HAL
open science

Etude numérique à petite et grande échelle de la bande laminaire-turbulente de l'écoulement de Couette plan transitionnel

Joran Rolland

To cite this version:

Joran Rolland. Etude numérique à petite et grande échelle de la bande laminaire-turbulente de l'écoulement de Couette plan transitionnel. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Ecole Polytechnique X, 2012. Français. NNT : . pastel-00755414

HAL Id: pastel-00755414

https://pastel.hal.science/pastel-00755414v1

Submitted on 21 Nov 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée pour obtenir le grade de

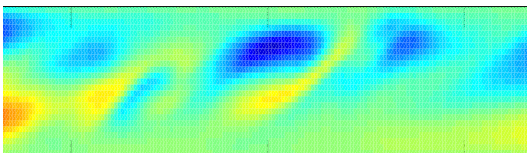
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

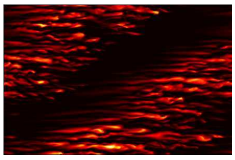
Spécialité : Mécanique

Par

Joran Rolland

Étude numérique à petite et grande échelle de la bande laminaire-turbulente de l'écoulement de Couette plan transitionnel





Soutenance effectuée le 25 septembre 2012, devant le jury composé de

Freddy Bouchet	Rapporteur	ENS Lyon
Laurette S. Tuckerman	Rapporteur	ESPCI
Carlo Cossu	Examinateur	IMFT
Bjoern Hof	Examinateur	Université de Goettingen
Patrice Le Gal	Président du Jury	IRPHE
Paul Manneville	Directeur de thèse	École Polytechnique

Remerciements :

Au LadHyX, d'abord. Paul Manneville m'a introduit au sujet. La direction, Patrick Huerre, puis Jean-Marc Chomaz et Christophe Clanet qui maintiennent une recherche de grande qualité au laboratoire, et avec toute l'équipe technique et d'administration assurent un fonctionnement sans accrocs. Je dois aussi beaucoup à mes collègues, stagiaires, thésards, post-docs et chercheurs pour toutes les discussions (scientifiques ou non) et leurs conseils. Je remercie aussi mes collègues de Saclay, Yohann Duguet et Romain Monchaux, ainsi que ceux d'Osaka, Genta Kawahara et Masaki Shimizu, pour leurs discussions, remarques et conseils.

Je remercie Patrice Le Gal d'avoir bien voulu être président de mon jury, Carlo Cossu et Björn Hof d'avoir étés examinateurs, ainsi que Freddy Bouchet et Laurette Tuckerman d'avoir étés rapporteurs. Je remercie aussi Erwann d'avoir bien voulu relire le manuscrit et d'avoir repris mon orthographe et ma grammaire d'ancien latiniste, toujours aussi chaotique...

Et finalement, tous ceux autour de moi, amis, famille et collègues, qui m'ont aidé, soutenu (et supporté mes humeurs...) pendant ces presque quatre ans de stage de DEA puis de thèse.

Notations :

- U, h : vitesse des plaque et demi-épaisseur de l'écoulement de Couette plan.
- L_x, L_z : taille longitudinale et transverse de l'écoulement.
- R : nombre de Reynolds, $R = hU/\nu$ avec ν viscosité cinématique.
- R_{g} Nombre de Reynolds seuil global d'existence de la turbulence.
- R_{t} Nombre de Reynolds seuil pour un écoulement turbulent sans motif.
- $\vec{v}$ champ de vitesse : écart à l'écoulement de Couette laminaire.
- $(\bar{V}_x, \bar{V}_y, \bar{V}_z)$: écoulement de fond idéalisé.
- Pour une grandeur complexe A, le conjugué est noté $\bar{A}$.
- $\vec{u}$ champ de vitesse : Perturbation linéaire à un écoulement de base/de fond.
- $\vec{\omega}$ champ de vorticité.
- (s_x, s_z) : cisaillement : $(\partial_y v_x, \partial_y v_z)$.
- (c_x, c_z) : vitesses de groupe.
- m, e, f, e_t : paramètre d'ordre, énergie cinétique $(\vec{v}^2)$, fraction turbulente et énergie turbulente instantanées.
- M, E, F, E_t : idem, mais moyenné.
- de manière générale, les quantités en minuscule sont instantanées et celles en majuscule, moyennées d'une façon où d'une autre.
- R_{s} : Nombre de Reynolds seuil.
- l_x, l_z : taille de sous domaine de l'écoulement.
- ξ_x, ξ_z, τ_0 : longueurs de cohérence (longitudinales et transverses) et temps de cohérence du motif.
- λ_x, λ_z : longueurs d'onde longitudinale et transverse (motif et autres).
- I, L et T : intermédiaire, laminaire, turbulent.

On utilisera les acronymes :

- DNS : *Direct Numerical Simulation*, simulation numérique directe des équations de Navier–Stokes
- pdf : *probability density function*, densité de probabilité
- PCF : *Plane Couette flow*, écoulement de Couette plan
- TCF : *Taylor–Couette flow*, écoulement de Taylor–Couette

Table des matières

1 Introduction générale **1**
1.1 Motivation . . . 1
1.2 Phénoménologie générale de la transition . . . 2
1.2.1 Comportement laminaire des écoulements de paroi . . . 2
1.2.2 Turbulence de paroi à bas nombre de Reynolds . . . 3
1.2.3 Les écoulements développés spatialement . . . 9
1.3 Différentes approches de modélisation . . . 10
1.3.1 Petite échelle . . . 10
1.3.2 Grande échelle . . . 13
1.4 But et plan . . . 14

2 Le système : équations, procédures numériques, traitement **17**
2.1 Le système et ses équations . . . 17
2.1.1 Géométrie . . . 17
2.1.2 Équations de Navier–Stokes pour un écoulement incompressible . . . 18
2.1.3 Équations linéarisées d'Orr–Sommerfeld–Squire . . . 18
2.2 Procédure numérique . . . 21
2.2.1 généralités . . . 21
2.2.2 Réduction de la résolution . . . 21
2.2.3 Solutions numériques et anomalies . . . 23
2.3 Grandeurs turbulentes et phénoménologie . . . 24
2.3.1 Grandeurs turbulentes . . . 24
2.3.2 Description de l'écoulement moyen . . . 30

3 Suivi instantané : Instabilité de cisaillement **39**
3.1 Modèle de l'écoulement de fond . . . 39
3.1.1 Déscription de Fourier à grande échelle . . . 39
3.1.2 Écoulement de fond . . . 41
3.1.3 Description analytique . . . 44
3.1.4 Échantillonnage de paramètres . . . 45
3.1.5 Écoulement de fond et lien cinématique avec le grand écoulement . . . 47
3.1.6 Critères de stabilité et comportement local du modèle . . . 50
3.1.7 Tension de Reynolds maintenant l'écoulement de fond : Principe et équations . 51
3.2 Expériences numériques . . . 54

3.2.1 Phénoménologie . . . 54
3.2.2 Vorticité transverse . . . 59
3.2.3 Dépendance transverse . . . 61
3.2.4 Advection . . . 62
3.3 Mesure . . . 63
3.3.1 Taille caractéristique . . . 64
3.3.2 Vitesse d'advection . . . 66
3.3.3 Résolution abaissée . . . 69
3.4 Résultats de l'analyse linéaire . . . 72
3.4.1 Les différents stades d'approximation . . . 72
3.4.2 Analyse locale . . . 75
3.4.3 Advection transverse . . . 84
3.4.4 Analyse globale . . . 85
3.4.5 Analyse de Bloch–Floquet . . . 88
3.5 Conclusion . . . 88
3.5.1 Résumé comparé : Relation entre modèle et phénoménologie . . . 89
3.5.2 Discussion . . . 91

4 Étude numérique de la bande à grande échelle 95
4.1 Définition et mesure des grandeurs pertinentes . . . 95
4.1.1 Quantifier la modulation de la turbulence . . . 95
4.1.2 Détermination pratique des moments de la phase . . . 98
4.1.3 Mesure des temps de résidence . . . 100
4.1.4 Remarques diverses . . . 104
4.2 Modèle pour la formation des bandes . . . 106
4.2.1 Motivation . . . 106
4.2.2 Formalisme de Ginzburg–Landau–Langevin . . . 106
4.2.3 Traitement du modèle à l'équilibre . . . 108
4.2.4 Dynamique autour de l'équilibre . . . 116
4.2.5 Comportement loin de l'équilibre . . . 123
4.3 Résultats des expériences numériques . . . 125
4.3.1 Comportement en temps et fluctuations autour de l'équilibre . . . 127
4.3.2 Autour de l'équilibre : taille de domaine variable . . . 130
4.3.3 Variation de R . . . 135
4.3.4 Temps de vie extraits des DNS . . . 141
4.3.5 Effets de tailles : Domaines élargis : paramètre d'ordre et défauts . . . 142
4.3.6 Effet de la taille sur l'existence des bandes et de la turbulence . . . 146
4.4 Résumé et discussion . . . 147

5 Expériences de trempe et formation de trous laminaires 151
5.1 Suivi . . . 151
5.1.1 Trempes . . . 151
5.1.2 Près de la disparition des bandes . . . 161
5.2 Modèles et discussion . . . 166

5.2.1 Approche mécanique . . . 168
5.2.2 Approche probabiliste/statistique globale . . . 171

6 Expériences de *spots* 173
6.1 Procédure et condition initiale . . . 173
6.2 Suivi statistique . . . 174
6.2.1 Suivi d'une expérience à basse résolution . . . 174
6.2.2 Expériences en DNS . . . 175
6.3 Création de vorticité transverse dans les *spots* . . . 180
6.3.1 Phénoménologie . . . 180
6.3.2 Mesure de vitesse d'advection . . . 181
6.3.3 Échelles caractéristiques . . . 182
6.4 Conclusion . . . 182
6.4.1 Résumé . . . 182
6.4.2 Discussion . . . 183

7 Conclusion 185
7.1 Résumé . . . 185
7.2 Discussion . . . 187
7.3 Perspectives . . . 187

Appendices 189

A Implémentation de Channelflow 191
A.1 Discrétisation en espace et en temps . . . 191
A.2 Effet de l'optimisation de l'algorithme de FFT . . . 191
A.3 Traitement de la pression et conséquence . . . 194
A.4 Organisation du code et intérêt pour le traitement en ligne . . . 194

B Approximation polynomiale dans la direction y 197
B.1 Bases de fonctions . . . 197
B.1.1 Principe et résultats généraux . . . 197
B.1.2 Exemples des premiers polynômes de la base . . . 200
B.1.3 Formulation linéaire des polyômes . . . 201
B.2 Intégration numérique . . . 203
B.3 Convergence de l'approximation numérique . . . 203

C Temps de résidence et modèle à quatre variables 207
C.1 Résolution de l'équation de Fokker–Planck en une dimension . . . 207
C.1.1 Définitions . . . 207
C.1.2 *renewal equation* . . . 209
C.1.3 expression générale en une dimension . . . 209
C.1.4 méthode du col . . . 212
C.2 Modèle à quatre variables . . . 213
C.3 Remarques sur les processus sans mémoire . . . 215

D Un modèle-jouet inabouti **217**
D.1 Motivation et principe 217
D.2 Organisation de la simulation 218
D.2.1 idée générale 218
D.2.2 Condition initiale 220
D.2.3 Simulation 220
D.3 Quelques resultats 221
D.4 Discussion 222

Bibliographie **223**

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Motivation

Les écoulements de paroi sont centraux dans un grand nombre d'applications industrielles, technologiques ou biologiques . Ils sont souvent de géométrie un peu complexe, mais peuvent se ramener, dans le principe, à un certain nombre d'écoulements types. On trouve deux principaux exemples pratiques, les couches limites planes (cisaillé ou conduit par la pression) et l'écoulement de Poiseuille dans une conduite. On trouve aussi des exemples pratiques d'écoulement de Poiseuille plan et Couette plan (échangeurs thermiques *etc.*) et Taylor Couette (entre autres en astrophysique). Ces trois derniers présentent l'intérêt d'être relativement simples et de contenir les mêmes idées que des cas plus complexes. La turbulence réduit le débit et favorise le mélange, elle peut être un avantage où un inconvénient selon les situations. Beaucoup de cas d'intérêt se situent dans le régime de transition à la turbulence. Ce régime, décrit depuis Reynolds dans le cas de la conduite, n'est pourtant compris que très partiellement, peut être moins que des régimes de turbulence plus développés [72]. Cela est du principalement à la cohabitation laminaire-turbulente qu'on peut retrouver dans tous ces écoulements.

Ces écoulements de parois peuvent se diviser en deux grands types, selon le nombre de dimensions dans lesquelles ils peuvent s'étendre : soit une (Poiseuille dans une conduite) soit deux (Couette plan, Poiseuille plan, Taylor Couette et les couches limites). On parlera souvent de quasi-unidimensionnel ou quasi-bidimensionnels. On introduit parfois (surtout dans les cas expérimentaux) la distinction entre les écoulements cisaillés et ceux poussés par la pression. Les écoulements les plus simples de chaque type servent donc de système modèle pour explorer le comportement de la transition à la turbulence, les mécanismes identifiés, les modèles développées, les idées générales issues de ces cas peuvent ensuite être transposés aux cas plus complexes, puis finalement aux cas d'intérêt pratique.

On aura dans ce manuscrit une approche exploratoire et de modélisations, et on ne cherchera pas, par exemple à proposer des stratégies de contrôle. On s'attaquera au cas quasi-bidimensionnel, notre choix d'écoulement type se porte alors sur Couette plan : c'est la géométrie la plus simple, et celui qui demande le moins de moyens et pose le moins de complications pour une approche numérique de type modèle réduit ou Simulation Numérique Directe (DNS).

1.2 Phénoménologie générale de la transition

On présente en premier lieu la phénoménologie de la transition vers la turbulence dans les écoulements de paroi, et en particulier dans Couette plan. On se concentre sur une description plus qualitative, mettant en avant les échelles et les types de comportement rencontrés. On fera la comparaison entre Couette plan (et TCF) et Poiseuille dans une conduite en mettant l'accent sur les ressemblances et la possibilité de transposer des idées d'un écoulement vers l'autre.

1.2.1 Comportement laminaire des écoulements de paroi

On commence par une description de l'écoulement de Couette plan qui permet d'introduire le paramètre de contrôle R, le nombre de Reynolds, central dans l'étude de la transition. Les écoulements de base laminaire des écoulements de parois sont décrits dans tous les manuels de mécanique des fluides élémentaires. Les couches limites, légèrement plus ardues, sont décrites dans des chapitres un peu plus avancés [55]. L'écoulement de Couette plan est l'écoulement entre deux plaques planes séparées d'une distance $2h$, chacune en déplacement à la vitesse $\pm U$, de taille $L_x \times L_z$ (figure 1.1 (a)). Comme dans tous les autres exemples, une fois les équations de Navier–Stokes adimensionnées, il ne reste plus qu'un paramètre de contrôle, le nombre de Reynolds $R = hU/\nu$, qui mesure le poids relatif de l'advection et de la dissipation visqueuse [55], ou d'un point de vue légèrement différent, le rapport des temps caractéristiques d'advection et de diffusion. Les tailles adimensionnées L_x/h et L_z/h jouent un rôle relativement important. Une meilleure comparaison entre les écoulements peut être faite en ajustant la définition de R (à un facteur multiplicatif près).

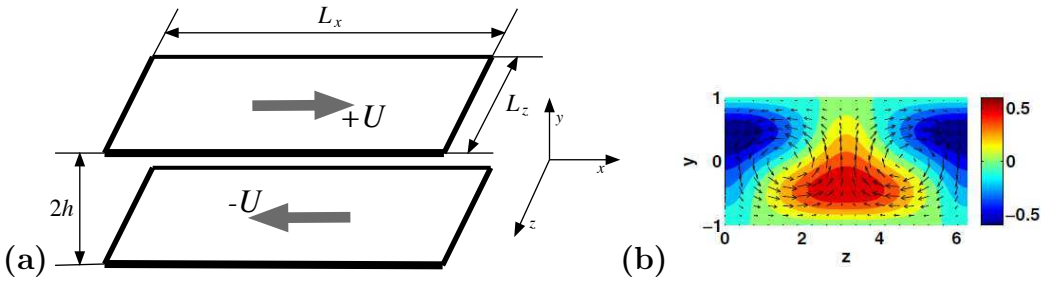


FIGURE 1.1 – (a) Schéma de l'écoulement de Couette plan. (b) Exemple de solution non linéaire instable de Navier–Stokes pour un profil de base sinusoidal à $R = 125$ [63], niveaux de couleurs : champ de vitesse longitudinal, vecteurs : champ de vitesse transverse et normal à la paroi.

Un certain nombre de situations, avec ou sans écoulement de base, comme la convection thermique de Rayleigh–Bénard, ou l'écoulement de Taylor–Couette avec rotation intérieure, suit un scénario classique de transition vers la turbulence [19, 67], quand le paramètre de contrôle, respectivement, le nombre de Rayleigh (Ra) et le nombre de Taylor (Ta) sont augmentés via une série de bifurcations, où chaque état, à commencer par l'écoulement de base, devient instable pour laisser place à un état un peu plus complexe. Le chaos apparaît après un nombre fini de bifurcations [67]. La situation est radicalement différente dans les écoulements de paroi (Couette plan, Taylor–Couette contra-rotatif *etc.*) : l'écoulement de base est stable pour tout nombre de Reynolds (dans le cas de Couette plan ou de la conduite [24, 88]) ou jusqu'à un nombre de Reynolds R_{TS} à partir duquel se développent

des ondes de Tollmien–Schlichting [16, 24] (dans le cas de Poiseuille plan et de la Couche limite). Cependant, la turbulence existe à des nombres de Reynolds finis, bien inférieurs à R_{TS}. Le cas de Taylor–Couette est légèrement différent : il y a deux paramètres de contrôle R_{o} et R_{i}, on peut atteindre la turbulence de paroi en partant du scénario classique de bifurcations de Taylor–Couette en jouant avec les paramètres [2, 73]. Mais il contient lui aussi le scénario de transition de la turbulence de paroi [1]. Il apparaît ainsi que le scénario classique d'une série de bifurcations est insuffisant pour décrire cette transition.

1.2.2 Turbulence de paroi à bas nombre de Reynolds

Ainsi, dans le cas de la turbulence de paroi, la phénoménologie fait apparaître un scénario différent, discontinu, dans lequel la taille adimensionnée, donnée par L_x et L_z joue un rôle non négligeable. On distingue schématiquement deux cas, en allant du plus simple au plus complexe, celui de la petite taille, dit de la Minimal Flow Unit qui présuppose des conditions de bord périodiques. On passe ensuite aux tailles plus grandes, qui permettent la transition avec des conditions de bord plus réalistes. On prend ainsi une approche plus thématique qu'historique.

Petites échelles : Minimal Flow Unit

La minimal flow unit, ou la taille de domaine périodique (dans Couette plan, Poiseuille plan *etc.*), en dessous de laquelle la turbulence de paroi ne peut se maintenir quel que soit R, a été mise en évidence à l'aide de DNS [49]. Cette approche met en évidence la structure de base de la turbulence de paroi. Si la convection de Rayleigh–Bénard ou l'écoulement de Taylor–Couette ont leurs rouleaux, dont l'amplitude dépend continuement du paramètre de contrôle, comme il sied pour une bifurcation super-critique, la turbulence de paroi a les *streaks* et *streamwise vortices* (ou vortex longitudinaux) (Fig. 1.1 (b)). Ces structures, dont l'évolution est chaotique dans la MFU se maintiennent avec une amplitude finie lorsqu'on baisse R jusqu'à un nombre de Reynolds seuil, puis disparaissent. Cela tient au fait que la "transition" [2] est discontinue. On trouve l'hystéresis dans les cas les plus simples (conduite, Couette plan). L'organisation précise des *streaks* et vortex dépend de l'écoulement, mais on les retrouve dans tous les cas. Leur interaction est à la base du processus auto-entretenu de la turbulence de paroi (décrit dans la section suivante), les longueurs d'ondes transverses de l'ordre de l'épaisseur, et la durée du cycle de renouvellement est toujours de l'ordre de la centaine de temps de retournement. On peut aussi montrer que la dynamique peut bien être décrite par un petit nombre de modes [40, 100, 101], rendant pertinente la description du système dans l'espace des phases.

En plus de mettre en évidence cette caractéristique des écoulements de paroi, cette approche a été à la base d'une partie des modélisations et interprétation de la transition en termes de systèmes dynamiques. On trouve deux comportements distincts d'un système chaotique : d'une part la dynamique autour (dans l'espace des phase) du cycle auto-entretenu, d'autre part, les échappements vers le laminaire [33, 67]. En effet, une autre caractéristique de la transition mise en évidence dans la MFU est que la turbulence de paroi contient un caractère transitoire [31, 32], avec une statistique des temps

1. On peut aussi la rejoindre dans le cas de Poiseuille plan et de la couche limite en passant par les ondes de Tollmien–Schlichting, mais ce n'est pas le cas qui se manifeste expérimentalement le plus simplement.

2. Le terme doit être pris avec un sens assez large. On discutera du choix de terminologie dans la section suivante

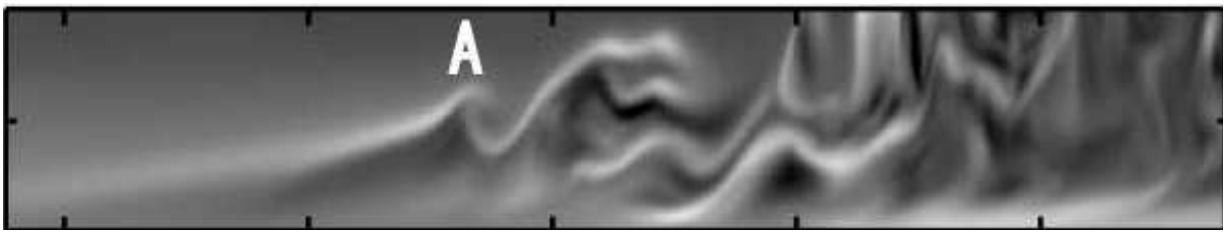


FIGURE 1.2 – Création de vorticité azimutale dans une couche cisaillée créée par un *streak* en amont d'un *puff* dans l'écoulement de Hagen–Poiseuille dans une conduite à $R = 2226$ [86]

de vie. Dans le cadre de la MFU, où le régime transitionnel correspond à du chaos à petit nombre de degrés de liberté, ce caractère est typique [53].

Toujours du point de vue de la petite échelle, la comparaison à l'écoulement de Poiseuille dans une conduite est toujours intéressante. En effet, cet écoulement contient bon nombre de phénomènes aussi présent dans les écoulements de Couette et Poiseuille plan. Ainsi dans les zones intermédiaires entre le corps du *puff* ou du *slug*, on trouve un type d'instabilité de cisaillement différente de celle de l'instabilité des *streaks* [28, 86]. Celle-ci concerne la couche cisaillée dans le plan $r - z$ et crée de la vorticité azimutale (Fig. 1.2). Cette vorticité azimutale est advectée vers le corps du *puff* ou en arrière du *slug*. On perd cependant la trace de son comportement détaillé dans ces régions.

Grandes échelles : cohabitation laminaire-turbulent

La phénoménologie des écoulements transitionnels à plus grande taille est plus complexe que celle de la MFU, et ce à cause d'un autre trait lié au caractère discontinu de la transition : la localisation de la turbulence et la cohabitation laminaire-turbulente. Le nombre de dimensions dans lesquelles peut s'étendre l'écoulement (soit une ou deux, la troisième étant normale à la paroi) va trancher entre les types de comportements. Ainsi, la cohabitation va suivre deux types de comportements distincts selon que l'écoulement est quasi unidimensionnel (la conduite) ou quasi-bidimensionnel (notre cas, Couette plan).

Du point de vue de la phénoménologie, le cas le plus simple est le cas quasi bidimensionnel des écoulements de Couette plan et de Taylor–Couette contra-rotatif. La coexistence laminaire-turbulente a été constatée expérimentalement pour la première fois dans le cadre de l'écoulement de Taylor–Couette [17, 18]. Les spirales turbulentes a été explorée quantitativement extensivement dans le cadre de l'écoulement de Taylor–Couette. Les bandes obliques ont été observée qualitativement dans le cas de l'écoulement de Couette plan expérimentalement.

Pour les plus grands nombres de Reynolds, un germe suffisamment grand, cisaillé et intense va créer un *spot* turbulent [56]. Ce *spot* a une forme de losange, et va croître jusqu'à ce que la turbulence envahisse tout le domaine. Autour de la gamme transitionnelle, la turbulence prend la forme de *streaks* et de vortex longitudinaux [5, 21, 58, 77]. Ils sont séparés par une longueur d'onde transverse en bon accord avec celle trouvée dans la MFU. Le régime permanent, qui ne contient pas de trous laminaires est souvent dit *featureless*. Une particularité intéressante se manifeste avec le *spot* turbulent : ce sont les écoulements à grande échelle (par rapport à celle de la paroi et de la longueur d'onde transverse entre deux *streaks*), qui prennent la forme d'un écoulement quadrupolaire dans le cas du spot turbulent.

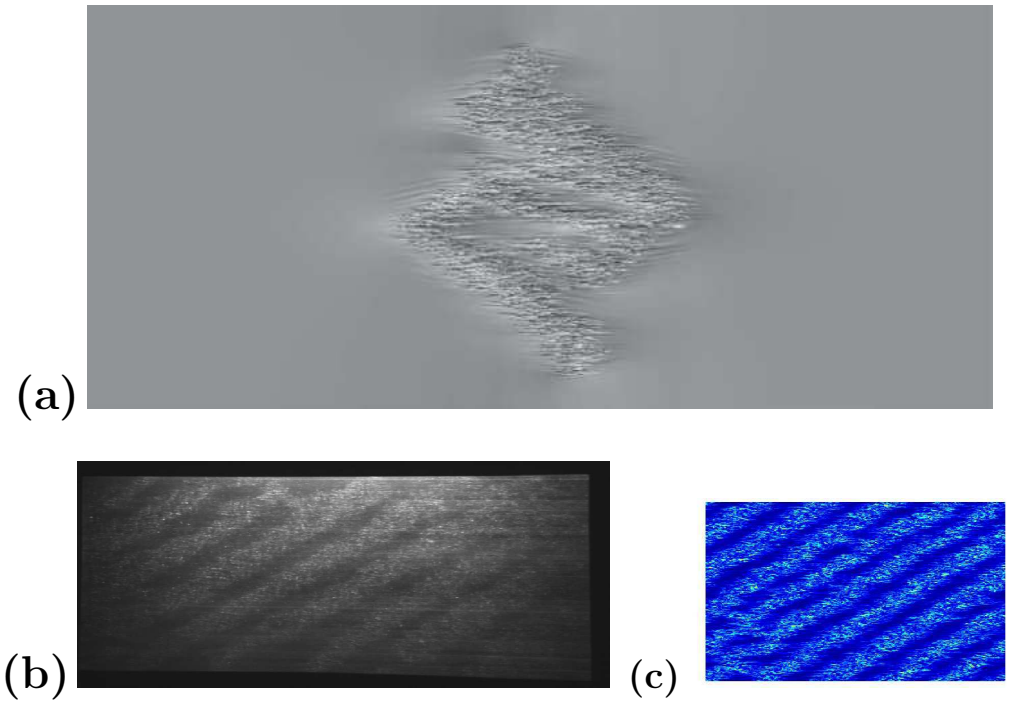


FIGURE 1.3 – (a) :Exemple de *spot* turbulent dans l'écoulement de Couette plan, niveaux de gris de v_y (DNS, Duguet *et al.* [26]). (b,c) Exemples de bande oblique. (b) : Photographie du motif dans l'écoulement de Couette plan (les bandes turbulentes sont révélées grâce aux paillettes de Kaliroscope), $R = 358$, [73] (c) : niveaux de couleurs de $\vec{v}^2$, la perturbation à l'écoulement laminaire, résultat de simulations numériques, $L_x \times L_z = 432 \times 256$, $R = 290$.

Pour les nombres de Reynolds inférieurs à $R_\mathrm{t} \simeq 415$, la cohabitation se manifeste. On peut obtenir de la turbulence de deux manières : soit en abaissant par trempe ou adiabatiquement le nombre de Reynolds depuis la turbulence *featureless* [73], soit en créant un germe [12, 13]. Dans le premier cas, on voit apparaître des trous laminaires qui se réorganisent en bandes obliques [26]. Dans le cas d'un germe, on a une phase de croissance de *spot*, qui prend d'abord une forme de losange, puis se dissymétrise en bandes obliques et suit une croissance labyrinthique (Fig. 1.3 (a)) avant que l'ensemble du domaine soit occupée par une ou des bandes [26] (Fig. 1.3 (b,c)). Ces bandes obliques correspondent au fameux régime de turbulence en spirale, ou *barber pole turbulence*, de l'écoulement de Taylor Couette (Fig. 1.4 (b)). Ce régime oblique a été simulé pour la première fois dans un domaine périodique oblique [5–7, 96]. Depuis, il a été reproduit dans différents écoulements quasi-bidimensionnels dans des géométries moins contraintes [1, 26, 58, 77, 92, 94].

Une première constatation est que l'on peut définir, après moyennage en temps, un écoulement de grande échelle le long des bandes [6, 17, 18]. Deuxièmement, dans Taylor Couette comme dans Couette plan, si le domaine est assez grand pour contenir plusieurs longueurs d'ondes, les bandes obliques restent désorganisées près de R_t (Fig. 1.4 (c)) tandis qu'elles s'organisent progressivement pour des nombres de Reynolds inférieurs. Ce régime désorganisé reste relativement complexe en espace. Lorsque les bandes sont organisées, le régime est extrêmement régulier en temps et en espace [6, 73, 75]. Une troisième constatation [6, 73–75, 96] est que le régime de bandes correspond à une modulation en

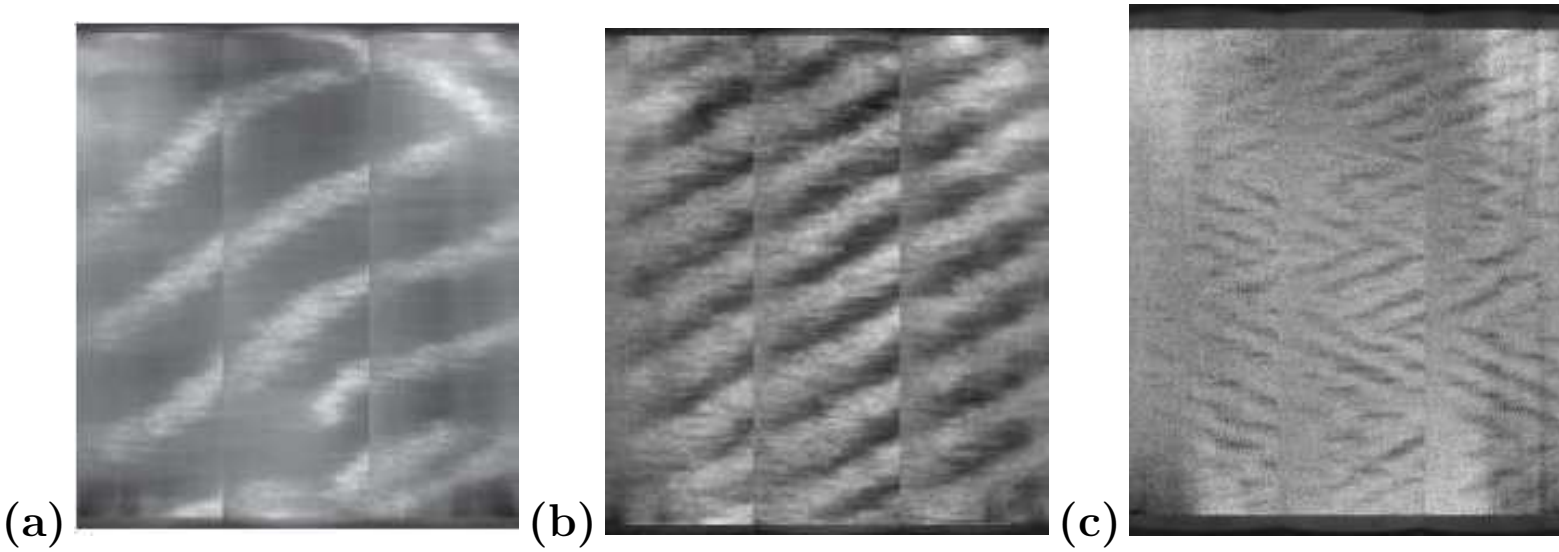


FIGURE 1.4 – Photographies du motif dans l'écoulement de Taylor–Couette plan obtenues par Prigent [73] (les bandes turbulentes sont révélées grâce aux paillettes de Kaliroscope), (a) régime de bandes fragmentées $R_0 = -1050$, $R_\mathrm{i} = 620$, (b) : régime de bandes organisées $R_0 = -1200$, $R_\mathrm{i} = 790$ (c) : régime à grand nombre de Reynolds $R_0 = -1200$, $R_\mathrm{i} = 760$.

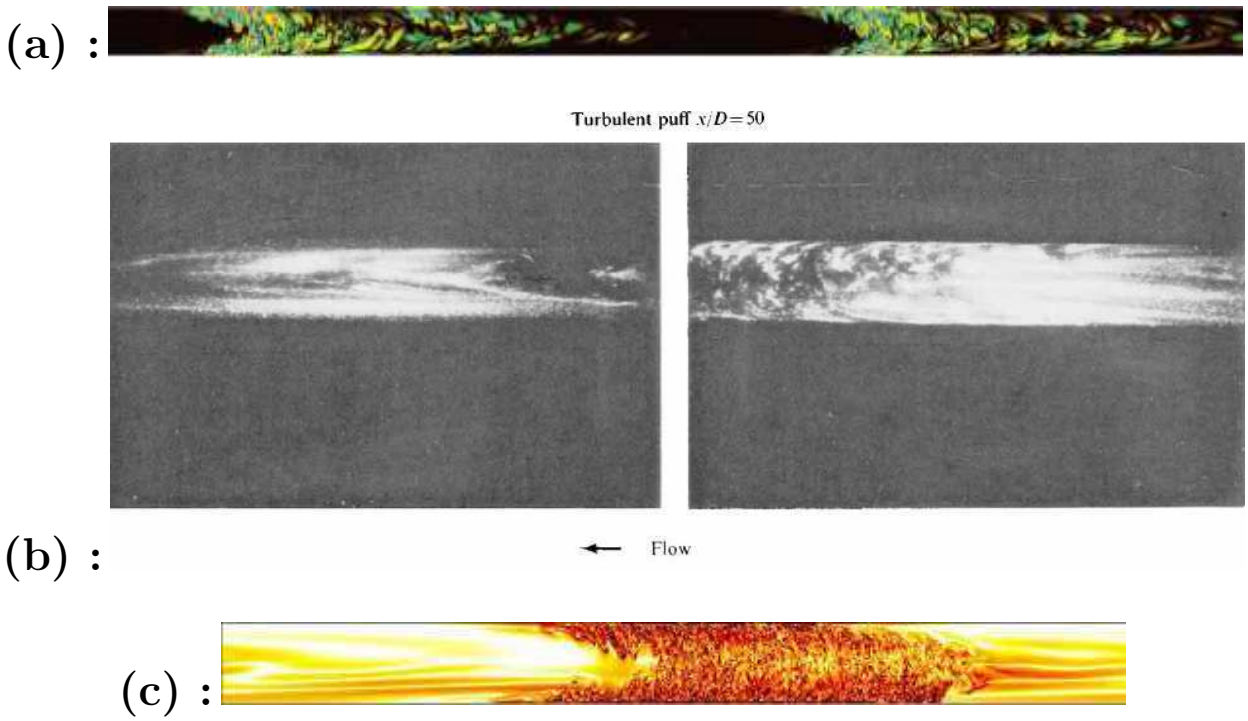


FIGURE 1.5 – Exemples de *puffs* dans PPF (a) DNS $R = 2300$ (Avila *et al.* [3]), (b) expérience $R = 2500$ (Wygnanski & Champagne [102]), (c) *slugs* dans l'écoulement de Poiseuille dans une conduite $R = 3000$ (Duguet *et al.* [28]) turbulents dans des DNS.

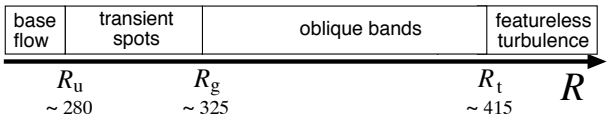


FIGURE 1.6 – Diagramme des régimes dans l'écoulement de Couette plan en fonction du nombre de Reynolds, tiré des expériences [73].

bonne approximation sinusoïdale de l'intensité de la turbulence. Pour cette raison, le mode de Fourier fondamental du motif, ainsi que les quantités qui en sont dérivées [7, 73–75] sont un très bon moyen de quantifier la modulation et sa disparition à R_t.

Lorsque le nombre de Reynolds est diminué, on atteint un autre régime complexe (figure 1.4 (a)) [73]. On voit apparaître des relaminarisation, des trous dans les bandes. Cela conduit à une fragmentation des bandes [73] qui suit parfois une dynamique complexe (Fig. 1.4 (a)). En dessous d'un second nombre de Reynolds $R_g \simeq 325$, cela conduit après un transitoire parfois complexe à la relaminarisation. La question de la turbulence transitoire réapparaît dans ce régime. En l'état actuel, elle n'est expérimentalement définie qu'en tant que durée de vie d'un objet unique (bande) [85]. On ne dispose pas de données sur le comportement de transitoires de plusieurs bandes. On peut concentrer ces résultats expérimentaux sur un diagramme de phase pour le cas de l'écoulement de Couette plan (Fig. 1.6).

Le cas quasi-unidimensionnel de la conduite présente l'intérêt de contenir, de manière plus accessible, une partie de la phénoménologie de Couette, parce que les interfaces laminaire-turbulent sont plus localisées. C'est sur ce cas qu'Osborne Reynolds a mis en évidence la transition [76] et ses principales caractéristiques : la stabilité de l'écoulement de base laminaire, la nécessité de perturbations d'amplitude finies pour déclencher la turbulence, le côté très intermittent de la turbulence, et la définition du nombre de Reynolds comme unique paramètre de contrôle de la transition.

Pour le haut de la gamme transitionnelle [28] la croissance à partir d'un germe conduit au régime dit de *slug* (Fig. 1.5), pour lequel la turbulence envahi de manière monotone la conduite (avec des vitesses différentes en amont et en aval). L'organisation spatiale de l'intensité de la turbulence est symétrique entre amont et aval du slug [102]. Ce régime est similaire à la turbulence uniforme dans Couette pour $R > R_t$.

Pour des nombres de Reynolds un peu plus faibles, on trouve le régime très intermittent, dit de *puff* [28,102] (Fig. 1.5). Les *puffs* sont métastables : ils peuvent soit relaminariser, soit générer un autre *puff* en amont par un processus complexe qu'on peut résumer par une croissance du puff puis une séparation autour de son milieu. On parle de *puff splitting* [65]. Les séparations et relaminarisations d'un *puff* donné ont des statistiques de temps poissonnienne bien définies [3]. Lorsque le nombre de Reynolds est décru, les séparations sont de plus en plus rares, et le temps entre séparations moyen devient beaucoup plus grand devant celui des relaminarisations [3]. Ces deux temps de vie se croisent à un nombre de Reynolds $R = 2040$. On tombe alors sur un régime de turbulence purement transitoire. À la différence des écoulements quasi bidimensionnels, les statistiques de temps de vie de la turbulence dépendent peu de la taille, principalement parce qu'à ces Reynolds on regarde le comportement d'un *puff* isolé [3]. La conséquence de ces deux processus est que dans les conduites suffisamment longues, dans une gamme de nombre de Reynolds intermédiaire, on voit apparaître une coexistence laminaire-turbulence, avec une distribution de longueurs d'onde entre *puffs* [65, 83].

Dans les cas quasi-unidimensionnels comme quasi-bidimensionnels, la fraction turbulente (parfois appelée facteur d'intermittence) apparaît comme une quantité particulièrement adaptée pour mettre en évidence la transition [8]. Cela est particulièrement vrai autour de R_{g}. Cela tient au fait qu'en moyenne la fraction turbulente est bien définie pour un nombre de Reynolds donné et quantifie la cohabitation.

En remarque supplémentaire, on peut noter que des écoulements légèrement plus complexes, contenant de la rotation, un gradient de température, des effets magnétiques *etc.* [14, 93] ont un comportement similaire : en particulier, on retrouve des bandes obliques, parfois pour des nombres de Reynolds très élevés, lorsque l'effet supplémentaire joue un rôle stabilisateur. Il apparaît que la taille des bandes suit une loi d'échelle donnée par la taille du gap, elle reste donc du même ordre de grandeur lorsque R augmente, tandis que la turbulence dans les bandes a des échelles dites interne, en *wall unit*, décroissant comme $1/R$ [72].

Les particularités de la phénoménologie en domaine périodique

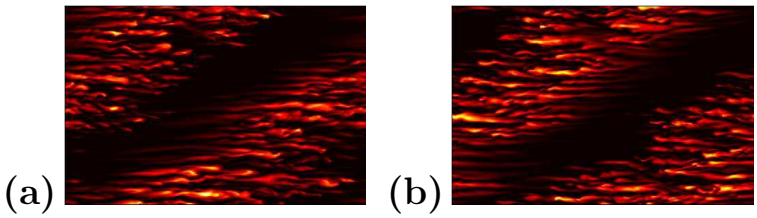


FIGURE 1.7 – Niveaux de couleur de $\mathbf{v^2}$, l'écart à l'écoulement laminaire, dans une DNS de l'écoulement de Couette plan, dans des plans $y = -0.62$ (a) : $y = 0.62$ (b) : dans un domaine périodique, $L_x = 110$, $L_z = 72$, $R = 370$ à $N_y = 27$ et $N_x x, z/L_{x,z} = 6$.

On décrit la phénoménologie du motif en domaine périodique de taille de l'ordre de la longueur d'onde, qu'on peut illustrer par la norme de l'écart à l'écoulement laminaire (Fig. 1.7). Les *streaks* apportent la contribution la plus importante à $\vec{v}^2$. Les effets des conditions de bord se font encore sentir, mais sur la bande plutôt que sur les *streaks* et vortex. On se base principalement sur les descriptions de Barkley & Tuckerman [5]. Ces remarques sont utiles pour fixer le cadre pour les études, en domaine périodique, ainsi que pour faire les choix adaptés lors des simulations numériques directes.

L'augmentation du nombre de Reynolds induit deux effets : l'augmentation de la taille du domaine occupé par la turbulence, et l'augmentation du bruit causé par la turbulence. La combinaison de ces deux effets va avoir deux conséquences : d'une part, des fluctuations d'orientation sur des échelles de temps de l'ordre de plusieurs milliers de temps de retournement (visible uniquement en domaine non contraint en orientation), d'autre part des disparitions transitoires des trous laminaires, sur des échelles de temps de l'ordre de plusieurs centaines de temps de retournement, bien plus visibles que dans les expériences de Prigent *et al.*.

Les longueurs d'ondes permises pour les bandes dans un domaine périodique sont des sous multiples de la taille du domaine. Cela impose une sélection de nombre d'onde, entre ceux permis par le système et les optimaux pour la bande [73, 75]. Ainsi quand on examine des domaines de taille croissante, on va voir augmenter la longueur d'onde de la bande présente, jusqu'à ce que le système

préfère avoir une longueur d'onde inférieure. Le régime de taille intermédiaire entre deux nombres de longueur d'onde va contenir une compétition de longueur d'onde et d'orientation.

En suivant une bande dans un domaine périodique sur des temps très longs (de l'ordre de plusieurs dizaines à centaines de milliers de temps de retournement), elle se déplace de manière erratique dans le domaine.

1.2.3 Les écoulements développés spatialement

Principe

Les écoulements développés spatialement correspondent à tous les cas où l'écoulement de base dépendant principalement d'une coordonnée y, évolue lentement dans une ou deux autres directions x et z (dans lesquels pointent la principale composante du vecteur vitesse) [46, 47]. La principale particularité des profils dans la direction y est d'avoir une couche de cisaillement instable. De nombreux exemples peuvent se trouver dans des sillages, jets *etc.*. Une des particularités de ces études d'instabilités est de faire la distinction entre une instabilité convective (Fig. 1.8 (a)), pour laquelle les perturbations sous forme de paquet d'onde sont advectées en espace et sont éventuellement évacuées, et une instabilité absolue pour lesquelles les perturbations croissent sur place. Cette distinction prend évidemment son sens quand un élément particulier permet de choisir un référentiel donné. La lenteur de l'évolution de l'écoulement de base dans la direction x (voire z) va permettre ce qu'on appelle l'approximation locale ou quasi-parallèle du profil. La stabilité de l'écoulement peut s'étudier en première approximation sur chacun des profils supposés parallèles. Ainsi, on peut voir des situations où, selon le lieu dans l'écoulement, on trouve des zones où l'écoulement est stable, convectivement instable ou absolument instable. Le caractère absolu ou convectif peut être déterminer grace au critère de Briggs–Bers sur la stabilité asymptotique de l'écoulement [47] . Les zones absolument instables ayant une tendance à être des oscillateurs une fois saturées, les zones convectivement instable, elles, ayant tendance à amplifier des perturbations qu'elles advectent. L'écoulement n'est globalement (au sens spatial) instable que s'il existe des zones d'instabilités absolue, et on va voir apparaître des comportements particuliers aux fronts entre zones d'instabilités absolue et convective, de type émission d'onde.

La phénoménologie de ces écoulements montre un scénario de transition vers la turbulence principalement spatial, qui font généralement appel à une instabilité globale et une transition convectif/absolu. On constate des séries d'instabilités, d'évolution vers un état plus complexe puis d'instabilité de ces états.

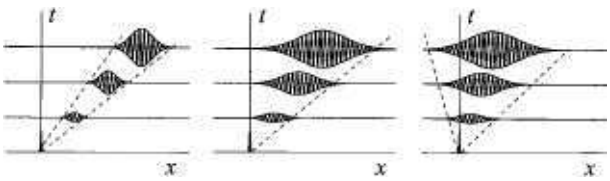


FIGURE 1.8 – Schéma de principe de la croissance d'un paquet d'onde pour un écoulement convectivement instable, marginalement absolument instable et absolument instable.

Lien avec le problème

La relation entre ce scénario et la transition des écoulements de paroi parallèles et linéairement stables n'est a priori pas évident. Cependant l'écoulement grande échelle et le comportement à petite échelle de la cohabitation laminaire-turbulente peut venir créer une situation très similaire. En effet, on constate dans les DNS des *puffs* métastables que les couches de mélange générées par les *streaks* sont instables vis à vis d'instabilités de type Kelvin–Helmholtz et qu'elles subissent l'advection de l'écoulement grande échelle [28,87] (Fig. 1.2). Ce dernier va évoluer spatialement relativement lentement par rapport à la longueur d'onde de l'instabilité.

Une des difficultés pour identifier des instabilités dans ce type de cadre va être de mettre en évidence un écoulement qu'on peut supposer de base, ou du moins, une situation quasi-permanente et régulière représentant suffisamment bien l'écoulement pour qu'elle puisse décrire des caractéristiques de l'instabilité dans l'écoulement turbulent. Cette étape est nécessaire ne serait ce que pour différencier instabilité et écoulement non-perturbé. Dans certains cas, on peut extraire le comportement à petite échelle, ne serait ce que qualitativement d'une solution permanente des équations de Navier–Stokes [101]. Elle est évidemment nécessaire pour étudier la stabilité de l'écoulement. Le plus souvent, en particulier quand certaines composantes des mécanismes sont mals connus, on doit reposer sur des échantillonnages des expériences (réelles ou numériques). Différentes approches sont possibles comme l'échantillonnage brut des champ de vitesse [60] (à plus haut Reynolds). Dans d'autres situations, l'ajustement des données par un profil classique, avec quelques paramètres ajustables, peut se révéler utile [105]. À chaque fois, des quantités caractéristiques apparaissent : amplitude du champ de vitesse, échelle caractéristique de variation spatiale, positions des maxima *etc.*. Dans tous les cas, l'ensemble de la distribution de profils doit être testée, on trouve souvent que seule une part assez réduite et relativement intense de la distribution de profils est instable [60,90]. Dans chacun de ces cas, un modèle de tension de Reynolds ou de viscosité turbulente classique, qui maintient le profil à l'équilibre, est utilisé. Dans les cas à très bas Reynolds, où ces modèles ne sont plus valides, une approche *ad hoc* peut être nécessaire.

1.3 Différentes approches de modélisation

On passe d'un point de vue expérience et DNS à des approches, numériques ou analytiques, centrées sur une ou quelques particularités de l'écoulement pour les isoler et les mettre en évidence. On peut séparer les modélisations en deux parts, d'une part à petite échelle, partant de Navier–Stokes et cherchant à retrouver le comportement de la turbulence à grande échelle, d'autre part à grande échelle, partant de données échantillonnées, et cherchant à donner un cadre d'étude.

1.3.1 Petite échelle

Du point de vue de la petite échelle, on s'intéresse surtout aux instabilités linéaires et à la forme de l'espace des phases. Le but est de donner une description théorique aux expériences numériques en MFU, à comprendre les mécanismes de maintien de la turbulence et les mécanismes de relaminarisation.

Perturbations optimales linéaires

Face à l'échec de l'approche linéaire modale classique, une première possibilité de solution, toujours linéaire, consiste en l'étude non-modale du système [16, 88]. En effet, même si, pour un système linéairement stable, toute condition initiale retourne asymptotiquement vers 0, l'évolution à partir de certaines conditions initiales présente un maximum d'énergie effective en un temps fini. On parle de croissance transitoire [16, 88]. L'idée derrière cette approche est qu'une telle condition initiale, d'amplitude non plus infinitésimale mais finie peut suivre un comportement bien décrit par l'opérateur linéaire, et croître suffisamment pour atteindre un régime non-linéaire. Pour obtenir une telle condition initiale et un tel comportement, il faut choisir une combinaison linéaire adaptée de modes propres de l'opérateur linéarisé du système [3], par une procédure d'optimisation d'un gain (généralement la norme du champ de vitesse au bout d'un temps T sur la norme de la condition initiale), par rapport à la condition initiale.

Ces normes sont souvent interprétées comme des énergies du système, et l'interprétation de perturbation optimisant l'énergie du système est relativement claire. Une faiblesse de l'approche est de négliger entièrement l'aspect non linéaire et d'amplitude finie de la turbulence dans les écoulements de parois. On peut très bien concevoir des exemples présentant de la croissance transitoire à l'ordre linéaire, mais déconnectés d'un état non-trivial à l'ordre non linéaire [22, 100], ce qui nécessite de déplacer les études linéaire à une base non triviale, différente de l'écoulement laminaire.

Cela étant dit, un des principaux succès de l'approche a été de mettre en évidence le mécanisme dit de *lift-up* par les vortex longitudinaux [101]. Cette perturbation optimale, tridimensionnelle, advecte du fluide rapide d'une région de l'écoulement vers une autre. Elle contient les *streamwise vortices* des écoulements turbulents et peut être tenue comme responsable de la formation des *streaks*. Les longueurs d'onde présentes sont en bon accord avec les constatations expérimentales.

Identification du cycle auto-entretenu

L'étude de la MFU permet de mettre en évidence le processus d'auto-entretien de la turbulence de paroi, ou *Self-Sustained Process*, ne serait-ce que d'un point de vue qualitatif [40, 49]. L'idée qui ressort des DNS est que les *streaks* dans une petite cellule (Fig. 1.1 (b)) subissent une instabilité de Kelvin–Helmholtz dans le plan $x - z$. L'instabilité forme de la vorticité normale à la paroi ω_y qui est transformée en vortex longitudinaux (Fig. 1.1 (b)) par l'écoulement de base. Ces vortex, *via* le mécanisme de *lift-up*, reforment les *streaks*. Ces constatations des DNS peuvent être mises dans le contexte de modèles relativement simples [101]. On peut en tirer l'instabilité des *streaks*, de pulsation nulle. En prenant une approche de type modèle réduit, *i.e.* avec un bon choix limité de modes dans la direction y perpendiculaire à la paroi, on peut décrire l'ensemble de la dynamique non-linéaire du cycle. On peut ainsi commencer par identifier une bifurcation de Hopf, conduisant à un état périodique, autour de $R \sim 100$, puis des bifurcations homoclines autour de $R \sim 350$, conduisant à un état suivant le cycle et pouvant éventuellement relaminariser [100, 101]. Cette approche traitée analytiquement dans un écoulement type peut être transposée à tous les écoulements de paroi classiques. Ces approches mettent de plus en évidence d'autres instabilités de cisaillement des profils de type *streaks* qui correspondent au cisaillement dans la direction y et ont une pulsation non nulle [101]. D'autre types d'approches de ce genre de cycles dans les écoulements cisaillées sont possibles [90], elles

3. D'où le nom d'approche non-modale

ont l'intérêt de mettre en évidence les conditions sur "l'amplitude" des *streaks* pour que l'instabilité se produise.

Ce type d'approche peut motiver des études complètement non-linéaires des équations de Navier–Stokes, pour mettre en évidence les équivalents des trajectoires périodiques et homoclines des modèles. La première solution exacte non-linéaire des équations de Navier–Stokes a été mise en évidence par Nagata [66]. En termes de forme et de nombre de Reynolds, elle correspond à la bifurcation de Hopf du modèle de Waleffe. Depuis, motivé par le succès du processus auto-entretenu, un certain nombre d'ondes, solutions exactes *etc.* ont étés mises en évidences dans les différents écoulements de paroi. Elles apportent une aide à la compréhension du chaos à petit nombre de degrés de liberté qu'on trouve dans les systèmes de type MFU. En effet elle peuvent jouer le rôle de trajectoires autour desquelles s'organise l'attracteur chaotique du système [67].

Frontière : edge states et perturbations optimales non linéaires

Étant donné que la turbulence de paroi peut être transitoire dans une certaine gamme de nombre de Reynolds, la question de savoir si le comportement chaotique dans la MFU est un attracteur ou un repulseur se pose. Parallèlement, se pose aussi la question de la frontière entre l'état chaotique et l'état laminaire. En effet, si les solutions particulières apportent de l'information sur le chaos correspondant à la turbulence, elles n'informent pas sur l'échappement du voisinage de l'attracteur chaotique vers le régime laminaire. Des modèles simples [101] mettent en évidence l'importance d'une telle frontière séparant les deux états, sous la forme d'un point col. En retournant aux équations de Navier–Stokes, ces frontières peuvent être explorées dans les simulations numériques.

Des approches par dichotomie [25, 28, 89, 103] ont mis en évidence la frontière entre le bassin d'attraction laminaire et l'état turbulent. On peut d'une part mettre en évidence la structure de ce type d'état, mais aussi le fait qu'ils vivent sur la *separatrix*[4] dans l'espace des phases entre l'état laminaire et l'état turbulent. Cette dernière est peupléà de points cols, le plus souvent avec une variété instable de dimension 1 : une légère perturbation dans une direction conduit à l'état laminaire, dans l'autre vers l'état turbulent. Au delà de leur organisation spatiale, on peut par exemple mettre en évidence la distance de cette frontière à l'état laminaire en fonction des paramètres.

En abordant le problème de l'autre direction, c'est à dire du passage de l'état laminaire vers l'état turbulent, on peut déterminer des perturbations optimales non-linéaires [27, 64]. On cherche ainsi à optimiser la forme de la condition initiale, vis à vis d'une fonction de coût de la trajectoire, et à minimiser son amplitude pour avoir une trajectoire passant par les cols et allant de la proximité de l'état laminaire vers la turbulence. On obtient ainsi un problème variationnel relativement complexe [64]. L'ajout de contraintes à cette fonction de coût du point de vue du comportement de l'écoulement permet d'améliorer la solution, c'est à dire, de réduire l'amplitude de la condition initiale. Un autre intérêt d'une telle approche est de mettre en évidence la succession d'états par lesquels l'écoulement passe du laminaire au turbulent.

4. Aussi dite frontière de bassin d'attraction. Dans le langage des systèmes dynamiques, pour une EDO dans un espace de dimension n il s'agit de la variété de dimension $n-1$ séparant deux types de comportements [53]

1.3.2 Grande échelle

On modélise deux aspects de la cohabitation laminaire-turbulent. On peut d'une part vouloir décrire la coexistence en elle-même, *i.e.* modéliser le comportement des grandeurs du type fraction turbulente, la question de l'invasion du laminaire par le turbulent, ou le contraire, dont on peut éventuellement extraire un comportement régulier (bandes *etc.*). D'autre part, on peut prendre la coexistence comme donnée et modéliser uniquement la modulation de la turbulence.

Modélisation de la coexistence laminaire-turbulente

Il s'agit surtout de modéliser le comportement des fronts laminaires-turbulents, soit typiquement le régime en *spot* isolé. Le comportement régulier en bandes peut sortir de ce type de modèle.

L'approche la plus simple consiste en des équations d'amplitude isotrope. La variable utilisée dans ces équations correspond typiquement à l'amplitude de la différence à l'écoulement laminaire, nulle dans le laminaire et non nulle dans les régions turbulentes. On utilise un signe + devant les non-linéarités cubiques et un signe − devant les non-linéarités quintiques pour prendre en compte le caractère discontinu de la "transition". Des termes diffusifs viennent ensuite rendre compte de la contamination du laminaire par le turbulent [11, 13]. On peut ajuster ces équations modèles pour prendre en compte l'effet du bruit intrinsèque à la turbulence, entre autres, mais il est difficile de leur faire contenir le comportement transitoire près de la disparition de la turbulence ainsi que du caractère profondément anisotrope de la croissance des *spots*, qui croissent en losanges ou en forme de bandes selon le nombre de Reynolds.

D'un point de vue différent, le comportement le comportement de la turbulence de paroi à la transition a longtemps été comparée au comportement de type intermittence spatio-temporelle que l'on trouve dans la convection turbulente dans un anneau [71]. Les modèles se comparent quantitativement à la percolation dirigée. Les adaptations quantitatives de ce type d'approche à la turbulence de paroi ont longtemps été difficiles [12]. Ce n'est que récemment que la bonne connaissance obtenue sur le comportement de l'écoulement de Poiseuille dans une conduite a permis la construction de modèles de réaction-diffusion et de réseaux d'itérations couplés [8]. Le détail du modèle est partiellement basé sur l'hydrodynamique (choix des variables, brisure de symétrie), ainsi que sur les modèles de réaction diffusion. Il est intéressant de voir que l'introduction d'un bruit multiplicatif donne aux équations continues l'ensemble de la phénoménologie de Poiseuille. Des tentatives d'extension de ce type de modèles à Couette plan peuvent être considérées avec un succès relatif quant au comportement de l'écoulement dans la direction longitudinale, en particulier la modulation très régulière de type bande [9]. Néanmoins, ils ne contiennent pas le comportement oblique de l'écoulement dans la direction transverse. On peut être tenté de faire la comparaison avec les modèles de réaction diffusion sur réseau de type percolation dirigée [44]. Ces derniers peuvent se reformuler sous la forme d'une théorie de champ, dont découlent des équations de Langevin pour une variable complexe avec bruit multiplicatif (en racine). On peut en déduire une équation d'évolution pour une variable réelle très similaire aux modèles de l'écoulement de Poiseuille.

Modèlisation de la bande

Deux approches assez similaires ont été prises pour décrire la spirale turbulente de l'écoulement de Taylor–Couette. La première cherche à faire sortir la cohabitation comme conséquence des équations,

la seconde, plus phénomènologique décrit directement le comportement de l'amplitude de la modulation laminaire-turbulent.

Ainsi, en partant des modèles quintiques utilisés pour les *spots*, et en ajoutant un terme intégral, basé sur un argument sur la pression, quantifiant le degré d'occupation [42], on obtient une équation d'amplitude pour l'intensité de la turbulence qui présente la coexistence laminaire-turbulent. La faiblesse de cette description est qu'elle ne fait pas apparaître de longueur d'onde : on ne trouve qu'une zone "laminaire" et une zone "turbulente" dans le domaine quelque soit sa taille. Son avantage est de donner une importance aux comportements à grande échelle, comme les écoulements moyens [6,51,91] dans l'équation d'amplitude, à la différence des non-linéarités qui traduisent un comportement local, ou du terme diffusif qui traduit un comportement à très courte portée.

On peut palier ce défaut en se plaçant à un niveau inférieur de modélisation en décrivant directement la bande à l'aide d'une équation d'amplitude pour la modulation de la turbulence [73–75]. La spirale turbulente de Taylor–Couette ressemblant beaucoup à un motif anisotrope qui disparaît apparemment continuement lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds. On peut ainsi proposer un modèle de type Ginzburg–Landau anisotrope [19] pour rationaliser les mesures. Ainsi décrire l'ensemble de la statique et de la dynamique de l'écoulement revient à donner des valeurs à quelques coefficients. Prigent proposait de prendre en compte l'effet du bruit intrinsèque causé par la turbulence en ajoutant un bruit additif transformant le modèle de Ginzburg–Landau en modèle de Langevin [98]. L'exploration de ce modèle et la comparaison avec l'écoulement réalisée jusqu'à présent est moins extensive que dans le cas déterministe. En particulier ce modèle ainsi que l'écoulement peuvent contenir des éléments de type motif bruité [84] très semblables aux phénomènes critiques [104].

1.4 But et plan

On se penche dans la thèse sur des problèmes ouverts en ce qui concerne la bande, en particulier la description complète de la phénoménologie de Couette plan ainsi que les mécanismes de formation de la cohabitation. On va donc suivre deux approches distinctes. La première est centrée sur les petites échelles, de l'ordre de l'épaisseur, dans le contexte de la bande et de l'écoulement moyen. La seconde est centrée sur le comportement de la bande à grande échelle, pour quantifier l'ensemble des phénomènes visibles dans la bande, pousser en détail l'étude du formalisme et comparer les deux. On s'intéresse aussi à la croissance oblique des *spots* et à la formation de trous dans la turbulence. On espère qu'une meilleur connaissance de la phénoménologie et une organisation de la zoologie de la turbulence dans l'écoulement permettra d'avancer sur la modélisation, comme cela a été le cas pour l'écoulement de Poiseuille.

On commence par décrire le système et les équations le décrivant dans différents cadres. On introduit nos procédure numériques, puis on décrit rapidement la phénoménologie de la bande oblique (Chapitre 2). On poursuit par une étude locale. On donne une description idéalisée de l'écoulement. On étudie l'instabilité de cet écoulement dans la DNS dans une étude linéaire (Chapitre 3). On poursuit sur l'étude de la bande oblique à grande échelle : on introduit les procédures de traitement spécifique, puis on explore les modèles et les simulations numériques en suivant une approche de formation de motif sous bruit et de phénomène critique (chapitre 4). Finalement on examine les relaminarisation et les croissances de *spots* dans les chapitres 5 et 6 en utilisant les outils introduits dans les sections précédentes. On fait le lien entre les parties et le bilan de l'étude dans la conclusion 7,

on discute des perspectives et des problèmes ouverts.

Les annexes présentent des détails plus techniques de la thèse. La première décrit l'implémentation du code CHANNELFLOW [36] et se concentre sur certaines particularités du code ayant un effet sur la qualité de la description de l'écoulement. La seconde annexe décrit dans le détail la procédure numérique utilisée pour décrire la dépendance des champs (vitesse, vorticité, fonction de courant) dans la direction normale à la paroi dans tous les modèles linéaires. La troisième annexe contient des détails sur la résolution de l'équation de Fokker–Planck pour la détermination de temps de premier retour difficiles à trouver dans la littérature ainsi que l'application de ce formalisme à notre problème. La quatrième décrit un petit *toy model* inabouti qui peut être ajusté pour décrire et rationaliser le comportement de l'écoulement.

Chapitre 2

Le système : équations, procédures numériques, traitement

Ce premier chapitre introduit de manière détaillée le système, ses équations de base, les procédures numériques utilisées. On présente plus en détail la phénoménologie à grande échelle de l'écoulement autour de la bande turbulente. Ceci nous permet d'introduire des procédures de traitement et de calcul de grandeurs turbulentes standard utilisés dans toute la suite. Les résultats présentés dans ce chapitre complètent ceux de Barkley & Tuckerman [6].

2.1 Le système et ses équations

2.1.1 Géométrie

On travaille sur l'écoulement de Couette plan (figure 1.1 (a)). Les coordonnées sont repérées par les vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$. L'écoulement entre deux frontières planes situées en $y = \pm h$ en mouvement aux vitesses $\pm U$ est $\vec{v}_b(\pm h) = \pm U\vec{e}_x$: on utilise une condition aux bords réaliste de non glissement. Ce sont la direction longitudinale et la direction normale à la paroi qui fixent les deux premiers vecteurs du système de coordonnées et par conséquent $\vec{e}_z$. Une première trace de la centro-symétrie de l'écoulement : $v_x \leftrightarrow -\vec{v}_x$, $v_y \leftrightarrow -v_y$, $x \leftrightarrow -x$, $y \leftrightarrow -y$ apparaît. On verra dans la suite que sa trace se retrouve dans l'écoulement turbulent moyen.

L'écoulement est supposé incompressible, ce qui est tout à fait raisonnable étant donné les conditions expérimentales [73]. Les domaines considérés sont périodiques, de taille $L_x \times L_z$. Les longueurs sont adimensionnées par h, et les vitesses par U. Le temps caractéristique inertiel (ou de retournement) est alors h/U, dont on attend qu'il gouverne les phénomènes rapides liés à la turbulence. On travaille uniquement avec l'écart à l'écoulement de base, le champ de vitesse $\vec{v}$, la pression étant donnée par l'incompressibilité et l'écoulement de base laminaire restant inchangé. Les énergies seront exprimées en unités de U^2. Le paramètre de contrôle apparaissant dans les équations est $R = hU/\nu$, avec ν la viscosité cinématique. Le temps caractéristique visqueux est h^2/ν, le nombre de Reynolds peut être vu comme le rapport de ce avec le temps de retournement. Le comportement du système est alors entièrement déterminé par les paramètres R, L_x et L_z [1].

1. Les tailles en unités de h correspondent à un facteur 2 près aux rapports d'aspect des expérimentateurs $L_{x,z}/(2h)$.

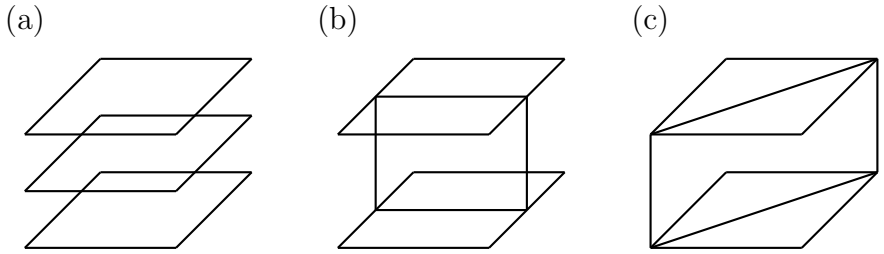


FIGURE 2.1 – Représentation schématique des plans utilisés pour les visualisations des DNS : (a) $x-z$ (b) $x-y$, (c) $y-z'$

Dans l'étude des DNS, on étudiera souvent des plans en coupe du domaine, appelés respectivement $x-z$: parallèle aux plaques (Fig. 2.1 (a)), $x-y$: perpendiculaire aux plaques et parallèle à la direction longitudinales (Fig. 2.1 (b)) et $y-z'$: perpendiculaire aux plaque et parallèle à la bande (Fig. 2.1 c)). Le z' utilisé ici correspond au x' de Barkley & Tuckerman [5, 6].

2.1.2 Équations de Navier–Stokes pour un écoulement incompressible

On a alors $\vec{v}_b = y\vec{e}_x$. On intègre numériquement les équations de Navier–Stokes, qui se réécrivent, en utilisant des notations tensorielles et les conventions de sommation d'Einstein, pour l'écart $\vec{v}$ à l'écoulement de base $\vec{v}_b = Uy\vec{e}_x$:

$$\partial_t v_i + (v_j\partial_j)v_i + y\partial_x v_i + \delta_{i,x}v_y = -\partial_i P + \frac{1}{R}\partial_j\partial_j v_i\,, \tag{2.1}$$

avec la condition d'incompressibilité :

$$\partial_i v_i = 0\,, \tag{2.2}$$

et les conditions aux limites :

$$v_i(y = \pm 1 = 0)\,, \tag{2.3}$$

et

$$v_i(x + nL_x, z + pL_z, y, t) = v_i(x, z, y, t),\ (n, p) \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.4}$$

2.1.3 Équations linéarisées d'Orr–Sommerfeld–Squire

Les équations de Navier–Stokes décrivent l'évolution du système dans le cas général. On s'intéresse maintenant au cas plus particulier où un écoulement quasi-permanent est donné et où on veut étudier les perturbations à cet écoulement. On fera toujours une analyse linéaire temporelle, c'est à dire que les taux de croissance et pulsations seront les valeurs propres du problème linéarisé :

$$\partial_t f = L(f) \Rightarrow (\sigma + \imath\omega)f = L(f)\,. \tag{2.5}$$

On décrit successivement les cas quasi-parallèles et non parallèles évoqués dans l'introduction, on décrit aussi le cas d'un écoulement de base modulé dans la direction transverse.

Orr-Sommerfeld et Squire

Dans le cas d'un écoulement indépendant du temps à deux composantes $\bar{V}_x, \bar{V}_z$, dépendant uniquement de la coordonnée y, on s'intéresse à la perturbation à cet écoulement $\vec{u} = \vec{v} - \vec{\bar{V}}$. Les équations de Navier–Stokes peuvent être réécrites en termes des variables u_y et $\eta = \partial_z u_x - \partial_x u_z$, la composante normale à la paroi de la vorticité , pour obtenir le système d'Orr-Sommerfeld-Squire [24, 88]. Ce système d'équations se révèle particulièrement pratique pour l'étude linéaire d'une perturbation à un écoulement indépendant du temps. La procédure numérique correspondant au traitement de ces équations linéarisées, utilisant des bases de fonctions $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ adaptées aux conditions aux limites en y sur η et u_y, est détaillée dans l'annexe B.

L'équation d'Orr-Sommerfeld linéarisée s'écrit dans le cas général :

$$\partial_t \Delta u_y + \left(\bar{V}_x \partial_x + \bar{V}_z \partial_z\right) \Delta u_y - \left(\partial_y^2(\bar{V}_x)\partial_x + \partial_y^2(\bar{V}_z)\partial_z\right) u_y - \frac{1}{R}\Delta^2 u_y = 0\,. \tag{2.6}$$

Elle est complétée par l'équation de Squire :

$$\partial_t \eta + \bar{V}_x \partial_x \eta + \bar{V}_z \partial_z \eta + \left(\partial_y(\bar{V}_x)\partial_z - \partial_y(\bar{V}_z)\partial_x\right) u_y - \frac{1}{R}\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right)\eta = 0\,. \tag{2.7}$$

Les conditions de bord correspondantes sont :

$$\eta(\pm 1) = 0,\ u_y(y = \pm 1) = 0,\ \partial_y u_y(y = \pm 1) = 0\,.$$

Pour une analyse de stabilité linéaire, les deux perturbations sont du type :

$$\eta(y, x, t) = B(y) \exp\left(ik_x x + ik_z z + \sigma t - i\omega t\right) + c.c.$$

et

$$u_y(y, x, t) = C(y) \exp\left(ik_x x + ik_z z + \sigma t - i\omega t\right) + c.c.\,.$$

On ne procède qu'à des analyses temporelles modales [88]. Dans ce cas, les deux fonctions sont les vecteurs propres de notre problème aux valeurs propres. Les vecteurs d'onde k_x et k_z sont pris comme des paramètres, et la valeur propre est $\sigma + i\omega$ avec la pulsation ω et le taux de croissance σ. Cette description correspond aussi au cas d'une analyse dite quasi-parallèle (ou locale) [46, 47].

Dans le cas où $\bar{V}_x(y) \propto \bar{V}_z(y)$, ou si $\bar{V}_z$ est négligé, le théorème de Squire s'applique [16, 24, 88], le vecteur d'onde le plus instable est parallèle à l'écoulement de base et on peut réduire l'étude à l'équation d'Orr–Sommerfeld :

$$\partial_t \Delta u_y - \frac{1}{R}\Delta^2 u_y + \bar{V}\partial_x \Delta u_y - \partial_x u_y \partial_y^2 \bar{V} = 0 \tag{2.8}$$

Avec la même condition de bord :

$$u_y(y = \pm 1) = 0,\ \partial_y u_y(y = \pm 1) = 0\,.$$

L'équation de Squire n'apporte alors d'information que lors d'une analyse non modale de perturbation optimale linéaire, mettant en évidence la croissance transitoire due au mécanisme de *lift-up* [88]. La perturbation est de la forme $u_y(y, x, t) = A(y) \exp\left(ikx + \sigma t - i\omega t\right) + c.c.$: on utilise la même approche que dans le cas précédent. La fonction de courant ϕ vérifie la même équation.

A chaque fois que l'on procède à une analyse temporelle, on obtient la pulsation $\omega(k_x)$ ou $\omega(k_x, k_z)$ (selon les cas). On peut en déduire les vitesses de groupes $c_x = \partial_{k_x}\omega$ et $c_z = \partial_{k_z}\omega$. En pratique, l'analyse est réalisée pour des valeurs discrètes de k, les dérivées sont calculées par différences finies.

Analyse globale et analyse de Bloch–Floquet

On détaille ici le cas où l'écoulement de $\bar{V}_x$ a une dépendance respectivement en x et en z en plus de la dépendance en y. Dans tous les cas la démarche précédente utilisée consiste en la simplification en utilisant le caractère incompressible, et en l'écriture des équations pour u_y (ou ϕ la fonction de courant) et η.

L'analyse globale ou non-parallèle [47] est faite dans le cas d'un écoulement de base $\left(\bar{V}_x, \bar{V}_y\right)(x, y)$ supposé bidimensionnel, dépendant des coordonnées x, y. On s'assure que cet écoulement est incompressible, la composante $\bar{V}_y$ est donnée par la dépendance en x de la composante $\bar{V}_x$: $\partial_x \bar{V}_x + \partial_y \bar{V}_y = 0$. Grâce à l'incompressibilité, on peut traiter le problème en utilisant la fonction de courant ϕ. On a $u_y = \partial_x \phi$ et $u_x = -\partial_y \phi$. On a pour ϕ les mêmes conditions de bord que pour y : $\phi(\pm 1) = 0$ et $\partial_y \phi(\pm 1) = 0$, conséquence des conditions de bord $u_y(\pm 1) = 0$ et $u_x(\pm 1) = 0$. En éliminant la pression des équations de Navier–Stokes bidimensionnelles linéarisées on obtient l'équation suivante pour la fonction de courant ϕ :

$$\begin{aligned}\partial_t \Delta\phi + \bar{V}_x \partial_x \Delta\phi - \partial_x \phi \partial_y^2 \bar{V}_x + \bar{V}_y \partial_y \Delta\phi \left(\Delta\phi \partial_x \bar{V}_x + \partial_y \phi \partial_x \partial_y \bar{V}_x\right) \\ + \left(\Delta\phi \partial_y \bar{V}_y - \partial_y \phi \partial_x^2 \bar{V}_y + \partial_x \phi \partial_x \partial_y \bar{V}_y\right) = \frac{1}{R} \Delta^2 \phi \,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

On peut en tirer un problème aux valeurs propres, dont ϕ est le vecteur propre (mode dit global), et la pulsation complexe $\sigma + i\omega$ est la valeur propre. On considérera uniquement ici des situations où la dépendance de $\left(\bar{V}_x, \bar{V}_y\right)$ en x est sinusoïdale et simple (fondamental et premier mode) et l'échelle caractéristique de variation en x grande devant les autres échelles longitudinales du problème, typiquement la longueur d'onde du mode local le plus instable. Pour le problème numérique, on utilise donc une décomposition en modes de Fourier tronquée en x, et la base de fonctions $\{g_n\}$ vérifiant les bonnes conditions de bord en y.

L'analyse de type Bloch–Floquet est faite sur un écoulement de base $\bar{V}_x$ purement longitudinal et parallèle qui dépend de y et z. La dépendance en z étant périodique et en bonne approximation sinusoïdale, de longueur d'onde λ_z, on peut en faire une analyse temporelle de Bloch–Floquet. On utilise la version des équations d'Orr–Sommerfeld–Squire avec la dépendance en z [101] :

$$\left(\partial_t + \bar{V}_x \partial_x - \frac{1}{R}\Delta\right) \Delta u_y + \left(\partial_z^2 \bar{V}_x - \partial_y^2 \bar{V}_x\right) \partial_x u_y + 2\partial_z \bar{V}_x \partial_x \partial_z u_y = 2\partial_x \partial_y \left(u_z \partial_z \bar{V}_x)\right) \,, \tag{2.10}$$

$$\left(\partial_t + \bar{V}_x \partial_x - \frac{1}{R}\Delta\right) \eta = \left(\partial_z \bar{V}_x \partial_y - \partial_y \bar{V}_x \partial_z\right) u_y - \left(u_y \partial_y + u_z \partial_z\right) \partial_z \bar{V}_x \,. \tag{2.11}$$

Elles font intervenir u_x et u_z qui se déduisent de u_y et η par :

$$\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z = 0 \,, \eta = \partial_z u_x - \partial_x u_z \,. \tag{2.12}$$

Ces deux composantes sont ainsi éliminées dans le problème discrétisé. En faisant une analyse temporelle, on a un problème aux valeurs propres, dont u_y, η sont les vecteurs propres et le taux de croissance $\sigma + i\omega$ est la valeur propre. On a une dépendance sinusoïdale dans la direction longitudinale avec le vecteur d'onde k_x comme paramètre. On utilise les bases de fonctions adaptées aux conditions de bord dans la direction y. On utilise une décomposition en modes de Fourier dans la direction transverse z. On a une dépendance en z du type $\exp(iK_z z) \sum_n \exp(2i\pi n z/\lambda_z)$, où $\exp(iK_z z)$ est le multiplicateur de Floquet et un des paramètres de contrôle, avec le nombre d'onde k_x et le nombre de Reynolds R.

2.2 Procédure numérique

2.2.1 généralités

L'intégration numérique des équations (2.1)-(2.4) de l'écoulement est assez standard. On utilise un code ouvert, ChannelFlow dû à J. Gibson [36] qui gère la discrétisation des champs de vitesse et de pression, ainsi que l'intégration numérique en temps du champ de vitesse dans le cadre de Navier–Stokes pour Couette et Poiseuille plan. Il suppose des conditions de bord périodiques en x et z. Le code utilise une décomposition en série de Fourier dans le plan $\vec{e}_x, \vec{e}_z$, pour les conditions de bord périodiques, et une décomposition en polynômes de Chebychev dans la direction normale aux parois $\vec{e}_y$, adaptée aux conditions aux bords de non glissement. On appellera N_y le nombre de polynômes de Chebyshev utilisés dans la discrétisation, et $N_{x,z}$ les nombres de modes de Fourier (aliasés) dans le plan. Le nombre effectif de points de mailles dans le plan est $2/3N_{x,z}$. Par abus de langage, on utilisera toujours $N_{x,z}$.

On détaille les particularités du code et de la procédure numérique qui ont une conséquence pour notre approche dans l'annexe A.

2.2.2 Réduction de la résolution

En pratique, on veut procéder à l'intégration numérique sur des machines "de bureau" ou de calcul légèrement plus puissantes. Cela pose vite des problèmes de mémoire et de temps de calcul pour étudier des domaines non inclinés de taille de l'ordre de la longueur d'onde de la bande [5], aux résolutions nominales pour ces nombres de Reynolds. L'étude de domaines très grands nécessite typiquement des machines de calcul parallèle [26], et est grande consommatrice de mémoire. On adopte une procédure de "modélisation" qui vise à réduire de manière contrôlée la résolution, en particulier dans la direction y. Le but est de pouvoir mener une étude semi-quantitative de la bande, quitte à subir des décalages des seuils de transition, longueurs d'ondes de la bande et amplitude de la modulation. On suit en cela les procédures de type modèle réduit. Le présupposé (empirique) motivant la démarche est que l'ensemble des instabilités présentes dans l'écoulement et leurs saturations peut être bien décrit par peu de modes, et que les modes de nombre d'onde plus importants sont esclaves de cette dynamique, jouant un rôle de puits d'énergie et présentant surtout un intérêt pour une estimation quantitative précise et la lisibilité des représentations de l'écoulement. La procédure extrême de réduction à trois fonctions de base dans la direction $\vec{e}_y$ a eu un succès mitigé [57], l'organisation en bandes et le détail précis de la transition n'étant pas reproduit. L'augmentation du nombre de fonctions de base rend la procédure lourde, en particulier pour le calcul du terme non linéaire, car on ne dispose pas d'algorithmes de transformation rapide. On approche donc les modèles réduits en arrivant dans l'autre coté en termes de résolution : on prend une approche de type DNS et on réduit sa résolution. Idéalement une procédure de ce type n'utilise que les modes les plus pertinents, ce qui revient à changer de base de fonctions en y [101], cependant, une telle approche nécessite une connaissance relativement fine du détail de l'écoulement qu'on ne possède pas encore à ce point. On se distingue des approches dite en dimension $2+\epsilon$ qui correspondent, elles, à une réduction drastique de résolution dans la direction transverse, typiquement dans l'écoulement de Poiseuille cylindrique, justifiée par la périodicité particulière du phénomène à observer.

On explore pour cela le comportement de l'intégration numérique des équations pour chaque

résolution. Des résolutions nominales pour une approche de type modèle réduit en sont déduites. Le premier critère pour choisir une résolution est d'assurer la stabilité de l'intégration numérique : cela est impossible pour $N_y \leq 5$, et sensible pour $N_y = 7$, 9. Pour $N_y \geq 11$, cela ne pose pas de problèmes. La stabilité numérique va de pair avec le bon rendu des structures turbulentes. C'est une particularité des équations de type Navier–Stokes à nombre de Reynolds "important" d'être d'autant plus stable en temps que la résolution est bonne. Cela semble du à la nécessité de dissiper de l'énergie aux petites échelles (qui autrement s'accumule comme dans le cas de l'équation d'Euler). À $N_y = 11$ les bandes sont représentées mais la compétition entre orientations est moins intense que dans la réalité [58]. Elle est mieux représentée à partir de $N_y = 13$. Un bon compromis entre le rendu de l'écoulement (structure turbulente, bandes) et la basse résolution est atteint pour $N_y = 15$. Dans le plan, on utilisera principalement une résolution "fine" : $N_{x,z}/L_{x,z} = 4$, même si elle peut être réduite : on utilisera dans certains cas $N_x/L_x = 1$ et $N_z/L_z = 3$. Cela conduit à une résolution raisonnable pour ces nombres de Reynolds, étant donné que l'unité de paroi y^+ est de l'ordre de h. La réduction de résolution en x et z permet une baisse substantielle des pas de temps, qui doivent respecter le critère de CFL. Pour une approche de type DNS, on utilisera la résolution $N_y = 27$ et $N_{x,z}/L_{x,z} = 6$, ce qui donne de bons résultats et est cohérent avec l'étude systématique.

En pratique, les résultats sont assez satisfaisants pour les champs bruts (par exemple, la norme de l'écart à l'écoulement de base $\vec{v}^2$) ainsi que leurs dérivées (ω_z, on le verra dans la figure 3.22 (b)). On est à nouveau tentés d'affirmer que l'ensemble de la dynamique (instablités, *etc.*) est dicté par les premiers modes de Chebyshev, les suivants étant tous rapides, esclaves de cette dynamique, et n'apportant que des raffinements et un peu plus de dissipation.

Une étude systématique de l'effet de la résolution a été menée [58], qui montre principalement un décalage continu des seuils R_g et R_t (figure 2.2). Cette dépendance en la résolution, et la nécessité de représentation des structures cohérentes turbulentes ayant une longueur de corrélation longitudinale correcte, se retrouve dans les résultats obtenus pour un modèle réduit [51].

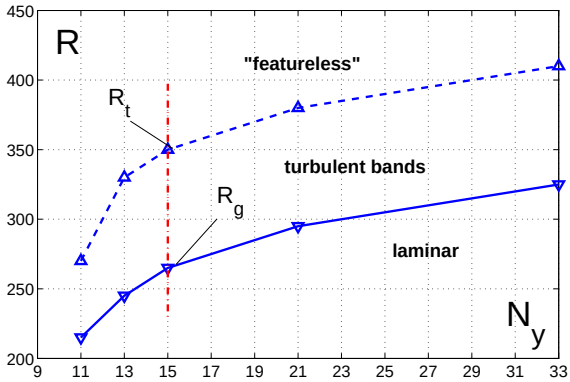


FIGURE 2.2 – Déplacement des seuils de transition R_g et R_t en fonction de la résolution N_y

On valide cette approche plus en détails dans les chapitres suivants à chaque fois que l'on a l'occasion de comparer un résultat de DNS ($N_y = 27$) avec un résultat du modèle réduit ($N_y = 15$) : on montre qu'en plus de la qualité des visualisations, on retrouve le même comportement des quantités moyennes avec les paramètres de contrôle, la même dépendance en y des profils moyens. Cela permet de vérifier le comportement de quantités plus fines et d'appuyer l'approche sur des bases

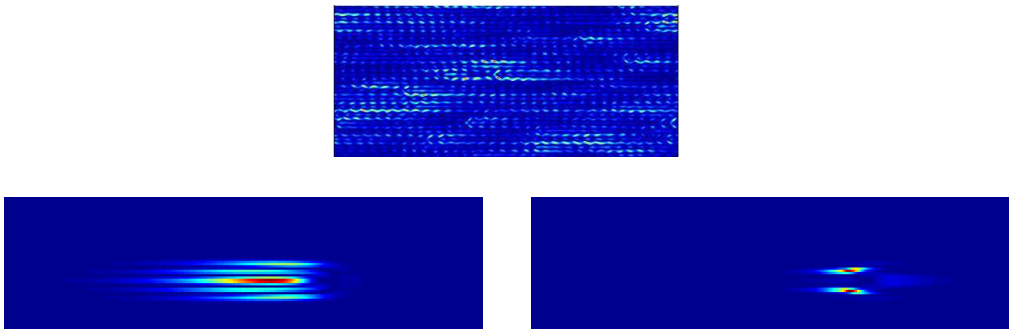


FIGURE 2.3 – Deux exemples de niveaux de couleurs de $\vec{v}^2$ de solutions numériques causées par les effets de résolution, haut : état périodique pour $N_y = 9$, centre et bas : soliton numérique pour $N_y = 15$ (respectivement $y > 0$ et $y < 0$). NB : les échelles de couleur dans la figure de gauche sont un ordre de grandeur en dessous de celle pour la figure de droite. Elles correspondent à un domaine de taille $L_x \times L_z = 110 \times 32$ pour un nombre de Reynolds $R = 270$

plus rigoureuses. L'approche n'est pas exempte de problèmes : il se présente un certain nombre de bizarreries (états numériques) et de problèmes qu'on décrit dans la section suivante.

2.2.3 Solutions numériques et anomalies

On trouve un premier cas en étudiant les effets de résolution. Pour $N_y \leq 9$ à bas nombre Reynolds, le résultat de l'intégration sont des états spatialement périodiques (figure 2.3, gauche) qui ne ressemblent évidemment à aucun type de solution des équations correctement discrétisées.

Un autre type de solution très régulière apparaît et mérite discussion. On l'obtient pour des expériences proches de R_g à $N_y = 15$. Lors de l'extinction de la turbulence, au lieu de converger vers un état laminaire, l'écoulement peut tomber sur une onde solitaire (figure 2.3, droite) se propageant à vitesse fixe sans déformation ni décroissance en amplitude, alors que l'on attend une relaminarisation pure est simple. On trouve aussi l'état inverse, qui se déplace dans la direction opposée, *i.e.* ayant subit une transformation $y \to -y$ et $v_x \to -v_x$ (ce type d'état correspond à une brisure de symétrie de l'écoulement de base). On pourrait penser qu'il s'agit d'une solution spécifique du type solution exacte ou *edge state*. Une comparaison à la littérature permet de discuter des différences et des similarités qu'a cet état avec des solutions validées à résolution élevée. Cet état leur ressemble assez peu [25, 89] : le champ de vitesse ne prend une amplitude conséquence que dans la moitié $y > 0$ ou $y < 0$ de l'écoulement.

On peut examiner plus finement cette solution, en particulier concernant les effets de résolution. On montre qu'elle subit une bifurcation noeud-col avec la variation du nombre de Reynolds [58]. De plus le noeud disparaît pour $N_y > 21$ [58] : on ne sait pas si ce type de solution continue à exister de manière instable à plus haute résolution. Il ne peut donc s'agir d'un vrai *edge state*, ou d'une onde progressive (*travelling wave*) qui, eux, existent toujours quand la résolution augmente. Une étude plus précise est nécessaire pour comprendre la raison de l'apparition de cette solution stable dans l'écoulement. On peut penser que la résolution réduite a pour conséquence une modification suffisamment importante de l'espace des phases qui transforme ce qui a toujours une structure de point col [25] en noeud pour certains nombres de Reynolds.

2.3 Grandeurs turbulentes et phénoménologie

Dans toute la suite de l'étude, on utilise des quantités turbulentes classiques. On décrit ici les procédures de traitement, qui sont basées sur l'organisation en espace particulière de la turbulence avec des zones dites intermédiaires ou suspendues (*overhanging*) [17, 18] entre laminaire et turbulent. On profite de cette section pour rappeler l'organisation de l'écoulement moyen en espace autour de la bande. Il s'agit d'une recirculation relativement complexe, à trois dimensions et trois composantes [6] dont la connaissance est nécessaire avant de passer à la suite.

2.3.1 Grandeurs turbulentes

La fraction turbulente f, parfois appelée facteur d'intermittence, le volume relatif de l'écoulement occupé par la turbulence, est un marqueur classique dans l'étude de la transition, ne serait ce que pour quantifier la croissance des tailles de zone turbulente avec R [13, 65]. Il est bien entendu nécessaire d'identifier lesdites zones turbulentes avant de pouvoir calculer f. De manière générale, pouvoir faire la distinction entre les zones de l'écoulement turbulente, pseudo-laminaire, laminaire et intermédiaires entre laminaire et turbulent est nécessaire pour quantifier le degré d'occupation du domaine par la turbulence, l'intensité de la turbulence dans ces zones, et les profils de vitesse de l'écoulement autour des bandes, même lorsque la géométrie de la bande devient complexe et désorganisée (Fig. 4.1 (c), Fig 4.33) [26, 73].

On se base sur les visualisations de la norme du champ de vitesse. On commence par décrire la disposition des bandes turbulentes à l'aide du champ $\vec{v}^2$ montré sur la figure 2.4, présentant des niveaux de couleur d'un instantané à $N_y = 15$, et la figure 2.5, présentant une moyenne sur 1000 unités de temps (ordre de grandeur de la durée nécessaire pour effacer la trace du détail local de l'écoulement [6]) à $N_y = 27$. Il apparaît une différence claire entre les deux demi-domaines $y < 0$ et $y > 0$, que l'on appelle bas et haut de l'écoulement, par commodité. En effet, il apparaît des zones où le champ $\vec{v}$ est non nul en haut mais pas en bas (et vice versa). Cet écart correspond à un décalage entre la partie haute et basse de l'écoulement dans le plan $x - y$ (Fig. 2.4 (a), Fig. 2.5), entraîné par les parois mobiles à la vitesse $+U$ en $y = 1$ et $-U$ en $y = -1$. Avec les x croissants, on passe ainsi d'une zone pseudo-laminaire à une zone *intermédiaire* où la turbulence se trouve en bas (appelée arrière ou *rear* (r) de la bande, selon la terminologie introduite par Prigent [73]), puis à une zone entièrement turbulente, puis à une autre zone intermédiaire (avant ou *front* (f), de la bande), où cette fois la turbulence est en haut avant de retrouver une zone pseudo-laminaire. Cette description est invariante par translation dans la direction parallèle à la bande pour l'écoulement moyenné en temps. Dans l'écoulement instantané, cette description apparaît comme une modulation de la turbulence de paroi en *streaks* et vortex, ce qui apparaît nettement dans un plan $y - z$ (Fig. 2.4 (b)). Cela a déjà été remarqué dans les écoulements de Taylor–Couette et Couette plan et discuté par plusieurs auteurs [5, 6, 17, 18, 23, 62, 97]. Les symétries particulières de ces régions seront discutées à l'aide des profils de vitesse.

Ces observations guident le développement d'une procédure de moyennage local, ou *coarse graining*, pour faire une discrimination entre écoulement laminaire et turbulent, ainsi que pour identifier les zones tampons intermédiaires entre laminaire et turbulent. On fait cette discrimination sur la norme de l'écart à l'écoulement de base laminaire $\vec{v}^2$ parce qu'elle quantifie simplement l'énergie cinétique de l'écoulement non trivial. Le but de cette démarche est de pouvoir distinguer ces trois

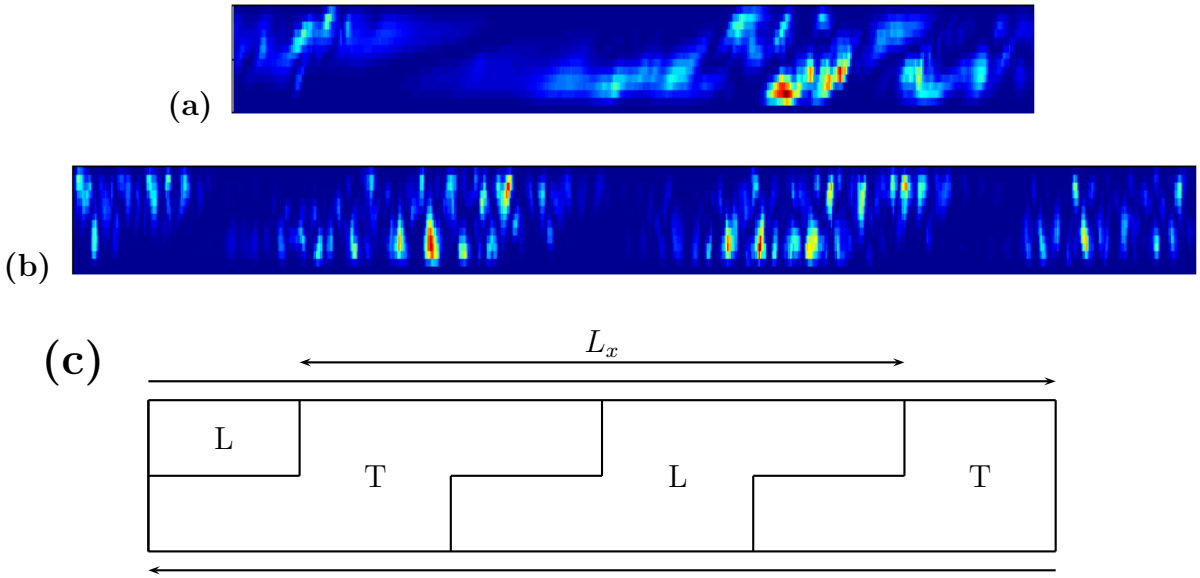


FIGURE 2.4 – Instantané de la perturbation à l'écoulement de base $\vec{v}^2$ dans un plan z constant (a) et x constant (b) $L_x \times L_z = 128 \times 180$, $R = 315$, $N_{x,z}/L_{x,z} = 4$, $N_y = 15$. (c) Organisation schématique de l'écoulement vu dans un plan $x - y$

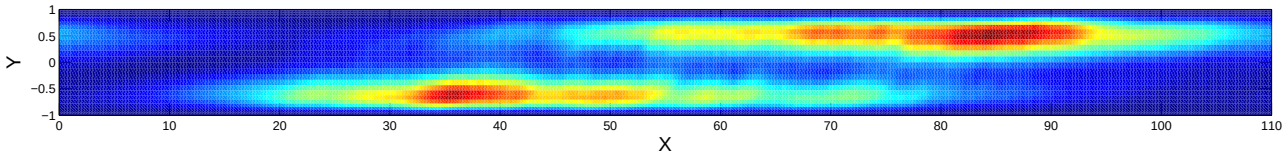


FIGURE 2.5 – Moyennes de la perturbation à l'écoulement de base $\vec{v}^2$, dans un plan z constant $L_x \times L_z = 110 \times 48$, $R = 370$, $N_{x,z}/L_{x,z} = 4$, $N_y = 27$.

types de zones simplement, pour mesurer le "volume" occupé par la turbulence, la surface (dans le plan $x - z$) des zones intermédiaires, et de faire des moyennes conditionnées. On utilise des cellules de taille $l_x \times l_y \times l_z = 2 \times 1 \times 2$ pour $y < 0$ et $y > 0$, que l'on illustre vu dans un plan $x - z$ et dans un plan $x - y$ sur la figure 2.6. Le choix de $l_y = 1$ est motivé par la différence frappante entre les parties hautes et basses de l'écoulement (Fig. 2.4, Fig. 2.5) et permet de saisir cette différence. Les choix de l_x et l_z doivent permettre d'identifier avec suffisamment de précision la localisation de la "turbulence". La longueur $l_z = 2$ correspond grossièrement à la largeur d'un *streak*, tandis que $l_x = 2$ est bien plus court que sa longueur ($\tilde{l} = 40$), pour pouvoir capturer suffisamment précisément la variation dans cette direction. En comparaison, la MFU classique a une taille $6 \times 2 \times 4$ [49].

On applique cette procédure dans un domaine de taille $L_x \times L_z = 128 \times 64$. On examine le champ $\vec{v}^2$ moyenné dans un demi espace $y < 0$, représenté sur la figure 2.7 par la surface de cette quantité, vu selon l'angle de la bande. Il apparaît clairement une modulation et une différence d'amplitude entre la partie laminaire, "vallée" et la partie turbulente "sommet". On applique un critère c pour trancher entre laminaire et turbulent : si la valeur moyenne est inférieure à c dans la petite boite,

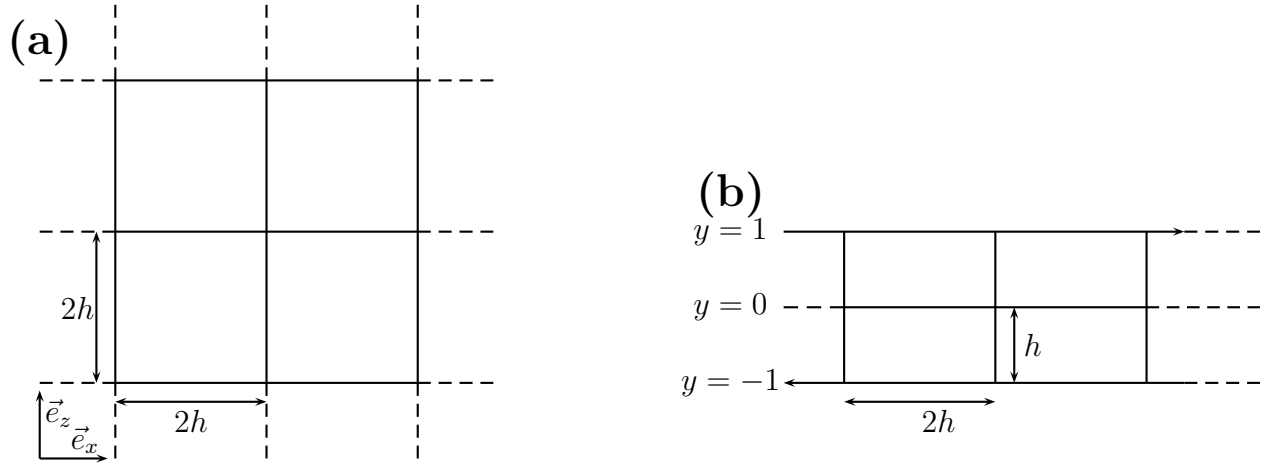


FIGURE 2.6 – Schéma des boîtes sur lesquelles sont faites le moyennage local. Plan $x - z$ (a), plan $x - y$ (b).

celle ci est considérée comme laminaire, et dans le cas contraire, elle est considérée comme turbulente. La représentation de la figure 2.7 permet de se représenter le critère à l'aide de l'axe vertical. Cette procédure nous donne alors deux champs dans des plans $x - z$ (un pour le haut, un pour le bas), avec une résolution inférieure à celles des champs de vitesse de départ (pas d'espace $\Delta_{x,z} = 2$, $\Delta_y = 1$) prenant des valeurs 0 ou 1 selon que la cellule correspondante est laminaire ou turbulente selon le critère c. On peut voir l'effet de cette procédure en suivant le traitement du champ de vitesse aux différentes étapes à l'aide des niveaux de couleur de la figure 2.8. On commence par le champ de norme $\vec{v}^2$ (Fig. 2.8 (a)), dans un plan $y = -0.57$ (bas), à la résolution nominale en x et z ($N_y = 15$, $N_{x,z}/L_{x,z} = 4$). On en déduit le champ suivant (Fig. 2.8 (b)) moyenné localement dans les cellules du bas. À ce champ moyenné localement, on applique le critère c (ici $c = 0.025$), pour obtenir le champ de 0 et de 1, indiquant quelles cellules sont turbulentes (Fig. 2.8 (c) en noir/blanc). La même procédure étant appliquée en haut ($y > 0$), les deux champs binaires sont décalés, comme expliqué dans la section précédente. On peut mettre ce décalage en évidence à l'aide d'un dernier champ combinant les informations du haut et du bas. Ainsi, s'il y a du laminaire au dessus du laminaire, la cellule est représentée en noir, du turbulent au dessus du laminaire ou vice-versa, la cellule est représentée en gris (clair ou foncé selon que la turbulence se trouve en haut ou en bas), et si on trouve du turbulent en face de turbulent, la cellule est représenté en blanc (Fig. 2.8 (d)). On y fait alors réapparaître dans des plans $x - z$ la succession laminaire-intermédiaire-turbulent-intermédiaire laminaire que l'on avait décrite dans des plans $x - y$ (Fig. 2.5). On peut alors définir quantitativement les quatre zones trouvées à l'aide des champs binaires et faire une distinction pour chaque paire de cellules haut/bas face à face. Le pseudo-laminaire correspond, pour une position x, z, à 0 dans les champs hauts et bas, le turbulent à 1 dans les champs hauts et bas et l'intermédiaire à 0 dans l'un et 1 dans l'autre. Cela

nous permet de faire des moyennes conditionnées de quantités (en prenant les valeurs cellules par cellule) et de profils (dépendant de y, en prenant les valeurs de champs, paire de cellules haut/bas par paire de cellule haut bas).

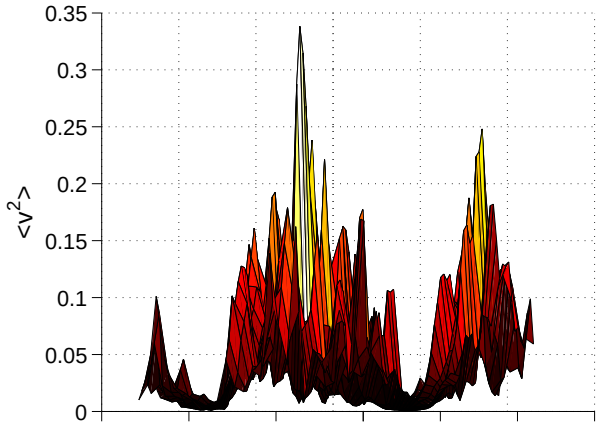


FIGURE 2.7 – Représentation en 3 dimensions (plan : x et z, troisième axe : $\vec{v}^2$) de l'énergie moyennée localement, vue de face.

Ainsi, cette procédure nous permet de déterminer la fraction turbulente f, la fraction du nombre de cellules turbulentes de l'écoulement. On peut aussi déterminer l'énergie turbulente e_t, l'intensité de la turbulence dans les bandes, moyenne conditionnée de $\vec{v}^2$ dans les cellules 1. À ces deux grandeurs s'ajoute l'information apportée par l'énergie moyenne (moyenne spatiale de $\vec{v}^2$). On peut également déterminer la surface projetée sur un plan $x-z$ de la zone intermédiaire f_f, qui correspond au nombre de cellule turbulentes (en bas ou en haut) faisant face à une cellule laminaire (en haut ou en bas) divisés par la moitié du nombre total de cellules. On calcule de même les profils de tous les champs dans ces quatre zones. Cette procédure est effectuée en ligne pour suivre ces quantités en temps. On trouve une dépendance continue en c de toutes les grandeurs déterminée, ce qui laisse une gamme de valeurs possibles (Fig. 2.9). La fraction turbulente décroît avec c : il est de plus en plus difficile pour les cellules d'être laminaire ou turbulent. L'énergie turbulente, elle, croît, car les cellules dans lesquelles on moyenne $\vec{v}^2$ sont de moins en moins nombreuses, les moins turbulentes disparaissant les unes après les autres à mesure que c est augmenté. Comme toujours "le critère est bien choisi" : pour une gamme de valeur, l'information qualitative (changement de comportement avec les paramètres de contrôle) et quantitative (ordre de grandeur des valeurs) reste la même et est en accord avec la littérature. Cette dépendance en c est attendue, étant donnée la modulation de l'intensité de la turbulence dans le régime de bande oblique. La situation est légèrement différente dans le cas de *spots* (partiellement) isolés [56] (Fig. 6.2, 6.1), dans ce cas, la turbulence est effectivement entourée de zone laminaire. La valeur de $\vec{v}^2$ tombe assez rapidement vers 0 lorsqu'on s'éloigne du *spot* [91]. La fraction turbulente converge à peu près si l'on décroît c. Pour toute la suite, on fixera $c = 0.025$, au milieu de la gamme où les grandeurs calculées prennent des valeurs raisonnables.

On montre que l'on a en bonne approximation $e \simeq e_t \times f$: les variations de l'énergie moyenne dépendent de celle de l'énergie dans la zone turbulente ainsi que la surface occupée par la turbulence (si le critère est correctement choisi, l'énergie laminaire est suffisamment petite). On réalise un tracé

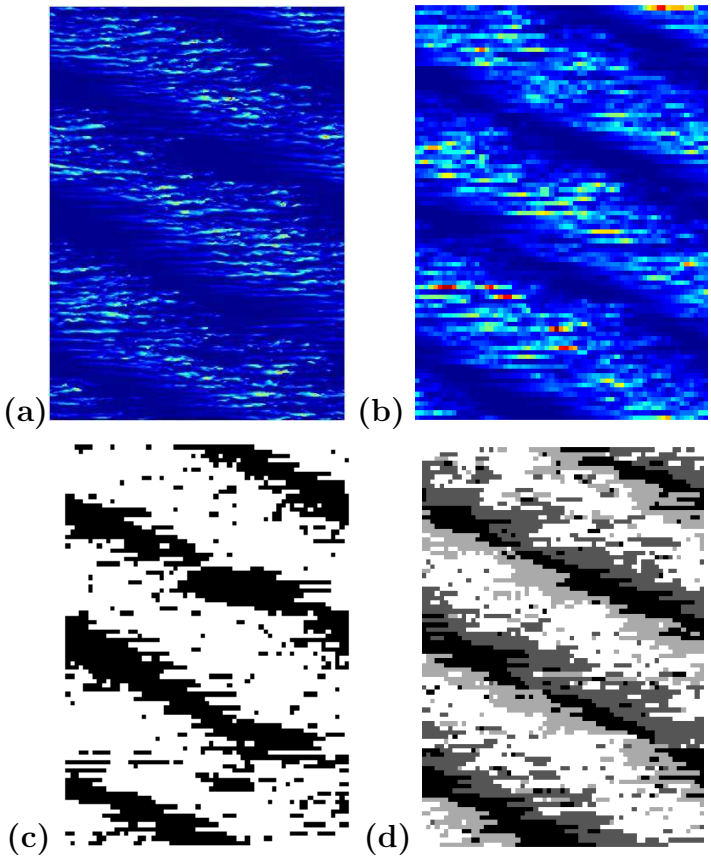


FIGURE 2.8 – Pour un système de taille $L_x \times L_z = 128 \times 180$ à $R = 315$ ($N_y = 15$) (a) : niveaux de couleur de $\vec{v}^2$ dans le plan $y = -0.57$, (b) : niveaux de couleur du moyennage local de $\vec{v}^2$ pour $y < 0$, (c) représentation noir/blanc de la localisation de la turbulent pour $y < 0$, représentation noir/gris/blanc de la localisation de la turbulence dans tout le domaine

normalisé (*i.e* de $\tilde{e} = (e - \langle e \rangle)/\sqrt{\langle e^2 \rangle - \langle e \rangle^2}$ *etc.*) de ces grandeurs sur la figure 2.10, pour mettre en évidence visuellement la corrélation entre grandeurs ainsi que les fluctuations relatives de chacune. Il apparaît sur les séries temporelles que l'énergie moyenne est corrélée respectivement à l'énergie turbulente (Fig. 2.10 (a)) et à la fraction turbulente (Fig. 2.10 (b)). Cependant, énergie turbulente et fraction turbulente ne sont pas corrélées (Fig. 2.10 (c)). Pour $R = 315$ et $L_x = 128$ et $32 \leq L_z \leq 80$, on calcule les corrélations entre ces grandeurs normalisées échantillonnées sur une durée $T \geq 5000$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, \tilde{e}\tilde{f}\,, \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, \tilde{e}\tilde{e}_t\,, \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, \tilde{e}_t\tilde{f}\,.$$

On détermine ensuite la moyenne et l'écart type sur les tailles L_z de chaque couple de corrélations. On trouve des corrélation de 0.5 ± 0.1 entre énergie moyenne et énergie turbulente, de 0.5 ± 0.1 entre énergie moyenne et fraction turbulente et de 0 ± 0.1 entre énergie turbulente et fraction turbulente. Cela confirme l'impression que l'on tire de la visualisation des séries temporelles.

Pour obtenir des information pour chaque valeur de paramètres de contrôle (R, taille) on ne peut prendre des valeurs instantanées de e, f et e_t, du fait de leur nature fluctuante. Pour une expérience

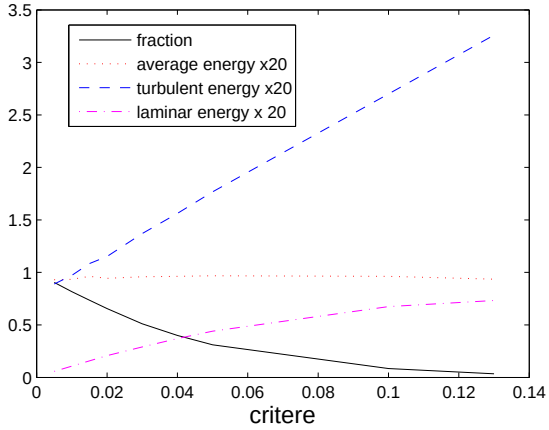


FIGURE 2.9 – Comportement des grandeurs turbulentes (fraction turbulente, énergie turbulente *etc.*) en fonction du critère de discrimination.

donnée, on pratique une moyenne en temps (écrite en lettre capitale) :

$$E = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, e(t)\,. \tag{2.13}$$

Une bonne détermination des moyennes suppose, d'une part T assez grand , *i.e.* de l'ordre d'au moins un millier de temps de retournement pour que les variations de E, F *etc.* avec T soient clairement en dessous du pourcent, et d'autre part que la moyenne commence lorsqu'un régime permanent est atteint, *i.e.* pour que le système oublie une éventuelle condition initiale particulière. On retrouve la relation précédente sur les grandeurs moyennées en temps $E \simeq E_t \times F$, du fait des faibles corrélations entre e_t et f.

Procédures typique dans les simulations numériques

Pour la plupart des expériences numériques présentées dans la suite, on applique la même procédure pour préparer une "condition initiale" pour l'étude du motif. L'approche standard est une procédure de trempe. On utilise un domaine suffisamment grand pour contenir une à plusieurs bandes. La condition initiale a un spectre aléatoire avec une condition de régularité : la borne supérieure sur la valeur possible des composantes décroît avec le nombre d'onde. On intègre numériquement cette condition initiale à des nombres de Reynolds suffisamment élevés pour que la turbulence uniforme (ce qui correspond à $R = 450$ pour les résolutions les plus basses ($N_y = 15$), et $R = 500$ pour les plus hautes ($N_y = 27$)) pendant typiquement 500 unités de temps (nécessaire pour atteindre un régime permanent dans tout le domaine). Le système a d'abord un court transitoire pendant lequel s'établissent les structures turbulentes typiques (figure 2.11, $T \lesssim 100$). La seule exigence sur la condition initiale pour produire en temps très courts lesdites structures et la turbulence "uniforme" est d'avoir des gradients dans les directions x et z sur une échelle spatiale de l'ordre h en plus d'une amplitude suffisante. Il atteint ensuite un régime permanent. Le régime permanent correspond à un plateau des grandeurs turbulentes (figure 2.11) : la fraction turbulente est proche de 1 et l'énergie turbulente quasiment égale à l'énergie du système. À $T = 500$, on réduit brutalement le nombre de Reynolds

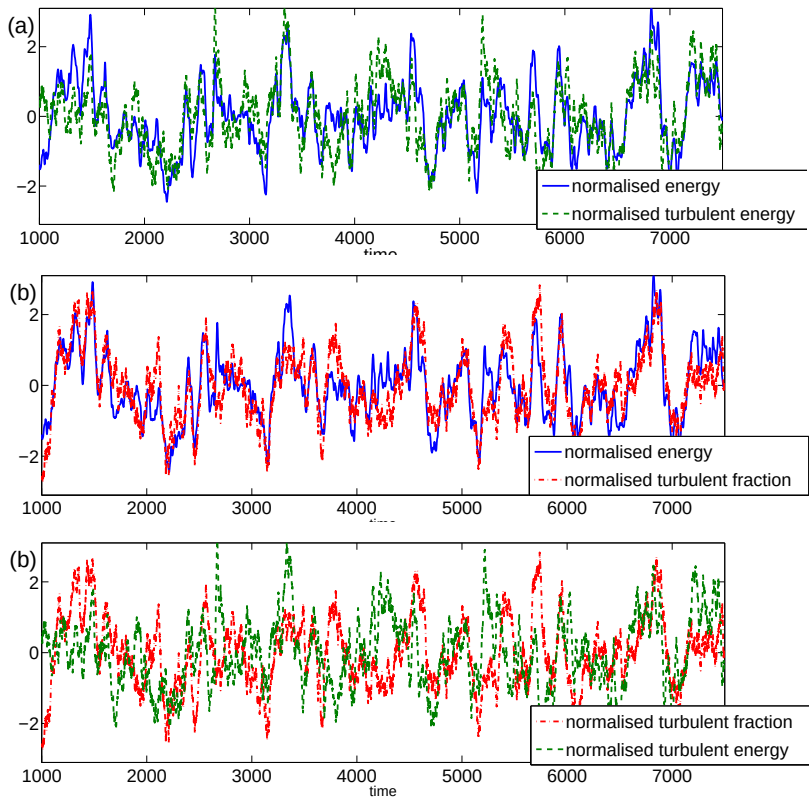


FIGURE 2.10 – Séries temporelles, comparant les quantités turbulentes deux à deux pour un exemple typique $L_x \times L_z = 48$, $R = 315$. (a) : l'énergie et énergie turbulente normalisée $\tilde{e}$ et $\tilde{e}_t$, (b) : l'énergie normalisée $\tilde{e}$ et la fraction turbulente normalisée $\tilde{f}$, et (c) : l'énergie turbulente normalisée $\tilde{e}_t$ et la fraction turbulente normalisée $\tilde{f}$. Le même code couleur est utilisé à chaque fois ($\tilde{e}$ en bleu trait plein, $\tilde{e}_t$ en vert et pointillé, $\tilde{f}$ en rouge et pointillé.)

à des valeurs incluses dans la plage $[R_{\mathrm{g}}, R_{\mathrm{t}}]$. On a alors un transitoire correspondant à la réduction d'intensité de la turbulence (visible dans la baisse de l'énergie turbulente, fig 2.11), l'apparition de zone laminaires (visible dans la baisse de la fraction turbulente, fig 2.11), et l'organisation de ces domaines laminaires en bande. Lorsque ce transitoire est terminé et que l'on a rejoint le voisinage du régime permanent, l'échantillonnage pour les moyennes en temps décrites dans la sous-section précédente peut commencer. Le chapitre 5 se concentre sur le détail des phénomènes se produisant lors d'une trempe.

2.3.2 Description de l'écoulement moyen

On a donné une première représentation de l'écoulement basée uniquement sur l'amplitude des champs de vitesse, sans préciser la valeur et le signe de chaque composante. On procède à cette description dans cette sous-section. Comme l'écoulement moyen (au sens équivalent d'un moyennage semi-locale en espace et/ou d'un moyennage en temps) est relativement complexe (trois composantes et trois dimensions), on commence par des représentations à deux composantes et deux dimensions, d'une part dans le plan $x-y$, montrant les composantes v_x et v_y, moyennées dans la direction parallèle

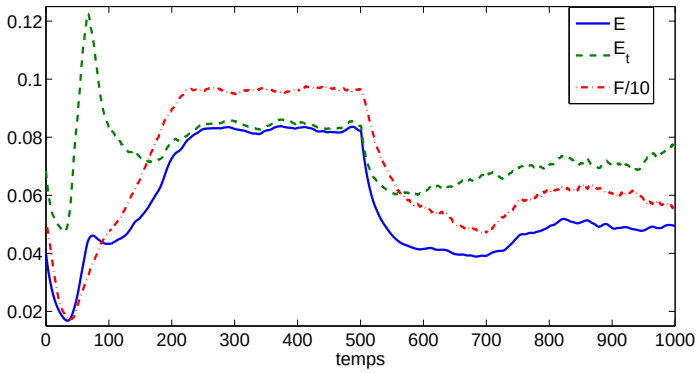


FIGURE 2.11 – Série temporelle de e, e_t et $f/10$, $L_x \times L_z = 110 \times 48$, $R = 450$ $(0 < T < 500)$ $R = 315$ $(500 < T < 1000)$, $N_y = 15$

à la bande, d'autre part dans le plan $x - z$, montrant les composantes v_x et v_z, moyennés dans la direction y. On "redéploie" ensuite cet écoulement à l'aide des profils de vitesse dans chacune des zones pseudo-laminaire, intermédiaires et turbulentes. Ainsi, on transpose dans le cas d'un domaine non contraint la description en domaine étroit incliné de Barkley & Tuckerman [6].

Représentations deux dimensions, deux composantes

On commence par la description des composantes v_x, v_y dans le plan $x - y$. Pour cela, on utilise des champs des vitesses échantillonnés lors des DNS ($L_x \times L_z = 110 \times 72$, $N_y = 27$, $N_{x,z}/L_{x,z} = 6$), que l'on moyenne sur au moins $1000h/U$ dans la direction parallèle à la bande, ce qui fait disparaître la modulation à petite échelle des *streaks* et des vortex longitudinaux. On montre un exemple de moyennage sur la figure 2.12 (a) appliqué aux champs de vecteur de v_x, v_y superposés à des niveaux de couleur de la norme $\vec{v}^2$.

On retrouve l'organisation en pseudo-laminaire, intermédiaire et turbulent dans les niveaux de couleur, ce qui permet de situer chaque zone. Il apparaît que v_y est quasiment nulle dans les zones pseudo-laminaires et turbulentes, tandis qu'il est non nul dans chaque zone intermédiaire : en effet on a $v_y < 0$ lorsque la turbulence est en bas et $v_y > 0$ lorsqu'elle est en haut. Du coté de v_x, on trouve un profil en S, de très faible amplitude dans la zone pseudo-laminaire et un profil en S de grande amplitude dans la zone turbulente. On trouve toujours $v_x < 0$ en haut et $v_x > 0$ en bas, à l'opposés de la vitesse des plaques. Dans les zones intermédiaires, on trouve $v_x \simeq 0$ dans la partie calme de l'écoulement (haut ou bas). La composante v_x dépend fortement de x et est ainsi clairement non-parallèle. C'est v_y qui vient assurer $\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0$ dans ce champ moyenné. Dans les faits, cela donne lieu à une recirculation qu'on peut représenter schématiquement dans la figure 2.12 (b) en négligeant v_x dans la zone pseudo-laminaire. On reprend la description schématique de l'organisation de la turbulence de la figure 2.4 (c), à laquelle on ajoute des flèches figurants les composantes v_x et v_y dans les zones où elles sont significatives.

Cette description oublie v_z et la variation transverse des composantes. Elle peut être mise en évidence de manière simple en prenant la moyenne des composantes v_x, v_z dans la direction y, comme cela est régulièrement fait pour les *spots* [52,91]. On représente ces composantes à l'aide de leurs lignes de courant que l'on superpose à des niveaux de couleur de $\vec{v}^2$ (moyenné sur l'épaisseur), pour figurer

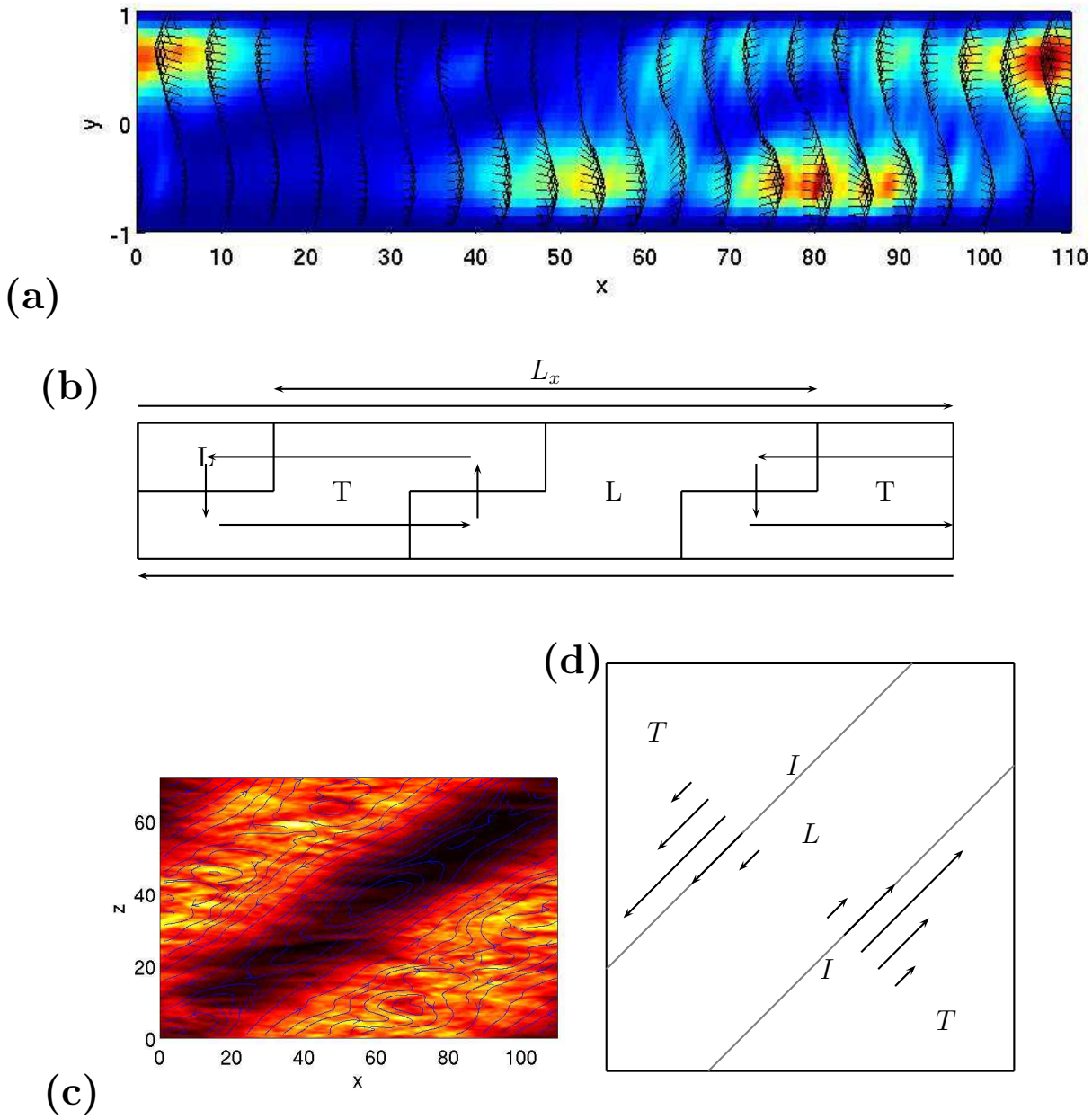


FIGURE 2.12 – Écoulement moyen le long de la bande. Vu dans un plan $x-y$: (a) : champ de vecteurs (v_x, v_y) superposé à la norme du champ de vitesse (moyenné dans la direction parallèle à la bande) ($L_x \times L_z = 110 \times 72$, $N_y = 27$, $R = 350$), (b) représentation schématique. Vu dans un plan $x-z$: (c) : lignes de courant de (v_x, v_z) (moyenné sur l'épaisseur) superposées à la norme du champ de vitesse (moyenné sur l'épaisseur) (d) : représentation schématique centrée sur la zone laminaire.

la position des bandes (Fig. 2.12 (c)). La zone turbulente et la zone pseudo-laminaire apparaissent respectivement en blanc et en noir, les zones intermédiaires apparaissant de la même couleur, à cause de la moyenne sur l'épaisseur. Les lignes de courant mettent en évidence un écoulement le long de la bande, principalement dans les zones intermédiaires. Cette circulation est quasiment nulle dans les zones turbulentes et pseudo-laminaire à cause du moyennage sur l'épaisseur. La direction suivie par cette circulation est indiquée par les flèches sur les lignes de courant. En moyenne sur le temps et sur l'épaisseur v_x et v_z ne varient pas dans la direction parallèle à la bande. Ainsi, le champ v_x, v_z est parallèle dans la direction normale à la bande. La direction prise par cette circulation est opposée dans chaque zone intermédiaire, où sa valeur maximale est de l'ordre de $0.1U$. Ces sens de circulation dépend de l'orientation de la bande : pour une bande dans l'autre orientation, v_z change de signe, affectant le sens de cette circulation. Elle peut être représentée schématiquement sur la figure 2.12 (d), où on place la bande turbulente au centre du domaine, on indique les zones turbulente, laminaire et intermédiaires à l'aide des lettres T, L et I et on représente cette circulation à l'aide de flèches. Le champ de vecteur représenté le long de la direction normale à la bande permet de donner l'information sur l'amplitude des composantes (plus importante dans les zones intermédiaires et nulle au centre des zones turbulentes et laminaires) dans chaque zone, en plus de l'information sur la direction donnée par les lignes de courant.

Profils moyens, trois dimensions, trois composantes

La description en deux dimensions, deux composantes, sur deux types de plan ($x - y$ et $x - z$) permet de se figurer les principales caractéristiques de l'écoulement autour de la bande. On complète cette description à l'aide des profils de vitesse moyennés conditionnellement en espace dans chaque zone, puis en temps (jusqu'à ce que les corrections soient inférieures au pourcent) pour redonner le volume à cette description et préciser les symétries de l'écoulement moyen. On réalise cette description sur deux séries de profils, à $N_y = 15$ et à $N_y = 27$ (Fig. 2.13, 2.14, 2.15) pour mettre en évidence le fait que la procédure de réduction de la résolution n'affecte pas ces profils. On ajoute des barres sur les profils à $N_y = 15$ pour mettre en évidence les fluctuations en temps autour de la moyenne. On présente les profils composante par composante. On fera bien évidemment la comparaison avec les profils calculés par Barkley & Tuckerman en domaine incliné. On fera aussi le bilan des symétries pour chaque composante. Une des principales différences entre les deux approches tient dans le fait que ces profils sont calculés à chaque instant exactement dans les zones identifiées comme pseudo-laminaire, intermédiaires et turbulentes, tandis que l'approche consistant à moyenner le long de la diagonale puis extraire les modes de Fourier pertinents peut introduire des différences dues au fait que la bande n'est pas à chaque instant exactement droite mais légèrement morcelée. Les différences introduites sont minimes et disparaissent après moyenne.

On considère d'abord les profils longitudinaux v_x, échantillonnés dans les zones turbulentes (v_x^{t}) et laminaires (v_x^{l}) à $N_y = 15$ (Fig. 2.13 (a)) et $N_y = 27$ (Fig. 2.13 (c)) ainsi que dans les zones intermédiaires ($v_x^{\mathrm{f,r}}$, f et r désignant *front* et *rear*, avant et arrière) à $N_y = 15$ (Fig. 2.13 (b)) et $N_y = 27$ (Fig. 2.13 (d)). Il n'y a pas de de différence entre le cas à $N_y = 15$ et celui à $N_y = 27$. On retrouve dans les profils moyennés conditionnellement en espace l'information que l'on trouvait dans les visualisations instantanées. Ainsi, on a des profils en S dans la zone turbulente et intermédiaire, comme noté sur la figure 2.12 (a), ainsi que des profils quasi-nuls dans un demi gap et non nuls dans l'autre dans la zone intermédiaire. Moyennés sur l'épaisseur, ils redonnent une contribution nulle

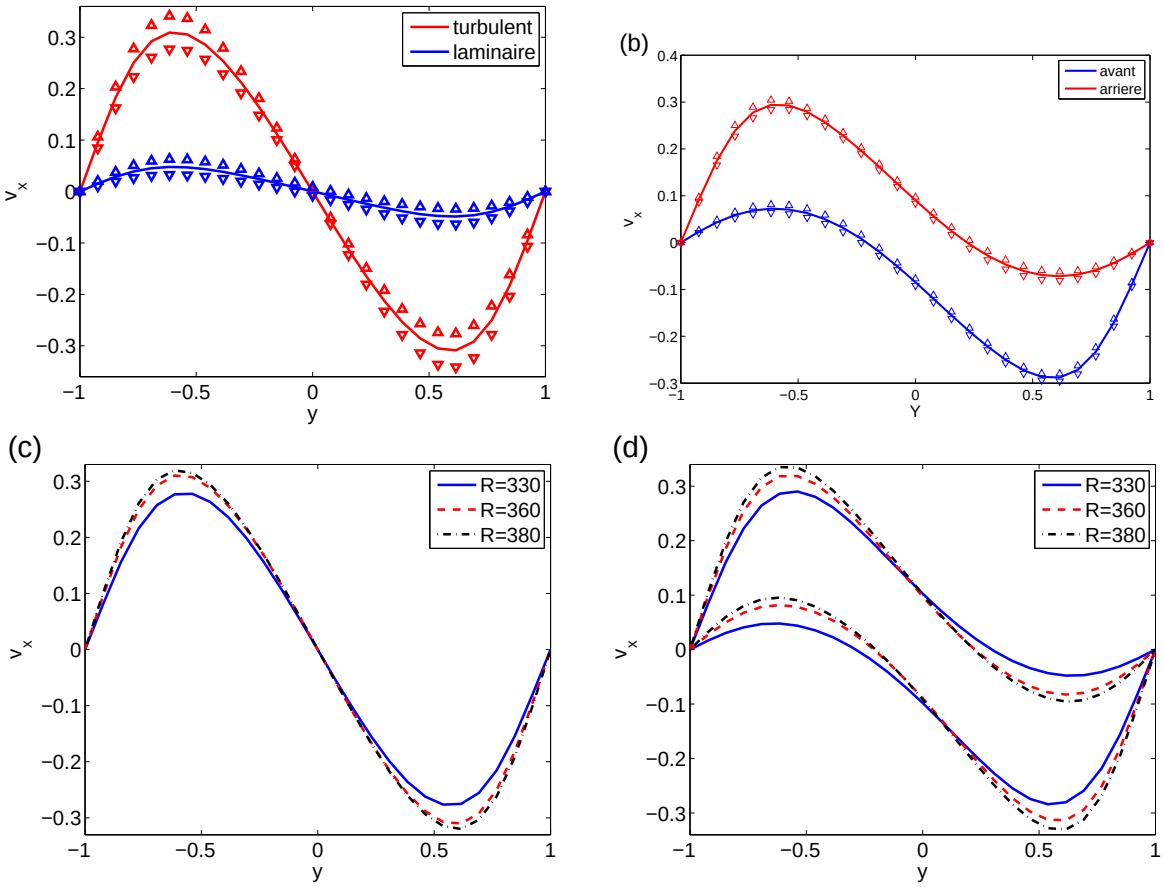


FIGURE 2.13 – Profil de vitesse v_x moyenné conditionnellement en espace et moyenné en temps : (a) : dans les zones laminaires et turbulentes ($N_y = 15$), (b) : dans les deux zones intermédiaires ($N_y = 15$), (c) : dans la zone turbulente ($N_y = 27$), (d) : dans les deux zones intermédiaires ($N_y = 27$)

dans les zones turbulentes et laminaires, et une contribution non nulle dans les zones intermédiaires, comme noté sur la figure 2.12 (c). Selon que l'on soit à l'avant ou à l'arrière des bandes, le signe de la contribution change pas si la bande change d'orientation. Seule l'amplitude de ces profils change avec le nombre de Reynolds (une augmentation d'une dizaine de pourcents), que cela soit dans la zone turbulente (Fig. 2.13 (c)) ou dans la zone intermédiaire (Fig. 2.13 (d)). On comparera ces variations avec celles de E_t et E. Finalement, les symétries de ces profils sont mises en évidence. Barkley & Tuckerman les ont identifiées comme une centrosymétrie par rapport à l'axe passant à $y = 0$ au milieu de la zone turbulente [6]. On peut l'expliciter sous la forme $y \leftrightarrow -y$, $v \leftrightarrow -v$, ainsi, cette opération laisse invariantes les zones turbulentes et laminaires et échange les deux zones intermédiaires :

$$v_x^{\mathrm{t}}(y) = -v_x^{\mathrm{t}}(-y)\,, v_x^{\mathrm{l}}(y) = -v_x^{\mathrm{l}}(-y)\,, v_x^{\mathrm{f}}(y) = -v_x^{\mathrm{r}}(-y)\,. \tag{2.14}$$

On a de plus, en première approximation, la relation entre profils turbulents et intermédiaires :

$$v_x^{\mathrm{t}}(y) \simeq v_x^{\mathrm{f}}(y) + v_x^{\mathrm{r}}(y) \simeq v_x^{\mathrm{f}}(y) - v_x^{\mathrm{f}}(-y) \simeq v_x^{\mathrm{r}}(y) - v_x^{\mathrm{r}}(-y)\,. \tag{2.15}$$

On fera pleinement usage de cette particularité de l'écoulement dans le chapitre 3 pour décrire l'ensemble de la dépendance en y de v_x à l'aide d'une seule forme de fonction.

Les profils transverses v_z sont de la même manière échantillonnées dans les zones turbulentes et laminaires à $N_y = 15$ (Fig. 2.14 (a)) ainsi que dans les zones intermédiaires à $N_y = 15$ (Fig. 2.14 (b)), pour plusieurs tailles (Fig. 2.14 (c)) à $N_y = 15$ et à $N_y = 27$ (Fig. 2.13 (d)). Il n'y a pas de différence entre le cas à $N_y = 15$ et celui à $N_y = 27$ (Fig. 2.14 (b,d)). Le profil turbulent v_z^{t} a une amplitude faible par rapport aux profils laminaire v_z^{l} ou intermédiaires $v_z^{\mathrm{f,r}}$ (Fig. 2.14 (a,b)), en particulier comparé à la situation de v_x. Ces profils ont des formes très similaires aux profils v_x et contiennent la même centro-symétrie. Moyennés sur l'épaisseur, ces profils redonnent la contribution attendue lors de l'examen des lignes de courant (Fig. 2.12 (c)) : non nulles dans les zones intermédiaires et nulles dans les zones turbulentes. L'autre particularité, que l'on ne retrouve pas dans v_x, tient dans la variation de l'amplitude de $v_z^{\mathrm{f,r}}$ avec la taille L_z, soit l'angle de la bande. Cela est entièrement lié au fait que v_x, v_z est parallèle à la direction de la bande, la composante s'ajustant à la direction est v_z.

On discute finalement les profils v_y. On les échantillonne dans les zones turbulentes et laminaires à $N_y = 15$ (Fig. 2.15 (a)) ainsi que dans les zones intermédiaires à $N_y = 15$ (Fig. 2.15 (b)) et à $N_y = 27$ (Fig. 2.15 (c)). Il n'y a pas de différence entre le cas à $N_y = 15$ et celui à $N_y = 27$. Encore plus que pour v_z, v_y est bien plus petit dans la zone turbulente que dans les zones intermédiaires, cette fois ci, d'un ordre de grandeur. À cause de la faible valeur de la moyenne, les fluctuations relatives en temps paraissent importantes. On retrouve dans ces profils l'image que l'on avait dans les champs de vecteur de la figure 2.12 (a), qui met en évidence la quasi-absence de composante v_y dans la zone turbulente et pseudo-laminaire, et son existence dans les zones intermédiaire. Son rôle dans l'écoulement moyen est de fermer la circulation dans le plan $x - y$ et maintenir l'incompressibilité. La composante v_y suit bien évidemment aussi la centro-symétrie de l'écoulement.

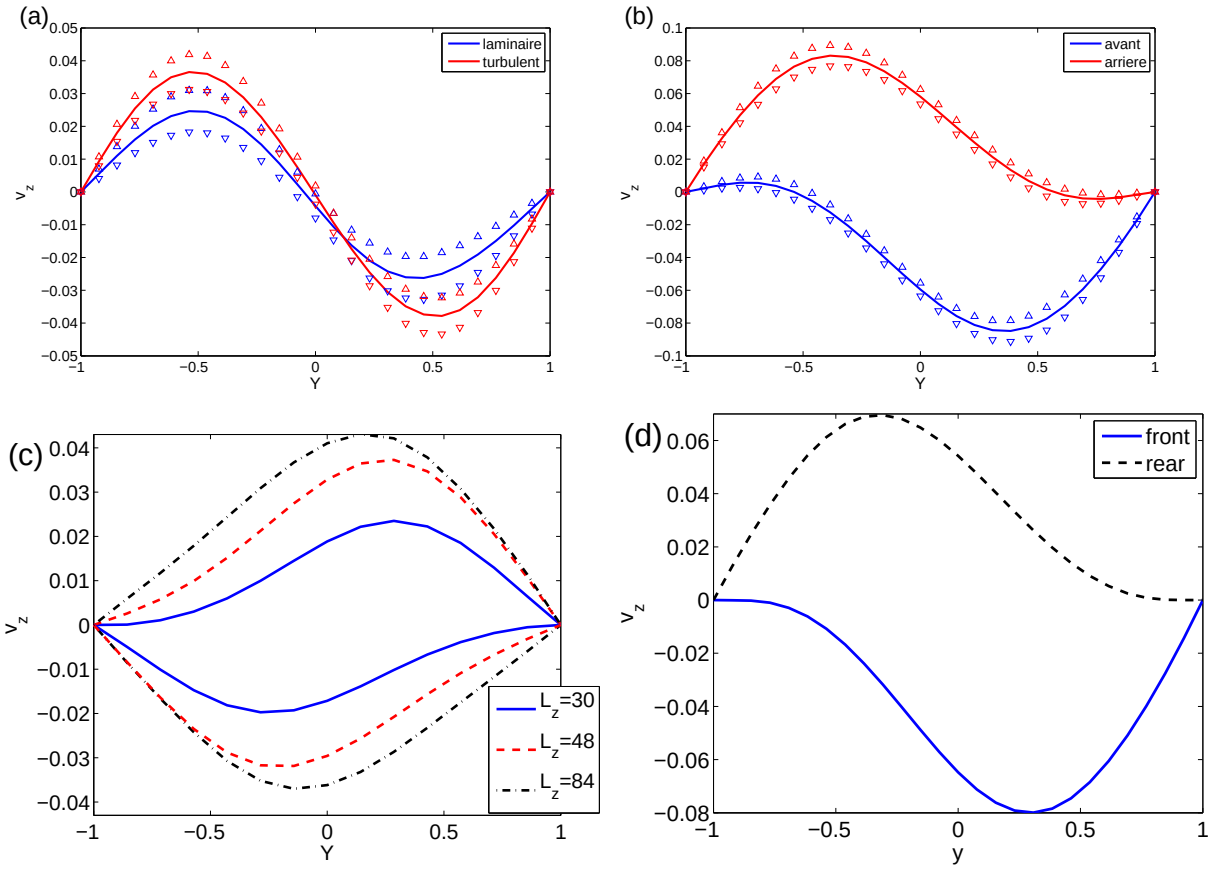


FIGURE 2.14 – Profil de vitesse v_z moyenné conditionnellement en espace et moyenné en temps : (a) : dans les zones laminaires et turbulentes ($N_y = 15$), (b) : dans les deux zones intermédiaires ($N_y = 15$), (c) : dans les zones intermédiaires pour plusieurs tailles (system $L_x = 128$, $R = 295$, $N_y = 15$), (d) : dans les deux zones intermédiaires ($N_y = 27$)

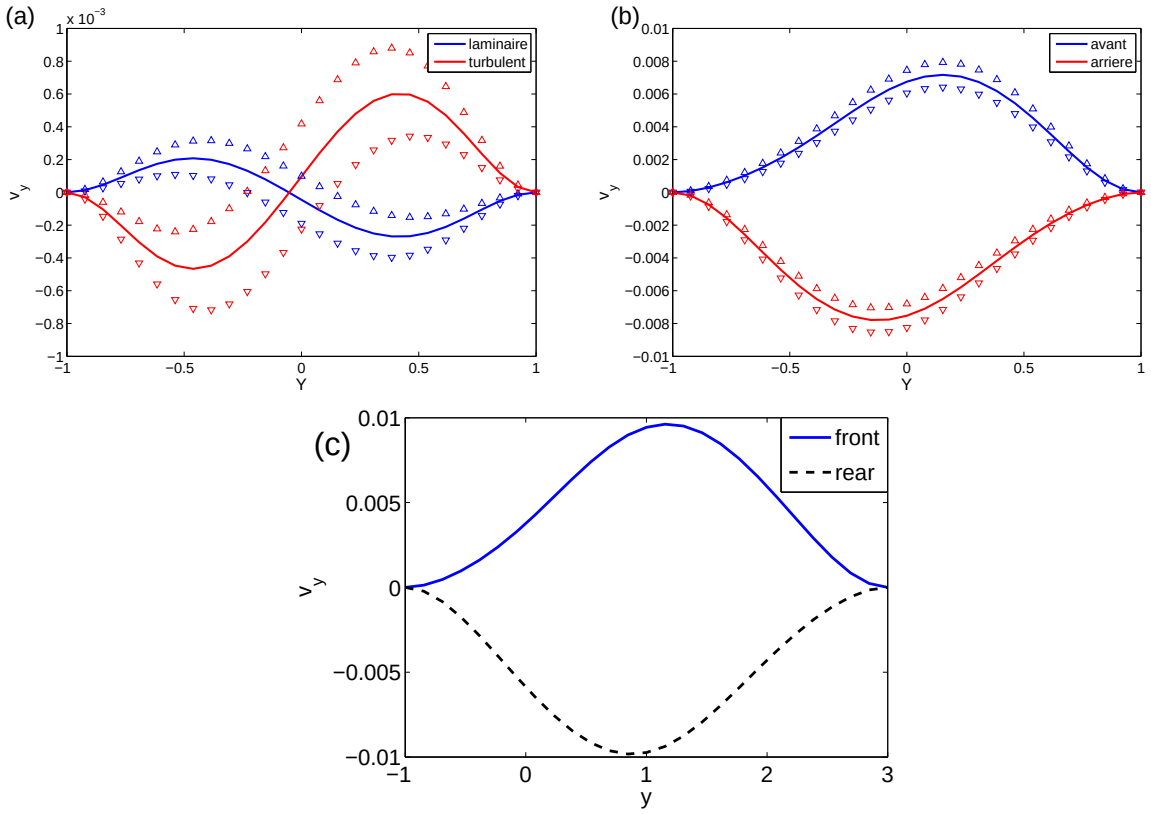


FIGURE 2.15 – Profil de vitesse v_y moyenné conditionnellement en espace et moyenné en temps : (a) : dans les zones laminaires et turbulentes ($N_y = 15$), (b) : dans les deux zones intermédiaires ($N_y = 15$), (c) : dans les deux zones intermédiaires ($N_y = 27$). Les triangles représentent les fluctuations relatives (en temps) autour du profil moyen.

Chapitre 3

Suivi instantané : Instabilité de cisaillement

Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement de l'écoulement à l'échelle de l'épaisseur, en dessous de l'échelle des bandes. On commence par donner une description de l'écoulement quasi-permanent modulé à petite et grande échelle, modélisée par un écoulement dit écoulement de fond. Une fois cette description donnée, on peut identifier les écarts à cet écoulement, en particulier l'instabilité de cisaillement qu'on met en avant et qu'on quantifie dans les DNS. À l'aide du modèle d'écoulement de fond, on peut faire une analyse de stabilité linéaire pour explorer ses mécanismes et faire une comparaison avec les résultats tirés de la DNS.

3.1 Modèle de l'écoulement de fond

On introduit dans cette section la description de la part quasi-stationnaire de l'écoulement à l'échelle locale ($O(h)$) comme de la bande ($O(100h)$). Cela permet de préciser le cadre utilisé pour la description phénoménologique de l'instabilité et son analyse linéaire. On rappelle d'abord la forme de la modulation grande échelle de l'écoulement moyen, en prenant un point de vue légèrement différent de celui de Barkley & Tuckerman [6,96] : on met l'accent sur le profil de vitesse dans la zone intermédiaire. On décrit ensuite ce que l'on entend par écoulement de fond, comme description modèle de la part quasi-stationnaire et spatialement presque périodique de l'écoulement. La description à grande échelle permet de proposer une formulation analytique des profils trouvés dans l'écoulement. Cette description permet de décrire à la fois l'écoulement longitudinal et transverse. Cette description introduit un petit nombre de paramètres. La gamme de paramètres pertinente et son comportement en espace sont extraits des DNS. Finalement, on discute du type de forces maintenant l'écoulement de fond et de leur effet dans l'analyse de stabilité linéaire.

3.1.1 Déscription de Fourier à grande échelle

On prend un point de vue instantané. Comme on examine des grandes échelles de l'écoulement, les grandeurs extraites auront de fait subi un premier moyennage. On étudie donc des quantités fluctuant peu sur les échelles de temps considérées. On prend un exemple typique à $L_x \times L_z = 110 \times 72$,

$R = 350$. Pour chaque cote y, on calcule la transformée de Fourier du champ v_x dans le plan $(x - z)$ correspondant. On s'intéresse aux profils des modes $(k_x, k_z) = (0, 0)$ et $(1, \pm 1)$ qui contiennent la modulation de la turbulence [6] (§ 4). Les harmoniques suivants sont négligeables et décorrélés. Ces profils contiennent la description à grande échelle de l'écoulement. Un premier aperçu (Fig. 3.1 (b)) montre qu'ils sont très similaires à ceux extraits du domaine incliné de Barkley & Tuckerman.

On commence par examiner la phase $\psi(y)$ du mode de Fourier $(1, \pm 1)$ de l'orientation présente dans le domaine en fonction de y (Fig. 3.1 (a)). On trouve une phase quasi constante $\phi_{+1,-1}$ dans chaque demi épaisseur $y < 0$ et $y > 0$ et un saut en $y = 0$. La phase ψ_{-1} en $y = -1$ est prise comme référence et fixé à $\psi_{-1} = 0$. On peut en déduire la différence de phase $\psi = \psi_1 - \psi_{-1} \simeq \pi/2$. Cette quantité contient le décalage de l'écoulement entre $y < 0$ et $y > 0$.

Barkley & Tuckerman ont écrit l'écoulement longitudinal moyen sous la forme :

$$\tilde{V}_x = g_0 + g_c \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{L_x} + \frac{z}{L_z}\right)\right) + g_s \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{L_x} + \frac{z}{L_z}\right)\right) .$$

Dans ce type de description, on passe d'une orientation de la bande à une autre en passant de $x/L_x + z/L_z$ à $x/L_x - z/L_z$. Les profils $g_{0,c,s}$ ainsi que tous les profils v présents dans la suite dépendent de y. En utilisant la phase extraite précédemment, on réécrit cette expression :

$$\tilde{V}_x = y + \langle v \rangle + v^{\mathrm{p}} \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{L_x} + \frac{z}{L_z}\right)\right) + v^{\mathrm{n}} \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{L_x} + \frac{z}{L_z}\right) + \psi\right) .$$

On y fait apparaître la moyenne $\langle v \rangle$ de v_x, ainsi que deux profils désignés comme positifs et négatifs v^{p} et v^{n}, qui sont non nuls respectivement dans les parties basses et hautes de l'écoulement. Cette réécriture permet de centrer la description grande échelle autour des profils trouvés dans les zones intermédiaires (figure 2.14, 2.15, § 2.3.2), là où l'un ou l'autre des cosinus vaut 1. On retrouve le fait que toute la dépendance normale à la paroi peut être décrite à l'aide d'une seule forme de profil et des symétries de l'écoulement. À l'aide de ces notations, le mode $(1, 1)$ s'écrit :

$$\hat{v} = \frac{v^{\mathrm{p}} + \cos(\psi) v^{\mathrm{n}} + \imath \sin(\psi) v^{\mathrm{n}}}{2} .$$

On peut donc tirer les profils $v^{\mathrm{p,n}}$ des transformées de Fourier $\hat{v}$. Ils sont tracés sur la figure 3.1 (b). On obtient la forme des profils dans les zones intermédiaires (voir figures 2.14 et 2.15, § 2.3.2 par exemple). En bonne approximation, la moyenne vérifie : $\langle v \rangle \propto v^{\mathrm{p}} + v^{\mathrm{n}}$. La centrosymétrie de l'écoulement se retrouve dans ces profils : $v^{\mathrm{p}}(y) = -v^{\mathrm{n}}(-y)$. On peut donc réécrire la dépendance grande échelle de l'écoulement :

$$\tilde{V}_x = y + v^{\mathrm{p}} \left(1 + \gamma \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{L_x} + \frac{z}{L_z}\right)\right)\right) + v^{\mathrm{n}} \left(1 + \gamma \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{L_x} + \frac{z}{L_z}\right) + \psi\right)\right) . \tag{3.1}$$

L'ensemble des trois profils présents dans cette formulation peut être exprimé à l'aide d'une seule fonction et d'opérations simples (addition, multiplication par un scalaire, symétrie). On tirera avantage de ce fait dans le modèle de l'écoulement de fond, dans le cadre quasi parallèle. Des combinaisons linéaires d'un seul profil seront utilisées pour décrire les différentes zones de l'écoulement.

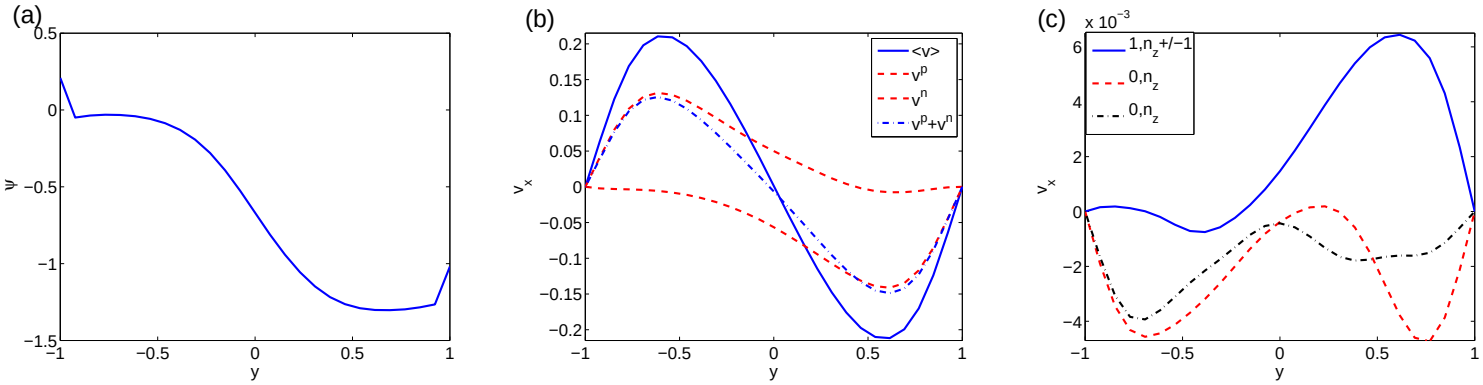


FIGURE 3.1 – (a) : Phase du mode du motif en fonction de y. (b) : Profils extraits du mode du motif. (c) Profils correspondant à la modulation petite échelle de l'écoulement de vitesse longitudinal.

Finalement, on peut extraire la constante γ de cette expression. L'écoulement grande échelle au centre des zones laminaires et turbulentes ne diffère que par son amplitude. On peut alors déterminer la position correspondante, $2\pi(x/L_x + z/L_z) = \phi$ pour le centre de la zone turbulente. Le centre de la zone laminaire correspond juste à un décalage de la phase de π. Les deux profils $v^{\mathrm{n,p}}$ ont la même pondération à ces deux positions. Cela donne $\cos(\phi) = \cos(\phi + \psi)$. En développant, on a $\phi = -\arctan(\sin(\psi)/(1 - \cos(\psi)))$. Puis en remplaçant la valeur de $\psi \simeq \pi/2$ trouvée dans la DNS, on a $\phi \simeq \pi/4$. En écrivant $a(y)$ le profil turbulent, $b(y)$ le laminaire, et $c(y) = v^{\mathrm{p}} + v^{\mathrm{n}}$, on a :

$$\begin{aligned} 2c\,(1 + \gamma\cos(\psi)) &= a \\ 2c\,(1 - \gamma\cos(\psi)) &= b \end{aligned}$$

En posant x le facteur de proportionnalité entre $a + b$ et c, on trouve $\gamma = (1 - x)/((1 + x)\cos(\psi)$, et en y plaçant les données de la DNS, on trouve $\gamma \simeq 1$. Cela permet d'annuler la contribution de v^{p} (ou v^{n}) dans la région intermédiaire correspondante.

On passe ensuite à la modulation de la composante transverse de l'écoulement moyen. On suit l'approche de Barkley & Tuckerman, en mettant l'accent sur les profils trouvés dans la zone intermédiaire, comme pour la composante longitudinale. On peut écrire une dépendance du type :

$$\bar{V}_z = \bar{v}_z^{\mathrm{b}_1}\left(1 + \sin\left(2\pi(\frac{x}{L_x} + \frac{z}{L_z})\right)\right) + \bar{v}_z^{\mathrm{b}2}\left(1 + \sin\left(2\pi(\frac{x}{L_x} + \frac{z}{L_z}) + \psi\right)\right). \tag{3.2}$$

Les profils $v_z^{\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2}$ peuvent être extrait au choix des transformées de Fourier de l'écoulement ou des profils moyens. Comme remarqué (Fig. 2.14, pp. 36), l'amplitude, et dans une moindre mesure la forme de ces profils, dépend de l'angle de la bande. On restera au niveau des profils moyens de $\bar{V}_z$, on vera qu'il ne joue qu'un rôle d'advection dans l'instabilité.

3.1.2 Écoulement de fond

On décrit qualitativement le détail à petite échelle de l'écoulement. Cette description est utile pour identifier l'instabilité dans les DNS (section 3.2). Elle sert aussi de base pour l'analyse de stabilité linéaire (section 3.4).

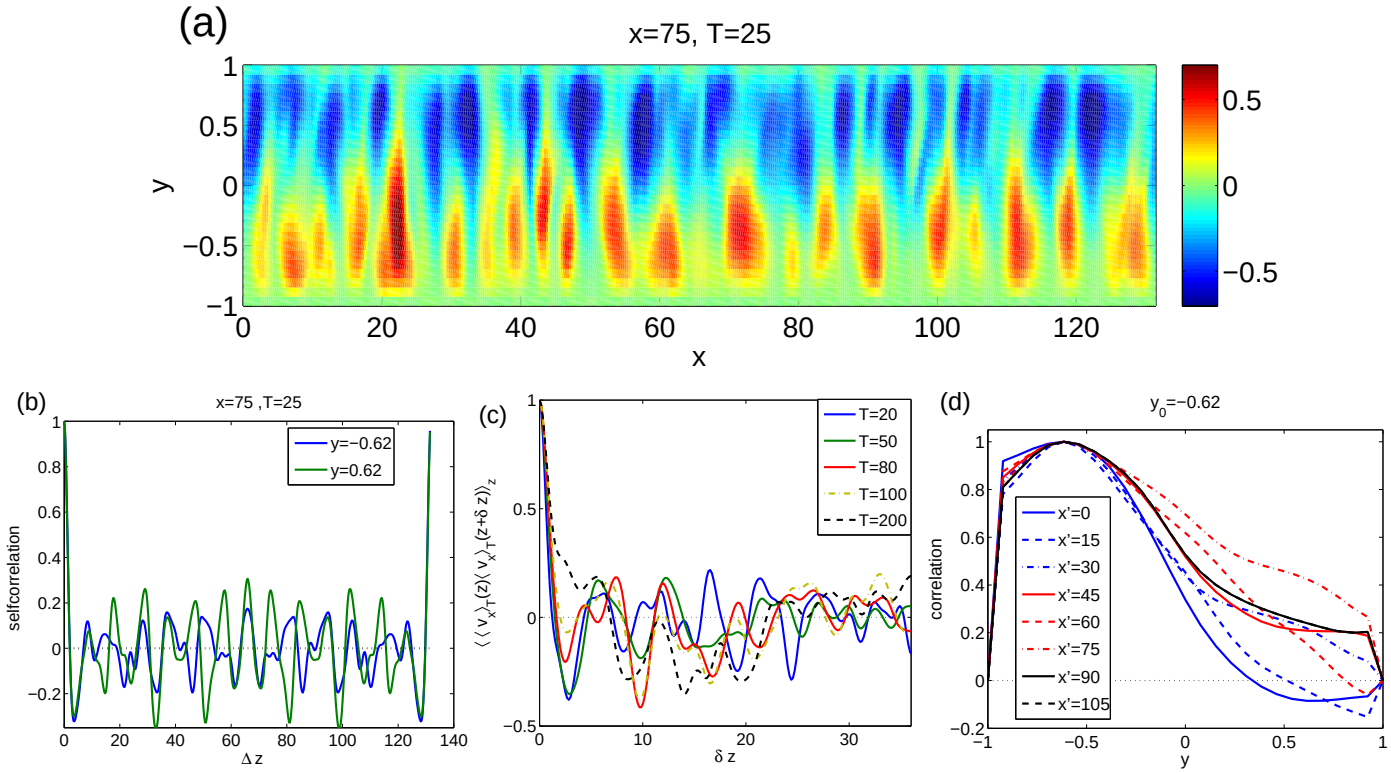


FIGURE 3.2 – (a) : Profil de vitesse longitudinal, le long d'une diagonale, moyenné sur un interval de temps $T = 25$ (dans la zone turbulente). (b) : Autocorrélation normalisée du champ de vitesse longitudinal (à nouveau moyenné sur une fenêtre de $T = 25$) le long de la direction z' pour deux distances à la parois y (dans la zone turbulente), (c) : Fonction de corrélation de v_x, le long d'une diagonale, pour différentes fenêtres de moyennage, en fonction de $\delta z'$, (d) : Corrélations du champ de vitesse longitudinal à $y_0 = -0.62$ avec le champ de vitesse à y, pour plusieurs positions x ($\Delta z' = 0$, moyennés sur une fenêtre $T = 25$).

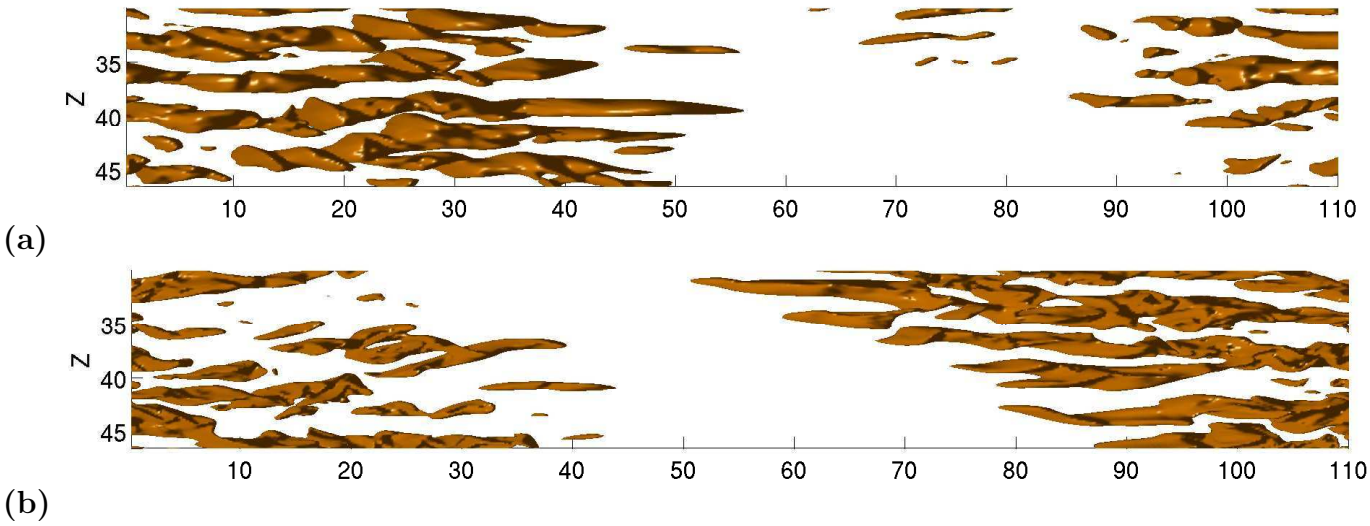


FIGURE 3.3 – Isovaleurs de $v_x = -0.35$ (a) et $v_x = +0.35$ (b), dans un système $L_x \times L_z = 110 \times 72$, $R = 350$, $N_y = 27$

On commence par une description qualitative de l'écoulement. L'écoulement en forme de *streaks* peut être vu sur la figure 3.2 (a) ou sur la figure 3.3. Le premier exemple correspond à des niveaux de couleur du champ de vitesse longitudinal au milieu de la zone turbulente, et illustre l'amplitude du champ v_x et sa périodicité en espace. Le second exemple correspond à des surfaces de niveau du champ de vitesse longitudinal centré autour de la zone laminaire et met en évidence la périodicité de l'écoulement et son organisation dans le plan $x - z$ (obliquité, décalage haut/bas). Dans les deux cas, les *streaks* correspondent à un profil de vitesse approximativement donné par les profils moyens (Fig. 2.13, Fig. 2.14, Fig. 2.15) ou des modes de Fourier (Fig. 3.1), de plus grande amplitude, confinés dans une zone mince. Dans la zone turbulente, le champ de vitesse $v_x > 0$ dans le bas de l'écoulement ($y < 0$) fait face à $v_x < 0$ (de plus faible amplitude $|v_x(y < 0)| > |v_x(y > 0)|$) dans le haut ($y > 0$), et vice versa.

On montre d'abord que sur des fenêtres temporelles relativement longues, on trouve un écoulement modulé quasi-sinusoïdalement dans la direction transverse. Cette régularité et le fait qu'elle se maintient en temps peut être mis en évidence sur les fonctions d'autocorrélation, dans la directions z' parallèle à la bande (direction notée x' chez Barkley & Tuckerman [5]) $\langle f(z')f(z' + \delta z')\rangle_{z'} = \int \mathrm{d}z' f(z')f(z' + \delta z')$ (Fig. 3.2 (b,c)) ou y (Fig. 3.2 (d)). Les fonctions de corrélation instantanées montrent la régularité et l'organisation, on se penche plus précisément sur le maintien de cette régularité en temps, au delà des simples visualisations (section 3.2). Les fonctions d'autocorrélation du champ v_x moyenné en temps sont donc examinée. Le choix d'un moyennage court en temps permet de s'abstraire partiellement des instabilités apparaissant dans l'écoulement pour se concentrer sur l'écoulement de fond, comme celle étudiée dans la suite, ou le cycle auto-entretenu [49, 101].

On peut considérer la fonction d'autocorrélation en fonction de $\delta z'$, le long des diagonales parallèles à la bande. Les deux exemples choisis sont pris dans la zone turbulente. On fait d'une part la comparaison entre haut et bas (Fig. 3.2 (b)) et entre fenêtres de moyennage (Fig. 3.2 (c)). Dans les deux cas, le comportement presque périodique de l'écoulement est mis en évidence, qui apparaît dans les modulations de la fonction d'autocorrélation, avec un espacement, entre deux *streaks* $\lambda_z \sim 4$.

La corrélation à grande distance apparaît dans la très lente décroissance de l'enveloppe des fonctions d'autocorrélation. La comparaison haut/bas tient en bonne approximation, les deux fonctions d'autocorrélation à $y = \pm 0.62$ sont égales pour $\delta z' \lesssim 5$ et très similaire au delà . Ces corrélations s'effacent lentement avec la durée des fenêtres de moyennage (Fig. 3.2 (c)). On voit décroître lentement l'enveloppe de la fonction d'autocorrélation et le comportement des modulations change avec la durée de moyennage. Cela n'est pas en désaccord avec le fait qu'une image claire est trouvée quelque soit le temps de départ de la fenêtre de moyennage. Les corrélations sont réduites par le chaos local et des effets de l'advection, car les *streaks* ne se reforment pas exactement comme ils étaient après le passage d'une instabilité. Le processus auto-entretenu de la turbulence vient ajouter à ce bruit.

En plus de la corrélation transverse, on confirme la bonne corrélation haut/bas. Cela peut se voir dans les fonctions de corrélations en y, à $\Delta z = 0$. On peut les examiner à différentes positions x correspondants à $x = 0$ (L), $x = 15$ (L), $x = 30$ (I), $x = 45$ (I), $x = 60$ (T), $x = 75$ (T), $x = 90$ (I), $x = 105$ (I). La meilleure corrélation haut/bas se retrouve dans la zone turbulente, où des *streaks* positifs sont en face de *streaks* négatifs. La plus basse se trouve dans les zones intermédiaires, où les *streaks* en haut/bas sont en face de $v_x = 0$ en bas/haut.

Ainsi, pour étudier l'instabilité et l'advection des perturbations, on peut faire le modèle suivant : l'écoulement est supposé périodique à petite échelle ($l_z \sim 4$) dans la direction transverse et indépendant du temps. Ces profils quasi-permanent sont créés d'une part par l'advection par les vortex longitudinaux (pour la dépendance en y) [101] et d'autre part par l'advection par l'écoulement de base $y\vec{e}_x$ (pour le décalage haut/bas). On peut étudier cet écoulement dans trois régimes : celui où on néglige les forces de type tension de Reynolds le maintenant, celui où on modélise ces forces par un terme de type tension et celui où on les modélise par une viscosité turbulente. L'effet de l'instabilité sur l'advection formant l'écoulement de fond n'est pas pris en compte, cela donne des résultats satisfaisant dans ce régime [101]. On pourra alors utiliser les équations linéarisées (2.6)-(2.12) autour du profil de l'écoulement de fond. La DNS permet de visualiser et de mesurer l'apparition d'écart à la description modèle. L'analyse de stabilité linéaire d'un tel écoulement vient modéliser l'apparition et l'advection de la vorticité transverse dans la DNS. La comparaison entre les deux permet de vérifier la cohérence des hypothèses faites pour l'analyse linéaire. L'amplitude de ce profil suit la même dépendance que l'écoulement moyen de l'équation (3.1). Cependant, les profils longitudinaux qu'on trouve par moyenne ou analyse de Fourier sont différents des profils trouvés effectivement dans l'écoulement, tant au niveau de l'épaisseur de la couche de cisaillement que de l'amplitude. De plus, ils fluctuent en temps. Leur description analytique et l'extraction des profils effectifs sont décrits dans les sections suivantes. À l'aide de cette description modèle et des échantillonnages, on peut reconstruire une description idéalisée de l'écoulement, de laquelle on peut extraire les écoulements à grande échelle ainsi que des caractéristiques d'instabilités. Cela permet de mieux comprendre le comportement complexe des DNS.

3.1.3 Description analytique

On se sert des profils moyens fixés dans les zones intermédiaires comme base pour écrire une expression analytique de profils utilisée dans le modèle de l'écoulement de fond. On cherche l'optimum entre la nécessité de précision et celle de simplicité. Ce type d'expression sert à décrire la dépendance en y de la modulation à petite échelle. Les visualisations indiquent les deux paramètres principaux de ces profils : leur amplitude et l'épaisseur de la couche de mélange. On peut aussi faire varier la position

du maximum de chaque profil, elle sera cependant fixée une fois pour toute pour v_x et v_z. On choisi la formulation suivante pour un maximum, respectivement, dans le bas et le haut de l'écoulement :

$$h_1^d(y) = -\left(-\tanh(d(-1-s_1)) + \tanh(d(y-s_1))\left(1-\exp(-0.05(1-y))\right)\right), \tag{3.3}$$

$$h_2^{d'} = \left(\tanh(-(1-s_2)d') + \tanh(-d'(y-s_2))\right)\left(1-\exp(-0.05(1+y))\right). \tag{3.4}$$

La couche de cisaillement autour de $y = 0$ est représenté par la tangente hyperbolique. Les paramètres d et d' correspondent aux inverses des épaisseurs de couche de cisaillement : ce sont les deux paramètres de contrôle de ces fonctions. On trace deux exemples de ces fonctions, avec des paramètres et une amplitude choisis pour s'adapter aux profiles $v_x^{\mathrm{p,n}}$ et $v_z^{b,f}$ sur la figure 3.4 (a,b). Si $d = d'$, ces deux profils ont la symétrie $y \leftrightarrow -y$, $v \leftrightarrow -v$ de l'écoulement. C'est ce qui guide le choix de f_2 une fois f_1 défini. Le facteur $(1-\exp(-0.05(1\pm y)))$ permet d'annuler le profil à la paroi, la valeur 0.05 fixe l'épaisseur de cette couche cisaillée. Avec $s_{1,2}$, ces valeurs fixent la position du maximum du profil. En pratique les profils dépendent assez peu de ce paramètre tant qu'il n'est pas trop important. En effet, on attend des profils de vitesse qu'ils soient relativement lissés par la viscosité près de la paroi. On utilise alors des profils du types :

$$\bar{V}_x(y) = y + \bar{v}_x = y + \frac{a h_1^d(y)}{\max_y(h_1^d(y))} + \frac{b h_2^{d'}(y)}{\max_y(h_2^{d'}(y))} \tag{3.5}$$

Pour décrire la dépendance de l'écoulement de fond. Ils sont utilisés pour l'échantillonnage de paramètres a, b, d, d' puis l'analyse linéaire desdits profils. On peut examiner l'accord avec les profils moyens $v_x^{\mathrm{p,n}}$ (Fig. 3.4 a) et $v_z^{b,f}$ (Fig. 3.4 b). Pour $d = d'$, $\int \mathrm{d}y\, \bar{V}_x \simeq -0.25(a-b)$. Cette relation est légèrement modifiée par lorsque $d \neq d'$.

3.1.4 Échantillonnage de paramètres

On compare de manière générale cette description analytique à l'écoulement. On le moyenne préalablement sur une fenêtre en temps de $T = 25$. Cette durée est suffisamment longue pour effacer la trace des fluctuations de courte durée (instabilités, *etc.*) tout en étant suffisamment courte pour ne pas brouiller l'écoulement. Le système choisi pour l'échantillonnage a une taille de 110×72, et est à $R = 350$. A chaque position x de l'écoulement, on fait correspondre une pdf de (a, b, d, d') : le profil de l'équation (3.5) est ajusté sur v_x à chaque position z'. Ces distributions sont caractérisées par leur moyenne m et l'écart quadratique moyen σ (Fig. 3.5). On étudie la moyenne selon z' ainsi que les minima et maxima $m \pm \sigma$ en fonction de x. Ces deux dernières quantités indiquent l'amplitude de la modulation petite échelle et sont légèrement augmentées par les fluctuations.

On peut examiner le comportement de la modulation (Fig. 3.5 (a)), des épaisseurs de couche de cisaillement (Fig. 3.5 (b)) ainsi que de la position des maxima (Fig. 3.5 (c)). Les positions de maxima $s_{1,2}$ varient relativement peu et seront fixés dans toute la suite à ± 0.6. Les inverses des épaisseurs de couche de cisaillement d, d' se placent dans une gamme de valeur, avec une dépendance molle en la position x. On considèrera dans toute la suite qu'elles sont relativement indépendante de la position x et distribuées entre 1 et 4. Cependant on n'a pas *a priori* de corrélation claire entre d et d', on ne prendra pas systématiquement $d = d'$. Cette décorrélation peut être comprise comme l'effet du décalage des *streaks* longitudinaux (Fig. 3.2 (a), 3.3). Cette symétrie est réintroduite par

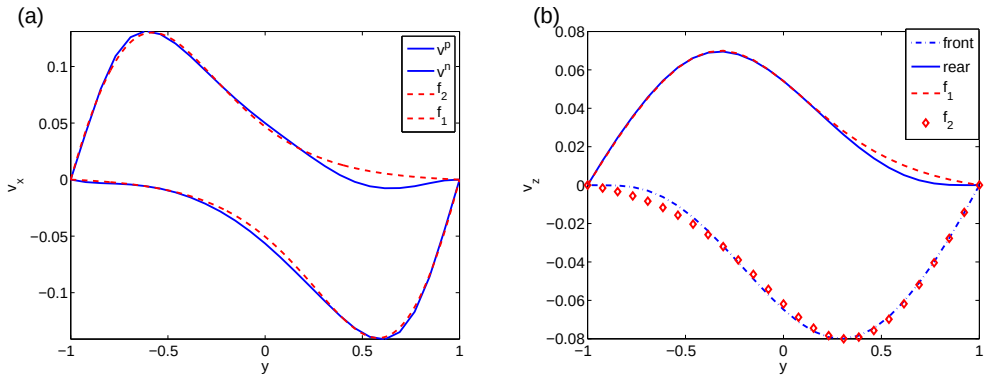


FIGURE 3.4 – (a) Exemple de profil de vitesse moyen $v^{\mathrm{p,n}}$ ($N_y = 27$, $R = 350$, $L_x \times L_z = 110 \times 72$), comparé à $h_{1,2}$: $(a = 0.14, b = 0)$, $(a = 0, b = 0.13)$, $d_1 = d_2 = 2$, s est pris à ± 0.67. (b) Exemple de $h_{1,2}$, $b_z = 0.08$, $d = 1.8$, le maximum est pris près de $y = -0.2$, comparé à un exemple de profil d'écoulement transverse v_z moyenné conditionnellement en espace dans les zones intermédiaires (voir figure 2.15c) pour $L_x = 110$, $L_z = 72$, $R = 350$.

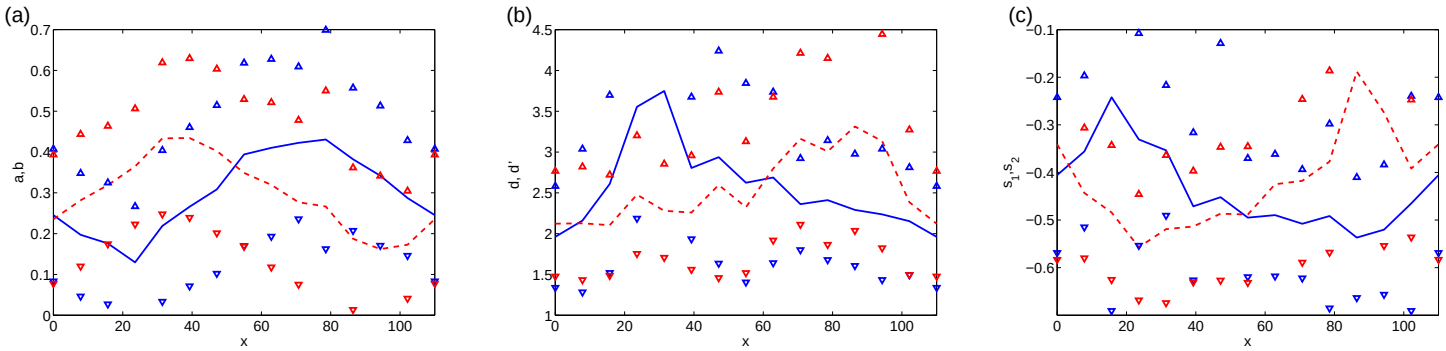


FIGURE 3.5 – Ajustement des profils longitudinaux fenêtrés en temps : (a) : amplitudes a et b en fonction de x. (b) : inverse de l'épaisseur de la couche de cisaillement d en fonction de x. (c) : décalage s en fonction de la position. Les triangles correspondent aux fluctuations.

le moyennage dans les profils moyens ou extraits de l'analyse de Fourier. De la figure 3.5 (a), on note tout de suite la modulation quasi sinusoïdale de l'amplitude à grande échelle. Cela était attendu étant donnée la modulation de l'amplitude moyenne. La courbe en trait plein correspond à la moyenne locale de l'amplitude. Les maxima (triangles vers le haut) correspondent à l'amplitude de l'écoulement longitudinal dans le coeur des *streaks* turbulents, les minima aux zéros, entre deux *streaks* de même signe (voir la figure 3.2 (a)). On trouve les maxima de a et b dans les zones intermédiaires, ainsi que deux croisements, un à faible amplitude dans la zone pseudo-laminaire et un à forte amplitude dans la zone turbulente. Cela donne les ordres de grandeur de paramètre à prendre pour modéliser l'organisation en *streak* de l'écoulement à chaque position x.

Le même type de description peut être utilisé pour l'écoulement de fond transverse. On pose alors les amplitudes a_z et b_z, et les inverses d'épaisseur de couche de cisaillement d_z et d'_z. Comme expliqué précédemment, le choix des paramètres se fait sur l'écoulement moyen. On utilise donc les profils moyens pour extraire des paramètres. voir par exemple les figures 2.14, 2.15 ou 3.4 (b) pour une comparaison quantitative. On choisira une modulation sinusoïdale comme introduite dans l'équation 3.2. Les inverses d'épaisseurs de couche de cisaillement sont prises autour de 1.8, les positions des maxima à ± 0.2, et les amplitudes varient typiquement de 0 à 0.08

3.1.5 Écoulement de fond et lien cinématique avec le grand écoulement

On montre de manière simple, sur une description tronquée en y, qui correspond à l'approximation à l'ordre le plus bas, que le grand écoulement correspond à la moyenne spatiale des *streaks* turbulent et vortex longitudinaux. Cette relation est bien entendu purement cinématique et ne prouve pas l'équilibre stable des bandes.

Composante longitudinale v_x

On part des constatations phénoménologiques concernant la modulation grande et petite échelle. On s'abstrait en premier lieu de la modulation grande échelle de l'équation (3.1) pour décrire le comportement semi périodique mis en évidence dans la littérature [40,49] dans les visualisations (Fig. 3.2 (a), Fig. 3.3) ou les fonctions de corrélation (figure 3.2 (b,c)). Ces dernières mettent en évidence la succession de *streaks* de vitesse $v_x > 0$ et $v_x < 0$, de période $\lambda_z \simeq 4$. On utilise la description de l'écoulement à l'aide du profil intermédiaire, décrit par l'équation (3.3) (ou son symétrique), ou, dans le cas d'une description modale tronquée (voir l'annexe B) :

$$s_\pm = (f_1 \pm \beta f_0) \tag{3.6}$$

avec β de l'ordre de 1 à ajuster à la main. Les profils qui apparaissent ici dépendent de y. L'intéret de cette description est de rendre la description de $v^{\mathrm{p,n}}$ entièrement manipulable à la main. On peut alternativement utiliser les fonctions $h_{1,2}$ (Eq. (3.3)), en particulier lors de l'analyse linéaire. On donne les deux exemples sur la figure 3.6 (a)

Localement, on peut décrire la modulation de la composante longitudinale de l'écoulement, organisée en *streaks* de vitesse par :

$$\bar{V}_x = \alpha_1 \frac{1}{2}(1 - \cos(\frac{2\pi}{\lambda_z} z))s_+ + \alpha_2 \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_z} z))s_- \,. \tag{3.7}$$

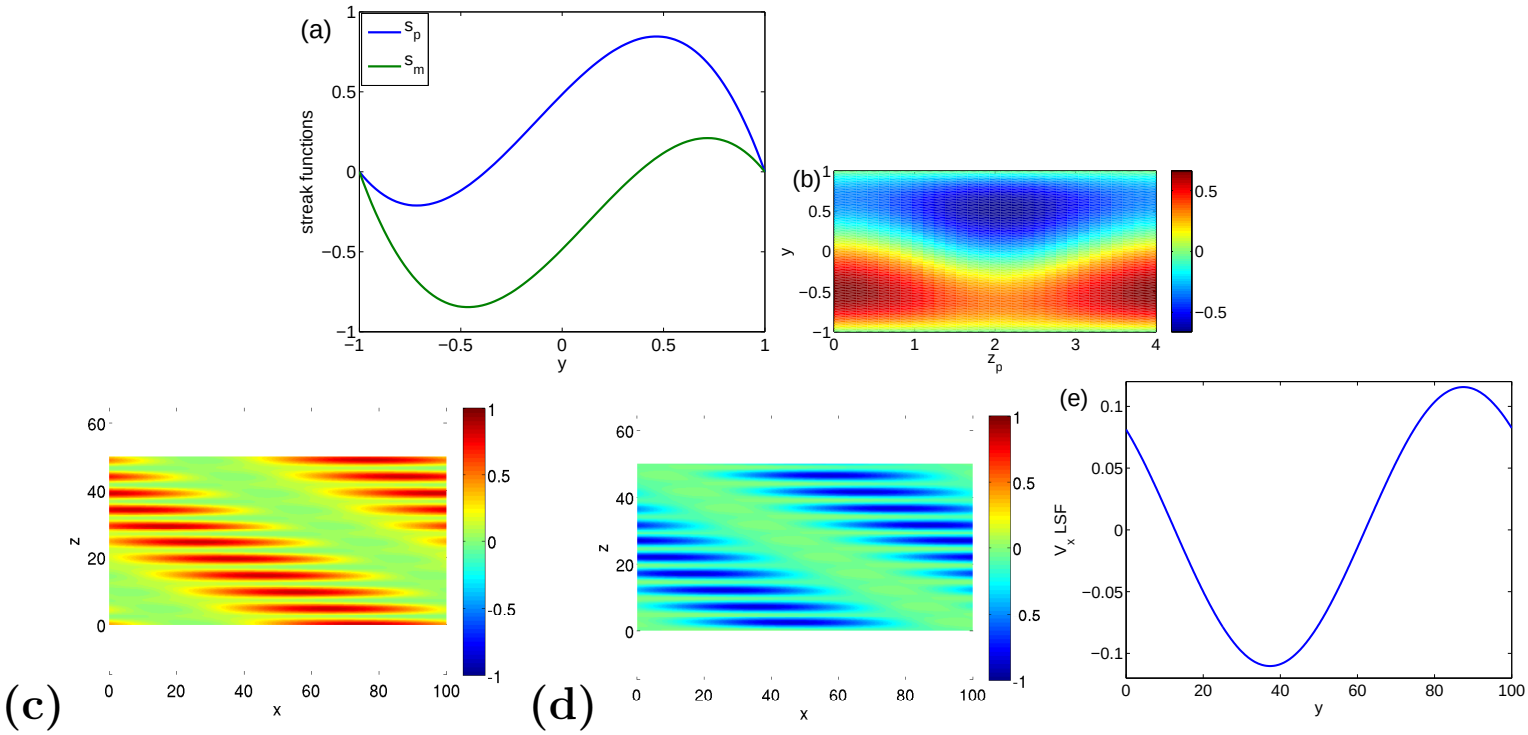


FIGURE 3.6 – (a) : Exemple de profils "intermédiaires" $f_1 \pm \beta f_0$. ($\beta = 1$) (b) : Exemple du champ v_x dans un plan local $y - z$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $\beta = 1$ périodique, contenant deux *streaks*. Champ de vitesse v_x dans des plans $y = \pm 0.5$ correspondant à la représentation de l'écoulement de fond ($\alpha = 0.5$ $\beta = 1$) : (c) : $y = -0.5$, (d) : $y = 0.5$. (e) : Exemple d'écoulement grande échelle obtenu avec cette représentation, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$.

On donne un exemple sur la figure 3.6 (b). Le cœur des *streaks* correspond à $z \equiv 0[\lambda_z/2]$. On a choisi une description purement harmonique pour les *streaks*, *i.e.* on a coupé au premier harmonique, celui de plus grande amplitude. Une description plus précise, prenant notamment en compte le comportement des couches de mélange vient rendre l'approximation plus précise. De la même manière qu'améliorer la description de la dépendance en y, ces précisions comptent pour décrire les processus du type instabilité , mais sont typiquement des restes pour décrire l'écoulement moyen.

Les coefficients α_1 et α_2 contiennent la modulation grande échelle de l'équation (3.1). La partie décrite ici est perdue suite au processus de moyenne induit par les moyennes conditionnées ou d'extraction de coefficients de Fourier.

En prenant cette dernière en compte, on peut écrire pour l'écoulement idéalisé :

$$\bar{V}_x = -0.25\alpha \left(\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L_x} x \pm \frac{2\pi}{L_z} z \right) \left(1 - \cos(\frac{2\pi}{\lambda_z} z) \right) \right) (\beta f_0 + f_1) \right.$$
$$\left. + \left(1 - \sin\left(\frac{2\pi}{L_x} x \pm \frac{2\pi}{L_z} z \right) \left(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_z} z) \right) \right) (-\beta f_0 + f_1) \right) . \tag{3.8}$$

Le coefficient α normalise le champ de vitesse. On donne des représentations de cet écoulement sous forme de niveaux de couleurs de v_x dans un plan $x - z$ dans les figures 3.6 (d,e). On écrit l'expression

de l'équation (3.8) en fonction de la direction invariante z', on obtient en fonction de x, y, z' :

$$\bar{V}_x = -0.25\alpha \left(\left(1 - \cos(\frac{2\pi}{L_x}x) \left(1 - \cos(\frac{2\pi}{\lambda_z}(z' \pm \frac{xL_z}{L_x}) \right) \right) (\beta f_0 + f_1) \right.$$
$$\left. + \left(1 - \sin(\frac{2\pi}{L_x}x) \left(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_z}(z' \pm \frac{xL_x}{L_z})) \right) \right) (-\beta f_0 + f_1) \right) ,$$

soit en moyennant sur z'

$$\bar{V}_x = -0.25\alpha \left(\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L_x}x\right) \right) (\beta f_0 + f_1) + \left(1 - \sin\left(\frac{2\pi}{L_x}x\right) \right) (-\beta f_0 + f_1) \right) . \tag{3.9}$$

Les modes 0, cos et sin obtenus ici décrivent les résultats numériques de Barkley et Tuckerman [6].

Et en utilisant les fonctions f_0 et f_1 pour s_+ et s_-, on obtient pour l'écoulement grande échelle moyennée sur l'épaisseur :

$$\bar{V}_x = -0.25\alpha\beta\frac{\sqrt{15}}{3} \left(-\cos(\frac{2\pi}{L_x}x) + \sin(\frac{2\pi}{L_x}x) \right) ,$$

soit

$$\bar{V}_x = -0.25\alpha\frac{\sqrt{30}}{3} \sin(\frac{2\pi}{L_x}x - \frac{\pi}{4}) , \tag{3.10}$$

qui correspond à la figure 3.6 (e). On retrouve la modulation de v_x présente dans les lignes de courant de l'écoulement à grande échelle (Fig. 2.12 (c), pp. 32).

Composantes transverse et normale à la paroi

Des descriptions du même type faisant intervenir uniquement des vortex longitudinaux ne donnent pas de résultats concluants quant aux composantes y et z de l'écoulement à grande échelle. Si on pratique une troncature extrême en utilisant les fonctions de base f_1 pour v_z et g_0 pour v_y, et qu'on lie l'amplitude des deux champs grâce à l'incompréssibilité, on obtient :

$$v_y - \frac{2\pi}{\lambda_z\sqrt{3}}\gamma \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda_z}\right) \left(1 - y^2\right)^2 \frac{\sqrt{315}}{16}$$
$$v_z = \gamma \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda_z}\right) y \left(1 - y^2\right) \frac{\sqrt{105}}{4}$$
$$\omega_x = \gamma\frac{\sqrt{105}}{4} \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda_z}\right) \left((1 - 3y^2) + \frac{\pi^2}{\lambda_z^2}(1 - y^2)^2 \right) \tag{3.11}$$

avec γ l'amplitude de la paire de vortex et λ_z la longueur d'onde entre deux *streaks* et deux paires de vortex. Cette description à petite échelle a une moyenne nulle. Une de ses faiblesse est que l'on a $\omega_x(\pm 1) \neq 0$, mais elle convient cependant pour une description purement cinématique de l'écoulement. Si on lui ajoute une modulation du type $1 + \cos(2\pi x/L_x \pm 2\pi z/L_z)$ (nulle dans la zone intermédiaire, maximum dans la zone turbulente), avec L_x et L_z les longueurs d'onde de la bande, elle ne contiendra

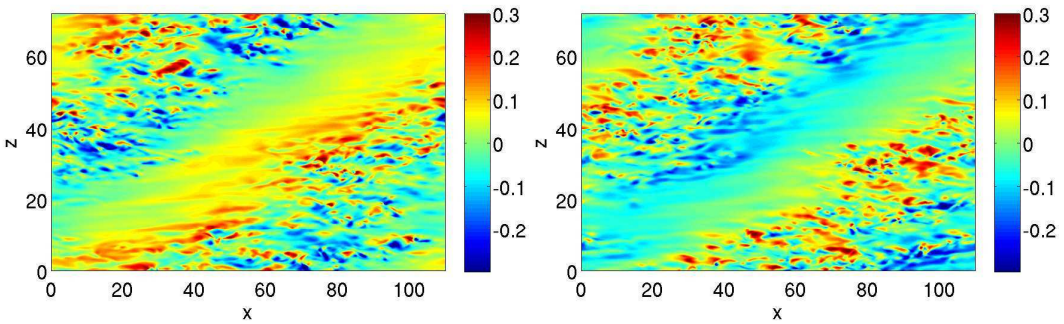


FIGURE 3.7 – Niveaux de couleur du champ de vitesse v_z, tirés de DNS, dans un domaine de taille $L_x \times L_z = 110 \times 72$, $R = 350$, $N_y = 27$ dans les plans $y = -0.61$ (a) et $y = 0.61$ (b).

toujours que des grands nombres d'onde en z ($2\pi/\lambda_z$, $2\pi/\lambda_z \pm 2\pi/L_z$) qui s'annule après moyenne le long de la diagonale. D'autre types de dépendance à grande échelle (marche, décalage discret entre chaque paire de vortex) peuvent donner une contribution non nulle, cependant, la composante v_y de l'écoulement grande échelle change de signe avec l'orientation, donnant une composante non nulle, mais très faible comparée à l'écoulement à grande échelle.

Il apparaît que les composantes v_y et v_z de l'écoulement grande échelle sont une conséquence de la composante v_x de l'écoulement grande échelle et de l'incompressibilité. Cela peut se voir dans des visualisations de champ de vitesse v_z instantanés (Fig. 3.7). Ainsi, la modulation petite échelle et les changements rapides de signe de v_z liés à ω_x apparaissent dans la zone turbulente ($30 \lesssim x \lesssim 80$ à $z = 0$). La situation est différente dans les deux zones intermédiaires, qui apparaissent nettement à $y = -0.61$ (arrière, Fig. 3.7 (a)) et $y = 0.61$ (avant, Fig. 3.7 (b)). Sur une large bande, la composante v_z est peu modulée à petite échelle, de l'ordre de ± 0.2. Contrairement à la composante v_x, c'est cette partie du champ qui contribue à l'écoulement à grande échelle.

L'effet est bien moins net, mais du même type, pour la composante v_y de l'écoulement à grande échelle.

3.1.6 Critères de stabilité et comportement local du modèle

On teste ces profils à l'aide des critères inviscides nécessaires de stabilité linéaire, c'est à dire les critères de Rayleigh, qui nécessite l'existence d'un point d'inflexion (à y_s), et le critère de Fjørtoft, qui impose une condition plus précise sur le point d'inflexion. Il nécessite que la quantité $(V - V(y_s))V''$ ou de manière équivalente $V'V'''$ s'annule à un endroit dans l'écoulement. Chacune des deux formulations inclut soit l'écoulement de base y, soit sa dérivée. La question du critère de stabilité inviscide porte non seulement sur la forme du profil, commandée par d et d', mais aussi son amplitude commandée par a et b. Il s'oppose en cela au critère de Rayleigh, qui nécessite $V'' = 0$ et qui ne pose donc pas de condition sur l'amplitude a. On teste le cas d'une région intermédiaire où on trouve $b = 0$ (figure 3.8), selon l'équation (3.1). La gamme de paramètres (a,d) (Eq. (3.3) testée ici est un peu plus large que celle trouvée effectivement dans l'écoulement. À moins qu'une instabilité purement visqueuse se ne produise, l'instabilité à nombre de Reynolds fini se produit à l'intérieur de la zone où elle est autorisée par les critères nécessaires inviscides. Cela nécessite une amplitude suffisamment importante, au moins $a \gtrsim 0.5$ pour des valeurs de d raisonnables, et une épaisseur de couche de

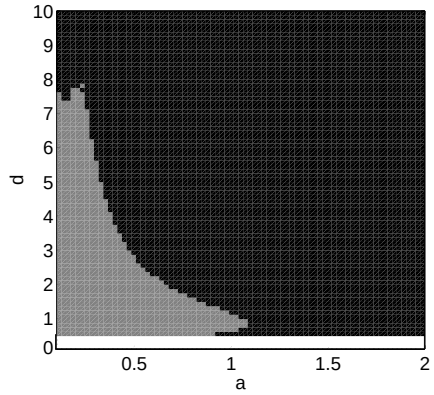


FIGURE 3.8 – Niveaux de gris du test des critères de Rayleigh et Fjørtoft pour le type de profils de l'équation (3.3) (blanc : pas de point d'inflection, gris : critère de Fjørtoft non vérifié, black : critère de Fjørtoft vérifié.

mélange suffisamment fine au moins $d \gtrsim 2.5$ pour des valeurs de a raisonnables. Cela donne une première confirmation que l'instabilité se produit dans le coeur des *streaks* turbulents, ainsi que le profil laminaire y stabilise l'écoulement.

Bien évidemment, ces critères ne donnent une information que sur le taux de croissance, pas sur la pulsation, ils ne sont qu'un préliminaire à l'étude de stabilité locale. La question du comportement de la pulsation et de la vitesse de groupe n'est réglée que par une analyse de stabilité classique. Cependant, cette première exploration donne une bonne idée des paramètres instables, et permet de déterminer si l'instabilité qu'on observera effectivement est visqueuse ou de type Kelvin–Helmholtz.

Les profils V_z, pris séparément, sont instables, à cause de leur point d'inflexion. L'étude de stabilité linéaire va montrer qu'ils n'ont qu'un effet mineur sur le taux de croissance.

3.1.7 Tension de Reynolds maintenant l'écoulement de fond : Principe et équations

On pose la question des forces qui maintiennent l'écoulement dit de fond dans son état quasi-permament. On propose un modèle de ces forces pour l'analyse de stabilité linéaire. On part pour celà de leur origine physique. Ainsi, la composante $\bar{V}_x$, modulée à petite échelle sur la longueur d'onde des *streaks* est créée par la vorticité longitudinale ω_x (principalement présente dans la zone turbulente) et advectée dans les zones intermédaires par l'écoulement de base laminaire y. Ces effets contrebalancent la diffusion visqueuse du profil. Cela a été noté par Barkley & Tuckerman pour l'écoulement moyen dans la zone laminiaire [6]. Les deux sont pris en compte dans le cadre de l'approximation 2D d'une instabilité confinée en z. Dans le cas de la composante $\bar{V}_z$, modulée à la grande ćhelle de la bande L_x, elle est maintenue par la pression pour assurer l'incompressibilité de l'écoulement grande échelle.

On peut alternativement considérer un modèle de viscosité turbulente [72]. Celui ci est moins pertinent aux nombres de Reynolds considérés ($R \simeq 350$, $R_\tau = \sqrt{R} \simeq 18.5$). Le principe de ce modèle est d'introduire une viscosité ν_t qui modèlise la tension de Reynolds $v_x v_y$. La viscosité totale est alors $\nu_T = 1/R + \nu_t$. Son interprétation est moins claire dans notre cas : elle est supposée représenter l'effet

des structures turbulentes dans le maintient du profil.

Force de type advection

On a ainsi pour le profil de l'écoulement de fond $\bar{v}_x$ ($\bar{V}_x = y + \bar{v}_x$) :

$$\left(y\partial_x + (v_z\partial_z + v_y\partial_y)\right)\bar{V}_x \simeq \frac{1}{R}\Delta\bar{v}_x\,. \tag{3.12}$$

Dans ce cas, on a $\partial_x \simeq 1/L_x$, $\partial_z \simeq 1/\lambda_z$ et $\Delta \simeq \partial_y^S$. L'effet ainsi décrit est modélisé par un opérateur $f(y)$, vérifiant :

$$f\bar{v}_x \simeq \frac{1}{R}\partial_y^2\bar{v}_x\,. \tag{3.13}$$

On extrait ainsi $f(y)$ de la relation :

$$f \simeq \frac{1}{R}\frac{\partial_y^2\bar{v}_x}{\bar{v}_x}\,.$$

L'équation de Navier–Stokes linéarisé donne ainsi :

$$\partial_t\vec{u} + (y + \bar{V}_x)\partial_x\vec{u} + u_y(1 + \partial_y\bar{V}_x) + f(\bar{V}_x\vec{e}_x + \vec{u}) = -\vec{\nabla}P + \frac{1}{R}\Delta(\bar{V}_x\vec{e}_x + \vec{u})\,.$$

On en déduit l'équation d'Orr–Sommerfeld modifiée pour u_y ou la fonction de courant ψ :

$$\partial_t\Delta\psi + \left((y + \bar{V}_x)\partial_x + f\right)\Delta\psi - \partial_x\psi\partial_y^2(y + \bar{V}_x) + \partial_y f\partial_y\psi = \frac{1}{R}\Delta^2\psi\,. \tag{3.14}$$

On trouve ainsi deux effets de f sur l'instabilité : $f\Delta\psi$ qui a tendance à jouer sur l'advection et $\partial_y f\partial_y\psi$. Cette force f est supposé non perturbé par $\vec{u} = u_x\vec{u}_x + u_y\vec{u}_y$ (car provenant principalement de $y(1/L_x)+v_z(1/\lambda_z)$. Dans une analyse où l'on a rétablis le caractère trois dimension, on peut utiliser la moyenne en z de $\bar{v}$ et considérer que la modulation en z est maintenue par *lift-up* sur des durées suffisamment longues, en gardant f ne dépendant que de y. Ce type de point de vue a étépris pour des modèles de viscosité turbulente [68].

L'effet de perturbations sur les forces qui maintiennent $\bar{V}_z$ correspondent à des perturbations aux forces de pression et n'apparaissent donc pas dans les équations d'Orr–Sommerfeld–Squire.

On extrait f à l'aide des profils de vitesse qu'on propose pour l'écoulement. Se pose la question du comportement de f (relativement libre) lorsque le profil de vitesse $\bar{V}_x$ et ses dérivées s'annulent (soit aux parois, voire dans un demi espace pour le cas de la zone intermédiaire). On régularise f à l'aide d'un masque, pour éviter les variations trop brutales qui n'ont pas de pertinence physique (Fig. 3.9 (a)). Ainsi, on masque f pour $\bar{V}_x < m$, paramètre variable. On masque de plus ∂_y près des bords et au centre où l'on trouve des variations brutales non physiques $|f'|(y) > 1 \Rightarrow f'(y) = 0$ (Fig. 3.9 (b)).

Viscosité turbulente

La viscosité effective ν_T vérifie :

$$\nu_T\partial_y\bar{V}_x = cte\,.$$

Cette expression est valide dans le cas d'un écoulement turbulent moyen sans dépendance en x. Dans notre cas (faible dépendance en x), on peut faire l'approximation que cette expression est valide,

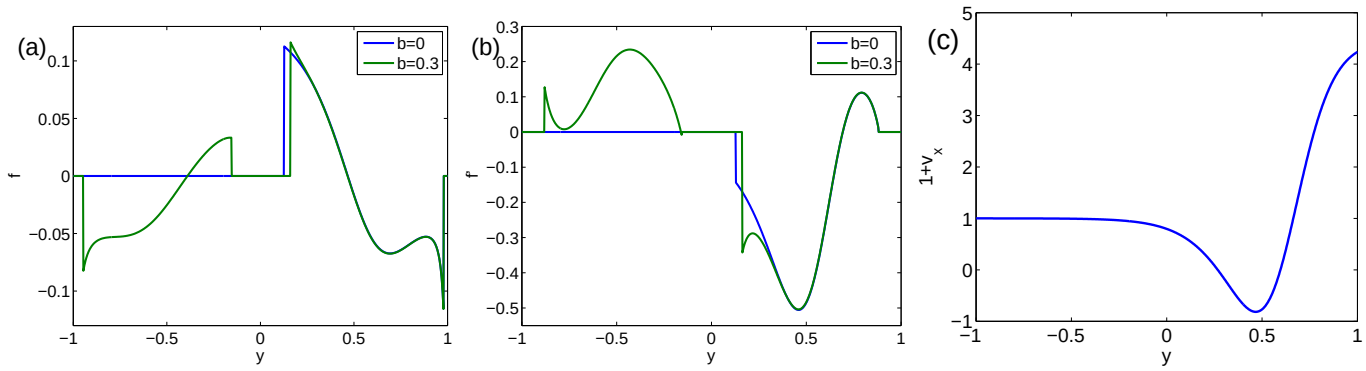


FIGURE 3.9 – Exemples de force f et de $1+\bar{v}'_x$ en fonction de la côte y : (a) Force f ($a = 0.7$, $d = 3.9$, $R = 350$) sans et avec contre-écoulement $b = 0.3$ et exemple de valeur pour masque $m = 0.07$. (b) : exemple de f' correspondant avec seuillage à 1. (c) : Exemple de $1 + \bar{v}'_x$

mais l'interprétation du rôle de la viscosité est moins transparent, mais modélise tout de même le maintient de l'écoulement quasi-permanent par les vortex longitudinaux et l'écoulement de base. On doit en particulier faire l'approximation que le second membre est effectivement constant et égal au cisaillement à la paroi, ce qui n'est *a priori* pas le cas : la valeur du cisaillement à la paroi en ± 1 n'est par exemple pas la même dans une zone intermédiaire.

On a ainsi, en posant $\bar{V}_x = 1 + \bar{v}_x$:

$$\nu_T \partial_y \bar{V}_x \simeq \frac{1}{R} \Leftrightarrow \nu_T = \frac{1}{R\left(1+\bar{v}'_x\right)} .$$

On fera appel aux dérivées premières et secondes :

$$\nu'_T = -\frac{\bar{v}''_x}{R\left(1+\bar{v}'_x\right)^2} , \nu''_T = \frac{2\left(\bar{v}''_x\right)^2 - \bar{v}'''_x(1+\bar{v}'_x)}{R\left(1+\bar{v}'_x\right)^3}$$

On trace $1 + \bar{v}'_x$ sur la figure 3.9 (c) dans un exemple sans contre-écoulement.

Pour déterminer les équations de Navier–Stokes en présence de ce terme, on commence par se rappeler que le terme de viscosité s'écrit de manière générale (sans prendre en compte la viscosité compressible) [48] :

$$\nabla(\nu \nabla v +^T (\nabla v)) .$$

Ainsi, en prenant en compte la dépendance en y de ν_T, on obtient pour les équations de Navier–Stokes linéarisées en deux dimensions :

$$\begin{aligned} \partial_t u_x + \bar{V}_x \partial_x u_x + u_y \partial_y \bar{V}_x &= -\partial_x P + \nu_T \Delta u_x + \nu'_T \left(\partial_y u_x + \partial_x u_y\right) \\ \partial_t u_y + \bar{V}_x \partial_x u_y &= -\partial_y P + \nu_T \Delta u_y + 2\nu'_T \partial_y u_y . \end{aligned}$$

On en dérive l'équation d'Orr–Sommerfeld pour la fonction de courant :

$$\partial_t \Delta\psi + \bar{V}\partial_x \Delta\psi - \partial_x \psi \partial_y^2 \bar{V} = \nu_T \Delta^2 \psi + 2\nu'_T \Delta\psi + \nu''_T \left(\partial_y^2 \psi - \partial_x^2 \psi\right) \tag{3.15}$$

Deux termes supplémentaires de dissipation sont introduits par la viscosité turbulente.

3.2 Expériences numériques

Une fois décrit et compris le comportement quasi-permanent de l'écoulement moyen et de l'écoulement de fond, on peut décrire l'écart à cet écoulement, dans des DNS en régime de bande permanente dans les domaines périodiques. On commence par une identification qualitative de l'instabilité qui nous intéresse ici à l'aide de visualisations dans des plans $x-y$, x, z ou y, z' d'intérêt. À l'aide d'arguments cinématiques, le rôle de la vorticité transverse est mis en évidence, et on s'en sert pour faire les principales mesures : longueurs caractéristiques et vitesse d'advection.

3.2.1 Phénoménologie

visualisation

On reprend d'abord brièvement l'organisation de l'écoulement de fond (*streaky background flow*), présenté et quantifié en détail dans la section 3.1. On se réfère à la figure 3.10 (a) et à la figure 3.11 (a,b,c,d,e) (à $T = 0$). La première donne des niveaux de couleur du champ de vitesse longitudinale dans un plan $x-y$, la seconde montre des profils de ce champ de vitesse à plusieurs endroits pertinents de l'écoulement, dans le même plan. On identifie les zones intermédiaires ($105 \leq x \leq 110$, $0 \leq x \leq 15$ contenant un *streak* "négatif", correspondant au profil de la figure 3.11 (d), et $25 \leq x \leq 55$ contenant un *streak* "positif" correspondant au profil de la figure 3.11 (a,b)), laminaire ($15 \leq x \leq 25$, profil de la figure 3.11 (e)) et turbulente ($55 \leq x \leq 105$, profil de la figure 3.11 (c)). Les profils des zones intermédiaires ont typiquement la forme $v_x > 0$, $y < 0$ ou $v_x < 0$, $y > 0$, tandis que les profils laminaires et turbulents ont la forme en "S" attendue, le laminaire étant d'amplitude clairement inférieur aux autres. Cela nous donne un point de comparaison entre le modèle de l'écoulement de fond et ce que l'on peut trouver de manière instantanée dans l'écoulement. Dans l'ensemble, le modèle fournit une assez bonne description. Le suivi en temps de l'exemple viendra appuyer le caractère quasi-permanent du fond.

On passe maintenant à la description qualitative de l'instabilité. On se concentrera sur la série de figure 3.10 (a,b,c,d,e,f) dans la zone intermédiaire ($45 \leq x \leq 55$) et dans l'ensemble de la zone turbulente, ce qui correspond aux profils de la figure 3.11 (c,d). Dans la zone intermédiaire, on peut voir apparaître une perturbation à l'écoulement décrit ci-dessus avec une courte longueur d'onde (figure 3.10 (a,b)). Les champs de vitesse inférieur et supérieur à zéro se mèlent (figure 3.10 (c,d)), l'écoulement de fond restant en bonne approximation identique à lui même. La perturbation semble ensuite disparaître (figure 3.10 (e,f)). Le cas de la zone turbulente peut se décrire d'une manière similaire, des enchevêtrement de vitesse positive et négative apparaissent. Dans les deux cas, on peut voir sur les niveaux de couleur (figure 3.10) et les profils (figure 3.11 (c,d)) une perturbation additive, centrée autour de zéro sur l'écoulement de fond.

On poursuit la description qualitative sur la comparaison des champ de vitesse v_x et v_y (niveaux de couleur, figure 3.12, v_x (a), v_y (b)). On peut voir par exemple l'instabilité se développer dans une zone intermédiaire sur le champ de vitesse longitudinal entre $35 \leq x \leq 45$ (figure 3.12 (a)). Elle apparaît aussi dans la zone turbulente avec une plus petite longueur d'onde. On pousse la comparaison avec le champ de vitesse v_y. Dans le cas d'un écoulement *streaky* non perturbé, on s'attendrait à voir un champ de vitesse de signe constant sur une plage de grande échelle (comme montré sur les profils moyens voir figure 2.13 (b,d) ou figure 3.12 (c)). On retrouve un champ de vitesse $v_y > 0$ qui advecte

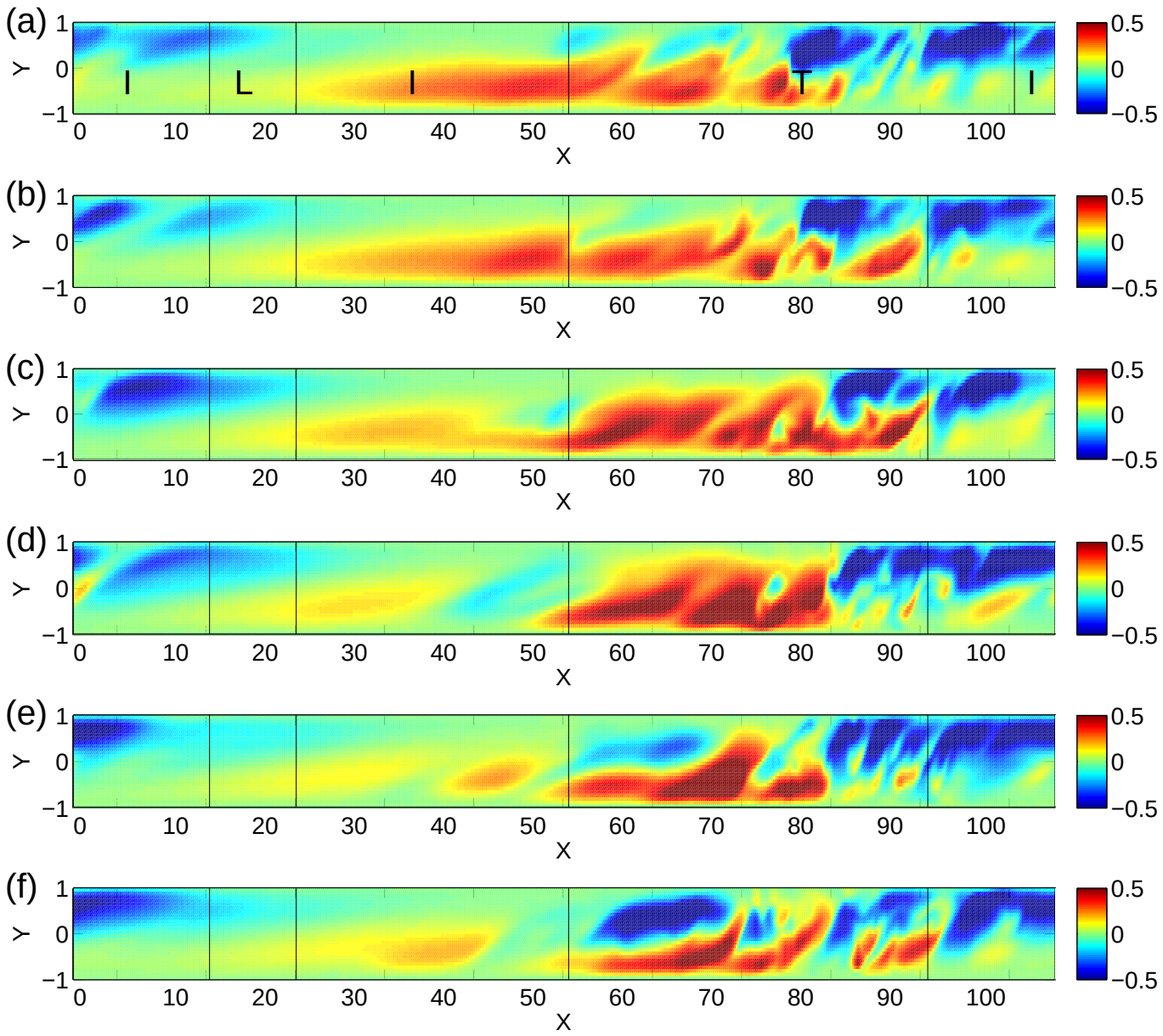


FIGURE 3.10 – Visualisation instantanée du champ de vitesse longitudinale v_x en niveaux de couleur, à une côte $z = 51$, (a) : $t = 0$, (b) : $t = 10$, (c) : $t = 20$, (d) : $t = 30$, (e) : $t = 40$ et (f) : $t = 50$, pour une DNS à $L_x \times L_z = 110 \times 72$, $N_y = 27$, $R = 350$.

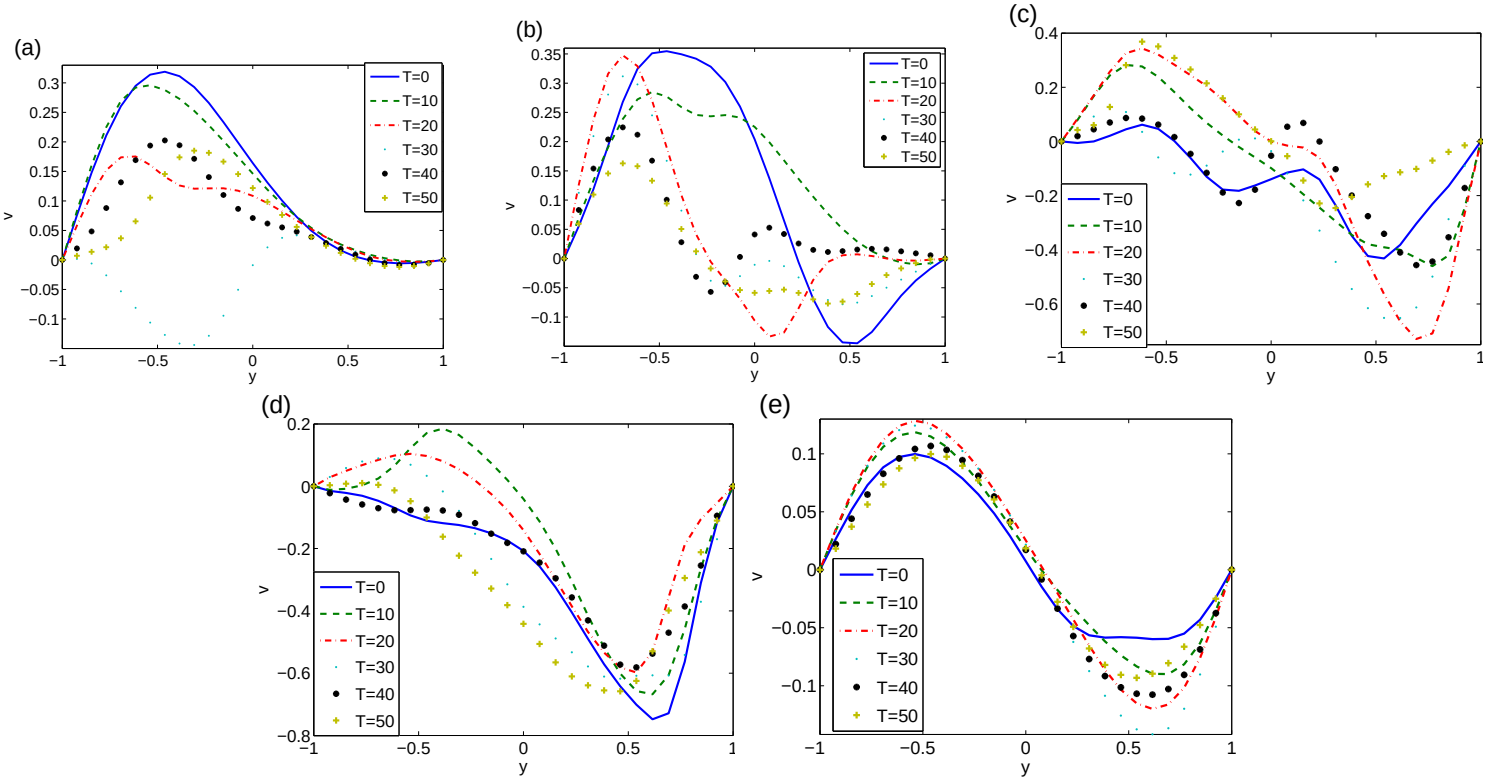


FIGURE 3.11 – Profils de vitesse à différentes valeurs de x (correspondants à la figure 3.10) : (a) : $x = 45$, (b) : $x = 55$, (c) : $x = 88$, (d) : $x = 100$ et (e) : $x = 25$, pour une DNS à $L_x \times L_z = 110 \times 72$, $N_y = 27$, $R = 350$.

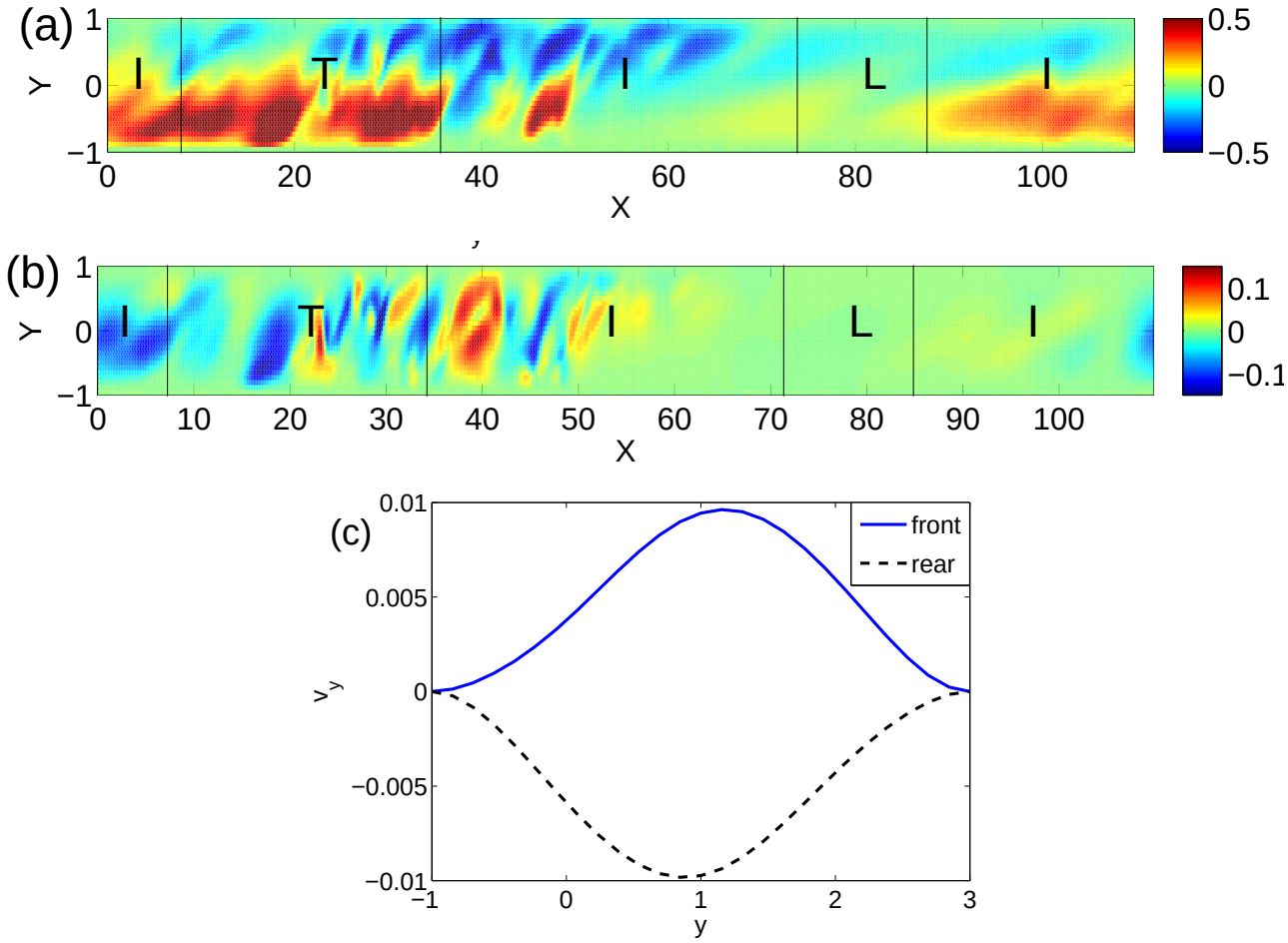


FIGURE 3.12 – Dans un système de taille $L_x \times L_z = 110 \times 72$, à $R = 350$, $N_y = 27$, (a) : Exemple de champ de vitesse longitudinal v_x, (b) : Composante v_y dudit champ correspondante v_y, (c) Profils v_y moyennés conditionnellement en espace.

du $v_x < 0$ vers les $y > 0$ et vice versa. Ils sont en amplitude un ordre de grandeur en dessous des profils instantanés en espace. Cette différence s'explique par des compensations au niveau de la moyenne en espace du profil. Cette moyenne correspond à la recirculation grande échelle [6]. Cette image n'est plus vérifiée sur une large partie de l'écoulement, dans la zone intermédiaire ($35 \lesssim x \lesssim 45$), ainsi que dans la zone turbulente ($20 \lesssim x \lesssim 30$). On retrouve l'enchevêtrement de vitesse longitudinal. Le champ v_y est lui aussi perturbé de manière corrélée à v_x avec la même longueur d'onde. Il s'agit simplement de la fermeture de lignes de courant comme attendu pour une instabilité de Kelvin–Helmholtz. Cette information se retrouve directement dans le champ de vorticité transverse décrit plus en détail dans la section suivante.

Analyse de Fourier

On peut suivre une approche plus quantitative de l'instabilité, permettant un suivi en temps qui complète l'approche de visualisation précédente. On reprend la tranche $x - y$ suivi dans la partie

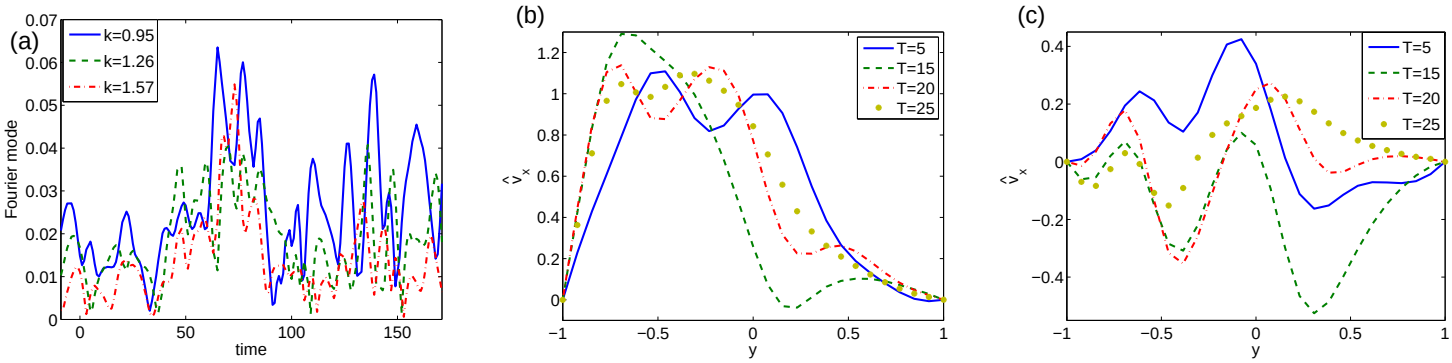


FIGURE 3.13 – (a) : Série temporelle de la transformée de Fourier (en module) de v_x à $y = 0$, $z = 51$ et $35 < x < 65$. Profil du mode $k = 0.95$ à différents instants : (b) partie réelle, (c) partie imaginaire.

précédente (figure 3.10 et 3.11). On prend une fenêtre en espace centrée autour de la perturbation, et on réalise la transformée de Fourier en x pour chaque cote y. Les modes autour de $k_x \sim 1$ dominent le spectre ($k = 0$ excepté), en accord avec la taille caractéristique de l'enchevêtrement de vitesse constaté. On suit en temps ces modes en $y = 0$, là où la modulation est la plus intense (figure 3.13 (a)). On peut voir apparaître une phase de croissance puis de saturation des modes. On trouve un temps caractéristique de l'ordre de plusieurs dizaines de h/U, ce qui donne un taux de croissance de l'ordre de 0.01. Le signal présente de plus des battements.

On suit plus précisément le mode $k = 0.95$. On en fait des profils (figure 3.13, (b) : partie réelle, (c) : partie imaginaire), en se concentrant sur les débuts du développement de la perturbation. La forme des modes normalisés ($\int \mathrm{d}y\, |\hat{v}_x| = 1$) se conserve bien pour la partie réelle. La partie imaginaire est fluctuante mais garde la même amplitude et les mêmes échelles de variation en y. La partie réelle a la même forme que les profils de l'écoulement de fond trouvé à cet endroit de l'écoulement (figure 3.11 (d)). La partie imaginaire est plus modulée. On mettra ces profils en comparaison avec les résultats de l'analyse linéaire de stabilité de la section 3.4.

Perturbation développée

On présente maintenant le cas de l'instabilité développée. Un exemple du même type que celui de la section précédente est donné dans la figure 3.14 (*nb* : il s'agit d'un autre plan $x - y$ à un autre instant.) De la même manière que précédemment, on peut repérer les zones turbulentes ($90 \lesssim x \lesssim 110$, $0 \lesssim x \lesssim 15$), les zones intermédiaires ($60 \lesssim x \lesssim 90$ et $15 \lesssim x \lesssim 45$) et laminaire ($45 \lesssim x \lesssim 60$). On retrouve (aux petites perturbations de la zone turbulente près) un écoulement *streaky* dans l'ensemble du plan, sauf une zone intermédiaire mise en valeur dans la figure 3.14 (a). Plus qu'un simple enchevêtrement, du *roll-up* typique est visible dans le rectangle. À nouveau, il apparaît que cette perturbation à l'écoulement *streaky* est centrée autour de $y = 0$. Un suivi en temps montre l'écoulement *streaky* légèrement perturbé (figure 3.14 (b)), puis présentant du *roll-up* (figure 3.14 (c,d)) puis à nouveau légèrement perturbé (figure 3.14 (e)). À nouveau, on trouve un nombre d'onde de l'ordre de $k \sim 1$. Ces figures relativement claires mettent en évidence le lien entre cette perturbation et une instabilité de couche cisaillée, ou de Kelvin–Helmholtz.

Dans ce cas précis, l'apparition puis disparition de la perturbation ne sont pas dû à son développement,

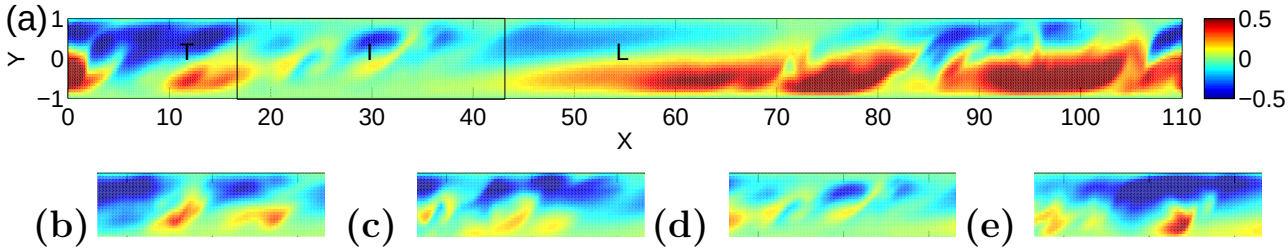


FIGURE 3.14 – Niveaux de couleur du champ de vitesse longitudinal v_x dans le plan $z = 33$ à des instants successifs. (a) $t = 20$. Centré sur la perturbation (b) : $t = 0$, (c) $t = 10$, (d) $t = 20$, (e) $t = 30$.

mais à ce qui va apparaître comme l'advection transverse des perturbations.

3.2.2 Vorticité transverse

Étant donnés les résultats des sections précédentes concernant cette instabilité, tant au niveau du type (Kelvin–Helmholtz) que de la dépendance (plan $x - y$, champ de vitesse v_x, v_y, fermeture des lignes de courant) il apparaît que la vorticité transverse $\omega_z = \partial_x v_y - \partial_y v_x$ est un bon indicateur du phénomène. On donne un exemple (même tranche $x - y$ que la section précédente, figure 3.15). La zone où le *roll-up* se produit est encadrée de la même manière. Dans les zones laminaire, turbulente et intermédiaire non perturbées identifiées, on trouve le comportement attendu pour la vorticité d'un écoulement *streaky* dans laquel $-\partial_y v_x$ domine, on trouve une vorticité transverse négative aux parois, et positive au coeur. Cela peut être confirmé par la comparaison aux profils de vorticité moyennés conditionnellement en espace (figure 3.15 (b)). On y retrouve la même image que pour les profils de vitesse, même forme pour les profils laminaire et turbulent, mais une amplitude réduite, profils intermédiaires ressemblant au turbulent pour $y > 0$ et au laminaire pour $y < 0$ (et vice versa). Dans la zone encadrée où se produit le *roll-up*, on s'écarte clairement de cette situation, avec une forte vorticité négative autour de $y = 0$. Il s'agit typiquement des contribution combinées de la modulation de v_y en x et de v_x en y due à l'instabilité.

Cela peut se mettre en évidence sur un petit modèle des profils. Ce type de description polynomiale des profils près de la paroi est relativement classique [49]. Elle est de plus tractable que la description systématique des équations (3.3)-(3.5). Étant donnée la forme des perturbations sur v_y se manifestant dans l'écoulement (figure 3.12), on peut les écrire sous la forme :

$$v_y \simeq \bar{v}_y + \alpha(1 - y^2)^2 \sin(x)\,.$$

La dépendance en y utilisée ici est celle de la première fonction de la base Hilbertienne pour v_y adaptée aux conditions de bord à la paroi (§ B). Le vecteur d'onde de l'ordre de 1 donne $\sin(x)$. Même à l'ordre le plus bas, ces bases peuvent approximer la majeur partie de la dépendance en y de l'écoulement. En particulier elle s'ajuste suffisamment pour que l'approximation reste valable pour les dérivées d'ordre bas. On a donc pour l'écoulement autour de la perturbation, au coeur d'un *streak* :

$$v_y \simeq \bar{v}_y + \alpha(1 - y^2)^2 \sin(x)\,. \tag{3.16}$$

Cette formulation donne :

$$v_x \simeq \bar{v}_x(y) + 4\alpha y(y^2 - 1)\cos(x)\,, \tag{3.17}$$

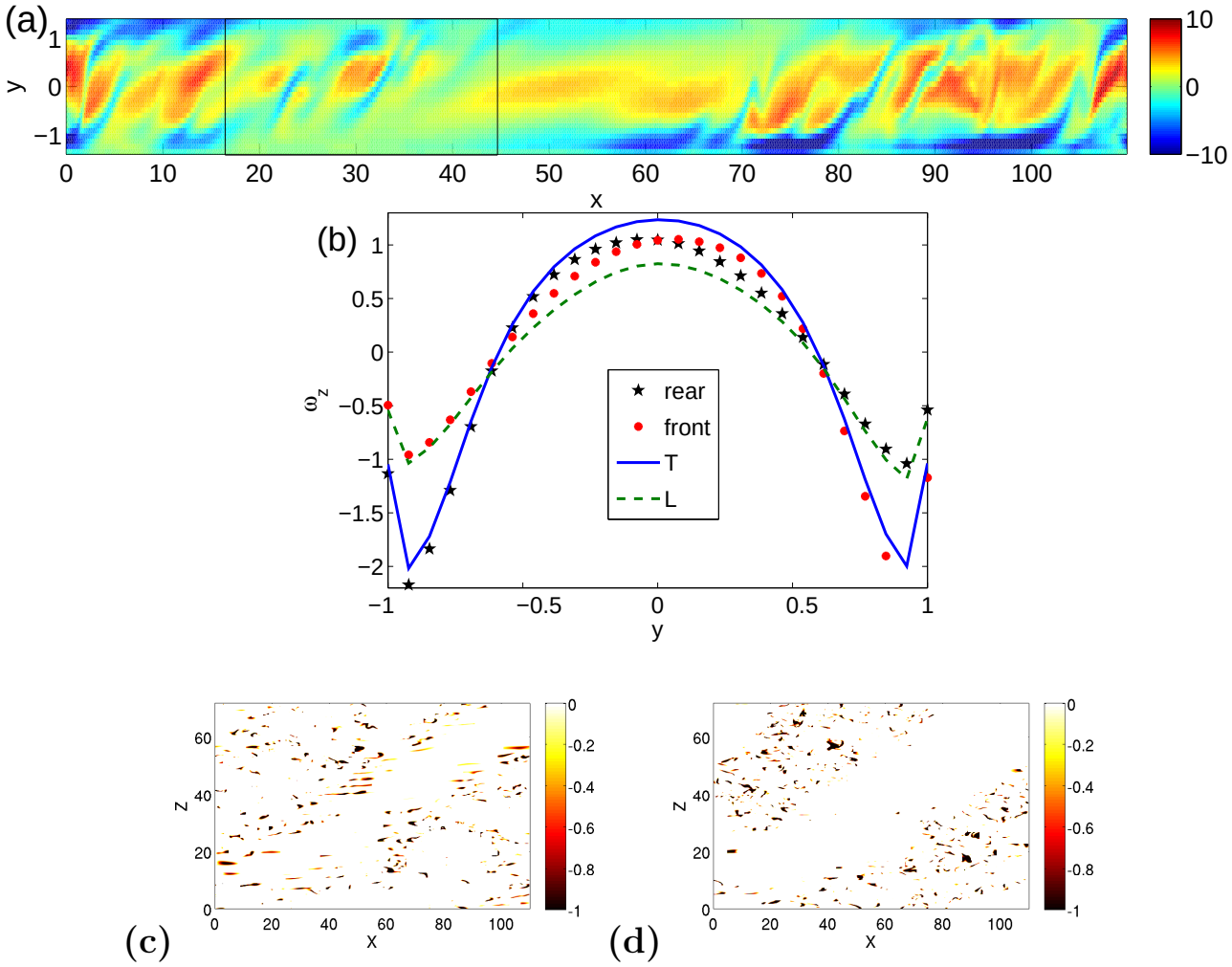


FIGURE 3.15 – (a) : Niveaux de couleur du champ de vorticité transverse ω_z dans le plan $z = 33$ (DNS de $L_x \times L_z = 110 \times 72$, $R = 350$), $t = 20$. (b) Profils de vorticité transverse conditionnellement moyennés (procédure de la section 2.3.2 pp. 30) dans les zones turbulentes et intermédiaires. Seuillés et filtrés spatiallement dans le plan $y = 0$ (c) $\omega_z^{\mathrm{th,i}}$ (d) $\omega_z^{\mathrm{th,t}}$.

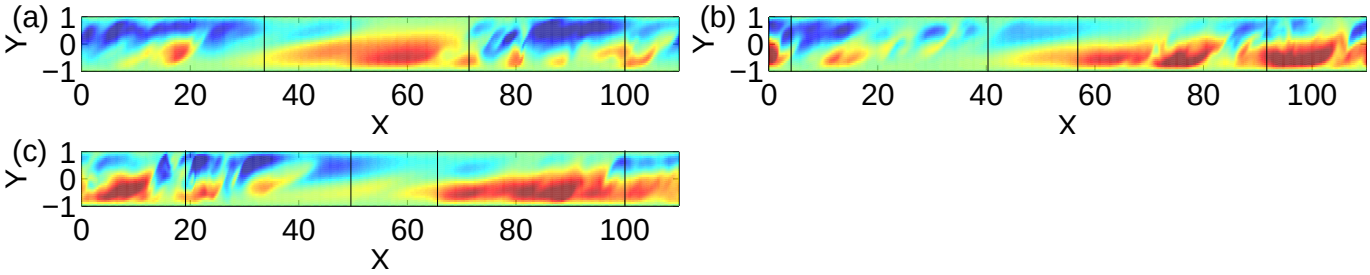


FIGURE 3.16 – Champ de vitesse longitudinal, dans les plans $z = 28$ (a), $z = 33$ (b) et $z = 38$ (c) à $t = 20$. Les niveaux de couleur sont les mêmes que dans la figure 3.10 ou la figure 3.14.

Avec $\bar{f}(y)$ ($f = v_x$, v_y, ω_z), la modulation grande échelle de l'écoulement de fond, qui est présenté dans la section précédente. Il correspond en bonne approximation à l'écoulement moyen en termes de forme de profil (voir les figures 2.13, 2.14, 2.15 pour le champ de vitesse et figures 3.15 (b), pour la vorticité transverse), cela permet de se faire une idée du comportement de la vorticité transverse. La dépendance en y est celle de la seconde fonction de la base Hilbertienne pour v_x adaptée aux conditions de bord, et qu'elle approxime bien la perturbation. (figure 3.13 (b)). Ces deux bases de fonctions sont utilisées et décrites plus en détail dans la seconde partie de l'article [81]. La vorticité s'approxime bien par :

$$\omega_z \simeq \bar{\omega}_z + \alpha \cos(x) \left((1 - y^2)^2 + 4 - 12y^2 \right) , \tag{3.18}$$

avec $\bar{\omega}_z \simeq -\partial_y \bar{v}_x$. Il apparaît clairement qu'en $y = 0$ seul le premier terme $4 + (1 - y^2)^2 = 5$ reste, les deux composantes contribuent bien de la même manière. La perturbation a la même forme que la vorticité dans la zone turbulente (figure 3.15 (b)), ce qui fait apparaître un peu de vorticité positive aux parois. Cependant, pour des raisons de simplicité de détection (en particulier en termes d'amplitude), on se concentre sur la vorticité négative en $y = 0$. Ainsi, détecter de la vorticité négative en $y = 0$ est équivalent à détecter la perturbation. On utilise donc cela comme marqueur de l'instabilité. même si elle ne reprécente qu'une partie de la contribution de la vorticité de la perturbation. On introduit un champ ω_z^{th} :

$$\omega_z \leq 0 \Leftrightarrow \omega_z^{\mathrm{th}} = \omega_z \, , \quad \omega_z > 0 \Leftrightarrow \omega_z^{\mathrm{th}} = 0 \tag{3.19}$$

seuillé en zéro, qui va signaler la présence des perturbations qui nous intéressent ici. Pour suivre le phénomène dans les zones intermédiaires et turbulentes, on applique un masque à l'aide de la discrimination laminaire/intermédiaire/turbulente (Fig. 2.8 (d), pp. 28) pour obtenir un champ $\tilde{\omega}_z^{\mathrm{th\,i}}$ (figure 3.15 (c)) et $\tilde{\omega}_z^{\mathrm{th\,t}}$ (Fig. 3.15 (d)). Les deux figures sont dans un plan $y = 0$ qui signale les perturbations respectivement dans les zones laminaires et turbulentes.

3.2.3 Dépendance transverse

On discute ensuite le caractère localisé en z des perturbations. On peut d'abord le remarquer sur des visualisations (figure 3.16). On prend trois plan $x - y$ décalés de $z = 5$, au même instant, l'un d'entre eux ayant déjà été discuté aux sections précédentes.

Pour chaque position z, la succession laminaire/intermédiaire turbulent est décalée, comme attendu avec les bandes obliques (Fig. 2.4, 2.8, 3.3, *etc.*). On indique les zones laminaires et turbulentes

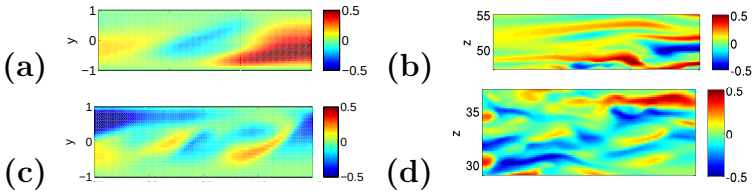


FIGURE 3.17 – Champs de vitesse longitudinal des deux exemples d'apparition et d'instabilité développée. (a,b) : Apparition à $t = 40$ (figure 3.10), vu dans le plan $x - y$, $z = 51$ (a), vu dans le plan $x - z$, $y = 0$ (b). (c,d) : Instabilité développée, à $t = 20$ (figure 3.14), dans le plan $x - y$, $z = 33$ (c) et dans le plan $x - z$, $y = 0$ (d).

pour chaque position z (les zones intermédiaires étant intercalées) : à $z = 28$ (figure 3.16 (a)), on trouve la zone laminaire à $25 \lesssim x \lesssim 35$ et la zone turbulente à $75 \lesssim x \lesssim 100$, à $z = 33$ (Fig. 3.16(b)), on trouve la zone laminaire à $40 \lesssim x \lesssim 55$ et la zone turbulent à $90 \lesssim x \lesssim 110$ et $0 \lesssim x \lesssim 5$ et finalement à $z = 38$, on trouve la zone laminaire à $50 \lesssim x \lesssim 65$ et la zone turbulente à $105 \lesssim x \lesssim 110$ et $0 \lesssim x \lesssim 15$. On retrouve le *roll-up* à $z = 33$ pour $20 \lesssim x \lesssim 35$ (zone intermédiaire) tandis qu'on en trouve pas de trace dans les zones intermédiaires à $z = 28$. On peut le voir à $z = 38$ pour $15 \lesssim x \lesssim 30$, cependant, il se trouve à un stade relativement différent de $z = 33$. L'image qu'on tire de ces constatations est que cette perturbation se développe dans une zone confinée en z, à l'échelle du filament*streak* longitudinal, typiquement, dans un *streak*, d'une part. D'autre part, elle est décorrélée de celles pouvant se développer dans les *streaks* voisins.

On peut retrouver une image plus globale de cette constatation dans la vorticité transverse seuillée et filtrée (dans les zones intermédiaires $\omega_z^{\mathrm{th\,i}}$, figure 3.15 (c) et turbulente $\omega_z^{\mathrm{th\,t}}$, figure 3.15 (d)). On voit apparaître des valeurs non nulles dans des zones relativement fines en z. On voit aussi apparaître dans cette image globale une absence de corrélation entre chaque vortex transverse. Cela se retrouve dans les suivis en temps (vidéos).

On reprend les deux exemples des figures 3.10 et 3.14 pour insister sur le comportement des perturbations à l'écoulement de fond dans la direction transverse. En particulier pour faire la différence entre l'instabilité décrite ici et le comportement habituellement décrit comme instabilité de *streak*, créant du ω_y décrit usuellement en MFU [49, 101]. Dans chaque cas, on compare à un instant donné le champ v_x dans un plan $x - y$ et $x - z$ (dans le plan médian) autour de l'instabilité. Les niveaux de couleur se trouvent sur la figure 3.17. Dans les deux cas, l'apparition de $v_x < 0$ au milieu de $v_x > 0$ ne correspond pas à du début de *roll-up* dans le plan $x - z$, mais bien dans le plan $x - y$. La vorticité transverse décrite simplement dans l'équation 3.18 se concentre effectivement à une échelle de l'ordre de h. On précisera ces constatations dans la section suivante (§ 3.3).

3.2.4 Advection

Comme il a été noté à la section précédente (Fig. 3.14 (b,c,d,e)), l'apparition et la disparition des vortex transverses dans un plan peut être due à leur advection dans les directions transverses et longitudinales. Ce fait peut se voir dans des visualisations vidéos. On suit la vorticité transverse seuillée ω_z^{th} dans un plan médian, dans une zone intermédiaire. On peut suivre à l'oeil l'évolution de chaque structure, tant son déplacement que sa forme. Il apparaît d'abord clairement un mouvement d'ensemble de la vorticité dans la direction transverse, vers les z positifs. La direction du déplacement

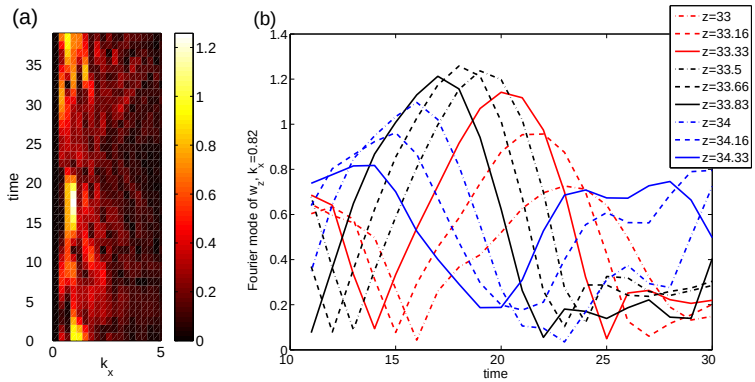


FIGURE 3.18 – (a) Niveaux de couleur du spectre de Fourier (en x) de ω_z, ($y = 0.15$, $z = 33.3$) en fonction du temps. (b) tracé du mode $k_x = 0.82$ en fonction du temps pour z allant de ~ 33 à ~ 34.5

est en accord avec le signe de la moyenne sur y des profils de vitesses moyens v_z à cet endroit. La direction d'advection dans la direction $\vec{e}_x$ est moins claire. selon la partie de la bande où la perturbation se trouve, on constate de l'advection vers les x croissants ou décroissants.

On peut aussi en obtenir une idée semi-quantitative en suivant une perturbation en temps et en z. On reprend celle présentée aux sections précédentes (Fig. 3.14). On réalise le spectre de Fourier de la vorticité transverse dans une fenêtre centrée autour de la perturbation, et on le suit en temps. D'abord à une position z donnée, on peut tracer des niveaux de couleur de $\hat{\omega}_z(k_x, t)$ (pris à un y donné (Fig. 3.18 (a)). La perturbation mentionnée apparaît dans le spectre pour $10 \lesssim t \lesssim 30$. L'amplitude est maximale pour $k_x \sim 1$, et décroit avec k_x, et sont typiquement liés à la valeur du mode dominant. Dans ce plan z donné, pour l'intervalle de temps mentionné, on voit augmenter puis décroître la valeur du mode qui nous intéresse, trace de l'apparition puis de la disparition de la perturbation. On peut de plus le voir disparaître au début de l'échelle des temps et à la fin, signe que d'autres vortex aplatis transverse passent par cette position.

On peut ensuite suivre le mode qui nous intéresse en temps et en espace (figure 3.18 (b)). Pour chaque position z, on trace son amplitude en fonction du temps. On voit l'enveloppe du mode se translater, avec une légère variation de l'amplitude. De plus la direction d'advection est parfaitement en accord avec le signe de la vitesse transverse de l'écoulement grande échelle dans cette zone (voir figures 2.14, pp. 36). Les temps caractéristique de variation de l'amplitude du mode (dans un référentiel en translation) sont de l'ordre la plusieurs dizaines de h/U. On trouve approximativement une vitesse d'advection $c_z \simeq 0.1$

3.3 Mesure

La section précédente se concentrait sur une description qualitative des principales caractéristiques de l'instabilité et de son développement. On se concentre maintenant sur la mesure de ces caractéristiques, en particulier les tailles caractéristiques et les vitesses d'advection. On les replacera dans le contexte de la bande oblique, en les comparant aux tailles caractéristiques de la bande, et des structures cohérentes de vitesse et à l'écoulement grande échelle autour de la bande.

3.3.1 Taille caractéristique

Les tailles caractéristiques et les informations sur l'organisation de cette instabilité dans le contexte des bandes peuvent êtres extraites de la vorticité transverse ω_z^{th} ainsi que de ses versions masquées $\omega_z^{\mathrm{th,t}}$ et $\omega_z^{\mathrm{th,i}}$. Il s'agit ici d'une information moyenne, par opposition à la dynamique de l'advection des perturbations mesurée ensuite. On tire profit de leur spectre et des fonctions de corrélation pour extraire l'ensemble des informations sur les tailles caractéristiques, donnée par les longueurs de corrélation (pente de la fonction de corrélation à 0) et la modulation en espace (indiquée par les oscillations des fonctions de corrélation).

Des niveaux de couleur des transformées de Fourier des champs $\omega_z^{\mathrm{th,i}}$ et $\omega_z^{\mathrm{th,t}}$ sont affichés sur figure 3.19 (a,b) (respectivement). L'extension du spectre en k_z est en bonne approximation la même dans les deux cas. Cependant, le spectre est plus étendu dans la direction k_x pour le cas de la vorticité transverse dans la zone turbulente, ce qui indique des tailles caractéristiques plus petites. Cela se retrouve après moyenne sur le vecteur d'onde k_z des deux spectres (figure 3.19 (c)), la pente de $\hat{\omega}_z^{th}$ est plus importante dans le cas intermédiaire que dans le cas turbulent, signe à nouveau que les tailles caractéristiques sont plus grandes dans les zones intermédiaires. Cette information est tout à fait cohérente avec l'image qualitative qu'on peut se faire de l'organisation des perturbations dans l'écoulement (figure 3.15 (c,d)).

On précise finalement que l'ensemble des vecteurs d'onde ayant un poids dans le spectre ne correspond *a priori* pas à l'ensemble des vecteurs d'onde instables. L'instabilité étant développée, une grande partie des plus grands vecteurs d'onde ($k \gg 1$) est asservie à des vecteurs d'onde plus petits ($k \sim 1$), véritablement instables. On se référera toujours aux longueurs d'onde apparentes des perturbations pour les comparaisons avec les résultats d'analyse de stabilité linéaire.

On peut poser la question de l'apparente périodicité du développement de l'instabilité, présente surtout dans la zone intermédiaire (figure 3.15 (c)). L'approche qualitative (figure 3.16) laisse penser que bien que le fond sur lequel se développe l'instabilité soit périodique, les perturbations sont dans l'ensemble décorrélées les unes des autres. Cette impression est confirmée pas l'examen des fonctions de corrélation de v_x, ω_z^{th}, $\omega_z^{\mathrm{th,i}}$ et $\omega_z^{\mathrm{th,t}}$ (figure 3.19 (d)). La fonction d'autocorrélation est calculée dans le plan $y = 0$ et prise à $\delta x = 0$. Elle est tracée en fonction de δz et normalisée par leur valeur en $\delta z = 0$. Le premier zéro correspond à la moitié de la taille caractéristique transverse des structures cohérentes. Les minima et maxima (anticorrélations et corrélations) sont une indication de leur périodicité, et la taille caractéristique de l'enveloppe donne l'ordre de grandeur de la longueur de cohérence. On peut l'estimer par la pente à l'origine.

Dans la direction transverse, les pentes à l'origine des fonctions d'autocorrélation de la vitesse longitudinale et de la vorticité transverse sont du même ordre de grandeur, bien que la vorticité soit légèrement plus fine que les *streaks*. Cela confirme l'impression que ces perturbations se développent dans les *streaks*. Les champs $\omega_z^{\mathrm{th\,t}}$ et ω_z^{th} sont les moins cohérents, et ne gardent qu'une faible trace de la périodicité du fond. La vorticité transverse dans la zone intermédiaire $\omega_z^{\mathrm{th\,i}}$, elle, garde une trace légèrement plus importante de périodicité, signe de la plus grande cohérence du fond dans la zone intermédiaire. La comparaison avec le champ de vitesse v_x est frappant, ce dernier est bien plus cohérent dans la direction $\vec{e}_z$, et a clairement une périodicité. Toute la périodicité présente dans ω_z^{th} (Fig. 3.15 (c), 3.19 (d)) n'est qu'une conséquence de la périodicité du fond. On remarque pour conclure que cette fonction de corrélation n'est représentée que pour les plus faibles valeurs de δz et qu'elle ne fait donc pas apparaître la corrélation à longue portée correspondant à la longueur d'onde

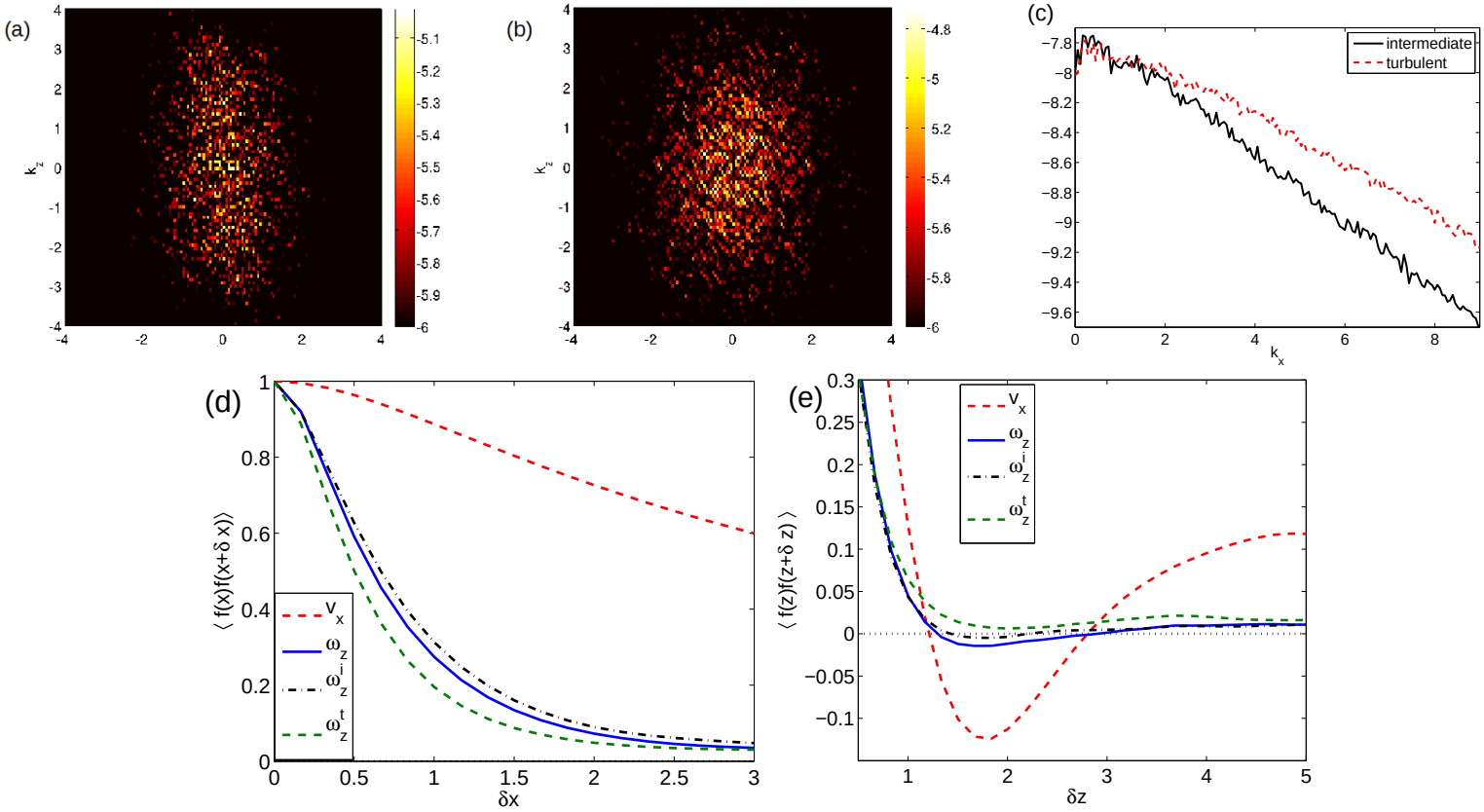


FIGURE 3.19 – Spectre de la vorticité transverse ω_z^{th} seuillée et masquée , dans (a) : la zone intermédiaire et (b) : la zone turbulente. (c) : Moyenne de ces deux spectre sur le nombre d'onde transverse k_z. Fonction d'autocorrélation des champs v_x, ω_z^{th} $\omega_z^{\mathrm{th,i}}$ et $\omega_z^{\mathrm{th,t}}$, (d) : en fonction de δx, (e) : en fonction de δz

de la bande λ_z.

Dans la direction longitudinale (Fig. 3.19 (e)), la longueur de cohérence de la vorticité transverse ω_z^{th} est clairement plus petite que celle du champ de vitesse longitudinal v_x. Il n'y a pas de trace de périodicité de $\omega_z^{\mathrm{th}}(x)$. La longueur de cohérence de v_x donne en bonne approximation la longueur des *streaks*, qui est aussi approximativement celle de la bande. La fonction de corrélation de ω_z^{th}, un bon ordre de grandeur au dessous, est à un facteur multiplicatif de l'ordre de l'unité près la longueur d'onde des perturbations se développant dans l'écoulement. On mesure les pentes à l'origine des fonctions d'autocorrélations de $\omega_z^{\mathrm{th,t}}$ et $\omega_z^{\mathrm{th,i}}$ qui donnent respectivement 1.5 et 1, indiquant des longueurs d'ondes des *roll-ups* plus importantes dans les zones intermédiaires que dans la zone turbulente, ce qui confirme l'information visuelle de la section précédente.

3.3.2 Vitesse d'advection

On ne peut tirer de la figure 3.18 qu'une information semi-quantitative, locale et instantanée sur la direction d'advection des perturbations et la valeur de la vitesse. Bien que celle ci soit en accord avec le signe du champ de vitesse à grande transverse échelle. Cependant, une mesure perturbation par perturbation n'est pas optimale.

Principe

On va donc mesurer la vitesse d'advection de la vorticité transverse seuillée ω_z^{th} dans tout l'écoulement. On pose c_x et c_z ses composantes.

L'approche suivie est dans le même esprit que les mesures de champs de vitesse de la Particle Image Velocimetry à deux dimensions. Pour des raisons de simplicité de la procédure, on mesurera indépendamment c_x et c_z. Le plan est divisé en carrés de coté $l_{x,z}$. $l_{x,z} = 2$ s'avère ici un bon choix. le marqueur dans notre cas est la vorticité transverse seuillée ω_z^{th} qui est présente dans les zones intermédiaires et turbulentes, mais moins dans la zone pseudo-laminaire. Au temps t, pour un carré repéré par les coordonnées de son coin inférieur gauche (plus faibles valeurs de x et z) (x_0, z_0). On calcule ensuite la fonction de corrélation normalisée avec le champ à $t + \delta t$ dans des carrés décalés de δz pris dans $[-2; 2]$. Ainsi, on pose le champ $\tilde{\omega} = \left(\omega_z^{\mathrm{th}} - \langle\omega_z^{\mathrm{th}}\rangle\right) / (\langle(\omega_z^{\mathrm{th}} - \langle\omega_z^{\mathrm{th}}\rangle)^2\rangle)^{\frac{1}{2}}$. La moyenne $\langle\rangle$ correspond à l'intégrale sur le carré de coin x_0, z_0 de taille 2×2.

$$C_{x_0,z_0,t}(\Delta z, \delta t) = \int_{x_0,z_0}^{x_0+2,z_0+2} \mathrm{d}x\mathrm{d}z\, \tilde{\omega}(x, z, t)\tilde{\omega}(x, z + \delta z, t + \delta t)\,,$$

avec x_0, z_0 la position du coin. On a $x_0 = 2m_x$, $z_0 = 2m_z$ avec $m_{x,z}$ entiers. Cette fonction de corrélation possède un maximum en δz_m que l'on détermine. δz_m indique de quelle distance les vortex plats se sont déplacés pendant δt. On peut ensuite diviser la distance δz_m par δt pour obtenir un champ de vitesse c_z, sur un espace discrétisé. À cette étape, on supprime tous les points aberrants (avec des valeurs extrêmes de c_z) qui proviennent typiquement de pavés ne contenant pas ou peu de vorticité. La zone laminaire souffre typiquement de ce problème : la mesure y sera moins précise et y souffrira de plus de points aberrants. On y trouve beaucoup moins, voire pas, de marqueurs, et la fonction de corrélation peut avoir un maximum pour un δx ou un δz trop grand.

On donne un exemple, en niveaux de couleur, de $c_z(x_0, z_0)$ dans la figure 3.20 (a). Le champ prend principalement les valeurs $-1, 0, +1$. On utilise l'invariance dans la direction diagonale z', pour

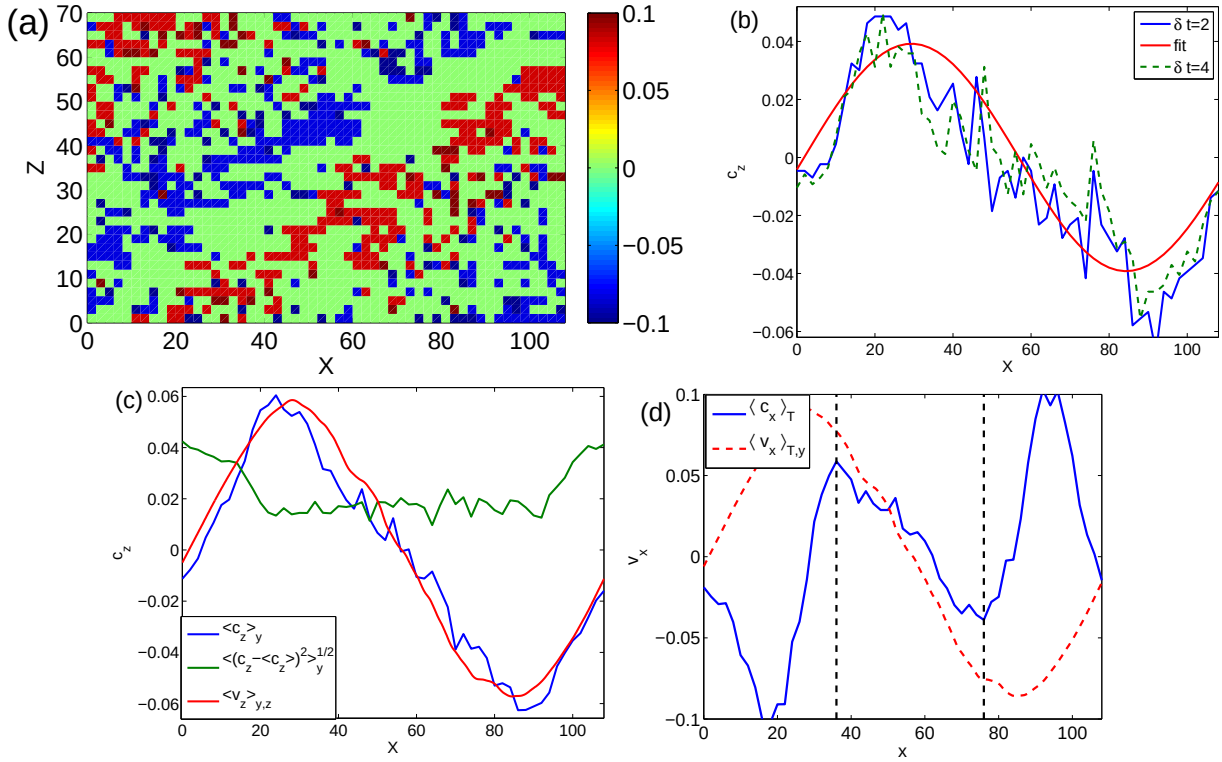


FIGURE 3.20 – (a) : Niveaux de couleur du champ de vitesse d'advection transverse c_z, dans le cas d'une bande, à $y = 0$. (b) : Vitesse d'advection c_z moyennée sur la diagonale à un instant donné à $y = 0$ en utilisant des pas de temps $\delta t = 2$ et $\delta t = 4$ ajustement sinusoïdal correspondant. (c) : Moyennes et fluctuations dans la direction y de la vitesse d'advection c_z à un instant donné, comparaison avec le champ de vitesse transverse grande échelle. (d) Comparaison de la vitesse d'advection longitudinale mesurée, à $\delta t = 1$, et $y = 0$ avec l'écoulement grande échelle correspondant.

moyenner sur cette coordonnée pour plus de lisibilité. On obtient donc une fonction de x. On en trace plusieurs exemples pour plusieurs valeurs de δt (figure 3.20 (b)), la procédure fonctionne et ne dépend pas de cette grandeur. La dépendance en x de c_z est quasi sinusoïdale. Pour des raisons de lisseté, on peut procéder à un moyennage en temps. On posera $\langle c_z \rangle_T$ ces moyennes en temps. La même procédure est appliquée pour mesurer c_x, ce champ est néanmoins plus bruité ; il nécessite un moyennage en temps systématique.

Cette fonction de x est typiquement calculée en $y = 0$, principalement parce que c'est là que l'on attend l'amplitude la plus forte pour la perturbation, et que la procédure de seuillage de ω_z est surtout adaptée à ces cotes. Moyennes et fluctuations sur l'épaisseur (notées $\langle c_z \rangle_y$ et $(\langle (c_z - \langle c_z \rangle_y)^2 \rangle_y)^{1/2}$) peuvent êtres calculées, pour estimer la cohérence de la vitesse d'advection sur l'épaisseur, *i.e.* pour vérifier si les perturbations se déplacent en bloc sur l'épaisseur de l'écoulement. Dans tous les cas, on fera la comparaison avec le champ de vitesse grande échelle, moyenné sur l'épaisseur y et sur la direction diagonale.

Vitesse d'advection transverse c_z

On présente le résultat sur la figure 3.20 (c). La zone laminaire correspond à $x \lesssim 20$ et $x \gtrsim 100$, la zone turbulente à $40 \lesssim x \lesssim 75$, les zones intermédiaires s'intercalent. Des deux directions, il s'agit de celle pour laquelle les résultats sont les plus simples et directs. Après moyennage en temps (nécessaire uniquement pour un peu de lissage), on trouve un parfait accord entre la vitesse d'advection des perturbations et la composante transverse, moyennée sur l'épaisseur, de l'écoulement moyen. Les fluctuations en y de la vitesse d'advection transverse montrent que les perturbations sont advectées en bloc, et sont cohérentes sur toute l'épaisseur, comme proposé dans la description cinématique.

On peut donc en conclure que, dans la direction transverse, les perturbations sont advectées par l'écoulement moyen, soit, dans des directions opposées pour chaque coté de la bande. Ce résultat est cohérent avec les visualisations (Fig. 3.14) et les mesures sur un seul rouleau de Kelvin–Helmholtz (Fig. 3.18). On peut résumer cette constatation sur le schéma de la figure 3.21 (a). On repère la bande et les zones intermédiaires, entièrement turbulente et pseudo-laminaire, marqué par L,T et I ainsi que la bande, dans le plan $x - z$. On y reporte la direction et le sens de c_z : nul dans les zones turbulente et pseudo-laminaire et non-nulle dans les zones intermédiaires, de signe opposé de chaque coté, avec un sens fixé par l'orientation de la bande.

On discutera plus en détail l'effet de l'écoulement moyen sur les perturbations dans la partie de modélisation.

Vitesse d'advection longitudinale c_x

On présente le résultat sur la figure 3.20 (d), qu'on compare à l'écoulement à grande échelle. L'image générale est cette fois moins claire. En effet, on distingue deux zones dans l'écoulement (une fois prise en compte les conditions de bord périodiques). La première correspond aux environs de la zone turbulente, la seconde aux environs de la zone pseudo laminaire. Dans la zone turbulente, on retrouve l'image que l'on avait pour la vitesse d'advection transverse c_z : les perturbations sont advectées à avec la vitesse de l'écoulement grande échelle, soit, toujours vers le centre de la région turbulente.

Dans la zone pseudo-laminaire, on trouve une image radicalement différente. c_x change relativement brutalement de signe lorsqu'on s'écarte de la zone turbulente, et s'annule au milieu de la zone laminaire. Dans l'ensemble, de ce coté de l'écoulement, les perturbations sont advectées vers la zone laminaire. Les perturbations étant plutôt concentrées dans la partie haute (respectivement basse) à l'avant (respectivement arrière) des bandes, elle ressentent principalement l'effet de l'écoulement dans cette demi-épaisseur, *i.e.* l'effet de l'écoulement laminaire sur ces perturbations ne disparaît pas avec le moyennage.

On peut à nouveau résumer ces constatations sur un schéma. On reprend la description schématique de l'écoulement, vu dans un plan $x - y$ (Fig. 3.21 (b)). On marque en grisé l'organisation de la turbulence et le comportement de l'écoulement à grande échelle. On indique en noir la direction de c_x selon la zone, et on sépare à nouveau de pointillé la zone où il y a accord entre l'écoulement de fond et la vitesse d'advection et celle où elles sont un signe opposé. On trouve un zéro de c_x au coeur de la zone turbulente, et un accord avec l'écoulement grande échelle autour de la zone turbulente. La vitesse d'advection c_x s'annule à nouveau au milieu de la zone intermédiaire. Autour de la zone pseudo-laminaire, elle prend la direction opposée.

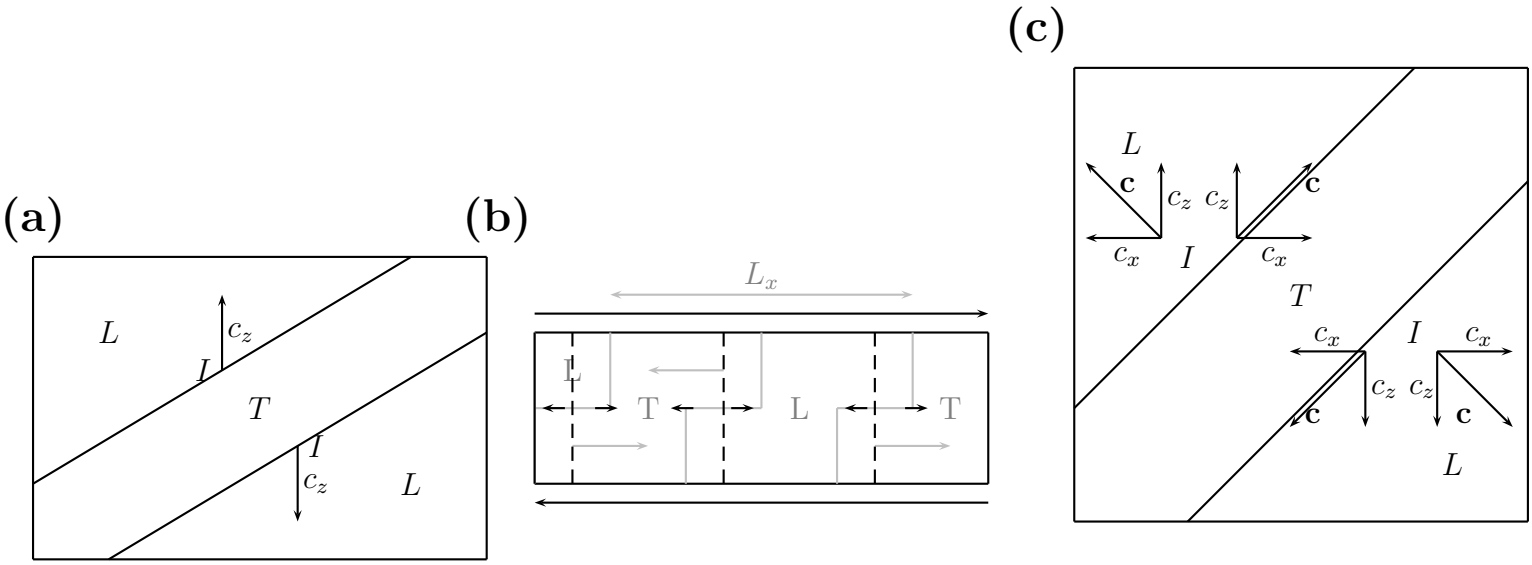


FIGURE 3.21 – Bilan des mesures des vitesses d'advection sur des schémas. (a) : Vitesse d'advection c_z vu dans un plan $x - z$. (b) : Vitesse d'advection c_x vu dans un plan $x - y$. Les flèches grises correspondent à l'écoulement moyen, les flèches noires, à la vitesse d'advection des perturbations c_x. (c) : Bilan, vitesse d'advection $\vec{c} = c_x\vec{e}_x + c_z\vec{e}_z$ vu dans un plan $x - z$

Bilan, $\vec{c} = c_x\vec{e}_x + c_z\vec{e}_z$

On peut accompagner le bilan d'un schéma du comportement de la vitesse d'advection (c_x, c_z) (Fig. 3.21 (c)). La prise en compte des deux composantes de la vitesse d'advection consiste simplement à transformer ces deux scalaires en un vecteur.

Autour de la zone turbulente, cela conduit à une image simple pour l'advection des perturbations : en effet l'amplitude et la direction de la vitesse d'advection sont les mêmes que celle de l'écoulement moyen à grande échelle : les perturbations sont advectées le long de la bande.

Autour de la zone laminaire, les perturbations sont advectées vers la direction laminaire, dans une direction qui est normale à la bande. La question de l'advection des perturbations vers la zone laminaire est à mettre en comparaison avec les résultats sur l'écoulement moyen. En effet, en faisant un bilan de force [6,96], on trouve, dans la zone pseudo laminaire, que c'est l'advection par l'écoulement de base de la turbulence qui équilibre la viscosité. Ces vitesses d'advection décrivent de manière détaillée le comportement local de l'écoulement et permettent de mieux comprendre son comportement moyen.

3.3.3 Résolution abaissée

On reprend rapidement l'ensemble de la démarche suivie précédemment dans le cas de la résolution abaissée, $N_y = 15$ utilisée dans le cadre du modèle réduit. Le but est de montrer que les phénomènes remarqués et étudiés ici ne sont pas altérés qualitativement par l'abaissement de la résolution. On passera plus rapidement sur les visualisations, ces dernières posant un problème de lisibilité. On passera plus de temps sur les procédures de traitement : mesure de longueur caractéristique et de vitesse d'advection.

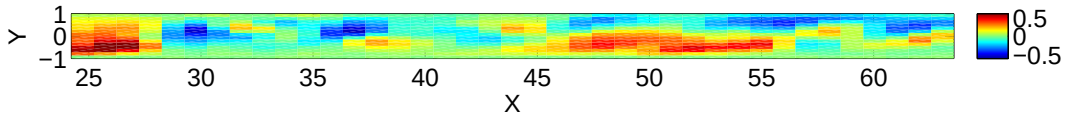


FIGURE 3.22 – Exemple de niveaux de couleur du champ de vitesse à $N_y = 15$ ($L_x \times L_z = 110 \times 48$) dans un plan $x - y$, centré autour d'une zone intermédiaire présentant la perturbation.

Visualisations

On considère un domaine de taille $L_x \times L_z = 110 \times 48$, à la résolution nominale du modèle réduit, $N_{x,z}/L_{x,z} = 4$, $N_y = 15$. On intègre un domaine contenant des bandes en temps, et on examine des visualisations.

L'ensemble des visualisations montrées précédemment (Fig. 3.3, § 3.1.2) montre l'organisation en *streaks* de vitesse longitudinaux, quasi-organisés de l'écoulement local, ainsi que l'organisation de l'écoulement grande échelle autour des bandes (Fig. 2.13, Fig. 2.14, Fig. 2.15, § 2.3.2). L'écoulement grande échelle et les profils moyens ont exactement la même structure dans les DNS que dans le modèle réduit. Il apparaît clair qu'on peut reprendre la même démarche qu'en DNS et définir un écoulement de fond à cette résolution. Il apparaît de plus que cet écoulement a la même structure que ce que l'on peut extraire de la DNS. On va donc pouvoir reprendre la démarche suivie à $N_y = 27$ pour la résolution abaissée. On utilisera particulièrement la vorticité transverse seuillée ω_z^{th}

Champ de vorticité transverse

On examine le champ de vitesse longitudinal v_x dans le même esprit que précédemment. On considère un exemple dans une zone intermédiaire avec des niveaux de couleur de ω_z (Fig. 3.22). Sur la figure, on peut identifier le champ de vorticité correspondant à l'écoulement de fond sur lequel s'ajoute des perturbations $\omega_z < 0$ autour de $y \sim 0$. Il est cependant difficile, en l'état, de trancher quant à la validité de la comparaison avec la DNS. Cependant la dépendance en x et en y de cette perturbation a la même structure que la description cinématique de la section 3.2.2 (Eq. (3.17), (3.16), (3.18)). Pour examiner plus en détail la situation, on passe donc à l'examen de la vorticité transverse.

Advection

Pour pousser la comparaison plus loin on utilise la procédure de mesure de vitesse d'advection de la section précédente à notre cas. On mesure la vitesse d'advection transverse dans un système de taille $L_x \times L_z = 110 \times 32$, pour lequel on dispose de conditions initiales à différents Reynolds dans la gamme $[R_{\mathrm{g}}; R_{\mathrm{t}}] \simeq [270; 345]$, de part l'étude systématique du comportement de la bande. On utilise des intégrations en temps à $R = 280$, $R = 290$, $R = 300$, $R = 310$, $R = 320$ et $R = 330$. On teste aussi l'effet de la taille, en fixant $R = 315$ et en prenant les tailles $L_x \times L_z = 110 \times 32$, 110×54 et 110×72.

On trace la vitesse d'advection c_z superposée à l'écoulement v_z moyenné sur l'épaisseur dans la figure 3.23 pour tous ces cas. Les deux vitesses ont le même type de modulation et la même phase, comme cela était le cas à $N_y = 27$. Il y a cependant un décalage quantitatif, présent dans tous les cas : la vitesse d'advection est légèrement inférieure à celle de l'écoulement moyen. L'écart le plus

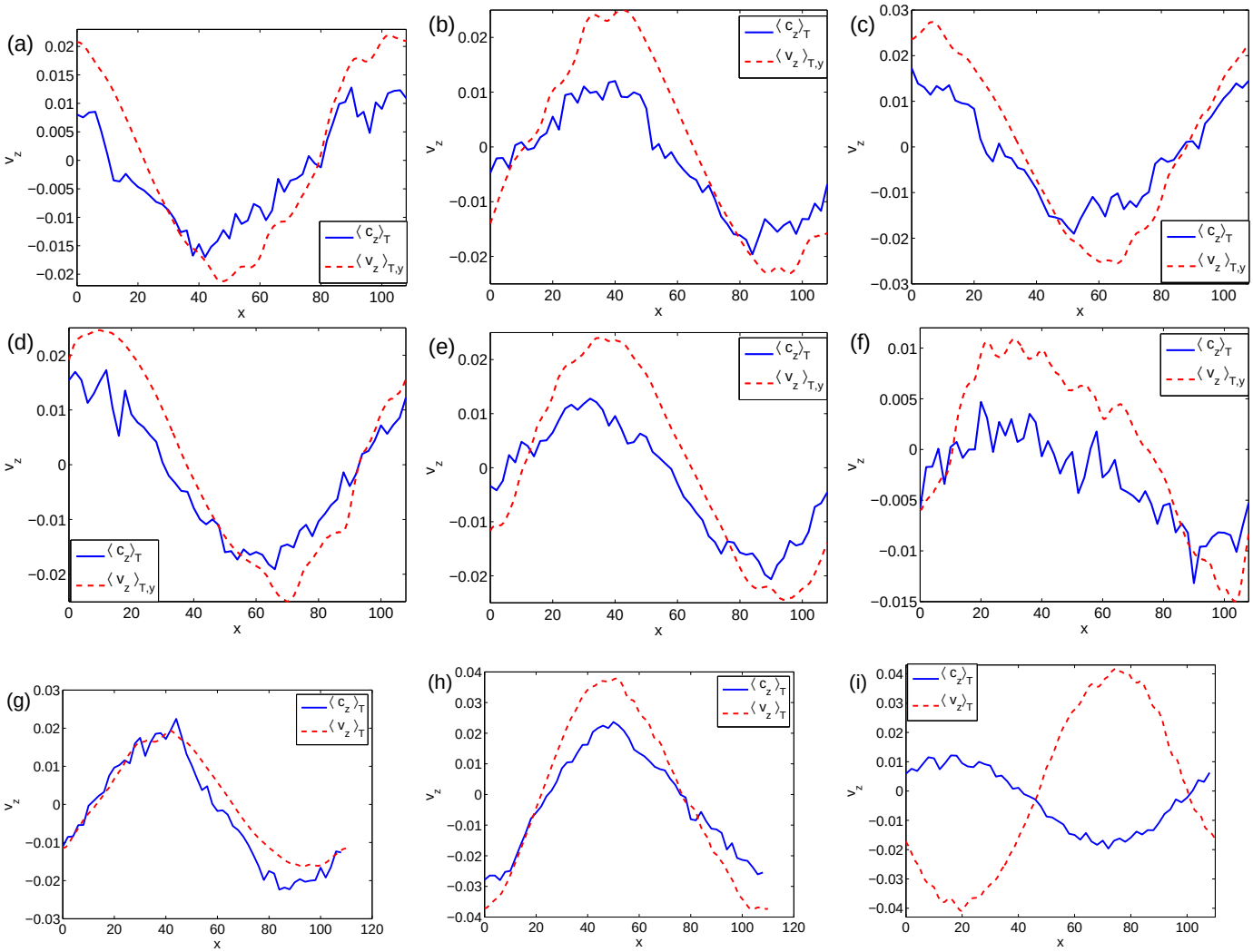


FIGURE 3.23 – Comparaison de la vitesse transverse d'advection transverse et de l'écoulement grande échelle. $N_y = 15$, $L_x \times L_z = 110 \times 32$, (a) : $R = 280$. (b) : $R = 290$. (c) : $R = 300$. (d) : $R = 310$. (e) : $R = 320$. (f) : $R = 330$. Puis à $R = 315$, $L_x = 110$. (g) : $L_z = 40$, (h) : $L_z = 54$, (i) : $L_z = 72$.

important est trouvé à $l_z = 72$ (Fig. 3.23 (i)) : c'est la conséquence d'importants défauts (orientation et longueur d'onde) dans la bande pour les données échantillonnées. En gardant l'idée du schéma 3.21 (c), des contributions de directions différentes se retrouvent dans l'écoulement moyen et dans la vitesse d'advection. L'accord entre les deux champs de vitesse n'est vrai qu'à un facteur multiplicatif proche de 1 près.

Échelles caractéristiques

On utilise les données de la taille 110×32 pour faire une étude systématique des échelles caractéristiques de la vorticité transverse seuillée à $N_y = 15$. On applique la procédure précédente aux Reynolds $R = 280$, $R = 290$, $R = 300$, $R = 310$, $R = 320$ et $R = 330$.

On trace les résultats sur la figure 3.24 pour $R = 280$, 290 et 300 et sur la figure 3.25 pour les Reynolds $R = 310$, 320 et 330. Dans l'ensemble des cas, qualitativement comme quantitativement, le comportement des échelles ne change absolument pas par rapport aux DNS. On retrouve les hiérarchies et les ordres de grandeur.

Remarques

L'application des procédures dans ce cas particulier cherchait à pousser la vérification du comportement du modèle réduit. Dans l'ensemble, la comparaison avec la DNS est concluante, l'instabilité se manifeste, avec les mêmes échelles caractéristiques et les mêmes vitesses d'advection (par rapport à l'écoulement grande échelle). Cela n'est pas forcement surprenant, les modes suivants servant principalement à donner du *roll-up* plus lisible. Ces modes sont esclaves de la dynamique des modes instables, et passé un certain ordre, ne vont apporter que de légers changements quantitatifs.

3.4 Résultats de l'analyse linéaire

On cherche à tester le modèle de l'écoulement de fond de manière progressive, la finalité étant de vérifier les mécanismes et de faire une comparaison avec les résultats extraits de la DNS. On commence par une analyse locale d'un écoulement à une composante, pour mettre en évidence les caractéristiques et les mécanismes d'instabilité et le comportement des vitesses de groupe. On prend en compte en suite l'écoulement transverse $\bar{V}_z$ dans l'analyse de stabilité pour tester les effets de l'advection transverse. On teste ensuite le cas non parallèle ou global, pour tester l'hypothèse quasi-parallèle et examiner la forme des modes qui peuvent se présenter. On testera finalement un cas où la dépendance transverse est prise en compte, dans la limite locale, *via* une analyse de Bloch–Floquet. À chaque fois, le problème linéaire (2.5) (pp. 18), discrétisé à l'aide des bases de polynômes décrites dans l'annexe B est résolu sous matlab.

Dans le cas local, on teste d'abord un exemple typique, puis on présente une étude paramétrique. Les cas global et de Bloch–Floquet sont plus lourd et ne sont testés que sur des exemples typiques.

3.4.1 Les différents stades d'approximation

En pratique, le modèle d'écoulement de fond contient une modulation à petite et grande échelle : Un certain nombre d'approximations dans l'analyse de l'écoulement sont possibles. Les approches

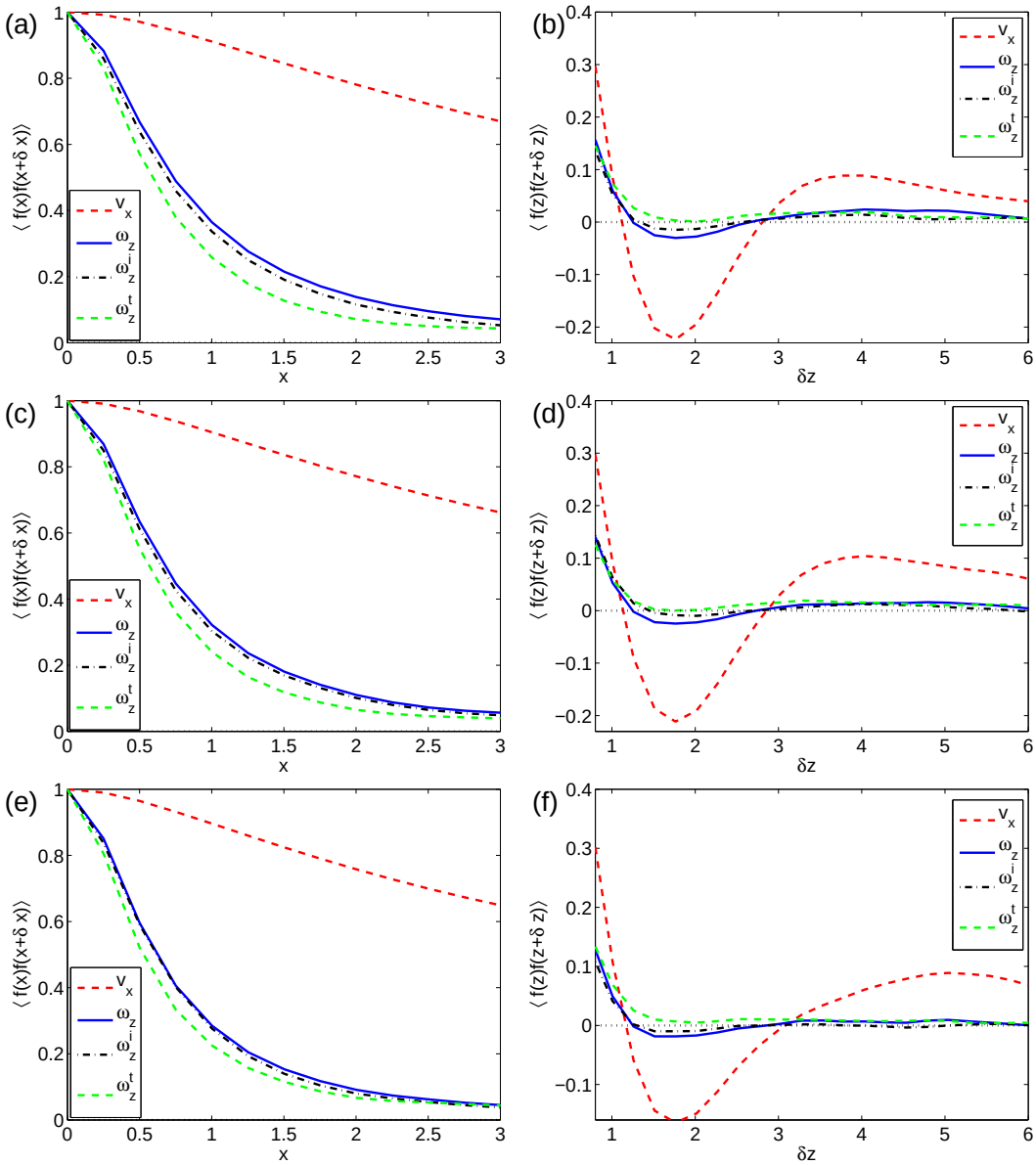


FIGURE 3.24 – Fonction de corrélation en x (a,c,e) et z de v_x (b,d,f), ω_z^{th}, $\omega_z^{\mathrm{th,i}}$ et $\omega_z^{\mathrm{th,t}}$ dans un domaine de taille $L_x \times L_z = 110 \times 32$ pour le modèle réduit $N_y = 15$, pour $R = 280$ (a,b), $R = 290$ (c,d) et $R = 300$ (e,f).

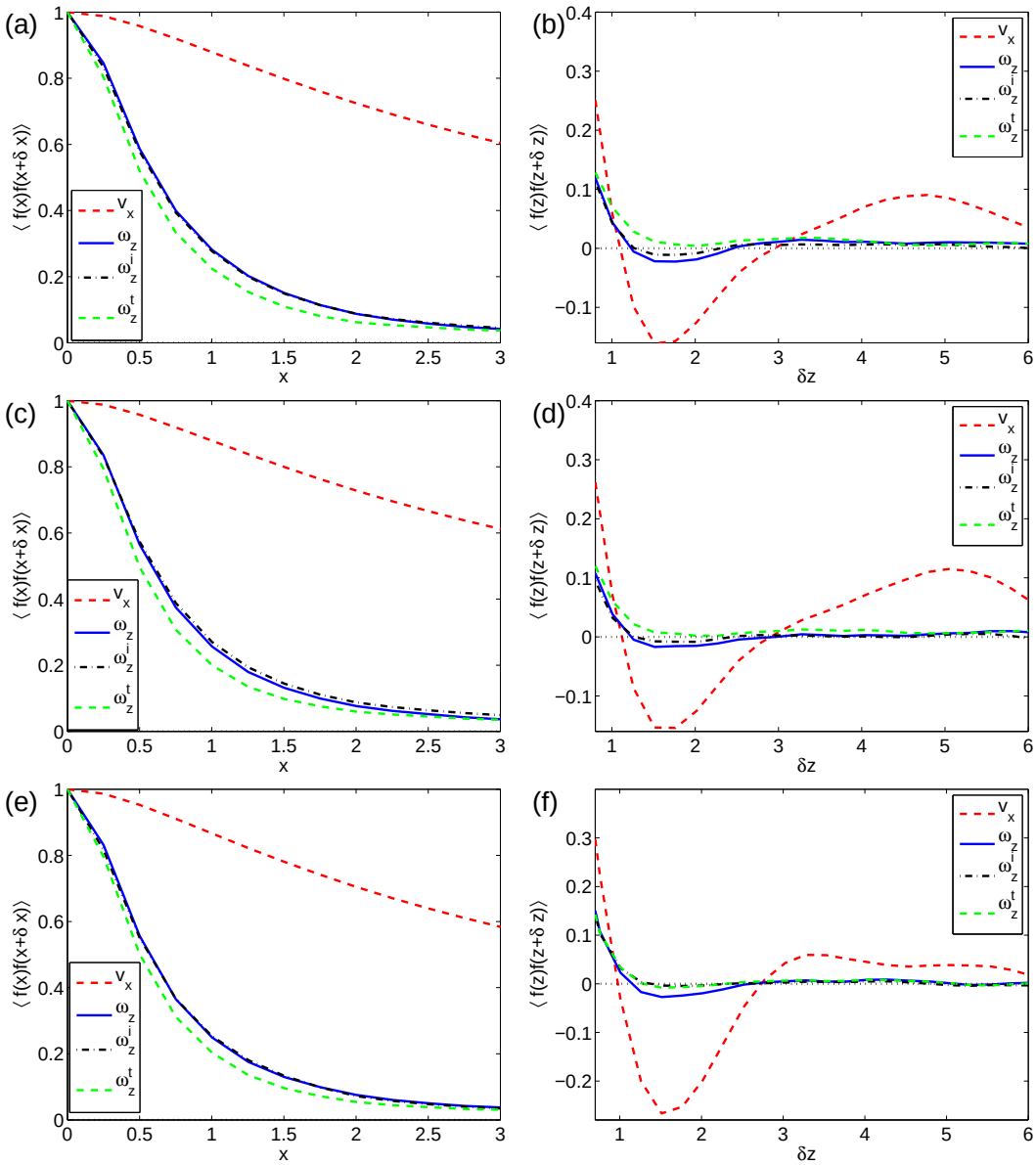


FIGURE 3.25 – Fonction de corrélation en x (a,c,e) et z (b,d,f) de v_x, ω_z^{th}, $\omega_z^{\mathrm{th,i}}$ et $\omega_z^{\mathrm{th,t}}$ dans un domaine de taille $L_x \times L_z = 110 \times 32$ pour le modèle réduit $N_y = 15$, pour $R = 310$ (a,b), $R = 320$ (c,d) et $R = 330$ (e,f).

phénoménologiques ont montré que l'instabilité, dans l'écoulement de Couette plan comme dans l'écoulement de Poiseuille cylindrique, partageait un grand nombre de caractéristiques des instabilités de couches de mélange bidimensionnelle. Les mesures de longueur de corrélation transverse dans l'écoulement de Couette plan montrent que la vorticité transverse est localisée, à l'échelle du *streak*, et qu'elle ne porte pas de trace de périodicité transverse, excepté des traces de la périodicité des *streaks* eux mêmes. On choisit donc d'étudier l'instabilité de couches cisaillées bidimensionnelles. Le coté bidimensionnel ne signifie pas ici invariant selon z, mais bien confiné en z. On devra donc extraire les amplitudes et épaisseurs de couches de cisaillements équivalents à ce qu'on trouve dans le coeur d'un *streak*, là où l'instabilité se développe dans l'écoulement de Couette plan et l'écoulement de Poiseuille cylindrique. Cette approximation a de plus l'avantage de simplifier l'étude : on s'affranchit ainsi des instabilités de Kelvin–Helmholtz classique des *streaks*, due à $\partial_z v_x$. Une étude plus approfondie du lien éventuel, linéaire ou non entre les deux instabilités nécessite évidement de prendre en compte cette modulation petite échelle.

Les visualisations et mesures montrent une séparation d'échelle claire dans la direction longitudinale, entre la longueur d'onde de l'instabilité et l'échelle de modulation de la turbulence. Cela est vrai pour l'écoulement de Poiseuille cylindrique (pour les *puffs* ou les *slugs*), comme c'est le cas pour l'écoulement de Couette plan, dans le régime de bande ou de *spot*. Cela indique qu'on peut utiliser le formalisme local dans notre situation. L'avantage d'une telle approche est qu'on l'on peut alors tester le comportement de chaque petite région de l'écoulement avec une forme et amplitude de profil, sans se préoccuper de l'organisation grande échelle de l'écoulement. Ainsi, une série de profils modélisant des régions des bandes ou des *spots* peuvent être analysés. Les résultats sont ensuite regroupés en prenant en compte l'organisation à grande échelle pour discuter le comportement global de telle ou telle situation. On calcule les vitesses de groupe pour pouvoir discuter de l'advection des paquets d'onde, du caractère absolu ou convectif de l'écoulement. La qualité de l'approximation quasi-parallèle peut être testée avec une analyse globale de stabilité.

Finalement, on peut utiliser ou retirer l'écoulement transverse à grande échelle. Il est pris en compte pour examiner l'effet de l'advection transverse dans les bandes ou les *spots*. On en fait abstraction pour discuter des mécanismes de base de l'instabilité. De plus, un écoulement de fond sans composante transverse peut être trouvé dans le case de Couette plan perturbé par un fil. Bien que l'on ne dispose pas de résultats de DNS sur ce cas, les résultats expérimentaux indiquent que l'organisation est la même que dans les bandes ou les *spots* plus classiques. On peut éclaircir chacun de ces cas à l'aide de l'étude de stabilité.

3.4.2 Analyse locale

L'analyse locale est faite en deux parties. On considère d'abord trois cas typiques, pour lesquels on détermine les relations de dispersions (taux de croissance, pulsation, vitesse de groupe) ainsi que les modes propres. On fait apparaître les comportements convectifs et absolus de l'instabilité à l'aide du critère de Briggs–Bers. Une fois cela mis en évidence, on étudie systématiquement le comportement de l'écoulement. On détermine la zone de stabilité, et si elle est absolue, dans l'espace des paramètres et la situation et localisation à laquelle elle correspond. Le tout est fait pour une gamme de nombres de Reynolds qui correspond aux bandes dans les expériences et DNS. À chaque fois, le problème linéarisé (2.5) découle de l'équation (2.6) où $\bar{V}_z = 0$ (pp. 19).

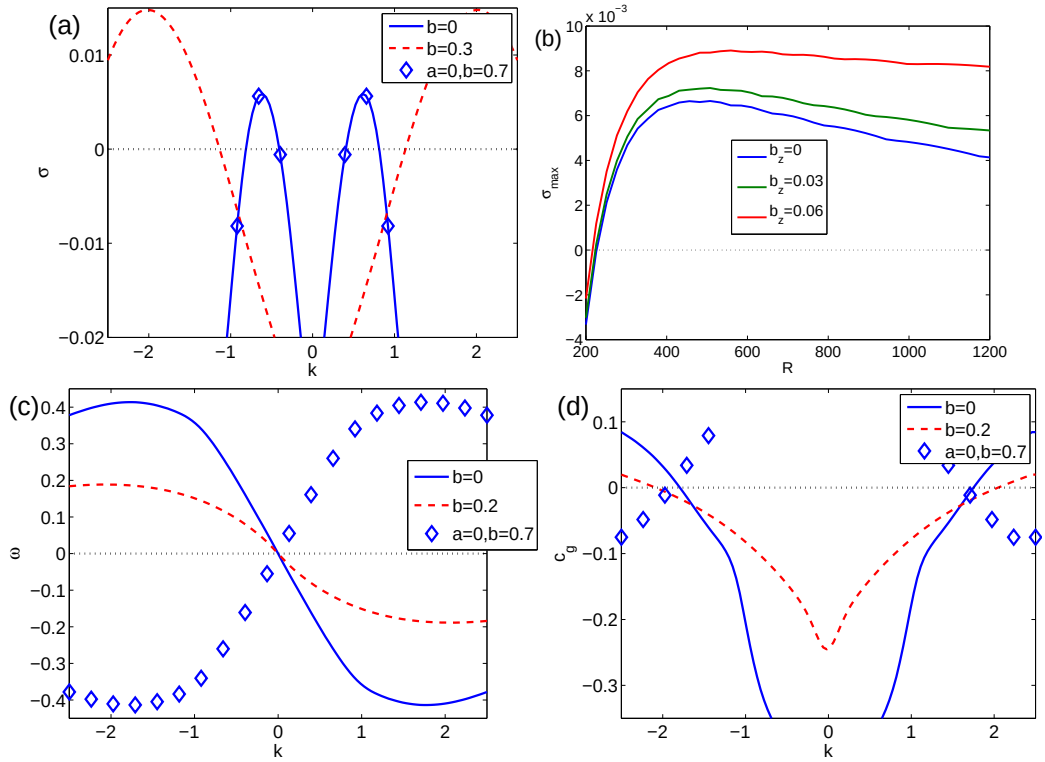


FIGURE 3.26 – (a) taux de croissance en fonction de k pour $a = 0.7$, $d = 3.9$, $b = 0$ et $b = 0.3$, $d' = 3$, $R = 350$, (plus en points pour $a = 0$, $b = 0.7$, $d' = 3.9$, $R = 350$). (b) maximum du taux de croissance $\sigma(k)$ en fonction de R (même régime de paramètres) pour trois valeurs de b_z, à $d_z = 1.8$. (c) pulsation ω en fonction de k, à $R = 350$ (mêmes paramètres). (d) Vitesse de groupe en fonction de k centrée autour des nombres d'onde instables, $\sigma > 0$ (mêmes paramètres $R = 350$)

Généralités

On présente trois cas types dans cette section, deux zones intermédiaires positionnées de manière symétrique par rapport à la bande et une zone turbulente. On montre qu'ils illustrent les caractéristiques de l'instabilité dans chaque zone. Les deux exemples représentent une zone intermédiaire avec un *streak* $v_x > 0$ en bas et une zone turbulent avec le *streak* concentré en bas. Le troisième, un *streak* $v_x < 0$ en haut va venir illustrer la symétrie $y \leftrightarrow -y, \bar{V} \leftrightarrow -\bar{V}, z \leftrightarrow z \pm \lambda_z/2$. On montrera l'équivalence des deux zones intermédiaires. On choisit des valeurs de a, b, d, d' qui correspondent à la gamme extraite des DNS (figure 3.5 (a,b)). On prend $b = 0$, $a = 0.7$, $d = 3.9$, puis $a = 0$, $b = 0.7$, $d' = 3.9$ et $a = 0.7$, $b = 0.2$, $d = 3.9$, $d' = 3$. Ces choix de paramètres sont guidés par la description de l'écoulement de fond pour représenter les situations souhaitées. Les calculs sont faits à $R = 350$, au milieu de la gamme d'existence des bandes et dans la zone de croissance de *spots*.

Pour ces trois exemples, le taux de croissance σ est tracé en fonction de k sur la figure 3.26 (a). On trouve le comportement typique d'une instabilité de Kelvin–Helmholtz visqueuse [16] : un maximum positif pour σ pour un $|k| = O(1)$ et une décroissance purement visqueuse de σ avec $|k|$. L'application de la symétrie $y \leftrightarrow -y$, $v \leftrightarrow -v$ ne change pas le comportement du taux de croissance. Le nombre d'onde le plus instable k_m est toujours de l'ordre de 1. Le paramètre b, soit l'amplitude

du contre-écoulement, augmente k_m, on passe de $k_m \simeq 0.5$ à $k_m = 2$. Ces valeurs sont un bon ordre de grandeur au dessus du vecteur d'onde des bandes,ce qui justifie l'analyse locale *a posteriori*.

Les maxima de $\sigma(k)$ (en k_m) sont notés σ_m. On les trace en fonction du nombre de Reynolds sur la figure 3.26 (b). Seule la courbe $a_z = 0$ est discutée ici, les autres le seront dans la section suivante. Le comportement de $\sigma_m(R)$ est conforme à l'intuition : il s'annule pour un $R_s \sim 200$, il est négatif en dessous, positif au dessus : la viscosité stabilise l'écoulement. Le taux de croissance a un maximum pour $R_m > R_s$, ce nombre de Reynolds optimal est de l'ordre de $R_m \sim 400$. Le taux de croissance σ_m sature pour les très grands R, pour rejoindre le cas inviscide. La gamme de valeur de nombre de Reynolds pertinentes pour une comparaison avec les DNS (§ 3.3 et § 6.3) est $[300; 500]$

On examine ensuite la pulsation. On la trace en fonction de k sur l'axe k réel pour les cas considérés sur la figure 3.26 (c). Elle est d'ordre 1 pour les valeurs de k considérées. Elle a les symétries attendues : pour un profil donné, on a $\omega(k) = -\omega(-k)$, et que pour les deux zones intermédiaires, on a des comportements inversés : $\omega(\bar{V}) = -\omega(-\bar{V})$. Leur comportement qualitatif ne change pas ou peu avec les profils : les maxima se trouvent au même endroit. Les valeurs de ω pour $\sigma(k) > 0$ sont de l'ordre de 0.1 dans la zone intermédiaire à 0.2 dans la zone turbulente. Elle sont du même ordre de grandeur que les fréquences de battement du mode de Fourier du mode se développant dans la DNS, comprise entre 0.6 et 0.3 (Fig. 3.13 (a)). Le comportement de la pulsation nous permet d'en déduire le comportement de la vitesse de groupe $c_x = d\omega/dk_x$.

On examine quantitativement la vitesse de groupe c_x. Les résultats pour les trois profils se trouvent sur la figure 3.26 (d). La vitesse de groupe a la symétrie $c_x(k) = c_x(-k)$, et que l'on a de manière intuitive $c_x(\bar{V}) = -c_x(-\bar{V})$. On se place dans le plan complexe pour déterminer si l'instabilité est convective ou absolue. On calcule $\sigma(k_i, k_r)$ (Fig. 3.27 (a,c) en lignes de niveaux) et la norme de la vitesse de groupe $\sqrt{(d\omega/dk_r)^2 + (d\omega/dk_r)^2}$ (Fig. 3.27 (b,d) en niveaux de couleur). Selon les critères classiques, l'instabilité est absolue si $\sigma > 0$ au point col de la relation de dispersion [46, 47]. On détermine la position de ces points cols à l'aide du croisement des iso-σ, lorsque σ est décru, ou de manière équivalente des 0 de la vitesse de groupe. On pose σ_0 le taux de croissance à $c_x = 0$. On trouve alors que le premier cas $b = 0$, a $\sigma_m > 0$ et $\sigma_0 < 0$ (Fig. 3.27 (a,b)), il est convectivement instable, tandis que dans le second cas, avec un contre écoulement, on a $\sigma_m > \sigma_0 > 0$ (Fig. 3.27 (c,d)) : il est absolument instable. Dans ce cas, un paquet d'onde peut croître sur place, il n'est pas advecté par l'écoulement. Le nombre d'onde k correspondant au point col varie peu d'un cas à un autre, il en est de même pour les valeurs de ω correspondante. Finalement, le signe de c_x (à $\sigma_m > 0$) pour le cas convectivement instable est donné assez simplement par le signe de v. Appliquer la symétrie $y \leftrightarrow -y$ $\bar{V} \leftrightarrow -\bar{V}$ et changer de zone intermédiaire revient à changer le signe de la vitesse de groupe. on trouve de plus que $c_x \sim \int \mathrm{d}y\, \bar{V}$ dans cette gamme : le paquet d'onde est advecté à la vitesse moyennée sur l'épaisseur.

On examine la forme des modes propres normalisés. Les modes les plus instables sont tracés sur la figure 3.28 (a) en fonction de y. Les profils u_x correspondants sont donnés sur la figure 3.28 (b), il s'agit de la dérivée en y des modes propres u_y, $u_x \propto i\partial_y u_y/k$. Les paramètres choisis sont ceux du paragraphe précédent, et permettent d'examiner le cas sans et avec contre-écoulement. Dans les deux cas, on a une partie de grande amplitude, et une partie de plus faible amplitude, déphasés de $\pi/2$. On fixe donc la partie dominante comme la partie réelle de u_y et l'autre comme sa partie imaginaire (vice versa pour u_x). On s'intéresse quasi exclusivement à la partie dominante. Pour u_y elle est décrite en bonne approximation par la première fonction de la base $\{g_n\}$, tandis que pour u_x, elle est comme

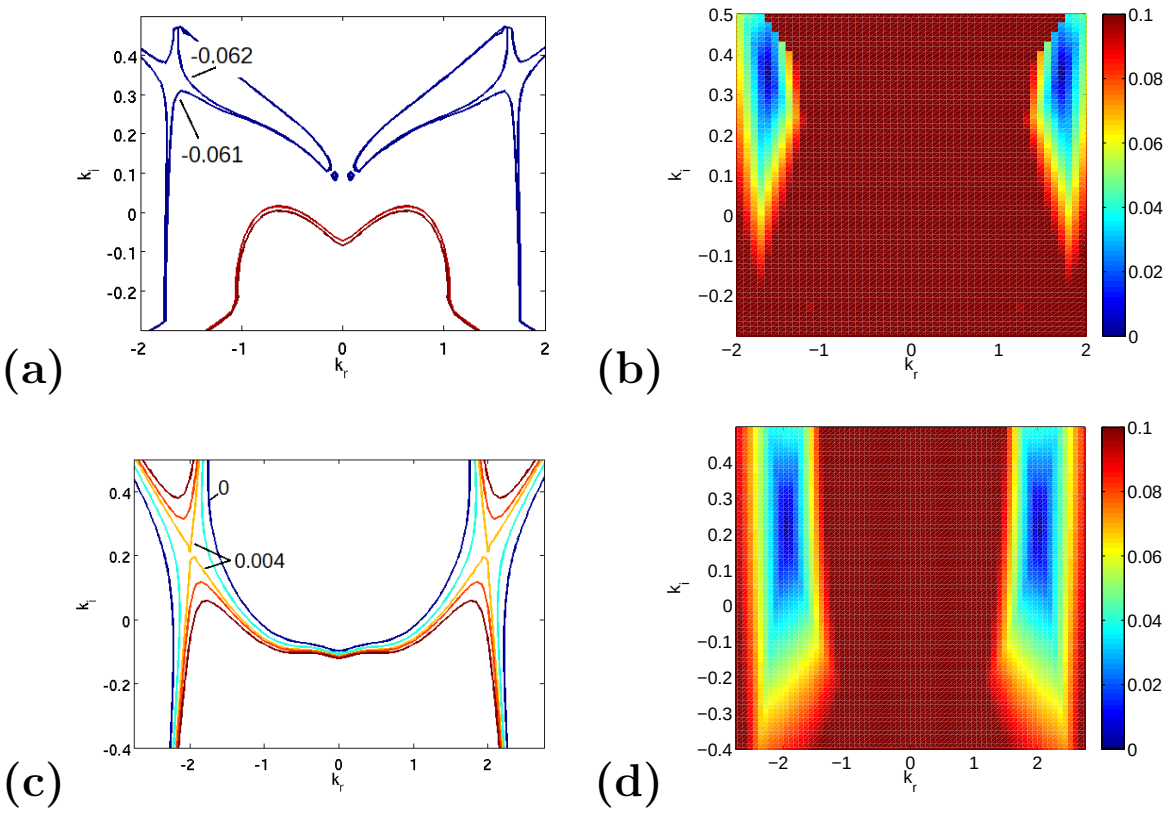


FIGURE 3.27 – Pour $a = 0.7$, $d = 3.9$, $b = 0$ (sans contre-écoulement) : (a) : lignes de niveaux du taux de croissance dans le plan complexe k_i, k_r, (b) : dérivée de ω par rapport à k dans le plan complexe k_i, k_r. Pour $a = 0.7$, $d = 3.9$, $b = 0.2$, $d' = 3$ (avec contre-écoulement) : (c) : lignes de niveaux du taux de croissance dans le plan complexe k_i, k_r, (d) : dérivée de ω par rapport à k dans le plan complexe k_i, k_r.

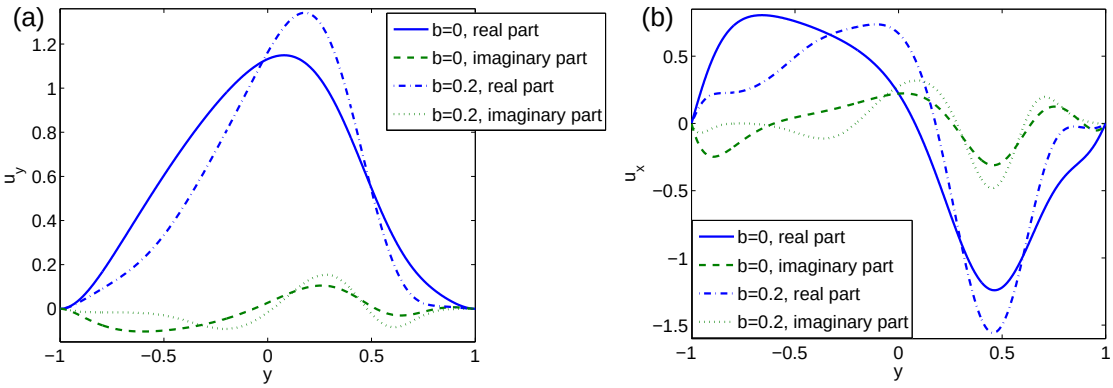


FIGURE 3.28 – (a) : Mode propre instable (partie réelle et imaginaire) for $R = 300$, $d = 3.9$, $a = 0.7$, $b = 0$. (b) : Dérivée en y du mode propre instable (correspondant à v_x

attendu décrit en bonne approximation par sa dérivée, la deuxième fonction de la base $\{f_n\}$. C'est en relativement bon accord avec le modèle simple proposé pour l'étude phénoménologique (Eq. (3.16), Eq. (3.17), Eq. (3.18)). L'asymétrie entre le haut et le bas est une conséquence de l'asymétrie du profil, le maximum est du coté du maximum de $\bar{V}_x$. Ce fait est plus marqué dans le cas avec contre écoulement, et il est plus marqué sur u_x que u_y. Le contre écoulement a peu d'effet sur les modes propres : ils sont simplement un peu plus raides et plus centrés dans le haut de l'écoulement. La comparaison avec les modes de Fourier extrait de la DNS est bonne, dans les deux cas, le mode se développant a la même forme que $\bar{V}_x$. La comparaison avec la partie déphasée tient relativement bien. L'application de la symétrie $y \leftrightarrow -y$, $\bar{V} \leftrightarrow -\bar{V}$ conduit à appliquer $y \leftrightarrow -y$ sur les modes propres. Cela est tout à fait intuitif.

Pour conclure cette sous-section, on donne rapidement les valeurs de σ correspondant à un autre cas typique, correspondant au profil laminaire. Cela correspond à choisir $a \simeq b \simeq 0.1$ et une relativement faible valeur de $d \lesssim 2$. Ces profils sont totalement stables, on trouve un $\sigma_m = -0.008$ à $R = 1900$, ce qui est totalement en dehors de la zone d'intérêt. Dans la zone d'intérêt, σ_m ne dépasse pas -0.02 à $R = 600$. Cette région de l'écoulement est linéairement stable, ce qui était parfaitement attendu étant donné que l'instabilité est du type Kelvin–Helmholtz et que l'on est au milieu de la gamme de paramètres stables à $1/R = 0$ (figure 3.8).

Analyse de l'effet de la tension maintenant l'écoulement de fond

On réalise l'analyse de stabilité linéaire avec et sans f pour comparaison. On s'attend à ce que la contribution à l'advection soit faible car $f \ll (y + \bar{V}_x)k_x$, Par contre, la contribution au taux de croissance peut être remarquable. De plus, l'effet de f sera d'autant plus important que R sera petit.

On résout le problème aux valeurs propres (2.5) issu de l'Équation (3.14) sur une large gamme de paramètres (nombre de Reynolds, amplitude du contre-écoulement) en faisant varier l'amplitude du masque, et on examine l'effet sur le taux de croissance et la vitesse de groupe.

De manière systématique, sauf pour les valeurs de masquage trop faibles $m \lesssim 0.04$ autorisant des valeurs très importantes de f dans un demi espace sans contre-écoulement, la force f ne modifie pas la forme de la relation de dispersion (Fig. 3.29 (a,b)) par rapport à un cas où $f = 0$. Elle modifie très peu la vitesse de groupe (Fig. 3.29 (b)). Elle induit un décalage dépendant de m sur $\sigma(k)$. La force $f(y)$ peut avoir un effet stabilisateur ou destabilisateur selon les valeurs de paramètres (Fig. 3.29). Ainsi, dans ce cas, le cas avec contre-écoulement est un peu stabilisé tandis que celui sans contre-écoulement est un peu destabilisé. Cette modification dépend légèrement de la largeur du masque (d'autant plus grande que m est grand). Le nombre d'onde le plus instable n'est pas ou peux changé, et la forme de la relation dispersion dans le plan complexe n'est pas modifiée. Ainsi, le nombre d'onde le plus instable avec contre-écoulement est toujours plus important que sans contre-écoulement

Si on suit le taux de croissance maximum en fonction du nombre de Reynolds, dans un cas avec (Fig. 3.29 (c)) ou sans contre-écoulement (Fig. 3.29 (d)). On note que dans les deux cas, la modification de σ est additive et qu'elle dépend peu du nombre de Reynolds. Elle devient de moins en moins importante à mesure que σ_m croît avec R. On remarque qu'aucun changement qualitatif au comportement de σ n'est apporté par cette force. Le décalage du seuil de stabilité en nombre de Reynolds reste suffisamment faible pour qu'il n'y ai pas de modification dans la gamme $[R_\mathrm{g}; R_\mathrm{t}]$

En ce qui concerne la viscositéturbulente, le régime d'approximation choisit s'adapte assez mal

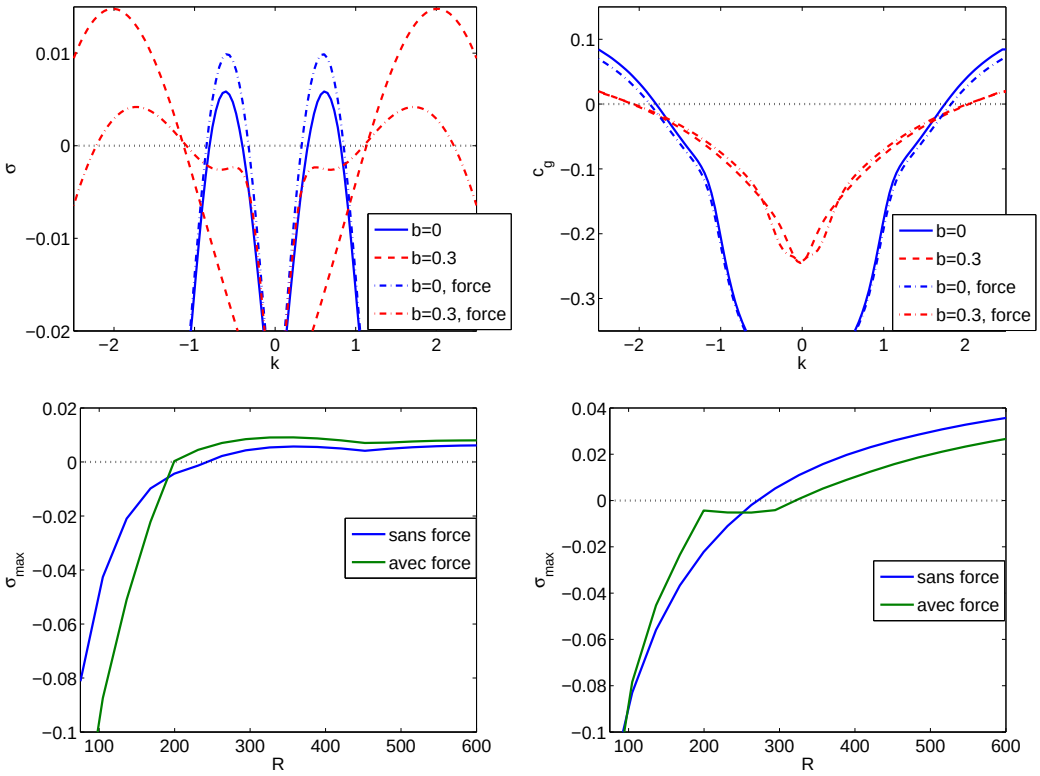


FIGURE 3.29 – Pour le régime de paramètres $a = 0.7$, $d = 3.9$, $d' = 3$ à $R = 350$, (a) taux de croissance en fonction de k_x, (b) vitesse de groupe en fonction de k_x. (c) taux de croissance maximum σ_m en fonction du nombre de Reynolds R pour un profil sans contre-écoulement (d) taux de croissance maximum σ_m en fonction du nombre de Reynolds R pour un profil avec contre-écoulement ($b = 0.3$). Valeur de masquage $m = 0.07$.

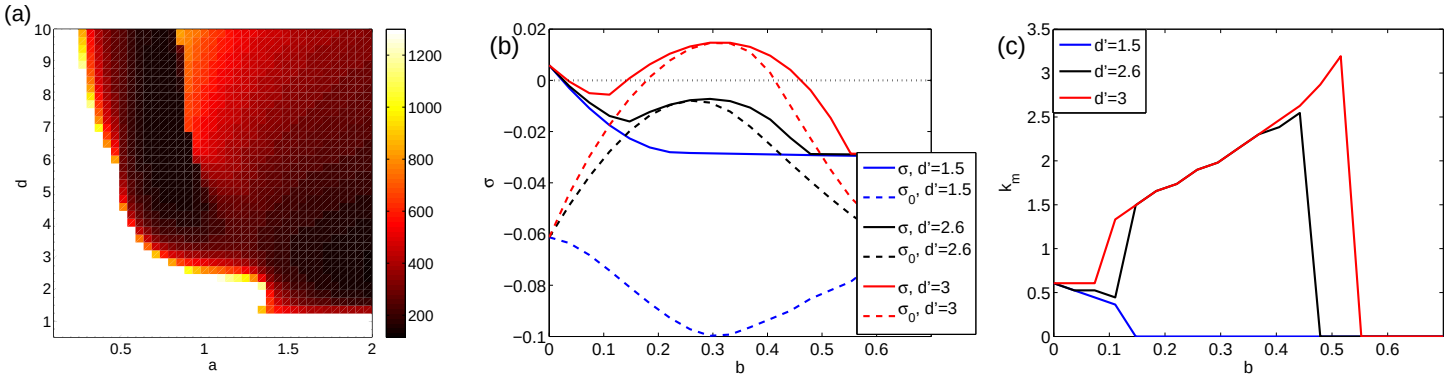


FIGURE 3.30 – (a) Niveaux de couleur de R_s en fonction de a et d. (b) taux de croissance maximum et taux de croissance au point col en fonction de b, pour $a = 0.7$, $d = 3.9$, $d' = 1.5$, $d' = 2.6$ et $d' = 3$ à $R = 350$.(c) : Nombre d'onde le plus instable en fonction de b pour plusieurs d', $R = 350$, $a = 0.7$, $d = 3.9$. Si $\sigma(k)$ n'a pas de maximum, k_m vaut zéro.

au système. En particulier parce que l'approximation v' petit devant 1 est mal vérifiée dans le cas du profil 2D, il y a une forte différence entre $1 + v'$ entre $+1$ et -1, en particulier dans la zone intermédiaire (Fig. 3.9 (c)). De plus cette quantité s'annule en plusieurs points où les modes instables sont non-négligeables, rendant la viscosité turbulente très irrégulière. On peut utiliser la viscosité turbulente correspondant à la moyenne en y [68] et considérer que la modulation en y est maintenue par le lift-up [101]. Cependant, celà s'adapte mal à l'approximation confinement/2D

L'absence d'effet qualitatif des tensions de Reynolds sur le résultat de l'analyse linéaire justifie qu'on les néglige dans l'analyse. Ainsi, le cas simplifié d'Orr–Sommerfeld–Squire usuel est un bon modèle pour étudier la formation de vorticité transverse dans le type de couches de mélanges qu'on trouve dans la DNS

Étude paramétrique

L'étude paramétrique a pour but d'examiner le comportement du modèle lorsque les paramètres a, b, d, d' ainsi que le nombre de Reynolds R sont changés. Les variations relatives de a et b permettent d'examiner plus en détail chaque zone de l'écoulement, tandis que celles de d, d', de parcourir la gamme d'inverses d'épaisseur de couche de mélange trouvée dans l'écoulement. On examinera d'abord systématiquement le comportement d'un profil intermédiaire, en changeant a et d'. On examine ensuite de manière systématique l'effet du contre-écoulement sur les vecteurs d'ondes ainsi que sur le caractère convectif ou absolu de l'instabilité.

On reprend la définition du nombre de Reynolds seuil R_s. Lorsque l'on change les caractéristiques de l'écoulement de fond, R_s varie en conséquence. Ainsi, R_s augmente lorsqu'on décroît l'amplitude a ou l'inverse de l'épaisseur de la couche de mélange d : il est plus difficile de déstabiliser l'écoulement. Le nombre de Reynolds seuil R_s diverge pour les plus faibles valeurs de a et d. La figure 3.30 (a) contient de manière systématique cette information : on y trace les niveaux de couleur de R_s en fonction de a et d. La zone où $R_s > 1000$ est considérée comme stable quelque soit R. Cela est raisonnable étant donnée la croissance extrêmement rapide de R_s, que l'on peut assimiler à une divergence, lorsqu'on approche cette zone de l'espace des paramètres. On compare ce résultat à celui issu du test des critères

de stabilité inviscide de Rayleigh et de Fjørtoft (figure 3.8). La surface de l'espace des paramètres où l'instabilité n'est pas interdite contient strictement celle où elle se produit. Cela vient confirmer le caractère de Kelvin–Helmholtz de l'instabilité contenue dans le modèle.

On peut discuter du comportement des profils moyens (figure 2.13, 2.14, 2.15.) ou des modes de Fourier grande longueur d'onde en $x - z$ (Eq. (3.1), Fig. 3.1 (a)) dans le cadre de ce modèle. Dans les zones intermédiaires, ils correspondent à de faible valeurs des paramètres a et d. On peut en extraire des valeur de $a \lesssim 0.3$ et $d \lesssim 2.5$. Ces valeurs tombent dans la gamme de paramètre stables (figure 3.8, 3.30 (a)). Cela montre que le phénomène observé dans les DNS n'est pas une instabilité de profils moyens en espace. Cette grande stabilité est un effet du profil de base laminaire : sans celui ci, les profils contenus dans l'équation (3.1), ou extraits des DNS (figures 2.13, 2.14, 2.15 et 3.1 (a)) seraient instables pour toute amplitude a. Il suffirait qu'un point d'inflexion existe, ce qui est le cas pour $d \gtrsim 0.5$.

Les valeurs de l'inverse de l'épaisseur de couche de cisaillement trouvées dans l'écoulement sont approximativement bornées par $d \lesssim 4.5$ (figure 3.5 (b)). Étant donné cette borne supérieure, l'amplitude a dans la zone intermédiaire doit être suffisamment importante pour que l'instabilité puisse se produire. On trouve une borne inférieure $a \gtrsim 0.5$. La gamme de valeurs devant ainsi être prise par a correspond au maximum des valeurs trouvées dans l'écoulement (figure 3.5 (a)). Comme il a été discuté dans la section (§ 3.1.4) précédente, ces valeurs ne se trouvent que dans le coeur des *streaks* de vitesse longitudinaux (Fig. 3.2 (a), 3.3, 3.5 (a)).

On passe maintenant à l'étude systématique de l'effet du contre-écoulement. Il est contrôlé par l'amplitude b et l'inverse d'épaisseur de couche de cisaillement d'. Étant donné l'étude de l'écoulement dans le coeur de la zone intermédiaire, on choisit des valeurs raisonnables de $a = 0.7$ et $d = 3.9$. L'étude se fait d'abord à $R = 350$ sur trois exemples. On suit le comportement du taux de croissance maximum σ_m ainsi que du taux de croissance à $c_x = 0$, σ_0 en fonction de l'amplitude du contre écoulement, pour deux valeurs d'épaisseurs de couche de cisaillement d'. Comme noté dans la section précédente, le comportement des vitesses de groupe ou des modes propres avec b ou d, d' varie peu (Fig. 3.26 (d), 3.28).

Le contre-écoulement restabilise le profil, pour $b \gtrsim 0.05$ (figure 3.30 (b)). Le profil peut être à nouveau déstabilisé si $b \gtrsim 0.15$. Cela est uniquement valable dans le cas où l'épaisseur d' est suffisamment importante (exemple $d' = 2.6$). Le taux de croissance maximum σ_m augmente avec b, et on voit apparaître une gamme de valeurs de b, strictement incluse dans la gamme $\sigma_m > 0$, pour laquelle le taux de croissance σ_0 est positif, *i.e.* pour laquelle l'écoulement est absolument instable : on a un passage de convectif à absolu. On trouve des taux de croissance du même ordre de grandeur dans les cas d'instabilité convective ou absolue, pour $b \lesssim 0.05$ ou $b \gtrsim 0.2$. Pour les plus grandes valeurs de b, le profil est restabilisé.

Comme noté dans la sous-section précédente, le nombre d'onde optimal k_m augmente avec l'amplitude du contre écoulement b. On suit son comportement avec b pour trois valeurs de d'. Les résultats sont résumés sur la figure 3.30 (c). On voit apparaître deux régimes. Le premier, pour les plus faibles valeurs de b, pour lequel le nombre d'onde k_m est quasiment constant et égal à 0.5, puis le second pour les plus grandes valeurs de b où k_m augmente continuement avec b après une augmentation brutale. C'est une conséquence du fait que $\sigma(k)$ est très plat lorsque $\sigma_m < 0$. Cette variation brutale se produit dans la gamme de b pour laquelle l'écoulement est stable et ne pose pas de problèmes outre mesure. Pour les plus petites valeurs de d', l'écoulement est complètement restabilisé pour les plus grandes

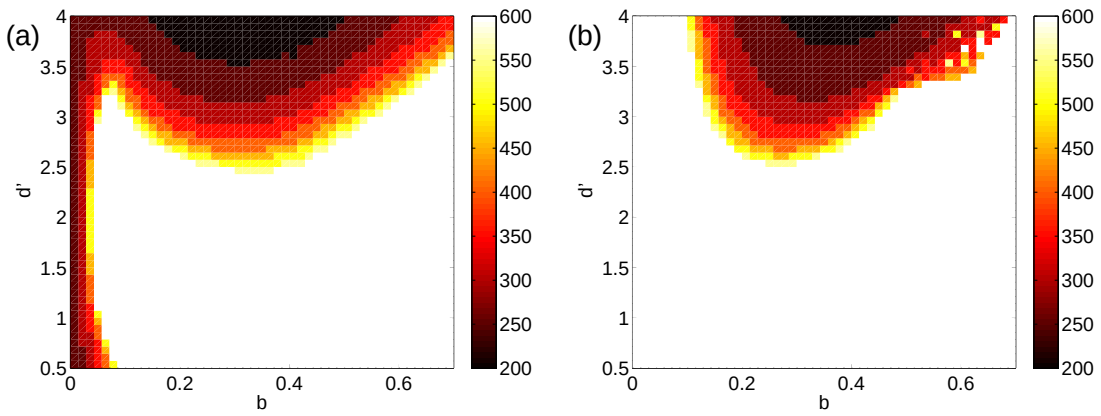


FIGURE 3.31 – Analyse de stabilité pour plusieurs b et d', à $a = 0.7$, $d = 3.9$, pour plusieurs nombres de Reynolds dans la gamme d'interêt, $R \in [200 : 500]$. (a) Région de l'espace des paramètres pour laquelle l'écoulement est instable, (b) Région de l'espace des paramètres pour laquelle l'écoulement est absolument instable.

valeurs de b, le taux de croissance maximum σ_m n'est alors plus défini. Les valeurs de λ_m correspondantes, avec un minimum autour de ~ 10 puis variant continument entre ~ 4 (intermédiaire) et ~ 2 (turbulent) se comparent bien aux longueurs de corrélations longitudinales (Fig. 3.19 (d)) dans les zones intermédiaires et turbulentes valant respectivement 1.5 et 1. Ces longueurs sont reduites d'au moins un facteur deux par rapport à la longueur d'onde à cause de la procédure de seuillage donnant ω_z^{th}. La tendance de réduction de la longueur d'onde en entrant dans la zone turbulente se retrouve bien dans le modèle.

On passe ensuite à une étude systématique des taux de croissance σ_m et σ_0, pour suivre le caractère convectif et absolu de l'écoulement en fonction des paramètres. On prend maintenant le nombre de Reynolds comme paramètre de contrôle supplémentaire : on le fera varier dans la plage qui nous intéresse, où l'on trouve des bandes (§ 4.3.3), des *spots* (§ 6) ou de la turbulence entretenue [21]. Les amplitudes et épaisseurs de couches de cisaillement ont les mêmes valeurs que précédemment, $a = 0.7$, $d = 3.9$. A chaque nombre de Reynolds, $R \in [200; 550]$ variant de 50 en 50, on calcule le signe des taux de croissance σ_m et σ_0. Ainsi, on détermine la zone de l'espace des paramètres (b, d') (Fig. 3.31) dans laquelle l'écoulement est instable (Fig. 3.31(a)) et absolument instable (Fig. 3.31(b)) pour chaque nombre de Reynolds. Les situations $a \simeq b \simeq 0.7$ sont peu probables et ont moins d'intérêt. La partie en blanc correspond à la stabilité. Pour les valeurs les plus faibles de d', $d' \lesssim 3.5$, le contre écoulement stabilise l'écoulement (Fig. 3.31 (a)). Le taux de croissance s'annule et devient négatif si la ligne $b \simeq 0.05$ est passé. Pour des valeurs de d' supérieures, la restabilisation par le contre-écoulement est perdue. Pour des valeurs plus importantes de b, l'écoulement est déstabilisé à nouveau. La valeur critique décroît quand d' croît. L'écoulement peut devenir absolument instable si $b \gtrsim 0.15$ et $d' \gtrsim 2.5$ (Fig. 3.31(b)). Décroître le nombre de Reynolds réduit la zone de l'espace des paramètres pour laquelle on a instabilité et instabilité absolue. L'instabilité convective disparaît si $R \lesssim 200$, l'écoulement n'est plus instable sans contre écoulement. L'instabilité absolue se maintient jusqu'à $R \lesssim 150$, dans une zone de l'espace des paramètres pour laquelle l'amplitude a et l'inverse de l'épaisseur de la couche de cisaillement d sont relativement importants.

Pour une valeur donnée de l'amplitude a, il y a une valeur minimale d'amplitude de contre

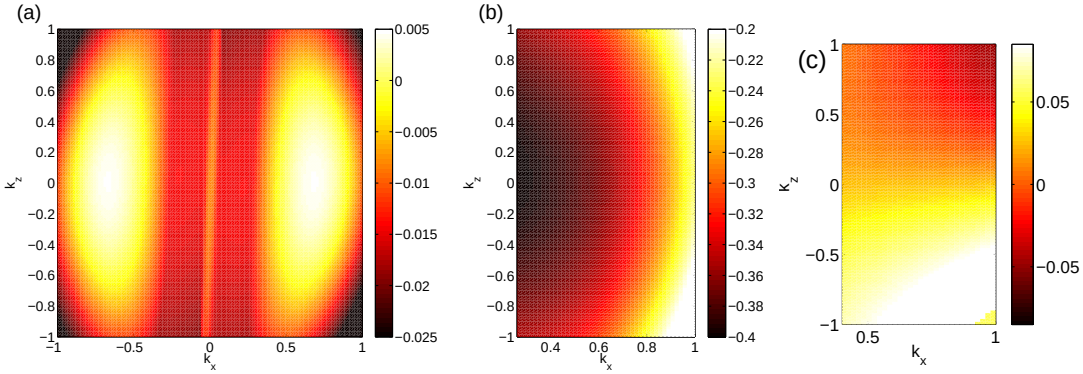


FIGURE 3.32 – Pour un régime de paramêtres ($a_x = 0.7$, $a_z = 0.06$, $s_x = -0.6$, $s_z = -0.1$, $d_x = 3.9$, $d_z = 1$, $R = 300$) : (a) Taux de croissance σ en fonction des nombres d'onde k_x, k_z. (b) vitesse de groupe c_x en fonction des nombres d'onde k_x etk_z. (c) : vitesse de groupe c_z en fonction de k_x et k_z.

écoulement b, dépendant faiblement de R, pour laquelle une instabilité absolue peut se produire. À cause de l'effet stabilisateur de l'écoulement de base laminaire, cette relation ne peut pas s'exprimer comme un ratio a/b , mais elle reste équivalente au ratio minimum pour lequel une instabilité absolue peut se produire (voir Huerre [46, 47])

3.4.3 Advection transverse

Comme pour le cas de l'advection longitudinale, on montre d'abord un cas typique concentré sur le comportement du taux de croissance et des vitesses de groupes longitudinales et transverses en fonction des nombres d'onde. Le problème linéarisé (2.5) découle des équations (2.6) et (2.7) (pp. 19). On fait ensuite une étude paramétrique des profils $\bar{V}_z$ pour trois types de profils $\bar{V}_x$ (Eq. (3.2)) représentants les deux zones intermédiaires et la zone turbulente.

Généralités

On choisit des valeurs de paramètres typiques d'une zone intermédiaire, soit $a = 0.7$, $d = 3.9$, $b = 0$: on ne prend pas de contre écoulement. Son effet sera examiné dans la sous-section suivante. Ces paramètres sont motivés par les valeurs extraites des DNS et les résultats de l'étude de stabilité à une seule composante. Comme annoncé, on choisit des valeurs de paramètres pour $\bar{V}_z$ tirées des profils moyens : on prend $a_z = 0.08$ et $d_z = 1.8$. On calcule le taux de croissance et les vitesses de groupe pour ces valeurs de paramètre. Le mode le plus instable est un mode propre de l'équation d'Orr-Sommerfeld, l'étude de l'équation de Squire n'est pas nécessaire dans ce cas : il n'y a pas d'effet tri-dimensionnel non trivial à l'ordre linéaire. Le cas est non trivial, en effet, comme il n'y pas strictement $\bar{V}_z \propto \bar{V}_x$ et ne peut pas se ramener à un cas purement bidimensionnel.

On trace les niveaux de couleur de σ sur la figure 3.32. La gamme de valeurs de vecteur d'onde k_x, k_z pour lesquels l'écoulement est instable apparaît en couleurs plus claires sur la figure 3.32 (a). Le long de l'axe $k_z = 0$, on retrouve le comportement à une composante. L'écoulement est instable pour la gamme $-0.5 \lesssim k_z \lesssim 0.5$ de nombre d'onde : la viscosité stabilise l'écoulement pour les nombres d'onde les plus grands. L'écoulement de fond transverse, bien qu'instable isolément (*i.e.* sans $\bar{V}_x$ et

surtout $y\vec{e}_x$), n'arrive pas à déstabiliser l'écoulement. Comme on l'a décrit précédemment, c'est un effet de l'écoulement de base laminaire. On peut le voir sur la figure 3.26 (b). Changer la valeur de a_z a peu d'effet sur le comportement de σ en fonction de R, en particulier, R_s est peu modifié par l'écoulement transverse.

On détaille les symétries trouvées dans le sectre. Le taux de croissance est invariant par la transformation $\bar{V}_x \leftrightarrow -\bar{V}_x$, ainsi que par $\bar{V}_z \leftrightarrow -\bar{V}_z$, $k_z \leftrightarrow -k_z$. Les vitesses de groupe ont la symétrie mise en évidence dans la section précédente. L'influence principale de $\bar{V}_x$ peut se comprendre à cause de sa plus grande amplitude. En augmentant a_z, on fait apparaître de plus en plus clairement le décalage de l'axe de symétrie du spectre (figure 3.32 (a)). Ce décalage est plus clair dans les coins, l'axe de symétrie suit la relation $k_z = 0.03k_x$ pour cette valeur de a_z.

On trace les niveaux de couleur des vitesses de groupe c_x et c_z sur les figures (respectivement) 3.32 (b) et (c). L'écoulement transverse a un faible effet sur la vitesse de groupe c_x : son comportement change peu du cas à une seule composante (figure 3.26 (d)). La vitesse de groupe c_z varie entre -0.1 et 0.1. La plupart des valeurs correspondent à des nombres d'onde stables, seules celles correspondant à des nombres d'onde instables sont pertinentes. On trouve alors dans ce cas des valeurs de vitesse de groupe autour de $c_z \sim 0.03$. On explore dans la sous-section suivante la relation systématique entre l'écoulement transverse et la vitesse de groupe c_z.

En conclusion de ce cas, on peut noter que les effets tridimensionnels non triviaux sont absents : l'écoulement transverse modifie la vitesse de groupe et modifie peu le taux de croissance de l'instabilité.

Étude paramétrique

On détaille dans cette sous section le comportement systématique de la vitesse de groupe c_z, pour les nombres d'onde le plus instable, en fonction des paramètres de l'écoulement de fond transverse. On varie les amplitudes a_z et b_z de ces écoulements entre 0 et 0.07, ces valeurs permettent de tester la modulation (Eq. (3.2)) de la composante transverse de l'écoulement de fond (figure 3.4 (b)). On choisit dans trois cas tests typiques en termes d'écoulement longitudinal, qui correspondent à l'écoulement longitudinal dans les deux zones intermédiaires et dans la zone turbulente.

Les niveaux de couleur de la vitesse de groupe des vecteurs d'onde les plus instables dans ces trois cas sont tracés en fonction de a_z et b_z dans la figure 3.33. il apparaît une relation entre c_z et $\int \mathrm{d}y\, \bar{V}_z \simeq -0.25(a_z - b_z)$. Cependant, on trouve un effet claire de $\bar{V}_x$: il vient dissymétriser la relation $c_z(a_z, b_z)$. Dans les deux premiers cas, le poids le plus important est donné à l'écoulement transverse présent dans le même demi écoulement que $\bar{V}_x$ (figure 3.33 (a,b)). Dans le cas avec contre écoulement, le poids est à nouveau donné à la partie écoulement de base, même si la symétrie est partiellement recouvrée.

De manière systématique, on voit que l'écoulement de fond n'a d'effet que sur la vitesse de groupe. Si les maxima de $\bar{V}_x$ et $\bar{V}_z$ sont dans la même moitié de l'écoulement, le taux de croissance maximum et la région instable du plan (k_x, k_z) s'élargit légèrement.

3.4.4 Analyse globale

On considère le problème global pour obtenir une information qualitative sur la forme du spectre et des modes instables sans chercher à réaliser une analyse systématique.

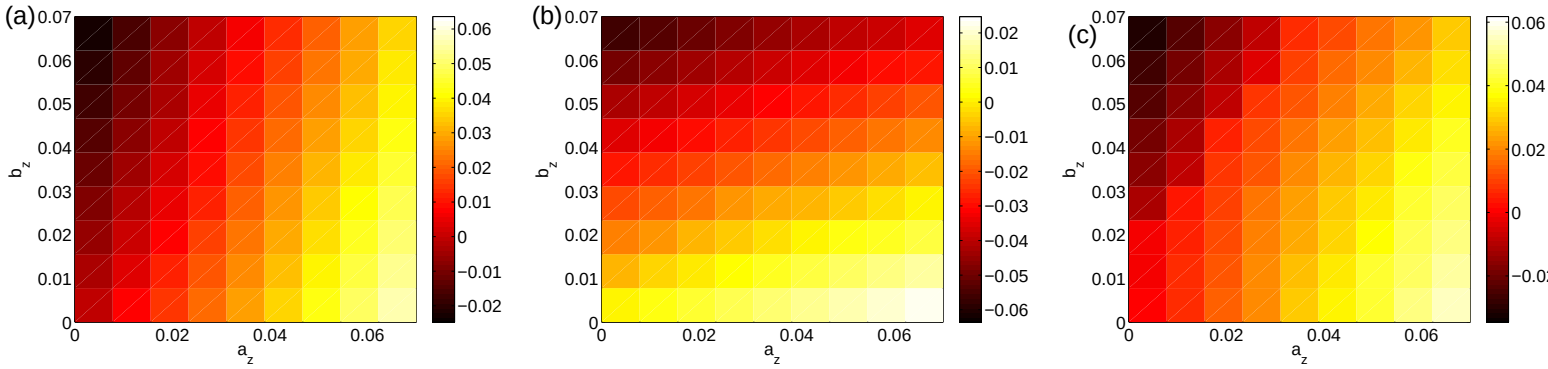


FIGURE 3.33 – Niveaux de couleur de vitesse de groupe, (a) : $c_z(\sigma_m)$ en fonction de a_z et b_z, $R = 300$ pour $a_x = 0.7$, $b_x = 0$, $d_x = 3.9$, $d_z = 1.8$. (b) : $c_z(\sigma_m)$ en fonction de a_z et b_z à $R = 300$ pour $a_x = 0$, $b_x = 0.7$, $d_x = 3.9$, $d_z = 1.8$. (c) : $c_z(\sigma_m)$ en fonction de a_z et b_z, $R = 300$, $a_x = 0.7$, $b_x = 0.35$, $d_x = 3.9$, $d_z = 1.8$.

Procédure

Le problème aux valeurs propres (2.5) découle de l'équation (2.9) (pp. 20). Le mode propre correspond à la fonction de courant ϕ, qui est reliée à la composante transverse du champ de vitesse par $u_y = -\partial_x \phi$. La dépendance longitudinale est donnée par l'équation (3.1) (pp. 40) en remplaçant les profils $v^{\mathrm{p,n}}$ par des profils d'écoulement de fond donnés par $h_{1,2}$ (Eq. (3.3), pp. 45). On choisit des valeurs pour a, b, d, d' en accord avec les échantillonnages de DNS et guidés par les résultats de l'analyse locale. On choisit pour ces profils les valeurs $a = 0.8$ et $b = 0.4$. La première fonction de la base $\{g_n\}$, $g_0 = (\sqrt{315}/16)(1 - y^2)^2$ est utilisée pour la composante $\bar{V}_y$ de l'écoulement de fond. Cela décrit assez bien le comportement de $\bar{V}_y$ (Fig. 3.12 (c)). Son amplitude et sa dépendance longitudinale sont choisies de manière à vérifier au mieux l'incompressibilité : $\partial_x \bar{V}_x + \partial_y \bar{V}_y = 0$. Cela permet de modéliser le comportement non parallèle de l'écoulement. Des niveaux de couleur de notre exemple de $(\bar{V}_x, \bar{V}_y)$ sont tracés sur la figure 3.34 (a,b).

Résultat

L'analyse est réalisée pour notre exemple au nombre de Reynolds $R = 350$. On trace les parties réelles et imaginaire du mode le plus instables sur la figure 3.34 (c,d). La forme des modes instables dépend relativement peu du nombre de Reynolds R. Les parties réelle et imaginaire ont la même enveloppe, leur modulation est décalée : un extremum de l'un correspond à un zéro de l'autre. Le mode fait apparaître deux zones particulières : l'une avec une modulation longitudinale rapide et une faible amplitude, l'autre avec une modulation plus lente et une grande amplitude. La partie à faible amplitude correspond à la zone sans contre-écoulement : dans le cadre de l'analyse locale, cette région est convectivement instable. La région où l'amplitude du mode est importante correspond à la région absolument instable où il y a un fort contre-écoulement.

On discute ensuite la forme du spectre, toujours calculé sur le même exemple (figure 3.35). Les taux de croissance des modes les plus instables sont du même ordre de grandeur que les taux de croissance maximum trouvés dans l'analyse locale. Les pulsations correspondantes sont d'ordre $\omega \sim 0.2$, en accord avec les résultats de l'analyse locale (Fig. 3.26 (c)) et la fréquence de battement des modes de

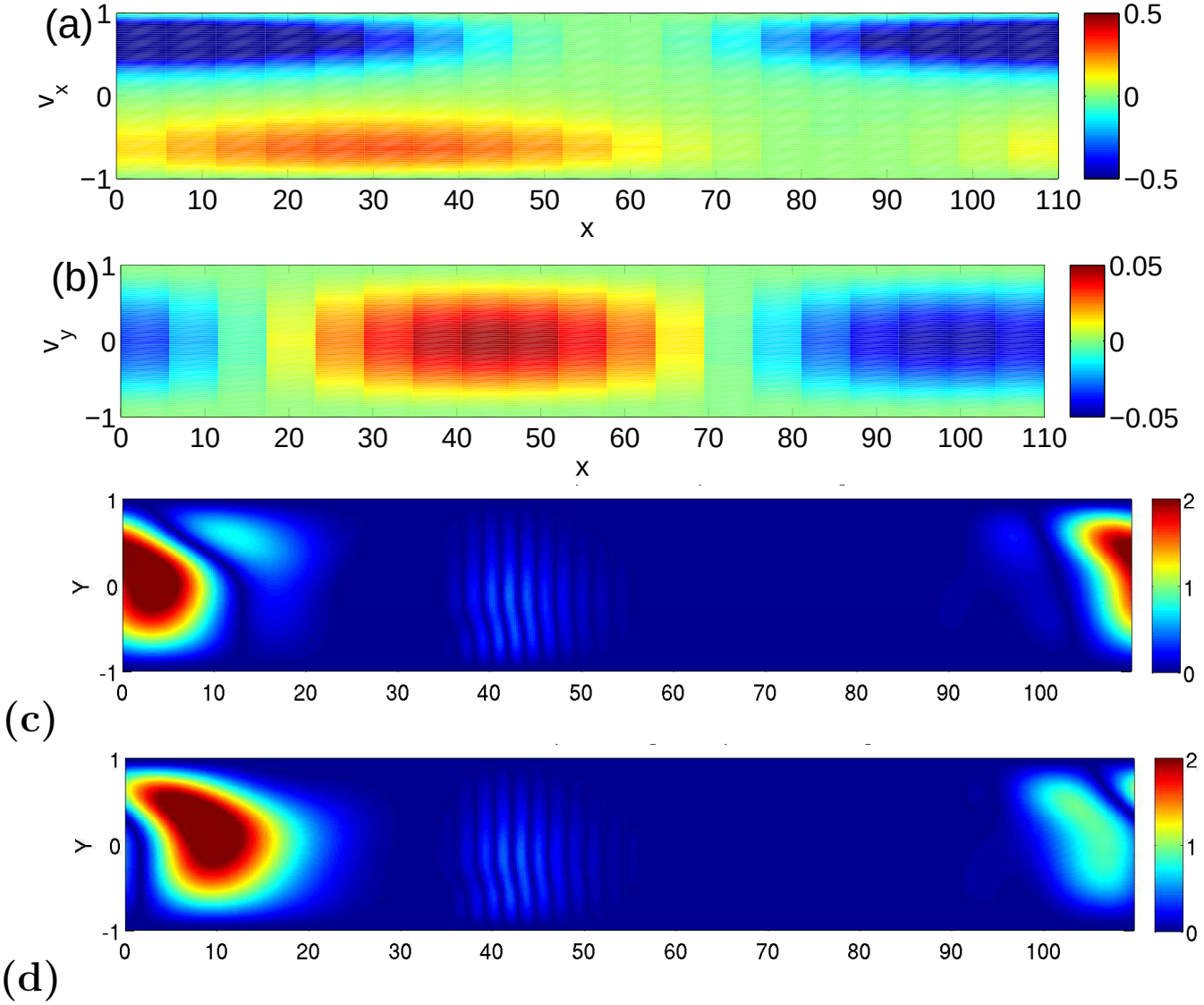


FIGURE 3.34 – (a,b) Écoulement de fond $a = 0.8$, $b = 0.4$, $d = 3.9$, $d' = 3$, $s = \mp 0.6$. (a) : $\bar{V}_x$, (b) : $\bar{V}_y$. Mode le plus instable correspondant à cet écoulement pour $R = 350$: partie réelle (c) et imaginaire (d).

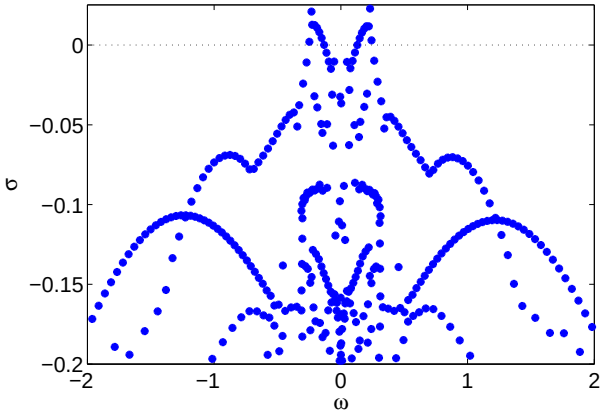


FIGURE 3.35 – Écoulement de fond $a = 0.8$, $b = 0.4$, $d = 3.9$, $d' = 3$, $s = \mp 0.6$. (a) : $\bar{V}_x$, (b) : $\bar{V}_y$. Forme typique du spectre dans le plan $\omega - \sigma$ pour l'exemple choisi, centré sur les modes instables.

Fourier correspondant à la perturbation développée (Fig. 3.13 (a)).

3.4.5 Analyse de Bloch–Floquet

On teste dans ce cas l'effet de la dépendance transverse du champ de vitesse $\bar{V}_x$, pour discuter de la validité de l'hypothèse de confinement en z faite. On choisit une modulation purement sinusoïdale dans la direction $\vec{e}_z$. Des modes propagatifs ont déjà été identifiés dans un système similaire [101], mais n'ont pas étés explorés. On suppose qu'il s'agit du même type de mode, mais on souhaite pousser la comparaison.

On utilise une dépendance transverse combinant les fonctions $h_{1,2}$ (Eq. (3.3), pp. 3.3) pour représenter le comportement vu dans les DNS (figure 3.2 (a)). On utilise une dépendance en z du type de l'équation (3.7). On donne un exemple correspondant à une zone intermédiaire contenant un *streak* $v_x < 0$ pour $y > 0$ sur la figure 3.36 (a). Le problème aux valeurs propres (2.5) découle des équations (2.10), (2.11) et (2.12) (pp. 20).

On donne le taux de croissance en fonction du nombre d'onde pour cet écoulement de fond sur la figure 3.36. Le comportement de σ est raisonnable, mais trop irrégulier pour être juste. Il reste probablement un *bug* dans la détermination du problème linéaire...

3.5 Conclusion

La conclusion de ce chapitre est organisée en deux parties synthétiques. La première consiste en un résumé comparé de l'analyse phénomènologique de la modélisation et de l'analyse du modèle. Chacun des points (mécanisme d'instabilité, échelle et longueur d'onde, vitesse d'advection *etc.*) est repris et remis dans son contexte (zone de l'écoulement *etc.*). On passe ensuite à la discussion proprement dite. On rappelle l'organisation des cohabitations stables ou métastables dans les différents écoulements cisaillés, ainsi que les propositions de cycle dans l'écoulement de Poiseuille dans une conduite. On détaille alors les possibilités d'un tel cycle de maintien de la cohabitation laminaire-turbulente dans

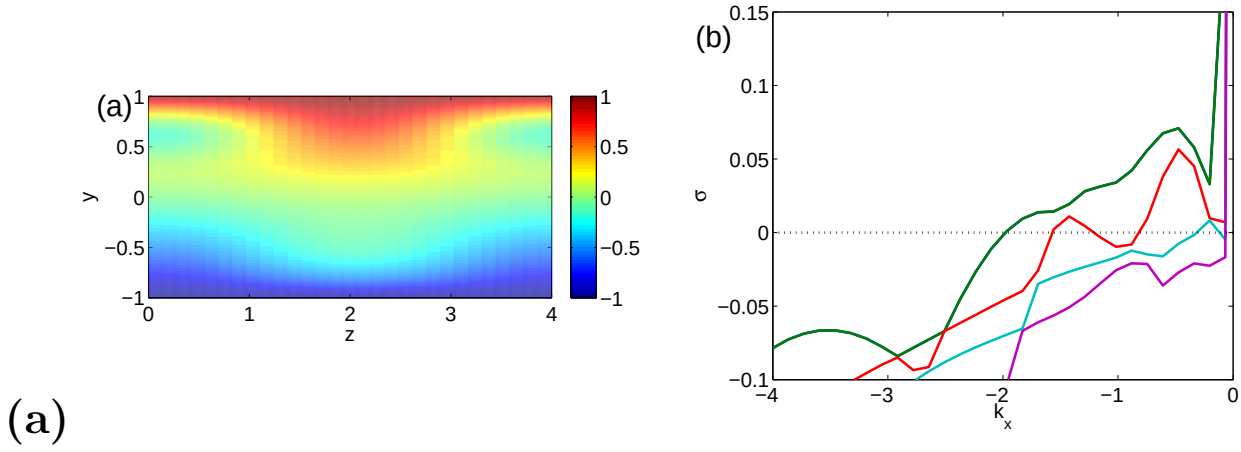


FIGURE 3.36 – (a) : Niveaux de couleurs de l'écoulement de fond $\bar{V}_x + y$ choisi. (b) : taux de croissance en fonction de k_x pour un paramètre de Floquet $\tilde{k}_z = 0$ pour ce choix d'écoulement

l'écoulement de Couette plan. On discute de possibles bases de mécanismes de maintien d'une zone pseudo-laminaire de longueur donnée. On s'attache à mettre en valeur les parties connues et comprises, et celles qui le sont moins.

3.5.1 Résumé comparé : Relation entre modèle et phénoménologie

La description moyenne des bandes, issue de la littérature [6, 96] et rappelée dans le chapitre précédent, sert de point de départ à la description de l'écoulement instantané en espace et quasi-permanent en temps. La turbulence est modulée à grande échelle. Cette modulation peut être recentrée sur la zone intermédiaire, pour mettre en évidence la simplicité de la description de la composante longitudinale du champ de vitesse. On peut extraire de la même manière les composantes transverse et normale à la paroi, l'ensemble contenant la recirculation le long et autour de la bande [6]. On peut passer à l'échelle inférieure. L'écoulement est périodique à l'échelle des *streaks* dans la direction z', parallèle à la bande (notée x' chez Barkley & Tuckerman [5]). Cette image se retrouve dans toutes les visualisations instantanées et peut être décrite simplement à l'aide des *streaks* turbulents et des vortex longitudinaux.

On peut poser cette description de manière plus quantitative. L'analyse des fonctions d'autocorrélation du champ de vitesse fait apparaître la semi-périodicité. Cette analyse sur des champ de vitesse moyennés en temps, sur des durées croissantes met en évidence le caractère semi-permanent de cette description. Les corrélations se réduisent avec la durée de moyennage à cause du chaos local de l'écoulement. Néanmoins, on peut décrire cette partie de l'écoulement, en bonne approximation à l'aide d'un écoulement permanent, périodique de courte longueur d'onde dans la direction parallèle à la bande, et modulée à grande échelle. On parle d'écoulement de fond. La partie longitudinale de l'écoulement de fond et transverse de l'écoulement moyen peut être décrite à l'aide de quelques polynômes satisfaisant les conditions de bord, ou de profils analytiques. Les paramètres intervenants dans la description analytique peuvent être extraits de la DNS et les différents régimes comparés aux différentes zones des bandes, des *spots*, ou dans l'écoulement de Couette plan perturbé par un fil [21]. À l'aide des régimes de paramètre pour chaque composante, on peut montrer qu'on retrouve

quantitativement l'écoulement à grande échelle, de manière cinématique, par simple moyennage sur les structures à petites échelles (*streaks*).

Une fois cette description posée, on peut identifier l'instabilité dans la DNS. Elle se superpose simplement au comportement idéalisé. On propose ici deux exemples, un correspondant au développement de l'instabilité, et un autre à l'instabilité développée. On identifie une instabilité de type Kelvin–Helmholtz de la dépendance en y de v_x. C'est dans ces exemples que l'on voit apparaître de manière qualitative la localisation transverse des perturbations, ainsi que la séparation d'échelle entre l'instabilité et la bande turbulente et mettre en évidence le lien entre instabilité et création de vorticité transverse.

La vorticité transverse nous permet d'abord de faire des mesures de taille caractéristique dans la direction transverse et dans la direction longitudinale. Les fonctions de corrélation dans la direction transverse confirment la localisation de l'instabilité dans les *streaks*, les longueurs de corrélation dans la direction longitudinale mettent en évidence de manière quantitative la séparation d'échelle entre la longueur d'onde de la bande et celle de l'instabilité. Ces particularités permettent de faire des choix de modélisation. D'une part, le confinement de l'instabilité dans les *streaks* turbulents oriente vers un modèle bidimensionnel de couche cisaillée. D'autre part la séparation d'échelles permet de faire une hypothèse de quasi-parallélisme et de pratiquer une étude de stabilité locale. On peut alors tirer des échantillonnages les distributions de paramètres correspondant à chaque zone, et utiliser la description moyenne pour quantifier leur modulation en espace. On peut alors analyser chaque zone à l'aide du régime de paramètre adapté. Pour pratiquer une analyse de stabilité globale, on utilise ces échantillonnages ainsi que la dépendance longitudinale de l'écoulement moyen. Les critères de stabilité linéaire ainsi que le calcul des taux de croissance dans l'analyse linéaire viennent confirmer le caractère de Kelvin–Helmholtz de l'instabilité. Un modèle de tension de Reynolds maintenant l'écoulement de fond montre que l'on peut négliger ce terme dans l'étude de stabilité et tout de même en obtenir une bonne compréhension semi-quantitative. Les profils sont plus stables que si la condition de non-glissement à la paroi est négligée [87]. De plus ils précisent que les régimes de paramètres instables correspondent au coeur des *streaks* turbulents, dans les zones intermédiaires et turbulentes. Pour cette instabilité comme pour d'autres du même type [60, 90], les *streaks* instables correspondent à la fraction des *streaks* les plus intenses, en amplitude de v_x et en cisaillement.

La vorticité transverse permet une mesure de la vitesse d'advection de ces perturbations dans l'écoulement. L'advection apparaît dans les visualisations des champs. On peut ensuite la mesurer *via* une procédure standard. On profite de l'invariance dans la direction parallèle à la bande pour faire une mesure moyenne des composantes transverse et longitudinale de la vitesse d'advection. La composante transverse correspond au cas le plus simple : elle est égale en tous point à la moyenne sur l'épaisseur de la composante transverse du grand écoulement. La composante longitudinale a deux comportements typique : dans la zone turbulente, elle suit la moyenne sur l'épaisseur de la composante longitudinale du grand écoulement. Autour de la zone laminaire, elle change de direction pour amener les perturbations vers la zone laminaire. En faisant le bilan de ces deux composantes, on trouve un écoulement le long de la bande autour de la zone turbulente. Près de la zone laminaire, elles sont advectées dans une direction en bonne approximation normale à la bande, vers le laminaire. Cette description est partiellement retrouvée dans le modèle. En effet, les vitesses de groupe pour les nombres d'onde instable correspondent à la moyenne sur l'épaisseur donnant l'écoulement grande échelle (Fig. 3.37 (a)). De plus, on fait apparaître une transition convectif/absolu de l'instabilité à

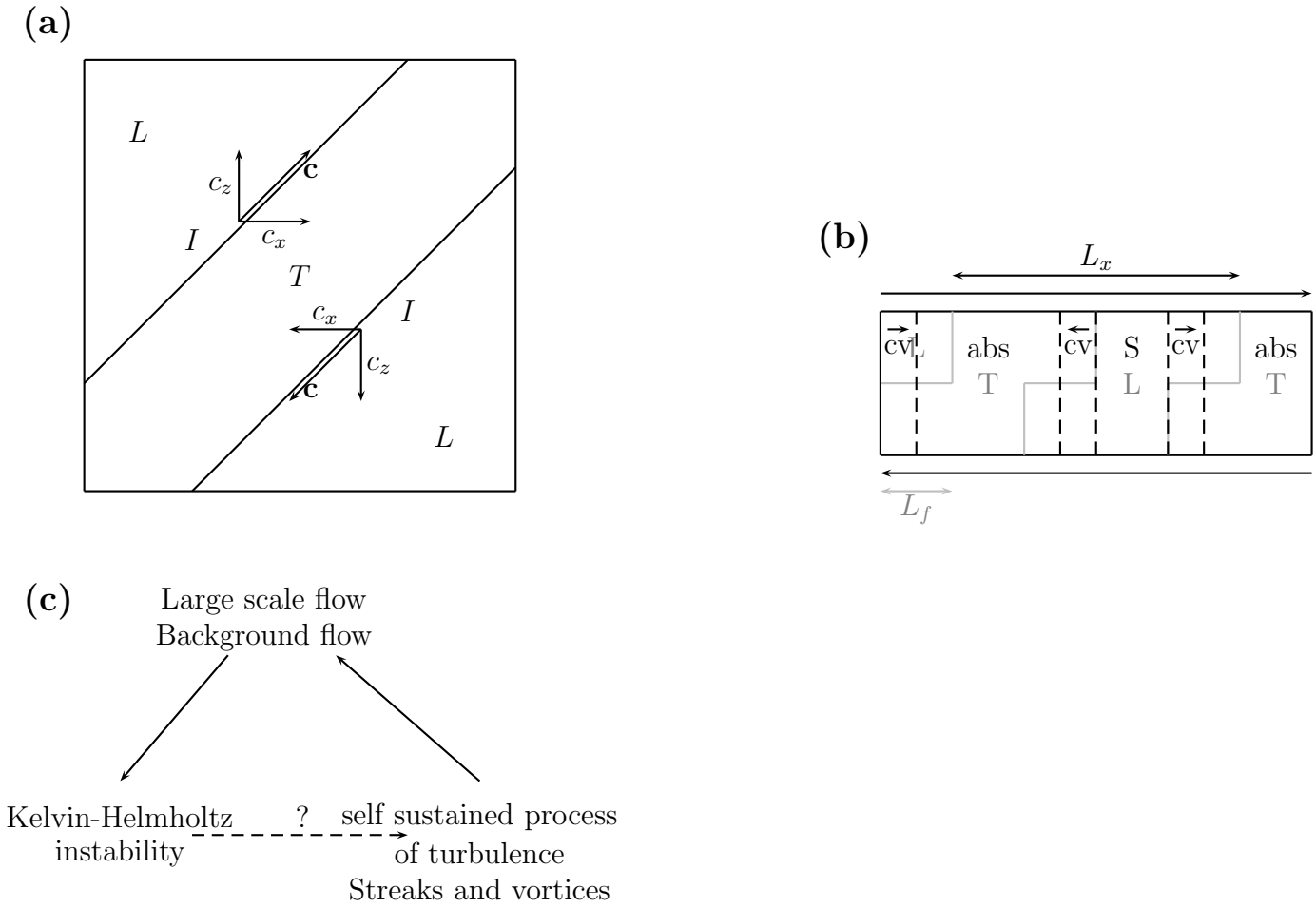


FIGURE 3.37 – Schémas de l'écoulement indiquant les zones laminaires, turbulente et intermédiaire, basé sur la figure 2.12 (c,d), où l'écoulement est stable, ainsi que la direction des deux composantes de la vitesse de groupe, déduites de l'analyse linéaire (a) : dans un plan $x - z$, (b) : dans un plan $x - y$. (c) : Possible cycle auto-entretenu des bandes

l'entrée de la zone turbulente (Fig. 3.37 (b)). Ces analyses locales se transposent bien aux autres géométries, et est en bon accord avec les cas d'analyse globale.

3.5.2 Discussion

On sépare la discussion en deux parties distinctes. La première et la plus conséquente revient sur la phénoménologie et l'analyse linéaire, et compare le cas de l'écoulement de Couette plan aux autres écoulements cisaillés. On décrit un cycle de maintien de la cohabitation laminaire-turbulent, similaire à celui proposé pour l'écoulement de Poiseuille dans une conduite. On fait ensuite apparaître les similarités entre le retour vers le laminaire des perturbations, et l'équilibre de force moyen dans la zone laminaire.

Comparaisons aux autres écoulements et possibilité d'un cycle

Les écoulements quasi-bidimensionnel et quasi-unidimensionnel cisaillés partagent un certain nombre de caractéristiques et de similarités dans la transition et l'organisation de la turbulence. Cela permet de transposer les idées d'un écoulement à un autre, en particulier le cycle proposé pour l'écoulement de Poiseuille dans une conduite, à l'écoulement de Couette plan.

On propose un exemple de cycle dans la figure 3.37 (c). On peut partir du processus d'auto entretien de la turbulence de paroi. Prise de manière isolée, c'est la partie la mieux comprise de la turbulence de paroi à faible nombre de Reynolds. On voit apparaître dans les DNS que les *streaks* turbulents composent l'écoulement de fond. On montre que la moyenne sur la direction parallèle à la bande des contributions des *streaks* et vortex longitudinaux, donnent l'écoulement à grande échelle le long des bandes (§ 3.1.5). Cet écoulement est maintenu en moyenne par des tensions de Reynolds à expliquer, mais dont on comprend qu'elles sont une conséquence de la turbulence locale. On s'est concentré dans la phénoménologie sur la flèche suivante du cycle : sur l'instabilité de ces couches cisaillées et l'advections des perturbations. DNS et modèle montrent que l'instabilité, de type Kelvin–Helmholtz est une instabilité de l'écoulement de fond. La mesure des vitesses d'advection ainsi que le calcul des vitesses de groupe met en évidence l'advection des perturbations le long de la bande et leur maintien autour de la zone turbulente. Le calcul des vitesses de groupe permet de mettre en évidence la transition convectif/absolu à l'entrée de la zone turbulente, ce qui permet de tracer un parallèle avec les écoulements spatialement développés , qui présentent une cascade spatiale d'instabilités conduisant à la turbulence. Comme dans le cas de l'écoulement de Poiseuille dans une conduite, on s'attend à ce que ces perturbations advectés et maintenues dans la zone turbulente viennent exciter en retour le processus auto-entretenu, et aider la turbulence à exister à des Reynolds plus faibles que R_{t}. La difficulté supplémentaire dans notre cas est que l'écoulement instable est une conséquence de la turbulence, et pas un écoulement laminaire permanent. C'est cette partie qui est pour l'instant la moins comprise dans le cycle. Jusqu'à présent les tensions de Reynolds ne sont calculées à partir des petites échelles que numériquement [6, 51] : on ne dispose pas de relation analytique explicite. L'idéal serait un lien direct et explicite entre les processus à petite échelle et entre les petites et les grandes échelles, qui bouclerait le cycle.

On discute très peu dans cette partie de l'influence du chaos local sur l'instabilité, et de la conséquence de l'instabilité sur le désordre. L'inverse de l'épaisseur, bien plus que l'amplitude, est définie en tant que distribution. Cela a un effet sur la tendance qu'on les *streaks* à être instables. L'instabilité, par sa tendance à générer de plus petites échelles longitudinales, va contribuer au désordre, bien que dans l'ensemble, les échelles caractéristiques sont bornées inférieurement à environ h par la viscosité.

La transition convectif/absolu a ceci d'intéressant qu'on s'attend à la retrouver aussi dans l'écoulement de Couette plan perturbé par un fil [4,21]. Des descriptions de type cycle peuvent alors permettre d'expliquer le maintien de la turbulence dans cette configuration à des nombres de Reynolds relativement bas. La principale différence repose sur l'absence d'advection transverse dans le cas de l'écoulement de Couette plan perturbé par un fil. L'analyse numérique du système montre une transition sous critique et un mode instable présentant des vortex longitudinaux [4]. L'état stable peut servir de base pour une étude similaire à celle présentée dans ce chapitre.

Retour des perturbations vers le laminaire et longueur d'onde

On met ici en évidence les similarités qui apparaissent dans la zone laminaire entre les études moyennes et les résultats instantanés. L'équilibre des forces dans la zone laminaire, basée sur l'advection du profil turbulent par le profil moyen, est en relation avec la longueur d'onde des bandes. On peut poser la question du maintien d'une distance bien définie entre bandes auto-entretenues. La possibilité d'une interaction [83] consistant en l'effet des perturbation dissipées entre les bandes peut être envisagée.

Chapitre 4

Étude numérique de la bande à grande échelle

Ce chapitre est centré sur l'étude phénoménologique et statistique et sur la modélisation de la formation des bandes à l'échelle d'une ou de plusieurs longueurs d'onde. On s'appuie sur les résultats expérimentaux de Prigent *et al.* [73] et numériques de Barkley & Tuckerman [6] ainsi que sur les nôtres (§ 3.1.1) pour proposer des grandeurs pertinentes pour mesurer la modulation. On s'inspire des approches précédentes pour proposer un modèle de (Ginzburg–)Landau–Langevin du système. On exploite le modèle en profondeur du point de vue analytique et numérique. On passe ensuite à l'étude numérique statistique pour le modèle à bas ordre et des DNS, en utilisant le cadre fourni par l'exploitation du modèle. On en tirera les paramètres effectifs du modèle. On termine par un bilan comparé des résultats.

4.1 Définition et mesure des grandeurs pertinentes

Dans le second chapitre, on a définit (§ 2.3.1) des grandeurs turbulentes classiques. Cependant, elles décrivent très partiellement les spécificités de la formation de la bande, en particulier la modulation en bonne approximation harmonique de la turbulence mise en avant par Prigent et Barkley & Tuckerman [6, 73–75, 96], parce qu'elles ne dépendent pas de l'organisation spatiale de la coexistence laminaire-turbulente. On se base sur leur approche pour proposer une quantité adaptée, qualifiée de paramètre d'ordre par abus de langage. On détaille la question de la moyenne du paramètre d'ordre et du comportement moyenné d'ensemble de sa phase. On montre de plus que les fluctuations d'orientation et de longueur d'onde s'observent particulièrement bien grâce à cette approche, on propose alors une mesure des temps de résidences dans tel ou tel état.

4.1.1 Quantifier la modulation de la turbulence

On cherche à quantifier la modulation de la turbulence sous la forme des bandes oblique et par extension, l'apparition et la disparition de cette modulation. Il faut une quantité qui prenne une valeur suffisamment importante lorsque la bande est bien définie et qui soit négligeable lorsqu'elle a apparemment disparu et laisse place à la turbulence uniforme. La transition vers la turbulence, au

sens strict, ne fait ni partie des bifurcations classiques, ni des transitions de phase, mais on appelle tout de même cette quantité un paramètre d'ordre par analogie avec ces cadres. On justifiera cette appellation lors de la comparaison quantitative entre les modèles et la DNS. Un paramètre d'ordre typique pour l'étude de la transition laminaire turbulente est la fraction turbulente f (voir [12, 13]). Elle est adaptée pour la transition à R_{g} en ce qu'elle quantifie la taille de la zone où l'écoulement est non trivial, mais est incomplète pour décrire la formation des bandes : elle peut prendre la même valeur pour un écoulement organisé ou désorganisé, quelle que soit sa forme. On veut utiliser une quantité directement reliée à la modulation dans l'écoulement.

De manière similaire à Prigent *et al.* et Barkley & Tuckerman [6, 7, 73–75] on utilise les quantités du champ de vitesse directement reliées à la modulation. Pour cela, on utilise le spectre de Fourier dans le plan x, z. On moyenne $\hat{v}_x^2$ dans la direction y (fig 4.1) :

$$m_{n_x,n_z}(t) = \left(\frac{1}{2}\int_{y=-1}^{1} \mathrm{d}y\, |\hat{v}_x|^2(n_x, y, n_z, t)\right)^{1/2}, \tag{4.1}$$

qui est typiquement relié à l'amplitude de l'énergie contenue dans ce mode n_x, n_z du champ de vitesse, repéré par ses nombre d'onde et est homogène à une vitesse. Le facteur 1/2 correspond à la normalisation $1/(h-(-h)) = 1/(1-(-1))$. On compare cette quantité en examinant dans deux situations le champ $\vec{v}^2$ et $\ln(m_{n_x,n_z})$ (figure 4.1 (a,c)). Le mode $(n_x, n_z) = (0, 0)$ a été retiré du spectre pour plus de lisibilité. Dans les deux cas, le domaine contient trois longueurs d'onde. Dans le premier cas (Fig. 4.1(a)), il n'y a pas de défaut, et on ne trouve qu'un pic dans le spectre (l'information à $n_x < 0$ est redondante) (Fig. 4.1(b)). L'amplitude du pic à $n_x = 1$ et $|n_z| = 3$, mode fondamental du motif correspondant, est plusieurs ordres de grandeur au dessus de celle des autres modes. Cela est aussi le cas dans les domaines inclinés [7, 96]. On trouve au moins un rapport 10 entre le mode du motif et les autres dans le cas d'un motif sans défauts. Cela correspond à ce qu'on attend de cette mesure. Dans le cas où la bande contient des défauts ou imperfections (Fig. 4.1(c)), on observe deux pics principaux (Fig. 4.1(d)), pour $n_z = \pm 3$, pour les deux orientations, qui ont une amplitude inférieure à celle du motif idéal, on trouve de plus des valeurs non négligeable autour de ces pics, qui correspondent à la modulation des deux orientations. Une procédure de démodulation classique permet de mettre en évidence les enveloppes. Les défauts dans la bande prennent la forme d'une disclinaison dès que le motif comporte au moins trois longueurs d'onde dans une direction. Dans les domaines contenant une ou deux longueurs d'onde, on trouve des morceaux de bande brisés (Fig. 4.4 (d)). De la même manière on retrouve deux pics à $\pm n_z$ dans le spectre ainsi qu'une enveloppe.

Ainsi $m_{n_x,\pm n_z}$ mesure l'amplitude de la modulation de la turbulence. Pour simplifier les notations, dans toute la suite, à chaque fois que le nombre de longueurs d'onde contenu dans le domaine est donné, on notera simplement ces quantités $m_\pm$, par référence aux deux orientations possibles. Dans toute la suite, on parlera du mode développé ou dominant pour le mode de plus grande amplitude, représentant l'orientation effectivement vue dans le système.

On peut en suivre les séries temporelles qui montrent qu'il s'agit d'une quantité fluctuante. Ainsi, de la même manière que pour les quantités turbulentes, on doit réaliser des moyennes de ces quantités fluctuantes. Un problème supplémentaire vient s'ajouter : principalement près de R_{t}, on trouve des fluctuations d'orientation (compétition entre les modes $\pm$, voir paragraphes § 4.1.3 et § 4.3.4) ainsi que de la réentrance de la turbulence (voir paragraphe § 4.3.3) ; et dans certains régimes de taille pouvant accommoder p ou $p+1$ longueurs d'onde, des fluctuations de longueur d'onde et d'orientation. Dans tous ces cas, une moyenne simple en temps est inefficace.

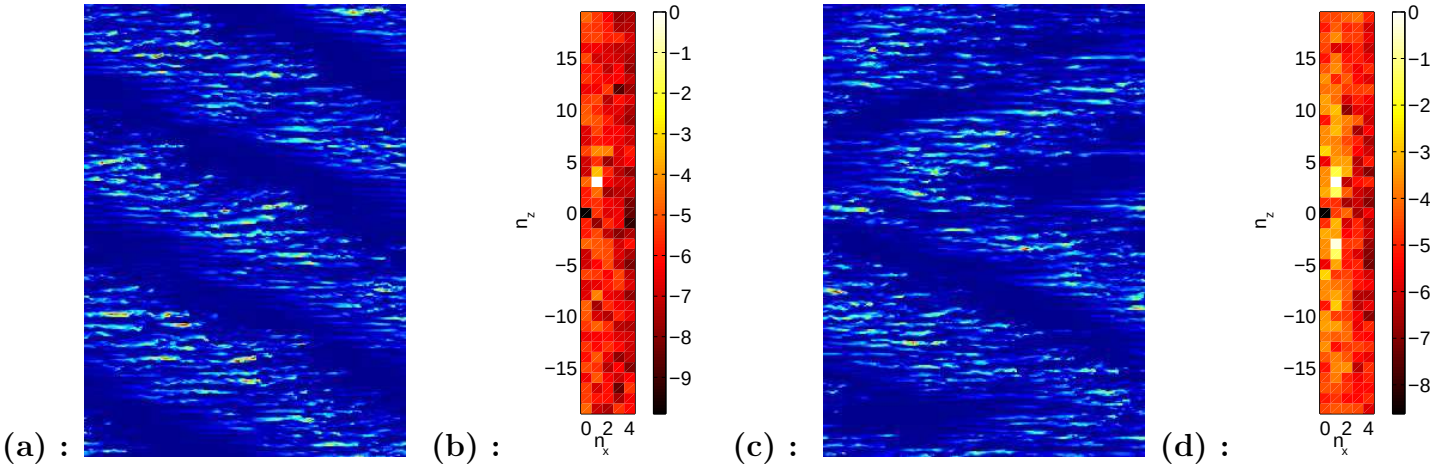


FIGURE 4.1 – Niveaux de couleur de $\vec{v}^2$ (a,c) et niveaux de couleur de $\ln(|\hat{v}|)$ (b,d). Sans défaut (a,b), avec défaut (c,d)

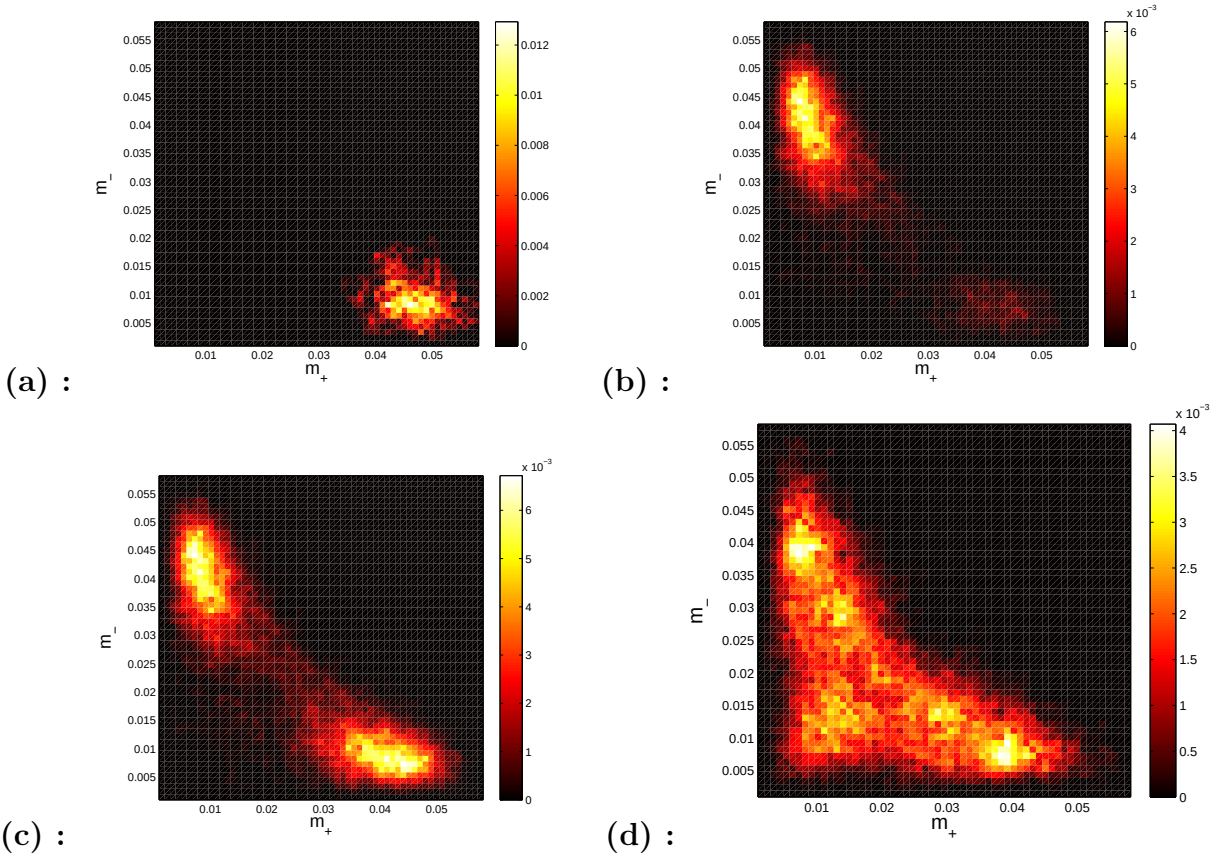


FIGURE 4.2 – Densité de probabilité de m_+, m_- pour $R = 290$ sans symétrisation (a), pour $R = 330$ sans symétrisation (b), pour $R = 330$ avec symétrisation (Eq. (4.2)) (c), pour $R = 337$ avec symétrisation (d). À chaque fois, $L_x \times L_z = 110 \times 32$, $L_{x,z}/N_{x,z} = 4$, $N_y = 15$

On peut échantillonner une pdf $\Pi(m_+, m_-)$ du module des deux modes (figure 4.2 (a)), elle se symétrise avec le temps d'échantillonnage (figure 4.2, (b)), à mesure que des retournements se produisent. Pour accélerer les choses, on la symétrise artificiellement (figure 4.2 (c)) [77] :

$$\Pi^{\mathrm{s}}(m_+, m_-) = 1/2(\Pi(m_+, m_-) + \Pi(m_-, m_+)) \tag{4.2}$$

La probabilité d'obtenir 0 est nulle, comme il sied pour le module d'une variable aléatoire complexe (voir la suite). La réentrance de la turbulence homogène se voit avec l'apparition d'un troisième maximum (figure 4.2, (d)).

On utilise la symétrie entre les orientations $\pm$ pour déterminer la moyenne. On définit ainsi :

$$M = 2\int_{m''<m'} \mathrm{d}m'\mathrm{d}m''\, m'\Pi^{\mathrm{s}}(m', m'')\,. \tag{4.3}$$

Les quantités m' et m'' peuvent être m_+ ou m_- ou inversement. De la même manière, on obtient ses fluctuations :

$$S = \left(2\int_{m''<m'} \mathrm{d}m'\mathrm{d}m''\,(m'-M)^2\Pi^{\mathrm{s}}(m', m'')\right)^{1/2}. \tag{4.4}$$

Cette dernière mesure surtout le désordre et la coexistence de différentes orientations. Le choix de la moyenne et des fluctuations du module reproduit l'approche suivie dans les études de transitions de phase [104], où l'on utilise le module de la moyenne spatiale du paramètre d'ordre, de manière à s'affranchir des variations de phase entre chaque "réalisation" du système. Cela permet une comparaison quantitative des DNS et du modèle. Ce choix se différencie à une approche de type champ moyen où l'on choisit le maximum de la pdf (valeur la plus probable) divisée par le module, comme Barkley *et al.* [7]. Cette approche présente des problèmes lorsque la pdf a de multiples maxima qui ne se correspondent pas via une opération de symétrie, (comme les modes m_+ et m_-). Ce cas ne semble cependant pas se produire dans les domaines inclinés [7]. L'approche de Barkley & Tuckerman est le pendant phénoménologique de l'approche en champ moyen qui sera utilisée pour faire des calculs analytiques dans le modèle. Cependant, les deux méthodes de mesure dans la DNS conduisent au même type de résultats.

Cette approche n'est plus pertinente lorsque quatre modes doivent être suivis, typiquement quand il y a compétition entre longueurs d'onde et orientations. On détaillera le calcul de la moyenne dans cette situation dans la section § 4.1.3.

4.1.2 Détermination pratique des moments de la phase

En calculant la phase à une cote y des modes $\hat{v}_\pm$ ainsi repérés, on obtient la position en x relative de la bande dans le domaine (figure 4.3 (a)). À cause de l'obliquité de la bande et des conditions aux limite périodique, tout déplacement en z peut se ramener à un déplacement en x. C'est donc la seule coordonnée nécessaire pour repérer la position de la bande. Le résultat obtenu dépend faiblement de la valeur de y pour laquelle la phase est calculée : la différence de phase entre deux valeurs de y fluctue rapidement autour d'une valeur constante (figure 4.3 (c)). Le module des deux modes $m_\pm$ étant toujours strictement positif, leur phase est toujours définie.

Ainsi, le comportement de la phase, dans les séries temporelles comme dans le suivi sur de longues durées des visualisations [5], ressemble énormement à une marche aléatoire. On va donc chercher à déterminer les deux premiers moments des séries temporelles pour les comparer aux résultats types.

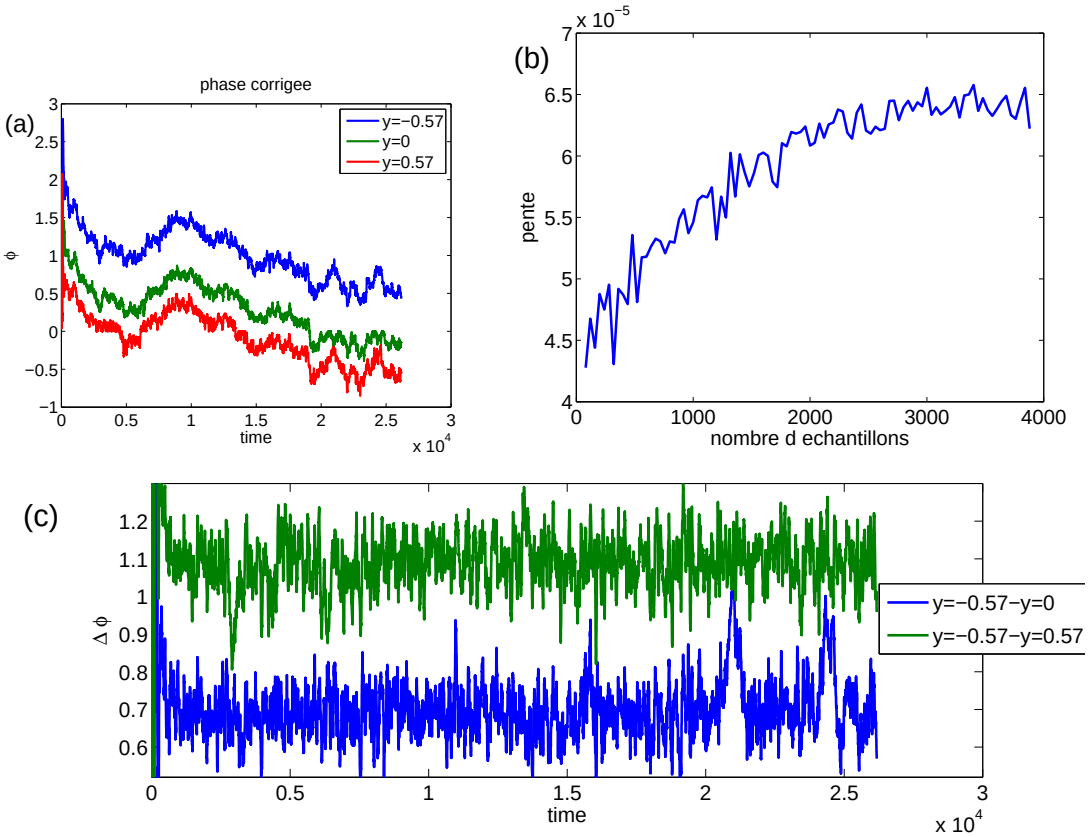


FIGURE 4.3 – (a) Phase prise à différentes côtes pour une taille $L_x \times L_z = 110 \times 48$, $R = 290$, $N_x/L_x = 1$, $N_z/L_z = 3$, $N_y = 15$. (b) Vérification de la convergence des moyennes d'ensemble : pente de $\langle \phi^2 \rangle(t)$ en fonction du nombre d'échantillons pour une durée de série temporellent donnée. (c) Différence de phase entre chaque côte.

On détermine l'évolution moyenne en temps des deux premiers cumulants (moyenne et écart type). On discutera et mesurera leur comportement typique dans la suite (modèle § 4.2.4 et DNS § 4.3.1). La dynamique du mode développé est beaucoup plus lente que celle du mode dominé, et quelle que soit la situation, la moyenne en temps de la phase est toujours nulle. On cherche à quantifier le comportement en temps de cette variable. On calcule donc une moyenne d'ensemble et des fluctuations d'ensemble des séries temporelles, par opposition aux moyennes en temps. La série temporelle est découpée en échantillons de durées T_0 égales, fixée par le nombre N d'échantillons et la durée T de la série temporelle : $T_0 = T/N$. On moyenne en sommant chaque échantillon :

$$\langle\phi\rangle(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \phi(t + (i-1)T_0) - \phi((i-1)T_0))\,, \tag{4.5}$$

et

$$\langle(\phi - \langle\phi\rangle)^2\rangle(t) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (\phi(t + (i-1)T_0) - \phi((i-1)T_0)))^2\right) - \langle\phi\rangle^2(t)\,. \tag{4.6}$$

Pour vérifier la convergence de la procédure, on calcule la pente des fluctuations pour un nombre d'échantillons croissant (Fig. 4.3 (b)). Elle converge pour plusieurs milliers d'échantillons, ce qui indique la convergence de la procédure. Cela fixe la valeur de N et donc de T_0. Cela nécessite donc des séries temporelles assez longues. Cette approche de mesure sera aussi testée dans le cadre du modèle (§ 4.2.4).

4.1.3 Mesure des temps de résidence

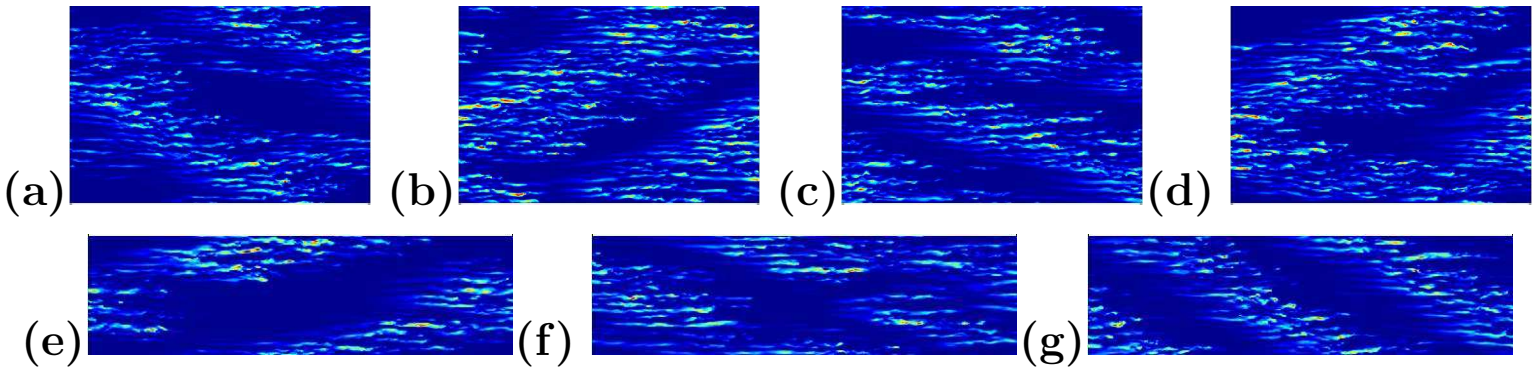


FIGURE 4.4 – Niveaux de couleur de $\vec{v}^2$ dans le plan $y = -0.57$, pour différents types de configurations : $L_x \times L_z = 128 \times 84$, $R = 315$ (a,b,c,d), $L_x \times L_z = 170 \times 48$, $R = 290$ (e,f,g)

Les pdf et les moyennes extraites dans la section précédente apportent une information sur l'équilibre, au sens statistique, du système. Les moyennes d'ensemble des séries temporelles de la phase donnent une information sur une dynamique lente, mue par le bruit du au chaos local, autour de cet équilibre (décrit par les maxima des pdf). On s'intéresse ensuite à ses fluctuations les plus extrêmes en temps, en particulier sur les changement d'orientation observés dans une certaine gamme de nombres de Reynolds et/ou de taille, pour lesquels l'écoulement explore des situations radicalement

différentes (Fig. 4.4 orientation + ou −, une (a,b,e,g) ou deux (c,f) longueurs d'onde dans la direction z (c) ou x (g)). Dans ces situations la bande garde une orientation et une longueur d'onde donnée pendant un temps (Fig. 4.4 (a,b,c,e,f,g), puis passe par une situation transitoire pendant laquelle elle est perturbée par des défauts (Fig. 4.4 (d)) avant de reprendre une orientation (voire une longueur d'onde Fig. 4.4 (c,f)) bien définie, éventuellement différente. On cherche donc à mettre en évidence ce comportement dans les séries temporelles des grandeurs qui nous donnent l'état de l'écoulement, en particulier les paramètres d'ordre. Les quantités qui vont nous intéresser sont les distribution de temps de résidence du système dans chaque orientation, et, le cas échéant, longueur d'onde.

On examine les séries temporelles du paramètre d'ordre. On en donne deux exemples (Fig. 4.5) dans le cas d'une compétition entre deux longeurs d'ondes, (même régime de paramètre que pour la figure 4.4, (a,b,c,d)) et figure 4.6, dans le cas d'une compétition entre deux orientations près de la disparition de la bande. Les quantités turbulentes sont insensibles aux changements d'orientation (Fig. 4.5 (b)) (comme on le verra dans la suite (§ 4.3.2)) et trop peu sensibles aux changements de longueur d'onde pour permettre des estimations précises. Autrement dit, les changements d'orientation se font à fraction turbulente constante, ce qui laisse supposer que la répartition laminaire/turbulente est dominée par un processus plutôt local, peu sensible à l'organisation à grande échelle (§ 5). Les séries temporelles des paramètres d'ordre ont des caractéristiques radicalement différentes. D'un point de vue instantané, on avait vu qu'un mode ou l'autre dominait lorsqu'une orientation ou longueur d'onde est clairement visible dans l'écoulement. Cela apparaît aussi de manière dynamique sur les figures. 4.5 (a) et 4.6) qui illustrent l'augmentation de l'un des m, sa domination, puis sa décroissance, éventuellement suivie de la croissance d'un autre m. Cela quantifie des évolutions du type Fig. 4.4 (a,b,c)→d→ (a,b,c). Il apparaît ainsi que ces séries temporelles sont particulièrement adaptées pour déterminer le temps passé dans chaque état.

Pour déterminer un temps de résidence dans un état, on applique une procédure de seuillage, ne nécessitant l'amplitude que du mode considéré [78]. En particulier, on ne fait pas de comparaisons entre amplitudes de modes, qui perdraient leur pertinence en terme de temps de séjour dans un état dans les cas à trois où quatre états. Si m^2 est au dessus d'un premier seuil s_1, l'état est considéré comme développé, et s'il descend en dessous d'un second seuil s_2, l'état est considéré comme dominé. La durée T_i de cet évènement est alors le temps de résidence dans cet état. On illustre ces deux seuils dans la figure 4.6 pour le cas d'une compétition entre deux orientations. L'approche est robuste, et peut être appliquée quel que soit le nombre d'états en compétition. D'un point de vue qualitatif, on s'attend à ce que les temps échantillonnés dépendent peu de s_1 dans une large gamme de valeur : une fois que l'état est développé, il le reste. Si s_1 est trop grand, le passage dans l'état n'est pas capté. On attend cependant une dépendance plus importante en s_2, d'une part parce que cela peut faire apparaître des excursions qui seront de moins en moins bien captées à mesure que s_2 est décru, d'autre part, parce que la réduction de s_2 allonge le temps mesuré lorsque l'état va finalement être détruit.

À l'aide de cette procédure, on obtient alors une distribution de temps de vie $\{T_i\}$ cumulées $Q(T)$:

$$Q(T) = \frac{\#\{T_i \geq T\}}{\#\{T_i\}},$$

qu'on trace en linéaire-linéaire ou logarithme-linéaire (figure 4.7), dans l'esprit d'événements indépendant, suivant une loi de type Poisson. Les pdf des temps de résidence confirment cette impression. Avec le

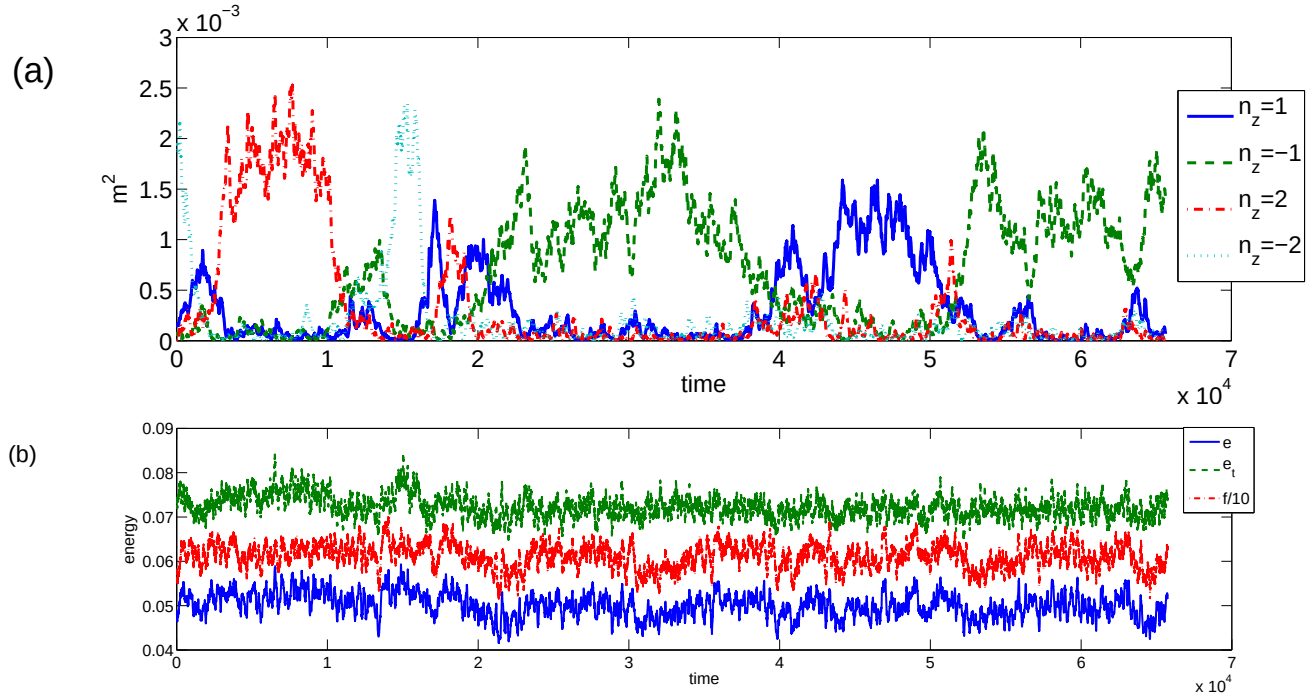


FIGURE 4.5 – Séries temporelles pour une expérience typique ($L_x \times L_z = 128 \times 84$, $R = 315$), (a) : m pour plusieurs n_z, (b) : e, e_t et $f/10$

nombre croissant d'évènements enregistrés, la distribution tend vers une loi exponentielle :

$$Q(T) \to \exp\left(-\frac{T}{\langle T \rangle}\right) .$$

Ainsi, pour un échantillonnage suffisamment long, la moyenne des temps de résidence τ_1 (calculée à l'aide de la pdf) se retrouve quasiment égale à la pente de la droite de la représentation log-lin τ_2, ou du paramètre d'un ajustement exponentiel du tracé lin-lin τ_3. L'ajustement exponentiel sous-estime $\langle T \rangle > \tau_3$, parce que les évènements les plus longs, donc les plus rares, ont moins de poids, tandis que l'ajustement linéaire sur-estime $\langle T \rangle < \tau_2$, parce qu'il donne beaucoup de poids aux évènements longs. On définit $\langle T \rangle = (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$. On peut déterminer de cette manière un critère de qualité de l'échantillonnage, ou une barre d'erreur sur le temps de vie mesuré, à l'aide de la variance $\sqrt{(\sum \tau^2) - \langle T \rangle}$ de ces trois temps $\tau_{1,2,3}$. Cet indicateur tend vers 0 à mesure que les séries temporelles traitées s'allongent. Une durée de l'ordre de plusieurs $10^5 h/U$ est généralement nécessaire pour la convergence. En pratique, cela correspond à une cinquantaine d'évènements.

Comme expliqué, on s'attend à ce que nos échantillonnages dépendent des seuils s_1 et s_2. On détermine alors le temps de résidence moyen en fonction des seuils s_1 et s_2 (figure 4.8). Ces courbes montrent une dépendance continue en (s_1, s_2) et permettent de se faire une bonne idée de la dépendance systèmatique de $\langle T \rangle$ dans le plan (s_1, s_2). On trouve un comportement commun à toutes les situations étudiées. Le temps de résidence moyen a un plateau sur une gamme de s_1 et une croissance monotone en fonction de s_2. On se placera toujours au milieu du plateau en s_1, qui assure une détection réaliste du début d'un état (d'orientation ou de longueur d'onde). Le temps de résidence moyen $\langle T \rangle$ décroît

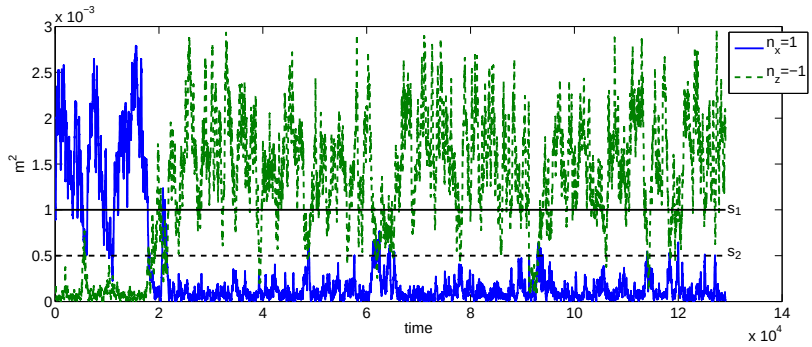


FIGURE 4.6 – Exemple de série temporelle de m^2 avec deux exemples de seuils s_1 et s_2

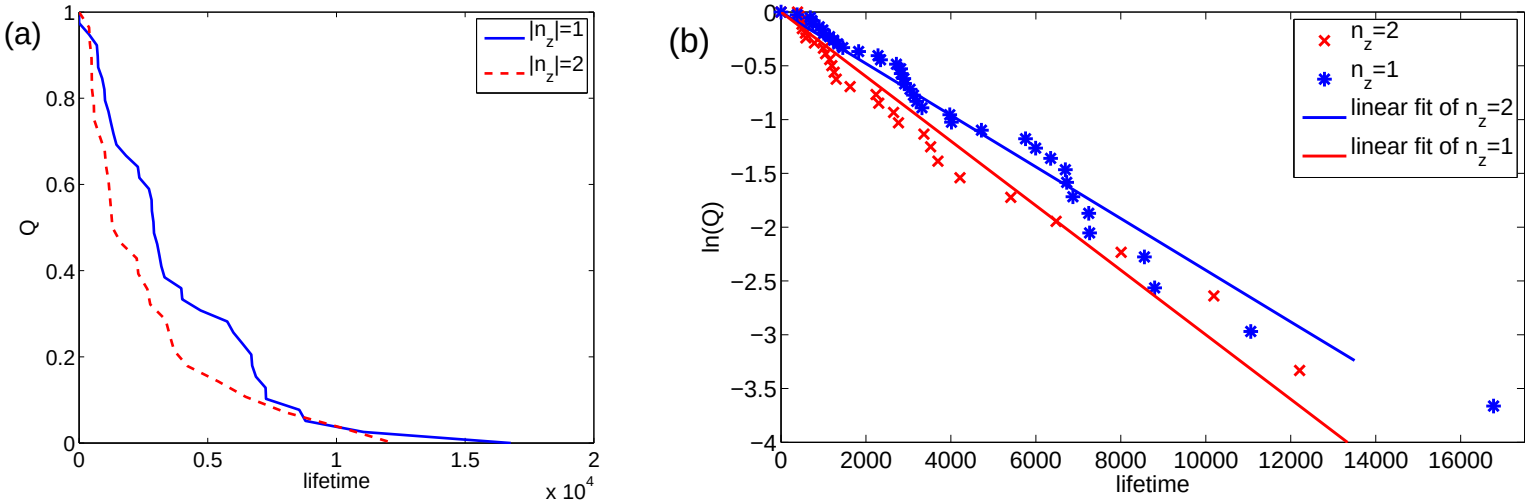


FIGURE 4.7 – densité de probibilité cumulée des temps de vie pour $L_x \times L_z = 128 \times 84$, $R = 315$, $s_1 = 0.001$, $s_2 = 0.0005$, en linéaire-linéaire (a) et en logarithme-linéaire (b)

avec le seuil (s_2). On réalise un ajustement linéaire, qui est relativement bon à chaque fois pour obtenir une extrapolation à $s_2 = 0$, qui correspond à la limite de sortie totale de l'état. On a ainsi une dépendance du type :

$$\langle T \rangle = \alpha(R, \delta\vec{k})\,(1 - \beta s_2)\ .$$

Le coefficient $\beta \simeq 1000 \pm 100$ ne dépend pas des paramétres comme la taille ou le nombre de Reynolds R. Cette procédure d'extrapolation possède un certain nombre d'avantage sur des approches *a priori* plus simples, comme par exemple une comparaison de deux modes (dans le cas d'une compétition entre deux états), en plus de pouvoir s'étendre à plus deux deux états. L'extrapolation permet d'estimer le temps de vie, avec des barres d'erreurs, dans des cas où le temps nécessaire pour échantillonner est extrêmement long (voir § 4.3.4) : la courbe $\langle T \rangle(s_2)$ sera bien estimée pour les plus grandes valeurs de s_2, mais permet tout de même une extrapolation. Finalement une procédure basée uniquement sur une comparaison (ratio, différence) va donner des distributions cumulées $Q(T)$ perturbées pour les temps cours. Les amplitudes de modes se croisent égales, mais le système ne fait qu'une courte excursion, ajoutant un temps court supplémentaire dont la durée correspond à l'excursion. Cela

nécessite des pdf relativement longues, le temps moyen ne peut plus être estimé que par la pente de la pdf cumulée, des contraintes que l'on ne peut pas imposer pour un échantillonnage des données de DNS. Ces remarques sont éclairées par l'étude des temps de premier passage dans le modèle de Langevin (paragraphe § 4.2.5)

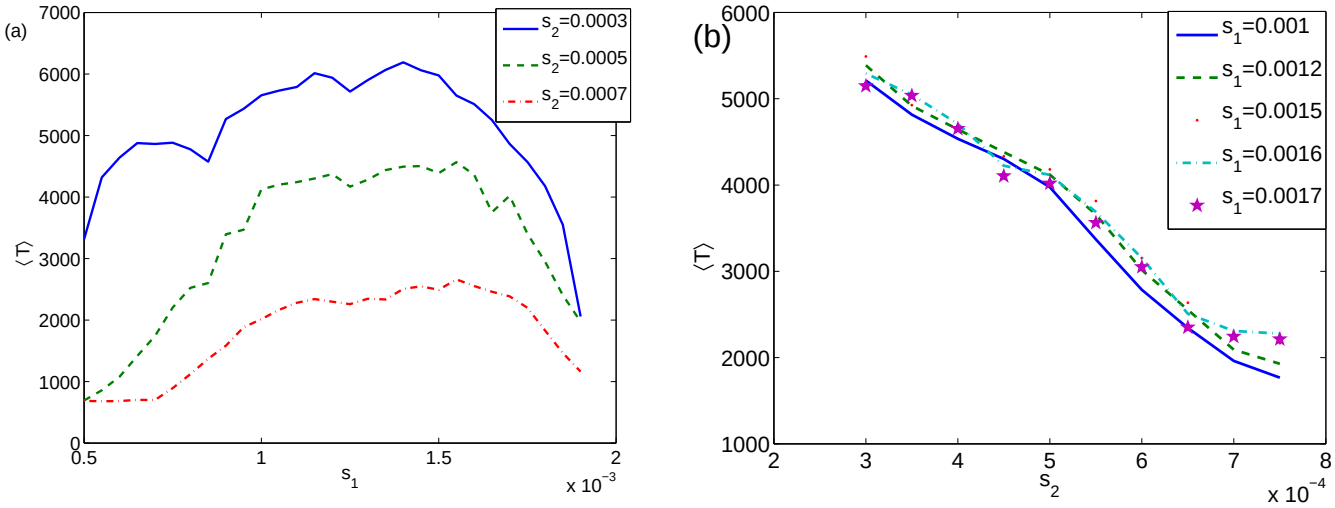


FIGURE 4.8 – temps de vie en fonction du seuil de déclanchement : s_1 (a), s_2 (b)

Cette détermination de la présence du système dans un état en termes de seuil permet aussi de moyenner de manière conditionnelle le paramètre d'ordre. Cela présente peu d'intérêt dans le cas d'une compétition entre deux modes, car la pdf en deux dimension reste symétrique et lisible. mais se révèle utile pour les cas où quatre modes sont en compétition. On suit donc une procédure de moyenne conditionnée par le fait que le mode (n_x, n_z) est développé. De la même manière que précédemment, on commence à moyenner lorsque $m_{n_x,n_z}(t)$ passe au dessus de s_1 et on arrête lorsqu'il passe en dessous de s_2. À nouveau, la moyenne ne dépend pas de s_1 sur un plateau. Contrairement au temps de résidence, elle ne dépend que faiblement de s_2, en effet, les valeurs échantillonnées ajoutées sont assez faibles. Cette approche converge plus rapidement que les calculs de temps de résidence. Des exemples de M déterminés de cette manière se retrouvent aux paragraphes § 4.3.2 et § 4.3.4

4.1.4 Remarques diverses

Du choix d'une définition de M

Lors de la présentation du calcul de m comme mesure de la modulation de la turbulence dans l'écoulement, il est apparu que l'on devait utiliser une approche statistique, $m(t)$ fluctuant fortement, et que plusieurs types de moyenne possibles se présentaient. Les moyennes simples en temps, comme pour les quantités turbulentes, sont totalement polluées par les fluctuations d'orientation et de longueur d'onde et ne sont pas pertinentes. Les moyennes calculées à l'aide des pdf sont robustes mais ne fonctionnent pas tant qu'il n'y a pas de fluctuations de longueur d'onde. Les moyennes conditionnées servent dans ces cas là. Si l'on compare systématiquement les deux approches, en calculant la différence relative des valeurs de M pour plusieurs R (figure 4.9), il y a un léger écart entre moyenne

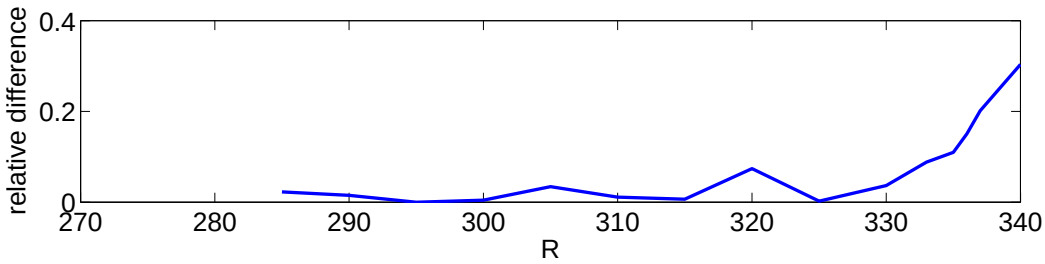


FIGURE 4.9 – Différence relative entre valeurs de M calculées par l'approche conditionnée par l'existence du motif et par l'approche pdf en fonction du nombre de Reynolds, dans l'approche modèle réduit $N_y = 15$.

conditionnée et moyenne pdf, la moyenne conditionnée ne prenant pas en compte les périodes où m est trop proche de zéro. Elle ne détecte pas les effets de la disparition transitoire de la turbulence [5,77]. On utilisera donc cette moyenne conditionnée uniquement dans les quelques cas de compétition entre quatre modes.

De la détermination d'une loi d'échelle (ou pas)

On aura tendance à se méfier de l'identification d'une tendance linéaire "à l'oeuil". On donne un exemple (figure 4.10) avec le mode $n_x = n_z = 0$, moyenné pour une gamme de nombre de Reynolds. On trace la moyenne en temps P et la moyenne du carré Q, les deux donnant l'impression d'une tendance linéaire (figure 4.10, (a,b)). On trace de plus la moyenne du carré avec le carré de la moyenne, les deux se recouvrant et étant en apparence parfaitement linéaire.

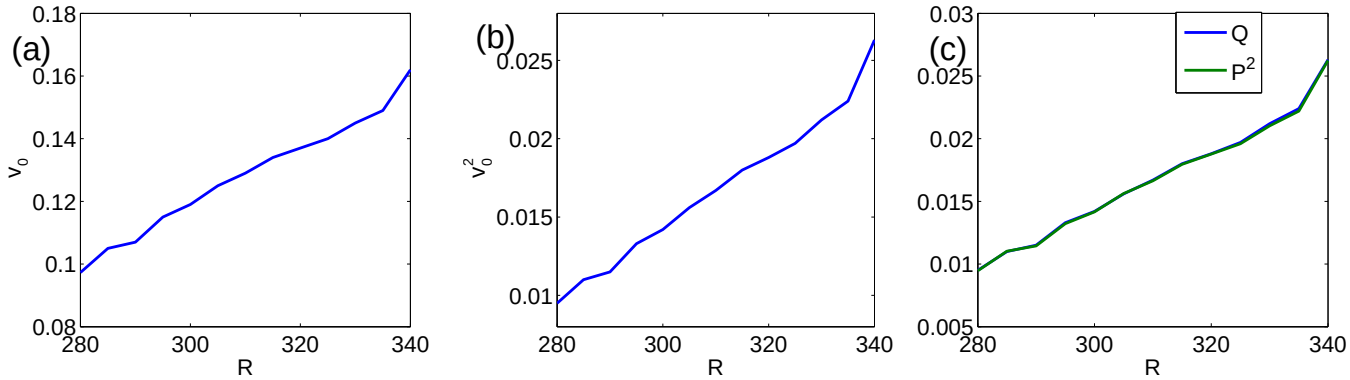


FIGURE 4.10 – En fonction de R : moyenne temporelle de v_0 (mode $0,0$ de Fourier, P) (a), moyenne temporelle de v_0^2 (Q) (b), carré de la moyenne temporelle de v_0 et moyenne temporelle de v_0^2 (c)

Dans toute la suite, les ajustements sont faits pour la comparaison avec une loi de puissance donnée, soit pour des raisons pratiques, comme l'extrapolation à $s_2 = 0$.

4.2 Modèle pour la formation des bandes

4.2.1 Motivation

La question du type de modèle à utiliser pour décrire le comportement de l'amplitude de la modulation de la turbulence $m_\pm(t)$ n'est pas triviale. En effet, comme il s'agit de l'apparition d'un état ordonné à partir de la turbulence, on ne dispose pas de cadre théorique classique, Barkley *et al.* parlent de bifurcation de pdf [7]. On se base donc sur des approches *ad hoc* et phénoménologiques d'équation d'amplitude bruités, parce qu'elles ont prouvés leur robustesse.

Ainsi, on présente le cadre général choisi pour la modélisation. On l'exploite ensuite en détails, d'abord à l'équilibre (au sens de la physique statistique), puis on étudie deux types de dépendances en temps, d'abord autour de l'équilibre, puis loin de l'équilibre. À chaque fois, on extraira le maximum de résultats analytiques, que l'on comparera à l'intégration numérique du modèle. On discutera de plus du sens que prennent nos procédures de traitement dans le cadre de ces modèles.

4.2.2 Formalisme de Ginzburg–Landau–Langevin

Principe

On utilise une description inspirée de formation de motif, approche justifiée *a posteriori* par le comportement du système. En effet, il apparaît une modulation dans l'écoulement pour une certaine gamme de paramètres de contrôle. Dans ce type de description, on a une dépendance rapide en espace [1] (motif indépendant du temps) correspondant à la longueur d'onde de la bande, et une dépendance lente en espace et en temps, correspondant à la modulation de ce motif. On peut alors, de manière similaire à [73–75] réécrire le champ de vitesse sous la forme :

$$v_x(\tilde{x}, \tilde{z}, x, z, t) = V_0 + A_+(x, z, t)\, e^{i(k_x^{\mathrm{c}}\tilde{x} + k_z^{\mathrm{c}}\tilde{z})} + A_-(x, z, t)\, e^{i(k_x^{\mathrm{c}}\tilde{x} - k_z^{\mathrm{c}}\tilde{z})} + \text{c.c.}\,.$$

On utilise un *paramètre d'ordre* complexe $A_\pm \in \mathbb{C}$ pour décrire la modulation. On notera respectivement $A_\pm^r$ et $A_\pm^i$ leurs parties réelles et imaginaires. On mentionne la moyenne en espace, c'est à dire le mode $(0, 0)$, v_0, qui s'avère non-nulle et qui dépend des paramètres de contrôle. On a présenté rapidement son comportement dans la section précédente (Fig. 4.10). $k_{x,z}^{\mathrm{c}} = 2\pi/\lambda_{x,z}^{\mathrm{c}}$ est le vecteur d'onde de la bande [2] et le centre du spectre lorsqu'on a une modulation spatiale. Comme pour m la notation $\pm$ fait la différence entre les deux orientations. Les variables lentes t, x et z décrivent la modulation en espace de l'amplitude du motif [19]. Les variables rapides $\tilde{x}, \tilde{z}$ varient sur une échelle $\lambda_{x,z}^{\mathrm{c}}$, un ratio ϵ (l'écart au seuil) sépare les deux gamme de variation en espace et en temps. Ainsi $A_\pm$ contient toutes les variations lentes : son module correspond à l'intensité de la modulation, et sa phase à sa position dans le domaine. Il ne contient pas de dépendance en y : en pratique, on peut faire correspondre $A_\pm$ à l'amplitude des modes les plus importants en y [6]. Les caractéristiques principales de la bande (apparition apparemment continue, l'anisotropie, l'invariance du système par translation en x et z, la domination d'une orientation sur l'autre) permettent une dépendance en temps et en

1. Elle même rapide par rapport aux échelles transverse et de temps des *streaks*
2. On parle de vecteur d'onde critique ou optimal, bien que la confusion avec *le* vecteur d'onde critique à R_{t} est possible

espace du type :

$$\tau_0 \partial_t A_\pm = (\epsilon + \xi_x^2 \partial_x^2 + \xi_z \partial_z^2) A_\pm - g_1 |A_\pm|^2 A_\pm - g_2 |A_\mp|^2 A_\pm + \zeta_\pm(t)\,. \tag{4.7}$$

On a $\epsilon = (R_\mathrm{t} - R)/R_\mathrm{t}$ l'écart au seuil ; cette expression est valable pour ϵ suffisamment petit. La partie déterministe de l'équation repose principalement sur des arguments de symétrie . L'écart au seuil ϵ est le principal paramètre déterminant le comportement qualitatif du modèle : la bande n'est attendue qu'à $\epsilon > 0$ [19]. On verra dans l'exploitation du modèle qu ϵ est la principale commande de l'amplitude du paramètre d'ordre moyen. R_t correspond au seuil d'apparition des bandes (vues pour $R < R_\mathrm{t}$). Les longueurs de cohérence $\xi_{x,z}$ déterminent les échelles caractéristiques de variation de l'amplitude, ainsi que la largeur du spectre de $A_\pm$ autour de $\vec{k}_\mathrm{c}$. Les dérivées en espace et en temps se font par rapport aux variables lentes. Le coefficient τ_0 est le temps de cohérence et détermine le facteur de conversion entre les échelles de temps de l'écoulement h/U et l'échelle de temps rapide $\tilde{t}$. Le rapport entre les échelles rapides $\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}$ et les échelles lentes x, z, t est données par $\tilde{t}/t \propto \epsilon$ pour le temps et $\tilde{x}/x, \tilde{z}/z \propto \epsilon^{\frac{1}{2}}$ pour l'espace. Le coefficient g_1 va déterminer l'amplitude à saturation et g_2 la compétition entre les deux orientations. Le ratio g_2/g_1, est la seconde quantité déterminant le comportement qualitatif du motif : un rapport supérieur à 1 est nécessaire pour avoir sélection d'une orientation [74], comme on le verra dans la suite. Le terme ζ est un bruit complexe additif (tous les coefficients sont réels) gaussien :

$$\langle \zeta_\pm \rangle = 0 \quad , \langle \zeta_\pm(t) \zeta_\pm(t') \rangle = \alpha^2(R) \delta(t - t')\,. \tag{4.8}$$

Les moments d'ordre supérieurs vérifient le théorème de Wick [104], et donc le bruit peut être entièrement défini par ses deux premiers moments. La limite du bruit blanc correspond à une différence d'échelles de temps suffisamment grande entre le temps de corrélation du bruit et le temps caractéristique d'évolution de $A_\pm$. L'amplitude du bruit subi par le motif est $\alpha(R)$. Ce bruit n'est pas d'origine thermique, comme c'est souvent le cas dans pour les problèmes de motifs bruités [39,45,84], ni extérieur (perturbations de l'expérience) mais d'origine turbulente. Il a une amplitude bien plus importante et son temps de corrélation est macroscopique, du fait de la cohérence à grande échelle de la turbulence [61] : on ne peut *a priori* avoir aucune attente précise quant à sa forme par des arguments purement hydrodynamiques. Le cadre de la transition est bien trop peu turbulent pour utiliser les approches de type température turbulente. On le considère comme un bruit blanc à l'échelle (de temps et d'espace) du motif : on justifiera cette approximation de manière expérimentale dans la suite (§ 4.3.1).

La partie déterministe de ce modèle peut être écrite à l'aide du potentiel $V = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}z\, U$ (pour une taille infinie), $V = (1/(L_x L_z)) \int \mathrm{d}x\mathrm{d}z\, U$ pour une taille finie :

$$\begin{aligned} U = -\frac{\epsilon}{2}(|A_+|^2 + |A_-|^2) + \frac{g_1}{4}(|A_+|^4 + |A_-|^4) + \frac{g_2}{2}|A_+|^2|A_-|^2 \\ + \frac{\xi_x^2}{2}\left((\partial_x A_+^r)^2 + (\partial_x A_+^i)^2 + (\partial_x A_-^r)^2 + (\partial_x A_-^i)^2\right) + \frac{\xi_z^2}{2}\left((\partial_z A_+^r)^2 + (\partial_z A_+^i)^2 + (\partial_z A_-^r)^2 + (\partial_z A_-^i)^2\right) \end{aligned} \tag{4.9}$$

On retrouve les équations de Ginzburg–Landau (4.7) en prenant la différentielle de V.

Pour de plus grandes valeurs de ϵ, on s'attend à dévier du comportement simple décrit par l'équation (4.7) ; en particulier, le modèle n'est plus strictement potentiel. Cependant, l'équation d'évolution garde toujours les mêmes traits qualitatifs, en terme de saturation, de compétition entre orientations et de dépendance en espace.

Modèle de Landau–Langevin

On va principalement décrire le comportement de la bande dans des domaines confinés, contenant peu de longueurs d'onde, toutes sous-harmoniques de la taille de la boite [77]. On n'a alors plus de dépendance lente en espace, mais un effet de l'écart au nombre d'onde critique : la taille finie a pour effet de n'autoriser qu'un ensemble dénombrable de nombre d'onde. La plupart du temps, la taille permet une seule longueur d'onde. Certaines tailles intermédiaires permettent une compétition entre deux longueurs d'ondes. On peut déterminer le modèle dans un petit domaine périodique à partir du modèle de Ginzburg–Landau (§ C.2). Ainsi si une seule longueur d'onde est permise, on a :

$$\tau_0 \partial_t A_\pm = \underbrace{\left(\epsilon - \xi_x^2 \delta k_x^2 - \xi_z^2 \delta k_z^2\right)}_{\tilde{\epsilon}} A_\pm - g_1 |A_\pm|^2 A_\pm - g_2 |A_\mp|^2 A_\pm + \zeta_\pm(t)\,, \tag{4.10}$$

avec $\delta k_{x,z} = k_{x,z} - k_{x,z}^{\mathrm{c}}$. La variation lente en espace correspond à l'écart au nombre d'onde idéal $\vec{k}^{\mathrm{c}}$. On pose $\tilde{\epsilon}$ pour simplifier les notations et discussions, on note que pour un vecteur d'onde trop éloigné du vecteur d'onde central, le motif n'existe plus ($\tilde{\epsilon} < 0$). Étant donné la symétrie des termes déterministes, on peut à nouveau écrire le problème sous forme potentielle. :

$$\partial_t A_\pm^{\mathrm{r,i}} = \frac{\partial V}{\partial A_\pm^{\mathrm{r,i}}} + \zeta\,, \tag{4.11}$$

avec

$$V = -\frac{\tilde{\epsilon}}{2}\left(|A_+|^2 + |A_-|^2\right) + \frac{g_1}{4}\left(|A_+|^4 + |A_+|^4\right) + \frac{g_2}{2}|A_+|^2|A_-|^2\,. \tag{4.12}$$

On discute aussi le cas où un vecteur d'onde et son harmonique sont permis dans l'annexe C.2.

On n'utilise pas l'expression commune $\partial/\partial\bar{A}$ (contrairement à [73] par exemple), où $\bar{A}$ est le conjugué de l'amplitude, ne serait ce parce que cette expression n'a pas de sens : le module de la variable complexe n'est pas analytique [82]. Cette écriture n'est utilisée que pour son coté compact. Cela conduirait à introduire un potentiel qui a un facteur multiplicatif par rapport au potentiel effectif du système, ce qui change l'amplitude du bruit dans l'étude statistique.

4.2.3 Traitement du modèle à l'équilibre

On l'exploite principalement pour le cas confiné, sans dépendance en espace, dont la dynamique est décrite par l'équation (4.10). Cette approche est pratique pour discuter des points d'équilibre et de leur stabilité à l'aide de la forme du potentiel. En effet, pour un bruit gaussien, l'équation de Fokker–Planck correspondant à l'équation de Langevin, vérifiée par la pdf $\rho(t, A_+, A_-)$ s'écrit [98] :

$$\tau_0 \partial_t \rho = -{}^t\partial_{A_\pm}\left(\rho \partial_{A_\pm} V + \frac{\alpha^2}{2}\partial_{A_\pm}\rho\right)\,, \tag{4.13}$$

avec le potentiel de l'équation (4.12), en posant $\partial_{A_\pm} = {}^t\left(\partial_{A_+^{\mathrm{r}}}, \partial_{A_+^{\mathrm{i}}}, \partial_{A_-^{\mathrm{r}}}, \partial_{A_-^{\mathrm{i}}}\right)$, en notant ^{t} la transposée. Cette expression peut se transposer dans le cas d'une dépendance en espace.

Généralités sur l'équilibre

De l'expression de l'équation de Fokker–Planck à l'équilibre (stationnaire et sans flux de probabilité), on tire la fonction de partition, écrite pour les parties réelles et imaginaire des paramètre d'ordre :

$$Z = \int \mathrm{d}A_+^r \mathrm{d}A_+^i \mathrm{d}A_-^r \mathrm{d}A_-^i \; e^{-\frac{2V}{\alpha^2}} \,. \tag{4.14}$$

On en déduit la pdf à l'équilibre, écrite pour le module. La phase est une variable neutre, avec une densité de probabilité uniforme, sur laquelle on a intégré. On présentera sa dynamique dans la section suivante 4.3.1. Pour l'équilibre, on se concentre donc sur le comportement du module du paramètre d'ordre. Cela donne alors :

$$\rho = \frac{|A_+||A_-|e^{-\frac{2V}{\alpha^2}}}{\int \mathrm{d}|A_+|\mathrm{d}|A_-|\,|A_+||A_-|e^{-\frac{2V}{\alpha^2}}} \,. \tag{4.15}$$

Le terme multiplicatif $|A_+||A_-|$ correspond à une densité d'état, d'autant plus faible que le module est faible. On a ce résultat général, sous des conditions relativement faibles pour une variable aléatoire complexe (indépendamment de la coloration du bruit ou de la possibilité d'une description potentielle) : la valeur 0 a une probabilité nulle, ce qui traduit la faible probabilité d'annuler simultanément la partie réelle et la partie imaginaire.

On va quantifier le paramètre d'ordre à l'équilibre [3] par ses cumulants. Les principales informations sont contenues dans la moyenne et les fluctuations. C'est ce cadre qui influe sur le choix du type de quantités M et S (Eq. (4.3), Eq. (4.4)) mesurées dans les expériences numériques. On s'intéressera principalement à une expression analytique dans une approche champ moyen, pour ϵ pas trop proche de 0, au premier ordre non nul en α. Les expressions perturbatives à la transition, contenant les ordres suivants sont peu manipulables et peu lisibles, et une estimation numérique à l'aide de la pdf (faisable rapidement) n'est pas systématique.

En première approximation, la pdf peut se développer comme une gaussienne, autour de ses maxima, qui vérifient :

$$0 = -\tilde{\epsilon}A_\pm^2 + g_1 A_\pm^4 + g_2 A_\pm^2 A_\mp^2 - \frac{\alpha^2}{2} \,. \tag{4.16}$$

La moyenne $\langle A_\pm \rangle$ est donnée par la position du maximum (modulo des corrections quand celui ci est proche de 0) et les fluctuations par la dérivée seconde. Le changement qualitatif se fait, comme dans le cas déterministe, autour de $\tilde{\epsilon} = 0$. On décrit les solutions possibles selon les valeurs de ϵ ; on verra que certains points fixes de la version déterministe du modèle (4.12) ne correspondent pas à des extrêma de la pdf. On va voir qu'on passe d'une valeur moyenne proche de 0 à une valeur moyenne non négligeable pour une orientation, et proche de 0 pour la seconde.

On considère d'abord la solution $\langle A_+ \rangle^2 = \langle A_- \rangle^2 = X$, la plus simple à exprimer analytiquement, elle est solution de :

$$0 = -\tilde{\epsilon}X + g_1 X^2 + g_2 X^2 - \frac{\alpha^2}{2} \,,$$

ce qui donne :

$$X = \frac{\tilde{\epsilon} + \sqrt{\tilde{\epsilon}^2 + 2\alpha^2(g_1 + g_2)}}{2(g_1 + g_2)} \,. \tag{4.17}$$

3. NB : équilibre du modèle

On peut l'expliciter au premier ordre. Pour $\epsilon < 0$ ($R > R_\mathrm{t}$) :

$$X = \frac{\alpha^2}{2|\tilde{\epsilon}|} + o(\alpha^2)\,, \tag{4.18}$$

Cette solution correspond à l'état de turbulence uniforme. La moyenne, $\sqrt{X}$ est non nulle ; c'est une conséquence de la taille finie qu'on discutera dans la suite. Et pour $\epsilon > 0$ ($R < R_\mathrm{t}$) :

$$X = \frac{\tilde{\epsilon}}{g_1 + g_2} + o(1)\,.$$

Pour $g_2 > g_1$, cette solution correspond au point col. Pour $g_2 < g_1$, c'est le maximum de la pdf. Il correspondrait à un motif carré, ainsi un modèle de ce type doit avoir $g_2 > g_1$ pour décrire les bandes. On remarque que le point fixe instable à 0 n'a pas d'équivalent en terme d'extrêma de pdf pour $\tilde{\epsilon} > 0$: son existence n'est pas permise par le bruit et le caractère complexe du paramètre d'ordre. (figure 4.11).

Si on cherche maintenant les solutions à $\epsilon > 0$ correspondant aux bandes, on pose $\langle A_\pm \rangle^2 = X$ (l'orientation dominante), $\langle A_\mp \rangle^2 = Y$ (l'orientation dominée). On doit résoudre :

$$\begin{cases} 0 = -\tilde{\epsilon}X + g_1 X^2 + g_2 XY - \frac{\alpha^2}{2} \\ 0 = -\tilde{\epsilon}Y + g_1 Y^2 + g_2 XY - \frac{\alpha^2}{2}\,. \end{cases}$$

On résout au premier ordre en α^2, *i.e.* dans l'esprit du champ moyen. On pose : $X = \tilde{\epsilon}/g_1 + c\alpha^2$ et $Y = b\alpha^2$ et on trouve : $b = 1/\left(2\tilde{\epsilon}(g_2/g_1 - 1)\right)$ et $c = -1/\left(2\tilde{\epsilon}(g_2/g_1 - 1)\right)$, pour trouver les solutions non triviales. Ceci donne :

$$\langle A_\mp \rangle = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2\tilde{\epsilon}\left(\frac{g_2}{g_1} - 1\right)}} + o(\alpha^2)\,, \tag{4.19}$$

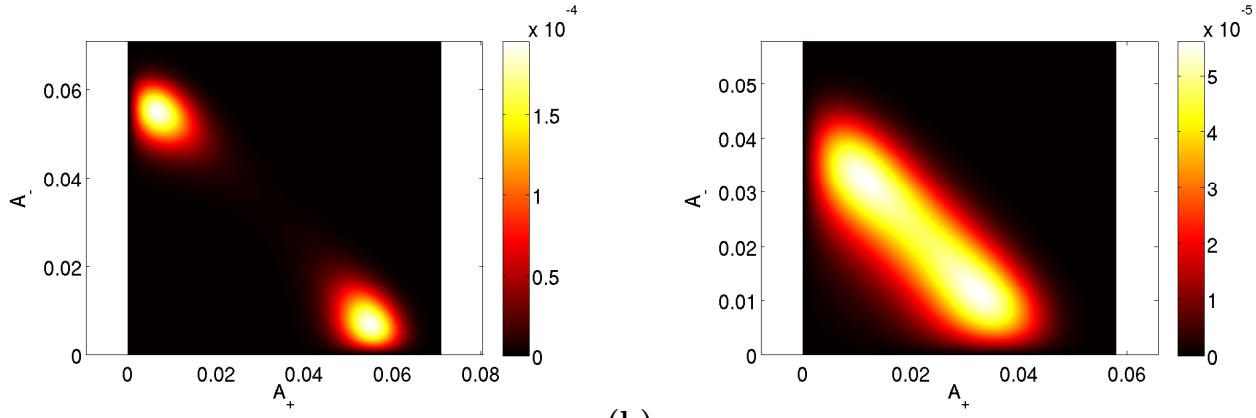
et

$$\langle A_\pm \rangle = \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}}{g_1}} - \frac{\alpha^2 g_1}{4\tilde{\epsilon}\left(\frac{g_2}{g_1} - 1\right)} + o(\alpha^2)\,. \tag{4.20}$$

Qu'on peut écrire à l'ordre $o(1)$ en α :

$$\langle A_\pm \rangle = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{R}{R_\mathrm{t}}\right) - (\xi_x^2(\delta k_x)^2 + \xi_z^2(\delta k_z)^2)}{g_1}}\,. \tag{4.21}$$

Comme pour le point fixe instable à 0, cette solution disparaît complètement pour $g_2 < g_1$. Dans la pdf, tous les maxima qui auraient pu se retrouver à 0 n'existent pas, comme on le voit dans les niveaux de couleur d'un exemple de pdf (Fig. 4.11). La correction au mode développé du motif devient négligeable à grand ϵ, de sorte qu'on peut garder une expression pour laquelle les corrections sont d'ordre $o(1)$ en α. La stabilité de ces solutions est testée à $\alpha = 0$ et $g_1 < g_2$ dans la section 4.2.5. L'équivalent de la courbe de stabilité marginale (notion déterministe), au delà de laquelle la solution proche de 0 (Eq. (4.18)) n'existe plus, est approximativement donnée par $\langle A_\pm \rangle = 0$.



(a) : **(b) :**

FIGURE 4.11 – Exemples de niveaux de couleurs de pdf du modèle pour $R_\mathrm{t} = 355$, $g_1 = 60$, $g_2 = 120$, $\alpha = 0.002$ (a) $R = 290$ (ϵ plus grand) et (b) $R = 330$ (ϵ plus petit).

En développant le potentiel à l'ordre gaussien autour de $\langle A_\pm \rangle$, on en déduit les fluctuations, données par $(1/Z)\int \mathrm{d}A(A - \langle A \rangle)^2 \exp(-V/(2\alpha^2))$ à $\epsilon > 0$:

$$\sigma_A = \frac{\alpha}{2\sqrt{|\epsilon|}}\,, \tag{4.22}$$

et à $\epsilon < 0$:

$$\sigma_A = \frac{\alpha}{\sqrt{2|\tilde{\epsilon}|}}\,.$$

On trace des exemples de pdf (Fig. 4.11), avec des valeurs de paramètres qui correspondent approximativement à ceux que l'on trouve dans la DNS. Dans le même esprit que dans la DNS (Eq. (4.2)Eq. (4.3), Eq. (4.4), Fig. 4.2), on profite de la symétrie de la pdf et on ne considère donc que la moitié du domaine $A_- < A_+$. On peut y retrouver d'une part une comparaison qualitative avec les résultats des DNS (Fig. 4.2), qui sont illustrés par les quantités calculées ici. On y retrouve la croissance de la valeur du maximum de la pdf, donnant approximativement $\langle A \rangle$ avec ϵ, l'impossibilité d'annuler le paramètre d'ordre, traduit par la valeur moyenne non nulle du mode dominé, et la croissance des fluctuations quand ϵ se rapproche de 0, correspondant à l'élargissement de la pdf.

Les corrections dues au bruit et au caractère complexe du paramètre d'ordre sont du même ordre que les premières corrections au champ moyen, mais ont l'intérêt de mettre en évidence simplement un certain nombre de caractéristiques pratiques de la pdf. On compare ces expressions analytiques aux valeurs exactes calculées via la pdf et on compile les résultats sur la figure 4.12. La moyenne présente deux types de comportement (Fig. 4.12 (a)) : la croissance en $\sqrt{\epsilon}$ loin de 0 à $\epsilon > 0$, ainsi que la décroissance lente en $1/|\epsilon|$ à $\epsilon < 0$. Ces deux tendances sont contenues dans le champ moyen, et on a un bon accord entre le champ moyen et la valeur calculée *via* la pdf. Du coté des fluctuations (Fig. 4.12 b)), la valeur calculée grâce à la pdf présente un maximum fini. Le champ moyen approxime bien la croissance rapide de σ près de $\epsilon = 0$, mais diverge pour ϵ trop petit. De plus, la valeur de transition $\epsilon = 0$ déterminée par le champ moyen est différente de celle correspondant au calcul par la pdf, déterminée par le maximum des fluctuations.

On peut de plus tester la stabilité de la solution (4.21) vis à vis des perturbations du nombre d'onde $\delta k_x + q_x, \delta k_z + q_z$. Le calcul est réalisé pour une taille de domaine infinie qui permet des perturbations infinitésimale de vecteur d'onde. On traite le problème à l'ordre 0 en α, qui atteint déjà les limites de résolution analytique. En suivant [19, IV)A)1)a)ii)] (pages 876 et 877) et en utilisant les équations 4.22 et 4.24 dans notre cadre anisotrope, on trouve un taux de croissance σ (le plus élevé) :

$$\sigma = -\left(\epsilon - \xi_x^2\delta k_x^2 - \xi_z^2\delta k_z^2 + \xi_x^2 q_x^2 + \xi_z^2 q_z^2\right) + \sqrt{\left(\epsilon - \xi_x^2\delta k_x^2 - \xi_z^2\delta k_z^2\right)^2 + \left(2\xi_x^2\delta k_x q_x + 2\xi_z^2\delta k_z q_z\right)^2},$$

qui devient positif dès qu'on franchit la surface donnée par :

$$\epsilon = 3\left(\xi_x^2\delta k_x^2 + \xi_z^2\delta k_z^2\right) + 4\frac{-\delta k_x^2 q_z^2\xi_x^2\xi_z^2 - \delta k_x^2 q_z^2\xi_x^2\xi_z^2 + \delta k_x\delta k_z q_x q_z\xi_x^2\xi_z^2}{\xi_x^2 q_x^2 + \xi_z^2} - \left(\xi_z^2 q_z^2 + \xi_x^2 q_x^2\right),$$

Le taux de croissance dépend de la géométrie des perturbations (*via* q_x et q_z), c'est une conséquence de l'anisotropie. On trouve la limite de stabilité pour toutes les perturbations en maximisant le second membre sur (q_x, q_z). Cette instabilité est une instabilité de type eckhaus dans un contexte anisotrope. Ce modèle ne contient pas d'instabilité de type zig-zag, qui n'apparaît que dans les systèmes isotropes. On trace le comportement typique de la courbe de stabilité marginale dans un plan $(\epsilon, \delta k)$ (figure 4.12 (c)). En pratique, pour les plus faibles $\delta k_x, \delta k_z$, on a une surface de stabilité marginale parabolique décrit par nos équations. En régime purement linéaire, le motif peut exister si le système se trouve au dessus de cette surface. On ajoute le tracé schématique de la surface d'instabilité de type Eckhaus pour un système de taille infinie. On ajoute sur cette figure deux exemples de taille finie, avec leurs δk respectifs, indiqués par les deux séries de lignes verticales. On peut schématiquement mettre en évidence les situations pour lesquelles une, ou deux (rarement plus) longueurs d'ondes sont permises pour le système. Dans la majorité des cas, un seul nombre d'onde est permis, il s'agit du cas représenté par les lignes verticales rouge. Tous les autres δk permis par ce type de taille sont clairement en dehors de la surface de stabilité. Lorsque la taille change, deux nombres d'onde peuvent se retrouver dans la fenêtre autorisée (ligne verticale violette). On se retrouve alors avec deux nombre d'onde métastables et quatre situations (orientation et nombre d'onde) possibles. Le système est alors décrit par quatre équations (complexes) couplées qu'on présente rapidement dans l'annexe C.2. Il s'agit là d'une description de principe. Une analyse pour un domaine isotrope de taille finie est nécessaire pour décrire exactement le comportement du système lorsque la taille du système impose deux vecteurs d'ondes. Une telle analyse est plus longue [95] et montre que l'instabilité d'Eckhaus devient sous-critique et que la courbe d'Eckhaus est abaissée par rapport à la courbe de stabilité marginale.

Critère de Ginzburg

Lorsqu'on a déterminé les valeurs des moyennes et des fluctuations du paramètre d'ordre en champ moyen dans la section précédente, on s'est borné à dire qu'on supposait que ϵ était suffisamment grand pour que le potentiel V soit bien approximé par une parabole autour de son maximum et que la pdf ρ est bien approximée par une gaussienne. Pour les plus faibles valeurs de ϵ, par contre, l'effet du terme quartique se fait plus sentir, de sorte que les fluctuations deviennent importante par rapport à la moyenne (Eq. (4.19) et Eq. (4.22)) et on s'attend donc à ce que cette approximation ne soit plus valide. On peut tester la limite de validité de manière systématique, en déterminant un critère dit de Ginzburg sur ϵ en fonction des paramètres du problème. Pour cela, on travaille avec la fonction

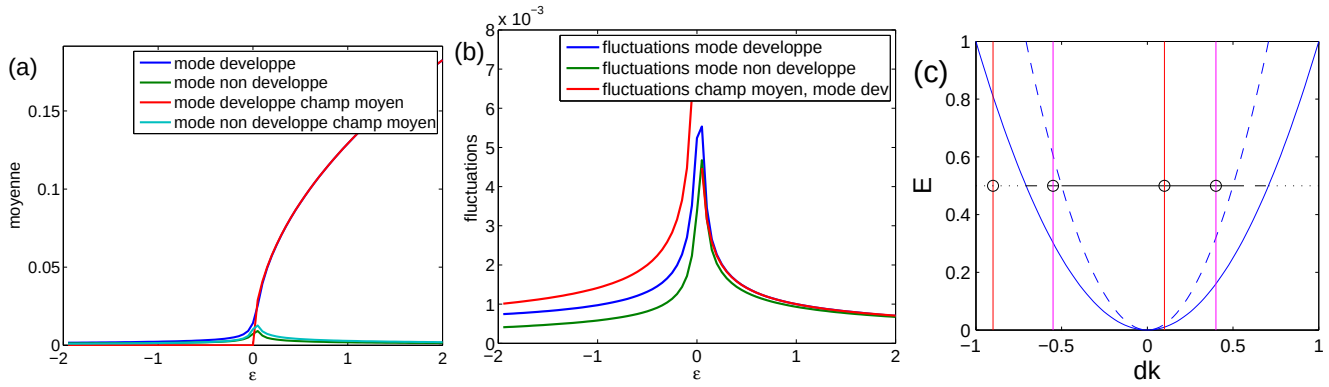


FIGURE 4.12 – Moyenne (a) et fluctuation (b) calculé numériquement par la pdf pour le modèle à l'équilibre et comparé aux valeurs de champ moyen. (c) Courbe schématique de stabilité marginale, prenant en compte la taille finie du domaine.

de partition Z, qu'on développe à l'ordre suivant, et on va déterminer à quelle condition sur ϵ cette correction n'est plus négligeable.

On développe le potentiel au premier ordre au delà de l'ordre gaussien $V_0 \propto (A - \sqrt{\epsilon/g})^2$. Cela fait apparaître dans l'exponentielle des puissances de A supérieure à 2. On développe donc l'exponentielle pour garder une expression traitable analytiquement. Ce développement se justifie : on veut savoir dans quelle mesure les corrections à l'ordre gaussien ont de l'importance *dans la limite du régime de paramètres pour laquelle le facteur exponentiel n'est pas totalement négligeable*. Ainsi, la procédure suivie correspond à l'approximation du potentiel par le comportement quadratique V_0 auquel on ajoute des perturbations ΔV. la fonction de partition $Z = \int \mathrm{d}A \exp(-2V_0/\alpha - 2\Delta V/\alpha)$ s'approxime par :

$$Z \simeq \int \mathrm{d}A \exp(-2V_0/\alpha)(1 - 2\Delta V/\alpha) = \underbrace{\int \mathrm{d}A \exp(-2V_0/\alpha)}_{Z_0} + \int \mathrm{d}A \exp(-2V_0/\alpha)(-2\Delta V/\alpha)$$

soit

$$Z \simeq Z_0(1 - 2\langle \Delta V \rangle_0/\alpha)$$

lorsque l'on fait le développement de l'exponentielle au premier ordre. On compare donc la moyenne avec le poids gaussien des perturbations au potentiel, et on les compare à 1. Le champ moyen est valide si elles sont négligeables. Cela correspond à l'approche systématique de critère de validité du champ moyen [104], bien qu'on retrouve déjà cette idée dans les approches antérieures [54] § 147.

On fait le test dans le cas où on néglige le caractère complexe du paramètre d'ordre, pour la lisibilité. On peut rajouter des effets (correction paramètre d'ordre complexe, borne de l'intégrale *etc.*) à prendre en compte *ad nauseam*, pour obtenir à chaque fois un peu plus de précision, l'approche étant la même. Pour ce calcul on a besoin des dérivées troisièmes du potentiel, prises en $A_\pm$ et $A_\mp$

correspondant au champ moyen (on néglige à cet ordre les effets du bruit). Ainsi, pour $\epsilon > 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 V}{\partial A_\pm^3} & = & 6g_1 A_\pm^{\mathrm{cm}} & = & 6\sqrt{g_1\epsilon} \\ \frac{\partial^3 V}{\partial A_\mp^3} & = & 6g_1 A_\mp^{\mathrm{cm}} & = & 0 \\ \frac{\partial^3 V}{\partial A_\pm^2 \partial A_\mp} & = & 2g_2 A_\mp^{\mathrm{cm}} & = & 0 \\ \frac{\partial^3 V}{\partial A_\pm \partial A_\mp^2} & = & 2g_2 A_\pm^{\mathrm{cm}} & = & 2g_2\sqrt{\frac{\epsilon}{g_1}} \end{cases} .$$

Ce qui donne pour V au second ordre :

$$V = \epsilon\left(A_\pm - \sqrt{\frac{\epsilon}{g_1}}\right)^2 + \frac{\epsilon\left(\frac{g_2}{g_1}-1\right)}{2}A_\mp^2 + \sqrt{g_1\epsilon}\left(A_\pm - \sqrt{\frac{\epsilon}{g_1}}\right)^3 + \frac{g_2}{3}\sqrt{\frac{\epsilon}{g_1}}A_\mp^2\left(A_\pm - \sqrt{\frac{\epsilon}{g_1}}\right) .$$

On a $Z = \int \mathrm{d}A_\pm \mathrm{d}A_\mp \exp\left(-2V/\alpha^2\right)$. En pratique, le domaine d'intégration est $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. On fait un premier changement de variables : $u = \sqrt{2}\left(A_\pm - \sqrt{\epsilon/g_1}\right)$ et $y = \sqrt{(g_2/g_1 - 1)}A_\mp$. À ce niveau on peut changer le domaine d'intégration en $[0; +\infty]$, mais cela a peu d'effet sur le reste de la discussion. Ce qui donne :

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{g_2}{g_1}-1\right)}}\int \mathrm{d}u\mathrm{d}y \exp\left(-\epsilon\frac{u^2+y^2}{\alpha^2} - \frac{\sqrt{g_1\epsilon}u^3}{\alpha^2\sqrt{2}} - \frac{2g_2\sqrt{\epsilon}uy^2}{3\sqrt{2}\alpha^2\sqrt{g_1}\left(\frac{g_2}{g_1}-1\right)}\right) .$$

Pour simplifier les notations, on pose :

$$\gamma_1 = \frac{\epsilon}{\alpha^2} \quad , \gamma_2 = \frac{\sqrt{g_1\epsilon}}{\alpha^2\sqrt{2}} \quad , \gamma_3 = \frac{\sqrt{2}g_2\sqrt{\epsilon}}{3\alpha^2\sqrt{g_1}\left(\frac{g_2}{g_1}-1\right)} \quad , \tilde{Z} = \sqrt{2\left(\frac{g_2}{g_1}-1\right)}Z ,$$

ce préfacteur ne change pas la discussion, il est le même pour tous les ordre et ne dépend pas du bruit α et de l'écart au seuil ϵ. $\gamma_{1,2,3}$ sont des inverses de fluctuation au carré. On peut alors réécrire Z :

$$\tilde{Z} = \int \mathrm{d}u\mathrm{d}y \exp\left(-\gamma_1(u^2+y^2)\right)\exp\left(-\gamma_2 u^3 - \gamma_3 y^2 u\right) .$$

On développe le second exponentiel au premier ordre, ce qui donne :

$$\tilde{Z}\int \mathrm{d}u\mathrm{d}y \exp\left(-\gamma_1(u^2+y^2)\right)\left(1 - \gamma_2 u^3 - \gamma_3 y^2 u\right) ,$$

$\tilde{Z}$ est alors la somme de trois termes :

$$\tilde{Z} = \underbrace{\left(\int \mathrm{d}u \exp\left(-\gamma_1 u^2\right)\right)^2}_{\pi/(4\gamma_1)} - \gamma_2 \underbrace{\left(\int \mathrm{d}y \exp\left(-\gamma_1 y^2\right)\right)}_{\sqrt{\pi}/(2\sqrt{\gamma_1})} \underbrace{\left(\int \mathrm{d}u\, u^3 \exp\left(-\sigma u^2\right)\right)}_{1/(2\gamma_1^2)}$$
$$- \gamma_3 \underbrace{\left(\int \mathrm{d}u\, u \exp\left(-\gamma_1 u^2\right)\right)}_{1/\gamma_1} \underbrace{\left(\int \mathrm{d}y\, y^2 \exp\left(-\gamma_1 y^2\right)\right)}_{\sqrt{\pi}/(4\gamma_1^{3/2})} .$$

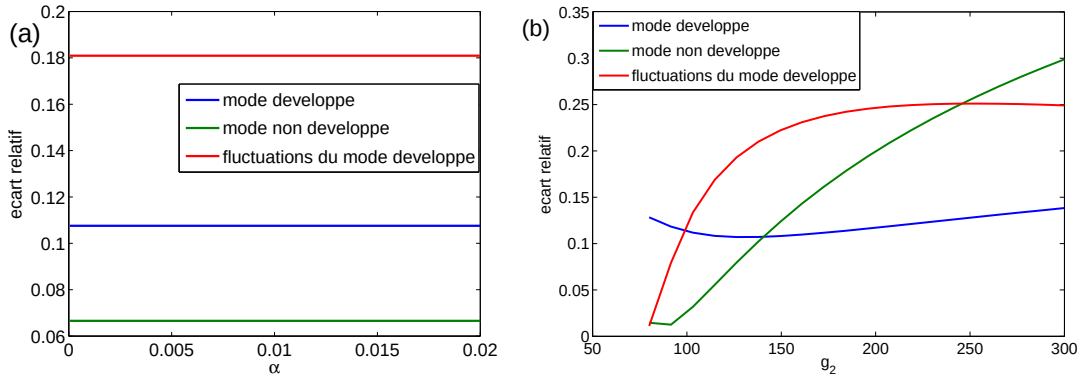


FIGURE 4.13 – Écart relatif pour la moyenne et les fluctuations entre le champ moyen à ϵ_g en fonction de α (a, $g_1 = 60$, $g_2 = 120$) et de g_2 (b, $g_1 = 60$)

On réorganise l'ensemble :

$$\tilde{Z} = \frac{\pi}{4\gamma_1} - \frac{\gamma_2\sqrt{\pi}}{2\gamma_1^{\frac{5}{2}}} - \frac{\gamma_3\sqrt{\pi}}{4\gamma_1^{\frac{5}{2}}} .$$

Et, en remplaçant les coefficients par leur valeurs :

$$\tilde{Z} = \frac{\pi\alpha^2}{4\epsilon} - \frac{\sqrt{\pi}\alpha^5}{2\epsilon^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\alpha^2}\sqrt{\frac{g_1}{2}} + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\alpha^2}\sqrt{\frac{2}{g_1}}\frac{g_2}{3\left(g_2/g_1 - 1\right)}\right) ,$$

soit :

$$\tilde{Z} = \frac{\pi\alpha^2}{4\epsilon}\left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\frac{g_1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{g_1}}\frac{g_2}{3\left(g_2/g_1 - 1\right)}\right)\right) .$$

Les corrections deviendront non négligeable si

$$1 \lesssim \frac{\alpha}{\epsilon}\left(\sqrt{\frac{2g_1}{\pi}} + \frac{2\sqrt{2}g_2}{3\sqrt{\pi}\left(g_2/g_1 - 1\right)\sqrt{g_1}}\right) . \tag{4.23}$$

On pose alors ϵ_g, la valeur de ϵ donnant le critère de Ginzburg :

$$\epsilon_g = \alpha\left(\sqrt{\frac{2g_1}{\pi}} + \frac{2\sqrt{2}g_2}{3\sqrt{\pi}\left(g_2/g_1 - 1\right)\sqrt{g_1}}\right) . \tag{4.24}$$

Le rapport $\alpha\sqrt{g_1}/\epsilon$ donne la loi d'échelle vérifiée par l'écart au seuil limite, les termes correctifs seront non négligeables pour ϵ petit, par rapport à $\alpha^{1/3}$, le second terme modifie un peu le critère selon les coefficients g_1 et g_2, en particulier le terme $1/(g_2/g_1 - 1)$, si le rapport g_2/g_1 est proche de $g_2/g_1 \gtrsim 1$ (proche du régime ou le minimum de V correspond aux "carrés"), le critère est difficilement vérifié, même pour des valeurs pas trop petites de ϵ. Comme on le discute dans la section suivante, le système passe facilement d'une orientation à une autre. Ainsi, il est mal décrit par le champ moyen gaussien qui correspond à une orientation relativement fixe.

On illustre ce critère à l'aide de l'écart relatif entre le champ moyen et les valeurs exactes, visible dans la figure 4.12, donné par l'écart relatif entre les résultats des équations (4.19) ($\langle A_\pm \rangle$), 4.20

($\langle A_{\mp}\rangle$) et 4.22 (σ_A) et les moyennes et fluctuations calculées numériquement en utilisant le potentiel. (Fig. 4.13). L'indépendance en α vient valider la loi d'échelle $\epsilon_g \propto \alpha\sqrt{g}$. L'écart relatif est encore faible à la limite de validité du champ moyen donnée par le critère de Ginzburg. La dépendance en g_2 est faible pour la moyenne du mode développé, (on a le même résultat pour g_1), plus importante pour les autres grandeurs. Les fluctuations et la moyenne du mode non développé prennent des valeurs moins importantes et sont plus sensibles que la moyenne, en particulier à l'inexactitude de l'approximation par une gaussienne symétrique autour de 0, ainsi qu'au caractère complexe du paramètre d'ordre. On peut corriger ces problèmes en complétant ΔV et en approfondissant le calcul des intégrales gaussiennes.

On peut retrouver la loi d'échelle à l'aide d'arguments qualitatifs [54] § 146. En effet, le champ moyen est correct tant que l'effet des fluctuations se fait peu sentir par rapport à la valeur de la moyenne. Dans un système sans extension spatiale il suffit alors de comparer les fluctuations $\sigma = \alpha/(2\sqrt{\epsilon})$ à la moyenne $\langle A\rangle = \sqrt{\epsilon/g_1}$, le rapport $\alpha\sqrt{g_1}/(2\epsilon)$ doit être petit devant 1 pour que le champ moyen soit valide. On retrouve ainsi la même loi d'échelle, mais sans les précisions apportées sur les autres effets (compétition d'orientation *etc.*).

Comparaison aux simulations numériques du modèle de Langevin

On peut réaliser des simulations numériques du modèle de Landau–Langevin pour échantillonner des pdf, calculer la moyenne et les fluctuations des modes développés et non développés et comparer au calcul réalisé grâce à la pdf. La figure 4.14 illustre le même cas que la figure 4.12. Sur toute la gamme de $\epsilon > 0$ (motif existant) et pour $\epsilon < 0$, on a accord entre les deux méthodes de calcul de la moyenne (Fig. 4.14 (a)). La situation est différente pour le calcul des fluctuations (Fig. 4.14 (b)). Pour $|\epsilon|$ proche de 0, l'accord entre les deux méthodes de calcul est relativement bon, avec quelque légers écarts. La situation est assez différentes pour ϵ plus grand : les fluctuations ne sont pas calculées avec précision à l'aide des séries temporelles, et le résultat est relativement bruité. D'autre part, il apparaît un écart relativement conséquent avec le calcul fait par la pdf, en particulier pour le mode développé. L'origine de cet écart n'est pas bien comprise. Ces valeurs dévient bien évidemment des fluctuations calculées en champ moyen (Fig. 4.12 (b)), qui elles, s'accordent bien avec les calcul grâce à la pdf. Cela peut rendre plus difficiles les comparaisons entre champ moyen et simulations numériques de Navier–Stokes.

4.2.4 Dynamique autour de l'équilibre

On commence par une mise en équation simplifiée et plus intuitive de la dynamique de la phase et du module du paramètre d'ordre à partir de l'équation de Landau-Langevin (4.10). On se place autour de l'équilibre, autour du minimum de potentiel, on ne prend donc pas en compte les changements d'orientation. Même de manière heuristique, on prend garde aux subtilités du changement de variable non-linéaire $A^r, A^i \to A, \phi$ qu'on a réalisé. Pour ce faire on réalise ce changement de variable de manière plus rigoureuses en partant de l'équation de Fokker–Planck. On obtient en particulier une équation pour la dynamique du module du paramètre d'ordre. On tire des comportements typique des fluctuations en temps qu'on teste contre l'intégration numérique du modèle. Cela nous permet de discuter dans quelle mesure on peut traiter la croissance "exponentielle" du paramètre d'ordre partant de 0.

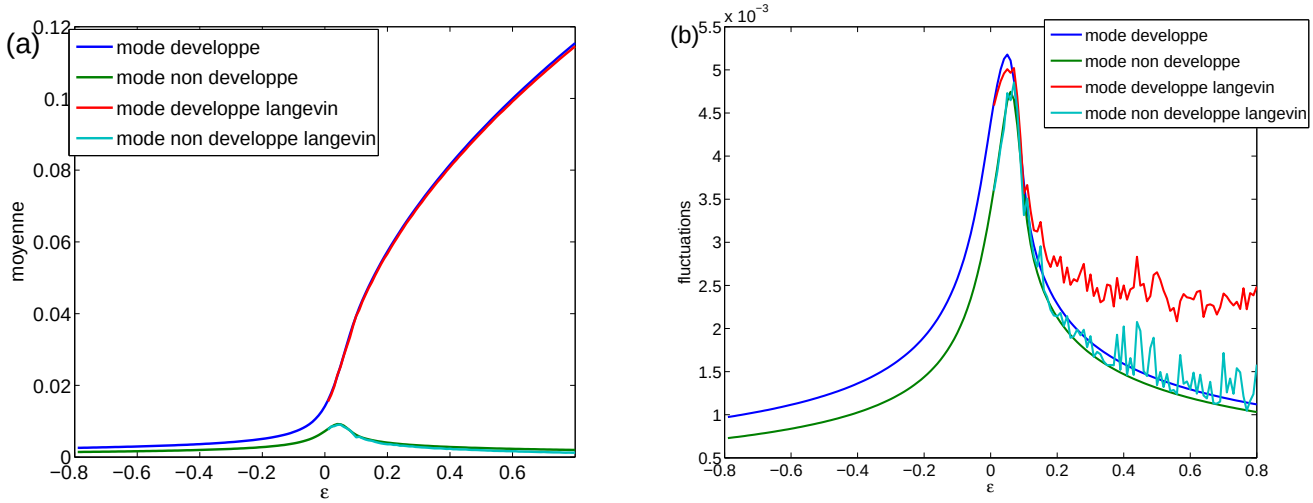


FIGURE 4.14 – Comparaison entre les moyennes et fluctuations calculées numériquement par la pdf, et les moyennes et fluctuations des séries temporelles de la simulation numérique du modèle de Langevin. (a) : moyenne, (b) : fluctuations

Des subtilités des changements de variables dans les équations de Langevin

Les changements de variable non linéaire dans une équation de Langevin pour une variable aléatoire $f(t)$:

$$f'(t) = G(f) + H(f)\zeta(t)$$

nécessitent une attention particulière en ce qu'ils font apparaître des termes du type $I(f)\zeta(t)$, avec G une fonction de f (non constante), même lorsque H est constant. La signification que prend ce terme va dépendre de la règle de discrétisation de l'équation différentielle [35, 44, 98] intégrée entre t et $t + dt$:

$$f(t + dt) - f(t) = dtG(f_\nu) + H(f_\nu) \int_t^{t+dt} \mathrm{d}t'\, \zeta(t')$$

où G et H sont évalué pour $f_\nu = \nu f(t + dt) + (1 - \nu)f(t)$. L'équation prend des sens différents selon la valeur de ν, en particulier, $H(f)$ et le terme de bruit ne sont pas corrélés pour $\nu = 0$ (dite d'Itô). Les changements de variables non linéaires se font de la même manière que pour une équation différentielle déterministe si l'on a pris $\nu = 1/2$ (dite de Stratonovitch) dans l'équation de départ. Si l'on utilise la règle d'Itô, on peut prendre plusieurs approches équivalente : passer en $\nu = 1/2$, faire le changement de variable puis repasser en $\nu = 0$, faire le changement de variable dans l'équation de Fokker–Plank ou faire le changement de variable en $\nu = 0$ en appliquant la formule d'Itô [35]. On choisit l'approche la plus simple selon le cas. Ainsi, l'équation de Fokker–Planck pour la pdf $P(f, t)$ s'écrit de manière générale en fonction de ν :

$$\partial_t P = -\partial_f \left(\left(G + \alpha^2 \nu H H' \right) P \right) + \frac{1}{2} \partial_f^2 \left(\alpha^2 H^2 P \right) .$$

En particulier, changer ν a pour conséquence d'introduire un terme supplémentaire, dépendant de l'amplitude α du bruit, dans la partie déterministe de l'équation de Langevin. On parle de dérive fantôme, qui se retrouve quelque soit l'approche suivie pour le changement de variable. On passe souvent en règle $\nu = 0$ dans le résultat finial pour simplifier le terme de bruit, et on obtient une nouvelle équation de Langevin avec une dérive. Le cas du passage $A_r, A_i \to A, \phi$ est légèrement plus complexe, mais va se faire dans le même esprit et va faire intervenir le même type de dérive. On travaillera avec l'équation de Fokker–Planck (provenant d'une équation de Langevin où $H = 1$), dans laquelle aucun problème de définition ne se pose. On y fera le changement de variable, puis on en tirera les équations de Langevin pour A et ϕ en règle $\nu = 0$ (sans corrélation entre bruit et variables A, ϕ).

Équations générales pour la dynamique d'un mode

En terme d'équation de Fokker–Planck [35, 98], partant de l'équation (4.13), on peut écrire pour une seule orientation possible :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial A_r}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial A_r}\right) + \frac{\partial}{\partial A_i}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial A_i}\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial A_r^2} + \frac{\partial^2}{\partial A_r^2}\right)\mu\,,$$

avec μ la pdf effective, $A_{r,i}$ les parties réelles et imaginaires du paramètre d'ordre et V le potentiel. On traite le cas pour une seule orientation ; on peut faire de même pour deux orientations couplées, le changement de variable étant sans conséquence sur ce couplage. En posant le module A et la phase ϕ on a alors :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial A}\left(A\mu \frac{\partial V}{\partial A}\right) + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\mu \frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial \phi}\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial A}\left(A\frac{\partial \mu}{\partial A}\right) + \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}(\mu)\right).$$

On écrit $A\partial\mu/(\partial A) = \partial(A\mu)/\partial A - \mu$ et on regroupe les dérivées premières et secondes de μ :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial A}\left(A\mu\left(\frac{\partial V}{\partial A} - \frac{\alpha^2}{2A}\right)\right) + \frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial A^2}(A\mu) + \frac{\alpha^2}{2A^2}\frac{\partial^2 \mu}{\partial \phi^2}\,.$$

En multipliant l'ensemble par A et en réintroduisant ρ la pdf du module et de la phase on retrouve :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial A}\left(\rho \frac{\partial}{\partial A}\left(V - \frac{\alpha^2}{2}\ln(A)\right)\right) + \frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial A^2} + \frac{\alpha^2}{2A^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial \phi^2}\,.$$

Le changement de variable non linéaire effectué a un effet non trivial sur la dynamique du module, en introduisant le terme $\alpha^2/2\ln(A)$ dans la partie "déterministe" de l'équation de Fokker–Planck, et permet d'expliciter le terme de dérive $\frac{\alpha^2}{2A}$ qu'on attend du changement de variables non linéaire. C'est ce terme qui interdit au module de visiter le voisinage de 0 dans la dynamique. Il est négligeable si A est développé. On a alors comme équation d'évolution de Langevin :

$$\begin{cases} \partial_t \phi = \frac{\tilde{\alpha}}{A}\zeta_1(t) \\ \partial_t A = -\partial_A V + \frac{\alpha^2}{2A} + \zeta_2(t) \end{cases} \tag{4.25}$$

Dans cette équation, ζ_1 et ζ_2 sont deux bruits blancs gaussien décorrélés.

Dynamique autour du mode développé

On reprend les équations (4.25), qu'on étudie autour du mode développé de module $A = \sqrt{\epsilon/g_1}$. Ainsi, la phase suit une équation d'évolution du type :

$$\tau_0 \partial_t \phi = \frac{1}{\langle A \rangle + (A - \langle A \rangle)} \zeta_1 \,. \tag{4.26}$$

L'effet de la moyenne de A et celui de ses fluctuations est mis en évidence dans le dénominateur. Cette écriture est pratique pour une bande qui ne subit par de changement d'orientation durant un temps très long (typiquement ϵ suffisamment grand). Le terme ζ_1 a une pdf donnée par :

$$\frac{\exp\left(\int \mathrm{d}t\, \zeta_1^2(t)/(2\alpha^2)\right)}{\int \mathrm{D}\zeta_1 \exp\left(\int \mathrm{d}t\, {\zeta_1}^2(t)/(2\alpha^2)\right)} \,.$$

On note $D\zeta$ pour indiquer qu'il s'agit là d'une intégrale de type intégrale de chemin. donnant une autocorrélation :

$$\langle \zeta_1(t)\zeta_1(t') \rangle = \alpha^2 \delta(t - t') \,.$$

L'approche de moyenne d'ensemble des séries temporelles (Eq. (4.5), Eq. (4.6), Eq. (4.30)) est réalisé dans cette esprit. L'échantillonnage de séries temporelles par découpage donne un ensemble de fonctions en temps $f(t)$ répartie selon leur distribution, sur laquelle on intègre pour obtenir moyenne et fluctuations.

On obtient en faisant ce changement de variable pour le module du paramètre d'ordre

$$\tau_0 \partial_t A = \tilde{\epsilon} A - g_1 A^3 + \frac{\alpha^2}{2A} + \zeta_2 \,.$$

On suppose en bonne approximation que le terme de dérive $\frac{\alpha^2}{2A}$ est négligeable lorsque A est développé. On peut donc traiter, en bonne approximation, de manière simplifiée les fluctuations de ces deux variables autour du point d'équilibre. On discutera des fluctuations loin de l'équilibre dans la suite. On adimensionne tous les temps par τ_0

On commence par le module. On part de l'équation d'évolution de l'écart au module moyen $f = A - \langle A \rangle$ approximée au premier ordre :

$$\partial_t f = -ef + \zeta_2(t) \,.$$

En champ moyen on a $e = 2\epsilon$. Lorsque ϵ est plus important, on sort du développement de l'équation de Landau. le terme e dévie de 2ϵ, mais le type d'équation reste valable. Le potentiel correspondant est $V = ef^2/2$, et la pdf : $\rho \propto \exp(-ef^2/\alpha^2)$. Cette pdf redonne comme valeur des fluctuations : $\sigma^2 = \alpha^2/(2e)$ On a alors :

$$f(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' \exp\left(-e(t - t')\right) \zeta_2(t') \,.$$

D'où

$$f(t)f(t') = \int_0^t \int_0^{t'} \mathrm{d}t'' \mathrm{d}t''' \zeta_2(t'')\zeta_2(t''') \exp\left(-e\left(t + t' - t'' - t'''\right)\right) \,.$$

En prenant la moyenne d'ensemble :

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \int_0^t \int_0^{t'} \mathrm{d}t''\mathrm{d}t'''\alpha^2\delta(t''-t''')\exp\left(-e\left(t+t'-t''-t'''\right)\right) .$$

on a supposé ici que t était plus grand que t'. On en déduit :

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \alpha^2\exp\left(-e(t+t')\right)\int_0^t \mathrm{d}t''\exp\left(-e\left(-2t''\right)\right) .$$

Soit :

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \frac{\alpha^2}{2e}\exp\left(-e(t+t')(\exp(2et')-1)\right) ,$$

On en déduit, pour t' et t suffisamment grand devant 0 la fonction d'autocorrélation de f :

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \frac{\alpha^2}{2e}\exp\left(-e|t-t'|\right) .$$

Pour $t=t'$, on a :

$$\langle f(t)f(t)\rangle = \frac{\alpha^2}{2e}\left(1-\exp(-2et)\right) , \tag{4.27}$$

qui permet de tester simplement la convergence de la fonction d'autocorrélation quand t et t' sont grands devant $\frac{\tau_0}{4\epsilon}$. En redimensionalisant les temps on a :

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \frac{\alpha^2}{2e}\exp\left(-\frac{e}{\tau_0}|t-t'|\right) , \tag{4.28}$$

En prenant $t=t'$ (grands), et en remplaçant $e=2\epsilon$ on retrouve les fluctuations au carré (Eq. (4.22)).

On passe maintenant à la phase. Le "bruit" vu par la phase est de la forme :

$$b(t) = \frac{\alpha\zeta_1(t)}{\langle A\rangle + f(t)} .$$

On utilise le fait que ζ_2 et ζ_1 sont décorrélés. La moyenne de b est clairement nulle. On a, en posant $\beta = \alpha/\langle A\rangle$:

$$\langle b(t)b(t')\rangle = \frac{\alpha^2\langle\zeta_1(t)\zeta_1(t')\rangle}{\langle A\rangle^2}\left(\frac{1}{1+\beta\int_0^t \mathrm{d}t''e^{-e(t-t'')}\langle\zeta_2(t'')\rangle + \beta\int_{-0}^{t'}\mathrm{d}t'''e^{-e(t'-t''')}\langle\zeta_2(t''')\rangle} + \frac{1}{\beta^2\int_0^t\int_0^{t'}\mathrm{d}t''\mathrm{d}t'''e^{-e(t+t'-t''-t''')}\langle\zeta_2(t'')\zeta_2(t''')\rangle}\right) ,$$

puis

$$\langle b(t)b(t')\rangle = \frac{\alpha^2}{\langle A\rangle^2}\frac{\delta(t-t')}{1+\beta^2\int_0^t\int_0^{t'}\mathrm{d}t''\mathrm{d}t'''\exp(-e(t+t'-t''-t'''))\delta(t''-t''')} ,$$

en prenant (le choix est indiférent) $t' > t$. On a :

$$\langle b(t)b(t')\rangle = \frac{\alpha^2}{\langle A\rangle^2}\frac{\delta(t-t')}{1+\beta^2\exp(-e(t+t'))\int_0^t dt''\exp(2et'')}\,,$$

puis avec t "suffisamment" grand :

$$\langle b(t)b(t')\rangle = \frac{\alpha^2}{\langle A\rangle^2}\frac{\delta(t-t')}{1+\beta^2\frac{e^{-e(t+t'-2t)}}{2e}}\,.$$

Ce qui donne de manière générale :

$$\langle b(t)b(t')\rangle = \frac{\alpha^2}{\langle A\rangle^2}\frac{\delta(t-t')}{1+\frac{\beta^2 e^{-e|t'-t|}}{2e}}\,,$$

soit, si on écrit l'équation d'évolution de la phase :

$$\partial_t\phi = \frac{\tilde{\alpha}}{\langle A\rangle}\zeta(t)\,.$$

On a finalement :

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{2\langle A\rangle e}}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\langle A\rangle^2}}}\,.$$

Et $\zeta(t)$ un bruit blanc gaussien de variance 1. Les fluctuations vérifient :

$$\langle\phi(t)\phi(t')\rangle = \frac{\tilde{\alpha}^2 t}{\langle A\rangle^2}\,,$$

ou en redimensionalisant les temps :

$$\langle\phi(t)\phi(t')\rangle = \frac{\tilde{\alpha}^2 t}{\langle A\rangle^2\tau_0}\,, \tag{4.29}$$

Détermination phénoménologique de la fonction d'autocorrélation du module

On suit la même procèdure de moyennage d'ensemble qu'au paragraphe § 2.3, à l'aide d'échantillons de longueur T_0. À partir de $f = A - \langle A\rangle$, on définit

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left((f(t+(i-1)T_0) - f((i-1)T_0))\,(f(t'+(i-1)T_0) - f((i-1)T_0))\right. \tag{4.30}$$

Comme pour la détermination des moyennes d'ensemble de la phase, cette procédure nécessite suffisamment d'échantillons pour converger. Ce type de détermination donne des cartes de $\langle f(t)f(t')\rangle$ en fonction de t et t' présentée sur la figure. 4.15 (a) en niveaux de couleurs. Celle-ci sont comme attendu symétriques par rapport à la droite $t' = t$. On peut ensuite tracer la fonction d'autocorrélation en fonction de $|t-t'|$ en en prenant la valeur sur une droite à t ou t' constant (Fig. 4.15 (b)). Cela ne dépendant pas des temps t et t' choisis s'ils sont suffisamment important pour que l'approximation de la fonction d'autocorrélation par une exponentielle décroissante soit valide (Eq. (4.27)).

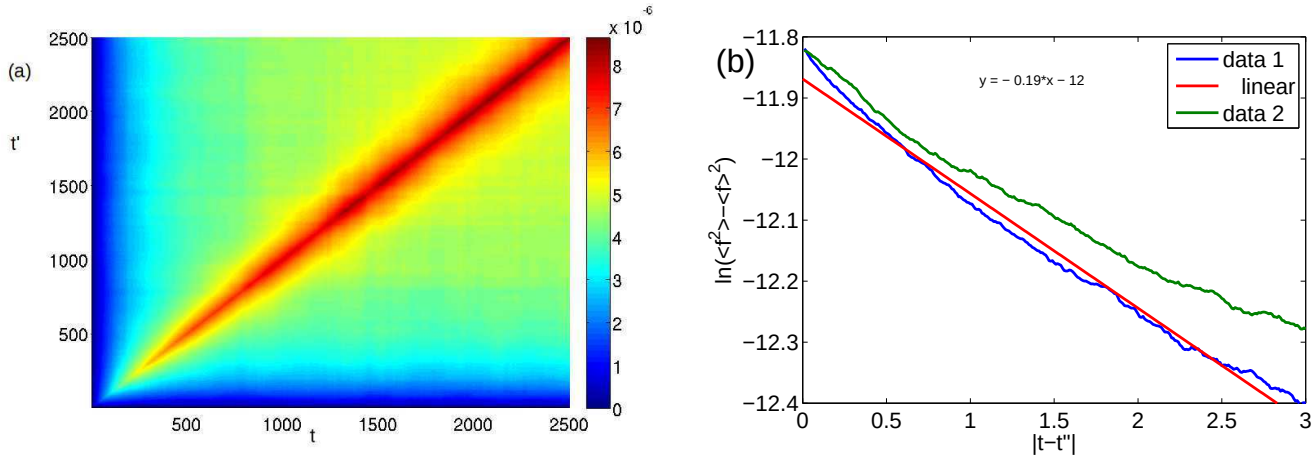


FIGURE 4.15 – Résultat de la simulation numérique du modèle de Landau–Langevin pour $\epsilon = 0.29$, $\alpha = 0.002$, $g_1 = 1$, $g_2 = 2$: (a) Logarithme de la fonction d'autocorrelation $\ln\langle f(t)f(t')\rangle$ dans le plan t, t', (b) valeur sur une tranche et estimation de la pente.

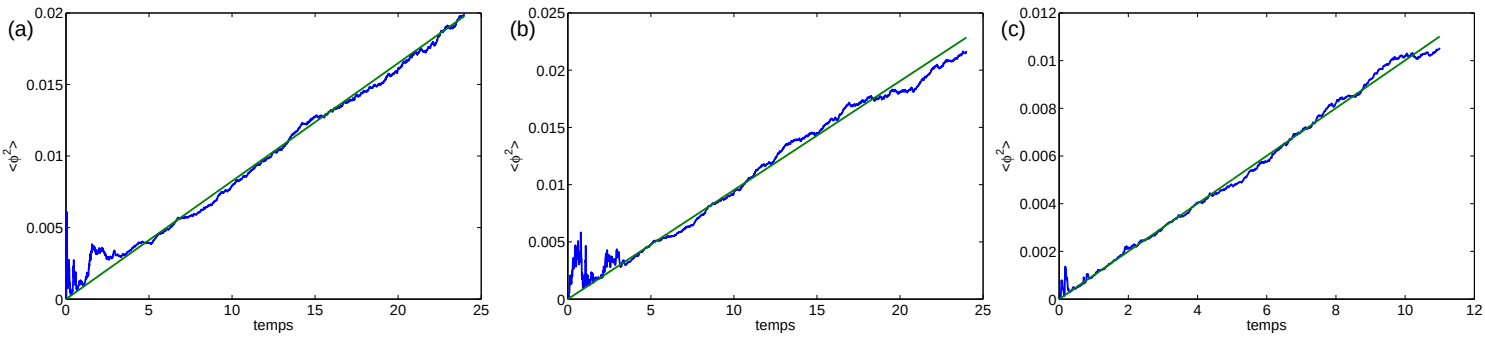


FIGURE 4.16 – Exemple de fluctuation de la phase pour une simulation du modèle de Landau–Langevin, avec comme paramètres $\alpha = 0.002$, $g_1 = 60$, $g_2 = 120$, (a) $\epsilon = 0.29$, (b) 0.25 et (c) 0.24

Comparaison entre résultats analytiques et résolution numérique du modèle de Langevin

On veut vérifier la qualité de la procédure de détermination de moyennes d'ensemble des séries temporelles, en la comparant aux résultats analytiques. On simule le modèle de Langevin pour plusieurs valeurs de ϵ, et on détermine l'évolution des fluctuations de la phase. On extrait la pente de $\langle\phi(t)^2\rangle$ et on applique le résultat précédent (Eq. (4.29)) pour en déduire α connaissant moyenne et fluctuations de A. Pour un $\alpha = 0.002$ dans la simulation numérique, on détermine à partir de la pente (Fig. 4.16) 0.00199, et ce, pour chaque valeur de ϵ. Ceci confirme numériquement le résultat analytique de l'équation 4.29, et permet de valider la méthode de calcul de moyenne d'ensemble des séries temporelles.

On teste le comportement de la fonction d'autocorrélation sur le modèle à l'aide de la procédure précédente. On replace les résultats sur la figure 4.15. La fonction d'autocorrélation croît rapidement sur la droite $t = t'$, prévue dans le calcul analytique (Eq. (4.27)). La fonction d'autocorrélation décroît

très rapidement lorsque l'on s'éloigne de la droite $t = t'$ sur ses niveaux de couleur en fonction de t et t' (Fig. 4.15 (a)). On trace la fonction d'autocorrélation en fonction de $|t-t'|$, pour t et t' assez grands, en linéaire-logarithmique pour la comparer à l'exponentiel décroissante issue du modèle (Eq. (4.28)). L'accord qualitatif avec la tendance attendue est bon. De manière plus quantitative, on peut comparer l'ordonnée à l'origine (-12) et la pente (0.19), obtenus par ajustement, à $\ln(\alpha^2/4\epsilon) = -12.2$ et $2\epsilon = 0.58$, les valeurs attendues dans le modèle. L'écart sur α est de 10%, celui sur ϵ/τ_0 de 60%. On prend garde au fait que ce calcul à été fait à $\tau_0 = 1$ et que l'effet de ce paramètre n'est pas testé.

Transitoires et effet du paramètre τ_0

La question du transitoire durant la croissance du paramètre d'ordre est moins simple que dans le cas légèrement dissymétrisé par la rotation de l'écoulement de Taylor–Couette [73], où l'une des deux orientations est favorisée, il faut extraire la tendance exponentielle de la compétition entre les deux orientations, compliquée par le bruit. On se penche plus en détail sur ce problème dans le chapitre suivant, consacré à la formation de trous dans un milieu turbulent, dans lequel est inclus les expériences de trempe. L'autre problème est l'effet du bruit et du caractère complexe du paramètre d'ordre sur la croissance lorsque celui ci est petit. On peut s'en donner une idée *via* la solution de l'équation (4.25), où ζ et les termes de saturation sont oubliés. On prend garde au fait que cette solution ne correspond pas au comportement moyen, à cause du terme en α^2/A. On trouve alors :

$$A(t) = A_0 \exp \frac{\epsilon t}{\tau_0} \sqrt{(1 - \frac{\alpha^2}{2\epsilon A_0^2}) + \frac{\alpha^2}{2\epsilon A_0^2} \exp\left(-\frac{2\epsilon t}{\tau_0}\right)} \tag{4.31}$$

La condition initiale, généralement non nulle et causée par le bruit est d'ordre $A_0 \sim \frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon'}}$. Cette solution, valide lorsque A n'est pas trop grand, indique que la croissance exponentielle en moyenne d'ensemble est une bonne approximation passé un certain temps.

En pratique, suivre les transitoire permet d'estimer R_{t} de manière classique par le ralentissement critique et permet aussi une estimation de τ_0

4.2.5 Comportement loin de l'équilibre

On décrit maintenant les excursions du module loin des minima du potentiel, par opposition aux cas précédents où l'on se concentrait sur les fluctuations autour de l'équilibre dans le puis. Dans le cas à deux états $A_\pm$, on s'attend au saut d'un minimum vers l'autre passant par le col. Le problème est abordé en terme de temps de premier passage. On peut résumer le principe qualitatif de la dynamique sur la figure 4.17. Sous l'effet du bruit, l'état du système peut simplement fluctuer autour du minimum et être rappelé par le potentiel (chemin 1), que l'on a décrit précédemment. Si les fluctuations sont suffisamment importantes, on peut voir apparaître des excursions vers le col (chemin 2 et 3). La courbure du potentiel au col étant relativement faible, l'effet du bruit à ce niveau peut pousser le système vers l'un ou l'autre minimum, entraînant un retour vers le puits initial (chemin 2) ou amener le système dans le second puis (chemin 3). Partant du col, les deux possibilités sont équiprobables du fait de la symétrie du système. Cette description met en avance les fluctuations du système une fois arrivé au col, contrairement à une image déterministe où le système continue sa trajectoire après avoir atteint le col.

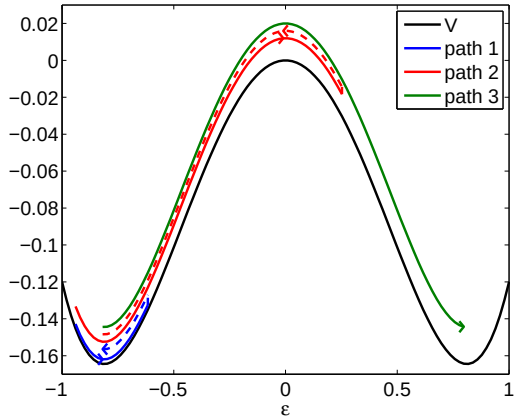


FIGURE 4.17 – Schéma de principe de l'échappement des puis. Les échelles de ϵ et V sont arbitraires

On peut quantifier ce comportement en terme du temps de premier passage d'un puis vers un autre, dans le même esprit que le traitement des séries temporelles (§ 4.1.3). On exprime ce temps de premier passage à l'aide des paramètres du modèle. On ne prend pas en compte ici les corrections d'ordre supérieur à $o(1)$ en α : elles sont du même ordre que les corrections que l'on peut apporter à l'approximation de type méthode du col. La gamme de valeurs de ϵ sur laquelle l'approximation est valable peut être estimée de la même manière que le critère de Ginzburg (Eq. (4.24), pp 115). L'étude hors d'équilibre permet de pousser la comparaison entre le modèle et la phénoménologie de l'écoulement de Couette plan. D'un point de vue quantitatif, cela permet de tester l'estimation des paramètres α et g_2 faite dans l'étude à l'équilibre où autour de l'équilibre.

L'idée du calcul du temps de premier passage réside dans la résolution de l'équation de Fokker–Planck, avec une pdf condition initiale piquée dans un puits. Le temps de premier passage peut ensuite être calculé analytiquement par la méthode du col, pourvu que la hauteur de col soit suffisamment haute, ou autrement dit, que le temps de premier passage soit suffisamment grand devant le temps caractéristique de fluctuation dans le puis [98]. On détaille la résolution dans l'annexe C. On part de l'équation (C.8). Le potentiel à deux dimensions est approximé par un potentiel à une dimension selon la ligne de plus grande pente [78]. Cela donne le cadre dans lequel on applique la méthode du col. On ne recherche alors pas simplement la dérivée seconde de V mais les valeurs propres du Hessien correspondant à la direction propre colinéaire à la ligne de plus grande pente (selon la direction instable du col).

On applique alors à notre système. On néglige l'effet du bruit le paramètre d'ordre complexes (qui modifie les valeurs de départ et d'arrivée, les valeurs de V et V''), qui sont à un ordre en $\alpha\sqrt{g}/\epsilon$ inférieur à l'ordre de la méthode du col (Eq (4.19)). On a : $z = (\sqrt{\epsilon/g_1}, 0)$ et $b = (\sqrt{\epsilon/(g_1+g_2)}, \sqrt{\epsilon/(g_1+g_2)})$ on prend les valeurs propres du Hessien de V selon les directions propres suivies par le processus pour sortir du puis, $V''(z) = \epsilon(g_2/g_1 - 1)$ $V(z) = -\epsilon^2/4g_1$, $V(b) = -\epsilon^2/(2(g_2+g_1))$, $V(b) - V(z) = \epsilon^2(g_2/g_1 - 1)/(4g_1(g_2/g_1+1))$ et le hessien H de V en b vaut :

$$H = \frac{2\epsilon g_1}{g_2+g_1}\begin{pmatrix} 1 & g_2/g_1 \\ g_2/g_1 & 1 \end{pmatrix},$$

qui a pour valeurs propres $(2\epsilon, 2\epsilon(1-g_2/g_1)/(g_2/g_1+1))$ pour les vecteurs propres $(1,1)$ (direction

stable) et $(1, -1)$ (direction instable).

D'où on a, en remplaçant dans l'expression (C.8) :

$$\tau = \tau_0 \frac{\pi\sqrt{\frac{g_2}{g_1}+1}\sqrt{2}}{\epsilon\left(\frac{g_2}{g_1}-1\right)} \exp\left(\frac{\epsilon^2\left(\frac{g_2}{g_1}-1\right)}{2\alpha^2 g_1\left(\frac{g_2}{g_1}+1\right)}\right). \tag{4.32}$$

Ainsi, ce temps caractéristique, à l'échelle donnée par τ_0 croît exponentiellement avec ϵ^2. On retrouve le même esprit que dans les loi de cinétique chimique de type Eyring/Arrhenius, avec un temps de premier passage croissant comme $\exp E/T$, entre autre parce que ces processus sont décrit par le même type d'équations.

Ecart entre approche asymptotique et résultats "exacts" et numériques

On teste de plus cette approche vis à vis de l'intégration numérique du modèle de Langevin. On en donne un exemple sur la figure 4.18 (a). On y retrouve le comportement typique d'excursions et d'inversions. On traite donc les séries temporelles de la même manière qu'au paragraphe § 4.1.3. On retrouve le même comportement Poissonnien des distributions de temps de résidence, et surtout, le même comportement du temps de résidence moyen en fonction des seuils s_1 et s_2. (figure 4.18 (b,c)). On peut comprendre le comportement du temps de vie moyen en fonction de s_2 en terme de temps de premier passage d'un puits vers une position de plus en plus proche du second puits. On choisit le second puits et non le col comme "destination" en raison des difficultés de détermination de la présence du système au col (comparativement au second puis), et surtout à cause des fluctuation sur le col. On fait donc à nouveau l'extrapolation à $s_2 = 0$ pour déterminer ce temps de premier passage d'un puits vers l'autre. Cette approche s'avère être adaptée en bonne approximation, si on néglige certains effets faibles à cet ordre, comme l'amplitude du mode dominé (Eq. (4.20)).

On présente temps moyen de premier passage en fonction de ϵ sur figure 4.19. On retrouve le comportement qualitatif noté pour le modèle unidimensionnel simple et illustré par la figure C.1 (b) (pp. 213). L'expression asymptotique n'est pas valable pour les petites valeurs de ϵ. Il apparaît un second écart pour les grandes valeurs de ϵ due à la saturation du temps de premier passage mesuré, due au fait que ce temps devient du même ordre de grandeur que la durée des séries temporelles.

Finalement, dans l'intervalle de ϵ $[0.04\,;\,0.1]$, où la comparaison est la meilleur, valeur numérique et expression asymptotique ont un facteur de proportionnalité constant, qui correspond à l'effet de l'approximation unidimensionnelle, les autres effets sont additifs, et peuvent être estimés de manière perturbative.

4.3 Résultats des expériences numériques

La section présente l'étude statistique systématique de la formation de la bande, par opposition aux descriptions de la section 1.2.2 ou 4.1 qui présentaient quelques exemples, pour introduire les méthodes. Pour chaque comportement traité, on fera la comparaison qualitative et, autant que possible, quantitative avec le modèle. On commence par examiner le comportement en temps du système autour de l'équilibre, en mettant en évidence l'effet du bruit. La majorité de la suite de l'étude correspond à l'étude paramétrique du comportement de la bande, sous l'effet des paramètres nombre

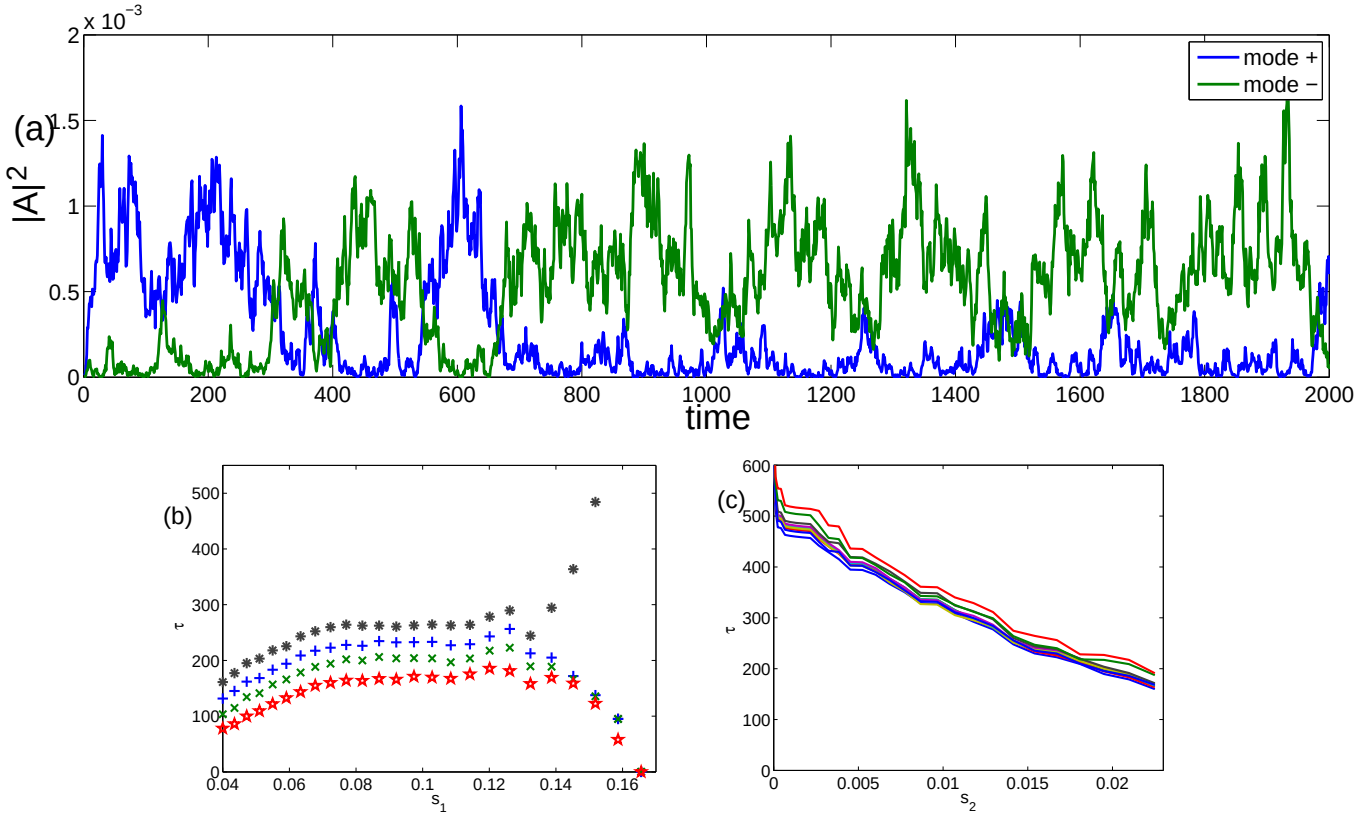


FIGURE 4.18 – (a) : Exemple d'une série temporelle du modèle de Landau–Langevin. Exemples de temps de résidence, dans une intègration numérique du modèle, pour $\epsilon = 0.075$, $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $\alpha = 0.2$ en fonction du seuil (b) : s_1 (pour plusieurs s_2) et (c) : s_2 (pour plusieurs s_1) .

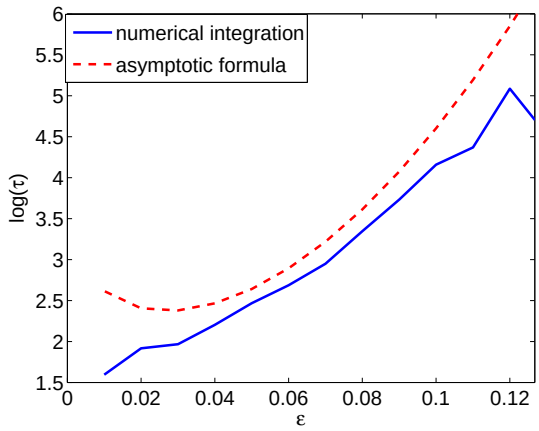


FIGURE 4.19 – Temps de résidence (logarithme naturel) en fonction de ϵ pour la formule asymptotique et extrait de l'intégration numérique du modèle (avec méthode de seuil présentée dans la section 4.1.3). Fin des séries temporelles à 10000 unités de temps (saturation du temps de vie mesure) $dt = 0.01$, $g_1 = 60$, $g_2 = 120$, $\alpha = 0.002$

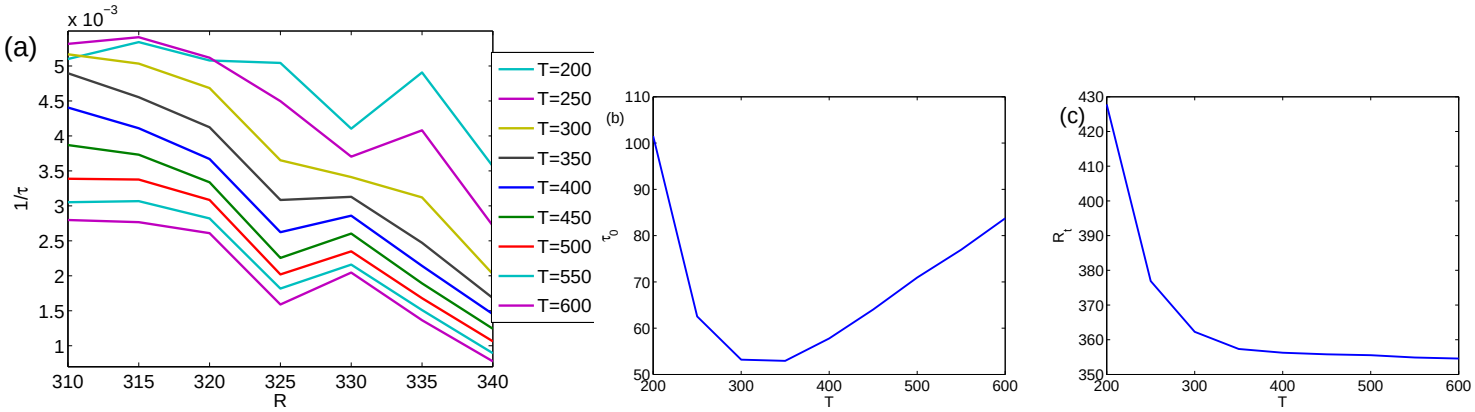


FIGURE 4.20 – (a) : Taux de croissance en fonction du nombre de Reynolds pour plusieurs longueurs de fenêtre. (b) : Temps caractéristique τ_0 en fonction de la durée de la fenêtre. (c) : Reynolds seuil R_{t} en fonction de la durée de la fenêtre.

d'onde et R dans des simulations. Le corps des mesures sera réalisé dans la modélisation numérique à bas ordre ($N_y = 15$), et est complétée par un exemple de statistiques tirés de DNS ($N_y = 27$), pour confirmation de la qualité de l'approximation. On traite ensuite les excursions hors de l'équilibre, *via* l'étude systématique des fluctuations d'orientation en fonction du nombre de Reynolds. Finalement, on présente quelques effets de taille, d'une part à grande taille pour illustrer la limite thermodynamique de la description du motif, d'autre part sur de petits systèmes pour illustrer la destruction de la formation du motif en petite taille.

4.3.1 Comportement en temps et fluctuations autour de l'équilibre

On examine ici le comportement en temps standard du paramètre d'ordre complexe. On commence par traiter systématiquement les expérience de trempe, avant d'examiner les fluctuations de la phase et celles de l'amplitude. Les mêmes procédures de traitement que pour le modèle sont utilisées. La bonne comparaison avec le modèle est mise en évidence, en particulier en ce qui concerne l'effet du bruit.

Croissance quasi-exponentielle

On pratique des expériences de trempe : on utilise une condition initiale présentant de la turbulence uniforme, avec une amplitude de la modulation très faible, à un R où les bandes existent. On voit apparaître la modulation et, parallèlement, croître le paramètre d'ordre dans les séries temporelles. On discute en détail le comportement du paramètre d'ordre pour toutes les phases de la trempe dans la section 5.1.1. On y montre de plus qu'avec suffisamment d'expériences numériques, en DNS ou en modèle réduit, on peut faire apparaître la croissance exponentielle dans le faisceau de courbe de $m_\pm$ (Fig. 5.7 (d), pp. 159), pendant le transitoire. On compare au modèle (Eq. (4.31)) qui peut se simplifier en $A \propto \exp(t/\tau)$, dans la limite où t n'est pas trop petit. On peut ainsi en extraire, par ajustement du faisceau de courbe sur une durée T, l'inverse du temps caractéristique de croissance $1/\tau$, et ce, pour toute une gamme de nombre de Reynolds.

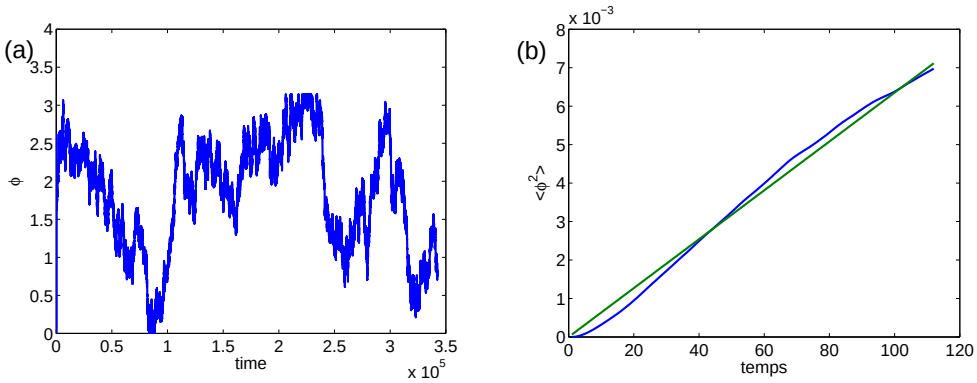


FIGURE 4.21 – (a) évolution de la phase et (b) fluctuations de la phase du paramètre d'ordre pour la DNS, $L_x = 110$, $L_z = 48$, $R = 290$, $N_y = 15$

On fait l'expérience numérique à $N_y = 15$, pour une taille accommodant la bande à tous les R, $L_x \times L_z = 128 \times 48$, et on extrait $1/\tau$ en fonction de R (Fig. 4.20). On ajuste les séries temporelles de $\log(m_\pm)$ sur une durée T à compter de la trempe. On en extrait l'inverse du taux de croissance $1/\tau$ en fonction de R. On détermine la fonction $1/\tau(R)$ pour plusieurs durée d'ajustement, pour déterminer l'effet de ce paramètre. En effet, si T est trop long, $A(t)$ peut sortir du régime où la saturation est négligée et où la croissance est exponentielle. L'inverse du taux de croissance $(1/\tau)(R)$ obtenu dépend faiblement de la durée T, et ce, sur une large gamme de durée ($200 \leq T \leq 600$) (Fig. 4.20 (a)). On trouve un comportement linéaire avec R, que l'on compare alors au comportement attendu dans le modèle, à savoir $1/\tau = (R_\mathrm{t} - R)/(\tau_0 R_\mathrm{t})$. On peut trouver τ_0 et R_t à l'aide de l'ordonnée à l'origine et de la pente de la droite $1/\tau(R)$ sur une plage de nombre de Reynolds $[R_0, 340]$. On laisse *a priori* R_0 libre : le comportement faiblement non-linéaire n'est pas forcement valable pour les plus petit nombre de Reynolds. En pratique, on ne trouve aucun effet de R_0, ce qui montre que l'on n'est pas descendu trop bas en R pour ne plus avoir $1/\tau = (R_\mathrm{t} - R)/(\tau_0 R_\mathrm{t})$. On extrait ces paramètres pour les différentes durées d'ajustement T (Fig. 4.20 (b,c)). Le temps de cohérence τ_0 est donnés en ordre de grandeur, avec un plateau à $\tau_0 \simeq 60h/U$ pour les durées d'ajustement intermédiaires. C'est la quantité la plus sensible à T. Le nombre de Reynolds de disparition des bandes R_t converge rapidement avec T vers $R_\mathrm{t} = 355$ avec la durée de l'échantillon ajusté. Cette valeur de R_t cadre bien avec les constatations qualitatives faites. L'ordre de grandeur de τ_0 est du même ordre de grandeur que la valeur estimée par Prigent [73] dans Taylor–Couette de $\tau_0 = 30h/U$.

Un des principaux écarts attendus avec la dépendance de type $(1 - R/R_\mathrm{t})/\tau_0$ est la variation de ϵ avec $\delta k_{x,z}$ l'écart au nombres d'onde optimaux. Cela motive le choix de taille accommodant bien le motif, d'une part, et avec un λ_z en milieu de gamme de longueur d'onde [73].

Phase

On utilise la procédure introduite dans la première section (§ 4.1.2) et utilisée dans la seconde pour analyser les séries temporelles du modèle. On cherche ici à extraire des données quantitatives sur l'amplitude du bruit, connaissant le temps caractéristique τ_0.

On trace un exemple de l'évolution de la phase en fonction du temps sur la figure 4.21. On choisit un nombre de Reynolds et une taille qui ne risquent pas d'être perturbés par un changement d'orien-

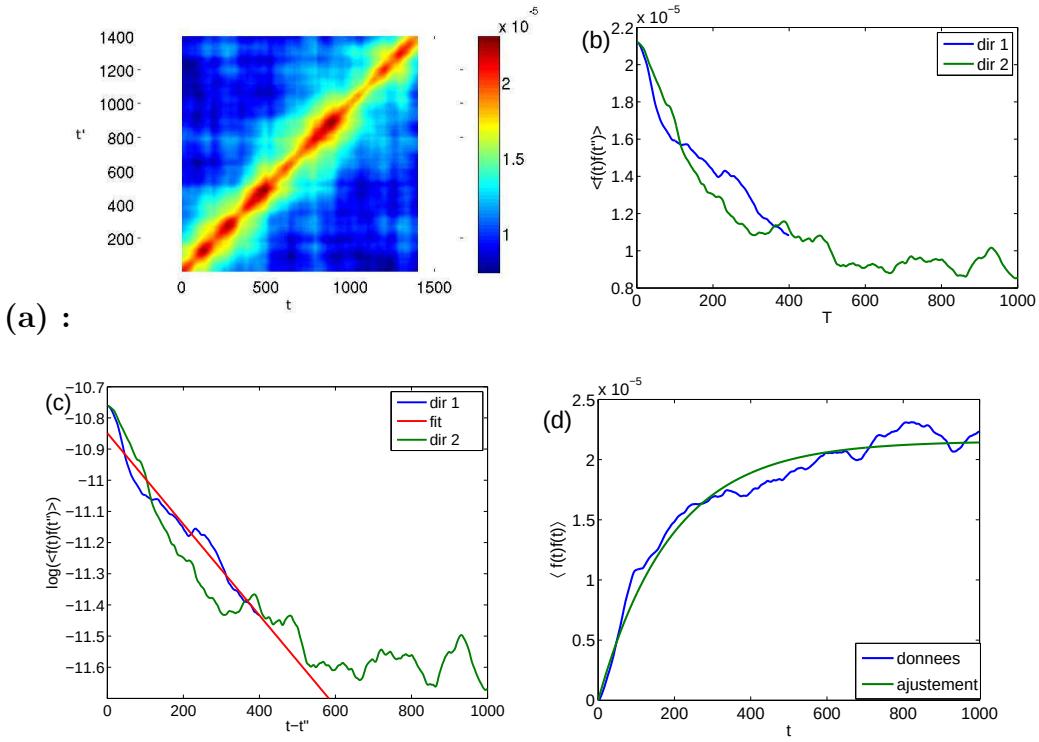


FIGURE 4.22 – Fluctuations d'ensemble du module du paramètre d'ordre, pour une taille $L_x \times L_z = 110 \times 48$ à $R = 290$. (a) : autocorrélation du paramètre d'ordre en fonction de t et t'. (b) : autocorrélation en fonction de $t - t'$ en linéaire-linéaire, (c) : autocorrélation du paramètre d'ordre en fonction de $t - t'$ en logarithme-linéaire. On trouve $y = -0.00146x - 10.8$. (d) : Fonction d'autocorrélation sur la droite $t = t'$ en linéaire-linéaire

tation ou une relaminarisation (suffisamment loin de R_{t} et R_{g}, taille accommodant parfaitement une bande), on prend donc $L_x \times L_z = 110 \times 48$ et $R = 290$. L'expérience numérique est réalisée en modèle réduit à $N_y = 15$. La série temporelle étant suffisamment longue, on voit apparaître la trace du mouvement de type marche aléatoire. On applique la procédure de traitement pour extraire le comportement des fluctuations (figure 4.21). On fait apparaître la croissance linéaire typique d'une marche aléatoire dans la série temporelle. On extrait alors un α en se basant sur le comportement du modèle (Eq. (4.29)). on a $\alpha/\sqrt{\tau_0} \simeq 0.0004$, en prenant $\tau_0 \simeq 30$, on en déduit $\alpha \simeq 10^{-3}$. La valeur se compare bien à celles par Prigent pour l'écoulement de Taylor–Couette [73].

Fonction d'autocorrélation du module du paramètre d'ordre

La méthode de calcul des fluctuations du module du paramètre d'ordre est la même que celle introduite dans la section 4.2.4 (Eq. (4.30)) : on réalise un moyennage d'ensemble des séries temporelles grace à un découpage. On utilise la même expérience que pour les fluctuations de la phase ($L_x \times L_z = 110 \times 48$, $R = 290$, $N_y = 15$), pour les mêmes raisons.

On obtient le même type de carte de $\langle f(t)f(t')\rangle$ dans le plan t, t' (Fig. 4.22 (a)) que pour l'intégration numérique du modèle de Langevin (Fig. 4.15). Comme pour la simulation numérique

du modèle, la fonction d'autocorrélation décroît exponentiellement avec $|t - t'|$ (Fig. 4.22 (b)), pour des temps t et t' suffisamment grand (Eq. (4.27)). On extrait le comportement exponentiel de la décroissance de la fonction d'autocorrélation de la même manière que pour le modèle : on considère une ligne à t ou de manière symétrique, à t' fixé. On examine ensuite la fonction d'autocorrélation en linéaire-linéaire ainsi qu'en logarithme-linéaire (Fig. 4.22 (c)). Dans ce dernier cas, on fait bien apparaître la décroissance exponentielle des fluctuations.

De la même manière que dans la simulation numérique, on compare nos données à l'expression analytique (Eq. (4.28)). Ainsi, l'ajustement de $\langle f(t)f(t')\rangle$ en fonction de $|t - t'|$, pour t et t' suffisamment grands devant τ_0/ϵ permet d'estimer τ_0 et α. On estime $\alpha^2/(4\epsilon) \simeq 2.10^{-5}$, soit $\alpha \simeq 0.004$ et $2\epsilon/\tau_0 \simeq 0.0014$ à l'aide des paramètres de l'ajustement, pour un $\epsilon \simeq 0.18$, si on utilise la valeur de $R_\mathrm{t} \simeq 355$ estimée précédemment. On prend garde au fait que ces valeurs ne se comparent qu'en approximation aux paramètres effectifs du modèle, comme remarqué lors du traitement du modèle de Langevin. On peut faire de même pour l'ajustement de $\langle f(t)f(t)\rangle$ (Fig. 4.22 (d)), qu'on compare au modèle (Eq. (4.27)). On trouve la tendance attendue. L'ajustement donne par $a(1 - \exp(-2et/\tau_0))$ donne $a = 0.000022$, qui correspond à $\alpha^2/(4\epsilon)$, qui est consistant avec l'ajustement précédent On trouve $2\epsilon/\tau_0 \simeq 0.0053$, qui se compare mal à $4\epsilon/\tau_0 \simeq 0.0028$, l'erreur est de 50%.

4.3.2 Autour de l'équilibre : taille de domaine variable

On s'intéresse au système à l'équilibre. on mesure la dépendance de M avec le vecteur d'onde $\vec{k}$, en simulant le système à nombre de Reynolds fixé et en faisant varier la taille. On va le comparer, dans le régime faiblement non linéaire et peu sensible au bruit à un comportement tiré du modèle de Landau–Langevin : $\langle A_\pm\rangle^2 = (\epsilon - \xi_x^2\delta k_x^2 - \xi_z^2\delta k_z^2)/g_1$ (Eq. (4.21)) au premier ordre. Le système dévie *a priori* de ce comportement dans le régime fortement non-linéaire, bien qu'il garde les mêmes traits qualitatifs. On déterminera donc à chaque fois des vecteur d'onde optimaux $\vec{k^\mathrm{c}}$ et des longueur de cohérence effectives $\xi_{x,z}$

Effet de la longueur d'onde longitudinale

On applique la procédure typique de préparation de bande (§ 2.3.1) pour plusieurs tailles L_x allant de $L_x = 55$ à $L_x = 290$ à R et $L_z = 48$ fixés, pour plusieurs nombres de Reynolds. Pour chaque taille, on commence par une condition initiale à $R = 315$, qu'on laisse évoluer au moins $5000h/U$. Ces champs de vitesse sont ensuite utilisés comme condition initiale à $R = 290$ et $R = 330$, pour lesquels on intègre les équation de Navier–Stokes sur une durée suffisamment longue pour que l'échantillonnage soit bon. On va ainsi tester des nombres de Reynolds au début, au milieu et à la fin de la gamme $[R_\mathrm{g}; R_\mathrm{t}]$. Étant donnée la longueur d'onde mesurée expérimentale $\lambda_x = 110$, on chercher à explorer des systèmes contenant une ou deux longueurs d'ondes. La taille $L_z = 48$ est choisie pour que la bande soit favorisée sur une large gamme de nombre de Reynolds [73]. Le domaine contient une seule bande jusqu'à $L_x = 170$, taille à laquelle on a compétition entre longueur d'onde et orientation, et qu'il contient naturellement deux bande au moins jusqu'à $L_x = 290$.

Les quantités turbulentes E et F ne montrent pas de tendance très nette lorsque la taille change (Fig. 4.23 (a,b)). Bien qu'il y ait un extrêma au milieu de la gamme à $k_x \sim 0.55$ pour chaque nombre de Reynolds, sa position est mal déterminée, dépend de la quantité considérée, et l'inflexion des courbes dépend du nombre de Reynolds. Cela permet cependant une première estimation de

k_x^c. Ce qui est un minimum à bas Reynolds devient un maximum à haut Reynolds, tandis que ces quantités sont quasiment constante à $R = 315$. Ces deux quantités augmentent avec R (§ 4.3.3), ce qui explique que les courbes soient l'une au dessus de l'autre. L'énergie turbulente, elle (Fig. 4.23 (c)), a un comportement très régulier : elle augmente bien moins fortement avec R, et elle présente un maximum à environ 0.055 pour tous les nombres de Reynolds. C'est une trace du fait que dans la zone turbulente, la norme du champ de vitesse est plus intense. On n'attend cependant pas de dépendance sous forme de loi de puissance bien définie pour $E_t(\overrightarrow{\delta k})$.

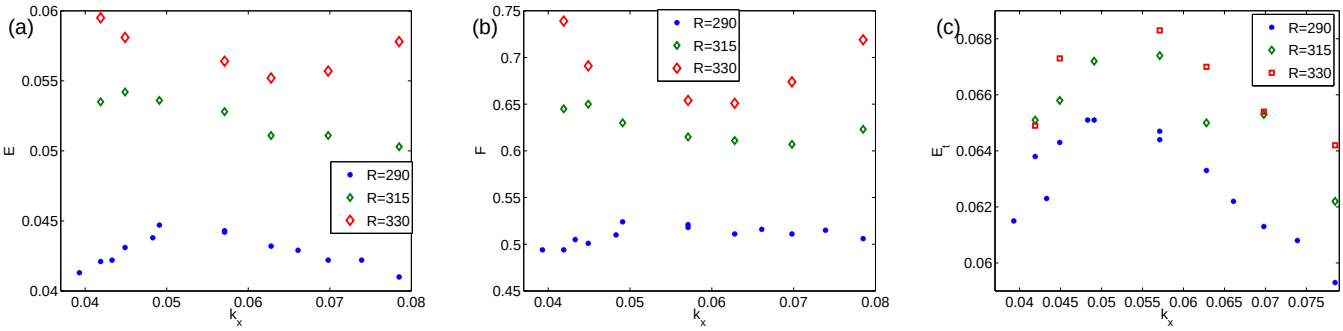


FIGURE 4.23 – (a) : E, (b) : F et (c) : E_t en fonction de k_x pour les trois nombres de Reynolds $R = 290$, $R = 315$, $R = 330$ considérés.

On se tourne alors vers le paramètre d'ordre M^2 pour une information plus claire [77]. On trace les résultats en fonction de k_x (Fig. 4.24 (a)). Dans tous les cas, on a un maximum bien défini, ne dépendant pas du nombre de bandes (une ou deux, pour les plus grandes tailles). On estime k_x^c le vecteur d'onde optimal pour chaque nombre de Reynolds à l'aide d'un ajustement quadratique des courbes $M^2(k_x)$, suivant l'approche prise par Prigent [73]. On trouve alors $k_x^c = 0.05$ pour $R = 290$, $k_x^c = 0.058$ pour $R = 315$ et $k_x^c = 0.058$ pour $R = 330$, soit $\lambda_x^c = 110$ à haut R et $\lambda_x^c = 125$ à plus bas R. Cette dépendance de k_x^c avec le nombre de Reynolds n'est pas rencontrée expérimentalement dans l'écoulement de Couette plan, mais est présente pour l'écoulement de Taylor Couette, périodique dans la direction longitudinale. Les valeurs pour $k_x < k_x^c$ et $k_x > k_x^c$ sont disymétriques, tout particulièrement pour $R = 290$, de manière similaire à la courbe de stabilité marginale de la convection de Rayleigh–Bénard [19], qui suggère que le modèle d'équation d'évolution (4.10) n'est quantitativement valide que très près de R_t.

Cette situation est particulièrement visible lorsqu'on porte M^2 en fonction de $(k_x - k_x^c)^2$ (Fig 4.24 (b)) et qu'on examine les trois tendances quasilinéaires en fonction de R. La pente apparente augmente (en valeur absolue) avec R, indiquant une sélection plus stricte du nombre d'onde. L'ajustement de ces courbes par une droite, et la détermination d'un ξ_x^2/g_1 effectif reste valable pour $R = 315$ et $R = 330$, qui donnent $\xi_x^2/g_1 = 2.7$ et $\xi_x^2/g_1 = 3.9$. Pour $R = 290$, l'ajustement linéaire permet d'estimer une selectivité du nombre d'onde (ou une longueur de corrélation), mais la comparaison avec le développement de Landau atteint sa limite. on obtient $\xi_x^2/g_1 = 2.2$. Ces résultats quantitatifs sont en accord avec le comportement de E_t.

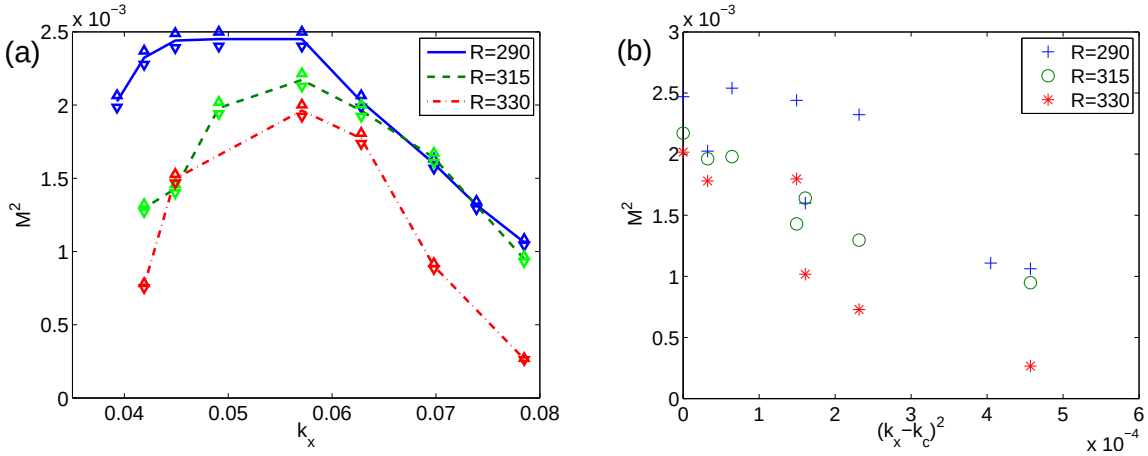


FIGURE 4.24 – M^2, Pour les trois nombres de Reynolds considérés, en fonction de k_x (gauche), en fonction de $(k_x - k_x^c)^2$, avec fit linéaire (droite)

Effet de la longueur d'onde transverse : L_z

On suit la même procédure que dans le cas précédent : on crée les conditions initiales de la même façon à $R = 315$, utilisées ensuite pour des simulations à $R = 295$. L_x est gardé constant dans chaque série d'expérience, à $L_x = 128$, et à $L_x = 110$ (uniquement à $R = 315$). Ces tailles sont choisies près de l'optimum noté expérimentalement [73]. On cherche à mettre en évidence le comportement du système en fonction de k_z pour les deux nombres de Reynolds et à tester l'effet d'un changement de k_x sur la dépendance en k_z. Pour chaque taille, la condition initiale est préparée comme détaillé dans la section 2.3.1. On utilise des tailles L_z allant de $L_z = 24$ à $L_z = 192$ pour $L_x = 128$, $R = 315$, de $L_z = 24$ à $L_z = 84$ (une longueur d'onde) et $L_z = 108$ à $L_z = 156$ (deux longueurs d'ondes) à $L_x = 128$, $R = 295$, et de $L_z = 36$ à $L_z = 96$ à $L_x = 110$ et $R = 315$. On observe de une à trois bandes, la limite entre une et deux bandes se situant entre $L_z = 84$ et $L_z = 90$, et la limite entre deux et trois bandes se situant entre $L_z = 144$ et $L_z = 156$. On observe une compétition intense entre les deux longueurs d'onde pour $L_z = 84$ et $L_z = 90$. On explore quantitativement ce phénomène dans la section 4.3.4.

On commence par examiner les données des quantiés turbulentes à $L_x = 128$, $R = 315$ (Fig. 4.25), $L_x = 128$, $R = 295$ (Fig. 4.30) et $L_x = 110$ $R = 315$ (Fig. 4.27). On prend garde au fait que ces variations, comme celles avec la taille L_x, sont relativement faibles, de l'ordre du pourcent. Les données sont portées avec une couleur différente pour chaque nombre de bandes. Pour un domaine présentant une bande, il apparaît deux tendances. La première est présente dans l'énergie turbulente (Fig. 4.25 (b), Fig. 4.30 (b), Fig. 4.27 (b)). La seconde est présente dans la fraction turbulente (Fig. 4.25 (c), Fig. 4.30 (c), Fig. 4.27 (c)) et par extension, dans l'énergie moyenne (Fig. 4.25 (a), Fig. 4.30 (a), Fig. 4.27 (a)). L'énergie turbulente E_t présente un maximum pour $L_z \simeq 40$, et un comportement relativement symétrique pour $L_z \gtrsim 40$ et $L_z \lesssim 40$, indiquant une turbulence plus intense dans la bande pour des tailles de cet ordre. La fraction turbulente quand à elle présente une croissance quasi monotone de $L_z = 84$ à $L_z = 24$, avec une augmentation de pente pour les plus pettes tailles. Cette impression se retrouve dans les tracés en fonction du nombre d'onde (Fig. 4.30, Fig. 4.27) à $L_x = 110$, $R = 315$ et $L_x = 128$, $R = 295$. Le comportement de E_t est le même que lorsque l'on varie L_x,

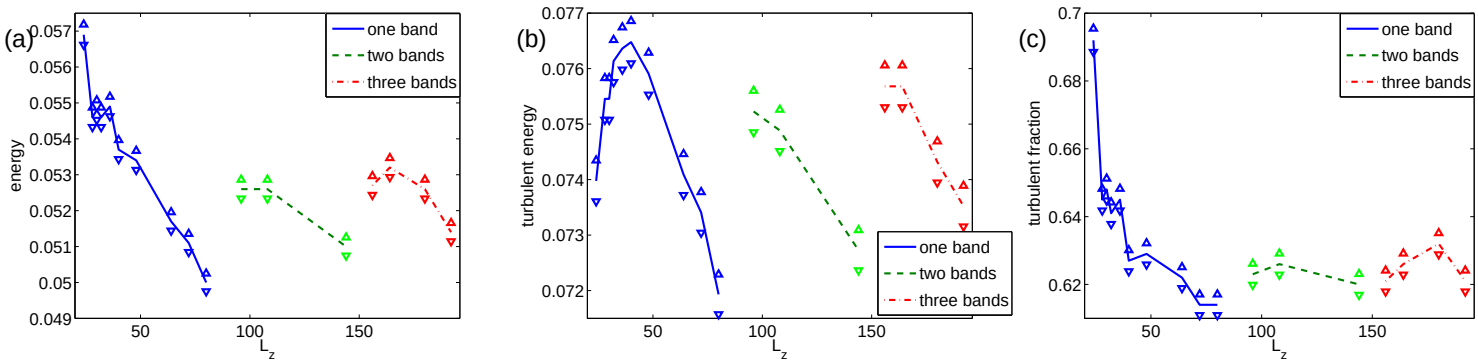


FIGURE 4.25 – Quantités turbulentes, (a) : E, (b) : E_t et (c) : F en fonction de k_z, $L_x = 128$ et $R = 315$.

indiquant un effet du nombre d'onde et une taille optimale, tandis que celle de la fraction turbulente semble être un effet de taille, indiquant que la formation des bandes est moins favorable dans des domaines plus petits (voir [70] § 4.3.6). Cette tendance est bien moins marquée à plus bas nombre de Reynolds $R = 295$ (Fig. 4.30 (a,c)). On ne peut pas accéder à la tendance aux petits L_z pour $L_x = 110$ (Fig. 4.27) et on ne trouve que la décroissance de ces grandeurs avec L_z (ou la croissance avec k_z) delà de l'optimum. Cela laisse cependant l'impression qu'on a aussi dans ce cas un optimum autour de $k_z \sim 0.15$, étant donné le plateau de E_t.

Les données pour des systèmes présentant deux et trois bandes, testé à $R = 315$ et $L_x = 128$ ne montre qu'une seule tendance pour ces trois grandeurs. On prend cependant garde au fait qu'on n'observe de manière stable deux et trois bandes que pour des longueurs d'onde $\lambda_z \gtrsim 48$, indiquant que n bandes à une longueur d'onde $\lambda_z \gtrsim 48$ sont plus stables que $n+1$ bandes à une longueur d'onde $\lambda_z \lesssim 48$. les nombres d'onde supérieur à l'optimum sont donc plus difficiles à observer pour un domaine contenant plus d'une longueur d'onde à cause de leur métastabilité.

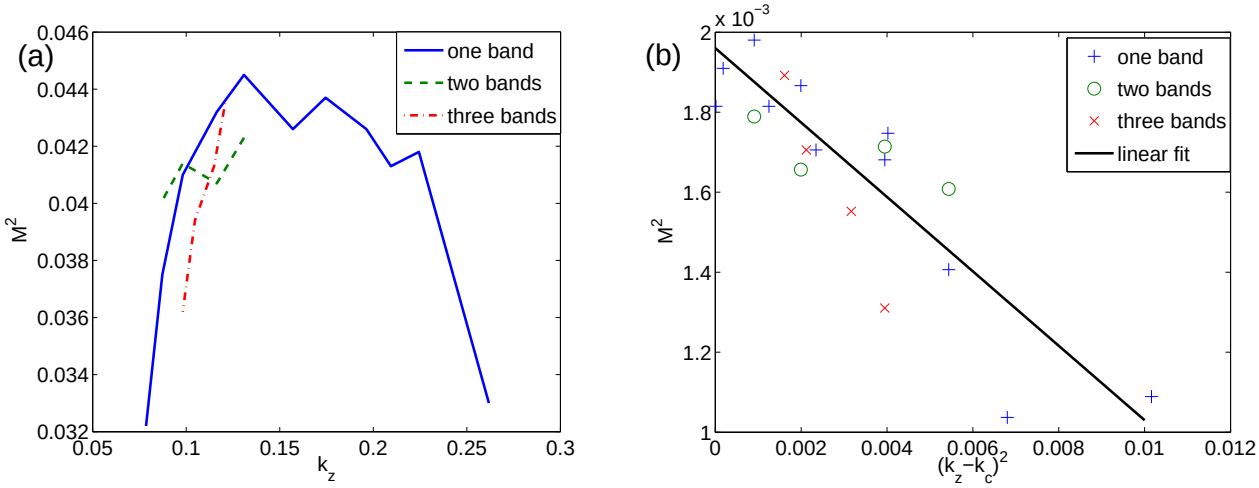


FIGURE 4.26 – Paramètre d'ordre en fonction du nombre d'onde. (a) : M, pour $L_x = 128$ et $R = 315$, en fonction de k_z, (b) M^2 en fonction de $(k_z - k_z^c)^2$, avec fit linéaire

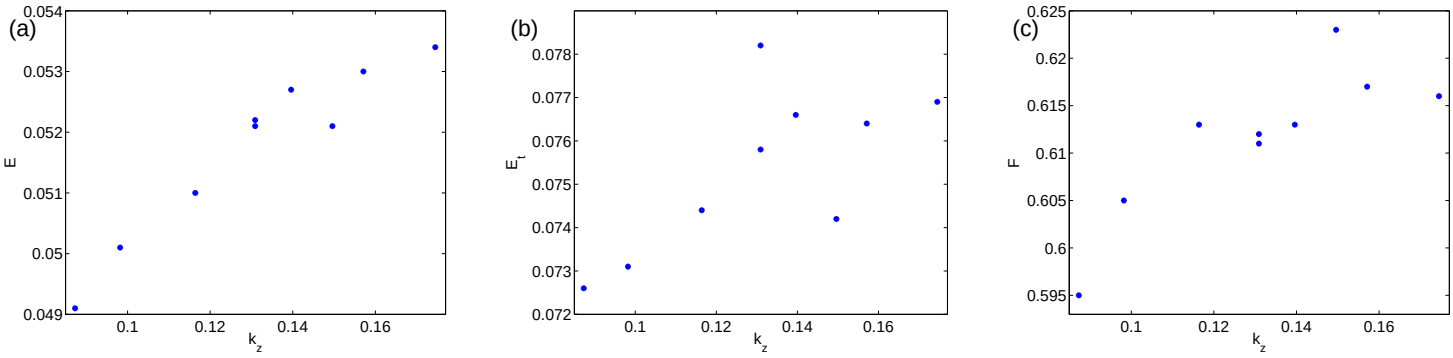


FIGURE 4.27 – Quantités turbulentes : (a) : E, (b) : E_t et (c) : F en fonction de k_z, $L_x = 110$ et $R = 315$.

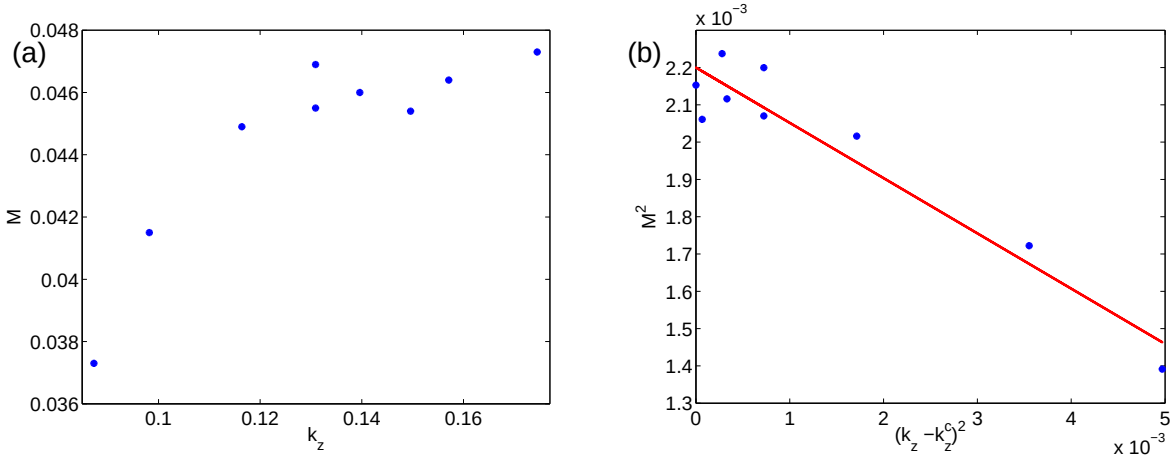


FIGURE 4.28 – M, pour $L_x = 110$ et $R = 315$, en fonction de k_z (gauche), en fonction de $(k_z - k_z^c)^2$, avec fit linéaire (droite)

On se tourne alors vers M^2 pour discuter plus précisément de la modulation de la turbulence dans l'écoulement et pour inclure nos observations dans le cadre du modèle de Landau–Langevin. Dans le même esprit que la section précédente, on trace M^2 en fonction de k_z (Fig. 4.26 (a),Fig. 4.28 (a) et Fig. 4.29 (a)). L'ensemble des données semblent prendre une forme symétrique autour d'un maximum, quasi-parabolique. Comme pour l'énergie turbulente, pour $L_x = 110$, on trouve un plateau de M, mais pas de maximum (Fig. 4.28 (a)), conséquence probable du fait que les plus petites tailles sont inaccessibles car trop défavorable à la turbulence. Pour $R = 295$ (Fig. 4.29 (a)) le plus grand k_z, la plus petite taille, est en léger décalage avec le comportement type, bien que la tendance soit quasi-parabolique pour les autres nombres d'onde. Les données pour deux et trois bandes sembles relativement cohérentes avec celles pour une seule bande. On réalise donc un ajustement de M^2 par une parabole pour estimer un k_z^c, qui nous donne $k_z^c = 0.16$ à $L_x = 128$ et $R = 315$, soit $\lambda_z^c = 39$ à comparer au minimum expérimental à $\lambda_z^c = 37.5$ [73]. On trouve ensuite $k_z^c = 0.01511$ à $R = 295$ et $k_z^c = 0.158$ à $L_x = 110$, $R = 315$, ce qui correspond à une longueur d'onde optimale de $\lambda_z^c = 43.3$. La valeur du maximum de M décroît légèrement avec le nombre de Reynolds, comme cela est constaté

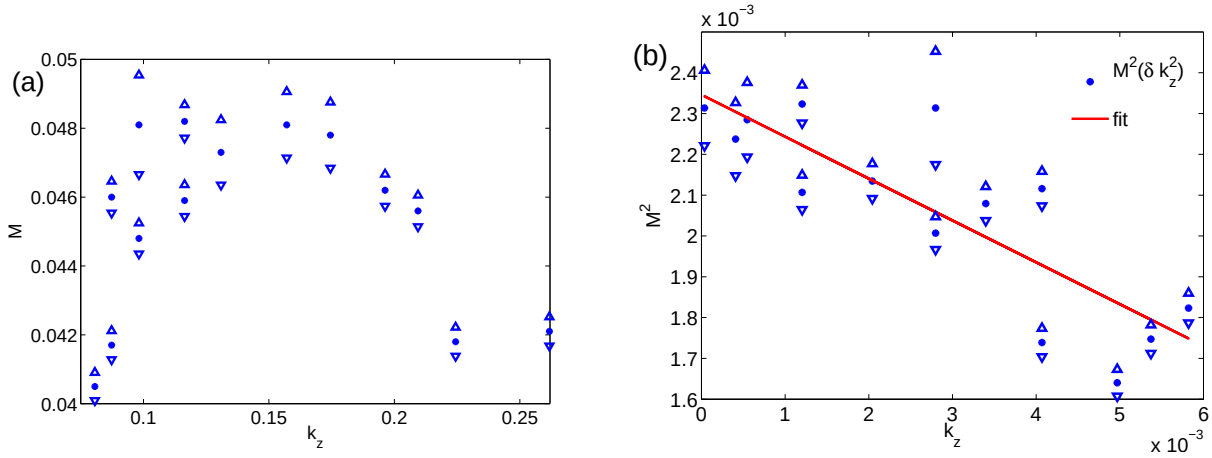


FIGURE 4.29 – Paramètre d'onde, pour $L_x = 128$ et $R = 295$, (a) : M en fonction de k_z , (b) M^2 en fonction de $(k_z - k_z^c)^2$, avec fit linéaire

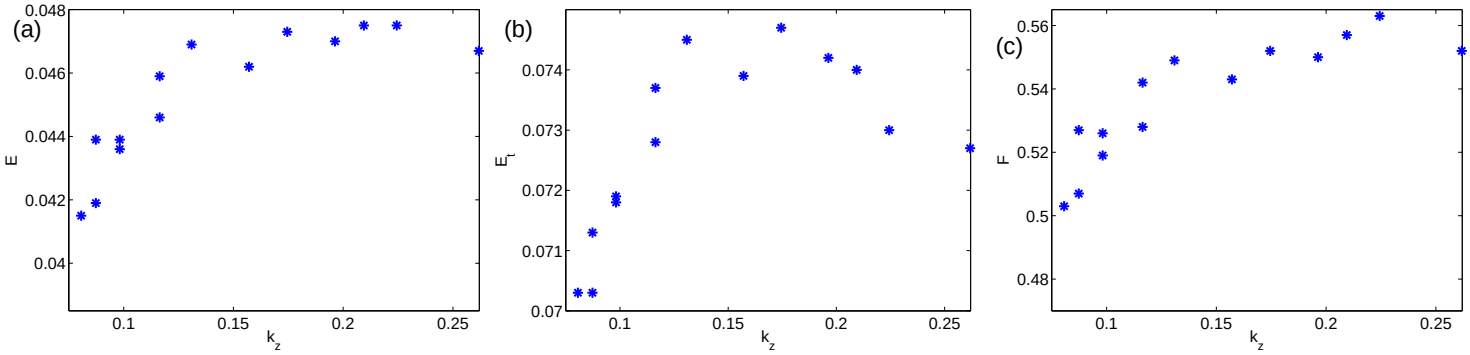


FIGURE 4.30 – Quantités turbulentes à $L_x = 128$ et $R = 295$ en fonction de k_z, (a) : énergie moyenne, (b) : énergie turbulente, (c) : fraction turbulente.

expérimentalement pour l'écoulement de Taylor–Couette [74] On trace ensuite M^2 en fonction de $(k_z - k_z^c)^2$ (Fig. 4.26 (b),Fig. 4.28 (b) et Fig. 4.29 (b)) . L'ajustement des données par une droite est bon, et permet d'en déduire $\xi_z^2/g_1 = 0.1$ à $R = 315$, $L_x = 128$, $\xi_z^2/g_1 = 0.103$ à $R = 295$, $L_x = 128$ et $\xi_z^2/g_1 = 0.148$ à $R = 315$, $L_x = 110$. Pour $L_x = 110$, la sélection est plus stricte. Cela peut être un effet de l'absence de données accessibles à très grand nombre d'onde, pour lesquels on attend une décroissance de M.

4.3.3 Variation de R

Principe

On étudie deux tailles de systèmes différentes : $L_x \times L_z = 128 \times 64$ et $L_x \times L_z = 110 \times 32$, à l'aide des grandeurs turbulentes et du paramètre d'ordre, dans l'esprit des équations modèles proposées. Le premier état pour ces simulations est préparé à $R = 315$ avec la même procédure que pour l'étude du système en fonction de la taille. On explore ensuite la gamme de Reynolds entre $[R_g, R_t]$ avec

un $\Delta R = 5$ avec une approche classique de continuation [49], où l'on modifie R après avoir laissé évoluer le système au moins $5000h/U$ à chaque nombre de Reynolds. Pour $R < 315$ (resp. $R > 315$) la condition initiale est obtenue à partir de l'état établi à $R+5$ (resp $R-5$). On suivra plus finement le système autour de R_t où on considère en plus $R = 333$, 336, 337. L'absence d'hystérésis dans la phénoménologie des bandes permet cette approche.

On commence par une description qualitative détaillée du comportement de l'écoulement lorsque R est augmenté jusqu'à la disparition des bandes. On précise ainsi la description de la section 1.2.2. La modulation disparaît principalement *via* la réduction de la part "laminaire" de l'écoulement, illustrée sur la figure 4.31 montrant le champ de $\vec{v}^2$ dans un plan $y = -0.57$. Les *streaks* et vortex longitudinaux vont prendre une place de plus en plus importante à mesure que le nombre de Reynolds est augmenté. L'intensité de la turbulence dans les bandes n'est que très légèrement affectée par le changement de R. Son augmentation est lente, similaire à ce qu'on attendrait de l'énergie moyenne en l'absence de bandes.

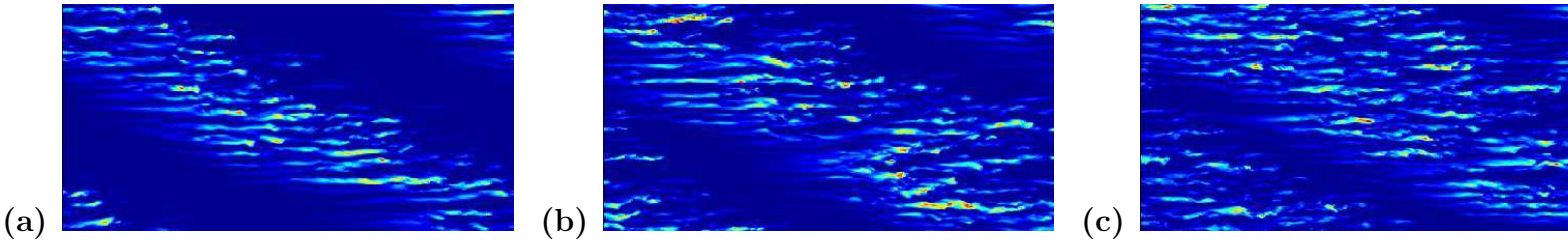


FIGURE 4.31 – Niveaux de couleur de $\vec{u}^2$ dans le plan $y = -0.57$ pour (a) : $R = 280$, (b) : $R = 300$ et (c) : $R = 330$, $L_x \times L_z = 128 \times 64$

À partir de $R = 325$, des changements d'orientation du motif sur des durées accessibles numériquement. On peut les mettre en évidence dans les visualisations du champ de vitesse ainsi qu'en suivant les séries temporelles de m (par exemple à $R = 330$, Fig. 4.6). Ces changements se font à une fréquence de plus en plus grande à mesure que R augmente. On décrit l'exploration quantitative de ces changements d'orientation en terme de temps de vie dans le paragraphe suivant.

À partir de $R = 335$, on voit apparaître un autre type de changement : de manière intermittente l'écoulement redevient uniformément turbulent pendant un temps donné. Cela est visible dans les séries temporelles de e ou f : la fraction turbulente monte à 1 et l'énergie moyenne rejoint l'énergie turbulente durant l'épisode (Fig. 4.32 (a,b)), comme attendu pour une situation uniformément turbulente. Ce régime semble être du même type que le régime dit intermittent identifié par Barkley & Tuckerman [5]. Cela est aussi visible dans les séries temporelles de m : tous les paramètres d'ordres tombent autour de 0 (Fig. 4.32 (c)), indiquant l'absence de modulation claire dans l'écoulement. Cela a pour conséquence l'apparition d'un troisème pic dans les pdf de m (Fig.4.2). On peut étendre la description en terme de temps de résidence à ce troisième état. Ces événements sont d'autant plus courants et longs que R est élevé, mais encore trop peu pour une quantification aussi claire que pour les changements d'orientation. Notre autre problème réside dans l'absence de cadre pour décrire cet état dans les équations modèles. L'ajout d'un terme dans le modèle (4.7) pour le prendre en compte est assez maladroite en ce qu'elle alourdit fortement l'analyse. L'apparition d'un second état métastable près de la transition appelle à des modifications du potentiel utilisé dans les éléments de théorie. Dans un tel modèle, cette caractéristique va tendre à rendre la transition à R_t discontinue

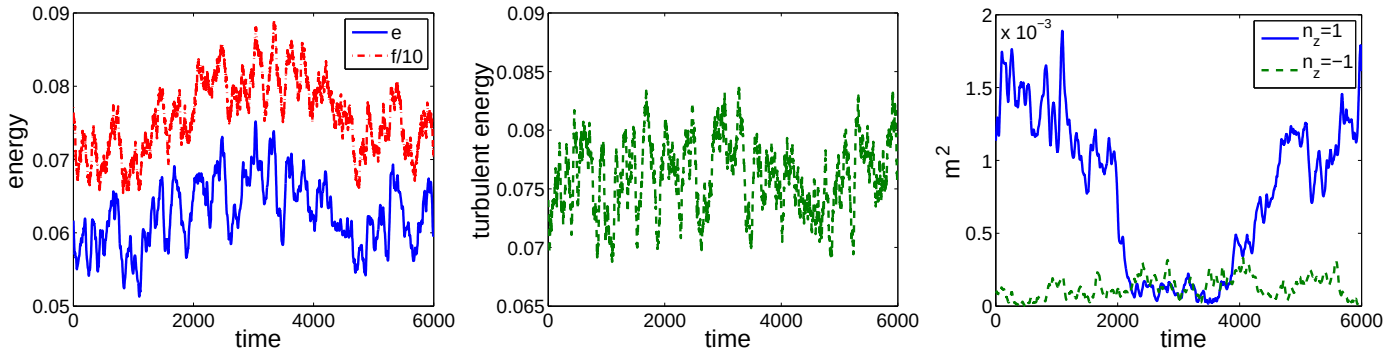


FIGURE 4.32 – Série temporelles à $R = 335$ centrées autour d'une réapparition de la turbulence uniforme, $L_x \times L_z = 110 \times 32$. (a) : Série temporelles de e, et $f/10$, (b) : e_t (droite) pour le même système aux même temps. (c) Séries temporelles de m^2

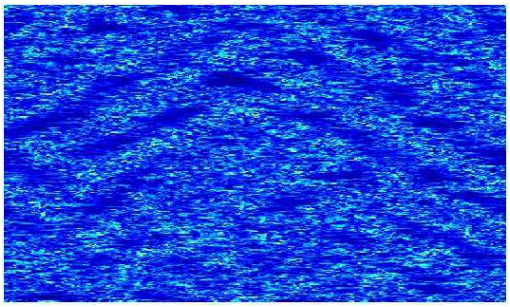


FIGURE 4.33 – Niveaux de couleur de $\vec{v}^2$ à $R = 340$, $L_x \times L_z = 432 \times 256$, l'écoulement présente des zones où les deux orientations sont possibles ainsi que des zones uniformément turbulentes.

lorsque l'on passe à la limite "thermodynamique" (*i.e* à très grande taille). En pratique on s'attend à trouver des zones entièrement turbulentes entourées de zones où les bandes sont bien définies. D'un point de vue visualisation, cela revient à dire qu'il va apparaître des domaines laminaires oblique, de manière isolée et éparse dans l'écoulement autrement uniformément turbulent (figure 4.33). On peut très bien avoir germination de ces trous en bande ou de l'écoulement uniformément turbulent, en accord avec une image de type transition du premier ordre.

Quantification de l'effet de R

On réalise une première approche quantitative à l'aide des quantités turbulentes, dans l'esprit des premières études sur la transition [13]. Comme remarqué qualitativement sur la norme des champs de vitesse (Fig. 4.31), la fraction turbulente F (Fig. 4.34 (b)) croît vers 1 avec R, ce qui traduit l'augmentation de la taille du domaine turbulent. Il y a un changement brutal de pente effective autour de R_t. Au delà de R_t, les trous laminaires ont quasiment disparu, la faible augmentation de F correspond à l'établissement de la turbulence uniforme. L'énergie turbulente, elle (Fig. 4.34 (a)), croît lentement avec R et ne subit aucun changement qualitatif particulier à R_t : l'intensité de la turbulence est donnée à nombre de Reynolds donné qu'il y ait des bandes ou non. L'énergie moyenne contient le mélange de ces deux informations, étant donné qu'on à $E \simeq E_t \times F$ (Fig. 2.10) : croissance

monotone pour $R < R_t$ et $R > R_t$ et un changement de pente brutal à R_t. Ces changement de pente nous conduisent à définir un R_t effectif autour de $R = 345 \pm 5$. Pour toutes ces grandeurs, la différence entre les deux tailles de domaines $L_x \times L_z = 128 \times 64$ et 110×32 est de l'ordre du pourcent sur F et que quelques pourcents pour E et E_t. Cela est cohérent avec les résultats des deux sous-sections précédentes.

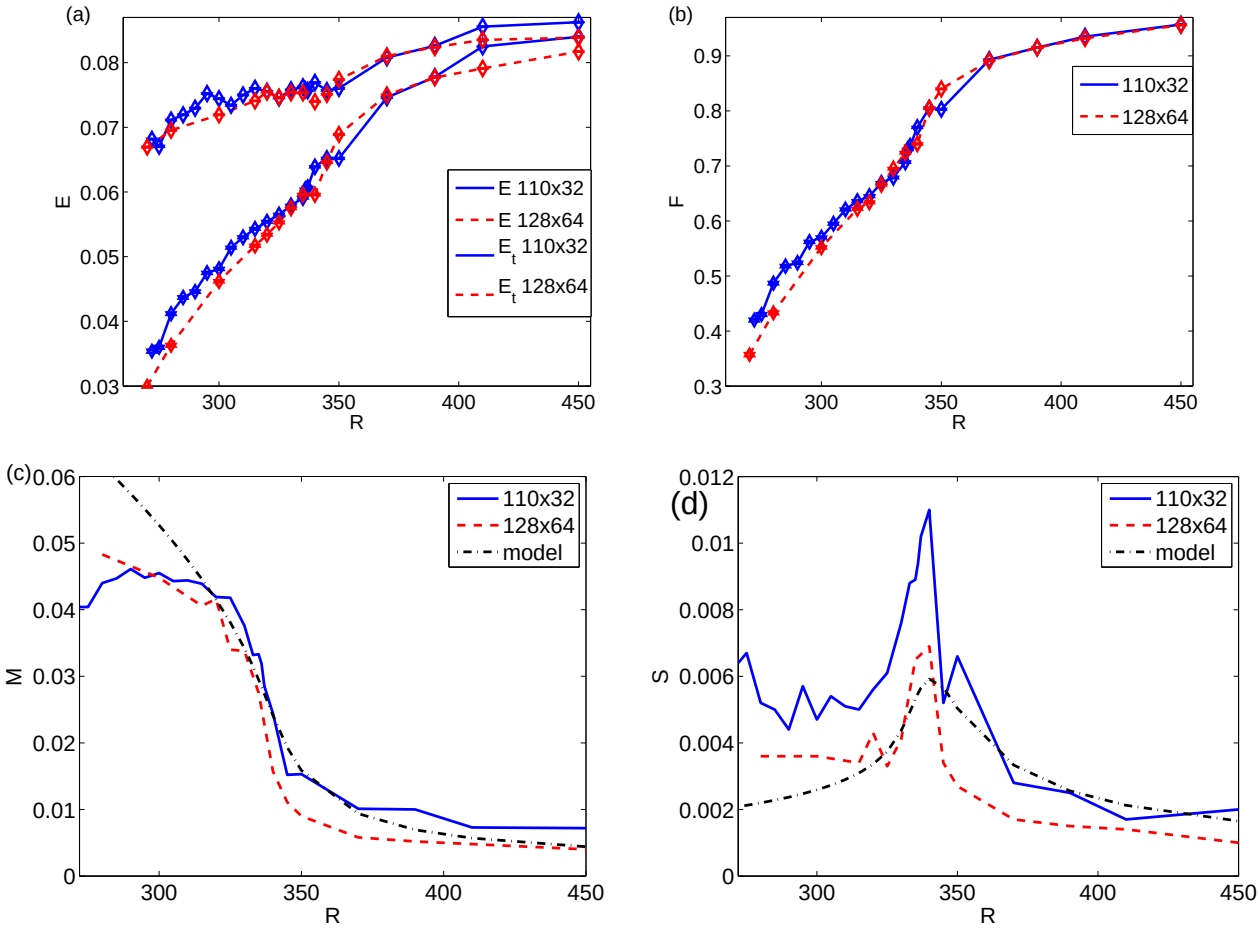


FIGURE 4.34 – Pour les deux tailles considérées ($L_x \times L_z = 110 \times 32$, $L_x \times L_z = 128 \times 64$) :(a) : E et E_t en fonction de R, (b) : F en fonction de R, (c) : M en fonction de R, (d) : S en fonction de R

On suit l'évolution de M et des fluctuations S (Eq. (4.4)), qu'on modélise par Landau–Langevin, en fonction de R sur l'ensemble de la gamme $[R_g, R_t]$ (figure 4.34 (c)) et M^2 en fonction de R loin de R_t, sur une gamme restreinte sur laquelle la comparaison avec le modèle est valide. Pour les deux tailles, la tendance générale correspond à décroissance de M avec l'augmentation de R. Près de R_g, on a saturation puis décroissance de M pour $L_x \times L_z = 110 \times 32$, dans le domaine de taille $L_x \times L_z = 128 \times 64$, M ne décroît pas pour les plus petits R. Cela traduit la saturation du paramètre d'ordre près de R_g ainsi que la dépendance de la longueur d'onde λ_z optimale avec R. Ainsi $\lambda_z = 32$ est favorable près de R_t mais assez défavorable du coté de R_g, d'où la décroissance. La longueur d'onde $\lambda_z = 64$ est plus près de l'optimal pour les plus bas Reynolds. Cependant, les valeurs de M pour $L_x = 110 \times 32$ sont supérieures à celles pour 128×64 pour les plus grandes valeurs de R, à nouveau

un effet des longueurs d'onde optimales, qui décroissent avec R. Finalement. Dans les deux cas, au dela du R_t effectif, le paramètre d'ordre ne tombe pas à 0, mais prend des valeurs non nulles pour R grand. Cela est typiquement un effet de taille finie : ainsi, dans une approche transition de phase, on s'attend à ce que les valeurs du paramètre d'ordre dans la phase désordonnée soient d'autant plus petite que la taille est grande, atteignant la valeur 0 dans la limite thermodynamique (en moyenne d'ensemble à taille infinie). On teste cet effet dans la section 4.3.5.

De manière qualitative, on suit les variations de S. (figure 4.34 (d)). On s'attend à une croissance importante (Eq. (4.22)) , même à taille finie, des fluctuations dans le modèle non corrigé, qui suivent le comportement divergeant selon une loi de puissance lorsque $\epsilon = 1 - R/R_t$ est suffisamment grand pour que le critère que Ginzburg (4.23) soit vérifié et que le champ moyen soit valide. Dans la limite thermodynamique, on peut s'attendre à une divergence selon une loi de puissance non triviale, phénomène présent dans les bifurcations bruitées [84]. Ce comportement peut être modifié si la réentrance de la turbulence (ou régime intermittent [5]) provoque une transition discontinue. On s'attend néanmoins à une forte augmentation. Les valeurs des fluctuations échantillonnées plus importantes que celles du modèle à $\epsilon \gtrsim 0.1$ ($R \lesssim 320$) se retrouvent dans les simulations numériques du modèle de Langevin (Fig. 4.14 (b)).

On quantifie ensuite les variations de M^2 pour les deux tailles (figure 4.35). On trouve un comportement affine, similaire au modèle (4.21), dans une plage de Reynolds. Les deux droites ont la même pente. Cependant M^2 est différent pour les plus petits nombres de Reynolds, un effet de la taille. La pente de l'ajustement linéaire est $1/(R_t g_1) = 5.3 \times 10^{-5}$ pour ces deux tailles, ainsi que R_t, valeur de R pour laquelle l'ajustement croise 0. On dispose de peu de valeurs près de 0, approximation de champ moyen oblige. On trouve ainsi $R_t = 355$ dans les deux cas, puis $g_1 = 55$ [77]. Cette valeur de g_1 donne un $\xi_z = 2.3$ à $R = 315$, $\xi_z = 2.3$ à $R = 295$ et $\xi_z = 2.8$ à $R = 315$, $L_x = 110$. On obtient aussi $\xi_x = 11$ à $R = 290$ (valeur effective), $\xi_x = 12.2$ à $R = 315$ et $\xi_x = 14.6$ à $R = 330$. Calculer ces valeurs reste pertinent, étant donné que l'approche linéaire est en bonne approximation valable aux nombres de Reynolds étudiés.

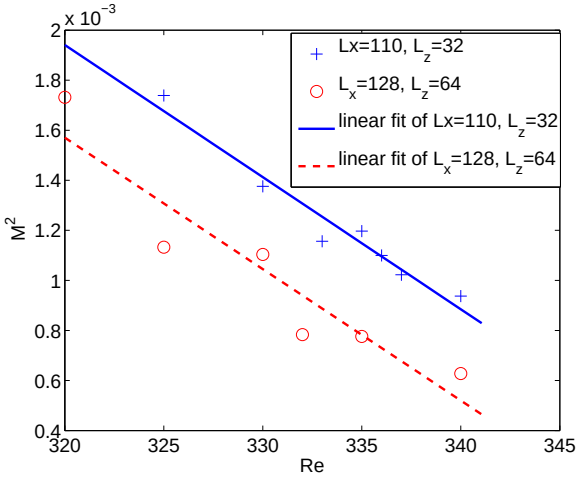


FIGURE 4.35 – Pour les deux tailles considérées ($L_x \times L_z = 110 \times 32$, $L_x \times L_z = 128 \times 64$) M^2 en fonction de R autour de R_t

Les valeurs extraites lors du traitement ont été utilisée pour le calcul de la moyenne et des fluctua-

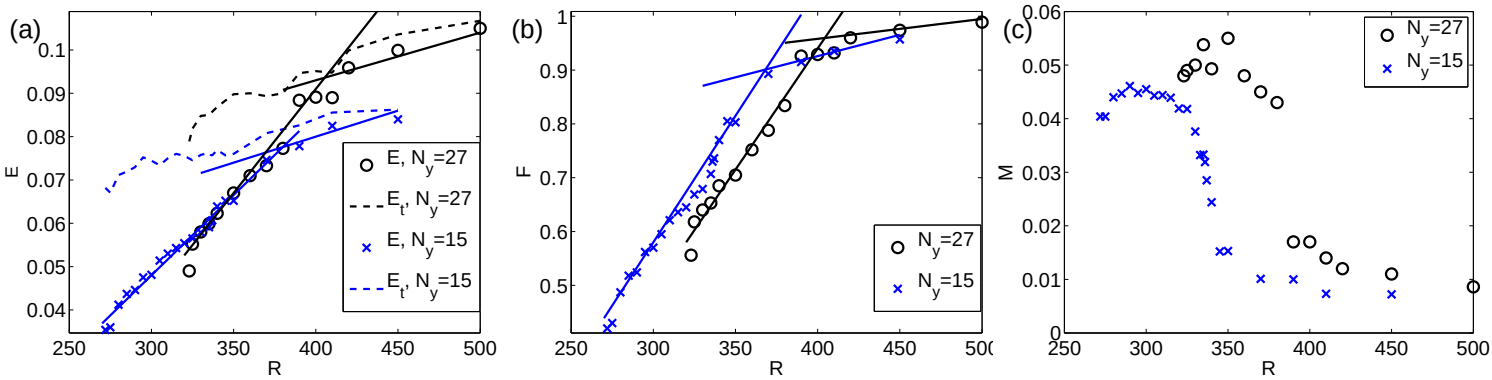


FIGURE 4.36 – Paramètre d'ordre et grandeurs turbulente en fonction de R à résolution normale

tions correspondantes au modèle potentiel. Le résultat a été ajouté sur la courbe pour comparaison qualitative (Fig. 4.34 (c), Fig. 4.34 (d)). Il apparaît clairement que, même si on trouve un bon accord dans le régime faiblement non linéaire, l'écart est plus conséquent à bas R. En prenant g_2 de l'ordre de 120, on parvient à une bonne description quantitative des fluctuations. Entre autres particularités non prise en compte, on trouve la dépendance avec le nombre de Reynolds de $\alpha(R)$, ainsi que la saturation de $\langle A \rangle$ dans la limite fortement non linéaire.

Effet de la résolution

Pour approfondir la question de la qualité de l'approximation offerte par la procédure à basse résolution, on reprent une partie de l'étude précédente à la résolution $N_y = 27$, $N_{x,z}/L_{x,z} = 6$, qui s'est avérée suffisante pour faire une DNS. La taille du système est $L_x \times L_z = 110 \times 32$, et on varie le nombre de Reynolds. La procédure est la même que pour $N_y = 15$, et pour des raisons de coût de calcul, on ne suit pas les fluctuations du système.

On calcule les grandeurs utilisées dans la section précédente : énergie moyenne, fraction turbulente, paramètre d'ordre, en fonction du nombre de Reynolds. Dans les visualisations des simulations, il apparaît que seuils $[R_\mathrm{g}; R_\mathrm{t}]$ sont décalés vers le haut (§ 2.2.2). On peut d'abord faire une comparaison qualitative avec le même système $L_x \times Lz = 110 \times 32$ à $N_y = 15$ (Fig. 4.36). On retrouve dans les deux cas exactement le même type de tendance : un comportement quasi-linéaire pour l'énergie moyenne et la fraction turbulente (Fig. 4.36 (a,b)) et l'enchaînement des régimes fortement non-linéaire ($R \lesssim 340$), faiblement non-linéaire et perturbé par le bruit ($R \gtrsim 385$) pour le paramètre d'ordre (Fig. 4.36 (c)). Dans les deux cas, le motif est défavorisé par sa taille aux plus faibles nombres de Reynolds, et on retrouve un comportement quasi-linéaire de M^2 en fonction de $1 - R/R_\mathrm{t}$ dans une gamme de R, on y retrouve donc le comportement faiblement non-linéaire. On peut aller plus loin et tirer des données quantitatives : un ajustement de M^2 donne un g_1 effectif $g_1 = 30$, qui se compare relativement bien au $g_1 = 55$ du cas $N_y = 15$. Dans le cadre de physique statistique, on voit que l'on reste dans la même classe d'universalité, et qu'on ne change que légèrement les grandeurs non-universelles.

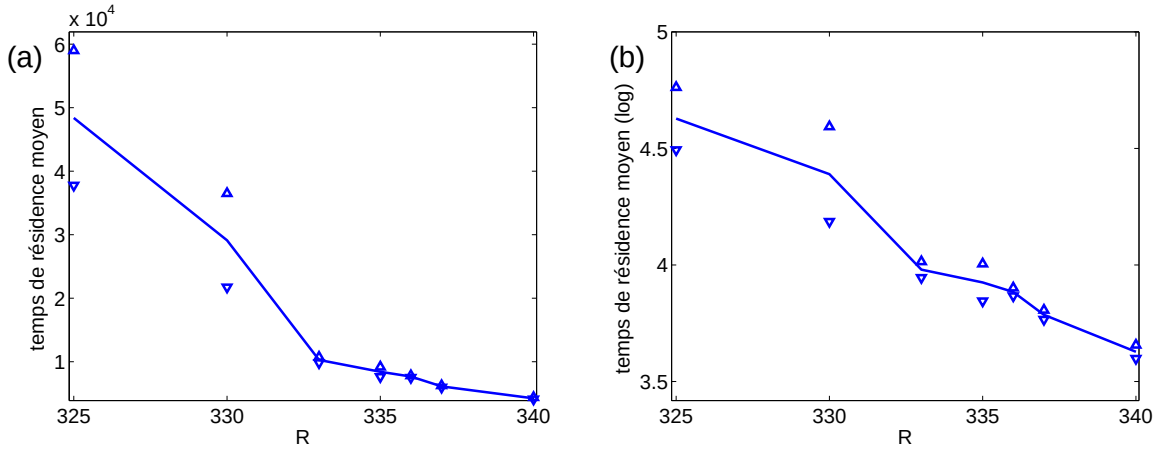


FIGURE 4.37 – Temps de résidence dans une orientation en fonction du nombre de Reynolds en (a) linéaire (b) Logarithme décimal. $L_x \times L_z = 110 \times 32$, $N_y = 15$, $L_x \times L_z = 110 \times 32$.

4.3.4 Temps de vie extraits des DNS

On décrit les expériences numériques en modèle réduit à $N_y = 15$. Les fluctuations d'orientation sont visibles à $L_x \times L_z = 110 \times 32$ pour $R \geq 325$. On trouve des fluctuations d'orientation et de longueur d'onde pour les tailles $L_x = 128$, $L_z = 84$ et 96, ($R = 315$) et $L_x \times L_z = 170 \times 48$ ($R = 315$). Le phénomène devient systématique près de R_{t}, ou lorsque le système passe d'un nombre de longueur d'onde préférentiel à un autre avec l'augmentation de la taille. Dans tous les cas, on trouve ce comportement quand le motif est destabilisé pour des situations qui correspondent à $\tilde{\epsilon}$ petit dans le modèle. On fera les mesures de temps de résidence moyen par la méthode présentée dans la section 4.1.3 et validée contre le modèle dans la section 4.2.5.

On mesure le temps de résidence pour deux longueurs d'onde dans le cas $L_x \times L_z = 128 \times 84$ à $R = 315$. On pratique de plus une mesure du paramètre d'ordre conditionnée. On obtient pour $\lambda_z = 84$ $\langle T \rangle = 3800 \pm 100$ et $M = 0.038 \pm 0.001$ et pour $\lambda_z = 42$, on obtient $\langle T \rangle = 8100 \pm 200$ et $M = 0.033 \pm 0.001$. La longueur d'onde ayant le paramètre d'ordre le plus grand n'est pas la plus stable (profondeur du puits, hauteur du col). Celà reste tout à fait permis dans le modèle, étant donné l'ensemble des paramètre de contrôle sur lesquels on peut jouer. Une description quantitative de ce cas peut être développée à partir du modèle de la section C.2.

On mesure systématiquement le temps de vie de chaque orientation pour la taille du système $L_x \times L_z = 110 \times 32$, pour des nombres de Reynolds allant de $R = 325$ à $R = 340$. On résume les résultats sur la figure 4.37. Les séries temporelles utilisées ont une durée d'environ $200000h/U$, pour permettre une estimation précise. Pour $R \geq 333$, cependant, le temps de vie est particulièrement long pour $R = 330$ et pour $R = 325$, l'estimation est alors moins précise, même si on tire profit de la procédure pour estimer le temps en résidence, basée sur les excursions, en ayant effectivement peu de retournements.

Il est difficile de faire une comparaison avec le modèle de Landau, étant donné la petitesse de $\epsilon = 1 - R/R_{\mathrm{t}}$. On se situe dans la gamme de ϵ où les critères de type Ginzburg ne sont pas vérifiés et où les expressions analytiques perturbatives ne représentent pas bien le comportement du système.

4.3.5 Effets de tailles : Domaines élargis : paramètre d'ordre et défauts

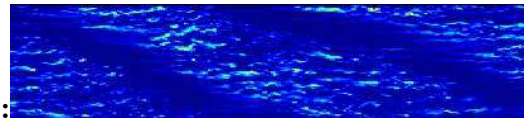
Motivations

Les expériences de Prigent, dans le cas de l'écoulement Taylor–Couette comme dans le cas de l'écoulement de Couette plan font apparaître des générations spontanées de défaut d'orientation dans le motif pour R s'approchant de R_{t} (Fig. 1.3 (f), pp. 1.3). C'est l'un des effets du bruit sur la formation du motif lorsque la taille augmente. On ne s'attend pas à une création spontanée de défaut à mesure que l'on s'approche du seuil dans le modèle de Ginzburg–Landau déterministe. Ce type de comportement est difficile à calculer dans ce modèle. Traiter le modèle de Ginzburg dans une limite finie est très fastidieux, contrairement à la limite de taille infinie pour laquelle il est aisé de déterminer des fonctions de corrélation où le comportement des fronts entre deux zones d'orientation différentes. Ces effets peuvent être mis en évidence dans les simulations.

Un autre effet typique du bruit à petite taille est la non-annulation du paramètre d'ordre à $R > R_{\mathrm{t}}$. Le comportement du motif bruité s'oppose ici à une formation de motif classique. La théorie des phénomènes critiques montre que dans un modèle tel que celui examiné, le paramètre d'ordre est effectivement non nul dans la phase non bifurquée à taille finie, mais qu'il va venir s'annuler lorsque l'on passe à la limite thermodynamique, son amplitude décroissant avec la taille [104]. On teste ce comportement à l'aide des grandeurs statistiques utilisées ici.

Alongement en $\vec{e}_x$, une, deux, quatre et six longueurs d'onde

On choisit un allongement de taille simple, dans une seule direction. L_z est gardé constant à $L_z = 48$, taille qui accommode bien une longueur d'onde à tous les nombres de Reynolds. On choisit des tailles $L_x = 110$, 220, 440 et 660, dont on attend qu'elles contiennent respectivement une, deux quatre et six bandes dans le coeur du régime de formation de motif [73]. On fait une étude paramétrique en R.

(a) : 

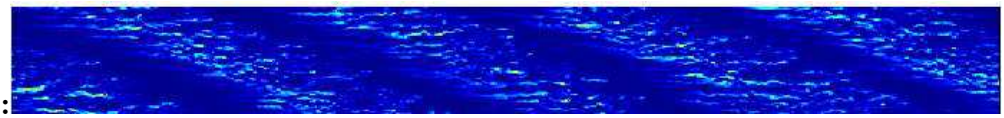
(b) : 

FIGURE 4.38 – Niveaux de couleur de $\vec{v}^2$ dans un plan $x - z$ pour $N_y = 15$ et $L_z = 48$, $R = 310$, (a) : à $L_x = 220$, (b) : à $L_x = 440$

On commence par une description qualitative du système. On obtient bien la longueur d'onde attendue $\lambda_x = 110$. On trouve ainsi deux longueurs d'onde dans le domaine $L_x = 220$ et quatre longueurs d'onde dans le domaine $L_x = 440$, et ce pour tous les nombres de Reynolds. La situation est différente dans le système $L_x = 660$. On observe six longueurs d'onde dans le domaine sur les durées finies considérés ($T \lesssim 10000$), pour $R \lesssim 330$. Cependant à $R = 340$, la situation est différente, des défauts (disparition locale de la modulation, disclinaison) peuvent apparaître, le système peut aussi subir une instabilité d'Eckhaus et passer à $\lambda_x = 94$. On illustre ces propriétés sur une expérience

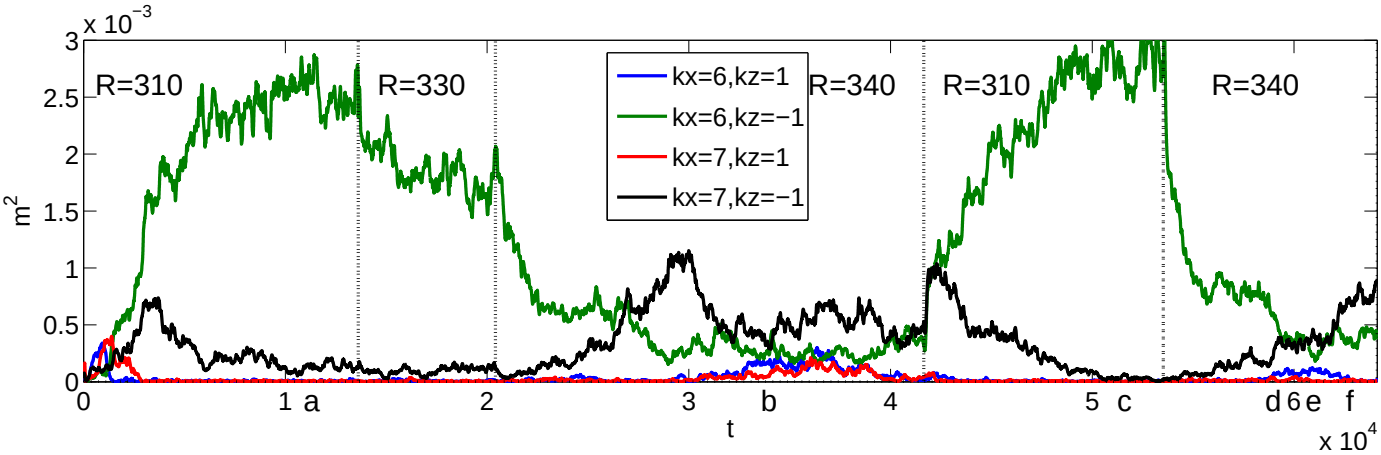


FIGURE 4.39 – Série temporelle des paramètres d'ordre pour $k_z = \pm 1$, $k_x = 6$ et $k_x = 7$, pour une taille $L_x \times L_z = 660 \times 48$, $N_y = 15$, Les nombres de Reynolds durant la simulation sont : $R = 310 \rightarrow 330 \rightarrow 340 \rightarrow 310 \rightarrow 340$.

numérique : on suit le paramètre d'ordre m^2 pour $k_z = \pm 1$ et $k_x = 6$, $k_x = 7$ (Fig. 4.39) ainsi que les niveaux de couleur du champ $\vec{v}^2$ dans un plan $x - z$ (Fig. 4.40). On indique les instants auxquels correspondent les niveaux de couleurs de $\vec{v}^2$ sur l'axe des temps de m^2. On commence par tremper le système de $R = 450$ à $R = 310$. Six longueurs d'onde d'une orientation donnée ($k_z = -1$) s'établissent dans le système (Fig. 4.40 (a)) et le paramètre d'ordre correspondant domine les autres (Fig. 4.39). Lorsque la bande est établie, on augmente le nombre de Reynolds brutalement à $R = 330$. L'amplitude de m^2 correspondant à $k_x = 6$ décroît, celle correspondant à $k_x = 7$ ($k_z = -1$) croît légèrement. La modulation de la turbulence est moins importante et présente de légers défauts : le mode $k_x = 7$ correspond ici à l'enveloppe de la modulation à $k_z = 6$. On augmente ensuite le nombre de Reynolds jusqu'à $R = 340$. La situation change qualitativement. Le paramètre d'ordre à $k_x = 6$ décroît d'autant plus, celui à $k_x = 7$ croît. Des défauts s'installent dans le système, le plus frapant étant une cohabitation spatiale de deux orientations différentes (Fig. 4.40 (b)), qui se traduit par m^2 ($k_x = 6$ $k_z = 1$) non négligeable (Fig. 4.39). On peut décroître le nombre de Reynolds à $R = 310$ et faire totalement disparaître les défauts (Fig. 4.40 (c)), jusqu'à ce que tous les paramètres d'ordre autre que $k_x = 6$, $k_z = -1$ soient négligeables (Fig. 4.39). On peut alors réitérer l'expérience en augmentant le nombre de Reynolds à $R = 340$. L'effet sur m^2 est le même. Il apparaît une zone de l'écoulement dans laquelle la modulation de la turbulence a quasiment disparu (Fig. 4.40 (d,e)). Cette zone se maintient sur plusieurs milliers de temps de retournement et n'est pas située au même endroit que le précédent défaut. Avec le temps, cette zone se transforme en plusieurs bandes de longueur d'onde plus faibles. Les autres diffusent jusqu'à ajuster $\lambda_x = 94$, soit sept longueurs d'ondes dans le domaine (Fig. 4.40 (f)).

Cette dynamique des défauts est riche, et se manifeste lorsque R est proche de R_t, soit lorsque l'écart au seuil est faible et que l'amplitude relative du bruit est importante. Cela étant dit, on s'attend trouver des défauts dans le motif à plus bas Reynolds, ils sont cependant bien moins probables et leur occurrences sont donc beaucoup plus rares.

On passe ensuite à une étude statistique systématique. On détermine le paramètre d'ordre, la fraction turbulente, l'énergie moyenne, et l'énergie turbulente. On le trace en fonction de R pour les

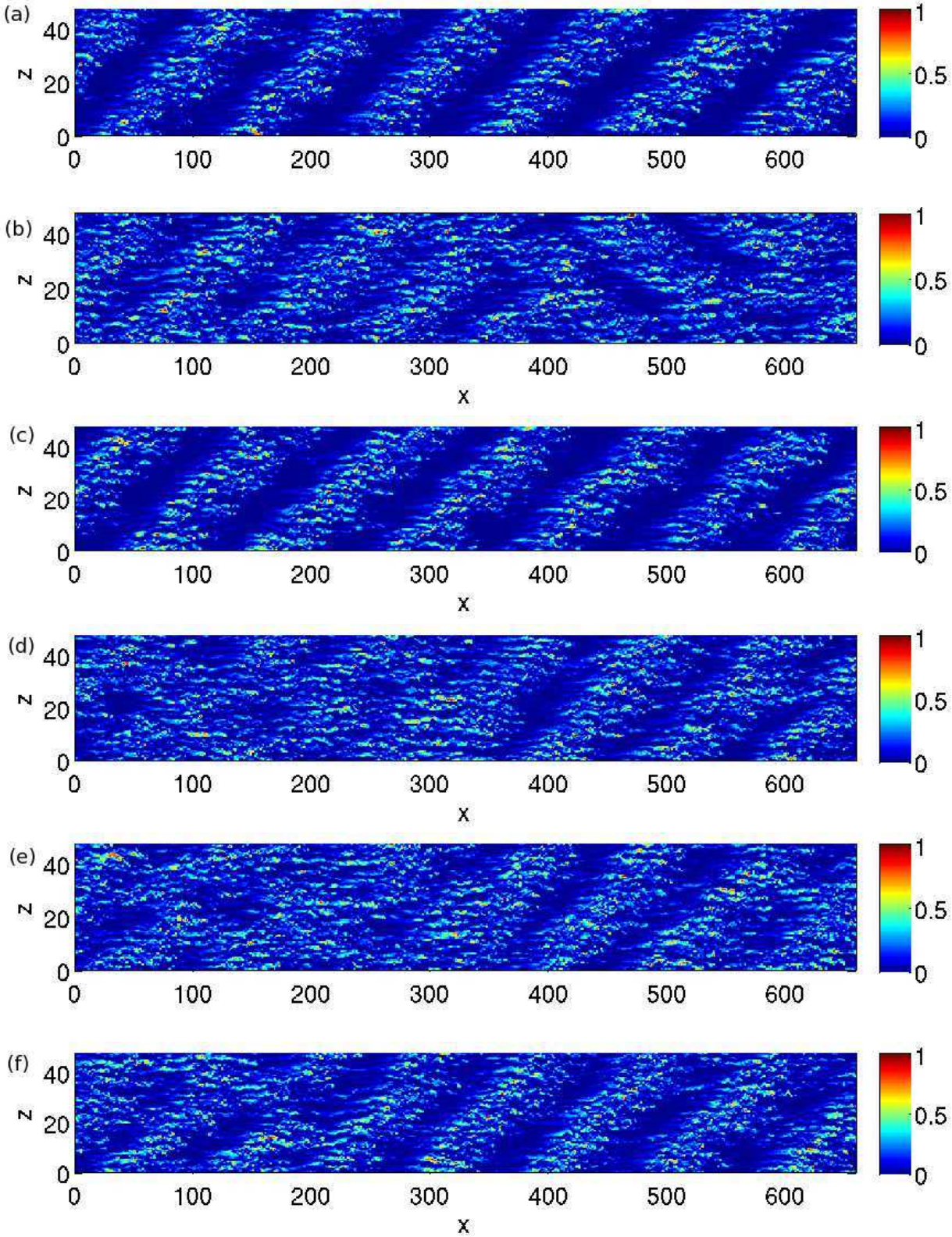


FIGURE 4.40 – Niveaux de couleur du champ $\vec{v}^2$ dans le plan $y = -0.57$, pour $L_x \times L_z = 660 \times 48$, $N_y = 15$. (a) : $R = 310$, (b) : $R = 340$ (défaut d'orientation), (c) : $R = 310$: élimination d'un défaut. (d,e) : $R = 340$ disparition locale des trous, (f) : $R = 340$ (passage à $\lambda_x = 94$). Les valeurs de m correspondantes sont indiquées sur la figure 4.39

quatre tailles sur la figure 4.41. Les quantités turbulentes F, E, et E_t montrent les tendances discutées dans la section précédente : la fraction turbulente et l'énergie moyenne sont proportionnelles et liés par l'énergie turbulente. L'énergie turbulente (Fig. 4.41 (d)) croît lentement avec R. La fraction turbulente (Fig. 4.41 (b)) croît linéairement dans la gamme de R dans laquelle le motif existe, puis converge vers 1 à $R > R_t$. L'énergie moyenne (Fig. 4.41 (c)) présente deux phases de croissances quasi linéaire et une rupture de pente à R_t. Il n'apparaît pas de tendance avec l'augmentation de la taille. En particulier au dessus de R_t, toutes les courbes de E et F s'effondrent sur une même courbe. On ne note aucune différence entre les tailles.

Cela n'est plus le cas pour le paramètre d'ordre (Fig. 4.41 (a)). Pour toutes les tailles, il suit la tendance mise en évidence dans la section précédente : saturation à bas nombre de Reynolds, décroissance en racine de $R_t - R$ puis valeur faible au dessus de R_t. En dessous de R_t, il n'apparaît pas de tendance claire en fonction de la taille. Au dessus de R_t, on a une hiérarchie simple des courbes : l'amplitude de M décroît avec la taille, il n'y a pas d'effondrement sur une même courbe. Il s'agit là de l'effet qualitativement attendu avec l'augmentation de la taille. On l'illustre qualitativement sur une approche simple.

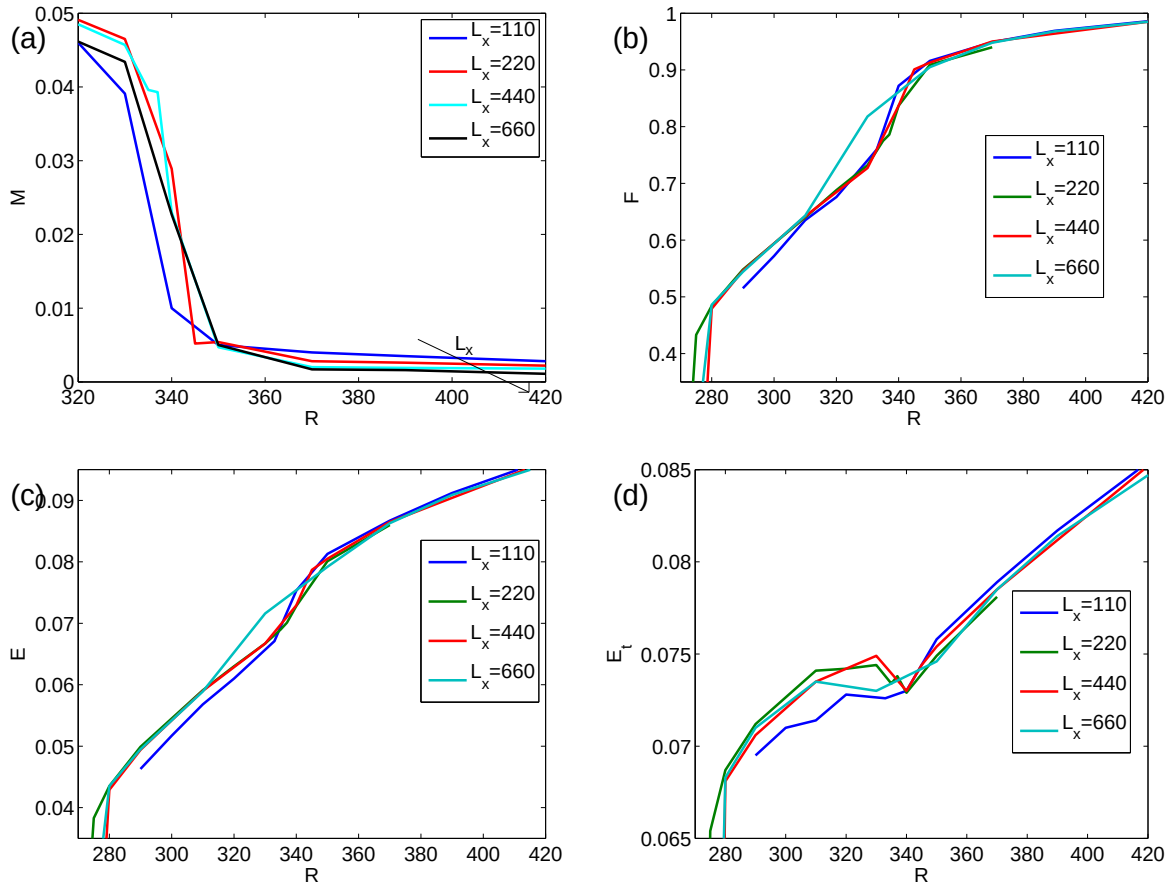


FIGURE 4.41 – Pour des systèmes de taille $L_x \times L_z = 110 \times 48$, 220×48, 440×48, 660×48 ($N_y = 15$, $N_z/L_z = 3$, $N_x/L_x = 1$) (a) : Paramètre d'ordre (b) fraction turbulente, (c) : énergie moyenne et (d) : énergie turbulente

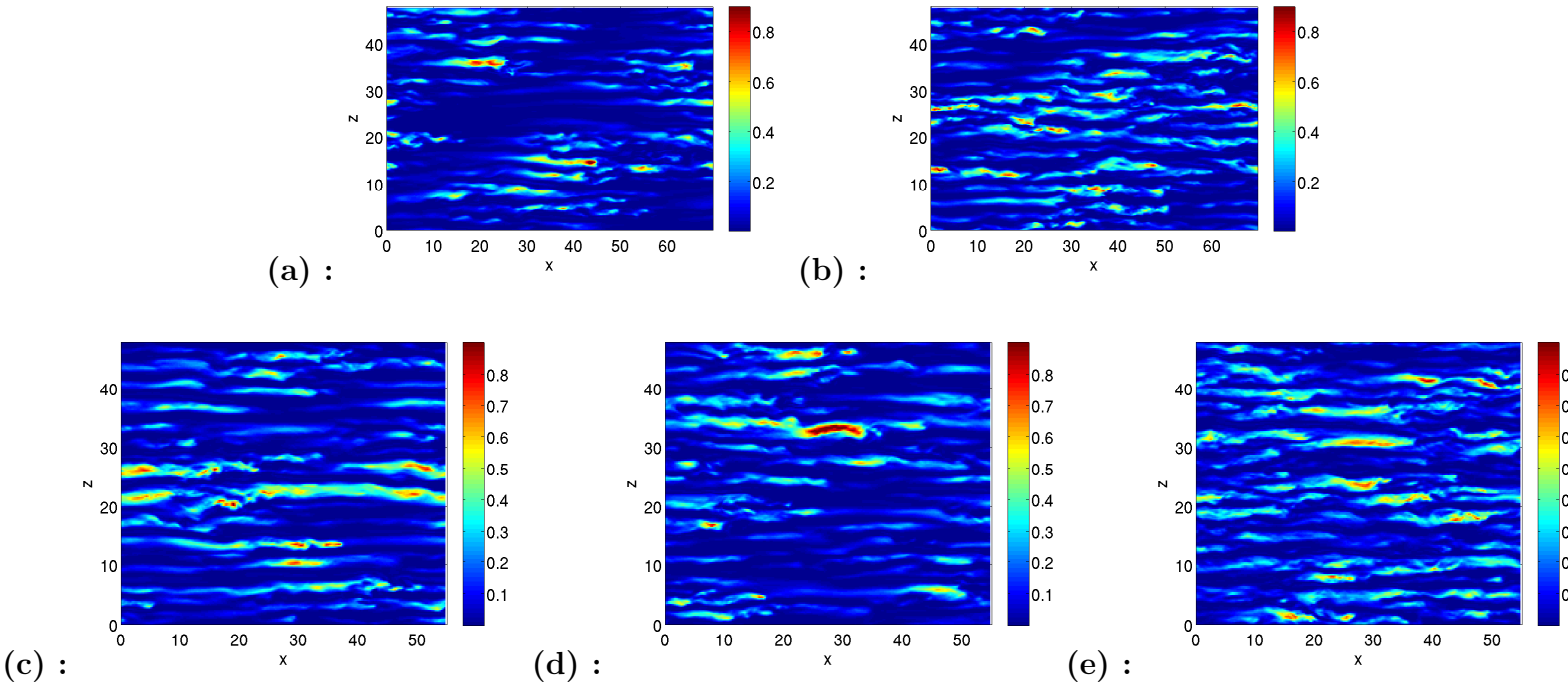


FIGURE 4.42 – Niveaux de couleurs de $\vec{v}^2$ dans le plan $y = -0.62$ pour $L_x \times L_z = 70 \times 48$ (a) : pour $R = 295$ et (b) : $R = 315$ et pour $L_x \times L_z = 56 \times 48$ pour $R = 310$ (c,d) (e) : $R = 350$. Résolution de $N_y = 15$, $N_{x,z}/L_{x,z} = 4$.

4.3.6 Effet de la taille sur l'existence des bandes et de la turbulence

On veut mettre en évidence les effets de taille sur la possibilité de maintenir de la turbulence développée, voire un motif oblique, dans la limite des plus petites tailles, complétant en ceci l'approche plus visuelle de Philip & Manneville [70]. Plusieurs tailles sont considérées : $L_x \times L_z = 56 \times 48$, 70×48 et 80×48. On comparera aux résultats à $L_x \times L_z = 110 \times 32$ et 128×64 où la bande est développée. Les simulations sont effectuées à la résolution $N_y = 15$, $N_{x,z}/L_{x,z} = 4$.

Des grandeurs moyennes définies et utilisées précédemment, la fraction turbulente et le paramètre d'ordre sont celles qui mettent le mieux en évidence la cohabitation laminaire-turbulente et son organisation (voir, par exemple, figure 4.25, 4.26, pp. 133). On trace F et M sur la figure 4.43. Ces quantités tombent à 0 pour des nombres de Reynolds de plus en plus important à mesure que la taille est réduite, de $R \simeq 265$ lorsque la taille correspond aux longueurs d'onde de la bande, à $R \simeq 280$ à $L_x \times L_z = 80 \times 48$, $R = 290$ à $L_x \times L_z = 70 \times 48$ et $R = 305$ à $L_x \times L_z = 56 \times 48$. Ce nombre de Reynolds converge vers R_t pour les tailles de l'ordre de la minimal flow unit, soit 355 à $N_y = 15$ et 415 en DNS [70]. D'autre part, on observe une baisse du seuil d'apparition des bandes venant de la turbulence uniforme. Ce comportement apparaît clairement dans les visualisations (Fig 4.42). Pour $L_z = 70$, la bande est peu nette. Pour la taille la plus petite, $L_x \times L_z = 56 \times 48$, elle disparaissent, pour laisser place à du désordre spatio-temporel sous forme de cohabitation laminaire-turbulent (Fig. 4.42 (c,d,e)), la taille, la forme et la position des trous laminaire est très variable. Cela apparaît dans le décrochage

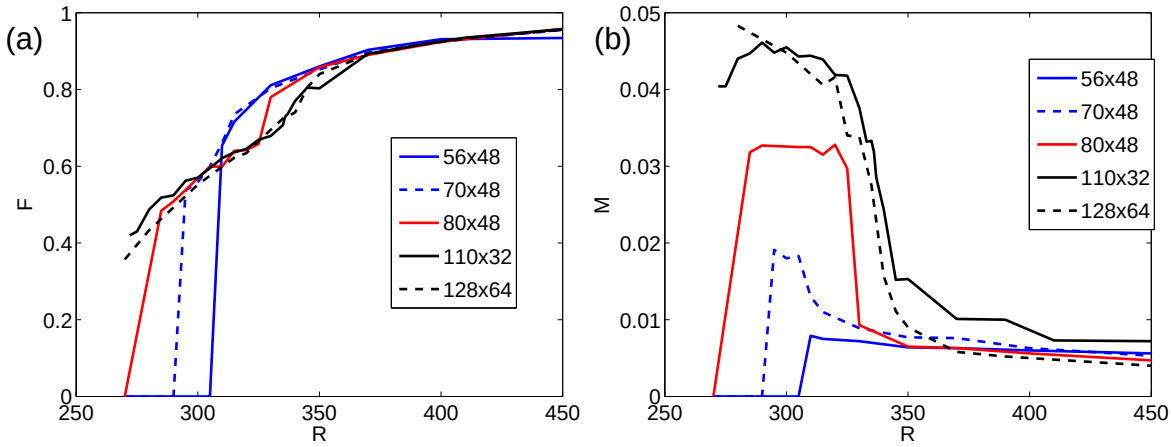


FIGURE 4.43 – (a) : Fraction turbulente en fonction de R pour plusieurs tailles de domaine, (b) : paramètre d'ordre en fonction de R pour plusieurs tailles de domaines. Résolution de $N_y = 15$, $N_{x,z}/L_{x,z} = 4$.

de F (Fig. 4.43 (a)). En effet, la fraction turbulente quitte le faisceau de courbes correspondant à la turbulence uniforme pour rejoindre celui correspondant aux bandes pour des Reynolds de plus en plus faible à mesure que la taille est réduite. On tire une information similaire du paramètre d'ordre (Fig. 4.43 (b)). la modulation dans l'écoulement se fait dans une zone de plus en plus restreinte en R (indiquée par la bosse de $M(R)$), les plus faibles maxima de $M(R)$ indiquent que la modulation est moins nette et contient des défauts (Fig. 4.42 (a)). On peut ainsi identifier la gamme sur laquelle la coexistence laminaire-turbulent est présente. La gamme d'existence des bandes se réduit avec la taille, ainsi, on trouve comme gamme $[280; 325]$ à $L_x \times L_z = 80 \times 48$ et $[290; 305]$ à $L_x \times L_z = 70 \times 48$.

Dans l'ensemble, il y a deux effets principaux de la réduction de la taille, d'une part, la longueur d'onde trop réduite dans la direction longitudinale met le motif mal à l'aise, comme cela a été remarqué dans l'étude systématique (Fig. 4.23). Il n'est pas surprenant alors de voir le "seuil" d'apparition des bandes réduits pour $L_x = 70$, la quantité $\epsilon = 1 - R/R_\mathrm{t} - \xi_x^2 \delta k_x^2$ devient très facilement négative pour de trop grands $|\delta k_x|$. L'autre effet se fait sentir sur R_g, qui augmente considérablement, jusqu'à atteindre $R_\mathrm{t} = 415$ (expérience et DNS) ou $R_\mathrm{t} = 355$ (à $N_y = 15$) pour les plus petites tailles [70]. L'interprétation est moins évidente, mais il semble qu'en défavorisant, voire, en cassant les bandes, on réduit la capacité de l'écoulement à maintenir la turbulence en dessous de R_t. Cela vient confirmer l'impression que l'on avait au chapitre précédent que l'organisation en bandes aide à entretenir la turbulence.

4.4 Résumé et discussion

Ce chapitre a été centré sur l'étude statistique à grande échelle de la formation du motif. En se basant sur les résultats et approches précédentes, on a mis en évidence toutes les particularités de la phénoménologie, on a pu faire des choix quant aux grandeurs à mesurer et on a proposé un modèle. En particulier, la modulation quasi-sinusoïdale de l'intensité de la turbulence rend pertinente l'utilisation du cadre de formation de motif et des phénomènes critiques basés sur un *paramètre*

EXP	R_t	g_1	g_2	ξ_x	ξ_z	τ_0	α
$N_y = 15$	345 ± 5	55	~ 120	$11 \to 14.6$	$2.3 \to 2.8$	~ 30	$\sim 2.10^{-3}$
$N_y = 27$	410 ± 5	30	-	-	-	-	-
PCF	415	-	-	-	-	-	-
TCF 1 $R_\mathrm{o}/2 = -425$	$R_\mathrm{i}/2 = 403$	82	106	-	$0.9 \to 1.2$	~ 18	3.10^{-3}
TCF 2 $R_\mathrm{o}/2 = -600$	$R_\mathrm{i}/2 = 428.5$	156	296	-	$1.4 \to 3.2$	~ 26	3.10^{-3}

TABLE 4.1 – Comparaison des estimations de coefficients de modèles de (Ginzburg–)Landau–Langevin effectif entre les DNS de l'écoulement de Couette plan, les modèles réduits de l'écoulement de Couette plan, et les expériences de l'écoulement de Taylor–Couette [73]

d'ordre. L'exploitation du modèle jusqu'au bout donne du poids aux procédures de traitement, motive les choix de mesures, et guide l'étude statistique, en mettant en évidence les situations à explorer.

Le modèle à bas ordre obtenu en tronquant la DNS dans la direction normale à la paroi est l'outil privilégié pour réaliser l'étude statistique. Les simulations de Barkley & Tuckerman et les expériences de Prigent ont mis en évidence la modulation quasi-sinusoïdale de la turbulence, que l'on confirme dans notre cas. On s'inspire de leurs travaux et on utilise le mode de Fourier fondamental du motif pour extraire d'une part l'amplitude de la modulation et d'autre part la position relative du motif dans le système. Le bruit intrinsèque de la turbulence fait apparaître la nécessité de moyenner ces quantités. On le fait en déterminant les pdf du paramètre d'ordre instantané. Le bruit intrinsèque fait aussi apparaître l'évolution apparemment aléatoire de la position du motif, qui peut être quantifié sur les moyennes d'ensemble des séries temporelles du motif. Un autre phénomène intéressant est la fluctuation d'orientation voire de longueur d'onde sous l'effet du bruit. Une procédure permet d'extraire des distributions de *temps de résidence* des séries temporelles de paramètre d'ordre.

Dans une étude de formation de motif ou de transition de phase, on peut déterminer en bonne approximation le comportement quantitatif du paramètre d'ordre à l'aide d'arguments simples de symétrie et de la nature de la bifurcation [19, 54]. On procède de cette manière, en prenant soin d'ajouter le bruit causé par la turbulence locale à petite échelle. Le cadre de travail ne découle pas des premiers principes. En l'état on ne peut pas remonter aux modèles statistiques ou déterministes à partir des équations de Navier–Stokes, en conséquence les descriptions choisies contiennent une bonne part d'empirisme. Une exploitation analytique et numérique en profondeur du modèle permet de mieux comprendre la phénoménologie, de justifier nos procédures de mesure et de guider l'étude statistique de la DNS.

La réduction du système à un domaine de petite taille aux conditions de bord périodiques conduit à passer d'un modèle de Ginzburg–Landau–Langevin à un modèle de Landau–Langevin contenant les vecteurs d'onde du motif. L'écriture de l'équation de Fokker–Planck correspondante permet d'extraire la PDF à l'équilibre du module et de comprendre le comportement des PDF tirées de la simulation comme étant due au caractère complexe du paramètre d'ordre. La PDF peut donner les comportements du paramètre d'ordre de manière analytique dans la limite d'une approximation de champ moyen. On voit ainsi le comportement de la moyenne et des fluctuations du paramètre d'ordre en fonction des paramètres de contrôle, et on peut quantifier la limite de validité de cette approximation *via* un critère de Ginzburg. On fait apparaître notamment le maximum de fluctuation autour de R_t et la valeur non nulle de la moyenne au dessus de R_t, conséquence du bruit dans un système de petite

taille.

Le modèle de Landau–Langevin permet de mettre en évidence le comportement autour de l'équilibre de la phase et de l'amplitude du paramètre d'ordre, sous la forme respectivement d'une marche aléatoire et d'un processus d'Ornstein–Ulhenbeck. Il met de plus en évidence les subtilités de la croissance exponentielle de l'amplitude. Les simulations numériques du modèle de Landau–Langevin confirment le fonctionnement de la procédure d'extraction de moyenne d'ensemble de séries temporelles, le comportement qualitatif contenu dans le modèle, et valident l'extraction des paramètre grâce à ce traitement. L'approche en termes d'équation de Fokker–Planck permet de comprendre les fluctuations en terme de *temps de premier passage* et d'échappement d'un puit dans ce modèle potentiel. On peut mieux comprendre le comportement de la procédure de traitement à l'aide des points de départ et d'arrivée et non *via* le passage du col. On confirme que ce comportement est typique d'un tel processus sur un modèle simplifié (dans l'annexe C) et sur des simulations numériques du modèle. Dans la limite où le bruit relatif est faible, on peut déterminer analytiquement l'expression du temps de premier passage sous la forme d'une loi de type Arrhenius. La confrontation aux simulations numériques du modèle met en évidence la limite de validité de l'expression analytique à fort bruit relatif, au sens des critères de type Ginzburg développés pour l'équilibre, ainsi que la limite de l'approche numérique lorsque les temps de premier passage deviennent trop longs par rapport au temps de simulation.

Finalement, de ce type de modèle potentiel on peut attendre un certain type de comportement qualitatif typique des transitions de phase quand on passe à des grandes tailles et à une modélisation de type Ginzburg–Landau–Langevin. En particulier, on s'attend à une apparition spontanée du désordre spatial en lieu et place des compétitions d'orientation, de la disparition du paramètre d'ordre dans la phase $R > R_{\mathrm{t}}$ ainsi que pour les systèmes échantillonnés suffisamment longtemps, la divergence des fluctuations. Dans ces limites on peut passer du motif simple sous bruit à des comportement de type phénomène critique.

Guidé par les considérations issues de l'analyse du modèle, on a procédé à l'étude de la formation de la bande et l'effet du bruit turbulent sur son comportement. Les indicateurs classiques de turbulence sont relativement pertinents pour suivre l'effet de l'augmentation du nombre de Reynolds et l'extension de la zone occupée par la turbulence. Cependant, l'information apportée par le paramètre d'ordre est ici plus détaillée. Ainsi on procède à l'étude du comportement faiblement non linéaire en fonction des nombres d'onde et du nombre de Reynolds. On retrouve le comportement attendu en terme de loi de puissance et on peut en extraire les paramètres du modèle de Landau–Langevin équivalent. L'étude des transitoires, des fluctuations du paramètre d'ordre et la mise en évidence de la marche aléatoire de la phase complète l'estimation des paramètres. On fait une comparaison de nos résultats avec les coefficients estimés par Prigent [73] dans le cas de Taylor–Couette (Tab. 4.1). Les comparaisons les plus pertinentes sont à faire soit avec l'écoulement de Couette plan (peu de données), soit avec l'écoulement de Taylor–Couette contra-rotatif, le plus similaire avec l'écoulement de Couette plan. On prend garde au fait qu'il y a un facteur 2 entre les nombres de Reynolds des écoulements de Couette plan et Taylor–Couette, à cause du choix du gap entier et non du demi gap comme échelle caractéristique de l'écoulement de Taylor–Couette. On se permet la comparaison car les simulations approchant la limite de la DNS montrent que l'on retrouve les même tendance du paramètre d'ordre et des grandeurs turbulentes à résolution normale et que les phénomènes présentés ici ne sont pas des solutions numériques ou trop influencées par le bruit de troncature. Les légères

différences quantitatives ont pour source principale la différence entre les deux systèmes et les effets quantitatifs de la réduction de l'ordre de la modélisation. L'autre limite vient de ce que l'estimation de coefficients d'équations modèles de Langevin d'un système réel est toujours approximative dans le cas d'un modèle non-linéaire [98] § 8.9.

L'étude du comportement des temps de résidence montrent que qualitativement, on retrouve des compétitions de longueur d'onde et d'orientation quand la stabilité du système devient moins importante. Ainsi les fluctuations de longueur d'onde et d'orientation se manifestent suffisamment pour être mesurées quand on attend une instabilité de type Eckhaus dans un système purement déterministe. Les fluctuations d'orientation sous l'effet du bruit, elles, se manifestent lorsque R croît vers R_{t}. Dans ce régime, on peut faire une étude paramétrique, qui montre la croissance quasi-exponentielle des temps de résidence dans une orientation avec l'écart au seuil. Cependant, la comparaison à l'expression analytique issue du modèle de Landau–Langevin est difficile, les mesures ne pouvant être effectuées que relativement pès de R_{t} où l'expression analytique n'est plus valide.

Finalement, l'exploration principalement qualitative de l'effet de taille permet de confirmer l'intuition donnée par le modèle. On voit effectivement apparaître un comportement critique du paramètre d'ordre, bien que les temps d'échantillonnage nécessaires soient trop courts pour suivre l'augmentation des maxima de fluctuations. L'apparition spontanée de défauts peut être mise en évidence. Dans la limite des taille plus petites que les longueurs d'onde typique, on peut explorer plus quantitativement, grâce à la fraction turbulente et au paramètre d'ordre, le maintien de la turbulence dans des domaines de taille grande devant la MFU, mais plus petite que la longueur d'onde du motif. On peut ainsi tester l'augmentation de R_{g} lorsque la taille diminue. Il finit par rejoindre R_{t} dans la limite de la MFU, confirmant phénoménologiquement l'impression que les bandes obliques maintiennent la turbulence à des nombres de Reynolds relativement faibles.

Chapitre 5

Expériences de trempe et formation de trous laminaires

On ce concentre ici sur l'apparition de trous laminaires au milieu de zones turbulentes et sur les conséquences à court et long terme de ces trous sur la cohabitation laminaire-turbulent. On examine spécifiquement deux types de situations, d'une part, des expériences de trempes pour lesquelles un écoulement uniformément turbulent à $R > R_{\mathrm{t}}$ voit son nombre de Reynolds baissé brutalement en dessous de R_{t}, d'autre part des expériences à des nombres de Reynolds proches de R_{g}, pour lesquelles les trous se forment "naturellement" dans des bandes apparemment métastables (voir [58, 77] pour les gammes de valeurs selon la résolution).

On sépare le chapitre en deux parties. On a premièrement une approche d'expérience numérique ($N_y = 15$ et $N_y = 27$) de trempe venant de $R > R_{\mathrm{t}}$ et de DNS suivie près de R_{g}. On procède à la comparaison détaillée entre ces deux approches. On s'efforce de quantifier l'apparition et le comportement de ces trous à l'aide de quantités classiques (fraction turbulente, frottement pariétal) ou définies précédemment (énergie turbulente, paramètre d'ordre). Deuxièmement, on propose des possibilités d'interprétation, des ébauches de modèles, mécaniques et statistiques, des directions d'étude, pour éclaircir ces formations de trous, du point de vue mécanique. On discute modèles et expériences numériques, en replaçant la formation de trous dans le contexte de la transition. Cela diffère de l'approche classique en terme de transitoire turbulent à l'échelle de la MFU (pour le passage turbulent→ laminaire) [31], de l'approche en *edge state* pour la limite entre les états turbulents [25, 89] et laminaires et des perturbations optimales (linéaires [88] ou non linéaires [27, 64]) pour le passage laminaire→turbulent.

5.1 Suivi

5.1.1 Trempes

On examine deux séries d'expériences de trempe, la première sous la forme de DNS ($N_y = 27$), la seconde à plus basse résolution. On adopte un plan thématique, en séparant les échelles de temps, d'une part les temps courts qui correspondent à la formation de trous et d'autre part, les temps longs qui correspondent à la réorganisation de ces trous. C'est l'examen des grandeurs typiques qui aide

à préciser la notion de temps long ou court, et plus exactement, la hiérarchie d'échelles de temps auxquelles se passent chaque phénomène. Cela permet de poser le cadre général dans lequel se passe la trempe.

On produit une condition initiale uniformément turbulente à $R = 500$ ($N_y = 27$) et à $R = 450$ ($N_y = 15$) suivant la procédure de la section 2.3.1 (pp. 29). Une fois obtenu un état statistiquement permanent (contenant les structures classiques), on peut obtenir d'autres conditions initiales uniformemént turbulentes décorrélées les unes des autres en laissant évoluer ces écoulements. Ces conditions initiales sont trempées respectivement à $R \in [325; 400]_{N_y=27}$ et $R \in [280; 340]_{N_y=15}$. On examine aussi des nombres de Reynolds supérieurs à R_t pour comparer les transitoires dans les deux régimes $R < R_\mathrm{t}$ et $R > R_\mathrm{t}$. La détermination de la gamme de nombre de Reynolds pertinent a été faite lors de l'exploration du régime des bandes (voir 2.2.2 et 4.3 [58, 77]) . On traite les tailles de domaine périodique $L_x \times L_z = 110 \times 32$ et $L_x \times L_z = 56 \times 48$ à $N_y = 27$ et 128×48, $R = 315$ à $N_y = 15$. Les grandes tailles maintiennent une bande, tandis que les petites ne permettent pas la cohabitation sous une forme aussi organisée [70] (§ 4.3.6). On examine une expérience par taille de domaine, nombre de Reynolds à $N_y = 27$, sauf pour $R = 370$, pour lequel on génère des conditions initiales distinctes à $R = 500$. On réalise 5 conditions initiales distinctes et autant de trempes pour les deux tailles, le but étant de montrer que les tailles de domaine sont suffisamment grandes pour que les moyennes en espace aient convergé , et de voir dans quelle mesure et sur quelles échelles de temps le comportement moyen de la trempe dépend du détail de l'organisation de la condition initiale. De la même manière, le cas examiné à $N_y = 15$ comporte 6 conditions initiales distinctes pour faire autant de trempes différentes. Cela permet de valider *a posteriori* le comportement qualitatif des séries temporelles traitées dans la section 4.3.1.

Lors de ces expériences, on suit la fraction turbulente, l'énergie moyenne, l'énergie turbulente, la surface occupée par les zones intermédiaires (ou le laminaire et le turbulent sont superposés [6,80]) et les paramètres d'ordre aux temps courts et aux temps longs (voir la référence [77] pour des définitions). On présente d'abord les temps court, puis les temps intermédiaires et longs. Ces deux derniers cas permettent de justifier Le découpage *a posteriori*. Une fois la trempe typique décrite, on passe à une description semi locale.

Le déroulement des trempes peut être illustré par des vidéos.

Temps court, formation des trous, approche moyenne en espace

On considère d'abord le cas des temps courts, à $N_y = 27$. On suit conjointement les quantités turbulentes lors de la trempe pour les deux tailles. On présente les résultats sur la figure 5.1 pour la gamme de temps $t \in [0; 80]$, concentré sur ce qui apparaît comme le premier régime. Les énergies et la fraction turbulente décroissent lors de la trempe, tandis que la taille de la zone intermédiaire croît. La hiérarchie des taux de croissance et des valeurs finales atteintes par les grandeurs arrivent en fonction de R est claire (R croissant indiqué par les flèches). L'énergie turbulente, l'énergie moyenne et la fraction turbulente sont d'autant moins importante et décroissant d'autant plus vite que le nombre de Reynolds est petit, tandis que la taille de la zone intermédiaire est d'autant plus importante et croît d'autant plus vite que le nombre de Reynolds est important. Il n'y a pas, dans cette gamme de temps, de distinction entre le comportement en dessous et au dessus de R_t. On fait la distinction entre la fraction turbulente et la taille des zones intermédiaires d'une part (figure 5.1 (c,d) (g,h)) et les énergies moyennes et turbulentes d'autre part (figure 5.1 (a,b) (e,f)). Pour l'énergie turbulente,

la décroissance est exponentielle, tandis que la tendance est linéaire pour la fraction turbulente et la taille de la zone intermédiaire. L'énergie moyenne, qui se comporte comme le produit de la fraction turbulente et de l'énergie turbulente, a donc une tendance plutôt exponentielle.

On constate qu'il n'y a pas de distinction claire, aux temps courts, entre le comportement dans la boite $L_x \times L_z = 110 \times 32$ dans laquelle les bandes vont finir par se développer et dans la boite $L_x \times L_z = 56 \times 48$ dans laquelle elle n'apparaissent pas [70]. On peut mettre cela plus en évidence en comparant les séries temporelles des deux tailles sur un même graphique.

On ajoute à ces données, l'examen du frottement pariétal pour la taille $L_x \times L_z = 110 \times 32$. On définit s_x et s_z :

$$s_x = \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=\pm 1}$$

et

$$s_z = \left.\frac{\partial v_z}{\partial y}\right|_{y=\pm 1} .$$

On pose ensuite $S_x^{\pm}$ et $S_z^{\pm}$ leurs moyennes en espace sur les deux parois :

$$S_x^{\pm} = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}z \left(\partial_y v_x\right)(\pm 1)\,,\; S_z^{\pm} = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}z \left(\partial_y v_z\right)(\pm 1)\,. \tag{5.1}$$

En examinant les profils de v_x et v_z ([6,80], § 2.3.2,§ 3.1) et de $\omega_y \simeq -\partial_y v_x$, le cisaillement s_x a le même signe sur les deux parois, et suit la modulation de l'amplitude de la turbulence. Cependant, à cause du changement de signe de la composante v_z qui apparaît dans l'écoulement grande échelle d'un coté et de l'autre de la bande, une moyenne en espace conduit à un résultat nul. Ce fait va être confirmé lors de l'étude locale. On ne suit donc que $S_x^{\pm}$ lors de l'étude moyenne. On trace le comportement de $S_x^{\pm}$ au temps court ainsi que celui de la contrainte à la paroi $S_x^{\pm}/R$ respectivement sur la figure 5.2 (a) et 5.2 (b). On a pour le cisaillement un comportement de décroissance quasi-exponentielle lors de la trempe, comme pour l'énergie turbulente. On constate le même type de hiérarchie entre les nombres de Reynolds. Le même type de comportement se retrouve évidemment pour la contrainte à la paroi, puisque les deux grandeurs ne diffèrent que d'un facteur multiplicatif.

On réalise la comparaison des différentes conditions initiales, pour un nombre de Reynolds d'arrivée $R = 370$ ($N_y = 27$). On le fait aux deux tailles $L_x \times L_z = 110 \times 32$ (bande possible) et $L_x \times L_z = 56 \times 48$ (intermittent). On examine pour l'ensemble des grandeurs turbulentes (e, f, e_t, f_f) que l'on présente sur la figure 5.3 (le code de couleur ne fait la distinction qu'entre les tailles, pas entre les expériences). On note que pour chaque quantité, on obtient un faisceau de courbe concentré autour d'une même tendance maîtresse. Deux cas dévient légèrement de la tendance pour l'énergie turbulente dans le cas de la petite taille (à $R = 365$). Cette déviation est atténuée pour l'énergie moyenne. L'organisation très régulière des courbes vient confirmer la tendance linéaire pour la fraction turbulente et la taille de la zone intermédiaire et le comportement exponentiel de l'énergie. Cela nous assure de plus que l'on peut étudier un nombre de Reynolds particulier pour une taille particulière à l'aide d'un seul exemple et obtenir un ajustement valable quelque soit l'expérience.

On peut suivre les tendances en fonction du nombre de Reynolds à l'aide de l'ajustement des séries temporelles de la fraction turbulente, de la taille de la zone intermédiaire, de l'énergie turbulente et de l'énergie moyenne. On ajuste les fractions par $at + b$ et l'énergie turbulente par $\alpha \exp(-t/\tau)$.

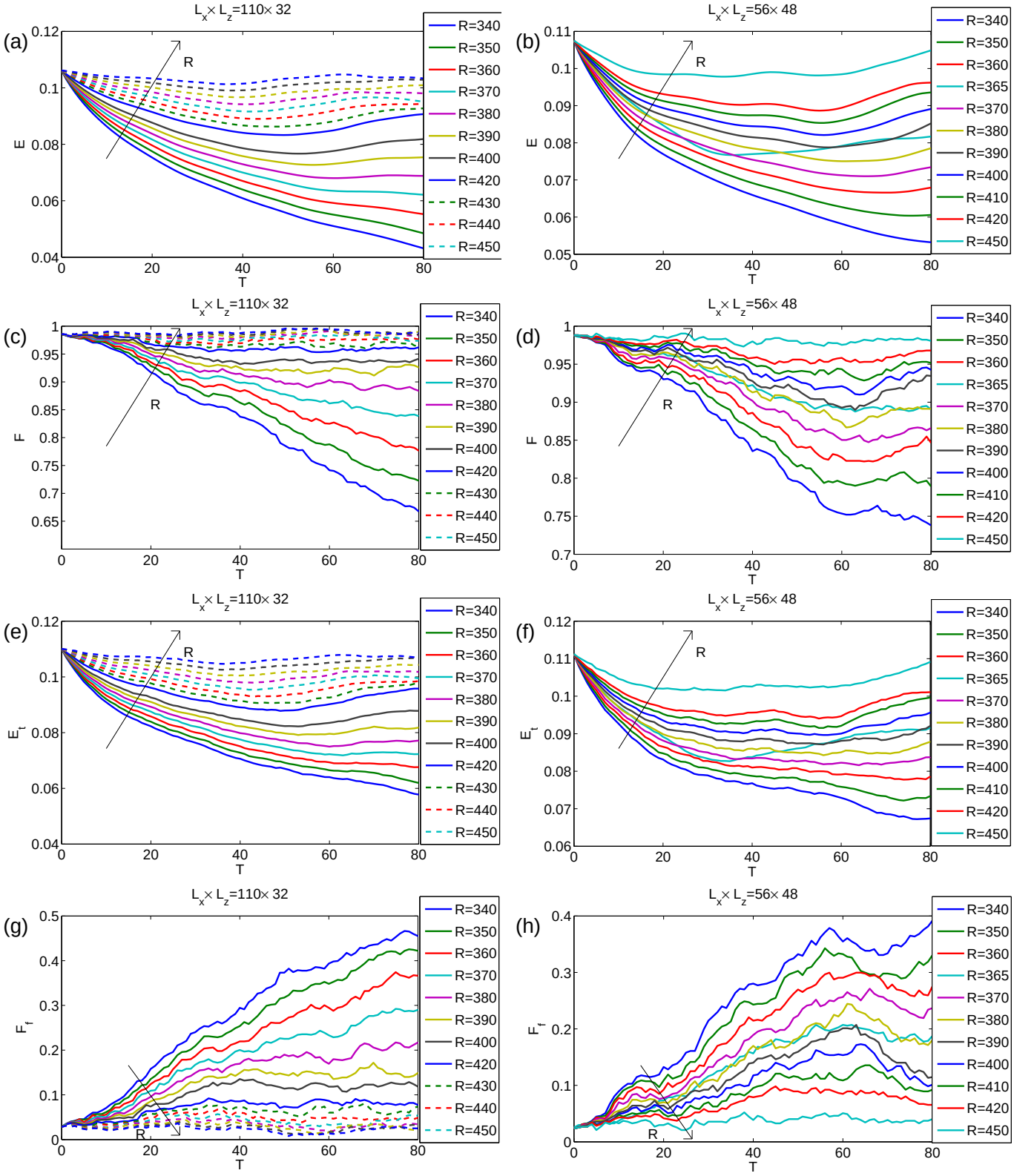


FIGURE 5.1 – Séries temporelles des quantités moyennes à petite taille ($L_x \times L_z = 56 \times 48$, b,d,f,h) et grande taille ($L_x \times L_z = 110 \times 32$ a,c,e,g) . Énergie moyenne, (a) : 110×32, (b) : 56×48. Fraction turbulente, (c) : 110×32, (d) : 56×48. Énergie turbulente, (e) : 110×32, (f) : 56×48. Fraction de front, (g) : 110×32, (h) : 56×48.

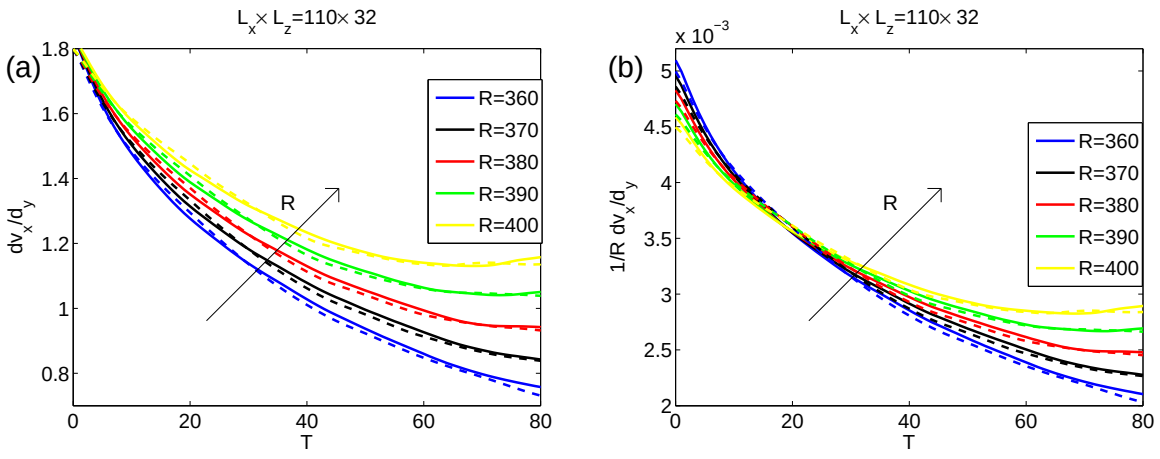


FIGURE 5.2 – Frottement pariétal aux temps courts : contrainte (a) et cisaillement (b). $L_x \times L_z = 110 \times 32$, $N_y = 27$, les trait-plein/pointillés correspondent aux deux parois.

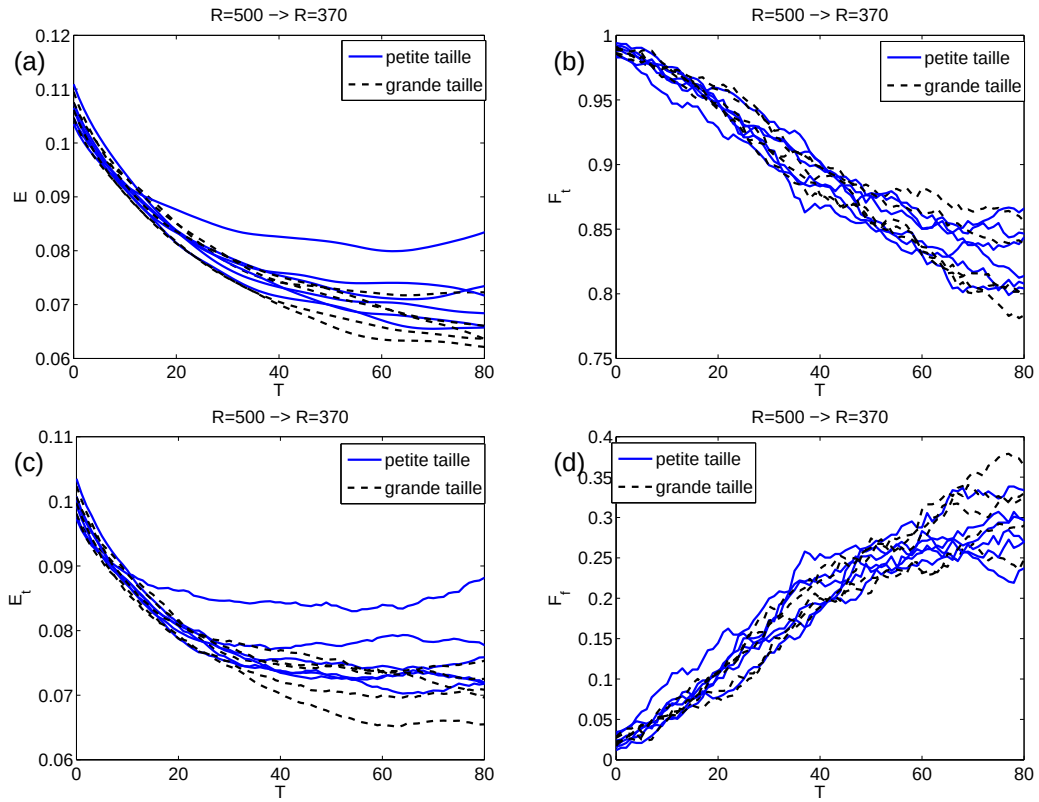


FIGURE 5.3 – Séries temporelles pour une trempe de $R = 500$ à $R = 370$, pour petite ($L_x \times L_z = 56 \times 48$) et grande taille ($L_x \times L_z = 110 \times 32$), pour plusieurs conditions initiales par taille. (a) : énergie, (b) : fraction turbulente, (c) : énergie turbulente, (d) : fraction de front. Le code de couleur ne fait la distinction qu'entre les tailles, pas entre les expériences.

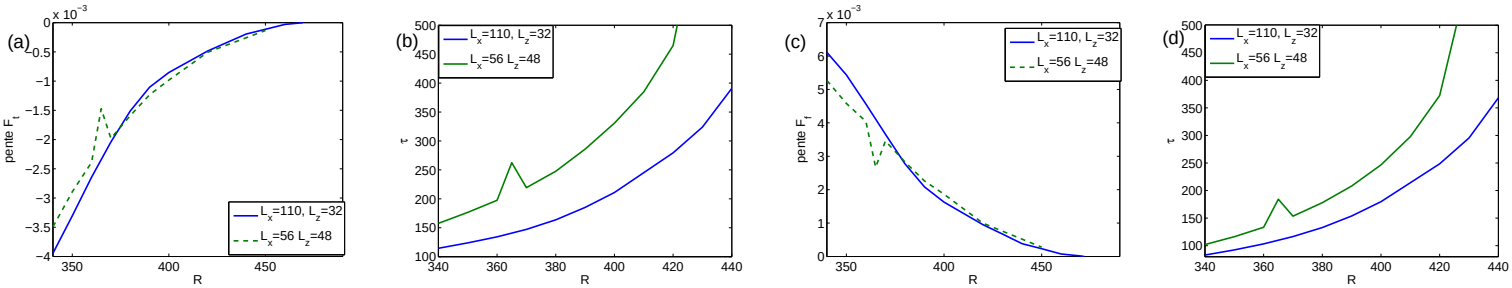


FIGURE 5.4 – Pente a et τ à l'origine des séries temporelles de (a) : la fraction turbulente, (b) : l'énergie turbulente et (c) : la fraction de front. (d) : énergie moyenne

On reporte ensuite les résultats, a et τ, en fonction du nombre de Reynolds R pour la fraction turbulente (Fig. 5.4 (a)), pour l'énergie turbulente (Fig. 5.4 (b)), pour la taille de la zone intermédiaire (Fig. 5.4 (c)) et l'énergie moyenne (Fig. 5.4 (d)). Les courbes présentent un écart à $R = 365$; ce point correspond aux courbes hors des tendances (figure 5.1). En valeur absolue, toutes ces pentes (a, $1/\tau$) décroissent quand R se rapproche de 500 par valeurs croissantes. Cela confirme l'impression qu'on tire des graphiques (figure 5.1). Les pentes pour l'énergie turbulente ou le cisaillement correspondent directement à un temps caractéristique tandis qu'un facteur correspondant à la valeur de F apparaît dans les fractions. Il n'apparaît pas de loi d'échelle très claire en fonction de R. Le comportement des temps caractéristique des fraction, $1/a$, ne dépendant pas de la taille. Pour des raisons pour l'instant encore non expliquées, les tendances des temps caractéristiques, τ, de l'énergie turbulente et de l'énergie moyenne dépendent partiellement de la taille. En approximant les courbes de manière affine, la pente apparente de $\tau(R)$ ne dépend pas de la taille, mais l'ordonnée à l'origine apparente en dépend.

Temps longs, établissement des bandes

On examine maintenant les séries temporelles pour l'apparition effective de trous laminaires et de leur réorganisation.

En suivant les séries temporelles des grandeurs turbulentes aux temps long pour les exemples à $R = 370$ ($N_y = 27$) et l'exemple à $N_y = 15$, on peut confirmer qu'il y a décorrélation aux temps intermédiaires, lors du creusement des trous et de la réorganisation en bande. On peut le voir pour chacune des grandeurs turbulentes (figure 5.5). Ce qui apparaît comme un faisceau de courbe cohérent aux temps courts $T \lesssim 100$ (Fig. 5.3) s'élargit très nettement. On passe d'un comportement apparemment déterministe (faible influence du bruit et des différences dans les conditions initiales) à des fluctuations autour d'une valeur d'équilibre pour $t \gtrsim 400$, avec un transitoire très bruité entre les deux. On voit apparaître la différence entre petite et grande taille. Dans le petit domaine, le système reste dans le voisinage du régime atteint après les temps court. Dans le grand domaine les quantités moyennes subissent un *over/undershoot* (selon la grandeur) qui correspond à l'apparition de vrais trous. On précise la hiérarchie de temps caractéristiques à l'aide des grandeurs turbulentes, pour lesquelles se succèdent ajustement au bon nombre de Reynolds ($t \sim 50$), *undershoot/overshoot*, $t \sim 100$ puis convergence vers le voisinage de la valeur moyenne $t \sim 300$. Localement, cela correspond à l'ajustement de l'écoulement à R puis au début de formation des trous. Cela justifie *a posteriori* le

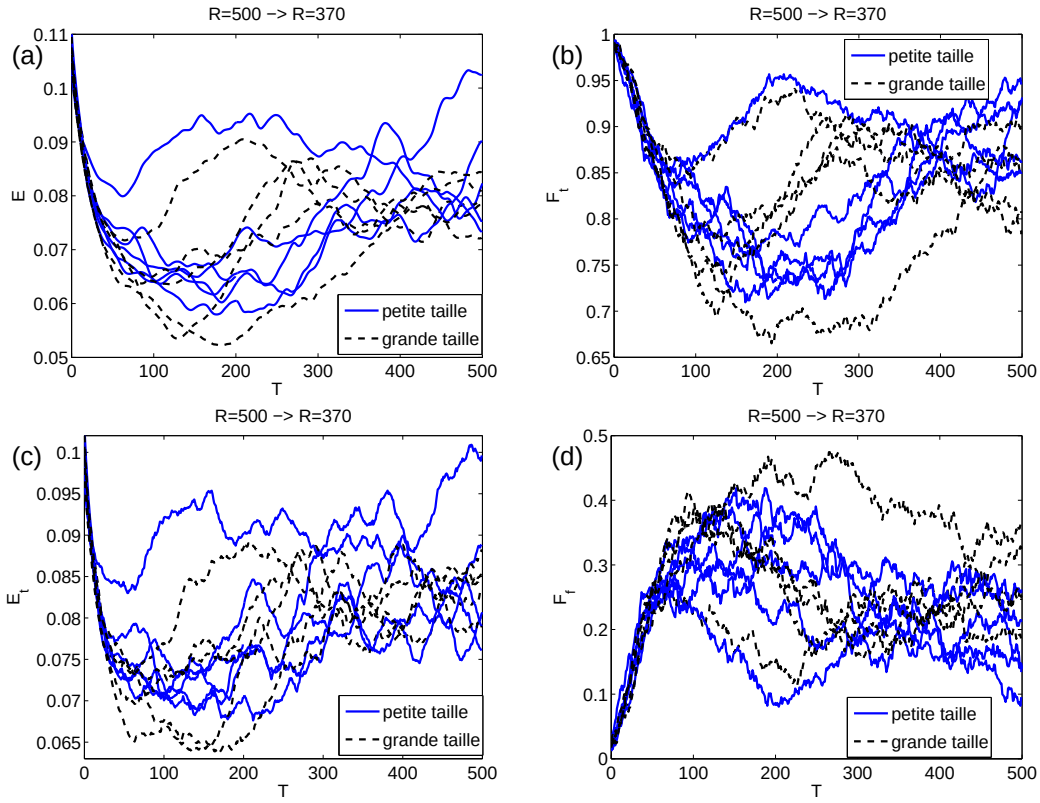


FIGURE 5.5 – Séries temporelles pour une trempe de $R = 500$ à $R = 370$, pour petite ($L_x \times L_z = 56 \times 48$) et grande taille ($L_x \times L_z = 110 \times 32$), pour plusieurs conditions initiales par taille. (a) : énergie, (b) : fraction turbulente, (c) : énergie turbulente, (d) : fraction de front.

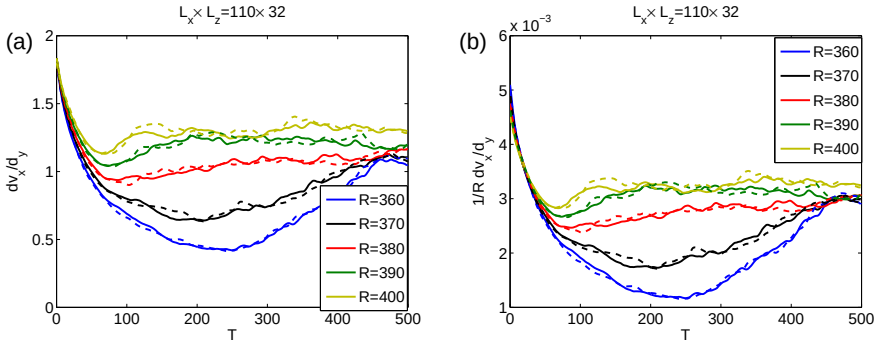


FIGURE 5.6 – Pour des expériences de trempe, $L_x \times L_z = 110 \times 32$, Reynolds de départ $R = 500$: (a) Cisaillement à la paroi, (b) Contrainte à la paroi, allant du début de la trempe jusqu'à atteindre le régime permanent.

découpage choisi dans la section précédente.

Cela met en évidence le fait qu'aux temps courts un processus déterministe se produit pour chaque distribution de vitesse (en espace), ce qui donne les mêmes courbes. Cependant, les processus aux temps longs dépendent de l'organisation en espace de l'écoulement, car les configurations sont différentes dans chaque cas. Le processus est le même à chaque fois, mais donne des séries temporelles décorrélées. (figure 5.5). On retrouve ce type de comportement dans le cisaillement à la paroi (figure 5.6). On a une décroissance quasi-exponentielle, puis un undershoot puis convergence vers le voisinage de la valeur moyenne au nombre de Reynolds correspondant. Ce comportement aux temps plus longs est présents dans les autres grandeurs turbulentes [77]. Au delà de $t \sim 400$ le régiment permanent est atteint, et on a des fluctuations autour de la moyenne, décorrélées entre expériences, conséquence du chaos local et des différentes conditions initiales.

On examine plus en détail l'établissement des bandes, pour explorer la suite de la trempe. La quantité qui se distingue dans cette phase est le paramètre d'ordre. On réalise la comparaison qualitative entre les données à $N_y = 15$ traitées systématiquement dans la section 4.3.1, et celles à $N_y = 27$. On utilise pour cela nos séries d'expériences à même taille, même nombre de Reynolds mais à condition initiale différente. On examine plus particulièrement les paramètres d'ordre. Dans la figure 5.7, en lin-log, l'orientation qui s'établit finalement correspond à la ligne continue, le tiret correspond à l'orientation ne gagnant pas. Dans tous les cas, les paramètres d'ordre correspondants aux deux orientations ont un croissance quasi-exponentielle, puis la saturation et compétition entre les deux se fait sentir, un des deux va alors décroître et l'autre atteindre le même régime permanent quelque soit l'expérience. Cela se voit particulièrement dans l'exemple à $N_y = 15$ et $R = 315$, pour lequel les séries temporelles sont relativement longues (Fig. 5.7 (b)). L'échelle de temps τ_0/ϵ, dans le cadre de la dépendance en temps introduite dans la section 4.2.4 (Eq (4.31) pp. 123) se fait sentir au niveau de la durée de la phase de croissance et de saturation. Dans le cas du système à $N_y = 27$ et $R = 370$, les séries temporelles sont plus courtes, mais font néanmoins apparaître la même phénoménologie et les mêmes temps caractéristiques.

Dans les expériences sur l'écoulement de Taylor Couette, Prigent [73] a pu mettre en évidence l'effet du sens de rotation sur l'orientation de la spirale (pp. 86–87). Dans l'écoulement de Couette plan, on s'attend à ce que les deux orientations soient équivalentes ; cela est confirmé par ces résultats, bien

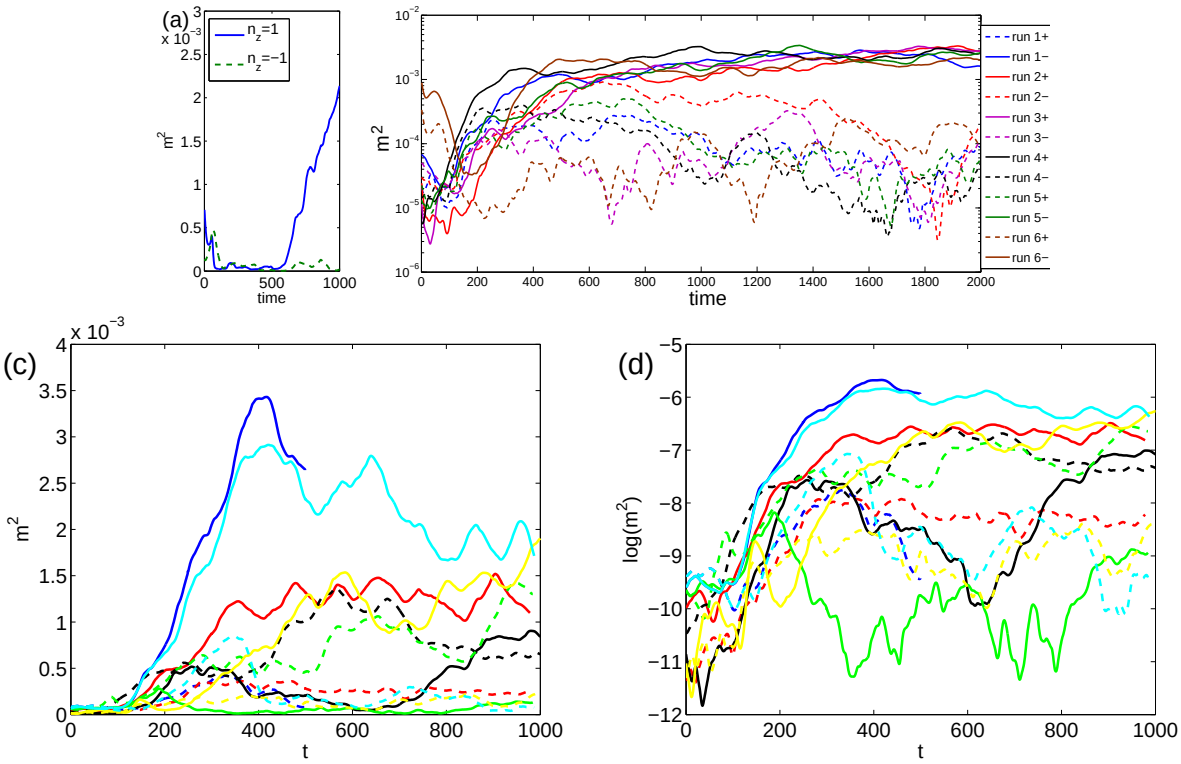


FIGURE 5.7 – Un exemple de série temporelle de m^2 incluant la préparation de la condition initiale à $R = 450$, $N_y = 15$ ($t < 500$) puis la trempe $t > 500$. (b) : échelle logarithme décimal/linéaire de m_+^2 et m_-^2 en fonction du temps pour 6 simulations différentes d'un même système, $L_x \times L_z = 128 \times 48$, $R = 315$, $N_y = 15$. (c) : même approche à $N_y = 27$, $R = 370$ et $L_x \times L_z = 110 \times 32$ (d) : en log-lin.

que des statistiques plus extensive soient nécessaires pour prouver cette affirmation. Prigent extrait le comportement en loi d'échelle du temps de croissance exponentielle du paramètre d'ordre. Dans l'écoulement de Couette plan une telle étude est beaucoup moins évidente. On vérifie pour les deux résolutions qu'on peut approximer la pente du faisceau de courbe (figure 5.7 (b,d)). Cela signifie qu'on ne peut pas se contenter d'une expérience par nombre de Reynolds, mais que des statistiques sont nécessaires. La difficulté à faire un ajustement sur un expérience vient entre autre de la compétition entre les deux orientations qui rend les séries temporelles plus complexes qu'une évolution du type croissance exponentielle puis saturation.

Suivi local

On poursuit l'étude de la trempe par une approche semi-locale à $R = 370$. On se pose la question suivante : quelle doit être l'énergie et le frottement pariétal autour d'un *streak* pour que celui-ci retombe vers le laminaire, y a t'il des valeurs critiques de ces deux grandeurs en deçà de laquelle la relaminarisation est assurée. On veut voir quantitativement, au delà des visualisations, à quoi correspond la retombée vers le laminaire. On cherchera à transposer ce que l'on trouve pour les trempes à la formation de trous près de R_g. On profite de la connaissance qu'on a du comportement et des échelles de temps moyen pour aborder le local : on connaît la durée sur laquelle le trou se forme.

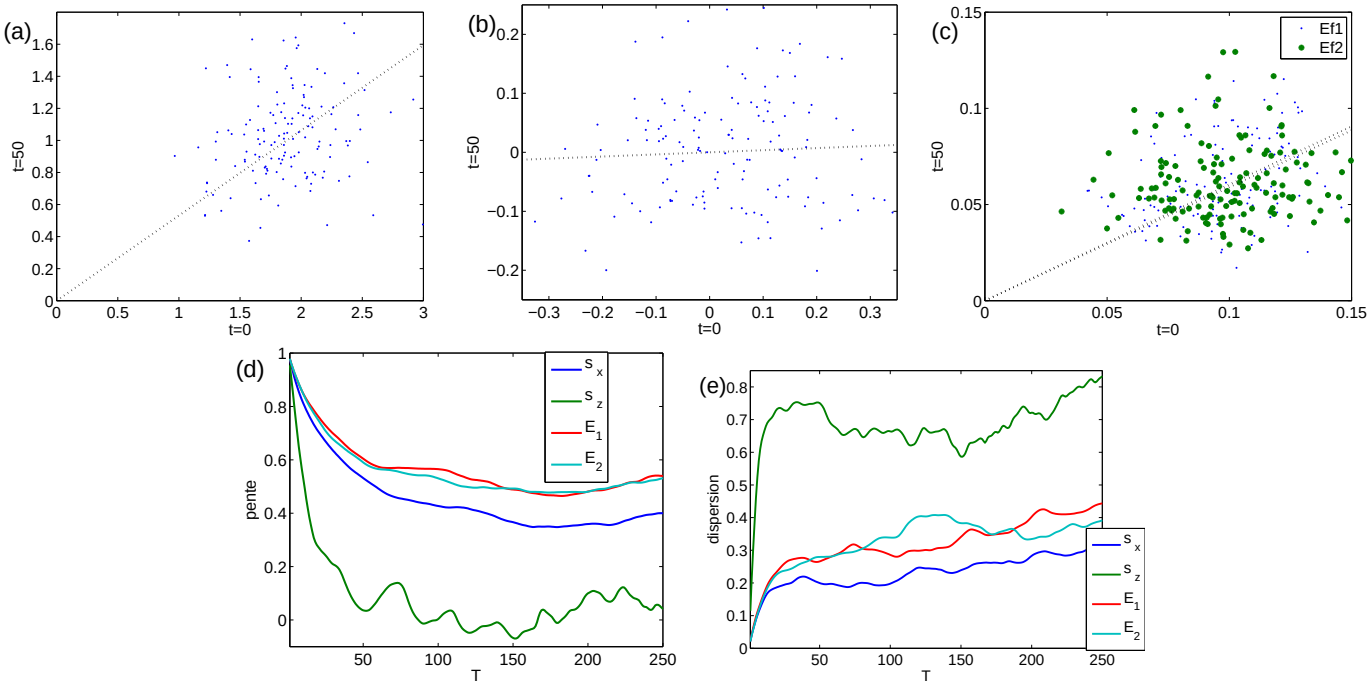


FIGURE 5.8 – Examen local de la trempe $R = 500 \to R = 370$, $L_x \times L_z = 110 \times 32$, $N_y = 27$. Nuages de points : moyenne locale du cisaillement à la parois (direction $\vec{e}_x$ (a) et $\vec{e}_z$ (b)) et de l'énergie (c). Pente (d) et dispersion (e) de chaque nuage.

Elle correspond à la durée sur laquell le trou est approximativement corrélé à la condition initiale turbulente. On suit l'énergie ainsi que le frottement pariétal. Avec ces deux grandeurs on teste à la fois l'amplitude mais aussi la raideur des profils de vitesse. On procède à un moyennage spatial dans de petits domaines. On choisit une surface de paroi de taille $l_x \times l_z$ pour moyenner le frottement pariétal en ± 1. On choisit des boites de taille $l_x \times 1 \times l_z$ (soit $y < 0$ soit $y > 0$) pour moyenner l'énergie. On cherche à capter le comportement semi local de l'écoulement, c'est à dire à l'échelle du *streak*. En effet, les visualisations du champ de vitesse montrent que les relaminarisations se font par portions de *streaks*. On sépare entre $y > 0$ et $y < 0$ à cause de la localisation (en bonne approximation) des *streaks* dans l'une des deux demi-épaisseurs [70,77,80]. On réalise donc des diagrames $f(t)$ en fonction de $f(0)$, $f(0)$ correspondant à la condition initiale à $R = 500$. On le fait pour t relativement petit $t \lesssim 250$, de manière à explorer les temps courts. Ce type de suivi donne des nuages de points autour d'une tendance.

On donne un exemple à $t = 50$ pour $l_x = 6$ et $l_z = 4$. Cette taille de cellule de moyennage est légèrement plus importante que celle choisie pour la discrimination laminaire turbulente [77]. En effet, le comportement que l'on cherche à capter se fait sur une échelle un peu plus large. Cela étant, il n'y a pas de différence notable de comportement lorsqu'on varie l_x l_z dans des gammes raisonnables $1 \lesssim l_x, l_z \lesssim 10$. On obtient des nuages de points pour la composante $\vec{e}_x$ frottement pariétal (figure 5.8 (a)), sa composante $\vec{e}_z$ (figure 5.8 (b)) ainsi que pour l'énergie (figure 5.8 (c)). Ils s'étendent autour d'une droite passant par l'origine. Seul s_z s'étend des deux cotés de 0, de manière symétrique. En effet, cette quantité contient l'information contenue dans les vortex longitudinaux et peut changer de

signe sur une même paroi. Il y a une certaine dispersion, qui ne semble pas dépendre de la condition initiale. Qualitativement, il apparaît un seul régime quelles que soient les valeurs initiales de l'énergie ou du frottement pariétal : les valeurs à t subissent une multiplication par $z(t) < 1$ par rapport aux valeurs à zéro. À cela s'ajoute la dispersion due au chaos local : des mêmes valeurs de s_x ou e peuvent correspondre à des situations légèrement différentes. On peut calculer la pente de la droite par les moindres carrés de :

$$\sum_i (f_i(t) - af_i(0))^2 \,,$$

soit :

$$a = \frac{\sum_i f_i(t) f_i(0)}{\sum_i f_i(0)^2}$$

et la dispersion par l'écart relatif à la droite :

$$\frac{\sum (f_i(t) - af_i(0))^2}{\frac{1}{2}\sum_i f_i(0)^2 + f_i(t)^2} \,.$$

On suit la pente et la dispersion en fonction du temps (Fig. 5.8 (d,e)). La pente suit d'abord un régime quasi exponentiel, avant de converger autour d'une valeur limite. La dispersion relative a un transitoire exponentiel relativement court en comparaison, avant elle aussi de converger autour d'une valeur limite. On remarque que la dispersion relative de s_z est clairement plus grande que celle de s_x et de l'énergie. Le comportement exponentiel des pentes renvoie à celui des moyennes : aux temps courts, énergie et cisaillement décroissent exponentiellement avec le même taux avant la réorganisation des bandes. On voit donc qu'on n'a pas de séparation nette entre une gamme de valeurs qui relaminarise totalement et une autre qui décroît vers le voisinage d'un comportement limite correspondant à $R = 370$. On capte principalement l'ajustement global (au sens de toutes les conditions initiales) à un nombre de Reynolds plus faible. Le transitoire de la dispersion correspond à une certaine décorrélation des valeurs. Pour des temps t trop longs, on s'attend à ce que la réorganisation à grande échelle et l'apparition d'un écoulement moyen aient trop fait dévier l'écoulement de ce qu'il était à l'origine, rendant les comparaisons à la situation à $t = 0$ non-pertinente.

5.1.2 Près de la disparition des bandes

On suit dans cette section des expériences numériques à nombre de Reynolds constant. Comme dans la section précédente, on suit deux séries d'expériences, les unes à $N_y = 27$, les autres à $N_y = 15$. On s'intéresse particulièrement aux excursions conjointes du paramètre d'ordre et de la fraction turbulente, c'est à dire aux situations où après l'apparition d'un ou plusieurs trous, la bande, au lieu de s'étendre, repousse, éventuellement avec une autre orientation.

On décrit d'abord quelques exemples détaillés. On passe propose ensuite à une approche statistique. Finalement, on explore le lien entre ces formations de trous et changement d'orientation et le régime de bandes fragmentées. Dans toute l'approche, on prend gare aux excursions de la fraction turbulente, correspondant à des trous qui ne se referment pas, et donc conduisent à une relaminarisation totale.

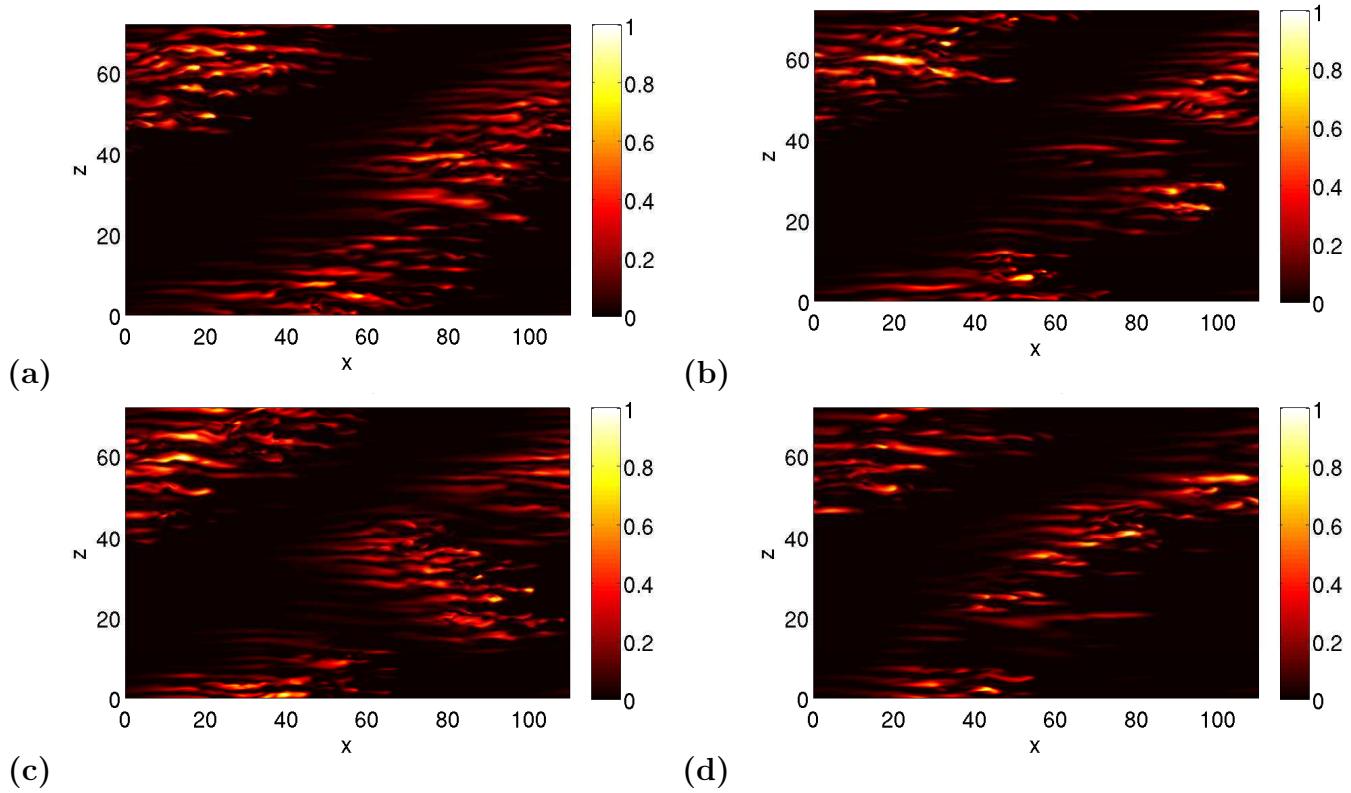


FIGURE 5.9 – Système de taille $L_x \times L_z = 110 \times 72$, $R = 317$. Norme de l'écart à l'écoulement laminaire $\vec{v}^2$ dans le plan $y = -0.61$ à quatre dates données. (a) : $T = 3220$, (b) : $T = 3320$, (c) : $T = 3450$. (a) : $T = 3800$

Identification

On présente d'abord un exemple qualitatif d'excursion, de formation de trou, et de velléités de retournement de la part du système. On se place pour cela à R proche de R_{g} en DNS à $N_y = 27$. On choisit un système de taille raisonnable pour contenir une bande relativement stable, à $L_x \times L_z = 110 \times 72$ (Fig. 5.9 (a)). On intègre en temps une condition initiale contenant une bande, et un évènement particulier est mis en évidence. Dans le cas choisi dans cette sous section, on augmente la probabilité de voir apparaître un trou en temps fini en baissant R à 317, un peu en dessous de R_{g}. Au court de l'abaissement ($R = 330 \to R = 325 \to R = 320 \to R = 317 \to R = 310$), on a pris une seconde trajectoire à $R = 315$ à partir d'une condition initiale à $R = 317$, dans un but de comparaison. Sur une durée relativement courte $t \simeq 500$ à 1000, ces deux systèmes ont eu une évolution relativement similaire. La seconde trajectoire est préparée en baissant lentement le nombre de Reynolds du système (figure 5.9 (c,d))

On peut suivre une "bande dessinée" du comportement du système à $R = 315$ sur la figure 5.9. À $T = 3220$ on a en apparence une bande parfaitement bien formée (Fig. 5.9 (a)) qui correspond aux descriptions qu'on en fait habituellement. En laissant évoluer le système on voit se former deux trous à deux endroits de la bande, dans l'exemple à $T = 3320$ (Fig. 5.9 (b)). Ils prennent toute la longueur (direction $\vec{e}_x$) de la bande et ont une largeur $l_z \sim 10$. Ils sont séparés d'une distance $l_z \sim 25$. Ces trous

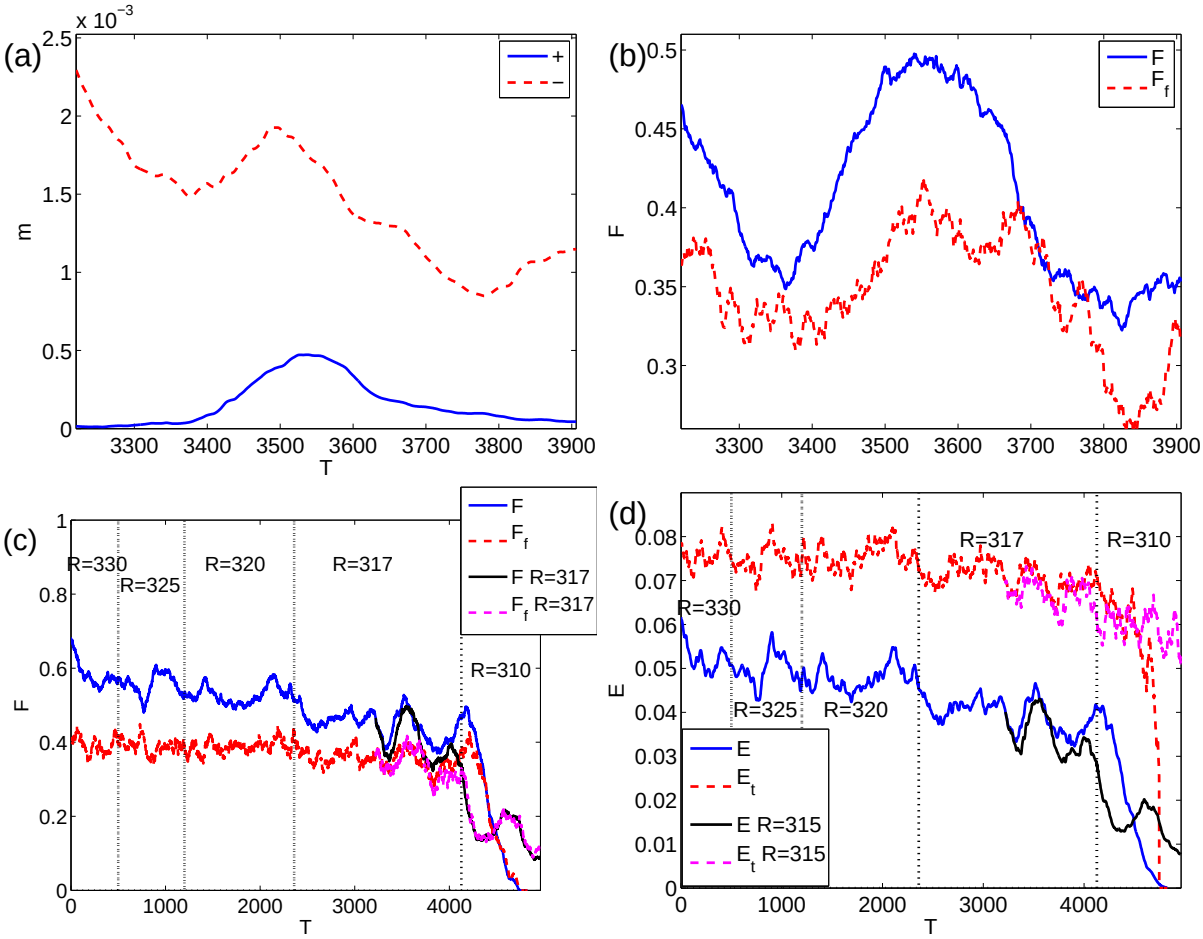


FIGURE 5.10 – Série temporelle du paramètre d'ordre (a) et des grandeurs turbulentes (b) centrées autour des évenements décrits dans la figure 5.9. (c) série temporelle pour le suivi long du système. (d) Série temporelle des énergie dans le suivi long du système

peuvent apparaître à des endroits apparemment aléatoirement placés dans la bande. Ces deux trous vont s'étendre et se développer, tandis que le germe quasi-isolé va croître dans l'orientation opposée à la bande actuelle, comme on peut le voir à $T = 3450$ (Fig. 5.9 (c)). En croissant plus vite que l'autre bande ne se rétracte, le germe atteint le reste de la turbulence et finit par se réorganiser en une bande de l'orientation initiale vers $T = 3800$ (Fig. 5.9 (d)). Ce morceau de bande est, en l'état, encore mal reconnecté avec le reste.

On peut mettre en évidence les signes de ce comportement dans les séries temporelles des paramètres d'ordre (Fig. 5.10 (a)) et des grandeurs turbulentes (Fig. 5.10 (b)), centrée autour des instantanés montrés dans la figure 5.9. Avec l'évolution en temps, au delà de $T \gtrsim 3300$, on voit apparaître une excursion d'un des paramètres d'ordre vers des valeurs plus faibles tandis que l'autre paramètre d'ordre croît. Cela se produit au moment où la bande se rompt et un germe de l'autre orientation apparaît. Le paramètre d'ordre de la seconde orientation revient ensuite vers le voisinage de la valeur moyenne basse ($T \gtrsim 3650$). cela correspond à la reformation de la bande. Au même moment, on voit que la formation du trou correspond à une excursion vers de plus faibles valeurs

de la fraction turbulente et de l'énergie moyenne. Les deux excursions basses de F à $T \simeq 3350$ et $T \simeq 3750$ correspondent au début et à la fin de cet épisode d'orientation différente et aux formations de trous correspondantes.

On peut examiner le comportement du système au delà de la fenêtre suivie. On poursuit les deux expériences similaires ($R = 315$ et $R = 317$), en suivant les quantités turbulentes (fraction turbulente, énergie moyenne, énergie turbulente). On trace les séries temporelles sur la figure 5.10 (c,d). Les prémices de $R = 330$ à $R = 320$ correspondent à $T < 2350$, et ne présentent pas d'évenement particuliers. Chacune des grandeurs décroît avec la décroissance de R. Le passage à $R = 317$ se fait à $T = 2350$ et le départ de la nouvelle trajectoire à $R = 315$ à $T = 3000$. La déviation entre les deux séries temporelles est assez lente, elle se déroule sur environ $1000h/U$. De plus, même s'il y a déviation quantitative, le comportement qualitatif des deux systèmes est extrêmement similaire. Ansi l'évènement de trou/retournement se produit pour les deux nombres de Reynolds. Les gammes de temps sur lesquelles les trous se produisent sont relativement longues, de l'ordre de 100 à 200 temps de retournement. De la même manière, la simulation à $R = 317$ prolongée à $R = 310$ relaminarise au même moment que celle restée à $R = 315$.

Cette comparaison entre suivi local et suivi dans les grandeurs moyenne montre que l'on peut identifier les événements de trous/retournements à l'aide des séries temporelles de f et $m_{\pm}$, sans avoir à passer par les visualisations. Cela réaffirme l'intérêt de ces grandeurs moyennes.

Suivi local

On utilise les approches de la section précédente § 5.1.1 pour chercher à déterminer si la bande dont on disposait présentait des signes avants coureurs de la formation de ces trous.

Dans l'ensemble, il apparaît un lent déclin des zones qui vont relaminariser. Il s'étale sur plusieurs centaines de temps de retournement

Comportement des séries temporelles

On sait faire le lien entre la formation de trous visibles dans les visualisations et les possibilités de retournement de l'orientation, avec le comportement de la fraction turbulente et du paramètre d'ordre. On suit donc une démarche d'échantillonnage pour identifier les excursions de ces deux grandeurs et en particuliers, les cas où elles sont corrélées. Pour cela, on suit un système de taille 110×32 pour les deux résolutions $N_y = 15$ et $N_y = 27$ dans deux gammes de nombres de Reynolds proches des R_{g} respectifs. Les retournements peuvent être facilités par cette situation. A nouveau, cette taille sert à provoquer un peu le phénomène, pour le rendre plus facile à observer et pouvoir ainsi déterminer ses caractéristiques. On pourra reprendre cette approche dans une situation non biaisée.

On va voir que dans cette situation, les excursions de paramètre d'ordre et les retournements sont relativement courants. Pour des retournements du type mis en évidence dans la section 4.3.4, l'amplitude du bruit et la stabilité de la bande laisse attendre des temps de résidence très long $\gtrsim 10^5$. La taille du système choisie, $L_z = 32$ est relativement étroite. La bande est moins à l'aise à ces nombres de Reynolds, mais pas autant qu'elle ne l'est aux grands nombres de Reynolds pour lesquels les retournements sont très courants [77, 78].

On choisit trois exemples de nombres de Reynolds à $N_y = 15$, $R = 275$, $R = 280$ et $R = 295$ (Fig. 5.11) ainsi que quatre exemples de nombres de Reynolds à $N_y = 27$, $R = 325$, $R = 330$,

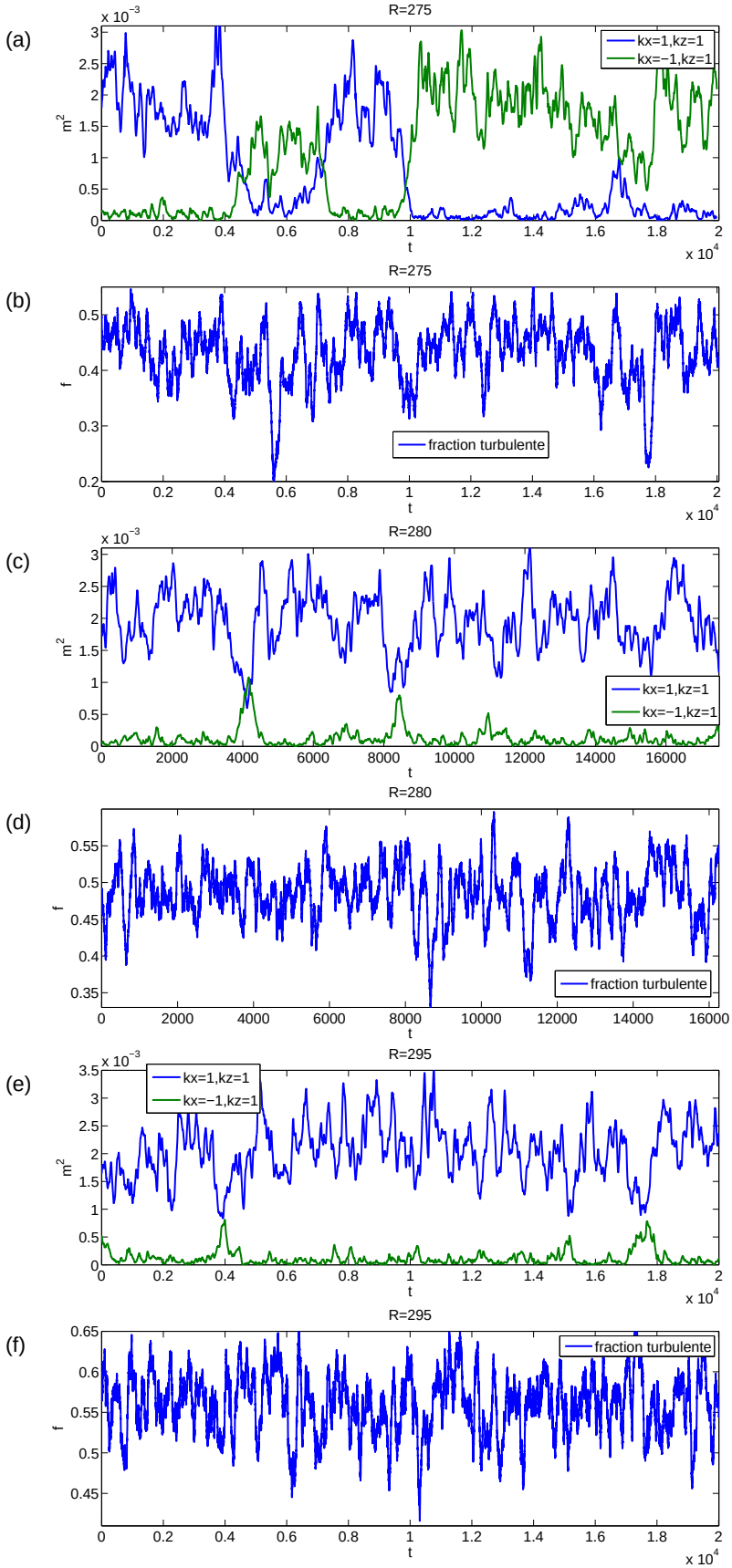


FIGURE 5.11 – Exemples de série temporelles dans le modèle réduit ($N_y = 15$), pour lesquelles on observe des excursions et des retournements. (a,c,e) : paramètre d'ordre, (b,d,f) : fraction turbulente, (a,b) : $R = 275$, (c,d) : $R = 280$, (e,f) : $R = 295$

$R = 335$ et $R = 340$ (Fig. 5.12). Ils correspondent à la même part de la gamme $[R_{\mathrm{g}}; R_{\mathrm{t}}]_{N_y}$, déterminée précédemment [58]. On suit les grandeurs moyennes classiques et on présente les résultats sur la figure 5.11 pour $N_y = 15$ et la figure 5.12 pour $N_y = 27$.

On examine conjointement les séries temporelles. En ce qui concerne le paramètre d'ordre, les séries temporelles de m^2 montrent pour les deux résolutions des excursions et des retournements relativement fréquents. Les temps de résidence dans une orientation sont de l'ordre de quelque milliers de temps de retournement. Dans le cas de $N_y = 27$, on peut mettre en évidence des retournements ou excursions de m^2 qui correspondent à des excursions vers le bas de la fraction turbulente. À part à $R = 340$, les retournements semblent être corrélés aux formations de trous. On retrouve des exemples à $N_y = 15$, $R = 275$ ($T \sim 5500$, $T \sim 10000$, $T \sim 17500$) et $R = 280$ ($T \sim 8500$) et à $N_y = 27$, $R = 330$ ($T \sim 5500$) et $R = 335$ ($T \sim 550$). À $R = 325$ et $R = 330$ le système finit par relaminariser. La possibilité de relaminarisation impose de reprendre une simulation différente, l'approche ne peut pas être aussi systématique que dans le cas des fluctuations d'orientation pour $R \lesssim R_{\mathrm{t}}$. Aux nombres de Reynolds plus importants ($R = 295$ et $R = 340$), les excursions de $m_{\pm}$ se font sans excurions de f.

Il est intéressant de voir que cette phénoménologie, comme le reste de ce qui a été identifié pour les bandes n'est pas altéré par l'approche de réduction de résolution. On peut donc prendre avantage de cette dernière pour faire des statistiques quantitatives.

Changements d'orientation et régime de bandes fragmentées

On le voit dans les expériences de Prigent dans Taylor–Couette et Couette plan [73]. On attend donc des coexistences des deux orientations en temps et en espace dans les simulations, mais avec une phénoménologie différente des cas à $R \lesssim R_{\mathrm{t}}$ (§ 4.3.5, pp. 142) : les domaines d'orientation différente sont ici séparés par des trous laminaires.

5.2 Modèles et discussion

Les modèles qu'on ébauche ici servent à mieux comprendre le phénomène et à le placer dans un cadre plus général. Il paraît illusoire à ce niveau d'obtenir une description globale et quantitative de l'ensemble des processus présents dans la formation des bandes et la transition. On propose et ébauche donc des modèles locaux et/ou simplifiés, dérivés clairement de Navier–Stokes. On ouvre autant de questions et de possibilités qu'on en règle. On s'inspire de modèles et descriptions proposés pour décrire l'écoulement de Poiseuille dans une conduite. On suit deux approches distinctes. Une première approche plutôt mécanique, locale et moyennée cherche à décrire pourquoi tel ou tel type de configuration va subir plus fortement la dissipation visqueuse et relaminariser. La seconde est statistique et globale, et discute, comment à partir d'une condition initiale donnée, prise comme une distribution, une partie de l'écoulement va évoluer vers des trous.

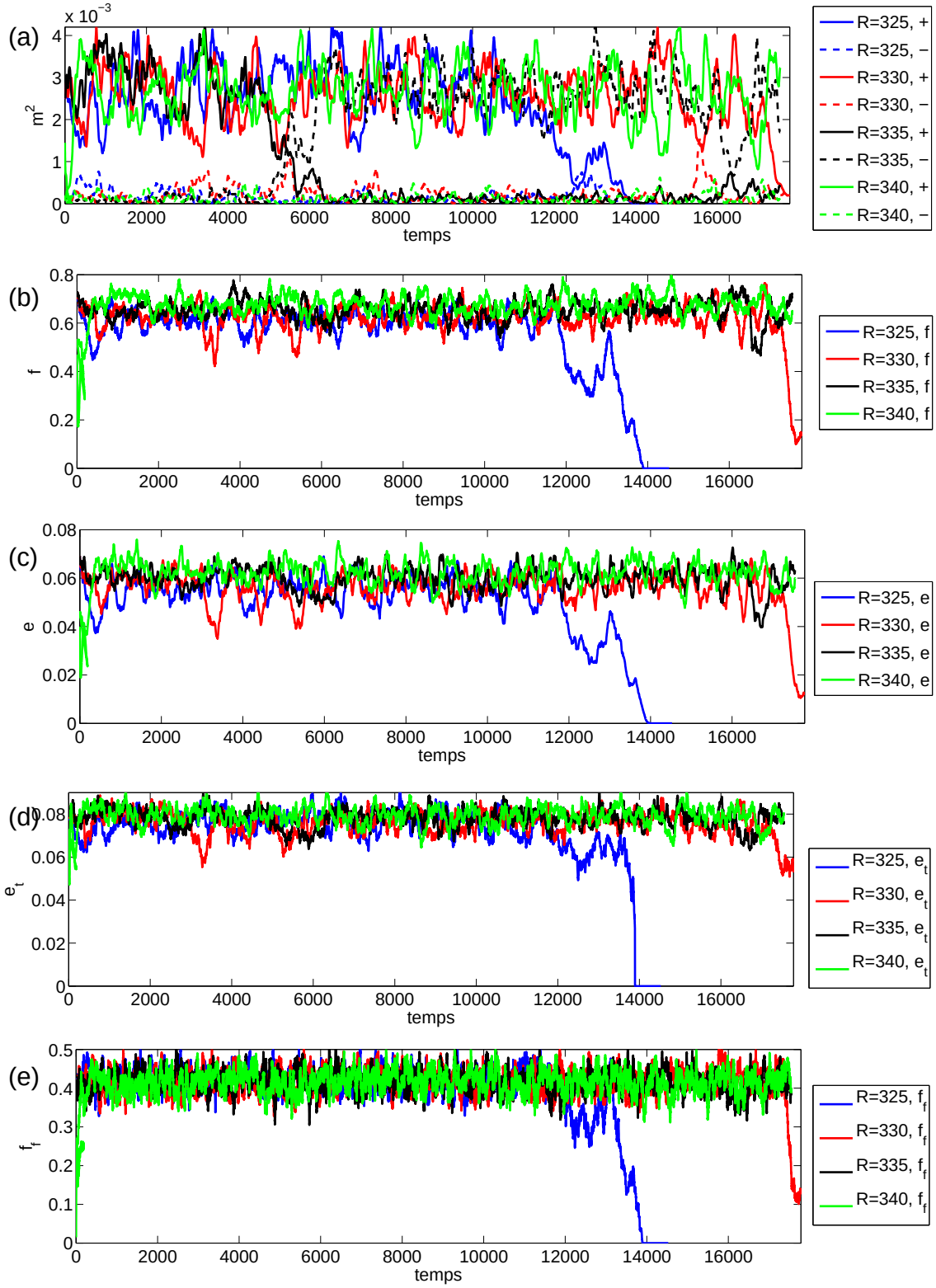


FIGURE 5.12 – Série temporelles des DNS ($N_y = 27$, pour lesquelles on observe des excursions et des retournements). (a) : paramètre d'ordre, (b) : fraction turbulente, (c) : énergie moyenne, (d) : énergie turbulente, (e) : surface de la zone intermédiaire.

5.2.1 Approche mécanique

Équations de bilan

Il est *a priori* intuitif que les transitoires soient d'autant plus rapides que le nombre de Reynolds est petit, en effet, la viscosité joue un rôle particulièrement important dans ce régime, *via* la dissipation. Celle ci est d'autant plus importante que le nombre de Reynolds est petit. De manière générale, on sait qu'un certain nombre de quantités (énergie cinétique, cisaillement) vérifie des bilans globaux à l'échelle de l'écoulement tout entier. On a des équation d'évolution du type :

$$\frac{df}{dt} = g + \frac{1}{R}h\,.$$

Le terme g est un terme de production lié à l'advection, le terme h est un terme provenant de la contrainte visqueuse et pouvant jouer le rôle de production ou de dissipation de la grandeur. A l'équilibre, on a compensation en moyene des termes g et h. Ainsi, de manière explicite, pour $E = 1/2 \int \mathrm{d}V \vec{v}^2$ et $S_x^{\pm} = \int \mathrm{d}S(\partial_y v_x)(y = \pm 1)$, on a les relations :

$$\partial_t E = -\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z v_x v_y - \frac{1}{R}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z(\partial_j v_i)(\partial_j v_i) \tag{5.2}$$

$$\partial_t S_x^{\pm} = -\int \mathrm{d}x\mathrm{d}z\left(\partial_y^2(v_x v_y)\right)(\pm 1) + \frac{1}{R}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}z\left(\partial_y^3 v_x\right)(\pm 1) \tag{5.3}$$

On retrouve les termes de production et de dissipation. Les termes de production, à cause de l'anisotropie de l'écoulement dépendent de la contrainte de Reynolds $v_x v_y$, qu'on peut relier localement au *lift-up*. Le terme visqueux, qui joue un rôle de dissipation pour l'énergie a lui aussi une expression claire. On comprend que lors d'une trempe, le nombre de Reynolds est brutalement changé. L'équilibre approximatif (au sens thermodynamique) entre advection et dissipation est brisé et on a un transitoire vers un nouvel équilibre, dominé au temps courts (définis ci-dessus) par le terme en $1/R$. Le terme de production va lui aussi évoluer (sur une échelle de temps plus longue), de manière moins explicite (car faisant intervenir le détail local de l'écoulement). Les deux vont se réajuster sur la fin du transitoire pour atteindre le voisinage d'un nouvel équilibre correspondant au nouveau nombre de Reynolds. Il s'agit bien sûr d'un équilibre en terme de quantités moyennes (énergie, fraction turbulente, cisaillement, *etc.*) qui ne préjuge pas de l'absence d'équilibre de la bande.

On peut comprendre très qualitativement le comportement de l'énergie à l'aide de quelque approximations. On a d'abord exactement, d'après Parseval :

$$E = \sum_{k_x,k_z,n_y}\sum_i |\hat{v}_{ik_x,k_z,n_y}|^2 \quad , \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,(\partial_j v_i)(\partial_j v_i) = \sum_i (\sum_{k_x,k_z}\int \mathrm{d}y\,(k_x^2 + k_z^2 + \partial_y^2)|\hat{v}_{ik_x,k_z}(y)|^2)$$

On fait ensuite un certain nombre d'approximation (fortes ou faibles) dans l'équation d'évolution de l'énergie :

- Le début de la dynamique est uniquement dû au terme visqueux (forte)
- On suppose que E est principalement dominé par v_x
- On suppose que le spectre est très piqué autour du mode principal (en k_x, k_z) des *streaks* (faible), qui reste en bonne approximation le mêmec lors de la trempe (plus forte)

– on exprime la dépendance en y dans le terme visqueux de manière modale : on réduit la dépendance en y à quelque modes, et on suppose que l'effet de ∂_y^2 peut se résumer à la multiplication par une constante k_y^2 (forte)

.

On a alors $E \sim |\hat{v}_x|^2$ et

$$\partial_t E \simeq -2\frac{k_x^2 + k_z^2 + k_y^2}{R} E \tag{5.4}$$

Ce qui donne un comportement exponentiel avec un temps caractéristique $\tau \simeq R/(k_x^2+k_z^2+k_y^2) \simeq R/(k_z^2 + k_y^2)$. Les tailles caractéristiques en z et y étant de l'ordre de 2 à 4, les nombres d'onde sont d'ordre 1 et on a, de manière un peu brutale, $\tau \sim R$. La confrontation avec l'expérience donne un résultat mitigé (figure 5.4 (b,d)). On peut comprendre l'ordre de grandeur et la tendance croissante de τ avec R, mais on ne peut pas plaquer exactement notre description aux données. C'est une conséquence de la limite de nos approximations.

En ce qui concerne la formation de trous, on suspecte qu'on a plutôt une excursion locale de l'écoulement, qui peut se faire sentir sur les deux termes des bilans. C'est le détail local qui va décider de la relaxation vers un état de cohabitation laminaire-turbulent ou vers le laminaire. Cela est plus l'objet de la section suivante.

Discussion locale

On se place à l'échelle d'un ou deux *streaks* (et des vortex voisins) dans la direction z et à l'échelle d'un ou deux vortex longitudinaux dans la direction x. On peut dans la plupart des cas limiter l'échelle locale à la moitié $y > 0$ ou $y < 0$ de l'écoulement. On fait bien la distinction entre les mécanismes locaux et ceux impliquant le voisinage plus ou moins éloigné, soit par "diffusion", contamination par contact, soit par advection par les écoulements moyens. On sépare la discussion en trois parties distinctes. On commence par une description et interprétation commune de la formation du comportement des trempes et des formations de trous. On présente ensuite les buts et possibilités à long terme. Finalement, on reprendra la description dans le cadre des différents modèles et méthodes de modélisation de l'écoulement. Le but est de proposer des approches permettant d'explorer plus en détail la relaminarisation et de justifier plus précisément nos affirmations. On reste très près de la littérature.

On étudie en parallèle les trempes et apparitions de trous près de R_{g} car elles ont une dynamique commune, même si elles ne conduisent pas forcement au même résultat. On essaie de séparer la dynamique en étapes distinctes pour en simplifier l'approche. On a d'abord une partie d'ajustement et d'éloignement de la condition initiale qui est relativement lent, qui correspond à la première phase des statistiques. Dans le cas des trempes, il s'agit d'un ajustement au nouveau nombre de Reynolds, par un processus quasi-déterministe auquel on a en bonne approximation une condition finale pour chaque condition initiale. Ce processus est relativement lent, il dure au moins un cycle du processus auto-entretenu, qui est de l'ordre de $100h/U$. Les effets non locaux, de contamination par les voisins (perturbations advectées *etc.*) sont en partie responsables de la dispersion. Dans le cas de la formation d'un trou dans une bande, il s'agit d'abord un éloignement relativement lent, sur les mêmes échelles de temps, de la situation "moyenne", provoqué par une raison ou une autre (une excursion un peu trop éloignée de la dynamique chaotique locale par exemple). Une fois cette étape passée, on peut

assister à deux situations dans le cas de la trempe : un déclin visqueux vers le pseudo-laminaire (ou laminaire) ou non, qui vont dépendre entre autre de l'état final de la "première étape". Ensuite, la création ou non d'un trou va dépendre du voisinage (de taille $l_x \sim 20$, $l_z \sim 10$) immédiat : le vrai trou se forme si le voisinage chute de la même manière. La corrélation "entre *streaks*" et de manière générale, entre zones voisines, peut être l'effet du hasard, ou renforcée par les processus de contamination/diffusion/advection (deux zones affaiblies de s'excitant pas mutuellement). Une fois les trous formés, on doit prendre en compte des effets à plus long terme et plus longue portée. C'est en particulier le cas des trempes : une fois les trous formés, avec une trace d'obliquité, l'écoulement à grande échelle se met en place et a tendance à renforcer ladite obliquité *via* l'advection des perturbations (§ 3). Dans le cas de la formation d'un trou dans une bande ou dans un *spot* [91], cet écoulement peut venir refermer le trou en réexcitant la partie pseudo-laminaire. S'il y a un germe isolé (deux trous se forment dans la bande) son propre écoulement grande échelle peut stimuler sa croissance comme celle d'un *spot*. La brisure de symétrie de ce germe stimule une croissance de type bande, et cela peut éventuellement se faire dans l'orientation opposée à celle de la bande initiale.

On a évoqué ici un certain nombre de processus. Le problème ouvert est de réussir à décrire quantitativement leur hydrodynamique (instabilités, interactions linéaires, non-linéaires entre composantes de $\vec{v}$ ou $\vec{\omega}$). Il paraît illusoire, en l'état d'obtenir une solution complète du problème avant d'avoir réussi à avoir des solutions partielles. En l'occurrence, il s'agit d'obtenir des descriptions claires, à un ordre ou un autre (linéaire, modèle réduit non-linéaire, DNS simplifiée) des processus locaux d'échec de la turbulence, du processus auto-entretenu, et du retour vers le laminaire. Pour chaque approche de modélisation, on cherche à découpler les problèmes pour mieux les comprendre et les recoupler ensuite : en l'occurrence, il paraît plus pertinent de commence à décrire une dynamique isolée (en terme de contamination) avant de décrire la dynamique pour laquelle les processus dus au voisinage sont modélisés, avant de décrire la vraie dynamique.

On commence par des approches purement linéaires ou faiblement non linéaires "processus par processus". On se base sur les descriptions des instabilités de cisaillement (en y comme en z) qu'on retrouve dans l'écoulement [81, 101] et des processus qui les entourent (de type régénération des *streaks* par les vortex, excitation de la vorticité ω_x par ω_y [49, 90, 101]). Si on prend comme point de départ les instabilités. Pour les trempes comme les trous dans les bandes, on peut extensivement étudier l'instabilité en fonction du nombre de Reynolds et des paramètres de contrôle des profils, qui correspondent en pratique à l'amplitude et au cisaillement [81]. Comme on s'y attend, la zone d'instabilité se rétracte avec le nombre de Reynolds. Un écoulement "de base" ou "de fond" sera d'autant moins instable et donnera une réaction croissant d'autant moins vite que le nombre de Reynolds sera faible, d'une part. D'autre part, la possibilité de tomber sur un écoulement de base stable et de conduire à une fin de cycle sera d'autant plus importante. En ce qui concerne l'interaction entre vorticité et la formation des *streaks* par ω_x, ces étapes sont relativement sensible à la diffusion visqueuse [101] : si le nombre de Reynolds est trop bas, ou le vortex de base pas assez intense, il peut être totalement diffusé avant de rétablir un *streak* suffisamment intense et cisaillé.

D'un point de vue totalement non linéaire ou cyclique, il s'agit d'aller explorer la façon dont l'écoulement peut passer du turbulent vers le laminaire, et comment ce passage est facilité par la baisse du nombre de Reynolds. La question de la frontière laminaire-turbulent est généralement centrée sur la transition laminaire vers turbulent [27, 64] : la façon la plus simple pour atteindre la turbulence et le "chemin" pris par le système. On s'intéresse plus à la proximité du "point col" du

"cycle limite", et à la possibilité qu'à le système de venir le visiter.

Ces approches permettent d'obtenir une compréhension qualitative du comportement local de l'écoulement. Les modèles simples [101] et les modèles sur réseaux [8] paraissent avoir la même structure en ce qui concerne l'évolution locale (chaos à faible nombre de degrés de libertés remplacés par une application chaotique). Il faut de plus comprendre les processus de contamination par le voisin et d'excitation par les perturbations charriées par l'écoulement à grande échelle présents dans ces modèles de manière plus *ad hoc*. En pratique, en dessous de R_{t}, l'écoulement est sous auto-perfusion et la turbulence continue à pouvoir exister grâce à la structure en bandes [70].

5.2.2 Approche probabiliste/statistique globale

Dès leur apparition, les trous laminaires ont la même organisation spatiale que lorsque le régime de bande est atteint. Ce qui est en accord avec le fait que l'établissement de l'équilibre laminaire/turbulent (régime permanent de f) est dû à un processus local, plus rapide que celui de l'établissement des bandes. On a des ordre de grandeur de temps d'un coté de 300 à 400 temps de retournement (au bout desquels existe des trous obliques) contre 1000 à 2000 pour la formation des bandes mêmes. La description de l'équilibre (en terme de volume) laminaire turbulent peut donc se faire de manière statistique, sans trop préjuger de l'organisation même des trous. Ainsi, après la description des possibles approches totalement moyennées et des approches locales, d'un point de vue mécanique, on complète avec un point de vue probabiliste.

À l'instant de la trempe, l'ensemble de l'écoulement peut être décrit par une distribution de probabilités de valeurs d'amplitude, de cisaillement *etc.* correspondant à différentes configurations de *streaks* et vortex. Pour une situation à un nombre de Reynolds $R > R_{\mathrm{t}}$, ces valeurs sont réparties aléatoirement dans l'espace. Ce qui compte, c'est que la taille du système soit suffisamment grande pour que la distribution de probabilités puisse être bien représentée. À cause de l'éloignement plus important de la frontière du bassin d'attraction laminaire à ce nombre de Reynolds, une plus large gamme de valeurs peut se maintenir. Lors de la trempe, chaque configuration va suivre sa dynamique propre, correspondant à sa condition initiale. Comme elles sont toutes représentées, on retrouve toujours en bonne approximation la même dynamique moyennée en espace. La répartition exacte en espace des différentes configurations n'a pas d'effet sur la dynamique aux temps courts (relaxation de chaque situation). Elle en a cependant aux temps moyens pendant lesquels la réorganisation en espace se produit.Cela se voit d'autant mieux sur les séries temporelles du paramètre d'ordre qui quantifie justement cette organisation.

En ce qui concerne les relaminarisations, on suit cette fois-ci strictement l'approche de Goldenfeld *et. al.* [38]. À chaque instant, une gamme de valeurs moins large est représentée dans le système. C'est l'excursion, *localement*, du système suffisamment loin dans la bonne direction de l'espace des phase, qui va le conduire localement à une dynamique de relaxation. Il doit être possible d'estimer la probabilité d'aller explorer cette région "dangereuse" de l'espace des phases (contre ou poussé part les voisins). On doit alors être capable de quantifier la probabilité de former un trou. Les modèles locaux (l'échelle locale étant à préciser) devraient être capable de dire si, le nombre de Reynolds augmentant, le bassin d'attraction de la turbulence est d'autant plus large, la dynamique se fait d'autant plus loin de la frontière du bassin, et les excursions suffisamment loin sont d'autant plus rares.

En conclusion, note qu'on explique assez partiellement les phénomènes mesurés dans cette section,

et que l'on invoque surtout des résultats précédents.

Chapitre 6

Expériences de *spots*

On procède à quelques expériences de croissance de *spots* turbulents dans l'écoulement transitionnel. On examinera des cas en dessous et au dessus de R_{t}. Du point de vue grande échelle, on reprend des expériences typiques en mettant l'accent sur la bande oblique, la perte de symétrie, l'apparition et l'élimination des défauts avec une approche qualitative. La spécificité du chapitre se trouve principalement dans la section concernant les petites échelles et l'apparition de vorticité transverse ω_z^{th}, et la comparaison au cas des bandes : on utilise la configuration en *spot* pour tester d'autres configurations d'écoulement grande échelle, ainsi que pour comparer l'instabilité en dessous et au dessus de R_{t}.

Le chapitre est organisé comme suit : on commence par décrire notre procédure et notre choix de condition initiale. On passe ensuite à la description de quelques cas de croissance, en résolution basse et en DNS, suivis à l'aide des quantités statistiques utilisées tout au long de la thèse. Finalement, on examine les petites échelles dans l'esprit de l'instabilité étudiée au chapitre 3.

6.1 Procédure et condition initiale

Lorsque l'on place dans le domaine une perturbation localisée suffisamment intense et suffisamment cisaillée ($\partial_z v_x$ et $\partial_y v_x$ suffisamment élevé), elle peut devenir turbulente et envahir l'ensemble du domaine. On parle de *spots* (Fig. 6.1) : une perturbation de forme quelconque (ici carrée Fig. 6.2 (a)) et correspondant à un profil de vitesse turbulent d'amplitude suffisante est placée au "centre" du domaine périodique. D'autres types de germes fonctionnent [11, 26]. On intègre ensuite en temps l'écoulement ainsi perturbé. On pratique deux types d'expériences, en modèle réduit ($N_y = 15$, $N_{x,z}/L_{x,z} = 4$) et en DNS ($N_y = 27$, $N_{x,z}/L_{x,z} = 6$). Le modèle réduit permet de tester un domaine plus grand ($L_x \times L_z = 110 \times 96$, $R = 320$), pouvant contenir deux longueurs d'ondes, et regarder l'élimination de défauts. La DNS sur une taille $L_x \times L_z = 110 \times 80$, à $R = 370$ et $R = 500$, permet d'examiner le détail de l'écoulement à petite échelle de manière lisible. Pour chaque type d'expérience, on calcule les grandeurs moyennes habituelles (énergie, fraction turbulente, paramètre d'ordre *etc.*) et les profils moyens *via* nos procédures. On appliquera de plus les procédures introduites pour l'étude de l'instabilité secondaire sur la première partie de la croissance, lorsque le *spot* est encore symétrique par rapport à un plan $x - y$.

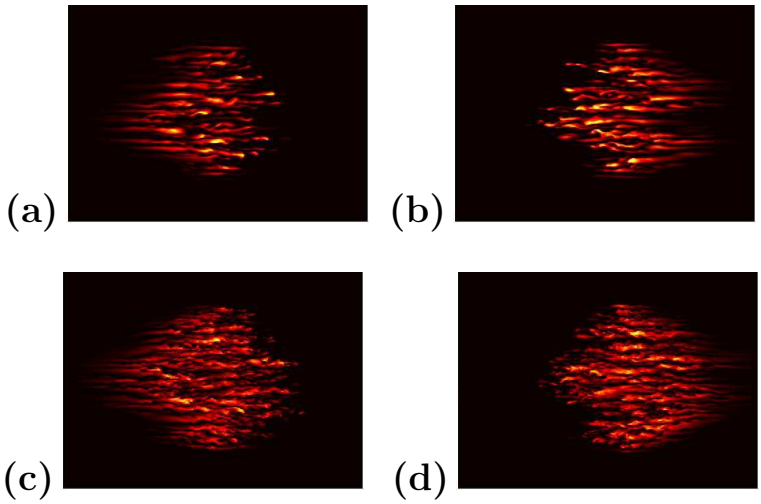


FIGURE 6.1 – Exemples de *spots* à $R = 370$ ($t = 200$) (a, b) et $R = 500$ ($t = 150$) (c, d) ($N_y = 27$) avant que la perturbation n'atteigne les bords du domaine, niveaux de couleur de $\vec{v}^2$ dans les plans $y = -0.6$ (a, c) et $y = 0.6$ (b, d) dans un domaine de taille $L_x \times L_z = 110 \times 80$, centré sur le spot

6.2 Suivi statistique

La croissance de *spots* permet toute une zoologie de possibilités. Les quelques cas présentés ici contiennent suffisamment de généralités et de traits typiques pour permettre de discuter la croissance de manière générale.

6.2.1 Suivi d'une expérience à basse résolution

On suit un *spot* à $R = 320$, au milieu de la gamme d'existence des bandes pour cette résolution, dans un domaine périodique de taille $L_x \times L_z = 110 \times 96$, qui contient deux longueurs d'ondes dans la direction transverse en régime permanent. On part de la condition initiale susmentionnée (figure 6.2 (a)). Dans un premier temps (court), le système passe d'une situation relativement artificielle à une solution plus naturelle de Navier–Stokes. Ce réajustement se traduit par la variation brutale d'énergie turbulente (figure 6.3 (b)), et permet de borner cette phase à $T \lesssim 50$. Le régime permanent est rapidement atteint à l'intérieur de la perturbation : cela est visible dans l'énergie turbulente (figure 6.3 (b)). On retrouve la même organisation dans la frontière entre laminaire et turbulent que dans les bandes et les trous laminaire. Le décalage entre haut et bas est visible (figure 6.1, en DNS). On vera dans la section suivante que les profils de vitesse moyen ont très tôt la même forme que dans les bandes, conséquence de l'organisation petite échelle de l'écoulement (*streaks* et vortex), et de la forme ovale/losange (avant brisure de symétrie [30]). Toute la suite de l'évolution du *spot* va correspondre à l'augmentation de sa taille, la brisure de la symétrie du *spot* qui passe en fragment de bandes, puis à la réorganisation. Les propriétés statistiques plus locales de la turbulence, énergie turbulente, profil, taille relative de la zone intermédiaire n'évoluant plus après les premières phases de la croissance (figure 6.3 (b,c)).

L'augmentation de la surface du domaine est mise en évidence par la fraction turbulente, proportionnelle à l'énergie moyenne (figure 6.3 (b,c)). La surface du domaine croît en bonne approximation

linéairement avec le temps par augmentation du nombre de *streaks*. La durée du processus de croissance va dépendre de la taille du domaine considéré, mais prend fin dès que la turbulence atteint les bords périodiques du domaine (Fig. 6.3 (a,b), Fig. 6.2 (e,f)). L'instant où l'on peut supposer que le *spot* sent les conditions de bord périodiques est antérieur à celui où l'on a rupture de pente de l'énergie turbulente et de la fraction turbulente, étant donnée la décroissance lente (en espace) de l'amplitude de la recirculation autour du *spot* [51, 91]. Il s'agit cependant d'une conjecture, l'effet précis de cet écoulement sur la bande à grande distance est pour l'instant inconnu.

On a ensuite une phase d'organisation de la turbulence en bandes. Elle commence par la brisure de la symétrie du *spot* (fig 6.2(e)), avant l'invasion totale du domaine. Elle se fait à intensité et à surface occupée par la turbulence constante (figure 6.3 (b,c), $t \gtrsim 750$). Cela marque que les processus commandant cette grandeur sont plus locaux et moyens que globaux, comme dans le cas de la compétition entre orientations (§ 4.3.4). Le paramètre d'ordre (figure 6.3 (a)) devient la quantité adaptée pour suivre l'évolution du système. Dans ce cas précis la compétition entre deux orientations est rapidement gagnée, ce qui se voit dans les visualisations. Une orientation apparaît dès le début (figure 6.2 (e,f), $T = 400$ et $T = 500$), ce qui traduit par des modes de Fourier $k_z > 0$ dominant rapidement les modes de Fourier $k_z < 0$, une fois le domaine complètement envahi (Fig. 6.3 $t \sim 750$, Fig. 6.2 (g,h,i,j)). deux bandes d'une orientation donnée apparaissent entre $500 < T < 1000$. L'élimination des défauts conduit à l'augmentation du mode de Fourier correspondant ($k_z = -2$, Fig. 6.3 (a)) vers le voisinage de sa valeur moyenne et à la décroissance des autres vers la gamme de valeur commandé par l'amplitude du bruit. La situation devient celle décrite dans le chapitre 4.

S'il on veut suivre plus en détail l'élimination des défauts, ou s'abstraire plus longtemps de l'effet des conditions de bord, il faut pratiquer ce type d'expérience dans des domaines plus grands [26].

6.2.2 Expériences en DNS

Suivi en temps, de R_g à $R > R_\mathrm{t}$

On pratique le même type d'expériences de *spot*, mais en DNS. On parcours toute la gamme de nombre de Reynolds d'existence des bandes, en particulier autour de $R_\mathrm{g} \simeq 325$ ($310 < R \leq 335$, selon la définition à R décroissant), pour donner une idée qualitative. On teste de plus un cas à $R = 500 > R_\mathrm{t}$, pour suivre la croissance lorsque les bandes ne peuvent plus exister. Les exemples à $R = 370$ et $R = 500$ seront examinés en détails et localement dans la section suivante.

On suit les expériences grâce aux quantités moyennes (Fig. 6.4), énergie, énergie moyenne, fraction turbulente, paramètre d'ordre. On peut séparer les gammes de R en trois parties : $R > R_\mathrm{t}$, $R_\mathrm{t} > R > R_\mathrm{g}$ et $R \lesssim R_\mathrm{g}$ sur la base de l'état final obtenu : turbulence uniforme, bande, ou écoulement entièrement laminaire. Le détail de la croissance lors du début de l'expérience ($T \lesssim 250$) ne dépend cependant pas du nombre de Reynolds : dans tous les cas, le *spot* passe par la phase d'adaptation au nombre de Reynolds, ce qui traduit par un ajustement local et apparaît dans l'énergie turbulente (Fig. 6.4(d)) et une première phase de croissance, dont la vitesse augmente avec le nombre de Reynolds (Fig. 6.4 (b,c)). À partir de $T \sim 250$, l'influence du nombre de Reynolds se fait sentir. Les cas à $R < R_\mathrm{g}$ retombent automatiquement vers le laminaire. Les cas tangents $R \gtrsim R_\mathrm{g}$ suivent une phase de fluctuation de taille avant de tomber vers le laminaire, les cas aux nombres de Reynolds plus importants finissent par croître, non sans mal ($R = 340$). Le cas à $R = 370$ a une croissance quasi monotone, tandis que le cas à $R > R_\mathrm{t}$ croît rapidement et la turbulence envahis le domaine.

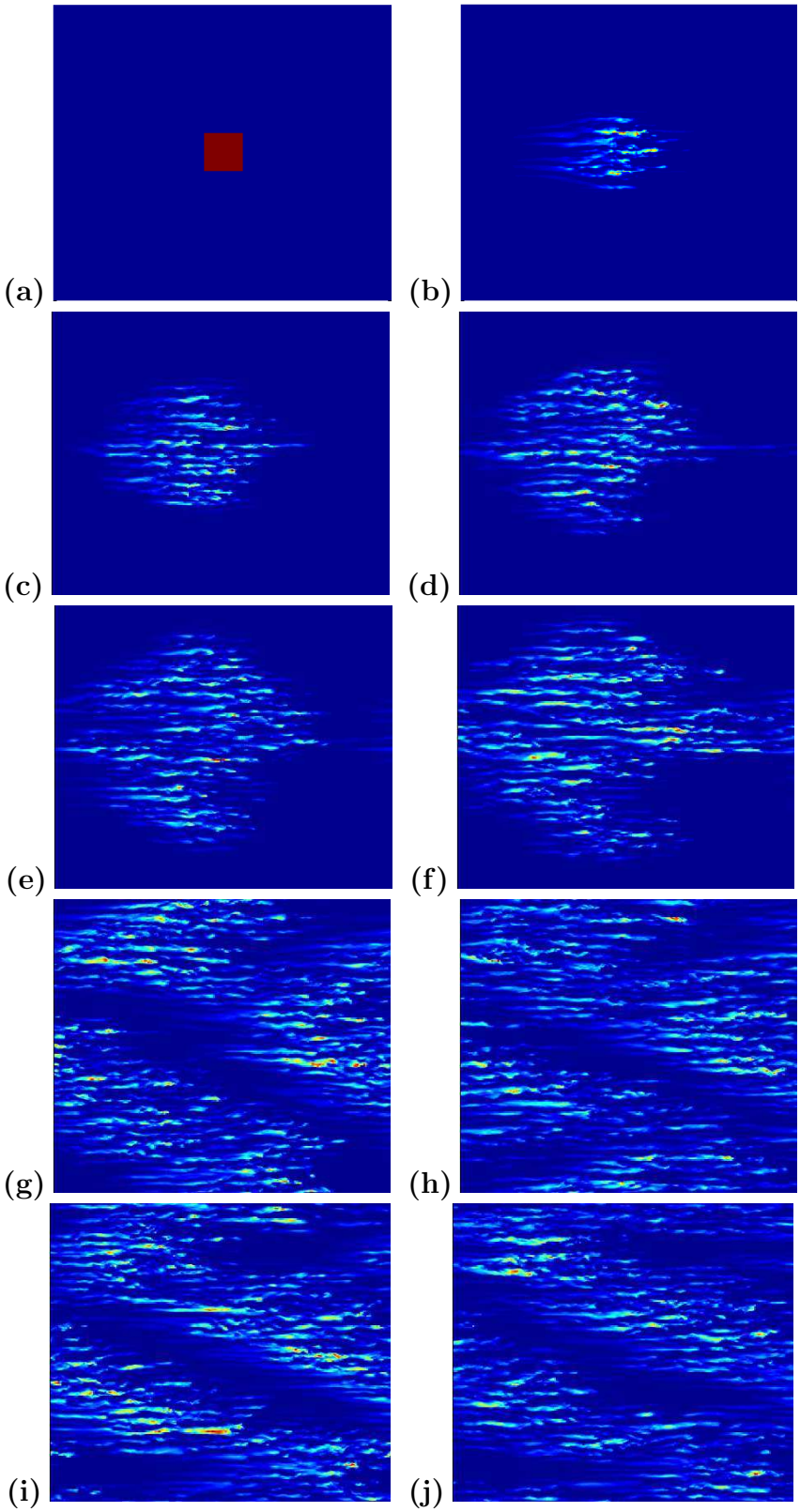


FIGURE 6.2 – Niveaux de couleur du carré de la norme de $\vec{v}$ à $y = -0.62$ ($N_y = 15$ $N_{x,z}/L_{x,z} = 4$), $R = 320$, $L_x \times L_z = 110 \times 96$. Au instants : (a) $T = 0$, (b) $T = 100$, (c) $T = 200$, (d) $T = 300$, (e) $T = 400$, (f) $T = 500$, (g), $T = 1000$, (h) $T = 1500$, (i) $T = 2000$, (j) $T = 2500$.

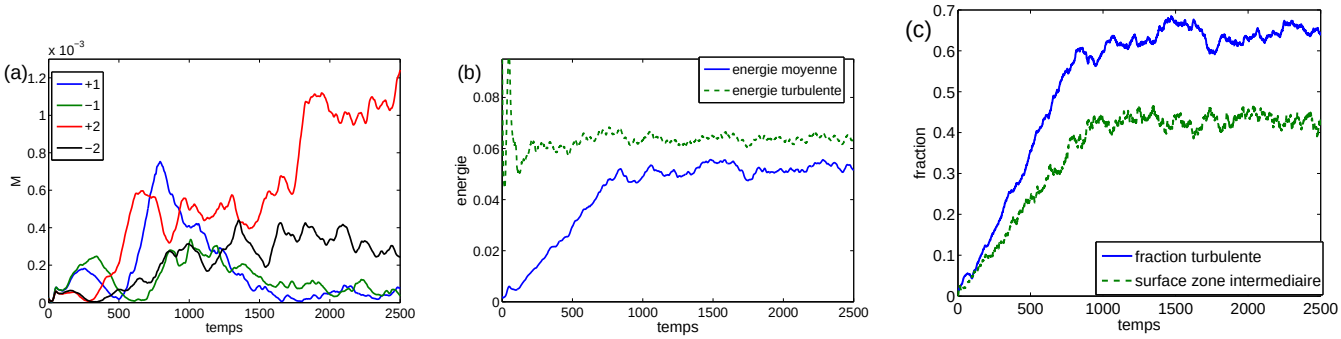


FIGURE 6.3 – Suivi à grande échelle pour une expérience de spot $L_x \times L_z = 110 \times 96$, $N_y = 15$, $R = 320$. (a) : Paramètres d'ordre, (b) : énergie, (c) : fraction turbulente et surface de la zone intermédiaire.

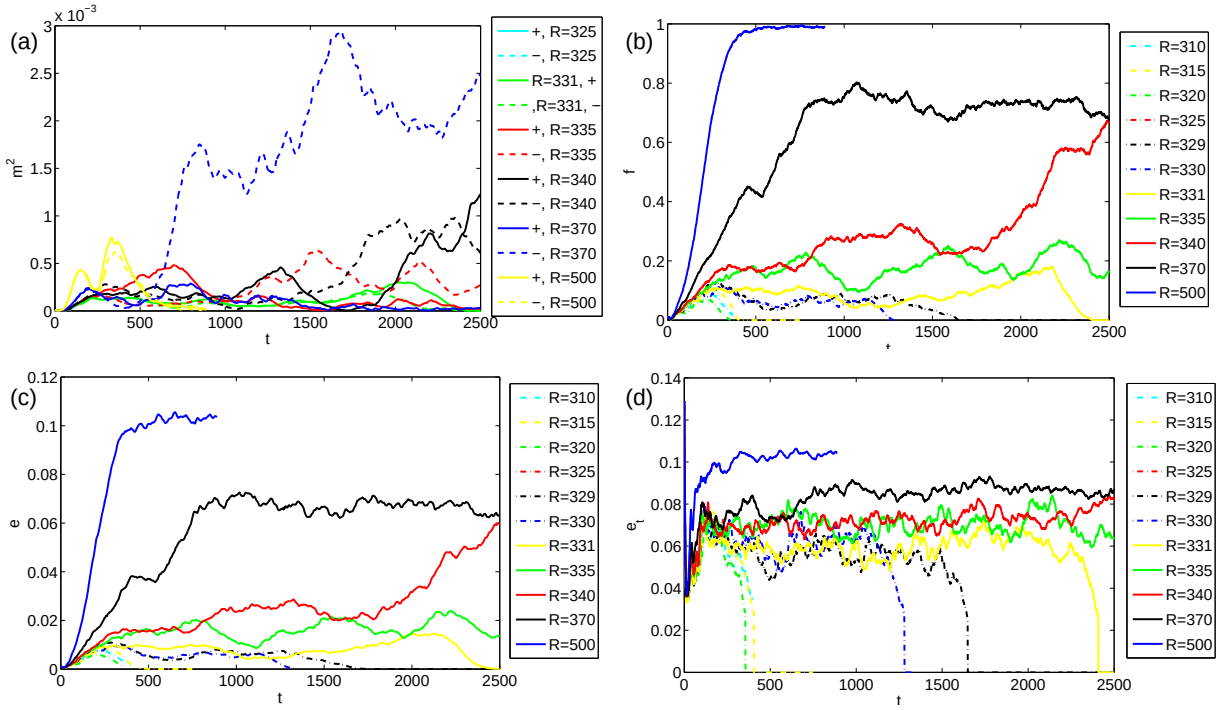


FIGURE 6.4 – Grandeurs statistiques pour le suivi d'une expérience $N_y = 27$, $N_{x,z}/L_{x,z} = 6$, $L_x \times L_z =$. (a) paramètres d'ordre pour les deux premiers modes, (b) fraction turbulente, (c) Énergie moyenne (d) énergie turbulente turbulente.

En plus de la question de la croissance et décroissance de la taille du domaine occupé par la turbulence, la question de la symétrie (par rapport au plan de symétrie original du *spot*) se pose [30]. Dans notre cas, elle apparaît relativement clairement dans les séries temporelles du paramètre d'ordre. Les deux modes (k_x, k_z) $(1,1)$ et $(1,-1)$ contiennent l'information sur l'orientation de l'objet présent dans le domaine. Ainsi, ce dernier est symétrique quand m_+ et m_- sont égaux, tandis que la brisure de symétrie est indiquée par la domination de l'un par l'autre. Ainsi le *spot* croissant à $R = 500$ reste quasisymétrique durant toute la phase d'envahissement du domaine, les deux modes croissant puis décroissant de manière très corrélées, indiquant l'apparition puis la disparition d'un objet en losange dans le domaine. À $R = 370$, la compétition entre orientations est très rapidement ($T < 500$) gagnée par m_-. Les conditions de bord périodique perturbent la compétition entre orientation *via* l'écoulement moyen autour du *spot*. Pour les plus petits nombres de Reynolds $R = 340$, la croissance de la zone turbulente est plus erratique, et $m_\pm$ indique que le domaine turbulent prend une forme oblique non symétrique, penchant d'une orientation à l'autre, à mesure que des *streaks* et vortex sont crées et relaminarisent d'un coté ou de l'autre du germe, comme cela est le cas dans des domaines l'écoulement grande échelle n'est pas présent [29].

De la même manière que précédemment, les domaines choisis ici sont encore trop petits pour observer une croissance de type labyrinthique.

Profils moyens en espace

On décrit maintenant Le détail en y de l'écoulement autour du *spot*. Les descriptions précédentes, faisant état de l'écoulement quadrupolaire, étaient à deux dimensions et deux composantes. On donne une description à trois dimensions et trois composantes à l'écoulement autour du spot, en suivant la démarche de la section 2.3.2, page 30. On utilise pour cela les procédures de calcul de profil moyen en espace introduite dans la section 2.3.2. Le suivi est fait en dessous et au dessus de R_t à $R = 370$ et $R = 500$ ($N_y = 27$). Dans le premier cas, on va avoir croissance puis réorganisation en bande, et dans le second croissance puis invasion du domaine, les zones intermédiaires seront toujours définies dans le premier cas, tandis qu'elles vont quasiment disparaître dans le second (§ 4). A cause du caractère transitoire de la définition de certaines zone, on s'intéresse alternativement à des moyennes en temps et des instantanés de profils moyennés conditionnellement en espace. Les profils v_x peuvent être calculés de la manière classique, ils ne ressentent pas l'effet de l'orientation et des dissymétries des *spots* ou des bandes. On doit cependant prendre plus de soin pour calculer des profils v_z. Le signe de cette composante de la vitesse dépendant directement de l'orientation de l'interface laminaire turbulent (qui donne l'écoulement le long des bandes § 3 ou l'écoulement quadrupolaire [52]). Pendant la phase de croissance en losange, on divisera donc l'écoulement en deux zones, $z < 40$ et $z > 40$ (désigné respectivement par $-$ et $+$), la droite $z = 40$ correspondant à la diagonale du losange, pour appliquer la procédure de calcul de profils v_z moyennés conditionnellement en espace. On est typiquement dans un cas où la description modale des profils introduites par Barkley & Tuckerman et utilisée dans le chapitre 3 est insuffisante.

On présente des profils instantanés v_x, v_z moyennés dans chaque zone sur la figure 6.5. On ne trouve pas de surprises particulières pour v_x (a,b), on décrit leurs symétries qu'on retrouve systématiquement dans les bandes (§ 2.3.2 pp. 30,§ 3.1.1 pp. 3.1.1) et les *spots* [56]. Leur amplitude dépend assez faiblement du nombre de Reynolds, cette variation est directement à relier avec la faible augmentation de l'énergie turbulente avec R (voir les figure 4.34 (a) et 4.36 (a) de la section 4.3.3 pour un exemple

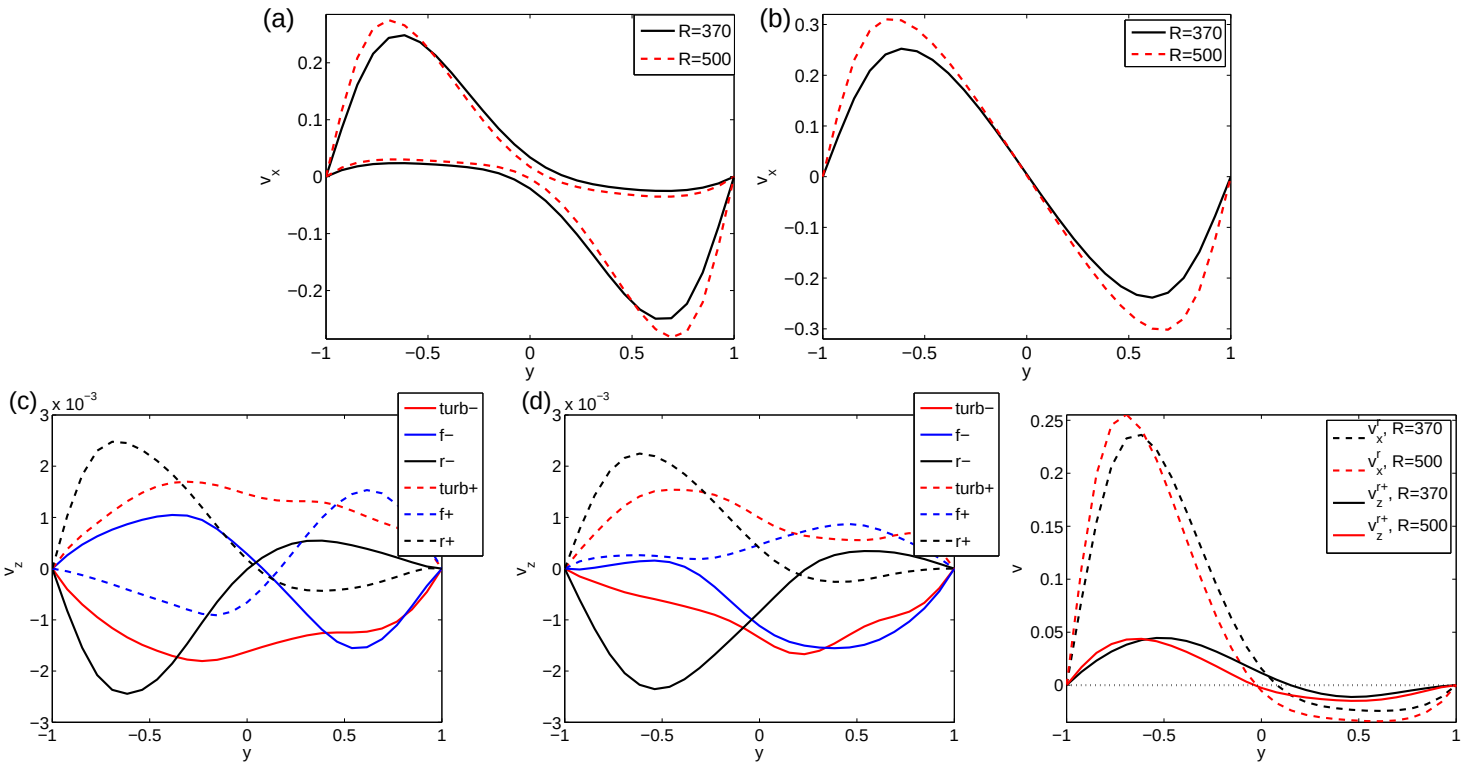


FIGURE 6.5 – Profils de vitesse longitudinale, à plusieurs nombres de Reynolds, moyennés conditionnellement dans (a) : les zones intermédiaires de *spots* à $R = 370 < R_t$ et $R = 500 > R_t$, (b) : la zone turbulente des *spots* à $R = 370 < R_t$ et $R = 500 > R_t$ (à la résolution prescrite). Profils de vitesse transverse, moyennés conditionnellement dans les zones turbulentes et intermédiaires des *spots*, dans les deux parties de l'écoulement à un temps donné (c) : à $R = 370 < R_t$, (d) : à $R = 500 > R_t$. Les signes + et − désignent respectivement les deux parties de l'écoulement $z > 40$ et $z < 40$ (voir figure 6.1), et les lettres f et r signifient front et rear désignent les deux zones intermédiaires différentes. (e) Profils v_x et v_z dans un cas de zone intermédiaires (ici r+)

à basse et haute résolution). Les profils v_z, eux, ont la spécificité d'être différents (signe opposé) dans les deux moitiés $-$ et $+$ de l'écoulement séparées par le plan $z = 40$. Ils sont plus bruités que leurs équivalents, moyennés en temps, des bandes. La différence la plus notable réside dans le fait qu'à cause de la forme des *spots*, et de l'écoulement quadrupolaire autour d'eux [52, 91], le signe de v_z change en passant du coté $-$ au coté $+$ et non lors d'un passage avant-arrière. On trouve alors en bonne approximation des symétries similaires à celles des bandes. On trouve un champ de vitesse v_z^+ positif pour $z > 40$ et négatif v_z^- pour $z < 40$, *i.e.* $v_z^+ \simeq -v_z^-$. la symétrie $v \leftrightarrow -v$, $y \leftrightarrow -y$ usuelle impose $v_x^{\mathrm{f}}(y) = -v_x^{\mathrm{r}}(-y)$, le profil turbulent en S vérifie $v_x^{\mathrm{t}}(y) = -v_x\mathrm{t}(-y)$ et $v_x^{\mathrm{t}}(y) = v_x^{\mathrm{f}}(y) + v_x^{\mathrm{r}}(y)$. On trouve $v_z^{\mathrm{f},\pm}(y) \simeq +v_z^{\mathrm{r},\pm}(-y)$ et $v_z^{\mathrm{t}}(y) = v_x^{\mathrm{f}}(y) + v_x^{\mathrm{r}}(y)$. On peut ainsi reconstruire l'ensemble des profils de vitesse longitudinale et transverse à l'aide des profils dans un quadrant de zone intermédiaire (Fig. 6.5), et cela, pour les deux nombres de Reynolds. L'amplitude de ces profils moyens est légèrement plus importante à $R = 500$ et que le cisaillement à la paroi comme autour de $y = 0$ est légèrement plus important.

6.3 Création de vorticité transverse dans les *spots*

On présente de manière plus succinte qu'au chapitre 3 la situation qu'on peut trouver dans les *spots* turbulents pour une taille $L_x \times L_z = 110 \times 80$, en dessous et au dessus de R_{t} $R = 370$ et $R = 500$ (Fig. 6.1). La condition initiale est la même que dans toutes les expériences de *spots* présentées ici, un carré contenant le profil en S usuel. On se concentre sur les premiers $200h/U$, avant que les *spots* ne se dissymétrisent et ne sentent les conditions de bord périodiques. Les procédures sont les mêmes que pour le cas des bandes. On verra qu'on retrouve des résultats très similaires, du point de vue microscopique.

6.3.1 Phénoménologie

La dynamique de la croissance du *spot* est évidemment plus rapide à $R = 500$ qu'à $R = 370$, mais les détails sont sensiblement les mêmes. En examinant le détail des tranches $x - y$, lorsque l'écoulement a atteint la phase de croissance en losange, à z donné(figure 6.6), on retrouve qualitativement l'image de l'organisation de l'écoulement qu'on voit dans les bandes (§ 3.1.1), avec la succession laminaire/intermédiaire/turbulent. Étant donnée la grande similarité avec les profils moyens dans les bandes, on suppose à nouveau que l'écoulement dans les *spots* peut être décrit par un écoulement de fond. La différence avec le cas des bandes est le fait que l'amplitude de la modulation n'est pas permanente, l'enveloppe de cet écoulement s'étend dans le temps en suivant le *spot*. On est contraint d'utiliser des instantanés en temps. Néanmoins, cela nous permet de repérer des perturbations particulières. On réutilisera la vorticité seuillée, en particulier pour les mesures de longueur caractéristique et de vitesse d'advection.

On peut donner des exemples de début de *roll-up* dans les *spots* sur notre visualisation. Ainsi, on en voit dans les zones intermédiaires pour $65 \leq x \leq 70$ à $R = 370$ (Fig. 6.6 (a)) et pour $45 \leq x \leq 50$ à $R = 500$ (Fig. 6.6 (a)). La longueur d'onde apparente est de l'ordre de $5h$, bien qu'elle apparaisse légèrement plus petite à $R = 500$. On peut retrouver ce type de perturbation de l'écoulement de fond dans la zone turbulente, à $x = 60$ ou $x = 65$ à $R = 370$, et à $x = 65$ ou $x = 72$ à $R = 500$. Comme attendu, à chacune de ces localisations, la perturbation à l'écoulement de fond se traduit par de la

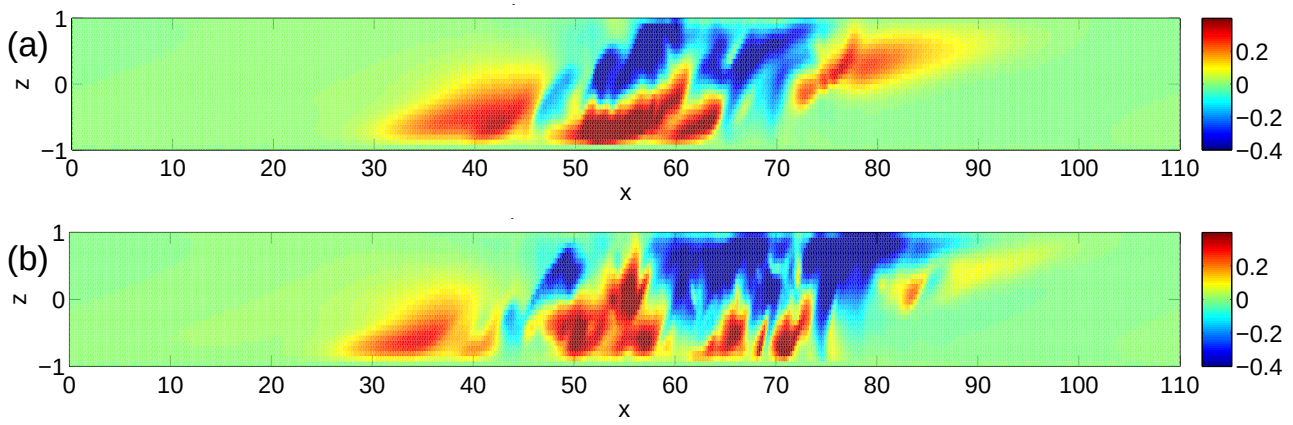


FIGURE 6.6 – Deux exemples de champ de vitesse v_x en niveaux de couleur dans les *spots* où l'instabilité se manifeste à deux nombres de Reynolds différents. (a) : $R = 370 < R_{\mathrm{t}}$, (b) $R = 500 > R_{\mathrm{t}}$, $L_x \times L_z = 110 \times 80$, $N_{x,z}/L_{x,z} = 6$, $N_y = 27$.

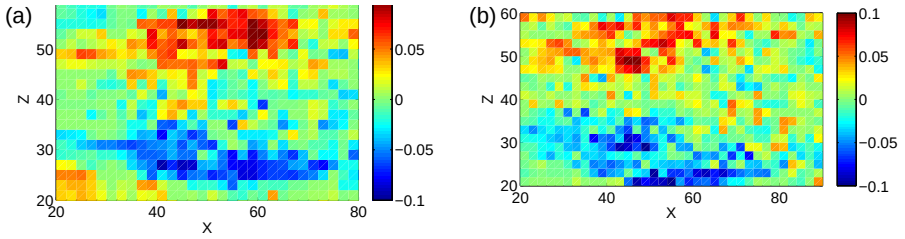


FIGURE 6.7 – Niveaux de couleur du champ de vitesse d'advection transverse dans le cas des *spots*, moyennée sur y (a) : $R = 370$ (b) : $R = 500$. Les deux figures sont centrées sur les *spots*.

vorticité transverse négative à $y = 0$, ce qui justifie l'utilisation des procédures du chapitre 3.

6.3.2 Mesure de vitesse d'advection

On applique la procédure utilisée pour les bandes. Les conditions contraignent son application : on ne trouve pas de direction diagonale sur laquelle moyenner, on n'a évidemment pas de situation statistiquement permanente pour qu'une moyenne en temps ait du sens. On se contentera d'un lissage via une moyenne sur l'épaisseur, en acceptant le résultat de la section précédente sur c_z : cette vitesse d'advection dépendent relativement peu de la position y. On donne deux exemples de résultats instantanés sur la figure 6.7

On est très limité par l'impossibilité de moyenner en temps pour mesurer c_x, et on ne dispose que de c_z, moyenné sur l'épaisseur pour plus de lisibilité. Les perturbations sont advectés en dehors du *spot*, suivant la même direction et avec la même vitesse que l'écoulement moyen $\int \mathrm{d}y\, v_z$. On ne note pas de différence avec le cas de la bande quant à l'effet de l'écoulement à grande échelle sur l'advection des perturbations. On ne note de plus pas de différence qualitative entre le cas $R = 370 < R_{\mathrm{t}}$ et le cas $R = 500 > R_{\mathrm{t}}$.

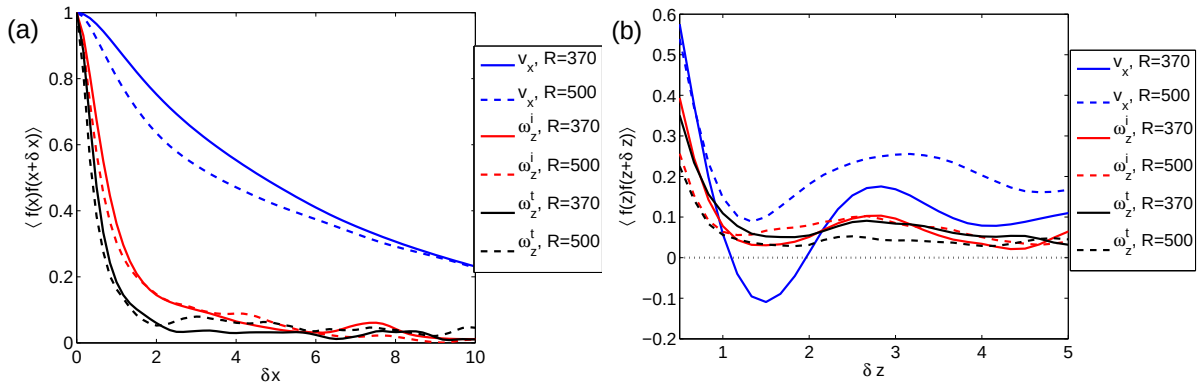


FIGURE 6.8 – Fonction de corrélation du champ de vitesse longitudinal v_x et de la vorticité filtrée ω_z^{th}, à $R = 370$ et $R = 500$. (a) : direction longitudinale, (b) : direction transverse. Les courbes à $R = 370$ sont en trait plein, celles à $R = 500$ en pointillé.

6.3.3 Échelles caractéristiques

On procède de la même manière que dans le chapitre consacré à l'instabilité, en calculant les fonctions de corrélation en espace. On est cependant limité par le caractère instationnaire de la croissance du *spot*, qui empêche les moyennes en temps. Les fonctions de corrélation sont alors plus perturbées par des évènements rares.

On trace les résultats sur la figure 6.8. Le comportement qualitatif et quantitatif de ces fonctions de corrélation est le même que dans le cas des bandes, on retrouve les hiérarchies de taille relativement marquée dans la direction x, d'une part entre zone intermédiaire et zone turbulente, d'autre part entre la taille des perturbations et la longueur caractéristique des *streaks*. La taille caractéristique longitudinale des perturbations décroît faiblement avec R (Fig. 6.8 (a)). De la même manière, dans la direction transverse (Fig. 6.8 (b)), on retrouve la hiérarchie de taille des bandes : les perturbations sont légèrement plus fines que les *streaks*, leur épaisseur ne dépend pas de la zone, mais décroît avec R. La fonction de corrélation transverse de ω_z^{th} garde une faible trace de la modulation du fond, qui apparaît plus clairement dans les fonctions corrélation du champ de vitesse. Le perturbations apparaissent décorrélées au delà d'un *streak*. Cependant, le résultat extrait n'est pas aussi clair que dans le cas des bandes.

6.4 Conclusion

6.4.1 Résumé

Dans ce chapitre, on reprend des expériences typiques, dans des tailles et conditions suffisamment larges pour pouvoir examiner le problème du point de vue de la formation et du comportement des bandes, ainsi que des instabilités à l'échelle du gap h. On reste cependant dans la limite de tailles de domaines relativement petites, contenant une ou deux bandes et soumis aux effets, généralement stabilisateurs, des conditions de bord périodiques.

On se sert des quantités turbulentes classiques (fraction turbulente, énergie moyenne, énergie

turbulente) et des paramètres d'ordre. On peut mettre en évidence l'augmentation de la vitesse de croissance du *spot* en fonction du nombre de Reynolds, ainsi que les régimes successifs que le système expérimente lorsque R est augmenté. On retrouve alors les idées du diagramme 1.6 (§ 1), on passe relativement continument d'une régime où l'on a un déclin systématique après un court temps, un régime autour de R_{g} où l'on peut voir déclin et croissance, puis en augmentant R, une croissance difficile, puis quasimonotone puis finalement totalement monotone. D'autre part, la croissance et la décroissance ne se font très rapidement que dans la direction transverse/oblique. La dissymétrie de la croissance se fait d'abord fortement sentir, passant, avec le temps, d'un *spot* oblique à des portions de bandes, de forme parfois complexe et fluctuante à plus bas R. De plus, à mesure que R augmente l'anisotropie et la dysimétrie de la croissance se manifeste différemment. Finalement, en approchant R_{t}, on atteint un régime dans lequel la croissance se produit de manière totalement symétrique d'une part, et ne s'arrête pas dans la direction longitudinale d'autre part. Le *spot* envahis alors tout le domaine. Les domaines utilisés capturent relativement bien le choix rapide d'une orientation lors de la croissance du *spot* à plus haut nombre de Reynolds, mais leur taille est insuffisante pour capter les plus rares changements de direction.

À petite échelle, de l'ordre de h, on retrouve l'instabilité mise en évidence dans les bandes, que R soit au dessus ou en dessous de R_{t}. La taille caractéristique longitudinale baisse légèrement avec R. L'approche quantitative introduite dans le chapitre 3 ne montre pas de distinction avec le cas des bandes, pour les deux nombres de Reynolds, $R < R_{\mathrm{t}}$ et $R > R_{\mathrm{t}}$, les échelles restent les mêmes, et les perturbations sont advectées par l'écoulement à grande échelle, dans ce cas de *spot* symétrique en début de croissance, l'écoulement quadrupolaire.

6.4.2 Discussion

Les données présentes dans la littérature et obtenues ici sur la phase de *spot* permettent deux approches en terme d'interprétation et de modélisation. On peut d'une part suivre une approche dans laquelle l'hydrodynamique est oubliée ou très simplifiée, pour permettre une description du processus de croissance/rétractation à grande échelle. On peut d'autre part se centrer sur le détail des structures cohérentes et des instabilités pour permettre une interprétation de chacun des processus augmentation de la taille du domaine, rétractation, *etc.*

À l'aide des données obtenues à grande échelle, on peut faire des choix et un tri dans les différents types de modèles (continus ou sur réseau, déterministe, chaotique déterministe ou stochastique). Contrairement à ce qui est contenu dans les premières approches de modélisation continue [11], la croissance est non seulement fortement anisotrope, mais aussi dissymétrique et contient la trace de la longueur d'onde longitudinale : le front *streamwise* s'étend, se fixe ou se rétracte, dans la direction transverse principalement, selon que l'on est au dessus de R_{t}, dans la gamme $[R_{\mathrm{g}}; R_{\mathrm{t}}]$, ou en dessous de R_{g}. D'autre part, il apparaît que la croissance peut contenir une forte part d'aléatoire, causé par le chaos local. Ce bruit se manifeste comme un bruit multiplicatif dans les modèles de réaction diffusion [44] ou dans les modèles proposés pour l'écoulement dans une conduite. Dans le premier cas, la forme du bruit est une conséquence de la structure du système lorsqu'on passe des modèles sur réseau à une théorie de champ, dans le second, un choix guidé par le fait que le bruit est causé par la turbulence et doit donc se manifester de manière croissante avec elle.

D'autre part, on peut s'aider de ces approches de modélisation pour améliorer le cadre dans lequel on étudie les *spots*. En particulier, ils doivent aider à la définition d'un éventuel seuil d'existence de

la turbulence. Dans le cas de la conduite, un modèle simple permet de montrer qu'un seuil peut être défini par le nombre de Reynolds à partir duquel la moyenne d'ensemble de la fraction turbulente est non nulle (dans la limite thermodynamique). On montre qu'il correspond très bien au croisement des temps de vie et des temps de *splitting* des domaines turbulents [3,65]. La fraction turbulente moyenne est une donnée qui peut être bien définie dans le cas de Couette, les temps de vie de la turbulence posent cependant plus de problèmes, car devenir du système dépend très fortement de la condition initiale. La possibilité de réduire cette zoologie à quelque évènements simples, comme dans le cas de poiseuille cylindrique, peut d'une part améliorer les procédures de mesure, d'autre part guider les *toy-models* et modèles quantitatifs de ce régime.

La question des mécanismes locaux à l'œuvre dans les *spots* est éclairée par l'exploration de l'instabilité de cisaillement dans le plan $x - y$. On peut ainsi montrer que les perturbations sont advectées par l'écoulement moyen, vers les fronts transverses, où se créent de nouveaux *streaks* et vortex. Ils peuvent alors participer à l'excitation de la turbulence. L'augmentation de la taille de la zone turbulente dans cette direction, même si elle est comprise qualitativement (création de *streaks* par *lift-up* au niveau du front, création de vortex par un *streak* instable) n'est pas encore quantifiée. En particulier, il reste à mettre en évidence de manière quantitative le rôle de l'écoulement moyen dans la vitesse d'extension du front (d'abord mise en évidence avec un profil de base sinusoïdal et des conditions de glissement à la paroi [91]). Ce front beaucoup moins vite lorsque la recirculation est absente, comme on peut le voir dans Couette plan classique [29, 30].

Chapitre 7

Conclusion

7.1 Résumé

La littérature contient les bases du sujet, mais laissent un certain nombre de questions ouvertes. Les expériences dans Couette plan et surtout Taylor–Couette [73–75] mettent en avant une partie de la phénoménologie en grande taille, et proposent les bases de la modélisation en terme de formation de motif. Les simulations [5,6,96] approchent elles aussi la phénoménologie et la modélisation et mettent en avant le comportement moyen détaillé de l'écoulement, dans une situation partiellement contrainte. Les simulations à bas ordre ne contiennent qu'une partie trop limitée de la phénoménologie [51,52,57]. Les modèles plus abstraits contiennent eux aussi une partie du comportement de l'écoulement, mais manquent l'anisotropie ou le côté bidimensionnel [8, 9]. Cependant cela laisse un certain nombre de questions ouvertes. La phénoménologie complète de Couette plan n'est que partiellement abordée ; les modèles en terme d'équation d'amplitude ne sont pas entièrement exploités et le détail petite échelle de l'écoulement est perdu après passage aux moyennes. De manière générale, les subtilités de la formation de motif bruité, l'apparition des écoulements moyens à partir des petites échelles, le détail des mécanismes microscopiques se déroulant dans les bandes sont en l'état des questions ouvertes. La modélisation de l'ensemble de la phénoménologie de la transition, de la formation des bandes à la disparition de la turbulence en passant par la croissance des *spots*, et de l'ensemble des mécanismes hydrodynamiques à petite échelle sont les premiers problèmes à explorer. La compréhension fine de la transition, et finalement l'extraction quantitative du comportement à grande échelle des équations de Navier–Stokes sont les problèmes à long terme qui guident l'étude.

Pour s'attaquer à l'ensemble de ces questions, le choix de simulations numériques de l'écoulement de Couette plan, à l'échelle d'une ou de quelques bandes, d'orientation non contrainte, a été l'approche choisie. Partant du même code, deux procédures sont possibles, avec des objectifs différents. La première consiste à utiliser un code de DNS tel quel, avec une résolution validée pour fournir des résultats qualitativement et quantitativement corrects aux nombre de Reynolds considérés. Le but est d'explorer le détail des petites échelles de l'écoulement, de taille de l'ordre de $O(h)$. La seconde consiste à utiliser le même code (§ 2.2), mais à sous-résoudre pour approcher par le haut les modèles de bas ordre de manière brute. L'abaissement de la résolution est contrôlé de sorte que les simulation aient toujours le même contenu qualitatif mais nécessitent des ressources informatiques (temps, RAM, ROM) bien plus faibles de manière à pouvoir faire de longues statistiques. On fait des comparaisons

quantitatives et qualitatives avec la DNS lorsque celà est possible. On consent pour cela à un décalage de certaines quantités que l'on estime non-universelles en restant dans la même classe d'universalité (au sens des transitions de phases), comme les valeurs exactes des seuils, les valeurs relatives de paramètres. Ainsi, le manuscrit se sépare donc en deux grandes parties principales, l'une centrée sur les DNS et l'investigation des petites échelles et l'autre sur l'approche à bas ordre et l'étude de la formation de motif. Les deux autres parties plus courtes, centrées sur des thèmes annexes, croissance de *spot* et relaminarisation, se partagent entre ces deux approches.

L'étude des petites échelles de l'écoulement se concentre sur une instabilité de cisaillement créant de la vorticité transverse. Guidé par les résultats sur l'écoulement de Poiseuille dans une conduite, les DNS permettent d'identifier le phénomène et sa localisation dans les *streaks* longitudinaux. Leur étude statistique permet d'introduire un écoulement idéalisé, dit de fond, représentant l'écoulement en *streaks* et en vortex, pour mettre en évidence dans les visualisations le développement de perturbations par rapport à cet écoulement. On voit apparaître l'advection des perturbations à la fois dans les directions transverses et longitudinales. La vorticité transverse, marqueur de ce phénomène, permet de mesurer les échelles caractéristiques ainsi que la vitesse d'advection des perturbations. La description en terme d'écoulement de fond permet la modélisation de l'écoulement, pour son étude de stabilité temporelle locale. Ce formalisme permet d'explorer les différentes localisations de l'écoulement qui n'est pas forcément organisé de manière simple ou unique. L'analyse de stabilité locale est en accord avec les mesures tirées des expériences numériques, et met en évidence la localisation de l'instabilité, mais surtout les vitesses de groupe des perturbations et la transition convectif/absolu à l'entrée de la zone turbulente, ce qui ouvre la possibilité d'une instabilité globale dans le modèle d'écoulement de fond et la discussion de l'écoulement idéalisé à l'aide des résultats concernant les écoulements développés spatialement.

Du point de vue de la formation de la bande, on est guidé par les approches précédentes, mettant en évidence la modulation quasi-sinusoïdale et l'efficacité des équations modèles, pour quantifier la modulation de la turbulence dans l'écoulement. Une exploration préliminaire de la phénoménologie des systèmes périodiques contenant peu de bandes a mis en évidence la variation de l'amplitude de la modulation avec R, la marche aléatoire de la phase et les compétitions d'orientation et de longueur d'onde. On propose les traitements adaptés, en pratique des moyennes d'ensemble de séries temporelles et l'exploitation des pdf, pour extraire le maximum de contenu. Une fois identifiée la phénoménologie, on propose une modélisation, guidé par les approches précédentes, pour la formation de la bande turbulente soumise à son propre bruit. Le modèle utilisé, de type Ginzburg–Landau–Langevin pour un système étendu ou Landau–Langevin pour un petit système, est à mi-chemin entre la formation de motif et les transitions de phase. En l'étudiant de manière extensive, on peut en extraire tout son contenu à l'équilibre, autour de l'équilibre, et pour de plus grandes fluctuations d'un état métastable à un autre. On peut pousser le calcul à l'ordre 1 en le bruit. Cette ordre contient l'ensemble de la phénoménologie pour une expression relativement simple, et il permet de comprendre les procédures de traitement mis en oeuvre. L'exploration statistique du système permet de vérifier que le comportement de l'écoulement est quantitativement décrit par le modèle, et d'en tirer les paramètres. L'exploration des plus grandes tailles permet de vérifier que le contenu qualitatif est en accord avec la phénoménologie.

Le chapitre sur les relaminarisations explore l'apparition de trous laminaires dans l'écoulement, que ce soit lors de trempes, venant de nombre de Reynolds où la turbulence est sans motif à grande

échelle, ou dans les bandes, près du seuil en dessous duquel la turbulence n'est que transitoire. On suit une approche à l'échelle de la bande à l'aide des grandeurs classiques. Les différentes phases de la trempe et leurs particularités sont mises en évidence. On valide les approches en terme d'équation modèle pour le comportement du paramètre d'ordre et on peut valider l'effet de la viscosité sur la première phase de la trempe, au niveau global comme au niveau local. Des changements d'orienation par relaminarisation locale et recroissance d'une bande d'orientation différente sont mis en évidence. La phénoménologie est différente de la compétition d'orientation sous l'effet du bruit près de R_{t}.

Le chapitre sur les *spots* a pour principal but d'exploration les quantités turbulentes sur la croissance des *spots* turbulents : une petite étude quantitative est proposée. L'autre point est l'exploration du comportement des petites échelles, en particulier de l'instabilité de cisaillement, dans une configuration légèrement différente de celle des bandes ainsi qu'à des nombre de Reynolds un peu trop grands pour que les bandes se manifestent.

7.2 Discussion

Les équations modèles décrivent très bien le comportement de la bande. Le principal point de discussion est la possibilité de faire le lien, ne serait ce que qualitativement, entre le comportement à petite échelle et le maintien de la turbulence sous la forme de bandes obliques.

Le principal lien proposé, qualitatif, est sous la forme d'un cycle d'auto-entretien de la turbulence. Il est discuté en détail à la fin du chapitre 3. En partant de la description idéalisée de type écoulement de fond en *streaks* et en vortex, on peut redériver le grand écoulement. Cet écoulement présente l'instabilité de *streaks* classique, ainsi qu'une l'instabilité des couches $x - y$. Le processus d'auto-entretient de la turbulence, isolé dans un système de type MFU ne se maintient pas en dessous de R_{t}, cependant, on argue que son excitation par l'instabilité de la couche cisaillée $v_x(y)$ et la transition convectif/absolu, qui emet des perturbations, permet de faire de la bande turbulente un état d'équilibre (statistique) stable et localisé. Comme il se maintient, il reforme les *streaks* et boucle le cycle. On ne peut cependant pas encore en dériver analytiquement les tensions de Reynolds qui maintiennent l'écoulement moyen.

Le processus de déviation de l'écoulement du voisinage du cycle auto-entretenu, qui permet l'apparition de trous laminaires, est partiellement examiné dans l'étude des relaminarisations. On s'attend à ce que ce soit l'échec de ce processus, au niveau local, qui soit responsable de la formation de trous dans les bandes. La déviation loin de l'équilibre peut être invoquée pour décrire le caractère transitoire de la turbulence à bas R. En pratique, ces excursions correspondent à l'approche d'une situation de type *edge state* et du passage du col.

7.3 Perspectives

On peut diviser les questions restants ouvertes en deux types, selon qu'un saut qualitatif (ou conceptuel) est à franchir, ou qu'elle reste ouvertes à cause de difficultés technique parfois importantes.

La comparaison quantitative entre les modèles de motifs bruités et la bande peut être poussée jusqu'au bout, pourvu que l'on puisse faire des expériences suffisamment longues dans des domaines suffisamment grands. L'ordre de la transition à R_{t}, La divergence des fluctuations, ainsi que les

temps de résidence à des nombre de Reynolds intermédiaires font partie des quantités pour lesquelles on ne peut pas confronter modèle et simulation, pour cause de manque de données. De même, la phénoménologie complète des croissances de *spots* fait parti des points relativement accessibles. La modélisation de la croissance oblique, au delà des modèles isotropes et déterministes, est un point moins trivial. Cela requiert un ajustement des modèles pour contenir de manière simple toute la phénoménologie.

La principale difficulté réside dans la possibilité de faire émerger des modèles de type Landau à partir des équations de Navier–Stokes, ne serait ce que pour l'apparition des bandes dans la turbulence uniforme. Cela nécessite une connaissance quantitative et fine des effets des grandes échelles sur les petites et de la rétro-action des petites échelles sur les grandes. Une meilleure connaissance de toutes les composantes à petite échelle de l'écoulement, ainsi que de leur contribution quantitative aux maintien des grandes échelles (via les tensions de Reynolds) est nécessaire. A ce sujet, les travaux récents, tant sur l'écoulement de Poiseuille cylindrique que sur sur l'écoulement de Couette plan posent les jalons de la compréhension idéalisée et/ou qualitative des mécanismes de l'écoulement.

Appendices

Annexe A

Implémentation de ChannelFlow

On présente ici rapidement le code ChannelFlow, de John Gibson [36]. On décrit le principe de la procédure numérique que l'on a choisie, parmi celles proposées par le code, et de ses avantages et inconvénients pour la résolution des équations de Navier–Stokes incompressibles. On explique rapidement l'organisation du code d'un point de vue informatique, l'avantage du choix du langage de programmation C++. On décrit comment on prend avantage de l'organisation pour notre propre code, qui ajoute du traitement en ligne à l'intégration en temps de Navier–Stokes.

A.1 Discrétisation en espace et en temps

L'approche de discrétisation en espace est très standard pour des écoulements de parois. Le code utilise une approche pseudo-spectrale (Tau-Galerkin [15]), avec une décomposition en série de Fourier dans les directions périodique x et z et une décomposition en polynômes de Chebyshev dans la direction y. Un des intérêts de cette approche est que l'ensemble des intégrales peuvent êtres calculées *via* des transformations de Fourier rapide (à la différence de la décomposition en polynômes de l'annexe B).

L'intégration utilise un schéma implicite pour les termes linéaires, explicite pour les termes non-linéaires, avec une condition de CFL. Le champ de vitesse et de pression est ainsi la solution d'un problème linéaire à inverser. On fixe dt comme un sous multiple de $1h/U = n * dt$, et tous les h/U, on réévalue dt. Le nombre de CFL est défini comme le maximum sur le domaine de $dt * |u_j(M)|/dx_i(M)$, $i, j = x, y, z$ (en pratique seul les dy dépendent de la position [15]), et la condition de CFL choisie garde généralement ce nombre entre 0.3 et 0.4 (bien que cela puisse être ajusté). Si le CFL est trop grand, on réduit dt, et s'il est trop petit, on augmente dt. Réduire la résolution et augmenter le pas d'espace permet d'obtenir des pas de temps plus important vérifiant la condition de CFL.

A.2 Effet de l'optimisation de l'algorithme de FFT

ChannelFlow utilise FFTW pour réaliser ses transformations de Fourier rapides (Fast Fourier Transform). Lorsque des transformations de Fourier (directes et inverses) vont être effectuées, en particulier pour une FFT réalisée à chaque itération de l'intégration en temps, FFTW est initialisé avec

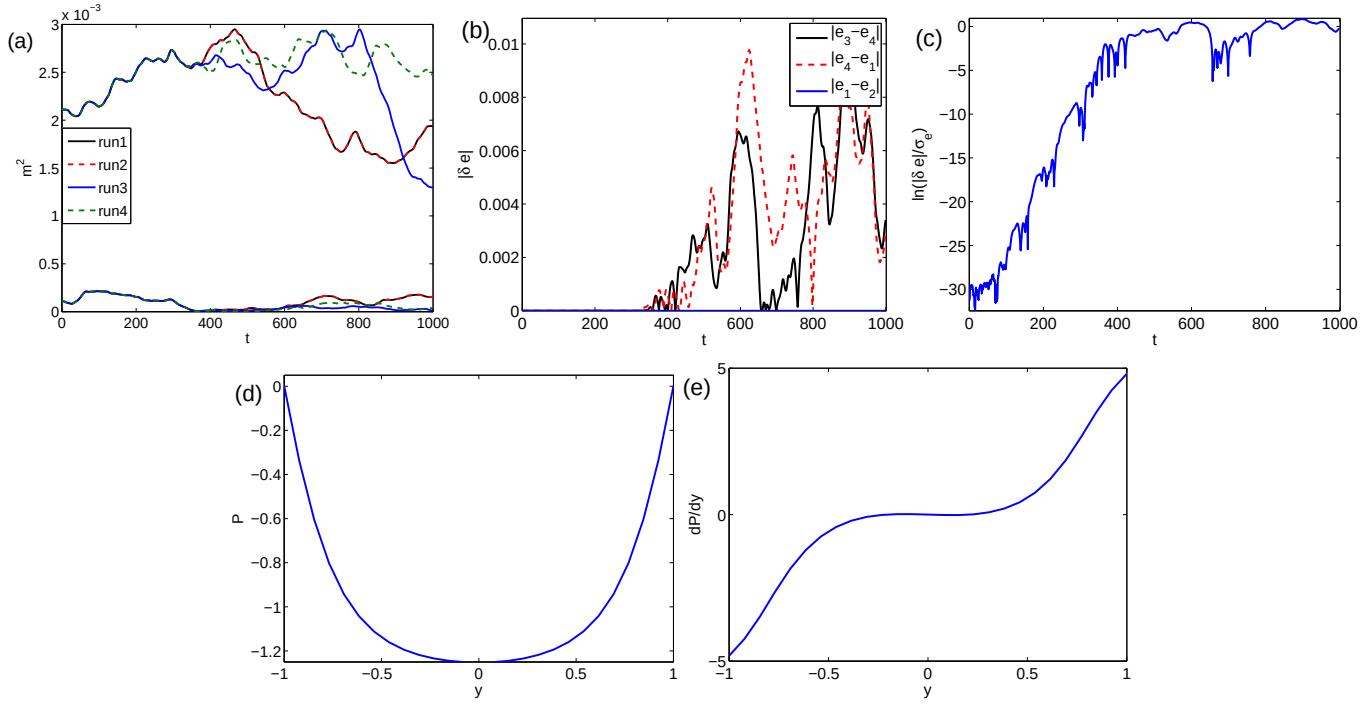


FIGURE A.1 – Pour une même condition initiale, sur une même machine, pour deux choix de fonctionnement de FFTW (ESTIMATE : run1 et run2, MEASURE : run3 et run4), $L_x \times L_z = 128 \times 48$, $R = 315$, $N_y = 15$: (a) Quatre exemples de séries temporelles du paramètres d'ordre, (b) écart entre les énergies moyennées en espace, (c) logarithme de l'écart. Pour $L_x \times L_z = 110 \times 32$, $R = 335$, $N_y = 27$: (d) exemple de profil de pression moyenné en espace (zone turbulente) et en temps en fonction de y, (e) gradient y de pression moyenné en espace (zone turbulente) et en temps en fonction de y.

les références des *arrays* devant contenir le champ à transformer et sa transformée des transformations, et détermine l'algorithme de FFT le plus rapide étant donnée la machine. On crée alors un *plan* (dans la terminologie de FFTW) contenant les références des *arrays* et l'algorithme choisi. Ensuite à chaque itération de la transformation, fftw exécute ce *plan*. L'optimisation du choix de l'algorithme de FFT est présenté comme un des avantages donnant à FFTW une grande rapidité. Plusieurs options s'offrent pour optimiser ce choix, la plus rapide étant d'estimer (ESTIMATE), sans réaliser de FFT, quel sera l'algorithme le plus rapide, les plus lente étant de réaliser des FFT selon les algorithmes, sur des vecteurs relativement court, et de mesurer leur performance (soit de manière sommaire (MEASURE), générale (PATIENT), voir totalement exhaustive (EXHAUSTIVE)). FFTW donne aussi la possibilité de sauver et réutiliser les résultats de ces estimations (WISDOM, dans la terminologie de FFTW), mais cette possibilité n'est pas intégrée dans ChannelFlow.

Une particularité se fait sentir lors des simulations. L'estimation de l'algorithme le plus rapide donnera toujours le même résultat à machine donnée, parce qu'elle ne dépend que des caractéristiques de la machine. La mesure, elle, ne donnera pas toujours le même résultat. Il semble que cela soit la conséquence de la mesure du temps sur le compteur de cycle du CPU [34, 37](§10.3), bien qu'il soit difficile d'éclaircir ce point sans accès au détail de l'algorithme de FFTW.

Cette initialisation est réalisée à chaque début d'exécution de la DNS. La conséquence de cette particularité sur l'intégration numérique est que l'application f qui donne $\vec{v}(t+dt) = f(\vec{v}(t))$ sera légèrement différente à chaque exécution de la DNS si l'on choisi de mesurer pour choisir l'algorithme le plus rapide, tandis qu'elle sera toujours la même (à machine donnée) si on choisi d'estimer pour choisir l'algorithme le plus rapide. En effet, les FFT effectuées sur $\vec{v}$ (en particulier celles pour estimer le terme non linéaire dans l'espace réel) sont initialisée en début de simulation. Cette légère différence va avoir pour conséquence de donner des résultats différents pour deux simulations partant de la même condition initiale.

On propose une expérience simple pour mettre cet effet en évidence. On se donne une condition initiale ($L_x \times L_z = 128 \times 48$, $N_y = 15$, $R = 315$), que l'on intègre quatre fois en temps pendant $1000h/U$. Le domaine contient une bande. Les deux premières fois (*run* 1 et 2), le choix de l'algorithme de FFT sera fait par estimation, les deux suivantes (*run* 3 et 4), par mesure. Lors de ces expériences, on suit le carré des paramètres d'ordre $m_\pm$ ainsi que l'énergie moyennée en espace e. On trace le résultat concernant le paramètre d'ordre sur la figure A.1 (a) : aucun écart n'apparaît entre les *runs* 1 et 2, pour les deux paramètre d'ordre m_+ et m_-. La différence avec les *runs* 3 et 4, ainsi qu'entre les *runs* 3 et 4 apparaît visuellement au bout de $t \sim 400h/U$. On peut la mettre en évidence en faisant la différence $\delta e = |e_i - e_j|$ entre les énergies cinétiques pour chacune des expériences (Fig. A.1 (b)). À nouveau, on ne distingue aucune différence entre les *runs* 1 et 2 (à 10^{-16} près) : en exécutant plusieurs fois la DNS, avec la même condition initiale et une estimation du meilleurs algorithme de FFT, on obtient toujours le même résultat. Cependant la différence avec les *runs* 3 et 4 ainsi qu'entre les runs 3 et 4 croît quasi-exponentiellement et sature assez rapidement : à chaque exécution de la DNS, avec la même condition initiale et en mesurant la vitesse des algorithmes de FFT, on obtient un résultat différent. La croissance exponentielle de la différence entre les *runs* 3 et 4 peut se mettre en évidence avec $\ln(\delta e/\sigma_{e_3})$ (Fig. A.1 (c)). Cela illustre l'écart croissant entre les résultats de simulations utilisant la même condition initiale et la même initialisation de FFT *via* mesure. Ainsi cette grandeur croît linéairement en temps quasiment dès le début de la simulation, *i.e.* dès que l'écart entre les deux énergie cinétiques moyennes devient de l'ordre d'au moins 10^{-16}. Elle sature autour de 1 lorsque que

la différence devient visible à l'oeil au bout de $t \sim 400h/U$. Cela assure que l'écart entre les énergies moyennes d'une simulation à l'autre reste toujours inférieur ou égal aux fluctuations en temps, à un régime de paramètre donné. D'un point de vue qualitatif, l'écart apparaît systématiquement lorsqu'on choisit de mesurer la vitesse des algorithmes de FFT, tandis que les simulations donnent exactement le même résultat (sur des durées de l'ordre de $10^4 h/U$ si on choisit d'estimer la vitesse des algorithmes de FFT.

Ces écarts entre simulations entraînent une non-reproductibilités des simulation (sur la même machine) qui peuvent se révéler gênante lorsqu'on veut reprendre plusieurs fois la même expérience. Cet effet est une conséquence inattendue de l'organisation de ChannelFlow. On peut introduire un autre type de biais entre simulations lorsque l'une d'elle est interrompue puis reprise : lors de la reprise, le nombre de CFL peut être inadapté, ce qui entraîne des dt différents sur quelque h/U. De plus, si l'on choisit un schéma à deux pas de temps pour la discrétisation du terme non linéaire, un petit biais peut être introduit lors de la première itération (à un seul pas de temps). Malgré ces différences, on trouve toujours un même résultat pour les grandeurs moyennées, que la simulation soit reproductible ou non. Cela met en évidence la robustesse des statistiques.

A.3 Traitement de la pression et conséquence

Le schéma d'intégration en temps étant semi implicite, $\vec{v}(t+dt)$ va être la solution d'un problème linéaire. Un des points subtils de ce problème est le traitement de la pression (qui n'apparaît pas à t). En prenant la divergence des équations de Navier Stokes, la pression et v_y sont solutions de deux équations linéaires couplées qui correspondent à un problème de type Helmholtz. Une des difficultés pour résoudre ce problème est que les conditions de bord en $y = \pm 1$ sont données pour v_y et sa dérivée, $v_y(\pm 1) = 0$ et $\partial_y v_y(y = \pm 1) = 0$, et il n'y a pas de condition de bord pour p. Cette difficulté est contournée en résolvant ces équations avec des conditions de bord inconnues pour $p(y = \pm 1) = Q\pm$ (mais assurant $\partial_y v_y(y = \pm 1) = 0$). Ces conditions sont déterminées, en résolvant le même problème, en utilisant un jeu de conditions de bord en $y = \pm 1$ pour la pression. On en prend ensuite la bonne combinaison linéaire (déterminée *via* la matrice d'influence) de ces solutions plus artificielles.

Une des faiblesses de cette approche est qu'elle peut affecter la valeur obtenue pour les profils moyens en x, z de p et de $\partial_y p$. On en donne ainsi un exemple moyennés conditionnellement dans les zones turbulente (Fig. A.1 (d,e)). Cette méthode introduit des conditions de bord $p = 0$ en ± 1 ainsi qu'une amplitude relativement importante de p. Elle n'a cependant pas d'effet sur $\partial_{x,z}(p)$ ainsi que sur $\vec{v}$. À cause des variations de p, la composante y du gradient de pression, $\partial P/\partial y$ a une amplitude bien plus importante que ce que l'on peut déterminer *via* d'autres procédures numériques [6] et ne cadre pas avec le bilan de forces. En conséquence, on ne peut pas effectuer le bilan de force dans la direction y à l'aide de ce code.

A.4 Organisation du code et intérêt pour le traitement en ligne

Malgré ces quelques particularités, le code ChannelFlow est particulièrement intéressant en raison de son organisation et de sa modularité, rendus possibles grâce à son écriture en C++. Ainsi,

il s'est révélé particulièrement simple à intégrer dans un code plus large, gérant la discrétisation en espace et l'intégration en temps grâce aux objets provenant de ChannelFlow (en particulier des classes flowfield et DNS). On peut ainsi adjoindre des procédures de traitement en ligne (discrimination laminaire turbulent, moyennes conditionnées), effectuées à chaque h/U sur les champs de vitesse avec une certaine aisance et en gardant un code simple à lire et à modifier.

Annexe B

Approximation polynomiale dans la direction y

Pour la résolution numérique des problèmes aux valeur propre de type Orr–Sommerfld–Squire on est conduit à utiliser une discrétisation en espace dans la direction y adaptée à la non-périodicité des conditions de bord. La démarche usuelle consiste à utiliser des polynômes de Chebychev. Les avantages de cette approche résident dans le fait que les polynômes sont connus de manière exacte à tout ordre, et que les transformations réelle/spectrale peuvent être faites à l'aide des algorithmes de FFT [15]. Ils peuvent cependant compliquer l'implémentation des problèmes, car il faut leur faire vérifier les conditions de bord. On peut palier à ce problème en utilisant des familles de polynômes contenant déjà ces conditions de bord. Lorsque la résolution nécessaire est faible, ce type d'approximation a tendance à converger plus rapidement que des polynômes de Chebychev.

B.1 Bases de fonctions

B.1.1 Principe et résultats généraux

Les deux bases de polynômes sur $[-1;1]$ vérifiant les conditions aux limites $f(y=\pm 1)=0$ et $f(y=\pm 1)=0\,, f'(\pm 1)=0$ peuvent être déterminées via le processus d'orthonomalisation de Gram–Schmidt. On commence à partir de la première fonction des deux bases :

$$g_0 = (1-y^2)^2$$

et

$$f_0 = (1-y^2)\,.$$

Les polynômes suivantes peuvent être écrits de manière générale :

$$g_n = P_n(y)(1-y^2)^2 \tag{B.1}$$

et

$$f_n = Q_n(1-y^2)\,. \tag{B.2}$$

On introduit ainsi deux familles de polynômes $\{P_n\}$ et $\{Q_n\}$ liés simplement aux bases $\{g_n\}$ et $\{f_n\}$. Pour la procédure de Gram–Schmid, on utilise le produit scalaire naturel de l'espace de Hilbert $L^2([-1,1])$:

$$\langle f|g\rangle = \int_{y=-1}^{1} \mathrm{d}y f(y)g(y)\,.$$

Transformer la mesure $\mathrm{d}y$ en $\mathrm{d}y\sqrt{1-y^2}$ présenterait l'intérêt de concentrer les points de collocation (cf § B.2) près du bord pour mieux résoudre cette couche de mélange. Cependant, on perd alors l'expression analytique simple de ces polynômes. De plus, l'instabilité se produisant autour de $y=0$, on a plutôt intérêt à bien résoudre le centre du canal. On a naturellement orthogonalité entre les polynômes pairs $n=2p$ et impairs $n=2p+1$. On peut donc les expliciter :

$$P_{2p} = \frac{1}{z_{2p}}\left(y^{2p} + \sum_{k=0}^{p-1} a_{2k}^{2p} y^{2k}\right)$$

$$Q_{2p} = \frac{1}{w_{2p}}\left(y^{2p} + \sum_{k=0}^{p-1} b_{2k}^{2p} y^{2k}\right)\,,$$

$$P_{2p+1} = \frac{1}{z_{2p+1}}\left(y^{2p+1} + \sum_{k=0}^{p-1} a_{2k+1}^{2p+1} y^{2k+1}\right)$$

$$Q_{2p+1} = \frac{1}{w_{2p+1}}\left(y^{2p+1} + \sum_{k=0}^{p-1} b_{2k+1}^{2p+1} y^{2k+1}\right),.$$

avec z_{2p} (resp. z_{2p+1}) et w_{2p} (resp. w_{2p+1}) les normalisations des polynômes $\{g_n\}$ et $\{f_n\}$ et les a_k^n et b_k^n les coefficients des polynômes $\{P_n\}$ et $\{Q_n\}$. On peut exprimer explicitement les normalisations à l'aide de ces coefficients et des intégrales I_{2l} et J_{2l} :

$$I_{2l} = \int_{y=-1}^{1} \mathrm{d}y y^{2l}(1-y^2)^4 = \frac{768}{32p^5+400p^4+1840p^3+3800p^2+3378p+945}\,,$$

$$J_{2l} = \int_{y=-1}^{1} \mathrm{d}y y^{2l}(1-y^2)^4 = 2\frac{8}{8p^3+36p^2+46p+15}\,.$$

On a ainsi pour $\{g_n\}$:

$$z_{2p}^2 = I_{4p} + \sum_{k=0}^{p-1}\left(2I_{2k+2p}a_{2k}^{2p} + \sum_{l=0}^{p-1} a_{2k}^{2p}a_{2l}^{2p} I_{2k+2l}\right)$$

et

$$z_{2p+1}^2 = I_{4p+2} + \sum_{k=0}^{p-1}\left(2a_{2k+1}^{2p+1}I_{2p+2k+2} + \sum_{l=0}^{p-1} a_{2k+1}^{2p+1}a_{2l+1}^{2p+1} I_{2k+2l+1}\right)\,.$$

Et pour $\{f_n\}$ on a :

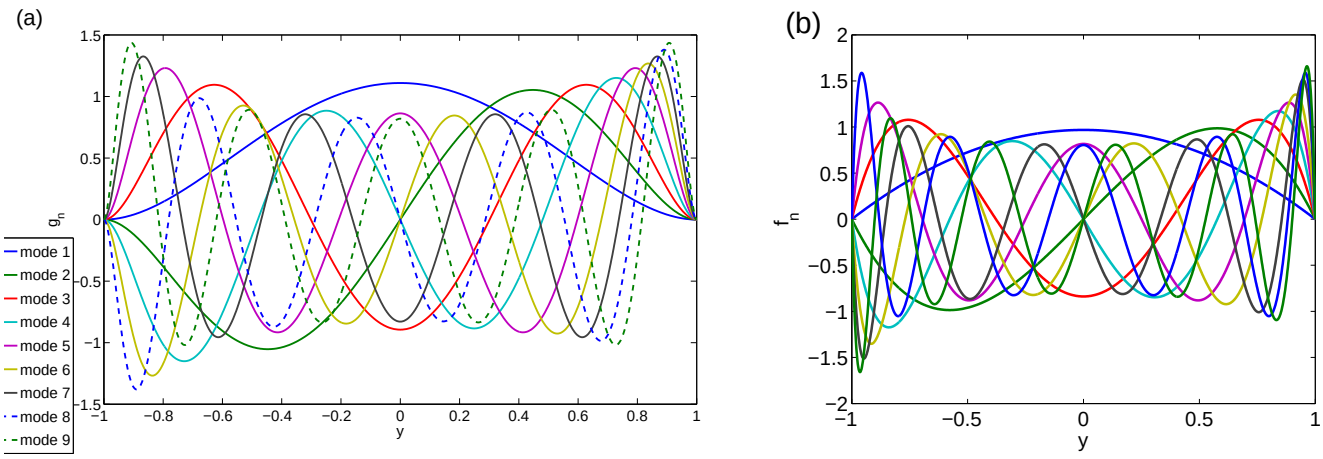


FIGURE B.1 – Exemple des premiers polynômes pour les familles (a) $\{g_n\}$ et (b) $\{f_n\}$.

$$w_{2p} = J_{4p} + 2\sum_{k=0}^{p-1} b_{2k}^{2p} J_{2k+2p} + \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{l=0}^{p-1} b_{2k}^{2p} b_{2l}^{2p} J_{2k+2l}$$

et

$$w_{2p+1} = J_{4p+2} + 2\sum_{k=0}^{p-1} b_{2k+1}^{2p+1} J_{2k+2p+2} + \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{l=0}^{p-1} b_{2k+1}^{2p+1} b_{2l+1}^{2p+1} J_{2k+2l+2}\,.$$

Les polynômes $\{P_n\}$ et $\{Q_n\}$ sont des polynômes de Jacobi dont on trouve une expression littérale dans la littérature [15]. On a ainsi :

$$P_n = J_{4,4}^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+4}{k}\binom{n+4}{n-k}(y-1)^k(y+1)^{n-k}$$

$$Q_n = J_{2,2}^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k}\binom{n+2}{n-k}(y-1)^k(y+1)^{n-k}\,.$$

Cependant cette expression est relativement lourde à manipuler, et nécessite que chacun des termes se compense (somme alternée) pour donner une bonne estimation de la fonction en tout point. Cela est de plus en plus difficile à mesure que l'ordre augmente à cause des erreurs d'arrondis (pourtant inférieures à 10^{-16})

On donne des exemples des premiers polynômes des bases $\{g_n\}$ (Fig. B.1 (a)) et $\{f_n\}$ (Fig. B.1 (b)). Le respect des conditions aux limites apparaît clairement. La parités des polynômes est alternée. En excluant les zéros en ± 1, leur nombre de racines correspond à au degré de $\{P_n\}$ et $\{Q_n\}$. Les polynômes d'ordre pair sont invariants par l'opération de symétrie $y \leftrightarrow -y$, ceux d'ordre impair sont anti symétriques. Cela est attendu étant donnée leur structure ne contenant respectivement que des termes pairs ou impairs.

B.1.2 Exemples des premiers polynômes de la base

On peut déterminer "à la main" les polynômes des bases $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$, on présente les premiers ici.

Base $\{f_n\}$

on donne les six premiers polynômes (0 à 5) de la base $\{f_n\}$:

$$f_0 = \frac{\sqrt{15}}{4}\left(1-y^2\right) ,$$

$$f_1 = \frac{\sqrt{105}}{4} y\left(1-y^2\right) ,$$

$$f_2 = \frac{21\sqrt{5}}{8}\left(y^2-\frac{1}{7}\right)\left(1-y^2\right) ,$$

$$f_3 = \frac{3\sqrt{1155}}{8}\left(y^3-\frac{1}{3}y\right)\left(1-y^2\right) ,$$

$$f_4 = \frac{33}{32}\sqrt{\frac{1365}{2}}\left(y^4-\frac{6}{11}y^2+\frac{1}{33}\right)\left(1-y^2\right) ,$$

$$f_5 = \frac{429}{32}\sqrt{\frac{35}{2}}\left(y^5-\frac{10}{13}y^3+\frac{15}{143}y\right)\left(1-y^2\right) .$$

On peut en déduire explicitement l'expression des dérivées premières à quatrième.

Base $\{g_n\}$

on donne les six premiers polynômes (0 à 5) de la base $\{g_n\}$:

$$g_0 = \frac{\sqrt{315}}{16}(1-y^2)^2 ,$$

$$g_1 = \frac{\sqrt{3465}}{16} y(1-y^2)^2 ,$$

$$g_2 = \frac{33\sqrt{91}}{32}(y^2-\frac{1}{11})(1-y^2)^2 ,$$

$$g_3 = \frac{39\sqrt{385}}{32}(y^3-\frac{3}{13}y)(1-y^2)^2 ,$$

$$g_4 = \frac{195\sqrt{1309}}{128}(y^4-\frac{2}{5}y^2+\frac{1}{65})(1-y^2)^2 ,$$

$$g_5 = \frac{51\sqrt{95095}}{128}(y^5-\frac{10}{17}y^3+\frac{1}{17}y)(1-y^2)^2 .$$

On peut en déduire explicitement l'expression des dérivées premières à quatrième.

B.1.3 Formulation linéaire des polyômes

La procédure de Gram-Schmid permet d'expliciter de manière systématique le problème linéaire vérifié par les coefficients du polynôme $2p$ (respectivement $2p+1$) en fonction des coefficients des polynômes $2q$ (resp. $2q+1$), $q < p$, en utilisant les relations d'orthogonalité entre les polynômes. Les polynômes d'ordre pair et impair étant naturellement orthogonaux entre eux.

Ainsi, pour déterminer de manière récursive les coefficients $\{a_k^n\}$ des polynômes $\{P_n\}$:

En posant le vecteur A^{2p} :

$$A^{2p} = \left(\{a_{2k}^{2p}\}_{k\in[0;p-1]}\right)$$

et

$$B^{2p} = \left(\left\{I_{2p+2q} + \sum_{l=0}^{q-1} a_{2l}^{2q} I_{2p+2l}\right\}_{q\in[0;p-1]}\right)$$

et

$$M^{2p} = \left(\left\{I_{2k+2q} + \sum_{l=0}^{q-1} a_{2l}^{2q} I_{2k+2l}\right\}_{k,q\in[0;p-1]}\right),$$

on a :

$$A^{2p} = (M^{2p})^{-1} B^{2p}\,.$$

Et, en posant le vecteur A^{2p+1} :

$$A^{2p+1} = \left(\{a_{2k+1}^{2p+1}\}_{k\in[0;p-1]}\right)$$

puis

$$B^{2p+1} = \left(\left\{I_{2p+2q+2} + \sum_{l=0}^{q-1} a_{2l+1}^{2q+1} I_{2p+2l+2}\right\}_{q\in[0;p-1]}\right)$$

et finalement :

$$M^{2p+1} = \left(\left\{I_{2k+2q+2} + \sum_{l=0}^{q-1} a_{2l+1}^{2q+1} I_{2k+2l+2}\right\}_{k,q\in[0;p-1]}\right),$$

On a

$$A^{2p+1} = (M^{2p+1})^{-1} B^{2p+1}\,.$$

Les matrices M^{2p} et M^{2p+1} sont triangulaires, en effet :

$$M_{k,q}^{2p} = I_{2k+2q} + \sum_{l=0}^{q-1} a_{2l}^{2q} I_{2k+2l} = \int_{y=-1}^{1} \mathrm{d}y^{2k}(1-y^2)^2 y^{2q}(1-y^2)^2 + \sum_{l=0}^{q-1} a_{2l}^{2q} \int_{y=-1}^{1} \mathrm{d}y^{2k}(1-y^2)^2 y^{2l}(1-y^2)^2\,,$$

soit

$$M_{k,q}^{2p} = \int_{y=-1}^{1} \mathrm{d}y\,\left(y^{2k}(1-y^2)^2 g_{2q}\right)$$

Or $y^{2k}(1-y^2)^2$ est une combinaison linéaire des g_{2p} pour $0 \leq p \leq k$ ainsi si $k < q$ c'est une combinaison linéaire de $g_{2p}\,, p \neq q$ tous orthogonaux à g_{2q} et donc donnant un produit scalaire nul. On voit de la même façon que

$$M_{k,q}^{2p+1} = \int_{y=-1}^{1} \mathrm{d}y \, \left(y^{2k+1}(1-y^2)^2 g_{2q+1}\right) \,,$$

ce qui permet de prouver la seconde affirmation.

De la même manière, on peut déterminer de manière systématique et récursive les coefficient b_k^n des polynômes $\{Q_n\}$. les coefficients $\{b_{2k}^{2p}\}_{k\in[0p-1]}$ s'obtiennent à partir des $\{b_{2l}^{2q}\}_{l\in[0q-1]}$, $q < p$: en posant $A_{2k}^{2p} = b_{2k}^{2p}$,

$$B_q^{2p} = -\left(J_{2p+2q} + \sum_{l=0}^{q-1} b_{2l}^{2q} J_{2p+2l}\right)$$

et

$$M_{k,q}^{2p} = J_{2k+2q} + \sum_{l=0}^{q-1} b_{2l}^{2q} J_{2k+2l} \,,$$

on a :

$$A^{2p} = M^{2p^{-1}} B^{2p} \,.$$

Et les coefficients $\{b_{2k+1}^{2p+1}\}_{k\in[0p-1]}$ s'obtiennent à partir des $\{b_{2l+1}^{2q+1}\}_{l\in[0q-1]}$, $q < p$: en posant $A_{2k+1}^{2p+1} = b_{2k+1}^{2p+1}$,

$$B_{2q+1}^{2p+1} = -\left(J_{2p+2q+2} + \sum_{l=0}^{q-1} b_{2l+1}^{2q+1} J_{2p+2l+2}\right)$$

et

$$M_{k,q}^{2p+1} = J_{2k+2q+2} + \sum_{l=0}^{q-1} b_{2l+1}^{2q+1} J_{2k+2l+2} \,,$$

on a :

$$A^{2p+1} = M^{2p+1^{-1}} B^{2p+1} \,.$$

On remarque que de manière générale, les $M_{q,q}$, et B_q décroissent rapidement avec q, ce qui peut rapidement poser un problème de conditionnement du problème numérique, d'une part à cause de la décroissance rapide des I_{2n} et J_{2n}, d'autre part à cause des compensations dans les sommes alternées présentes dans les $M_{k,q}$, et B_q. Comme ces deux quantités restent en bonne approximation du même ordre de grandeur lorsque q croît, on passe du problème :

$$\sum_{k=0}^{p-1} M_{k,q} A_k - B_q = 0 \,,\, q \in [0, p-1]$$

au problème :

$$\sum_{k=0}^{p-1} M_{k,q} A_k / B_q - 1 = 0 \,,\, q \in [0, p-1] \,,$$

Ce qui améliore fortement la convergence de l'inversion de M.

B.2 Intégration numérique

La troncature de Galerkin des problèmes aux valeurs propres tirés des équations 2.6 et 2.7 (et des suivants, pp. 19) permet de réduire le problème continu en un problème linéaire discrêt avec un petit nombre d'équations. Ces problèmes font apparaître un certain nombre d'intégrales de fonctions (généralement des polynômes) intégrées contre les fonctions de bases g_n et f_n. On fait de l'intégration exacte : les intégrales sont calculées numériquement à l'aide des points de collocation adaptés et des poids correspondants.

Ainsi, pour une procédure de Galerkin à l'ordre n_b, On intègre des polynômes de degré allant jusqu'à $2n_b$. On utilise les $2n_b + 2$ racines[1] of P_{2n_b+2}, $\{y_k^g\}$ (resp. $Q_{2n'_b+2}$, $\{y_k^f\}$), On a un ensemble de $n_b + 1$ points $x_k^g \geq 0$. Les $n_b + 1$ poids ($2n_b + 2$ symétrique par rapport à 0) ρ_k^g verifient $N + 1$ équations :

$$0 = I_{2m} - 2\sum_{k=1}^{n_b+1} \rho_k^g y_k^{g2m}(1 - y_k^{g2})^4$$

et respectivement :

$$0 = J_{2m} - 2\sum_{k=1}^{n_b+1} \rho_k^g y_k^{f2m}(1 - y_k^{f2})^4 \,.$$

Les racines sont calculées numériquement à l'aide de l'expression des polynômes $\{g_n\}$ et $\{f_n\}$. On en donne un exemple sur la figure B.2 (a). Ils sont assez proches de points régulièrements espacés (Points de collocation pour les modes de Fourier). La différence est assez fine et se fait sentir sur les poids pour l'intégration. Une fois les racines connues, les poids sont extraits des deux problèmes linéaires précédents. On en donne un exemple sur la figure B.2 (b). L'ensemble des poids obtenus est très régulier. Cette régularité se brise complètement si on fixe un choix de points arbitraires pour l'intégration numérique, comme par exemple des points régulièrement espacés.

B.3 Convergence de l'approximation numérique

La procédure est d'abord testée et validée sur le cas simple d'un profil en tangente hyperbolique vérifiant les conditions de bord, *via* l'analyse linéaire de l'équation d'Orr-Sommerfeld 2.8 (figure B.3 taux de croissance (a) et mode propres (b)). Les vitesses de groupe et de phase s'avèrent être nulles pour le mode le plus instable. Le cas considéré est similaire à des approches précédentes [99], avec la différence que des parois se trouvent en $y = \pm 1$. Le calcul du spectre et des modes propres s'avère être cohérent avec les résultats dans des cas similaires. La convergence est exponentielle et nécessite assez peu de modes : dans ce cas $n_b = 12$ suffit. Le calcul correct du taux de croissance est le plus exigent en terme de résolution : la pulsation et les modes propres s'obtiennent avec moitié moins de résolution.

Des tests de convergence plus détaillés sont effectués sur le modèle. On s'attend au pire pour une procédure de ce type à une convergence en puissance de $1/n$ (voir [15]), mais en pratique, la convergence est exponentielle. Comme dans le cas de la tangente hyperbolique, la détermination

1. Qui s'avèrent réelles et symétriques par rapport à 0, une caractéristique de ce type de polynômes.

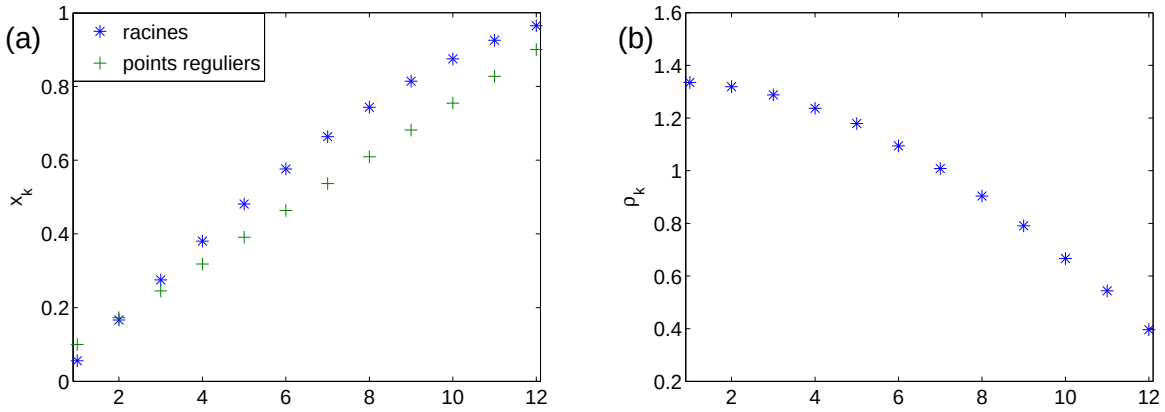


FIGURE B.2 – Sur un exemple de résolution n_b donnée : (a) Répartition des points de collocation sur [0 ;1]. (b) : Valeur des poids pour l'intégration numérique.

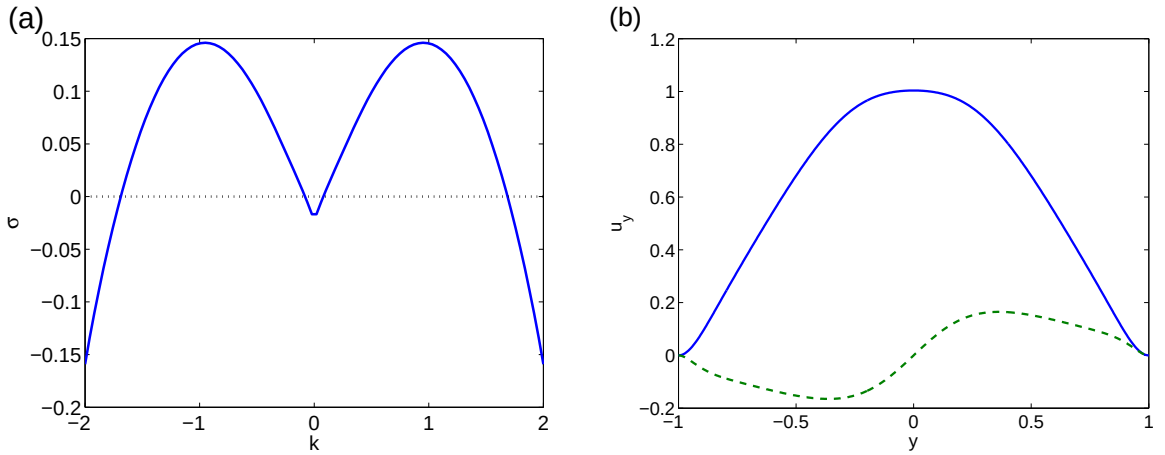


FIGURE B.3 – Exemple de résultat sur un profil en tangente hyperbolique : (a) taux de croissance en fonction du nombre d'onde. (b) : modes propres en fonction de y

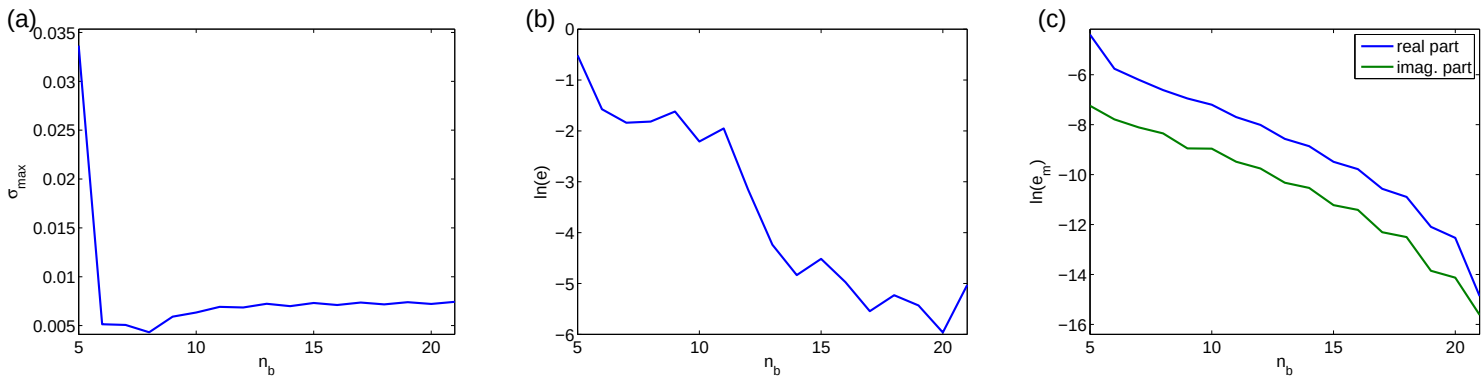


FIGURE B.4 – Test de convergence sur le modèle (3.5) pp. 45. (a) : Taux de croissance en fonction du nombre de polynômes. (b) : erreur e (Eq. (B.3)) sur le taux de croissance en fonction du nombre de polynômes. (c) : erreur e_m (Eq. (B.4)) sur les modes propres en fonction du nombre de polynômes

précise du mode le plus instable (ou le moins stable) est la plus critique : la convergence des parties réelles et imaginaires de la valeur propre ainsi que du mode propre est assez similaire, cependant, σ étant petit en valeur absolue, les erreurs absolue conduisent à de grandes erreurs relatives, et peuvent changer son signe, changeant de fait la conclusion (stabilité/instabilité) de la procédure. Une analyse non-linéaire requiert de plus la détermination du comportement de modes stables, cependant, leur taux de croissance (négatif) est moins sensible aux erreurs relatives.

A nouveau, pour des nombres de Reynolds pas trop grands, et des profils de base pas trop raides, il est intéressant de noter que la procédure fonctionne correctement avec assez peu de modes (au moins 7)

On définit deux erreurs pour suivre la convergence du calcul :

$$e(n_b) = \frac{1}{k_{max}\max_k(\sigma_{22})}\int_0^{k_{max}} \mathrm{d}k|\sigma_{n_b}(k) - \sigma_{22}(k)|\,, \tag{B.3}$$

et

$$e_m^{\mathrm{r,i}}(n_b) = \sqrt{\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\left(A_{n_b}^{\mathrm{r,i}}(y) - A_{22}^{\mathrm{r,i}}(y)\right)^2}\,. \tag{B.4}$$

On trace les résultats sur la figure B.4. Le nombre de modes minimal pour une bonne approximation est visible sur la figure (a), la convergence exponentielle est visible sur les figures (b) et (c). Les modes propres nécessitent assez peu de modes (3, 4) pour être calculés avec précision (figure B.4 (c)). Les problèmes concernant le calcul de σ sont clairement visibles sur la figure B.4 (a), en particulier le changement de signe. Pour un nombre de modes trop faibles, le taux de croissance est largement surestimé, une conséquence de la mauvaise estimation des termes non diagonaux le couplant avec les modes suivants.

Annexe C

Fluctuations de longueur d'onde et d'orientation : calcul du temps de résidence et modèle à quatre variables

L'expression analytique du temps de premier passage (4.32), où le modèle de Landau–Langevin à quatre équations couplées utilisé pour décrire la compétition entre orientation et longueur d'onde [78] peuvent être retrouvés à partir des premiers principes. On trouve des indications sur la résolution de ces problèmes dans la littérature [98]. Dans cette annexe, on explicite la démarche pour retrouver ces résultats.

C.1 Résolution de l'équation de Fokker–Planck en une dimension

Le comportement du système à deux variables $|A_\pm|$ et le saut de $|A_\pm|$ à $|A_\mp|$ peut être bien décrit par le comportement d'un système à une seule variable x, principalement parce que le système suit un chemin particulier dans le plan $(|A_+|, |A_-|)$ lors d'un changement d'orientation. On explicite ici le calcul du temps de premier passage entre un puis de potentiel et un autre en une dimension et le calcul d'une expression analytique dans la limite où la barrière de potentiel à franchir est grande devant le bruit. Finalement on décrit le comportement du temps de premier passage entre deux points quelconques, entre le puis de potentiel et le col, pour appuyer la procédure de traitement proposée dans la section 4.1.3.

C.1.1 Définitions

On considère un processus aléatoire dans un potentiel $V(x)$, avec un bruit $\zeta(t)$ de variance α^2 (Eq. (4.8), pp. 107).

Une réalisation de cette marche aléatoire est donnée par $x(t)$, suivant une équation de Langevin :

$$\frac{dx}{dt} = -\partial_x V + \zeta(t)$$

Le potentiel V a deux minima en a et c, et un point selle en b. On veut expliciter le temps moyen τ pris pour aller de z à c, ou temps de vie dans l'état autour du point z. Cette question est traitée plus simplement en terme de probabilités. La distribution de temps de vie est $f_z(t)$, on a donc $\tau = \int \mathrm{d}t\, t f_z(t)$. Tous les temps seront adimentionnés par τ_0. Cette quantité sera réintroduite dans les expressions finales en fonction des paramètres effectifs du système. Pour les comparaisons entre modèle asymptotique et intégration du modèle de Langevin, on prendra $\tau_0 = 1$.

Si on considère la transformée de Laplace de f, on a

$$\hat{f}(s) = \int \mathrm{d}t\, e^{-st} f(t)\,. \tag{C.1}$$

En particulier :

$$\hat{f}'(s) = -\int \mathrm{d}t\, t e^{-st} f(t)\,,$$

d'où $\tau = -\hat{f}'(0)$. On travaillera avec les transformées de Laplace (notés avec un *hat*).

La probabilité d'être en x à t en partant de z est $P(x,t|z)$, avec $P(x,0|z) = \delta(x-z)$; la densité de probabilité d'équilibre est notée $P^{\mathrm{eq}}(x)$. L'équation de Fokker–Planck décrivant l'évolution de la pdf est :

$$\partial_t P(x,t|z) = \partial_x \left(\partial_x V + \frac{\alpha^2}{2} \partial_x \right) P(x,t|z)\,. \tag{C.2}$$

En transformée de Laplace, avec $\hat{P}(x,s|z) = \int \mathrm{d}t\, \exp(-ts) P(x,t|z)$, on aura, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int \mathrm{d}t\, e^{-st} \partial_t P(x,t|z) = \left[P(x,t|z) e^{-st} \right]_0^{+\infty} - \int \mathrm{d}t\, (-s) e^{-st} P(x,t|z) = -\delta(x-z) + s\hat{P}(x,s|z)\,.$$

On posera :

$$\hat{P}(x,s|z) = \hat{\psi}(x,s,|z) + \frac{1}{s} P^{\mathrm{eq}}(x)\,. \tag{C.3}$$

Le premier terme représente la transformée de Laplace de l'écart à la pdf d'équilibre, et le second est la transformée de Laplace de la pdf d'équilibre. L'ensemble du problème s'écrit plus simplement en terme de cette fonction $\hat{\psi}$.

On a un certain nombre de résultats généraux servant dans la suite. La pdf à l'équilibre s'écrit simplement : $P^{\mathrm{eq}}(x) \propto \exp(-2V/\alpha^2)$, elle vérifie l'équation de Fokker–Planck à l'équilibre : $0 = \partial_x(V) P^{\mathrm{eq}} + \frac{\alpha^2}{2} \partial_x P^{\mathrm{eq}}$. L'intégrale sur l'ensemble du domaine donne :

$$\int \mathrm{d}x\, \hat{P}(x,s|z) = \int \mathrm{d}x\, \hat{\psi}(x,s|z) + \frac{1}{s}\,,$$

étant donnée la normalisation de P^{eq}, et en inversant les deux intégrales :

$$\int \mathrm{d}t\, e^{-st} \int \mathrm{d}x\, P(x,t|z) = \int \mathrm{d}t\, e^{-st} = \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \int \mathrm{d}x\, \hat{\psi}(x,s|z)\,,$$

d'où $\int \mathrm{d}x \hat{\psi} = 0$.

C.1.2 *renewal equation*

On veut faire le lien entre le temps de premier passage et les pdf, les secondes pouvant être estimées à partir de l'équation de Fokker–Planck.

On considère donc notre processus aléatoire P, ainsi qu'un processus similaire Q, tel que $Q(x \geq c, t|z) = 0$, *i.e* un processus qui ne va pas plus loin que c. Ainsi, la probabilité d'être en $x \leq$ à un temps donné est d'y aller directement plus celle d'y aller en passant par c, qu'on peut réécrire en la probabilité d'y aller directement en un temps t', $f_z(t')$, puis d'aller de c en x en un temps $t - t'$, soit :

$$P(x, t|z) = Q(x, t|z) + \int_0^t \mathrm{d}t'\, f_z(t') P(x, t - t'|c)\,.$$

En prennant $x = c$, on obtient :

$$P(c, t|z) = \int_0^t \mathrm{d}t'\, f_z(t') P(c, t - t'|c)\,. \tag{C.4}$$

On considère donc la probabilité d'être en c en partant de z au bout d'un temps t. On en prend la transformée de Laplace, le second terme étant un produit de convolution, il donne alors le produit des transformées de Laplace, d'où :

$$\hat{f}_z(s) = \frac{\hat{P}(c, s|z)}{\hat{P}(c, s|c)}\,.$$

Comme on a $\tau_z = -\hat{f}_z'(0)$, on écrit le rapport de transformées de Laplace en fonction de $\hat{\psi}$ et P^{eq} :

$$\hat{f}_z'(s) = \frac{\left(\hat{\psi}'(c, s|z) - \frac{1}{s^2}P^{\mathrm{eq}}(c)\right)\left(\hat{\psi}(c, s|c) + \frac{1}{s}P^{\mathrm{eq}}(c)\right) - \left(\hat{\psi}'(c, s|c) - \frac{1}{s^2}P^{\mathrm{eq}}(c)\right)\left(\hat{\psi}(c, s|z) + \frac{1}{s}P^{\mathrm{eq}}(c)\right)}{(\hat{\psi}(c, s|c) + \frac{1}{s}P^{\mathrm{eq}}(c))^2}\,,$$

c'est à dire :

$$\hat{f}_z'(s) = \frac{1}{(\hat{\psi}(c, s|c) + \frac{1}{s}P^{\mathrm{eq}}(c))^2}\left(\frac{1}{s^2}P^{\mathrm{eq}}(c)\left(\hat{\psi}(c, s|z) - \hat{\psi}(c, s|c)\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{s}P^{\mathrm{eq}}(c)\left(\hat{\psi}'(c, s|z) - \hat{\psi}'(c, s|c)\right) + \left(\hat{\psi}'(c, s|z)\hat{\psi}(c, s|c) - \hat{\psi}'(c, s|c)\hat{\psi}(c, s|z)\right)\right)\,.$$

Puis en multipliant le numérateur et le dénominateur par s^2 et en prenant la limite $s \to 0$, on obtient :

$$\tau_z = -\hat{f}_z'(0) = \frac{\hat{\psi}(c, 0|c) - \hat{\psi}(c, 0|z)}{P^{\mathrm{eq}}(c)}\,. \tag{C.5}$$

C.1.3 expression générale en une dimension

Il faut résoudre l'équation de Fokker–Planck pour en extraire $\hat{\psi}(x, 0|z)$, à $s = 0$. L'équation de Fokker–Planck donne en transformée de Laplace :

$$-\delta(x - z) + P^{\mathrm{eq}}(x) + s\hat{\psi}(x, s|z) = \partial_x\left(V' + \frac{\alpha^2}{2}\partial_x\right)\hat{\psi}(x, s|z)\,,$$

d'où :

$$-\delta(x-z)+P^{\mathrm{eq}}(x)=\partial_x\left(V'(x)+\frac{\alpha^2}{2}\partial_x\right)\hat{\psi}(x,0|z)\,.$$

On la résout directement pour : $\Delta(x,c,z)=\hat{\psi}(x,0|c)-\hat{\psi}(x,0,z)$. D'après l'équation (C.5) on a : $\tau=\Delta(c,c,z)/P(c)$.

On a :

$$-\delta(x-c)+\delta(x-z)=\partial_x\left(\partial_x V+\frac{\alpha^2}{2}\partial_x\right)\Delta(x,c,z)\,.$$

Cette équations a des singularités en z et en c, on la résout par la méthodes classiques consistant à la traiter normalement sur les intervalles sans discontinuités et à utiliser des relations de passages entre chaque intervalle. Ainsi, cette équation est bien définie sur les trois intervalles $]-\infty;z[$, $]z;c[$ et $]c;+\infty[$ On a donc trois constantes (de x) A, B et C telles que :

$$\begin{cases} x<z & A= \quad V'(x)\Delta+\frac{\alpha^2}{2}\partial_x\Delta \\ z<x<c & B= \quad V'(x)\Delta+\frac{\alpha^2}{2}\partial_x\Delta \\ c<x & C= \quad V'(x)\Delta+\frac{\alpha^2}{2}\partial_x\Delta \end{cases}.$$

On a $A=C=0$: Δ et $\partial_x\Delta$ tendent vers 0 à l'infini (ou au bord du domaine de définition le cas échéant), car $P(x,t|z)$ puis $\hat{\psi}(x,s|z)$ (ainsi que leur dérivée première) tendent vers 0 quand $x\to\infty$.

On peut faire le lien entre ces constantes à l'aide d'équations intégrées autour des singularités en z et en c. Ainsi, en intégrant entre $z-\epsilon$ et $z+\epsilon$ ainsi qu'entre $c-\epsilon$ et $c-\epsilon$, puis en passant à la limite $\epsilon\to 0$, on trouve les relations de passage :

$$\begin{cases} 1= & V(z)\Delta+\frac{\alpha^2}{2}(\partial_x\Delta)(z,c,z) \\ -1= & V(z)\Delta+\frac{\alpha^2}{2}(\partial_x\Delta)(c,c,z) \end{cases}.$$

Ce qui impose que $B=1$ (par continuité en z), les deux équations étants équivalentes, en les explicitant :

$$\begin{cases} 1= & V(z)\left(\hat{\psi}(z,0|c)-\hat{\psi}(z,0|z)\right)+\frac{\alpha^2}{2}\left((\partial_x\hat{\psi})(z,0|c)-(\partial_x\hat{\psi})(z,0|z))\right) \\ -1= & V(c)\left(\hat{\psi}(c,0|c)-\hat{\psi}(c,0|z)\right)+\frac{\alpha^2}{2}\left((\partial_x\hat{\psi})(c,0|c)-(\partial_x\hat{\psi})(c,0|z))\right) \end{cases}.$$

Pour $x<z$ et $x>c$, on a :

$$\partial_x(V)\Delta+\frac{\alpha^2}{2}\partial_x\Delta=0\,.$$

Soit $\Delta\propto\exp(-2V/\alpha^2)\propto P^{\mathrm{eq}}(x)$, *i.e.*, $\Delta=aP^{\mathrm{eq}}$ pour $x<z$ et $\Delta=\tilde{a}P^{\mathrm{eq}}$ pour $x>c$ avec a et $\tilde{a}$ à déterminer.

Pour $z<x<c$, on pose $\Delta=P^{\mathrm{eq}}\lambda(x)$, λ vérifie alors :

$$\partial_x\lambda=\frac{2}{\alpha^2P^{\mathrm{eq}}(x)}\,,$$

soit en intégrant :

$$\lambda(x)=\lambda(z)+\frac{2}{\alpha^2}\int_z^x \mathrm{d}x'\,\frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x)}\,.$$

On a $\lambda(z) = a$, et en c, on a :

$$\tilde{a}P^{\mathrm{eq}}(c) = aP^{\mathrm{eq}}(c) + \frac{2P^{\mathrm{eq}}(c)}{\alpha^2}\int_z^c \mathrm{d}x'\,\frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x')}\,.$$

Il reste alors la constante a à déterminer, car $\tau = \Delta(c,c,z)$. En faisant le bilan :

$$\begin{cases} x < z & \Delta = & aP^{\mathrm{eq}}(x) \\ z < x < c & \Delta = & aP^{\mathrm{eq}}(x) + \frac{2P^{\mathrm{eq}}(x)}{\alpha^2}\int_z^x \mathrm{d}x'\,\frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x')} \\ c < x & \Delta = & aP^{\mathrm{eq}}(x) + \frac{2P^{\mathrm{eq}}(x)}{\alpha^2}\int_z^c \mathrm{d}x'\,\frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x')} \end{cases}.$$

En utilisant le fait que $\int \mathrm{d}x\hat{\psi} = 0$, on a $\int \mathrm{d}x\Delta = 0$, soit :

$$0 = a\underbrace{\int_{-\infty}^z \mathrm{d}x\,P^{\mathrm{eq}}(x) + \int_z^c \mathrm{d}x\,P^{\mathrm{eq}}(x) + \int_c^{+\infty}\mathrm{d}x\,P^{\mathrm{eq}}(x)}_{=1}$$
$$+\frac{2}{\alpha^2}\int_z^c \mathrm{d}x\,\frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x)}\int_c^{\infty}\mathrm{d}x\,P^{\mathrm{eq}}(x) + \frac{2}{\alpha^2}\int_z^c \mathrm{d}x\,P^{\mathrm{eq}}(x)\int_z^x \mathrm{d}x'\,\frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x')}\,,$$

soit :

$$a = -\frac{2}{\alpha^2}\underbrace{\in_z^c dxP^{\mathrm{eq}}(x)\int_z^x \mathrm{d}x\,\frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x')} + \int_c^{+\infty}\mathrm{d}x\,P^{\mathrm{eq}}(x)\int_z^c \mathrm{d}x\,\frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x)}}_{a'}\,.$$

Et on a :

$$\tau = aP^{\mathrm{eq}}(c) + \frac{2P^{\mathrm{eq}}(c)}{\alpha^2}\int_z^c \mathrm{d}x\,\frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x)}\,. \tag{C.6}$$

S'en suivent un certain nombre de manipulations sur les intégrales pour les mettre dans une forme plus lisible. On peut réécrire :

$$\frac{\alpha^2\tau}{2} = a' + \int_z^c \mathrm{d}x\,\frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x)}\,,$$

i.e.[1]

$$= \underbrace{\int_z^c \frac{\mathrm{d}x}{P^{\mathrm{eq}}(x)}}_{I_1} + \int_z^c \frac{\mathrm{d}x}{P^{\mathrm{eq}}(x)}\left(\underbrace{-1}_{I_1} + \int_{-\infty}^z \mathrm{d}x\,P^{\mathrm{eq}}(x) + \underbrace{\int_z^c \mathrm{d}x\,P^{\mathrm{eq}}(x)}_{I_2}\right)$$
$$+\int_z^c \mathrm{d}x\,P^{\mathrm{eq}}(x)\int_x^c \frac{\mathrm{d}x'}{P^{\mathrm{eq}}(x')} - \underbrace{\int_z^c \mathrm{d}x\,P^{\mathrm{eq}}(x)\int_z^c \frac{\mathrm{d}x}{P^{\mathrm{eq}}(x)}}_{I_2}\,,$$

soit

$$\frac{\alpha^2\tau}{2} = \int_z^c \mathrm{d}x\,\frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x)}\int_{-\infty}^z \mathrm{d}x\,P^{\mathrm{eq}}(x) + \int_z^c \mathrm{d}x\,P^{\mathrm{eq}}(x)\int_x^c \mathrm{d}x'\,\frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x')}\,.$$

1. On est ici contraint de condenser les notations...

On obtient finalement :

$$\tau_z = \frac{2}{\alpha^2} \int_z^c \mathrm{d}x \, \frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x)} \int_{-\infty}^x \mathrm{d}x' \, P^{\mathrm{eq}}(x') \, ,$$

qu'on approxime légèrement :

$$\tau_z = \frac{2}{\alpha^2} \int_z^c \mathrm{d}x \, \frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x)} \left(\int_{-\infty}^b \mathrm{d}x' \, P^{\mathrm{eq}}(x') + \underbrace{\int_{-b}^x \mathrm{d}x' \, P^{\mathrm{eq}}(x')}_{\simeq 0} \right) \, ,$$

b étant le point col du potentiel V. La seconde intégralle est négligeable, la pdf prenant des valeurs importantes loin du point selle.

On a alors :

$$\tau_z = \frac{2}{\alpha^2} \int_z^c \mathrm{d}x \, \frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x)} \left(\int_{-\infty}^b \mathrm{d}x' \, P^{\mathrm{eq}}(x') \right) \, . \tag{C.7}$$

C.1.4 méthode du col

On considère les points c et z symétriques par rapport au point col b, on a alors :

$$\int_{-\infty}^b \mathrm{d}x' \, P^{\mathrm{eq}}(x') = \frac{1}{2} \, .$$

Il reste à estimer :

$$\int_z^c \mathrm{d}x \, \frac{1}{P^{\mathrm{eq}}(x)} = 2 \underbrace{\left(\int_{-\infty}^b \mathrm{d}x \, \exp(-\frac{2V(x)}{\alpha^2}) \right)}_{1/Z} \left(\int_z^c \mathrm{d}x \, \exp 2\frac{2V(x)}{\alpha^2} \right) \, .$$

La première intégrale est estimée par une méthode du col autour de z ou c (minimum de V), la seconde autour de b (col de V).

On a alors, classiquement :

$$\exp\left(-\frac{2V(c)}{\alpha^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \exp(-\frac{(x-c)^2 V''(c)}{\alpha^2}) = \frac{\sqrt{\pi\alpha^2}}{\sqrt{V''(c)}} \exp\left(-\frac{2V(c)}{\alpha^2}\right) \, ,$$

car $\int_0^\infty \mathrm{d}x \exp(-x^2/\sigma) = \sqrt{\pi} 2\sqrt{\sigma}$, idem pour la seconde intégrale, ce qui donne, les $\alpha^2/2$ se simplifiant, idem pour le 2 et le 1/2 :

$$\frac{2\pi}{\sqrt{|V''(b)|V''(z)}} \exp\left(\frac{2(V(b)-V(z))}{\alpha^2}\right) \, . \tag{C.8}$$

Une estimation de la limite de validité de cette approximation requiert, comme pour le critère de Ginzburg effectif (Eq. (4.24), pp 115), une estimation de τ à l'ordre suivant. On donne un ordre d'idée de ces différents comportements sur la figure C.1 sur un modèle unidimensionnel : $V = -\epsilon x^2/2 + g x^4/4$

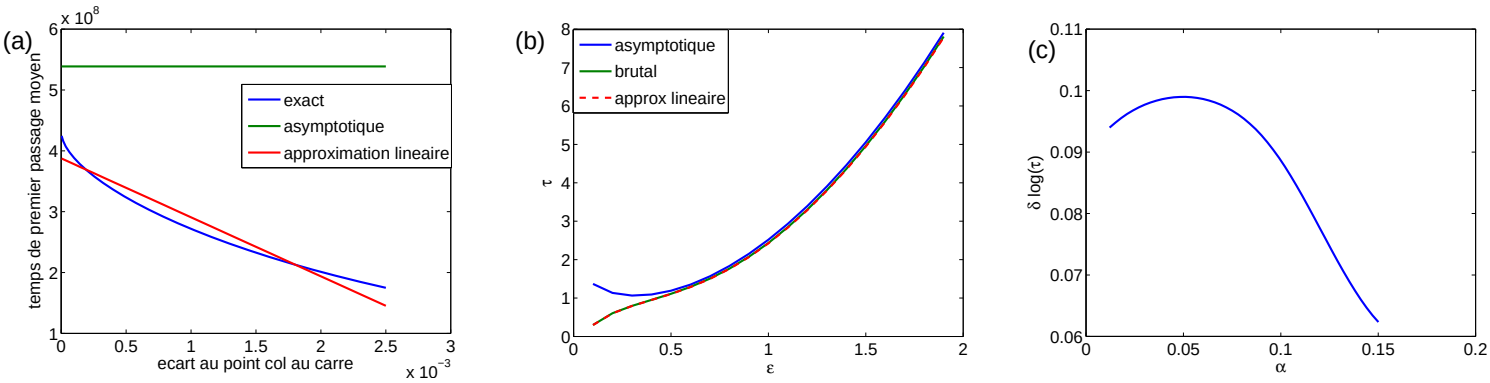


FIGURE C.1 – (a) Valeur asymptotique et calcul exact en fonction de la distance au point col (carré), (b) Formule asymptotique, calcul exact et approximation lineaire en linéaire-logarithmique, (c) : Rapport entre l'asymptotique et l'exact en fonction de α, en logarithmique.

sur lequel une estimation numérique complète peut être faite. On étudie d'abord l'évolution du temps moyen de premier passage en fonction de la distance au "point d'arrivée" au carré, qui correspond à la dépendance du temps de premier passage moyen en fonction de s_2 dans les simulations de Navier–Stokes ou du modèle de Landau–Langevin (Fig. C.1(a)). Il apparaît croissance monotone, du même type que celle trouvée dans les simulations (Fig. 4.8, pp. 104, Fig. 4.18, pp. 126), mais on ne peut pas en tirer de tendance simple (linéaire ou autre). Une approximation linéaire est cependant acceptable. On compare ensuite l'expression exacte à l'expression asymptotique en fonction de ϵ, on met clairement en évidence la limite de la méthode du col, qui semble dévier des résultats exact pour des valeurs de ϵ voisine du minimum du temps de vie asymptotique (on peut estimer grossièrement la limite de validité à l'aide de ce critère.) Finalement, on remarque que pour les grandes valeurs de ϵ, le rapport entre le temps exact et l'expression asymptotique est constant, proche de 1 (figure C.1 (c), en logarithmique) et peu dépendant de la valeur de α.

On prend garde au fait que l'estimation du temps de premier passage en une dimension néglige la forme exacte du paysage énergétique, qui vient apporter des facteurs correctifs multiplicatifs.

C.2 Modèle à quatre variables

On dérive un modèle de quatre équations de Landau couplées, à partir du modèle de Ginzburg–Landau. Cela correspond à la compétition entre deux longueurs d'ondes, par exemple. On part d'une situation faiblement non linéaire, valable dans la même gamme de paramètres que pour la compétition entre deux orientation. Ainsi, on peut donner une base plus solide aux équations proposée pour ce cas [78]. On part de la description du potentiel (4.9) (pp. 4.9), en taille finie.

On a $V = V_{\text{quad}} + V_{\text{quart}}$, avec :

$$V_{\text{quad}} = \frac{1}{L_x L_z} \int \mathrm{d}x\mathrm{d}z \left(-\frac{\epsilon}{2} \left(|A_+|^2 + |A_-|^2 \right) + \frac{\xi_x^2}{2} \left((\partial_x A_+^r)^2 + (\partial_x A_+^i)^2 + (\partial_x A_-^r)^2 + (\partial_x A_-^i)^2 \right) \right.$$
$$\left. + \frac{\xi_z^2}{2} \left((\partial_z A_+^r)^2 + (\partial_z A_z^i)^2 + (\partial_z A_-^r)^2 + (\partial_z A_-^i)^2 \right) \right)$$

et

$$V_{\text{quart}} = \frac{1}{L_x L_z} \int \mathrm{d}x\mathrm{d}z \, \frac{g_1}{4} \left(|A_+|^4 + |A_-|^4 \right) + \frac{g_2}{2} |A_+|^2 |A_-|^2 \,,$$

La partie quadratique se réécrit sans trop de problèmes via Parseval :

$$V_{\text{quad}} = \frac{1}{L_x L_z} \sum_{\delta k_x, \delta k_z} \left(-\frac{\epsilon}{2} + \xi_x^2 \delta k_x^2 + \xi_z^2 \delta k_z^2 \right) \left(|A_+|^2(\delta k_x, \delta k_z) + |A_-|^2(\delta k_x, \delta k_z) \right) \,,$$

tandis que la partie quartique est plus problématique. On peut la traiter de manière générale en se rappelant que

$$A_\pm = \sum_{n_x > 0, n_z > 0} A_\pm(n_x, n_z) \exp\left(i \left(\frac{2\pi n_x x}{L_x} - k_x^{\mathrm{c}} \right) + i \left(\frac{2\pi n_z}{L_z} - k_z^{\mathrm{c}} \right) \right)$$

On se limitera ici à deux modes, mais on peut généraliser l'approche à tous les modes. On prendra ces deux modes B et C selon z, mais le cas en x se traite de manière symétrique (on démultiplierait les termes de couplage, qui ont tous la même signification). On a alors

$$|A_\pm|^2 = |C_\pm|^2 + |B_\pm^2|^2 + C_\pm \bar{B}_\pm \exp\left(\frac{2i\pi z}{L_z} \right) + \bar{C}_\pm B_\pm \exp\left(-\frac{2i\pi z}{L_z} \right) \,.$$

Ce qui donne pour le premier terme quartique

$$\begin{aligned} |A_\pm|^4 = |C_\pm|^4 + |B_\pm|^4 + 4|C_\pm|^2 |B_\pm|^2 (B_\pm \bar{C}_\pm)^2 \exp\left(\frac{4i\pi z}{L_z} \right) + (\bar{B}_\pm C_\pm)^2 \exp\left(-\frac{4i\pi z}{L_z} \right) \\ +2 \left(|C_\pm|^2 + |B_\pm|^2 \right) \left(C_\pm \bar{B}_\pm \exp\left(\frac{2i\pi z}{L_z} \right) + \bar{C}_\pm B_\pm \exp\left(-\frac{2i\pi z}{L_z} \right) \right) \,, \end{aligned}$$

qui intégré sur x et z, donne :

$$|C_\pm|^4 + |B_\pm|^4 + 4|C_\pm|^2 |B_\pm|^2$$

et pour le second terme quartique

$$\begin{aligned} |A_+|^2 |A_-|^2 = |C_+|^2 |C_-|^2 + |B_+|^2 |B_-|^2 + |C_+|^2 |B_-|^2 + |B_+|^2 |C_-|^2 + C_+ \bar{B}_+ C_- \bar{B}_- + B_+ \bar{C}_+ B_- \bar{C}_- \\ + \left(|C_\pm|^2 + |B_\pm|^2 \right) \left(B_\mp \bar{C}_\mp \exp\left(\mp \frac{2i\pi z}{L_z} \right) + C_\mp \bar{B}_\mp \exp\left(\pm \frac{2i\pi z}{L_z} \right) \right) \\ + C_+ \bar{B}_+ \bar{C}_- B_- \exp\left(\frac{4i\pi z}{L_z} \right) + \bar{C}_+ B_+ \bar{B}_- C_- \exp\left(-\frac{4i\pi z}{L_z} \right) \,, \end{aligned}$$

qui intégré, donne :

$$|A_+|^2 |A_-|^2 = |C_+|^2 |C_-|^2 + |B_+|^2 |B_-|^2 + |C_+|^2 |B_-|^2 + |B_+|^2 |C_-|^2 + C_+ \bar{B}_+ C_- \bar{B}_- + B_+ \bar{C}_+ B_- \bar{C}_-$$

Cela permet d'écrire le potentiel correspondant à la compétition entre deux modes (et leurs deux orientations) qui ont des $\epsilon_C = \epsilon + \xi_x^2 \delta k_{x,C}^2 + \xi_z^2 \delta k_{z,C}^2$ et $\epsilon_B = \epsilon + \xi_x^2 \delta k_{x,B}^2 + \xi_z^2 \delta k_{z,B}^2$ positifs, dans la même limite ϵ petit où l'on a écrit le potentiel correspondant à la compétition entre deux orientations. En gardant un seul ϵ positif, on retombe sur le modèle de Landau classique.

On peut traiter ce modèle de manière potentielle, en déterminant la position des minima, des points cols, et leur stabilité . La détermination des temps de premier passage s'alourdit grandement, car il y a maintenant 6 cols, non symétriques, avec deux sens de passage pour chacun. La comparaison avec les données numériques est difficile, principalement parce que l'on aura déterminé un temps de résidence. Dans ce potentiel, le seul terme inhabituel est $C_+\bar{B}_+C_-\bar{B}_- + B_+\bar{C}_+B_-\bar{C}_-$. Il s'agit d'un terme qui a que très rarement du poids, et qui contient le fait que la symétrie $A_\pm \to A_\pm \exp(i\phi)$ se fait sur l'ensemble du champ, c'est à dire sur chacun des modes en même temps.

C.3 Remarques sur les processus sans mémoire

On présente souvent la loi de Poisson comme régissant un processus alétoire discret, pour lequel le système passe d'un état 1 vers un état 2 avec un taux de probabilité de transition $w_{1\to 2} = \frac{1}{\tau}$ constant dans le temps. Ainsi, en écrivant une équation d'évolution du type équation maîtresse/Chapman–Kolmogorov, la probabilité d'être dans l'état 1 à $t + dt$ (dt petit devant τ), $P_1(t + dt)$ (en y étant depuis $t = 0$) vérifie :

$$P_1(t + dt) = (1 - w_{1\to 2}dt)P_1(t)\,,$$

Le coefficient $w_{1\to 2}dt$ correspondant à la probabilité de passer de l'état 1 vers l'état 2 pendant dt. $1 - w_{1\to 2}dt$ correspond alors à la probabilité d'y rester. En passant à la limite $dt \to 0$, on obtient :

$$\partial_t P_1(t) = -w_{1\to 2}P_1(t)\,.$$

En résolvant et en appliquant la normalisation de P_1, on a :

$$P_1(t) = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}\,,$$

soit la fameuse loi de Poisson.

Toute la dérivation précédente se fait en considérant deux états discrets, en oubliant le détail de l'évolution continue des pdf entre 1 et 2. Ainsi, face à un système présentant une distribution de temps de vie de type Poisson, on affirme qu'il a un taux de transition constant, indépendant de l'histoire écoulée, et on peut être tenté de dire, vu de l'extérieur, qu'il s'agit d'un processus *sans mémoire*, au sens où si l'on suit la dynamique lâche le système dans l'état 1, le taux de probabilité de saut sera le même quelque soit le temps passé dans cet état.

En pratique, il convient de distinguer les cas où le système garde parfaitement la mémoire du temps écoulé. C'est le cas à chaque fois qu'on peut écrire de manière explicite l'évolution en temps détaillée, et continue (entre 1 et 2) de la pdf du système. On peut citer notre exemple, qui suit une équation de Fokker–Planck, avec une barrière de potentiel à franchir grâce au bruit, et un exemple plus historique, celui de la désintégration radioactive, d'abord décrite phénoménologiquement, qui se comprend à température nulle comme le franchissement d'une barrière de potentiel, par effet tunnel, la pdf du système suivant une équation de Schrödinger (relativement similaire à celle de Fokker-Planck), l'approche probabiliste étant purement quantique. Dans les deux cas, il y a un flux net de densité de probabilité : le centre de la pdf se déplace dans le temps de 1 vers 2. En terme de séries

temporelles, cela se traduit par des excursions plus ou moins lointaines et fréquentes et un éventuel départ.

De la même manière on peut arguer que les distributions de temps de vie de l'état turbulent correspondent à un processus de Poisson qui a une certaine mémoire : si le système peut être décrit en mêmes termes probabilistes que les changements d'orientation et de longueur d'onde [78].

Annexe D

Un modèle-jouet inabouti

D.1 Motivation et principe

L'approche la plus brutale de modélisation consiste à construire un modèle analytique ou numérique simple s'ajustant aux observations, avec pour principal but de créer un cadre dans lequel les rationaliser. Ainsi, une fois le cadre choisi, les détails du modèle ou des quantités mesurées peuvent êtres affinés grâce à l'aller-retour entre modèle et expérience.

L'approche suivie ici a une base très visuelle. Dès l'approche en terme de MFU ou les premières expériences, on a remarqué que les vortex longitudinaux et les *streaks* de v_x sont les principales briques de la turbulence de paroi. Une des premières question a été de comprendre le lien entre eux, à laquelle la réponse a été apportée par le cycle auto-entretenu. En passant à l'échelle supérieure, la cohabitation turbulente fait apparaître *streaks* et vortex, et que la plupart des processus repérés se font par mort/création de ces unités (ou groupes d'unités), que cela soit en bordure de *spot* ou au centre d'une bande. De plus, sur des portées en z assez moyenne, l'écoulement moyen et l'advection des perturbations favorise un décalage en x de *streaks* voisins en z et semble favoriser une distance minimale en x entre deux *streaks* (§ 3).

On simplifie alors drastiquement l'écoulement. On garde le *streak* comme brique de base de la turbulence, ce faisant, on fait disparaître les *streamwise vortices* dans les interactions et processus régissant le comportement des *streaks*. En effet, les seconds sont à une échelle en x inférieure aux premiers (Fig. D.1 (a)), tandis qu'ils sont de la même taille dans la direction z (Fig. D.1 (b)). Si une description comprenant *streaks* et vortex peut être comparée à décrire les atomes par noyau et nuage électronique, notre approche consiste à décrire l'atome en entier comme un dipôle électrique interagissant avec les autres. On simplifie aussi drastiquement l'organisation en espace en la discrétisant. On a ainsi une ou deux positions possibles en y, et un réseau en x et z. Les *streaks* sont supposés de longueur en x fixée, leur largeur en z correspondant au pas du réseau. Les résultats sur la création/destruction en apparence stochastique des *streaks* consolide l'approche discrète et une approche stochastique et statistique de leur comportement. On suppose ainsi les *streaks* non-interpénétrable en interaction de portée finie dans les direction x, y et z, qu'on décrira par un potentiel effectif V, le tout placé dans un bruit blanc. Dans toute la suite le mot *streak* est utilisé par un certain abus de langage. Il s'agit de l'élément de base de notre modèle, qui a une certaine distance avec le comportement continu de l'écoulement turbulent.

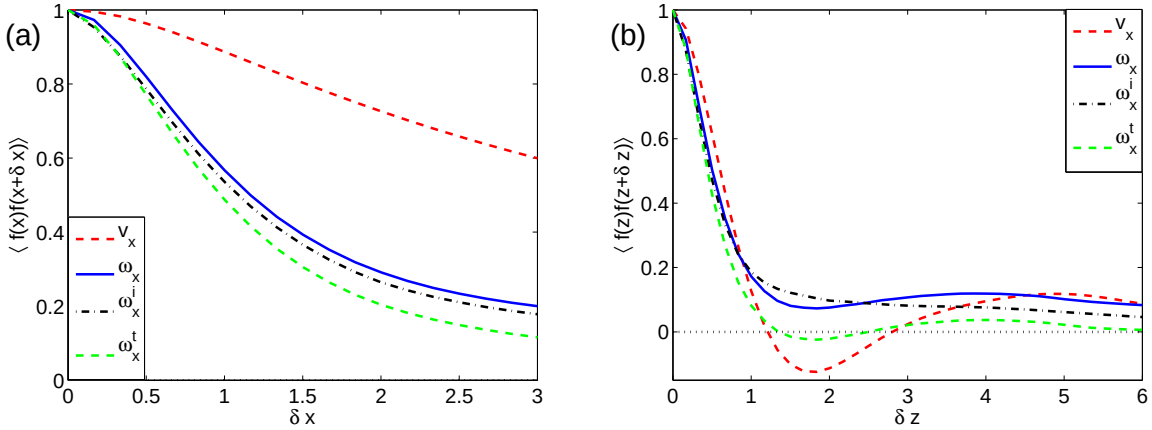


FIGURE D.1 – Fonctions de corrélation du champ de vitesse v_x et de la vorticité longitudinale ω_x (dans tout l'écoulement et masquée dans les zones intermédiaires et turbulentes) : (a) en fonction de δx, (b) en fonction de δz.

On gardera toujours le même type de principe dans l'interaction entre *streaks*, guidés par la connaissance de l'écoulement. Dans la direction x, elle sera répulsive jusqu'à une certaine distance d_x, puis faiblement attractive. Cette partie du potentiel peut être en $(\delta_x - d_x)^2$ (ou plus complexe), en posant δ_x la distance entre deux *streaks* consécutifs de même z. Elle sera toujours attractive dans la direction z, à moyenne portée (de l'ordre de quelque *streaks*), favorisant toujours un léger décalage en x entre deux *streaks* voisin, en accord avec leur voisinage. Si on note δ_z^1 et δ_z^2, le décalage en x d'un *streak* avec ses premiers et seconds voisins en z, le potentiel contient des termes du type $(\delta_z^{1,2} - d_z^{1,2})^2$. En y, on favorisera toujours la superposition de deux *streaks*, avec un léger décalage en x (lorsque l'on choisit d'avoir deux positions, $y = \pm 0.5$). Ainsi, pour deux *streaks* de même z, mais de y différent, on note δ_y leur décalage en x, le potentiel contient alors un terme du type $(\delta_y - d_y)^2$. Jusqu'à présent, le détail du potentiel d'interaction est totalement *ad hoc*.

On s'intéresse tant à la dynamique qu'au comportement moyen de ce type de modèle. Étant donné le cadre (interaction entre unités non interpénétrable, sur un réseau, avec une évolution aléatoire), on utilisera les outils de la simulation en physique statistique.

D.2 Organisation de la simulation

D.2.1 idée générale

Étant donné le cadre statistique et le type de modèle potentiel, une simulation de type Monte–Carlo–Metropolis est adaptée. Elle peut se transposer à une situation où l'on ne dispose pas d'un potentiel effectif pour chaque configuration, mais juste des taux de probabilités pour chaque type d'évènement. On commencera chaque simulation par une situation entièrement turbulente, dans laquelle le domaine est remplis de *streaks*, qui évoluera, avec la dynamique artificielle de Monte–Carlo vers le voisinage de son équilibre.

A chaque temps, l'état du système est représenté par un champ (discrétisé, sur les pas du réseau),

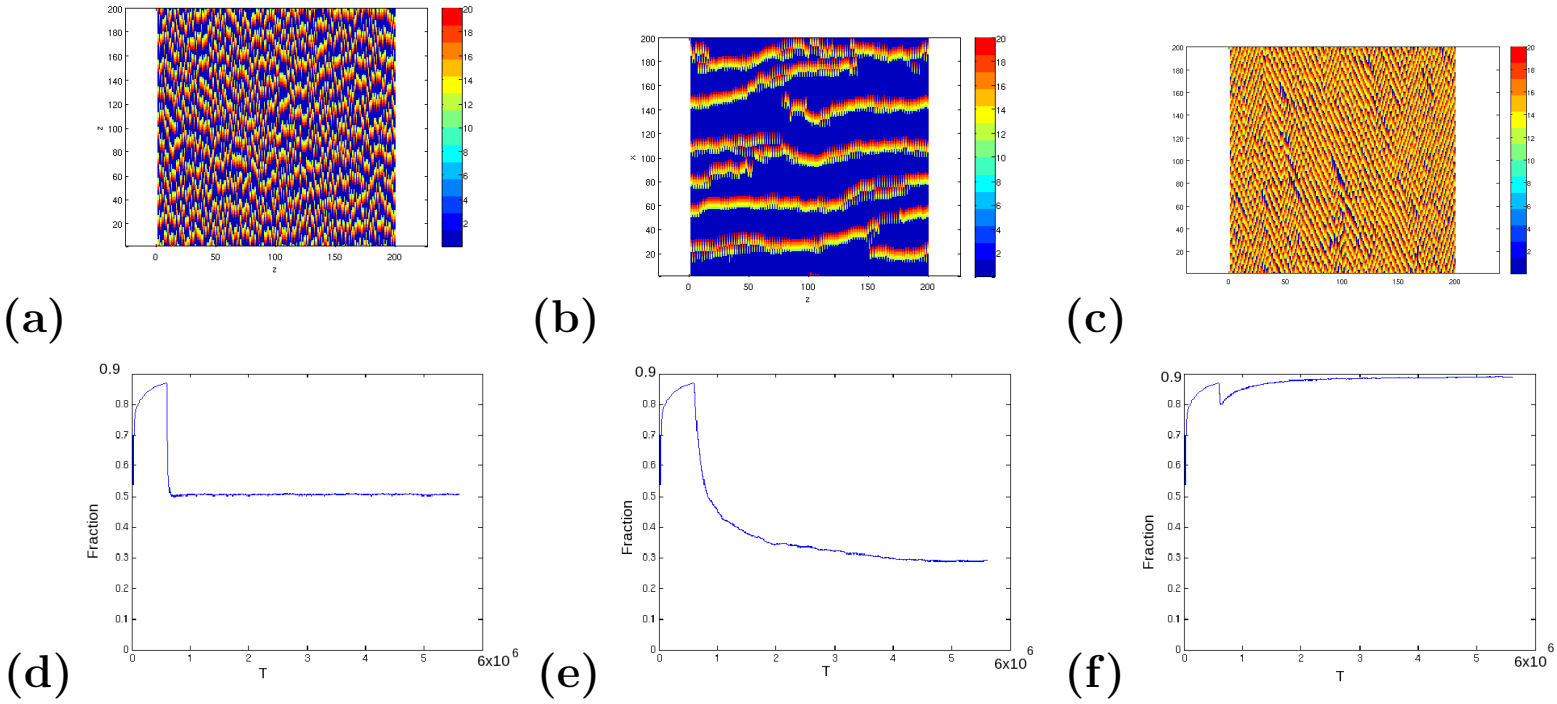


FIGURE D.2 – (a,b,c) Exemples de niveaux de couleur de champs correspondant à trois régimes de paramètres différents, donnant trois types de comportement qualitativement différents. Le bleu correspond à du vide, les gammes de jaune à rouge correspond à des *streaks*, les valeurs du champ de *streaks* sont multipliées par 10 pour faire une plus grande différence avec le 0. (d,e,f) Séries temporelle de F lors du remplissage et de la simulation, correspondant respectivement aux visualisations (a,b,c).

contenant des valeurs nulles si la position est vide et non-nulle lorsqu'un *streak* est présent, sur un domaine périodique de taille $L_x \times L_z$. Par commodité, les valeurs non-nulles vont de 1 à l (la longueur entière du *streak*), croissant dans le sens des x croissants si $y > 0$ ou dans le sens des x décroissant si $y < 0$. On en donne des exemples en niveaux de couleur sur la figure D.2 (a,b,c). La longueur l des *streaks* est toujours un sous-multiple de la taille du domaine L_x. Celà est pratique pour le déplacement des *streaks* et la vérification de la non-interpénétration. De ce champ, on calcule une fraction turbulente, somme du nombre de sites occupés sur le nombre total de sites.

D.2.2 Condition initiale

La première étape réalisée avant toute simulation consiste en un remplissage du domaine avec des *streaks*. Elle dure jusqu'à ce que la fraction turbulente atteigne le voisinage de l'unité. Le remplissage se fait comme suit :

- À chaque pas de temps, on tire un évènement : placer un *streak* où en déplacer un, chacun avec une probabilités 0.5.
- Dans l'éventualité placer :
  - On tire une position aléatoirement, qui correspond à l'origine du *streak*. pour $y > 0$ le *streak* s'étendra vers les x croissants à partir de cette position, pour les $y < 0$ c'est le contraire.
  - On vérifie qu'il y a de la place, le cas échéant, on place le *streak*, sinon, on ne fait rien.
  - On passe ensuite au pas de temps suivant
- Dans l'éventualité déplacer :
  - On tire une position aléatoirement. S'il n'y a pas de *streak*, on ne fait rien et on passe au pas de temps suivant.
  - S'il y a un *streak*, on vérifie si la case directement devant (pour $y > 0$) ou derrière (pour $y < 0$) est vide, le cas échéant, on déplace le *streak*, sinon, on ne fait rien.
  - On passe ensuite au pas de temps suivant.

Le déplacement est là pour permettre au taux de remplissage d'atteindre 1, car dans le cas d'un problème du type parking sans déplacement, on sait en effet que le remplissage moyen est strictement inférieur à 1. On peut voir l'évolution de la fraction turbulente lors du remplissage sur les figures D.2 (d,e,f) pour $T \leq 7.5 \times 10^5$. Le remplissage est de plus en plus lent à mesure que F croît : il s'agit rapidement de libérer de la place pour pouvoir placer de nouveaux *streaks*.

D.2.3 Simulation

Une fois le remplissage fait, on passe à la simulation proprement dite. On procède comme suit :

- À chaque pas de temps, on tire aléatoirement un type d'évènement : déplacement, retrait, ou placement d'un *streak*, chacun avec une probabilité un tiers. Ainsi, à chaque pas de temps, on propose une modification de l'état du système. On introduit donc un second champ : le système modifié par l'évènement proposé. Si la dynamique nous fait choisir cette modification, le champ représentant le système devient ce champ modifié, sinon, il ne change pas.
- Dans le cas d'un évènement déplacement :
  - On tire une position aléatoirement, et on vérifie que le déplacement est possible, comme pour l'étape remplissage. Sinon on ne fait rien.
  - Si cela est possible, on fait la modification déplacement dans le second champ.

- Dans le cas d'un évènement retrait :
  - On tire une position aléatoirement et on vérifie qu'il y a un *streak*. S'il n'y en a pas, on ne fait rien.
  - S'il y a un *streak*, on fait la modification retrait dans le second champ.
- Dans le cas d'un évènement placement :
  - On tire une position de remplissage aléatoirement, et on vérifie que le placement est possible, comme dans l'étape de remplissage. S'il n'est pas possible, on ne fait rien.
  - Si elle est possible, on fait la modification dans le second champ.
- On détermine la valeur du potentiel dans la situation avant (V_0) et après (V_1) la modification
- On tire un nombre a aléatoirement entre 0 et 1 qu'on compare à $b = \exp((V_0 - V_1)/\alpha)$. S'il $b/a > 1$, le changement est accepté, sinon on ne fait rien.
- On passe ensuite au pas de temps suivant.

On fait avancer cette dynamique artificielle aussi longtemps que nécessaire pour rejoindre le voisinage d'un état apparemment statistiquement permanent, que l'on examine.

D.3 Quelques resultats

Tel quel, ce modèle contient encore beaucoup de paramètres sur lesquels on peut jouer (en plus de la longueur des *streaks* et la taille du domaine), mais on peut quand même trouver quelque situations types.

On peut obtenir une coexistence vide/*streaks*, dans laquelle l'organisation est particulièrement oblique. On en donne un exemple sur la figure D.2 (a, exemple de champ, d, fraction turbulente). La fraction turbulente tombe très vite vers le voisinage d'un équilibre et fluctue assez peu. Du point de vue de l'organisation, cela correspond à un système où les trous ont une taille très régulière dans la direction x. Les *streaks* sont tous décalés les uns par rapport aux autres, ce qui donne une obliquité à l'organisation : on a des traces de bandes, avec tout de même des défauts : ruptures d'orientation, fusions entre deux bandes *etc.*

On peut obtenir un domaine se vidant, avec quelque alignements de *streaks*. On en donne un exemple sur la figure D.2 (b, exemple de champ, e, fraction turbulente). Dans ce cas précis, la fraction turbulente suit un long transitoire qui semble converger vers une valeur finie. Le système prend le temps de se vider. D'un point de vue visuel, cela correspond à des bandes de *streaks*, apparemment isolées les unes des autres, sans inclinaison forte. On trouve par endroit des liens entre bandes.

On peut obtenir un remplissage quasi-complet du domaine. On en donne un exemple sur la figure D.2 (c, exemple de champ, f, fraction turbulente). Le système voit d'abord un transitoire d'ajustement à la dynamique sous le potentiel, qui correspond à une chute brutale de la fraction d'occupation, puis un reremplissage. Le voisinage d'un régiment d'équilibre est atteint, avec un remplissage proche de 1. D'un point de vue plus visuel, le système contient assez peu de trous. L'organisation du champ de *streaks* à l'aide d'entier croissant met en évidence une forte trace d'obliquité dans la forme de ce remplissage, visible dans les niveaux de couleur. Cela marque la différence du remplissage aléatoire de la condition initiale.

D.4 Discussion

Comme on le voit sur ces trois exemples, ce modèle très simplifiés de la dynamique de l'écoulement permet de reproduire une partie de la zoologie vue dans les simulations, que cela soit l'écoulement entièrement turbulent mais contenant une trace d'obliquité, les bandes isolées à bas nombre de Reynolds où bien le régime en bande classique. Il peut être intéressant de le tester avec un autre type de condition initiale, par exemple du type germe, pour tester des croissances de bande, à la différence des expériences de type trempe faites ici. En passant à un échelon plus analytique, au delà des simulations, on peut traiter ce modèle *via* les procédures classiques de physique statistique, soit à l'équilibre en effectuant un premier *coarse graining* (ou moyennage local), soit hors d'équilibre, à l'aide des techniques utilisées en réaction diffusion (voir [44]) pour passer de règles dynamiques à une théorie de champ. Cela permet de passer de la variable *streaks*, discrète à un champ de densité continu.

Cela étant dit, le modèle dans sa forme actuelle contient encore un certain nombre de faiblesses. La première réside dans le fait que tous les termes de potentiels (ou taux de probabilité) sont appliqués *ad hoc*, inspirés par l'observation du système. Des résultats récents ont montrés que les probabilités de certains évènements (vie/mort de *streaks* en bordure de domaine, en conditions contraintes) pouvaient êtres extraites des expériences numériques [29]. On peut penser que la poursuite de ce type d'études permettra d'extraire des DNS ou des expériences les taux de probabilités d'évènements similaires : déclin de la turbulence au milieu d'une bande/spot [91], création/déclin de *streaks* en domaine non contraint, et effet de l'obliquités, *etc.* . En ce sens, le modèle présenté ici est plus un prototype pour tester un type d'approche (purement statistique), dont on connaît les méthodes de simulation et de traitement analytique auquel il peut donner lieu. Avec le retour entre modèle et expériences (pratique et numérique), on peut le modifier, comme par exemple utiliser des *streaks* ou groupes de *streaks* comme élément de base, autoriser les évènements à plusieurs *streaks*, utiliser des descriptions potentielles ou en taux de probabilité.

Bibliographie

[1] H. Aida, T. Tsukahara, Y. Kawaguchi *Development of a turbulent spot into a stripe pattern in plane Poiseuille flow*, Compte rendu pour International symposiom on turbulence and shear flow phenomena (2011).

[2] C.D Anderek, S.S. Liu, H.L. Swinney, *Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders*, J. Fluid Mech, **164**, 155–183 (1986).

[3] K. Avila, D. Moxey, A. de Lozar, M. Avila, D. Barkley, B. Hof *The onset of turbulence in pipe flow*, Science **333**, 192–196 (2011).

[4] D. Barkley, L.S. Tuckerman, *Stability analysis of perturbed plane Couette flow*, Phys. Fluids, **11**, 1187–1195 (1999).

[5] D. Barkley, L.S. Tuckerman, *Computational Study of Turbulent Laminar Patterns in Couette Flow*, Phys Rev Let **94**, 014502 (2005).

[6] D. Barkley, L.S. Tuckerman, *Mean flow of turbulent laminar patterns in Couette flow*, J. Fluid Mech **574**, 109-137 (2007).

[7] D. Barkley, O. Dauchot, L.S. Tuckerman, *Statistical analysis of the transition to turbulent-laminar banded patterns in plane Couette flow*, J. Phys. Conf. Ser., **137**, 012029 (2008).

[8] D. Barkley, *Simplifying the complexity of pipe flow*, Phys. Rev. E, **84**, 016309 (2011).

[9] D. Barkley, *Modeling the transition to turbulence in shear flows*, J. Phys. Conf. Ser. **318**, 032001 (2011).

[10] R. Betchov, A. Szewczyk, *Stability of a shear layer between parallel streams*, Phys. Fluids, **6**, 1391–1396 (1963).

[11] P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal, *L'espace Chaotique*, Herman (1998).

[12] S. Bottin, H. Chaté, *Statistical analysis of the transtion to turbulence in plane Couette flow*, Eur. Phys. J. B, **6**, 143-155 (1998).

[13] S. Bottin, F. Daviaud, P. Manneville, O. Dauchot, *Discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in plane Couette flow*, Europhys. Lett. **43**, 171-176, (1998).

[14] G. Brethouwer, Y. Duguet, P. Schlatter, *Turbulent-laminar coexistence in wall flows with coriolis, buoyancy or Lorentz forces*, J. Fluid Mech. accepted.

[15] C. Canuto, M.Y. Hussaini, H.A. Quateroni, T.A. Zhang *Spectral methods : fundamentals in single domains*, Springer Verlag (2006).

[16] F. Charru, *Instabilités hydrodynamiques*, EDP sience (2007).

[17] D. Coles, *Transition in circular Couette flow*, J. Fluid Mech., **21**, 385–425 (1965), Ch. Van Atta, *Exploratory measurements in spiral turbulence*, J. Fluid Mech., **25**, 495–512 (1966).

[18] D. Coles, Ch. Van Atta, *Measured distortion of a laminar circular Couette flow by end effect* J. Fluid Mech. **25**, 513–521, (1966).

[19] M.C. Cross, P.C. Hohenberg, *Pattern formation outside of equilibrium*, Rev. Mod. Phys.**65**, pp. 851–1123 (1993).

[20] F. Daviaud, J. Hegseth, P. Bergé, *Subcritical transition to turbulence in Plane Couette flow* Phys. Rev. Lett. **69**, 2511-2514 (1992).

[21] O. Dauchot, F. Daviaud, *Streamwise vortices in plane Couette flow*, Phys. Fluid, **7**, 901–903 (1995).

[22] O. Dauchot, P. Manneville, *Local versus global concepts in hydrodynamic stability theory*, J. Phys. II, **7**, 371–389 (1997).

[23] S. Dong, *Evidence for internal structure of spiral turbulence*, Phys. Rev. E, **80**, 067301 (2009).

[24] P.G. Drazin, W.H. Reid, *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press (1993).

[25] Y. Duguet, P. Schlatter, D.S. Henningson, *Localized edge states in plane Couette flow*, Phys. Fluids, **21**, 111701 (2009).

[26] Y. Duguet, P. Schlatter, D.S. Henningson *Formation of turbulent patterns near the onset of transition in plane Couette flow*, J. Fluid. Mech, **650**, 119–129 (2010).

[27] Y. Duguet, L. Brandt, B.R.J. Larsson, *Towards minimal perturbations in transitional plane Couette flow*, Phys. Rev. E, **82**, 026316 (2010).

[28] Y. Duguet, A. Willis, R. Kerswell, *Slug genesis in cylindrical pipe flow*, J. Fluid Mech. **663**, 180–208 (2010).

[29] Y. Duguet, O. Le maître, P. Schlatter *Stochastic and deterministic motion of a laminar-turbulent interface in a shear flow* Phys. Rev. E, **84**, 066315 (2011).

[30] Y. Duguet, communication privée.

[31] B. Eckhardt, T.M. Schneider, B. Hof, J. Westerweel, *Turbulence transition in Pipe flow*, Ann. Rev. Fluid Mech., **39**, 447–468 (2007).

[32] B. Eckhardt, H. Faisst, A. Schmiegel, T.M. Schneider *Dynamical systems and the transition to turbulence in linearly stable shear flows*, Phil. Trans. R. Soc. A, **36**, pp. 1297-1315 (2008).

[33] H. Faisst, B. Eckhardt, *Sensitive dependence on initial conditions in transition to turbulence in pipe flow*, J. Fluid Mech. **504**, 343–352 (2004).

[34] M. Frigo, S.G. Johnson, *FFTW manual*, version 3.3.1 2/20/2012.

[35] C.W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences*, Springer (2003).

[36] J. Gibson, http ://www.cns.gatech.edu/channelflow/.

[37] J. Gibson, private communication.

[38] N. Goldenfeld, N. Guttenberg, G. Gioia, *Extreme fluctuations and the finite lifetime of the turbulent state*, Phys. Rev. E, **81**, 035304 (2010).

[39] R. Graham, *Hydrodynamic fluctuations near the convection instability*, Phys. Rev. A, **10**, 1762-1784 (1974).

[40] J.M. Hamilton, J. Kim, F. Waleffe, *Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures*, J. Fluid Mech. **287**, pp. 317–348, (1995).

[41] S. Hashimoto, A. Hasobe, T. Tsukahara, Y. Kawaguchi, H. Kawamura, *An experimental study on turbulent-stripe structure in transitional channel flow Turbulence*, Heat and mass transfer 6, K. Hanjalić, U. Nagano, S. Jakirlić eds. (2009).

[42] F. Hayot, Y. Pomeau, *Turbulent domain stabilization in annular flow*, Phys. Rev. E, **50**, 2019–2021 (1994).

[43] J.J. Hegseth *Turbulent spots in plane Couette flow*, Phys. Rev. E, **54**, 4915–4923 (1996).

[44] H.J. Hilhorst, *Processus aléatoires et problèles de réaction diffusion*, notes de cours, DEA de physique théorique (2009).

[45] P. Hohenberg, J. Swift, *Effects of additive noise at the onset of Rayleigh-Bénard convection*, Phys. Rev A, **46**, 4773–4785 (1992).

[46] P. Huerre, P. A. Monkewitz, *Local and global instabilities in spatially developping flows* Ann. Rev. Fluid Mech. **22**, 473–537 (1990).

[47] P. Huerre, *Open shear flow instabilities*, Perspectives in fluid dynamics, G.K. Batchelor, H.K. Moffatt, M.G. Worster eds. pp. 159–229 Cambridge University Press (2000).

[48] Y. Hwang, C. Cossu, *Amplification of coherent streaks in the turbulent Couette flow : an input-output analysis at low Reynolds number*, J. Fluid Mech., **1**, 1–16 (2009).

[49] J. Jiménez and P. Moin *The minimal flow unit in near wall turbulence*, J. Fluid Mech. **225**, 213-240 (1991).

[50] G. Kawahara, J. Jimenez, M. Uhlmann, A. Pinelli *Linear instability of a corrugated vortex sheet - a model for streak instabity* J. Fluid Mech., **483**, 315–342 (2002).

[51] M. Lagha, P. Manneville, *Modeling transitional plane Couette flow*, Eur. Phys. J. B, **58**, 433–447 (2007).

[52] M. Lagha, P. Manneville, *Modeling of plane Couette flow I. Large Scale flow around turbulent spots*, Phys. Fluids, **19**, 094105 (2007).

[53] Y-C Lai, T. Tél, *Transient chaos, complex dynamics on finite-time scales*, Springer Applied mathematical sciences (2010).

[54] L.D. Landau, E. Lifshitz, *Physique statistique*, Ellipses (1994).

[55] L.D. Landau, E. Lifshitz, *Mécanique des fluides*, Ellipses (1994).

[56] A. Lundbladh A.V. Johansson, *Direct simulation of turbulent spots in plane Couette flow*, J. Fluid Mech. **229** 499–516 (1991).

[57] P. Manneville, *Spatiotemporal perspective on the decay of turbulence in wall-bounded flows*, Phys. Rev. E, **79**, 025301 (2009).

[58] P. Manneville, J. Rolland, *On modelling transitional turbulent flows using under-resolved direct numerical simulations*, Theor. Comput. Fluid Dyn., **25**, 407–420 (2011).

[59] P. Manneville, *On the decay of turbulence in plane Couette flow*, Fluid Dyn. Res., **43**, 065501 (2011).

[60] M. Marquillie U. Erhenstein, J.P. Laval, *Instability of streaks in wall turbulence with adverse pressure gradient* J. Fluid Mech., **681**, 205–240 (2011)

[61] B.J. McKeon, K.R. Sreenivasan (eds), *Scaling and structure in high Reynolds number wall bounded flows*, theme issue, Phil. Trans. Royal Soc. A, **365**, 635–646 (2007).

[62] A. Meseguer, F. Mellibovsky, M. Avila, and F. Marques *Instability mechanisms and transition scenarios of spiral turbulence in Taylor Couette flow*, Phys. Rev. E, **80**, 046315 (2009).

[63] J. Moehlis, H. Faisst, B. Eckhardt, *A low dimensional model for turbulent shear flows.*, New J. Phys., **6**, 56 (2004).

[64] A. Monokrousos, A. Bottaro, L. Brandt, A. Di Vita, D.S. Henningson, *Nonequilibrium thermodynamics and the optimal path to turbulence in shear flows*, Phys. Rev. Let., **106**, 134502 (2011).

[65] D. Moxey, D. Barkley, *Distinct large-scale turbulent-laminar states in transitional pipe flow*, Proc. Nat. Acad. Science, **18**, 8091–8096 (2010).

[66] M. Nagata, *Three-dimensional finite-amplitude solutions in plane Couette flow : bifurcation from infinity*, J. Fluid Mech., **217**, 519–527 (1990).

[67] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press (1993).

[68] J. Park, Y. Hwang, C.Cossu, *On the instability of large scale streaks in turbulent Couette and Poiseuille flow*, C. R. Méc., **339**, 1–5 (2011).

[69] F. Pétrélis, S. Fauve, E. Dormy, J.P. Valet, *Simple Mechanism for reversal of Earth's Magnetic field*, Phys. Rev. Lett., **102**, 144503 (2009).

[70] J. Philip, P. Manneville, *From temporal to spatiotemporal dynamics in transitional plane Couette flow*, Phys. Rev. E, **83**, 036308 (2011).

[71] Y. Pomeau, *Front motion, metastability and subcritical bifurcations in hydrodynamics*, Physica D, **23**, 3–11 (1986).

[72] S.B. Pope, *Turbulent flows*, Cambridge University Press (2010).

[73] A. Prigent, *La spirale turbulente : motifs de grande longueur d'onde dans les écoulements cisaillés turbulents*, PHD thesis (2001).

[74] A. Prigent, G. Grégoire, H. Chaté, O. Dauchot, W. van Saarlos, *Large-scale finite wavelength modulation within turbulent shear slow*, Phys. Rev. Lett. **89**, 014501 (2002).

[75] A. Prigent, G. Grégoire, H. Chaté, O. Dauchot, *Long-wavelength modulation of turbulent shear flow*, Physica D, **174**, 100-113 (2003).

[76] O. Reynolds, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct of sinuous and of the law of resistance in parallel channels.* Phil. Trans. Roy. Soc., **174**, 935–982 (1883).

[77] J. Rolland, P. Manneville, *Ginzburg–Landau description of laminar-turbulent oblique bands in transitional plane Couette flow*, Eur. Phys. J. B, **80**, 529–544 (2011).

[78] J. Rolland, P. Manneville, *Temporal fluctuations of laminar-turbulent oblique bands in transitional plane Couette flow*, J. Stat Phys., **142**, 577–591 (2011).

[79] J. Rolland, P. Manneville, *Turbulent pattern formation in plane Couette flow : modelling and investigation of mechanisms*, J. Phys. Conf. Ser. **318**, 032034 (2011).

[80] J. Rolland *A short wavelength instability in oblique turbulent bands of transitional plane Couette flow, part 1 : Numerical experiments*, preprint for Phys. Fluids.

[81] J. Rolland *A short wavelength instability in oblique turbulent bands of transitional plane Couette flow, part 2 : Modeling and stability analysis*, preprint for Phys. Fluids.

[82] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod (1998).

[83] D. Samanta, A. De Lozar, B. Hof, *Experimental investigation of laminar turbulent intermittency in pipe flow*, J. Fluid Mech., **681**, 193–204 (2011).

[84] M. Scherer, G Ahlers, F. Hörner and I. Rehberg, *Deviation from linear theory for fluctuations below the super-critical primary bifurcation to Electroconvection*, Phys. Rev. Lett. **85**, 3754–3757 (2000).

[85] L. Shi, M. Avila, B. Hof, *Onset of sustained turbulence in Couette flow*, FOR 1182 Workshop, Dynamics of Coherent structures in turbulent flows, Septembre 19–21, (2011).

[86] M. Shimizu, S. Kida *Structure of a turbulent puff in pipe flow*, J. Phys. soc. of Jap., **77**, 114401 (2008).

[87] M. Shimizu, S. Kida, *A driving mechanism of a turbulent puff in Pipe flow.*, Fluid Dyn. Res. **41**, 045501 (2009).

[88] P.J. Schmid, D.S. Henningson, *Stability and transition in shear flows*, Springer Verlag (2001).

[89] T.M. Schneider, D. Marinc, B. Eckhardt, *Localized edge states nucleate turbulence in extended plane Couette cells*, J. Fluid Mech. vol. 646, 441–451 (2010).

[90] W. Schoppa, F. Hussain, *Coherent structure generation in near-wall turbulence*, J. Fluid Mech. **453**, 57–108 (2002).

[91] J. Schumacher, B. Eckhardt, *Evolution of turbulent spots in a parallel shear flow*, Phys. Rev. E, **63**, 046307 (2001).

[92] T. Tsukahara, Y. Seki, H. Kawamura, D. Tochio, *DNS of turbulence channel flow at very low Reynolds number* in Turbulence and Shear flow phenomena 4 Wiliamsburg, pp.935, J.A.C. Humphrey, T.B. Gatski, J.K. Eaton, R. Friedrich, N. Kasagi, M.A. Leschziner eds (2005).

[93] T. Tsukahara, N. Tillmark, P.H. Alfredsson, *Flow regimes in plane Couette flow with system rotation*, J. Fluid Mech. **648**, 5–33 (2010).

[94] T. Tsukahara, *Transition to/from turbulence in subcritical flows between two infinite parallel plates* Proceedings of Korea-Japan CFD workshop, 296-306 (2010).

[95] L.S. Tuckerman, D. Barkley, *Bifurcation analysis of the Eckhaus instability*, Physica D, **46**, 57–86 (1990).

[96] L.S. Tuckerman, D. Barkley, *Patterns and dynamics in transitional plane Couette flow*, Phys. Fluids, **23**, 041301 (2011).

[97] Ch. Van Atta, *Exploratory measurements in spiral turbulence*, J. Fluid Mech., **25**, 495-512 (1966).

[98] N.G Van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry*, North-Holland (1990).

[99] E. Villermaux, *On the role of viscosity in shear instabilities*, Phys. Fluids, **10** 368–373 (1998).

[100] F. Waleffe, *Transition in shear flows : non-linear normality versus non-normal linearity*, Phys. Fluids, **7**, 3060–3066, (1995).

[101] F. Waleffe, *On a self sustaining process in shear flows*, Phys. Fluids **9**, 883–900 (1996).

[102] I.J. Wygnanski, F.H. Champagne, *On transition in a pipe. Part 1 : the origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug*, J. Fluid Mech. **59** 281–335 (1973).

[103] A.P. Willis, R.R. Kerswell, *Turbulent dynamics of pipe flow captured in a reduced model : puff relaminarization and localized 'edge' states*, J. Fluid Mech., **619**, 213–233 (2008).

[104] J. Zinn-Justin, *Transitions de phase et groupe de renormalisation*, EDP sciences (2005).

[105] Q. Zhou, R.J.A.M. Stevens, K. Sugiyama, S. Grossmann, D. Lohse, K.-Q. Xia, *Prandtl–Blasius temperature and velocity boundary-layer profiles in turbulent Rayleigh–Bénard convection*, J. Fluid Mech., **664**, 297–312, (2010).

Résumé :

La thèse propose une étude numérique et une modélisation de la transition vers la turbulence dans l'écoulement de Couette plan. On se concentre particulièrement sur le régime de bandes oblique laminaire turbulentes, au coeur de la transition. On suit deux types d'approches selon le type d'échelles considérées. D'une part on étudie le détail à petite échelle de l'écoulement. À l'aide de DNS, une instabilité de cisaillement créant de la vorticité transverse est mise en évidence, et la vitesse d'advection des perturbations est mesurée. La modélisation de l'écoulement turbulent et cette instabilité vient confirmer ces mécanismes et met en évidence la transition absolue/convective à l'entrée des bandes. une description du maintien de la turbulence en termes de cycle auto-entretenu est proposée. D'autre part, on étudie l'écoulement à l'échelle de la bande. Des outils statistiques permettent d'étudier les bandes en termes de formation de motif. L'effet du bruit intrinsèque issu de la turbulence est mis en évidence, en particulier dans les changements d'orientation. La modélisation du motif en termes d'équation de Landau–Langevin et d'équation de Fokker–Planck correspondante fait le parallèle avec les motifs bruités et les phénomènes critiques. Partant de ce modèle on peut comprendre les retournements en termes de temps de premier passage moyen. Finalement, on regarde deux autres types de problèmes en couplant les approches microscopiques et macroscopiques. L'étude des relaminarisations tant au seuil de disparition de la turbulence qu'au seuil d'apparition du motif permet de mettre en évidence les mécanismes de disparition de la turbulence. L'étude de *spots* turbulents propose un aperçu de leur zoologie et permet d'approcher les mécanismes petite échelle à plus grand nombre de Reynolds.

Summary :

The thesis proposes a numerical study and modelling of the transition to turbulence in plane Couette flow. It is focused on the laminar-turbulent oblique bands regime at the centre of the transition. Two types of approaches are taken, based on the scales considered. On the one hand, one can study the microscopic details of the flow. Direct Numerical simulations are used to identify and characterise a shear instability that creates spanwise vorticity, and allows to measure the advection velocity of these perturbations. The modelling of the background turbulent flow is used to study the instability in term of linear analysis. The convective/absolute transition in the intermediate zone between turbulent and pseudo-laminar flow is emphasised. From these data, a description of the sustaining of turbulence in term of a cycle is proposed. On the other hand, the flow can be seen at the scale of the band. Statistical tools are used to study the oblique band in term of pattern formation. The effect of the intrinsic turbulent noise is studied, particularly with the orientation fluctuation of the band. The modelling in term of Landau–Langevin and corresponding Fokker–Planck equation draws a parallel with the noisy pattern formation and critical phenomena. Using this model, the orientation fluctuations can be understood in term of mean first passage time. Eventually, several topics are considered from both points of view. The study of relaminarisations both at the threshold of disappearance of turbulence and of appearance of the bands helps to identify the mechanisms of local death of turbulence. The study of turbulent spots presents part of their zoology and helps to study the small scale mechanisms at higher Reynolds numbers.