $u, v \in F_n$, alors $(u^i)_{0\leq i\leq n}$ n'est pas libre sur L et donc $(u^i v)_{0\leq i\leq n}$ n'est pas libre sur L, non plus. Ainsi, on doit avoir

$$\sum_{\sigma\in S_{n+1}} \varepsilon(\sigma)(u^{\sigma(0)}v \cdot u^{\sigma(1)}v \cdot \ldots \cdot u^{\sigma(n)}v) = 0,$$

ce qui montre l'existence d'un polynôme non nul homogène $p(u,v)$ (variables non commutatives) tel que $p(u,v) = 0$ pour tous $u, v \in F_n$. Mais alors $p(a,b) = 0$ pour tous $a, b \in A$ (car si λ_1, $\lambda_2 \in L$ sont proches de 0, alors $x + \lambda_1 a, x + \lambda_2 b \in F_n$ et donc $p(x + \lambda_1 a, x + \lambda_2 b) = 0$. Cette identité polynômiale reste vraie pour tous λ_1 et λ_2 et on conclut par homogénéité de p). Ainsi A est une algèbre à identité polynômiale. D'après Kaplansky [29], toute algèbre à division qui est aussi à identité polynômiale est de dimension finie sur son centre Z.

Il suffit donc de voir que $\dim_L Z < \infty$. Cela est standard, mais, pour le confort du lecteur, rappelons-en la preuve. Fixons un clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$ et un plongement $\mathbf{Q}_p \to \overline{\mathbf{Q}_p}$. Comme Z est une extension algébrique de $\mathbf{Q}_p$, ce plongement s'étend en une injection de $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels $Z \to \overline{\mathbf{Q}_p}$. Le lemme de Krasner montre que $\overline{\mathbf{Q}_p}$ est de dimension dénombrable sur $\mathbf{Q}_p$, donc il en est de même de Z. Or, tout espace de Fréchet de dimension au plus dénombrable sur $\mathbf{Q}_p$ est de dimension finie (application standard du lemme de Baire). Cela permet de conclure (noter que Z est bien un Fréchet, car il est fermé dans A).

□

En mettant ensemble tous les résultats de ce chapitre, nous arrivons à :

Théorème 2.7.3. *Soit G un groupe de Lie p-adique et soit* $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ *(resp* $\mathrm{LA}_L^{\mathrm{adm}}(G)$*) une représentation topologiquement irréductible. Alors* $\mathrm{End}_{\mathrm{L[G]}}(\Pi)$ *est une L-algèbre à division, de dimension finie.*

Démonstration. On a déjà vu que $\mathrm{End}_{\mathrm{L[G]}}(\Pi)$ est une algèbre à division. En combinant le corollaire 2.5.3 et le théorème 2.7.1, il suffit de montrer que $\mathrm{End}_{\mathrm{L[G]}}(\Pi)$ est une L-algèbre de Fréchet. Si $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$, cela est clair, car alors $\mathrm{End}_{\mathrm{L[G]}}(\Pi)$ est une sous-algèbre fermée de $\mathrm{End}_{\mathrm{L}}(\Pi)$, qui est une L-algèbre de Banach pour la norme sup. On suppose donc que $\Pi \in \mathrm{LA}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ et on fixe un sous-groupe ouvert compact H de G. On voit Π^* comme $D(H,L)$-module coadmissible. On a un isomorphisme naturel de L-algèbres

$$\mathrm{End}_{D(H,L)}(\Pi^*) \simeq \varprojlim_r \mathrm{End}_{D_r(H,L)}(\Pi_r^*).$$

De plus, par dualité on a un isomorphisme canonique $\mathrm{End}_{D(H,L)}(\Pi^*) \simeq \mathrm{End}_{L[H]}(\Pi)^{\mathrm{op}}$. Mais Π_r^* étant un Banach, il en est de même de $\mathrm{End}_L(\Pi_r^*)$, donc aussi de son sous-espace fermé $\mathrm{End}_{D_r(H,L)}(\Pi_r^*)$. Cela montre que $\mathrm{End}_{D(H,L)}(\Pi^*)$ est une L-algèbre de Fréchet et donc

$\mathrm{End}_{L[G]}(\Pi)$ aussi (car fermée dans $\mathrm{End}_{D(H,L)}(\Pi^*)$). Enfin, cette topologie ne dépend pas du choix de H, car si $H_1 \subset H_2$, alors $D(H_1, L)$ (resp. $D_r(H_1, L)$) est un module libre de type fini sur $D(H_2, L)$ (resp. $D_r(H_2, L)$).

□

Le théorème 2.7.3 a la conséquence utile suivante, observée dans [38, lemma 4.20]. On laisse au lecteur d'en adapter la preuve pour obtenir le

Corollaire 2.7.4. *Soit G un groupe de Lie p-adique et soit $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ (resp. $\mathrm{LA}_L^{\mathrm{adm}}(G)$) une représentation topologiquement irréductible. Il existe alors une extension finie galoisienne L'/L et des $\Pi_i \in \mathrm{Ban}_{L'}^{\mathrm{adm}}(G)$ (resp. $\mathrm{LA}_{L'}^{\mathrm{adm}}(G)$) absolument topologiquement irréductibles, telles que*

$$\Pi \otimes_L L' \simeq \Pi_1 \oplus \Pi_2 \oplus ... \oplus \Pi_s.$$

Chapitre 3

Théorie de Hodge p-adique et (φ, Γ)-modules

Le but de ce chapitre[1] est de rappeler quelques résultats standard concernant les liens entre la théorie des (φ, Γ)-modules et la théorie de Hodge p-adique. Les seuls résultats originaux dans ce chapitre sont la proposition 3.5.3 et la preuve de la proposition 3.7.1. Ils nous seront utiles bien plus tard.

Pour expliquer certaines constructions classiques, il faut malheureusement ouvrir la boîte de Pandore des anneaux de Fontaine. Le lecteur pourra facilement faire abstraction de la plupart de ces anneaux, car souvent seuls les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{B}}^+$ et $\mathscr{R}$ (voir plus bas pour les définitions) seront utilisés. Voir [25] et [15] pour les preuves des assertions concernant les anneaux de Fontaine, ainsi que [16] pour une vue d'ensemble. Soit $\varepsilon^{(n)}$ une racine primitive d'ordre p^n de l'unité, telle que $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$ pour tout n. On pose $F_n = \mathbf{Q}_p(\varepsilon^{(n)})$, $L_n = L \otimes_{\mathbf{Q}_p} F_n$ et $L_\infty = \cup_n L_n$.

3.1 Anneaux de fonctions analytiques

On note, pour $b \geq 1$, $n_b = p^{b-1}(p-1)$ et $r_b = \frac{1}{n_b} = v_p(\varepsilon^{(b)} - 1)$. Nous ferons un usage constant de la pléiade d'anneaux de séries de Laurent suivants.

• L'anneau

$$O_{\mathscr{E}} = \{\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n | \quad a_n \in O_L \quad \text{et} \quad \lim_{n \to -\infty} v_p(a_n) = \infty\}$$

et son corps de fractions $\mathscr{E} = O_{\mathscr{E}}[1/p]$. On munit $O_{\mathscr{E}}$ de la topologie **faible**, dont une base de voisinages de 0 est donnée par les $\pi_L^n O_{\mathscr{E}} + T^m O_L[[T]]$, avec $m, n \in \mathbf{N}$ et on munit $\mathscr{E} = \cup_{n \geq 0} \pi_L^{-n} O_{\mathscr{E}}$ de la topologie limite inductive.

• Pour tout $b \geq 1$ on note $O_{\mathscr{E}}^{\dagger, b}$ la complétion p-adique de $O_L[[T]][\frac{p}{T^{n_b}}]$. On le munit de la topologie T-adique, pour laquelle il est complet. On note $O_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]} = O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}[\frac{1}{T}]$ et on munit $\mathscr{E}^{(0,r_b]} = O_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}[\frac{1}{p}] = \cup_{k \geq 0} p^{-k} O_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}$ de la topologie limite inductive. On montre que $\mathscr{E}^{(0,r_b]}$ est l'anneau des séries $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k \in \mathscr{E}$ qui convergent sur la couronne $0 < v_p(T) \leq r_b$ (elles y sont bornées) et $O_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}$ est le réseau de $\mathscr{E}^{(0,r_b]}$ formé des séries à coefficients dans O_L. Soit $\mathscr{E}^{]0,r_b]}$ l'anneau des séries de Laurent à coefficients dans L, qui convergent sur la couronne $0 < v_p(T) \leq r_b$. C'est naturellement un anneau de Fréchet, muni de la topologie définie par

1. Le lecteur est fortement conseillé de revenir à ce chapitre seulement si besoin se fait sentir...

les normes sup sur les couronnes $r_n \leq v_p(T) \leq r_b$, avec $n \geq b$

• L'anneau de Robba est la réunion des $\mathscr{E}^{]0,r_b]}$, muni de la topologie limite inductive. Le corps $\mathscr{E}^\dagger = \cup_{b\geq 1}\mathscr{E}^{(0,r_b]}$ est le sous-anneau de $\mathscr{R}$ des éléments bornés. Il est dense dans $\mathscr{R}$ et $\mathscr{E}$ s'identifie au complété de $\mathscr{E}^\dagger$ pour la valuation p-adique.

• Si $\Lambda \in \{\mathscr{E}, \mathscr{R}\}$, on pose $\Lambda^+ = \Lambda \cap L[[T]]$. Ainsi, $\mathscr{E}^+ = O_L[[T]][\frac{1}{p}]$ est l'anneau des mesures sur $\mathbf{Z}_p$, à valeurs dans L et $\mathscr{R}^+$ est l'anneau des fonctions rigides analytiques sur le disque unité ouvert (sur L) ou encore l'anneau des distributions sur $\mathbf{Z}_p$, à valeurs dans L. L'isomorphisme entre $\mathscr{E}^+$ (resp. $\mathscr{R}^+$) et l'anneau des mesures (resp. distributions) sur $\mathbf{Z}_p$ est donné par la transformée d'Amice :

$$\mu \to A_\mu = \sum_{n\geq 0} \int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n} \mu \cdot T^n.$$

On munit ces anneaux d'actions continues de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$ et d'un Frobenius φ, commutant entre elles, en posant $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$ et $\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1$ si $a \in \mathbf{Z}_p^*$. Alors $\mathscr{E}^+, \mathscr{R}^+, O_{\mathscr{E}}, \mathscr{E}, \mathscr{E}^\dagger, \mathscr{R}$ sont stables par φ et Γ. L'action de Γ sur $\mathscr{R}$ se dérive, d'où une connexion $\nabla = \lim_{a\to 1} \frac{\sigma_a - 1}{a-1}$ sur $\mathscr{R}$. Explicitement, on a $\nabla(f) = t(1+T)f'(T)$, où $t = \log(1+T) \in \mathscr{R}$ est le $2i\pi$ de Fontaine. Noter que l'on a $\sigma_a(t) = at$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$ et $\varphi(t) = pt$. De plus, on dispose pour tout $n \geq 1$ d'une injection Γ-équivariante[2] $\varphi^{-n} : \mathscr{E}^{]0,r_n]} \to L_n[[t]]$, qui envoie f sur $f(\varepsilon^{(n)}e^{t/p^n} - 1)$.

3.2 Anneaux de Fontaine

Soit $\mathbf{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbf{Q}_p}$ et soit $O_{\mathbf{C}_p}$ l'anneau de ses entiers. On note $\tilde{\mathbf{E}}^+$ l'anneau des suites $x = (x^{(n)})_{n\geq 0} \in O_{\mathbf{C}_p}^{\mathbf{N}}$ telles que $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ pour tout n, l'addition étant définie par

$$(x+y)^{(n)} = \lim_{j\to\infty} (x^{(n+j)} + y^{(n+j)})^{p^j}$$

et la multiplication étant définie composante par composante ; c'est un anneau parfait de caractéristique p, muni d'une action naturelle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, commutant au Frobenius $x \to x^p$, que l'on note φ. En posant $v_E(x) = v_p(x^{(0)})$ pour $x \in \tilde{\mathbf{E}}^+$, on obtient une valuation sur l'anneau $\tilde{\mathbf{E}}^+$. L'élément $\overline{T} = (\varepsilon^{(n)})_n - 1 \in \tilde{\mathbf{E}}^+$ satisfait $v_E(\overline{T}) = \frac{p}{p-1}$ et le corps des fractions $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}^+[1/\overline{T}]$ de $\tilde{\mathbf{E}}^+$ est complet pour la valuation v_E.

Soit $\tilde{\mathbf{A}}^+ = W(\tilde{\mathbf{E}}^+)$ (resp. $\tilde{\mathbf{A}} = W(\tilde{\mathbf{E}})$) l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\tilde{\mathbf{E}}^+$ (resp. $\tilde{\mathbf{E}}$). Tout élément de $\tilde{\mathbf{A}}^+$ (resp. $\tilde{\mathbf{A}}$) s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k\geq 0} p^k[x_k]$, avec $x_k \in \tilde{\mathbf{E}}^+$ (resp. $\tilde{\mathbf{E}}$), $[x] \in \tilde{\mathbf{A}}^+$ (resp. $\tilde{\mathbf{A}}$) étant le représentant de Teichmuller de $x \in \tilde{\mathbf{E}}^+$ (resp. $\tilde{\mathbf{E}}$). On munit $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{A}}^+$ de la topologie définie par les semi-valuations $(w_n)_{n\geq 0}$, où

$$w_n\left(\sum_{k\geq 0} p^k[x_k]\right) = \min_{k\leq n} v_E(x_k).$$

Ils sont séparés et complets pour cette topologie, qui est plus faible que la p-adique. Le Frobenius et l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ sur $\tilde{\mathbf{E}}^+$ et $\tilde{\mathbf{E}}$ induisent un Frobenius bijectif φ et une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ sur $\tilde{\mathbf{A}}^+$ et $\tilde{\mathbf{A}}$. Les actions de φ et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ sont continues. On note $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{A}}[\frac{1}{p}]$ et $\tilde{\mathbf{B}}^+ = \tilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$, munis de la topologie limite inductive et des actions naturelles de φ et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, déduites de celles sur $\tilde{\mathbf{A}}$.

2. Comme f converge en $\varepsilon^{(n)} - 1$, $f(\varepsilon^{(n)}e^{t/p^n} - 1)$ est bien défini en tant qu'élément de $L_n[[t]]$.

Un élément important de $\tilde{\mathbf{A}}^+$ est $T=[1+\overline{T}]-1$. On a $\varphi(T)=(1+T)^p-1$, T est invariant par $H=\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty}))$ et $\sigma_a(T)=(1+T)^a-1$ pour $a\in\mathbf{Z}_p^*$. C'est d'ailleurs cet élément qui permet de faire le lien avec les anneaux de la partie 3.1.

Nous aurons besoin des sous-anneaux (et complétions de sous-anneaux) suivants de $\tilde{\mathbf{B}}$, qui font le lien entre la théorie de Hodge p-adique et la théorie des (φ,Γ)-modules :

• Pour $r>0$ on note

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}=\{\sum_{k\geq 0}p^k[x_k]\in\tilde{\mathbf{A}}|\quad \lim_{k\to\infty}v_E(x_k)+\frac{k}{r}=\infty\},$$

et on pose $v^{(0,r]}(x)=\inf_{k\geq 0}v_E(x_k)+\frac{k}{r}$. On munit $\tilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ de la topologie définie par[3] $v^{(0,r]}$, pour laquelle il est séparé et complet. L'anneau $\tilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est stable sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, qui agit continûment, et $\varphi:\tilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}\to\tilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-1}r]}$ est un homéomorphisme. On note $\tilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}=\tilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}[\frac{1}{p}]=\cup_{k\geq 0}p^{-k}\tilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$, muni de la topologie limite inductive. Enfin, $\tilde{\mathbf{B}}^\dagger$ est la réunion des $\tilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$, muni aussi de la topologie limite inductive. Il s'agit d'un corps.

• Pour $b\geq 1$ on note $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger,b}=\{x\in\tilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-b}]}|\quad v^{(0,p^{-b}]}(x)\geq 0\}$. On a alors $\tilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-b}]}=\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger,b}[\frac{1}{\overline{T}}]$. La topologie induite sur $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger,b}$ par la topologie de $\tilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-b}]}$ est la topologie $\overline{T}$-adique.

• Si $a_k\in\mathbf{Z}_p$ et $\lim_{k\to-\infty}a_k=0$, la série $\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_kT^k$ converge dans $\tilde{\mathbf{A}}$ et l'on obtient de cette manière une copie

$$\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}=\{\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_kT^k\in\tilde{\mathbf{A}}|\quad a_k\in\mathbf{Z}_p,\quad \lim_{k\to-\infty}a_k=0\}$$

de l'anneau $O_{\mathscr{E}}$ pour $L=\mathbf{Q}_p$, plongée dans $\tilde{\mathbf{A}}$ (de manière compatible avec les actions de φ et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$). Soit $\mathbf{B}$ l'adhérence, pour la topologie p-adique, de l'extension maximale non-ramifiée de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}[1/p]$ dans $\tilde{\mathbf{B}}$. Ce sous-corps de $\tilde{\mathbf{B}}$ est stable sous l'action de φ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, et il en est de même de son anneau d'entiers $\mathbf{A}$.

• Si $\Lambda\in\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}$ et déco $\in\{\dagger;\dagger,b;(0,r]\}$ on pose $\Lambda^{\text{déco}}=\tilde{\Lambda}^{\text{déco}}\cap\Lambda$. On pose enfin $\mathbf{B}_{\mathrm{rig}}=\mathscr{R}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\mathbf{B}^\dagger$.

• Soit $\tilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ la complétion de $\tilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ pour la topologie de Fréchet induite par les semi-valuations $(\min(v^{(0,s]},v^{(0,r]}))_{0<s\leq r}$ et soit $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ la réunion des $\tilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$. Cet anneau est muni d'un Frobenius bijectif, obtenu par prolongement à partir du Frobenius sur $\tilde{\mathbf{B}}^\dagger$.

• L'application $\theta:\tilde{\mathbf{A}}^+\to O_{\mathbf{C}_p}$ définie par

$$\theta\left(\sum_{k\geq 0}p^k[x_k]\right)=\sum_{k\geq 0}p^kx_k^{(0)}$$

est un morphisme surjectif d'anneaux et $\mathrm{Ker}(\theta)=\omega\cdot\tilde{\mathbf{A}}^+$, où $\omega=\frac{T}{\varphi^{-1}(T)}$. Le séparé complété $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ de $\tilde{\mathbf{B}}^+$ pour la topologie ω-adique est un anneau de valuation discrète, d'uniformisante ω ou[4]

$$t=\log(1+T)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{T^n}{n}.$$

Le morphisme $\theta:\tilde{\mathbf{B}}^+\to\mathbf{C}_p$ s'étend par continuité en un morphisme surjectif $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\to\mathbf{C}_p$, dont le noyau est engendré par ω ou t. On note $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}=\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[1/t]$, qui est donc un corps de valuation discrète, d'uniformisante t et de corps résiduel $\mathbf{C}_p$.

3. L'application $v^{(0,r]}$ satisfait $v^{(0,r]}(x+y)\geq\min(v^{(0,r]}(x),v^{(0,r]}(y))$ et $v^{(0,r]}(xy)\geq v^{(0,r]}(x)+v^{(0,r]}(y)$.

4. Noter que l'on utilise la même lettre que pour l'élément $t=\log(1+T)$ de $\mathscr{R}$. Cela s'explique par le fait que l'on a une injection naturelle de $\mathscr{R}^+=\mathscr{R}\cap L[[T]]$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, qui envoie f sur $f(e^t-1)$ et cette injection envoie l'élément t de $\mathscr{R}$ sur $t\in\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

Si Λ est un des anneaux précédents, on étend l'action de φ et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ à $O_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda$ (ou $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \Lambda$), par O_L (ou L)-linéarité.

Proposition 3.2.1. *On a des isomorphismes compatibles avec toutes les structures supplémentaires (topologie, Frobenius, action de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$*)*

$$(O_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A})^H \simeq O_{\mathscr{E}}, \quad (O_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}^{\dagger,b})^H \simeq O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}, \quad (O_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}^{(0,p^{-b}]})^H \simeq O_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}.$$

Démonstration. [15], propositions 7.1, 7.5 et 7.6. □

La proposition 3.2.1 et [2, prop. 3.15] entraînent les isomorphismes naturels suivants

$$(L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B})^H = \mathscr{E}, \quad (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}^\dagger)^H = \mathscr{E}^\dagger, \quad (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{rig}})^H = \mathscr{R}.$$

On utilisera souvent le lemme suivant [5].

Lemme 3.2.2. *a) Soit $a \in \mathbf{Z}$. Alors $\varphi^a(T) \in t\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ si et seulement si $a \geq 0$. Dans ce cas, on a $\frac{\varphi^a(T)}{\varphi^b(T)} \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour tout $b \in \mathbf{Z}$.*

b) Si $j \notin [1,n]$, alors $\varphi^{-j}\left(\frac{T}{\varphi^n(T)}\right) \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

c) Soit $x \in \tilde{\mathbf{A}}^+$ et $k \geq 1$. Alors $x \in T^k\tilde{\mathbf{A}}^+$ si et seulement si $\varphi^n(x) \in t^k\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. a) Il suffit de noter que $\varphi^n(T) = e^{p^n t} - 1 \equiv p^n t \pmod{t^2\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+}$ pour tout $n \geq 0$ et $\varphi^{-n}(T) = \varepsilon^{(n)}e^{t/p^n} - 1 \notin t\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour $n \geq 1$.

b) C'est une conséquence immédiate du a).

c) Un sens étant évident, supposons que $\varphi^n(x) \in t^k\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour tout $n \geq 0$ et montrons que $x \in T^k\tilde{\mathbf{A}}^+$. Pour $k = 1$, c'est un résultat standard [9, lemme III.3.7]. Si $k > 1$, le cas $k = 1$ nous dit qu'il existe $y \in \tilde{\mathbf{A}}^+$ tel que $x = Ty$. Alors $\varphi^n(y) \in t^{k-1}\frac{t}{\varphi^n(T)}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ = t^{k-1}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (par la preuve de a)), ce qui permet de conclure par récurrence sur k.

□

3.3 (φ,Γ)-modules

Définition 3.3.1. a) Soit A un anneau topologique muni d'un endomorphisme continu φ et d'une action continue de Γ, qui commutent. Un (φ,Γ)-module sur A est un A-module de type fini muni d'un endomorphisme semi-linéaire φ et d'une action semi-linéaire de Γ, commutant entre elles.

b) Un (φ,Γ)-module D sur $O_{\mathscr{E}}$ est dit *étale* si $\varphi(D)$ engendre D sur $O_{\mathscr{E}}$. Un (φ,Γ)-module D sur $\mathscr{E}$ est dit *étale* s'il admet un $O_{\mathscr{E}}$-réseau stable par φ et Γ et qui est étale en tant que (φ,Γ)-module sur $O_{\mathscr{E}}$.

c) On note $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ (resp. $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$) la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $O_{\mathscr{E}}$, qui sont de torsion (resp. libres) comme $O_{\mathscr{E}}$-module. Enfin, on note $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}$.

On dispose alors du théorème fondamental suivant, dû à Fontaine [26].

5. Le lemme VI.5.2 de [12], qui est une version du b) de ce lemme, n'est pas correct.

Théorème 3.3.2. *Le foncteur $V \to D(V) = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^H$ induit une équivalence exacte entre la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $O_{\mathscr{E}}$ et la catégorie des O_L-représentations*[6] *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$. *De plus, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V \simeq (O_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}) \otimes_{O_{\mathscr{E}}} D(V).$$

Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$ et soit V la O_L-représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ qui lui correspond. Posons, pour $b \geq 1$, $D^{\dagger,b} = (\mathbf{A}^{\dagger,b} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^H$. Voir [5, prop. 4.2.6] pour une preuve du résultat suivant de Cherbonnier et Colmez :

Théorème 3.3.3. *Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$ est libre de rang d, alors il existe $m(D)$ tel que $D^{\dagger,m(D)}$ soit libre de rang d sur $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,m(D)}$, et $D^{\dagger,b} = O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b} \otimes_{O_{\mathscr{E}}^{\dagger,m(D)}} D^{\dagger,m(D)}$ pour tout $b \geq m(D)$.*

Remarque 3.3.4. Dans la suite $m(D)$ désigne toujours un entier assez grand, qui ne dépend que de D, mais qui est "variablement fixe", i.e. on se permet de l'augmenter si besoin est.

Si D est un (φ,Γ)-module étale correspondant à V, on associe à D une famille de (φ,Γ) et Γ-modules :

- Les (φ,Γ)-modules

$$\tilde{D} = (\tilde{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^H, \quad \tilde{D}^+ = (\tilde{\mathbf{A}}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^H, \quad \tilde{D}^{\dagger,b} = (\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger,b} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^H,$$

ainsi que $D^{(0,r_b]} = (\mathbf{A}^{(0,p^{-b}]} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^H$ et $\tilde{D}^{(0,r_b]} = (\tilde{\mathbf{A}}^{(0,p^{-b}]} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^H$.

- Les (φ,Γ)-modules $\tilde{D}^{]0,r_b]} = (\tilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-b}]} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^H$, $D^{]0,r_b]} = (\mathbf{B}^{]0,p^{-b}]} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^H$ et

$$D^\dagger = (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^H, \quad D_{\mathrm{rig}} = (\mathbf{B}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^H, \quad \tilde{D}_{\mathrm{rig}} = (\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^H.$$

- Les Γ-modules $\tilde{D}_{\mathrm{dif}} = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^H$ et $\tilde{D}_{\mathrm{dif}}^+ = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^H$.

Remarque 3.3.5. a) On déduit des théorèmes 3.3.2 et 3.3.3 les isomorphismes suivants, compatibles avec toutes les structures supplémentaires

$$D_{\mathrm{rig}} \simeq \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D^\dagger, \quad \mathscr{E} \otimes_{O_{\mathscr{E}}} D \simeq \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D^\dagger, \quad \tilde{D} \simeq \tilde{\mathbf{A}}^H \otimes_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}} D.$$

b) On récupère V de manière fonctorielle à partir de D et $\tilde{D}$ par

$$V = ((O_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}) \otimes_{O_{\mathscr{E}}} D)^{\varphi=1} = ((O_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \tilde{\mathbf{A}}) \otimes_{O_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \tilde{\mathbf{A}}^H} \tilde{D})^{\varphi=1}$$

et on récupère $V_L = L \otimes_{O_L} V$ de manière fonctorielle à partir de $D^\dagger$ et D_{rig} par

$$V_L = ((L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \tilde{\mathbf{B}}^\dagger) \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D^\dagger)^{\varphi=1} = ((L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}) \otimes_{\mathscr{R}} D_{\mathrm{rig}})^{\varphi=1}.$$

Combiné avec l'isomorphisme fonctoriel $D_{\mathrm{rig}} = (\mathbf{B}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_L)^H$, cela montre que

$$\mathrm{End}_{L[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)]}(V_L) = \mathrm{End}_{\varphi,\Gamma,\mathscr{R}}(D_{\mathrm{rig}}(V_L)).$$

Nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 3.3.6. *Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}}) \cup \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$. Alors $\tilde{D}^+$ est dense dans $\tilde{D}_{\mathrm{dif}}^+$ pour la topologie ω-adique.*

6. Soit $A \in \{O_L, L\}$. Une A-représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ est un A-module de type fini muni d'une action A-linéaire continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$. Soit $V = V(D)$. On démontre par récurrence sur k que pour tout $u \in \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$, il existe $\tilde{y} \in \tilde{D}^+$ tel que $\tilde{y} - u \in \omega^k \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$. D'après [12, lemme V.1.7], l'application $\theta : \tilde{D}^+ \to (O_{\mathbf{C}_p} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^H$ est surjective. Donc pour tout $u \in \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ il existe $\tilde{y} \in \tilde{D}^+$ tel que $\theta(\tilde{y}) = \theta(u)$, i.e. $\tilde{y} - u \in \omega \cdot \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$. Cela démontre le cas $k = 1$. Supposons le résultat vrai pour k et soit $u \in \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$. Il existe $\tilde{y} \in \tilde{D}^+$ et $u_1 \in \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ tel que $\tilde{y} - u = \omega^k \cdot u_1$. Soit $\tilde{y_1} \in \tilde{D}^+$ tel que $\tilde{y_1} - u_1 \in \omega \cdot \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$. Alors $(\tilde{y} - \omega^k \cdot \tilde{y_1}) - u \in \omega^{k+1} \cdot \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$, ce qui permet de conclure.

□

Définition 3.3.7. Si D est le (φ, Γ)-module étale attaché à une O_L (ou L)-représentation V, on note $\check{D}$ le (φ, Γ)-module attaché à $V^*(1) = V^* \otimes \chi$. Cela s'applique aussi à $\tilde{D}, \tilde{D}^+, D_{\mathrm{rig}}$, etc...

3.4 Morphismes de localisation et le module de Fontaine $D^+_{\mathrm{dif},n}$

Si $x = \sum_k p^k[x_k] \in \tilde{\mathbf{B}}^{(0,1]}$, la série $\sum_k p^k[x_k]$ converge dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, ce qui fournit un morphisme naturel $\tilde{\mathbf{B}}^{(0,1]} \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, qui se trouve être injectif. Ce morphisme s'étend en un morphisme, toujours injectif, de $\tilde{\mathbf{B}}^{]0,1]}$ dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$. Composé avec l'isomorphisme $\tilde{\mathbf{B}}^{]0,1]} \simeq \tilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]}$ induit par φ^n, ce morphisme induit une application de localisation $\varphi^{-n} : \tilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]} \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, compatible avec l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$.

Définition 3.4.1. Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, auquel on associe une L-représentation V de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ et des (φ, Γ)-modules D_{rig}, etc, comme dans 3.3. Pour $n \geq m(D)$:

a) On note $\varphi^{-n} : D^{]0,r_n]} \to \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ la composée de l'injection $D^{]0,r_n]} \subset \tilde{D}^{]0,r_n]}$ avec l'application $\varphi^{-n} \otimes 1 : \tilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]} \otimes V \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes V$. Cette injection L-linéaire, Γ-équivariante est appelée *morphisme de localisation* en $\varepsilon^{(n)} - 1$.

b) On note $D^+_{\mathrm{dif},n}$ le sous $L_n[[t]]$-module de $\tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ engendré par l'image de $\varphi^{-n} : D^{]0,r_n]} \to \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ et on pose $D_{\mathrm{dif},n} = D^+_{\mathrm{dif},n}[1/t]$.

Exemple 3.4.2. Si D est le (φ, Γ)-module attaché à la représentation triviale, le morphisme de localisation est l'injection φ^{-n} de $\mathscr{E}^{]0,r_n]} \to L_n[[t]]$ de la partie 3.1, composée avec l'inclusion $L_n[[t]] \subset L \otimes_{\mathbf{Q}_p} (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^H$.

Remarque 3.4.3. a) Pour $n \geq m(D)$ on a

$$D^+_{\mathrm{dif},n} = L_n[[t]] \otimes_{\mathscr{E}^{]0,r_n]}} D^{]0,r_n]},$$

où $L_n[[t]]$ est vu comme $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$-algèbre via φ^{-n} (exemple 3.4.2). Le théorème 3.3.3 entraîne que $D^+_{\mathrm{dif},n}$ est un $L_n[[t]]$-module libre de même rang que D (et égal à $\dim_L(V)$), stable sous l'action de Γ. De plus, Γ_n agit de manière L_n-linéaire sur $D^+_{\mathrm{dif},n}$.

b) La représentation V est dite *de de Rham* si le L-espace vectoriel

$$D_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)}$$

est de dimension $\dim_L V$. La filtration sur $D_{\mathrm{dR}}(V)$ est définie par $\mathrm{Fil}^i(D_{\mathrm{dR}}(V)) = (t^i \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)}$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$. On pose aussi $D^+_{\mathrm{dR}}(V) = \mathrm{Fil}^0(D_{\mathrm{dR}}(V))$. Si V est de de Rham, alors on peut retrouver $D_{\mathrm{dR}}(V)$ et sa filtration à partir de $D^+_{\mathrm{dif},n}$ par la recette $\mathrm{Fil}^i(D_{\mathrm{dR}}(V)) = (t^i D^+_{\mathrm{dif},n})^\Gamma$, pour $n \geq m(D)$ et $i \in \mathbf{Z}$. De plus, $D_{\mathrm{dif},n} = L_n((t)) \otimes_L D_{\mathrm{dR}}(V)$ pour tout $n \geq m(D)$. Notons qu'avec nos conventions, si V est de de Rham, alors les poids de Hodge-Tate de V sont les opposés des sauts de la filtration sur $D_{\mathrm{dR}}(V)$.

3.5 L'action infinitésimale de Γ

Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ attaché à V. D'après Berger [2], lemme 4.1 et ce qui suit, l'action infinitésimale de Γ sur D_{rig} définit une connexion

$$\nabla : D_{\mathrm{rig}} \to D_{\mathrm{rig}}, \quad \nabla(z) = \lim_{a \to 1} \frac{\sigma_a(z) - z}{a - 1},$$

qui commute à φ et Γ et laisse stable $D^{]0,r_n]}$ pour $n \geq m(D)$. Par exemple, si D est trivial, alors $D_{\mathrm{rig}} = \mathscr{R}$ et

$$\nabla(f) = (1+T)\log(1+T) \cdot \frac{d}{dT} f(T) = t \cdot \frac{df}{dt}$$

pour $f \in \mathscr{R}$. En général, la connexion ∇ satisfait $\nabla(fz) = \nabla(f)z + f\nabla(z)$ pour $z \in D_{\mathrm{rig}}$ et $f \in \mathscr{R}$.

L'action de Γ sur $D^+_{\mathrm{dif},n}$ (avec $n \geq m(D)$) peut aussi se dériver, ce qui induit une connexion L_n-linéaire $\nabla = \lim_{a \to 1} \frac{\sigma_a - 1}{a-1}$ sur $D^+_{\mathrm{dif},n}$, au-dessus de la connexion $t\frac{d}{dt}$ sur $L_n[[t]]$. Cette connexion préserve donc $t^i D^+_{\mathrm{dif},n}$ pour tout $i \geq 0$.

Définition 3.5.1. Les poids de Hodge-Tate généralisés (resp. le polynôme $P_{\mathrm{Sen,D}}$ de Sen) de D (ou de V) sont les valeurs propres (resp. le polynôme caractéristique) de ∇ agissant sur le L_n-module libre de type fini $D_{\mathrm{Sen},n} := D^+_{\mathrm{dif},n}/tD^+_{\mathrm{dif},n}$. L'opérateur de Sen $\Theta_{\mathrm{Sen},D}$ est l'opérateur $\nabla \pmod t$ agissant sur la réunion des $D_{\mathrm{Sen},n}$.

Remarque 3.5.2. La définition 3.5.1 est compatible avec la définition classique[7] des poids de Hodge-Tate généralisés. En effet, $\theta : (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^H \to (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^H$ identifie $D_{\mathrm{Sen},n}$ à un sous-L_n-module de $D_{\mathrm{Sen}}(V)$, tel que $D_{\mathrm{Sen},n} \otimes_{L_n} L_\infty = D_{\mathrm{Sen}}(V)$, compatible avec les opérateurs Θ_{Sen}.

La proposition suivante va jouer un rôle important dans la suite.

Proposition 3.5.3. *Si $P \in L[X]$, alors $P(\Theta_{\mathrm{Sen},D}) = 0$ équivaut à $P(\nabla)(D_{\mathrm{rig}}) \subset t \cdot D_{\mathrm{rig}}$.*

Démonstration. Si $z \in D_{\mathrm{rig}}$ et $\varphi^{-n}(z) \in tD^+_{\mathrm{dif},n}$ pour tout n assez grand, alors $z \in tD_{\mathrm{rig}}$ (voir [2], lemmes 5.1 et 5.4). Ensuite, D_{rig} est la réunion des $D^{]0,r_n]}$, qui sont stables par ∇, pour n assez grand. En utilisant tout ceci et le fait que φ^{-n} commute à ∇, on obtient que $P(\nabla)(D_{\mathrm{rig}}) \subset t \cdot D_{\mathrm{rig}}$ si et seulement si $P(\nabla)(\varphi^{-n}(D^{]0,r_n]})) \subset t \cdot D^+_{\mathrm{dif},n}$ pour tout n assez grand. Cela équivaut à $P(\nabla)(D^+_{\mathrm{dif},n}) \subset t \cdot D^+_{\mathrm{dif},n}$ pour n assez grand. Mais cela arrive si et seulement si $P(\Theta_{\mathrm{Sen},D}) = 0$, ce qui permet de conclure.

□

3.6 Traces de Tate normalisées

Rappelons que $H = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty}))$. Soit $I = [0,1) \cap \mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$ et $I_n = I \cap p^{-n}\mathbf{Z}_p$, de telle sorte que I est la réunion croissante des I_n et aussi un système de représentants de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$. Si $b \in \mathbf{Q}_p$, soit n tel que $p^n b \in \mathbf{Z}_p$ et posons

$$[(1+T)^b] = \varphi^{-n}\left((1+T)^{p^n b}\right) = \varphi^{-n}\left(\sum_{k \geq 0} \binom{p^n b}{k} T^k\right)$$

7. D'après Sen [41], il existe un plus grand sous-L_∞-module libre de type fini $D_{\mathrm{Sen}}(V)$ de $(\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^H$, qui est stable par Γ. Le module $D_{\mathrm{Sen}}(V)$ engendre $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ sur $\mathbf{C}_p$ et est de rang $\dim_L V$. L'action infinitésimale de Γ sur $D_{\mathrm{Sen}}(V)$ définit un opérateur L_∞-linéaire Θ_{Sen}, dont les valeurs propres s'appelent les poids de Hodge-Tate généralisés de V.

et $\varepsilon(b) = (\varepsilon^{(n)})^{p^n b}$. On obtient ainsi des éléments de $(\tilde{\mathbf{A}}^+)^H$, resp. μ_{p^∞}, qui ne dépendent pas du choix de n et tels que

$$[(1+T)^b] = \varepsilon(b) \cdot e^{tb} \in (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^H.$$

La proposition 8.5. de [15] montre que tout élément z de $\tilde{\mathbf{A}}^H$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = \sum_{i \in I} [(1+T)^i] z_i$, avec $z_i \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ qui tend vers 0 quand $v_p(i) \to -\infty$. De plus, on a $z \in (\tilde{\mathbf{A}}^+)^H$ si et seulement si $z_i \in \mathbf{Z}_p[[T]]$ pour tout $i \in I$, et les applications $z \to z_i$ sont $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$-linéaires. Posons alors, pour $z \in \tilde{\mathbf{A}}^H$

$$T_n(z) = \sum_{i \in I_n} [(1+T)^i] z_i \in \tilde{\mathbf{A}}^H.$$

Lemme 3.6.1. *On a $\varphi^{-n} \circ T_0 = T_n \circ \varphi^{-n}$ et T_n est $\varphi^{-n}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p})$-linéaire, Γ-équivariante.*

Démonstration. La première égalité est équivalente à $T_0 \circ \varphi^n = \varphi^n \circ T_n$, qui est immédiate sur la définition (les deux quantités valent $\sum_{i \in I_n} (1+T)^{p^n i} \varphi^n(z_i)$). La $\varphi^{-n}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p})$-linéarité découle de la $A_{\mathbf{Q}_p}$-linéarité de T_0 et de ce que l'on vient de démontrer. La Γ-équivariance est immédiate. □

On étend T_n à $\tilde{\mathbf{B}}^H$ par $\mathbf{Q}_p$-linéarité. Alors T_n préserve $(\tilde{\mathbf{B}}^+)^H$. Si $n \geq 1$, alors $T_n(\omega^j z) = \omega^j T_n(z)$ pour tout $j \in \mathbf{N}$ et $z \in (\tilde{\mathbf{B}}^+)^H$ (lemme 3.6.1 ; noter que $\omega \in \varphi^{-1}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p})$)). Le résultat suivant fait l'objet de [9, prop. V.4.5], mais pour le confort du lecteur on en donne une preuve.

Proposition 3.6.2. *Soit $n \geq 1$. Il existe un unique prolongement continu $T_n : (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^H \to (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^H$ de $T_n : (\tilde{\mathbf{B}}^+)^H \to (\tilde{\mathbf{B}}^+)^H$. De plus, T_n est $F_n[[t]]$-linéaire, son image est contenue dans $F_n[[t]]$ et pour tous $m \geq 0$ et $x \in F_{n+m} \subset (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^H$*

$$T_n(x) = \frac{1}{p^m} \mathrm{Tr}_{F_{n+m}/F_n}(x).$$

Démonstration. Le lemme 3.3.6 montre que $(\tilde{\mathbf{B}}^+)^H$ est dense dans $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^H$ pour la topologie ω-adique (et donc aussi pour la topologie faible de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$). Le lemme 3.6.1 et la discussion qui la suit montrent que $T_n : (\tilde{\mathbf{B}}^+)^H \to (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^H$ est continu pour la topologie ω-adique, d'où l'existence et l'unicité d'un prolongement continu de T_n à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^H$. Ensuite, on a $[(1+T)^i] = \varepsilon(i) e^{it} \in F_n[[t]]$ si $i \in I_n$. Donc $T_n((\tilde{\mathbf{B}}^+)^H) \subset F_n[[t]]$. Comme $F_n[[t]]$ est fermé dans $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^H$, on obtient $T_n((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^H) \subset F_n[[t]]$. Puisque $t = \log(1+T)$ et T_n est $\mathbf{Z}_p[[T]]$-linéaire continue, elle est $\mathbf{Q}_p[[t]]$-linéaire. Pour conclure, il suffit d'utiliser la formule $\varepsilon^{(m)} = e^{-\frac{t}{p^m}}[(1+T)^{\frac{1}{p^m}}]$, qui montre à la fois que T_n est F_n-linéaire et que $T_n(\varepsilon^{(m)}) = 0$ pour tout $m > n$. □

On définit alors $T_{0,\mathrm{dR}} : (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^H \to \mathbf{Q}_p[[t]] \subset (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^H$ par

$$T_{0,\mathrm{dR}} = \frac{1}{p} \mathrm{Tr}_{F_1((t))/\mathbf{Q}_p((t))} \circ T_1.$$

Il faut faire attention au fait que $T_{0,\mathrm{dR}}$ ne coincide pas avec T_0 (ou avec $\frac{p-1}{p} T_0$) sur $(\tilde{\mathbf{B}}^+)^H$.

3.7 Dualité

Soit V une O_L-représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ et soit $D = D(V)$. L'accouplement $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$-équivariant parfait $V^*(1) \times V \to O_L(1)$ induit un accouplement $\tilde{\mathbf{A}}^H \otimes_{\mathbf{Z}_p} O_L$-bilinéaire, Γ-équivariant

$$\langle\ ,\ \rangle : \tilde{\check{D}} \times \tilde{D} = (\tilde{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V^*(1))^H \times (\tilde{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^H \to (\tilde{\mathbf{A}}^H \otimes_{\mathbf{Z}_p} O_L)(1).$$

On note $\frac{dT}{1+T}$ la base canonique du Γ-module $\mathbf{Z}_p(1)$ et on fait agir φ sur $\frac{dT}{1+T}$ par $\varphi(\frac{dT}{1+T}) = \frac{dT}{1+T}$. On identifie $M(1)$ à $M\frac{dT}{1+T}$ pour tout Γ-module M. L'application T_0 du § 3.6 induit une application Γ-équivariante

$$T_0 = (T_0 \otimes \mathrm{id})(1) : (\tilde{\mathbf{A}}^H \otimes_{\mathbf{Z}_p} O_L)(1) \to (\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathbf{Z}_p} O_L)\frac{dT}{1+T} = O_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T},$$

ce qui permet de définir un accouplement entre $\check{\tilde{D}}$ et $\tilde{D}$ par

$$\{\ ,\ \} : \check{\tilde{D}} \times \tilde{D} \to O_L, \quad \{\check{z}, z\} = \mathrm{res}_0(T_0(\langle \sigma_{-1}(\check{z}), z\rangle)),$$

avec la notation habituelle $\mathrm{res}_0(f) = a_{-1}$ si $f = (\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n T^n)dT$. Cet accouplement est φ et Γ invariant (lemme 3.6.1 et [11, prop. I.2.2]) et sa restriction à $\check{D} \times D$ est celle utilisée dans [12]. Bien sûr, si on part d'une L-représentation V, les constructions précédentes s'appliquent.

Soit maintenant V une L-représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ et soit $D = D(V)$. La dualité entre V^* et V induit un accouplement Γ-équivariant parfait

$$\langle\ ,\ \rangle : \check{\tilde{D}}_{\mathrm{dif}} \times \tilde{D}_{\mathrm{dif}} \to (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}^H_{\mathrm{dR}})(1) = (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}^H_{\mathrm{dR}})dt,$$

dt étant une base de $\mathbf{Q}_p(1)$ (comme $t = \log(1+T)$, on a bien $dt = \frac{dT}{1+T}$, compatible avec l'action de Γ). Cet accouplement envoie $\check{\tilde{D}}^+_{\mathrm{dif}} \times \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ dans $(L \otimes_{\mathbf{Q}_p} (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^H)dt$ et induit, pour n assez grand, un accouplement parfait Γ-équivariant $\langle\ ,\ \rangle : \check{D}_{\mathrm{dif},n} \times D_{\mathrm{dif},n} \to L_n((t))dt$, tel que $\check{D}^+_{\mathrm{dif},n}$ et $D^+_{\mathrm{dif},n}$ soient exactement orthogonaux. On définit alors un accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathrm{dif}} : \check{\tilde{D}}_{\mathrm{dif}} \times \tilde{D}_{\mathrm{dif}} \to L$ en posant (cf. § 3.6 pour $T_{0,\mathrm{dR}}$)

$$\{\check{z}, z\}_{\mathrm{dif}} = \mathrm{res}_0(T_{0,\mathrm{dR}}(\langle \sigma_{-1}(\check{z}), z\rangle)),$$

où $\mathrm{res}_0 : L((t))dt \to L$ est l'application résidu. Alors $\{\ ,\ \}_{\mathrm{dif}}$ induit un accouplement Γ-invariant parfait entre $\check{D}_{\mathrm{dif},n}$ et $D_{\mathrm{dif},n}$ et $\check{D}^+_{\mathrm{dif},n}$ et $D^+_{\mathrm{dif},n}$ sont exactement orthogonaux pour n assez grand [12, lemme VI.3.3].

Le résultat suivant est une reformulation de [12, prop. VI.1.3]. Il sera un ingrédient essentiel pour la suite. Pour le confort du lecteur, on en donne une preuve.

Proposition 3.7.1. *Soient $n, k \in \mathbf{N}^*$, $a \in \mathbf{Z}$ et $\check{z} \in \check{\tilde{D}}^+$, $z \in \left(\frac{\varphi^a(T)}{\varphi^n(T)}\right)^k \tilde{D}^+$. Alors*

$$\{\check{z}, z\} = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \{\varphi^{-j}(\check{z}), \varphi^{-j}(z)\}_{\mathrm{dif}},$$

la somme n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Démonstration. On peut supposer[8] que $a = 0$. Posons $\langle \sigma_{-1}(\check{z}), z\rangle = f\frac{dT}{1+T}$, avec $f \in \left(\frac{T}{\varphi^n(T)}\right)^k (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} (\tilde{\mathbf{B}}^+)^H)$. Alors

$$\langle \sigma_{-1}(\varphi^{-j}(\check{z})), \varphi^{-j}(z)\rangle = \varphi^{-j}(f)dt \in (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}^H_{\mathrm{dR}})dt$$

et $\varphi^{-j}(f) \in (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^H$ pour $j \notin [1, n]$ (lemme 3.2.2), ce qui fait que seuls les termes d'indice $j \in [1, n]$ dans la somme sont non nuls. Dans la suite on fixe un tel j.

8. Si $a \neq 0$, remplacer z et $\check{z}$ par $\varphi^{-a}(z)$ et $\varphi^{-a}(\check{z})$, ainsi que n par $n - a$; l'égalité à démontrer est la même, car $\{\ ,\ \}$ est φ-invariant.

Notons $g = T_0(f) \in \left(\frac{T}{\varphi^n(T)}\right)^k \mathscr{E}^+$, de telle sorte que $\{\check{z}, z\} = \mathrm{res}_0(g\frac{dT}{1+T})$. Ensuite, comme $j \geq 1$, on a (lemme 3.6.1)

$$T_1(\varphi^{-j}(g)) = T_1(\varphi^{-j}(T_0(f))) = T_1 \circ T_j(\varphi^{-j}(f)) = T_1(\varphi^{-j}(f)),$$

donc (en prenant la trace) $T_{0,\mathrm{dR}}(\varphi^{-j}(g)) = T_{0,\mathrm{dR}}(\varphi^{-j}(f))$ et

$$\{\varphi^{-j}(\check{z}), \varphi^{-j}(z)\}_{\mathrm{dif}} = \mathrm{res}_0(T_{0,\mathrm{dR}}(\varphi^{-j}(g))dt).$$

Si A_j est l'ensemble des racines primitives d'ordre p^j de l'unité, alors

$$T_{0,\mathrm{dR}}(\varphi^{-j}(g)) = \frac{1}{p^j}\mathrm{Tr}_{L_j/L}(g(\varepsilon^{(j)}e^{t/p^j} - 1)) = \frac{1}{p^j}\sum_{\zeta\in A_j} g(\zeta e^{t/p^j} - 1)$$

et, en faisant la substitution $t \to p^{j-n}t$, on obtient finalement

$$\{\varphi^{-j}(\check{z}), \varphi^{-j}(z)\}_{\mathrm{dif}} = \frac{1}{p^n}\sum_{\zeta\in A_j} \mathrm{res}_0(g(\zeta e^{t/p^n} - 1)dt),$$

ce qui permet de conclure que

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\{\varphi^{-j}(\check{z}), \varphi^{-j}(z)\}_{\mathrm{dif}} = \frac{1}{p^n}\sum_{\zeta\in\mu_{p^n}} \mathrm{res}_0(g(\zeta e^{t/p^n} - 1)dt)$$

$$= \mathrm{res}_0\left(\frac{1}{p^n}\sum_{\zeta\in\mu_{p^n}} g(\zeta e^{t/p^n} - 1)dt\right) = \mathrm{res}_0(\psi^n(g)(e^t - 1)dt) =$$

$$\mathrm{res}_0\left(\psi^n(g)\frac{dT}{1+T}\right) = \mathrm{res}_0\left(g\frac{dT}{1+T}\right) = \{\check{z}, z\}.$$

Les dernières égalités utilisent la définition de $\{\ ,\ \}$, le changement de variable $T = e^t - 1$ et l'égalité [11, prop. I.2.2] $\mathrm{res}_0(f\frac{dT}{1+T}) = \mathrm{res}_0(\psi(f)\frac{dT}{1+T})$ pour tout $f \in \mathscr{R}$.

□

3.8 Les modules D^{nr}, $D^\sharp$ et $D^\natural$

Les modules suivants jouent un rôle très important dans la correspondance de Langlands locale p-adique pour G. Ils font l'objet d'une étude détaillée dans [11].

Définition 3.8.1. Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}}) \cup \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$.

a) Le O_L-module D^{nr} est l'intersection des $\varphi^n(D)$, pour $n \geq 1$.

b) D^+ (resp. D^{++}) est le O_L-module des $x \in D$ tels que la suite $(\varphi^n(x))_{n\geq 0}$ soit bornée (resp. tend vers 0) pour la topologie faible de D.

c) Si D est de torsion, on définit $D^\natural$ et $D^\sharp$ comme les orthogonaux respectifs de $\check{D}^+$ et $\check{D}^{++}$, pour l'accouplement $\{\ ,\ \}$ (voir 3.7). Dans le cas général on définit $D^\natural$ (resp. $D^\sharp$) comme la limite projective des $(D/p^k)^\natural$ (resp. $(D/p^kD)^\sharp$).

On étend ces définitions aux (φ, Γ)-modules sur $\mathscr{E}$, en choisissant des réseaux stables par φ et Γ (les objets obtenus ne dépendent pas des choix) et en tensorisant par L. Noter que $D^\natural \subset D^\sharp$.

Proposition 3.8.2. *Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}}) \cup \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$. Alors :*

a) D^{nr} et $D^\sharp/D^\natural$ sont des O_L-modules de type fini. Si D est de torsion, alors $\check{D}^{\mathrm{nr}}$ est le dual de $D^\sharp/D^\natural$.

b) $D^\natural$ (resp. $D^\sharp$) sont des sous $O_L[[T]]$-modules compacts de D, qui engendrent D et sur lesquels ψ est surjectif.

c) Si D est de torsion ou si D est irréductible de rang ≥ 2, alors $D^\sharp/D^\natural$ est un O_L-module de longueur finie.

Démonstration. Toutes les références sont à [11]. Le a) suit de la prop. II.2.2 et de la prop. II.5.19. Le b) découle de la prop. II.6.3. Enfin, c) est le cor. II.5.21.

□

Remarque 3.8.3. 1) Il est immédiat de vérifier que $D \to D^?$ est un foncteur si $? \in \{+, ++, \mathrm{nr}, \natural, \sharp\}$. Un point important [11, prop. II.6.5] est que ce foncteur préserve les surjections si $? \in \{\natural, \sharp\}$.

2) L'idée de base de la preuve de la proposition est que si D est de torsion, alors D^+ et D^{++} sont assez gros pour engendrer D. Ce résultat est en général faux si D n'est pas de torsion.

3) On déduit de la proposition ci-dessus que si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, alors D^{nr} et $D^\sharp/D^\natural$ sont des L-espaces vectoriels de dimension finie et que $\check{D}^{\mathrm{nr}}$ est le L-dual de $D^\sharp/D^\natural$. De plus, si D est irréductible de dimension ≥ 2, alors $D^\natural = D^\sharp$. Cela est faux si D est de dimension 1.

4)$D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$, il n'est pas vrai en général que $D^\sharp/D^\natural$ est le dual de $\check{D}^{\mathrm{nr}}$.

Nous aurons aussi besoin du résultat plus technique suivant, déduit [12, lemme IV.5.1] de la technique des extensions presque étales :

Lemme 3.8.4. *Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$ et $D_k = D/p^kD$. Il existe $c = c(D)$ tel que p^c tue* $\mathrm{Coker}(D^{\mathrm{nr}} \to D_k^{\mathrm{nr}})$ *et* $\mathrm{Coker}(\tilde{D}^+ \to \tilde{D}_k^+)$ *pour tout $k \geq 1$.*

Chapitre 4

Paires G-compatibles et foncteur de Montréal

Dans ce chapitre, dont la raison d'exister est le théorème 10.0.3, on démontre quelques propriétés de base de la catégorie $\mathrm{Rep}_L(G)$ (voir l'introduction ou ci-dessous), en utilisant la théorie des (φ, Γ)-modules. L'ingrédient clef est le foncteur de Montréal et le point est le fait que le (φ, Γ)-module attaché à une représentation $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ contient presque toute l'information contenue dans[1] Π. Ce résultat fondamental est démontré dans [12, chap. IV] pour les représentations de torsion. On fait l'exercice de passage à la limite pour montrer qu'il reste vrai pour $\mathrm{Rep}_L(G)$. Cela nous permet de montrer que tout objet de $\mathrm{Rep}_L(G)$ est de longueur finie (topologiquement). C'est la réciproque d'un théorème profond de Paskunas [38, th.1.1]. Même si beaucoup plus facile (et vraie pour tout p, alors que loc.cit. est pour l'instant démontrée pour $p \geq 5$) la preuve de cette réciproque utilise un bon nombre de résultats de [12]. On aura besoin de ce résultat dans les chapitres suivants pour démontrer un résultat de finitude pour les modules de Jacquet localement analytiques des représentations de $\mathrm{Rep}_L(G)$.

Il est à noter que même si on utilise essentiellement tous les objets qui interviennent dans la construction de la correspondance de Langlands locale p-adique pour G, on évite les deux théorèmes les plus délicats de la théorie (dûs à Colmez [12, th.II.3.3], Kisin [32, th.0.1.1] et Paskunas [38]). Ainsi, les résultats que l'on démontre n'ont pas de restriction sur p.

Dans ce chapitre D est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$ ou $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$. On résumera ceci par "$D$ est un (φ, Γ)-module étale". On fixe un caractère unitaire $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to O_L^*$ et on utilise systématiquement les résultats et définitions de la partie 3.8. Enfin, on rappelle que $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

4.1 Paires G-compatibles et fonctorialité

Représentations de G

Si A est un anneau commutatif et H est un groupe topologique, une A-représentation de H est un $A[H]$-module à gauche. Une telle représentation Π est dite *lisse* si le stabilisateur de tout $v \in \Pi$ est ouvert dans H et *lisse admissible* si de plus les invariants de Π sous n'importe quel sous-groupe ouvert compact de H forment un A-module de type fini.

Nous aurons besoin des catégories de représentations suivantes :

1. Le foncteur de Montréal tue les morceaux de dimension finie, mais à peu de choses près c'est l'unique information que l'on perd.

• $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ est la catégorie des O_L-représentations Π de longueur finie, ayant un caractère central, lisses et [2] admissibles. Tout $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ est un O_L-module de torsion.

• $\mathrm{Rep}_{O_L}(G)$ est la catégorie des O_L-représentations Π de G, ayant un caractère central et telles que Π est un O_L-module séparé et complet pour la topologie p-adique, sans p-torsion et tel que $\Pi/p^n\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ pour tout n.

• $\mathrm{Rep}_L(G)$ est la catégorie des L-représentations de G qui admettent un O_L-réseau ouvert, borné, stable par G et dans $\mathrm{Rep}_{O_L}(G)$.

Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$, on note $\Pi^\vee = \mathrm{Hom}(\Pi, L/O_L)$ le dual de Pontryagin de Π. C'est naturellement un O_L-module compact pour la topologie de la convergence faible, muni d'une action évidente de G. Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{O_L}(G)$ (resp. $\mathrm{Rep}_L(G)$) on note Π^* le O_L (resp. L)-dual continu de Π.

Rappels

Soit D un (φ, Γ)-module étale, muni de la topologie faible. Rappelons que l'on dispose [12, chap. II] d'un faisceau G-équivariant sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, attaché à (D, δ), dont l'espace des sections sur U est noté $D \boxtimes_\delta U$. Par définition,

$$D \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}} | \quad x_n \in D \quad \text{et} \quad \psi(x_{n+1}) = x_n\},$$

muni de la topologie induite par la topologie produit sur $D^{\mathbf{N}}$.

Si $? \in \{\natural, \sharp\}$, on note $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p = (D \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p) \cap (D^?)^{\mathbf{N}}$ et, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, on note $(D^? \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_b = (D_0^? \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p) \otimes_{O_L} L$, pour n'importe quel réseau D_0 de D, stable par φ et Γ. Alors $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ est un sous-module fermé de $D \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ et il est compact si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}}) \cup \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$. De plus, $(D^? \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_b$ est un L-espace vectoriel topologique localement convexe pour la topologie limite inductive.

On munit

$$D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in D \times D | \quad \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_2) = w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1))\}$$

de la topologie induite par $D \times D$ et on en considère les sous-B-modules fermés suivants :

• $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \{z \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 | \quad \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(z) \in D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p\}$.

• $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}} = \{z \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 | \quad \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(z) \in D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p\}$.

• $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = (D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}} \cup \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, et [3] $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est le saturé de $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$.

Remarque 4.1.1. L'action de G sur $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est décrite par les formules suivantes :

• Pour $z \in D$, $a \in \mathbf{Z}_p^*$ et $b \in \mathbf{Z}_p$ on a

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = \varphi(z), \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = \sigma_a(z), \quad \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = (1+T)^b \cdot z.$$

• Pour $z = (z_1, z_2) \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $a \in \mathbf{Q}_p^*$ on a $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) z = \delta(a)z$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) z = (z_2, z_1)$, $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(w \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z\right) = \delta(p)\psi(z_2)$ et enfin $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}\left(w \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\right) = u_b\left(\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_2)\right)$, où [4]

$$u_b = \delta(1+b) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ w_\delta \circ \begin{pmatrix} (1+b)^{-2} & b(1+b)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ w_\delta \circ \begin{pmatrix} 1 & (1+b)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. L'admissibilité est une conséquence des autres hypothèses, grâce aux travaux de Barthel-Livné et Breuil.
3. Le sous-module $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ n'est pas forcément saturé p-adiquement, voir la remarque VII.4.28 de [12].
4. La formule de [12, pag. 325] comporte quelques fautes de frappe.

sur $D \boxtimes p\mathbf{Z}_p$.

Remarque 4.1.2. Si $f : D_1 \to D_2$ est un morphisme de (φ, Γ)-modules, il est apparent sur la définition du faisceau $D \to D \boxtimes_\delta U$ que f induit un morphisme équivariant du faisceau attaché à (D_1, δ) dans le faisceau attaché à (D_2, δ). En particulier, f induit des morphismes de G (resp. B)-modules topologiques $f : D_1 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D_2 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ (resp. $f : D_1 \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p \to D_2 \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$). Si $? \in \{\sharp, \natural\}$, alors f envoie $D_1^?$ dans $D_2^?$ (remarque 3.8.3) et donc f envoie $D_1^? \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ dans $D_2^? \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ et $D_1^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ dans $D_2^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$.

Si $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G, on dit que (D, δ) est une *paire G-compatible* et on pose

$$\Pi(D, \delta) = (D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1).$$

C'est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(\mathrm{G})$, $\mathrm{Rep}_{\mathrm{O_L}}(\mathrm{G})$, resp. $\mathrm{Rep}_{\mathrm{L}}(\mathrm{G})$, suivant que $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$, resp. $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ [12, lemme II.2.10].

Proposition 4.1.3. *Soient D un (φ, Γ)-module étale et soient $\delta, \eta : \mathbf{Q}_p^* \to O_L^*$ des caractères unitaires. Si (D, δ) est une paire G-compatible, alors il en est de même de $(D(\eta), \delta\eta^2)$ et on a un isomorphisme de G-modules de Banach*

$$\Pi(D(\eta), \delta\eta^2) \simeq \Pi(D, \delta) \otimes (\eta \circ \det).$$

Démonstration. C'est une conséquence de [12, prop. II.1.11]. □

Proposition 4.1.4. *Pour tout δ, la paire $(\mathscr{E}, \delta)$ est G-compatible. Plus précisément :*

a) On a un isomorphisme de G-modules topologiques[5]

$$\mathscr{E}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \mathscr{E}^+ \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \simeq (\mathrm{Ind}_B^G(\delta^{-1} \otimes 1)^{\mathrm{cont}})^*.$$

b) L'application $\mathscr{E} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to \mathrm{Ind}_B^G(\chi^{-1}\delta \otimes \chi^{-1})$ définie par

$$z \to \phi_z, \quad \phi_z(g) = \mathrm{res}_0\left(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wgz)\frac{dT}{1+T}\right)$$

est une surjection G-équivariante, de noyau $\mathscr{E}^+ \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, d'où un isomorphisme

$$\Pi(\mathscr{E}, \delta) \simeq \mathrm{Ind}_B^G(\chi^{-1}\delta \otimes \chi^{-1})^{\mathrm{cont}}.$$

Les résultats de a) et b) restent vrais si on remplace $\mathscr{E}$ par $\mathscr{R}$ et les induites continues par des induites localement analytiques.

Démonstration. Voir la remarque II.1.1 de [12]. □

Les résultats suivants seront souvent utilisés par la suite. Rappelons que $P = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est le sous-groupe mirabolique de G.

Proposition 4.1.5. *a) Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}} \cup \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$ et soit M un sous O_L-module fermé de $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$, stable par P. Si $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(M)$ engendre D en tant que (φ, Γ)-module, alors $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p \subset M$.*

b) Soit (D, δ) une paire G-compatible, avec $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$. Alors $(D/p^k D, \delta)$ est une paire G-compatible pour tout $k \geq 0$.

c) Une paire (D, δ) est G-compatible si et seulement si $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G.

5. On note dans la suite $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2)^{\mathrm{cont}}$ l'espace des fonctions continues $f : G \to L$ telles que $f\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) g\right) = \delta_1(a)\delta_2(d)f(g)$ pour tous $a, d \in \mathbf{Q}_p^*$, $b \in \mathbf{Q}_p$ et $g \in G$. La définition de $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2)^{\mathrm{an}}$ est obtenue en remplaçant "continue" par "localement analytique".

Démonstration. Le a) découle de la preuve du théorème III.3.8 de [11] (noter que le caractère δ ne joue aucun rôle quand on considère la restriction à P). Le b) et le c) sont contenus dans la proposition II.2.6 (et sa preuve) de [12]. □

4.2 Invariants sous $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Dans cette partie on démontre certains résultats élémentaires concernant les $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$-invariants d'une représentation de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ ou $\mathrm{Rep}_L(G)$.

Lemme 4.2.1. *Soit $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$. Alors $\Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ est un O_L-module de longueur finie.*

Démonstration. Soit K_m le noyau de l'application naturelle $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$. Il suffit de montrer que $\Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} \subset \Pi^{K_m}$ pour m assez grand. Soit δ un caractère central de Π et soit $n \geq 1$ tel que δ soit trivial sur $1 + p^n\mathbf{Z}_p$. Si $x \in 1 + p^{n+1}\mathbf{Z}_p$, il existe $y \in 1 + p^n\mathbf{Z}_p$ tel que $x = y^2$. Si $v \in \Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$, alors

$$\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v = \left(\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{smallmatrix}\right) v = \delta(y)v = v.$$

Comme $\det K_{n+1} \subset 1 + p^{n+1}\mathbf{Z}_p$, on en déduit que l'on peut prendre $m = n + 1$.

□

Corollaire 4.2.2. *Pour tout $\Pi \in \mathrm{Rep}_{O_L}(G)$ (resp. $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$), $\Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ est un O_L-module libre de type fini (resp. un L-espace vectoriel de dimension finie).*

Démonstration. On peut supposer que $\Pi \in \mathrm{Rep}_{O_L}(G)$. Alors $\Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ est un O_L-module sans p-torsion, séparé et complet pour la topologie p-adique (car fermé dans Π) et dont la réduction modulo une uniformisante π_L de O_L est un k_L-espace vectoriel de dimension finie (lemme 4.2.1). Le résultat découle du lemme de Nakayama topologique. □

Lemme 4.2.3. *Soit M un O_L-module tué par une puissance de p et muni d'une action O_L-linéaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Alors $M/M^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ n'a pas de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$-invariants nontriviaux.*

Démonstration. Il faut montrer que si $x \in M$ et $(g-1)(h-1)x = 0$ pour tous $g, h \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$, alors $(g-1)x = 0$ pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$. On obtient $g^{n+1}(x) - g^n(x) = g(x) - x$ pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et $n \geq 0$. Ainsi, $g^n(x) = n(g(x)-x)+x$. Par hypothèse il existe n qui tue M. On a alors $g^n(x) = x$ pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$. On conclut en utilisant le fait que $g \to g^n$ est bijective sur U et sur l'unipotent inférieur, et que ces deux sous-groupes engendrent $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$. □

Corollaire 4.2.4. *Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$, alors $\Pi/\Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ n'a pas de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$-invariants nontriviaux.*

Démonstration. Prendre un réseau de Π, réduire mod p^n pour tout n et utiliser le lemme 4.2.3. □

Lemme 4.2.5. *Soit V une L-représentation unitaire, de dimension finie de G. Alors $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ agit trivialement sur Π.*

Démonstration. C'est bien connu, mais on va donner la preuve. Par hypothèse V admet un O_L-réseau Θ stable par G. Alors $\Theta/\pi_L^n\Theta$ est un O_L-module de longueur finie, muni d'une action lisse de G (car toutes les normes sur V sont équivalentes). Donc [12, lemme III.1.4]

$\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{Q}_p & 1 \end{smallmatrix}\right)$ agissent trivialement sur $\Theta/\pi_L^n\Theta$. On conclut en passant à la limite et en utilisant le fait que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{Q}_p & 1 \end{smallmatrix}\right)$ engendrent $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

□

Proposition 4.2.6. *Soit (D,δ) une paire G-compatible, avec $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$. Alors*

$$\Pi(D,\delta)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = (D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$$

et c'est la plus grande sous-représentation de dimension finie sur L de $\Pi(D,\delta)$.

Démonstration. D'après la prop. 4.1.5, $X := (D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$ est un sous-G-module de $\Pi(D,\delta)$. De plus, X est de dimension finie car il s'injecte (via $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$) dans $D^\sharp/D^\natural$, qui est de dimension finie sur L (car dual de $\check{D}^{\mathrm{nr}}$). On déduit du lemme 4.2.5 l'inclusion $X \subset \Pi(D,\delta)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$.

Pour montrer l'inclusion inverse, soit D_0 un réseau de D, stable par φ et Γ. Alors (D_0,δ) est une paire G-compatible[6] et $\Theta := \Pi(D_0,\delta)$ est un O_L-réseau de $\Pi(D,\delta)$. Si l'image de $z = (z_1,z_2) \in D_0 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ appartient à $\Theta^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$, alors $z_1, z_2 \in \frac{1}{T} D_0^\natural$ (car $(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1)x \in D_0^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, pour $x \in \{z, wz\}$). Ainsi, le sous-O_L-module des $z \in D_0 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ dont l'image appartient à $\Theta^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ est compact est stable par G. Il est donc inclus dans $D_0^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ [12, remarque II.2.3 (i)]. Cela permet de conclure.

□

Corollaire 4.2.7. *Si (D,δ) est une paire G-compatible avec $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ non nul, alors $\Pi(D,\delta)$ est de dimension infinie sur L.*

Démonstration. Sinon, la proposition 4.2.6 montre que $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et donc (en appliquant $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$) $D = D^\sharp$, ce qui est impossible pour $D \neq 0$ (car $D_0^\sharp$ est compact si D_0 est un réseau de D stable par φ et Γ). □

Corollaire 4.2.8. *Si (D,δ) est G-compatible et si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ est irréductible, alors*

a) $\Pi(D,\delta)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = 0$ *si* $\dim(D) \geq 2$.

b) Supposons que $D \simeq \mathscr{E}(\eta)$ pour un caractère unitaire η. Si $\delta \neq \eta^2$, alors $\Pi(D,\delta)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = 0$, et si $\delta = \eta^2$, alors

$$\Pi(D,\delta)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = \chi^{-1}\eta \circ \det .$$

Démonstration. a) Dans ce cas $D^\natural = D^\sharp$ et la prop. 4.2.6 permet de conclure.

b) Par les propositions 4.1.3 et 4.1.4 on se ramène à prouver que

$$\left(\mathrm{Ind}(\chi^{-1}\delta \otimes \chi^{-1})^{\mathrm{cont}}\right)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = \chi^{-1}$$

si $\delta = 1$ et 0 sinon. Ceci est immédiat. □

6. C'est une conséquence immédiate de la définition de $D_0^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ comme saturé de $(D_0^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$.

4.3 Le sous-module $\tilde{D}^+$ de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$

Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}} \cup \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$. On renvoie aux parties 3.3 et 3.6 pour les notations utilisées dans la suite. On munit $\tilde{D}$ d'une action du mirabolique P en posant, si $k \in \mathbf{Z}$, $a \in \mathbf{Z}_p^*$, $b \in \mathbf{Q}_p$,

$$\left(\begin{smallmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \tilde{z} = [(1+T)^b]\varphi^k(\sigma_a(\tilde{z})).$$

Cette action laisse stable $\tilde{D}^+$.

Comme $\tilde{D} = \tilde{\mathbf{A}}^H \otimes_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}} D$ (cela découle du théorème 3.3.2), l'application $T_n : \tilde{\mathbf{A}}^H \to \varphi^{-n}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p})$ de 3.6 induit une application $T_n = T_n \otimes \mathrm{id} : \tilde{D} \to \varphi^{-n}(D)$. Explicitement, si $I = [0,1[\cap \mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$, alors tout élément z de $\tilde{D}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = \sum_{i\in I}[(1+T)^i]z_i$, avec $z_i \in D$ et $\lim_{v_p(i)\to-\infty} z_i = 0$, et on pose $T_n(z) = \sum_{i\in I_n}[(1+T)^i]z_i$. D'après [12, lemme II.1.16], la suite de terme général

$$\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \varphi^n(T_n(z)) = \sum_{i\in I_n} \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z_i \in D \boxtimes_\delta p^{-n}\mathbf{Z}_p \subset D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$$

converge dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et on note $i(z)$ sa limite.[7]

Proposition 4.3.1. *a) Pour tous $z \in \tilde{D}$ et $k \in \mathbf{N}$ on a*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) i(z)\right) = \varphi^k(T_k(z)).$$

b) $i : \tilde{D} \to D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ induit une injection P-équivariante de $\tilde{D}^+$ dans $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$.

Démonstration. Le point a) est une traduction facile des définitions. Le b) est une conséquence du lemme IV.2.2 i) de [11] (le a) montre que le plongement de $\tilde{D}$ dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ est bien celui considéré dans loc.cit).

□

4.4 Dualité

On suppose toujours que $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}} \cup \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$ (le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ s'obtient en tensorisant par L). On étend l'accouplement (voir 3.7) $\{\ ,\ \} : \check{D} \times D \to O_L$ en un accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1} : (\check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1) \times (D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \to O_L$, en posant

$$\{(\check{z}_1, \check{z}_2), (z_1, z_2)\}_{\mathbf{P}^1} = \{\check{z}_1, z_1\} + \{\psi(\check{z}_2), \psi(z_2)\}.$$

On montre [12, th.II.1.13] qu'il est G-équivariant et parfait. Rappelons (4.3) que l'on dispose d'injections $i : \tilde{D} \to D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $i : \tilde{\check{D}} \to \check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. Voir 3.6 et 3.7 pour les autres notations qui apparaissent dans la preuve du résultat suivant, qui est implicite dans [12].

Proposition 4.4.1. *Si $\check{z} \in \tilde{\check{D}}$ et $z \in \tilde{D}$, alors $\{i(\check{z}), i(z)\}_{\mathbf{P}^1} = \{\check{z}, z\}$.*

Démonstration. Ecrivons $\check{z} = \sum_{i\in I}[(1+T)^i]\check{z}_i$ et $z = \sum_{i\in I}[(1+T)^i]z_i$, avec $z_i \in D$ et $\check{z}_i \in \check{D}$, qui tendent vers 0 pour la topologie faible. Si $a \notin \mathbf{Z}_p$, alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ est nulle sur $D \boxtimes_\delta (a + \mathbf{Z}_p)$, donc pour tous $\check{x} \in \check{D}$, $x \in D$

$$\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\check{x}, x\}_{\mathbf{P}^1} = \{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\check{x}\right), x\} = 0.$$

7. Pour faciliter la comparaison avec loc.cit., mentionnons que $\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \varphi^n(T_n(z))$ y est noté $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(z)$.

Ainsi, par définition des injections i et continuité de $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$, on a

$$\{i(\check{z}), i(z)\}_{\mathbf{P}^1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j\in I_n} \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \check{z}_i, \left(\begin{smallmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z_j\}_{\mathbf{P}^1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j\in I_n} \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & i-j \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \check{z}_i, z_j\}_{\mathbf{P}^1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I_n} \{\check{z}_i, z_i\}.$$

Ensuite, comme T_0 est $O_{\mathscr{E}}$-linéaire et $T_0([(1+T)^b]) = 0$ si $b \notin \mathbf{Z}_p$, on obtient

$$T_0(\langle \sigma_{-1}(\check{z}), z\rangle) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j\in I_n} T_0([(1+T)^{i-j}]\langle \sigma_{-1}(\check{z}_j), z_i\rangle) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I_n} \langle \sigma_{-1}(\check{z}_i), z_i\rangle.$$

Les deux quantités sont donc égales à $\sum_{i\in I}\{\check{z}_i, z_i\}$.

□

L'application de restriction

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} : D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p, \quad z \to \left(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\right)_{n\geq 0}$$

est B-équivariante et, par définition de $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$, on a $\mathrm{Ker}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}) \subset (D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$.

Lemme 4.4.2. *Soit (D,δ) une paire G-compatible. Posons $X = D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}} \cup \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$ et $X = (D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$. Alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ induit une suite exacte*

$$0 \to (0, D^{\mathrm{nr}}) \to (D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}} \to X \to 0.$$

Démonstration. L'exactitude à gauche est démontrée dans [12, prop. II.1.14]. Par définition, l'image de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ est contenue dans X. La surjectivité est prouvée dans le ii) de la remarque II.2.3 de loc.cit, le point étant que si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}} \cup \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$, alors $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ est compact (car fermé dans le compact $D^\natural \times D^\natural$) donc son image par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ est un sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module compact de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$, qui contient (prop. 4.3.1) le sous-module dense (prop.4.1.5) $\tilde{D}^+$ de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$.

□

On continue avec une preuve alternative de [12, th. II.2.11]. Ce résultat sera systématiquement utilisé dans la suite.

Théorème 4.4.3. *Soit D un (φ,Γ)-module étale et $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to O_L^*$ un caractère unitaire.*

a) L'orthogonal de $\tilde{D}^+$ dans $\check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ est un sous-module de $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$.

b) Si (D,δ) est une paire G-compatible, alors $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ est l'orthogonal de $\tilde{D}^+$ et de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ dans $\check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$.

Démonstration. Le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ se déduit par tensorisation par L, donc on suppose dans la suite que $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}} \cup \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$.

a) Soit N l'orthogonal de $\tilde{D}^+$ dans $\check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. Il est stable par P, car $\tilde{D}^+$ l'est. Supposons que D est de torsion. Si $x = (x_1, x_2) \in N$, alors pour tout $y \in D^+ \subset \tilde{D}^+$ on a $\{x_1, y\} = \{x, y\}_{\mathbf{P}^1} = 0$, donc x_1 est orthogonal à D^+ et $x_1 \in \check{D}^\natural$. En appliquant ceci à $\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) x$ pour tout $n \geq 0$, on obtient $x \in \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ et donc $N \subset \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$.

Supposons maintenant que $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$ et soient $D_k = D/p^kD$ et c tel que p^c tue le conoyau de $\tilde{D}^+ \to \tilde{D}_k^+$ pour tout k (lemme 3.8.4). Donc, si $x \in N$, alors $p^c x \pmod{p^k}$ est orthogonal à $\tilde{D}_k^+$ et, d'après le cas de torsion, on a $p^c x \pmod{p^k} \in \check{D}_k^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. En passant à la limite projective on obtient $x \in \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ et donc $N \subset \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$.

b) En utilisant a) et l'inclusion (prop. 4.3.1) $\tilde{D}^+ \subset D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, il suffit de montrer que $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est orthogonal à $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. Quitte à remplacer D par D/p^kD et à passer à la limite, on peut supposer [8] que D est de torsion.

Soit M l'orthogonal de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. Alors M est stable par w (car $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ l'est) et $M \subset \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ (par a)), donc M est compact (car fermé dans le compact $\check{D}^\natural \times \check{D}^\natural$). Alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(M)$ est un sous P-module compact de $\check{D}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$, tel que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(M)$ contient $\check{D}^{++}$ (car M contient $\check{D}^{++} \subset \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$), qui engendre $\check{D}$. On en déduit (prop. 4.1.5 a)) que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(M) = \check{D}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ et donc (lemme 4.4.2) $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \subset M + (0, \check{D}^{\mathrm{nr}})$. Ainsi, $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ est lui-même compact [9]. Le même argument montre alors que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\check{M}) = D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$, si $\check{M}$ est l'orthogonal de $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$.

On a donc $\check{D}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \subset M + (0, \check{D}^{\mathrm{nr}})$ et $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \subset \check{M} + (0, D^{\mathrm{nr}})$, et il reste à voir que $M + (0, \check{D}^{\mathrm{nr}})$ est orthogonal à $\check{M} + (0, D^{\mathrm{nr}})$. Or, on a vu que $\check{M} + (0, D^{\mathrm{nr}}) \subset D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et, par définition, M est orthogonal à $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, donc M est orthogonal à $\check{M} + (0, D^{\mathrm{nr}})$. En faisant la même chose avec $\check{M}$ et en utilisant le fait que D^{nr} est orthogonal à $\check{D}^{\mathrm{nr}}$, cela permet de conclure.

□

Corollaire 4.4.4. *Soit (D, δ) une paire G-compatible. Alors $(\check{D}, \delta^{-1})$ est G-compatible et le dual faible de $\Pi(D, \delta)$ est isomorphe à $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, dans lequel $\check{\tilde{D}}^+$ est dense. On a donc une suite exacte de G-modules topologiques*

$$0 \to \Pi(\check{D}, \delta^{-1})^* \to D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to \Pi(D, \delta) \to 0.$$

Démonstration. Cela découle du théorème précédent et du fait que $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$ est parfait et G-équivariant. □

Le résultat suivant est [12, cor.II.2.9], mais la démonstration que l'on donne ici est orthogonale à celle de loc.cit. : en effet, on le voit ici comme corollaire du théorème 4.4.3, alors que dans loc.cit. il est un des ingrédients essentiels dans la preuve de ce théorème.

Corollaire 4.4.5. *Soit (D, δ) une paire G-compatible, avec $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}} \cup \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$. Alors l'inclusion de $\tilde{D}$ dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ induit une suite exacte de B-modules topologiques*

$$0 \to \tilde{D}/\tilde{D}^+ \to \Pi(D, \delta) \to D^\sharp/D^\natural \to 0.$$

Démonstration. Commençons par le cas de torsion. Alors $D^\sharp/D^\natural$ est le dual (de Pontryagin) de $\check{D}^{\mathrm{nr}}$ et $\tilde{D}/\tilde{D}^+$ est le dual de $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p$, d'après [11, prop. IV.5.4]. En utilisant le théorème 4.4.3, on voit que la suite exacte demandée est obtenue en dualisant la suite exacte

$$0 \to (0, \check{D}^{\mathrm{nr}}) \to \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \to \check{D}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p \to 0$$

du lemme 4.4.2, ce qui permet de conclure.

Supposons que $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$ et posons $D_k = D/p^kD$. Alors $D^\sharp/D^\natural$ est la limite projective des $D_k^\sharp/D_k^\natural$ et $\tilde{D}/\tilde{D}^+$ est la limite projective des $\tilde{D}_k/\tilde{D}_k^+$ ([11, lemme IV.5.3] pour

8. $(D/p^kD, \delta)$ reste une paire G-compatible par la prop. 4.1.5.

9. Cela n'a rien de trivial à cet instant, car nous ne savons pas encore que $(\check{D}, \delta^{-1})$ est G-compatible. C'est d'ailleurs ce qu'on cherche à démontrer...

le dernier). L'isomorphisme $\tilde{D}_k \simeq \tilde{\mathbf{A}}^H \otimes_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}} D_k$ (remarque 3.3.5) montre que l'application naturelle $\tilde{D}_{k+1} \to \tilde{D}_k$ est surjective. Il en est donc de même de l'application de transition $\tilde{D}_{k+1}/\tilde{D}_{k+1}^+ \to \tilde{D}_k/\tilde{D}_k^+$. Ainsi, en passant à la limite dans

$$0 \to \tilde{D}_k/\tilde{D}_k^+ \to \Pi(D_k,\delta) \to D_k^\sharp/D_k^\natural \to 0$$

on obtient bien une suite exacte

$$0 \to \tilde{D}/\tilde{D}^+ \to \varprojlim \Pi(D_k,\delta) \to D^\sharp/D^\natural \to 0.$$

Comme $\Pi(D)$ est le quotient de $\varprojlim \Pi(D_k,\delta)$ par son O_L-module de torsion, cela permet de conclure dans le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$.

□

Remarque 4.4.6. 1) Le corollaire ne s'applique pas en général aux (φ,Γ)-modules sur $O_{\mathscr{E}}$. Cependant, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$ a la propriété que $D^\sharp = D^\natural$, alors la preuve montre que l'on a un isomorphisme B-équivariant $\tilde{D}/\tilde{D}^+ \simeq \Pi(D,\delta)$ (le point est que dans ce cas $\varprojlim \Pi(D_k,\delta)$ n'a pas de O_L-torsion, car $\tilde{D}/\tilde{D}^+$ n'en a pas).

2) Ce corollaire va jouer un rôle très important dans la suite, car il permet de faire le lien avec la théorie de Hodge p-adique, à travers la théorie du modèle de Kirillov.

Corollaire 4.4.7. *Soit (D,δ) une paire G-compatible telle que $\check{D}^{\mathrm{nr}} = 0$.*

a) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, alors on a un isomorphisme de B-modules compacts $\Pi(D)^\vee \simeq \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p$.

b) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, on a un isomorphisme de B-modules topologiques $\Pi(D)^* \simeq (\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{b}}$.

Démonstration. Cela découle du corollaire 4.4.4 et du lemme 4.4.2. □

4.5 Presqu'exactitude de $D \to \Pi(D,\delta)$

Si (D_1,δ) et (D_2,δ) sont des paires G-compatibles (noter que δ est le même dans les deux paires) et si $f : D_1 \to D_2$ est un morphisme de (φ,Γ)-modules, la remarque 4.1.2 montre que f induit un morphisme G-équivariant $f : \Pi(D_1) \to \Pi(D_2)$. Le résultat suivant sera systématiquement utilisé dans la suite.

Proposition 4.5.1. *Soit $0 \to D_1 \to D \to D_2 \to 0$ une suite exacte dans une des catégories $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(O_{\mathscr{E}})$, $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$. Si (D,δ) est une paire G-compatible, alors :*

a) (D_1,δ) et (D_2,δ) sont des paires G-compatibles.

b) Si $D, D_1, D_2 \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, alors l'application $\alpha : \Pi(D,\delta) \to \Pi(D_2,\delta)$ est surjective, l'image de $\Pi(D_1,\delta)$ dans $\Pi(D,\delta)$ est de L-codimension finie dans $\mathrm{Ker}(\alpha)$, et $\mathrm{Ker}(\Pi(D_1,\delta) \to \Pi(D,\delta))$ est de L-dimension finie.

Démonstration. Commençons par noter que la suite $0 \to D_1 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D_2 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to 0$ est trivialement exacte. Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, remplacer dans la suite $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ par $(D^? \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_b$.

a) Pour montrer que (D_1,δ) est G-compatible[10], il suffit (prop. 4.1.5) de montrer que $D_1^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G. Soit $z \in D_1^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $g \in G$, et posons $x_n = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) gz\right)$.

10. La preuve qui suit est un peu détournée, le résultat suit aussi facilement de [12, lemme II.2.5].

Comme $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par g (prop. 4.1.5), on a $(x_n)_{n\geq 0} \in D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$. On en déduit que $(x_n)_{n\geq 0} \in (D_1 \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p) \cap (D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p) = D_1^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ (l'égalité suit de l'exactitude [11, th. III.3.5] du foncteur $D \to D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$), ce qui permet de conclure.

Pour montrer que (D_2, δ) est G-compatible, on dualise la suite exacte $0 \to D_1 \to D \to D_2 \to 0$ et on obtient une suite exacte $0 \to \check{D}_2 \to \check{D} \to \check{D}_1 \to 0$. On conclut alors en utilisant ce que l'on vient de démontrer et le corollaire 4.4.4.

b) La surjectivité de α découle de celle de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D_2 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. Ensuite, en utilisant le lemme du serpent, il suffit de montrer que le conoyau de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D_2^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est de dimension finie sur L et que $D_1^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est de codimension finie dans le noyau de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D_2^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. Cela résulte du lemme du serpent et des faits suivants :

- La suite $0 \to (D_1^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{b}} \to (D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{b}} \to (D_2^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{b}} \to 0$ est exacte [11, th. III.3.5].
- Pour tout $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, le L-espace vectoriel $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ est de codimension finie dans $(D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{b}}$. En effet, le quotient $(D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{b}}/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ s'injecte (via $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$) dans $D^\sharp/D^\natural$ (cela découle du fait que ψ est injectif sur le L-espace vectoriel de dimension finie $D^\sharp/D^\natural$, car surjectif).
- Le lemme 4.4.2 et le fait que $\dim_L D^{\mathrm{nr}} < \infty$.

□

Remarque 4.5.2. La réciproque du point a) de la proposition 4.5.1 est presque toujours fausse, la condition de G-compatibilité d'une paire étant très forte.

Corollaire 4.5.3. *Soit $0 \to D_1 \to D \to D_2 \to 0$ une suite exacte dans $\mathrm{Rep}_L(G)$ et δ tel que (D, δ) soit une paire G-compatible. Si $D_j^{\mathrm{nr}} = 0$ et $\check{D}_j^{\mathrm{nr}} = 0$ pour $j = 1, 2$, alors la suite exacte précédente induit une suite exacte dans $\mathrm{Rep}_L(G)$*

$$0 \to \Pi(D_1, \delta) \to \Pi(D, \delta) \to \Pi(D_2, \delta) \to 0.$$

Démonstration. Notons pour simplifier $\Pi(\mathscr{D}) = \Pi(\mathscr{D}, \delta)$ pour $\mathscr{D} \in \{D, D_1, D_2\}$. La proposition 4.5.1 (et la discussion qui la précède) montre que $0 \to D_1 \to D \to D_2 \to 0$ induit des morphismes G-équivariants continus $\alpha : \Pi(D) \to \Pi(D_2)$ et $\beta : \Pi(D_1) \to \Pi(D)$ tels que $\alpha \circ \beta = 0$ et α est surjectif. Pour démontrer l'exactitude de la suite induite par α et β dans $\mathrm{Rep}_L(G)$, il suffit de montrer que la suite de B-modules topologiques (induite par α et β) $0 \to \Pi(D_2)^* \to \Pi(D)^* \to \Pi(D_1)^* \to 0$ est exacte.

Or, l'hypothèse $D_1^{\mathrm{nr}} = 0$ et $D_2^{\mathrm{nr}} = 0$ entraîne $D^{\mathrm{nr}} = 0$ et donc $\check{\mathscr{D}}^\sharp = \check{\mathscr{D}}^\natural$ pour $\mathscr{D} \in \{D, D_1, D_2\}$ (rappelons que $\check{\mathscr{D}}^\sharp/\check{\mathscr{D}}^\natural$ est isomorphe au dual de $\mathscr{D}^{\mathrm{nr}}$). En combinant cela avec le corollaire 4.4.7, on obtient un isomorphisme de B-modules topologiques (avec $\mathscr{D} \in \{D, D_1, D_2\}$)

$$\Pi(\mathscr{D})^* \simeq (\check{\mathscr{D}}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p)_b \simeq (\check{\mathscr{D}}^\sharp \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p)_b.$$

L'exactitude des foncteurs $D \to \check{D}$ et $D \to (D^\sharp \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p)_b$ ([11, th. III.3.5] pour le dernier) permet de conclure.

□

Proposition 4.5.4. *Soit (D, δ) une paire G-compatible, avec $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ de dimension ≥ 2. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) D est irréductible.

b) $\Pi(D, \delta)$ est topologiquement irréductible comme G-module.

c) $\Pi(D, \delta)$ est topologiquement irréductible comme B-module, B étant le Borel supérieur.

Démonstration. Supposons que D est irréductible et montrons le c). Comme $\dim_{\mathscr{E}} D \geq 2$, on a $\check{D}^{\mathrm{nr}} = 0$ (car $\check{D}$ est aussi irréductible de dimension ≥ 2) et donc $\Pi(D,\delta)^* \simeq (\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p)_b$ comme B-modules topologiques (corollaire 4.4.7). En choisissant un réseau $\check{D}_0$ stable par φ et Γ dans $\check{D}$ et en lui appliquant le a) de la proposition 4.1.5, on voit que $\check{D}_0^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p$ est irréductible comme $O_L[B]$-module topologique et donc $(\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p)_b$ est aussi irréductible. On conclut par dualité.

Il nous reste à montrer que b) entraîne a). Supposons que D est réductible et soit $0 \to D_1 \to D \to D_2 \to 0$ une suite exacte dans $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, avec $D_1 \neq 0$ et $D_1 \neq D$. Les paires (D_1,δ) et (D_2,δ) sont G-compatibles (prop. 4.5.1) et on a un morphisme $f : \Pi(D_1) \to \Pi(D)$ dans $\mathrm{Rep}_L(G)$. On conclut en utilisant le b) de la prop. 4.5.1 et le fait que $\Pi(D,\delta)$ est de dimension infinie (cor. 4.2.7). □

Remarque 4.5.5. Le (φ,Γ)-module trivial et le caractère trivial fournissent un contre-exemple à la proposition 4.5.4 si on considère des (φ,Γ)-modules de dimension 1.

Proposition 4.5.6. *Soit (D,δ) une paire G-compatible, avec $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$. Alors $\Pi(D,\delta)$ est un B-module topologiquement de longueur finie.*

Démonstration. Si $\dim_{\mathscr{E}} D = 1$, cela résulte de la proposition 4.1.5 et du lemme 4.4.2). Le cas général s'en déduit par récurrence sur $\dim_{\mathscr{E}}(D)$, en utilisant la proposition 4.5.4 pour traiter le cas irréductible et la proposition 4.5.1 (et l'hypothèse de récurrence) pour traiter le cas réductible.

□

4.6 Le foncteur de Montréal

Cette partie est consacrée à des rappels sur le foncteur de Montréal. Soit $K = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et soit Z le centre de G. Si W est une KZ-représentation lisse, on note $c-\mathrm{ind}_{KZ}^G W$ l'ensemble des fonctions $f : G \to W$ à support fini modulo KZ et telles que $f(kg) = k \cdot f(g)$ pour $k \in KZ$ et $g \in G$. Alors $c - \mathrm{ind}_{KZ}^G W$ est une G-représentation lisse, l'action de G étant définie par $(g \cdot f)(h) = f(hg)$. Si $g \in G$ et $v \in W$, on note $[g,v] \in c - \mathrm{ind}_{KZ}^G W$ la fonction définie par $[g,v](h) = 1_{hg \in KZ} hg \cdot v$.

Soit Π de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ et soit $W \subset \Pi$ de type fini sur O_L, stable par KZ et qui engendre Π comme G-module (un tel W existe toujours, cf. [12, lemme III.1.6]). L'application

$$\phi_W : c - \mathrm{ind}_{KZ}^G W \to \Pi, \quad \phi_W(f) = \sum_{g \in G/KZ} g \cdot f(g^{-1})$$

est alors une surjection G-équivariante. On dit que W induit une *présentation standard de* Π si $\mathrm{Ker}(\phi_W)$ est engendré comme $O_L[G]$-module par

$$\left\{ \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) y \right] - \left[\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), y \right], \quad \text{où} \quad y \in W \cap \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) W \right\}.$$

D'après [12, th. III.3.1], pour tout $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ on peut trouver W induisant une présentation standard de Π.

Définition 4.6.1. Si W induit une présentation standard de $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$, on note

- $D_W^\natural(\Pi)$ le dual de Pontryagin de $P^+ \cdot W$, où $P^+ = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- $D_W^+(\Pi)$ l'ensemble des $\mu \in \Pi^\vee$ nuls sur $g \cdot W$ pour tout $g \in P - P^+$, où $P = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

$D_W^+(\Pi)$ est naturellement un P^+-module et donc il admet une structure naturelle[11] de (φ,Γ)-module sur $O_L[[T]]$. On définit alors

$$D(\Pi) = O_{\mathscr{E}} \otimes_{O_L[[T]]} D_W^+(\Pi).$$

Il est facile de voir que la restriction à $P^+ \cdot W$ induit une injection de $D_W^+(\Pi)$ dans $D_W^\natural(\Pi)$, dont l'image est d'indice fini dans $D_W^\natural(\Pi)$. On a donc un isomorphisme de $O_{\mathscr{E}}$-modules $D(\Pi) \simeq O_{\mathscr{E}} \otimes_{O_L[[T]]} D_W^\natural(\Pi)$, ce qui permet de définir une application $\beta_{\mathbf{Z}_p} : \Pi^\vee \to D(\Pi)$, composée des

$$\Pi^\vee \to D_W^\natural(\Pi) \to O_{\mathscr{E}} \otimes_{O_L[[T]]} D_W^\natural(\Pi) \simeq D(\Pi),$$

la première flèche étant la restriction, la deuxième $x \to 1 \otimes x$ et la troisième vient de la discussion ci-dessus. L'application $\beta_{\mathbf{Z}_p}$ est $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$-équivariante et [12, prop. IV.1.7, IV.1.12] satisfait $\beta_{\mathbf{Z}_p} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \psi \circ \beta_{\mathbf{Z}_p}$. On définit enfin $\beta_{\mathbf{P}^1} : \Pi^\vee \to D(\Pi) \oplus D(\Pi)$ par $\beta_{\mathbf{P}^1}(x) = (\beta_{\mathbf{Z}_p}(x), \beta_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot x))$. Comme les noms l'indiquent, les objets $D(\Pi)$, $\beta_{\mathbf{Z}_p}$ et $\beta_{\mathbf{P}^1}$ ne dépendent pas du choix de W. On montre [12, th. IV.2.13] que $\Pi \to D(\Pi)$ est un foncteur exact contravariant de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ dans $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, appelé foncteur de Montréal par Paskunas. Le résultat suivant est un des résultats principaux du chapitre IV de [12].

Proposition 4.6.2. *Soit $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$, de*[12] *caractère central δ et soit $D = D(\Pi)$.*

a) (D, δ^{-1}) est une paire G-compatible et $\beta_{\mathbf{P}^1}$ est un morphisme G-équivariant $\Pi^\vee \to D^\sharp \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. Son noyau est $(\Pi^\vee)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ et c'est un O_L-module de longueur finie.

c) $\beta_{\mathbf{P}^1}$ envoie l'orthogonal de $\Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ dans $D^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$.

4.7 Reconstruction de Π

Soit $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$, de caractère central δ et soit Θ un réseau ouvert borné de Π, stable par G. Les $\Theta/\pi_L^n\Theta \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ forment un système inductif, les transitions étant induites par la multiplication par π_L. Le foncteur de Montréal étant contravariant et exact, les $D_n = D(\Theta/\pi_L^n\Theta)$ forment un système projectif isomorphe au système projectif $(D(\Theta)/\pi_L^n D(\Theta))_{n\geq 1}$. Les paires (D_n, δ^{-1}) sont G-compatibles (prop. 4.6.2) et $(D(\Theta)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ est isomorphe à la limite projective des $D_n^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, donc $(D(\Theta), \delta^{-1})$ et $(D(\Pi), \delta^{-1})$ sont des paires G-compatibles. De plus, le O_L-dual de Θ s'identifie à la limite projective des $\Theta_n^\vee$ et les applications $\beta_{\mathbf{P}^1} : \Theta_n^\vee \to D_n^\sharp \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ sont compatibles. Elles définissent donc par passage à la limite une application continue $\beta_{\mathbf{P}^1} : \Theta^* \to D(\Theta)^\sharp \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, qui est G-équivariante. En inversant p, on obtient une application continue et G-équivariante $\beta_{\mathbf{P}^1} : \Pi^* \to D(\Pi)^\sharp \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. En passant à la limite dans la prop. 4.6.2, on voit que $\mathrm{Ker}(\beta_{\mathbf{P}^1})$ est égal à $(\Pi^*)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ et c'est un L-espace vectoriel de dimension finie.

Posons $\sigma = \Pi/\Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} \in \mathrm{Rep}_L(G)$, de telle sorte que[13] $D(\sigma) \simeq D(\Pi)$ et $\sigma^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = 0$ (cor. 4.2.4). Le lemme 4.7.3 ci-dessous (appliqué à σ) montre que l'application $\beta_{\mathbf{P}^1} : \sigma^* \to D(\sigma)^\sharp \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ se factorise par $D(\sigma)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \simeq D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \simeq \Pi(\check{D}(\Pi), \delta)^*$, le dernier isomorphisme étant fourni par le cor. 4.4.4. La transposée de $\beta_{\mathbf{P}^1}$ induit donc un morphisme G-équivariant continu

$$\beta_\Pi : \Pi(\check{D}(\Pi), \delta) \to \Pi/\Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}.$$

11. Les actions de φ et Γ sont celles de $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; la structure de $O_L[[T]]$-module est induite par l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et l'isomorphisme standard $O_L[[T]] \simeq O_L\left[\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right]\right]$.

12. Le caractère central n'est pas unique pour les objets de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$.

13. Par le cor. 4.2.2 et le fait que le foncteur de Montréal tue les objets de dimension finie.

En général[14] il découle du théorème suivant que ce morphisme est un isomorphisme (mais ce n'est pas toujours le cas).

Théorème 4.7.1. *Si* $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$*, alors le noyau et conoyau de* β_Π *sont de dimension finie sur* L*. Plus précisément,* $\mathrm{Coker}(\beta_\Pi)$ *est un quotient de* $((\Pi^*)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)})^*$*.*

Démonstration. Gardons les notations ci-dessus. Comme σ^* est une sous-représentation de Π^*, il suffit de démontrer le théorème pour σ, ce qui nous permet de supposer que $\Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = 0$, et donc $\sigma = \Pi$. Les lemmes 4.7.3 et 4.7.4 ci-dessous et la prop. 4.6.2 montrent que $\beta_{\mathbf{P}^1}$ induit une suite exacte

$$0 \to (\Pi^*)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} \to \Pi^* \to D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \to K \to 0,$$

avec K de dimension finie. On conclut en dualisant cette suite exacte et en utilisant le cor. 4.4.4.

Il nous reste maintenant à démontrer les lemmes. On fixe un réseau ouvert borné Θ de Π, stable par G et on note $\Theta_n = \Theta/\pi_L^n\Theta$, $D = D(\Theta)$ et $D_n = D(\Theta_n) = D/\pi_L^n D$. Soit $H = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et soit Z_n l'orthogonal de Θ_n^H dans $\Theta_n^\vee$, de telle sorte que $\beta_{\mathbf{P}^1}(Z_n) \subset D_n^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ (prop. 4.6.2).

Lemme 4.7.2. *Si* $\Pi^H = 0$*, alors il existe* n_0 *tel que la multiplication par* π_L *induit un isomorphisme de* Θ_n^H *dans* Θ_{n+1}^H *pour tout* $n \geq n_0$*.*

Démonstration. La multiplication par π_L de Θ_n dans Θ_{n+1} est G-équivariante injective, donc induit une injection de Θ_n^H dans Θ_{n+1}^H pour tout n. Si un tel n_0 n'existe pas, il existe une partie infinie I de $\mathbb{N}$ et, pour tout $n \in I$, un vecteur $v_n \in \Theta_{n+1}^H$ qui n'est pas dans l'image de la multiplication par π_L. On peut donc trouver $x_n \in \Theta - \pi_L\Theta$ tel que $v_n = x_n \pmod{\pi_L^{n+1}}$ et $gx_n - x_n \in \pi_L^{n+1}\Theta$ pour tout $g \in H$. Pour $n \in I \cap]j, \infty]$ on a $x_n \pmod{\pi_L^j} \in \Theta_j^H$, qui est un ensemble fini (lemme 4.2.1). Par extraction diagonale, on obtient ainsi l'existence d'une sous-suite $(y_n)_n$ de $(x_n)_{n\in I}$ qui converge π_L-adiquement vers un $\alpha \in \Theta$. En passant à la limite dans $gx_n - x_n \in \pi_L^{n+1}\Theta$, on obtient $\alpha \in \Theta^H = 0$. Mais cela contredit le fait que $y_n \notin \pi_L\Theta$ pour tout n, ce qui permet de conclure.

□

Lemme 4.7.3. *Si* $\Pi^H = 0$*, alors* $\beta_{\mathbf{P}^1}(\Theta^*) \subset D^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$*, donc* $\beta_{\mathbf{P}^1}(\Pi^*) \subset D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$*.*

Démonstration. En dualisant la suite exacte

$$0 \to \Theta_n^H \to \Theta_n \to \Theta_n/\Theta_n^H \to 0,$$

on obtient une suite exacte de O_L-modules profinis $0 \to Z_n \to \Theta_n^\vee \to (\Theta_n^H)^\vee \to 0$. En passant à la limite projective, on obtient

$$0 \to \varprojlim Z_n \to \Theta^* \to \varprojlim (\Theta_n^H)^\vee \to 0.$$

Les lemmes 4.2.1 et 4.7.2 montrent qu'il existe N tel que p^N tue[15] $\varprojlim (\Theta_n^H)^\vee = (\varinjlim \Theta_n^H)^\vee$. On a donc $p^N\Theta^* \subset \varprojlim Z_n$. Comme $\beta_{\mathbf{P}^1}(Z_n) \subset D_n^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ (prop. 4.6.2), on obtient

$$\beta_{\mathbf{P}^1}(p^N\Theta^*) \subset \varprojlim D_n^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 = (D(\Theta)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$$

et donc $\beta_{\mathbf{P}^1}(\Theta^*) \subset D^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, ce qui permet de conclure.

□

14. La suite montre que c'est le cas si les composants de Jordan-Hőlder de Π sont supersinguliers.
15. Rappelons que les applications de transition $\Theta_n \to \Theta_{n+1}$ sont induites par la multiplication par π_L.

Lemme 4.7.4. *On a* $D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \subset \beta_{\mathbf{P}^1}(\Pi^*) + (0, D(\Pi)^{\mathrm{nr}})$.

Démonstration. Comme Θ^* est compact, $M = \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\beta_{\mathbf{P}^1}(\Theta^*))$ est un sous-P-module compact de $D^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p$. De plus, $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(M)$ engendre D (car $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\beta_{\mathbf{P}^1}(\Theta_n^*)) = \beta_{\mathbf{Z}_p}(\Theta_n^*)$ engendre D_n par construction même), donc par la proposition 4.1.5 on a $M = D^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p$. On en déduit (lemme 4.4.2) que $D^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \subset \beta_{\mathbf{P}^1}(\Theta^*) + (0, D^{\mathrm{nr}})$, ce qui permet de conclure, en tensorisant par L (par définition on a $D(\Pi) = \mathscr{E} \otimes_{O_{\mathscr{E}}} D$).

□

□

Corollaire 4.7.5. *Soit* $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ *supersingulière, de caractère central* δ. *Alors* $D(\Pi)$ *est absolument irréductible de dimension* ≥ 2 *et on a des isomorphismes topologiques de* G*-modules*

$$\Pi^* \simeq D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1, \quad \Pi \simeq \Pi(\check{D}(\Pi), \delta).$$

Démonstration. Comme Π est irréductible de dimension infinie, on a $\Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = 0$ et $(\Pi^*)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = 0$. Le théorème 4.7.1 fournit une suite exacte $0 \to K \to \Pi(\check{D}(\Pi), \delta) \to \Pi \to 0$, avec $\dim_L(K) < \infty$. On va montrer que $\check{D}(\Pi)$ est irréductible.

Supposons que $0 \to D_1 \to \check{D}(\Pi) \to D_2 \to 0$ est une suite exacte dans $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\Gamma)$. Alors (D_j, δ) sont des paires G-compatibles et la suite $0 \to \Pi(D_1) \to \Pi(\check{D}(\Pi), \delta) \to \Pi(D_2) \to 0$ est exacte modulo des L-représentations de dimension finie (prop. 4.5.1). On en déduit qu'au moins une des représentations $\Pi(D_1, \delta)$ et $\Pi(D_2, \delta)$ n'admet pas Π comme facteur de Jordan-Hőlder, et donc est de dimension finie. Le corollaire 4.2.7 entraîne alors $D_1 = 0$ ou $D_2 = 0$, ce qui montre que $\check{D}(\Pi)$ est irréductible, et donc $D(\Pi)$ aussi. En appliquant ceci à $\Pi \otimes_L L'$ pour tout extension finie L' de L, on conclut que $D(\Pi)$ est absolument irréductible.

Si $\dim_{\mathscr{E}}(D(\Pi)) = 1$, il découle du th. 4.7.1 et de la prop. 4.1.4 que Π est ordinaire, contradiction. Donc $\dim_{\mathscr{E}} \geq 2$ et $\check{D}(\Pi)^\sharp = \check{D}(\Pi)^\natural$, ce qui entraîne $K = 0$ (th. 4.7.1). On a donc $\Pi \simeq \Pi(\check{D}(\Pi), \delta)$ et on conclut en utilisant le cor. 4.4.4.

□

Remarque 4.7.6. On déduit du cor. 4.7.5 que si Π_1, Π_2 sont supersingulières, de même caractère central et si $D(\Pi_1) \simeq D(\Pi_2)$, alors $\Pi_1 \simeq \Pi_2$. Cette propriété d'injectivité du foncteur de Montréal est démontrée par voie très détournée dans [38] (voir la preuve du théorème 10.4 de loc.cit.), mais l'approche de loc.cit. fournit plus d'informations. On y prouve que si $p \geq 5$ et si Π est supersingulière à caractère central δ, alors $V(\Pi)$ est de dimension 2 et $\det \check{V}(\Pi) = \chi\delta$ (les normalisations ne sont pas les mêmes dans [12] et [38]). En particulier, l'image par le foncteur de Montréal suffit à retrouver le caractère central, ce qui est assez surprenant à priori, car le (φ, Γ)-module attaché à un $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ n'utilise que la restriction au mirabolique. Il est probable que ceci est vrai pour tout p.

Théorème 4.7.7. *Tout objet de* $\mathrm{Rep}_L(G)$ *est de longueur finie comme* B*-module topologique.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 4.7.1 et de la proposition 4.5.6.

□

Chapitre 5

Vecteurs localement analytiques

Ce chapitre étend à toutes les paires G-compatibles les résultats de [12, chap. V], concernant l'espace $\Pi(D,\delta)^{\mathrm{an}}$. Ce degré de généralité sera essentiel pour les applications aux chapitres 8 et 10.

La plus grande partie de ce chapitre est consacrée à la preuve du théorème 5.5.1. La démonstration de ce résultat est fort technique et reprend un bon nombre d'idées de [12]. Cependant, il y a aussi des différences notables avec l'approche de loc.cit. : on remplace les arguments de dualité et de théorie de Hodge p-adique de loc.cit. par une étude directe des rayons d'analyticité des vecteurs de $\Pi(D,\delta)$. Cette étude est grandement facilitée par la proposition 5.2.2, qui permet de simplifier certains arguments de [12]. Cette proposition est aussi utilisée dans la preuve du corollaire 5.5.2. Une preuve indépendante de ce corollaire permettrait de simplifier considérablement la preuve du théorème 5.5.1. Notons aussi que l'on retrouve les résultats de Schneider et Teitelbaum sur la densité des vecteurs localement analytiques (et même quelque chose de plus fort) pour les objets de $\mathrm{Rep}_L(G)$.

5.1 Préliminaires

On fixe dans la suite une paire G-compatible (D,δ), avec $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, et un réseau $\mathscr{D}$ de D, stable par φ et Γ. On note $\Pi = \Pi(D,\delta)$ et $\Theta = \Pi(\mathscr{D},\delta)$. Alors Θ est un réseau ouvert, borné et stable par G de l'espace de Banach Π. On munit Π de la valuation v_Π définie par $v_\Pi(v) = k$ si $v \in p^k\Theta$ et $v \notin p^{k+1}\Theta$. Ainsi, p^{-v_π} est une norme sur Π, définissant la topologie de Π.

On renvoie àu § 3.1 pour les anneaux de fonctions analytiques utilisés dans la suite. Rappelons que $\Lambda(\Gamma)$ est l'anneau des mesures à valeurs dans O_L sur Γ. Si R est un anneau de séries de Laurent (comme $O_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{R}$, $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$, etc.), on dispose d'anneaux $R(\Gamma)$. On renvoie le lecteur au paragraphe 3 de la partie V.1 de [12] pour les définitions et propriétés de ces anneaux.

Rappelons que $m(\mathscr{D})$ est un entier assez grand, qui ne dépend que de $\mathscr{D}$. Il est en particulier choisi tel que le théorème 3.3.3 s'applique à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \subset \mathscr{D}^{(0,r_{m(\mathscr{D})}]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ (cela utilise le cor. II.7.2 de [11]). Comme $\mathscr{D}^\natural$ est compact, il existe $l_1 = l_1(\mathscr{D})$ tel que $\mathscr{D}^\natural \subset T^{-l_1}\mathscr{D}^{\dagger,m(\mathscr{D})}$, donc $\mathscr{D}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \subset (T^{-l_1}\mathscr{D}^{\dagger,m(\mathscr{D})}) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, où l'on note

$$X \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = (\mathscr{D} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \cap (X \times X)$$

pour toute partie X de $\mathscr{D}$ (pareil avec D). Quitte à augmenter encore l_1 et $m(\mathscr{D})$, on peut supposer qu'ils sont aussi associés à $(\check{\mathscr{D}}, \delta^{-1})$, et que l'involution i_δ de $O_L[\Gamma]$ qui envoie σ_a sur

$\delta(a)\sigma_{\frac{1}{a}}$ s'étend en une involution continue de $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(\Gamma)$, $O_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}(\Gamma)$, $\mathscr{R}(\Gamma)$ pour $b \geq m(\mathscr{D})$ (voir [12, lemme V.2.3]).

On fixe une base $e_1, e_2, ..., e_d$ de $\mathscr{D}^{\dagger,m(\mathscr{D})}$ sur $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,m(\mathscr{D})}$ (c'est aussi une base de $\mathscr{D}^{\dagger,b}$ sur $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$ pour tout $b \geq m(\mathscr{D})$).

Nous allons utiliser systématiquement le résultat parfaitement classique suivant.

Lemme 5.1.1. *$\frac{\varphi^n(T)}{T^{p^n}}$ est une unité de $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$ si $b > n$.*

Démonstration. Voir le lemme II.5.2 de [7].

□

On continue avec un lemme technique, dont les arguments sont aussi standard. Faute d'une référence, on donne la preuve.

Lemme 5.1.2. *Il existe $l(\mathscr{D}) \geq 1$ tel que pour tous $a \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{N}^*$ et $b \geq m(\mathscr{D}) + k$*

$$\psi^k(T^a \mathscr{D}^{\dagger,b}) \subset T^{[\frac{a}{p^k}]-l(\mathscr{D})} \mathscr{D}^{\dagger,b-k}.$$

Démonstration. Si $a \in \mathbf{Z}$ et si $c = [\frac{a}{p^k}]$, alors le lemme 5.1.1 montre que

$$\psi^k(T^a \mathscr{D}^{\dagger,b}) \subset \psi^k(T^{p^k c} \mathscr{D}^{\dagger,b}) = \psi^k(\varphi^k(T)^c \mathscr{D}^{\dagger,b}) = T^c \psi^k(\mathscr{D}^{\dagger,b}).$$

On peut donc se contenter de traiter le cas $a = 0$.

Soit $l \geq 1$ tel que p divise l et $\psi((1+T)^j e_i) \in T^{-l}\mathscr{D}^{\dagger,m(\mathscr{D})}$ pour $(i,j) \in [1,d] \times [0,p-1]$. Alors $\psi(\mathscr{D}^{\dagger,b}) \subset T^{-l}\mathscr{D}^{\dagger,b-1}$ pour tout $b > m(\mathscr{D})$, car $\psi(O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}) \subset O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b-1}$ et donc

$$\mathscr{D}^{\dagger,b} = \sum_{i=1}^{d} O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b} \cdot e_i = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=0}^{p-1} (1+T)^j \varphi(O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b-1}) e_i.$$

Posons $l(\mathscr{D}) = 2l$ et montrons par récurrence sur k que $\psi^k(\mathscr{D}^{\dagger,b}) \subset T^{-l(\mathscr{D})}\mathscr{D}^{\dagger,b-k}$ pour $b \geq m(\mathscr{D}) + k$. Pour $k = 1$, on vient de le faire. Pour passer de k à $k+1$, on utilise l'hypothèse de récurrence et le lemme 5.1.1, ce qui donne pour $b > m(\mathscr{D}) + k$

$$\psi^{k+1}(\mathscr{D}^{\dagger,b}) \subset \psi(\varphi(T)^{-\frac{l(\mathscr{D})}{p}} \mathscr{D}^{\dagger,b-k}) = T^{-\frac{l(\mathscr{D})}{p}} \psi(\mathscr{D}^{\dagger,b-k}).$$

On conclut en utilisant l'inclusion $\psi(\mathscr{D}^{\dagger,b-k}) \subset T^{-\frac{l(\mathscr{D})}{2}} \mathscr{D}^{\dagger,b-k-1}$ (second paragraphe) et l'inégalité $l(\mathscr{D}) \geq \frac{l(\mathscr{D})}{2} + \frac{l(\mathscr{D})}{p}$.

□

5.2 Vecteurs localement analytiques et coefficients de Mahler

On renvoie aux parties 2.1 et 2.2 pour les généralités sur les groupes uniformes et les coefficients de Mahler. Si $m \geq 2$, notons $K_m = 1 + p^m M_2(\mathbf{Z}_p)$ et

$$a_m^+ = \begin{pmatrix} 1+p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_m^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+p^m \end{pmatrix}, \quad u_m^+ = \begin{pmatrix} 1 & p^m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_m^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^m & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors K_m est un pro-p-groupe uniforme et $(a_m^+, a_m^-, u_m^+, u_m^-)$ est un système minimal de générateurs topologiques. Pour simplifier, on notera pour $\alpha \in \mathbf{N}^4$

$$b_m^\alpha = (a_m^+ - 1)^{\alpha_1} \cdot (a_m^- - 1)^{\alpha_2} \cdot (u_m^+ - 1)^{\alpha_3} \cdot (u_m^- - 1)^{\alpha_4} \in \mathbf{Z}_p[K_m].$$

Si $v \in \Pi$, on note $o_v : K_m \to \Pi$ la fonction $g \to g \cdot v$. C'est une fonction continue sur K_m dont les coefficients de Mahler sont donnés par $a_\alpha(o_v) = b_m^\alpha \cdot v$. Par le théorème de Mahler, on a $\lim_{|\alpha|\to\infty} a_\alpha(o_v) = 0$.

Définition 5.2.1. Soit $\Pi_m^{(b)}$ le sous-espace de Π formé des vecteurs $v \in \Pi$ tels que

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} v_\Pi(b_m^\alpha \cdot v) - p^m r_b \cdot |\alpha| = \infty.$$

On munit $\Pi_m^{(b)}$ de la valuation

$$v_m^{(b)}(v) = \inf_{\alpha\in\mathbf{N}^4} (v_\Pi(b_m^\alpha \cdot v) - p^m r_b \cdot |\alpha|),$$

pour laquelle il est complet (donc un espace de Banach). De plus, le théorème d'Amice montre que la limite inductive (sur b, à m fixé) des $\Pi_m^{(b)}$ s'identifie en tant qu'espace vectoriel topologique à Π^{an}. Le but d'une bonne partie de ce chapitre est de décrire cet espace en termes de $\mathscr{D}$.

Rappelons que l'on dispose d'une constante l_1 telle que $\mathscr{D}^\natural \subset T^{-l_1}\mathscr{D}^{\dagger,b}$ (voir 5.1).

Proposition 5.2.2. *Soient $b > m > m(\mathscr{D})$ et $v \in \Pi_m^{(b)}$. Alors v admet un relèvement à $(p^s T^{s'} \mathscr{D}^{\dagger,b}) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \subset D^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, avec $s = v_m^{(b)}$ et $s' = -(p^m n_b + l_1)$.*

Démonstration. On peut supposer que $v_m^{(b)}(v) \geq 0$. Notons $\xi = (u_m^+)^{n_b}$, $\mu = (u_m^-)^{n_b}$ et

$$a_k = \min(v_\Pi(\xi^k v), v_\Pi(\mu^k v)),$$

de telle sorte que $\lim_{k\to\infty} a_k - p^m k = \infty$ et $a_k \geq p^m k + v_m^{(b)}(v)$ pour tout k (par définition de $\Pi_m^{(b)}$ et $v_m^{(b)}$).

Soient $X = \mathscr{D} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $Y = \mathscr{D}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, et fixons un relèvement $z = (z_1, z_2) \in p^{a_0} X$ de v (il en existe, car $v_\Pi(v) \geq a_0 \geq 0$). Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.2.3. *Il existe une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de Y telle que pour tout $n \geq 1$*

$$\xi^n z - \sum_{k=0}^{n-1} p^{a_k} \xi^{n-k-1} y_k \in p^{a_n} X.$$

Démonstration. On construit la suite en question par récurrence. Noter que Y est stable par ξ et η (car il est stable par G), ainsi que l'égalité $p^n X \cap Y = p^n Y$ (pour $n \geq 0$), qui découle de la définition de Y.

Supposons d'abord que $n = 1$. Si $a_1 < a_0$, on prend $y_0 = 0$, supposons donc que $a_1 \geq a_0$. Comme $v_\Pi(\xi v) \geq a_1 \geq 0$, on a $\xi z \in (p^{a_1} X + Y) \cap p^{a_0} X \subset p^{a_1} X + p^{a_0} Y$, ce qui montre l'existence de y_0. Supposons avoir trouvé $y_0, ..., y_{n-1}$ et écrivons

$$\xi^n z = \sum_{k=0}^{n-1} p^{a_k} \xi^{n-k-1} y_k + p^{a_n} u$$

pour un $u \in X$. Si $a_n > a_{n+1}$, on prend $y_n = 0$. Sinon, en appliquant ξ à l'égalité précédente on obtient $p^{a_n} \xi u \in \xi^{n+1} z + Y \subset p^{a_{n+1}} X + Y$ (la deuxième inclusion suit de $v_\Pi(\xi^{n+1} v) \geq a_{n+1}$). On en déduit que $p^{a_n} \xi u \in p^{a_{n+1}} X + p^{a_n} Y$ et on choisit $y_n \in Y$ tel que $p^{a_n} \xi u - p^{a_n} y_n \in p^{a_{n+1}} X$. Cela permet de conclure. □

Revenons à la preuve de la proposition. En appliquant $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ à la relation du lemme 5.2.3, et en utilisant le fait que ξ agit par multiplication par $\varphi^m(T)^{n_b}$, on obtient $z_1 - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \in p^{a_n}\mathscr{D}$, avec

$$A_k = \frac{p^{a_k}}{\varphi^m(T)^{(k+1)n_b}}\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(y_k) =$$

$$p^{a_k - p^m k}\frac{1}{\varphi^m(T)^{n_b}}\left(\frac{p^{p^m}}{\varphi^m(T)^{n_b}}\right)^k \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(y_k) \in p^{a_k - p^m k}T^{-l_1 - p^m n_b}\mathscr{D}^{\dagger,b},$$

la dernière relation utilisant le lemme 5.1.1, le fait que $p \in T^{n_b}O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(y_k) \in \mathscr{D}^\natural \subset T^{-l_1}\mathscr{D}^{\dagger,b}$.

Comme $\mathscr{D}^{\dagger,b}$ est complet pour la topologie p-adique et comme $a_k - p^m k$ tend vers ∞ et est minoré par $v_m^{(b)}(v)$, on déduit de ce qui précède que $z_1 \in p^{v_m^{(b)}(v)}T^{-p^m n_b - l_1}\mathscr{D}^{\dagger,b}$. Les mêmes arguments (remplacer dans ce qui précède ξ par η et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w\cdot)$) donnent la même estimée pour z_2, ce qui permet de conclure.

□

Remarque 5.2.4. Suppposons que $D^\natural = D^\sharp$ (par exemple D est irréductible de dimension ≥ 2), de telle sorte que l'inclusion de $\tilde{D}$ dans Π induise un isomorphisme de B-modules de Banach $\Pi \simeq \tilde{D}/\tilde{D}^+$. En posant $X = \tilde{\mathscr{D}}$ et $Y = \tilde{\mathscr{D}}^+$, on vérifie sans mal que le lemme 5.2.3 s'applique encore (le point est que Y est stable par ξ et $Y \cap p^n X = p^n Y$ pour $n \geq 0$). Le reste de la preuve s'applique et montre que tout $v \in \Pi_m^{(b)}$ admet un relèvement à $\tilde{D}^{(0,r_b]}$. Par contre, les éléments de $\tilde{D}^{(0,r_b]}$ ne fournissent pas en général des vecteurs localement analytiques.

Le but de la suite est de montrer que l'image de $D^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ par la projection canonique $p_\Pi : D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to \Pi$ est contenue dans $\Pi_m^{(b+1)}$ pour m convenable [1] et $b > 2m$. Nous allons suivre les arguments de [12], qui s'adaptent sans problème à notre degré de généralité.

5.3 Vecteurs propres de ψ

Pour tout $\alpha \in O_L^*$, on note

$$\mathscr{C}^\alpha = (1 - \alpha \cdot \varphi)\mathscr{D}^{\psi=\alpha} \subset \mathscr{D}^{\psi=0}.$$

La proposition suivante est une version de la proposition V.2.1 de [12] (qui n'est vraie [2] qu'après tensorisation par L). Voir 5.1 pour les objets i_δ, $\Lambda(\Gamma)$, etc.

Proposition 5.3.1. *Soit $P \in O_L[X]$ tel que $P(\psi) = 0 \in \mathrm{End}_{O_L}(\mathscr{D}^\sharp/\mathscr{D}^\natural)$. Soit $\alpha \in O_L^*$ tel que α et $\beta := \frac{1}{\delta(p)\alpha}$ ne soient pas des racines de P et α^{-1} et β^{-1} ne soient pas des valeurs propres de φ sur D^{nr}. Alors $w_\delta(\mathscr{C}^\alpha) \cap \mathscr{C}^\beta$ est d'indice fini dans $\mathscr{C}^\beta$.*

Démonstration. **Etape 1** On montre que $w_\delta(\mathscr{C}^\alpha) \otimes_{O_L} L = \mathscr{C}^\beta \otimes_{O_L} L$.

Soit $z \in \mathscr{D}^{\psi=\alpha}$ et soit $z' = P(\alpha)z = P(\psi)z$. Par hypothèse on a $z' \in \mathscr{D}^\natural$, donc $(\alpha^{-n}z')_{n\geq 0} \in \mathscr{D}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$. Comme $\mathscr{D}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ se surjecte sur $\mathscr{D}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$ (lemme 4.4.2), il existe $x = (x_1, x_2) \in \mathscr{D}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ tel que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)x\right) = \alpha^{-n}z'$ pour tout $n \geq 0$. Alors (ibid.) $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)x - \alpha^{-1}x \in$

1. On peut vérifier que les espaces de Banach $\Pi_m^{(b)}$ ne dépendent pas du choix de m, c'est d'ailleurs pour cela que l'on a choisi des normalisations un peu étranges dans leur définition. Comme nous n'avons pas besoin de ce résultat pour la suite, nous le laissons en exercice au lecteur.

2. Le problème est que $\mathscr{D}^{\psi=1}$ n'est pas toujours contenu dans $\mathscr{D}^\natural$, même sous les hypothèses de loc.cit. Comme le montre la suite, cela ne change rien aux arguments.

$\mathrm{Ker}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}) = (0, \mathscr{D}^{\mathrm{nr}})$ et un petit calcul montre que ceci entraîne $\psi(x_2) - \beta x_2 \in \mathscr{D}^{\mathrm{nr}}$. Comme β^{-1} n'est pas valeur propre de $\varphi \in \mathrm{End}_L(D^{\mathrm{nr}})$, il existe $u \in D^{\mathrm{nr}}$ tel que $\beta\varphi(u) - u = \psi(x_2) - \beta x_2$. Alors $x_2 + \varphi(u) \in \mathscr{D}^{\psi=\beta} \otimes_{O_L} L$ et donc $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(x_2 + \varphi(u)) = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(x_2) \in \mathscr{C}^\beta \otimes_{O_L} L$. Comme

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(x_2) = w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(x_1)) = P(\alpha) w_\delta((1-\alpha\varphi)(z)),$$

on conclut que $w_\delta(\mathscr{C}^\alpha \otimes_{O_L} L) \subset \mathscr{C}^\beta \otimes_{O_L} L$. Par symétrie, cette inclusion est une égalité.

Etape 2 Comme $\mathscr{C}^\alpha$ et $\mathscr{C}^\beta$ sont des $\Lambda(\Gamma)$-modules de type fini et comme w_δ est i_δ-semi-linéaire, l'étape 1 montre l'existence d'une constante $c = c(P, \alpha, \mathscr{D})$ telle que $w_\delta(\mathscr{C}^\beta) \subset p^{-c}\mathscr{C}^\alpha$. Soit alors $x \in \mathscr{C}^\beta$. On vient de voir qu'il existe $y \in \mathscr{D}^{\psi=\alpha}$ tel que $w_\delta(x) = p^{-c}(1-\alpha\varphi)y$. Si y' est un autre choix, alors $y - y' \in \mathscr{D}^{\varphi=\frac{1}{\alpha}}$. Comme $w_\delta(x) \in \mathscr{D}$, on a $y \pmod{p^c} \in (\mathscr{D}/p^c\mathscr{D})^{\varphi=\frac{1}{\alpha}}$. De plus, si $y \pmod{p^c} = 0$, alors $x \in w_\delta(\mathscr{C}^\alpha) \cap \mathscr{C}^\beta$. Ainsi, l'application $x \to y \pmod{p^c}$ induit une injection de $\mathscr{C}^\beta/(\mathscr{C}^\beta \cap w_\delta(\mathscr{C}^\alpha))$ dans le quotient de $(\mathscr{D}/p^c\mathscr{D})^{\varphi=\frac{1}{\alpha}}$ par l'image de $\mathscr{D}^{\varphi=\frac{1}{\alpha}}$. Comme ce quotient est fini (car $(\mathscr{D}/p^c\mathscr{D})^{\varphi=\frac{1}{\alpha}}$ est contenu dans $(\mathscr{D}/p^c\mathscr{D})^{\mathrm{nr}}$, qui est fini), cela permet de conclure.

□

5.4 L'action de G sur $T^a\mathscr{D}^{\dagger,b}\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$

Le but de cette partie est de contrôler l'action de G sur les modules $(T^a\mathscr{D}^{\dagger,b})\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. Tous les arguments sont repris de [12, chap. V] et les résultats importants pour la suite sont les propositions 5.4.5 et 5.4.7 ci-dessous. Rappelons que les constantes $c, c_1, c_2, ..., m_1, m_2, ...$ ci-dessous ne dépendent que de $\mathscr{D}$, δ et du choix de la base $e_1, e_2, ..., e_d$ (voir 5.1).

Proposition 5.4.1. *Il existe $m_1 \geq m(\mathscr{D})$ tel que w_δ laisse stable $\mathscr{D}^{(0,r_b]}\boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$ pour tout $b \geq m_1$.*

Démonstration. On choisit P, α et β comme dans la proposition 5.3.1 et on note $M = w_\delta(\mathscr{C}^\alpha) \cap \mathscr{C}^\beta$. On choisit ensuite $m_1 \geq m(\mathscr{D})$ tel que pour tout $b \geq m_1$

- Si $? \in \{\alpha, \beta\}$, alors $\mathscr{C}^?$ est un sous-$\Lambda(\Gamma)$-module libre de rang d de $\mathscr{D}^{(0,r_b]}\boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$, tel que $O_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}(\Gamma) \otimes_{\Lambda(\Gamma)} \mathscr{C}^? = \mathscr{D}^{(0,r_b]}\boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$ (c.f. [12, cor. V.1.13]).
- L'inclusion de M dans $\mathscr{C}^\beta$ induit un isomorphisme

$$O_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}(\Gamma) \otimes_{\Lambda(\Gamma)} M = O_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}(\Gamma) \otimes_{\Lambda(\Gamma)} \mathscr{C}^\beta$$

(car $\mathscr{C}^\beta/M$ est un $\Lambda(\Gamma)$-module fini-ensemblistement- d'après prop. 5.3.1).

On a alors $O_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}(\Gamma) \otimes_{\Lambda(\Gamma)} M = \mathscr{D}^{(0,r_b]}\boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$ et $w_\delta(M) \subset \mathscr{C}^\alpha \subset \mathscr{D}^{(0,r_b]}\boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$ (par définition de M), ce qui permet de conclure, en utilisant la i_δ-semi-linéarité de w_δ.

□

Rappelons que l'on note $X \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = (\mathscr{D}\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \cap (X \times X)$ pour $X \subset \mathscr{D}$ (pareil avec D).

Corollaire 5.4.2. *Si $b > m_1$, alors $\mathscr{D}^{(0,r_b]}\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et $D^\dagger\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G.*

Démonstration. C'est une conséquence formelle des formules donnant l'action de G sur $\mathscr{D}\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, de la proposition 5.4.1 et des inclusions $\psi(\mathscr{D}^{(0,r_{b+1}]}) \subset \mathscr{D}^{(0,r_b]}$, $\varphi(\mathscr{D}^{(0,r_b]}) \subset \mathscr{D}^{(0,r_{b+1}]}$ et $\sigma_a(\mathscr{D}^{(0,r_b]}) \subset \mathscr{D}^{(0,r_b]}$.

□

Si $b \geq m > m_1$, on note $\tau_m = \sigma_{1+p^m} - 1$ et

$$M_m^{\dagger,b} = (1+T)\varphi^m(\mathscr{D}^{\dagger,b}) \quad \text{et} \quad M_m^{(0,r_b]} = (1+T)\varphi^m(\mathscr{D}^{(0,r_b]}).$$

Notons que $\left(\begin{smallmatrix} 1+p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1$ agit comme τ_m sur $\mathscr{D}$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1$ y agit agit par multiplication par $\varphi^m(T)$. Le résultat suivant ([12, prop. V.1.14] et sa preuve) compare les deux actions, ce qui est fondamental pour la suite. Rappelons que l'on a fixé une base $(e_i)_i$ du $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$-module $\mathscr{D}^{\dagger,b}$, et que $\Gamma_m = \chi^{-1}(1+p^m\mathbf{Z}_p)$. Si $m \geq 2$, on définit des anneaux $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(\Gamma_m)$, etc, en remplaçant simplement la variable T par τ_m.

Proposition 5.4.3. *Il existe $m_2 > m_1$ tel que pour tous $b \geq m \geq m_2$ on ait*

a) τ_m est bijectif sur $M_m^{(0,r_b]}$ et τ_m^a induit une bijection de $M_m^{\dagger,b}$ sur $\varphi^m(T)^a \cdot M_m^{\dagger,b}$, pour tout $a \in \mathbf{Z}$.

b) $M_m^{\dagger,b}$ (resp. $M_m^{(0,r_b]}$) est un $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(\Gamma_m)$ (resp. $O_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}(\Gamma_m)$)-module libre de base $((1+T)\varphi^m(e_i))_i$.

On fixe un tel m_2 et on le note simplement m. Voir 5.2 pour les notations K_m, a_m^+, a_m^-, b_m^α, etc.

Lemme 5.4.4. *Il existe une constante $c \geq 1$ telle que :*

a) Pour tous $b \geq m$ et $a \in \mathbf{Z}$ on a $w_\delta(\tau_m^a M_m^{\dagger,b}) \subset \tau_m^{a-c} M_m^{\dagger,b}$.

b) Pour tous $b \geq m$, $a \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$ et $g \in K_m$ on a $(g-1)^n(\tau_m^a M_m^{\dagger,b}) \subset \tau_m^{n+a-c} M_m^{\dagger,b}$.

Démonstration. a) Notons $f_i := (1+T)\varphi^m(e_i) \in \mathscr{D}^{(0,r_{2m}]}$. Alors (cor. 5.4.1) $w_\delta(f_i) \in \mathscr{D}^{(0,r_{2m}]} = \mathscr{D}^{\dagger,2m}[\frac{1}{T}]$. On choisit (et on fixe) c' tel que $w_\delta(f_i) \in \varphi^m(T)^{-c'+l(\mathscr{D})}\mathscr{D}^{\dagger,2m}$ pour $1 \leq i \leq d$ (voir le lemme 5.1.2 pour $l(\mathscr{D})$). Comme w_δ commute à $\mathrm{Res}_{1+p^m\mathbf{Z}_p}$ (car $1+p^m\mathbf{Z}_p$ est stable par w), il existe $g_i \in \mathscr{D}$ tels que $w_\delta(f_i) = (1+T)\varphi^m(g_i)$. Ainsi, on a $\varphi^m(g_i) \in \varphi^m(T)^{-c'+l(\mathscr{D})}\mathscr{D}^{\dagger,2m}$, ensuite $g_i \in T^{-c'}\mathscr{D}^{\dagger,m}$ (utiliser le lemme 5.1.2 et l'identité $g_i = \psi^m(\varphi^m(g_i))$) et donc finalement (prop. 5.4.3) $w_\delta(f_i) \in \varphi^m(T)^{-c'}M_m^{\dagger,m} = \tau_m^{-c'}M_m^{\dagger,m}$.

Soient enfin $b \geq m$, $a \in \mathbf{Z}$ et notons $X = M_m^{\dagger,b}$. Comme les e_i forment une base $\mathscr{D}^{\dagger,b}$ sur $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$, les f_i forment une base de X sur $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(\Gamma_m)$ (prop. 5.4.3). En utilisant la i_δ-semi-linéarité de w_δ et le fait que $w_\delta(f_i) \in \tau_m^{-c'}X$, on obtient $w_\delta(\tau_m^a X) \subset \tau_m^{a-c'}X$, ce qui permet de conclure.

b) On va montrer que $c = 8c'$ marche (avec c' comme dans la preuve de a), dont on garde les notations). Le a) de prop. 5.4.3 montre que $(g-1)^n(\tau_m^a X) = \tau_m^{a+n}X$ si $a \in \mathbf{Z}$ et $g \in \{a_m^+, u_m^+\}$. En combinant cela avec le a), on obtient pour $g \in \{u_m^+, a_m^+\}$

$$(wgw-1)^n(\tau_m^a X) = w(g-1)^n w(\tau_m^a X) \subset w(\tau_m^{a+n-c'}X) \subset \tau_m^{a+n-2c'}X$$

et donc $b_m^\alpha(\tau_m^a X) \subset \tau_m^{|\alpha|+a-c}X$.

Soit maintenant $g \in K_m$ quelconque et écrivons $(g-1)^n = \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^4} c_\alpha b^\alpha$ dans $\Lambda(K_m)$. D'après Lazard (voir la discussion qui précède le théorème 4.11 de [45]), on sait que $c_\alpha \in \mathbf{Z}_p$ et $v_p(c_\alpha) \geq n - |\alpha|$ quand $|\alpha| < n$. Comme p est multiple de $\tau_m^{n_b}$ (et donc de τ_m) dans $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(\Gamma_m)$, on obtient $c_\alpha b^\alpha(\tau_m^a X) \subset \tau_m^{\max(n,|\alpha|)+a-c}X$ pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^4$. Comme X est complet pour la topologie τ_m-adique (car $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}(\Gamma_m)$ l'est), cela permet de conclure que $(g-1)^n(\tau_m^a X) \subset \tau_m^{n+a-c}X$, ce qui finit la preuve.

□

Proposition 5.4.5. *Il existe $c_1 > c$ tel que :*

a) Pour tout $a \in \mathbf{Z}$ on a $w_\delta((T^a\mathscr{D}^{\dagger,b})^{\psi=0}) \subset (T^{a-c_1}\mathscr{D}^{\dagger,b})^{\psi=0}$.

b) Pour tous $b > 2m$, $a \in \mathbf{Z}$, $n \geq 1$ et $g \in K_m$

$$(g-1)^n(T^a\mathscr{D}^{\dagger,b}) \subset T^{a+p^m n-c_1}\mathscr{D}^{\dagger,b}.$$

Démonstration. On va montrer que l'on peut prendre $c_1 = p^m(1+c+l(\mathscr{D}))$. Fixons $b > 2m$, $a \in \mathbf{Z}$, $n \geq 1$ et notons, pour simplifier, $q = [\frac{a}{p^m}]$ et $Y = \tau_m^{q-l(\mathscr{D})}M_m^{\dagger,b-m}$.

Lemme 5.4.6. *Soit A (resp. B) l'ensemble des $i \in \{0,1,...,p^m-1\}$ tels que p ne divise pas i (resp. p divise i). Alors $T^a\mathscr{D}^{\dagger,b} \subset \sum_{i\in A}\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)Y + \sum_{i\in B}\left(\begin{smallmatrix} 1 & i-1 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)Y$ et $(T^a\mathscr{D}^{\dagger,b})^{\psi=0} \subset \sum_{i\in A}\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)Y$.*

Démonstration. Soit $z \in T^a\mathscr{D}^{\dagger,b}$ et posons $z_i = \psi^m((1+T)^{-i}z)$, de telle sorte que $z = \sum_{i=0}^{p^m-1}(1+T)^i \cdot \varphi^m(z_i)$ et $z_i \in T^{q-l(\mathscr{D})}\mathscr{D}^{\dagger,b-m}$ (lemme 5.1.2). On en déduit (prop. 5.4.3) que $x_i = (1+T)\varphi^m(\sigma_{\frac{1}{i}}(z_i))$ (pour $i \in A$) et $y_i = (1+T)\varphi^m(z_i)$ (pour $i \in B$) sont des éléments de Y et on conclut en remarquant que $z = \sum_{i\in A}\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)x_i + \sum_{i\in B}\left(\begin{smallmatrix} 1 & i-1 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)y_i$. La deuxième assertion s'en déduit, car si $\psi(z) = 0$, alors $z_i = 0$ pour tout $i \in B$. □

En revenant à la preuve de la proposition 5.4.5 et en appliquant le lemme 5.4.4, la prop. 5.4.3 b) et le lemme 5.1.1 (dans cet ordre) on obtient, pour $g \in K_m$,

$$\begin{aligned}(g-1)^n(Y) &\subset \tau_m^{q-l(\mathscr{D})-c+n}M_m^{\dagger,b-m} = \varphi^m(T)^{q-c-l(\mathscr{D})+n}M_m^{\dagger,b-m} \\ &\subset T^{p^m(q-c-l(\mathscr{D})+n)}\mathscr{D}^{\dagger,b} \subset T^{a+p^m n-c_1}\mathscr{D}^{\dagger,b}.\end{aligned}$$

On conclut pour le b) en utilisant le lemme 5.4.6 et le fait que K_m est distingué dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$. Le a) se démontre de la même manière, en utilisant le a) de la prop. 5.4.3. □

Rappelons que $v_\Pi(v) = k$ si $v \in p^k\Theta$ et $v \notin p^{k+1}\Theta$, et que $p_\Pi : \mathscr{D}\boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to \Pi$ est la projection naturelle. Voir 3.7 pour les accouplements $\langle\,.\,\rangle$ et $\{\ ,\ \}$.

Proposition 5.4.7. *Il existe une constante c_2 telle que si $a \in \mathbf{Z}$, $b > 2m$ et $z \in (T^a\mathscr{D}^{\dagger,b})\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$, alors $v = p_\Pi(z)$ satisfait*

$$\inf_{\alpha\in\mathbf{N}^4} v_\Pi(b_m^\alpha v) - p^m r_b|\alpha| \geq ar_b - c_2.$$

Démonstration. Comme $\frac{p}{T^{n_b}} \in O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$, l'énoncé est évident quand $a < 0$. La proposition 5.4.5 montre que $b_m^\alpha \cdot z \in (T^{a+p^m|\alpha|-4c_1}\mathscr{D}^{\dagger,b})\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ et on conclut en utilisant le lemme 5.4.8 ci-dessous.

Lemme 5.4.8. *Il existe c_3 tel que $v_\Pi(p_\Pi(z)) \geq ar_b - c_3$ si $b > 2m$, $a \in \mathbf{Z}$ et $z \in (T^a\mathscr{D}^{\dagger,b})\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$.*

Démonstration. Par dualité de Schikhof et cor. 4.4.4, un vecteur $v \in \Pi$ est dans $p^k\Theta$ si et seulement si $\{\check{z}, v\}_{\mathbf{P}^1} \in p^k O_L$ pour tout $\check{z} \in \check{\mathscr{D}}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. On applique cette observation à $v = p_\Pi(z)$. Comme $\{\check{z}, v\}_{\mathbf{P}^1} = \{\check{z}, z\}_{\mathbf{P}^1}$, le résultat suit de l'inclusion $\mathscr{D}^\natural \subset T^{-l_1}\mathscr{D}^{\dagger,b}$ et du lemme 5.4.9 ci-dessous.

□

Lemme 5.4.9. *Si $a_1, a_2 \in \mathbf{Z}$ et $b > \max(m(\mathscr{D}), m(\check{\mathscr{D}}))$, alors*

$$\{T^{a_1}\check{\mathscr{D}}^{\dagger,b}, T^{a_2}\mathscr{D}^{\dagger,b}\} \subset p^{(a_1+a_2)r_b}O_L.$$

Démonstration. Soient $\check{z} \in T^{a_1}\check{\mathscr{D}}^{\dagger,b}$, $z \in T^{a_2}\mathscr{D}^{\dagger,b}$ et f tel que $f\frac{dT}{1+T} = \langle \sigma_{-1}(\check{z}), z\rangle$. Alors $f \in T^{a_1+a_2}O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$ et si on écrit $f = T^{a_1+a_2}\sum_{n\in\mathbf{Z}} b_n T^n$, alors

$$\mathrm{res}_0\left(f\frac{dT}{1+T}\right) = \sum_{j\geq 0}(-1)^j b_{-1-a_1-a_2-j}.$$

On conclut en utilisant l'inégalité $v_p(b_j) \geq -jr_b$.

□

□

Remarque 5.4.10. Avec plus de travail, on peut montrer que $\lim_{|\alpha|\to\infty} v_\Pi(b_m^\alpha v) - |\alpha| r_b p^m = \infty$ pour v dans l'image de $D^{(0,r_b]}$. Combiné avec les propositions 5.4.7 et 5.2.2, on obtient un isomorphisme de L-espaces vectoriels topologiques

$$(D^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \simeq \Pi_m^{(b)}.$$

5.5 Le module $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et l'espace $\Pi(D,\delta)^{\mathrm{an}}$

Commençons par préciser un peu les topologies sur les espaces divers et variés que l'on manipulera dans la suite. Le module $\mathscr{D}^{\dagger,b}$ est séparé et complet pour la topologie T-adique, d'où une topologie naturelle sur $\mathscr{D}^{(0,r_b]} = \mathscr{D}^{\dagger,b}[\frac{1}{T}]$. On munit $D^{(0,r_b]} = \cup_{k\geq 0} p^{-k}\mathscr{D}^{(0,r_b]}$ et $D^\dagger = \cup_b D^{(0,r_b]}$ de la topologie limite inductive.

Il nous sera également utile d'avoir une description plus concrète de ces topologies. Pour cela, rappelons l'on dispose d'une pléiade d'anneaux de séries de Laurent (voir 3.1), chacun ayant une topologie naturelle. Cela induit une topologie naturelle sur les modules libres de type fini sur ces anneaux (on vérifie qu'elle ne dépend pas des choix de bases). En appliquant cette discussion aux modules $\mathscr{D}^{\dagger,b}$, $\mathscr{D}^{(0,r_b]}$, $D^{(0,r_b]}$, $D^\dagger$, D_{rig}, etc, on obtient des topologies sur ces modules, qui sont les mêmes que celles introduites dans le premier paragraphe.

Si $X \in \{\mathscr{D}^{(0,r_b]}, D^{(0,r_b]}, D^\dagger\}$, on munit $X \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de la topologie induite par l'inclusion $X \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \subset X \times X$. Cette topologie est plus forte que celle induite par l'inclusion $X \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \subset \mathscr{D} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ (ou $X \subset D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$). Comme $\mathscr{D}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est fermé dans $\mathscr{D} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, il est aussi fermé dans $\mathscr{D}^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ pour $b > m(\mathscr{D})$, donc $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est fermé dans $D^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et dans $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. On munit alors $(\mathscr{D}^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(\mathscr{D}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$ et $(X \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$ de la topologie quotient, pour $X \in \{D^{(0,r_b]}, D^\dagger\}$.

La discussion précédente nous fournit un L-espace vectoriel topologique $(D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$. Le corollaire 5.4.2 montre que $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ admet une action de G, qui est continue pour sa topologie naturelle (cela suit de la proposition 5.4.5). Ainsi, $(D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$ est un G-module topologique.

Théorème 5.5.1. *Soit (D,δ) une paire G-compatible avec $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$. Alors l'inclusion de $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ induit un isomorphisme de G-modules topologiques*

$$(D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \simeq \Pi(D,\delta)^{\mathrm{an}}.$$

Démonstration. Les propositions 5.2.2 et 5.4.7 montrent que l'on a des injections continues

$$\Pi(D,\delta)_m^{(b)} \subset (D^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \subset \Pi(D,\delta)_m^{(b+1)},$$

qui sont des homéomorphismes sur leurs images. On conclut en passant à la limite inductive sur $b > 2m$ (rappelons que l'isomorphisme d'Amice identifie $\Pi(D,\delta)^{\mathrm{an}}$ comme espace vectoriel topologique à la limite inductive des $\Pi(D,\delta)_m^{(b)}$).

□

Le résultat suivant est en fait un sous-produit de la preuve du théorème 5.5.1, mais il ne semble pas facile à démontrer directement :

Corollaire 5.5.2. *Soit* $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ *supersingulière et* $v \in \Pi$. *Si les applications* $x \to \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v$ *et* $x \to \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{smallmatrix}\right) v$ *sont localement analytiques, alors* $v \in \Pi^{\mathrm{an}}$.

Démonstration. On peut supposer que $\Pi = \Pi(D,\delta)$ pour une paire admissible (D,δ). La preuve de la proposition 5.2.2 n'utilise que la croissance des coefficients de Mahler des applications $x \to \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v$ et $x \to \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{smallmatrix}\right) v$. Elle montre que v admet un relèvement à $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. Le théorème 5.5.1 permet alors de conclure.

□

Corollaire 5.5.3. *Soit* (D,δ) *une paire* G*-compatible et soit* $\Pi = \Pi(D,\delta)$. *Il existe* m *et* b *tels que* $\Pi_m^{(b)}$ *soit dense dans* Π.

Remarque 5.5.4. En particulier, Π^{an} est dense dans Π. Bien sûr, cela est bien connu en toute généralité par les travaux de Schneider et Teitelbaum, mais notons que nous les retrouvons dans ce cas particulier par la théorie des (φ,Γ)-modules. Nous ne savons pas si le résultat du corollaire est aussi valable en toute généralité, même si cela est probable.

Démonstration. Soit m comme dans les parties précédentes (cf. prop. 5.4.3 et ce qui suit) et soit $b = 2m+1$. Supposons que $z \in \Pi^* \simeq \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ s'annule sur $\Pi_m^{(b+1)}$. On déduit de la prop. 5.4.7 que z est orthogonal à $D^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. Mais $D^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est dense dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, donc z est orthogonal à $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et donc il est nul. Cela permet de conclure. □

Le a) de la prop. 5.4.5 montre que w_δ est continu sur $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$, quand on munit cet espace de la topologie induite par la topologie naturelle de $D^\dagger$, qui, elle, est induite par la topologie de D_{rig}. La densité de $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$ dans $D_{\mathrm{rig}}^{\psi=0}$ (qui suit de celle de $D^\dagger$ dans D_{rig}) nous permet d'étendre w_δ de manière unique en une involution de $D_{\mathrm{rig}}^{\psi=0}$. On définit alors, de la manière usuelle

$$D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \{(z_1,z_2) \in D_{\mathrm{rig}} \times D_{\mathrm{rig}} | \quad \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_2) = w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1)).\}.$$

L'action continue de G sur $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ s'étend, elle aussi, par continuité en une action de G sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. On dispose donc d'un G-module topologique $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. En appliquant ceci à la paire G-compatible $(\check{D},\delta^{-1})$ on obtient aussi un module $\check{D}_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. L'accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1} : (\check{D}^\dagger \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1) \times (D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \to L$ s'étend en un accouplement G-équivariant parfait (voir la discussion qui précède [12, prop. V.2.10])

$$\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1} : (\check{D}_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1) \times (D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \to L.$$

Théorème 5.5.5. *Soit* (D,δ) *une paire* G*-compatible et notons* $\Pi = \Pi(D,\delta)$ *et* $\check{\Pi} = \Pi(\check{D},\delta^{-1})$. *Alors*

a) $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ *est isomorphe comme* G*-module topologique à l'orthogonal de* $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ *dans* $\check{D}_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$.

b) $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ *et* $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$ *sont exactement orthogonaux pour l'accouplement* $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$.

c) L'injection $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^* \to D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ *induit une suite exacte de* G*-modules topologiques*

$$0 \to (\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^* \to D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to \Pi^{\mathrm{an}} \to 0.$$

Démonstration. a) Le théorème 5.5.1 montre que le dual topologique de Π^{an} s'identifie à l'orthogonal de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ dans $(D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)^*$. Par densité de $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ dans $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, tout élément de $(D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)^*$ s'étend de manière unique en un élément de $(D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)^* = \check{D}_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, ce qui permet de conclure (la G-équivariance suit de celle de l'isomorphisme du théorème 5.5.1 et du fait que $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$ est G-équivariant).

b) Le cor. 4.4.4 fournit un isomorphisme de G-modules $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \simeq \check{\Pi}^*$. Le a) montre donc que $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ est l'orthogonal de $\check{\Pi}^*$. Or $\check{\Pi}^*$ est un sous-espace dense de $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$ (par densité de $\check{\Pi}^{\mathrm{an}}$ dans $\check{\Pi}$ combinée à la réfléxivité de $\check{\Pi}^{\mathrm{an}}$ et au théorème de Hahn-Banach), donc $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ est en fait l'orthogonal de $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$, ce qui démontre le b).

c) D'après a), $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$ est un sous-espace fermé de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. Soit Y le quotient. En utilisant de nouveau que $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$ induit une dualité parfaite entre $\check{D}_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ et $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, on obtient un isomorphisme topologique de Y^* sur l'orthogonal de $(\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$ dans $\check{D}_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, donc sur $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ (par b)). On a donc un isomorphisme de G-modules topologiques $Y^* \simeq (\Pi^{\mathrm{an}})^*$ (la G-équivariance suit de celle de $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$), ce qui permet de conclure (notons que Y est réflexif, car $\check{D}_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ satisfait Hahn-Banach).

□

Corollaire 5.5.6. *Avec les notations du théorème 5.5.5, on a*

$$D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 + (\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*.$$

Démonstration. Ceci découle de la preuve du théorème 5.5.5. Explicitement, si $z \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, alors $x \to \{x, z\}_{\mathbf{P}^1}$ est une forme linéaire continue sur $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ et donc elle est représentée par un élément $v \in \Pi^{\mathrm{an}}$ (car Π^{an} est réflexif). Par le théorème 5.5.1, v a un relèvement z_v à $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. Par construction $z - z_v$ est orthogonal à $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$ et donc $z - z_v \in (\check{\Pi}^{\mathrm{an}})^*$, ce qui permet de conclure.

□

Corollaire 5.5.7. *Sous les hypothèses du théorème 5.5.5, il existe* $m = m(D, \delta)$ *tel que* $(\Pi(D, \delta)^{\mathrm{an}})^* \subset \check{D}^{]0, r_m]} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$.

Démonstration. Le théorème 5.5.5 appliqué à $(\check{D}, \delta^{-1})$ montre que $(\Pi(D, \delta)^{\mathrm{an}})^*$ est un sous-espace fermé de $\check{D}_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, qui est isomorphe comme espace vectoriel topologique à la limite inductive des $\check{D}^{]0, r_m]} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, chacun de ces espaces étant un Fréchet. Puisque $(\Pi(D, \delta)^{\mathrm{an}})^*$ est lui-même un Fréchet, il est contenu dans un des $\check{D}^{]0, r_m]} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. □

Chapitre 6

L'action infinitésimale de G

Ce court chapitre représente le coeur de cette thèse, car les résultats que l'on établit dans ce chapitre seront utilisés partout dans la suite. Comme le lecteur pourra facilement se convaincre, les preuves des résultats principaux sont très élémentaires, mais utilisent pleinement les résultats techniques du chapitre précédent. Les formules obtenues, qui décrivent l'action infinitésimale de G sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, sont assez frappantes : il suffit par exemple de contempler les formules donnant l'action de l'unipotent inférieur de G (cf. remarque 4.1.1) pour se rendre compte que la formule du corollaire 6.2.5 ci-dessous n'a rien d'évident. On finit le chapitre par une réponse à une question de Harris, qui est une version localement analytique d'un théorème de Morra [37].

6.1 Fonctions analytiques sur des couronnes et distributions sur K_m

Les résultats importants pour la suite sont les propositions 6.1.6 et 6.1.8, ainsi que le corollaire 6.1.7. Les détails topologiques étant un peu délicats, nous avons besoin de quelques préliminaires pour les démontrer. Notons que l'on utilisera pleinement les résultats du chapitre précédent.

Soit m comme après la prop. 5.4.3 et soient $a \geq b > 2m$. On note $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}$ l'anneau des fonctions analytiques sur la couronne $r_a \leq v_p(T) \leq r_b$, que l'on munit de la valuation

$$v^{[r_a,r_b]}(f) = \inf_{r_a \leq v_p(x) \leq r_b} v_p(f(x)).$$

Une série de Laurent $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$ est dans $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}$ si et seulement si $\lim_{k\to\pm\infty} v_p(a_k)+kr_a = \infty$ et $\lim_{k\to\pm\infty} v_p(a_k) + kr_b = \infty$, et il découle du principe du maximum que

$$v^{[r_a,r_b]}\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k\right) = \min(\inf_{k\in\mathbf{Z}}(v_p(a_k) + kr_a), \inf_{k\in\mathbf{Z}}(v_p(b_k) + kr_b)).$$

Soit $O_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}$ l'anneau de valuation de $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}$. Rappelons que $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$ est le complété de $O_{\mathscr{E}}^{+}[\frac{p}{T^{n_b}}]$ pour la topologie p-adique. Le résultat suivant est bien connu.

Lemme 6.1.1. *Si $a \geq b$, alors $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$ est le sous-anneau de $O_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}$ formé des séries $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$ à coefficients dans O_L, telles que $\lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) + kr_b = \infty$ et $[v_p(a_k)] \geq -kr_b$ pour tout k, $[v_p(a_k)]$ étant la partie entière de $v_p(a_k)$.*

Lemme 6.1.2. *a)* $O_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]} \cap O_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]} \subset \frac{1}{p} O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$.

b) Si $f \in O_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}$ *satisfait* $v^{[r_a,r_b]}(f) \geq N$ *pour un* $N \in \mathbf{N}$, *alors* $f \in \frac{1}{p} T^{Nn_b} O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$.

Démonstration. a) C'est une conséquence immédiate du lemme 6.1.1 (la présence de $\frac{1}{p}$ est due au terme $[v_p(a_k)]$ dans le lemme 6.1.1).

b) Si $r_a \leq v_p(x) \leq r_b$, on a

$$v_p(f(x)) - Nn_b v_p(x) \geq v^{[r_a,r_b]}(f) - Nn_b r_b \geq 0,$$

donc $T^{-Nn_b} f \in O_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]} \cap O_{\mathscr{E}}^{(0,r_b]}$ et on conclut en utilisant le a).

□

Le lemme suivant établit un résultat de continuité, qui sera raffiné par la suite. Rappelons que l'on a choisit une base $e_1, e_2, ..., e_d$ de $\mathscr{D}^{\dagger,b}$ sur $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$. C'est aussi une base de $D^{]0,r_b]}$ sur $\mathscr{E}^{]0,r_b]}$, ce qui nous permet de poser

$$v^{[r_a,r_b]}(z) = \min_{1 \leq i \leq d} v^{[r_a,r_b]}(f_i) \quad \text{si} \quad z = \sum_{i=1}^{d} f_i e_i \in D^{]0,r_b]}$$

Lemme 6.1.3. *Il existe une constante* c_4 *telle que pour tous* $a \geq b > 2m$, $\alpha \in \mathbf{N}^4$ *et* $z \in D^{]0,r_b]}$ *on ait*

$$v^{[r_a,r_b]}(b_m^\alpha z) \geq \frac{n_b}{n_a} \left(v^{[r_a,r_b]}(z) - 1 \right) + p^m |\alpha| r_a - c_4.$$

Démonstration. On peut supposer que $z \in D^{(0,r_b]}$ (car $D^{(0,r_b]}$ est dense dans $D^{]0,r_b]}$ et car l'action de K_m sur $D^{]0,r_b]}$ a été définie par continuité à partir de l'action sur $D^{(0,r_b]}$). Ensuite, en multipliant z par une puissance entière de p, on peut supposer que $z \in \mathscr{D}^{(0,r_b]}$ et $v^{[r_a,r_b]}(z) \geq 0$. Soit N la partie entière de $v^{[r_a,r_b]}(z)$. On déduit du lemme 6.1.2 que $z \in \frac{1}{p} T^{Nn_b} \mathscr{D}^{\dagger,b}$, ce qui permet d'utiliser la prop. 5.4.5 pour obtenir $b_m^\alpha z \in \frac{1}{p} T^{Nn_b + p^m|\alpha| - 4c_1} \mathscr{D}^{\dagger,b}$, d'où

$$v^{[r_a,r_b]}(b_m^\alpha z) \geq (Nn_b + p^m|\alpha| - 4c_1) r_a - 1,$$

ce qui permet de conclure avec $c_4 = 4c_1 + 1$ (noter que $N > v^{[r_a,r_b]}(z) - 1$). □

Le résultat suivant est aussi bien connu, mais nous en donnons la preuve, pour le confort du lecteur.

Lemme 6.1.4. *a) Si* $(f_k)_k$ *est une suite d'éléments de* $O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$ *qui converge vers* 0 *pour la topologie p-adique, alors la série* $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{T^{n_a}}{p} \right)^k f_k$ *converge dans* $O_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}$.

b) Si $f \in O_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}$, *alors il existe une suite* $(f_k)_k$ *comme dans a) et telle que*

$$pf = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{T^{n_a}}{p} \right)^k f_k.$$

Démonstration. a) Il suffit de constater que

$$v^{[r_a,r_b]} \left(\left(\frac{T^{n_a}}{p} \right)^k f_k \right) \geq v^{[r_a,r_b]}(f_k)$$

et que, par hypothèse, la dernière quantité est positive et tend vers ∞ pour $k \to \infty$.

b) Posons $pf = \sum_{k\in\mathbf{Z}} b_k T^k$ et, pour $k \geq 0$, posons $g_k = \sum_{j=0}^{n_a-1} p^k b_{kn_a+j} T^j$. Alors $g_k \in O_{\mathscr{E}}^+$ tend vers 0 pour la topologie p-adique (car $v_p(b_k)+kr_a \geq 1$ pour tout k et $\lim_{k\to\infty} v_p(b_k)+kr_a = \infty$) et on a

$$\sum_{k\geq 0} b_k T^k = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{T^{n_a}}{p}\right)^k g_k.$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que $\sum_{k\leq 0} b_k T^k \in O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}$. Cela découle du lemme 6.1.1.

□

Notons, pour $a > 2m$,

$$D_a(K_m, L) = \{ \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^4} c_\alpha b_m^\alpha | \quad \lim_{|\alpha|\to\infty} v_p(c_\alpha) + p^m r_a|\alpha| = \infty\},$$

de telle sorte que $D(K_m, L)$ est la limite projective des $D_a(K_m, L)$. L'algèbre $D_a(K_m, L)$ est de Banach pour la valuation

$$v_a\left(\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^4} c_\alpha b_m^\alpha\right) = \inf_{\alpha\in\mathbf{N}^4} (v_p(c_\alpha) + p^m|\alpha|r_a)$$

et la famille $(v_a)_{a>2m}$ définit la topologie de Fréchet de $D(K_m, L)$. Nous pouvons enfin donner la version optimale du lemme 6.1.3.

Proposition 6.1.5. *Il existe une constante c_5 telle que pour tous $a \geq b > 2m$, $z \in D^{]0,r_b]}$ et $\lambda = \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^4} c_\alpha b_m^\alpha \in D_a(K_m, L)$, la série $\sum_\alpha c_\alpha b_m^\alpha z$ converge dans $D^{]0,r_b]}$ et*

$$v^{[r_a,r_b]}\left(\sum_\alpha c_\alpha b_m^\alpha z\right) \geq v^{[r_a,r_b]}(z) + v_a(\lambda) - c_5.$$

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe c_5 tel que

$$v^{[r_a,r_b]}(b_m^\alpha z) \geq v^{[r_a,r_b]}(z) + p^m|\alpha|r_a - c_5$$

pour tous $z \in D^{]0,r_b]}$, $\alpha \in \mathbf{N}^4$ et $a \geq b > 2m$. On peut supposer que $v^{[r_a,r_b]}(z) \in [0,1]$ (multiplier z par une puissance de p), en particulier $z \in O_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]} \otimes_{O_{\mathscr{E}}^{\dagger,b}} \mathscr{D}^{\dagger,b}$. Le lemme 6.1.4 permet d'écrire pz comme une série convergente (pour $v^{[r_a,r_b]}$)

$$pz = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{T^{n_a}}{p}\right)^k z_k,$$

avec $z_k \in \mathscr{D}^{\dagger,b}$ tendant vers 0 pour la topologie p-adique. Soit $S_N = \sum_{k\leq N} \left(\frac{T^{n_a}}{p}\right)^k z_k$. Le lemme 6.1.3 montre que $b_m^\alpha S_N$ tend vers $pb_m^\alpha z$ pour la valuation $v^{[r_a,r_b]}$. La proposition 5.4.5 montre que

$$b_m^\alpha S_N \in \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{T^{n_a}}{p}\right)^k T^{p^m|\alpha|-4c_1} \mathscr{D}^{\dagger,b},$$

et donc

$$v^{[r_a,r_b]}(b_m^\alpha S_N) \geq (p^m|\alpha| - 4c_1)r_a.$$

En faisant $N \to \infty$ on obtient donc que $v^{[r_a,r_b]}(b_m^\alpha z) \geq p^m|\alpha|r_a - 4c_1 - 1$ pour tout z tel que $v^{[r_a,r_b]}(z) \in [0,1]$. Cela permet de conclure. □

Proposition 6.1.6. *Si H est un sous-groupe compact de G et si b est assez grand, alors l'action de H sur $D^{]0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ s'étend en une structure de $D(H,L)$-module topologique.*

Démonstration. Comme H est commensurable à $K_m = 1 + p^m M_2(\mathbf{Z}_p)$ (avec m comme ci-dessus), on peut supposer que $H = K_m$. Notons que tout élément $z = (z_1, z_2)$ de $D^{]0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ s'écrit $z = z_1 + w \cdot \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_2)$, avec $z_1, \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_2) \in D^{]0,r_b]}$. En passant à la limite projective dans la proposition 6.1.5, on obtient une application continue $D(K_m, L) \times D^{]0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D^{]0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, définie par $(\lambda, z) \to \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^4} c_\alpha b_m^\alpha z$ si $\lambda = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^4} c_\alpha b_m^\alpha$. Cette application étend la structure de $L[K_m]$-module de $D^{]0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. Comme $L[K_m]$ est dense [1] dans $D(K_m, L)$, on conclut que $D^{]0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est un $D(K_m, L)$-module topologique.

□

Corollaire 6.1.7. *Si H est un sous-groupe ouvert compact de G, alors $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est un $D(H,L)$-module topologique.*

Proposition 6.1.8. *Soit H un sous-groupe ouvert compact de G, qui stabilise l'ouvert compact $U \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$. Alors $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta U$ est un sous-$D(H,L)$-module de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $\mathrm{Res}_U(\lambda \cdot z) = \lambda \cdot \mathrm{Res}_U(z)$ pour tous $z \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $\lambda \in D(H,L)$.*

Démonstration. Cela découle de la continuité de l'action de $D(H,L)$, de la densité de $L[H]$ dans $D(H,L)$ et de la G-équivariance de l'application Res_U.

□

6.2 Le $\mathfrak{gl}_2$-module $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$

Soit $U(\mathfrak{gl}_2)$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G. Si H est un sous-groupe ouvert compact de G, on dispose d'une inclusion $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} U(\mathfrak{gl}_2) \subset D(H,L)$, en voyant les éléments de $L \otimes_{\mathbf{Q}_p} U(\mathfrak{gl}_2)$ comme des opérateurs différentiels sur $C^{\mathrm{an}}(H,L)$ et en évaluant en $1 \in H$. La proposition 6.1.8 montre que $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p = D_{\mathrm{rig}}$ est un $\mathfrak{gl}_2$-module et que $\mathrm{Res}_U(X \cdot z) = X \cdot \mathrm{Res}_U(z)$ pour $z \in D_{\mathrm{rig}}$, $X \in \mathfrak{gl}_2$ et $U \subset \mathbf{Z}_p$ ouvert compact.

On utilise la base

$$I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \quad u^+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad u^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

de $\mathfrak{gl}_2$. Rappelons que $w(\delta)$ désigne la dérivée de δ en 1. C'est aussi le poids de Hodge-Tate généralisé du caractère galoisien attaché à δ par la théorie locale du corps de classes.

Proposition 6.2.1. *Pour tout $z \in D_{\mathrm{rig}}$ on a $I_2(z) = w(\delta)z$, $u^+(z) = tz$ et $h(z) = 2\nabla z - w(\delta)z$.*

Démonstration. La formule $I_2(z) = w(\delta)z$ suit du fait que $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ a pour caractère central δ. Comme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z = (1+T)^b z$ pour $z \in D_{\mathrm{rig}}$ et $b \in \mathbf{Z}_p$, on a

$$u^+(z) = \lim_{b \to 0} \frac{(1+T)^b - 1}{b} z = tz$$

pour tout $z \in D_{\mathrm{rig}}$. Le caractère central de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ étant δ, un calcul immédiat donne

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) z = \delta^{-1}(a)\sigma_{a^2}(z).$$

1. C'est une conséquence immédiate du fait que le dual de $D(K_m, L)$ est $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(K_m, L)$.

Il s'ensuit que pour $z \in D_{\mathrm{rig}}$ on a

$$h(z) = \lim_{a \to 1} \frac{\delta^{-1}(a)\sigma_{a^2} z - z}{a-1} = 2\nabla z - w(\delta) z.$$

□

L'élément de Casimir

$$C = u^+u^- + u^-u^+ + \frac{1}{2}h^2$$

engendre le centre de $U(\mathfrak{sl}_2)$. La proposition 6.1.8 montre que l'on peut voir C comme endomorphisme L-linéaire continu de $D_{\mathrm{rig}} = D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p$.

Lemme 6.2.2. *L'endomorphisme C de D_{rig} est $\mathscr{R}$-linéaire et compatible avec φ et Γ.*

Démonstration. Comme C commute à l'action adjointe de G, les formules donnant l'action de G sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ montrent que l'opérateur $C : D_{\mathrm{rig}} \to D_{\mathrm{rig}}$ commute à φ et Γ et satisfait $C((1+T)^m \cdot z) = (1+T)^m \cdot C(z)$ pour tout $m \in \mathbf{N}$ et tout $z \in D_{\mathrm{rig}}$. Par linéarité, on obtient $C(f(T)z) = f(T)C(z)$ pour tout $f \in L(T)$ et [2] tout $z \in D_{\mathrm{rig}}$. Or, il est facile de voir que $L(T)$ est dense dans $\mathscr{R}$ (tout $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n \cdot T^n \in \mathscr{R}$ est la limite dans $\mathscr{R}$ de la suite $\sum_{|n| \leq N} a_n \cdot T^n$). On en déduit le résultat.

□

Lemme 6.2.3. *On a une égalité d'opérateurs sur D_{rig}*

$$C = 2tu^- + \frac{(2\nabla - (w(\delta)+1))^2 - 1}{2}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 6.2.1 et de l'égalité $C = 2u^+u^- + \frac{h^2-2h}{2}$, qui découle de $u^+u^- - u^-u^+ = h$.

□

Théorème 6.2.4. *Supposons que les endomorphismes de D sont tous scalaires. Alors il existe $\alpha \in L$ tel que $Cz = \alpha z$ pour tout $z \in D_{\mathrm{rig}}$ et α est uniquement déterminé par l'égalité d'opérateurs*

$$(2\Theta_{\mathrm{Sen,D}} - (w(\delta)+1) \cdot \mathrm{Id})^2 = (2\alpha + 1) \cdot \mathrm{Id}.$$

Démonstration. Sous l'hypothèse du théorème les endomorphismes de D_{rig} sont aussi tous scalaires (remarque 3.3.5). L'existence de α suit alors du lemme 6.2.2. Le lemme 6.2.3 montre que $\frac{(2\nabla-(w(\delta)+1))^2-1}{2} - \alpha$ envoie D_{rig} dans $t \cdot D_{\mathrm{rig}}$, et on conclut en utilisant la proposition 3.5.3.

□

Notons

$$P_{D,\delta} = \frac{(2X - (w(\delta)+1))^2 - (1+2\alpha)}{4}.$$

Le corollaire suivant sera très utile par la suite.

2. Noter que si $z \in D_{\mathrm{rig}}$ et $P \in L[T]$ est non nul, alors $\frac{1}{P(T)} \cdot z \in D_{\mathrm{rig}}$.

Corollaire 6.2.5. *a) Pour tout $z \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$ on a*

$$w_\delta(tz) = -\frac{P_{D,\delta}(\nabla)(w_\delta(z))}{t}.$$

b) Pour tout $(z_1, z_2) \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ on a

$$u^+(z_1, z_2) = \left(tz_1, -\frac{P_{D,\delta}(\nabla)(z_2)}{t}\right).$$

c) Pour tout $z \in D_{\mathrm{rig}}$ on a

$$u^-(z) = -\frac{P_{D,\delta}(\nabla)(z)}{t}.$$

Démonstration. a) Le lemme 6.2.3 et la définition de α montrent que que

$$w_\delta(tz) = w_\delta(u^+z) = wu^+z = u^-wz = u^-(w_\delta(z)) = -\frac{P_{D,\delta}(\nabla)(w_\delta(z))}{t}.$$

b) On peut écrire $z = z_1 + w \cdot (\varphi \circ \psi(z_2))$. On a donc

$$u^+(z) = u^+(z_1) + w \cdot u^-(\varphi(\psi(z_2)))$$

et le résultat découle alors de a) et du lemme 6.2.3.

c) Cela découle du lemme 6.2.3 (ou bien de a) et b)).

□

Remarque 6.2.6. Soit (D, δ) la paire G-compatible attachée à une L-représentation V de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$. Supposons que $\mathrm{End}_{L[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)]}(V) = L$ et soient a, b les poids de Hodge-Tate généralisés de V. Soit $P_{\mathrm{Sen},V} = (X-a)(X-b)$ le polynôme de Sen de V. Alors $P_{D,\delta} = P_{\mathrm{Sen},V}$ et $\alpha = \frac{(a-b)^2-1}{2}$. En effet, dans ce cas $\delta = \chi^{-1} \cdot \det V$ (vu comme caractère de $\mathbf{Q}_p^*$ par la théorie locale du corps de classes) et donc

$$w(\delta) = w(\det V) - 1 = a + b - 1.$$

On en déduit que $P_{\mathrm{Sen},V} - P_{D,\delta}$ est un polynôme constant, qui tue $\Theta_{\mathrm{Sen},D}$. C'est donc le polynôme nul.

6.3 Une question de Harris

Nous allons appliquer les résultats précédents pour répondre à une question de Harris. Soit E une extension quadratique de $\mathbf{Q}_p$ et soit $\alpha \in E$ tel que $E = \mathbf{Q}_p(\sqrt{\alpha})$. Si $x \in E^*$ s'écrit $x = a + b\sqrt{\alpha}$, avec $a, b \in \mathbf{Q}_p$, on pose $g_x = \left(\begin{smallmatrix} a & b\alpha \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$. Alors $x \to g_x$ est un morphisme injectif de E^* dans G.

Théorème 6.3.1. *Soit $E/\mathbf{Q}_p$ une extension quadratique, $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ supersingulière et $\delta : E^* \to L^*$ un caractère continu. Alors $\mathrm{Hom}_{E^*}(\Pi^{\mathrm{an}}, \delta) = 0$.*

Démonstration. En utilisant le corollaire 4.7.5 et le c) du théorème 5.5.5, il suffit par dualité de démontrer l'énoncé suivant : soit (D, δ) une paire G-compatible, avec $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ absolument irréductible de dimension ≥ 2 et soit ω un caractère de E^*. Alors il n'existe pas $z \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ non nul tel que $g_x \cdot z = \omega(x)z$ pour tout $x \in E^*$.

Supposons que z est comme avant et que $z \neq 0$. Ecrivons $z = (z_1, z_2)$ et notons $k = w(\delta)$. Alors $P_{D,\delta} = X^2 - (k+1)X + \beta$ pour un $\beta \in L$ (le polynôme $P_{D,\delta}$ a été défini avant le cor. 6.2.5). Soit a^+ (resp. a^-) l'action infinitésimale de $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (resp. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_p^* \end{smallmatrix}\right)$). La proposition 6.2.1 montre que $a^+ = \nabla$ et $a^- = k - \nabla$. La relation

$$\left(\begin{smallmatrix} b & 1 \\ 1 & \alpha b \end{smallmatrix}\right) z = w \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha b \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right) z = \delta(1 + b\sqrt{\alpha})wz$$

entraîne, en prenant la dérivée par rapport à b en $b = 0$, l'existence d'un $c \in L$ tel que $a^+(z) + \alpha a^-(z) = cwz$. En appliquant $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \circ w$ à cette relation et en utilisant les expressions précédentes de a^+ et a^- on obtient

$$cz_2 = ((1-\alpha)\nabla + k\alpha)z_1, \quad cz_1 = (k + (\alpha - 1)\nabla)z_2.$$

Ensuite, en dérivant la relation

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & b\alpha \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right) z = \delta(1 + b\sqrt{\alpha})z$$

on obtient $\alpha u^+(z) + u^-(z) = cz$, ce qui fournit, compte tenu du corollaire 6.2.5

$$\alpha t z_1 - \frac{P_{D,\delta}(\nabla)z_1}{t} = cz_1, \quad tz_2 - \alpha\frac{P_{D,\delta}(z_2)}{t} = cz_2.$$

Supposons dans un premier temps que $c = 0$. En combinant les deux relations obtenues ci-dessus on obtient $\nabla(z_1) = \frac{k\alpha}{\alpha-1}z_1$ et $P_{D,\delta}\left(\frac{k\alpha}{\alpha-1}\right)z_1 = P_{D,\delta}(\nabla)z_1 = \alpha t^2 z_1$, et des relations semblables pour z_2. Or, cela entraîne trivialement $z_1 = z_2 = 0$.

Supposons donc que $c \neq 0$. La relation

$$cz_2 = ((1-\alpha)\nabla + k\alpha)z_1, \quad cz_1 = (k + (\alpha - 1)\nabla)z_2$$

fournit

$$z_1 = \frac{(k + (\alpha-1)\nabla)(k\alpha - (\alpha-1)\nabla)z_1}{c^2},$$

qui s'écrit, après un calcul pénible mais immédiat $\nabla^2(z_1) - k\nabla(z_1) + \gamma z_1 = 0$, avec $\gamma = \frac{c^2 - k^2\alpha}{(\alpha-1)^2} \in L$. En combinant ceci avec la relation $\alpha t z_1 - \frac{P_{D,\delta}(\nabla)z_1}{t} = cz_1$, un nouveau calcul fournit $\nabla(z_1) = F \cdot z_1$, avec $F \in L[t]$ de degré 2 (explicitement $F = -\alpha t^2 + ct + \beta - \gamma$). Ainsi, $\nabla^2(z_1) = (\nabla F + F^2)z_1$ et, en remplaçant tout ceci dans l'égalité $\nabla^2(z_1) - k\nabla(z_1) + \gamma z_1 = 0$, on obtient enfin $(\nabla F + F^2 - kF + \gamma)z_1 = 0$. Clairement, cela entraîne $z_1 = 0$. L'argument pour z_2 étant le même, cela permet de conclure.

□

Chapitre 7

Modules de Jacquet analytiques et série principale p-adique

Dans ce chapitre on applique les résultats du chapitre 6 à l'étude des modules de Jacquet localement analytiques des représentations de $\mathrm{Rep}_L(G)$. On en démontre par exemple la finitude (la preuve est bien détournée). Ensuite, nous calculons le module de Jacquet analytique de $\Pi(D, \delta_D)$ quand D est de dimension 2, ce qui nous permet de dévisser le module $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\delta_D} \mathbf{P}^1$ quand D est triangulin. Cela permet de répondre à des questions de Berger, Breuil et Emerton [4, 22] et d'obtenir ainsi une description explicite de $\Pi(D)^{\mathrm{an}}$ quand D est triangulin de dimension 2. Ces résultats ont été démontrés par des methodes différentes par Liu, Xie, Zhang et Colmez [35, 36, 14].

7.1 Un résultat de finitude

On démontre un résultat de finitude pour les équations différentielles p-adiques attachées aux représentations galoisiennes. Soit V une L-représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, soit D_{rig} son (φ, Γ)-module sur $\mathscr{R}$ et soit $\nabla = \lim_{a \to 1} \frac{\sigma_a - 1}{a-1}$ la connexion sur D_{rig} obtenue en dérivant l'action de Γ. Si $P \in L[X]$, notons

$$D_{\mathrm{rig}}^{P(\nabla)=0} = \{z \in D_{\mathrm{rig}} | \quad P(\nabla)(z) = 0\}.$$

Proposition 7.1.1. *Avec les notations précédentes, on a l'inégalité suivante pour tout $P \in L[X]$ non nul*

$$\dim_L D_{\mathrm{rig}}^{P(\nabla)=0} \leq \dim_L(V) \cdot \deg(P).$$

Démonstration. Quitte à remplacer L par une extension finie, on peut supposer que toutes les racines de P dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$ sont dans L. On démontre le résultat par récurrence sur $\deg P$. Pour traiter le cas $\deg(P) = 1$, nous avons besoin de quelques préliminaires.

Lemme 7.1.2. *On a* $(\mathrm{Frac}(\mathscr{R}))^{\nabla=0} = L$.

Démonstration. Ce résultat est probablement standard, mais faute d'une référence voici une preuve. Rappelons que $\nabla(f) = t \cdot (1+T)f'(T)$ pour $f \in \mathscr{R}$, où $t = \log(1+T)$. En particulier $\mathscr{R}^{\nabla=0} = L$. La condition $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = 0$ équivaut à $f' \cdot g = f \cdot g'$. Soit $r > 0$ tel que f et g soient analytiques sur la couronne $0 < v_p(T) \leq r$. Si $0 < r' \leq r$ et si $z \in \mathbf{C}_p$ est un zéro de g dans la couronne $r' \leq v_p(T) \leq r$, la relation $f' \cdot g = g' \cdot f$ montre que z a la même multiplicité (finie) dans f et dans g. D'après des résultats standard de Lazard (voir par exemple la prop. 4.12

de [2]), le quotient $\frac{f}{g}$ est donc analytique dans la couronne $r' \leq v_p(T) \leq r$. Comme cela vaut pour tout $r' \leq r$, le quotient $\frac{f}{g}$ est analytique sur la couronne $0 < v_p(T) \leq r$ et donc est dans $\mathscr{R}^{\nabla=0} = L$.

□

Le cas $\deg(P) = 1$ suit alors du lemme ci-dessous et du fait que le rang de D_{rig} sur $\mathscr{R}$ est $\dim_L(V)$.

Lemme 7.1.3. *Soit $\alpha \in L$. L'application naturelle $D_{\mathrm{rig}}^{\nabla=\alpha} \otimes_L \mathscr{R} \to D_{\mathrm{rig}}$ est injective.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier que si $z_1, z_2, ..., z_d \in D_{\mathrm{rig}}^{\nabla=\alpha}$ sont libres sur L, alors ils sont libres sur $\mathscr{R}$. Soit (quitte à renuméroter les z_i) $\sum_{i=1}^k f_i \cdot z_i = 0$ une relation de longueur minimale sur $\mathscr{R}$ et soit $g_i = \frac{f_i}{f_1} \in \mathrm{Frac}(\mathscr{R})$. En appliquant ∇ et en utilisant le fait que $\nabla(z_i) = \alpha \cdot z_i$, on obtient $\sum_{i=1}^k \nabla(g_i) \cdot z_i = 0$. Comme $\nabla(g_1) = 0$, par minimalité on obtient $\nabla(g_i) = 0$ pour tout i. Le lemme 7.1.2 permet alors de conclure.

□

Supposons le résultat démontré pour $\deg P = n$ et montrons-le pour $\deg P = n+1$. Soit $P = (X - \alpha) \cdot Q(X)$, avec $Q \in L[X]$ et notons $W_1 = D_{\mathrm{rig}}^{P(\nabla)=0}$ et $W_2 = D_{\mathrm{rig}}^{Q(\nabla)=0}$. Alors $\nabla - \alpha$ est un opérateur L-linéaire de W_1 dans W_2, dont le noyau est de dimension au plus $\dim_L(V)$ (lemme 7.1.3) et dont l'image est de dimension au plus $\dim_L W_2 \leq \deg(Q) \cdot \dim_L V$. Le résultat s'en déduit.

□

7.2 Finitude du module de Jacquet

Rappelons que l'on note $J^*(\pi) = (\pi^*)^U$ (avec $U = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) pour toute représentation localement analytique admissible π de G. Alors $J^*(\pi)$ est le dual du module de Jacquet "naïf", quotient de π par le sous-espace fermé engendré par les vecteurs $(u-1)v$, avec $u \in U$ et $v \in \pi$. La preuve du résultat suivant utilise un bon nombre de résultats des chapitres précédents. Il serait intéressant d'en donner une démonstration directe, qui n'utilise pas la théorie des (φ, Γ)-modules. Rappelons que u^+ désigne l'action infinitésimale de U.

Théorème 7.2.1. *Pour tout $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ on a $\dim_L(J^*(\Pi^{\mathrm{an}})) < \infty$ et $J^*(\Pi^{\mathrm{an}}) = ((\Pi^{\mathrm{an}})^*)^{u^+=0}$.*

Démonstration. Le foncteur $\Pi \to \Pi^{\mathrm{an}}$ est exact, donc $\Pi \to J^*(\Pi^{\mathrm{an}})$ est exact à gauche. En utilisant cette observation et les théorèmes 4.7.1 et 4.7.7, il suffit de démontrer le résultat pour les représentations $\Pi(D, \delta)$ attachées aux paires G-compatibles (D, δ), avec D irréductible. Si D est de dimension 1, cela suit facilement de la proposition 4.1.4. Si D est de dimension ≥ 2, le corollaire 6.2.5 et la proposition 7.1.1 montrent que $((\Pi^{\mathrm{an}})^*)^{u^+=0}$ est un L-espace vectoriel de dimension finie. Cela montre que $\dim_L(J^*(\Pi^{\mathrm{an}})) < \infty$, car $J^*(\Pi^{\mathrm{an}})$ est un sous-espace de $((\Pi^{\mathrm{an}})^*)^{u^+=0}$. Pour conclure, il suffit d'utiliser le lemme ci-dessous :

Lemme 7.2.2. *Soit M une L-représentation localement analytique du mirabolique P. Si $M^{u^+=0}$ est de dimension finie sur L, alors $M^{u^+=0} = M^U$.*

Démonstration. Il existe n tel que $M^{u^+=0}$ soit invariant par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n\mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Si $m \in M^{u^+=0}$ et $a \in \mathbf{Q}_p$, on a alors pour tout $k \geq n - v_p(a)$

$$\left(\begin{smallmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) m = \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^k a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) m = \left(\begin{smallmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) m,$$

donc $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) m = m$. Cela permet de conclure. □

□

Dans la suite on suppose que $\Pi = \Pi(D, \delta)$, où (D, δ) est la paire G-compatible attachée à une représentation $V \in \mathrm{Irr}_2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p))$ (voir la définition 1.3.5). On a donc $\delta = \delta_D = \chi^{-1} \cdot \det V$. On note simplement $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes U = D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\delta_D} U$.

7.3 Critère d'annulation en dimension 2

Soient a et b les poids de Hodge-Tate généralisés de D. D'après la proposition 7.1.1, le L-espace vectoriel

$$X = \{z \in D_{\mathrm{rig}} | (\nabla - a)(\nabla - b)z = 0\}$$

est de dimension au plus 4 (on fera mieux par la suite). Comme X est stable par φ, on a $X \subset \varphi(D_{\mathrm{rig}})$, de telle sorte que $(0, z) \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ pour tout $z \in X$. Rappelons que l'on a une suite exacte de G-modules topologiques [1]

$$0 \to (\Pi^{\mathrm{an}})^* \otimes \delta_D \to D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi^{\mathrm{an}} \to 0.$$

Proposition 7.3.1. *On a une égalité de sous-L-espaces vectoriels de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$*

$$J^*(\Pi^{\mathrm{an}}) \otimes \delta_D = \{(0, z) | z \in X\}.$$

Démonstration. Soit $\pi = \Pi^{\mathrm{an}}$. L'inclusion $\pi^* \otimes \delta_D \subset D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ induit une inclusion

$$J^*(\pi) \otimes \delta_D \subset (D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)^U \subset (D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)^{u^+=0}$$

et, d'après le corollaire 6.2.5 et la remarque 6.2.6, on a

$$(D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)^{u^+=0} = \{(0, z) | z \in X\}.$$

Montrons maintenant que les inclusions précédentes sont des égalités. On déduit du lemme 7.2.2 que $(D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)^U = (D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)^{u^+=0}$. Il nous reste à montrer que $(0, z) \in \pi^* \otimes \delta_D$ pour tout $z \in X$. Les $\varphi^n(z)$ vivent dans X, qui est un L-espace vectoriel de dimension finie. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 7.3.2. *Soit $z \in D_{\mathrm{rig}}$ tel que l'espace engendré par les $\varphi^n(z)$, avec $n \geq 0$, soit de dimension finie sur L. Alors fz est orthogonal à $\check{D}^\natural$ pour tout $f \in \mathscr{R}^+$.*

Démonstration. Par densité de $L[T]$ dans $\mathscr{R}^+$, on peut supposer que $f \in L[T]$, ensuite $f = (1+T)^k$ (par linéarité) et enfin $f = 1$ (car $\check{D}^\natural$ est un $O_L[[T]][\frac{1}{p}]$-module et $\{(1+T)^k\check{z}, (1+T)^k z\} = \{\check{z}, z\}$). Soit $P \in L[X]$ non nul, tel que $P(\varphi)(z) = 0$. Comme φ et ψ sont adjoints pour $\{\ ,\ \}$, on obtient $\{P(\psi)\check{z}, z\} = 0$ pour tout $z \in \check{D}^\natural$ (même $\check{D}_{\mathrm{rig}}$). Mais $P(\psi)D^\natural = D^\natural$, d'après [11, prop. II.5.15], ce qui permet de conclure.

□

1. Cela utilise le théorème 5.5.5 et le fait que $\check{D} \simeq D \otimes \delta_D^{-1}$, car $\dim D = 2$.

Revenons à la preuve du fait que $(0,z) \in \pi^* \otimes \delta_D$ pour tout $z \in X$. D'après le b) du théorème 5.5.5, il suffit de montrer que $(0,z)$ est orthogonal à $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, ce qui vient du fait que z est orthogonal à $\check{D}^\natural$ (lemme 7.3.2). Cela permet de conclure.

□

Corollaire 7.3.3. *V est trianguline si et seulement si $J^*(\Pi^{\mathrm{an}}) \neq 0$.*

Démonstration. Si V est trianguline, et si $0 \to \mathscr{R}(\delta_1) \to D_{\mathrm{rig}} \to \mathscr{R}(\delta_2) \to 0$ est une triangulation de son (φ,Γ)-module, alors la base canonique e_1 de $\mathscr{R}(\delta_1)$ est clairement un élément de X, ce qui permet de conclure, au vu de la proposition ci-dessus et du théorème 7.2.1.

Pour conclure, il suffit de vérifier que $X = 0$ si V n'est pas trianguline. Si $X \neq 0$, il existe (après avoir remplacé L par une extension finie) un vecteur propre pour φ et Γ dans X. On en déduit que V est trianguline [10, lemme 3.2]. □

7.4 Le module de Jacquet dans le cas triangulin

Dans la suite on fixe un point $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$ et on note $V = V(s)$, $\Pi = \Pi(s)$, etc. On renvoie au § 1.7 pour les notations utilisées ci-dessous. Le but de cette partie est de calculer l'espace X défini dans § 7.2. Cela va demander quelques préliminaires.

On note e_i la base canonique de $\mathscr{R}(\delta_i)$ (rappelons que $\varphi(e_i) = \delta_i(p)e_i$ et $\sigma_a(e_i) = \delta_i(a)e_i$) et p_s la projection de D_{rig} sur $\mathscr{R}(\delta_2)$. Noter [10, prop 4.5] que les poids de Hodge-Tate généralisés de V sont $w(\delta_1)$ et $w(\delta_2)$. De plus, comme D_{rig} est de pente 0 et que V est irréductible, la théorie des pentes de Kedlaya montre que $v_p(\delta_1(p)) = -v_p(\delta_2(p)) > 0$.

Rappelons que $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ est dit exceptionnel si $\delta_1 = x^{w(s)}\delta_2$. Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$, il existe $e_2' \in D_{\mathrm{rig}}$ tel que $p_s(e_2') = t^{w(s)}e_2$ et $\sigma_a(e_2') = a^{w(s)}\delta_2(a)e_2'$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$. Si s n'est pas exceptionnel, on peut choisir e_2' tel que $\varphi(e_2') = p^{w(s)}\delta_2(p)e_2'$ et alors e_2' est unique à multiplication par un élément de L^* près. Si s est exceptionnel, on peut choisir e_2' tel que $\varphi(e_2') = p^{w(s)}\delta_2(p)e_2' + e_1$, et alors e_2' est unique à addition près d'un élément de Le_1. Ces résultats sont déduits du calcul de la cohomologie de $\mathscr{R}(\delta)$, voir [10, prop. 3.10]. On aura besoin dans la suite du résultat suivant [14, lemme 3.22] :

Lemme 7.4.1. *Soit $V \in \mathrm{Irr}_2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p))$ (déf. 1.3.5) et soit D_{rig} son (φ,Γ)-module.*

a) Si D_{rig} possède un vecteur propre pour les actions de φ et Γ, alors V est trianguline.

b) Si V correspond à un point $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}} \cup \mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}}$ ou si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ est exceptionnel, alors les vecteurs propres pour l'action de φ et Γ sont dans $\cup_{k\geq 0} L^* \cdot t^k e_1$.

c) Si V correspond à un point $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ non exceptionnel, les vecteurs propres pour φ et Γ sont dans $L^* \cdot t^k e_1$ ou dans $L^* \cdot t^k e_2'$ pour un $k \geq 0$.

Le lemme suivant sera utilisé constamment dans la suite. Il fournit aussi une démonstration très directe de la proposition 1.19 de [14].

Lemme 7.4.2. *Soit $k \in L$. L'espace des solutions de l'équation $\nabla f + kf = 0$ (avec $f \in \mathscr{R}$) est $\{0\}$ si $k \notin \{0,-1,-2,...\}$ et $L \cdot t^{-k}$ si $k \in \{0,-1,-2,...\}$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{R}$ une solution non nulle de l'équation $\nabla f + kf = 0$ et soit j le plus grand entier positif tel que $f \in t^j \cdot \mathscr{R}$. Posons $f = t^j \cdot g$, avec $g \in \mathscr{R} - t \cdot \mathscr{R}$. On a $\nabla g + (k+j)g = 0$. Comme $\nabla(\mathscr{R}) \subset t \cdot \mathscr{R}$, on obtient $k + j = 0$ et $g \in L$. Le résultat s'en déduit.

□

Notons $X_2 = \{z \in D_{\mathrm{rig}} | (\nabla - w(\delta_2))z = 0\}$, de telle sorte que $(\nabla - w(\delta_1))X \subset X_2$.

Lemme 7.4.3. *On a $X_2 = 0$ si $w(s) \notin \{0, -1, -2, ...\}$ et $X_2 = L \cdot t^{-w(s)}e_1$ si $w(s) \in \{0, -1, -2, ...\}$.*

Démonstration. Comme $\nabla e_j = w(\delta_j) \cdot e_j$, l'équation $(\nabla - w(\delta_2))(fe_1) = 0$ équivaut à $\nabla f + w(s)f = 0$ et l'équation $(\nabla - w(\delta_2))(fe_2) = 0$ équivaut à $\nabla f = 0$ et donc à $f \in L$.

Supposons que $w(s) \notin \{0, -1, ...\}$. La suite exacte $0 \to \mathscr{R}(\delta_1) \to D_{\mathrm{rig}} \to \mathscr{R}(\delta_2) \to 0$ et l'observation du premier paragraphe montrent que X_2 s'injecte dans Le_2. Supposons que $X_2 \neq 0$, donc $\dim_L X_2 = 1$. Soit $x \in X_2 - \{0\}$, donc $x \notin \mathscr{R}e_1$ et x est vecteur propre pour φ et Γ. Le lemme 7.4.1 montre que $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ n'est pas exceptionnel et qu'il existe $c \in L^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $x = ct^k \cdot e_2'$. Comme $x \in X_2$ et $\nabla e_2' = (w(s) + w(\delta_2))e_2'$, on obtient $w(s) = -k \in \{0, -1, -2, ...\}$, une contradiction. Donc $X_2 = 0$.

Supposons maintenant que $w(s) \in \{0, -1, -2, ...\}$. Le premier paragraphe nous fournit une suite exacte $0 \to Lt^{-w(s)}e_1 \to X_2 \to Le_2$ et il reste à voir qu'elle n'est pas exacte à droite. Supposons donc qu'il existe $z \in X_2$ qui s'envoie sur e_2. Alors $\varphi(z) - \delta_2(p)z$ est dans $X_2 \cap \mathscr{R}e_1 = Lt^{-w(s)}e_1$ et donc, quitte à travailler [2] avec $z + ct^{-w(s)}e_1$ pour un $c \in L$ bien choisi, on peut supposer que $\varphi(z) = \delta_2(p)z$. Soit $\gamma \in \Gamma$. Il existe $a \in L$ tel que $\gamma(z) = \delta_2(\chi(\gamma))z + at^{-w(s)}e_1$. Comme φ et Γ commutent, un petit calcul donne $a(p^{-w(s)}\delta_1(p) - \delta_2(p)) = 0$, donc $a = 0$. Mais alors la suite exacte $0 \to \mathscr{R}(\delta_1) \to D_{\mathrm{rig}} \to \mathscr{R}(\delta_2) \to 0$ est scindée, contradiction. □

Proposition 7.4.4. *1) Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$ ou si $w(s) \notin \mathbf{Z}^*$, alors $X = L \cdot e_1$.*

2) Si $w(s) \in \{..., -2, -1\}$, alors $X = L \cdot e_1 \oplus L \cdot t^{-w(s)}e_1$.

3) Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$, alors $X = L \cdot e_1 \oplus L \cdot e_2'$.

Démonstration. Commençons par remarquer que $e_1 \in X$ et que $t^{-w(s)}e_1 \in X$ (resp. $e_2' \in X$) pour $s \in \{..., -2, -1\}$ (resp. $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$). Pour l'inclusion inverse, on va distinguer deux cas :

• Si $w(s) \notin \{0, -1, -2, ...\}$, la proposition précédente montre que $(\nabla - w(\delta_1))z = 0$ si $z \in X$, donc [3] la triangulation de D_{rig} induit une suite exacte

$$0 \to Le_1 \to X \to \{fe_2 | \nabla(f) = w(s)f\}.$$

Si $w(s) \notin \mathbf{N}^*$, le lemme 7.4.2 montre que le terme de droite de cette suite exacte est nul et $X = Le_1$. Si $w(s) \in \mathbf{N}^*$ (ce qui inclut les cas $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ et $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$), on obtient donc (par le lemme 7.4.2) une suite exacte $0 \to Le_1 \to X \to L \cdot t^{w(s)}$. Cela montre déjà que $\dim_L(X) \leq 2$ et permet de conclure dans le cas $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$. Supposons que $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$ et montrons que cette suite n'est pas exacte à droite (et donc que $X = L \cdot e_1$). Si ce n'était pas le cas, on trouve comme dans la preuve du lemme 7.4.3 un $z \in X$ qui s'envoie sur $t^{w(s)}e_2$ et tel que $\varphi(z) = p^{w(s)}\delta_2(p)z$. Comme $\sigma_a(z) - a^{w(s)}\delta_2(a)z \in L \cdot e_1$ et comme φ commute à Γ, on obtient facilement que $\sigma_a(z) = a^{w(s)}\delta_2(a)$, donc z est propre pour φ et Γ, ce qui contredit le lemme 7.4.1.

• Si $w(s) \in \{0, -1, -2, ...\}$, le lemme 7.4.3 montre que $(\nabla - w(\delta_1))X \subset X_2 \subset \mathscr{R}e_1$, donc l'image de X dans $\mathscr{R}(\delta_2)$ est contenue dans $\{fe_2 | \nabla f - w(s)f = 0\}$. Le dernier espace est nul si $w(s) < 0$ et de dimension 1 si $w(s) = 0$. Enfin,

$$X \cap \mathscr{R}e_1 = \{fe_1 | \nabla(\nabla f) + w(s)\nabla f = 0\}$$

2. Cela utilise le fait que $p^{-w(s)}\delta_1(p) \neq \delta_2(p)$, car $v_p(\delta_1(p)) > 0$ et $v_p(\delta_2(p)) < 0$.
3. Noter que $(\nabla - w(\delta_1))(fe_2) = (\nabla - w(s))f \cdot e_2$.

et ceci est de dimension 2 (resp. 1) si $w(s) < 0$ (resp. $w(s) = 0$), toujours d'après le lemme 7.4.2 (si $w(s) = 0$, noter que la relation $\nabla(\nabla f) = 0$ force $\nabla f \in L \cap t \cdot \mathscr{R} = \{0\}$ et donc $f \in L$). Ceci permet de conclure.

□

7.5 L'involution w_D dans le cas triangulin

Le but de cette partie est de décrire de manière explicite l'action de $w_D = w_{\delta_D}$ sur $D_{\mathrm{rig}}^{\psi=0}$, ce qui fait l'objet des propositions 7.5.2 et 7.5.4 ci-dessous. Cela étend et raffine le résultat du délicat lemme II.3.13 de [12] (dont on n'utilise pas le résultat et dont la méthode de démonstration n'est pas adaptable à notre situation).

Rappelons que l'on suppose que V est trianguline, correspondant à un point $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$ de $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$.

Lemme 7.5.1. *On a $w \cdot e_1 \in (D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)^U$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 7.3.1 et du fait que $w \cdot e_1 = (0, e_1)$ et $e_1 \in X$. □

Proposition 7.5.2. *Pour tout $f \in \mathscr{R}^{\psi=0}$ on a $w_D(f \cdot e_1) = \delta_1(-1) w_{\delta_D \delta_1^{-2}}(f) \cdot e_1$.*

Démonstration. On laisse au lecteur le soin de vérifier l'identité suivante (dans laquelle $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$)

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot w = w \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Appliquons cette identité à $e_1 \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Le terme de gauche est égal [4] à $\delta_1(-1)(1+T)e_1$, ce qui permet donc d'écrire $w_D((1+T)e_1) = \delta_1(-1)(1+T)e_1$. Comme $\sigma_a(e_1) = \delta_1(a)e_1$ et comme $w_D(\sigma_a(z)) = \delta_D(a)\sigma_{\frac{1}{a}}(w_D(z))$, il est facile de voir que les applications $F(f) = w_D(fe_1)$ et $G(f) = \delta_1(-1) w_{\delta_D \cdot \delta_1^{-2}}(f) \cdot e_1$ sont semi-linéaires pour l'action de $i_{\delta_D \cdot \delta_1^{-1}}$. Comme elles coïncident sur $1 + T$, qui est une base de $\mathscr{R}^{\psi=0}$ sur $\mathscr{R}(\Gamma)$, on obtient bien $F = G$, d'où le résultat.

□

Soit $\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1 = (D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1) \cap (\mathscr{R}e_1 \times \mathscr{R}e_1)$.

Corollaire 7.5.3. *$\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1$ est un sous-module fermé de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$, stable sous l'action de G.*

Démonstration. En tant qu'espace vectoriel topologique, $\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1$ (resp. $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$) s'identifie à $\mathscr{R}e_1 \times \mathscr{R}e_1$ (resp. $D_{\mathrm{rig}} \times D_{\mathrm{rig}}$). La fermeture de $\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1$ dans $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ suit donc de celle de $\mathscr{R}e_1$ dans D_{rig}. La stabilité de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ sous l'action de G découle de la proposition 7.5.2, de la stabilité de $\mathscr{R}e_1$ par φ et Γ, et des formules donnant l'action de G sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ (cf. remarque 4.1.1).

□

4. Utiliser le fait que $w \cdot e_1 = (0, e_1)$, le lemme 7.5.1, l'égalité $\sigma_{-1}(e_1) = \delta_1(-1)e_1$ et enfin le fait que $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ a pour caractère central δ_D.

Rappelons que p_s désigne la projection canonique $D_{\mathrm{rig}} \to \mathscr{R}e_2 = \mathscr{R}(\delta_2)$.

Proposition 7.5.4. *Pour tout $B \in \mathscr{R}^{\psi=0}$ on a*

$$p_s(w_D(B \cdot \varphi(\hat{e}_2))) = \delta_2(-1) w_{\delta_D \cdot \delta_2^{-2}}(B)\varphi(e_2).$$

Démonstration. Un argument de semi-linéarité comme dans la preuve de la proposition 7.5.2 montre que l'on peut supposer que $B = 1 + T$.

Posons $Y = (D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1)/(\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1)$ et notons $z \to [z]$ la projection canonique $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 \to Y$. Nous aurons besoin du résultat suivant, analogue du lemme 7.5.1.

Lemme 7.5.5. *L'élément $[w \cdot \varphi(\hat{e}_2)]$ de Y est invariant par U.*

Démonstration. Le lemme 7.2.2 montre qu'il suffit de vérifier que $\dim_L Y^{u^+=0} < \infty$ et que $[w \cdot \varphi(\hat{e}_2)] \in Y^{u^+=0}$. Le L-espace vectoriel

$$W = \{f \in \mathscr{R}(\delta_2) | (\nabla - w(\delta_1))(\nabla - w(\delta_2))f = 0\}$$

est de dimension finie d'après la proposition 7.1.1. Si $z = (z_1, z_2) \in D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ satisfait $[z] \in Y^{u^+=0}$, alors $u^+ z \in \mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1$ et on déduit du corollaire 6.2.5 et de la remarque 6.2.6 que $z_1 \in \mathscr{R}e_1$ et que $p_s(z_2) \in W$. Donc

$$z = z_1 + w \cdot \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_2) \equiv w \cdot \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(p_s(z_2)) \pmod{\mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1},$$

ce qui montre que $\dim_L Y^{u^+=0} < \infty$.

Pour conclure, il nous reste à vérifier que $u^+(w \cdot \varphi(\hat{e}_2)) \in \mathscr{R}e_1 \boxtimes \mathbf{P}^1$. Cela découle du corollaire 6.2.5 et du fait que $(\nabla - w(\delta_2))\hat{e}_2 \in \mathscr{R}e_1$ (car $\sigma_a(\hat{e}_2) - \delta_2(a)\hat{e}_2 \in \mathscr{R}e_1$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$).

□

Revenons à la preuve de la proposition 7.5.4. On applique l'identité matricielle du début de la preuve de la proposition 7.5.2 à $[w \cdot \varphi(\hat{e}_2)]$. Noter que $[w \cdot \varphi(\hat{e}_2)]$ est vecteur propre pour l'opérateur $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, de valeur propre $\delta_2 \cdot \delta_D(-1)$. L'identité matricielle s'écrit donc $p_s(w_D((1+T)\varphi(\hat{e}_2))) = \delta_2(-1)(1+T)\varphi(e_2)$, ce qui permet de conclure.

□

7.6 Dévissage de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer les résultats des parties précédentes pour étudier le G-module topologique $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ quand D est triangulin. Le résultat suivant admet au moins 2 autres démonstrations [14, 35, 36].

Théorème 7.6.1. *La suite exacte $0 \to \mathscr{R}e_1 \to D_{\mathrm{rig}} \to \mathscr{R}e_2 \to 0$ induit une suite exacte de G-modules topologiques*

$$0 \to (\mathscr{R} \boxtimes_{\delta_D \cdot \delta_1^{-2}} \mathbf{P}^1) \otimes \delta_1 \to D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 \to (\mathscr{R} \boxtimes_{\delta_D \cdot \delta_2^{-2}} \mathbf{P}^1) \otimes \delta_2 \to 0.$$

Démonstration. Commençons par définir les morphismes dans cette suite exacte. L'application i de $\mathscr{R} \boxtimes_{\delta_D \cdot \delta_1^{-2}} \mathbf{P}^1$ dans $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ envoie (f_1, f_2) sur $(f_1 \cdot e_1, \delta_1(-1) f_2 \cdot e_1)$. L'application de $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ dans $\mathscr{R} \boxtimes_{\delta_D \cdot \delta_2^{-2}} \mathbf{P}^1$ envoie $(A_1 \cdot e_1 + B_1 \cdot \varphi(\hat{e}_2), A_2 \cdot e_1 + B_2 \cdot \varphi(\hat{e}_2))$ sur $(B_1, \delta_2(-1)B_2)$,

où $A_i, B_i \in \mathscr{R}$ ($\hat{e}_2 \in D_{\mathrm{rig}}$ est un relèvement fixé de e_2). Le fait que ces applications i et pr sont bien définies et induisent une suite exacte d'espaces vectoriels topologiques est une conséquence immédiate des propositions 7.5.2 et 7.5.4. La G-équivariance (à torsion par δ_1, resp. δ_2 près) suit des propositions 7.5.2 et 7.5.4, du fait que $f \to f \cdot e_1$ et p_s sont des morphismes de (φ, Γ)-modules et des formules explicites donnant l'action de G sur les modules intervenant dans la suite exacte (cf. remarque 4.1.1).

□

Remarque 7.6.2. Le théorème 7.6.1 combiné à la proposition 4.1.4 et à la suite exacte de G-modules topologiques

$$0 \to (\Pi^{\mathrm{an}})^* \otimes \delta_D \to D_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi^{\mathrm{an}} \to 0$$

permet de montrer que Π^{an} est de longueur finie et que

$$(\Pi^{\mathrm{an}})^{\mathrm{ss}} = (\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \chi^{-1}\delta_2))^{\mathrm{ss}} \oplus (\mathrm{Ind}_B^G(\delta_2 \otimes \chi^{-1}\delta_1))^{\mathrm{ss}}.$$

Il faut travailler un peu plus [14] pour déterminer les extensions entre les constituants de Jordan-Hölder. Si D correspond à un point générique $s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$ (i.e. $\frac{\delta_1}{\chi\delta_2}$ n'est pas de la forme x^k, avec $k \in \mathbf{N}$), on obtient une suite exacte de G-modules topologiques

$$0 \to \mathrm{Ind}^{\mathrm{an}}(\delta_2 \otimes \chi^{-1}\delta_1) \to \Pi^{\mathrm{an}} \to \mathrm{Ind}^{\mathrm{an}}(\delta_1 \otimes \chi^{-1}\delta_2) \to 0.$$

Chapitre 8

Dualité et modèle de Kirillov

Dans ce chapitre on construit, suivant [12], un modèle de Kirillov pour les vecteurs localement algébriques eventuels de la représentation $\Pi(D,\delta)$. Le résultat essentiel pour la suite est le théorème 8.3.1, qui établit un lien entre la dualité, la théorie du modèle de Kirillov et la théorie de Hodge p-adique. Ce lien sera très important dans les chapitres suivants, qui étudient les vecteurs localement algébriques de $\Pi(D,\delta)$. Le théorème 8.3.1 a aussi des applications à la $\mathfrak{n}$-cohomologie de $\Pi(D,\delta)^{\mathrm{an}}$ (cf. par exemple le théorème 8.4.3).

Dans la suite (D,δ) est une paire G-compatible, avec $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$. On note $\Pi = \Pi(D,\delta) \in \mathrm{Rep}_L(G)$ et on suppose que $D^\natural = D^\sharp$ (par exemple, D est irréductible de dimension au moins 2), de telle sorte que l'inclusion de $\tilde{D}/\tilde{D}^+$ dans Π est un isomorphisme de $L[B]$-modules de Banach (cor. 4.4.5).

8.1 Vecteurs U-finis et modèle de Kirillov

Rappelons que P est le sous-groupe mirabolique de G.

Définition 8.1.1. a) Soient $k \in \mathbf{N}^*$ et $v \in \Pi$. On dit que v est U-fini de degré $< k$ s'il existe $n \geq 1$ tel que $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^k v = 0$. On note $\Pi^{U,k}$ le sous-L-espace vectoriel des vecteurs U-finis de degré $< k$ et $\Pi^{U-\mathrm{fini}}$ la réunion des $\Pi^{U,k}$.

b) $v \in \Pi$ est dit P-fini si $v \in \Pi^{U-\mathrm{fini}}$ et si le L-espace vectoriel engendré par $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v$ (avec $a \in \mathbf{Z}_p^*$) est de dimension finie sur L.

Lemme 8.1.2. *Soient $k \in \mathbf{N}^*$ et $v \in \Pi$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $v \in \Pi^{U,k}$.

b) L'application $x \to \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v$ est localement polynomiale de degré plus petit que k.

c) Tout relèvement $z \in \tilde{D}$ de v appartient à $\frac{1}{\varphi^n(T)^k}\tilde{D}^+$ pour un certain $n \geq 1$.

Démonstration. Si $a \in \mathbf{Z}_p$ et $n \geq 1$, soit $f_{n,a}(x) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a+p^n x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v$. Alors $f_{n,a} : \mathbf{Z}_p \to \Pi$ est une application continue dont le k-ième coefficient de Mahler est

$$a_k(f_{n,a}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^k v.$$

En utilisant le théorème de Mahler, l'équivalence entre a) et b) est immédiate. L'équivalence entre a) et c) est une simple traduction de l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $\tilde{D}$ (voir 4.3).

□

On déduit du ii) (ou du iii)) du lemme précédent que $\Pi^{U-\text{fini}}$ est stable par le Borel supérieur B de G. On dispose d'une injection de $\tilde{D}^+$ dans $\tilde{D}^+_{\text{dif}}$ (car $\tilde{\mathbf{B}}^+ \subset \mathbf{B}^+_{\text{dR}}$) et donc d'une injection de $\frac{1}{\varphi^a(T)^k}\tilde{D}^+$ dans $\tilde{D}_{\text{dif}}$ pour tout $a \in \mathbf{Z}$. Ceci permet, en utilisant le c) du lemme précédent, de définir une fonction (pour $v \in \Pi^{U-\text{fini}}$)

$$\phi_v : \mathbf{Q}_p^* \to \tilde{D}_{\text{dif}}/\tilde{D}^+_{\text{dif}}, \quad \phi_v(x) = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\tilde{z} \pmod{\tilde{D}^+_{\text{dif}}}$$

telle que $\text{Im}(\phi_v) \subset t^{-k}\tilde{D}^+_{\text{dif}}/\tilde{D}^+_{\text{dif}}$ pour $v \in \Pi^{U,k}$.

Proposition 8.1.3. *Soit $v \in \Pi^{U-\text{fini}}$. Alors*

a) ϕ_v ne dépend pas du choix de $\tilde{z}$, et ϕ_v est à support compact dans $\mathbf{Q}_p$.

b) L'application $v \to \phi_v$ est injective.

c) On a $\sigma_a(\phi_v(x)) = \phi_v(ax)$ pour $a \in \mathbf{Z}_p^*$ et $x \in \mathbf{Q}_p^*$. De plus, si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$, on a

$$\phi_{gv}(x) = \delta_D(d)[(1+T)^{\frac{bx}{d}}]\phi_v\left(\frac{ax}{d}\right).$$

Démonstration. La preuve est identique à celle du lemme VI.5.4 de [12], mais pour le confort du lecteur on rappelle l'argument. Le fait que ϕ_v ne dépend pas de $\tilde{z}$ suit de l'inclusion $\tilde{D}^+ \subset \tilde{D}^+_{\text{dif}}$.

Supposons que v a un relèvement $\tilde{z} \in \frac{1}{\varphi^n(T)^k}\tilde{D}^+$. Le a) du lemme 3.2.2 montre que $\phi_v(p^{-m}) = 0$ pour tout $m > n$, et donc ϕ_v est à support compact dans $\mathbf{Q}_p$. Supposons que $\phi_v = 0$. Alors $\varphi^m(\tilde{z}) \in \tilde{D}^+_{\text{dif}}$ pour tout $m \in \mathbf{Z}$. Donc, si $\tilde{x} = \varphi^n(T)^k \cdot \tilde{z}$, alors $\varphi^m(\varphi^{-n}(\tilde{x})) \in \varphi^m(T)^k\tilde{D}^+_{\text{dif}} \subset t^k\mathbf{B}^+_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ pour tout $m \geq 0$. On déduit du b) du lemme 3.2.2 que $\varphi^{-n}(\tilde{x}) \in T^k\tilde{D}^+$ et donc $\tilde{z} \in \tilde{D}^+$ et $v = 0$. Cela démontre a) et b). Le c) étant une simple traduction de l'action de B sur $\tilde{D}$, cela permet de conclure.

□

8.2 L'espace $\Pi_c^{P-\text{fini}}$

Le lemme suivant est une conséquence facile du lemme 3.2.2.

Lemme 8.2.1. *Soit $v \in \Pi$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $v \in \Pi^{U-\text{fini}}$ et ϕ_v est à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$ (i.e. $\phi_v(x) = 0$ quand $v_p(x)$ est suffisament grand).

b) Il existe $n, k \geq 1$ et $m \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\left(\sum_{i=0}^{p^n-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)^k \left(\begin{smallmatrix} p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v = 0.$$

Démonstration. Soient n, k et m comme dans b) et soit $\tilde{z} \in \tilde{D}$ un relèvement de v. La condition b) s'écrit alors $\left(\frac{\varphi^n(T)}{T}\right)^k \varphi^m(\tilde{z}) \in \tilde{D}^+$, ou encore $\tilde{z} \in \left(\frac{\varphi^{-m}(T)}{\varphi^{n-m}(T)}\right)^k \tilde{D}^+$. Le lemme 3.2.2 montre alors que $\varphi^j(\tilde{z}) \in \tilde{D}^+_{\text{dif}}$ pour tout $j \geq m$. En utilisant la première relation de la prop. 8.1.3 c), on obtient $\phi_v(x) = 0$ si $v_p(x) \geq m$. Cela montre que b) entraîne a) (il est clair que tout v comme dans b) est U-fini).

Supposons maintenant que $\phi_v(x) = 0$ pour tout $v_p(x) \geq m$, avec $m \geq 1$. Soit $\tilde{z} = \frac{\tilde{x}}{\varphi^n(T)^k}$ un relèvement de v, avec $\tilde{x} \in \tilde{D}^+$. Alors $\varphi^{m+j}(\tilde{z}) \in \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ pour tout $j \geq 0$, donc $\varphi^j(\varphi^m(\tilde{x})) \in t^k \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ pour tout $j \geq 0$. On déduit du lemme 3.2.2 que $\varphi^m(\tilde{x}) \in T^k \tilde{D}^+$ et donc $\varphi^m(\tilde{z}) \in \left(\frac{T}{\varphi^{m+n}(T)}\right)^k \tilde{D}^+$. Mais cela est équivalent à

$$\left(\sum_{i=0}^{p^{m+n}-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)^k \left(\begin{smallmatrix} p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v = 0,$$

ce qui permet de conclure.

□

Définition 8.2.2. On dit qu'un vecteur $v \in \Pi$ est U-fini à support compact si v satisfait une des conditions du lemme 8.2.1. On note $\Pi_c^{U-\mathrm{fini}}$ l'espace de ces vecteurs et $\Pi_c^{P-\mathrm{fini}} = \Pi_c^{U-\mathrm{fini}} \cap \Pi^{P-\mathrm{fini}}$. C'est donc l'espace des vecteurs $v \in \Pi_c^{U-\mathrm{fini}}$ tels que l'espace engendré par $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v$ soit de dimension finie sur L.

Remarque 8.2.3. a) Le b) du lemme 8.2.1 fournit une définition naturelle de $\Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$ pour toute P-représentation de Banach Π, et montre que $\Pi \to \Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$ est un foncteur.

b) L'intérêt de considérer $\Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$ (et pas $\Pi^{P-\mathrm{fini}}$ tout entier) est le fait que tous les vecteurs de cet espace sont localement analytiques. Cela n'est pas du tout une évidence (th. 8.3.1) et utilise pleinement des calculs dans les anneaux de Fontaine. Il serait *très* intéressant de démontrer cette assertion directement.

c) Je ne sais pas en quelle mesure $\Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$ est différent de $\Pi^{P-\mathrm{fini}}$. Les résultats du chapitre 7 suggèrent que $\Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$ est de L-codimension finie dans $\Pi^{P-\mathrm{fini}}$ (et même que les deux espaces sont égaux si Π est supersingulière et D n'est pas triangulin).

Le but de la suite de cette partie est de décrire l'espace $\Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$ en termes de théorie de Hodge p-adique. Cela va demander quelque préliminaires. Rappelons (def. 3.4.1) que l'on dispose de modules de Fontaine $D_{\mathrm{dif},n}$ et $D^+_{\mathrm{dif},n}$ pour $n \geq m(D)$, où $m(D)$ est un entier assez grand. Soit $D_{\mathrm{dif},\infty}/D^+_{\mathrm{dif},\infty}$ la limite inductive (c'est aussi la réunion croissante) des $D_{\mathrm{dif},n}/D^+_{\mathrm{dif},n}$. C'est naturellement un sous-module de $\tilde{D}_{\mathrm{dif}}/\tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$. Si M est un $L[\Gamma]$-module, on note $M^{\Gamma-\mathrm{fini}}$ le sous-espace de M formé des $x \in M$ dont l'orbite sous Γ engendre un L-espace vectoriel de dimension finie.

Lemme 8.2.4. *Pour tout $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ on a*

$$\left(\tilde{D}_{\mathrm{dif}}/\tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}\right)^{\Gamma-\mathrm{fini}} = D_{\mathrm{dif},\infty}/D^+_{\mathrm{dif},\infty}.$$

Démonstration. Soit $V = V(D)$ et notons, pour simplifier, $X = \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ et $Y = D^+_{\mathrm{dif},\infty}$. L'application θ induit des isomorphismes $X/tX = \tilde{D}_{\mathrm{Sen}}(V) = (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^H$ et $Y/tY = D_{\mathrm{Sen}}(V)$, donc d'après Sen [41] on a $(X/tX)^{\Gamma-\mathrm{fini}} = Y/tY$. Comme t est vecteur propre pour Γ, on a aussi $(t^{-1}X/X)^{\Gamma-\mathrm{fini}} = t^{-1}Y/Y$. En utilisant les suites exactes (dont les applications sont Γ-équivariantes, à des éléments de $\mathbf{Z}_p^*$ près)

$$0 \to t^{-1}X/X \to t^{-k}X/X \to t^{-k+1}X/X \to 0,$$

$$0 \to t^{-1}Y/Y \to t^{-k}Y/Y \to t^{-k+1}Y/Y \to 0,$$

on obtient par récurrence sur $k \geq 1$ que $(t^{-k}X/X)^{\Gamma-\mathrm{fini}} = t^{-k}Y/Y$. Le résultat se déduit en passant à la limite inductive sur k.

□

Le résultat suivant est [12, prop. VI.5.15], mais on en donne une preuve différente [1].

Proposition 8.2.5. *L'application* $v \to (\phi_v(p^i))_{i\in\mathbf{Z}}$ *induit une bijection*

$$\Pi_c^{P-\mathrm{fini}} \to \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} D_{\mathrm{dif},\infty}/D^+_{\mathrm{dif},\infty}.$$

Démonstration. Soit $v \in \Pi^{P-\mathrm{fini}}$. Le lemme 8.2.4 montre que $\phi_v(x) \in D_{\mathrm{dif},\infty}/D_{\mathrm{dif},\infty}$ pour tout $x \in \mathbf{Q}_p$, donc $(\phi_v(p^i))_{i\in\mathbf{Z}} \in \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} D_{\mathrm{dif},\infty}/D^+_{\mathrm{dif},\infty}$ pour tout $x \in \Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$. La proposition 8.1.3 montre que l'application ainsi obtenue est injective. Il reste à démontrer qu'elle est surjective. Cela se fait en deux étapes.

Etape 1 Soit $y \in D_{\mathrm{dif},\infty}/D^+_{\mathrm{dif},\infty}$. On va construire $v \in \Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$ tel que $\phi_v(p^i) = 1_{i=0}\cdot y$. Soit $\hat{y}$ un relèvement de y à $t^{-k}D^+_{\mathrm{dif},\infty}$ pour un certain $k \geq 1$ et rappelons que $\omega = \frac{T}{\varphi^{-1}(T)} \in \tilde{\mathbf{A}}^+$ est une uniformisante de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$. On a donc $\omega^k \cdot \hat{y} \in \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$ et en appliquant le lemme 3.3.6 à $u = \omega^k \cdot \hat{y}$, on obtient un $\tilde{y} \in \tilde{D}^+$ tel que $\tilde{y} - \omega^k \cdot \hat{y} \in \omega^k \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$. Soit $\tilde{z} = \omega^{-k}\tilde{y} \in \tilde{D}$ et soit v son image dans Π. Comme $T^k \cdot \tilde{z} \in \tilde{D}^+$, le vecteur v est U-fini. Le lemme 3.2.2 montre que $\phi_v(p^i) = 0$ pour tout $i \neq 0$. Enfin, par construction $\phi_v(1) = y$ et comme $\Gamma \cdot y$ engendre un espace de dimension finie sur L, l'injectivité de $v \to \phi_v$ montre que v est Γ-fini. On a donc bien $v \in \Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$.

Etape 2 Soit $(y_i)_i$ est une suite presque nulle dans $D_{\mathrm{dif},\infty}/D^+_{\mathrm{dif},\infty}$. D'après l'étape 1, il existe pour chaque $l \in \mathbf{Z}$ un $v'_l \in \Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$ tel que $\phi_{v'_l}(p^i) = 1_{i=0}y_l$. L'injectivité de $v \to \phi_v$ et le fait que $(y_l)_l$ est une suite presque nulle montrent que $(y'_l)_l$ est une suite presque nulle. On peut donc définir

$$v = \sum_{l\in\mathbf{Z}} \left(\begin{smallmatrix} p^{-l} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) v'_l$$

et on vérifie facilement que $\phi_v(p^i) = x_i$ pour tout i. Ceci permet de conclure.

□

8.3 Dualité et modèle de Kirillov

On démontre dans cette partie le résultat principal du chapitre, le théorème 8.3.1 ci-dessous. Il correspond à [12, prop. VI.5.12], dont nous allons détailler un peu la preuve. Voir 3.7 pour l'accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathrm{dif}}$. On fixe une paire G-compatible (D, δ), avec $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ et on note $\Pi = \Pi(D, \delta)$. Rappelons que l'on suppose que $D^\natural = D^\sharp$.

Le théorème 5.5.5 combiné au corollaire 5.5.7 montrent l'existence d'un $m(D)$ assez grand, tel que $(\Pi^{\mathrm{an}})^* \subset \check{D}^{]0,r_{m(D)}]} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. On peut donc définir pour $\check{z} \in (\Pi^{\mathrm{an}})^*$, $n \geq m(D)$ et $j \in \mathbf{Z}$

$$i_{j,n}(\check{z}) = \varphi^{-n}\left(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} p^{n-j} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\check{z}\right)\right) \in \check{D}^+_{\mathrm{dif},n}.$$

Théorème 8.3.1. *Soit* $v \in \Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$ *et soit* $n \geq m(D)$ *tel que* $\phi_v(p^j) \in D_{\mathrm{dif},n}/D^+_{\mathrm{dif},n}$ *pour tout* $j \in \mathbf{Z}$. *Alors* $v \in \Pi^{\mathrm{an}}$ *et pour tout* $\check{z} \in (\Pi^{\mathrm{an}})^* \subset \check{D}_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ *on a*

$$\{\check{z}, v\}_{\mathbf{P}^1} = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \{i_{j,n}(\check{z}), \phi_v(p^{-j})\}_{\mathrm{dif}}.$$

Démonstration. Notons déjà qu'un tel n existe bien (prop. 8.2.5). Soit $F(\check{z})$ la somme dans le terme de droite. Puisque ϕ_v est à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$, il n'y a qu'un nombre fini

1. Celle donnée dans [12, prop. VI.5.8] ne s'adapte pas facilement au degré de généralité auquel nous nous sommes placés, car elle utilise le résultat d'irréductibilité [12, prop. VI.2.6].

de termes non nuls dans cette somme (et cela uniformément en $\check{z}$). Comme $z \to i_{j,n}(z)$ sont continues (car $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ et φ^{-n} le sont), on en déduit que F définit une forme linéaire continue sur $(\Pi^{\mathrm{an}})^*$. Mais Π^{an} est réflexif (c'est un espace de type compact), donc il existe $v_1 \in \Pi^{\mathrm{an}}$ tel que $F(\check{z}) = \{\check{z}, v_1\}_{\mathbf{P}^1}$ pour tout $\check{z} \in (\Pi^{\mathrm{an}})^*$. On va montrer que $v_1 = v$, ce qui permettra de conclure. Pour cela, il suffit de montrer que $F(i(\check{z})) = \{i(\check{z}), v\}_{\mathbf{P}^1}$ pour tout $\check{z} \in \tilde{\check{D}}^+$ (en effet, $v_1 - v \in \Pi$ est alors orthogonal à $\tilde{\check{D}}^+$ et donc est nul par le théorème 4.4.3 et le corollaire 4.4.4). Nous avons besoin du lemme suivant (rappelons que T_n est la trace de Tate normalisée).

Lemme 8.3.2. *Pour tout $\check{z} \in \tilde{\check{D}}^+$ et tout $n \geq m(D)$ on a*

$$i_{0,n}(i(\check{z})) = T_n(\check{z}) \in \check{D}^+_{\mathrm{dif},n}.$$

Démonstration. On a $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\check{z}\right) = \varphi^n(T_n(\check{z}))$ par la proposition 4.3.1. Il suffit d'appliquer φ^{-n} pour obtenir l'égalité désirée dans $\tilde{\check{D}}^+$ et donc aussi dans $\tilde{\check{D}}^+_{\mathrm{dif}}$. Enfin, les deux termes appartiennent à $\check{D}^+_{\mathrm{dif},n} \subset \tilde{\check{D}}^+_{\mathrm{dif}}$, par construction, d'où le résultat. □

Revenons à la preuve du théorème et fixons $\check{z} \in \tilde{\check{D}}^+$. Puisque $\phi_v(p^{-j}) \in D_{\mathrm{dif},n}/D^+_{\mathrm{dif},n}$, un retour à la définition de $\{\ ,\ \}_{\mathrm{dif}}$ combiné avec le lemme 8.3.2 montrent que

$$\{i_{j,n}(i(\check{z})), \phi_v(p^{-j})\}_{\mathrm{dif}} = \{T_n(\varphi^{-j}(\check{z})), \phi_v(p^{-j})\}_{\mathrm{dif}} = \{\varphi^{-j}(\check{z}), \phi_v(p^{-j})\}_{\mathrm{dif}}.$$

Comme $v \in \Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$, la preuve du lemme 8.2.1 montre l'existence d'entiers a, m, k tels que v ait un relèvement z à $\left(\frac{\varphi^a(T)}{\varphi^m(T)}\right)^k \tilde{D}^+$. Comme $\varphi^{-j}(z) - \phi_v(p^{-j}) \in \tilde{D}^+_{\mathrm{dif}}$, on a $\{\varphi^{-j}(\check{z}), \phi_v(p^{-j})\}_{\mathrm{dif}} = \{\varphi^{-j}(\check{z}), \varphi^{-j}(z)\}_{\mathrm{dif}}$. Le théorème est donc une conséquence de la proposition 3.7.1.

□

8.4 Densité des vecteurs analytiques U-finis

Le but de cette partie est d'appliquer le théorème 8.3.1 pour obtenir un résultat de densité plus fort que celui de Schneider et Teitelbaum [45], pour la catégorie $\mathrm{Rep}_L(G)$.

Proposition 8.4.1. *Soit (D, δ) une paire G-compatible, avec $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$. Si $D^\sharp = D^\natural$, alors $\Pi(D,\delta)_c^{P-\mathrm{fini}}$ est dense dans Π.*

Démonstration. Supposons que ce n'est pas le cas et posons $\Pi = \Pi(D, \delta)$. Il existe donc $z \in \Pi^* = \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ tel que $\{z, v\}_{\mathbf{P}^1} = 0$ pour tout $v \in \Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$. Soit $n \geq m(D)$. Si $x \in D_{\mathrm{dif},n}/D^+_{\mathrm{dif},n}$, la proposition 8.2.5 montre qu'il existe $v \in \Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$ tel que $\phi_v(p^{-j}) = 1_{j=0} \cdot x$. D'après le théorème 8.3.1, $i_{0,n}(z)$ est orthogonal à x. Comme l'accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathrm{dif}}$ est non dégénéré, on obtient $i_{0,n}(z) = 0$. En revenant à la définition de $i_{0,n}$ et en utilisant l'injectivité de φ^{-n}, cela s'écrit $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z = 0$ pour $n \geq m(D)$. En appliquant ψ, cette égalité reste vraie aussi pour $n \leq m(D)$ et donc $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(z) = 0$. Le lemme 4.4.2 et l'hypothèse $D^\sharp = D^\natural$ (qui entraîne $\check{D}^{\mathrm{nr}} = 0$) permettent alors de conclure que $z = 0$, ce qui finit la preuve. □

Remarque 8.4.2. L'hypothèse $D^\natural = D^\sharp$ est cruciale dans la proposition 8.4.1. En effet, supposons qu'elle n'est pas satisfaite, donc l'espace $Y = (0, \check{D}^{\mathrm{nr}})$ est non nul, stable par B (lemme 4.4.2) et de dimension finie sur L. De plus, il admet un O_L-réseau stable par B (fourni par $(0, \check{D}_0^{\mathrm{nr}})$ si $\check{D}_0$ est un réseau de D stable par φ et Γ). Comme dans la preuve du lemme 4.2.5, on obtient que $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ agit trivialement sur Y. Ceci combiné à la stabilité de Y par $\left(\begin{smallmatrix} p^{\mathbf{Z}} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

et au b) du lemme 8.2.1 montre que Y est inclus dans l'orthogonal de $\Pi(D,\delta)_c^{P-\mathrm{fini}}$. Ainsi, $\Pi(D,\delta)_c^{P-\mathrm{fini}}$ n'est pas dense dans $\Pi(D,\delta)$ quand $D^\natural \neq D^\sharp$.

Soit, comme le nom l'indique, $(\Pi(D,\delta)^{\mathrm{an}})^{U-\mathrm{fini}} = \Pi(D,\delta)^{\mathrm{an}} \cap \Pi(D,\delta)^{U-\mathrm{fini}}$. C'est aussi l'espace des vecteurs $v \in \Pi(D,\delta)^{\mathrm{an}}$ qui sont tués par une puissance de u^+.

Théorème 8.4.3. *Supposons que V est absolument irréductible, de dimension 2. Alors $(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^{U-\mathrm{fini}}$ est dense dans $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$ si et seulement si V n'est pas trianguline.*

Démonstration. Notons pour simplifier $\pi = \Pi(V)^{\mathrm{an}}$. Supposons que $\pi^{U-\mathrm{fini}}$ n'est pas dense dans π. Il existe donc $\check{z} \in \pi^* \subset \check{D}_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ qui est nul sur $\pi^{U-\mathrm{fini}}$. Par le théorème 8.3.1, $\Pi_c^{P-\mathrm{fini}}$ est un sous-espace de $\pi^{U-\mathrm{fini}}$. La preuve de la proposition 8.4.1 montre alors que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\check{z}) = 0$ et donc $\check{z} = (0,\check{x})$, pour un $\check{x} \in \cap_{n\geq 1}\varphi^n(\check{D}_{\mathrm{rig}})$. On en déduit que si $\pi^{U-\mathrm{fini}}$ n'est pas dense dans π, alors $\cap_{n\geq 1}\varphi^n(\check{D}_{\mathrm{rig}}) \neq 0$. Le théorème 3.23 de [14] montre [2] que $\check{D}$ est triangulin et donc D aussi.

Supposons maintenant que V est trianguline. On va montrer que l'on peut trouver $l \in \cap_{n\geq 1}((u^+)^n\pi^*)$ non nulle. Une telle forme linéaire l est clairement nulle sur $(\Pi(V)^{\mathrm{an}})^{U-\mathrm{fini}}$, ce qui permettra de conclure. On choisit une triangulation $0 \to \mathscr{R}(\delta_1) \to \check{D}_{\mathrm{rig}} \to \mathscr{R}(\delta_2) \to 0$ de $\check{D}_{\mathrm{rig}}$ et on note e_1 la base canonique de $\mathscr{R}(\delta_1)$. Soient $w_1 = w(\delta_1)$ et $w_2 = w(\delta_2)$. Le corollaire 6.2.5 et la remarque 6.2.6 montrent que pour tout $z \in \check{D}_{\mathrm{rig}}$ et $n \geq 1$ on a

$$(u^-)^n z = \frac{(-1)^n}{t^n}\prod_{i=0}^{n-1}(\nabla - w_1 - i)(\nabla - w_2 - i)z.$$

En prenant $z = t^n e_1$, on obtient donc

$$\begin{aligned}(u^+)^n w(t^n e_1) &= (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1}(\nabla - w_1 + n - i)(\nabla - w_2 + n - i)e_1 \\ &= (-1)^n n! \prod_{i=1}^{n}(w_1 - w_2 + n)we_1.\end{aligned}$$

Le lemme 7.3.2 combiné au théorème 5.5.5 montrent que $w(t^n e_1) \in \pi^*$. La formule précédente permet donc de conclure (avec $l = we_1$) si $w_1 - w_2$ n'est pas un entier négatif. Dans ce cas nous laissons au lecteur l'exercice de vérifier qu'il suffit de prendre $l = wt^{w_2 - w_1}e_1$. Cela permet de conclure.

□

Remarque 8.4.4. La preuve montre que $\Pi(V)_c^{P-\mathrm{fini}}$ est déjà dense dans $\Pi^{\mathrm{an}}(V)$ si V n'est pas trianguline.

2. La preuve de ce résultat est fort délicate. Il serait intéressant de trouver un argument plus simple dans notre situation.

Chapitre 9

Vecteurs localement algébriques et représentations de de Rham

Dans ce chapitre, D est un (φ, Γ)-module étale de dimension 2 sur $\mathscr{E}$, absolument irréductible et $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to O_L^*$ est un caractère tel que (D, δ) soit une paire G-compatible.

On note simplement $\Pi(D)$ la représentation $\Pi(D, \delta) = (D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$ et on note $\delta_D = \chi^{-1} \det V(D)$, vu comme caractère de $\mathbf{Q}_p^*$ par la théorie du corps de classes locale. Le théorème[1] II.3.3 de [12] montre que (D, δ_D) est une paire G-compatible. On se propose de démonstrer le résultat suivant, qui se spécialise sur [12, th. VI.6.13, VI.6.18] pour $\delta = \delta_D$.[2]

Théorème 9.0.5. $\Pi(D)^{\mathrm{alg}} \neq 0$ *si et seulement si* $\delta \cdot \delta_D^{-1}$ *est un caractère lisse et D est de de Rham à poids de Hodge-Tate distincts.*

L'idée principale de la preuve est de relier la théorie du modèle de Kirillov à la théorie de Hodge p-adique et ensuite, via l'étude infinitésimale faite dans le chapitre 6, à la dualité entre Π et Π^*. L'objet qui permet de faire le passage d'une théorie à l'autre est un sous-espace $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}}$ de $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{fini}}$ (voir 8.2.2 pour ce dernier), qui est censé jouer le rôle de $\Pi(D)_c^{\mathrm{alg}}$, sous-espace de $\Pi(D)^{\mathrm{alg}}$ formé de fonctions à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$ (une fois que l'on a considéré un modèle de Kirillov[3] pour $\Pi(D)^{\mathrm{alg}}$). Le théorème 9.0.5 se déduit de l'étude de l'action infinitésimale de l'unipotent inférieur sur cet espace, ainsi que de la description de $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}}$ fournie par la théorie de Hodge p-adique (prop. 8.2.5).

Remarque 9.0.6. Si $\eta : \mathbf{Q}_p^* \to O_L^*$ est un caractère unitaire, alors $z \to z \otimes \eta$ induit [12, prop. II.1.11] un isomorphisme de G-modules topologiques $\Pi(D, \delta) \otimes (\eta \circ \det) \to \Pi(D(\eta), \delta \cdot \eta^2)$. De plus, si η est localement algébrique, alors D est de de Rham si et seulement si $D(\eta)$ l'est. Ainsi, pour démontrer le théorème 9.0.5, on peut faire des torsions par des caractères unitaires localement algébriques.

9.1 Sorites sur les vecteurs localement algébriques

Soit G un $\mathbf{Q}_p$-groupe algébrique réductif, que l'on identifie à ses $\mathbf{Q}_p$-points et soit π une L-représentation localement analytique de G (au sens de [44]). Soit $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ et $\mathrm{Rep}_L^{\mathrm{alg}}(G)$

1. Il s'agit du théorème fondamental de la correspondance de Langlands locale p-adique pour G.
2. Il découle des travaux de Paskunas que l'égalité $\delta = \delta_D$ est automatique si $p \geq 5$, et il est fort probable que c'est encore le cas pour $p = 2$ ou $p = 3$. Comme nous voulons inclure les cas $p = 2$ et $p = 3$, nous avons préféré cette formulation du théorème.
3. La théorie classique du modèle de Kirillov s'applique aux représentations lisses admissibles irréductibles, mais elle s'adapte sans mal au cas localement algébrique, voir le chapitre VI de [12].

la catégorie des L-représentations du groupe algébrique G.

Définition 9.1.1. a) Si $W \in \mathrm{Rep}_L^{\mathrm{alg}}(G)$, soit $\pi_{W-\mathrm{lalg}}$ l'espace des vecteurs $v \in \pi$ qui sont dans l'image d'un morphisme H-équivariant $f : W^n \to \pi$, pour un sous-groupe ouvert H de G et un entier $n \geq 1$. C'est un sous-espace de π stable par G.

b) On dit que $v \in \pi$ est localement algébrique et on écrit $v \in \pi^{\mathrm{alg}}$ s'il existe $W \in \mathrm{Rep}_L^{\mathrm{alg}}(G)$ telle que $v \in \pi_{W-\mathrm{lalg}}$. On dit que π est localement algébrique si $\pi^{\mathrm{alg}} = \pi$.

Cette définition, tirée de [23] est équivalente aux celles utilisées par Schneider-Teitelbaum [43] ou Colmez [12], grâce à la proposition 4.2.8 de [23]. Soit $\mathrm{Hom}(W, \pi)^{\mathfrak{g}}$ l'espace des morphismes $\mathfrak{g}$-équivariants de W dans π.

Proposition 9.1.2. *a) Soit $W \in \mathrm{Rep}_L^{\mathrm{alg}}(G)$. Le morphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}(W, \pi)^{\mathfrak{g}} \otimes_L W \to \pi_{W-\mathrm{lalg}}$$

est un isomorphisme topologique et $\pi_{W-l\mathrm{alg}}$ est un sous-espace fermé de π.

b) Soit $\hat{G}$ un système de représentants des objets irréductibles de $\mathrm{Rep}_L^{\mathrm{alg}}(G)$. L'application naturelle

$$\oplus_{W \in \hat{G}} \pi_{W-\mathrm{lalg}} \to \pi^{\mathrm{alg}}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Voir la section 4.2 de [23]. □

9.2 Représentations de Hodge-Tate et caractères infinitésimaux

Le résultat suivant est [12, prop. VI.5.1]. Nous en donnons une démonstration plus directe, basée sur le théorème 6.2.4. Si $k \geq 1$ et l sont des entiers, on note $W_{l,k} = \mathrm{Sym}^{k-1}(L^2) \otimes \det^l$, où $\mathrm{Sym}^{k-1}(L^2)$ est la puissance symétrique $(k-1)$-ième de la représentation standard de G sur $L \oplus L$.

Proposition 9.2.1. *Si $\Pi(D)^{\mathrm{alg}} \neq 0$, alors D est de Hodge-Tate à poids distincts et $\delta \cdot \delta_D^{-1}$ est lisse. Dans ce cas, si $l < l + k$ sont les poids de D, alors il existe une représentation lisse admissible $\Pi(D)^{\mathrm{lc}}$ telle que $\Pi(D)^{\mathrm{alg}} = W_{l,k} \otimes \Pi(D)^{\mathrm{lc}}$.*

Démonstration. Supposons que $W_{l,k} \otimes \Pi^{\mathrm{lc}}$ est une sous-représentation de $\Pi(D)^{\mathrm{alg}}$, pour une représentation lisse nontriviale Π^{lc}. En considérant les caractères centraux, on obtient la lissité du caractère $x \to \delta(x) \cdot x^{1-k-2l}$, ce qui implique $k + 2l = 1 + w(\delta)$. Le caractère infinitésimal de $W_{l,k} \otimes \Pi^{\mathrm{lc}}$ étant $\frac{k^2-1}{2}$, le théorème 6.2.4 entraîne $(2\Theta_{\mathrm{Sen},D} - (1 + w(\delta)))^2 = k^2$. Combiné à l'égalité $k + 2l = 1 + w(\delta)$, ceci montre que les poids de Hodge-Tate de D sont l et $k + l$ et que $\delta \cdot \delta_D^{-1}$ est lisse (car de poids 0). Ainsi, l est le plus petit poids de D, en particulier il est unique. Il en est donc de même de k, ce qui montre (via la proposition 9.1.2) que $\Pi(D)^{\mathrm{alg}} = W_{l,k} \otimes_L \Pi(D)^{\mathrm{lc}}$ pour une représentation lisse $\Pi(D)^{\mathrm{lc}}$. L'admissibilité de $\Pi(D)^{\mathrm{lc}}$ suit de celle de $\Pi(D)$, car $\Pi(D)^{\mathrm{lc}} = \mathrm{Hom}(W_{l,k}, \Pi(D)^{\mathrm{an}})^{\mathfrak{g}}$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{Hom}(W_{l,k}, \Pi(D)^{\mathrm{an}})$, qui est une représentation localement analytique admissible puisque $W_{l,k}$ est de dimension finie ; on conclut alors par la proposition 6.4 et le théorème 6.6 de [45]. □

On supposera donc dans la suite que D est à poids de Hodge-Tate $1-k$ et 1, avec $k \in \mathbf{N}^*$ et que $w(\delta) = 1-k$. Ce choix étrange s'explique par le fait que $\check{D}$ a poids de Hodge-Tate 0 et k, et que la plupart des calculs seront faits dans $\check{D}$. La remarque 9.0.6 montre que l'on peut faire l'hypothèse concernant les poids de D et la proposition 9.2.1 montre que si $w(\delta) \neq 1-k$, alors il n'y a aucun espoir de trouver des vecteurs algébriques (noter que la condition que $\delta \cdot \delta_D^{-1}$ soit lisse équivaut à $w(\delta) = w(\delta_D) = 1-k$).

9.3 Sous-modules divers et variés de $\check{\mathscr{D}}^+_{\mathrm{dif},n}$

Rappelons que $m(D)$ désigne un entier suffisament grand, qui ne dépend que de D (et de δ). Le résultat suivant est une conséquence facile de la caractérisation différentielle des représentations de Hodge-Tate [27].

Proposition 9.3.1. *Posons $\varepsilon = 1$ si D n'est pas de Rham et 0 dans le cas contraire. Il existe $e_1, e_2 \in \check{D}_{\mathrm{dif},m(D)}$ tels que*

a) e_1, e_2 forment une base de $\check{D}^+_{\mathrm{dif},n}$ sur $L_n[[t]]$ pour tout $n \geq m(D)$.

b) $\sigma_a(e_1) = e_1$ et $\sigma_a(e_2) = a^k e_2 + \varepsilon a^k \log a \cdot t^k e_1$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

Démonstration. $\check{D}$ est de dimension 2, de Hodge-Tate à poids 0 et k. D'après [12, prop. VI.3.2] (mais on note ici e_2 ce qui y est noté $t^k e_2$), on peut trouver e_1 et e_2 qui satisfont a) et b), mais avec $a \in 1 + p^{m(D)}\mathbf{Z}_p$ au lieu de $a \in \mathbf{Z}_p^*$. Notons $m = m(D)$ et $\Gamma_m = \chi^{-1}(1+p^m\mathbf{Z}_p)$. Si $b \in \mathbf{Z}_p^*$, alors $(\sigma_b - 1)e_1$ est un élément Γ_m-invariant de $\check{D}^+_{\mathrm{dif},m}$, et un calcul immédiat montre que cela entraîne l'existence de $c_b \in L_m^*$ tel que $\sigma_b(e_1) = c_b e_1$. Alors c définit un cocycle $c : \Gamma/\Gamma_m \to L_m^*$. On conclut par Hilbert 90 que l'on peut modifier e_1 par un élément de L_m^* de façon à le rendre Γ-invariant. L'argument pour e_2 est le même.

□

On fixe dans toute la suite une base e_1, e_2 comme dans la prop. 9.3.1.

Définition 9.3.2. Soit $\mathscr{D} \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ à poids de Hodge-Tate 1 et $1-k$ (éventuellement avec multiplicités). Si $n \geq m(\mathscr{D})$, on note

• $O_n(\mathscr{D})$ l'orthogonal (dans $\check{\mathscr{D}}^+_{\mathrm{dif},n}$) de $\left(\mathscr{D}_{\mathrm{dif},n}/\mathscr{D}^+_{\mathrm{dif},n}\right)^{\mu_{n,k}=0}$ pour l'accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathrm{dif}}$ (pour lequel on renvoie à 3.7), où

$$\mu_{n,k} = \prod_{i=0}^{k-1} (\sigma_{1+p^n} - (1+p^n)^{i+1-k}).$$

• $M_n(\mathscr{D}) = \{z \in \check{\mathscr{D}}^+_{\mathrm{dif},n} | \nabla_{2k}(z) \in t^k O_n(\mathscr{D})\}$, avec $\nabla_{2k} = \nabla(\nabla-1)\cdot \ldots \cdot(\nabla - 2k+1)$.

Les résultats techniques suivants fournissent des caractérisations différentielles des représentations de de Rham.

Lemme 9.3.3. *Soit $\mathscr{D}$ comme dans la définition 9.3.2 et $n \geq m(\mathscr{D})$. Alors*

$$O_n(\mathscr{D}) = \cap_{i=0}^{k-1} (\sigma_{1+p^n} - (1+p^n)^i)\check{\mathscr{D}}^+_{\mathrm{dif},n}.$$

Démonstration. Notons $a = 1 + p^n$ et $\sigma = \sigma_a$. Le lemme des noyaux montre que

$$\left(\mathscr{D}_{\mathrm{dif},n}/\mathscr{D}^+_{\mathrm{dif},n}\right)^{\mu_{n,k}=0} = \oplus_{i=0}^{k-1}\left(\mathscr{D}_{\mathrm{dif},n}/\mathscr{D}^+_{\mathrm{dif},n}\right)^{\sigma-a^{i+1-k}=0}.$$

Mais $\left(\mathscr{D}_{\mathrm{dif},n}/\mathscr{D}^+_{\mathrm{dif},n}\right)^{\sigma-a^{i+1-k}=0}$ est en dualité parfaite avec $\frac{\check{\mathscr{D}}^+_{\mathrm{dif},n}}{\sigma^{-1}-a^{i+1-k}}$ (car $\{\,.\,\}_{\mathrm{dif}}$ est parfait et Γ-invariant), donc

$$O_n(\mathscr{D}) = \cap_{i=0}^{k-1}(\sigma^{-1} - a^{i+1-k})\check{\mathscr{D}}^+_{\mathrm{dif},n} = \cap_{i=0}^{k-1}(\sigma - a^i)\check{\mathscr{D}}^+_{\mathrm{dif},n}.$$

□

Proposition 9.3.4. *$O_n(D)$ est le $L_n[[t]]$-module libre de base $t^k e_1$ et e_2.*

Démonstration. Notons $a = 1 + p^n$ et $\sigma = \sigma_a$ et fixons $0 \leq i < k$. Si $A, B \in L_n[[t]]$, un calcul immédiat montre que

$$(\sigma - a^i)(Ae_1 + Be_2) = ((\sigma - a^i)A + \varepsilon a^k \log a \cdot t^k\sigma(B)) \cdot e_1 + (a^k\sigma - a^i)B \cdot e_2.$$

Or $B \to (a^k\sigma - a^i)B$ est bijective sur $L_n[[t]]$ et l'image de $A \to (\sigma - a^i)A$ est l'ensemble des séries $f \in L_n[[t]]$ dont le coefficient de t^i est nul (utiliser le fait que $\sigma(t) = at$). On en déduit que $(\sigma - a^i)\check{\mathscr{D}}^+_{\mathrm{dif},n}$ est l'ensemble des combinaisons $Ae_1 + Be_2$, avec $A, B \in L_n[[t]]$ et le coefficient de t^i dans A est nul. On conclut en utilisant le lemme 9.3.3. □

Proposition 9.3.5. *Pour tout $n \geq m(D)$ on a $M_n(D) = \check{D}^+_{\mathrm{dif},n}$ si D est de de Rham et $M_n(D) = L_n[[t]]e_1 + t^k L_n[[t]]e_2$ sinon.*

Démonstration. Rappelons que $\varepsilon = 1$ si D est de de Rham et 0 sinon. En passant à la limite (pour $a \to 1$) dans les égalités de la proposition 9.3.1 on obtient

$$\nabla(e_1) = 0, \quad \nabla\left(\frac{e_2}{t^k}\right) = \varepsilon \cdot e_1.$$

En utilisant la règle de Leibnitz, on obtient pour $B \in L_n((t))$ et $P \in L_n[X]$ les égalités $P(\nabla)(B \cdot e_1) = P(\nabla)(B) \cdot e_1$ et

$$P(\nabla)(B \cdot e_2) = P(\nabla)\left(t^k B \cdot \frac{e_2}{t^k}\right) = \frac{P(\nabla)(t^k B)}{t^k} \cdot e_2 + \varepsilon P'(\nabla)(t^k B) \cdot e_1$$

$$= P(\nabla + k)(B) \cdot e_2 + \varepsilon P'(\nabla + k)(B) \cdot t^k e_1.$$

Soit $P = \prod_{i=0}^{2k-1}(X - i)$, de telle sorte que $P(\nabla) = \nabla_{2k}$. On vérifie sans mal que $P(\nabla)(L_n[[t]]) \subset t^{2k}L_n[[t]]$ et que $P(\nabla + k)(L_n[[t]]) \subset t^k L_n[[t]]$. Combiné à la proposition 9.3.4, ceci montre que pour tous $A, B \in L_n[[t]]$ on a $Ae_1 + Be_2 \in M_n(D)$ si et seulement si $\varepsilon \cdot P'(\nabla + k)(B) \in t^k L_n[[t]]$. Enfin, la condition $P'(\nabla + k)(B) \in t^k L_n[[t]]$ équivaut à $P'(\nabla)(t^k B) \in t^{2k}L_n[[t]]$. La proposition suit donc du lemme suivant.

Lemme 9.3.6. *Soient $B \in L_n[[t]]$ et $P = \prod_{i=0}^{2k-1}(X - i)$. Alors $P'(\nabla)(B) \in t^{2k}L_n[[t]]$ si et seulement si $B \in t^{2k}L_n[[t]]$.*

Démonstration. Si $B = \sum_{j\geq 0}\alpha_j t^j$, alors on a des égalités dans $L_n[[t]]/t^{2k}L_n[[t]]$

$$\sum_{j=0}^{2k-1}\frac{\nabla_{2k}}{\nabla - j}B = \sum_{s=0}^{2k-1}\alpha_s \cdot \sum_{j=0}^{2k-1}\frac{\nabla_{2k}}{\nabla - j}(t^s)$$

$$= \sum_{s=0}^{2k-1} \alpha_s \cdot \frac{\nabla_{2k}}{\nabla - s}(t^s) = \sum_{s=0}^{2k-1} (-1)^{2k-1-s} s! \cdot (2k-s-1)! \alpha_s \cdot t^s.$$

On a donc $P'(\nabla)(B) \in t^{2k} L_n[[t]]$ si et seulement si $\alpha_s = 0$ pour tout $0 \leq s \leq 2k-1$, i.e. si et seulement si $B \in t^{2k} L_n[[t]]$. □

□

9.4 Dualité

Dans cette partie (qui est le coeur technique du chapitre) on suppose que $\mathscr{D} \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ est à poids de Hodge-Tate 1 et $1-k$, que $w(\delta) = 1-k$ et que pour tout $z \in \check{\mathscr{D}}_{\mathrm{rig}}$ on a

$$u^-(z) = \frac{\nabla(k-\nabla)(z)}{t}.$$

Par exemple, D satisfait toutes ces propriétés (la dernière par le corollaire 6.2.5 et la remarque 6.2.6). Rappelons que $\nabla_{2k} = \prod_{i=0}^{2k-1}(\nabla - i)$.

Lemme 9.4.1. *Pour tout $\check{z} \in \check{\mathscr{D}}_{\mathrm{rig}}$ on a $(u^-)^k(\check{z}) = (-1)^k \frac{\nabla_{2k}(\check{z})}{t^k}$.*

Démonstration. On vérifie par calcul direct la formule (avec $x \in \check{\mathscr{D}}_{\mathrm{rig}}$ et $j \geq 0$)

$$\nabla(k-\nabla)\left(\frac{x}{t^j}\right) = \frac{(k+j-\nabla)(\nabla-j)(x)}{t^j}.$$

Une récurrence immédiate permet alors de déduire de notre hypothèse sur l'action de u^- que pour tout $j \geq 1$ et $\check{z} \in \check{\mathscr{D}}_{\mathrm{rig}}$ on a

$$(u^-)^j(\check{z}) = \frac{\nabla(\nabla-1)...(\nabla-j+1)(k-\nabla)(k+1-\nabla)...(k+j-1-\nabla)(\check{z})}{t^j}.$$

On conclut en prenant $j = k$. □

Pour $n \geq m(\mathscr{D})$, on note $\Pi(\mathscr{D})_{c,n}^{P-\mathrm{alg}}$ le sous-espace de $\Pi(\mathscr{D})_c^{P-\mathrm{fini}}$ (voir 8.2.2 pour cet espace) formé des vecteurs tués par $\prod_{i=0}^{k-1}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1+p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - (1+p^n)^{i+1-k}\right)$ et par $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^k$. On note $\Pi(\mathscr{D})_c^{P-\mathrm{alg}}$ la réunion des $\Pi_{c,n}^{P-\mathrm{alg}}(\mathscr{D})$. C'est un sous-espace de $\Pi(\mathscr{D})^{\mathrm{an}}$ d'après le théorème 8.3.1. La proposition 8.2.5 montre que l'application $v \to (\phi_v(p^i))_{i\in\mathbf{Z}}$ induit une bijection

$$\Pi(\mathscr{D})_c^{P-\mathrm{alg}} \simeq \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \left(\varinjlim_{n \geq m(E)} \left(\mathscr{D}_{\mathrm{dif},n}/\mathscr{D}_{\mathrm{dif},n}^+\right)^{\mu_{n,k}=0} \right),$$

où $\mu_{n,k} = \prod_{i=0}^{k-1}(\sigma_{1+p^n} - (1+p^n)^{i+1-k})$. On renvoie aux parties 8.3 et à la définition 9.3.2 pour les notations $i_{j,n}$, $O_n(\mathscr{D})$ et $M_n(\mathscr{D})$.

Proposition 9.4.2. *$(u^-)^k$ tue $\Pi(\mathscr{D})_c^{P-\mathrm{alg}}$ si et seulement si $M_n(\mathscr{D}) = \check{\mathscr{D}}_{\mathrm{dif},n}^+$ pour tout $n \geq m(\mathscr{D})$.*

Démonstration. Par dualité, $(u^-)^k$ tue $\Pi(\mathscr{D})_c^{P-\mathrm{alg}}$ si et seulement si $(u^-)^k((\Pi(\mathscr{D})^{\mathrm{an}})^*)$ est orthogonal à $\Pi(\mathscr{D})_c^{P-\mathrm{alg}}$ pour l'accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$. Le théorème 8.3.1 et la description de $\Pi(\mathscr{D})_c^{P-\mathrm{alg}}$ donnée ci-dessus montrent que cela arrive si et seulement si $i_{j,n}((u^-)^k\check{z}) \in O_n(\mathscr{D})$ pour tous $n \geq m(\mathscr{D})$ et $\check{z} \in (\Pi(\mathscr{D})^{\mathrm{an}})^*$. En revenant à la définition des applications $i_{j,n}$ et en

utilisant le lemme 9.4.1, on conclut que $(u^-)^k$ tue $\Pi(\mathscr{D})_c^{P-\mathrm{alg}}$ si et seulement si $\varphi^{-n}(\check{z}) \in M_n(\mathscr{D})$ pour tous $\check{z} \in \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}((\Pi(\mathscr{D})^{\mathrm{an}})^*)$ et $n \geq m(\mathscr{D})$.

Posons $Y = (\Pi(\mathscr{D})^{\mathrm{an}})^*$. Comme $M_n(\mathscr{D})$ est un $L_n[[t]]$-module, on peut conclure si on prouve que $\varphi^{-n}\left(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(Y)\right)$ engendre $\check{\mathscr{D}}^+_{\mathrm{dif},n}$. Or, la surjectivité de ψ sur $\check{\mathscr{D}}^\natural$ et le lemme 4.4.2 montrent que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(Y) = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\check{\mathscr{D}}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p) = \check{\mathscr{D}}^\natural$. Ainsi, il suffit de vérifier que $\varphi^{-n}(\check{\mathscr{D}}^\natural)$ engendre $\check{\mathscr{D}}^+_{\mathrm{dif},n}$, ce qui est évident car $\check{\mathscr{D}}^\natural$ engendre $\mathscr{D}$ et donc en contient une base.

□

Corollaire 9.4.3. *D est de de Rham si et seulement si $(u^-)^k$ tue $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}}$.*

Démonstration. C'est une conséquence évidente des propositions 9.4.2 et 9.3.5. □

9.5 Preuve du théorème 9.0.5

Supposons que $\Pi(D)^{\mathrm{alg}} \neq 0$. Le corollaire[4] VI.5.9 de [12], appliqué à $D \otimes \chi^{k-1}$ montre que $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}} \subset \Pi(D)^{\mathrm{alg}}$. Comme $\Pi^{\mathrm{alg}}(D) = W_{1-k,k} \otimes \Pi(D)^{\mathrm{lc}}$, l'opérateur $(u^-)^k$ tue $\Pi(D)^{\mathrm{alg}}$ et donc il tue $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}}$. On en déduit que D est de de Rham (corollaire 9.4.3).

Réciproquement, supposons que D est de de Rham à poids 1 et $1-k$, et que $w(\delta) = 1-k$. Le corollaire 9.4.3 montre qu'alors $(u^-)^k$ tue $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}}$. Or, par construction tout vecteur $v \in \Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}}$ est tué par $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^k$ et $\prod_{i=0}^{k-1}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1+p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - (1+p^n)^{i+1-k}\right)$ pour n assez grand, donc v est tué par $(u^+)^k$ et $\prod_{i=0}^{k-1}(h-2i+k-1)$ (car le caractère central δ de $\Pi(D)$ satisfait $w(\delta) = 1-k$). On en déduit qu'il existe un idéal de codimension finie dans $U(\mathfrak{sl}_2)$ qui tue $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}}$ et donc que tout vecteur de $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}}$ est $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$-algébrique. Comme le caractère central δ de $\Pi(D)$ est localement algébrique, cela montre que $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}} \subset \Pi(D)^{\mathrm{alg}}$. Il nous reste donc à voir que $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}} \neq 0$ pour conclure. Cela suit de l'isomorphisme

$$\Pi(\mathscr{D})_c^{P-\mathrm{alg}} \simeq \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \left(\varinjlim_{n \geq m(E)} \left(\mathscr{D}_{\mathrm{dif},n}/\mathscr{D}^+_{\mathrm{dif},n}\right)^{\mu_{n,k}=0} \right)$$

et de la proposition 9.3.4.

4. C'est une conséquence de l'irréductibilité sous l'action du sous-groupe de Borel de l'espace des fonctions localement constantes à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$ (voir le lemme 2.9.1 de [28]), et de la description explicite de $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}}$.

Chapitre 10

Extensions de représentations de de Rham et vecteurs localement algébriques

Dans ce chapitre, $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ est de dimension 2, absolument irréductible et de de Rham, à poids de Hodge-Tate distincts. On considère une suite exacte non scindée $0 \to D \to E \to D \to 0$ dans $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ et un caractère unitaire $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to O_L^*$ tel que la paire (E, δ) soit G-compatible. On suppose enfin que $\delta \cdot \delta_D^{-1}$ est un caractère lisse, où $\delta_D = \chi^{-1} \det V(D)$. Pour $\mathscr{D} \in \{D, E\}$ on note

$$\Pi(\mathscr{D}) = (\mathscr{D} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(\mathscr{D}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \in \mathrm{Rep}_L(G).$$

Remarque 10.0.1. 1) La paire (D, δ) est G-compatible (prop. 4.5.1). En revanche, il n'est pas vrai que si (D, δ) est G-compatible et $E \in \mathrm{Ext}^1(D, D)$, alors (E, δ) est G-compatible. En effet, il découle des travaux de Paskunas et Colmez que, génériquement, (E, δ) est G-compatible si et seulement si $\det_{L[\varepsilon]}(V(E)) = \det_L(V(D))$ (et donc que le sous-espace de $\mathrm{Ext}^1(D, D)$ attaché aux paires G-compatibles (E, δ) est de dimension 3).

2) Les hypothèses faites sur D entraînent, grâce au théorème 9.0.5, que $\Pi(D)^{\mathrm{alg}} \neq 0$.

Lemme 10.0.2. *La suite exacte $0 \to D \to E \to D \to 0$ induit une suite exacte $0 \to \Pi(D) \to \Pi(E) \to \Pi(D) \to 0$ dans $\mathrm{Rep}_L(G)$.*

Démonstration. Les hypothèses du corollaire 4.5.3 sont trivialement satisfaites, vu que D et $\check{D}$ sont irréductibles de dimension 2.

□

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant, qui répond à une question de Paskunas.

Théorème 10.0.3. *E est de de Rham si et seulement si $\Pi(E)^{\mathrm{alg}} \neq \Pi(D)^{\mathrm{alg}}$, auquel cas on a une suite exacte de G-modules*

$$0 \to \Pi(D)^{\mathrm{alg}} \to \Pi(E)^{\mathrm{alg}} \to \Pi(D)^{\mathrm{alg}} \to 0.$$

On supposera dans ce qui suit que D est à poids de Hodge-Tate $1-k$ et 1, avec $k \in \mathbf{N}^*$. On a donc $w(\delta) = w(\delta_D) = 1-k$. La remarque 9.0.6 nous permet de faire cette hypothèse.

Noter qu'alors $\check{D}$ est à poids 0 et k et que le polynôme de Sen de $\check{E}$ est $X^2(X-k)^2$. La preuve du théorème 10.0.3 suit de près celle du théorème 9.0.5, mais les détails techniques sont plus délicats.

Remarque 10.0.4. Même si D est de de Rham, E n'a aucune raison d'être de de Rham, ni même de Hodge-Tate. En fait, pour n assez grand la suite exacte $0 \to D \to E \to D \to 0$ induit des suites exactes de Γ-modules $0 \to D_{\mathrm{Sen},n} \to E_{\mathrm{Sen},n} \to D_{\mathrm{Sen},n} \to 0$ et

$$0 \to D^+_{\mathrm{dif},n} \to E^+_{\mathrm{dif},n} \to D^+_{\mathrm{dif},n} \to 0$$

et on vérifie que E est de Hodge-Tate (resp. de de Rham) si et seulement si la première (resp. la seconde) suite exacte est scindée.

10.1 Caractérisation infinitésimale des extensions de Hodge-Tate

Proposition 10.1.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\check{E}$ est de Hodge-Tate ;

b) On a $\Theta^2_{\mathrm{Sen},\check{E}} = k \cdot \Theta_{\mathrm{Sen},\check{E}}$;

c) L'élément de Casimir agit par multiplication par $\frac{k^2-1}{2}$ sur $\check{E}_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$.

d) Pour tout $z \in \check{E}_{\mathrm{rig}}$ on a

$$u^-(z) = \frac{\nabla(k-\nabla)(z)}{t}.$$

Démonstration. Comme $\check{E}$ est de Hodge-Tate si et seulement si $\Theta_{\mathrm{Sen},\check{E}}$ est diagonalisable à valeurs propres entières et comme le polynôme de Sen de $\check{E}$ est $X^2(X-k)^2$, il est clair que a) équivaut à b). L'équivalence entre c) et d) est une conséquence immédiate du lemme 6.2.3 (appliqué à $\check{E}_{\mathrm{rig}}$ et δ^{-1} ; noter que $w(\delta^{-1}) = k-1$). Pour montrer que d) entraîne b), il suffit d'appliquer la proposition 3.5.3 à $P(X) = X(k-X)$ (noter que le d) entraîne l'inclusion $P(\nabla)(\check{E}_{\mathrm{rig}}) \subset t\check{E}_{\mathrm{rig}}$, car u^- laisse stable $\check{E}_{\mathrm{rig}}$).

Supposons maintenant que b) est vraie et montrons le c). La suite exacte $0 \to \check{D}_{\mathrm{rig}} \to \check{E}_{\mathrm{rig}} \to \check{D}_{\mathrm{rig}} \to 0$ nous permet de voir $\check{E}_{\mathrm{rig}}$ comme une déformation de $\check{D}_{\mathrm{rig}}$ à $L[\varepsilon] = L[X]/X^2$. Comme cette suite exacte n'est pas scindée (sinon la suite $0 \to D \to E \to D \to 0$ serait aussi scindée) et comme D (et donc $\check{D}$) est absolument irréductible, on obtient $\mathrm{End}_{\varphi,\Gamma,\mathscr{R}}(\check{E}_{\mathrm{rig}}) = L[\varepsilon]$. L'élément de Casimir C étant un endomorphisme du (φ,Γ)-module $\check{E}_{\mathrm{rig}}$ (lemme 6.2.2), on en déduit l'existence de $a, b \in L$ tels que $Cz = (a+b\varepsilon)z$ pour tout $z \in \check{E}_{\mathrm{rig}}$. Comme $w(\delta^{-1}) = k-1$, le lemme 6.2.3 montre que l'on a une égalité d'opérateurs

$$C - \frac{k^2-1}{2} = 2tu^- + \frac{(2\nabla-k)^2-k^2}{2}$$

sur $\check{E}_{\mathrm{rig}}$. Or la proposition 3.5.3 et notre hypothèse entraînent l'inclusion

$$\frac{(2\nabla-k)^2-k^2}{2}(\check{E}_{\mathrm{rig}}) \subset t \cdot \check{E}_{\mathrm{rig}}.$$

Ainsi, $(a - \frac{k^2-1}{2})z + b\varepsilon(z) \in t \cdot \check{E}_{\mathrm{rig}}$ pour tout $z \in \check{E}_{\mathrm{rig}}$. En prenant $z \in \mathrm{Ker}(\varepsilon) = \check{D}_{\mathrm{rig}} \subset \check{E}_{\mathrm{rig}}$ on obtient $(a - \frac{k^2-1}{2})\check{D}_{\mathrm{rig}} \subset t \cdot \check{D}_{\mathrm{rig}}$, donc $a = \frac{k^2-1}{2}$. On en déduit que $b \cdot \varepsilon(\check{E}_{\mathrm{rig}}) \subset t \cdot \check{E}_{\mathrm{rig}}$ et comme $\varepsilon(\check{E}_{\mathrm{rig}}) = \check{D}_{\mathrm{rig}}$, on obtient $b = 0$ et $C = \frac{k^2-1}{2}$. Cela permet de conclure. □

Le lemme suivant est immédiat, mais il nous sera bien utile. Rappelons que $W_{l,k} = \mathrm{Sym}^{k-1}(L^2) \otimes \det^l$.

Lemme 10.1.2. *a) On a* $\Pi(E)^{\mathrm{alg}} = W_{1-k,k} \otimes \Pi(E)^{\mathrm{lc}}$ *pour une représentation lisse admissible* $\Pi(E)^{\mathrm{lc}}$.

b) Si $\Pi(E)^{\mathrm{alg}}$ *se surjecte sur* $\Pi(D)^{\mathrm{alg}}$, *alors* $\Pi(E)^{\mathrm{lc}}$ *se surjecte sur* $\Pi(D)^{\mathrm{lc}}$.

Démonstration. a) En utilisant la suite exacte $0 \to \Pi(D)^{\mathrm{alg}} \to \Pi(E)^{\mathrm{alg}} \to \Pi(D)^{\mathrm{alg}}$, on se ramène à montrer que $\Pi(D)^{\mathrm{alg}}$ ne contient aucune représentation du type $W_{l',k'} \otimes \Pi^{\mathrm{lc}}$, avec Π^{lc} lisse et $(l',k') \neq (1-k,k)$. Ceci a été vu dans la preuve de la proposition 9.2.1.

b) Le morphisme $\Pi(E)^{\mathrm{lc}} \to \Pi(D)^{\mathrm{lc}}$ est induit par la surjection $\Pi(E)^{\mathrm{an}} \to \Pi(D)^{\mathrm{an}}$ (déduite de l'exactitude du foncteur $\Pi \to \Pi^{\mathrm{an}}$ et du lemme 10.0.2) et par l'identification $\Pi(\mathscr{D})^{\mathrm{lc}} = \mathrm{Hom}(W_{1-k,k}, \Pi(\mathscr{D})^{\mathrm{an}})^{\mathfrak{g}}$, avec $\mathscr{D} \in \{D, E\}$. Après tensorisation par $W_{1-k,k}$, il devient juste le morphisme naturel $\Pi(E)^{\mathrm{alg}} \to \Pi(D)^{\mathrm{alg}}$. Cela permet de conclure.

□

Proposition 10.1.3. *Si* $\Pi(E)^{\mathrm{alg}} \neq \Pi(D)^{\mathrm{alg}}$, *alors* E *est de Hodge-Tate.*

Démonstration. Comme dans la preuve de la proposition 10.1.1 on obtient l'existence de $a, b \in L$ tels que $C(z) = (a + b\varepsilon)z$ pour tout $z \in E_{\mathrm{rig}}$, où C est l'élément de Casimir. On voit $\Pi(E)$ comme déformation de $\Pi(D)$ à $L[\varepsilon]$, via le lemme 10.0.2. Cette structure de $L[\varepsilon]$-module est induite par la structure de $L[\varepsilon]$-module sur E_{rig}. Ainsi, C agit aussi par $a + b\varepsilon$ sur $\Pi(E)^{\mathrm{an}}$, qui est un quotient de $E_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ (th. 5.5.5). Le lemme 10.1.2 montre que $C(v) = \frac{k^2-1}{2}v$ pour tout $v \in \Pi(E)^{\mathrm{alg}}$. En prenant $v \in \Pi(D)^{\mathrm{alg}} \subset \Pi(E)^{\mathrm{alg}}$ non nul, on obtient $av = \frac{k^2-1}{2}v$ et donc $a = \frac{k^2-1}{2}$. Ainsi, on a $b \cdot \varepsilon v = 0$ pour tout $v \in \Pi(E)^{\mathrm{alg}}$. On en déduit que si $\Pi(E)^{\mathrm{alg}} \neq \Pi(D)^{\mathrm{alg}}$, alors $b = 0$ et C agit par $\frac{k^2-1}{2}$ sur $E_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ donc, par dualité, aussi sur $\check{E}_{\mathrm{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. La proposition 10.1.1 montre que $\check{E}$ est de Hodge-Tate, donc E l'est aussi.

□

10.2 Structure de $\check{E}^+_{\mathrm{dif},n}$

On suppose dans la suite que E est de Hodge-Tate. Rappelons que si $\mathscr{D} \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, alors $m(\mathscr{D})$ désigne un entier suffisament grand, qui ne dépend que de $\mathscr{D}$ (et de δ). On supposera dans la suite que $m(E) \geq m(D)$.

La proposition 9.3.1 nous fournit une base e_1, e_2 de $D^+_{\mathrm{dif},n}$ pour $n \geq m(D)$. Comme D est de de Rham, on peut en fait choisir directement une base e_1, e_1' de D_{dR} sur L et poser $e_2 = t^k e_1'$. On a donc $\sigma_a(e_1) = e_1$ et $\sigma_a(e_2) = a^k e_2$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

Proposition 10.2.1. *Il existe* $f_1, f_2 \in \check{E}^+_{\mathrm{dif},m(E)}$ *tels que*

a) e_1, e_2, f_1, f_2 *forment une base de* $\check{E}^+_{\mathrm{dif},n}$ *sur* $L_n[[t]]$ *pour tout* $n \geq m(E)$.

b) Il existe $\alpha \in L$ *tel que* $\sigma_a(f_1) = f_1$ *et* $\sigma_a(f_2) = a^k f_2 + \alpha a^k \log a \cdot t^k e_1$ *pour tout* $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

Démonstration. Pour simplifier, on note $m = m(E)$, $X = \check{E}^+_{\mathrm{dif},m}$, $Y = \check{D}^+_{\mathrm{dif},m}$, $R = L_m[[t]]$ et enfin $a = 1 + p^m$. La suite exacte $0 \to D^{]0,r_m]} \to E^{]0,r_m]} \to D^{]0,r_m]} \to 0$ et la platitude de R sur $\mathscr{E}^{]0,r_m]}$ fournissent une suite exacte de $R[\Gamma_m]$-modules $0 \to Y \to X \to Y \to 0$.

Soient $f_1, f_2 \in X$ qui s'envoient sur e_1, e_2, respectivement, de telle sorte que e_1, e_2, f_1, f_2 est une R-base de X. On a $\sigma_a(f_1) - f_1 \in Y$ et $\sigma_a(f_2) - a^k f_2 \in Y$. Si $A, B \in R$, il est facile de vérifier que

$$(\sigma_a - 1)(f_1 + Ae_1 + Be_2) = (\sigma_a(f_1) - f_1) + (\sigma_a(A) - A)e_1 + (a^k\sigma_a(B) - B)e_2.$$

Mais $B \to a^k\sigma_a(B) - B$ est surjective sur R et $A \to \sigma_a(A) - A$ a pour image l'ensemble des éléments de R de terme constant nul (cela découle trivialement du fait que $\sigma_a(t) = at$). Ainsi, quitte à remplacer f_1 par $f_1 + Ae_1 + Be_2$ pour $A, B \in R$ convenables, on peut supposer que $\sigma_a(f_1) - f_1 = \alpha \cdot e_1$ pour un $\alpha \in L_m$. Alors $(\sigma_a - 1)^2(f_1) = 0$ et donc $\nabla^2(f_1) = 0$. On en déduit que l'image de f_1 dans X/tX est tuée par $\Theta^2_{\mathrm{Sen},\check{E}}$ et donc aussi par $\Theta_{\mathrm{Sen},\check{E}}$ (prop. 10.1.1). Ainsi, $\nabla(f_1) = \frac{\alpha}{\log a} e_1 \in tX$ et comme $e_1 \notin tX$, on en déduit que $\alpha = 0$ et donc $\sigma_a(f_1) = f_1$.

Pour f_2, l'argument est identique : on peut supposer que

$$(\sigma_a - a^k)(f_2) = \alpha a^k \log a \cdot t^k e_1 + \beta e_2,$$

avec $\alpha, \beta \in L_m$. On en déduit que $(\nabla - k)^2(f_2) = 0$, ensuite

$$\alpha t^k e_1 + \frac{\beta e_2}{a^k \log a} = (\nabla - k)(f_2) \in tX$$

et donc $\beta = 0$ (mais, bien sûr, on ne peut rien dire de α...).

Pour l'instant on a obtenu $\sigma_a(f_1) = f_1$ et $\sigma_a(f_2) = a^k f_2 + \alpha a^k \log a \cdot t^k e_1$ pour tout $a \in 1 + p^m\mathbf{Z}_p$, avec $\alpha \in L_m$. On finit alors comme dans la preuve de la proposition 9.3.1, en utilisant le théorème de Hilbert 90.

□

Remarque 10.2.2. Avec les notations de la proposition 10.2.1, on a $\alpha = 0$ si et seulement si E est de de Rham. En effet, E est de de Rham si et seulement si $\check{E}$ l'est, et cela arrive si et seulement si $(\check{E}_{\mathrm{dif},n})^\Gamma$ est un L-espace vectoriel de dimension 4 pour un/tout $n \geq m(E)$. Or, on vérifie facilement que $(\check{E}_{\mathrm{dif},n})^\Gamma$ est le L-espace vectoriel de base $e_1, \frac{e_2}{t^k}, f_1, \frac{f_2}{t^k}$ si $\alpha = 0$ et le L-espace vectoriel de base $e_1, \frac{e_2}{t^k}, f_1$ sinon.

On renvoie le lecteur à la définition 9.3.2 pour les modules $O_n(E)$ et $M_n(E)$.

Proposition 10.2.3. *a) $O_n(E)$ est le $L_n[[t]]$-module libre de base $t^k e_1, t^k f_1, e_2, f_2$.*

b) $M_n(E) = \check{D}^+_{\mathrm{dif},n}$ si E est de de Rham et $M_n(E)$ est le $L_n[[t]]$-module libre de base $e_1, f_1, e_2, t^k f_2$ sinon.

Démonstration. a) Fixons $n \geq m(E)$ et notons $a = 1 + p^n$ et $\sigma = \sigma_a$. Si $A, B, C, D \in L_n[[t]]$ et si $0 \leq i < k$, un calcul immédiat montre que pour $0 \leq i < k$ on a

$$(\sigma - a^i)(Ae_1 + Be_2 + Cf_1 + Df_2) = ((\sigma - a^i)A + \alpha a^k t^k \log a \cdot \sigma(D))e_1 +$$
$$(a^k\sigma - a^i)B \cdot e_2 + (\sigma - a^i)C \cdot f_1 + (a^k\sigma - a^i)D \cdot f_2.$$

On en déduit comme dans la preuve de la proposition 9.3.4 que $(\sigma - a^i)\check{E}^+_{\mathrm{dif},n}$ est l'ensemble des combinaisons $A_1e_1 + B_1e_2 + C_1f_1 + D_1f_2$ telles que les coefficients de t^i dans A_1 et C_1 soient nuls. On conclut en prenant l'intersection sur $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$ et en utilisant le lemme 9.3.3.

b) En passant à la limite (pour $a \to 1$) dans la proposition 10.2.1 on obtient

$$\nabla(e_1) = 0, \quad \nabla(f_1) = 0, \quad \nabla\left(\frac{e_2}{t^k}\right) = 0, \quad \nabla\left(\frac{f_2}{t^k}\right) = \alpha \cdot e_1.$$

Comme dans la preuve de la proposition 9.3.5 on en déduit que pour tous $B \in L_n[[t]]$ et $P \in L[T]$

$$P(\nabla)(B \cdot f_2) = P(\nabla + k)(B) \cdot f_2 + \alpha P'(\nabla + k)(B) \cdot t^k e_1,$$

ainsi que le fait que $Ae_1+Be_2+Cf_1+Df_2 \in M_n(E)$ si et seulement si $\alpha P'(\nabla+k)(D) \in t^k L_n[[t]]$. On conclut en utilisant le lemme 9.3.6. □

10.3 Décomposition de $\Pi(E)_c^{P-\mathrm{alg}}$

On se propose de décrire l'espace $\Pi(E)_c^{P-\mathrm{alg}}$ un peu plus en détail. Notons pour simplifier $R_n = L_n[[t]]$. Des arguments identiques à ceux donnés dans les propositions 9.3.1 et 10.2.1 montrent l'existence de $e'_1, e'_2, f'_1, f'_2 \in E^+_{\mathrm{dif},m(E)}$ tels que

• e'_1, e'_2 est une R_n-base de $D^+_{\mathrm{dif},n}$ et e'_1, e'_2, f'_1, f'_2 est une R_n-base de $E^+_{\mathrm{dif},n}$ pour $n \geq m(E)$.

• On a $\sigma_a(e'_1) = a^{1-k}e'_1$, $\sigma_a(e'_2) = ae'_2$, $\sigma_a(f'_1) = a^{1-k}f'_1$ et enfin $\sigma_a(f'_2) = af'_2+\beta a \log a \cdot t^k e'_1$ pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$, pour un certain $\beta \in L$.

Les calculs usuels montrent alors que pour $z = Ae'_1 + Be'_2 + Cf'_1 + Df'_2 \in E_{\mathrm{dif},n}$ on a $\mu_{n,k}(z) \in E^+_{\mathrm{dif},n}$ si et seulement si $A, C \in R_n$ et $B, D \in t^{-k}R_n$. On a donc un isomorphisme de $R_n[\Gamma]$-modules

$$\left(E_{\mathrm{dif},n}/E^+_{\mathrm{dif},n}\right)^{\mu_{n,k}=0} = t^{-k}R_n/R_ne'_2 \oplus t^{-k}R_n/R_nf'_2.$$

On obtient de même un isomorphisme de $R_n[\Gamma]$-modules

$$\left(D_{\mathrm{dif},n}/D^+_{\mathrm{dif},n}\right)^{\mu_{n,k}=0} = t^{-k}R_n/R_ne'_2.$$

En combinant ceci avec la congruence $\sigma_a(f'_2) \equiv af'_2 \pmod{R_ne_1}$, on en déduit que

$$\left(E_{\mathrm{dif},n}/E^+_{\mathrm{dif},n}\right)^{\mu_{n,k}=0} \simeq \left(D_{\mathrm{dif},n}/D^+_{\mathrm{dif},n}\right)^{\mu_{n,k}=0} \oplus \left(D_{\mathrm{dif},n}/D^+_{\mathrm{dif},n}\right)^{\mu_{n,k}=0},$$

compatible avec la structure de $L_n[[t]][\Gamma]$-module. Bien sûr, par construction cette décomposition est induite par la suite exacte

$$0 \to D_{\mathrm{dif},n} \to E_{\mathrm{dif},n} \to D_{\mathrm{dif},n} \to 0.$$

En passant à la limite inductive sur n et en utilisant la proposition 8.2.5, on obtient une suite exacte scindée de B-modules

$$0 \to \Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}} \to \Pi(E)_c^{P-\mathrm{alg}} \to \Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}} \to 0.$$

10.4 Preuve du théorème 10.0.3

On sait [12, prop. VI.5.6] que $\Pi(D)^{\mathrm{lc}}$ a un modèle de Kirillov (c'est une conséquence des constructions du chapitre 8 et de 10.3). D'après un résultat standard dans la théorie du modèle de Kirillov, on a $\Pi(D)^{\mathrm{lc}} = \Pi(D)_c^{\mathrm{lc}} + w \cdot \Pi(D)_c^{\mathrm{lc}}$, où $\Pi(D)^{\mathrm{lc}}$ désigne l'espace des vecteurs $v \in \Pi(D)^{\mathrm{lc}}$ dont l'image dans le modèle de Kirillov est à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$. On en déduit que $\Pi(D)^{\mathrm{alg}} = \Pi(D)_c^{\mathrm{alg}} + w \cdot \Pi(D)_c^{\mathrm{alg}}$, avec des notations évidentes. Or, comme on a vu dans 9.5, on a $\Pi(D)_c^{\mathrm{alg}} = \Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}}$. On en déduit que $\Pi(D)^{\mathrm{alg}} = \Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}} + w \cdot \Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}}$.

Supposons maintenant que E est de de Rham et montrons que l'application naturelle $\Pi(E)^{\mathrm{alg}} \to \Pi(D)^{\mathrm{alg}}$ est surjective. Le b) de la proposition 10.2.3 et la proposition 9.4.2 montrent

que $(u^-)^k$ tue $\Pi(E)_c^{P-\mathrm{alg}}$ et, comme dans 9.5, on conclut que $\Pi(E)_c^{P-\mathrm{alg}} \subset \Pi(E)^{\mathrm{alg}}$. L'image de $\Pi(E)^{\mathrm{alg}}$ dans $\Pi(D)^{\mathrm{alg}}$ contient donc $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}}$ (car $\Pi(E)_c^{P-\mathrm{alg}}$ se surjecte sur $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}}$ d'après le § 10.3) et comme elle est stable par G, on peut conclure en utilisant le premier paragraphe.

On conclut alors en utilisant la suite exacte

$$0 \to \Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}} \to \Pi(E)_c^{P-\mathrm{alg}} \to \Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}} \to 0$$

(cf. discussion qui suit la prop. 10.2.3) et le premier paragraphe.

Supposons maintenant que $\Pi(E)^{\mathrm{alg}} \neq \Pi(D)^{\mathrm{alg}}$ et montrons que E est de de Rham. D'après les propositions 10.2.3 et 9.4.2, il suffit de vérifier que $(u^-)^k$ tue $\Pi(E)_c^{P-\mathrm{alg}}$. En utilisant le lemme 10.1.2, on se ramène donc à montrer que $\Pi(E)_c^{P-\mathrm{alg}} \subset \Pi(E)^{\mathrm{alg}}$. Or, on a une suite exacte scindée

$$0 \to \Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}} \to \Pi(E)_c^{P-\mathrm{alg}} \to \Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}} \to 0$$

et on sait déjà que $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}} \subset \Pi(D)^{\mathrm{alg}} \subset \Pi(E)^{\mathrm{alg}}$. Il reste à voir que l'image de $\Pi(E)_c^{\mathrm{alg}}$ contient $\Pi(D)_c^{P-\mathrm{alg}}$, sachant qu'elle est non nulle (car $\Pi(E)^{\mathrm{alg}} \neq \Pi(D)^{\mathrm{alg}}$). L'argument étant identique à celui du corollaire VI.5.9 de [12], cela permet de conclure.

Bibliographie

[1] K. Ardakov, S.J. Wadsley, On irreducible representations of compact p-adic analytic groups, preprint, disponible à `http://www.maths.nottingham.ac.uk/personal/pmzka1/`.

[2] L. Berger-Représentations p-adiques et équations différentielles, Invent. Math. 148 (2002), p.219-284.

[3] L. Berger-Central characters for smooth irreducible modular representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova (F. Baldassarri's 60th birthday).

[4] L. Berger, C. Breuil-Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $G_{\mathbf{Q}_p}$, Astérisque 330, p. 155-211.

[5] L. Berger, P. Colmez-Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, Astérisque 319 (2008), p. 303-337.

[6] C. Breuil-Invariant L et série spéciale p-adique, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup 37 (2004), p. 559-610.

[7] F. Cherbonnier, P. Colmez-Représentations p-adiques surconvergentes, Invent. Math. 133 (1998), p. 581-611.

[8] F. Cherbonnier, P. Colmez-Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, J.A.M.S, Volume 12, Number 1, January 1999, Pages 241-268.

[9] P. Colmez- Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Ann. of Math. 148 (1998), p. 485-571.

[10] P.Colmez-Représentations triangulines de dimension 2, Astérisque 319 (2008), p.213-258.

[11] P. Colmez-(φ, Γ)-modules et représentations du mirabolique de G, Astérisque 330 (2010), p. 61-153.

[12] P. Colmez-Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, Astérisque 330 (2010), p. 281-509.

[13] P. Colmez-La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque 330, p.213-262.

[14] P. Colmez-La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$: vecteurs localement analytiques, preprint.

[15] P. Colmez-Espaces Vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, Astérisque 319 (2008), p.117-186.

[16] P. Colmez-Les conjectures de monodromie p-adiques, Sém. Bourbaki 2001-02, exp. 897, Astérisque 290 (2003), p.53-101.

[17] K. D. Dixon, M. P. F. Du Sautoy, A. Mann, D. Segal- Analytic pro-p-groups, 2nd edition, Cambridge University Press, 1999.

[18] G. Dospinescu-Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Math. Annalen, à paraître.

[19] G. Dospinescu-Equations différentielles p-adiques et foncteurs de Jacquet analytiques, appendice à [14], preprint, disponible à `http://arxiv.org/abs/1111.4543`.

[20] G. Dospinescu, B. Schraen- Endomorphism algebras of admissible p-adic representations of p-adic Lie groups, preprint, disponible à `http://arxiv.org/abs/1106.2446`.

[21] M. Emerton-A local-global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programme for $GL_2/\mathbf{Q}$, Pure Appl. Math. Q. 2 (2006), p. 279-393.

[22] M. Emerton-Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $GL_2/\mathbf{Q}$, preprint, disponible à `http://www.math.northwestern.edu/~emerton/preprints.html`.

[23] M. Emerton-Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups, to appear in Memoirs of the AMS, disponible à `http://www.math.northwestern.edu/~emerton/preprints.html`.

[24] M. Emerton-On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms, Invent. Math. 164 (2006), no. 1, 1-84.

[25] J.-M. Fontaine-Sur Certains Types de Représentations p-Adiques du Groupe de Galois d'un Corps Local ; Construction d'un Anneau de Barsotti-Tate, Ann. of Math. 115 (1982), p.529-577.

[26] J.-M. Fontaine-Représentations p-adiques des corps locaux. I, in The Grothendieck Festschrift, Vol II, Progr. Math., vol 87, Birkhauser, 1990, p. 249-309.

[27] J.-M. Fontaine-Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, Astérisque 295 (2004), p. 1-115.

[28] H. Jacquet, R. Langlands-Automorphic forms on GL(2), Springer Lecture Notes in Mathematics, 1970, pp. 1-548.

[29] I. Kaplansky, Rings with a polynomial identity, Bull. Amer. Math. Soc. Volume 54, Number 6 (1948), 575-580.

[30] K. Kato-Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}. I, in Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991), Lecture notes in Math., vol.1553, Springer, 1993, p.50-163.

[31] K.S. Kedlaya-A p-adic local monodromy theorem, Ann. of Math. 160 (2004), p.93-184.

[32] M. Kisin-Deformations of $G_{\mathbf{Q}_p}$ and G representations, Astérisque 330, 2010, p. 511-528.

[33] M. Kisin-The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2, J. Amer. Math. Soc 22(3)(2009), p. 641-690.

[34] M. Lazard, Groupes analytiques p-adiques, Publ.Math.IHES 26(1965).

[35] R. Liu, Locally Analytic Vectors of some crystabeline representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_\mathrm{p})$, Compos. Math. (à paraître).

[36] R. Liu, B. Xie, Y. Zhang, Locally Analytic Vectors of Unitary Principal Series of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_\mathrm{p})$, à paraître aux Annales de l'E.N.S.

[37] S.Morra-Multiplicity theorems modulo p for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, preprint, disponible à `http://www.math.univ-montp2.fr/~morra/Quadratiche.pdf`.

[38] V. Paškūnas-The image of Colmez's Montréal functor, preprint, disponible à `http://arxiv.org/abs/1005.2008`.

[39] B. Perrin-Riou-Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Invent. Math. 115 (1994), p.81-161.

[40] D. Quillen, On the endomorphism ring of a simple module over an enveloping algebra, Proc. Amer. Math. Soc, 21 (1969), 171-172.

[41] S. Sen-Continuous cohomology and p-adic Galois representations, Invent. Math 62 (1980/1981), p. 89-116.

[42] P. Schneider, J. Teitelbaum, Banach space representations and Iwasawa theory, Israel J. Math. 127, 359-380 (2002).

[43] P. Schneider, J. Teitelbaum- $U(\mathfrak{g})$-finite locally analytic representations, Represent. Theory 5 (2001), p 111-128.

[44] P. Schneider, J. Teitelbaum- Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2, J. Amer. Math. Soc 15 (2002), p. 443-468.

[45] P. Schneider, J. Teitelbaum- Algebras of p-adic distributions and admissible representations, Invent. Math. 153 (2003), p. 145-196.