HAL
open science

Focalisation et contrôle des ondes en milieux complexes et localement résonants

Fabrice Lemoult

To cite this version:

Fabrice Lemoult. Focalisation et contrôle des ondes en milieux complexes et localement résonants. Acoustique [physics.class-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2011. Français. NNT : . pastel-00733611

HAL Id: pastel-00733611

https://pastel.hal.science/pastel-00733611

Submitted on 19 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat de l'Université Paris 7 - Denis Diderot

UFR De Physique, spécialité Acoustique Physique

Présentée par :

Fabrice Lemoult

sous la direction de **Mathias Fink**

et encadrée par **Geoffroy Lerosey**

à l'Institut Langevin - Ondes et Image

Focalisation et contrôle des ondes en milieux complexes et localement résonants

---

Soutenance le 9 Décembre 2011 à 14h

Devant le jury composé de :

Mathias Fink	Directeur de thèse
Philippe Lalanne	Rapporteur
Geoffroy Lerosey	Encadrant
Roger Maynard	
John H. Page	Rapporteur
John B. Pendry	
Anne Sentenac	
Sergey Skipetrov	

Remerciements

Avant toute chose, je tiens à remercier très sincèrement Geoffroy Lerosey pour d'abord m'avoir convaincu de faire une thèse à ses côtés, puis pour son encadrement durant ces trois années de thèse. Geoffroy a une culture scientifique débordante qui fait de lui un chercheur remarquable, et cette qualité est très enrichissante pour les gens qui travaillent à ses côtés. Outre sa grande expertise scientifique, Geoffroy fait preuve de qualités humaines exceptionnelles (que je ne me risquerais pas à énumérer) et partager mon quotidien avec lui a été un réel plaisir. Il m'a de plus appris à appréhender l'univers de la recherche scientifique en tous points en m'encourageant à lire la production scientifique de manière quotidienne, en m'apprenant à rédiger des articles scientifiques, en m'enseignant l'art de faire des expériences de coin de table qui ont toujours un impact beaucoup plus retentissant, en me lançant dans l'univers non moins passionnant de la simulation numérique, et pour plein d'autres raisons encore. Bref, plus qu'un simple encadrant, Geoffroy est pour moi un exemple à suivre. Sa patte restera à jamais gravée en moi et j'espère un jour atteindre son niveau d'excellence.

Je tiens également à remercier chaleureusement Mathias Fink pour m'avoir permis de réaliser cette thèse au sein de l'Institut Langevin. Mathias a certes un agenda très rempli qui ne lui permet pas de suivre quotidiennement l'avancée des recherches mais il a suivi l'avancée de ces travaux avec un grand intérêt. Mathias fait preuve d'un enthousiasme à toute épreuve et d'une expertise exceptionnelle qui font de lui un parfait directeur. Grâce à lui le laboratoire est un véritable pôle de compétitivité international et c'est un énorme plaisir que d'avoir pu participer à la recherche à ses côtés.

Je tiens aussi à exprimer ma profonde gratitude à mes deux rapporteurs de thèse John H. Page et Philippe Lalanne pour avoir pris le temps de lire ce manuscrit, et ceci dans des délais de lecture relativement courts. Je tiens à accorder une mention spéciale à J. Page qui a lu ce manuscrit dans une langue qui n'est pas la sienne et qui s'est ensuite déplacé depuis le Canada pour venir assister à la soutenance. Je remercie également Roger Maynard, John B. Pendry, Anne Sentenac et Sergey Skipetrov de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury de thèse, et je suis extrêmement fier d'avoir réussi à réunir des scientifiques de leur trempe pour la soutenance.

J'adresse également des remerciements à de nombreux membres de l'Institut Langevin avec qui j'ai pu échanger durant cette thèse. Je remercie tout particulièrement Nadège Kaina qui a effectué un stage au laboratoire au cours duquel elle a fourni un travail expérimental (et numérique d'ailleurs) très minutieux, qui fait l'objet du dernier chapitre de ce manuscrit. J'adresse également de très sincères remerciements à Patricia Daenens

qui a eu la solution à de nombreux problèmes expérimentaux que j'ai pu rencontré au cours de ma thèse. Patricia est toujours de bonne humeur et répond aux sollicitations de tout le monde avec une joie communicative. Je remercie aussi Julien de Rosny avec qui les discussions ne sont jamais très longues mais toujours très fructifiantes. Je remercie tous les membres de la feue équipe d'électromagnétisme du laboratoire, à savoir Mathieu Davy, Abdel Ourir, Redha Abdeddaim et Camille Jouvaud pour le partage de matériel qui s'est toujours bien déroulé et pour les différentes discussions d'ordre expérimental ou théorique que l'on a pu avoir. Je remercie les enseignants du laboratoire que j'ai connu lors de mes années d'étude à l'ESPCI, Arnaud Tourin et Gabriel Montaldo, puis lors de mon Master d'acoustique, Christophe Barrière et Daniel Royer, qui ont contribué à ma passion pour les ondes et donc à mon entrée à l'Institut Langevin.

Je tiens aussi à remercier les « jeunes » du laboratoire à commencer par Sébastien Popoff qui a partagé mon quotidien de thésard. Je remercie les membres de mon bureau pour la bonne ambiance qui a régné pendant trois ans : Émilie Macé, Franck Philippe, Benoît Larrat et Bruno Osmanski. Je remercie également les membres du bureau d'en face, Alice Bretagne, Nicolas Etaix et Bastien Arnal, ou encore des membres d'autres bureaux, Aniss Bendjoudi, Alexandre Leblanc, Alexandre Aubry pour les différents échanges que l'on a pu avoir. Je remercie aussi mes amis à l'extérieur du laboratoire, la bande de Montesson/Houilles, mes amis de la 123ème (et autres promotions d'ailleurs), la bande des joyeux lurons du bar de l'ESPCI, et plein d'autres encore que je ne vais pas me risquer à citer un par un.

Je remercie mes parents pour m'avoir encouragé à faire des études qui se terminent aujourd'hui avec l'obtention d'un doctorat et pour m'avoir soutenu (financièrement et moralement) tout au long de cette scolarité. J'ai également des pensées pour mes frères et sœurs, Mélanie, Grégoire et Annabelle, et pour la belle famille, Pierre et Flora, avec qui j'ai parfois (voire souvent) été désagréable mais qui seront toujours présents à mes côtés. Je pense aussi à tous les autres membres de la famille que je ne peux citer intégralement. J'ai également une pensée pour Claudine et Francis qui ont toujours cru en mes capacités sans forcément y comprendre grand chose.

Enfin, je dédie cette thèse à ma chérie, Stéphanie Périé, à la fois pour son soutien lors des trois années de thèse mais aussi pour le bonheur que j'ai de partager ma vie avec elle depuis bientôt neuf ans.

Table des matières

Introduction **1**

I Manipulation d'ondes en milieux complexes **5**
I.1 Ondes et propagation 6
I.1.1 Équation d'ondes et solutions 6
I.1.2 Solutions en présence de sources 9
I.1.3 Solutions en milieux complexes 12
I.2 Exploitation d'un milieu complexe 15
I.2.1 Expérience de focalisation par retournement temporel 15
I.2.2 Retournement temporel mono-voie et degrés de liberté temporels . . 18
I.2.3 Degrés de liberté spatiaux et focalisation à travers un milieu multi-diffusant 22
I.2.4 Filtre adapté ou filtre inverse ? 25
I.3 Conversion des degrés de liberté 30
I.3.1 Algorithme d'un filtre inverse spatial 31
I.3.2 Vérification expérimentale 34
I.3.3 Limites de l'inversion et degrés de liberté 40
I.4 Conclusion 46

II Milieu de fils et super-résolution **49**
II.1 Limite de diffraction, super-résolution et résultats préliminaires 50
II.1.1 Optique de Fourier 50
II.1.2 Imagerie et super-résolution 54
II.1.3 Expérience fondatrice 56
II.1.4 Interprétation phénoménologique 59
II.2 Le milieu de fils conducteurs 61
II.2.1 Un milieu infini 62
II.2.2 Modes guidés dans un milieu de dimension finie le long des fils . . . 68
II.2.3 Modes propres et rayonnement d'un milieu de dimension finie . . . 77
II.2.4 Effet Purcell 83
II.3 Exploitations de ces propriétés 86
II.3.1 Degrés de liberté 86
II.3.2 Focalisation par retournement temporel 89
II.3.3 Imagerie 95
II.3.4 Influence des pertes 97

II.4 Conclusion 102

III Propagation des ondes dans des milieux périodiques localement résonants 105

III.1 Milieu contenant des inclusions résonantes : état de l'art 106
III.1.1 Milieux diélectriques 106
III.1.2 Polaritons 110
III.1.3 Métamatériaux 113
III.1.4 Hybridation 116
III.1.5 Conclusions, contradictions et questions résultantes des modèles exposés 118
III.2 Approche microscopique : polaritons dans les milieux résonants 119
III.2.1 Mise en place du problème 119
III.2.2 Couplage de type champ proche : modèle de liaison forte 122
III.2.3 Champ lointain : interférences de type Fano 126
III.2.4 Formulation analytique : relation de dispersion 129
III.2.5 Bande interdite d'hybridation 131
III.3 Vérification de l'approche 134
III.3.1 Chaîne linéaire de « split ring resonators » 134
III.3.2 Résonateurs de Mie 137
III.3.3 « Spoof plasmons polaritons » 140
III.3.4 Vers des échelles macroscopiques 143
III.3.5 Influence des pertes 146
III.4 Conclusion 150

IV « Métalentille résonante » : focalisation et imagerie super-résolues depuis le champ lointain 153

IV.1 Utilisation des modes sub-longueur d'onde en acoustique : focalisation sub-longueur d'onde depuis le champ lointain 154
IV.1.1 Première expérience et obtention du résonateur adéquat 155
IV.1.2 Réseau périodique de canettes 161
IV.1.3 Focalisation sub-longueur d'onde 165
IV.1.4 Exaltation du déplacement acoustique 169
IV.2 Transposition à l'optique : une approche polychromatique pour franchir la limite de la diffraction dans le visible 174
IV.2.1 Résonances plasmons 174
IV.2.2 Modes propagatifs dans un milieu de nano-cylindres plasmoniques . 178
IV.2.3 Focalisation sub-longueur d'onde depuis le champ lointain 182
IV.2.4 Échographie sub-longueur d'onde de champ lointain 187
IV.3 Conclusion 190

V Exploitation de la bande interdite d'hybridation 193

V.1 Cristaux photoniques et phononiques 194
V.1.1 Structure multicouche : miroir de Bragg 194
V.1.2 Généralisation à 2 et 3 dimensions 198

V.1.3 Exploitation des discontinuités 201
V.2 Bande interdite d'hybridation : propriétés et observations 205
V.2.1 Observations expérimentales des bandes interdites 205
V.2.2 Bandes interdites dans les cristaux désordonnés 209
V.3 Exploitation de la bande interdite 213
V.3.1 Comment générer un défaut dans un cristal sub-longueur d'onde ? . 213
V.3.2 Démonstration expérimentale d'une cavité sub-longueur d'onde . . . 215
V.3.3 Ultra faibles volumes modaux et facteurs de qualité très élevés . . . 218
V.3.4 Limites de l'approche et généralisation 224
V.3.5 Applications : antennes, lasers, guides d'ondes et filtres 225
V.4 Conclusion 231

Conclusion **233**

Introduction

Parmi les sens dont l'être humain est doté, au moins deux sont associés de manière évidente à des phénomènes ondulatoires : la vue et l'ouïe. La lumière et le son sont de natures très différentes l'un de l'autre, mais ils permettent à l'homme de percevoir des informations sur son environnement, de se repérer dans l'espace ou encore de communiquer avec ses pairs. Les ondes sonores ou visuelles présentent la propriété de pouvoir transporter une information dans l'espace et dans le temps, et il n'est pas surprenant que le règne animal ait appris à les utiliser.

La relation entre onde et information dépend très fortement des récepteurs mis en jeu. Par exemple, l'homme possède deux yeux qui lui permettent d'obtenir une information tri-dimensionnelle de son environnement. Nos yeux nous autorisent aussi à percevoir toute une palette de couleurs. Mais ces récepteurs ont leurs limites et nous sommes par exemple incapables d'entendre les sons émis par les chauve-souris. L'ouïe et la vue ne sont que la partie immergée de l'iceberg puisqu'ils ne correspondent qu'à une infime proportion des phénomènes ondulatoires qui nous entourent. C'est pourquoi les physiciens ont exploré ces derniers : pour augmenter leur perception de l'univers environnant.

Au cours des siècles, l'homme a mis au point des dispositifs pour émettre et recevoir des ondes de différentes natures afin d'explorer le monde qui l'entoure. Par exemple, le développement des lentilles optiques a permis de comprendre les mouvements des planètes, et plus tard d'observer des cellules à l'aide de microscopes. Les transducteurs piézoélectriques développés par Langevin ont débouché sur la mise au point des SONARs, qui permettent d'explorer les fonds marins ou d'y communiquer, et plus récemment sur la possibilité d'observer l'intérieur du corps humain grâce à l'échographie. La découverte par Hertz et Marconi des antennes qui émettent et reçoivent des ondes radio-fréquence a permis l'avènement des communications sans fil. Le facteur commun à toutes ces expériences est la nécessité de contrôler les ondes, émises ou reçues, pour les transformer en une information.

Tous ces « messages » ondulatoires sont sujet aux limites inhérentes à la propagation dans le milieu considéré. Ainsi, nous ne voyons pas à travers les murs puisque les ondes

optiques ne s'y propagent pas. Le brouillard trouble la vision au-delà de quelques mètres puisque les ondes y sont diffusées. Nous ne sommes pas capables d'entendre une personne qui parle à un kilomètre de nous puisque l'onde sonore diverge et est atténuée lors de sa propagation.
Les ondes peuvent aussi nous induire en erreur : l'effet mirage fait croire en la présence d'une étendue d'eau au milieu du désert. L'écho d'un cri en montagne peut faire croire en la présence de multiples personnes. Bien que ces effets soient très bien compris aujourd'hui, ils montrent à quel point le message porté par une onde dépend des événements vécus lors de sa propagation.
Dans ce contexte, l'Institut Langevin s'est spécialisé, sous l'impulsion de Mathias Fink, dans le contrôle spatio-temporel des ondes pour, par exemple, optimiser les performances d'un système d'imagerie ou de télécommunications en tirant profit des événements de réflexions que subit une onde lors de sa propagation. Nous verrons donc au cours du premier chapitre de cette thèse quels sont les leviers dont dispose un expérimentateur pour contrôler de manière optimale les ondes dans des milieux complexes.
Cependant, il existe une barrière fondamentale qui limite la plupart des applications liées aux phénomènes ondulatoires : la limite de la diffraction. Les ondes ont une dimension caractéristique, la longueur d'onde, et elles ne peuvent pas transporter une information sur un détail spatial plus petit que cette longueur. En particulier, nous ne pouvons pas observer des atomes à l'aide d'un microscope confocal, et ce, quel que soit son grossissement.
Notre étude va donc conduire à étudier les solutions qui s'offrent à nous pour franchir cette barrière. Il est évident que l'on ne peut pas outrepasser cette limite en espace libre. On peut en revanche imaginer des milieux de propagation très particuliers qui permettent la conversion d'informations sub-longueur d'onde en une information percevable en champ lointain. Nous verrons qu'avec une connaissance précise du milieu qui permet cette conversion, nous serons capables de reconstruire une information sub-longueur d'onde uniquement à l'aide d'ondes propagatives. Au cours du deuxième chapitre de cette thèse, nous étudierons un exemple de milieu constitué de fils métalliques identiques, qui permet une telle conversion dans le domaine des micro-ondes.
Ce milieu très particulier utilise un phénomène inhérent à la physique des ondes : la résonance. Cette propriété n'est donc pas limitée aux ondes radio-fréquence mais généralisable à tous les types d'ondes. Cela nous amènera au cours du troisième chapitre à généraliser notre approche à tous les différents types d'ondes, à toutes les gammes de fréquence et à en proposer un modèle théorique. Nous verrons que, dans bien des cas, la relation de dispersion d'un milieu périodique de résonateurs peut être comprise et calculée uniquement

en considérant un couplage de type propagatif entre éléments.
Au cours du quatrième chapitre de ce manuscrit, nous montrerons comment il est possible d'exploiter les propriétés d'un tel milieu de propagation, structuré à l'échelle sub-longueur d'onde, à des fins de focalisation ou d'imagerie en dessous de la limite de la diffraction. Nous montrerons un exemple de milieu acoustique dont le résonateur élémentaire est une canette de soda. Puis nous transposerons le concept au domaine de l'optique où l'occlusion résonante consiste en une nano-particule plasmonique. Nous démontrerons le potentiel de notre approche en terme de nano-lithographie et proposerons une méthode d'imagerie échographique de champ lointain non limitée par la diffraction.
Enfin, au cours du cinquième et dernier chapitre de ce manuscrit, nous nous intéresserons à une propriété particulière de ce type de milieu structuré sur une échelle sub-longueur d'onde. Outre la conversion d'une information sub-longueur d'onde en une onde propagative, ces milieux peuvent en effet inhiber la propagation des ondes. Nous verrons comment tirer partie de ces propriétés pour créer des milieux qui présentent à la fois les avantages des cristaux photoniques et phononiques et ceux des métamatériaux, à savoir des bandes de propagation interdites à des échelles spatiales très petites devant la longueur d'onde.

Chapitre I

Manipulation d'ondes en milieux complexes

Ce premier chapitre est dédié au contrôle spatio-temporel des ondes dans les milieux hétérogènes. La notion d'onde est très large et recouvre un grand nombre de domaines, en particulier ceux de l'acoustique et de l'électromagnétisme. Nous commençons par rappeler les solutions en espace libre de l'équation qui régit ces ondes, appelée équation d'onde, et qui est commune à ces deux domaines. Puis nous introduisons des termes sources et exprimons les solutions de l'équation d'onde en termes de fonctions de Green.
Nous montrons ensuite qu'en utilisant plusieurs sources d'émission on peut jouer sur des degrés de liberté spatiaux pour, entre autre, choisir les zones de l'espace où focaliser des ondes. De la même manière, en utilisant des signaux polychromatiques l'utilisateur possède des degrés de liberté fréquentiels (ou temporels) pour transmettre une information d'un point à autre point de l'espace.
Ceci nous conduit à l'idée qu'il existe un paramètre important à prendre en compte dans la propagation des ondes : le milieu de propagation. En effet, lorsque celui-ci présente des obstacles (des hétérogénéités), les ondes subissent des évènements de réflexion ou de diffraction qui peuvent être interprétées comme l'apparition de sources virtuelles. Lorsque le nombre de ces sources virtuelles devient élevé, on parle de milieu de propagation complexe. Nous ne faisons pas une étude exhaustive de la propagation dans ce type de milieu, mais nous nous intéressons aux degrés de liberté qu'ils offrent pour contrôler les ondes.
Nous montrons qu'il est possible de tirer partie de ces sources virtuelles en utilisant la technique qui est étudiée au laboratoire depuis presque 20 ans : la focalisation par retournement temporel. Cette technique, qui repose sur l'invariance par renversement du temps de l'équation d'onde, est une méthode robuste qui permet de focaliser des ondes

dans le temps et dans l'espace au travers d'un milieu complexe. Les résultats obtenus en terme de focalisation spatiale sont d'ailleurs meilleurs que ceux obtenus en espace libre. En étudiant les cas limites du retournement temporel, une unique source avec une large bande passante, et une multitude de sources monochromatiques, nous démontrons qu'il est possible de contrôler les sources virtuelles générées lors de la propagation, utilisant ainsi chacun des différents types de degrés de liberté. Cela nous conduit à nous intéresser plus en détail à la manipulation et à la conversion de ces degrés de liberté.
Grâce à un algorithme itératif basé sur la technique de focalisation par retournement temporel, nous montrons ensuite qu'il est possible de transformer une information spatiale en une information temporelle (et inversement). Les degrés de liberté deviennent alors des degrés de liberté spatio-temporels indissociables. En tirant au mieux parti de ces derniers, nous obtenons un filtre inverse spatial à un instant donné. Nous montrons alors que les performances obtenues en termes de focalisation sont bien meilleures que celles obtenues par une technique de focalisation par filtrage inverse spatio-temporel. En étudiant de manière analytique les critères de convergence de cet algorithme itératif, nous montrons que l'on a accès au nombre de degrés de liberté spatio-temporels offerts par un milieu de propagation. En particulier, la convergence est reliée aux paramètres statistiques décrivant le milieu de propagation. Nous pensons que cette approche qui prouve le lien étroit entre les deux types de degrés de liberté ouvre de nombreuses perspectives quant au contrôle spatio-temporel des ondes.

I.1 Ondes et propagation

I.1.1 Équation d'ondes et solutions

En acoustique (respectivement en électromagnétisme), la propagation des ondes est régie par l'équation d'onde (équation de D'Alembert). Pour un fluide au repos (respectivement dans le vide ou l'air), elle s'écrit en l'absence de sources :

$$\Delta\Psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{I.1}$$

Ψ représente la pression p, la vitesse $\mathbf{v}$ ou encore le potentiel acoustique ϕ (respectivement, le champ électrique $\mathbf{E}$ ou bien le champ magnétique $\mathbf{H}$). Lorsque la quantité considérée est vectorielle, il faut prendre une forme vectorielle de l'équation. c est homogène à une vitesse et est égale à $\sqrt{\frac{1}{\rho\chi}}$, où ρ représente la masse volumique du fluide considéré et χ sa compressibilité (respectivement c est la célérité de la lumière dans le vide, une constante

universelle). En acoustique comme en électromagnétisme, l'équation d'onde résulte du couplage entre deux grandeurs physiques : une variation locale de la pression entraîne un déplacement de particules qui à son tour induit une variation de pression, et ainsi de suite. Ce couplage entre deux grandeurs physiques est responsable de la propagation des ondes. Les solutions de l'équation d'ondes sont des fonctions qui dépendent à la fois de la position $\mathbf{r}$ et du temps t. Comme l'équation est linéaire, on peut séparer la dépendance spatiale de la dépendance temporelle et écrire les solutions sous forme de solutions harmoniques. Nous savons, grâce à l'analyse de Fourier [1], que toute solution temporelle s'écrit comme une combinaison linéaire de modes harmoniques. L'espace temporel et celui des fréquences sont réciproques et permettent de représenter un même phénomène physique. Nous pouvons ainsi représenter toute grandeur physique dépendant du temps (une fonction réelle) par sa transformée de Fourier (une fonction complexe) définie avec la convention suivante :

$$\tilde{\Psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t \tag{I.2}$$

Nous précisons au lecteur que, par abus de langage, nous noterons quasi-systématiquement la transformée de Fourier et la fonction dépendant du temps de la même manière (Ψ). Ici, nous soulignons qu'un signal temporel complexe est une superposition de plusieurs modes harmoniques. Nous verrons qu'utiliser de tels signaux peut s'avérer très utile dans certains milieux de propagation.

Dans l'espace des fréquences, l'équation de D'Alembert devient l'équation de Helmholtz :

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\Psi(\mathbf{r}, \omega) = 0 \tag{I.3}$$

Cette forme d'équation a le mérite de faire apparaître la propriété fondamentale des ondes. La solution Ψ de l'équation est égale à $-\frac{c^2}{\omega^2}\Delta\Psi$, ce qui signifie que le champ en un point de l'espace est directement relié au champ sur les points voisins. Ainsi, une variation du champ en un point de l'espace entraîne un changement sur les points voisins. Cette propriété de l'équation d'onde est fascinante : ce qui se produit à un instant donné et en un point particulier est mesurable à un autre instant et en une autre position.

Le développement fait jusqu'à présent est tout a fait classique et est présent dans tout livre traitant de la propagation des ondes [2,3]. Le résultat de ce qui suit se trouve lui aussi dans les livres mais est moins communément présenté de cette manière. Nous voulons souligner l'effet très symétrique que jouent le temps et l'espace dans l'équation de D'Alembert.

À l'instar de la transformée de Fourier sur la variable temporelle, nous pouvons travailler dans l'espace réciproque des vecteurs d'ondes $\mathbf{k}$ plutôt que dans l'espace des positions $\mathbf{r}$. À nouveau, d'un point de vue mathématique, nous pouvons représenter toute grandeur

physique dépendant de $\mathbf{r}$ par sa transformée de Fourier définie avec la convention suivante :

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{k}) = \iiint \Psi(\mathbf{r}) e^{j\mathbf{k}.\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{I.4}$$

Les notations entre les deux espaces de représentation seront une nouvelle fois souvent confondues. Par analogie avec la transformée de Fourier temporelle, une distribution spatiale quelconque est la superposition d'un grand nombre de vecteurs d'ondes. Pour générer une forme spatiale complexe, il faut avoir accès au plus grand nombre possible de vecteurs d'ondes.

Après cette deuxième transformation, l'équation de D'Alembert se réduit à l'équation :

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \Psi(\mathbf{k}, \omega) = 0 \tag{I.5}$$

L'équation de propagation en espace libre admet donc une solution non nulle dans l'unique cas où $|k| = \dfrac{\omega}{c}$. Cette relation qui relie le nombre d'onde k à la pulsation ω est caractéristique d'un milieu de propagation et est appelée relation de dispersion. Elle représente l'équation d'ondes dans l'espace des fréquences temporelles et spatiales. Cette relation de dispersion est d'un intérêt majeur puisque c'est elle qui relie les échelles de temps et d'espace caractéristiques d'une onde (ce qui permet entre autres de définir une longueur d'onde et une période). A partir de cette relation de dispersion, on extrait deux vitesses qui permettent d'obtenir le lien entre les deux échelles :

- la vitesse de phase $v_\Phi = \dfrac{\omega}{k}$ qui correspond au déplacement des fronts d'onde ;
- la vitesse de groupe $v_g = \dfrac{\partial \omega}{\partial k}$ qui correspond au déplacement de l'enveloppe d'un paquet d'ondes.

Ces deux vitesses sont égales à c dans le cas de la propagation en espace libre.

Enfin, grâce aux deux transformations mathématiques que nous avons effectuées, nous avons explicité une base de l'espace des solutions de l'équation d'onde. Ainsi, toute solution de l'équation d'onde en espace libre s'écrit comme une combinaison linéaire d'ondes planes monochromatiques qui s'écrivent :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{j(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{tel que} \quad |k| = \frac{\omega}{c} \tag{I.6}$$

Ce résultat est bien connu et très souvent, pour résoudre l'équation d'onde, on cherche une solution sous cette forme. Le fait d'être passé par les espaces réciproques permet d'avoir une représentation claire d'une onde plane. Autant nous sommes relativement familiers avec la transformée de Fourier lorsqu'il s'agit de la variable temporelle, autant la transformée de Fourier spatiale est plus difficile à appréhender. La première propriété fon-

damentale d'une onde plane est le fait qu'elle est d'extension spatiale infinie, comme l'est un signal monochromatique dans le temps. Dès que l'on introduit une discontinuité d'espace, la solution est nécessairement la superposition de plusieurs (voire d'un continuum) d'ondes planes.

I.1.2 Solutions en présence de sources

Les ondes planes sont les solutions de l'équation d'ondes en l'absence de sources, mais en pratique elles sont générées par celles-ci. Il faut donc introduire des termes sources dans l'équation. À nouveau, nous invoquons la propriété de linéarité de l'équation afin de travailler avec des sources ponctuelles, sachant que la solution à des sources plus complexes s'obtient par linéarité. On peut, par exemple, rechercher les solutions de l'équation d'ondes, appelées fonctions de Green (impulsionnelles), avec un terme source ponctuel et impulsionnel :

$$\Delta g_0(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g_0(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \tag{I.7}$$

où $\delta(x)$ correspond à la distribution de Dirac.
Souvent (et quasi-systématiquement en optique), les physiciens utilisent des fonctions de Green monochromatiques, mais il est possible de reconstruire toute solution dépendant du temps à partir de ces solutions. À nouveau, les solutions sont différentes selon que g_0 représente une grandeur scalaire (la pression ou le potentiel acoustique) ou bien une grandeur vectorielle (les champs électrique et magnétique) pour lesquelles il faut considérer la polarisation du Dirac source.
Dans le cas le plus simple des ondes scalaires, en effectuant les mêmes transformations mathématiques que précédemment, on montre que la fonction de Green dans l'espace des fréquences s'écrit :

$$g_0(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}' - i\omega t'}}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \tag{I.8}$$

Après transformation de Fourier inverse, on écrit aisément la fonction de Green impulsionnelle d'espace libre :

$$g_0(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = -\frac{\delta\left(\pm(t - t') \pm \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{I.9}$$

Notons tout d'abord qu'il n'y a pas unicité de la solution dans l'espace réel, ce qui traduit les propriétés de réciprocité spatiale et d'invariance par renversement du temps de

l'équation d'onde. Ainsi, g_0 peut être l'expression d'une onde divergente ou convergente, et causale ou anti-causale. D'autre part, la fonction de Green ne dépend que des différences $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ et $t-t'$: $g_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$. Cette propriété provient de l'invariance par translation dans l'espace et dans le temps du milieu de propagation considéré.

Dans cette partie, nous proposons de faire référence à quelques applications, telles que l'imagerie ou les télécommunications, afin de les interpréter en termes de fonctions de Green.

Considérons une première situation pour laquelle les sources sont monochromatiques. La fonction de Green monochromatique d'espace libre pour une source unique donne une solution où les ondes se propagent dans toutes les directions de l'espace. Si on veut focaliser des ondes, c'est-à-dire concentrer l'énergie en un point particulier, il faut prendre une superposition de sources. Il s'agit typiquement d'une application nécessitant des degrés de liberté spatiaux. Pour toute distribution de sources, la solution finale est la somme des contributions de chacune des sources et elle peut faire apparaître des régions d'espace de forte concentration énergétique.

A titre d'exemple, prenons des sources situées sur un disque de diamètre D, inclus dans le plan $z=0$ et centré sur l'origine. Ceci représente typiquement la géométrie d'une lentille en optique ou d'un transducteur ultrasonore. Avec cette disposition spatiale de sources, il reste un grand nombre de degrés de liberté : nous pouvons encore jouer sur les phases et amplitudes relatives d'émissions de chacun des points sources. En appliquant la loi d'amplitudes (complexes) $A(x,y)=\exp\left(-j\frac{\omega}{c}\sqrt{x^2+y^2+F^2}\right)$ sur les sources d'émission, nous focalisons les ondes autour du point de coordonnées $(0,0,F)$ (figure I.1).

La superposition de fonctions de Green associée à notre distribution de sources donne naissance à des interférences constructives en un point particulier de l'espace. Pour avoir une estimation de la dimension caractéristique de cette zone d'espace, il faut introduire une mesure de la relation de phases entre les différentes fonctions de Green que l'on somme. Cette mesure est appelée longueur de cohérence l_{coh} d'une distribution de sources. Cette longueur caractéristique représente la distance maximale entre deux points d'espace pour lesquels les vibrations sont cohérentes. Deux points sources sont considérés comme indépendants lorsqu'ils sont séparés d'une distance supérieure à l_{coh}. La longueur de cohérence dépend à la fois des caractéristiques intrinsèques de la source et de la distance à laquelle on se trouve : plus on s'éloigne, plus la source se rapproche d'une source ponctuelle qui présente une longueur de cohérence infinie. La longueur de cohérence d'une distribution de sources augmente avec le rapport entre la longueur d'onde λ et l'angle sous-lequel elle est vue.

Pour la distribution de sources présentée précédemment, cela permet de définir une dimen-

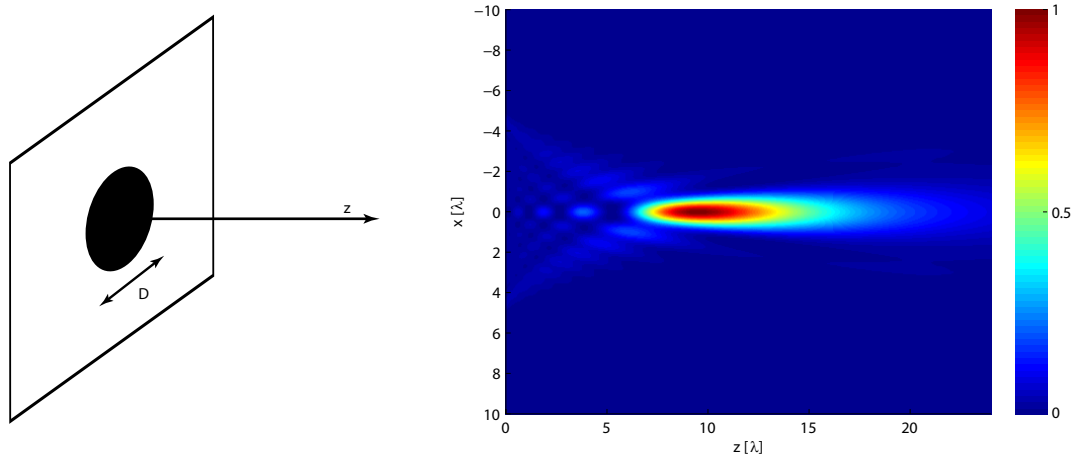

FIGURE I.1 – Exemple de focalisation à l'aide de degrés de liberté spatiaux : une distribution de sources monochromatiques (géométrie des sources à gauche avec $D = 10\lambda$) peut focaliser des ondes en un point particulier de l'espace (de coordonnée $(0, 0, F)$ avec $F = 10\lambda$) à condition d'imposer la bonne loi de phase sur les sources comme le montre la carte d'énergie (à droite).

sion caractéristique de la zone d'espace où l'énergie est concentrée : la largeur de la tache focale. Elle dépend directement de la fréquence d'émission, de la géométrie des sources et de la loi d'amplitude appliquée. Elle est connue sous le nom de limite de Rayleigh (ou de Abbe en optique) et est égale à $1.22\dfrac{\lambda F}{D}$ dans le plan $z = F$.
Maintenant que nous avons vu un exemple de superposition spatiale de sources cohérentes, essayons d'en faire de même dans le temps. Pour cela, prenons un point source unique de manière à n'avoir aucun degré de liberté spatial, et utilisons une large bande passante centrée autour d'une fréquence f_0. Ce genre de dispositif d'exploitation des ondes est typiquement ce que l'on retrouve dans une application de type télécommunications.
À nouveau, cela laisse un grand nombre de possibilités puisqu'il est possible de fabriquer une multitude de signaux différents avec une même bande passante. En choisissant la forme temporelle d'émission de type impulsion (un cosinus multiplié par une fenêtre temporelle de quelques périodes) qui correspond à un bit d'information par exemple, nous focalisons spatialement et temporellement l'énergie associée aux ondes. En effet, à un instant t donné postérieur à l'émission, l'énergie est concentrée autour de la sphère de rayon ct (figure I.2). De manière symétrique à ce qui se passe spatialement, on peut définir un temps de cohérence t_{coh} caractéristique du signal émis. Si on veut envoyer N bits d'information à un utilisateur, nous répétons dans le temps l'émission du signal émis précédemment. Pour décoder le signal reçu ailleurs, il faut donc que le taux de répétition des impulsions soit

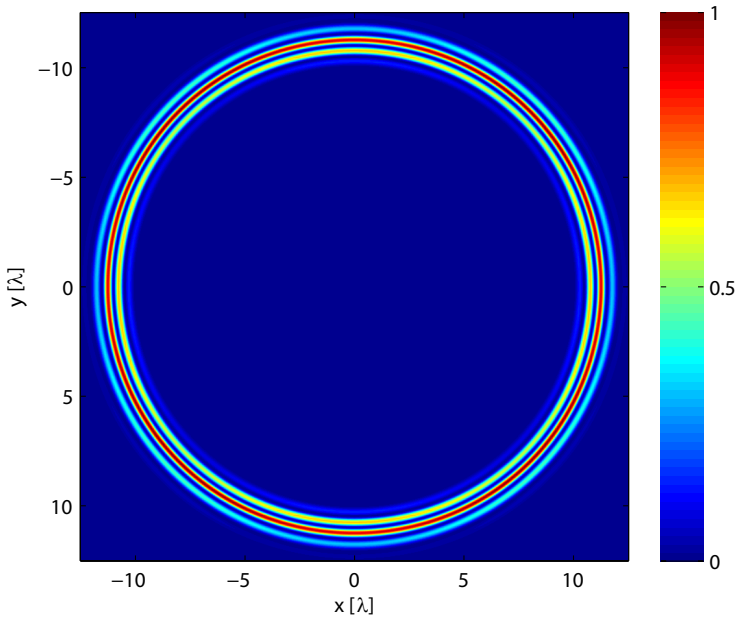

FIGURE I.2 – Exemple de « focalisation » à l'aide de degrés de liberté temporels : l'énergie émise par un point source à l'instant $t = 0$ est concentrée autour de la sphère de rayon ct.

supérieur au temps de cohérence. Dans le cas d'une impulsion, le temps de cohérence du signal correspond à sa durée, ou encore à l'inverse de sa bande passante.

I.1.3 Solutions en milieux complexes

Il existe un autre paramètre important pour l'étude des ondes : le milieu de propagation. En milieu hétérogène, les ondes subissent des réflexions ou des effets de diffraction qui dévient leur trajectoire. Ces particularités dans la propagation, qui sont très souvent des freins pour différentes applications, sont en réalité à l'origine de nombreux phénomènes intéressants.

Pour illustrer l'importance du milieu de propagation, prenons un point source émettant une impulsion, et plaçons un miroir plan quelque part dans le milieu de propagation. Ce miroir réfléchit l'onde sphérique issue du point source et crée un écho. Désormais, l'énergie émise initialement n'est pas uniquement concentrée sur la sphère de rayon ct mais également sur une sphère centrée sur l'image par le miroir du point source (figure I.3).

Tout se passe dans le demi-plan situé au-dessus du miroir comme si un point source virtuel avait émis une impulsion avec un retard dans le temps. Cette propriété, connue sous le nom de théorème des images, offre de nouveaux degrés de liberté. En effet, nous

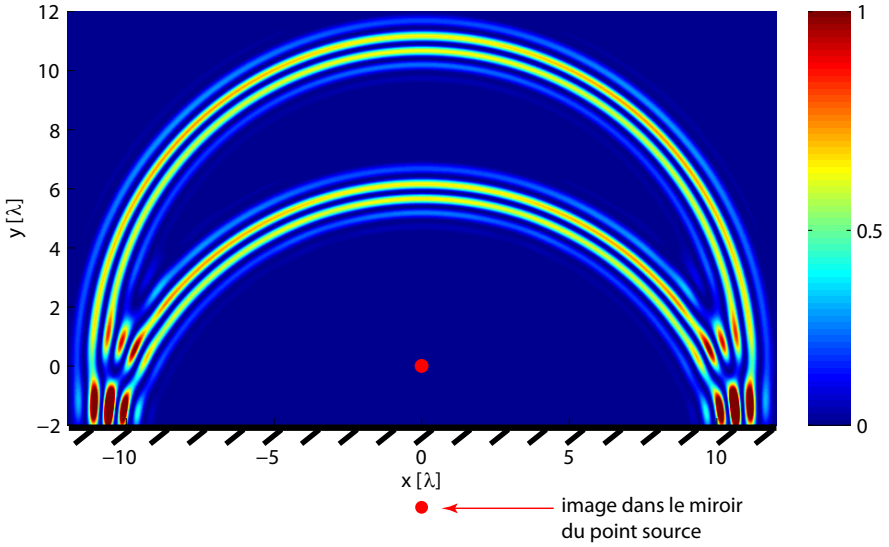

FIGURE I.3 – Apparition d'une source virtuelle due à la présence d'un miroir réflecteur : l'énergie émise par un point source à l'instant $t = 0$ est concentrée autour de la sphère de rayon ct ainsi que sur une sphère centrée sur l'image de la source initiale par le miroir.

avons vu précédemment que la superposition de sources permet, entre autres, de focaliser spatialement des ondes à condition de leur appliquer une loi d'amplitudes (complexes) contrôlée. Ici, nous n'avons pas un contrôle total de la source virtuelle, mais en jouant sur le signal émis par les sources, c'est-à-dire sur les degrés de liberté temporels de la source émettrice, nous pouvons créer un champ spatio-temporel plus ou moins complexe. Cependant, il est absolument indispensable de jouer sur les degrés de liberté (spatiaux ou temporels) si l'on veut contrôler cette source virtuelle.

Ce premier exemple, qui peut paraître très trivial, ouvre déjà un grand nombre de perspectives. Par exemple, Aris L. Moustakas et ses collègues [4] ont montré qu'en tirant partie de la réflexion des ondes sur un miroir on peut augmenter la capacité de Shannon (en d'autres termes la quantité d'information) que l'on peut transmettre d'un point A vers un point B en télécommunication. Un autre travail de recherche très proche de cet exemple a été effectué récemment à l'Institut Fresnel [5] : en utilisant un miroir placé derrière un objectif de microscope et en jouant sur les degrés de liberté spatiaux à l'émission des taches focales isotropes ont été obtenues : il s'agit de la méthode 4π avec modulateur spatial de lumière.

Par la suite, comme dans l'exemple précédent, nous exploiterons la présence de sources virtuelles. Le miroir plan est un exemple simple pour prouver l'existence de sources virtuelles, mais nous lui préférerons des milieux de propagation qui en génèrent un bien plus

grand nombre. Pour cela, intéressons nous à un type de milieux très largement étudié à l'Institut Langevin [6,7] : les milieux multiplement diffuseurs. Lorsqu'une impulsion émise par une source traverse ce type de milieu, elle perd progressivement sa cohérence temporelle et spatiale au cours des différents processus de diffusion. L'onde transmise peut s'étaler sur plusieurs centaines de fois la durée de l'impulsion initiale. On définit donc un milieu fortement diffuseur comme un milieu qui, illuminé par une onde cohérente, produit une figure de « speckle [1] », c'est-à-dire une répartition aléatoire dans le temps et dans l'espace de l'énergie. À la sortie du milieu, on définit donc la longueur de cohérence comme étant la taille caractéristique d'un grain de speckle et le temps de cohérence comme le temps au bout duquel on obtient une figure de speckle statistiquement décorrélée de la précédente.

Ce type de milieux peut se présenter sous la forme d'une collection de diffuseurs placés dans un milieu de propagation homogène. Chaque diffuseur diffracte les ondes, créant des sources virtuelles à l'instar du miroir plan. Pour décrire ce milieu, on écrit en première approximation l'équation de propagation des ondes avec une hétérogénéité de vitesse [2] [8, 9] :

$$\Delta\Psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c(\mathbf{r})^2}\frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{I.10}$$

Pour obtenir les solutions de cette équation il est intéressant de se ramener à l'équation de propagation en milieu homogène en introduisant l'opérateur $\sigma(\mathbf{r})$:

$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{1}{c(\mathbf{r})^2} - \frac{1}{{c_0}^2} \tag{I.11}$$

où c_0 correspond à la célérité des ondes dans le milieu qui englobe les diffuseurs. L'équation d'onde en milieu hétérogène se met sous la forme de l'équation d'onde en milieu homogène, avec un terme source lié aux hétérogénéités de vitesse de propagation dans le milieu :

$$\Delta\Psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{{c_0}^2}\frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = \sigma(\mathbf{r})\frac{\partial^2\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} \tag{I.12}$$

Dans cette équation, le membre de gauche correspond à la propagation des ondes en milieu homogène de célérité c_0. Le membre de droite correspond à un terme source comme dans l'équation I.7, mais cette source dépend de la solution en espace homogène. Nous avons donc mis en évidence, mathématiquement, l'explication de notre intuition qui prédisait la présence de sources virtuelles dues aux différentes réflexions sur les diffuseurs. Ces

1. La traduction française de speckle est tavelure, mais l'usage de ce mot est quasi-inexistant.
2. Souvent en électromagnétisme, on ne considère qu'une hétérogénéité dans le tenseur des permittivités $\epsilon(\mathbf{r})$.

sources virtuelles dépendent de la propagation et, pour les contrôler, il faut utiliser des sources multiples ou polychromatiques. C'est-à-dire qu'il faut exploiter les degrés de liberté spatiaux et temporels du milieu de propagation.
De manière générale, le milieu de propagation offre des perspectives nouvelles. La présence de sources virtuelles détériore la qualité des techniques basées sur les théories des milieux homogènes, mais en tirant partie du milieu de propagation, cela offre de nouvelles possibilités expérimentales.

I.2 Exploitation d'un milieu complexe

I.2.1 Expérience de focalisation par retournement temporel

Nous allons nous intéresser à la technique qui a été introduite au laboratoire par Mathias Fink au début des années 90 : la focalisation par retournement temporel. De nombreux travaux issus du laboratoire expliquent les principes qui régissent le retournement temporel [10–13]. Nous allons ici ne présenter que les principaux résultats, obtenus au laboratoire, notamment les résultats qui ont conduit à étudier les milieux complexes. Nous allons montrer comment le retournement temporel s'interprète en termes de degrés de liberté spatiaux et temporels.
Le principe de base de la focalisation par retournement temporel repose sur l'invariance par retournement du temps de l'équation d'onde aussi bien en acoustique [10, 11] qu'en électromagnétisme [14–16]. En effet, l'équation fait intervenir une dérivée d'ordre pair par rapport au temps. En d'autres termes si $\Psi(\mathbf{r}, t)$ est solution de l'équation d'onde alors $\Psi(\mathbf{r}, -t)$ l'est également. Remarquons que nous avons déjà vérifié cette propriété lorsque nous avons obtenu les fonctions de Green d'espace libre (équation I.9). D'autre part, pour un milieu stationnaire dans le temps (invariant par translation dans le temps), on peut aussi changer l'origine du temps et toute fonction du type $\Psi(\mathbf{r}, T-t)$ est aussi solution de l'équation d'onde. À ce stade, une opération de retournement temporel reste complètement hypothétique puisqu'il faut enregistrer $\Psi(\mathbf{r}, t)$ en tout point et à tout instant pour ensuite vérifier que $\Psi(\mathbf{r}, -t)$ est bien solution de l'équation d'onde.
La seconde idée fondamentale qui a rendu possible les expériences de retournement temporel est le principe d'Helmholtz-Kirchhoff : à partir de la connaissance de Ψ et de sa dérivée normale sur une surface fermée autour d'un volume V, il est possible de reconstruire Ψ dans tout le volume V. Dès lors, le concept de cavité à retournement temporel [10] devient concevable : il suffit d'inverser chronologiquement Ψ et sa dérivée normale sur une surface fermée pour réaliser une opération de retournement temporel.

Cependant, tout ceci reste une expérience de pensée puisqu'il est impossible de réaliser expérimentalement une surface fermée tapissée de transducteurs (qui sont des antennes dans le cas des ondes électromagnétiques) afin d'enregistrer le champ émis par des sources au sein de ce volume. Il faut une quantité pharaonique de transducteurs, et en pratique nous ne pouvons en piloter avec une électronique indépendante qu'un nombre limité.
L'expérience de retournement temporel typique réalisée au sein du laboratoire (ou maintenant par des étudiants en travaux pratiques à l'ESPCI ParisTech) utilise seulement une partie de la surface et se résume en deux phases :

- Une phase, dite d'enregistrement, pendant laquelle une source émet une impulsion et le champ ainsi généré est enregistré après propagation dans le milieu à l'aide d'une matrice de capteurs (appelé un Miroir à Retournement Temporel MRT) ;
- Une phase, dite de ré-émission, durant laquelle le MRT émet en chronologie inverse les signaux enregistrés, générant ainsi des ondes qui « remontent le temps » et revivent leur passé.

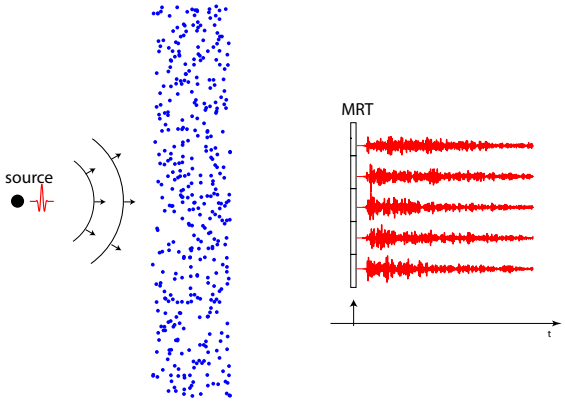

FIGURE I.4 – Phase d'enregistrement du champ.

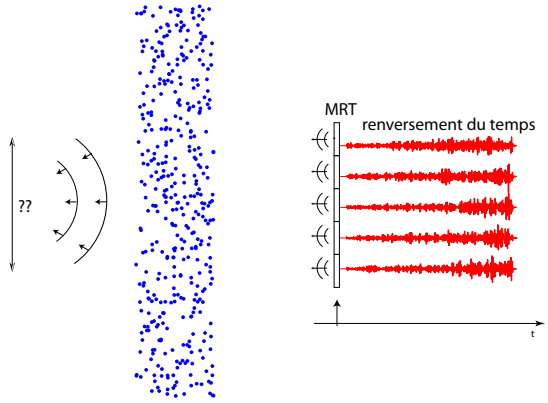

FIGURE I.5 – Phase de réémission du champ retourné temporellement.

Pour fixer un peu plus en détail le déroulement de cette expérience, plaçons nous dans le cas des expériences qui ont été réalisées au laboratoire en 1995 par Arnaud Derode [6]. Nous utilisons des ondes ultrasonores dans l'eau et un milieu désordonné qui consiste en une collection de tiges d'acier identiques. Pour la phase d'enregistrement (figure I.4), la source, un transducteur piézoélectrique mono-élément, émet une impulsion brève ($\approx 1\ \mu$s) centrée autour de 3,5 MHz. L'onde émise se propage au travers du milieu désordonné et on enregistre sur le MRT le champ en sortie du milieu. Le signal enregistré par une des voies du MRT fait apparaître, outre l'arrivée d'une première impulsion dite balistique, toute une « coda » , un signal de speckle temporel, qui s'étend sur plus de 160 μs. C'est la signature des sources virtuelles générées au cours de la propagation : plus le signal

est éloigné du front d'onde balistique, plus il a subi d'évènements de diffusion lors de sa propagation.
Une fois cette banque de données enregistrée, on entre dans la deuxième phase du retournement temporel. Les signaux sont inversés temporellement puis réémis (figure I.5). L'onde se propage à nouveau à travers le milieu désordonné puis atteint l'autre côté. Un front d'onde sort du milieu et focalise les ultrasons à la fois dans le temps (figure I.6) et dans l'espace au point où se trouvait initialement la source.
D'un point de vue temporel, le signal reçu au point focal a une durée caractéristique égale à la durée de l'impulsion initialement émise. Le signal émis qui s'étend sur plus de 160 μs a donc subi une recompression temporelle. La banque de signaux que l'on émet lors de la deuxième phase du retournement temporel tire grandement parti de la complexité du milieu et de la création de sources virtuelles. Tout se passe au point source initial comme si les signaux émis par l'ensemble des sources virtuelles arrivaient simultanément.
D'un point de vue spatial, pour quantifier la qualité de la focalisation on définit la tache focale comme étant le maximimum de la valeur absolue du signal reçu en tout point. Dans ce cas, la tache focale (figure I.6), qui caractérise la qualité spatiale de la compression autour de la position initiale, est plus étroite que celle obtenue en l'absence du milieu multi-diffuseur. Cela signifie que la répartition spatiale des sources virtuelles augmente l'ouverture angulaire qui participe à la focalisation, réduisant ainsi la largeur de la tache focale.

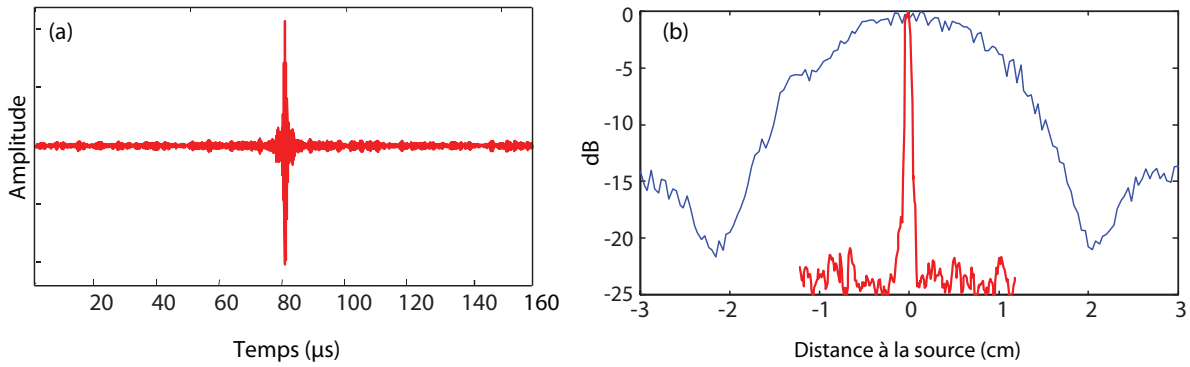

FIGURE I.6 – Focalisation temporelle (gauche) et spatiale (droite) après une opération de retournement temporel à travers la forêt de tiges (rouge) et dans l'eau (bleu). Figure reproduite de [6].

La focalisation par retournement temporel est donc une méthode simple à réaliser expérimentalement pour contrôler les sources virtuelles qu'un milieu complexe génère. Comme nous l'avions entrevu dans la première partie, ce milieu offre un bien plus grand nombre

de degrés de liberté que le milieu homogène. On peut utiliser des signaux très longs et à large bande passante, exploiter ainsi les degrés de liberté temporels du milieu, et obtenir des résultats meilleurs en termes de focalisation qu'en milieu homogène.
Cette technique permet, outre un grand nombre d'applications potentielles, l'étude de la propagation dans les milieux complexes en explorant ses limites. Pour bien comprendre toutes ces notions de degrés de liberté, nous allons nous intéresser à deux cas limites du retournement temporel : une opération de retournement temporel avec un MRT composé d'un unique élément, et une opération de focalisation avec des signaux monochromatiques. Dans le premier cas nous exploiterons les degrés de liberté temporels du milieu de propagation, alors que dans le deuxième cas ce sont les degrés de liberté spatiaux qui nous intéresseront.

I.2.2 Retournement temporel mono-voie et degrés de liberté temporels

Pour le cas du transducteur unique composant le MRT, nous reprenons les conditions de l'expérience réalisée au laboratoire en 1997 [17]. Au lieu de prendre un milieu complexe multidiffusant comme précédemment, nous nous plaçons dans un milieu clos réverbérant. Ce genre de milieu de propagation, d'abord été étudié en acoustique architecturale, présente l'avantage de générer des sources virtuelles qui peuvent entourer complètement la cavité.
Lorsqu'une source placée dans la cavité émet une impulsion, le champ enregistré en un point est la superposition des échos dûs aux parois. Sabine [18] a montré dans l'étude de l'acoustique des salles que cette superposition d'échos se traduit par une forme temporelle qui prend l'apparence d'un signal dont l'amplitude suit une distribution aléatoire et qui décroît exponentiellement au cours du temps (à cause de l'atténuation lors de la propagation et/ou lors des réflexions). La durée caractéristique de la décroissance est le paramètre critique de la cavité qui permet de bien comprendre les propriétés du retournement temporel.
Prenons le cas de la cavité de l'expérience de 1997 [17] faite de silicium qui présente l'avantage d'avoir des temps de réverbération extrêmement longs. Les ondes élastiques sont générées et détectées dans cette plaque de silicium par des transducteurs couplés à des pointes d'aluminium (figure I.7). Un des transducteurs situé au point A émet une impulsion brève de durée τ et on enregistre au point B une coda qui s'étend sur une durée de plus de 20000 fois τ. Ce signal traduit la présence de sources virtuelles, et tout se passe au point B comme si on recevait des impulsions qui auraient été émises à différents instants

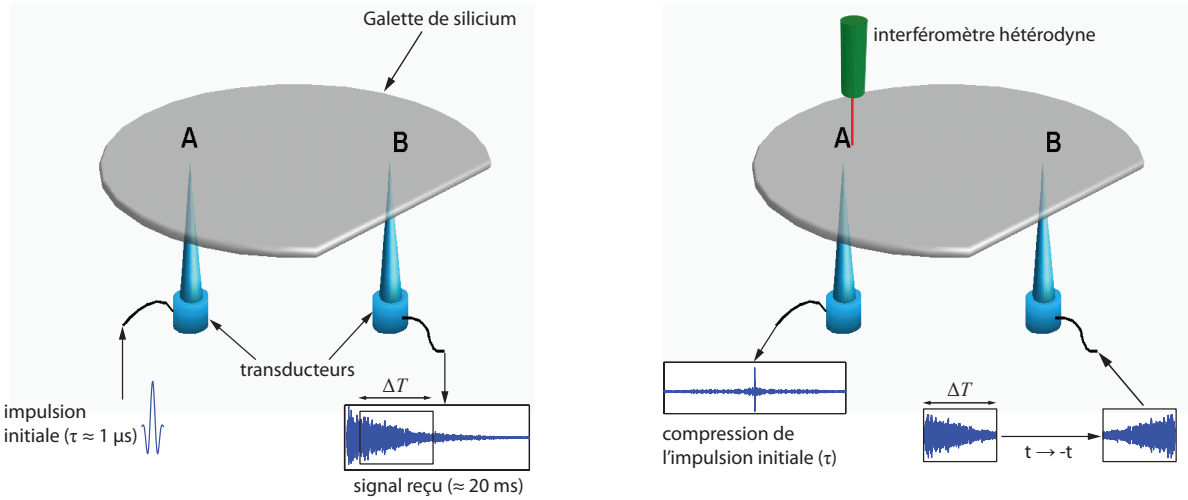

FIGURE I.7 – Les deux étapes d'une expérience de retournement temporel monovoie en cavité et cartographie du champ.

par une multitude de sources en plus de la source au point A. La géométrie de la cavité revêt une importance capitale : plus sa forme est complexe, plus les signaux qui arrivent au point B proviennent de directions différentes. On parle ainsi de cavité ergodique lorsque les signaux arrivant au point B sont la superposition de signaux d'impulsions provenant de sources aléatoirement distribuées spatialement.

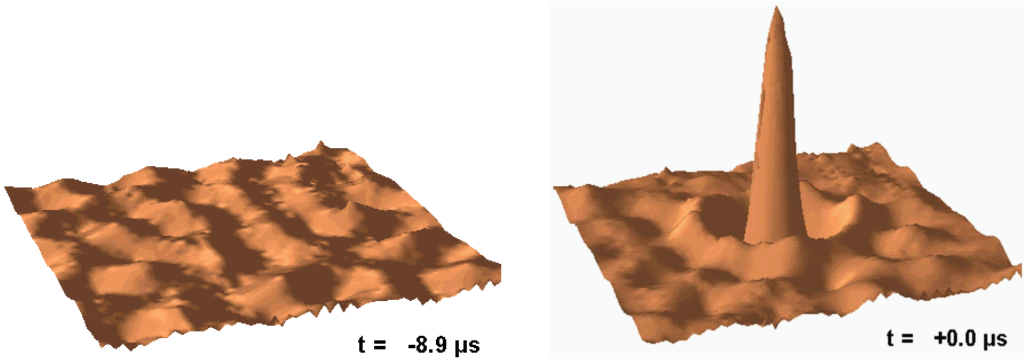

FIGURE I.8 – Cartographie du déplacement à la surface de la galette de silicium à un instant quelconque (à gauche) et à l'instant de la focalisation temporelle (à droite).

Lors de la seconde phase (figure I.7), on réémet la version retournée temporellement d'une partie (de durée ΔT) de cette coda. Le champ résultant est mesuré à l'aide d'un interféromètre hétérodyne (développé par Daniel Royer [19]) autour du point A. La recompression

temporelle au point A est observée comme précédemmment, mais l'effet le plus spectaculaire provient de la focalisation spatiale autour du point A (figure I.8). Avec un unique transducteur situé en B et en tirant partie du milieu de propagation, il a été possible de focaliser les ondes élastiques sur une tache focale de largeur $\lambda/2$, c'est-à-dire d'ouverture angulaire maximale.

D'autre part, le rapport entre l'amplitude du pic de focalisation et les signaux reçus à un instant quelconque et/ou en un autre point, que l'on appelle les lobes secondaires spatiaux et/ou temporels, nous renseigne sur les limites de cette technique. C. Draeger [17] a montré expérimentalement que ce rapport dépend très fortement de la durée ΔT du signal réémis. D'un point de vue théorique, Arnaud Derode et Mathias Fink [12] ont expliqué ce phénomène en termes de « grains d'information ». Dans ce modèle, la coda reçue au point B est assimilée à une succession de grains d'informations de durée τ (figure I.9). Les grains d'informations sont les signaux issus des sources virtuelles. Après l'étape de retournement temporel où l'on « synchronise » tous ces signaux, l'amplitude du pic de focalisation est égal au nombre d'impulsions émises, soit $N = \dfrac{\Delta T}{\tau}$. Sur des positions voisines et/ou à des instants différents, ces grains d'information se somment de manière incohérente et on a donc une amplitude moyenne égale à $\sqrt{N}$. Le rapport entre l'amplitude du pic et l'amplitude moyenne des lobes secondaires est donc égal à $\sqrt{N}$. Cette explication phénomènologique permet de *compter* les degrés de liberté temporels utilisés au cours de l'expérience et ils sont au nombre de N.

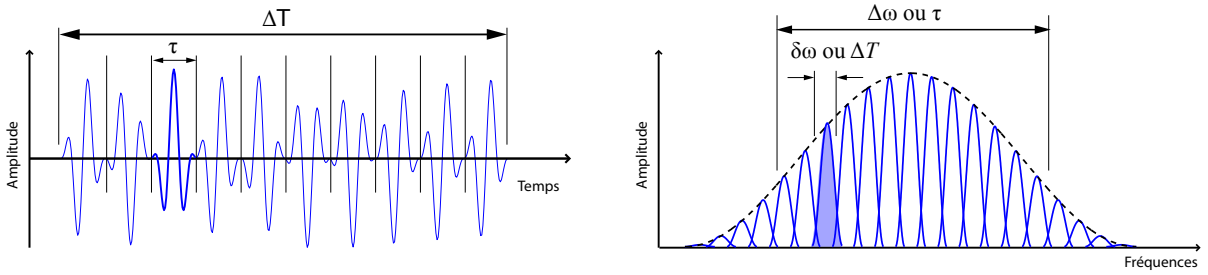

FIGURE I.9 – Schématisation du nombre de degrés de liberté temporels dans l'espace temporel et fréquentiel.

Le temps et les fréquences étant deux représentations d'un même phénomène, l'interprétation de ces degrés de liberté temporels dans l'espace des fréquences présente aussi un intérêt. La durée τ de l'impulsion initiale peut être vue comme l'inverse de la bande passante $\Delta\omega$ disponible lors de l'expérience. Par analogie avec l'approche dans l'espace temporel, on définit donc le nombre de degrés de liberté comme étant le nombre de fréquences décorrélées contenues dans la bande passante. La fréquence de corrélation $\delta\omega$, c'est-à-dire la distance spectrale qui sépare deux modes harmoniques statistiquement indépendants

dans la cavité, dépend uniquement du milieu de propagation et des fréquences utilisées. Pour une expérience menée dans une cavité, trois temps caractéristiques de l'expérience sont à considérer pour estimer cette distance spectrale :

- le temps d'absorption t_{abs} qui limite la durée temporelle enregistrable d'un signal en réponse à une impulsion ;
- le temps de Heisenberg t_{H} qui caractérise la distance spectrale séparant deux modes propres harmoniques consécutifs ;
- la durée ΔT du signal temporel émis lors de l'étape de ré-émission du retournement temporel.

La fréquence de corrélation pour l'expérience considérée est alors proportionnelle à l'inverse du plus petit de ces temps. Les fréquences ne sont considérées comme décorrélées que lorsqu'elles sont séparées d'une distance $\delta\omega$. Le nombre de degrés de liberté temporels s'écrit dans ce cas $N = \dfrac{\Delta\omega}{\delta\omega}$ (figure I.9). Notons que Julien de Rosny [20] a montré que $\delta\omega$ n'est pas nécessairement constante sur toute la bande passante.

Une illustration très visuelle de ces degrés de liberté temporels peut être faite à l'aide des vecteurs de Fresnel (figure I.10). Chaque degré de liberté (dans l'espace des fréquences) est représenté par un vecteur dans le plan complexe. Après l'opération de retournement temporel tous ces vecteurs s'alignent au point source et se somment de manière cohérente donant ainsi une amplitude de N. En toute autre position, ces vecteurs ont une orientation aléatoire ce qui résulte en une marche aléatoire et l'amplitude est donc bien inférieure et égale à $\sqrt{N}$. Plus on a de degrés de liberté plus le rapport signal à bruit est important.

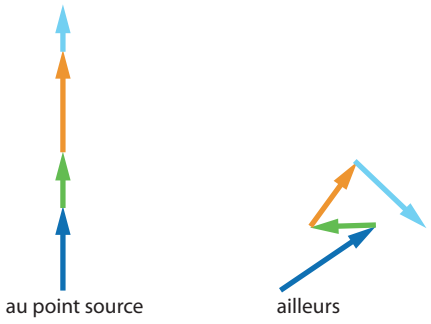

FIGURE I.10 – Schématisation du contrôle des degrés de liberté lors de l'opération de retournement temporel. Chaque vecteur correspond à un degré de liberté temporel et le champ résultant en une position donnée est la somme de ces vecteurs. Au point source tous ces vecteurs se somment de manière cohérente (amplitude de N), alors qu'ils se somment de manière incohérente ailleurs (amplitude statistiquement égale à $\sqrt{N}$).

On peut aussi donner une représentation de l'opération de retournement temporel dans

la cavité en termes de modes propres du système. Lorsqu'on émet une impulsion depuis le point un A, on excite tous les modes propres de la cavité qui ne présentent pas de nœud au pas A. Cela crée au point B la superposition de tous ces modes propres, chacun avec une phase aléatoire. L'idée du retournement temporel est alors de réémettre tous ces modes depuis le point B mais avec une relation de phase particulière de manière à ce qu'ils se somment tous de manière cohérente au point A. Après l'étape de retournement temporel, on a donc au point A la somme cohérente (phase nulle) de tous les modes propres de la cavité qui ne présentent de nœuds ni en A ni en B. Ailleurs ces modes se somment de manière incohérente. On retrouve bien l'amplitude de N au point focal et de $\sqrt{N}$ ailleurs, où N correspond au nombre de modes indépendants contenus dans la bande passante.

I.2.3 Degrés de liberté spatiaux et focalisation à travers un milieu multidiffusant

Maintenant, intéressons nous à un autre cas limite du retournement temporel : celui où nous n'avons plus aucun degré de liberté temporel (un signal monochromatique à la fréquence f_0). Avec un point source unique comme précédemment, il est assez intuitif de comprendre qu'on ne peut pas focaliser les ondes sur une position particulière. En effet, si on émet une onde monochromatique dans la cavité, cette onde s'étend spatialement sur toute la cavité créant des noeuds et des ventres à des positions particulières mais jamais elle ne converge vers un endroit désiré [3].

Dans ce cas monochromatique, pour effectuer une opération analogue, il faut donc contrôler des degrés de liberté spatiaux en utilisant plusieurs sources d'émission. Ce type de régime critique du retournement temporel est caractéristique d'une application optique où les sources d'émission sont généralement des lasers continus. Pour contrôler plusieurs degrés de liberté spatiaux en optique, I. M. Vellekoop et A. P. Mosk [21] ont repris les idées de l'astronomie sur l'optique adaptative [22] [4] et ont utilisé un modulateur spatial de lumière (SLM pour Spatial Light Modulator en anglais). Ils ont utilisé leur SLM pour contrôler des fronts d'onde et focaliser une onde optique à travers un milieu multiplement diffusant.

Dans leur configuration expérimentale, un faisceau laser éclaire une couche de peinture (qui agit comme un milieu multiplement diffusant) et crée à la sortie une figure de « speckle » (figure I.11). L'idée de l'expérience est d'utiliser le SLM, et donc les degrés de liberté spatiaux, pour focaliser les ondes optiques à la sortie du milieu, comme dans une

3. Ceci justifie une fois de plus la formule sur le nombre de degrés de liberté temporels $N = \dfrac{\Delta\omega}{\delta\omega}$

4. Ainsi que les concepts développés à l'Institut Langevin.

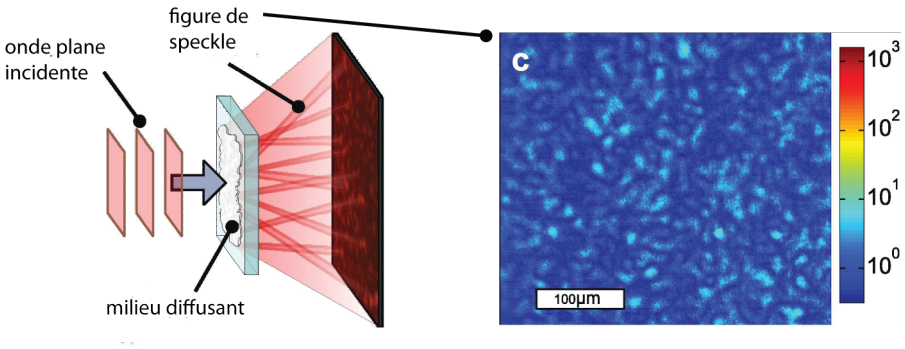

FIGURE I.11 – Schéma de principe de l'expérience de I. M. Vellekoop et A. P. Mosk en optique (image reproduite de [21]).

expérience de retournement temporel. Le SLM permet de contrôler la phase du faisceau incident sur de nombreux pixels (64×64 éléments dans leur expérience). Via un algorithme itératif, les auteurs ont fait varier la phase sur chaque pixel du SLM de manière à optimiser l'intensité optique au point souhaité.

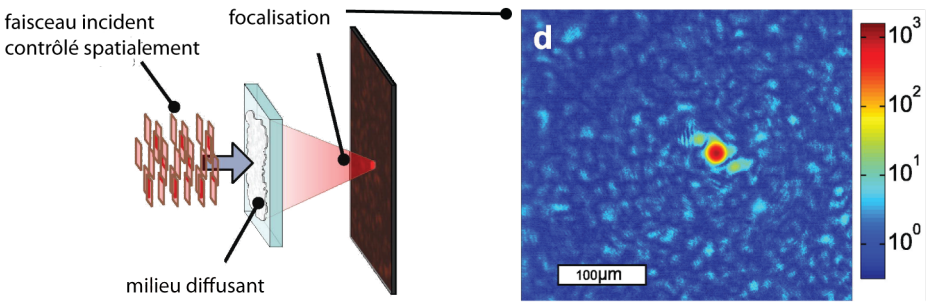

FIGURE I.12 – Manipulation des degrés de liberté spatiaux pour focaliser à travers le milieu diffusant (image reproduite de [21]).

À la fin de l'algorithme, les interférences constructives des ondes produisent une focalisation de l'intensité optique à la sortie du milieu multiplement diffusant (figure I.12). Suivant la complexité du milieu, un plus ou moins grand nombre de pixels à contrôler sur le SLM est nécessaire. Avec un milieu diffusant tel que la longueur de cohérence à la sortie du milieu soit inférieure à la distance qui sépare deux pixels du SLM, ils ont montré que le rapport entre l'amplitude du pic de focalisation et le niveau moyen du speckle est égal à N (si on regarde l'intensité), où N est le nombre de pixels du SLM. Il s'agit ici des « grains d'information » spatiaux et on retrouve le même résultat que précédemment.

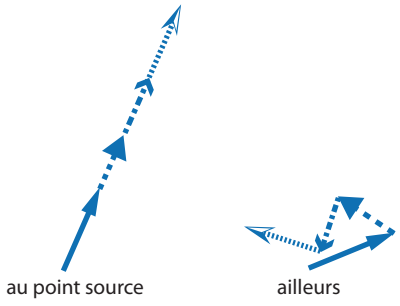

FIGURE I.13 – Schématisation du contrôle des degrés de liberté spatiaux lors de l'opération de focalisation à travers le milieu diffusant. Chaque vecteur correspond à un degré de liberté spatial et le champ résultant en une position donnée et la somme de ces vecteurs. Au point source tous ces vecteurs se somment de manière cohérente, alors qu'ils se somment de manière incohérente ailleurs.

Par analogie avec les degrés de liberté temporels, on peut interpréter les degrés de liberté spatiaux avec des vecteurs analogues aux vecteurs de Fresnel (figure I.13). Chaque degré de liberté est représenté par un vecteur dans le plan complexe mais ici il s'agit de degrés de liberté spatiaux. Après l'opération d'optimisation, tous ces vecteurs s'alignent au point source et se somment de manière cohérente. En revanche, ces vecteurs ont une orientation aléatoire en toute autre position ce qui résulte en une marche aléatoire. Plus on a de degrés de liberté, plus le rapport signal à bruit est important. Il s'agit de la même représentation que les modes propres de la cavité réverbérante. Chaque pixel du SLM produit une figure de speckle indépendante des autres à la sortie du milieu. Après l'optimisation on met en phase au point focal toutes ces figures de speckle : on a une somme cohérente de N figures de speckle au point focal, alors que l'on a une marche aléatoire ailleurs.
Depuis cette expérience préliminaire, de nombreux travaux ont vu le jour sur la manipulation des degrés de liberté spatiaux en optique. Par exemple, au laboratoire, S. Popoff et ses collaborateurs [23] ont montré qu'ils pouvaient remplacer l'étape d'optimisation itérative par une étape d'apprentissage de la matrice de transfert entre les pixels du SLM et le plan focal de l'autre côté du milieu multi-diffusant. Cette matrice de transfert est reliée aux fonctions de Green monochromatiques. Il est alors possible de focaliser en tout point de sortie du milieu diffusant en adaptant le masque de phase sur le SLM en adéquation avec l'apprentissage préliminaire. Le masque de phase qui maximise l'énergie au point focal correspond au masque de phase du retournement temporel.
Ces résultats rappellent les résultats obtenus à la fin des années 1970 : la communauté optique s'était très fortement intéressée à des cristaux non-linéaires qui agissent comme

des miroirs à retournement temporel [24, 25]. Une onde plane incidente sur un tel cristal est, sous certaines conditions, réfléchie dans sa direction d'incidence avec une inversion de phase. Conjuguer la phase d'un signal monochromatique $e^{j\omega t}$ équivaut à une opération de retournement temporel $(e^{j\omega t})^* = e^{-j\omega t}$, et ces matériaux ont été appelés des miroirs à conjugaison de phase. Ces miroirs ont d'abord été utilisés dans le but de corriger les aberrations de phase qu'un milieu faiblement aberrateur peut engendrer lors de la propagation, mais désormais ils sont également utilisés pour tirer profit d'un milieu de propagation complexe [26].

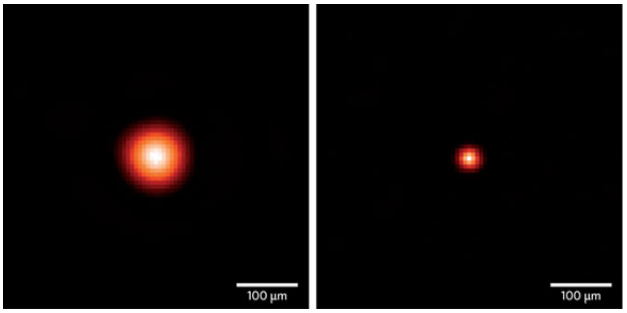

FIGURE I.14 – Focalisation spatiale par contrôle de degrés de libertés spatiaux en espace libre (gauche) et à travers un milieu multi-diffusant (droite). Image reproduite de [27].

Enfin, la largeur de la tache focale obtenue au travers du milieu diffusant mérite que nous nous y attardions. En espace libre, elle est égale à $\frac{\lambda F}{D} = \frac{\lambda}{2}\text{ON}$ (où ON est l'ouverture numérique, le paramètre communément utilisé en optique). Lorsqu'on utilise un milieu complexe, nous augmentons virtuellement cette ouverture numérique. Le fait de jouer sur les degrés de liberté spatiaux à l'émission permet de contrôler les sources virtuelles et donc d'augmenter l'ouverture numérique. Tout comme nous avons montré une tache focale plus fine lors du retournement temporel au travers de la forêt de tiges qu'en eau libre, il a été montré en optique que le milieu diffusant permet d'obtenir une tache focale plus fine qu'en espace libre (figure I.14). C'est alors le milieu multiplement diffusant qui joue le rôle de source, et comme la longueur de cohérence à la sortie du milieu est plus faible, la tache focale est réduite [27].

I.2.4 Filtre adapté ou filtre inverse ?

Jusqu'à maintenant nous avons traité le retournement temporel d'un point de vue physique. Il peut être utile de l'analyser en termes de traitement du signal pour bien com-

prendre ses limites. La réponse entre un point situé en $\mathbf{r_0}$ et un point situé en $\mathbf{r_1}$ est définie par sa réponse impulsionnelle $h(\mathbf{r_0}, \mathbf{r_1}, t)$. Quel que soit le signal $f(t)$ émis initialement en $\mathbf{r_0}$, on peut écrire le signal reçu en $\mathbf{r_1}$ comme $h(\mathbf{r_0}, \mathbf{r_1}, t) * f(t)$ (où $*$ correspond à l'opérateur de convolution). Si on fait l'hypothèse que les réponses des instruments de mesure sont parfaites, la réponse impulsionnelle correspond à la fonction de Green physique.
Avec cette notation, nous pouvons écrire le résultat d'une expérience de retournement temporel pour une source située en $\mathbf{r_0}$ qui aurait émis une impulsion $f(t)$. Le $i^{\text{ème}}$ élément du MRT (lui même composé de N_s éléments) émet en chronologie inverse le signal temporel qu'il a initialement reçu : $h(\mathbf{r_0}, \mathbf{r_i}, -t) * f(-t)$. Après réémission, les ondes se propagent dans le milieu, ce qui se traduit par une convolution avec la réponse impulsionnelle $h(\mathbf{r_i}, \mathbf{r}, t)$. Le signal reçu en un point quelconque de l'espace situé en $\mathbf{r}$ s'écrit donc comme la somme des contributions de tous les éléments du miroir à retournement temporel :

$$f_{RT}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{N_s} h(\mathbf{r_i}, \mathbf{r}, t) * h(\mathbf{r_0}, \mathbf{r_i}, -t) * f(-t) \tag{I.13}$$

En particulier, pour $\mathbf{r} = \mathbf{r_0}$, c'est-à-dire au point source initial, le résultat du retournement temporel est la définition même d'un filtre adapté au sens du traitement du signal. Un tel filtre maximise l'amplitude du signal reçu au point focal et à un temps donné pour une énergie totale d'émission fixée. Cette propriété de filtre adapté du retournement temporel lui assure une très grande robustesse vis-à-vis du bruit, mais n'optimise pas la focalisation spatiale, c'est-à-dire ne limite pas le niveau des lobes secondaires.
Au contraire, il a été montré au laboratoire [28] qu'en utilisant une approche de type filtre inverse, on peut ajouter de nouvelles contraintes sur la valeur du champ autour de la zone focale et ainsi ajuster en partie le niveau des lobes spatiaux et/ou temporels.
Afin de définir la focalisation par filtre inverse, nous devons définir l'opérateur linéaire à inverser reliant chaque transducteur du réseau (auparavant le MRT) à un ensemble de points de contrôle disséminés dans le milieu insonifié. Les signaux appliqués sur les éléments du réseau correspondent aux signaux d'entrée du filtre et les signaux mesurés sur les points de contrôle aux signaux de sortie du filtre. Cette inversion s'applique entre un nombre d'éléments d'émission N_s (l'équivalent des voies du MRT) et un certain nombre de points de contrôles L. On utilise alors la réponse impulsionnelle $h_{ik}(t)$ pour chaque couple (i, k) formé d'un point de contrôle et d'un élément du réseau. Comme les transformations sont supposées linéaires et invariantes par translation dans le temps, les $L \times N_s$ fonctions temporelles $h_{ik}(t)$ (pour $i \in [\![1; L]\!]$, et $k \in [\![1; N_s]\!]$) peuvent décrire toute opération d'émission-réception dans une telle configuration. Ainsi, appelons $e_k(t)$, ($k \in [\![1; N_s]\!]$), les

N_s signaux d'entrée émis par chacun des transducteurs du réseau. Les signaux de sortie $f_i(t)$ ($i \in [\![1; L]\!]$), reçus dans l'espace de contrôle sont donnés par :

$$f_i(t) = \sum_{k=1}^{N_s} h_{ik}(t) * e_k(t) \quad \forall i \in [\![1; L]\!] \tag{I.14}$$

Une transformée de Fourier de l'équation précédente donne en notation matricielle :

$$\mathbf{f}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{e}(\omega) \tag{I.15}$$

où l'on a introduit la matrice de transfert $\mathbf{H}(\omega) = \big(H_{ik}(\omega)\big)_{(i,k)\in[\![1;L]\!]\times[\![1;N_s]\!]}$ qui décrit la propagation dans l'espace des fréquences entre le réseau de transducteurs et l'ensemble des points de contrôle et est pour cette raison appelée opérateur de propagation.
Dans notre cas, nous sommes confrontés à une expérience de diffraction inverse. Le but est de déterminer le vecteur d'émission $\mathbf{e}$ qui donne naissance après propagation dans le milieu à un champ $\mathbf{f}$ dans le plan de contrôle. Comme le but est de focaliser dans le plan de contrôle, le vecteur $\mathbf{f}$ choisi comme objectif ($\mathbf{f^0}$) est fixé et correspond à une focalisation optimale. Pour obtenir le vecteur $\mathbf{e}$ à émettre sur le réseau, il faut donc inverser la matrice de propagation $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{e} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{f^0} \tag{I.16}$$

Ce qui assure d'avoir le champ optimal dans le plan focal :

$$\mathbf{f} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{f^0} \tag{I.17}$$

Cependant, l'inversion de l'opérateur de propagation $\mathbf{H}$ correspond à un problème mal conditionné. En effet, la solution de l'inversion ne dépend pas continument des données mesurées. De très faibles erreurs dans la mesure de $\mathbf{H}$ produisent d'énormes erreurs sur la solution inversée. Lors de sa thèse, Mickaël Tanter [28] a montré qu'on pouvait trouver une méthode de régularisation à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières. Cependant, cette régularisation doit être faite fréquence par fréquence et le retour dans l'espace des signaux temporels peut entraîner des erreurs.
Plus tard, Gabriel Montaldo [29] a proposé une méthode originale basée sur des itérations du retournement temporel classique qui converge vers le filtre inverse. Cette technique présente l'avantage d'être à la fois aussi précise que le filtre inverse numérique et presque aussi simple à réaliser que le retournement temporel classique. De plus, cette méthode ne repose pas sur une inversion mathématique ce qui la rend beaucoup plus stable que le

filtre inverse analytique. Nous allons ici nous intéresser à cette méthode pour réaliser des taches focales « nettoyées » de leurs lobes spatio-temporels, c'est-à-dire pour augmenter le rapport signal à bruit de la focalisation.

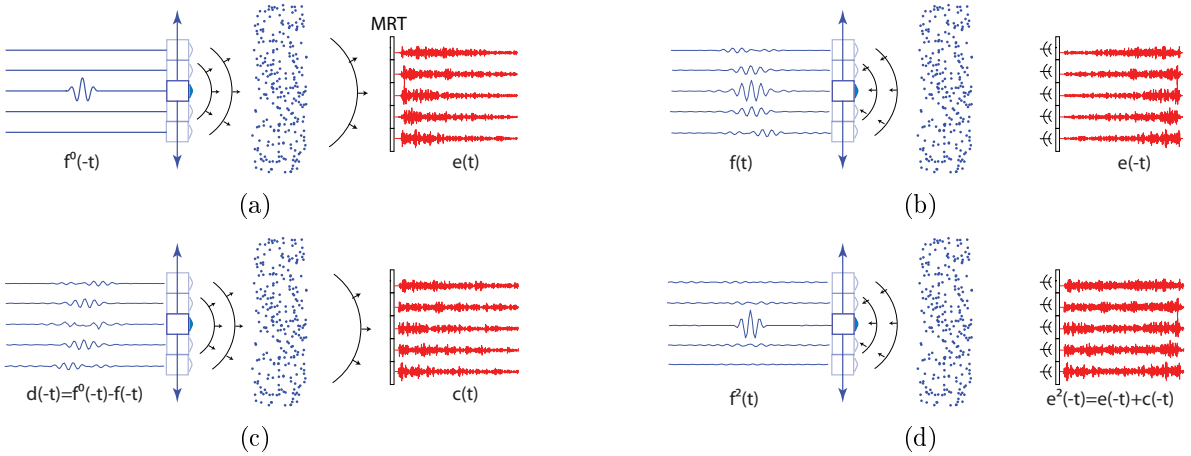

FIGURE I.15 – Principe du retournement temporel itératif : retournement temporel classique (a) et (b) ; émission des lobes secondaires (c) ; focalisation avec les signaux corrigés (d).

L'idée simple de cette méthode est d'améliorer le processus de retournement temporel en supprimant les lobes secondaires à l'aide d'un algorithme itératif. Pour la mettre œuvre, reprenons le même dispositif expérimental que lors de la première expérience de retournement temporel présentée dans ce manuscrit (figure I.4) avec la forêt de tiges. La première étape consiste à créer un objectif spatio-temporel $f_i^0(t)$ où i correspond aux différents points de contrôle. Nous choisissons une impulsion brève pour l'émission depuis le point source (qui correspondra au point focal après retournement temporel) et des signaux identiquement nuls sur les autres positions. L'impulsion choisie, dans un souci de réalisme, doit bien évidemment être contenue dans la bande passante des transducteurs. Cet objectif est alors émis par la source (figure I.15(a)).

Puis, comme dans une procédure de retournement temporel classique, chaque élément du MRT enregistre et mémorise la réponse impulsionnelle $h_k(t)$, $k \in [\![1; N_s]\!]$. Ces signaux sont inversés dans le temps pour donner les signaux d'initialisation de l'algorithme $e_k^1(t) =$ puis renvoyés du MRT vers le plan focal (figure I.15(b)). En déplaçant le transducteur mono-élément, on va, comme dans les opérations de retournement temporel menées jusqu'à maintenant, acquérir le champ acoustique $f_i(t)$ sur les différentes positions i du plan focal. Le signal reçu au point focal ressemble à l'objectif mais contient des lobes secondaires temporels. Les signaux reçus sur les autres positions sont eux aussi « pollués » par des signaux temporels car la focalisation spatiale n'est pas parfaite comme nous l'avons vu précédemment. Ces deux premières étapes correspondent au retournement temporel

classique.
L'idée de cette méthode est de supprimer les lobes secondaires en utilisant le retournement temporel de manière itérative. On isole les lobes secondaires en faisant une simple soustraction par l'objectif que l'on s'était fixé : $d_i(t) = f_i^0(t) - f_i(t)$ (figure I.15(c)). Les signaux $d_i(t)$ sont retournés temporellement et émis du plan focal vers le MRT qui enregistre des signaux $c_k(t)$. Si le MRT envoie $c_k(-t)$ une approximation de l'opposé des lobes secondaires obtenus précédemment $d_i(t)$ est recréée en chaque point du plan focal. Il suffit donc que le MRT envoie $e_k^2(t) = e_k^1(t) + c_k(-t)$ pour reformer l'objectif au point focal. Comme le schématise la figure I.15(d) les signaux reçus présentent toujours des lobes secondaires mais d'amplitude moindre. Il convient désormais de réitérer le procédé depuis la seconde étape jusqu'à obtenir un niveau de lobes minimal. Lorsqu'on atteint l'objectif, on mémorise les derniers signaux envoyés par le MRT qui permettent de focaliser l'onde au point focal désiré.
Gabriel Montaldo a montré [29] que cette méthode converge vers le filtre inverse décrit au paragraphe précédent. Par rapport au résultat obtenu lors de l'équation I.17 qui concerne le filtre inverse, avec le retournement temporel itératif à la n^{ème} itération le champ $\mathbf{f}$ obtenu est :

$$\mathbf{f}^n = \left(\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger)^n\right) \mathbf{f}^\mathbf{0} \tag{I.18}$$

où $\mathbf{I}$ est l'opérateur identité et † est l'opérateur de transposition hermitienne ($\mathbf{H}^\dagger = {}^t\mathbf{H}^*$). A la condition d'une bonne normalisation de $\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger$ qui est effectuée à l'émission, la technique converge vers la matrice identité suivant une loi de puissance en n. Cette méthode, telle qu'expliquée jusqu'à présent, est une méthode de filtrage inverse itérative que l'on peut réaliser de manière analogique. Cependant, comme dans le paragraphe précédent, si on connaît l'opérateur de propagation $\mathbf{H}$ entre toutes les positions d'enregistrement et le miroir à renversement du temps, on peut simuler la propagation numériquement par des produits de convolution, la différence étant qu'aucun bruit expérimental ne participe à l'opération. On a alors directement accès aux signaux temporels qui assurent un objectif spatio-temporel donné.
Après seulement une vingtaine d'itérations, les signaux reçus dans le plan focal sont largement nettoyés de leurs lobes spatio-temporels. Temporellement (figure I.16), la valeur moyenne des lobes secondaires se situe 15 dB en-dessous de l'intensité du pic de focalisation dans le cas du RT classique alors que cette valeur est de 27 dB pour le retournement temporel itératif. Le niveau des lobes spatiaux décroît lui-aussi sensiblement dans les mêmes proportions : une valeur de 10 dB d'amélioration est mesurée (figure I.17). Cepen-

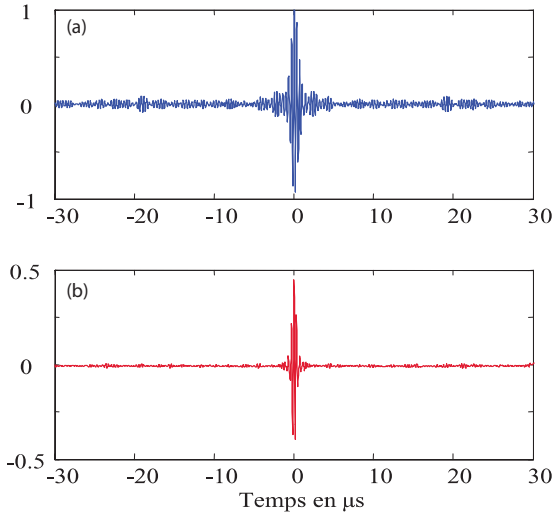

FIGURE I.16 – Impulsion reçue au point focal après retournement temporel (a), et après 15 itérations de retournement temporel itératif (b).

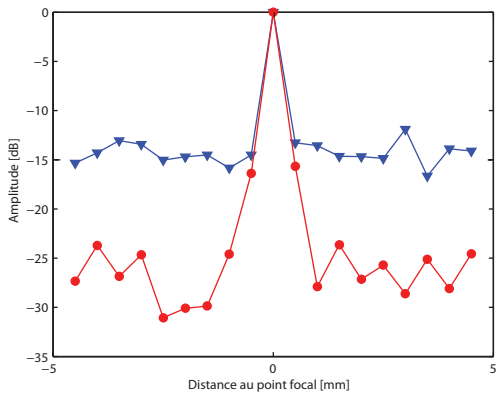

FIGURE I.17 – Focalisation spatiale après retournement temporel (bleu) et 15 itérations de retournement temporel itératif (rouge).

dant la méthode itérative présente un inconvénient : comme il s'agit d'un filtre inverse et non plus d'un filtre adapté, l'amplitude du pic de focalisation décroît sensiblement (6 dB) par rapport au retournement temporel, comme on peut le voir sur l'échelle du signal temporel reçu après itérations. En ajustant le nombre d'itérations Geoffroy Lerosey et Gabriel Montaldo [14] ont montré que cette méthode permet d'augmenter le débit d'informations dans le cadre de télécommunications par retournement temporel.
Notons à nouveau que cette méthode de filtre inverse tire grandement parti des degrés de liberté offerts lors de la propagation dans un milieu complexe, pour obtenir des résultats bien meilleurs que ceux qui pourraient être obtenus en espace libre. Cependant, elle résulte, tout comme le retournement temporel, en une focalisation qui est symétrique par rapport aux variables de temps et d'espace. Ceci se comprend assez facilement quand on regarde les équations dans l'espace de Fourier. Le filtre inverse correspond à une inversion du champ obtenu spatialement fréquence par fréquence ce qui se traduit par une inversion spatio-temporelle.

I.3 Conversion des degrés de liberté

La focalisation par retournement temporel permet de contrôler les sources virtuelles générées lors de la propagation dans un milieu complexe, et cela même dans les cas extrêmes (source unique ou fréquence unique). Ces deux cas limites nous ont par ailleurs montré

que l'efficacité de la focalisation est la même spatialement que temporellement. En effet, le contrôle des degrés de liberté résulte en une somme cohérente des ondes au point focal et à un instant donné, et en une somme incohérente partout ailleurs et à tout autre instant. Si, au lieu d'utiliser le retournement temporel, qui agit comme un filtre adapté, on utilise un filtre inverse le résultat est une inversion spatio-temporelle du champ créé dans le plan focal. Un autre contrôle des sources virtuelles est donc possible, mais la focalisation reste équivalente temporellement et spatialement. La question qui va nous intéresser au cours de cette partie concerne la possibilité de briser cette symétrie temps/espace : est-il possible de convertir des degrés de liberté spatiaux en degrés de liberté temporels et vice et versa ?

I.3.1 Algorithme d'un filtre inverse spatial

Dans cette partie, nous voulons relâcher les contraintes temporelles que l'on impose au champ ondulatoire et voir s'il est possible d'obtenir de meilleurs résultats d'un point de vue spatial. En effet, un problème typique en imagerie (ou en détection) est que le nombre de points sur lesquels on essaie de focaliser (ou de manière équivalente le nombre de cibles que l'on essaie de détecter) doit être plus petit que le nombre de récepteurs que l'on utilise. Cette limite provient du fait que les techniques classiques d'inversion, qui ont une base mathématique, se font fréquence par fréquence ; par conséquent, le nombre maximal de valeurs singulières à inverser est nécessairement limité par le nombre de degrés de liberté spatiaux N_s. Le filtre inverse itératif ne déroge pas à la règle puisqu'il converge vers le filtre inverse analytique. Pour bien comprendre cette propriété il faut regarder la matrice $\mathbf{H}(\omega)$ dans le cas où $N_s = 1$. Dans cette situation très précise, il ne s'agit d'ailleurs plus d'une matrice mais d'un vecteur colonne $L \times 1$. Son inversion à fréquence fixée résulte en l'inversion d'une unique valeur singulière. Est-il cependant possible avec cet unique transducteur de réaliser une inversion spatiale du champ sur plusieurs points ?
Nous avons proposé en 2009 [30] une méthode itérative qui permet de traiter de manière cohérente les degrés de liberté temporels (en d'autres termes toutes les fréquences contenues dans la bande passante) de manière à obtenir une focalisation spatiale optimale. Évidemment ceci a un coût comparé au filtre inverse : le champ résultant de notre algorithme n'est pas une inversion spatio-temporelle du champ mais seulement une inversion spatiale instantanée à l'instant de la focalisation.
Pour cette expérience, nous reprenons le même dispositif expérimental que précédemment. L'expérience débute par une étape de retournement temporel classique. Pour simplifier les notations nous considérons que l'impulsion initiale est un Dirac temporel $\delta(t)$: les effets

de la bande passante des transducteurs sont contenus dans la réponse impulsionnelle du dispositif expérimental. Nous émettons à l'étape de réémission les signaux $h_{ik}(-t)$ depuis le MRT de manière à focaliser une impulsion à la position i. L'impulsion obtenue après cette étape au point i permet de définir l'instant de la focalisation $t = 0$. En fait, nous réalisons L étapes de retournement temporel, et nous obtenons la matrice F des signaux reçus à la position j lorsqu'on focalise à la position i :

$$\mathbf{F}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{N_s} h_{jk}(t) * h_{ik}(-t) \tag{I.19}$$

La matrice $\mathbf{F}(t)$ des L opérations de retournement temporel s'écrit de manière équivalente dans l'espace de Fourier :

$$\mathbf{F}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}^{\dagger}(\omega) \tag{I.20}$$

$\mathbf{F}(\omega)$ est une matrice carrée de dimension L et le nombre de sources nécessaires à la focalisation N_s n'intervient pas dans sa dimension. Désormais, nous allons nous concentrer sur l'instant $t = 0$, c'est-à-dire l'instant du maximum de l'impulsion reçue après retournement temporel. Les valeurs obtenues à cet instant s'écrivent simplement à partir des matrices $\mathbf{F}(\omega)$ ou $\mathbf{F}(t)$:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}(t = 0) = \int_{\omega} \mathbf{F}(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{I.21}$$

La matrice $\mathbf{G}$, dont chaque élément est la somme des différentes contributions fréquentielles, représente une photo instantanée à $t = 0$ des champs après focalisation par retournement temporel. C'est l'inversion de cette matrice carrée de dimension L qui va nous intéresser. Comparé aux problèmes inverses traditionnels, l'inversion ne dépend donc pas uniquement des N_s sources utilisées dans le MRT mais de l'ensemble des degrés de liberté offerts par le milieu. Cette inversion est donc bien différente de celle présentée précédemment où l'on a inversé la matrice de propagation fréquence par fréquence. L'ensemble des composantes fréquentielles qui contribuent à la focalisation sont traitées de manière cohérente.

Le but est de trouver la banque de signaux temporels $\mathbf{E}$ qui permet une inversion spatiale instantanée. La première étape est une étape de renormalisation des signaux à émettre par RT de telle sorte que $\mathbf{G}$ ait une diagonale unitaire (c'est-à-dire que toutes les impulsions focalisées ont la même amplitude). Ensuite, il faut annuler les lobes spatiaux créés à la position $j \neq i$ et à l'instant $t = 0$ lors de la focalisation à la position i (à savoir $\mathbf{G}_{ij}$ pour $i \neq j$). L'idée de l'algorithme que nous avons proposé est d'ajouter aux signaux initiaux

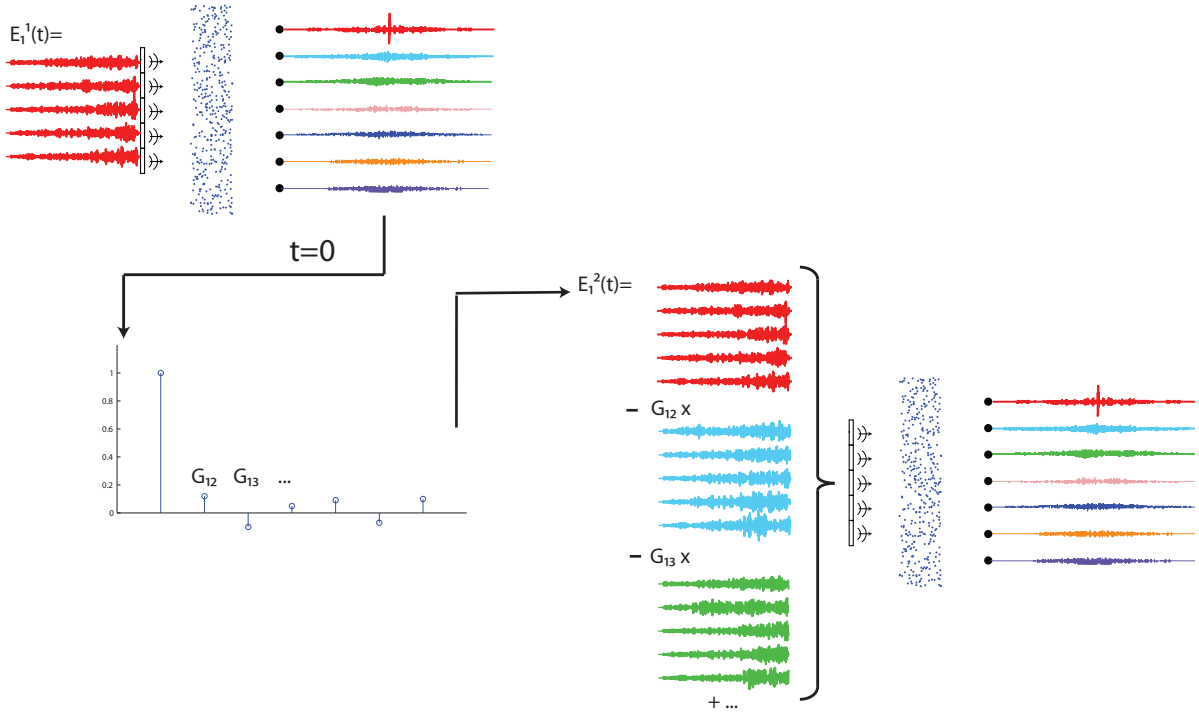

FIGURE I.18 – Schéma de principe de l'algorithme d'inversion spatiale instantanée du champ.

qui focalisent à la position i, une somme de signaux qui focalisent à la position $j \neq i$ mais multipliés par l'opposé du niveau de lobes secondaire que l'on souhaite annuler (à savoir $-\mathbf{G}_{ij}$).

Ainsi, on « nettoie » les lobes spatiaux secondaires sur les positions $j \neq i$ lorsqu'on focalise sur le point i (figure I.18). Naturellement, cette étape crée de nouveaux lobes secondaires et il convient d'itérer le processus pour converger (si cela est possible) vers l'inversion complète. En résumé, les signaux émis à la $n^{\text{ème}}$ itération s'écrivent dans l'espace de Fourier :

$$\mathbf{E}^{(n+1)}(\omega) = 2\mathbf{E}^{(n)}(\omega) - {}^{t}\mathbf{G}^{(n)}\mathbf{E}^{(n)}(\omega) \tag{I.22}$$

Avec pour étape d'initialisation de l'algorithme l'émission des signaux de retournement temporel $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{H}^{\dagger}$.

Après propagation depuis les éléments du MRT vers le plan focal, on peut écrire le champ obtenu en chaque position $\mathbf{F}^{(n+1)}(\omega)$ ainsi que sa valeur à l'instant de la focalisation $\mathbf{G}^{(n+1)}$:

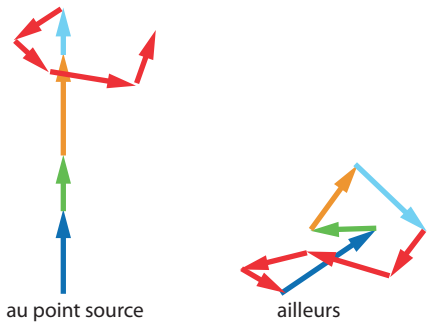

FIGURE I.19 – Représentation avec les vecteurs de Fresnel de l'effet de l'algorithme. Comparé à la figure I.10 dans le cas du retournement temporel, l'algorithme ajoute des corrections (flèches rouges) qui annulent le champ à $t = 0$ en dehors du point focal et se somment de manière incohérente au point focal.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(n+1)}(\omega) &= \mathbf{F}^{(n)}(\omega)\left(2\mathbf{I} - \mathbf{G}^{(n)}\right) \\ \mathbf{G}^{(n+1)} &= \mathbf{G}^{(n)}\left(2\mathbf{I} - \mathbf{G}^{(n)}\right) \end{aligned} \tag{I.23}$$

Ce qui nous permet d'obtenir simplement le champ instantané à la $n^{\text{ème}}$ itération :

$$\mathbf{G}^{(n)} = \mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{G})^{(2^{n-1})} \tag{I.24}$$

Sous certaines conditions que nous discuterons plus tard, cette suite converge vers la matrice identité $\mathbf{I}$ avec une progression géométrique. L'exposant de la convergence est 2^{n-1} ce qui signifie que l'inversion est réalisée avec très peu d'itérations.
Nous pouvons encore une fois interpréter le résultat de la focalisation après l'algorithme à l'aide des vecteurs de Fresnel. En effet, lorsqu'on regarde la somme des contributions de chacune des fréquences, cela correspond exactement à regarder la tache focale instantanée. L'algorithme ajoute des corrections par rapport au retournement temporel. En dehors du point focal ces corrections permettent d'annuler le champ instantané et de revenir à l'origine, alors qu'au point focal ces corrections se somment de manière incohérente (figure I.19).

I.3.2 Vérification expérimentale

Nous avons testé cet algorithme à l'aide du dispositif expérimental de l'expérience de focalisation par retournement temporel à travers la forêt de tiges. Étant limités à une

fréquence d'échantillonnage de 32 MHz par le matériel disponible, nous avons abaissé la fréquence centrale des transducteurs à 1.5 MHz pour avoir une meilleure résolution temporelle. La première étape consiste à enregistrer les réponses impulsionnelles entre les $L = 21$ positions séparées de 1 mm de notre plan focal et l'unique transducteur ($N_s = 1$) qui compose notre MRT.
A partir de ces signaux, l'algorithme est lancé numériquement, et après seulement 6 itérations, le niveau moyen des lobes spatiaux à $t = 0$ a atteint une valeur plus faible que le niveau de bruit moyen de l'expérience. L'algorithme nous renvoie une banque de $L \times N_s$ signaux temporels $e_{ij}(t)$ qui sont supposés assurer une focalisation spatiale optimale à $t = 0$.

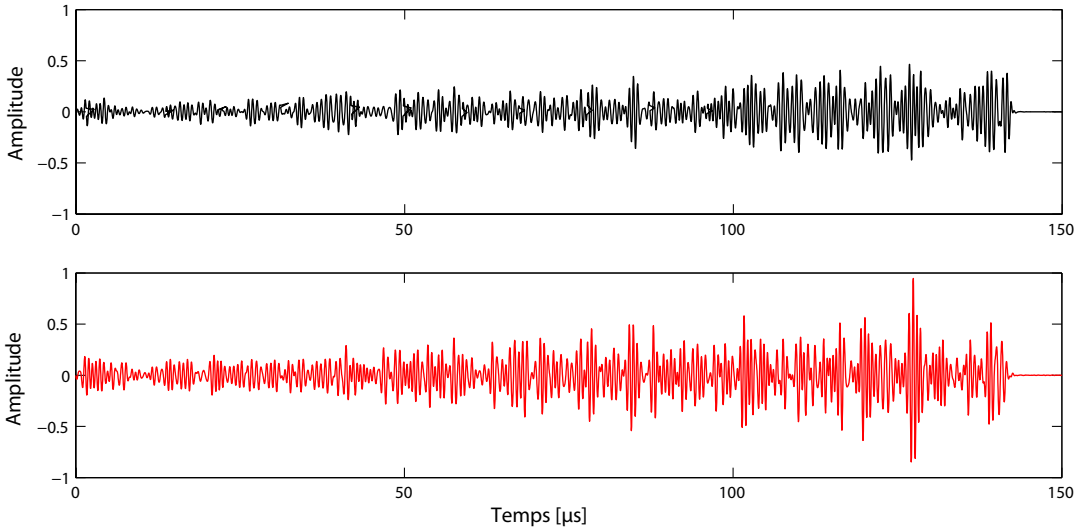

FIGURE I.20 – Signal de retournement temporel (haut) et issu de l'algorithme (bas) à émettre depuis le MRT pour focaliser sur la 11ème position.

À titre d'exemple, la figure I.20 présente un signal d'émission pour une expérience de retournement temporel et un signal d'émission pour le filtre inverse spatial instantané à $t = 0$. Comme nous l'avons vu précédemment, le retournement temporel agit comme un filtre adapté de la propagation donc il maximise l'énergie reçue au point focal. Les signaux issus de l'algorithme déposent donc un peu moins d'énergie au point focal et il faut envoyer plus d'énergie pour assurer la même amplitude de focalisation. Dans le cas des signaux de l'algorithme, étant donné que les contraintes spatio-temporelles de focalisation sont relativement faibles, nous n'avons besoin d'envoyer que 1.4 fois plus d'énergie qu'avec les signaux de RT.
Comme dans une expérience de retournement classique, on réémet un de ces signaux

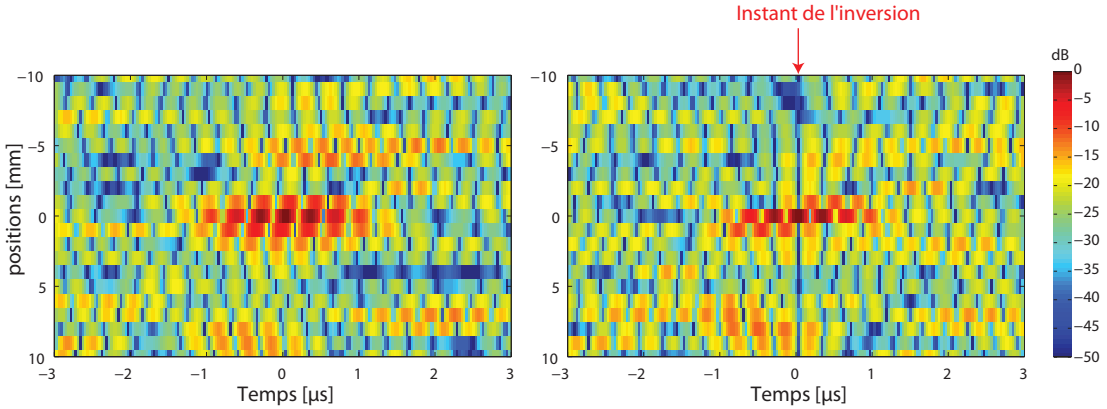

FIGURE I.21 – Cartes des signaux mesurés dans le plan focal après retournement temporel (gauche) et inversion spatiale à $t = 0$ (droite).

depuis le MRT et on mesure le champ dans le plan focal à l'aide d'un transducteur monté sur un banc de translation. Les champs ultrasonores mesurés pour le retournement temporel et dans le cas de l'émission des signaux issus de l'algorithme sont représentés sur la figure I.21 en échelle logarithmique. Comme escompté, le champ est focalisé dans les deux cas autour de la position $x = 0$ qui a été choisie lors de l'émission.

Pour quantifier l'effet de l'algorithme sur la focalisation, nous comparons tout d'abord la tache focale spatio-temporelle obtenue à celle obtenue par retournement temporel. Le signal reçu au point focal dans le cas de l'algorithme reste focalisé temporellement (figure I.22). Hormis les lobes temporels, on reçoit essentiellement une impulsion centrée autour de $t = 0$ au point focal. Ce signal est donc similaire à celui obtenu dans une expérience de retournement temporel sauf que la symétrie temporelle par rapport à $t = 0$ a été perdue. Les lobes temporels avant et après l'impulsion ne sont plus les mêmes mais la compression temporelle a bien été conservée.

Spatialement, il est d'usage de quantifier la focalisation en mesurant le maximum dans le temps de la valeur absolue des signaux reçus dans le plan focal. Les taches focales obtenues de cette manière (figure I.23) sont très similaires pour les signaux issus de l'algorithme et pour le retournement temporel. Le champ ultrasonore au point focal est, dans les deux cas, plus intense d'une valeur moyenne de 12 dB par rapport au champ reçu sur n'importe quelle autre position. L'algorithme n'a donc pas eu d'effet sur la focalisation spatiale moyennée au cours du temps : il n'a ni dégradé ni amélioré la focalisation mesurée sur toute la fenêtre temporelle. Ceci confirme le fait que l'algorithme n'effectue pas une inversion spatio-temporelle du champ. Les signaux issus de l'algorithme donnent des résultats similaires au retournement temporel en terme de focalisation spatio-temporelle,

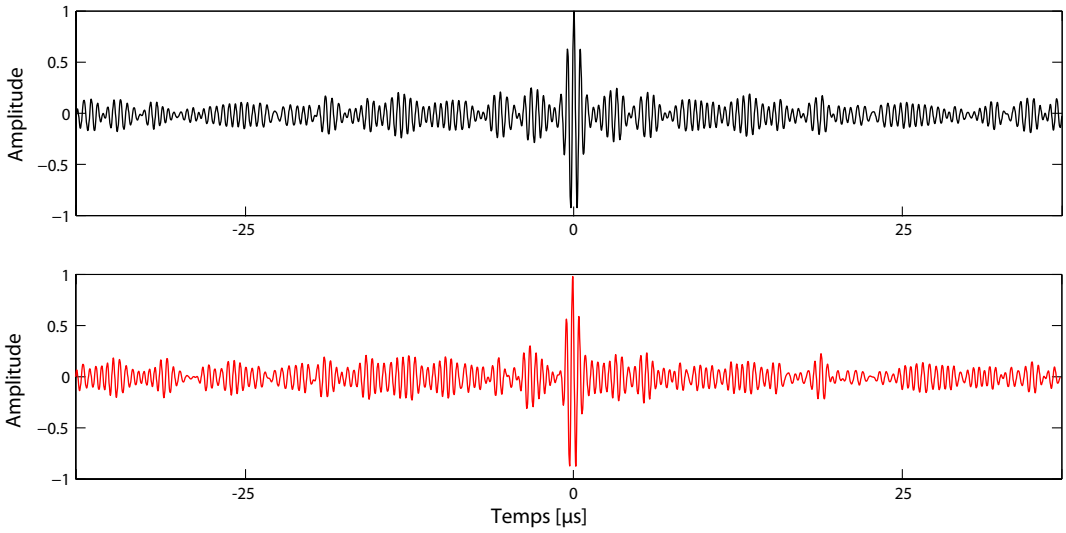

FIGURE I.22 – Signal reçu au point focal après émission des signaux de retournement temporel (haut) et issus de l'algorithme itératif (bas).

en particulier en terme de dépôt d'énergie.

Pour voir l'effet de l'algorithme, il faut observer la tache focale instantanée obtenue à l'instant de la focalisation temporelle $t = 0$. Alors que dans le cas du retournement temporel celle-ci correspond en moyenne à celle obtenue en calculant le maximum dans le temps, avec les signaux de l'algorithme le niveau de lobes spatiaux est diminué drastiquement d'environs 30 dB (figure I.23 courbe bleue). On peut voir nettement l'effet de cette inversion à l'instant $t = 0$ de la focalisation sur les cartes de champs mesurées dans le plan focal (figure I.21). Le niveau des lobes spatiaux à l'instant de la focalisation a ici atteint le niveau de bruit expérimental. L'inversion spatiale escomptée ne se produit qu'à l'instant de la focalisation, contrairement au filtre inverse spatio-temporel. En revanche, comme les contraintes de l'inversion sont très faibles, on peut obtenir une inversion qui atteint le niveau de bruit expérimental autour de -45 dB, ce qui n'est pas le cas avec un filtre inverse spatio-temporel. Même si l'algorithme a été réalisé numériquement, il est très efficace car il traite de manière cohérente toute la bande passante et ne nécessite pas de méthode de régularisation.

Étant donné que l'algorithme nous donne les $L \times N_s$ signaux pour focaliser sur les L positions de contrôle, nous avons aussi pu vérifier l'inversion de la matrice de $\mathbf{G}$ après les 6 itérations. Sur la figure I.24 nous avons représenté la matrice $\mathbf{G}$ expérimentale obtenue après l'étape d'initialisation de l'algorithme, c'est-à-dire après retournement temporel. Le niveau moyen des lobes secondaires spatiaux instantanés est autour de -12 dB. Après

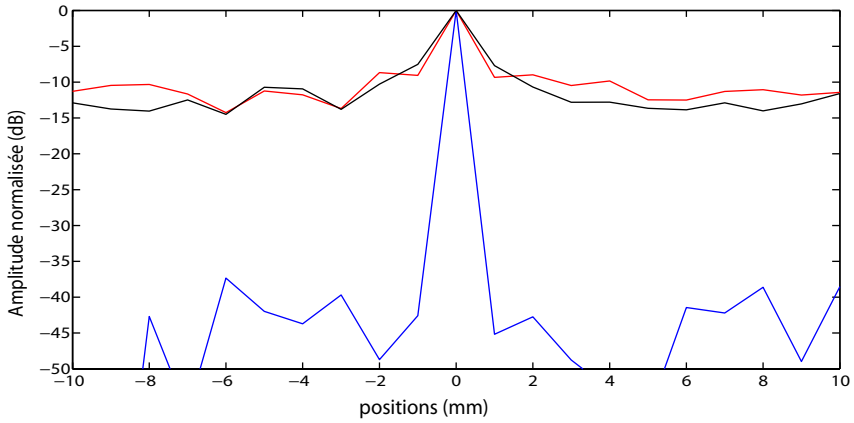

FIGURE I.23 – Mesure de la tache focale en gardant le maximum des signaux temporels reçus après retournement temporel (noir) et après émission des signaux de l'algorithme (rouge). La courbe bleue représente la tache focale instantanée avec les signaux de l'algorithme situés environs 40 dB en-dessous du retournement temporel.

convergence de l'algorithme, nous avons émis les signaux de focalisation puis mesuré les champs ultrasonores autour de chacun des points focaux. La matrice $\mathbf{G}$ en fin d'algorithme démontre l'inversion qui a été réalisée puisque désormais les éléments hors diagonale ont un niveau moyen autour de -40 dB.

Cet algorithme, qui est très simple à mettre en œuvre sous réserve qu'il converge, peut être appliqué à l'imagerie. En effet, le but de l'inversion est de diminuer les lobes spatiaux lorsqu'on veut focaliser sur plusieurs positions. Pour aller encore plus loin, plusieurs sources placées sur nos points de contrôles peuvent émettre simultanément une impulsion et on enregistre les signaux reçus par le MRT. À l'aide de la banque de signaux que l'algorithme itératif fournit, nous espérons être capables de reconstruire la distribution spatiale des sources initiales. Il s'agit donc bien ici d'une application de type imagerie puisqu'on cherche à reconstruire une distribution spatiale de sources.

Pour tester ce genre d'applications, nous avons émis simultanément une impulsion depuis $L = 21$ positions à l'aide d'une barrette échographique. Pour se rapprocher au mieux d'une application d'imagerie nous avons pondéré ces émissions simultanées par un motif d'amplitude (figure I.25 gauche). Avec un unique transducteur nous avons enregistré le signal $s(t)$ transmis à travers la forêt de tiges. À l'aide des réponses impulsionnelles qui avaient été préalablement acquises nous allons essayer de reconstruire le motif d'émission. Par inter-corrélation de ce signal $s(t)$ avec les réponses impulsionnelles $(h_i(t) * s(-t))$ nous effectuons l'équivalent numérique du retournement temporel. La somme de toutes les taches focales pondérées par le motif d'amplitude donne une estimation du motif

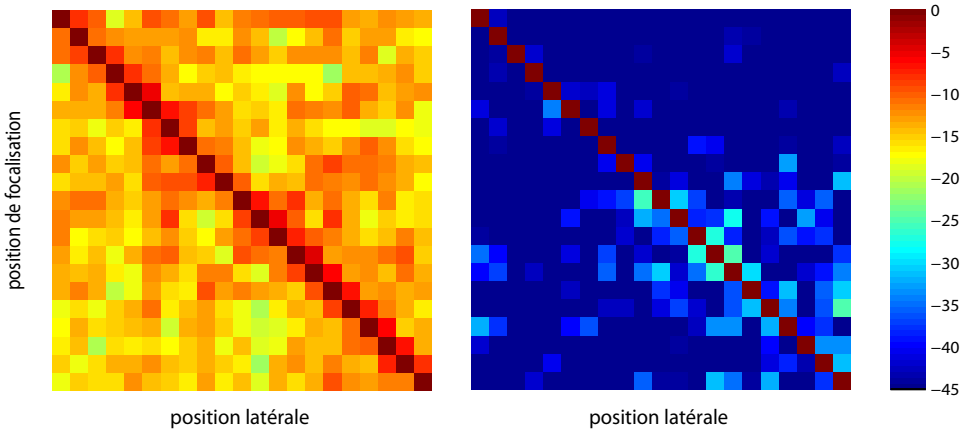

FIGURE I.24 – Matrice **G** des L taches focales instantanées (en dB) après une itération (gauche) et après 6 itérations (droite).

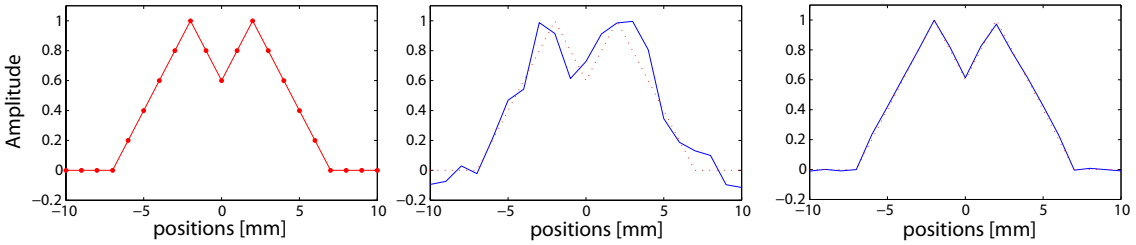

FIGURE I.25 – Expérience d'imagerie. Les transducteurs émettent simultanément une impulsion avec un motif d'amplitude (gauche). La reconstruction de l'image se fait par corrélation avec les réponses impulsionnelles (milieu) et par les signaux issus de l'algorithme (droite).

initial. Cependant les lobes spatiaux et temporels secondaires que crée une tache focale sur les autres positions détériorent la qualité du motif d'amplitude que l'on observe dans le plan focal. Avec cette méthode d'imagerie nous construisons une approximation de la distribution spatiale initiale des sources (figure I.25 milieu) avec une erreur moyenne de l'ordre de 5 dB.

À présent, au lieu d'utiliser les réponses impulsionnelles pour reconstruire l'image des sources, nous utilisons les signaux issus de l'inversion à $t = 0$. Par inter-corrélations, nous reconstruisons le champ dans le plan focal et nous nous concentrons sur l'instant de la focalisation temporelle. Étant donné l'efficacité de l'inversion pour chacune des positions où le motif d'amplitude est non nul, les lobes secondaires créées sur les autres positions sont très faibles. Ainsi, avec cette méthode nous reconstruisons le motif initial avec une

erreur de l'ordre de -20 dB (figure I.25 droite).
Cette expérience nécessite que les sources émettent toutes une impulsion symétrique dans le temps et ce simultanément. Pratiquement, ceci peut être réalisé en illuminant avec une onde plane un motif de contraste (une plaque métallique percée par exemple). Ce type d'algorithme peut selon nous également avoir un intérêt dans des applications de détection de sources avec des ondes élastiques comme par exemple les tablettes tactiles qui ont été développées au laboratoire par Ros Kiri Ing [31]. En effet, lorsque le milieu de propagation est complexe et la bande passante des signaux utilisés large, un unique capteur permet de détecter parfaitement un nombre important de sources simultanément. Enfin, comme cette méthode d'inversion permet d'adresser indépendamment des bits d'information sur différents points de contrôle avec un rapport signal à bruit optimal, elle peut aussi présenter un grand avantage pour les télécommunications à large bande passante de type MIMO (« Multiple Input-Multiple Output »).

I.3.3 Limites de l'inversion et degrés de liberté

Grâce aux degrés de liberté temporels qu'offre le milieu de propagation, cette méthode permet de réaliser une inversion spatiale du champ à $t = 0$, même avec un unique transducteur. Afin de bien comprendre cette conversion de degrés de liberté, il faut quantifier les limites de l'algorithme.
Revenons un peu plus en détail sur la définition de la matrice $\mathbf{G}$ après l'étape d'initialisation de l'algorithme. L'équation I.21 traduit le fait que $\mathbf{G}$ est la somme sur toutes les fréquences de la bande passante des matrices de covariance $\mathbf{HH}^\dagger$. $\mathbf{G}$ est une photo instantanée du champ à $t = 0$, elle est par définition réelle et symétrique. Elle est donc semblable à une matrice diagonale à valeurs propres positives. On peut alors écrire $\mathbf{G}$ comme le produit $\mathbf{PDP}^\dagger$ où $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale à coefficients positifs, et $\mathbf{P}$ une matrice de changement de base. Avec cette notation la matrice $\mathbf{G}^{(n)}$ de la focalisation spatiale instantanée après n itérations s'écrit :

$$\mathbf{G}^{(n)} = \mathbf{P}\left(\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{(2^{n-1})}\right)\mathbf{P}^\dagger \tag{I.25}$$

Ainsi, la suite $\left(\mathbf{G}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice identité si les valeurs propres de la matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{(2^{n-1})}$ sont comprises entre -1 et 1. En d'autres termes, la suite converge si la plus grande valeur propre de $\mathbf{D}$, qui est aussi celle de $\mathbf{G}$, est inférieure à deux [5]. Étant donné la définition de $\mathbf{G}$, cela équivaut à dire que sa norme Euclidienne $\|\mathbf{G}\|_2$ doit être

5. Il faut garder en mémoire que l'algorithme itératif débute par une étape de renormalisation de manière à avoir une matrice $\mathbf{G}$ d'initialisation à diagonale unitaire.

inférieure à 2.
Essayons à présent de donner un sens physique à ce critère mathématique de convergence. Pour simplifier les calculs nous partons du principe que les fonctions de Green entre les N_s éléments du MRT et les L positions de contrôle sont décorrélées. Cela revient à dire que les capteurs du MRT et les positions de contrôle sont séparées d'une distance supérieure à la longueur de cohérence l_{coh} du champ. Ces fonctions de Green suivent donc une statistique aléatoire. Dans le domaine de Fourier, cela revient à dire que $\mathbf{H}_{ij}(\omega)$ est une variable complexe aléatoire à moyenne nulle. Lors de l'étape de renormalisation, pour assurer une amplitude de focalisation fixée à 1, nous avons de fait imposé la variance de ces variables aléatoires à $\frac{1}{N_s}$, l'inverse du nombre de degrés de liberté spatiaux.
Faisons une autre hypothèse concernant la dépendance fréquentielle des champs : nous choisissons de diviser la bande passante en segments de largeur $\delta\omega$. Ce pas fréquentiel est choisi comme la plus petite longueur spectrale qui garantit d'avoir des fréquences décorrélées, c'est-à-dire la fréquence de corrélation du milieu de propagation. Avec cette seconde hypothèse, on quantifie le nombre de degrés de liberté temporels contenus dans la bande passante $\Delta\omega$ comme étant $N_f = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega}$. On réécrit alors la matrice $\mathbf{G}$ comme une somme discrète (et non plus une intégrale) dont les coefficients sont égaux à :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{ij} &= \frac{1}{N_f}\sum_{k=1}^{N_f}\sum_{n=1}^{N_s}\mathbf{H}_{in}^{\omega_k}\mathbf{H}_{jn}^{\omega_k *} \\ \text{avec} \quad < \mathbf{H}_{in}^{\omega_k}\mathbf{H}_{im}^{\omega_l *} > &= \underbrace{\frac{1}{N_s}\delta_{nm}}_{\text{hypothèse spatiale}} \times \underbrace{\delta_{kl}}_{\text{hypothèse fréquentielle}} \end{aligned} \tag{I.26}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.
Avec ces hypothèses nous pouvons écrire la moyenne et la variance des éléments de $\mathbf{G}$ en utilisant le théorème des moments :

$$\begin{aligned} < \mathbf{G}_{ij} > &= \delta_{ij} \\ \text{var}[\,\mathbf{G}_{ij}\,] &= \frac{1}{N_s N_f} \end{aligned} \tag{I.27}$$

La matrice $\mathbf{G}$ peut alors se réécrire comme la somme de la matrice identité $\mathbf{I}$ et d'une matrice réelle aléatoire de variance $\frac{1}{N_s N_f}$. Ceci nous permet de majorer la norme de $\mathbf{G}$:

$$\|\mathbf{G}\|_2 = \|\mathbf{I}_L + \mathbf{R}\|_2 \leq 1 + \|\mathbf{R}\|_2 \tag{I.28}$$

Le critère de convergence sur la norme de la matrice $\mathbf{G}$ est alors vérifié si on majore la norme de $\mathbf{R}$ par 1. La norme de $\mathbf{R}$ suit la statistique d'une matrice aléatoire dont nous avons déjà explicité la moyenne et la variance. Ainsi, nous obtenons un critère qui assure la convergence de la suite itérative vers la matrice identité. Il s'agit d'une condition entre le nombre L de points de contrôle dans le plan focal et le nombre total de degrés de liberté spatio-temporels $N = N_s N_f$:

$$L \leq N = N_s N_f \tag{I.29}$$

Ce résultat est assez facile à interpréter physiquement. Lorsqu'on focalise par retournement temporel sur une position, le niveau moyen des lobes secondaires est égal à $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Lorsqu'on essaie de focaliser sur L positions, les lobes secondaires se somment de manière incohérente et leur amplitude moyenne est donc multipliée par $\sqrt{L}$. L'équation I.29 traduit simplement le fait que le niveau des lobes secondaires doit être inférieur à l'amplitude de la somme des impulsions focalisées si l'on veut les éliminer itérativement.

On remarque que la matrice $\mathbf{G}$ est gouvernée par le nombre de degrés de liberté spatio-temporels $N = N_s N_f$. On retrouve donc l'idée que pour réaliser cette inversion dans un cas monochromatique ($N_f = 1$) il faut un nombre de sources N_s supérieur ou égal au nombre des positions de contrôle. C'est pourquoi le filtre inverse spatio-temporel, qui réalise une inversion fréquence par fréquence, nécessite un nombre de sources d'émission supérieur au nombre de points focaux.

Cette étude permet de faire un lien avec des travaux antérieurs sur les milieux complexes. Dans le cas limite où L et N_s sont suffisamment grands, R. Sprik et ses collègues [32] ont démontré que la distribution des valeurs propres de la matrice monochromatique $\mathbf{F}(\omega)$ suit une loi de Marcenko-Pastur [33], où la plus grande valeur singulière est reliée à $\frac{L}{N_s}$. Après sommation des contributions des N_f fréquences décorrélées de la bande passante nous venons de montrer que la plus grande valeur propre de $\mathbf{G}$ est quant à elle reliée à $\frac{L}{N_s N_f}$, ce qui est en accord avec le cas monochromatique.

Finalement, nous venons de démontrer pourquoi en utilisant des signaux avec une large bande passante, on réalise une inversion spatiale du champ même avec un unique transducteur à condition que le nombre de degrés de liberté temporels compense la perte d'information spatiale.

L'étude sur la convergence de l'algorithme nous renseigne aussi sur les propriétés du milieu

de propagation. Si la plus grande valeur propre de $\mathbf{G}$ est inférieure à 2, cela signifie que le nombre de degrés de liberté est suffisant pour pouvoir réaliser une inversion spatiale à $t = 0$ du champ. À nombre de degrés de liberté spatiaux N_s fixé, en diminuant la bande passante, on atteint une valeur limite où l'algorithme ne converge plus :

$$\Delta\omega_{min} = \frac{L\delta\omega}{N_s} \tag{I.30}$$

Dans cette équation, $\delta\omega$ est relié aux paramètres statistiques qui décrivent le milieu de propagation. Le théorème de Wiener-Khinchin assure que la fonction de corrélation spectrale est la transformée de Fourier de la distribution des « temps de vol ». En d'autres termes, si ΔT correspond à la durée caractéristique du temps de transport de l'énergie transmise au travers du milieu complexe, on a $\delta\omega = \dfrac{1}{\Delta T}$. Dans l'approximation de diffusion pour les milieux multiplement diffusant ce temps caractéristique de la propagation est égal au temps de Thouless [34] $\tau_{\text{thouless}} = \dfrac{{l_0}^2}{D}$, où l_0 est l'épaisseur du milieu complexe. D est le coefficient de diffusion qui, dans le cas de diffuseurs isotropes comme le sont les tiges d'acier utilisées ici, est relié au libre parcours moyen élastique l_e [35] :

$$D = \frac{c_0 l_e}{d} \tag{I.31}$$

où c_0 est la vitesse de propagation des ondes dans le milieu homogène autour des diffuseurs et d la dimension d'espace du problème étudié (ici nous avons utilisé un milieu aléatoire de dimension 2). Finalement, nous pouvons relier le libre parcours moyen élastique à la bande passante minimale qui assure la convergence de l'algorithme :

$$l_e(\omega) = \frac{2{l_0}^2 N_s \Delta\omega_{min}(\omega)}{c_0 L} \tag{I.32}$$

Nous avons voulu vérifier expérimentalement cette relation. Nous avons fait l'acquisition des réponses impulsionnelles entre $N_s = 2$ et $L = 21$ positions. Ensuite, nous avons utilisé l'algorithme itératif en diminuant graduellement la bande passante des signaux dans les cas $N_s = 1$ et $N_s = 2$. Par dichotomie nous obtenons la plus petite bande passante qui assure la convergence de l'algorithme pour différentes valeurs de la fréquence centrale d'émission dans les 2 cas. Nous vérifions en particulier que dans le cas $N_s = 2$ la bande passante nécessaire pour assurer la convergence est la moitié de celle nécessaire dans le cas $N_s = 1$. En prenant $l_0 = 3$ cm et $c_0 = 1524$ m.s^{-1} dans l'équation I.32, nous construisons une estimation du libre parcours moyen élastique en fonction de la fréquence centrale d'émission (figure I.26).

La reconstruction obtenue est alors la même dans les deux cas, ce qui justifie l'équivalence

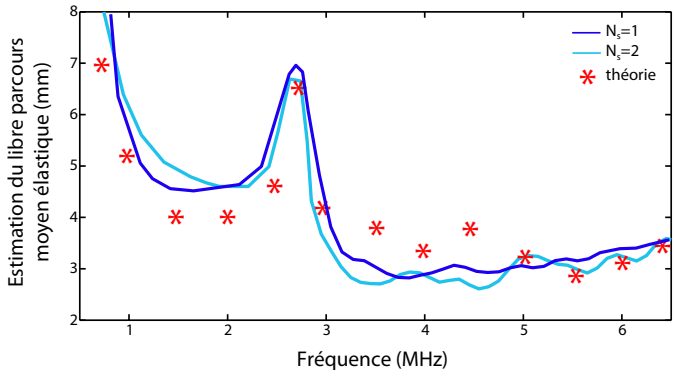

FIGURE I.26 – Évolution en fonction de la fréquence du libre parcours moyen élastique reconstruit en utilisant 1 ou 2 éléments dans le MRT. Les astérisques représentent une prédiction théorique issue de [7].

de chacun des degrés de liberté spatio-temporels. D'autre part, elle est en relativement bon accord avec les prédictions théoriques qui ont été faites sur ce type de milieu [7], puisqu'elle montre assez clairement la résonance autour de 2.75 MHz qui correspond à un pic de la section efficace de diffusion pour un cylindre d'aluminium de rayon 0.4 mm.
Enfin, nous voudrions parler des limites de l'algorithme en termes de résolution spatiale. Dans le calcul que nous avons mené, nous avons supposé que les fonctions de Green correspondant à deux points de contrôle différents sont décorrélées. Cela a été le cas jusqu'à présent puisque nous avons imposé à nos points de contrôle d'être séparés d'au moins la taille caractéristique d'un grain de speckle à la sortie du milieu diffusant, c'est-à-dire la longueur de cohérence du champ.
Ici, nous réalisons la même expérience que précédemment mais nous rapprochons les points de contrôle en imposant un pas spatial de 0.1 mm ($\lambda/10$) entre eux. Pour mesurer les fonctions de Green et le champ acoustique après refocalisation, nous avons dans ce cas dû prendre un hydrophone aiguille plutôt qu'un transducteur piézoélectrique dont la dimension latérale est trop grande. D'autre part, dans cette expérience nous avons augmenté le nombre de degrés de liberté spatiaux N_s à 3 et le nombre de points de contrôle L à 61.
Nous commençons l'expérience par l'apprentissage des 61×3 fonctions de Green. Lorsqu'on utilise l'algorithme itératif pour faire l'inversion spatiale du champ à l'instant de la focalisation celui-ci ne converge pas alors que nous avons gardé les conditions entre L et le nombre de degrés de liberté quasiment inchangées. Nous nous sommes donc attelés à trouver le pas minimal entre les positions de contrôle qui permet la convergence de l'algorithme. Ce pas minimal est de 0.5 mm ce qui correspond à une demie longueur d'onde

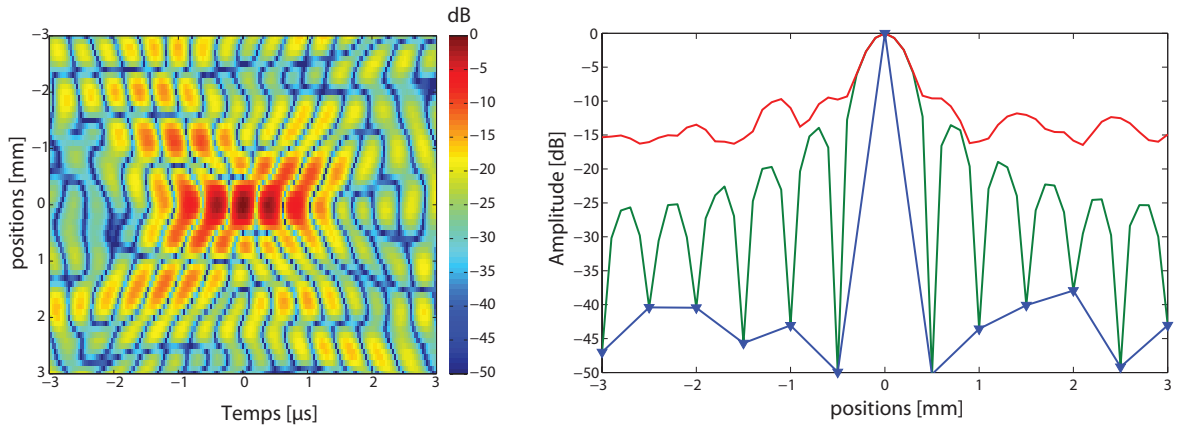

FIGURE I.27 – (Gauche) Carte des signaux ultrasonores enregistrés. (Droite) Tache focale en calculant le maximum dans le temps (rouge) et à $t = 0$.

dans l'eau pour une fréquence centrale de 1.5 MHz. Ce pas minimal correspond d'ailleurs à la largeur à mi-hauteur de la tache focale obtenue par retournement temporel à travers ce même milieu de tiges, qui est elle-même un estimateur de la longueur de cohérence du champ. Ceci justifie le fait que, lorsque les positions de contrôle sont trop proches les unes des autres, les fonctions de Green sont corrélées.

La dernière étape de l'expérience a consisté à réémettre les signaux issus de l'algorithme après convergence sur les positions séparées de $0,5\ \lambda$ et de mesurer la tache focale à l'aide de notre hydrophone. Sur la figure I.27 à gauche, nous représentons en dB la carte de champ obtenue spatialement et temporellement. La tache focale obtenue en calculant le maximum des signaux reçus en chacune des positions est représentée en trait rouge sur la figure de droite. Cette tache focale est équivalente à celle que l'on obtient par retournement temporel, ainsi qu'à celles que nous avons montrées jusqu'à maintenant. Néanmoins, le niveau moyen des lobes secondaires a légèrement diminué puisque nous avons utilisé $N_s = 3$ sources.

La tache focale obtenue à $t = 0$ lorsqu'on ne regarde que les points de contrôle est représentée en bleue sur la figure. Celle-ci montre que nous avons effectivement réussi à descendre leur amplitude au niveau du bruit expérimental comme précédemment. En revanche, lorsqu'on regarde ce qui se passe sur les positions situées entre les points de contrôle (trait vert), le niveau des lobes spatiaux remonte nettement. Cette tache focale instantanée a une forme de sinus cardinal où les zéros correspondent à nos points de contrôle, mais le niveau des lobes est régi par la théorie de la diffraction. Ceci montre que l'algorithme permet d'obtenir une inversion du champ sur des points de contrôle suffisamment espacés,

mais il ne permet pas de générer un champ qui peut varier spatialement à une échelle plus petite que la demie longueur d'onde dans l'eau. Les ondes ont une échelle de variation spatiale caractéristique qui ne peut pas être changée par une méthode d'inversion.
En résumé, cette méthode d'inversion spatiale à $t = 0$ permet d'exploiter au maximum les degrés de liberté spatiaux et temporels offerts par le milieu de propagation. Ceci permet par exemple de diminuer le nombre de capteurs que l'on utilise pour imager des sources et nous pensons que ce type de procédure peut présenter de nouvelles perspectives dans la détection de sources et dans les techniques de contrôle non destructif. Nous pensons aussi que ceci peut avoir un intérêt pour des applications de télécommunications à large bande passante. En effet, nous avons réalisé une inversion à un instant unique mais on peut imaginer réaliser cette inversion sur un peigne de temps avec un pas qui correspond au temps entre 2 bits d'information. Enfin, cette manipulation des degrés de liberté spatiaux et temporels ouvre de nouvelles perspectives pour le contrôle de champ optique, où les échelles de temps sont bien plus petites. Ainsi, des travaux récents concernant la focalisation spatiale et temporelle de champs optiques [36,37] s'inspirent de nos résultats pour contrôler les degrés de liberté offerts par les milieux complexes. Dans ces références, les auteurs montrent qu'en ne jouant que sur les degrés de liberté spatiaux à l'aide d'un modulateur spatial de phase, ils contrôlent le champ temporel reçu en un point particulier à la sortie d'un milieu multiplement diffusant.

I.4 Conclusion

Nous avons consacré ce premier chapitre à l'étude de la propagation des ondes dans des milieux complexes et aux techniques qui existent pour tirer profit d'un tel milieu de propagation. Nous avons commencé notre étude en rappelant les principes de la physique des ondes et en donnant les solutions de l'équation d'onde en espace libre. Nous avons introduit les différents degrés de liberté que l'expérimentateur peut utiliser pour contrôler les ondes. Celui-ci peut en effet manipuler des degrés de liberté temporels en émettant des signaux temporels avec une large bande passante, et il peut contrôler des degrés de liberté spatiaux en utilisant plusieurs sources d'émission.
Ensuite, nous avons vu que l'introduction d'un milieu de propagation qui présente des réflecteurs (ou des diffuseurs) permet la génération de sources virtuelles. Ces sources virtuelles sont inhérentes à la propagation des ondes dans un tel milieu et sont généralement considérées comme des obstacles pour de nombreuses applications. Nous avons alors montré qu'il est possible de tirer partie de ces sources virtuelles en utilisant la technique qui est étudiée au laboratoire depuis presque 20 ans : le retournement temporel. Cette tech-

nique, qui repose sur l'invariance par renversement du temps de l'équation d'onde, est une méthode robuste qui permet de focaliser des ondes dans le temps et dans l'espace au travers d'un milieu complexe. Les résultats obtenus en terme de focalisation spatiale sont d'ailleurs meilleurs que ceux obtenus en espace libre. En étudiant les cas limites du retournement temporel, une unique source avec une large bande passante, et une multitude de sources monochromatiques, nous avons mis en évidence qu'il est possible de contrôler les sources virtuelles générées lors de la propagation, utilisant ainsi chacun des différents types de degrés de liberté. Cela nous a conduit à nous intéresser plus en détail à la manipulation et à la conversion de ces degrés de liberté.

À l'aide d'un algorithme itératif, nous avons montré qu'il est possible de convertir des degrés de liberté temporels en une information spatiale. Alors que la focalisation par retournement temporel est équivalente spatialement et temporellement, nous avons obtenu une focalisation spatiale optimale (toutefois limitée par la limite de diffraction) à l'instant de la focalisation temporelle. En étudiant théoriquement les limites de cette procédure, nous avons mis en évidence que le paramètre important lors de la propagation en milieu complexe est le produit des N_f degrés de liberté temporels par les N_s degrés de liberté spatiaux.

Cette étude, réalisée dans le cas des ondes scalaires, est généralisable à tout type d'ondes, et ouvre de nombreuses perspectives pour le contrôle spatio-temporel d'ondes. En optique, des travaux récents pour focaliser des ondes spatialement et temporellement s'inspirent de nos résultats pour contrôler les degrés de liberté qui leur sont offerts [36, 37].

À présent, la question qui se pose à nous et qui va faire l'objet des prochains chapitres est la suivante : existe-il des milieux de propagation qui offrent des degrés de liberté spatio-temporels pour focaliser des ondes en-dessous de la limite de la diffraction et depuis le champ lointain ?

Chapitre II

Milieu de fils et super-résolution

Jusqu'à maintenant nous nous sommes limités à l'étude de phénomènes qui sont à l'échelle de la longueur d'onde. Forts de nos résultats sur l'importance de la bande passante et du nombre de sources d'émission, nous verrons dans ce chapitre comment contrôler les ondes sur une échelle plus petite que la longueur d'onde en utilisant un milieu complexe structuré sur une échelle plus petite que celle-ci.

Nous débuterons ce chapitre par rappeler les principes qui justifient la limite de la diffraction. À une fréquence donnée, les ondes ont une échelle de variation spatiale caractéristique que l'on appelle la longueur d'onde et il n'est pas possible de générer des champs qui varient sur des échelles inférieures à la moitié de cette longueur. En revanche, lorsqu'on prend une distribution de sources organisées sur une plus petite échelle nous sommes nécessairement en présence de champs qui varient sur une échelle sub-longueur d'onde. Ces champs ne se propagent pas dans le milieu et restent confinés proche des sources, c'est pourquoi on les appelle *ondes évanescentes*, définissant ainsi deux régions de l'espace par rapport aux sources : une zone dite de champ proche où les champs peuvent varier sur une échelle sub-longueur d'onde grâce à la présence des ondes évanescentes, et une zone dite de champ lointain où les champs ont une dimension caractéristique de variation spatiale qui ne peut pas être plus fine que la longueur d'onde.

Par conséquent, si on souhaite focaliser des ondes sur une échelle sub-longueur d'onde, ou bien faire une image avec une résolution plus fine que la longueur d'onde, il faut obtenir l'information portée par les ondes évanescentes. Après avoir montré quelques techniques qui permettent de réaliser cette opération, nous nous intéressons aux travaux expérimentaux obtenus au laboratoire en 2007 [38] qui ont motivé cette thèse. En utilisant un milieu hétérogène, une distribution aléatoire de fils métalliques organisés à une échelle sub-longueur d'onde, et en jouant sur les degrés de liberté spatio-temporels, des taches fo-

cales de $\lambda/30$ ont été obtenues depuis le champ lointain dans le domaine des micro-ondes, montrant l'effet de conversion des ondes évanescentes en ondes propagatives.
En simplifiant, le système pour se ramener à l'étude d'un milieu périodique de fils conducteurs organisé à une échelle sub-longueur d'onde, nous expliquons théoriquement ces résultats expérimentaux. Pour bien comprendre les modes propres électromagnétiques que supporte le milieu en question que nous appelons « milieu de fils », nous faisons son étude complète en partant du milieu infini pour terminer sur le milieu de dimension finie d'intérêt. Alors que le milieu infini supporte des modes propres sub-longueur d'ondes qui se propagent de manière adispersive le long des fils, le milieu de fils de longueur finie supporte quant à lui des modes sub-longueur d'ondes qui se propagent dans la dimension transverse aux fils. Enfin, nous montrons qu'en prenant un milieu de dimensions finies suivant les trois directions d'espace, des modes propres sub-longueur d'onde résonants apparaissent dans le milieu. Ces modes dispersifs présentent de plus l'avantage de rayonner de l'énergie vers le champ lointain, agissant ainsi comme des convertisseurs d'ondes évanescentes en ondes propagatives. Ce milieu permet donc de recueillir en champ lointain une information sub-longueur d'ondes sur une source placée proche du milieu de fils comme une information codée dans un signal temporel.
Ensuite nous montrons comment un expérimentateur peut utiliser ces degrés de liberté spatio-temporels offerts par le milieu pour focaliser des ondes. En reprenant les résultats de la partie précédente sur le contrôle spatio-temporel nous montrons l'obtention de taches focales dont la dimension est de $\lambda/25$, bien inférieure à la limite de la diffraction. Nous étudions l'opération réciproque de la focalisation, à savoir l'imagerie. Nous montrons une preuve de concept d'imagerie en micro-ondes avec l'obtention de l'image d'une distribution de sources avec une résolution de $\lambda/80$. Cela nous amène aussi à étudier les limites d'un tel dispositif et notamment l'influence des pertes ohmiques dans le cas présent. Ces pertes ont un effet bien plus important sur l'information la plus sub-longueur d'onde des sources et donc dégradent les performances du système d'imagerie ou de focalisation.

II.1 Limite de diffraction, super-résolution et résultats préliminaires

II.1.1 Optique de Fourier

Afin de comprendre le lien qu'il existe entre la longueur caractéristique des ondes (la longueur d'onde) et les limites de la focalisation, nous adoptons le formalisme de l'optique

de Fourier [39, 40]. Ce formalisme est fondé sur la décomposition en ondes planes des solutions de l'équation d'onde que nous avons vu précédemment. Nous explicitons ce formalisme pour le cas d'une onde scalaire Ψ mais tout est généralisable au cas des ondes vectorielles.

Contrairement aux solutions générales de l'équation d'ondes nous supposons ici que le champ Ψ est connu dans le plan $z = 0$ et nous cherchons les solutions qui se propagent selon l'axe des z croissants. Nous avons en quelque sorte brisé la symétrie du problème puisque les trois directions d'espace Ox, Oy et Oz ne sont plus équivalentes dans ce problème. Les solutions de l'équation de Helmholtz (les ondes planes) ont déjà été obtenues dans le chapitre précédent, et les solutions de notre problème sont une superposition de ces ondes planes. Cependant, étant donné la géométrie de notre problème, il est préférable de chercher les solutions de l'équation de Helmholtz en n'effectuant une transformée de Fourier que sur les variables x et y d'espace. Pour des raisons de simplicité de calcul nous allons considérer le cas monochromatique à la pulsation ω (et nous allons omettre la dépendance en ω dans la notation), on cherche donc la solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{K}, z)}{\partial z^2} + \gamma^2 \Psi(\mathbf{K}, z) = 0 \tag{II.1}$$

où nous avons introduit la variable γ qui vérifie $\gamma^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - |\mathbf{K}|^2$. La solution se met sous la forme :

$$\Psi(\mathbf{K}, z) = A(\mathbf{K}) e^{j\gamma z} + B(\mathbf{K}) e^{-j\gamma z} \tag{II.2}$$

Maintenant, on utilise les conditions aux limites de notre problème pour en déduire que $B(\mathbf{K})$ est nul puisque nous avons supposé que la propagation se fait dans le sens $z > 0$, et que $A(\mathbf{K}) = \Psi(\mathbf{K}, z = 0)$. Finalement, cela permet d'écrire le champ $\Psi(\mathbf{r})$ en tous points de l'espace en fonction de la transformée de Fourier du champ dans le plan $z = 0$:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mathbf{K}, z = 0) e^{j\mathbf{K}.\mathbf{R} + j\gamma(\mathbf{K})z} \mathrm{d}\mathbf{K} \tag{II.3}$$

avec $\mathbf{R}$ un point du plan $z = 0$. Les conditions sur γ sont données par :

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{K}) &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - |\mathbf{K}|^2} \quad \text{si } |\mathbf{K}| \leq \frac{\omega}{c} \\ \gamma(\mathbf{K}) &= j\sqrt{|\mathbf{K}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad \text{si } |\mathbf{K}| > \frac{\omega}{c} \end{aligned} \tag{II.4}$$

La solution de notre problème s'écrit donc comme une superposition d'ondes planes de vecteurs d'ondes $\mathbf{k} = \{\mathbf{K}, \gamma\}$ dont l'amplitude est la transformée de Fourier du champ dans le plan $z = 0$. La variable $\mathbf{K}$ apparaît alors comme la pulsation spatiale associée aux variations spatiales du champ dans le plan $z = 0$. On distingue deux types d'ondes différentes dans cette décomposition :

- Lorsque la fréquence spatiale vérifie $|\mathbf{K}| \leq \dfrac{\omega}{c}$, γ est réel. L'argument de l'exponentielle dans l'équation II.3 est imaginaire pur et l'onde associée est dite propagative.
- Si la fréquence spatiale est plus élevée $\left(|\mathbf{K}| > \dfrac{\omega}{c}\right)$, γ devient imaginaire pur et l'onde décroît de façon exponentielle en fonction de la distance parcourue sur l'axe Oz. Ce type d'onde est dit évanescent car son amplitude est négligeable après une distance parcourue de l'ordre de la longueur d'onde.

Pour satisfaire les conditions aux limites du problème en question il a fallu ajouter aux solutions propagatives de l'équation d'onde en espace libre, des modes propres évanescents. Ces modes ne sont pas des solutions de l'équation d'onde en milieu infini puisqu'ils divergeraient à l'infini mais des modes qui permettent de vérifier les relations de continuité aux interfaces. Ces modes restent confinés autour des sources/interfaces et ne se propagent pas.

Ainsi, si le champ en $z = 0$ résulte d'une source ponctuelle, l'ensemble des variations spatiales $\mathbf{K}$ est présent dans le plan $z = 0$. En revanche seulement une partie de ces valeurs de fréquences spatiales se propage dans le milieu homogène, celles qui sont dites propagatives. La propagation selon le sens des $z > 0$ se comporte comme un filtre passe-bas pour les fréquences : les plus petits détails du champ Ψ qui sont représentés par les grandes fréquences spatiales sont perdus lors de la propagation. Cette propriété est à l'origine de la limite de diffraction en imagerie conventionnelle.

Dans la référence [39], Joseph Goodman va encore plus loin au travers d'une analogie avec le traitement du signal en écrivant de deux façons distinctes le champ $\Psi(\mathbf{r})$ en fonction de sa transformée de Fourier :

$$\begin{cases} \Psi(\mathbf{r}) &= \dfrac{1}{4\pi^2} \displaystyle\iint_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mathbf{K}, z = 0) e^{j\mathbf{K}.\mathbf{R} + j\gamma(\mathbf{K})z} \mathrm{d}\mathbf{K} \\ \\ \Psi(\mathbf{r}) &= \dfrac{1}{4\pi^2} \displaystyle\iint_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mathbf{K}, z) e^{j\mathbf{K}.\mathbf{R}} \mathrm{d}\mathbf{K} \end{cases} \tag{II.5}$$

On écrit alors la transformée de Fourier du champ en un point de coordonnée z quelconque en fonction de la transformée de Fourier du champ dans le plan $z = 0$ par l'intermédiaire de la fonction de transfert :

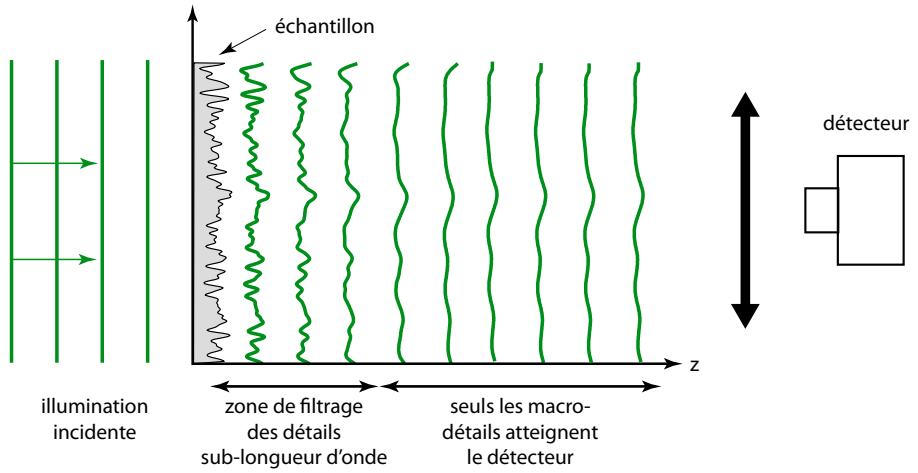

FIGURE II.1 – Filtrage des fréquences spatiales d'un échantillon éclairé en transmission par une onde plane.

$$\Psi(\mathbf{K}, z) = H(\mathbf{K}, z).\Psi(\mathbf{K}, z = 0) \tag{II.6}$$

avec H qui se met sous la forme suivante, lorsque la coordonnée z est supérieure à la longueur d'onde considérée :

$$\begin{aligned} H(\mathbf{K}, z) &= \exp\left(j\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - |\mathbf{K}|^2 z}\right) && \text{si } |\mathbf{K}| \leq \frac{\omega}{c} \\ H(\mathbf{K}, z) &= 0 && \text{si } |\mathbf{K}| > \frac{\omega}{c} \end{aligned} \tag{II.7}$$

Grâce à ce formalisme, le phénomène de propagation est vu comme un filtre spatial linéaire et dispersif de bande passante finie. La sortie de ce filtre est nulle si le vecteur d'onde $\mathbf{K}$ a une norme supérieure au nombre d'onde dans le vide donc pour des variations spatiales de dimensions inférieures à la longueur d'onde.

Comme le montre la figure II.1, lorsqu'on illumine un objet et qu'on observe la lumière transmise, les fronts d'onde issus de cet objet sont filtrés au cours de leur propagation. Les informations relatives aux détails fins de l'objet disparaissent et les fronts d'ondes sont lissés. D'ailleurs, plus les fréquences spatiales associées à l'objet sont élevées, plus les ondes évanescentes qui leur sont associées sont rapidement atténuées à mesure qu'on s'éloigne de l'objet. Ceci explique donc la limite ultime des techniques de microscopie optique, l'image d'un point n'est pas un point mais plutôt une tache, appelée « tache d'Airy », dont la taille est intimement liée à la longueur d'onde des ondes utilisées.

Par réciprocité, lorsqu'on essaie d'effectuer l'opération inverse, à savoir focaliser des ondes

en un point particulier de l'espace, on émet des ondes propagatives. L'échelle spatiale caractéristique de ces ondes est la longueur d'onde et nous ne sommes pas capables de produire des champs qui varient sur une échelle plus fine à une certaine distance des sources d'émission. Après interférences constructives on obtient bien un maximum d'énergie à l'endroit désiré mais la dimension caractéristique de ce point focal ne peut pas être plus petite que l'échelle caractéristique des ondes mises en jeu. Les ondes étant à la fois positives puis négatives au cours d'une période, la taille limite de la tache focale que l'on peut effectivement générer à l'aide des ondes propagatives ne peut jamais être plus fine que $\frac{\lambda}{2}$.

II.1.2 Imagerie et super-résolution

Il est clair que si l'on avait accès aux ondes évanescentes qui peuvent varier sur des échelles sub-longueur d'onde alors nous pourrions franchir la limite de diffraction et atteindre des résolutions infiniment fines. Cependant, ces ondes restent confinées à la surface de l'objet que l'on souhaite imager puisqu'elles décroissent de manière exponentielle avec la distance à l'objet. Cette zone d'espace où le champ varie sur des échelles sub-longueur d'ondes définit ce que l'on appelle le champ proche. Par opposition le demi-espace où le champ varie sur des échelles de l'ordre de la longueur d'onde est appelé le champ lointain. L'épaisseur de cette zone de champ proche est approximativement égale à la longueur d'onde d'illumination. Il est donc impossible de placer un objectif de microscope dans cette zone. Pour accéder à ces ondes il faut trouver un autre moyen et c'est le principe de la microscopie optique en champ proche (ou SNOM pour « scanning near-field optical microscope »).

Nous ne faisons pas ici une étude approfondie de cette technique mais juste une présentation de son histoire ainsi que de ses grandes lignes. La question de la mesure de ces ondes évanescentes a longtemps occupé l'esprit des chercheurs et ce n'est qu'en 1928 que E. H. Synge [41] a proposé un début de réponse. Synge a eu l'idée de placer dans le champ proche d'un objet à imager une nano-particule d'or dont le rôle est de diffuser les ondes évanescentes. De cette manière il espérait convertir les ondes évanescentes en ondes propagatives détectables en champ lointain. Puis, en déplaçant cette particule au-dessus de la surface, on reconstitue point par point l'intensité du champ présent à la surface avec une résolution déterminée par la taille de la particule, le pas du déplacement et/ou la distance entre la particule et l'objet.

Albert Einstein trouva cette idée ingénieuse mais difficilement réalisable en pratique. Il a suggéré de remplacer la nanoparticule par un nano-trou percé dans un film métallique afin de l'utiliser comme une nano-source de lumière. Grâce à ce nano-trou placé dans la

zone de champ proche optique de l'échantillon et éclairé par une onde progressive, il est possible de générer localement un champ évanescent au niveau de la surface. Ce champ est ensuite diffusé par la surface éclairée et enregistré en champ lointain. La résolution du système est alors gouverné par la dimension de cette nano-ouverture.
Cependant, les technologies de l'époque ne permettaient pas une telle précision de déplacement et de manipulation de nano-objets. Avec l'avènement des microdéplacements piézoélectriques qui permettent de se déplacer avec une précision nanométrique, ces deux expériences ont pu voir le jour au début des années 1980. Chacune de ces expériences a donné naissance à l'une des deux grandes familles de SNOM avec [42–44] et sans [45] ouverture.
Ces deux techniques sont à l'heure actuelle arrivées à maturité et de nombreux groupes de recherche possèdent un SNOM qui leur permet d'imager des détails à l'échelle nanométrique. Il reste tout de même encore beaucoup de recherche fondamentale dans ce domaine notamment à travers l'interaction onde/matière. Par exemple, le groupe de L. Kuipers a récemment présenté des résultats intéressants où la sonde de champ proche utilisée est essentiellement sensible au champ magnétique [46]. Cependant, le plus grand défaut de cette technologie réside dans le fait qu'il faut charioter point par point la sonde de champ proche pour obtenir l'image finale, ce qui peut prendre beaucoup de temps. Cela rend cette technologie inutilisable dans le but d'imager des tissus vivants par exemple.
Toujours dans l'optique de récupérer ces informations spatiales qui restent confinées autour de l'objet, la plasmonique est aussi une nouvelle voie de recherche en pleine expansion. Elle repose sur l'étude et la caractérisation d'une certaine catégorie d'ondes évanescentes : les plasmons de surface. Ceux-ci sont dûs à l'excitation collective (sous certaines conditions) des électrons libres dans un conducteur par les ondes électromagnétiques [1]. Tout comme les ondes évanescentes, les plasmons de surface ne sont pas des modes propres de la propagation en espace libre mais des modes qui permettent de satisfaire les relations de continuité aux interfaces. Ils sont eux aussi associés à des nombres d'onde supérieurs à ceux des ondes dans le vide.
En revanche, contrairement aux ondes évanescentes, les plasmons de surface sont des ondes propagatives, se propagageant le long de l'interface en question. Le domaine de la plasmonique est relativement nouveau et il reste encore beaucoup d'études à mener avant d'être capables de les utiliser pleinement. Toutefois, les avancées dans le domaine abondent. Récemment, une équipe de chercheurs s'est intéressée au phénomène de focalisation de ces ondes, une focalisation qui est donc plus fine que la limite de diffraction dans le vide a été obtenue [47].

1. Nous en reparlerons au chapitre IV

En plus des applications de type imagerie, la plasmonique ouvre de grandes perspectives sur la propagation d'ondes sur des échelles bien plus petites que les échelles classiques. L'utilisation et la maîtrise de ces ondes confinées seraient une véritable révolution, et pas seulement dans le domaine de l'optique. La plasmonique pourrait même remplacer l'électronique dans le futur, l'information serait transportée par la lumière sur des échelles comparables à celles des pistes métalliques utilisées à l'heure actuelle. Les innovations en matière de plasmonique sont quasi quotidiennes et pourraient aboutir, à terme, sur la réalisation de toutes les fonctionnalités qui, jusqu'ici, étaient réalisées par des composants électroniques ou par des dispositifs optiques montés sur de grandes tables optiques.

II.1.3 Expérience fondatrice

Au laboratoire, une autre piste a été explorée pour focaliser des ondes sur des dimensions sub-longueur d'onde. En 2007, Geoffroy Lerosey et ses collaborateurs [14, 38] ont obtenu des résultats expérimentaux surprenants et très prometteurs. Le principe de l'expérience est le même que celui de n'importe quelle expérience de retournement temporel. Dans une cavité réverbérante électromagnétique (environ 1 m^3) ils ont placé un Miroir à Retournement Temporel.
En revanche, au lieu de faire une expérience classique, et de manière à obtenir une focalisation sub-longueur d'onde, il ont fabriqué des sources de champ évanescent. Dans le domaine des micro-ondes, il est bien connu qu'une antenne qui n'est pas adaptée en impédance à la ligne qui l'alimente, lorsque la partie imaginaire de son impédance propre est importante, ne rayonne pas efficacement en champ lointain. Elle crée un champ dit « réactif » qui reste confiné au voisinage de l'antenne [48].
Il ont donc fabriqué une antenne dont la partie réelle de l'impédance propre est quasi-nulle, mais qui présente une forte partie imaginaire de manière à avoir un fort champ évanescent. Une telle source que l'on peut qualifier de non radiative est connue depuis longtemps dans le domaine des micro-ondes : un élément rayonnant dont la dimension est petite devant la longueur d'onde en est un exemple parfait. Ils ont donc opté pour un câble coaxial dont l'âme dépasse de quelques millimètres d'un plan de masse. Pour pouvoir mesurer les taches focales qu'ils obtiendraient, ils ont de plus réalisé un réseau avec ces monopoles, dont le pas entre antennes est bien inférieur à la longueur d'onde utilisée. Ils ont choisi un pas de 4 mm, soit un trentième de la longueur d'onde pour des ondes électromagnétiques à 2,45 GHz. La figure II.2 montre une photo (à gauche) du réseau ainsi constitué, sur laquelle on peut voir les bouts de câble coaxial d'une longueur de 2 mm qui dépassent du plan de masse.

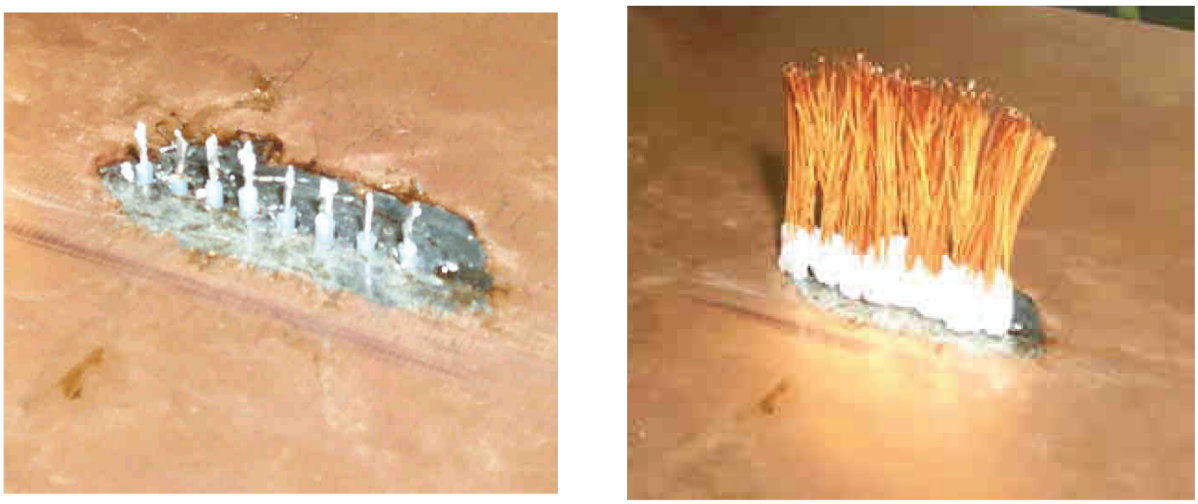

FIGURE II.2 – Photo du réseau de 8 antennes non radiatives espacées de 4 mm (à gauche). Ce réseau est ensuite surplombé d'une collection de fils de cuivre (à droite).

Ces antennes étant très peu efficaces (elles ne produisent pratiquement pas de rayonnement électromagnétique en champ lointain), ils ont alors décidé de placer dans le champ proche de ces antennes des diffuseurs. Ces diffuseurs agissent comme des convertisseurs d'ondes évanescentes en ondes propagatives comme dans l'expérience proposée initialement par Synge [41]. Le diffuseur le plus élémentaire en micro-ondes est le fil conducteur. Ils ont donc mis une collection de fils de cuivre de 3 à 4 cm de long au-dessus du réseau d'antennes réactives précédent. La figure II.2 présente une photo (à droite) de ce réseau d'antennes, surplombé de sa collection de diffuseurs.
Ensuite, comme dans une expérience de retournement temporel classique, l'expérience consiste à enregistrer les réponses impulsionnelles entre chacune des antennes de ce réseau et le miroir à retournement temporel placé en champ lointain. Notons tout d'abord qu'en l'absence de diffuseurs le réseau de monopoles est exclusivement réactif : on n'enregistre quasiment pas de signal sur le MRT. Avec les diffuseurs, le réseau devient radiatif puisque le MRT capte des signaux ce qui justifie le rôle de convertisseur d'ondes évanescentes en ondes propagatives. À ce stade on constate déjà que le MRT reçoit une information sub-longueur d'onde puisque la réponse reçue par une antenne du MRT lorsque l'antenne 4 du réseau de monopole émet une impulsion est différente de celle reçue lorsque c'est l'antenne 5 (éloignée de $\lambda/30$) qui émet une impulsion.
Ensuite, ils ont mesuré la tache focale obtenue après l'étape de réémission du retournement temporel. Évidemment, d'un point de vue temporel, on retrouve une impulsion brève sur l'antenne sur laquelle on essaie de focaliser. D'un point de vue spatial, les résultats sont en revanche tout à fait surprenants : des taches focales de largeur à mi-hauteur

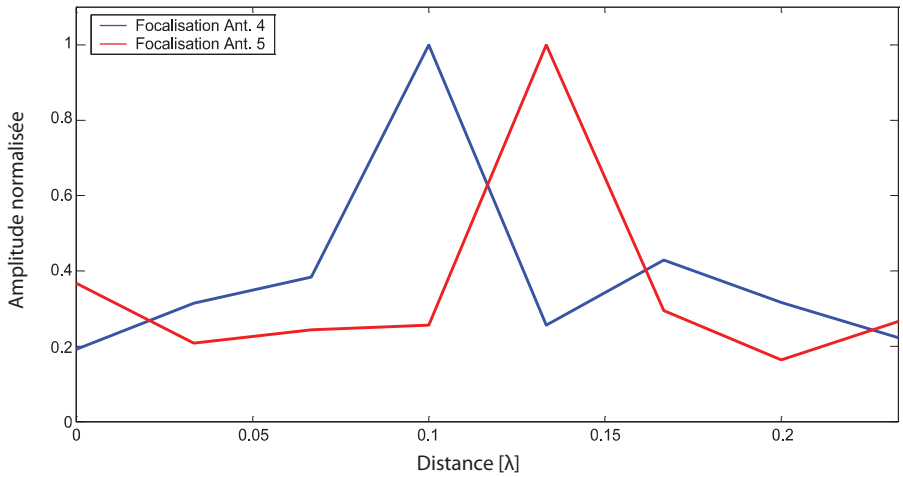

FIGURE II.3 – Taches focales obtenues par retournement temporel lorsque l'on focalise sur l'antenne 4 et sur l'antenne 5 du réseau à $\lambda/30$.

inférieures à $\lambda/30$ ont été observées expérimentalement (figure II.3). Cette dernière figure montre qu'il est possible grâce à ces antennes et au retournement temporel d'adresser simultanément deux antennes séparées uniquement d'un trentième de longueur d'onde. Ils ont bien entendu vérifié que la tache focale obtenue avec des antennes classiques est quant à elle limitée par la limite de diffraction, et qu'il n'est pas possible de focaliser sur une unique antenne lorsque les antennes sont séparées de $\lambda/30$.
Cela présente un intérêt majeur autant d'un point de vue applicatif que théorique. En effet, si l'on est capable de communiquer de manière indépendante avec des antennes séparées de distances aussi petites (comparées à la longueur d'onde) que dans cette expérience, on peut alors imaginer obtenir des débits de télécommunication plus important. Ainsi, dans le papier originel relatant ces résultats expérimentaux [38], les auteurs ont présenté une application à la télécommunication de cette expérience. Un MRT constitué de 3 antennes communique avec un réseau constitué de 3 monopoles surplombés de leur collection de diffuseurs. La télécommunication par retournement temporel consiste à envoyer des trains de réponses impulsionnelles (retournées temporellement) multipliées par ± 1. Lorsque le pic après recompression temporelle est positif on a un bit d'information qui correspond à 1, lorsqu'il est négatif à 0. Ils ont démontré le transfert de 3 informations différentes sur chacun des monopoles, obtenant donc trois informations distinctes pour un encombrement spatial de $\lambda/15$. En effectuant la même opération avec des antennes standards mais avec le même pas spatial, les trois antennes reçoivent exactement la même information et il n'est pas possible de décoder les 3 canaux d'information séparément.

II.1.4 Interprétation phénoménologique

D'un point de vue théorique, cette expérience est à rapprocher des expériences de SNOM à pointe diffusante. Les diffuseurs placés dans le champ proche des antennes réactives agissent comme la pointe de SNOM : le champ évanescent qui reste normalement confiné autour de la source est transformé en ondes propagatives que l'on enregistre en champ lointain. Le processus de cette conversion n'était pas bien compris à l'époque de ces résultats et nous allons en donner une explication dans ce chapitre. D'autre part, contrairement au SNOM, il est ici possible de focaliser n'importe où dans la collection de diffuseurs en choisissant la forme d'onde à émettre. La notion de codage temps/fréquence de l'information spatiale a été introduit dans le premier chapitre mais à un aucun moment elle ne portait sur une information sub-longueur d'onde.

Pour expliquer ces résultats expérimentaux, nous allons tout d'abord simplifier le problème. Lors de cette expérience tout se passait en cavité réverbérante et on pourrait penser que cela joue un rôle important dans les résultats obtenus. C'est pourquoi nous nous en affranchissons et travaillons à présent en espace libre, de manière à supprimer toutes les sources virtuelles qu'elle peut engendrer.

D'autre part, les milieux de diffuseurs de cette expérience étaient fabriqués « à la main », et il était difficile d'obtenir des résultats quantitatifs et parfaitement reproductibles. Pour obtenir des résultats plus systématiques, nous nous proposons d'étudier un milieu mieux contrôlé. Nous choisissons d'étudier un milieu périodique où tous les fils présentent la même la longueur. Le fait de passer à un milieu périodique est essentiellement dans le but de pouvoir mener une analyse quantitative d'un point de vue théorique. Nous avons aussi réalisé que même si les fils de l'expérience fondatrice de 2007 présentent une certaine distribution de longueur, celle-ci est plutôt bien distribuée autour de 3,5 cm. Cela joue un rôle important, puisqu'il se trouve qu'un fil conducteur en micro-ondes présente un effet résonant lorsque sa longueur est un multiple d'une demie longueur d'onde dans l'air. Lorsque ces fils sont placés sur un plan de masse qui agit comme un miroir ils présentent aussi cet effet résonant lorsque leur longueur équivaut à $\lambda/4$ ce qui était le cas.

Pour comprendre les résultats, il y a deux aspects fondamentaux qui entrent en jeu : d'un côté il faut réussir à comprendre comment on peut générer des champs qui varient sur une échelle sub-longueur d'onde, et d'un autre côté il faut expliquer comment les antennes qui étaient réactives sont devenues rayonnantes. En réalité tout ceci se comprend assez bien grâce à la nature résonante de chacun des fils qui constitue le milieu en question.

Pour le premier point, le fait de placer N résonateurs identiques sur une échelle sub-longueur d'onde va induire un fort couplage entre eux. Ce couplage résulte en une levée

de dégénérescence des fréquences intrinsèques de résonance, et le milieu constitué de ces N résonateurs se comporte comme un macro-résonateur qui possède N fréquences de résonance. Ce passage d'un niveau d'énergie résonant à une bande de fréquence résonante est tout à fait analogue aux potentiels de Kronig-Penney en physique du solide [49], ou bien au couplage entre pendules oscillants en mécanique du solide. Ainsi, ce macro-résonateur peut être décrit par un ensemble de N modes propres, chacun ayant sa fréquence propre, où les fréquences de résonance sont distribuées sur un intervalle de fréquence qui dépend du terme de couplage entre les résonateurs.

Les petits monopoles réactifs excités par des signaux polychromatiques qui couvrent la gamme de fréquence en question se décomposent sur les modes propres du système avec un jeu de phase et d'amplitude unique. Comme chacun de ces modes a sa propre fréquence de résonance (en ignorant les possibles fréquences de résonance dégénérées) l'information spatiale sub-longueur d'onde est encodée en une signature fréquentielle. Ceci est aussi le cas pour les ondes dans le vide où chaque fréquence correspond à une distance caractéristique (la longueur d'onde) mais ici on ramène une très large gamme d'échelles spatiales fines sur une bande de fréquence centrée autour de la résonance intrinsèque des fils. D'un point de vue temporel, tout est bien entendu équivalent à ce qui se passe fréquentiellement : une impulsion brève se transforme en un signal temporel qui dure longtemps et contient une information sub-longueur d'onde sur la source émettrice.

Le deuxième point important à comprendre est l'efficacité de rayonnement de ce milieu qui permet de recevoir l'information sub-longueur d'onde en champ lointain. Pour cela, la nature résonante du milieu composé de fils joue à nouveau un rôle important. En effet, en ignorant les pertes intrinsèques dues aux matériaux, l'énergie emmagasinée dans un mode du milieu ne peut se dissiper que par des effets radiatifs. Plus le mode varie sur une échelle spatiale fine, plus il a de mal à quitter le milieu, ce qui augmente son temps de vie dans le milieu. Grâce à l'effet résonant et à l'effet Purcell [50] plus le temps de vie est important plus la source réactive a tendance à exciter ce mode. Cet effet contrebalance le mauvais couplage des modes propres avec les ondes radiatives. En ignorant les pertes, tous les modes émettent la même quantité d'énergie vers le champ lointain. Ceci assure que l'ensemble de l'information sub-longueur d'onde qui a été encodée dans le spectre rejoint le champ lointain avec la même efficacité, mais cela peut prendre plus ou moins de temps. Les modes associés aux échelles spatiales les plus fines ont tendance à s'échapper du milieu plus tardivement. Si on ajoute des pertes dans le milieu c'est donc ces modes qui en souffrent le plus, ce qui a tendance à diminuer la taille des taches focales que nous pouvons générer. Nous étudierons ce concept plus précisément par la suite.

II.2 Le milieu de fils conducteurs

Afin d'étudier un peu plus en détail et de manière quantitative ces résultats nous nous proposons ici d'étudier un milieu périodique de fils de cuivre, parallèles entre eux. Une photo de l'échantillon expérimental qui remplace le milieu aléatoire est présentée sur la figure II.4. Il consiste en un arrangement périodique de 20×20 tiges de cuivre (diamètre 3 mm, longueur 40 cm) organisées suivant une maille carrée de 1,2 cm de côté. L'échantillon est fabriqué à l'aide de plaques de Teflon [2] (épaisseur 8 mm) aux deux extrémités. Le fait de passer à des milieux organisés de façon périodique permet une étude quantitative grâce au formalisme de Floquet-Bloch [51–53]. Ce formalisme très utilisé en physique du solide [54] pour décrire les structures de bandes électroniques des cristaux, a été introduit pour les ondes électromagnétiques avec l'avènement des cristaux photoniques [55, 56].

FIGURE II.4 – Échantillon expérimental pour étudier les résultats de l'expérience de 2007.

Plutôt que d'étudier le couplage entre résonateurs, nous étudions la physique associée à ces milieux de fils conducteurs qui est assez riche. Celle-ci change complètement selon que le milieu est infini, ou de dimensions finies. C'est pourquoi, pour bien comprendre tous les phénomènes mis en jeu nous partons de l'étude d'un milieu infini, pour ensuite ajouter des contraintes de taille finie, et finalement être capables d'interpréter les résultats de l'expérience de 2007 [38] de manière quantitative lorsque ce milieu est borné dans les trois dimensions d'espace. Cette étude théorique a été publiée dans la revue *Waves in Random*

2. Le Teflon est un diélectrique à faibles pertes : $\tan\delta \approx 10^{-4}$.

and Complex Media [57, 58], et nous reprenons ici en grande partie le développement de cette série d'articles.

II.2.1 Un milieu infini

Nous commençons donc par l'étude des modes propres électromagnétiques d'un milieu infini constitué de fils conducteurs. Nous ferons souvent référence à ce type de milieux comme un « milieu de fils » la traduction littérale de « wire medium » tel qu'il est souvent présenté dans la littérature [59, 60]. Pour des applications micro-ondes, ce milieu est souvent vu comme un milieu métallique dilué, donc comme un diélectrique artificiel qui présente l'avantage d'avoir une permittivité effective négative [59]. Lors de sa thèse, Pavel Belov a étudié en détail les modes propres de ce type de milieux pour en obtenir des paramètres effectifs [60, 61]. Nous reprenons en partie ses résultats mais sans considérer les paramètres effectifs.

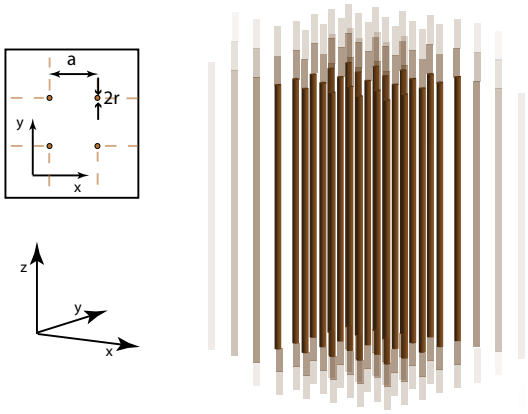

FIGURE II.5 – Géométrie du milieu de fils infini.

Commençons par définir la géométrie du milieu de fils. Dans cette partie, nous considérons un milieu infini constitué de fils parfaitement conducteurs, infiniment longs et alignés suivant l'axe Oz. Ces fils sont organisés suivant un réseau périodique bidimensionnel, de maille élémentaire carrée (de côté a), dans le plan xy. La figure II.5 représente la géométrie du problème en question. Nous faisons de plus l'hypothèse de fils fins, c'est-à-dire que leur rayon est considéré comme petit devant le paramètre de maille a, ceci nous permettra de négliger les ordres de diffraction. Pour obtenir les solutions électromagnétiques dans ce milieu nous repartons des équations de Maxwell et cherchons les solutions qui satisfont la géométrie du milieu.

Nous cherchons les champs électriques et magnétiques $(\mathbf{E};\mathbf{H})$ qui satisfont à la fois les conditions aux limites ainsi que les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{II.8}$$

où, bien entendu, μ_0 et ε_0 représentent respectivement la perméabilité et la permittivité du vide.

À travers cette équation, nous avons d'ores et déjà fait l'hypothèse que les champs électromagnétiques se propagent dans l'air uniquement : la présence des surfaces métalliques n'est prise en compte qu'à travers les conditions aux limites. Comme nous l'avons fait précédemment nous allons résoudre ce système dans l'espace des fréquences. D'autre part, le milieu étant invariant par translation selon l'axe Oz nous pouvons aussi effectuer une transformée de Fourier selon la variable z. Les champs $(\mathbf{E};\mathbf{H})$ dépendant de z et de t solutions de notre problème s'écrivent donc comme une superposition de solutions dépendant des variables k et ω avec la convention suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}_\perp, z, t) &= \iint_{\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{x}_\perp, k, \omega) e^{j(kz-\omega t)} \mathrm{d}z\mathrm{d}t \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}_\perp, z, t) &= \iint_{\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\mathbf{x}_\perp, k, \omega) e^{j(kz-\omega t)} \mathrm{d}z\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{II.9}$$

où la variable $\mathbf{x}_\perp$ correspond à la coordonnée dans le plan Oxy. k peut être vu comme la constante de propagation des ondes selon l'axe Oz. Les solutions que nous recherchons $\mathbf{E}(\mathbf{x}_\perp, k, \omega)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{x}_\perp, k, \omega)$, bien que ne dépendant plus de z, ont toujours 3 composantes suivant chacun des axes du problème, et chacune d'entre elles est désormais une variable complexe. Étant donnée la géométrie uniaxiale du problème nous effectuons une décomposition de ces champs en accord avec cette géométrie [3] :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}_\perp, k, \omega) &= \mathbf{E}_\perp(\mathbf{x}_\perp, k, \omega) + E_\parallel(\mathbf{x}_\perp, k, \omega)\mathbf{e_z} \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}_\perp, k, \omega) &= \mathbf{H}_\perp(\mathbf{x}_\perp, k, \omega) + H_\parallel(\mathbf{x}_\perp, k, \omega)\mathbf{e_z} \end{aligned} \tag{II.10}$$

Enfin, nous faisons une dernière décomposition de nos champs pour satisfaire la géométrie du problème. L'invariance par translation infinitésimale dans le plan transverse xy est brisée à cause de la nature périodique du milieu et donc nous ne pouvons pas résoudre ce problème à l'aide de la transformée de Fourier. Nous utilisons donc le formalisme de

3. Cela se fait couramment dans l'étude des modes propagatifs d'un guide d'ondes.

Floquet-Bloch [51, 52] qui permet la résolution d'équations différentielles avec des conditions aux limites périodiques. Comme il est souvent fait en physique du solide [54], et plus récemment dans les cristaux photoniques [56], nous pouvons décomposer chacune des composantes des champs U (où U peut correspondre à $\mathbf{E}_\perp$, $\mathbf{H}_\perp$, $E_\parallel$ or $H_\parallel$) sous la forme d'un mode de Bloch :

$$U_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{x}_\perp) = e^{j\mathbf{k}_\perp.\mathbf{x}_\perp}\tilde{U}(\mathbf{x}_\perp) \tag{II.11}$$

Dans cette équation, $\mathbf{k}_\perp$ correspond à ce qu'on appelle le vecteur d'onde de Bloch (ou le pseudo-moment en physique du solide) et $\tilde{U}(\mathbf{x}_\perp)$ est une fonction qui vérifie la périodicité du milieu de fils dans le plan transverse ($\tilde{U}(\mathbf{x}_\perp) = \tilde{U}(\mathbf{x}_\perp + \mathbf{R})$ où $\mathbf{R}$ est un vecteur du réseau périodique).

Ce théorème de Bloch, bien que très mathématique (notamment dans l'article originel de Floquet [51]), se comprend en fait assez facilement en introduisant des sources virtuelles comme nous l'avons fait dans le premier chapitre. Si l'on considère une onde plane qui se propage dans ce réseau périodique, chaque nœud du réseau périodique agit comme un miroir qui fabrique des sources virtuelles. Ces sources virtuelles ne sont pas réparties aléatoirement mais vérifient la période du réseau. Ainsi, l'onde plane n'existe pas toute seule dans ce milieu mais est en fait accompagnée d'une infinité d'autres ondes planes qui résultent des réflexions sur les nœuds du réseau. Les ondes planes ne sont plus des modes propres de la propagation dans un tel milieu.

Dans l'espace réciproque (ou espace de Fourier par rapport à la variable $\mathbf{x}_\perp$) la solution de Bloch correspond à la superposition de plusieurs vecteurs d'onde en raison de la périodicité du facteur $\tilde{U}(\mathbf{x}_\perp)$ dans le réseau direct. Le vecteur d'onde de Bloch est donc défini à un vecteur du réseau réciproque près, et conventionnellement, on choisit $k_\perp$ le plus proche du nœud 0 du réseau réciproque. Ce domaine est appelé la première zone de Brillouin, et permet de caractériser entièrement les solutions. Très souvent les physiciens ont tendance à se limiter à la première zone de Brillouin et à oublier la nature périodique des solutions de Bloch. Cela revient à étudier la propagation d'une onde plane. Mais il est important de garder en mémoire que cette pseudo onde plane transporte avec elle une multitude d'autres ondes planes qui vérifient néanmoins la même relation de dispersion.

Une fois que l'on a pris en compte toutes ces considérations géométriques le problème de Maxwell se réduit à la résolution du système suivant :

$$\begin{aligned} j\omega\mu_0\tilde{H}_{\parallel}\mathbf{e_z} &= (j\mathbf{k}_\perp + \nabla_\perp)\times\tilde{\mathbf{E}}_\perp \\ j\omega\mu_0\tilde{\mathbf{H}}_\perp &= \mathbf{e_z}\times\left(jk\tilde{\mathbf{E}}_\perp - (j\mathbf{k}_\perp + \nabla_\perp)\,\tilde{E}_{\parallel}\right) \\ -j\omega\varepsilon_0\tilde{E}_{\parallel}\mathbf{e_z} &= (j\mathbf{k}_\perp + \nabla_\perp)\times\tilde{\mathbf{H}}_\perp \\ -j\omega\varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}_\perp &= \mathbf{e_z}\times\left(jk\tilde{\mathbf{H}}_\perp - (j\mathbf{k}_\perp + \nabla_\perp)\,\tilde{H}_{\parallel}\right) \end{aligned} \tag{II.12}$$

Pour résoudre ce problème aux valeurs propres, nous décomposons les modes de Bloch suivant les trois types de modes qui peuvent exister : les modes transverses magnétiques (TM) où $\tilde{H}_{\parallel} = 0$, les modes transverses électriques (TE) où $\tilde{E}_{\parallel} = 0$, et les modes transverses électromagnétiques (TEM) où les deux composantes tangentielles aux fils $\tilde{H}_{\parallel}$ et $\tilde{E}_{\parallel}$ sont nulles. Pour chacun de ces modes, les équations couplées de II.12 se limitent à l'étude d'une unique composante des champs, et cela donne les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{TM :}\quad & \left({k_\perp}^2 + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{E}_{\parallel} - 2j(\mathbf{k}_\perp.\nabla_\perp)\tilde{E}_{\parallel} - \mathbf{\Delta}_\perp\tilde{E}_{\parallel} = 0 \\ \text{TE :}\quad & \left({k_\perp}^2 + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{H}_{\parallel} - 2j(\mathbf{k}_\perp.\nabla_\perp)\tilde{H}_{\parallel} - \mathbf{\Delta}_\perp\tilde{H}_{\parallel} = 0 \\ \text{TEM :}\quad & \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{\mathbf{E}}_\perp = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{II.13}$$

La résolution des relations de continuité aux interfaces ne pose pas de difficultés pour les ondes TE et TEM puisque la composante tangentielle aux fils du champ électrique est déjà nulle. Pour les ondes TM le problème des conditions aux limites est relativement complexe. Dans la référence [61], les auteurs ont fait la résolution intégrale de ce problème en décomposant $\tilde{E}_{\parallel}$ en une série de fonctions de Hankel au sein de la cellule élémentaire du réseau périodique et en imposant des conditions de périodicité sur les bords de cette cellule élémentaire. Le résultat final de ce problème aux valeurs propres se résume finalement aux relations de dispersion (sur la première zone de Brillouin) suivantes :

$$\begin{aligned} \text{TM :}\quad {k_\perp}^2 + k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} - {k_p}^2 \\ \text{TE :}\quad {k_\perp}^2 + k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \\ \text{TEM :}\quad k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned} \tag{II.14}$$

Le paramètre k_p est issu des références [60, 61], et est appelé le nombre d'onde plasma. C'est un paramètre qui dépend à la fois du paramètre de réseau a et du rayon r des fils métalliques [4].

4. ${k_p}^2 = \dfrac{2\pi/a^2}{\ln\frac{a}{2\pi r} + F(1)}$ avec $F(1) \approx 0.5275$

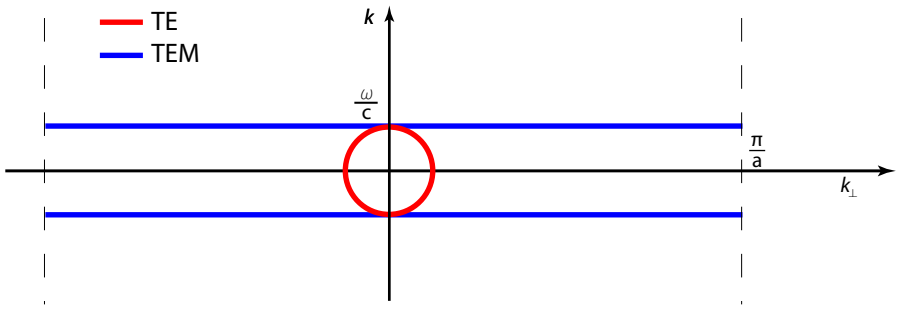

FIGURE II.6 – Relations de dispersion pour les ondes de Bloch TE et TEM dans le cas où $a \ll \lambda$. Dans cette gamme de fréquence, les ondes TM sont purement évanescentes.

À partir de maintenant, nous nous concentrons sur la gamme de fréquences qui permet d'expliquer l'expérience fondatrice introduite dans la partie précédente. Nous prenons donc des fréquences pour lesquelles la longueur d'onde associée dans le vide est largement supérieure à la distance entre deux fils. Dans cette gamme de fréquence et en gardant l'hypothèse de fils fins, le nombre d'onde plasma k_p est largement supérieur à n'importe quel autre nombre d'onde en jeu, et par conséquent les ondes TM sont toujours évanescentes. Les ondes TE ont la même relation de dispersion que les ondes dans le vide et elles se propagent donc comme si elles ne voyaient pas le milieu de fils (excepté le fait qu'elles transportent avec elles les harmoniques de Bloch). Enfin, les ondes TEM ont une relation de dispersion qui est toujours vérifiée quelle que soit la valeur de $k_\perp$ et elles sont par conséquent toujours propagatives. La figure II.6 résume les relations de dispersion obtenues dans la gamme de fréquence considérée.
La figure montre clairement que pour les grands nombres d'onde (ou encore les petits détails spatiaux), les ondes TE et TM sont évanescentes, alors que les modes TEM sont toujours propagatifs. Par la suite nous ne considérerons donc que ces modes TEM. Cela nous permet d'écrire assez simplement la forme des champs électromagnétiques dans le milieu de fils. Pour un vecteur d'onde $\mathbf{k}_\perp$ donné, ces champs peuvent s'écrire à l'aide de l'unique potentiel scalaire $\tilde{\phi}(x_\perp)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{x}_\perp) &= -\nabla e^{j\mathbf{k}_\perp.\mathbf{x}_\perp}\tilde{\phi}(\mathbf{x}_\perp) \\ \mathbf{H}_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{x}_\perp) &= \frac{1}{\mu_0 c}\mathbf{e_z} \times \nabla e^{j\mathbf{k}_\perp.\mathbf{x}_\perp}\tilde{\phi}(\mathbf{x}_\perp) \end{aligned} \tag{II.15}$$

La fonction $\tilde{\phi}(\mathbf{x}_\perp)$ permet de satisfaire à la fois la périodicité du réseau et les conditions aux limites sur la surface des fils. Ce potentiel peut être vu comme une enveloppe spatiale qui permet de vérifier les contraintes géométriques. On en revient donc à l'approximation très

souvent faite lorsqu'on applique le théorème de Bloch : nous négligeons cette enveloppe spatiale, ce qui revient à considérer la propagation d'une onde plane. En d'autres termes, nous négligeons les ordres de diffraction supérieurs dûs à la présence de ce potentiel périodique.

La conséquence principale de cette approximation est qu'on oublie la microstructure du milieu. Nous ne faisons cette approximation que maintenant parce qu'il était important de garder la microstructure du milieu pour déterminer les relations de dispersion. Dans ce qui suit, nous négligeons donc les ordres de diffraction supérieurs ce qui équivaut à prendre un potentiel égal à une constante. Dans ce cas nous pouvons donc aussi choisir de manière arbitraire l'orientation des axes Ox et Oy puisqu'on vient de négliger la microstructure du milieu.

Une propriété intéressante de ces ondes TEM réside dans la vitesse de groupe. Cette vitesse de groupe, $\mathbf{v}_g = c\,\mathbf{e_z}$, est un vecteur constant toujours orienté selon l'axe Oz. Si on prend un paquet d'ondes dans un plan transverse, il se propage sans distorsion selon l'axe des fils. Cette propriété provient du caractère très anisotrope du milieu considéré : le milieu agit comme une superposition de lignes de transmission parallèles les unes aux autres. Pour vérifier cette propriété nous avons simulé à l'aide du logiciel *CST Microwaves*, un milieu infini constitué de fils parallèles.

Nous plaçons à l'origine un petit dipôle électrique orienté selon l'axe Ox émettant une impulsion. Sur la figure II.7, nous représentons la composante x du champ électrique dans le plan xz à un instant postérieur à l'émission ($t = 5$ ns pour une impulsion émise à $t = 0$). Cette impulsion s'est propagée le long des fils et la longueur d'onde le long des fils est la même qu'en espace libre, alors que la distribution du champ dans le plan transverse varie sur une échelle bien plus petite. Sur la figure on remarque aussi l'effet du potentiel périodique sur les solutions de Bloch, puisqu'on voit le champ s'annuler sur chacun des fils du réseau.

Cette propriété de guidage le long de l'axe des fils a été démontrée dans plusieurs articles [62–64]. Un profil spatial quelconque émis dans un plan transverse de ce réseau de guides d'onde peut être mesuré à grande distance dans un autre plan transverse. Il s'agit de la propagation pixel par pixel d'une image. Cependant, dans ces références le milieu expérimental utilisé a une dimension finie ce qui ajoute des conditions aux limites particulières. Ainsi cette propriété ne s'observe que pour certaines fréquences particulières comme nous le verrons dans la prochaine partie.

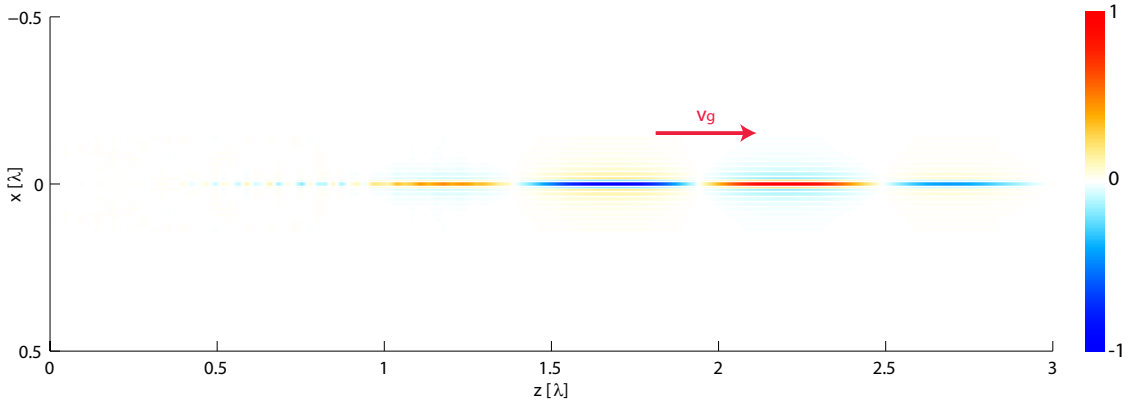

FIGURE II.7 – Paquet d'onde dans le milieu de fil infini à $t = 5\ ns$ pour une impulsion émise à $t = 0$: la propagation se fait le long des fils du réseau.

II.2.2 Modes guidés dans un milieu de dimension finie le long des fils

Dans un milieu de fils infini on aurait donc une propagation adispersive d'ondes TEM le long de l'axe des fils. Cependant, ce milieu infini ne peut exister et le fait d'ajouter une première contrainte de dimension finie le long de l'axe des fils change fondamentalement les modes propres du milieu.

Loi de la réfraction à l'interface air-milieu de fils

Commençons notre étude en considérant le demi-plan $z < 0$ comme étant un milieu de fils, et le demi-plan $z > 0$ du vide. Supposons que nous avons une onde de Bloch TEM de vecteur d'onde transverse $\mathbf{k}_\perp = k_\perp \mathbf{e_x}$ qui a été générée en $z = -\infty$. Cette onde arrive sur l'interface $z = 0$ et nous cherchons à déterminer les ondes réfléchies (une onde de Bloch TEM) et transmises (une onde dans le vide). La première étape est d'obtenir la loi de la réfraction pour l'interface considérée. Cette loi est une conséquence de l'invariance par translation le long de l'interface et résulte en la conservation de la composante tangentielle du vecteur d'onde à l'interface. Étant donné les relations de dispersion mises en jeu de part et d'autre de l'interface cela revient aux relations sur les angles θ_i, θ_r et θ_t suivantes :

$$\begin{aligned} \theta_r &= -\theta_i \\ \tan\theta_i &= \sin\theta_t = \frac{k_\perp}{\omega/c} \end{aligned} \tag{II.16}$$

Ces lois de Snell-Descartes un peu particulières font apparaître un angle d'incidence cri-

tique $\theta_c = \pi/4$. Lorsque l'angle d'incidence est supérieur à cet angle, il y a réflexion totale interne, autrement dit l'onde transmise est évanescente.
La deuxième étape pour déterminer les ondes transmises et réfléchies à l'interface est d'appliquer les relations de continuité. Nous négligeons les ordres de diffraction supérieur ainsi que les ondes TE et TM évanescentes qui auraient éventuellement pu être générées à l'interface. D'après l'équation II.15, on peut écrire le champ électrique des deux côtés de l'interface sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{(i)} &= E_0 e^{i(k_\perp x + k(z-L/2))} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{E}^{(r)} &= r E_0 e^{i(k_\perp x - k(z-L/2))} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{E}^{(t)} &= t E_0 e^{i(k_\perp x + \kappa(z-L/2))} \begin{pmatrix} \cos\theta_t \\ 0 \\ -\sin\theta_t \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{II.17}$$

Ainsi que les champs magnétiques :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}^{(i)} &= \frac{E_0}{\mu_0 c} e^{i(k_\perp x + k(z-L/2))} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{H}^{(r)} &= \frac{r E_0}{\mu_0 c} e^{i(k_\perp x - k(z-L/2))} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{H}^{(t)} &= \frac{t E_0}{\mu_0 c} e^{i(k_\perp x + \kappa(z-L/2))} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{II.18}$$

où $k = \dfrac{\omega}{c}$ pour satisfaire la relation de dispersion des ondes TEM, et $\kappa = \sqrt{k^2 - {k_\perp}^2}$ si $\theta_i \leq \theta_c$ ou bien $\kappa = j\sqrt{{k_\perp}^2 - k^2}$ dans le de la réflexion totale interne. Avec ces formes de champs, la conservation des composantes tangentielles des champs à l'interface ainsi que l'utilisation de la loi de réfraction, nous écrivons le coefficient de réflexion :

$$r = -\frac{k - \kappa}{k + \kappa} \tag{II.19}$$

Dans le cas où il y a réflexion totale interne r a bien une norme égale à 1 mais il devient

complexe. Cela introduit donc un déphasage lors de la réflexion de valeur :

$$\varphi(k_\perp, k) = \pi - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{{k_\perp}^2 - k^2}}{k}\right) \tag{II.20}$$

Ce déphasage est bien connu pour les ondes qui subissent une réflexion totale interne entre deux milieux diélectriques, et l'une de ses conséquences est l'effet Goos-Hänchen [65] qui introduit un décalage de l'onde réfléchie suivant l'interface.

Modes propagatifs dans la direction transverse

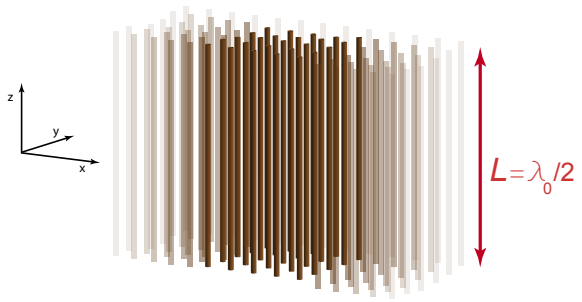

FIGURE II.8 – Géométrie du milieu de fils de longueur finie.

Ce décalage a son importance lorsque nous ajoutons une deuxième condition aux limites suivant la direction des fils. Maintenant, nous considérons un milieu de fils borné entre les deux plans $z = -L/2$ et $z = L/2$ (Figure II.8). Avec cette nouvelle contrainte d'espace les ondes de Bloch TEM à l'intérieur du milieu de fils subissent une condition de résonance Farby-Pérot lorsque la différence de chemin optique δ pour un aller retour entre les deux interfaces vérifie la condition suivante :

$$\delta = 2kL + 2\varphi(k_\perp, k) = 2n\pi \tag{II.21}$$

avec n un entier naturel. Finalement avec les équations (II.20) and (II.21) on obtient une relation de dispersion pour les modes de Bloch à l'intérieur d'un milieu de fils borné. Cette relation de dispersion concerne donc la propagation d'ondes guidées suivant la direction Ox, transverse aux fils. Les ondes de Bloch TEM qui étaient précédemment guidées le long des fils subissent un décalage spatial à chaque réflexion ce qui induit une propagation selon Ox. Le comportement du milieu de fils de longueur finie est donc bien différent de celui infini. Pour la première résonance Fabry-Pérot ($n = 1$) on a la relation suivante :

$$\tan\left(k\frac{L}{2}\right) = \frac{\sqrt{{k_\perp}^2 - k^2}}{k} \tag{II.22}$$

Cette relation de dispersion est dite implicite puisqu'on ne peut pas la résoudre de manière analytique. Nous représentons sur la figure II.9 le résultat de la résolution numérique de cette équation. Nous normalisons la fréquence et le nombre d'onde par la fréquence f_0 et le nombre d'onde k_0 qui correspondraient à un Fabry-Pérot idéal de longueur $\lambda/2$. Les asymptotes de la ligne de la lumière ($\omega = kc$) pour les basses fréquences et l'asymptote $f = f_0$ pour les grands nombres d'onde sont aussi représentées sur la figure. Y sont aussi superposés les résultats de simulation numérique pour la même géométrie.

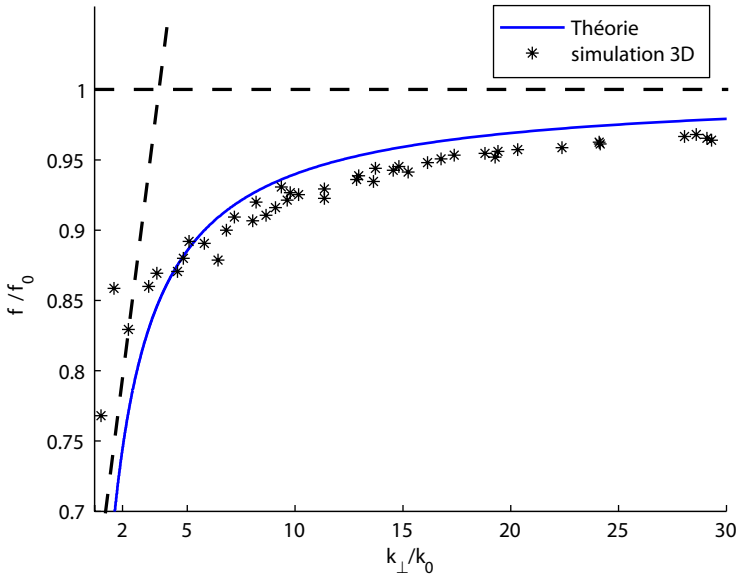

FIGURE II.9 – Relation de dispersion des modes guidés dans le milieu de fils de longueur finie.

Si on avait voulu être plus rigoureux lors de la détermination de cette relation de dispersion, il aurait fallu prendre en compte les ondes de Bloch TM créées à chaque réflexion ainsi que les ordres de diffraction supérieurs (et par conséquent les ondes de Bloch TE). Ces ondes, qui sont toutes évanescentes, ajoutent des petites corrections sur le déphasage induit à chaque réflexion, et on aurait ainsi obtenu une relation de dispersion plus compliquée qui dépendrait des paramètres géométriques du milieu de fils (rayon des fils et pas du réseau). Dans l'annexe de [57] nous avons discuté l'influence de la prise en compte de ces ondes séparément, et dans la référence [66] les auteurs obtiennent une relation de dispersion qui tient compte des ondes TM uniquement. La prise en compte des ordres

de diffraction supérieurs donne des résultats plus proches des résultats de simulation que la prise en compte des ondes TM. Ces corrections permettent de raffiner le modèle mais l'important dans cette partie est de mettre en évidence que le fait de borner le milieu de fils selon l'axe des fils induit une propagation dispersive des ondes.

Profils des champs dans le milieu

Nous décrivons ici de manière plus précise ces modes propagatifs dans le milieu de fils borné suivant l'axe des fils. Nous savons que le champ dans le milieu de fils doit être TEM par rapport aux fils. Toujours en négligeant les ondes TM et les ordres de diffraction supérieur, et en choisissant l'axe Ox pour avoir $\mathbf{k}_\perp = k_\perp \mathbf{e_x}$, on peut exprimer les champs électromagnétiques dans le milieu de fils de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{TEM}} &= e^{j\mathbf{k}_\perp.\mathbf{x}_\perp} \begin{pmatrix} E_0(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{H}_{\text{TEM}} &= \frac{1}{j\mu_0\omega} e^{j\mathbf{k}_\perp.\mathbf{x}_\perp} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{d}E_0/\mathrm{d}z \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{II.23}$$

Si on considère l'équation II.12 de propagation des modes TEM dans le milieu de fils on a une expression de E_0 :

$$E_0(z) = C_1 \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right) \tag{II.24}$$

De part et d'autre du milieu de fils, dans les régions ne contenant que de l'air, les champs électromagnétiques s'écrivent comme des ondes planes avec le même vecteur d'onde tangentiel à l'interface $\mathbf{k}_\perp$. Ce qui s'écrit en conservant les notations précédentes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{air}} &= E_{1,2} e^{j(\mathbf{k}_\perp.\mathbf{x}_\perp \pm \kappa(z \mp \frac{L}{2}))} \begin{pmatrix} \pm\kappa/k \\ 0 \\ -k_\perp/k \end{pmatrix} \\ \mathbf{H}_{\text{air}} &= \frac{E_{1,2}}{j\mu_0 c} e^{j(\mathbf{k}_\perp.\mathbf{x}_\perp \pm \kappa(z \mp \frac{L}{2}))} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{II.25}$$

Les indices 1 et 2 correspondent respectivement aux régions d'espace $z > L/2$ et $z < -L/2$. En appliquant les relations de continuité des composantes tangentielles à l'interface on arrive à la résolution du système suivant :

$$\begin{pmatrix} \sin(kL/2) & \cos(kL/2) & -\kappa/k & 0 \\ -\cos(kL/2) & \sin(kL/2) & -i & 0 \\ -\sin(kL/2) & \cos(kL/2) & 0 & \kappa/k \\ -\cos(kL/2) & -\sin(kL/2) & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{II.26}$$

Ce système a une solution non nulle si et seulement si le déterminant de la matrice est nul. La première solution qui annule le déterminant de la matrice nous permet d'obtenir une expression de la relation de dispersion précédente :

$$\cos\left(k\frac{L}{2}\right) = \frac{k}{k_\perp} \tag{II.27}$$

Cette expression est en fait rigoureusement la même que celle qui a été introduite à l'équation II.22. Il suffit d'écrire le sinus en fonction du cosinus pour obtenir la tangente que l'on avait précédemment. Avec cette contrainte sur le déterminant de la matrice, on peut finalement obtenir une expression des champs électromagnétiques dans toutes les régions de l'espace. Pour le champ TEM dans le milieu de fils cela donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{TEM}} &= E_0 \sin(kz)\, e^{j(\mathbf{k}_\perp.\mathbf{x}_\perp)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{H}_{\text{TEM}} &= -\frac{iE_0}{\mu_0 c} \cos(kz)\, e^{j(\mathbf{k}_\perp.\mathbf{x}_\perp)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{II.28}$$

Cela nous permet de constater que, pour le première résonance Fabry-Pérot, le champ électrique transverse au fil est maximal aux deux interfaces et s'annule au milieu. Le champ magnétique transverse est quant à lui maximal au milieu et s'annule aux deux interfaces (figure II.10).

Pour les grands nombres d'ondes transverses (les ondes sont évanescentes dans l'air), les champs dans les régions d'air s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{air}} &= E_0 e^{j\mathbf{k}_\perp.\mathbf{x}_\perp} e^{\mp\sqrt{{k_\perp}^2-k^2}(z\mp\frac{L}{2})} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-k^2/{k_\perp}^2} \\ 0 \\ j \end{pmatrix} \\ \mathbf{H}_{\text{air}} &= \frac{jE_0}{\mu_0 c}\frac{k}{k_\perp} e^{j\mathbf{k}_\perp.\mathbf{x}_\perp} e^{\mp\sqrt{{k_\perp}^2-k^2}(z\mp\frac{L}{2})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{II.29}$$

Considérations énergétiques

Enfin, cette relation de dispersion peut se comprendre de manière assez simple si l'on considère la densité d'énergie stockée dans le milieu de fils. En effet, selon la valeur de $k_\perp$ les ondes de Bloch TEM pénètrent dans l'air sur une distance inversement proportionnelle à la quantité $\sqrt{{k_\perp}^2 - k^2}$. Chaque mode propagatif dans le milieu de fils est défini par la résonance Fabry-Pérot pour un aller retour dans le milieu, dont la longueur n'est pas rigoureusement égale à L mais doit tenir compte des distances de pénétration dans l'air. Cette méthode est couramment utilisée en optique pour calculer les fréquences de résonance des cavités Fabry-Pérot en tenant compte de la longueur de pénétration dans le métal. Un moyen d'estimer cette longueur effective est de calculer la quantité :

$$L_{\text{eff}} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y,z)\mathrm{d}z\right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[u(x,y,z)\right]^2 \mathrm{d}z} \tag{II.30}$$

où $u(x,y,z)$ est la densité d'énergie électromagnétique pour le mode considéré. En utilisant la nature TEM des ondes de Bloch dans le milieu de fils, on s'aperçoit que la densité d'énergie est constante dans tout le milieu de fils, de $-L/2$ à $L/2$. Pour simplifier les notations nous considérons que cette constante est égale à 1, ce qui n'a aucune influence sur le résultat puisque cette quantité se simplifie dans le calcul de L_{eff}. En revanche, la densité d'énergie décroît de manière exponentielle aux deux interfaces avec l'air. En prenant en compte les 3 composantes des champs non nulles, nous arrivons finalement à l'expression de la longueur effective de la cavité :

$$L_{\text{eff}} = L + \frac{2}{\sqrt{{k_\perp}^2 - k^2}} \tag{II.31}$$

Cette expression présente l'énorme avantage de montrer de manière explicite l'augmentation de la longueur de la cavité Fabry-Pérot à considérer à cause de la pénétration des champs dans les régions d'air. Il y a donc une résonance Fabry-Pérot lorsque cette longueur effective est un multiple de la demie longueur d'onde ($L_{\text{eff}} = n\lambda/2$ pour la $n^{\text{ème}}$ résonance Fabry-Pérot). Après réarrangement de l'équation, cela conduit à une nouvelle expression de la relation de dispersion pour la première résonance Fabry-Pérot :

$$\frac{f_0}{f} = 1 + \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{k_\perp}{k_0}\right)^2 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{II.32}$$

où k_0 et f_0 correspondent aux paramètres d'une cavité Fabry-Pérot idéale, c'est-à-dire

$k_0 = \pi/L$ et $f_0 = c/2L$. Cette relation de dispersion est à nouveau implicite et on ne peut la résoudre que numériquement. La solution se superpose en fait avec la relation obtenue précédemment, et nous l'avons introduite pour l'intérêt qu'elle présente pour la compréhension physique de la dispersion qu'introduisent les contraintes d'espace de ce milieu de fils borné.

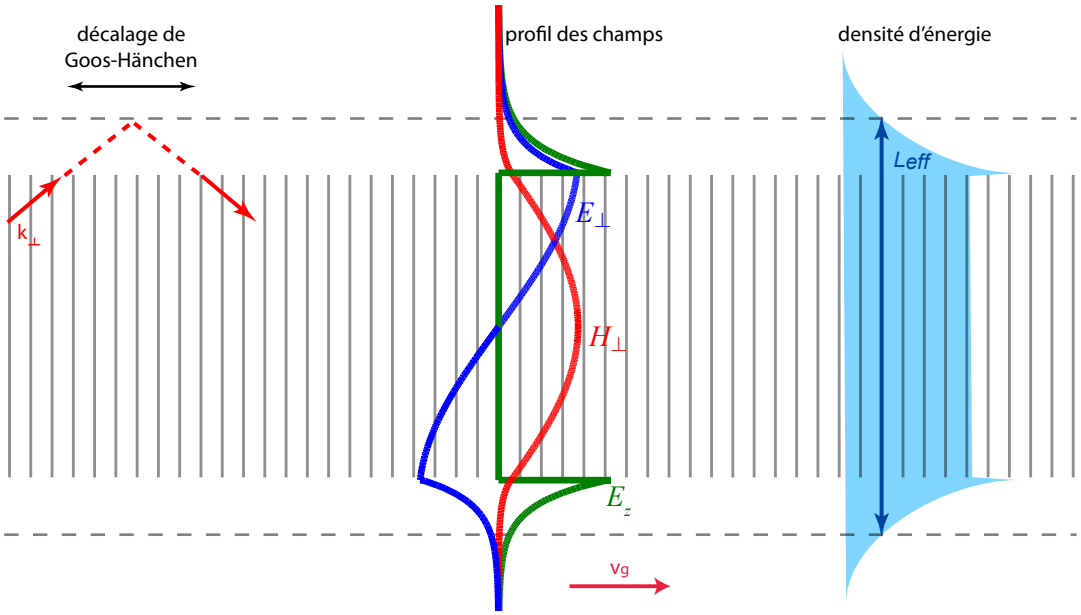

FIGURE II.10 – Schématisation des différentes explications de la relation de dispersion.

Sur la figure II.10, nous représentons les trois approches qui nous ont permis l'obtention d'une relation de dispersion pour les modes guidés dans le milieu de fils de longueur finie. Que ce soient l'effet Goos-Hänchen, le calcul rigoureux des champs dans le milieu, ou les considérations sur la densité d'énergie, tous prennent en compte le fait que les ondes évanescentes aux interfaces jouent un rôle sur le mode propre guidé. La relation de dispersion que l'on obtient est en fait gouvernée par ces ondes évanescentes. Les contraintes dues à la dimension finie du milieu de fils ont donc complètement changé la nature des modes propres supportées par le milieu : d'une propagation adispersive guidée le long des fils, nous sommes passés à une propagation dispersive guidée dans un plan transverse aux fils.

Explication du phénomène de canalisation

Revenons quelques instants sur les résultats d'imagerie pixel par pixel qui ont été obtenus par Pavel Belov et ses collègues en 2006 [62]. Dans ces résultats expérimentaux que

nous résumons sur la figure II.11, le profil du champ électrique créé par un objet sub-longueur d'onde placé à une extrémité du milieu de fils de longueur finie est reconstruit sur l'autre interface du milieu. Cette méthode d'imagerie tire partie comme nous l'avons vu précédemment de la propagation des ondes TEM le long de l'axe des fils. Bien des auteurs justifient d'ailleurs leurs résultats par la nature adispersive des modes TEM [63]. Cela peut sembler surprenant puisque nous venons de voir que lorsque la longueur des fils est finie il y a propagation dans les directions transverses et donc dispersion. Comment expliquer alors ces résultats expérimentaux ?

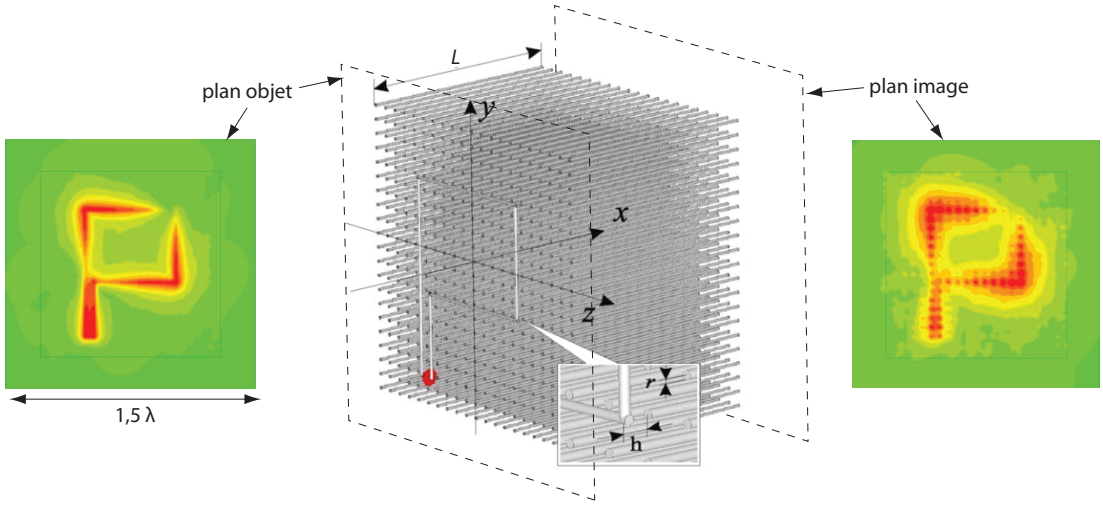

FIGURE II.11 – Imagerie par canalisation en-dessous de la limite de diffraction proposée par Pavel Belov et ses collègues (image reproduite de [62]).

En réalité, cette méthode d'imagerie ne fonctionne qu'à une fréquence bien précise, la fréquence de résonance d'un Fabry-Pérot idéal, à savoir lorsque la longueur des fils est exactement égale à un multiple de $\lambda/2$. Il s'agit donc d'une méthode d'imagerie monochromatique. En reprenant les calculs que nous avons mené jusqu'à maintenant et en se plaçant à cette fréquence bien particulière, nous pouvons en fait expliquer ces résultats. En introduisant le résultat de l'équation II.22 dans l'équation II.19 nous retrouvons un coefficient de réflexion effectif qui dépend de la fréquence :

$$r(f) = -\frac{1 - i\tan(\pi f L/c)}{1 + i\tan(\pi f L/c)} \tag{II.33}$$

Lorsque la fréquence correspond à la fréquence de résonance intrinsèque f_0 d'un Fabry-Pérot idéal, ce coefficient de réflexion est égal à -1 et est indépendant du nombre d'onde $k_\perp$ puisque la relation de dispersion n'a pas de solution à cette fréquence. Comme ce coefficient est réel, la réflexion n'induit pas de déphasage comme c'était le cas précédemment,

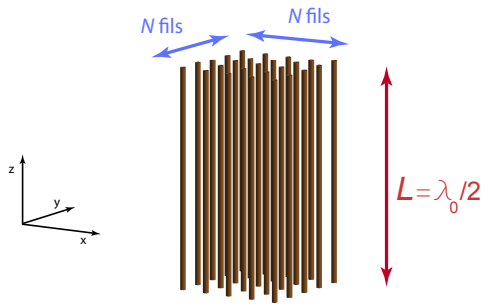

FIGURE II.12 – Géométrie du milieu de fils de dimensions finies.

et notamment le décalage Goos-Hänchen est nul. Comme les ondes de Bloch TEM se propagent le long des fils, s'il n'y a pas de décalage Goos-Hänchen, il ne peut pas y avoir de propagation dans les directions transverses.
En résumé, à la fréquence f_0, quel que soit le nombre d'onde $k_\perp$ considéré, l'onde réfléchie se propage dans la direction des fils tout comme l'onde incidente qui l'a générée. Cela implique alors que le profil du champ électrique sur une interface se recrée sur l'autre interface, aboutissant au régime dit de canalisation. Ceci explique donc les résultats de l'expérience de Belov [62, 66] où la résolution obtenue est bien plus fine que la longueur d'onde dans le vide, mais dépend de la distance entre fils. Cela étant dit, cette méthode d'imagerie recrée le profil du champ électrique d'un objet quelconque en champ proche du milieu de fils, et il faut utiliser une sonde de champ proche pour venir imager « l'image » de l'objet initial. Notons que ce phénomène de canalisation peut-être observé dans d'autres milieux comme par exemple un milieu composé de guides d'onde acoustique [67].

II.2.3 Modes propres et rayonnement d'un milieu de dimension finie

Jusqu'à maintenant tout se passait à l'intérieur ou dans le champ proche du milieu de fils. Maintenant, nous reprenons ce même milieu de fils mais nous ajoutons cette fois des contraintes de taille finie suivant les dimensions transverses (figure II.12). Le fait d'ajouter cette contrainte géométrique a 2 conséquences : des modes propres stationnaires se créent dans le milieu et on a émission d'ondes vers le champ lointain.

Modes propres stationnaires dans le milieu

La première conséquence est le fait que les nombres d'onde qui sont supportés par le milieu ne forment plus un continuum mais sont quantifiés : des modes propres stationnaires se

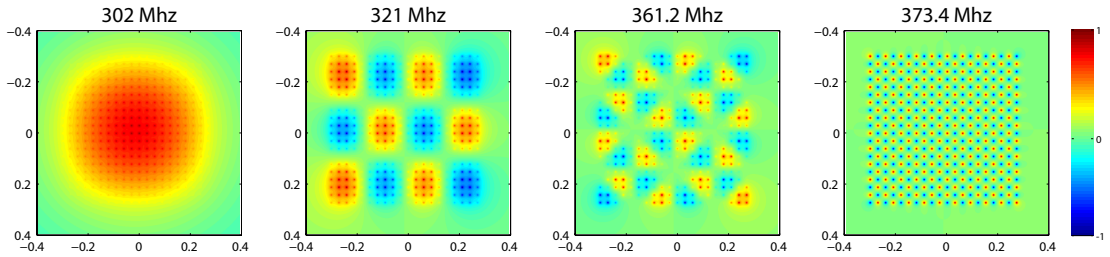

FIGURE II.13 – Composante z du champ électrique obtenue en simulation à 1 mm d'une interface du milieu de fils pour différentes fréquence. Les axes sont en unité de λ_0 soit 80 cm.

créent dans le milieu de fils. En physique du solide, la quantification des nombres d'ondes dans les cristaux se fait en introduisant les conditions aux limites de Born-Von Karman [54] qui consiste à « cycliser » le cristal, à savoir imposer que le dernier atome constituant le cristal soit équivalent au premier. Le nombre d'atomes en jeu dans les cristaux est très important et les dimensions du cristal sont bien plus grandes que les longueurs d'onde en jeu. Dans notre cas, nous considérons un milieu de 20×20 tiges, dont la dimension totale n'excède pas ici une demie longueur d'onde dans le vide. Par conséquent, cette condition aux limites n'est pas adaptée à notre système. Cependant, le même effet de quantification des vecteurs d'ondes est observé.

Les ondes guidées dans le milieu de fils rencontrent des interfaces entre le milieu de fils et les régions d'air, ce qui se traduit par la génération d'une onde réfléchie et d'une onde transmise. La formule analytique du coefficient de réflexion pour cette interface n'est pas facile à obtenir puisque l'onde transmise dans l'air est la superposition d'un grand nombre d'ondes planes à cause de la dimension finie le long des fils. Toujours est il que les interférences que l'on obtient dans le milieu de fils ne sont constructives que pour un spectre discret de nombres d'onde de Bloch, créant ainsi les modes stationnaires supportés par la géométrie en question.

Les nombres d'onde de Bloch sont donc quantifiés et sont égaux à : $\mathbf{k}_\perp = \dfrac{\pi}{D}(m.\mathbf{e_x} + n.\mathbf{e_y})$, avec $(m,n) \in [\![0; N-1]\!]^2$ et D la dimension transverse du milieu de fils dans les directions Ox et Oy ($D = a(N-1)$). Il est important de rappeler que chaque nombre d'onde de Bloch $k_{\perp(m,n)}$ est associé à une fréquence propre $f_{(m,n)}$ d'après les résultats de la partie précédente.

Sur la figure II.13, nous représentons certains de ces modes propres résultant d'une simulation numérique pour un milieu de fils constitué de 20×20 fils d'une longueur de 40 cm et espacés de 1.2 cm. Certains de ces modes propres sont aussi la superposition

de 2 modes propres qui ont la même fréquence de résonance que la simulation n'a pas réussi à séparer. Par exemple, le troisième mode est la superposition des modes propres de nombres d'onde $k_{4,8}$ et $k_{8,4}$. Ce milieu supporte donc, sur une gamme de fréquence allant de 300 MHz à 375 MHz, des modes propres stationnaires qui varient sur des échelles allant de la dimension du réseau D jusqu'à son pas a.
Pour quantifier un peu plus les échelles en jeu, le milieu de fils, grâce à la relation de dispersion qu'il induit, permet d'encoder des informations allant de 50 cm ce qui correspondrait à une fréquence 600 MHz jusqu'à une longueur d'onde de 2.4 cm qui correspondrait à une fréquence de 12.5 GHz. Le milieu de fils permet donc de compresser l'information normalement contenue sur plus de 12 GHz de bande passante en quelques dizaines de MHz. Ce caractère dispersif des modes propres est d'un intérêt fondamental pour comprendre les résultats obtenus en 2007 [38].

Rayonnement en champ lointain

La seconde conséquence importante de la contrainte de dimension finie latéralement est une conversion des ondes guidées dans le milieu de fil en ondes propagatives dans l'air. Pour comprendre cette conversion, il faut revenir au profil des champs dans la structure. Nous avons déjà vu que les champs ne peuvent pas s'échapper du milieu par les interfaces du haut et du bas puisque les ondes dans l'air sont évanescentes. Le seul moyen de sortir est donc par les interfaces latérales. Étant donné que les composantes x et y du champ électrique pour la première résonance sont impaires pour la première résonance Fabry-Pérot, elles ne peuvent pas contribuer au rayonnement latéralement. En revanche, la composante z du champ électrique est quant à elle paire et confinée aux 2 interfaces. On peut donc modéliser ce champ par la présence de 2 petits dipôles infinitésimaux $\vec{p}_{1,2}$ positionnés en $z = \pm L/2$. Le champ rayonné par la superposition de ces deux petits dipôles s'écrit dans l'approximation dipolaire et en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0 \sin\Phi}{4\pi r} e^{ikr} \left(e^{i\frac{kL}{2}\sin\Phi} + e^{i(-\frac{kL}{2}\sin\Phi + \varphi)} \right) \mathbf{e_\Phi} \tag{II.34}$$

où Φ correspond à l'angle zénithal, et φ correspond au déphasage entre les deux dipôles. Selon la parité de la résonance Fabry-Pérot considérée, les deux dipôles sont soit en phase (comme c'est le cas pour la première résonance Fabry-Pérot et le profil de champ représenté sur la figure II.10) soit en opposition de phase. De plus, pour la $n^{\text{ème}}$ résonance Fabry-Pérot, la distance qui sépare ces deux dipôles est approximativement égale à $n\lambda/2$. Le rayonnement obtenu pour la superposition de ces 2 dipôles est représenté sur la figure II.14 pour les 3 premières résonances Fabry-Pérot.

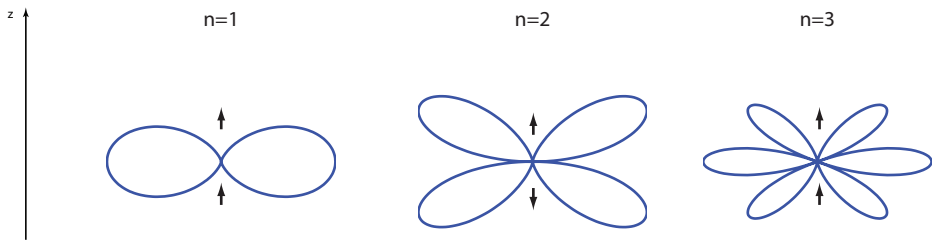

FIGURE II.14 – Diagramme de rayonnement pour 2 dipôles élémentaires parallèles entre eux espacés de $n\lambda/2$ et qui sont en phase si n est impair, et en opposition de phase sinon.

Ceci donne l'allure du champ rayonné dans un plan qui contient l'axe Oz (qui est un axe de révolution) et on remarque que l'on n'a effectivement aucun rayonnement suivant cet axe. Mais il faut aussi prendre en compte la superposition spatiale d'une infinité de cette paire de dipôles élémentaires répartie suivant la forme du mode propre stationnaire dans le milieu de fils. La distribution spatiale des sources de rayonnement est donnée par la forme du mode de Bloch TEM dans les fils. La composante E_z du champ sur une des interfaces du milieu de fils a la périodicité donnée par le nombre d'onde de Bloch du mode considéré et prend la forme :

$$E_z^{\mathbf{k}_\perp} \propto \sin\left(k_{\perp_x}(x - \frac{D}{2})\right) \sin\left(k_{\perp_y}(y - \frac{D}{2})\right) \Pi_D(x, y) \tag{II.35}$$

où Π_D est la fonction porte bidimensionnelle de largeur D. En sommant cette distribution de sources on obtiendrait directement la forme du diagramme de rayonnement. Ceci dit, il existe une méthode plus élégante pour obtenir cette directivité transverse en passant dans l'espace de Fourier spatial. Cette expression se transforme en la somme de 4 sinus cardinaux 2D positionnés sur les coins d'un rectangle de largeur $2k_{\perp_x}$ et de hauteur $2k_{\perp_y}$ (figure II.15). Cette représentation contient toute l'information sur le champ propagatif qu'engendre le mode stationnaire. Au début de ce chapitre, nous avons vu que la propagation agit comme un filtre spatial passe-bas et ici il prend la forme d'un disque de rayon ω/c. Tout ce qui est contenu dans ce disque se propage vers le champ lointain. Cela nous permet d'obtenir à la fois l'énergie qui est rayonnée ainsi que le diagramme de directivité. Tout d'abord, en sommant le module au carré de la fonction ainsi obtenue sur ce disque, nous obtenons l'énergie rayonnée. Le calcul complet est relativement compliqué à mener puisqu'il faut passer d'une géométrie carrée à une symétrie cylindrique ce qui se fait par des décomposition en fonctions de Hankel, mais une estimation de cette quantité d'énergie

peut être obtenue assez facilement. En effet, comme nous sommons 4 sinus cardinaux de la variable $Dk_{\perp_{x,y}}$ (on a donc une décroissance inversement proportionnelle à cette quantité pour chaque sinus cardinal), l'efficacité du rayonnement est égale à $1/(16\pi).(DLk_{\perp_x}k_{\perp_y})^2$: plus le nombre d'onde de Bloch est petit, plus le mode en question émet d'énergie, et inversement.

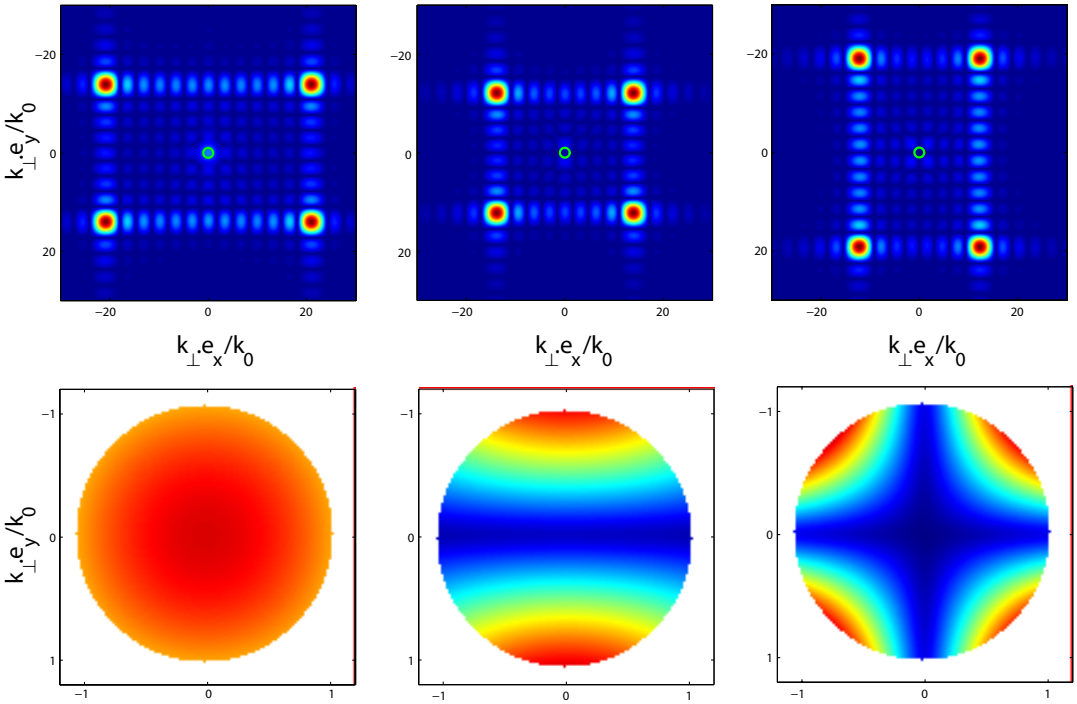

FIGURE II.15 – Transformée de Fourier spatiale de 3 modes propres différents. En haut on voit la superposition des 4 sinus cardinaux. En bas on représente la projection de ces modes sur le disque du filtre passe-bas de la propagation. Selon $k_\perp$ un rayonnement monopolaire, dipolaire ou quadrupolaire est observé.

Dans le même temps, cette représentation nous donne accès à la directivité du rayonnement, lorsqu'on regarde de plus près l'intersection avec le disque de rayon ω/c (en vert sur la figure). Un point du cercle de coordonnées ($\omega/c\cos\theta$,$\omega/c\sin\theta$) permet d'obtenir la quantité d'énergie qui est rayonnée dans la direction définie par l'angle θ. Il reste toutefois important de garder en mémoire que cette représentation donne la directivité dans le plan transverse. Le diagramme de directivité dans un plan qui contient l'axe Oz reste celui de la figure II.14.

Selon la parité des modes stationnaires, ou en d'autres termes selon la parité des indices m et n, la transformée de Fourier d'espace inversant la parité, nous obtenons des diagrammes de directivité différents. Pour une direction donnée, si l'entier qui décrit le nombre d'onde

de Bloch dans cette direction est pair, son spectre de Fourier est impair et il s'annule à l'origine. En revanche, un entier impair n'impose pas cette annulation à l'origine. De plus, puisque nous avons pris une dimension latérale inférieure à $\lambda/2$ le spectre ne s'annule pas sur tout le disque du filtre passe-bas [5]. En prenant en compte les 2 directions d'espace, cela se résume par les 4 diagrammes de directivité possibles :

- les modes impair-impair donnent un rayonnement monopolaire ;
- les modes impair-pair (respectivement pair-impair) donnent un rayonnement dipolaire suivant Ox (respectivement Oy) ;
- les modes pair-pair donnes un rayonnement quadrupolaire.

Cette diversité sur les diagrammes de rayonnement est un moyen de lever les dégénérescences des modes. Cela confère au milieu des degrés de liberté spatiaux qui sont des informations exploitables à des fins d'imagerie ou de focalisation comme nous l'avons vu dans le premier chapitre. À une fréquence donnée où l'on retrouve plusieurs modes stationnaires, en enregistrant le champ rayonné dans différentes directions il devient possible de discriminer les modes qui ont été excités, ce qui augmente la quantité d'informations que l'on capte en champ lointain.

Il existe une autre manière de comprendre ces diagrammes de directivité, à l'aide des rayonnement de coins qui ont été introduits pour étudier le rayonnement acoustique des structures [68,69]. En calculant le rayonnement des plaques rectangulaires minces, il a été mis en évidence que seuls les quatre coins de la plaque contribuent significativement au rayonnement.

En effet, dans ces plaques minces de dimensions latérales relativement petite comparée à la longueur d'ondes des ondes acoustiques dans l'air, il existe des modes stationnaires qui vérifient la condition $k < m\pi/D$ and $k < n\pi/D$. Ces modes correspondent donc à des modes subsoniques analogues aux modes de Bloch que l'on a mis en évidence ici. Si on décompose ces modes en sources secondaires d'émission, la plupart de ces sources ont tendance à annuler leur effet entre elles. En groupant ces sources secondaires en dipôles ou quadrupôles sub-longueur d'ondes qui ne rayonnent pas (figure II.16), on montre que le rayonnement apparent se limite au rayonnement des coins, ce qui permet d'obtenir aisément la directivité du mode propre considéré.

5. Lorsque la dimension transverse dépasse $\lambda/2$ on des zéros qui apparaissent dans le disque de la propagation. Cela donne naissance à des diagrammes de directivité plus complexes.

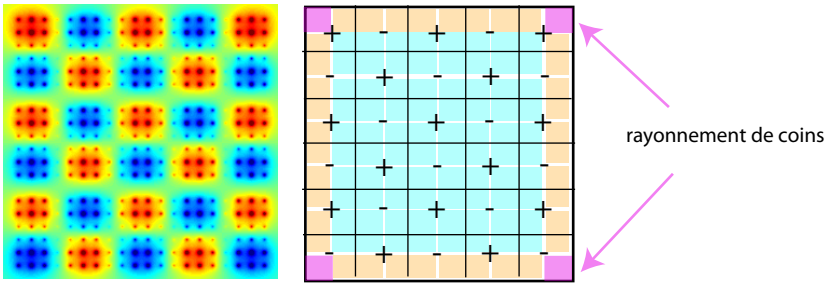

FIGURE II.16 – Illustration du rayonnement de coins. (gauche) La composante z du champ électrique à une interface pour un mode de Bloch donné. (droite) Décomposition sur les sources secondaires démontrant que le rayonnement est dû aux coins. Dans ce cas on comprend aisément que le mode rayonne de manière dipolaire.

II.2.4 Effet Purcell

L'idée de l'expérience initiale était de récupérer l'information sub-longueur d'onde encodée comme une informationn temporelle en champ lointain. Or, il semble à première vue que les modes les plus sub-longueur d'onde rayonnent de manière moins efficace, ce qui laisse supposer que la technique ne permet pas d'obtenir la résolution optimale. En réalité il reste un dernier phénomène à étudier, c'est le couplage entre un objet placé dans le champ proche de ce milieu et le milieu lui-même.

Le taux d'émission spontanée n'est pas une quantité intrinsèque des atomes ou des molécules dans un matériau donné, mais cette quantité dépend très fortement des propriétés électromagnétiques du milieu environnant. En 1946, Edward M. Purcell [50] a démontré que le taux d'émission spontanée Γ d'une source de lumière dépend très fortement de son environnement. On peut augmenter de manière significative ce taux d'émission lorsqu'on place la source dans une cavité résonante. Ce phénomène est aujourd'hui connu sous le nom « d'effet Purcell » et se résume à l'aide du facteur de Purcell F_p :

$$F_p = \frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{3\lambda^3}{4\pi^2}\frac{Q}{V} \tag{II.36}$$

où Q correspond au facteur de qualité de la cavité résonante et V à son volume modal.

Un peu plus tard, en 1987, E. Yablonovitch [55] a prédit théoriquement qu'un cristal « photonique » peut permettre de contrôler le taux de recombinaison radiative d'une source de lumière à l'intérieur de ce matériau. Cette idée a donné lieu au vaste domaine des cristaux photoniques à bande interdite, où cet effet est utilisé pour inhiber l'émission spontanée.

Étant donné que le volume modal V est quasiment constant dans notre cas, le taux d'émis-

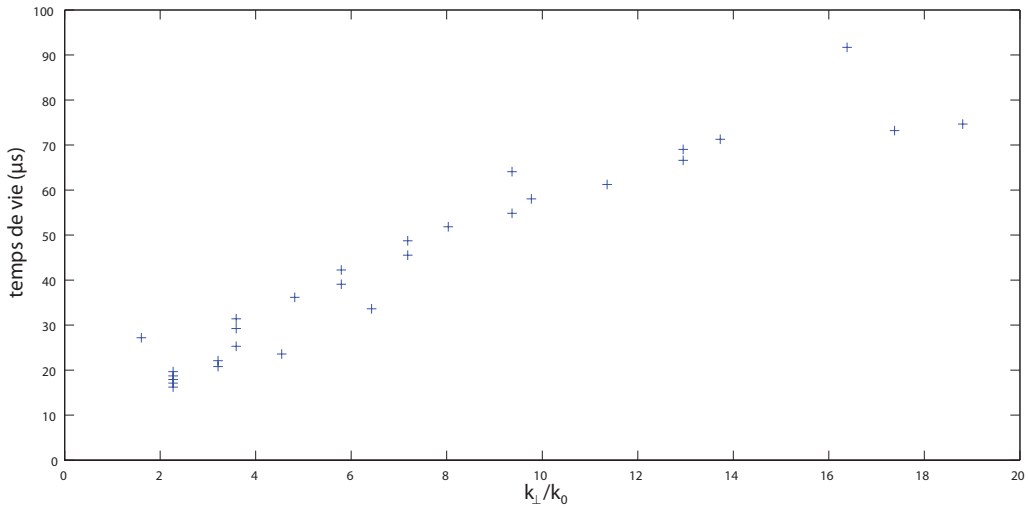

FIGURE II.17 – Évolution du temps de vie d'un mode dans la structure en fonction du nombre d'onde de Bloch.

sion spontanée d'une source placée dans le champ proche du milieu de fils est gouverné par le facteur de qualité de la résonance considérée. Ce facteur de qualité peut s'obtenir à partir des calculs que nous avons menés précédemment, puisque nous avons montré que l'énergie rayonnée est proportionnelle à $(DLk_{\perp_x}k_{\perp_y})^2$: les petits nombres d'ondes rayonnent plus efficacement. En d'autres termes le facteur de qualité, qui est le ratio entre l'énergie stockée dans le résonateur et l'énergie rayonnée, augmente linéairement avec $(DLk_{\perp_x}k_{\perp_y})^2$. Comme indiqué dans la formule de Purcell [50], cela se traduit par une émission plus importante pour une source qui correspondrait aux grands nombres d'onde.

Cet effet se manifeste alors par un meilleur couplage entre une source réactive placée proche d'une interface du milieu de fils et le milieu lui-même. Et ce meilleur couplage s'observe d'autant mieux qu'on excite un mode très sub-longueur d'onde. La nature résonante des modes piégés dans le milieu permet d'adapter l'impédance d'un petit dipôle électrique qui serait placé à une extrémité. L'effet Purcell compense le mauvais rayonnement des modes associés aux grands nombres d'onde de Bloch. Il implique un taux d'émission spontané proportionnel à la quantité $(Dk_\perp)^2$, alors que le rayonnement a une efficacité proportionnelle à l'inverse de cette quantité. Les deux effets se contrebalancent et finalement en négligeant les pertes ohmiques l'ensemble des détails sub-longueur d'ondes générés par une source proche du milieu rayonnent la même quantité d'énergie. La seule différence est la gamme de fréquence sur laquelle l'énergie est émise, puisque les modes les plus sub-longueur d'onde ont des bandes passantes de résonance bien plus étroites.

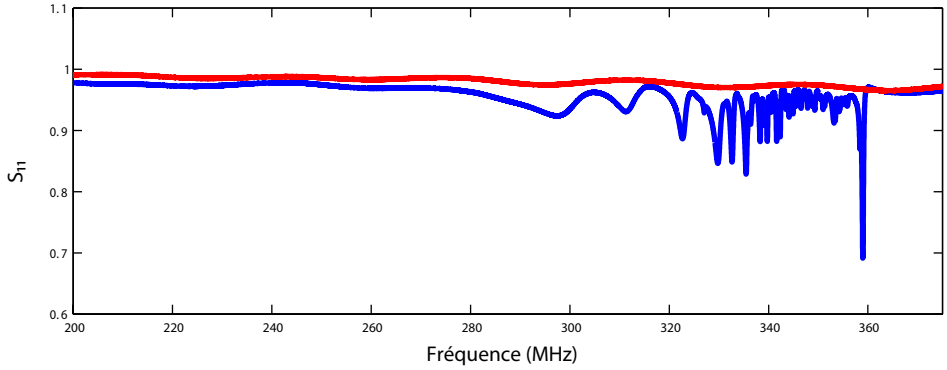

FIGURE II.18 – Exemple d'un S_{11} mesuré pour un petit monopole placé dans l'axe d'une tige du réseau en l'absence (rouge) et avec (bleu) le milieu de fils.

D'un point de vue temporel, un facteur de qualité élevé signifie un temps d'atténuation long : plus le facteur de qualité est important, plus les modes oscillent longtemps. Si on regarde le temps de vie d'un mode dans la structure on observe une augmentation avec le nombre d'onde du mode considéré. Avec le calcul que l'on vient de faire il semblerait que le temps de vie du mode augmente de manière quadratique avec le mode. Lorsque nous avons essayé de l'obtenir à partir de simulations temporelles nous avons obtenu une croissance linéaire (figure II.17). Pour obtenir cette courbe, nous avons effectué une transformée de Fourier à fenêtre glissante (analyse temps/fréquence). Cependant les temps de simulation étaient trop courts [6] et il semble donc que la progression linéaire avec le nombre d'onde de Bloch $k_\perp$ ne soit pas rigoureuse. Toujours est il qu'on observe bien une augmentation du temps de vie avec le nombre d'onde.

L'effet Purcell explique pourquoi les antennes de l'expérience de 2007 [38], qui étaient purement réactives, sont devenues émettrices en présence de la collection de fils. Cet effet permet l'adaptation d'impédance des petits monopoles qui sont complètement désadaptés. Nous avons vérifié expérimentalement cette adaptation d'impédance à l'aide d'un analyseur de réseaux. Nous mesurons le paramètre S_{11} (coefficient de réflexion à l'entrée) d'un petit monopole réactif comme celui de l'expérience initiale en présence et en l'absence du milieu de tiges (figure II.18). Ce coefficient correspond au ratio entre la puissance émise à l'entrée du monopole et la puissance réfléchie par celui-ci. Lorsque ce ratio est égal à 1, toute la puissance est renvoyée vers la ligne d'alimentation ce qui signifie qu'il n'y a pas de puissance rayonnée. En revanche lorsque celui-ci diminue, une partie de l'énergie est rayonnée par le monopole (ou absorbée).

6. Nous avons simulé 15 μs de signal pour avoir des temps de simulation convenables.

En l'absence du milieu de fils ce paramètre S_{11} reste quasiment constant à 1 sur la bande passante considérée ce qui montre bien que l'on utilise une source réactive. Lorsqu'on approche le milieu de fils, la courbe obtenue peut descendre jusqu'à 0.7, ce qui montre que l'effet Purcell permet d'adapter l'impédance d'une source. Le couplage entre le monopole et le milieu de fils est d'ailleurs d'autant plus important que les modes sont résonants, c'est-à-dire pour les fréquences proches de la fréquence propre de résonance d'un fil unique (f_0). Il s'agit bien d'un phénomène d'amplification résonante : lorsqu'on excite un résonateur à la résonance celui-ci répond avec des amplitudes qui sont d'autant plus importante que le facteur de qualité est important. Cette vision permet d'ailleurs de voir l'équivalence avec l'effet Purcell.

II.3 Exploitations de ces propriétés

Après cette étude sur les propriétés physiques du milieu de fils, intéressons nous maintenant à l'exploitation de ces propriétés à des fins de focalisation et d'imagerie en dessous-de la limite de diffraction. En effet, il est apparu que le milieu de fils agit comme un convertisseur d'ondes évanescentes en ondes propagatives grâce à des phénomènes résonants et dispersifs. Les ondes évanescentes qui restent généralement confinés autour de la source qui les a générées sont porteuses de l'information sub-longueur d'onde qui nous intéresse. Comme nous sommes capables de les mesurer et donc de les exciter efficacement et de les contrôler depuis le champ lointain, cela ouvre de nombreuses perspectives.

II.3.1 Degrés de liberté

Les degrés de liberté spatio-temporels que nous offre le milieu de fils sont importants et il nous faut les expliciter un peu plus en détail. Ces degrés de liberté nous intéressent pour contrôler des ondes depuis le champ lointain dans ce milieu de fils. Pour bien les comprendre il est plus aisé de partir de l'opération réciproque, à savoir une source ponctuelle placée en champ proche du milieu de fils.
Prenons donc la situation où l'on a un petit dipôle placé à quelques millimètres du milieu de fils de la figure II.4. Ce petit dipôle émet une impulsion centrée autour de 350 Mhz d'une durée de 5 ns. Évidemment, la physique du milieu de fils que nous venons d'expliciter dans la partie précédente nous permet de savoir ce qui se produit. En mesurant une composante transverse du champ électrique dans le milieu de fils (en simulation et sans considérer les pertes ohmiques) nous obtenons un signal qui s'étend sur plus de 15 μs [7] (figure II.19),

7. Pour des raisons de temps de calcul nous avons arrêté la simulation au bout de 15 μs.

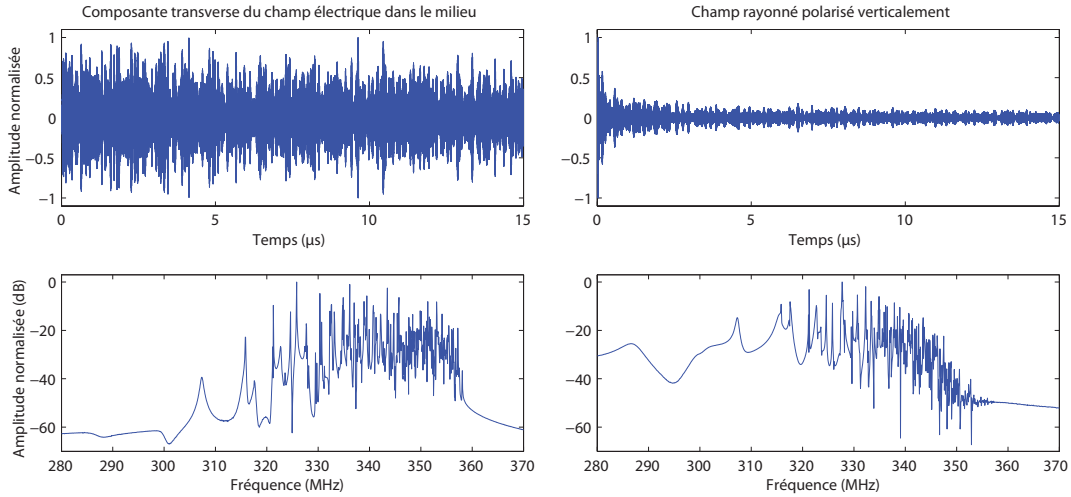

FIGURE II.19 – Signaux temporels (et leurs spectres) dans la structure et en champ lointain qui montrent le spectre discret des résonances du milieu.

soit plus de 3000 fois la durée de l'impulsion initiale. Ceci traduit la nature résonante du milieu de fils. Lorsqu'on regarde le spectre fréquentiel de ce signal, on voit la présence de nombreux pics de résonance qui correspondent aux modes propres stationaires du milieu de fils de dimension finie, qui oscillent tous sur des échelles plus petite que la longueur d'onde.

Nous savons que ces modes propres rayonnent en champ lointain, et lorsque nous mesurons le champ rayonné polarisé suivant l'axe Oz, nous obtenons un signal temporel qui lui aussi s'étend sur 15 μs et qui présente un spectre fréquentiel qui a de nombreux pics de résonance (figure II.19). Si on change la position du dipôle émetteur dans le plan Oxy le signal reçu en champ lointain présente des pics de résonance distincts traduisant la conversion d'une onde évanescente en une information propagative. La distribution spatiale de champ générée par la source excite donc les modes propres de la structure avec un jeu de phases et d'amplitudes unique. Ces modes propres spatiaux correspondent chacun à une fréquence propre de résonance. Ils rejoignent le champ lointain comme une information codée dans le spectre de rayonnement. Nous remarquons d'ailleurs que les facteurs de qualité qui correspondent à chacune des résonances évoluent comme nous l'avions prédit.

La répartition des degrés de liberté fréquentiels offerts par ce milieu a donc une allure légèrement différente de celle présentée dans le cas d'un milieu aléatoire que nous avons étudié dans le premier chapitre (figure I.9). Tout d'abord la distribution sur l'axe fréquentiel est donné par la relation de dispersion. Les N_f degrés de liberté fréquentiels offerts par le milieu ne sont pas équi-répartis sur l'axe des fréquences et ne sont pas séparés d'un

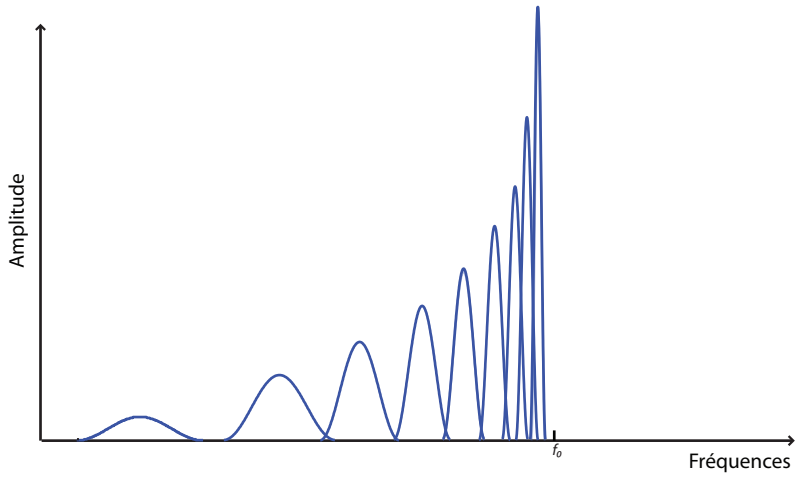

FIGURE II.20 – Schématisation de la distribution des degrés de liberté fréquentiels offerts par le milieu de fils.

pas constant $\delta\omega$. Ici, nous avons bien plus de degrés de liberté proches de la fréquence f_0. Cependant, ces degrés de liberté restent distincts les uns des autres puisque le facteur de qualité des résonances contrebalance cet effet : les pics associés aux degrés de liberté deviennent de plus en plus étroits à mesure qu'on se rapproche de f_0. L'énergie contenue dans chacun des pics de résonance étant la même quelle que soit la résonance, c'est l'amplitude de chacun des pics qui augmente. Sur la figure II.20 nous représentons une schématisation de la répartition fréquentielle de ces degrés de liberté. Ceci ne se voit pas très bien sur les résultats de simulation puisque nous avons dû stopper les simulations pour des raisons évidentes de temps de calcul.
Les degrés de liberté spatiaux offerts par ce milieu sont quant à eux aussi légèrement différents de ceux que présentaient les milieux aléatoires. Ici, le milieu de fils de dimension finie et de largeur inférieure à la demie longueur d'onde n'offre que 4 diagrammes de directivité différents (monopolaire, dipolaire x ou y et quadrupolaire). On ne peut pas augmenter le nombre de sources en champ lointain indéfiniment pour générer des champs différents. Dans les milieux complexes désordonnés à partir du moment où les sources étaient séparées d'une distance supérieure à la longueur de cohérence on avait des degrés de liberté spatiaux indépendants. Ici, nous avons donc un maximum de degrés de liberté spatiaux qui se limite expérimentalement à 4 pour pouvoir exciter de manière indépendante chacun des diagrammes de directivité (figure II.21). En augmentant la dimension transverse du milieu D on obtient une plus grande diversité sur les diagrammes de rayonnement et on peut ainsi jouir d'un plus grand nombre de degrés de liberté spatiaux.

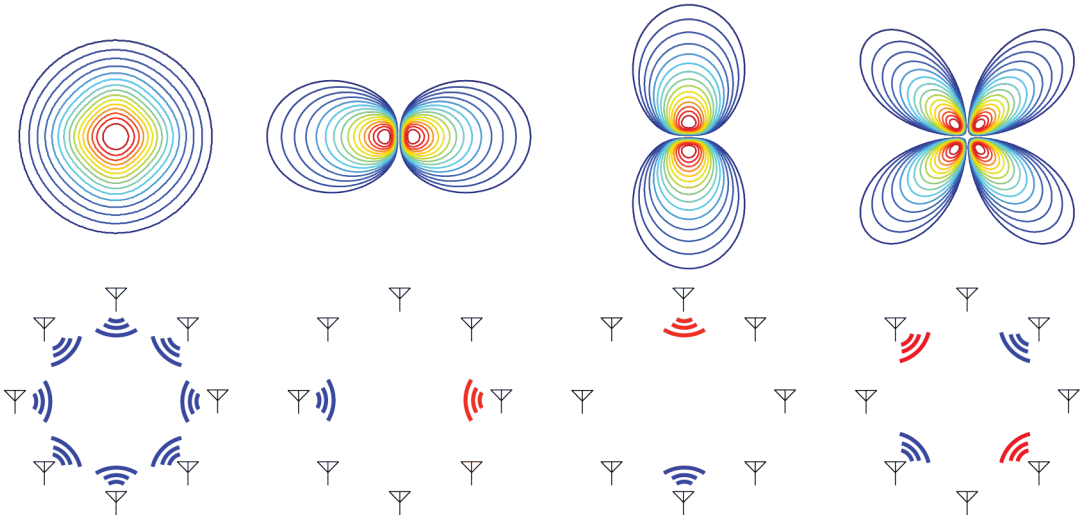

FIGURE II.21 – Les quatre diagrammes de directivité offerts par le milieu et la méthode pour les exciter avec 8 antennes en champ lointain.

II.3.2 Focalisation par retournement temporel

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, une méthode simple et efficace pour tirer parti des degrés de liberté spatio-temporels offerts par un milieu de propagation est le retournement temporel. Cette technique permet de traiter de manière cohérente l'ensemble des informations contenues dans une bande-passante en un point particulier de l'espace. Cette technique réside dans la connaissance des fonctions de Green entre le point où l'on désire focaliser les ondes et les éléments qui constituent le Miroir à Retournement Temporel.

Ici, le MRT est composé de 8 antennes placées dans le champ lointain de manière à exploiter au maximum les degrés de liberté spatiaux du milieu de fils. Le point source de l'expérience de retournement temporel est un petit dipôle placé dans le champ proche du milieu de fils. Expérimentalement nous préférons utiliser un monopole sur un plan de masse afin de s'assurer que les câbles inhérents à tout montage expérimental n'agissent pas comme des antennes qui participeraient aux résultats de super-résolution que nous obtenons.

Pour un signal monochromatique, le retournement temporel agit comme une opération de conjugaison de phase et crée le mode propre associé à la fréquence d'émission avec une phase nulle au point d'excitation initial. Si on change de fréquence on change le mode propre qui est créé mais on conserve la phase nulle au point d'excitation initial. En sommant toutes ces fréquences d'excitation grâce au retournement temporel, on somme

tous les modes propres du milieu de manière cohérente au point d'excitation initial (la phase y est nulle pour tous les modes) et de manière incohérente partout ailleurs.
Le champ retourné temporellement puis réémis depuis le champ lointain crée donc un point focal qui est directement proportionnel au nombre de modes de Bloch indépendants initialement excités par la source dans le milieu de fils. Grâce à ce milieu de fils, il en résulte un point focal qui peut osciller aussi finement que le mode propre de plus grande périodicité offert par le milieu, à savoir la périodicité du réseau de fils. On peut ainsi espérer obtenir une focalisation sub-longueur d'onde comme si le miroir à retournement temporel était placé en champ proche [70] de nos sources et prenait en compte les ondes évanescentes.
Lorsque le miroir à retournement temporel est composé d'une unique antenne placée en champ lointain du milieu de fils, on ne capte pas la signature de tous les modes propres du milieu de fils puisque certains modes ne rayonnent pas dans cette direction. La focalisation par retournement temporel n'est dans ce cas pas proportionnelle au nombre total de modes de Bloch mais seulement à ceux qui rayonnent dans la direction de l'antenne. C'est pourquoi il est important de pouvoir tirer profit des degrés de liberté spatiaux pour avoir la meilleure focalisation possible.
Si on se place dans une cavité réverbérante comme dans l'expérience de 2007, celle-ci crée des sources virtuelles de champ lointain qui permettent de capter tous les diagrammes de rayonnement possibles avec une unique antenne. Ce n'est pas la cavité qui permet la focalisation sub-longueur d'onde mais bien le milieu de fils, la cavité permet juste de diminuer le nombre d'éléments constituant le MRT.
Nous avons donc réalisé cette expérience sur l'échantillon expérimental de la figure II.4. Nous nous sommes placés en chambre anéchoïque de manière à n'obtenir que la réponse du milieu de fils [8]. Le milieu de fils est placé verticalement sur un plan de masse de cuivre d'un mètre carré (1 m×1 m) qui isole les fils qui alimentent nos sources. Celles-ci sont des petits monopoles de 3 mm de longs linéairement alignés et séparés de 12 mm (le pas du réseau de fils) au nombre de 16 (figure II.22).
Ces monopoles sont reliés à 2 multiplexeurs de 8 voies chacun, eux-mêmes reliés à un générateur de signaux arbitraires pouvant émettre des signaux échantillonnés à 10 GHz (Tektronix AWG7102). Nous avons donc la capacité de contrôler indépendamment chacun de ces 16 monopoles avec une électronique qui nous permet de travailler directement sur les signaux temporels. Nous n'avons pas besoin de technique de modulation comme dans la toute première expérience de retournement temporel avec des ondes électromagnétiques

8. La chambre anéchoïque nous a été généreusement prêtée par Emmanuel Geron du Laboratoire d'Électricité Générale que nous tenons à remercier.

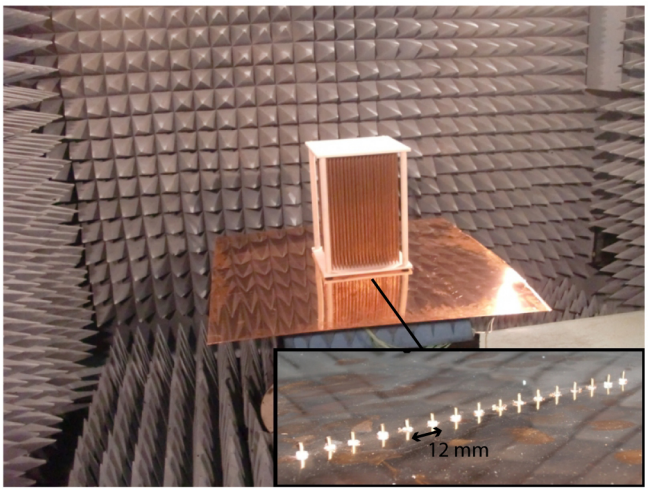

FIGURE II.22 – Photo du milieu de fils sur son plan de masse et dans la chambre anéchoïque. Dans l'encadré on peut observer les petits monopoles sources.

qui a été menée au laboratoire [15].
Le fait d'utiliser ces petits monopoles comme source est une méthode pour générer des ondes évanescentes en micro-ondes. Cette technique est celle qui avait été employée en 2007 [38] et cela nous permet notamment d'en expliquer les résultats. Une autre technique pour fabriquer des champs qui varient sur des échelles sub-longueur d'onde aurait été d'utiliser un prisme de cire illuminé en réflexion totale interne. Ce type d'expérience a été réalisée en Angleterre par Alastair Hibbins et ses collègues en 2008 [71] pour étudier des pseudo-plasmons de surface. Ils travaillaient à une fréquence autour de 20 GHz où la longueur d'onde est de 1,5 cm et leur échantillon était déjà très volumineux. Vu les longueurs d'ondes en jeu dans notre expérience (de l'ordre du mètre) un prisme de cire n'était absolument pas envisageable.
En champ lointain de ce milieu de fils (environs 4 mètres) nous plaçons une antenne quart d'onde (un fil de 25 cm dépassant d'un plan de masse) reliée à un oscilloscope échantillonnant à 20 GHz (Tektronix 6604B). Le milieu de fils (avec le plan de masse et les monopoles) est de plus monté sur un moteur rotatif qui nous permet d'émuler (par linéarité des équations) une expérience où l'on aurait un miroir à retournement temporel composé de 8 antennes en champ lointain.
La première étape de l'expérience consiste à faire émettre une impulsion de 5 ns centrée autour de 300 MHz par un des monopoles (en l'occurrence le neuvième monopole du réseau). On enregistre le signal capté par l'antenne quart d'onde placée en champ lointain du milieu de fils. Ce signal ainsi que le signal reçu en l'absence du milieu de fils est

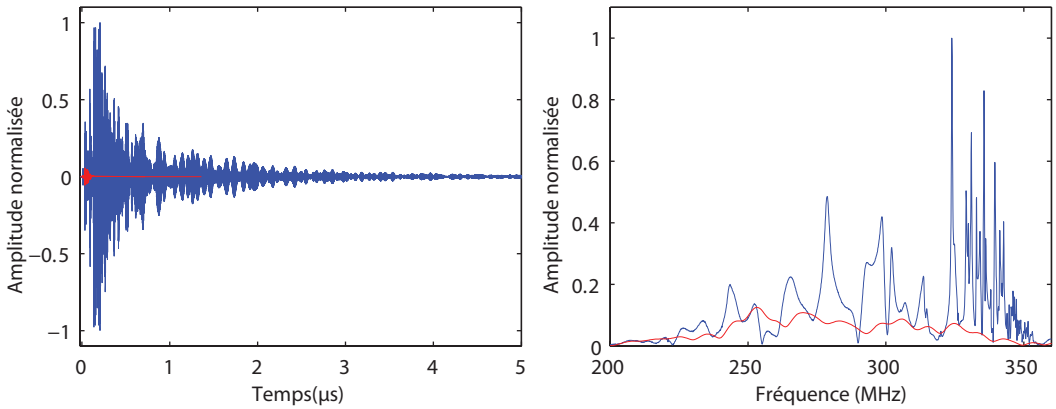

FIGURE II.23 – Signal temporel (et sa transformée de Fourier) reçu par l'antenne en champ lointain lorsque le huitième monopole émet une impulsion avec (bleu) et sans (rouge) le milieu de fils.

représenté sur la figure II.23.

Tout d'abord, on constate le même phénomène que celui qui avait été observée en 2007 : la présence du milieu de fils permet de faire rayonner de manière efficace le monopole. Ceci est bien évidemment cohérent avec la mesure du paramètre S_{11} que nous avons effectuée et qui nous a montré l'adaptation d'impédance qu'offre le milieu de fils.

D'autre part, ce signal s'étend sur plus 5 μs soit 1000 fois la durée de l'impulsion initiale. Ceci est caractéristique des phénomènes de résonance que nous avons mis en évidence précédemment. Le signal dure moins longtemps que les signaux que nous obtenons en simulation à cause des pertes dans le cuivre. Traditionnellement le cuivre est considéré comme un conducteur parfait à 300 MHz, mais vu les facteurs de qualité des résonances qui sont en jeu dans notre cas, nous atteignons les limites de la modélisation par un conducteur parfait. Nous aurons l'occasion de discuter les limites dues aux pertes à la fin de ce chapitre.

La transformée de Fourier de ce signal montre nettement la présence de pics de résonance comme nous l'avons prédit théoriquement, chaque pic étant associé à un mode propre résonant. Nous observons de plus que les largeurs spectrales de ces pics diminuent à mesure qu'on s'approche de la fréquence de 360 MHz ($\approx f_0$ car le Teflon aux deux extrémités diminue la fréquence de résonance) et que l'amplitude augmente, en accord avec l'allure des degrés de liberté fréquentiels que nous avons introduits (figure II.20). En l'absence du milieu de fils nous n'observons pas ces résonances. Cependant le spectre obtenu n'a pas la forme gaussienne de l'impulsion initiale à cause des réflexions dans les câbles. On observe d'ailleurs que temporellement l'impulsion s'est légèrement étendue et fait 20 ns

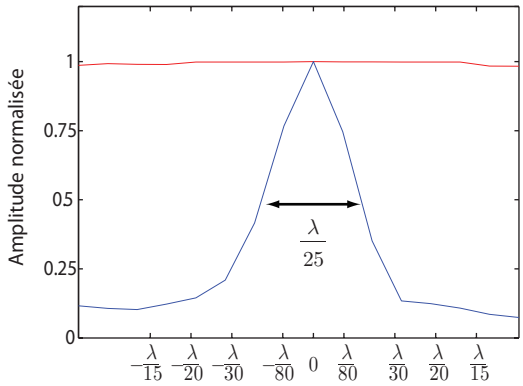

FIGURE II.24 – Tache focale obtenue par retournement temporel avec (bleu) et sans (rouge) le milieu de fils.

plutôt que les 5 escomptées.
Ce signal est retourné temporellement puis réémis par l'antenne quart d'onde. L'antenne réceptrice initiale devient la source et les petits monopoles deviennent des récepteurs. Nous mesurons le champ capté par chacun des monopoles à l'aide de nos multiplexeurs et des 2 voies d'enregistrement de l'oscilloscope. Avec cette banque de 16 signaux nous avons une mesure de l'efficacité de l'opération de retournement temporel. Nous représentons sur la figure II.24 la tache focale obtenue en calculant le maximum de la valeur absolue au carré des signaux reçus. Cela correspond à la mesure d'une tache focale en énergie.
En l'absence du milieu de fils nous n'avons bien évidemment aucune focalisation puisque les petits monopoles voient passer un front d'onde divergeant issu de l'antenne quart d'onde. Avec le milieu de fils nous mesurons une tache focale dont la largeur à mi-hauteur n'est pas le pas du réseau mais est de $\lambda/25$, très nettement inférieur à la limite de diffraction. Nous n'obtenons pas une résolution égale au pas du réseau à cause des pertes dans les fils de cuivres comme nous le verrons par la suite.
Nous avons effectué la même expérience de retournement temporel mono-voie pour focaliser sur chacun des 16 monopoles et nous représentons les taches focales obtenues sur la figure II.25 (en haut à gauche). Bien évidemment focaliser sur chacun des monopoles est impossible en l'absence du milieu de fils comme dans le cas précédent. Nous mesurons une largeur à mi-hauteur moyenne de l'ordre de $\lambda/20$, légèrement supérieure à celle obtenue pour le neuvième monopole. Nous sommes donc capable de focaliser à l'aide d'une unique antenne placée en espace libre sur 16 positions distinctes séparées de $\lambda/80$ juste en jouant sur la forme temporelle d'émission, avec des taches focales de dimensions bien inférieures à la limite de la diffraction.

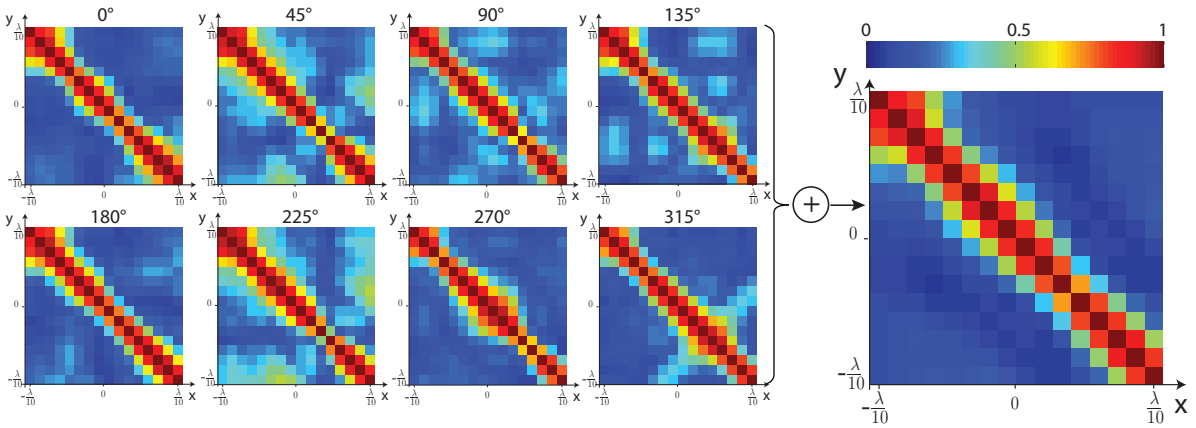

FIGURE II.25 – Taches focales (normalisées) obtenues par retournement temporel mono-voie lorsqu'on focalise sur chacun des 16 monopoles en faisant varier l'angle où se trouve l'antenne en champ lointain. À droite : les taches focales normalisées d'une expérience de retournement temporelle avec un MRT composé de 8 éléments.

Nous avons aussi voulu vérifier la diversité spatiale offerte par le milieu de fils. Pour cela nous avons reproduit les mêmes expériences de retournement temporel sur les 16 monopoles en tournant l'ensemble milieu de fils, plan de masse et monopoles de 45 ° entre chaque expérience. Nous avons vérifié que les signaux temporels (et leurs transformées de Fourier) associés à l'émission d'un même monopole sont différents lorsqu'on change la direction d'émission.

Nous représentons sur la figure II.25 les taches focales obtenues sur chacun des monopoles et pour chaque direction. Quelle que soit la direction d'émission, nous obtenons des points focaux dont la largeur à mi-hauteur moyenne est de l'ordre de $\lambda/20$, bien en dessous de la limite de diffraction. Ces taches focales sont différentes selon la direction d'émission ce qui prouve bien l'importance des degrés de liberté spatiaux. Enfin, par linéarité des équations d'onde nous représentons sur la même figure la tache focale qui aurait été obtenue dans le cas d'une expérience avec un MRT composé de 8 éléments. Dans ce cas la largeur moyenne des taches focales est de l'ordre de $\lambda/25$ ce qui est un peu inférieur au cas précédent, mais surtout le niveau moyen des lobes secondaires est bien inférieur.

Cependant, ces résultats expérimentaux ne montrent pas les effets dûs à la symétrie. Pour le comprendre, prenons le cas où nous disposons d'une unique antenne en champ lointain et que celle-ci est parfaitement alignée sur l'axe Ox (axe qui contient la rangée de tiges du milieu), ce qui correspondrait à l'angle de 0 ° . Tous les modes de Bloch que génère cette antenne sont symétriques par rapport à l'axe Ox. Par conséquent tout point focal créé d'un côté de l'axe a nécessairement son image de l'autre côté de l'axe. Ceci est aussi vrai quel

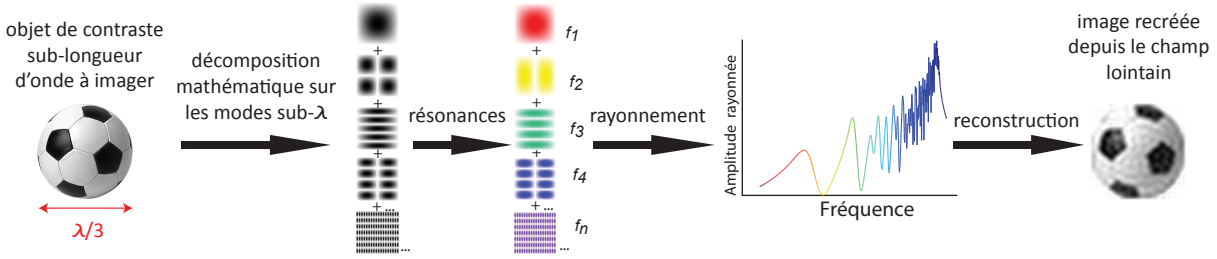

FIGURE II.26 – Schéma de principe de l'imagerie sub-longueur d'onde grâce au milieu de fils.

que soit l'angle choisi parmi les 8 angles. En revanche, lorsqu'on somme les contributions des 8 directions on supprime les lobes secondaires de symétrie puisque les 8 directions ne donnent pas les mêmes : pour obtenir un point focal unique nous devrions donc absolument avoir besoin des degrés de liberté spatiaux. Cependant, expérimentalement, notre milieu n'est pas parfaitement périodique et les tiges ne sont pas exactement de même longueur. Cela induit une levée de dégénérescence sur les modes propres du milieu et nous obtenons ainsi de meilleurs résultats qu'en théorie.

II.3.3 Imagerie

Maintenant intéressons nous à l'opération réciproque de la focalisation : l'imagerie. Au lieu d'utiliser un point source nous utilisons des sources qui ont des distributions spatiales sub-longueur d'onde plus compliquées. Si on place une telle source dans le champ proche du milieu de fils, il se produit exactement les mêmes phénomènes. Mathématiquement, la distribution spatiale du champ qui se trouve dans le champ proche du milieu de fils se décompose sur les modes propres de la structure. Chacun de ces modes modes propres a sa propre fréquence de résonance, donc en quelque sorte le milieu de fils « colore » l'information. Ces modes propres rayonnent ensuite de l'énergie vers le champ lointain avec la même efficacité. À partir de ce champ rayonné on peut imaginer reconstruire la source initiale. Ce processus d'imagerie sub-longueur d'onde est représenté sur la figure II.26. L'étape d'imagerie à proprement parler est l'étape de reconstruction du motif original.
Comme dans la plupart des techniques d'imagerie traditionnelles basées sur des signaux temporels (échographie, imagerie radar...) il faut utiliser des filtres sur les signaux RF pour recréer l'image. Le filtre le plus simple qui est utilisé est le filtre de ligne à retard connu sous le nom de « beamforming » (formation de voie en français) qui considère la propagation en espace libre d'impulsions. La résolution donnée par ce filtre est donc celle donnée par le critère de Rayleigh au mieux égale à $\lambda/2$. Dans notre cas, ou dans toute

expérience d'imagerie dans un milieu complexe, les fonctions de Green sont beaucoup plus compliquées et la technique de « beamforming » ne peut pas fonctionner, et le filtre que l'on doit utiliser est beaucoup plus compliqué. Mais le principe reste le même puisque le filtre à appliquer repose sur une connaissance a priori du milieu de propagation par l'intermédiaire des fonctions de Green. La technique d'imagerie est alors effectuée par convolution du filtre choisi avec les signaux expérimentaux qui portent les informations sub-longueur d'onde de l'objet que l'on souhaite imager.

Tout comme dans l'expérience de retournement temporel, nous proposons donc d'utiliser des filtres basés sur les fonctions de Green elles-mêmes, ce qui nécessite une étape d'apprentissage de celles-ci. Typiquement, en utilisant N_s antennes dans le champ lointain, il faut enregistrer les $L \times N_s$ réponses impulsionnelles $h_{ij}(t)$, où L correspond au nombre de pixels de notre image. Nous aurions pu utiliser les réponses impulsionnelles retournées temporellement pour créer l'image, mais nous avons vu dans le premier chapitre qu'il est possible de jouer avec les degrés de liberté spatio-temporels pour obtenir des méthodes d'inversions plus efficaces.

Le filtre inverse instantané sur les 16 positions de contrôle formées par nos monopoles ne converge pas car certaines fréquences de résonance subissent trop de pertes. Nous avons donc commencé par 30 itérations de retournement temporel itératif [29] pour accroître l'amplitude de ces fréquences, suivies de l'inversion spatiale à $t = 0$ à partir de ces signaux comme étape d'initialisation. Les filtres ainsi obtenus donnent une image de nos sources à l'instant (numérique) $t = 0$. Une fois l'apprentissage des réponses impulsionnelles et la conception de nos filtres effectués le système est calibré et peut recevoir n'importe quel objet.

Expérimentalement nous avons créé un objet virtuel en faisant une combinaison linéaire des signaux reçus par l'antenne en champ lointain quand chacun des monopoles émet une impulsion, avec différents poids appliqués sur les signaux (figure II.27). À nouveau, nous invoquons la linéarité des équations pour générer l'image avec 8 antennes placées en champ lointain du milieu de fils. L'étape d'acquisition donne 8 signaux $s_j(t)$ qui sont la signature temporelle d'un objet sub-longueur d'onde. La reconstruction de l'image se fait par produits de convolution (numérique) de ces signaux avec les filtres préalablement obtenus. Sur la figure II.27 nous représentons l'image obtenue par cette méthode. Nous arrivons à reconstruire l'image de l'objet avec une résolution de $\lambda/80$.

Cette première expérience d'imagerie n'est qu'une preuve de concept. En effet, nous avons utilisé les mêmes sources pour faire l'étape d'apprentissage des réponses impulsionnelles et pour fabriquer l'objet sub-longueur d'onde. Il ne fait aucun doute qu'utiliser un objet plus complexe et notamment continu à la place du réseau linéaire de sources discrètes

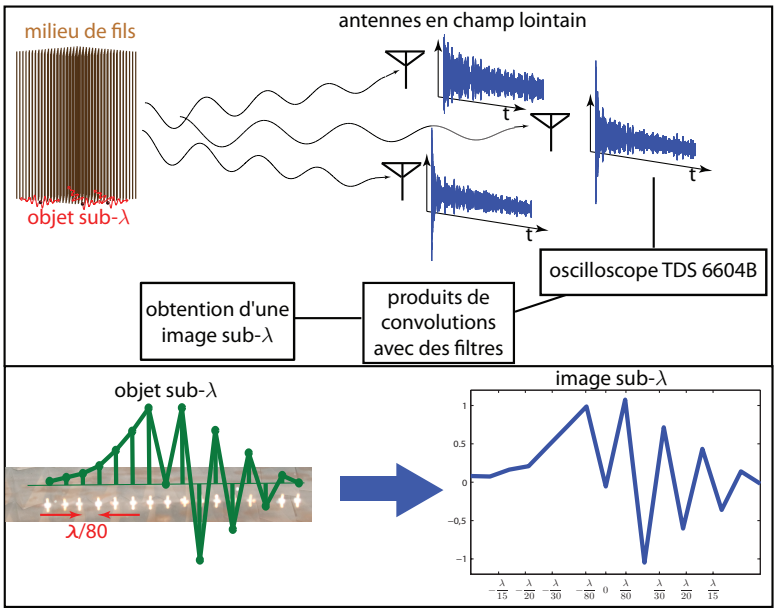

FIGURE II.27 – (en haut) Schéma de principe de l'imagerie par corrélation. (en bas) L'objet sub-longueur d'onde (gauche) correspond à une émission simultanée des 16 monopoles avec différents poids appliqués (en vert). L'image reconstruite (à droite) depuis le champ lointain montre une résolution de $\lambda/80$.

compliquera grandement l'imagerie. D'autre part notre montage expérimental ne nous permettait pas de créer un objet bi-dimensionnel mais nos résultats indiquent que ceci fonctionnerait aussi.

Enfin, la plus grande limite de cette méthode réside dans la fabrication des filtres. Ici nous avons fait une inversion sur 16 positions de contrôle, si on veut imager une source quelconque il faut obligatoirement faire cette inversion sur des points de contrôle qui couvrent l'ensemble de l'interface du milieu de fils. Dans notre cas les lobes spatiaux en dehors de nos points de contrôle sont certainement très élevés, et si nous avions placé une source en dehors de ces points de contrôle nous n'aurions pas pu obtenir de résultat d'imagerie probant.

II.3.4 Influence des pertes

Jusqu'à maintenant nous avons ignoré les pertes mais nous avons vu expérimentalement qu'on ne pouvait pas les négliger. En ignorant les pertes, la seule limite de l'utilisation du milieu de fils pour la focalisation sub-longueur d'onde est le pas du réseau puisque le mode qui varie avec la plus fine échelle spatiale est justement le mode qui a le pas du

réseau. L'information sub-longueur d'onde qui rejoint le champ lointain peut être aussi fine que le pas du réseau, et il en va de même pour les expériences d'imagerie.
Cependant, lorsque nous considérons les pertes, de nouvelles limites apparaissent. En effet, les pertes détériorent les facteurs de qualité de résonance, et elles ont donc beaucoup plus d'influence sur les modes qui restent longtemps dans le milieu de fils. Jusqu'à présent nous avons introduit des facteurs de qualité de rayonnement que nous nommerons désormais Q_{rad}. En considérant les pertes (dans les fils de cuivre ou dans la structure diélectrique) les facteurs de qualité se dégradent, et une manière de quantifier cette dégradation est d'introduire des facteurs de qualité de pertes Q_{pertes}. Le facteur de qualité Q apparent est relié aux deux précédents de la manière suivante :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{\text{rad}}} + \frac{1}{Q_{\text{pertes}}} \tag{II.37}$$

Nous avons déjà vu que Q_{rad} est proportionnel à $(DLk_{\perp_x}k_{\perp_y})^2$ et il nous reste à quantifier Q_{pertes}. Pour cela il faut se rappeler qu'un facteur de qualité est un rapport entre l'énergie stockée et l'énergie dissipée. Pour estimer la quantité d'énergie stockée dans un mode propre de la structure il faut se souvenir de la nature TEM de ceux-ci. Ainsi la densité d'énergie est constante le long des fils. Dans les directions transverses, nous avons des fonctions sinusoïdales. On peut donc estimer l'énergie stockée dans un mode propre :

$$w_{\text{stockée}} = \frac{D^2}{4}\frac{L}{2}\frac{{E_0}^2}{\mu_0 c^2} \tag{II.38}$$

Pour l'énergie dissipée, nous ne considérons que les pertes ohmiques dans les fils, ce qui est en bon accord avec les résultats expérimentaux. Les courants surfaciques qui parcourent les fils de cuivre sont obtenus directement à partir de la forme du champ magnétique dans le milieu de fils qui a l'allure d'un cosinus. La résistance surfacique des métaux est le rapport entre la résistivité ρ du métal considéré et un paramètre que l'on appelle l'épaisseur de peau δ (la distance de pénétration des champs dans les métaux). Ainsi l'énergie dissipée dans un mode donné s'exprime :

$$w_{\text{dissipée}} = \frac{1}{\omega}\frac{\rho}{\delta}\frac{L}{2}(2+\pi)r\frac{1}{{\mu_0}^2c^2}\sum_{\text{fils}}{E_m}^2 \tag{II.39}$$

où E_m correspond à l'amplitude du champ électrique sur le $m^{\text{ème}}$ fil considéré. Cette quantité est directement reliée au mode de Bloch considéré. Dans les directions transverses ces modes de Bloch sont des sinus, donc la somme peut être approximée par $N^2{E_0}^2/4$ où N est le nombre de fils dans une direction donnée.
Après simplifications on obtient le facteur de qualité de pertes :

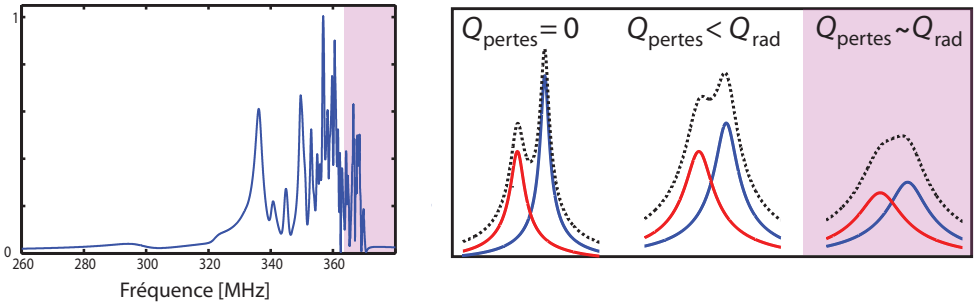

FIGURE II.28 – Illustration de l'influence des pertes sur les résonances. La zone en rose sur le spectre rayonné correspond aux degrés de libertés fréquentiels qui ne sont plus intégralement séparables à cause des pertes.

$$Q_{\text{pertes}} = \frac{D^2}{\delta N^2 (2+\pi) r} \tag{II.40}$$

Ce facteur de qualité de pertes ne dépend pas du mode considéré (en supposant que l'épaisseur de peau est constante sur la gamme de fréquence des modes) mais dépend uniquement des propriétés géométriques du milieu. Les pertes sont constantes pour tous les modes avec un facteur de qualité de l'ordre de 500 avec nos paramètres expérimentaux. Ce facteur de qualité de pertes fait saturer tous les facteurs de qualité apparents autour de 500. D'un point de vue temporel, ces pertes introduisent une décroissance exponentielle avec un temps caractéristique de 1,5 μs que nous avons vérifié expérimentalement. Cela explique pourquoi nous n'avons pas obtenu de signaux qui s'étendent sur plus de 15 μs comme en simulation, mais seulement sur 5 μs.

Les pertes n'influencent pas les modes dont le facteur de qualité radiatif est inférieur mais elles jouent sur les modes qui ont un facteur de qualité radiatif comparable ou supérieur à 500, à savoir les modes associés aux plus fines échelles spatiales. Cette diminution du facteur de qualité pour ces modes a deux conséquences : l'amplitude rayonnée est plus faible que prévue et la largeur des pics de résonance augmente (figure II.28).

Pour illustrer l'influence des pertes nous décrivons le milieu de fils à l'aide de 2 paramètres : sa dimension latérale D et le nombre de fils qui constituent le réseau dans cette direction N (le paramètre de maille est alors défini comme D/N). La projection mathématique d'un Dirac spatial d'excitation sur les modes du milieu s'écrit :

$$P(x,y) = \sum_{m,n=1}^{N} A_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi}{D}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{D}y\right) \tag{II.41}$$

Chaque mode subit une résonance caractérisée par son facteur de qualité $Q_{m,n}$ et sa fréquence de résonance $f_{m,n}$. L'amplitude rayonnée par ces modes est alors proportionnelle à la racine carrée du facteur de qualité radiatif Q_{rad}. Ainsi le signal capté en champ lointain donne une estimation de la projection du Dirac d'excitation de la forme :

$$A(x,y) \propto \sum_{m,n=1}^{N} A_{m,n} \sqrt{\frac{Q_{m,n}}{Q_{\text{rad}_{m,n}}}} \sin\left(\frac{m\pi}{D}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{D}y\right) \tag{II.42}$$

En l'absence de pertes, $A(x,y)$ est rigoureusement proportionnel à $P(x,y)$ et la résolution est donnée par les modes propres que supporte le réseau. Sur la figure II.29 nous représentons une projection d'un motif spatial hypothétique sur les modes propres qui montre une résolution d'image donnée par le pas du réseau. En revanche, dès que l'on considère les pertes, il y a une diminution de l'amplitude reçue pour les modes ayant les plus grands facteurs de qualité radiatifs, soit les modes associés aux plus petites échelles spatiales. Cela explique pourquoi lors de l'expérience de focalisation par retournement temporel nous n'avons pas obtenu une résolution égale au pas du réseau. Le retournement temporel permet uniquement de satisfaire les conditions de phases sur les différents modes mais ne compense pas les effets de l'atténuation. Cette diminution de l'amplitude rayonnée n'est cependant pas dramatique, puisqu'on peut imaginer amplifier les modes qui subissent le plus de pertes à l'émission grâce à des méthodes d'inversion.

En revanche, l'augmentation de la largeur des pics de résonance due aux pertes est un effet beaucoup plus limitant. Cette augmentation se traduit par un mélange entre les pics de résonance et ceux-ci ne sont plus considérés comme des degrés de liberté fréquentiels indépendant. Pour quantifier cet aspect, il faut revenir à la répartition fréquentielle de ces degrés de liberté qui est donnée par la relation de dispersion des modes, et que nous avons schématisée sur la figure II.20. Mathématiquement, la longueur de corrélation spectrale $\delta\omega$ entre deux modes consécutifs est reliée via la relation de dispersion à la distance $\delta k_\perp$ entre deux modes consécutifs dans l'espace des k par :

$$\delta\omega = \frac{\partial\omega}{\partial k_\perp}\delta k_\perp \tag{II.43}$$

La vitesse de groupe est quant à elle donnée par l'équation de dispersion et est égale à :

$$\frac{\partial\omega}{\partial k_\perp} = \frac{\omega}{k_\perp}\frac{1}{1+\frac{L}{2}\sqrt{{k_\perp}^2-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2}} \tag{II.44}$$

En combinant ces deux dernières équations, on obtient une expression de la longueur de corrélation spectrale. Cette longueur n'est pas constante sur toute la bande passante

comme nous l'avons vu précédemment, et pour les modes les plus sub-longueur d'ondes on peut l'approximer par :

$$\delta\omega_{m,n} \approx \omega_{m,n}\frac{2(\delta k_\perp)_{m,n}}{L{k_{m,n}}^2} \tag{II.45}$$

où $(\delta k_\perp)_{m,n}$ correspond à la distance dans l'espace des k entre le mode de nombre d'onde $k_{m,n}$ et son plus proche voisin de plus faible nombre d'onde qui rayonne dans la même direction. Par exemple si on considère un rayonnement dans la direction Ox, $(\delta k_\perp)_{m,n} = k_{m,n} - \max(k_{m-1,n}, k_{m,n-2})$.

Cette distance spectrale nécessite maintenant d'être comparée à la largeur du pic de résonance donnée par le facteur de qualité de la résonance. Nous aurons des degrés de liberté fréquentiels indépendants lorsque la distance entre deux modes consécutifs est plus grande que la largeur du pic de la résonance (m, n). Avec le facteur de qualité que nous avons obtenu, cela s'écrit :

$$\frac{2(\delta k_\perp)_{m,n}}{L\pi^2(m^2+n^2)} \geqslant \frac{16}{\pi^3}\left(\frac{1}{Lmn}\right)^2 + \frac{1}{\delta N^2(2+\pi)r} \tag{II.46}$$

En l'absence de pertes, cette relation est toujours vérifiée quelle que soit la valeur de N. On peut donc imaginer diminuer arbitrairement le pas du réseau pour obtenir la meilleure résolution possible. Lorsqu'on ajoute les pertes ohmiques on obtient une valeur maximale pour le couple (m, n). Cela définit donc une nouvelle limite de résolution puisque la somme de l'équation (II.42) s'arrête à $(N_{\max}, N_{\max})$ au lieu du couple (N, N) comme précédemment. Cette limite de résolution est désormais égale à $D/N_{\max}$, valeur plus grande que le pas du réseau.

La figure II.29 schématise l'influence des pertes sur la résolution : l'amplitude rayonnée par les modes diminue et la largeur spectrale des résonances augmente. Les résonances proches de f_0 associées aux modes les plus sub-longueur d'onde se mélangent et il n'est pas possible de contrôler indépendamment chacun des modes, ce qui limite l'information sub-longueur d'onde reçue.

Finalement, la reconstruction de l'image avec les degrés de liberté fréquentiels indépendants offerts par le milieu avec des pertes donne une image qui a une moins bonne résolution que le pas du réseau (figure II.28).

Les résultats que nous avons obtenu expérimentalement avec une résolution de $\lambda/80$ s'expliquent essentiellement par la nature uni-dimensionnelle du motif initial. Comme on ne s'est pas intéressé à ce qui se passait dans les autres directions, il est possible que nous n'ayons pas la même résolution dans ces autres directions. Les modes associés à des motifs

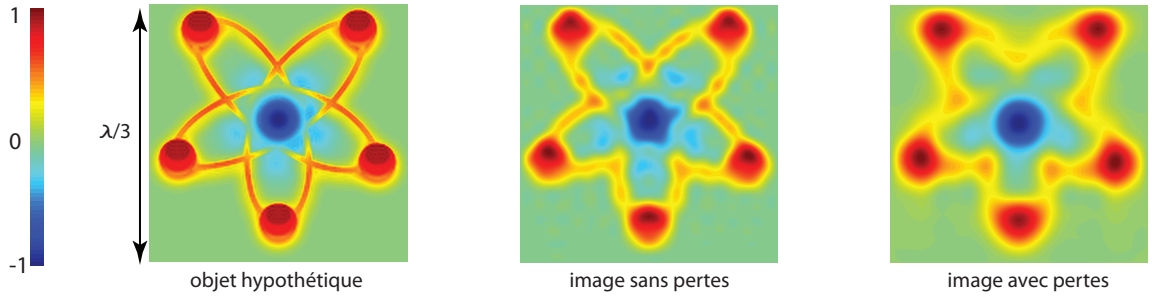

FIGURE II.29 – Illustration de l'influence des pertes sur la résolution. (gauche) un objet sub-longueur d'onde hypothétique. (centre) Projection sur les modes propres du milieu qui correspondrait à une image accessible sans pertes. (droite) Projection sur les modes propres du milieu que l'on peut contrôler indépendamment depuis le champ lointain qui correspondrait à une image avec pertes.

sub-longueur d'onde de l'ordre de $\lambda/80$ dans la direction du motif que l'on souhaite contrôler indépendamment ne sont pas aussi proches que dans le cas bi-dimensionnel, et nous avons réussi par des méthodes itératives à converger vers les bons signaux. La convergence des filtres a été obtenue de manière très empirique ce qui justifie le fait que les degrés de liberté qui nous ont permis d'obtenir cette résolution était très difficiles à séparer. Notons enfin qu'en diminuant le rayon des fils qui constituent le milieu on diminue sensiblement les pertes ohmiques, et on augmente ainsi la résolution du dispositif d'imagerie.

II.4 Conclusion

Après avoir introduit brièvement la notion d'onde évanescente et ce que cela implique en termes de limite de diffraction, nous nous sommes consacrés au cours de ce chapitre à la compréhension des résultats de super-résolution qui avaient été obtenus au laboratoire en 2007 [38]. Ces résultats concernaient l'obtention de taches focales d'une largeur de $\lambda/30$ dans un milieu complexe constitué de fils conducteurs depuis le champ lointain. Les milieux qui permettaient ces résultats étaient fabriqués de manière empirique et la première étape a été de simplifier le problème.
Cela nous a conduit à nous intéresser à la physique des ondes électromagnétiques dans un milieu composé de fils conducteurs parallèles entre eux organisés suivant un réseau périodique carré à une échelle sub-longueur d'onde. Ce type de milieu présente l'énorme avantage de pouvoir supporter des ondes guidées adispersives qui peuvent osciller sur des échelles bien plus petites que la longueur d'onde dans le vide.

Lorsqu'on ajoute des dimensions finies à ce milieu, il devient dispersif et nous connaissons l'importance des phénomènes dispersifs en termes de degrés de liberté fréquentiels. Ce type de milieu de longueur finie et de dimensions transverses bornées, permet la conversion de champs qui oscillent sur de très petites échelles en ondes propagatives que l'on peut enregistrer en champ lointain, ouvrant la voie vers la super-résolution.
Tout ceci nous a permis d'obtenir expérimentalement avec un milieu bien mieux contrôlé qu'en 2007 des résultats de focalisation et même d'imagerie montrant les mêmes propriétés de super-résolution. Des taches focales de largeur $\lambda/25$ ont été obtenues avec l'utilisation d'une unique source d'émission et dans une chambre anéchoïque. Nous avons montré une expérience préliminaire d'imagerie où nous avons reconstruit un objet uni-dimensionnel avec une résolution de $\lambda/80$. Enfin nous avons discuté de l'influence des pertes ohmiques sur les performances du système.
Désormais, nous avons compris les principes physiques qui régissent ces résultats et nous voulons prouver qu'il s'agit de phénomènes universels. Lorsque nous avons publié ces résultats dans *Physical Review Letters* [72], nous avons en fait introduit un concept général que nous avons appelé « métalentille résonante ». Nous avons affirmé que ces résultats de super-résolution ne sont pas réservés au milieu de fils utilisé dans ces expériences. Tout est en fait généralisable à tout milieu composé de résonateurs identiques sub-longueur d'onde organisés sur une échelle elle-même plus petite que la longueur d'onde. Le milieu de fils n'est qu'un exemple parmi tant d'autres. Les relecteurs de l'article ainsi que les éditeurs des journaux auxquels nous avions soumis l'article étaient très dubitatifs sur cette assertion. Cela nous a très fortement encouragé à réaliser des expériences qui prouveraient la véracité de nos propos et à proposer une approche théorique générale, comme nous allons le voir dans le prochain chapitre.

Chapitre III

Propagation des ondes dans des milieux périodiques localement résonants

Le chapitre précédent nous a montré que lorsqu'on s'intéresse à des phénomènes qui varient sur des échelles plus petites que la longueur d'onde considérée, il est important de considérer les effets microscopiques au sein du milieu. En effet, le milieu de fils est structuré sur une échelle plus petite que la longueur d'onde dans le vide. Grâce à ce milieu, nous convertissons des champs qui oscillent sur de très petites échelles en des champs qui se propagent dans le vide et qui ont par conséquent comme longueur caractéristique la longueur d'onde. Nous avons étudié ce milieu à la lumière des modes de Bloch en partant d'un milieu infini, mais ce milieu peut aussi être vu comme un milieu composé de résonateurs identiques, des dipôles électriques, placés très proches les uns des autres.
Dans ce chapitre, nous allons remplacer le milieu de fils, où l'on a pu utiliser les modèles mathématiques de la communauté micro-ondes, par un milieu composé de résonateurs identiques. En organisant ces résonateurs suivant un réseau périodique, comme les fils conducteurs dans le chapitre précédent, nous nous attendons à obtenir des résultats similaires.
Étant donné que ce type de milieu a été étudié dans de nombreux domaines différents, l'étude que nous allons mener est transversale. Cela nous amènera tout d'abord à rappeler les différents modèles qu'il existe aujourd'hui pour décrire ce genre de milieux. Ainsi, nous nous intéresserons à la notion de milieu effectif pour décrire la propagation au sein d'un tel matériau. Cela nous conduira à introduire les notions de milieu diélectrique, de polaritons ou encore d'hybridation. Nous verrons aussi comment les paramètres effectifs sont obtenus dans le domaine des métamatériaux.
Soulignant le caractère incompatible de certaines de ces approches, nous soulèverons un

certain nombre de points à éclaircir pour tenter d'unifier ces approches
Afin de répondre à ces questions, nous prendrons l'approche volontairement simpliste de l'étude d'un milieu unidimensionnel. Nous commencerons par l'étude du type de couplage qui régit un ensemble linéaire de résonateurs dans un guide d'onde. Nous verrons que l'essentiel de la physique qui gouverne ce système se résume en une interférence de type Fano entre une onde incidente et la réponse d'un résonateur. Nous développerons un formalisme qui donne la relation de dispersion en fonction des propriétés d'un unique résonateur et des paramètres géométriques du milieu, dans le cas simple de notre système unidimensionnel.
Enfin, nous vérifierons notre modèle sur un certain nombre d'exemples, ce qui nous permettra d'en souligner le caractère général.

III.1 Milieu contenant des inclusions résonantes : état de l'art

Jusqu'à présent nous avons réalisé une étude du milieu de fils avec une approche modale dans le formalisme de Bloch, mais chacun des fils constituant le milieu peut être vu comme un résonateur sub-longueur d'onde. Nous nous proposons donc de réaliser une étude générale sur des milieux homogènes comportant des réseaux périodiques d'occlusions résonantes. Nous allons dans un premier temps recenser les différentes approches qui traitent de ces milieux afin d'en dégager certaines contradictions.
Nous pensons qu'il est possible de décrire simplement la relation de dispersion pour ce type de milieux. À maintes reprises, lorsque nous avons présenté ces résultats en conférence, on nous a demandé quels étaient les paramètres effectifs qui permettent de décrire le milieu, nous reprochant de ne pas franchir la limite de diffraction mais seulement de la « déplacer » en travaillant dans un milieu de plus fort indice. Nous voulons donc dans cette partie proposer une description physique de la relation de dispersion dans un milieu composé de résonateurs identiques.

III.1.1 Milieux diélectriques

Pour obtenir le comportement des ondes dans un milieu composé de résonateurs identiques ainsi que les paramètres effectifs qui y décrivent la propagation des ondes, nous allons tout d'abord revenir sur les modèles qui existent déjà et notamment le modèle des milieux diélectriques.

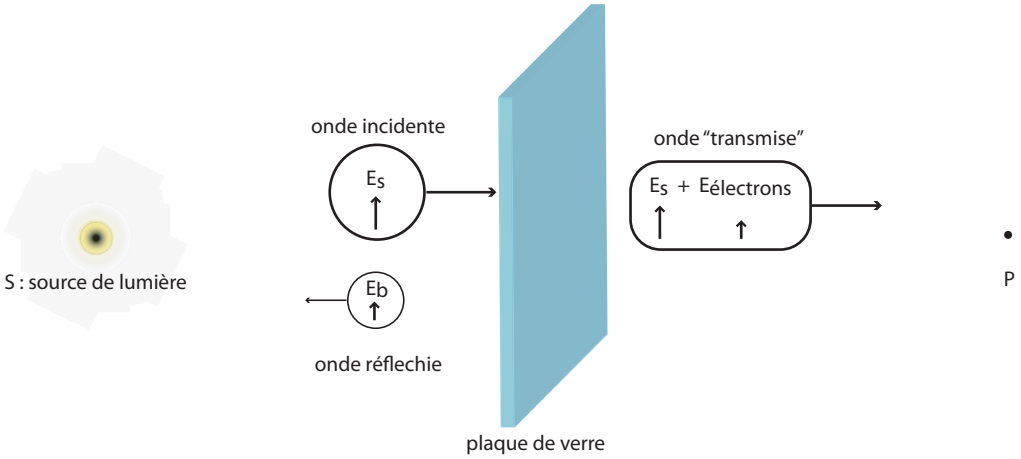

FIGURE III.1 – Onde optique traversant un milieu transparent.

Il est bien connu que les ondes électromagnétiques se propagent plus lentement dans l'eau que dans l'air. Cet effet est très souvent décrit par l'indice de réfraction n. Cet indice est caractéristique d'un milieu de propagation et il est défini à partir de la relation de dispersion :

$$n(\omega) = \frac{k(\omega)c}{\omega} \tag{III.1}$$

Ici nous voulons comprendre comment ce ralentissement de la lumière peut intervenir d'un point de vue physique. En particulier, nous voulons comprendre comment cette observation est reliée aux fondements de la physique des ondes :

- Le champ en un point de l'espace est la somme de tous les champs créés par les sources.
- Le champ créé par une source est obtenu en un autre point de l'espace avec un retard dû à la propagation à la vitesse c.

Ces deux hypothèses restent vraies dans le cas d'un milieu diélectrique, mais ce qu'il faut expliquer est pourquoi cela se manifeste par un ralentissement apparent de la propagation. En se plaçant dans la géométrie très simple proposée dans la leçon de Feynman d'électromagnétisme [73], on peut donner une interprétation phénoménologique de l'indice de réfraction. Considérons une source placée en champ lointain d'une plaque d'un matériau transparent, par exemple du verre. Cette situation est résumée sur la figure III.1, où on imagine que P et S sont très éloignés de la plaque.

Le champ résultant en P est le champ issu de la source S auquel il faut ajouter le champ issu de toutes les sources virtuelles que génère la propagation. En l'absence de la plaque de verre, le champ en P est celui issu de S, alors qu'en présence de la plaque on observe a priori

un ralentissement des ondes. La plaque de verre étant composée d'atomes qui contiennent des électrons, elle génère des sources virtuelles. En présence d'une excitation électrique, ces électrons se mettent en mouvement puis agissent comme des sources secondaires de champ électrique.

Pour comprendre de manière plus quantitative cet effet, il faut calculer le champ créé par les électrons en mouvement. Si la source S est placée en champ lointain, cela revient à considérer l'arrivée d'une onde plane de pulsation ω sur la plaque de verre de telle sorte que le champ électrique issu de S peut s'écrire :

$$\mathbf{E_S} = \mathbf{E_0} e^{j\omega z/c} \tag{III.2}$$

En considérant que le champ $\mathbf{E_0}$ est orienté verticalement, les électrons des atomes de la plaque se déplacent de haut en bas sous l'action de la force de Coulomb $F = qE$. Pour comprendre le mouvement des électrons, nous modélisons les atomes à l'aide du modèle de l'électron élastiquement lié. Ce modèle consiste à supposer que les électrons gravitant autour du noyau atomique sont soumis à trois forces :

- la force attractive de la part du noyau (supposée correspondre à un oscillateur harmonique de fréquence ω_0) que l'on peut modéliser par une force de rappel autour d'une position d'équilibre ;
- la force sinusoïdale due au champ électrique incident F ;
- une force de freinage ou de dissipation (caractérisée par un coefficient d'atténuation γ).

On obtient finalement le déplacement des électrons suivant :

$$x(\omega) = \frac{qE_0}{m\left({\omega_0}^2 - \omega^2 - j\gamma\omega\right)} \tag{III.3}$$

Dans ce modèle, le déplacement est considéré comme étant le même pour tous les électrons excepté leur position d'équilibre qui change. D'après la leçon de Feynman [73], ces électrons situés dans la plaque de verre créent un champ au point P qui s'écrit :

$$E_{\text{électrons}} = \frac{j\omega\eta q}{2\epsilon_0 c} x(\omega) e^{j\omega z/c} \tag{III.4}$$

Comme nous nous y attendions, le déplacement des électrons crée une onde qui se propage vers les $z > 0$, et dont l'amplitude est proportionnelle au nombre d'atomes par unité de volume (le facteur η) ainsi qu'au champ électrique incident (le facteur E_0 dans $x(\omega)$). Le champ total en P résulte de la superposition du champ issu de la source S et du champ produit par les électrons en mouvement, soit :

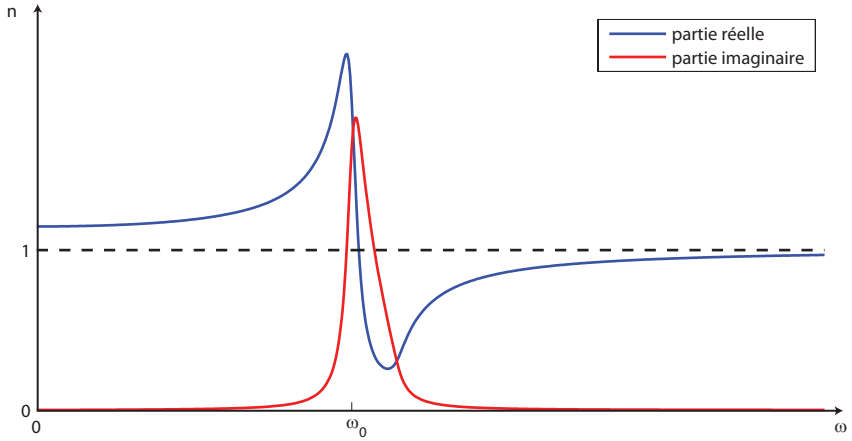

FIGURE III.2 – Indice de réfraction en fonction de la fréquence à partir du modèle de l'électron élastiquement lié.

$$E_P = \left(1 + \frac{j\omega\eta q^2}{2\epsilon_0 mc}\frac{1}{{\omega_0}^2 - \omega^2 - j\gamma\omega}\right) E_0 e^{j\omega z/c} \tag{III.5}$$

On a donc un champ déphasé de $\pi/2$ (à cause du facteur j) qui s'ajoute à celui qui provient de S. Ceci s'apparente à un champ qui a subi un retard par rapport à une propagation en espace libre. Notons que ce modèle permet aussi de prédire l'amplitude transmise à travers la plaque de diélectrique. D'après cette expression du champ au point P, le déphasage (ou le ralentissement) qu'a subi l'onde lors de son passage au travers de la plaque est donc $\delta\Phi = \omega/c(n-1)e$ (où e est l'épaisseur de la plaque de verre). Ceci permet de définir un indice effectif n de la plaque de verre, qui prend la forme :

$$n^2 = 1 + \frac{f}{{\omega_0}^2 - \omega^2 - j\gamma\omega} \tag{III.6}$$

où f correspond à une certaine « force » de résonance caractéristique du milieu considéré et γ traduit le coefficient d'atténuation. La partie réelle et la partie imaginaire de cette fonction sont représentées sur la figure III.2. En pratique la réponse d'un matériau donné est la superposition de plusieurs de ces résonances pour prendre en compte les différentes orbitales atomiques (ou moléculaires) qui ont des fréquences de résonance distinctes.
Ce modèle, très largement accepté, nécessite de décrire le milieu comme un milieu moyen où tous les résonateurs voient le même champ électrique incident. La raison principale évoquée pour justifier cette hypothèse est que la longuer d'onde considérée est bien plus grande que la distance moyenne inter-atomique. Nous verrons par la suite que cette justification, si elle est pertinente pour les milieux diélectriques, ne l'est pas nécessairement

dans le cas général. Ainsi, ce modèle ne permet pas de décrire le profil des champs à l'échelle des résonateurs comme nous souhaitons le faire. Cependant, certains résultats importants de cette approche méritent discussion.
Comme dans tout phénomène résonant, l'oscillateur harmonique est capable de suivre le mouvement imposé par la fréquence d'excitation, lorsque celle-ci est inférieure à la fréquence de résonance. Dans ce cas, les résonateurs sont en phase avec l'excitation. Dans cette région du spectre fréquentiel, les ondes se propagent avec une vitesse de phase qui est plus faible que celle en espace libre.
En revanche, pour des fréquences d'excitation supérieures à la fréquence de résonance, le matériau répond avec un déphasage de π et il est donc en opposition de phase par rapport à l'excitation initiale. Dans cette gamme du spectre, les ondes ont donc une vitesse de phase supérieure à la vitesse de la lumière (mais la vitesse de groupe reste bien inférieure à celle-ci). C'est le cas par exemple des rayons X lorsqu'on travaille au-dessus des résonances électroniques.
Entre ces deux régions, à savoir autour de la fréquence ω_0, le milieu est très fortement dispersif et c'est donc cette gamme de fréquence qui nous intéresse. Cependant, avec les paramètres caractéristiques des résonances électroniques, on ne peut pas atteindre des indices très élevés qui permettraient d'obtenir les mêmes résolutions qu'avec le milieu de fils. Moins il y a de pertes intrinsèques et plus la gamme de fréquences correspondant à cette transition est étroite. D'autre part, lorsque les pertes sont faibles, l'amplitude du pic de résonance est plus importante, ce qui implique un plus gros transfert d'énergie depuis le champ incident vers les dipôles induits au voisinage de la résonance, soit une importance relative du champ issu des sources virtuelles au point P plus grande.

III.1.2 Polaritons

Un autre modèle que l'on retrouve très souvent pour décrire les paramètres effectifs d'un milieu diélectrique est le modèle des polaritons. Ce terme, qui provient de la physique quantique, désigne une quasi-particule issue du couplage fort entre une onde lumineuse et une onde de polarisation électrique. La notion de polariton a été introduite à l'aide d'un formalisme quantique pour décrire les propriétés diélectriques des matériaux par Hopfield [74], mais les résultats obtenus s'expliquent très bien dans le cadre de l'électrodynamique classique. La présence des polaritons est observée par la présence d'un anticroisement dans les relations de dispersion de la lumière et celle d'une résonance.
Le couplage entre la propagation des ondes et une collection de résonateurs identiques, que nous avons introduit dans la partie précédente, est la notion même de polariton. Le

comportement de type polariton est lié au fait que les résonateurs qui composent un milieu de propagation sont excités par les ondes, et ces derniers « réinjectent » des ondes dans ce même milieu. Ad Lagendijk [75] affirme que tout phénomène résonant qui apparaît dans un indice de réfraction effectif peut être appelé polariton.
Dans son cours, celui-ci reprend la notion de polaritons dans les milieux optiques au travers du formalisme de la diffusion multiple. Pour ce faire, la matrice de diffusion de chacun des diffuseurs est introduite. Cependant, en calculant l'albedo [1] des éléments résonants considérés (les électrons liés aux atomes), il montre que l'approximation d'évènements de diffusion indépendants peut être utilisée. En d'autres termes, étant donné que la section efficace de diffusion des résonateurs est bien plus faible que celle d'absorption, on considère que le champ vu par l'un de ceux-ci n'est pas modifié par ses voisins.
Une nouvelle fois, on retrouve l'idée qu'il est possible de moyenner les effets des éléments résonants qui constituent le milieu. Cette approche, qui est bien sûr valide dans les cas considérés, résulte en des polaritons dont la relation de dispersion est en « S » : ceux-ci ne résultent ni en une bande interdite ni en un indice très élevé. Il est clair par conséquent qu'une telle approche n'est pas adaptée à nos problèmes. Ad Lagendijk dit d'ailleurs que pour des polaritons dans des milieux très diffusants, toutes les contributions de diffusion multiples doivent être considérées, ce qui complique énormément le problème et le rend insoluble dans le cas général.
Parmi les polaritons, on trouve également les plasmons de surface qui résultent du couplage entre une onde optique et la variation de la densité d'électrons à la surface des métaux nobles. Ceux-ci ont des relations de dispersion qui rappellent très fortement celles que nous obtenons pour le milieu de résonateurs que nous avons étudié. En effet, la relation de dispersion que nous avons obtenue pour les modes guidés dans le milieu de fils est analogue à celle des plasmons de surface en prenant $\omega_0 = \omega_p/\sqrt{2}$ (où ω_p est la fréquence plasma).
Il en va de même pour les « spoof plasmons » polaritons (SP), des modes guidés à la surface de structures métalliques périodiques d'abord observés par Ulrich et ses collaborateurs [77], puis interprétés comme des pseudo-plasmons de surface par John Pendry et ses collaborateurs [78]. Les plasmons de surface n'existent pas dans le domaine micro-ondes à la surface des métaux puisque la conductivité de surface est beaucoup trop importante. En utilisant une surface cannelée (figure III.3), il a été montré théoriquement [78] puis expérimentalement [79] qu'on observe des modes propagatifs le long de l'interface. Ces modes se comportent comme des plasmons de surface. Deux géométries différentes

1. L'albedo est caractéristique d'un diffuseur et correspond au ratio entre la section efficace de diffusion et la section efficace totale.

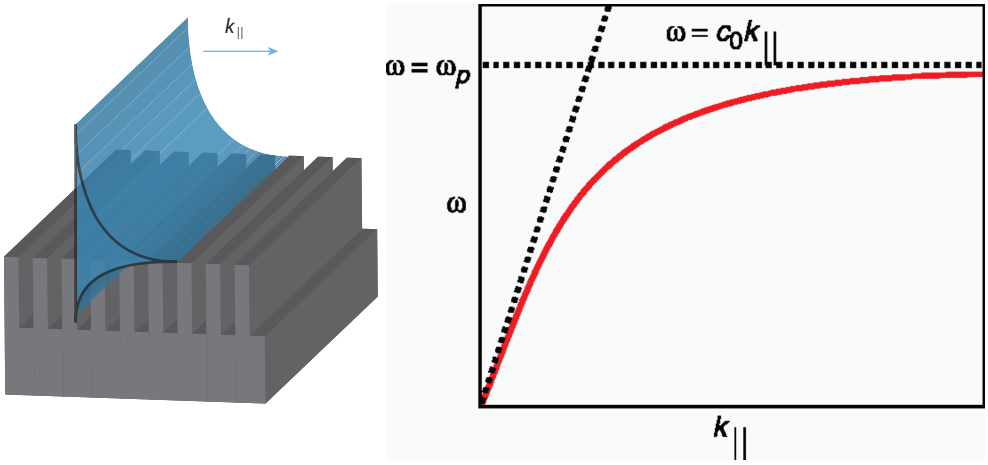

FIGURE III.3 – Une surface métallique cannelée (à gauche) présente des modes de surface propagatifs analogues aux plasmons de surface. À droite la relation de dispersion de ces modes (issue de [76]) qui est analogue à celle obtenue pour le milieu de fils.

ont été proposées pour réaliser ces SP [76] : un réseau périodique de fentes ou bien un réseau périodique bi-dimensionnel de trous. Dans les deux cas la relation de dispersion dépend largement des paramètres de la géométrie choisie, mais sous certaines conditions, on obtient la même forme de relation de dispersion que celle du milieu de fils.
Dans le cas des SP, une permittivité négative effective de la surface cannelée permet de faire une analogie avec les « vrais » plasmons de surface observés dans la gamme optique, d'où le nom qui leur a été donné. La relation de dispersion des pseudo-plasmons est obtenue à partir de la décomposition en modes de Bloch à l'interface, comme nous l'avons fait dans le milieu de fils. La permittivité effective de la surface est quant à elle obtenue ensuite à partir de cette relation de dispersion, en reprenant les modèles acceptés sur les plasmons de surface. Finalement, c'est l'approche microscopique qui donne le comportement des modes de surface. L'approche effective permet quant à elle de faire l'analogie avec les théories existantes en optique. Dans le cas des plasmons de surface, l'obtention de la relation de dispersion résulte de la conservation de la composante tangentielle du vecteur d'onde à l'interface métal/diélectrique.
Ces approches ne peuvent pas être utilisées dans le cas général et nous ne pouvons donc pas les transposer à notre étude. Cependant, il apparaît clairement qu'à nouveau les propriétés de ces ondes de surface résultent d'une résonance : la résonance plasma pour les plasmons de surface, et une résonance de type guide d'onde pour les spoof plasmons [2].

2. Dans le cas unidimensionnel la profondeur est de $\lambda/4$ et dans le cas 2D la longueur des trous est de $\lambda/2$

III.1.3 Métamatériaux

L'homogénéisation et la représentation d'un matériau micro-structuré par des paramètres effectifs ne sont pas limitées aux milieux diélectriques ou aux ondes de surfaces. Dans le domaine récent des métamatériaux, cette même approche a été introduite principalement par John Pendry. Ces métamatériaux sont le pendant des cristaux diélectriques à l'échelle macroscopique : ils sont constitués d'éléments résonants organisés à une échelle sub-longueur d'onde [3]. Les inclusions résonantes dans ces matériaux ne sont plus les atomes eux-mêmes mais des structures spécifiques qui confèrent une propriété macroscopique au milieu.

Le concept de métamatériaux a pour origine les travaux théoriques menés par Veselago à la fin des années 1960 [80]. Il a étudié analytiquement un matériau qui présenterait simultanément une perméabilité et une permittivité négatives. De tels milieux, s'ils existaient, présenteraient la propriété intéressante d'avoir un indice de réfraction négatif et donc des propriétés de propagation très intéressantes, comme la réfraction négative. Cependant, ce type de milieux n'existe pas à l'état naturel, ce qui a mené aux recherches récentes dans ce domaine.

John Pendry a démontré qu'un milieu composé de fils métalliques peut être modélisé comme un milieu qui présente une permittivité négative [59]. Ce milieu, que nous avons vu dans le chapitre précédent, est le milieu infini composé de fils parallèles (figure III.4). Nous avons en effet vu que les modes de Bloch TM sont purement évanescents pour des nombres d'ondes inférieurs au nombre d'onde plasmon k_p. On peut donc définir un indice de réfraction qui est imaginaire pur, ce qui peut s'écrire en introduisant une permittivité négative. Une autre manière de voir la permittivité négative d'un tel milieu est de reprendre le modèle de l'électron élastiquement lié. Ici, on a un milieu composé de matériaux conducteurs (dilués) donc des électrons libres. La force de rappel dans le modèle est donc infiniment faible ($\omega_0 \approx 0$), et on retrouve bien l'indice de réfraction qui est imaginaire pur d'après l'équation III.6. Ce résultat est identique à celui obtenu pour un métal, à ceci près que dans ce cas on règle la fréquence plasma à l'aide des paramètres géométriques du milieu.

Un peu plus tard, John Pendry a montré qu'un milieu composé de petits (comparés à la longueur d'onde) résonateurs magnétiques (figure III.4), de petites boucles de courant fendues et imbriquées l'une dans l'autre (les « split ring resonators » en anglais), peut présenter une perméabilité négative [81]. Dans ce cas, la perméabilité négative est obtenue

3. Il existe de plus en plus de métamatériaux non résonants, et parmi eux ceux résultant des transformations d'espace. Ici, par souci de simplicité, nous désignerons par métamatériaux uniquement ceux constitués d'une cellule élémentaire résonante.

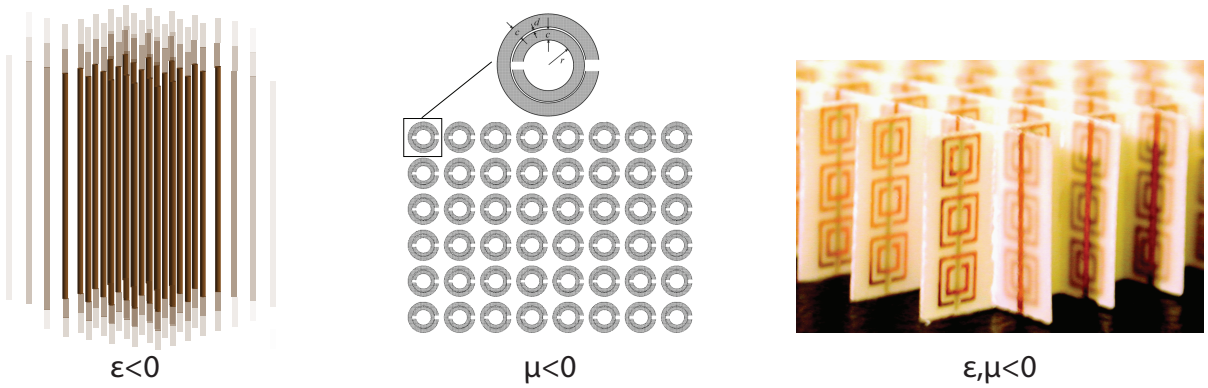

FIGURE III.4 – (gauche) Milieu qui présente une permittivité négative pour les ondes TM [59], (milieu) milieu qui présente une perméabilité négative (issu de [81]), (droite) milieu qui présente a priori un indice négatif (issu de [82]).

sur une bande de fréquence étroite au-dessus de la fréquence de résonance de chacun des résonateurs. Le modèle qui permet d'obtenir cette propriété est analogue au modèle de l'électron élastiquement lié, mais cette fois les résonateurs harmoniques qui composent le milieu répondent à une sollicitation due au champ magnétique incident. Par conséquent, c'est la perméabilité qui est en jeu lorsqu'on obtient l'indice de réfraction. Contrairement aux résonances électroniques de la partie précédente, ici la force f de la résonance dans l'équation III.6 peut être choisie grâce à la forme des résonateurs, de manière à obtenir un indice de réfraction imaginaire pur (qui est ici caractéristique de la perméabilité négative) au-dessus de la fréquence propre de résonance ω_0.

Bien que l'existence de matériaux présentant soit une permittivité négative, soit une perméabilité négative, ait été démontrée, il n'était pas évident que la combinaison des deux résulterait sur un indice de réfraction négatif. Cela a pourtant été démontré par une équipe de l'Université de Californie à San Diego [83,84] qui a proposé d'alterner un fil conducteur avec un résonateur magnétique dans une maille carrée (figure III.4). Le milieu de fils donne la permittivité négative et la perméabilité négative est obtenue grâce aux résonateurs magnétiques. Il n'est pas évident que la description du milieu composite s'obtienne en superposant les propriétés des deux milieux séparément. En effet, un couplage des deux éléments élémentaires pourrait modifier la physique du milieu. De plus, les auteurs sont passés du milieu de fils infinis proposé initialement à un réseau de fils de taille finie. Or nous avons vu qu'une longueur finie des fils modifie complètement les propriétés du milieu. Nous notons ici que le milieu considéré ressemble en fait plus à un réseau périodique constitué de deux éléments résonants : le split-ring et le fil de taille finie dont la longueur

donne une résonance autour de la fréquence pour laquelle l'indice est négatif. Cependant, les auteurs ont prouvé expérimentalement [82] l'existence de réfraction négative : il semble donc que l'on puisse modéliser ce milieu par un indice effectif n négatif.
Ces résultats expérimentaux ont été très controversés quant au fait qu'ils prouvent réellement l'existence d'un indice négatif et font encore débat aujourd'hui. À titre d'exemple, des phénomènes de réfraction négative dûs à des ordres de diffraction ont aussi été observés dans les cristaux photoniques [85, 86] ou phononiques [87], qui ne nécessitent pas de faire appel à un indice négatif. Ici, nous ne voulons pas entrer dans la polémique sur l'existence ou non de cet indice négatif, mais plutôt nous intéresser aux modèles qui sont utilisés dans ce domaine de recherche pour décrire le milieu micro-structuré en termes de paramètres effectifs. En effet, ces milieux sont composés de résonateurs sub-longueur d'onde organisés sur une échelle elle même sub-longueur d'onde, tout comme le sont nos milieux d'étude.
Pour donner des paramètres effectifs à ces milieux, la première hypothèse communément admise est le fait que la maille élémentaire doit être bien inférieure à la longueur d'onde dans le vide. De la même manière qu'un milieu diélectrique peut être considéré comme homogène à une échelle macroscopique, une milieu organisé à une échelle mésoscopique a un comportement pouvant être modélisé par des propriétés effectives à une échelle macroscopique. Les méthodes d'homogénéisation utilisées dans ce domaine de recherche reposent sur des techniques de « moyennage » des champs au sein d'une cellule élémentaire. Le paramètre effectif est alors obtenu en sommant les réponses collectives des occlusions qui constituent le matériau. Cette approche est finalement très similaire à celle du modèle de l'électron élastiquement lié pour décrire les milieux diélectriques. Notamment, dans cette approche, on considère que les résonateurs voient tous le même champ incident. Le champ au point P de la figure III.1 est la superposition du champ incident et du champ créé par les différents résonateurs du milieu, introduisant un nouveau champ déphasé de $\pi/2$, ce qui permet l'obtention de l'indice effectif. La différence avec le modèle diélectrique que nous avons présenté réside dans la forme de la résonance. C'est le dessin du résonateur qui fixe le comportement résonant de la maille élémentaire. Dans ce cas, on peut avoir une « force f » de résonance relativement importante qui résulte en des propriétés effectives importantes ou négatives. À nouveau, les mêmes hypothèses que précédemment sont faites et aucune description microscopique ou physique n'est réellement donnée.

III.1.4 Hybridation

La notion d'hybridation est une notion héritée de la chimie quantique pour expliquer expliquer les liaisons chimiques dans des systèmes très simples. Lorsqu'on approche deux atomes l'un de l'autre, on observe un couplage des orbitales atomiques des différents atomes. Ce couplage entraîne une répulsion des niveaux énergétiques des orbitales initiales qui donne naissance à des orbitales hybrides. Lorsqu'on peuple les orbitales hybrides ainsi obtenues avec les électrons des deux atomes, cette hybridation peut résulter en une diminution de l'énergie globale associée aux deux atomes pris séparément. Ainsi, une liaison électronique se forme entre les deux atomes : de deux orbitales atomiques on est passé à des orbitales moléculaires délocalisées sur toute la molécule et qui sont favorisées énergétiquement.

Cette notion d'hybridation est en fait bien plus large et ne concerne pas uniquement les orbitales atomiques : tout phénomène de couplage peut être interprété comme une hybridation. Notons que la notion de polariton que nous avons vu précédemment est finalement un cas particulier de cette idée d'hybridation puisqu'il s'agit d'un couplage entre un photon et un polaron.

En physique des ondes, la notion d'hybridation est couramment utilisée pour expliquer le couplage entre deux résonateurs ou nano-particules [88, 89]. Plus proches de nos travaux, de nombreux articles ont été publiés en acoustique qui présentent des cristaux phononiques dits à « bande interdite d'hybridation » [90–93]. Ces cristaux, contrairement aux cristaux photoniques et phononiques typiques, doivent leurs propriétés au caractère résonant de la cellule élémentaire, et non à la périodicité du milieu. Ceci se traduit notamment par une vitesse de groupe qui peut sembler négative dans la bande interdite quand elle tend vers l'infini dans les bandes interdites usuelles [92–95].

Les cristaux à bandes interdite dite d'hybridation sont donc constitués d'éléments résonants et peuvent ainsi être structurés à une échelle sub-longueur d'onde. Nous soulignons qu'ils sont ainsi formellement équivalents aux métamatériaux que nous considérons ici.

La manière dont est généralement traité le problème est la suivante. On considère les solutions du problème prises indépendamment. Le phonon (ou photon) est solution d'un hamiltonien d'espace libre d'énergie E_{ph} qui suit la relation de dispersion des ondes planes en milieu homogène. Le résonateur est solution d'un hamiltonien de résonance d'énergie $E_{\text{rés}}$ constante (figure III.5). En introduisant un potentiel de couplage V entre le résonateur et le photon, les niveaux d'énergie E propres du système hybride sont solutions de l'équation :

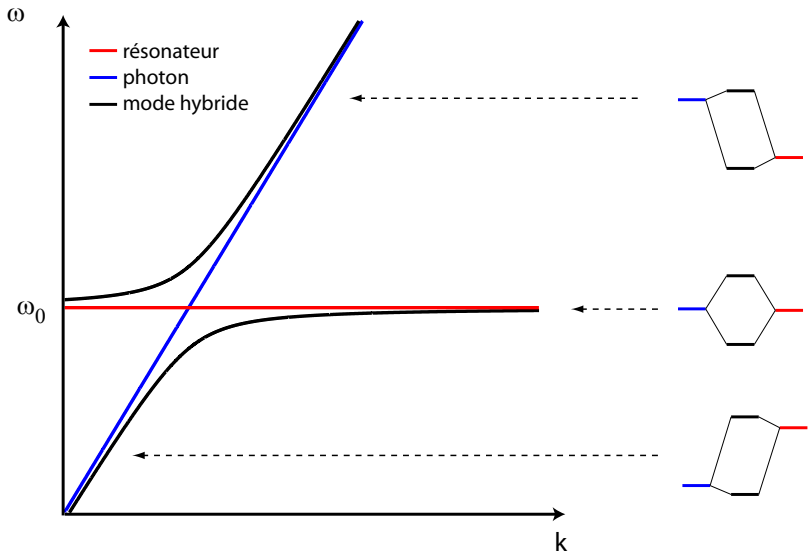

FIGURE III.5 – Relation de dispersion obtenue par hybridation entre un photon et un résonateur.

$$\begin{vmatrix} E_{\text{ph}} - E & V \\ V & E_{\text{rés}} - E \end{vmatrix} = 0 \tag{III.7}$$

Ce qui donne deux solutions couplées, d'énergies respectives :

$$E_{\pm} = \frac{E_{\text{ph}} + E_{\text{rés}}}{2} \pm \sqrt{(E_{\text{ph}} - E_{\text{rés}})^2 + 4V^2} \tag{III.8}$$

Dans le cas où la différence d'énergie entre les deux sous-systèmes est grande devant le potentiel de couplage, on retrouve les niveaux d'énergie de ceux-ci. En revanche, lorsque celles-ci sont du même ordre de grandeur, le système couplé donne lieu à un niveau d'énergie plus faible que le plus faible des deux niveaux non perturbés, et un niveau plus élevé que le niveau le plus élevé en l'absence de couplage. On a donc une bande liante, des ondes guidées par les résonateurs, et une bande anti-liante, des ondes qui rayonnent vers le champ lointain car leur vecteur d'onde est plus faible que celui des ondes dans le milieu homogène. Sans même connaître le terme de couplage, nous pouvons d'ores et déjà avoir une intuition de l'allure des relations de dispersion de ce système couplé (figure III.5).
Ce modèle est en bon accord avec l'allure de la relation de dispersion du milieu de fils mais il ne permet pas une interprétation physique simple des phénomènes mis en jeu lors de la propagation dans le milieu. Notamment, le terme de couplage entre l'onde (le photon) et le résonateur (un fil métallique) n'est pas trivial. De plus, dans ce modèle, tout comme

dans les modèles de milieu effectif, toute interaction entre les résonateurs est implicite et la description microscopique du milieu n'est pas possible.
Nous voudrions faire remarquer que la justification du formalisme d'hybridation n'est jamais donnée dans les références que nous avons consultées. Néanmoins, les résultats sont en accord avec cette approche et celle-ci semble donc pertinente, bien qu'étant obscure. Or, dans cette approche, il semble que les propriétés du milieu de propagation résultent uniquement d'une interaction d'ondes planes avec une résonance. Ainsi, tout semble pouvoir se comprendre en terme d'ondes propagatives. Notons enfin que de façon assez surprenante, les cristaux d'hybridation sont systématiquement étudiés pour leurs bandes interdites, et jamais pour leurs bandes propagatives qui doivent pourtant présenter des propriétés similaires à celles du milieu de fils.

III.1.5 Conclusions, contradictions et questions résultantes des modèles exposés

Ces différentes approches qui permettent de décrire la propagation des ondes dans des milieux contenant des occlusions résonantes sont principalement des approches effectives. Elles présupposent que la longueur d'onde des ondes qui se propagent dans le milieu est grande devant la distance séparant les différents résonateurs constituant le milieu : on parle de modèle quasi-statique. Ainsi, tous les résonateurs « voient » le même champ incident. Tout ceci résulte en une réponse moyenne du milieu où la présence de plusieurs résonateurs n'intervient que par l'intermédiaire de la densité. Cette idée de réponse moyenne dans le cas du milieu de fils ne nous paraît pas valable. En effet, si tous les fils voyaient le même champ incident puisqu'ils sont disposés sur une échelle très inférieure à la longueur d'onde, comment expliquer les modes qui oscillent à l'échelle du milieu ? C'est d'ailleurs un problème inhérent au modèle du milieu effectif : comment peut-on considérer que le champ incident vu par les différents résonateurs est identique alors que le modèle donne des indices effectifs associés à des longueurs d'onde égales au pas du réseau ?
Pour pallier à cette difficulté, on retrouve très souvent l'idée qu'il y a des phénomènes de couplage de type champ proche au sein du matériau : on commence par considérer un modèle quasi-statique où tous les résonateurs voient le même champ incident, puis on ajoute des corrections de champ proche. Cette « pirouette » permet de retomber sur ses pieds puisque désormais ces champs qui oscillent à l'échelle du milieu ne sont que des corrections par rapport au modèle effectif. Nous avons aussi vu dans la partie précédente que les cristaux d'hybridation peuvent être considérés comme des métamatériaux. En effet, ils sont constitués d'éléments résonants qui peuvent être organisés sur une échelle

sub-longueur d'onde.
La première question qui vient à l'esprit est donc la suivante. Tous ces phénomènes (hybridation, plasmons, métamatériaux) peuvent-ils être classés sous le même nom, et expliqués à l'aide du même mécanisme physique ?
Si tel est le cas, nous sommes face à une contradiction. En effet, dans le domaine des métamatériaux, des effets de couplage de champ proche sont invoqués pour expliquer les propriétés macroscopiques du milieu. Or, pour l'hybridation, il est clair qu'aucun effet de champ proche n'est pris en compte puisque ce n'est pas le couplage entre résonateurs qui est à la base du phénomène, mais le couplage d'ondes propagatives et d'un résonateur : ce phénomène semble donc être dû uniquement à un couplage de type champ lointain. La deuxième question qui vient à l'esprit est donc la suivante. Les divers phénomènes exposés sont-il majoritairement le résultat d'un couplage de type champ lointain ou d'interactions de type champ proche ?
Enfin, si cette approche est la bonne et que ces diverses appellations résultent des mêmes phénomènes physiques, certaines limitations des métamatériaux ne semblent pas être justifiées. En effet, dans le domaine des cristaux d'hybridation, il n'est jamais fait mention du fait que la période du milieu doit être petite devant la longueur d'onde, ni même que le milieu doit être périodique. D'où la question qui se pose : faut-il que les matériaux fabriqués soient structurés à l'échelle sub-longueur d'onde, et dans le cas contraire, quel modèle permet d'obtenir leurs propriétés sans faire intervenir cette hypothèse ?
Dans la partie suivante, nous allons tenter de répondre à ces questions et par la même occasion proposer un formalisme général pour l'ensemble de ces concepts.

III.2 Approche microscopique : polaritons dans les milieux résonants

III.2.1 Mise en place du problème

Afin de décrire la propagation des ondes dans un milieu composé de résonateurs, nous reprenons l'idée intuitive que nous avons présenté, et qui consiste à dire que les résonateurs sont couplés. Lorsqu'on prend N résonateurs, un couplage entre ces résonateurs intervient, ce qui résulte en une levée de dégénérescence et donc en l'apparition de N modes propres présentant chacuns une fréquence de résonance propre. Dans cette partie, nous souhaitons tout d'abord comprendre la nature de ce couplage. Pour simplifier le problème, nous proposons de travailler sur un milieu unidimensionnel composé de résonateurs identiques.

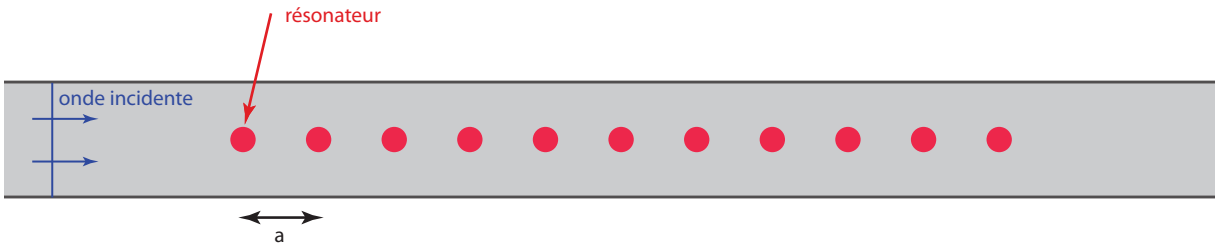

FIGURE III.6 – Géométrie du problème quasi-unidimensionnel.

Pour cela, nous étudions la géométrie présentée sur la figure III.6, où une onde plane incidente arrive sur une ligne de résonateurs périodiquement espacés.
Pour étudier en détail ce cas de figure, nous prenons comme résonateur sub-longueur d'onde l'exemple d'un split ring resonator (SRR) introduit dans le cas des métamatériaux. Nous nous plaçons dans un guide d'onde avec des parois métalliques pour avoir un problème quasi-unidimensionnel, le milieu est donc invariant par translation suivant l'axe Oz. De plus, le guide d'onde est dimensionné pour avoir une hauteur bien plus petite que la longueur d'onde afin de rester dans le cadre d'une propagation unidimensionnelle. Ce type de guide d'onde présente un mode propagatif qui a la même relation de dispersion que les ondes planes dans le vide pour une onde polarisée TM par rapport au plan d'observation. Le champ magnétique de ce mode est constant sur toute la section du guide.
Pour évaluer l'interaction entre ce résonateur et l'onde incidente nous mesurons en simulation l'onde transmise vers l'avant ($x \mapsto \infty$) lorsqu'on illumine un unique résonateur avec une onde plane venant de $x \mapsto -\infty$. Puis, nous mesurons l'onde transmise lorsque nous formons une chaine de 40 résonateurs dans le guide d'onde précédent. Sur la figure III.7, nous représentons ces deux coefficients de transmission. Le coefficient de transmission en présence d'un résonateur fait clairement apparaître un effet résonant puisqu'il s'annule sur la gamme de fréquence considérée. Nous pouvons d'ores et déjà remarquer qu'il n'est pas symétrique par rapport à la fréquence de résonance f_0. Cet effet est imputable à une résonance de type Fano [96, 97] et nous aurons l'occasion de revenir un peu plus en détail sur l'allure de ce coefficient de transmission. Lorsqu'on place N résonateurs dans le guide d'onde, on remarque la présence de multiples pics de résonances comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, ce qui traduit un effet de couplage entre résonateurs. De plus, on remarque une bande de fréquence sur laquelle la propagation est interdite. Le but de notre approche est donc de comprendre ces observations.

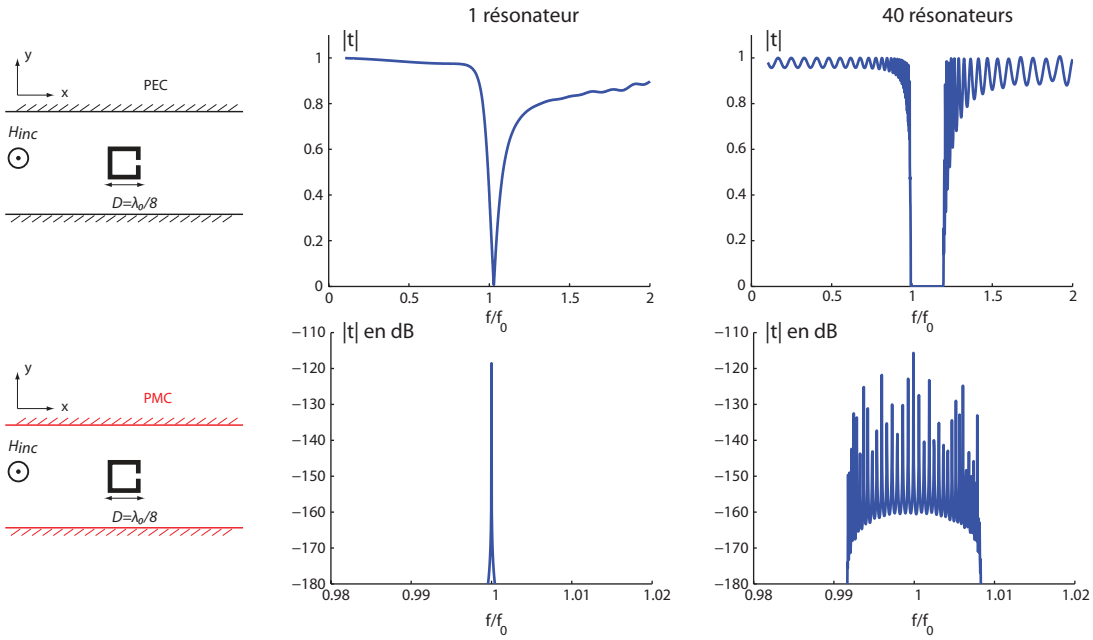

FIGURE III.7 – Coefficients de transmission dans un guide d'onde contenant des ondes propagatives (parois PEC en haut) et uniquement des ondes évanescentes (parois PMC en bas) au travers de 1 et 40 SRR. Nous attirons l'attention sur les échelles de fréquences qui sont totalement différentes dans les deux situations.

Pour bien comprendre l'influence des ondes propagatives et des phénomènes de couplage de type champ proche en jeu, nous supprimons l'onde propagative dans le guide d'onde. Pour cela, au lieu de placer le SRR dans un guide d'onde qui présente des parois conductrices, nous simulons la situation où les parois sont des PMC (pour « Perfect Magnetic Conductor »), qui imposent à la composante tangentielle du champ magnétique de s'annuler à l'interface. Étant donné les dimensions considérées, nous nous retrouvons en-dessous de la fréquence de coupure du premier mode, et les ondes TM sont évanescentes. Nous avons ainsi éliminé la composante propagative dans le problème considéré. Nous observons alors un comportement complètement différent. En mesurant le coefficient de transmission avec un résonateur unique nous obtenons un pic de résonance beaucoup plus étroit qu'avec les parois métalliques : ce pic de transmission correspond à un effet tunnel résonant. Lorsqu'on forme une chaine de résonateurs, nous observons une levée de dégénérescence et plusieurs pics apparaissent. Ils sont distribués autour de la fréquence propre de résonance d'un résonateur (figure III.7). Comme nous avons supprimé les ondes planes dans le guide, ceux-ci sont imputables à un couplage de type champ proche uniquement. Cette petite analyse numérique simple permet de s'affranchir de tout couplage résultant d'ondes propagatives.
À partir de l'observation de ces deux comportements différents en présence des ondes propagatives et en leur absence, nous voulons comprendre quels sont les phénomènes de couplage en jeu dans le système étudié et nous allons donc étudier les deux situations séparément.

III.2.2 Couplage de type champ proche : modèle de liaison forte

Nous allons commencer par l'étude du guide d'onde avec des parois magnétiques où l'on a supprimé les ondes propagatives. Ainsi, le couplage entre résonateurs ne peut s'opérer que par champ proche. Pour expliquer le comportement observé, commençons par considérer le cas très général d'un système composé de deux oscillateurs harmoniques sans pertes (notés Ψ_1 et Ψ_2) de même pulsation de résonance ω_0, et introduisons un terme de couplage adimensionné κ entre ces deux résonateurs. Cela revient à étudier le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}^2\Psi_1}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2(\Psi_1 + \kappa\Psi_2) & = & 0 \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\Psi_2}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2(\Psi_2 + \kappa\Psi_1) & = & 0 \end{array}\right. \tag{III.9}$$

En annulant le déterminant du système, on trouve les deux pulsations propres de réso-

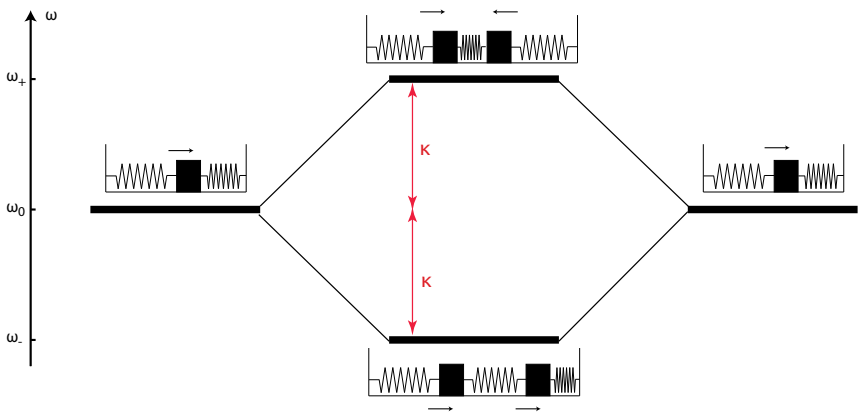

FIGURE III.8 – Représentation en niveaux d'énergie d'un couplage entre deux résonateurs identiques (ici des résonateurs de type masse/ressort).

nance :

$$\omega_{\pm}{}^2 = \omega_0{}^2(1 \pm \kappa) \tag{III.10}$$

On a donc deux fréquences propres de résonance, l'une de plus faible énergie et l'autre de plus haute énergie que l'oscillateur seul. Suivant le signe de κ, c'est le mode anti-symétrique (respectivement symétrique) qui a la plus haute énergie.
Ce modèle de résonateurs couplés est bien connu en physique quantique et a une représentation très simple sur un diagramme énergétique. L'interaction entre les deux oscillateurs harmoniques de pulsations ω_0, c'est-à-dire de même niveau énergétique, donne naissance à deux modes hybrides aux pulsations $\omega_{\pm}$ (figure III.8), soit deux niveaux énergétiques distincts. Ce modèle permet entre autre d'expliquer les liaisons covalentes d'une molécule. C'est pourquoi il est appelé modèle de liaison forte (« tight-binding model » en anglais). En conservant ce même modèle de couplage entre résonateurs, on peut alors augmenter le nombre de résonateurs arbitrairement jusqu'à avoir une chaîne linéaire composée de N résonateurs. Nous faisons de plus une hypothèse importante de couplage avec les plus proches voisins uniquement ce qui est usuel dans le cas du modèle de liaison forte. Ainsi, l'équation vérifiée par le $n^{\text{ème}}$ résonateur de la chaine prend la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi_n}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0{}^2\Psi_n + \frac{\kappa}{2}\omega_0{}^2(\Psi_{n-1} + \Psi_{n+1}) = 0 \tag{III.11}$$

On a renormalisé le terme de couplage pour que la somme des termes de couplage pour un résonateur donné soit égale à κ. En se plaçant dans l'espace réciproque (spatial et tem-

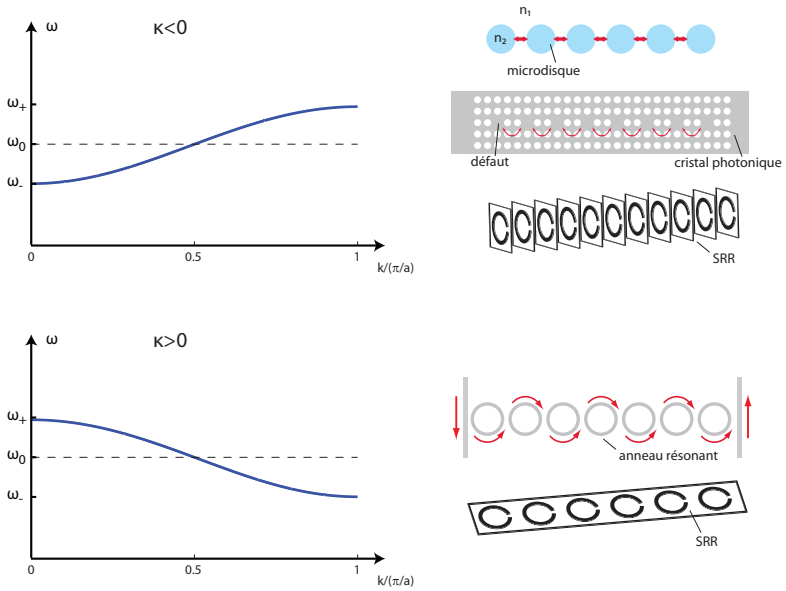

FIGURE III.9 – Représentation des relations de dispersion obtenues par le modèle de liaison forte. À droite quelques exemples de systèmes qui vérifient ces relations.

porel), on montre que les fréquences de résonance du système composé de N résonateurs suivent une loi de dispersion sinusoïdale (figure III.9) :

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 \left(1 + \kappa \cos(ka)\right) \tag{III.12}$$

où a correspond à la distance entre résonateurs.
La principale propriété de cette loi de dispersion est que la distribution des fréquences propres de la chaine de résonateurs est comprise dans une bande de fréquence symétrique centrée autour de ω_0 :

$$\sqrt{1 - |\kappa|} \leq \frac{\omega}{\omega_0} \leq \sqrt{1 + |\kappa|} \tag{III.13}$$

Dans le cas limite où N tend vers l'infini on a un continuum de niveaux énergétiques possibles qui correspond à une bande dans le diagramme énergétique d'un cristal par exemple.
Ce type de relation de dispersion a aussi été observé à une échelle mésoscopique avec la proposition faite par Amnon Yariv de réaliser des guides d'onde optiques à partir de résonateurs couplés [98]. L'hypothèse importante pour la fabrication de ces guides d'onde est que ces résonateurs présentent un facteur de qualité élevé. Nous verrons dans la partie suivante que l'hypothèse de facteur de qualité très élevé ne suffit pas à justifier l'utilisation

de ce modèle. Il faut un couplage soit de type champ proche, soit entre plus proches voisins uniquement. Ce type de guide d'onde a vu le jour avec l'utilisation de micro-disques résonants [98], de petits anneaux résonants [99] ou encore en utilisant des défauts dans des cristaux photoniques[4] [100]. En micro-ondes, des guides composés de split-ring resonators, qui supportent des ondes magnéto-inductives, ont aussi vu le jour [101]. Dans ce cas précis, on peut d'ailleurs observer les deux types de couplage (κ positif et négatif pour un couplage majoritairement capacitif ou inductif) suivant l'arrangement spatial de la chaîne. Ces différents exemples de guide d'onde sont représentés sur la figure III.9.

En reprenant la simulation des 40 SRR dans le guide d'onde avec des parois de type PMC, nous pouvons maintenant comprendre aisément l'apparition des pics d'effet tunnel résonant distribués autour de f_0. Regardons de plus près le champ magnétique correspondant à chacun des pics (figure III.10). À partir de l'allure de ce champ magnétique, nous obtenons une relation de dispersion pour les différents modes résonants. Les fréquences correspondant aux différents modes sub-longueur d'onde sont contenues dans une bande de fréquence étroite centrée sur f_0 : ce type de relation de dispersion est typiquement imputable à un modèle de liaison forte (« tight binding modèle » en anglais). On observe d'ailleurs que le couplage est positif, soit de type capacitif, ce qui est en accord avec le fait qu'on ne peut pas obtenir de couplage inductif car la structure est infinie suivant l'axe Oz.

L'idée intéressante dans ce modèle est que désormais tous les résonateurs ne voient pas un même champ incident mais voit le champ issu de son plus proche voisin. Chaque résonateur induit un déphasage de l'onde par rapport au précédent. Ceci résulte en une propagation le long de la chaîne de résonateurs. Cette idée est très intéressante pour expliquer la présence de modes sub-longueur d'onde : si on veut avoir une propagation à l'échelle de la maille élémentaire du milieu il faut une variation importante de la phase au sein de celle-ci. La nature résonante de la cellule élémentaire permet ce changement de phase.

Ce modèle, bien qu'il donne lieu à la propagation de modes sub-longueurs d'onde dans une chaîne de résonateurs, ne donne pas le même comportement que celui que nous avons observé dans le cas du milieu de fils par exemple. En effet, nous n'avons observé des modes sub-longueur d'onde qu'en-dessous de la fréquence propre de résonance d'un résonateur. En d'autres termes, nous obtenons des relations de dispersion asymétriques. D'autre part, ce couplage de type champ proche ne crée pas de bande interdite. Il autorise uniquement la propagation d'une onde sur un intervalle de fréquence étroit centré autour de la fréquence de résonance propre d'un résonateur.

4. Nous aurons l'occasion de décrire ces résonateurs au cours du chapitre V.

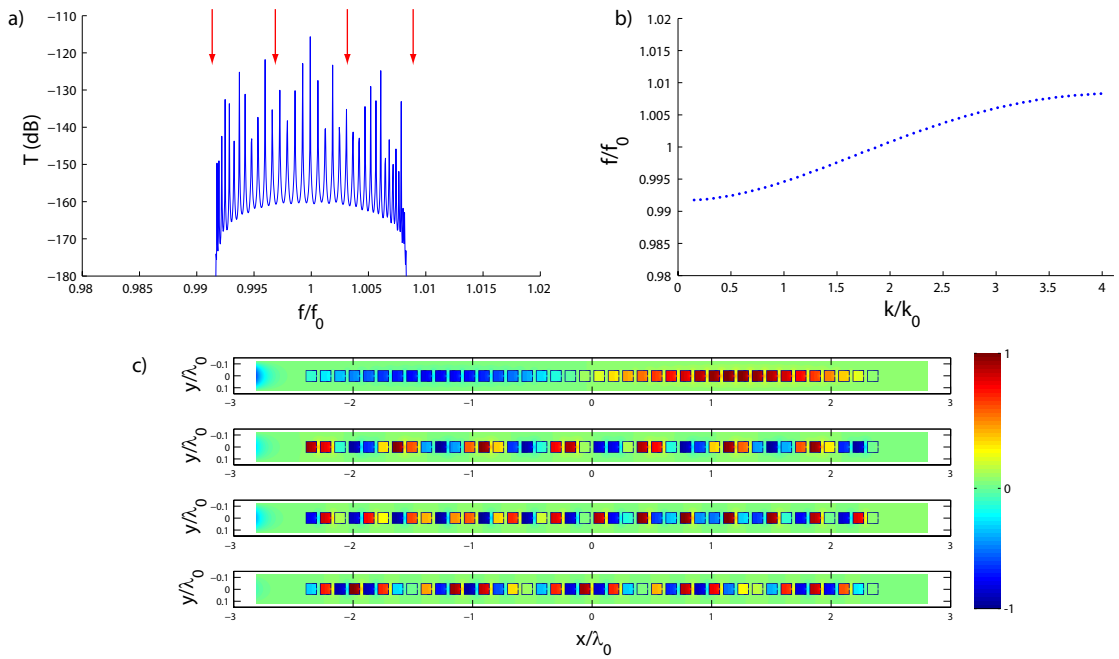

FIGURE III.10 – (a) Module du coefficient de transmission pour une chaîne de 40 résonateurs dans un guide d'onde en-dessous de la fréquence de coupure qui montre des pics d'effet tunnel résonant. En regardant de plus près le champ magnétique au sein de la chaîne (c), nous extrayons une relation de dispersion explicable par un modèle de liaison forte (b)

III.2.3 Champ lointain : interférences de type Fano

Pour expliquer le comportement de la chaîne de SRR dans le guide d'onde avec des parois métalliques, et donc se rapprocher des courbes d'hybridation ou des métamatériaux aux propriétés effectives négatives, il faut prendre en compte une interaction avec l'onde plane incidente. En effet, nous venons de voir qu'un couplage de type champ proche ne permet pas d'expliquer le coefficient de transmission obtenu dans ces cas. Nous devons donc considérer l'interaction avec le continuum de solutions dans le guide d'onde (les ondes propagatives) ce qui résulte en un couplage de type champ lointain entre les différents résonateurs.

Le coefficient de transmission d'un résonateur unique dans le guide d'onde n'est pas symétrique en fréquence et il paraît ainsi naturel de faire intervenir la notion de résonance de Fano [96,97]. Ce type de résonance résulte d'un couplage entre deux canaux de transmission d'un système : un canal direct et continu et un canal résonant donc discret (figure III.11). Dans le cas du résonateur sub-longueur d'onde dans le guide d'onde, le canal direct, ou continuum, fait référence à la transmission vers l'avant de l'onde plane incidente

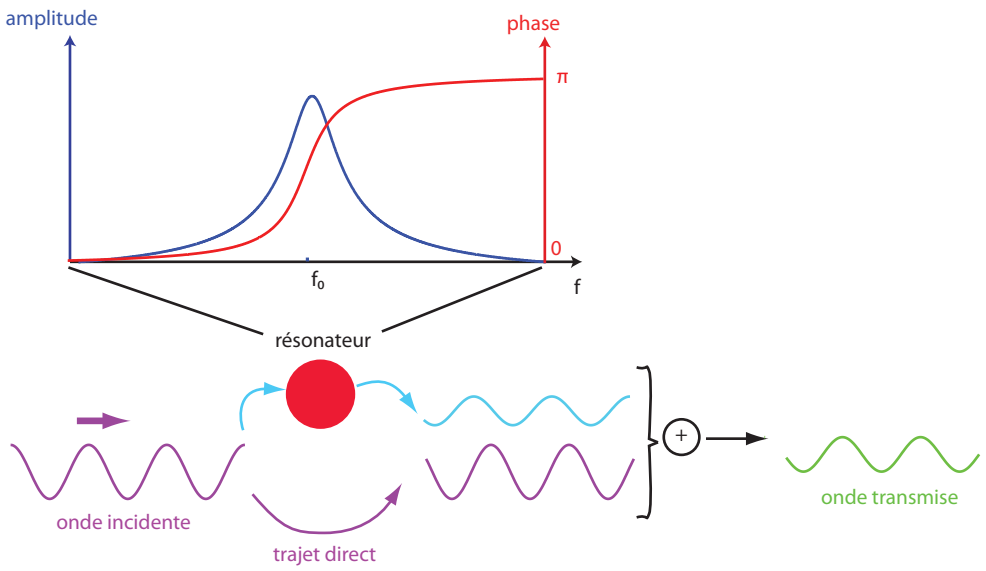

FIGURE III.11 – Schéma de principe des interférences en jeu qui donnent naissance à la résonance de type Fano dans le coefficient de transmission.

sans interaction. Le canal résonant, ou discret, correspond à l'excitation du résonateur, qui se couple ensuite aux ondes radiatives et réémet des ondes propagatives. Ces deux modes de transmission interfèrent entre eux avec un déphasage variable, qui dépend de la réponse du résonateur et de la taille de celui-ci, et le couplage donne lieu à la résonance de Fano, qui n'est donc plus nécessairement symétrique par rapport à f_0.

Dans le cas du SRR que nous avons introduit précédemment on comprend aisément ces interférences. Le canal direct correspond à une propagation sur une distance de la taille du résonateur soit dans ce cas un déphasage de $\pi/8$, étant donné la dimension du résonateur qui est à peu près égal à $\lambda/8$. Le canal indirect correspond à la résonance au sein du SRR que l'on considère dans ce cas comme ponctuel. De plus, la caractéristique intrinsèque de tout phénomène résonant est la présence d'un saut de phase de π autour de la fréquence de résonance, qui dans le cas du SRR correspond à un déphasage de 0 vers π. Pour bien comprendre l'allure de ce coefficient de transmission il faut alors voir que l'onde qui subit le trajet direct et l'onde issue du résonateur interfèrent à la sortie. De plus, il faut se rappeler que l'onde réémise à une amplitude qui est intimement liée à la force de la résonance.

Ainsi, lorsque l'onde réémise par le résonateur est en phase avec l'onde plane incidente ($f < f_0$ dans le cas d'un SRR dans le guide d'onde), le résonateur suivant dans la chaine de résonateur voit une onde incidente similaire à l'onde incidente sur le premier résonateur,

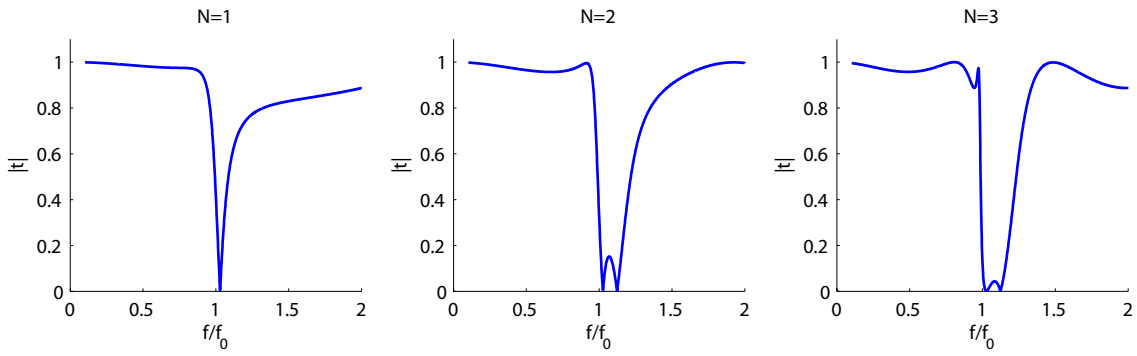

FIGURE III.12 – Coefficients de transmission en présence d'1, 2 et 3 résonateurs.

et la relation de dispersion pour la chaine de résonateurs suit la relation de dispersion de l'espace libre. En augmentant la fréquence, le résonateur répond avec un déphasage de plus en plus élevé par rapport à l'onde plane incidente, ce qui induit le déphasage nécessaire à l'échelle de la cellule élémentaire du milieu pour avoir propagation de modes sub-longueur d'ondes dans la chaîne de résonateurs. Lorsque la réponse du résonateur est en quadrature avec l'excitation incidente, on observe un saut de phase de π entre les deux extrémités de la maille élémentaire en prenant en compte l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise. Lorsque le déphasage augmente encore, le résonateur commence à répondre en opposition de phase avec l'excitation, ce qui a pour effet d'annuler l'onde incidente transmise vers l'avant. Ceci se traduit par l'apparition d'une bande interdite dans la relation de dispersion. On y fait d'ailleurs souvent référence sous le nom de « bande interdite d'hybridation » pour insister sur l'importance du couplage entre une onde propagative et une résonance localisée. Ceci est strictement équivalent au fait d'invoquer une propriété effective négative.

Sur la figure III.12 nous représentons le coefficient de transmission obtenu en sortie du guide d'onde lorsqu'on y place 1, 2 et 3 résonateurs. Comme nous l'avons vu, le coefficient de transmission avec un unique résonateur n'est pas symétrique, ce qui traduit la présence d'une résonance de type Fano. Lorsqu'on place 2 résonateurs dans le guide, on fait donc

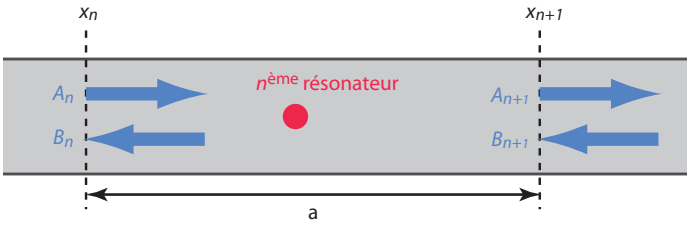

FIGURE III.13 – Schéma de principe pour obtenir la relation de dispersion théoriquement.

apparaître deux résonances Fano dans le coefficient de transmission. La particularité de ces résonances Fano est dans leur comportement très asymétrique en fréquence. Ainsi on observe 2 pics de transmission importante (module égal à 1) en-dessous de la fréquence f_0, et deux annulations du coefficient de transmission au-dessus de f_0. Dans le cas de trois résonateurs on augmente le nombre de pics de transmission et de réflexion, ainsi que le comportement asymétrique en fréquence.
Lorsqu'on place 40 résonateurs dans le guide d'onde, on obtient 40 résonances Fano qui se superposent (figure III.7). Ainsi, on fait apparaître ce comportement dissymétrique de manière plus flagrante et on observe 40 pics ainsi que 40 minima de transmission. Ces modes propres de transmission excitables depuis le champ lointain sont typiquement ceux qui nous ont permis de réaliser des expériences de super-résolution dans le chapitre précédent. Lorsqu'on augmente indéfiniment le nombre de résonateurs on obtient un continuum de pics de transmission et de réflexion. Cela revient à considérer une bande de propagation suivie d'une bande interdite. Cette bande interdite est d'ailleurs celle que l'on retrouve dans les matériaux présentant une perméabilité négative. Notons que c'est cette asymétrie des résonances Fano ainsi que leur caractère cumulatif qui élargit la réponse en fréquence d'une chaine de résonateurs par rapport à un unique résonateur.
Ainsi, nous avons mis en évidence la nature générale des phénomènes qui nous intéressent. Les indices élevés obtenus dans les matériaux localement résonants ainsi que les bandes interdites résultent d'interférences entre une onde propagative incidente et le champ propagatif réémis par le résonateur qui présente un saut de phase de π autour de f_0.

III.2.4 Formulation analytique : relation de dispersion

Pour expliquer plus en détail cette approche phénoménologique et pour obtenir la relation de dispersion d'une chaîne de résonateurs dans un milieu contenant un continuum d'ondes propagatives, nous cherchons les solutions du problème à l'échelle de la maille élémentaire de la chaîne et pour une structure infinie. Pour cela nous reprenons une approche qui a

largement été utilisée pour décrire les structures unidimensionnelles multi-couches [102], et qui a aussi été introduite par A. Yariv pour décrire le couplage entre un guide d'onde et une cavité [103]. Dans le cas de la géométrie présentée sur la figure III.13, nous cherchons la matrice de transfert $\mathbf{M}$ qui permet d'obtenir les amplitudes des ondes de Bloch au niveau des frontières de la cellule élémentaire :

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \tag{III.14}$$

Dans le cas où nous repoussons à l'infini les bornes de la maille élémentaire, nous obtenons une matrice $\mathbf{M}_\infty$ qui contient les coefficients de transmission et de réflexion en champ lointain. Pour obtenir les éléments de la matrice $\mathbf{M}_\infty$, nous disposons de deux solutions particulières :

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_\infty \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ t^* \end{pmatrix} = \mathbf{M}_\infty \begin{pmatrix} r^* \\ 1 \end{pmatrix} \tag{III.15}$$

Ceci nous permet d'écrire la matrice $\mathbf{M}_\infty$ dans le cas où il n'y a pas de pertes (ie. $|t|^2 + |r|^2 = 1$) :

$$\mathbf{M}_\infty = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t^*} & -\dfrac{r^*}{t^*} \\ \\ -\dfrac{r}{t} & \dfrac{1}{t} \end{pmatrix} \tag{III.16}$$

À partir de cette matrice de transfert à l'infini, qui par conséquent ne prend pas en compte les effets de champ proche, on obtient la matrice $\mathbf{M}$ pour une maille élémentaire de longueur a en ajoutant un déphasage dû à la propagation en espace libre :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t^*} e^{j\frac{\omega}{c}a} & -\dfrac{r^*}{t^*} \\ \\ -\dfrac{r}{t} & \dfrac{1}{t} e^{-j\frac{\omega}{c}a} \end{pmatrix} \tag{III.17}$$

Le champ Ψ_n au point $x = x_n$ est la somme d'une onde qui se propage dans le sens des x croissants et dont l'amplitude complexe est A_n, et d'une onde qui se propage dans le sens des x décroissants d'amplitude B_n ($\Psi_n = A_n + B_n$). On cherche à modéliser la propagation à l'échelle de la maille élémentaire de manière à obtenir une onde de Bloch tel que $\Psi_{n+1} = e^{jka}\Psi_n$. Cette relation est vérifiée pour les vecteurs propres de $\mathbf{M}$ dans le cas où les valeurs propres de $\mathbf{M}$ se mettent sous la forme e^{jka}. En résolvant l'équation

$\det(\mathbf{M} - e^{jka}\mathbf{I})$, on obtient la relation de dispersion suivante :

$$\cos(ka) = \Re\left(\frac{1}{t}e^{-j\frac{\omega}{c}a}\right) \tag{III.18}$$

Et pour souligner les poids relatifs de la réponse en phase et de celle en quadrature de phase du résonateur, responsables de la résonance Fano en transmission, on peut réécrire cette relation de dispersion sous la forme :

$$\cos(ka) = \Re\left(\frac{1}{t}\right)\cos\left(\frac{\omega}{c}a\right) - \Im\left(\frac{1}{t}\right)\sin\left(\frac{\omega}{c}a\right) \tag{III.19}$$

Cette équation montre bien comment la présence du résonateur dans la cellule élémentaire (que l'on retrouve dans le coefficient de transmission t) transforme le nombre d'onde d'espace libre $\frac{\omega}{c}$ en un nombre d'onde de Bloch k. Cette relation de dispersion est universelle et elle dépend uniquement de la période a et du coefficient de transmission t en champ lointain du résonateur, c'est-à-dire de la section efficace de diffusion. Étant donné que le coefficient de transmission peut avoir n'importe quelle valeur entre 0 et 1 (en module), on imagine aisément que le nombre d'onde de Bloch peut explorer l'ensemble de la première zone de Brillouin. Si la maille élémentaire est inférieure à la longueur d'onde dans le guide (ou dans le vide plus généralement) cela se traduit par l'existence de modes propagatifs sub-longueur d'onde. D'autre part, lorsqu'on se place à une fréquence éloignée de la fréquence de résonance du résonateur, celui-ci est relativement transparent et donc la relation de dispersion suit la relation de dispersion du guide d'onde (ou d'espace libre dans le cas plus général).

Notons que cette approche permet d'obtenir la relation de dispersion d'un milieu infini composé de résonateurs identiques périodiquement espacés, mais elle permet aussi d'obtenir le comportement d'une chaîne linéaire de dimension finie qui peut éventuellement contenir du désordre. En effet, la matrice de transfert pour passer d'un résonateur à l'autre est clairement identifiée à partir de la réponse en champ lointain de chaque résonateur. Ainsi nous pouvons mettre en évidence les modes propres résonants que nous avons exploité au chapitre précédent. De plus, avec cette approche, on comprend aisément que ces modes propres sont excitables depuis le champ lointain.

III.2.5 Bande interdite d'hybridation

Une autre conséquence directe de l'équation III.18 est l'apparition d'une bande interdite. En effet, lorsque le coefficient de transmission t décroît (en valeur absolue), le membre de droite de l'équation a de très fortes chances d'être supérieur à 1 en valeur absolue, et par

conséquent l'équation ne donne plus de solution propagative. À nouveau, ce comportement dépend très fortement du résonateur considéré. L'apparition d'une bande interdite dans la relation de dispersion dans le cas où $a \ll \lambda$ est donc intégralement imputable à la nature résonante de la cellule élémentaire, plutôt qu'à la nature périodique du milieu. En effet, dans ce cas la relation de dispersion devient $cos(ka) = \Re(1/t)$ et la période du milieu n'intervient plus. On retrouve et on explique ainsi très simplement la notion de bande interdite d'hybridation. Notons que si $\lambda \approx a$, on peut avoir un mélange des effets de l'ordre et de la nature résonante du milieu, ce qui va se traduire par des bandes interdites de Bragg et d'hybridation.

Pour décrire le comportement des ondes au sein de la bande interdite d'hybridation, on peut introduire un nombre d'onde de Bloch complexe : $k = j\kappa$. À partir de la relation de dispersion, nous pouvons obtenir la partie imaginaire. Ainsi, dans la gamme de fréquence qui ne présente pas de mode propagatif nous avons :

$$\kappa = \frac{1}{a}\Im\left(\arccos\Re\left(\frac{1}{t}e^{-j\frac{\omega}{c}a}\right)\right) \tag{III.20}$$

où arccos est la fonction complexe réciproque de la fonction cosinus. En réalité, dès que l'argument de la fonction arccos n'est pas dans l'intervalle $]-1;1]$, la fonction arccos donne un nombre imaginaire, ce qui est le cas dans la bande interdite. La formule de la relation de dispersion permet donc d'obtenir à la fois la relation de dispersion des ondes propagatives et le comportement des ondes évanescentes dans la bande interdite.

Contrairement à ce que nous avons vu dans le chapitre précédent, c'est souvent la recherche de cette bande interdite qui a motivé les travaux sur les milieux localement résonants. Dans le cas du milieu de fils, nous avons travaillé sur la gamme de fréquence associée à des modes propagatifs sub-longueur d'onde, alors que la plupart des groupes sont à la recherche d'une gamme de fréquence qui inhibe la propagation. Nous avons préféré mettre en évidence les modes sub-longueur d'ondes qui peuvent se propager au sein du milieu en les excitant depuis le champ lointain. Avec le recul, nous nous apercevons que nous avons eu une démarche inverse à celles qui sont menées habituellement. En effet, il est bien connu que la densité d'état locale (LDOS en anglais) diverge au voisinage d'une bande interdite. On aurait donc pu partir du fait que nous avions ouvert cette bande interdite, pour ensuite mettre en évidence la présence de modes sub-longueur d'onde dans nos milieux au voisinage de cette bande interdite.

Ainsi, dans la communauté micro-ondes, un exemple de cette bande interdite est apparu en 1999 [104] sous le nom de « mushroom like EBG » (matériau à bande interdite en forme de champignon en français). Dans ce cas précis, l'idée était de diminuer le couplage entre

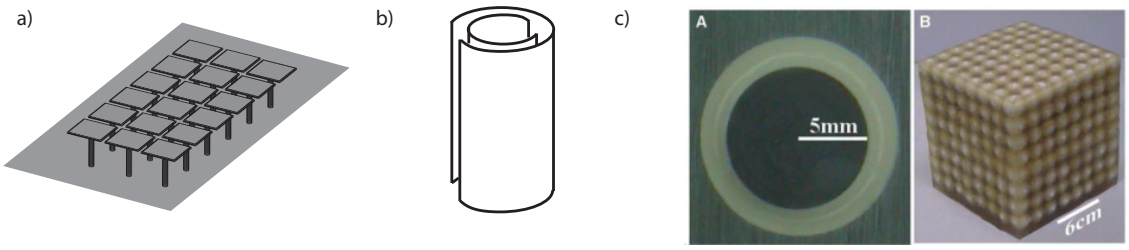

FIGURE III.14 – Différents exemples où la bande interdite d'hybridation a déjà été observée : (a) « mushroom-like EBG » [104], (b) split ring resonator [81] et (c) billes de plomb enrobées en acoustique [105].

deux antennes à plaque (« patch antenna » en anglais) par l'intermédiaire d'un matériau à bande interdite. Cependant, les deux antennes étaient distantes de $\lambda/2$ sur la plaque imprimée, interdisant ainsi d'avoir recours à un cristal photonique usuel. Ainsi, les auteurs ont proposé d'utiliser des structures résonantes en forme de champignon. Comme souvent, en micro-ondes, ils ont décrit le matériau avec un modèle de circuit équivalent constitué d'inductances et de capacités agissant comme un filtre coupe-bande, et aucune théorie générale du problème n'a été proposée.

Dans la communauté des métamatériaux, on retrouve très souvent cette bande interdite et c'est d'ailleurs la recherche de celle-ci qui a motivé les premiers travaux. Mettre en évidence un matériau qui présente une permittivité (respectivement perméabilité) négative consiste justement à prouver l'existence d'une bande interdite [5]. Ainsi, le milieu composé de split ring resonators proposé initialement [81] a été introduit justement parce qu'il présentait une bande interdite, caractéristique d'une perméabilité effective négative dans ce cas. Depuis ce travail, de nombreuses autres structures qui mettent en évidence la présence d'une bande interdite ont vu le jour, mais à chaque fois elle s'explique par la nature résonante de la cellule élémentaire constituant le matériau.

Dans le domaine des ondes acoustiques, cette bande interdite due à l'effet résonant de matériaux périodiques sub-longueur d'onde a aussi été mise en évidence. C'est d'ailleurs dans cette communauté qu'a été introduite la notion de bande interdite d'hybridation [90–93]. Ainsi, Liu et ses collaborateurs [105] ont proposé un matériau acoustique composé d'inclusions résonantes sub-longueur d'onde qui consistent en de petites sphères de plomb enrobées d'une fine épaisseur de silicone. Dans cet article, l'ouverture de la bande inter-

5. Il est d'ailleurs assez surprenant que deux bandes interdites (l'une sur la permittivité et l'autre sur la perméabilité) résultent en la propagation des ondes dans un matériau que l'on peut modéliser avec un indice effectif négatif.

dite due à la résonance est démontrée et un parallèle avec les métamateriaux est établi : les auteurs parlent d'ailleurs de module élastique dynamique négatif. Depuis, ils ont revu leur position et attribuent cette bande à une masse effective dynamique négative, mais l'important repose dans la présence d'une bande interdite. L'analogie avec les métamatériaux électromagnétiques a été poussée encore plus loin : Fang et ses collaborateurs [106] ont proposé d'utiliser des résonateurs de Helmholtz dans un guide d'onde pour obtenir une bande interdite qu'ils ont, dans ce cas, associée à un module élastique négatif. Cependant l'observation reste la même : on a ouverture d'une bande interdite d'hybridation.

III.3 Vérification de l'approche

Nous avons donc vu dans la partie précédente que les différentes approches (polariton, milieu effectif, hybridation) échouaient à décrire la propagation des modes propres au sein du matériau. À partir du résultat de l'équation de III.18 nous allons donner différents exemples de résonateurs sub-longueur d'ondes afin de convaincre le lecteur que le couplage entre une résonance localisée et un continuum d'ondes propagatives résulte en une interférence Fano. Lorsqu'on a une chaîne linéaire de résonateurs cela résulte en l'apparition de modes propagatifs le long de la chaîne, qui ont des longueurs d'onde qui peuvent atteindre la maille du réseau, même si celle-ci est sub-longueur d'onde. Une chaîne de résonateurs fait aussi apparaître une bande interdite d'hybridation, qui est due à la nature résonante du milieu et non pas au pas du réseau.

III.3.1 Chaîne linéaire de « split ring resonators »

Pour illustrer cette approche, nous pouvons tout d'abord reprendre le cas d'un SRR dans le guide d'onde avec des parois métalliques. En reprenant la simulation de la chaîne de 40 résonateurs, nous effectuons la transformée de Fourier spatiale pour chaque fréquence et nous les représentons en image de couleur sur la figure III.15. Les zones de forte intensité (en unités arbitraires) correspondent aux nombres d'onde des modes dans la chaîne de résonateurs. Pour bien voir que les distances en jeu sont sub-longueur d'onde, nous avons renormalisé l'axe des abscisses par $k_0 = \dfrac{\omega_0}{c}$ qui correspond au nombre d'onde d'espace libre pour la fréquence propre de résonance d'un résonateur[6]. Nous observons comme dans le cas du milieu de fils des modes propagatifs qui présentent des vecteurs d'ondes bien supérieurs à ceux supportés par le guide d'onde.

6. Il est d'usage de renormaliser les nombres d'onde de Bloch par π/a lorsqu'on travaille dans les milieux périodiques, mais ici cela ne montre pas la nature sub-longueur d'onde du milieu

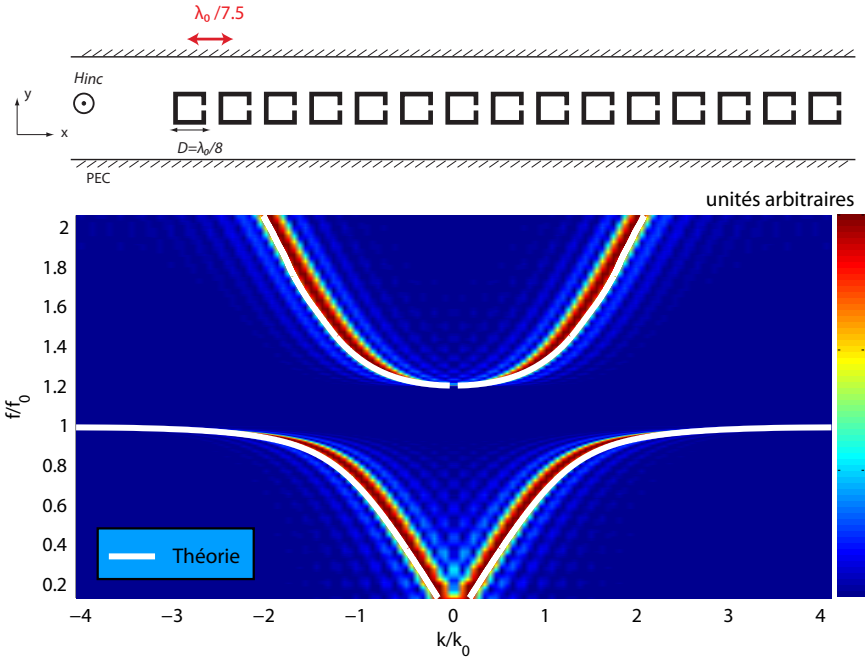

FIGURE III.15 – Relation de dispersion obtenue pour un milieu périodique sub-longueur d'onde de SRR comme maille élémentaire.

En prenant désormais la simulation qui correspond à un unique résonateur, nous extrayons le coefficient de transmission en champ lointain. D'après ce qui précède, nous savons que nous pouvons reconstruire la relation de dispersion d'une chaine linéaire de pas a qui serait constitué de ce SRR comme cellule élémentaire. Sur la figure, nous superposons la relation de dispersion obtenue avec la formule III.18. Nous remarquons un très bon accord avec celle obtenue en simulant une chaîne de 40 résonateurs. Cela valide donc notre approche et montre bien que c'est le couplage avec les ondes planes qui régit la relation de dispersion pour les modes sub-longueur d'ondes au sein du milieu, et non pas un phénomène de couplage par ondes évanescentes entre résonateurs. On peut éventuellement ajouter des corrections en prenant en compte des effets de champ proche, mais le comportement global de la relation de dispersion est donné par la réponse résonante de la cellule élémentaire. Sur la relation de dispersion que nous représentons à nouveau sur la figure III.16, nous remarquons une gamme de fréquence, juste au-dessus de la fréquence intrinsèque des résonateurs, qui ne présente pas de solutions : il s'agit de la bande interdite d'hybridation dont nous avons parlé précédemment. À partir de la connaissance du coefficient de transmission d'un unique résonateur en champ lointain, nous pouvons aussi extraire le comportement des ondes au sein de celle-ci. Ainsi, sur la figure III.16, nous représentons la partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch obtenue à partir de notre modèle en champ lointain.

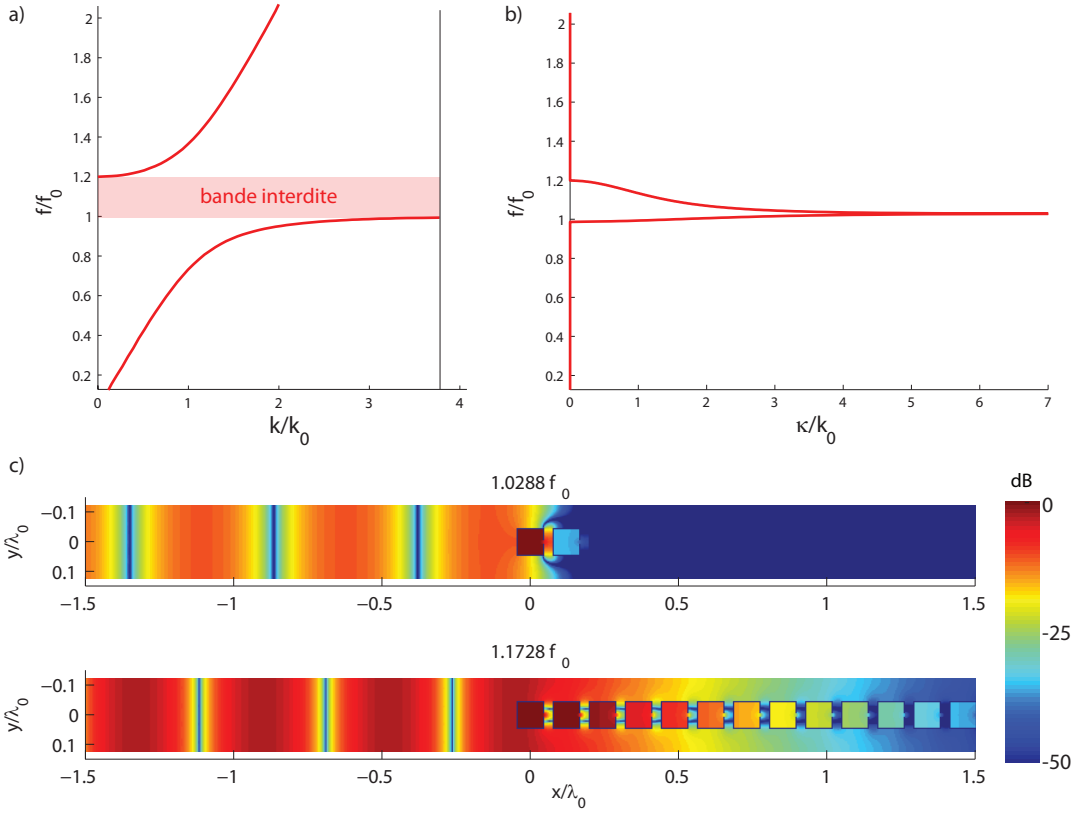

FIGURE III.16 – (a) Relation de dispersion de la figure III.15 qui fait apparaître une bande interdite. (b) Partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch dans la bande interdite. (c) Carte du champ magnétique pour deux fréquences différentes dans la bande interdite.

Remarquons que le comportement au sein de la bande interdite est différent de ce qu'on observe classiquement dans les bandes interdites de Bragg : on a comportement dissymétrique en fréquence. Notamment, le maximum d'atténuation ne se trouve pas au milieu de la bande interdite comme dans les miroirs de Bragg, mais plus proche de la bande de propagation de plus faible énergie. Ceci s'explique à nouveau simplement . L'atténuation de l'onde est d'autant plus efficace que le résonateur répond en opposition de phase et efficacement. Le minimum de la bande interdite se trouve donc systématiquement assez proche de la résonance, et celle-ci remonte ensuite continument car le résonateur répond toujours en opposition de phase, mais de moins efficacement. Lorsqu'on regarde plus en détail les cartes de champ magnétique correspondant à des fréquences dans la bande interdite, on peut apprécier son efficacité. Après seulement quelques résonateurs (et même un seul résonateur dans le cas du maximum de κ) l'onde incidente est complètement atténuée.

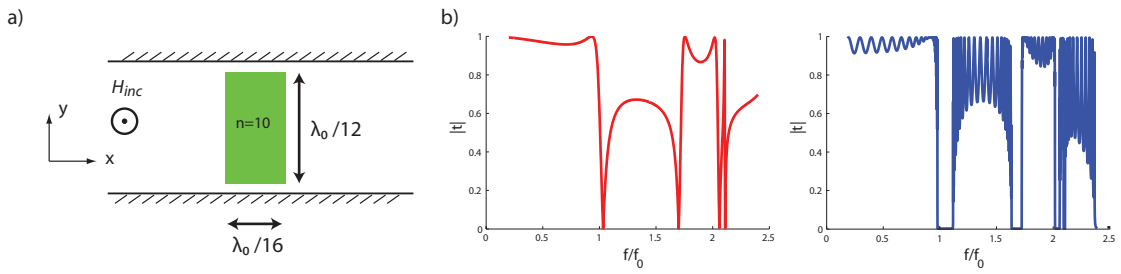

FIGURE III.17 – (a) Géométrie d'un résonateur unique placé dans le guide d'onde. (b) Coeffcients de transmission pour un seul résonateur et une chaîne de 25 résonateurs.

III.3.2 Résonateurs de Mie

Pour tenter de convaincre le lecteur de l'universalité de notre approche, nous prenons un autre type de résonateur : un résonateur de Mie. Dans le cas unidimensionnel, il s'agit en fait de « barreaux » diélectriques infinis suivant la direction Oz. Ce type de résonateur présente une résonance lorsque sa largeur vaut environs $\lambda/2n$. Par conséquent plus l'indice est élevé, plus le résonateur est sub-longueur d'onde. Pour garder l'interférence Fano dans le guide, le résonateur n'occupe pas toute la section du guide, ainsi il y a toujours un trajet direct pour l'onde plane incidente. Nous prenons des rectangles (dans le plan xy) de diélectrique d'indice effectif $n = 10$ (figure III.17). Nous allons explorer le comportement de ce résonateur sur une gamme de fréquence qui permet d'observer plusieurs résonances. Nous commençons par simuler le comportement d'un unique résonateur présent dans le guide d'onde. Sur la figure III.17, nous représentons le coefficient de transmission en champ lointain du résonateur à la sortie du guide d'onde. Ce coefficient de transmission fait nettement apparaître le comportement de type Fano des différentes résonances observées. Pour la première résonance on retrouve le comportement observé dans le cas d'un SRR avec un maximum de transmission juste avant f_0 et un minimum après. La deuxième résonance est dipolaire (le champ s'annule au milieu de la particule diélectrique) et le comportement en fréquence du coefficient de transmission est donc symétrique par rapport au précédent, mais fait toujours apparaître une résonance de type Fano. En augmentant encore la fréquence, on observe cette alternance de résonances monopolaires et dipolaires qui ont toutes un comportement de type Fano.

Comme dans l'exemple des SRR, nous organisons ensuite les rectangles de diélectrique suivant une chaine linéaire au sein du guide d'onde avec des parois métalliques en polarisation TM. En simulant une chaine composée de 25 d'entre eux, nous obtenons le coefficient de transmission de la figure III.17 qui montre nettement l'apparition de bandes

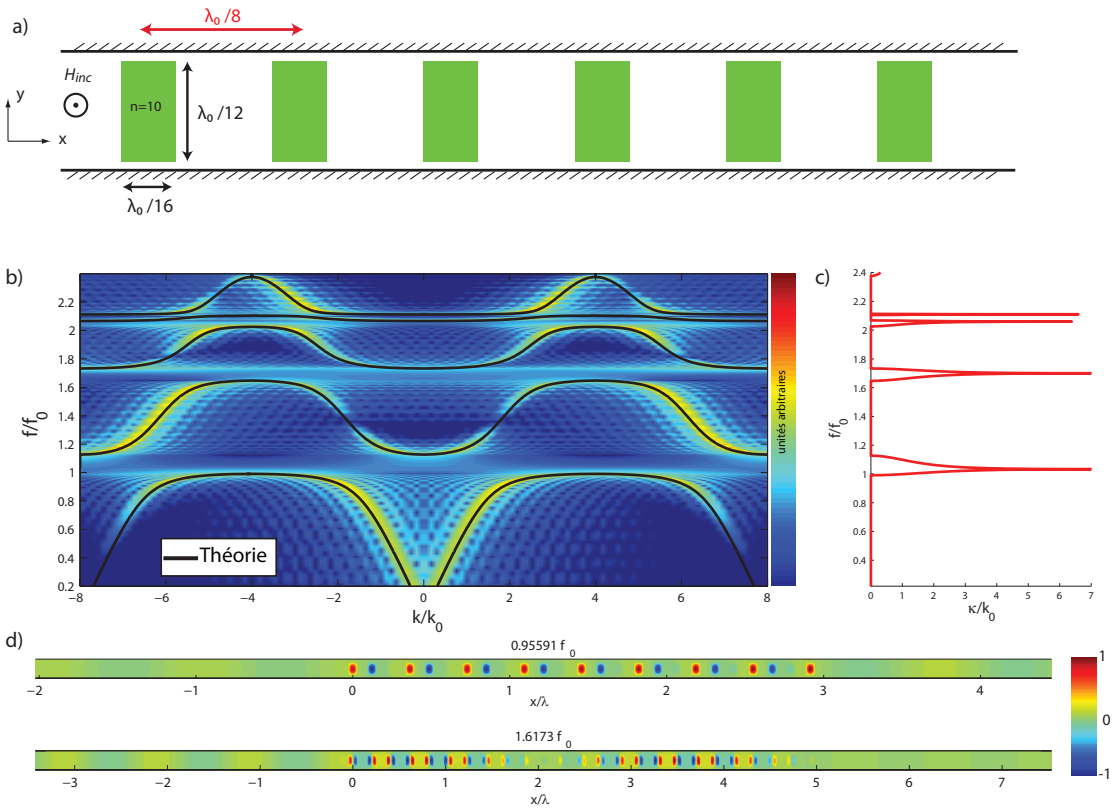

FIGURE III.18 – (a) Géométrie de la chaîne de résonateurs. (b) Relation de dispersion (simulée et théorique). (c) Partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch. (d) Cartes du champ magnétique pour deux fréquences différentes.

interdites de propagation et de modes résonants. La superposition des 25 résonances de Fano (multipliées par le nombre de résonances observées dans la gamme de fréquence considérée) est difficile à repérer. C'est pourquoi nous allons maintenant nous intéresser au profil du champ magnétique au sein de la chaîne de résonateurs.

Sur la figure III.18, nous représentons en image codée en couleur la transformée de Fourier spatiale le long de l'axe Ox pour chaque fréquence simulée. Nous avons volontairement tracé cette relation de dispersion sur les deux premières zones de Brillouin, pour montrer que dans le cas de la deuxième bande observée, qui correspond à la deuxième résonance des barreaux de diélectrique, la pente de la relation de dispersion est négative. Cela est dû au déphasage supplémentaire induit par le caractère dipolaire de la résonance. De plus, en traçant cette relation de dispersion sur les deux premières zones de Brillouin en image de couleur, on peut se rendre compte que l'énergie est essentiellement localisée dans la deuxième zone de Brillouin pour la deuxième bande propagative : même s'il on a

recouvrement du spectre à cause de la nature périodique du milieu, le nombre d'onde est plus proche de $k + 2\pi/a$ (où $k \in [-\pi/a; \pi/a]$) que de k.
Sur la même image, nous superposons la relation de dispersion obtenue avec notre modèle théorique en ne prenant que le coefficient de transmission en champ lointain d'un résonateur unique (équation III.18). Nous pouvons noter un excellent accord entre les deux relations de dispersion obtenues. Nous représentons aussi sur la figure, le comportement de la partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch. Nous pouvons remarquer que celle-ci est non-nulle uniquement dans les bandes interdites que l'on aperçoit sur la relation de dispersion, et le comportement non symétrique en fréquence traduit bien la nature de type hybridation de ces bandes interdites. Bien que le milieu soit constitué de diélectrique et périodique, il ne s'agit pas d'une bande interdite de Bragg puisqu'elle apparaît à la fréquence de résonance du barreau diélectrique.
Enfin, sur la figure, nous représentons les cartes du champ magnétique pour deux fréquences différentes. La première fréquence est dans la première bande propagative et montre le caractère sub-longueur d'onde des modes propres qui sont créés. Nous avons ici pu générer un mode qui change 3 fois de signe sur une échelle égale à une longueur d'onde d'espace libre. La deuxième carte de champ représente un mode obtenu dans la deuxième branche propagative qui montre très bien le changement de signe au passage du rectangle diélectrique. Le champ dans le milieu est périodique spatialement et son mode fondamental lorsqu'on effectue une transformée de Fourier spatiale est dans la deuxième zone de Brillouin, comme énoncé précédemment.
Cette nouvelle simulation montre à nouveau le caractère sub-longueur d'onde des modes qui se propagent dans une chaine composée de résonateurs sub-longueur d'onde organisés sur une échelle sub-longueur d'onde. Ces modes sont ceux que nous avons exploité dans le chapitre précédent dans le cas du milieu de fils, et désormais nous pouvons les retrouver dans tout milieu composé de résonateurs identiques.
Pour bien comprendre la différence avec un cas complètement unidimensionnel, nous avons lancé une simulation en prenant une particule de Mie qui occupe toute la section du guide. On se retrouve alors typiquement dans le cas d'école d'une structure multi-couche : un miroir de Bragg. Le coefficient de transmission en présence d'un unique résonateur dans le guide d'onde est le coefficient de transmission classique d'un Fabry-Pérot qui n'a donc pas l'allure d'une résonance Fano. Ceci se comprend aisément puisque l'épaisseur de diélectrique occupe toute la section du guide, il n'y a plus de canal direct pour l'onde incidente. L'onde transmise vers l'avant n'est plus le résultat d'interférences entre deux canaux de transmission mais uniquement l'onde transmise par le résonateur que constitue un épaisseur de diélectrique.

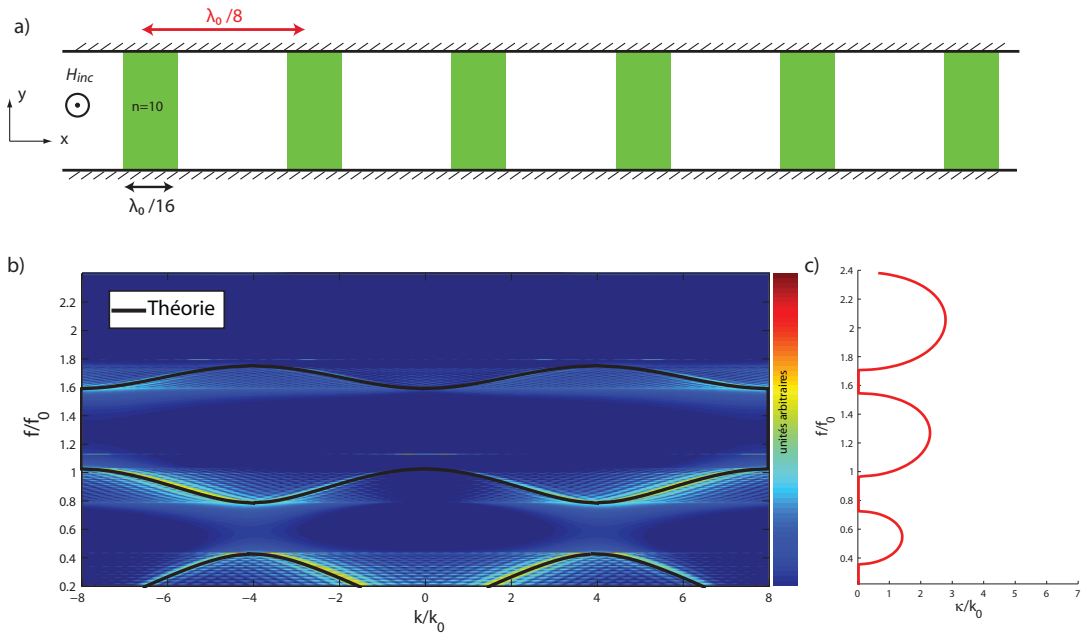

FIGURE III.19 – (a) Géométrie de la chaîne de résonateurs. (b) Relation de dispersion (simulée et théorique). (c) Partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch.

Ainsi, sur la figure III.19, nous représentons la relation de dispersion obtenue en simulant une chaîne de 25 résonateurs avec les mêmes paramètres que précédemment, ainsi que la prédiction théorique obtenue avec notre modèle. Nous avons normalisé la courbe à partir de la fréquence f_0 correspondant à la simulation précédente avec des résonateurs de Mie afin de bien pouvoir les comparer. Évidemment ce système est complètement unidimensionnel et il n'y a pas d'onde évanescente qui puisse intervenir, hormis le couplage par les courants de déplacement sur les parois des barreaux de diélectrique qui sont très faibles. Notre modèle de champ lointain est donc en parfaite adéquation avec le relation de dispersion en simulation. Lorsqu'on regarde la partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch, on voit très bien que la nature des bandes interdites a complètement changé par rapport à la situation précédente : désormais nous n'avons que de bandes interdites de Bragg.

III.3.3 « Spoof plasmons polaritons »

La particularité de notre approche est de tenir compte du couplage d'un résonateur avec le continuum des solutions dans le guide d'onde. Ceci nous amène donc à considérer le cas des plasmons de surface (des polaritons) à la lumière de cette approche. En effet, un polariton est typiquement le couplage entre un photon et une résonance localisée,

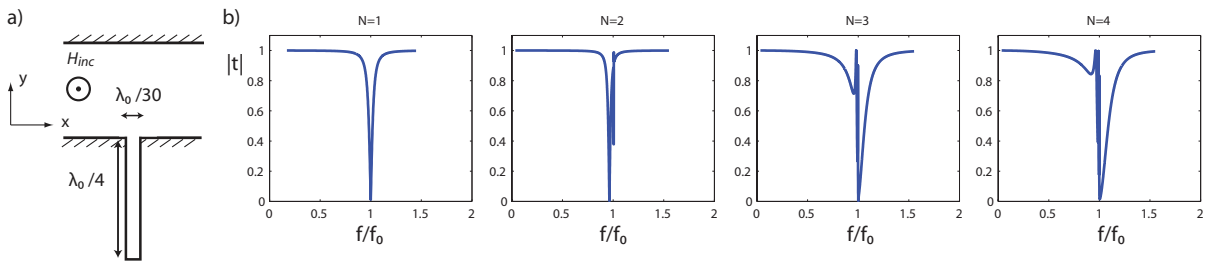

FIGURE III.20 – (a) géométrie du résonateur élémentaire. (b) Coefficients de transmission pour 1, 2, 3 puis 4 fentes dans le guide d'onde.

mais le résonateur élémentaire dans le cas des plasmons de surface n'est pas évident à identifier, puisqu'il s'agit d'une résonance collective d'électrons. En reprenant la structure unidimensionnelle proposée par John Pendry [78] des « spoof plasmons polaritons » (SP), qui permettent d'émuler le comportement des plasmons de surface en micro-ondes, nous pouvons plus facilement identifier le résonateur élémentaire du milieu. Dans ce cas nous prenons une surface métallique qui contient des fentes sub-longueur d'onde. Le résonateur élémentaire du milieu est donc une de ces fentes et nous étudions le système à nouveau en polarisation TM.

Pour étudier la relation de dispersion, nous prenons donc un guide d'onde avec des parois métalliques et nous ajoutons une fente dans une des parois (figure III.20). Lorsque la hauteur h de la fente est égale à $\lambda/4$, le mode guidé au sein de celle-ci subit une résonance du fait de la rupture d'impédance à la sortie, et nous avons donc un résonateur élémentaire. Dans le guide d'onde nous observons la présence de cette résonance dans le coefficient de transmission : on observe une annulation du coefficient de transmission. Ce coefficient de transmission est symétrique (en module) autour de f_0 et ne montre pas le caractère Fano de la résonance puisqu'on peut l'interpréter avec un modèle de Breit-Wigner. En réalité, une résonance de Breit-Wigner est un cas particulier de la résonance Fano, pour laquelle le paramètre de Fano vaut 0. Ceci se comprend en reprenant l'interprétation phénoménologique de la résonance de type Fano. Lorsque le canal direct ne subit pas de déphasage lors de la propagation à l'échelle du résonateur, ce qui est typiquement le cas lorsqu'on prend une fente très sub-longueur d'onde, on obtient une résonance dans le coefficient de transmission qui est symétrique par rapport à f_0 (en module), comme l'est la résonance sur l'amplitude au sein du résonateur.

Lorsqu'on commence à ajouter des fentes supplémentaires (figure III.20), on doit faire apparaître des résonances supplémentaires. C'est à ce moment que le caractère Fano des résonances se manifeste. Le coefficient de transmission devient de plus en plus asymmé-

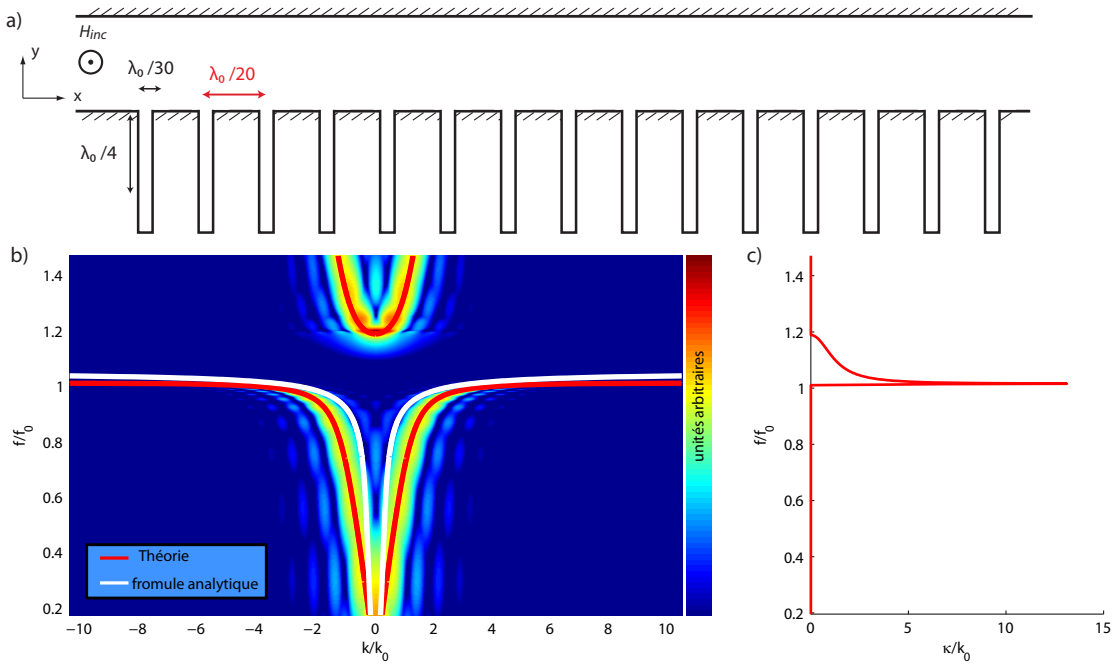

FIGURE III.21 – (a) Géométrie de la chaîne de résonateurs. (b) Relation de dispersion (simulée et théorique). La courbe rouge correspond à la relation de dispersion obtenue avec le coefficient de transmission en champ lointain alors que la courbe blanche correspond à la formule proposée dans la référence [76] (c) Partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch.

trique à mesure que l'on ajoute des fentes. En effet, les interférences entre un canal direct et un canal indirect sont un effet cumulatif qui se manifeste d'autant plus que le nombre de fentes est élevé. Cette simulation montre très bien qu'en passant d'un coefficient de transmission de type Breit-Wigner, on finit sur un coefficient de transmission qui fait apparaître plusieurs résonances de type Fano.

En reprenant cette même fente comme cellule élémentaire d'un réseau périodique sub-longueur d'onde, nous pouvons simuler la propagation d'une onde de surface dans le guide d'onde. Comme nous l'avons fait dans les cas précédents, nous prenons 40 fentes et nous représentons sur la figure III.21 la transformée de Fourier spatiale correspondant à chacune des fréquences en code de couleur. À nouveau nous normalisons les nombre d'onde par le nombre d'onde d'espace libre à la résonance pour montrer le caractère très sub-longueur d'onde de la relation de dispersion. Sur la courbe nous superposons la relation de dispersion obtenue avec le coefficient de transmission d'une unique fente en champ lointain. Nous remarquons un bon accord entre les deux relations de dispersion. Sur le graphique nous superposons aussi la relation de dispersion proposée initialement [76] pour

décrire la propagation de ces pseudo-plasmons de surface.
En ce qui concerne la branche propagative au-dessus de la fréquence de résonance, la branche anti-liante, il faut se rappeler que nous sommes en présence d'ondes de surface guidées. Lorsque le nombre d'onde associé au mode de surface devient inférieur à celui en espace libre, ces ondes de surface guidées se couplent avec des ondes propagatives qui forment un angle avec la surface et par conséquent on n'a plus cette propriété de guidage sur l'interface. Ceci est également vrai pour les autres résonateurs. Cependant, lorsque nous étudions les résonateurs dans un système unidimensionnel, les ondes ne peuvent pas « fuir [7] » et on peut mesurer cette branche grâce à l'accumulation de champ dû à la résonance. Ici, les ondes passent sans voir les fentes.

III.3.4 Vers des échelles macroscopiques

Afin de montrer que l'approche de type milieu effectif peut perdre de son sens lorsqu'on s'intéresse à des milieux composés d'inclusions résonantes, nous prenons à nouveau des SRR pour constituer un milieu périodique dont le pas du milieu n'est plus sub-longueur d'onde. Nous les séparons d'une longueur qui devient égale à $\lambda_0/2.4$, où λ_0 correspond à la longueur d'onde en espace libre pour la première fréquence de résonance des SRR. Désormais nous avons une distance entre résonateurs qui est supérieure à $\lambda/4$, ce qui semble être la limite communément admise pour utiliser des modèles effectifs.
Sur la figure III.22, nous représentons en image de couleur la relation de dispersion obtenue en simulant une chaîne linéaire composée de 40 SRR. En reprenant le même coefficient de transmission que précédemment pour obtenir la relation de dispersion, nous superposons sur cette image la relation de dispersion théorique obtenue qui montre un très bon accord. Ce n'est pas non plus surprenant que nous obtenions un bon accord sur la relation de dispersion puisque nous avons complètement supprimé les effets de champ proche potentiels qui auraient pu influer sur la relation de dispersion en prenant un pas de réseau aussi important. C'est pourquoi les échelles spatiales en jeu ne présentent pas un caractère très sub-longueur d'onde. En plus d'extraire la relation de dispersion, nous obtenons le comportement de la partie imaginaire du nombre d'onde dans les bandes interdites qui apparaissent dans la relation de dispersion ainsi obtenue.
Cette relation de dispersion présente plusieurs points particuliers qui méritent d'être regardés de plus près. Tout d'abord, la relation de dispersion présente une bande interdite pour des fréquences inférieures à la fréquence propre de résonance des SRR. Cette bande

7. On utilise le terme fuir car ces modes sont appelés « leaky modes » en anglais, littéralement des modes à fuites.

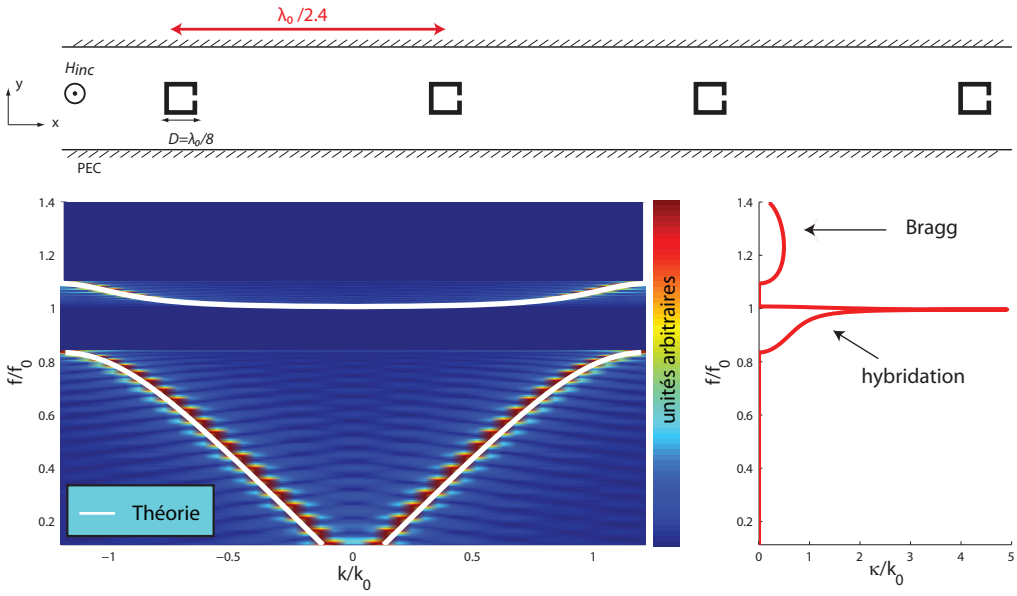

FIGURE III.22 – (a) Relation de dispersion d'une chaîne de SRR organisée avec un pas égal à $\lambda_0/2,4$. (b) Partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch dans les bandes interdites.

interdite apparaît pour les fréquences où la relation de dispersion croise le bord de la première zone de Brillouin. Chaque résonateur induit une onde réfléchie qui interfère destructivement avec l'onde incidente puisque le pas du réseau est de l'ordre de $\lambda/2$, où λ correspond à la longueur d'onde donnée par la chaine de résonateur. Cette bande interdite est imputable à un effet de repliement de spectre imposée sur la relation de dispersion de type polariton. C'est pourquoi le comportement de la partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch semble avoir radicalement changé par rapport au cas précédent. Il s'agit donc d'une bande interdite imputable à la fois à un effet d'hybridation et à un effet de périodicité.

La relation de dispersion présente une autre bande interdite au-dessus de la fréquence f_0. Cette bande interdite apparaît quant à elle lorsque la ligne de la lumière ($\omega = kc$) rencontre le bord de la première zone de Brillouin. Le comportement de la partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch est complètement différent. Cette bande interdite apparaît à cause de la nature périodique du milieu. Cet exemple montre bien la complexité des phénomènes qui entrent en jeu lorsqu'on se trouve dans un cas limite où les théories effectives ne permettent pas de donner le comportement des ondes.

Afin de montrer l'universalité de notre approche, nous reprenons le cas du résonateur de Mie d'indice $n = 10$. Au lieu de positionner ce résonateur dans une maille élémentaire sub-longueur d'onde, nous simulons une chaîne de 25 résonateurs avec un pas spatial égal

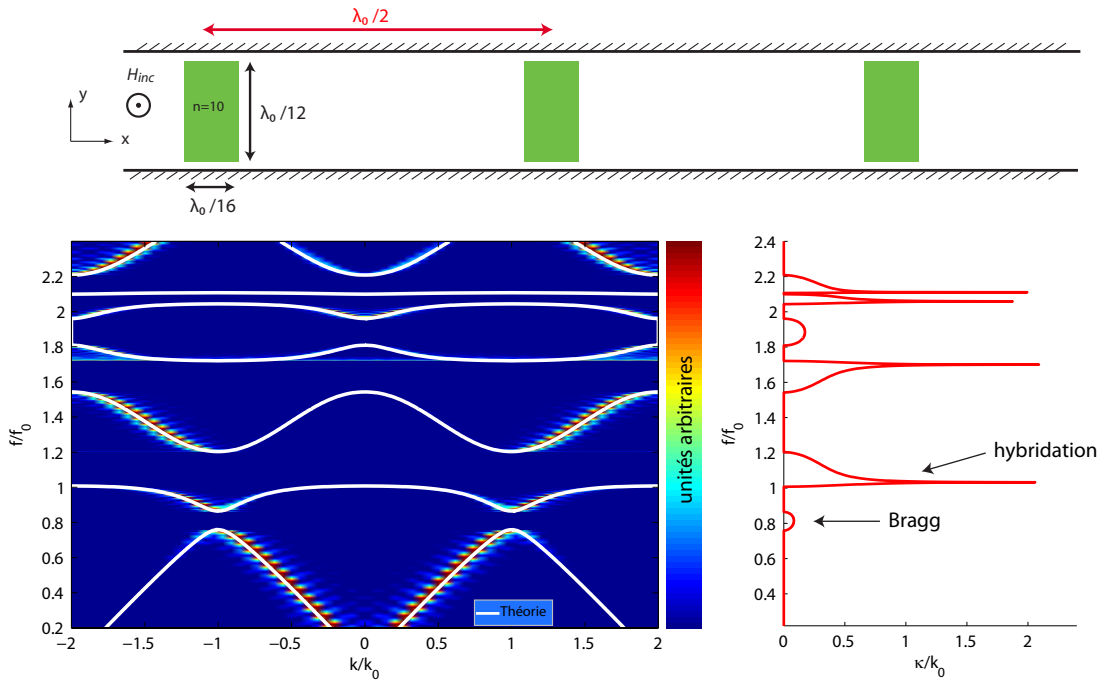

FIGURE III.23 – (a) Relation de dispersion d'une chaîne de résonateurs de Mie (simulée et théorique) avec un pas spatial de $\lambda_0/2$. (b) Partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch.

à $\lambda/2$ pour la première fréquence de résonance de la particule. Sur la figure III.23, nous représentons la relation de dispersion obtenue à partir de la simulation d'une chaine de 25 résonateurs où nous superposons la relation de dispersion théorique obtenue à partir du coefficient de transmission d'un unique résonateur. Nous traçons à nouveau volontairement la relation de dispersion sur les deux premières zones de Brillouin afin de bien montrer que l'énergie est essentiellement concentrée dans la deuxième zone de Brillouin après l'apparition de la première bande interdite. Sur la figure, nous représentons aussi la partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch calculée à partir du coefficient de transmission d'un unique résonateur. Celle-ci fait apparaître elle aussi un comportement différent des deux types de bande interdite possibles.

Pour interpréter cette relation de dispersion, nous partons de la fréquence nulle et on augmente petit à petit la fréquence. Au début, la relation de dispersion suit la ligne de la lumière jusqu'à arriver en bord de zone de Brillouin. Lorsque la relation de dispersion rencontre le bord de la zone de Brillouin on a ouverture d'une bande interdite de Bragg. Si le milieu n'était pas périodique, cette bande interdite n'existerait pas et la relation de dispersion aurait continué [8] jusqu'à atteindre la fréquence de résonance f_0. Nous savons

8. C'est pour cette raison que nous avons tracé la relation de dispersion sur les deux premières zones

qu'il s'agit de la fréquence de résonance du résonateur de Mie choisi, par conséquent on doit observer un comportement de type polariton, qui se traduit par l'apparition d'une bande interdite d'hybridation. En regardant la partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch, c'est effectivement ce que l'on observe sur la figure. De plus cette bande interdite est caractéristique au niveau du comportement de la partie réelle du nombre d'onde : au lieu de repartir de la même valeur de k elle repart de $k \pm \pi/a$. En augmentant ainsi de suite la fréquence on peut observer l'ouverture de nombreuses bandes interdites de d'hybridation et d'une unique autre bande interdite de Bragg. Même si ce milieu peut être étudié à la lumière des cristaux photoniques sans difficultés, notre approche marque nettement la différence entre les deux types de bandes interdites. De plus on remarque, en regardant la partie imaginaire du nombre d'onde, que la bande interdite de Bragg est beaucoup moins efficace que la bande interdite d'hybridation pour atténuer les ondes. Nous aurons l'occasion d'en reparler au cours du dernier chapitre de ce manuscrit.

III.3.5 Influence des pertes

Dans le traitement que nous avons fait jusqu'à présent, nous avons toujours négligé les pertes. Or nous savons que celles-ci jouent un rôle important. Nous avons par exemple vu dans le chapitre précédent que les pertes altèrent les modes sub-longueur d'onde, ce qui limite la résolution dans nos expériences de focalisation et d'imagerie. Nous avons également vu que des techniques telles que le filtre inverse permettent de compenser ces pertes, afin d'obtenir la résolution optimale, c'est-à-dire la période du système. Notre approche diffère de celles des milieux effectifs car nous considérons que le champ incident sur un résonateur résulte de l'interférence de l'onde incidente avec le champ généré par le résonateur précédent.

La relation de dispersion obtenue dépend donc du facteur de qualité radiatif et du facteur de qualité des pertes intrinsèques du résonateur. Dans de nombreuses approches, il n'est pas évident de distinguer les effets des pertes radiatives de ceux dus aux pertes intrinsèques. Ceci est particulièrement vrai pour les approches des milieux effectifs dans lesquels on moyenne un champ créé par une résonance qui présente un unique facteur de qualité global. Or, il est clair que ces diverses pertes n'ont pas des effets symétriques. En effet, un résonateur qui présente de très faibles pertes intrinsèques mais des pertes radiatives plus élevées répond à une onde incidente pour créer un polariton conformément à notre approche. Au contraire, un résonateur qui présente de très faibles pertes radiatives mais des pertes intrinsèques élevées ne peut pas donner ce type de comportement : l'énergie

de Brillouin.

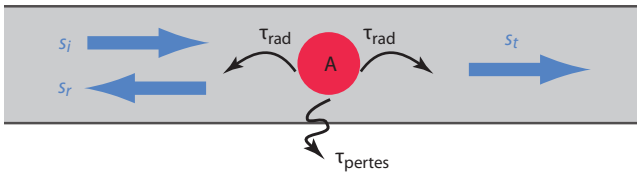

FIGURE III.24 – Schéma de principe de la théorie des modes couplés et des temps caractéristiques en jeu.

est dissipée avant d'être emmagasinée par le résonateur. Il est par conséquent évident que faire intervenir un unique facteur de qualité n'est pas correct.
Afin de dissymétriser les effets des diverses types de pertes, nous allons d'abord reprendre la théorie temporelle des modes couplés [107, 108], qui consiste à faire un développement limité autour de la résonance, et qui permet de dissocier les effets des pertes radiatives et des pertes intrinsèques dans le résonateur.
Dans cette théorie, on considère un résonateur dont l'amplitude A a différents canaux pour s'exciter et se désexciter. Dans le cas unidimensionnel, le canal d'excitation consiste en une onde plane incidente. Les canaux de désexcitation consistent en une onde émise vers l'avant (qui va intervenir dans le coefficient de transmission) et une onde émise vers l'arrière. Étant donné la symétrie du problème, on peut considérer que ces deux canaux radiatifs sont régis par un même temps caractéristique τ_{rad}. En plus de ceux-ci, on peut ajouter un canal de pertes intrinsèques du résonateur régi par un temps caractéristique τ_{pertes} (figure III.24). Le système d'équations couplées ne prend pas toujours la même forme suivant les références mais on peut le trouver sous la forme [103] :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} &= j\omega_0 - \left(\frac{2}{\tau_{\text{rad}}} + \frac{1}{\tau_{\text{pertes}}}\right) A + \sqrt{\frac{2}{\tau_{\text{rad}}}} s_i \\ s_t &= s_i + \sqrt{\frac{2}{\tau_{\text{rad}}}} A \\ s_r &= \sqrt{\frac{2}{\tau_{\text{rad}}}} A \end{aligned} \tag{III.21}$$

auquel cas, on peut écrire le coefficient de transmission $t = \dfrac{s_t}{s_i}$:

$$t = \frac{(\omega - \omega_0) - j\frac{\omega_0}{Q_{\text{pertes}}}}{(\omega - \omega_0) - j\omega_0\left(\frac{1}{Q_{\text{pertes}}} + \frac{1}{Q_{\text{rad}}}\right)} \tag{III.22}$$

où les facteurs de qualités radiatifs et de pertes intrinsèques ont été introduits. Ils dépendent du temps caractéristique de désexcitation du résonateur : $Q = \omega_0 \tau$. Cette formule

ne permet pas de faire apparaître le caractère Fano de la résonance que nous attendions. Pour cela on peut ajouter « à la main » un déphasage pour le canal direct qui intervient dans le calcul de s_t comme dans la référence [109]. Ce déphasage est en fait intimement lié à la dimension du résonateur considéré, puisqu'il faut un certain temps à l'onde incidente pour parcourir la cellule élémentaire. Cette formule ne nous satisfait pas complètement, néanmoins elle a le mérite de faire apparaître des comportements complètement différents des pertes intrinsèques au résonateur et des pertes radiatives.
Un autre moyen pour observer l'effet des pertes est de reprendre le formalisme qui fait intervenir la matrice $\mathbf{M}_\infty$. En effet, lorsqu'on ne peut plus négliger les pertes, c'est-à-dire dans le cas $|t|^2 + |r|^2 = 1 - p^2$ (où p^2 correspond à un certain coefficient d'absorption), la matrice $\mathbf{M}_\infty$ prend une forme différente de celle présentée précédemment :

$$\mathbf{M}_\infty = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{1-|r|^2} & -\dfrac{tr^*}{1-|r|^2} \\ \\ -\dfrac{t^*r}{1-|r|^2} & \dfrac{t^*}{1-|r|^2} \end{pmatrix} \tag{III.23}$$

Après passage à la matrice de transfert $\mathbf{M}$ de la maille élémentaire du réseau, et recherche des valeurs propres de la matrice, nous obtenons la relation de dispersion :

$$\cos(ka) - \frac{p^2}{2|t|^2} e^{jka} = \Re\left(\frac{1}{t} e^{-j\frac{\omega}{c}a}\right) \tag{III.24}$$

Cette relation de dispersion n'a pas de solution réelle dans le cas général où les pertes ne sont pas négligeables, c'est-à-dire au voisinage de la résonance. Lorsqu'on est loin de la résonance en fréquence, on retrouve comme précédemment la relation de dispersion du guide d'onde ou de l'espace libre. En revanche, lorsqu'on se rapproche de la fréquence de résonance, les pertes intrinsèques ne sont plus négligeables. Phénoménologiquement, celles-ci ont tendance à diminuer l'amplitude de l'onde réémise par le résonateur, ce qui se traduit par une diminution de son poids dans la résonance Fano observée en champ lointain. Ainsi, le coefficient de transmission n'atteint plus les valeurs de 0 ou 1 proche de f_0. Et, pour obtenir la relation de dispersion, il faut désormais considérer un nombre d'onde de Bloch complexe. Dans les approches de milieux effectifs cela se traduit par l'apparition d'une partie imaginaire dans la propriété effective considérée. Ici nous notons que contrairement aux courbes en « S » typiquement obtenues pour les polaritons en présence de pertes, on balaie bien l'intervalle $[0; \pi/a]$ avec le vecteur d'onde k, auquel on ajoute une partie imaginaire. Ces deux résultats sont très différents. Le premier suggère que les grands vecteurs d'onde ne sont pas supportés par le milieu, alors que le deuxième

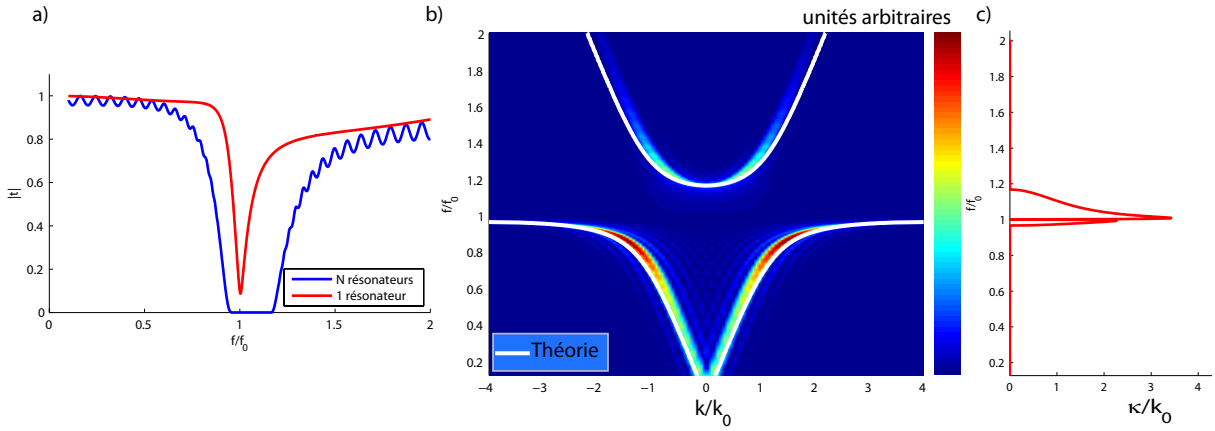

FIGURE III.25 – Simulation de SRR en présence de 5 % de pertes. (a) Coefficients de transmission pour 1 et N résonateurs. (b) partie réelle du nombre d'onde de Bloch obtenue par la théorie (équation III.24) et par transformée de Fourier spatiale le long d'une chaîne de 40 SRR. (c) Partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch qui prend en compte les pertes.

indique qu'ils existent mais sont atténués. Notre approche est donc plus proche de la réalité dans notre cas, puisque nous avons vu que ces grands vecteurs d'onde, bien qu'atténués, peuvent être mis à profit expérimentalement. Nous verrons à nouveau ce cas de figure dans le prochain chapitre.

Pour observer cet effet, nous reprenons la simulation avec les SRR dans le guide d'onde, et nous ajoutons 5 % de pertes dans les résonateurs. De la même manière que ce que nous avons déjà fait jusqu'à présent, nous extrayons le coefficient de transmission lorsque nous n'avons qu'un seul résonateur dans le guide d'onde. Sur la figure III.25, nous représentons ce coefficient de transmission. Contrairement au cas où les pertes sont nulles, celui-ci ne descend pas jusqu'à zéro et cela doit donc se traduire par l'apparition d'une partie imaginaire dans le nombre d'ondes de Bloch, une fois que l'on prend ce résonateur comme brique élémentaire d'un réseau périodique. Nous superposons donc sur la coube précédente le coefficient de transmission obtenu en bout de chaîne lorsque celle-ci est composée de 40 résonateurs. Celui-ci fait apparaître l'atténuation puisque les modes qui étaient précédemment juste en-dessous de la fréquence f_0 semblent avoir souffert de pertes et ne sont plus transmis.

Sur la figure, nous représentons la transformée de Fourier spatiale obtenue fréquence par fréquence pour la chaine de 40 SRR avec des pertes intrinsèques. Sur cette image codée en couleur, nous superposons la relation de dispersion obtenue à partir de la simulation d'un unique résonateur et de l'équation III.24. La partie réelle du nombre d'onde de Bloch

semble inchangée par rapport au cas sans pertes et nous retrouvons la même relation de dispersion qu'en l'absence de pertes. En revanche, la partie imaginaire de ce nombre d'onde de Bloch suit un comportement différent. Premièrement, dans la zone au-dessus de f_0 qui correspond à la bande interdite d'hybridation, cette partie imaginaire semble saturer et n'atteint plus de valeurs au-delà de 3.5 k_0 comme elle le faisait en l'absence de pertes. D'autre part, cette partie imaginaire devient non négligeable pour les modes sub-longueur d'onde dans la gamme de fréquence juste en-dessous de f_0. Cela signifie que ces modes souffrent de l'atténuation et décroissent de façon exponentielle en même temps qu'ils se propagent, comme le coefficient de transmission en bout de chaîne le montre. C'est pourquoi, dans les milieux diélectriques, on ajoute une composante complexe à l'indice effectif pour obtenir ce comportement. Cependant, les modes sub-longueur d'ondes restent observables au sein du milieu. Nous pensons donc avoir pu démontré avec cet exemple que la partie réelle du nombre d'ondes de Bloch continue à suivre la relation de dispersion en l'absence de pertes, ce qui est complètement différent que de dire que celle-ci sature en nombre d'onde. Cette observation mériterait une investigation expérimentale plus poussée qui n'aura malheureusement pas l'occasion d'apparaître dans ce manuscrit. D'autre part, nous voulons insister sur le fait que la partie imaginaire du nombre d'onde a une origine différente au-dessus et en-dessous de f_0. En effet, en-dessous de f_0, κ correspond a une atténuation due à des pertes, alors qu'au-dessus de f_0, c'est une atténuation due à des réflexions.

III.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons repris l'idée que nous avions entrouverte dans le cas du milieu de fils, à savoir qu'un milieu composé de résonateurs sub-longueur d'onde organisés sur une échelle elle même sub-longueur d'onde donne lieu à un couplage entre résonateurs. En plaçant N résonateurs sur une échelle sub-longueur d'onde, on s'attend à obtenir à N propres résonants.

Cependant, cette idée intuitive n'est pas évidente à mettre en évidence puisqu'il reste à trouver quel est le mécanisme physique qui gouverne le couplage. De plus nous avons vu que ce genre de problématique recouvre de nombreux domaines de la physique des ondes, et de nombreux modèles existent pour expliquer la propagation des ondes traversant ces matériaux. Dans ces modèles, on utilise des approches de moyennage sur tout l'échantillon. Lorsqu'on s'intéresse à la propagation au sein du matériau, il devient beaucoup plus difficile de décrire le milieu comme un milieu effectif puisque des résonateurs sont présents en des points particuliers. Classiquement, pour pallier à cette difficulté, on fait appel à la

notion de champ proche : le milieu de propagation est un milieu homogène auquel il faut ajouter des corrections dues au couplage champ proche entre les différents résonateurs. Or, nous avons vu que les modèles de couplage champ proche ne permettent pas de donner un comportement en adéquation avec les relations de dispersion observées dans ces milieux. Nous avons donc proposé un modèle, dans le cas simple d'une géométrie unidimensionnelle, qui permet d'obtenir la relation de dispersion des ondes au sein du matériau. Le fondement de ce modèle réside dans la notion de polariton : les résonateurs sont couplés aux ondes propagatives, et l'onde qui se propage dans le matériau est hybride, résultat de ce couplage. En regardant le coefficient de transmission au passage d'un résonateur unique on peut observer ce couplage. En effet, ce coefficient de transmission fait apparaître une résonance de type Fano, caractéristique des interférences entre un canal direct pour la propagation des ondes, et un canal indirect. Dans ce cas, le canal indirect correspond à l'excitation du résonateur puis à sa désexcitation par émission d'ondes propagatives, celles-là même qui interfèrent avec les ondes passant par le canal direct. Finalement, nous avons donc montré qu'il y a un bien un phénomène de couplage qui intervient, mais il s'agit d'un couplage entre chacun des résonateurs et un continuum de solutions solutions propagatives.
Une fois le phénomène de couplage identifié, nous avons alors montré qu'il est possible d'obtenir la relation de dispersion des polaritons qui se propagent au sein du matériau. En reprenant le formalisme matriciel proposé A. Yariv [103], nous avons obtenu les relations de dispersion dans des exemples de milieux composés de différents résonateurs. Cela nous a permis de mettre en évidence la présence d'un bande interdite à la propagation des ondes, qui avait déjà été observée dans le domaine des ondes acoustiques, et qui porte le nom de bande interdite d'hybridation. Nous aurons l'occasion de discuter plus en détail des possibilités qu'offre cette bande interdite, mais nous avons d'ores et déjà montré qu'elle est due à la nature résonante de la maille élémentaire du milieu d'étude. En ouvrant une bande interdite, nous avons nécessairement des relations de dispersion qui atteignent les limites de la première zone de Brillouin, ce sont ces modes en bord de zone de Brillouin que nous avons utilisé dans le chapitre précédent et que nous exploiterons dans le prochain chapitre.
Ces travaux ne sont cependant pas complètement terminés puisque nous nous sommes limités au cas le plus simple d'un milieu unidimensionnel. Pour passer à 2 voire 3 dimensions, il faudra mener des calculs plus important pour comprendre comment les ondes, qui sont diffusées dans des directions différentes de celles de la propagation, agissent sur le coefficient de transmission vers l'avant et le phénomène d'interférence Fano observé. Il ne fait aucun doute qu'il faudra faire intervenir le théorème optique qui relie la section efficace de diffusion du résonateur à l'onde diffusée vers l'avant. De plus, lors d'un passage

à 2 (ou 3) dimensions il faudra prendre en compte une certaine densité de résonateurs lorsqu'on travaille avec des ondes planes, et nous n'avons pas encore réussi à identifier la densité de résonateurs qui doit intervenir. Cependant, nous pensons que l'approche initialisée dans un cas unidimensionnel ici a de bonnes chances d'être généralisable à des milieux bidimensionnels, puis tridimensionnels. De plus, même si l'allure générale de la relation de dispersion est donnée par le couplage des résonateurs avec les ondes propagatives des effets de champ proche peuvent apporter des corrections à celle-ci : par exemple nous savons que des couplages inductifs de champ proche dans des réseaux tridimensionnels de SRR ajoutent à la relation de dispersion une correction de type « tight binding ». Un modèle plus général qui prendrait en compte ces effets de champ proche supplémentaires est donc nécessaire dès que l'on veut connaître avec exactitude la relation de dispersion.

Chapitre IV

« Métalentille résonante » : focalisation et imagerie super-résolues depuis le champ lointain

Maintenant que nous venons de mettre en évidence la présence de modes qui oscillent à l'échelle du milieu dans tout milieu composé de résonateurs sub-longueur d'onde, nous nous proposons d'exploiter ces propriétés. Lorsque nous avons publié le premier article sur propriétés physique de ce type de milieux de dimensions finies (ie. le milieu de fils du chapitre II), nous les avons nommés « métalentilles résonantes » [72], pour leur capacité à convertir une information sub-longueur d'onde en une information propagative. En effet, un réseau de résonateurs sub-longueur d'onde supporte des modes propres dont les variations spatiales peuvent être aussi fines que le pas du réseau comme nous l'avons vu au chapitre précédent. En mesurant une information spectrale en champ lointain, nous obtenons une information spatiale sub-longueur d'onde sur une source qui aurait été placée en champ proche de ce milieu. C'est cette propriété de lentille que nous nous proposons de mettre en évidence ici à travers deux exemples dans deux domaines de la physique différents.

Nous commençons par présenter des résultats expérimentaux en acoustique. Le milieu d'étude a pour maille élémentaire un résonateur de Helmholtz. Nous vérifions bien l'existence des modes collectifs qui varient sur des échelles plus fines que la longueur d'onde dans l'air et que l'on peut générer depuis le champ lointain. En exploitant les degrés de liberté offerts par le milieu, nous démontrons expérimentalement l'obtention de taches focales dont la largeur à mi-hauteur est limitée l'ouverture d'un résonateur et non plus par la longueur d'onde dans le vide. Cette expérience acoustique nous permet aussi de

mettre en évidence une propriété intéressante de la focalisation sub-longueur d'onde. Le fait de concentrer l'énergie sur des dimensions très fines permet une exaltation du déplacement acoustique que nous démontrons par l'intermédiaire d'une expérience visuelle où nous faisons « sauter » de petites billes de verre.
Dans un deuxième temps, nous donnons un exemple de métalentille résonante dans la gamme des fréquences optiques pour prouver l'énorme intérêt que présente ce genre de milieux. Nous montrons dans ce cas des résultats de simulation numérique pour un milieu composé de résonateurs plasmoniques. La cellule élémentaire du milieu est ici une nano-particule d'argent qui présente une résonance pour une longueur d'onde bien supérieure à ses dimensions grâce aux plasmons localisés. Pour diminuer les dimensions transverses nous travaillons sur un résonateur de géométrie anisotrope, un nano-cylindre, qui ressemble au résonateur choisi pour l'expérience en micro-ondes, mais dont le rapport longueur/diamètre est bien inférieur grâce au caractère plasmonique de la résonance.
Nous obtenons la relation de dispersion pour un milieu composé de ces résonateurs qui présente dans ce cas des effets de dispersion supplémentaires dûs à la nature dispersive de l'argent. Ensuite, en partant du principe que l'on est capable de contrôler les degrés de liberté temporels d'une onde optique, nous montrons l'obtention de taches focales bien plus fines que la limite de la diffraction, qui montrent elles aussi un effet d'exaltation du champ électrique. Ceci nous permet ensuite d'imaginer une technique d'imagerie qui tire partie de ces propriétés de focalisation. Nous introduisons ainsi une technique d'imagerie échographique qui permet d'imager des objets depuis le champ lointain en-dessous de la limite de la diffraction. Nous montrons l'image d'objets de faibles contrastes d'indice optique avec une résolution de $\lambda/7$.

IV.1 Utilisation des modes sub-longueur d'onde en acoustique : focalisation sub-longueur d'onde depuis le champ lointain

Pour justifier la validité de notre approche, nous allons ici montrer l'obtention de résultats similaires à ceux obtenus en micro-ondes mais dans le domaine de l'acoustique. Pour des raisons de commodité expérimentale, nous préférerons travailler avec des ondes acoustiques audibles dans l'air dont la longueur d'onde est de l'ordre du mètre plutôt qu'avec des ondes ultrasonores dans l'eau dont la longueur d'onde est de l'ordre du millimètre. D'autre part, les fréquences en jeu pour les ondes audibles sont de l'ordre de la centaine de Hertz (voire du kiloHertz) ce qui nous permet d'utiliser un matériel expérimental beau-

coup moins onéreux. Les résultats que nous présentons dans cette partie ont fait l'objet d'une publication dans Physical Review Letters [110].
Le contrôle des ondes acoustiques sur des échelles sub-longueur d'ondes n'a pas été autant étudié que celui des ondes électromagnétiques. Il y a eu quelques propositions pour réaliser de l'imagerie sub-longueur d'onde acoustique basées sur le concept de canalisation [67] ou d'hyper-lentille [111]. Concernant la focalisation, il y a eu une proposition basée sur un analogue de la structure optique dite du « Bull's eye » [112], ainsi que l'obtention de focalisation ultrasonore à l'aide d'un milieu à indice négatif [113]. Cependant, aucune de ces méthodes n'a permis le contrôle des ondes acoustiques sur une échelle sub-longueur d'onde. Les seules preuves expérimentales de focalisation sub-longueur d'onde ont été données par l'utilisation d'un puits acoustique [114] au laboratoire (mais il faut utiliser une source active au point focal) ou bien depuis le champ proche d'un cristal phononique par l'équipe de John Page [115].

IV.1.1 Première expérience et obtention du résonateur adéquat

La première étape pour reproduire les résultats obtenus en micro-ondes est donc la fabrication d'un résonateur acoustique dont la dimension transverse est très inférieure à la longueur d'onde. La première idée qui nous est venue à l'esprit a été de reproduire le fil conducteur qui présente une résonance lorsque sa longueur suivant Oz est égale à $\lambda/2$. En acoustique il existe l'équivalent de ce résonateur qui est utilisé dans la fabrication des instruments de musique depuis très longtemps : un tube de longueur $\lambda/2$ ouvert aux deux extrémités [116, 117].
En effet, il existe un mode acoustique qui se propage dans les tubes quelle que soit leur section. Ce mode, habituellement appelé P_0, est uniforme sur toute la section du tube et se propage à une vitesse v proche de la vitesse c des ondes acoustiques dans l'air. Il est par conséquent très analogue au mode TEM que l'on a étudié précédemment. Lorsque ce même tube présente deux extrémités, il y a rupture d'impédance aux extrémités et une résonance apparaît dans le tube. Quand les deux extrémités sont ouvertes (c'est le cas des flûtes dans les instruments de musique), la résonance a lieu pour des fréquences proches de $f = n\dfrac{c}{2L}$. Ceci est donc très similaire à ce que nous avions en micro-ondes, et laisse présager que l'on va obtenir sans difficultés les mêmes résultats.
Étant donné que nous allons ensuite organiser ces tubes suivant un réseau périodique, nous avons opté pour des tubes de section carrée de 1 cm de côté. Et, afin d'obtenir une dimension transverse bien plus petite que la longueur d'onde de résonance, nous avons travaillé avec un tube en aluminium de longueur 50 cm, qui présente une première

résonance aux alentours de 343 Hz (en simulation nous avons pris une célérité de l'air de 343 m.s^{-1}). Nous avons réalisé un réseau périodique de 20×20 tubes pour pousser la ressemblance avec l'expérience électromagnétique jusqu'au bout.

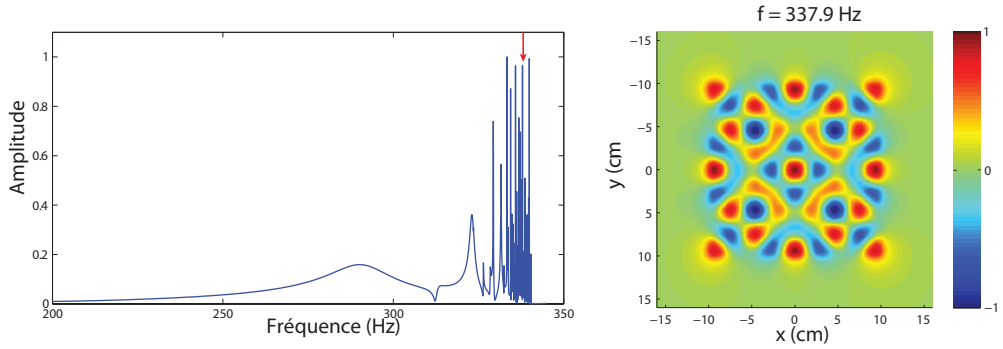

FIGURE IV.1 – Spectre fréquentiel mesuré à mi-longueur d'un tube du centre pour un réseau de 20×20 tubes. À droite, distribution spatiale de la pression à la fréquence représentée par la flèche rouge.

En simulation, ce réseau est illuminé par une onde plane venant de $x = -\infty$ et nous mesurons la pression à mi-longueur d'un des tubes centraux. Le résultat de la simulation (figure IV.1) est tout à fait similaire à ce que nous obtenions en micro-ondes puisqu'il montre clairement la présence de nombreux pics de résonances. Lorsqu'on regarde une carte de la pression acoustique à une fréquence donnée à l'extrémité du milieu [1], on observe un mode propre très sub-longueur d'onde.

Les parois dans la simulation sont considérées comme infiniment rigides donc le couplage entre les différents résonateurs se fait exclusivement par les extrémités des tubes. C'est donc le facteur de qualité radiatif des tubes qui permet la dispersion modale. Nous montrons que cette grande similitude avec les résultats électromagnétiques, nous permet d'expliquer les résultats de Zhu et ses collègues [67]. Ils ont réalisé une expérience d'imagerie pixel par pixel exactement similaire à celle de Belov [62] mais dans le domaine acoustique (figure II.11). Comme nous l'avons dit précédemment, ce n'est pas l'aplatissement de la relation de dispersion qui explique la super-résolution, mais bien le phénomène de canalisation à la fréquence Fabry-Pérot des tubes.

Expérimentalement, nous avons émis une rampe en fréquence (un signal temporel modulé qui balaie une large gamme de fréquence), « chirp »en anglais, à l'aide d'un haut-parleur. Nous avons commencé par l'étude d'un tube unique. À l'aide d'un microphone placé

1. On a l'habitude de dire que la pression s'annule aux extrémités d'un tube ouvert, mais en pratique il y a toujours une distance de pénétration dans l'air.

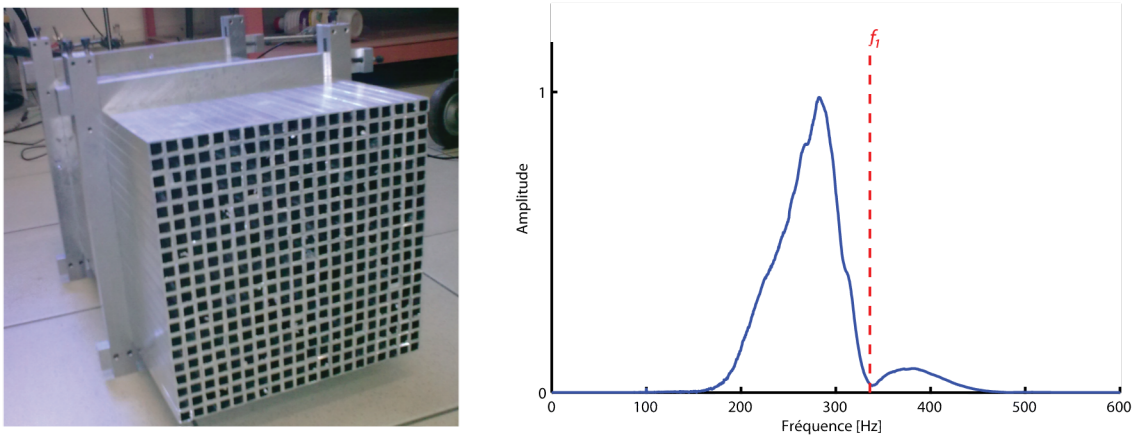

FIGURE IV.2 – Échantillon expérimental des 20×20 tubes. Mesure expérimentale des résonances du réseau à l'aide d'un microphone placé sur un tube du milieu.

proche d'une des extrémités du tube nous mesurons les fréquences de résonance d'un tube d'aluminium ayant les paramètres décrits plus haut. On obtient une première fréquence de résonance de 336 Hz. Cette valeur est légèrement inférieure à la valeur théorique de $c/2L$. Ensuite, nous avons travaillé expérimentalement sur le réseau périodique de 20×20 tubes de la figure IV.2. Nous avons mené une expérience très similaire à la simulation puisque nous avons utilisé un haut-parleur pour émettre un « chirp » (centré autour de 336 Hz) positionné à 1,5 m du réseau. Nous enregistrons à l'aide d'un microphone le son reçu proche de l'ouverture d'un des tubes du milieu.

Nous montrons sur la figure IV.2 la transformée de Fourier de ce signal. À notre grande déception, ce signal ne montre pas de multiples résonances comme nous l'escomptions, cependant la transformée de Fourier montre des similitudes :

- Elle s'annule pour la fréquence propre de résonance d'un tube ;
- En-dessous de cette fréquence f_1, nous observons toute une gamme de fréquences sur laquelle le signal est amplifié qui semble ressembler à un mélange de pics de résonances ;
- Au-dessus de la fréquence f_1 le spectre ne montre pas de réponse significative.

Finalement, même si l'expérience n'a pas été très concluante, elle montre tout de même de nombreuses similitudes avec les travaux menés en électromagnétisme. En revanche, il semble qu'expérimentalement les degrés de liberté fréquentiels offerts par ce milieu se sont tous mélangés pour donner l'apparence d'une résonance unique, ceci étant dû aux pertes. Les mécanismes d'atténuation des ondes acoustiques dans l'air sont de plusieurs natures mais les effets qui prédominent lorsqu'on s'intéresse aux tuyaux sont essentiellement les effets de conduction thermique et de viscosité. Ils sont d'ailleurs principalement localisés

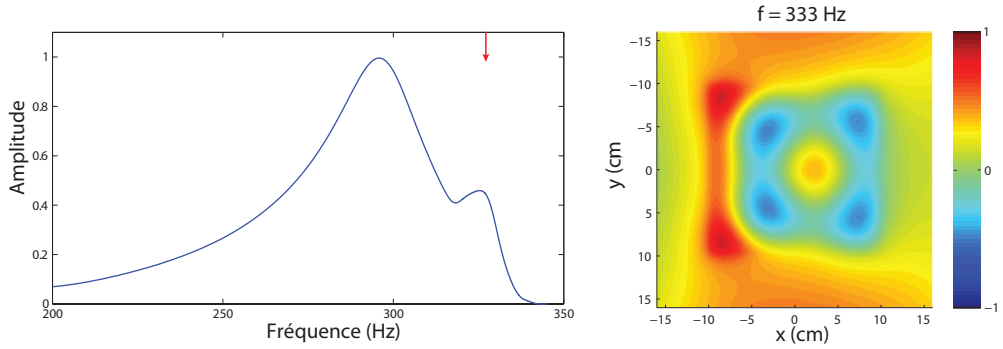

FIGURE IV.3 – Résultat de la simulation en prenant en compte les pertes.

au niveau des parois du tube. En effet, le mode P_0 des tubes n'est pas rigoureusement uniforme sur toute la section du tuyau puisque la vitesse particulaire doit s'annuler sur les parois : la vitesse s'annule sur une couche très fine appelée couche limite, ce qui produit des frottements importants en raison de la viscosité de l'air.

La théorie complète de l'atténuation et de la dispersion a été développée par Kirchhoff [118], mais un modèle simplifié proposé par Zwikker et Kosten [119] donne une bonne approximation pour des tubes de section circulaire. Ce modèle remplace les équations de propagation des ondes par des équations unidimensionnelles obtenues en moyennant les grandeurs acoustiques sur une section du tube [117]. Ceci permet d'obtenir des paramètres effectifs pour la simulation. Notamment, lorsque le diamètre D d'un tube diminue, les pertes augmentent comme $1/D^2$.

Nous avons alors simulé la matrice de tubes en prenant en compte ces effets de pertes sur les parois et nous avons obtenus des résultats en bon accord avec l'expérience (figure IV.3). Si on regarde une carte de champ de pression à une fréquence dans la gamme de résonance, on constate que le champ varie sur une échelle sub-longueur d'onde mais elle n'atteint pas la période du réseau. Les pertes acoustiques dues aux faibles sections de nos tubes empêchent d'obtenir des modes très sub-longuer d'onde.

Cependant, lorsqu'on s'intéresse un peu plus en détail à la description d'un tube unique, cette première expérience permet de valider l'idée de notre modèle de résonateurs couplés. Le facteur de qualité de la résonance du tube, qui prend en compte les pertes par rayonnement et les pertes par dissipation [120], ne donne pas la dispersion escomptée. Alors que les pertes par rayonnement créent la dispersion fréquentielle des modes propres lorsqu'on a une matrice de résonateurs, la dissipation n'augmente pas cette dispersion mais mélange les résonances. Les deux facteurs de qualité qui décrivent le résonateur unique n'ont pas du tout les mêmes effets comme nous l'avons montré précédemment.

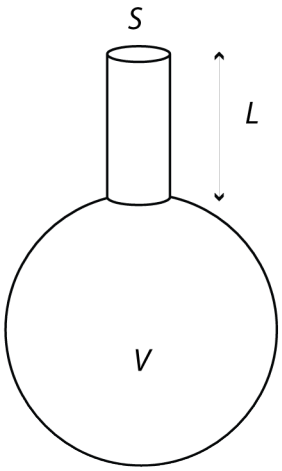

FIGURE IV.4 – Photographie des exemplaires conservés au Lycée Jacques Decour à Paris de résonateurs de Helmholtz fabriqués par Rudolph Koenig. À droite, schématisation du résonateur avec les paramètres importants.

Après cette première tentative, nous sommes donc parti à la recherche d'un résonateur acoustique qui présenterait les qualités voulues : une dimension petite devant la longuer d'onde à la résonance et de relativement faibles pertes intrinsèques. En acoustique, il existe un autre résonateur sub-longueur d'onde introduit par Herman von Helmholtz [121] il y a plus d'un siècle et ce résonateur porte aujourd'hui son nom. La figure IV.4 montre une photographie des exemplaires conservés au Lycée Jacques Decour à Paris de résonateurs de Helmholtz fabriqués par Rudolph Koenig.
Il s'agit de cavités sphériques de laiton, vernies, de diverses dimensions. Chacune présente deux ouvertures : un petit conduit (sommets des sphères sur la photo), et à l'opposé une ouverture plus grande destinée à recevoir le son à étudier (bases des sphères sur la photo). Cependant, il n'est pas nécessaire que le résonateur présente ces deux ouvertures pour observer la résonance acoustique.
La résonance de Helmholtz est dans son principe due à l'oscillation d'ensemble de la colonne de gaz contenue dans le cou du résonateur. La cavité de volume V agit comme une force de rappel. La fréquence de résonance théorique de ce résonateur se met sous la forme :

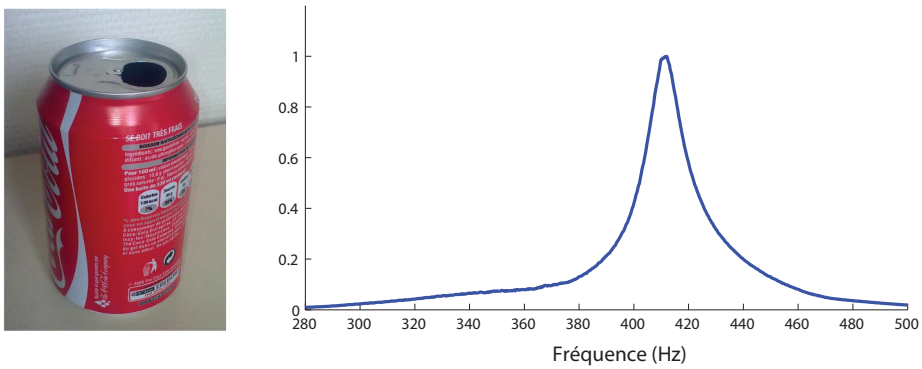

FIGURE IV.5 – Canette de soda utilisée comme résonateur de Helmholtz dans notre expérience, et mesure de sa fréquence de résonance.

$$f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{VL}} \tag{IV.1}$$

Les dimensions du résonateur peuvent être très petites devant la longueur d'onde de résonance ce qui en fait un bon candidat pour notre étude. Il y a plusieurs paramètres à prendre en compte dans notre cas. Nous voulons des dimensions transverses relativement petites par rapport à la longueur d'onde donc il faut préférer un volume important. Nous savons que les pertes sont importantes dans les petites sections donc il est intéressant d'avoir une longueur L de cou plutôt courte. Par conséquent, cela nous impose une ouverture S petite pour conserver une résonance à basse fréquence. Plutôt que d'essayer de fabriquer un résonateur nous mêmes, nous avons essayé des objets de la vie courante : bouteilles, verres, boules de Noël, ballons de chimie... Pour chacun de ces résonateurs nous avons mesuré expérimentalement la résonance. Les géométries étant plus complexes que le modèle sphère+ouverture cylindrique, nous avons utilisé la simulation numérique pour étudier ces résonateurs. En simulant chacune des géométries avec et sans pertes nous avons obtenu la contribution radiative et dissipative au facteur de qualité.

Après plusieurs tentatives, nous avons convergé vers un résonateur de Helmholtz qui consiste en une canette de soda (33 cL). Le cou du résonateur est très court donc on limite les pertes dues aux faibles sections, et le volume du résonateur est grand devant l'ouverture ce qui en fait un résonateur sub-longueur d'onde. Expérimentalement (figure IV.5), nous avons mesuré une fréquence de résonance de 415 Hz, ce qui signifie que sa dimension latérale est de l'ordre de $\lambda/12$ à la résonance [2]. Le facteur de qualité expérimental est de

2. Notons qu'en utilisant une canette de 50 cL, la fréquence de résonance aurait été placée plus bas dans le spectre, et la période du réseau aurait été encore plus sub-longueur d'onde.

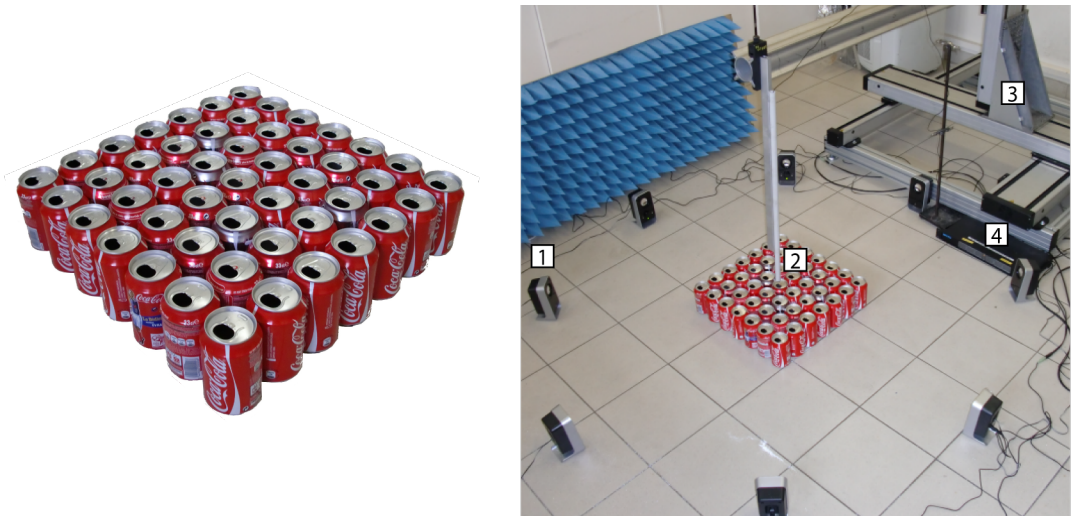

FIGURE IV.6 – Le réseau de 7×7 canettes et le dispositif expérimental : (1) 8 haut-parleurs commerciaux pré-amplifiés, (2) microphone monté sur (3) un banc de mesure motorisé, (4) carte son MOTU.

14, et nous avons vérifié numériquement que c'est essentiellement les pertes radiatives qui le gouvernent puisqu'il atteint une valeur de 16 lorsqu'on simule la canette sans pertes.

IV.1.2 Réseau périodique de canettes

Maintenant que nous avons trouvé le résonateur pouvant nous donner les résultats escomptés, nous fabriquons notre « métalentille résonante » qui doit agir comme un convertisseur d'ondes propagatives en ondes évanescentes. Le son émis depuis le champ lointain par un haut-parleur doit donner naissance à des modes résonants qui oscillent sur des distances bien plus petites que la longueur d'onde. Pour cela, nous travaillons sur un milieu périodique (maille carrée) de 7×7 canettes (figure IV.6). Les canettes sont jointives les unes aux autres ce qui donne un pas de réseau de 6,6 cm ($\lambda_0/12$).
Nous positionnons 8 haut-parleurs à un mètre du réseau de canettes (plus d'une longueur d'onde dans l'air à 415 Hz) reliés à une carte son MOTU 24 I/O contrôlée via Matlab. À titre indicatif, à cette distance le champ évanescent issu des haut-parleurs qui oscille sur une échelle de $\lambda/4$ a une amplitude de 10^{-7}. Ceci assure qu'aucun champ évanescent provenant des haut-parleurs ne participe aux résultats. Nous plaçons un microphone de largeur 1 cm au-dessus (2 cm) de l'ouverture d'une des canettes du centre. Le microphone est monté sur une platine de mesure motorisée tri-dimensionnelle (1 m de course) qui nous permettra de mesurer la répartition spatiale du champ acoustique. Cette expérience a été réalisée dans une salle quelconque du laboratoire qui présente une certaine réverbération et

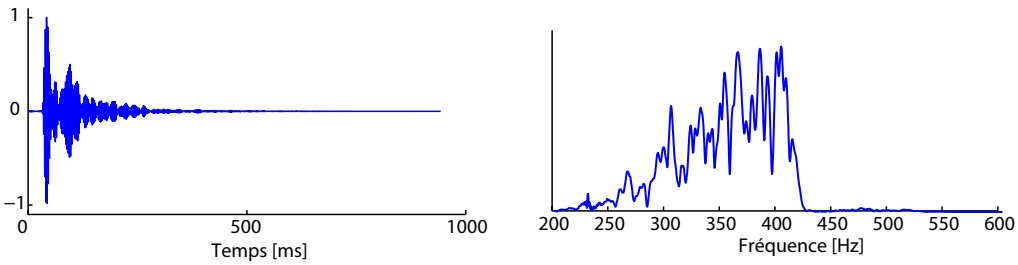

FIGURE IV.7 – Signal temporel (et son spectre) reçu par le microphone au-dessus d'une des canettes lorsqu'un haut-parleur émet une impulsion.

nous aurions pu obtenir des résultats plus propres en nous plaçant en chambre anéchoïde. La figure IV.6 montre une photographie du dispositif expérimental.

Nous commençons l'expérience par enregistrer le signal reçu lorsqu'un des haut-parleurs émet un « chirp » (de durée 5 s balayant la gamme de fréquences allant de 150 Hz à 600 Hz, multiplié par une fenêtre de Hanning). En convoluant le signal reçu par le retourné temporel du « chirp », nous obtenons le signal qui aurait été reçu par le microphone si on avait émis une impulsion brève (20 ms), symétrique dans le temps et de même bande passante que le « chirp ». Ceci garantit un meilleur rapport signal à bruit que lorsque nous émettons des impulsions.

Le signal ainsi obtenu est représenté sur la figure IV.7, ainsi que sa transformée de Fourier. D'un point de vue temporel, on voit que le signal s'étend sur plus de 200 ms, ce qui traduit la nature résonante du milieu. Fréquentiellement, les degrés de liberté fréquentiels se mélangent beaucoup moins que dans le cas des tubes, et ce signal présente de nombreux pics de résonance sur la gamme 340-420 Hz. Il présente en réalité plus de pics de résonance, notamment en-dessous de 340 Hz, qui sont des pics parasites dûs à la réverbération dans la pièce.

À présent, nous reproduisons la même expérience d'acquisition de réponse impulsionnelle lorsque chacun des haut-parleurs émet une impulsion[3] et lorsque le microphone est positionné au-dessus de chacune des canettes, de manière à obtenir la répartition spatio-temporelle du champ. À partir de cette banque de réponses impulsionnelles nous déterminons les fréquences de résonance des modes ainsi que leur diagramme de directivité. En effet, nous avons vu avec le milieu de fils dans le chapitre précédent qu'un milieu carré de dimensions latérales inférieures à $\lambda/2$ donne lieu à 4 diagrammes de directivité différents : monopolaire, dipolaire (x ou y) et quadrupolaire. Nous effectuons des com-

3. Ici, nous employons le terme impulsion, mais l'opération reste la même que précédemment, à savoir émission d'un chirp et convolution du signal reçu avec la version retournée temporellement du chirp.

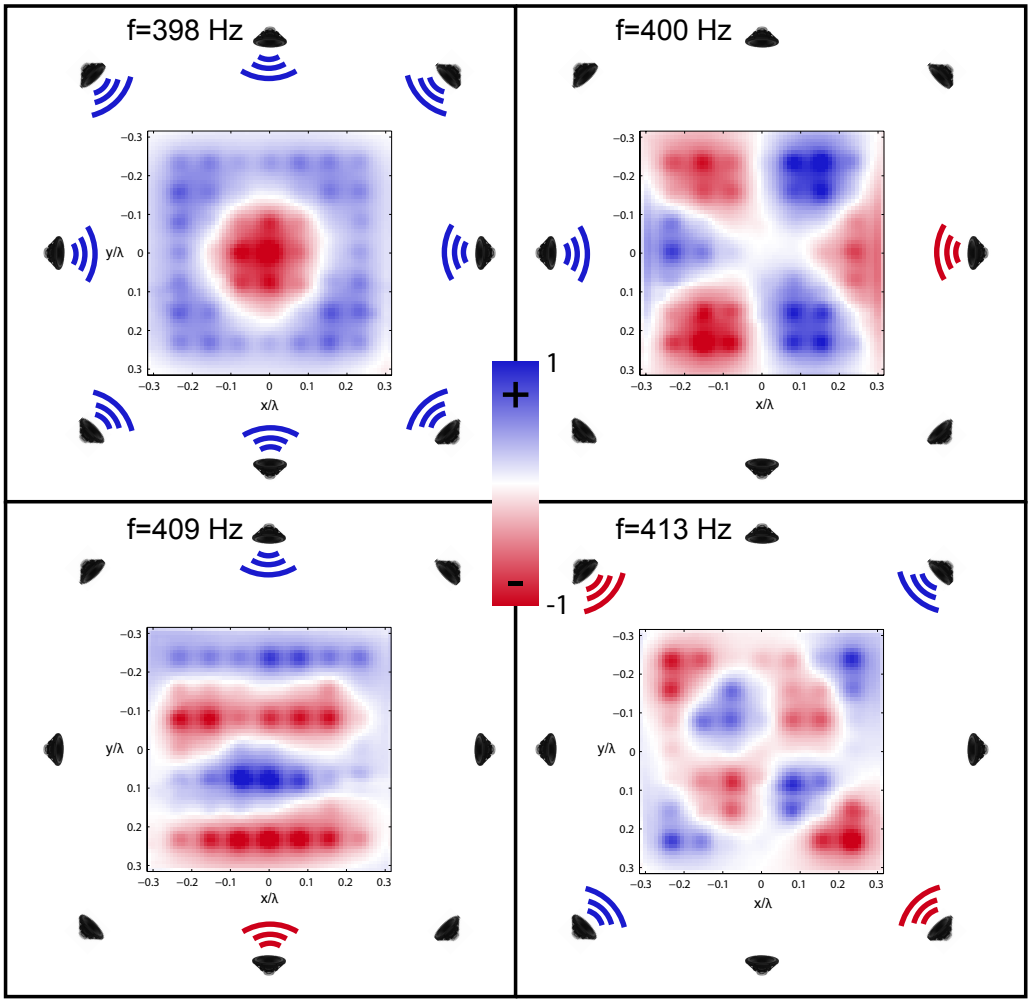

FIGURE IV.8 – Modes sub-longueur d'ondes mesurés à différentes fréquences et pour différents diagrammes de directivité.

binaisons linéaires des réponses impulsionnelles dans le spectre de Fourier en adéquation avec ces directivités. Cela nous permet de déterminer les fréquences de résonance associées à chaque type de directivité. Nous utilisons alors les haut-parleurs pour émettre des sons monochromatiques aux fréquences déterminées par l'opération précédente, et nous faisons émettre seulement les hauts parleurs qui satisfont la directivité souhaitée.

Le microphone est alors utilisé pour cartographier le champ au dessus des canettes. Sur la figure IV.8 nous représentons quatre de nos mesures, chacune étant associée à un type de rayonnement. Il s'agit bien de modes sub-longueur d'onde puisque le premier présente déjà 2 nœuds dans la direction Ox sur une distance de $2\lambda/3$. Les modes qui ont des variations spatiales très fines n'ont pas été mesurés expérimentalement à cause des pertes dans le milieu qui empêchent de les résoudre. Cependant, nous avons quand même mesuré des

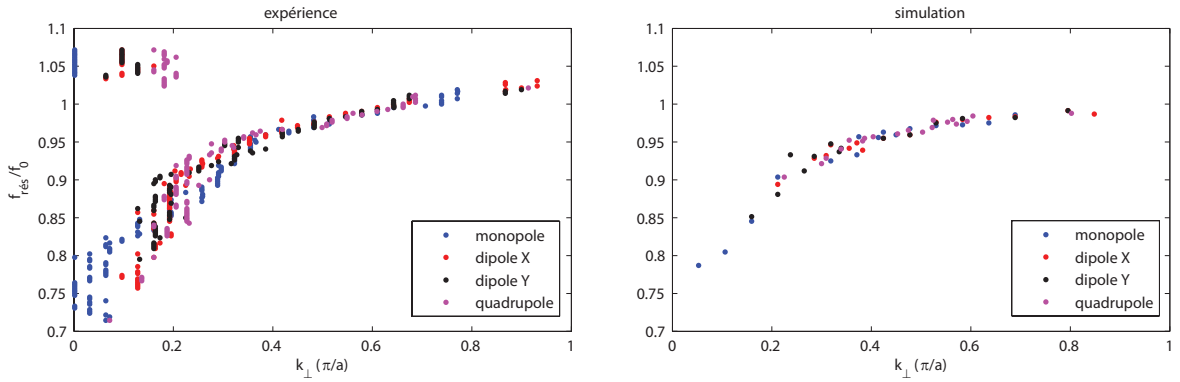

FIGURE IV.9 – Relation de dispersion des modes obtenue expérimentalement et à partir des simulations.

cartes de champs qui présentent des variations spatiales de l'ordre du pas du réseau. Sur les cartes de champs de la figure IV.8, on voit aussi très bien le principe de rayonnement de coins. Par exemple, même si on émet avec des haut-parleurs qui sont situés sur l'axe Ox on peut observer des nœuds et ventres suivant Oy.

À l'aide de la banque de réponses impulsionnelles que nous avons acquise nous avons aussi voulu déterminer la relation de dispersion des modes. Autant en électromagnétisme nous avons été capable d'en donner une formule analytique, autant ici la décomposition en ondes de Bloch puis la projection sur les ondes planes à l'ouverture des canettes est assez difficile à réaliser.

Nous calculons donc, à l'aide d'une transformée de Fourier spatiale 2D des modes enregistrés, les vecteurs d'ondes associés. Étant donné la résolution spatiale limitée de l'acquisition, la relation de dispersion n'est pas très précise, mais nous obtenons une bonne estimation de celle-ci sur la figure IV.9. Avec les paramètres expérimentaux, dès que $k_\perp$ dépasse $0.2\pi/a$, les modes sont sub-longueur d'onde. Cette relation de dispersion a l'allure de celle recherchée, ce qui une fois de plus semble justifier notre approche.

Enfin, nous voulons insister sur le fait que cette relation de dispersion est uniquement due au couplage par le son dans l'air entre les différents résonateurs. En effet, étant donné que les canettes se touchent les unes aux autres, on pourrait penser que celles-ci sont couplées mécaniquement, les parois d'une canette faisant vibrer ses voisines et ainsi de suite. Nous avons donc simulé la matrice de canettes à l'aide de *COMSOL*, mais en imposant des parois infiniment rigides. Nous avons vérifié un très bon accord avec l'expérience [4]. Nous avons mesuré les mêmes modes sub-longueur d'onde qu'en expérience ainsi que les mêmes

4. Nous rappelons que la simulation tient compte des pertes.

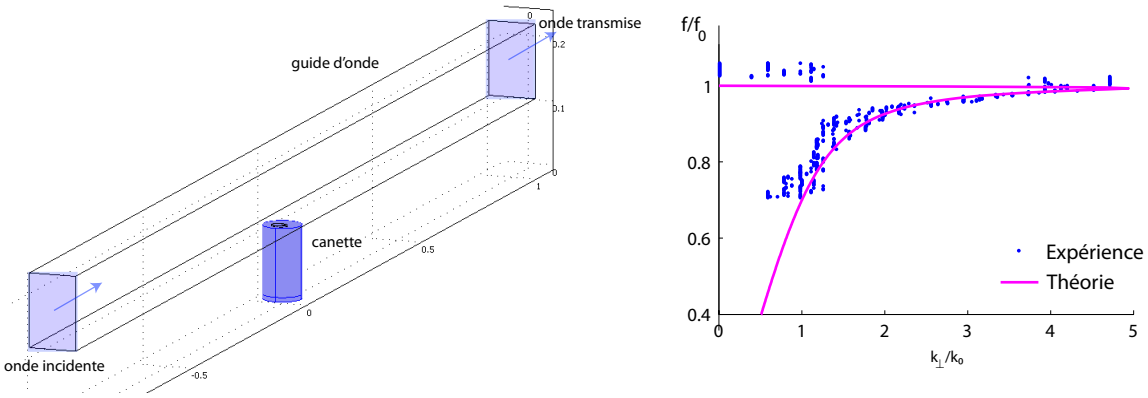

FIGURE IV.10 – Relation de dispersion des modes obtenue à partir de notre modèle théorique, avec un coefficient de transmission pour une canette obtenu dans un guide d'onde.

diagrammes de directivité. Pour résumer au mieux les résultats numériques nous représentons sur la figure IV.9 la relation de dispersion numérique obtenue. L'adéquation des résultats montre sans équivoque qu'il n'y a pas de couplage mécanique entre les différents résonateurs : le couplage est uniquement dû à l'hybridation de la résonance avec les ondes propagatives dans l'air.

Afin de valider l'approche que nous avons introduite au chapitre précédent, nous avons aussi simulé le comportement d'une canette seule dans un guide d'onde. Cette géométrie, représentée sur la figure IV.10, rappelle très fortement celle des pseudo-plasmons de surface que nous avons vu précédemment dans le cas des ondes électromagnétiques. En mesurant le coefficient de transmission dans le guide d'onde, nous savons que nous sommes capables de reconstruire la relation de dispersion dans le cas d'un milieu unidimensionnel. Ce cas de figure est un peu plus compliqué puisque la géométrie est tri-dimensionnelle et que nous considérons les pertes. Sur la figure IV.10 nous représentons la relation de dispersion obtenue avec la formule III.18 du chapitre précédent. Nous superposons sur cette courbe les données expérimentales qui montrent un très bon accord. Ceci est encore une preuve du fait que les canettes se couplent par l'air uniquement grâce au continuum de solutions propagatives.

IV.1.3 Focalisation sub-longueur d'onde

Maintenant que nous avons clairement identifié les degrés de liberté spatio-temporels qu'offre le milieu constitué de canettes afin de contrôler de champ acoustique sur une échelle sub-longueur d'onde, nous pouvons essayer de les exploiter. Le problème reste le

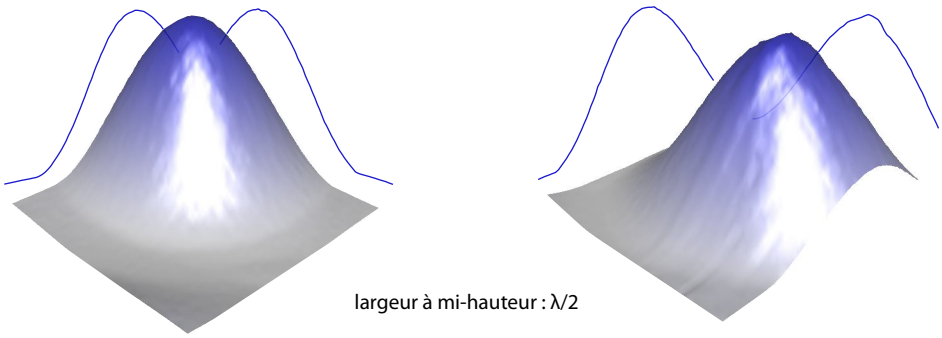

FIGURE IV.11 – Taches focales expérimentales obtenues dans la pièce en l'absence de canettes.

même que celui que nous avons déjà rencontré à maintes reprises au cours de ce manuscrit : l'information spatiale est *codée* sur différentes fréquences de la bande passante et il nous faut sommer de manière cohérente toutes ces fréquences. Comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises jusqu'à maintenant, nous nous proposons d'abord d'utiliser le retournement temporel pour tirer partie de ces degrés de liberté spatio-temporels.
Pour commencer, nous réalisons une expérience de contrôle dans la pièce du laboratoire où nous effectuons nos expériences. Nous retirons les canettes et laissons les haut-parleurs et le microphone en position. Nous enregistrons les réponses impulsionnelles de la pièce du laboratoire entre une position qui aurait été au-dessus des canettes et les huit haut-parleurs. Nous retournons temporellement ces réponses et nous faisons émettre simultanément les huit haut-parleurs. Notons que nous avons utilisé la propriété de réciprocité spatiale des ondes puisque les réponses impulsionnelles ont été acquises en faisant émettre les haut-parleurs.
Ensuite nous utilisons le banc motorisé pour déplacer le microphone et ainsi mesurer le champ acoustique pour en extraire la tache focale. Sur la figure IV.11 nous représentons deux taches focales d'intensité acoustique (on trace le carré du maximum de la valeur absolue des signaux mesurés en chaque position). Comme nos haut-parleurs sont placés sur un cercle, la focalisation est isotrope et nous obtenons des taches focales limitées par la limite de la diffraction, de largeur à mi-hauteur $\lambda/2$. D'un point de vue temporel, nous avons bien entendu le résultat classique de la focalisation par retournement temporel : une impulsion est reçue au point focal malgré la réverbération introduite par la pièce.
Ensuite, nous avons réalisé une deuxième expérience de contrôle qui a consisté à n'utiliser qu'une seule canette. Étant donné sa nature résonante, il doit y avoir une exaltation du champ de pression proche de son ouverture. Nous mesurons les réponses impulsionnelles

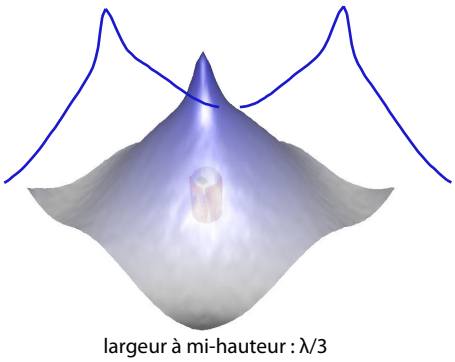

FIGURE IV.12 – Tache focale expérimentale obtenue au dessus d'une unique canette.

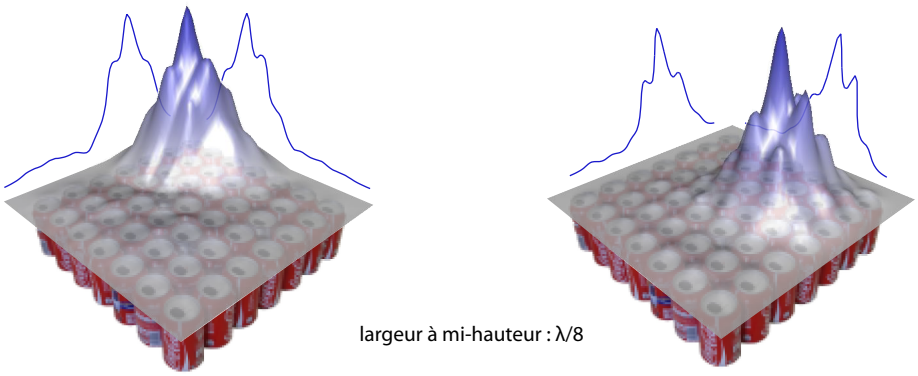

FIGURE IV.13 – Taches focales expérimentales obtenues par retournement temporel au-dessus des 49 canettes.

entre le microphone placé 2 cm au-dessus de la canette et les huit haut-parleurs. Après retournement temporel et émission des signaux, nous mesurons le champ autour de la canette. La tache focale obtenue est représentée sur la figure IV.12. Comparé au cas précédent, on superpose à la tache focale de largeur $\lambda/2$ un léger effet de champ proche et d'amplification du champ au niveau de l'ouverture de la canette. Cela augmente légèrement l'amplitude au point focal et diminue légèrement la largeur à mi-hauteur. Cependant, la largeur à mi-hauteur est environ égale à $\lambda/3$ ce qui n'est pas bien inférieur à la limite de la diffraction. D'autre part, cet effet n'est rien d'autre qu'un « effet de pointe » et il n'offre aucune flexibilité : il est absolument impossible de créer une tache focale de $\lambda/3$ ailleurs qu'au-dessus de la canette.

En présence du milieu de 7×7 canettes, nous enregistrons à nouveau les réponses impulsionnelles, les retournons temporellement puis émettons ces signaux simultanément avec

les huit haut-parleurs. Le microphone est utilisé pour mesurer le champ de pression en chacun des points au-dessus du réseau de canettes et nous affichons sur la figure IV.13 le résultat de cette expérience de retournement temporel pour 2 positions différentes du réseau de canettes (ici les positions (2,2) et (3,5) où le nombre indique le numéro de la canette dans les directions x et y).
Nous obtenons des taches focales dont la largeur à mi-hauteur est de $\lambda/8$ soit 4 fois plus fine qu'en l'absence de canettes. Nous avons bien sûr observé qu'il est possible de focaliser le son au dessus de chacune des canettes du réseau. Comme nous avons utilisé la technique du retournement temporel, il est important de rappeler que nous avons une focalisation temporelle dans le même temps : cette tache focale est obtenue à l'instant $t = 0$ et en un autre instant le champ est relativement homogène et faible au-dessus des canettes.
On a donc pu tirer partie des modes propres offerts par le réseau de canettes. La diminution de la tache focale n'est pas due à l'amplification du champ au dessus d'une canette unique. Cette amplification subsiste puisqu'on continue à observer des maxima relatifs au-dessus des autres canettes, et ceci s'explique très bien à l'aide du théorème de Bloch. Même si on arrive à générer localement des modes collectifs, la nature discrète du milieu persiste et le champ est toujours localement maximal au-dessus de l'ouverture d'une canette.
Comme nous l'avons déjà vu au cours de ce manuscrit, la focalisation par retournement temporel permet d'exploiter les degrés de liberté spatio-temporels mais n'est pas la meilleure technique en termes de résolution spatiale. En effet, elle ne compense pas les pertes dans le milieu puisqu'elle n'influe pas sur les amplitudes relatives du spectre fréquentiel mais joue seulement sur la phase du signal à chaque fréquence. Nous savons dans notre cas que certains modes souffrent plus des pertes que d'autres puisqu'ils ont des facteurs de qualité radiatifs plus importants. Ces modes, qui restent plus longtemps dans le milieu, sont justement les modes qui correspondent aux détails spatiaux les plus fins. Si on veut diminuer la largeur des taches focales, il faut amplifier ces modes et donc se rapprocher d'une méthode d'inversion.
Les techniques d'inversion nécessitent des méthodes de régularisation à cause du bruit expérimental, et ici nous préférons utiliser la technique du retournement temporel itératif [29] qui permet de converger vers l'inversion sans trop souffrir du bruit. Cette technique requiert l'acquisition de l'ensemble des réponses impulsionnelles entre les huit haut-parleurs et les 7×7 positions focales au-dessus du réseau de canettes. Nous utilisons donc les réponses que nous avons enregistrées précédemment pour calculer les modes propres.
Ensuite nous effectuons le retournement temporel itératif numériquement sur cette banque de signaux. Nous obtenons ainsi la banque de signaux à émettre depuis les haut-parleurs pour focaliser sur chacune des canettes tout en minimisant le niveau des lobes secondaires.

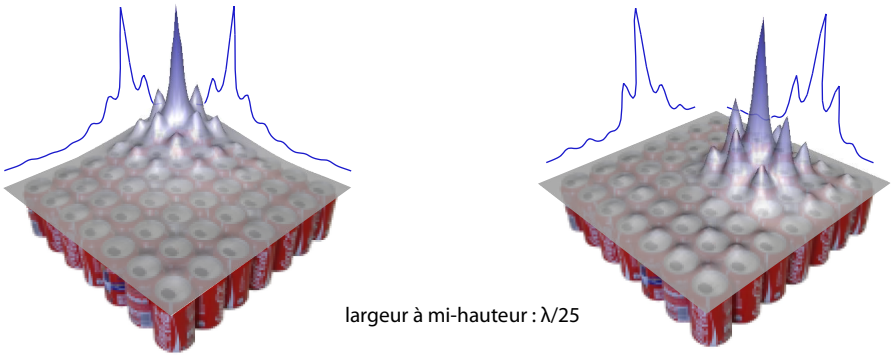

FIGURE IV.14 – Taches focales expérimentales obtenues par retournement temporel itératif au-dessus des 49 canettes.

Nous avons testé expérimentalement cette technique sur les deux mêmes positions que l'expérience de retournement temporel. Sur la figure IV.14 sont représentées les taches focales ainsi obtenues. La largeur à mi-hauteur du pic de focalisation est dans ce cas de $\lambda/25$, soit la dimension de l'ouverture d'une canette. En réalité nous ne pouvons pas focaliser sur des points situés entre les canettes donc nous pouvons choisir la position d'un point focal avec une résolution de $\lambda/12$ uniquement sur tout le réseau de canettes.
L'énergie déposée au point focal nécessite quelques commentaires. Nous savons que le retournement temporel est un filtre adapté donc c'est la technique qui maximise l'énergie au point focal. Avec les données expérimentales que nous venons de présenter, à énergie émise constante, l'intensité acoustique au point focal est égale à 3,5 dans le cas du retournement temporel et à 1,9 dans le cas de la méthode itérative (en unités arbitraires). Ces résultats ne sont pas surprenant puisque le retournement temporel itératif favorise les modes qui subissent le plus de pertes pour obtenir une meilleure résolution : il faut donc émettre plus d'énergie pour obtenir une même intensité au point focal. Dans le cas où il n'y a pas de canettes, on mesure une intensité du pic de focalisation de 6,3 (unités arbitraires) ce qui est plus important qu'en l'absence de canettes. À nouveau ceci s'explique simplement puisque les réponses impulsionnelles en l'absence de canettes ne sont pas associés à des modes résonants : il suffit de très peu d'énergie à l'émission pour focaliser sur des taches focales limitées par la diffraction.

IV.1.4 Exaltation du déplacement acoustique

Nous avons voulu réaliser une expérience visuelle pour observer la focalisation des ondes sonores. Nous avons fait une expérience très similaire aux travaux de Chladni [122]. Dans

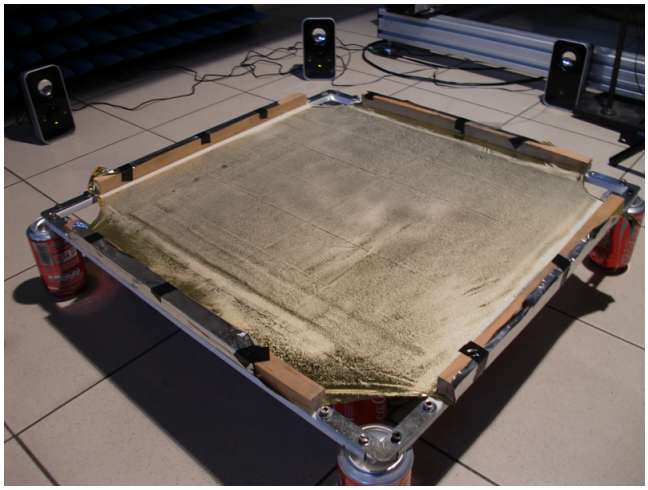

FIGURE IV.15 – Feuille de Mylar saupoudrée de billes de verre positionnée au-dessus du réseau de canettes.

ses travaux, ce dernier avait frotté un archet sur un disque de cuivre saupoudré de sable. Le sable s'était alors réparti en étoile à 8 ou 10 branches qui correspondent aux modes propres de vibration du disque de cuivre. Ces expériences sont bien comprises aujourd'hui et nous savons que le sable s'accumule dans les nœuds de vibration. Il s'agit d'expériences monochromatiques où l'on peut visualiser les modes propres de vibration d'une plaque. Nous reprenons cette idée ici, mais il est plus difficile dans notre cas d'observer la focalisation car celle-ci dépend du temps.

Au-dessus du réseau de canettes nous positionnons une feuille de Mylar (20 micromètres d'épaisseur) tendue. Le Mylar est supposé être transparent aux ondes acoustiques et suivre le déplacement de l'air. Sur cette feuille, nous déposons de petites billes de verre (120 μm de diamètre) qui agissent comme le sable dans l'expérience de Chladni (figure IV.15). Nous émettons avec les huit haut-parleurs les signaux de retournement temporel (ou de retournement temporel itératif) et nous observons les billes sauter uniquement à l'endroit souhaité. En choisissant d'autres signaux d'émission nous observons les billes sauter à un autre endroit.

Cette expérience démontre les applications potentielles de la focalisation sub-longueur d'onde en termes d'actuateurs, puisque nous prouvons qu'elle permet de déplacer des objets à l'aide d'ondes acoustiques. De manière assez surprenante, en l'absence de canettes nous n'avons pas réussi à faire sauter les billes de verre, même en augmentant le volume des haut-parleurs au maximum. Ceci nous a permis de mettre en avant une autre conséquence de la focalisation des ondes sur une échelle sub-longueur d'onde. De manière

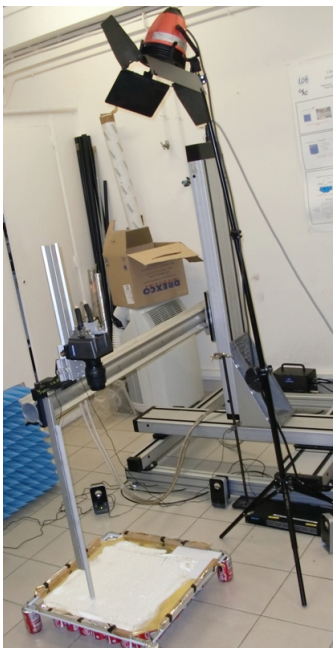

FIGURE IV.16 – Dispositif expérimental avec la caméra ultra rapide et le projecteur.

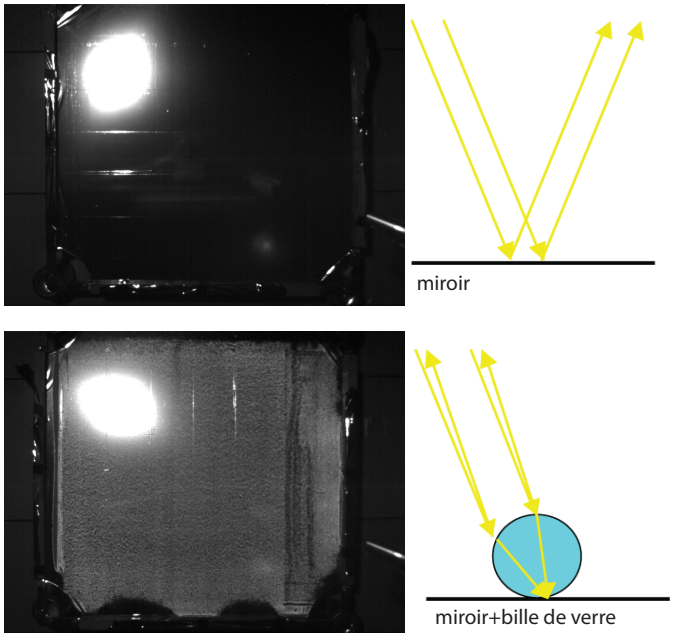

FIGURE IV.17 – Image de la feuille de Mylar vue depuis la caméra avec (bas) et sans (haut) les billes déposées dessus. À droite le chemin de la lumière dans les deux cas est schématisé.

analogue à l'exaltation du champ électrique créée par des potentiels électriques qui varient sur des échelles sub-longueur d'onde, notre expérience conduit à une exaltation du déplacement acoustique au point focal. En effet, le déplacement acoustique est proportionnel au gradient du champ de pression : si on fait varier celui-ci sur une échelle plus fine on augmente, par conséquent, le déplacement au point focal.

Pour donner un ordre de grandeur, à l'aide des intensités mesurées au point focal précédemment nous pouvons obtenir une estimation de ce déplacement. Par retournement temporel en présence des canettes, même si l'intensité du champ de pression est plus faible qu'en l'absence de canettes, comme on dépose l'énergie sur une tache 4 fois plus petite on a finalement un déplacement acoustique qui est 4 fois plus important. Dans le cas du retournement temporel itératif cette exaltation est encore plus prononcée puisqu'on focalise sur une tache focale qui est 12,5 fois plus petite. D'autre part, nous n'avons pas présenté l'allure du champ suivant l'axe perpendiculaire au réseau de canettes mais celui-ci décroit très vite depuis l'ouverture car les ondes sont évanescentes et présentent un très grand nombre d'onde transverse $k_\perp$. En réalité on augmente ainsi encore un peu plus l'exaltation du déplacement acoustique.

Cette expérience, très visuelle pour une personne présente dans la salle du laboratoire,

nous a posé quelques difficultés pour enregistrer le déplacement des billes. Pour cela, nous avons positionné une caméra ultra rapide (2000 images par seconde), qui nous permet d'avoir accès aux fréquences auxquelles nous travaillons, à la verticale de la feuille de Mylar. Étant donné la cadence image de la caméra il faut ajouter un éclairage puissant. Nous avons utilisé un projecteur de forte puissance (500 Watts) positionné quasiment à la verticale de la feuille de Mylar (figure IV.16). Ce projecteur est branché sur le courant alternatif (50 Hz) mais, la durée du signal obtenu après recompression temporelle étant bien inférieure à cette échelle de temps, les fluctuations lumineuses ne nous gênent pas.
Le contraste de l'image lors du déplacement des billes résulte d'un effet optique dû aux billes de verre elles-mêmes : l'effet photo-réflectif. La feuille de Mylar apparaît très sombre en l'absence de billes car le projecteur n'est pas orienté exactement à la verticale de la feuille de Mylar, et on n'observe ainsi que le reflet direct de l'ampoule dans le coin de l'image. Celle-ci devient en revanche très lumineuse en présence de billes (figure IV.17). Une explication simple de ce phénomène est schématisée. Lorsque la lumière entre dans une sphère de verre de dimension plus grande que la longueur d'onde, les rayons parallèles sont focalisés sur la face opposée de la sphère à cause de l'indice du verre. Si la sphère est placée sur un miroir, et donc sur la feuille de Mylar métallisée, ces rayons se réfléchissent et subissent le trajet inverse. Si on était en incidence normale les images avec et sans billes seraient similaires. Dans notre cas, comme nous avons un angle d'incidence légèrement oblique, les faisceaux sont réfléchis en dehors de la caméra en l'absence des billes alors qu'ils sont réfléchis dans la caméra lorsqu'elles sont présentes.
Lorsqu'on focalise les ondes acoustiques au-dessus du réseau de canettes, on crée un pic de pression au niveau de la feuille de Mylar. Celui-ci induit dans le même temps des déplacements acoustiques dans les directions x, y et z, que la feuille de Mylar suit. Ces déplacements, proportionnels au gradient de pression, sont très importants lorsqu'on focalise sur des échelles très sub-longueur d'onde.
Par conséquent, au niveau du point focal, la feuille de Mylar se déplace de haut en bas en soulevant les billes de verre. Lorsque le Mylar se déplace vers le haut les billes sont déplacées vers le haut et restent collées à la feuille. Lorsque le Mylar se déplace vers le bas les billes en phase ascendante ne peuvent pas arrêter leur déplacement et se désolidarisent de la feuille de Mylar. Ceci n'arrive que pour les billes qui ont accumulé suffisamment d'énergie cinétique, c'est-à-dire pour celles qui sont situées au point focal. Lorsque des billes se décollent nous perdons l'effet photo-réflectif et cela se traduit par un noircissement de l'image sur la caméra. Par conséquent, pour un pic de pression négatif, un changement de signe de négatif vers positif du déplacement acoustique (le moment où les billes sont décollées de la feuille), nous observons un point noir à l'image.

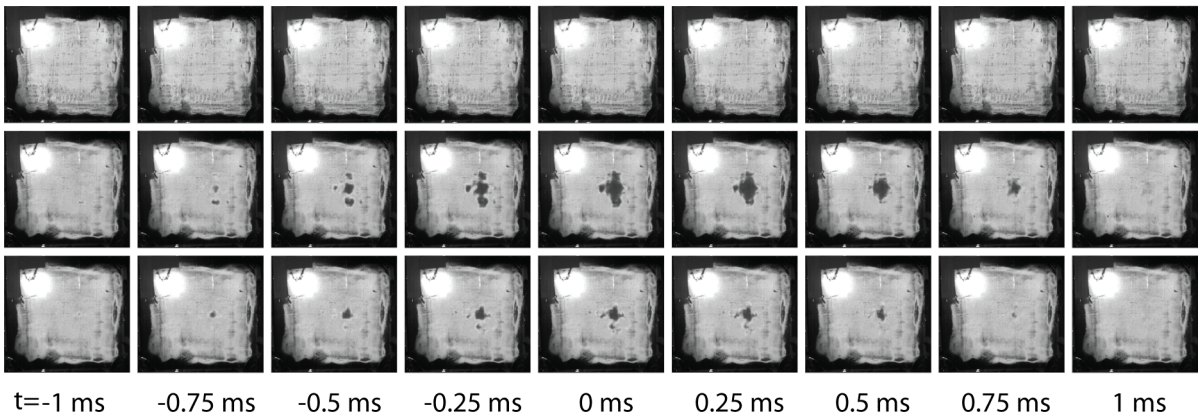

FIGURE IV.18 – Films de la focalisation acoustique avec notre dispositif.

Nous avons utilisé cette procédure expérimentale pour imager la focalisation acoustique que nous observions à l'œil nu. Sur la figure IV.18 nous représentons 9 images consécutives enregistrées par la caméra autour de l'instant $t = 0$ de la focalisation temporelle. En l'absence du réseau de canettes (en haut) nous n'observons aucun déplacement des billes, même avec un volume à l'émission poussé au maximum. En revanche, lorsqu'on focalise sur une échelle plus fine grâce au réseau de canettes, on arrive à amplifier le déplacement acoustique et par conséquent à noircir l'image. Les films obtenus par retournement temporel ($2^{\text{ème}}$ ligne) et par retournement temporel itératif ($3^{\text{ème}}$ ligne) montrent bien cette exaltation du déplacement acoustique sur de très petites échelles.
Nous avons reproduit l'expérience sur différentes positions et il est évidemment possible de focaliser au-dessus de n'importe quelle canette du réseau. Un autre point intéressant concerne le fait que l'apprentissage des fonctions de Green peut se faire en l'absence de la feuille de la Mylar. Ensuite on ajoute celle-ci et on saupoudre de billes de verre. Les signaux enregistrés précédemment continuent à focaliser à l'endroit désiré ce qui prouve la robustesse de la méthode. Nous pensons que cette expérience simple prouve le potentiel en termes d'applications (actuateurs, capteurs, MEMs...) de la focalisation sub-longueur d'onde acoustique ainsi obtenue.
En résumé dans cette première partie nous avons obtenu des résultats tout à fait similaires à ceux que nous avions obtenus dans le cas du milieu de fils en électromagnétisme. Les fils qui agissaient comme des résonateurs en micro-ondes ont été remplacés par des canettes qui sont des résonateurs de Helmholtz en acoustique. En les organisant sur une échelle sub-longueur d'onde nous avons obtenu une relation de dispersion très similaire, puis été capable de l'exploiter pour focaliser des ondes sonores sur des dimensions bien inférieures à la limite de la diffraction. Ces résultats justifient une fois de plus notre intuition générale

sur les milieux composés de résonateurs identiques sub-longueur d'onde.

IV.2 Transposition à l'optique : une approche polychromatique pour franchir la limite de la diffraction dans le visible

Pour vérifier l'universalité de nos résultats, nous avons aussi prospecté dans le domaine des fréquences optiques. Les potentielles applications qu'offrirait une transposition de nos approches dans ce domaine seraient prodigieuses puisqu'on pourrait obtenir des images de microscopie super-résolue en temps réel, et focaliser des ondes sur des échelles très fines ouvrant ainsi la voie à des techniques de lithographie nouvelles.
Autant en acoustique nous avons pu mener des expériences relativement facilement étant donnée les distances et fréquences en jeu, autant en optique nous nous sommes pour l'instant contenté d'une étude numérique. Nous présenterons donc dans cette partie des résultats obtenus à l'aide de *CST Microwaves*. Cependant, nous ne négligeons jamais les pertes dues aux matériaux utilisés de manière à démontrer des résultats aussi réalistes que possible, et nous ne ferons pas l'étude de milieux qui seraient impossibles à fabriquer expérimentalement.

IV.2.1 Résonances plasmons

Dans le domaine des fréquences optiques, les métaux parfaitement conducteurs n'existent pas, et on ne peut pas reproduire l'expérience menée en micro-ondes facilement. Pour obtenir un résonateur optique sub-longueur d'onde, il faut tout d'abord revenir sur les propriétés électromagnétiques des métaux nobles. Ils peuvent être décrits assez convenablement par le modèle des électrons libres quant à leur structure électronique. Cette approche consiste à traiter les électrons de valence du métal comme un gaz d'électrons libres, ignorant ainsi le réseau métallique en première approximation. Un gaz dense de particules chargées est appelé un plasma et on parle d'un plasma d'électrons libres à l'intérieur d'un métal. Sous l'application d'un champ électrique oscillant, la densité de ce gaz d'électrons peut se mettre à osciller, et cette oscillation peut se propager : on parle alors de plasmon de volume.
Une extension importante de la physique des plasmons est le concept de plasmon de surface [123, 124]. La théorie de Maxwell montre que des ondes électromagnétiques polarisées TM peuvent se propager le long d'une interface entre un métal et un diélectrique. Ces

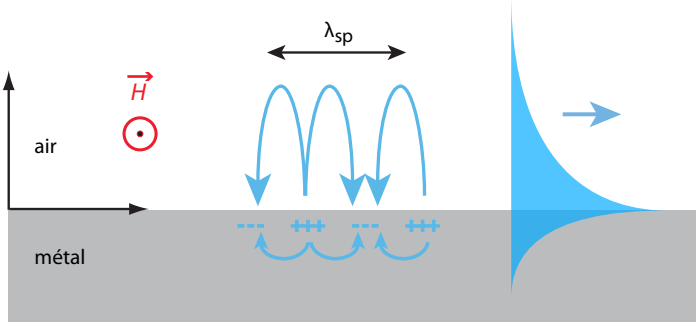

FIGURE IV.19 – Représentation schématique d'un plasmon de surface.

ondes sont associées à des oscillations de la densité d'électrons libres à la surface du métal, on les appelle les plasmons de surface. Ces ondes sont hybrides et résultent d'un couplage entre une excitation collective des électrons et une onde électromagnétique existant à la surface du métal. On retrouve donc la notion de polariton qui fait référence à leur nature hybride.

Le maximum d'intensité du champ associé à cette onde se trouve à l'interface métal-diélectrique. Le champ électromagnétique décroît exponentiellement dans les deux milieux suivant les directions perpendiculaires à l'interface, ce qui est une caractéristique des ondes de surface. La figure IV.19 représente schématiquement des oscillations de charges et présente la dépendance exponentielle des plasmons de surface. En termes de permittivité diélectrique, la condition *sine qua non* pour avoir existence de cette onde de surface est d'avoir une interface entre deux matériaux de constantes diélectriques de signes opposés. Ceci est le cas d'une interface air-métal, puisque les métaux ont une permittivité négative. Notons que ceux-ci existent pour des fréquences bien en-deçà des fréquences optiques, mais que leur profondeur de pénétration dans l'air est extrêmement importante étant donné les très grandes permittivités des métaux en-dessous des fréquences optiques.

Par opposition aux plasmons de surface qui se propagent le long d'une interface, il existe des plasmons dits localisés qui sont caractéristiques des nanoparticules métalliques. La densité d'électrons d'une nano-particule métallique peut elle aussi se mettre en oscillation sous l'application d'un champ électrique et les électrons restent confinés autour de la particule elle-même, introduisant une résonance plasmon. Ces plasmons localisés sont radiatifs et peuvent donc se coupler directement avec la lumière. Ils présentent un fort confinement du champ électromagnétique au voisinage des particules métalliques (figure IV.20).

Cette résonance plasmon est connue depuis bien longtemps d'un point de vue empirique. L'illustration qui est souvent donnée dans le cadre de la plasmonique est la coupe de Lycurgus (British Museum) faite de rubis doré. Ce matériau contient des petites particules

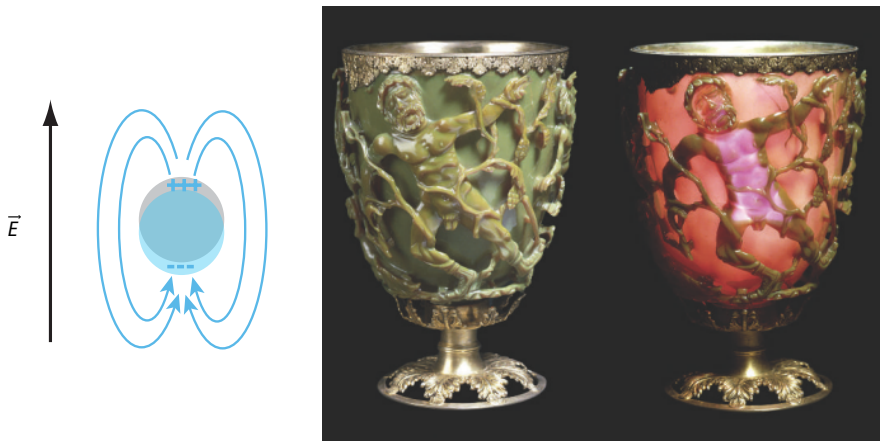

FIGURE IV.20 – Représentation schématique d'un plasmon localisé sur une nanoparticule : sous l'application d'un champ électrique le nuage électronique se déplace créant une résonance. À droite, la coupe de Lycurgus qui est une illustration de cette résonance plasmon.

d'or de 5 à 60 nm de dimensions. Éclairée depuis l'intérieur la coupe apparaît rouge, alors qu'elle semble verte sous un éclairage normal, ce qui est entièrement imputable aux propriétés de réflexion et d'absorption à la résonance des nanoparticules composant le rubis doré. Certaines couleurs des vitraux des cathédrales sont obtenues de la même manière en incluant des nanoparticules lors de la fabrication du verre.
Cette résonance plasmon localisée est très fortement conditionnée par les dimensions caractéristiques de la nanoparticule ainsi que par le métal qui la constitue et le milieu diélectrique environnant, mais elle peut bien évidemment se trouver dans le spectre visible comme en atteste le rubis doré. Il n'existe pas de formule générale pour prédire la résonance plasmon en fonction des paramètres de la nanoparticule. Cependant, dans un article général sur le sujet, S. Lal et ses collaborateurs [125] ont fait un résumé des fréquences de résonance observées pour différents types de nano-particules (figure IV.21). Pour obtenir une fréquence de résonance dans le visible, il existe plusieurs candidats potentiels.
Afin de déterminer le résonateur qui permettra de fabriquer notre « méta-lentille résonante » il faut tout d'abord choisir le métal noble qui constitue les nano-particules. Nous avons choisi d'utiliser de l'argent pour une raison de minimisation des pertes. En effet, selon les valeurs de permittivité qui ont été mesurées expérimentalement par Johnson et Christy [126], l'argent présente un minimum de pertes autour d'une longueur d'onde de 750 nm (figure IV.22). Comme nous savons que les pertes limitent les possibilités lorsqu'on a une matrice de résonateurs, nous avons voulu travailler autour de ce minimum de pertes.

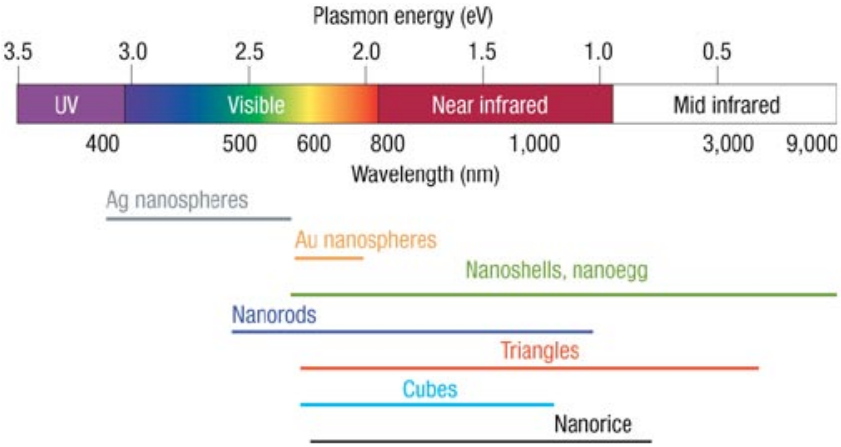

FIGURE IV.21 – Fréquence de résonance de différentes nanoparticules (figure issue de [125]).

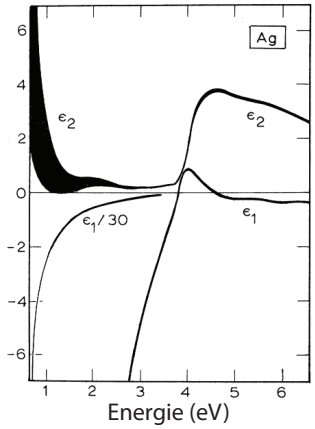

FIGURE IV.22 – Permittivité de l'argent mesurée expérimentalement [126].

Une fois le métal choisi, on voit sur la figure IV.21 que les nano-cylindres sont de bons candidats pour obtenir une résonance à la fréquence souhaitée. En plus de cela, la dimension transverse d'un cylindre peut être très petite comparée à la longueur d'onde grâce à la résonance le long de la dimension longitudinale du cylindre, comme pour les fils dans le domaine micro-ondes. Cependant, nous nous sommes imposés de rester dans les limites de ce qui est réalisable expérimentalement et notamment nous nous sommes limités à des rapports d'aspect entre le diamètre et la longueur du nano-cylindre ne dépassant pas 3.
Nous avons simulé à l'aide de *CST* le comportement d'un nano-cylindre d'argent [5] pour différents diamètres et différentes longueurs. Finalement, nous avons convergé vers un cylindre de 30 nm de diamètre et de 100 nm de longueur (figure IV.23). Illuminé par une onde plane polarisée suivant le grand axe, ce nano-cylindre présente une résonance autour de 600 nm. Le facteur de qualité de la résonance est de l'ordre de 15 ce qui est équivalent à ce que nous avions en acoustique.
La fréquence de résonance est légèrement supérieure à celle du minimum d'absorption de l'argent, mais nous allons voir dans la partie suivante que des effets dispersifs supplémentaires apparaissent lorsqu'on utilise cette nanoparticule comme cellule élémentaire d'un réseau périodique sub-longueur d'onde. En effet, l'argent étant dispersif dans la gamme de fréquence considérée, les phénomènes de dispersion intrinsèques à celui-ci vont se superposer aux phénomènes de dispersion dûs au couplage entre résonateurs.

5. Les valeurs de permittivité des simulations sont celles de Johnson et Christy [126].

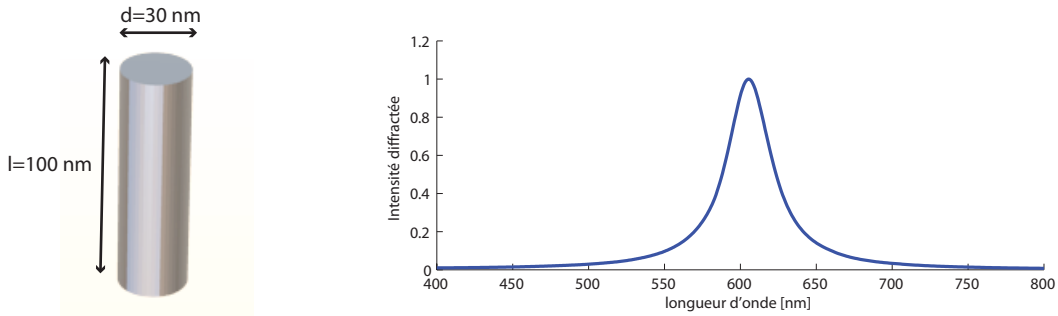

FIGURE IV.23 – Résonance d'un nano-cylindre d'argent simulée à l'aide de *CST*.

IV.2.2 Modes propagatifs dans un milieu de nano-cylindres plasmoniques

Comme pour les deux autres exemples de métalentille résonante déjà étudiés, nous allons maintenant utiliser ce résonateur comme brique élémentaire d'un réseau périodique sub-longueur d'onde. Forts de nos résultats précédents, nous n'avons pas trop de doutes sur le fait qu'un tel milieu peut supporter des modes résonants. D'autre part, plusieurs travaux antérieurs [127–130] traitent de l'utilisation de chaines de nano-particules pour guider des ondes sur une échelle sub-longueur d'onde.

Ici, nous utilisons nous aussi la propriété de guidage des chaines de nano-particules, en l'occurrence des nano-cylindres, mais nous travaillons sur une structure bi-dimensionnelle comme dans les autres domaines ondulatoires explorés jusqu'à maintenant. Nous choisissons un réseau périodique de 9×9 nano-cylindres organisés suivant une maille carrée de 50 nm de côté (figure IV.24). De ce fait la dimension transverse du milieu est de 400 nm. Le nombre de nano-cylindres ne peut pas être augmenté arbitrairement à cause des temps de calculs que nécessite une simulation.

Pour vérifier la création de modes collectifs, nous commençons par simuler la situation où l'on place un petit dipôle électrique polarisé suivant Oz (l'axe des cylindres) positionné à 25 nm au-dessus d'un des cylindres. Ce petit dipôle émet une impulsion de 10 fs centrée autour de 500 THz (soit une longueur d'onde dans le vide de 600 nm, ou encore une énergie de 2,07 eV pour utiliser des unités plus conventionnelles en optique), et nous enregistrons le champ rayonné vers le champ lointain. Nous observons des pics de résonance dans le spectre rayonné, et ces pics changent suivant la direction d'observation, ce qui est en accord avec tous les résultats déjà présentés. Le milieu de nano-cylindres agit donc bien comme une métalentille résonante qui permet a priori la création de modes sub-longueur d'onde résonants qui sont convertis en champs propagatifs.

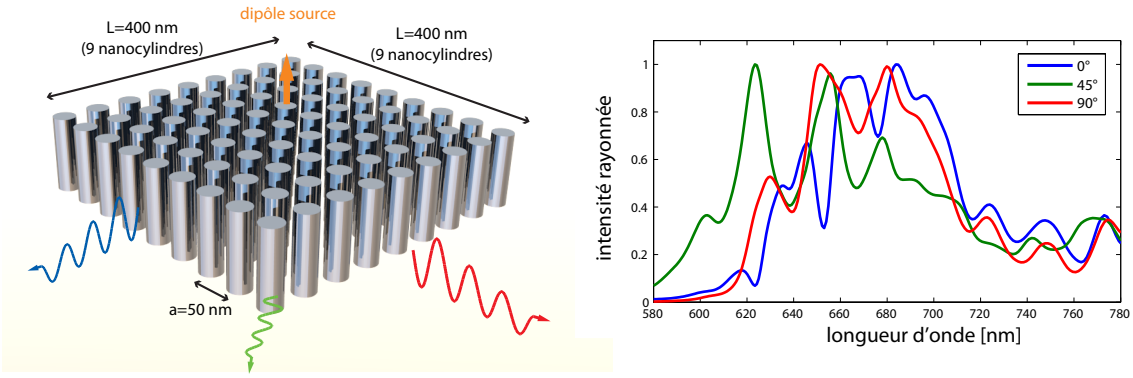

FIGURE IV.24 – Milieu composé de 9×9 nanocylindres et spectre rayonné lorsqu'on place un dipôle à l'extrémité d'un des nanocylindres.

Dans le même temps, nous enregistrons la composante E_z du champ électrique au cours du temps sur un plan situé à 25 nm de l'autre interface du réseau. Les signaux s'étendent sur une durée bien plus longue que l'impulsion initiale (typiquement 500 fs), nouvelle preuve de la nature résonante du milieu. D'autre part, d'un point de vue spatial, ces signaux sont différents en chacun des points du plan d'observation. Il est donc clair que l'on a des champs qui varient sur des échelles sub-longueur d'onde. Tout ceci n'est pas surprenant puisque nous travaillons à la fois en champ proche de la source initiale et du réseau de nano-cylindres.

Pour vérifier que ces variations spatiales sub-longueur d'ondes sont bien associées à des modes du milieu de nano-cylindres, nous effectuons des transformées de Fourier sur les signaux enregistrés en chacun des points pour obtenir la réponse fréquentielle du milieu. Nous représentons sur la figure IV.25 l'amplitude et la phase de certains modes observés. Ceux-ci sont plus compliqués à interpréter que dans les deux expériences précédentes puisqu'il semble que certains modes résultent de la superposition de plusieurs nombres d'onde : à une fréquence donnée il y a plusieurs échelles de longueur. Les champs ne sont pas stationnaires dans le milieu mais évoluent en fonction du temps. La relation de dispersion doit donc être multivaluée. D'autre part les pertes sont relativement importantes et le champ semble décroître depuis la position du dipôle source vers les bords du milieu de fils, ce qui nous empêche d'avoir accès aisément à une relation de dispersion. Cet effet est d'autant plus important que le mode est sub-longueur d'onde comme l'atteste la figure IV.25.

Pour avoir une idée de l'allure de la relation de dispersion, nous nous proposons de reprendre l'étude qui a été faite dans le cas du milieu de fils en micro-ondes. Dans le cas où la permittivité des métaux est de $-\infty$, nous avons mis en évidence l'existence de modes

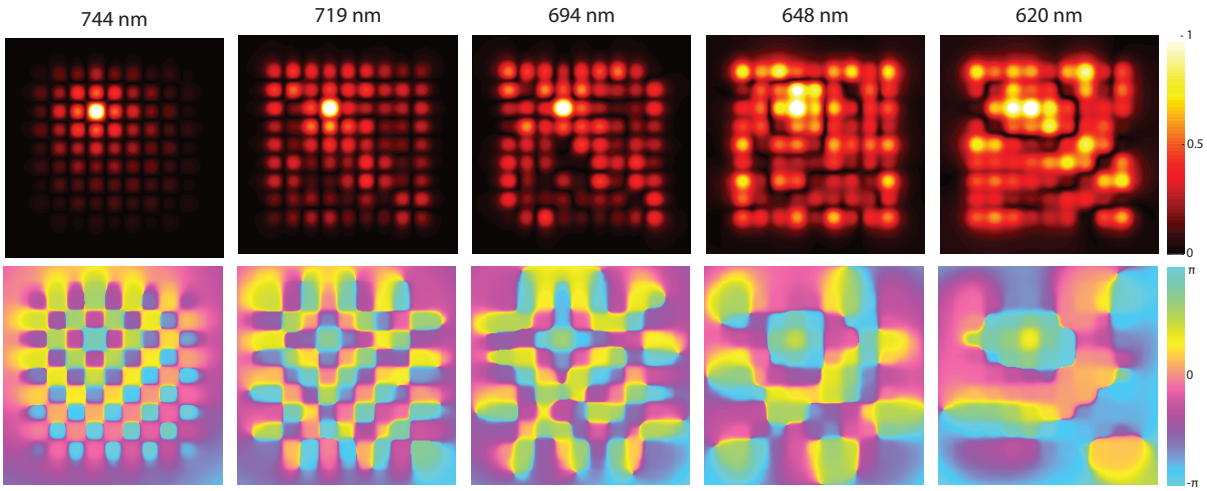

FIGURE IV.25 – Cartes de champ proche électrique E_z en amplitude (haut) et phase (bas) pour plusieurs fréquences mesurées lorsque le dipôle polarisé suivant Oz émet dans le champ proche du réseau de nano-cylindres.

de Bloch TEM qui se propagent de manière adispersive le long des fils. Lorsqu'on prend en compte la valeur finie de la permittivité du métal, ces modes n'existent plus et il faut considérer la propagation de modes hybrides plasmoniques qui ne sont ni transverses électriques ni transverses magnétiques par rapport aux fils. M. Silveirinha [131] a étudié le milieu de fils infini dans le domaine optique et il a montré l'existence de modes propagatifs avec la courbe d'iso-fréquence suivante :

$$k_z{}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{2}\left(k_p{}^2 + k_\perp{}^2 - k_c{}^2 \pm \sqrt{\left(k_p{}^2 + k_\perp{}^2 - k_c{}^2\right)^2 + 4k_\perp{}^2 k_c{}^2}\right) \tag{IV.2}$$

où k_p et k_c sont des constantes qui dépendent des paramètres géométriques du milieu (et font intervenir la permittivité de l'argent), et où nous avons conservé les mêmes notations que précédemment. Le résultat de cette formule avec nos paramètres géométriques à 500 THz est représenté sur la figure IV.26. Sur la figure nous superposons des résultats de simulation numérique obtenus avec *COMSOL*. Il s'agit de simulations bi-dimensionnelles où l'on obtient la constante de propagation hors du plan (k_z) pour différents modes propres du réseau 2D. Cette courbe iso-fréquence montre l'existence de modes sub-longueur propagatifs. Ces modes sont quasiment TEM mais une légère composante non nulle du champ électrique suivant les cylindres subsiste. Lorsqu'on ajoute des contraintes de taille finie sur la longueur des cylindres, on imagine bien que le fait que cette courbe ne soit pas plate comme l'était celle des ondes TEM en micro-ondes va ajouter de la dispersion dans la propagation des modes guidés. En appliquant les mêmes règles de déphasage à la réflexion

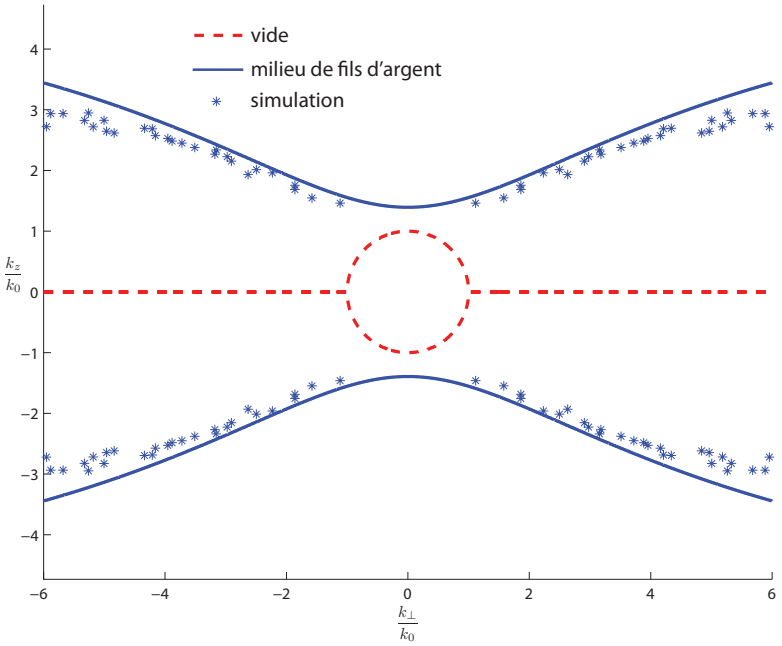

FIGURE IV.26 – Courbe iso-fréquence des modes propagatifs dans un milieu de cylindres infini à 500 THz.

de ces ondes qui se propagent le long des fils lorsqu'ils rencontrent une interface dans la structure de longueur finie (cf Chapitre II), nous obtenons une relation de dispersion des modes guidés. Nous appliquons aussi la règle de résonance Fabry-Pérot le long des fils pour finalement obtenir la relation de dispersion présentée sur la figure IV.27.

Comme nous nous y attendions, la relation de dispersion est multivaluée : pour certaines fréquences on a la superposition de 2 nombres d'ondes. Cette courbe présente un maximum qui correspond à un mode à vitesse de groupe nulle qui peut avoir un certain intérêt en termes d'applications [132, 133] mais ce n'est pas le propos ici. On peut aussi observer des modes guidés à vitesse de phase négative[6] qu'on pourrait utiliser pour d'autres applications.

Cette forme de courbe est due à la dispersion de l'argent sur la gamme de fréquence considérée et peut être vue comme une correction au deuxième ordre par rapport au modèle de résonateurs couplés : le couplage entre résonateurs induit de la dispersion sur les fréquences de résonance, puis cette dispersion est ensuite corrigée en fonction du comportement de l'argent aux fréquences obtenues. Cette forme de relation de dispersion

6. On pourrait croire que c'est la vitesse de groupe qui est négative, mais il ne faut pas oublier que la courbe est symétrique par rapport à $k_\perp = 0$. Il faut donc prendre le vecteur d'onde de sens opposé pour garder une vitesse de groupe positive, mais dans ce cas la vitesse de phase devient négative.

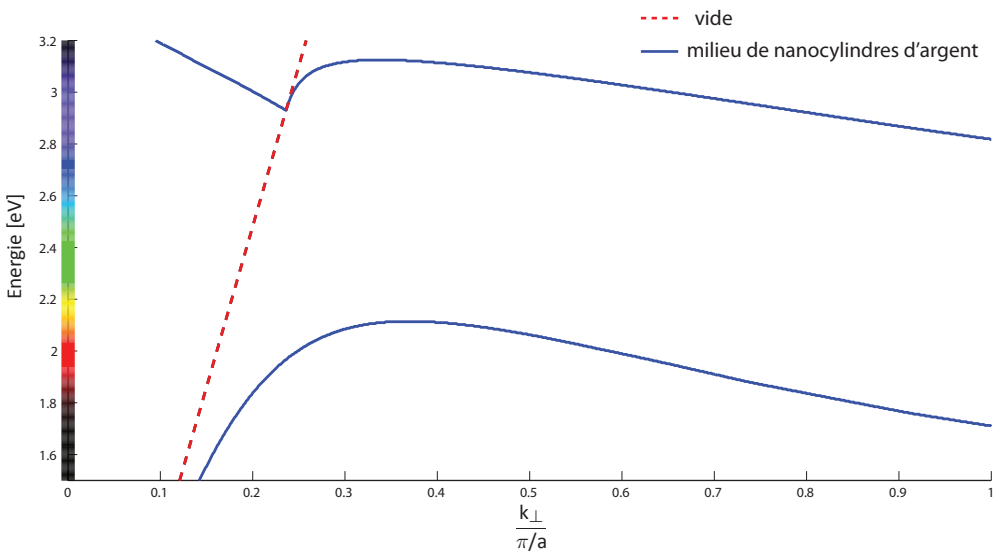

FIGURE IV.27 – Relation de dispersion des modes guidés dans un milieu de nano-cylindres d'argent de longueur finie.

a déjà été observée par Webber et Ford [130] dans la propagation de modes guidés par des chaines de nanoparticules. On note ici que la dispersion induite par le métal joue en notre faveur. En effet, nous avons expliqué au chapitre II que les modes les plus sub-longueur d'onde du milieu de fils ont des temps de vie très élevés dans le milieu car leur vitesse de groupe est quasi-nulle. Ici, la dispersion additionnelle créée par l'argent a modifié la relation de dispersion qui n'est plus plate en bord de bande. La distance spectrale $\delta\omega$ entre deux modes consécutifs est donc augmentée grâce à la dispersion du métal. Ceci nous autorise à avoir un facteur de qualité de pertes Q_{loss} plus petit que dans le cas du milieu de fils en micro-ondes, tout en conservant une séparation fréquentielle des modes. La dispersion contrebalance ainsi en partie les effets de pertes importantes.
Enfin, le dimensionnement de la nanoparticule que nous avons choisi pour notre étude prend tout son sens seulement maintenant. On peut remarquer que les modes les plus sub-longueur d'onde (les grands $k_\perp$) sont maintenant situés au minimum des pertes de l'argent. Le fait de minimiser les pertes pour ceux-ci nous permet d'augmenter nos possibilités en termes d'imagerie/focalisation.

IV.2.3 Focalisation sub-longueur d'onde depuis le champ lointain

Maintenant que nous avons observé l'existence de modes sub-longueur d'onde qui se convertissent en champ propagatif, il ne reste plus qu'à les exploiter. Dans le cas de l'optique, les champs varient sur des échelles de temps très courtes ($1/10^{\text{ème}}$ de femtose-

conde) et la technique du retournement temporel en est encore à ses débuts. Cependant, des travaux récents [36,37,134] menés par trois groupes différents laissent présager que le contrôle spatio-temporel des champs optiques est à notre portée. Que ce soit par utilisation du « pulse shaping » [36], de non-linéarités [37], ou bien par interférométrie spatiale et spectrale [134], chacun des groupes a montré des résultats de focalisation spatio-temporelle à travers un milieu multi-diffusant en optique. Il s'agit de contrôle de degrés de liberté spatio-temporels sans avoir accès au signal temporel directement mais le résultat est le même. Ce que nous allons proposer ici est encore aux limites du possible aujourd'hui, mais il ne fait aucun doute que ces techniques vont progresser rapidement dans les prochaines années. En partant du principe que nous sommes capables de contrôler la phase et l'amplitude d'un champ optique polychromatique, nous proposons d'utiliser dans un premier temps le retournement temporel pour focaliser des ondes sur des taches focales plus fines que la limite de diffraction. Les résultats obtenus en simulation sont les mêmes que ceux obtenus dans les autres gammes de fréquences étant donné la présence des modes sub-longueur d'onde.

En utilisant huit directions d'incidence comme nous l'avons fait jusqu'à présent, nous avons commencé par simuler cette opération en l'absence du milieu de nano-cylindres. Ainsi, nous focalisons de la lumière de façon isotrope ce qui se fait rarement en optique et nous allons comparer nos résultats de super-résolution à cette simulation. D'autre part, cela permet d'avoir une référence pour mesurer l'exaltation du champ électrique en présence des nano-cylindres.

Compte tenu de la relation de dispersion, nous émettons une impulsion (symétrique dans le temps) centrée autour de 425 THz de 10 fs de durée depuis huit directions différentes. Cette configuration où l'on a une ouverture angulaire de 1 et où on contrôle le champ spatio-temporel ne semble pas impossible à réaliser expérimentalement. Avec un jeu de miroir, un unique modulateur de phase et un réseau diffractant, on peut réaliser cette expérience. D'autre part, des lasers émettant des impulsions de cette durée ont vu le jour au début des années 2000 [135–138].

En enregistrant le champ reçu en un point qui serait au-dessus d'un des nano-cylindres pour ces huit ondes planes, nous obtenons huit fonctions de Green. Puis en ré-émettant simultanément depuis les huit directions ces fonctions de Green retournées temporellement, nous obtenons une focalisation spatio-temporelle d'espace libre. La tache focale en énergie pour cette simulation est représentée sur la figure IV.28. Nous mesurons une largeur à mi-hauteur de 340 nm soit $\approx \lambda/2$ pour la fréquence centrale d'émission de l'impulsion. En normalisant l'énergie totale émise à 1, on mesure une intensité électrique au point focal de 1, valeur qui va nous servir de référence.

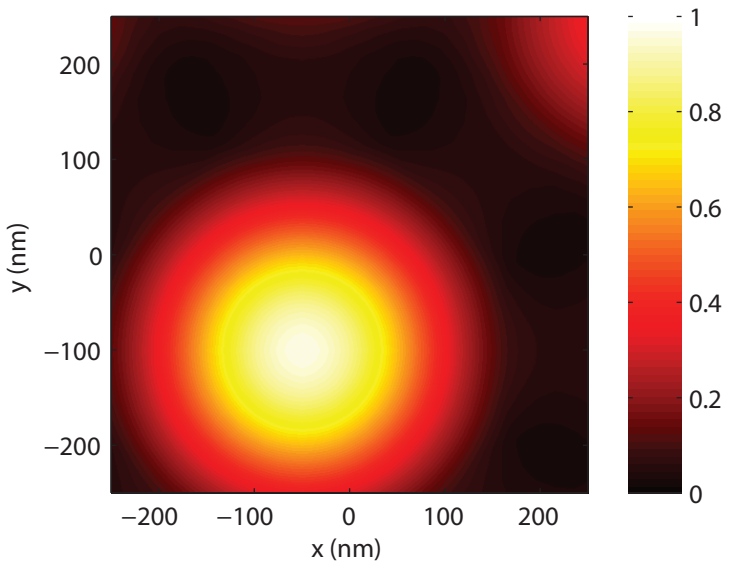

FIGURE IV.28 – Focalisation par retournement temporel en espace libre.

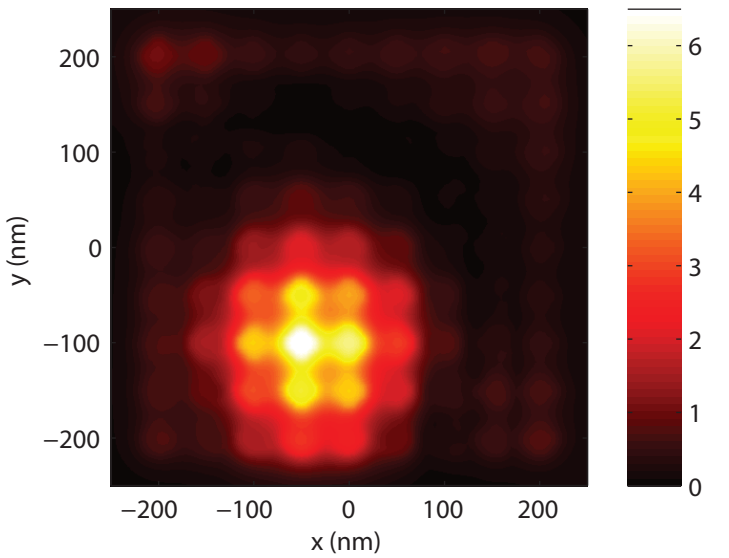

FIGURE IV.29 – Focalisation par retournement temporel au-dessus du milieu de fils.

Maintenant, nous ajoutons le milieu de nano-cylindres, et nous effectuons la même opération de retournement temporel. Le point d'enregistrement des fonctions de Green est situé à 25 nm d'un des nano-cylindres. Nous obtenons une tache focale dont la largeur à mi-hauteur est de 120 nm, soit $\lambda/6$ pour la fréquence centrale de l'impulsion émise (figure IV.29). Cette largeur du pic de focalisation est plus fine que ce qui peut se faire avec les techniques de champ lointain existantes qui utilisent un objectif à immersion [139]. De plus, on aurait pu obtenir de meilleurs résultats de focalisation si on avait augmenté le nombre de degrés de liberté spatiaux. En effet, la nature multivaluée de la relation de dispersion complexifie les diagrammes de directivité des modes de la structure. En augmentant le nombre de sources en champ lointain on contrôle indépendamment plus de modes dans la structure. L'intensité du point focal pour une énergie d'émission normalisée à 1 est 6,5 fois plus importante qu'en l'absence du milieu de fils, ce qui justifie encore une fois le phénomène d'exaltation du champ électrique.

Par retournement temporel, l'énergie focalisée n'est pas localisée sur un unique cylindre puisque les premiers voisins sont inclus dans la tache focale à mi-hauteur. Pour obtenir de meilleurs résultats de focalisation, nous avons effectué une opération similaire à ce que nous avions fait en acoustique, à savoir une méthode d'inversion. Les limites de la focalisation par retournement temporel sont toujours les mêmes puisqu'elle ne compense pas les pertes. Pour compenser les pertes, nous utilisons le retournement temporel itératif [29] qui converge vers l'inversion et qui augmente l'amplitude des modes qui souffrent le plus des pertes. Cette étape nécessite l'acquisition de l'ensemble des fonctions de Green entre les huit directions d'émission et tous les points au-dessus de chacun des nano-cylindres. D'un point de vue expérimental, cette étape nécessitera l'utilisation d'un microscope à champ proche optique à large bande passante, ou bien l'utilisation de l'outil numérique associé à une caractérisation parfaite de l'échantillon par exemple avec un Microscope Électronique à Balayage. Une fois cette acquisition effectuée, on lance la procédure itérative d'inversion et on obtient une banque de signaux qui permet de focaliser en chacun des points au-dessus des nano-cylindres (à 25 nm).

En relançant la simulation avec ces signaux et en émettant simultanément depuis les huit directions d'espace, nous obtenons la tache focale présentée sur la figure IV.30. Comme nous l'avions déjà observé en acoustique, la largeur de la tache focale a été diminuée et nous obtenons désormais une largeur à mi-hauteur de 30 nm, soit $\approx \lambda/20$ pour la fréquence centrale (700 nm) d'émission de l'impulsion (figure IV.30). Désormais la largeur du point focal correspond au diamètre d'un nano-cylindre, mais nous ne pouvons focaliser qu'au dessus des nano-particules, ce qui limite la résolution au pas du réseau.

Ces résultats de focalisation sont vraiment très prometteurs puisqu'à notre connaissance

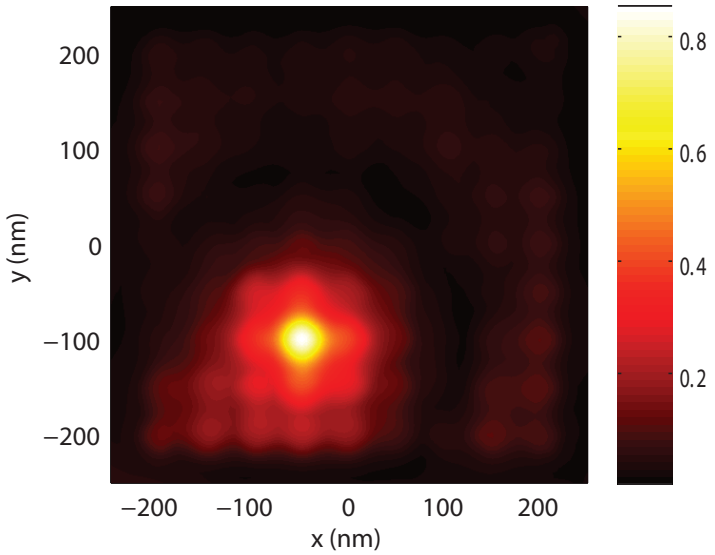

FIGURE IV.30 – Focalisation par retournement temporel itératif au-dessus du milieu de fils.

aucun résultat similaire n'a jamais été obtenu. La superlentille [140] a permis d'obtenir expérimentalement des points focaux dont la largeur à mi-hauteur n'est que de 60 nm [141] en travaillant avec une longueur d'onde de 365 nm. De plus, cette technique ne laisse aucune flexibilité puisque la source qui permet d'obtenir cette super-résolution doit être placée dans le champ proche de la superlentille et déplacée mécaniquement. Ici, il suffit d'émettre des signaux différents pour choisir la position de la tache focale.

Conscients des limites des techniques de nano-fabrication, nous avons aussi simulé le même milieu en ajoutant 10 % de désordre sur la longueur des nano-cylindres, leur diamètre et leur position. Les temps de simulation étant largement plus longs dans ce cas nous n'avons pas mesuré de tache focale numérique, mais nous avons vérifié que le milieu réagit de la même manière que le milieu régulier lorsqu'il est illuminé par une onde plane. Le milieu présente des réponses impulsionnelles qui sont légèrement plus « chahutées » que le milieu régulier mais des modes qui varient sur des échelles sub-longueur d'ondes ont été observés. Les modes propres sont plus compliqués mais conservent leur nature dispersive et sub-longueur d'onde. Nos résultats ne sont pas remis en cause par des points chauds causés par le désordre puisque nous avons vérifié que les réponses impulsionnelles en tous les points du milieu présentaient la même allure que dans le cas du milieu ordonné.

IV.2.4 Échographie sub-longueur d'onde de champ lointain

Si la focalisation présente un énorme potentiel en terme de lithographie, l'intérêt principal de la super-résolution en optique concerne bien sûr l'opération réciproque, à savoir l'imagerie. Outre les techniques de champ proche déjà introduites dans le chapitre II, des techniques de champ lointain basées sur le concept des métamatériaux ou des réseaux de diffraction ont été proposées, en utilisant une étape de conversion d'ondes évanescentes en ondes propagatives par l'utilisation d'un milieu anisotrope [142–144] ou bien en utilisant un réseau diffractant sub-longueur d'onde [145, 146]. Dans le meilleur des cas ces techniques d'imagerie ont montré une résolution de 130 nm. Une technique basée sur l'utilisation d'un réseau diffractant sub-longueur d'onde couplé à un matériau diélectrique de fort indice qui permet de fabriquer un champ variant sur une plus petite échelle que la longueur d'onde a été étudiée numériquement, et pourrait permettre de faire de l'imagerie super-résolue [147]. Enfin, des techniques d'imagerie basées sur des illuminations successives de l'échantillon ont aussi démontré de l'imagerie avec une résolution inférieure à $\lambda/2$ [148, 149]. Ces techniques tirent partie à la fois de la résolution à l'émission et à la réception pour obtenir des détails spatiaux plus fins que la limite de la diffraction.

Ici, comme nous avons été capables de focaliser sur des taches focales bien plus fines que la longueur d'onde, il est certain que l'on peut faire de l'imagerie super-résolue. Pour obtenir une technique d'imagerie de champ lointain sub-longueur d'onde, nous proposons une technique analogue à l'échographie ultrasonore. Grâce à cette technique nous espérons remplacer l'étape de chariotage obligatoire dans la microscopie de champ proche optique par une étape de traitement du signal. Les degrés de liberté spatio-temporels que procure la métalentille résonante permettent de s'affranchir du déplacement matériel d'une pointe unique.

Cette technique d'imagerie nécessite une première étape de caractérisation du milieu de nano-cylindres afin d'apprendre les fonctions de Green entre huit directions d'émission et chaque point au-dessus des nano-cylindres, soit dans notre cas 8×81 fonctions de Green. Nous apprenons aussi dans le même temps les 8×8 fonctions de Green de champ lointain lorsqu'on émet depuis une direction et qu'on reçoit depuis une autre.

Une fois l'acquisition de ces signaux effectuée, le système d'imagerie est calibré et il suffit d'approcher un objet du milieu de nano-cylindres pour en faire son image. En présence de l'objet nous effectuons une acquisition des 8×8 fonctions de Green de champ lointain lorsqu'on émet depuis une des directions et on reçoit sur une autre, soit au total 8 illuminations de l'échantillon. Ce sont ces signaux qui portent l'information sub-longueur d'onde sur l'objet à imager. En réalité, nous ne travaillons pas directement sur ces signaux

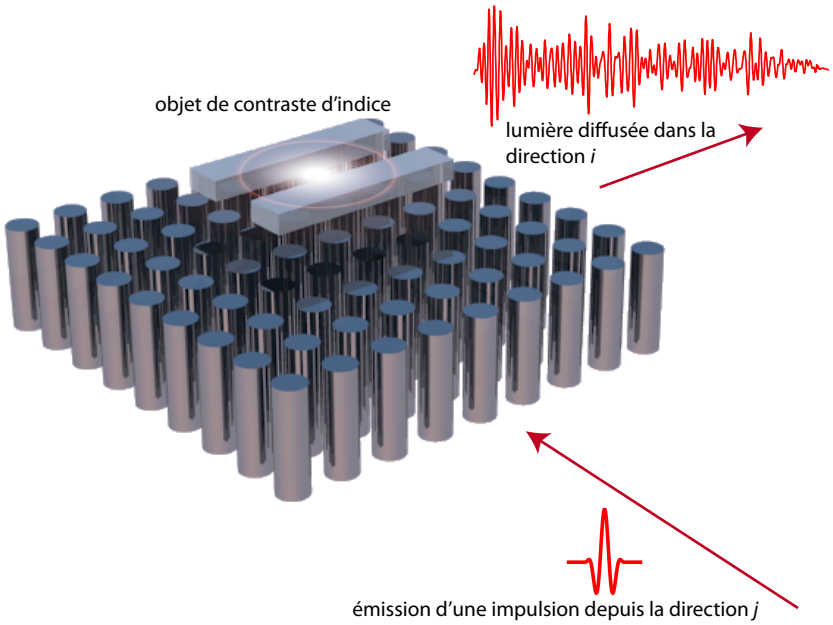

FIGURE IV.31 – Schématisation des signaux acquis lors de l'étape d'imagerie.

mais sur les signaux de différence entre les cas avec et sans objet, pour s'affranchir des effets de réflexion et de diffraction dûs au milieu de nano-cylindres. Ces signaux de différence présentent une énergie qui est 6 fois moins importante en moyenne que les signaux avant soustraction, ce qui est largement mesurable avec les rapports signal à bruit typiques en optique.

Pour réaliser l'image, nous proposons de profiter à la fois de la focalisation à l'émission et à la réception pour obtenir la meilleure résolution et le meilleur rapport signal à bruit possibles. Ces techniques sont utilisées en échographie ultrasonore, à la différence près que les images obtenues correspondent à de la propagation en espace libre et sans milieu résonant. Ces deux étapes de focalisation sont effectuées numériquement sur les signaux acquis à l'aide de la banque de fonctions de Green préalablement enregistrée. Pour obtenir le pixel k de l'image, nous corrélons le signal porteur de l'information sur l'objet reçu dans la direction i lorsqu'on émet depuis la direction j avec les fonctions de Green G_{ik} et G_{jk}. En sommant sur les directions d'émission et de réception nous profitons de la focalisation sub-longueur d'onde à l'émission et à la réception démontrée précédemment. La valeur que l'on donne au pixel de l'image est le maximum dans le temps du signal obtenu. En pratique pour améliorer encore un peu plus la résolution nous n'utilisons pas directement les fonctions de Green pour la corrélation mais des signaux de filtre inverse itératif similaires à ceux présentés pour la focalisation.

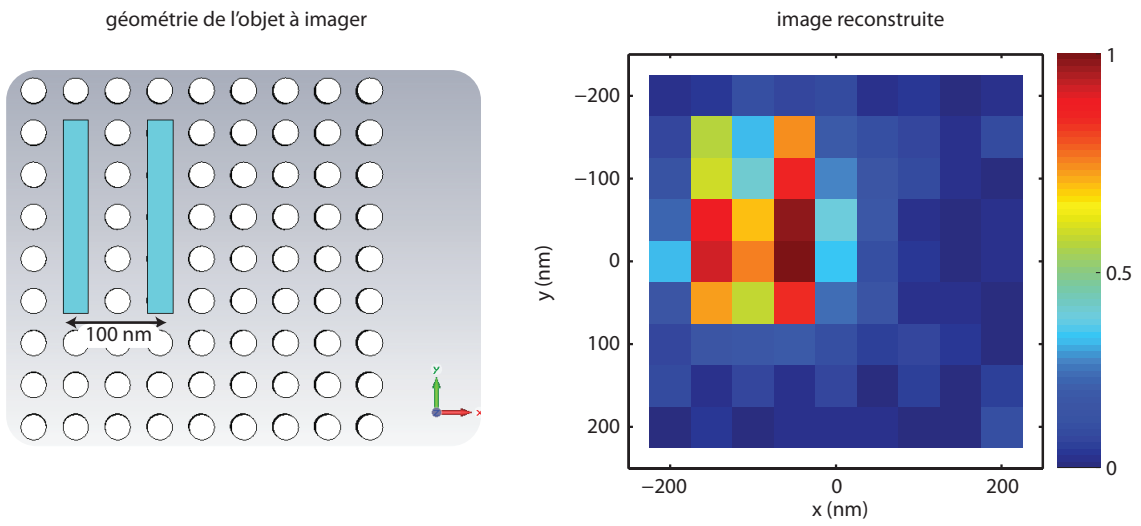

FIGURE IV.32 – Image obtenue pour deux objets séparés de 100 nm.

Nous avons testé cette technique d'imagerie sur des objets de faible contraste d'indice. Nous prenons des objets sub-longueur d'onde d'indice 1,5 que nous positionnons à 25 nm du milieu de nano-cylindres. À partir des signaux enregistrés en champ lointain, nous lançons la procédure d'imagerie avec focalisation numérique à l'émission et à la réception. Pour l'instant nous n'avons pas obtenu l'image d'objets très complexes. Les seules images obtenues correspondent à des objets qui présentent beaucoup de pixels nuls sur l'ensemble du réseau de nano-cylindres. Nous avons tout de même réussi à obtenir l'image de deux objets sub-longueur d'onde séparés de 100 nm, soit $\lambda/7$, pour la fréquence centrale d'émission. Cette image montre bien que la résolution du dispositif est inférieure à $\lambda/7$ puisqu'on observe que les pixels associés aux points entre les deux objets sont de plus faible intensité (figure IV.32). Nous travaillons à imager des objets plus complexes et qui occupent plus de pixels de la zone observée, et il ne fait nul doute que nous pourrons obtenir des résultats prochainement. Faute de temps, ils n'apparaîtront pas dans ce manuscrit mais feront l'objet d'une publication prochainement.

Bien que ces résultats ne soient que numériques, nous avons bon espoir d'en voir un jour une démonstration expérimentale. Tout d'abord, grâce aux expériences menées en acoustique et en micro-ondes, nous savons que le milieu de nano-cylindres se comporte bien comme une « métalentille résonante ». D'autre part, les pertes de l'argent n'ont jamais été négligées dans notre analyse et il ne fait aucun doute que nous simulons une situation proche de la réalité. En revanche, la plus grande difficulté expérimentale va résider dans l'acquisition des fonctions de Green en champ proche du milieu de nano-

cylindres. Approcher une pointe diffusante ou bien une fibre étirée en champ proche du milieu risque de perturber ses modes propres et il n'est pas dit que l'on obtienne une bonne caractérisation de la réponse du milieu. Nous imaginons peut être réaliser cette étape numériquement : on caractérise physiquement le milieu avec une technique d'imagerie super-résolue et ensuite on simule ce milieu pour obtenir les fonctions de Green.
Enfin, notons que notre procédure d'imagerie peut être améliorée. En effet, la présence de l'objet diélectrique modifie la relation de dispersion des ondes dans le milieu. Des méthodes d'inversion basées sur notre méthode pourraient donc être beaucoup plus puissantes que notre reconstruction brutale. De plus, il est possible d'utiliser une métalentille résonante beaucoup plus grande pour imager de plus gros objets. En augmentant le nombre de nano-cylindres, les modes vont se mélanger spectralement, mais présenteront des diagrammes de rayonnement beaucoup plus complexes. On gagnera ainsi en termes de degrés de liberté spatiaux.

IV.3 Conclusion

Le but de ce chapitre était d'exploiter les modes propres qu'un milieu composé de résonateurs identiques supporte. Pour cela nous avons pris un exemple acoustique (un milieu composé de résonateurs de Helmholtz) et un milieu dans le domeaine du visible en optique (un milieu composé de nano-particules d'argent). Dans les deux cas nous avons prouvé qu'il est possible d'exciter des modes qui varient sur une échelle sub-longueur d'onde depuis le champ lointain. Évidemment, chaque mode ayant une fréquence de résonance propre et un diagramme de directivité donné, il a fallu contrôler les degrés de liberté spatio-temporels offerts par ces milieux pour mettre en évidence le contrôle du champ sur une échelle sub-longueur d'onde depuis le champ lointain.
Ainsi, en acoustique, nous avons focalisé des ondes sur des distances égales à $\lambda/25$ en excitant le milieu avec des champs polychromatiques depuis huit directions différentes en champ lointain. Ceci, nous a aussi amené à nous intéresser aux propriétés d'une tache focale qui présente des dimensions aussi petites. Nous avons, grâce à une expérience visuelle, mis en évidence l'exaltation du déplacement acoustique au niveau du point focal, et ceci nous a permis de déplacer des objets grâce à des ondes acoustiques. Nous pensons que cette propriété peut trouver un grand intérêt dans la fabrication de micro-actuateurs avec un nombre d'électroniques indépendantes limité.
Dans le cas du milieu optique, ce qui nous a le plus intéressé a été de réaliser de l'imagerie sub-longueur d'onde depuis le champ lointain. Pour cela, nous avons d'abord dû prouver que nous étions capables de focaliser des champs optiques en-dessous de la limite de la

diffraction. Nous avons alors montré l'obtention, depuis le champ lointain, de taches focales dont la largeur à mi-hauteur est de seulement 30 nm, soit approximativement $\approx \lambda/20$, pour une bande passante centrée autour de 700 nm.
Forts de ces résultats de focalisation, nous nous sommes alors lancés dans l'étude d'une technique d'imagerie de champ lointain qui aurait une résolution inférieure à la limite de la diffraction. Plutôt que d'imager des objets actifs placés dans le champ proche du milieu, nous avons introduit une méthode échographique de champ lointain sub-longueur d'onde. Nous n'avons pas encore obtenu l'image d'objets très compliqués, mais nous montrons que nous avons été capables de séparer deux objets sub-longueur d'onde d'indice 1.5, distants de 100 nm, soit $\lambda/7$. Cette technique n'est qu'une preuve de concept et il très probable que, en faisant une étude paramétrique sur le résonateur qui constitue la maille élémentaire, nous puissions obtenir des résultats meilleurs.
Introduire du désordre dans les fréquences de résonance de chacun des résonateurs constituant le milieu peut aussi mener à des résultats très intéressant. Dans le prochain chapitre, nous n'allons pas introduire ce désordre sur tout l'échantillon mais seulement introduire un défaut. Nous allons voir que cela aussi permet de concentrer les champs sur des échelles très sub-longueur d'onde.

Chapitre V

Exploitation de la bande interdite d'hybridation

Jusqu'à maintenant nous nous sommes intéressés aux ondes propagatives dans un milieu constitué de résonateurs identiques. Ces ondes ont la propriété de pouvoir présenter une échelle spatiale caractéristique bien plus fine que la longueur d'onde en espace libre, et cela nous a permis d'obtenir des résultats de super-résolution en excitant le milieu depuis le champ lointain. Or nous avons vu que ces milieux d'étude présentent une bande interdite d'hybridation que nous n'avons pas encore exploitée jusqu'à maintenant.
Dans cette partie, nous montrons en quoi cette bande interdite peut présenter des avantages. La distance d'atténuation dans cette gamme de fréquence est très faible devant la longueur d'onde et les ondes sont complètement atténuées après seulement quelques résonateurs. Contrairement aux bandes interdites dans les cristaux photoniques et phononiques (ou dans les miroirs de Bragg) où la dimension caractéristique de la maille élémentaire est de l'ordre de la demie longueur d'onde, nous parvenons à atténuer les ondes sur des distances bien inférieures.
À l'instar de ce qui se fait dans les cristaux photoniques à bande interdite, nous nous intéressons à l'introduction d'un défaut dans la structure. En reprenant l'exemple du milieu de fils que nous avons étudié au chapitre II, nous montrons qu'en introduisant un résonateur dont la fréquence de résonance est dans la bande interdite, nous créons un défaut dans la structure. De cette manière, nous mettons en évidence la présence d'une cavité résonante sub-longueur d'onde présentant un facteur de qualité uniquement limité par les pertes ohmiques. De plus, nous montrons que cette bande interdite ne dépend pas de la nature périodique du milieu, mais seulement de la réponse d'un résonateur unique. Ceci permet d'obtenir des résultats similaires dans un milieu qui présente un désordre

spatial.
Comme nous l'avons vu précédemment l'effet Purcell, qui caractérise le taux d'émission spontané d'une source en fonction de son environnement, peut être augmenté en jouant sur le facteur de qualité ou le volume d'une cavité résonante. Dans notre cas, nous pouvons à la fois jouir de facteurs de qualité importants et de volumes modaux très petits, tout ceci résultant en un accroissement très important du facteur du Purcell. Nous soulignons de possibles applications à ces défauts dans les cristaux sub-longueur d'ondes.

V.1 Cristaux photoniques et phononiques

La notion de bande interdite en physique des ondes est issue de la physique du solide. En effet, les fonctions d'onde des électrons d'un hamiltonien prenant en compte un potentiel périodique, qui traduit la présence des noyaux atomiques dans un cristal, font apparaître des gammes de fréquence sans solution [54]. Ces gammes de fréquence sont appelées des bandes interdites. Pour expliquer la présence de ces bandes on doit comprendre l'influence d'un potentiel périodique sur les ondes et on fait donc appel au formalisme de Floquet-Bloch [51, 52]. Cette notion, qui semblait réservée aux électrons, a ensuite été transposée aux ondes en 1987 par E. Yablonovitch [55] donnant ainsi naissance aux matériaux photoniques et phononiques à bande interdite.

V.1.1 Structure multicouche : miroir de Bragg

Nous commençons notre étude des matériaux à bande interdite par le cas le plus simple d'une structure périodique unidmensionnelle présentée sur la figure V.1. Il s'agit d'un matériau multicouche dans lequel on alterne de manière périodique une épaisseur d'un matériau d'indice n_1 et une épaisseur d'un matériau d'indice n_2. Cet arrangement spatial n'est pas une idée nouvelle puisque Lord Rayleigh a publié en 1887 [150] l'une des premières études sur les propriétés optiques des films multi-couches. Comme nous allons le détailler dans cette partie, ce genre de structure peut se comporter comme un miroir (dit miroir de Bragg) dans une certaine gamme de fréquence, et peut « localiser [1] » la lumière si la structure présente des défauts. Ces concepts sont souvent utilisés dans les miroirs diélectriques et les filtres optiques [151].
La méthode classique pour étudier la propagation des ondes dans ce genre de structure est la méthode initiée par Rayleigh. Elle consiste à considérer une onde plane qui se propage

1. On ne parle pas de localisation au sens d'Anderson dans un milieu présentant du désordre, mais du piégeage d'une onde par un défaut unique.

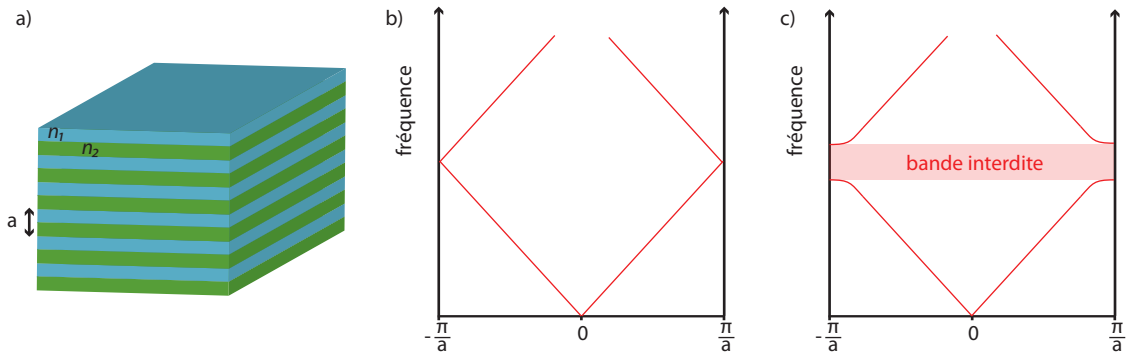

FIGURE V.1 – (a) Géométrie d'un matériau unidimensionnel multicouche. Relations de dispersion sur la première zone de Brillouin lorsque $n_1 = n_2$ (b) et $n_1 \neq n_2$ (c).

dans le milieu et à lui ajouter la somme des ondes réfléchies et transmises à chaque interface. Pour des raisons de généralisation à 2D et 3D, cette méthode a été remplacée aujourd'hui par le formalisme mathématique de Floquet-Bloch [51–53] qui permet de résoudre les systèmes d'équations à coefficients périodiques.

En appliquant les propriétés d'invariance par translation infinitésimale suivant les directions Ox et Oy, ce problème devient un problème de Bloch unidimensionnel. L'invariance par translation infinitésimale suivant z étant rompue, on définit le nombre d'onde de Bloch k dans la direction Oz. Toute solution de Bloch étant périodique, ce nombre d'onde est en fait défini à $2\pi/a$ près (où a est le pas du réseau), et par commodité on se limite souvent à rechercher les solutions dans l'intervalle $[-\pi/a; \pi/a]$, que l'on appelle la première zone de Brillouin.

Considérons des ondes qui se propagent dans la direction Oz, traversant chaque interface avec une incidence normale. La solution recherchée dépend fortement des indices n_1 et n_2 choisis pour constituer le milieu. Lorsque les indices n_1 et n_2 sont égaux la relation de dispersion suit la ligne de la lumière :

$$\omega = \frac{ck}{n} \tag{V.1}$$

Dans ce cas où les indices sont égaux, c'est à dire dans un milieu homogène, on peut se limiter à la première zone de Brillouin (par abus de langage), et on peut tracer une relation de dispersion sur celle-ci en réindexant les solutions en dehors de celle-ci et en remplaçant $k + 2\pi/a$ par k (figure V.1). Lorsqu'on ajoute un léger contraste d'indice, on obtient une solution qui est très proche de la situation précédente à la différence que celle-ci fait apparaître l'ouverture d'une bande interdite à la propagation des ondes. Dans

cette gamme de fréquence il n'y a pas de solution propagative pour les ondes : on parle de bande interdite photonique (respectivement phononique en acoustique).
Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser a cette bande interdite en détail. En effet, de nombreuses applications ont été envisagées depuis la découverte de matériaux qui peuvent inhiber la propagation des ondes. Par exemple, ce genre de milieu, appelé cristal photonique (respectivement phononique), peut agir comme un filtre coupe-bande, en filtrant toutes les fréquences comprises dans la bande interdite. Une cavité qui présente des parois infiniment réfléchissantes peut être créée dans ce cristal, constituant ainsi un mode résonant localisé.
Le formalisme mathématique de Bloch, qui prédit l'apparition de cette bande interdite, se comprend aisément en repartant de l'idée initiale de Lord Rayleigh. Le contraste d'indice induit la création d'ondes réfléchies à chaque interface. Ces ondes interfèrent destructivement avec l'onde incidente pour certaines conditions de longueur d'onde et ceci arrive lorsque le pas du réseau est un multiple de la demie longueur d'onde de l'onde incidente. Ainsi, nous observons l'apparition d'une bande interdite à chaque fois que la relation de dispersion rencontre le bord de la première zone de Brillouin, ou bien son centre. On parle de bande interdite de Bragg. Ceci est vrai dans le cas unidimensionnel mais ne le sera pas nécessairement lorsque nous passerons à 2 et 3 dimensions. Cette propriété donne une indication sur les dimensions caractéristiques d'un tel milieu, puisque l'ouverture d'une bande interdite intervient lorsque la relation de dispersion du milieu composite (on prend n comme une moyenne entre n_1 et n_2) croise le bord de la zone de Brillouin. Cela donne une longueur effective de la maille élémentaire de l'ordre de $\lambda/2n$. Cette bande interdite est donc caractéristique d'un matériau structuré à l'échelle de la longueur d'onde.
La présence d'une bande interdite dans la relation de dispersion signifie qu'il n'y a pas d'onde qui se propage à ces fréquences. Que se passe-t-il alors quand on illumine ce matériau par une onde plane dont la fréquence se situe dans la bande interdite ? En fait, comme nous l'avons déjà vu dans les chapitres précédents, il n'existe aucune solution avec un nombre d'onde réel, cependant on obtient des solutions présentant des nombres d'onde de Bloch purement imaginaires. Les ondes ne se propagent pas dans cette gamme de fréquence mais décroissent de manière exponentielle depuis la surface d'excitation. Ces solutions divergent à l'infini et par conséquent il s'agit de solutions qu'on ne peut observer qu'au niveau d'une discontinuité du matériau considéré : une interface ou bien un défaut. Nous allons maintenant détailler ces deux exemples où l'on peut observer des ondes évanescentes.
Nous considérons donc la situation où le demi-espace $z > 0$ est constitué de ce matériau périodique, et le demi-espace $z < 0$ d'un milieu homogène. Nous supposons qu'une onde

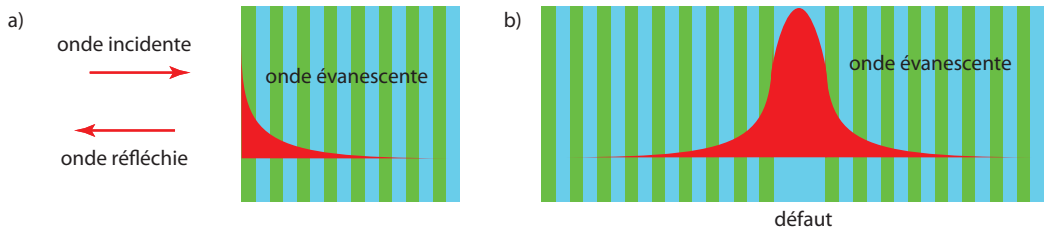

FIGURE V.2 – Deux géométries pour observer les solutions évanescentes : (a) un miroir de Bragg (b) un défaut dans le milieu périodique.

plane incidente venant de $z = -\infty$ rencontre ce matériau en $z = 0$, et nous cherchons la solution de ce problème pour une fréquence comprise dans la bande interdite. Puisqu'il n'existe pas de solution qui s'étende à l'infini dans cette gamme de fréquence, le matériau agit comme un miroir. En revanche, l'onde incidente pénètre dans le miroir sur une distance qui est donnée par la partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch. Cette situation est représentée sur la figure V.2.

Ce type de matériau, qui agit donc comme un miroir sélectif, est appelé miroir de Bragg. Ces miroirs ont grandement participé à l'avènement des lasers. En effet, en fabriquant des miroirs à partir de matériaux entièrement diélectriques, les pertes sont minimisées et des réflectivités supérieures à 99 % peuvent être atteintes [2].

Un autre moyen de briser l'invariance par translation du milieu et d'y ajouter un défaut. Prenons par exemple un défaut qui consiste à augmenter l'épaisseur d'une des couches du milieu (figure V.2). Bien sûr, on comprend aisément que les modes dans le milieu loin du défaut sont ceux d'un milieu parfaitement périodique. L'intérêt est donc de se concentrer sur le voisinage de ce dernier.

Nous cherchons une nouvelle fois la solution du problème pour une pulsation ω dans la bande interdite de la structure. Nous savons qu'il n'y a pas de modes qui s'étendent à l'infini à cette fréquence. Le fait d'avoir introduit un défaut ne change pas cette propriété dans l'ensemble du milieu qui reste périodique dans les zones d'espace en dehors du défaut. Si on a une solution à cette fréquence, elle doit donc décroître de façon exponentielle de part et d'autre du défaut considéré. On retrouve l'idée que le milieu périodique agit comme un miroir à la fréquence considérée.

Si on positionne deux miroirs parallèles entre eux l'un en face de l'autre, les ondes sont « coincées » entre ces deux miroirs, subissant ainsi de multiples aller-retours. Ainsi, nous avons quantification des modes autorisés dans le système. Un premier mode peut exister

2. Rappelons que dans le visible les métaux font de piètres miroirs car ils absorbent beaucoup les ondes.

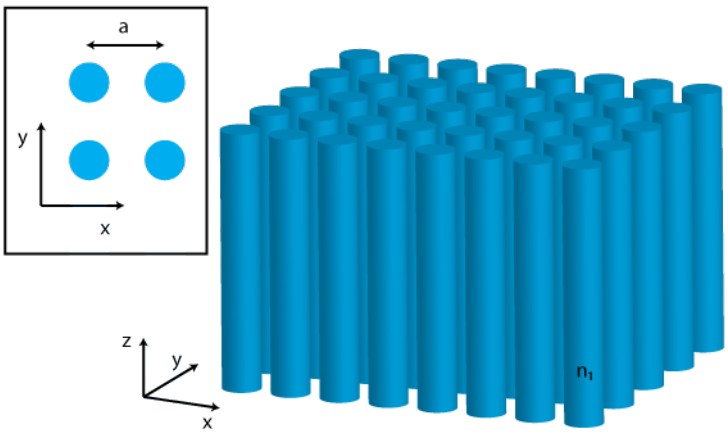

FIGURE V.3 – Un exemple de cristal photonique ou phononique bidimensionnel. Le milieu est infini suivant l'axe Oz et périodique dans le plan xy.

à la condition que la longueur d'onde de l'onde qui subit un aller-retour dans cette cavité résonante soit le double de la distance séparant ces deux miroirs. La dimension caractéristique qui permet l'existence d'un mode localisé doit être d'au moins $\lambda/2$ si l'indice diélectrique du défaut vaut 1. Ceci donne encore un ordre de grandeur des dimensions caractéristiques en jeu dans ce type de matériau : les deux miroirs doivent être séparés d'une distance supérieure à $\lambda/2$ si on veut observer un mode résonant.

V.1.2 Généralisation à 2 et 3 dimensions

Maintenant que nous avons présenté le cas le plus simple du milieu unidimensionnel, nous pouvons généraliser ces résultats à des milieux bidimensionnels et tridimensionnels. Comme dans le cas unidimensionnel, des bandes interdites apparaissent dans les plans de périodicité du milieu.

Dans le cas bidimensionnel, un cristal photonique (respectivement phononique) est périodique suivant deux directions d'espace et invariant par translation infinitésimale suivant la troisième direction. Un exemple typique de ces milieux consiste en une collection de colonnes diélectriques arrangées suivant une maille périodique carrée (figure V.3). Pour certaines valeurs de l'espacement entre les différentes colonnes, ce cristal peut présenter une bande interdite dans le plan xy. Au sein de cette bande interdite, il n'existe toujours pas de modes qui s'étendent à l'infini, et les ondes sont réfléchies si le matériau présente une discontinuité. Contrairement au cas unidimensionnel qui ne permet pas d'avoir une bande interdite pour tous les angles d'incidence possibles, ce cristal bidimensionnel peut

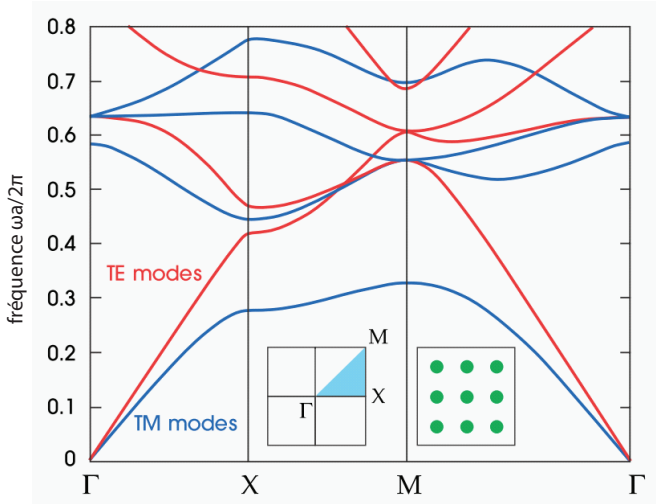

FIGURE V.4 – Relations de dispersion pour un exemple de cristal photonique (figure issue de [56]).

permettre de réfléchir les ondes quel que soit leur angle d'incidence dans le plan xy.
À nouveau, nous invoquons le théorème de Bloch pour obtenir les solutions dans ce genre de milieux. Autant le cas unidimensionnel peut être résolu à l'aide de matrices de transfert, autant, dès que l'on passe à deux dimensions, il est beaucoup plus aisé d'utiliser le formalisme de Bloch. Les modes de Bloch, solutions de la géométrie considérée, sont similaires à ceux obtenus dans le cas unidimensionnel. La seule différence provient du fait que dans le cas présent nous prenons $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$ comme vecteur d'onde de Bloch limité à la première zone de Brillouin, alors que précédemment il s'agissait de k_z.
En optique, dans une géométrie bidimensionnelle, on a aussi coutume de séparer les modes suivant leur polarisation par rapport au plan xy : nous pouvons ainsi séparer les modes transverses électriques (TE) des modes transverses magnétiques (TM). Cette séparation entre les deux types de mode est importante puisque leurs comportements respectifs peuvent être complètement différents [3]. Par exemple, il est tout à fait possible d'observer une bande interdite pour une polarisation mais pas pour l'autre. C'est pourquoi lorsqu'on a une bande interdite commune aux deux polarisation on parle de bande interdite complète.
À titre d'exemple, nous prenons l'exemple du cristal bidimensionnel proposé dans [56] pour un cristal photonique bidimensionnel. Il s'agit d'un arrangement périodique (maille

3. D'ailleurs au chapitre II, nous avons bien vu que les ondes TE et TM n'avaient pas du tout le même comportement dans le milieu de fils.

carrée de côté a) de colonnes d'alumine (ϵ_r=8.9) placées dans l'air, et de rayon r=0.2a. Sur la figure V.4, nous représentons le diagramme de bande obtenu pour les deux polarisations possibles. L'axe des abscisses correspond au vecteur d'onde $\mathbf{k}_\perp$. Lorsque nous nous déplaçons de la gauche vers la droite sur l'axe des abscisses, le vecteur d'onde $\mathbf{k}_\perp$ balaye la première zone de Brillouin du point Γ vers X, puis M, et enfin on revient au point Γ. Ces points caractéristiques de la première zone de Brillouin sont universels et sont représentés sur la figure.

Même s'il est d'usage de ne représenter le diagramme de bande que sur des contours de la première zone de Brillouin, pour avoir une relation de dispersion complète il faudrait tracer des courbes bidimensionnelles. En fait, les physiciens qui s'intéressent à ce type de matériaux sont à la recherche de bandes interdites, et ces points particuliers de la zone de Brillouin correspondent dans l'immense majorité des cas aux bornes supérieures et inférieures des bandes de propagation, délimitant ainsi les bandes interdites. De plus, dans ce cas particulier on peut se limiter à tracer la relation de dispersion dans le triangle coloré sur la figure pour des raisons de symétrie de la maille élémentaire carrée. Si, par exemple, on rompt la symétrie suivant Ox, on doit tracer la relation de dispersion dans le carré du coin droit.

Le résultat de ce tracé de la relation de dispersion permet de mettre en évidence la présence de gammes de fréquence qui interdisent la propagation de chacune des polarisations. Ici, il n'existe pas de bande interdite indépendante de la polarisation, mais de nombreux exemples peuvent être donnés dans lesquels les deux polarisations présentent des bandes interdites pour les mêmes gammes de fréquence. De plus, suivant la direction de propagation considérée, il se peut que l'on se retrouve dans une bande propagative ou bien dans une bande interdite. On parle alors de « stop-band » lorsque toutes les directions de propagation ne sont pas interdites, et de « full band-gap » dans le cas contraire.

Au sein d'une bande interdite, il n'existe pas de solutions propagatives et les ondes décroissent de manière exponentielle. Or nous savons que les ondes évanescentes n'existent que si le milieu présente une discontinuité d'espace. Par conséquent si on veut exploiter la présence de ces ondes évanescentes, il faut introduire cette discontinuité, qui dans le cas bidimensionnel peut prendre 3 formes : une interface infinie avec un autre milieu, un défaut linéaire (infini suivant une direction), ou encore un défaut ponctuel. Ces trois types de discontinuités possibles sont représentées sur la figure V.5. Dans le cas tridimensionnel on ajoute le défaut ponctuel tridimensionnel. Dans la prochaine partie nous discuterons donc de chacune des possibilités qu'offrent ces configurations.

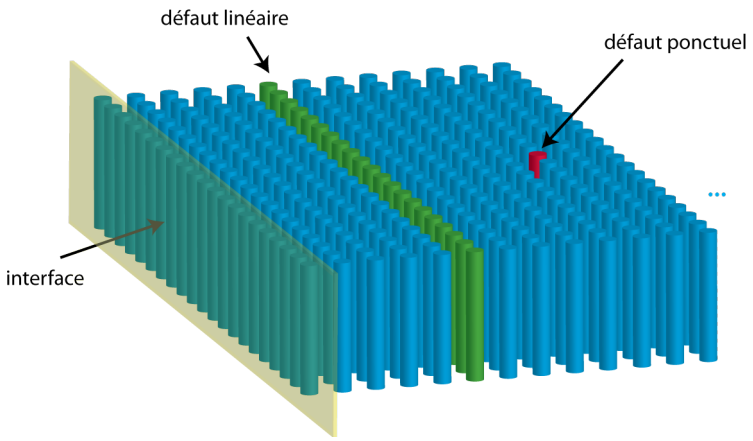

FIGURE V.5 – Différents types de défaut dans un cristal bi-dimensionnel qui permettent d'observer des ondes évanescentes.

V.1.3 Exploitation des discontinuités

Interface cristal photonique/milieu homogène

Commençons notre étude par la discontinuité la plus importante que constitue une interface entre un cristal photonique (phononique) et un milieu homogène. À l'instar du miroir de Bragg dans le cas unidimensionnel, lorsque nous considérons une onde incidente sur ce type de matériau possédant une fréquence dans une bande interdite, nous nous attendons à obtenir des solutions évanescentes. La différence ici, c'est que désormais une bande interdite pour tous les vecteurs $\mathbf{k}_\perp$ peut exister. Bien sûr nous devons garder un nombre d'onde k_z égal à zéro pour conserver cette bande interdite. Cette propriété peut avoir un grand nombre d'applications. Par exemple, on peut utiliser cette interface comme un filtre coupe bande puisqu'une couche de ce matériau ne laisse passer que les fréquences qui ne sont pas interdites par la relation de dispersion. Ou encore, étant donné que nous pouvons avoir des propriétés différentes suivant les polarisations de la lumière incidente, nous pouvons imaginer utiliser ce matériau comme un filtre polarisant.
Une autre possibilité intéressante lorsqu'on utilise une interface avec l'air est l'occurrence de réfraction négative. Cette propriété n'est pas due à la présence d'une bande interdite pour la propagation des ondes, mais à la nature périodique du milieu. En effet, le théorème de Bloch qui permet de résoudre la propagation des ondes dit que toute solution dans ces milieux est le produit d'une onde plane par une fonction qui doit respecter la périodicité du milieu. Ainsi, lorsque le nombre d'onde k est solution, le nombre d'onde $k \pm 2\pi/a$ est aussi présent dans la solution propagative. Lorsque cette onde de Bloch rencontre une interface

avec l'air, elle peut donc donner naissance à toutes les solutions qui satisfont la relation de passage, à savoir la conservation de la composante tangentielle du vecteur d'onde. Par conséquent tous les ordres de diffraction non évanescents sont générés. Cette propriété de réfraction négative a été mise en évidence dans les cristaux photoniques [85, 86] et les cristaux phononiques [87].

Cavité résonante

Le deuxième type de discontinuité que l'on peut rencontrer est un défaut ponctuel dans le cristal. Dans le cas des miroirs de Bragg que nous avons vu précédemment, nous avons pu constater qu'en perturbant une seule épaisseur du milieu nous pouvions créer un unique mode propre localisé au niveau de celui-ci (ou bien un nombre quantifié de modes localisés qui ont des fréquences dans la bande interdite). Ceci pouvait être fait en changeant l'épaisseur d'une des couches du milieu ou bien en changeant son indice diélectrique.
Dans un cas bidimensionnel, nous avons encore plus de possibilités pour créer ce défaut. Si on reprend la géométrie composée de colonnes de diélectrique, nous pouvons supprimer une des colonnes dans le milieu, changer son diamètre ou bien son indice de réfraction, ou encore remplacer cette colonne par un parallélépipède par exemple. En perturbant la géométrie sur une unique position du réseau, on brise l'invariance par translation et on peut créer des modes localisés.
Nous rappelons l'explication fondamentale de cette propriété : les cristaux photoniques (phononiques) réfléchissent les ondes incidentes dans une certaine gamme de fréquence grâce à la présence d'une bande interdite. En supprimant une unique colonne du milieu, on crée une cavité qui est entourée de miroir réfléchissants. Si la cavité a des dimensions qui permettent de supporter un mode piégé entre ces différents miroirs, alors les ondes se retrouvent localisées autour de ce défaut et ne peuvent pas s'en échapper. Remarquons tout de même, que nous sommes resté dans un cas bidimensionnel et le mode piégé reste d'extension infinie suivant Oz [4].
Pour illustrer cette discussion, nous reprenons l'exemple qui a été étudié à la fois expérimentalement [152] et théoriquement [153] au début des années 90 : un réseau périodique carré de colonnes d'alumine dans l'air illuminé par des ondes électromagnétiques dans la gamme micro-onde. Dans la configuration expérimentale, les colonnes n'étaient pas de dimension infinie mais étaient placées entre deux interfaces métalliques. Pour créer un défaut expérimentalement, les auteurs ont remplacé une des colonnes par une colonne ayant

4. Il peut aussi être borné suivant Oz si on travaille dans des guides d'ondes, mais dans ce cas ce n'est pas le même phénomène qui permet de piéger les ondes dans l'autre direction, mais par exemple la réflexion totale interne.

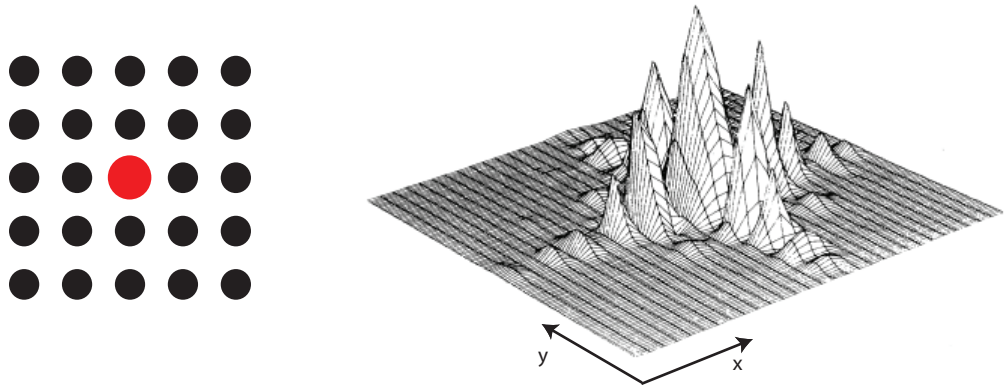

FIGURE V.6 – Cartographie du champ magnétique autour d'un défaut dans un cristal photonique de la gamme micro-ondes (figure reproduite de [152]).

un diamètre différent. En mesurant le champ autour du défaut à l'aide d'une sonde de champ proche, ils ont alors pu constater expérimentalement la présence d'un mode piégé (figure V.6).
Depuis ce travail fondateur, de nombreux groupes ont mis en évidence la présence de modes piégés autour d'un défaut. Aujourd'hui ces modes piégés sont utilisés comme des cavités résonantes qui permettent d'obtenir des facteurs de qualité extrêmement élevés. Ces cavités, qui ont des dimensions de l'ordre de la longueur d'onde, trouvent de nombreuses applications dans la fabrication de filtres [154, 155], de capteurs à haute résolution [156] ou encore de de lasers à faible seuil [157]. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette dernière application un peu plus en détail, mais nous pouvons déjà comprendre l'intérêt de ce genre de cavités dans le but de réaliser des sources lasers : un défaut dans un cristal photonique permet de former une cavité dont le volume modal est de l'ordre de λ^3 et ayant un facteur de qualité supérieur à 10000. Ainsi, en accord avec l'effet Purcell, le taux d'émission spontané d'une source placée dans cette cavité est grandement augmenté.

Guide d'onde

Les défauts ponctuels dans les cristaux photoniques (phononiques) permettent de concentrer le champ en un point particulier. Les défauts linéaires permettent quant à eux de guider les ondes d'un point particulier vers un autre. Tout comme le défaut ponctuel, il y a de nombreuses possibilités pour générer ce défaut, mais très souvent il est réalisé en supprimant une ligne du cristal. Un exemple de ce type de guide d'onde est présenté sur la figure V.7. Grâce à la bande interdite offerte par le cristal, les parois de ce guide agissent comme des miroirs parfaits. Ainsi, si le défaut est suffisamment grand pour supporter un

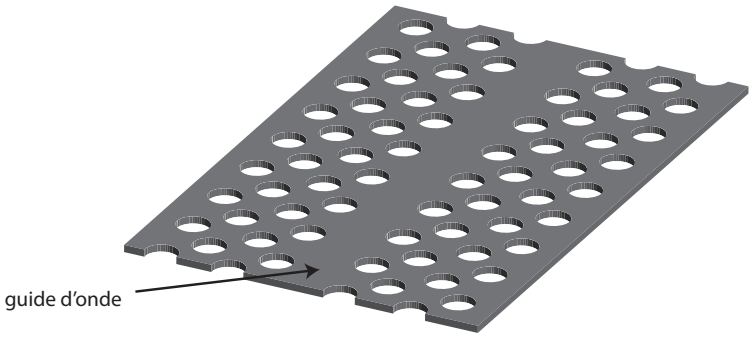

FIGURE V.7 – Exemple de défaut linéaire qui permet de créer un guide d'onde.

mode propre dans la direction transverse au guide, on obtient cette propriété de guidage des ondes [56, 158].
Une propriété intéressante de ces guides est que les ondes peuvent être confinées dans une région constituée d'air. Les fibres optiques classiquement utilisées guident la lumière grâce à un phénomène de réflexion totale interne, et par conséquent la lumière est concentrée dans des régions de fort indice diélectrique. Cette propriété offerte par les cristaux photoniques peut jouer son importance dans de nombreuses applications pour lesquelles on désire diminuer les interactions (absorption, non-linéarité...) avec un milieu diélectrique. Ces guides peuvent aussi présenter une vitesse de groupe extrêmement faible : on peut ainsi ralentir très fortement la lumière ce qui peut présenter des avantages pour la modulation d'ondes lumineuses [159].
De part leur compatibilité avec la filière silicium, les cristaux photoniques bidimensionnels réalisés sur des substrats de silicium sont devenus particulièrement attractifs pour le développement de circuits intégrés photoniques [160, 161]. Dans le but de réaliser des circuits complexes de guidage des ondes, les technologies dans ce domaine permettent aujourd'hui de réaliser des circuits séparateurs (qui divisent le faisceau incident en deux faisceaux) [56], des filtres très sélectifs en couplant ce guide d'onde à une cavité [154, 155] ou des démonstrations de transistor optique [162].
En résumé, les cristaux photoniques ont connu un développement important au cours des 20 dernières années, et ils sont considérés aujourd'hui comme de potentiels candidats pour remplacer les pistes de cuivre dans les circuits électroniques. Tout ceci est possible grâce à la présence d'une bande interdite à la propagation des ondes. Cette bande interdite est due à la nature périodique du matériau et cela impose une condition importante sur le dimensionnement des guides ou cavités que l'on peut concevoir. Dans la partie suivante,

nous nous proposons d'explorer les mêmes pistes d'études que celles qui ont été proposées dans le cas de ces matériaux, grâce à la bande interdite que nous offre un milieu constitué d'occlusions résonantes. Nous aurons les mêmes possibilités grâce à cette bande interdite mais les échelles caractéristiques en jeu deviennent dans notre cas bien inférieures à la longueur d'onde.

V.2 Bande interdite d'hybridation : propriétés et observations

V.2.1 Observations expérimentales des bandes interdites

Nous avons vu précédemment, dans le cas unidimensionnel, que les matériaux contenant des occlusions résonantes offrent une bande interdite d'hybridation. Celle-ci permet d'atténuer les ondes sur des distances très petites comparées à la longueur d'onde. Les milieux que nous avons réalisé expérimentalement étaient de dimension finie, ce qui nous permet d'observer expérimentalement la présence de cette bande interdite très facilement. Ayant toujours utilisé des signaux large bande, nous avons déjà fait l'acquisition des réponses impulsionnelles des milieux étudiés dans cette gamme de fréquences. En reprenant les données expérimentales précédentes nous pouvons effectivement observer la présence de cette bande interdite.

Acoustique

Par exemple, reprenons les données acquises dans le cas du milieu acoustique composé de canettes de soda que nous avons présenté au chapitre précédent. Nous avons commencé l'expérience par acquérir le signal temporel à l'aide du microphone positionné au-dessus de l'ouverture d'une des canettes lorsqu'un des haut-parleurs émet un « chirp » (figure IV.7). En regardant la transformée de Fourier de ce signal nous avions mis en évidence la présence de modes résonants, grâce à la multitude de pics observés en-dessous de la fréquence de résonance propre f_0 d'une canette.
Nous reprenons ce signal temporel et nous affichons sur la figure V.8 sa transformée de Fourier, mais cette fois en échelle logarithmique pour bien observer le comportement au-dessus de f_0. Sur cette courbe expérimentale, on voit nettement la présence d'une bande interdite, puisque le spectre mesuré descend d'environs 60 dB par rapport au dernier mode résonant enregistré.
Reprenons maintenant l'ensemble des fonctions de Green acquises lorsque chacun des

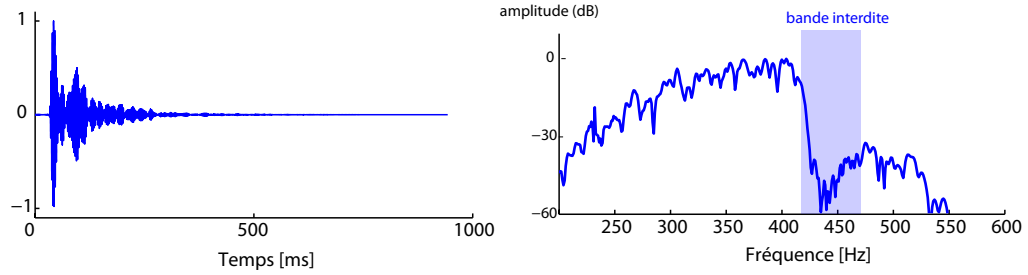

FIGURE V.8 – Signal temporel (et son spectre en échelle logarithmique) reçu par le microphone au-dessus d'une des canettes lorsqu'un haut-parleur émet une impulsion.

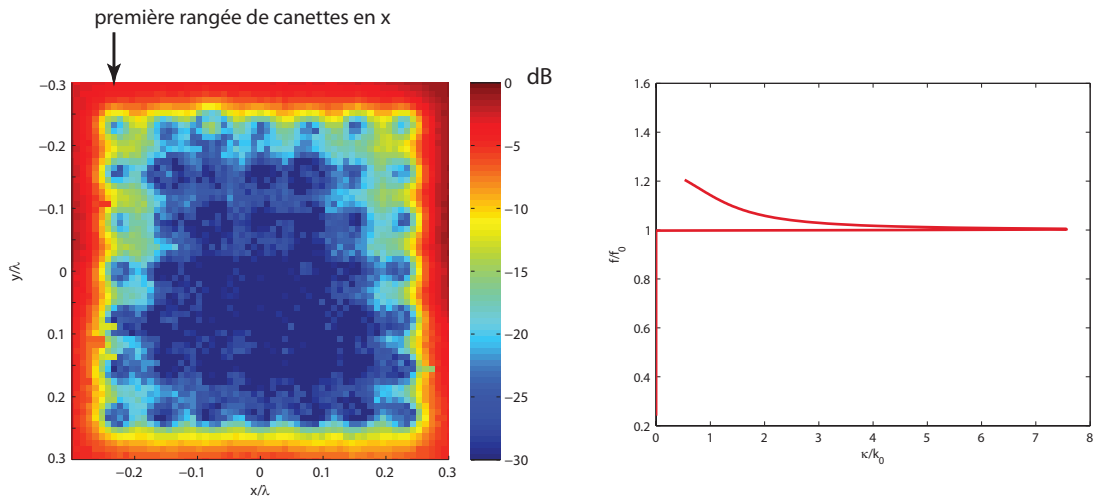

FIGURE V.9 – (gauche) Carte d'intensité du champ acoustique mesurée au-dessus du réseau de canettes pour une fréquence de 1.05 f_0. (droite) Partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch théorique.

haut-parleurs émet et que le microphone se déplace au-dessus du réseau de canettes. Auparavant, nous avions généré les différents diagrammes de rayonnement à partir de la banque de fonctions de Green et observé les modes sub-longueur d'ondes excités depuis le champ lointain. Ici, nous regardons à partir de cette même banque de signaux les fréquences qui sont contenues dans la bande interdite.
Pour bien se rendre compte des distances d'atténuation en jeu, nous représentons sur la figure V.9 une carte d'amplitude du champ mesuré lorsque les 8 haut-parleurs émettent simultanément. D'après cette carte de champ, on peut remarquer que les ondes incidentes sont atténuées de plus de 30 dB après seulement une rangée de canettes, soit une distance égale à $\lambda/12$. Nous sommes ici limités à une dynamique de 30 dB pour des raisons expérimentales. Ceci n'est absolument pas réalisable avec des cristaux photoniques dont le pas du réseau est de l'ordre de la longueur d'onde.
En reprenant la simulation d'un canette dans un guide d'onde, nous pouvons obtenir l'allure de la partie imaginaire κ du nombre d'onde de Bloch dans la bande interdite. Nous représentons sur la figure ce comportement que nous pouvons associer à une bande interdite d'hybridation. La valeur maximale de κ obtenue théoriquement est de 7.5 k_0, ce qui signifie que la distance d'atténuation minimale est de $\approx \lambda/50$. Il est donc évident que les ondes soient complètement atténuées après seulement une rangée de canettes.

Micro-ondes

Prenons un autre exemple qui prouve l'existence de cette bande interdite : le milieu de fils (étudié au chapitre 2). Celui-ci devrait être encore plus spectaculaire puisque le pas du réseau est de l'ordre de $\lambda/70$ à la fréquence de résonance. Malheureusement, les données expérimentales préalablement acquises ne permettent pas d'observer la présence d'une bande interdite puisque l'amplitude des signaux au delà de la dernière fréquence associée aux modes propres est rapidement en dessous du niveau de bruit expérimental.
Nous avons donc mené une nouvelle série d'expériences. Pour cela nous avons changé les dimensions du milieu de fils pour pouvoir travailler dans un environnement anéchoïde à l'échelle du laboratoire. Nous travaillons désormais sur le milieu de fils présenté sur la figure V.10, qui consiste en un arrangement périodique (de maille élémentaire carrée de côté a=2 mm) de 19×19 tiges de cuivres de longueur L=7 cm et de diamètre d=0,5 mm. Ces dimensions correspondent à une résonance théorique de 2,14 GHz pour un fil seul, mais à cause de la structure en Teflon celle-ci est légèrement inférieure expérimentalement. Pour observer la présence de la bande interdite, nous commençons par placer une antenne en champ lointain de l'échantillon et nous positionnons en champ proche du milieu un petit

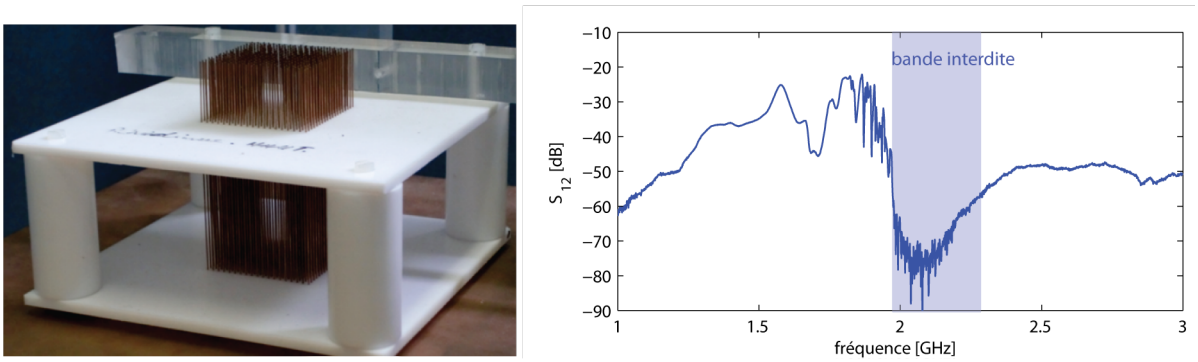

FIGURE V.10 – (gauche) Échantillon expérimental dans le domaine micro-onde. (droite) Mesure du coefficient S_{12} entre une antenne en champ lointain et un monopole au milieu des fils.

monopole sur un plan de masse. Plutôt que de travailler avec des impulsions temporelles, nous travaillons en fréquences à l'aide d'un analyseur de réseau (Agilent N5230C PNA) afin d'avoir une meilleure dynamique. Nous mesurons le coefficient S_{12}, une mesure de l'efficacité de la transmission entre l'antenne en champ lointain et le monopole dans le champ proche des tiges. Sur la figure V.10, nous représentons le résultat de cette opération. Nous observons bien la présence des modes de Bloch sub-longueur d'onde, qui se trouvent en-dessous d'une fréquence de 2 GHz.

Au-delà de cette fréquence nous remarquons une gamme de fréquence sur laquelle le coefficient de transmission a largement diminué. Nous rappelons que le monopole n'est pas adapté en impédance et que par conséquent la valeur intrinsèque du coefficient de transmission n'a pas une grande signification. On remarque tout de même que le paramètre S_{12} se trouve maintenant en-dessous du niveau moyen d'environ 30 dB. De plus, nous savons que les ondes polarisées TE (par rapport aux fils) sont propagatives dans le milieu de fils et nous empêchent d'observer avec une meilleure dynamique le comportement dans la bande interdite.

Ces premières observations expérimentales de la bande interdite dans ces matériaux nous permettent d'envisager les mêmes propriétés de guidage et de cavités résonantes que les cristaux photoniques. Pour cela, plutôt que mesurer les bandes évanescentes à partir d'une interface avec l'air, nous allons tenter d'ajouter une cavité résonante dans le milieu.

V.2.2 Bandes interdites dans les cristaux désordonnés

Mise en évidence d'une bande interdite dans un milieu désordonné

Pour réaliser une cavité dans le cas des cristaux photoniques, nous avons vu qu'il suffisait de briser l'invariance par translation du milieu. Pour cela, on peut par exemple retirer un élément du réseau périodique. En réalisant la même opération dans le cas du milieu de fils présenté dans la partie précédente on n'observe pas la présence de mode résonant localisé au niveau de ce défaut.

Cette observation expérimentale nous amène à revenir un peu plus en détail sur la nature de la bande interdite dans nos matériaux. En brisant l'invariance par translation du milieu on ne crée pas de cavité, mais on observe toujours la présence de la bande interdite. Nous savons que la bande interdite est essentiellement due à la présence des occlusions résonantes dans le milieu. Par conséquent nous nous proposons de briser encore un peu plus l'invariance par translation du milieu et ainsi créer un milieu contenant des résonateurs sub-longueur d'ondes identiques mais distribués de manière aléatoire spatialement.

En reprenant l'exemple des SRR que nous avons étudié au chapitre III, nous allons mettre en évidence que la bande interdite subsiste à ce désordre spatial. Au lieu d'organiser les 40 SRR de manière périodique dans le guide d'onde, nous les disposons de manière aléatoire suivant l'axe du guide. Une image de la position des résonateurs dans le guide d'onde est donnée sur la figure V.11.

Pour obtenir le comportement de cette chaîne aléatoirement distribuée, nous émettons une onde plane venant de la gauche et obtenons les solutions fréquence par fréquence. Sur la figure V.11 nous représentons en image codée en couleur la transformée de Fourier spatiale du champ magnétique le long de la chaine pour les solutions obtenues. Le désordre sur la position des résonateurs avait été choisi comme un écart par rapport à la position d'un milieu périodique donc on retrouve légèrement les harmoniques du nombre de Bloch de la première zone de Brillouin. Sur cette relation de dispersion nous superposons la relation de dispersion théorique obtenue à partir du coefficient de transmission d'un unique résonateur dans le guide d'onde. Le pas spatial choisi pour obtenir cette relation de dispersion théorique est $a^* = D/(N-1)$ (où D correspond à la longueur totale de la chaine de N résonateurs). On peut noter un très bon accord entre les deux relations de dispersion obtenues.

Lorsqu'on regarde cette relation de dispersion de plus près, on s'aperçoit que l'on observe toujours la présence d'une bande interdite à la propagation au-dessus de la fréquence f_0 comme le prédit la théorie pour les milieux périodiques. Cette bande interdite a résisté au désordre spatial alors que la bande interdite de Bragg, due à la périodicité du réseau

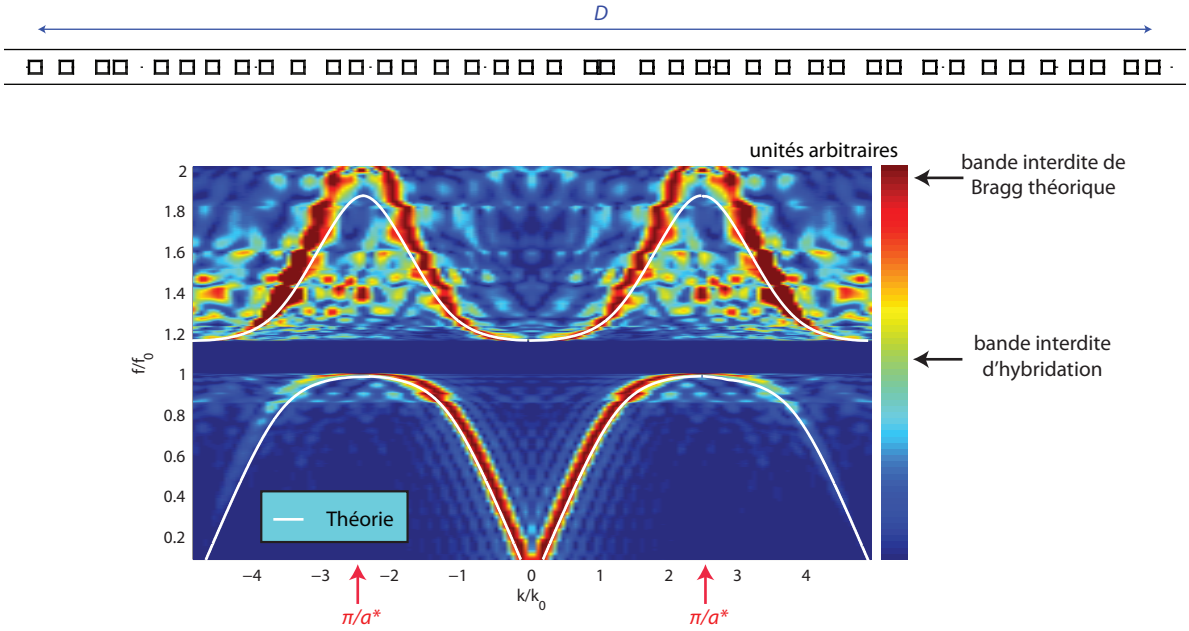

FIGURE V.11 – Géométrie de la chaîne de SRR distribués de manière aléatoire dans le guide. Nous représentons la transformée de Fourier spatiale des solutions dans la chaîne de résonateurs, sur laquelle nous superposons la relation de dispersion d'une chaine périodique de pas $a^* = D/(N-1)$ (obtenue à partir du coefficient de transmission d'un résonateur et de la formule III.18).

et qui aurait du apparaître autour de 1.8 f_0, a complètement disparu.
Pour étudier plus en détail le comportement des solutions au sein de la bande interdite, nous traçons sur la figure V.12 le coefficient de transmission au travers de la chaine de résonateurs en échelle logarithmique. Il s'agit d'une simulation sans pertes et la valeur de -600 dB est complètement folklorique, mais ce coefficient de transmission montre bien la présence d'une bande interdite au-dessus de la fréquence f_0 que le modèle du milieu périodique théorique prédisait. En plus de cette bande interdite, le coefficient de transmission présente de nombreux zéros que l'on peut attribuer à des phénomènes de localisation dans un milieu désordonné unidimensionnel. En revanche, on observe bien à nouveau sur cette figure que la bande interdite de Bragg n'apparaît plus dans le milieu aléatoire.
Sur la figure, nous représentons également deux solutions obtenues pour des fréquences au sein de la bande interdite. Celles-ci montrent la longueur caractéristique d'atténuation obtenue dans cette bande interdite. En réalité nous n'avons pas besoin d'un milieu composé de 40 résonateurs pour diminuer sensiblement le coefficient de transmission, et la présence de très peu de résonateurs suffit à atténuer significativement les ondes.
Ceci se comprend aisément lorsqu'on invoque le comportement de type Fano du coefficient

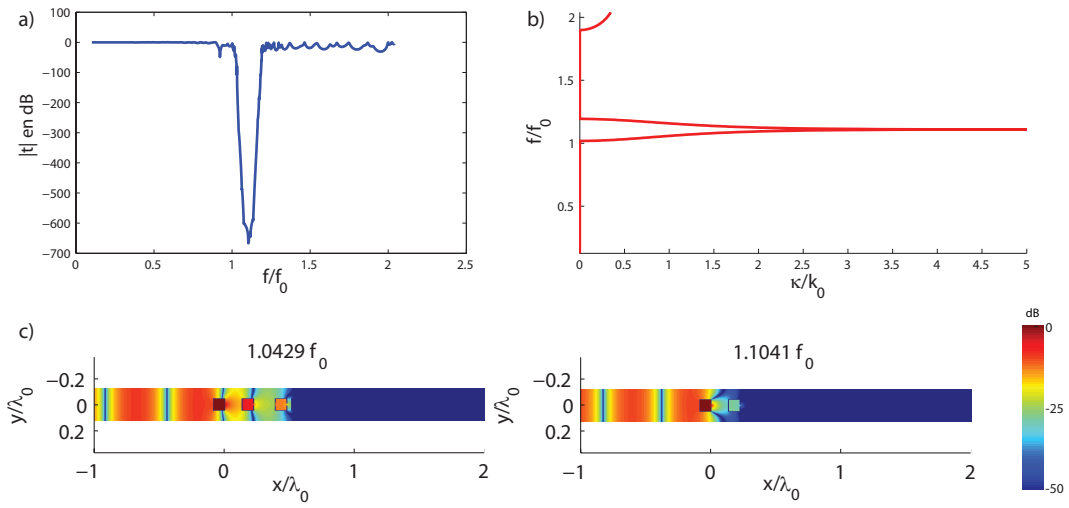

FIGURE V.12 – (a) coefficient de transmission en bout du chaîne. (b) Comportement de la partie imaginaire du nombre d'onde de Bloch pour un milieu périodique de pas égal à a^*. (c) Carte du champ magnétique pour deux fréquences dans la bande interdite.

de transmission. Lorsque le résonateur répond en opposition de phase par rapport à l'onde plane incidente, cela résulte en une annulation de l'onde diffusée vers l'avant. Ainsi, chaque résonateur ayant le même comportement, cet effet est cumulatif le long de la chaine et se traduit par la conservation de la bande interdite, même en présence de désordre sur la position de chacun des résonateurs.

Ceci montre la propriété intéressante de cette bande interdite d'hybridation : c'est la résonance intrinsèque des résonateurs et non pas la périodicité du milieu qui lui donne naissance. En réalité, on peut trouver plusieurs exemples de milieux aléatoires composés de résonateurs identiques qui présentent une bande interdite d'hybridation. Par exemple, en acoustique, Devaud et ses collaborateurs [163, 164] ont observé la présence de cette bande interdite dans un milieu composé d'eau et d'un nuage de bulles monodisperses. Une bulle agit comme un résonateur acoustique sub-longueur d'onde : le gaz contenu dans la bulle est équivalent à une masse oscillante retenue par un ressort donné par la tension de surface de la bulle. Lorsque les bulles constituant ce milieu sont identiques, on observe la présence d'une bande interdite au-dessus de la fréquence propre de résonance d'une bulle. D'autres observations théoriques et expérimentales de cette bande interdite dans des milieux acoustiques ont été faites [90–93].

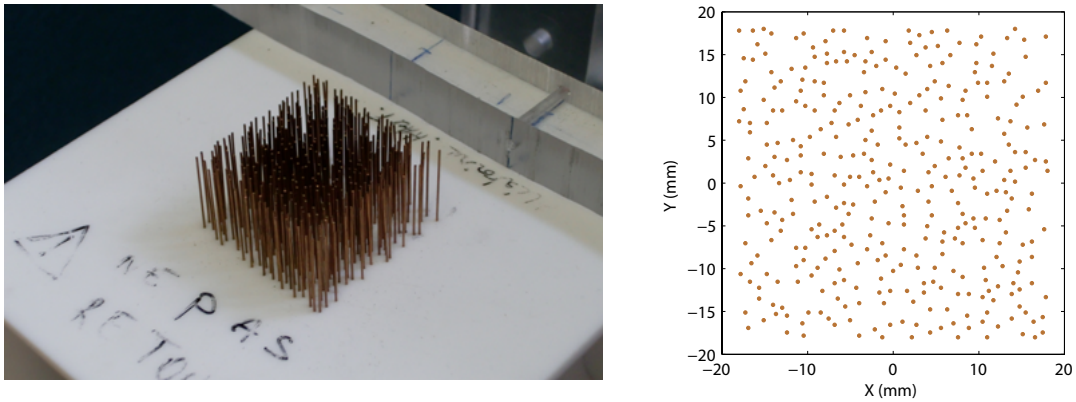

FIGURE V.13 – Échantillon expérimental avec désordre sur la position des résonateurs (représenté à droite) dans le domaine micro-onde.

Observation expérimentale

Pour observer cette bande interdite dans un milieu qui présente du désordre sur la position nous reprenons le milieu de fils. Nous avons réalisé un échantillon expérimental qui présente les mêmes dimensions que le milieu périodique vu précédemment et le même nombre de tiges de cuivre, mais la position de chacune d'entre elle est complètement aléatoire. Une photo de cet échantillon est présentée sur la figure V.13. Dans cet échantillon, les dimensions sont significativement réduites par rapport au cas des SRR que nous venons de voir en simulation puisque, la longueur des tiges étant de 7 cm, la distance moyenne entre les différents résonateurs composant le milieu est de l'ordre de $\lambda_0/70$.
À partir de cet échantillon expérimental, nous réalisons la même expérience que précédemment pour observer la présence d'une bande interdite au-dessus de f_0. Nous plaçons une antenne rayonnante en champ lointain et un petit monopole à une extrémité d'une des tiges centrales du milieu de fils. À l'aide de l'analyseur de réseau, nous mesurons le coefficient de transmission S_{12} entre les deux antennes (figure V.14). Comme dans le cas du milieu périodique, nous observons une gamme de fréquence sur laquelle le coefficient de transmission a largement décru. Il est tout de même difficile d'observer de manière plus efficace l'influence de cette bande interdite, puisque, comme dans le cas du milieu périodique, les ondes TE (par rapport aux fils) ne subissent pas l'influence de cette bande interdite et par conséquent limitent la dynamique d'observation.
Sur la figure, on peut aussi remarquer une propriété intéressante que nous n'avons pas étudiée dans les chapitres précédents concernant les milieux composés de résonateurs. En effet, nous observons la présence de pics résonants en-dessous de la fréquence f_0. Ces pics

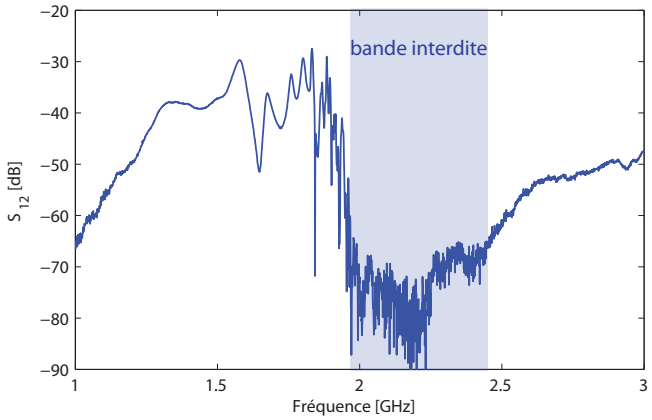

FIGURE V.14 – Mesure du coefficient S_{12} entre une antenne en champ lointain et un monopole au milieu des fils.

correspondent aux modes sub-longueur d'onde que nous avons exploité dans les chapitres précédents qui, eux-aussi, résistent au désordre. Nous n'avons pas mesuré en détail leurs profils mais, en regardant la manière dont la largeur des pics diminue au fur et à mesure que l'on se rapproche de f_0, nous savons qu'ils suivent le même comportement que ceux observés dans les milieux périodiques. En revanche nous ne pouvons plus associer un unique nombre d'onde à un mode propre. Finalement le désordre sur la position des résonateurs ne détruit aucune des propriétés que nous exploitons : la bande interdite et les modes résonants sub-longueur d'onde subsistent en présence de désordre.

V.3 Exploitation de la bande interdite

V.3.1 Comment générer un défaut dans un cristal sub-longueur d'onde ?

Dans la partie précédente nous avons vu que le fait de briser l'invariance par translation du milieu ne permet pas de créer des modes localisés dans un milieu composé de résonateurs identiques. Et cela est bien logique : pour créer une cavité en enlevant un fil, il faudrait que le vide ainsi généré permette l'établissement d'une onde stationnaire. Compte tenu des dimensions sub-longueur d'onde mises en jeu, cela est bien sûr impossible. Par conséquent il faut trouver une autre solution pour tirer profit de cette bande interdite localement.
Pour cela il faut revenir à ce que signifie une bande interdite en termes de densité d'états (« Density of States » en anglais, DOS). Cette quantité correspond au nombre de modes

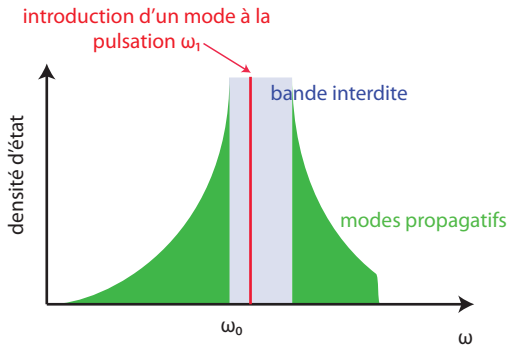

FIGURE V.15 – Densité d'état et introduction d'un mode dans la bande interdite dans un milieu contenant des occlusions résonantes.

autorisés par intervalle de fréquence $\delta\omega$. En regardant le comportement de la relation de dispersion, on comprend aisément que la densité d'états diverge en s'approchant de la bande interdite. En revanche, au sein de celle-ci, il n'y a pas de solution puisqu'en l'absence de discontinuité d'espace les ondes évanescentes ne sont pas solution de l'équation d'onde dans ce milieu. Si on veut introduire un mode dans cette bande interdite, il faut donc introduire un état possible dans cette bande interdite. L'idée intéressante que nous proposons dans ce chapitre est d'introduire un résonateur dont la fréquence de résonance propre est dans la bande interdite (figure V.15).

Pour cela, nous reprenons notre exemple unidimensionnel consistant en une chaine linéaire de SRR dans un guide d'onde. Nous prenons dans ce cas un chaine composée de 31 SRR périodiquement espacés et nous remplaçons le 16ème résonateur par un résonateur qui présente une fréquence de résonance dans la bande interdite. Pour cela nous augmentons légèrement l'ouverture de l'anneau métallique. Sur la figure V.16, nous représentons le coefficient de transmission en bout de chaine en fonction de la fréquence. Ce coefficient de transmission fait apparaître la présence de la bande interdite. Au sein de celle-ci, nous observons un pic de transmission que l'on peut associer à un effet tunnel résonant. Encore une fois les valeurs intrinsèques du coefficient de transmission n'ont pas une grande signification.

Sur la figure, nous représentons la carte du champ magnétique à la fréquence correspondant à ce pic de transmission. L'amplitude du champ au niveau du résonateur dont nous avons légèrement augmenté la fréquence de résonance est plus élevée que partout ailleurs dans le milieu : nous avons réussi à créer un mode localisé spatialement, et donc une cavité de type défaut dans un cristal à bande interdite d'hybridation.

Le résultat de cette simulation permet d'envisager l'introduction d'un défaut dans n'im-

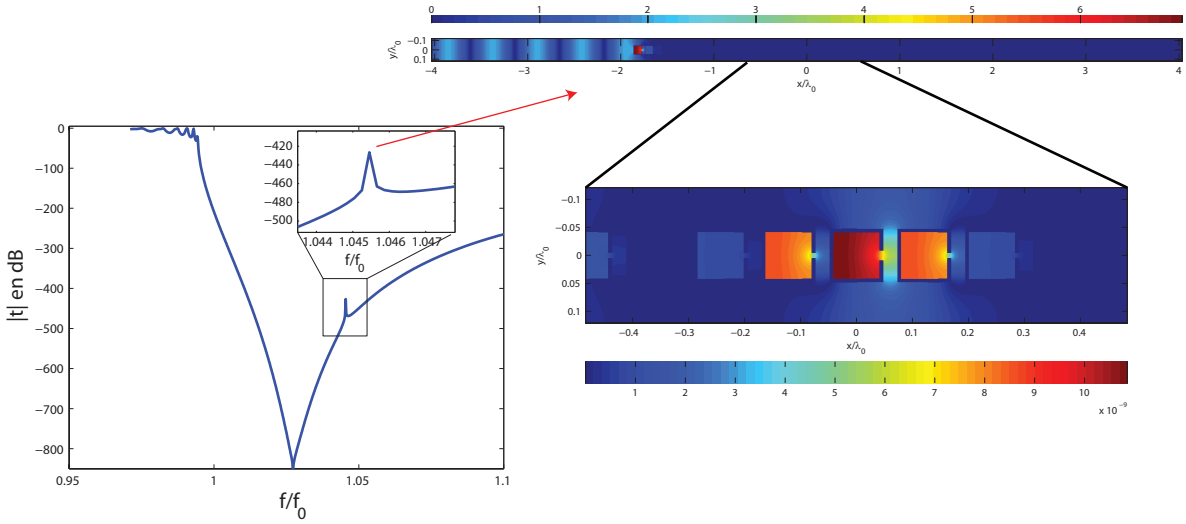

FIGURE V.16 – Coefficient de transmission (à gauche) et carte de la valeur absolue du champ magnétique à la fréquence notée par la flèche lorsqu'on introduit un résonateur dont la fréquence est dans la bande interdite d'une chaine de 31 résonateurs. Les échelles de couleur changent entre les deux cartes de champ.

porte quel matériau présentant une bande interdite. La présence d'une bande interdite pour la propagation des ondes assure que le mode ainsi créé est localisé au niveau du résonateur qui a changé de fréquence de résonance. Ainsi, pour créer une cavité résonante dans ce type de milieux, il suffit de faire « tomber » la fréquence de résonance d'un unique résonateur dans la bande interdite des autres. Nous notons que les défauts étudiés dans le domaine des cristaux photoniques usuels sont finalement obtenus de la même manière. Cependant, les dimensions mises en jeu sont plus grandes et un vide de $\lambda/2$ permet l'établissement d'un mode stationnaire. Nous soulignons également que cette approche n'est pas tellement compatible avec la notion de couplage en champ proche des métamatériaux ou celle des milieux effectifs. En effet, si tous les SRR étaient couplés les uns aux autres en champ proche, modifier un SRR devrait créer un autre mode, et pas une cavité. De même, si on considère un milieu effectif, la contribution du SRR modifié ne devrait-elle pas être négligeable ?

V.3.2 Démonstration expérimentale d'une cavité sub-longueur d'onde

Pour observer expérimentalement l'introduction d'un mode localisé dans un matériau qui présente une bande interdite d'hybridation, nous reprenons l'exemple du milieu de fils en

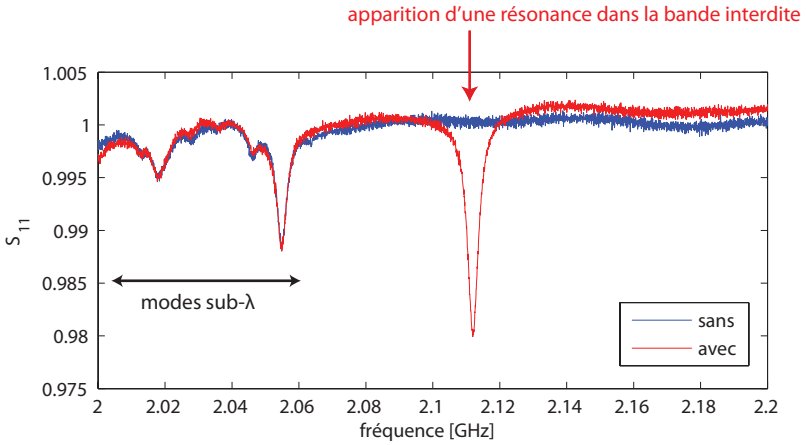

FIGURE V.17 – Mesure du paramètre S_{11} dans le milieu de fils en présence (et en l'absence) d'une tige plus courte que les autres.

micro-ondes. Le résonateur élémentaire dans ce milieu est un fil métallique qui présente une résonance théorique lorsque sa longueur est un multiple de la demie longueur d'onde d'excitation. Par conséquent, introduire un résonateur dont la fréquence de résonance se situe dans la bande interdite créée par les autres résonateurs revient à introduire une tige plus courte.

Expérimentalement, nous commençons notre étude en travaillant sur le milieu périodique. La tige du centre est remplacée par une tige de longueur 67 mm, soit 3 mm de moins que les autres tiges constituant le milieu. Nous alignons la tige avec les autres dans le plan xy et par conséquent ce défaut est légèrement asymétrique par rapport à la direction Oz.

Pour observer le comportement au niveau du défaut, nous prenons un monopole que nous positionnons au niveau de ce défaut, et nous mesurons le paramètre S_{11}. Lorsque ce paramètre décroît par rapport à son niveau original de 1, cela signifie qu'une partie de l'énergie envoyée dans le monopole ne revient pas, ce qui traduit la présence d'un mode dans la structure. Sur la figure V.17 nous représentons le résultat de cette mesure. Nous superposons sur la figure le résultat de la mesure en l'absence du défaut. En comparant les deux courbes expérimentales, nous observons l'apparition d'un pic de résonance au-dessus de f_0. Nous avons donc créé un mode dont la fréquence de résonance est dans la bande interdite du matériau périodique. Ceci confirme le résultat de la simulation quant à la présence d'une résonance dans la bande interdite. De plus, les autres résonances que l'on observe sont inchangées entre les deux situations car ils correspondent aux modes sub-longueur d'onde.

Dans un modèle classique de résonateurs couplés nous aurions interprété les résultats

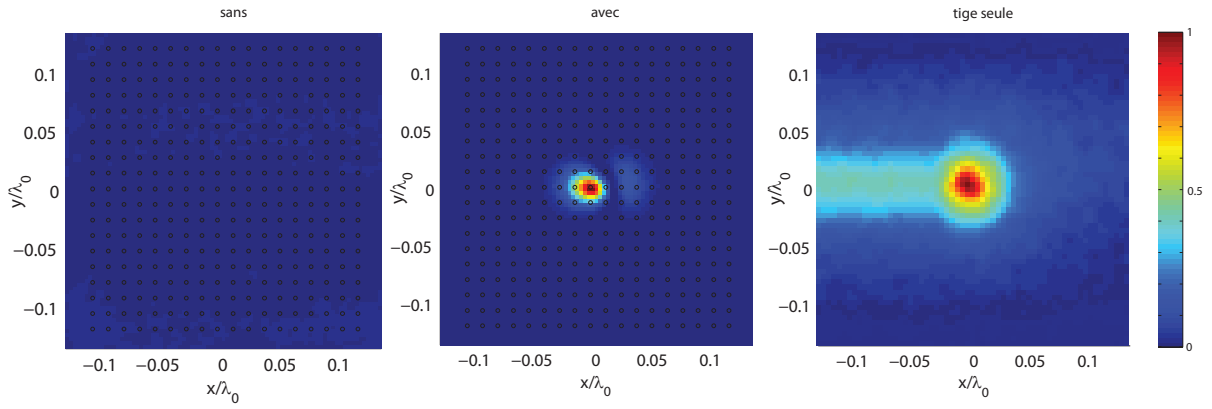

FIGURE V.18 – Carte spatial de la mesure du paramètre S_{11} (on représente en fait $1-S_{11}$ en unités renormalisées) avec et sans défaut dans le milieu à la fréquence de $2,12$ GHz. À titre de comparaison le confinement spatial pour une tige seule en espace libre est aussi représenté sur la figure (dans ce cas la fréquence est de 1.96 GHz).

différemment. On aurait pu penser que la modification d'un des résonateurs change le couplage entre les résonateurs et crée un mode collectif résonant dont la fréquence est différente. Pour bien montrer que dans notre cas le mode est piégé dans la bande interdite créée par les autres fils constituant le milieu, nous effectuons la même mesure que précédemment en déplaçant le monopole dans le plan xy. Ainsi, nous cartographions le profil spatial de ce mode.

Sur la figure V.18, nous représentons le résultat de cette opération pour la fréquence de $2,12$ GHz qui correspond au pic observé sur le paramètre S_{11}. Nous représentons aussi le résultat obtenu en l'absence du défaut à titre de comparaison. Nous pouvons remarquer que le mode correspondant à l'introduction de la tige plus courte est localisé au niveau de celle-ci. Contrairement à un couplage entre tous les résonateurs qui aurait créé un mode délocalisé sur l'ensemble du milieu, le mode est confiné au niveau du défaut sur des dimensions caractéristiques qui sont très largement inférieures à la longueur d'onde en espace libre. En effet, le paramètre S_{11} revient à son niveau de référence sur une distance égale à $\lambda/70$, soit le pas du réseau. Contrairement aux cavités créées dans les cristaux photoniques qui nécessitent des dimensions caractéristiques de l'ordre de la longueur d'onde, nous avons créé un mode piégé sur des dimensions complètement indépendantes de la longueur d'onde (en x et y).

À titre de comparaison nous représentons sur la même figure le résultat de la mesure pour une tige seule, en l'absence du milieu de fils. En effet, il s'agit d'un résonateur sub-longueur d'onde et le champ est déjà confiné spatialement autour de celui-ci à la

résonance. En comparant au cas du résonateur piégé dans la bande interdite du milieu de fils, nous pouvons observer un confinement spatial plus important dans le cas de la cavité sub-longueur d'onde. De plus, sur la zone explorée, le paramètre S_{11} associé au fil seul n'est jamais revenu à son niveau de 1 ce qui prouve d'autant plus l'étalement spatial relativement élevé du mode résonant associé à un résonateur seul en espace libre [5].

V.3.3 Ultra faibles volumes modaux et facteurs de qualité très élevés

Cette première observation expérimentale montre bien la possibilité de créer un mode localisé spatialement dans le milieu grâce à la présence d'une bande interdite d'hybridation. Nous nous proposons ici d'étudier un peu plus en détail les propriétés de ce mode localisé.

Choix du résonateur pour le défaut

Nous débutons en étudiant le comportement en fréquence du résonateur qui constitue le défaut dans le milieu. Nous savons que théoriquement la fréquence de résonance d'un fil est proche de $c/2L$, où L est la longueur du fil. Or, il faut ajouter quelques subtilités à cette fréquence théorique. En effet, étant donné que ce résonateur se couple très facilement au continuum des ondes propagatives, la fréquence de résonance observée en espace libre diminue. Dans un modèle de résonance de Lorentz, la fréquence de résonance observée en espace libre est $f_{\text{res}} = f_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, où Q correspond au facteur de qualité (qui prend en compte les pertes par rayonnement et par effet Joule). Par conséquent, le même résonateur placé dans une cavité ou en espace libre ne résonne pas à la même fréquence.
Pour observer cet effet, nous avons mesuré le paramètre S_{11} lorsque l'on place une tige dans le milieu de fils, et lorsque celle-ci est seule. Nous avons effectué cette opération sur des fils de longueur variable. Sur la figure V.19, nous résumons les résultats obtenus dans les deux situations. Dans les deux cas, nous obtenons une variation linéaire de la fréquence de résonance mesurée en fonction de $1/L$. La pente de chacune des droites est proche de $c/2$, en accord avec la théorie. En revanche, on observe un décalage en fréquence entre les deux droites obtenues qui est imputable aux pertes radiatives. Lorsque la tige est placée dans le milieu de fils, le rayonnement diminue considérablement, ce qui a pour effet d'augmenter la fréquence de résonance apparente du fil. Pour créer un défaut dans ces

5. La carte du champ pour un résonateur seul fait apparaître une ligne plus intense suivant l'axe Ox qui est due a un défaut de la structure en Teflon de notre échantillon expérimental. La mesure autour du fil doit être isotrope et il faut donc considérer l'étalement dans les autres directions d'espace pour observer le confinement autour de ce résonateur.

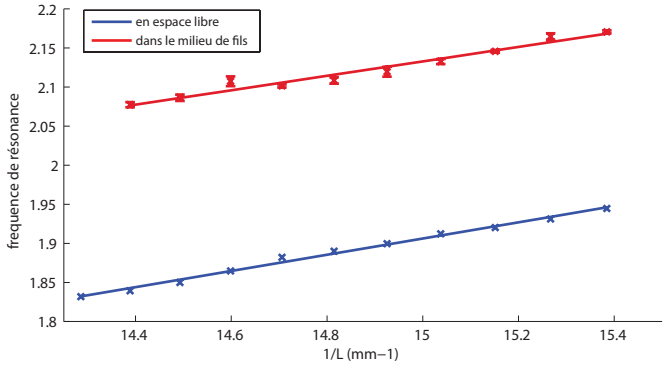

FIGURE V.19 – Évolution de la fréquence de résonance des fils en fonction de $1/L$ dans le milieu de fils et en espace libre.

milieux c'est donc la fréquence de résonance intrinsèque f_0 qu'il faut prendre en compte, et non plus celle apparente en présence de rayonnement.

Nous ne présentons pas de mesure correspondant au facteur de qualité puisque les tiges placées dans le milieu de fils nous ont toutes donné un facteur de qualité de 500, soit le facteur de qualité de pertes ohmiques dans nos conditions expérimentales. Cela signifie que nous avons des facteurs de qualité radiatifs qui sont bien supérieurs à 500 alors qu'ils sont de l'ordre de 3 en l'absence du milieu de fils. Cette valeur de 500, qui limite le facteur de qualité, est due à l'effet Joule dans les métaux et est donc due à nos paramètres expérimentaux. En diminuant le diamètre des tiges, qui est de 0.5 mm ici, à une valeur égale à 5 fois l'épaisseur de peau, on obtiendrait un facteur de qualité de pertes supérieur à 10000.

Par ailleurs, la mesure du paramètre S_{11} peut nous permettre d'estimer le profil de la longueur d'atténuation en fonction de la fréquence. En effet, plus ce paramètre descend, à la fréquence de résonance correspondant à la cavité sub-longueur d'onde, plus le mode est résonant. Si le mode pénètre dans le milieu environnant il peut rejoindre les bords du milieu par effet tunnel et donner naissance à des ondes propagatives. Par conséquent plus le mode est piégé entre les résonateurs plus son amplitude est importante, et plus le paramètre S_{11} descend (il s'agit de la propriété d'adaptation d'impédance dont nous avons parlé au chapitre II). Malheureusement, les résultats expérimentaux ne permettent pas de donner une analyse quantitative de ce comportement à cause de la dynamique des mesures. Nous avons donc eu recours à la simulation numérique et à la suppression des pertes intrinsèques pour extraire cette grandeur. De plus, les longueurs de tiges dont nous disposions expérimentalement ne permettait pas d'explorer l'ensemble de la bande

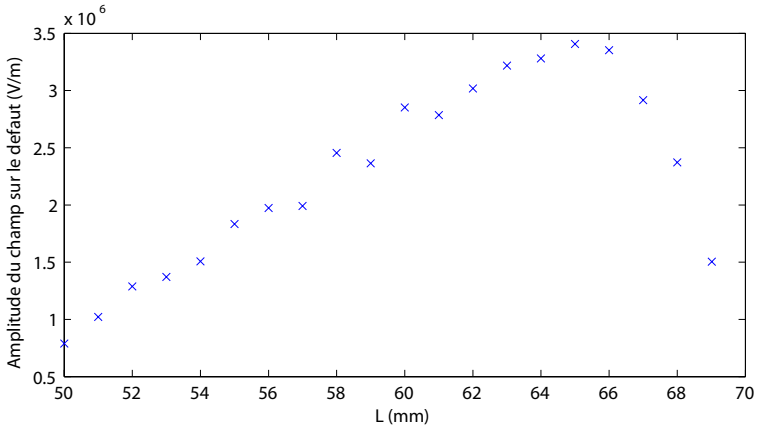

FIGURE V.20 – Amplitude du champ mesurée dans la cavité sub-longueur d'onde en fonction de la longueur de la tige constituant le défaut (sachant que le milieu de fils est constitué de tiges de 70 mm).

d'interdite d'hybridation. Sur la figure V.20 nous représentons l'amplitude du champ E_z mesurée à 1 mm du défaut lorsqu'on excite la cavité résonante par un petit dipôle électrique polarisé suivant z, positionné à l'autre bout du fil. L'émission est normalisée à 1 V.m^{-1} et nous mesurons des amplitudes qui peuvent atteindre des valeurs de plus de 10^6 V.m^{-1}, ce qui est d'ailleurs une estimation des facteurs de qualité que l'on peut atteindre en diminuant les pertes. De plus sur la figure, nous pouvons remarquer que la bande interdite du milieu de fils présente une dimension de tige optimale pour constituer un défaut de 65 mm.

Confinement spatial

D'un point de vue fréquentiel, nous venons de voir que la bande interdite d'hybridation augmente considérablement le facteur de qualité radiatif d'une tige résonante, mais le facteur de qualité observé reste limité par les pertes ohmiques. Pour évaluer l'effet de la bande interdite sur le confinement spatial, nous cartographions le paramètre S_{11} dans le plan transverse en déplaçant le monopole. Nous effectuons cette mesure pour différentes longueurs de tiges.

Nous représentons le résultat de cette mesure sur la figure V.21. Lorsqu'on regarde chacune des cartes obtenues, nous remarquons qu'à chaque fois le champ est confiné entre ses premiers voisins. Finalement, nous n'avons pas besoin d'utiliser un aussi grand nombre de résonateurs pour réaliser une cavité sub-longueur d'onde. Nous ne pouvons pas observer l'efficacité de la bande interdite de cette manière puisque le champ est complètement

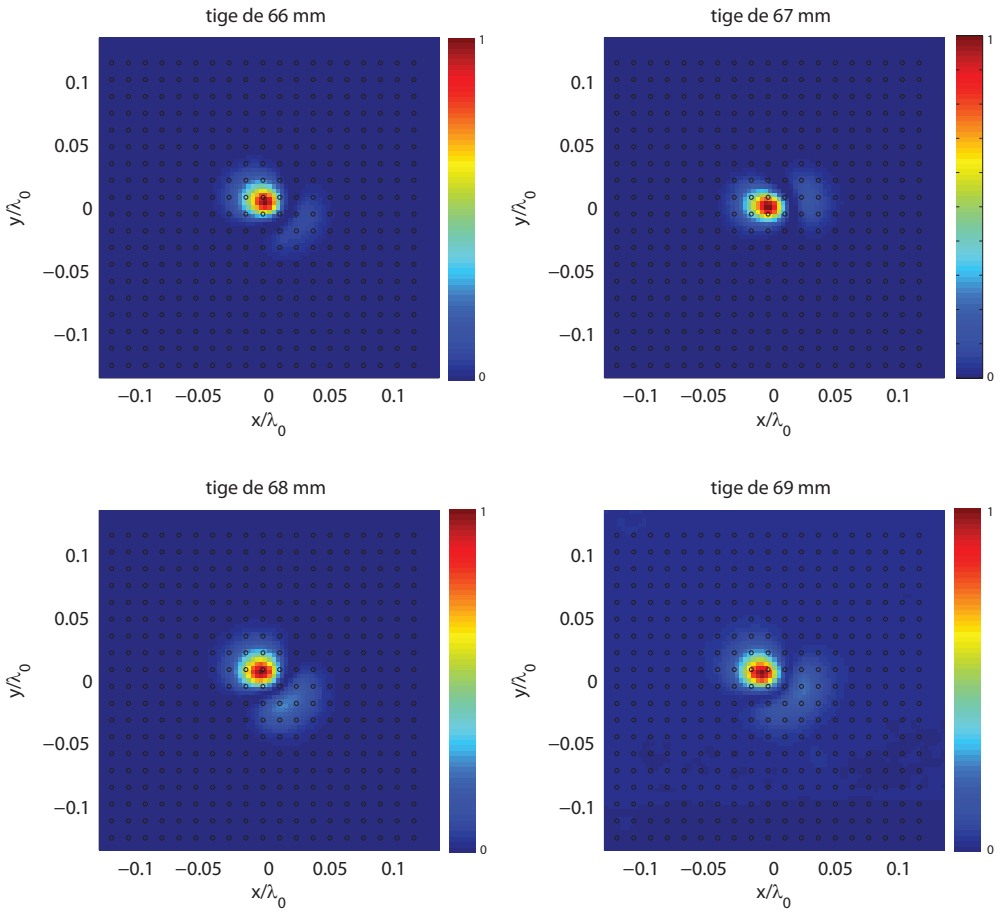

FIGURE V.21 – Mesure du confinement spatial pour différentes longueurs de tiges. Nous représentons la valeur de $1 - S_{11}$ en unités arbitraires.

atténué après seulement un pas de réseau à notre dynamique près, qui est limitée par les ondes TE. La seule observation que l'on peut faire à partir de ces résultats expérimentaux est que nous réussissons à confiner le champ sur des dimensions extrêmement petites devant la longueur d'onde dans le plan xy.
De plus, nous n'effectuons une mesure de S_{11} que sur une interface du milieu et nous n'observons pas le champ le long du fil constituant le défaut. Nous savons que la densité d'énergie est constante le long de celui-ci, puisque le champ est TEM par rapport au fil. Par conséquent le champ dans la direction transverse s'étend sur une distance de $\lambda/2$. Pour avoir une analyse plus quantitative du confinement spatial nous avons réalisé des simulations numériques de cette structure à l'aide de *CST Microwaves* en prenant en compte les pertes ohmiques. Le volume modal associé au défaut est calculé à partir de la densité d'énergie $u(\mathbf{r})$:

$$V_{\text{modal}} = \frac{\left[\int u(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r}\right]^2}{\int \left[u(\mathbf{r})\right]^2 \mathrm{d}\mathbf{r}} \tag{V.2}$$

Après avoir mesuré en simulation la densité d'énergie associée au mode localisé autour du défaut, nous estimons la valeur du volume modal (qui ne varie pas vraiment suivant la longueur des tiges[6]) autour d'une valeur moyenne de $\lambda^3/2000$. Cette valeur moyenne du confinement du champ dépend de nos paramètres expérimentaux puisque nous avons pris un pas de réseau égal à 2 mm. En diminuant ce pas de réseau, on peut diminuer de façon quadratique ce volume modal.

Expériences dans un milieu désordonné

Nous avons aussi mené des expériences dans l'échantillon expérimental désordonné pour observer la robustesse de cette bande interdite par rapport à un désordre spatial. En mesurant de la même manière que précédemment le paramètre S_{11} lorsque le monopole est positionné au niveau du défaut, nous obtenons la fréquence de résonance du défaut dans la bande interdite. Nous avons alors pu observer un comportement tout à fait similaire à celui observé dans le cas du milieu périodique.
La fréquence de résonance observée pour un défaut est à nouveau très proche de la fréquence théorique de $c/2L$, le seul écart à cette formule théorique provenant des pertes radiatives et des dimensions de la tige. Le milieu aléatoire donne donc des résultats très

6. Nos tiges sont toutes de taille assez proches dont la fréquence de résonance est au centre de la bande interdite. Pour voir un effet de la longueur des tiges, il aurait fallu utiliser des tiges plus courtes ce qui n'était pas possible expérimentalement pour des raisons pratiques.

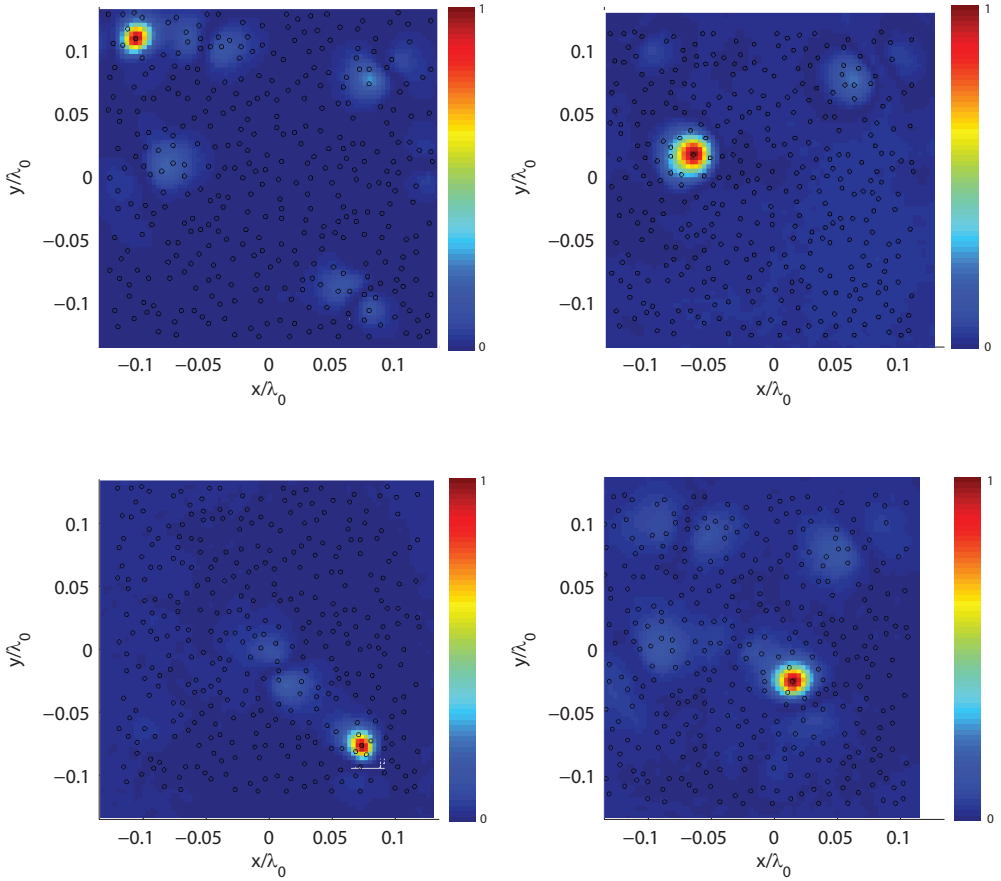

FIGURE V.22 – Mesure du confinement spatial pour différentes positions dans le milieu désordonné. Nous représentons la valeur de $1 - S_{11}$ en unités arbitraires

similaires à ceux donnés par le milieu périodique, ce qui certifie que nous avons bien créé une cavité résonante grâce à la bande interdite : l'échantillon aléatoire donne un comportement similaire à l'échantillon périodique d'un point de vue spectral.
L'intérêt de l'échantillon aléatoire est donc dans la répartition spatiale du mode résonant. En effet, suivant la position où nous plaçons le défaut, nous devrions observer des comportements différents, puisque la géométrie locale change d'une position à une autre. Pour cela nous avons positionné un défaut sur différentes positions dans le milieu de fils. Comme précédemment, nous utilisons le monopole pour cartographier la répartition spatiale du mode dans l'échantillon. Sur la figure V.22, nous représentons le résultat de cette opération pour un défaut de longueur 65 mm positionné en différents endroits du milieu[7]. Suivant la position choisie, le mode est plus ou moins confiné autour du défaut.

7. Nous travaillons avec la tige la plus éloignée en fréquence du début de la bande interdite puisque

Cependant, étant donné l'efficacité de la bande d'interdite, jamais un mode ne déborde au-delà de ses plus proches voisins.
En reprenant la formule sur le volume modal (équation V.2) mais en l'appliquant à un cas surfacique correspondant à nos données expérimentales, nous obtenons une estimation du confinement latéral. En multipliant cette valeur par $\lambda/2$ qui correspond au confinement suivant la direction longitudinale au fil, nous obtenons des volumes modaux qui oscillent entre $\lambda^3/1500$ et $\lambda^3/4000$. Le fait de passer à un milieu aléatoire peut donc permettre d'augmenter légèrement le confinement spatial à condition de bien choisir l'endroit où on positionne le défaut. Cependant, la propriété la plus importante à retenir de l'analyse de notre échantillon désordonné est que nous avons conservé toutes les propriétés que nous avions observé dans le cas périodique. Ceci peut permettre d'envisager des applications plus sereinement puisque les résultats ne sont pas sensibles au désordre de position.

V.3.4 Limites de l'approche et généralisation

Les possibilités qu'offrent ce genre de structures sont en fait bien plus importantes que celles observées expérimentalement ici. En effet, nous avons réalisé un premier échantillon expérimental constitué de tiges de cuivre de 0.5 mm de diamètre. Le cuivre a eu pour effet de diminuer sensiblement les performances de la cavité sub-longueur d'onde ainsi mise au point. Cette observation est d'ailleurs assez surprenante puisqu'il est très rare d'entendre quelqu'un dire qu'il souffre des pertes ohmiques dans le cuivre lorsqu'il travaille dans la gamme micro-ondes, et pourtant nous avons bien mis en évidence cette limitation ici. En diminuant le diamètre des fils on diminue considérablement les pertes par effet Joule. Ces pertes sont dues à la pénétration des champs électromagnétiques dans le métal sur une distance caractéristique appelée épaisseur de peau δ. Lorsqu'on diminue le diamètre d des tiges on diminue le volume de pénétration qui est proche de $\pi L\delta(d-\delta)$. Par conséquent le facteur de qualité associé aux pertes intrinsèques dans le résonateur augmente linéairement avec celui-ci. En diminuant le diamètre on peut donc augmenter de façon drastique, jusqu'à des tiges de quelques épaisseurs de peau de diamètre.
Un autre paramètre limitant dans nos expériences et la distance séparant les résonateurs. Expérimentalement, nous avons pris un pas de 2 mm pour pouvoir changer relativement facilement la tige qui constitue le défaut dans la structure. Si le but est d'obtenir la cavité avec le plus petit volume modal possible, on peut diminuer le pas du réseau autant qu'on le souhaite jusqu'à ce que les tiges soient presque jointives. Comme nous avons vu que

notre échantillon expérimental présentait déjà des défauts qui perturbent la mesure pour d'autres longueurs de tiges.

le champ est complètement annulé après son premier voisin, cette diminution du pas du réseau a pour effet de diminuer le volume modal. En gros le volume modal diminue comme le carré du pas du réseau.
En combinant les des effets (diminution du pas du réseau et diminution du diamètre des tiges) on augmente considérablement le facteur de Purcell d'une source que l'on placerait dans la cavité. La formule de Purcell donne le taux d'émission spontanée d'une source placée dans un environnement résonant :

$$F_p = \frac{3\lambda^3}{4\pi^2}\frac{Q}{V_{\text{modal}}} \tag{V.3}$$

Nous remarquons qu'en augmentant le facteur de qualité (grâce à la diminution du diamètre des fils) et en diminuant le volume modal (grâce à la diminution du pas du réseau, qui est aussi rendue possible par la diminution du diamètre des tiges) nous jouons directement sur le facteur de Purcell. Les deux effets ont pour même conséquence d'augmenter considérablement le facteur de Purcell. Nous avons des résultats préliminaires de simulation numérique qui semblent montrer que, en diminuant le diamètre des fils jusqu'à 10 μm (soit six fois l'épaisseur de peau du cuivre à 2 GHz) et en diminuant le pas du réseau à 20 μm, nous pouvons atteindre des facteurs de qualité de l'ordre 10000 et des volumes modaux de $\lambda^3/2.10^8$. Nous notons d'ailleurs que ce comportement est assez peu courant. En effet, généralement un plus faible volume modal implique plus de pertes ohmiques, à l'instar d'une cavité métallique. Ici, nous obtenons le comportement contraire.
D'autres part ces cavités sub-longueur d'onde ne se limitent pas au défaut ponctuel et nous pouvons tout à fait créer un défaut linéaire comme cela est souvent fait dans le cadre des cristaux photoniques. Cela ouvre de nombreuses perspectives intéressantes puisque les échelles caractéristiques en jeu dans ces milieux sont considérablement sub-longueur d'onde. Nous pouvons aussi changer le résonateur constituant la maille élémentaire du matériau pour obtenir des propriétés différentes. On peut par exemple utiliser des résonateurs de Mie en optique qui présentent des pertes quasiment nulles. En fait, les perspectives sont très nombreuses comme nous allons le voir dans la prochaine partie.

V.3.5 Applications : antennes, lasers, guides d'ondes et filtres

Nous venons de mettre en évidence un moyen très simple d'introduire un défaut dans une bande interdite d'hybridation. Nous avons vérifié expérimentalement que l'on pouvait concentrer les champs sur des volumes très petits et réaliser des cavités sub-longueur d'onde avec des facteurs de qualité très élevés. Nous présentons à présent différentes applications qu'offrent ces défauts.

Interactions ondes/matière, lasers

Parmi les possibilités qu'offre l'introduction de défauts dans les milieux composés d'occlusions résonantes, nous pensons que la fabrication de laser à très faible seuil d'émission est très prometteuse. En effet, pour franchir le seuil qui permet l'émission stimulée de photons, ce type de cavité dont le volume modal est très faible présente un grand intérêt. Lorsqu'un photon est émis par le milieu excité, il revient très vite vers ce même milieu à gain ce qui favorise l'effet laser.
C'est dans ce contexte de cavité laser que la recherche de grands facteurs de Purcell est intéressante. Avec les cavités qui présenteraient des facteurs de qualité de 10000 et des volumes modaux de $\lambda^3/2.10^8$, on atteindrait des facteurs de Purcell insoupçonnables. En gardant des dimensions raisonnables on pourrait déjà atteindre des facteurs de Purcell inégalables. Notons cependant que cette approche est valable pour le cas de bons métaux. Dans le visible, les performances sont bien sûr dégradées à cause du caractère fini de la permittivité des métaux.
À l'heure actuelle il y a deux axes de recherches complètement différents pour obtenir des lasers à faibles seuils : augmenter le facteur de qualité ou bien diminuer le volume modal. Des cavités qui présentent des volumes modaux extrêmement faibles ont démontré la possibilité de générer des sources cohérentes de plasmons de surface [165–167]. De l'autre côté, en atteignant des facteurs de qualité supérieurs à 10^6 dans des cavités de cristaux photoniques [168] ou bien grâce à l'utilisation de « whispering-gallery-modes » [169], des lasers à très faible seuil ont été démontrés. Dans notre situation nous avons l'énorme avantage de pouvoir jouer sur les deux effets, ce qui fait de nos cavités de bons candidats pour leur utilisation en tant que cavités lasers à relativement basse fréquence.
Par ailleurs, à notre connaissance il n'existe pas de démonstration de cavités qui permettent de mettre au point un laser qui fonctionnerait dans la gamme des ondes térahertz ou infra-rouge (loin du spectre visible). Les cavités que nous présentons dans le cas du milieu de fils peuvent être directement redimensionnées pour fonctionner dans la gamme térahertz où les pertes ohmiques sont encore relativement faibles. Dans ce cas on peut imaginer placer le défaut au milieu d'une matrice à gain qui permettrait une inversion de population électronique et un effet laser. La gamme térahertz est le parent pauvre de la physique des ondes et nous imaginons que ce type de cavités peut servir à mettre au point un laser dans cette gamme de fréquence. Le résonateur élémentaire peut d'ailleurs prendre une forme complètement différente s'il le faut. Enfin, ce type de cavités pourrait avoir de gros intérêts dans le domaine de l'électrodynamique quantique dont les interactions ondes/matière sont le socle.

Découplage d'antennes

Une autre application qui vient à l'esprit lorsqu'on met en évidence la présence d'une bande d'interdite est d'utiliser celle-ci pour atténuer les ondes. Dans ce contexte, les applications de télécommunications ont déjà montré un intérêt majeur pour ce type de matériaux à bande interdite. En effet, si on veut augmenter le débit d'information d'un point vers un autre, on peut vouloir augmenter le nombre d'antennes d'émission. Cependant, comme toujours, la limite de la diffraction limite les possibilités : on ne peut pas rapprocher les antennes indéfiniment sans qu'elles reçoivent le même signal.
Dans les chapitres précédents, nous avons vu que nous étions capables de focaliser les ondes sur des taches focales de dimension bien inférieures à la longueur d'onde mais cela nécessitait l'utilisation de signaux large bande. Dans les techniques de télécommunications qui existent à l'heure actuelle, ceci est un frein puisque les normes actuelles définissent des canaux fréquentiels qui présentent des bandes étroites. Une solution alternative à la focalisation pour que deux antennes séparées d'une distance inférieure à la demie longueur d'onde reçoivent des signaux différents est qu'elles présentent des diagrammes de directivités orthogonaux. Pour cela, il faut réussir à isoler les deux antennes. C'est cette propriété d'isolation qu'offre la bande interdite que nous voulons exploiter ici.
Pour réaliser cette opération, nous reprenons l'exemple du milieu de fils en simulation. Au lieu de travailler sur des fils de longueur $\lambda/2$ nous prenons des fils dont la longueur est de l'ordre de $\lambda/4$ que nous relions à un plan de masse, ce qui en fait des résonateurs quart-d'onde. Dans cet exemple, nous disposons 6×7 fils suivant une maille carrée de côté $a = \lambda/70$. Pour mettre au point les antennes, nous supprimons deux de ces fils que nous remplaçons par des câbles coaxiaux légèrement plus courts que les autres fils du milieu, alimentés depuis la face arrière du plan de masse. L'âme des coaxiaux est légèrement plus longue que leur gaine, mais c'est la longueur de la gaine qui fixe la fréquence de résonance des coaxiaux. Ainsi, les antennes de ce dispositif ont une fréquence de résonance dans la bande interdite du milieu de fils. La distance qui sépare les deux antennes est de l'ordre de $\lambda/25$ (figure V.23).
Les paramètres S pour ce système de deux antennes donnent le comportement de ce réseau d'antennes : à la fréquence de 378 MHz, nous avons un pic d'absorption pour le paramètre S_{11} qui indique que l'antenne rayonne (ou absorbe) de l'énergie à cette fréquence. À la même fréquence, le paramètre S_{12} donne une valeur de -40 dB qui indique l'intensité reçue par la deuxième antenne lorsque la première émet. Cette valeur est exactement ce que nous recherchions puisqu'elle assure qu'une antenne ne voit quasiment pas l'autre antenne, qui est pourtant placée à une distance très sub-longueur d'onde. De plus, le diagramme

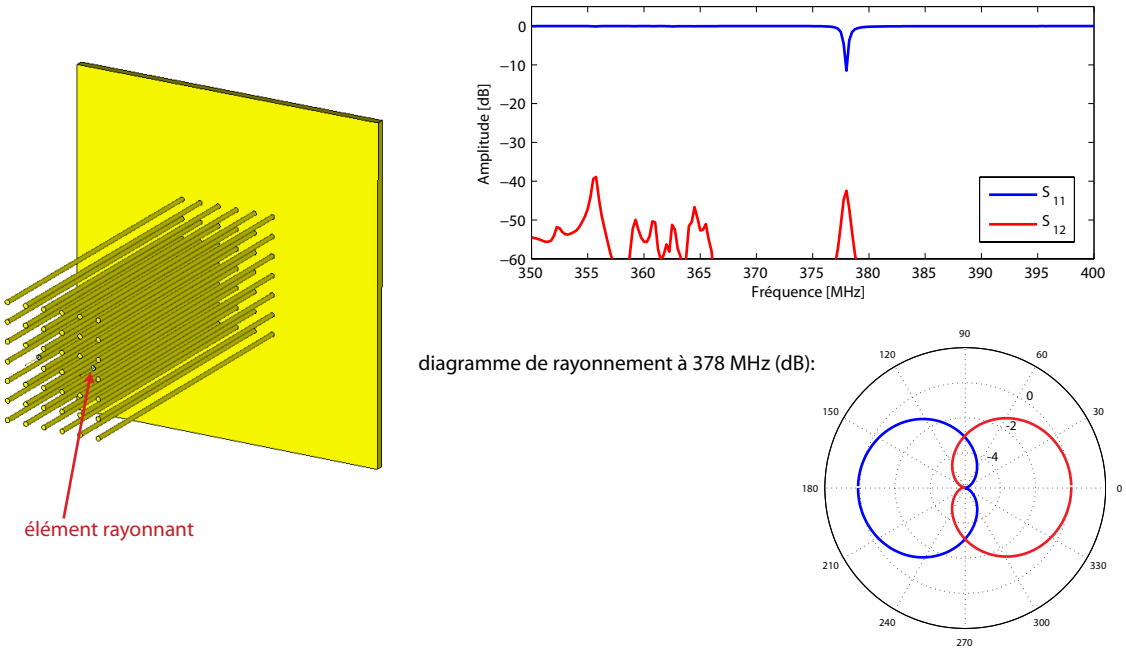

FIGURE V.23 – Exemple d'exploitation de la bande interdite dans un contexte de télécommunications : deux éléments rayonnants séparés de $\lambda/25$ ne se « voient » pas (paramètres S) grâce au milieu de fils et rayonnent dans des directions différentes.

de rayonnement de cette antenne à la fréquence de résonance donne un rayonnement uniquement dans la direction $\theta = 180\,^{\circ}$, du côté où l'antenne est située. Par symétrie du système l'autre antenne émet dans l'autre direction. Ainsi, les deux antennes, bien que disposées sur une échelle sub-longueur d'onde, n'ont pas du tout le même comportement en champ lointain et tout se passe comme si elles ne se voyaient pas.
Depuis, cette idée a mûri et une sart-up créée au laboratoire en 2008, *Time Reversal Communication*, utilise un procédé similaire pour fabriquer des antennes miniatures, procédé qui a fait l'objet d'un dépôt de brevet. Un travail sur l'adaptation d'impédance de l'élément rayonnant permet d'augmenter sensiblement son efficacité et sa bande passante.

Guides d'ondes

À l'instar des guides d'ondes qui ont été développés dans les cristaux photoniques, nous pouvons remplacer le défaut ponctuel précédent par un défaut linéaire. Ainsi, nous avons invariance par translation le long de la ligne de défaut et les ondes sont guidées le long de la chaîne de défauts. La différence fondamentale avec les cristaux photoniques réside une nouvelle fois dans la dimension caractéristique de ces guides d'ondes, très sub-longueur

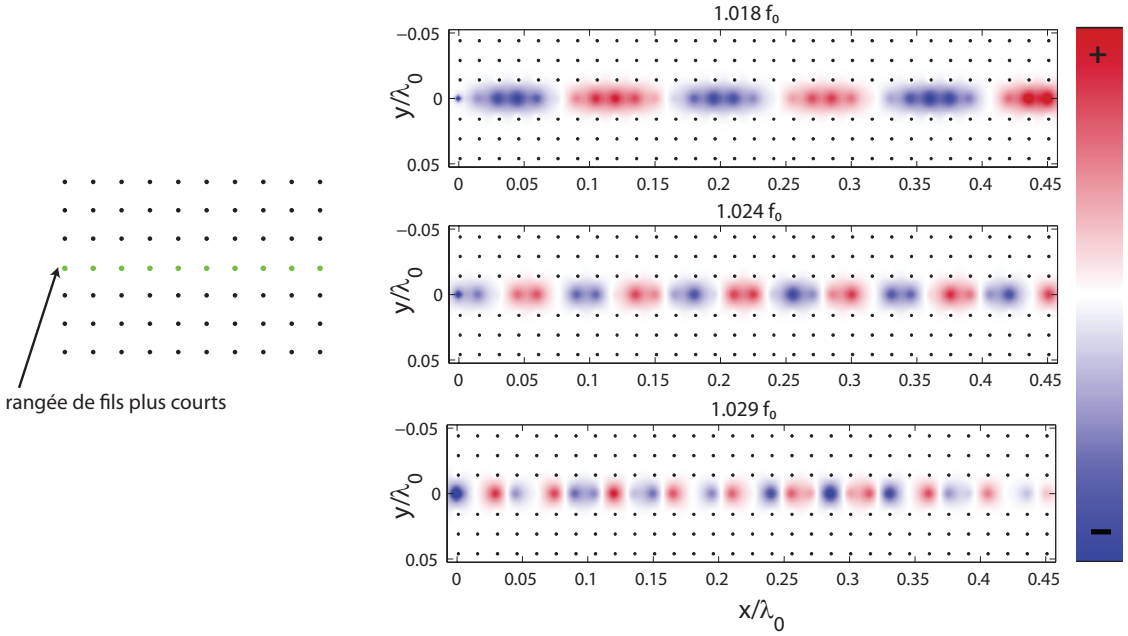

FIGURE V.24 – Composante z du champ électrique au niveau d'une ligne de défauts dans un milieu de fils quart d'onde qui montre une propriété de guidage sur des échelles sub-longueur d'onde.

d'onde.

Nous mettons en évidence cette propriété de guidage des ondes en reprenant le même exemple de géométrie que dans le cas précédent, à savoir des fils dont la longueur est un quart de longueur d'onde, reliés à un plan de masse. Dans un milieu composé de fils comme maille élémentaire, nous raccourcissons la longueur des fils le long d'une rangée du milieu suivant l'axe Ox. Puis nous excitons cette rangée de fils à l'aide d'un dipôle positionné au-dessus du premier fil de la ligne de défaut. Sur la figure V.24, nous représentons la composante z du champ électrique dans le plan juste au-dessus des fils pour une fréquence comprise dans la bande interdite du matériau. Nous pouvons remarquer que les ondes sont confinées autour de la rangée de défauts et se propagent suivant l'axe Ox. La largeur de ce guide d'onde est de $\lambda/40$. Évidemment, cette propriété de guidage des ondes ne présente pas un grand intérêt pour les fréquences micro-ondes puisque le câble coaxial est déjà un exemple de guide d'onde dont les dimensions caractéristiques sont bien inférieures à la longueur d'onde. En revanche ce type de guide d'onde peut trouver son utilité dans la gamme des fréquences optiques en utilisant des résonateurs de Mie à faible pertes par exemple.

Lors de sa thèse Stefan Maier [170] avait proposé d'utiliser une chaine linéaire de fils mé-

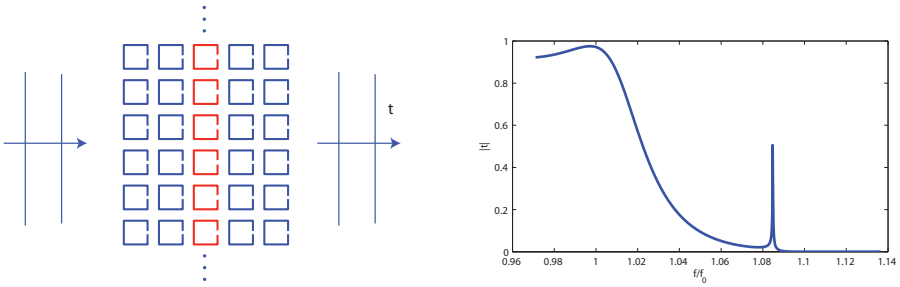

FIGURE V.25 – Exemple d'une application de filtre : coefficient de transmission au travers de 5 SRR dont la rangée du milieu est un défaut linéaire.

talliques pour guider les ondes sur une échelle sub-longueur d'onde. Ici, nous obtenons des longueurs caractéristiques qui sont bien inférieures aux résultats qui avaient été obtenues puisque nous pouvons descendre jusqu'à des échelles de $\lambda/10000$. De plus, la miniaturisation des guides consistant en des défauts dans un milieu localement résonant ne passe pas nécessairement par une diminution de la longueur d'onde d'opération : on peut très bien travailler dans la gamme infra-rouge et obtenir des guides d'ondes dont les dimensions sont bien plus petites qu'un guide d'onde conçu pour des ondes dans l'ultra-violet ou le visible comme ceux proposés par S. Maier et ses collaborateurs. Dans notre cas, la longueur d'onde d'espace libre donne uniquement le caractère résonant de la cellule élémentaire mais ce n'est plus elle qui régit la propagation au sein du guide.
Outre le guide d'onde, qui est un défaut linéaire infini, nous pouvons reprendre tous les travaux qui ont été effectués dans les cristaux photoniques. Nous pouvons par exemple coupler ce guide à une cavité résonante, fabriquer des composants qui séparent le faisceau en deux, fabriquer des filtres passe-bandes, etc... Ce type de guide peut aussi apporter son concours dans l'électrodynamique quantique ou l'ordinateur quantique puisque les volumes en jeu sont extrêmement petits. Notons tout de même que, les éléments étant métalliques, les pertes associées peuvent être élevées.

Filtres et détecteurs

Une autre application de ce type de cavité résonante est leur utilisation pour fabriquer des filtres passe-bandes. En effet lorsqu'on regarde le coefficient de transmission de la figure V.25 qui correspond à l'introduction d'une ligne de défauts dans une matrice dont l'épaisseur est composée de 5 rangées de résonateurs, nous observons un pic de transmission dans la bande interdite. Ce pic de transmission est relativement étroit et peut donc permettre la propriété de filtrage. En augmentant le nombre de résonateurs, on augmente

sensiblement la finesse de ce pic et on améliore les performances d'un tel filtre.
Nous pensons que tous ces concepts peuvent être très intéressants dans la gamme térahertz où l'on peut encore considérer les métaux comme de très bons conducteurs. Comme nous l'avons fait tout au long de ce manuscrit, nous sommes certains que les concepts démontrés ici en micro-ondes sont transposables à cette gamme du spectre ondulatoire. Un filtre extrêmement étroit en fréquence peut permettre d'isoler une fréquence dans la gamme térahertz et ainsi servir pour un détecteur. Les applications potentielles dans cette gamme de fréquence sont nombreuses et leur explorations a commencé il y a seulement une vingtaine d'années avec l'avènement des lasers femtosecondes. L'aspect peu énergétique et non-ionisant des ondes térahertz ouvre de nombreuses possibilités basées sur des propriétés spectroscopiques particulières, utilisables en particulier dans les domaines de la médecine et de la sécurité. Si nous parvenions à mettre au point des détecteurs extrêmement précis en longueur d'onde, nous pourrions utiliser ces propriétés.

V.4 Conclusion

Au cours de ce dernier chapitre, nous nous sommes intéressés à une partie du spectre associée aux milieux localement résonants que nous n'avions pas exploré jusqu'à présent. En effet, au lieu de s'intéresser aux modes sub-longueur d'ondes que l'on peut contrôler depuis le champ lointain en utilisant des sources polychromatiques, nous avons travaillé sur la gamme de fréquence qui interdit la propagation des ondes.
Après avoir observé expérimentalement la présence de cette bande interdite sur les échantillons expérimentaux que nous avions étudiés aux chapitres précédents (milieu de canettes pour les ondes acoustiques, et milieu de fils pour les ondes micro-ondes), nous avons mis en évidence théoriquement et expérimentalement que cette bande interdite résiste à l'introduction de désordre sur la position des occlusions résonantes constituant le milieu. Ceci nous a permis d'introduire le fait qu'on ne peut pas créer un défaut dans le milieu en supprimant un des résonateurs du milieu.
Cela nous a donc conduit à trouver une alternative pour générer un défaut dans ce type de milieux : en choisissant un résonateur dont la fréquence de résonance intrinsèque est dans la bande interdite du milieu, nous introduisons un mode résonant à la fréquence de ce nouveau résonateur. De plus, en regardant la répartition spatiale de ce mode, nous avons mis en évidence qu'il était localisé au niveau du défaut. Ainsi, en prenant comme échantillon expérimental un milieu de fils, nous avons alors montré l'obtention de cavités résonantes au sein du milieu. Les facteurs de qualités et les volumes modaux associés à ces résonances laissent entrevoir des facteurs de Purcell extrêmement élevés qui pourraient

avoir de nombreuses applications dans le domaine des interactions onde/matière.
Enfin, nous avons terminé le chapitre en montrant les nombreuses possibilités qu'offre cette bande interdite. En reprenant quelques idées qui ont été développées dans le contexte des cristaux photoniques à bande interdite, nous montrons que les milieux composés de résonateurs identiques permettent de réaliser ces mêmes fonctionnalités, mais sur des dimensions caractéristiques qui peuvent être largement inférieures à la longueur d'onde. De plus, comme la présence de la bande interdite résiste à l'introduction d'un désordre sur la position, cela peut laisser envisager des possibilités de fabrication pour le domaine de l'optique. Nous n'avons présenté que quelques exemples d'applications mais nous pensons que tout ce qui a été fait dans les cristaux photoniques ces dernières années est facilement généralisable à ce type de milieux.

Conclusion

Au cours de cette thèse nous avons eu l'occasion de balayer les domaines de l'acoustique et de l'optique, en passant par la gamme micro-ondes. Nos recherches ont été stimulées par l'universalité de leur applicabilité. Nous n'avons pas recherché à étudier un point particulier en détail mais nous avons essayé de présenter des résultats transversaux applicables dans les différents champs de recherche de la physique des ondes.
Notre étude nous a donc conduit à nous intéresser au contrôle des ondes dans des milieux hétérogènes qui peuvent être localement résonants. Nous avons vu que le fait d'utiliser des sources multiples et des signaux polychromatiques offrait de grandes possibilités pour contrôler les ondes au sein de ces matériaux. Dans un milieu multi-diffuseur, nous avons mis en évidence que ces différents leviers offerts par la propagation des ondes permettaient d'obtenir des résultats meilleurs qu'en espace libre à condition de traiter de manière cohérente les signaux reçus. L'information contenue dans une bande passante peut en effet être convertie en une information spatiale et *vice et versa*. Ceci est d'autant plus vrai que le milieu dans lequel les ondes se propage est complexe.
Après avoir détaillé ces techniques de traitement cohérent d'une information contenue dans des signaux reçus en champ lointain, nous nous sommes lancés dans l'analyse d'un milieu composé de fils conducteurs dans la gamme micro-ondes. Ceci nous a permis de comprendre la physique associée à la propagation des ondes au sein d'un milieu organisé sur une échelle bien inférieure à la longueur d'onde. Ainsi, nous avons mis en évidence la possibilité de générer dans ce milieu et uniquement à l'aide d'ondes propagatives des modes qui oscillent sur des échelles caractéristiques complètement indépendantes de la longueur d'onde en espace libre, mais gouvernées par les propriétés du milieu. Nous avons démontré la possibilité de focaliser des ondes ou bien d'imager des objets en-dessous de la limite de la diffraction depuis le champ lointain en utilisant ce milieu.
Nous avons ensuite voulu montrer que ces résultats étaient généralisables à tous les domaines de la physique ondulatoire. Pour cela il nous a fallu reprendre le milieu de fils précédent et le regarder comme un milieu composé de résonateurs identiques, disposés sur une échelle sub-longueur d'onde. Après avoir compris que les résonances individuelles des

différents résonateurs se couplaient au continuum des solutions propagatives (les ondes planes), nous avons pu mettre en évidence la propagation d'ondes couplées aux résonateurs, des polaritons, avec des longueurs d'onde apparentes bien inférieures à la longueur d'onde en espace libre.
Nous avons alors montré la possibilité de fabriquer ces milieux dans l'ensemble des domaines de la physique ondulatoire. En prenant un exemple en acoustique, un milieu composé de résonateurs de Helmholtz, et un exemple en optique pour des longueurs d'onde visibles, un milieu composé de nano-particules d'argent, nous avons montré la possibilité de contrôler ces polaritons depuis le champ lointain. Ainsi nous avons donné des exemples de focalisation et d'imagerie super-résolues qui offrent de nombreuses perspectives. La limite de la diffraction a été largement franchie dans les deux exemples et nous pensons que cela ouvre la voie vers des applications.
Nous avons refusé de traiter ces milieux composés d'occlusions résonantes comme des milieux effectifs, comme cela se fait usuellement, et cela nous a permis d'introduire une impureté dans celui-ci. Si on avait choisi une approche effective, nous n'aurions pas réussi à mettre en évidence le comportement au voisinage de cette impureté. Avec notre approche, où les polaritons ont des longueurs d'onde à l'échelle du milieu de propagation, nous avons pu mettre en évidence la possibilité de piéger les champs au niveau de ce défaut. Cela laisse envisager de nombreuses possibilités à l'instar du dopage des semi-conducteurs qui ont permis le développement des technologies électroniques.
Finalement, nous avons répondu à de nombreuses questions quant à la propagation des ondes et à leur contrôle au sein de milieux localement résonants, et cela ouvre autant de nouvelles questions. L'analogie directe que l'on peut faire avec les milieux physiques composés d'atomes, des occlusions résonantes, soulève la question du contrôle des ondes à l'échelle atomique. Les milieux d'étude dans ce manuscrit se comportent comme des macro-molécules et cela peut nous permettre de comprendre l'interaction onde-matière à l'échelle du laboratoire.
Une autre piste de recherche qui a été entrouverte au cours de ce manuscrit est l'introduction de désordre dans ces milieux. Lorsque le désordre concerne la position uniquement, les propriétés semblent inchangées. Si on veut briser ces propriétés, il faut introduire un désordre sur l'autre variable dont dépendent les ondes, à savoir la variable temporelle. Pour cela, en introduisant un désordre sur les fréquences de résonance des différents résonateurs composant le milieu, nous devrions obtenir des solutions complètement différentes. Que se passe-t-il alors si les résonateurs sont polydisperses ? L'introduction de désordre nécessite de s'intéresser à des propriétés statistiques et moyennes que nous n'avons pas voulu exploré ici. Le lien avec les phénomènes de localisation d'Anderson, de rétrodiffusion

cohérente, ou encore de super-radiance dans un matériau localement résonant contenant des résonateurs polydisperses est aussi envisagé comme futur axe de recherche.
La physique ondulatoire est finalement très vaste et la dualité onde-corpuscule introduite par Einstein dans le cas de la lumière, puis généralisée par de Broglie, nous laisse envisager de nombreuses perspectives concernant la physique fondamentale. La nature ondulatoire des électrons permet donc d'entrevoir leur contrôle spatial et temporel comme nous l'avons fait ici avec des ondes lumineuses et acoustiques. Les interactions électroniques étant la base des phénomènes chimiques, nous pouvons ainsi rêver à de nouvelles possibilités en termes de contrôle de réactions ou de catalyse.
Nous ne prétendons pas pouvoir réaliser cela dans un avenir proche. Cependant, nous avons eu une approche transversale tout au long de ce manuscrit et cela nous a permis d'explorer les théories introduites dans différentes communautés. Des théories différentes sont présentées dans chacune d'entre elles alors que les phénomènes physiques observés sont similaires. Nous espérons avoir convaincu le lecteur de ce manuscrit que les interactions entre les différentes communautés, plutôt qu'un cloisonnement, sont la clé d'une recherche efficace.

Bibliographie

[1] J. B. J. Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*, volume 1. Gauthier-Villars et fils, 1888.

[2] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics, 3rd edition.* New York, Jhon Willey & Sons, 1999.

[3] H. Bouasse. *Acoustique générale : Ondes aériennes.* Paris, Delagrave, 1926.

[4] A. L. Moustakas, H. U. Baranger, L. Balents, A. M. Sengupta, and S. H. Simon. Communication through a diffusive medium : Coherence and capacity. *Science*, 287(5451), pp. 287–290, 2000.

[5] E. Mudry, E. Le Moal, P. Ferrand, P. C. Chaumet, and A. Sentenac. Isotropic diffraction-limited focusing using a single objective lens. *Phys. Rev. Lett.*, 105(20), pp. 203903, Nov 2010.

[6] A. Derode, P. Roux, and M. Fink. Robust acoustic time reversal with high-order multiple scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 75(23), pp. 4206–4209, Dec 1995.

[7] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink. Random multiple scattering of ultrasound. I. Coherent and ballistic waves. *Phys. Rev. E*, 64(3), pp. 036605, Aug 2001.

[8] P. Sheng. *Introduction to Wave Scattering, Localization, and Mesoscopic Phenomena.* San Diego, Academic, 1995.

[9] É. Akkermans and G. Montambaux. *Physique mésoscopique des électrons et des photons.* Paris, EDP Sciences, 2004.

[10] D. Cassereau and M. Fink. Time-reversal of ultrasonic fields. iii. theory of the closed time-reversal cavity. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 39(5), pp. 579–592, 1992.

[11] M. Fink. Time reversed acoustics. *Physics Today*, 50(3), pp. 34–40, 1997.

[12] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink. Random multiple scattering of ultrasound. II. Is time reversal a self-averaging process ? *Phys. Rev. E*, 64(3), pp. 036606–+, 2001.

[13] M. Fink, J. De Rosny, G. Lerosey, and A. Tourin. Time-reversed waves and super-resolution. *Comptes Rendus Physique*, 10(5), pp. 447–463, 2009.

[14] Geoffroy Lerosey. *Retournement temporel d'ondes électromagnétiques et application à la télécommunication en milieux complexes.* Thèse de doctorat, Université Paris 7 - Denis Diderot, 2006.

[15] G. Lerosey, J. de Rosny, A. Tourin, A. Derode, G. Montaldo, and M. Fink. Time reversal of electromagnetic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 92(19), pp. 193904, 2004.

[16] R. Carminati, R. Pierrat, J. de Rosny, and M. Fink. Theory of the time reversal cavity for electromagnetic fields. *Opt. Lett.*, 32(21), pp. 3107–3109, 2007.

[17] C. Draeger and M. Fink. One-channel time reversal of elastic waves in a chaotic 2D-silicon cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 79(3), pp. 407–410, 1997.

[18] W. C. Sabine. *Collected Papers on Acoustics.* Cambridge, Haravard University Press, 1922.

[19] D. Royer and E. Dieulesaint. Mesures optiques de déplacements d'amplitude 10^{-4} à 10^{2} Angström. Application aux ondes élastiques. *Revue de Physique Appliquée*, 24(8), pp. 833–846, 1989.

[20] Julien de Rosny. *Milieux réverbérants et réversibilité.* Thèse de doctorat, Université Paris 6 - Pierre et Maris Curie, 2000.

[21] I. M. Vellekoop and A. P. Mosk. Focusing coherent light through opaque strongly scattering media. *Opt. Lett.*, 32(16), pp. 2309–2311, Aug 2007.

[22] R.A. Muller and A. Buffington. Real-time correction of atmospherically degraded telescope images through image sharpening. *J. Opt. Soc. Am*, 64(9), pp. 1200–1210, 1974.

[23] S. M. Popoff, G. Lerosey, R. Carminati, M. Fink, A. C. Boccara, and S. Gigan. Measuring the transmission matrix in optics : an approach to the study and control of light propagation in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 104(10), pp. 100601, 2010.

[24] A. Ashkin, G. D. Boyd, J. M. Dziedzic, R. G. Smith, A. A. Ballman, J. J. Levinstein, and K. Nassau. Optically-induced refractive index inhomogeneities in $LiNbO_3$ and $LiTaO_3$. *Appl. Phys. Lett.*, 9(1), pp. 72–74, 1966.

[25] F. S. Chen, J. T. La Macchia, and D. B. Fraser. Holographic storage in lithium niobate. *Appl. Phys. Lett.*, 13(7), pp. 223–225, 1968.

[26] Z. Yaqoob, D. Psaltis, M.S. Feld, and C. Yang. Optical phase conjugation for turbidity suppression in biological samples. *Nature Photonics*, 2(2), pp. 110–115, 2008.

[27] I. M. Vellekoop, A. Lagendijk, and A. P. Mosk. Exploiting disorder for perfect focusing. *Nature Photonics*, 4(5), pp. 320–322, 2010.

[28] M. Tanter, J. F. Aubry, J. Gerber, J. L. Thomas, and M. Fink. Optimal focusing by spatio-temporal inverse filter. I. Basic principles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110, pp. 37–47, 2001.

[29] G. Montaldo, M. Tanter, and M. Fink. Real time inverse filter focusing through iterative time reversal. *J. Acoust. Soc. Am.*, 115(2), pp. 768–775, 2004.

[30] F. Lemoult, G. Lerosey, J. de Rosny, and M. Fink. Manipulating spatiotemporal degrees of freedom of waves in random media. *Phys. Rev. Lett.*, 103(17), pp. 173902, 2009.

[31] R. K. Ing, N. Quieffin, S. Catheline, and M. Fink. In solid localization of finger impacts using acoustic time-reversal process. *Appl. Phys. Lett.*, 87(20), pp. 204104, 2005.

[32] R. Sprik, A. Tourin, J. de Rosny, and M. Fink. Eigenvalue distributions of correlated multichannel transfer matrices in strongly scattering systems. *Phys. Rev. B*, 78(1), pp. 012202, 2008.

[33] V. A. Marčenko and L. A. Pastur. Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1, pp. 457, 1967.

[34] D. J. Thouless. Electrons in disordered systems and the theory of localization. *Physics Reports*, 13(3), pp. 93–142, 1974.

[35] S. Rytov, Y. A. Kravtsov, and V. Tatarskii. *Principle of statistical radiophysics IV : Wave propagation through random media*, volume 4. Berlin, Springer-Verlag, 1989.

[36] J. Aulbach, B. Gjonaj, P. M. Johnson, A. P. Mosk, and A. Lagendijk. Control of light transmission through opaque scattering media in space and time. *Phys. Rev. Lett.*, 106(10), pp. 103901, Mar 2011.

[37] O. Katz, E. Small, Y. Bromberg, and Y. Silberberg. Focusing and compression of ultrashort pulses through scattering media. *Nature Photonics*, 5(6), pp. 372–377, 2011.

[38] G. Lerosey, J. de Rosny, A. Tourin, and M. Fink. Focusing beyond the diffraction limit with far-field time reversal. *Science*, 315, pp. 1120, 2007.

[39] J. W. Goodman. *Introduction to Fourier optics.* Englewood, Roberts & Company Publishers, 2005.

[40] J. M. Vigoureux. De l'onde évanescente de Fresnel au champ proche optique. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 28(3-4), pp. 525, 2003.

[41] E. H. Synge. A suggested method for extending microscopic resolution into the ultra-microscopic region. *Philosophical Magazine Series 7*, 6(35), pp. 356–362, 1928.

[42] E. A. Ash and G. Nicholls. Super-resolution aperture scanning microscope. *Nature*, 237(5357), pp. 510–512, June 1972.

[43] D. W. Pohl, W. Denk, and M. Lanz. Optical stethoscopy : Image recording with resolution $\lambda/20$. *Appl. Phys. Lett.*, 44(7), pp. 651–653, 1984.

[44] A. Lewis, M. Isaacson, A. Harootunian, and A. Muray. Development of a 500 Å resolution microscope. *Ultramicroscopy*, 13, pp. 227–231, 1984.

[45] F. Zenhausern, M. P. Oboyle, and H. K. Wickramasinghe. Apertureless near-field optical microscope. *Appl. Phys. Lett.*, 65(13), pp. 1623–1625, 1994.

[46] M. Burresi, D. van Oosten, T. Kampfrath, H. Schoenmaker, R. Heideman, A. Leinse, and L. Kuipers. Probing the magnetic field of light at optical frequencies. *Science*, 326(5952), pp. 550–553, 2009.

[47] L. Yin, V. K. Vlasko-Vlasov, J. Pearson, J. M. Hiller, J. Hua, U. Welp, D. E. Brown, and C. W. Kimball. Subwavelength focusing and guiding of surface plasmons. *Nano Letters*, 5(7), pp. 1399–1402, 2005.

[48] C. A. Balanis. *Antenna Theory, Analysis and Design.* Wiley New York, seconde édition, 1997.

[49] R. L. Kronig and W. G. Penney. Quantum mechanics of electrons in crystal lattices. *Proceedings of the Royal Society of London (Series A)*, 130(814), pp. 499–513, 1931.

[50] E. M. Purcell. Spontaneous transition probabilities in radio-frequency spectroscopy. *Phys. Rev.*, 69, pp. 681, 1946.

[51] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 12, pp. 47–88, 1883.

[52] F. Bloch. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 52, pp. 555–600, 1929.

[53] L. Brillouin. *Wave Propagation in Periodic Structures.* New York, McGraw-Hill, 1946.

[54] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics.* New York, Wiley, 1996.

[55] E. Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Phys. Rev. Lett.*, 58(20), pp. 2059–2062, May 1987.

[56] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, and R. D. Meade. *Photonic Crystals : Molding the Flow of Light (Second Edition)*. Princeton University Press, 2008.

[57] F. Lemoult, M. Fink, and G. Lerosey. Revisiting the wire medium : an ideal resonant metalens. *Waves in Random and Complex Media*, 21(4), pp. 591–613, 2011.

[58] F. Lemoult, M. Fink, and G. Lerosey. Far-field sub-wavelength imaging and focusing using a wire medium based resonant metalens. *Waves in Random and Complex Media*, 21(4), pp. 614–627, 2011.

[59] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, and I. Youngs. Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures. *Phys. Rev. Lett.*, 76(25), pp. 4773–4776, Jun 1996.

[60] P. A. Belov, R. Marqués, S. I. Maslovski, I. S. Nefedov, M. Silveirinha, C. R. Simovski, and S. A. Tretyakov. Strong spatial dispersion in wire media in the very large wavelength limit. *Phys. Rev. B*, 67(11), pp. 113103, Mar 2003.

[61] P. A. Belov, S. A. Tretyakov, and A. J. Viitanen. Dispersion and reflection properties of artificial media formed by regular lattices of ideally conducting wires. *J. Electromagnet. Wave.*, 16, pp. 1153–1170(18), 2002.

[62] P. A. Belov, C. R. Simovski, and P. Ikonen. Canalization of subwavelength images by electromagnetic crystals. *Phys. Rev. B*, 71(19), pp. 193105, May 2005.

[63] G. Shvets, S. Trendafilov, J. B. Pendry, and A. Sarychev. Guiding, focusing, and sensing on the subwavelength scale using metallic wire arrays. *Phys. Rev. Lett.*, 99(5), pp. 53903, 2007.

[64] B. D. F. Casse, W. T. Lu, Y. J. Huang, E. Gultepe, L. Menon, and S. Sridhar. Super-resolution imaging using a three-dimensional metamaterials nanolens. *Appl. Phys. Lett.*, 96(2), pp. 023114, 2010.

[65] F. Goos and H. Hänchen. Ein neuer und fundamentaler versuch zur totalreflexion. *Annalen der Physik*, 436(7-8), pp. 333–346, 1947.

[66] P. A. Belov and M. G. Silveirinha. Resolution of subwavelength transmission devices formed by a wire medium. *Phys. Rev. E*, 73(5), pp. 056607, May 2006.

[67] J. Zhu, J. Christensen, J. Jung, L. Martin-Moreno, X. Yin, L. Fok, X. Zhang, and F. J. Garcia-Vidal. A holey-structured metamaterial for acoustic deep-subwavelength imaging. *Nature Physics*, 7(1), pp. 52–55, January 2011.

[68] C. Lesueur. *Rayonnement acoustique des structures.* Editions Eyrolles, 1988.

[69] F. Fahy and P. Gardonio. *Sound and structural vibration : radiation, transmission and response.* Academic Press, 2007.

[70] J. de Rosny and M. Fink. Focusing properties of near-field time reversal. *Phys. Rev. A*, 76(6), pp. 065801, Dec 2007.

[71] A. P. Hibbins, E. Hendry, M. J. Lockyear, and J. R. Sambles. Prism coupling to "designer" surface plasmons. *Opt. Express*, 16(25), pp. 20441–20447, Dec 2008.

[72] F. Lemoult, G. Lerosey, J. de Rosny, and M. Fink. Resonant metalenses for breaking the diffraction barrier. *Phys. Rev. Lett.*, 104, pp. 203901, 2010.

[73] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, et al. *The Feynman lectures on physics*, volume 2. Addison-Wesley Reading, 1964.

[74] J. J. Hopfield. Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals. *Phys. Rev.*, 112, pp. 1555–1567, Dec 1958.

[75] A. Lagendijk. Vibrational relaxation studied with light. *Ultrashort processes in condensed matter*, 314, pp. 197, 1993.

[76] F. J. Garcia-Vidal, L. Martin-Moreno, and J. B. Pendry. Surfaces with holes in them : new plasmonic metamaterials. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 7(2), pp. S97–S101, 2005.

[77] R. Ulrich and M. Tacke. Submillimeter waveguiding on periodic metal structure. *Appl. Phys. Lett.*, 22(5), pp. 251–253, 1973.

[78] J. B. Pendry, L. Martin-Moreno, and F. J. Garcia-Vidal. Mimicking surface plasmons with structured surfaces. *Science*, 305(5685), pp. 847–848, 2004.

[79] A. P. Hibbins, B. R. Evans, and J. R. Sambles. Experimental verification of designer surface plasmons. *Science*, 308(5722), pp. 670–672, 2005.

[80] V. G. Veselago. The electrodynamics of substances with simultaneous negative values of ϵ and μ. *Physics-Uspekhi*, 10(4), pp. 509, 1968.

[81] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 47(11), pp. 2075–2084, 1999.

[82] R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz. Experimental verification of a negative index of refraction. *Science*, 292(5514), pp. 77–79, 2001.

[83] D. R. Smith, Willie J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys. Rev. Lett.*, 84, pp. 4184–4187, May 2000.

[84] R. A. Shelby, D. R. Smith, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz. Microwave transmission through a two-dimensional, isotropic, left-handed metamaterial. *Appl. Phys. Lett.*, 78(4), pp. 489–491, 2001.

[85] M. Notomi. Theory of light propagation in strongly modulated photonic crystals : Refractionlike behavior in the vicinity of the photonic band gap. *Phys. Rev. B*, 62, pp. 10696–10705, Oct 2000.

[86] C. Luo, S. Johnson, J. Joannopoulos, and J. B. Pendry. Negative refraction without negative index in metallic photonic crystals. *Opt. Express*, 11(7), pp. 746–754, Apr 2003.

[87] A. Sukhovich, L. Jing, and J. H. Page. Negative refraction and focusing of ultrasound in two-dimensional phononic crystals. *Phys. Rev. B*, 77, pp. 014301, Jan 2008.

[88] R. Abdeddaim, A. Ourir, and J. de Rosny. Realizing a negative index metamaterial by controlling hybridization of trapped modes. *Phys. Rev. B*, 83, pp. 033101, Jan 2011.

[89] J. M. Steele, N. K. Grady, P. Nordlander, and N. J. Halas. *Plasmon Hybridization in complex nanostructures*, volume 131 of *Springer Series in Optical Sciences*. Springer Series, 2007.

[90] X. Jing, P. Sheng, and M. Zhou. Acoustic and electromagnetic quasimodes in dispersed random media. *Phys. Rev. A*, 46(10), pp. 6513, 1992.

[91] I. E. Psarobas, A. Modinos, R. Sainidou, and N. Stefanou. Acoustic properties of colloidal crystals. *Phys. Rev. B*, 65(6), pp. 064307, 2002.

[92] T. Still, W. Cheng, M. Retsch, R. Sainidou, J. Wang, U. Jonas, N. Stefanou, and G. Fytas. Simultaneous occurrence of structure-directed and particle-resonance-induced phononic gaps in colloidal films. *Phys. Rev. Lett.*, 100, pp. 194301, May 2008.

[93] E. J. S. Lee and J. H. Page. 3p1-20. In *Proceedings of Symposium on Ultrasonic Electronics*, volume 30, pages 461–462, 2009.

[94] Alice Bretagne. *Manipulation d'ondes ultrasonores en milieux complexes : filtrage, guidage et focalisation.* Thèse de doctorat, Université Paris 7 - Denis Diderot, 2011.

[95] V. Leroy, A. Bretagne, M. Fink, H. Willaime, P. Tabeling, and A. Tourin. Design and characterization of bubble phononic crystals. *Appl. Phys. Lett.*, 95, pp. 171904, 2009.

[96] U. Fano. Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts. *Phys. Rev.*, 124, pp. 1866–1878, Dec 1961.

[97] A. E. Miroshnichenko, S. Flach, and Y. S. Kivshar. Fano resonances in nanoscale structures. *Rev. Mod. Phys.*, 82, pp. 2257–2298, Aug 2010.

[98] A. Yariv, Y. X., R. K. Lee, and A. Scherer. Coupled-resonator optical waveguide : a proposal and analysis. *Opt. Lett.*, 24(11), pp. 711–713, Jun 1999.

[99] J. Poon, J. Scheuer, S. Mookherjea, G. Paloczi, Y. Huang, and A. Yariv. Matrix analysis of microring coupled-resonator optical waveguides. *Opt. Express*, 12(1), pp. 90–103, Jan 2004.

[100] M. Notomi, E. Kuramochi, and T. Tanabe. Large-scale arrays of ultrahigh-q coupled nanocavities. 2(12), pp. 741–747, December 2008.

[101] O. Sydoruk, O. Zhuromskyy, A. Radkovskaya, E. Shamonina, and L. Solymar. *Magnetoinductive Waves I : Theory.* Chapter 14 in Theory and Phenomena of Metamaterials (Handbook of Artificial Materials), F. Capolino, CRC Press, 2009.

[102] A. Yariv and P. Yeh. *Optical Waves in Crystals.* New York, Wiley, 1984.

[103] Y. Xu, Y. Li, R. K. Lee, and A. Yariv. Scattering-theory analysis of waveguide-resonator coupling. *Phys. Rev. E*, 62, pp. 7389–7404, Nov 2000.

[104] F. Yang and Y. Rahmat-Samii. Microstrip antennas integrated with electromagnetic band-gap (ebg) structures : A low mutual coupling design for array applications. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 51(10), pp. 2936–2946, 2003.

[105] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Y. Zhu, Z. Yang, C. T. Chan, and P. Sheng. Locally resonant sonic materials. *Science*, 289(5485), pp. 1734–1736, 2000.

[106] N. Fang, D. Xi, J. Xu, M. Ambati, W. Srituravanich, C. Sun, and X. Zhang. Ultrasonic metamaterials with negative modulus. *Nature materials*, 5(6), pp. 452–456, 2006.

[107] H. A. Haus. *Waves and fields in optoelectronics*, volume 1. New Jersey, Prentice-Hall, 1984.

[108] S. Fan, W. Suh, and J. D. Joannopoulos. Temporal coupled-mode theory for the fano resonance in optical resonators. *J. Opt. Soc. Am. A*, 20(3), pp. 569–572, Mar 2003.

[109] Z. Ruan and S. Fan. Temporal coupled-mode theory for fano resonance in light scattering by a single obstacle. *The Journal of Physical Chemistry C*, 114(16), pp. 7324–7329, 2010.

[110] F. Lemoult, M. Fink, and G. Lerosey. Acoustic resonators for far-field control of sound on a subwavelength scale. *Phys. Rev. Lett.*, 107(6), pp. 064301, Aug 2011.

[111] Jensen Li, Lee Fok, Xiaobo Yin, Guy Bartal, and Xiang Zhang. Experimental demonstration of an acoustic magnifying hyperlens. *Nature Materials*, 8(12), pp. 931–934, December 2009.

[112] J. Christensen, A. I. Fernandez-Dominguez, F. de Leon-Perez, L. Martin-Moreno, and F. J. Garcia-Vidal. Collimation of sound assisted by acoustic surface waves. *Nature Physics*, 3(12), pp. 851–852, December 2007.

[113] S. Zhang, L. Yin, and N. Fang. Focusing ultrasound with an acoustic metamaterial network. *Phys. Rev. Lett.*, 102, pp. 194301, May 2009.

[114] J. de Rosny and M. Fink. Overcoming the diffraction limit in wave physics using a time-reversal mirror and a novel acoustic sink. *Phys. Rev. Lett.*, 89, pp. 124301, Aug 2002.

[115] A. Sukhovich, B. Merheb, K. Muralidharan, J. O. Vasseur, Y. Pennec, P. A. Deymier, and J. H. Page. Experimental and theoretical evidence for subwavelength imaging in phononic crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 102, pp. 154301, Apr 2009.

[116] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, and J. V. Sanders. *Fundamentals of Acoustics, 4th Edition*, volume 1. New York, Wiley, 2000.

[117] J. Kergomard and A. Chaigne. *Acoustique des instruments de musique.* Paris, Belin, 2008.

[118] G. Kirchhoff. Über den einfluss der wärmeleitung in einem gase auf die schallbewegung. *Annalen der Physik*, 134, pp. 177–193, 1868.

[119] C. W. Kosten and C. S. Zwikker. *Sound Absorbing Materials.* Amsterdam, Elsevier, 1949.

[120] M. J. Moloney and D. L. Hatten. Acoustic quality factor and energy losses in cylindrical pipes. *Am. J. Phys.*, 69(3), pp. 311–314, 2001.

[121] H. von Helmholtz. *On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music.* London, Longmans, Green and Co., 1885.

[122] E. F. F. Chladni. *Die Akustik.* Leipzig, Breitkopf & Härtel, 1802.

[123] R. H. Ritchie. Plasma losses by fast electrons in thin films. *Phys. Rev.*, 106, pp. 874–881, Jun 1957.

[124] H. Raether. *Surface Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings.* New York, Springer-Verlag, 1988.

[125] S. Lal, S. Link, and N. J. Halas. Nano-optics from sensing to waveguiding. *Nature Photonics*, 1(11), pp. 641–648, November 2007.

[126] P. B. Johnson and R. W. Christy. Optical constants of the noble metals. *Phys. Rev. B*, 6, pp. 4370–4379, Dec 1972.

[127] M. Quinten, A. Leitner, J. R. Krenn, and F. R. Aussenegg. Electromagnetic energy transport via linear chains of silver nanoparticles. *Opt. Lett.*, 23(17), pp. 1331–1333, Sep 1998.

[128] M. L. Brongersma, J. W. Hartman, and H. A. Atwater. Electromagnetic energy transfer and switching in nanoparticle chain arrays below the diffraction limit. *Phys. Rev. B*, 62, pp. 16356–16359, Dec 2000.

[129] S. A. Maier, P. G. Kik, H. A. Atwater, S. Meltzer, E. Harel, B. E. Koel, and A. A. G. Requicha. Local detection of electromagnetic energy transport below the diffraction limit in metal nanoparticle plasmon waveguides. *Nature Materials*, 2(4), pp. 229–232, April 2003.

[130] W. H. Weber and G. W. Ford. Propagation of optical excitations by dipolar interactions in metal nanoparticle chains. *Phys. Rev. B*, 70, pp. 125429, Sep 2004.

[131] M. G. Silveirinha. Nonlocal homogenization model for a periodic array of ϵ-negative rods. *Phys. Rev. E*, 73, pp. 046612, Apr 2006.

[132] I. Tolstoy and E. Usdin. Wave propagation in elastic plates : low and high mode dispersion. *J. Acoust. Soc. Am.*, 29, pp. 37, 1957.

[133] C. Prada, O. Balogun, and TW Murray. Laser-based ultrasonic generation and detection of zero-group velocity Lamb waves in thin plates. *Appl. Phys. Lett.*, 87, pp. 194109, 2005.

[134] D. J. McCabe, A. Tajalli, D. R. Austin, P. Bondareff, I. A. Walmsley, S. Gigan, and B. Chatel. Spatio-temporal focusing of an ultrafast pulse through a multiply scattering medium. *Nature Communications*, 2, pp. 447–, August 2011.

[135] A. Stingl, M. Lenzner, Ch. Spielmann, F. Krausz, and R. Szipöcs. Sub-10-fs mirror-dispersion-controlled Ti :sapphire laser. *Opt. Lett.*, 20(6), pp. 602–604, Mar 1995.

[136] D. H. Sutter, L. Gallmann, N. Matuschek, F. Morier-Genoud, V. Scheuer, G. Angelow, T. Tschudi, G. Steinmeyer, and U. Keller. Sub-6-fs pulses from a SESAM-assisted Kerr-lens modelocked Ti :sapphire laser : at the frontiers of ultrashort pulse generation. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 70, pp. 5–12, 2000.

[137] R. Ell, U. Morgner, F. X. KÃÂrtner, J. G. Fujimoto, E. P. Ippen, V. Scheuer, G. Angelow, T. Tschudi, M. J. Lederer, A. Boiko, and B. Luther-Davies. Generation of 5-fs pulses and octave-spanning spectra directly from a Ti :sapphire laser. *Opt. Lett.*, 26(6), pp. 373–375, Mar 2001.

[138] G. Mourou and T. Tajima. More intense, shorter pulses. *Science*, 331(6013), pp. 41–42, 2011.

[139] Y. de Wilde and P. A. Lemoine. *La Nano-Imagerie par Microscopie optique en Champ Proche*. Ed. Techniques Ingénieur, 2007.

[140] J. B. Pendry. Negative refraction makes a perfect lens. *Phys. Rev. Lett.*, 85(18), pp. 3966–3969, Oct 2000.

[141] N. Fang, H. Lee, C. Sun, and X. Zhang. Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens. *Science*, 308(5721), pp. 534–537, 2005.

[142] A. Salandrino and N. Engheta. Far-field subdiffraction optical microscopy using metamaterial crystals : Theory and simulations. *Phys. Rev. B*, 74(7), pp. 075103, Aug 2006.

[143] Z. Jacob, L. V. Alekseyev, and E. Narimanov. Optical hyperlens : Far-field imaging beyond the diffraction limit. *Opt. Express*, 14(18), pp. 8247–8256, 2006.

[144] Z. Liu, H. Lee, Y. Xiong, C. Sun, and X. Zhang. Far-field optical hyperlens magnifying sub-diffraction-limited objects. *Science*, 315(5819), pp. 1686, 2007.

[145] S. Durant, Z. Liu, J.M. Steele, and X. Zhang. Theory of the transmission properties of an optical far-field superlens for imaging beyond the diffraction limit. *J. Opt. Soc. Am. B*, 23, pp. 2383–2392, 2006.

[146] Z. Liu, S. Durant, H. Lee, Y. Pikus, N. Fang, Y. Xiong, C. Sun, and X. Zhang. Far-field optical superlens. *Nano Letters*, 7, pp. 403–408, 2007.

[147] A. Sentenac, P. C. Chaumet, and K. Belkebir. Beyond the rayleigh criterion : Grating assisted far-field optical diffraction tomography. *Phys. Rev. Lett.*, 97(24), pp. 243901, Dec 2006.

[148] M. G. L. Gustafsson. Surpassing the lateral resolution limit by a factor of two using structured illumination microscopy. *Journal of Microscopy*, 198(2), pp. 82–87, 2000.

[149] K. I. Willig, S. O. Rizzoli, V. Westphal, R. Jahn, and S. W. Hell. STED microscopy reveals that synaptotagmin remains clustered after synaptic vesicle exocytosis. *Nature*, 440(7086), pp. 935–939, April 2006.

[150] L. Rayleigh. On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure. *Phil. Mag*, 24(147), pp. 145–159, 1887.

[151] E. Hecht and A. Zajac. *Optics, 3rd Edition*. MA, Addison-Wesley, 1997.

[152] S. L. McCall, P. M. Platzman, R. Dalichaouch, D. Smith, and S. Schultz. Microwave propagation in two-dimensional dielectric lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 67, pp. 2017–2020, Oct 1991.

[153] R. D. Meade, A. M. Rappe, K. D. Brommer, J. D. Joannopoulos, and O. L. Alerhand. Accurate theoretical analysis of photonic band-gap materials. *Phys. Rev. B*, 48, pp. 8434–8437, Sep 1993.

[154] S. Noda, A. Chutinan, and M. Imada. Trapping and emission of photons by a single defect in a photonic bandgap structure. *Nature*, 407(6804), pp. 608–610, October 2000.

[155] B. Song, S. Noda, and T. Asano. Photonic devices based on in-plane hetero photonic crystals. *Science*, 300(5625), pp. 1537, 2003.

[156] M. Lončar, A. Scherer, and Y. Qiu. Photonic crystal laser sources for chemical detection. *Appl. Phys. Lett.*, 82(26), pp. 4648–4650, 2003.

[157] O. Painter, R. K. Lee, A. Scherer, A. Yariv, J. D. O'Brien, P. D. Dapkus, and I. Kim. Two-dimensional photonic band-gap defect mode laser. *Science*, 284(5421), pp. 1819–1821, 1999.

[158] J. D. Joannopoulos, P. R. Villeneuve, and S. Fan. Photonic crystals : putting a new twist on light. *Nature*, 386(6621), pp. 143–149, March 1997.

[159] T. F. Krauss. Slow light in photonic crystal waveguides. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 40, pp. 2666, 2007.

[160] Y. Sugimoto, Y. Tanaka, N. Ikeda, Y. Nakamura, K. Asakawa, and K. Inoue. Low propagation loss of 0.76 db/mm in gaas-based single-line-defect two-dimensional photonic crystal slab waveguides up to 1 cm in length. *Opt. Express*, 12(6), pp. 1090–1096, Mar 2004.

[161] M. Notomi, K. Yamada, A. Shinya, J. Takahashi, C. Takahashi, and I. Yokohama. Extremely large group-velocity dispersion of line-defect waveguides in photonic crystal slabs. *Phys. Rev. Lett.*, 87, pp. 253902, Nov 2001.

[162] M. F. Yanik, S. Fan, M. Soljačić, and J. D. Joannopoulos. All-optical transistor action with bistable switching in a photonic crystal cross-waveguide geometry. *Opt. Lett.*, 28(24), pp. 2506–2508, Dec 2003.

[163] V. Leroy, A. Strybulevych, J. H. Page, and M. G. Scanlon. Sound velocity and attenuation in bubbly gels measured by transmission experiments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123, pp. 1931, 2008.

[164] Devaud, M., Hocquet, T., and Leroy, V. Sound propagation in a monodisperse bubble cloud : From the crystal to the glass. *Eur. Phys. J. E*, 32(1), pp. 13–23, 2010.

[165] R. F. Oulton, V. J. Sorger, T. Zentgraf, R. M. Ma, C. Gladden, L. Dai, G. Bartal, and X. Zhang. Plasmon lasers at deep subwavelength scale. *Nature*, 461(7264), pp. 629–632, October 2009.

[166] M. A. Noginov, G. Zhu, A. M. Belgrave, R. Bakker, V. M. Shalaev, E. E. Narimanov, S. Stout, E. Herz, T. Suteewong, and U. Wiesner. Demonstration of a spaser-based nanolaser. *Nature*, 460(7259), pp. 1110–1112, August 2009.

[167] M. I. Stockman. The spaser as a nanoscale quantum generator and ultrafast amplifier. *Journal of Optics*, 12(2), pp. 024004, 2010.

[168] M. Lončar, T. Yoshie, A. Scherer, P. Gogna, and Y. Qiu. Low-threshold photonic crystal laser. *Appl. Phys. Lett.*, 81(15), pp. 2680–2682, 2002.

[169] V. Sandoghdar, F. Treussart, J. Hare, V. Lefevre-Seguin, J.M. Raimond, and S. Haroche. Very low threshold whispering-gallery-mode microsphere laser. *Phys. Rev. A*, 54(3), pp. 1777–1780, 1996.

[170] S. A. Maier, M. L. Brongersma, and H. A. Atwater. Electromagnetic energy transport along arrays of closely spaced metal rods as an analogue to plasmonic devices. *Appl. Phys. Lett.*, 78(1), pp. 16–18, 2001.