Approximations parcimonieuses et problèmes inverses en acoustique

Gilles Chardon

▶ **To cite this version:**

Gilles Chardon. Approximations parcimonieuses et problèmes inverses en acoustique. Optique [physics.optics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2012. Français. NNT : . pastel-00732847

HAL Id: pastel-00732847
https://pastel.hal.science/pastel-00732847

Submitted on 17 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie

École Doctorale Sciences mécaniques, acoustique, électronique et robotique de Paris

Thèse de doctorat

Discipline : Sciences de l'ingénieur

présentée par

Gilles Chardon

Approximations parcimonieuses et problèmes inverses en acoustique

---

dirigée par Laurent Daudet

Soutenue le 27 juin 2012 devant le jury composé de :

M. Albert Cohen	Université Pierre et Marie Curie	examinateur
M. Laurent Daudet	Université Paris Diderot	directeur
M. Mathias Fink	ESPCI	examinateur
M. Josselin Garnier	Université Paris Diderot	rapporteur
M. François Gautier	Université du Maine	examinateur
M. Yves Grenier	Télécom ParisTech	examinateur
M. Martin Vetterli	EPFL	rapporteur

Institut Langevin
1 rue Jussieu
75 005 Paris

École doctorale SMAER
4 place Jussieu BC 270
75 252 Paris cedex 05

Résumé

Cette thèse présente d'une part, la construction d'approximations parcimonieuses de champs acoustiques, d'autre part l'utilisation de ces approximations pour la résolution de problèmes inverses.

L'approximation de solutions de l'équation d'Helmholtz est étendue à des modèles de vibration de plaques, ce qui, entre autres, permet également de concevoir une méthode de calcul de mode propres alternative aux méthodes de référence.

Différents problèmes inverses sont ensuite étudiés, en se basant sur ces résultats d'approximation. Le premier est l'holographie acoustique en champ proche, pour laquelle nous développons une nouvelle méthode de régularisation, ainsi qu'une antenne aléatoire permettant de réduire le nombre de mesures nécessaires à la reconstruction de déformées opérationnelles de plaques. Le deuxième problème inverse étudié est l'interpolation spatiale de réponses impulsionnelles de plaques, où nous montrons qu'en mesurant le champ vibratoire sur un ensemble d'échantillons bien choisi (justifié par une analyse théorique), les réponses impulsionnelles d'une plaque peuvent être obtenues avec moins de mesures que demandées par le théorème d'échantillonnage de Shannon. Enfin, le problème de la localisation de sources dans un espace clos réverbérant est étudié. Nous montrons qu'en utilisant des modèles parcimonieux d'ondes, la localisation est possible sans connaissances a priori sur les conditions aux limites du domaine de propagation des ondes.

Mots-clefs

parcimonie, problèmes inverses, acoustique, équation d'Helmholtz, analyse modale, localisation de sources

Sparse approximations and inverse problems in acoustics

Abstract

In this work, we construct sparse approximations of acoustic fields, as well as methods for solving inverse problems based on these approximations.

The approximation of solutions of the Helmholtz equation is extended to the solutions of plate vibration models, which allows the design of an alternative numerical method for the computation of plate eigenmodes.

Some inverse problems are then studied, using these approximation results. The first is nearfield acoustical holography, for which we develop a new regularisation scheme, as well as a random antenna. These two tools allow the reduction of the number of measurements needed for a good reconstruction of the operational deflection shapes to be recovered. Spatial interpolation of plate impulse responses is then studied. Using the approximation models, we show that we can measure the plate impulse responses with fewer measurements than needed by the Shannon sampling theorem, by choosing the sampling strategy justified by a theoretical analysis. Finally, we developped new algorithms for source localisation in an enclosed space. We show that using approximation models of acoustical fields, source localisation is possible without any prior on the space where the waves propagate.

Keywords

sparsity, inverse problems, acoustics, Helmholtz equation, modal analysis, source localisation

Remerciements

Je vais faire court.

La plupart des travaux de cette thèse ont eu pour cadre le projet ECHANGE, je tiens donc à remercier ses membres, en particulier ceux avec qui j'ai eu l'occasion de travailler de façon plus soutenue, Rémi, Albert, Antoine, Nancy et François. Travailler tant avec des acousticiens qu'avec des mathématiciens, dans des conditions de travail aussi idéales, a été un vrai plaisir.

Merci aux membres du jury d'avoir pris le temps pour dire ce qu'ils pensaient de mon travail.

Je remercie les membres (ou anciens membres) de l'Institut Langevin pour leur accueil, en particulier Patricia, Christelle, Corinne, Lorraine, Claire, Julien, Matthieu, Redha et Alex.

Bien qu'ils ne soient pas de mon lab, j'ai passé durant ces trois ans de très bons moments avec les thésards AAO (vous êtes trop nombreux pour être cités, fallait pas aller tous dans le même lab), Zafar et Angélique, à Prague et à Kyoto, avec les acousticiens du LAUM, Benjamin et Gaël, et du LAM, Delphine et Arthur, à Lyon, Nantes et Vancouver.

Merci à mes parents, qui ont toujours su me donner un coup de main quand il fallait.

Mais mes plus amples remerciements vont évidemment à Laurent (qui a en fait été déjà remercié trois fois plus haut, si on veut être pédant, mais il mérite d'être remercié une quatrième fois), avec qui cela a été un réel plaisir de travailler durant ces 3,25 années.

Enfin, une pensée pour Franck, qui nous a quittés beaucoup trop tôt.

Place à l'action.

Table des matières

Introduction **9**

I Aspects mathématiques 13

1 Approximation de solutions de l'équation d'Helmholtz 15
1.1 Un résultat similaire : le théorème de Runge 15
1.2 Théorie de Vekua 16
1.3 Approximation dans les espaces de Sobolev 18
1.4 Démonstrations alternatives 21
1.5 Méthode des solutions fondamentales 22
1.6 Conclusion 23

2 Approximation de solutions de modèles de plaques 25
2.1 Approximation de solutions du système de l'élasticité 25
2.2 Approximation de solutions du modèle de Kirchhoff-Love 27
2.3 Modèle de Reissner-Mindlin 30
2.4 Conclusion 33

3 Analyse modale numérique de plaques minces 35
3.1 Éléments finis 35
3.2 Méthode des solutions particulières 36
3.3 Application aux plaques 43
3.4 Conclusion 48

4 Échantillonnage de solutions de l'équation d'Helmholtz 49
4.1 Le théorème d'échantillonnage et d'autres résultats classiques 49
4.2 Approximation par moindres carrés 50
4.3 Application aux solutions de l'équation d'Helmholtz 52
4.4 Conclusion 57

II Problèmes inverses parcimonieux en acoustique 59

5 Parcimonie et problèmes inverses 61
5.1 Problèmes inverses 61
5.2 Parcimonie 65

5.3 Compressed sensing 69
5.4 Conclusion 71

6 Holographie acoustique en champ proche compressive 73
6.1 État de l'art 73
6.2 Principe de la NAH 74
6.3 Régularisation parcimonieuse 75
6.4 Construction d'une antenne aléatoire 79
6.5 Résultats expérimentaux 81
6.6 Conclusion 81

7 Interpolation spatiale de réponses impulsionnelles de plaques 85
7.1 État de l'art 86
7.2 Modèle parcimonieux de réponse impulsionnelle 86
7.3 Identification des modes 87
7.4 Interpolation des modes 88
7.5 Résultats expérimentaux 89
7.6 Conclusion 100

8 Localisation de sources en environnement réverbérant 101
8.1 État de l'art 101
8.2 Environnement réverbérant connu 103
8.3 Environnement réverbérant inconnu 107
8.4 Conclusion 115

Conclusion 117

Liste des publications 119

A Fonctions de Bessel 121

B Échantillonnage multicanal de sinusoïdes amorties 123

Table des figures 129

Bibliographie 133

Introduction

Cette thèse est à la rencontre de trois disciplines : l'acoustique, le traitement du signal et l'analyse numérique.

Les problèmes traités proviennent de l'acoustique. Ce sont des problèmes inverses : nous essayerons, à partir de mesures perturbées et/ou incomplètes, de reconstituer l'information physique recherchée. Voici ces trois problèmes. L'holographie acoustique en champ proche tout d'abord, problème inverse classique consistant à rétropropager le champ acoustique rayonné par une structure vibrante pour estimer son comportement mécanique. Le deuxième problème est la mesure de réponses impulsionnelles de plaques. Enfin, le dernier problème étudié est la localisation de sources, plus particulièrement en environnements réverbérants inconnus.

Les deux premiers problèmes sont, dans un sens, déjà résolus. L'holographie acoustique en champ proche a 27 ans déjà (comme l'auteur de ces lignes), et le théorème d'échantillonnage de Shannon (milieu du vingtième siècle) permet de mesurer les réponses impulsionnelles sans trop de difficultés, à partir du moment où les fréquences d'échantillonnages spatiales et temporelles sont assez élevées. Mais nous voulons faire mieux : ces méthodes standards ne parviennent pas à utiliser l'information a priori disponible sur les quantités recherchées. Ces quantités sont des champs physiques, plus particulièrement des champs de déplacement de plaques. Notre but sera donc d'utiliser des modèles physiques de plaques pour améliorer les méthodes de reconstruction, notamment pour diminuer le nombre de mesures nécessaires. Une partie des informations mesurées en respectant les conditions du theorème de Shannon est en effet redondante avec les modèles de plaques.

L'outil de traitement du signal adapté à ce défi est le *compressed sensing*, ou acquisition compressée. Avancée majeure du traitement du signal de la décennie passée et sujet d'étude toujours d'actualité, cet outil consiste à utiliser la parcimonie des signaux (i.e. le fait qu'ils admettent une représentation compacte dans une base ou un dictionnaire fixés à l'avance), non plus pour seulement traiter au mieux les données (les compresser, en extraire le plus d'informations possible, régulariser un problème inverse, etc.), mais pour concevoir de nouvelles façons de les mesurer. La quantité de mesures à faire n'est alors plus liée à la bande passante du signal, mais à la quantité d'information qu'il porte réellement. Pour ceci, deux études préalables doivent être faites :

- premièrement, la recherche d'un modèle parcimonieux de signal, permettant de représenter de la façon la plus efficace possible les signaux à reconstruire
- deuxièmement, le choix d'une stratégie de mesure (qui se traduit par un nouveau dispositif ou protocole expérimental), compatible avec le modèle parci-

monieux.

Avec ces deux ingrédients, de nouvelles méthodes d'échantillonnage, non sujettes aux limitations du théorème de Shannon, peuvent être conçues, avec toutes les conséquences économiques et pratiques (voire sociales) que ceci entraîne (dispositifs expérimentaux moins complexes, doses reçues plus faibles en imagerie médicale, etc.). Le prix à payer est une complexité algorithmique plus élevée. Ce coût, vu les progrès constants en calcul numérique, reste assez faible en général.

Le cas du troisième problème, la localisation de sources, est légèrement différent. Il n'y sera pas question de réduction du nombre de mesures, les méthodes existantes étant assez efficaces de ce point de vue, mais de résoudre le problème de la localisation de sources en environnement réverbérant de façon tout à fait originale, pouvant même traiter le cas d'un milieu réverbérant inconnu. Ici aussi, ce sera un modèle parcimonieux qui nous permettra de développer des algorithmes à même de résoudre ce problème.

Les buts de la thèse (diminuer le nombre de mesures, localiser des sources en environnement inconnu) et les moyens (parcimonie et *compressed sensing*) sont fixés. Reste encore à relier les deux, c'est à dire traduire les a priori physiques dont nous disposons sur nos signaux en a priori parcimonieux utilisables par les algorithmes de traitement du signal.

Ce lien sera assuré par des résultats d'analyse numérique. Les a priori physiques sont disponibles sous forme d'équations aux dérivées partielles, plus précisement l'équation des ondes et certaines de ses variantes (équation d'Helmholtz, modèle de Kirchhoff-Love, etc.). Des résultats d'analyse numérique, généralement appliqués à la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles, nous permetteront de construire des modèles parcimonieux. La théorie de Vekua donne des approximations de solutions de l'équation d'Helmholtz, ce qui est suffisant pour l'acoustique, et donc le troisième problème. Nous étendons ces résultats à des modèles de plaques, pour pouvoir l'appliquer aux deux premiers problèmes nous intéressant. Ces modèles nous permettront également de concevoir une méthode de calcul de modes propres de plaques.

Un objectif plus général de cette thèse est, au-delà de concevoir des méthodes de résolution de problèmes inverses particuliers, de montrer que la conjonction de ces trois domaines, acoustique, parcimonie et *compressed sensing*, et analyse numérique, permet de développer des méthodes de résolution de problèmes inverses tout à fait originales, prenant en compte la physique même des objets à reconstruire.

Les huit chapitres de la thèse sont répartis en deux sections principales. Dans la première section, nous présentons les différents résultats mathématiques obtenus :

- Le premier chapitre présente un état de l'art de l'approximation de solutions de l'équation d'Helmholtz, en se basant principalement sur la théorie de Vekua.
- Ces approximations sont étendues dans le deuxième chapitre à deux modèles de plaques : le modèle de Kirchhoff-Love pour les plaques minces, et le modèle de Reissner-Mindlin pour les plaques d'épaisseur moyenne.
- Le troisième applique ces résultats pour le calcul de modes propres de plaques. La recherche de ces modes est généralement effectuée par des méthodes reposant sur un maillage comme la méthode des éléments finis, qui peuvent

être très coûteuses à hautes fréquences ou en présence de singularités. Nous étendons ici aux plaques une méthode alternative précédemment appliquée à l'équation d'Helmholtz, en utilisant les résultats d'approximation du chapitre 2.

– Le quatrième chapitre analyse la stabilité de l'échantillonnage de solutions de l'équation d'Hehlmoltz sur un domaine borné. Les théorèmes d'échantillonnage classiques sont inapplicables dans ce cas. Nous utilisons les résultats du chapitre 1 et des travaux récents sur l'approximation aux moindres carrés pour donner des préconisations sur l'échantillonnage de ces solutions, et donc en particulier sur la mesure de champs acoustiques.

La deuxième partie applique ces résultats à la résolution de problèmes inverses en acoustique. La rigueur mathématique y sera échangée contre la validation expérimentale. Voici les chapitres qui composent cette partie :

– Le chapitre 5 présente de façon générale ces problèmes inverses et la méthode standard pour les résoudre, ainsi que le concept de parcimonie et la façon dont elle peut aider à traiter les problèmes inverses.
– Le sixième chapitre présente les travaux sur l'holographie acoustique en champ proche, où l'utilisation d'une régularisation basée sur l'approximation parcimonieuse des déformées opérationnelles de plaque permet la réduction du nombre de mesures nécessaires à la reconstruction.
– Le septième chapitre traite de l'interpolation spatiale de réponses impulsionnelles de plaques avec un nombre faible de mesures, c'est-à-dire trop peu nombreuses pour appliquer le théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist. Une méthode originale d'interpolation est proposée en utilisant les résultats du chapitre 2 pour construire une représentation parcimonieuse des réponses impulsionnelles et des algorithmes permettant d'en tirer parti.
– Nous nous intéressons dans le dernier chapitre à la localisation de sources acoustiques. Ce problème, classique en champ libre, devient plus difficile en espace clos réverbérant, et encore plus difficile quand cet espace est inconnu. Nous utiliserons les modèles de champ du chapitre 1 pour la résolution de ce problème.

De nombreux développements, tant théoriques qu'expérimentaux, sont encore à faire sur ces sujets. L'objectif de cette thèse a surtout été de montrer que le formalisme de la parcimonie est pertinent en physique des ondes, et ce pour deux raisons. La première est que les modèles physiques de propagation des ondes (i.e., des équations aux dérivées partielles) peuvent être réinterprétés en modèle parcimonieux, pouvant également faire intervenir de la structure dans les supports des signaux. Ces modèles de parcimonie ne sont donc pas de simples objets mathématiques abstraits, mais des concepts très utiles pour la modélisation de phénomènes physiques. La deuxième raison est que ces modèles aident la résolution de problèmes inverses. Le *compressed sensing*, dont les développements algorithmiques et théoriques ont été nombreux depuis les articles fondateurs du domaine, y trouve des applications expérimentales concrètes. Au-delà de la réduction du nombre de mesures à effectuer, la parcimonie permet de développer des méthodes originales pour aborder des problèmes délicats, comme la localisation de sources en bande étroite et milieu réverbérant inconnu.

Première partie

Aspects mathématiques

Chapitre 1

Approximation de solutions de l'équation d'Helmholtz

Ce chapitre présente un état de l'art de l'approximation de solutions d'équations aux dérivées partielles elliptiques, et plus particulièrement de l'équation d'Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0. \tag{1.1}$$

Contrairement à d'autres types d'approximations plus classiques (approximation par des polynômes, éléments finis, etc.), ces méthodes ne vont approximer que les solutions de l'EDP étudiée. On s'attend à des vitesses de convergence plus élevées, et donc une représentation plus compacte, qui pourra servir, soit à diminuer la taille des problèmes numériques à résoudre, soit comme a priori parcimonieux pour des problèmes de traitement du signal. Les deux méthodes qui nous intéressent particulièrement ici sont l'approximation de solutions de l'équation d'Helmholtz par des polynômes harmoniques généralisés, qui seront définis plus bas, et par des sommes d'ondes planes.

Le théorème de Runge, s'appliquant aux fonctions holomorphes, est introduit en premier. Est ensuite présentée la théorie de Vekua, qui se base sur ce résultat pour aboutir à l'approximation de solutions d'EDP elliptiques, avec des résultats précis pour l'équation d'Helmholtz dans les espaces de Sobolev. Trois démonstrations alternatives sont ensuite données : une, élémentaire, dans le cas particulier du disque, une se basant sur un développement en série de Taylor, la dernière utilisant la formule de Green. Enfin, une approximation alternative, la méthode des solutions fondamentales, est mentionnée.

1.1 Un résultat similaire : le théorème de Runge

Avant d'énoncer le théorème de Runge, rappelons quelques résultats élémentaires de la théorie des fonctions d'une variable complexe. On dit qu'une fonction f de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ est analytique au point z_0 si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z)}{h}$$

existe. On note alors ce nombre $f'(z_0)$, la dérivée de f en z_0. On dira qu'une fonction est holomorphe sur un ouvert Ω si elle est dérivable en tout point de Ω. En particulier, tout polynôme est holomorphe, ainsi que toute fraction rationnelle sur $\mathbf{C}$ privé de ses pôles.

Cette définition, analogue en tout point à celle de la dérivée d'une fonction d'une variable réelle, est toutefois nettement plus contraignante. En effet, l'analyticité d'une fonction implique l'existence de ses dérivées quel que soit l'ordre. On montre également que, en décomposant f en partie réelle et imaginaire,

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

ces parties doivent vérifier les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Une conséquence élémentaire est l'harmonicité de u et de v, qui vérifient en effet $\Delta u = \Delta v = 0$.

Le théorème de Runge [Con78] dit la chose suivante :

Théorème 1.1. *(Runge) Soit un compact K, f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω incluant K, et P un ensemble contenant au moins un point de chaque composante connexe de $\mathbb{C}\backslash K$. Il existe une suite de fonctions rationnelles (r_n), dont les pôles sont compris dans P, convergeant uniformément vers f.*

Quand K est simplement connexe, on peut prendre $P = \{\infty\}$, les r_n sont alors des polynômes. On peut d'ores et déjà obtenir un premier résultat sur les fonctions harmoniques, solutions de l'EDP elliptique la plus simple, $\Delta u = 0$. Soit u une fonction harmonique dans un ouvert Ω simplement connexe. On peut lui associer sa fonction conjuguée v, qui vérifie $f = u + iv$ holomorphe. f est alors approximable dans un compact simplement connexe K par une suite de polynômes (r_n) . En prenant la partie réelle de f et des r_n, on montre que u peut être approximée uniformément par une suite de polynômes harmoniques des variables x et y. C'est en quelque sorte une généralisation de l'opération "prendre la partie réelle", qui permet ici de passer de l'approximation d'une fonction holomorphe à l'approximation d'une fonction harmonique, que la théorie de Vekua propose.

1.2 Théorie de Vekua

La théorie de Vekua traite des solutions de l'équation

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0. \tag{1.2}$$

Elle est présentée de façon extensive dans l'ouvrage de Vekua [Vek67], et résumée dans un article d'Henrici [Hen57]. Cette équation, après le changement de variable

$$z = x + iy, \quad \xi = x - iy$$

et le changement de fonction inconnue

$$U(z,\xi) = u(\frac{z+\xi}{2}, \frac{z-\xi}{2i})$$

devient l'équation équivalente

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \xi} + A\frac{\partial U}{\partial z} + B\frac{\partial U}{\partial \xi} + CU = 0 \tag{1.3}$$

où A, B, et C sont définis par

$$A(z,\xi) = \frac{1}{4}(a+ib) \tag{1.4}$$

$$B(z,\xi) = \frac{1}{4}(a-ib) \tag{1.5}$$

$$C(z,\xi) = \frac{1}{4}c \tag{1.6}$$

Les coefficients a, b et c sont supposés suffisamment réguliers pour que A, B et C soient analytiques dans le domaine $D \times D^\star$. Une condition nécessaire est que a, b et c soient analytiques dans D.

À cette équation, on associe une fonction, appelée *fonction de Riemann*, solution de l'équation intégrale

$$V(z,\xi) - \int_t^z B(s,\xi)V(s,\xi)ds - \int_\tau^\xi A(z,\sigma)V(z,\sigma)d\sigma + \int_t^z \int_\tau^\xi C(s,\sigma)V(s,\sigma)dsd\sigma = 1$$

Cette solution, unique, est notée $R(z,\xi,t,\tau)$. Dans le cas particulier de l'équation d'Helmholtz, R est solution de

$$V(z,\xi) + k^2 \int_t^z \int_\tau^\xi V(s,\sigma)dsd\sigma = 1$$

et vaut $R(z,\xi,t,\tau) = J_0\left(k\sqrt{(z-t)(\xi-\tau)}\right)$ où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0.

Cette fonction permet de représenter les solutions régulières (dans un certain sens qui ne sera pas précisé ici) de l'équation 1.3.

Théorème 1.2. *Soit u une solution régulière de 1.2. Alors il existe des fonctions $\phi(z)$ et $\psi(\xi)$ holomorphes dans D et $D^\star$ respectivement, telles que*

$$u(x,y) = \phi(s)R(s,\sigma,z,\xi) + \int_s^z \phi'(t)R(t,\sigma,z,\xi)dt + \int_\sigma^\xi \psi'(\tau)R(s,\tau,z,\xi)d\tau$$

Dans le cas de l'équation d'Helmholtz, et en prenant $s = \sigma = 0$, on obtient

$$u(x,y) = \phi(0)J_0\left(k\sqrt{z\xi}\right) + \int_0^z \phi'(t)J_0\left(k\sqrt{(z-t)\xi}\right)dt + \int_0^z \psi'(\tau)J_0\left(k\sqrt{z(\xi-\tau)}\right)d\tau$$

En approximant ϕ et ψ par des polynômes (conséquence immédiate du théorème de Runge), on peut approximer u par les images de ces polynômes. Dans le cas de l'équation d'Helmholtz, le monôme z^n a pour image, à une constante multiplicative près, la fonction de Fourier-Bessel $e^{in\theta}J_n(r)$ en coordonnées polaires. Les solutions de l'équation d'Helmholtz suffisamment régulières peuvent donc être approximées par des sommes de telles fonctions, sommes qu'on appellera *polynômes harmoniques généralisés*. Ces décompositions peuvent également être obtenues par la théorie développée par Bergman [Ber61] avec des outils différents.

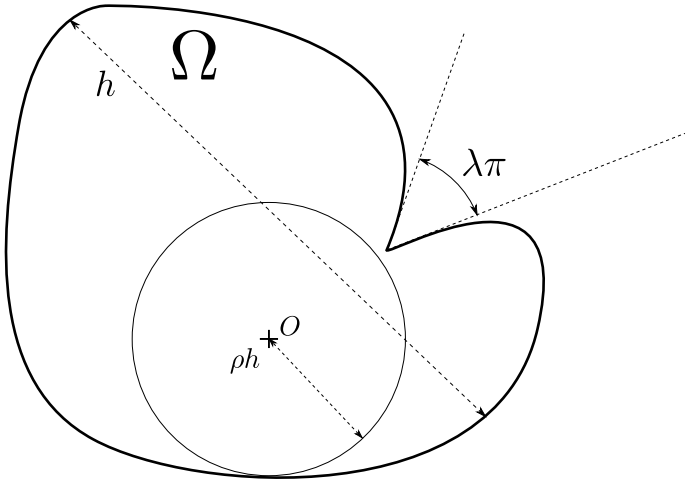

FIGURE 1.1 – Un domaine répondant aux conditions du théorème 1.3

1.3 Approximation dans les espaces de Sobolev

Melenk [Mel99] puis Moiola et al. [MHP11b, MHP11a], ont précisé les propriétés des approximations données par Vekua dans le cas particulier de l'équation d'Helmholtz, c'est à dire le cas où $a = b = 0$ et $c = k^2$ constant. Voici l'esquisse de la preuve des bornes d'approximation dans les espaces de Sobolev. On suppose que le domaine considéré est un ouvert étoilé par rapport à l'origine (c'est à dire que tout point doit pouvoir être relié par un segment à l'origine sans sortir du domaine), de diamètre h, et que la boule de centre l'origine de rayon ρh y est incluse (on a donc $0 < \rho \leq 1/2$). On demande également que le domaine satisfasse la condition de cône extérieur d'angle $\lambda\pi$. Ceci signifie que pour tout point en dehors de Ω, il existe un cône d'angle au sommet $\lambda\pi$ n'intersectant pas Ω. En particulier, on a pour un domaine convexe $\lambda = 1$. Un domaine polygonal non-convexe dont l'angle au sommet maximal est $(1 + \alpha)\pi$ aura $\lambda = 1 - \alpha < 1$. Un domaine répondant à ces conditions est donné figure 1.1

On peut réécrire les opérateurs de Vekua sous une forme reliant les fonctions harmoniques, solutions de $\Delta\phi = 0$, et les solutions de l'équation d'Helmholtz :

$$V_1[\phi](x) = \phi(x) - \frac{\lambda|x|}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} J_1(\lambda|x|\sqrt{1-t})dt$$

$$V_2[\phi](x) = \phi(x) + \frac{\lambda|x|}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} I_1(\lambda|x|\sqrt{1-t})dt$$

J_1 est la fonction de Bessel d'ordre 1, I_1 la fonction de Bessel modifiée d'ordre 1 (cf. annexe A).

Ces opérateurs sont continus en norme H^p entre l'ensemble des solutions de l'équation d'Helmholtz et l'ensemble des fonctions harmoniques et réciproquement. En combinant cette propriété avec l'approximation de fonctions harmoniques par des polynômes harmoniques, on trouve des bornes sur l'erreur d'approximation d'une solution de l'équation d'Hehlmoltz par un polynôme harmonique généralisé :

Théorème 1.3. *(Moiola, Hiptmair, Perugia) Soit une solution u de l'équation d'Helmholtz avec un nombre d'onde k sur un domaine Ω du plan répondant aux conditions données plus haut, appartenant à $H^{K+1}(\Omega)$. Pour tout $L \geq K$, il existe un polynôme harmonique généralisé de degré au plus L tel que pour tout $j \leq K+1$,*

$$\|u - Q_L\|_{j,k} \leq C(1 + (kh)^{j+6})e^{3(1-\rho)kh/4} \left(\frac{\log(L+2)}{L+2}\right)^{\lambda(K+1-j)} \|u\|_{K+1,k}$$

Remarque 1.4. Les normes utilisées sont légèrement différentes que celle qu'utilisent Moiola et al.. Elles sont définies par

$$\|u\|_{p,k}^2 = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{k^{2j}} \sum_{\substack{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbf{N} \\ \alpha_1+\alpha_2\leq p}} \int_\Omega |D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} u|^2 dx$$

Elles sont la somme des énergies de u et de ses dérivées jusqu'à l'ordre p. Le facteur $1/k^{2j}$ sert à remettre à niveau les différentes contributions des dérivées. La fonction u étant solution de l'équation d'Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$, dériver deux fois revient très grossièrement à multiplier par k^2, effet compensé par ces poids.

Remarque 1.5. La borne du théorème 1.3 croît exponentiellement en fonction du produit kh, alors que sa convergence en L n'est qu'algébrique. Au fur et à mesure que la fréquence k augmente, l'ordre des polynômes harmoniques généralisés nécessaire pour conserver la même qualité d'approximation devrait donc être exponentiel en fonction de k. Or, dans les applications des chapitres suivants, un ordre L proportionnel au produit kh est suffisant. Ceci est dû au fait que dans ces cas, les fonctions à approximer n'ont pas de singularités (modes propres dans des domaines analytiques, domaine d'intêret strictement inclus dans le domaine où la fonction vérifie l'équation, etc.). Dans ce cas, la convergence de l'approximation d'une fonction harmonique par un polynôme harmonique est exponentielle en L (cf. [Mel99] section 2.5). La rapidité de la convergence dépend également de la forme du domaine, ainsi que de la distance entre le domaine et la plus proche singularité de la prolongation de la solution en dehors de ce domaine. Ceci permettrait de compenser le terme $e^{3(1-\rho)kh/4}$ provenant de la continuité des opérateurs de Vekua, au moins dans les cas qui se sont présentés à nous.

En utilisant les identités de Bessel et de Jacobi-Anger (cf. annexe A), on peut étendre ce résultat aux ondes planes :

Théorème 1.6. *(Moiola, Hiptmair, Perugia) Soit une solution u de l'équation d'Helmholtz avec un nombre d'onde k sur un domaine Ω du plan répondant aux conditions données plus haut, appartenant à $H^{K+1}(\Omega)$. On prend $q \geq 1$, $p = 2q+1$ et p ondes planes $e^{i\mathbf{k}_l\cdot\mathbf{x}}$ avec des vecteurs d'onde $\mathbf{k}_l$ répartis uniformément sur le cercle de rayon k.*

Alors pour tout L vérifiant

$$0 \leq K \leq L \leq q \quad et \quad L - K \leq \left\lfloor \frac{q-1}{2} \right\rfloor$$

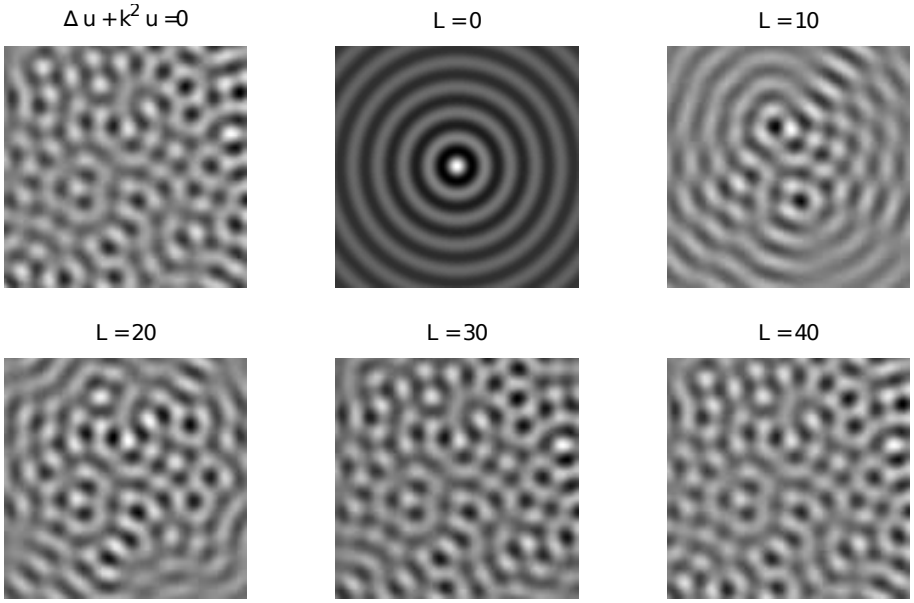

FIGURE 1.2 – Une solution de l'équation d'Helmholtz et ses approximations par des polynômes harmoniques généralisés d'ordres croissants

il existe des coefficients α_l *tels que si* $0 \leq j \leq K$,

$$\left\| u - \sum_{l=1}^{p} \alpha_l e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{x}} \right\|_{j,k} \leq C e^{(7/4-3\rho/4)kh} (1 + (kh)^{q+j-K+8}) \cdots$$

$$\cdots \left(\left(\frac{\log(L+2)}{L+2} \right)^{\lambda(K+1-j)} + \left(\frac{2}{\rho} \right)^{L} \sqrt{\frac{L+1}{q+1}} \left(\frac{e^{5/2}}{2\sqrt{2}\sqrt{q+1}} \right)^{q} \right) \|u\|_{K+1,k}$$

Si de plus, on a $q \geq 2K+1$, *alors*

$$\left\| u - \sum_{l=1}^{p} \alpha_l e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{x}} \right\|_{j,k} \leq C e^{(7/4-3\rho/4)kh} (1 + (kh)^{q+j-K+8}) \cdots$$

$$\cdots \left(\left(\frac{2\log(q+2)}{q+2} \right)^{\lambda(K+1-j)} + (4e^{-1}\rho)^{-q/2} \right) \|u\|_{K+1,k}$$

Ces résultats peuvent être résumés simplement de la façon suivante pour le cas d'un domaine convexe : une solution de l'équation d'Helmholtz ayant ses dérivées jusqu'à l'ordre p d'énergie finie peut, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre q ($q < p$), peut être approximée par un polynôme harmonique généralisé ou une somme d'ondes planes. La convergence de cette approximation est algébrique, d'ordre $p - q$.

Sur la figure 1.2 est donnée une fonction solution de l'équation d'Helmholtz mesurée expérimentalement. Ses approximations par des polynômes harmoniques généralisés d'ordre L (c'est-à-dire par des sommes de fonctions de Fourier-Bessel d'ordres de $-L$ à L) sont données. Comme on le voit sur ces figures, la solution est bien approximée sur un disque de rayon croissant avec L. Ajouter des fonctions de Fourier-Bessel non seulement permet d'agrandir ce cercle, mais également d'améliorer l'approximation à l'intérieur de celui-ci.

Cas de la dimension 3

Des résultats analogues sont obtenus en dimension 3, en utilisant les harmoniques sphériques et en remplaçant les fonctions de Bessel par les fonctions de Bessel sphériques. L'approximation en ondes planes est également possible, en prenant les vecteurs d'onde sur une sphère. Ces résultats ne seront pas utilisés dans la suite de cette thèse, les développements théoriques et expérimentaux actuels se limitant au cas de la dimension 2.

1.4 Démonstrations alternatives

La démonstration présentée ci-dessus donne des bornes précises. Il est cependant utile de présenter quelques démonstrations différentes, permettant de voir le problème sous un autre angle.

1.4.1 Le cas particulier du disque

Cette première démonstration est basée sur la décomposition en série de Fourier sur le bord du disque de la solution. Elle est dûe à Perrey-Debain [PD06]. Les résultats sont donnés en norme uniforme. Une solution au sens faible u de 1.1 est au moins dans H^1, sa trace g sur le bord du disque est donc dans L^2, et admet une représentation en série de Fourier :

$$g = \sum \hat{g}_n e^{in\theta}.$$

Si k n'est pas une fréquence propre du cercle, on peut alors écrire

$$u = \sum \hat{g}_n \frac{J_n(kr)}{J_n(kR)} e^{in\theta}$$

À partir du rang $n_0 = \lceil kR \rceil$, les fonctions de Bessel sont strictement croissantes sur $[0, 1]$. L'erreur d'approximation par un polynôme harmonique généralisé d'ordre N u_N en norme uniforme peut donc être facilement bornée :

$$||u - u_N||_{L^\infty} = \max \left| \sum_{|n|>N} \hat{g}_n \frac{J_n(kr)}{J_n(kR)} e^{in\theta} \right| < \sum_{|n|>N} |\hat{g}_n|.$$

La convergence de l'approximation dépend du comportement des coefficients $\hat{g}_n$, comportement qui dépend lui-même de la régularité de g, qui, enfin, dépend de la régularité de u. Plus clairement, plus u est régulière, plus vite l'approximation converge.

Pour obtenir une approximation en somme d'ondes planes, les fonctions de Fourier-Bessel sont elles-mêmes approximées en utilisant la formule de Jacobi-Anger.

On a alors ce résultat :

Théorème 1.7. *Soit u une solution de l'équation d'Helmholtz dans le disque unité, avec pour nombre d'onde k. Soit $Q > 2k$, tel que $I = [k, Q-k] \cap \mathbf{N}$ soit non vide.*

Alors il existe une somme $\tilde{u}$ de Q ondes planes, aux vecteurs d'ondes régulièrement espacés sur le cercle de rayon k, tel que

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty} < \min_{N \in I} \left(\sum_{|n|>N} |\hat{g}_n| + \frac{2\beta_N^Q J_{Q-N}(k)}{\beta_N^Q - 1} \sum_{|n|\leq N} \left| \frac{\hat{g}_n}{J_n(k)} \right| \right)$$

où $\beta_N = (Q-N)/k$, et $\hat{g}_n$ sont les coefficients de la série de Fourier de la trace de u sur le cercle unité.

La faiblesse de ce résultat est évidemment la présence des coefficients $\hat{g}_n$ dans la borne, et non de la norme de u. Certaines idées seront toutefois réutilisées dans des démonstrations du chapitre 4.

1.4.2 Développement de Taylor

La démonstration de Céssenat et Després [CD98] utilise les développements de Taylor. Au voisinage d'un point, une fonction peut être localement approximée par un polynôme. Si de plus, elle est solution d'une équation différentielle, on peut en déduire des relations sur les coefficients de ce polynôme. Dans le cas de l'équation d'Helmholtz, les coefficients devant les termes $x^n y^m$, $x^{n+2} y^m$ et $x^n y^{m+2}$ sont linéairement dépendants. Les $p(p+1)/2$ coefficients des polynômes approximant les solutions à l'ordre p n'ont donc que $2p+1$ degrés de liberté. En choisissant $2p+1$ ondes planes telles que les polynômes les approximant forment une famille libre de l'espace de ces polynômes, on obtient une base de cet espace. L'erreur d'approximation entre une solution de l'équation d'Helmholtz et la meilleure somme d'ondes planes est donc l'erreur d'approximation de la solution par un polynôme d'ordre p, plus la même erreur pour les ondes planes. On peut faire tendre cette erreur vers 0 en augmentant l'ordre des polynômes, et donc le nombre d'ondes planes, ou en diminuant la taille du domaine considéré (option qui ne nous intéresse pas, la taille de nos domaines étant fixée).

1.4.3 Fonctions de Herglotz

Une dernière démonstration, d'un résultat plus faible, a été donnée par Colton et Kress [CK01]. Ils montrent que les fonctions de Herglotz, c'est à dire les transformées de Fourier inverse de fonctions à support sur un cercle de centre l'origine, L_2 sur ce cercle, restreintes à un domaine borné sont denses au sens de la norme H^1 dans l'ensemble des solutions H^1 de l'équation d'Helmholtz sur ce domaine. Ces résultats ne donnent pas d'indications sur la convergence des approximations.

1.5 Méthode des solutions fondamentales

Une autre méthode d'interpolation de solutions de l'équation d'Helmholtz, assez populaire, est la méthode des solutions fondamentales (Method of Fundamental Solutions, MFS) [FK98]. Elle consiste à choisir des points sources autour du domaine où approximer la fonction, et à construire une famille de fonctions, prises comme

des solutions fondamentales de 1.1 centrées sur les points sources. Les points sources sont généralement pris sur une courbe entourant le domaine. Un premier problème de cette méthode est, comme pour les ondes planes, qu'augmenter le nombre de sources conduit à rapprocher les points sources. Les solutions fondamentales centrées sur des points proches vont donc se ressembler de plus en plus, ce qui sera nuisible pour le conditionnement de la méthode. De plus, le choix de la courbe sur laquelle prendre les points peut-être difficile, et a des conséquences assez importantes sur la convergence de l'approximation. Celle-ci peut en effet être exponentielle ou en racine du nombre de sources, suivant la distance entre les sources et le domaine, et entre le domaine et de possibles singularités du prolongement de u autour du domaine[BB08].

Cette méthode ne sera donc pas utilisée par la suite.

1.6 Conclusion

La théorie de Vekua permet d'obtenir des résultats précis sur la convergence des approximations de solutions de l'équation d'Helmholtz par des polynômes harmoniques généralisés ou par des sommes d'ondes planes. Ces approximations sont bien plus générales que celles généralement utilisées en acoustique, qui se limitent aux cas du disque ou de la sphère. Ceci permet une plus grande souplesse dans la conception des méthodes expérimentales, comme on le verra plus précisement au chapitre 8.

Nous utiliserons ces résultats dans les chapitres suivants, soit directement, soit en les étendant à d'autres modèles de vibrations, tels que les modèles de Kirchhoff-Love et de Reissner-Mindlin au chapitre suivant.

Chapitre 2

Approximation de solutions de modèles de plaques

Les résultats de la partie précédente sont pertinents pour traiter l'équation des ondes scalaire, donc la vibration des membranes, en dimension 2, et l'acoustique, en dimension 3. Ils permettent également, après quelques manipulations, de traiter des modèles plus complexes, tels que les équations de Maxwell ou de l'élasticité comme l'a fait Moiola [Moi11] et ses collègues [HMP11]. Nous rappelons ici ses résultats sur l'élasticité, et donnons les résultats analogues pour l'approximation en polynômes harmoniques généralisés des solutions des modèles de Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin, modèles standards pour les plaques.

Les différents modèles utilisés sont exposés dans bon nombre d'ouvrages, par exemple dans [Yu96].

2.1 Approximation de solutions du système de l'élasticité

Dans le cadre de l'élasticité linéaire et en régime harmonique, le déplacement $\mathbf{u}$ est, dans l'hypothèse d'un milieu homogène et sans forces extérieures, solution de l'équation

$$(\lambda + 2\mu)\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mu\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + \omega^2\rho\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

où λ et μ sont les constantes de Lamé, dépendantes du matériau, ρ la densité de ce matériau et ω la pulsation. L'approximation de $\mathbf{u}$ est basée sur la décomposition d'Helmholtz de $\mathbf{u}$, comme somme du rotationnel d'un potentiel vecteur et du gradient d'un potentiel scalaire. Ces deux composantes représentent respectivement les ondes de cisaillement et les ondes de compression. Les nombres d'ondes de ces deux composantes, notés k_s et k_p, sont respectivement

$$k_s = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}, \quad k_p = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}$$

Les potentiels χ et $\boldsymbol{\psi}$ sont définis par

$$\chi = -\frac{1}{k_p^2}\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\psi} = \frac{1}{k_s^2}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}$$

On vérifie aisément que

$$\mathbf{u} = -\frac{\lambda+2\mu}{\omega^2\rho}\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \frac{\mu}{\omega^2\rho}\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{u} = \mathbf{grad}\,\chi + \mathbf{rot}\,\psi$$

et que

$$\Delta\chi + k_p^2\chi = 0$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\psi} = 0, \quad \Delta\boldsymbol{\psi} + k_s^2\boldsymbol{\psi} = 0$$

Le potentiel scalaire χ rend compte des ondes de compression, tandis que les ondes de cisaillement sont représentées par le potentiel vecteur $\boldsymbol{\psi}$.

Ces deux potentiels, solutions de l'équation d'Helmholtz, peuvent donc être approximés par des sommes d'ondes planes. Le gradient ou le rotationnel d'une onde plane étant encore une onde plane, le champ de déplacement $\mathbf{u}$ peut donc être approximé par une somme d'ondes planes. Celles-ci sont réparties en deux catégories. Pour chaque direction, on aura en effet une onde plane de compression, dont le mouvement se situe dans l'axe du vecteur d'onde, de norme k_p, et deux ondes de cisaillement, pour lesquelles le mouvement se situe dans le plan orthogonal à leur vecteur d'onde, cette fois de longueur k_s.

Le résultat obtenu par Moiola [Moi11] est le suivant :

Théorème 2.1. *Soit Ω un domaine de $\mathbf{R}^3$ vérifiant les conditions de la section 1.3, K et q deux entiers, avec $q \geq 2K+1$, $q \geq 2(1+2^{1/\lambda_\Omega})$ où λ_Ω est un paramètre dépendant de la forme de Ω (égal à 1 si Ω est convexe). Il existe alors un ensemble de $p = (q+1)^2$ directions sur la sphère telles pour toute solution $\mathbf{u}$ du modèle de l'élasticité dans*

$$H^{K+1}(\mathrm{div}\,,\Omega)\cap H^{K+1}(\mathbf{rot}\,,\Omega) = \left\{\mathbf{v}\in H^{K+1}(\Omega)^3, \mathrm{div}\,\mathbf{v}\in H^{K+1}(\Omega) \text{ et } \mathbf{rot}\,\mathbf{v}\in H^{K+1}(\Omega)^3\right\}$$

il existe une combinaison $\tilde{\mathbf{u}}$ de p ondes planes de compression et $2p$ ondes planes de cisaillement telles que pour $1 \leq j \leq K$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}\|_{j-1,k_s,\Omega} \;\leq\; & C\left(1+(k_sh)^{q+j-K+8}\right)e^{(7/4-3/4\rho)k_sh}(k_sh)^{K+1-j}\left(q^{-\lambda_\Omega(k+1-j)}+(\rho q)^{-(q-3)/2}M\right)\\ & \left(k_p^{-2}\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|_{K+1,k_p}+k_s^{-2}\|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}\|_{K+1,k_s}\right).\end{aligned}$$

La constante $C>0$ dépend de j, K, et de la forme de Ω uniquement. M est une constante bornée par $2\sqrt{\pi}p$.

La modélisation de la flexion de plaque peut passer par l'utilisation du modèle de l'élasticité linéaire, en considérant la plaque comme un milieu de dimension 3 d'épaisseur constante. Cependant, dans la plupart des applications, le modèle peut être réduit à deux dimensions, ce qui simplifie de façon significative la modélisation. Nous nous intéressons ici à deux modèles de flexion : le modèle de Kirchhoff-Love pour les plaques minces, ainsi que le modèle de Reissner-Mindlin, plus sophistiqué mais plus fidèle pour les plaques épaisses. Des résultats d'approximation en polynômes harmoniques généralisés semblables au théorème 1.3 sont donnés dans les sections suivantes pour ces deux modèles.

On appelera *polynôme harmonique généralisé de paramètre* λ une somme de fonctions de Fourier-Bessel solution de l'équation d'Helmholtz $\Delta P - \lambda P = 0$. Le cas du chapitre précédent correspond à un λ négatif. Si λ est positif, on dira, par analogie avec les fonctions des Bessel modifiées, que le polynôme harmonique généralisé est modifié.

2.2 Approximation de solutions du modèle de Kirchhoff-Love

Pour modéliser les plaques, notamment les plaques fines au sens où leurs épaisseurs sont nettement plus petites que les longueurs d'ondes mises en jeu, il paraît inefficace de considérer la dépendance du champ en fonction des trois dimensions. Le modèle de Kirchhoff-Love [Yu96] permet donc réduire le nombre de variables spatiales à 2. Dans ce modèle, le champ de déplacement $\mathbf{u}$ est supposé être de la forme

$$\begin{cases} u_x(x,y,z,t) = -z\frac{\partial w}{\partial x} \\ u_y(x,y,z,t) = -z\frac{\partial w}{\partial y} \\ u_z(x,y,z,t) = w(x,y,t) \end{cases}$$

Le déplacement est modélisé par une unique fonction scalaire w de deux variables d'espace. On montre qu'en régime harmonique, w est solution de

$$D\Delta^2 w + T\Delta w - \rho h\omega^2 w = 0. \tag{2.1}$$

où D est la rigidité du matériau, T représente la tension éventuellement appliquée sur les bords de la plaque, h est l'épaisseur de la plaque, ρ sa masse volumique. Pour obtenir des résultats sur l'approximation de solutions de cette équation, nous allons nous ramener au cas de l'équation d'Helmholtz. L'astuce consiste à décomposer les solutions de 2.1 comme sommes de deux solutions de l'équation d'Helmholtz, dont les paramètres sont déduits de ceux de 2.1.

Les résultats sont démontrés pour un cas un peu plus général où le terme devant w peut être positif. Ceci servira pour le modèle de Reissner-Mindlin. La première étape consiste à décomposer w comme somme de deux solutions de l'équation d'Helmholtz.

Lemme 2.2. *Soit w une solution, de $\Delta^2 w + a\Delta w + bw = 0$ au sens des distributions, (dont l'équation 2.1 est un cas particulier). Alors, w se décompose comme somme d'une solution w_1 de $\Delta w_1 - \lambda_1 w_1 = 0$ et d'une solution w_2 de $\Delta w_1 - \lambda_2 w_2 = 0$, où λ_1 et λ_2 sont les zéros du polynôme $\lambda^2 + a\lambda + b$, dont on suppose le discriminant strictement positif.*

De plus, si $w \in H^{K+2}$, on a

$$||w_1||_{K,k_1} \leq \frac{2k_+^2}{\delta_\lambda}||w||_{K+2,k_1} \tag{2.2}$$

$$||w_2||_{K,k_2} \leq \frac{2k_+^2}{\delta_\lambda}||w||_{K+2,k_2}. \tag{2.3}$$

où $k_1 = \sqrt{|\lambda_1|}$ et $k_2 = \sqrt{|\lambda_2|}$, k_+ désignant le plus grand des deux, et $\delta_\lambda = \sqrt{a^2 - 4b}$ la différence entre λ_1 et λ_2

Démonstration. Analyse : en admettant la décomposition, on trouve

$$\begin{aligned} \Delta w - \lambda_2 w &= (\Delta w_1 - \lambda_2 w_1) + (\Delta w_2 - \lambda_2 w_2) && (2.4)\\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) w_1 + 0 && (2.5) \end{aligned}$$

Après un calcul analogue pour w_2, on trouve

$$w_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\Delta w - \lambda_2 w), \quad w_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\Delta w - \lambda_1 w).$$

Synthèse : on vérifie tout d'abord que $w = w_1 + w_2$:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\Delta w - \lambda_2 w) - (\Delta w - \lambda_1 w) && (2.6)\\ &= w && (2.7) \end{aligned}$$

Puis que w_1 vérifie bien $\Delta w_1 - \lambda_1 w_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta w_1 - \lambda_1 w_1 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left((\Delta^2 w - \lambda_2 \Delta w) - (\lambda_1 \Delta w - \lambda_1 \lambda_2 w)\right) && (2.8)\\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\Delta^2 w - (\lambda_2 + \lambda_1)\Delta w + \lambda_1 \lambda_2 w\right) && (2.9)\\ &= 0 && (2.10) \end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que λ_1 et λ_2 sont les zéros du polynôme $\lambda^2 + b\lambda + c$. Le même calcul montre que w_2 vérifie $\Delta w_2 - \lambda_2 w_2 = 0$.

Enfin, si $w \in H^{K+2}$, alors

$$\begin{aligned} \|w_1\|_{K,k_1} &\leq \frac{1}{|\lambda_1 - \lambda_2|}\left(\|\Delta w\|_{K,k_1} + \lambda_2 \|w\|_{K,k_1}\right) && (2.11)\\ &\leq \frac{1}{\delta_\lambda}\left(k_1^2 \|w\|_{K+2,k_1} + k_2^2 \|w\|_{K+2,k_1}\right) && (2.12)\\ &\leq \frac{2k_+^2}{\delta_\lambda}\|w\|_{K+2,k_1} && (2.13) \end{aligned}$$

Le calcul est identique pour w_2. □

Remarque 2.3. Dans le cas de l'équation 2.1 sans précontrainte, i.e. $T = 0$, on a $k_1 = k_2 = (\rho h/D)^{1/4}\sqrt{\omega} = k$, $\delta_\lambda = 2k^2$ et le résultat devient simplement

$$||w_1||_{K,k} \leq ||w||_{K+2,k}, \quad ||w_2||_{K,k} \leq ||w||_{K+2,k}.$$

Remarque 2.4. Deux ordres sont perdus dans les majorations 2.2 et 2.3 : la norme d'ordre K des deux composantes de w est bornée par sa norme d'ordre $K + 2$. Il est cependant impossible, dans le cas général, de faire mieux. Considérons, dans un secteur de disque de centre l'origine, la fonction f définie en coordonnées polaires par $f = e^{i\theta/2}(J_{1/2}(r) - I_{1/2}(r))$. Cette fonction est solution de l'équation $\Delta^2 w - w = 0$. Elle se décompose en $f_1 = e^{i\theta/2} J_{1/2}(r)$, qui vérifie $\Delta f_1 + f_1 = 0$, et $f_2 = -e^{i\theta/2} I_{1/2}(r)$, qui vérifie elle $\Delta f_2 - f_2 = 0$. Ces deux fonctions ont une dépendance radiale à l'origine de l'ordre de $r^{1/2}$ (cf. propriétés des fonctions de Bessel, annexe A) et ne sont donc pas dans H^3. Ces termes, lorsque f_2 est soustraite à f_1, se compensent, et f se comporte, à l'origine, comme $r^{5/2}$, et est dans H^4.

Si λ_1, ou λ_2, est négatif, la composante correspondante de w peut être approximée par un polynôme harmonique généralisé ou par des ondes planes en utilisant les résultats du chapitre précédent. Il en est de même si λ_1, ou λ_2, est positif, avec deux familles légèrement différentes. La première, au lieu de fonctions de Bessel J_n, fait intervenir les fonctions de Bessel modifiées I_n. C'est donc une approximation par un polynôme harmonique généralisé modifié. La deuxième utilise des fonctions exponentielles $e^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ au lieu des ondes planes. Les résultats d'approximation sont quasiment identiques.

Théorème 2.5. *Soit un domaine Ω vérifiant les hypothèses de la section 1.3, $K \geq 1$ entier, et $w \in H^{K+2}$ satisfaisant les conditions du lemme 2.2. Alors pour tout $L > K$, il existe deux polynômes harmoniques généralisés P_L et Q_L de paramètres λ_1 et λ_2, de degré au plus L tels que, pour tout $j \leq K$,*

$$\|w-(P_L+Q_L)\|_{j,k_+} \leq C\frac{k_+^2}{\delta_\lambda}(1+(k_+h)^{j+6})e^{\frac{3}{4}(3-\rho)k_+h}\left(\frac{\ln(L+2)}{L+2}\right)^{\lambda(K-j)}(k_+h)^{K-j}\|w\|_{K+2,k_-},$$

où k_- est le plus petit de k_1 et k_2. Si λ_1 et λ_2 sont tous deux négatifs, la borne peut être divisée par $e^{3/2k_+h}$.

Démonstration. La première étape est de décomposer w en utilisant le lemme 2.2. En utilisant le théorème 2.2.1.ii et la remarque 1.2.6 tirés de [MHP09], on peut approximer ces deux composantes par des polynômes harmoniques généralisés, modifiés si le paramètre λ de l'équation d'Helmholtz associé est positif. Prenons, pour fixer les idées, le cas particulier où $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, avec $|\lambda_2| > |\lambda_1|$. Les autres cas se traitent de la même manière. On a

$$\begin{aligned}
\|w-(P_L+Q_L)\|_{j,k_+} &\leq \|w_1\|_{j,k_+} + \|w_2\|_{j,k_+} \\
&\leq \|w_1\|_{j,k_1} + \|w_2\|_{j,k_2} \\
&\leq C(1+(k_1h)^{j+6})e^{\frac{3}{4}(1-\rho)k_1h}\left(\frac{\ln(L+2)}{L+2}\right)^{\lambda(K-j)}(k_1h)^{K-j}\|w_1\|_{K,k_1} \\
&\quad +C(1+(k_2h)^{j+6})e^{\frac{3}{4}(3-\rho)k_2h}\left(\frac{\ln(L+2)}{L+2}\right)^{\lambda(K-j)}(k_2h)^{K-j}\|w_1\|_{K,k_2} \\
&\leq C\frac{k_+^2}{\delta_\lambda}(1+(k_+h)^{j+6})e^{\frac{3}{4}(3-\rho)k_+h}\left(\frac{\ln(L+2)}{L+2}\right)^{\lambda(K-j)}(k_+h)^{K-j}\|w\|_{K+2,k_-}
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.6. Pour les plaques sans précontrainte, le résultat est légèrement plus simple. Le produit des racines du polynômes, valant $\rho h\omega^2/D$, étant toujours positif, celles-ci sont de signes distincts, et la tension étant nulle, de même valeur absolue. On a donc

$$\|w-(P_L+Q_L)\|_{j,k} \leq C(1+(kh)^{j+6})e^{\frac{3}{4}(3-\rho)kh}\left(\frac{\ln(L+2)}{L+2}\right)^{\lambda(K-j)}(kh)^{K-j}\|w\|_{K+2,k}.$$

2.3 Modèle de Reissner-Mindlin

Le modèle de Kirchhoff-Love rend bien compte des vibrations de plaques à basses fréquences, mais devient de moins en moins fidèle quand la fréquence augmente. Le modèle de Reissner-Mindlin, qui ne néglige pas l'inertie en rotation de la plaque, doit alors être utilisé. Il nécessite, en plus du déplacement w, la prise en compte de l'angle de rotation des fibres de la plaques, qui n'est plus directement relié au déplacement comme dans le modèle de Kirchhoff-Love. Cet angle de rotation sera ici noté β_x suivant la direction x, et β_y suivant l'axe y, ou de façon plus compacte comme un vecteur à deux composantes $\boldsymbol{\beta}$.

Le déplacement (u_x, u_y, u_z) s'écrit en fonction de ces paramètres (en linéarisant l'effet de la rotation)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x(x,y,z,t) = -z\beta_x(x,y,t) \\ u_y(x,y,z,t) = -z\beta_y(x,y,t) \\ u_z(x,y,z,t) = w(x,y,t) \end{array} \right.$$

La modélisation du mouvement des plaques à plus hautes fréquences nécessite l'utilisation du modèle de l'élasticité linéaire complet. En effet des modes de propagation plus complexes, appelés modes de Lamb, dépendant également de la coordonnée z, apparaissent.

Les équations du mouvement dans le modèle de Reissner-Mindlin s'écrivent [Yu96, RW04] :

$$\left\{ \begin{array}{l} D\left(\mathbf{grad}\ \operatorname{div}\boldsymbol{\beta} - \frac{1-\nu}{2}\mathbf{rot}\ \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}\right) + \mu h(\mathbf{grad}\, w - \boldsymbol{\beta}) - \rho I\boldsymbol{\beta}'' = 0 \\ \mu h \operatorname{div}(\mathbf{grad}\, w - \boldsymbol{\beta}) - \rho h w'' = 0 \end{array} \right.$$

où ν est le coefficient de Poisson du matériau, $I = h^3/12$, et $\mu = G\kappa$, G étant le module de cisaillement du matériau, et κ un facteur correctif, souvent pris comme égal à 5/6. Les modes propres, ou plus généralement les solutions harmoniques de ces équations, vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} D\left(\mathbf{grad}\ \operatorname{div}\boldsymbol{\beta} - \frac{1-\nu}{2}(\mathbf{rot}\ \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}\right) + \mu h(\mathbf{grad}\, w - \boldsymbol{\beta}) + \omega^2\rho I\boldsymbol{\beta} = 0 \\ \mu h \operatorname{div}(\mathbf{grad}\, w - \boldsymbol{\beta}) + \omega^2\rho h w = 0 \end{array} \right. \tag{2.14}$$

Comme pour le modèle de Kirchoff-Love, la première étape de l'approximation est la décomposition des solutions de 2.14 en sommes de fonctions solutions de l'équation d'Helmholtz.

Lemme 2.7. *Les solutions $(w, \boldsymbol{\beta})$ de 2.14, en dehors d'une fréquence particulière appelée fréquence de coupure, se décomposent de la façon suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} w & = & w_1 + w_2 \\ \boldsymbol{\beta} & = & \left(1 + \frac{\omega^2\rho}{\mu\lambda_1}\right)\mathbf{grad}\, w_1 + \left(1 + \frac{\omega^2\rho}{\mu\lambda_2}\right)\mathbf{grad}\, w_2 + \mathbf{rot}\,\psi \end{array} \right. \tag{2.15}$$

où w_1 et w_2 sont solutions de l'équation d'Helmholtz $\Delta u - \lambda_{1,2}u = 0$ où $\lambda_{1,2}$ est un des zéros du polynôme

$$D\lambda^2 - \left(\frac{D\rho}{\mu} + \rho I\right)\lambda + \left(\frac{\rho^2 I}{\mu}\omega^2 - h\rho\omega^2\right) \tag{2.16}$$

et ψ est solution de l'équation d'Helmholtz $\Delta\psi - \lambda_3\psi = 0$ avec $\lambda_3 = -\frac{I\omega^2 - \mu h}{D(1-\nu)}$.

Démonstration. La démonstration est basée sur la décomposition d'Helmholtz de $\boldsymbol{\beta}$, c'est à dire comme la somme d'un gradient et d'un rotationnel : $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{grad}\,\phi + \mathbf{rot}\,\psi$. Elle est sembable à celle de [RW04]. En remplaçant $\boldsymbol{\beta}$ par cette décomposition, on trouve trois équations, où le champ rotationnel est découplé du champ gradient et de w :

$$\begin{cases} D\Delta^2\phi_0 - \mu h\Delta\phi_0 + \omega^2\rho I\Delta\phi_0 + \mu h\Delta w = 0 \\ -\Delta\phi_0 + \Delta w + \omega^2\frac{\rho}{\mu}w = 0 \\ D\frac{1-\nu}{2}\Delta^2\psi_0 - \mu h\Delta\psi_0 + \omega^2\rho I\Delta\psi_0 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant $\Delta\phi$ dans la première équation par sa valeur en fonction de w donnée par la deuxième, on obtient une équation sur w :

$$D\Delta^2 w + \omega^2\left(\frac{D\rho}{\mu} + \rho I\right)\Delta w + \left(\omega^4\frac{\rho^2 I}{\mu} - \omega^2 h\rho\right)w = 0$$

La décomposition pour w est obtenue en appliquant le lemme 2.2, en remarquant que le discriminant δ du polynôme 2.16 est positif :

$$\begin{aligned} \delta &= \left(\left(\frac{D^2\rho^2}{\mu} + \rho I\right)\omega^2\right)^2 - 4D\left(\omega^4\frac{\rho^2 I}{\mu} - \omega^2 h\rho\right) \\ &= \left(\left(\frac{D^2\rho^2}{\mu} - \rho I\right)\omega^2\right)^2 + 4D\omega^2 h\rho \\ &> 0 \end{aligned}$$

Le champ ϕ_0 est solution de

$$\Delta\phi_0 = \Delta w + \omega^2\frac{\rho}{\mu}w$$

Une solution particulière est

$$\phi_1 + \phi_2 = \left(1 + \frac{\omega^2\rho}{\mu\lambda_1}\right)w_1 + \left(1 + \frac{\omega^2\rho}{\mu\lambda_2}\right)w_2$$

La solution générale est l'ensemble des fonctions harmoniques, on a donc

$$\phi_0 = \phi_1 + \phi_2 + \phi_h$$

où ϕ_h est une fonction harmonique. Le champ ψ est lui solution de l'équation

$$D\frac{1-\nu}{2}\Delta^2\psi - \mu h\Delta\psi + \omega^2\rho I\Delta\psi = 0$$

De la même façon, ψ s'écrit

$$\psi = \psi_3 + \psi_h$$

où ψ_3 vérifie

$$D\frac{1-\nu}{2}\Delta\psi - \mu h\psi + \omega^2\rho I\psi = 0$$

et ψ_h est harmonique. Le vecteur $\boldsymbol{\beta}$ se décompose donc comme

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{grad}\,\phi_1 + \mathbf{grad}\,\phi_2 + \mathbf{rot}\,\psi_3 + \boldsymbol{\beta}_h$$

où $\boldsymbol{\beta}_h$ regroupe les termes harmoniques. Les sous-espaces des solutions de l'équation d'Helmholtz étant supplémentaires, on trouve en projetant l'équation du mouvement sur ces trois sous-espaces que

$$\mu h \boldsymbol{\beta}_h - \rho I \omega^2 \boldsymbol{\beta}_h = 0$$

$\boldsymbol{\beta}_h$ ne peut donc être non nulle seulement à la fréquence de coupure $\omega_c = \sqrt{\frac{\mu h}{\rho I}}$, cas que nous avons écarté. La décomposition finale de $\boldsymbol{\beta}$ est donc :

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{grad}\,\phi_1 + \mathbf{grad}\,\phi_2 + \mathbf{rot}\,\psi_3$$

On peut ensuite remplacer ϕ_1 et ϕ_2 par leurs valeurs en fonction de w_1 et w_2. □

L'approximation de w se déduit directement du théorème 2.5. L'approximation de la composante gradient se déduit directement de l'approximation de w. Elle fait donc intervenir les gradients de polynômes harmoniques généralisés. La partie rotationnelle est approximée par le rotationnel du polynôme harmonique généralisé qui approxime le potentiel ψ. On notera que le gradient et le rotationnel d'un polynôme harmonique généralisé de degré L font intervenir des fonctions de Fourier-Bessel d'ordre $L+1$. L'annexe A donne leurs expressions. L'approximation des coordonnées de $\boldsymbol{\beta}$ serait possible directement par des polynômes harmoniques généralisés, mais utiliser ces deux familles de fonctions permet que les approximations restent solutions du modèle de Reissner-Mindlin.

Théorème 2.8. *Soit une solution $(w, \boldsymbol{\beta})$ du modèle de Reissner-Mindlin. Alors il existe deux polynômes harmoniques généralisés P_L et Q_L de paramètres λ_1 et λ_2 de degré au plus L tels que*

$$\|w-(P_L+Q_L)\|_{j,k_+} \leq C\frac{k_+^2}{\delta_\lambda}(1+(k_+h)^{j+6})e^{\frac{3}{4}(3-\rho)k_+h}\left(\frac{\ln(L+2)}{L+2}\right)^{\lambda(K-j)}(k_+h)^{K-j}\|w\|_{K+2,k_-},$$

et un polynôme harmonique généralisé R_L, de degré au plus L et de paramètre λ_3 tel que

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{\beta} - \left(\left(1+\tfrac{\omega^2\rho}{\lambda_1\mu}\right)\mathbf{grad}\,P_L + \left(1+\tfrac{\omega^2\rho}{\lambda_2\mu}\right)\mathbf{grad}\,Q_L + \mathbf{rot}\,R_L\right)\|_{j,k_{++}}\\ &\leq C(1+(k_{++}h)^{j+6})e^{\frac{3}{4}(3-\rho)k_{++}h}\left(\tfrac{\ln(L+2)}{L+2}\right)^{\lambda(K-j)}(k_{++}h)^{K-j}\\ &\quad\left(\tfrac{k_+^2}{\delta_\lambda}\left(1+\tfrac{\omega^2\rho}{\mu\lambda_-}\right)\|w\|_{K+3,k_-} + \tfrac{1}{\lambda_3}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\beta}\|_{K+1,k_3}\right)\end{aligned}$$

où k_+ est le plus grand de k_1 et k_2, k_- le plus petit, et k_{++} le plus grand de k_+ et k_3.

Démonstration. Le résultat pour w est la simple application du théorème 2.5. On utilise ensuite ce résultat pour la partie gradient de $\boldsymbol{\beta}$: on a $\phi_1 = \left(1+\frac{\omega^2\rho}{\lambda_1\mu}\right)w_1$, donc

$$\|\mathbf{grad}\,\phi_1 - \left(1+\frac{\omega^2\rho}{\lambda_1\mu}\right)\mathbf{grad}\,P_L\|_{j,k_1} \leq \left(1+\frac{\omega^2\rho}{\lambda_1\mu}\right)\|w_1 - P_L\|_{j+1,k_1}.$$

On a le même résultat pour ϕ_2. Le résultat pour la somme est obtenu de façon analogue à la démonstration du théorème 2.5. Pour la partie rotationnelle, on vérifie

que $\psi = \frac{1}{\lambda_3}\mathbf{rot}\,\beta$. ψ est approximé par R_L, polynôme harmonique généralisé, qui vérifie

$$\|\psi - R_L\|_{j,k_3} \leq C\frac{1}{\lambda_3}(1+(k_3h)^{j+6})e^{\frac{3}{4}(3-\rho)k_3h}\left(\frac{\ln(L+2)}{L+2}\right)^{\lambda(K-j)}(k_3h)^{K-j}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\beta}\|_{K,k_3}$$

Le résultat final est obtenu en combinant ces deux approximations. □

2.4 Conclusion

Ces premiers résultats sur les plaques montrent que les vibrations de plaques, tant pour les modèle de Kirchhoff-Love que de Reissner-Mindlin, peuvent être approximées par des sommes de fonctions de Fourier-Bessel. Des résultats similaires peuvent également être obtenus pour les ondes planes. Il n'est cependant pas certain que les bornes obtenues soient les meilleures possibles. En particulier, les décompositions des solutions en sommes de solutions de l'équation d'Helmholtz font perdre des ordres de convergence. S'il est possible d'améliorer les convergences des approximations, cela ne peut se faire en utilisant les décompositions utilisées ici comme le montre la remarque 2.3, ce qui empêche l'utilisation des résultats pour les solutions de l'équation d'Helmholtz.

Les résultats obtenus pour le modèle de Kirchhoff-Love sont utilisés dans le chapitre suivant, pour remplacer l'approximation par éléments finis dans le calcul de modes propres de plaques.

Chapitre 3

Analyse modale numérique de plaques minces

La recherche des modes propres d'une structure est un problème classique en mécanique. Ces modes sont, du point de vue physique, des solutions de l'équation du système, qui peuvent s'exprimer comme produit d'une fonction de l'espace et d'une fonction du temps. Du point de vue mathématique, ce seront les vecteurs propres du laplacien (pour les membranes ou l'acoustique) ou du bilaplacien (pour les plaques minces), dans l'espace des fonctions suffisamment dérivables qui vérifient également les conditions aux bords :

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = 0 \\ \text{conditions aux limites} \end{cases} \tag{3.1}$$

en demandant également que ces fonctions soient non nulles.

Ces modes peuvent être obtenus de deux façons :

- soit expérimentalement, à partir de mesures obtenues en excitant la structure soit par une impulsion, soit harmoniquement. De nombreuses techniques ont été développées à cette fin. Nous nous intéresserons à ce problème dans les chapitre 6 et 7 ;
- soit analytiquement, dans certains cas particuliers (membranes carrées, circulaires, etc.) ;
- soit numériquement, l'objet de ce chapitre.

Après avoir présenté une méthode de calcul de référence, la méthode des éléments finis, nous présentons deux méthodes assez proches, basées sur la décomposition des modes propres suivant les principes présentés aux chapitre précédents. Notre travail a ici été d'appliquer cette méthode aux cas des plaques minces (modèle de Kirchhoff-Love).

3.1 Éléments finis

La méthode des éléments finis permet d'approximer le problème continu 3.1 par un problème discret à l'aide de deux outils :

- la formulation faible du problème 3.1, appelé, par opposition, formulation forte,

– l'approximation des fonctions par des fonctions linéaires par morceaux (voire de façon plus sophistiquée, polynomiales par morceaux).

On s'intéressera d'abord au cas des conditions aux limites de Dirichlet pour un domaine de bord lisse. Pour obtenir la formulation faible, on intègre les deux côtés de l'équation 3.1 contre une autre fonction v, appelée *fonction test* :

$$-\int_\Omega \Delta u v - \int_\Omega \lambda u v = 0.$$

Après intégration par parties, on obtient la formulation faible de 3.1 :

$$\int_\Omega \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, v - \lambda \int_\Omega uv = 0. \tag{3.2}$$

L'espace dans lequel on prendra u et v est H_0^1, c'est à dire la fermeture selon la norme H^1 de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ s'annulant sur le bord de Ω. C'est en effet dans cet espace que la formulation faible a un sens. On peut montrer que si une fonction u vérifie 3.2, alors elle est solution de la formulation forte, et est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le problème mis sous cette forme n'est cependant pas encore utilisable pour le calcul numérique (l'ensemble des fonctions considérées est même plus grand que pour la formulation forte).

L'espace H_0^1 est approximé par un espace d'éléments finis, noté V_h. Pour ce faire, Ω est maillé, c'est-à-dire découpé en triangles de petites tailles d'ordre h, et H_0^1 est alors approximé par l'espace engendré par les fonctions affines par morceaux, nulles sur tous les sommets du maillage sauf un (seulement les sommets intérieurs, les fonctions de H_0^1 étant nulles sur le bord). On cherche alors à résoudre le même problème 3.2, mais où cette fois u et v sont pris dans V_h. Après décomposition de u et de v sur une base (ϕ_i) de V_h, résoudre 3.2 se réduit à rechercher les solutions non nulles de

$$KU = \lambda MU$$

où K et M, respectivement matrice de raideur et matrice de masse, ont pour termes $k_{ij} = \int_\Omega \mathbf{grad}\, \phi_i \cdot \mathbf{grad}\, \phi_j$ et $m_{ij} = \int_\Omega \phi_i \phi_j$, et U est le vecteur des coordonnées de u dans la base ϕ_i. C'est un problème de valeurs propres généralisées, la symétrie de K et de M assure l'existence des vecteurs propres U_n et valeurs propres λ_n, que l'on peut obtenir par des méthodes de calcul classiques, si possible en tenant compte du fait que K et M sont creuses. Si V_h a une dimension suffisante (on considère généralement que dix éléments par longueur d'onde sont nécessaires), λ_n et $u_n = \sum \phi_i U_{n,i}$ sont des bonnes approximations des valeurs et vecteurs propres du problème continu, jusqu'à la longueur d'onde d'intérêt.

Cette méthode, bien que standard et bien comprise, présente cependant un inconvénient majeur : le calcul de modes de hautes fréquences propres nécessite une discrétisation très fine du domaine, et donc des systèmes numériques à résoudre de tailles très élevées. La méthode des solutions particulières vise à réduire la taille des systèmes numériques en utilisant les approximations du chapitre2.

3.2 Méthode des solutions particulières

Cette méthode (dans la suite abrégée en MPS pour *Method of Particular Solutions*), introduite dans l'article de Fox, Henrici et Moller [FHM67], dans le cas du

laplacien, est basée sur l'approximation de solutions de l'équation d'Helmholtz par des sommes de fonctions de Fourier-Bessel. Leur objectif était, avec des fonctions de Fourier-Bessel d'ordre fractionnaire, de traiter les singularités de coin pouvant apparaître dans un domain polygonal. Elle a ensuite été améliorée par Betcke et Trefethen [BT05] ainsi que Barnett et Berry [Bar00] indépendamment.

Contrairement à la méthode des éléments finis qui, pour les conditions aux limites de Dirichlet par exemple, cherche parmi H_1^0 les fonctions vérifiant également l'équation d'Helmholtz, cette méthode cherche parmi les vecteurs propres du laplacien pour diverses valeurs de k ceux qui vérifient également les conditions aux limites. Elle demande donc, pour chaque valeur de k testée, la construction d'une famille de fonctions dont les combinaisons linéaires approximent les solutions de l'équation d'Helmholtz. La comparaison avec la méthode des éléments finis, qui nécessite une seule discrétisation de H_1^0 pour trouver tous les modes propres jusqu'à une fréquence donnée, semble peu avantageuse. Cependant, deux propriétés intéressantes viennent modérer ce jugement :

- la taille des familles génératrices est sensiblement inférieure à la taille du maillage en éléments finis (en dimension deux et en première approche, linéaire en la fréquence pour la MPS, quadratique pour la FEM) ;
- la MPS permet la recherche de modes propres dans un intervalle donné de fréquence, alors que la FEM est contrainte de considérer tous les modes propres de fréquences inférieures à la fréquence maximale considérée.

Ceci rend donc cette méthode particulièrement intéressante pour la recherche de modes propres à hautes fréquences. Un autre point intéressant est la possibilité de prendre en compte les singularités de coin avec une famille génératrice bien choisie.

3.2.1 La méthode des solutions particulières originale

La première version de cette méthode, celle de Fox, Henrici et Moler, consiste tout d'abord à construire une famille génératrice de fonctions, que l'on notera par exemple $(u_n^k)_{0\leq n\leq N}$, sans la préciser pour l'instant. Cette famille doit pouvoir, quand N tend vers l'infini, approximer toutes les solutions de l'équation. Les fréquences propres sont obtenues en cherchant les valeurs de k pour lesquelles il existe une combinaison linéaire des u_n^k non nulle qui vérifie les conditions aux bords, au moins approximativement. Pour cela, on discrétise le bord du domaine par une suite de points $\mathbf{x}_i$. On range ensuite les valeurs des fonctions u_n^k dans une matrice U_k :

$$U_k = \begin{pmatrix} u_1^k(\mathbf{x}_1) & \cdots & u_n^k(\mathbf{x}_1) & \cdots & u_N^k(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_1^k(\mathbf{x}_i) & \cdots & u_n^k(\mathbf{x}_i) & \cdots & u_N^k(\mathbf{x}_i) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_1^k(\mathbf{x}_I) & \cdots & u_n^k(\mathbf{x}_I) & \cdots & u_N^k(\mathbf{x}_I) \end{pmatrix}.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une combinaison linéaire des u_n^k identiquement non nulle mais nulle sur le bord est la nullité du déterminant de U_k. En raison des diverses approximations faites (dimension finie de la famille génératrice, de la discrétisation du bord), on cherche les fréquences propres comme

minima locaux de la fonction D définie par

$$D(k) = \det U_k.$$

Plusieurs familles de fonctions génératrices peuvent être utilisées. Les ondes planes ou les fonctions de Fourier-Bessel conviennent au cas général. Dans leur article, Fox et al. [FHM67] s'intéressent à des cas particuliers, comme par exemple une membrane en L, qui présente un coin entrant d'angle $3\pi/2$. Des singularités se présentent donc en ce point, qui empêchent une bonne approximation par ondes planes ou fonctions de Fourier-Bessel, les modes propres, en particulier en basses fréquences, étant peu réguliers (i.e. ne sont plus dans H^p à partir d'un certain p peu élevé). Ils proposent donc de choisir pour famille de fonctions des fonctions de Fourier-Bessel d'ordre fractionnaire, qui vérifient déjà les conditions aux limites sur les deux segments formant le coin singulier [1].

Cette méthode, bien qu'excessivement simple à implémenter, présente un inconvénient majeur. La fonction à minimiser, le déterminant de U_k, devient en réalité proche de 0 pour quasiment toutes les valeurs de k quand la taille des familles augmente. Ceci est dû à leur conditionnement, de plus en plus médiocre à mesure que N augmente. Des combinaisons de ces fonctions, avec des coefficients non négligeables, peuvent donc approximer la fonction nulle, et donc être nulles sur les points considérés pour la construction de U_k, d'où la valeur très faible du déterminant. Ceci est un obstacle à l'obtention de hautes fréquences propres, ou d'estimations de bonne précision, même à basses fréquences.

Un autre inconvénient non négligeable de la méthode est l'utilisation de matrices carrées. Ceci force la dimension des espaces considérés et le nombre de points d'échantillonnage sur le bord à être égaux. La plage possible des tailles de familles génératrices étant limitée par le bas par la nécessité d'approximer de façon assez exhaustive les solutions de l'équation d'Helmholtz, et par le haut par les limitations décrites au paragraphe précédent, le nombre de points utilisés pour décrire le bord ne pourra pas donc être fixé à l'avance. Ceci implique qu'à basses fréquences, peu de points sont disponibles pour la description du domaine, limitant la précision des estimations des fréquences propres, même si la taille des familles génératrices est suffisante. Enfin, la distinction entre valeurs propres simples et multiples est impossible de façon simple, le comportement du déterminant étant semblable pour ces deux cas.

Application numérique

Des résultats numériques sont donnés dans un cas simple, une membrane carrée, mais permettant déjà de montrer les limites de la méthode indiquées dans la partie précédente.

La figure 3.1 donne le déterminant recherché, pour des valeurs faibles du nombre d'onde, avec deux valeurs $N = 32$ et $N = 64$. La plage de nombres d'onde où l'estimation est correcte comparée aux résultats analytiques est indiquée. Comme

1. Pour l'anecdote, ce sont les résultats de cette méthode qui ont servi à dessiner le logo de Matlab, programme écrit à l'origine par Moler.

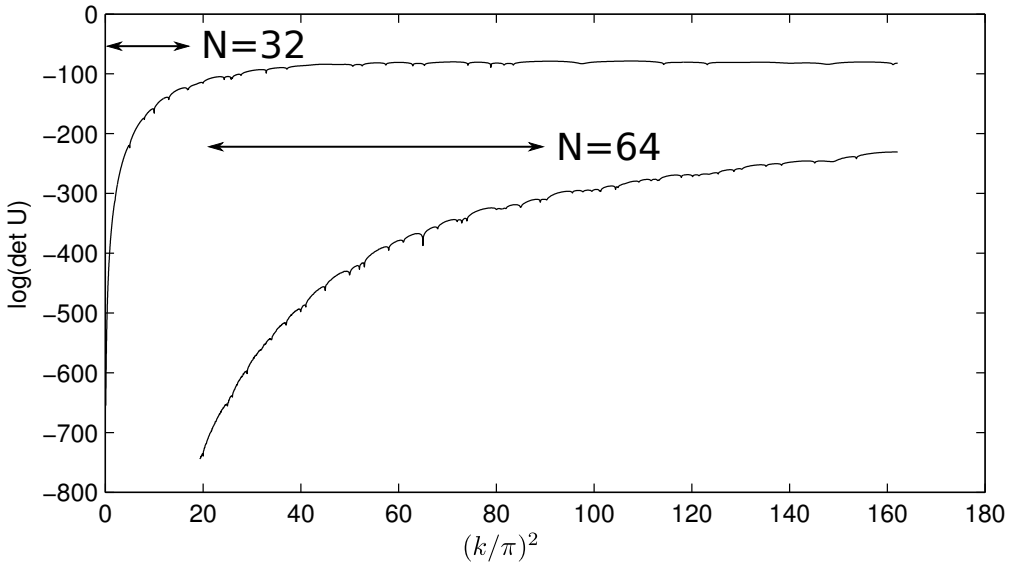

Figure 3.1 – Méthodes des solutions particulières : déterminant de U à basses fréquences, pour $N = 32$ et $N = 64$. Les estimations ne sont valides que dans les intervalles indiqués.

remarqué plus haut, une valeur de N donnée ne permet une estimation correcte que sur une plage assez étroite. Il est donc nécessaire de constamment changer la description du domaine pour espérer avoir des résultats corrects. De plus, rien ne permet de distinguer les valeurs propres multiples des valeurs propres simples.

En hautes fréquences, l'estimation de fréquences propres devient tout proprement impossible. La taille des familles génératrices nécessaire à une bonne représentation des solutions est plus élevée que celle à partir de laquelle les familles sont trop mal conditionnées pour donner des résultats numériques corrects. Les courbes tracées figure 3.2 pour des valeurs de N de 80, 90 et 100 ne permettent en aucun cas l'identification des fréquences propres. Dans le premier cas, les minima visible ne correspondent pas au modes du problème continu. Dans les deux autres cas, la recherche des minima est impossible.

Variantes

Des variantes de cette méthode, pour les membranes tant que pour les plaques, ont été utilisées par Alves et Antunes [AA09], et Kang et Lee [KL01]. Les premiers, au lieu d'utiliser une approximation en polynôme harmonique généralisé, approximent les modes par la méthode des solutions fondamentales, c'est à dire des sommes de fonctions de la forme $Y_0(kr)$ (et $K_0(kr)$ pour les plaques) où Y_0 (et K_0) sont les fonctions de Bessel de seconde espèce (modifiée pour K_0), et r est la distance entre un point du domaine et un point source choisi à l'avance. Les seconds utilisent des fonctions de Bessel de première espèce J_0 (et I_0 pour les plaques). Une difficulté de ces méthodes est la nécessité de choisir les points sources. Ce choix peut en effet avoir des conséquences non négligeables sur la qualité de l'approximation [BB08].

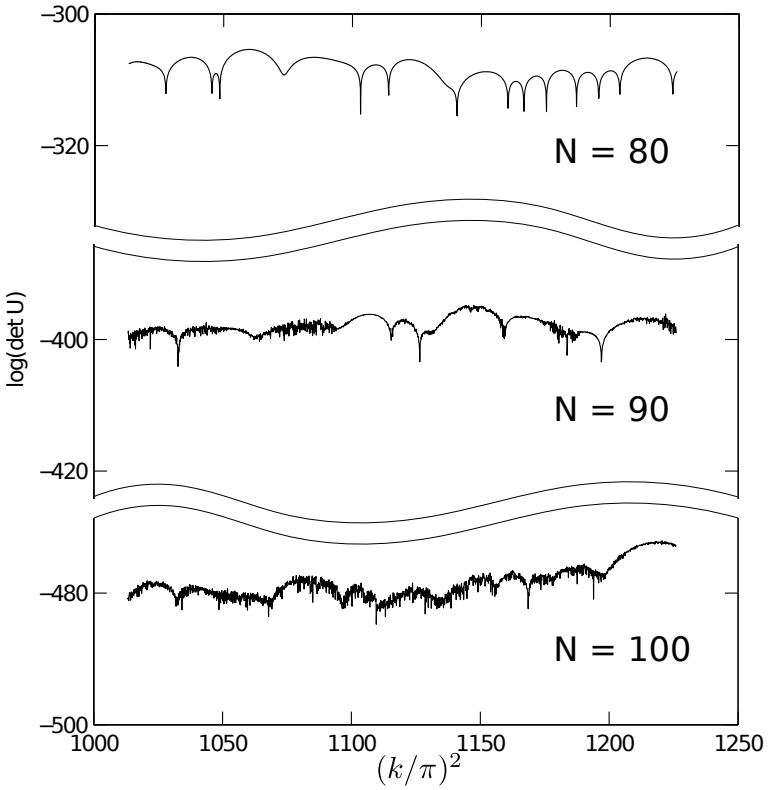

FIGURE 3.2 – Déterminant de U à hautes fréquences, pour $N = 80$, 90 et 100. Le conditionnement des matrices empêche la recherche des minima avant que les familles soient assez grandes pour approximer correctement les solutions, rendant l'estimation des fréquences propres impossible.

À part les approximations de natures différentes, ces méthodes sont semblables en tout point à la MPS.

3.2.2 MPS améliorée

Une nouvelle méthode, basée sur la MPS standard, a été développée indépendamment par Betcke et Trefethen [BT05], et Barnett et Berry [Bar00]. Elle consiste à non seulement utiliser des points sur le bord du domaine, mais également à l'intérieur de celui-ci. D'autre part, le critère à minimiser n'est plus un déterminant, mais une valeur propre (ou singulière) généralisée de deux matrices, une correspondant aux points intérieurs, l'autre aux points extérieurs. La non-nullité de la solution est, dans la MPS standard, garantie par la non-nullité des coefficients de l'approximation. Or, à cause du mauvais conditionnement des familles d'approximation, une fonction quasiment nulle peut-être représentée par des coefficients non négligeables. L'idée est donc de garantir la non-nullité de la solution en demandant que sa norme (dans L_2 par exemple), soit non nulle. Cette norme est approximée en échantillonnant la fonction à l'intérieur du domaine.

Considérons le cas des conditions aux limites de Dirichlet. La formulation 3.1 est légèrement modifiée pour donner

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u - \lambda u & = & 0 \\ \|Tu\|^2_{L_2(\partial\Omega)} & = & 0 \\ \|u\|^2_{L_2(\Omega)} & = & 1 \end{array} \right. \tag{3.3}$$

où T est l'opérateur trace. On cherche u dans H^1 pour que cet opérateur, qui à une fonction de Ω associe la fonction définie sur $\partial\Omega$ y prenant les mêmes valeurs, soit défini. Si la norme de la trace de u est nulle, alors u est nulle presque partout sur sa frontière. On trouvera donc les valeurs propres λ comme celles pour lesquelles une telle fonction existe. À cette fin, on cherche, pour chaque valeur de λ, la fonction vérifiant l'équation d'Helmholtz et de norme 1, minimisant la norme L_2 de sa trace sur le bord. Si cette norme est nulle, λ est une valeur propre. On appelera cette norme la *tension* $\tau(\lambda)$ définie donc par

$$\tau(\lambda) = \min \|Tu\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \quad \text{sous contrainte que } -\Delta u - \lambda u = 0 \text{ et } \|u\|^2_{L_2(\Omega)} = 1. \tag{3.4}$$

Pour mener à bien les calculs numériques, trois discrétisations sont nécessaires :
- approximation des solutions de l'équation d'Helmoltz comme somme de fonctions de Fourier-Bessel, ou d'ondes planes $\tilde{u} = \sum_{l=1}^{L} U_l \phi_l$
- discrétisation de la frontière par une famille de N points $\mathbf{x}_n$
- discrétisation de l'intérieur du domaine par une famille de M points $\mathbf{y}_m$.

La première condition de 3.3 est automatiquement vérifiée, et les normes sont remplacées par leurs estimations (ici par Monte-Carlo), dont le calcul est un simple produit matriciel :

$$\|T\tilde{u}\|_{L_2(\partial\Omega)} \approx \sum_{n=1}^{N} \tilde{u}(\mathbf{x}_n) = U^\star F U \tag{3.5}$$

$$\|\tilde{u}\|_{L_2(\Omega)} \approx \sum_{m=1}^{M} \tilde{u}(\mathbf{y}_m) = U^\star G U \tag{3.6}$$

où U est le vecteur des coordonnées de $\tilde{u}$ dans la base (ϕ_l), et les termes de F et G sont donnés par :

$$F_{ij} = \sum_{n=1}^{N} \phi_i^\star(\mathbf{x}_n)\phi_j(\mathbf{x}_n) \qquad G_{ij} = \sum_{m=1}^{M} \phi_i^\star(\mathbf{y}_m)\phi_j(\mathbf{y}_m).$$

L'estimation de la tension τ après discrétisation du problème, sera noté $t(\lambda)$. C'est la solution du problème de minimisation

$$t(\lambda) = \min U^\star F U \text{ sous contrainte que } U^\star G U = 1 \tag{3.7}$$

Ce problème peut être résolu en cherchant la plus grande valeur propre généralisée du problème

$$GU = \alpha F U, \tag{3.8}$$

la tension étant l'inverse de cette valeur propre.

Notons ici que la dimension du problème aux valeurs propres à résoudre est la taille de la famille génératrice utilisée. Elle est donc indépendante du nombre de points utilisés pour l'estimation des normes à l'intérieur du domaine et sur son bord. Cette dimension est de plus réduite comme proposé dans la thèse de Barnett [Bar00] afin que le conditionnement du problème reste raisonnable.

Remarque 3.1. Les estimations 3.5 et 3.6 peuvent également être obtenues par des méthodes de quadratures plus sophistiquées. La méthode de Monte-Carlo utilisée ici a l'avantage d'être très simple à implémenter. Remarquons également que le but n'est pas ici d'estimer de la manière la plus précise possible la norme de u à l'intérieur du domaine, ou la norme de sa trace sur le bord, mais de déterminer si celles-ci sont nulles ou non. Le critère de choix d'une estimation de ces normes sera donc plutôt le conditionnement des matrices G et F ainsi obtenues. Les résultats qui seront exposés dans le chapitre suivant sur l'échantillonnage de solutions de l'équation d'Helmholtz laissent à penser que des méthodes d'estimation spécifiques doivent être développées pour garantir de meilleurs résultats.

Application numérique

Les résultats de la méthode sont donnés pour les mêmes conditions que la MPS standard. La description du domaine est cette fois identique pour toutes les fréquences considérées. La taille des familles génératrices, elle, croît linéairement avec la fréquence. Le tracé des premières valeurs singulières permet d'identifier les fréquences propres multiples, comme précisé sur la figure 3.4. Une base de l'espace propre associé à la fréquence $k = \sqrt{125}\pi$ est donnée figure 3.5. Il est à noter que cette base n'est pas orthogonale. En effet, les décompositions en sommes de fonctions de Fourier-Bessel sont les premiers vecteurs propres du problème 3.8. Les matrices y intervenant étant hermitiennes, ces décompositions sont orthogonales. Or, les fonctions de Fourier-Bessel n'étant pas orthogonales dans le domaine considéré, cette orthogonalité n'est pas conservée pour les modes eux-mêmes.

Les résultats pour la gamme de fréquences pour lesquelles la MPS originale échoue sont donnés figure 3.6. Le mode pour $k = \sqrt{1058}\pi$ est donnée. Il est obtenu

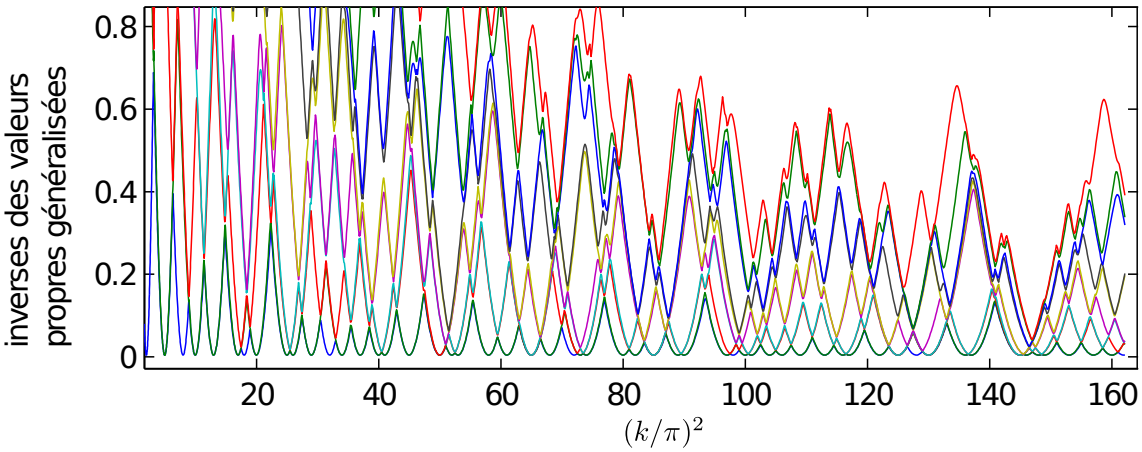

Figure 3.3 – Inverses des dix plus grandes valeurs propres généralisées du problème numérique 3.8. Les couleurs indiquent les rangs des valeurs propres : première en bleu, deuxième en vert, etc. Les fréquences propres sont les minima (ici, avec l'axe des abscisses utilisé, les sommes de deux carrés d'entiers). Les points utilisés pour l'estimation des normes sont identiques sur tout l'intervalle considéré, la taille des familles génératrices est proportionnelle à k.

avec un espace d'approximation de dimension 172, alors que pour l'application de la FEM, plus de 10 000 éléments finis (au moins 10 par longueur d'onde) seraient nécessaires.

3.3 Application aux plaques

Notre contribution est l'adaptation de cette méthode à la détermination de modes propres de plaques minces. Elle nécessite

- d'utiliser des familles de fonctions à même d'approximer des modes propres de plaques ;
- de modéliser les différentes conditions aux limites qui peuvent se présenter pour les plaques de façon utilisable par cette méthode.

L'approximation des modes propres a déjà été traitée au chapitre précédent : l'ajout de fonctions exponentielles, ou de fonctions de Fourier-Bessel modifiées permet d'approximer les modes propres de plaques homogènes.

3.3.1 Conditions aux limites

Les différentes conditions aux limites à approximer sont au nombre de trois. La première est l'encastrement, où le déplacement et sa dérivée normale sont fixés à zéro sur le bord. La tension correspondante est

$$t_e = \int_\Gamma |w|^2 + \frac{1}{k} \int_\Gamma \left| \frac{\partial w}{\partial n} \right|^2 .$$

La deuxième est l'appui simple : le déplacement est supposé nul aux bords, mais la plaque est laissée libre de pivoter. Le moment de torsion M_n exercé par le support

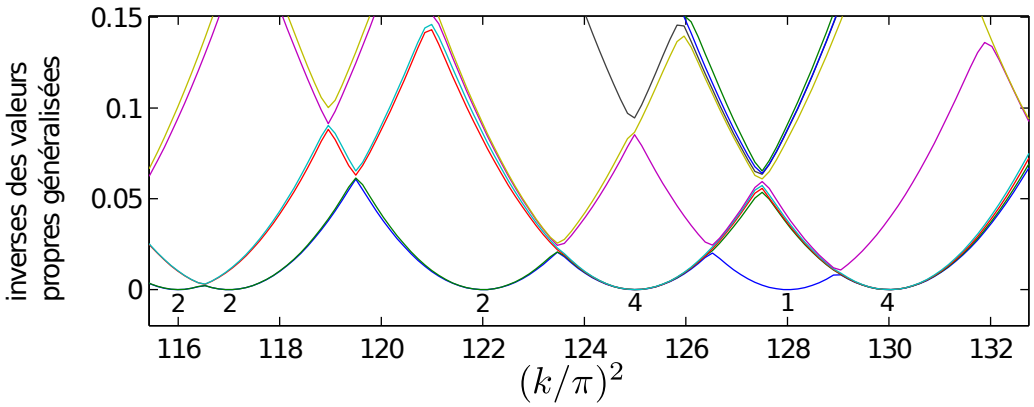

FIGURE 3.4 – Agrandissement de la figure précédente. Les ordres des fréquences propres sont indiqués. Ce sont le nombre de valeurs propres généralisées de 3.8 atteignant 0.

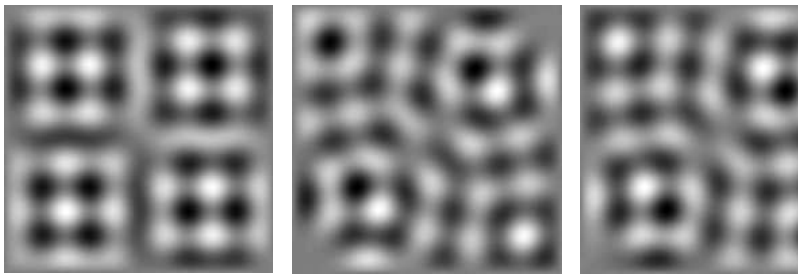

FIGURE 3.5 – Base de l'espace propre pour $k = \sqrt{125}\pi$. La dimension de l'espace d'approximation est de 73.

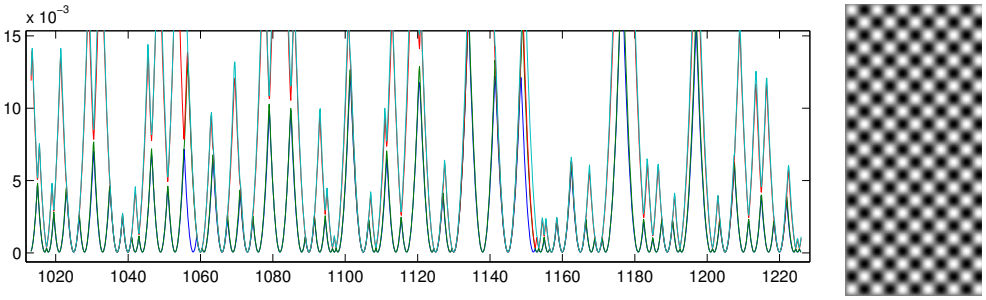

FIGURE 3.6 – Inverses des valeurs propres de 3.8 pour le même intervalle que la figure 3.2. Le mode (simple) à $k = \sqrt{1058}\pi$ est donné. La dimension de l'espace d'approximation est de 172, alors que le calcul par éléments finis nécessiterait plus de 10 000 éléments.

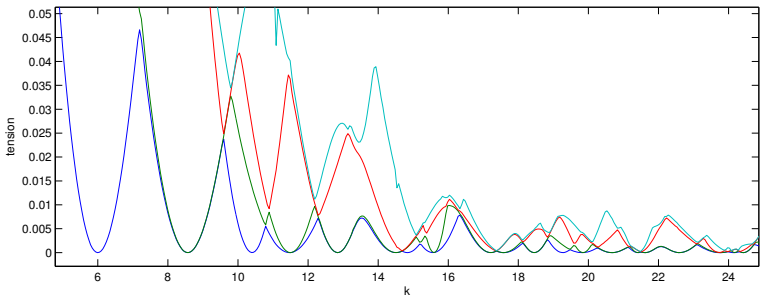

Figure 3.7 – Tension pour une plaque carrée encastrée

sur la plaque est donc supposé nul. La tension pour l'appui simple est

$$t_s = \int_\Gamma |w|^2 + \frac{1}{Dk^2} \int_\Gamma |M_n|^2 .$$

Enfin, la dernière condition au bord considérée est la condition libre, où le moment de torsion M_n et la réaction de bord de Kelvin-Kirchhoff K_n sont nuls. La tension s'écrit

$$t_l = \frac{1}{Dk^2} \int_\Gamma |M_n|^2 + \frac{1}{Dk^3} \int_\Gamma |K_n|^2 .$$

Le moment de torsion et réaction de Kirchhoff-Love s'écrivent respectivement

$$M_n = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)$$

$$K_n = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial n \partial t^2} + \frac{1-\nu}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right)$$

où ν est le coefficient de Poisson du matériau et R le rayon de courbure du bord. Les coefficients $1/k$, D/k^2 et D/k^3 intervenant devant certaines intégrales non seulement servent à homogénéiser les quantités, mais les simulations font apparaître qu'ils améliorent également la stabilité numérique des calculs.

3.3.2 Applications numériques

Quelques cas simples avec diverses conditions aux limites

Le résultat de la méthode pour une plaque carrée encastrée est donné figure 3.7. Les modes sont bien visibles, ainsi que leurs multiplicités.

Pour les calculs suivants, la famille utilisée pour l'approximation sera la famille d'ondes planes. Le principal intérêt de celles-ci est le calcul très simple des dérivées. En effet, la dérivée selon un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ d'une onde plane propagative de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ devient simplement la multiplication par le complexe $i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}$. De même, le laplacien devient la multiplication par $-k^2$. Ces propriétés, ainsi que le temps de calcul des exponentielles plus faible que celui des fonctions de Bessel, font des ondes planes une famille intéressante pour l'implémentation, bien que moins stable numériquement que les fonctions de Fourier-Bessel.

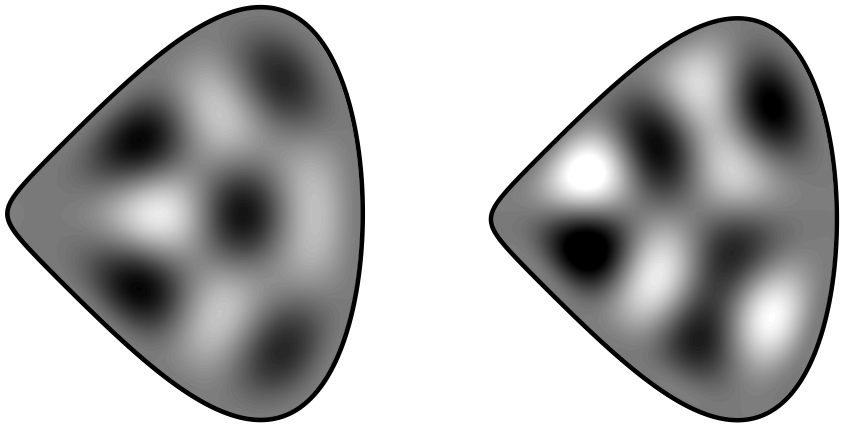

FIGURE 3.8 – 14e et 16e modes d'une plaque non triviale

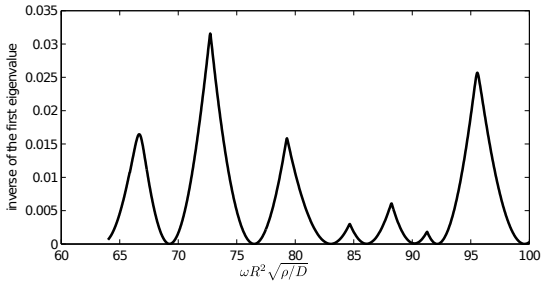

FIGURE 3.9 – Tension pour la plaque non triviale

Deux exemples de modes pour une plaque étudiée dans l'article d'Alves et Antunes [AA09] sont donnés figure 3.8. Les bords de la plaque sont supposés encastrés. La tension pour cette plaque est donnée figure 3.7, et la forme et les fréquences des modes sont en bon accord avec les résultats d'Alves et Antunes.

Le cas du disque est ensuite étudié. Les résultats pour trois conditions aux limites (encastrement, appui simple et libre) sont comparés aux valeurs données par Leissa [Lei69] dans le tableau 3.1. La tension est donnée pour le cas de l'encastrement figure 3.10.

Disque précontraint

Le cas des plaques précontraintes, où une tension T leur est appliquée, est pris en compte en utilisant les nombres d'ondes différents pour la composante propagative et la composante exponentielle. La comparaison avec les résultats de Leissa [Lei69] pour un disque précontraint est donnée dans le tableau 3.2

Leissa	10.21	21.26	34.88	39.77	51.04	60.82	69.67
MPS	10.21 6	21.25	34.85	39.77	51.02	60.83	69.66

TABLE 3.1 – Valeurs de $\omega R^2\sqrt{\rho/D}$ pour les premières fréquences propres d'une plaque circulaire encastrée

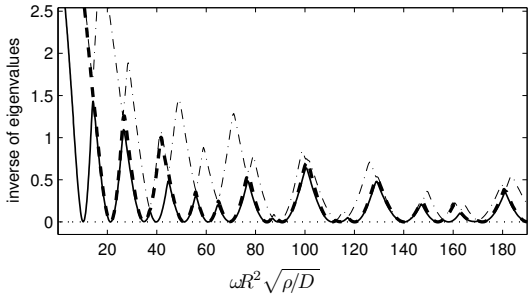

Figure 3.10 – Tension pour la plaque circulaire encastrée.

Leissa	14.30	36.41	40.91	45.52
MPS	14.29	26.39	40.57	45.52

Table 3.2 – Valeurs de $\omega R^2\sqrt{\rho/D}$ pour les premières fréquences propres d'une plaque circulaire encastrée précontrainte avec une tension $T = 14.68D/R^2$

3.3.3 Extensions : plaque avec coins singuliers, plaque trouée

La méthode telle qu'elle est décrite ici convient pour des plaques dont le bord est de classe $\mathcal{C}^\infty$, pour lesquelles les modes propres sont également infiniment dérivables, ce qui permet l'approximation des modes par des familles de tailles réduites. Dans le cas où la plaque a des coins, les modes peuvent, suivant les angles des coins, exhiber des singularités, c'est-à-dire qu'il ne seront pas dans un espace H^p, pour un p pouvant être faible. Dans ce cas, l'approximation par ondes planes ou fonctions de Fourier-Bessel nécessite des tailles de familles trop grandes pour que le conditionnement de celles-ci reste raisonnable. L'ajout de fonctions de Fourier-Bessel d'ordres fractionnaires centrées sur ces coins et bien choisies permettrait, comme dans les travaux de Betcke, de capturer ces singularités. Le résidu pourra alors être approximé de façon classique. Une telle idée a déjà été utilisée par De Smet et al. [VVD07] en complément d'une famille de structure proche des familles d'ondes planes utilisées ici. La justification est cependant légèrement différente, les auteurs justifiant l'usage de telles fonctions singulières pour capturer les singularités des efforts dans la plaque. La convergence de l'approximation peut toutefois être réduite même quand l'effort est borné.

Une deuxième extension est le traitement de trous éventuels dans la plaque. La théorie de Vekua pour le bilaplacien proposerait alors d'ajouter à la famille d'approximation des fonctions de Bessel (standard et modifiées) de seconde espèce centrées dans les trous. L'intérêt de cette approche est cependant assez réduit, puisqu'elle ne peut traiter que les trous dont le bord ne présente pas de singularité. En effet, l'ajout des fonctions de Fourier-Bessel singulières est impossible, leur dépendance en angle (en $e^{in\theta}$, mais où n n'est pas entier) rend impossible leur usage dans un domaine multiplement connexe. En effet, en partant d'un point donné et en faisant le tour d'un trou (donc en tournant de 2π), la dépendance en angle qui n'est pas périodique empêche de retomber sur la même valeur.

3.3.4 Comparaison avec l'état de l'art

L'adaptation de la méthode aux plaques est, pour la partie théorique, simple, mais des difficultés numériques font que son implémentation est délicate. En effet, les fonctions de Bessel modifiées et les ondes exponentielles sont très mal conditionnées. Il convient donc de trouver des astuces numériques, encore inconnues, pour pouvoir atteindre les mêmes plages de fréquences que pour les membranes.

Les apports de cette méthode par rapport aux méthodes de Kang [KL01] ou Antunes [AA09] sont significatifs. L'utilisation d'ondes planes permet de simplifier nettement la construction des familles d'approximations, puisqu'il n'est plus nécessaire de choisir des points sources. L'utilisation de fonctions de Fourier-Bessel nécessite encore le choix d'un centre, dont l'influence n'est pas à négliger. Les théorèmes d'approximation des chapitres 1 et 2 suggère de prendre comme centre le point le plus éloigné des bords du domaine. Les réels avantages sont l'extension de la plage de fréquence sur laquelle la méthode est applicable, et les fréquences propres plus simples à trouver, vu la forme plus agréable de la fonction à minimiser. D'autre part, la détermination de la multiplicité des modes, et des modes eux-mêmes, et significativement simplifiée.

3.4 Conclusion

La méthode des solutions particulières est, surtout dans sa version améliorée, une alternative intéressante aux éléments finis pour le calcul numérique de modes propres de membranes, de plaques, mais également de cavités acoustique, l'extension en dimension 3 ne posant pas de difficultés particulières. Notre contribution permet l'utilisation de cette méthode pour le calcul de modes propres de plaques avec une implémentation aisée, le calcul des dérivées d'ondes planes, pour le calcul des conditions aux limites, étant trivial. Deux problèmes sont encore à résoudre. L'ajout des ondes exponentielles rend les problèmes numériques encore moins bien conditionnés que pour les membranes, ce qui rend l'utilisation à haute fréquence difficile. D'autre part, le calcul de la tension sur un intervalle de nombres d'onde de largeur et de résolution intéressantes peut être très long. Des algorithmes utilisant la forme particulière de la tension (qui peut en première approche être approximée par une suite d'arcs de parabole) pourront aider à accélerer les calculs.

Chapitre 4

Échantillonnage de solutions de l'équation d'Helmholtz

Alors que le chapitre 3 traitait du calcul de modes propres, nous nous intéressons ici à la mesure de modes propres du laplacien, ou plus généralement de solutions de l'équation d'Helmholtz. Les résultats de cette partie sont destinés à donner des préconisations sur la construction d'un réseau de capteurs destiné à mesurer un champ acoustique, pour des applications de mesure de champ acoustique, de localisation de sources, etc.

Le résultat le plus important de la théorie de l'échantillonnage est le théorème de Shannon-Nyquist, donnant la fréquence minimale à laquelle échantillonner un signal suivant sa bande passante. D'autres résultats viennent ensuite compléter ce théorème : l'échantillonnage de signaux ayant des spectres aux supports de forme plus complexe qu'un intervalle de fréquences ou, en dimensions plus élevées, qu'un hypercube, peut être fait en utilisant des échantillonnages plus sophistiqués qu'une simple grille régulière. Enfin, dans le cas où la taille du support de la transformée de Fourier est connu, des résultats de Landau permettent de reconstituer un signal à partir d'un échantillonnage aléatoire. Cette approche est un précurseur du *compressed sensing* (cf. chapitre 5).

Dans notre cas, les signaux à reconstituer ne sont définis que sur un domaine de $\mathbf{R}^2$, ce qui nécessite une autre méthode d'échantillonnage, et des résultats de stabilité spécifiques.

4.1 Le théorème d'échantillonnage et d'autres résultats classiques

Un des résultats les plus importants en traitement du signal est le théorème d'échantillonnage, qui montre qu'il est possible, sous certaines conditions, de reconstruire un signal continu à partir d'échantillons discrets. Dans sa version la plus simple, la condition sur le signal à reconstruire est qu'il n'ait pas de composantes au-delà d'une certaine fréquence.

Théorème 4.1. *(d'échantillonnage, Shannon-Nyquist-Whittaker-Kotelnikov-etc.) Soit*

une fonction $f \in L_2(\mathbf{R})$, telle que le support de sa transformée de Fourier soit compris dans $]-Fe/2, Fe/2[$ (elle est donc continue).

Alors f peut être reconstruite à partir de ses valeurs aux points n/Fe, $n \in \mathbf{Z}$. Cette reconstruction est obtenue en filtrant la somme de distributions de Dirac $\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n/Fe)\delta(t-n/Fe)$ pour ne garder que les fréquences comprises entre $-Fe/2$ et $Fe/2$.

Ce théorème s'étend de façon simple en dimension supérieure, quand le support de la transformée de Fourier est inclus dans un hypercube de largeur Fe. On peut alors échantillonner le signal à la fréquence Fe dans toutes les directions.

On peut faire mieux que ce théorème quand on connait un pavage du plan (ou de l'espace, en dimension supérieure), tel que les copies du support de la transformée du signal ne s'intersectent pas [Pap77]. Un exemple courant est celui des signaux dont la transformée de Fourier est incluse dans un disque. L'application simple du théorème de Shannon utiliserait l'inclusion de cette sphère dans le carré de largeur le diamètre du cercle, et un échantillonnage sur une grille régulière. Avec la version améliorée du théorème, on peut échantillonner ce type de signaux sur une grille hexagonale légèrement moins dense que la grille classique.

Cette version n'est toujours pas optimale : si le support de la transformée de Fourier est incluse cette fois dans un anneau, ce théorème ne permet pas de faire mieux que si elle était incluse dans le disque.

Des travaux de Landau [Lan67], Olevskii et Ulanovskii [OU06], et enfin de Matei et Meyer [MM08] permettent cependant d'échantilloner ce type de signaux de façon efficace.

Landau a montré que la densité minimale d'échantillons était exactement la surface du support de la transformée de Fourier du signal. Ceci n'est cependant qu'une condition nécessaire, et n'est en aucun cas suffisante.

Un dernier problème est la reconstruction du signal quand la taille seule du support de sa transformée de Fourier est connue. Ce problème a été étudié entre autre par Matei et Meyer, qui, en dimension 2, conseillent d'échantillonner le signal sur les sommets d'un quasi-cristal.

Ces résultats puissants sont cependant limités par l'hypothèse qui est faite que les signaux sont des fonctions définies sur $\mathbf{R}^N$. Or ici, les signaux à reconstruire n'existent que sur un domaine fini de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$. Même en les prolongeant (dans les cas où c'est possible) en une solution de l'équation d'Helmholtz sur $\mathbf{R}^2$ tout entier par exemple, les résultats ne pourraient s'appliquer, une solution de l'équation d'Helmholtz ne pouvant pas être dans $L^2(\mathbf{R}^2)$. Ces théorèmes ne sont donc pas bien adaptés aux types de mesures qui nous intéressent, nous utiliserons donc les décompositions du chapitre 1 et des résultats sur l'approximation au moindres carrés de fonctions à partir d'un nombre fini d'échantillons.

4.2 Approximation par moindres carrés

La méthode qui sera utilisée pour l'échantillonnage de solutions de l'équation d'Helmholtz est basé sur l'approximation par moindres carrés.

Pour introduire cette méthode, intéressons nous à un exemple élémentaire, l'approximation d'une fonction continue de l'intervalle $[-1, 1]$ par des polynômes. L'existence d'une telle approximation est donnée par le théorème de Stone-Weierstrass [sto48, Wei85]. Le but est ici de construire cette approximation à partir d'échantillons de la fonction en certains points, en quantité N. L'application immédiate de l'interpolation lagrangienne, obtenue par la recherche du polynôme de degré $N-1$ passant par N points, bien que d'implémentation aisée, n'offre pas forcément les résultats souhaités. En effet, comme l'a montré Runge [Run01] en étudiant l'interpolation polynomiale de la fonction $1/(1+25x^2)$, l'erreur d'interpolation peut tendre vers l'infini avec le nombre d'échantillons, quand ceux-ci sont pris uniformément répartis. Pour pallier ce problème, on peut utiliser les échantillons situés aux abscisses de Tchebychev (i.e. les racines des polynômes de Tchebychev, donc plus denses près des bords de l'intervalle). L'erreur d'approximation tend vers alors vers zéro.

Une autre façon d'attaquer ce problème est d'utiliser une approximation par moindres carrés, avec des polynômes dont le degré pourra être inférieur au nombre d'échantillons. Le nombre de mesures étant supérieur à la dimension de l'espace dans lequel vivent les polynômes servant à approximer les fonctions, cette réduction du degré des polynômes fait office de régularisation. Elle a été étudiée par Cohen et al. [CDL11], dans le cas où les échantillons sont tirés suivant une loi donnée. Le résultat principal de leur étude est, étant donnée une famille d'espaces d'approximation (de dimensions croissantes), et une loi selon laquelle les échantillons sont tirés, la dimension maximale de l'espace à utiliser, en fonction du nombre d'échantillons, permettant de garantir la stabilité de l'approximation.

En voici quelques détails. On souhaite reconstruire une fonction f définie sur un domaine Ω inclus dans $\mathbf{R}^d$ à partir de sa valeur en n points tirés selon une densité de probabilité ρ. On suppose que cette fonction peut être approximée par des fonctions prises dans des espaces V_m avec $\dim V_m = m$. L'approximation de f dans V_m, notée $P_m f$, est définie par

$$P_m f = \operatorname*{argmin}_{v \in V_m} \|f - v\|_2^2,$$

et son approximation à partir des n échantillons x_n est donnée par

$$P_m^n f = \operatorname*{argmin}_{v \in V_m} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - v(x_i)|^2.$$

Le but est alors de trouver des conditions sous lesquelles l'erreur entre f et son approximation $P_m^n f$ dans V_m obtenue à partir des n échantillons est du même ordre que l'erreur entre f et sa meilleure approximation $P_m f$ dans V_m, notée $e_m(f)$.

On définit pour chaque espace V_m une quantité $K(m)$ définie par

$$K(m) = \sup_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^{m} |L_j(x)|^2$$

où la famille $(L_j)_{1 \leq j \leq m}$ est une base de V_m, orthonormale pour le produit scalaire

$$(f, g)_\rho = \int_\Omega f(x) g(x) d\rho.$$

Il est donc à remarquer que cette quantité dépend de la mesure de probabilité utilisée pour le tirage des échantillons.

Le théorème portera sur l'estimateur aux moindres carrés tronqué $\tilde{f}$, obtenu en tronquant $P_m^n f$ pour que sa valeur absolue ne dépasse par L, un majorant quelconque de $|f|$.

Ce théorème est le suivant :

Théorème 4.2. *(Cohen, Davenport, Leviatan) Pour tout $r > 0$ et m tel que*

$$K(m) \leq \kappa \frac{n}{\log n} \text{ avec } \kappa = \frac{1 - \log 2}{2 + 2r}$$

alors

$$\mathbf{E}(\|f - \tilde{f}\|_2^2) \leq (1 + \varepsilon(n)) e_m(f)^2 + 8L^2 n^{-r}$$

où $\varepsilon = \frac{4\kappa}{\log n}$.

Ce théorème donne donc, pour un n donné, la dimension maximale de l'espace d'approximation utilisable pour que l'erreur de reconstruction reste du même ordre de grandeur que l'erreur d'approximation $e_m(f)$. Afin de minimiser l'erreur de reconstruction, il convient donc de maximiser m, ce qui permet de diminuer $e_m(f)$, tout en vérifiant la condition sur m. $K(m)$ dépendant de la densité de probabilité utilisée pour le tirage, celle-ci doit être choisie de manière astucieuse afin d'avoir des valeurs de $K(m)$ les plus grandes possibles.

Dans leur article, Cohen et al. reprennent l'exemple de l'approximation de fonctions par des polynômes. En utilisant pour le tirage une loi uniforme, on trouve $K(m) = m^2$. L'échantillonnage de n points permettra donc d'utiliser environ $m \sim \sqrt{\frac{n}{\log n}}$. Au contraire, le tirage des points avec la densité de probabilité

$$d\rho = \frac{dx}{\pi\sqrt{1 - x^2}}$$

pour laquelle les polynômes de Tchebychev sont orthogonaux, permet d'utiliser $m \sim \frac{n}{\log n}$. On retrouve donc des résultats semblables au cas où les points sont choisis de façon déterministe, c'est à dire que l'utilisation d'un échantillonnage plus dense sur les bords de l'intervalle donne une meilleure stabilité à la reconstruction.

4.3 Application aux solutions de l'équation d'Helmholtz

L'échantillonnage de solutions de l'équation d'Helmholtz sur un domaine borné ne peut pas, comme montré plus haut, être basé sur le théorème d'échantillonnage de Shannon. Cependant, en se fondant sur les approximations introduites au chapitre 1 et sur les résultats d'approximation par moindres carrés, on peut développer des méthodes spécifiques d'échantillonnage et les étudier. Afin d'obtenir des résultats explicites, l'étude théorique sera menée pour le cas de l'échantillonnage dans un disque.

La famille d'espaces d'approximation sera ici les espaces engendrés par les fonctions de Fourier-Bessel, ou les ondes planes. On montrera cependant que les résultats

sont semblables pour ces deux options. Pour le tirage des échantillons, la loi uniforme,notée ν sera étudiée, ainsi qu'une famille de lois de tirages, dits *mixtes*, divisant l'ensemble des échantillons en deux groupes et notées ν_α :

- un premier groupe d'échantillons tirés selon la loi uniforme dans le domaine considéré,
- un deuxième groupe, où les échantillons sont tirés toujours selon la loi uniforme, mais cette fois-ci sur le bord du domaine.

La proportion d'échantillons sur le cercle sera variable et notée α. Ce choix est justifié par analogie au cas précédent, où la concentration des échantillons sur les bords de l'intervalle permettait une meilleure stabilité de l'approximation.

Le cas du disque, pour lequel la décomposition en somme de fonctions de Fourier-Bessel est particulièrement adaptée, permet de mener au bout les calculs. Nous étudions ici le comportement des deux échantillonnages définis plus haut, pour l'approximation en sommes de fonctions de Fourier-Bessel ou d'ondes planes.

Fonctions de Fourier-Bessel

Dans le cas des fonctions de Fourier-Bessel, il est possible de trouver explicitement le comportement de K pour les deux types d'échantillonnage. Les espaces V_m seront les espaces engendrés par les fonctions de Fourier-Bessel d'ordre $-L$ à L, avec donc $m = 2L + 1$ impair.

Théorème 4.3. *Pour l'approximation par des fonctions de Fourier-Bessel sur un cercle, K est quadratique en L pour l'échantillonnage uniforme, et linéaire en L pour l'échantillonnage mixte, avec une constante de proportionnalité $2/\alpha$.*

Démonstration. Les fonctions de Fourier-Bessel sont orthogonales sur le disque, et ce pour toute mesure invariante par rotation. En effet, cette orthogonalité provient de la dépendance angulaire en $e^{in\theta}$. Le K de l'espace engendré par les fonctions de Bessel $b_n = J_n(kr)e^{in\theta}$ pour $-L \leq n \leq L$, noté K_L, s'écrit, par exemple pour la loi uniforme :

$$K_L = \sup \sum_{n=-L}^{n=L} \frac{|b_n|^2}{||b_n||_\nu^2}.$$

Dans le cas de la loi uniforme, on minorera K_L. On a :

$$K_L > K'_L = \sum_{n=-L}^{n=L} \frac{|J_n(\lambda)|^2}{||b_n||_\nu^2}.$$

Pour $n > \lceil \lambda \rceil$, on peut majorer $||b_n||_\nu^2$:

$$\begin{aligned}
||b_n||_\nu^2 &= \frac{1}{\pi}\int_D J_n(\lambda r)^2 dxdy \\
&= 2\int_0^1 r J_{|n|}(\lambda r)^2 dr \\
&= \frac{4}{\lambda^2}\sum_{p=0}^{\infty}(n+1+2p)J^2_{|n|+1+2p}(\lambda) \\
&< \frac{4}{\lambda^2}\sum_{p=0}^{\infty}(n+1+2p)(k/|n|)^{2+4p}J^2_{|n|}(\lambda) \\
&< 4\frac{|n|+1}{n^2}\frac{1-\frac{|n|-1}{|n|+1}(\lambda/|n|)^4}{\left(1-(\lambda/|n|)^4\right)^2}J^2_{|n|}(\lambda)
\end{aligned}$$

Dans ces calculs ont été utilisés des résultats sur les fonctions de Bessel regroupés dans l'annexe A.

Comme $|b_n(\lambda)| = J_{|n|}(\lambda)$, on a

$$\frac{|b_n(\lambda)^2|}{||b_n||_\rho^2} > \frac{|n|}{4}\frac{|n|}{|n|+1}\frac{\left(1-(\lambda/|n|)^4\right)^2}{1-\frac{|n|-1}{|n|+1}(\lambda/|n|)^4} \sim \frac{|n|}{4},$$

donc $K'_L \sim L^2/4$, et $K_L \gtrsim L^2/4$.

Dans le cas de l'échantillonnage mixte, on peut majorer K_L. En premier lieu,

$$K_L < K''_L = \sum_{l=-L}^{l=L} \sup \frac{|b_l|^2}{||b_l||^2_{\nu_\alpha}}$$

Quand $|l| > \lambda$, J_l croissante sur $[0,1]$, on a $\sup|b_l| = J_{|n|}(\lambda)$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{J_n(\lambda)}{||b_n||^2_{\nu_\alpha}} &= \frac{J_n(\lambda)^2}{\frac{1-\alpha}{\pi}\int_D J_n(\lambda r)^2 dxdy + \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_n(\lambda)^2 d\theta} \\
&< \frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$K_L < K''_{\lfloor\lambda\rfloor} + \frac{2(L-\lfloor\lambda\rfloor)}{\alpha}$$

□

Ces résultats peuvent être résumés de la façon suivante :

- pour l'échantillonnage uniforme, le nombre d'échantillons à mesurer pour pouvoir utiliser une famille d'approximation de $2N+1$ fonctions est au moins proportionnel à N^2,
- pour l'échantillonnage mixte, le nombre d'échantillons à mesurer est proportionnel à N.

C'est donc l'échantillonnage mixte qui doit être utilisé pour garantir les meilleurs résultats. Il est également à noter que la proportion α d'échantillons sur le bord a une influence sur le nombre d'échantillons, une forte valeur de α permettant de réduire la constante de proportionnalité. Il est cependant néfaste de choisir un α trop grand, l'erreur d'approximation bornée dans le théorème 4.2 faisant de moins en moins intervenir l'erreur qui nous intéresse, c'est-à-dire l'erreur d'approximation dans le disque uniquement. Le cas limite où $\alpha = 1$, c'est à dire où la fonction n'est mesurée que sur le bord, ne permet même plus de contrôler cette erreur. Ces comportements se vérifieront pour les applications numériques.

Ondes planes

Des résultats similaires sont obtenus pour la décomposition en ondes planes. Ceci n'est pas surprenant, ondes planes et fonctions de Fourier-Bessel étant liées par la formule de Jacobi-Anger et la première intégrale de Bessel (cf. annexe A).

Les principes généraux de la preuve sont indiqués, mais les calculs, très laborieux, sont omis.

La première étape du calcul est d'orthogonaliser la famille d'ondes planes par rapport à la mesure utilisée. Cette famille de $Q = 2N + 1$ ondes planes est générée avec des vecteurs d'ondes $\mathbf{k}_l$ régulièrement distribués le long du cercle. Pour les mesures utilisées, la matrice de Gram de la famille est circulante, et donc est diagonale dans la base de Fourier. La famille orthogonale obtenue en transformant la famille d'ondes planes par la racine carré de la matrice de Gram a pour expression

$$b_j^Q = c_j^Q \sum_{l=-Q}^{Q} e^{ilj\pi/Q} e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{x}}$$

où c_j^Q une constante telle que $\|b_j^Q\| = 1$. Ceci est une quadrature de la formule de Jacobi-Anger, les b_n^Q sont donc en fait des approximations des vraies fonctions de Fourier-Bessel. Nous avons également

$$b_j^Q = {c'}_j^Q \sum_{p\in\mathbb{Z}} i^{pQ} b_j.$$

Pour calculer les bornes sur K, il suffit en fait d'étudier les conséquences des quadratures sur le résultat obtenu pour l'approximation par sommes de fonctions de Fourier-Bessel. Les résultats sont identiques au théorème 4.3.

4.3.1 Applications numériques

Les résultats du théorème 4.3 sont tout d'abord testés sur le disque. La fonction à approximer est le champ rayonné par des sources situées à courte distance. Un tel choix permet de bien mettre en valeur les phénomènes attendus. Une telle situation, bien qu'assez particulière, peut tout de même arriver expérimentalement, par exemple lors de la mesure du champ acoustique aux voisinage d'une ou plusieurs sources. La figure 4.1 montre l'erreur de reconstruction de la fonction à partir de 400 mesures, pour L variant de 1 à 120. Le diamètre du disque est 1, le nombre

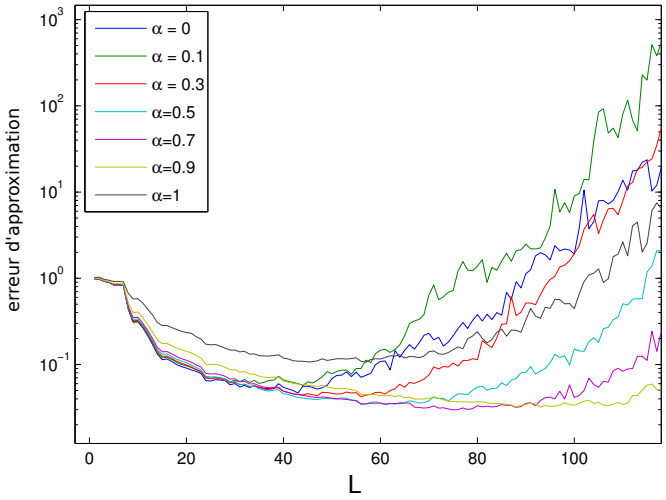

FIGURE 4.1 – Erreur de reconstruction en fonction de L, pour 400 mesures et différentes proportions α d'échantillons sur le bord

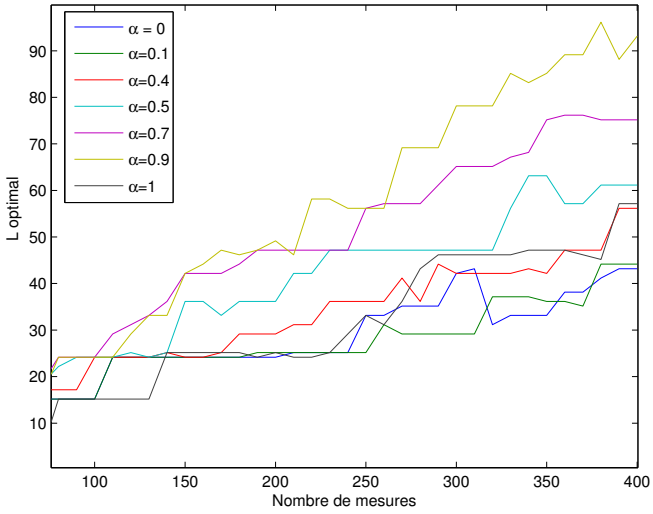

FIGURE 4.2 – L optimal en fonction du nombre de mesures et de l'échantillonnage utilisé (α est la proportion d'échantillons sur le bord)

d'onde $k = 12$. La dimension de l'espace d'approximation croît avec la proportion d'échantillons sur le bord tant que celle-ci reste faible : avec l'échantillonnage uniforme, on trouve $L = 43$, alors qu'avec $\alpha = 1/2$ par exemple, on a $L = 61$, ou $L = 75$ pour $\alpha = 0.7$. Cependant, à plus forte proportion, bien que le L optimal puisse être encore plus grand comme on peut le voir figure 4.2, l'erreur minimale d'approximation remonte. Ceci est bien visible pour $\alpha = 0.9$, où le L optimal est de 93, mais où l'erreur de reconstruction est en fait plus grande que pour $\alpha = 0.7$. Ceci est encore plus remarquable pour $\alpha = 1$, où tous les échantillons sont sur le bord. Ce phénomène, prévu dans la section précédente, peut ici s'interpréter de la façon suivante : le nombre d'onde choisi est ici proche du nombre d'onde d'un mode propre du disque avec conditions aux limites de Dirichlet. Ce mode propre, fonction de Fourier-Bessel, est très proche d'une des fonctions de Fourier-Bessel intervenant dans l'approximation de la fonction. Il existe donc une fonction de Fourier-Bessel non nulle à l'intérieur du disque, mais de valeurs très faibles sur le bord. Ceci rend la détermination de son coefficient très instable à partir de mesures uniquement, ou presque intégralement, sur le bord, et donc sa contribution à la décomposition très perturbée, ce qui explique les erreurs d'approximation médiocres pour les valeurs de α élevées.

4.4 Conclusion

La mesure de solutions de l'équation d'Helmholtz, ne pouvant être traitée de façon efficace par les méthodes classiques d'échantillonnage, est ici analysée sous l'angle de l'approximation au moindre carrés d'une fonction à partir d'échantillons, en utilisant les théorèmes d'approximation de la partie 1. En utilisant ces résultats, nous montrons, dans le cas du disque, qu'il est plus efficace d'échantillonner une telle fonction non seulement à l'intérieur du domaine où elle est définie, mais également sur son bord. Des points sont encore à éclaircir :

- comment choisir la bonne dimension de l'espace d'approximation, en ayant à disposition uniquement les mesures ?
- a-t-on les mêmes résultats pour des domaines plus compliqués qu'un cercle ?

Il semble que seules des simulations numériques peuvent répondre à de telles questions. Malgré ces interrogations en suspens, ces résultats peuvent tout de même être appliqués, par exemple au chapitre 7 pour l'échantillonnage de réponses impulsionnelles de plaques.

Deuxième partie

Problèmes inverses parcimonieux en acoustique

Chapitre 5

Parcimonie et problèmes inverses

Cette seconde partie de la thèse traite de problèmes de traitement du signal en acoustique, plus précisément de problèmes inverses. Il y sera question de reconstruire des comportements de structures mécaniques, de localisation de sources, etc. Le premier chapitre de cette partie, essentiellement bibliographique, présente une vue générale des problèmes inverses, du concept de parcimonie, et de la façon dont des a priori parcimonieux peuvent être utilisés pour la résolution de problèmes inverses.

5.1 Problèmes inverses

Un problème inverse est la tentative de reconstituer une grandeur physique à partir d'observations incomplètes et/ou bruitées. Ces problèmes inverses sont ubiquites en traitement du signal. Citons-en quelques-uns :

- la déconvolution de signaux ou d'images,
- la localisation de sources,
- l'imagerie médicale,
- le contrôle non destructif, etc.

Dans tous ces cas, la simulation des mesures à partir des grandeurs physiques est possible : c'est le problème direct. Cependant, remonter à ces grandeurs physiques à partir des mesures est loin d'être aussi simple. Le problème inverse peut en effet avoir plus d'une solution, ou être très instable par rapport au bruit, aux incertitudes expérimentales, etc.

Intéressons nous à l'exemple classique de la déconvolution. Un signal f à reconstituer, par exemple une image comme la figure 5.1, n'est accessible qu'après convolution par un noyau g, qui, dans l'exemple de l'image, modélise un floutage. Le problème direct est donc simplement la convolution avec g. De plus, les observation sont affectées d'un bruit n. Le modèle s'écrit donc $m = g \star f + n$. L'image légèrement floutée et bruitée est donnée figure 5.2, avec le noyau de convolution utilisé.

Le but est alors, ayant à disposition m et g, de reconstituer f. On prendra ici pour g une gaussienne, et pour n un bruit blanc gaussien.

L'approche naïve consiste à déconvoluer sans précautions m (par exemple en utilisant la transformée de Fourier). Le résultat, donné figure 5.3 (a), est inutilisable.

FIGURE 5.1 – Une photographie

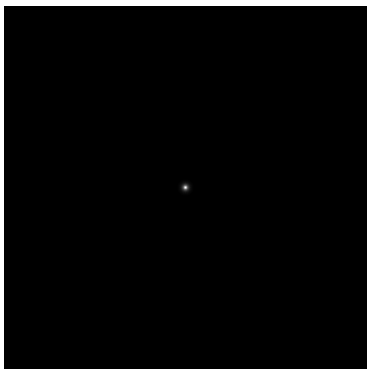

FIGURE 5.2 – (a) Le noyau de convolution utilisé (b) La photographie légèrement floutée et bruitée

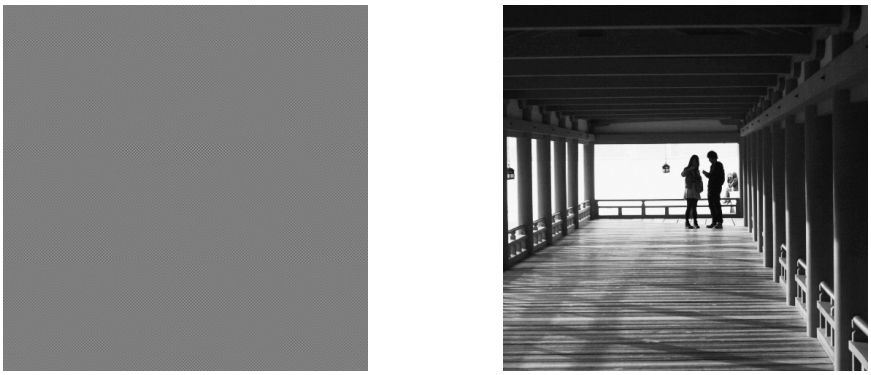

Figure 5.3 – (a) Déconvolution naïve (b) Déconvolution régularisée

En effet, la transformée du noyau de convolution g tendant rapidement vers 0 quand $|k|$ tend vers l'infini, la déconvolution, obtenue comme la transformée de Fourier inverse du quotient des transformées de m et g, amplifie fortement les composantes hautes fréquences du bruit n. La reconstitution de f est donc impossible sans a priori sur ce signal.

De nombreux outils existent pour formuler de tels a priori sur des images (ondelettes [Mal08], variation totale [ROF92, CCN+09], etc.). Nous allons cependant utiliser un a priori très simple, qui va toutefois nous permettre de retrouver une méthode de régularisation très populaire. Les N pixels de l'image sont considérés comme étant la réalisation d'un processus gaussien, blanc, isotrope, d'écart type σ_f, de moyenne nulle. La probabilité de f est donc

$$p(f) = \frac{1}{(2\pi\sigma_f)^{N/2}} e^{-\|f\|^2/(2\sigma_f^2)}.$$

Le bruit n, qu'on a supposé blanc gaussien isotrope, a lui pour écart type σ_n :

$$p(n) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n)^{N/2}} e^{-\|n\|^2/(2\sigma_n^2)}.$$

Nous allons rechercher l'image $\hat{f}$ qui maximise sa probablilité conditionnée par l'observation de m :

$$\hat{f} = \text{argmax } p(f|m).$$

Cette probabilité conditionnelle peut, après application du théorème de Bayes, être exprimée en fonction de $p(n)$, $p(f)$ et $p(m)$:

$$p(f|m) = \frac{p(m|f)p(f)}{p(m)} = \frac{p(n)p(f)}{p(m)}.$$

$p(m)$ étant une constante, on cherche donc à maximiser le produit $p(m|f)p(f)$:

$$\hat{f} = \text{argmax} \frac{1}{(4\pi^2\sigma_f\sigma_n)^{N/2}} e^{-\|m-g\star f\|^2/(2\sigma_n^2)} e^{-\|f\|^2/(2\sigma_f^2)} \tag{5.1}$$

$$= \text{argmin} \|m - g \star f\|^2 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_f^2}\|f\|^2 \tag{5.2}$$

Cette méthode de régularisation est appellée méthode de Tikhonov (du nom du mathématicien qui l'a étudiée [TA77]). Le résultat de cette régularisation est donné figure 5.3 (b). En comparaison avec l'inversion naïve, ce résultat est très nettement meilleur.

Dans sa forme générale, la régularisation de Tikhonov s'écrit

$$\hat{\mathbf{x}} = \text{argmin} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{\Gamma}\mathbf{x}\|_2^2$$

où $\mathbf{x}$ est le vecteur à reconstruire, $\mathbf{y}$ est le vecteur des mesures, $\mathbf{A}$ est la matrice modélisant le problème direct (ici supposé linéaire), λ un paramètre réglant le niveau de régularisation, et $\mathbf{\Gamma}$ la matrice de Tikhonov. C'est, dans le formalisme probabiliste, l'inverse de la racine de la matrice de covariance supposée pour le modèle de $\mathbf{x}$ (le bruit est ici supposé blanc). Le résultat de la régularisation peut être obtenu explicitement. On a en effet

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\star\mathbf{A} + \lambda^2\mathbf{\Gamma}^\star\mathbf{\Gamma})^{-1}\mathbf{A}^\star\mathbf{y}. \tag{5.3}$$

Quand λ tend vers 0, la régularisation n'a plus d'effet, on retrouve l'inverse de $\mathbf{A}$. Inversement, dans le cas où $\mathbf{\Gamma}$ est l'identité et où λ tend vers l'infini, la régularisation consiste (à une renormalisation près) à remplacer l'inverse de $\mathbf{A}$ par son adjointe. Ceci peut être rapproché de la conjugaison de phase en physique.

Analysons plus précisement le comportement de la régularisation de Tikhonov dans un cas très courant, où les mesures sont modifiées par un filtrage passe-bas (pour rester simple, en dimension 1). Ce filtrage est la convolution du signal $\mathbf{x}$ avec un noyau de convolution $\mathbf{g}$. La matrice $\mathbf{A}$ correspondant à cette convolution est une matrice circulante, qui est donc diagonale dans la base de Fourier. On note g_j ses valeurs propres, qui correspondent aux fréquences ν_j des vecteurs de la base de Fourier. L'écriture explicite 5.3 peut donc se réécrire (en supposant $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}$) :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{G}^\star\mathbf{G} + \lambda^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{G}^\star\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{y}. \tag{5.4}$$

où $\mathbf{F}$ est la matrice de la transformée de Fourier discrète, et $\mathbf{G}$ la matrice diagonale de termes g_j.

La matrice $\mathbf{R} = (\mathbf{G}^\star\mathbf{G} + \lambda^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{G}^\star\mathbf{G}$ est encore diagonale, et représente l'effet de la régularisation sur l'inversion naïve. Ses termes diagonaux sont

$$r_j = \frac{|g_j|^2}{\lambda^2 + |g_j|^2}.$$

Les termes g_j étant décroissants quand la fréquence augmente, l'effet de la régularisation est d'appliquer un filtrage passe-bas, dont la pente et la fréquence de coupure dépendent du filtre appliqué au signal ainsi que du paramètre de la régularisation. Les hautes fréquences, qui sont atténuées par le filtrage, sont encore plus écrasées par la régularisation, ce qui rend leur reconstruction impossible.

Malgré ces limitations, sa simplicité d'usage et d'implémentation font de la régularisation de Tikhonov une méthode très populaire pour la résolution de problèmes inverses. Un large éventail de régularisations différentes, basées sur des modèles divers, est disponible et nous allons, dans la suite, nous tourner plus particulièrement vers des méthodes basées sur le concept de parcimonie, présenté dans la partie suivante.

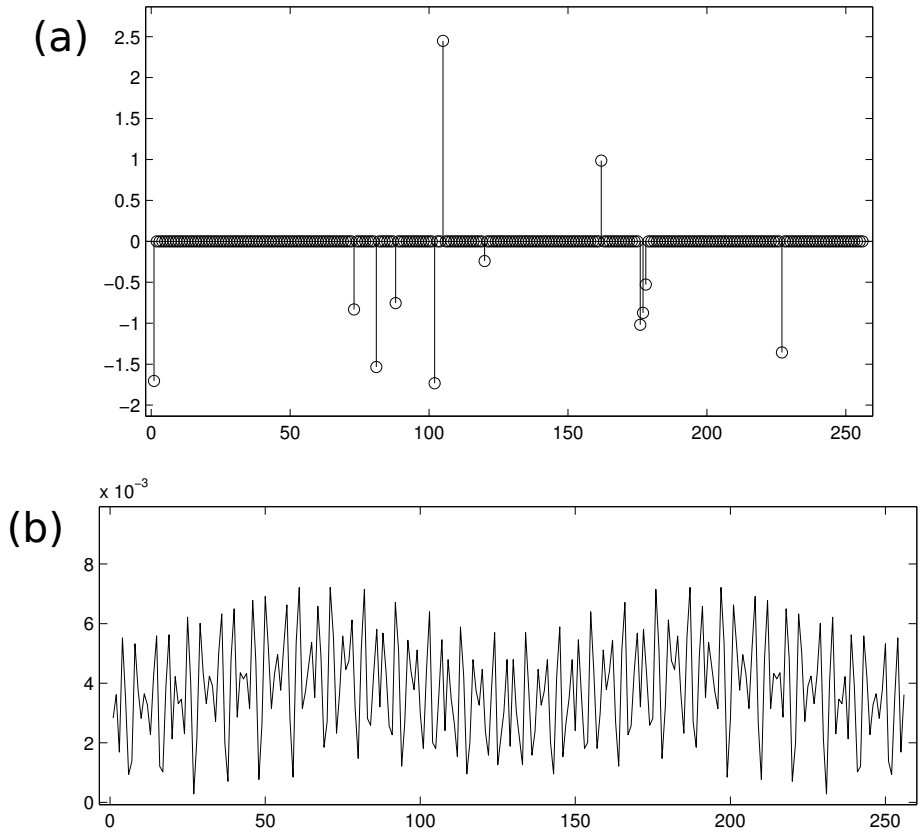

FIGURE 5.4 – (a) Un signal parcimonieux dans la base canonique (b) Un signal parcimonieux dans la base de Fourier

5.2 Parcimonie

Le modèle considéré sur les signaux dans la partie précédente, i.e. qu'ils étaient la réalisation d'un bruit gaussien de covariance donnée, peut dans un bon nombre de cas être amélioré. Une amélioration possible est l'utilisation de la parcimonie des signaux à reconstruire.

5.2.1 Définitions

On dit qu'un signal est *parcimonieux* dans une base (fixée à l'avance), si sa décomposition a peu de coefficients non nuls. La figure 5.4 donne deux exemples de signaux parcimonieux, le premier dans la base canonique, le deuxième dans la base de Fourier. Cette parcimonie se mesure à l'aide de la pseudo-norme ℓ_0, qui compte le nombre de coefficients non nuls d'un vecteur (elle est souvent abusivement appelée "norme ℓ_0" bien qu'elle ne respecte pas tous les axiomes d'une norme). On considèrera également les signaux *compressibles*, qui bien qu'ils ne soient pas eux-mêmes exactement parcimonieux, peuvent être approximés par un signal parcimonieux, au sens où l'erreur d'approximation par un signal de support de taille s tend très rapidement vers 0 quand s augmente.

La décomposition parcimonieuse d'un tel signal est simplement donnée par un changement de base. Les algorithmes de compression JPEG et JPEG2000, par ex-

emple, sont basés sur ce principe (assortis d'algorithmes de quantification, de modèles perceptuels et d'algorithmes de compression entropique). Les bases utilisées sont respectivement des bases de cosinus locaux et d'ondelettes Cohen-Daubechies-Feauveau [CDF92].

5.2.2 Décomposition dans un dictionnaire

Une base n'offre cependant pas forcément assez de richesse pour représenter de façon parcimonieuse certains signaux. On préfère dans ce cas décomposer les signaux sur un dictionnaire, c'est à dire une famille génératrice de l'espace des signaux considérés, dont la taille pourra être largement supérieure à la dimension de cet espace. Une décomposition d'un vecteur dans un dictionnaire est loin d'être unique, il convient donc de concevoir des méthodes à même de trouver la décomposition la plus parcimonieuse possible d'un signal. En notant $\mathbf{D}$ le dictionnaire, $\mathbf{s}$ le signal et $\mathbf{c}$ les coefficients de sa décomposition, on cherche à résoudre le problème de minimisation

$$\hat{\mathbf{c}} = \text{argmin}\|\mathbf{c}\|_0 \text{ tel que } \mathbf{s} = \mathbf{D}\mathbf{c}. \tag{5.5}$$

Ce problème est malheureusement NP-difficile, c'est à dire que dans le cas général, sa complexité est exponentielle en fonction de la taille des vecteurs mis en jeu, ce qui rend les calculs trop longs pour des dimensions de dictionnaires intéressantes. Devant cet écueil, deux réactions sont possibles. La première consiste à résoudre de façon approximative le problème 5.5. La deuxième à remplacer 5.5 par un problème différent, mais plus simple (au sens de la complexité algorithmique), et qui sous certaines conditions donne le même résultat.

Approches itératives

La première approche conduit à des algorithmes itératifs, obtenant une solution pas à pas. On appelle ce type d'algorithme *glouton* (*greedy*). L'algorithme de référence de cette catégorie est Orthogonal Matching Pursuit (OMP) [PRK93]. Il consiste à sélectionner à chaque étape l'atome du dictionnaire le plus corrélé au signal (i.e., celui dont la valeur absolue du produit scalaire avec le signal est maximale, en supposant que les atomes sont normalisés), puis à projeter le signal sur l'orthogonal de l'espace engendré par les atomes identifiés jusque là. L'algorithme s'arrête par exemple, quand le nombre d'atomes à identifier est atteint,hj ou quand la norme du résidu descend sous un certain seuil.

L'implémentation de cet algorithme est très facile, et peut être accélérée, par exemple, par une décomposition QR de la famille des atomes sélectionnés mise à jour à chaque étape de l'algorithme.

Approches ℓ_1

La deuxième approche vise à remplacer la pseudo-norme ℓ_0 par une norme ayant un comportement plus agréable. On se tourne généralement vers la norme ℓ_1, qui a le bon goût de favoriser la parcimonie des solutions, et d'être convexe. Le problème

de minimisation obtenu est appelée *Basis Pursuit* (BP) [CDS98] :

$$\hat{\mathbf{c}} = \text{argmin}\|\mathbf{c}\|_1 \text{ tel que } \mathbf{s} = \mathbf{D}\mathbf{c}. \tag{5.6}$$

Si $\mathbf{D}$ et $\mathbf{c}$ vérifient certaines conditions, assez restrictives en pratique, on peut montrer que les solution de 5.5 et 5.6 sont en réalité les mêmes (ces conditions seront explicitées plus bas).

Dans le cas bruité, on peut soit relâcher la contrainte en autorisant une erreur ε, égale au niveau de bruit attendu dans les mesures. On appelle alors ce problème *Basis Pursuit Denoising* (BPDN) :

$$\hat{\mathbf{c}} = \text{argmin}\|\mathbf{c}\|_1 \text{ tel que } \|\mathbf{s} - \mathbf{D}\mathbf{c}\|_2 < \varepsilon. \tag{5.7}$$

Une alternative est d'utiliser une forme analogue à la régularisation de Tikhonov, ce qui donne un problème de minimisation sans contrainte, mais avec un paramètre de régularisation λ. On appelle LASSO [Tib94] ce problème :

$$\hat{\mathbf{c}} = \text{argmin}\|\mathbf{s} - \mathbf{D}\mathbf{c}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{c}\|_1. \tag{5.8}$$

De nombreuses variantes de ces deux classes de méthodes existent. Sans être exhaustif, citons CoSaMP [NT09], les minimisations ℓ_p [FL09], etc. OMP et Basis Pursuit, ou des variantes adaptées à des modèles parcimonieux plus précis, seront utilisés par la suite.

Ce type de parcimonie peut également être utilisé à des fins de compression de signaux ou de séparation de sources. Citons l'exemple de MPTK [KG06], une bibliothèque de décomposition audio basée sur Matching Pursuit et des transformées de Fourier sur plusieurs tailles de fenêtres simultanément.

5.2.3 Parcimonie structurée

Une manière d'affiner les modèles parcimonieux est de contraindre le support des vecteurs à vérifier certaines conditions. On parle alors de parcimonie structurée.

Deux cas particuliers de structure seront utilisés par la suite : la parcimonie conjointe de plusieurs signaux, et la parcimonie par blocs. Dans ces deux cas, la connaissance a priori de la structure du support apporte de meilleures performances que la parcimonie simple.

Parcimonie conjointe

Dans le cas où les mesures peuvent provenir d'observations différentes d'un même objet ou de mêmes quantités physiques (par exemple en imagerie hyperspectrale, ou en traitement d'antenne), les différentes observations peuvent avoir en commun leurs supports dans le domaine parcimonieux. On parle dans ce cas de parcimonie conjointe.

L'adaptation d'OMP à cette parcimonie est facile, et est étudiée théoriquement dans [GRSV08]. La sélection de l'atome à chaque étape, se fera en sommant la corrélation des différents signaux avec les atomes (ou, au choix, leur carrés). La structure générale de l'algorithme reste identique.

De même, Basis Pursuit peut être modifié pour rendre compte de ce modèle, en remplaçant la norme ℓ_1 par une norme mixte [CH06]. En notant $\mathbf{S}$ la matrice contenant les signaux sous forme de colonnes, et $\mathbf{C}$ la matrice contenant les coefficients de ces signaux, on trouve $\hat{\mathbf{C}}$ comme la solution de :

$$\hat{\mathbf{C}} = \text{argmin}\|\mathbf{C}\|_{2,1} \text{ tel que } \mathbf{S} = \mathbf{DC}.$$

La norme mixte $\ell_{2,1}$ est définie par

$$\|\mathbf{C}\|_{2,1} = \sum \|\mathbf{C}^j\|_2$$

où $\mathbf{C}^j$ est le $j-$ième vecteur *ligne* de $\mathbf{C}$.

Parcimonie par blocs

Un autre cas fréquent est la parcimonie par blocs. Dans ces cas, les coefficients peuvent être regroupés par blocs. Ce ne sera pas alors la taille des supports qui sera importante, mais le nombre de blocs utilisés pour la décomposition des signaux.

Pour OMP, à la place de calculer les produits scalaires du signal avec les atomes, on calculera la norme de la projection du signal sur l'espace engendré par les atomes d'un même bloc. Le bloc pour lequel cette norme est maximale est selectionné. On retrouve bien OMP quand les blocs sont réduits à des singletons, puisque la norme de la projection d'un vecteur sur la droite vectorielle engendrée par un vecteur unitaire est bien la valeur absolue du produit scalaire entre ces deux vecteurs. L'algorithme ainsi obtenu est appelé Block OMP (BOMP) [YCEB10], ou Group OMP.

Pour Basis Pursuit, en décomposant $\mathbf{c}$ en plusieurs sous-vecteurs $\mathbf{c}_j$ correspondant chacun à un groupe d'atomes, le problème de minimisation devient

$$\hat{\mathbf{c}} = \text{argmin} \sum \|\mathbf{c}_j\|_2 \text{ tel que } \mathbf{s} = \mathbf{Dc}.$$

Ces deux modèles, bien qu'en première approche semblant assez différents, sont toutefois liés, puisque la parcimonie conjointe peut se réduire à la parcimonie par blocs en réorganisant les données.

D'autres modèles plus compliqués existent, avec des groupes se chevauchant, etc. Bach donne une méthode pour construire des normes adaptées à un type de structure donnée [Bac10]. Nos a priori seront cependant assez simples pour ne pas avoir à utiliser ces outils.

5.2.4 Parcimonie de type analyse

Un type de parcimonie différent est la parcimonie à l'analyse. Alors que dans la parcimonie de type synthèse, c'est le vecteur de décomposition du signal dans une base ou un dictionnaire qui est parcimonieux, ici ce sera l'image du signal par un opérateur (linéaire) fixé à l'avance qui aura peu de coefficients non nuls. Ces deux types de parcimonie ont été comparées dans [EMR07]. De nouveaux résultats sur ce modèle sont apparus récemment, notamment un algorithme itératif, GAP, analogue d'OMP [NDEG12].

Ce type de parcimonie vient généraliser l'utilisation de la variation totale. La variation totale, norme ℓ_1 du gradient discret d'une image, est généralement utilisée pour les applications en traitement d'image, puisqu'elle permet de bien reconstituer les signaux constants par morceaux. Contrairement à la régularisation de Tikhonov, utiliser un terme régularisant en variation totale permet de conserver les discontinuités des signaux à reconstruire, discontinuités courantes dans les images. Dans le formalisme de la parcimonie à l'analyse, cela revient à rechercher l'image pour laquelle le gradient est le plus parcimonieux possible. D'autres types d'applications sont en train d'émerger, notamment pour traiter des problèmes venant de la physique, comme la localisation de sources [NG12]. Nous traiterons ce problème en utilisant la parcimonie de type synthèse dans le chapitre 8.

5.3 Compressed sensing

La parcimonie peut servir d'a priori pour la régularisation de problèmes inverses. En remplaçant, par exemple, la norme ℓ_2 de la régularisation de Tikhonov par une norme ℓ_1, on peut tirer parti de tels a priori pour améliorer la régularisation. Pour les images, la parcimonie de la transformée en ondelettes ou du gradient de l'image (ce qui revient à minimiser la variation totale, c'est à dire la norme ℓ_1 du gradient) peut être utilisée pour, par exemple, conserver les discontinuités qui auraient autrement été gommées par la régularisation.

L'application la plus spectaculaire de tels a priori est l'acquisition compressée, ou *compressed sensing* [Don06, CRT05, CW08], ou encore *compressive sampling*. En effet, l'utilisation de la parcimonie des signaux va non seulement permettre de régulariser des problèmes inverses, mais également de réduire significativement le nombre de mesures à effectuer. Il sera donc en particulier possible de descendre en dessous de la limite de Shannon.

En suivant le théorème de Shannon, l'échantillonnage d'un signal incluant une composante de fréquence f nécessiterait de l'échantillonner à une fréquence d'au moins $2f$. Avec le compressed sensing, ce sera la parcimonie du signal, dans une base connue à l'avance, qui déterminera le nombre de mesures à effectuer.

Voici figure 5.5 une démonstration sur un exemple simple. Le signal à reconstruire est de taille 256, et sa transformée de Fourier n'a que 8 coefficients non nuls. Ce signal ayant des composantes hautes fréquences, il est nécessaire de l'échantillonner finement pour pouvoir appliquer le théorème d'échantillonnage de Shannon. Or, nous voulons le reconstruire avec les 40 échantillons indiqués par des points noirs.

L'approche classique serait de calculer l'estimation aux moindres carrés, c'est-à-dire de chercher parmi tous les signaux correspondants aux mesures celui dont la norme ℓ_2 est minimale. Cette estimation, comme on le voit clairement sur la figure, est très mauvaise. En effet, on ne retrouve que les coefficients du signal mesurés, les autres étant fixés à 0 pour minimiser la norme ℓ_2 du signal. La norme ℓ_2, invariante par changement de base orthogonale, ne peut de toute façon pas prendre en compte la parcimonie, qui est une propriété liée à une base particulière.

Le compressed sensing propose lui de minimiser une norme ℓ_1, c'est-à-dire d'utiliser Basis Pursuit. Cette norme dépendant de la base dans laquelle on la calcule,

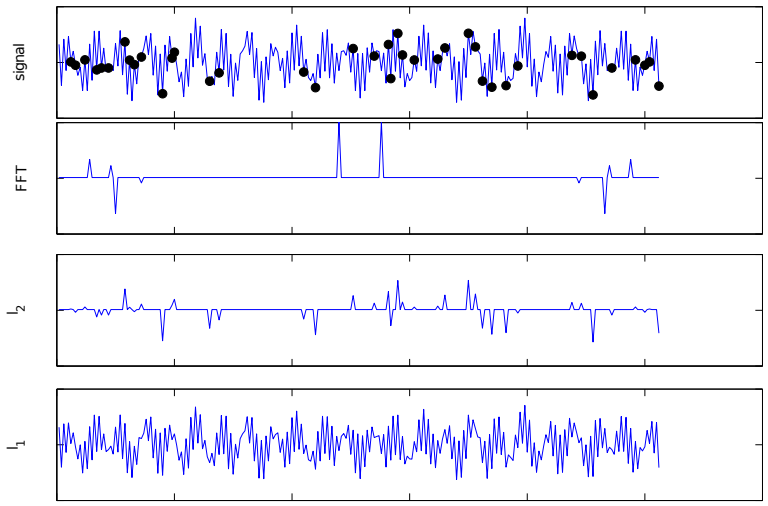

FIGURE 5.5 – Exemple d'application du compressed sensing. De haut en bas : (1) un signal parcimonieux dans la base de Fourier (2) les coefficients de sa FFT (3) sa reconstruction ℓ_2 à partir des échantillons indiqués par des disques sur le signal (4) sa reconstruction ℓ_1 à partir des mêmes échantillons

il est nécessaire de bien la choisir. Elle doit vérifier deux conditions :

- le signal à reconstruire doit y être parcimonieux
- elle doit être incohérente avec la base dans laquelle le signal est mesuré (ici, la base canonique), ce qui veut dire que les vecteurs de la première base doivent avoir une représentation dans la deuxième la plus étalée possible.

Si ces deux conditions sont respectées, il est alors possible de reconstituer le signal avec moins de mesures que demandées par le théorème de Shannon-Nyquist, comme on le voit sur le dernier graphique de la figure 5.5.

De nombreux résultats théoriques viennent expliquer ce phénomène, et donner des indications pour construire des mesures à même d'appliquer cette méthode. Deux choix de mesures permettent la reconstruction :

- les mesures sont des produits scalaires du signal avec des vecteurs tirés au hasard (gaussiens ou Bernoulli). Ces mesures sont cependant difficiles à mettre en œuvre, car elles nécessitent un contrôle très fort sur le processus physique de mesure. Ce principe a néanmoins été implémenté en optique, avec la caméra à 1 pixel, utilisant un réseau de micro-miroirs pour mettre en œuvre ces produits scalaires [DDT+08].
- les mesures sont encore des produits scalaires, mais avec des vecteurs choisis au hasard parmi une base fixée la plus incohérente avec la base où le signal est parcimonieux (au sens ou le produit scalaire entre un vecteur de chaque base doit être le plus faible possible). C'est la méthode appliquée pour l'exemple de la figure 5.5, où les vecteurs de la base de Fourier sont très incohérents avec la base canonique, les produits scalaires valant $1/\sqrt{N}$ où N est la dimension du signal. C'est d'ailleurs la cohérence la plus basse possible.

Des résultats théoriques permettent alors de dire qu'avec grande probabilité, il suffit d'un nombre de mesures un peu plus que proportionnel au nombre de coefficients non nuls du signal pour le reconstituer.

Les résultats sur la possibilité de la reconstruction sont le plus souvent de nature probabiliste, c'est à dire qu'ils donnent la probabilité de pouvoir reconstruire le signal. En effet, les résultats théoriques standards, notamment pour Basis Pursuit, font intervenir la constante d'isométrie restreinte de la matrice reliant signal et mesures. On associe à cette matrice, notée $\mathbf{A}$ et rectangulaire (plus large que haute), sa constante d'isométrie restreinte δ_s définie par la plus petite valeur telle que

$$(1 - \delta_s)\|\mathbf{x}_s\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}_s\|_2^2 \leq (1 + \delta_s)\|\mathbf{x}_s\|_2^2$$

pour tous vecteurs $\mathbf{x}_s$ dont la taille du support est s. La reconstruction par Basis Pursuit est alors possible pour tout vecteur avec support de taille s si $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$ [Can08]. Ce résultat classique a depuis été amélioré, par exemple dans [FL09]. Cette constante d'isométrie restreinte est cependant très difficile à calculer, voire impossible en temps raisonnable pour des tailles de matrices intéressantes. D'autre part, ces résultats ne sont que des conditions suffisantes. En pratique, la reconstruction fonctionne pour des valeurs de constante d'isométrie restreinte plus élevées. Ces résultats sur la reconstruction de signaux parcimonieux ne seront donc pas utilisés dans la suite, où nous vérifieront nos résultats par des simulations et manipulations.

Le compressed sensing n'est pas seulement un ensemble de théorème mathématiques. De nombreuses applications ont déjà été développées. L'IRM compressive [LDSP08], ou plus généralement l'imagerie médicale compressive, permet de réaliser des images de qualité semblable aux systèmes existants, mais en nécessitant des temps de mesures moindres, ce qui permet de réduire les doses d'irradiation reçues, ou de rendre plus facile l'imagerie chez les enfants. Le *xampling* est une autre application, visant à échantillonner des signaux temporels hautes fréquences avec une faible fréquence d'échantillonnage [MEE11].

Les applications en acoustique étaient cependant assez rares au début de cette thèse.

5.4 Conclusion

Les méthodes de résolution de problèmes inverses sont multiples, et dépassent largement le cadre de cette thèse. Nous utiliserons dans les chapitres suivants les a priori parcimonieux des chapitres 1 et 2 pour résoudre quelques problèmes inverses de l'acoustique :

- l'holographie acoustique (chapitre 6), où nous montrerons qu'en remplaçant le terme de régularisation ℓ_2 généralement employé par un terme ℓ_1 dans une base adaptée, et une antenne régulière de microphones par une antenne aléatoire, nous pouvons réduire le nombre de micros utilisés sans réduire la qualité de la reconstruction des déformées opérationelles d'une plaque,
- l'interpolation spatiale de réponses impulsionnelles d'une plaque (chapitre 7) avec une fréquence d'échantillonnage plus basse que demandée par le théorème d'échantillonnage de Shannon.
- la localisation de sources en environnement réverbérant inconnu (chapitre 8), où des modèles parcimonieux de champ nous aideront à séparer les différentes composantes du champ mesuré.

L'utilisation de ces a priori permettent non seulement de diminuer le nombre de mesures à effectuer pour reconstituer des champs vibratoires ou acoustiques, mais également à élaborer de nouvelles méthodes de résolution de problèmes difficiles comme la localisation de sources en environnement inconnu.

Chapitre 6

Holographie acoustique en champ proche compressive

L'holographie acoustique en champ proche (Nearfield Acoustical Holography, NAH) est en quelque sorte le problème inverse acoustique standard. Le but est de reconstruire une distribution de sources sur un plan, à partir de mesures situées sur un plan parallèle à celui-ci. La propagation des ondes, atténuant les hautes fréquences spatiales de la distribution de sources, rend la rétropropagation non triviale. Il est donc nécessaire de régulariser l'inversion, comme montré au chapitre précédent pour le cas de la déconvolution d'image (l'holographie est en fait un problème de déconvolution, où les données peuvent prendre des valeurs complexes). Jusqu'à présent, la plupart des travaux se sont basés sur la régularisation de Tikhonov, ou sur des implémentations diverses de filtres passe-bas. Nous proposons ici, dans le cas de la mesure de déformées opérationnelles d'une plaque, d'utiliser la parcimonie de la distribution de sources pour régulariser l'inversion. Cette étude a permis de construire une antenne adaptée à l'utilisation du formalisme parcimonieux, antenne utilisée dans des manipulations expérimentales qui ont conduit à la validation de la méthode.

Cette étude a fait l'objet d'une publication dans le JASA [CPO+], en collaboration avec Antoine Peillot et François Ollivier de l'équipe Modélisation Propagation et Imagerie Acoustique de l'Institut Jean le Rond d'Alembert (UPMC) pour les manipulations, et Nancy Bertin et Rémi Gribonval de l'équipe METISS (INRIA, CNRS) à Rennes, pour le traitement des données.

6.1 État de l'art

L'article fondateur de l'holographie acoustique en champ proche date de 1985, par Maynard, Williams et Lee [MWL85]. Le principe général de l'holographie acoustique en champ proche y est décrit, mais c'est plus tard que le problème de la régularisation a été traité de façon plus explicite. Dans [Wil01], Williams propose la régularisation de Tikhonov, ainsi que des techniques numériques telles que les itérations de Landweber.

D'autre auteurs ont proposé des méthodes de régularisation différentes : Thomas et Pascal [TP05] proposent l'utilisation d'une transformée en ondelettes en prétraite-

FIGURE 6.1 – Dispositif expérimental d'holographie acoustique en champ proche

ment, et récemment, Antoni propose l'utilisation d'a prioris probabilistes sur les distributions de sources dans un formalisme bayésien [Ant12].

La méthode de régularisation que nous proposons est basée sur la parcimonie des champs de vitesses à reconstruire. En plus d'améliorer les résultats des inversions, elle permettra, après la construction d'une antenne appropriée, l'utilisation d'un nombre réduit de mesures.

6.2 Principe de la NAH

Un dispositif expérimental de NAH est montré figure 6.1. L'objectif de ce montage [MCO+12] était de mesurer la vibrations de la table d'harmonie d'un clavecin, à partir des mesures sur l'antenne, parallèle à la table. La propagation acoustique entre un plan source d'élévation 0 et un plan de mesure d'élévation z_0, parallèles, s'écrit simplement comme une convolution de la distribution de sources $\dot{w}$ par la fonction de Green du milieu :

$$p(x, y, z_0) = g(x, y, z_0) \star_{xy} \dot{w}(x, y, 0) \tag{6.1}$$

où $\star_{xy}$ représente la convolution en deux dimensions et g vaut

$$g(x, y, z) = g(\mathbf{r}) = -i\rho ck \frac{e^{ik||\mathbf{r}||}}{2\pi||\mathbf{r}||}.$$

Après transformée de Fourier spatiale, on obtient

$$P(k_x, k_y, z_0) = G(k_x, k_y, z_0)\dot{W}(k_x, k_y, 0). \tag{6.2}$$

où k_x et k_y sont les vecteurs d'ondes selon les directions x et y.

Les implémentations standards de la NAH utilisent une version discrétisée de cette équation. Après mesure du champ sur une grille régulière et une transformée de Fourier discrète, on obtient une formulation vectorielle de la NAH :

$$\mathbf{Fp} = \mathbf{GF}\dot{\mathbf{w}} \tag{6.3}$$

où :
- $\dot{\mathbf{w}}$ est le vecteur des vitesses de la plaque aux points d'échantillonnage, §
- $\mathbf{p}$ est le vecteur des pressions mesurées sur le plan source,
- $\mathbf{F}$ la matrice de la FFT à deux dimensions,
- $\mathbf{G}$ une matrice diagonale dont les termes sont les valeurs de G aux vecteurs d'ondes correspondant aux vecteurs de base de la FFT.

L'inversion naïve de cette équation donne

$$\mathbf{p} = \mathbf{F^{-1}GF\dot{w}}.$$

Les résultats de cette inversion sont inutilisables, l'opérateur de propagation étant mal conditionné. La transformée de g est en effet

$$G(k_x, k_y, z_0) = \frac{k_z}{\rho_0 ck} e^{ik_z z_0}$$

où $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$. Ainsi, à haute fréquences spatiales, quand $k_x^2 + k_y^2$ dépasse k^2, k_z devient imaginaire pur, et l'exponentielle décroit très rapidement. Le propagateur se comporte donc comme un filtre passe-bas.

Comme vu au chapitre précédent, l'utilisation de la régularisation de Tikhonov dans ce contexte se réduit à filtrer l'inversion naïve avec un filtre passe-bas. Les discontinuités, qui ont de fortes composantes hautes fréquences, sont donc perdues, alors qu'elles peuvent être importantes pour la reconstruction (par exemple entre une plaque aux bords libres et son contour).

6.3 Régularisation parcimonieuse

Afin d'améliorer ces résultats, nous proposons d'exploiter la parcimonie des champs de vitesses à reconstruire. Dans le cas nous intéressant, la mesure de déformées opérationnelles de plaque, nous pouvons utiliser les résultats du chapitre 2 sur l'approximation de solutions du modèle de Kirchhoff-Love. Afin d'obtenir une méthode de régularisation d'implémentation aisée, ce modèle sera légèrement simplifié.

Nous utilisons ici la version ondes planes des approximations : une solution w du modèle de Kirchhoff-Love peut-être approximée par des sommes d'ondes planes $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ et d'ondes évanescentes $e^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, où les vecteurs d'ondes sont pris dans un cercle de rayon k_p (ce k_p est différent du nombre d'onde des ondes acoustiques dans l'air). Nous négligerons les ondes évanescentes qui, d'après nos résultats expérimentaux, ne sont pas importantes pour la reconstruction. Nous relâchons ensuite la contrainte sur les nombres d'ondes des ondes planes utilisés. Le modèle utilisé pour l'inversion est donc la parcimonie dans un dictionnaire d'ondes planes, sans contrainte sur leurs nombres d'ondes. En échantillonnant de façon astucieuse les vecteurs d'ondes (i.e. sur une grille rectangulaire), on peut construire ce dictionnaire en restreignant au domaine de la plaque les vecteurs de la base de Fourier sur un domaine rectangulaire plus grand (voir figure 6.2).

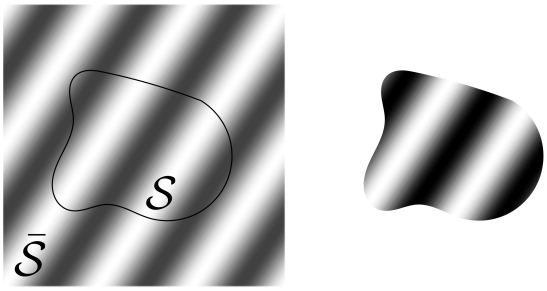

FIGURE 6.2 – Construction des atomes du dictionnaire. À gauche, le domaine $\bar{\mathcal{S}}$ sur lequel est construit les vecteurs de base de la transformée de Fourier, et la forme de la plaque $\mathcal{S}$. À droite, un atome du dictionnaire.

Ce modèle simplifié permet l'application directe d'algorithmes de reconstruction parcimonieuse, en particulier de Basis Pursuit, qui revient à remplacer la norme ℓ_2 de la régularisation de Tikhonov par une norme ℓ_1.

Cette méthode de régularisation a été testée avec deux plaques différentes : une plaque rectangulaire, tenue sur les coins et libres aux bords, ainsi qu'une plaque en forme de disque coupé, tenue sur une partie de son bord et libre sur le reste. La mesure est faite sur une antenne régulière de 120 microphones, à 16 reprises en déplaçant légèrement l'antenne, pour obtenir 1920 mesures sur une grille quatre fois plus fine. La qualité des reconstructions est mesurée en calculant la corrélation entre la mesure de référence, obtenue par vibrométrie laser, et la reconstruction. La corrélation entre deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est donnée par

$$C = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Les figures 6.3 et 6.5 donnent les reconstructions des déformées opérationnelles à 4 fréquences pour chaque plaque, avec 6 méthodes différentes :

- la première est la reconstruction de référence, par vibrométrie laser ;
- vient ensuite la NAH classique, avec régularisation de Tikhonov et les 1920 mesures ;
- régularisation de Tikhonov, mais avec seulement 120 mesures (antenne régulière utilisée une seule fois) ;
- les trois reconstructions suivantes utilisent Basis Pursuit, avec 120 mesures régulières ;
- avec 120 mesures prises au hasard parmi les 1920,
- avec 120 mesures prises au hasard au dessus de la plaque.

Ces premiers tests montrent la pertinence de l'utilisation de la parcimonie pour la régularisation de la NAH. L'amélioration est particulièrement frappante en basses et hautes fréquences. En basses fréquences, l'utilisation de cette régularisation alternative permet une meilleure reconstitution des déformées au bord des plaques, le filtrage étant trop brutal en utilisant Tikhonov. En hautes fréquences, l'utilisation de la parcimonie permet de reconstituer des profils de vitesses difficiles à reconstruire avec des méthodes classiques, la fréquence d'échantillonnage spatiale de l'antenne étant trop faible pour reconstituer toutes les composantes.

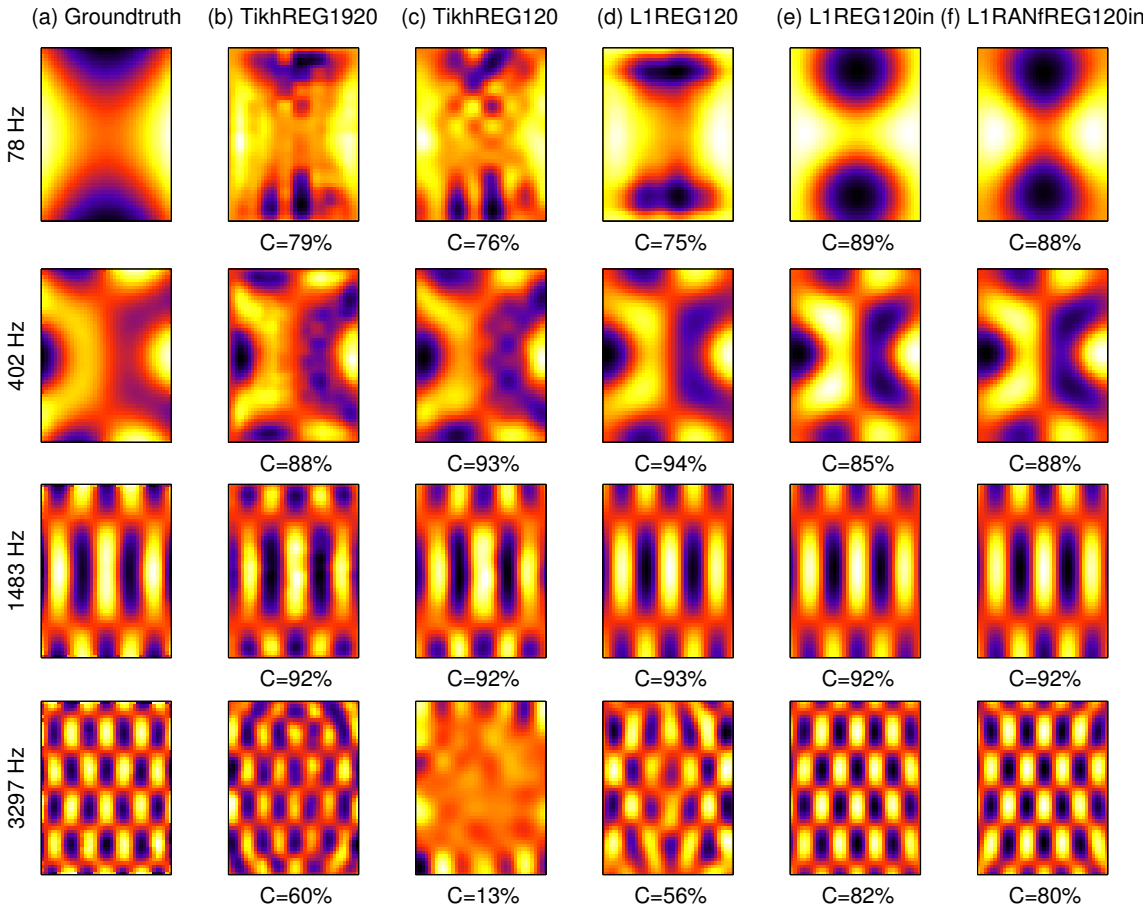

Figure 6.3 – Reconstruction de 4 déformées opérationnelles de la plaque rectangulaire avec diverses méthodes

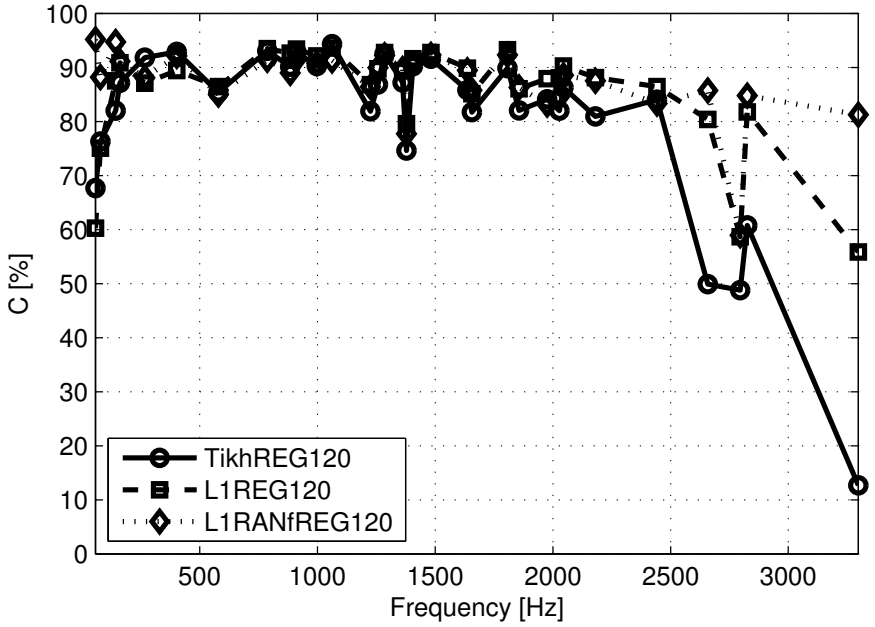

FIGURE 6.4 – Comparaison de trois approches utilisant 120 microphones : Tikhonov avec l'antenne de 120 microphones, ℓ_1 avec une sous-antenne régulière de 120 microphones au-dessus de la plaque, et ℓ_1 avec 120 microphones placés aléatoirement au-dessus de la plaque. La corrélation est donnée pour différents modes.

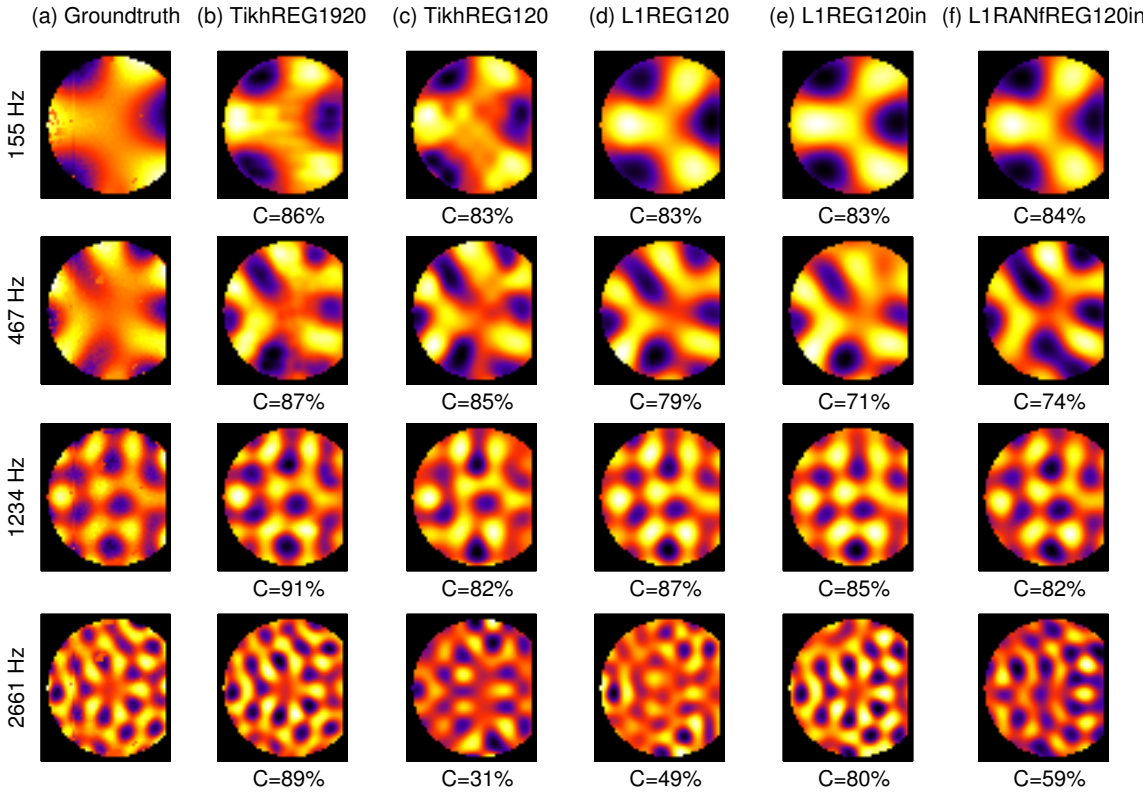

FIGURE 6.5 – Reconstruction de 4 déformées opérationnelles de la plaque circulaire avec diverses méthodes

Ces observations sont confirmées par la figure 6.4, qui donne les corrélations entre les modes et leurs reconstructions, à nombre de mesure constant, utilisant Tikhonov, ℓ_1 avec antenne régulière et ℓ_1 avec antenne aléatoire. Les performances de l'antenne aléatoire, bien que comparables à Tikhonov en moyennes fréquences, sont nettement meilleures à basses et hautes fréquences.

Notons enfin que utiliser des mesures situées uniquement au-dessus de la plaque est préférable à une zone de mesure plus grande que celle-ci. Alors que pour l'holographie classique, ceci était nécessaire afin que des discontinuités ne viennent perturber le calcul de la transformée de Fourier spatiale du champ, les mesures situées à l'extérieur du domaine de la plaque ne sont pas bien prises en compte par le modèle de propagation qui suppose ici une plaque bafflé.

Pour ces résultats, l'antenne aléatoire était simulée à partir d'un échantillonnage régulier fin d'où on a sélectionné 120 microphones. Nous étudions maintenant la construction d'une antenne aléatoire, qui nous permettera d'éviter les problèmes de répétabilité que posent les mesures multiples.

6.4 Construction d'une antenne aléatoire

Comme vu dans le chapitre précédent, il est difficile d'appliquer les résultats théoriques pour la construction de dispositifs expérimentaux de *compressed sensing*. Nous choisissons donc de simuler numériquement différentes options de construction d'antenne, et de choisir celle présentant le meilleur compromis entre performances et simplicité de mise en œuvre expérimentale.

Six formes d'antennes sont testées :

- antenne régulière ;
- antenne "tensorielle", où les micros sont placés aléatoirement sur des barres parallèles identiques, elles-mêmes placées aléatoirement ;
- antenne parallèle, où les barres peuvent être différentes ;
- antenne oblique croisée, les barres sont cette fois obliques et peuvent se croiser ;
- antenne oblique, idem mais sans croisements ;
- antenne aléatoire avec tirage de densité uniforme, difficile à construire mais servant de référence.

Ces six antennes sont testées numériquement sur 3 modes d'une plaque carrée : modes (8,8) à 911Hz, (2,12) et (12,2) à 1053Hz, pour des nombres de capteurs allant de 10 à 100. La taille de la plaque est de 200mm, la distance entre plaque et antenne de 20mm.

Les reconstructions ont été obtenues en utilisant CVX [GB11, GB08], un librairie de minimisation convexe. L'erreur de reconstruction pour ces différents modes, nombres de mesures, et formes d'antenne, est donnée figure 6.6. La meilleure antenne parmi les six est l'antenne aléatoire. Cependant, construire une telle antenne est techniquement plus difficile que, par exemple, constuire une antenne oblique, qui elle aussi permet des reconstructions nettement meilleures que l'antenne régulière. C'est donc cette antenne oblique qui sera choisie pour les manipulations.

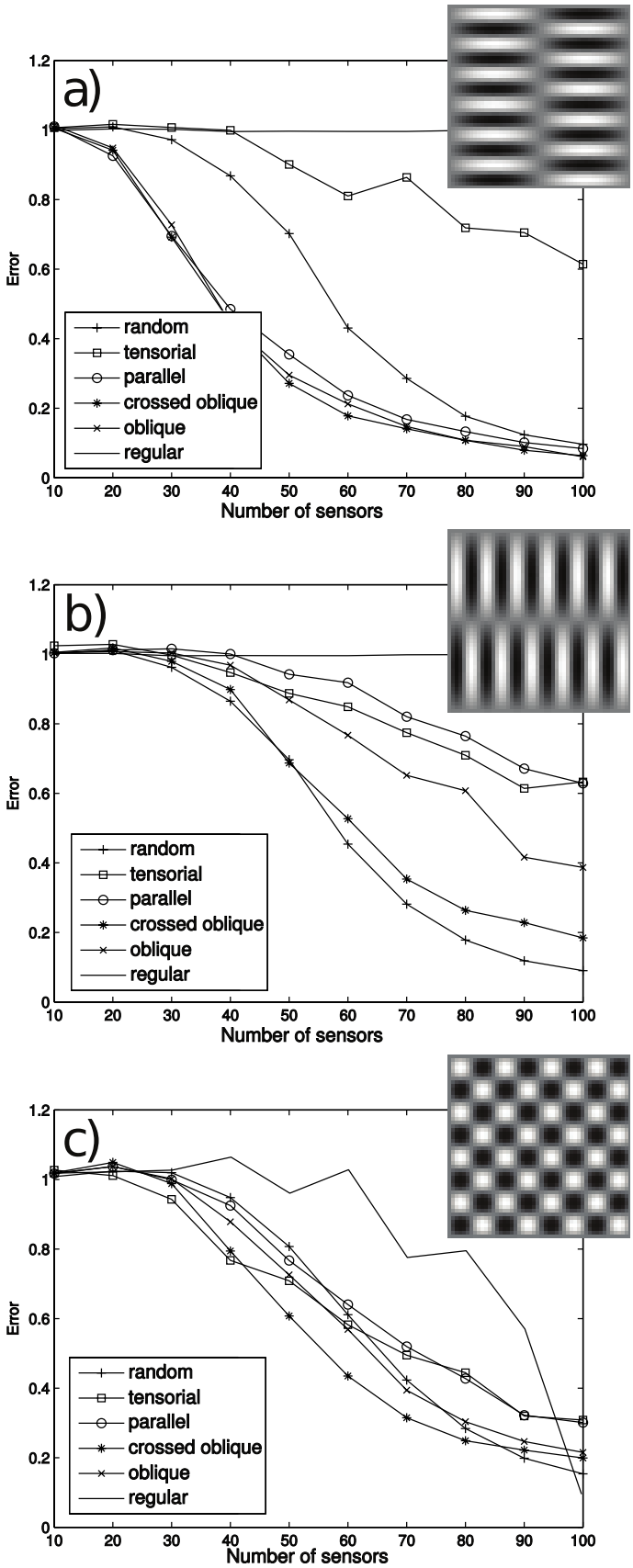

FIGURE 6.6 – Performances des six formes d'antennes proposées

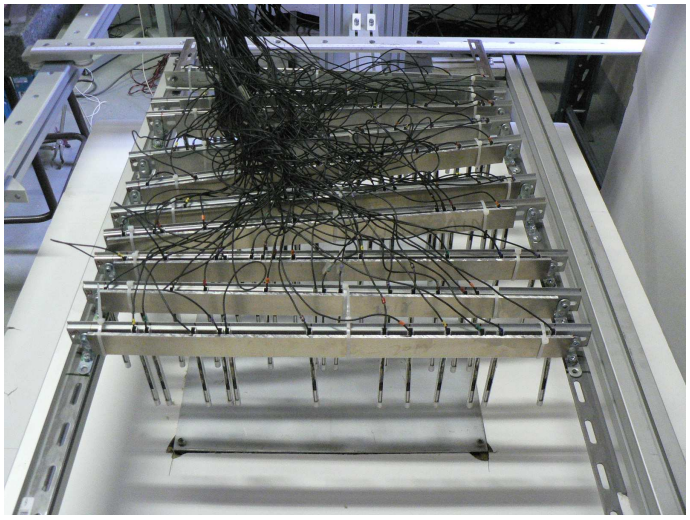

Figure 6.7 – Antenne aléatoire construite

6.5 Résultats expérimentaux

L'antenne construite est visible figure 6.7. Elle est testée avec la plaque rectangulaire. Les résultats sont donnés figure 6.8, pour un nombre constant de microphones (42), mais pris en sous-échantillonnant les 1920 mesures pour en tirer 42 mesures régulières ou aléatoires, ou sur la nouvelle antenne. Cette nouvelle antenne permet donc de bonnes reconstructions avec un nombre très réduit de microphones. Une raison est qu'il n'est plus nécessaire de répéter la mesure plusieurs fois, ce qui évite de devoir remettre en phase les différents lots de mesures.

La figure 6.9 donne, pour les 4 modes, la corrélation entre la reconstruction et la référence, pour un nombre variable de microphones, avec Tikhonov et antennes régulières, et ℓ_1 et antennes aléatoires. L'utilisation de la parcimonie et d'antennes aléatoires permet de conserver de bonnes reconstructions avec seulement quelques dizaines de microphones.

6.6 Conclusion

L'holographie acoustique en champ proche, généralement régularisée par Tikhonov ou un simple filtrage passe-bas, est ici régularisée en utilisant la parcimonie des profils de vitesses à reconstruire. Nous montrons que ceci permet de meilleures reconstructions, avec un nombre de mesures significativement réduit. La méthode telle qu'elle est présentée a cependant un désavantage certain : elle est basée sur un modèle de plaque homogène, hypothèse assez forte sur le type de structure à étudier. Des plaques inhomogènes, voir des structures plus complexes, telles qu'un système mécanique complet, comme un moteur, ne sont pas pris en compte par le modèle parcimonieux utilisé. Nous pouvons cependant en tirer deux conclusions importantes :

– des méthodes de régularisation autres que Tikhonov, utilisant des informations a priori sur les distributions de vitesses, peuvent être utilisées et améliorent les reconstructions. Ce point est en accord avec l'article d'Antoni [Ant12] ;

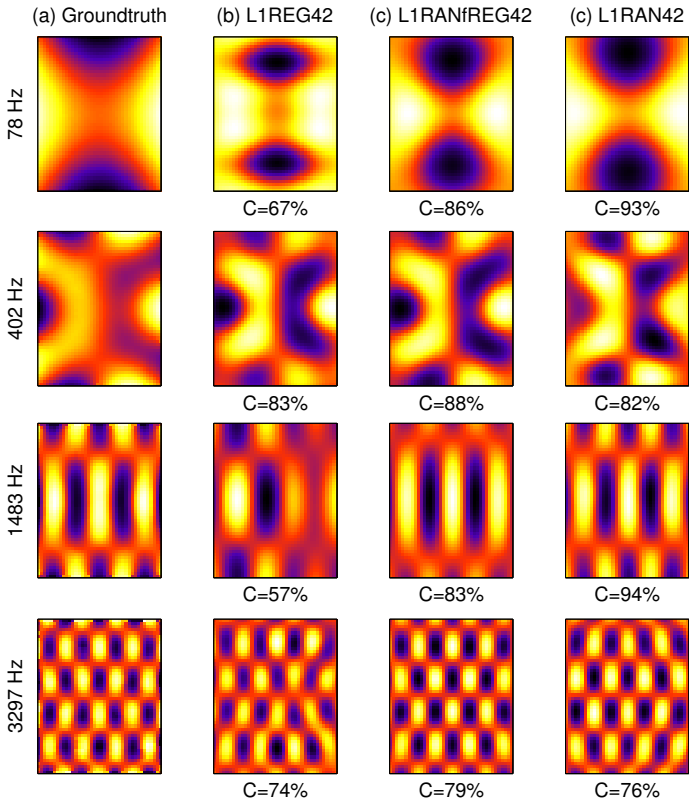

FIGURE 6.8 – Reconstructions avec l'antenne aléatoire pour différentes méthodes.

– une antenne aléatoire, associée à une méthode de régularisation pouvant en tirer profit, permet également de meilleures performances.

Le second point est lui en désaccord avec un article de Bai et al. [BLL10]. Les auteurs y affirment que l'utilisation d'antennes aléatoires pour l'imagerie en champ proche est injustifiée. Ce résultat est dû au fait qu'ils utilisent une SVD tronquée ou la régularisation de Tikhonov pour régulariser l'inversion, régularisations qui ne permettent pas de profiter des propriétés d'une antenne aléatoire comme le peut la régularisation par la norme ℓ_1.

Le chapitre suivant se propose d'interpoler des réponses impulsionnelles de plaques. Le modèle parcimonieux, jusqu'ici simplifié pour pouvoir formuler la régularisation sous une forme standard, y sera utilisé intégralement.

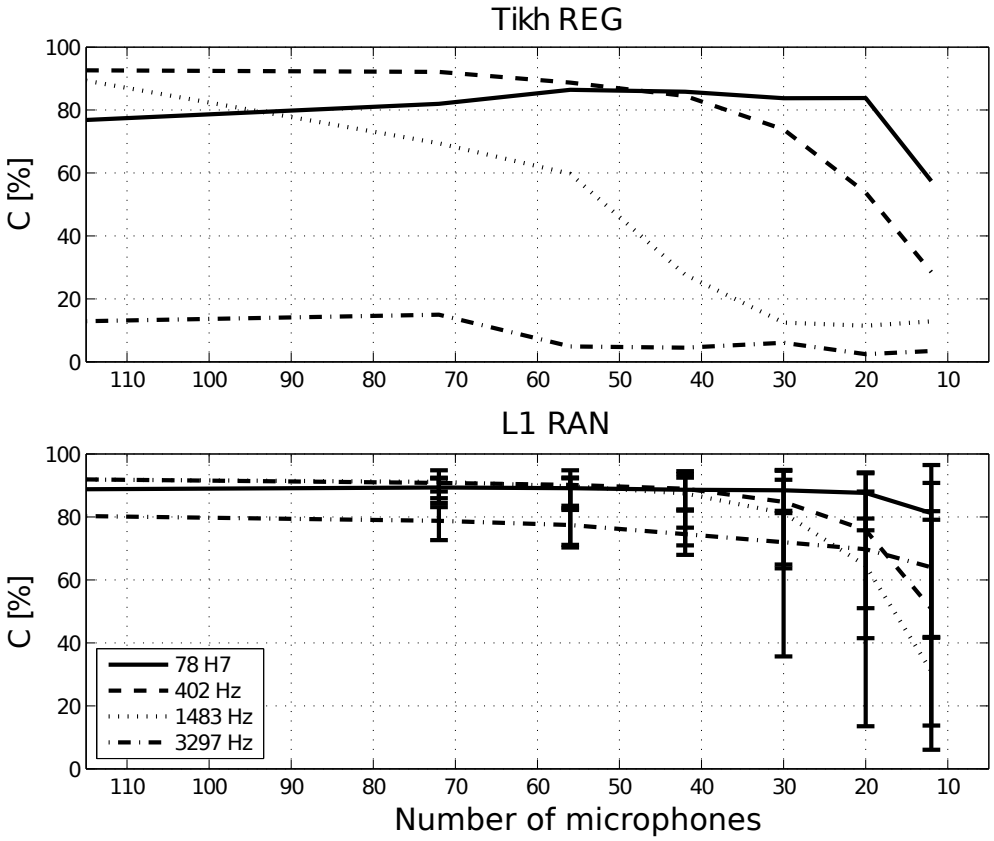

Figure 6.9 – Comparaison de Tikhonov et antenne régulière avec ℓ_1 et antenne aléatoire, pour 4 modes, et différents nombres de microphones

Chapitre 7

Interpolation spatiale de réponses impulsionnelles de plaques

Dans cette partie, nous nous intéressons à la détermination de réponses impulsionnelles de plaques, avec le but de reconstruire ces réponses avec le nombre le plus faible de mesures.

Classiquement, la détermination de ces réponses impulsionnelles peut se faire de deux façons :

- par des mesures expérimentales, avec diverses excitations (impulsions, chirps, excitation harmonique, etc.), en échantillonnant spatialement le champ vibratoire assez finement pour pouvoir appliquer le théorème d'échantillonnage,
- par des méthodes numériques, directement (méthode des différences finies par exemple), ou par une décomposition modale, qu'elles soient tout à fait générales comme les éléments finis, ou utilisant des propriétés particulières du modèle considéré (isotropie, homogénéité, etc.).

Ces méthodes ont toutes deux des limitations : la mesure expérimentale nécessite un grand nombre d'échantillons spatiaux (i.e. de mesures) particulièrement en hautes fréquences, et les méthodes numériques demandent la connaissance parfaite des paramètres du modèle et de la géométrie de la plaque.

La méthode considérée ici peut être abordée de deux points de vue différents :

- comme une méthode expérimentale, où l'utilisation d'un modèle physique simple (hypothèses de Kirchhoff-Love, homogénéité, isotropie, mais pas d'informations sur les paramètres du modèle ou les conditions aux limites) permet de réduire le nombre de mesures nécessaires,
- ou comme une méthode numérique, où la connaissance du matériau et des conditions aux limites est remplacée par des mesures en faible nombre.

Cette méthode est basée sur une décomposition modale des réponses impulsionnelles, et sur la décomposition en ondes planes de ces modes. Contrairement à la partie précédente, nous utilisons ici le modèle complet, i.e. avec les contraintes sur les modules des vecteurs d'onde des ondes planes utilisées pour la décomposition. Des variantes d'algorithmes parcimonieux standards sont utilisées pour la reconstruction, avec de bonnes performances, pour un nombre d'échantillons pouvant, dans les conditions expérimentales considérées ici, être le tiers du nombre à atteindre pour pouvoir appliquer le théorème d'échantillonnage.

Ce travail a fait l'object d'une publication dans le Journal of Sound and Vibration en 2011 [CLD11], en collaboration avec Alexandre Leblanc pour les manipulations et l'interprétation des résultats.

7.1 État de l'art

L'article de Haneda et al. [HKK99] présente une méthode semblable pour l'interpolation de réponses impulsionnelles de salle, avec toutefois de sévères limitations. La décomposition modale est obtenue par une méthode de prédiction linéaire, puis l'interpolation spatiale est effectuée avec l'hypothèse d'une salle rectangulaire, sur un segment parallèle à l'un des murs de la salle. Ce cas est donc extrêmement simple, puisqu'il suffit d'identifier un cosinus. Il n'y a donc que 3 paramètres à identifier (fréquence spatiale, phase, amplitude).

L'article de Leblanc et al. [LLI11] utilise une décomposition différente : après une transformée de Fourier, pour chaque fréquence, le champ vibratoire est approximé par une somme de solutions fondamentales dont les singularités sont situées sur un cercle autour de la zone d'intêret (cf. MFS [FK98]).

7.2 Modèle parcimonieux de réponse impulsionnelle

En se plaçant dans les hypothèses de Kirchhoff-Love, la réponse impulsionnelle d'une plaque est la solution de

$$\begin{cases} D\Delta^2 w + \alpha \dfrac{\partial w}{\partial t} + \rho h \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \delta_{t=0,\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \\ \text{conditions aux limites} \end{cases}$$

On suppose que le point d'excitation $\mathbf{x}_0$ est situé en dehors de la zone où la réponse impulsionnelle doit être interpolée. Les conditions aux limites, qui n'ont pas besoin d'être précisées, sont supposées telle que le bilaplacien soit autoadjoint, par exemple appui simple, bords libres ou encastrés, et toutes combinaisons.

En notant w_n les modes propres de Δ^2 et k_n^4 les valeurs propres associées, le déplacement w peut être décrit par une décomposition modale

$$w(\mathbf{x}, t) = \sum_{n \in \mathbf{N}} q_n(t) w_n(\mathbf{x}).$$

Les modes propres étant linéairement indépendants, les coefficients q_n vérifient les équations

$$\rho h \frac{\partial^2 q_n}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial q_n}{\partial t} + D k_n^4 q_n = 0.$$

Les solutions de ces équations sont des sinusoïdes amorties. La réponse impulsionnelle s'écrit donc

$$w(\mathbf{x}, t) = \sum_{n \in N} A_n e^{-a_n t} \cos(\omega_n t + \phi_n) w_n(\mathbf{x}).$$

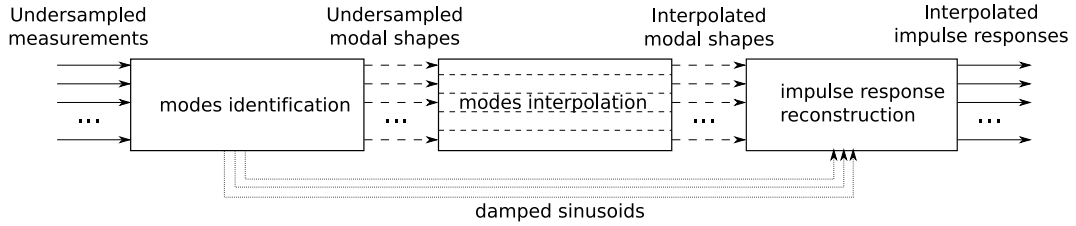

Figure 7.1 – Schéma-bloc de la méthode

Ces modes, solutions de $\Delta^2 w_n + k^4 w_n = 0$ peuvent, comme montré dans le chapitre 2, être approximés par des sommes d'ondes planes propagatives et évanescentes :

$$w_n \approx \sum_{m=1}^{M} w^-_{nm} e^-_{\mathbf{k}_{n,m}}(\mathbf{x}) + w^+_{nm} e^+_{\mathbf{k}_{n,m}}(\mathbf{x})$$

où $e^-_{\mathbf{k}_{n,m}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}_{n,m}\cdot\mathbf{x}}$ sont les ondes propagatives et $e^+_{\mathbf{k}_{n,m}}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{k}_{n,m}\cdot\mathbf{x}}$ les ondes évanescentes.

Enfin, la bande passante des signaux étant limitée, seuls les N premiers modes sont observés, ce qui permet de tronquer la somme modale. L'approximation finale s'écrit donc

$$w(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{n=0}^{N} A_n e^{-a_n t} \cos(\omega_n t + \phi) \left(\sum_{m=1}^{M} w^-_{nm} e^-_{\mathbf{k}_{n,m}}(\mathbf{x}) + w^+_{nm} e^+_{\mathbf{k}_{n,m}}(\mathbf{x}) \right).$$

L'interpolation des réponses impulsionnelles se fera en plusieurs étapes, schématisées figure 7.1 :

- les fréquences et amortissement modaux ω_n et a_n sont déterminés, ce qui permet l'évaluation des amplitudes et phases des modes aux points de mesures ;
- celles-ci sont ensuite utilisées pour estimer les coefficients k_n, w^+_{nm} et w^-_{nm}, et interpoler les modes ;
- enfin, les modes et sinusoïdes amorties sont recombinés pour calculer les interpolations des réponses impusionnelles.

7.3 Identification des modes

La première étape de la détermination des paramètres de la décomposition est l'identification des fréquences et amortissements des modes propres. Pour cette tâche, nous utilisons une variante multicanal d'OMP, Simultaneous Orthogonal Matching Pursuit [GRSV08], algorithme adapté au cas de signaux se décomposant sur les mêmes atomes d'un dictionnaire commun, avec évidemment des coefficients différents. À chaque étape, l'atome choisi est celui qui maximise la somme des corrélations de chaque signaux avec les atomes. Le fonctionnement général de l'algorithme est identique à celui d'OMP. Les atomes sont ici des sinusoïdes amorties $c_{a,\omega,\phi} = e^{-at}\cos(\omega t + \phi)$, où les fréquences et amortissements sont discrétisés, par exemple sur une grille uniforme. Pour éviter la discrétisation des phases, les corrélations sont faites avec les versions complexes de ces sinusoïdes : $\tilde{c}_{a,\omega,\phi} = e^{-at+i\omega t}$ et $\tilde{c}^\star_{a,\omega,\phi} = e^{-at-i\omega t}$. Le calcul peut être accéléré en utilisant la FFT. Calculer la

corrélation d'un signal f avec une sinusoïde amortie $e^{-at+i\omega t}$ revient à calculer la corrélation entre fe^{at} et la sinusoïde $e^{i\omega t}$, que la FFT permet de calculer rapidement. Les phases et amplitudes des composantes sinusoïdales sont esuite estimées par moindres carrés.

L'estimation conjointe sur les différents canaux des fréquences et amortissement présente des avantages non négligeables. Il serait évidemment plus simple d'utiliser un seul canal, mais le risque est de ne pas identifier les modes pour lesquels la mesure est située sur une ligne nodale. D'autre part, l'utilisation indépendante de plusieurs canaux doit être suivie d'une fusion des estimations, tâche non triviale, et nécessite un nombre élevé d'exécutions de l'algorithme (une par canal).

D'autre algorithmes pourraient être utilisés, tels que MUSIC [Sch86, HS90] ou ESPRIT [RPK86]. Cependant, leur intérêt principal, leur haute résolution, c'est à dire le fait de pouvoir distinguer des sinusoïdes qui ne serait pas séparées par une transformée de Fourier, n'est pas ici un réel avantage. En effet, l'estimation des fréquences et amortissements n'est pas le but de la méthode, mais un moyen. Deux modes qui ne seront pas séparés par des estimations basées sur des transformées de Fourier auront des nombres d'ondes proches. La somme de ces deux modes, bien que n'étant pas un mode propre, pourra tout de même être correctement approximée par des sommes d'ondes planes.

Bien que le but principal de ce chapitre est le sous-échantillonnage spatial, il est également possible de sous-échantillonner temporellement. Nous avons, dans un article de conférence [CD10] disponible en annexe, analysé la précision de l'estimation des fréquences et amortissement de signaux multicanaux sous-échantillonnés et reconstitués à l'aide de SOMP et d'une version *compressed sensing* de MUSIC.

7.4 Interpolation des modes

Une fois les fréquences propres identifiées, nous avons à notre disposition la valeur des modes propres aux points de mesure. Leur décomposition en ondes planes est alors utilisée pour pouvoir les interpoler spatialement. Le faible nombre de degrés de liberté nécessaire pour obtenir une approximation correcte des modes propres permet de les reconstruite avec un faible nombre de mesures, par exemple moins élevé que le nombre d'échantillons demandé par le théorème d'échantillonnage.

La première étape de la reconstruction est l'estimation du nombre d'onde k_n. Celle-ci peut être évitée lorsque l'on connaît la relation de dispersion du milieu (par exemple pour l'acoustique, où il est facile de connaître la vitesse de propagation des ondes), mais est nécessaire quand l'épaisseur ou le matériau de la plaque est inconnu. On peut associer à chaque nombre d'onde k l'espace $\mathcal{E}_k$ des combinaisons linéaires d'ondes planes propagatives et exponentielles de nombre d'onde k, et de directions parcourant l'intervalle $[0, 2\pi[$. Le nombre d'onde minimisant la distance entre les mesures et cet espace est pris comme estimation. C'est également le nombre d'onde maximisant la norme la projection orthogonale des mesures sur cet espace.

En pratique, nous n'avons accès qu'aux échantillons choisis pour la mesure, et l'espace $\mathcal{E}_k$ doit être approximé par un espace de dimension fini E_k, obtenu en discrétisant les vecteurs d'ondes sur le cercle de rayon k, par exemple uniformément.

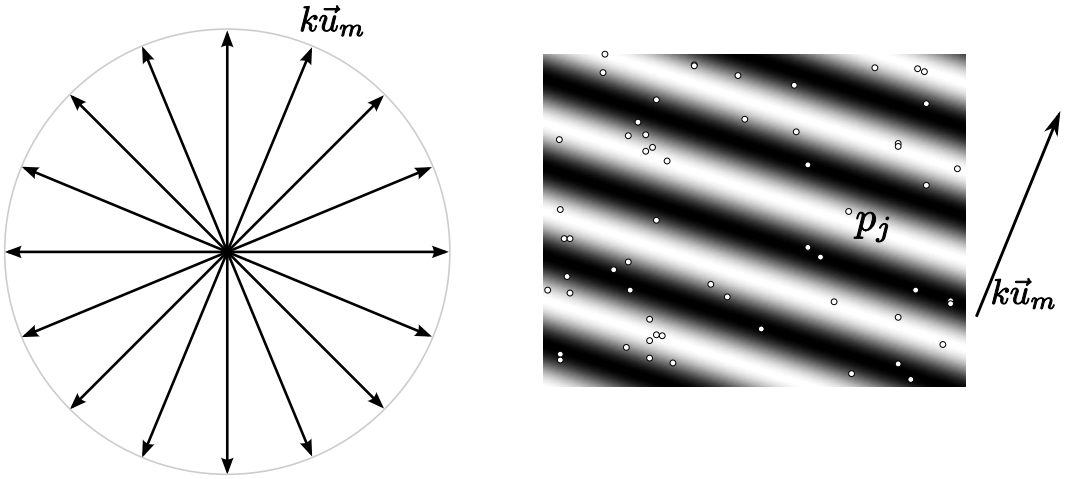

Figure 7.2 – Vecteurs d'ondes utilisés, et onde plane échantillonnée à des positions aléatoires

Une telle discrétisation des vecteurs d'ondes est donnée figure 7.2, avec un exemple d'onde plane échantillonnée spatialement. Les valeurs sont placées dans une matrice W_k :

$$\mathbf{W}_k = \begin{pmatrix} e^{ik\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{x}_1} & \dots & e^{ik\mathbf{u}_M\cdot\mathbf{x}_1} & e^{k\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{x}_1} & \dots & e^{k\mathbf{u}_M\cdot\mathbf{x}_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{ik\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{x}_j} & \ddots & e^{ik\mathbf{u}_M\cdot\mathbf{x}_j} & e^{k\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{x}_j} & \ddots & e^{k\mathbf{u}_M\cdot\mathbf{x}_j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{ik\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{x}_J} & \dots & e^{ik\mathbf{u}_M\cdot\mathbf{x}_J} & e^{k\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{x}_J} & \dots & e^{k\mathbf{u}_M\cdot\mathbf{x}_J} \end{pmatrix}$$

les $\mathbf{u}_m$ étant des vecteurs unitaires pris régulièrement sur le cercle (cf. figure 7.2), les $\mathbf{x}_j$ les points d'échantillonnage. La matrice du projecteur orthogonal sur E_k s'écrit $\mathbf{P}_k = \mathbf{W}_k\mathbf{W}_k^\dagger$ où † est la pseudo-inverse. L'estimation du nombre d'onde $\hat{k}$ est donnée par :

$$\hat{k} = \underset{k}{\operatorname{argmax}} \, ||\mathbf{P}_k\mathbf{m}||^2$$

où $\mathbf{m}$ est un vecteur colonne contenant les mesures. Une fois que k est estimé, les coefficients des ondes planes sont simplement obtenus par projection orthogonale de $\mathbf{m}$ sur E_k.

Cette estimation peut également servir à déterminer la relation de dispersion d'une plaque sans dispositif expérimental complexe, la mesure pouvant être effectuée quelles que soient les conditions au limites de la plaque. Inversement, la connaissance préalable de la relation de dispersion permet d'éviter cette étape.

7.5 Résultats expérimentaux

La méthode est testée sur 3 plaques différentes :
- une plaque de forme irrégulière, au bords libres,
- une plaque rectangulaire, libre sur 3 côtés, mais encastrée sur le dernier,
- enfin, une plaque circulaire tronquée au bords libres.

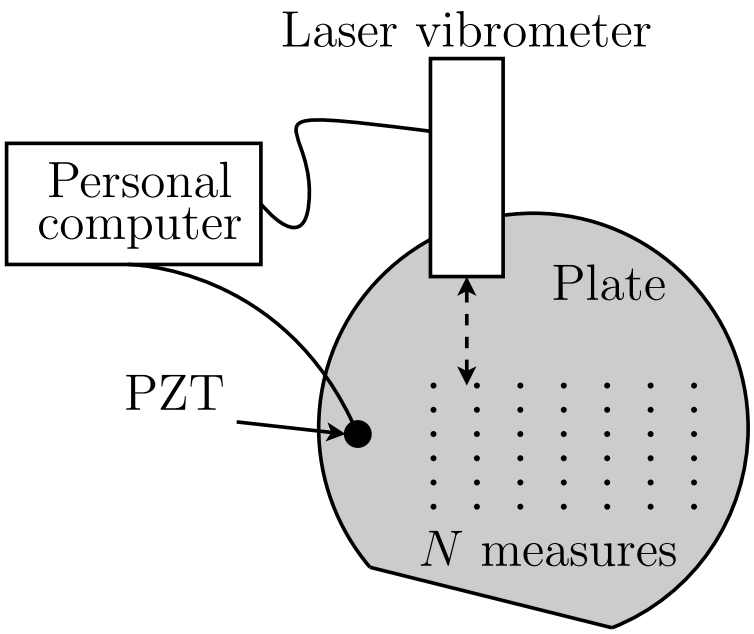

Figure 7.3 – Montage expérimental

Ces plaques sont homogènes et isotropes, et sont excitées par un transducteur piézoélectrique émettant un chirp, les ondes de flexion sont mesurées par un vibromètre laser. La figure 7.3 présente un schéma de ce dispositif. Après déconvolution du chirp d'excitation, les réponses impulsionnelles sont disponibles dans la bande audible.

7.5.1 Identification des modes

L'algorithme SOMP n'est appliqué qu'à un sous-ensemble de 16 signaux choisis aléatoirement. Les atomes identifiés sont ensuite utilisés pour décomposer les autres signaux par une simple projection orthogonale. Réduire le nombre de signaux utilisés pour l'identification permet de maintenir les besoins en mémoire et en capacité de calcul à des niveau raisonnables, sans trop réduire la qualité de l'identification. Le dictionnaire est discrétisé suivant plus de 3×10^5 fréquences et 32 amortissements différents.

L'énergie du résidu à chaque étape est tracé figure 7.4, pour SOMP ainsi que l'approximation obtenue en gardant les plus grands coefficients de la transformée de Fourier discrète, pour les 16 canaux utilisés de la plaque rectangulaire. Cette énergie décroit très rapidement pour SOMP : il suffit d'en effet 5 sinusoïdes amorties pour expliquer la moitié de l'énergie du signal, alors que 608 coefficients de la transformée de Fourier sont nécessaires pour aboutir au même niveau d'approximation. Ce nombre peu élevé de composantes nécessaires pour approximer le signal permet de réduire au maximum le nombre d'interpolations à effectuer.

7.5.2 Interpolation des modes

Les résultats d'approximation sont donnés pour les 3 plaques. Les deux premières permettent de montrer que la méthode est valable pour des conditions aux limites

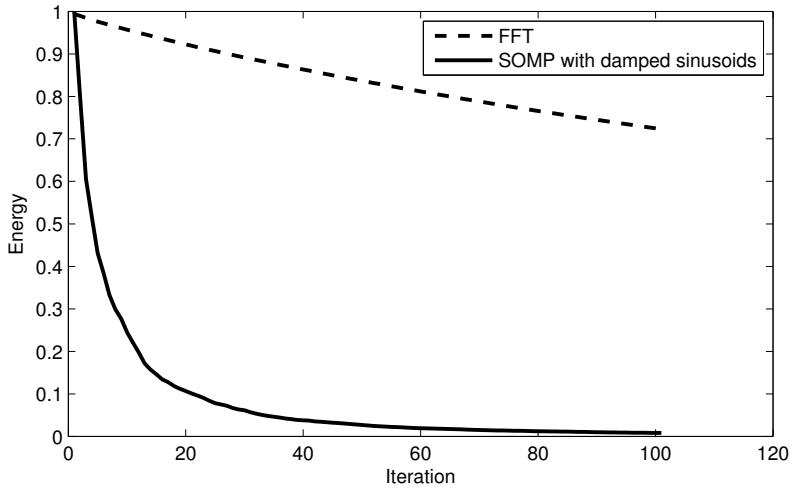

Figure 7.4 – Proportion d'énergie non capturée par SOMP et la transformée de Fourier en fonctions du nombre de coefficients

non triviales : plaque rectangulaire, mais aux conditions aux bords différentes sur un des côtés, et plaque de forme quelconque. Pour la dernière plaque, nous donnerons une analyse plus poussée des résultats, notamment en ce qui concerne le gain en nombre d'échantillons.

Plaque rectangulaire L'interpolation basse fréquence (Fourier) et la méthode proposée ici sont comparées pour le mode de fréquence 19 299 Hz. 117 échantillons sont utilisés : une grille regulière de 13×9 pour l'interpolation basse fréquence, et 117 échantillons aléatoirement choisis pour la méthode proposée. La norme de la projection sur l'espace E_k défini précédemment est tracé figure 7.5 pour l'échantillonnage irrégulier. Un maximum à $k = 154m^{-1}$ est très clairement visible, avec une valeur proche de 1. C'est cette valeur de k qui est donc prise comme estimation du nombre d'onde du mode.

La mesure complète sur la grille de 39×27 échantillons est comparée aux résultats des deux méthodes figure 7.6. Le résultat de la méthode proposée sans tenir compte des ondes évanescentes est également donné.

Dans ce cas, l'échantillonnage régulier fonctionne, la fréquence d'échantillonnage étant assez élevée pour répondre aux conditions du théorème d'échantillonnage. Cependant, ceci n'est valable qu'à l'intérieur du domaine : l'interpolation supposant ici que le champ soit périodique, et donc qu'il ait la même valeur sur les bords opposés, les résultats sont médiocres sur les frontières. Ceci est particulièrement visible sur le bord droit de la plaque. La méthode proposée permet elle une bonne reconstruction tant à l'intérieur que sur les bords de la plaque. De plus, l'interpolation faite en négligeant les ondes évanescentes garde une qualité tout à fait satisfaisante, même aux bords. Ne pas inclure ces ondes évanescentes dans la reconstruction permet de diminuer le nombre de mesures et la complexité des calculs sans perte de qualité significative.

La reconstruction de tous les modes dans la bande passante considérée permet de

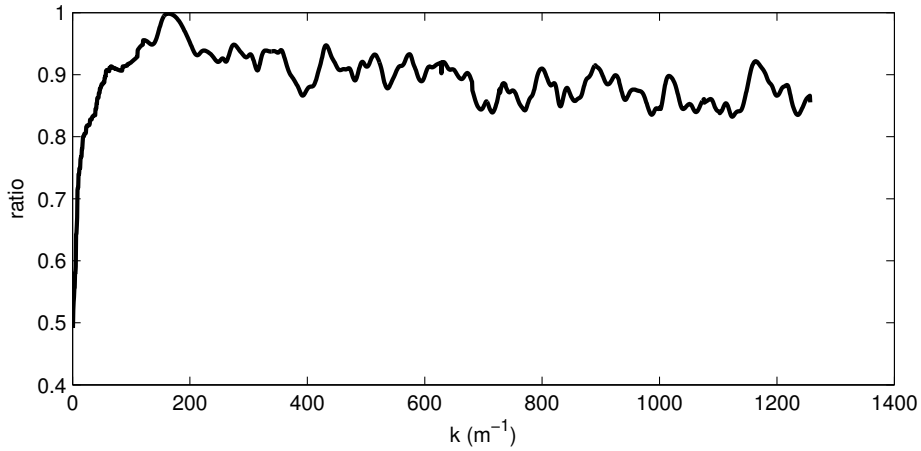

FIGURE 7.5 – Norme de la projection du mode sur l'espace d'ondes planes en fonction du nombre d'onde. Le maximum à $k = 154m^{-1}$ est pris comme estimation du nombre d'onde du mode.

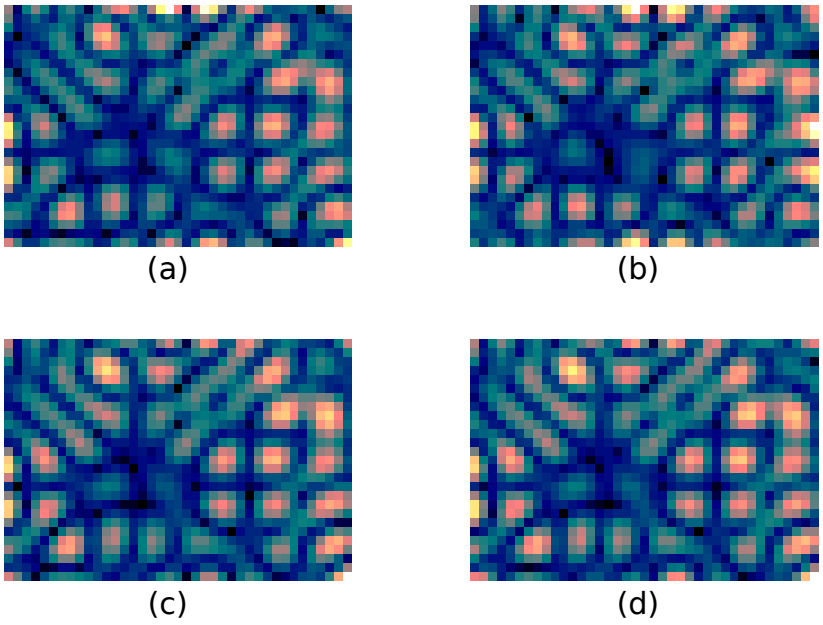

FIGURE 7.6 – Résultats de l'approximation du mode à 19 299Hz de la plaque rectangulaire : (a) mesures complètes (b) interpolation basse fréquence (c) méthode proposée avec dictionnaire complet (d) méthode proposée avec ondes propagatives seulement.

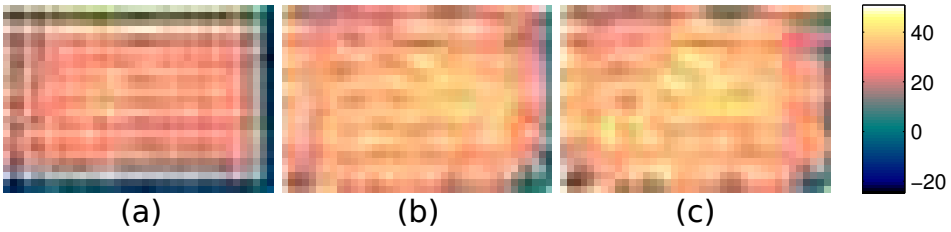

Figure 7.7 – Rapport signal sur erreur en dB pour (a) l'interpolation basse fréquence (b) la méthode proposée avec dictionnaire complet (c) avec ondes propagatives uniquement.

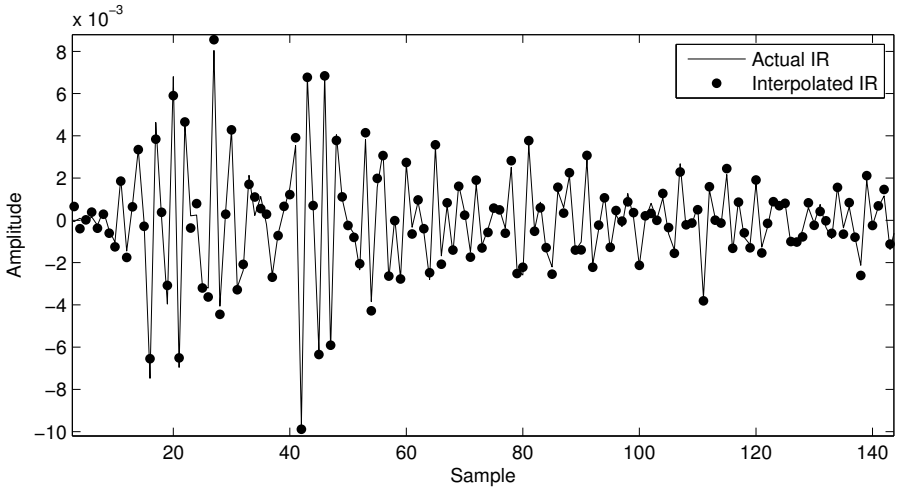

Figure 7.8 – Comparaison de l'interpolation d'une réponse impulsionnelle et de la réponse originale sur la plaque carrée.

reconstituer les réponses impulsionnelles de la plaque. Le rapport signal sur erreur est donné figure 7.7 pour l'interpolation basse fréquence et la méthode avec ou sans les ondes évanescentes. Le rapport signal sur erreur moyen est respectivement de 19 dB, 30 dB et 29 dB. L'échec de l'interpolation basse fréquence est ici clairement visible sur les bord bas et droit de la plaque. Un exemple d'interpolation de réponses impulsionnelle loin d'un point de mesure est donné figure 7.8. Elle est comparée à une mesure de référence, qui n'est pas utilisée dans la reconstruction.

Plaque quelconque Cette plaque, dont la forme est donnée figure 7.9, a pour dimensions approximatives 370mm×120mm. Ses bords sont libres. Elle est échantillonée sur une grille de pas 5mm, soit 1455 échantillons. L'interpolation basse fréquence est obtenue avec une grille de pas 15mm ; soit 165 points. Le même nombre de points, placés aléatoirement, est utilisé pour la méthode proposée. Les résultats sont tout à fait sembable aux précédents (figure 7.10) : 19dB pour l'interpolation basse fréquence, avec de mauvais résultats près des bords, et 24dB pour la méthode proposée, avec ou sans ondes évanescentes. La qualité médiocre dans le coin haut droite s'explique par la présence à cette endroit du transducteur excitant la plaque.

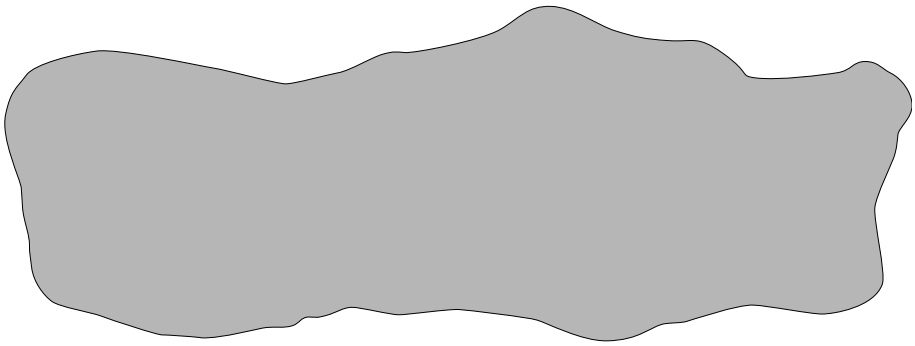

Figure 7.9 – Plaque de forme quelconque.

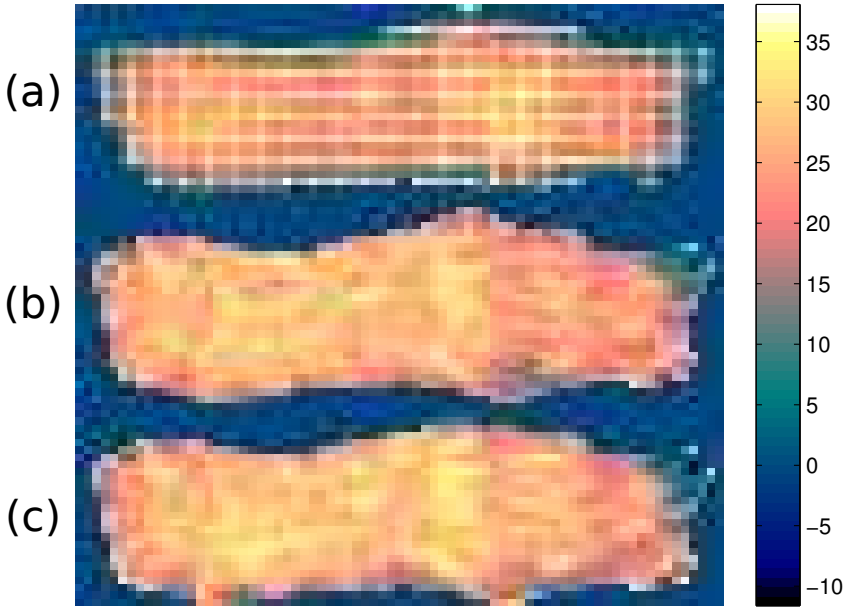

Figure 7.10 – Rapport signal sur erreur des interpolations (a) basse fréquence, méthode proposée avec ondes évanescentes (b), sans ondes évanescentes (c).

Disque tronqué Les résultats sur cette plaque permettent de montrer que le nombre d'échantillons nécessaire à l'interpolation peut être bien inférieur au nombre nécessaire pour l'application du théorème d'échantillonnage.

Pour cette plaque, les mesures sont faites sur un sous-domaine de la plaque entière, et les ondes evanescentes sont négligées. La forme de la plaque et du sous-domaine sont visibles figure 7.3. Les réponses impulsionnelles sont échantillonnées sur une grille de 64×64, avec un pas de 4mm. Plusieurs sous-échantillonnages sont étudiés :

- une grille régulière de 256 échantillons, avec un pas de 16mm,
- une grille régulière de 64 échantillons, avec un pas de 32mm,
- et 64 échantillons aléatoirement placés.

Ces échantillons aléatoires ne couvrent pas le coin bas gauche, où la plaque est excitée, et conformément aux résultats du chapitre 4, une partie des échantillons est située sur la frontière du domaine considéré.

La figure 7.11 présente le résultat de cinq interpolations différentes pour le mode à 20 452 Hz, visible en (a). Les interpolations (b) et (c) sont des interpolations basses fréquences. La première, utilisant la grille de 256 échantillons, est de bonne qualité. Cependant, la deuxième, avec 64 échantillons, est un échec. En effet, la période d'échantillonnage spatiale est trop grande pour reconstituer le signal : les composantes hautes fréquences sont repliées dans le domaine basses fréquences.

Les trois interpolations (d) (e) et (f) sont obtenues avec l'algorithme proposé. L'interpolation (d) utilise l'échantillonnage aléatoire, et parvient à bien reconstituer le mode, avec le même nombre d'échantillons que l'interpolation (c). L'interpolation (e) est, sans surprise, correcte. La qualité de l'interpolation (f) est quelque peu surprenante. En effet, dans le cas présent, l'application directe du compressed sensing, avec une parcimonie dans le domaine de Fourier et des mesures dans le domaine direct, ne réussirait pas à reconstituer le signal avec un échantillonnage régulier, le repliement spectral étant dans ce cas impossible à éviter. Ici, une information supplémentaire est disponible : les ondes planes intervenant dans la décomposition ont le même nombre d'onde. C'est cette contrainte supplémentaire qui permet de déplier le spectre. La figure 7.12 montre le support d'un mode dans le plan de Fourier en bleu, et ses alias en traits fins. Le support original est le seul à avoir la forme d'un cercle, ce qui permet de le distinguer de ses alias. La reconstruction ne peut cependant pas être parfaite : certaines combinaisons d'ondes planes, indiquées aux intersections du support avec les droites dont une des coordonnées est la fréquence d'échantillonnage, restent invisibles pour cette échantillonnage et ne peuvent être reconstruites. Ceci explique que cette interpolation soit bonne, mais pas parfaite.

Une coupe unidimensionelle des interpolations utilisant 64 échantillons selon la colonne 17 est donnée figure 7.13. Les échantillons de la grille régulière sont indiqués. L'interpolation basse fréquence passe bien par tous les échantillons, mais ne parvient pas à approcher le mode.

La figure 7.14 montre, pour tous les 200 modes identifiés, la qualité de l'approximation en fonction du nombre de mesures, pour la méthode d'interpolation proposée avec un échantillonnage aléatoire. Le nombre minimum N_N de mesures

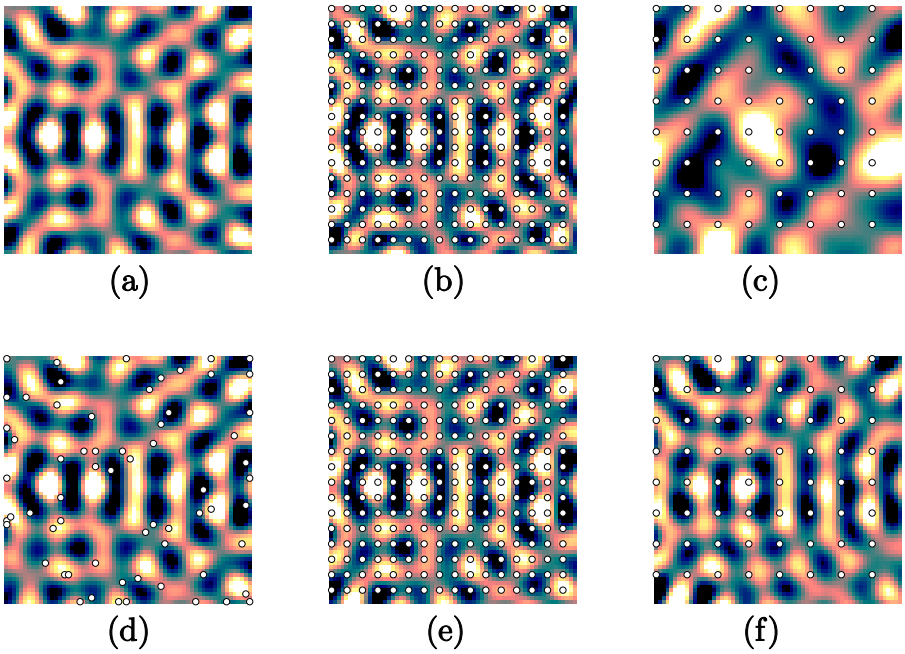

Figure 7.11 – Résultat de l'interpolation du mode de fréquence 20 452 Hz sur le disque tronqué. (a) mesures complètes, interpolations basses fréquences avec grille régulière de 256 échantillons (b), idem avec 64 échantillons (c), méthode proposée avec 64 échantillons aléatoirement placés (d), la grille régulière de 256 échantillons (e), idem avec 64 échantillons (f).

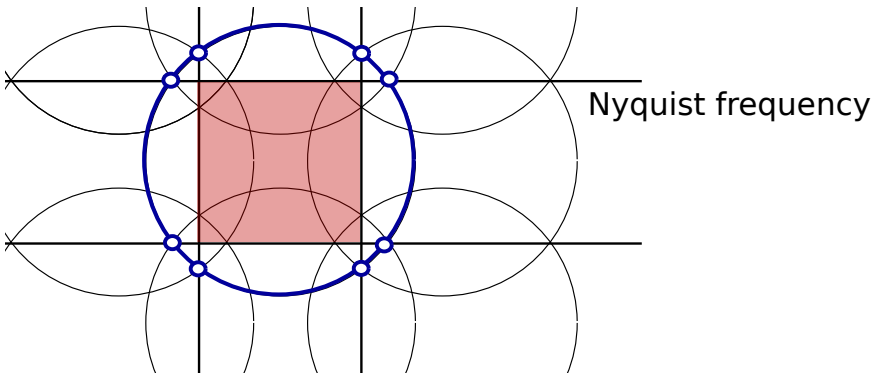

Figure 7.12 – Support de la décomposition d'un mode dans le plan de Fourier (en bleu), ainsi que ces différents alias (en traits fins). La zone accessible par les méthodes standards est indiquée en rouge.

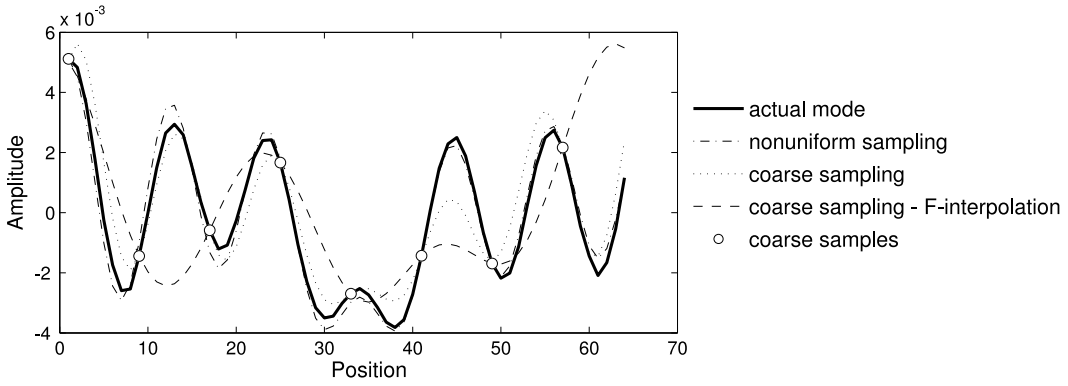

Figure 7.13 – Mode et interpolation sur une coupe de la plaque.

pour appliquer le théorème d'échantillonnage est ici

$$N_N = \left\lceil \frac{Lk}{\pi} \right\rceil^2$$

où L est la largeur du domaine. Le nombre d'échantillons nécessaires à notre méthode est quant à lui approximativement

$$N_{pw} \approx 5\frac{Lk}{\pi}$$

où la constante multiplicative est estimée à partir de la figure 7.14. Notre méthode permet donc de gagner un ordre de grandeur. La diminution du nombre de mesures nécessaires est donc de plus en plus importante avec la fréquence.

La figure 7.15 donne la qualité des interpolations basses fréquences et ondes planes pour 64 échantillons. L'interpolation basse fréquence (qualité moyenne 0dB) n'est bonne qu'aux points de mesure, alors que la méthode proposée donne une bonne reconstruction sur tout le domaine considéré (qualité moyenne 25dB). Un exemple de reconstruction de réponse impulsionnelle est donné figure 7.16. Il est à noter que le point où est interpolée la réponse impulsionnelle est situé à une distance de plus d'une longeur d'onde du point de mesure le plus proche. Le temps nécessaire à la mesure des 4096 réponses impulsionnelles complètes, en considérant qu'une mesure est faite en deux secondes, est de plus de deux heures. Avec la méthode proposée, la mesure dure deux minutes, et le calcul dix minutes. Le total est donc de 12 minutes, soit dix fois moins que la mesure standard.

Enfin, bien que ce ne soit pas l'intérêt principal de cette étude, la figure 7.17 donne l'estimation de la courbe de dispersion de la plaque. Les estimations sont obtenues avec l'échantillonnage régulier pour la partie (a), avec l'échantillonnage aléatoire pour la partie (b). Pour l'échantillonnage régulier, plus de la moitié des modes ont une période trop grande pour être mesurés classiquement. Cela est cependant sans conséquences sur l'estimation du nombre d'onde.

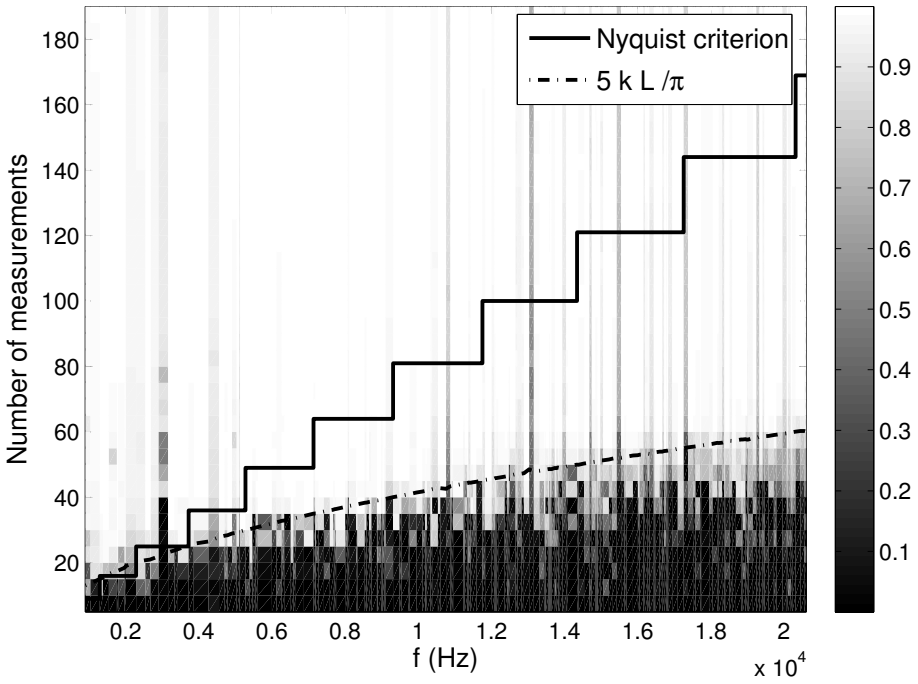

FIGURE 7.14 – Qualité de la reconstruction (mesurée par la corrélation) du mode en fonction de sa fréquence et du nombre d'échantillons utilisés. La limite du theorème d'échantillonnage est indiquée en trait gras.

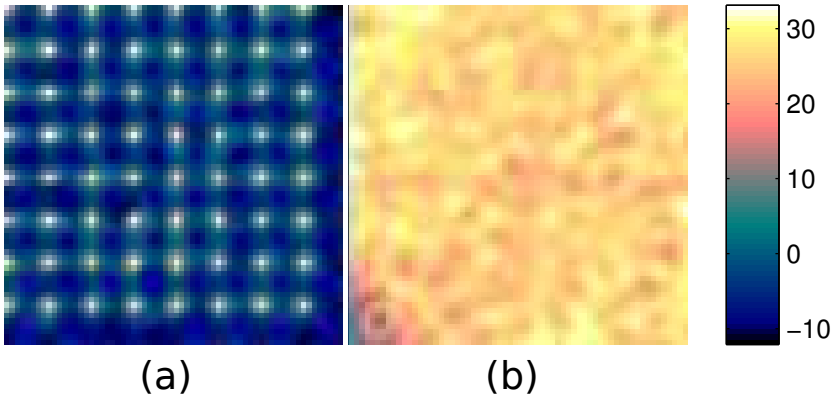

FIGURE 7.15 – Rapport signal sur erreur de l'approximation des réponses impulsionnelles pour l'interpolation basse fréquence (a), la méthode proposée avec 64 échantillons aléatoirement placés (b).

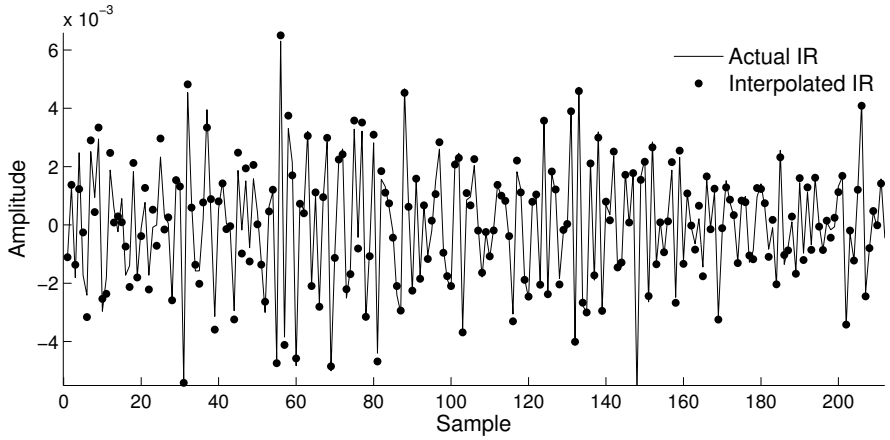

Figure 7.16 – Réponse impulsionnelle mesurée sur le disque tronqué (trait plein), et interpolation donnée par l'algorithme proposé (points).

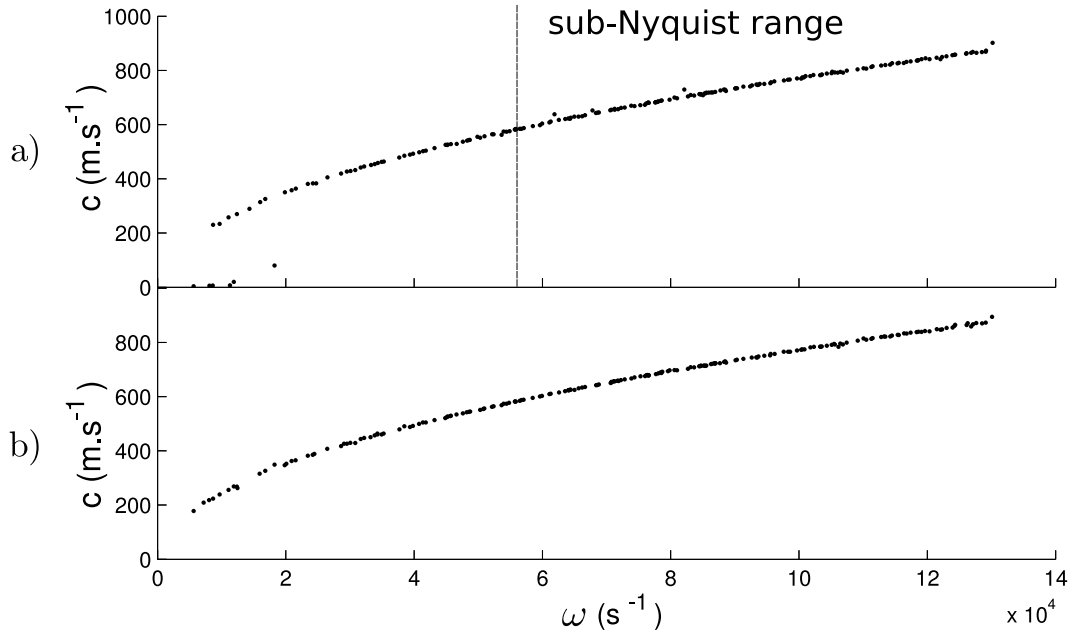

Figure 7.17 – Relations de dispersions estimées expérimentalement à partir des mesures sur (a) la grille de 64 échantillons réguliers, (b) les 64 échantillons aléatoirement placés. La fréquence à partir de laquelle le théorème d'échantillonnage n'est plus applicable est indiquée.

7.6 Conclusion

Nous avons montré que l'utilisation d'un modèle de plaque, traduit sous forme parcimonieuse pour être utilisé par des algorithmes de reconstruction parcimonieux, rend possible la connaissance de réponses impulsionnelles de plaque avec un nombre très réduit de mesures par rapport aux conditions du théorème d'échantillonnage. Certains points restent encore à éclaircir, notamment le nombre de mesures nécessaires à la reconstruction, et le nombre d'onde planes à utiliser pour représenter les modes. Des débuts de réponses sont obtenus par les résultats du chapitre 4, mais ces questions nécessitent encore des développements.

Dans ce chapitre, le domaine d'intérêt était supposé sans source. Le chapitre suivant s'intéresse au cas où des sources sont présentes, et à la question de comment les localiser sans connaissance préalable sur les conditions aux limites du domaine de propagation.

Chapitre 8

Localisation de sources en environnement réverbérant

La localisation de sources est un problème classique de traitement du signal, pour lequel de multiples méthodes ont été développées. Le cas classique est l'estimation de direction d'arrivée d'une source à partir de mesures sur une antenne de microphones. En champ proche, deux hypothèses sont généralement faites :

- les sources sont supposées omnidirectionnelles
- la propagation est supposée se dérouler en champ libre.

Ces deux conditions ne sont évidemment pas toujours respectées. Il convient donc de développer des modèles et des méthodes à même de traiter ces cas. Certaines méthodes existent déjà, mais nous utiliserons, comme dans les chapitres précedents, le formalisme de la parcimonie pour construire de nouveaux algorithmes.

Nous nous intéressons principalement à la localisation de sources (pas seulement l'estimation de directions d'arrivées) en salles, ou environnements plus ou moins confinés, que ces milieux soient connus ou non. Une partie de ces travaux a été présentée aux conférences ICASSP 2012 [CD12a] et Acoustics 2012 [CD12b].

8.1 État de l'art

La méthode de base de localisation de source dans le cas de sources omnidirectionelles en champ libre est la formation de voies (ou *beamforming*, en anglais). Cette méthode consiste à recombiner les mesures prises sur une antenne de microphones de façon astucieuse pour resserer la directivité du réseau, et ainsi pouvoir séparer les sources provenant de directions différentes. Pour la localisation, cette méthode est équivalente à calculer la corrélation des mesures avec le dictionnaire des champs rayonnés par des sources placées aux positions candidates. Cette méthode, très simple, présente toutefois l'inconvénient de ne pas pouvoir séparer des sources peu résolues, ainsi que d'être perturbée par l'apparition de lobes secondaires (ces caractéristiques sont à rapprocher des limitations de l'analyse de Fourier, méthode au formalisme semblable).

Une autre méthode populaire, visant à pallier les désavantages de la formation de voies, est l'algorithme MUSIC (MUltiple SIgnal Classification)[Sch86], dont la

résolution est cette fois limitée par le rapport signal sur bruit. Cette méthode est basée sur la construction d'un espace signal à partir des mesures, et du parcours de la variété d'antenne (i.e. le champ rayonné aux capteurs par une source qui parcourt l'ensemble des positions candidates des sources) afin de détecter ses points d'intersection avec l'espace signal. Ces intersections sont les estimations des directions d'arrivée des sources. Pour pouvoir construire l'espace signal, il est nécessaire d'avoir plusieurs réalisations des mesures, et que les sources soient décorrélées pour éviter que ces réalisations ne soient pas colinéaires. La résolution de cette méthode n'est plus limitée par la taille du réseau de capteurs, mais par le rapport signal sur bruit.

Une dernière méthode, par Malioutov et al. [MCW05] est basée sur le formalisme de la parcimonie. Le nombre de sources étant supposé faible, la décomposition des mesures sur le dictionnaire est donc parcimonieuse, ce qui rend possible l'usage de Basis Pursuit ou d'autres algorithmes parcimonieux.

Ces méthodes, bien comprises, sont néanmoins, dans leur utilisation courante, limitées au cas du champ libre. La localisation dans des environnements réverbérants nécessite donc le développement de méthodes alternatives.

8.1.1 Localisation en environnement réverbérant

Récemment, de nombreuses méthodes pour la localisation de sources ou l'imagerie en environnements réverbérants ont été développées. Certaines sont basées sur la méthode des sources images, d'autre sur la décomposition du champ en champ rayonné et champ incident à l'intérieur d'un domaine sphérique ou hémisphérique, et enfin, des méthodes utilisant la parcimonie des sources.

La localisation basée sur la méthode des sources images (par exemple [CPO00] et [MTN09], qui utilisent des algorithmes de clustering, ou [JF96], dans le domaine temporel) consiste à trier les différentes arrivées des signaux en trajets directs et trajets réfléchis. Seuls les trajets directs sont utilisés pour la localisation. Ces méthodes, trop éloignées du sujet de cette thèse, et limités à des cas simples, ne seront pas traitées ici.

Une méthode, basée sur le retournement temporel, a été utilisée par Ing et al. [IQCF05] pour la localisation d'impacts d'un doigt sur une plaque, afin de construire des interfaces tactiles. Le retournement temporel permet, en simulant la propagation des ondes dans la plaque, excitée aux positions des capteurs par le signal reçu retourné en temps, de focaliser les ondes à l'endroit de l'impact. Cette méthode, qui présente un intérêt certain pour la focalisation d'ondes en environnements inhomogènes inconnus, a quelques désavantages. Le retournement temporel revient à remplacer l'inverse de l'opérateur qui modélise le problème direct par son adjoint. Si l'opérateur est orthogonal ou presque, l'adjoint est une bonne approximation. Sinon, la localisation de source ne sera pas parfaite : contraste et résolution sont limités par la physique. D'autre part, cette méthode ne permet pas d'introduire de la connaissance a priori sur les sources pour aider la localisation. Enfin, il est nécessaire de connaître parfaitement les conditions aux limites pour pouvoir simuler la propagation des ondes.

Deux méthodes, basées sur deux types différents de parcimonie du champ acous-

tique, permettent la localisation de source en régime harmonique dans une salle connue. La première, de Dokmanic et Vetterli [DV12] consiste à calculer, par une méthode numérique au choix, les réponses impulsionnelles de la salle pour ainsi construire un dictionnaire utilisable par un algorithme de reconstruction de type OMP ou Basis Pursuit par exemple. Cette méthode sera développée section 8.2.

L'autre méthode, par Nam et Gribonval [NG12] utilise la parcimonie de type synthèse, en utilisant directement l'équation d'Helmholtz et les conditions aux limites pour construire l'opérateur d'analyse. Cette méthode a été pour l'instant testée uniquement en régime temporel. L'inconvénient évident de ces méthodes est la nécessité de connaître parfaitement le milieu. D'autre part, comme il sera montré plus loin, elles nécessitent l'usage de plusieurs fréquences simultanément pour localiser plus d'une source.

D'autres travaux, s'intéressant plus à l'holographie qu'à la localisation de sources mais assez semblables pour être citées ici, utilisent des mesures conjointes de pression et de vitesse de l'air pour séparer champ diffus et champ rayonné par les sources, et permettent donc l'imagerie dans des environnements inconnus. Pour se faire, Aucejo et al, avec l'iPTF [ATG10], ansi que Garcia et Langrenne, avec la Data Completion Method (DCM) [GL12], se basent sur la formule de Green, permettant d'exprimer le champ à l'intérieur d'un volume comme une intégrale sur sa frontière faisant intervenir valeur du champ et dérivée normale. Cette formule nécessite donc la connaissance de la pression et de la vitesse sur cette frontière. La *méthode de séparation du champ* (Field Separation Method, FSM) [GBL+12], utilise une antenne sphérique de sondes de pression et de vitesse, ou deux antennes sphériques concentriques. Ceci permet de séparer le champ sur des fonctions de Bessel et de Hankel multipliées par des harmonique sphériques pour la dépendance angulaire. La partie décomposée sur les fonctions de Bessel j_n représente le champ diffus alors que les fonctions de Hankel h_n représentent le champ rayonné. L'utilisation d'antennes hémisphériques est possible en supposant que le plan équatorial de la sphère est rigide, et en modifiant légèrement la décomposition du champ.

La limitation principale de ces méthodes est la nécessité de mesurer pression et vitesse autour de la zone d'intérêt, ainsi que la forme particulière d'antenne demandée par la FSM.

8.2 Environnement réverbérant connu

La méthode de Dokmanic et Vetterli [DV12] que nous analysons ici, est basée sur le calcul du dictionnaire (ou variété d'antenne) dans l'environnement réverbérant. Pour ce faire, il est nécessaire de connaître parfaitement non seulement la forme de la salle où la mesure doit se faire, mais également les conditions aux limites modélisant les bords de cette salle. La connaissance de la forme peut être aisée à déterminer à partir de mesures ou d'un plan, mais les conditions aux limites sont un problème plus complexe. La modélisation de matériaux absorbants ou diffuseurs ne se réduit pas à de simples conditions aux limites de Dirichlet au Neumann, sans parler d'une porte ou fenêtre ouverte...

Admettons cependant que nous connaissons parfaitement la salle, notée Ω. Nous

supposerons même que ses murs, notés $\partial\Omega$, sont parfaitement rigides. La variété d'antenne est alors l'ensemble des réponses impulsionnelles, obtenues par l'échantillonnage, aux emplacements des microphones, de la solution de l'équation

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = \delta_{\mathbf{x_s}} \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{8.1}$$

pour toutes les positions candidates $\mathbf{x}_s$. Pour ce calcul, Dokmanic utilise la méthode des éléments finis. Nous utiliserons cette méthode pour simuler les mesures (avec FreemFem++ [PHHM]), mais la construction du dictionnaire sera faite en utilisant la décomposition en fonctions de Fourier-Bessel. La solution de 8.1 peut être décomposée comme somme d'une solution particulière $u^s_{\mathbf{x_s}}$ et d'une solution homogène $u^0_{\mathbf{x_s}}$. La première rend compte du second membre de l'équation, tandis que la seconde sera choisie de telle façon que la somme des deux vérifie les conditions aux limites. Cette solution particulière sera ici la solution en champ libre, c'est à dire fonction de Hankel $u^s_{\mathbf{x_s}} = \frac{ik}{4\pi} h_0(kr)$ où r est la distance au point source. Le second terme u_0 est donc solution de

$$\begin{cases} \Delta u^0_{\mathbf{x_s}} + k^2 u^0_{\mathbf{x_s}} = 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = -\frac{\partial u_s}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} \end{cases} \tag{8.2}$$

On notera N l'opérateur de $L^2(\partial\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ qui à une fonction g définie sur le bord, associe la solution de l'équation d'Helmholtz dont la dérivée normale est égale à g.

La solution de 8.1 peut alors s'écrire

$$u_{\mathbf{x_s}} = u^s_{\mathbf{x_s}} - N(u^s_{\mathbf{x_s}}\big|_{\partial\Omega})$$

Se placer dans un environnement réverbérant est donc dans ce formalisme équivalent à perturber le dictionnaire en champ libre. Étudier l'opérateur N permet donc d'obtenir des informations sur le dictionnaire réverbérant. Il est remarquable que cet opérateur est tout simplement celui dont on veut estimer la norme pour la recherche de modes propres en utilisant la méthode des solutions particulières du chapitre 3. Ainsi, quand la norme de cet opérateur est très élevée, i.e. près des modes propres, le dictionnaire sera très fortement perturbé.

Pour analyser ces perturbations plus précisement, nous utilisons à présent le formalisme modal. Le laplacien avec conditions aux limites de Neumann est autoadjoint, la base des modes propres $(u_n)_{n\geq 0}$ associés à leurs nombres d'ondes respectifs $(k_n)_{n\geq 0}$ est donc une base orthogonale de $L^2(\Omega)$. La solution $u_{\mathbf{x}_s}$, dans $L^2(\Omega)$, peut donc s'écrire $u_{\mathbf{x}} = \sum_{n\geq 0} a_n u_n$.

Au sens des distributions, on a

$$\left\langle \Delta u_{\mathbf{x}_s} + k^2 u_{\mathbf{x}}, u_n \right\rangle = \langle \delta_{\mathbf{x}_s}, u_n \rangle \tag{8.3}$$

$$\int_\Omega \Delta u_{\mathbf{x}_s} u_n + k^2 a_n = u_n(\mathbf{x}_s) \tag{8.4}$$

$$-\int_\Omega u_{\mathbf{x}_s}(-\Delta u_n) + k^2 a_n = u_n(\mathbf{x}_s) \tag{8.5}$$

$$-k_n^2 \int_\Omega u_{\mathbf{x}_s} u_n + k^2 a_n = u_n(\mathbf{x}_s) \tag{8.6}$$

$$(k^2 - k_n^2) a_n = u_n(\mathbf{x}_s) \tag{8.7}$$

$$\tag{8.8}$$

La solution $u_{\mathbf{x}_s}$ a donc pour expression

$$u_{\mathbf{x}_s}(\mathbf{x}) = \sum_{n \geq 0} \frac{u_n(\mathbf{x}_s) u_n(\mathbf{x})}{k^2 - k_n^2} \tag{8.9}$$

En prenant des mesures aux points $\mathbf{x}_i$, et en prenant pour positions candidates les positions $\mathbf{x}_s$, les éléments d_s^i du dictionnaire ont pour expression

$$d_s^i = \sum_{n \geq 0} \frac{u_n(\mathbf{x}_s) u_n(\mathbf{x}_i)}{k^2 - k_n^2}$$

Ce dictionnaire, imposé par la physique du problème, présente de mauvaises propriétés pour la localisation des sources. En effet, sa cohérence, c'est à dire le produit scalaire maximal entre colonnes (supposées normalisées), est très élevée. Or, une condition pour que OMP puisse identifier des signaux parcimonieux est que la cohérence du dictionnaire soit faible [Tro04]. On peut même montrer que cette cohérence tend vers 1, le maximum possible, quand la fréquence s'approche d'une fréquence propre. En effet, si au moins une mesure et deux positions candidates ne sont pas placées sur des noeuds d'un mode, ce mode, quand la fréquence s'approche de sa fréquence propre, écrasera les contributions des autres modes, ce qui rend les colonnes de plus en plus colinéaires, et donc fait tendre leur produit scalaire vers 1.

Voici une illustration numérique des causes de ce résultat. Dans une membrane sont situées deux sources (qui ne seront pas actives simultanément), dont le champ rayonné est mesuré sur 10 points. Dans le cas d'une fréquence située entre deux fréquences propres, la corrélation entre le champ rayonné par la source est bien maximale à l'endroit de la source active, même s'il est difficile de le remarquer sur la figure 8.1. À une fréquence proche d'une fréquence propre, la distinction entre les deux résultats de corrélation devient très difficile, comme on peut le voir figure 8.2. En effet, dans cette situation, le mode propre dont la fréquence est proche de la fréquence d'excitation représente quasiment tout le champ rayonné par la source. Ce mode propre étant évidemment le même quelle que soit la localisation de la source (à part le cas où cette source est sur une ligne nodale du mode), les différentes sources ne sont pas distinguables. La seule exception est le cas où la source est sur un noeud du mode, auquel cas celui-ci n'est pas excité, ou si toutes les mesures sont sur des noeuds. Dans ce cas, le mode est excité mais invisible.

Cependant, utiliser une fréquence la plus éloignée possible d'un mode propre ne résout pas tout. En effet, dans l'expression des termes du dictionnaire, seuls les deux modes entourant la fréquence choisie vont être réellement significatifs. Le rang du dictionnaire est donc grossièrement au maximum 2. L'utilisation d'une seule fréquence fait que le nombre de mesures (au sens de nombre d'informations sur le champ) réellement disponibles est limité à 2, ce qui restreint toute utilisation pratique de la méthode pour la localisation de plusieurs sources.

Pour pouvoir tout de même localiser des sources, Dokmanic propose d'utiliser plusieures fréquences à la fois. D'après le raisonnement précédent, utiliser n_f fréquences différents limite donc le nombre de mesures réellement disponibles à $2n_f$. L'utilisation de 6 canaux et 10 mesures permet de localiser 3 sources comme le montrent les résultats de la figure 8.3. Les corrélations des mesures avec le dictionnaire, utilisées pour identifier la première source, ont un maximum bien visible à l'emplacement de celle-ci. On peut y remarquer des motifs correspondant aux lignes nodales des modes proches des fréquences utilisées.

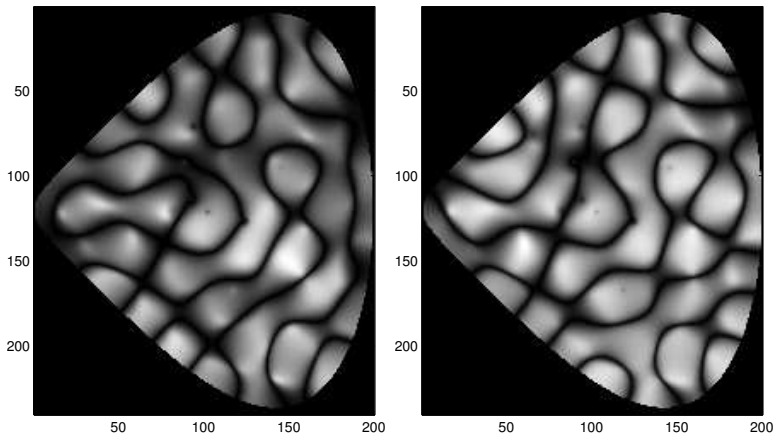

FIGURE 8.1 – Corrélations du dictionnaire réverbéré avec les mesures pour deux sources différentes, à une fréquence éloignée d'une fréquence propre

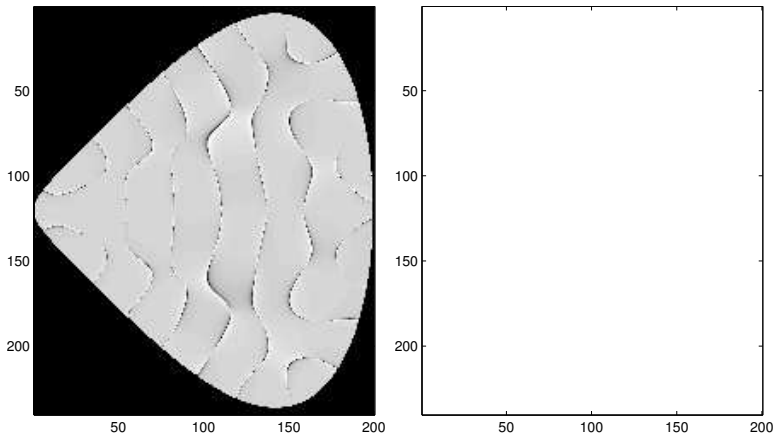

FIGURE 8.2 – Corrélations du dictionnaire réverbéré avec les mesures pour deux source différentes, à une fréquence proche d'une fréquence propre

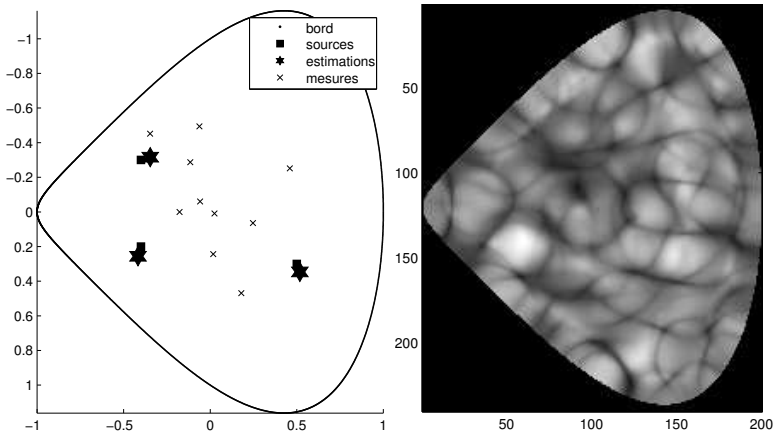

Figure 8.3 – Résultat de la localisation de trois sources par OMP en utilisant 6 canaux et 10 mesures, et corrélation du dictionnaire avec les mesures (premier pas d'OMP)

Ces premiers résultats sur la localisation de sources en environnement connu montrent les difficultés fondamentales auxquelles nous pouvons être confrontés. Comme le dit Dokmanic, "The room helps" [DV12], la salle aide, notamment pour localiser des sources sans trajet direct les reliant aux microphones, mais ceci au prix de limitations qui ne peuvent être levées de façon simple, et à condition d'utiliser plusieurs fréquences simultanément.

8.3 Environnement réverbérant inconnu

Dans le cas où la salle n'est pas connue, la localisation reste possible. La méthode que nous proposons est basée sur des mesures en bande étroite, dans une salle réverbérante inconnue. Il nous sera donc impossible d'exploiter les temps d'arrivée des sources aux différents capteurs. Une condition nécessaire pour la réussite de la méthode, est que l'antenne doit englober la zone d'intêret : en effet, toute source placée à l'extérieur de l'antenne sera considérée comme faisant partie du champ diffus, et donc éliminée. Cela peut-être considéré soit comme un inconvénient, contraignant la construction de l'antenne, soit comme un avantage, permettant de localiser des sources dans un environnement bruité. Cette antenne sera composée uniquement de capteurs de pression, et sa forme sera, dans une certaine mesure, libre. La méthode est basée sur la décomposition du champ acoustique en un champ provenant des sources, et un champ diffus, c'est-à-dire, pour l'équation d'Helmholtz, la décomposition de la solution en somme d'une solution particulière et d'une solution homogène. C'est dans la solution particulière que seront cherchées les informations utiles à la localisation des sources.

Le modèle est ici présenté en dimension 2, comme les simulations et manipulations.

8.3.1 Modèle de champ acoustique

Le champ est supposé être généré par un nombre faible de sources monopolaires dans le domaine considéré. Cependant, aucune hypothèse n'est faite sur l'extérieur de ce domaine : les conditions aux limites ne seront pas précisées, et d'autre sources peuvent émettre. Le champ à l'intérieur du domaine est donc solution de l'équation d'Helmholtz avec second membre

$$\Delta p + k^2 p = \sum_j s_j \delta_{\mathbf{x}_j}$$

où s_j sont les activations des sources et $\mathbf{x}_j$ leurs emplacements.

Le problème direct associé à ce problème inverse est le calcul de la pression dans le domaine connaissant les emplacements et activations des sources. Les conditions aux limites de Ω n'étant pas connues, ce problème direct est impossible à résoudre. La résolution du problème inverse semble donc sérieusement compromise, mais un modèle bien adapté permettra d'élaborer des méthodes de localisation.

La pression p peut être en effet décomposée comme somme d'une solution particulière p^s de l'équation d'Helmholtz, pouvant être choisie de façon arbitraire, et d'une solution p^0 de l'équation homogène. Les informations à retrouver sont portées par la solution particulière, alors que la solution homogène est perturbée par la réverbération ainsi que les sources extérieures au domaine. Cette solution particulière est choisie comme somme de fonctions de Bessel de seconde espèce :

$$p^s(\mathbf{x}) = \sum_j \frac{s_j}{2\pi} Y_0(k||\mathbf{x} - \mathbf{x}_j||)$$

contrairement aux autres méthodes, où cette solution est écrite en utilisant des fonctions de Hankel. Ce choix est justifié par le fait que la composante réelle des fonctions de Hankel est une fonction de Bessel de première espèce, qui est donc prise en compte par la composante homogène. Ceci permet également de mettre en valeur que la méthode ne localise pas vraiment des sources, mais plutôt des seconds membres de l'équation d'Helmholtz. En effet, le caractère de source ou de puits acoustique dépend également de la partie homogène de la solution.

Cette décomposition est faite, pour les méthodes telles que l'iPTF [ATG10] ou la FSM [GBL+12], en pré-traitement de l'inversion des ondes. Ici, nous utiliserons cette décomposition dans la modélisation parcimonieuse du signal, ce qui permettra plus de souplesse sur le type de mesures à effectuer.

La composante homogène p^0 est approximée par une somme d'ondes planes ou de fonctions de Fourier-Bessel, la taille de la famille de fonctions restant faible. Le nombre d'onde de ces fonctions est supposé connu, mais aucune hypothèse n'est faite sur les coefficients. La composante source p^s est elle parcimonieuse dans un dictionnaire de sources, qui sont placées sur une grille de positions candidates. Après échantillonnage du champ, le vecteur des mesures $\mathbf{p}$ s'écrit donc

$$\mathbf{p} = \mathbf{W}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{S}\boldsymbol{\beta}$$

où les ondes planes (ou fonctions de Fourier-Bessel) échantillonnées sont rangées dans la matrices $\mathbf{W}$, les sources candidates dans la matrice $\mathbf{S}$, le vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ étant de dimension faible, et le vecteur $\boldsymbol{\beta}$, dont le support est l'information recherchée, est de grande dimension mais parcimonieux.

8.3.2 Algorithmes

Deux algorithmes, basés sur les deux représentants principaux des algorithmes parcimonieux (Orthogonal Matching Pursuit et Basis Pursuit), sont proposés (cf. présentation de ces algorithms section 5.2.2). L'adaptation d'autres algorithmes ne devrait pas poser de problèmes, le modèle utilisé pouvant facilement se réduire à de la parcimonie par blocs.

Algorithme itératif

Avant la première étape d'OMP, il convient d'éliminer la partie homogène des mesures. Pour se faire, nous projetons ces mesures sur l'orthogonal de l'espace engendré par les ondes planes. La première source est identifiée, puis le signal est ensuite projeté sur l'orthogonal de l'espace engendré par les ondes planes et la source identifiée, etc., jusqu'à l'arrêt de l'algorithme quand toutes de sources sont identifiées. Cet algorithme peut se réduire à l'OMP standard, en forçant les premiers coefficients identifiés à être ceux des ondes planes. Le paramètre de cet algorithme est le nombre d'itérations à effectuer, il est donc bien adapté à la situation où le nombre de sources est connu.

Méthode basée sur Basis Pursuit

Des deux vecteurs de coefficients $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$, seul $\boldsymbol{\beta}$ est supposé parcimonieux. Inversement, aucun a priori n'est supposé sur $\boldsymbol{\alpha}$. Pour encourager $\boldsymbol{\beta}$ à être parcimonieux, nous minisons donc sa norme ℓ_1, tout en minimisant la norme ℓ_2 de $\boldsymbol{\alpha}$. Le problème d'optimisation à résoudre est donc :

$$(\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \underset{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}{\operatorname{argmin}} \, ||\boldsymbol{\alpha}||_2^2 + ||\boldsymbol{\beta}||_1 \quad \text{sous contrainte} \quad ||\mathbf{W}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{S}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{p}|| < \epsilon$$

où ϵ est le niveau de bruit attendu. Ce problème peut être réduit à Group Basis Pursuit, en considérant que les coefficients des ondes planes forment un groupe, et que chaque coefficient de source est un groupe singleton. Ceci permet de résoudre ce problème par des outils existants tels que `spgl1` [vdBF08, vdBF07]. Cet algorithme est lui adapté à la situation où le niveau de bruit est connu.

Dans ce problème de minimisation, la valeur de $\boldsymbol{\alpha}$ n'est pas utilisée pour la localisation. Or, à $\boldsymbol{\beta}$ fixé, $\boldsymbol{\alpha}$ peut être obtenu par un simple problème de moindres carrés. Ceci pourrait être utilisé pour éliminer totalement $\boldsymbol{\alpha}$ du problème d'optimisation et réduire la dimension du problème numérique.

8.3.3 Résultats

La méthode est testée, pour des raisons de simplicité, tant d'implémentation que d'interprétation des résultats, en dimension 2. L'adaptation aux trois dimensions ne présente pas de difficultés particulières. Des résultats de simulation numériques sont d'abord donnés, puis des résultats d'expériences réelles, sur une plaque métallique.

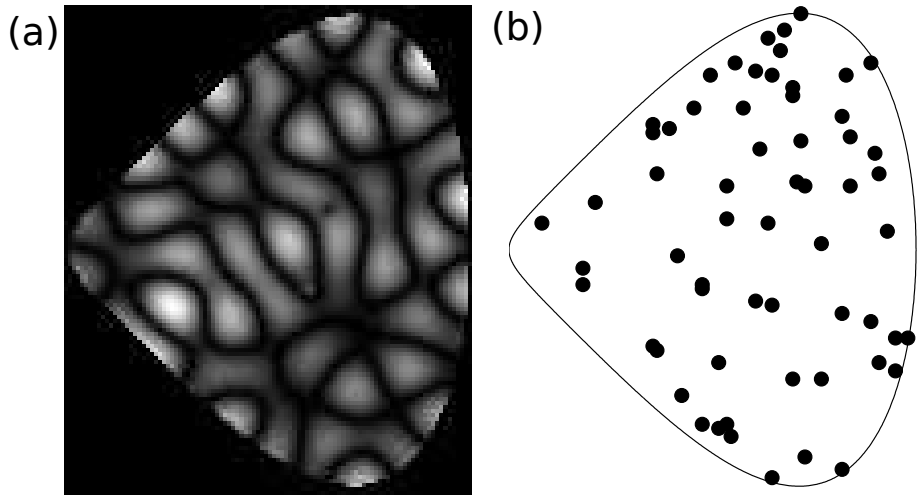

FIGURE 8.4 – (a) Champ simulé sur la membrane (b) points de mesures

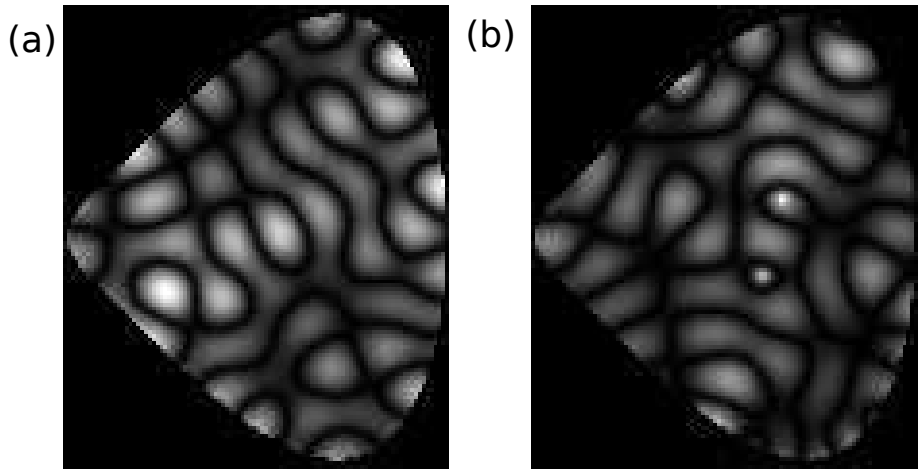

FIGURE 8.5 – (a) Champ homogène estimé (b) Champ source estimé

Simulations numériques

La simulation est faite sur une membrane de forme non triviale, excitée par deux sources. La propagation des ondes est simulée par éléments finis (FreeFem++). Le champ de déplacement à l'intérieur de la membrane, ainsi que les 60 points sur lesquels il est échantillonné, est donné figure 8.4.

La séparation en champ homogène et champ source estimée à partir des mesures est donnée figure 8.5. Elle est obtenue en projetant le champ orthogonalement sur l'espace engendré par les ondes planes et son orthogonal. La figure 8.6 montre les résultats de l'algorithme itératif. L'image (a) donne les corrélations du champ complet avec le dictionnaire de source. Le maximum de ces corrélations ne correspond pas à la position d'une source, alors que le maximum pour le champ source estimé (cf. figure 8.5 (b)) est bien la position de la première source. Les corrélations à la deuxième étape sont également données. Le résultat final de la localisation montre que les deux sources sont bien identifiées.

Les résultats pour Basis Pursuit sont donnés figure 8.7. Le résultat de Basis

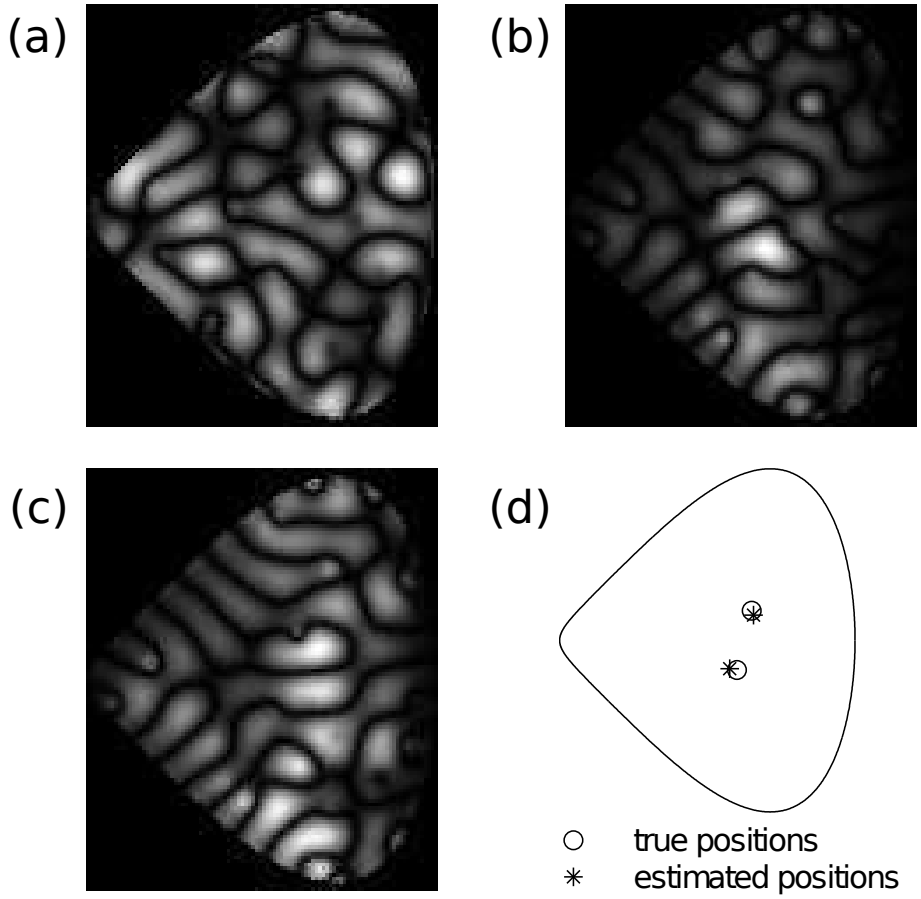

Figure 8.6 – (a) Corrélation avec le champ total (b) Corrélations au premier pas de l'algorithme itératif (c) Corrélations au deuxième pas (d) Sources estimées

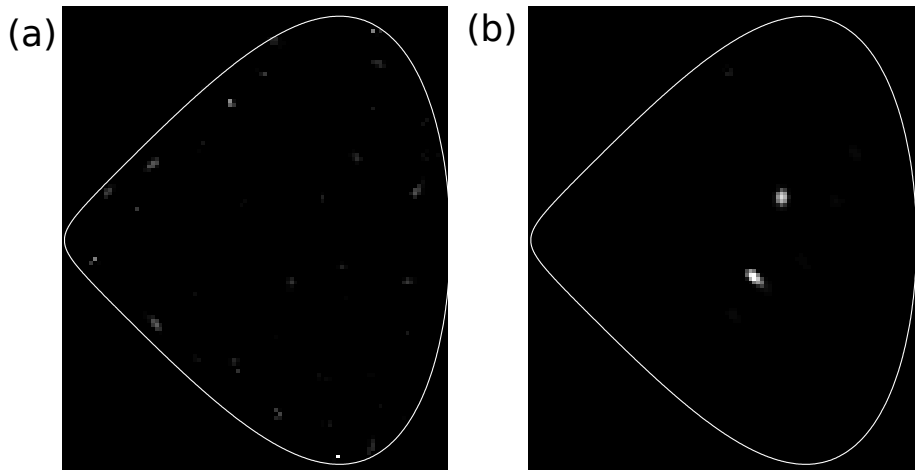

FIGURE 8.7 – (a) Résultat de Basis Pursuit sans prise en compte du champ réverbéré (b) Avec prise en compte

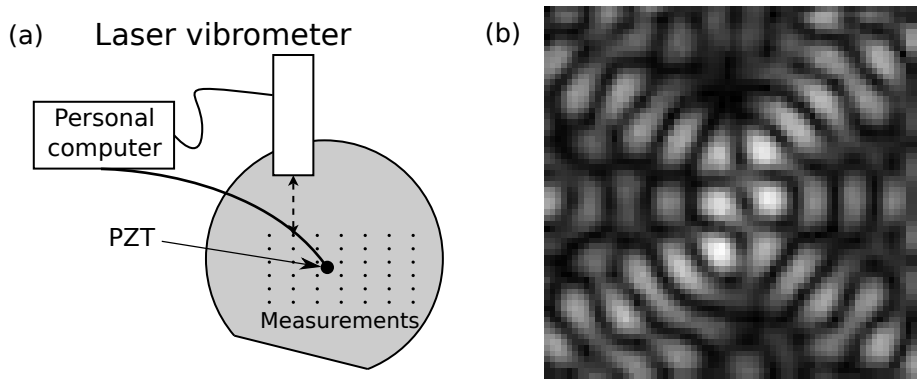

FIGURE 8.8 – (a) Dispositif expérimental (b) Champ mesuré à 30 631 Hz

Pursuit avec le dictionnaire de sources seulement (fig. 8.7 (a)) montre un grand nombre de sources qui n'existent pas réellement. Ce comportement peut-être interprété comme une tentative par Basis Pursuit d'expliquer le champ homogène comme le champ généré par des sources monopolaires placées autour du domaine d'intérêt, comme on le ferait en utilisant la méthode des solutions fondamentales [FK98]. En utilisant l'algorithme (fig. 8.7 (b)) proposé, les deux sources apparaissent clairement. Elles ne sont cependant pas réduites à un seul point. Ceci empêche de retrouver facilement leur niveau.

Expérience sur une plaque

La manipulation est faite sur la même plaque qu'au chapitre 7, sauf que cette fois-ci, elle est excitée au centre de la zone d'intérêt (cf. figure 8.8, où est également donné le champ mesuré à 30 631 Hz). La physique des plaques est différente des membranes, mais le modèle est encore pertinent. En effet, à la fréquence utilisée (30 631 Hz), le comportement de la plaque peut encore être encore expliqué par le modèle de Kirchhoff-Love. Comme dans le chapitre 7, seule la composante propagative de la décomposition des solutions sera prise en compte. Des termes en fonction de

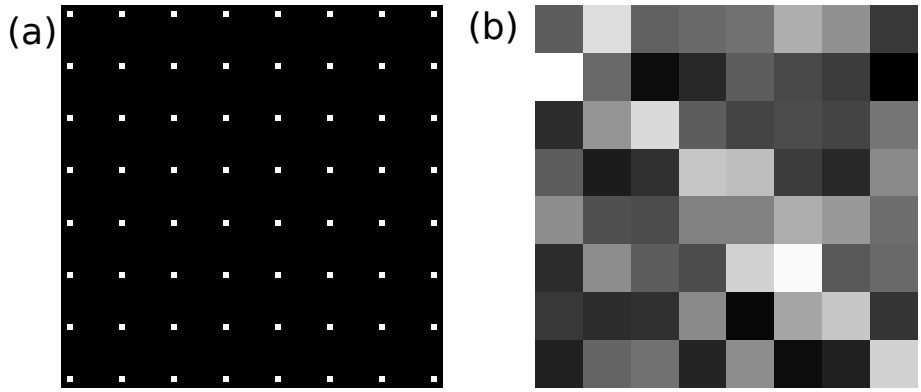

Figure 8.9 – (a) Grille d'échantillonnage (b) Champ mesuré

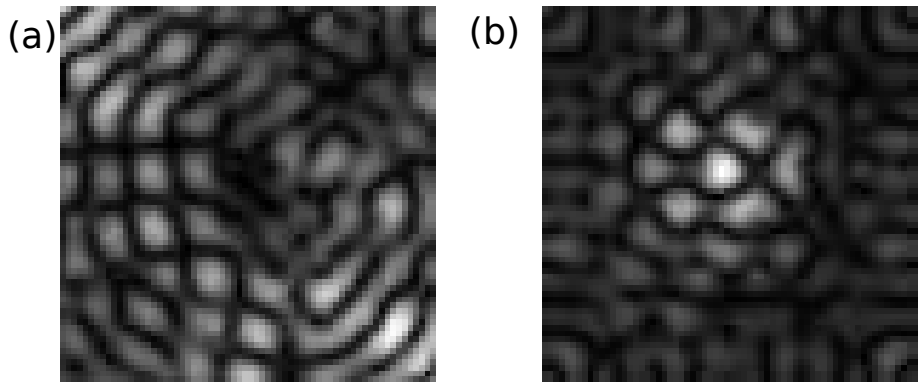

Figure 8.10 – (a) Corrélations avec le champ complet (b) Corrélations avec le champ source après soustraction du champ homogène

Bessel modifée de deuxième espèce apparaissent également dans les termes sources. Ils seront négligés.

Le champ est échantillonné sur une grille régulière, dont la période est plus grande que la demi-période des vibrations. Nous nous plaçons donc dans le cadre du compressed sensing. Cette grille ainsi que la valeur du champ (en valeur absolue) sur celle-ci est donnée figure 8.9.

Les résultats de l'algorithme itératif, avec ou sans prise en compte de la réverbération, sont donnés figure 8.10. Comme pour les simulations, la prise en compte de la réverbération permet la localisation de la source, au centre du domaine. Le résultat est le même pour Basis Pursuit (figure 8.11).

8.3.4 Discussion

Ces simulations et manipulations montrent que le principe général de la méthode est prometteur. Des manipulations en acoustique audible viendront compléter cette étude.

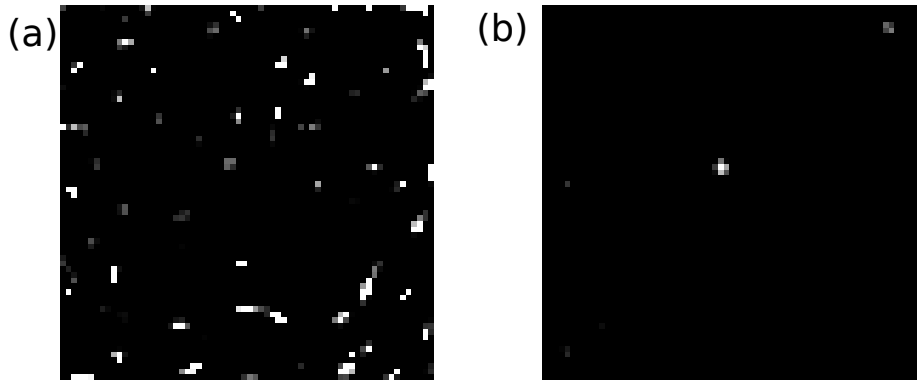

FIGURE 8.11 – (a) (a) Résultat de Basis Pursuit sans prise en compte du champ réverbéré (b) Avec prise en compte

Comparaison avec l'état de l'art

Contrairement aux méthodes basées sur les temps d'arrivée, cette méthode ne nécessite pas de mesures temporelles, ou de sources spécifiques. On peut donc localiser des sources de bruits, incohérentes ou non. Cette plus grande souplesse se paye par un nombre de mesures nécessaires plus élevé.

Les méthodes de Dokmanic [DV12] et de Nam [NG12] nécessitent toutes les deux la connaissance, non seulement de la géométrie de la salle, mais également des propriétés acoustiques des revêtements des murs. Autant la première n'est pas des plus difficiles à obtenir (à partir des plans, ou simplement de mesures), autant la modélisation des conditions aux bords est nettement plus difficile. D'autre part, ces méthodes ne peuvent éliminer des sources de bruits extérieurs.

Enfin, contrairement à l'iPTF, la DCM ou la FSM, plutôt orientées vers l'holographie mais tout de même assez semblables pour être comparées, il n'est pas nécessaire pour notre méthode de mesurer pression et vélocité de l'air (ou pression sur deux sphères ou hémisphères concentriques), ce qui donne plus de souplesse à la forme de l'antenne ou du domaine de mesure.

Extensions

Plusieurs extensions sont envisageables. La première consiste à s'adapter au cas de la mesure de sources à proximité d'un mur. Dans ce cas, la condition aux limites du mur doit être connue, pour alors être utilisée comme une mesure. Par exemple, un mur rigide pourra être remplacé par des mesures de dérivées normales nulles. Contrairement aux méthodes comme la FSM, ce mur n'est pas nécessairement plat, des murs courbes pouvant également être pris en compte par cette astuce.

Une autre extension, est l'utilisation simultanée de mesures à plusieurs fréquences, comme le fait Dokmanic. L'utilisation de la parcimonie conjointe entre les fréquences permet simplement de prendre en compte ce type de mesures.

Une dernière extension est la combinaison de cette méthode avec la localisation de sources directives. Ce problème, que nous avons déjà étudiée dans le cas anéchoïque [POCD12], consiste à rajouter des dipoles, quadrupoles, etc., dans le dictionnaire. Ces différentes directivités forment un bloc par position de source.

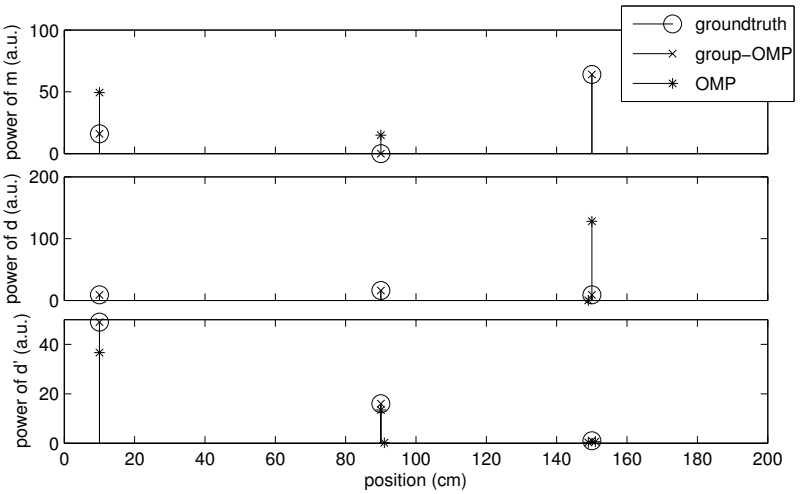

Figure 8.12 – Localisation et identification de trois sources directives, avec OMP et Group OMP. Sont tracés les coefficients des monopoles (m), des dipoles suivant l'axe parallèle à l'antenne (d), et orthogonale à l'antenne (d').

L'utilisation de cette parcimonie structurée permet alors la détermination des positions et des directivités des sources. La figure 8.12 donne un aperçu des résultats de cette méthode sur des simulations numériques. Trois sources sont situées à distance d'une antenne de microphones (en dimension 2). Ces sources sont directives : elles sont composé d'un monopôle et d'un dipôle. Elle peuvent être décomposées sur un dictionnaire contenant des monopôles, des dipôles orientés suivant un axe arbitraire, et des dipôles orientés sur l'axe orthogonal. Deux méthodes de reconstruction sont comparés :

- 9 itérations d'OMP avec ce dictionnaire
- 3 itérations de Group OMP (ou Block OMP), où le monopole et les deux dipoles correspondant à la même position forment un groupe.

Comme on le voit bien sur la figure, l'utilisation de la parcimonie de groupe permet de retrouver à la fois position et directivités des sources. Remarquons toutefois que l'implémentation de cette méthode peur poser des problèmes liés à l'ambiguïtié qui peut exister entre deux sources complexes placées à des endroits différents, mais dont les directivités sont telles qu'elles sont peu distingables par des mesures à distance.

8.4 Conclusion

La localisation de sources, problème standard en champ libre et en présence de sources monopolaires, devient nettement plus complexe dans des environnements confinés ou avec des sources à directivités non triviales. Ces difficultés sont à la fois d'ordre expérimental, ainsi que fondamental. La connaissance parfaite du lieu de l'expérience, ou la construction d'une antenne englobant les sources, avec une

forme parfois contrainte à une sphère ou une hémisphère, complique les manipulations. La méthode que nous avons développée, nécessitant une antenne englobant les sources, mais sans autres contraintes particulières, utilisant uniquement de simples microphones, et s'adaptant à des environnements inconnus ou bruités, semble de ce point de vue intéressante. Cependant, même en supposant les manipulations parfaites (connaissance parfaite du milieu et de l'antenne, ou alternativement antenne englobant le domaine d'intérêt et connue avec précision), la localisation de sources en environnement réverbérant soulève des problèmes fondamentaux :

- quand le milieu est connu, la physique des ondes perturbe assez la modélisation du problème pour rendre nécessaire la mesure sur plusieurs fréquences simultanément. En effet, la présence de modes propres vient limiter le rang des dictionnaires, ce qui oblige à rajouter de la diversité en utilisant plusieurs canaux.
- Quand le milieu est inconnu, cette connaissance doit être remplacée par un nombre plus élevé de mesures. Ce nombre de mesures nécessaire n'est pas encore complètement compris.

Des progrès sont encore à accomplir, tant expérimentalement que théoriquement, pour parvenir à bien comprendre les particularités de la localisation de sources en environnement confiné.

Conclusion

Le *compressed sensing* et la parcimonie en général, comme montré dans cette thèse, trouvent avec l'acoustique un nombre d'applications intéressantes, tant sur le plan expérimental que théorique. Les quelques problèmes étudiés peuvent se reformuler sous forme parcimonieuse, permettant soit de réduire le nombre de mesures nécessaires à la reconstruction de grandeurs physiques (déformées opérationnelles ou réponses impulsionnelles de plaques) en dessous de la limite de Shannon, soit de concevoir de nouvelles méthodes permettant de résoudre des problèmes complexes comme la localisation de sources en environnement réverbérant inconnu. Des analyses théoriques, débutées dans cette thèse, sont encore à mener pour justifier théoriquement les résultats expérimentaux et de simulations que nous avons eus, et également pour en trouver les limites.

La méthode d'holographie acoustique développée montre la pertinence de l'utilisation de la parcimonie pour la régularisation de l'inversion des ondes. Cette nouvelle technique peut être utilisée pour le traitement de mesures effectuées suivant des protocoles déjà existants (mesure sur une grille régulière, etc.), mais peuvent également servir à la conception et l'utilisation de nouvelles antennes, aléatoires et non sujettes aux limitations du théorème de Shannon.

L'interpolation de réponses impulsionelles, qui utilise un modèle parcimonieux assez particulier ne pouvant être exploité par les théorèmes habituels d'échantillonnage, nous a amené à justifier les échantillonnages utilisés par des résultats de stabilité spécifiques, différents des résultats classiques de *compressed sensing*.

La méthode de localisation de sources développée ici adopte un point de vue différent des autres méthodes déjà existantes. L'utilisation d'un modèle de signal parcimonieux permet plus de souplesse sur les dispositifs expérimentaux à utiliser, ainsi que l'utilisation d'a priori supplémentaires sur les sources, comme par exemple la parcimonie de groupes pour la modélisation de sources directives. Au-delà de ces premiers résultats, cette méthode paraît être un bon point de départ pour résoudre d'autres problèmes proches. On peut penser à la séparation de sources acoustiques, ou encore à la déréverbération, ceci non pas en utilisant des modèles de signaux audio, mais la physique même de la propagation des ondes (voire les deux).

L'application du formalisme parcimonieux au type de signaux rencontrés en acoustique est un sujet d'étude en soi. Nous avons ici utilisé des résultats de la théorie de Vekua pour construire ces modèles parcimonieux, principalement de type synthèse, alors qu'ils sont généralement appliqués à des problèmes d'analyse numérique, comme nous l'avons nous même fait pour le calcul de modes propres de plaques. Il serait ici intéressant d'étudier plus en profondeur ces résultats, ainsi que les in-

teractions possibles avec la parcimonie de type analyse, utilisant directement une discrétisation des équations différentielles mises en jeu.

Les perspectives ouvertes par ce travail sont cependant, à notre avis, bien plus vastes que ce seul domaine d'applications qu'est l'acoustique. La modélisation des ondes utilisée tout le long de la thèse, en traduisant une équation aux dérivées partielles en modèle parcimonieux, n'est pas limitée aux champs acoustiques. L'électromagnétisme, avec les équations de Maxwell pour lesquelles Hiptmair et al. [HMP11] ont déjà donné des approximations en ondes planes, est bien sûr une application de choix pour les méthodes présentées ici. Des applications en mécanique quantique seraient également possibles, sans difficultés théoriques majeures, l'équation de Schrödinger en régime harmonique se réduisant à l'équation d'Helmholtz, mais présenteraient des défis expérimentaux bien plus difficiles qu'en acoustique. La généralisation des résultats d'approximation à d'autre types d'équations (équation de la chaleur par exemple) permettrait des applications encore plus variées.

Enfin, rappelons qu'un objectif de cette thèse était de montrer la pertinence des modèles parcimonieux pour traiter des problèmes inverses en acoustique, notamment en tirant parti de la physique des signaux à reconstruire. Cet objectif est, nous le pensons, rempli. En effet, de nombreux modèles parcimonieux différents ont été mis à contribution pour la modélisation des problèmes inverses étudiés :

- la parcimonie de groupe, pour par exemple la construction de modèles parcimonieux de modes propres, ou de modélisation de sources directives,
- la parcimonie conjointe, pour prendre en compte des mesures multiples d'un même objet physique sous des conditions différentes (emplacements différents sur une plaque, mesures simultanées à plusieurs fréquences, etc.),
- parcimonie à la synthèse, mais aussi à l'analyse, notamment dans le cas de la localisation de source.

Certains de ces modèles ont été conçus pour la résolution de problèmes ayant peu de rapports avec la physique : apprentissage, traitement d'images, etc. Ils nous ont cependant été d'une grande utilité, non seulement pour les résultats qu'ils nous ont permis d'obtenir, mais également parce qu'ils sont imposés par la physique des problèmes étudiés. Ceci doit nous encourager, non seulement à profiter des divers modèles et résultats théoriques existants pour les appliquer à nos problèmes de physique, mais également, dans l'autre sens, à concevoir de nouvelles manières de modéliser la parcimonie des signaux physiques, si particuliers par rapport aux objets d'étude habituels en traitement du signal.

Liste des publications

Articles dans revues à comité de lecture

- G. Chardon, Antoine Peillot, François Ollivier, Nancy Bertin, Rémi Gribonval, Laurent Daudet, *Nearfield Acoustic Holography using sparse regularization and compressive sampling principles*, accepté pour publication dans le Journal of the Acoustical Society of America
- G. Chardon, A. Leblanc, L. Daudet, *Plate impulse response spatial interpolation with sub-Nyquist sampling*, Journal of Sound and Vibration, Volume 330, Issue 23, 7 November 2011, Pages 5678-5689

Conférences avec actes

- A. Peillot, F. Ollivier, G. Chardon et L. Daudet. *Source localisation in an unknown reverberant environment using compressive sampling in the frequency domain*. Acoustics 2012, Nantes, France, April 2012.
- G. Chardon et L. Daudet. *Source localisation in an unknown reverberant environment using compressive sampling in the frequency domain*. Acoustics 2012, Nantes, France, April 2012.
- G. Chardon et L. Daudet. *Narrowband source localization in an unknown reverberant environment using wavefield sparse decomposition*. Interna- tional Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP) 2012, Kyoto, Japan, March 2012.
- R. Gribonval, G. Chardon et L. Daudet. *Blind calibration for compressed sensing by convex optimization*. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP) 2012, Kyoto, Japan, March 2012.
- G. Chardon, N. Bertin, L. Daudet, *Multiplexage spatial aléatoire pour l'échantillonnage compressif - application à l'holographie acoustique*, GRETSI 2011, Bordeaux, France, September 2011
- R. Mignot, G. Chardon et L. Daudet. *Compressively sampling the plenacoustic function*, SPIE Conference Wavelets and Sparsity XIV, San Diego, USA, August 2011 doi :10.1117/12.892761
- G. Chardon, L. Daudet, *Computation of plate eigenmodes with the plane wave decomposition method*, WAVES 2011, Vancouver, Canada
- A. Peillot, F. Ollivier, G. Chardon, L. Daudet, *Localization and iden- tification of sound sources using "compressive sampling" techniques*, 18th International Congress on Sound and Vibration, Rio de Janeiro, Brazil, July 2011

- G. Chardon, L. Daudet, *Optimal subsampling of multichannel damped sinusoids* , Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM), 2010 IEEE , Jerusalem, Israel. doi :10.1109/SAM.2010.5606750
- G. Chardon, A. Peillot, L. Daudet, F. Ollivier, *Le 'Compressed sensing' pour l'holographie acoustique de champ proche - I : Aspects algorithmiques et simulations*, 10ème Congrès Français d'Acoustique, Lyon, Avril 2010
- A. Peillot, G. Chardon, F. Ollivier, L. Daudet, *Le 'Compressed sensing' pour l'holographie acoustique de champ proche - II : Mise en œuvre expérimentale*, 10ème Congrès Français d'Acoustique, Lyon, Avril 2010

Conférences sans actes

- G. Chardon, A. Cohen, L. Daudet, *Sampling the solutions of the Helmholtz equation*, iTwist 2012, Marseille, France
- G. Chardon, L. Daudet, *Joint localisation and identification of acoustical sources with structured-sparsity priors*, SPARS 2011, Edinburgh, Scotland

Annexe A

Fonctions de Bessel

Voici quelques résultats sur les fonctions de Bessel utilisés dans cette thèse. La plupart sont tirés de [AS72] et de [PD06].

Les fonctions de Bessel sont définies comme les solutions de l'équation différentielle

$$x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

Pour chaque paramètre α, il existe deux fonctions linéairement indépendantes, notées J_α et Y_α. Leur principal intérêt est l'écriture des solutions de l'équation d'Helmholtz. En effet, $e^{i\alpha\theta}J_\alpha(kr)$ et $e^{i\alpha\theta}Y_\alpha(kr)$ sont toutes deux solution de l'équation $\Delta u + k^2 u = O$, sur le plan (privé de l'origine pour Y_α) quand α est entier, sur un domaine simplement connexe n'incluant pas l'origine sinon.

Ces deux fonctions peuvent être combinées pour donner les fonctions de Hankel

$$H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iY_\alpha(x)$$

$$H_\alpha^{(2)}(x) = J_\alpha(x) - iY_\alpha(x)$$

qui servent à modéliser des sources ou des puits acoustiques.

On peut également définir les fonctions de Bessel modifiées I_n et K_n, solutions de

$$x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 + \alpha^2)y = 0.$$

Les fonctions de Bessel de première espèce peuvent être définies par une série :

$$J_\alpha(x) = (z/2)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k!\Gamma(\alpha + k + 1)}$$

ou par une intégrale si l'ordre est entier :

$$J_n(x) = \frac{1}{i^n\pi}\int_0^\pi e^{iz}\cos(n\theta)d\theta$$

Cette expression permet de relier fonctions de Fourier-Bessel et ondes planes. On a en effet, pour un point $\mathbf{x}$ de coordonnées polaires (r, θ), la première intégrale de Bessel :

$$J_n(kr)e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi i^n}\int_0^{2\pi} e^{i\mathbf{k}_\phi\cdot\mathbf{x}}e^{in\phi}d\phi$$

où $\mathbf{k}_\theta$ est le vecteur de coordonnées polaires (k, θ). On peut inverser décomposer une onde plane comme sommes de fonctions de Fourier-Bessel. C'est la formule de Jacobi-Anger :

$$e^{i\mathbf{k}_\phi \cdot \mathbf{x}} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} i^n J_n(kr) e^{in(\theta - \phi)}$$

Voici quelques propriétés utilisées dans les démonstrations des chapitres 2 et 4. La dérivée d'une fonction de Bessel vérifie :

$$2J'_n = J_{n-1} - J_{n+1}$$

On a l'intégrale

$$\int_0^R r^2 J_n^2(r) dr = 2 \sum_{k \in \mathbf{N}} (n + 1 + 2k) J_{n+1+2k}^2(r)$$

Pour $\alpha > 0$ les fonctions de Bessel J_α sont croissantes sur $]0, \alpha[$, et on a également, pour $0 \leq x \leq \alpha$ et p entier strictement positif :

$$J_{\alpha+p}(x) < \left(\frac{x}{\alpha}\right)^p J_\alpha(x)$$

Enfin, voici les expressions des gradients et rotationnels d'une fonction de Fourier-Bessel $J_n(kr)e^{in\theta}$ pour n entier, utilisés pour certaines approximations du chapitre 2 :

$$\mathbf{grad}\, J_n(kr)e^{in\theta} = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} J_{n-1}e^{i(n-1)\theta} & - & J_{n+1}e^{i(n+1)\theta} \\ iJ_{n-1}e^{i(n-1)\theta} & + & iJ_{n+1}e^{i(n+1)\theta} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{rot}\, J_n(kr)e^{in\theta} = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} iJ_{n-1}e^{i(n-1)\theta} & - & iJ_{n+1}e^{i(n+1)\theta} \\ -J_{n-1}e^{i(n-1)\theta} & + & J_{n+1}e^{i(n+1)\theta} \end{pmatrix}$$

Ces expressions font intervenir, comme pour la dérivée d'une fonction de Bessel, les fonctions de Fourier-Bessel d'ordres $n-1$ et $n+1$.

Annexe B

Échantillonnage multicanal de sinusoïdes amorties

L'article reproduit dans les pages suivantes a été présenté à la conférence Sensor Array and Multichannel Signal Processing (SAM) en 2010 à Jérusalem [CD10]. Nous nous intéressons dans ce travail à la meilleure manière d'échantillonner un ensemble de signaux, somme de sinusoïdes qui partagent les mêmes amortissements et fréquences sur les différents canaux. Ce peut-être le cas des mesures des chapitres 6 ou 7 par exemple.

Nous montrons que le compromis pour assurer la meilleure précision de l'estimation des fréquences et des amortissements est d'échantillonner les signaux sur une durée approximativement égale à deux fois le temps caractéristique de décroissance.

OPTIMAL SUBSAMPLING OF MULTICHANNEL DAMPED SINUSOIDS

Gilles Chardon and Laurent Daudet

Institut Langevin
UPMC - Univ. Paris 6, Université Paris Diderot - Paris 7, ESPCI ParisTech, CNRS UMR 7587,
10, rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France
firstname.lastname@espci.fr

ABSTRACT

In this paper, we investigate the optimal ways to sample multichannel impulse responses, composed of a small number of exponentially damped sinusoids, under the constraint that the total number of samples is fixed - for instance with limited storage / computational power. We compute Cramér-Rao bounds for multichannel estimation of the parameters of a damped sinusoid. These bounds provide the length during which the signals should be measured to get the best results, roughly at 2 times the typical decay time of the sinusoid. Due to bandwidth constraints, the signals are best sampled irregularly, and variants of Matching Pursuit and MUSIC adapted to the irregular sampling and multichannel data are compared to the Cramér-Rao bounds. In practical situation, this method leads to savings in terms of memory, data throughput and computational complexity.

***Index Terms*—** compressed sensing, spectral analysis, array signal processing

1. INTRODUCTION

Array processing techniques have proved extremely powerful for many tasks in signal processing. To name but a few of these techniques, we can mention the remarkable achievements of beamforming [1], holography [2], Synthetic Aperture Radar [3] etc. However, there are a many practical situations, typically when a high bandwidth is needed, where such techniques lead to an extremely large number of samples, which in turn leads to stringent experimental constraints on the acquisition devices that need to cope with high data throughput and large storage capabilities. Processing these signals can also involve very large computational costs.

In most of these techniques, such as in the Nearfield Acoustic Holography (NAH) [2] that motivates this study, the acquired signals have a very specific structure, as the different sensors typically acquire different "views" of the same source, therefore sharing a lot of characteristics. For instance, in NAH used to visualize resonating modes of vibrating structures with an array of microphones, every signal is a sum of a few sinusoids (one per mode, in the simplest non-degenerated case), whose frequencies (and damping factor if relevant) are shared across all microphones. Here, individual microphone signals only differ by the amplitude and phase of each sinusoid, and that is precisely the information that is needed to image the vibration of the structure. It should be noted too that, in frequent experimental cases, these signals are corrupted by strong noise.

This work is partly supported by the French Agence Nationale de la Recherche, under project ECHANGE ANR-08-EMER-006

In view of this remarkable multichannel signal structure, this paper investigates the use of non-uniform sampling techniques to get the best estimation of these parameters for a fixed total number of samples. Reducing the number of samples not only reduces the global data throughput and the storage space needed to record the signals, in some cases it also reduces the computational complexity of the processing, as shown in this paper. It can be noted that incorporating prior information on the structure of the signal at the sampling stage is very much in the spirit of compressed sensing techniques, although the sinusoidal nature of the signals allows the use of specific resolution techniques.

In order to recover the parameters of the sinusoids from the non-uniform samples, we have studied two algorithms. The first one is an adaptation of Simultaneous Orthogonal Matching Pursuit (SOMP) [4], a generic multichannel sparse recovery algorithm. This extension is rather straightforward in the case of undamped sinusoids. The second one is based on the high resolution spectral estimator MUSIC (MUltiple SIgnal Classification) [5]. As we shall demonstrate, this technique can be extended in a natural way to our multichannel, non-uniformly sampled problem, with possibly damped sinusoids.

To summarize the original contributions of this paper, it presents a full study on how to handle non-uniform sampling for multichannel damped sinusoids (data model introduced section 2):

- the computation of Cramér-Rao bounds for the estimation of the signal components (section 3),
- the investigation of the optimal observation length, that as we shall demonstrate should be roughly 2 times the typical decay time of the signal (section 4),
- The generalization of two estimation algorithms, SOMP (section 5) and MUSIC (section 6), and the comparison of their performance in terms of precision, resolution, and computational cost (section 7).

2. DATA MODEL

The signals measured by the K sensors are combinations of P exponentially modulated sinusoids (impulse responses). A given sinusoidal component, indexed by p, has the same frequency ω_p and damping factor α_p across sensors, but different phases ϕ_{pk} and amplitudes A_{pk}. The measurements are distorted by a complex noise w_k, assumed white gaussian of variance $2\sigma^2$ and uncorrelated between sensors. The expression of the signal received by the k-th sensor at time t is then :

$$X_k(t) = \sum_{p=1}^{P} A_{pk} e^{-\alpha_p t} e^{i(\phi_{pk}+\omega_p t)} + w_k(t) \qquad (1)$$

Such signals, sums of the same atoms with different coefficients, can be described by the Joint Sparsity Model 2 (JSM-2) introduced in [6]. They are found in nearfield acoustical holography of normal modes of freely-vibrating plates, where each normal mode of the plate radiates a damped sinusoid, solution of a second-order differential equation. Amplitudes and phases of each mode, varying in space, are used to recover the modal shape.

These signals are sampled at M times t_m, identical for each channel.

3. CRAMER-RAO BOUNDS

Cramér-Rao bounds (CRBs) for monochannel damped sine waves can be found in [7]. Following the same computation, these results can be generalized to derive bounds for the multichannel case (K channels) of a single damped sinusoid affected by white Gaussian noise :

$$\begin{aligned} CRB_\omega &= \frac{1}{KR}\frac{a}{ac-b^2} \\ CRB_\alpha &= \frac{1}{KR}\frac{a}{ac-b^2} \\ CRB_{\phi_i} &= \frac{1}{R_i a} + \frac{1}{KR}\frac{b^2}{a(ac-b^2)} \\ CRB_{A_i} &= \frac{\sigma^2}{a} + \frac{A_i^2}{KR}\frac{b^2}{a(ac-b^2)} \end{aligned}$$

where $a = \sum_{m=1}^{M} e^{-2\alpha t_m}$, $b = \sum_{m=1}^{M} t_m e^{-2\alpha t_m}$, $c = \sum_{m=1}^{M} t_m^2 e^{-2\alpha t_m}$ and $R = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\frac{A_k^2}{\sigma^2}$. These bounds are obviously lower than the monochannel ones, especially for the damping and the frequency parameters which are shared among the channels : whereas the monochannel bounds for frequency and damping are inversely proportional to the ratio of the amplitude squared at $t = 0$ over the noise variance (ratio we will call Signal-to-Noise Ratio (SNR) in the remainder of the paper, with a slight abuse of language) the multichannel bounds are inversely proportional to KR, i.e. the sum of the SNRs in each channel. Phases and amplitudes, although different for each channel, also have better bounds : they are sums of two terms, one inversely proportional to the sum of the SNRs, and one inversely proportional to the SNR of the channel. This can be explained by the fact that a better estimation of the frequency and the damping gives a better estimation of the phases and the amplitudes. Both algorithms used in this paper show a similar behavior : phases and amplitudes are estimated by projecting the signal on the subspace spanned by the chosen atoms. A better estimation of this subspace will obviously lead to a better estimation of the parameters of the components.

4. OPTIMAL OBSERVATION LENGTH

In this section, we investigate how these Cramér-Rao bounds can be used to compute the optimal observation length T, as a function of the damping parameter α, for a fixed number of samples M.

Here, in order to obtain closed-form solutions, we assume that the signals are uniformly subsampled, i.e. $t_m = \frac{m}{M}T = m\Delta t$, for $0 \leq m < M$. We can then rewrite the frequency and damping Cramér-Rao bounds as

$$CRB_\omega = CRB_\alpha = \frac{1}{KR}\frac{\alpha^2}{M} f(M, \alpha T) \qquad (2)$$

where

$$f(M,\beta) = \frac{M\sum_{m=0}^{M-1} f_1\left(\frac{\beta m}{M}\right)}{\sum_{m=0}^{M-1} f_1\left(\frac{\beta m}{M}\right)\sum_{m=0}^{M-1} f_3\left(\frac{\beta m}{M}\right) - \left(\sum_{m=0}^{M-1} f_2\left(\frac{\beta m}{M}\right)\right)^2}$$

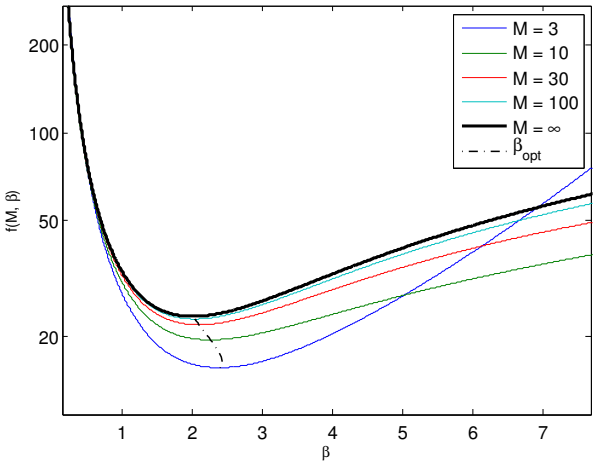

Fig. 1. Values of $f(M, \beta)$ that governs the CRB as a function of the observation duration $T = \beta/\alpha$. M is the number of samples in the interval $[0, T]$, α is the decay time of the sinusoid.

$$f_1(x) = e^{-2x}, f_2(x) = xe^{-2x}, f_3(x) = x^2 e^{-2x}$$

Here, the $\beta = \alpha T$ parameter represents the number of decay characteristic times $1/\alpha$ that is being used for the observation interval $[0, T] = [0, \beta/\alpha]$. The optimal observation length is the T_{opt} minimizing the lower bound. It should be noted that, as seen from Equation (2), this optimum is independent of the number K of channels and the SNR R. The limit of f as M goes to infinity can be computed (discrete sums are seen as Riemann sums of f_1, f_2 and f_3 and therefore converge to their integral on $[0, \beta]$) :

$$f(+\infty, \beta) = \frac{8\beta(e^{4\beta} - e^{2\beta})}{e^{4\beta} - 2e^{2\beta} + 4\beta^2 + 1}$$

Values of $f(M, \beta)$ for different M and $\beta = \alpha T$ and its limit for $M = \infty$ are plotted figure 1, where optimal values of β are indicated. We can see that the optimal value of β is approximately 2 for every M, thus the optimal observation length for a damped sinusoid is approximately $T_{opt} = \frac{2}{\alpha}$. The bottom line goes as follows: when analyzing exponentially damped sinusoids under a constraint on the total number M of samples, it is better not to take the first M samples, but rather to spread the samples across the signal. However, after too many characteristic decay times $\frac{1}{\alpha}$ the samples mostly represent noise and carry little information. For uniform sampling, a good trade-off is to sample within $[0, \frac{2}{\alpha}]$.

In practical estimation of sinusoidal components in a signal with uniform sampling, the bandwidth is limited by the Shannon-Nyquist theorem. A solution is to sample the signal irregularly. The following two sections describe different algorithms that can be used to recover the parameters of signals from irregular samples. Numerical tests in section 7 show that the optimal sampling duration $T \approx 2/\alpha$ still holds approximately for non-uniform sampling with a constant density on $[0, T]$.

5. SIMULTANEOUS ORTHOGONAL MATCHING PURSUIT

Simultaneous orthogonal matching pursuit [4], a greedy sparse approximation algorithm specialized in recovering JSM-2 signals, aims

at identifying the components one at a time, by selecting the atom of a dictionary's most correlated, on average, with the signals, subtracting the contribution of this component, and iterating until the desired number of components are found.

An atom of frequency ω and damping α is $\psi_{\omega\alpha} = \gamma_{\omega\alpha}(e^{(i\omega-\alpha)t_1}, \ldots, e^{(i\omega-\alpha)t_m}, \ldots, e^{(i\omega-\alpha)t_M})$, with $\gamma_{\omega\alpha}$ such that $||\psi_{\omega\alpha}|| = 1$.

The algorithm works as follows :

1. Initialize the residuals $r_{k,0} = (X_k(t_1), \ldots, X_k(t_M))^T$, set the iteration counter $l = 1$
2. Select the pair (ω_l, α_l) maximizing $\sum_{k=1}^{K} |\langle \psi_{\omega\alpha}, r_{k,l} \rangle|^p$.
3. Let $q_{k,l}$ be the orthogonal projection of $r_{k,l}$ on $\text{span}(\psi_{\omega_1\alpha_1}, \ldots, \psi_{\omega_l\alpha_l})$ and $r_{k,l+1} = r_{k,l} - q_{k,l}$
4. Increment l and iterate until enough components are found
5. Estimate phases and amplitudes with the coordinates of the projection of X_k in the space spanned by $(\psi_{\omega_1\alpha_1}, \ldots, \psi_{\omega_l\alpha_l})$.

The parameter $p \geq 1$ controls the way information is integrated between channels. In this paper, p will always be equal to 2.

As this algorithm uses a Fourier approach to detect sinusoidal component, its resolution is limited, restricting its use to signals with clearly separated partials. When the signals contains sinusoids with very close frequencies, which indeed occurs in some experimental setups, e.g. holography of plates of particular geometries, high resolution methods can be helpful, as described in the next section.

6. MULTICHANNEL MUSIC

High resolution spectral estimation methods, such as MUSIC [5], are often used to go beyond the standard limitations of plain Fourier-based methods. Based on the computation of a signal subspace and a noise subspace, MUSIC requires an estimation of the covariance of the signal. This covariance is, in the traditional monochannel and regularly sampled case, estimated by a average over overlapping windows. In our case, this averaging is not done in this way, made impossible by the irregular sampling, but over the different signals available. The signals can be arranged in a matrix $\mathbf{X}$ of general term $x_{ij} = X_i(t_j)$. Our signal model 1 allows us to write $\mathbf{X}$ as:

$$\mathbf{X} = \mathbf{VA} + \mathbf{W}$$

where $\mathbf{V}$ is the matrix containing the damped sinusoids sampled at the times t_m, $v_{ij} = e^{(i\omega_j - \alpha_j)t_i}$, and $\mathbf{A}$ contains the amplitudes and phases of each partial, $a_{ij} = A_{ij}e^{i\phi_{ij}}$.

The first step is to estimate the matrix $\mathbf{V}$. The autocorrelation of the noiseless signals $\mathbf{R_u} = \mathbf{VA}(\mathbf{VA})^H$ has the same image as the matrix $\mathbf{V}$, under the condition that the matrix $\mathbf{A}$ has sufficient rank (this, among other conditions, requires more channels than components). This image, the signal subspace, is also the space related to the P strictly positive eigenvalues of $\mathbf{R_u}$. The nullspace is called noise subspace. The eigenvalues of the autocorrelation of the noisy signals $\mathbf{R_n} = E[\mathbf{XX}^H] = \mathbf{R_u} + \sigma^2\mathbf{I}$ are the eigenvalues of $\mathbf{R_u}$ augmented by σ^2. The signal subspace is thus the space related to the P largest eigenvalues of $\mathbf{R_n}$.

Frequencies and damping are found by searching the vectors $\psi_{\omega\alpha} = (e^{(i\omega-\alpha)t_1}, \ldots, e^{(i\omega-\alpha)t_M})$ contained by the signal subspace. These vectors are orthogonal to the noise subspace, the length of their projection $\Pi_n(\psi_{\omega\alpha})$ in the noise subspace is 0. In practice, as we only have an estimate of $\mathbf{R_n}$, we pick the values of ω and α where the pseudospectrum $S(\omega, \alpha) = \frac{1}{||\Pi_n(\psi_{\omega\alpha})||^2}$ reaches a maximum.

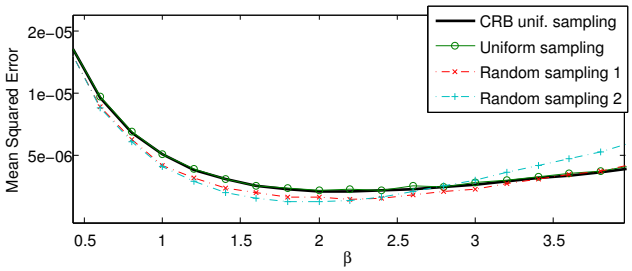

Fig. 2. Mean square error on the frequency estimation, SOMP, for different observations duration. SNR = 30dB, 20 samples, $\alpha = 0.1$.

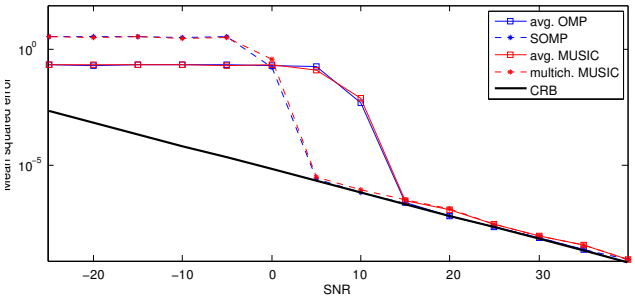

Fig. 3. Mean square error on the frequency estimation, SOMP compared to Cramér-Rao bounds

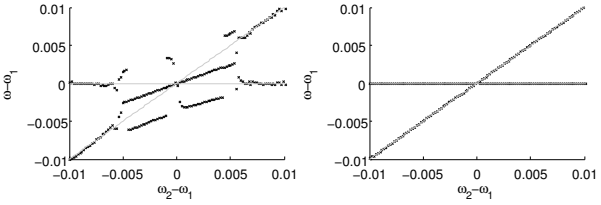

Fig. 4. Frequency estimations for two partials with close frequencies, 100 signals, no noise, 50 samples per signal. left: SOMP, right: nonuniform multichannel MUSIC

Amplitudes and phases are then found, as in SOMP, with the coordinates of the projection of the signals in the space spanned by the selected atoms.

It should be noted that the use of the MUSIC algorithm is standard in antenna processing, but in a framework where regularly sampled signals (in time) are gathered by different sensors (possibly irregularly sampled in space) to infer directions of arrival. The novelty is to use here the dual view of the same problem, where the signals are irregularly sampled in time, under the constraint that the sampling times t_m are identical across channels to determine frequencies and dampings of sinusoidal components of signals.

7. PERFORMANCES

7.1. Accuracy

The accuracy of SOMP and MUSIC is compared to the Cramér-Rao bound in two cases. For both cases, the signals are sum of a unique damped sinusoid with varying amplitudes and phases over the channels, and gaussian white noise.

First, with fixed SNR (30 dB), number of samples ($M = 20$) damping ($\alpha = 0.1$) and number of channels ($K = 128$), we estimate the variance of the estimators for different observation length T, with uniform sampling and nonuniform sampling (sampling times drawn from a uniform distribution on $[0, T]$). These estimated variances are plotted on Fig. 2 in the case of SOMP (MUSIC exhibits a similar behavior). Estimation with uniform sampling has good performances compared to the CRBs, and has the same behaviour, with a minimum at approximately $\beta = 2$. Variances for nonuniform sampling are similar, with minima close to $\beta = 2$. It should be noted that some of the variances are lower than the Cramér-Rao bounds for uniform sampling, which is not surprising as some random choices from nonuniform sampling times may better catch the structure of the signal. These results justify the arguments of section 4, as the optimal observation length $T \approx 2/\alpha$ given by the CRB in the uniform case is close to the actual optimal length for nonuniform sampling.

The second case is with varying SNRs, with fixed number of channels ($K = 10$), damping ($\alpha = 0.01$), number of samples ($M = 20$), and quasi optimal observation length ($T = 200$). We compare on Fig. 3 the joint frequency estimation (SOMP, multichannel MUSIC), and the averaged monochannel estimation (OMP, monochannel MUSIC). For low SNRs, joint and averaged estimations have similar performances, close the Cramér-Rao bounds, but between SNRs of 5 dB and 15 dB, separate estimations fails, whereas joint estimation still recovers the frequency of the sinusoids.

7.2. Resolution

The resolution of SOMP and MUSIC are compared with signals containing two components, with the same amplitude and random phase for each channel. We have here 50 samples picked from 1024 regularly spaced times, and 100 channels, with no noise. Figure 4 shows that SOMP ($p = 2$) does not recover the two components when their frequencies are close, whereas MUSIC only fails when frequencies coincide. Furthermore, the frequencies estimated by SOMP are biased even with well separated frequencies, where MUSIC does not show such a bias.

7.3. Computational complexity

Here, we compare the complexity of the different algorithms for a given target accuracy, tuning for each of them the number of samples in such a way that the error variance stays below 3×10^{-10}. The fastest algorithm is multichannel MUSIC with nonuniform sampling, as it needs the lowest number of samples per channel. Table 1 shows computation times for 100 channels and 1 channel, uniform and nonuniform sampling, using Matlab on a 3.2 GHz processor. MUSIC is more efficient for multichannel estimation, while SOMP (actually OMP) is faster for monochannel estimation. This can be explained by the fact that the complexity of MUSIC is dominated by the computation of the pseudo-spectrum of complexity $\mathcal{O}(NM^2)$, identical for multichannel and monochannel estimation, while SOMP is dominated by the computation of the correlations, of complexity $\mathcal{O}(KNM)$, linear in the number of channels.

8. CONCLUSION

There are many experimental cases where antennas of sensors record a small number of sinusoidal components, possibly damped, varying only in phase and amplitude on every sensor. In this paper we have shown that in these cases, it is possible to use non-uniform samples which brings a significant advantage in terms of complexity, and memory requirements. In the damped case, CRBs show that the samples are best spread over $[0, 2/\alpha]$, i.e. over 2 times the typical decay time of the sinusoids.

	nonuniform sampling		uniform sampling	
	100 ch.	1 ch.	100 ch.	1 ch.
samples per channel	10	1000	350	1600
MUSIC	0.06	70.2	1.9	170.89
SOMP ($p = 1$ or 2)	0.21	0.96	3.2	1.48

Table 1. Computation time (seconds) for one sinusoidal component, and similar accuracy.

To simultaneously recover the sinusoidal parameters in all the channels, we have proposed and compared two algorithms: a generic distributed compressed sensing algorithm, SOMP, and a variant of a spectral estimation algorithm, MUSIC. Both algorithms use the common sparsity of the channels and the larger period of time spanned by the samples to give a sharper accuracy for the frequency estimation, not so far from the Cramér-Rao bounds for reasonable SNRs. However, both algorithm have drawbacks : SOMP, based on a Fourier approach, cannot resolve close components, and MUSIC can have a large complexity for a small number of channels.

9. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to thank Bertrand David and Gérard Blanchet for useful discussions on high-resolution methods.

10. REFERENCES

[1] B.D. Van Veen and K.M. Buckley, "Beamforming: a versatile approach to spatial filtering," *ASSP Magazine, IEEE*, vol. 5, no. 2, pp. 4–24, April 1988.

[2] J. D. Maynard, E. G. Williams, and Y. Lee, "Nearfield acoustic holography: I. theory of generalized holography and the development of nah," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 78, no. 4, pp. 1395–1413, 1985.

[3] John C. Curlander and Robert N. McDonough, *Synthetic Aperture Radar: Systems and Signal Processing*, Wiley-Interscience, 1991.

[4] R. Gribonval, H. Rauhut, K. Schnass, and P. Vandergheynst, "Atoms of all channels, unite! average case analysis of multichannel sparse recovery using greedy algorithms," *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 14, no. 5, pp. 655–687, 2008.

[5] R. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 34, no. 3, pp. 276–280, Mar 1986.

[6] Dror Baron, Marco F. Duarte, Michael B. Wakin, Shriram Sarvotham, and Richard G. Baraniuk, "Distributed compressive sensing," *CoRR*, vol. abs/0901.3403, 2009.

[7] T. Wigren and A. Nehorai, "Asymptotic cramer-rao bounds for estimation of the parameters of damped sine waves in noise," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 39, no. 4, pp. 1017–1020, Apr 1991.

Table des figures

1.1 Un domaine répondant aux conditions du théorème 1.3 18
1.2 Une solution de l'équation d'Helmholtz et ses approximations par des polynômes harmoniques généralisés d'ordres croissants 20

3.1 Méthodes des solutions particulières : déterminant de U à basses fréquences, pour $N = 32$ et $N = 64$. Les estimations ne sont valides que dans les intervalles indiqués. 39
3.2 Déterminant de U à hautes fréquences, pour $N = 80$, 90 et 100. Le conditionnement des matrices empêche la recherche des minima avant que les familles soient assez grandes pour approximer correctement les solutions, rendant l'estimation des fréquences propres impossible. . . 40
3.3 Inverses des dix plus grandes valeurs propres généralisées du problème numérique 3.8. Les couleurs indiquent les rangs des valeurs propres : première en bleu, deuxième en vert, etc. Les fréquences propres sont les minima (ici, avec l'axe des abscisses utilisé, les sommes de deux carrés d'entiers). Les points utilisés pour l'estimation des normes sont identiques sur tout l'intervalle considéré, la taille des familles génératrices est proportionnelle à k. 43
3.4 Agrandissement de la figure précédente. Les ordres des fréquences propres sont indiqués. Ce sont le nombre de valeurs propres généralisées de 3.8 atteignant 0. 44
3.5 Base de l'espace propre pour $k = \sqrt{125}\pi$. La dimension de l'espace d'approximation est de 73. 44
3.6 Inverses des valeurs propres de 3.8 pour le même intervalle que la figure 3.2. Le mode (simple) à $k = \sqrt{1058}\pi$ est donné. La dimension de l'espace d'approximation est de 172, alors que le calcul par éléments finis nécessiterait plus de 10 000 éléments. 44
3.7 Tension pour une plaque carrée encastrée 45
3.8 14e et 16e modes d'une plaque non triviale 46
3.9 Tension pour la plaque non triviale 46
3.10 Tension pour la plaque circulaire encastrée. 47

4.1 Erreur de reconstruction en fonction de L, pour 400 mesures et différentes proportions α d'échantillons sur le bord 56
4.2 L optimal en fonction du nombre de mesures et de l'échantillonnage utilisé (α est la proportion d'échantillons sur le bord) 56

5.1 Une photographie 62
5.2 (a) Le noyau de convolution utilisé (b) La photographie légèrement floutée et bruitée 62
5.3 (a) Déconvolution naïve (b) Déconvolution régularisée 63
5.4 (a) Un signal parcimonieux dans la base canonique (b) Un signal parcimonieux dans la base de Fourier 65
5.5 Exemple d'application du compressed sensing. De haut en bas : (1) un signal parcimonieux dans la base de Fourier (2) les coefficients de sa FFT (3) sa reconstruction ℓ_2 à partir des échantillons indiqués par des disques sur le signal (4) sa reconstruction ℓ_1 à partir des mêmes échantillons 70

6.1 Dispositif expérimental d'holographie acoustique en champ proche . . 74
6.2 Construction des atomes du dictionnaire. À gauche, le domaine $\bar{\mathcal{S}}$ sur lequel est construit les vecteurs de base de la transformée de Fourier, et la forme de la plaque $\mathcal{S}$. À droite, un atome du dictionnaire. 76
6.3 Reconstruction de 4 déformées opérationnelles de la plaque rectangulaire avec diverses méthodes 77
6.4 Comparaison de trois approches utilisant 120 microphones : Tikhonov avec l'antenne de 120 microphones, ℓ_1 avec une sous-antenne régulière de 120 microphones au-dessus de la plaque, et ℓ_1 avec 120 microphones placés aléatoirement au-dessus de la plaque. La corrélation est donnée pour différents modes. 78
6.5 Reconstruction de 4 déformées opérationnelles de la plaque circulaire avec diverses méthodes 78
6.6 Performances des six formes d'antennes proposées 80
6.7 Antenne aléatoire construite 81
6.8 Reconstructions avec l'antenne aléatoire pour différentes méthodes. . 82
6.9 Comparaison de Tikhonov et antenne régulière avec ℓ_1 et antenne aléatoire, pour 4 modes, et différents nombres de microphones 83

7.1 Schéma-bloc de la méthode 87
7.2 Vecteurs d'ondes utilisés, et onde plane échantillonnée à des positions aléatoires 89
7.3 Montage expérimental 90
7.4 Proportion d'énergie non capturée par SOMP et la transformée de Fourier en fonctions du nombre de coefficients 91
7.5 Norme de la projection du mode sur l'espace d'ondes planes en fonction du nombre d'onde. Le maximum à $k = 154m^{-1}$ est pris comme estimation du nombre d'onde du mode. 92
7.6 Résultats de l'approximation du mode à 19 299Hz de la plaque rectangulaire : (a) mesures complètes (b) interpolation basse fréquence (c) méthode proposée avec dictionnaire complet (d) méthode proposée avec ondes propagatives seulement. 92

7.7 Rapport signal sur erreur en dB pour (a) l'interpolation basse fréquence (b) la méthode proposée avec dictionnaire complet (c) avec ondes propagatives uniquement. 93
7.8 Comparaison de l'interpolation d'une réponse impulsionnelle et de la réponse originale sur la plaque carrée. 93
7.9 Plaque de forme quelconque. 94
7.10 Rapport signal sur erreur des interpolations (a) basse fréquence, méthode proposée avec ondes évanescentes (b), sans ondes évanescentes (c). 94
7.11 Résultat de l'interpolation du mode de fréquence 20 452 Hz sur le disque tronqué. (a) mesures complètes, interpolations basses fréquences avec grille régulière de 256 échantillons (b), idem avec 64 échantillons (c), méthode proposée avec 64 échantillons aléatoirement placés (d), la grille régulière de 256 échantillons (e), idem avec 64 échantillons (f). 96
7.12 Support de la décomposition d'un mode dans le plan de Fourier (en bleu), ainsi que ces différents alias (en traits fins). La zone accessible par les méthodes standards est indiquée en rouge. 96
7.13 Mode et interpolation sur une coupe de la plaque. 97
7.14 Qualité de la reconstruction (mesurée par la corrélation) du mode en fonction de sa fréquence et du nombre d'échantillons utilisés. La limite du theorème d'échantillonnage est indiquée en trait gras. 98
7.15 Rapport signal sur erreur de l'approximation des réponses impulsionnelles pour l'interpolation basse fréquence (a), la méthode proposée avec 64 échantillons aléatoirement placés (b). 98
7.16 Réponse impulsionnelle mesurée sur le disque tronqué (trait plein), et interpolation donnée par l'algorithme proposé (points). 99
7.17 Relations de dispersions estimées expérimentalement à partir des mesures sur (a) la grille de 64 échantillons réguliers, (b) les 64 échantillons aléatoirement placés. La fréquence à partir de laquelle le théorème d'échantillonnage n'est plus applicable est indiquée. 99

8.1 Corrélations du dictionnaire réverbéré avec les mesures pour deux sources différentes, à une fréquence éloignée d'une fréquence propre . 106
8.2 Corrélations du dictionnaire réverbéré avec les mesures pour deux source différentes, à une fréquence proche d'une fréquence propre . . . 106
8.3 Résultat de la localisation de trois sources par OMP en utilisant 6 canaux et 10 mesures, et corrélation du dictionnaire avec les mesures (premier pas d'OMP) 107
8.4 (a) Champ simulé sur la membrane (b) points de mesures 110
8.5 (a) Champ homogène estimé (b) Champ source estimé 110
8.6 (a) Corrélation avec le champ total (b) Corrélations au premier pas de l'algorithme itératif (c) Corrélations au deuxième pas (d) Sources estimées 111
8.7 (a) Résultat de Basis Pursuit sans prise en compte du champ réverbéré (b) Avec prise en compte 112
8.8 (a) Dispositif expérimental (b) Champ mesuré à 30 631 Hz 112
8.9 (a) Grille d'échantillonnage (b) Champ mesuré 113

8.10 (a) Corrélations avec le champ complet (b) Corrélations avec le champ source après soustraction du champ homogène 113
8.11 (a) (a) Résultat de Basis Pursuit sans prise en compte du champ réverbéré (b) Avec prise en compte 114
8.12 Localisation et identification de trois sources directives, avec OMP et Group OMP. Sont tracés les coefficients des monopoles (m), des dipoles suivant l'axe parallèle à l'antenne (d), et orthogonale à l'antenne (d'). 115

Bibliographie

[AA09] Carlos J. S. Alves et Pedro R. S. Antunes : The method of fundamental solutions applied to the calculation of eigensolutions for 2D plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(2):177–194, 2009.

[Ant12] Jérôme Antoni : A bayesian approach to sound source reconstruction : Optimal basis, regularization, and focusing. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(4):2873–2890, 2012.

[AS72] Abramowitz et Stegun, éditeurs. *Handbook of mathematical functions*. Dover, 1972. http ://people.math.sfu.ca/˜cbm/aands/.

[ATG10] M. Aucejo, N. Totaro et J.-L. Guyader : Identification of source velocities on 3D structures in non-anechoic environments : Theoretical background and experimental validation of the inverse patch transfer functions method. *Journal of Sound and Vibration*, 329(18):3691 – 3708, 2010.

[Bac10] Francis Bach : Structured sparsity-inducing norms through submodular functions. *In In Advances in neural information processing systems*, 2010.

[Bar00] Alex H. Barnett : *Dissipation in Deforming Chaotic Billiards*. Thèse de doctorat, Harvard University, 2000.

[BB08] A. H. Barnett et T. Betcke : Stability and convergence of the method of fundamental solutions for Helmholtz problems on analytic domains. *J. Comput. Phys.*, 227(14):7003–7026, juillet 2008.

[Ber61] Stefan Bergman : *Integral operator in the theory of linear partial differential equations*. Springer-Verlag, 1961.

[BLL10] Mingsian R. Bai, Jia-Hong Lin et Kwan-Liang Liu : Optimized microphone deployment for near-field acoustic holography : To be, or not to be random, that is the question. *J. Sound Vib.*, 329(14):2809 – 2824, 2010.

[BT05] T. Betcke et L.N. Trefethen : Reviving the method of particular solutions. *SIAM review*, pages 469–491, 2005.

[Can08] Emmanuel J. Candès : The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes Rendus Mathematique*, 346(9–10):589 – 592, 2008.

[CCN+09] Antonin CHAMBOLLE, Vicent CASELLES, Matteo NOVAGA, Daniel CREMERS et Thomas POCK : An introduction to Total Variation for Image Analysis. http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00437581/PDF/preprint.pdf, 2009.

[CD98] Olivier CESSENAT et Bruno DESPRES : Application of an ultra weak variational formulation of elliptic PDEs to the two-dimensional Helmholtz problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35:255–299, February 1998.

[CD10] G. CHARDON et L. DAUDET : Optimal subsampling of multichannel damped sinusoids. *In Proceedings of the Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM)*. IEEE, 2010. Jerusalem, Israel.

[CD12a] G. CHARDON et L. DAUDET : Narrowband source localization in an unknown reverberant environment using wavefield sparse decomposition. *In Proceedings of 37th International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*. IEEE, 2012. Kyoto, Japan.

[CD12b] G. CHARDON et L. DAUDET : Source localisation in an unknown reverberant environment using compressive sampling in the frequency domain. *In Proceedings of Acoustics 2012*. IEEE, 2012. Nantes, France.

[CDF92] A. COHEN, Ingrid DAUBECHIES et J.-C. FEAUVEAU : Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 45(5):485–560, 1992.

[CDL11] A. COHEN, M. A. DAVENPORT et D. LEVIATAN : On the stability and accuracy of least squares approximations,. Rapport technique, arXiv :1111.4422v1, 2011.

[CDS98] Scott Shaobing CHEN, David L. DONOHO et Michael A. SAUNDERS : Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20:33–61, 1998.

[CH06] Jie Chen Jie CHEN et Xiaoming Huo Xiaoming HUO : Theoretical results on sparse representations of multiple-measurement vectors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(12):4634–4643, 2006.

[CK01] David COLTON et Rainer KRESS : On the denseness of Herglotz wave functions and electromagnetic herglotz pairs in Sobolev spaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 24(16):1289–1303, 2001.

[CLD11] G. CHARDON, A. LEBLANC et L. DAUDET : Plate impulse response spatial interpolation with sub-nyquist sampling. *Journal of Sound and Vibration*, 330(23):5678 – 5689, 2011.

[Con78] John B. CONWAY : *Functions of one complex variable*. Springer-Verlag, 1978.

[CPO+] G. CHARDON, A. PEILLOT, F. OLLIVIER, N. BERTIN, R. GRIBONVAL et L. DAUDET : Nearfield acoustic holography using sparse regularization and compressive sampling principles. to appear in the Journal of the Acoustical Society of America.

[CPO00] E.D. Di CLAUDIO, R. PARISI et G. ORLANDI : Multi-source localization in reverberant environments by ROOT-MUSIC and clustering. *In In*

proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2000.

[CRT05] E. J. CANDÈS, J. ROMBERG et T. TAO : Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Comm. Pure Appl. Math.*, 59:1207–1223, 2005.

[CW08] Emmanuel J. CANDÈS et Michael B. WAKIN : An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2):21–30, March 2008.

[DDT+08] Marco F. DUARTE, Mark A. DAVENPORT, Dharmpal TAKHAR, Jason N. LASKA, Ting SUN, Kevin F. KELLY et Richard G. BARANIUK : Single pixel imaging via compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2):83–91, 2008.

[Don06] D.L. DONOHO : Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(4):1289–1306, 2006.

[DV12] I. DOKMANIC et M ; VETTERLI : Room helps : acoustics localisation with finite elements. *In Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Kyoto, Japan*, 2012.

[EMR07] M. ELAD, P. MILANFAR et R. RUBINSTEIN : Analysis versus synthesis in signal priors. *Inverse Problems*, 23(3):947–968, 2007.

[FHM67] L. FOX, P. HENRICI et C. MOLER : Approximations and bounds for eigenvalues of elliptic operators. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 4(1):89–102, 1967.

[FK98] G. FAIRWEATHER et A. KARAGEORGHIS : The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Adv. Comp. Math.*, 9, 1998.

[FL09] Simon FOUCART et Ming-Jun LAI : Sparsest solutions of underdetermined linear systems via lq-minimization for 0 < q <= 1. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 26(3):395 – 407, 2009.

[GB08] M. GRANT et S. BOYD : Graph implementations for nonsmooth convex programs. *In* V. BLONDEL, S. BOYD et H. KIMURA, éditeurs : *Recent Advances in Learning and Control*, Lecture Notes Control Inf. Sc., pages 95–110. Springer-Verlag Ltd, Berlin Heidelberg, 2008.

[GB11] M. GRANT et S. BOYD : CVX : Matlab software for disciplined convex programming, version. `http://cvxr.com/cvx`, last visited 24/02/2011, 2011.

[GBL+12] A. GARCIA, Y. BRAIKIA, C. LANGRENNE, E. BAVU et M. MELON : Source identification in small spaces using field separation method : application to a car trunk. *In Proceedings of Acoustics 2012, Nantes, France*, 2012.

[GL12] A. GARCIA et C. LANGRENNE : Data completion method for the characterization of sound source in confined domain. *In Proceedings of Acoustics 2012, Nantes, France*, 2012.

[GRSV08] Rémi GRIBONVAL, Holger RAUHUT, Karin SCHNASS et Pierre VANDERGHEYNST : Atoms of all channels, unite ! average case analysis of multi-channel sparse recovery using greedy algorithms. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 14(5-6):655–687, 2008.

[Hen57] Peter HENRICI : A survey of I. N. Vekua's theory of elliptic partial differential equations with analytic coefficients. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 8:169–203, 1957. 10.1007/BF01600500.

[HKK99] Y. HANEDA, Y. KANEDA et N. KITAWAKI : Common-acoustical-pole and residue model and its application to spatial interpolation and extrapolation of a room transfer function. *IEEE Trans. Speech Audio Processing*, 7:709–717, 1999.

[HMP11] R. HIPTMAIR, A. MOIOLA et I. PERUGIA : Error analysis of Trefftz-discontinuous Galerkin methods for the time-harmonic Maxwell equations. Rapport technique, SAM Report 2011-09, ETH Zürich, 2011.

[HS90] Y HUA et T K SARKAR : Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 38(5):814–824, 1990.

[IQCF05] Ros Kiri ING, Nicolas QUIEFFIN, Stefan CATHELINE et Mathias FINK : In solid localization of finger impacts using acoustic time-reversal process. *Applied Physics Letters*, 87(20):204104, 2005.

[JF96] Ea-Ee JAN et James FLANAGAN : Sound source localization in reverberant environments using an outlier elimination algorithm. *In Proceedings of the International Conference on Spoken Language Processing*, pages 1321–1324, 1996.

[KG06] Sacha KRSTULOVIC et Rémi GRIBONVAL : MPTK : Matching Pursuit made tractable. *In Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. (ICASSP'06)*, volume 3, pages III–496 – III–499, Toulouse, France, mai 2006.

[KL01] S. W. KANG et J. M. LEE : Free vibration analysis of arbitrarily shaped plates with clamped edges using wave-type functions. *Journal of Sound and Vibration*, 242(1):9 – 26, 2001.

[Lan67] H. J. LANDAU : Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions. *Acta Math.*, 117:37–52, 1967.

[LDSP08] M. LUSTIG, D. L. DONOHO, J. M. SANTOS et J. M. PAULY : Compressed Sensing MRI. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 25(2):72–82, mars 2008.

[Lei69] Arthur LEISSA : *Vibration of Plates*. NASA, Washington, 1969.

[LLI11] Alexandre LEBLANC, Antoine LAVIE et Ros Kiri ING : The method of fundamental solutions for the impulse responses reconstruction in arbitrarily shaped plates. *Acta Acustica united with Acustica*, 97(6):919–925, 2011.

[Mal08] Stephane MALLAT : *A Wavelet Tour of Signal Processing - The Sparse Way*. Academic Press, San Diego, 3 édition, December 2008.

[MCO+12] Sylvie Le MOYNE, Sandie Le CONTE, François OLLIVIER, Joël FRELAT, Jean-Claude BATTAULT et Stéphane VAIEDELICH : Restoration of a 17th-century harpsichord to playable condition : A numerical and experimental study. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(1):888–896, 2012.

[MCW05] D. MALIOUTOV, M. CETIN et A. S. WILLSKY : A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 53(8), 2005.

[MEE11] M. MISHALI, Y. C. ELDAR et A. ELRON : Xampling : Signal acquisition and processing in union of subspaces. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 59(10):4719–4734, 2011.

[Mel99] J.M. MELENK : Operator adapted spectral element methods I : harmonic and generalized harmonic polynomials. *Numerische Mathematik*, 84:35–69, 1999. 10.1007/s002110050463.

[MHP09] A. MOIOLA, R. HIPTMAIR et I. PERUGIA : Approximation by plane waves. Research Report 2009-27, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, August 2009.

[MHP11a] A. MOIOLA, R. HIPTMAIR et I. PERUGIA : Plane wave approximation of homogeneous Helmholtz solutions. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 62:809–837, 2011. 10.1007/s00033-011-0147-y.

[MHP11b] A. MOIOLA, R. HIPTMAIR et I. PERUGIA : Vekua theory for the Helmholtz operator. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 62:779–807, 2011. 10.1007/s00033-011-0142-3.

[MM08] B. MATEI et Y. MEYER : Quasicrystals are sets of stable sampling. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 346(23-24):1235–1238, 2008.

[Moi11] Andrea MOIOLA : Plane wave approximation in linear elasticity. Rapport technique, to appear in Applicable Analysis, 2011.

[MTN09] M. Kuhne M, R. TOGNERI et S. NORDHOLM : Robust source localization in reverberant environments based on weighted fuzzy clustering. *IEEE Signal Processing Letters*, 16(2):85, 2009.

[MWL85] J. D. MAYNARD, E. G. WILLIAMS et Y. LEE : Nearfield acoustic holography : I. theory of generalized holography and the development of nah. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 78(4):1395–1413, 1985.

[NDEG12] Sangnam NAM, Mike E. DAVIES, Michael ELAD et Rémi GRIBONVAL : The Cosparse Analysis Model and Algorithms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2012. Preprint available on arXiv since 24 Jun 2011.

[NG12] S. NAM et R. GRIBONVAL : Physics-driven structured cosparse modeling for source localization. *In Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Kyoto, Japan*, 2012.

[NT09] D. NEEDELL et J.A. TROPP : Cosamp : Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 26(3):301 – 321, 2009.

[OU06] Alexander OLEVSKII et Alexander ULANOVSKII : Universal sampling of band-limited signals. *Comptes Rendus Mathematique*, 342(12):927 – 931, 2006.

[Pap77] A. PAPOULIS : Generalized sampling expansion. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 24(11):652–654, 1977.

[PD06] E. PERREY-DEBAIN : Plane wave decomposition in the unit disc : Convergence estimates and computational aspects. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 193(1):140 – 156, 2006.

[PHHM] O. PIRONNEAU, F. HECHT, A. Le HYARIC et J. MORICE : FreeFem++. http ://www.freefem.org/ff++.

[POCD12] A. PEILLOT, F. OLLIVIER, G. CHARDON et L. DAUDET : Acoustic sources joint localization and characterization using compressive sampling. *In Proceedings of Acoustics 2012, Nantes, France*, 2012.

[PRK93] Y. C. PATI, R. REZAIIFAR et P. S. KRISHNAPRASAD : Orthogonal matching pursuit : Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. *In Proceedings of the 27 th Annual Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, pages 40–44, 1993.

[ROF92] Leonid I. RUDIN, Stanley OSHER et Emad FATEMI : Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 60(1–4):259 – 268, 1992.

[RPK86] R ROY, A PAULRAJ et T KAILATH : ESPRIT–a subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 34(5):1340–1342, 1986.

[Run01] Carl RUNGE : Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten. *Zeitung der Math. und Phys.*, 46:224–243, 1901.

[RW04] L. R. F. ROSE et C. H. WANG : Mindlin plate theory for damage detection : Source solutions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 116(1):154–171, 2004.

[Sch86] R. SCHMIDT : Multiple emitter location and signal parameter estimation. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 34(3):276 – 280, 1986.

[sto48] STONE : The generalized weierstrass approximation theorem. *Mathematics Magazine*, 21(4):167–184, 1948.

[TA77] A.N. TIKHONOV et V.Y. ARSENIN : *Solutions of Ill-Posed Problems*. Winston, 1977.

[Tib94] Robert TIBSHIRANI : Regression shrinkage and selection via the Lasso. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 58:267–288, 1994.

[TP05] Jean-Hugh THOMAS et Jean-Claude PASCAL : Wavelet preprocessing for lessening truncation effects in nearfield acoustical holography. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(2):851–860, 2005.

[Tro04] Joel A. TROPP : Greed is good : Algorithmic results for sparse approximation. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 50:2231–2242, 2004.

[vdBF07] E. van den BERG et M. P. FRIEDLANDER : SPGL1 : A solver for large-scale sparse reconstruction, June 2007. http ://www.cs.ubc.ca/labs/scl/spgl1.

[vdBF08] E. van den BERG et M. P. FRIEDLANDER : Probing the Pareto frontier for basis pursuit solutions. *SIAM Journ. Sc. Comp.*, 31(2), 2008.

[Vek67] Illia N. VEKUA : *New methods for solving elliptic equations*. North-Holland, 1967.

[VVD07] C. VANMAELE, D. VANDEPITTE et W. DESMET : An efficient wave based prediction technique for plate bending vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(33–34):3178 – 3189, 2007.

[Wei85] K. WEIERSTRASS : Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 2: 633–639,789–805, 1885.

[Wil01] Earl G. WILLIAMS : Regularization methods for near-field acoustical holography. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(4): 1976–1988, 2001.

[YCEB10] P. Kuppinger Y. C. ELDAR et H. BOLCSKEI : Block-sparse signals : Uncertainty relations and efficient recovery. *IEEE Trans. Signal Processing*, 58(6):2636–2646, 2010.

[Yu96] Yi-Yuan YU : *Vibrations of Elastic Plates*. Springer, 1996.