



**HAL**  
open science

# Interactions hydrodynamiques entre une particule solide et une paroi plane avec condition de glissement de Navier

Nejiba Ghalya

► **To cite this version:**

Nejiba Ghalya. Interactions hydrodynamiques entre une particule solide et une paroi plane avec condition de glissement de Navier. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique X, 2012. Français. NNT : . pastel-00767656

**HAL Id: pastel-00767656**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00767656>**

Submitted on 20 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse présentée pour obtenir les grades de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS**

Spécialité : Mécanique

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE  
TUNIS**

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

**Néjiba GHALYA**

---

**Interactions hydrodynamiques entre une particule solide  
et une paroi plane avec une condition de glissement  
de Navier**

---

M. Antoine SELLIER	Directeur de thèse	LadhyX, École Polytechnique, France
M. Lassaad ELASMI	Directeur de thèse	Lim , École Polytechnique, Tunisie
M. François FEUILLEBOIS	Examineur	LIMSI
M. John SHERWOOD	Rapporteur	Université de Cambridge
M. Christophe JOSSERAND	Rapporteur	Institut Jean Le Rond d'Alembert
M. Taieb HADHRI	Examineur	ENIT
MD. Henda FEKIH	Examinatrice	ENIT
M. Laurentiu PASOL	Invité	ANDRITZ



*à mes chers parents,  
ma machine.*



## Remerciements

Bien qu'il soit difficile d'exprimer avec des simples mots tout ce que je lui dois, je remercie mon directeur de thèse français Antoine SELIER, enseignant à l'école polytechnique, de m'avoir proposé ce sujet passionnant et de m'apporter très gentiment toute l'aide nécessaire afin de prendre en main les idées clés de ce travail. Je n'oublierais pas ces qualités humaines qui ont grandement contribué au plaisir que j'ai eu à réaliser ce mémoire. Il m'a dirigé au long de ces 3 années de thèse et a toujours été disponible, à l'écoute de mes nombreuses questions, et s'est toujours intéressé à l'avancée de mes travaux, ses conseils étant pour beaucoup dans le résultat final de ce travail. Sa rigueur, sa capacité d'analyse des problèmes et ses très nombreuses connaissances m'ont permis de progresser et ont répondu à plusieurs de mes préoccupations. Pour tout cela merci.

Je remercie mon directeur de thèse tunisien Lassaad ELASMI, professeur à l'école polytechnique de Tunisie, pour la direction de cette thèse malgré ses nombreuses responsabilités. Je le remercie énormément parcequ'il m'as mis entre de très bonnes mains pendant ses occupations professionnelles.

Je voudrais remercier très particulièrement François FEUILLEBOIS, chercheur au LIMSI, pour tout son apport scientifique et littéraire. Merci pour tout ce temps qu'il m'a consacré. Merci pour sa gentillesse et sa présence à répondre à tous mes problèmes de programmation. Enfin, ses nombreuses relectures et corrections de cette thèse ont été appréciables. Cette thèse lui doit beaucoup.

Je tiens également à remercier les membres du laboratoires Ladhyx, plus particulièrement à Thérèse, Marine et Daniel pour leur gentillesse et surtout à Sabine qui m'a soutenu dans des moments de doute et de désespoir.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à ma famille. Je remercie mes parents Khemais et Habiba pour leurs soutien et sans qui je ne serais pas là aujourd'hui. Enfin, je voudrais remercier mon ami, qui m'a accompagné tout au long de ces travaux, qui a su me supporter et m'encourager et qui a été toujours à mes coté pour le meilleur et le pire.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
------------------------------	----------

## **Chapitre 1**

### **Sphère maintenue dans un écoulement parabolique au voisinage d'une paroi plane sur laquelle s'exerce une condition de glissement**

1.1	Introduction . . . . .	8
1.2	Présentation du problème et résolution . . . . .	8
1.2.1	Présentation du problème . . . . .	8
1.2.2	Problème adimensionné . . . . .	10
1.2.3	Résolution . . . . .	12
1.3	Étude de l'écoulement résolu . . . . .	17
1.3.1	Vitesse et pression perturbées . . . . .	17
1.3.2	Force exercée sur une sphère fixée dans un écoulement de cisaillement parabolique . . . . .	19
1.3.3	Calcul du moment exercé sur la sphère et résultats . . . . .	22
1.3.4	Sphère libre de se déplacer dans un écoulement parabolique . . . . .	25

## **Chapitre 2**

### **Stresslet pour une sphère dans un écoulement de cisaillement linéaire ou parabolique.**

#### **Asymptotique pour une sphère distante**

2.1	Introduction . . . . .	32
-----	------------------------	----

2.2	Stresslets pour une sphère fixée dans un écoulement de cisaillement parabolique et dans un écoulement de cisaillement linéaire . . . . .	32
2.3	Force sur une sphère en mouvement dans un écoulement arbitraire . . . . .	38
2.4	Stresslet pour une sphère en translation dans un fluide au repos . . . . .	39
2.5	Stresslet pour une sphère en rotation dans un fluide au repos . . . . .	42
2.6	Stresslet pour une sphère libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique	45
2.7	Développements asymptotiques pour des distances à la paroi grandes devant le rayon de la sphère . . . . .	51

### Chapitre 3

#### Détermination analytique du tenseur de Green pour le problème de glissement sur la paroi

3.1	Présentation du problème . . . . .	60
3.2	Détermination de $\mathbf{W}^k$ et de $s^k$ . . . . .	61
3.2.1	Détermination des $B_j^{(k)}$ et des $B^{(k)}$ . . . . .	61
3.2.2	Expressions des composantes de la vitesse $W^k$ et de la pression $s^k$ .	66

### Chapitre 4

#### Méthode numérique

4.1	Introduction . . . . .	73
4.1.1	Calcul précis du tenseur de Green . . . . .	74
4.2	Équation intégrale de surface . . . . .	84
4.2.1	Mouvement d'un corps rigide . . . . .	84
4.2.2	Cas de l'écoulement extérieur $(\mathbf{u}^\infty, p^\infty)$ . . . . .	87
4.3	Résolution numérique de l'équation intégrale par la méthode des éléments de frontières . . . . .	92

### Chapitre 5

#### Résultats pour une sphère et pour un ellipsoïde avec glissement sur la paroi

5.1	Introduction . . . . .	99
-----	------------------------	----

---

5.2	Résultats pour une sphère . . . . .	100
5.3	Résultats numériques pour une particule solide ellipsoïdale non inclinée dont un axe est normal à la paroi . . . . .	113
5.3.1	Résultats pour le cas $u^\infty = 0$ . . . . .	114
5.3.2	Résultats pour un ellipsoïde non incliné dans un écoulement de cisaillement parabolique ou linéaire avec glissement sur la paroi . .	119
5.4	Résultats pour un ellipsoïde incliné . . . . .	131
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>149</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>161</b>



# Introduction générale

L'écoulement d'un fluide est décrit par l'hydrodynamique, qui le représente comme un milieu continu. Pour connaître complètement le champ de vitesse, il faut une condition limite qui traduit son comportement sur une paroi solide. Si la condition de non-glissement généralement adoptée, qui suppose la vitesse relative liquide-solide nulle, est très robuste, elle n'en demeure pas moins un postulat de l'hydrodynamique. La question de son origine et de sa validité a été posée, dès la naissance de ce domaine, par des fondateurs : Navier [26] puis Maxwell [25] ont proposé de remplacer la condition de non-glissement par la condition aux limites plus générale suivante :

$$u_t = b \frac{\partial u_t}{\partial x_3} \quad (1)$$

où la grandeur introduite,  $b$ , est la longueur de glissement,  $u_t$  est la composante de la vitesse parallèle à la paroi et  $x_3$  la position dans la direction normale à la paroi. Dans cette expression, la longueur de glissement  $b$  s'interprète comme la profondeur (à l'intérieur du solide) à laquelle l'extrapolation linéaire du profil de vitesse s'annule. La condition de non-glissement correspond ainsi à la limite  $b = 0$ .

Dans la plupart des modèles théoriques de la mécanique des fluides et en théorie de la lubrification, la condition de non-glissement aux parois constitue une condition aux limites satisfaisante. Pourtant la mise en évidence expérimentale de glissement aux parois a conduit à remettre cette hypothèse en question de plus en plus fréquemment lors de la dernière décennie [27]. Des travaux théoriques prospectifs visent actuellement à optimiser la déviation de l'écoulement et minimiser le frottement en jouant sur des alternances de zones de glissement et de non-glissement [33], [34], [35] .

Le phénomène de glissement à la paroi est fréquemment rencontré pour les fluides polymères [37], pour lesquels ce glissement est souvent assimilé à un glissement apparent,

résultant de la formation d'une fine couche de fluide de faible viscosité à la paroi.

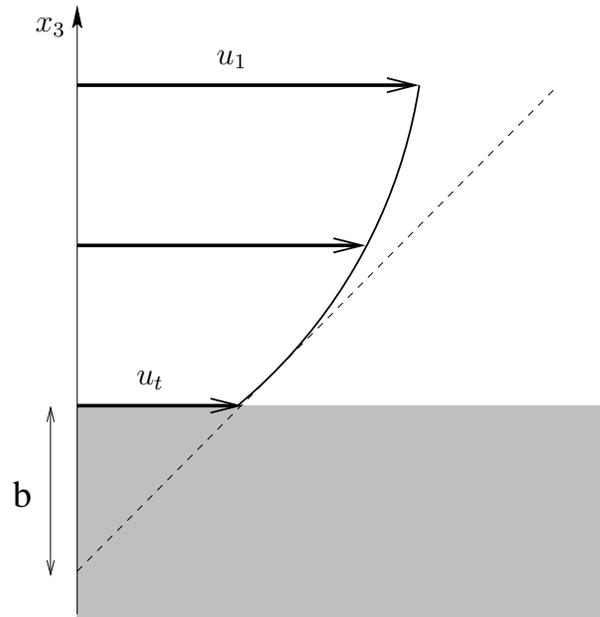


FIG. 1 – Écoulement avec glissement sur la paroi où  $b > 0$  est la longueur de glissement,  $u_t$  la vitesse de glissement, qui correspond à (1), et  $u_1$  la vitesse le long de la paroi.

Dans les techniques de séparation en chimie analytique (fractionnement flux-force FFF et chromatographie hydrodynamique) [28], la présence de glissement peut réduire la dispersion hydrodynamique due au gradient de vitesse entre le centre et la paroi du canal, cette dispersion étant a priori néfaste pour la séparation des particules [29]. La présence ou non de glissement à la paroi joue également un rôle important dans le cadre d'écoulement au voisinage de milieux microporeux (condition à la limite de glissement de Beavers et Joseph [30]).

L'étude physique montre bien l'importance des conditions aux limites qui sont la base essentielle pour déterminer un écoulement. D'autre part chaque écoulement doit être bien décrit par des équations du mouvement. On s'intéresse ici uniquement aux fluides newtoniens. Le rapport entre les forces d'inertie et de viscosité peut varier d'un écoulement à un autre, et pour un écoulement donné, d'un point à l'autre du champ. La prépondérance relative de l'une ou l'autre de ces forces dépend de la valeur du nombre de Reynolds. Le nombre de Reynolds donne à chaque écoulement sa spécification. Le nombre de Reynolds est très petit devant l'unité,  $R_e \ll 1$ , pour l'écoulement relatif à des particules

sub-microniques ou microniques.

Dans le cas où ce paramètre est globalement petit, l'écoulement est de type "rampant" et relève d'un modèle spécifique. Pour un fluide newtonien, ce modèle correspond à une forme simplifiée linéarisée du modèle de Navier-Stokes, connue sous le nom des équations de Stokes que nous allons examiner dans ce travail.

Il s'agit alors de résoudre les équations de Stokes (2) et (3) où  $\mathbf{u}$  et  $p$  sont la vitesse et la pression du fluide de viscosité dynamique  $\mu$  :

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3)$$

Ce travail examine le transport de petites particules dans un tel écoulement avec paroi. Pour assurer que les interactions entre particules soient négligeables, on suppose que la suspension des particules est suffisamment diluée (faible fraction volumique). Par suite, on s'intéresse ici à l'étude d'une seule particule, en particulier dans un écoulement de cisaillement parabolique, près d'une paroi sur laquelle s'applique une condition de glissement.

Les problèmes d'écoulements autour de particules sphériques en mouvement de translation et de rotation au voisinage d'une paroi plane avec condition de non-glissement ont été résolus dans différents articles : Dean et O'Neill [5] ont utilisé la méthode des coordonnées bisphériques dans le cas d'une sphère en mouvement de rotation au voisinage d'une paroi plane, puis O'Neill [3] a repris le même problème mais en considérant le cas du mouvement de translation. Goldman et al [20] ont utilisé la théorie de la lubrification dans le cas où la distance entre la sphère et la paroi est petite par rapport au rayon de la sphère. Le même problème a été repris et reformulé par O'Neill et Stewartson [22] puis par Perkins et Jones [23] qui ont effectué des corrections sur les solutions précédentes.

Une expression formelle de la fonction de Green pour une paroi plane avec glissement a été présentée par [36], mais seul un développement asymptotique de cette fonction a été exploité numériquement.

Le problème d'une sphère qui se translate perpendiculairement à la paroi glissante a été résolu par la méthode de la solution fondamentale en distribuant des singularités à l'intérieur de la sphère [43]. Les résultats ne correspondent pas à ceux de [8] aux petites

distances ; notons que les résultats de [8] seront par ailleurs corrigés dans ce mémoire. Les problèmes de translation et de rotation d'une particule sphérique dans un fluide au repos avec glissement de ce fluide sur la paroi ont été résolus par Davis et al [19].

Pour le cas du non-glissement, le cas où la sphère est maintenue fixe dans un écoulement de cisaillement au voisinage d'une paroi plane a été étudié par Goldman et al [21] puis par Tözeren et Sakalak [24] qui ont traité le problème avec la méthode des coordonnées bisphériques. Ces calculs ont été repris avec précision dans la thèse de Chaoui [17] et dans Chaoui et Feuillebois [18] .

Le problème pour une sphère dans un écoulement parabolique près d'une paroi avec non glissement du fluide sur la paroi a été considéré par Pasol [1] et Pasol et al [6].

Le cas où la particule sphérique est animée d'un mouvement de translation et de rotation dans un écoulement de cisaillement au voisinage d'une paroi plane avec condition de glissement du fluide sur cette paroi est étudié par Loussaief [2], Feuillebois et al [32] Luo et Pozrikidis [31].

Le cas d'une particule sphérique dans un écoulement parabolique avec glissement à la paroi n'a pas été traité à notre connaissance.

Dans cette thèse il y a deux parties :

La première partie, constituée de deux chapitres, concerne le problème d'une particule sphérique fixée dans un écoulement parabolique au voisinage d'une paroi sur laquelle s'exerce une condition de glissement. On suppose qu'il n'y a pas de glissement sur la particule. Le nombre de Reynolds est très petit devant 1 et les équations de Stokes s'appliquent. Le même problème mais sans glissement ni sur la particule ni sur la paroi est étudié par [1]. Ces résultats nous permettent de donner des tables de comparaison pour le cas d'une longueur de glissement nulle. Résoudre le problème de l'écoulement revient à déterminer la vitesse et la pression perturbées en présence de la particule. Nous utilisons ici les coordonnées bipolaires. Ceci est traité dans le chapitre 1. On donne des résultats pour la force totale  $\mathbf{F}$  et pour le couple total  $\mathbf{C}$  exercés par le fluide sur la sphère.

Cette approche nous permet aussi de calculer la partie symétrique de dipôle de Stokes :

---

le stresslet. Dans le chapitre **2** on calcule le stresslet pour une particule sphérique au voisinage d'une paroi sur laquelle s'exerce une condition de glissement pour deux écoulements différents : écoulement de cisaillement linéaire et écoulement parabolique. Ensuite on calcule le stresslet dans le cas de la translation et de la rotation. Puis à la fin de ce chapitre on présente les expressions asymptotiques de tous les stresslets calculés dans le cas où la sphère est loin de la paroi.

Dans une seconde partie de cette thèse on utilise une autre méthode pour traiter le problème d'une particule fixée dans un écoulement parabolique au voisinage d'une paroi sur laquelle s'exerce une condition de glissement. Ceci en utilisant le tenseur de Green  $\mathbf{G}$  calculé au chapitre **3**. D'après [11] la vitesse de l'écoulement vérifie une équation intégrale qui s'écrit en fonction du tenseur de Green calculé. On résout cette équation intégrale par la méthode des éléments de surface. Ce calcul est détaillé dans le chapitre **4**.

Nous montrons que les résultats obtenus par la méthode des éléments de surfaces et par la méthode des coordonnées bisphériques sont en très excellent accord. Dans le chapitre **5**, on présente des tables de comparaison des résultats calculés pour une sphère par les deux méthodes. L'intérêt de la méthode des éléments de surface apparaît essentiellement lors de l'étude de l'influence de la forme de la particule sur les grandeurs physiques (force, couple, vitesse et stresslet). À titre d'exemple, on traite le problème de l'écoulement parabolique avec glissement pour une particule ellipsoïdale fixe de même volume que la sphère et d'axe perpendiculaire à la paroi. Nous étendons aussi notre calcul au cas d'une particule ellipsoïdale d'axe incliné par rapport à la paroi.



# Chapitre 1

## Sphère maintenue dans un écoulement parabolique au voisinage d'une paroi plane sur laquelle s'exerce une condition de glissement

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1.2</b>	<b>Présentation du problème et résolution</b>	<b>8</b>
1.2.1	Présentation du problème	8
1.2.2	Problème adimensionné	10
1.2.3	Résolution	12
<b>1.3</b>	<b>Étude de l'écoulement résolu</b>	<b>17</b>
1.3.1	Vitesse et pression perturbées	17
1.3.2	Force exercée sur une sphère fixée dans un écoulement de cisaillement parabolique	19
1.3.3	Calcul du moment exercé sur la sphère et résultats	22
1.3.4	Sphère libre de se déplacer dans un écoulement parabolique	25

---

## 1.1 Introduction

On considère une particule sphérique maintenue dans un écoulement de cisaillement parabolique au voisinage d'une paroi plane sur laquelle s'exerce une condition de glissement de Navier.

Nous déterminons ici l'écoulement du fluide (vitesse et pression) autour de cette particule en résolvant le problème de Stokes. Le cas où il n'y a pas de glissement sur la paroi est résolu par Pasol [1], en utilisant la méthode de Goren et O'Neill [4]. Cette méthode fait intervenir les coordonnées bisphériques et la méthode de séparation des variables. Dans notre calcul, on utilise la même stratégie que pour l'étude d'une sphère maintenue immobile dans un écoulement de cisaillement linéaire avec condition de glissement sur la paroi [2].

On écrit les équations de l'écoulement et la condition limite de glissement de Navier sur la paroi. Ensuite, on exprime la vitesse et la pression, qui sont solutions des équations de Stokes et vérifient les conditions limites, au moyen des coordonnées bisphériques. Ces solutions sont exprimées au moyen de fonctions harmoniques qui dépendent de sept séries de coefficients.

Le problème se ramène alors à la détermination de ces sept séries de coefficients. On verra dans notre calcul qu'on écrit sept équations pour ces coefficients. Puis par combinaisons on se ramène à quatre équations pour quatre séries de coefficients. Finalement, on résout le système linéaire infini par la méthode classique de factorisation **LU**, avec un programme MAPLE et un programme FORTRAN qui nous permettent ensuite de produire des résultats numériques pour les efforts hydrodynamiques (force et couple) qui s'exercent sur la sphère. On en déduit les vitesses de translation et de rotation d'une sphère libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique.

## 1.2 Présentation du problème et résolution

### 1.2.1 Présentation du problème

Soit un fluide visqueux newtonien incompressible limité par une paroi solide, plane et immobile. A ce fluide on applique un écoulement parabolique et une condition de glissement sur la paroi. On définit  $(O, x_1, x_2, x_3)$  un repère orthonormé lié à la paroi,  $\tilde{\mathbf{V}}^\infty = kz^2\mathbf{e}_x$  la vitesse du fluide et  $\tilde{\mathbf{P}}^\infty = 2\mu kx$  sa pression où  $k > 0$  est une constante. On considère une

particule sphérique de rayon  $a$  fixée dans ce fluide et on note  $\ell$  la distance du centre de la sphère à la paroi.

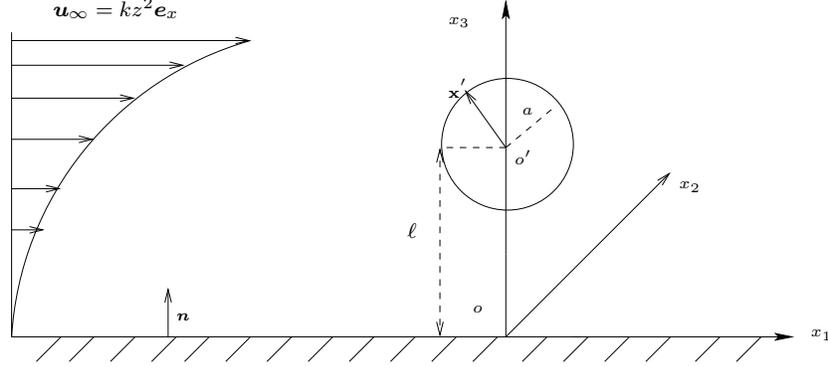


FIG. 1.1 – Sphère fixe dans un écoulement de cisaillement parabolique avec une condition de glissement sur la paroi ( $x_3 = 0$ ).

On définit le nombre de Reynolds suivant :

$$Re = \frac{\rho_f a^3 k}{\mu_f}$$

avec :

$\rho_f$  : masse volumique du fluide,

$\mu_f$  : viscosité dynamique du fluide.

On considère les situations physiques pour lesquelles  $Re \ll 1$ .

Le champs de l'écoulement perturbé  $(\tilde{\mathbf{V}}^q, \tilde{p}^q)$  satisfait en première approximation aux équations de Stokes :

$$(\tilde{I}) \begin{cases} \mu_f \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{V}}^q = \tilde{\nabla} \tilde{P}^q, \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}^q = 0. \end{cases}$$

\* La condition de non-glissement sur la sphère :

$$\| \tilde{\mathbf{x}}' \| = a; \quad \tilde{\mathbf{V}}^q = \mathbf{0}, \quad (1.1)$$

où  $\tilde{\mathbf{x}}'$  est le rayon vecteur admettant pour origine le centre de la sphère.

On a  $\tilde{\mathbf{V}}^q = \tilde{\mathbf{V}}^\infty + \tilde{\mathbf{v}}^q$  avec  $\tilde{\mathbf{V}}^\infty$  la vitesse de l'écoulement non perturbé et  $\tilde{\mathbf{v}}^q$  la perturbation de vitesse de l'écoulement. Ceci donne alors  $\tilde{\mathbf{v}}^q = -kz^2 \mathbf{e}_x$  sur la sphère.

\* La condition de glissement de Navier [26] sur la paroi

$$\tilde{V}_x^q = b \frac{\partial \tilde{V}_x^q}{\partial \tilde{z}}; \quad \tilde{V}_y^q = b \frac{\partial \tilde{V}_y^q}{\partial \tilde{z}}; \quad \tilde{V}_z^q = 0, \quad \text{en } \tilde{z} = 0. \quad (1.2)$$

où  $b \geq 0$  est la longueur du glissement.

\* La condition limite à l'infini : à une distance infinie du centre de la sphère, la vitesse et la pression du fluide doivent être égales à celles de l'écoulement non perturbé :

$$\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty, \quad \mathbf{V}^q = \mathbf{V}^\infty = kz^2 \mathbf{e}_x \quad \text{et} \quad P^q = P^\infty = 2\mu_f kx. \quad (1.3)$$

## 1.2.2 Problème adimensionné

Pour écrire les équations adimensionnées qui correspondent à  $\tilde{I}$ , (1, 1), (1, 2) et (1, 3), on définit les grandeurs caractéristiques suivantes :

$l^* = a$  longueur caractéristique,

$v^* = ka^2$  vitesse caractéristique de l'écoulement,

$p^* = \mu_f \frac{v^*}{a}$  pression caractéristique .

On définit la perturbation de pression adimensionnée  $p^q$  par  $\tilde{p}^q = p^* p^q$  et la pression perturbée adimensionnée  $P^q$  par  $\tilde{P}^q = p^* P^q$ .

On note  $\tilde{\mathbf{x}}' = a\mathbf{x}'$  où  $\mathbf{x}'$  est le vecteur position adimensionnel qui repère un point courant de l'écoulement à partir du centre de la sphère.

La pression du fluide loin de la sphère est  $\tilde{P}^\infty = p^* P^\infty$ , avec  $P^\infty$ , pression adimensionnelle.

De même pour les vitesses, on définit les vitesses dimensionnelles  $(\tilde{\mathbf{V}}^q, \tilde{\mathbf{V}}^\infty, \tilde{\mathbf{v}}^q)$  et les vitesses adimensionnelles  $(\mathbf{V}^q, \mathbf{V}^\infty, \mathbf{v}^q)$  par la relation suivante :  $(\tilde{\mathbf{V}}^q, \tilde{\mathbf{V}}^\infty, \tilde{\mathbf{v}}^q) = v^*(\mathbf{V}^q, \mathbf{V}^\infty, \mathbf{v}^q)$ .

L'opérateur gradient s'écrit  $\tilde{\nabla} = \frac{1}{a}\nabla$ .

Avec ces adimensionnements, le système des équations de Stokes et des conditions limites donne le problème adimensionnalisé suivant :

$$(I) \begin{cases} \nabla^2 \mathbf{V}^q = \nabla P^q, \\ \nabla \cdot \mathbf{V}^q = 0. \end{cases}$$

Sur la surface de la sphère :

$$\|\tilde{\mathbf{x}}'\| = 1; \quad \mathbf{V}^q = 0; \quad \mathbf{v}^q = -z^2 \mathbf{e}_x. \quad (1.4)$$

Sur la paroi, en  $z = 0$  :

$$\mathbf{V}^q = \left( \frac{b}{a} \frac{\partial V_x^q}{\partial z}, \frac{b}{a} \frac{\partial V_y^q}{\partial z}, 0 \right). \quad (1.5)$$

Loin du centre de la sphère :

$$\mathbf{V}^q = \mathbf{V}^\infty = z^2 \mathbf{e}_x \quad \text{et} \quad P^q = 0. \quad (1.6)$$

On notera dans la suite par  $\lambda = \frac{b}{a}$  la longueur adimensionnelle de glissement sur la paroi. Pour résoudre ce problème d'écoulement on cherchera la perturbation de vitesse  $\mathbf{v}^q$  et la perturbation de pression  $p^q$ .

On utilise les coordonnées bisphériques  $(\eta, \xi, \phi)$  qui sont reliées aux coordonnées cylindriques  $(\rho, z, \phi)$  par

$$\rho = c \frac{\sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad ; \quad z = c \frac{\sinh \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad (1.7)$$

où  $\alpha$  est définie par  $\cosh \alpha = \frac{c}{a}$ ,  $\xi \in [0, \alpha]$  avec  $\xi = 0$  sur le plan et  $\xi = \alpha > 0$  sur la surface de la sphère.  $c$  une constante sans dimension,  $\eta \in [0, 2\pi]$  et l'angle  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

L'écoulement à résoudre finalement est le suivant :

$$(S) \begin{cases} \nabla^2 \mathbf{v}^q = \nabla p^q, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^q = 0, \\ \|\mathbf{x}'\| = 1, \quad \mathbf{v}^q = -z^2 \mathbf{e}_x \quad \text{en } \xi = \alpha, \\ z = 0, \quad \mathbf{v}^q = (\lambda \frac{\partial v_x^q}{\partial z}, \lambda \frac{\partial v_y^q}{\partial z}, 0) \quad \text{en } \xi = 0, \\ \mathbf{v}^q = \mathbf{0} \quad \text{à l'infini.} \end{cases}$$

Pour résoudre le système (S) on l'écrit d'abord en coordonnées cylindriques  $(\rho, z, \phi)$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = (\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2})v_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho}, \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \phi} = (\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2})v_\phi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \nabla^2 v_z, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} v_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.11)$$

En prenant la divergence de la première équation de (S) et en tenant compte de  $\nabla \cdot \mathbf{v}^q = 0$ , on trouve  $\nabla^2 p = 0$ . La pression est donc une fonction harmonique.

La solution du système (1.8), (1.9), (1.10) et (1.11) proposée par Dean et O'Neill [5] pour la pression  $p^q$  et les composantes cylindriques  $(v_\rho, v_\phi, v_z)$  de la vitesse  $\mathbf{v}^q$  a la forme suivante :

$$p^q = Q_1 \cos \phi, \quad (1.12)$$

$$v_\rho = \frac{1}{2}[\rho Q_1 + c(U_2 + U_0)] \cos \phi, \quad (1.13)$$

$$v_\phi = \frac{1}{2}c[U_2 - U_0] \sin \phi, \quad (1.14)$$

$$v_z = \frac{1}{2}[zQ_1 + 2cW_1] \cos \phi. \quad (1.15)$$

$Q_1, W_1, U_2, U_0$  sont des harmoniques sphériques qui s'expriment en coordonnées bisphériques par

$$U_2 = c(\cosh \xi - \mu)^{\frac{1}{2}} \sin \eta^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left[ F_n \cosh\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi\right) + G_n \sinh\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi\right) \right] P_n''(\mu), \quad (1.16)$$

$$Q_1 = c(\cosh \xi - \mu)^{\frac{1}{2}} \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \left[ B_n \cosh\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi\right) + C_n \sinh\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi\right) \right] P_n'(\mu), \quad (1.17)$$

$$W_1 = c(\cosh \xi - \mu)^{\frac{1}{2}} \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \sinh\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi\right) \right] P_n'(\mu), \quad (1.18)$$

$$U_0 = c(\cosh \xi - \mu)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ D_n \cosh\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi\right) + E_n \sinh\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi\right) \right] P_n(\mu), \quad (1.19)$$

où  $\mu = \cos \eta$  et  $P_n(\mu)$  est le polynôme de Legendre de degré  $n$ .  $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n$  et  $G_n$  sont sept séries de coefficients à déterminer. La forme choisie ici satisfait la condition de vitesse nulle à l'infini représentée en coordonnées bisphériques par  $\xi = \eta = 0$ .

### 1.2.3 Résolution

On utilise les conditions limites de l'écoulement pour résoudre le problème, ce qui revient à écrire sept équations pour les sept séries de coefficients. On suit la même approche que dans [2]. Parmi nos sept équations, six qui sont identiques à celles obtenues pour l'écoulement de cisaillement linéaire avec condition de glissement sur la paroi. La première équation se déduit de la dérivée de l'équation de continuité (1.11), puis après un développement du calcul on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{c}(2n+1)C_n - \frac{\lambda}{c}(n+2)C_{n+1} - \frac{\lambda}{c}(n-1)C_{n-1} - B_n \\ & -(2n+1)A_n + (n+2)A_{n+1} + (n-1)A_{n-1} = 0, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Puis, en utilisant la condition de glissement sur la paroi (1.5), on obtient ces deux relations :

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda}{4c}C_{n+1} + \frac{\lambda}{4c}C_{n-1} - \frac{1}{2}A_{n-1} + \frac{1}{2}A_{n+1} - \frac{\lambda}{2c}(2n+1)G_n \\ & + \frac{\lambda}{2c}(n+3)G_{n+1} + \frac{\lambda}{2c}(n-2)G_{n-1} + F_n = 0, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{4c}(n+1)(n+2)C_{n+1} - \frac{\lambda}{4c}nC_{n-1} + \frac{1}{2}(n-1)nA_{n-1} \\
& - \frac{1}{2}(n+1)(n+2)A_{n+1} - \frac{\lambda}{2c}(2n+1)E_n + \frac{\lambda}{2c}(n+1)E_{n+1} \\
& + \frac{\lambda}{2c}nE_{n-1} + D_n = 0, \quad n \geq 0.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

La relation suivante est déterminée à partir de la condition limite sur la sphère (1.4), donc en  $\xi = \alpha$

$$\begin{aligned}
& B_n - 2q_n^-\left(\frac{n-1}{2n-1}A_{n-1}\right) - 2q_n^+\left(\frac{n+2}{2n+3}A_{n+1}\right) \\
& + \tanh \alpha \left(n + \frac{1}{2}\right) (2 \coth \alpha A_n + C_n) = 0, \quad n \geq 1
\end{aligned} \tag{1.23}$$

où

$$q_n^\pm = \tanh\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right) \coth \alpha \pm 1. \tag{1.24}$$

La condition de non-glissement sur la sphère (en  $\xi = \alpha$ ) a donné  $\mathbf{v}^q = -z^2 \mathbf{e}_x$ . On a  $\mathbf{e}_x = \cos \phi \mathbf{e}_\rho - \sin \phi \mathbf{e}_\phi$  donc

$$\mathbf{v}^q = -z^2 \cos \phi \mathbf{e}_\rho + z^2 \sin \phi \mathbf{e}_\phi = v_\rho^q \mathbf{e}_\rho + v_\phi^q \mathbf{e}_\phi. \tag{1.25}$$

Par suite

$$v_\rho^q = -z^2 \cos \phi \quad \text{et} \quad v_\phi^q = z^2 \sin \phi. \tag{1.26}$$

D'autre part, d'après (1.13) et (1.14) on a

$$\frac{1}{2}[\rho Q_1 + c(U_2 + U_0)] = -z^2 \tag{1.27}$$

et

$$\frac{1}{2}c[U_2 - U_0] = z^2. \tag{1.28}$$

Par soustraction de ces deux dernières équations on obtient :

$$\frac{1}{2}\rho Q_1 + cU_0 = -2z^2, \tag{1.29}$$

donc

$$U_0 = \frac{-2z^2}{c} - \frac{1}{2c}\rho Q_1. \tag{1.30}$$

D'autre part, on a  $v_z^q = 0$  en  $\xi = \alpha$ , donc d'après (1.15)

$$[Q_1]_{\xi=\alpha} = \frac{-2c}{z}[W_1]_{\xi=\alpha}, \tag{1.31}$$

par suite

$$U_0 = \frac{-2z^2}{c} + \frac{\rho}{z}W_1. \tag{1.32}$$

En  $\xi = \alpha$  on a

$$\frac{-2z^2}{c} = -2c \sinh^2 \alpha (\cosh \alpha - \mu)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(\cosh \alpha - \mu)^{\frac{5}{2}}}. \quad (1.33)$$

On a

$$(\cosh \alpha - \mu)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2} e^{\frac{\alpha}{2}} [1 - 2e^\alpha \mu + e^{2\alpha}]. \quad (1.34)$$

D'autre part on a le développement suivant dans la base des polynômes de Legendre pour  $r_2 > r_1$  :

$$(r_1^2 - 2r_1 r_2 \mu + r_2^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \frac{r_1^n}{r_2^{n+1}}. \quad (1.35)$$

Dans notre cas, nous avons  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = e^\alpha$  et  $\alpha > 0$  donc  $r_2 > r_1$  et par suite

$$(\cosh \alpha - \mu)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})\alpha} P_n(\mu). \quad (1.36)$$

En dérivant cette dernière relation deux fois par rapport à  $\alpha$  on obtient

$$(\cosh \alpha - \mu)^{-\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3 \sinh^2 \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left( 2n+1 + \frac{2}{\tanh \alpha} \right) e^{-(n+\frac{1}{2})\alpha} P_n(\mu). \quad (1.37)$$

Ce qui donne

$$\frac{-2z^2}{c} = -2c (\cosh \alpha - \mu)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left( 2n+1 + \frac{2}{\tanh \alpha} \right) e^{-(n+\frac{1}{2})\alpha} P_n(\mu). \quad (1.38)$$

Ensuite, on a

$$\frac{\rho}{z} W_1 = c (\cosh \alpha - \mu)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh((n+\frac{1}{2})\alpha)}{\sinh \alpha} \sin^2 \eta P_n'(\mu) \quad (1.39)$$

où  $\sin^2 \eta = 1 - \cos^2 \eta = 1 - \mu^2$ . On a la relation suivante entre les polynômes de Legendre

$$(1 - \mu^2) P_n'(\mu) = \frac{n(n+1)}{2n+1} [P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu)] \quad , \quad n \geq 1. \quad (1.40)$$

Donc,

$$\frac{\rho}{z} W_1 = c (\cosh \alpha - \mu)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -\frac{(n-1)n \sinh((n+\frac{1}{2})\alpha)}{(2n-1) \sinh \alpha} A_{n-1} + \frac{(n+1)(n+2) \sinh((n+\frac{3}{2})\alpha)}{(2n+3) \sinh \alpha} A_{n+1} \right] P_n(\mu). \quad (1.41)$$

Puis en posant

$$K_n' = \frac{2\sqrt{2}}{3} (2n+1) \left( 2n+1 + \frac{2}{\tanh \alpha} \right) e^{-(n+\frac{1}{2})\alpha}, \quad (1.42)$$

la relation (1.32) en  $\xi = \alpha$  s'écrit alors

$$D_n \cosh((n+\frac{1}{2})\alpha) + E_n \sinh((n+\frac{1}{2})\alpha) = -K_n' - \frac{(n-1)n \sinh((n+\frac{1}{2})\alpha)}{(2n-1) \sinh \alpha} A_{n-1} + \frac{(n+1)(n+2) \sinh((n+\frac{3}{2})\alpha)}{(2n+3) \sinh \alpha} A_{n+1}. \quad (1.43)$$

On divise ensuite cette dernière équation par  $\cosh((n + \frac{1}{2})\alpha)$  et on pose

$$K_n = \frac{K'_n}{\cosh((n + \frac{1}{2})\alpha)}. \quad (1.44)$$

En utilisant les formules de trigonométrie hyperbolique suivantes :

$$\sinh((n - \frac{1}{2})\alpha) = \sinh((n + \frac{1}{2})\alpha) \cosh \alpha - \cosh((n + \frac{1}{2})\alpha) \sinh \alpha, \quad (1.45)$$

$$\sinh((n + \frac{3}{2})\alpha) = \sinh((n + \frac{1}{2})\alpha) \cosh \alpha + \cosh((n + \frac{1}{2})\alpha) \sinh \alpha, \quad (1.46)$$

on pose

$$\frac{\sinh((n - \frac{1}{2})\alpha)}{\sinh \alpha \cosh((n + \frac{1}{2})\alpha)} = \tanh((n + \frac{1}{2})\alpha) \coth \alpha - 1 = q_n^- \quad (1.47)$$

et

$$\frac{\sinh((n + \frac{3}{2})\alpha)}{\sinh \alpha \cosh((n + \frac{1}{2})\alpha)} = \tanh((n + \frac{1}{2})\alpha) \coth \alpha + 1 = q_n^+. \quad (1.48)$$

Avec ces notations, l'équation (1.43) donne la cinquième relation suivante entre les séries de coefficients :

$$-\frac{(n-1)n}{2n-1}q_n^-A_{n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3}q_n^+A_{n+1} - K_n = D_n + E_n \cosh((n + \frac{1}{2})\alpha), \quad n \geq 0. \quad (1.49)$$

Maintenant, si on somme les relations (1.27) et (1.28) et d'une manière similaire en développant cette somme, on écrit la sixième relation suivante :

$$-\frac{1}{2n+3}q_n^+A_{n+1} + \frac{1}{2n-1}q_n^-A_{n-1} = F_n + \tanh((n + \frac{1}{2})\alpha)G_n, \quad n \geq 2. \quad (1.50)$$

À partir de l'équation de continuité (1.11), on arrive enfin à une septième relation, la même que dans le problème de l'écoulement de cisaillement linéaire avec condition de glissement sur la paroi :

$$\begin{aligned} & \frac{5}{2}C_n - \frac{1}{2}(n-1)C_{n-1} + \frac{1}{2}(n+2)C_{n+1} - \frac{1}{2}E_{n-1} + E_n - \frac{1}{2}E_{n+1} \\ & + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)G_{n-1} - (n-1)(n+2)G_n + \frac{1}{2}(n+2)(n+3)G_{n+1} = 0, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (1.51)$$

On a donc obtenu sept relations entre les sept séries de coefficients  $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n$  et  $G_n$ . Ces relations sont identiques à celles obtenues pour [2], sauf que pour la condition sur la sphère le terme  $K_n$  n'est pas le même. Ceci est dû au fait que sur la sphère on a  $\mathbf{v}^a = -z^2\mathbf{e}_x$  pour l'écoulement parabolique et  $\mathbf{v}^c = -(z + \lambda)\mathbf{e}_x$  pour l'écoulement de

cisaillement linéaire avec glissement sur la paroi ( $c$  pour cisaillement linéaire et  $q$  pour cisaillement quadratique). D'une manière similaire à [2], on réduit le nombre des inconnues de sept coefficients à quatre, soient  $A_n, C_n, E_n$  et  $G_n$ . On a ainsi le système linéaire à quatre équations pour quatre inconnues suivant :

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)(2n-1-2q_n^-)}{2n-1}A_{n-1} + (-2n-1+2\tanh((n+\frac{1}{2})\alpha)\coth\alpha)A_n \\ & + \frac{(n+2)(2n+3-2q_n^+)}{2n+3}A_{n+1} - \frac{\lambda(n-1)}{c}C_{n-1} + \frac{\tanh((n+\frac{1}{2})\alpha)c+2\lambda n+\lambda}{c}C_n \\ & - \frac{\lambda(n+2)}{c}C_{n+1} = 0, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{2n-1}{2(2n-1)}A_{n-1} + \frac{2n+3-2q_n^+}{2(2n+3)}A_{n+1} + \frac{\lambda}{4c}C_{n-1} - \frac{\lambda}{4c}C_{n+1} + \frac{\lambda(n-2)}{2c}G_{n-1} \\ & - \frac{2\tanh((n+\frac{1}{2})\alpha)c+2\lambda n+\lambda}{2c}G_n + \frac{\lambda(n+3)}{2c}G_{n+1} = 0, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$\begin{aligned} & \frac{n(n-1)(2n-1-2q_n^-)}{2(2n-1)}A_{n-1} - \frac{(n+1)(n+2)(2n+3-2q_n^+)}{2(2n+3)}A_{n+1} \\ & - \frac{\lambda n(n-1)}{4c}C_{n-1} + \frac{\lambda(n+1)(n+2)}{4c}C_{n+1} + \frac{\lambda n}{2c}E_{n-1} \\ & - \frac{2\tanh((n+\frac{1}{2})\alpha)c+2\lambda n+\lambda}{2c}E_n + \frac{\lambda(n+1)}{2c}E_{n+1} = K_n, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} & \frac{5}{2}C_n - \frac{1}{2}(n-1)C_{n-1} + \frac{1}{2}(n+2)C_{n+1} - \frac{1}{2}E_{n-1} + E_n - \frac{1}{2}E_{n+1} \\ & + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)G_{n-1} - (n-1)(n+2)G_n + \frac{1}{2}(n+2)(n+3)G_{n+1} = 0, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (1.55)$$

On obtient un système linéaire infini, qu'il faut tronquer. On résout pour  $n = N$  grand, on augmente ensuite  $N$  jusqu'à avoir la convergence des séries harmoniques. L'étape finale consiste à résoudre le système linéaire par la factorisation LU qui est bien appropriée, car la matrice est tridiagonale. On obtient ainsi les coefficients  $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n$  et  $G_n$  qui vont nous permettre de résoudre le problème (S), donc de déterminer la vitesse perturbée ( $v_\rho^q, v_\phi^q, v_z^q$ ) et la pression perturbée  $p^q$ .

## 1.3 Étude de l'écoulement résolu

### 1.3.1 Vitesse et pression perturbées

Les calculs ont été réalisés pour différentes positions du centre de la sphère par rapport à la paroi et pour différentes valeurs de la longueur de glissement  $\lambda$ .

Les tables suivantes (Tab.1.1) et (Tab.1.2) donnent pour  $\frac{\ell}{a} = 1.18$ , au points  $M_1$  et  $M_2$  repérées respectivement par :  $\{x_1 = -4, y_1 = -10^{-4}, z_1 = 0.43\}$ ,  $\{x_2 = 2.5, y_2 = 0, z_2 = 0.5\}$ , les vitesses et la pression pour différentes valeurs de la longueur de glissement, calculées pour un nombre de termes  $N = 2000$ . Pour le cas du non-glissement ( $\lambda = 0$ ), pour le point  $M_2$  on retrouve bien les résultats de [6]. On donne aussi des résultats pour le cas  $\lambda = 1$  et le cas  $\lambda = 2$ .

$\lambda$	$v_x$	$v_y$	$v_z$	$p$
0	0.0288908472	-0.000036605	0.008040456	-7.768012003
1	-0.143380772	0.000066626	0.011947907	-7.761391420
2	-0.22387957	-0.0000074779	0.01085088	-7.77340389

TAB. 1.1 – vitesses et pression pour la position  $M_1$  .

$\lambda$	$v_x$	$v_y$	$v_z$	$p$
0	-0.084980231	0	0.005616210	4.391803964
1	-0.2517595581	0	0.0370210085	4.578008563
2	-0.3352921625	0	0.043135066	4.624861439

TAB. 1.2 – vitesses et pression pour la position  $M_2$ .

Ces valeurs sont calculées pour un nombre de termes  $N = 2000$ , en effet pour trouver les vitesses et la pression nous avons calculé les séries  $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n$  et  $F_n$  avec un nombre de points qui assure leurs convergences. Pour ce faire nous les avons calculé avec un nombre de termes  $N = 500, N = 1000, N = 1500, N = 2000$  et  $N = 2500$ . Nous avons remarqué qu'à partir de  $N = 2000$  ces séries convergent.

La position de la sphère étant fixée, on peut tracer les trajectoires du fluide à partir d'un point de départ donné  $M$  de coordonnées  $x = -4, y = -10^{-3}$  et  $z = 0.8$ , pour les valeurs de glissement 0, 0.5, 1.5 représentées respectivement par les courbes verte, bleu et rouge.

On voit que ces trajectoires contiennent largement la zone située entre la sphère et la paroi, qui est une zone à très faible vitesse telle que l'énergie dissipée soit faible.

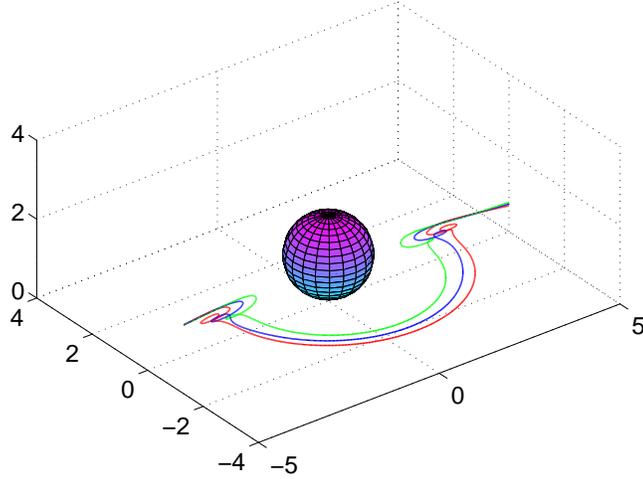


FIG. 1.2 – trajectoires partant du même point ( $x/a = -4$ ,  $y/a = -10^{-3}$  et  $z/a = 0.8$ ) pour les valeurs de la longueur de glissement suivantes :  $\lambda = 0$ (vert),  $\lambda = 0.5$ (bleu) et  $\lambda = 1.5$ (rouge). La sphère de rayon 1 est située en  $\ell/a = 1.18$ .

### 1.3.2 Force exercée sur une sphère fixée dans un écoulement de cisaillement parabolique

La force exercée par le fluide sur la sphère (notée ici  $\mathbf{F}_{f \rightarrow s}$ , aussi on note la force exercée par le fluide sur la paroi par  $\mathbf{F}_{f \rightarrow p}$ ) se calcule à partir du théorème d'Euler :

$$\mathbf{F}_{f \rightarrow s} = -\mathbf{F}_{f \rightarrow p} = - \int_{S_p} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} ds \quad (1.56)$$

avec  $S_p$  = surface de la paroi,  $ds = \rho d\rho d\phi$ ,  $\mathbf{n}$  la normale extérieure au fluide et  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  le tenseur des contraintes défini pour le fluide newtonien par

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = -\tilde{p}\mathbf{I} + \mu_f[\nabla\tilde{\mathbf{v}} + (\nabla\tilde{\mathbf{v}})^t]. \quad (1.57)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur unité. Les composantes de ce tenseur des contraintes s'écrivent :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = -\tilde{p}\delta_{ij} + \mu_f\left[\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{v}_j}{\partial x_i}\right]. \quad (1.58)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. On a la contrainte adimensionnée (normalisée par  $p^*$ )

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{e}_\rho - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\phi + \left(p - 2\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{e}_z \quad (1.59)$$

En utilisant les relations entre les coordonnées cylindriques et les coordonnées cartésiennes

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y, \quad (1.60)$$

on montre que la seule composante non nulle de  $\mathbf{F}$  est celle suivant  $\mathbf{e}_x$ , c'est-à-dire,  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x$ . Ceci peut aussi s'obtenir directement d'après [14], par un raisonnement utilisant la linéarité des équations de Stokes et la symétrie de la figure. Puis on remplace  $v_\rho, v_\phi, v_z$  et  $p$  par les relations (1.12),(1.13),(1.14),(1.15), ensuite on intègre sur  $\phi$  et  $\rho$ , avec  $\phi \in [0, 2\pi]$  et  $\rho \in [0, +\infty]$  et on obtient l'intégrale :

$$F_x = \pi \mu_f k a^3 \int_0^\infty \left( \frac{\partial v_\rho}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_z}{\rho} \right) \rho d\rho. \quad (1.61)$$

On aura aussi besoin des dérivées et différentielle suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1-\mu}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}; \quad d\rho = \frac{cd\eta}{\sin \eta(1-\mu)} \Big|_{\xi=0}. \quad (1.62)$$

On utilise l'expression suivante valable pour toutes fonctions dérivables  $f$  et  $g$  :

$$c \frac{\partial}{\partial z} [(\cosh \xi - \mu)^{\frac{1}{2}} f(\xi) g(\eta)] = (1-\mu)^{\frac{3}{2}} f'(0) g(\eta) \quad \text{en} \quad \xi = 0. \quad (1.63)$$

Puis en utilisant les expressions des fonctions harmoniques  $Q_1$  et  $U_0$  données dans (1.17) et (1.19) on obtient

$$F_x = -\sqrt{2} \pi \mu_f k a^3 \sinh^3 \alpha \sum_{n=0}^{\infty} [E_n + n(n+1)C_n]. \quad (1.64)$$

On adimensionne  $F_x$  par  $6\pi \mu_f a k(l)^2$  et on obtient

$$F_x = 6\pi \mu_f a k \ell^2 f_{xx}^p \quad (1.65)$$

où  $f_{xx}^p$  (les indices  $xx$  indiquent une force dans la direction  $x$  due à un écoulement dans la direction  $x$ ) est la force adimensionnée donnée par

$$f_{xx}^p = -\frac{\sqrt{2} \sinh^3 \alpha}{6(\cosh \alpha)^2} \sum_{n=0}^{\infty} [E_n + n(n+1)C_n]. \quad (1.66)$$

On présente ci-dessous la table (Tab.1.3) qui donne les valeurs de la force adimensionnée  $f_{xx}^p$  pour différentes valeurs de la longueur de glissement en fonction de la variation de  $\frac{\ell}{a}$ . Pour le cas de non-glissement c'est-à-dire le cas  $\lambda = 0$ , on retrouve les mêmes résultats que [1]. Puis on donne une courbe (Fig.1.3) qui présente la variation de la force adimensionnée  $f_{xx}^p$  pour différentes valeurs de la longueur de glissement en fonction de la distance adimensionnée entre la paroi et le centre de la sphère.

$\lambda$	$\frac{\ell}{a}$	$f_{xx}^p$
0	1.005	1.93688946939717
0	1.01	1.93103784535445
0	1.1	1.83619665879909
0	1.5	1.56864054402936
0	3	1.24579733245956
0	10	1.06235664931178
0.3	1.005	1.79778979480274
0.3	1.01	1.79262998671069
0.3	1.1	1.71168842183910
0.3	1.5	1.49447904380502
0.3	3	1.22613318721695
0.3	10	1.06060555960541
1	1.005	1.64836719429487
1	1.01	1.64381809857828
1	1.1	1.83619665879909
1	1.5	1.39582109263582
1	3	1.19350836661579
1	10	1.05708360840036
3	1.005	1.48742830806105
3	1.01	1.48339898401447
3	1.1	1.42057989650861
3	1.5	1.27308377874052
3	3	1.13977210216999
3	10	1.04941726964257
5	1.005	1.41796112911797
5	1.01	1.41421156172881
5	1.1	1.35434238745923
5	1.5	1.21621104467614
5	3	1.10896485657704
5	10	1.04368770464271

TAB. 1.3 – Force adimensionnée pour différentes valeurs de la longueur de glissement.

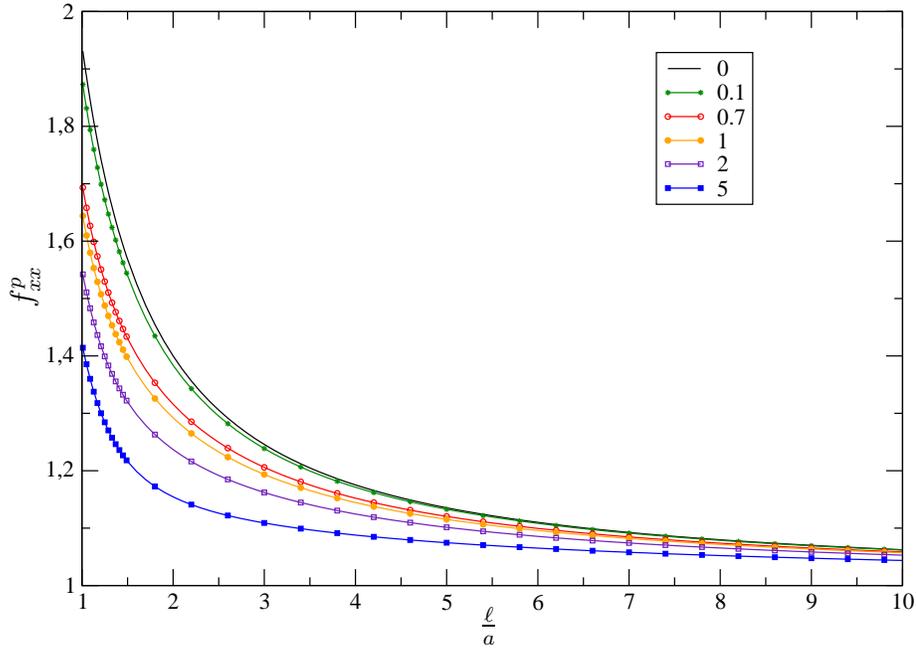


FIG. 1.3 – variation de la force adimensionnée  $f_{xx}^p$  pour différentes valeurs de  $\lambda$  en fonction de  $\frac{\ell}{a}$ .  $\lambda = 0$  (ligne sans symbole),  $\lambda = 0.1$  ( $\star$ ),  $\lambda = 0.7$  ( $\circ$ ),  $\lambda = 1$  ( $\bullet$ ),  $\lambda = 2$  ( $\square$ ) et  $\lambda = 5$  ( $\blacksquare$ ).

Pour toutes les valeurs de la longueur de glissement, on remarque que plus la sphère est proche de la paroi plus le coefficient de force  $f_{xx}^p$  est important. Ce coefficient augmente lorsque le glissement diminue, donc l'écoulement est plus facile lorsqu'il y a glissement. Ce coefficient atteint sa valeur maximale au cas du non-glissement ( $\lambda = 0$ ) [6]. Près de la paroi il n'y a pas de singularité c'est à dire que la force ne tend pas à l'infini au contact est ce qui est dû au fait qu'il n'y a pas de mouvement relatif entre surface proche.

### 1.3.3 Calcul du moment exercé sur la sphère et résultats

Soit  $\tilde{\mathbf{r}}$  un vecteur dont l'origine est située au centre de la sphère et qui a pour extrémité un point quelconque de la surface de la particule :  $\tilde{\mathbf{r}} = a\mathbf{e}_r$  où  $\mathbf{e}_r$  est un vecteur unitaire normal à la surface  $S$  de la sphère.

Le moment qu'exerce le fluide sur la sphère est

$$\mathbf{C} = \int_S \tilde{\mathbf{r}} \wedge [\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}] ds \quad (1.67)$$

L'expression du couple s'écrit comme dans le cas de l'écoulement parabolique sans glisse-

ment [1]

$$\mathbf{C}_y = 2\sqrt{2}\pi\mu_f a^3 k\ell \frac{\sinh^4 \alpha}{\cosh \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} [E_n \coth \alpha + 2n(n+1)A_n] \mathbf{e}_y. \quad (1.68)$$

On adimensionalise par le couple exercé sur une particule fixée dans un écoulement parabolique infini. Ce couple se calcule par la seconde formule de Faxen :  $C^* = 8\pi\mu_f a^3 k\ell$ . On obtient donc le couple (1.68) sous la forme suivante :

$$\mathbf{C}_y = C^* c_{yx}^p \mathbf{e}_y \quad (1.69)$$

où

$$c_{yx}^p = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\sinh^4 \alpha}{\cosh \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} [E_n \coth \alpha + 2n(n+1)A_n]. \quad (1.70)$$

Les indices  $yx$  indiquent un couple dans la direction  $y$  due à un écoulement dans la direction  $x$ . On présente ci-dessous la table (Tab.1.4) qui donne les valeurs du couple adimensionné  $c_{yx}^p$  pour différentes valeurs de la longueur de glissement en fonction de  $\frac{\ell}{a}$ .

$\lambda$	$\frac{\ell}{a}$	$C_{yx}^p$
0	1.005	0.990699769622818
0	1.01	0.990632064988739
0	1.1	0.989852570880745
0	1.5	0.991096125533703
0	3	0.997603251922701
0	10	0.999911896757890
0.3	1.005	0.984127292001557
0.3	1.01	0.984578403668039
0.3	1.1	0.990332690434922
0.3	1.5	0.997403583220967
0.3	3	0.999600490700986
0.3	10	0.999984499563051
1	1.005	0.974015874139708
1	1.01	0.974867161250973
1	1.1	0.987409376133658
1	1.5	1.00774076828609
1	3	1.00577448081198
1	10	1.00042259716194
3	1.005	0.960329035038729
3	1.01	0.962444016883765
3	1.1	0.981240647708434
3	1.5	1.01847903899036
3	3	1.01762820010778
3	10	1.00210080690434
5	1.005	0.934520863646225
5	1.01	0.952997514684703
5	1.1	0.977385726902053
5	1.5	1.02187229718339
5	3	1.02404053593125
5	10	1.00362163257146

TAB. 1.4 – Couple adimensionné  $c_{yx}^p$  : ces résultats sont calculés avec un nombre de points  $N=2000$  pour avoir la précision de  $10^{-15}$  présentée ici.

Pour le cas de non-glissement sur la paroi on retrouve les mêmes résultats que [1]. On donne maintenant la figure (Fig 1.4) suivante qui présente la variation du couple adimensionné  $c_{yx}^p$  pour différentes valeurs de la longueur de glissement, en fonction de la distance à la paroi adimensionnée :

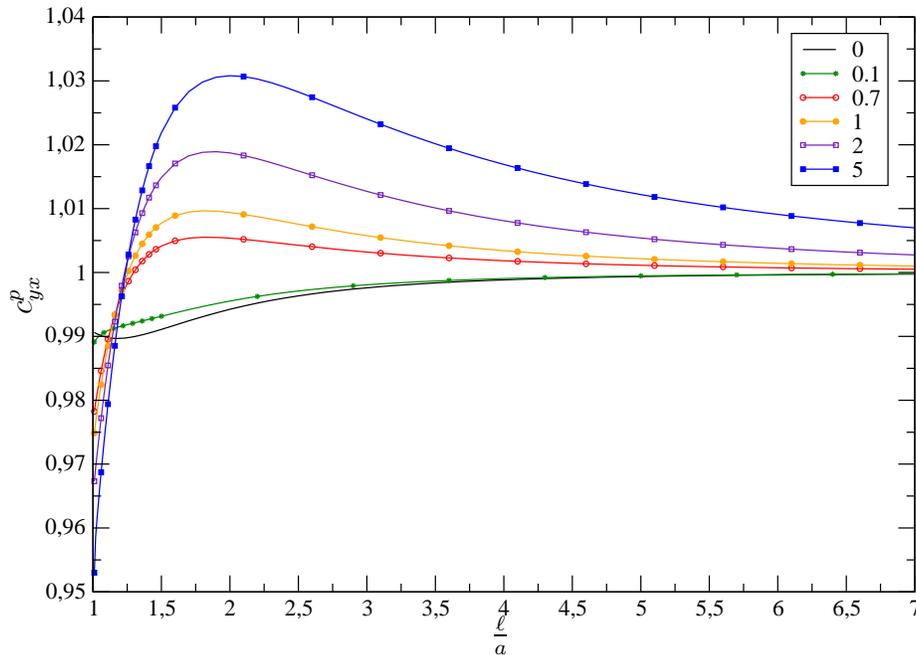


FIG. 1.4 – Variation du couple adimensionné  $c_{yx}^p$  pour différentes valeurs de  $\lambda$  en fonction de  $\frac{l}{a}$ ,  $\lambda = 0$ (ligne sans symbole),  $\lambda = 0.1$ ( $\star$ ),  $\lambda = 0.7$ ( $\circ$ ),  $\lambda = 1$ ( $\bullet$ ),  $\lambda = 2$ ( $\square$ ) et  $\lambda = 5$ ( $\blacksquare$ ).

Loin de la paroi, ce couple tend vers 1 qui est bien sa valeur à l'infini calculé par Pasol [1]. On voit qu'à partir de  $l/a = 1.3$  si le glissement augmente ce couple augmente, alors que près de la paroi le couple et le glissement varient au sens contraire et ce ci est dû au fait que le gradient de la vitesse près de la paroi diminue si le glissement augmente.

### 1.3.4 Sphère libre de se déplacer dans un écoulement parabolique

On calcule dans cette partie les vitesses de translation  $U^P$  et de rotation  $\omega^P$  d'une sphère libre de se déplacer dans un écoulement parabolique, avec condition de glissement sur la paroi. On écrit alors la superposition des trois écoulements suivants :

- 1- particule fixe dans l'écoulement parabolique,
- 2- particule en translation dans un fluide au repos,
- 3- particule en rotation dans un fluide au repos. Ceci nous donne les deux relations

suivantes :

$$\mathbf{C}^P + \mathbf{C}^t + \mathbf{C}^r = 0, \quad (1.71)$$

$$\mathbf{F}^P + \mathbf{F}^t + \mathbf{F}^r = 0. \quad (1.72)$$

Le cas d'une sphère en rotation est étudié en [19], le couple  $\mathbf{C}^r$  et la force  $\mathbf{F}^r$  sont donnés par

$$\mathbf{C}^r = -8\pi\mu_f a^3 \omega^p c_{yy}^r \mathbf{e}_y \quad \text{où} \quad c_{yy}^r = -\frac{\sqrt{2}}{4} \sinh^3 \alpha \sum_{n=0}^{\infty} [E_n^r \coth \alpha + 2n(n+1)A_n^r], \quad (1.73)$$

$$\mathbf{F}^r = 6\pi\mu_f a^2 \omega^p f_{xy}^r \mathbf{e}_x \quad \text{où} \quad f_{xy}^r = -\frac{\sqrt{2}}{6} \sinh^2 \alpha \sum_{n=0}^{\infty} [E_n^r + n(n+1)C_n^r]. \quad (1.74)$$

Pour le cas où la sphère est en translation dans un fluide au repos [19] le couple est donné par

$$\mathbf{C}^t = 8\pi\mu_f a^2 k \ell c_{yx}^t \mathbf{e}_y \quad \text{où} \quad c_{yx}^t = \frac{\sqrt{2}}{4} \sinh^2 \alpha \sum_{n=0}^{\infty} [E_n^t \coth \alpha + 2n(n+1)A_n^t], \quad (1.75)$$

et la force est donnée par

$$\mathbf{F}^r = -6\pi\mu_f a U^p f_{xx}^t \mathbf{e}_x \quad \text{où} \quad f_{xx}^t = -\frac{\sqrt{2}}{6} \sinh \alpha \sum_{n=0}^{\infty} [E_n^t + n(n+1)C_n^t]. \quad (1.76)$$

En utilisant les relations (1.71), (1.72), (1.64) et (1.68), nous obtenons les deux vitesses  $\omega^p$  et  $U^p$  suivantes

$$\omega^p = ak \frac{(\frac{\ell}{a}) [f_{xx}^p c_{yx}^t + (\frac{\ell}{a})^{-1} c_y^p f_{xx}^t]}{[c_{yy}^r f_{xx}^t - f_{xy}^r c_{yx}^t]}, \quad (1.77)$$

$$U^p = a^2 k \frac{(\frac{\ell}{a})^2 [f_{xx}^p c_{yy}^r + (\frac{\ell}{a})^{-1} c_y^p f_{xy}^r]}{[c_{yy}^r f_{xx}^t - f_{xy}^r c_{yx}^t]}. \quad (1.78)$$

On donne dans la table (Tab.1.5) les valeurs des vitesses adimensionnées (même adimensionnement que dans [1]) : on adimensionne la vitesse de translation  $U^p$  par  $ka^2((\frac{\ell}{a})^2 + \frac{1}{3})$  et la vitesse de rotation  $\omega^p$  par  $(k\ell)$ . D'après les formules de Faxen, les vitesses adimensionnées tendent alors vers l'unité lorsque la distance entre la sphère et la paroi tend vers l'infini. Ensuite, on trace les courbes (Fig 1.5) et (Fig 1.6) des vitesses adimensionnées pour différentes valeurs de la longueur de glissement  $\lambda$  en fonction de  $\frac{\ell}{a}$  distance du centre de la sphère à la paroi.

On remarque que lorsque la longueur de glissement adimensionnée  $\lambda$  diminue, les contraintes de lubrification sont plus importantes, donc la vitesse de la sphère diminue. On remarque aussi que la variation de vitesse de rotation avec  $\lambda$  est faible.

$\lambda$	$\frac{\ell}{a}$	$U^p/ka^2((\frac{\ell}{a})^2 + \frac{1}{3})$	$\omega^p/(k\ell)$
0	1.005	0.427203785960068	0.473260036671507
0	1.01	0.467001831500180	0.519313317886782
0	1.1	0.663246863479326	0.737155646561923
0	1.5	0.863549689993608	0.914677577055627
0	3	0.979286979068913	0.989044983839921
0	10	0.999382591943627	0.999689791588581
0.3	1.005	0.735015395087715	0.569063256227701
0.3	1.01	0.737421692382580	0.610671413124883
0.3	1.1	0.785634534854174	0.794186765944000
0.3	1.5	0.896049222455522	0.932630453541163
0.3	3	0.982164038397231	0.990835791989803
0.3	10	0.999415205415624	0.999712440451149
1	1.005	0.867812107271011	0.556745390752513
1	1.01	0.865601165013590	0.598963539036048
1	1.1	0.873677046407998	0.786536367834189
1	1.5	0.927536019793231	0.932649967798838
1	3	0.985699050147603	0.991672615030531
1	10	0.999470785591098	0.999742020659860
3	1.005	0.972345960100743	0.541595252422003
3	1.01	0.967424129728486	0.583570674416940
3	1.1	0.951040852981770	0.770540563012753
3	1.5	0.960506857933526	0.925241346189192
3	3	0.990171761326037	0.991296848029301
3	10	0.999565030048381	0.999766650166729
5	1.005	1.00955434367420	0.534008926203670
5	1.01	1.00358038176861	0.577547692025299
5	1.1	0.979705400251321	0.764143852828369
5	1.5	0.974103178361857	0.921468659100516
5	3	0.992332299333655	0.990816517584967
5	10	0.999621934774649	0.999768569974214

TAB. 1.5 – Valeurs des vitesses adimensionnées  $U^p$  et  $\omega^p$  pour différentes valeurs de la longueur de glissement.

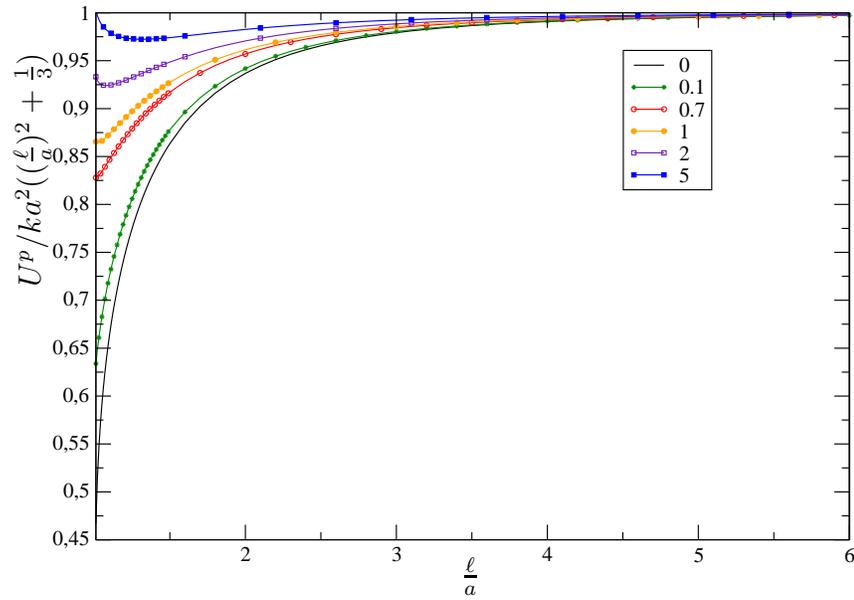


FIG. 1.5 – Variation de vitesse de translation  $U^p$  adimensionnée.  $\lambda = 0$ (ligne sans symbole),  $\lambda = 0.1$ ( $\star$ ),  $\lambda = 0.7$ ( $\circ$ ),  $\lambda = 1$ ( $\bullet$ ),  $\lambda = 2$ ( $\square$ ) et  $\lambda = 5$ ( $\blacksquare$ ).

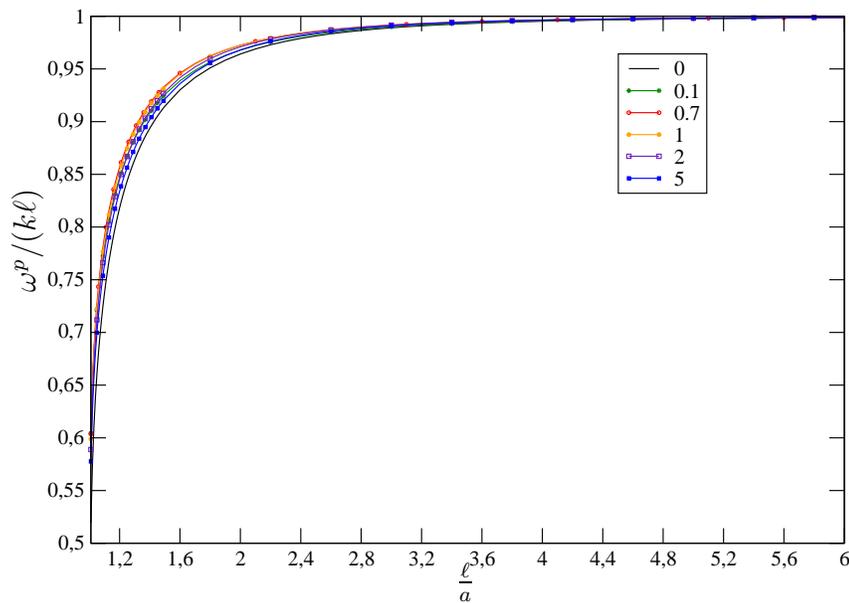


FIG. 1.6 – Variation de la vitesse de rotation  $\omega^p$  adimensionnée.  $\lambda = 0$ (ligne sans symbole),  $\lambda = 0.1$ ( $\star$ ),  $\lambda = 0.7$ ( $\circ$ ),  $\lambda = 1$ ( $\bullet$ ),  $\lambda = 2$ ( $\square$ ) et  $\lambda = 5$ ( $\blacksquare$ ).

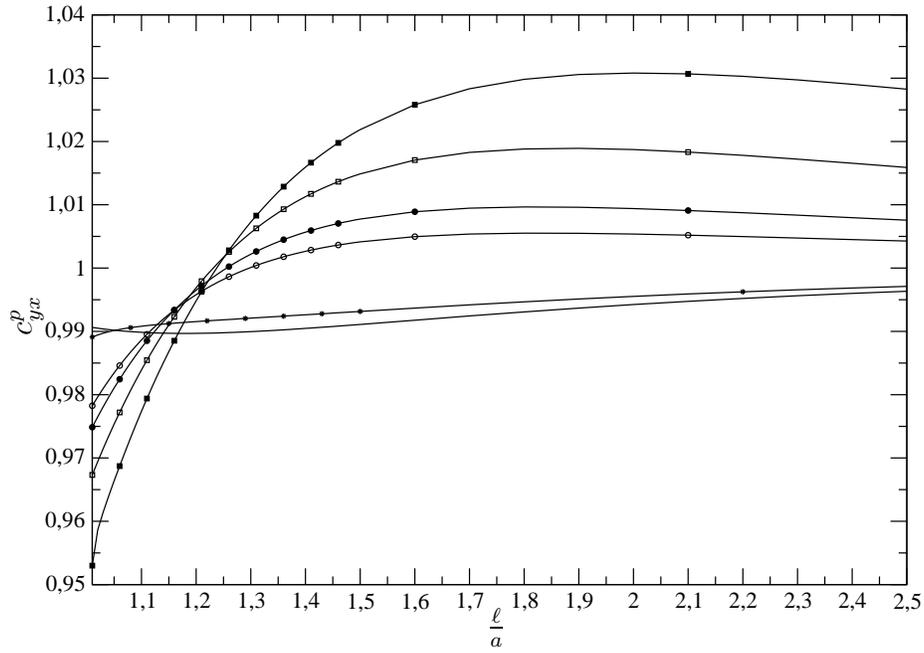


FIG. 1.7 – Variation du couple adimensionné  $c_{yx}^p$  pour différentes valeurs de  $\lambda$  en fonction de  $\frac{l}{a}$ ,  $\lambda = 0$ (ligne sans symbole),  $\lambda = 0.1$ ( $\star$ ),  $\lambda = 0.7$ ( $\circ$ ),  $\lambda = 1$ ( $\bullet$ ),  $\lambda = 2$ ( $\square$ ) et  $\lambda = 5$ ( $\blacksquare$ ).

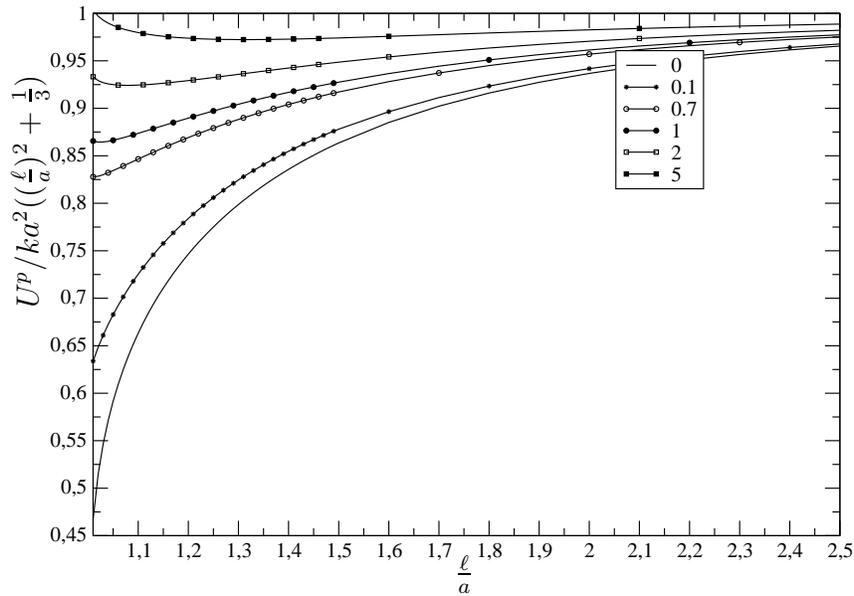


FIG. 1.8 – Variation de vitesse de translation  $U^p$  adimensionnée.  $\lambda = 0$ (ligne sans symbole),  $\lambda = 0.1$ ( $\star$ ),  $\lambda = 0.7$ ( $\circ$ ),  $\lambda = 1$ ( $\bullet$ ),  $\lambda = 2$ ( $\square$ ) et  $\lambda = 5$ ( $\blacksquare$ ).

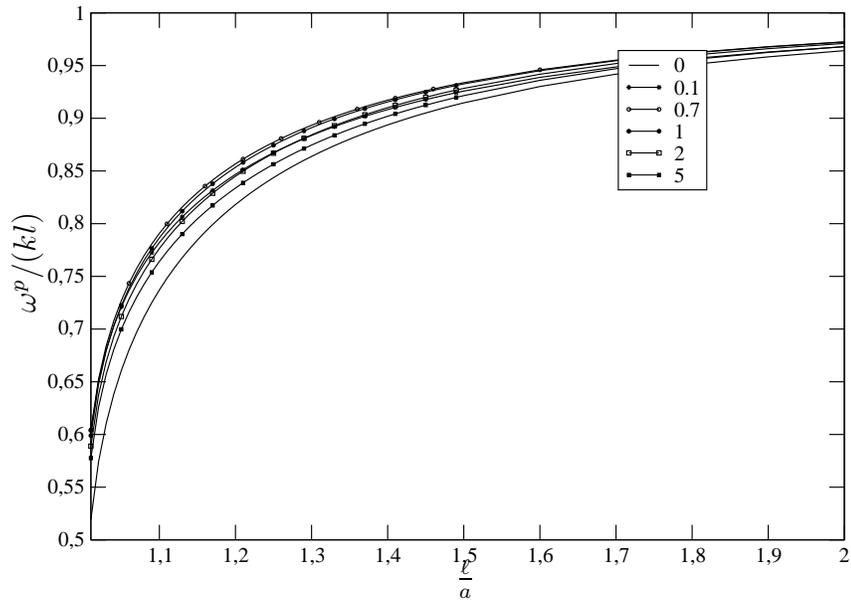


FIG. 1.9 – Variation de la vitesse de rotation  $\omega^p$  adimensionnée.  $\lambda = 0$ (ligne sans symbole),  $\lambda = 0.1$ ( $\star$ ),  $\lambda = 0.7$ ( $\circ$ ),  $\lambda = 1$ ( $\bullet$ ),  $\lambda = 2$ ( $\square$ ) et  $\lambda = 5$ ( $\blacksquare$ ).

# Chapitre 2

## Stresslet pour une sphère dans un écoulement de cisaillement linéaire ou parabolique.

### Asymptotique pour une sphère distante

#### Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	32
2.2	Stresslets pour une sphère fixée dans un écoulement de cisaillement parabolique et dans un écoulement de cisaillement linéaire . . . . .	32
2.3	Force sur une sphère en mouvement dans un écoulement arbitraire . . . . .	38
2.4	Stresslet pour une sphère en translation dans un fluide au repos . . . . .	39
2.5	Stresslet pour une sphère en rotation dans un fluide au repos	42
2.6	Stresslet pour une sphère libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique . . . . .	45
2.7	Développements asymptotiques pour des distances à la paroi grandes devant le rayon de la sphère . . . . .	51

---

## 2.1 Introduction

Le stresslet est la somme des moments symétriques des contraintes sur la sphère, c'est-à-dire c'est la partie symétrique du doublet de Stokes. Le calcul du stresslet intervient dans le calcul de la viscosité moyenne d'une suspension diluée. Pour le cas de non-glissement sur la paroi le stresslet est calculé dans [1]. Dans ce chapitre, on calcule le stresslet pour le cas d'une sphère fixée dans un écoulement parabolique et dans un écoulement de cisaillement linéaire, près d'une paroi sur laquelle s'exerce une condition de glissement. On utilise pour cela les coordonnées bisphériques. Puis on calcule le stresslet pour les cas de la translation et de la rotation en utilisant le théorème de réciprocité ainsi que fait Pasol dans [1].

Dans une autre partie de ce chapitre on donne les écritures asymptotiques des stresslets calculés ainsi que la force, le couple, les vitesses  $U^p$  et  $\omega^p$  pour une sphère en écoulement parabolique près d'une paroi sur laquelle s'exerce une condition de glissement.

## 2.2 Stresslets pour une sphère fixée dans un écoulement de cisaillement parabolique et dans un écoulement de cisaillement linéaire

Le stresslet, somme des moment symétriques des contraintes sur la sphère, est donné sous la forme suivante

$$\mathbf{S} = \int_S \left( \frac{1}{2} [\mathbf{r}\boldsymbol{\tau}_r + \boldsymbol{\tau}_r\mathbf{r}] - \frac{1}{3} \mathbf{I} [\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\tau}_r] \right) ds \quad (2.1)$$

où

$S$  la surface de la sphère de rayon  $a$ ,

$ds = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$  est l'unité de surface de la sphère,

$\mathbf{I}$  est le tenseur unité,

$\mathbf{r}$  un vecteur joignant le centre de la sphère et un point de sa surface,

$\boldsymbol{\tau}_r$  la contrainte sur la surface de la sphère donnée d'après Happel et Brenner [7] par la formule suivante

$$\boldsymbol{\tau}_r = -\frac{\mathbf{r}}{a}p + \mu_f \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} - \frac{\mathbf{v}}{a} \right) + \frac{\mu_f}{a} \nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{v}$  et  $p$  sont la vitesse est la pression hydrodynamique du fluide et  $\mu_f$  sa viscosité dynamique.

Par linéarité des équations de Stokes, si on change  $\mathbf{u}^\infty$  par  $-\mathbf{u}^\infty$ , la solution pour l'écoulement est donnée par  $(-\mathbf{u}, -p)$  alors  $\boldsymbol{\tau}$  change de signe. Puisque le stresslet est une fonctionnelle linéaire du tenseur des contraintes, alors il change de signe. Pour revenir à l'écoulement initial  $\mathbf{u}^\infty$  on peut faire une transformation géométrique qui prend en compte les symétries de la figure. Il y a deux transformations possibles, une symétrie par rapport au plan  $x = 0$ , et une rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $(O, z)$ . Dans la première transformation, les composantes des tenseurs  $\mathbf{r}\boldsymbol{\tau}_r$  et  $\boldsymbol{\tau}_r\mathbf{r}$  se comportent de la façon suivante : les composantes  $xx, yy, zz, yz$  et  $zy$  ne changent pas de signe. Il en est de même pour les composantes du stresslet  $\mathbf{S}$ . Finalement les composantes  $S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}, S_{yz}$  et  $S_{zy}$  sont nulles. Si maintenant à la suite de la transformation  $\mathbf{u}^\infty$  en  $-\mathbf{u}^\infty$  on applique la rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $(O, z)$ , on s'aperçoit que la composante  $xy$  de  $\mathbf{r}\boldsymbol{\tau}_r$  et de  $\boldsymbol{\tau}_r\mathbf{r}$  ne change pas de signe, donc  $S_{xy}$  est nulle. Par suite la seule composante non nulle du stresslet est  $S_{xz} = S_{zx}$ .

En utilisant (2.1) et (2.2), la composante  $S_{xz}$  du stresslet est donnée par

$$\begin{aligned} S_{xz} &= \frac{1}{2}[x\tau_z + \tau_x z] = \frac{1}{2}\left[-\frac{xz}{a}p + \mu_f x \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{v_z}{a}\right) + \frac{\mu_f}{a} x \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\right] + \\ &\quad \frac{1}{2}\left[-\frac{xz}{a}p + \mu_f z \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} - \frac{v_x}{a}\right) + \frac{\mu_f}{a} z \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\right] = \quad (2.3) \\ &-\frac{xz}{a}p + \frac{1}{2}\mu_f \left[z \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} - \frac{v_x}{a}\right) + x \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{v_z}{a}\right)\right] + \frac{\mu_f}{2a} \left[x \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + z \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\right]. \end{aligned}$$

Pour simplifier le calcul de (2.3) on fait intervenir le doublet de Stokes qui est relié au stresslet par la relation suivante

$$D_{xz} = S_{xz} - \frac{1}{2}C_y. \quad (2.4)$$

L'équation (2.4) est valable pour l'écoulement parabolique et l'écoulement de cisaillement linéaire pour une sphère fixe. On écrit alors

$$S_{xz}^m = D_{xz}^m + \frac{1}{2}C_y^m \quad (2.5)$$

où  $m = c$  pour l'écoulement de cisaillement linéaire,  $m = p$  pour l'écoulement parabolique et  $C_y^m = \mathbf{C}_y \cdot \mathbf{e}_y$ .

Le couple dans le cas de l'écoulement de cisaillement linéaire est calculé dans [2]. Il reste donc à déterminer le doublet de Stokes pour les deux écoulements. Le doublet représente le moment d'ordre 1 de la force surfacique qui s'exerce sur la sphère :

$$D_{xz} = \int_S \left[-\frac{xz}{a}p + \mu_f x \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{v_z}{a}\right) + \frac{\mu_f}{2a} x \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\right] ds \quad (2.6)$$

Dans le cas du non-glissement, on peut montrer que  $\int_S x \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) ds = 0$  [1] et en outre il est simple de vérifier que cette intégrale ne dépend pas de la longueur de glissement  $\lambda$ .

On aura donc :

$$D_{xz} = \int_S \left[ -\frac{xz}{a} p + \mu_f x \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{v_z}{a} \right) \right] ds. \quad (2.7)$$

On introduit maintenant les coordonnées cylindriques  $(\rho, \phi, z)$  et les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ . Sur la surface de la sphère, en  $\xi = \alpha$  on a  $ds = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$ . En coordonnées bisphériques, on calcule :

$$\sin \theta = \frac{\rho}{a} = \frac{\sinh \alpha \cdot \sin \eta}{\cosh \alpha - \mu}, \quad (2.8)$$

$$d\theta = -\frac{\sinh \alpha d\eta}{\cosh \alpha - \mu} = -\frac{\sinh \alpha d\mu}{\sin \eta (\cosh \alpha - \mu)}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\cosh \alpha - \mu}{c} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (2.9)$$

En utilisant les expressions des vitesses et de la pression en fonction des harmoniques sphériques, on trouve l'expression du doublet de Stokes pour les deux écoulements.

Pour l'écoulement de cisaillement quadratique<sup>1</sup> :

$$D_{xz}^p = -\sqrt{2}\pi\mu_f k a^4 \sinh \alpha^4 \sum_{n \geq 1} n(n+1) \left( 2A_n^p + \frac{1}{3}(2n+1)(B_n^p + C_n^p) \right), \quad (2.10)$$

(On note ici que  $A_n^p, B_n^p, C_n^p, D_n^p, E_n^p, F_n^p$  et  $G_n^p$  sont respectivement les coefficients  $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n$  et  $G_n$  calculés au chapitre 1 ).

Pour l'écoulement de cisaillement linéaire<sup>2</sup> :

$$D_{xz}^c = -\sqrt{2}\pi\mu_f k a^3 \sinh \alpha^3 \sum_{n \geq 1} n(n+1) \left( 2A_n^c + \frac{1}{3}(2n+1)(B_n^c + C_n^c) \right). \quad (2.11)$$

On rappelle que le couple pour l'écoulement de cisaillement linéaire est donné d'après [2] par

$$\mathbf{C}^c = 4\pi a^3 \mu_f k c_{yy}^c \mathbf{e}_y \quad \text{où} \quad c_{yy}^c = \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh^3 \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{E_n^c}{\tanh \alpha} + 2n(n+1)A_n^c \right], \quad (2.12)$$

et le couple pour l'écoulement quadratique calculé dans le chapitre 1 est donné par

$$\mathbf{C}^p = 8\pi a^4 \mu_f k \frac{l}{a} c_{yx}^p \mathbf{e}_y \quad \text{où} \quad c_{yx}^p = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\sinh^4 \alpha}{\cosh \alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{E_n^p}{\tanh \alpha} + 2n(n+1)A_n^p \right]. \quad (2.13)$$

On obtient donc le stresslet suivant dans le cas linéaire en utilisant (2.5)

$$S_{xz}^c = \sqrt{2}\pi\mu_f k a^3 \sinh \alpha^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{E_n^c}{\tanh \alpha} - \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)(B_n^c + C_n^c) \right]. \quad (2.14)$$

<sup>1</sup>On corrige la faute de frappe dans Pasol [1] dans annexe C equation (C.15)

<sup>2</sup>On corrige la faute de frappe dans Pasol [1] dans annexe C equation (C.14)

On adimensionne ce stresslet par  $S^{*c} = 6\pi\mu_f k a^3$ . On obtient donc  $S_{xz}^c = S^{*c} s_{xz}^c$  où

$$s_{xz}^c = \frac{\sqrt{2}}{6} \sinh \alpha^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{E_n^c}{\tanh \alpha} - \frac{1}{3} n(n+1)(2n+1)(B_n^c + C_n^c) \right]. \quad (2.15)$$

Pour le stresslet parabolique, on obtient d'après (2.13) et (2.10)

$$S_{xz}^p = \sqrt{2}\pi\mu_f k a^4 \sinh^4 \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{E_n^p}{\tanh \alpha} - \frac{1}{3} n(n+1)(2n+1)(B_n^p + C_n^p) \right]. \quad (2.16)$$

On adimensionne ce stresslet par  $S^{*p} = \frac{20}{3}\pi\mu_f k a^4 \left(\frac{\ell}{a}\right)$ . On obtient donc  $S_{xz}^p = S^{*p} s_{xz}^p$  avec

$$s_{xz}^p = \frac{3\sqrt{2}}{20} \frac{\sinh \alpha^4}{\cosh \alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{E_n^p}{\tanh \alpha} - \frac{1}{3} n(n+1)(2n+1)(B_n^p + C_n^p) \right]. \quad (2.17)$$

La table (Tab.2.1) donne les valeurs de  $s_{xz}^p$  et  $s_{xz}^c$  pour différents glissements en fonction de la distance à la paroi. Puis on présente (Fig.2.1) et (Fig.2.2) les courbes de variations de stresslet parabolique et de stresslet linéaire en fonction de la distance adimensionnée, du centre de la sphère à la paroi, pour différents glissements.

Le stresslet dans le cas où la sphère est fixée dans un écoulement parabolique (Fig.2.1) diminue lorsque le glissement est petit. Pour  $\lambda = 5$  et près de la paroi,  $1.005 \leq \frac{\ell}{a} \leq 1.1$  la courbe du stresslet croît puis à partir de  $1.1 \leq \frac{\ell}{a}$  elle décroît. Alors que les courbes qui correspondent à un glissement  $\lambda \in \{2, 1, 0.7, 0.1, 0\}$  sont toujours décroissantes près de la paroi. Le maximum 1.0127257 de ce stresslet est atteint à une altitude  $\frac{\ell}{a} = 1.1$  et sa valeur minimale 0.88887745 est atteinte à une distance  $\frac{\ell}{a} = 1.6$ .

Pour le cas où la sphère est fixée dans un écoulement de cisaillement linéaire, (Fig.2.2), le stresslet et la longueur de glissement ont le même sens de variation. Loin de la paroi et à une distance  $1.9 \leq \frac{\ell}{a}$  toutes les courbes qui présentent les variations du stresslet pour chaque glissement sont croissantes et tendent toutes vers une valeur maximale de l'ordre de 0.525. Alors que près de la paroi, pour le cas d'un glissement important  $\lambda = 5$  le stresslet croît pour  $1.005 \leq \frac{\ell}{a} \leq 1.1$  et décroît lorsque  $1.1 \leq \frac{\ell}{a} \leq 1.9$ . Pour un glissement faible la courbe est croissante pour toute distance particule-paroi. Ce stresslet est minimum en  $\frac{\ell}{a} = 1.005$  et sa valeur minimale est 0.33789536.

$\lambda$	$\frac{\ell}{a}$	$s_{xz}^c$	$s_{xz}^p$
0	1.005	0.337895362402656	0.908247872709222
0	1.01	0.338352753597239	0.907759020309233
0	1.1	0.346398954952653	0.900382407473213
0	1.5	0.377943768349653	0.888303073776821
0	3	0.449964886574075	0.913923487674014
0	10	0.523102352921074	0.971071460195754
0.3	1.005	0.352816072434764	0.947834751629466
0.3	1.01	0.353126328974178	0.947375276918478
0.3	1.1	0.359333840158484	0.939165405072911
0.3	1.5	0.388160759769151	0.917920455113921
0.3	3	0.455680197741401	0.926388173259552
0.3	10	0.523927871572681	0.972630196119301
1	1.005	0.371027922444123	0.981524332099777
1	1.01	0.371091976109402	0.981152223860742
1	1.1	0.373270112626025	0.974312029469110
1	1.5	0.394032687487863	0.950735192197904
1	3	0.459421407076319	0.942545499487491
1	10	0.525059415027416	0.975297218483789
3	1.005	0.403434575998553	1.00169711973441
3	1.01	0.417783665034047	1.00743091704601
3	1.1	0.409843135067221	1.00315007346369
3	1.5	0.403381999617491	0.983143717428874
3	3	0.459010294754230	0.963103531972884
3	10	0.526096853492771	0.979833891562521
5	1.005	-0.04240792369712568	0.885143222020730
5	1.01	0.407111267831678	1.00065876247307
5	1.1	0.449032382543688	1.01272568493662
5	1.5	0.415110270451163	0.995277370761904
5	3	0.457066654248052	0.972752985421459
5	10	0.526142368852283	0.982570334384704

TAB. 2.1 – Valeurs de  $s_{xz}^p$  stresslet adimensionné pour l'écoulement parabolique et de  $s_{xz}^c$  stresslet adimensionné pour l'écoulement de cisaillement linéaire.

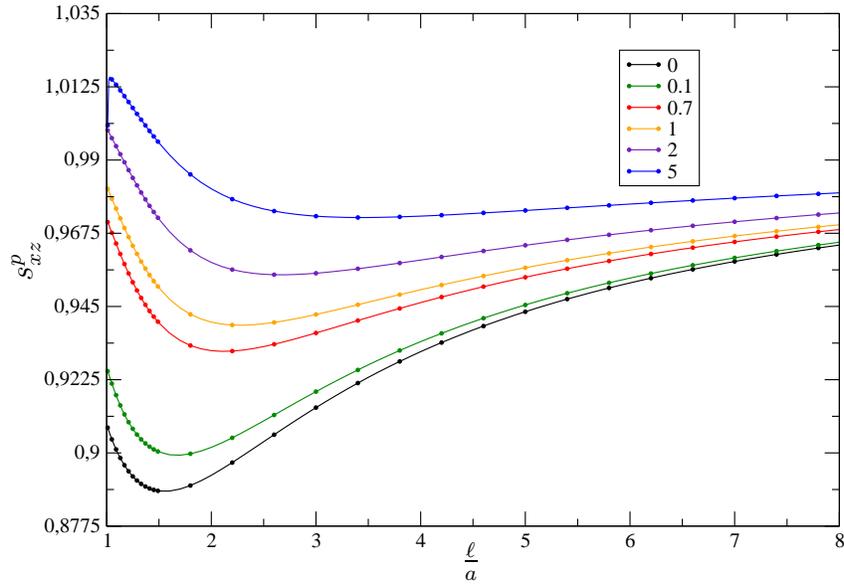


FIG. 2.1 – Variation du stresslet adimensionné  $s_{xz}^p$  pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée :  $\lambda = 0$ (noir),  $\lambda = 0.1$ (vert),  $\lambda = 0.7$ (rouge),  $\lambda = 1$ (orangé),  $\lambda = 2$ (mauve),  $\lambda = 5$ (bleu).

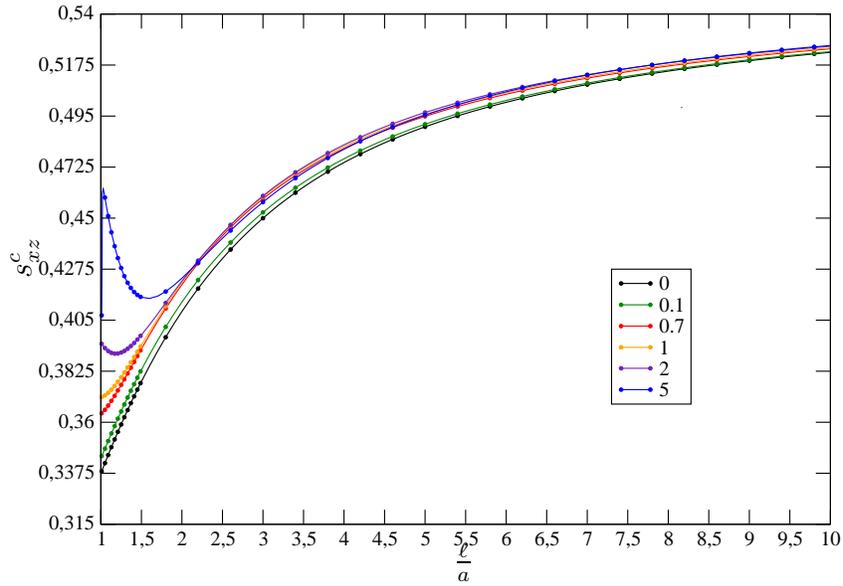


FIG. 2.2 – Variation du stresslet adimensionné  $s_{xz}^c$  pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée :  $\lambda = 0$ (noir),  $\lambda = 0.1$ (vert),  $\lambda = 0.7$ (rouge),  $\lambda = 1$ (orangé),  $\lambda = 2$ (mauve),  $\lambda = 5$ (bleu).

## 2.3 Force sur une sphère en mouvement dans un écoulement arbitraire

On cherche la force hydrodynamique  $\mathbf{F}$  qui s'exerce sur une sphère en translation avec une vitesse  $\mathbf{U}^s$  et en rotation avec une vitesse  $\mathbf{\Omega}^s$  dans un écoulement arbitraire  $\mathbf{u}^\infty$ . Le problème s'écrit pour la perturbation de l'écoulement  $(\mathbf{u}, p)$  :

$$(I_1) \begin{cases} \mu_f \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u} = \mathbf{U}^s + \mathbf{\Omega}^s \wedge \mathbf{x}' - \mathbf{u}^\infty, \\ \mathbf{u} = (b \frac{\partial u_x}{\partial z}, b \frac{\partial u_x}{\partial z}, 0) \quad \text{sur la paroi}, \\ \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{pour} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

où  $\mathbf{x}'$  est un vecteur qui joint le centre de la sphère à un point de la surface. On va utiliser le théorème de réciprocité. Dans cet objectif, on considère d'autre part l'écoulement de Stokes autour d'une sphère se déplaçant dans le fluide au repos avec la vitesse  $\mathbf{V}$  parallèle à la paroi. Les équations de Stokes pour l'écoulement perturbé  $(\mathbf{v}^t, p^t)$  en présence de la sphère, que l'on appellera ici "écoulement réciproque", s'écrivent :

$$(I_2) \begin{cases} \mu_f \nabla^2 \mathbf{v}^t - \nabla p^t = 0 & \text{dans le milieu fluide } \mathcal{D}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^t = 0 & \text{dans le milieu fluide } \mathcal{D}, \\ \mathbf{v}^t = \mathbf{V} & \text{sur la surface de la sphère } S, \\ \mathbf{v}^t = (b \frac{\partial v_x^t}{\partial z}, b \frac{\partial v_x^t}{\partial z}, 0) & \text{sur la paroi}, \\ \mathbf{v}^t \rightarrow \mathbf{0} & \text{pour} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Considérons le volume du fluide  $V_f$  limité par  $S$  (surface de la sphère),  $S_W$  (surface de la paroi) et une coupole de surface  $S_\infty$  et soit  $S_f$  la frontière du volume  $V_f$  avec  $S_f = S_W \cup S_\infty \cup S$ . Le théorème de réciprocité s'écrit d'après [7] :

$$\int_{S_f} (v_i^t \sigma_{ij} - u_i \sigma_{ij}^t) n_j ds = 0. \quad (2.18)$$

On a  $(u_i^t, u_i) \rightarrow 0$  sur  $S_\infty$ , donc

$$\int_{S \cup S_W} (v_i^t \sigma_{ij} - u_i \sigma_{ij}^t) n_j ds = 0. \quad (2.19)$$

Sur la surface de la paroi on a

$$u_i = \frac{b}{\mu_f} (\mu_f \frac{\partial v_i}{\partial z}) = \frac{b}{\mu_f} \sigma_{iz}, \quad u_z = u_z^t = 0, \quad v_i^t = \frac{b}{\mu_f} (\mu_f \frac{\partial v_i}{\partial z})^t = \frac{b}{\mu_f} \sigma_{iz}^t, \quad \sigma_{ij} \cdot n_j = \sigma_{iz}, \quad \sigma_{ij}^t \cdot n_j = \sigma_{iz}^t$$

avec  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ . On aura par suite  $(v_i^t \sigma_{ij} - u_i \sigma_{ij}^t) n_j = 0$  ce qui donne

$$\int_{S_w} (v_i^t \sigma_{ij} - u_i \sigma_{ij}^t) n_j ds = 0. \quad (2.20)$$

Par suite, le théorème de réciprocité donne

$$\int_S (v_i^t \sigma_{ij} - u_i \sigma_{ij}^t) n_j ds = 0. \quad (2.21)$$

On utilise les notations suivantes :  $f_i = \sigma_{ij} n_j$  et  $f_i^t = \sigma_{ij}^t n_j$  où  $f_i$  est la force surfacique sur  $S$  pour l'écoulement étudié et  $f_i^t$  est la force surfacique sur  $S$  pour l'écoulement réciproque.

On obtient donc la relation suivante :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^s \cdot \mathbf{F}^t + \boldsymbol{\Omega}^s \cdot \mathbf{C}^t - \int_S \mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{f}^t ds \quad (2.22)$$

avec  $\mathbf{F}$  la force hydrodynamique exercée par le fluide sur la sphère. Considérons maintenant que  $\mathbf{V} = V \mathbf{e}_x$ . Alors  $\mathbf{C}^t$  et  $\mathbf{F}^t$  la force et le couple exercés sur une sphère en translation, calculés en [2] et [19], sont donnés par

$$\mathbf{C}^t = 8\pi\mu_f V a^2 c_{yx}^t \mathbf{e}_y \quad (2.23)$$

où

$$c_{yx}^t = \frac{\sqrt{2}}{4} \sinh^2 \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} [E_n^t \coth \alpha + 2n(n+1)A_n^t]. \quad (2.24)$$

$$\mathbf{F}^t = -6\pi\mu_f a V f_{xx}^t \mathbf{e}_x \quad (2.25)$$

où

$$f_{xx}^t = -\frac{\sqrt{2}}{6} \sinh \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} [E_n^t + n(n+1)C_n^t]. \quad (2.26)$$

Ainsi, si l'on connaît la contrainte  $\mathbf{f}^t$  en chaque point sur la sphère, on peut calculer la force qui s'exerce sur la sphère dans un écoulement quelconque au moyen d'une simple quadrature (2.22). Ce résultat généralise à une paroi avec glissement celui obtenu par Goldman, Cox et Brenner [21] pour le cas d'une paroi sans glissement.

## 2.4 Stresslet pour une sphère en translation dans un fluide au repos

Pour calculer le stresslet pour une sphère en translation avec la vitesse  $\mathbf{V}$ , on applique le théorème de réciprocité en utilisant l'écoulement réciproque créé par la situation suivante :

une sphère fixée dans un écoulement de cisaillement linéaire avec glissement sur la paroi, c'est-à-dire

$$\mathbf{U}^s = \mathbf{\Omega}^s = 0, \quad \mathbf{u}^\infty(x) = k(z+b)\mathbf{e}_x. \quad (2.27)$$

L'équation (2.22) s'écrit donc :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}^c = -k \int_S (z+b) f_x^t ds = -k \int_S (z-\ell) f_x^t ds - k \int_S (\ell+b) f_x^t ds \quad (2.28)$$

où  $\mathbf{F}^c$  est la force qui s'exerce sur la particule dans le cas de l'écoulement de cisaillement linéaire avec glissement sur la paroi. Cette force est donnée d'après [2] par

$$\mathbf{F}^c = 6\pi\mu_f k(\ell+b)a f_{xx}^c \mathbf{e}_x \quad (2.29)$$

où

$$f_{xx}^c = -\frac{\sqrt{2}}{6} \frac{\sinh \alpha}{\coth \alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} [E_n^c + n(n+1)C_n^c]. \quad (2.30)$$

On définit la composante  $xz$  du doublet de Stokes par

$$D_{xz}^t = \int_S z f_x^t ds. \quad (2.31)$$

L'équation (2.28) s'écrit aussi

$$V \cdot F_x^c = -k \cdot D_{zx}^t - k(\ell+b) \int_S f_x^t ds = -k D_{zx}^t - k(\ell+b) F_x^t. \quad (2.32)$$

Donc la composante  $xz$  du doublet de Stokes pour le cas de translation est donnée par

$$D_{zx}^t = -\frac{V F_x^c}{k} - (\ell+b) F_x^t. \quad (2.33)$$

D'autre part, le doublet de Stokes pour la translation peut s'écrire comme somme d'une partie symétrique (le stresslet  $S_{xz}^t$ ) et d'une partie antisymétrique (liée au couple  $C_y^t$ ) :

$$D_{zx}^t = S_{zx}^t + \frac{C_y^t}{2}. \quad (2.34)$$

Notons que l'on considère ici la transposée de la composante considérée en (2.5) ; d'où le changement de signe. Donc

$$S_{zx}^t = -\frac{V F_x^t}{k} - (\ell+b) F_x^t - \frac{C_y^t}{2}. \quad (2.35)$$

Finalement, d'après les relations (2.23), (2.25) et (2.29) on obtient le stresslet pour une sphère en translation dans un fluide au repos sous la forme suivante :

$$S_{zx}^t = -6\pi\mu_f V(b+\ell)a \left( f_{xx}^c - f_{xx}^t + \frac{2}{3} \frac{a}{(b+\ell)} c_{yx}^t \right). \quad (2.36)$$

Ce stresslet en translation est adimensionné par  $S^{t*} = 6\pi\mu_f Va^2$  ce qui donne  $S_{zx}^t = S^{t*} s_{zx}^t$  avec  $s_{zx}^t$  donné par

$$s_{zx}^t = \left(\lambda + \frac{\ell}{a}\right) \left[-f_{xx}^c + f_{xx}^t - \frac{2}{3} \frac{a}{(b+\ell)} c_{yx}^t\right]. \quad (2.37)$$

On présente (Fig.2.3), la courbe de variation du stresslet pour une sphère en translation dans un fluide au repos avec condition de glissement sur la paroi. Des valeurs de  $s_{zx}^t$  sont données table (Tab.2.2). On remarque que l'on a pu obtenir des valeurs avec 15 chiffres significatifs. Le nombre de termes à utiliser dans les séries donnant les harmoniques sphériques croît lorsque  $\frac{\ell}{a} - 1$  décroît. A titre d'exemple, pour  $\frac{\ell}{a} - 1 = 0.005$ , il a fallu utiliser 2000 termes pour obtenir 15 chiffres significatifs.

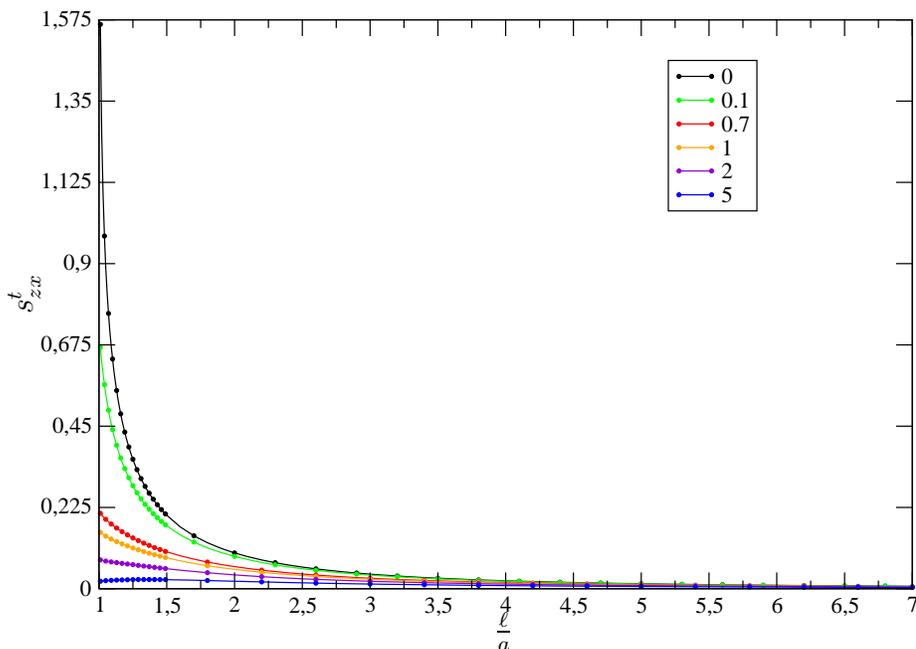


FIG. 2.3 – Variation du stresslet adimensionné  $s_{zx}^t$  pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée :  $\lambda = 0$ (noir),  $\lambda = 0.1$ (vert),  $\lambda = 0.7$ (rouge),  $\lambda = 1$ (orangé),  $\lambda = 2$ (mauve),  $\lambda = 5$ (bleu).

La figure (Fig.2.3) montre qu'en milieu infini, le stresslet sur une sphère en translation s'annule par symétrie. Il devient non nul près de la paroi à cause de l'asymétrie des contraintes.

## 2.5 Stresslet pour une sphère en rotation dans un fluide au repos

Pour trouver le stresslet pour une sphère en rotation on applique le théorème de réciprocité entre l'écoulement perturbé  $(\mathbf{u}, p)$  autour de la sphère fixe dans l'écoulement de cisaillement linéaire avec glissement sur la paroi et l'écoulement  $(\mathbf{v}^r, p^r)$  autour de la sphère en rotation avec la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_y$  dans un fluide au repos près d'une paroi sur

laquelle s'exerce une condition de glissement

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_f \nabla^2 \mathbf{v}^r - \nabla p^r = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^r = 0, \\ \mathbf{v}^r = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}' \quad \text{sur la surface de la sphère,} \\ \mathbf{v}^r = (b \frac{\partial v_x^r}{\partial z}, b \frac{\partial v_x^r}{\partial z}, 0), \\ \mathbf{v}^r \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{quand } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

On aura donc en suivant la même approche que pour le cas de la translation :

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C}^c = \mathbf{U}^s \cdot \mathbf{F}^r + \boldsymbol{\Omega}^s \cdot \mathbf{C}^r - \int_S \mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{f}^r ds \quad (2.38)$$

où  $\mathbf{F}^r$  et  $\mathbf{C}^r$  sont la force et le couple qui s'exercent sur la sphère en rotation. Ces grandeurs ont été calculées par [9] :

$$\mathbf{C}^r = -8\pi\mu_f a^3 \omega c_{yy}^r \mathbf{e}_y, \quad c_{yy}^r = -\frac{\sqrt{2}}{4} \sinh^3 \alpha \sum_{n=0}^{\infty} [E_n^r \coth \alpha + 2n(n+1)A_n^r], \quad (2.39)$$

$$\mathbf{F}^r = 6\pi\mu_f a^2 \omega f_{xy}^r \mathbf{e}_x, \quad f_{xy}^r = -\frac{\sqrt{2}}{6} \sinh^2 \alpha \sum_{n=0}^{\infty} [E_n^r + n(n+1)C_n^r]. \quad (2.40)$$

Le couple  $\mathbf{C}^c$  pour le cas de l'écoulement réciproque est donné d'après [2] par

$$\mathbf{C}^c = 4\pi k \mu_f a^3 c_{yy}^c \mathbf{e}_y, \quad c_{yy}^c = \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh^3 \alpha \sum_{n=0}^{\infty} [E_n^c \coth \alpha + 2n(n+1)A_n^c]. \quad (2.41)$$

Ces relations nous donnent comme dans le cas de la translation, la formule du stresslet comme suit :

$$S_{zx}^r = -\omega \cdot C_y^c - (\ell + b) F_x^r - \frac{1}{2} C_y^r. \quad (2.42)$$

En remplaçant par les relations (2.39), (2.40) et (2.41) dans (2.42), nous obtenons finalement le stresslet pour une sphère en rotation dans un fluide au repos avec condition de glissement sur la paroi sous la forme suivante

$$S_{zx}^r = -6\pi\mu_f a^3 \omega \left[ \frac{2}{3} c_{yx}^c + \left( \frac{\ell}{a} + \lambda \right) f_{xy}^r - \frac{2}{3} c_{yy}^r \right]. \quad (2.43)$$

Le stresslet en rotation est adimensionné par  $S^{r*} = 6\pi\mu_f a^3 \omega$ , ce qui donne  $S_{zx}^r = S^{r*} s_{zx}^r$  avec  $s_{zx}^r$  donné par :

$$s_{zx}^r = -\frac{2}{3} c_{yx}^c - \left( \frac{\ell}{a} + \lambda \right) f_{xy}^r + \frac{2}{3} c_{yy}^r. \quad (2.44)$$

On présente dans la table (Tab.2.2) et la figure (Fig.2.4) les valeurs du stresslet adimensionné  $s_{zx}^r$  pour une sphère en rotation dans un fluide au repos.

$\lambda$	$\frac{\ell}{a}$	$s_{zx}^r$	$s_{zx}^t$
0	1.005	0.582814476540828	1.87232997087067
0	1.01	0.491603275808335	1.56229124106626
0	1.1	0.205187077390473	0.635759552252175
0	1.5	0.05872085410850234	0.203299697910146
0	3	0.007327807592660832	0.04033905816154719
0	10	0.0002068882752896294	0.003287577506908199
0.3	1.005	0.526545867609727	0.383800811488538
0.3	1.01	0.450447262109655	0.376142060864403
0.3	1.1	0.185816949195411	0.289836588027906
0.3	1.5	0.04903351426502869	0.139431519766287
0.3	3	0.006169219609555346	0.03403039582644300
0.3	10	0.0001917581201228300	0.003108532501143284
1	1.005	0.522939403915383	0.157754792841468
1	1.01	0.450642151227848	0.155928930525328
1	1.1	0.200241004885364	0.135708613830752
1	1.5	0.05268133086869176	0.08554992739330539
1	3	0.005729440049287559	0.02638896256875702
1	10	0.0001722233493399060	0.002803349442496003
3	1.005	0.523849055628102	0.04922330701328716
3	1.01	0.450418929591413	0.04923882661437875
3	1.1	0.208972890362659	0.04746525347951766
3	1.5	0.05904883223463062	0.04036549321137221
3	3	0.006117669777956879	0.01715851294413637
3	10	0.0001563732761720579	0.002286775669754702
5	1.005	0.614233824741356	0.01429287210440002
5	1.01	0.465379766372896	0.02067605499457772
5	1.1	0.211167808555076	0.02327360821411830
5	1.5	0.06140712442756047	0.02506594235537766
5	3	0.006470462163245844	0.01206261456861735
5	10	0.0001554772011303704	0.001976366344934520

TAB. 2.2 – Valeurs de  $s_{zx}^r$  stresslet adimensionné pour une sphère en rotation et de  $s_{zx}^t$  stresslet adimensionné pour une sphère en translation.

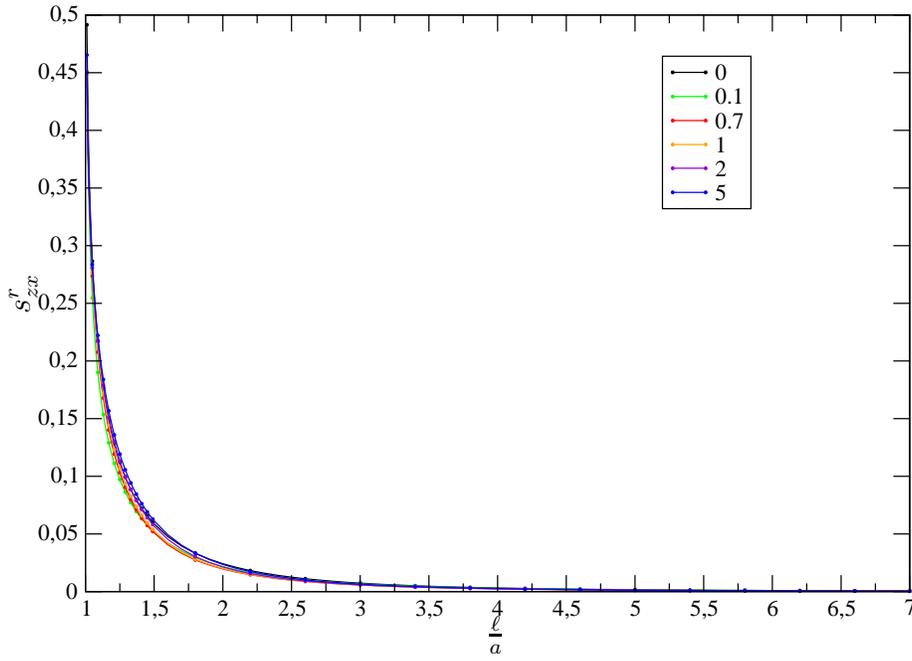


FIG. 2.4 – Variation du stresslet adimensionné  $s_{zx}^r$  pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée :  $\lambda = 0$ (noir),  $\lambda = 0.1$ (vert),  $\lambda = 0.7$ (rouge),  $\lambda = 1$ (orangé),  $\lambda = 2$ (mauve),  $\lambda = 5$ (bleu).

Comme pour la translation en fluide infini, le stresslet pour une sphère en rotation s’annule par symétrie. Il devient nul près de la paroi. La variation avec la longueur de glissement est faible alors qu’elle est importante dans le cas de la translation.

## 2.6 Stresslet pour une sphère libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique

On considère toujours le cas d’un glissement sur la paroi. Par linéarité des équations de Stokes, le stresslet pour une sphère libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique est la somme des stresslets obtenus pour les trois écoulements suivants :

- \*  $S^p$  pour une sphère fixe dans un écoulement parabolique, calculé dans le paragraphe 2.2,
- \*  $S_{zx}^t$  pour une sphère en translation dans un un fluide au repos, calculé dans le paragraphe 2.4,
- \*  $S_{zx}^r$  pour une sphère en rotation dans un fluide au repos, calculé dans le paragraphe 2.5.

Le stresslet sur la sphère libre est donc

$$S^{libre} = S^p + S_{zx}^t + S_{zx}^r. \quad (2.45)$$

Puis on adimensionne ce stresslet libre par  $6\pi\mu_f a^4 (\frac{10}{9} \frac{\ell}{a})$  ce qui donne

$$S^{libre} = 6\pi\mu_f a^4 (\frac{10}{9} \frac{\ell}{a}) s_{xz}^{libre} \quad \text{où} \quad s_{xz}^{libre} = (\frac{9}{10} \frac{\ell}{a} + \frac{3}{10} \frac{a}{\ell}) V s_{zx}^t + \frac{9}{10} \omega s_{zx}^r + s_{xz}^p. \quad (2.46)$$

On présente (Fig.2.5) des courbes de variation et table (Tab.2.3) des valeurs du stresslet pour une sphère libre de mouvoir dans un écoulement parabolique près d'une paroi sur laquelle s'exerce une condition de glissement. Ces valeurs sont données en fonction de la longueur de glissement adimensionnée  $\lambda$  et en en fonction la distance adimensionnée  $\frac{\ell}{a}$  du centre de la sphère à la paroi.

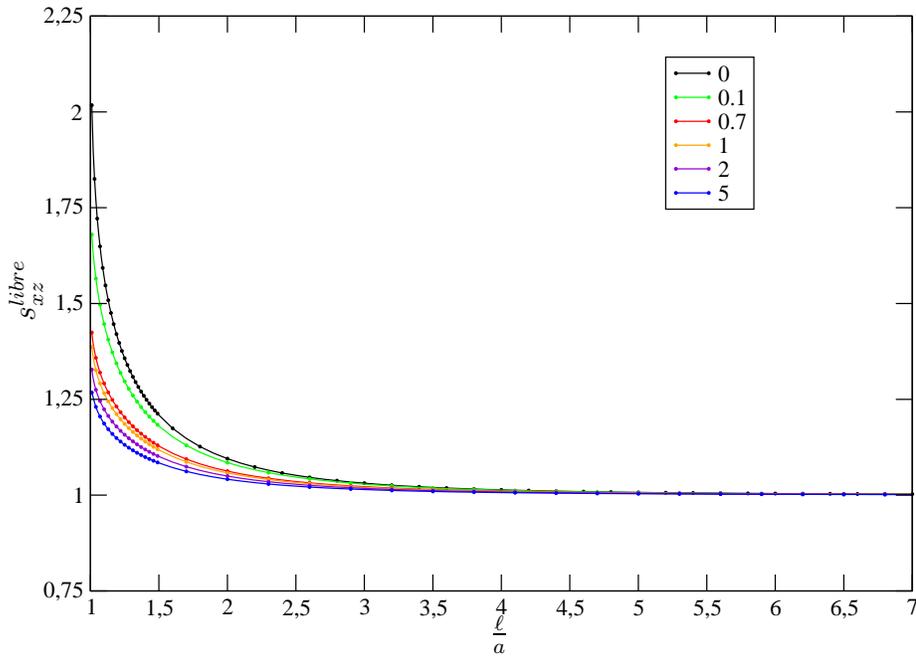


FIG. 2.5 – Variation du stresslet pour une sphère libre de se mouvoir dans un écoulement  $s_{xz}^{libre}$  pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée :  $\lambda = 0$ (noir),  $\lambda = 0.1$ (vert),  $\lambda = 0.7$ (rouge),  $\lambda = 1$ (orangé),  $\lambda = 2$ (mauve),  $\lambda = 5$ (bleu).

Le stresslet pour une sphère libre de se déplacer dans un écoulement de cisaillement parabolique (Fig.2.5) augmente lorsque le glissement sur la paroi est petit. Il atteint en  $\frac{\ell}{a} = 1.005$  sa valeur maximale 2.0174362. La valeur minimale de ce stresslet est sa limite loin de la paroi. Cette limite vaut 1.

$\lambda$	$\frac{\ell}{a}$	$s_{xz}^{libre}$
0	1.01	2.01743619028559
0	1.1	1.56896030228773
0	1.5	1.20875971369402
0	3	1.03105610621729
0	10	1.00092609786865
0.3	1.01	1.52946588528016
0.3	1.1	1.35951154378484
0.3	1.5	1.15273072144904
0.3	3	1.02547519527840
0.3	10	1.00085636207271
1	1.01	1.38685917919230
1	1.1	1.26577507047148
1	1.5	1.11794860026174
1	3	1.02049146635173
1	10	1.00075302831342
3	1.01	1.30144608636000
3	1.1	1.20507122399133
3	1.5	1.09241026258653
3	3	1.01613316601841
3	10	1.00061519701957
5	1.01	1.26758508809462
5	1.1	1.18674380714499
5	1.5	1.08404969918820
5	3	1.01453994126714
5	10	1.00055007240225

TAB. 2.3 – Valeurs du  $s_{xz}^{libre}$  stresslet adimensionné pour une sphère libre de mouvoir dans un écoulement parabolique

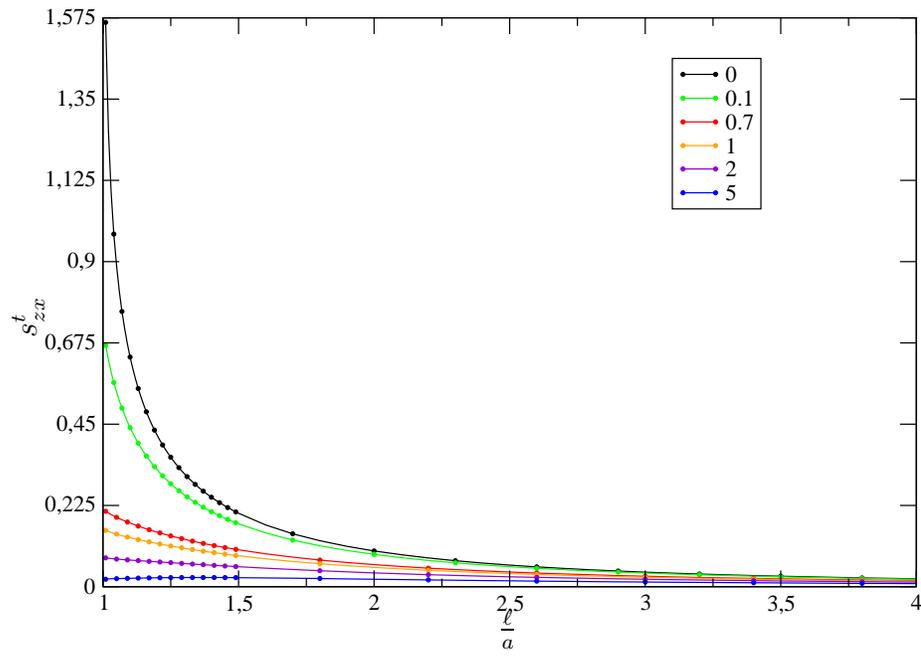


FIG. 2.6 – Variation du stresslet adimensionné  $s_{zx}^t$  pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée :  $\lambda = 0$ (noir),  $\lambda = 0.1$ (vert),  $\lambda = 0.7$ (rouge),  $\lambda = 1$ (orangé),  $\lambda = 2$ (mauve),  $\lambda = 5$ (bleu).

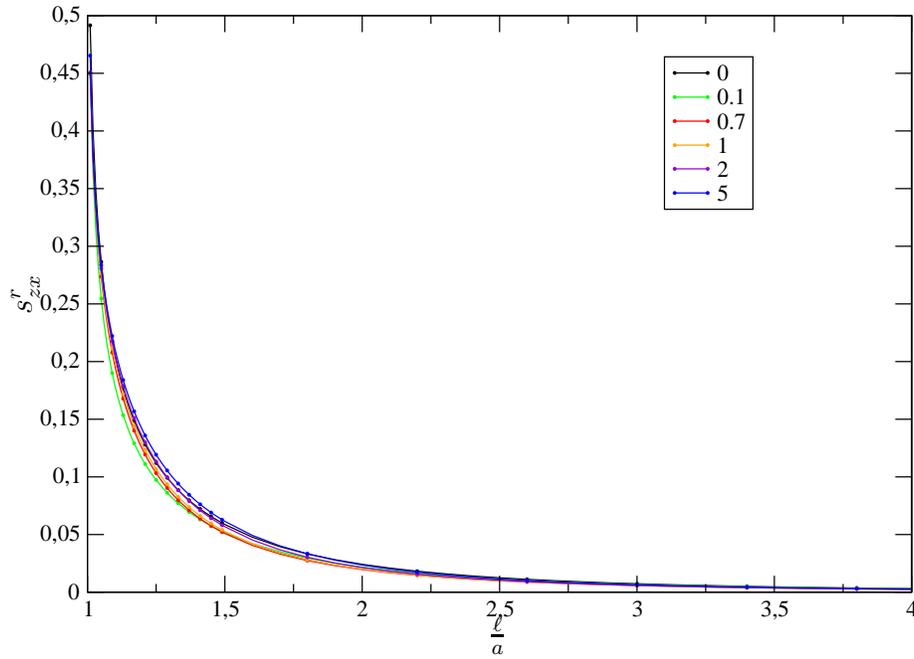


FIG. 2.7 – Variation du stresslet adimensionné  $s_{zx}^r$  pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée :  $\lambda = 0$ (noir),  $\lambda = 0.1$ (vert),  $\lambda = 0.7$ (rouge),  $\lambda = 1$ (orangé),  $\lambda = 2$ (mauve),  $\lambda = 5$ (bleu).

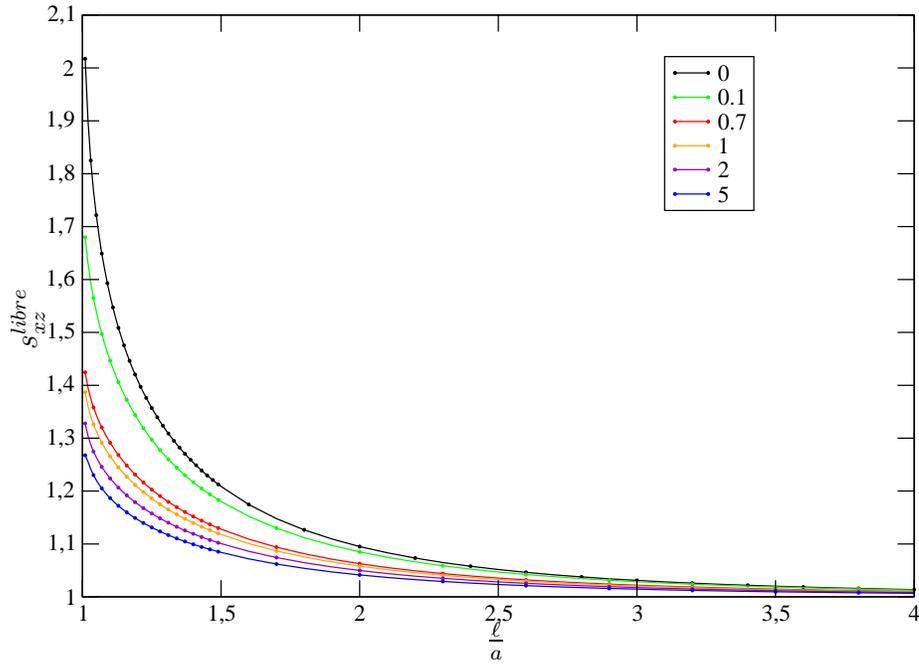


FIG. 2.8 – Variation du stresslet pour une sphère libre de se mouvoir dans un écoulement  $s_{xz}^{libre}$  pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée :  $\lambda = 0$ (noir),  $\lambda = 0.1$ (vert),  $\lambda = 0.7$ (rouge),  $\lambda = 1$ (orangé),  $\lambda = 2$ (mauve),  $\lambda = 5$ (bleu).

## 2.7 Développements asymptotiques pour des distances à la paroi grandes devant le rayon de la sphère

Pour résoudre le système (S) décrit au chapitre 1, on a déterminé  $A_n, C_n, E_n, G_n$  en calculant la solution du système linéaire suivant

$$\widehat{M}_1 X_1 + \widehat{M}_1^+ X_2 = B_1, \quad (2.47)$$

$$M_n^- X_{n-1} + M_n X_n + M_n^+ X_{n+1} = B_n \quad (n \geq 2) \quad (2.48)$$

où les matrices  $M$  sont des matrices  $4 \times 4$  connues, les vecteurs  $B$  sont connus avec

$$B_1 = (0, K_0, K_1, 0)^t; \quad B_n = (0, 0, K_n, 0)^t \quad (n \geq 2)$$

et les inconnues sont

$$X_1 = (A_1, C_1, E_1, E_0)^t; \quad X_n = (A_n, C_n, E_n, G_n)^t \quad (n \geq 2).$$

Ce système linéaire infini est résolu en tronquant pour un  $n$  assez grand, soit  $N$ , tel que  $X_{N+1} = 0$ . Alors pour  $n = N$ , on a d'après (2.48)

$$M_N^- X_{N-1} + M_N X_N = B_N. \quad (2.49)$$

Il est également intéressant d'obtenir des développements asymptotiques formels (en utilisant un logiciel de calcul symbolique) lorsque  $\frac{\ell}{a} - 1$  devient grande par rapport à l'unité, soit pour une sphère à une grande distance de la paroi. Lorsque  $\frac{\ell}{a} - 1$  n'est pas très grande l'obtention d'un certain nombre de termes dans le développement est pratiquement limité par le temps de calcul informatique et la mémoire. Pour cette raison, l'algorithme rapide proposé est le suivant. L'idée principale consiste à résoudre le système linéaire (S) étape par étape en  $n$ . Une difficulté est que les matrices  $\widehat{M}_1^+, M_n^-$  et  $M_n^+$  pour  $n \geq 2$ , ont toutes un déterminant nul. Une méthode proposée pour éviter cette difficulté suit le principe de l'algorithme de Thomas pour inverser une matrice tridiagonale. L'idée est étendue aux matrices  $\widehat{M}_1^+, M_n^-$  et  $M_n^+$  [38], [39]. L'algorithme est le suivant

\* la solution formelle de (2.47) pour  $X_1$  est  $X_1 = U_1 X_2 + V_1$  où

$$U_1 = -[\widehat{M}_1]^{-1} \widehat{M}_1^+; \quad V_1 = [\widehat{M}_1]^{-1} B_1 \quad (2.50)$$

\* la solution formelle de (2.48) pour  $X_n$  ou  $2 \leq n \leq N - 1$  est  $X_n = U_n X_{n+1} + V_n$  où

$$U_n = -[M_n^- U_{n-1} + M_n]^{-1} M_n^+; \quad V_n = [M_n^- U_{n-1} + M_n]^{-1} [B_n - M_n^- V_{n-1}]. \quad (2.51)$$

\* la solution formelle de (2.49) pour  $X_N$  est  $X_N = V_N$  où

$$V_N = [M_N^- U_{N-1} + M_N]^{-1} [B_N - M_N^- V_{N-1}]. \quad (2.52)$$

On voit que  $(U_1, V_1)$  peuvent être calculées directement avec (2.50), puis  $(U_n, V_n)$  avec (2.51) pour  $n = 2, \dots, N-1$ , enfin  $V_N$  avec (2.52). Une fois que  $V_N$  est connue,  $X_N = V_N$ , puis tous les autres  $X_n$  pour les valeurs décroissantes  $n = N-1, \dots, 1$ .

Cette procédure a deux intérêts principaux :

\* A chaque étape, il suffit d'inverser une matrice  $4 \times 4$ .

\* Lorsque  $N$  est augmenté d'une unité, il n'est pas nécessaire de tout recalculer. En effet, il suffit de calculer seulement  $U_{N-1}$ ,  $U_N$  et  $V_N$  (seule la matrice  $[M_N^- U_{N-1} + M_N]$  doit être inversée). On obtiendra alors les nouveaux  $X_n$ .

Cet algorithme a été appliqué pour calculer des développements asymptotiques lorsque la sphère est à une grande distance de la paroi par rapport à son rayon,  $\ell \gg a$ . Puisque les fonctions hyperboliques sont impliquées dans les séries harmoniques  $U_0, W_1, U_2, Q_1$  décrites au premier chapitre, il est apparu utile de développer suivant le petit paramètre  $\varepsilon = \exp(-\frac{\ell}{a})$ . Les formules pour les coefficients de frottement des force, couple et stresslet sont alors obtenues et sont converties en développement en  $\frac{a}{\ell}$ . Le nombre de termes dans les développements en harmoniques sphériques doit être supérieur au nombre de termes du développement en  $\varepsilon$  pour obtenir des résultats significatifs. Les résultats suivants, ici jusqu'à l'ordre  $(\frac{a}{\ell})^6$ , ont été obtenus en programmant l'algorithme en langage Mathematica :

$$\begin{aligned} f_{xx}^q = & 1 + \frac{9}{16} \left(\frac{a}{\ell}\right) + \left(\frac{499}{768} - \frac{9\lambda}{16}\right) \left(\frac{a}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{9\lambda^2}{8} - \frac{81\lambda}{128} - \frac{1575}{4096}\right) \left(\frac{a}{\ell}\right)^3 \\ & + \left(-\frac{81\lambda^3}{16} + \frac{405\lambda^2}{256} + \frac{3701\lambda}{4096} - \frac{7263}{65536}\right) \left(\frac{a}{\ell}\right)^4 \\ & + \left(\frac{261\lambda^4}{8} - \frac{891\lambda^3}{128} - \frac{19551\lambda^2}{4096} + \frac{4959\lambda}{16384} + \frac{1596155}{3145728}\right) \left(\frac{a}{\ell}\right)^5 \\ & + \left(-\frac{4005\lambda^5}{16} + \frac{5589\lambda^4}{128} + \frac{17507\lambda^3}{512} - \frac{45081\lambda^2}{32768} \right. \\ & \left. - \frac{2197069\lambda}{1048576} - \frac{3036175}{16777216}\right) \left(\frac{a}{\ell}\right)^6 \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned}
 c_{yx}^q &= 1 + \left( \frac{27\lambda^2}{32} - \frac{3}{32} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^3 + \left( -\frac{99\lambda^3}{16} + \frac{243\lambda^2}{512} + \frac{3\lambda}{8} + \frac{9}{256} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^4 \\
 &+ \left( \frac{1395\lambda^4}{32} - \frac{2025\lambda^3}{512} - \frac{39541\lambda^2}{8192} - \frac{45\lambda}{256} + \frac{977}{4096} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^5 \\
 &+ \left( -\frac{10665\lambda^5}{32} + \frac{14823\lambda^4}{512} + \frac{80273\lambda^3}{2048} + \frac{238563\lambda^2}{131072} - \frac{2547\lambda}{2048} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{16455}{65536} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^6
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}
 s_{xz}^q &= 1 + \left( \frac{9}{32} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right) + \left( -\frac{81}{512} + \frac{9\lambda}{16} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^2 + \left( \frac{32451}{40960} + \frac{243\lambda}{512} - \frac{81\lambda^2}{32} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^3 \\
 &+ \left( \frac{18981}{655360} - \frac{26691\lambda}{10240} - \frac{1053\lambda^2}{512} + \frac{261\lambda^3}{16} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^4 \\
 &+ \left( \frac{12048973\lambda}{10485760} + \frac{28197\lambda}{131072} + \frac{71903\lambda^2}{4096} + \frac{405\lambda^3}{32} - \frac{4005\lambda^4}{32} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^5 \\
 &+ \left( \frac{18594831\lambda}{33554432} + \frac{30226663\lambda}{5242880} - \frac{184527\lambda^2}{81920} - \frac{286621\lambda^3}{2048} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{48357\lambda^4}{512} + \frac{34695\lambda^5}{32} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^6
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
 w^p &= 1 - \left( \frac{5}{8} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^3 + \left( \frac{5\lambda}{4} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^4 + \left( \frac{79}{96} - \frac{45\lambda^2}{8} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^5 \\
 &+ \left( -\frac{75}{128} - \frac{265\lambda}{96} + \frac{435\lambda^3}{16} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^6
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned}
 \omega^p &= 1 - \left( \frac{5}{16} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^3 + \left( \frac{15\lambda}{16} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^4 + \left( \frac{1}{4} - \frac{7\lambda^2}{2} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^5 \\
 &+ \left( -\frac{75}{256} - \frac{5\lambda}{4} + \frac{775\lambda^3}{16} \right) \left( \frac{a}{\ell} \right)^6
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Un "développement asymptotique" est par définition [41] tel que chaque terme du développement est d'un ordre inférieur au précédent (on ne peut pas parler de série, car rien n'indique qu'il y aurait convergence pour un nombre infini de termes). Dans les formules (2.53), (2.54) et (2.55) :

- si  $\lambda$  est d'ordre 1, le rapport de deux termes successifs est d'ordre  $\frac{a}{\ell}$ , donc il faut  $\frac{a}{\ell} \ll 1$  pour avoir un développement asymptotique.

- si  $\lambda$  devient grand, chaque terme est d'ordre  $\lambda^n \left( \frac{a}{\ell} \right)^{n+1}$ .

Donc le rapport de deux termes successifs est d'ordre  $\lambda \frac{a}{\ell}$ ; pour avoir un développement asymptotique il faut  $\lambda \frac{a}{\ell} \ll 1$ .

Donc, dans tous les cas, il faut  $\lambda \frac{a}{\ell} \ll 1$ .

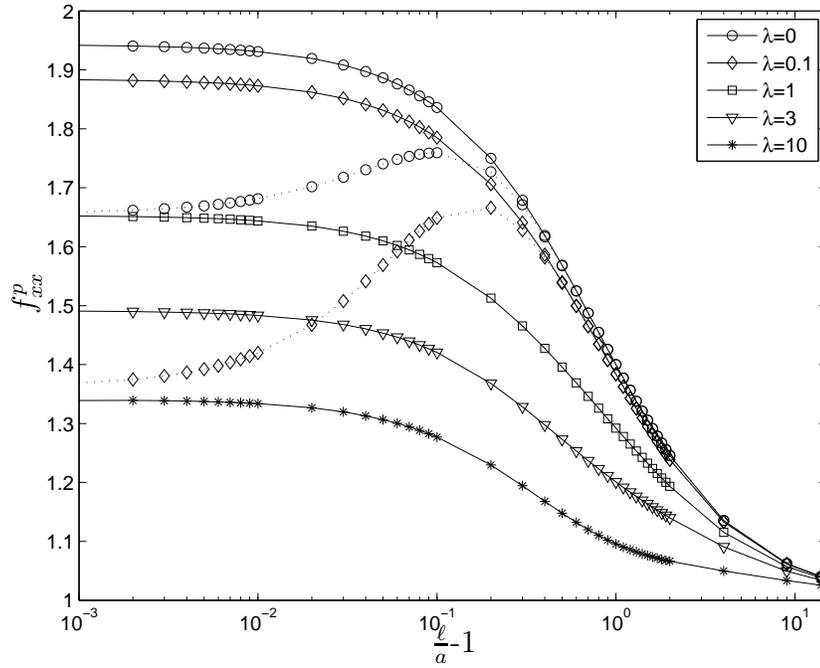


FIG. 2.9 – Résultats pour la force adimensionnée  $f_{xx}^p$  sur une sphère fixée dans un écoulement de cisaillement quadratique avec glissement sur la paroi en fonction de  $\ell/a - 1$ , pour différents glissements. Les résultats obtenus avec les coordonnées bipolaires sont représentés par les courbes en lignes continues et symboles. Les courbes en lignes pointillées avec symboles sont les résultats du développement asymptotique (2.53) pour des valeurs petites de  $\frac{a}{\ell}$  pour  $\lambda = 0, 0.1$ .

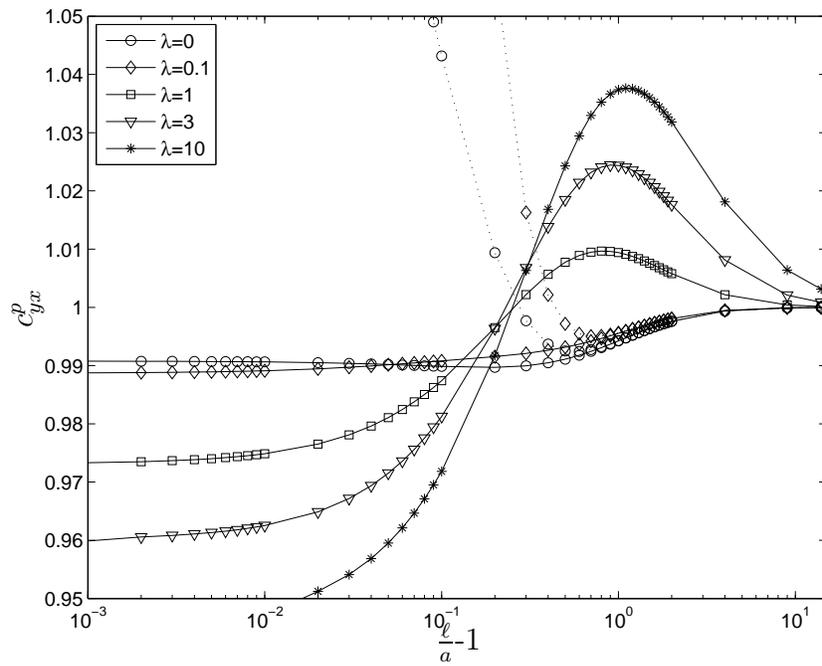


FIG. 2.10 – Résultats pour le couple adimensionné  $c_{yx}^p$  pour une sphère fixe dans un écoulement parabolique près d'une paroi sur laquelle s'exerce une condition de glissement et comparaison pour  $\lambda = 0, 0.1$  avec les résultats du développement asymptotique pour des valeurs de  $\frac{a}{l}$  assez petites. Les lignes continues sont les valeurs exactes du couple. Les lignes en pointillées sont les valeurs obtenues par le développement asymptotique (2.54) .

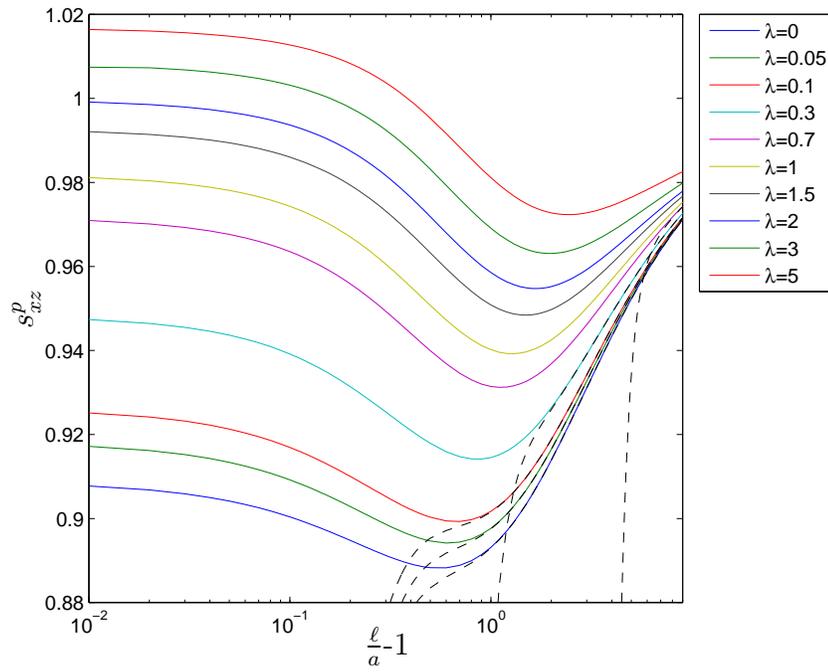


FIG. 2.11 – Résultats du coefficient du stresslet  $s_{xz}^p$  pour une sphère fixe dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi. Les lignes continues et en couleurs représentent les valeurs exactes du stresslet. Les courbes en tirets représentent les résultats du développement asymptotique (2.55) pour  $\frac{a}{l}$  petit pour les cas  $\lambda = 0, 0.05, 0.2, 0.3$  et  $0.7$ .

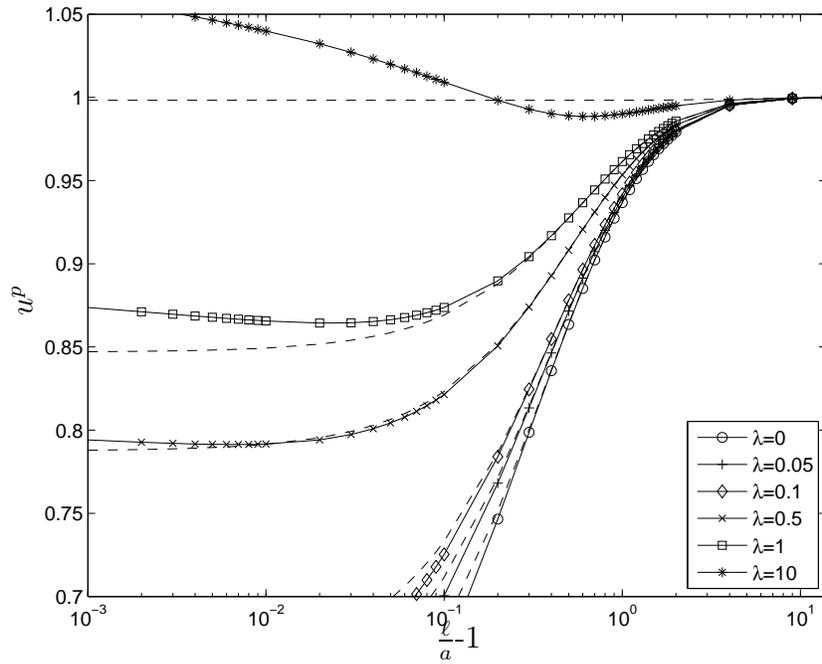


FIG. 2.12 – Vitesse de translation normalisée d’une sphère libre de mouvoir dans un écoulement parabolique lorsqu’une condition de glissement s’exerce sur la paroi. Les lignes continues représentent les valeurs exactes de la vitesse  $u^p$ . Les lignes en tirets représentent l’approximant de Padé (3,3) calculé d’après (2.56) pour une grande distance du centre de la sphère à la paroi.

L’approximant de Padé [42] permet, par comparaison avec le développement asymptotique, d’étendre le domaine de validité, dans notre cas, étendre vers les plus petites distances particule-paroi. La somme des degrés de numérateur et du dénominateur dans le calcul de l’approximant de Padé, peut être au maximum égale au degré du développement asymptotique. Dans les formules (2.56) et (2.57) la somme des degrés est 6, c’est pour cette raison que nous avons utilisé l’approximant de Padé(3,3). Si on met plus que (3,3), on a des coefficients indéterminés.



# Chapitre 3

## Détermination analytique du tenseur de Green pour le problème de glissement sur la paroi

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Présentation du problème</b>	<b>60</b>
<b>3.2</b>	<b>Détermination de <math>\mathbf{W}^k</math> et de <math>s^k</math></b>	<b>61</b>
3.2.1	Détermination des $B_j^{(k)}$ et des $B^{(k)}$	61
3.2.2	Expressions des composantes de la vitesse $W^k$ et de la pression $s^k$	66

---

Dans le cadre des écoulements à faible nombre de Reynolds, le problème est régi par les équations de Stokes linéaires et peut être résolu par différentes méthodes utilisant le tenseur de Green. On se propose dans ce chapitre de déterminer le tenseur de Green associé au problème suivant :

$$S_1 \left\{ \begin{array}{ll} \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans le domaine fluide } \mathcal{D}, \\ (\mathbf{u}, p) \rightarrow (\mathbf{0}, 0) & \text{loin du centre de la sphère,} \\ u_3 = 0 & \text{sur le plan } \Sigma \text{ (en } x_3 = 0), \\ u_1 = b \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, u_2 = b \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \text{sur le plan } \Sigma \text{ (en } x_3 = 0), \\ \mathbf{u} = -\mathbf{u}_\infty + \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}' & \text{sur la surface de la sphère.} \end{array} \right.$$

Le tenseur de Green recherché correspond à l'écoulement dû à une force ponctuelle  $\mathbf{f}$ , placée en un point  $\mathbf{y}$  du fluide à une distance  $h = \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_3 > 0$  du plan. La force  $\mathbf{f}$  est supposée dirigée selon

$\mathbf{e}_k$  où  $k = (1, 2, 3)$  et  $(\mathbf{e}_k)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , et où l'on utilise les coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$  avec  $\Sigma(x_3 = 0)$  la frontière plane de l'écoulement.

### 3.1 Présentation du problème

On note  $G_j^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  et  $H^k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  la vitesse et la pression au point d'observation  $\mathbf{x}$  dues à une force ponctuelle  $f\mathbf{e}_k$  placée en  $\mathbf{y}$ . L'écoulement est régi par les équations de Stokes avec singularité placée en  $\mathbf{y}$  :

$$\mu \nabla^2 \mathbf{G}^k - \nabla H^k + f \delta_{3d}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{e}_k = 0 \quad \text{dans le domaine } x \cdot \mathbf{e}_3 > 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{G}^k = 0 \quad \text{dans le domaine } x \cdot \mathbf{e}_3 > 0, \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{G}^k$  et  $H^k$  sont respectivement la vitesse et la pression associées au Stokeslet,  $f$  : intensité de la force ponctuelle,

$\delta_{3d}(x - y) = \delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2)\delta(x_3 - y_3)$  où  $\delta$  est la mesure de Dirac. Grâce à la linéarité des équations (3.1)-(3.2), la solution peut être calculée par la méthode des images sous la forme suivante

$$\mathbf{G}^k = \mathbf{u}^k + \mathbf{v}^k + \mathbf{W}^k, \quad (3.3)$$

$$H^k = p^k + q^k + s^k \quad (3.4)$$

où  $(\mathbf{u}^k, p^k)$  est la solution fondamentale singulière due au Stokeslet dans un domaine infini qui satisfait le système

$$S_2 \begin{cases} \mu \nabla^2 \mathbf{u}^k = \nabla p^k - f \delta_{3d}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{e}_k, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^k = 0 \\ (\mathbf{u}^k, p^k) \rightarrow (\mathbf{0}, 0) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{pour } x_3 > 0, \\ \text{pour } |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow \infty. \end{array}$$

Cette solution est donnée par

$$\mathbf{u}^k \cdot \mathbf{e}_i = u_i^k = \frac{f}{8\pi\mu} \left[ \frac{\delta_{ik}}{R} + \frac{R_i R_k}{R^3} \right], \quad (3.5)$$

$$p^k = \frac{f}{4\pi} \frac{R_k}{R^3}. \quad (3.6)$$

où  $\delta_{ik}$  est le symbole de Kronecker,  $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  et  $R_i = x_i - y_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

L'écoulement  $(\mathbf{v}^k, q^k)$  est la solution fondamentale, régulière dans le domaine fluide, due au Stokeslet image pris au point  $\mathbf{y}'$  image du point  $\mathbf{y}$  par rapport au plan  $\Sigma(x_3 = 0)$  et d'intensité  $-f$ . Elle s'écrit alors

$$\mathbf{v}^k \cdot \mathbf{e}_i = v_i^k = -\frac{f}{8\pi\mu} \left[ \frac{\delta_{ik}}{R'} + \frac{R'_i R'_k}{R'^3} \right], \quad (3.7)$$

$$q^k = -\frac{f}{4\pi} \frac{R'_k}{R'^3}. \quad (3.8)$$

Puisque  $\mathbf{y}'$  est le symétrique de  $\mathbf{y}$  par rapport au plan  $\Sigma$  nous avons  $R' = |\mathbf{x} - \mathbf{y}'|$  et  $R'_i = x_i - y'_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

Donc, pour calculer le tenseur de Green, il reste à déterminer l'écoulement  $(\mathbf{W}^k, s^k)$  pour  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

## 3.2 Détermination de $\mathbf{W}^k$ et de $s^k$

### 3.2.1 Détermination des $B_j^{(k)}$ et des $B^{(k)}$

L'écoulement  $(\mathbf{W}^k, s^k)$  vérifie les équations de Stokes suivantes

$$S_3 \begin{cases} \mu \nabla^2 \mathbf{W}^k = \nabla s^k & \text{dans le domaine } x \cdot \mathbf{e}_3 > 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{W}^k = 0 & \text{dans le domaine } x \cdot \mathbf{e}_3 > 0, \\ (\mathbf{W}^k, s^k) \rightarrow (0, 0) & \text{pour } R \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Pour déterminer la vitesse  $\mathbf{W}^k$  et la pression  $s^k$ , nous utilisons la transformée de Fourier bidimensionnelle  $\hat{g}$  d'une fonction  $g(R_1, R_2, R_3)$  telle que

$$\hat{g}(\lambda_1, \lambda_2, R_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(R_1, R_2, R_3) e^{i(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)} dR_1 dR_2 \quad (3.9)$$

avec  $i$  nombre complexe usuel tel que  $i^2 = -1$ . On a aussi besoin de la transformée de Fourier bidimensionnelle inverse

$$g(R_1, R_2, R_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\lambda_1, \lambda_2, R_3) e^{i(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)} d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (3.10)$$

On posera dans la suite  $\xi = (\lambda_1 + \lambda_2)^{\frac{1}{2}}$ . En appliquant la divergence aux deux premières équations de  $S_3$ , on montre que la pression  $s^k$  est harmonique c'est-à-dire que  $\Delta s^k = 0$ . Par transformée de Fourier nous avons donc

$$-\xi^2 \hat{s}^k + \frac{\partial^2}{\partial R'_3 \partial R'_3} \hat{s}^k = 0 \quad (3.11)$$

qui est une équation linéaire homogène du second ordre à coefficients réels constants. La solution retenue, telle  $\hat{s}^k \rightarrow 0$  si  $R'_3 \rightarrow +\infty$ , est donc

$$\hat{s}^k = 2\mu \frac{h}{4\pi\mu} B^{(k)} e^{-\xi(R'_3 - h)}. \quad (3.12)$$

Par suite et d'après  $S_3$ , la transformée de Fourier  $\hat{W}_j^k$  de la composante  $W_j^k = \mathbf{W}^k \cdot \mathbf{e}_j$  est donnée par

$$\hat{W}_j^k = \frac{h}{4\pi\mu} [B_j^{(k)} + (i \frac{\lambda_1 \delta_{1j} + \lambda_2 \delta_{2j}}{\xi} + \delta_{j3})(R'_3 - h)B^{(k)}] e^{-\xi(R'_3 - h)} \quad (3.13)$$

avec

$$B^{(k)} = i\lambda_1 B_1^{(k)} + i\lambda_2 B_2^{(k)} + \xi B_3^{(k)}. \quad (3.14)$$

Pour déterminer les quantités  $B^{(k)}$  et  $B_j^{(k)}$  nous exploitons les conditions aux limites sur le plan situé en  $x_3 = 0$ , c'est-à-dire en  $R'_3 = h$ .

★ Condition d'imperméabilité sur le plan. Cette condition s'écrit

$$G_3^k = u_3^k + v_3^k + W_3^k = 0. \quad (3.15)$$

D'après (3.5) et (3.7) on a

$$u_3^k + v_3^k = -\frac{h}{4\pi\mu} [\delta_{\gamma k} \frac{R'_\gamma}{R'_3}]. \quad (3.16)$$

où  $\gamma = 1, 2$  et où l'on utilise la convention de sommation d'Einstein (somme sur  $\gamma$ ) pour  $k=(1,2,3)$ .

$$\hat{u}_3^k + \hat{v}_3^k = \frac{h}{4\pi\mu} [\delta_{\gamma k}] [-i\lambda_\gamma \frac{e^{-h\xi}}{\xi}] \quad (3.17)$$

En posant  $g_1(\xi) = \frac{e^{-h\xi}}{\xi}$  nous avons donc

$$\hat{u}_3^k + \hat{v}_3^k = \frac{h}{4\pi\mu} [-i\lambda_\gamma g_1(\xi)] \delta_{\gamma k}. \quad (3.18)$$

Or en  $x_3 = 0$  nous avons

$$\hat{W}_3^k = -(\hat{u}_3^k + \hat{v}_3^k) = \frac{h}{4\pi\mu} i\delta_{\gamma k} \lambda_\gamma g_1(\xi) \quad (3.19)$$

et d'après (3.13) en  $R'_3 = h$

$$\hat{W}_3^k = \frac{h}{4\pi\mu} B_3^{(k)}. \quad (3.20)$$

Ainsi

$$B_3^{(k)} = i\delta_{\gamma k} \lambda_\gamma g_1(\xi). \quad (3.21)$$

★ La condition de glissement sur la paroi s'écrit

$$G_j^k = u_j^k + v_j^k + W_j^k = b \frac{\partial}{\partial R'_3} [u_j^k + v_j^k + W_j^k], j = (1, 2). \quad (3.22)$$

Sur le plan, en  $x_3 = 0$ ,  $W_1^k$  et  $W_2^k$  sont telles que :

$$u_1^k + v_1^k + W_1^k = b \frac{\partial}{\partial R'_3} [u_1^k + v_1^k + W_1^k], \quad (3.23)$$

$$u_2^k + v_2^k + W_2^k = b \frac{\partial}{\partial R'_3} [u_2^k + v_2^k + W_2^k]. \quad (3.24)$$

Les deux dernières relations (3.23) et (3.24) sont symétriques, donc on peut faire le calcul pour un seul  $j$  où  $j = 1, 2$ . On sait qu'en  $R'_3 = h$  et si  $j \neq 3$ , d'après (3.5) et (3.7) on a

$$u_j^k + v_j^k = -\frac{h}{4\pi\mu} \delta_{3k} \delta_{\gamma j} \frac{R'_\gamma}{R'^3}. \quad (3.25)$$

Donc

$$\hat{u}_j^k + \hat{v}_j^k = \frac{h}{4\pi\mu} \delta_{3k} \delta_{\gamma j} [-i\lambda_\gamma g_1(\xi)]. \quad (3.26)$$

Enfin, en  $R'_3 = h$  d'après (3.13) nous avons

$$\hat{W}_j^k = B_j^k, \quad (j = 1, 2). \quad (3.27)$$

Par suite en  $R'_3 = h$  ( $x_3 = 0$ ) et  $j \neq 3$  nous obtenons

$$\hat{u}_j^k + \hat{v}_j^k + \hat{W}_j^k = B_j^k - \frac{h}{4\pi\mu} \delta_{3k} \delta_{\gamma j} [i\lambda_\gamma g_1(\xi)], \quad (j = 1, 2). \quad (3.28)$$

★ Étude du morceau  $\frac{\partial}{\partial R'_3} [u_j^k + v_j^k + \hat{W}_j^k]$  et de sa transformée de Fourier. On sait que

$$u_j^k = \frac{1}{8\pi\mu} \left[ \frac{\delta_{jk}}{R} + \frac{R_j R_k}{R^3} \right] \quad (3.29)$$

et

$$v_j^k = -\frac{1}{8\pi\mu} \left[ \frac{\delta_{jk}}{R} + \frac{R'_j R'_k}{R'^3} \right]. \quad (3.30)$$

Sur le plan on a  $R = R'$ ,  $R_3 = x_3 - h$ ,  $R'_3 = x_3 + h$  et  $\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial R'_3} = \frac{\partial}{\partial R_3}$  ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial x_3} [u_j^k + v_j^k] = \frac{\partial}{\partial R_3} u_j^k + \frac{\partial}{\partial R'_3} v_j^k.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} [u_j^k + v_j^k] &= \frac{1}{8\pi\mu} \left\{ \delta_{jk} \left[ -\frac{R_3}{R^3} + \frac{R'_3}{R'^3} \right] - 3 \frac{R_j R_k R_3}{R^5} + 3 \frac{R'_j R'_k R'_3}{R'^5} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{R^3} [\gamma_{j3} R_k + \gamma_{k3} R_j] - \frac{1}{R'^3} [\gamma_{j3} R'_k + \gamma_{k3} R'_j] \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Maintenant sur le plan, en  $R' = R = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $R_3 = -h$  et  $R'_3 = h$  nous avons

$$R_k - R'_k = -2h\delta_{k3}, \quad (3.32)$$

$$R'_j R'_k R'_3 - R_j R_k R_3 = h(R'_j R'_k + R_j R_k). \quad (3.33)$$

Si  $j = 3 = k$  on a  $R'_j R'_k + R_j R_k = 2h^2$  et si ( $j = 3$  et  $k \neq 3$ ) ou ( $k = 3$  et  $j \neq 3$ ) on a  $R'_j R'_k + R_j R_k = 2R'_j R'_k$  d'où

$$R'_j R'_k + R_j R_k = 2h^2 \delta_{j3} \delta_{k3} + 2\delta'_{j3} \delta'_{k3} R'_j R'_k \quad (3.34)$$

avec  $\delta'_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ . Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} [u_j^k + v_j^k] &= \frac{1}{8\pi\mu} \left\{ \frac{2h\delta_{jk}}{R'^3} + \frac{1}{R'^3} [-2h\delta_{j3}\delta_{k3} - 2h\delta_{k3}\delta_{j3}] + \right. \\ &\quad \left. \frac{3h}{R'^5} [2h^2\delta_{j3}\delta_{k3} + 2\delta'_{j3}\delta'_{k3}R'_jR'_k] \right\}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} [u_j^k + v_j^k] &= \frac{h}{4\pi\mu} \left[ \frac{\delta_{jk}}{R'^3} - \frac{2\delta_{j3}\delta_{k3}}{R'^3} + \frac{3}{R'^5} [h^2\delta_{j3}\delta_{k3}] + \right. \\ &\quad \left. \frac{3}{R'^5} [\delta'_{j3}\delta'_{k3}R'_jR'_k] \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

En utilisant ensuite la relation

$$\frac{R'_jR'_k}{R'^5} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial R'_j \partial R'_k} \left( \frac{1}{R'} \right) + \frac{\delta_{jk}}{3R'^3}, \quad (3.37)$$

on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} [u_j^k + v_j^k] &= \frac{h}{4\pi\mu} \left[ (\delta_{jk} - 2\delta_{j3}\delta_{k3} + \delta_{jk}\delta'_{k3}\delta'_{j3}) \frac{1}{R'^3} + \right. \\ &\quad \left. \frac{3h^2}{R'^5} \delta_{jk}\delta_{k3} + \delta'_{j3}\delta'_{k3} \frac{\partial}{\partial R'_k} \left( \frac{1}{R'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

On a  $R'^2 = (\rho^2 + h^2)$  avec  $\rho^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ . Soient les fonctions suivantes

$$g_1(\xi) = \int_0^\infty \frac{\rho J_0(\rho\xi) d\xi}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{-h\xi}}{\xi}, \quad (3.39)$$

$$g_3(\xi) = \int_0^\infty \frac{\rho J_0(\rho\xi) d\xi}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^{-h\xi}}{h}, \quad (3.40)$$

$$g_5(\xi) = \int_0^\infty \frac{\rho J_0(\rho\xi) d\xi}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} = \left[ \frac{1 + h\xi}{3h^3} \right] e^{-h\xi}. \quad (3.41)$$

Nous verrons dans la suite que la fonction  $g_5$  n'intervient pas en fait dans nos résultats ultérieurs.

Calculons la quantité  $\tau = (\delta_{jk} - 2\delta_{j3}\delta_{k3} + \delta_{jk}\delta'_{k3}\delta'_{j3})$  :

$$\begin{aligned} \tau &= -1, \quad \text{si } j = k = 3, \\ \tau &= 0, \quad \text{si } j = 3 \text{ et } k \neq 3, \\ \tau &= 0, \quad \text{si } j \neq 3 \text{ et } k = 3, \\ \tau &= 2\delta_{jk}, \quad \text{si } j \neq 3 \text{ et } k \neq 3. \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de (3.38) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} [\hat{u}_j^k + \hat{v}_j^k] &= \frac{h}{4\pi\mu} \left[ (\delta_{jk} - 2\delta_{j3}\delta_{k3} + \delta_{jk}\delta'_{k3}\delta'_{j3}) g_3(\xi) + \right. \\ &\quad \left. 3h^2\delta_{jk}\delta_{k3} g_5(\xi) - \delta'_{j3}\delta'_{k3} \lambda_j \lambda_k g_1(\xi) \right]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_3}[\hat{W}_j^k] = -\xi B_j^{(k)} + (i\lambda_\gamma \frac{\delta_{\gamma j}}{\xi} + \delta_{j3})B^{(k)}, \quad (j = 1, 2). \quad (3.43)$$

D'après (3.23),(3.24),(3.28),(3.42) et (3.43) nous obtenons

$$B_j^{(k)} - \frac{h}{4\pi\mu}\delta_{3k}\delta_{\gamma j}[i\lambda_\gamma g_1(\xi)] = b[-\xi B_j^{(k)} + i\lambda_\gamma \frac{\delta_{\gamma j}}{\xi}B^{(k)} + a_3^j g_3(\xi) + a_5^j g_5(\xi) - \lambda_j \lambda_k a_1^j g_1(\xi)] \quad (3.44)$$

avec les coefficients suivants

$$a_1^j = \delta'_{j3}\delta'_{k3} = (1 - \delta_{j3})(1 - \delta_{k3}), \quad (3.45)$$

$$a_3^j = \delta_{jk} - 2\delta_{j3}\delta_{k3} + \delta_{jk}\delta'_{k3}\delta'_{j3}, \quad (3.46)$$

$$a_5^j = 3h^2\delta_{jk}\delta_{k3}. \quad (3.47)$$

On obtient par suite les expressions des  $B_j^{(k)}$  et des  $B^{(k)}$  pour  $(j, k) \in \{1, 2, 3\}$ . Les expressions ci-dessous ont été obtenues et vérifiées avec le logiciel Maple :

Pour  $k = 3$  :

$$B_1^{(3)} = \frac{i\lambda_1 g_1(\xi)(b\xi^2 + \xi)}{2\xi^3 b^2 + 3b\xi^2 + \xi}, \quad (3.48)$$

$$B_2^{(3)} = \frac{i\lambda_2 g_1(\xi)(b\xi^2 + \xi)}{2\xi^3 b^2 + 3b\xi^2 + \xi}, \quad (3.49)$$

$$B_3^{(3)} = 0. \quad (3.50)$$

$$B^{(3)} = \frac{-g_1(\xi)\xi^2(b\xi^2 + \xi)}{2\xi^3 b^2 + 3b\xi^2 + \xi}. \quad (3.51)$$

Pour  $k = 1$  :

$$B_1^{(1)} = \frac{-2b(bg_1(\xi)\xi^4 + g_1(\xi)\xi^3 - b\xi^2(g_3(\xi) + g_1(\xi)\lambda_2^2) - g_1(\xi)\xi\lambda_2^2 - bg_3(\xi)\lambda_2^2 - g_3(\xi)\xi)}{2\xi^3 b^2 + 3b\xi^2 + \xi}, \quad (3.52)$$

$$B_2^{(1)} = -2b\lambda_1\lambda_2 \left[ \frac{bg_1(\xi)\xi^2 + g_1(\xi)\xi + bg_3(\xi)}{2\xi^3 b^2 + 3b\xi^2 + \xi} \right], \quad (3.53)$$

$$B_3^{(1)} = i\lambda_1 g_1(\xi). \quad (3.54)$$

$$B^{(1)} = i\lambda_1 \left[ \frac{(2bg_3(\xi) + g_1(\xi)\xi)}{2b\xi + 1} \right]. \quad (3.55)$$

pour  $k = 2$ ,

$$B_1^{(2)} = -2b\lambda_1\lambda_2 \left[ \frac{bg_1(\xi)\xi^2 + g_1(\xi)\xi + bg_3(\xi)}{2\xi^3 b^2 + 3b\xi^2 + \xi} \right], \quad (3.56)$$

$$B_2^{(2)} = \frac{-2b(bg_1(\xi)\xi^4 + g_1(\xi)\xi^3 - b\xi^2(g_3(\xi) + g_1(\xi)\lambda_1^2) - g_1(\xi)\xi\lambda_1^2 - bg_3(\xi)\lambda_1^2 - g_3(\xi)\xi)}{2\xi^3 b^2 + 3b\xi^2 + \xi}, \quad (3.57)$$

$$B_3^{(2)} = i\lambda_2 g_1(\xi). \quad (3.58)$$

$$B^{(2)} = i\lambda_2 \left[ \frac{(2bg_3(\xi) + g_1(\xi)\xi)}{2b\xi + 1} \right]. \quad (3.59)$$

### 3.2.2 Expressions des composantes de la vitesse $W^k$ et de la pression $s^k$

On injecte les expressions des  $B_j^{(k)}$  et  $B^{(k)}$  dans celles de la vitesse  $\hat{W}_j^k$  et de la pression  $\hat{s}^k$  pour  $(j, k) \in \{1, 2, 3\}$ . D'après (3.13),(3.12),(3.55),(3.52),(3.53),(3.59),(3.56),(3.57), (3.48),(3.49) et (3.51) on obtient les résultats suivants

pour  $k = 1$ ,

$$\hat{W}_1^1(\lambda_1, \lambda_2) = \left[ -\frac{\lambda_1^2(2b+x_3)e^{-\xi R'_3}}{\xi(1+2b\xi)} + \frac{2be^{-\xi R'_3}}{h(1+2b\xi)} + \frac{2b^2\lambda_2^2e^{-\xi R'_3}}{h\xi(1+b\xi)(1+2b\xi)} - \frac{2b\lambda_1^2x_3e^{-\xi R'_3}}{h\xi(1+2b\xi)} \right] \frac{h}{4\pi\mu}, \quad (3.60)$$

$$\hat{W}_2^1(\lambda_1, \lambda_2) = \left[ -\frac{(2b+x_3)e^{-\xi R'_3}}{\xi(1+2b\xi)} - \frac{2b^2\lambda_1\lambda_2e^{-\xi R'_3}}{h\xi(1+b\xi)(1+2b\xi)} - \frac{2b\lambda_1\lambda_2x_3e^{-\xi R'_3}}{h\xi(1+2b\xi)} \right] \frac{h}{4\pi\mu}, \quad (3.61)$$

$$\hat{W}_3^1(\lambda_1, \lambda_2) = \left[ \frac{i\lambda_1e^{-\xi R'_3}}{\xi} + \frac{i\lambda_1x_3e^{-\xi R'_3}}{(1+2b\xi)} + \frac{i\lambda_12bx_3e^{-\xi R'_3}}{h(1+2b\xi)} \right] \frac{h}{4\pi\mu}, \quad (3.62)$$

$$\hat{s}^1(\lambda_1, \lambda_2) = \left[ 2\mu i\lambda_1 \left( \frac{2b}{h(1+2b\xi)} + \frac{1}{(1+2b\xi)} \right) \right] \frac{h}{4\pi\mu}. \quad (3.63)$$

Pour  $k = 2$ ,

on peut remarquer que les expressions des  $B_j^{(k)}$  et  $B^{(k)}$  sont symétriques, c'est-à-dire

$$B_1^2(\lambda_1, \lambda_2) = B_2^1(\lambda_2, \lambda_1), \quad (3.64)$$

$$B_2^2(\lambda_1, \lambda_2) = B_1^1(\lambda_2, \lambda_1), \quad (3.65)$$

$$B^2(\lambda_1, \lambda_2) = B^1(\lambda_2, \lambda_1). \quad (3.66)$$

Par suite les vitesses  $\hat{W}_j^k$  sont symétriques au même sens que les  $B_j^{(k)}$  et  $B^{(k)}$

$$\hat{W}_1^2(\lambda_1, \lambda_2) = \hat{W}_2^1(\lambda_2, \lambda_1), \quad (3.67)$$

$$\hat{W}_2^2(\lambda_1, \lambda_2) = \hat{W}_1^1(\lambda_2, \lambda_1), \quad (3.68)$$

$$\hat{W}_3^2(\lambda_1, \lambda_2) = \hat{W}_3^1(\lambda_2, \lambda_1), \quad (3.69)$$

$$\hat{s}^2(\lambda_1, \lambda_2) = \hat{s}^1(\lambda_2, \lambda_1). \quad (3.70)$$

Pour  $k = 3$

$$\hat{W}_1^3(\lambda_1, \lambda_2) = \left[ \frac{i\lambda_1 e^{-\xi R'_3}}{\xi(1+2b\xi)} - \frac{i\lambda_1 x_3 e^{-\xi R'_3}}{(1+2b\xi)} \right] \frac{h}{4\pi\mu}, \quad (3.71)$$

$$\hat{W}_2^3(\lambda_1, \lambda_2) = \left[ \frac{i\lambda_2 e^{-\xi R'_3}}{\xi(1+2b\xi)} - \frac{i\lambda_2 x_3 e^{-\xi R'_3}}{\xi(1+2b\xi)} \right] \frac{h}{4\pi\mu}, \quad (3.72)$$

$$\hat{W}_2^3(\lambda_1, \lambda_2) = \left[ \frac{-\xi x_3 e^{-\xi R'_3}}{(1+2b\xi)} \right] \frac{h}{4\pi\mu}, \quad (3.73)$$

$$\hat{s}^3(\lambda_1, \lambda_2) = \left[ -2\mu_f \frac{\xi e^{-\xi R'_3}}{(1+2b\xi)} \right] \frac{h}{4\pi\mu}. \quad (3.74)$$

Les transformées de Fourier des vitesses et de pression  $\hat{W}_j^{(k)}$  et  $\hat{s}^{(k)}$  pour tous  $(j, k) \in \{1, 2, 3\}$  ont la forme suivante

$$\hat{f} = e^{-\xi R'_3} \{ \hat{h}(\xi) + i\lambda_1 \hat{h}_1(\xi) + i\lambda_2 \hat{h}_2(\xi) + \lambda_1 \lambda_2 \hat{h}_3(\xi) + \lambda_1^2 \hat{h}_4(\xi) + \lambda_2^2 \hat{h}_5(\xi) \}. \quad (3.75)$$

On cherche à écrire la transformée de Fourier inverse de la fonction  $\hat{f}$ . Comme  $\hat{h}(\xi)$  est une fonction radiale, sa transformée de Fourier inverse est donnée par l'expression suivante où  $J_0$  la fonction de Bessel d'ordre 0

$$\hat{h} = \int_0^\infty h(\xi) J_0(\rho\xi) \xi d\xi. \quad (3.76)$$

Cette expression définit la transformée de Hankel.

En utilisant (3.10), nous avons

$$i\lambda_\alpha \hat{h}_\beta(\xi) = -\frac{\partial}{\partial R_\alpha} \hat{h}_\beta(\xi) \quad \text{pour } \alpha = (1, 2), \text{ et } \beta = (1, 2, 3, 4, 5) \quad (3.77)$$

$$\lambda_\alpha \lambda_\gamma \hat{h}_\beta(\xi) = -\frac{\partial^2}{\partial R_\alpha \partial R_\gamma} \hat{h}_\beta(\xi) \quad \text{pour } \alpha = (1, 2), \gamma = (1, 2) \text{ et } \beta = (1, 2, 3, 4, 5) \quad (3.78)$$

Pour écrire finalement les transformées de Fourier inverses de ces  $\hat{h}_\beta$  nous utilisons les relations suivantes où  $J_1$  la fonction de Bessel d'ordre 1 :

Pour tout  $\langle g \rangle$  définie par

$$\langle g \rangle = \int_0^\infty e^{-R'_3 \xi} g(\xi) J_0(\rho\xi) d\xi, \quad (3.79)$$

nous avons pour  $\rho > 0$ ,

$$\frac{\partial \langle g \rangle}{\partial R'_3} = -\langle \xi g \rangle, \quad \frac{\partial \langle g \rangle}{\partial R'_\alpha} = -\frac{R'_\alpha}{\rho} \int_0^\infty \xi J_1(\rho\xi) g(\xi) e^{-R'_3 \xi} d\xi, \quad \alpha = 1, 2, \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \langle g \rangle}{\partial R'_\alpha \partial R'_\beta} &= -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{\rho} \int_0^\infty \xi J_1(\rho\xi) g(\xi) e^{-R'_3 \xi} d\xi \\ &+ \frac{R'_\alpha R'_\beta}{\rho} \int_0^\infty \xi^2 \left[ 2 \frac{J_1(\rho\xi)}{\rho\xi} - J_0(\rho\xi) \right] g(\xi) e^{-R'_3 \xi} d\xi, \quad (\alpha, \beta) = (1, 2), \end{aligned} \quad (3.81)$$

et pour le cas  $\rho = 0$

$$\frac{\partial \langle g \rangle}{\partial R'_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 \langle g \rangle}{\partial R'_\alpha \partial R'_\beta} = -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{2} \int_0^\infty \xi^2 g(\xi) e^{-R'_3 \xi} d\xi, \quad (\alpha, \beta) = (1, 2). \quad (3.82)$$

Présentons maintenant les résultats obtenus pour les composantes de la vitesse.

★ cas  $k = 1$

D'après (3.60),(3.61),(3.62), on obtient

Pour le cas  $j = 1$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\mu}{h} W_1^1 &= (2b + x_3) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi + \frac{2b}{h} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi \\ &- \frac{2b^2}{h} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)(1 + b\xi)} d\xi + \frac{2bx_3}{h} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi \end{aligned} \quad (3.83)$$

ce qui donne à partir de (3.81) et (3.82) les résultats suivants

-si  $\rho = 0$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\mu}{h} W_1^1 &= -\frac{(2b + x_3)}{2} \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi}}{(1 + 2b\xi)} d\xi + \frac{2b}{h} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi}}{(1 + 2b\xi)} d\xi \\ &+ \frac{b^2}{h} \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi}}{(1 + b\xi)(1 + 2b\xi)} d\xi - \frac{bx_3}{h} \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi}}{(1 + 2b\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\mu}{h} W_1^1 &= -(b + x_3(1/2 + b/h)) \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi}}{(1 + 2b\xi)} d\xi + \frac{2b}{h} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi}}{(1 + 2b\xi)} d\xi \\ &+ \frac{b^2}{h} \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi}}{(1 + b\xi)(1 + 2b\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (3.85)$$

-si  $\rho > 0$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\mu}{h} W_1^1(R_1, R_2) &= -\frac{(2b + x_3)}{\rho} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi + \frac{2b^2}{\rho h} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)(1 + b\xi)} d\xi \\ &+ \frac{(2b + x_3)R_1^2}{\rho^2} \int_0^\infty \frac{\xi^2 \left[ 2 \frac{J_1(\rho\xi)}{\rho\xi} - J_0(\rho\xi) \right] e^{-R'_3 \xi}}{(1 + 2b\xi)} d\xi + \frac{2b}{h} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi \\ &- \frac{2b^2 R_2^2}{h\rho^2} \int_0^\infty \frac{\xi^2 \left[ 2 \frac{J_1(\rho\xi)}{\rho\xi} - J_0(\rho\xi) \right] e^{-R'_3 \xi}}{(1 + 2b\xi)(1 + b\xi)} d\xi - \frac{2bx_3}{\rho h} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi \\ &+ \frac{2bx_3 R_1^2}{h\rho^2} \int_0^\infty \frac{\xi^2 \left[ 2 \frac{J_1(\rho\xi)}{\rho\xi} - J_0(\rho\xi) \right] e^{-R'_3 \xi}}{(1 + 2b\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi\mu}{h}W_1^1(R_1, R_2) &= (2b + x_3(1 + 2b/h)) \\
&\quad \left\{ \left(\frac{R_1}{\rho}\right)^2 \int_0^\infty \frac{\xi^2 [2\frac{J_1(\rho\xi)}{\rho\xi} - J_0(\rho\xi)] e^{-R'_3\xi}}{(1 + 2b\xi)} d\xi - \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3\xi} J_1(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi \right\} \\
&\quad + \frac{2b^2}{h} \left[ \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3\xi} J_1(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)(1 + b\xi)} d\xi - \left(\frac{R_2}{\rho}\right)^2 \int_0^\infty \frac{\xi^2 [2\frac{J_1(\rho\xi)}{\rho\xi} - J_0(\rho\xi)] e^{-R'_3\xi}}{(1 + 2b\xi)(1 + b\xi)} d\xi \right] \\
&\quad + \frac{2b}{h} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi. \tag{3.87}
\end{aligned}$$

Pour le cas  $j = 2$

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi\mu}{h}W_2^1 &= (2b + x_3) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi + \frac{2bx_3}{h} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi \\
&\quad + \frac{2b^2}{h} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)(1 + b\xi)} d\xi, \tag{3.88}
\end{aligned}$$

-si  $\rho = 0$

$$W_2^1 = 0. \tag{3.89}$$

-si  $\rho > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi\mu}{h}W_2^1(R_1, R_2) &= \frac{(2b + x_3)R_1R_2}{\rho^2} \int_0^\infty \frac{\xi^2 [2\frac{J_1(\rho\xi)}{\rho\xi} - J_0(\rho\xi)] e^{-R'_3\xi}}{(1 + 2b\xi)} d\xi \\
&\quad + \frac{2bx_3R_1R_2}{\rho^2 h} \int_0^\infty \frac{\xi^2 [2\frac{J_1(\rho\xi)}{\rho\xi} - J_0(\rho\xi)] e^{-R'_3\xi}}{(1 + 2b\xi)} d\xi \\
&\quad + \frac{2b^2R_1R_2}{\rho^2 h} \int_0^\infty \frac{\xi^2 [2\frac{J_1(\rho\xi)}{\rho\xi} - J_0(\rho\xi)] e^{-R'_3\xi}}{(1 + 2b\xi)(1 + b\xi)} d\xi. \tag{3.90}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi\mu}{h}W_2^1(R_1, R_2) &= \frac{R_1R_2}{\rho^2} \{ [x_3 + 2b(1 + x_3/h)] \\
&\quad \int_0^\infty \frac{\xi^2 [2\frac{J_1(\rho\xi)}{\rho\xi} - J_0(\rho\xi)] e^{-R'_3\xi}}{(1 + 2b\xi)} d\xi \\
&\quad + \frac{2b^2}{h} \int_0^\infty \frac{\xi^2 [2\frac{J_1(\rho\xi)}{\rho\xi} - J_0(\rho\xi)] e^{-R'_3\xi}}{(1 + 2b\xi)(1 + b\xi)} d\xi \}. \tag{3.91}
\end{aligned}$$

Pour le cas  $j = 3$

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi\mu}{h}W_3^1 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^\infty e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi) d\xi - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi \\
&\quad - \frac{2bx_3}{h} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi. \tag{3.92}
\end{aligned}$$

-si  $\rho = 0$

$$W_3^1 = 0. \quad (3.93)$$

-si  $\rho > 0$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\mu}{h} W_3^1(R_1, R_2) &= \frac{R_1}{\rho} \int_0^\infty \xi J_1(\rho\xi) e^{-R_3'\xi} d\xi + \frac{x_3 R_1}{\rho} \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R_3'\xi} J_1(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi \\ &+ \frac{2bx_3 R_1}{h\rho} \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R_3'\xi} J_1(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\frac{4\pi\mu}{h} W_3^1(R_1, R_2) = \frac{R_1}{\rho} \left\{ x_3(1+2b/h) \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R_3'\xi} J_1(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi + \frac{\rho}{(\rho^2 + R_3'^2)^{3/2}} \right\}. \quad (3.95)$$

★ cas  $k = 2$

Les calculs sont analogues au cas  $k = 1$ , mais ici par raison de symétrie on écrit que :

$$W_1^2(R_1, R_2) = W_2^1(R_2, R_1), \quad (3.96)$$

$$W_2^2(R_1, R_2) = W_1^1(R_2, R_1), \quad (3.97)$$

$$W_3^2(R_1, R_2) = W_3^1(R_2, R_1). \quad (3.98)$$

★ cas  $k = 3$

Pour le cas  $j = 1$

$$\frac{4\pi\mu}{h} W_1^3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^\infty \frac{e^{-R_3'\xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R_3'\xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi. \quad (3.99)$$

-si  $\rho = 0$

$$W_1^3 = 0, \quad (3.100)$$

-si  $\rho > 0$

$$\frac{4\pi\mu}{h} W_1^3(R_1, R_2) = \frac{R_1}{\rho} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R_3'\xi} J_1(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi - \frac{x_3 R_1}{\rho} \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R_3'\xi} J_1(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi. \quad (3.101)$$

Pour le cas  $j = 2$

$$\frac{4\pi\mu}{h} W_2^3 = -\frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^\infty \frac{e^{-R_3'\xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R_3'\xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi \quad (3.102)$$

-si  $\rho = 0$

$$W_2^3 = 0. \quad (3.103)$$

-si  $\rho > 0$

$$\frac{4\pi\mu}{h}W_2^3(R_1, R_2) = \frac{R_2}{\rho} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3\xi} J_1(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi - \frac{x_3 R_2}{\rho} \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3\xi} J_1(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi. \quad (3.104)$$

Pour le cas  $j = 3$

$$\frac{4\pi\mu}{h}W_3^3 = -x_3 \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi, \quad (3.105)$$

-si  $\rho = 0$

$$\frac{4\pi\mu}{h}W_3^3 = -x_3 \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3\xi}}{(1+2b\xi)} d\xi, \quad (3.106)$$

-si  $\rho > 0$

$$\frac{4\pi\mu}{h}W_3^3(R_1, R_2) = -x_3 \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi. \quad (3.107)$$

Nous présentons ensuite les résultats obtenus pour la pression  $s^{(k)}$ , pour  $k \in \{1, 2, 3\}$ . La stratégie de calcul est analogue à celle du calcul des vitesses  $W_j^{(k)}$  :

on injecte les  $B_j^{(k)}$  et les  $B^{(k)}$  dans (3.12) pour obtenir les  $s^{(k)}$  pour  $k = (1, 2, 3)$ , puis on applique pour chaque  $k$  la transformée de Fourier inverse (qui se traduit par une transformée de Hankel). En utilisant (3.82) et (3.81), on obtient alors les expressions suivantes

★ cas  $k = 1$

$$s^{(1)} = \frac{h}{4\pi\mu} 2\mu \left[ \frac{2b}{h} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi \right]. \quad (3.108)$$

-si  $\rho = 0$

$$s^{(1)} = 0, \quad (3.109)$$

-si  $\rho > 0$

$$s^{(1)} = \frac{h}{4\pi\mu} \frac{4\mu b R_1}{h\rho} \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3\xi} J_1(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi - \frac{2\mu R_1}{\rho} \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3\xi} J_1(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi. \quad (3.110)$$

$$s^{(1)} = \frac{R_1}{\rho\pi} (b + h/2) \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3\xi} J_1(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi. \quad (3.111)$$

★ cas  $k = 2$

Par raison de symétrie on a

$$s^{(2)}(R_1, R_2) = s^{(1)}(R_2, R_1). \quad (3.112)$$

On obtient enfin

★ cas  $k = 3$

$$s^{(3)} = -\frac{h}{4\pi\mu} 2\mu \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi. \quad (3.113)$$

-si  $\rho = 0$

$$s^{(3)}(R_1, R_2) = -\frac{h}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)} d\xi. \quad (3.114)$$

-si  $\rho > 0$

$$s^{(3)} = -\frac{h}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^2 J_0(\rho\xi) e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)} d\xi. \quad (3.115)$$

En conclusion, nous avons calculé théoriquement le tenseur de Green  $G$ . Pour le calcul numérique nous nous ramenons à calculer sept intégrales qui interviennent dans les expressions des vitesses  $W_j^{(k)}$  et la pression  $s^{(k)}$  pour  $(i, k) = (1, 2, 3)$  pour le cas  $\rho > 0$ . Ces intégrales sont les suivantes :

$$\int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi, \quad (3.116)$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi, \quad (3.117)$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi, \quad (3.118)$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi, \quad (3.119)$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho\xi)}{(1+2b\xi)(1+b\xi)} d\xi, \quad (3.120)$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi^2 [2\frac{J_1(\rho\xi)}{\rho\xi} - J_0(\rho\xi)] e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)} d\xi, \quad (3.121)$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi^2 [2\frac{J_1(\rho\xi)}{\rho\xi} - J_0(\rho\xi)] e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)(1+b\xi)} d\xi. \quad (3.122)$$

Pour le cas  $\rho = 0$ , nous avons trois intégrales à calculer qui sont les suivantes

$$\int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)} d\xi, \quad (3.123)$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)} d\xi, \quad (3.124)$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)(1+b\xi)} d\xi, \quad (3.125)$$

Ces dix intégrales sont calculées numériquement avec précision dans le chapitre 4.

# Chapitre 4

## Méthode numérique

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>73</b>
4.1.1	Calcul précis du tenseur de Green	74
<b>4.2</b>	<b>Équation intégrale de surface</b>	<b>84</b>
4.2.1	Mouvement d'un corps rigide	84
4.2.2	Cas de l'écoulement extérieur $(\mathbf{u}^\infty, p^\infty)$	87
<b>4.3</b>	<b>Résolution numérique de l'équation intégrale par la méthode des éléments de frontières</b>	<b>92</b>

---

### 4.1 Introduction

Ce chapitre comporte deux parties. Dans la première partie nous calculons numériquement et avec précision les intégrales qui interviennent dans le calcul des vitesses  $W_j^{(k)}$  et de la pression  $s^{(k)}$ .

La deuxième partie propose des équations intégrales pertinentes pour le problème et leur traitement numérique expose la méthode des éléments de frontière qui consiste à discrétiser l'équation intégrale sur un nombre fini de triangles.

### 4.1.1 Calcul précis du tenseur de Green

Dans cette partie nous calculons avec précision les intégrales qui interviennent dans le calcul des vitesses  $W_j^{(k)}$  et de la pression  $s^{(k)}$  calculées théoriquement dans le chapitre 3. Pour effectuer notre calcul avec précision, nous avons testé nos intégrales avec deux programmes différents : Maple avec 20 décimales et le programme Fortran double précision (ces intégrales nous les avons calculé nous même en utilisant la méthode de quadrature de Gauss). Nous rappelons ces dix intégrales  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f'_0, f'_1$  et  $f'_2$  telles que

$$f_0 = \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho \xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi, \quad (4.1)$$

$$f_1 = \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho \xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi, \quad (4.2)$$

$$f_2 = \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho \xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi, \quad (4.3)$$

$$f_3 = \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho \xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi, \quad (4.4)$$

$$f_4 = \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho \xi)}{(1 + 2b\xi)(1 + b\xi)} d\xi, \quad (4.5)$$

$$f_5 = \int_0^\infty \frac{\xi^2 [2 \frac{J_1(\rho \xi)}{\rho \xi} - J_0(\rho \xi)] e^{-R'_3 \xi}}{(1 + 2b\xi)} d\xi, \quad (4.6)$$

$$f_6 = \int_0^\infty \frac{\xi^2 [2 \frac{J_1(\rho \xi)}{\rho \xi} - J_0(\rho \xi)] e^{-R'_3 \xi}}{(1 + 2b\xi)(1 + b\xi)} d\xi. \quad (4.7)$$

$$f'_0 = \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi}}{(1 + 2b\xi)} d\xi, \quad (4.8)$$

$$f'_1 = \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi}}{(1 + 2b\xi)} d\xi, \quad (4.9)$$

$$f'_2 = \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi}}{(1 + 2b\xi)(1 + b\xi)} d\xi. \quad (4.10)$$

Pour le cas où  $R'_3 = x_3 + y_3$  est de l'ordre de 1, même avec une longueur de glissement  $b$  petite nous avons trouvé un bon accord entre les résultats par les deux programmes, cette comparaison est présentée dans les tables Tab.4.1 et Tab.4.2.

Intégrale	Maple	Fortran
$f_0$	0.03835958657018307	0.03835958657018307
$f_1$	0.130586339631272	0.130586339631272
$f_2$	0.125429135549603	0.125429135549603
$f_3$	0.1323173968837334	0.1323173968837334
$f_4$	0.08864140787038247	0.08864140787038247
$f_5$	0.135755532938180	0.135755532938180
$f_6$	0.07521875602667786	0.07521875602667842
$f'_0$	0.403652637676805	0.403652637676806
$f'_1$	0.596347362323194	0.596347362323194
$f'_2$	0.302065689540607	0.302065689540608

TAB. 4.1 – Table de comparaison des intégrales avec  $b = 0.5$ ,  $R'_3 = 1$ ,  $\rho = 1.5$ .

Pour le cas  $b = 0.01$ ,  $R'_3 = 1$ ,  $\rho = 1.5$  nous présentons la table Tab.4.2 pour un nombre de chiffres après la virgule égale à 10 car pour certaines intégrales le temps de calcul avec Maple est trop long.

Intégrale	Maple	Fortran
$f_0$	-0.00870602658050	-0.00870602657937
$f_1$	0.25134217516308	0.25134217516305
$f_2$	0.233665001228	0.233665001228567
$f_3$	0.1708511039855	0.1708511039855
$f_4$	0.249019076362894	0.249019076362894
$f_5$	0.34382892678	0.34382892678
$f_6$	0.3385653230	0.3385653231
$f'_0$	0.963335174712824	0.963335174712822
$f'_1$	1.88874126435879	1.88874126435895
$f'_2$	1.83519579569918	1.83519579569857

TAB. 4.2 – Table de comparaison des intégrales avec  $b = 0.01$ ,  $R'_3 = 1$ ,  $\rho = 1.5$ .

Pour le cas où  $x_3$  petit,  $y_3$  petit et avec un glissement petit, soient  $b = 0.01$ ,  $R'_3 = 0.02$ ,  $\rho = 0.5$ , nous avons un problème de précision et ceci correspond au fait que  $R_3$  est petit Tab.4.3.

Intégrale	Maple	Fortran
$f_0$	-7.72360567123922951643	-7.72322650623850
$f_1$	3.9531840100528274842	3.95318400186342
$f_2$	1.8617577085785585585	1.86178321948348
$f_3$	0.31408888001682184952	0.314089765136192
$f_4$	3.9301693136209921825	3.93016931136245
$f_5$	23,536341712603605051	23.535 9626443684
$f_6$	23.309912830176810213	23.3098503086444
$f'_0$	1009.1315941920148141	1009.12992535336
$f'_1$	74543.420290399259293	74542.1523759072
$f'_2$	37758.223692575933888	37758.0759360920

TAB. 4.3 – Table de comparaison des intégrales avec  $b = 0.01$ ,  $R'_3 = 0.02$ ,  $\rho = 0.5$ .

Alors pour résoudre ce problème, nous avons décomposé les intégrales (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) et (4.1) pour le cas  $\rho > 0$  de la façon suivante

★ Calcul de l'intégrale  $f_1$

-Si  $b=0$ , nous avons

$$f_1(\xi) = \int_0^\infty \xi e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho \xi) d\xi = -\frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^\infty e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho \xi) d\xi = \frac{\rho}{[\rho^2 + R_3'^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.11)$$

-Si  $b > 0$  on a  $\frac{\xi}{1+2b\xi} = \frac{1}{2b} \left[ \frac{2b\xi+1-1}{1+2b\xi} \right] = \frac{1}{2b} \left[ 1 - \frac{1}{1+2b\xi} \right]$  ce qui donne

$$f_1(\xi) = \frac{1}{2b} \left\{ \int_0^\infty e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho \xi) d\xi - \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho \xi)}{1+2b\xi} d\xi \right\} \quad (4.12)$$

nous avons

$$\int_0^\infty e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho \xi) d\xi = -\frac{1}{\rho} \int_0^\infty e^{-R'_3 \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} J_0(\rho \xi) d\xi \quad (4.13)$$

car  $J_1(\rho\xi) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\xi}J_0(\rho\xi)$ . Donc

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-R'_3\xi}J_1(\rho\xi)d\xi &= -\frac{1}{\rho}\{[-e^{-R'_3\xi}J_0(\rho\xi)]_0^\infty + R'_3\int_0^\infty e^{-R'_3\xi}J_0(\rho\xi)d\xi\} \\ &= -\frac{1}{\rho}\left\{-1 + \frac{R'_3}{[\rho^2 + R_3'^2]^{\frac{1}{2}}}\right\}\end{aligned}\quad (4.14)$$

Nous avons  $R'^2 = \rho^2 + R_3'^2$ . En utilisant ensuite le changement de variable  $\xi = \frac{u}{2b}$  nous obtenons

$$f_1(\xi) = \frac{1}{2b}\left\{\frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{R'_3}{R'}\right) - \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3\frac{u}{2b}}J_1(\rho\frac{u}{2b})}{2b(1+u)}du\right\}\quad (4.15)$$

★ Calcul de l'intégrale  $f_2$

-Si  $b = 0$  nous avons

$$f_2(\xi) = \int_0^\infty \xi^2 e^{-R'_3\xi} J_1(\rho\xi) d\xi = \frac{3\rho R_3'}{R'^5}.\quad (4.16)$$

-Si  $b > 0$ , on a  $\xi^2 = \frac{1}{2b}2b\xi^2 = \frac{1}{2b}[(1 + 2b\xi)\xi - \xi]$  par suite

$$f_2(\xi) = \frac{1}{2b}\left\{\int_0^\infty \xi e^{-R'_3\xi} J_1(\rho\xi) d\xi - \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3\xi} J_1(\rho\xi)}{1 + 2b\xi} d\xi\right\}.\quad (4.17)$$

Par intégration par parties, on a

$$\int_0^\infty \xi e^{-R'_3\xi} J_1(\rho\xi) d\xi = \frac{1}{\partial R_3'} \left\{ \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \xi e^{-R'_3\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (J_0(\rho\xi)) d\xi \right\} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{R'} - \frac{R_3'^2}{R'^3} \right).\quad (4.18)$$

On trouve donc

$$f_2(\xi) = \frac{1}{2b} \left\{ \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{R'} - \frac{R_3'^2}{R'^3} \right) - f_1(\xi) \right\}.\quad (4.19)$$

★ Calcul de l'intégrale  $f_0$

-Si  $b = 0$

$$\begin{aligned}f_0(\xi) &= \int_0^\infty \xi^2 e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi) d\xi = \frac{\partial^2}{\partial R_3' \partial R_3'} \int_0^\infty e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi) d\xi \\ &= \frac{\partial^2}{\partial R_3' \partial R_3'} \left[ \frac{1}{R'} \right] = -\frac{1}{R_3'^2} + 3\frac{R_3'^2}{R'^5}.\end{aligned}\quad (4.20)$$

-Si  $b > 0$

$$f_0(\xi) = \frac{1}{2b} \left\{ \int_0^\infty \xi e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi) d\xi - \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi \right\}.\quad (4.21)$$

Nous avons

$$\int_0^\infty \xi e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi) d\xi = -\frac{\partial}{\partial R_3'} \int_0^\infty e^{-R'_3\xi} J_0(\rho\xi) d\xi = \frac{R_3'}{R'^3}.\quad (4.22)$$

En utilisant la décomposition  $\xi = \frac{1}{2b}[2b\xi + 1 - 1]$  on a

$$\int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho \xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi = \frac{1}{2b} \left\{ \int_0^\infty e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho \xi) d\xi - \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho \xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi \right\}, \quad (4.23)$$

ce qui donne

$$f_0(\xi) = \frac{1}{2b} \left\{ \frac{R'_3}{R'^3} - \frac{1}{2b} \frac{1}{R'} + \frac{1}{2b} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho \xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi \right\}. \quad (4.24)$$

On aura par suite

$$f_0(\xi) = \frac{1}{2b} \left\{ \frac{R'_3}{R'^3} - \frac{1}{2b} \frac{1}{R'} + \frac{1}{2b} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}} J_0(\rho \frac{u}{2b})}{2b(1 + u)} du \right\}. \quad (4.25)$$

★ Calcul de l'intégrale  $f_3$

-Si  $b = 0$  on a

$$f_3(\xi) = \int_0^\infty \xi e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho \xi) d\xi = -\frac{\partial}{\partial R'_3} \int_0^\infty e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho \xi) d\xi = \frac{R'_3}{R'^3}. \quad (4.26)$$

-Si  $b > 0$  on décompose  $\xi$  comme pour les fonctions précédentes, et l'on obtient

$$\begin{aligned} f_3(\xi) &= \frac{1}{2b} \left\{ \int_0^\infty e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho \xi) d\xi - \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho \xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{2b} \left\{ \frac{1}{R'} - \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}} J_0(\rho \frac{u}{2b})}{2b(1 + u)} du \right\}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

★ Calcul de l'intégrale  $f_5$

nous avons

$$\begin{aligned} f_5 &= \int_0^\infty \frac{\xi^2 [2 \frac{J_1(\rho \xi)}{\rho \xi} - J_0(\rho \xi)] e^{-R'_3 \xi}}{(1 + 2b\xi)} d\xi \\ &= \frac{2}{\rho} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho \xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi - \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho \xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi \\ &= \frac{2}{\rho} f_1(\xi) - f_0(\xi). \end{aligned} \quad (4.28)$$

★ Calcul de l'intégrale  $f_4$

-Si  $b = 0$  on a

$$f_4(\xi) = \int_0^\infty \xi e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho \xi) d\xi = \frac{\rho}{R'^3} \quad (4.29)$$

-Si  $b > 0$ , on remplace  $\xi$  par  $\frac{1}{b}(b\xi + 1 - 1)$  donc

$$\begin{aligned} f_4(\xi) &= \frac{1}{b} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho \xi)}{(1 + 2b\xi)} d\xi - \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho \xi)}{(1 + 2b\xi)(1 + b\xi)} d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{b} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}} J_1(\rho \frac{u}{2b})}{2b(1 + bu)} du - \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}} J_0(\rho \frac{u}{2b})}{2b(1 + u)(1 + \frac{u}{2})} du \right\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

★ Calcul de l'intégrale  $f_6$

nous avons

$$\begin{aligned}
 f_6(\xi) &= \int_0^\infty \frac{\xi^2 [2 \frac{J_1(\rho\xi)}{\rho\xi} - J_0(\rho\xi)] e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)(1+b\xi)} d\xi \\
 &= \frac{2}{\rho} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi} J_1(\rho\xi)}{(1+2b\xi)(1+b\xi)} d\xi - \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)(1+b\xi)} d\xi \\
 &= \frac{2}{\rho} f_4(\xi) - \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)(1+b\xi)} d\xi.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

-Si  $b = 0$  en déduit que

$$f_6(\xi) = \frac{2}{R'^3} - \frac{1}{R_3'^2} + 3 \frac{R_3'^2}{R'^5}. \tag{4.32}$$

-Si  $b > 0$ , on utilise la décomposition  $\xi^2 = \frac{1}{b} b \xi \xi = \frac{1}{b} (\xi(1+b\xi) - 1)$

$$\frac{\xi^2}{(1+2b\xi)(1+b\xi)} = \frac{1}{b} \left( \frac{\xi}{(1+2b\xi)} - \frac{\xi}{(1+2b\xi)(1+b\xi)} \right), \tag{4.33}$$

encore on a  $\xi = \frac{1}{b} b \xi = \frac{1}{b} ((b\xi + 1) - 1)$  par suite

$$\frac{\xi^2}{(1+2b\xi)(1+b\xi)} = \frac{1}{b} \left( \frac{\xi}{(1+2b\xi)} - \frac{1}{b(1+2b\xi)} + \frac{1}{b(1+2b\xi)(1+b\xi)} \right). \tag{4.34}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 f_6(\xi) &= \frac{2}{\rho} f_4(\xi) - \frac{1}{b} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi \\
 &\quad + \frac{1}{b^2} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)} d\xi - \frac{1}{b^2} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi} J_0(\rho\xi)}{(1+2b\xi)(1+b\xi)} d\xi.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}
 f_6(\xi) &= \frac{2}{\rho} f_4(\xi) - \frac{1}{b} f_3(\xi) + \frac{1}{b^2} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}} J_0(\rho \frac{u}{2b})}{2b(1+u)} du \\
 &\quad - \frac{1}{b^2} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}} J_0(\rho \frac{u}{2b})}{2b(1+u)(1+\frac{u}{2})} du.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Finalement, pour calculer avec précision les sept intégrales  $f_0(\xi)$ ,  $f_1(\xi)$ ,  $f_2(\xi)$ ,  $f_3(\xi)$ ,  $f_4(\xi)$ ,  $f_5(\xi)$  et  $f_6(\xi)$ , on s'est ramené au calcul analytique des trois intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}} J_0(\rho \frac{u}{2b})}{(1+u)} du, \tag{4.37}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}} J_1(\rho \frac{u}{2b})}{(1+u)} du, \tag{4.38}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}} J_0(\rho \frac{u}{2b})}{(1+u)(1+\frac{u}{2})} du. \tag{4.39}$$

Calculons maintenant avec précision les intégrales  $f'_0$ ,  $f'_1$  et  $f'_2$  qui interviennent dans les expressions des vitesses et de la pression pour le cas  $\rho = 0$ .

★ Calcul de l'intégrale  $f'_0$

- Si  $b = 0$  nous avons

$$f'_0(\xi) = \int_0^\infty \xi e^{-R'_3 \xi} d\xi = -\frac{\partial}{\partial R'_3} \int_0^\infty e^{-R'_3 \xi} d\xi = \frac{1}{R'^2_3}. \quad (4.40)$$

- Si  $b > 0$ , on utilise la décomposition  $\xi = \frac{1}{2b}2b = \frac{1}{2b}[1 + 2b\xi + 1 - 1] = \frac{1+2b\xi}{2b} - \frac{1}{2b}$  ce qui nous donne

$$\begin{aligned} f'_0(\xi) &= \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)} d\xi = \frac{1}{2b} \int_0^\infty e^{-R'_3 \xi} d\xi - \frac{1}{2b} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{2bR'_3} - \frac{1}{2b} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (4.41)$$

On utilise ensuite le changement de variable  $u = 2b\xi$ , on obtient

$$f'_0(\xi) = \frac{1}{2bR'_3} - \frac{1}{4b^2} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}}}{(1+u)} du. \quad (4.42)$$

Pour avoir un résultat précis de  $f'_0$ , nous allons calculer l'intégrale  $\int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}}}{(1+u)} du$  par intégration par parties. Soit  $f = \frac{1}{1+u}$  et  $g' = e^{-R'_3 \frac{u}{2b}}$  donc  $f' = \frac{-1}{(1+u)^2}$  et  $g = \frac{-2b}{R'_3} e^{-R'_3 \frac{u}{2b}}$  par suite

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}}}{(1+u)} du &= \left[ \frac{-2b}{R'_3} e^{-R'_3 \frac{u}{2b}} \frac{1}{1+u} \right]_0^\infty - \frac{2b}{R'_3} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}}}{(1+u)^2} du \\ &= \frac{2b}{R'_3} - \frac{2b}{R'_3} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}}}{(1+u)^2} du. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Finalement

$$\begin{aligned} f'_0(\xi) &= \frac{1}{2bR'_3} - \frac{1}{4b^2} \left\{ \frac{2b}{R'_3} - \frac{2b}{R'_3} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}}}{(1+u)^2} du \right\} \\ &= \frac{1}{2bR'_3} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}}}{(1+u)^2} du \end{aligned} \quad (4.44)$$

★ Calcul de l'intégrale  $f'_1$

- Si  $b = 0$  nous avons

$$f'_1(\xi) = \int_0^\infty \xi^2 e^{-R'_3 \xi} d\xi = \frac{\partial^2}{\partial R'^2_3} \int_0^\infty e^{-R'_3 \xi} d\xi = \frac{2}{R'^3_3}. \quad (4.45)$$

- Si  $b > 0$ , nous avons  $\frac{\xi^2}{(1+2b\xi)} = \frac{\xi}{2b} - \frac{\xi}{2b(1+2b\xi)}$  par suite

$$\begin{aligned} f'_1(\xi) &= \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)} d\xi = \frac{1}{2b} \int_0^\infty \xi e^{-R'_3 \xi} d\xi - \frac{1}{2b} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)} d\xi \\ &= -\frac{1}{2b} \frac{\partial}{\partial R'_3} \int_0^\infty e^{-R'_3 \xi} d\xi - \frac{1}{2b} f'_0(\xi) \\ &= -\frac{1}{2bR'^2_3} - \frac{1}{2b} f'_0(\xi). \end{aligned} \quad (4.46)$$

★ Calcul de l'intégrale  $f'_2$

- Si  $b = 0$  nous avons

$$f'_2(\xi) = \int_0^\infty \xi^2 e^{-R'_3 \xi} d\xi = \frac{2}{R'_3{}^3}. \quad (4.47)$$

- Si  $b > 0$ , on utilise la décomposition de  $\xi^2$  sous la forme de (4.34), alors l'expression de  $f'_2(\xi)$  s'écrit

$$\begin{aligned} f'_2(\xi) &= \int_0^\infty \frac{\xi^2 e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)(1+b\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{b} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)} d\xi - \frac{1}{b^2} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)} d\xi + \frac{1}{b^2} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)(1+b\xi)} d\xi. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Par suite

$$f'_2(\xi) = \frac{1}{b} f'_0(\xi) - \frac{1}{b^2} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)} d\xi + \frac{1}{b^2} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \xi}}{(1+2b\xi)(1+b\xi)} d\xi. \quad (4.49)$$

En utilisant le changement de variable  $u = 2b\xi$  et l'intégrale (4.43) nous obtenons

$$\begin{aligned} f'_2(\xi) &= \frac{1}{b} f'_0(\xi) - \frac{1}{b^2} \left\{ \frac{2b}{R'_3} - \frac{2b}{R'_3} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}}}{(1+u)^2} du \right\} \\ &\quad + \frac{1}{b^2} \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}}}{2b(1+u)(1+\frac{u}{2})} du. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Finalement pour calculer les intégrales,  $f'_0$ ,  $f'_1$  et  $f'_2$  il s'agit de calculer analytiquement les deux intégrales suivantes

$$\int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}}}{(1+u)^2} du \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{e^{-R'_3 \frac{u}{2b}}}{(1+u)(1+\frac{u}{2})} du. \quad (4.51)$$

Maintenant, en utilisant cette méthode de calcul analytique des intégrales, nous présentons la table Tab.4.4 donnant les résultats précis. Cette table améliore les résultats de la table Tab.4.3

À partir de ces résultats, nous avons calculé avec précision les vitesses  $W_j^k$  et la pression  $s^{(k)}$ , puis par suite le tenseur de Green  $\mathbf{G}$  avec précision.

Intégrale	Maple	Fortran avant	Fortran après traitement
$f_0$	-7.7236056723922951643	-7.72322650623850	-7.72360567239005
$f_1$	3.9531840100528274842	3.95318400186342	3.95318401005277
$f_2$	1.8617577085785585585	1.86178321948348	1.86175770858166
$f_3$	0.31408888001682184952	0.314089765136192	0.314088880016772
$f_4$	3.9301693136209921825	3.93016931136245	3.93016931362016
$f_5$	23.536341712603605051	23.535 9626443684	23.5363417126036011
$f_6$	23.309912830176810213	23.3098503086444	23.3099128303584
$f'_0$	1009.1315941920148141	1009.12992535336	1009.13159419201
$f'_1$	74543.420290399259293	74542.1523759072	74543.4202903993
$f'_2$	37758.223692575933888	37758.0759360920	37758.2236925759

TAB. 4.4 – Valeurs précises des intégrales avec  $b = 0.01$ ,  $R'_3 = 0.02$ ,  $\rho = 0.5$ .

## 4.2 Équation intégrale de surface

### 4.2.1 Mouvement d'un corps rigide

On considère une particule solide de forme quelconque de surface  $S$  et de centre  $O'$ , en suspension dans un fluide newtonien, de densité uniforme  $\rho$  et de viscosité  $\mu > 0$ , qui occupe le demi espace  $x_3 > 0$ . On choisit un repère cartésien  $(O, x_1, x_2, x_3)$  et on note  $\Sigma$  le plan  $x_3 = 0$ . Le vecteur normal à la particule est dirigée vers le fluide, pour le plan  $\Sigma$  la normale est  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ . On note  $\mathbf{U}$  la vitesse de translation du corps rigide et  $\mathbf{\Omega}$  sa vitesse de rotation. Le mouvement de la particule induit un écoulement  $(\mathbf{u}, p)$  où  $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$  est la vitesse du fluide de pression  $p$  et de viscosité  $\mu$ . Soit  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes. Le champ  $(\mathbf{u}, p)$  vérifie les équations de Stokes suivantes

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}, \quad (\mathbf{u}, p) \rightarrow (\mathbf{0}, 0) \quad \text{à l'infini}, \quad (4.52)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M} \quad \text{sur } S, \quad (4.53)$$

$$u_1 = b \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, u_2 = b \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, u_3 = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (4.54)$$

où  $\mathcal{D}$  désigne le domaine fluide et  $b \geq 0$  est la longueur de glissement.

On considère un pôle  $\mathbf{y}$  tel que  $y_3 = \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_3 > 0$  et  $\mathbf{x}$  un point situé dans la même partie du plan que  $\mathbf{y}$  c'est-à-dire tel que  $x_3 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3 > 0$ .

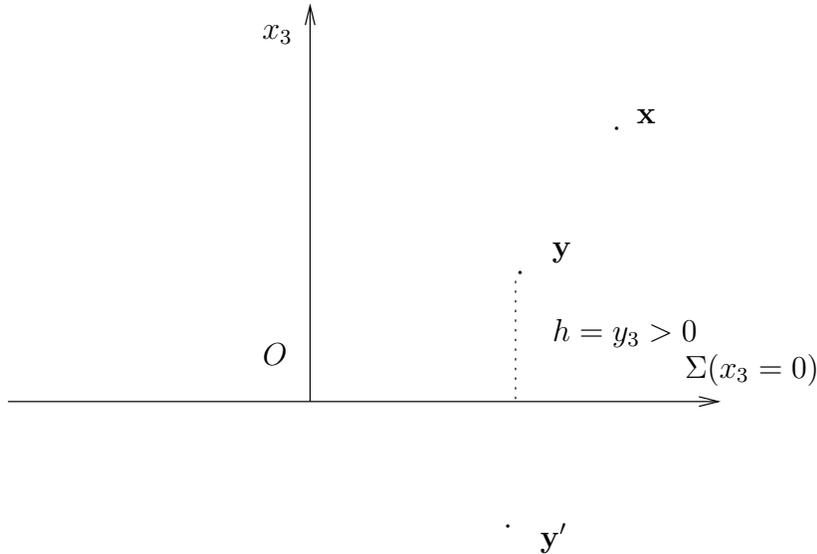


FIG. 4.1 – Position du pôle  $\mathbf{y}$  et du pôle symétrique  $\mathbf{y}'$  dans le repère  $(O, x_1, x_2, x_3)$

On considère, pour  $k = \{1, 2, 3\}$ , les écoulements de Stokes  $(\mathbf{v}^{(k)}, p^{(k)})$  où  $\mathbf{v}^{(k)}$  est la vitesse due à une force ponctuelle parallèle à  $\mathbf{e}_k$  et d'intensité unité, placée au pôle  $\mathbf{y}$  c'est-à-dire obéissant

aux équations suivantes

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v}^{(k)} = \nabla p^{(k)} - \delta_{3d}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{e}_k, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^{(k)} = 0, \quad \text{pour } x_3 > 0, \quad (4.55)$$

$$(\mathbf{v}^{(k)}, p^{(k)}) \rightarrow (\mathbf{0}, 0) \quad \text{si } |\mathbf{x}| = |\mathbf{OM}| \rightarrow \infty \quad (4.56)$$

où  $\delta_{3d}(x - y) = \delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2)\delta(x_3 - y_3)$  et  $\delta$  est la distribution de Dirac. Ces écoulements permettent de définir le tenseur de Green  $\mathbf{G}$  dont la composante cartésienne  $G_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est donnée par

$$\mathbf{G}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_j \quad (4.57)$$

et le tenseur  $\mathbf{T} = T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ , qui est le tenseur des contraintes associé à  $\mathbf{G}$ . D'après [11], la vitesse  $\mathbf{u}$  solution de (4.52) vérifie la représentation intégrale suivante

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j = - \int_{S \cup \Sigma} \{(\mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{y}) G_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - (\mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_i) T_{ijk}(\mathbf{y}, \mathbf{x})(\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_k)\} dS(\mathbf{y}), \mathbf{x} \text{ dans } \mathcal{D}. \quad (4.58)$$

Dans cette intégrale (4.58) la surface  $\Sigma$  est le plan  $x_3 = 0$  entier, c'est-à-dire que  $\Sigma$  est une surface non bornée. D'après (4.55) et (4.56), il n'y a pas une condition limite imposée sur le plan  $x_3 = 0$ , donc le tenseur  $\mathbf{G}$  n'est pas unique. Il est judicieux alors de choisir un tenseur de Green particulier de manière à ce que l'intégrale sur  $\Sigma$  disparaisse. On prend le tenseur  $\mathbf{G}^c$  de composante cartésienne  $\mathbf{G}_{jk}^c = \mathbf{v}^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{e}_j$  qui vérifie la condition de Navier [26] sur le plan

$$v_1^{(k)} = \lambda \frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_3}, v_2^{(k)} = \lambda \frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_3}, v_3^{(k)} = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \quad (4.59)$$

En utilisant (4.55) et (4.56) avec la condition de glissement (4.59), on arrive à obtenir analytiquement le tenseur de Green  $\mathbf{G}^c$  : ceci est effectué au chapitre 3.

Écrivons maintenant la partie de l'équation intégrale (4.58) sur la paroi. On utilise ici les notations suivantes :

$\mathbf{u}'$  : le tenseur de Green  $\mathbf{G}^c$  et  $\boldsymbol{\sigma}'$  = le tenseur des contraintes  $\mathbf{T}^c$  associé à  $\mathbf{G}^c$ . On veut montrer que

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' dS = \int_{\Sigma} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.60)$$

Soit  $\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  et  $\mathbf{f}' = \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n}$ . Sur la paroi nous avons  $u_3 = 0$ , donc

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p \mathbf{e}_3 + \mu \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right] \mathbf{e}_1 + \mu \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right] \mathbf{e}_2 = -p \mathbf{e}_3 + \mu \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \mathbf{e}_2 \right] \quad (4.61)$$

ce qui donne en utilisant que  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}'$  vérifient la condition de glissement de Navier

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p \mathbf{e}_3 + \frac{\mu}{\lambda} (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2) \quad (4.62)$$

Nous avons aussi

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}' = (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} + [\mathbf{u}' - (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] \quad (4.63)$$

et

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \frac{\mu}{\lambda}(u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}' - (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = u'_1 \mathbf{e}_1 + u'_2 \mathbf{e}_2. \quad (4.64)$$

Par suite on aura

$$(\mathbf{u}' - (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) = \frac{\mu}{\lambda}(u_1 u'_1 + u_2 u'_2). \quad (4.65)$$

Nous avons d'autre part

$$\frac{\mu}{\lambda}(u_1 u'_1 + u_2 u'_2) = (\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n} - (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (4.66)$$

Nous obtenons donc,  $\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' = 0$  sur  $\Sigma$ , ce qui donne

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' dS - \int_{\Sigma} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (4.67)$$

Maintenant, en écrivant (4.58) et en utilisant (4.67) pour le tenseur  $\mathbf{G}^c$  et le tenseur des contraintes associé  $\mathbf{T}^c$ , nous obtenons pour  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  l'équation suivante

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j = - \int_S \{(\mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{y}) G_{ij}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - (\mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_i) T_{ijk}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x})(\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_k)\} dS(\mathbf{y}). \quad (4.68)$$

D'après Pozrikidis [12], la deuxième intégrale sur le tenseur de contrainte  $\mathbf{T}^c$  est nulle. Par suite on obtient l'intégrale suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j = - \int_S \{(\mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{y}) G_{ij}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x})\} dS(\mathbf{y}), \quad \text{pour } \mathbf{x} \text{ dans } \mathcal{D}. \quad (4.69)$$

On a  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}$ , où  $\mathbf{f}$  est la force surfacique exercée par le fluide sur la particule. Lorsque  $\mathbf{x}$  tend vers la surface  $S$  de la particule, c'est-à-dire,  $\mathbf{x}$  s'approche de  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{G}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  est intégrable sur  $S$  (pour  $\mathbf{y} \in S$ ). D'après la condition limite (4.53) et par limite de  $\mathbf{x}$  sur la surface  $S$  de la particule, l'intégrale (4.69) s'écrit pour tout  $\mathbf{x}$  sur  $S$

$$(\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) \cdot \mathbf{e}_j = - \int_S (\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{y}) G_{ij}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS(\mathbf{y}), \quad \text{pour } \mathbf{x} = \mathbf{O}\mathbf{M} \text{ sur } S. \quad (4.70)$$

Le traitement du problème de Stokes (4.52), (4.53) et (4.54) fait appel aux trois étapes suivantes :

1. La détermination du tenseur de Green  $\mathbf{G}^c$  (calcul analytique fait au chapitre 3).
2. La détermination de la force surfacique  $\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  par résolution de l'équation intégrale (4.70). Ceci nous permet ensuite de calculer la force totale  $\mathbf{F}$  et le couple total  $\mathbf{C}$  (par rapport au point  $\mathbf{O}'$ ), donnés par les formules suivantes

$$\mathbf{F} = \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \mathbf{C} = \int_S (\mathbf{O}'\mathbf{M} \wedge \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.71)$$

3. Au besoin, on calcule le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  dans le fluide, en utilisant (4.69).

### 4.2.2 Cas de l'écoulement extérieur ( $\mathbf{u}^\infty, p^\infty$ )

Considérons l'écoulement ( $\mathbf{u}^\infty + \mathbf{u}, p^\infty + p$ ) de contrainte associée ( $\boldsymbol{\sigma}^\infty + \boldsymbol{\sigma}$ ) avec  $(\mathbf{u}, p)$  solution du problème de Stokes dans le milieu fluide et tel que

$$(\mathbf{u}, p) \rightarrow (\mathbf{0}, 0) \quad \text{loin de la paroi,} \quad (4.72)$$

et

$$\mathbf{u} = -\mathbf{u}^\infty + \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M} \quad \text{sur la surface de la sphère } S. \quad (4.73)$$

En raison de (4.72), la vitesse  $\mathbf{u}$  vérifie l'équation intégrale suivante pour  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j = - \int_{S \cup \Sigma} \{(\mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{y}) G_{ij}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - (\mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_i) T_{ijk}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x})(\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_k)\} dS(\mathbf{y}) \quad (4.74)$$

Soit  $\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ , l'équation intégrale (4.74) s'écrit aussi pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j = - \int_{S \cup \Sigma} \{f_i(\mathbf{y}) G_{ij}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - (\mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_i) T_{ijk}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x})(\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_k)\} dS(\mathbf{y}) \quad (4.75)$$

Notons ici que  $(\mathbf{u}, p)$  vérifie les conditions de Navier sur  $\Sigma$ . En utilisant la démarche employée pour établir (4.60) nous voyons que cette fois

$$\int_{\Sigma} \{f_i(\mathbf{y}) G_{ij}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - (\mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_i) T_{ijk}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x})(\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_k)\} dS(\mathbf{y}) = 0. \quad (4.76)$$

D'autre part,  $(\mathbf{u}^\infty, p^\infty)$  est un écoulement de Stokes dans la particule et puisque  $\mathbf{x}$  est située dans la particule, nous avons l'équation intégrale suivante

$$\mathbf{0} = - \int_S (\boldsymbol{\sigma}^\infty \cdot \mathbf{n})(\mathbf{y}) \mathbf{G}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS(\mathbf{y}) + \int_S \mathbf{u}^\infty(\mathbf{y}) \mathbf{T}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad (4.77)$$

En notons  $\mathbf{f}^\infty = \boldsymbol{\sigma}^\infty \cdot \mathbf{n}$  l'équation intégrale (4.77) s'écrit

$$\mathbf{0} = - \int_S \{f_i^\infty(\mathbf{y}) G_{ij}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - (\mathbf{u}^\infty(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_i) T_{ijk}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x})(\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_k)\} dS(\mathbf{y}) \quad (4.78)$$

Par addition des équations (4.75) et (4.78) nous obtenons pour  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j = - \int_S \{(f_i + f_i^\infty)(\mathbf{y}) G_{ij}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - (\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i^\infty)(\mathbf{y}) T_{ijk}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x})(\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_k)\} dS(\mathbf{y}). \quad (4.79)$$

Pour l'écoulement  $(\mathbf{u}^\infty + \mathbf{u}, p^\infty + p)$ , la force  $\mathbf{F}$  et le couple  $\mathbf{C}$  exercés par le fluide sur la particule sont donnés par

$$\mathbf{F} = \int_S (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^\infty) \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \int_S (\mathbf{O}'\mathbf{M} \wedge (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^\infty)) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.80)$$

Puisque  $\int_S \boldsymbol{\sigma}^\infty \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{O}'\mathbf{M} \wedge \boldsymbol{\sigma}^\infty \cdot \mathbf{n} dS = 0$ , on obtient donc

$$\mathbf{F} = \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \int_S \mathbf{O}'\mathbf{M} \wedge \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.81)$$

Soient  $(\mathbf{u}, p)$  et  $(\mathbf{u}', p')$  deux écoulements qui vérifient (4.52), (4.54) et (4.73) de tenseurs de contraintes respectivement  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\sigma}'$ . Le théorème de réciprocité s'écrit

$$\int_{S \cup \Sigma} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S \cup \Sigma} \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.82)$$

Soient  $(\mathbf{u}_t^{(i)}, p_t^{(i)})$  et  $(\mathbf{u}_r^{(i)}, p_r^{(i)})$  ( $i=1,2,3$ ), six écoulements de Stokes. Les indices  $t$  et  $r$  indiquent respectivement les cas de la translation et la rotation. Ces écoulements obéissent également aux équations (4.52), (4.54) et (4.73). Nous avons

$$\mathbf{u}_t^{(i)} = \mathbf{e}_i \quad \text{sur } S, \quad (4.83)$$

$$\mathbf{u}_r^{(i)} = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M} \quad \text{sur } S, \quad (4.84)$$

$$\mathbf{f}_t^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}_t^{(i)} \cdot \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_r^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}_r^{(i)} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } S. \quad (4.85)$$

D'après (4.81) et (4.83) nous avons

$$F_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i = \int_S \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{u}_t^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.86)$$

Le théorème de réciprocité (4.82) pour les écoulement  $(\mathbf{u}, p)$  et  $(\mathbf{u}_t^{(i)}, p_t^{(i)})$ , en utilisant la condition de glissement (4.54) sur la paroi  $\Sigma$  et d'après (4.67), s'écrit

$$\int_S \mathbf{u}_t^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_t^{(i)} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.87)$$

En utilisant (4.85), (4.86) et (4.87) nous obtenons

$$F_i = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS. \quad (4.88)$$

Nous obtenons alors puisque  $\mathbf{u} = -\mathbf{u}^\infty + \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}$  sur la surface  $S$

$$F_i = - \int_S \mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS + \int_S (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS. \quad (4.89)$$

D'autre part nous avons

$$C_i = \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_i = \int_S (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.90)$$

D'après la relation (4.84) nous obtenons

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_i = \int_S \mathbf{u}_r^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.91)$$

Appliquons maintenant de nouveau le théorème de réciprocité pour les deux écoulements  $(\mathbf{u}, p)$  et  $(\mathbf{u}_r^{(i)}, p_r^{(i)})$  de contraintes associées  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\sigma}_r^{(i)}$ , nous avons

$$\int_{S \cup \Sigma} \mathbf{u}_r^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S \cup \Sigma} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_r^{(i)} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.92)$$

Ces deux écoulements vérifient la condition de glissement de Navier donc d'après (4.67), l'intégrale (4.92) s'écrit

$$\int_S \mathbf{u}_r^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_r^{(i)} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.93)$$

On aura par suite

$$C_i = \int_S \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_r^{(i)} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_r^{(i)} dS. \quad (4.94)$$

Ce qui donne alors

$$C_i = - \int_S \mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{f}_r^{(i)} dS + \int_S (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) \cdot \mathbf{f}_r^{(i)} dS. \quad (4.95)$$

★ Pour le cas où la particule est fixe nous avons  $\mathbf{U} = \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$  par suite les composantes  $F_i$  et  $C_i$  s'écrivent

$$F_i = - \int_S \mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS \quad \text{et} \quad C_i = - \int_S \mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{f}_r^{(i)} dS. \quad (4.96)$$

Les forces  $\mathbf{f}_t^{(i)}$  et  $\mathbf{f}_r^{(i)}$  sont calculées numériquement par résolution de l'équation (4.58) ce qui nous a permis par suite de calculer la force  $F_i$  et le couple  $C_i$ .

L'équation intégrale (4.79), lorsque la particule est fixe, s'écrit

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j = - \int_S (f_i + f_i^\infty)(\mathbf{y}) G_{ij}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS(\mathbf{y}). \quad (4.97)$$

En calculons  $\mathbf{f} + \mathbf{f}^\infty = (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^\infty) \cdot \mathbf{n}$ , on en déduit le calcul du stresslet, moment symétrique des contraintes pour une sphère fixe dans l'écoulement.

★ Si la particule est maintenant libre de bouger, nous avons  $\mathbf{F} = \mathbf{C} = \mathbf{0}$ . D'après (4.95), nous avons

$$- \int_S \mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS + \int_S (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS = 0, \quad (4.98)$$

ce qui donne finalement

$$\int_S \mathbf{U} \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS + \int_S (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS = \int_S \mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS. \quad (4.99)$$

Puisque  $\mathbf{U} = U_i \mathbf{e}_j$  et  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_i \mathbf{e}_j$ , nous avons

$$\left( \int_S \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS \right) U_j + \left( \int_S (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS \right) \Omega_j = \int_S \mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS. \quad (4.100)$$

On introduit les coefficients suivants

$$A_{ij} = \int_S \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS \quad \text{et} \quad B_{ij} = \int_S (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS, \quad (4.101)$$

Nous obtenons alors

$$A_{ij} U_j + B_{ij} \Omega_j = \int_S \mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS \quad (i=1,2,3). \quad (4.102)$$

De l'équation (4.89) nous obtenons

$$\left( \int_S \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{f}_r^{(i)} dS \right) U_j + \left( \int_S (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) \cdot \mathbf{f}_r^{(i)} dS \right) \Omega_j = \int_S \mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{f}_r^{(i)} dS. \quad (4.103)$$

On introduit les coefficients suivants

$$E_{ij} = \int_S \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{f}_r^{(i)} dS \quad \text{et} \quad D_{ij} = \int_S (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{x}') \cdot \mathbf{f}_r^{(i)} dS, \quad (4.104)$$

Nous obtenons alors

$$E_{ij}U_j + D_{ij}\Omega_j = \int_S \mathbf{u}^\infty \cdot \mathbf{f}_r^{(i)} dS \quad (i=1,2,3). \quad (4.105)$$

Si on considère maintenant les écoulements de translation  $(\mathbf{u}_t^{(i)}, p_t^{(i)})$  et  $(\mathbf{u}_t^{(j)}, p_t^{(j)})$  de contraintes respectives  $\boldsymbol{\sigma}_t^{(i)}$  et  $\boldsymbol{\sigma}_t^{(j)}$ . Le théorème de réciprocité s'écrit :

$$\int_{S \cup \Sigma} \mathbf{u}_t^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_t^{(j)} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S \cup \Sigma} \mathbf{u}_t^{(j)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_t^{(i)} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.106)$$

Puisque les deux écoulements de translations vérifient les conditions de glissement de Navier et d'après (4.67), l'intégrale (4.106) sera

$$\int_S \mathbf{u}_t^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_t^{(j)} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{u}_t^{(j)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_t^{(i)} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.107)$$

Nous avons

$$\mathbf{f}_t^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}_t^{(i)} \cdot \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_t^{(j)} = \boldsymbol{\sigma}_t^{(j)} \cdot \mathbf{n}, \quad (4.108)$$

$$\mathbf{u}_t^{(i)} = \mathbf{e}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_t^{(j)} = \mathbf{e}_j. \quad (4.109)$$

Par injection de ces dernières relations dans (4.107) nous obtenons

$$\int_S \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{f}_t^{(j)} dS = \int_S \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS. \quad (4.110)$$

On déduit alors que  $A_{ij} = A_{ji}$ .

Considérons maintenant les écoulements de rotation  $(\mathbf{u}_r^{(i)}, p_r^{(i)})$  et  $(\mathbf{u}_r^{(j)}, p_r^{(j)})$  de contraintes respectives  $\boldsymbol{\sigma}_r^{(i)}$  et  $\boldsymbol{\sigma}_r^{(j)}$ . Le théorème de réciprocité s'écrit :

$$\int_{S \cup \Sigma} \mathbf{u}_r^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_r^{(j)} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S \cup \Sigma} \mathbf{u}_r^{(j)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_r^{(i)} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.111)$$

Puisque les deux écoulements de rotation vérifient les conditions de glissement de Navier et d'après (4.67), l'intégrale (4.111) s'écrit

$$\int_S \mathbf{u}_r^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_r^{(j)} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{u}_r^{(j)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_r^{(i)} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.112)$$

Nous avons

$$\mathbf{f}_r^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}_r^{(i)} \cdot \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_r^{(j)} = \boldsymbol{\sigma}_r^{(j)} \cdot \mathbf{n}, \quad (4.113)$$

$$\mathbf{u}_r^{(i)} = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{O}'M \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_r^{(j)} = \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{O}'M. \quad (4.114)$$

En injectant les relations (4.113) et (4.114) dans (4.112) nous obtenons

$$\int_S (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{O}'M) \cdot \mathbf{f}_r^{(j)} dS = \int_S (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{O}'M) \cdot \mathbf{f}_r^{(i)} dS. \quad (4.115)$$

On conclut donc, d'après les relations (4.104) et (4.115) que  $D_{ji} = D_{ij}$ .

Si on considère cette fois respectivement les écoulements de rotation et de translation  $(\mathbf{u}_r^{(j)}, p_r^{(j)})$  et  $(\mathbf{u}_t^{(i)}, p_t^{(i)})$  de tenseur de contraintes respectives  $\boldsymbol{\sigma}_r^{(j)}$  et  $\boldsymbol{\sigma}_t^{(i)}$ . Le théorème de réciprocité s'écrit :

$$\int_{S \cup \Sigma} \mathbf{u}_t^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_r^{(j)} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S \cup \Sigma} \mathbf{u}_r^{(j)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_t^{(i)} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.116)$$

Ces deux écoulements considérés vérifient la condition de glissement sur la paroi et en utilisant (4.67), (4.116) devient

$$\int_S \mathbf{u}_t^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_r^{(j)} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{u}_r^{(j)} \cdot \boldsymbol{\sigma}_t^{(i)} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.117)$$

En utilisant maintenant les relations (4.108), (4.109), (4.113) et (4.114), l'équation (4.117) s'écrit

$$\int_S \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{f}_r^{(j)} dS = \int_S (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) \cdot \mathbf{f}_t^{(i)} dS. \quad (4.118)$$

Ce qui donne d'après (4.101), (4.104) et (4.118) que  $B_{ij} = E_{ji}$ .

Les coefficients  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $E_{ij}$  et  $D_{ij}$  forment donc, une matrice réelle, symétrique et de la forme

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{E} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

telles que

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{B} = B_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = D_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (4.119)$$

Pour l'écoulement  $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}$  nous avons la force  $\mathbf{F}$  et le couple  $\mathbf{C}$  sont donnés par

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.120)$$

On veut montrer dans ce qui suit que la matrice  $\mathbf{M}$  est définie négative. Considérons le vecteur  $\mathbf{X} = (\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega})^t$  nous avons

$$\mathbf{X}^t \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.121)$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\Omega} &= \left( \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \right) \cdot \mathbf{U} + \left( \int_S \mathbf{O}'\mathbf{M} \wedge \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \right) \cdot \boldsymbol{\Omega} \\ &= \int_S \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= \int_S (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_S \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (4.122)$$

De plus nous avons

$$\int_{S \cup \Sigma} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = -2\mu \int_D \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{ij} dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Sigma} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.123)$$

Nous obtenons par suite

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = -2\mu \int_D \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{ij} dV - \int_\Sigma \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.124)$$

Nous avons

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot (-p\mathbf{n} + 2\mu \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{n}), \quad (4.125)$$

puisque la vitesse  $\mathbf{u}$  vérifie la condition de glissement de Navier sur la paroi nous avons  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_3 = 0$ ,  $u_i = \lambda \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \right) = 2\lambda \mathbf{e}_{i3}$ , pour  $i = (1, 2)$  et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = u_1 \mathbf{e}_{13} + u_2 \mathbf{e}_{23}$ . Nous obtenons par suite

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mu}{\lambda} (u_1^2 + u_2^2). \quad (4.126)$$

Ce qui donne finalement

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = -2\mu \int_D \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{ij} dV - \frac{\mu}{\lambda} \int_\Sigma (u_1^2 + u_2^2) dS < 0. \quad (4.127)$$

On conclut donc que la matrice  $\mathbf{M}$  est réelle symétrique et définie négative par suite elle est inversible ce qui impose l'unique solution du système linéaire.

Dans le cas, où la sphère est libre de se mouvoir et en utilisant (4.73), l'équation intégrale (4.79) s'écrit

$$(-\mathbf{u}^\infty + \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) \cdot \mathbf{e}_j = - \int_S \{ (f_i + f_i^\infty)(\mathbf{y}) G_{ij}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - (\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i^\infty)(\mathbf{y}) T_{ijk}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x}) (\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_k) \} dS(\mathbf{y}). \quad (4.128)$$

### 4.3 Résolution numérique de l'équation intégrale par la méthode des éléments de frontières

On cherche à résoudre numériquement l'équation intégrale suivante

$$I(\mathbf{x}) = \int_S (\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{y}) G_{ij}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS(\mathbf{y}). \quad (4.129)$$

Pour cela on discrétise l'équation intégrale (4.129) sur un nombre fini d'éléments de surface. La discrétisation par éléments de surface résulte d'une transposition discrète des méthodes de représentation de la géométrie et des variables par des fonction de formes et des valeurs nodales classiquement utilisées dans le contexte des méthodes des éléments finis. On introduit pour cela une partition de la surface  $S$  en  $N_e$  éléments de surface  $E_e$ ,  $e \in \{1, \dots, N_e\}$ , disjoints. Ce procédé permet la construction d'une surface approchée  $\tilde{S} = \cup E_e$  de  $S$ . Ceci est obtenu en utilisant un

maillage de la surface de la particule constitué de  $N_e$  éléments de surface  $E_e$ . L'intégrale (4.129) s'écrit alors comme une somme d'intégrales élémentaires

$$I(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{E_e} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{y}) \mathbf{G}_{ij}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS(\mathbf{y}). \quad (4.130)$$

Le calcul effectif de chaque intégrale sur l'élément  $E_e$  repose sur une description analytique du type

$$\xi \in \Delta_e \quad \rightarrow \quad \mathbf{y}(\xi) \in E_e \quad (4.131)$$

qui fait correspondre chaque élément  $E_e$  à un élément de référence  $\Delta_e$  qui est ici un triangle à 6 noeuds avec  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ . Pour un élément de surface donné  $E_e$ , l'image sur la surface  $S$  des points  $\xi(q) = (\xi_1(q), \xi_2(q))$  est notée  $\mathbf{y}(e, q)$ . Chaque élément de  $E_e$  est alors décrit par un paramétrage de la forme

$$\xi \in \Delta_e \quad \rightarrow \quad \mathbf{y}(\xi) = \sum_{q=1}^6 M_q(\xi) \mathbf{y}(e, q) \quad (4.132)$$

où  $\mathbf{y}(e, 1), \dots, \mathbf{y}(e, 6)$  sont les noeuds géométriques sur la facette  $E_e$  et les  $M_q(\xi)$ ,  $q \in \{1, \dots, 6\}$  sont les 6 fonctions de forme choisies. Ces dernières sont ici des polynômes d'ordre 2 qui vérifient les propriétés suivantes

$$M_p(\xi(q)) = \delta_{pq}; \quad \sum_{q=1}^6 M_q(\xi) = 1, \quad \xi \in \Delta_e, (q, p) \in \{1, \dots, 6\} \quad (4.133)$$

où  $\xi(q)$  est l'antécédent sur  $\Delta_e$  du noeud  $\mathbf{y}(e, q)$  de  $E_e$ . Ainsi la construction de la surface approchée  $\tilde{S} = \cup E_e$  comporte les étapes suivantes :

- Le choix des 6 noeuds géométriques situés sur  $S$ . Ce choix est retenu sous la forme d'une table de coordonnées donnant pour chaque  $q$ ,  $1 \leq q \leq 6$  les coordonnées cartésiennes de  $\mathbf{y}(e, q)$ .
- La table de connectivité qui à tout couple  $(e, q)$  associe  $N(e, q)$  et donne pour chaque noeud  $\mathbf{y}(e, q)$  de numéro local  $q$  sur l'élément local de numéro  $e$  son numéro global  $m(e, q)$ , où  $(1 \leq m(e, q) \leq 6)$ . Ainsi l'élément de surface  $E_e$  est défini par la donnée des 6 noeuds  $\mathbf{y}^{m(e,1)}, \dots, \mathbf{y}^{m(e,6)}$ .

Les tables de coordonnées et de connectivité définissent le maillage. La surface approchée  $\tilde{S}$  résulte alors d'une interpolation de type (4.132) sur chaque élément. Les fonctions de forme qui vérifient (4.133) sont ici telles que :

$$M_1(\xi) = (2\xi_3 - 1)\xi_3, \quad M_2(\xi) = 4\xi_1\xi_3, \quad M_3(\xi) = (2\xi_1 - 1)\xi_1, \quad (4.134)$$

$$M_4(\xi) = 4\xi_1\xi_2, \quad M_5(\xi) = (2\xi_2 - 1)\xi_2, \quad M_6(\xi) = 4\xi_2\xi_3 \quad (4.135)$$

où  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont les coordonnées de  $\xi$  dans le triangle de référence  $\Delta_e$  avec  $\xi_1 \geq 0$ ,  $\xi_2 \geq 0$  et  $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2 \geq 0$ . La variation quadratique en  $\xi_1, \xi_2$  des fonctions de forme  $M_1, \dots, M_6$ ,

permet la prise en compte de la courbure de la surface  $S$ . De l'expression (4.132), on déduit que

$$d\mathbf{y}(\xi) = \sum_{q=1}^6 \mathbf{y}(e, q) [M_{q,\xi_1}(\xi) d\xi_1 + M_{q,\xi_2}(\xi) d\xi_2] = \mathbf{t}_1 d\xi_1 + \mathbf{t}_2 d\xi_2 \quad (4.136)$$

où  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$  sont les vecteurs de la base naturelle du plan tangent à  $E_e$  en  $\mathbf{y}(\xi)$ . Ces vecteurs sont ici donnés par les relations

$$\mathbf{t}_1 = \sum_{q=1}^6 M_{q,\xi_1}(\xi) \mathbf{y}(e, q), \quad \mathbf{t}_2 = \sum_{q=1}^6 M_{q,\xi_2}(\xi) \mathbf{y}(e, q). \quad (4.137)$$

Les fonctions  $M_{q,\xi_1}$  et  $M_{q,\xi_2}$  sont les dérivées de premier ordre des fonctions  $M_q$  pour ( $1 \leq q \leq 6$ ). L'élément d'aire  $dS$  au point  $\mathbf{y}(\xi)$  d'un élément de surface est alors donné par :

$$dS(\mathbf{y}) = |\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2| d\xi_1 d\xi_2 = J(\xi) d\xi_1 d\xi_2 \quad (4.138)$$

où  $J(\xi)$  est le Jacobien du changement de variable  $\mathbf{y} \rightarrow \xi$  inverse du paramétrage (4.132) de l'élément de surface. Rappelons que l'intégrale (4.130) est définie par

$$I(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{E_e} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{y}(\xi)) \mathbf{G}_{ij}^c(\mathbf{y}(\xi), \mathbf{x}) dS(\mathbf{y}(\xi)). \quad (4.139)$$

D'après l'approximation (4.132) nous avons l'interpolation suivante sur chaque élément  $E_e$

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{y}(\xi)) = \sum_{q=1}^6 M_q(\xi) (\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{y}(e, q)). \quad (4.140)$$

Par suite, on écrit l'intégrale (4.139) sous la forme

$$I(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{q=1}^6 (\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{y}(e, q)) I^{(e,q)}(\mathbf{x}) \quad (4.141)$$

avec

$$I^{(e,q)}(\mathbf{x}) = \int_{\Delta_e} M_q(\xi) G_{ij}^c(\mathbf{y}(\xi), \mathbf{x}) J(\xi) d\xi_1 d\xi_2. \quad (4.142)$$

Dans ce qui suit nous examinons comment calculer l'intégrale  $I^{(e,q)}(\mathbf{x})$  précédente à chaque noeud du maillage  $\mathbf{x}$ . On distingue alors deux cas pour la position du point  $\mathbf{x}$  :

1- Le cas où  $\mathbf{x} \notin \Delta_e$ . Dans ce cas l'intégrale  $I^{(e,q)}$  est régulière et est calculée par l'utilisation de formules de quadrature par points de Gauss.

2- Le cas où  $\mathbf{x} \in \Delta_e$ . L'intégrale  $I^{(e,q)}(\mathbf{x})$  est alors singulière car  $G_{ij}^c(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  est faiblement singulier lorsque le point  $\mathbf{y}$  s'approche de  $\mathbf{x}$  qui se trouve sur  $\Delta_e$ . Plus précisément, ici  $\mathbf{x}$  est l'un des noeuds

$\mathbf{y}(e, q)$  de l'élément  $\Delta_e$  de coordonnées  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ . On introduit alors les coordonnées polaires  $(\rho, \alpha)$  centrées en  $\eta$  dans le triangle de référence  $\Delta_e$  et telles que :

$$\xi_1 = \eta_1 + \rho \cos \alpha \quad \text{et} \quad \xi_2 = \eta_2 + \rho \sin \alpha, \quad \text{pour } \alpha_1 < \alpha < \alpha_2, \quad 0 \leq \rho \leq d(\alpha). \quad (4.143)$$

Pour tout point  $\mathbf{y}$  de  $E_e$  on a d'après le paramétrage (4.132) la relation

$$\mathbf{y} - \mathbf{x} = \sum_{q=1}^6 [M_q(\xi) - M_q(\eta)] \mathbf{y}(e, q). \quad (4.144)$$

D'après la formule de Taylor pour les polynômes de 2 variables on a

$$M_q(\xi) - M_q(\eta) = (\xi_1 - \eta_1) M_{q,\xi_1}(\xi, \eta) + (\xi_2 - \eta_2) M_{q,\xi_2}(\xi, \eta). \quad (4.145)$$

D'après (4.143), l'équation (4.145) s'écrit en coordonnées polaires, pour tout  $q \in \{1, \dots, 6\}$ ,

$$M_q(\xi) - M_q(\eta) = \rho (\cos \alpha M_{q,\xi_1}(\xi, \eta) + \sin \alpha M_{q,\xi_2}(\xi, \eta)). \quad (4.146)$$

Les polynômes  $M_{q,\xi_1}$  et  $M_{q,\xi_2}$  sont définis ici, pour tout  $1 \leq q \leq 6$ , comme suit :

$$M_{1,\xi_1}(\xi) = 1 - 4\xi_3, \quad M_{2,\xi_1}(\xi) = 4(\xi_3 - \xi_1), \quad M_{3,\xi_1}(\xi) = -1 + 4\xi_1, \quad (4.147)$$

$$M_{4,\xi_1}(\xi) = 4\xi_2, \quad M_{5,\xi_1}(\xi) = 0, \quad M_{6,\xi_1}(\xi) = -4\xi_2, \quad (4.148)$$

$$M_{1,\xi_2}(\xi) = 1 - 4\xi_3, \quad M_{2,\xi_2}(\xi) = -4\xi_1, \quad M_{3,\xi_2}(\xi) = 0, \quad (4.149)$$

$$M_{4,\xi_2}(\xi) = 4\xi_1, \quad M_{5,\xi_2}(\xi) = -1 + 4\xi_2, \quad M_{6,\xi_2}(\xi) = 4(\xi_3 - \xi_2). \quad (4.150)$$

Soit  $\widehat{M}_q$  la fonction de forme modifiée en utilisant les polynômes  $M_{q,\xi_1}$  et  $M_{q,\xi_2}$ , définie par

$$\widehat{M}_q(\rho, \alpha, \eta) = \cos \alpha M_{q,\xi_1}(\xi, \eta) + \sin \alpha M_{q,\xi_2}(\xi, \eta). \quad (4.151)$$

La relation (4.146) s'écrit donc

$$M_q(\xi) - M_q(\eta) = \rho \widehat{M}_q(\rho, \alpha, \eta), \quad \text{pour } 1 \leq q \leq 6. \quad (4.152)$$

À partir de (4.147), (4.148), (4.149), (4.150) et (4.151), les polynômes  $\widehat{M}_q$  s'écrivent ici pour tous  $q = \{1, \dots, 6\}$  sous les formes suivantes où  $\eta_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2$

$$\widehat{M}_1 = (1 - 4\eta_3)(\cos \alpha + \sin \alpha) + 2\rho(\cos \alpha + \sin \alpha)^2, \quad (4.153)$$

$$\widehat{M}_2 = 4[\eta_3 \cos \alpha - \eta_1(\cos \alpha + \sin \alpha) - \rho \cos \alpha(\cos \alpha + \sin \alpha)], \quad (4.154)$$

$$\widehat{M}_3 = 4[\eta_1 - 1] \cos \alpha + 2\rho \cos^2 \alpha, \quad (4.155)$$

$$\widehat{M}_4 = 4(\eta_2 \cos \alpha + \eta_1 \sin \alpha) + 4\rho \cos \alpha \sin \alpha, \quad (4.156)$$

$$\widehat{M}_5 = 4[\eta_2 - 1] \cos \alpha + 2\rho \sin^2 \alpha, \quad (4.157)$$

$$\widehat{M}_6 = 4[\eta_3 \sin \alpha - \eta_2(\cos \alpha + \sin \alpha) - \rho \cos \alpha(\cos \alpha + \sin \alpha)]. \quad (4.158)$$

Pour tout  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{x}$  sur l'élément  $E_e$  et en utilisant (4.152), la relation (4.144) s'écrit

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \rho \left| \sum_{q=1}^6 \widehat{M}_q \mathbf{y}(e, q) \right| \quad (4.159)$$

où  $|\sum_{q=1}^6 \widehat{M}_q \mathbf{y}(e, q)|$  est non nulle en  $\rho = 0$ . On peut donc voir, qu'il existe une fonction  $\widehat{G}$  non singulière en  $\rho = 0$  de telle sorte que, pour  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\eta)$  et tout  $\mathbf{y}$  situé sur l'élément de surface  $E_e$ , on a

$$G(\mathbf{y}(\xi), \mathbf{x}) = \frac{\widehat{G}(\mathbf{y}(\xi), \mathbf{x})}{\rho}. \quad (4.160)$$

Enfin l'élément différentiel devient

$$d\xi = \rho d\rho d\alpha. \quad (4.161)$$

La combinaison de (4.152), (4.159) (4.160) et (4.161) permet finalement de réécrire l'intégrale singulière (4.142) sous une forme régulière dans le système  $\rho, \alpha$

$$I^{(e,q)}(\mathbf{x}) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left\{ \int_0^{d(\alpha)} M_q(\rho, \alpha, \eta) \widehat{G}_{ij}(\rho, \alpha, \eta) d\rho \right\} d\alpha. \quad (4.162)$$

La méthode de quadrature de Gauss consiste à remplacer le calcul de l'intégrale par une somme pondérée des valeurs prises par l'intégrande en un certain nombre de points du domaine d'intégration. C'est une méthode de quadrature exacte pour un polynôme de degré  $2n - 1$  avec  $n$  points pris sur le domaine d'intégration.

Pour l'intégrale régulière (cas où  $\mathbf{x} \notin \Delta_e$ ), une manière habituelle de calculer l'intégrale (4.142) consiste à faire un changement de variable qui transforme le triangle  $\Delta_e$  en un carré  $[-1, 1]^2$ , mais cette méthode brise la symétrie du triangle qui doit être privilégiée. Il existe d'autre part des formules d'intégration numérique utilisant les points  $(\xi_1(i), \xi_2(i))$  et les poids  $\omega_i$  spécialement adaptés au triangle (Lyness et Jespersen [13]), et respectant la symétrie ternaire. L'intégrale numérique (4.142) prend alors la forme suivante

$$\sum_{i=1}^N \omega_i u[(\xi_1(i), \xi_2(i))] \quad (4.163)$$

où  $N$  est le nombre de points de Gauss à utiliser sur l'élément de surface  $E_e$ . Pour le cas où  $\mathbf{x} \in \Delta_e$ , le calcul de l'intégrale (4.162) nécessite cette fois un dernier changement de variable. En effet, la description de l'élément de référence  $\Delta_e$  en coordonnées polaires  $(\rho, \alpha)$  utilise une subdivision en trois triangles de  $\Delta_e$ . Chacun des triangles est caractérisé par la donnée de quatre paramètres  $\rho_0, \alpha_1, \alpha_m$  et contient les points  $\xi(\rho, \alpha)$  tels que  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$  et  $0 \leq \rho \leq \frac{\rho_0}{\cos(\alpha - \alpha_m)}$  où  $\alpha_m = \{\pi/4, 3\pi/4\}$ . Sur chacun des triangles de la subdivision de  $\Delta_e$ , on considère alors le changement de variable  $(v_1, v_2) \rightarrow (\rho, \alpha)$  défini par

$$\alpha = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} v_1 + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}, \quad \rho = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\cos(\alpha - \alpha_m)} (1 + v_1). \quad (4.164)$$

Les variables  $(v_1, v_2)$  parcourent le carré  $[-1, 1]^2$  pour chaque subdivision (triangles). L'élément différentiel se transforme en

$$d\rho d\alpha = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\rho_0}{4 \cos(\alpha - \alpha_m)}. \quad (4.165)$$

Cet ultime changement de variable permet ainsi de calculer l'intégrale singulière à l'aide de points de Gauss sur le carré  $[-1, 1]^2$ . Cette intégrale est évaluée au moyen de la formule produit

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j u[(\xi_1(i), \xi_2(i))] \quad (4.166)$$

où les  $\xi(i)$  et les  $\omega_i$  sont les points et poids de Gauss. Enfin, l'équation intégrale (4.70) aura la forme d'un système linéaire  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$  où  $\mathbf{A}$  est une matrice pleine et non symétrique. Ce système est résolu dans cette thèse par factorisation LU. Le nombre de point de Gauss  $N$  dépend de la position de  $\mathbf{x}$  par rapport à  $\Delta_e$ . Pour une intégrale régulière si  $\mathbf{x}$  est loin de  $\Delta_e$  on peut prendre le nombre  $N$  de points de quadrature de Gauss assez petit, mais si  $\mathbf{x}$  est proche de  $\Delta_e$  il faut prendre un grand nombre de points. Le nombre  $N$  doit être suffisant pour avoir une précision donnée.



# Chapitre 5

## Résultats pour une sphère et pour un ellipsoïde avec glissement sur la paroi

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>99</b>
<b>5.2</b>	<b>Résultats pour une sphère . . . . .</b>	<b>100</b>
<b>5.3</b>	<b>Résultats numériques pour une particule solide ellipsoïdale non inclinée dont un axe est normal à la paroi . . . . .</b>	<b>113</b>
5.3.1	Résultats pour le cas $u^\infty = 0$ . . . . .	114
5.3.2	Résultats pour un ellipsoïde non incliné dans un écoulement de cisaillement parabolique ou linéaire avec glissement sur la paroi	119
<b>5.4</b>	<b>Résultats pour un ellipsoïde incliné . . . . .</b>	<b>131</b>

---

### 5.1 Introduction

On présente dans ce chapitre les résultats obtenus par la méthode des équations intégrales expliquée au chapitre 4. Puis on compare ces résultats avec ceux du chapitre 1, pour une sphère dans un écoulement de cisaillement parabolique près d'une paroi en  $\mathbf{x}_3 = 0$  sur laquelle s'exerce une condition de glissement. On donne des tables de résultats qui montrent que plus le nombre de noeud du maillage est élevé plus les résultats sont précis. Dans une seconde partie de ce chapitre

on donne, en utilisant la méthode des équations intégrales, des résultats pour une particule ellipsoïdale. Enfin on compare les résultats de la sphère avec ceux de l'ellipsoïde. Ces deux particules de forme différente ont le même centre et le même volume. Ces résultats nous permettront de remarquer l'influence du volume de la particule sur les forces et couples. On peut aussi étendre le calcul en utilisant la méthode des éléments de surface pour étudier le problème physique d'un ellipsoïde fixe, incliné par rapport au plan( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ ).

## 5.2 Résultats pour une sphère

Avec la méthode des éléments de frontière utilisée au chapitre 4, pour le calcul des intégrales de surfaces et par linéarité, la force et le couple exercés par le fluide newtonien sur la surface de la sphère de rayon  $a$  et mobile avec un mouvement d'un corps rigide  $(\mathbf{U}, \mathbf{\Omega})$  sont donnés par les relations suivantes :

$$\mathbf{F} = \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds, \quad \mathbf{C} = \int_S \mathbf{r} \wedge [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] ds. \quad (5.1)$$

La sphère se déplaçant au voisinage de la paroi en  $\mathbf{x}_3 = 0$ , les expressions de  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{C}$  dépendent seulement de six coefficients de frottement :  $f_{33}$ ,  $c_{33}$ ,  $f_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $f_{21}$  et  $c_{22}$ . Ces coefficients sont définis comme suit :

$$\mathbf{F} = -6\pi\mu_f a f_{33} \mathbf{U} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = 0 \quad \text{pour} \quad \mathbf{U} \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{\Omega} = 0, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{C} = -8\pi\mu_f a^3 c_{33} \mathbf{\Omega} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = 0 \quad \text{pour} \quad \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{U} = 0, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{F} = -6\pi\mu_f a f_{11} \mathbf{U} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = -8\pi\mu_f a^2 c_{12} \mathbf{U} \wedge \mathbf{e}_3 \quad \text{pour} \quad \mathbf{U} \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{\Omega} = 0, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{C} = -8\pi\mu_f a^3 c_{22} \mathbf{\Omega} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = -6\pi\mu_f a^2 f_{21} \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{e}_3 \quad \text{pour} \quad \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{U} = 0. \quad (5.5)$$

Nous présentons maintenant dans les tables Tab.5.1, Tab.5.2 et Tab.5.3, les résultats des coefficients de frottement  $f_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $f_{21}$  et  $c_{22}$  pour différentes valeurs de  $\frac{\ell}{a}$  et différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée  $\frac{b}{a} = \lambda$ , en faisant varier le nombre de noeuds  $N$  du maillage. On donne d'autre part les résultats pour ces coefficients en utilisant le calcul en coordonnées bipolaires (chapitre 1). Cette comparaison permet de voir que les résultats obtenus par la méthode des intégrales de surface convergent très remarquablement lorsque  $N$  croît vers ceux obtenus par le calcul en coordonnées bipolaires.

$\lambda = 0.3$ et $\frac{\ell}{a} = 3$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{11}$	1.20041	1.20349	1.20382	1.20385
$c_{12}$	0.000048	0.000097	0.000087	0.000085
$f_{21}$	0.000053	0.000115	0.000115	0.000114
$c_{22}$	1.01005	1.00932	1.00912	1.00911

TAB. 5.1 – Valeurs des coefficients  $f_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $f_{21}$  et  $c_{22}$  pour  $\lambda=0.3$ .

$\lambda = 1$ et $\frac{\ell}{a} = 1.5$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{11}$	1.28628	1.28981	1.29020	1.29023
$c_{12}$	-0.026335	-0.026200	-0.026285	-0.026293
$f_{21}$	-0.034849	-0.035023	-0.035054	-0.035057
$c_{22}$	1.03624	1.03560	1.03548	1.03548

TAB. 5.2 – Valeurs des coefficients  $f_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $f_{21}$  et  $c_{22}$  pour  $\lambda=1$ .

$\lambda = 3$ et $\frac{\ell}{a} = 1.1$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{11}$	1.08794	1.09024	1.09048	1.09050
$c_{12}$	-0.104126	-0.104399	-0.104645	-0.104668
$f_{21}$	-0.138909	-0.139704	-0.139551	-0.139557
$c_{22}$	1.090462	1.090456	1.092046	1.092192

TAB. 5.3 – Valeurs des coefficients  $f_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $f_{21}$  et  $c_{22}$  pour  $\lambda=3$ .

On donne maintenant la Table Tab.5.4 qui présente les résultats de la méthode des équations intégrales pour les coefficients de frottement  $f_{33}$  et  $c_{33}$  et on compare ces résultats avec ceux obtenus en coordonnées bipolaires. On corrige les résultats de O'Neill et Bhatt([8]) qui ont aussi utilisé les coordonnées bipolaires mais n'ont pas pris un nombre suffisant de termes dans le calcul de leurs séries. Dans notre calcul nous avons pris 2500 termes.

$\lambda = 2.5$ et $\frac{\ell}{a} = 1.543$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires (corrigé)	O'Neill et Bhatt
$f_{33}$	2.11545	2.12474	2.12572	2.12568	2.11843
$c_{33}$	0.99321	0.98947	0.98934	0.98935	0.98835

TAB. 5.4 – Correction des coefficients  $f_{33}$  et  $c_{33}$ .

On compare à présent, pour une sphère fixée dans un écoulement parabolique près d'une paroi sur laquelle s'exerce une condition de glissement, les résultats en coordonnées bipolaires et les résultats avec la méthode des équations intégrales. Ces résultats concernent la force adimensionnée  $f_{xx}^p$  et le couple adimensionné  $c_{xy}^p$  exercés par le fluide sur la sphère. On donne aussi des résultats pour les vitesses adimensionnées  $u^p$  et  $w^p$  d'une sphère libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique avec une condition de glissement sur la paroi. Rappelons d'abord les résultats obtenus en coordonnées bipolaires :

$$f_{xx}^p = -\frac{\sqrt{2} \sinh^3 \alpha}{6(\cosh \alpha)^2} \sum_{n=0}^{\infty} [E_n + n(n+1)C_n]. \quad (5.6)$$

$$c_{yx}^p = \frac{\sqrt{2} \sinh^4 \alpha}{4 \cosh \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} [E_n \coth \alpha + 2n(n+1)A_n]. \quad (5.7)$$

Les vitesses adimensionnées sont définies de la façon suivante et leurs expressions en fonction des coefficients de frottement s'écrivent comme suit (chapitre 2) :

$$W^p = ak\left(\frac{\ell}{a}\right)u^p \quad \text{où} \quad u^p = \frac{[f_{xx}^p c_{yx}^t + (\frac{\ell}{a})^{-1} c_y^p f_{xx}^t]}{[c_{yy}^r f_{xx}^t - f_{xy}^r c_{yx}^t]}, \quad (5.8)$$

$$U^p = ka^2\left(\left(\frac{\ell}{a}\right) + \frac{1}{3}\right)u^p \quad \text{où} \quad u^p = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{\ell}\right)^2\right)} \frac{[f_{xx}^p c_{yy}^r + (\frac{\ell}{a})^{-1} c_y^p f_{xy}^r]}{[c_{yy}^r f_{xx}^t - f_{xy}^r c_{yx}^t]}. \quad (5.9)$$

Pour le cas du non-glissement (Tab.5.5) on remarque que pour toutes valeurs de la distance du centre de la sphère à la paroi, les comparaisons entre les résultats en calculs bipolaires et ceux obtenus par la méthode des intégrales de surfaces sont excellentes. Dans le cas où il y a glissement sur la paroi, les résultats sont aussi en excellent accord pour les cas des grandes distances à la paroi.

Résultats pour le cas de la longueur de glissement adimensionnée  $\lambda = 0$  pour différentes valeurs de la distance adimensionnée entre le centre de la sphère et la paroi.

$\lambda = 0, \frac{\ell}{a} = 1.1$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.8270	1.8352	1.8361	1.8362
$c_{xy}^p$	0.9867	0.9903	0.9900	0.9900
$u^p$	0.6583	0.6616	0.6633	0.6633
$w^p$	0.7200	0.7334	0.7373	0.7372
$\lambda = 0, \frac{\ell}{a} = 1.5$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.5629	1.5680	1.5686	1.5686
$c_{xy}^p$	0.9880	0.9914	0.9911	0.9911
$u^p$	0.8640	0.8637	0.8636	0.8636
$w^p$	0.9110	0.9150	0.9147	0.9147
$\lambda = 0, \frac{\ell}{a} = 3$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.2421	1.2454	1.2458	1.2458
$c_{xy}^p$	0.9942	0.9980	0.9977	0.9976
$u^p$	0.9792	0.9793	0.9793	0.9793
$w^p$	0.9845	0.9893	0.9891	0.9890
$\lambda = 0, \frac{\ell}{a} = 5$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.1323	1.1351	1.1354	1.1354
$c_{xy}^p$	0.9958	0.9998	0.9994	0.9994
$u^p$	0.9952	0.9952	0.9952	0.9952
$w^p$	0.9930	0.9978	0.9976	0.9976

TAB. 5.5 – Valeurs des coefficients  $f_{xx}^p$  et  $c_{xy}^p$  pour  $\lambda = 0$ .

Résultats pour le cas de la longueur de glissement adimensionnée  $\lambda = 0.3$  pour différentes valeurs de la distance adimensionnée entre le centre de la sphère et la paroi.

$\lambda = 0.3, \frac{\ell}{a}=1.1$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.7044	1.7110	1.71164	1.71169
$c_{xy}^p$	0.9876	0.9910	0.9904	0.9903
$u^p$	0.7855	0.7859	0.7857	0.7856
$w^p$	0.7917	0.7951	0.7943	0.7942
$\lambda = 0.3, \frac{\ell}{a}=1.5$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.4891	1.4939	1.4944	1.4944
$c_{xy}^p$	0.9941	0.9979	0.9975	0.9974
$u^p$	0.8959	0.8961	0.8961	0.8960
$w^p$	0.9110	0.9150	0.9147	0.9147
$\lambda = 0.3, \frac{\ell}{a}=3$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.2225	1.2256	1.2261	1.2261
$c_{xy}^p$	0.9961	1.0000	0.9997	0.9996
$u^p$	0.9820	0.9822	0.9822	0.9822
$w^p$	0.9863	0.9911	0.9909	0.9908
$\lambda = 0.3, \frac{\ell}{a}=5$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.1252	1.1280	1.1283	1.1283
$c_{xy}^p$	0.9963	1.0003	1.0000	1.0000
$u^p$	0.9956	0.9957	0.9957	0.9957
$w^p$	0.9932	0.9981	0.9979	0.9979

TAB. 5.6 – Valeurs des coefficients  $f_{xx}^p$ ,  $c_{xy}^p$ ,  $u^p$  et  $w^p$  pour  $\lambda = 0.3$ .

Résultats pour le cas de la longueur de glissement adimensionnée  $\lambda = 0.7$ , pour différentes valeurs de la distance adimensionnée entre le centre de la sphère et la paroi.

$\lambda = 0.7, \frac{\ell}{a}=1.1$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.6126	1.6187	1.6193	1.6194
$c_{xy}^p$	0.9859	0.9893	0.9887	0.9887
$u^p$	0.8460	0.8467	0.8466	0.8465
$w^p$	0.7892	0.7921	0.7909	0.7908
$\lambda = 0.7, \frac{\ell}{a}=1.5$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.4255	1.4300	1.4304	1.4305
$c_{xy}^p$	1.0008	1.0046	1.0042	1.0041
$u^p$	0.9168	0.9172	0.9172	0.9172
$w^p$	0.93001	0.9342	0.9339	0.9338
$\lambda = 0.7, \frac{\ell}{a}=3$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.2024	1.2055	1.2059	1.2059
$c_{xy}^p$	1.0000	1.0063	1.0033	1.0032
$u^p$	0.9843	0.9845	0.9845	0.9845
$w^p$	0.9870	0.9918	0.9916	0.9915
$\lambda = 0.7, \frac{\ell}{a}=5$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.1174	1.1201	1.1204	1.1204
$c_{xy}^p$	0.9975	1.0016	1.0012	1.0012
$u^p$	0.9960	0.9961	0.9961	0.9961
$w^p$	0.9934	0.9983	0.9981	0.9980

TAB. 5.7 – Valeurs des coefficients  $f_{xx}^p$ ,  $c_{xy}^p$ ,  $u^p$  et  $w^p$  pour  $\lambda = 0.7$ .

Résultats pour le cas de la longueur de glissement adimensionnée  $\lambda = 1$ , pour différentes valeurs de la distance adimensionnée entre le centre de la sphère et la paroi.

$\lambda = 1, \frac{\ell}{a}=1.1$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.5663	1.5722	1.5728	1.5729
$c_{xy}^p$	0.9847	0.9881	0.9875	0.9874
$U^p$	0.7828	0.8737	0.8737	0.8737
$W^p$	0.7855	0.7880	0.7867	0.7865
$\lambda = 1, \frac{\ell}{a}=1.5$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.3910	1.3953	1.3958	1.3958
$c_{xy}^p$	1.0044	1.0082	1.0078	1.0074
$u^p$	0.9271	0.9276	0.9275	0.9275
$w^p$	0.9290	0.9330	0.9327	0.9326
$\lambda = 1, \frac{\ell}{a}=3$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.1901	1.1932	1.1935	1.1935
$c_{xy}^p$	1.0022	1.0062	1.0058	1.0058
$u^p$	0.9856	0.9857	0.9857	0.9857
$w^p$	0.9872	0.9919	0.9917	0.9917
$\lambda = 1, \frac{\ell}{a}=5$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.1123	1.1150	1.1152	1.1153
$c_{xy}^p$	0.9985	1.0026	1.0022	1.0022
$u^p$	0.9962	0.9963	0.9963	0.9963
$w^p$	0.9935	0.9983	0.9981	0.9981

TAB. 5.8 – Valeurs des coefficients  $f_{xx}^p$ ,  $c_{xy}^p$ ,  $u^p$  et  $w^p$  pour  $\lambda = 1$ .

Résultats pour le cas de la longueur de glissement adimensionnée  $\lambda = 2$ , pour différentes valeurs de la distance adimensionnée entre le centre de la sphère et la paroi.

$\lambda = 2, \frac{\ell}{a}=1.1$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.4705	1.4760	1.4766	1.4766
$c_{xy}^p$	0.9812	0.9846	0.9840	0.9839
$u^p$	0.9231	0.9244	0.9245	0.9245
$w^p$	0.7757	0.7781	0.7766	0.7764
$\lambda = 2, \frac{\ell}{a}=1.5$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.3152	1.3192	1.3197	1.3197
$c_{xy}^p$	1.0115	1.0153	1.0149	1.0149
$u^p$	0.9480	0.9486	0.9486	0.9486
$w^p$	0.9248	0.9288	0.9284	0.9283
$\lambda = 2, \frac{\ell}{a}=3$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.1588	1.1618	1.1621	1.1621
$c_{xy}^p$	1.0090	1.0131	1.0128	1.0127
$u^p$	0.9883	0.9884	0.9884	0.9884
$w^p$	0.9871	0.9918	0.9916	0.9916
$\lambda = 2, \frac{\ell}{a}=5$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.0985	1.1011	1.1014	1.1014
$c_{xy}^p$	1.0017	1.0058	1.0055	1.0054
$u^p$	0.9968	0.9967	0.9969	0.9969
$w^p$	0.9935	0.9984	0.9982	0.9982

TAB. 5.9 – Valeurs des coefficients  $f_{xx}^p$ ,  $c_{xy}^p$ ,  $u^p$  et  $w^p$  pour  $\lambda = 2$ .

Résultats pour le cas de la longueur de glissement adimensionnée  $\lambda = 5$ , pour différentes valeurs de la distance adimensionnée entre le centre de la sphère et la paroi.

$\lambda = 5, \frac{\ell}{a}=1.1$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.3488	1.3539	1.3543	1.3543
$c_{xy}^p$	0.9747	0.9781	0.9775	0.9774
$u^p$	0.9779	0.9795	0.9797	0.9797
$w^p$	0.7639	0.7660	0.7643	0.7641
$\lambda = 5, \frac{\ell}{a}=1.5$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.2122	1.2158	1.2162	1.2162
$c_{xy}^p$	1.0184	1.0224	1.0219	1.0219
$u^p$	0.9733	0.9740	0.9741	0.9741
$w^p$	0.9181	0.9219	0.9215	0.9215
$\lambda = 5, \frac{\ell}{a}=3$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.1059	1.1087	1.1089	1.1090
$c_{xy}^p$	1.0203	1.0245	1.0241	1.0240
$u^p$	0.9921	0.9923	0.9923	0.9923
$w^p$	0.9864	0.9911	0.9909	0.9908
$\lambda = 5, \frac{\ell}{a}=5$	N=74	N=242	N=1058	Bipolaires
$f_{xx}^p$	1.0719	1.0743	1.0746	1.0746
$c_{xy}^p$	1.0085	1.0126	1.0123	1.0122
$u^p$	0.9967	0.9977	0.9977	0.9977
$w^p$	0.9935	0.9983	0.9981	0.9981

TAB. 5.10 – Valeurs des coefficients  $f_{xx}^p$ ,  $c_{xy}^p$ ,  $u^p$  et  $w^p$  pour  $\lambda = 5$ .

Maintenant on trace les courbes des grandeurs  $f_{xx}^p$ ,  $c_{xy}^p$ ,  $u^p$  et  $w^p$  où nous avons superposé les valeurs du calcul en coordonnées bipolaires (lignes de différentes couleurs) et les résultats numériques qui sont représentés sur chaque courbe par des points.

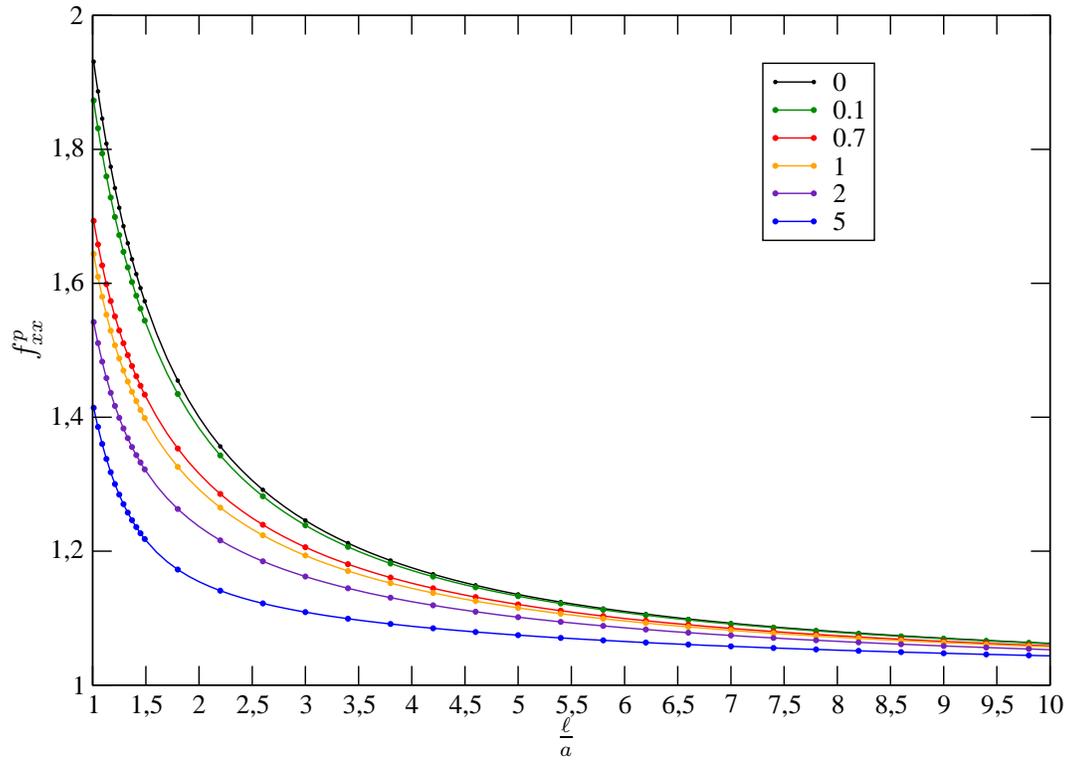


FIG. 5.1 – Superposition des résultats du calcul en coordonnées bipolaires (lignes) avec ceux en calcul numérique (points) pour le coefficient  $f_{xx}^p$  pour une sphère fixe dans un écoulement parabolique avec condition de glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement.

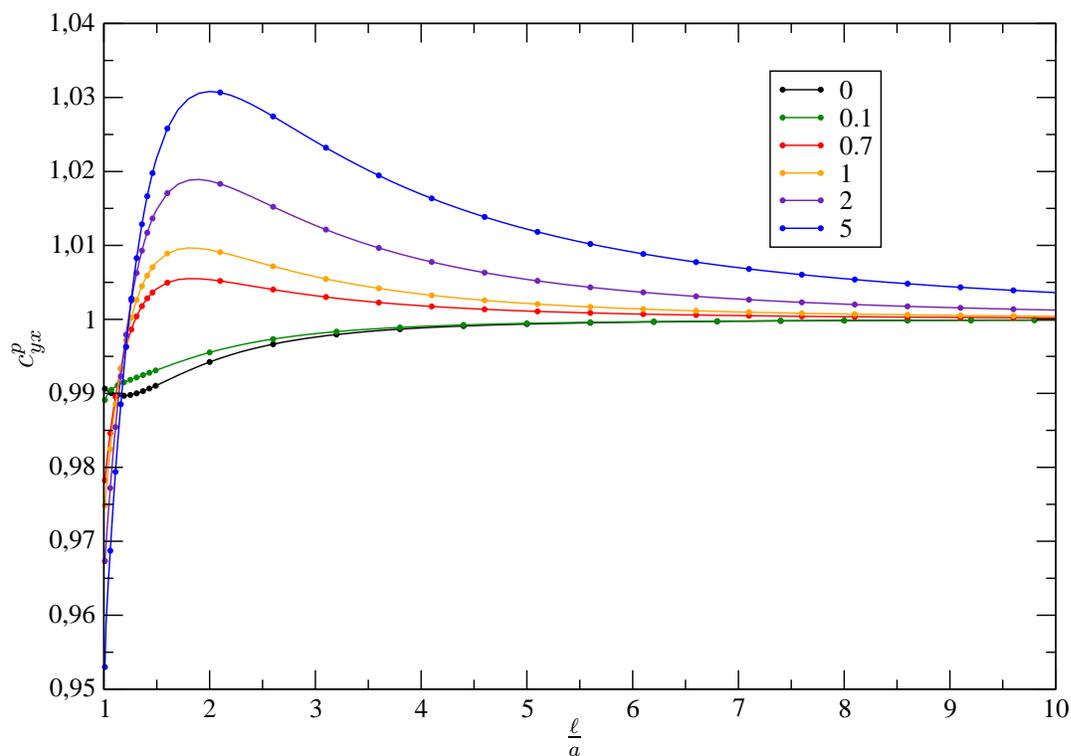


FIG. 5.2 – Superposition des résultats du calcul en coordonnées bipolaires (lignes) avec ceux en calcul numérique (points) pour le couple  $c_{yx}^p$  pour une sphère fixe dans un écoulement parabolique avec condition de glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement.

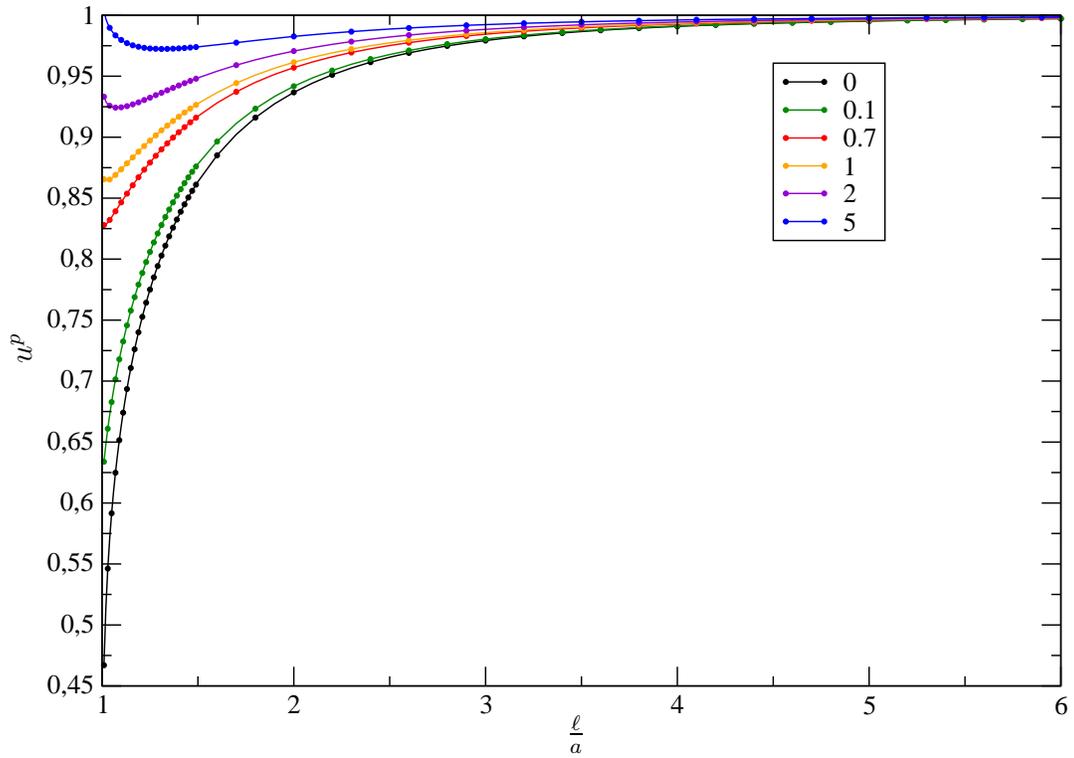


FIG. 5.3 – Superposition des résultats du calcul en coordonnées bipolaires (lignes) avec ceux en calcul numérique (points) pour la vitesse de translation  $u^p$  d'une sphère libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique avec condition de glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement .

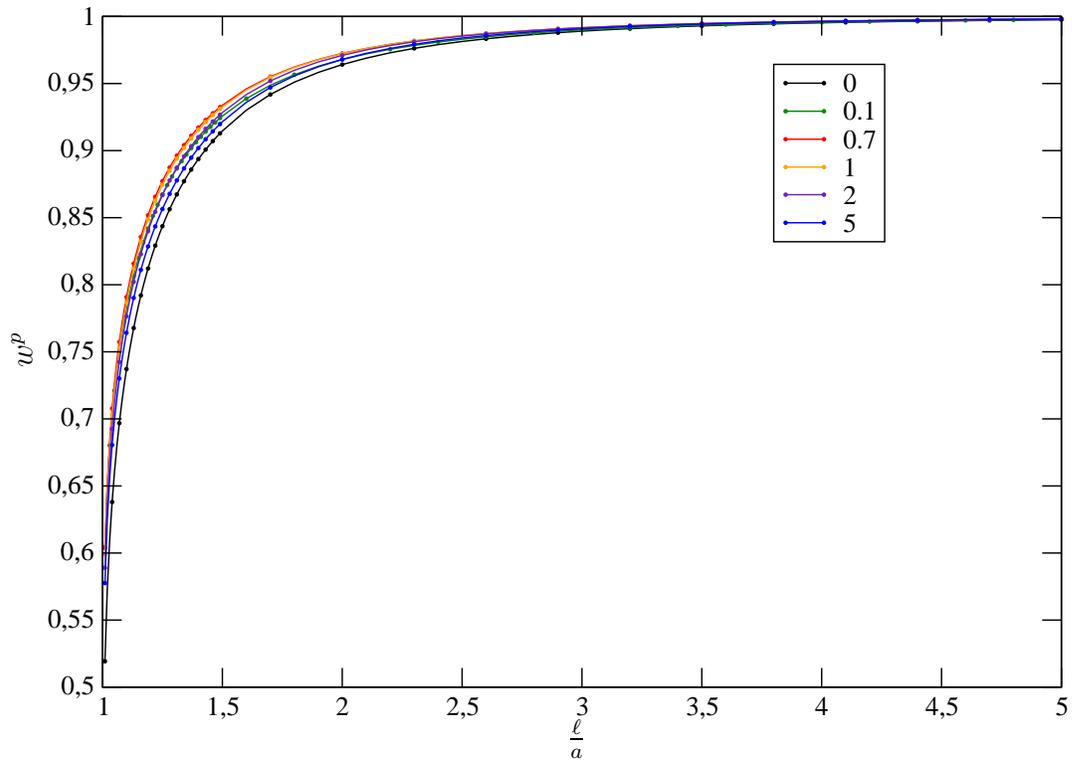


FIG. 5.4 – Superposition des résultats du calcul en coordonnées bipolaires (lignes) avec ceux en calcul numérique (points) pour la vitesse de rotation  $w^p$  d'une sphère libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique avec condition de glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement .

### 5.3 Résultats numériques pour une particule solide ellipsoïdale non inclinée dont un axe est normal à la paroi

Le calcul en coordonnées bipolaires est limité au cas d'une particule sphérique, alors que la méthode des éléments de frontière peut être applicable à une particule non sphérique. Les résultats présentés sur les figures ci-dessous, montrent comment la force totale et le couple total exercés par le fluide sur la particule, pour le cas de glissement sur la paroi, dépendent de la forme de cette particule.

On compare les résultats obtenus pour une sphère de rayon  $a$ , fixée dans un écoulement parabolique près d'une paroi sur laquelle s'exerce une condition de glissement et pour un ellipsoïde de même centre et de même volume que la sphère. Cette particule ellipsoïdale est maintenue fixe et ses axes  $a_i$  sont parallèles aux vecteurs  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = (1, 2, 3)$ . Soient  $a_1 = 1.2a$ ,  $a_2 = \frac{1}{a_1}$  et  $a_3 = a$  (Fig.5.5).

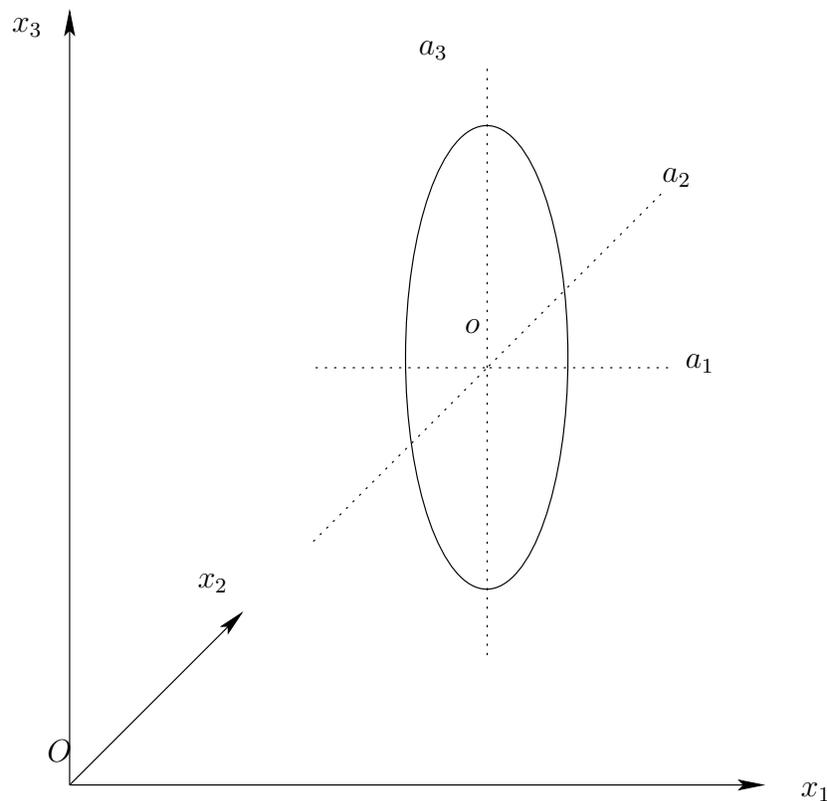


FIG. 5.5 – Particule ellipsoïdale maintenue fixe, chaque axe  $a_i$  étant parallèle à  $x_i$ .

### 5.3.1 Résultats pour le cas $u^\infty = 0$

Pour cet ellipsoïde, on calcule les coefficients de frottement  $f_{33}$ ,  $c_{33}$ ,  $f_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $f_{21}$  et  $c_{22}$  à partir des expressions (5.2), (5.3), (5.4) et (5.5).

Ces résultats sont calculés pour un nombre de noeuds dans le maillage  $N=1058$  pour chaque surface de la particule.

On peut voir (Fig.5.6) que le coefficient  $f_{33}$  a presque la même valeur pour la sphère et pour la particule ellipsoïdale. Alors qu'il est clair que le coefficient de frottement  $f_{11}$  (Fig.5.7) dépend de la forme de la particule .

Les coefficients de frottement  $c_{33}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{22}$  et  $c_{12}$  sont tracés respectivement figures (Fig.5.8), (Fig.5.9) et (Fig.5.10), pour différentes valeurs de la longueur de glissement  $\lambda$  adimensionnée en fonction de  $\frac{\ell}{a}$ . Ces figures montrent la sensibilité de ces coefficients à la forme des particules placées dans le fluide.

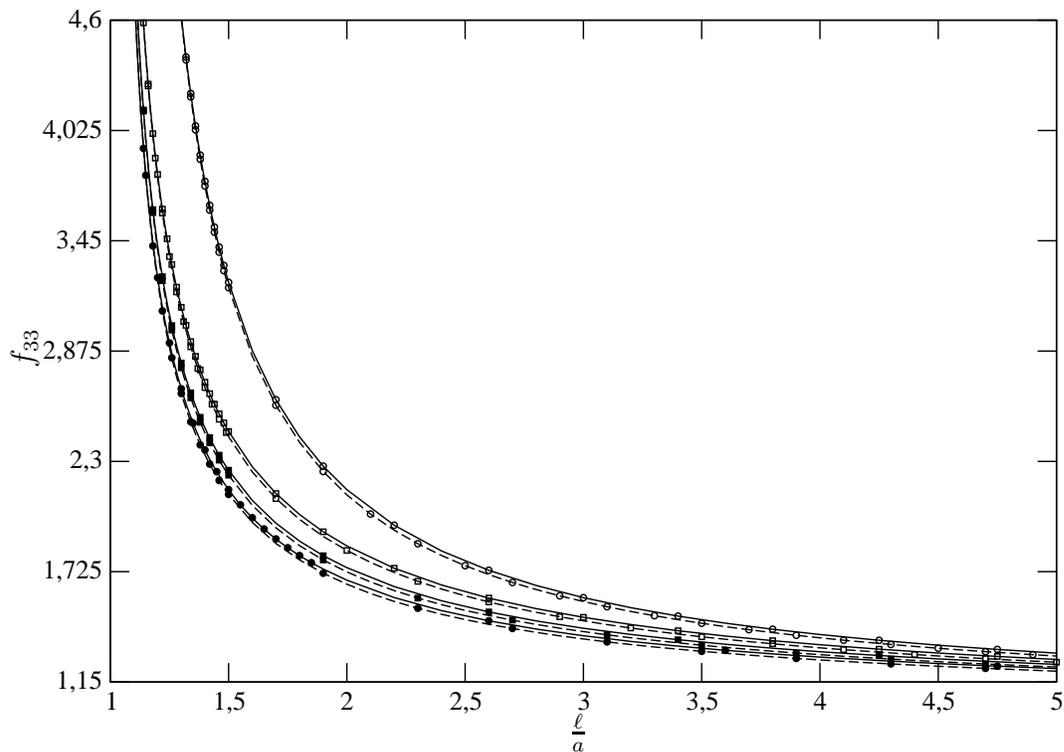


FIG. 5.6 – Comparaison du coefficient de frottement  $f_{33}$  pour une sphère (ligne en pointillés) et une ellipsoïde (ligne continue) pour différentes valeurs du glissement,  $\lambda = 0$  (○),  $\lambda = 0.7$  (□),  $\lambda = 2$  (■) et  $\lambda = 5$  (●).

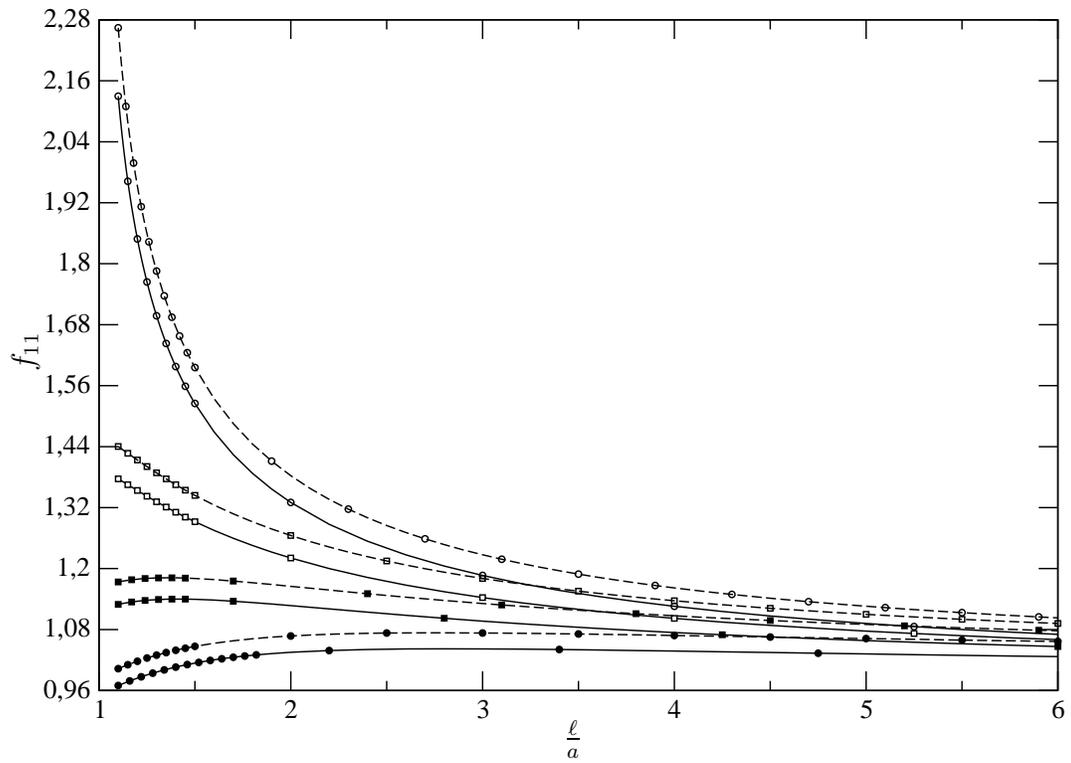


FIG. 5.7 – Comparaison du coefficient de frottement  $f_{11}$  pour une sphère (ligne en pointillés) et une ellipsoïde (ligne continue) pour différentes valeurs du glissement,  $\lambda = 0$  (○),  $\lambda = 0.7$  (□),  $\lambda = 2$  (■) et  $\lambda = 5$  (●).

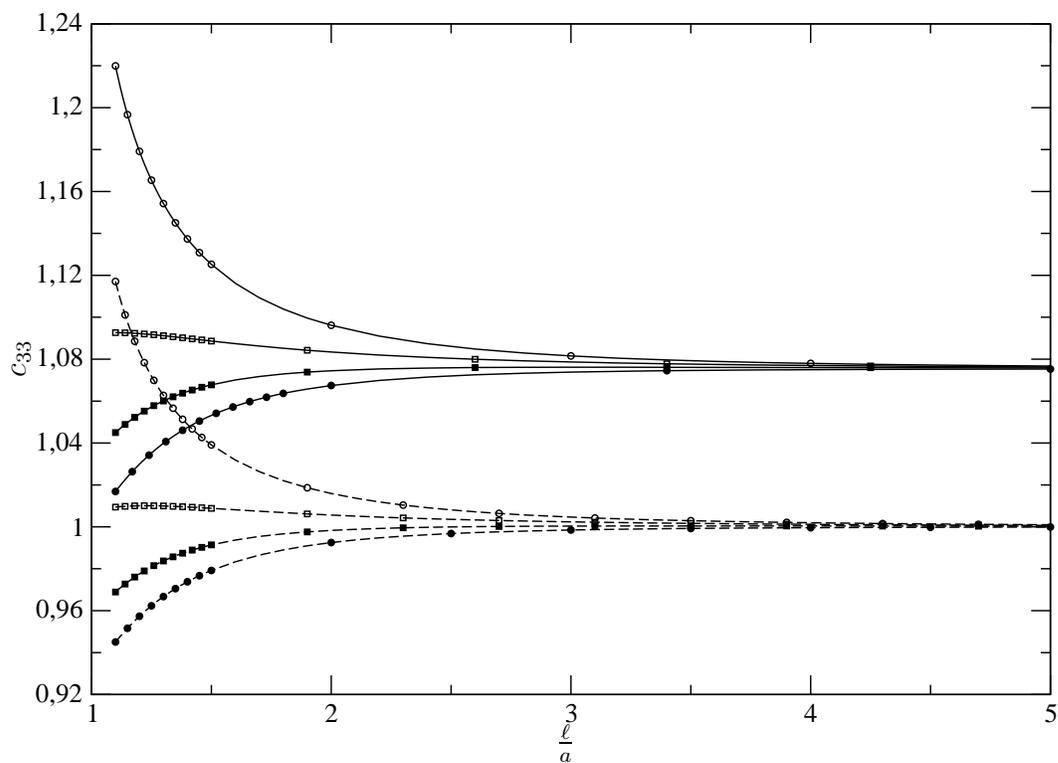


FIG. 5.8 – Comparaison du coefficient de frottement  $c_{33}$  pour une sphère (ligne en pointillés) et une ellipsoïde (ligne continue) pour différentes valeurs du glissement,  $\lambda = 0$  (○),  $\lambda = 0.7$  (□),  $\lambda = 2$  (■) et  $\lambda = 5$  (●).

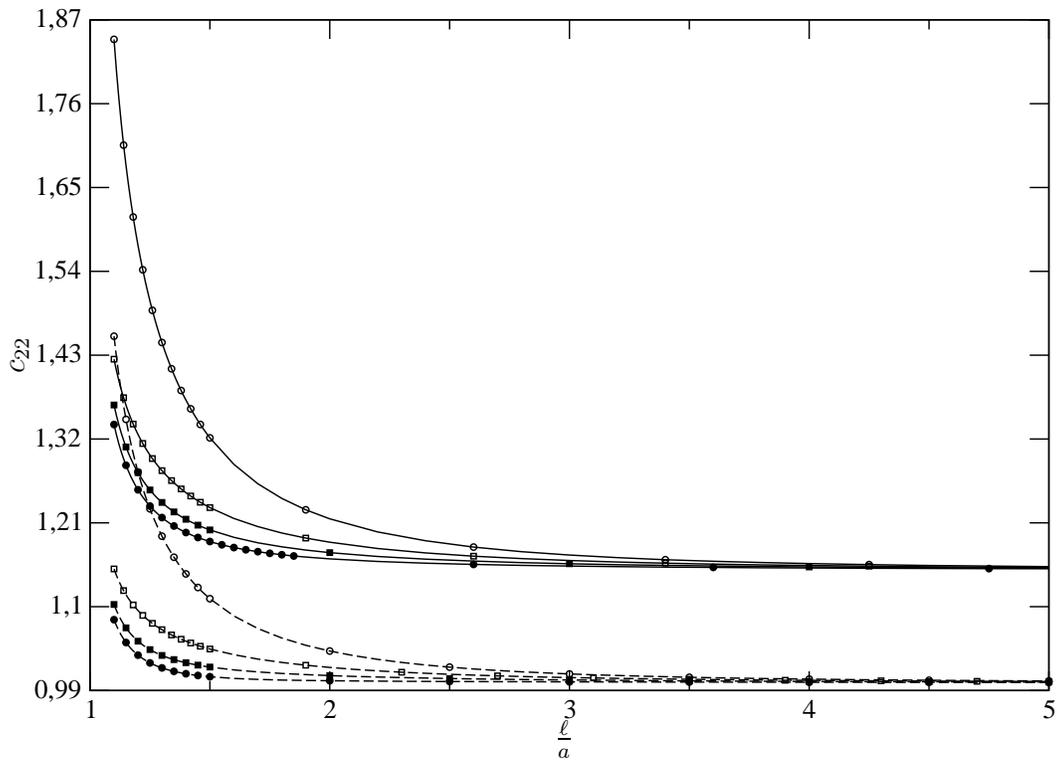


FIG. 5.9 – Comparaison du coefficient de frottement  $c_{22}$  pour une sphère (ligne en pointillés) et une ellipsoïde (ligne continue) pour différentes valeurs du glissement,  $\lambda = 0$  ( $\circ$ ),  $\lambda = 0.7$  ( $\square$ ),  $\lambda = 2$  ( $\blacksquare$ ) et  $\lambda = 5$  ( $\bullet$ ).

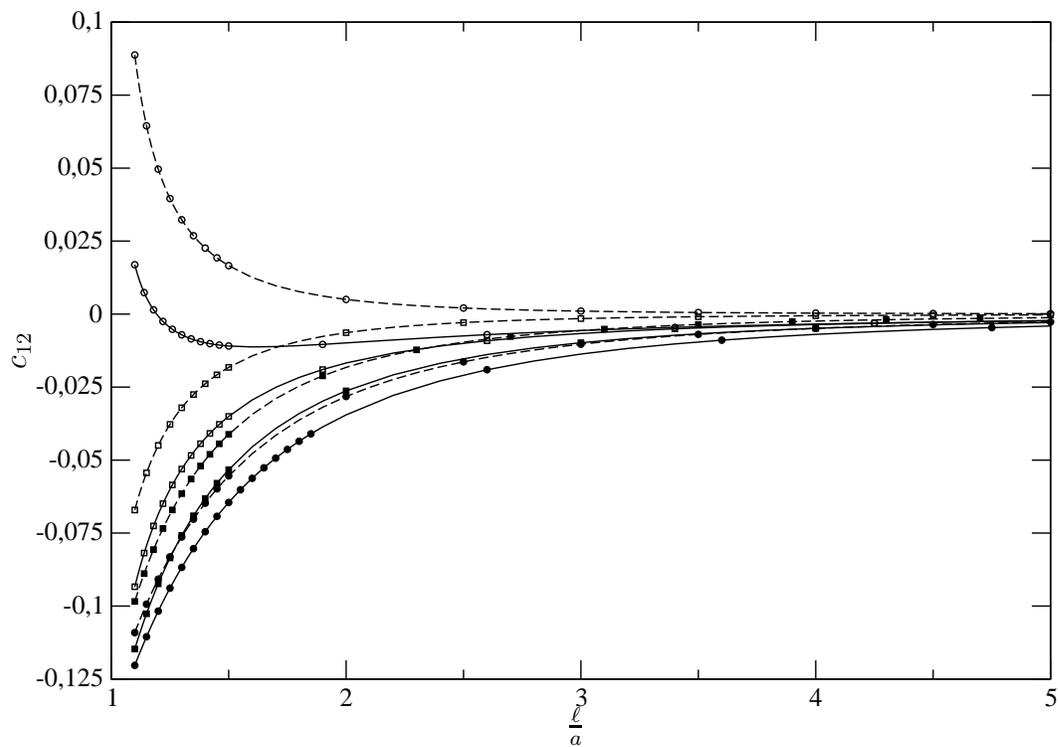


FIG. 5.10 – Comparaison du coefficient de frottement  $c_{12}$  pour une sphère (ligne en pointillés) et une ellipsoïde (ligne continue) pour différentes valeurs du glissement,  $\lambda = 0$  ( $\circ$ ),  $\lambda = 0.7$  ( $\square$ ),  $\lambda = 2$  ( $\blacksquare$ ) et  $\lambda = 5$  ( $\bullet$ ).

### 5.3.2 Résultats pour un ellipsoïde non incliné dans un écoulement de cisaillement parabolique ou linéaire avec glissement sur la paroi

Maintenant on considère la particule ellipsoïdale fixe dans un écoulement de cisaillement parabolique où de cisaillement linéaire avec une condition de glissement sur la paroi. La force et le couple exercés sur la particule et le stresslet sont donnés par les expressions suivantes

$$\mathbf{F}^p = 6\pi\mu ka^3 \left(\frac{\ell}{a}\right)^2 f_{11}^p \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{C}^p = 4\pi\mu ka^4 \left(\frac{\ell}{a}\right) c_{21}^p \mathbf{e}_2, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{F}^c = 6\pi\mu ka^2 \left(\frac{\ell}{a} + \frac{b}{a}\right) f_{11}^c \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{C}^c = 4\pi\mu ka^3 c_{22}^c \mathbf{e}_2, \quad (5.11)$$

$$S_{13}^p = \frac{20\pi}{3} \mu ka^4 \frac{\ell}{a} s_{13}^p. \quad (5.12)$$

$$S_{13}^c = 6\pi\mu ka^3 s_{13}^c. \quad (5.13)$$

Dans le cas où l'ellipsoïde est libre de se déplacer dans un écoulement de cisaillement linéaire ou parabolique les vitesses de translation et de rotation de la particule ellipsoïdale sont données comme suit

$$\mathbf{U}^p = ka^2 \left(\left(\frac{\ell}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\right) u^p \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{W}^p = klw^p \mathbf{e}_2, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{U}^c = ka \left(\left(\frac{\ell}{a}\right) + \frac{b}{a}\right) u^c \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{W}^c = \frac{k}{2} w^c \mathbf{e}_2. \quad (5.15)$$

On donne maintenant les expressions des stresslets lorsque la particule ellipsoïdale est en translation de vitesse  $V$  ou en rotation de vitesse  $\Omega$  dans un fluide au repos

$$S_{13}^t = 6\pi\mu Va^2 s_{13}^t, \quad (5.16)$$

$$S_{13}^r = 6\pi\mu\Omega a^3 s_{13}^r. \quad (5.17)$$

Nous donnons les résultats concernant tous ces coefficients adimensionnés dans les figures suivantes pour différentes valeurs du glissement.

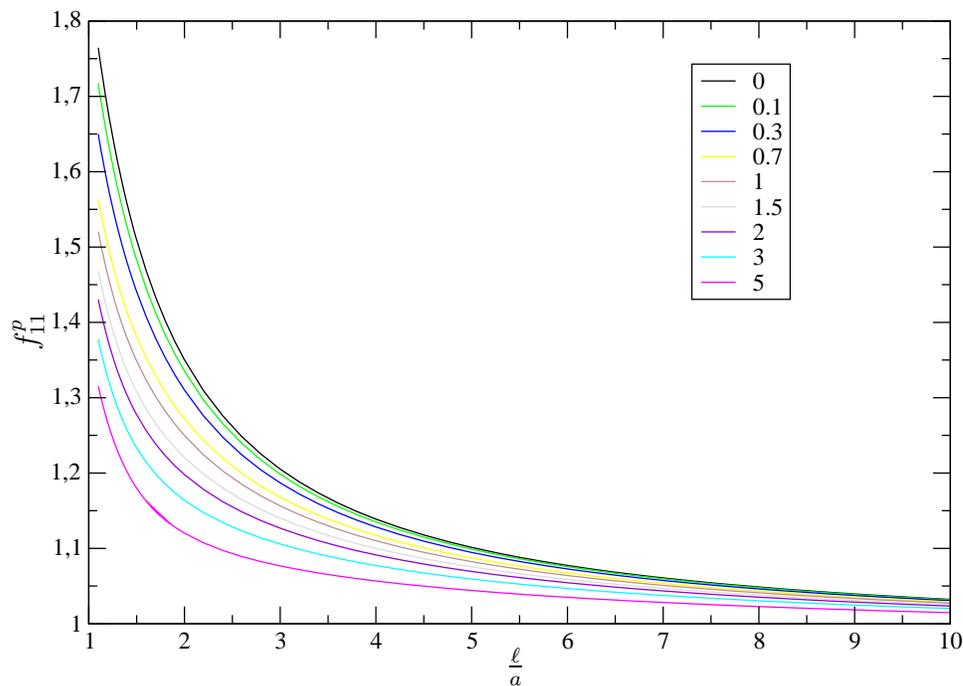


FIG. 5.11 – Variation de la force adimensionnée  $f_{11}^p$  pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement.

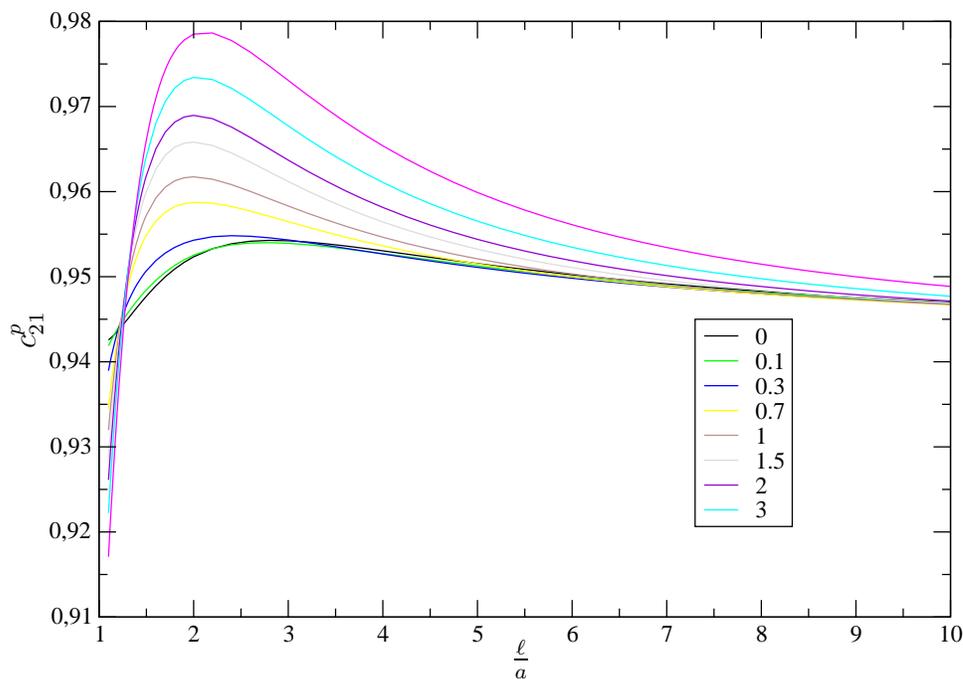


FIG. 5.12 – Variation du couple adimensionné  $c_{21}^p$  pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement.

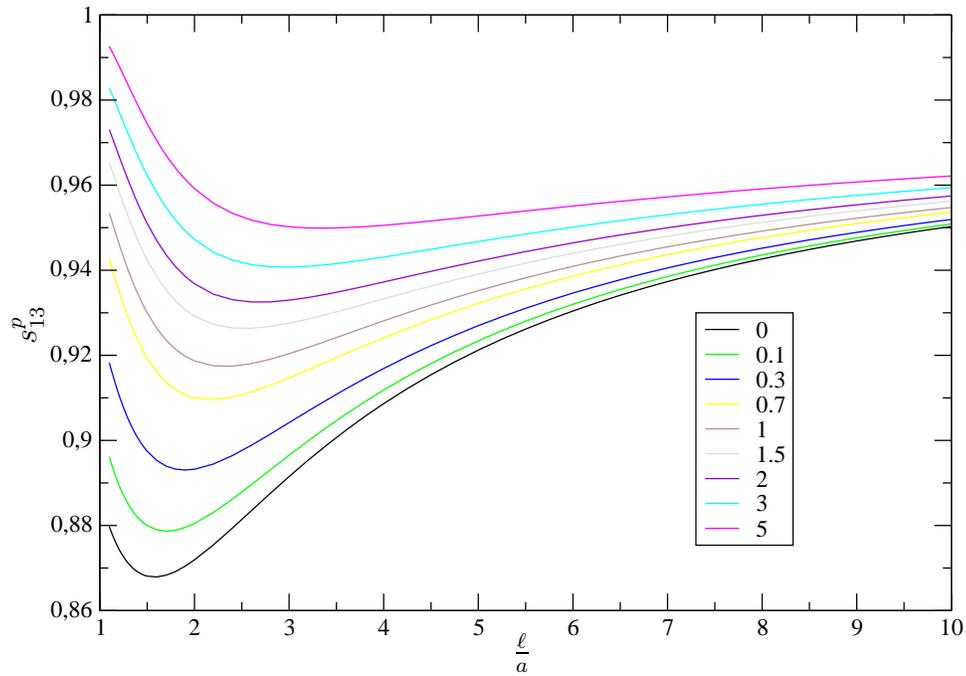


FIG. 5.13 – Variation du stresslet  $s_{13}^p$  pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement.

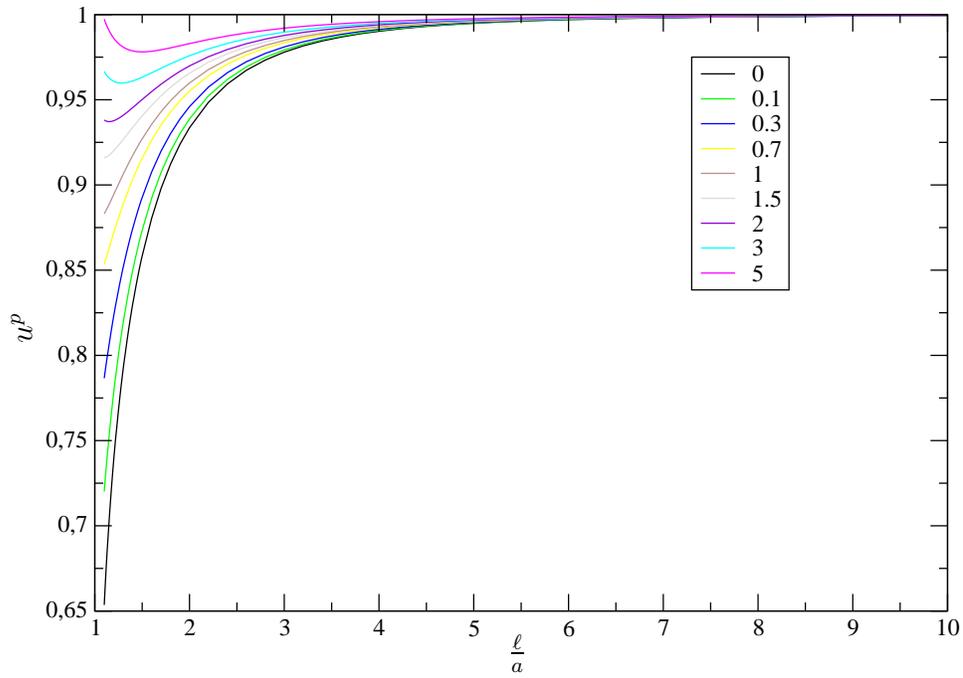


FIG. 5.14 – Variation de la vitesse de translation  $u^p$  pour un ellipsoïde libre de se déplacer dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement.

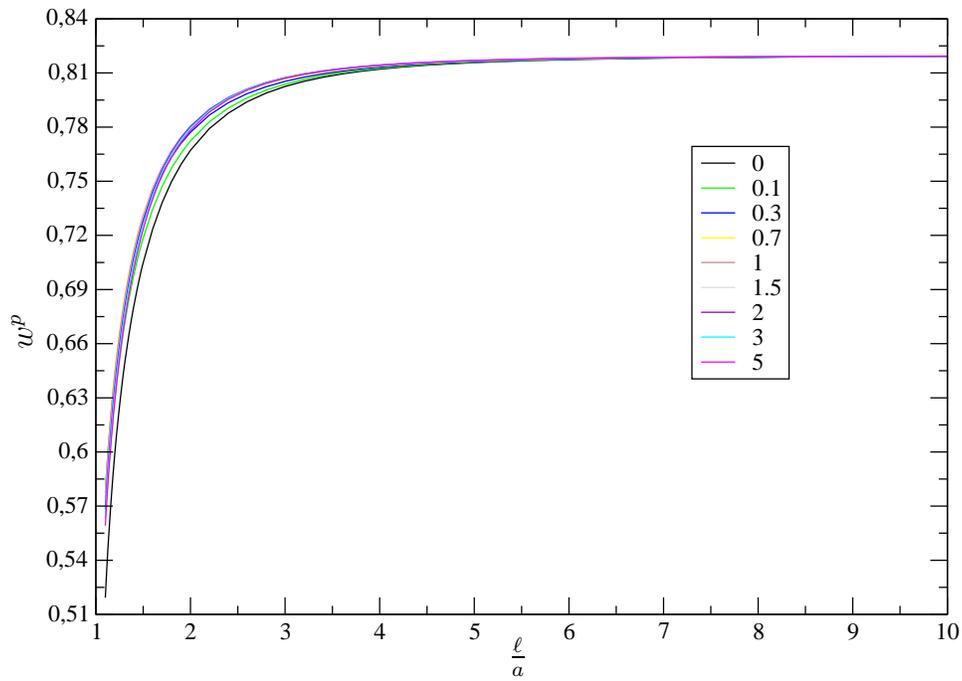


FIG. 5.15 – Variation de la vitesse de rotation  $w^p$  pour un ellipsoïde libre de se déplacer dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement.

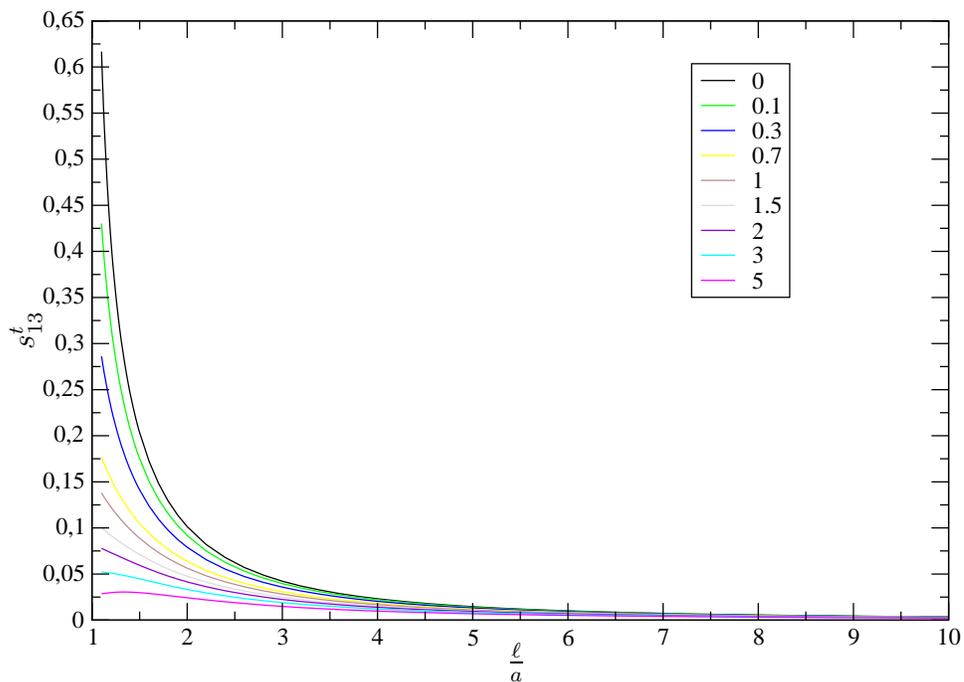


FIG. 5.16 – Variation du stresslet  $s_{13}^t$  pour un ellipsoïde en translation dans un fluide au repos pour différentes valeurs du glissement.

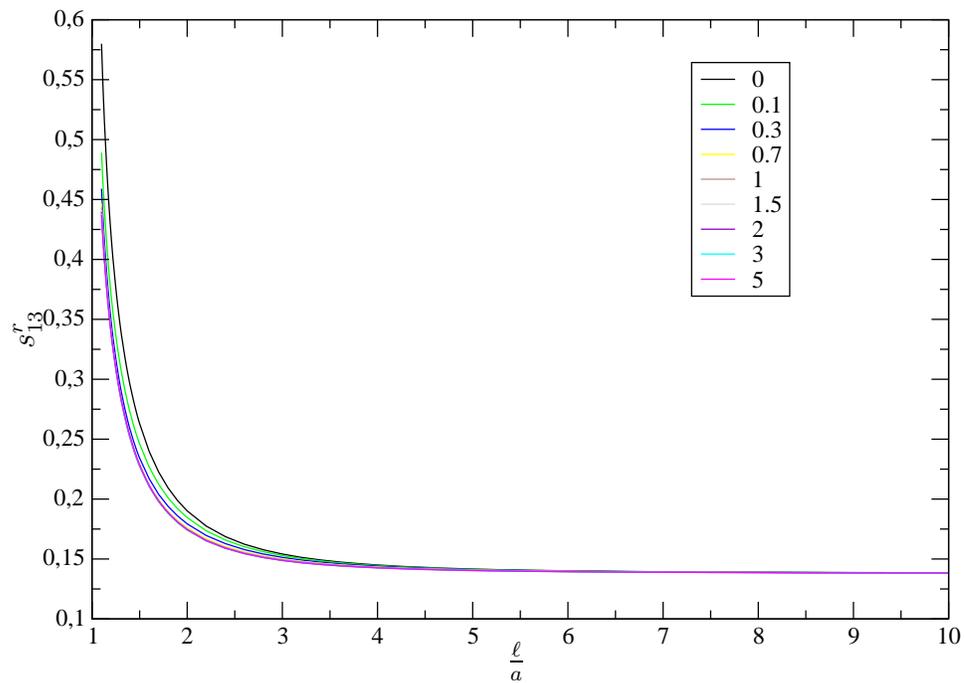


FIG. 5.17 – Variation du stresslet  $s_{13}^r$  pour un ellipsoïde en rotation dans un fluide au repos pour différentes valeurs du glissement.

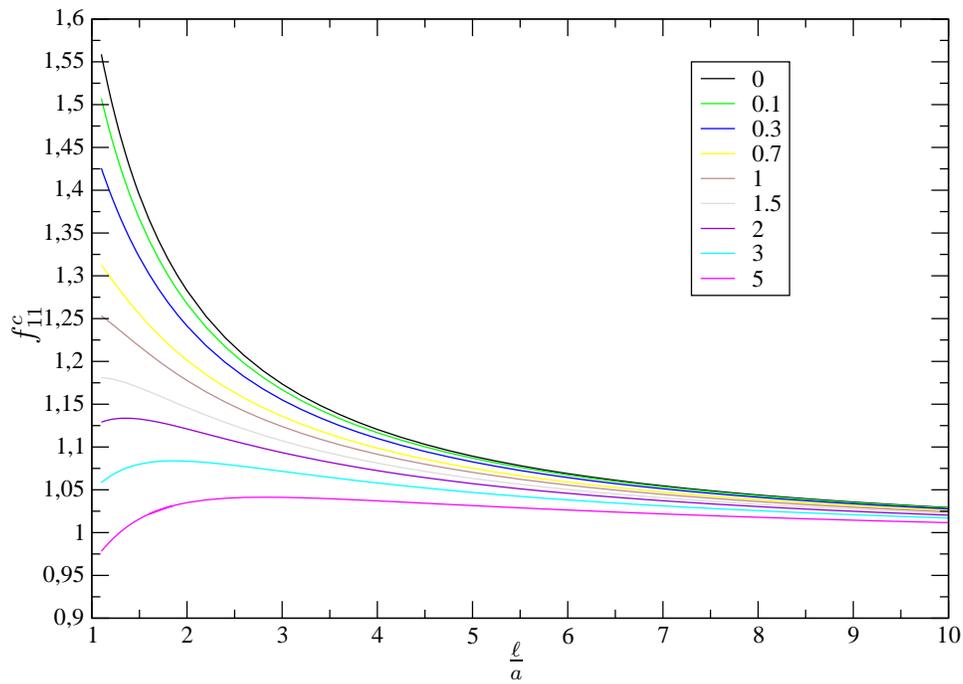


FIG. 5.18 – Variation de la force adimensionnée  $f_{11}^c$  pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement linéaire avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement.

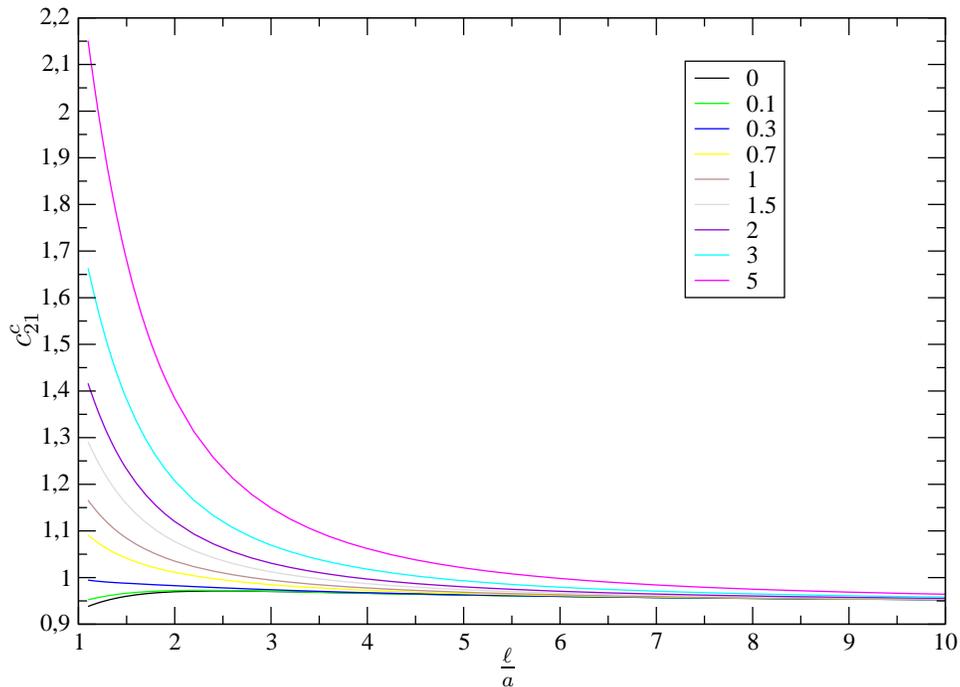


FIG. 5.19 – Variation du couple adimensionné  $c_{21}^c$  pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement linéaire avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement.

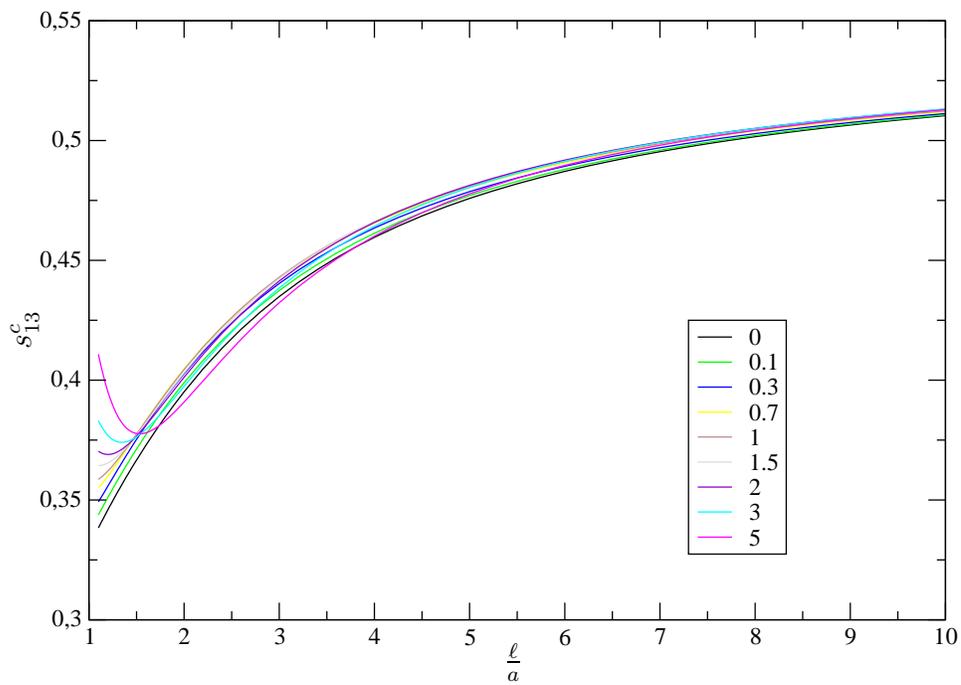


FIG. 5.20 – Variation du stresslet  $s_{13}^c$  pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement linéaire avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement.

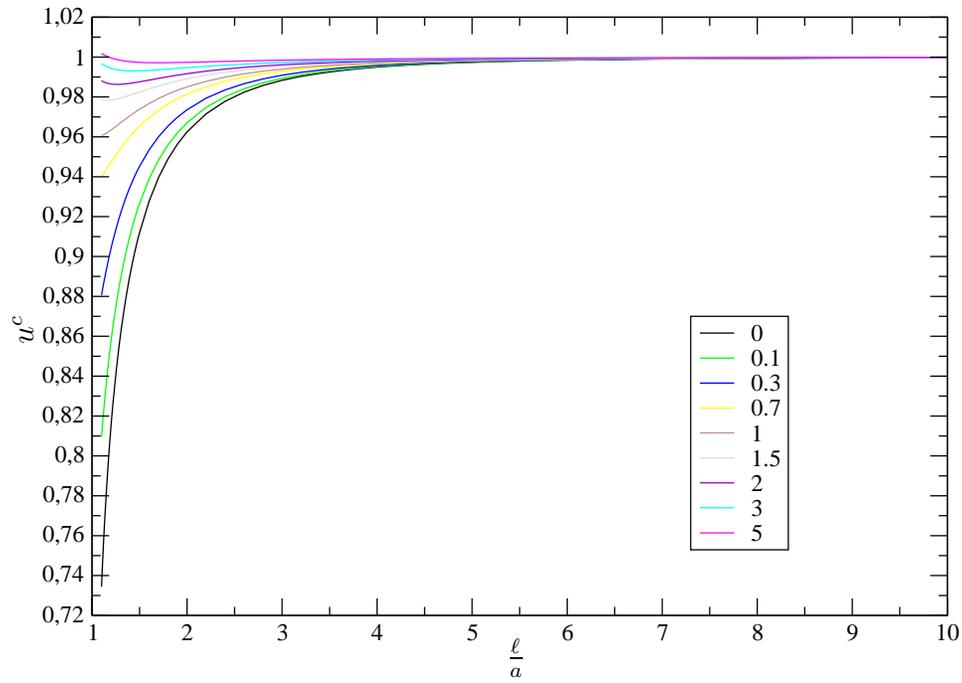


FIG. 5.21 – Variation de la vitesse de translation  $u^c$  pour un ellipsoïde libre de se déplacer dans un écoulement linéaire avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement.

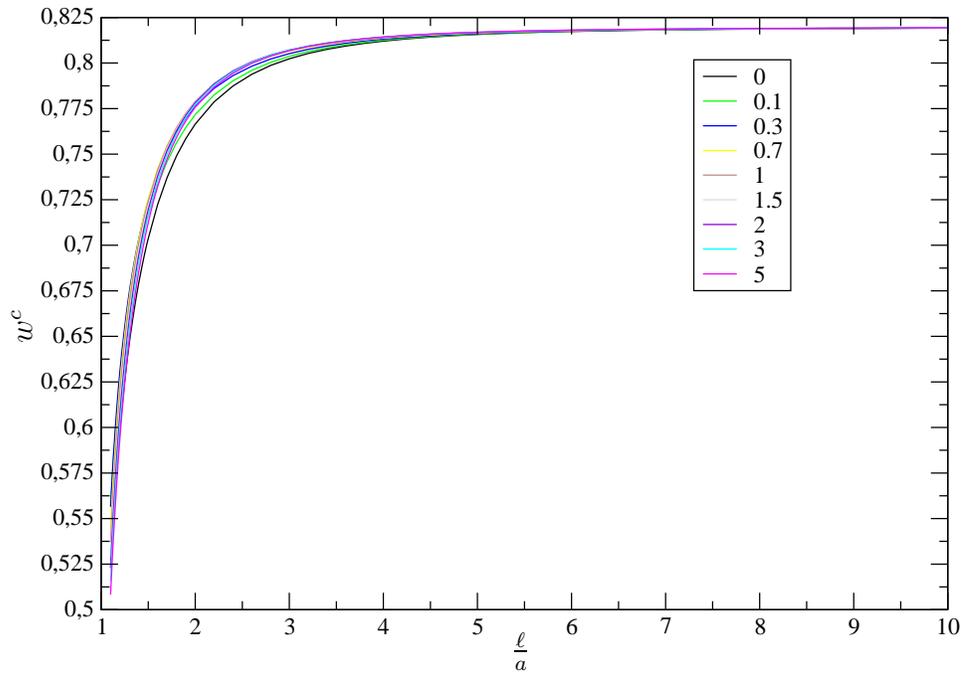


FIG. 5.22 – Variation de la vitesse de rotation  $w^c$  pour un ellipsoïde libre de se déplacer dans un écoulement linéaire avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement.

Sur la (Fig.5.11), on remarque que plus l'écart adimensionné  $(\frac{\ell}{a} - 1)$  entre la paroi et la particule ellipsoïdale est petit, plus les valeurs de la force  $f_{11}^p$  sont importantes. On voit aussi que dans ce cas ( $(\frac{\ell}{a} - 1)$  petit), lorsque le glissement croît les valeurs de la force décroissent et ceci apparaît clairement dans le cas du non glissement ( $\lambda = 0$ ) et le cas d'un glissement important ( $\lambda = 5$ ).

Contrairement à la force, le couple  $c_{21}^p$  (Fig.5.12) et la longueur de glissement ont le même sens de variation. Près de la paroi, à une altitude 1.2, le couple atteint une valeur minimale et ceci est vrai pour toute longueur de glissement.

Le stresslet pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi (Fig.5.13) croît avec le glissement; par exemple à une altitude  $\frac{\ell}{a} = 1.2$  le stresslet atteint sa valeur minimale 0.874525 dans le cas du non-glissement et sa valeur maximale 0.988159 est atteinte dans le cas d'un glissement grand ( $\lambda = 5$ ).

Lorsque la particule ellipsoïdale est libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi, sa vitesse de translation (Fig.5.14) tend vers la valeur unité loin de la paroi. Elle atteint la valeur 0.999591 à l'altitude  $\frac{\ell}{a} = 10$ . Pour des petites distances particule-paroi, l'ellipsoïde se translate avec une vitesse minimale 0.653526. Cette particule tourne avec une vitesse  $w^p$  (Fig.5.15) qui varie dans le même sens que la longueur de glissement  $\lambda$ . Loin de la paroi ( $\frac{\ell}{a} \geq 5$ ), cette vitesse atteint presque son asymptote; elle est de l'ordre de 0.819341.

Le stresslet pour un ellipsoïde en mouvement de translation dans un fluide au repos (Fig.5.16) est plus important près de la paroi, sa valeur est plus élevée lorsque le glissement est moins important. Loin de la paroi, à partir d'une altitude  $\frac{\ell}{a} \geq 5$ , le stresslet est presque nul, il est de l'ordre de 0.002170. De même lorsque l'ellipsoïde est en mouvement de rotation, près de la paroi, le stresslet (Fig.5.17) varie en sens contraire de la longueur de glissement, mais à partir de  $\frac{\ell}{a} \geq 5$  le stresslet, pour toute longueur  $\lambda$ , atteint asymptotiquement une valeur minimale; il vaut 0.138349.

Pour le cas où la particule ellipsoïdale est fixée dans un écoulement linéaire avec une condition de glissement sur la paroi, la (Fig.5.18) présente la variation de la force  $f_{11}^c$  qui atteint un maximum, dans le cas du non-glissement, à une altitude 1.2; cette valeur maximale est 1.558804 alors qu'à cette altitude et pour le cas d'un glissement important ( $\lambda = 5$ ) cette force est minimale, ce minimum est 0.978226. Pour cet écoulement le couple exercé sur la particule ellipsoïdale (Fig.5.19) est important lorsque le glissement est plus élevé. Il croît lorsque l'écart  $\frac{\ell}{a} - 1$  entre l'ellipsoïde et la paroi décroît. Pour chaque valeur du glissement, la courbe qui représente la variation du couple atteint dans le cadre de notre calcul son maximum près de la paroi en  $\frac{\ell}{a} = 1.2$  et son maximum à une grande altitude.

La (Fig.5.20) présente les variations du stresslet pour cet ellipsoïde, pour  $1.2 \leq \frac{\ell}{a} \leq 5$ . Les allures des courbes diffèrent pour chaque glissement, alors qu'à partir d'une distance égale à 2 toutes les courbes sont croissantes et suivent la même allure. La valeur du stresslet maximal est atteinte à une grande distance de la paroi et la valeur minimale est 0.338369, atteinte en  $\frac{\ell}{a} = 1.2$ .

Dans un écoulement de cisaillement linéaire avec une condition de glissement sur la paroi, la (Fig.5.21) montre qu'à la distance  $\frac{\ell}{a} = 1.2$ , la particule ellipsoïdale se translate avec une vitesse minimale de l'ordre de 0.734463 pour  $\lambda = 0$  et que pour  $\lambda = 5$  sa vitesse est 1.001860.

Près de la paroi, lorsque la distance est inférieure ou égale à 5, cette vitesse varie dans le même sens que la longueur de glissement. À partir de  $\frac{\ell}{a} = 5$ , les courbes de variation de cette vitesse pour différentes valeurs de la longueur de glissement tendent vers une valeur presque égale à 1 ; elle est de l'ordre de 0.9999. Lorsque cet ellipsoïde est en mouvement de rotation, les courbes de sa vitesse (Fig.5.22) pour chaque glissement ont la même allure, elles croissent à partir d'une distance très proche de la paroi et atteignent presque leur asymptote, pour toutes les longueurs de glissement, à partir de  $\frac{\ell}{a} \geq 6$ . À ce niveau, à une altitude grande, l'ellipsoïde tourne avec une vitesse égale à 0.819325.

## 5.4 Résultats pour un ellipsoïde incliné

On considère le même ellipsoïde, son demi-axe  $(O, a_3)$  étant maintenant incliné d'un angle  $\beta = \frac{\pi}{4}$  avec la droite  $(O, x_3)$ , (Fig.5.23).

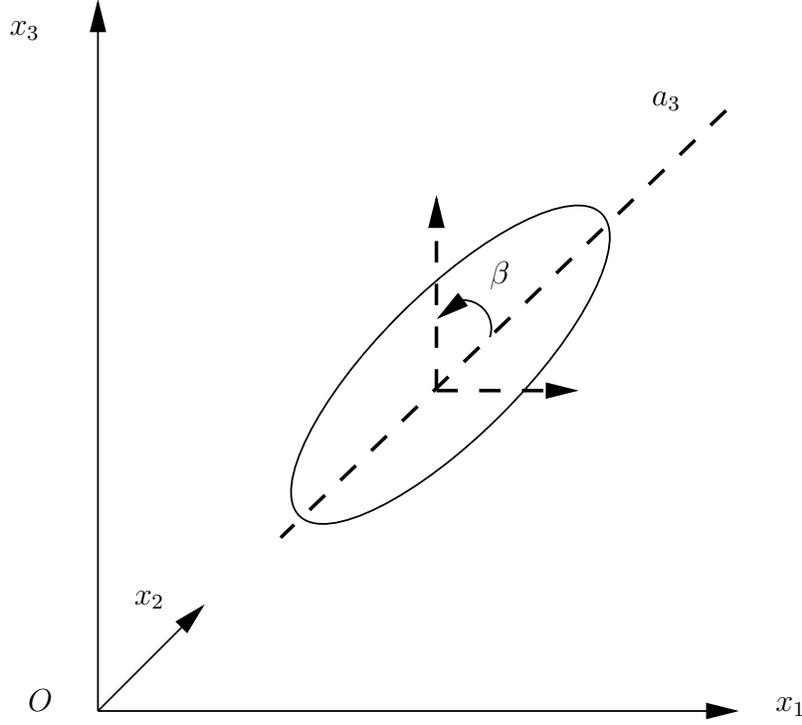


FIG. 5.23 – Ellipsoïde incliné avec une angle  $\beta = \frac{\pi}{4}$  par rapport à l'axe  $(O, x_3)$  .

Par raison de non-symétrie de la figure, de nouveaux coefficients non nuls apparaissent. Pour la force exercée par le fluide sur l'ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement linéaire ou parabolique avec condition de glissement sur la paroi, il y a une deuxième composante non nulle selon  $\mathbf{e}_3$  qui a lieu pour les deux écoulements. Pour cet ellipsoïde la force totale pour les deux écoulements s'écrit sous la forme suivante

$$F^p = 6\pi\mu ka^3 \left(\frac{\ell}{a}\right)^2 f_{11}^p + 6\pi\mu ka^3 \left(\frac{\ell}{a}\right)^2 f_{13}^p \quad (5.18)$$

$$F^c = 6\pi\mu ka^2 \left(\frac{\ell}{a} + \frac{b}{a}\right) f_{11}^c + 6\pi\mu ka^2 \left(\frac{\ell}{a} + \frac{b}{a}\right) f_{13}^c \quad (5.19)$$

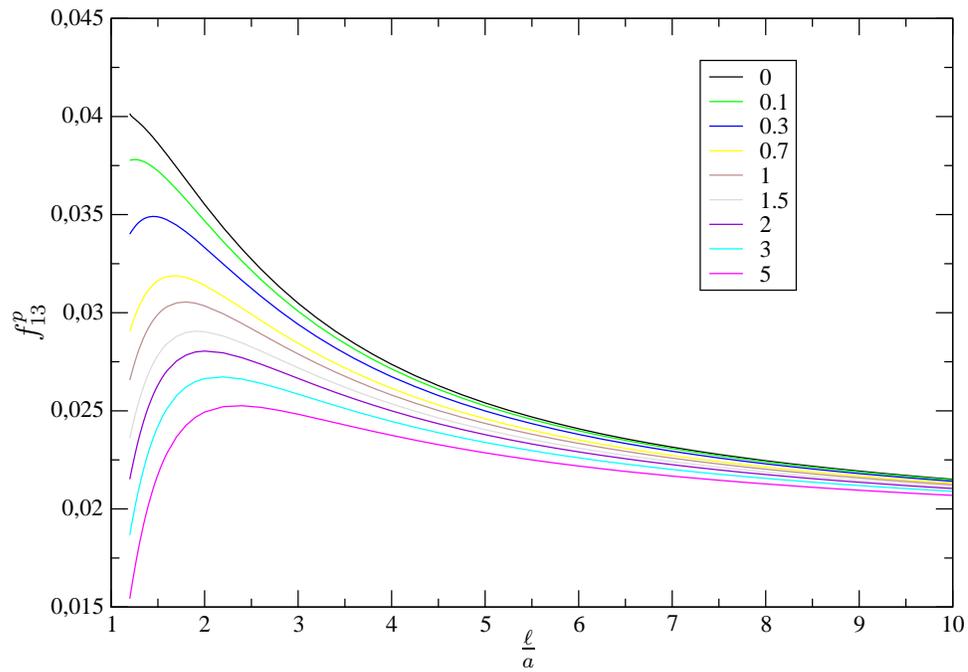


FIG. 5.24 – Variation du nouveau coefficient  $f_{13}^p$  de la force exercée sur l'ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement parabolique avec condition de glissement sur la paroi.

Les valeurs de ces coefficients sont petites mais non nulles, même si la distance paroi-particule est grande. Elles croissent lorsque l'ellipsoïde est plus proche de la paroi.

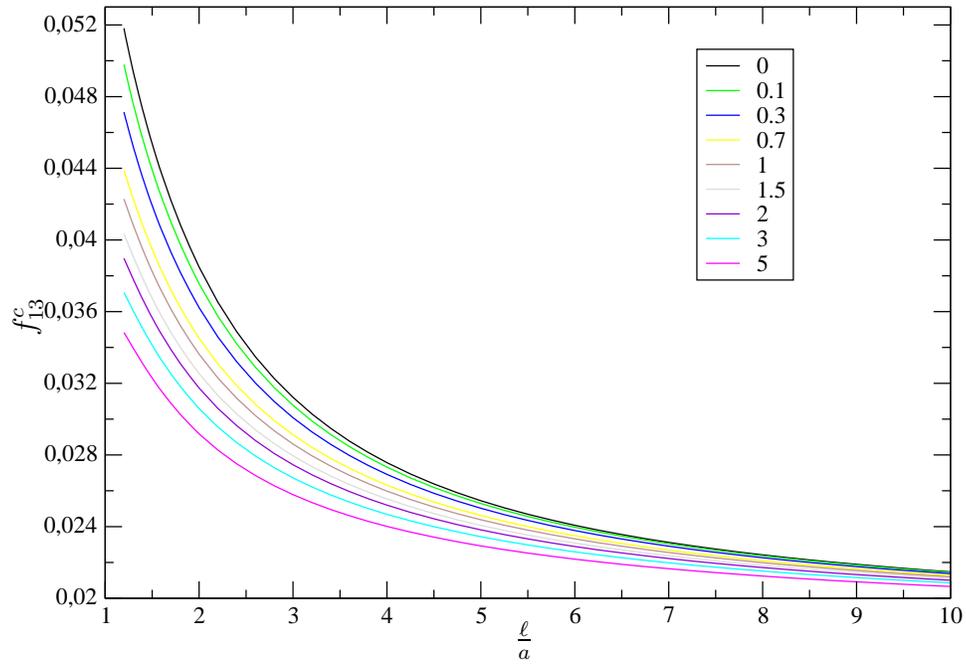


FIG. 5.25 – Variation du nouveau coefficient  $f_{13}^c$  de la force exercée sur l'ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement linéaire avec condition de glissement sur la paroi.

Lorsque la particule ellipsoïdale se translate selon  $\mathbf{e}_1$  ou tourne selon  $\mathbf{e}_2$ , nous avons les forces de rotation et de translation données par les expressions suivantes

$$\mathbf{F}^t = -6\pi\mu a f_{11}^t U^{(1)} \mathbf{e}_1 - 6\pi\mu a f_{13}^t U^{(3)} \mathbf{e}_3. \quad (5.20)$$

$$\mathbf{F}^r = 6\pi\mu a^2 f_{21}^r \Omega^{(1)} \mathbf{e}_1 + 6\pi\mu a^2 f_{23}^r \Omega^{(3)} \mathbf{e}_3. \quad (5.21)$$

Ces expressions montrent l'apparition du nouveau coefficient non nul  $f_{13}^t$  pour la force de translation et du nouveau coefficient non nul  $f_{23}^r$  pour la force de rotation. On remarque (Fig.5.26) que le coefficient  $f_{13}^t$  est petit mais non nul. Près de la paroi il atteint à une altitude égale 1.2 une valeur maximale de l'ordre de 0.1. Même loin de la paroi ce coefficient est toujours non nul, il atteint une valeur minimale de l'ordre de 0.02 en  $\frac{\ell}{a} = 10$ . Alors que la (Fig.5.27) montre que le nouveau coefficient  $f_{23}^r$  près de la paroi en  $\frac{\ell}{a} = 1.2$  atteint un maximum huit fois plus grand que celui de  $f_{13}^t$ . Loin de la paroi, à partir d'une altitude  $\frac{\ell}{a}$  égale 5, on voit bien que ce nouveau coefficient  $f_{23}^r$  est presque nul, sa valeur minimale est  $9.10^{-4}$  en  $\frac{\ell}{a} = 10$ .

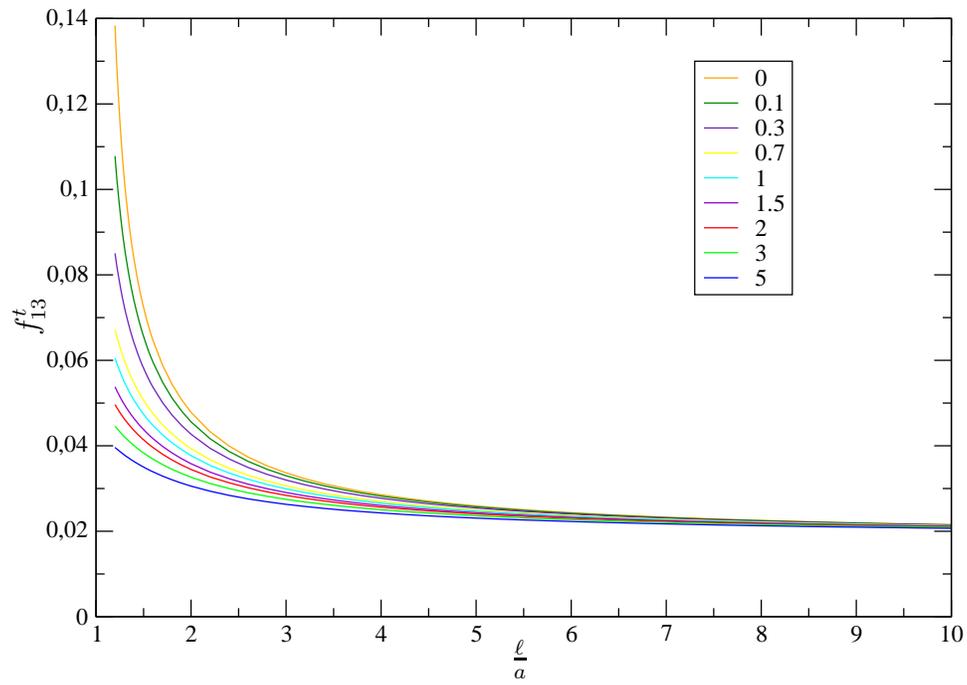


FIG. 5.26 – Variation du coefficient  $f_{13}^t$  de la force exercée par le fluide sur un ellipsoïde qui se translate selon  $e_1$ .

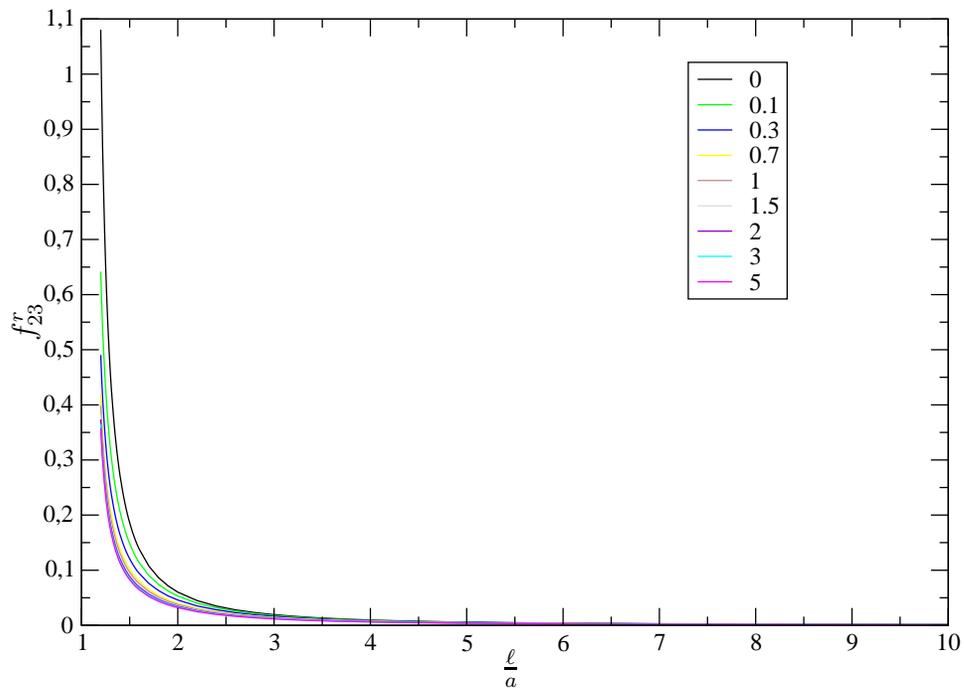


FIG. 5.27 – Variation du coefficient  $f_{23}^r$  de la force exercée par le fluide sur un ellipsoïde qui tourne selon  $e_2$ .

Lorsque l'ellipsoïde est libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique ou dans un écoulement linéaire avec glissement sur la paroi et par raison du non-symétrie la troisième composante de la vitesse de translation de la particule selon la direction  $\mathbf{e}_3$  apparaît.

$$\mathbf{U}^p = ka^2\left(\left(\frac{\ell}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\right)u_1^p\mathbf{e}_1 + ka^2\left(\left(\frac{\ell}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\right)u_3^p\mathbf{e}_3 \quad (5.22)$$

$$\mathbf{U}^c = ka\left(\left(\frac{\ell}{a}\right) + \frac{b}{a}\right)u_1^c\mathbf{e}_1 + ka\left(\left(\frac{\ell}{a}\right) + \frac{b}{a}\right)u_3^c\mathbf{e}_3 \quad (5.23)$$

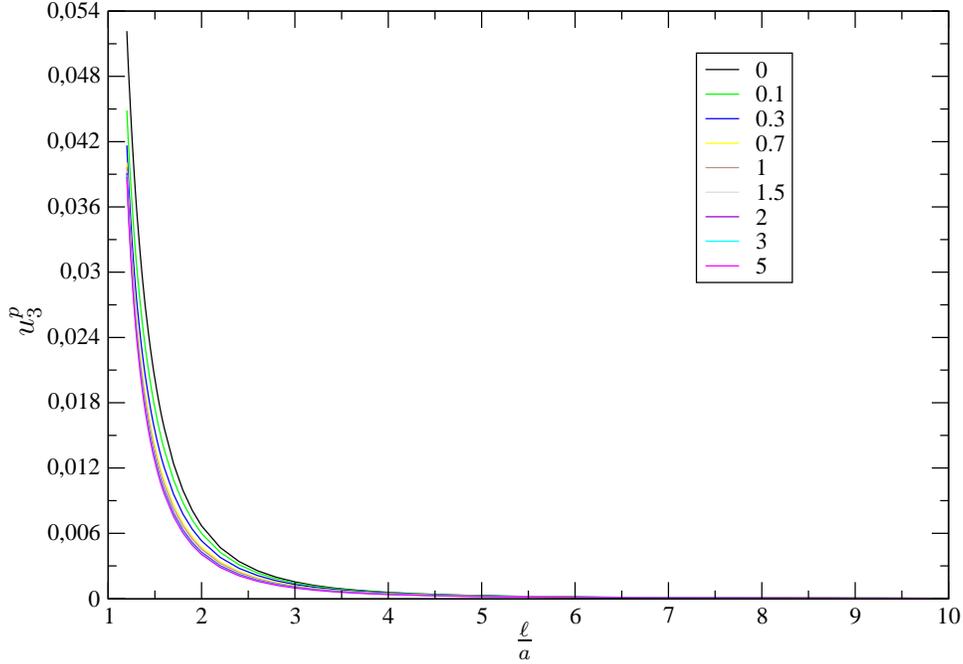


FIG. 5.28 – Variation de la nouvelle composante de la vitesse de translation  $u_3^p$  pour un ellipsoïde libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi.

Ce nouveau coefficient de la vitesse de translation  $u_3^p$  pour une particule ellipsoïdale libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi (Fig.5.28) a pour valeur maximale 0.0522 atteinte en  $\frac{\ell}{a} = 1.2$ , alors qu'à partir d'une grande distance paroi-particule  $\frac{\ell}{a} \geq 5$  ce nouveau coefficient est presque nul, il est de l'ordre de 0.0000222.

De même pour le cas où la particule ellipsoïdale est libre de se déplacer dans un écoulement de cisaillement linéaire avec glissement sur la paroi (Fig.5.29), la nouvelle composante  $u_3^c$  de la

vitesse de translation de l'ellipsoïde est petite non nulle près de la paroi, mais à une distance  $\frac{\ell}{a} \geq 5$ , ce nouveau coefficient est presque nul, il est de l'ordre de 0.0000153.

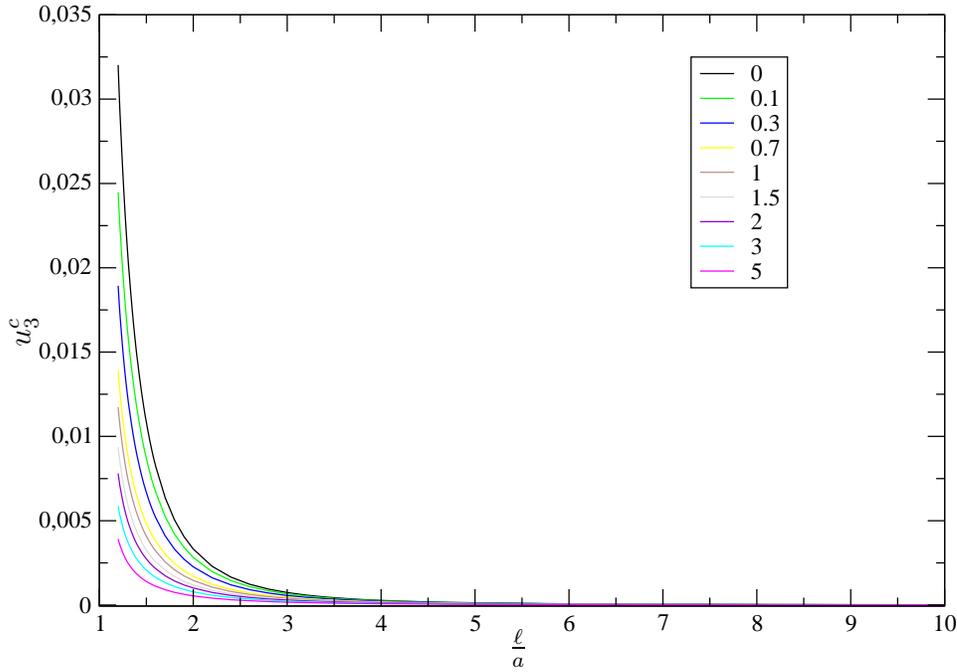


FIG. 5.29 – Variation de la nouvelle composante de la vitesse de translation pour un ellipsoïde libre de se mouvoir dans un écoulement linéaire avec glissement sur la paroi.

On rappelle que le stresslet est le moment symétrique des contraintes, il est donné sous la forme suivant

$$\mathbf{S} = \int_S \left( \frac{1}{2} [\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}] - \frac{1}{3} \mathbf{I}[\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}] \right) ds \quad (5.24)$$

Lorsque la particule ellipsoïdale de surface  $S$  se translate selon  $\mathbf{e}_1$ , et grâce à la non-symétrie de la figure, d'autres composantes non nulles du stresslet apparaissent. De même pour le cas où l'ellipsoïde est en rotation selon  $\mathbf{e}_2$ .

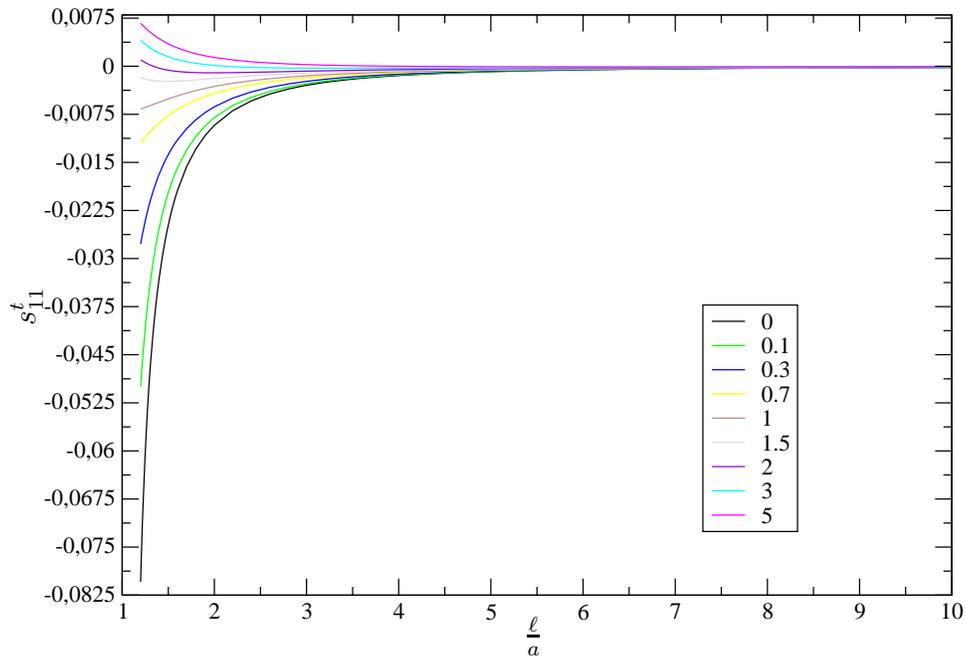


FIG. 5.30 – Variation de la composante  $s_{11}^t$  du stresslet lorsque l'ellipsoïde se translate selon  $\mathbf{e}_1$  dans un fluide au repos pour différentes valeurs  $\lambda$  entre 0 et 5.

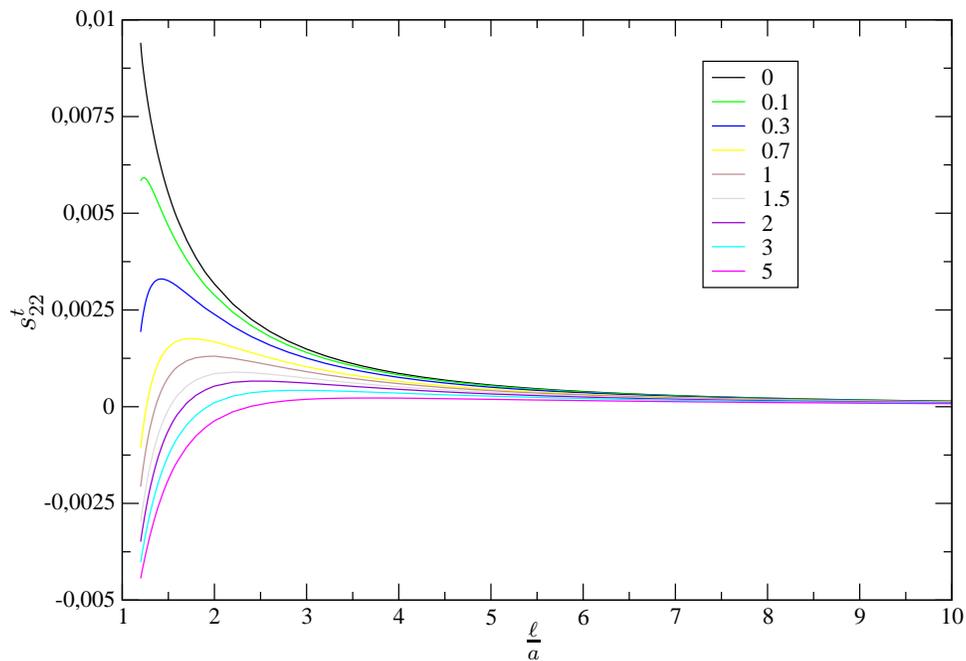


FIG. 5.31 – Variation de la composante  $s_{22}^t$  du stresslet lorsque l'ellipsoïde se translate selon  $\mathbf{e}_1$  dans un fluide au repos pour différentes valeurs  $\lambda$  entre 0 et 5.

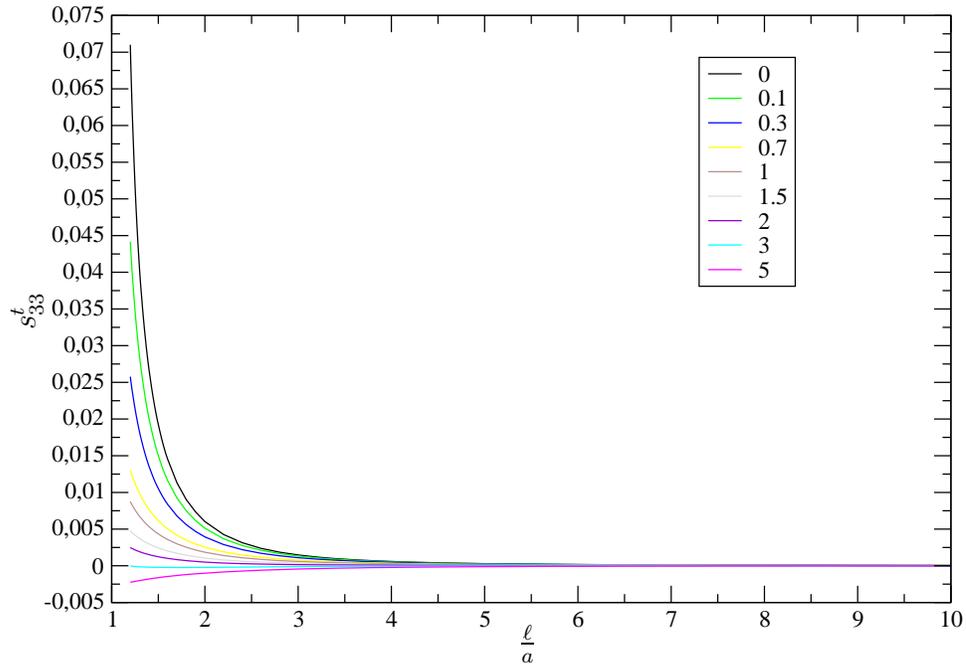


FIG. 5.32 – Variation de la composante  $s_{33}^t$  du stresslet lorsque l'ellipsoïde se translate selon  $\mathbf{e}_1$  dans un fluide au repos.

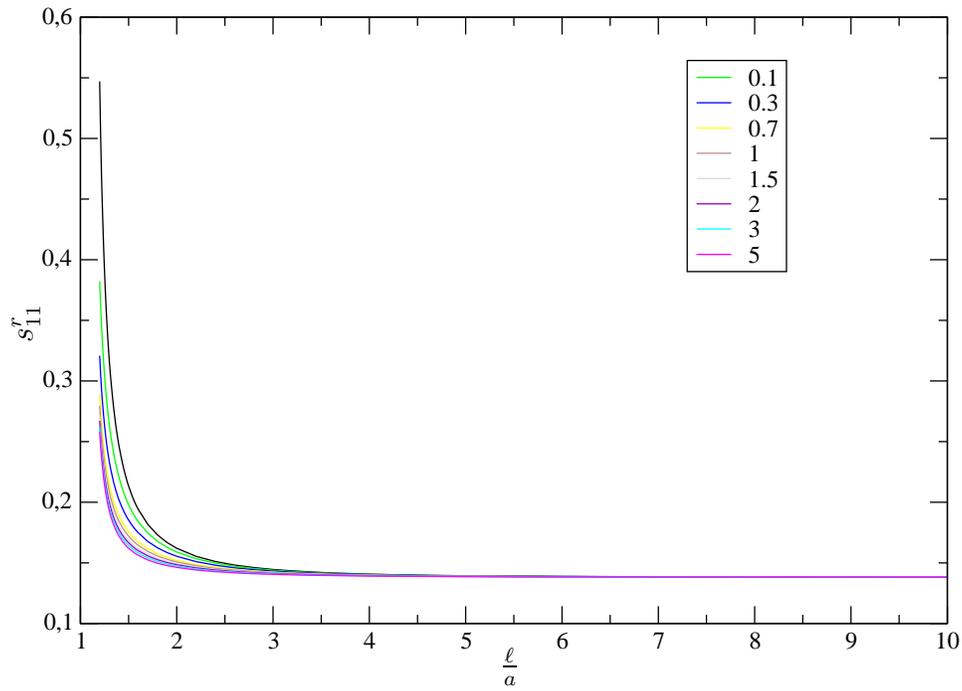


FIG. 5.33 – Variation de la composante  $s_{11}^r$  du stresslet lorsque l'ellipsoïde tourne selon  $\mathbf{e}_2$  dans un fluide au repos.

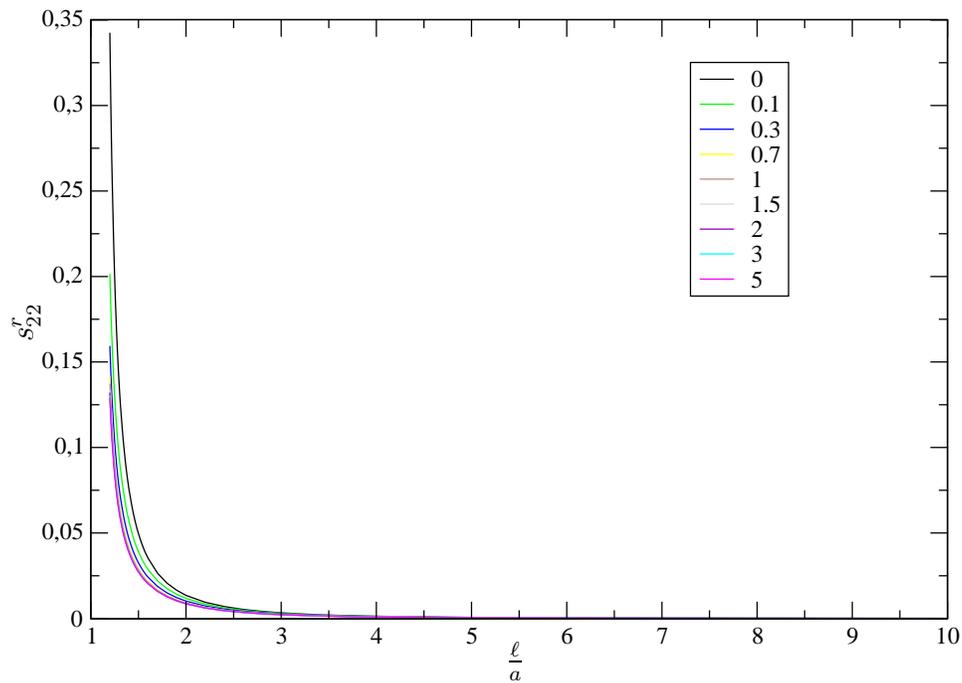


FIG. 5.34 – Variation de la composante  $s_{22}^r$  du stresslet lorsque l'ellipsoïde tourne selon  $\mathbf{e}_2$  dans un fluide au repos.

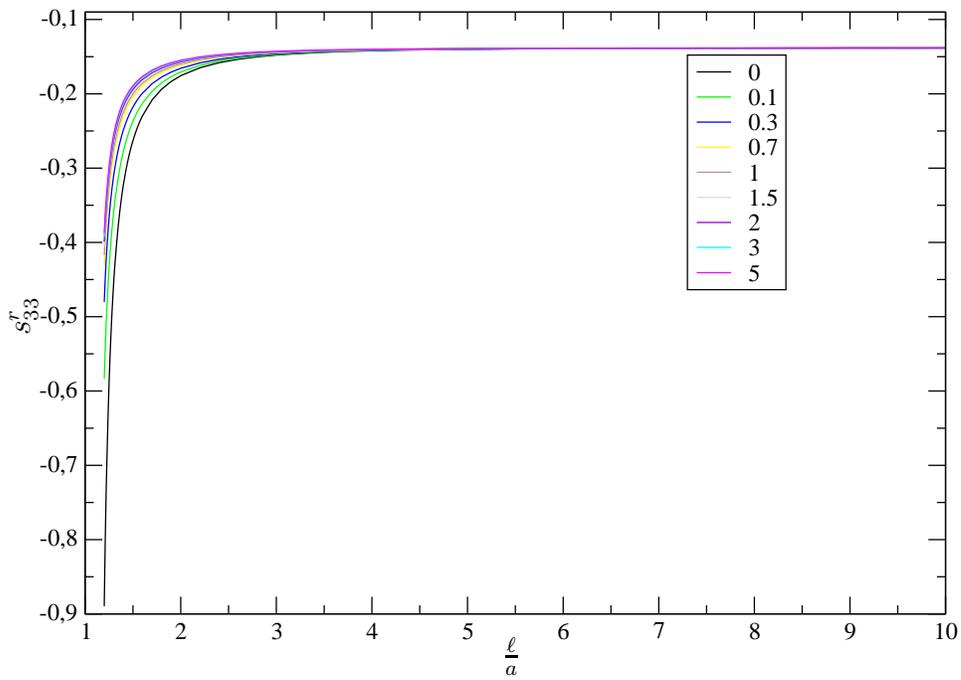


FIG. 5.35 – Variation de la composante  $s_{33}^r$  du stresslet lorsque l'ellipsoïde tourne selon  $\mathbf{e}_2$  dans un fluide au repos.

On présente maintenant les résultats concernant les nouvelles composantes non nulles du stresslet pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement parabolique avec glissement sur la paroi et les résultats du stresslet pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement linéaire avec glissement sur la paroi.

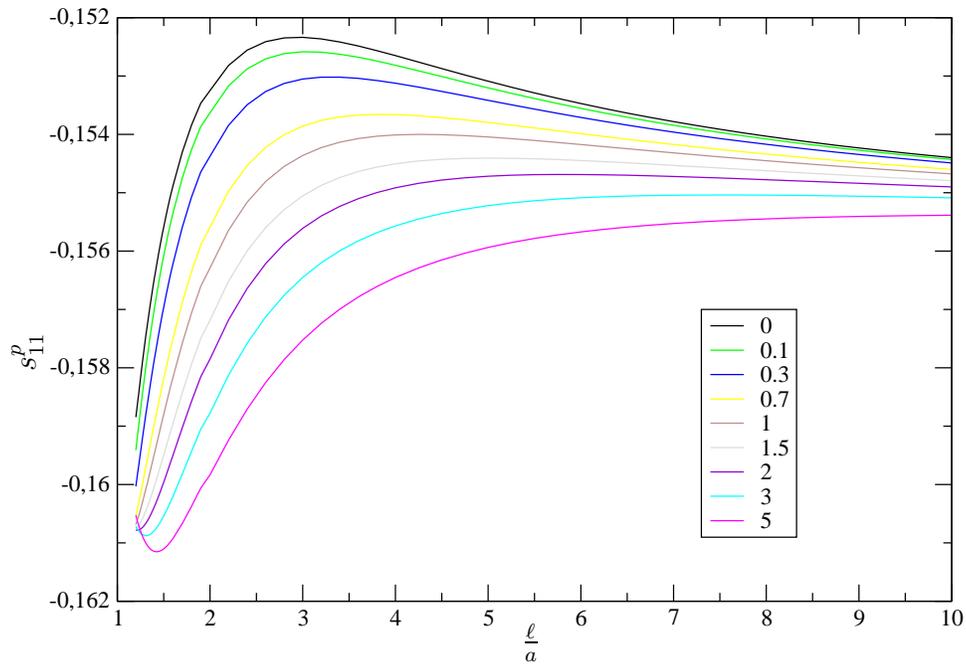


FIG. 5.36 – Variation de la composante  $s_{11}^p$  du stresslet pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement parabolique avec glissement sur la paroi.

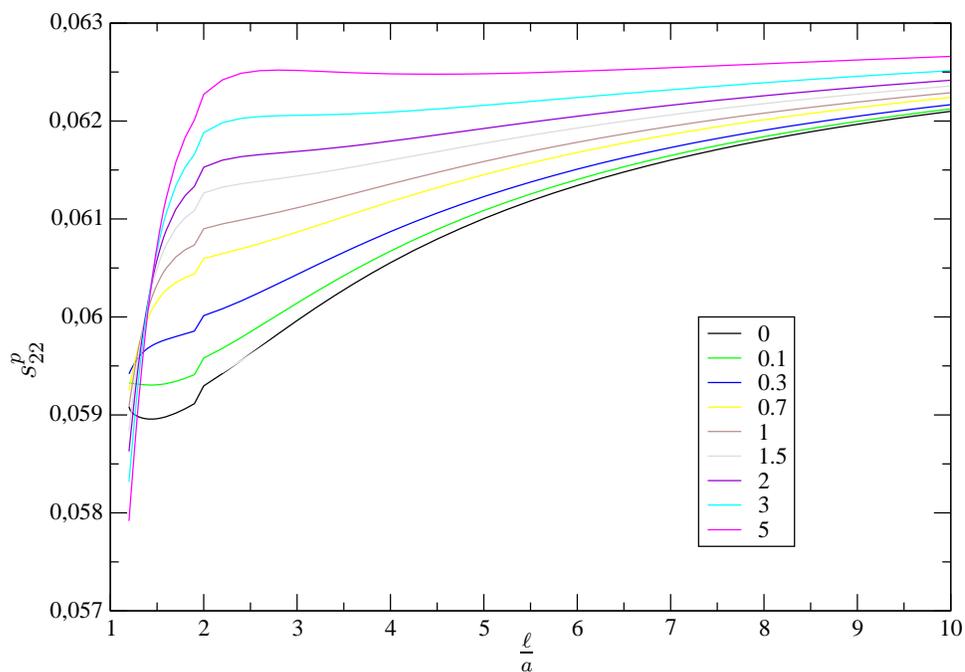


FIG. 5.37 – Variation de la composante  $s_{22}^p$  du stresslet pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement parabolique avec glissement sur la paroi.

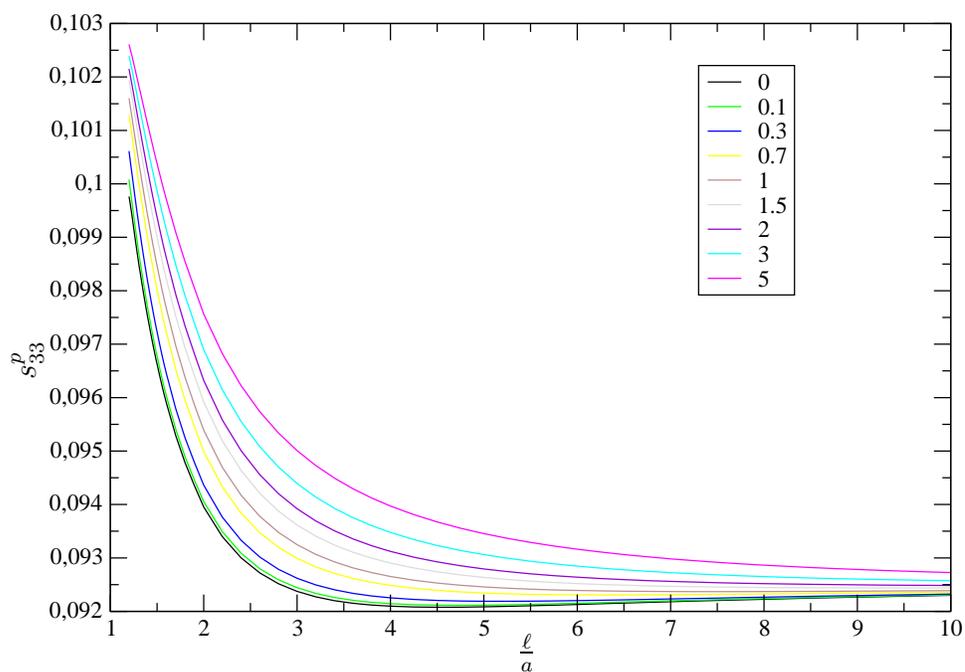


FIG. 5.38 – Variation de la composante  $s_{33}^p$  du stresslet pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement parabolique avec glissement sur la paroi.

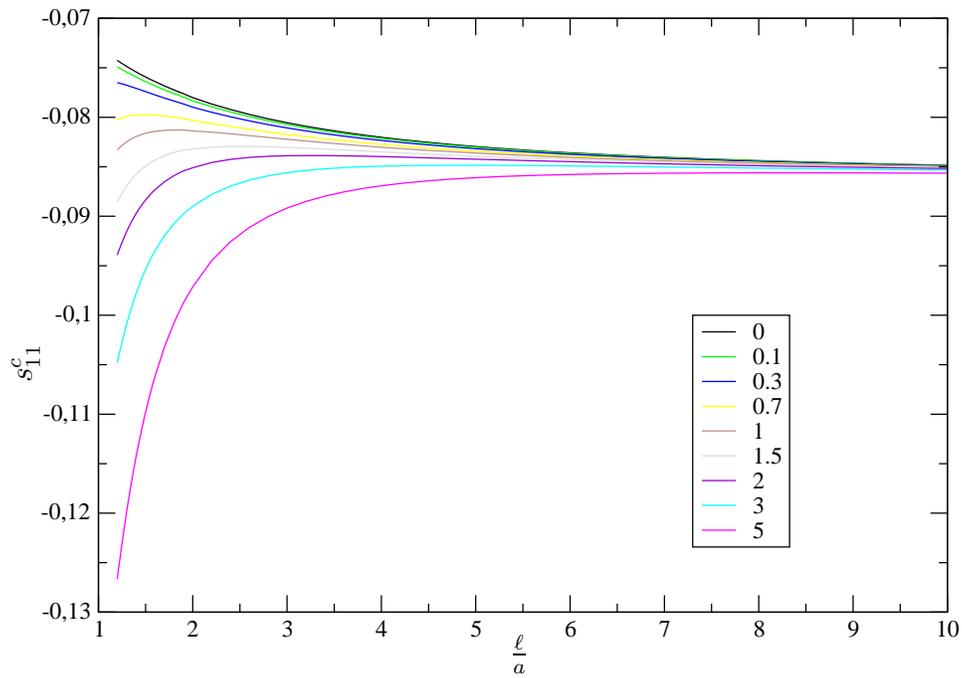


FIG. 5.39 – Variation de la composante  $s_{11}^c$  du stresslet pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement linéaire avec glissement sur la paroi.

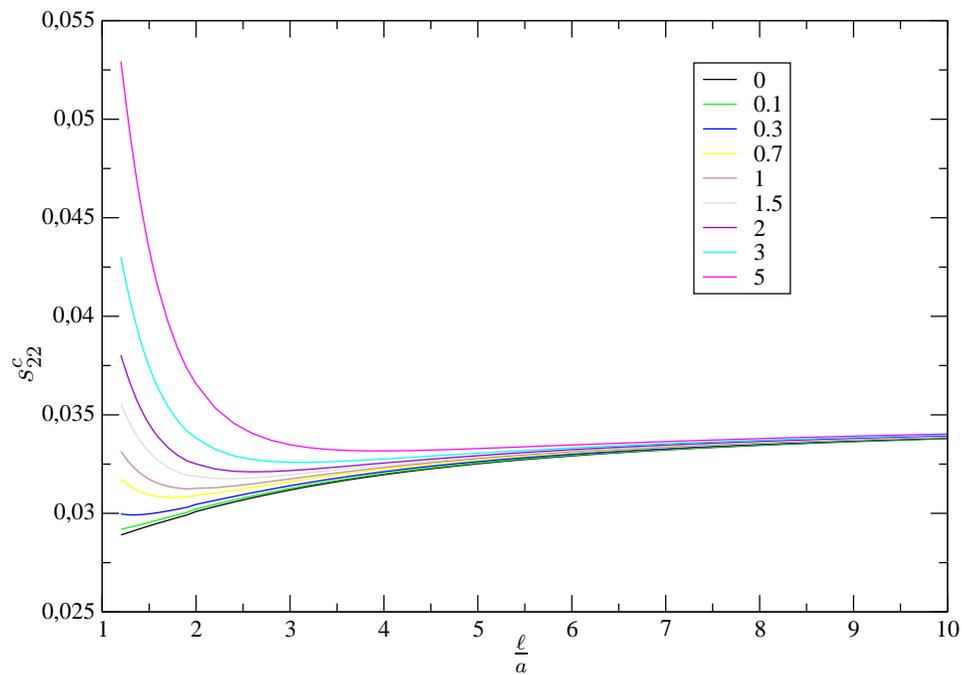


FIG. 5.40 – Variation de la composante  $s_{22}^c$  du stresslet pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement linéaire avec glissement sur la paroi.

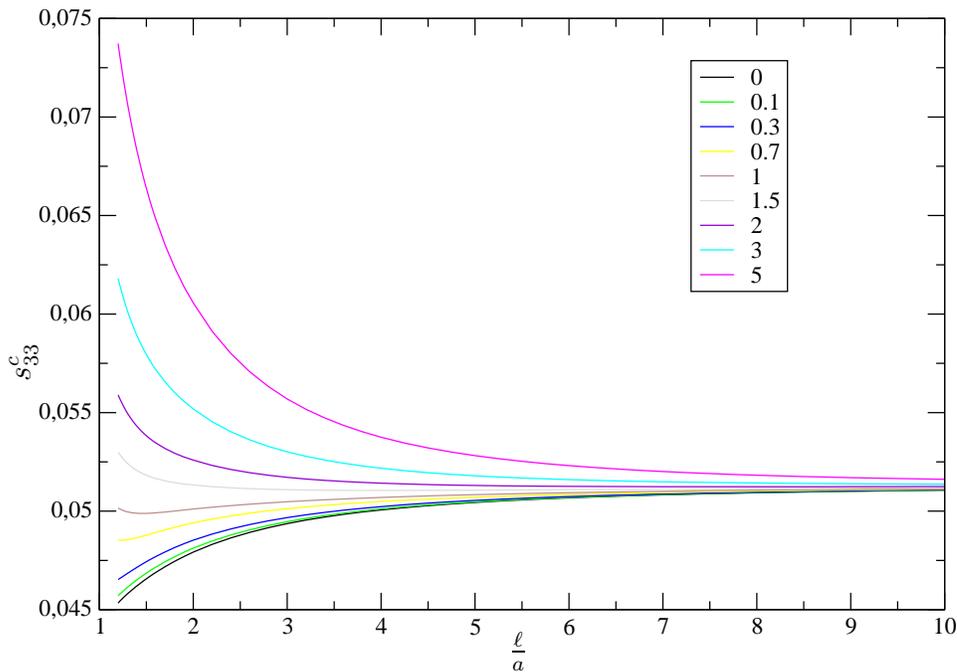


FIG. 5.41 – Variation de la composante  $s_{33}^c$  du stresslet pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement linéaire avec glissement sur la paroi.

Lorsque la particule ellipsoïdale inclinée se translate dans un fluide au repos, les nouveaux coefficients du stresslet (Fig.5.30), (Fig.5.31) et (Fig.5.32) ont des valeurs très petites près de la paroi, aux altitudes  $1.2 \leq \frac{\ell}{a} \leq 5$ . Lorsque la distance paroi-particule est supérieure ou égale à 5, on voit que les valeurs de ces coefficients sont presque nulles pour toutes les longueurs de glissement. Loin de la paroi, le stresslet pour une particule ellipsoïdale inclinée qui se translate dans un fluide au repos se comporte comme si cette particule ellipsoïdale étant non inclinée, c'est-à-dire que le stresslet possède une seule composante.

Dans le cas où l'ellipsoïde incliné est en mouvement de rotation dans un fluide au repos, trois nouvelles composante non nulles du stresslet apparaissent ; elles sont présentées (Fig.5.33), (Fig.5.34) et (Fig.5.35). Les valeurs des composantes  $s_{11}^r$  (Fig.5.33) et  $s_{33}^r$  (Fig.5.35) sont petites mais non nulles même loin de la paroi. Alors que la composante  $s_{22}^r$  (Fig.5.34) varie en sens contraire de la longueur de glissement  $\lambda$ , ceci lorsque la distance particule-paroi  $1.2 \leq \frac{\ell}{a} \leq 5$ . Loin de la paroi et à partir d'une distance égale 5, cette composante est presque nulle ; elle est de l'ordre de 0.000056 en  $\frac{\ell}{a} = 10$ .

Lorsque la particule ellipsoïdale inclinée est fixée dans un écoulement parabolique avec une condition de glissement sur la paroi, les nouvelles composantes du stresslet sont petites mais non nulles.

Les valeurs de la composante  $s_{11}^p$  (Fig.5.36) sont négatives. Lorsque la longueur de glissement diminue, la valeur de cette composante augmente. Elle atteint sa valeur maximale  $-0.152336$  à l'altitude  $\frac{\ell}{a} = 3$  pour le cas du non-glissement sur la paroi. Les (Fig5.37) et (Fig5.37) montrent que la deuxième et troisième composante du stresslet sont petites mais non nulles même à une grande distance de la paroi. La composante  $s_{22}^p$  (Fig5.37) atteint ses extremums pour le cas d'une longueur de glissement grande  $\lambda = 5$ , son minimum est  $0.057917$  en une altitude  $\frac{\ell}{a} = 1.2$  et son maximum est  $0.062659$  atteint loin de la paroi. (Fig5.37) montre que cette composante a le même sens de variation que le glissement, elle a un minimum global en  $\frac{\ell}{a} = 4.5$  égale  $0.092078$  et sa valeur maximale  $0.102611$  est atteinte en une distance  $\frac{\ell}{a} = 1.2$ .

Pour un ellipsoïde incliné fixé dans un écoulement de cisaillement linéaire avec une condition de glissement sur la paroi, les nouvelles composantes de stresslet sont non nulles même à une grande distance de de la paroi. La composante décrite par la (Fig.5.39) est négative et croît en sens inverse du glissement. Pour une longueur de glissement  $\lambda \in \{5, 3, 2, 1.5, 1, 0.7\}$  et à des petites distances particule-paroi, les portions de ces courbes sont croissantes alors que pour le cas d'un glissement petit,  $0.3, 0.1$  ou  $0$ , ces portions de courbes sont décroissantes. Mais loin de la paroi toutes ces courbes ont la même allure : elles tendent toutes vers une valeur de l'ordre de  $0.085$ . La (Fig.5.40) montre que la deuxième composante du stresslet est positive non nulle loin de la paroi. Elle atteint son maximum  $0.052935$  ( pour un glissement important) et son minimum  $0.028912$  ( le cas du non-glissement ) en  $\frac{\ell}{a} = 1.2$ . Lorsque la longueur de glissement  $\lambda \in \{0, 0.1\}$  les courbes de variations du stresslet sont croissantes pour toute distance particule-paroi. Si  $\lambda \in \{5, 3, 2, 1.5, 1, 0.7, 0.3\}$ , les portions des courbes sont décroissantes, alors que loin de la paroi elles croissent vers une valeur qui est presque la même pour ces valeurs de glissements. Cette valeur est de l'ordre de  $0.0337$ . Près de la paroi (Fig.5.41), en  $\frac{\ell}{a} = 1.2$ , la composante du stresslet atteint son maximum  $0.073728$  et son minimum  $0.045333$ . Loin de la paroi cette composante tend vers une valeur de l'ordre de  $0.051$ .



# Conclusion et perspectives

Ce travail concerne l'étude théorique du comportement d'une particule solide dans un écoulement de cisaillement parabolique d'un fluide newtonien au voisinage d'une paroi sur laquelle s'exerce une condition de glissement de Navier [26].

Le problème de l'écoulement de Stokes autour d'une particule peut être décomposé en somme de problèmes concernant des écoulements élémentaires (translation, rotation d'une particule dans un fluide au repos, écoulement de cisaillement linéaire et parabolique sur une particule fixe). Chaque écoulement possède une solution en harmoniques sphériques représentées sous forme de séries en coordonnées bisphériques. Nous avons présenté dans le chapitre **1** une solution originale pour l'écoulement de cisaillement parabolique. Les coefficients des séries sont solutions de 4 relations de récurrence couplées formant un système linéaire infini. Ce système est résolu par la factorisation LU qui est bien appropriée car la matrice à inverser est tridiagonale. Nous avons pu déterminer les coefficients et ainsi la solution avec une grande précision pour différentes valeurs du glissement et pour des distances particule-paroi jusqu'à des écarts de 0.005/rayon.

Nous avons calculé la vitesse et la pression du fluide et avons obtenu pour la première fois la force et le couple exercés par le fluide sur une particule sphérique fixe dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi. Les résultats sont en bon accord avec ceux obtenus pour le cas particulier du non-glissement [1].

Le stresslet, qui est le moment symétrique des contraintes sur la particule, est également calculé en vue de son application à la rhéologie des suspensions. Le stresslet intervient en effet dans le calcul de la viscosité moyenne d'une suspension diluée dans un écoulement de cisaillement linéaire et parabolique avec glissement sur la paroi. C'est pourquoi dans le chapitre **2** nous avons calculé pour la première fois, le stresslet pour une particule sphérique proche d'un plan avec condition de glissement pour différents écoulement de Stokes. Ces résultats sont exacts et valables à toute distance entre la paroi et le centre de la particule, sauf au contact. Pour ce calcul nous avons utilisé les coordonnées bisphériques. Nous avons d'abord obtenu le stresslet pour une particule

fixe dans un écoulement de cisaillement parabolique et linéaire avec glissement sur la paroi ; puis pour les écoulements où la sphère est en translation ou en rotation dans un fluide au repos, en utilisant le théorème de réciprocité. Nous avons alors calculé le stresslet pour une sphère libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique avec un glissement sur la paroi. Nos résultats coïncident avec ceux obtenus par Pasol [1] pour le cas du non-glissement.

Nous avons obtenu à partir des solutions analytiques précédentes des développements asymptotiques de la force et du couple exercés par le fluide sur la sphère lorsque la distance paroi-sphère est grande devant le rayon de la sphère, ceci en écoulement de cisaillement linéaire et parabolique avec glissement sur la paroi. Nous en avons déduit les formules asymptotiques pour les vitesses de rotation et translation lorsque la sphère est libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi. Nous avons obtenu ces résultats en résolvant le système linéaire obtenu au premier chapitre par une extension de l'algorithme de Thomas d'inversion d'une matrice tridiagonale. Pour cet algorithme, le temps de calcul est proportionnel au nombre de termes dans la série. Il est ainsi possible d'obtenir un grand nombre de termes qui sont nécessaires pour résoudre la situation où la sphère est plus proche de la paroi avec glissement. Sur le plan théorique, l'algorithme pour résoudre ce type de système linéaire infini peut être appliqué à d'autres problèmes résolus avec la technique des coordonnées bisphériques (en particulier le problème des écoulements asymétriques) de façon à obtenir des résultats pour de petits écarts entre les surfaces.

Dans une deuxième partie de ce travail, nous avons traité le problème d'une particule de forme arbitraire en écoulement parabolique avec glissement à la paroi par la méthode des éléments de frontière. Pour ce faire, nous avons d'abord calculé, dans le chapitre **3**, le tenseur de Green du problème associé. Ce tenseur obéit aux équations de Stokes et à la condition de glissement sur la paroi. Il intervient dans l'expression de la vitesse sous forme d'une équation intégrale. On explique dans le chapitre **4** la méthode de résolution de cette équation intégrale au moyen des éléments de frontière. Cette approche consiste à discrétiser la surface de la particule en un nombre suffisant de facettes triangulaires pour fournir au moins autant d'équations que la problème discret compte d'inconnues. En utilisant cette méthode, nous avons retrouvé pour une particule sphérique nos résultats obtenus par le calcul en coordonnées bisphériques. Ces résultats sont en excellent accord. Cette comparaison est d'autant plus précise que le nombre de noeuds dans le maillage est élevé. Nous avons présenté ces résultats et ces comparaisons dans le chapitre **5**.

Le méthode des coordonnées bisphériques est limitée aux particules sphériques. En ce qui concerne les particules non-sphériques près d'une paroi avec glissement, le problème hydrodynamique peut

être résolu par la méthode des éléments de frontière. Nous avons obtenu pour la première fois des résultats pour une particule ellipsoïdale dans un écoulement de cisaillement parabolique près d'une paroi sur laquelle s'exerce une condition de glissement. La comparaison des résultats pour une sphère et un ellipsoïde de même volume montre que certains coefficients de frottements sont très sensibles à la forme des particules. Puis, en utilisant la méthode des éléments de frontière nous avons étudié le cas d'un ellipsoïde incliné. Nous avons donné des résultats analytiques pour de nouveaux coefficients non nuls qui apparaissent à cause de la non-symétrie de la figure.

Les résultats obtenus pour la vitesse de rotation et de translation de la sphère fixe dans l'écoulement parabolique avec glissement sur la paroi, peuvent être appliqués en chimie analytique aux méthodes de séparation.

Les résultats obtenus pour le stresslet sur une sphère libre de se déplacer dans un écoulement parabolique avec une condition de glissement sur la paroi permettent de calculer la viscosité moyenne d'une suspension diluée de sphères.

Pour l'ellipsoïde, on pourrait calculer les forces, les couples et les stresslets dans le cas où l'orientation est quelconque, et considérer ensuite le cas d'un ellipsoïde libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique près d'une paroi sur laquelle s'exerce une condition de glissement.

Ces résultats pour des ellipsoïdes près d'une paroi avec glissement offrent diverses perspectives d'applications en chimie analytique, en génie chimique et en biologie.



# Table des figures

1	Écoulement avec glissement sur la paroi où $b > 0$ est la longueur de glissement, $u_t$ la vitesse de glissement, qui correspond à (1), et $u_1$ la vitesse le long de la paroi.	2
1.1	Sphère fixe dans un écoulement de cisaillement parabolique avec une condition de glissement sur la paroi ( $x_3 = 0$ ).	9
1.2	trajectoires partant du même point ( $x/a = -4$ , $y/a = -10^{-3}$ et $z/a = 0.8$ ) pour les valeurs de la longueur de glissement suivantes : $\lambda = 0$ (vert), $\lambda = 0.5$ (bleu) et $\lambda = 1.5$ (rouge). La sphère de rayon 1 est située en $\ell/a = 1.18$ .	19
1.3	variation de la force adimensionnée $f_{xx}^p$ pour différentes valeurs de $\lambda$ en fonction de $\frac{\ell}{a}$ . $\lambda = 0$ (ligne sans symbole), $\lambda = 0.1$ (★), $\lambda = 0.7$ (○), $\lambda = 1$ (●), $\lambda = 2$ (□) et $\lambda = 5$ (■).	22
1.4	Variation du couple adimensionné $c_{yx}^p$ pour différentes valeurs de $\lambda$ en fonction de $\frac{\ell}{a}$ , $\lambda = 0$ (ligne sans symbole), $\lambda = 0.1$ (★), $\lambda = 0.7$ (○), $\lambda = 1$ (●), $\lambda = 2$ (□) et $\lambda = 5$ (■).	25
1.5	Variation de vitesse de translation $U^p$ adimensionnée. $\lambda = 0$ (ligne sans symbole), $\lambda = 0.1$ (★), $\lambda = 0.7$ (○), $\lambda = 1$ (●), $\lambda = 2$ (□) et $\lambda = 5$ (■).	28
1.6	Variation de la vitesse de rotation $\omega^p$ adimensionnée. $\lambda = 0$ (ligne sans symbole), $\lambda = 0.1$ (★), $\lambda = 0.7$ (○), $\lambda = 1$ (●), $\lambda = 2$ (□) et $\lambda = 5$ (■).	28
1.7	Variation du couple adimensionné $c_{yx}^p$ pour différentes valeurs de $\lambda$ en fonction de $\frac{\ell}{a}$ , $\lambda = 0$ (ligne sans symbole), $\lambda = 0.1$ (★), $\lambda = 0.7$ (○), $\lambda = 1$ (●), $\lambda = 2$ (□) et $\lambda = 5$ (■).	29
1.8	Variation de vitesse de translation $U^p$ adimensionnée. $\lambda = 0$ (ligne sans symbole), $\lambda = 0.1$ (★), $\lambda = 0.7$ (○), $\lambda = 1$ (●), $\lambda = 2$ (□) et $\lambda = 5$ (■).	29
1.9	Variation de la vitesse de rotation $\omega^p$ adimensionnée. $\lambda = 0$ (ligne sans symbole), $\lambda = 0.1$ (★), $\lambda = 0.7$ (○), $\lambda = 1$ (●), $\lambda = 2$ (□) et $\lambda = 5$ (■).	30

2.1	Variation du stresslet adimensionné $s_{xz}^p$ pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée : $\lambda = 0$ (noir), $\lambda = 0.1$ (vert), $\lambda = 0.7$ (rouge), $\lambda = 1$ (orangé), $\lambda = 2$ (mauve), $\lambda = 5$ (bleu). . . . .	37
2.2	Variation du stresslet adimensionné $s_{xz}^c$ pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée : $\lambda = 0$ (noir), $\lambda = 0.1$ (vert), $\lambda = 0.7$ (rouge), $\lambda = 1$ (orangé), $\lambda = 2$ (mauve), $\lambda = 5$ (bleu). . . . .	37
2.3	Variation du stresslet adimensionné $s_{zx}^t$ pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée : $\lambda = 0$ (noir), $\lambda = 0.1$ (vert), $\lambda = 0.7$ (rouge), $\lambda = 1$ (orangé), $\lambda = 2$ (mauve), $\lambda = 5$ (bleu). . . . .	42
2.4	Variation du stresslet adimensionné $s_{zx}^r$ pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée : $\lambda = 0$ (noir), $\lambda = 0.1$ (vert), $\lambda = 0.7$ (rouge), $\lambda = 1$ (orangé), $\lambda = 2$ (mauve), $\lambda = 5$ (bleu). . . . .	45
2.5	Variation du stresslet pour une sphère libre de se mouvoir dans un écoulement $s_{xz}^{libre}$ pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée : $\lambda = 0$ (noir), $\lambda = 0.1$ (vert), $\lambda = 0.7$ (rouge), $\lambda = 1$ (orangé), $\lambda = 2$ (mauve), $\lambda = 5$ (bleu). . . . .	46
2.6	Variation du stresslet adimensionné $s_{zx}^t$ pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée : $\lambda = 0$ (noir), $\lambda = 0.1$ (vert), $\lambda = 0.7$ (rouge), $\lambda = 1$ (orangé), $\lambda = 2$ (mauve), $\lambda = 5$ (bleu). . . . .	48
2.7	Variation du stresslet adimensionné $s_{zx}^r$ pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée : $\lambda = 0$ (noir), $\lambda = 0.1$ (vert), $\lambda = 0.7$ (rouge), $\lambda = 1$ (orangé), $\lambda = 2$ (mauve), $\lambda = 5$ (bleu). . . . .	49
2.8	Variation du stresslet pour une sphère libre de se mouvoir dans un écoulement $s_{xz}^{libre}$ pour différentes valeurs de la longueur de glissement adimensionnée : $\lambda = 0$ (noir), $\lambda = 0.1$ (vert), $\lambda = 0.7$ (rouge), $\lambda = 1$ (orangé), $\lambda = 2$ (mauve), $\lambda = 5$ (bleu). . . . .	50
2.9	Résultats pour la force adimensionnée $f_{xx}^p$ sur une sphère fixée dans un écoulement de cisaillement quadratique avec glissement sur la paroi en fonction de $\ell/a - 1$ , pour différents glissements. Les résultats obtenus avec les coordonnées bipolaires sont représentés par les courbes en lignes continues et symboles. Les courbes en lignes pointillées avec symboles sont les résultats du développement asymptotique (2.53) pour des valeurs petites de $\frac{a}{\ell}$ pour $\lambda = 0, 0.1$ . . . . .	54

2.10	Résultats pour le couple adimensionné $c_{yx}^p$ pour une sphère fixe dans un écoulement parabolique près d'une paroi sur laquelle s'exerce une condition de glissement et comparaison pour $\lambda = 0, 0.1$ avec les résultats du développement asymptotique pour des valeurs de $\frac{a}{\ell}$ assez petites. Les lignes continues sont les valeurs exactes du couple. Les lignes en pointillées sont les valeurs obtenues par le développement asymptotique (2.54) . . . . .	55
2.11	Résultats du coefficient du stresslet $s_{xz}^p$ pour une sphère fixe dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi. Les lignes continues et en couleurs représentent les valeurs exactes du stresslet. Les courbes en tirets représentent les résultats du développement asymptotique (2.55) pour $\frac{a}{\ell}$ petit pour les cas $\lambda = 0, 0.05, 0.2, 0.3$ et $0.7$ . . . . .	56
2.12	Vitesse de translation normalisée d'une sphère libre de mouvoir dans un écoulement parabolique lorsqu'une condition de glissement s'exerce sur la paroi. Les lignes continues représentent les valeurs exactes de la vitesse $u^p$ . Les lignes en tirets représentent l'approximant de Padé (3,3) calculé d'après (2.56) pour une grande distance du centre de la sphère à la paroi. . . . .	57
4.1	Position du pôle $\mathbf{y}$ et du pôle symétrique $\mathbf{y}'$ dans le repère $(O, x_1, x_2, x_3)$ . . . . .	84
5.1	Superposition des résultats du calcul en coordonnées bipolaires (lignes) avec ceux en calcul numérique (points) pour le coefficient $f_{xx}^p$ pour une sphère fixe dans un écoulement parabolique avec condition de glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement. . . . .	109
5.2	Superposition des résultats du calcul en coordonnées bipolaires (lignes) avec ceux en calcul numérique (points) pour le couple $c_{yx}^p$ pour une sphère fixe dans un écoulement parabolique avec condition de glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement. . . . .	110
5.3	Superposition des résultats du calcul en coordonnées bipolaires (lignes) avec ceux en calcul numérique (points) pour la vitesse de translation $u^p$ d'une sphère libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique avec condition de glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement . . . . .	111
5.4	Superposition des résultats du calcul en coordonnées bipolaires (lignes) avec ceux en calcul numérique (points) pour la vitesse de rotation $w^p$ d'une sphère libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique avec condition de glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement . . . . .	112
5.5	Particule ellipsoïdale maintenue fixe, chaque axe $a_i$ étant parallèle à $x_i$ . . . . .	113

5.6	Comparaison du coefficient de frottement $f_{33}$ pour une sphère (ligne en pointillés) et une ellipsoïde (ligne continue) pour différentes valeurs du glissement, $\lambda = 0(\circ)$ , $\lambda = 0.7(\square)$ , $\lambda = 2(\blacksquare)$ et $\lambda = 5(\bullet)$ . . . . .	114
5.7	Comparaison du coefficient de frottement $f_{11}$ pour une sphère (ligne en pointillés) et une ellipsoïde (ligne continue) pour différentes valeurs du glissement, $\lambda = 0(\circ)$ , $\lambda = 0.7(\square)$ , $\lambda = 2(\blacksquare)$ et $\lambda = 5(\bullet)$ . . . . .	115
5.8	Comparaison du coefficient de frottement $c_{33}$ pour une sphère (ligne en pointillés) et une ellipsoïde (ligne continue) pour différentes valeurs du glissement, $\lambda = 0(\circ)$ , $\lambda = 0.7(\square)$ , $\lambda = 2(\blacksquare)$ et $\lambda = 5(\bullet)$ . . . . .	116
5.9	Comparaison du coefficient de frottement $c_{22}$ pour une sphère (ligne en pointillés) et une ellipsoïde (ligne continue) pour différentes valeurs du glissement, $\lambda = 0(\circ)$ , $\lambda = 0.7(\square)$ , $\lambda = 2(\blacksquare)$ et $\lambda = 5(\bullet)$ . . . . .	117
5.10	Comparaison du coefficient de frottement $c_{12}$ pour une sphère (ligne en pointillés) et une ellipsoïde (ligne continue) pour différentes valeurs du glissement, $\lambda = 0(\circ)$ , $\lambda = 0.7(\square)$ , $\lambda = 2(\blacksquare)$ et $\lambda = 5(\bullet)$ . . . . .	118
5.11	Variation de la force adimensionnée $f_{11}^p$ pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement. . . . .	120
5.12	Variation du couple adimensionné $c_{21}^p$ pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement. . . . .	120
5.13	Variation du stresslet $s_{13}^p$ pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement. . . . .	121
5.14	Variation de la vitesse de translation $u^p$ pour un ellipsoïde libre de se déplacer dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement. . . . .	122
5.15	Variation de la vitesse de rotation $w^p$ pour un ellipsoïde libre de se déplacer dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement. . . . .	123
5.16	Variation du stresslet $s_{13}^t$ pour un ellipsoïde en translation dans un fluide au repos pour différentes valeurs du glissement. . . . .	124
5.17	Variation du stresslet $s_{13}^r$ pour un ellipsoïde en rotation dans un fluide au repos pour différentes valeurs du glissement. . . . .	124
5.18	Variation de la force adimensionnée $f_{11}^c$ pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement linéaire avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement. . . . .	125

5.19	Variation du couple adimensionné $c_{21}^c$ pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement linéaire avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement. . . . .	125
5.20	Variation du stresslet $s_{13}^c$ pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement linéaire avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement. . . . .	126
5.21	Variation de la vitesse de translation $w^c$ pour un ellipsoïde libre de se déplacer dans un écoulement linéaire avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement. . . . .	127
5.22	Variation de la vitesse de rotation $w^c$ pour un ellipsoïde libre de se déplacer dans un écoulement linéaire avec glissement sur la paroi pour différentes valeurs du glissement. . . . .	128
5.23	Ellipsoïde incliné avec une angle $\beta = \frac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe $(O, x_3)$ . . . . .	131
5.24	Variation du nouveau coefficient $f_{13}^p$ de la force exercée sur l'ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement parabolique avec condition de glissement sur la paroi. . . . .	132
5.25	Variation du nouveau coefficient $f_{13}^c$ de la force exercée sur l'ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement linéaire avec condition de glissement sur la paroi. . . . .	133
5.26	Variation du coefficient $f_{13}^t$ de la force exercée par le fluide sur un ellipsoïde qui se translate selon $e_1$ . . . . .	135
5.27	Variation du coefficient $f_{23}^r$ de la force exercée par le fluide sur un ellipsoïde qui tourne selon $e_2$ . . . . .	136
5.28	Variation de la nouvelle composante de la vitesse de translation $u_3^p$ pour un ellipsoïde libre de se mouvoir dans un écoulement parabolique avec glissement sur la paroi. . . . .	137
5.29	Variation de la nouvelle composante de la vitesse de translation pour un ellipsoïde libre de se mouvoir dans un écoulement linéaire avec glissement sur la paroi. . . . .	138
5.30	Variation de la composante $s_{11}^t$ du stresslet lorsque l'ellipsoïde se translate selon $e_1$ dans un fluide au repos pour différentes valeurs $\lambda$ entre 0 et 5. . . . .	139
5.31	Variation de la composante $s_{22}^t$ du stresslet lorsque l'ellipsoïde se translate selon $e_1$ dans un fluide au repos pour différentes valeurs $\lambda$ entre 0 et 5. . . . .	139
5.32	Variation de la composante $s_{33}^t$ du stresslet lorsque l'ellipsoïde se translate selon $e_1$ dans un fluide au repos. . . . .	140
5.33	Variation de la composante $s_{11}^r$ du stresslet lorsque l'ellipsoïde tourne selon $e_2$ dans un fluide au repos. . . . .	141

5.34	Variation de la composante $s_{22}^r$ du stresslet lorsque l'ellipsoïde tourne selon $\mathbf{e}_2$ dans un fluide au repos. . . . .	141
5.35	Variation de la composante $s_{33}^r$ du stresslet lorsque l'ellipsoïde tourne selon $\mathbf{e}_2$ dans un fluide au repos. . . . .	142
5.36	Variation de la composante $s_{11}^p$ du stresslet pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement parabolique avec glissement sur la paroi. . . . .	143
5.37	Variation de la composante $s_{22}^p$ du stresslet pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement parabolique avec glissement sur la paroi. . . . .	144
5.38	Variation de la composante $s_{33}^p$ du stresslet pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement parabolique avec glissement sur la paroi. . . . .	144
5.39	Variation de la composante $s_{11}^c$ du stresslet pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement linéaire avec glissement sur la paroi. . . . .	145
5.40	Variation de la composante $s_{22}^c$ du stresslet pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement linéaire avec glissement sur la paroi. . . . .	145
5.41	Variation de la composante $s_{33}^c$ du stresslet pour un ellipsoïde fixe dans un écoulement de cisaillement linéaire avec glissement sur la paroi. . . . .	146

# Liste des tableaux

1.1	vitesses et pression pour la position $M_1$ . . . . .	17
1.2	vitesses et pression pour la position $M_2$ . . . . .	17
1.3	Force adimensionnée pour différentes valeurs de la longueur de glissement. . . . .	21
1.4	Couple adimensionné $c_{yx}^p$ : ces résultats sont calculés avec un nombre de points $N=2000$ pour avoir la précision de $10^{-15}$ présentée ici. . . . .	24
1.5	Valeurs des vitesses adimensionnées $U^p$ et $\omega^p$ pour différentes valeurs de la longueur de glissement. . . . .	27
2.1	Valeurs de $s_{xz}^p$ stresslet adimensionné pour l'écoulement parabolique et de $s_{xz}^c$ stresslet adimensionné pour l'écoulement de cisaillement linéaire. . . . .	36
2.2	Valeurs de $s_{zx}^r$ stresslet adimensionné pour une sphère en rotation et de $s_{zx}^t$ stresslet adimensionné pour une sphère en translation. . . . .	44
2.3	Valeurs du $s_{xz}^{libre}$ stresslet adimensionné pour une sphère libre de mouvoir dans un écoulement parabolique . . . . .	47
4.1	Table de comparaison des intégrales avec $b = 0.5$ , $R'_3 = 1$ , $\rho = 1.5$ . . . . .	75
4.2	Table de comparaison des intégrales avec $b = 0.01$ , $R'_3 = 1$ , $\rho = 1.5$ . . . . .	76
4.3	Table de comparaison des intégrales avec $b = 0.01$ , $R'_3 = 0.02$ , $\rho = 0.5$ . . . . .	77
4.4	Valeurs précises des intégrales avec $b = 0.01$ , $R'_3 = 0.02$ , $\rho = 0.5$ . . . . .	83
5.1	Valeurs des coefficients $f_{11}$ , $c_{12}$ , $f_{21}$ et $c_{22}$ pour $\lambda=0.3$ . . . . .	101
5.2	Valeurs des coefficients $f_{11}$ , $c_{12}$ , $f_{21}$ et $c_{22}$ pour $\lambda=1$ . . . . .	101
5.3	Valeurs des coefficients $f_{11}$ , $c_{12}$ , $f_{21}$ et $c_{22}$ pour $\lambda=3$ . . . . .	101
5.4	Correction des coefficients $f_{33}$ et $c_{33}$ . . . . .	102

---

5.5	Valeurs des coefficients $f_{xx}^p$ et $c_{xy}^p$ pour $\lambda = 0$ . . . . .	103
5.6	Valeurs des coefficients $f_{xx}^p$ , $c_{xy}^p$ , $u^p$ et $w^p$ pour $\lambda = 0.3$ . . . . .	104
5.7	Valeurs des coefficients $f_{xx}^p$ , $c_{xy}^p$ , $u^p$ et $w^p$ pour $\lambda = 0.7$ . . . . .	105
5.8	Valeurs des coefficients $f_{xx}^p$ , $c_{xy}^p$ , $u^p$ et $w^p$ pour $\lambda = 1$ . . . . .	106
5.9	Valeurs des coefficients $f_{xx}^p$ , $c_{xy}^p$ , $u^p$ et $w^p$ pour $\lambda = 2$ . . . . .	107
5.10	Valeurs des coefficients $f_{xx}^p$ , $c_{xy}^p$ , $u^p$ et $w^p$ pour $\lambda = 5$ . . . . .	108

# Bibliographie

- [1] L. Pasol : Interactions hydrodynamiques dans les suspensions. Effectifs collectifs, *Thèse. Université Pierre et Marie Curie*, Paris 6, 2003.
- [2] H. Loussaief : Écoulement de suspension avec condition de glissement sur la paroi, *Thèse. Université Pierre et Marie Curie*, Paris 6, 2008.
- [3] M.E.O'Neill : A slow motion of viscous liquid caused by a slowly moving solid sphere, *Mathematika*. **11**, 67-74, 1964.
- [4] S. L. Goren and M. E. O'Neill : on the hydrodynamic resistance to a particle of a dilute suspension when in the neighbourhood of a large obstacle, *Chem. Engng. Sci.* **26**, 325-338, 1971.
- [5] W. R. Dean and M. E. O'Neill : A slow motion of viscous liquid caused by the rotation of a solid sphere, *Mathematika*. **10**, 13-24, 1963.
- [6] L. Pasol, A. Sellier and F. Feuillebois : A sphere in a second degree polynomial creeping flow parallel to a wall, *Q. J.Mech. Appl. Math.* **59**, 587-614, 2006.
- [7] J. Happel and H. Brenner : Low Reynolds number hydrodynamics, *Prentice Hall*, 1965.
- [8] M. E. O'Neill and B. S.Bhatt : Slow motion of a solid sphere in the presence of a naturally permeable surface *Q. J.Mech. Appl. Math.* **44**, 91-104, 1991
- [9] W. R. Dean and M. E. O'Neill : A slow motion of viscous liquid caused by the rotation of a solid sphere, *Mathematika*. **14**, 170-172, 1967.
- [10] W. R. Dean and M. E. O'Neill : A slow rotation of viscous liquid caused by the rotation of a solid sphere, *Mathematika*. **10**, 13-24, 1963.
- [11] S. Kim and S. J Karrila : Microhydrodynamics : principles and selected applications, *Butterworth*, 1991.
- [12] C. Pozrikidis : Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow, *Cambridge University Press*, 1992.
- [13] J. N. Lyness, D. Jespersen : Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle, *J. Inst. Mat. Appl.* **15**, 19-32, 1975.

- 
- [14] F. P Bretherton : The motion of rigid particles in a shear flow at low Reynolds number, *J.Fluid Mech.* **14**, 284-304, 1962.
- [15] H. Faxen : Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen ebenen Wänden eingeschlossen ist, *Annalen der Physik IV.* **68**, 89-119, 1922.
- [16] H. Faxen : Die Bewegung einer starren Kugel langs der Achse eines mit zäher Flüssigkeit gefüllten Rohres, *Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik.* **17** (27), 1-28, 1922-1923.
- [17] M. Chaoui : Migration d'une particule proche d'une paroi en écoulement de cisaillement, *Thèse, Université Pierre et Marie Curie*, Paris 6, 1995.
- [18] M. Chaoui and F. Feuillebois : Creeping flow around a sphere in a shear flow close to a wall, *Quart. J.Mech. Appl. Math.* **56** (3), 381-410, 2003.
- [19] A. M. J. Davis, M. T. Kezirian and H. Brenner : On the Stokes-Einstein model of surface diffusion along solid surfaces : Slip boundary conditions, *J. Coll. Interf. Sci.* **169**, 129-140, 1994.
- [20] A. J. Goldman, R. G. Cox and H. Brenner : Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall. I. Motion through a quiescent flow, *Chem. Eng. Sci.* **22**, 637-651, 1967.
- [21] A. J. Goldman, R. G. Cox and H. Brenner : Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall. II. Couette flow, *Chem. Eng. Sci.* **22**, 653-660, 1967.
- [22] M. E. O'Neill and K. Stewartson : On the slow motion of sphere parallel to a nearby wall, *J. Fluid Mech.* **27**, 705-724, 1967.
- [23] G. S. Perkins and R. B. Jones : Hydrodynamic interaction of spherical particle with a planar boundary, *II., Hard wall, Physica A* **189**, 447-477, 1992.
- [24] H. Tozeren and R. Skalak : Stress on a suspension near rigid boundaries, *J. Fluid Mech.* **82**, 289-307, 1983.
- [25] J. C. Maxwell : On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **170**, 231-256, 1879.
- [26] C. L. M. H. Navier : Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, *Mémoire de l'académie royale des sciences de l'institut de France.* **VI**, 389-440, 1823.
- [27] E. Lauga, M. P. Brenner and H. A. Stone : *Microfluidics : The no-slip boundary condition*, *Handbook of experimental Fluid Dynamics*, ed Tropea C, Foss J and Yarin A, *New York : Springer-Verlag.* 2005.
- [28] M. Martin : Theory of field-flow fractionation, *Journal of chromatography.* **39**, 1-139, 1998.

- 
- [29] C. -O. Ng : How does wall slippage affect hydrodynamic dispersion ?, *Microfluid Nano-fluid.* **10**, 47-57, 2011.
- [30] G. Beavers and D. Joseph : Boundary conditions at a naturally permeable wall, *J. Fluid Mech.* **30**, 197-207, 1967.
- [31] H. Luo and C. Pozrikidis : Effet of surface slip on Stokes flow past a spherical particle in infinite fluid and near a plane wall, *J. Eng. Math.* **62**, 1-21, 2008.
- [32] F. Feuillebois, H. Loussaief and L. Pasol : Particles in creeping flow near a slip wall, *American Institute of Physics Conf. Proc.* **1186**, 3-14, 2009.
- [33] F. Feuillebois, M. Z. Bazant and O. I. Vinogradova : Effective slip over superhydrophobic surfaces in thin channels, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 026001, 2009.
- [34] F. Feuillebois, M. Z. Bazant and O. I. Vinogradova : Erratum : Effective slip over superhydrophobic surfaces in thin channels [*Phys. Rev. Lett.* **102**, 026001, 2009.], *Phys. Rev. Lett.* **104**, 159902, 2010.
- [35] F. Feuillebois, M. Z. Bazant and O. I. Vinogradova : Transverse flow in thin superhydrophobic channels, *Phys. Rev. E.* **82**, 1-4, 2010.
- [36] E. Luga and T. M. Squires : Brownian motion near a partial-slip boundary : A local probe of the no-slip condition, *Phys. Fluids.* **17**, 103102, 2005.
- [37] H. Hervet and L. Leger : Flow with slip at the wall : from simple to complex fluids, *C. R. Physique.* **4**, 241-249, 2003.
- [38] F. Feuillebois, N. Ghalya, A. Sellier and L. Elasmı : Influence of wall slip in dilute suspensions, *Journal of Physics.* 2012, in press.
- [39] N. Ghalya, A. Sellier and F. Feuillebois : Migration of a solid and arbitrarily-shaped particle near a plane slipping wall, *Journal of Physics.* 2012, in press.
- [40] F. Feuillebois, N. Ghalya, A. Sellier and L. Elasmı : Motion of particles in a Parabolic flow near a slip wall, *American Institute of Physics Conf. Proc.* **1404**, 340-351, 2011.
- [41] M. van Dyke : *Perturbation methods in fluid mechanics*, The Parabolic Press, Stanford, California. 1975.
- [42] G. A. Baker. Jr : *Padé approximants*, Cambridge University Press. 1985.
- [43] L. Elasmı : Singularity method for Stokes floww with slip boundary condition. *Journal of Applied Mathematics.* **735**, 724-739, 2008.