



**HAL**  
open science

# Analyses et simulations multifractales pour une meilleure gestion des eaux pluviales en milieu urbain et péri-urbain

Auguste Gires

► **To cite this version:**

Auguste Gires. Analyses et simulations multifractales pour une meilleure gestion des eaux pluviales en milieu urbain et péri-urbain. Sciences de la Terre. Université Paris-Est, 2012. Français. NNT : 2012PEST1130 . pastel-00780472

**HAL Id: pastel-00780472**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00780472v1>**

Submitted on 24 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UNIVERSITÉ — — PARIS-EST

Thèse présentée pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'Université Paris-Est**  
Spécialité : Sciences et Techniques de l'Environnement

par

**Auguste Gires**

Ecole Doctorale : SCIENCES, INGENIERIE ET ENVIRONNEMENT

## *Analyses et simulations multifractales pour une meilleure gestion des eaux pluviales en milieu urbain et péri-urbain*

Thèse soutenue le 5 octobre 2012 devant le jury composé de :

Jean-Luc Bertrand-Krajewski  
Isabelle Pedroso De Lima  
François Schmitt  
Jacques Parent-du-Chatelet  
Cedo Maksimovic  
Ioulia Tchiguirinskaia  
Daniel Schertzer

*Rapporteur*  
*Rapporteur*  
*Examineur*  
*Examineur*  
*Examineur*  
*Co-encadrant*  
*Directeur de thèse*

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Daniel Schertzer, mon directeur de thèse et Ioulia Tchiguirinskaia, co-directrice. Merci de m'avoir fait partager votre immense expérience pour me guider dans ma thèse. Merci de m'avoir donné l'opportunité de présenter mes travaux à de nombreuses conférences et de m'avoir permis de bénéficier de votre réseau de connaissances. Merci également de m'avoir rapidement impliqué dans le fonctionnement de l'équipe.

Vous m'avez convaincu de poursuivre dans la recherche, et c'est avec un grand plaisir que je le ferai dans l'équipe Complexité en Hydrométéorologie que vous animez. Je ne perds pas espoir de parvenir à changer votre perception qu'une date limite est le seul moment où il faut faire les choses (il fallait quand même que j'en parle quelque part !) ...

Je remercie les membres du jury, François Schmitt, président du jury, Isabelle de Lima (merci également pour l'organisation de la conférence IPC 10 à Coimbra, qui fut très enrichissante aussi bien scientifiquement que culturellement) et Jean-Luc Bertrand Krajewski, les rapporteurs de ma thèse.

Cedo Maksimovic et Jacques Parent-du-Chatelet (qui était déjà dans mon jury de master, merci pour sa fidélité) ont accepté d'évaluer mon travail, je leur en suis très reconnaissant.

Je souhaite également remercier Cedo Maksimovic et Christian Onof pour m'avoir accueilli à l'Imperial College à Londres au cours d'un séjour de deux mois, et pour m'avoir donné accès à un cas d'étude avec un modèle calibré et des données de pluie.

Merci à Nuno, Susana et Lipen de m'avoir intégré dans l'équipe des doctorants.

Merci à Shaun Lovejoy pour ses conseils avisés lors de nos multiples rencontres dans diverses conférences, et pour ses relectures d'articles.

Merci à François Chaumeau, Véronique Lanier et Natalija Stancic de la Direction Eau et Assainissement du Conseil Général de Seine-Saint-Denis pour la fourniture du modèle Canoe calibré, des données mesurées et leurs conseils dans l'interprétation des résultats.

Merci également à Météo-France et plus particulièrement à Christine Lac, Véronique Ducroq, Jean-Michel Veisseire, Jacques Parent du Châtelet, et Jean-François Royer pour la fourniture des données radar et des sorties du modèle Méso-NH, ainsi que pour leurs suggestions dans l'exploitation de ces données et leurs commentaires avisés.

Cette thèse a été effectuée au sein du Laboratoire Eau Environnement et Systèmes Urbains de l'Ecole des Ponts ParisTech. Je tiens à remercier Bruno Tassin de m'y avoir accueilli depuis mon master.

Merci à Catherine Charleux et Annick Piazza pour leur aide dans toutes les démarches administratives.

Merci également à tous les membres du LEESU qui font régner une ambiance chaleureuse dans ce laboratoire, et notamment l'équipe d'HM&Co : Tuan, Georges, Yacine, Abdellah, Bahar, Julien, et plus particulièrement Agathe qui a supporté avec le sourire mes remarques sur Multi-Hydro.

Et pour finir, je remercie ma géniale femme Natacha et nos deux non moins géniaux petits garçons Nathanaël et Nikita. C'est un vrai bonheur de vivre avec vous !

## Résumé

### **Titre : Analyses et simulations multifractales pour une meilleure gestion des eaux pluviales en milieu urbain et péri-urbain**

Les multifractals universels (UM) sont un outil puissant et abondamment utilisé d'analyse et de simulation de champs géophysiques, comme la pluie, extrêmement variables sur une large gamme d'échelles. Ils sont basés sur le concept de cascade multiplicative qui repose sur la notion physique d'invariance d'échelle pour explorer le phénomène fondamental qu'est l'intermittence. Dans ce cadre, toute la variabilité du champ est caractérisée à l'aide de simplement trois paramètres qui ont en plus une interprétation physique. Dans cette thèse on utilise ce cadre théorique pour quantifier l'impact de la variabilité à petite échelle de la pluie en hydrologie urbaine. La première étape consiste à analyser la variabilité spatio-temporelle de données radar de précipitation à l'aide d'un modèle multifractal anisotrope simple.

Divers événements pluvieux sont analysés : celui du 9 février 2009 aussi bien autour de Paris (radar en bande C de Trappes de Météo-France) que de Londres (mosaïque Nimrod du Met. Office britannique), un épisode « cévenol » ayant eu lieu du 5 au 9 septembre 2005 (mosaïque radar Météo-France), et l'évènement du 9 juillet 2009 autour de la région de Londres. Un comportement scalant a été observé sur deux gammes d'échelles séparées par une rupture à 16 km qui est discutée. Ces données sont globalement en accord avec un modèle spatio-temporel simple reposant sur un exposant d'anisotropie entre l'espace et de temps. Les résultats suggèrent une possible universalité des paramètres UM pour les précipitations. Pour l'évènement « cévenol » les précipitations issues des sorties de simulations Méso-NH (un modèle météorologique méso-échelle non-hydrostatique développé par Météo-France/CNRM et le Laboratoire d'Aérodynamique de l'Univ. de Toulouse, France) ont également été analysées et présentent un comportement qualitatif similaire, mais avec des estimations des paramètres UM différentes correspondant à des comportements quantitatifs distincts notamment au niveau des extrêmes.

Cette thèse aborde également un autre aspect de l'intermittence, particulièrement important pour les longues séries temporelles pluviométriques, que sont les nombreuses mesures nulles de la pluie (c'est-à-dire un pixel où aucune pluie n'est relevée), i.e. les longues périodes sèches. L'ancienne question de la source de cette intermittence, et notamment la nécessité d'un modèle dédié, est revisitée. D'abord les effets d'un seuil sur un champ multifractal sont analysés et ensuite un « toy model » qui introduit des zéros au sein du processus de cascade et conditionnellement aux valeurs du champ est développé. Cela permet d'expliquer la plupart des comportements observés, par exemple, les différences entre les statistiques événementielles et globales.

L'impact de la variabilité de la pluie est analysé à travers l'étude de la sensibilité de modèles d'hydrologie/hydraulique urbaine à la donnée de pluie. Deux bassins versants essentiellement urbains (un de 3 400 ha en Seine-Saint-Denis à proximité de Paris, et un de 900 ha à Londres) modélisés avec des modèles opérationnels semi-distribués sont pris comme cas d'études. Par ailleurs le modèle distribué Multi-Hydro (en développement au LEESU) est testé sur une portion de 145 ha du cas d'étude parisien. L'impact de la variabilité à petites échelles non mesurée des précipitations (i.e. se produisant à des échelles plus petites que 1 km en espace et 5 min en temps qui sont disponibles avec les données radar à bande C) est d'abord évalué. Ceci est réalisé par la génération d'un ensemble de pluie réaliste désagrégée

en continuant stochastiquement le processus sous-jacent de cascade au-delà de l'échelle d'observation, puis la simulation de l'ensemble correspondant d'hydrographes. Il apparaît que la variabilité à petites échelles de la pluie engendre une variabilité hydrologique qui ne doit pas être négligée. De plus le modèle Multi-Hydro génère une variabilité plus importante et pas seulement au niveau du pic de débit, i.e. même pour les pluies modérées. Ces résultats mettent en lumière la nécessité d'installer des radars en bande X (dont la résolution est hectométrique) en milieu urbain. Dans un deuxième temps les outils multifractals sont employés sur les pluies et les débits simulés qui présentent aussi un comportement scalant. Il apparaît que le réseau d'assainissement transmet simplement la variabilité des précipitations sans l'atténuer, au moins en termes de statistiques multifractals.

*Mots clés :*

Variabilité des précipitations, hydrologie urbaine, multifractal, intermittence, analyse spatio-temporelle

## Abstract

### **Title: Improving storm water management in urban and peri-urban areas with the help of multifractal analysis and simulations**

The Universal Multifractals (UM) are a powerful tool which has been extensively used to analyze and simulate geophysical fields, such as rainfall, that are extremely variable over wide range of scales. It is based on the concept of cascade phenomenology that relies on the physical notion of scale invariance to explore the fundamental phenomenon of intermittency. In this framework the whole variability of a field is characterized with the help of only three parameters that are furthermore physically meaningful. In this PhD thesis we use this theoretical framework to quantify the impacts of small scale rainfall variability in urban hydrology. The first step consists in analysing radar rainfall space-time variability with the help of a simple anisotropic multifractal model.

A variety of rainfall events are analyzed: the 9<sup>th</sup> February 2009 rainfall event both in Paris (Météo-France C-band radar of Trappes) and London region (UK Met. Office Nimrod mosaic), a “Cevenol” episode that occurred in the South of France 5-9 September 2005 (Météo-France radar mosaic) and the 9<sup>th</sup> July 2009 event over the London area. It appears that a scaling behaviour was observed on two distinct ranges of scales separated by a break at roughly 16 km that is discussed. These data sets are in overall agreement with a simple space-time scaling model relying on single anisotropy exponent between space and time. The results hint at a possible universality of the UM parameters for rainfall. For the “Cevenol” episode the rainfall outputs of Meso-NH simulations (a meteorological non-hydrostatic mesoscale model developed by Meteo-France/CNRM and Laboratoire d’Aérodologie (Univ. Toulouse, France)) are also analyzed and show a similar qualitative behaviour but with different estimates for the UM parameters corresponding to distinct quantitative behaviours, in particular for the rainfall extremes.

This thesis also explores another facet of intermittency, which is particularly important for long time series of precipitation, that of numerous zero rainfall measurements (a pixel or a time step with no recorded rainfall), i. e. long “dry” periods. We revisit the long lasting discussion on the source of this intermittency, e.g. whether it requires a specific modelling. First the effects of a threshold on a universal multifractal field are investigated and second a toy model that introduces some zeros within the cascade process conditioned by the field value is developed. This enables to explain most of the observed behaviour, e.g. the difference between event statistics and overall statistics.

The impact of rainfall variability is investigated through the analysis of the sensitivity to the rainfall input of urban hydrologic-hydraulic models. Two predominantly urban catchments (a 3 400 ha one in Seine-Saint-Denis near Paris, and a 900 ha one in London) modelled with the help of operational semi-distributed models are used as case studies. The fully distributed model Multi-Hydro (under development at LEESU) is also tested on a 147 ha portion of the Paris case study. First the impact of unmeasured small scale rainfall variability (i.e. occurring at scales smaller than 1 km in space and 5 min in time which are available with C-band radar data) is evaluated. This is achieved by generating an ensemble of realistic downscaled rainfall fields by continuing the stochastic cascade process below the observation scale and then simulating the corresponding ensemble of hydrographs. It appears that the

small scale rainfall variability generates significant hydrological variability that should not be neglected. Furthermore the Multi-Hydro model generates a larger variability not only during the peak flow, but during the whole event, i.e. for moderate rain rates. These findings highlight the need to implement X-band radars (whose resolution is hectometric) in urban areas. In a second part multifractal tools are used on both rainfall and simulated discharges that also exhibit a scaling behaviour. It appears that the rainfall drainage system basically transmits the rainfall variability without damping it, at least in terms of multifractal statistics.

*Key words:*

Rainfall variability, urban hydrology, multifractals, intermittency, spatio-temporal analysis

## Table des matières

<b>1. INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>12</b>
1.1. Contexte général et problématique .....	12
1.2. Cadre de la thèse .....	14
1.3. Organisation du manuscrit .....	14
1.4. Brève introduction au cadre théorique des multifractals universels.....	15
<b>2. COMPARAISON MULTIFRACTALE DES PRECIPITATIONS A PARTIR DE DONNEES RADAR ET DU MODELE MESO-NH .....</b>	<b>20</b>
2.1. La mesure radar et ses limites .....	20
2.1.1. Rappels des grands principes .....	21
2.1.2. Difficultés liées à la mesure radar du champ de précipitation.....	23
2.2. Présentation des données.....	25
2.2.1. L'évènement cévenol du 5-9 septembre 2005.....	25
2.2.2. Evènement du 9 février 2009 en région parisienne .....	27
2.2.3. Les évènements de la région londonienne du 9 février 2009 et du 7 juillet 2009 .....	29
2.3. Comparaison multifractale .....	31
2.3.1. Analyse spatiale comparée des évènements.....	31
2.3.2. Analyse spatio-temporelle.....	35
2.4. Conclusion .....	38
<b>3. AMELIORATION DE LA PRISE EN COMPTE DES ZEROS DE LA PLUIE DANS LE CADRE DES MULTIFRACTALS UNIVERSELS.....</b>	<b>39</b>
3.1. Positionnement du problème .....	39
3.2. Effet d'un seuil sur un champ multifractal conservatif.....	40
3.2.1. Cadre théorique .....	40
3.2.2. Validation de ce cadre théorique (simulations numériques et données réelles) .....	41
3.2.3. Suggestion d'une correction du biais introduit par les zéros.....	45
3.3. Un « toy model » pour simuler les zéros .....	45
3.3.1. Présentation du toy model.....	46
3.3.2. Principaux résultats .....	47
3.4. Conclusion .....	50
<b>4. QUANTIFICATION DE L'INCERTITUDE ASSOCIEE A LA VARIABILITE A PETITES ECHELLES DE LA PLUIE EN HYDROLOGIE URBAINE .....</b>	<b>51</b>
4.1. Introduction.....	51
4.2. Explication de la désagrégation .....	53
4.3. Présentation des cas d'études et modèles associés.....	55

4.3.1.	Bassin versant de Seine-Saint-Denis, avec Canoé .....	55
4.3.2.	Bassin versant « Kodak », avec Multi-Hydro .....	57
4.3.3.	Bassin versant de Cranbrook, avec Inforworks.....	60
<b>4.4.</b>	<b>Impact de la variabilité non-mesurée des précipitations.....</b>	<b>61</b>
4.4.1.	Analyse sur les modèles 1D semi-distribués.....	61
4.4.2.	Analyse sur le modèle distribué Multi-Hydro (et comparaison) .....	67
<b>4.5.</b>	<b>Analyse multifractales sur les débits simulés.....</b>	<b>70</b>
<b>4.6.</b>	<b>Conclusion .....</b>	<b>70</b>
<b>5.</b>	<b>CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES.....</b>	<b>71</b>
<b>6.</b>	<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>73</b>
<b>7.</b>	<b>ANNEXES .....</b>	<b>83</b>
7.1.	Annexe 1 : Introduction aux multifractals en hydro-météorologie .....	83
7.2.	Annexe 2 : «Analyses multifractales et spatio-temporelles des précipitations du modèle Més0-NH et des données radar» (Hydrological Sciences Journal) .....	139
7.3.	Annexe 3 : « Quantifying the impact of small scale unmeasured rainfall variability on urban runoff through multifractal downscaling » (Journal of Hydrology).....	163
7.4.	Annexe 4 : «Influence of the zero-rainfall on the assessment of the multifractal parameters» (Advances in Water Resources) .....	185
7.5.	Annexe 5 : «Impact de la variabilité non-mesurée des précipitations sur les débits en hydrologie urbaine : un cas d'étude dans le cadre multifractal » (La Houille Blanche).....	209
7.6.	Annexe 6 : «Impact of small scale rainfall uncertainty on urban discharge forecasts» (IAHS Red Book, Publ. 351) .....	219
7.7.	Annexe 7 : «Multifractal analysis of a semi-distributed urban hydrological model» (Urban Water Journal).....	225
7.8.	Annexe 8 : « Impact of small scale unmeasured rainfall variability in urban areas: a case study with 1D and 1D/2D hydrological models in a multifractal framework» (soumis Journal of Hydraulic Research) .....	244
7.9.	Annexe 9 : « A toy model to deal with zero rainfall in a Universal Multifractal framework» (soumis Nonlinear Processes in Geophysics).....	254

## Liste des figures

Figure 1: (a) Intensité pluvieuse estimée par le radar de Trappes le 9 février 2009 à 16h05. (b) Support de la pluie pour le même pas de temps sur une zone centrée sur le radar .....	16
Figure 2 : Estimation de la dimension fractale du support (Eq. 1) de la pluie représenté Figure 1 .....	17
Figure 3 : Estimation de la dimension fractale du support de la pluie Fig. pour différent seuil de définition de l'occurrence ou non de la pluie.....	17
Figure 4 : Illustration schématique du fonctionnement d'un radar météorologique (Meteorological-Office, 2009).....	21
Figure 5 : Cartes des réseaux radar de Météo-France (a) et du Meteorological Office britannique (b) ....	23
Figure 6 : Cumul de pluie (mm) via les images radar pendant 16h de l'évènement cévenol à partir du 5 septembre 2005 à 16h. Les coordonnées (en °, Réseau géodésique français 1993) des quatre coins sont 46.3-1.3, 41.5-1.3, 46.2-8.1 et 41.4-7.5.....	26
Figure 7 : Evolution de l'intensité moyenne des précipitations sur la zone étudiée au cours de l'évènement étudié pour les deux types de données : simulation Méso-NH (trait pontillé) et données radar (trait continu).....	26
Figure 8 : Cumul de pluie (mm) via les sorties du modèle Méso-NH pendant 18h pour l'évènement cévenol, à partir du 6 septembre à 00h00. ....	27
Figure 9 : Positionnement du radar à bande C de Trappes (Météo-France) en région parisienne.....	28
Figure 10 : Situation météorologique du 9 février 2009 (tirée du bulletin climatique quotidien émis par Météo-France, et disponible en libre accès sur le site internet meteo.fr).....	28
Figure 11 : (a) Image « instantanée » (en moyenne sur 5 min) de la réflectivité mesurée par le radar de Trappes. (b) Cumul de pluie en mm pendant l'ensemble de l'évènement étudié (les coordonnées en hm sont du Lambert II étendu) .....	29
Figure 12 : Positionnement des radars à bande C du UK Meteorological Office qui couvrent la région de Londres.....	30
Figure 13 : Carte du cumul de pluie en mm pour les zones étudiées pour l'évènement de Février (a) et Juillet (b). Le système de coordonnées (en m) est British National Grid.....	30
Figure 14 : Evolution temporelle du taux moyen de pluie sur les zones étudiées pour les évènements de Février et Juillet.....	30
Figure 15 : Moyenne d'ensemble des spectres (Eq. 7) pour l'évènement cévenol (a) et celui de Paris du 9 février 2009 (b).....	31
Figure 16 : Illustration de la courbe de comportement scalant (Eq. 1) pour l'évènement de Paris (a) et celui de Londres du 7 juillet 2009 (b).....	33
Figure 17 : Pour l'évènement de Paris du 9 février 2009: (a) Courbe de détermination de $\alpha$ et $C_1$ par la méthode DTM (Eq. 6). (b) Fonction des moments d'échelle empirique et théorique (à partir des estimations de $\alpha$ et $C_1$ obtenue par la méthode DTM. ....	35
Figure 18 : Illustration des échantillons indépendants considérés dans des analyses spatiales (a), temporelles (b) et spatio-temporelles (c).....	36
Figure 19 : Pour les données radar de l'évènement cévenol, méthode DTM en analyse spatio-temporelle : (a) Eq 5 ( $R^2$ est égale à 0.99 en moyenne pour les grandes échelles et 0.06 pour les petites) ; (b) Courbes de détermination de $\alpha$ et $C_1$ (eq. 5).....	37
Figure 20: Effets d'un seuillage (les cas 1 à 5 sont testés, correspondant respectivement à des seuils de 0, $10^{-5}$ , 0.001, 0.01 and 0.1) sur des champs simulés avec $\alpha=1.8$ et $C_1=0.5$ . (a) Courbe de scaling i.e. Eq. (2) dans un graphique en log-log pour $q>1$ . (b) Idem (a) pour $q<1$ . (c) Fonction des moments d'échelles $K(q)$ pour $0 \leq q \leq 3$ (d) Fonction des moments d'échelles $K(q)$ pour $0 \leq q \leq 1$ (e) Courbes de détermination de $\alpha$ (méthode DTM). (f) Illustration de la méthode du comptage de boîtes (Eq. 1), les coefficients de détermination des courbes sont tous supérieurs à 0.995.....	44
Figure 21 : Illustration du processus de cascade pour générer $W_\lambda$ et $R_\lambda$ .....	47
Figure 22 : (a) Analyse TM de $W_\lambda$ , (b) Analyse TM de $R_\lambda$ , (c) $K(q)$ pour $R_\lambda$ , et (d) Courbe de détermination de $C_1$ et $\alpha$ , pour des simulations avec les paramètres $C_1=0.1$ , $\alpha=1.9$ , $\gamma_0=0.1$ and $p_0=0.5$ .....	49
Figure 23 : Illustration de deux pas de cascade du processus de désagrégation spatio-temporelle mis en œuvre. ....	53
Figure 24 : Illustration de la désagrégation pour un pas de temps pour l'évènement parisien du 9 février 2009 au-dessus du cas d'étude de Seine-Saint-Denis (la résolution temporelle du champ désagrégé a été ramenée à 5 min en moyennant les 4 pas de temps de 1.25 min générés). ....	54
Figure 25 : Localisation dans la région parisienne du bassin versant de Seine-Saint-Denis étudié, et du radar de Trappes .....	55

Figure 26 : Bassin versant étudié en Seine-Saint-Denis et sa subdivision en sous-bassins versants et le réseau d'assainissement modélisé (avec l'aide Julien Richard).....	56
Figure 27 : (a) Distribution de la surface des sous-bassins versants modélisés pour le cas d'étude en Seine-Saint-Denis. (b) Illustration de la décroissance en loi de puissance de l'histogramme (les deux plus gros bassins versants visibles en (b) ne le sont pas dans (a) et ne sont pas pris en compte dans la régression linéaire) .....	56
Figure 28 : (a) Représentation d'une portion du réseau modélisé avec des pixels de 20 m de côté. (b) Estimation de la dimension fractale du réseau modélisé avec la méthode du comptage de boîtes (Eq. 1) .....	57
Figure 29 : Photographie aérienne du bassin versant dit « Kodak » de 145 ha, situé sur la commune de Sevran (en Seine-Saint-Denis) .....	58
Figure 30 : (a), (b) et (c) Carte de l'occupation du sol mise en œuvre dans Multi-Hydro à une échelle de 1 m, 10 m et 20 m. Le réseau d'assainissement modélisé avec SWMM est superposé à cette carte (les nœuds, qui correspondent à des regards ou des avaloirs, et les canalisations sont visibles le long de la plupart des routes). (d) Capture d'écran du modèle Canoé de la même zone.....	59
Figure 31 : Courbe de détermination de la dimension fractale de la portion imperméabilisée du bassin Kodak. Le calcul a été fait sur une portion de 512 x 512 pixels de côté 2 m extraite au milieu du bassin (les résultats obtenus en décalant cette zone d'étude sont très similaires). .....	60
Figure 32 : Localisation dans la région Londonienne du bassin versant de Cranbrook, et des radars de Chenies (à l'Ouest) et Thurnham (à l'Est). .....	61
Figure 33 : Représentation schématique du bassin versant de Cranbrook, avec la hauteur totale de pluie reçue par chacun des 51 sous bassins-versants pour l'évènement du 9 février 2009. Les lignes noires correspondent au réseau d'assainissement modélisé.....	61
Figure 34 : Les figures sont tracées pour la conduite 87 du cas d'étude de Seine-Saint-Denis pour l'évènement du 9 février 2009, en partant d'une résolution initiale de pluie 1 km x 1 km x 5 min. (a) Ensemble des 100 hydrogrammes simulés. (b) Hydrogrammes $Q_{0,9}$ (trait en tiret), $Q_{0,5}$ (trait pointillé), $Q_{0,1}$ (trait en tiret) and $Q_{\text{radar}}$ (trait continu). (c) Histogramme des débits de pointe des 100 échantillons. (d) Courbe de détermination du coefficient $k$ . .....	63
Figure 35 : Carte des $CV'$ pour le cas d'étude de Seine-Saint-Denis pour l'évènement du 9 février 2009 pour une résolution initiale de pluie de 1 km x 1 km x 5 min. ....	64
Figure 36 : $CV'$ évalué pour les canalisations sélectionnées du cas d'étude de Cranbrook pour les évènements de février (a) et juillet (b) (attention, les échelles verticales ne sont pas les mêmes) .....	64
Figure 37 : Carte de la grandeur $Q_{0,9}(t_{PF, \text{radar}}) - Q_{0,1}(t_{PF, \text{radar}})$ (en $m^3/s$ ) pour le cas d'étude de Seine-Saint-Denis pour l'évènement du 9 février 2009 pour une résolution initiale de pluie de 1 km x 1 km x 5 min. ....	65
Figure 38 : Figures obtenues pour le cas d'étude de Seine-Saint-Denis pour l'évènement du 9 février 2009. (a) Pour la conduite 87, 100 échantillons d'hydrogrammes simulés à partir d'une résolution de 1 km x 1 km x 5min (rouge) ou 9 km x 9 km x 20 min (noir). (b) Comparaison des $CV'$ en fonction de la résolution initiale de pluie pour toutes les canalisations. ....	66
Figure 39 : (a) Capture d'écran du modèle Canoé des 4 sous-bassins versants dont l'eau est drainée vers les conduites où des mesures de hauteur d'eau sont disponibles. (b) Schéma de la configuration réelle des deux bassins de stockage où des mesures de hauteur d'eau sont disponibles. (c) Représentation de ces bassins dans le modèle Canoé (d) Evolution temporelle du niveau d'eau dans la canalisation étudiée (qui correspond au bassin (1) pour l'évènement du 9 février 2009: mesurée (noir), simulée avec un fonctionnement classique des vannes (bleu), simulée avec le fonctionnement réel des vannes (trait continu rouge) et l'incertitude correspondante associée à la variabilité à petites échelles de la pluie (traits pointillés rouges). .....	67
Figure 40 : Comparaison des débits simulés par Multi-Hydro et Canoé à l'exutoire du bassin « Kodak » pour l'évènement du 9 février 2009.....	68
Figure 41 : Hydrogrammes $Q_{\text{radar}}$ (trait continu), $Q_{0,25}$ et $Q_{0,75}$ (couleur sombre), $Q_{0,1}$ et $Q_{0,9}$ (couleur claire) pour l'exutoire du bassin Kodak pour l'évènement du 9 février 2009, avec Multi-Hydro à 10m (a) et Canoé (b) .....	69
Figure 42 : Idem Figure 38 pour 5 conduites du bassin Kodak avec le modèle Multi-Hydro à 10 m.....	69

## Liste des tableaux

<b>Tableau 1 : Principales caractéristiques des différents types de radar météorologique.....</b>	<b>22</b>
<b>Tableau 2 : Estimation des paramètres multifractals <math>\alpha</math>, <math>C_1</math>, <math>H</math> et <math>\beta</math> pour les différents évènements étudiés en analyse spatiale. ....</b>	<b>32</b>
<b>Tableau 3 : Estimation des paramètres multifractals <math>\alpha</math>, <math>C_1</math> et <math>H</math> pour l'évènement du 5-9 Septembre 2005 dans le sud de la France (données radar et les simulations Méso-NH).....</b>	<b>37</b>
<b>Tableau 4 : Estimation des paramètres multifractals <math>\alpha</math>, <math>C_1</math> et <math>H</math> pour les deux évènements londoniens et pour les différents types d'analyse. ....</b>	<b>38</b>

# **1. Introduction générale**

## **1.1. Contexte général et problématique**

Au cours des dernières décennies, la complexité des réseaux d'assainissement s'est fortement accrue par la mise en œuvre de bassins de stockage, d'un certain degré de maillage, de stations de pompage, de vannes... L'augmentation des capacités d'action sur le réseau a été concomitante à une automatisation et un développement du contrôle en temps réel de ce dernier (Schutze et al., 2004, pour une revue). Le but traditionnel de ces outils est de limiter les débordements de réseau qui engendrent des inondations urbaines. Dans un contexte réglementaire plus strict comme celui de la Directive Cadre sur l'Eau (Council of the European Communities, 2000), un objectif de réduction de la pollution et d'amélioration de l'état écologique des masses d'eau a été ajouté. Ceci passe par exemple par la limitation des volumes d'eau rejetés sans traitement dans le milieu naturel via les déversoirs d'orage, qui sont une source importante de pollution des rivières (Pleau et al., 2005), ou bien un contrôle des débits pour optimiser le fonctionnement des stations d'épuration (Schutze et al., 2004). Par ailleurs, ce sont bien souvent les mêmes bassins de stockage qui servent à faire du traitement de l'eau pluviale lors d'évènements moyens (via une décantation) et à limiter les débordements lors d'évènements extrêmes (via l'écrêtement des pics de débit). Il convient de noter que ces deux utilisations sont antinomiques puisque la première implique de stocker l'eau dès le début de l'évènement pluvieux, tandis que la deuxième implique de conserver un volume disponible pour le pic de débit. L'optimisation de ces capacités de stockage passe par l'utilisation de modèles hydrologiques / hydrauliques en milieu urbain, mais aussi par une meilleure connaissance, à des échelles adaptées, des précipitations qui sont le processus à la base des ruissellements.

L'objectif de cette thèse est de caractériser l'impact de la variabilité des précipitations sur la réponse des bassins versants urbains. Ce problème peut sembler très « appliqué » mais nécessite en réalité la mise en œuvre d'outils théoriques permettant de quantifier aussi bien la variabilité des précipitations à des échelles pertinentes pour l'hydrologie urbaine, donc typiquement inférieures au kilomètre et à quelques minutes, que la variabilité des débits. Nous nous proposons dans cette thèse d'utiliser les outils du cadre des multifractals universels (Schertzer and Lovejoy, 1987a) couramment employé pour analyser et simuler des champs géophysiques extrêmement variables sur une large gamme d'échelle, mais jusqu'à maintenant peu ou pas employé en hydrologie urbaine.

Afin d'apporter des éléments de réponse à cette problématique, mes travaux de thèse se sont structurés en trois volets :

- Comparaison multifractale des données radar de précipitations à la résolution de 1 km en espace et 5 min en temps, et des sorties du modèle numérique Mésoscale-NH. L'objectif étant de se donner un cadre théorique pour caractériser la variabilité de la pluie à petites échelles.
- Etude de l'impact des nombreux zéros de la pluie (i.e. un pixel considéré comme sans pluie dans les données) sur l'estimation des paramètres multifractals, et amélioration de la prise en compte des zéros dans ce cadre théorique.
- Quantification de l'impact de la variabilité de la pluie en hydrologie urbaine, via l'étude de la sensibilité de modèles à la résolution du champ de précipitation. Cette étude a été menée sur des bassins versants urbains de Seine-Saint-Denis et de Londres. Des modèles semi-distribués 1D opérationnels et un modèle de recherche totalement distribué ont été mis en œuvre.

Il convient ici de souligner quelques caractéristiques des modélisations stochastiques des précipitations, qui sont à la base de mon travail de thèse. Plusieurs approches sont couramment employées aussi bien dans des travaux scientifiques qu'opérationnellement.

La première repose sur des processus ponctuels qui se contentent de fournir une représentation statistique des champs de pluie. Dans ces derniers une série temporelle est représentée par une succession d'évènements pluvieux dont les heures d'occurrence sont générées par un processus stochastique. Ensuite une intensité et une durée définies à partir de variables aléatoires indépendantes sont associées à chaque évènement. Le processus le plus simple est un processus de Poisson (se référer à Waymire and Gupta, 1981, pour une revue) dans lequel la durée entre deux évènements successifs est indépendante et exponentiellement distribuée. Le nombre d'évènements dans un intervalle de temps donné est alors indépendant et distribué suivant une loi de Poisson. Afin de mieux représenter les extrêmes de pluie des processus à deux niveaux ont ensuite été introduits (Rodriguez-Iturbe et al., 1987; Onof et al., 2000 pour un revue ; Wheeler et al., 2005, pour un modèle spatio-temporel en vue d'une application hydrologique). La notion d'évènement est alors remplacée par des cellules pluvieuses réparties au sein de groupes. La succession des groupes est générée par un processus de Poisson. La position des cellules pluvieuses au sein d'un groupe est définie soit à l'aide d'une distribution exponentielle à partir de l'instant de début du groupe (processus dit de Neyman-Scott), soit à partir d'un deuxième processus de Poisson imbriqué (processus dit de Bartlett-Lewis). Divers raffinements possibles pour les lois de probabilité définissant la durée et l'intensité de chaque cellule pluvieuse ont été testés. Même si il faut nuancer cette affirmation (Olsson and Burlando, 2002, ont montré que certains processus ponctuels présentent quelques propriétés d'invariance sur une gamme d'échelle réduite), une des principales limites de ces processus est qu'ils sont pour l'essentiel valables à l'échelle pour laquelle ils ont été définis.

Parallèlement des modélisations stochastiques des précipitations reposant sur des principes physiques de base de la variabilité qu'elles étaient censées représenter, notamment autour de la question des échelles (Hubert and Carbonnel, 1989; Lovejoy and Mandelbrot, 1985; Lovejoy and Schertzer, 1985; Olsson et al., 1993; Rodriguez-Iturbe et al., 1984) et enfin de l'invariance d'échelle (Hubert and Carbonnel, 1989; Lovejoy and Mandelbrot, 1985; Lovejoy and Schertzer, 1985; Olsson et al., 1993) ont progressivement été développées. La rupture la plus profonde étant sans doute intervenue avec l'avènement des modèles multifractals de précipitation (Bendjoudi et al., 1997; de Lima and de Lima, 2009; de Lima and Grasman, 1999; Deidda, 2000; Desaulnier-Soucy et al., 2001; Gupta and Waymire, 1993; Harris et al., 1996; Hubert et al., 1995; Macor et al., 2007; Nykanen, 2008; Olsson and Niemczynowicz, 1996; Schertzer and Lovejoy, 1987a; Schertzer and Lovejoy, 1987b; Schertzer et al., 2002; Tessier et al., 1993). Cette rupture a conduit à un basculement de modèles linéaires stochastiques (additions de structures de plus en plus petites) vers des modèles fortement non-linéaires (modulation multiplicative des petites structures par les plus grosses). Ce cadre théorique présente l'originalité d'être à la fois statistique et à base physique (reposant sur la propriété structurelle d'invariance d'échelles des équations génératrices des mouvements atmosphériques que l'on suppose rester valable sur celles inconnues régissant les précipitations). Ces modèles et notamment les multifractals universels possèdent en outre l'avantage de ne reposer que sur un nombre très réduit de paramètres contrairement aux processus ponctuels à deux niveaux. Cette rupture a changé par maints aspects le statut scientifique des précipitations : perçues auparavant comme pouvant faire seulement l'objet de statistiques, elles sont devenues le sujet de débats théoriques, par exemple faut-il (Keddem and Chiu, 1987) ou non (Lovejoy and Schertzer, 1989) traiter les valeurs nulles des

précipitations à part, y a-t-il (Schertzer and Lovejoy, 1987a; Schertzer and Lovejoy, 1997) ou non (Gupta and Waymire, 1993; Mandelbrot, 1989) des comportements universels ?

Par ailleurs certains auteurs (par exemple Bernardara et al., 2007; Menabde and Sivapalan, 2000; Veneziano and Furcolo, 2002) ont proposé divers modèles mêlant une approche de type processus ponctuel pour l'alternance des périodes sèches et humides et une approche reposant sur l'invariance d'échelle pour représenter la variabilité au sein d'un événement pluvieux. Des modèles visant à reproduire à une échelle donnée les caractéristiques géométriques des hyétogrammes observés ont également été testés. Par exemple Arnaud and Lavabre (1999) en ont développé un reposant sur 21 paramètres qui est utilisé opérationnellement.

## **1.2. Cadre de la thèse**

Mes travaux de thèse se sont inscrits dans le cadre :

- de la chaire « Hydrologie pour une ville résiliente » de l'Ecole des Ponts ParisTech en partenariat avec Véolia ([www.enpc.fr/hydrologie-pour-une-ville-resiliente](http://www.enpc.fr/hydrologie-pour-une-ville-resiliente)).
- du projet européen FP7 SMARTeST ([www.floodresilience.eu](http://www.floodresilience.eu)), qui vise à faciliter l'accès au marché de technologie de résilience aux inondations. Ce projet regroupe 10 partenaires de 7 pays européens.
- du projet européen Interreg RainGain ([www.raingain.eu](http://www.raingain.eu)) qui vise à l'installation de radars en bande X en milieu urbain et à une utilisation des données de pluie à petites échelles pour la prévision des inondations pluviales en milieu urbain. Ce projet regroupe 13 partenaires dans 4 pays.

## **1.3. Organisation du manuscrit**

Les travaux de ma thèse ont donné lieu à huit publications, qui représentent des étapes et sont incluses in extenso en annexe. Elles sont citées dans le texte à la fois par Gires et al. (201X) et par leur numéro d'annexe.

### Articles publiés:

Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2011. Analyses multifractales et spatio-temporelles des précipitations du modèle Meso-NH et des données radar. *Hydrological Sciences Journal-Journal Des Sciences Hydrologiques*, 56(3): 380-396. **Annexe 2.**

Gires, A., Onof, C., Maksimovic, C., Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I., Lovejoy, S., 2012. Quantifying the impact of small scale unmeasured rainfall variability on urban runoff through multifractal downscaling: A case study. *Journal of Hydrology*, 442-443: 117-128. **Annexe 3.**

Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2012. Influence of the zero-rainfall on the assessment of the multifractal parameters. *Advances in Water Resources*, 45, 13-25. **Annexe 4.**

Gires, A., Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I., Lovejoy, S., Maksimovic, C., Onof, C., Simoes, N., 2011. Impact of unmeasured rainfall variability on urban discharge: a case study in a multifractal framework. *Houille Blanche - Revue Internationale de l'Eau*(4): 37-42. **Annexe 5.**

Gires, A., Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I., Lovejoy, S., Onof, C., Maksimovic, C., Simoes, N., 2011b. Impact of small scale rainfall uncertainty on urban discharge forecasts. In *Weather Radar and Hydrology*, Eds: Moore, J., Cole, S., Illingworth, A. IAHS Publ. 351. p 400-406 **Annexe 6**.

Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2012d. Multifractal analysis of an urban hydrological model on a Seine-Saint-Denis study case. *Urban Water Journal*, DOI:10.1080/1573062X.2012.716447. **Annexe 7**.

#### Articles soumis:

Gires, A., Giangola-Murzyn, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2012a. Impact of small scale rainfall variability in urban areas: a case study with 2D/1D hydrological models in a multifractal framework. *Journal of Hydraulic Research* (submitted in a special issue UDM 10). **Annexe 8**.

Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2012e. A toy model to deal with zero rainfall in a Universal Multifractal framework. *Nonlinear Processes in Geophysics* (submitted). **Annexe 9**.

Ce manuscrit est composé d'une synthèse pour chaque volet de ma thèse qui introduit plus en détail les problématiques associées, présentent les données utilisées, la méthodologie mise en œuvre et les principaux résultats, se contentant de faire référence aux articles pour les autres résultats. Par ailleurs, les annexes sont constituées d'un cours d'introduction aux multifractals que j'ai préparé et des articles.

Il convient ici de préciser que les modèles opérationnels d'hydrologie urbaine que j'ai utilisés m'ont été fournis calibrés sur les sites d'études. Je les ai ensuite moi-même mis en œuvre avec différents types d'entrée de pluie. Pour le modèle de recherche Multi-Hydro, je ne suis pas le développeur, mais j'ai eu un rôle plus actif en tant que « premier testeur ».

### **1.4. Brève introduction au cadre théorique des multifractals universels**

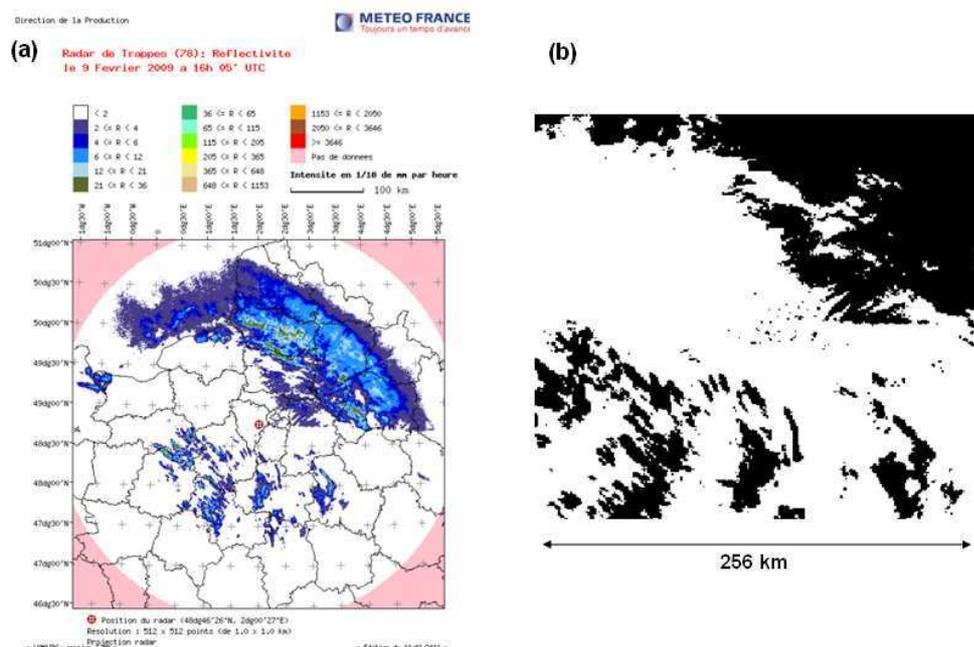
Les multifractals et les précipitations ont déjà une longue histoire commune (pour revues voir Lovejoy and Schertzer, 1995; Schertzer et al., 2010). Les notions essentielles du cadre théorique sont présentées dans le corps de ce manuscrit. Le lecteur intéressé pourra se référer à une introduction plus détaillée aux multifractals en hydrométéorologie disponible en annexe. Cette introduction est présentée sous la forme d'un cours. Ce choix a été fait pour permettre au lecteur hydrologue urbain intéressé pas nécessairement spécialiste de prendre en main ses notions d'une façon (je l'espère !) plus pédagogique qu'à travers un état de l'art classique. Par ailleurs deux niveaux de lecture du document ont été fait. Il s'agit d'un document réalisé à partir des interventions suivantes :

- « Multifractal data analysis techniques and simulations » dans le cours « Multifractal techniques in environmental engineering » (responsable : Daniel Schertzer) de l'école doctorale SIE de l'Université Paris-Est.

- « Introduction to rainfall analysis and modelling with multifractal cascades » dans le cours « Stochastic Hydrology » (responsable: Christian Onof) du master 2 « Hydrology and water resources management » de l'Imperial College London.

- « Introduction aux multifractales dans les milieux karstiques » dans le cours d'hydrogéologie (responsable : Ioulia Tchiguirinskaia) du master 2 Sciences et Génie de l'Environnement, option Système Aquatique et Gestion de l'Eau, de l'Ecole des Ponts ParisTech.

Les champs de pluie présentent une forte variabilité, comme on peut le voir sur la Figure 1.a qui représente l'intensité pluvieuse (mm/h) vue par le radar de Trappes pendant un pas de temps de 5 min au cours de l'évènement du 9 février 2009 (une plus ample description des données est fournie après). Le cadre théorique des multifractals va permettre de caractériser ce champ dans toute sa complexité.



**Figure 1: (a) Intensité pluvieuse estimée par le radar de Trappes le 9 février 2009 à 16h05. (b) Support de la pluie pour le même pas de temps sur une zone centrée sur le radar**

On s'intéresse dans un premier temps à l'objet géométrique qu'est le support de la pluie (Figure 1.b), c'est-à-dire la portion de l'axe du temps et/ou de l'espace où il pleut (plus précisément où de la pluie est mesurée). Il apparaît que ce dernier est fractal et donc que son degré d'homogénéité peut être caractérisé par une dimension fractale ( $D_F$ ) (Carbonnel and Hubert, 1988; Hentschel and Procaccia, 1983; Lovejoy et al., 1987). Cette dimension peut être définie comme la dimension de Hausdorff, mais dans la pratique, elle est plutôt définie comme dimension de « comptage de boîte » qui est déterminée par la relation d'échelle:

$$N_\lambda \approx \lambda^{D_F} \quad \text{Eq. 1}$$

Où  $N_\lambda$  est le nombre de pas de temps ou d'espace de taille  $l$  nécessaire pour couvrir le support de la pluie à la résolution  $\lambda (=L/l)$ , définie par le rapport entre l'échelle extérieure  $L$  et l'échelle d'observation  $l$ . La Figure 2 représente l'Eq. 1 dans un graphique en log-log pour le support de la Figure 1. L'alignement des points témoigne du caractère fractal de l'objet géométrique sur deux gammes d'échelles distinctes. Sur la gamme 1-64 km on trouve  $D_F =$

1.74, tandis que sur la gamme 64-256 km on trouve  $D_F=1.95$  ce qui est très proche de 2 (i.e. la dimension de l'espace sous-jacent) et reflète simplement qu'à partir de 64 km la pluie est présente partout.

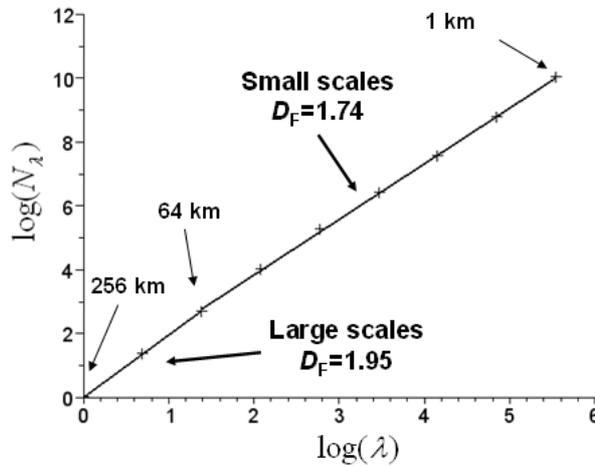


Figure 2 : Estimation de la dimension fractale du support (Eq. 1) de la pluie représenté Figure 1

On constate une dépendance sensible de cette dimension fractale par rapport au seuil choisi pour définir l'occurrence ou non de pluie (Hubert et al., 1995; Lovejoy et al., 1987). Lorsque le seuil augmente, le support (et sa dimension fractale) d'occurrence de la pluie diminue. Ce phénomène est illustré Figure 3 pour le champ de pluie de la Figure 1. Ainsi le champ de pluie n'est pas caractérisé par une seule dimension fractale, mais en fait par une infinité ; cela donne un premier aperçu de ce que l'on appelle champ multifractal. Dans ce cadre la notion de seuil  $s_\lambda$  à une résolution donnée est remplacée par celle invariante d'échelles de singularité  $\gamma$  :  $s_\lambda = \lambda^\gamma$ . Les propriétés statistiques (moments, probabilité de distribution) d'un champ multifractal sont définies par des lois d'échelle s'exprimant directement ou indirectement par rapport à ces singularités.

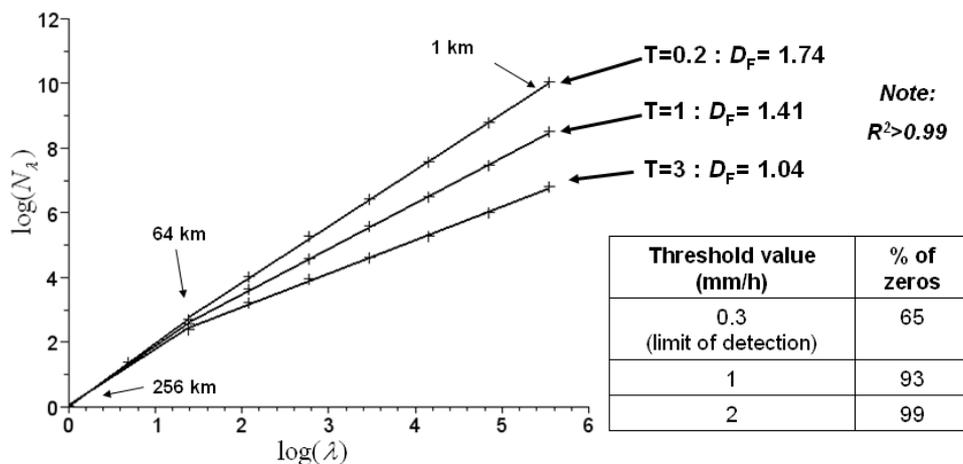


Figure 3 : Estimation de la dimension fractale du support de la pluie Fig. pour différent seuil de définition de l'occurrence ou non de la pluie.

On appelle  $R_\lambda$  le champ de pluie à la résolution  $\lambda$ . Numériquement le champ  $R_\lambda$  à différentes résolutions  $\lambda$  est obtenu en moyennant le champ mesuré  $R_\Lambda$  à la résolution initiale

Λ. Il est usuel de prendre comme statistiques du champ  $R_\lambda$  à différentes résolution  $\lambda$  ses moments statistiques d'ordre  $q < R_\lambda^q >$ . Si le champ étudié est multifractal, alors ces moments sont définis par des lois d'échelles:

$$\langle R_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad \text{Eq. 2}$$

Où  $K(q)$  est la fonction d'échelle des moments. Cette fonction est convexe. On peut montrer (Schertzer and Lovejoy, 1987a) que de façon équivalente, les probabilités de dépassement de seuils  $s_\lambda = \lambda^\gamma$ , définies à partir d'une singularité (arbitraire)  $\gamma$ , sont reliées par la relation :

$$\Pr(R_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad \text{Eq. 3}$$

qui définit la fonction codimension  $c(\gamma)$  qui est croissante et convexe. Lorsque  $c(\gamma) < d$  (où  $d$  est la dimension d'étude du champ, dans cette étude :  $d = 1$  ou  $2$ ),  $c(\gamma)$  peut s'interpréter comme la co-dimension fractale du support où la divergence ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) champ est plus rapide que  $\lambda^\gamma$ . Les fonctions  $K(q)$  et  $c(\gamma)$  sont reliées par la transformation de Legendre (Parisi and Frish, 1985). En fait, celle-ci résulte pour les multifractals stochastiques de la transformation de Mellin qui lie moments et probabilités (Schertzer and Lovejoy, 1993; Schertzer and Lovejoy, 2011).

Les fonctions  $K(q)$  et  $c(\gamma)$  caractérisent la variabilité à travers les échelles du champ étudié et dépendent dans le cas général d'une infinité de paramètres du fait des faibles contraintes mathématiques (essentiellement convexité) à satisfaire par ces fonctions. Dans le cadre des multifractals universels, qui constituent sous des conditions assez générales un attracteur limite pour les cascades multifractales et correspondent à une généralisation multiplicative des théorèmes centraux limites (Schertzer and Lovejoy, 1997), ce nombre de paramètre est réduit à 3 (Schertzer and Lovejoy, 1987a):

-  $H$ , le degré de non-conservation, mesure la dépendance en échelle du champ moyen ( $H=0$  pour un champ conservatif).

-  $C_1$  mesure l'intermittence moyenne soit le degré de concentration du champ moyen. Plus précisément,  $C_1$  est la codimension de la singularité moyenne pour un champ conservatif, c'est-à-dire le complément de la dimension fractale  $D_I$  du support de cette singularité par rapport à la dimension de l'espace physique  $d$ :  $C_1 = d - D_I$ , et donc  $C_1=0$  pour un champ homogène :

- l'indice de multifractalité  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ), mesure comment évolue l'intermittence lorsqu'on s'écarte progressivement du champ moyen.  $\alpha=0$  correspond à un champ (mono-/uni-) fractal caractérisé par une seule dimension, alors que  $\alpha=2$ , correspond à un champ improprement nommé « lognormal ». Une définition rigoureuse et essentielle pour les simulations de multifractalité  $\alpha$ , est qu'il correspond à l'indice de stabilité de Lévy du générateur de la cascade.

Dans ce cadre les expressions analytiques de  $K(q)$  et  $c(\gamma)$  sont données par les équations suivantes :

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) + Hq \quad \text{Eq. 4}$$

$$c(\gamma) = \begin{cases} C_1 \left( \frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right)^\alpha & \alpha \neq 1 \\ C_1 \exp \left( \frac{\gamma}{C_1} - 1 \right) & \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{Eq. 5}$$

$$\text{où } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$$

En appelant  $\gamma_0 = -\frac{C_1\alpha'}{\alpha}$ , dans la définition de  $c(\gamma)$ , deux cas se présentent:

- Si  $\alpha > 1$ , alors  $c$  est définie pour  $\gamma > \gamma_0$ , et égale à zéro pour  $\gamma \leq \gamma_0$
- Si  $\alpha < 1$ , alors  $c$  est définie pour  $\gamma < \gamma_0$ , et égale à l'infini pour  $\gamma \geq \gamma_0$

Des paramètres  $\alpha$  et  $C_1$  grands reflètent des extrêmes prononcés. Ces paramètres peuvent être déterminés à l'aide de la méthode du double moment trace (DTM) (Lavallée et al., 1993). Cette méthode repose sur le fait que, dans le cadre des multifractals universels, la fonction d'échelle des moments  $K(q, \eta)$  du champ  $R_\lambda^{(\eta)}$ , obtenu en dégradant la puissance  $\eta$  du champ à la résolution maximale (une analyse avec une méthode DTM modifiée, Veneziano and Furcolo, 1999 a également été faite mais n'apporte pas de changement dans les estimations qui suivent), s'exprime aisément en fonction de  $\alpha$  :

$$\left\langle \left( R_\lambda^{(\eta)} \right)^q \right\rangle \approx \lambda^{K(q, \eta)} = \lambda^{K(q\eta) - \eta K(q)} = \lambda^{\eta^\alpha K(q)} \quad \text{Eq. 6}$$

Ainsi  $\alpha$  est la pente de la partie linéaire de  $K(q, \eta)$  en fonction de  $\eta$  dans un graphique log-log. Dans la suite, la portion de la courbe utilisée pour estimer  $\alpha$  est représentée en trait plein sur les courbes de détermination de  $\alpha$ .

La première étape d'une analyse multifractale consiste souvent en une analyse spectrale. La présence d'une pente spectrale  $\beta$  relativement constante sur une gamme de fréquences  $f$

$$E(f) = f^{-\beta} \quad \text{Eq. 7}$$

correspond à une première confirmation du comportement scalant du champ étudié. C'est un indicateur de l'importance de la corrélation du champ. Un grand  $\beta$  correspond à une longueur de corrélation faible. La présence d'une loi de puissance reflète l'absence de longueur caractéristique dans le processus. Le degré de non conservation  $H$  se déduit de la pente spectrale  $\beta$ , par la relation (Tessier et al., 1993; Yaglom, 1966)

$$\beta = 1 + 2H - K(2a) \quad \text{Eq. 8}$$

Le terme  $K(2a)$  correspond à l'effet d'intermittence (ou « correction » d'intermittence) sur la pente spectrale, généré par un champ conservatif  $\varepsilon_\lambda$ , s'il existe, tel que  $R_\lambda \propto \varepsilon_\lambda^a \lambda^{-H}$ . Dans cette étude, l'approximation classique de  $a$  par 1 est utilisée.

Les données spatio-temporelles exploitées dans cette thèse, à savoir la pluie en un certain nombre de pixels d'une surface donnée pendant un certain nombre de pas de temps, permettent de mener trois types d'analyses :

- des analyses spatiales : elles consistent à faire, pour chaque pas de temps, l'analyse spatiale 2D du champ de pluie.
- des analyses temporelles : elles consistent à faire, pour chaque pixel, l'analyse de la série temporelle 1D pluviométrique.
- des analyses spatio-temporelles : elles consistent à faire directement l'analyse 2+1 D du champ de pluie.

Pour les trois types d'études, il est possible d'effectuer des analyses échantillon par échantillon (c'est-à-dire pas de temps par pas de temps en analyse spatiale et pixel par pixel en analyse temporelle) et en moyenne d'ensemble. Dans ce cas, chaque échantillon est considéré comme une réalisation du phénomène. La moyenne faite dans les équations 2 et 6 porte alors sur tous les échantillons dégradés indépendamment et non plus sur un seul. Les équations 2 et 6 ne sont a priori valables qu'en moyenne sur un ensemble infini de réalisations. Ainsi les analyses « échantillon par échantillon » sont moins robustes que celles en « moyenne d'ensemble » qui prennent en compte d'avantage d'échantillons, mais elles

permettent tout de même de mettre en lumière certains comportements en terme d'évolution temporelle ou de répartition spatiale des paramètres.

Afin de simuler un champ multifractal universel discret conservatif, la procédure suivante est mise en œuvre (Pecknold et al., 1993). A chaque pas de cascade, une structure telle un pas de temps (en 1D) ou un pixel (en 2D) est divisée en  $\lambda_1$  pas de temps (en 1D) ou  $\lambda_1^2$  pixels (en 2D). Le rapport d'échelles  $\lambda_1 = 2$  est habituellement choisi, mais ceci n'est pas obligatoire. La valeur affectée à une sous-structure est la valeur de la structure mère multipliée par un facteur aléatoire, choisi de façon à assurer la validité des équations 2 et 4. Ainsi après  $n$  pas de cascade (la résolution est  $\lambda_n = \lambda_1^n$ ) la valeur d'une structure est égale au produit des incréments multiplicatifs aléatoires des  $n$  pas de cascade précédents.

Nous introduirons au fil du texte les notions complémentaires qui apparaîtront utiles.

## **2. Comparaison multifractale des précipitations à partir de données radar et du modèle Méso-NH**

“I like the rain before it falls. Of course there is no such thing, she said. That's why it's my favorite. Something can still make you happy, can't it, even if it isn't real?”  
*The Rain Before It Falls*, Jonathan Coe

L'objectif de cette partie est de présenter et comparer les résultats des analyses multifractales menées sur quatre évènements pluvieux en France et dans la région de Londres. Préalablement, les évènements pluvieux seront présentés, après avoir rappelé les grands principes et les limites de la mesure radar, le principal type de données utilisé dans cette thèse.

Nous nous concentrons ici sur la comparaison entre évènements, plus de détails sur les analyses de chaque évènement peuvent être trouvés dans (Gires et al., 2012b, annexe 3; Gires et al., 2011b annexe 6; Gires et al., 2011c, annexe 2; Gires et al., 2012d, annexe 7).

### **2.1. La mesure radar et ses limites**

Il y a de nombreuses revues classiques sur l'utilisation du radar en météorologie (Collier, 1996; Meischner, 2004; Steiner, 2005), et sur ses applications en hydrologie (Delrieu et al., 2009b; Krajewski and Smith, 2002). Pour une discussion classique sur les erreurs liées à la mesure radar et les corrections possibles voir (Hazenberget al., 2011). Nous ne cherchons pas dans cette partie à être exhaustif, mais simplement à rappeler les grands principes de la mesure radar et ses limites qu'un utilisateur de ce type de données doit avoir à l'esprit. Nous discuterons principalement le cas des radars à simple polarisation car les données que nous analysons en sont issues.

### 2.1.1. Rappels des grands principes

Un radar (abréviation de Radio Detection and Ranging) est un instrument de télédétection constitué d'un émetteur, d'un récepteur et d'une antenne. Afin de détecter et mesurer la pluie, le radar émet un faisceau d'ondes électromagnétiques ( $I_{rad}$ ). Une partie de l'onde est alors rétrodiffusée par les hydrométéores (ex : gouttelette, goutte, flocon de neige, grêle...) présents dans l'atmosphère vers le radar, où la puissance reçue ( $P_r$  en W) est mesurée (Figure 4). Il est alors possible de calculer la réflectivité ( $Z$ ,  $\text{mm}^6 \cdot \text{m}^{-3}$ ) par la relation :

$$P_r = \frac{C|K_w|}{r^2} Z \quad \text{Eq. 9}$$

Où  $|K_w|$  est la constante diélectrique de l'hydrométéore en phase liquide (typiquement 0.93),  $r$  est la distance à la cible (évaluée par le temps de parcours entre l'émission et la réception de l'impulsion électromagnétique qui se déplace à la vitesse de la lumière), et  $C$  est une constante dépendant du radar (qui prend en compte la puissance émise par ce dernier). Plus l'atmosphère est chargée en hydrométéores, plus l'onde sera rétrodiffusée, et plus  $Z$  sera grande. La réflectivité  $Z$  est souvent exprimée en  $\text{dBZ} = 10\log(Z/Z_0)$  (où  $Z_0=1 \text{ mm}^6 \cdot \text{m}^{-3}$ ) et typiquement comprise entre 5 et 70 dBZ en fonction de l'intensité pluvieuse observée. Dans le cadre d'hypothèses simplificatrices (essentiellement gouttes sphériques, et diffusion de Rayleigh valable ce qui nécessite des diamètres de gouttes inférieurs à  $\lambda_{rad}/10$ ), il est possible de relier la réflectivité à la distribution des tailles de gouttes. Pour fixer quelques ordres de grandeur un radar émet typiquement pendant des impulsions de 0.1 à 2  $\mu\text{s}$  à une puissance de  $10^3$ - $10^6$  W et la puissance reçue est de l'ordre de  $10^{-13}$ W.

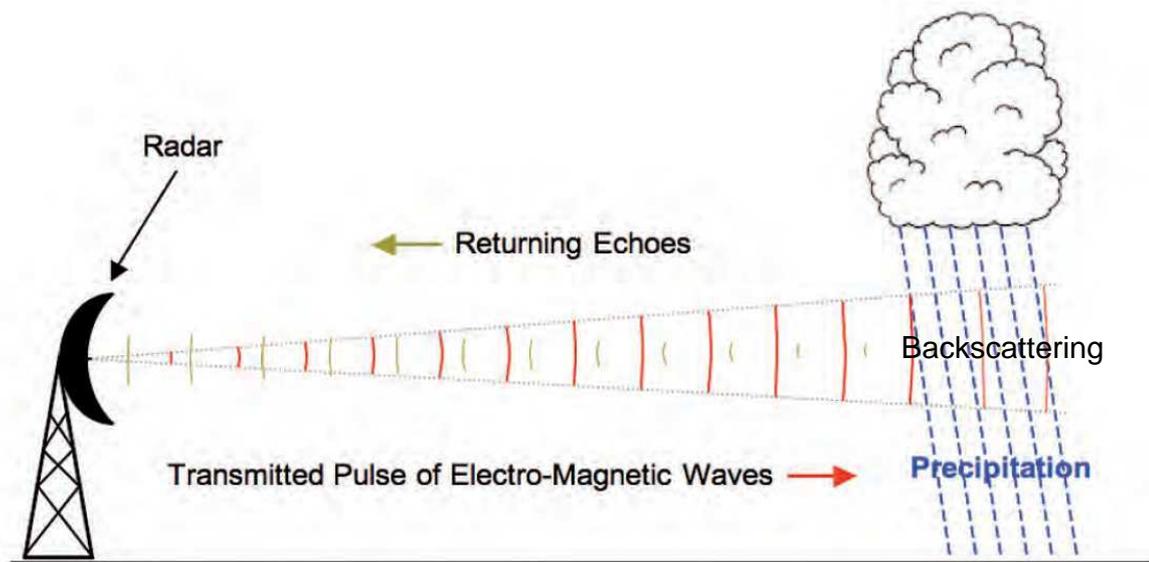


Figure 4 : Illustration schématique du fonctionnement d'un radar météorologique (Meteorological-Office, 2009)

La réflectivité  $Z$ , qui est la grandeur effectivement mesurée à l'aide d'un radar, est ensuite convertie en intensité de pluie ( $R$ , en mm/h) à l'aide d'une loi de puissance :

$$Z = aR^b \quad \text{Eq. 10}$$

Avec typiquement, pour des pluies stratiformes  $a=200$  et  $b=1.6$ . Cette relation a été proposée pour la première fois dans l'article historique de Marshall et Palmer (1948) et fait débat depuis. Nous reviendrons sur cette relation dans la section suivante.

Il existe différents types de radar, essentiellement caractérisés par la longueur d'onde  $l_{rad}$  (cm) de leur signal. Le Tableau 1 présente les trois gammes de longueur d'onde utilisées en météorologie. Nous reviendrons plus en détail dans la suite sur les propriétés associées à chaque type de radar. On peut simplement citer ici une conséquence du choix de la longueur d'onde sur la taille des antennes radar. La largeur  $\theta$  du faisceau (en  $^\circ$ ) est reliée à la longueur d'onde, à l'efficacité de l'antenne  $e_a$  (typiquement de l'ordre de 0.8 ou moins) et à son diamètre  $d_a$  (en m) par la relation :

$$\theta = \frac{180}{\pi} \frac{l_{rad}}{e_a d_a} \quad \text{Eq. 11}$$

Ainsi, sachant que  $\theta$  vaut environ  $1^\circ$ , il apparaît que les radars en bande S ont des antennes d'environ 6-10m (imposant des installations de grandes dimensions générant des coûts importants), ceux à bande C de 3-5m et ceux en bande X de 1-2m. Par ailleurs plus la longueur d'onde est grande plus la portée (la distance maximale de capacité de détection et/ou mesure de la pluie) du radar est grande, et plus la résolution est mauvaise. Se référer au Tableau 1 pour des ordres de grandeur.

Ainsi le choix d'un type de radar s'apparente à un équilibre entre la dimension des installations, la portée et la résolution souhaitée. En Europe, les services météorologiques ont opté principalement pour des radars à bande C, à part dans certaines zones spécifiques comme le sud de la France où l'atténuation (voir paragraphe suivant pour plus de détails) liée aux fortes précipitations a incité à recourir à des radars en bande S. Ces radars sont organisés en réseau. La Figure 5 présente les réseaux français et britannique. Il est ainsi possible de générer des mosaïques radar qui sont des images composites issues de l'interpolation des mesures de l'ensemble des radars d'un réseau. Il est prévu dans le cadre du programme européen OPERA ([www.knmi.nl/opera/](http://www.knmi.nl/opera/)) d'aboutir à la diffusion opérationnelle d'une lame d'eau radar sur toute l'Europe.

Type de radar	Longueur d'onde $l_{rad}$ (cm)	Fréquence (GHz)	Portée (km)	Résolution spatiale (km)
Bande S	7.5 – 15	2 – 4	250 – 350	2-5
Bande C	3.75 – 7.5	4 – 8	150 – 250	1-2
Bande X	2.5 – 3.75	8 – 12	40 – 60	0.1

**Tableau 1 : Principales caractéristiques des différents types de radar météorologique.**

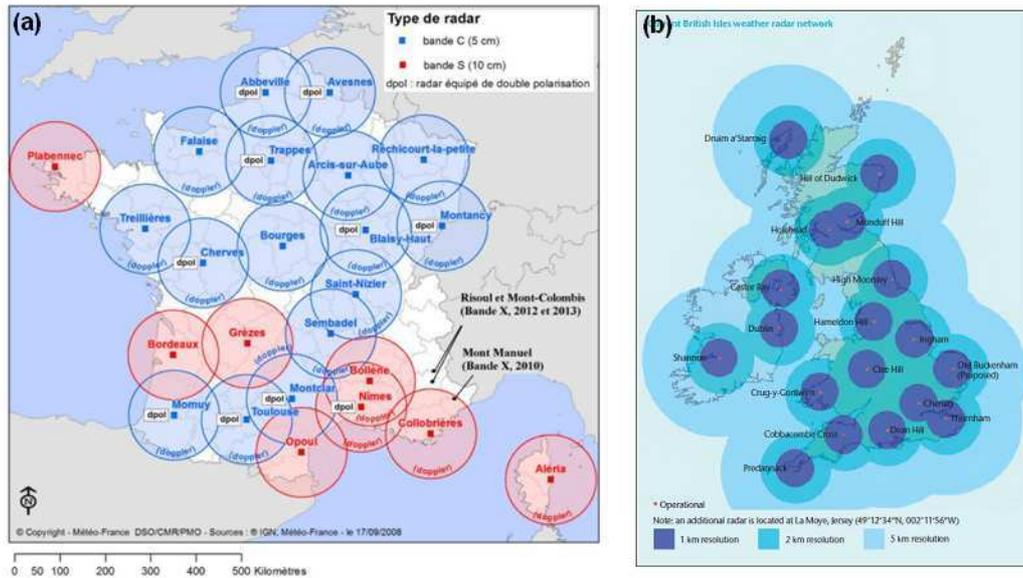


Figure 5 : Cartes des réseaux radar de Météo-France (a) et du Meteorological Office britannique (b)

### 2.1.2. Difficultés liées à la mesure radar du champ de précipitation

Le cadre simplifié (et un peu naïf !) de la mesure des précipitations tel que sommairement présenté dans la section précédente se heurte à un certain nombre de difficultés classiques que nous allons ici expliciter. Nous présenterons également quelques procédés pour surmonter ces difficultés, et les incertitudes qu'elles génèrent. Nous distinguerons les problèmes liés à l'estimation de la réflectivité et ceux liés aux passages à l'estimation de l'intensité pluvieuse qui est la grandeur pertinente pour les hydrologues. Enfin nous évoquerons brièvement les perspectives offertes par les radars à double polarisation et quelques problèmes de recherche à traiter.

En plus des problèmes de calibration du matériel, il apparait que l'estimation quantitative du champ de précipitation est perturbée par :

- Les échos fixes : ce sont des obstacles (immeubles, relief,...) derrière lesquels le radar ne peut pas voir. Ils sont facilement identifiables, et il n'est pas possible de les corriger. En revanche l'exploitation de radar en réseau permet de limiter leur impact.
- Non correspondance entre précipitation au sol et mesure en altitude : c'est le cas lorsque les gouttes s'évaporent au cours de leur chute entre le nuage où elles sont détectées et le sol. Du fait de l'inclinaison du faisceau radar et de la courbure de la Terre, le radar peut également être amené à « voir » au dessus des nuages qui génèrent les précipitations.

Le radariste doit également faire face à des problèmes associés à la propagation d'une onde électromagnétique dans l'atmosphère :

- Atténuation : l'onde électromagnétique est atténuée au cours de sa propagation (phénomène très prononcé pour les radars en bande X et beaucoup moins pour ceux en bande S). Malgré les corrections possibles qui dépendent de la réflectivité mesurée, ce phénomène reste une source d'incertitude sur la mesure et qui croit avec la distance au radar.

- Propagation anormale : du fait de gradients verticaux d'indices de réfraction de l'air, le faisceau radar ne se propage pas en ligne droite, mais avec une certaine courbure. Dans certaines conditions météorologiques (notamment en cas d'inversion des températures dans la basse couche de l'atmosphère), la trajectoire de l'onde peut-être suffisamment infléchie pour que l'écho radar vienne du sol et pas de l'atmosphère.

Du fait de l'évolution des caractéristiques des hydrométéores (nature, distribution de taille) au cours de leur chute, il existe également une variabilité « naturelle » de la réflectivité en fonction de l'altitude. Les deux exemples les plus marquants sont :

- Bande de brillance : dans les nuages à proximité de l'isotherme 0°C les flocons de neige entrent en fusion tout en conservant des diamètres importants, ce qui engendre une zone de réflectivité plus intense.
- Effet orographique : des petites précipitations d'altitude moyenne peuvent servir de noyau de condensation à des nuages de plus basse altitude qui vont générer des pluies intenses qui ne seront pas « vues » par le radar.

La mise en œuvre d'algorithmes reposant essentiellement sur l'utilisation de profils verticaux de réflectivité types permet d'atténuer ces difficultés (Andrieu and Creutin, 1995; Andrieu et al., 1995; Berne et al., 2004a; Vignal et al., 1999; Vignal et al., 2000). Ces techniques sont par ailleurs utilisées de façon opérationnelle par les services météorologiques dans la production de leur lame d'eau radar (Harrison et al., 2000; Tabary, 2007; Tabary et al., 2007).

Enfin, il convient de mentionner les difficultés liées au passage de la réflectivité qui constitue la grandeur mesurée par le radar, à l'intensité pluvieuse qui intéresse les hydrologues. Pour une discussion classique détaillée de ces questions, se référer à (Krajewski and Smith, 2002). La relation de Marshal-Palmer (Eq. 10) peut être obtenue théoriquement en moyennes d'ensembles à partir de la distribution des tailles de gouttes sous certaines hypothèses simplificatrices fortes dont l'homogénéité de cette dernière qu'ils avaient expérimentalement vérifiée. Cependant, Lovejoy and Schertzer (1990) en répétant leur expérience ont mis en valeur une distribution des gouttes avec une dimension fractale d'environ 1.8 et non 2. Cette mise en lumière de l'hétérogénéité de la distribution des gouttes a été raffinée par une analyse multifractale (Lilley et al., 2006) de l'expérience HYDROP (reconstitution de la taille et de la position des gouttes de pluie dans un volume d'environ 1m<sup>3</sup> à partir d'images stéréographiques, Desaulnier-Soucy et al., 2001) ou celle (Tchiguirinskaia et al., 2003) de séries obtenues à partir d'un spectromètre optique (Salles et al., 1998). Cette hétérogénéité multifractale peut conduire à des effets importants de rétrodiffusion cohérente (l'effet Speckle, Lovejoy et al., 1996; Schertzer et al., 2011), donc à des biais statistiques. Ces travaux montrent la nécessité d'associer un cadre théorique tenant compte de l'extrême variabilité du champ de précipitation même à petites échelles avec le développement d'outils de mesure, ce qui est rarement fait.

Ces considérations ne sont pas encore prises en compte au niveau opérationnel, où les paramètres  $a$  et  $b$  de la relation de Marshal-Palmer sont considérés comme dépendants du type de pluie observée. A titre d'illustration, le centre opérationnel radar américain recommande  $a=200$  et  $b=1.6$  pour des pluies stratiformes classiques (c'est la relation utilisée par Météo-France et le Met. Office),  $a=75$  et  $b=2$  pour des pluies stratiformes d'hiver de l'Ouest, et  $a=250$  et  $b=1.2$  pour des pluies tropicales convectives (NOAA, 2005). Plus généralement  $a$  et  $b$  varient dans les intervalles suivant :  $75 < a < 1000$  et  $1 < b < 2$ . Compte tenu de la relation en loi de puissance, ces différences ont un fort impact sur l'estimation du taux de pluie (Einfalt et al., 2004). Ces paramètres sont perçus comme susceptibles de varier spatialement et temporellement au cours d'un évènement pluvieux. Par exemple Delrieu et al. (2009a), proposent un algorithme où la nature plutôt convective ou stratiforme du pixel est évaluée par

les gradients verticaux et horizontaux de réflectivité et une relation  $Z-R$  adaptée est ensuite mise en œuvre.

Enfin il convient d'évoquer la généralisation opérationnelle progressive de l'utilisation de radar à double polarisation. Ces derniers émettent et reçoivent une onde électromagnétique polarisée verticalement ou horizontalement. Les gouttes d'eau étant aplaties dans leur chute en raison des frottements avec l'air, les propriétés mesurées dans les deux directions sont différentes. Ainsi, ce type de radar est capable de mesurer une réflectivité différentielle (entre les deux polarisations) et une différence de phase entre les deux polarisations. Les développements algorithmiques les plus récents s'appuient sur ces mesures (où des dérivées) qui permettent d'estimer en temps réel la distribution des tailles de gouttes et n'utilisent plus la loi de Marshall-Palmer comme hypothèse de base (Le Bouar et al., 2001; Tabary et al., 2011; Testud et al., 2000).

Pour finir mentionnons les difficultés inhérentes à la validation des données radar par absence de référence fiable pour l'estimation des lames d'eau. En effet les pluviomètres (WMO, 2008) ne mesurent pas les précipitations aux mêmes échelles. Ainsi il convient de poser la question du lien entre une mesure volumique (de l'ordre du  $\text{km}^3$  pour le radar) et quasi ponctuelle (de l'ordre de quelques centaines de  $\text{cm}^2$  pour les pluviomètres), notamment au niveau de la variabilité intrinsèque à petites échelles (sous-maille radar) de la pluie (Ciach and Krajewski, 1999; Jaffrain and Berne, 2012) ce qui est rarement fait.

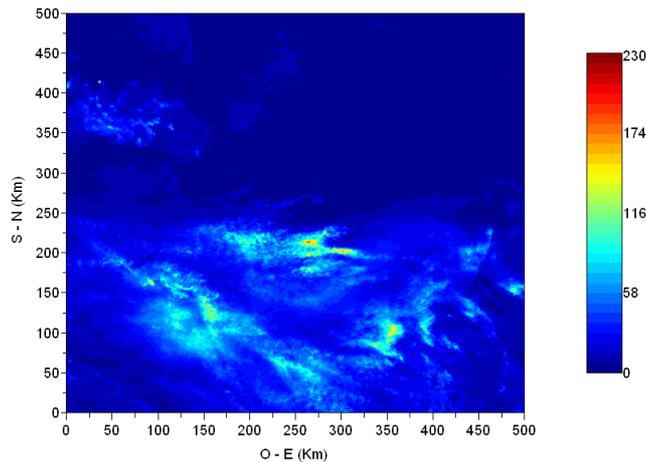
## **2.2. Présentation des données**

### **2.2.1. L'évènement cévenol du 5-9 septembre 2005**

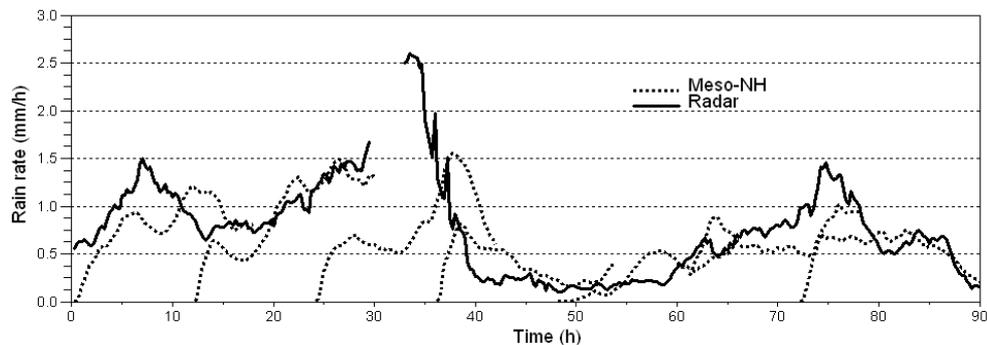
Le premier évènement traité dans cette thèse est un évènement cévenol (intense épisode pluvieux sur le sud-est de la France, au cours duquel plus de 150 mm d'eau sont tombés en moins de 12h) ayant eut lieu entre le 5 et le 9 septembre 2005. Deux types de données ont été analysés : des données radar et des sorties de simulation Méso-NH.

#### ***Données radar***

Le premier type de données pour cet évènement correspond à des données radar issues de la mosaïque radar de Météo-France (Parent-du-Châtelet et al., 2005). Cette dernière prend en compte des corrections des échos de sol, d'atténuation et de profils verticaux de réflectivité (Tabary, 2007; Tabary et al., 2007). Une relation classique du type  $Z = aR^b$ , avec  $a = 200$  et  $b = 1.6$  (pour  $Z$  en  $\text{mm}^6 \cdot \text{m}^{-3}$  et  $R$  en  $\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$ ) a été mise en œuvre pour passer de la réflectivité  $Z$  au taux de pluie  $R$ . Une zone de 512 km x 512 km pendant 5 jours a été extraite. La résolution des données est de 1 km en espace et 15 min en temps. Le cumul total de pluie pendant 16 h à partir du 5 septembre 2005 à 14h est en Figure 6. L'évolution temporelle de l'intensité moyenne de pluie est en Figure 7. Il y a 2 heures 30 de données manquantes au niveau du deuxième (et principal) pic de précipitations, après un peu plus de 30h.



**Figure 6 : Cumul de pluie (mm) via les images radar pendant 16h de l'évènement cévenol à partir du 5 septembre 2005 à 16h. Les coordonnées (en °, Réseau géodésique français 1993) des quatre coins sont 46.3-1.3, 41.5-1.3, 46.2-8.1 et 41.4-7.5.**



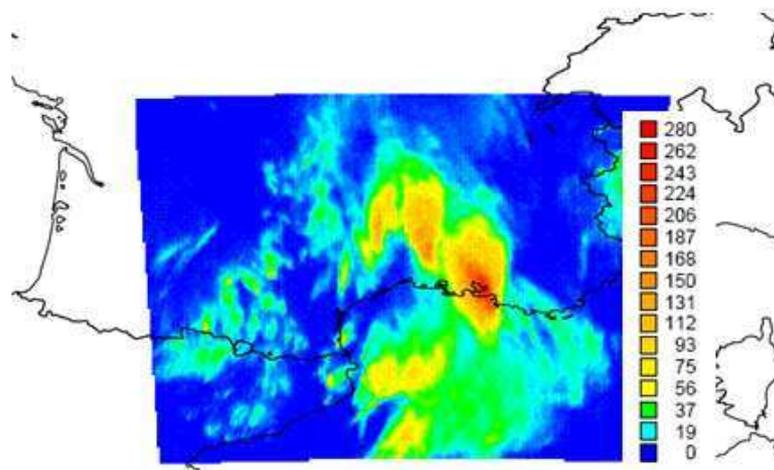
**Figure 7 : Evolution de l'intensité moyenne des précipitations sur la zone étudiée au cours de l'évènement étudié pour les deux types de données : simulation Mésos-NH (trait pontillé) et données radar (trait continu)**

### *Sorties de simulations Mésos-NH*

Le deuxième type de données analysé pour cet évènement correspond aux précipitations fournies par une simulation numérique effectuée à l'aide du modèle Mésos-NH, qui est un modèle de recherche développé conjointement par Météo-France et le Laboratoire d'Aérodynamique (Univ. P. Sabatier, Toulouse, France) (Lafore et al., 1998). Mésos-NH est un modèle méso-échelle ; il permet de traiter des évènements météorologiques à l'échelle mésoscopique, qui correspond à une échelle intermédiaire où les distances caractéristiques sont de l'ordre de quelques kilomètres à quelques centaines de kilomètres. C'est un modèle non-hydrostatique, c'est-à-dire que le terme vertical d'accélération n'est pas négligé dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. L'abandon de l'hypothèse hydrostatique permet notamment de résoudre la convection profonde. Cependant le modèle est anélastique, ce qui signifie que les ondes acoustiques sont filtrées. La résolution numérique est assurée par un schéma temporel de type leap-frog et un schéma d'advection eulérien. Le modèle a déjà été beaucoup utilisé dans le cadre de recherches à l'échelle mésoscopique (une liste des publications liées à Mésos-NH est disponible sur le site Internet du modèle : <http://mesonh.aero.obs-mip.fr/mesonh/>), et sa partie physique a été reprise dans le modèle AROME utilisé opérationnellement par Météo France. La grille utilisée fait 300 \*300 mailles dont la taille de chacune est de 0.0215° (soit environ 2.40 km) en latitude et de

0.0284° (soit environ 3.17 km) en longitude. Les conditions initiales, ainsi que les conditions aux limites, ont été obtenues à l'aide d'une simulation numérique effectuée avec le modèle Arpège (Météo-France) sur une grille de moins haute résolution, dans laquelle était emboîtée la grille utilisée par Méso-NH. Les données sont des précipitations cumulées sur des pas de temps d'échantillonnage de 15 minutes sur chaque pixel –alors que le pas de temps de calcul est de l'ordre de quelques secondes– obtenus à partir de sept simulations de 18 heures démarrant toutes les 12 heures

Le cumul sur 18h à partir du 6 septembre 00h00 est visible Figure 8. L'évolution du taux moyen de précipitation sur la zone étudiée est visible sur la Figure 7. L'absence de pluie au début de chaque simulation est due au fait qu'à l'initialisation des simulations les rapports de mélange des hydrométéores (glace, graupel, gouttelette, goutte, grêle, neige) sont tous nuls. L'humidité par contre n'est pas nulle, et va commencer à générer les hydrométéores assez rapidement (quelques pas de temps d'échantillonnage) si les conditions météorologiques l'imposent, mais il faut cependant un certain temps (quelques heures) pour arriver à des précipitations réalistes. Le manque de réalisme de cette mise en route nous a conduits à ne pas prendre en compte les deux premières heures de chaque simulation dans nos statistiques, i.e. les analyses sont menées sur les 16 dernières heures de chaque simulation. Même s'il y a des différences entre les courbes de Méso-NH et radar, notamment un facteur 1.5 au niveau du premier pic qui de plus n'intervient pas précisément au même instant, ces intensités moyennes présentent des évolutions relativement similaires.



**Figure 8 : Cumul de pluie (mm) via les sorties du modèle Méso-NH pendant 18h pour l'évènement cévenol, à partir du 6 septembre à 00h00.**

### ***2.2.2. Evènement du 9 février 2009 en région parisienne***

Le deuxième évènement pluvieux étudié dans cette thèse a eu lieu le 9 février 2009 en région parisienne. La Figure 10 représente la situation météorologique pendant cet épisode. Le front chaud actif « Z » traverse la France d'Ouest en Est et engendre des précipitations significatives sur son passage. Les données analysées viennent du radar à bande C de Trappes (Ouest de Paris, voir Figure 9), qui est exploité par Météo-France. Le traitement des données radar par Météo-France a été mentionné au paragraphe précédent, et nous n'y reviendrons pas ici. La résolution de ces données radar est de 1 km en espace et 5 min en temps. En Figure 11.a se trouve une image radar de réflectivité pour un pas de temps de 5 min. Une zone de 256

km centrée sur le radar a été analysée pendant 13h. En Figure 11.b se trouve le cumul de pluie pour l'évènement étudié.

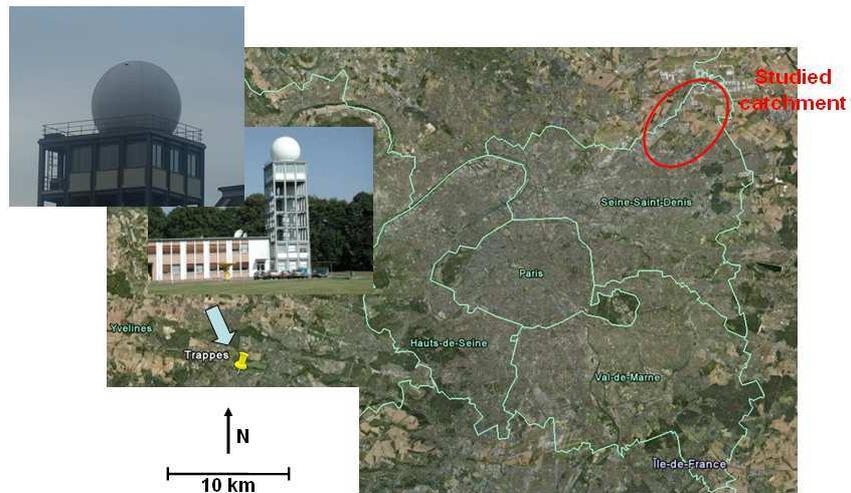


Figure 9 : Positionnement du radar à bande C de Trappes (Météo-France) en région parisienne.

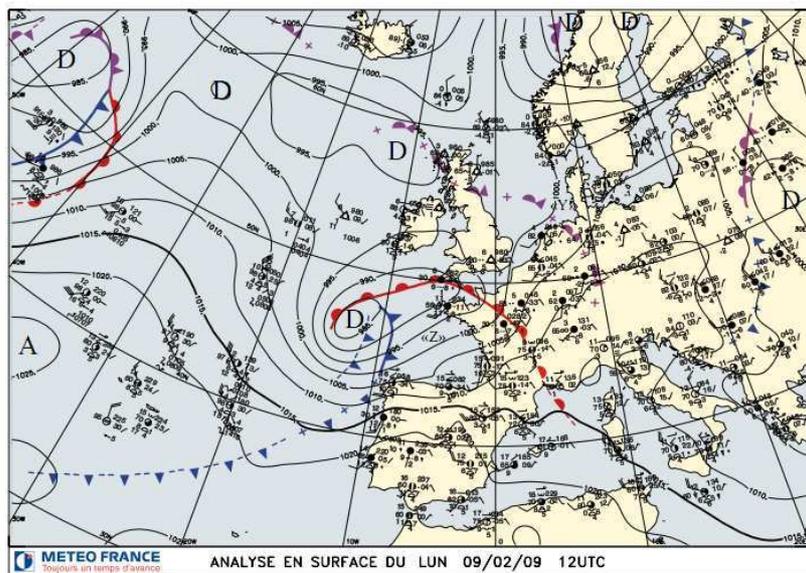
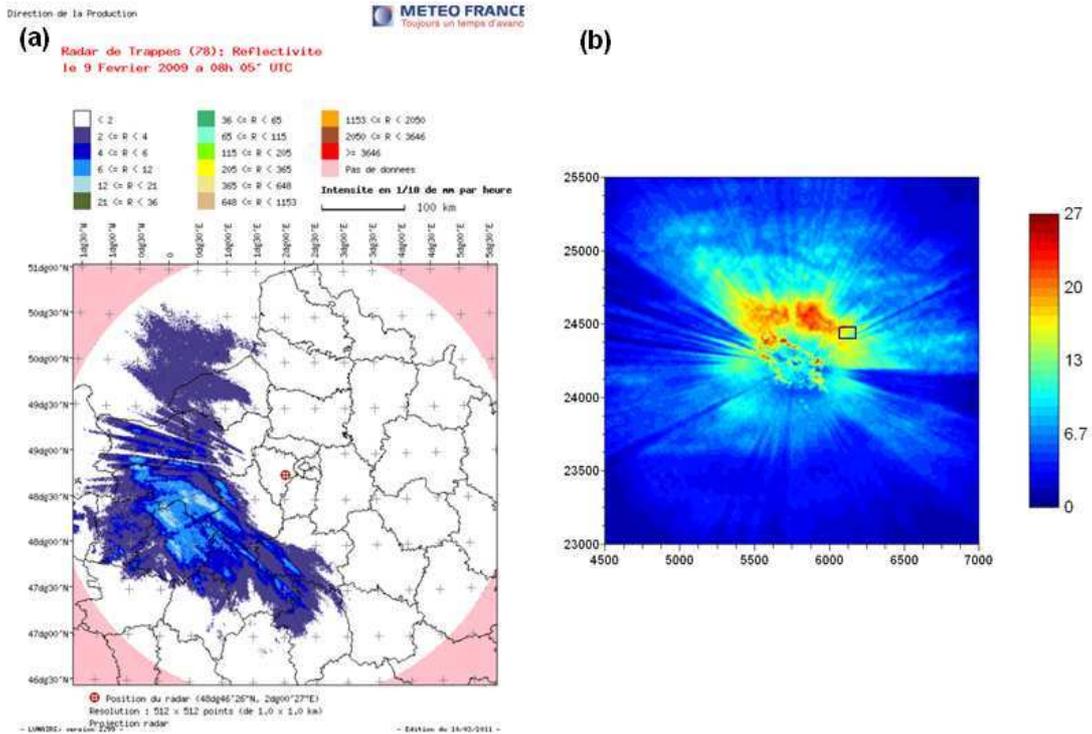


Figure 10 : Situation météorologique du 9 février 2009 (tirée du bulletin climatique quotidien émis par Météo-France, et disponible en libre accès sur le site internet meteo.fr)



**Figure 11 : (a) Image « instantanée » (en moyenne sur 5 min) de la réflectivité mesurée par le radar de Trappes. (b) Cumul de pluie en mm pendant l'ensemble de l'évènement étudié (les coordonnées en hm sont du Lambert II étendu)**

### 2.2.3. Les évènements de la région londonienne du 9 février 2009 et du 7 juillet 2009

Les deux derniers évènements étudiés dans cette thèse ont eu lieu le 9 février et le 7 juillet 2009 dans la région de Londres. Les données analysées sont extraites de la mosaïque radar Nimrod, un produit développé par le UK Meteorological Office à partir du réseau radar à bande C déployé au Royaume-Uni (Figure 5.b). La région de Londres est couverte par le radar de Chenies à l'Ouest et Thurnham à l'Est (Figure 12).

Dans le traitement Nimrod (Harrison et al., 2000), les données brutes sont corrigées à l'aide de profils verticaux de réflectivité idéaux prenant en compte l'altitude du niveau 0°C (estimée via un modèle méso-échelle du UK Met. Office) et la hauteur du sommet des nuages (estimée via l'imagerie infrarouge du satellite Meteosat et la mise en œuvre d'un modèle méso-échelle). Un ajustement avec des données horaires de pluviomètres est également réalisé. La résolution des données est de 1 km en espace et 5 min en temps. Une zone carrée de côté 64 km pendant 21 h est étudiée. Les cumuls pour chaque évènement sont présentés en Figure 13. Les zones d'étude sont légèrement différentes (un décalage vertical) pour les deux évènements car elles ont été sélectionnées de façon à capturer la portion la plus intense du champ de pluie. Des cellules pluvieuses très localisées sont visibles pour l'évènement du 7 juillet 2009. L'évolution temporelle du taux de pluie moyen pour les deux évènements est en Figure 14.

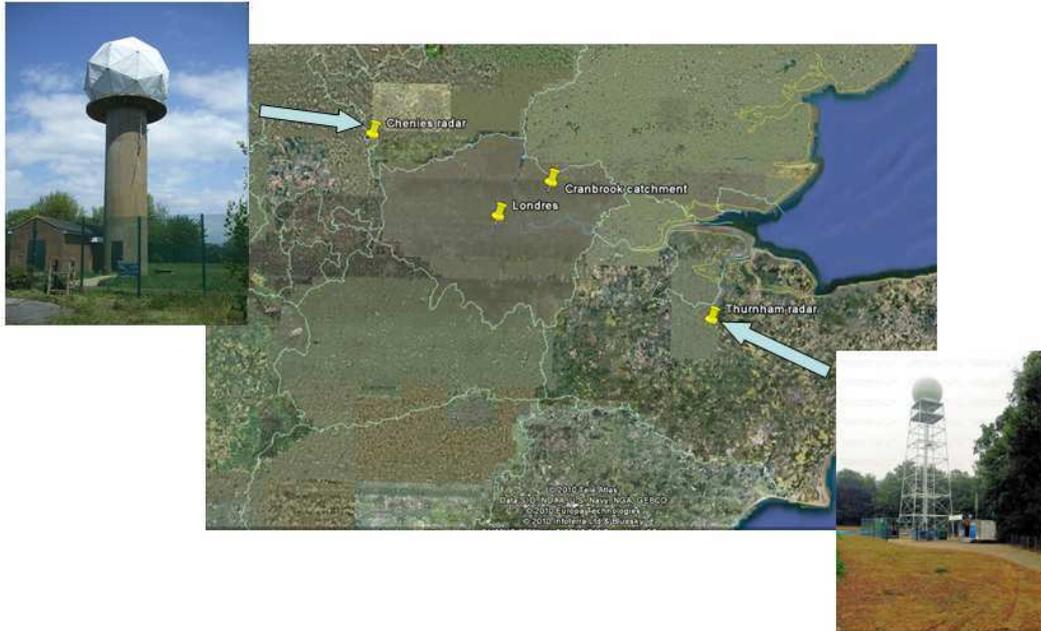


Figure 12 : Positionnement des radars à bande C du UK Meteorological Office qui couvrent la région de Londres.

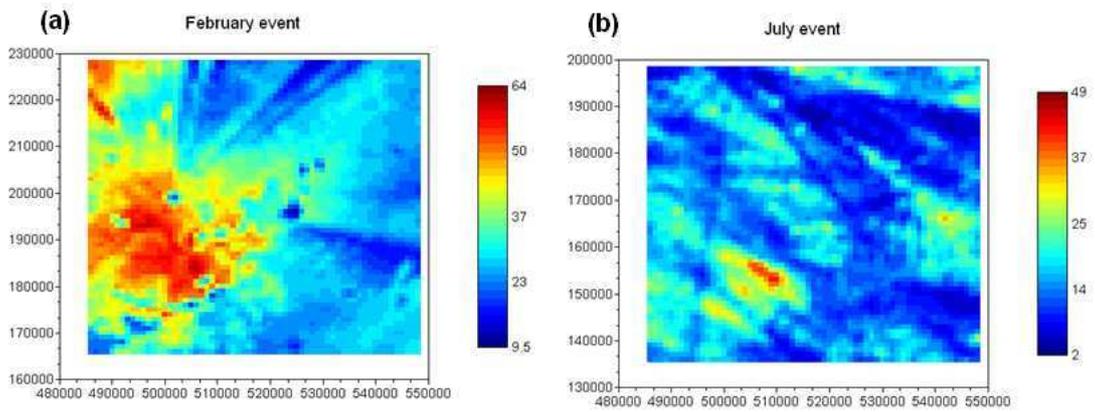


Figure 13 : Carte du cumul de pluie en mm pour les zones étudiées pour l'évènement de Février (a) et Juillet (b). Le système de coordonnées (en m) est British National Grid.

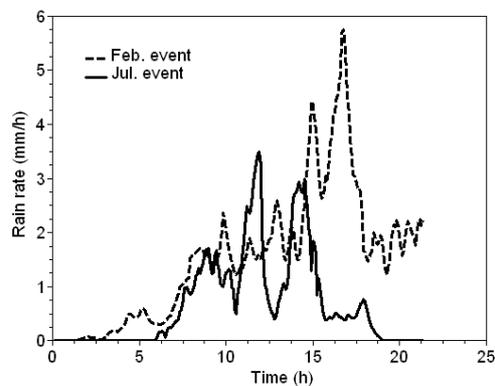


Figure 14 : Evolution temporelle du taux moyen de pluie sur les zones étudiées pour les évènements de Février et Juillet.

## 2.3. Comparaison multifractale

### 2.3.1. Analyse spatiale comparée des évènements

Dans cette partie, nous présentons des résultats d'analyses spatiales en moyenne d'ensemble, c'est-à-dire que la moyenne faite dans les équations 2 et 6 porte alors sur tous les échantillons (cartes 2D d'un pas de temps) qui sont dégradés indépendamment. Des résultats sur des analyses pas de temps par pas de temps sont dans (Gires et al., 2011c, annexe 2).

La Figure 15 présente le spectre moyen (Eq. 7) pour les données radar de l'évènement cévenol et de celui du 9 février 2009 en région parisienne. La présence d'une pente spectrale donne une première confirmation du comportement scalant de la pluie avec néanmoins une rupture dans ce dernier. Pour l'évènement cévenol (Figure 15.a) cette rupture aurait lieu entre les nombres d'onde 25 et 35, soit pour des distances comprises entre 14 et 20 km. Une pente spectrale est également visible pour l'évènement parisien, avec une rupture moins évidente (Figure 15.b). Nous en avons néanmoins considéré une pour un nombre d'onde  $k=16$  soit environ 16 km, par cohérence avec l'analyse multifractale présentée ci-dessous dans laquelle elle est clairement visible. Les pentes spectrales observées pour les différents évènements étudiés sont reportées Tableau 2. Il convient de noter que quel que soit l'évènement et la gamme d'échelles considérée, les pentes spectrales obtenues sont inférieures à la dimension du champ (égale à 2 dans cette analyse spatiale), ce qui signifie que la méthode DTM peut s'appliquer directement au champ de pluie. Dans le cas contraire, il aurait fallu faire une intégration fractionnaire du champ, ou bien analyser les fluctuations (module du gradient) de ce dernier (Nykanen, 2008).

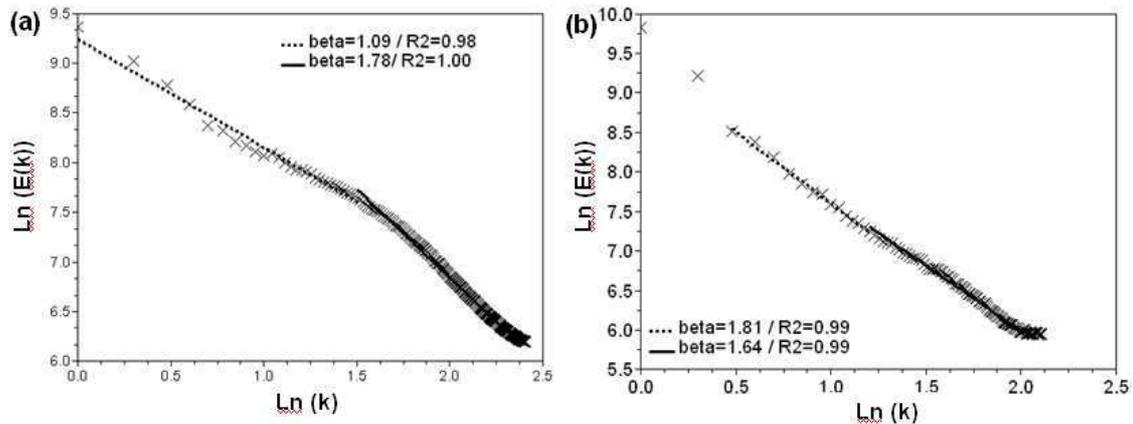


Figure 15 : Moyenne d'ensemble des spectres (Eq. 7) pour l'évènement cévenol (a) et celui de Paris du 9 février 2009 (b).

Evènement	Gamme d'échelles	$\alpha$	$C_1$	$H$	$\beta$
5-9 Sept, Sud-Est de la France	Petites échelles : 1 - 16 km	1.62	0.16	0.53	1.78
	Grandes échelle : 16 - 512km	0.89	0.45	0.34	1.09
9 février 2009 Région parisienne	Petites échelles : 1 - 16 km	1.52	0.056	0.37	1.64
	Grandes échelles : 16 - 256km	1.08	0.28	0.61	1.81
9 février 2009, Région Londonienne	1-64 km	1.62	0.14	0.56	1.87
7 juillet 2009, Région Londonienne	1-64 km	0.92	0.49	0.57	1.49

**Tableau 2 : Estimation des paramètres multifractals  $\alpha$ ,  $C_1$ ,  $H$  et  $\beta$  pour les différents évènements étudiés en analyse spatiale.**

Les moments statistiques en fonction de différentes résolutions (Eq. 2) sont tracés en Figure 16 pour l'évènement du 9 février 2009 à Paris, et celui du 7 juillet 2009 à Londres. La présence de droite (ou section de droite) reflète le comportement scalant du champ de pluie (sur une gamme d'échelles délimitée). Pour l'évènement parisien, il apparait distinctement une rupture (se traduisant par une cassure dans les pentes des droites) à environ 16 km. Cette « impression visuelle » est validée par l'analyse du coefficient de régression linéaire  $R^2$  qui vaut en moyenne (sur les différents moments tracés) 0.96 sur la gamme d'échelles 1-16 km et 0.97 sur la gamme 16-256 km, alors qu'il n'est que de 0.91 si aucune rupture n'est prise en compte. Une rupture est également retrouvée sur l'évènement cévenol aussi bien sur les données radar (à 16 km) que sur les simulations Méso-NH (à 20-25 km). Ce type de rupture à 16 km a été également observé sur d'autres évènements de la région parisienne (Tchiguirinskaia et al., 2011). La présence de cette rupture sur différents évènements et à la fois sur des données radar et des simulations Méso-NH à des échelles spatiales comparables semble montrer qu'il ne s'agit pas d'un artefact, mais qu'elle est probablement associée à un phénomène physique. Pour l'évènement cévenol, une explication de cette rupture à travers la topographie est a priori exclue, dans la mesure où une analyse multifracale menée sur les données de relief de la zone d'étude ne met pas en évidence de rupture, au moins entre 2-3 km et 150-200 km. L'échelle de la rupture de 16 km rappelle la notion de taille caractéristique des cellules pluvieuses fréquemment utilisée en météorologie classique. Pour l'évènement cévenol, une autre cause possible pourrait-être la durée d'échantillonnage de 15 min des données disponibles, ce qui est assez long par rapport à la résolution spatiale de l'ordre du kilomètre. Cette interprétation serait en accord avec le constat que le scaling est en moyenne légèrement meilleur (3%) pour les échelles supérieures à 20 km que pour les échelles plus petites. Il faut néanmoins prendre avec prudence cette interprétation car la rupture est également observée sur l'évènement parisien où le pas d'échantillonnage est plus faible. Nous verrons dans la section 3 que cette rupture est possiblement associée à une mauvaise prise en compte des zéros (i.e. des pixels ou pas de temps où aucune pluie n'est mesurée) de la pluie dans le cadre de ces multifractals. On peut d'ailleurs noter que ces explications ne sont pas contradictoires.

Concernant les évènements de la région de Londres, il n'apparait pas clairement de rupture. Par exemple, la courbe de scaling (Eq. 2) pour l'évènement de juillet est tracée en Figure 16.b. Les coefficients de régression linéaire  $R^2$  valent en moyenne 0.98 sans prise en compte de rupture sur toute la gamme d'échelle 1-64 km (cette moyenne est également de

0.98 pour l'évènement de février). Il faut néanmoins relativiser ce constat dans la mesure où la gamme d'échelles disponible de 1 à 64 km ne permet pas de mettre clairement en lumière la rupture observée sur les évènements français. On distingue d'ailleurs une légère courbure sur les courbes de scaling qui pourrait correspondre à une rupture. Il faudrait pour le confirmer disposer de données sur une plus large gamme d'échelles pour ces évènements.

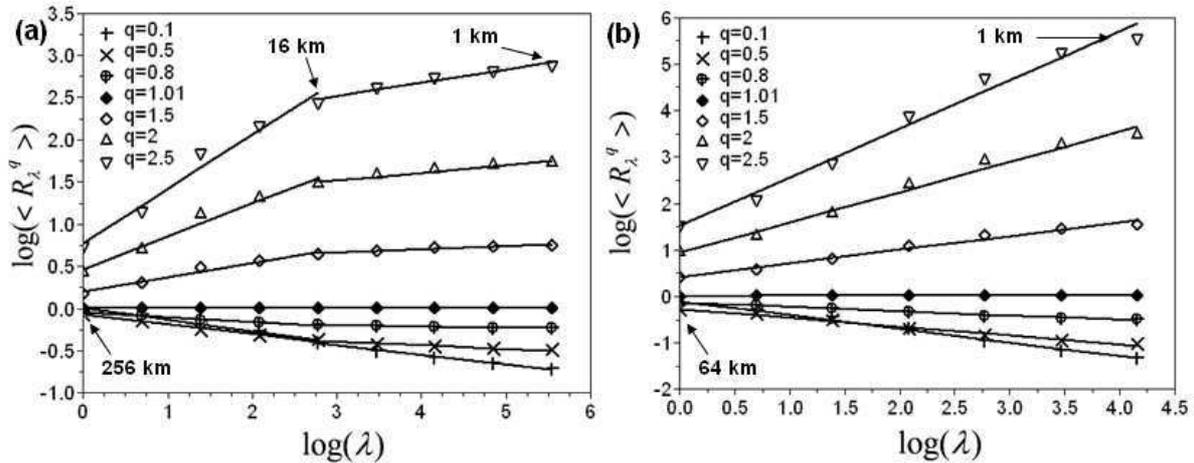


Figure 16 : Illustration de la courbe de comportement scalant (Eq. 1) pour l'évènement de Paris (a) et celui de Londres du 7 juillet 2009 (b).

Une illustration de l'estimation des paramètres multifractals pour l'évènement de Paris est en Figure 17.a. Les courbes de  $K(q)$  empiriques et ajustées avec les paramètres issus de l'analyse DTM sont en Figure 17.b. Cet ajustement est très bon, à part pour les petits moments, ce qui s'explique théoriquement par une transition de phase multifractale associée aux nombreux zéros présents dans le champ de pluie (voir partie 3 pour plus de détails). Les valeurs numériques des paramètres multifractals ainsi que les gammes d'échelles sur lesquelles elles ont été estimées sont dans le Tableau 2. De même que quasiment toutes les estimations disponibles dans la littérature, ces dernières ne tiennent pas compte d'un éventuel biais introduit par une mauvaise prise en compte des zéros de la pluie dans ce cadre multifractal qui affecterait tous les évènements étudiés (se référer la partie 3 pour une étude plus approfondie de cette question).

Concernant les petites échelles, il apparaît que les grandeurs estimées pour les 2 évènements français et celui du 9 février 2009 à Londres (où la gamme d'échelles est un peu plus large) sont comparables, à savoir  $\alpha \approx 1.5 - 1.7$ ,  $C_1 \approx 0.05 - 0.2$  et  $H \approx 0.3 - 0.6$ . Ces grandeurs sont similaires à celles trouvées par Tessier et al. (1993)  $\alpha=1.4$ ,  $C_1=0.12$  et  $H=0.32$  sur des réflectivités radar sur une gamme d'échelles de 75 m à 19 km. Verrier et al. (2010) ont trouvé sur la partie pluvieuse d'évènements de mousson africaine  $\alpha=1.8$ ,  $C_1=0.12$  et  $H=0.4$ . La similitude des paramètres malgré des situations météorologiques différentes tend à confirmer la robustesse du cadre théorique employé et met en lumière une possible universalité des paramètres multifractals pour les champs de pluie.

Il convient d'ajouter que ces valeurs de paramètres multifractals sont accord avec celles décrivant habituellement la turbulence (Lazarev et al., 1994; Schmitt et al., 1992), ce qui attesterait que la pluie se comporte comme un scalaire passif aux petites échelles. Concernant  $H$ , on trouve des valeurs positives, ce qui correspond à un champ non-conservatif, plus lisse, et plus corrélé. Une interprétation possible, qui est développée plus en détail dans la partie 3 est que la quantité conservée n'est pas le taux de pluie directement mais plutôt une quantité comme la teneur totale en eau dans l'atmosphère.

Mentionnons pour finir que de nombreux auteurs ont trouvé des  $H \neq 0$ . Par exemple de Montera et al. (2009) ont analysé des séries temporelles à hautes résolutions pour des événements français et ont trouvé un  $H$  d'environ 0.5. Tessier et al. (1993) ont analysé des séries temporelles journalières de 30 pluviomètres en France et trouvé  $H=-0.35$  pour les grandes échelles (16 – 4096 jours). Verrier et al. (2010) trouvent un  $H$  d'environ 0.4 sur une gamme d'échelle 1-64 km. Nykanen (2008) et Nykanen et Harris (2003) ont analysé des données radar de 5 événements pluvieux intenses des Rocheuses américaines. Les valeurs de  $H$ , estimées pour chaque pas de temps, variaient de 0.31 à 0.61.

On observe pour les grandes échelles un  $\alpha$  plus petit et un  $C_1$  plus grand. On trouve même pour l'évènement cévenol un  $\alpha < 1$ , ce qui reflète un changement statistique significatif par rapport aux petites échelles. En effet  $\alpha > 1$  évoque le comportement non-classique « self-organised critical » (Bak et al., 1988) qui correspond au fait que les probabilités des extrêmes sont en loi de puissance, alors que ce comportement est plus difficile à obtenir pour  $\alpha < 1$ . Cette différence profonde de comportement entre les gammes d'échelles implique que les statistiques à petites échelles ne peuvent pas toujours être déduites des statistiques obtenues à grandes échelles. Il convient de noter que les paramètres à grandes échelles se rapprochent des grandeurs classiquement trouvées en analyse temporelle de séries basse résolution (habituellement journalière) issues de pluviomètres, à savoir  $\alpha \approx 0.5 - 0.7$  et  $C_1 \approx 0.3 - 0.5$  (de Lima and de Lima, 2009; de Lima and Grasman, 1999; Fraedrich and Larnder, 1993; Ladoy et al., 1993; Olsson, 1995; Tessier et al., 1996).

Reste à évoquer les paramètres trouvés pour l'évènement de juillet 2009 dans la région de Londres. On trouve un  $\alpha=0.92$  et un  $C_1=0.49$ , ce qui est très différent des autres événements. Comme c'est visible sur la Figure 13, cet événement apparaît comme caractérisé par des cellules pluvieuses de petites tailles (quelques kms). Une possible interprétation des différences sur les paramètres serait que cet événement apparaît à l'échelle 1-64 km comme un « modèle réduit » des autres événements à l'échelle 16-256 km. Ainsi les paramètres à petites échelles pour ce dernier sont comparables à ceux à grandes échelles pour les autres. D'ailleurs, les paramètres estimés simplement sur la gamme d'échelle 1-4 km (ce qui comme nous l'avons vu précédemment n'est pas pertinent au vu des données disponibles) sont  $\alpha=1.16$  et  $C_1=0.28$ , ce qui se rapproche des grandeurs à petites échelles des autres événements. Pour confirmer cette interprétation, il faudrait disposer de données à plus hautes résolutions, et également mettre en œuvre des analyses multifractales sur d'autres événements.

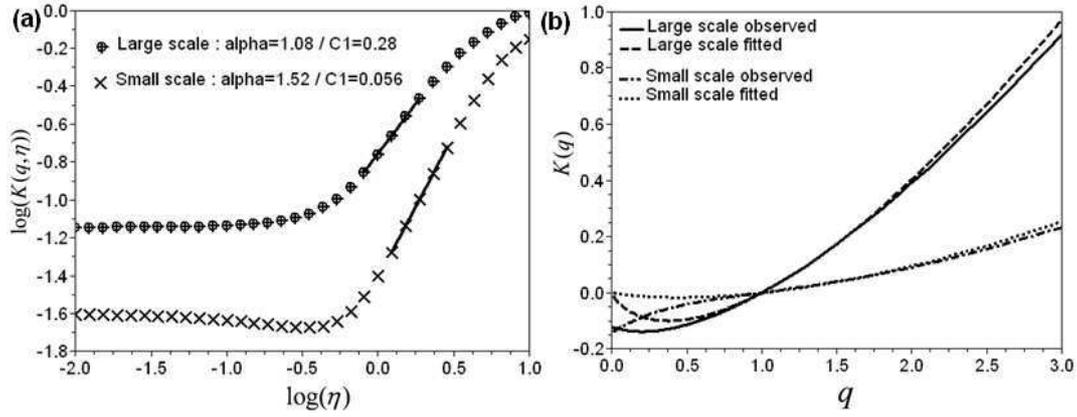


Figure 17 : Pour l'évènement de Paris du 9 février 2009: (a) Courbe de détermination de  $\alpha$  et  $C_1$  par la méthode DTM (Eq. 6). (b) Fonction des moments d'échelle empirique et théorique (à partir des estimations de  $\alpha$  et  $C_1$  obtenue par la méthode DTM).

### 2.3.2. Analyse spatio-temporelle

Nous avons jusqu'à maintenant réalisé des analyses spatiales, c'est-à-dire que la carte 2D de chaque pas de temps est considérée comme un échantillon indépendant et dégradé indépendamment dans les équations 2 et 6 (cf. Figure 18.a pour une illustration). Il est également possible de faire des analyses temporelles, où l'échantillon pris en compte n'est pas une carte 2D, mais la série temporelle d'un pixel (cf. Figure 18.b). Afin de relier les statistiques issues des analyses spatiales et temporelles, nous nous plaçons dans le cadre d'un modèle spatio-temporel unifié et scalant. Le plus simple pour la pluie (Biaou et al., 2003; Deidda, 2000; Macor, 2007; Marsan et al., 1996; Radkevich et al., 2008) se base sur l'hypothèse d'un exposant d'anisotropie entre l'espace et le temps, ce qui correspond à une invariance généralisée d'échelles linéaire (mais non plus isotrope). Ainsi, ils suggèrent que les fonctions d'échelle des moments spatiale et temporelle devraient être proportionnelles, c'est-à-dire

$$K_{espace}(q) = \frac{K_{temps}(q)}{1 - H_t} \quad \text{Eq. 12}$$

Où  $H_t$  est l'exposant d'anisotropie entre l'espace et le temps. Ceci implique des  $\alpha$  identiques et des  $C_1$  et  $H$  présentant le même rapport.

$$\frac{C_{1,espace}}{C_{1,temps}} = \frac{H_{espace}}{H_{temps}} = \frac{1}{1 - H_t} \quad \text{Eq. 13}$$

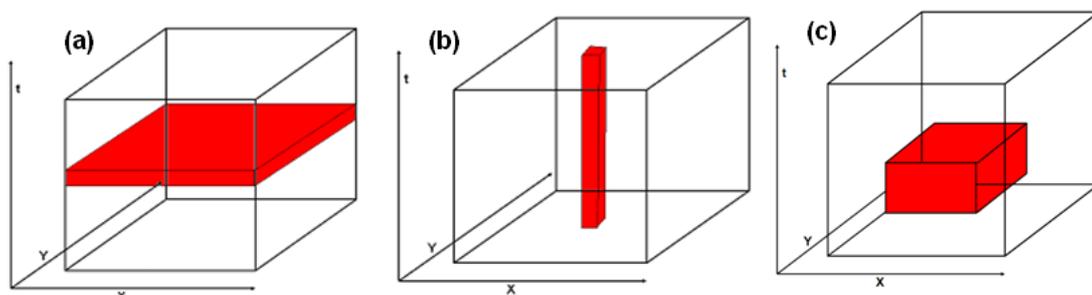
Les estimations des paramètres multifractals pour les grandes échelles de l'évènement cévenol et pour les données mosaïque radar et les simulations Méso-NH sont reportées dans le Tableau 3. Nous n'évoquons pas ici les petites échelles puisque les estimations de paramètres pour ces dernières en analyse temporelle ne sont pas très fiables dans la mesure où la gamme considérée est trop réduite (15min – 1h). Quelques commentaires peuvent néanmoins être trouvés dans (Gires et al., 2011c, annexe 2). Le premier résultat est que les estimations des paramètres multifractals trouvées dans les analyses temporelles et spatiales aux grandes échelles sont globalement en accord avec ce cadre théorique, notamment pour les données radar. En effet, pour ces dernières le rapport  $C_{1,espace}/C_{1,temps}$  obtenu correspond à un exposant d'anisotropie égale à 0.22, tandis que le rapport  $H_{espace}/H_{temps}$  mène à un  $H_t$  de

0.38. Ces grandeurs sont comparables entre elles et compatibles avec la valeur de  $1/3$  qui correspondrait à la théorie de Kolmogorov (Kolmogorov, 1962; Marsan et al., 1996). Pour les données Méso-NH, le rapport entre les  $C_1$  mène à un  $H_t$  de 0.30, ce qui est en accord avec ce cadre théorique. En revanche le rapport des  $H$  ne permet pas de rentrer dans ce dernier puisqu'il donne un  $H_t$  de -0.01. Ainsi, on obtient pour les grandes échelles un bon accord des données radar avec le modèle spatio-temporel unifié, mais ce n'est pas le cas pour l'ensemble des paramètres des simulations Méso-NH.

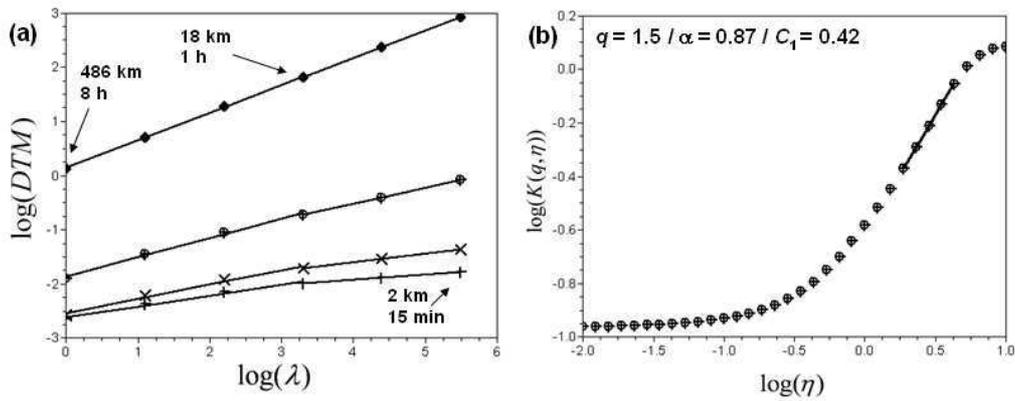
Afin de confirmer ces résultats, des analyses spatio-temporelles ont été faites. Dans ces dernières, les dimensions spatiales et temporelles sont prises en compte simultanément (cf. Figure 18.c). Nous avons considéré une isotropie parfaite entre les deux directions d'espace, et un exposant d'anisotropie espace-temps égal à  $1/3$  (qui correspondrait à la théorie de Kolmogorov, et qui a été à peu près retrouvé dans les analyses spatiale et temporelle des données). Ainsi lors de la dégradation du champ dans la mise en œuvre de l'analyse multifractale (TM et DTM), lorsque les dimensions d'espace sont divisées par  $\lambda_1$ , la dimension temporelle, est divisée par  $\lambda_1^{-1/3}$ . Ici nous avons choisi  $\lambda$  égal à 3, si bien que la dimension temporelle est divisée par 2 ( $3^{2/3} \approx 2.08$ ) (Biaou et al., 2003). Pour les données Méso-NH, nous avons considéré des échantillons de  $3^5 * 3^5 * 2^5 = 243 * 243 * 32$  pixels. Pour les données radar, nous nous sommes ramenés à des échantillons de cette taille en dégradant préalablement les deux dimensions d'espace d'un facteur 2. Nous avons travaillé en moyenne d'ensemble avec les échantillons disponibles pour les deux types de données.

La courbe obtenue dans l'analyse DTM (Eq. 6 dans un graphique en log-log) qui permet de vérifier le comportement scalant du champ, est présentée Figure 19 pour les données radar. Une rupture a été prise en compte pour  $\lambda = 27$ , ce qui correspond à environ 20 km en espace et 4 h en temps. Cette rupture du comportement scalant est équivalente à celle déjà observée dans les analyses spatiales et temporelles. On retrouve la même rupture pour les données Méso-NH.

Les courbes de détermination de  $\alpha$  et  $C_1$  pour les grandes échelles sont en Figure 19.b pour les données radar. Les estimations des paramètres multifractals pour les deux types de données en grandes échelles sont présentées Tableau 3. En ce qui concerne les données radar, pour les grandes échelles, nous retrouvons les mêmes valeurs des paramètres que dans l'analyse spatiale, ce qui est parfaitement cohérent avec le modèle spatio-temporel unifié précédemment évoqué. Pour les données Méso-NH, la courbe de détermination de  $\alpha$  est nettement moins lisse que pour les données radar et perd même sa convexité, ce qui entraîne des estimations des paramètres moins fiables. On obtient un  $\alpha$  plus grand que dans l'analyse spatiale, et un  $C_1$  nettement plus petit, compris entre celui de l'analyse spatiale et de l'analyse temporelle.



**Figure 18 : Illustration des échantillons indépendants considérés dans des analyses spatiales (a), temporelles (b) et spatio-temporelles (c).**



**Figure 19 :** Pour les données radar de l'évènement cévenol, méthode DTM en analyse spatio-temporelle : (a) Eq 5 ( $R^2$  est égale à 0.99 en moyenne pour les grandes échelles et 0.06 pour les petites) ; (b) Courbes de détermination de  $\alpha$  et  $C_1$  (eq. 5)

Type d'analyse	Données radar				Simulation Més0-NH			
	Gamme d'échelles	$\alpha$	$C_1$	$H$	Gamme d'échelles	$\alpha$	$C_1$	$H$
Analyse spatiale	16 – 512 km	0.89	0.45	0.34	22 – 720 km	0.54	0.71	0.36
Analyse temporelle	1 – 16 h	0.82	0.35	0.21	1 – 16 h	0.54	0.50	0.37
Analyse spatio-temporelle	20 km - 486 km 1 h – 8 h	0.87	0.42	-	28 km - 680 km 1 h – 8 h	0.68	0.47	-

**Tableau 3 :** Estimation des paramètres multifractals  $\alpha$ ,  $C_1$  et  $H$  pour l'évènement du 5-9 Septembre 2005 dans le sud de la France (données radar et les simulations Més0-NH)

Pour finir, mentionnons que ce type d'analyse a également été menée pour les deux évènements londoniens. Les estimations des paramètres multifractals sont reportées Tableau 4. Pour l'évènement de février, les  $\alpha$  spatial et temporel sont très proches et le rapport des  $C_1$  correspond à un  $H_t$  sous-jacent de 0.28, ce qui est proche de la valeur théorique de 1/3. En revanche, le rapport des  $H$  conduit à un  $H_t$  de 0.62, ce qui n'est pas très bon. Il convient de noter que les estimations de  $H$  sont moins fiables que celles d' $\alpha$  et  $C_1$ , en raison des difficultés d'estimations des pentes spectrales. Les données restent néanmoins en accord avec ce cadre théorique spatio-temporel sur cet évènement. Concernant l'évènement du 7 juillet le rapport des  $C_1$  donne un  $H_t$  de 0.02 et un celui des  $H$  un  $H_t$  de 0.82. Sur cet évènement, le cadre spatio-temporel, sans être totalement exclu n'est pas explicitement validé.

Type d'analyse Gamme d'échelle	Evènements	$\alpha$	$C_1$	$H$
Analyse spatiale 1 – 64 km	9 février 2009	1.62	0.14	0.56
	7 juillet 2009	0.92	0.49	0.57
Analyse temporelle 5 min – 11 h	9 février 2009	1.52	0.10	0.21
	7 juillet 2009	0.72	0.48	0.10

**Tableau 4 : Estimation des paramètres multifractals  $\alpha$ ,  $C_1$  et  $H$  pour les deux évènements londoniens et pour les différents types d'analyse.**

## **2.4. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons procédé à une analyse multifractale de la variabilité spatio-temporelle de la pluie. Dans le cadre des multifractals universels utilisés, cette variabilité est quantifiée à l'aide de simplement trois paramètres caractérisant les lois d'échelles reliant les statistiques du champ de pluie à différentes résolutions.

Nous avons comparé les résultats obtenus sur les données radar de quatre évènements pluvieux : un évènement cévenol qui a eu lieu sur la partie Sud - Est de la France du 5 au 9 septembre 2005, un évènement dans la région parisienne le 9 février 2009, et les évènements du 9 février et 7 juillet 2009 aux alentours de Londres. Nous disposons par ailleurs des sorties du modèle météorologique méso-échelle non hydrostatique Méso-NH pour l'évènement cévenol.

Il ressort de l'analyse des données radar des conclusions qui constituent une étape importante en vue de la validation des descentes d'échelles spatio-temporelles et des simulations multifractales des champs de pluie :

- Le caractère scalant du champ de précipitation est confirmé, avec néanmoins une rupture, observée pour la plupart des évènements dans l'analyse spatiale à une échelle d'environ 20 km. Une explication possible, associée à une mauvaise prise en compte des zéros de la pluie dans ce cadre multifractal, sera présentée dans le chapitre suivant.

- La comparaison des estimations des paramètres multifractals obtenues dans les analyses spatiales et temporelles est globalement en accord avec les prédictions du modèle de précipitation spatio-temporel unifié et scalant le plus simple, qui repose sur un exposant d'anisotropie entre les dimensions spatiales et temporelles. Ce résultat est confirmé par l'analyse spatio-temporelle directe du champ de pluie.

- Ces résultats laissent entrevoir la possibilité d'une certaine universalité des paramètres multifractals pour les champs de précipitation, à savoir  $\alpha \approx 1.5 - 1.7$ ,  $C_1 \approx 0.05 - 0.2$  et  $H \approx 0.3 - 0.6$ .

En ce qui concerne les simulations Méso-NH, il apparaît que le champ de précipitation simulé présente des caractéristiques qualitatives similaires, à savoir une rupture de comportement à environ 20-25 km et un accord (moins bon que pour les données radar, particulièrement au niveau du degré de non conservation du champ) avec le cadre spatio-temporel unifié. En revanche, les estimations numériques des paramètres multifractals présentent des différences non négligeables avec celles obtenues sur les données radar : la variabilité multifractale de la pluie est sous-représentée par le modèle Méso-NH, tandis que l'intermittence moyenne est sur-représentée.

### **3. Amélioration de la prise en compte des zéros de la pluie dans le cadre des multifractals universels**

“I think about that a lot these days – the idea of destiny as nothing more than a random dispatch of particles which brings you to places you never imagined finding yourself. Just as I also understand that uncertainty governs every moment of human existence. And when it comes to thinking that life works according to linear principles...”

*Leaving the world, Douglas Kennedy*

#### **3.1. Positionnement du problème**

Dans le premier volet de cette thèse nous avons utilisé un modèle spatio-temporel scalant de précipitations permettant de rendre compte de la variabilité à travers une grande gamme d'échelles et d'intensités. Dans cette partie, nous nous intéressons à un aspect de l'intermittence : la succession de périodes humides et sèches. Il convient de mentionner que l'effet des zéros de la pluie (i.e. un pixel ou un pas de temps où aucune pluie n'a été enregistrée) est de plus en plus visible avec les grandes résolutions par rapport aux petites. Par exemple en France une longue série temporelle (plusieurs années) à haute résolution (5 min) contient typiquement 96-98% de zéros (Hoang, 2011). La nature de ces zéros est particulièrement épineuse puisque certains sont réels et d'autres sont simplement associés à la limite de détection de l'appareil de mesure. Par exemple pour les pluviomètres à auget les plus classiques, trois problèmes affectent la mesure des précipitations de faibles intensités : (a) la nécessité de mouiller les surfaces de l'entonnoir et des augets après une période de temps sec, (b) les pertes par évaporation qui ne sont pas négligeables car les surfaces exposées à l'eau sont grandes par rapport au volume en jeu, et (c) la nature discontinue des mesures (WMO, 2008). Ainsi, une limite de détection typique est de 0.2 mm/h ce qui correspond habituellement à un basculement d'auget en une heure. C'est aussi la limite de détection classiquement considérée pour les radars. Cette dernière n'a pas vraiment diminuée avec les radars à double polarisation puisque les algorithmes mis en œuvre pour exploiter les informations de réflectivité verticale et horizontale ne fonctionnent pas pour des intensités pluvieuses inférieures à 1.5 mm/h (Testud et al., 2000). Pour bien montrer l'importance de ce seuil de détection, mentionnons par exemple que 0.2 mm/h correspond à environ 2-3 fois la pluie moyenne à Paris (environ 650 mm par an).

La façon de prendre en compte ces nombreux zéros des champs de précipitation dans un cadre multifractal fait l'objet de discussions depuis près de 20 ans. Par exemple, à la fin des années 80 il y a eu un débat théorique sur la nécessité (Keddem and Chiu, 1987) ou non (Lovejoy and Schertzer, 1989) de considérer les zéros séparément des autres valeurs. Depuis, de nombreux auteurs ont préconisé des méthodes souvent contradictoires les unes avec les autres. Commençons par évoquer le problème de la modélisation et de la simulation de ces zéros. Certains suggèrent que le champ de précipitation résulte de la multiplication d'un champ multifractal par un champ binaire indépendant représentant le support de la pluie. Différents modèles de support de pluie ont été publiés : une cascade aléatoire de type  $\beta$ -modèle discret (Over and Gupta, 1996) ou continu (Schmitt et al., 1998), ou un processus de renouvellement à deux états (qui représentent les périodes sèches ou humides) appliqué à la résolution maximale (Schmitt et al., 1998). Quelles que soient les précautions oratoires prises,

l'indépendance de ces deux champs est en fait considérée, et cela pose une question théorique évidente. Olsson (1998) introduit les zéros au sein du processus de cascade en affectant explicitement une probabilité non nulle aux zéros à chaque étape du processus. Contrairement aux modèles précédemment mentionnés, cette probabilité dépend des caractéristiques du champ de précipitations simulé. Plus précisément elle est modulée en fonction de l'intensité du pas de temps (c'est un modèle 1D de série temporelle) et de son positionnement dans la séquence d'alternance entre pas de temps secs et humides. D'autres auteurs (de Montera et al., 2009; Lovejoy et al., 2008) pensent au contraire qu'un simple seuil mis en œuvre à la résolution maximale permet de reproduire les propriétés observées. Certains auteurs font état qu'un seuil génère une rupture dans le comportement scalant (de Montera et al., 2009; Larnder, 1995). Il y a un accord assez général sur le fait que l'estimation des paramètres multifractals est très sensible au nombreux zéros (qu'ils soient réels ou artificiels). Ils introduisent un biais qui mène à une sous-estimation de  $\alpha$  et une surestimation de  $C_1$ . Ces paramètres étant utilisés pour quantifier les extrêmes, ceci peut avoir des conséquences sévères. En revanche il n'y a pas d'accord sur la façon de résoudre ce biais dans l'estimation et différentes techniques sont disponibles dans la littérature : ne prendre en compte que la pluie tombée sur le support fractal de cette dernière (Schmitt et al., 1998), ne faire que des analyses événementielles pour limiter le nombre de zéros (de Montera et al., 2009; Verrier et al., 2010), une forme de méthode itérative s'appuyant sur une première estimation des paramètres et des simulations multifractales (Lovejoy et al., 2008).

Cette partie du manuscrit repose sur 2 articles Gires et al. (2012c, annexe 4) et Gires et al. (2012e, annexe 9). Nous exposons ici les principaux résultats et l'articulation entre les deux articles et renvoyons aux annexes 4 et 9 pour plus de détails le lecteur intéressé. Dans le premier article (Gires et al., 2012c, annexe 4), nous nous intéressons plus particulièrement à l'effet d'un seuil sur un champ multifractal conservatif. Dans le deuxième (Gires et al., 2012e, annexe 9) nous suggérons un « toy model » dans lequel les zéros sont introduits directement au sein du processus de cascade.

## **3.2.Effet d'un seuil sur un champ multifractal conservatif**

### **3.2.1. Cadre théorique**

Soit un champ multifractal  $R_\lambda$  conservatif ( $H=0$ ) satisfaisant les équations 2 à 5, auquel un seuil  $T = \Lambda^{\gamma_{\min}}$  (où  $\gamma_{\min}$  est la singularité associée au seuil) est appliqué à la résolution maximale  $\Lambda$ . Toutes les valeurs inférieures à  $T$  sont artificiellement mise à zéro, ce qui revient à mettre les singularités  $\gamma \leq \gamma_{\min}$  à  $-\infty$ . La fonction de codimension devient alors bornée inférieurement par  $c_{\min} > 0$ , défini par  $\gamma_{\min}$  and  $c_{\min}$ , au moins à la résolution  $\Lambda$ . En utilisant l'équation 5, on obtient (en écrivant  $c(\gamma_{\min}) = c_{\min}$ ):

$$\gamma_{\min} = \frac{C_1 \alpha}{\alpha - 1} \left( \frac{c_{\min}}{C_1} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - \frac{C_1}{\alpha - 1} \quad \text{Eq. 14}$$

En raison de la transformée de Legendre, il y a un moment d'ordre statistique critique correspondant:

$$q_{\min} = c'(\gamma_{\min}) = \left( \frac{c_{\min}}{C_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{Eq. 15}$$

en dessous duquel la fonction des moments d'échelle  $K(q)$  devient linéaire :

$$K(q) = q\gamma_{\min} - c_{\min} \quad \text{Eq. 16}$$

Cette propriété peut être utilisée pour estimer  $\gamma_{\min}$  et  $c_{\min}$  à partir d'une régression linéaire de  $K(q)$  pour les petites valeurs de  $q$ . Comme remarqué par certains auteurs (de Lima and Grasman, 1999; Gires et al., 2011c, annexe 2; Hittinger, 2007; Schertzer and Lovejoy, 1992; Schmitt et al., 1998), ce comportement des champs multifractals seuillés est typique d'une transition de phase multifractal (Schertzer and Lovejoy, 1992; Schertzer et al., 1997). Plus précisément cela correspond à une transition d'ordre 2 analogue à celle définissant un singularité maximale observable pour les échantillons finis (Douglas and Barros, 2003; Hubert et al., 1993; Lovejoy and Schertzer, 2007; Schertzer and Lovejoy, 1989). En effet avec un nombre limité d'échantillon, les singularités plus grandes que  $\gamma_s$  (singularité maximum observable) ne seront pas observées et les statistiques pour les moments d'ordre  $q$  supérieur à  $q_s$  (le moment maximum observable correspondant) ne seront pas fiables. Plus précisément, cet « effet d'échantillonnage » conduit à  $c(\gamma) = +\infty$  pour  $\gamma > \gamma_s$ , avec  $c(\gamma_s) = d + d_s$  ( $d_s$  est la dimension d'échantillonnage,  $\Lambda^{d_s}$  étant égal au nombre d'échantillon). En conséquence pour  $q > q_s = c'(\gamma_s)$ :

$$K(q) = q\gamma_s - c(\gamma_s) \quad \text{Eq. 17}$$

La linéarité de  $K(q)$  pour les petits et grands moments à de fortes conséquences sur la technique DTM (Eq. 6) utilisée pour estimer les paramètres  $C_1$  et  $\alpha$ . En effet, en injectant les expressions linéaires pour  $K(q)$  (Eq. 16 et 17) dans l'équation 6 on montre que  $K(q, \eta)$  atteint un plateau pour  $\eta$  petit ( $\eta \leq \eta_-(q)$ ) et  $\eta$  grand ( $\eta \geq \eta_+(q)$ ):

$$- K(q, \eta) = (q-1)c_{\min}, \text{ for } \eta \leq \eta_-(q) = (c_{\min} / C_1)^{1/\alpha} \quad \text{Eq. 18a}$$

$$- K(q, \eta) = (q-1)(d + d_s), \text{ for } \eta \geq \eta_+(q) = ((d + d_s) / C_1)^{1/\alpha} \quad \text{Eq. 18b}$$

Ainsi plus la codimension fractale du support de la pluie  $c_{\min}$  est grande, plus le plateau de  $K(q, \eta)$  pour les petits  $\eta$  ( $\eta \leq \eta_-(q)$ ) est élevé, et plus petite sera la gamme de  $\eta$  ( $\eta_-(q) \leq \eta \leq \eta_+(q)$ ) disponibles pour estimer  $\alpha$  et  $C_1$  (la portion linéaire de la courbe DTM). Ces deux plateaux peuvent ainsi mener à de sévères sous-estimations de  $\alpha$ , sachant qu'ils sont en plus associés à des courbures transitoires qui réduisent d'avantage la gamme d' $\eta$  disponible.

Nous avons maintenant un cadre théorique permettant d'analyser directement les effets d'un seuil sur un champ multifractal appliqué à une résolution  $\Lambda$ , ce qui correspond au cas de la pluie. Une limite demeure néanmoins pour les résolutions  $\lambda < \Lambda$ . En effet les champs correspondant sont obtenus par aggrégation à partir de la résolution maximale  $\Lambda$ , processus qui va ré-introduire des singularités  $-\infty \leq \gamma < \gamma_{\min}$ . Nous nous proposons donc d'étudier en détail des résultats de simulations numériques pour confirmer ce cadre théorique.

### **3.2.2. Validation de ce cadre théorique (simulations numériques et données réelles)**

Pour un jeu de paramètres  $\alpha$  et  $C_1$  donné, 1000 simulations de 4096 ( $=2^{12}$ ) pas de temps sont faites et considérées comme des réalisations indépendantes d'un même phénomène. Ces dimensions peuvent être interprétées comme correspondant à 40 ans de données de pluie à 5 min sub-divisées en échantillon distinct afin d'étudier le comportement scalant de 5 min à 2 semaines. Les 1000 échantillons ont été normalisés en moyenne d'ensemble afin de conserver la variabilité de la moyenne entre ces derniers. Un seuil a ensuite été appliqué à la résolution maximale avant de nouvelle normalisation comme c'est le cas avec les données de pluie. Il convient tout de même de noter que la moyenne n'est

généralement pas baissée de plus de 1%, même avec les plus grands seuils mis en œuvre dans cette étude. Comme c'est le cas avec des données de pluie, l'analyse multifractal est mise en œuvre sur les champs ré-aggrégés à partir de la résolution maximale.

### Cas d'un unique regime scalant

Nous discuterons tout d'abord le cas de champs multifractals simulés avec  $\alpha=1.8$  et  $C_1=0.5$  sur toute la gamme d'échelles, c'est-à-dire sans rupture de comportement. Cinq seuils ont été mis en œuvre sur les champs normalisés :  $0-10^{-5}-10^{-3}-10^{-2}-10^{-1}$ , correspondant à des pourcentages de zéros égaux respectivement à 0-5.4-27-51-76% sur les champs ainsi générés. Les principales courbes résumant l'effet du seuil (et donc des zéros) sont en Figure 20. Comme suggéré par Harris et al. (1997) les résolutions minimale et maximale ne sont pas prises en compte pour faire la régression linéaire permettant d'obtenir  $K(q)$  car elles dévient régulièrement du comportement scalant attendu. Comme c'est visible sur les figures Figure 20.a and b le comportement scalant du champ initial (sans seuil) est excellent (les coefficients de détermination  $-R^2-$  des régressions linéaires sont supérieurs à 0.998). Sur les champs seuillés, il n'y a pas de changement significatif pour  $q>1$  tandis qu'il y a une dégradation du scaling pour les petits  $q$  ( $R^2=0.95$  pour  $q=0.1$ ). Ce phénomène était attendu puisque les grands moments d'ordre statistique reflètent plus les extrêmes qui sont moins affectés par le seuil, tandis que les petits moments prennent davantage en compte la contribution des petites valeurs. La courbure visible sur la courbe de scaling pour les petits  $q$  (particulièrement visible pour  $q=0.1$ ) signifie que les petites échelles sont davantage affectés par le seuil que les grandes. A la résolution  $\Lambda$ , c'est une conséquence directe de la troncature des petites singularités. Pour les résolutions plus petites, le lien est moins direct car le processus d'agrégation tend à supprimer les valeurs nulles. Ceci est en lien avec le fait que le seuil est appliqué à une résolution donnée ce qui rompt le scaling.

Pour les grands moments  $q$ , la fonction des moments d'échelles  $K(q)$ , n'est pas affectée par les seuils (Figure 20.c), comme expliqué précédemment. Pour les petits moments, la transition de phase multifractale prévue a bien lieu, et l'ordonnée à l'origine et la pente de la portion linéaire de  $K(q)$  permettent d'estimer respectivement  $c_{\min}$  (la codimension fractale, c'est l'opposée de l'ordonnée à l'origine) et  $\gamma_{\min}$  (la singularité minimum observable). Comme attendu  $c_{\min}$  et  $\gamma_{\min}$  augmentent avec le seuil. Il est possible d'estimer ces paramètres par une autre méthode: évaluer  $c_{\min}$  par la méthode du comptage de boîtes (Eq. 1), et ensuite  $\gamma_{\min}$  à partir de l'Eq. 14 (en utilisant les paramètres  $\alpha$  and  $C_1$  de la simulation). Les résultats sont en Figure 20.f. Malgré le piètre scaling pour les petits  $q$ ,  $c_{\min}$  et  $\gamma_{\min}$  obtenus par les deux méthodes sont respectivement en excellent et bon accord, ce qui confirme la présence d'une transition de phase multifractale telle que décrite précédemment. Néanmoins les  $\gamma_{\min}$  observées sont plus grandes que celles attendues en appliquant la formule  $T = \Lambda^{\gamma_{\min}}$ , où  $T$  est le seuil. Ceci est certainement dû aux perturbations inhérentes aux processus d'agrégation, et au fait que la qualité du scaling pour les petits moments est dégradé par le seuil. Il convient également de mentionner que les pentes spectrales ne sont pas modifiées par le seuillage des champs. Ceci n'est pas surprenant dans la mesure où un spectre est équivalent à un moment d'ordre 2, qui comme indiqué précédemment n'est pas affecté tant que  $\gamma_{\min}$  est assez faible. Plus précisément, théoriquement (en raison de la transformée de Legendre entre les fonctions codimension et moments d'échelles) on s'attend à ce que les moments statistiques d'ordre  $q>q_{\min}$  (avec  $q_{\min} = c'(\gamma_{\min})$ ) ne soit pas trop affectés, mais empiriquement on constate un effet pour des moments plus élevés.

Sur les courbes de détermination de  $\alpha$  dans la méthode DTM (Figure 20.e), des valeurs correctes de  $\alpha$  et  $C_1$  (respectivement 1.79 et 0.47) sont trouvées lorsqu'il n'y a pas de seuil. Comme attendu les courbes présentent un plateau pour les grandes valeurs de  $\eta$ . L'augmentation de la valeur minimum de  $K(q,\eta)$  (en accord avec la valeur attendue de  $(q-1)c_{\min}$ ) avec le seuil réduit la gamme d' $\eta$  disponibles pour évaluer  $\alpha$  (la portion linéaire de la courbe), dont les estimations décroissent fortement (1.33 pour le plus grand seuil). En revanche les estimations de  $C_1$  ne sont pas significativement affectées.

Les mêmes analyses sur des champs avec  $\alpha=1.8, 1.5$  ou  $1.2$  et  $C_1=0.5$  ou  $0.2$  conduisent à des résultats similaires tant que  $\gamma_{\min}$  n'est pas trop proche de  $C_1$  ( $C_1 - \gamma_{\min} \leq 0.2$  par exemple). Dans le cas contraire, une partie trop importante du champ a été retirée par le seuillage et même les grands moments sont affectés. Pour les champs avec  $\alpha < 1$ , la transition de phase est également observée. En revanche elle affecte nettement moins les estimations de  $\alpha$  et  $C_1$  car le démarrage du plateau supérieur a lieu pour des  $\eta$  plus grand ce qui augmente la gamme d' $\eta$  disponibles pour l'estimation de ces paramètres (plus de détails sont disponibles dans la section 5.2 de Gires et al., 2012c, annexe 4).

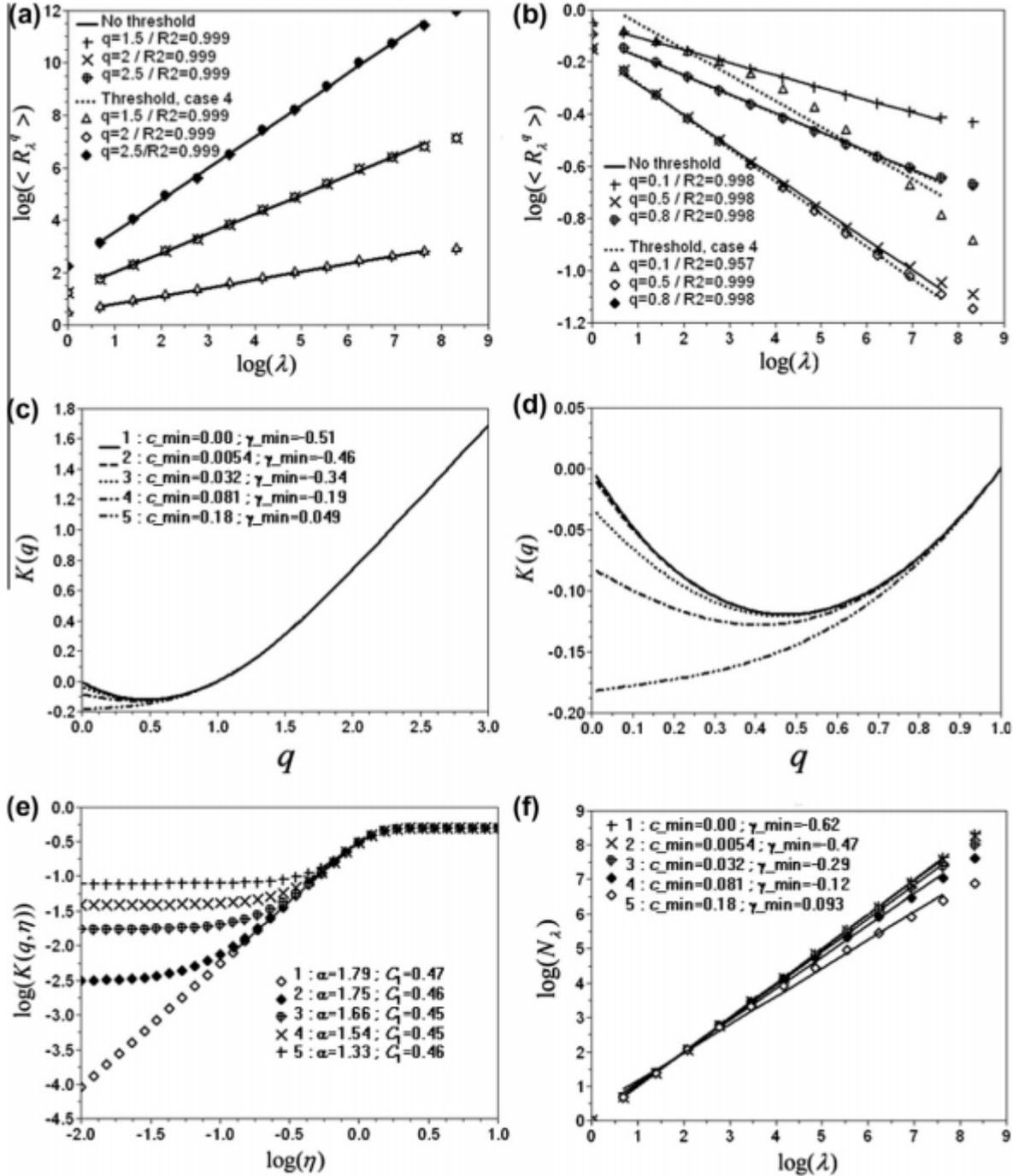


Figure 20: Effets d'un seuillage (les cas 1 à 5 sont testés, correspondant respectivement à des seuils de  $0$ ,  $10^{-5}$ ,  $0.001$ ,  $0.01$  and  $0.1$ ) sur des champs simulés avec  $\alpha=1.8$  et  $C_1=0.5$ . (a) Courbe de scaling i.e. Eq. (2) dans un graphique en log-log pour  $q > 1$ . (b) Idem (a) pour  $q < 1$ . (c) Fonction des moments d'échelles  $K(q)$  pour  $0 \leq q \leq 3$  (d) Fonction des moments d'échelles  $K(q)$  pour  $0 \leq q \leq 1$  (e) Courbes de détermination de  $\alpha$  (méthode DTM). (f) Illustration de la méthode du comptage de boîtes (Eq. 1), les coefficients de détermination des courbes sont tous supérieurs à  $0.995$ .

### Cas avec une rupture de comportement scalant et des données

Nous avons également testé l'influence de la mise en œuvre d'un seuil sur un champ multifractal simulé présentant une rupture de comportement scalant. Il apparaît que globalement le cadre théorique développé précédemment reste valable sur chacune des gammes d'échelles (des résultats plus détaillés avec un cas où seul  $C_1$  diffère d'une gamme d'échelle à l'autre et un cas où les deux paramètres UM changent sont en section 5.3 de Gires et al., 2012c, annexe 4). Cette transition de phase multifractale est par exemple visible sur la Figure 17.b où les courbes empiriques de  $K(q)$  pour les petites et les grandes échelles se détachent de leur expression théorique pour les petits moments d'ordre  $q$ . Une étude plus poussée a été faite sur une portion de l'évènement Cévenol. Il apparaît qu'un champ multifractal simulé avec une rupture puis seuillé permet de bien reproduire le comportement observé (voir section 4 Gires et al., 2012c, annexe 4 pour plus de détails).

#### **3.2.3. Suggestion d'une correction du biais introduit par les zéros**

Enfin une méthode est suggérée pour améliorer l'estimation des paramètres multifractals en supposant qu'ils soient biaisés par un seuil. Cette dernière et les résultats associés ne sont que résumés ici, pour plus de détails, se référer à section 6 de Gires et al. (2012c, annexe 4). Cette méthode est itérative et repose sur les étapes suivantes :

- (i) Estimation des paramètres multifractals sur le champ initial.
- (ii) Modification du champ initial en ajoutant les petites singularités d'un champ simulé avec les paramètres UM initiaux.
- (iii) Estimation des paramètres UM sur le champ modifié
- (iv) Reprise de (ii) et (iii) en prenant en compte la nouvelle estimation des paramètres UM. Le processus s'arrêtant quand deux estimations successives des paramètres UM sont suffisamment proches.

Cette méthode permet n'améliorer l'estimation des paramètres multifractals sous-jacents mais restent imparfaits. En particulier la convergence du processus n'est pas assurée et ce dernier doit être stoppé après un nombre prédéfini d'itérations.

### **3.3. Un « toy model » pour simuler les zéros**

L'approche de la section précédente essentiellement basée sur la recherche d'une « correction » aux zéros ne donne pas pleinement satisfaction. Par ailleurs elle ne permet pas de faire clairement la distinction entre les zéros réels et artificiels, ce qui est particulièrement limitant dans l'étude de longues séries temporelles. Il semble donc nécessaire de mieux comprendre le mécanisme des zéros avant de chercher de nouvelles méthodes d'estimation des paramètres caractéristiques des processus sous-jacents. C'est précisément l'objet du deuxième article (Gires et al., 2012e, annexe 9) qui a été récemment soumis. Plus précisément l'objectif de développer un « toy model » permettant d'expliquer au moins partiellement les écarts observés entre les données de pluie empiriques et un multifractal universel unique, à savoir : présence d'une rupture visible sur le spectre et dans les analyses TM et DTM, différences entre les valeurs standards des paramètres issus d'analyses spatiales (habituellement centrées sur des évènements pluvieux) et d'analyses temporelles (habituellement faites sur des longues séries de quelques mois à quelques décennies qui incluent les périodes sèches), absence d'explication physique à la non-conservativité des

champs d'intensité pluvieuse relevée par la plupart des auteurs. Ces écarts sont explicités plus longuement en section 3 de Gires et al. (2012e, annexe 9).

### 3.3.1. Présentation du toy model

Avant de présenter le « toy model » que l'on dénomme UM+0 avec lequel nous proposons de générer des champs de pluie avec leurs zéros, rappelons comment est construit un champ multifractal universel discret, noté  $W$  (voir Figure 21 pour une illustration).

A chaque étape du processus de cascade, chaque pas de temps est divisé en  $\lambda_1$  pas de temps (l'explication est faite en 1D, mais ce processus est facilement généralisable en 2D ou à 3D). Même si cela n'est pas obligatoire,  $\lambda_1$  est habituellement égale à 2. Après  $n$  étapes de cascade, le champ est constitué des  $W_{n,i}$ , où  $i=1, \dots, \lambda_1^n$ . La valeur affectée à un sous pas de temps est égale à la valeur du pas de temps père multipliée par une variable aléatoire  $\mu_{W_{n,i}}$ , i.e.  $W_{n,i} = W_{n-1,j} \mu_{W_{n,i}}$  Eq. 19

Où les indices  $i$  et  $j$  correctement choisis assurent la bonne connexion entre les structures mères et filles (ici des pas de temps). Les variables aléatoires  $\mu_{W_{n,i}}$  sont indépendantes et identiquement distribuées. Une cascade donnée est définie par la succession des réalisations de  $\mu_{W_{n,i}}$ . Pour générer un champ UM (Eq. 2 et 4 valides) avec les paramètres  $C_1$  et  $\alpha$ , il suffit

de prendre comme incrément multiplicatif aléatoire  $\mu_w = \exp\left[\left(\frac{C_1 \ln(\lambda_1)}{|\alpha-1|}\right)^{1/\alpha} L(\alpha)\right] / \lambda_1^{\frac{C_1}{\alpha-1}}$  où

$L(\alpha)$  est une variable de Lévy extrême d'indice  $\alpha$  ( i.e.  $\langle \exp(qL(\alpha)) \rangle = \exp(q^\alpha)$ ) qui peut être générée à partir de la procédure décrite par Chambers et al. (1976). Plus de détails sur la simulation des processus de cascades UM discrètes et continues sont disponibles dans (Pecknold et al. (1993) et Lovejoy and Schertzer (2010).

Expliquons maintenant comment nous proposons d'introduire les zéros de la pluie pour simuler un champ de pluie  $R$  à partir du champ UM  $W$ . Comme mentionné dans l'introduction, principalement deux techniques ont été proposées : multiplier le champ UM par un support indépendant aléatoire, ou bien simplement seuiller le champ UM à la résolution maximale. Les deux techniques possèdent de sérieuses limites : l'hypothèse d'indépendance du support n'est pas valide pour la première et les deux ne permettent pas de distinguer les zéros réels des faux. Nous proposons d'introduire ici les zéros directement au sein du processus de cascade (comme fait dans Olsson, 1998), et d'une façon conditionnelle par rapport aux valeurs simulées, puis de seuiller le champ à la résolution maximale. Les deux hypothèses sous-jacentes sont :

- La quantité conservative n'est pas directement l'intensité pluvieuse, mais la quantité totale d'eau (dans toutes ses phases) dans l'atmosphère dont seulement une partie devient effectivement de la pluie. Le processus UM+0 donne une façon invariante d'échelle de déterminer quelle proportion devient effectivement de la pluie et où elle est localisée. Le «  $W$  » du champ conservatif UM correspond à « eau » (en anglais !), tandis que «  $R$  » est l'intensité pluvieuse (toujours en anglais !). Cette correspondance ne doit pas être considérée comme exacte, mais plus comme conceptuelle.
- A chaque étape du processus de cascade, si le taux de pluie est plus petit qu'une certaine intensité (définie par une singularité  $\gamma_0$ ), alors il n'est pas certain de « survivre » (la mise à zéro étant définie par une probabilité  $p_0$ ). Ceci représente une forme de limite physique au processus de pluie.

Plus précisément,  $R$  est obtenu à partir de  $W$  de la façon suivante ( $\mu r$  et  $\mu w$  sont les incréments multiplicatifs aléatoires de  $R$  et  $W$  respectivement):

- $R_0 = W_0$ ,  $R_1 = W_1$
- Si  $W_{n-1} \leq (\lambda_1^{n-1})^{\gamma_0}$  alors  $\mu r_{n,i} = \mu w_{n,i}$  avec une probabilité  $p_0$  et  $\mu r_{n,i} = 0$  avec une probabilité  $1 - p_0$
- Si  $W_{n-1} > (\lambda_1^{n-1})^{\gamma_0}$  alors  $\mu r_{n,i} = \mu w_{n,i}$  dans tous les cas.

$\gamma_0$  et  $p_0$  sont les paramètres qui caractérisent le processus de génération des zéros réels de la pluie. Il convient de remarquer que comme il s'agit d'un processus multiplicatif, une fois que le taux de pluie a été mis à zéro à une résolution, il le reste pour toutes les résolutions supérieures. Ceci permet de représenter les longues périodes de temps sec. Enfin un seuil est mis en œuvre à la résolution maximale pour représenter la limite de détection de n'importe quel instrument de mesure de la pluie.

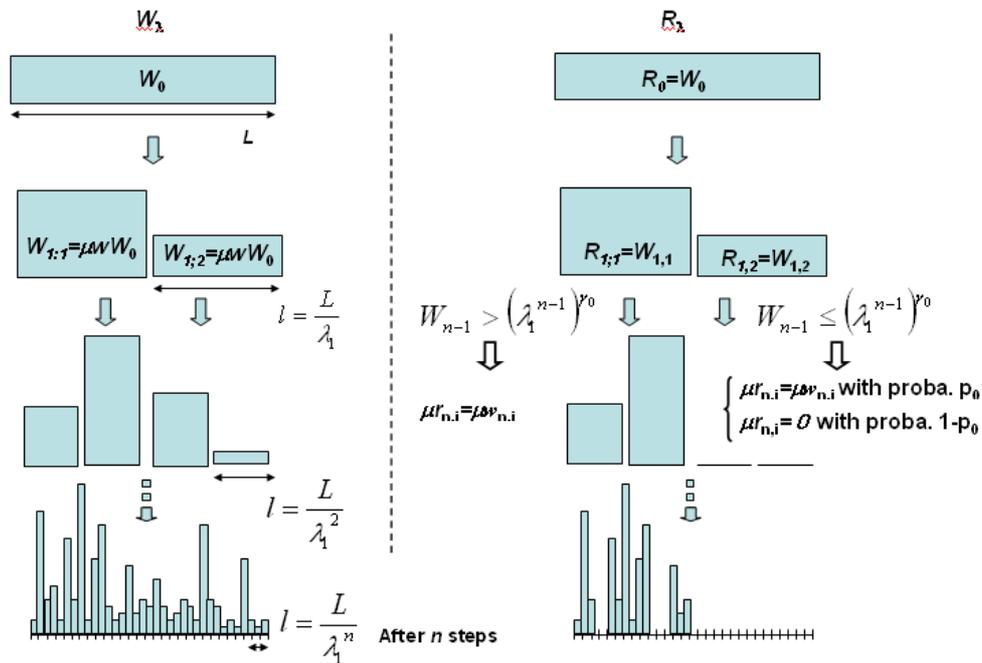


Figure 21 : Illustration du processus de cascade pour générer  $W_\lambda$  et  $R_\lambda$ .

### 3.3.2. Principaux résultats

Cette section discute le comportement observé du modèle UM+0 à partir de simulations numériques. Les valeurs  $C_1=0.1$  et  $\alpha=1.9$  sont utilisées. Ces dernières sont typiquement observées sur des analyses multifractales de séries temporelles ou de cartes ne comportant (presque) pas de zéros. Par exemple de Montera et al. (2010) ont trouvé  $C_1=0.13$  et  $\alpha=1.7$  pour une série temporelle à 30 s, Mandapaka et al. (2009) ont trouvé  $C_1=0.18$  et  $\alpha=1.9$  pour des analyses spatiales et temporelles sur des données Lidar à haute résolution (2.5 m, 1 s), et Verrier et al. (2010) ont trouvé  $C_1=0.12$  et  $\alpha=1.78$  sur des analyses spatiales de données radar (résolution d'1 km). En ce qui concerne les paramètres supplémentaires du modèle UM+0, on teste dans un premier temps les valeurs  $\gamma_0=0.1$  et  $p_0=0.5$ . Ces valeurs permettent d'obtenir un comportement comparable aux pluies observées. Par ailleurs une

étude exhaustive de la sensibilité du modèle UM+0 aux paramètres  $\gamma_0$  et  $p_0$  est faite dans la section 6 de Gires et al. (2012e, annexe 9). Des tests sont réalisés avec (modèle appelé UM+0) ou sans (modèle appelé UM+0+T) la mise en œuvre d'un seuil de 10 sur le champ UM+0 préalablement normalisé à la résolution maximum en moyenne d'ensemble. L'analyse est faite sur un ensemble de 1000 réalisations indépendantes 1D de longueur 4096. L'essentiel des analyses (et sauf mention contraire) est réalisé sur le champ habillé, c'est-à-dire obtenu en ré-agrégeant le champ à partir de la résolution maximale, comme c'est fait pour les données de pluie réelles. Seuls quelques paramètres sont évalués directement sur la cascade nue, qui est inaccessible sur des données de pluie. Seul les principaux résultats sont détaillés ici, le reste est disponible dans la section 5 de Gires et al. (2012e, annexe 9).

Le pourcentage de zéros est égal à 95% et 97% pour respectivement le modèle UM+0 et UM+0+T. Ceci signifierait qu'avec une telle limite de détection, l'instrument de mesure manque environ 1/3 des pas de temps pluvieux. Ceci semble plausible, mais très complexe à formellement vérifier. Les dimensions fractales trouvées sont comparables à celles classiquement observées sur des longues séries temporelles. En revanche si une rupture est prise en compte, il apparaît que la dimension fractale pour les petites échelles est plus grande que pour les grandes échelles, ce qui n'est habituellement pas observé. Ceci constitue une limite du modèle proposé ici.

Les résultats des analyses TM et DTM sur les champs habillés sont en Figure 22. Le comportement scalant du champ UM est excellent (Figure 22.a,  $R^2 > 0.997$  pour tous les moments), et l'analyse DTM (Figure 22.d) donne  $C_1=0.094$  et  $\alpha=1.91$ , ce qui est très proche des paramètres utilisés dans les simulations. Le scaling est dégradé sur le champ UM+0 où une courbure est visible pour tous les moments (Figure 22.b). Par exemple le  $R^2$  pour  $q=2$  (qui sera considéré dans la suite comme l'indicateur de la qualité du scaling) vaut 0.95 sans prendre en compte de rupture. En prenant en compte une rupture pour  $\lambda=128$ , ce même  $R^2$  vaut 0.98 et 0.97 pour respectivement les petites et les grandes échelles. La fonction  $K(q)$  (Figure 22.c) pour le champ UM+0 pour les petites échelles reste proche de celle pour le champ UM sauf pour les petits moments où la transition de phase multifractale associée au nombreux zéros introduit un biais. En revanche pour les grandes échelles, les différences sont beaucoup plus grandes et la courbure de  $K(q)$  qui reflète la multifractalité du champ est presque perdue. Les courbes de détermination de  $\alpha$  avec la méthode DTM sont en Figure 22.d. On trouve  $C_1=0.32$  et  $\alpha=0.69$  pour les grandes échelles, et  $C_1=0.11$  et  $\alpha=1.33$  pour les petites échelles. En prenant en compte le seuil (modèle UM+0+T), la qualité du scaling reste comparable et les paramètres UM sont un peu plus affectés. En effet on trouve  $C_1=0.33$  et  $\alpha=0.65$  pour les grandes échelles, et  $C_1=0.13$  et  $\alpha=1.22$  pour les petites échelles. Ce « toy model » assez simple permet de reproduire la rupture de comportement et les principales variations des paramètres UM que l'on observe entre les petites et les grandes échelles sur les champs de pluie. Notons pour finir que c'est le comportement des petites échelles qui permet de mieux retrouver les propriétés du champ UM sous-jacent.

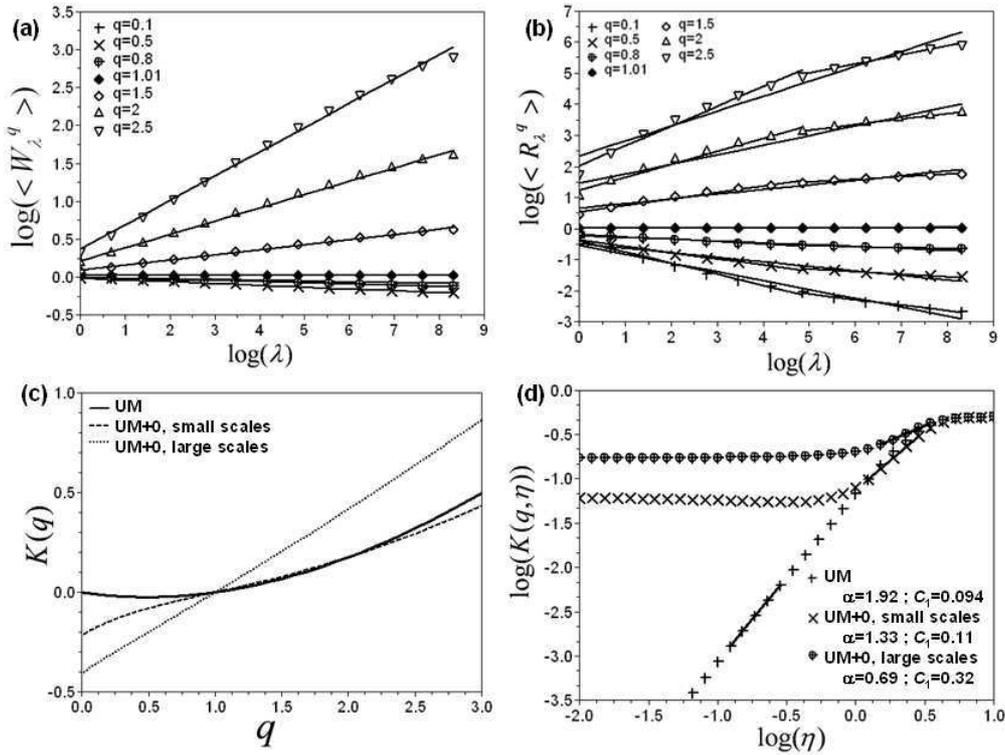


Figure 22 : (a) Analyse TM de  $W_\lambda$ , (b) Analyse TM de  $R_\lambda$ , (c)  $K(q)$  pour  $R_\lambda$ , et (d) Courbe de détermination de  $C_1$  et  $\alpha$ , pour des simulations avec les paramètres  $C_1=0.1$ ,  $\alpha=1.9$ ,  $\gamma_0=0.1$  and  $p_0=0.5$

Une des principales caractéristiques du processus de cascade UM+0 est sa non-conservativité. En effet à chaque étape de la cascade certains pas temps (potentiellement ceux avec des petites singularités) sont mis à zéros si bien que la moyenne diminue avec le nombre de pas de cascade. Une étude sur le champ nu, pour évaluer  $H$ , dont on rappelle qu'il caractérise l'évolution de la moyenne du champ à travers les échelles ( $\langle R_\lambda \rangle \approx \lambda^{-H}$ ) permet de quantifier cette propriété. Au lieu d'une droite, on trouve plutôt une courbe, ce qui signifie que le cadre habituel caractérisant la non-conservativité par  $H$  ne s'applique probablement pas directement. En estimant tout de même un  $H$  sur deux gammes d'échelles (les mêmes que dans l'analyse TM et DTM), on trouve  $H$  égale à 0.09 pour les petites échelles et égale à 0.25 sur les grandes. Ceci est en contradiction avec les valeurs habituellement trouvées dans la littérature où  $H$  est nul pour les grandes échelles et vaut 0.3-0.6 pour les petites échelles. Par ailleurs il apparaît que la pente spectrale du champ UM n'est pas significativement affectée par le processus UM+0 (on trouve environ  $\beta=1$  pour les deux gammes d'échelles), ce qui signifie que ce dernier ne parvient à reproduire le comportement spectral des champs de pluie. Ce modèle fournit tout de même un cadre pour expliquer le fait que  $H \neq 0$  sur de nombreux champs pluie observés, ce qui n'est pas le cas du simple seuil ou de la multiplication par un support indépendant. Une amélioration possible pourrait être d'introduire une vitesse verticale de vent comme suggéré par Lovejoy and Schertzer (2008), qui développent un modèle reproduisant le comportement spectral observé de la pluie où le taux de pluie est le produit d'une quantité d'eau par une vitesse verticale.

Enfin, pour reproduire une analyse événementielle, une analyse multifractale a été faite en ne prenant en compte que les portions les plus pluvieuses des échantillons simulés. Plus précisément les 128 pas de temps consécutifs de chaque échantillon avec le plus grand cumul sont extraits et une analyse en moyenne d'ensemble sur les 50 présentant le cumul le plus grand est faite. Il en ressort qu'il n'y a pas de rupture de comportement, et que les paramètres UM estimés se rapprochent de ceux observés en analyse événementielle sur des

données réelles. En effet on trouve  $C_1=0.094$  et  $\alpha=1.60$  pour le champ UM+0, et  $C_1=0.11$  et  $\alpha=1.49$  pour le champ UM+0+T.

Il est intéressant de remarquer de que ce “toy model” permet de reproduire à la fois les paramètres observés dans la littérature pour des longues séries temporelles (avec les résultats à grandes échelles) et pour des études évènementielles (en sélectionnant les portions simulées présentant le plus de pluie). Mentionnons pour finir qu’une telle analyse sur les portions intenses d’un champ UM simulé avec  $C_1=0.5$  et  $\alpha=0.5$  donne  $C_1=0.31$  et  $\alpha=0.57$ . Ceci confirme que les paramètres observés habituellement sur des longues séries temporelles ne permettent pas d’expliquer ceux observés sur des études évènementielles.

### **3.4. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la question débattue depuis longtemps de la prise en compte des zéros de la pluie dans un cadre multifractal.

Nous avons dans un premier temps étudié l’effet d’un seuil sur un champ multifractal conservatif. Ce seuil est mis en œuvre à la résolution maximale, ce qui reproduit l’effet d’une limite de détection inférieure sur une série temporelle empirique. Théoriquement, on s’attend à ce que l’introduction d’un seuil entraîne une transition de phase multifractale d’ordre 2 affectant les statistiques obtenues pour des moments et des singularités plus petits qu’un niveau critique. Cette transition de phase limite la gamme de moments disponibles pour l’estimation des paramètres multifractals ce qui entraîne un biais significatif sur ces dernières avec notamment une forte sous-estimation de  $\alpha$ . Ces prédictions théoriques sont confirmées par une étude détaillée menée sur des champs multifractals simulés. Par ailleurs il apparait, à partir de l’analyse d’une portion de l’évènement cévenol, que ce simple seuil représente relativement bien les comportements observés à l’échelle d’un évènement pluvieux. Enfin une méthode est suggérée pour améliorer l’estimation des paramètres multifractals en supposant qu’ils soient biaisés par un seuil. Cette méthode est itérative et repose essentiellement sur l’ajout des petites singularités d’un champ multifractal aléatoire simulé. Les résultats obtenus à partir de champs simulés aux propriétés connues puis seuillés sont encourageants au sens où ils permettent une meilleure estimation des paramètres multifractals sous-jacents mais restent imparfaits. En particulier la convergence du processus n’est pas assurée et ce dernier doit être stoppé après un nombre prédéfini d’itérations.

Ce modèle ne permettant pas d’expliquer l’ensemble des écarts observée entre les données de pluie empiriques et un multifractal universel unique, nous avons suggéré et analysé un nouveau « toy model ». Ce dernier repose sur l’introduction de zéros au sein du processus de cascade et d’une façon conditionnelle par rapport au taux de pluie: à chaque étape du processus de cascade discrète multifractale universelle conservative si la valeur du champ est inférieure à une certaine singularité, alors il a une certaine probabilité de s’éteindre. La singularité et la probabilité sont des paramètres du modèle. Ce « toy model » permet d’introduire les zéros observés dans le champ d’intensité pluvieuse précipitée à partir d’un champ qui représenterait la quantité totale d’eau (dans tous ses états) dans l’atmosphère. Ensuite ce simple modèle invariant d’échelle est testé ainsi que sa sensibilité à ses deux paramètres. Il apparait qu’il permet de retrouver beaucoup des propriétés observées sur les champs de précipitations empiriques: une rupture de comportement scalant, non-conservativité du champ (explication seulement partielle), différences entre les paramètres UM pour les petites et les grandes échelles, et écarts entre des analyses évènementielles et celles incluant des périodes de temps sec. Néanmoins certaines des propriétés observées sur les données empiriques ne sont pas reproduites par ce modèle: ce dernier ne modifie par le

comportement spectral, le coefficient de non-conservation est plus grand pour les grandes échelles que les pour petites, et la dimension fractale du support de la pluie est plus grande pour les petites échelles que pour les grandes. Ceci signifie que ce modèle doit être considéré simplement comme un modèle intéressant et encourageant demandant des développements complémentaires.

#### **4. Quantification de l'incertitude associée à la variabilité à petites échelles de la pluie en hydrologie urbaine**

“No anunciaban tormenta pero sí esa típica jornada en que el viento trae lluvia, la lluvia cae en unas zonas y en otras no [...]. En una esquina y la contigua un nudo abandonado sobre el desagüe de una calle que de inmediato empieza a rebosar agua. Sol en la siguiente esquina y luego, de nuevo aguas y nubes.”

Traduction familiale libre : « Aucune tempête n'était prévue, juste une de ces journées typiques où le vent amène de la pluie, la pluie qui tombe à certains endroits et pas à d'autres [...]. Au coin d'une rue, une ruelle abandonnée qui soudain se met à déborder d'eau. Soleil au coin de rue suivant, et puis de nouveau pluie et nuage ». La scène se déroule à la Havane (Cuba)

*Y de repente fue ayer*, Boris Izaguirre

##### **4.1. Introduction**

Comme nous l'avons vu dans les précédentes parties, les multifractals universels sont devenus un mode classique d'analyse et de simulation de l'extrême variabilité sur de grandes gammes d'échelles des processus géophysiques, en particulier la pluie. Ils reposent sur un nombre très réduit de paramètres. De telles analyses menées sur les débits et/ou les précipitations, ont permis d'éclairer la relation pluie – débit dans différents contextes (Tessier et al., 1996, sur des bassins versants français de 40 km<sup>2</sup> à 200 km<sup>2</sup> ; Pandey et al., 1998, sur des bassins versants nord-américains de 5 km<sup>2</sup> à 2 millions de km<sup>2</sup> ; Labat et al., 2002, sur des sources karstiques ; Tchiguirinskaia et al., 2007, sur des bassins versants non jaugés) en comparant leurs paramètres multifractals respectifs et le comportement de leurs extrêmes (Schertzer et al., 2006).

Par ailleurs de nombreuses études plus classiques sur des bassins ruraux ont été effectuées pour évaluer l'impact de la variabilité de la pluie sur la modélisation des débits (Arnaud et al., 2002; de Lima and Singh, 2002; Dodov and Foufoula-Georgiou, 2005; Emmanuel, 2011; Faures et al., 1995; Hubert et al., 2007; Morin et al., 1995; Rebora et al., 2006a; Singh, 1997; Smith et al., 2004). Même si des nuances sont à apporter en fonction de la taille et des caractéristiques des bassins versants ainsi que du type de pluie, elles montrent globalement un impact significatif de la variabilité de la pluie sur la modélisation des débits. En hydrologie urbaine, avec des bassins versants plus petits et une proportion plus grande de pluie immédiatement efficace, en raison de coefficients d'imperméabilisation supérieurs, les effets semblent plus importants (Aronica and Cannarozzo, 2000; Berne et al., 2004b; Niemczynowicz, 1991; Segond et al., 2007a).

L'objet de cette partie est d'utiliser le cadre conceptuel des multifractals universels pour apporter des éléments de réponse à la question pratique de la quantification en hydrologie urbaine de l'impact de la variabilité spatio-temporelle à petites échelles de la pluie. On s'intéressera notamment à la variabilité qui n'est pas mesurée car arrivant à des échelles plus petites que celles disponibles à partir des réseaux de radars en bande C des services météorologiques nationaux, à savoir 1 km en espace et 5 min en temps. Les données de précipitations utilisées sont issues de radars en bande C et ont été présentées dans la section 2.2. La donnée est considérée comme correcte à cette résolution et l'effet de l'incertitude de ces estimations sur les débits simulés n'est pas analysé ici. Cette incertitude peut avoir des conséquences non négligeables. Par exemple Vieux and Bedient (Vieux and Bedient, 2004) ont montré, sur un bassin versant essentiellement urbain de 260 km<sup>2</sup>, qu'un biais linéaire sur les données pluviométriques radar utilisées avait des effets non linéaires sur les débits simulés. De nombreuses autres études, dont beaucoup comparent les données radar et les données de pluviomètres, confirment l'impact significatif de l'incertitude sur la mesure de pluie (Andreassian et al., 2001; Arnaud et al., 2011; Borga, 2002; Quirmbach and Schultz, 2002; Segond et al., 2007b). Par ailleurs, précisons que l'incertitude sur les modèles hydrologiques n'est pas non plus étudiée ici. Cette dernière comporte 3 sources principales (Deletic et al., 2009; Métadier, 2011) (voir partie 4.3 de son manuscrit de thèse) : les incertitudes liées aux systèmes de mesures, les incertitudes sur la connaissance des processus, et les incertitudes liées aux procédures de calage.

L'analyse sera faite sur deux cas d'études correspondant à des bassins versants urbains, un de 34 km<sup>2</sup> situé dans le Nord-Est de la Seine-Saint-Denis, et un de 9 km<sup>2</sup> dans le Borough de Redbridge à Londres. Ce dernier a été fait en collaboration avec l'équipe « Urban Water Research Group » de l'Imperial College London, à l'occasion d'un séjour de deux mois dans cette équipe. Deux types de modèles ont été utilisés : des modèles semi-distribués opérationnels, et un modèle distribué en cours de développement au LEESU.

La méthodologie mise en œuvre pour quantifier l'impact de la variabilité non mesurée des précipitations en hydrologie urbaine consiste à :

- (i) Générer un ensemble de champs de précipitations désagrégées réalistes à l'aide de cascades multifractales universelles discrètes (section 4.2)
- (ii) Simuler les ensembles d'hydrogrammes correspondants à l'aide des modèles hydrologiques / hydrauliques disponibles (section 4.3)
- (iii) Analyser la variabilité au sein de ces ensembles qui, en supposant les modèles fiables, reflète l'incertitude recherchée (section 4.4).

Ensuite, le cadre des multifractals est employé à la fois pour générer complètement des champs de précipitations, et analyser les débits en résultant (section 4.5).

## 4.2. Explication de la désagrégation

Pour tous les cas d'études, les données initiales de pluie sont issues de radars en bande C et présentent une résolution de 1 km en espace et 5 min en temps. Afin de générer des champs réalistes à plus hautes résolutions, nous allons nous appuyer sur les modèles de cascades multifractales qui sont intrinsèquement des modèles de désagrégation (Schertzer and Lovejoy, 1987a; Schertzer et al., 2010). Ils ont été dans un premier temps utilisés principalement pour analyser et simuler des champs de pluie, puis ont été progressivement mis en œuvre pour les désagréger (Biaou et al., 2003; Deidda, 2000; Ferraris et al., 2003; Olsson et al., 2001; Reborja et al., 2006b; Royer et al., 2008). Le cadre des multifractals universels employé ici est particulièrement adapté à cet exercice (Biaou et al., 2003). En effet, la désagrégation mise en œuvre consiste simplement à estimer les paramètres sur la gamme d'échelles disponible (1-256 km pour les données parisiennes, et 1-64 km pour celles londoniennes), puis poursuivre la cascade stochastiquement au-delà de l'échelle d'observation. Le processus est schématisé Figure 23. L'hypothèse sous-jacente est que les propriétés scalantes mises en lumière sur les données disponibles restent valables pour des résolutions plus grandes. Nous n'avons pas de moyen de vérifier cette hypothèse pour les événements considérés, mais elle a été confirmée par quelques auteurs ayant étudié des données de pluie à plus hautes résolutions. Par exemple Mandapaka et al. (2009) ont validé le comportement scalant jusqu'à quelques mètres en espace et quelques secondes en temps. Menabde et al. (1997) et de Montera et al. (2009) l'ont validé jusqu'à respectivement 15 s et 32 s. Par ailleurs, Desaulnier-Soucy et al. (2001) et Lilley et al. (2008) ont mis en lumière un comportement scalant jusqu'à des échelles de l'ordre du centimètre à partir d'images stéréographiques du champ de pluie permettant de reconstituer les gouttes dans un volume d'environ  $1 \text{ m}^3$ .

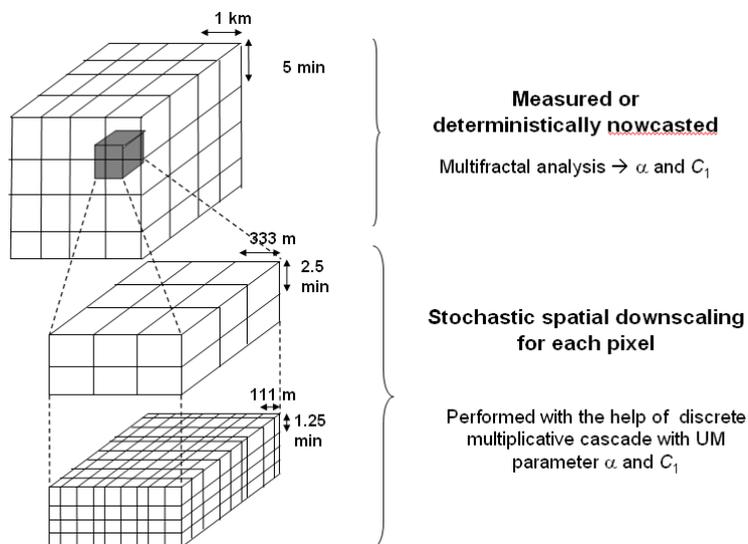
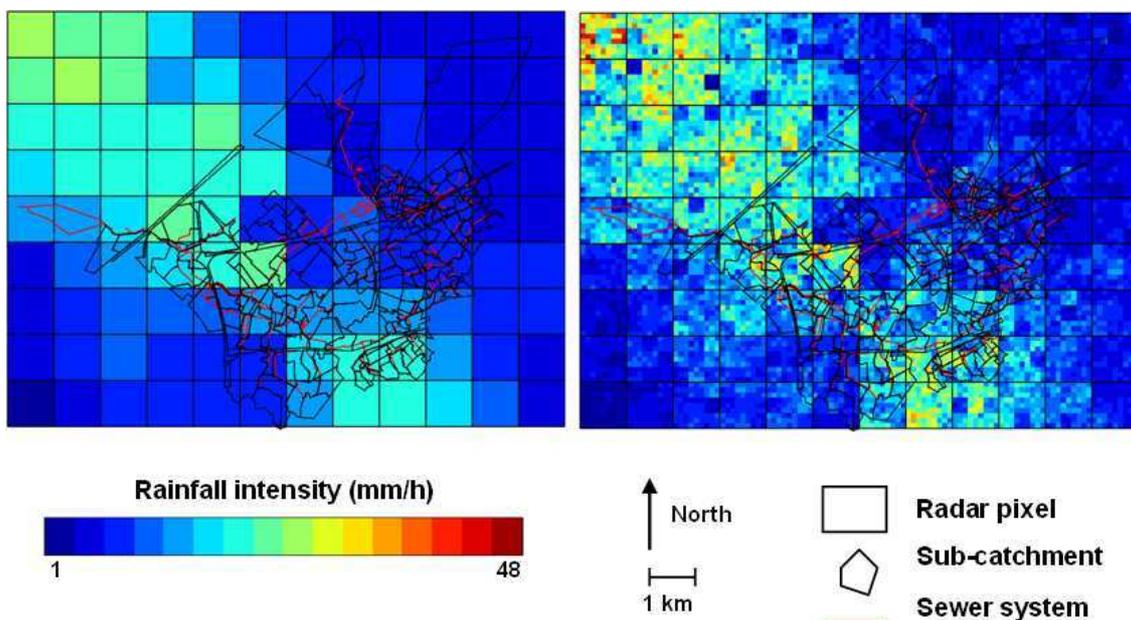


Figure 23 : Illustration de deux pas de cascade du processus de désagrégation spatio-temporelle mis en œuvre.

Plus précisément les valeurs des paramètres multifractals  $C_1$  et  $\alpha$  sont celles présentées dans la première partie, c'est-à-dire respectivement 0.056 et 1.52 pour l'évènement parisien (ce sont les petites échelles qui sont prises en compte), 0.14 et 1.62 pour celui de février à Londres, et 0.49 et 0.92 pour celui de juillet à Londres. Par ailleurs, c'est une désagrégation spatio-temporelle reposant sur un simple coefficient d'anisotropie  $H_t$  d'1/3 entre l'espace et le

temps qui est mise en œuvre. C'est-à-dire que lorsque la taille d'un pixel est divisée par  $\lambda_{xy}$  en espace, elle l'est par  $\lambda_t = \lambda_{xy}^{1-Ht}$  en temps. Ici on prend  $\lambda_{xy} = 3$  et donc  $\lambda_t = 2$  ( $2^{1-1/3} \approx 2.08$ ). Se référer à Lovejoy and Schertzer (2010), Pecknold et al. (1993), ou Gires et al. (2012b, annexe 3) pour plus de détails sur la simulation du champ multifractal. Se référer à Gires et al. (2012b, annexe 3) et notamment la section 2.3.2 pour une comparaison avec une désagrégation simplement spatiale qui aurait tendance à générer des valeurs trop importantes de taux de pluie par rapport à la désagrégation spatio-temporelle.

Deux pas de cascades sont mis en œuvre pour les cas d'études avec les modèles semi-distribués, ce qui fait passer la résolution de 1 km en espace et 5 min en temps à 111 m en espace et 1.25 min en temps. Il convient de noter que si les désagrégations de deux pas de temps successifs sont indépendantes (i.e., les cascades générées pour chaque sous-pixel sont effectivement indépendantes), il n'en reste pas moins que les valeurs désagrégées restent dépendantes du fait que les structures à plus grandes échelles le sont. La Figure 24 illustre un exemple de désagrégation pour un pas de temps arbitraire (la résolution temporelle du champ désagrégé a été ramenée à 5 min en moyennant les 4 pas de temps de 1.25 min générés). La même palette de couleur a été utilisée pour les champs radar bruts et désagrégés afin de faciliter la comparaison. La variabilité générée au sein des pixels est visible. Les pixels radar apparaissent clairement, et la désagrégation préserve cette pixelisation. L'utilisation de cascades continues et non discrètes (Schertzer and Lovejoy, 1987a) permettrait de faire disparaître ces structures carrées. Pour l'étude avec le modèle distribué Multi-Hydro, quatre pas de cascade sont mis en œuvre pour aboutir à une résolution de 12 m en espace et 19 s en temps.



**Figure 24 : Illustration de la désagrégation pour un pas de temps pour l'évènement parisien du 9 février 2009 au-dessus du cas d'étude de Seine-Saint-Denis (la résolution temporelle du champ désagrégé a été ramenée à 5 min en moyennant les 4 pas de temps de 1.25 min générés).**

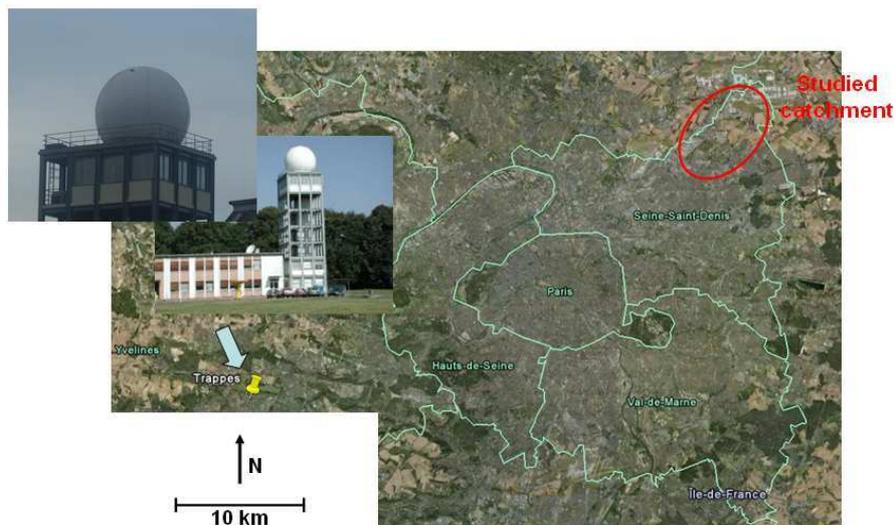
Mentionnons pour finir que la technique de désagrégation mise en œuvre assure une conservation en moyenne du champ et non à chaque pas de cascade. Pour l'exemple de la pluie du 9 février 2009 sur le bassin versant de Seine-Saint-Denis, les données radar indiquent une hauteur d'eau totale moyenne de 15.1 mm, et les champs désagrégés de  $15.1 \pm 0.01$  mm

en fonction de la réalisation considérée. Ainsi les différences hydrologiques qui seront étudiées ne proviennent pas de différences de volume mais bien de variations dans la répartition spatio-temporelle des précipitations.

### **4.3. Présentation des cas d'études et modèles associés**

#### **4.3.1. Bassin versant de Seine-Saint-Denis, avec Canoé**

La zone étudiée est située en Seine-Saint-Denis (Nord-Est de Paris) dont les principales caractéristiques (du point de vue de l'hydrologie urbaine seulement !) sont une faible variation d'élévation, et une rapide urbanisation (associée à une imperméabilisation croissante) depuis les années 50. Ceci a rendu l'évacuation des eaux pluviales problématique avec des débordements d'égout réguliers. Ainsi depuis la fin des années 1980, la Direction Eau et Assainissement (DEA) du Conseil Général, qui gère les 750 km de réseau départemental, a construit des bassins de stockage (31 bassins pour volume total de 1.4 million de m<sup>3</sup>) et mis en place une gestion automatisée (36 vannes et 26 pompes) prenant en compte des informations de pluviométrie (information radar et réseau de 26 pluviomètres) et de débit en réseau (22 débitmètres) pour en optimiser l'utilisation (Andrieu and Jacquet, 1987; Browne et al., 1998). Plus précisément, le bassin versant étudié est une zone urbaine et péri-urbaine de 34 km<sup>2</sup> située au Nord-Est du département (Figure 25) dont l'assainissement est séparatif.



**Figure 25 : Localisation dans la région parisienne du bassin versant de Seine-Saint-Denis étudié, et du radar de Trappes**

Le modèle utilisé a été fourni calibré par la DEA qui l'utilise quotidiennement. Il s'agit d'une modélisation semi-distribuée à l'aide du logiciel Canoé (Allison et al., 2005) dont une représentation est visible Figure 26. Le bassin versant est divisé en 198 sous-bassins versants qui sont considérés comme homogènes. Leur réponse hydrologique est simulée à l'aide d'un réservoir linéaire dont le temps caractéristique est évalué à partir de la surface, de la pente, du coefficient d'imperméabilisation et d'une longueur caractéristique. Leur surface varie de 0.9 à 92 ha, à part pour deux qui font 347 et 404 ha. La Figure 27.a représente la distribution des surfaces de bassin (les deux plus gros ne sont pas représentés) qui présente une décroissance en loi de puissance avec un exposant caractéristique de 1.71 (Figure 27.b).

Le coefficient moyen d'imperméabilisation est de 41 %, avec des valeurs s'étalant de 0 à 95 % en fonction des sous-bassins versants. Seul le réseau principal d'égout est pris en compte pour un total de 69 km de canalisation modélisée. La circulation de l'eau dans les conduites est simulée de façon dynamique à partir des équations de Saint-Venant 1D. Comme précédemment mentionné, la zone est plate et la pente moyenne des canalisations est de 0.009 m/m. Les données de pluie sont issues du radar en bande C de Trappes situé à 45 km. Le cumul total de pluie au cours de l'évènement va de 19 mm au Nord-Ouest à 9 mm au Sud-Est.

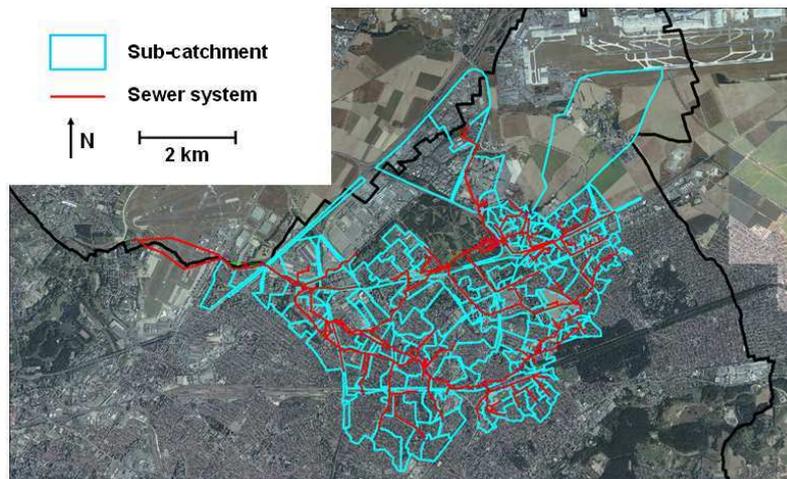


Figure 26 : Bassin versant étudié en Seine-Saint-Denis et sa subdivision en sous-bassins versants et le réseau d'assainissement modélisé (avec l'aide Julien Richard).

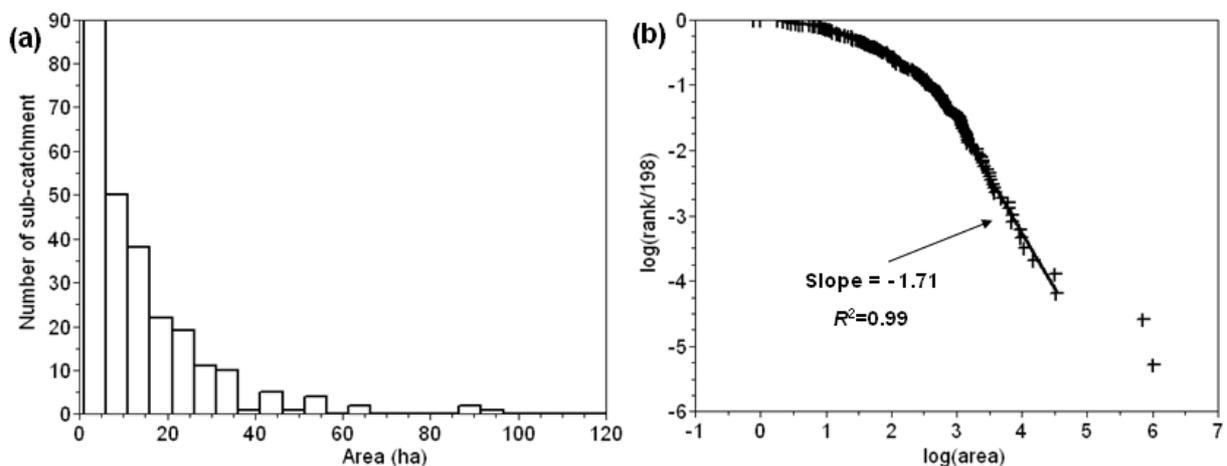


Figure 27 : (a) Distribution de la surface des sous-bassins versants modélisés pour le cas d'étude en Seine-Saint-Denis. (b) Illustration de la décroissance en loi de puissance de l'historgramme (les deux plus gros bassins versants visibles en (b) ne le sont pas dans (a) et ne sont pas pris en compte dans la régression linéaire)

Le réseau modélisé présente un comportement invariant d'échelle. En effet il est possible de calculer sa dimension fractale à partir de la méthode du comptage de boîtes. Pour réaliser cela, une grille avec des pixels de 20 m a été générée, et les pixels interceptant une canalisation sont considérés comme une représentation du réseau. Une matrice de taille 256 x 256 est extraite (Figure 28.a) et la dimension fractale  $d_F$  est évaluée via l'Eq. 1 (dans un graphique en log-log en Figure 28.b). Le comportement scalant est bon sur deux gammes

d'échelles, comme en témoigne les coefficients de régression linéaire des droites permettant l'estimation de  $d_F$ , qui valent 0.994 et 0.999 pour respectivement les petites et les grandes échelles. Pour des échelles allant de 20 à 160 m,  $d_F$  vaut 1.09, ce qui est très proche de 1. Ceci reflète simplement le fait qu'ici la dimension fractale décrit le caractère linéaire des canalisations et pas le réseau. La taille de 20 m de la grille initiale est certainement trop petite par rapport à la résolution du réseau d'assainissement modélisé. Pour des échelles allant de 160 m à 5 km, on trouve  $d_F$  égale à 1.68. Le réseau d'assainissement pluvial du Val-de-Marne (Sud-Est de Paris) présente un comportement scalant similaire avec une dimension fractale de 1.67 sur une gamme d'échelles allant de 290 à 18 km (Sarkis, 2008). Ces valeurs pour des réseaux artificiels sont du même ordre de grandeur que celles trouvées pour des réseaux de rivières naturelles. Par exemple Takayasu (1990) a trouvé des dimensions fractales de 1.85 et 1.4 pour respectivement l'Amazone et le Nil.

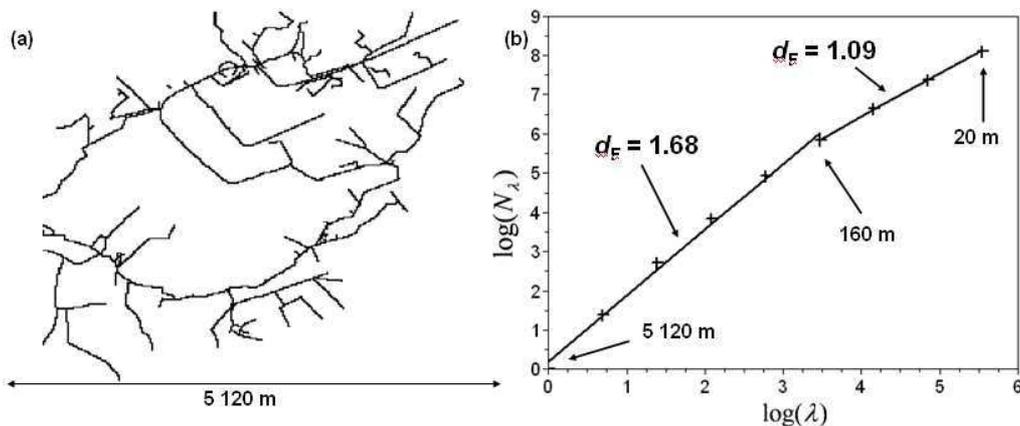


Figure 28 : (a) Représentation d'une portion du réseau modélisé avec des pixels de 20 m de côté. (b) Estimation de la dimension fractale du réseau modélisé avec la méthode du comptage de boîtes (Eq. 1)

#### 4.3.2. Bassin versant « Kodak », avec Multi-Hydro

Une étude plus fine Gires et al. (2012a, annexe 8) est réalisée sur un bassin versant de 1.4-1.5 km<sup>2</sup> (Figure 29), située au Sud-Est de la zone présentée dans le paragraphe précédent. Ce bassin versant est appelé « Bassin Kodak » parce qu'il y avait précédemment une usine Kodak à l'emplacement du parc visible au Nord-Ouest du bassin Figure 29. La DEA étudie la possibilité de construire un bassin de rétention sur cette zone pour y limiter les débordements de réseau, mais aussi pour soulager le bassin versant aval (situé au Nord, sur l'autre rive du canal de l'Ourcq) dont le réseau est régulièrement surchargé lors d'évènements pluvieux intenses.



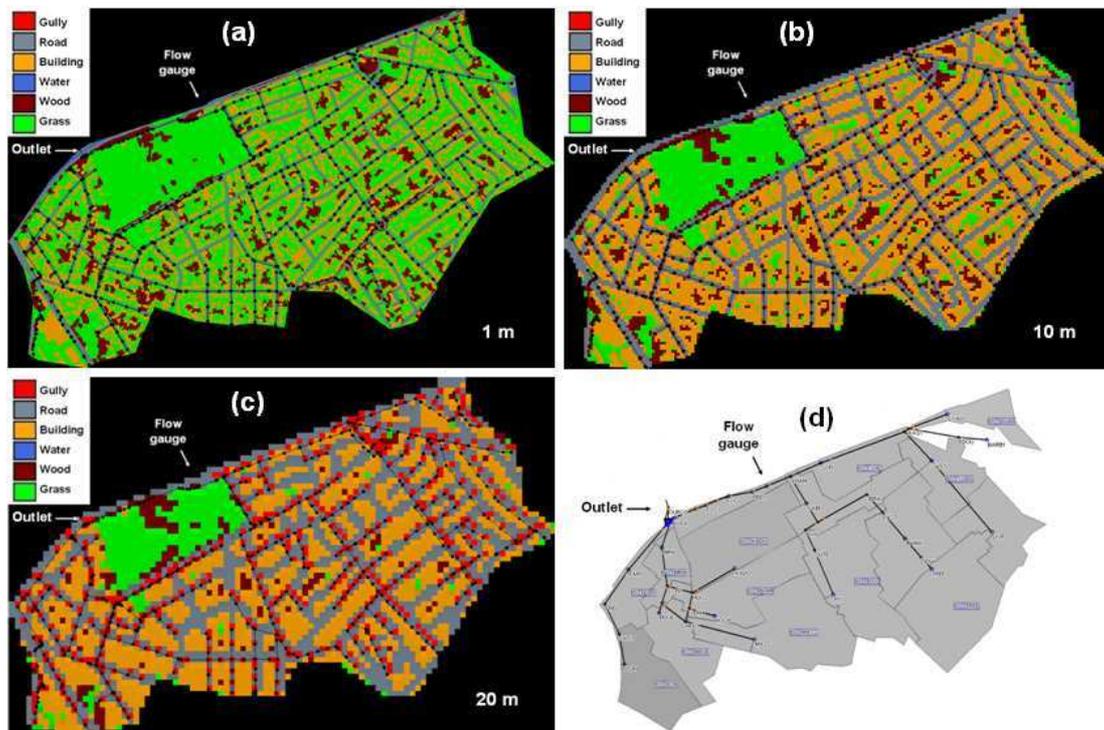
**Figure 29 : Photographie aérienne du bassin versant dit « Kodak » de 145 ha, situé sur la commune de Sevrans (en Seine-Saint-Denis)**

Le bassin versant « Kodak » est modélisé à l'aide de Multi-Hydro (v1 El Tabach et al., 2009; v2 Giangola-Murzyn et al., 2012), un modèle distribué en cours de développement et validation à l'Ecole des Ponts ParisTech dans le cadre du projet européen FP7 SMARTesT. La version utilisée dans cette étude consiste en un couplage entre un modèle 2D pour le ruissellement de surface et l'infiltration (TRES, Two dimensional Runoff, Erosion and eXport model, Velleux et al., 2011), et un modèle 1D du réseau d'assainissement (SWMM, Storm Water Management Model, Rossman, 2010). Les principales données d'entrée consistent en une description précise du réseau d'assainissement, de la topographie, et de l'occupation du sol. Dans cette étude, cinq classes d'occupation du sol sont distinguées : forêt, herbe, route, bâtiment et avaloir. Chaque classe est entièrement caractérisée par une conductivité hydraulique (m/s), une succion capillaire (m), un déficit en eau (sans unité, compris entre 0 et 1), un coefficient de Manning ( $s \cdot m^{-1/3}$ ) et une hauteur d'interception (mm). Les données topographiques disponibles ne prennent pas en compte les modifications anthropogéniques, si bien que les élévations des pixels « route » ont été baissées de 15 cm (prise en compte des trottoirs et création d'un chemin préférentiel pour l'eau) et celles des « bâtiments » augmentées de 5 m (pour éviter le passage de l'eau). Les interactions entre le réseau d'assainissement et les flux de surface sont gérées au niveau des avaloirs, où l'eau peut circuler dans les deux sens, i.e. de la surface au réseau en condition normale, et dans l'autre sens en cas de surcharge du réseau. Se référer à (Giangola-Murzyn et al., 2012) pour plus de détails. On remarque que d'autres équipes de recherche en France adopte cette approche de couplage entre modules pour modéliser les milieux péri-urbains en tenant compte de leurs spécificités. Par exemple l'IFSTTAR de Nantes développe URBS (Rodriguez et al., 2008), et l'IRSTEA de Lyon la plateforme PUMMA (Jankowsky, 2011).

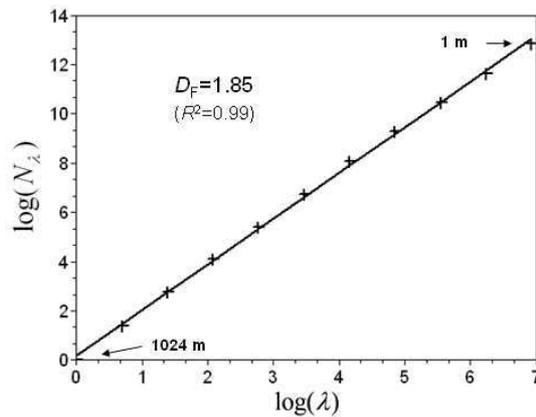
Les cartes d'occupation du sol pour des pixels de taille 1 m, 10 m et 20 m sont en Figure 30. Les différences sont dues au fait que chaque pixel ne peut correspondre qu'à un seul mode d'occupation du sol si bien qu'il convient de préciser le processus d'affectation d'une classe d'occupation du sol à un pixel. Les classes sont triées par ordre d'importance pour les processus hydrologiques en milieu urbain (1 : avaloir, 2 : route, 3 : bâtiments, 4 : herbe, 5 : forêt), et la classe d'occupation affectée à un pixel est la plus importante qu'il contient. Le réseau routier est visible à toutes les échelles et il apparaît que plus l'échelle est grande, plus l'importance des bâtiments (ici essentiellement des pavillons) est surestimée par

rapport aux jardins attenants. Une illustration des conséquences hydrologiques de ces choix est le coefficient d'imperméabilisation (obtenu en prenant en compte les classes d'occupation « avaloir », « route » et « bâtiment ») qui reflète la proportion d'eau immédiatement active. Il est égale à 87, 83, 77, 63, 53, 47, 40 % respectivement pour des tailles de pixels de 20, 15, 10, 5, 3, 2, 1 m. Ce comportement est typique d'un ensemble fractal. Plus précisément les variations du coefficient d'imperméabilisation s'expliquent bien à l'aide de la notion de dimension fractale. En effet, la Figure 31 représente la courbe de détermination de la dimension fractale de la portion imperméabilisée du bassin (Eq. 1 dans un graphique en log-log). On trouve une dimension fractale de 1.85 avec un très bon coefficient  $R^2$  ( $>0.99$ ) Par ailleurs la surface du bassin est de 1.42 km<sup>2</sup> à une échelle de 1 m, de 1.49 km<sup>2</sup> à 20 m.

Le bassin « Kodak » fait par ailleurs partie de la zone étudiée dans la section précédente, et nous disposons donc d'une modélisation semi-distribuée 1D avec Canoé (Figure 30.d). Le bassin « Kodak » est modélisé plus finement que le reste de la grande zone, puisqu'il est subdivisé en 16 sous-bassins versants dont la surface va de 4 à 14.5 ha. L'aire totale modélisée est de 1.39 km<sup>2</sup>. Le coefficient d'imperméabilisation moyen est de 48 % dans le modèle Canoé, ce qui correspond à celui qui est obtenu avec des pixels de 3 m. Le réseau d'assainissement est beaucoup plus détaillé dans Multi-Hydro.



**Figure 30 :** (a), (b) et (c) Carte de l'occupation du sol mise en œuvre dans Multi-Hydro à une échelle de 1 m, 10 m et 20 m. Le réseau d'assainissement modélisé avec SWMM est superposé à cette carte (les nœuds, qui correspondent à des regards ou des avaloirs, et les canalisations sont visibles le long de la plupart des routes). (d) Capture d'écran du modèle Canoé de la même zone.



**Figure 31 : Courbe de détermination de la dimension fractale de la portion imperméabilisée du bassin Kodak. Le calcul a été fait sur une portion de 512 x 512 pixels de côté 2 m extraite au milieu du bassin (les résultats obtenus en décalant cette zone d'étude sont très similaires).**

#### **4.3.3. Bassin versant de Cranbrook, avec Inforworks**

Le dernier cas d'étude analysé ici est le bassin versant urbain de Cranbrook situé dans le district de Redbridge à Londres (Royaume-Unis) (Figure 32) et connu pour être un lieu fréquent d'inondations urbaines. Ce bassin versant d'environ 9 km<sup>2</sup> s'étend approximativement sur 5.75 km de long, et est essentiellement urbain avec quelques parcs, deux lacs et quelques terrains de jeu. Le modèle utilisé a été fourni calibré (Thames Water Utilities Ltd Engineering, 2002) et repose sur le logiciel d'hydrologie urbaine Inforworks CS (Wallingford Software, 2009). Les paramètres n'ont pas été changés pour les simulations que nous avons effectuées. Il s'agit d'un modèle semi-distribué 1D très similaire à Canoé précédemment présenté. La principale différence réside dans le fait que la réponse hydrologique des sous-bassins versants est modélisée par un double réservoir linéaire dans Inforworks CS et par un simple réservoir linéaire dans Canoé. La zone d'étude est divisée en 51 sous-bassins versants dont la surface varie de 1 à 62 ha avec des temps de concentration allant de quelques minutes à une dizaine de minutes. Le découpage en sous-bassins versants et le réseau modélisé sont visibles en Figure 33. La répartition spatiale du cumul total de pluie (via des images radar) au cours de l'évènement pluvieux de février est également présentée en Figure 33. Le cumul varie de 16 à 23 mm en fonction des sous-bassins versants avec davantage de pluie au sud, à proximité de l'exutoire. Pour l'évènement de juillet cette hauteur varie de 4 à 14 mm du Nord au Sud avec des disparités entre sous-bassins plus prononcées dues à des cellules pluvieuses plus localisées. Dans cette étude, les hydrogrammes de 10 canalisations sont analysés. Ces dernières ont été sélectionnées de façon à couvrir une large gamme de taille de bassin caractérisée par  $L_{sd}$ , la racine carrée de la surface drainée par la canalisation. Ici  $L_{sd}$  varie de 370 à 2910 m (Figure 33).



Figure 32 : Localisation dans la région Londonienne du bassin versant de Cranbrook, et des radars de Chenies (à l'Ouest) et Thurnham (à l'Est).

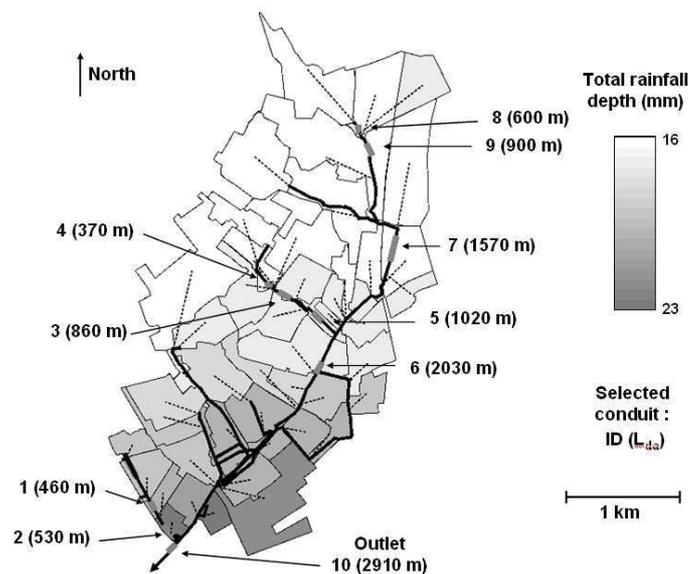


Figure 33 : Représentation schématique du bassin versant de Cranbrook, avec la hauteur totale de pluie reçue par chacun des 51 sous bassins-versants pour l'évènement du 9 février 2009. Les lignes noires correspondent au réseau d'assainissement modélisé.

## **4.4. Impact de la variabilité non-mesurée des précipitations**

### **4.4.1. Analyse sur les modèles 1D semi-distribués**

Le but de cette partie est d'utiliser les propriétés multifractales du champ de pluie pour évaluer l'incertitude associée à la variabilité non mesurée des précipitations. Plus précisément la sensibilité de deux modèles semi-distribués d'hydrologie urbaine à la résolution du champ de précipitation est évaluée. En supposant que ces modèles représentent correctement la relation pluie-débit, cette sensibilité correspond à l'incertitude recherchée. La méthodologie mise en œuvre est la suivante :

- (i) Génération d'un ensemble de 100 champs de pluie réaliste stochastiquement désagrégés à la résolution de 111 m en espace et 1.25 en temps. (cf. section 4.2 pour une description de la méthode)

- (ii) Simulation de l'ensemble correspondant d'hydrogrammes avec les modèles hydrologiques/hydrauliques préalablement calibrés (section 4.3). Mentionnons simplement pour des raisons techniques, la résolution temporelle est ramenée à 5 min en temps pour le cas d'étude avec Canoé.
- (iii) La variabilité au sein de ces ensembles, qui reflète l'incertitude associée à la variabilité à petites échelles non mesurée, est ensuite analysée.

Les résultats sont discutés à partir de la conduite 87 du bassin versant de Seine-Saint-Denis située dans l'Ouest de ce dernier (des courbes similaires sont obtenues pour les autres canalisations et cas d'études). Les cent hydrogrammes simulés sont tracés en Figure 34.a. Mêmes si les courbes présentent des évolutions globalement similaires, leurs détails sont différents. Afin de clarifier ces disparités, qui reflètent l'incertitude associée à la variabilité à petites échelles non mesurée, les quantiles à 10, 50 et 90 % ont été estimés pour chaque pas de temps. Les courbes correspondantes, dénotées respectivement  $Q_{0.1}$ ,  $Q_{0.5}$  et  $Q_{0.9}$  (attention, ce sont des courbes enveloppes qui ne correspondent pas à un seul hydrogramme) sont tracées avec  $Q_{\text{radar}}$  (le débit simulé à partir des données radar brutes à la résolution 1 km x 1 km x 5 min) en Figure 34.b. Cette figure permet de bien visualiser l'incertitude recherchée qui apparaît pour tout l'hydrogramme et a tendance à augmenter avec le débit.

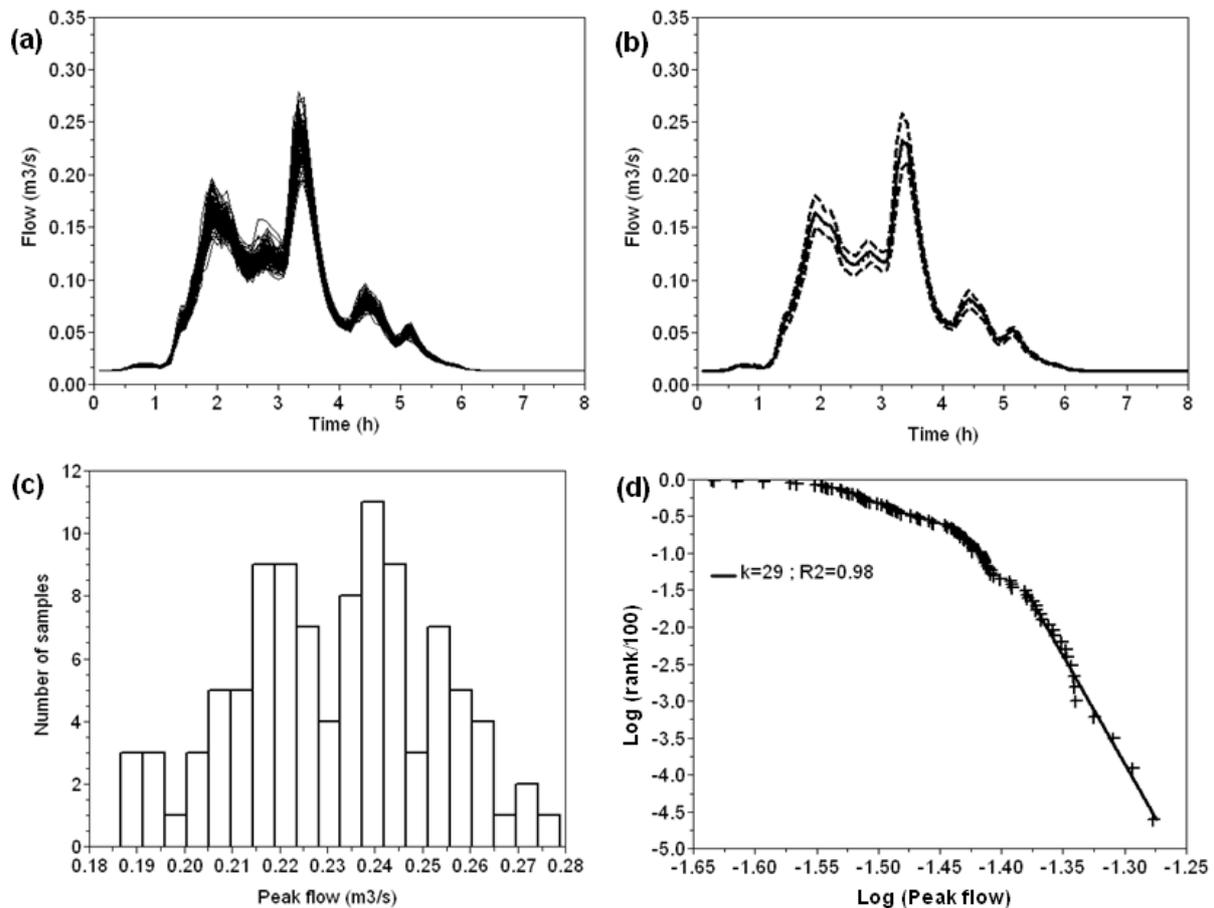
Une approche plus quantitative est mise en œuvre pour le débit de pointe. A cette fin, l'heure d'occurrence du débit de pointe  $t_{PF, \text{radar}}$  avec les données radar brutes est récupérée. Ensuite pour chaque simulation le débit à  $t_{PF, \text{radar}}$  est estimé, et l'histogramme correspondant est tracé en Figure 34.c. Une première étape pour caractériser ce dernier consiste à estimer un coefficient de variation ( $CV'$ ) défini de la façon suivante :

$$CV' = \frac{Q_{0.9}(t_{PF, \text{radar}}) - Q_{0.1}(t_{PF, \text{radar}})}{2 * PF_{\text{radar}}} \quad \text{Eq. 20}$$

$CV'$  est défini à partir des quantiles et pas de l'écart-type ce qui est plus rigoureux pour des distributions asymétriques telles que celle Figure 34.c. Ici on trouve  $CV' = 9.9\%$ . Par ailleurs, il est possible de s'intéresser davantage aux échantillons extrêmes ; i.e. les parties droites des histogrammes. On constate qu'elles sont caractérisées par un comportement en loi de puissance, c'est-à-dire que l'on a :

$$\Pr(X > x) \propto x^{-k} \quad \text{Eq. 21}$$

où  $k$  est l'exposant caractéristique. Afin de vérifier l'ajustement d'une loi de puissance, les débits de pointe pour chaque échantillon ont été triés par ordre décroissant, et le rang divisé par le nombre d'échantillon en fonction du débit de pointe est tracé dans un graphique en échelle log-log. La Figure 34.d représente cette courbe pour la canalisation 87, et est représentative des autres. La ligne droite (coefficient de régression linéaire de 0.98) observée pour les grandes intensités reflète la loi de puissance sous-jacente. On trouve ici  $k = 29$ . Observer ce type de comportement en loi de puissance est classique avec les multifractals (cf. section 6.3 de l'annexe 1), et il est également retrouvé sur les champs de pluie désagrégée. Les conclusions que l'on peut tirer des valeurs numériques de  $k$  en fonction des canalisations étant similaires de celles pour  $CV'$ , nous ne les détaillerons pas ici. Pour plus de détails, se référer à (Gires et al., 2011a, annexe 5; Gires et al., 2011b, annexe 6) où cette question est spécifiquement abordée.



**Figure 34 :** Les figures sont tracées pour la conduite 87 du cas d'étude de Seine-Saint-Denis pour l'évènement du 9 février 2009, en partant d'une résolution initiale de pluie 1 km x 1 km x 5 min. (a) Ensemble des 100 hydrogrammes simulés. (b) Hydrogrammes  $Q_{0.9}$  (trait en tiret),  $Q_{0.5}$  (trait pointillé),  $Q_{0.1}$  (trait en tiret) and  $Q_{radar}$  (trait continu). (c) Histogramme des débits de pointe des 100 échantillons. (d) Courbe de détermination du coefficient  $k$ .

Une carte des coefficients  $CV'$  pour les canalisations du bassin versant de Seine-Saint-Denis pour l'évènement du 9 février 2009 est en Figure 35. Il apparaît que comme attendu  $CV'$  a tendance à décroître pour les conduites aval, ce qui reflète que l'incertitude associée à la variabilité non-mesurée de la pluie est atténuée pour des surfaces drainées plus grandes.  $CV'$  est presque négligeable pour l'exutoire et atteint environ 25 % pour beaucoup de conduites à l'amont. Il convient de remarquer que cette incertitude est significative alors que la résolution du modèle (la racine carrée de la taille moyenne des sous bassins versants est de 412 m) est grossière par rapport à celle de la pluie désagrégée (111 m), qui elle-même ne permet pas de pleinement rendre compte de la variabilité des champs de pluie. Se référer au paragraphe 4.4.2 pour l'utilisation d'un modèle complètement distribué plus fin.

Ces résultats sont similaires à ceux obtenus pour le cas d'étude de Londres (Figure 36) où pour l'évènement du même jour de février 2009 de Londres  $CV'$  est égale à 3.4 % à l'exutoire (la surface du bassin étudié est 4 fois plus petite) et atteint 20 % pour les conduites amont. Pour l'évènement de juillet avec des cellules pluvieuses plus localisées  $CV'$  dépasse 40% pour certaines conduites, et vaut environ 20% à l'exutoire. Cette valeur très grande est due au fait que les pluies les plus intenses sont proches de l'exutoire, si bien que dans ce cas la réponse de ce dernier correspond davantage à celles des sous-bassins versants avoisinants qu'à celle de l'ensemble du bassin de Cranbrook.

Par ailleurs, pour le cas d'étude de Londres, une étude sur tout l'hydrogramme et pas seulement le débit de pointe a été faite, il a été montré que  $Q_{0.9}$  semble présenter une relation

en double loi de puissance avec  $Q_{\text{radar}}$  et  $L_{\text{sd}}$  (pour plus de détail se référer à la section 4.2.2 de Gires et al., 2012b, annexe 3). L'utilisation de radar en bande X dont la résolution spatiale est d'environ 100 m permettrait de réduire l'incertitude associée à la variabilité non-mesurée des précipitations.

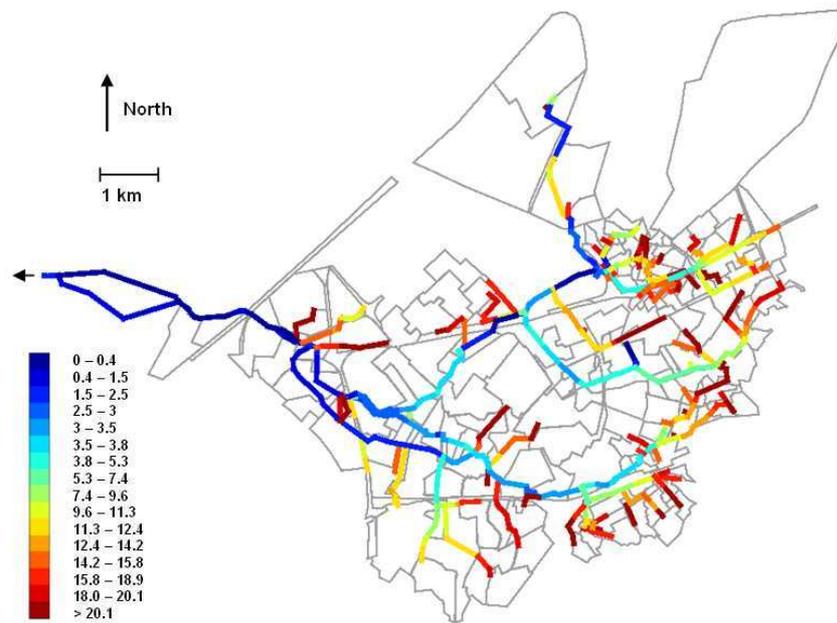


Figure 35 : Carte des  $CV'$  pour le cas d'étude de Seine-Saint-Denis pour l'évènement du 9 février 2009 pour une résolution initiale de pluie de 1 km x 1 km x 5 min.

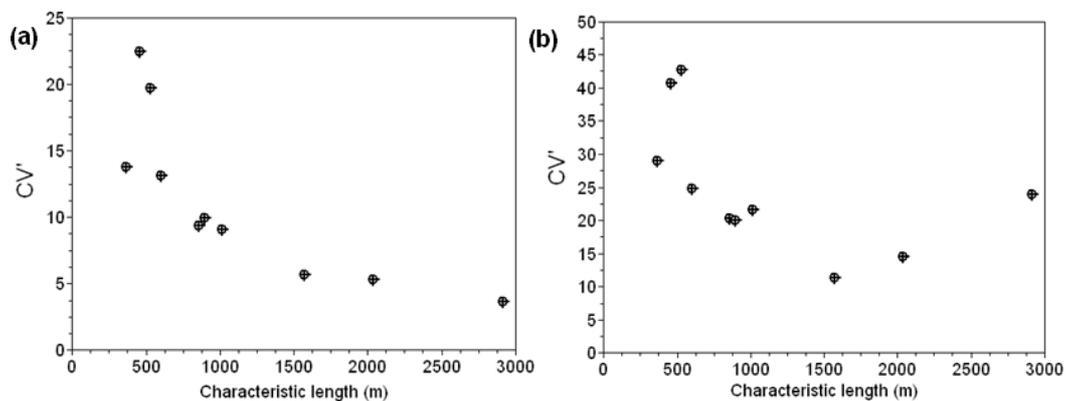
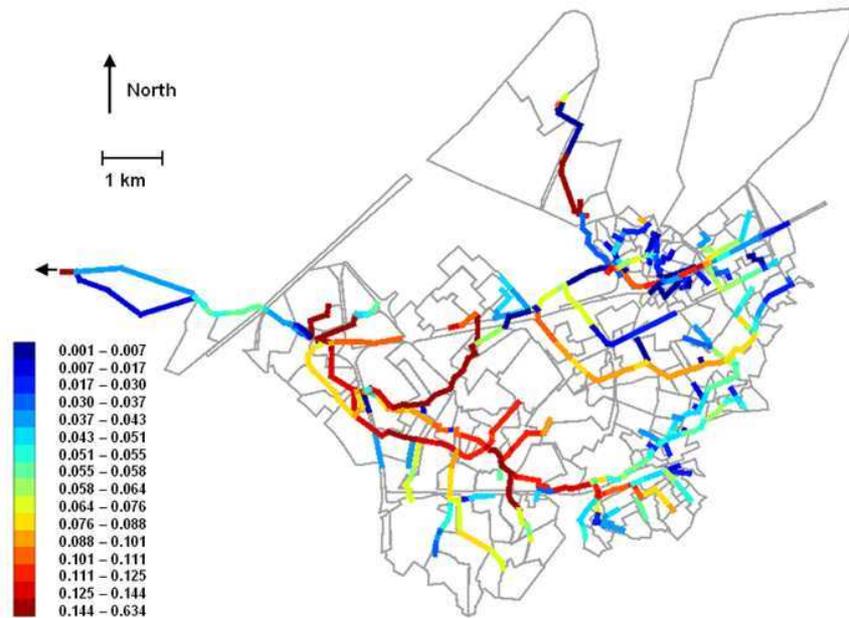


Figure 36 :  $CV'$  évalué pour les canalisations sélectionnées du cas d'étude de Cranbrook pour les évènements de février (a) et juillet (b) (attention, les échelles verticales ne sont pas les mêmes)

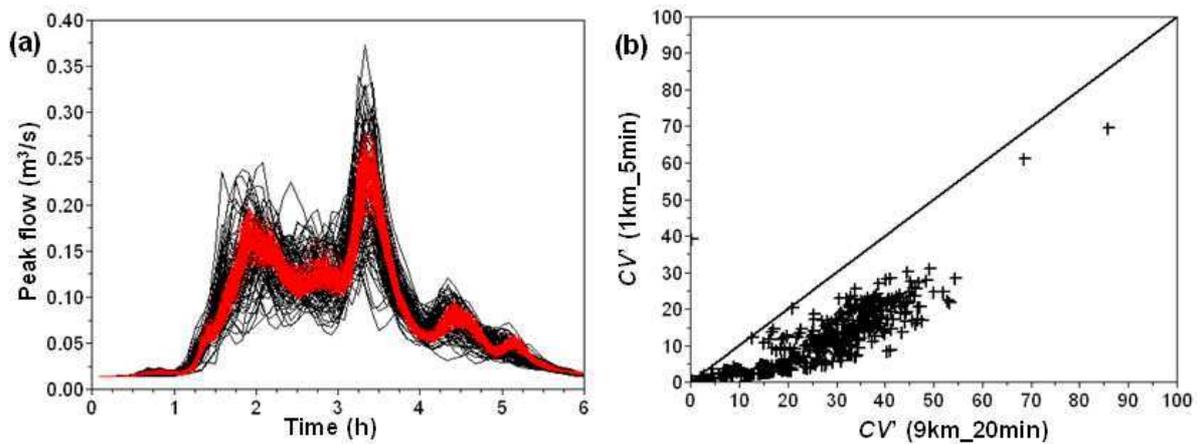
Nous nous sommes pour le moment essentiellement intéressés à des grandeurs relatives. La Figure 37 est une carte de la grandeur  $Q_{0.9}(t_{PF, \text{radar}}) - Q_{0.1}(t_{PF, \text{radar}})$  en fonction des canalisations. Il apparait une zone intermédiaire entre l'amont et l'aval où cette grandeur est maximale. Il s'agit de la zone plus rouge visible au milieu de la Figure 37. Plus à l'amont même si l'incertitude relative est supérieure, les débits restent assez faibles, tandis que plus à l'aval, même si les débits sont plus grands, l'incertitude est atténuée par la taille du bassin versant.



**Figure 37 : Carte de la grandeur  $Q_{0,9}(t_{PF,radar}) - Q_{0,1}(t_{PF,radar})$  (en m<sup>3</sup>/s) pour le cas d'étude de Seine-Saint-Denis pour l'évènement du 9 février 2009 pour une résolution initiale de pluie de 1 km x 1 km x 5 min.**

La même étude a été faite pour le cas d'étude de Seine-Saint-Denis en partant d'une pluie avec une résolution de 9 km en espace et 20 min en temps, obtenue en agrégeant les données radar brutes. Dans cette configuration, un pixel de 9 km x 9 km recouvre presque complètement le bassin étudié, si bien que cela revient globalement à considérer une pluie uniforme (en espace). Dans ce cas, quatre pas de cascade sont effectués pour obtenir la même résolution finale de 111 m en espace et 1.25 min en temps.

Les ensembles d'hydrogrammes simulés pour les deux résolutions initiales sont tracés Figure 38.a. Comme attendu, les hydrogrammes pour la résolution initiale plus grossière de pluie (i.e. 9 km x 9 km x 20 min) recouvrent les autres, ce qui reflète simplement que l'incertitude croit lorsque la précision du champ initial décroît. Les CV' correspondant ont été estimés et présentent une répartition similaire à celle de la Figure 35, avec des valeurs plus élevées. Afin de clarifier ce point, les CV' estimés pour les deux résolutions initiales de champ de précipitation sont présentés en Figure 38.b. Même si aucune tendance claire ne se dégage, il apparaît tout de même que l'incertitude est plus de deux fois plus grande avec la résolution plus grossière. Cette figure permet de quantifier l'apport en terme de réduction d'incertitude de l'utilisation de radars en bande C, qui fournissent des données à une résolution de 1 km x 1 km x 5 min, par rapport à l'utilisation d'une pluie uniforme sur l'ensemble du bassin. Il est intéressant de noter que les valeurs de CV' trouvées sont du même ordre de grandeur que l'erreur relative (en valeur absolue) faite sur les débits de pointe en prenant en compte une pluie à la résolution de 9 km x 9 km x 20 min par rapport celle disponible à 1 km x 1 km x 5 min. En effet cette erreur relative est supérieure à 10% et 20% pour respectivement un tiers et un dixième des conduites. Une brève analyse sur cette erreur relative pour le cas d'étude de Londres est disponible en section 4.1 de Gires et al. (2012b, annexe 3).



**Figure 38 : Figures obtenues pour le cas d'étude de Seine-Saint-Denis pour l'évènement du 9 février 2009. (a) Pour la conduite 87, 100 échantillons d'hydrogrammes simulés à partir d'une résolution de 1 km x 1 km x 5min (rouge) ou 9 km x 9 km x 20 min (noir). (b) Comparaison des CV' en fonction de la résolution initiale de pluie pour toutes les canalisations.**

Même si le but de cette partie est de tester la sensibilité de deux modèles semi-distribués à la résolution des données de précipitations, leur validité a également été analysée pour l'évènement du 9 février 2009 sur le cas d'étude de Seine-Saint-Denis. A cette fin le niveau d'eau mesuré dans le bassin de stockage 1 (voir Figure 39.b pour un schéma de la configuration locale) est comparé au niveau d'eau dans la large canalisation qui le représente dans le modèle Canoé (Figure 39.c). L'eau arrivant dans cette canalisation provient de 4 sous-bassins versants couvrant une superficie de 256 ha (Figure 39.a). Ces sous-bassins versants sont parmi les plus grands, ce qui peut affecter la fiabilité des flux simulés. Comme indiqué sur le schéma Figure 39.b, le remplissage des bassins dépend fortement de l'état de deux vannes. La Figure 39.d montre l'évolution temporelle du niveau d'eau mesuré. Deux modes de gestion des vannes sont testés : celui classique (c'est celui qui est utilisé dans cette étude, en bleu sur la Figure 39.d), et celui qui a été effectivement mis en œuvre le jour de cet évènement (en rouge sur la Figure 39.d). Le comportement global est assez similaire dans les deux cas. Les principales différences sont visibles au niveau du début de la montée des eaux, et de l'heure d'ouverture de la vanne 1 qui déclenche la brusque chute du niveau d'eau à la fin de la simulation. Ces deux évènements sont naturellement mieux représentés avec le mode de fonctionnement réel des vannes, si bien que nous ne discuterons que ce dernier dans la suite de ce paragraphe. La montée du niveau d'eau est plutôt bien représentée par le modèle. Néanmoins après 5.5 h de simulation, le modèle simule d'abord une chute, puis une stabilité du niveau d'eau, alors que les mesures indiquent une poursuite de la montée mais moins rapide que précédemment. Cette contradiction est certainement due aux différences entre la configuration réelle des bassins de stockage (Figure 39.b) et sa représentation dans le modèle (Figure 39.c) qui ne permet pas de simuler précisément les flux d'eau. En effet les deux bassins sont modélisés par deux larges canalisations, et de plus dans le modèle Canoé la vanne 2 n'assure pas la jonction du deuxième bassin directement au premier mais au nœud PMB0. En conséquence, lorsque la vanne 2 est ouverte dans le modèle (comme c'est le cas après 5.5 h ici) l'eau n'est pas relâchée dans le premier bassin, et au lieu de ça va directement au nœud PMB0. Ainsi le niveau d'eau n'augmente pas dans le premier bassin comme cela est mesuré. L'impact de la variabilité à petites échelles de la pluie (à partir d'une résolution de 1 km x 1 km x 5 min) est illustré avec les courbes en pointillé sur la Figure 39.d, qui représente les quantiles à 10 et 90% pour chaque pas de temps de l'ensemble des évolutions temporelles des hauteurs d'eau simulées (voir le paragraphe précédent pour plus de détail sur la méthodologie). Cette incertitude est essentiellement visible au moment où les niveaux sont les

plus élevés. Ils convient de noter que la grande taille de ces sous-bassins versants ne permet pas de pleinement rendre compte de la variabilité générée par la désagrégation du champ de précipitation.

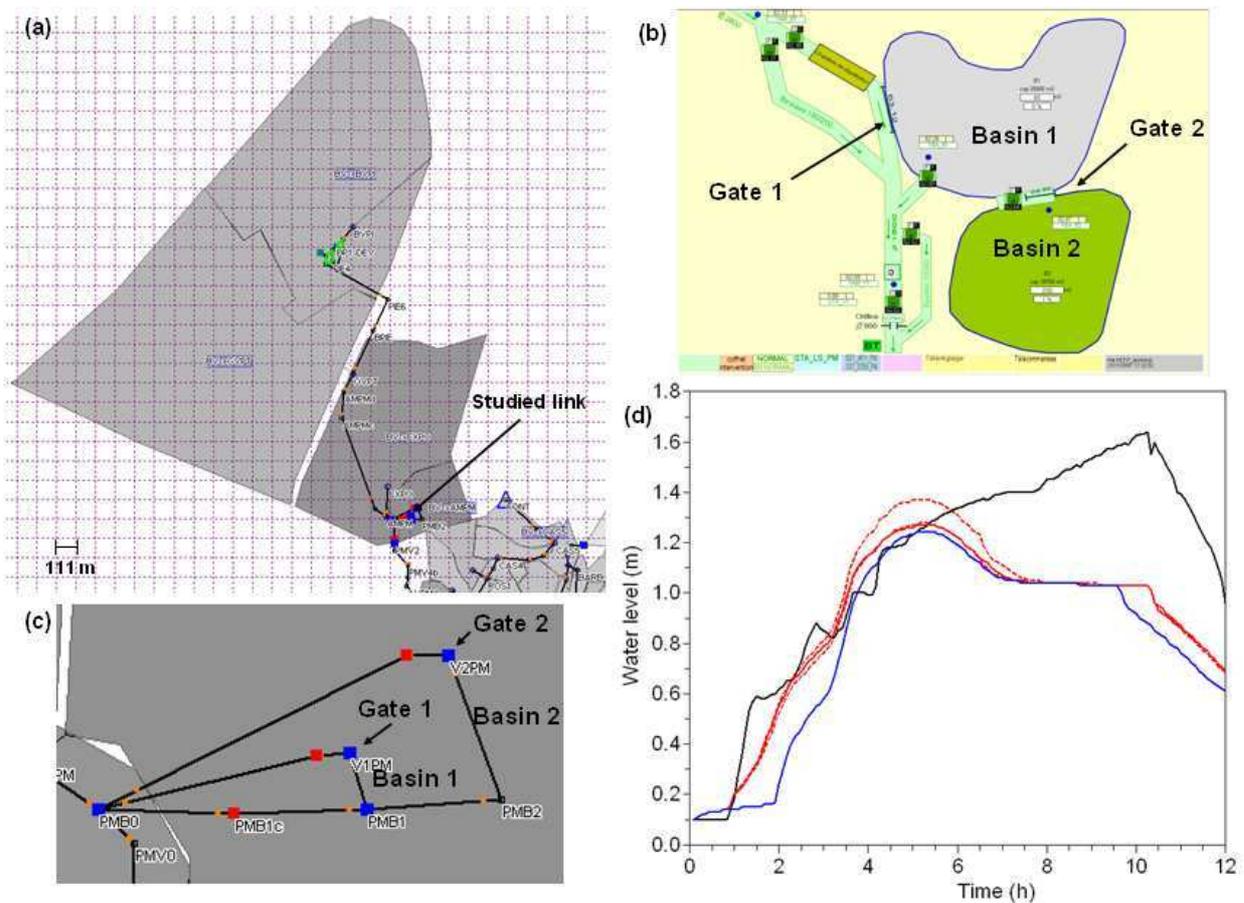


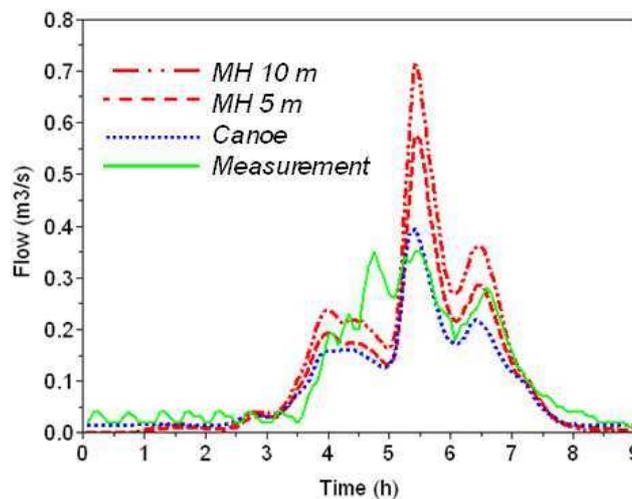
Figure 39 : (a) Capture d'écran du modèle Canoé des 4 sous-bassins versants dont l'eau est drainée vers les conduites où des mesures de hauteur d'eau sont disponibles. (b) Schéma de la configuration réelle des deux bassins de stockage où des mesures de hauteur d'eau sont disponibles. (c) Représentation de ces bassins dans le modèle Canoé (d) Evolution temporelle du niveau d'eau dans la canalisation étudiée (qui correspond au bassin (1) pour l'évènement du 9 février 2009: mesurée (noir), simulée avec un fonctionnement classique des vannes (bleu), simulée avec le fonctionnement réel des vannes (trait continu rouge) et l'incertitude correspondante associée à la variabilité à petites échelles de la pluie (traits pointillés rouges).

#### 4.4.2. Analyse sur le modèle distribué Multi-Hydro (et comparaison)

Comme mentionné précédemment, les modèles semi-distribués utilisés jusque-là ne permettent pas de prendre pleinement en compte la variabilité spatiale de la pluie du fait de la taille trop grossière des sous-bassins versants. Dans cette partie nous mettons en œuvre le modèle distribué Multi-Hydro et le modèle semi-distribué Canoé sur le bassin « Kodak » de  $1.45 \text{ km}^2$ , qui a été présenté en détail section 4.3.2. L'évènement du 9 février 2009 est utilisé.

La première étape consiste à comparer les débits simulés avec les données radar brutes (i.e. non désagrégées) par les différents modèles (Multi-Hydro 10 m, 5 m et Canoé) et mesurés au niveau du point de mesure situé au Nord-Est de l'ancien site de l'usine Kodak (Figure 30) qui draine environ les 2/3 des eaux pluviales du bassin. Les hydrogrammes sont

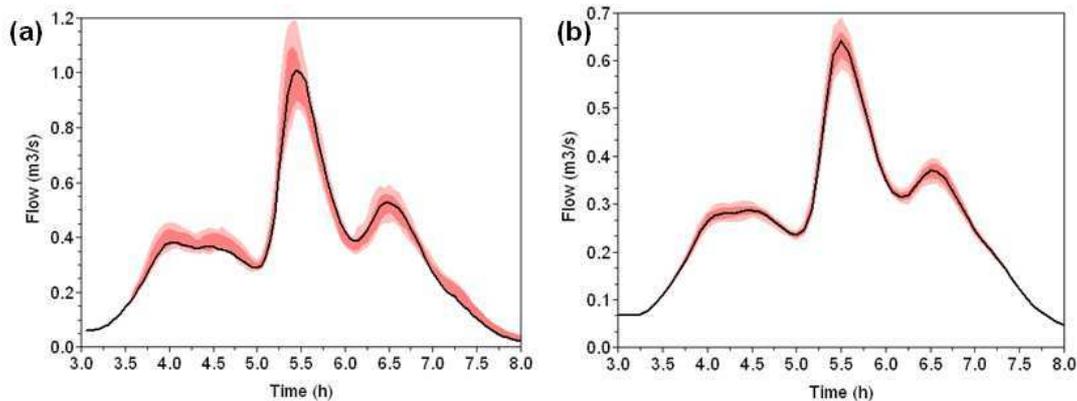
en Figure 40. Cette pluie n'engendre pas de débordement d'égout. Avant de poursuivre il convient de préciser qu'il n'y a eu aucune calibration pour les paramètres de Multi-Hydro (des valeurs assez générales pour les grandeurs physiques caractéristiques des classes d'occupation du sol et de sol ont été utilisées), alors que le modèle semi-distribué 1D a été calibré. Les différences de valeur numérique sont essentiellement causées par les différences de coefficient d'imperméabilisation. Il n'y a pas de décalage temporel significatif entre les modèles. En ce qui concerne la comparaison avec les mesures, le coefficient de Nash-Sutcliffe vaut 0.40 pour MH 10 m, 0.68 pour MH 5 m et 0.78 pour Canoé. Les trois modèles réagissent trop vite au début de l'évènement de pluie ce qui est probablement dû à une mauvaise représentation des pertes initiales. Les trois modèles manquent le premier pic. Une explication possible (non vérifiée) pourrait être des erreurs au niveau des mesures de pluie ou de débit. Il faudrait de toute façon plus d'évènement pour valider correctement ces modèles. L'objectif est ici de montrer que les débits simulés avec les modèles sont grossièrement corrects et qu'il est légitime d'en analyser la sensibilité à la résolution des données de précipitations, ce qui est l'objectif de cette partie.



**Figure 40 : Comparaison des débits simulés par Multi-Hydro et Canoé à l'exutoire du bassin « Kodak » pour l'évènement du 9 février 2009.**

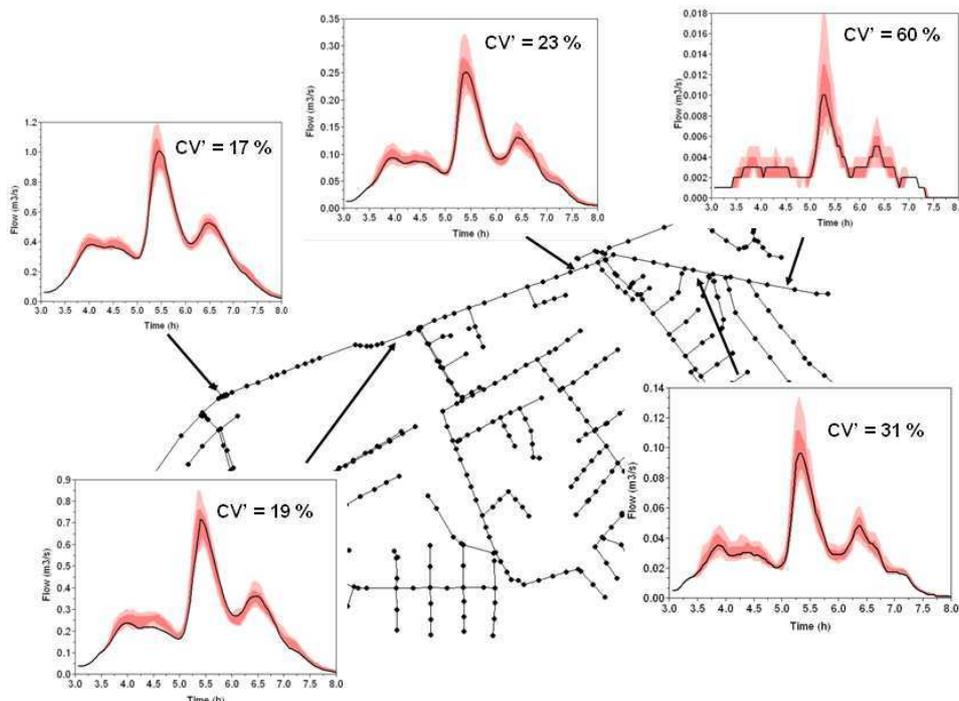
De même que précédemment, nous cherchons à quantifier l'impact de la variabilité non-mesurée de la pluie. A cette fin la même méthodologie que pour les modèles semi-distribués est mise en œuvre. La seule différence est que quatre pas de cascade spatio-temporelle sont effectués avec Multi-Hydro au lieu de deux avec les modèles semi-distribués pour atteindre une résolution du champ de pluie de 12.3 m en espace et 18.75 s en temps au lieu de 111m en espace et 1.25 min en temps. Les débits simulés avec les données radar brutes ( $Q_{\text{radar}}$ ), et les incertitudes correspondantes  $Q_{0.1}$ ,  $Q_{0.25}$ ,  $Q_{0.75}$  et  $Q_{0.9}$  (en  $\text{m}^3/\text{s}$ ) pour l'exutoire sont en Figure 41 (attention les échelles verticales des deux courbes ne sont pas les mêmes, car nous avons souhaité mettre en lumière l'incertitude sur ces dernières). Pour Multi-Hydro, nous ne présentons que les courbes pour une échelle de 10 m (en raison de temps de calcul importants, nous n'avons pas pu simuler des ensembles à une échelle de 5 m au moment de l'écriture de ce manuscrit). Il apparaît que les incertitudes sont plus importantes pour Multi-Hydro que pour Canoé, ce qui montre que le modèle distribué permet de révéler davantage d'incertitude, et pas seulement au niveau du débit de pointe mais aussi pendant les périodes de pluie modérée. Cette impression visuelle est confirmée par les indicateurs quantitatifs développés pour les débits de pointe. En effet, on trouve pour l'exutoire CV' égale à 17 % pour Multi-Hydro à 10 m et 8 % pour Canoé. Ceci signifie simplement que les résultats

fournis par les modèles semi-distribués sont faussement rassurants, et qu'il est nécessaire de prendre davantage en compte les phénomènes de petites échelles, notamment la pluie, en hydrologie urbaine.



**Figure 41 : Hydrogrammes  $Q_{\text{radar}}$  (trait continu),  $Q_{0.25}$  et  $Q_{0.75}$  (couleur sombre),  $Q_{0.1}$  et  $Q_{0.9}$  (couleur claire) pour l'exutoire du bassin Kodak pour l'évènement du 9 février 2009, avec Multi-Hydro à 10m et Canoé (b)**

Enfin l'incertitude en fonction de la position de la conduite dans le réseau a aussi été étudiée pour le bassin Kodak. L'incertitude pour 5 conduites est visible Figure 42. Comme précédemment vu, elle augmente pour les canalisations à l'amont du réseau. Les très grandes valeurs obtenues n'étaient cependant pas nécessairement prévisibles notamment pour un évènement assez courant comme celui étudié. Ceci reflète la nécessité de disposer de données de pluie de qualité pour améliorer la gestion en temps réel en termes de quantité, mais aussi de qualité.



**Figure 42 : Idem Figure 41 pour 5 conduites du bassin Kodak avec le modèle Multi-Hydro à 10 m.**

## **4.5. Analyse multifractales sur les débits simulés**

Dans cette partie les techniques multifractales sont utilisées non seulement pour les champs de précipitation, mais aussi pour analyser les débits simulés. Nous présenterons ici brièvement la méthodologie mise en œuvre et les principaux résultats. Pour plus de détails se référer à la section 5 de Gires et al. (2012d, annexe 7).

Pour étudier ces propriétés, la procédure suivante est mise en œuvre sur le cas d'étude de Seine-Saint-Denis avec le modèle semi-distribué Canoë:

- (i) Génération avec des cascades multifractales spatio-temporelles de 100 champs de pluie réaliste à haute résolution (111 m en espace et 1 min en temps), durant 256 min, correspondant environ à une période de retour de 5 ans.
- (ii) Simulation des hydrogrammes correspondants.
- (iii) Analyse multifractale en moyenne d'ensemble des débits simulés pour chaque canalisation (chaque hydrographe simulé est considéré comme une réalisation indépendante du même phénomène).

Il apparaît que les débits simulés présentent un bon comportement scalant sur une gamme d'échelles allant de 4 h à 5 min. Une analyse des paramètres multifractals  $C_1$  et  $\alpha$  à l'aide de la notion de singularité maximale (voir section 6.5 du cours d'introduction aux multifractals en annexe) observable permet de montrer que globalement le réseau d'assainissement reproduit les extrêmes de la pluie, sans véritablement les atténuer.

## **4.6. Conclusion**

Le but de ce chapitre était d'étudier à l'aide des outils multifractals la sensibilité de modèles d'hydrologie urbaine à la variabilité spatio-temporelle des champs de pluie. Deux modèles semi-distribués (Canoë et Infowork) et un modèle distribué (Multi-Hydro) ont été testés sur des cas d'études correspondant à des bassins versants urbains en Seine-Saint-Denis (34 km<sup>2</sup>, avec un zoom sur un sous-bassin de 1.45 km<sup>2</sup>) et à Londres (9 km<sup>2</sup>). Trois événements pluvieux ont été utilisés (un à Paris et deux à Londres).

Premièrement nous avons étudié l'incertitude sur les débits simulés par les modèles semi-distribués associée à la variabilité de la pluie à des échelles plus petites que 1 km x 1 km x 5 min, qui sont celles habituellement disponibles avec les réseaux de radars en bande C. Une analyse des quantiles sur les débits de pointe montre que cette incertitude excède 20 % sur les canalisations amont. Par ailleurs l'étude avec le modèle distribué Multi-Hydro, montre que cette incertitude est sous-estimée par les modèles semi-distribués classiquement employés. Une étude similaire en partant d'une pluie à la résolution de 9 km x 9 km x 5 min a montré une chute significative de l'incertitude lorsque la résolution disponible avec les radars en bande C était utilisée. Ceci met en lumière l'intérêt de développer l'utilisation de radars en bande X en milieu urbain. En effet ces derniers fournissent des données à une résolution hectométrique permettant une meilleure gestion des eaux pluviales. En attendant il convient de prendre en compte au moins de façon probabiliste l'incertitude associée à la variabilité non-mesurée des champs de pluie, qui ne peut pas être négligée, dans la gestion en temps réel des réseaux d'assainissement.

Deuxièmement les propriétés multifractales des hydrogrammes simulés ont été analysées à l'aide de champs de pluie synthétiques de résolution 111 m x 111 m x 1 min, de

durée 4 h et de période de retour 5 ans. Il apparaît que les débits présentent un comportement scalant sur la gamme d'échelles de 5 min à 4 h et que le réseau d'assainissement n'atténue pas ou seulement très légèrement les extrêmes des précipitations.

## **5. Conclusions générales et perspectives**

Au cours de cette thèse, après avoir caractérisé la variabilité des précipitations à petites échelles, nous avons cherché à quantifier l'impact de cette dernière sur la modélisation des débits en hydrologie urbaine. Nous nous sommes placés dans le cadre multifractal, dans lequel la variabilité est caractérisée non pas à une échelle donnée, mais à travers les échelles. Dans le cadre particulier des multifractals universels, cette variabilité multi-échelle est caractérisée à l'aide de simplement trois paramètres :  $C_1$  l'intermittence moyenne,  $\alpha$  l'indice de multifractalité et  $H$  le paramètre de non-conservation.

Dans un premier volet de la thèse, nous avons procédé à l'étude à l'aide du cadre théorique des multifractals universels de la variabilité du champ de précipitations à partir de données issues de radars en bande C (à une résolution de 1 km en espace et 5 min en temps) et/ou de sorties d'un modèle numérique météorologique d'un évènement cévenol, d'un évènement de la région parisienne, et de deux de la région londonienne. Cette étude a mis en lumière l'intérêt de comparer simulations numériques et données de façon structurelle et à travers les échelles à l'aide d'un modèle spatio-temporel reposant sur un simple exposant d'anisotropie entre l'espace et le temps. Nous avons mis en lumière une rupture dans le comportement scalant à une échelle spatiale d'environ 16 km, qui a également été observée sur les sorties du modèle numérique Mésos-NH du même évènement cévenol. Mais surtout, cette comparaison a mis en valeur le fait que même si le modèle numérique génère un champ de précipitations possédant des propriétés d'invariance d'échelles, il en sous estime la variabilité multifractale et en surestime l'intermittence moyenne.

L'analyse des données précédentes a mis en lumière des écarts par rapport à un multifractal universel unique, qui sont confirmés par la littérature (présence d'une rupture, différence entre les des valeurs standards des paramètres multifractals en analyse spatiale et temporelle). Il est apparu qu'ils sont très probablement dus à une mauvaise prise en compte des zéros de la pluie (un pixel où aucune pluie n'a été mesurée). Ainsi dans un deuxième volet cette question a été abordée sous deux angles. Tout d'abord l'effet d'un seuil, représentant la limite de détection des instruments de mesure, sur un champ multifractal, a été analysé. Il génère une transition de phase multifractale pour les petits moments statistiques qui elle-même entraîne un biais significatif dans l'estimation des paramètres multifractals (sous-estimation de  $\alpha$  et surestimation de  $C_1$ ). Ce modèle représente relativement bien les effets observés à l'échelle d'un évènement pluvieux. En revanche il ne permet pas de rendre compte des propriétés de longues séries. Nous avons donc développé un « toy model » générant des zéros directement au sein du processus de cascade et pas indépendamment de la valeur du champ simulé. Ce modèle donne des résultats encourageants au sens où il permet d'expliquer en partie les incohérences observées et fourni une explication physique à la non-conservativité des champs d'intensité pluvieuses qui a souvent été constatée.

Le troisième volet a consisté en la quantification de l'impact de la variabilité de la pluie en hydrologie urbaine, à travers l'étude de la sensibilité de modèles hydrologiques/hydrauliques urbains à la résolution de la pluie. Plus précisément, la

méthodologie a consisté à générer des ensembles de réalisations réalistes de pluie à plus hautes résolutions à partir des images radar, et analyser la variabilité au sein des ensembles d'hydrogrammes correspondants. Des modèles semi-distribués opérationnels sur deux cas d'études (un bassin versant de 34 km<sup>2</sup> en Seine-Saint-Denis et un de 9 km<sup>2</sup> à Londres) ont été mis en œuvre. Il est apparu que l'incertitude associée à la variabilité non-mesurée (ayant lieu à des échelles plus petites que 1 km en espace et 5 min en temps) est significative, et doit être prise en compte. Une méthodologie similaire a été mise en œuvre avec un modèle distribué (Multi-Hydro, en cours de développement au LEESU) sur un bassin versant de 1.5 km<sup>2</sup>, et a révélé une sous-estimation de l'incertitude par les modèles semi-distribués. Par ailleurs le caractère fractal des réseaux d'assainissement a été constaté et une analyse multifractale des débits simulés a révélé un comportement scalant, ouvrant la voie à de nouvelles façons de tester les modèles et d'analyser les risques.

Ce travail doit être perçu comme une première étape, qui mérite des développements sur la modélisation des champs de précipitations à hautes résolutions, et en hydrologie urbaine aussi bien en modélisation que dans la gestion des réseaux.

Il conviendra dans un premier temps de poursuivre l'amélioration de la représentation théorique des champs de précipitation à hautes résolutions, et donc des techniques de désagrégation spatio-temporelle avec une meilleure prise en compte des zéros du champ de pluie. A partir de là, deux applications sont envisageables dans un futur proche :

- Développement d'outils de comparaison puis de fusion des mesures de précipitation par radars et pluviomètres qui prennent en compte la différence de résolution des deux instruments (environ 20 cm pour un pluviomètre, 100 m pour un radar en bande X et 1 km pour un radar en bande C). En effet, les techniques actuelles négligent à tort la variabilité à petites échelles des précipitations. Ces nouveaux outils s'appuieront sur des cascades multifractales en conditionnant les valeurs aux points de mesures (ici des pluviomètres) (Tchiguirinskaia et al., 2004). Le résultat ne sera pas déterministe, mais consistera en des cartes de probabilités de précipitations.
- Développement d'outils de prévisions à court terme des précipitations se basant sur le cadre des multifractals qui prendra donc intrinsèquement en compte la dynamique invariante d'échelle et non-linéaire des structures pluvieuses, ce que ne font pas les outils actuels. En effet les modèles météorologiques permettent difficilement de faire de la prévision à court terme de précipitation (leurs échelles de fonctionnement sont trop grandes par rapport à celles pertinentes pour les précipitations si bien qu'elles sont pour l'essentiel paramétrisées, et le temps de mise en route trop importants), et les méthodes statistiques actuellement mise en œuvre (reposant principalement sur des corrélations entre des images successives) manquent de base physique. Ces développements s'accompagneront d'une poursuite des réflexions sur la prédictibilité des champs de précipitations à petites échelles (Macor, 2007; Marsan, 1998).

Par ailleurs il est envisageable d'utiliser les techniques multifractales dans le prolongement des travaux de (Biaou et al., 2005; Royer et al., 2008) pour évaluer le changement climatique et ses conséquences à des échelles pertinentes pour l'hydrologie, et notamment l'hydrologie urbaine, ce qui a été reconnu comme essentiel dans le dernier rapport du GIEC (Solomon et al., 2007). Cela répond d'ailleurs à une demande montante des collectivités locales (AFPCN, 2008) qui s'interrogent de plus en plus sur les dimensionnements à prévoir de leurs ouvrages, qui correspondent à de longues périodes d'investissement et de durée de vie. La notion de changement climatique ayant déjà fait

évoluer les modes de réflexion à ce niveau, il devient donc indispensable d'apporter les outils nécessaires pour y répondre.

En termes d'hydrologie urbaine, il conviendra de poursuivre l'étude de l'impact de la variabilité de la pluie avec d'autres cas d'études, en mettant en œuvre des précipitations plus fortes engendrant des débordements de réseau et des inondations par ruissellement pluvial. Il semble que l'utilisation des techniques multifractales sur les débits dans les réseaux d'assainissement soit à poursuivre à la fois pour tester les modèles, mais aussi pour revoir les estimations des périodes de retour des événements comme cela a été fait sur des rivières (Tchiguirinskaia et al., 2012). Ces travaux montrent par ailleurs l'intérêt de déployer des radars en bande X en milieu urbain comme cela a déjà été fait au Japon par exemple (Maki et al., 2005; Maki et al., 2010), qui donnent accès à des données de précipitation à l'échelle hectométrique, qui est l'objet du projet européen Interreg RainGain récemment lancé. Des outils permettant d'exploiter ces informations complémentaires en vue d'une meilleure exploitation des capacités de stockage du réseau pour limiter les débordements de réseaux et le rejet d'eau non traitée dans le milieu naturel doivent être développés.

A plus long terme, il conviendra de développer des outils de modélisation capables de prendre en compte le milieu urbain dans toute sa complexité, adaptés pour traiter la question du changement d'échelle et prenant en compte les phénomènes de petites échelles aussi bien physiques (ex : variabilité de la pluie, mais aussi des autres champs comme les capacités d'infiltration des sols...), que de gestion de l'eau pluviale (cuves de rétention d'eau, toitures végétalisées, technologie de résilience aux inondations...). Ceci constituera un enjeu majeur pour être pionnier dans le domaine de l'hydrologie urbaine quantitative.

## **6. Bibliographie**

- AFPCN, 2008. Adaptation au changement climatique : les risques naturels. Association Française pour la Prévention des Catastrophes Naturelles.
- Allison, INSA-Lyon and Sogreah-consultant, 2005. Manuel d'utilisation de Canoé, [www.canoe-hydro.com](http://www.canoe-hydro.com).
- Andreassian, V., Perrin, C., Michel, C., Usart-Sanchez, I. and Lavabre, J., 2001. Impact of imperfect rainfall knowledge on the efficiency and the parameters of watershed models. *Journal of Hydrology*, 250(1-4): 206-223.
- Andrieu, H. and Creutin, J.D., 1995. Identification of vertical profiles of radar reflectivity for hydrological applications using inverse method .1. Formulation. *Journal of Applied Meteorology*, 34(1): 225-239.
- Andrieu, H., Delrieu, G. and Creutin, J.D., 1995. Identification of vertical profiles of radar reflectivity for hydrological applications using inverse method .2. Sensitivity analysis and case-study. *Journal of Applied Meteorology*, 34(1): 240-259.
- Andrieu, H. and Jacquet, G., 1987. Le radar météorologique de Trappes et l'estimation des intensités pluvieuses en Seine-Saint-Denis. Intérêt pour la gestion des réseaux d'assainissement. *La Houille Blanche*(6): 447-457.
- Arnaud, P., Bouvier, C., Cisneros, L. and Dominguez, R., 2002. Influence of rainfall spatial variability on flood prediction. *Journal of Hydrology*, 260(1-4): 216-230.

- Arnaud, P. and Lavabre, J., 1999. Using a stochastic model for generating hourly hyetographs to study extreme rainfalls. *Hydrological Sciences Journal-Journal Des Sciences Hydrologiques*, 44(3): 433-446.
- Arnaud, P., Lavabre, J., Fouchier, C., Diss, S. and Javelle, P., 2011. Sensitivity of hydrological models to uncertainty in rainfall input. *Hydrological Sciences Journal-Journal Des Sciences Hydrologiques*, 56(3): 397-410.
- Aronica, G. and Cannarozzo, M., 2000. Studying the hydrological response of urban catchments using a semi-distributed linear non-linear model. *Journal of Hydrology*, 238(1-2): 35-43.
- Bak, P., Tang, C. and Weissenfeld, K., 1988. Self-Organized Criticality. *Phys. Rev. Lett.*, 38: 364-374.
- Bendjoudi, H., Hubert, P., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1997. Interprétation multifractale des courbes intensité-durée-fréquence des précipitations, Multifractal point of view on rainfall intensity-duration-frequency curves. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIA - Earth and Planetary Science*, 325: 323-326.
- Bernardara, P., De Michele, C. and Rosso, R., 2007. A simple model of rain in time: An alternating renewal process of wet and dry states with a fractional (non-Gaussian) rain intensity. *Atmospheric Research*, 84(4): 291-301.
- Berne, A., Delrieu, G., Andrieu, H. and Creutin, J.D., 2004a. Influence of the vertical profile of reflectivity on radar-estimated rain rates at short time steps. *Journal of Hydrometeorology*, 5(2): 296-310.
- Berne, A., Delrieu, G., Creutin, J.D. and Obled, C., 2004b. Temporal and spatial resolution of rainfall measurements required for urban hydrology. *Journal of Hydrology*, 299(3-4): 166-179.
- Biaou, A., Chauvin, F., Royer, J.-F. and Schertzer, D., 2005. Analyse multifractale des précipitations dans un scénario GIEC du CNRM. Note de centre GMGEC, CNRM, 101: 45.
- Biaou, A., Hubert, P., Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I. and Bendjoudi, H., 2003. Fractals, multifractals et prévision des précipitations. *Sud Sciences et Technologies*, 10: 10-15.
- Borga, M., 2002. Accuracy of radar rainfall estimates for streamflow simulation. *Journal of Hydrology*, 267(1-2): 26-39.
- Browne, O., Auriaux, G., Idier, F. and Delattre, J.M., 1998. Un système d'aide à la décision pour la conduite du réseau d'assainissement de Seine-Saint-Denis, Novatech'98 Proceedings, Lyon, France, May 4-6 1998.
- Carbonnel, J.P. and Hubert, P., 1988. Caractérisation fractale de la variabilité et de l'anisotropie des précipitations tropicales. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 2: 909-914.
- Chambers, J.M., Mallows, C.L. and Stuck, B.W., 1976. Method for simulating stable random-variables. *Journal of the American Statistical Association*, 71(354): 340-344.
- Ciach, G.J. and Krajewski, W.F., 1999. On the estimation of radar rainfall error variance. *Advances in Water Resources*, 22(6): 585-595.
- Collier, C.G., 1996. Application of weather radar systems. *Series in Atmospheric Physics*.
- Council of the European Communities, 2000. Directive of establishing a framework for community action in the field of water policy. EC Directive No. 2000/60/EEC of 23 October 2000.
- de Lima, J. and Singh, V.P., 2002. The influence of the pattern of moving rainstorms on overland flow. *Advances in Water Resources*, 25(7): 817-828.
- de Lima, M.I.P. and de Lima, J., 2009. Investigating the multifractality of point precipitation in the Madeira archipelago. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 16(2): 299-311.
- de Lima, M.I.P. and Grasman, J., 1999. Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal. *Journal of Hydrology*, 220(1-2): 1-11.

- de Montera, L., Barthes, L., Mallet, C. and Gole, P., 2009. The Effect of Rain-No Rain Intermittency on the Estimation of the Universal Multifractals Model Parameters. *Journal of Hydrometeorology*, 10(2): 493-506.
- de Montera, L., Verrier, S., Mallet, C. and Barthes, L., 2010. A passive scalar-like model for rain applicable up to storm scale. *Atmospheric Research*, 98(1): 140-147.
- Deidda, R., 2000. Rainfall downscaling in a space-time multifractal framework. *Water Resour. Res.*, 36: 1779-1794.
- Deletic, A. et al., 2009. Defining Uncertainties in Modelling of Urban Drainage Systems. *Proceedings, 8th International Conference on Urban Drainage Modelling*, Tokyo, Japan: 1-12.
- Delrieu, G. et al., 2009a. Bollene-2002 Experiment: Radar Quantitative Precipitation Estimation in the Cevennes-Vivarais Region, France. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 48(7): 1422-1447.
- Delrieu, G. et al., 2009b. Weather radar and hydrology Preface. *Advances in Water Resources*, 32(7): 969-974.
- Desaulnier-Soucy, N., Lovejoy, S. and Schertzer, D., 2001. The continuum limit in rain and the HYDROP experiment. *J. Atm. Res.*(59-60): 163-197.
- Dodov, B. and Foufoula-Georgiou, E., 2005. Incorporating the spatio-temporal distribution of rainfall and basin geomorphology into nonlinear analyses of streamflow dynamics. *Advances in Water Resources*, 28(7): 711-728.
- Douglas, E.M. and Barros, A.P., 2003. Probable maximum precipitation estimation using multifractals: Application in the eastern United States. *Journal of Hydrometeorology*, 4(6): 1012-1024.
- Einfalt, T. et al., 2004. Towards a roadmap for use of radar rainfall data in urban drainage. *Journal of Hydrology*, 299(3-4): 186-202.
- El Tabach, E., Tchiguirinskaia, I., Mahmood, O. and Schertzer, D., 2009. Multi-Hydro: a spatially distributed numerical model to assess and manage runoff processes in peri-urban watersheds, Final conference of the COST Action C22 Urban Flood Management, Paris 26/27.11.2009, France.
- Emmanuel, I., 2011. Evaluation de l'apport de la mesure de pluie par radar météorologique pour la modélisation pluie-débit de petits bassins versants, PhD Thesis, ISTTAR, Nantes, France.
- Faures, J.M., Goodrich, D.C., Woolhiser, D.A. and Sorooshian, S., 1995. Impact of small-scale spatial rainfall variability of runoff modeling. *Journal of Hydrology*, 173(1-4): 309-326.
- Ferraris, L., Gabellani, S., Rebora, N. and Provenzale, A., 2003. A comparison of stochastic models for spatial rainfall downscaling. *Water Resources Research*, 39(12).
- Fraedrich, K. and Larnder, C., 1993. Scaling regimes of composite rainfall time-series. *Tellus Series a-Dynamic Meteorology and Oceanography*, 45A(4): 289-298.
- Giangola-Murzyn, A., Gires, A., Hoang, T., Tchiguirinskaia, I. and Schertzer, D., 2012. Multi-Component Physically Based Model to Assess Systemic Resilience in Paris Region. *Proceedings Hydro-Informatics Conference*, Hamburg, 14-18 July 2012, Germany.
- Gires, A., Giangola-Murzyn, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2012a. Impact of small scale rainfall variability in urban areas: a case study with 2D/1D hydrological models in a multifractal framework. *Journal of Hydraulic Research* (submitted in a special issue UDM 10).
- Gires, A. et al., 2012b. Quantifying the impact of small scale unmeasured rainfall variability on urban runoff through multifractal downscaling: A case study. *Journal of Hydrology*, 442-443: 117-128.

- Gires, A. et al., 2011a. Impact of unmeasured rainfall variability on urban discharge: a case study in a multifractal framework. *Houille Blanche-Revue Internationale De L Eau*(4): 37-42.
- Gires, A. et al., 2011b. Impact of small scale rainfall uncertainty on urban discharge forecasts. In *Weather Radar and Hydrology*, Eds: Moore, J., Cole, S., Illingworth, A, IAHS Publ. 351: 400-406.
- Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2011c. Analyses multifractales et spatio-temporelles des précipitations du modèle Meso-NH et des données radar. *Hydrological Sciences Journal-Journal Des Sciences Hydrologiques*, 56(3): 380-396.
- Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2012c. Influence of the zero-rainfall on the assessment of the multifractal parameters. *Advances in Water Resources*, 45: 13-25.
- Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2012d. Multifractal analysis of an urban hydrological model on a Seine-Saint-Denis study case. *Urban Water Journal*. In press.
- Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2012e. A toy model to deal with zero rainfall in a Universal Multifractal framework. *Nonlinear Processes in Geophysics* (submitted).
- Gupta, V.K. and Waymire, E., 1993. A Statistical Analysis of Mesoscale Rainfall as a Random Cascade. *J. Appl. Meteor*, 32: 251-267.
- Harris, D., Menabde, M., Seed, A. and Austin, G., 1996. Multifractal characterization of rain fields with a strong orographic influence. *J. Geophys. Res.*, 101: 26405-26414.
- Harris, D., Menabde, M., Seed, A. and Austin, G., 1997. Factors affecting multiscaling analysis of rainfall time series. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 4: 137-155.
- Harrison, D.L., Driscoll, S.J. and Kitchen, M., 2000. Improving precipitation estimates from weather radar using quality control and correction techniques. *Meteorological Applications*, 7(2): 135-144.
- Hazenbergh, P., Leijnse, H. and Uijlenhoet, R., 2011. Radar rainfall estimation of stratiform winter precipitation in the Belgian Ardennes. *Water Resources Research*, 47.
- Hentschel, H.G.E. and Procaccia, I., 1983. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. *Physica D*, 8(3): 435-444.
- Hittinger, F., 2007. Intercomparaison des incertitudes dans l'Analyse de Fréquence de Crues classique et l'Analyse Mutlifractale de Fréquence de Crues., Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, 35 pp.
- Hoang, T., 2011. Prise en compte des fluctuations spatio-temporelles pluies-débits pour une meilleure gestion de la ressource en eau et une meilleure évaluation des risques, PhD Thesis., Univ. Paris Est, Marne-la-Vallée.
- Hubert, P. and Carbonnel, J.P., 1989. Dimensions fractales de l'occurrence de pluie en climat soudanoshélien. *Hydrologie continentale*, 4: 3-10.
- Hubert, P., Friggit, F. and Carbonnel, J.P., 1995. Multifractal structure of rainfall occurrence in west Africa. In: Z.W. Kundzewicz (Editor), *New Uncertainty Concepts in Hydrology and Water Resources*. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 109-113.
- Hubert, P., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., Bendjoudi, H. and Lovejoy, S., 2007. Predetermination of floods. In: O.F. Vasiliev, P. VanGelder, E.J. Plate and M.V. Bolgov (Editors), *Extreme Hydrological Events: New Concepts for Security*. NATO Science Series IV Earth and Environmental Sciences, pp. 185-198.
- Hubert, P. et al., 1993. Multifractals and extreme rainfall events. *Geophys. Res. Lett.*, 20: 931-934.

- Jaffrain, J. and Berne, A., 2012. Influence of the Subgrid Variability of the Raindrop Size Distribution on Radar Rainfall Estimators. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 51(4): 780-785.
- Jankowsky, S., 2011. Understanding and modelling of hydrological processes in small peri-urban catchments using an object-oriented and modular distributed approach. Application to the Chaudanne and Mercier sub-catchments (Yzeron catchment, France). PhD Thesis., Lyon, France.
- Keddem, B. and Chiu, L.S., 1987. Are rain rate processes self-similar? *Wat. Resour. Res.*, 23: 1816-1818.
- Kolmogorov, A.N., 1962. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid. Mech.*, 83: 349.
- Krajewski, W.F. and Smith, J.A., 2002. Radar hydrology: rainfall estimation. *Advances in Water Resources*, 25(8-12): 1387-1394.
- Labat, D., Mangin, A. and Ababou, R., 2002. Rainfall-runoff relations for karstic springs: multifractal analyses. *Journal of Hydrology*, 256(3-4): 176-195.
- Ladoy, P., Schmitt, F., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1993. The multifractal temporal variability of nimes rainfall data. *Comptes Rendus de l'Academie Des Sciences Serie Ii*, 317(6): 775-782.
- Lafore, J.-P. et al., 1998. The Meso-NH Atmospheric Simulation System. Part I: adiabatic formulation and control simulations. Scientific objectives and experimental design. *Ann. Geophys.*, 16: 90-109.
- Larnder, C., 1995. Observer problems in multifractals: the example of rain, MsC Thesis, McGill Univ., Montreal, Canada.
- Lavallée, D., Lovejoy, S. and Ladoy, P., 1993. Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. In: L. de Cola and N. Lam (Editors), *Fractals in geography*. Prentice-Hall, pp. 171-205.
- Lazarev, A., Schertzer, D., Lovejoy, S. and Chigirinskaya, Y., 1994. Unified multifractal atmospheric dynamics tested in the tropics: part II, vertical scaling and Generalized Scale Invariance. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 1: 115-123.
- Le Bouar, E., Testud, J. and Keenan, T.D., 2001. Validation of the rain profiling algorithm "ZPHI" from the C-band polarimetric weather radar in Darwin. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 18(11): 1819-1837.
- Lilley, M., Lovejoy, S., Desaulniers-Soucy, N., Schertzer, D., 2006. Multifractal large number of drops limit in rain. *Journal of hydrology*, 328: 20-37.
- Lovejoy, S., Duncan, M.R. and Schertzer, D., 1996. Scalar multifractal radar observer's problem. *J. Geophys. Res.*, 101: 26479-26492.
- Lovejoy, S. and Mandelbrot, B., 1985. Fractal properties of rain and a fractal model. *Tellus*, 37(A): 209-232.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 1985. Generalized scale-invariance in the atmosphere and fractal models of rain. *Water Resources Research*, 21(8): 1233-1250.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 1989. Comments on Are rain rate processes self-similar? *Wat. Resour. Res.*, 25: 577-579.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 1990. Fractals, raindrops and resolution dependence of rain measurements. *Journal of Applied Meteorology*, 29(11): 1167-1170.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 1995. Multifractals and rain. In: A.W. Kundzewicz (Editor), *New Uncertainty Concepts in Hydrology and Hydrological modelling*. Cambridge Press, pp. 62-103.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 2007. Scaling and multifractal fields in the solid earth and topography. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 14(4): 465-502.

- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 2008. Turbulence, rain drops and the  $l^{1/2}$  number density law. *New J. of Physics*, 10: 32pp.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 2010. On the simulation of continuous in scale universal multifractals, part I Spatially continuous processes. *Computers & Geosciences*, 36(11): 1393-1403.
- Lovejoy, S., Schertzer, D. and Allaire, V., 2008. The remarkable wide range spatial scaling of TRMM precipitation. *J. Atmos. Research*, 90: 10-32.
- Lovejoy, S., Schertzer, D. and Tsonis, A.A., 1987. Function box-counting and multiple elliptical dimension in rain. *Science*, 235(4792): 1036-1038.
- Macor, J., 2007. Développement de techniques de prévision de pluie basées sur les propriétés multi-échelles des données radar et satellites., Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Marne La vallée, 193 pp.
- Macor, J., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2007. Multifractal Methods Applied to Rain Forecast Using Radar Data. *La Houille Blanche*, 4: 92-98.
- Maki, M. et al., 2005. Semi-operational rainfall observations with X-band multi-parameter radar. *Atmospheric Science Letters*, 6(1): 12-18.
- Maki, M. et al., 2010. X-band Polarimetric Radar Networks in Urban Areas. Proc. Sixth European Conf. on Radar in Meteorology and Hydrology, Sibiu, Romania, Sept. 2010.
- Mandapaka, P.V., Lewandowski, P., Eichinger, W.E. and Krajewski, W.F., 2009. Multiscaling analysis of high resolution space-time lidar-rainfall. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 16(5): 579-586.
- Mandelbrot, B., 1989. Fractal geometry: what is it and what does it do? In: D.J.T.M. Fleischman and R.C. Ball (Editors), *Fractals in the Natural Sciences*. Princeton University Press, Princeton, pp. 3-16.
- Marsan, D., 1998. Multifractals espace-temps, dynamique et prédictibilité; application aux précipitations, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris.
- Marsan, D., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1996. Causal space-time multifractal processes: Predictability and forecasting of rain fields. *J. Geophys. Res.*, 101: 26333-26346.
- Marshall, J.S. and Palmer, W.M., 1948. The distribution of raindrops with size. *J. Meteor.*, 5: 165-166.
- Meischner, P., 2004. *Weather Radar : Principles and Advanced Applications*. Springer, Berlin.
- Menabde, M., Harris, D., Seed, A., Austin, G. and Stow, D., 1997. Multiscaling properties of rainfall and bounded random cascades. *Water Resources Research*, 33(12): 2823-2830.
- Menabde, M. and Sivapalan, M., 2000. Modeling of rainfall time series and extremes using bounded random cascades and Levy-stable distributions. *Water Resources Research*, 36(11): 3293-3300.
- Métadier, M., 2011. Traitement et analyse de séries chronologiques continues de turbidité pour la formulation et le test de modèles des rejets urbains par temps de pluie, PhD Thesis, Lyon, France.
- Meteorological-Office, U., 2009. National Meteorological Library and Archive Fact sheet 15 - Weather radar.
- Morin, J., Rosenfeld, D. and Amitai, E., 1995. Radar rain field evaluation and possible use of its high temporal and spatial resolution of hydrological purposes. *Journal of Hydrology*, 172(1-4): 275-292.
- Niemczynowicz, J., 1991. On the storm movement and its applications. *Atmospheric Research*, 27(1-3): 109-127.
- NOAA, 2005. Federal Meteorological Handbook No. 11, Doppler radar meteorological observations, Part B, Doppler radar Theory and Meteorology.

- Nykanen, D.K., 2008. Linkages between Orographic Forcing and the Scaling Properties of Convective Rainfall in Mountainous Regions. *J. of hydrometeorology* 9: 327-347.
- Nykanen, D.K. and Harris, D., 2003. Orographic influences on the multiscale statistical properties of precipitation. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, 108(D8).
- Olsson, J., 1995. Limits and characteristics of the multifractal behavior of a high-resolution rainfall time series. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2: 23-29.
- Olsson, J., 1998. Evaluation of a scaling cascade model for temporal rainfall disaggregation. *Hydrology and Earth System Sciences*, 2(1): 19-30.
- Olsson, J. and Burlando, P., 2002. Reproduction of temporal scaling by a rectangular pulses rainfall model. *Hydrological Processes*, 16(3): 611-630.
- Olsson, J. and Niemczynowicz, J., 1996. Multifractal analysis of daily spatial rainfall distributions. *J. of hydrology*, 187: 29-43.
- Olsson, J., Niemczynowicz, J. and Berndtsson, R., 1993. Fractal analysis of high-resolution rainfall time series. *J. Geophys. Res.*, 98: 23265-23274.
- Olsson, J., Uvo, C.B. and Jinno, K., 2001. Statistical atmospheric downscaling of short-term extreme rainfall by neural networks. *Physics and Chemistry of the Earth Part B-Hydrology Oceans and Atmosphere*, 26(9): 695-700.
- Onof, C. et al., 2000. Rainfall modelling using Poisson-cluster processes: a review of developments. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 14(6): 384-411.
- Over, T.M. and Gupta, V.K., 1996. A space-time theory of mesoscale rainfall using random cascades. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, 101(D21): 26319-26331.
- Pandey, G., Lovejoy, S. and Schertzer, D., 1998. Multifractal analysis of daily river flows including extremes for basins of five to two million square kilometres, one day to 75 years. *Journal of Hydrology*, 208(1-2): 62-81.
- Parent-du-Châtelet, J., Tabary, P. and Lamargue, P., 2005. Evolution du réseau radar opérationnel de Météo-France pour une meilleure estimation des lames d'eau. *Hydrologie continentale*, 49.
- Parisi, G. and Frish, U., 1985. A multifractal model of intermittency. In: M. Ghill, R. Benzi and G. Parisi (Editors), *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics*. Elsevier North Holland, New-York, pp. 111-114.
- Pecknold, S., Lovejoy, S., Schertzer, D., Hooge, C. and Malouin, J.F., 1993. The simulation of universal multifractals. In: J.M. Perdan and A. Lejeune (Editors), *Cellular Automata: Prospects in astrophysical applications*. World Scientific, pp. 228-267.
- Pleau, M., Colas, H., Lavalée, P., Pelletier, G. and Bonin, R., 2005. Global optimal real-time control of the Quebec urban drainage system. *Environmental Modelling & Software*, 20(4): 401-413.
- Quirnbach, M. and Schultz, G.A., 2002. Comparison of rain gauge and radar data as input to an urban rainfall-runoff model. *Water Science and Technology*, 45(2): 27-33.
- Radkevich, A., Lovejoy, S., Strawbridge, K.B., Schertzer, D. and Lilley, M., 2008. Scaling turbulent atmospheric stratification. III: Space-time stratification of passive scalars from lidar data. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 134(631): 317-335.
- Rebora, N., Ferraris, L., von Hardenberg, J. and Provenzale, A., 2006a. Rainfall downscaling and flood forecasting: a case study in the Mediterranean area. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 6(4): 611-619.
- Rebora, N., Ferraris, L., von Hardenberg, J. and Provenzale, A., 2006b. RainFARM: Rainfall downscaling by a filtered autoregressive model. *Journal of Hydrometeorology*, 7(4): 724-738.

- Rodriguez-Iturbe, I., Cox, D. and Isham, V., 1987. Some models for rainfall based on stochastic point processes. *Proc. R. Soc. A*, 417: 283-298.
- Rodriguez-Iturbe, I., Gupta, V.K. and Waymire, E., 1984. Scale considerations in the modelling of temporal rainfall. *Wat. Resour. Res.*, 20: 1611-1619.
- Rodriguez, F., Andrieu, H. and Morena, F., 2008. A distributed hydrological model for urbanized areas - model development and application to case studies. *Journal of Hydrology*, 351: 268-287.
- Rossman, L.A., 2010. Storm Water Management Model, User's Manual. Version 5.0. U.S. Environmental Protection Agency, EPA/600/R-05/040.
- Royer, J.-F., Biaou, A., Chauvin, F., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2008. Multifractal analysis of the evolution of simulated precipitation over France in a climate scenario. *C.R Geoscience*, 340: 431-440.
- Salles, C., Creutin, J.D. and Sempere-Torres, D., 1998. The optical spectropuviometer revisited. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 15(5): 1215-1222.
- Sarkis, B., 2008. Etude multi-échelle des réseaux d'assainissement. MSc Thesis. Ecole des Ponts ParisTech
- Schertzer, D. et al., 2006. Extremes and multifractals in hydrology: results, validations and prospects. *Houille Blanche-Revue Internationale De L Eau*(5): 112-119.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1987a. Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling and multiplicative processes. *J. Geophys. Res.*, 92(D8): 9693-9714.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1987b. Singularités anisotropes, divergences des moments en turbulence: invariance d'échelle généralisée et processus multiplicatifs. *Ann. Sci. Math. Que*, 11(1): 139-181.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1989. Nonlinear variability in geophysics multifractal analysis and simulations. In: P. L. (Editor), *Fractals Physical Origin and properties*. Plenum Press, New-York, pp. 41-82.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1992. Hard and soft multifractal processes. *Physica A*, 185(1-4): 187-194.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1993. Scaling and multifractal processes, Lecture notes of *Nonlinear Variability in Geophysics 3*.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1997. Universal multifractals do exist!: Comments. *Journal of Applied Meteorology*, 36(9): 1296-1303.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2011. Multifractals, generalized scale invariance and complexity in geophysics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(12): 3417-3456.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., Schmitt, F., Chigirinskaya, Y. and Marsan, D., 1997. Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency. *Fractals-Complex Geometry Patterns and Scaling in Nature and Society*, 5(3): 427-471.
- Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I. and Lovejoy, S., 2011. Getting higher resolution rainfall estimates: X-band radar technology and multifractal drop distribution. *Proceedings of the Weather Radar and Hydrology symposium held in Exeter, UK, April 2011, IAHS Publ.* 351.
- Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I., Lovejoy, S. and Hubert, P., 2010. No monsters, no miracles: in nonlinear sciences hydrology is not an outlier! *Hydrological Sciences Journal-Journal Des Sciences Hydrologiques*, 55(6): 965-979.
- Schertzer, D. et al., 2002. Discussion of "Evidence of chaos in the rainfall-runoff process" - Which chaos in the rainfall-runoff process? *Hydrological Sciences Journal-Journal Des Sciences Hydrologiques*, 47(1): 139-148.

- Schmitt, F., Lavalée, D., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1992. Empirical Determination of Universal Multifractal Exponents in Turbulent Velocity Fields. *Physical Review Letters*, 68(3): 305-308.
- Schmitt, F., Vannitsem, S. and Barbosa, A., 1998. Modeling of rainfall time series using two-state renewal processes and multifractals. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, 103(D18): 23181-23193.
- Schutze, M., Campisano, A., Colas, H., Schilling, W. and Vanrolleghem, P.A., 2004. Real time control of urban wastewater systems - where do we stand today? *Journal of Hydrology*, 299(3-4): 335-348.
- Segond, M.L., Neokleous, N., Makropoulos, C., Onof, C. and Maksimovic, C., 2007a. Simulation and spatio-temporal disaggregation of multi-site rainfall data for urban drainage applications. *Hydrological Sciences Journal-Journal Des Sciences Hydrologiques*, 52(5): 917-935.
- Segond, M.L., Wheater, H.S. and Onof, C., 2007b. The significance of spatial rainfall representation for flood runoff estimation: A numerical evaluation based on the Lee catchment, UK. *Journal of Hydrology*, 347(1-2): 116-131.
- Singh, V.P., 1997. Effect of spatial and temporal variability in rainfall and watershed characteristics on stream flow hydrograph. *Hydrological Processes*, 11(12): 1649-1669.
- Smith, M.B. et al., 2004. Runoff response to spatial variability in precipitation: an analysis of observed data. *Journal of Hydrology*, 298(1-4): 267-286.
- Solomon, S. et al., 2007. Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA, 996 pp.
- Steiner, M., 2005. Estimation of Precipitation Using Ground-based, Active Microwave Sensors. In: M.G. Anderson (Editor), *Encyclopedia of hydrological sciences*. Wiley.
- Tabary, P., 2007. The new French operational radar rainfall product. Part I: Methodology. *Weather and Forecasting*, 22(3): 393-408.
- Tabary, P. et al., 2011. Evaluation of two "integrated" polarimetric Quantitative Precipitation Estimation (QPE) algorithms at C-band. *Journal of Hydrology*, 405(3-4): 248-260.
- Tabary, P. et al., 2007. The new French operational radar rainfall product. Part II: Validation. *Weather and Forecasting*, 22(3): 409-427.
- Takayasu, H., 1990. *Fractals in the physical sciences*. Manchester University Press, Manchester.
- Tchiguirinskaia, I. et al., 2003. Multifractal analysis of the OSP measured rain rates over time scales from millisecond to day. *Proc. IUGG 2003*, Sapporo, Japan.
- Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., Bendjoudi, H., Hubert, P. and Lovejoy, S., 2004. Multiscaling geophysics and sustainable development. *Scales in Hydrology and Water Management*, IAHS Publ. 287: 113-136.
- Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., Hoang, T. and Lovejoy, S., 2011. Multifractal study of three storms with different dynamics over the Paris region. In: R. Moore, C. J. and A.J. Illingworth (Editors), *Weather radar and Hydrology*, IAHS Red Book 351, pp. 421-426.
- Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., Hubert, P., Bendjoudi, H. and Lovejoy, S., 2007. Potential of multifractal modelling of ungauged basins. In: D. Schertzer (Editor), *PUB Kick-Off Meeting*. IAHS Press, Wallingford, UK.
- Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2012. Multifractals and physically based estimates of extreme floods. *Proceedings Hydro-Informatics Conference*, Hamburg, 14-18 July 2012, Germany.

- Tessier, Y., Lovejoy, S., Hubert, P., Schertzer, D. and Pecknold, S., 1996. Multifractal analysis and modeling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, 101(D21): 26427-26440.
- Tessier, Y., Lovejoy, S. and Schertzer, D., 1993. Universal Multifractals: theory and observations for rain and clouds. *Journal of Applied Meteorology*, 32(2): 223-250.
- Testud, J., Le Bouar, E., Obligis, E. and Ali-Mehenni, M., 2000. The rain profiling algorithm applied to polarimetric weather radar. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 17(3): 332-356.
- Thames Water Utilities Ltd Engineering, 2002. Surface Water Model Of CranBrook And Seven Kings Water For London Borough Of Redbridge Appendix B, Model Development Report.
- Velleux, M.L., England, J.F. and Julien, P.Y., 2011. TREX Watershed Modelling Framework User's Manual: Model Theory and Description. Department of civil engineering, Colorado State University, Fort Collins: 106p.
- Veneziano, D. and Furcolo, P., 1999. A modified double trace moment method of multifractal analysis. *Fractals-Complex Geometry Patterns and Scaling in Nature and Society*, 7(2): 181-195.
- Veneziano, D. and Furcolo, P., 2002. Multifractality of rainfall and scaling of intensity-duration-frequency curves. *Water Resources Research*, 38(12).
- Verrier, S., de Montera, L., Barthes, L. and Mallet, C., 2010. Multifractal analysis of African monsoon rain fields, taking into account the zero rain-rate problem. *Journal of Hydrology*, 389(1-2): 111-120.
- Vieux, B.E. and Bedient, P.B., 2004. Assessing urban hydrologic prediction accuracy through event reconstruction. *Journal of Hydrology*, 299(3-4): 217-236.
- Vignal, B., Andrieu, H. and Creutin, J.D., 1999. Identification of vertical profiles of reflectivity from volume scan radar data. *Journal of Applied Meteorology*, 38(8): 1214-1228.
- Vignal, B., Galli, G., Joss, J. and Germann, U., 2000. Three methods to determine profiles of reflectivity from volumetric radar data to correct precipitation estimates. *Journal of Applied Meteorology*, 39(10): 1715-1726.
- Wallingford Software, 2009. Infoworks CS Help documentation.
- Waymire, E. and Gupta, V.K., 1981. The mathematical structure of rainfall representations 1 : a review of the stochastic rainfall models. *Water Resources Research*, 17(5): 1261-1272.
- Wheater, H.S. et al., 2005. Spatial-temporal rainfall modelling for flood risk estimation. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 19(6): 403-416.
- WMO, 2008. Guide to meteorological instruments and methods of observations, WMO-No.8, 7<sup>th</sup> edition.
- Yaglom, A.M., 1966. The influence on the fluctuation in energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval. *Sov. Phys. Dokl.*, 2: 26-30.

## **7. Annexes**

### **7.1. Annexe 1 : Introduction aux multifractals en hydro-météorologie**

# Introduction to multifractals in hydro-meteorology

Auguste Gires  
auguste.gires@leesu.enpc.fr

## Outline

1.	Introduction .....	2
2.	One necessary tool: fractal geometry.....	3
2.1.	Limits of classical geometry.....	3
2.2.	Notion of fractal dimension.....	5
2.3.	Tutorial: fractal trees .....	7
3.	Limits of traditional methods .....	8
3.1.	Predetermination or statistical prediction.....	8
3.2.	Numerous scales of observation .....	10
3.3.	Scale truncation and parameterization in numerical models.....	12
4.	First evidence of scale-invariance in hydrology.....	12
4.1.	Scale invariance in the fundamental equations.....	12
4.2.	Spectral analysis .....	13
4.2.1.	Theory.....	13
4.2.2.	Examples of power spectrum in hydrology .....	13
4.3.	Fractal geometry applied to hydrology .....	16
4.4.	Tutorial: estimation of rainfall support fractal dimension.....	18
4.5.	World precipitation records .....	20
5.	From fractals to multifractals .....	20
5.1.	Cascade phenomenology.....	20
5.2.	Tutorial: the $\beta$ -model .....	22
5.3.	The $\alpha$ -model .....	23
6.	Multifractal properties .....	25
6.1.	Characteristic scaling functions.....	25
6.2.	Singular limit of cascade process and divergence of the fluxes .....	28
6.3.	Bare vs. dressed and divergence of moments.....	30
6.4.	Universality .....	35
6.5.	Sampling dimension.....	36
6.6.	Tutorial : multifractal data analysis techniques .....	37
6.6.1.	Up-scaling of the field.....	38
6.6.2.	Scaling moment function.....	38
6.6.3.	Direct estimation of UM parameters $\alpha$ and $C_1$ .....	40
6.6.4.	The codimension function .....	42
6.7.	Tutorial: non-conservative fields .....	43
7.	Simulations of UM fields .....	48
7.1.	How to build discrete multifractal cascades .....	48
7.2.	Tutorials: simulating UM fields.....	48
7.3.	Levy variables and generalized central limit theorem .....	51
8.	Conclusions .....	52
9.	References .....	52

## 1. Introduction

Let us start by pointing out few basic features that show how hydro-meteorology science is complex. First the governing equations of the processes (ex: Navier-Stokes equations in the atmosphere) are non linear, i.e. the effects are not proportional to causes. There are furthermore interactions between non-linear processes, which lead to non-trivial behaviour. Second geophysical fields exhibit an extreme variability over a wide range of spatial and temporal scales. It should be mentioned that because of a kind of golden age in data availability this variability is more and more visible on wider ranges of scales. Third these fields exhibit a strong intermittency, i.e. the processes are sometimes “ON” and sometimes “OFF”. More precisely the flux (ex: rainfall, or pollutant) are generated by few events per year, the statistics are non-Gaussian which means the probability tails cannot be neglected, and there are long-range correlations.

As a consequence of these features, geophysical fields are complex to measure, to analyse, to model, to simulate, and even to represent. Hence there is a need for a specific formalism and tools enabling to deal with such non-trivial behaviour, not only in an ad hoc way. Multifractal cascades which rely on rather simple physically and mathematically based notions are a very helpful framework to achieve that. For example, the whole scaling variability is quantified with the help of only few relevant parameters.

This course is an introduction to multifractal cascades in the specific context of hydro-meteorology, which means that the analysed data will primarily be rainfall and river or sewer discharge. In section 2 the notion of scale invariance is presented through fractal geometry. Then some limits of traditional methods are discussed in section 3. Section 4 highlights some evidence of scale-invariance in hydro-meteorology. Section 5 discusses the jump from fractals which are used to analyse geometrical sets to multifractals which are used to analyse fields with a full range of intensities. Multifractals properties are presented in section 6. The simulation of discrete universal multifractals is explained in section 7.

A tutorial is furthermore embedded within this course. It mainly consists in performing fractal and multifractal analysis of a rainfall time series to familiarize the reader with these new concepts. The studied data corresponds to a rainfall time series, measured with the help of a tipping bucket rain gauge located in the county of Val-de-Marne (South-East of Paris). The temporal resolution is 1 hour, and only the 512 consecutive time steps (21.3 days) with the heaviest rainfall between 1993 and 2007 are studied. During the selected period 142 mm of rainfall depth were recorded. There is 86 % of zeros. The minimum non-zero value is 0.2mm/h, which corresponds to a tipping of the bucket in one hour. Figure 1 displays the time evolution of the studied rainfall series and the pattern of the rainfall occurrences (i.e. when the rain gauge has recorded some rain)

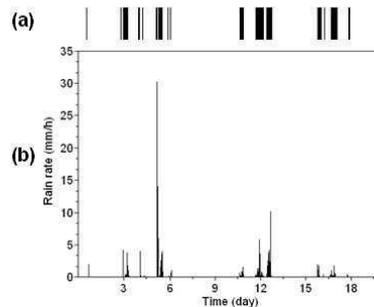


Figure 1 : Studied rainfall time series (b), and pattern of occurrences (a)

Finally it should be mentioned that this document can be read with two levels of complexity, according to how far is the reader willing to dig into the world of multifractals. For a first level approach, the reader should only read the sections which have a vertical black line on the left. In that case the prime aim of this course will be show the reader how rather basic tools relying on simple assumptions enable to characterize and furthermore simulate patterns of rainfall occurrences and rainfall time series similar to the ones of Figure 1. Hopefully it will arouse the curiosity of the reader and he will start to read the whole document!

## 2. One necessary tool: fractal geometry

### Aim:

The aim of this section is to introduce the notion of scale invariance through fractal geometry, which is the first step towards the understanding of multifractal concepts. The examples mentioned in this section are not specifically related to hydrology.

### 2.1. Limits of classical geometry

Classical (i.e. Euclidian) geometry, which basically deals with regular forms obtained with the help of a rule and a compass, enables to represent a great number of natural phenomenon ranging from the elliptical trajectories of planets, to the behaviour of light in the framework of geometrical optics or the molecular structure of a crystal. Nevertheless representing objects such as a sponge, a bracken leaf, a cauliflower, a rocky coastline or a cloud with the help of this geometry is very complex (see Figure 3 for some illustrations). Indeed observed at a smaller scale these objects are not regular but rather exhibit more and more details.

To illustrate this idea, let's consider the famous Von Koch snowflake. This curve is obtained by starting with an equilateral triangle, and then iteratively replacing each elementary segment as follow:

- divide the line segment into three segments of equal length.
- draw an equilateral triangle that has the middle segment from step 1 as its base and points outward.

- remove the line segment that is the base of the triangle from step 2.

The first steps of the Van Koch snowflakes are shown in Figure 2. After  $n$  steps of the process, the snowflake is made of  $N_n = 3 * 4^n$  segments of length  $l_n = (1/3)^n$ . As a consequence, the perimeter of the snowflake is  $P_n = 9 * (4/3)^n$ . It is striking to see that the perimeter has no limit for increasing  $n$ , while the area of the snowflake remains bounded!

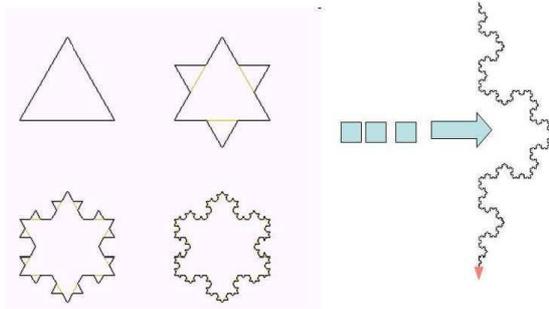


Figure 2 : Van Koch snowflake

Noting that the previously mentioned geometrical objects exhibit similar shapes whatever the scale of observation, Mandelbrot (1975; 1982) introduced the notion of fractal object to represent them. A fractal object is a mathematical object that is generated through an iterative process, and exhibits a scale invariant behaviour (i.e. its form is the same at all scales). Such objects do not have any characteristic scale. As the scale of observation becomes smaller and smaller, details that were not distinguishable at larger scale become visible. Fractals can also be random. In that case, each step of the process should display randomness, and with the same probability laws. For example, in the Van Koch snowflake, it is possible to randomize the process by replacing the middle segment by an isosceles triangle of random height (between pre-defined bounds) rather than an equilateral one. Random fractals usually exhibit a non-uniform appearance which is closer to natural phenomena. Examples of fractal objects are shown in Figure 3.

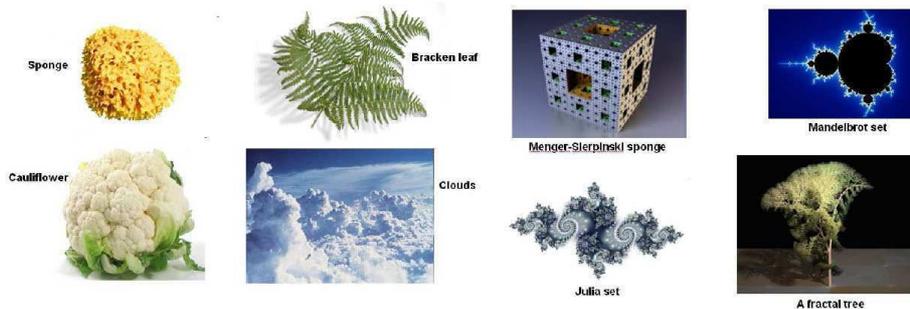


Figure 3: Examples of fractal objects

## 2.2. Notion of fractal dimension

Before introducing the notion of fractal dimension, let's briefly remind basic facts about classical (i.e. topological) dimension. Let's consider a 1D segment of length  $l_0$ . The number of segment of size  $l$  to cover the initial segment is equal to  $N(l) = \left(\frac{l_0}{l}\right)^1$ . More generally the number of non overlapping d-dimensional cube of size  $l$  to cover one of size  $l_0$  is equal to  $N(l) = \left(\frac{l_0}{l}\right)^d$ . After introducing the resolution  $\lambda = \frac{l_0}{l}$ , i.e. the ratio between the outer scale of the phenomenon and the scale of observation we have:

$$N_\lambda = \lambda^d \quad \text{Eq. 1}$$

Figure 4 illustrates this point for a segment (in 1D), a square (in 2D) and a cube (in 3D).

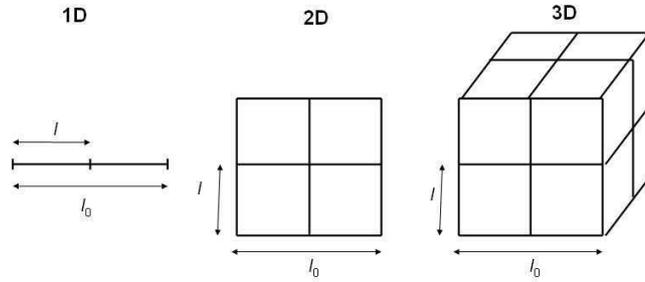


Figure 4: Illustration of the definition of the classical dimension

Let's consider a bounded set  $A$  of size  $l_0$  embedded in  $\mathfrak{R}^D$ . Let  $N_{\lambda,A}$  be the number of non-overlapping cubes of size  $l$  necessary to cover the set  $A$ . For a fractal object this number and the resolution ( $\lambda = \frac{l_0}{l}$ ) are power-law related in the high resolution limit ( $\lambda \rightarrow +\infty$ ), with an exponent equal to the fractal dimension ( $D_F$ ) of the set, i.e. we have:

$$N_{\lambda,A} \approx \lambda^{D_F} \quad \text{Eq. 2}$$

A standard technique to estimate a fractal dimension is the box-counting which relies on the previous equation. To implement this technique, one defines non-overlapping cubes of size  $l$  smaller and smaller, and the fractal dimension is given by:

$$D_F = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln(N_{\lambda,A})}{\ln(\lambda)} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln(N_{\lambda,A})}{-\ln(l)} \quad \text{Eq. 3}$$

The fractal dimension quantifies the sparseness of the set  $A$ , i.e. how much space does it fill. It is possible to interpret this result in a probabilistic way. Indeed, let's consider a cube of size  $l$ .  $P_l$  is the probability that it intersects  $A$ . This probability scales with the resolution:

$$\Pr = \frac{N_{\lambda,A}}{N_\lambda} = \frac{\lambda^{D_F}}{\lambda^D} = \lambda^{-c_F} \quad \text{Eq. 4}$$

Where  $c_F = D - D_F$  is called the fractal codimension of this object.

To illustrate this notion, let's evaluate the fractal dimension of the Cantor set, which is obtained by iteratively removing the middle section of a unit segment (Figure 5). After  $n$  steps of the process the Cantor set is made of  $N(I_n) = 2^n$  unit segment of length  $I_n = (1/3)^n$ . This

yields  $D_F = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(N(I_n))}{-\ln(I_n)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63$ . For the Van Koch snowflake (Figure 2) one finds

$$D_F = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(N(I_n))}{-\ln(I_n)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26.$$

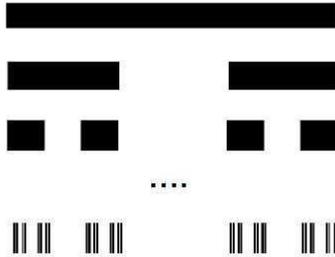


Figure 5 : Illustration of a Cantor set

To conclude this brief presentation of fractal geometry, it should be mentioned that the fractal dimension can be defined more rigorously (mathematically speaking) with the Hausdorff dimension. Let's consider a bounded set  $A$  embedded in  $\mathbb{R}^D$ . The Hausdorff dimension (or fractal dimension) of  $A$  is obtained by either one of these definitions which are equivalent:

Definition 1

The  $\beta$ -measure of Hausdorff  $H^\beta(A)$ ;  $\beta > 0$  is defined by:

$$H^\beta(A) = \lim_{\rho \rightarrow 0} H_\rho^\beta(A)$$

$$\text{where } H_\rho^\beta(A) = \inf_{\left\{ \sum_i |\Delta_i|^\beta; |\Delta_i| < \rho, A \subset \bigcup_i \Delta_i, A \cap \Delta_i \neq \Phi, \Delta_i \cap \Delta_j = \Phi \text{ if } i \neq j \right\}}$$

The Hausdorff dimension is then defined by  $d_H = \inf\{\beta; H^\beta(A) = 0\} = \sup\{\beta; H^\beta(A) > 0\}$

Definition 2

For a covering of  $A$  with  $D$ -dimensional cubes of size  $\varepsilon_i$ , Let's call  $l_d(\varepsilon) = \inf \sum_i \varepsilon_i^d$ ,

where the infimum is taken on all the possible covering with cubes of size smaller than  $\varepsilon$ . Then one defines  $l_d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l_d(\varepsilon)$ . One can show that there is a value  $d_H \in [0, \infty]$ , called the

Hausdorff dimension, so that :

- $l_d = 0$  for  $d > d_H$
- $l_d \in ]0, +\infty[$  for  $d = d_H$
- $l_d = +\infty$  for  $d < d_H$

**2.3. Tutorial: fractal trees**

To illustrate how fractal geometry is useful to easily represent complex geometrical shapes, let us try to plot realistic trees with the help of a fractal process. At each step of the process segments are replaced as shown on Figure 6, where the angle  $\theta$  is a parameter.

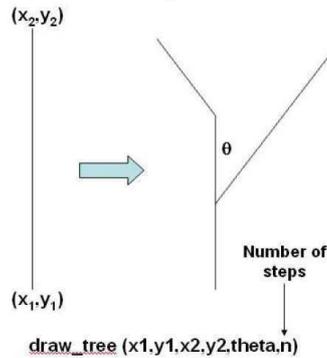


Figure 6 : Illustration of a step of a simple fractal process leading to a tree.

Question

Use the Scilab script "draw\_tree" to plot various trees. Try different number of steps in the cascade process and different angles  $\theta$ .

Answer

Figure 7 displays examples with different  $\theta$ . As it is visible on Figure 8 that simple fractal process enables to draw rather realistic trees. A solution to obtain even more realistic trees could be to randomly select at each step of the process an angle  $\theta$  instead of using a fixed one.

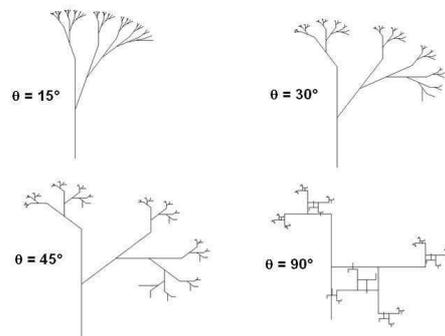


Figure 7 : Illustration of the “trees” obtained with the help of the simple fractal process

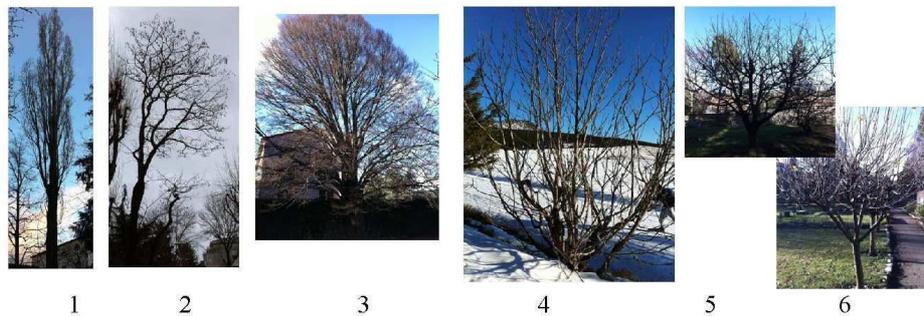


Figure 8 : Pictures of trees from Le Puy-en-Velay (1, 3, 5, 6), Les Estables (4), and Sceaux (2) (France) during the winter 2012

### 3. Limits of traditional methods

Aim:

This section aims at highlighting some limits of traditional techniques used by hydrologists to study geophysical fields highly variable over wide range of scales. This is not an exhaustive list. The main drawbacks mentioned are a lack of physical insight and that the scale issue is often neglected.

#### 3.1. Predetermination or statistical prediction

A classical way of studying the extremes of hydrological series is to perform a frequency analysis. This technique is illustrated in this section with river discharges. The aim is for instance to determine the probability that the discharge of a river will not exceed a given level during a year or conversely the discharge associated with a given level of probability. This information enables statistical prediction, that is to say the announcement of a future event non-precisely located in time. The hazards related to floods or rainfalls are handled with such information in most civil engineering works (dams, levee, sewer system ...).

In this framework the annual maximum of the studied variable (river discharge, rainfall intensities...) is seen as a random variable ( $X$ ), and the aim is to determine the cumulative probability distribution  $F_x(x) = \Pr(X \leq x, \text{ during one year})$ . The probability of non-exceedance is usually expressed in terms of return period  $T_x(x)$ , which expresses the same information in years:

$$T_x(x) = \frac{1}{1 - F_x(x)} \quad \text{Eq. 5}$$

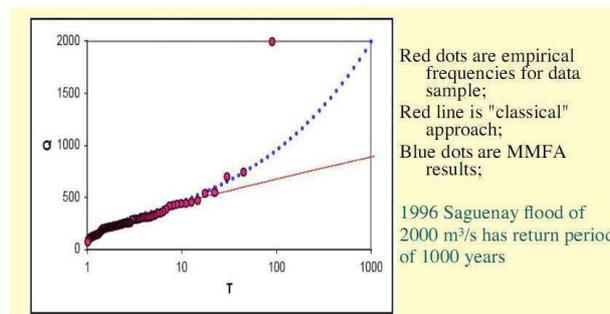
The studied variable  $X$  exceeds  $x$  every  $T_x(x)$  on average.

In order to discuss some limits of this type of analysis let's briefly present how the probability distribution is estimated with the help of annual maximum technique. The highlighted limits remain true when other techniques (mainly Peak Over Threshold) are used because they all basically involve similar steps. In the annual maximum technique, the peak discharge of the  $N$  recorded years are ranked from the largest ( $r = 1$ ) to the smallest ( $r = N$ ). The empirical probability that the discharge will not exceed the value of the  $r$ -st value is defined by

$$F_x(x) = 1 - \frac{r + a}{N + b} \quad \text{Eq. 6}$$

The coefficient  $a$  and  $b$  take into account the finiteness of  $N$  and are expected to be equal to zero in the large  $N$  limit. There are many suggested values in the literature for these parameters (Weibull, Hazen, Cunnane, Gringorten), and no clear rules for selecting one.

The next step, which enables estimating discharge level for return periods longer than the time series (with greater uncertainties!), consists in fitting an existing probability law to the empirical probability. Many different laws are used (GEV, Gumbel, Fréchet, Pearson III, log-Pearson III, Weibull, gamma...), and several fitting methods are available (graphical fitting, method of moments, maximum of likelihood...), yielding different estimates. The extreme value theory (Fischer and Tippett, 1928) suggests to use an extreme value distribution (Gumbel, Fréchet, GEV), but it is not always done. For instance, in an effort to set out uniform technique, in 1967 the Water Resources Council (WRC) has made mandatory the use of log-Pearson III (which is not an extreme value distribution!) for all federal projects (WRC, 2002). Sometimes too extreme events are even considered as outliers and neglected in the implemented techniques that aim at studying these extreme events! As illustrated by Figure 9 these extremes event are sometimes not explained with such classical approaches.



**Figure 9 : Flood frequency analysis of discharge series of Kenogami (United States of America). The “classical” approach does not enable to explain the 1996 flood (red dot at the top of the figure), whereas an approach relying on multifractals (MMFA) yields a return period of roughly 1000. (Courtesy of Ioulia Tchiguirinskaia)**

Despite a century of research, there is no agreement among hydrologists on which law and technique to use (Hubert et al., 2007), which might suggest some limits to this kind of analysis. The choices made either to estimate the empirical probabilities or to select a statistical law or to fit it are often arbitrary and usually highly dependant of the habits of a region... There is a need for a statistical analysis relying on stronger physical insight.

### 3.2. Numerous scales of observation

Geophysical processes exhibit a non-linear variability from very large scales down to small scales (Davis et al., 1994; Ladoy et al., 1991). A fundamental feature of such variable fields is that the observed/measured intensity is highly dependent of the scale of observation, i.e. the duration and surface over which the measurement device averages the intensity. This point is illustrated here with the examples of rainfall. Figure 10.a (Macor, 2007) displays the temporal evolution of rainfall intensity (mm/h) between 1982 and 2000 over a rain gauge located in Laboulaye (Argentina) with observation time steps ranging from one day (top) to one year (bottom). Figure 10.b displays the same variable for a rainfall event that occurred on July 6<sup>th</sup>, 2001 in Bagneux (near Paris), with time steps ranging from 5 minutes to 1 hour. It can be seen that the rainfall intensity is scaled dependant (for example for Laboulaye time series the maximum ranges from roughly 200 mm/h for hourly time step to 1 mm/h for a yearly time step), as well as the rainfall pattern (for example for the Bagneux time series the second peak is the most significant whereas for 30 minute time step it is the first one).

Classically hydrologists quantify the extremes of such fields with the help of Intensity-Duration-Frequency (IDF) curves. An IDF curve is representation of these three main variables (the duration, the corresponding maximum intensity, and the return period) for past data. IDF curves basically rely on a frequency analysis of each duration. A second step involving a new fitting to existing models (Montana, Talbot, Keiffer and Chu) enables obtaining the rainfall intensity as a function of the duration and the return period. Figure 11 displays an example of IDF curves for 30 years of data from the Paris-Montsouris rain gauge obtained with the annual maximum method and a Gumbel law.

Despite its limits (see previous section on frequency analysis) IDF curves provide a great insight in the quantification of extreme rainfall. However having to consider separately duration and intensity appears to be somehow artificial. A statistical formalism that enables to take into account all the durations at once would be more appropriate.

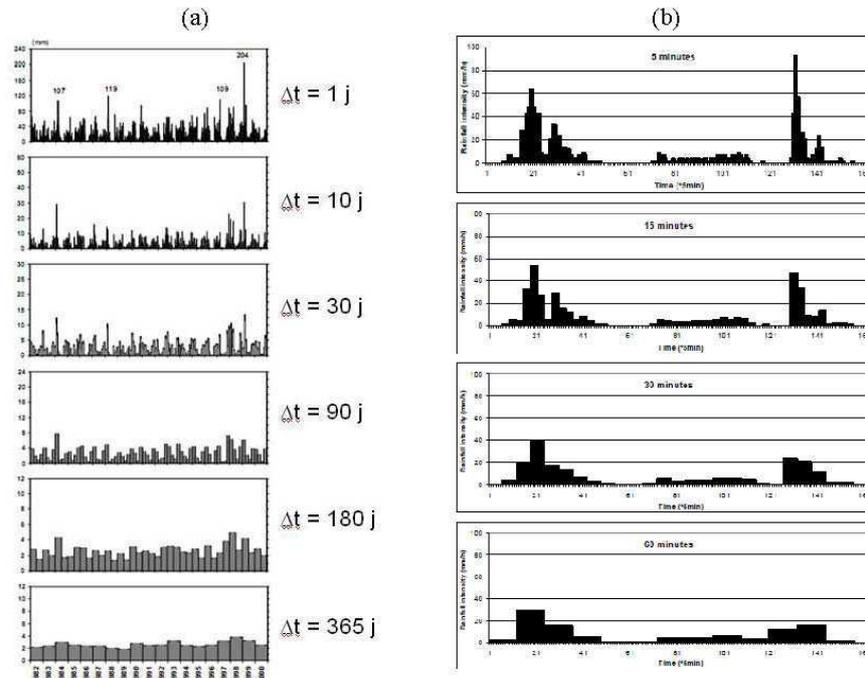


Figure 10 : (a) Observed rainfall at Laboulaye (1982-2000) from 1 hour to 1 year duration (Macor, 2007)  
 (b) Observed rainfall at Bagnaux on July 6<sup>th</sup> 2001 from 5 minutes to 1 hour duration.

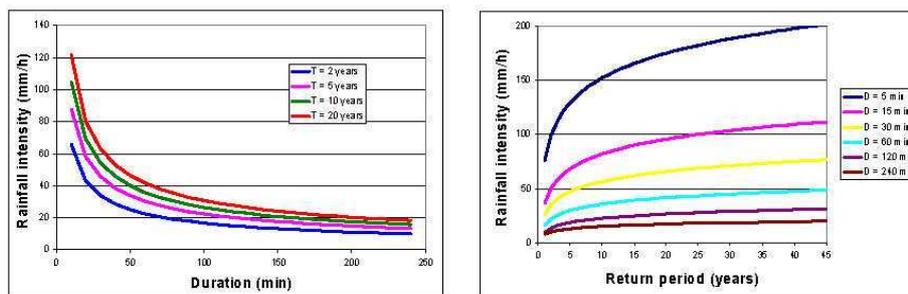


Figure 11 : IDF curves for 30 years of rainfall data from Paris-Montsouris.

### 3.3. Scale truncation and parameterization in numerical models

Another classical way of studying highly variable geophysical field is to rely on numerical models. However these models are not able to reproduce the variability on the whole range of scales where it is observed. Indeed as pointed out by Marsan (1996):

“The deterministic models were developed following the usual methods of geophysical fluid dynamics and largely based on various truncations of the Navier-Stokes equations. They are predicated on the integration of nonlinear partial differential equations which attempt to represent the complex nonlinear dynamics hopefully including appropriate parameterizations of the physics. Because of the limited number of degrees of freedom which can be explicitly modelled, this approach makes drastic scale truncations, typically studying one scale independently of the others, transforming partial differential equations (PDE), into ordinary differential equations (ODE), arbitrarily hypothesizing the homogeneity of subgrid-scale fields, and performing ad hoc parameterizations. Even if one ignores these oversimplifying assumptions the consequences of such choices, which have increasingly weak links with the real world, are ultimately complex and unwieldy numerical codes”.

## 4. First evidence of scale-invariance in hydrology

*Aim:*

This section aims at showing that scale invariance is ubiquitous in hydrology and should therefore be the core principle of any method designed to analyze and/or model hydrological fields.

### 4.1. Scale invariance in the fundamental equations

The basic equations of the atmosphere and the oceans are the Navier-Stokes equations:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \underline{v} + \underline{f} \quad \text{Eq. 7}$$

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0$$

(constraint used to eliminate  $p$ ) where  $\underline{v}$ =velocity,  $t$ =time,  $p$ =pressure,  $\rho$ =density,  $\nu$ =viscosity and  $\underline{f}$ =body force (gravity, stirring...). These equations are invariant under isotropic contractions  $\underline{x} \rightarrow \underline{x}/\lambda$ , as long as:

$$\underline{v} \rightarrow \underline{v}/\lambda^H$$

$$t \rightarrow t/\lambda^{-H}$$

$$\nu \rightarrow \nu/\lambda^{+H}$$

$$\underline{f} \rightarrow \underline{f}/\lambda^{2H-1}$$

where  $H$  is an arbitrary scaling exponent.

This property of scale invariance should remain true for the (unknown) partial differential equations governing rainfall. Discharges should also exhibit scale invariance since they are non conservative integration in the space and time of rainfall (Hubert, 2001). This suggests that the same phenomenon should be observed at each step of the cascade process.

The next two sections are dedicated to confirming the relevance of this theoretical prediction of scale invariance on basic statistical analysis such as spectral analysis and the estimation of fractal dimensions.

## 4.2. Spectral analysis

### 4.2.1. Theory

Let's denote  $\varepsilon$  (a function of the time  $t$  or space  $x$ ) the studied field, and  $\hat{\varepsilon}$  (a function of the wave number  $k$ ) its Fourier transform. The power spectrum  $E(k)$  is defined by:

- In dimension 1 :  $E(k) = \left| \hat{\varepsilon}(k) \right|^2$
- In dimension  $d$  :  $E(k) \propto k^{d-1} \left\langle \left| \hat{\varepsilon}(k) \right|^2 \right\rangle_{k'=k}$  (The exact definition is  $\int_0^\infty E(k) dk = \int \left\langle \left| \hat{\varepsilon}(k) \right|^2 \right\rangle d^D k$ )

The power spectrum is the Fourier transform of the auto-correlation function ( $\Gamma$ ), i.e. we have in 1D:  $\Gamma(\tau) = \langle \varepsilon(t)\varepsilon(t+\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k)e^{-i\tau k} dk$ .

A striking consequence of scale invariance (or scaling) is that the power spectrum follows a power law over a wide range of wave number (Mandelbrot, 1982; Schertzer and Lovejoy, 1985):

$$E(k) \propto k^{-\beta} \quad \text{Eq. 8}$$

where  $\beta$  is the spectral exponent. It is an indicator of the strength of the correlation of the field. A great  $\beta$  corresponds to a short range correlation. The power law shows that there is no characteristic length in the process. Scaling is an ensemble statistical property, which means that the spectrum of a single realization might not exhibit good scaling behaviour. However long series may enable to retrieve correct estimates of the scaling range and the exponent.

### 4.2.2. Examples of power spectrum in hydrology

There are numerous examples of implementation of spectral analysis for discharge data (Pandey et al., 1998; Tessier et al., 1996) as well as for rainfall data (Fraedrich and Larnder, 1993; Georgakakos et al., 1994; Harris et al., 1996; Ladoy et al., 1991; Mandapaka et al., 2009; Menabde et al., 1997; Nikolopoulos et al., 2008; Nykanen and Harris, 2003; Olsson, 1996; Royer et al., 2008; Veneziano et al., 1996) in the literature. Our goal here is not to be exhaustive but only to present few examples.

Tessier et al. (1996) performed a spectral analysis on 30 year long daily rainfall and discharge time series of 30 French basins whose surface ranges from 40 to 200 km<sup>2</sup>. The power spectra for 3 daily river discharge time series are shown Figure 12. Tessier et al. observed a scaling behaviour over two ranges of scales separated by a break occurring between 16 and 30 days. The average (over all the stations) spectrum of flows is presented Figure 13. The peak corresponding to an annual periodicity is visible. They found  $\beta=1.6$  for small scales (1-16 days) and  $\beta=0.7$  for large scales (1 month - 30 years). They observed the same scaling break for rainfall data (Figure 14) for which  $\beta=0.3$  for small scales and  $\beta=0.2$  for large scales. Since they did not find any correlation between the characteristic duration of the scaling break and the basin features (size, geology), they associated it to the synoptic maximum, i.e. the characteristic lifetime of planetary scale atmospheric structures (Kolesnikov and Monin, 1965). Pandey et al. (1998) obtained similar results on daily flow time series of 19 rivers in the USA whose basin areas ranges from 5 to 5x10<sup>6</sup> km<sup>2</sup>.

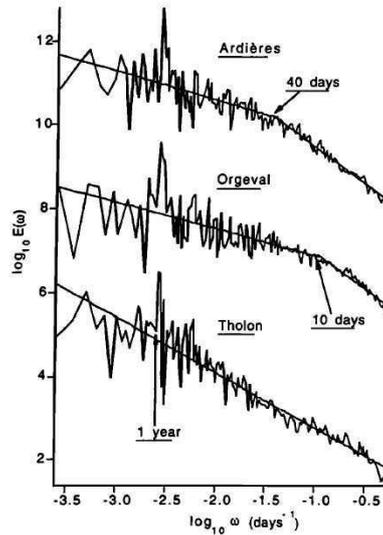


Figure 12 : Power spectra for daily river flows for three different rivers in France (Tessier et al., 1996)

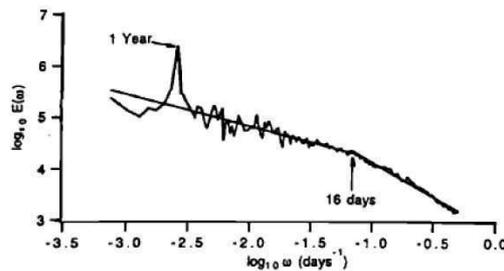


Figure 13 : Power spectrum for daily river flows averaged for all stations (Tessier et al., 1996)

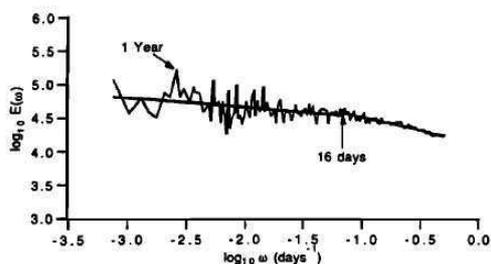


Figure 14 : Power spectrum for daily rainfall accumulations averaged for all stations (Tessier et al., 1996)

Manabde et al. (1997) analyzed a 17 h rainfall event that occurred over Matawai (New-Zeeland) on January 26<sup>th</sup>, 1996, recorded with an electronic rain gauge having a 15s resolution. With the help of a spectral analysis they showed that the rainfall field exhibited a scaling behaviour between 4 min and 17 h with  $\beta=1.37$  (Figure 15).

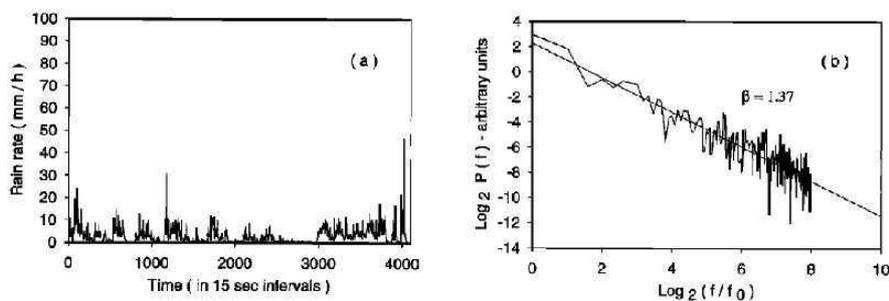


Figure 15 : Rainfall data from Matawai for January 26<sup>th</sup>, 1996 (a) Time series rainfall data (b) Power spectrum (Menabde et al., 1997)

It is also possible to implement a spectral analysis on spatial fields (2D). For example radar data with a resolution of 1 km in space and 5 min in time of a heavy rainfall event that occurred in the south of France on September 5-9<sup>th</sup> 2005 was analysed by Gires et al. (2010). The spectral analysis showed (Figure 16) that the field exhibited a good scaling behaviour on two ranges of scales 1-16 km and 16-512 km, with  $\beta=1.78$  for small scales and  $\beta=1.09$  for large scales.

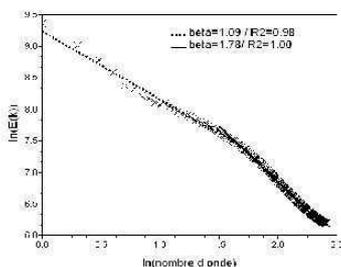


Figure 16 : 2D spectral analysis of a rainfall data corresponding to a heavy rainfall that occurred in the south of France on September 5-9<sup>th</sup> 2005 (Gires et al., 2010)

### 4.3. Fractal geometry applied to hydrology

It appears that fractal geometry, which relies on the notion of scale invariance, is ubiquitous in hydrology. Famous examples are river basins. For instance Bendjoudi and Hubert (2002) showed that the perimeter of the Danube (Eastern Europe) and Seine (France) river basins are too tortuous to be scaled independent. Indeed they showed that the perimeter  $P(l)$  measured with a scale of observation (gauge)  $l$  does not reach a upper limit with smaller and smaller  $l$ , but on the contrary exhibits a power low relation. Figure 17 illustrates this point for the Seine Basins. The authors also observed the same kind of behaviour on the area of the basins.

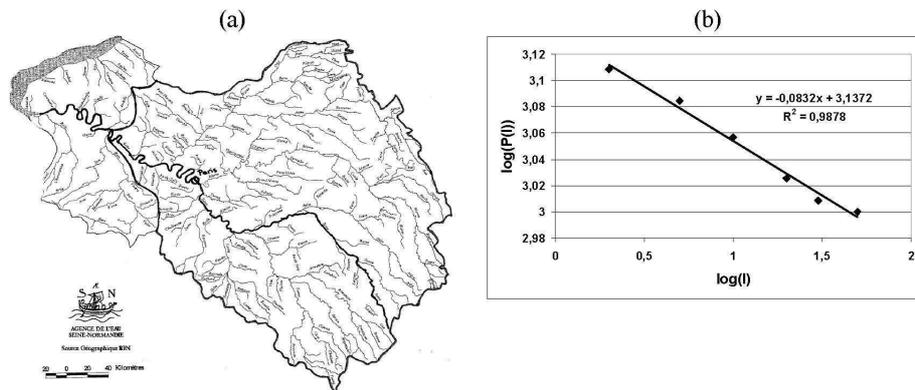


Figure 17 : The Seine river basin (left) and the fractal properties of its perimeter (right) (Bendjoudi and Hubert, 2002)

Numerous studies also showed that the structure of the river network is also fractal. For example Takayasu (1990) showed that the fractal dimension of the Amazon River network was 1.85 (Figure 18.a). The right part of Figure 18.b displays the number of non-overlapping boxes needed to cover the river network as a function of the size of the boxes (i.e.: box counting method) in a log-log plot. The straight line reflects fractal behaviour. He conducted the same study on the Nile river network whose fractal dimension is 1.4 suggesting that the dimension of a river is larger in a region of higher rainfall.

(a)

(b)

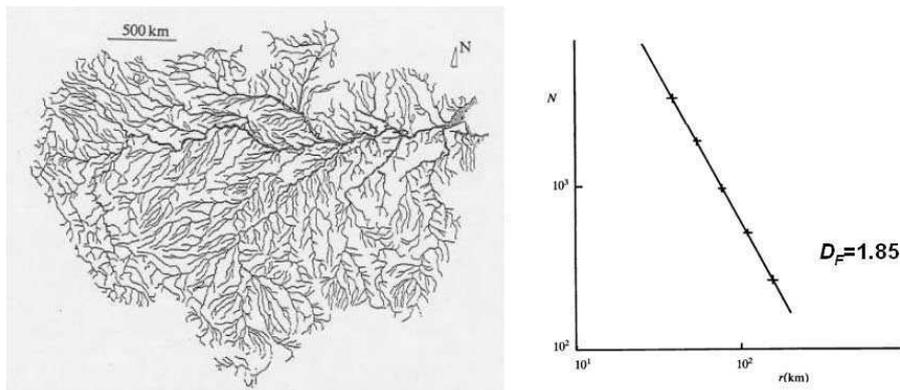


Figure 18 : The Amazon river network (right), and its fractal properties (left). (Takayasu, 1990)

Not only river basins and networks but also rainfall occurrences exhibit fractal properties. Indeed Hubert and Carbonnel (1989) analysed a 45 year daily rainfall time series of Dédougou (Burkina Faso). In Figure 19, only the days when rainfall was observed are highlighted. The authors showed that the occurrence of rainy days exhibited a fractal behaviour with  $D_F = 0.8$ . The observations have striking similarities with the Cantor set, which as explained in section 2.2 is obtained by iteratively removing the middle section of the unit interval, and is of dimension  $\log(2)/\log(3) \approx 0.63$ . Interestingly, in Dédougou the wet season is considered to last 7 month per year and  $\log(7)/\log(12) \approx 0.8$ , which corresponds to the estimated fractal dimension. Nevertheless since rainfall fields exhibit different levels of intensities, their analysis can't be reduced to the oversimplified binary question of occurrence or non-occurrence. This would be all the more less relevant since fractal dimension of rainfall occurrence depends in a sensitive manner (it is a decreasing function) of the threshold defining a negligible intensity (Halsey et al., 1986; Hubert et al., 1995; Schertzer and Lovejoy, 1984). This need for a formalism that deals not only with geometrical sets (here the geometrical support of rainfall occurrence) but also with fields is addressed in the next two sections which introduce multifractals.



Figure 19 : Rainfall data from Dedougou for a 45 year period (1922-1966). Each line is a different year and each point a rainy day. (Hubert and Carbonnel, 1989)

#### 4.4. Tutorial: estimation of rainfall support fractal dimension.

Question:

Use the function “fractal\_dimension” to evaluate the fractal dimension of the support of the studied rainfall time series, i.e. the portion of the field where some rain is recorded. Interpret the obtained curve.

Answer:

The notations of section 2.2 are used. Figure 20 displays Eq. 2, which defines the fractal dimension. A break is visible at  $\lambda=128$  (which corresponds to a scale of roughly 5 days). For greater scales, it appears that  $D_F = 1$ , which basically means that it rains all the times. For small scales we find  $D_F=0.57$  (the coefficient of determination of the linear regression is equal to 0.99).

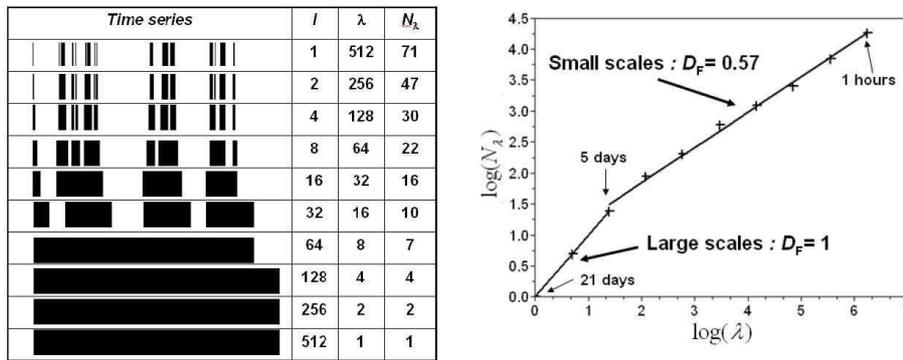


Figure 20: Illustration of the computation of the fractal dimension of the studied rainfall field.

**Question:**

Implement a threshold of 0.6 and 1 on the time series (i.e. artificially set the value smaller than the threshold to zero). Evaluate the fractal dimensions of the new fields. Interpret the results.

**Answer:**

Table 1 and Figure 21 display the results for the fractal dimension analysis of the thresholded fields. The coefficients of determination of the linear regressions are all greater than 0.98, which validates the existence of a fractal dimension for the small scales of the thresholded fields. It appears that  $D_F$  decreases with increasing thresholds. This corresponds to an intuitive notion of the multifractality of this field, i.e. not a single fractal dimension, but an infinite number (more precisely, one per singularity) are needed to fully characterize it.

Threshold value (mm/h)	% of zeros	$D_F$ small scale	$D_F$ large scale
0.2 (limit of detection of the rain gauge)	86	0.57	1
0.6	92	0.44	1
1	95	0.37	1

Table 1: % of zeros and fractal dimensions of the studied rainfall field with different thresholds.

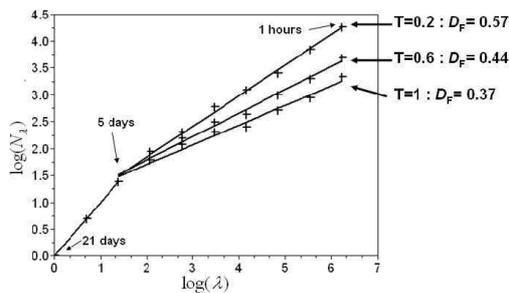


Figure 21 : Computation of the fractal dimension of the studied rainfall field with different thresholds.

#### 4.5. World precipitation records

Let us conclude this section with a last example of scaling relation for rainfall. As it is visible on Figure 22, the world record of the rainfall depth during an event seems to be power law related to the duration of the considered event (Jennings, 1950).

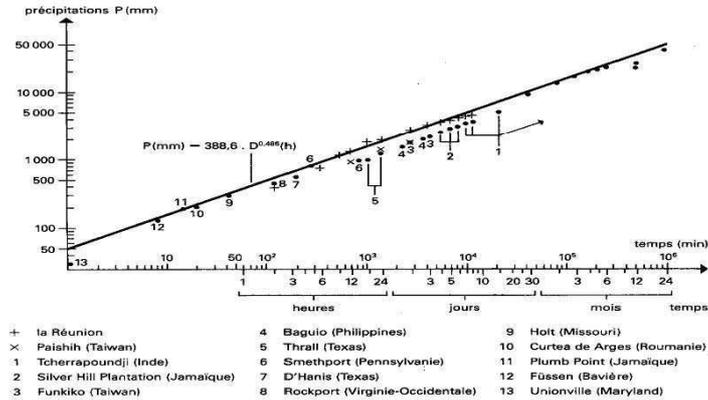


Figure 22 : Rainfall depth world record vs. the duration of the considered event. (Jennings, 1950)

### 5. From fractals to multifractals

#### Aim:

In the previous section, we saw that scale invariance was a fundamental physical property (theoretically predicted and empirically observed) that was usually neglected in the study of highly variable geophysical fields. This section aims at presenting the cascade phenomenology, a physically based framework that basically relies on the idea that the same phenomenon are occurring at all scales. This cascade process possesses the two fundamental Navier-Stokes equations properties of scale invariance and conservation.

#### 5.1. Cascade phenomenology

The cascade phenomenology was initially introduced to investigate and model atmospheric turbulence, but is now used for other geophysical fields such as rain. It enables reproducing the tendency of these fields to be more and more locally concentrated as scales are smaller and smaller. The three main properties of cascade phenomenology are:

- (i) scale invariance
- (ii) a conserved quantity (i.e. the ensemble average is a basic quantity that is independent of scale).
- (iii) localness in Fourier space (the dynamics involves interactions primarily between structures of similar size)

In the atmosphere this model remains valid down to scales roughly equal to 1 mm where the viscosity breaks the scaling (Lovejoy and Schertzer, 1990) and dissipates the

activity. In dynamical cascade models the “activity” (energy flux in the case of turbulence) passed down from parent structure (eddies in the case of turbulence) to offspring’s is determined in a multiplicative scale invariant way.

To illustrate these cascade models, let’s introduce the discrete case, where scales are discretized (Figure 23). At the beginning the activity ( $\varepsilon_0 = 1$ ) is uniform over a structure (a  $d$ -dimensional cube) of characteristic length  $L$  ( $\lambda = 1$ ). One step of the cascade process consists in breaking each structure into smaller ones with a scale ratio  $\lambda_1$  (larger than one and usually equal to 2 also it is not mandatory). As a consequence after  $n$  steps, there are  $\lambda_1^{dn}$  sub-structures of characteristic length  $l_n = \frac{L}{\lambda_1^n}$ . The resolution of the process is then equal to  $\lambda = \frac{L}{l_n} = \lambda_1^n$ . The activity  $\varepsilon_n$  (i.e.  $\varepsilon_{n,i}$ , with  $i = 1, \dots, \lambda_1^d$ ) affected to a daughter structure is equal to its parent’s one multiplied by random variable ( $\mu\varepsilon$ ) :  $\varepsilon_n = \mu\varepsilon \varepsilon_{n-1}$ . Building a cascade process basically requires determining: (i) how to divide each structure into sub-structures, (ii) the probability distribution of the random multiplicative increment. The key assumption is that these two properties are the same at all scales. Numerous examples of cascade models have been suggested in the literature, and we will only present three in this document: the  $\beta$ -model, the  $\alpha$ -model, and the discrete Universal Multifractals (see section 7).

The probability distribution of the random multiplication should be chosen so that  $\langle \mu\varepsilon \rangle = 1$ , i.e. that there is an ensemble conservation through scales, which is called “canonical conservation”. The more restrictive case in which conservation is imposed for each realization and not only on average is called “micro-canonical”.

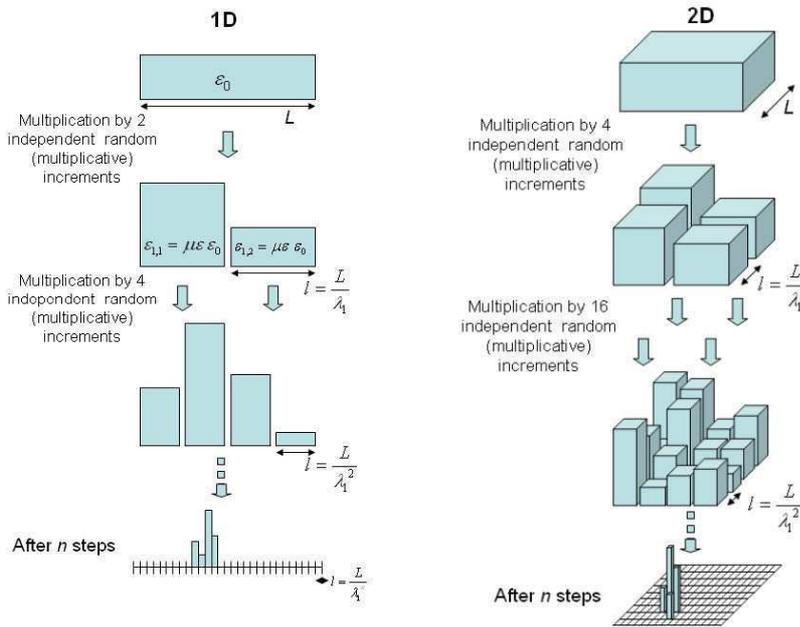


Figure 23 : Illustration of a discrete cascade process in 1D (left) and 2D (right).

## 5.2. Tutorial: the $\beta$ -model

The simplest cascade model (Frisch et al., 1978; Mandelbrot, 1974; Novikov and Stewart, 1964), often called  $\beta$ -model assumes that structures are either dead (inactive) or alive (active). It was initially designed to take into account intermittence. In this model, the multiplicative random increments  $\mu\mathcal{E}$  have two states, whose probability of occurrence are defined by:

$$\Pr(\mu\mathcal{E} = \lambda_1^c) = \lambda_1^{-c} \quad (\text{alive}) \quad \text{Eq. 9a}$$

$$\Pr(\mu\mathcal{E} = 0) = 1 - \lambda_1^{-c} \quad (\text{dead}) \quad \text{Eq. 9b}$$

The value affected to the boost  $\mu\mathcal{E} = \lambda_1^c$  ensures conservation of the average activity  $\mathcal{E}$  (i.e.  $\langle \mu\mathcal{E} \rangle = 1 \Leftrightarrow \langle \mathcal{E}_n \rangle = \langle \mathcal{E}_0 \rangle$  where  $\langle \cdot \rangle$  denotes ensemble average). At each step of the process the fraction of alive structures decreases by a factor  $\beta = \lambda_1^{-c}$ , and their activity is increased by the factor  $1/\beta$  to ensure (average) conservation.

### Question:

Determine the possible states after  $n$  steps and their respective probability. Interpret the parameter  $c$ .

### Answer:

After  $n$  steps of the process, i.e. at a resolution  $\lambda_n = \lambda_1^n$ , the sub-structure activity only exhibit two possible states, dead or alive, with the probability of occurrence:

$$\Pr(\mathcal{E}_n = \lambda_n^c) = \lambda_n^{-c} \quad (\text{alive})$$

$$\Pr(\mathcal{E}_n = 0) = 1 - \lambda_n^{-c} \quad (\text{dead})$$

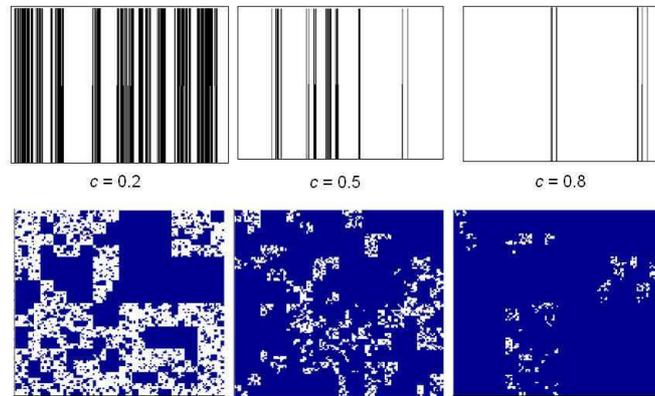
Given the definition of 2.1,  $c$  appears to be the fractal codimension of the structures alive. The corresponding fractal dimension is  $d-c$  where  $d$  is the dimension of the embedding space. It should be noted that the activity of the structures alive diverges with increasing resolution. The  $\beta$ -model is said to be monofractal because it exhibits only one fractal codimension.

### Question 11:

Use the scilab function “beta\_model” to simulate  $\beta$ -models. Try different  $c$ . Simulate several fields with  $c=0.43$  and compare with the rainfall occurrence pattern of the studied rainfall time series (Figure 20)

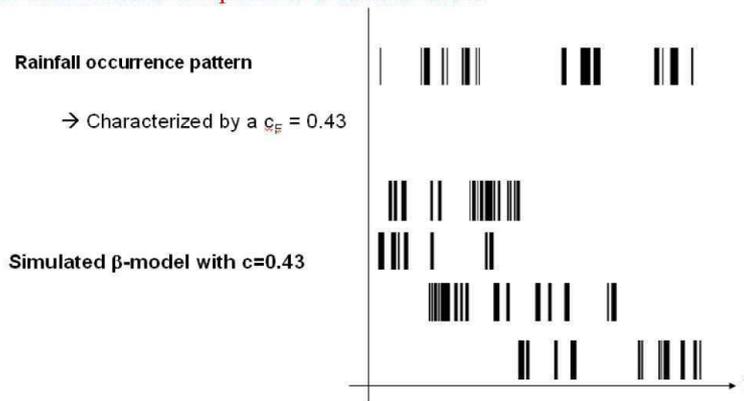
### Answer 11:

Figure 24 displays some examples of simulated fields with different values for the  $c$ -parameter.



**Figure 24 :** Examples of simulated fields with a  $\beta$ -model for  $c$  equal to 0.2, 0.5 and 0.8, in 1D (top, with zero values in white) and 2D (bottom, with zero values in blue)

Figure 25 displays 4 examples of simulated  $\beta$ -models (with a final resolution of 512) with  $c=0.43$  corresponding to the fractal codimension of the studied rainfall time series. As it can be seen, the  $\beta$ -model enables to simulate with simple assumptions patterns exhibiting similarities with the rather complex one of the time series.



**Figure 25 :** Rainfall occurrence pattern of the studied rainfall time series and simulated field with a  $\beta$ -model

### 5.3. The $\alpha$ -model

Schertzer and Lovejoy (1984) introduced the  $\alpha$ -model to tackle the need for a more realistic alternative to the simplistic dead/alive dichotomy. At each step of the cascade process, the structures are not either “killed” or “saved” as in the  $\beta$ -model, but become “more active” or “less active”, according to the following binomial process (Figure 26):

$$\Pr(\mu\mathcal{E} = \lambda_1^{+c}) = \lambda_1^{-c} \quad (\text{boost}) \quad \text{Eq. 10a}$$

$$\Pr(\mu\mathcal{E} = \lambda_1^{-c}) = 1 - \lambda_1^{-c} \quad (\text{decrease}) \quad \text{Eq. 10b}$$

The parameters are chosen so that the ensemble average is conserved. Therefore we have:

$$\lambda_1^{\gamma_+} \lambda_1^{-c} + \lambda_1^{\gamma_-} (1 - \lambda_1^{-c}) = 1 \quad \text{Eq. 11}$$

As a consequence,  $\gamma_+$  and  $\gamma_-$  which are called singularities are respectively positive and negative. The  $\beta$ -model is retrieved when  $\gamma_- \rightarrow -\infty$ .

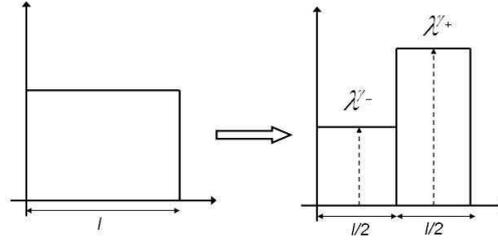


Figure 26 : Illustration of a step of  $\alpha$ -model cascade process

Trough a complex succession of  $\gamma_+$  and  $\gamma_-$ , a full hierarchy of intensity levels is introduced. After two steps, the resolution is  $\lambda_2 = \lambda_1^2$  and the field only has three possible values ( $\lambda_1^{2\gamma_+}$ ,  $\lambda_1^{\gamma_+ + \gamma_-}$  and  $\lambda_1^{2\gamma_-}$ ) with the following probabilities:

$$\begin{aligned} \Pr(\varepsilon_2 = (\lambda_1^2)^{\gamma_+}) &= (\lambda_1^2)^{-c} \quad (\text{two boosts}) \\ \Pr(\varepsilon_2 = (\lambda_1^2)^{(\gamma_+ + \gamma_-)/2}) &= 2\lambda_1^{-c} (1 - \lambda_1^{-c}) \quad (\text{one boost and one decrease}) \\ \Pr(\varepsilon_2 = (\lambda_1^2)^{\gamma_-}) &= (1 - \lambda_1^{-c})^2 \quad (\text{two decreases}) \end{aligned}$$

Iterating this procedure, after  $n = n_+ + n_-$  steps we find:

$$\begin{aligned} \gamma_{n_+, n_-} &= \frac{n_+ \gamma_+ + n_- \gamma_-}{n_+ + n_-}, \quad n_+ = 1, \dots, n; \quad n_- = n - n_+ \\ \Pr(\varepsilon_n = (\lambda_1^n)^{\gamma_{n_+, n_-}}) &= \binom{n}{n_+} \lambda_1^{-cn_+} (1 - \lambda_1^{-c})^{n-n_+} \end{aligned}$$

Since there is a finite number of possible intensity levels, one may write:

$$\Pr(\varepsilon_n \geq (\lambda_1^n)^{\gamma}) = \sum_j p_j (\lambda_1^n)^{-c_j} \quad \text{Eq. 12}$$

The previous equation allows introducing the notion of singularity  $\gamma$ , which somehow corresponds to an intensity level independent of scale, i.e. at resolution  $\lambda$  the corresponding intensity level is  $\lambda^\gamma$ . In the specific case of the  $\alpha$ -model the observable singularities are bounded:  $\gamma_- \leq \gamma_{n_+, n_-} \leq \gamma_+$ . Taking the limit  $n \rightarrow +\infty$ , which allows for a continuum of singularities, the sum in equation XX is dominated by a single term (the one with the smallest  $c_{ij}$ ) and we find:  $\Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)}$

Where the sign  $\approx$  denotes asymptotic convergence and absorbs the multiplicative factor  $p_i$ ; as well as the logarithmic number of terms in the sum. It appears that a fractal set of codimension  $c(\gamma)$  is associated to each singularity  $\gamma$ . The field is said to be multifractal (the term was first coined by Parisi and Frish (1985)). Figure 27 displays an illustration of such field.

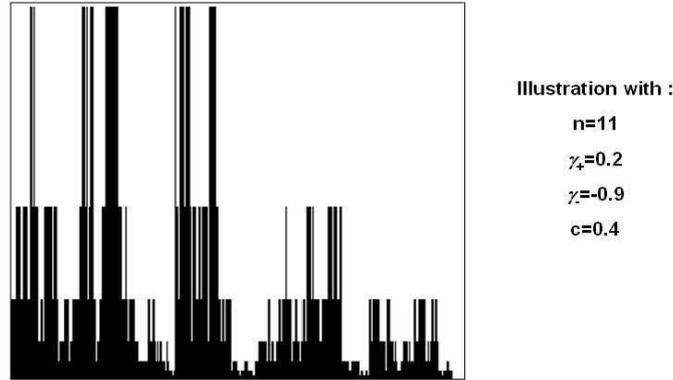


Figure 27 : Example of a field simulated with the help of an  $\alpha$ -model

## 6. Multifractal properties

### Aim:

Scale-invariant multiplicative processes generally yield multifractals, and the aim of the section is to present its main properties.

### 6.1. Characteristic scaling functions

Let's denote  $\varepsilon_\lambda$  the studied field at a resolution  $\lambda = L/l$ , where  $L$  is the outer scale of the phenomenon and  $l$  the observation scale. If the field is multifractal then the probability of exceeding a scale-dependant threshold ( $\lambda^\gamma$ ) defined with the help of the scale invariant notion of singularity ( $\gamma$ ) is given by:

$$\Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad \text{Eq. 13}$$

which defines the codimension function  $c(\gamma)$ .  $\approx$  denotes asymptotic convergence and absorbs slowly varying prefactors.  $c(\gamma)$  is convex and increasing with no upper bound in the general case. When  $c(\gamma) < d$ ,  $c(\gamma)$  can be interpreted as the fractal co-dimension of the support of the field where it exceeds  $\lambda^\gamma$  (Schertzer and Lovejoy, 1987b). If  $c(\gamma) < d$ , then this interpretation is not valid, and we are almost sure that the field does not exceed  $\lambda^\gamma$ .

It can be shown (Schertzer and Lovejoy, 1987a) that this is equivalent to the scaling of statistical moments of arbitrary  $q$ -th power:

$$\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad \text{Eq. 14}$$

which defines the moment scaling function  $K(q)$ . This function is convex. The functions  $K(q)$  and  $c(\gamma)$  are linked by the Legendre transform (Parisi and Frish, 1985). Thus, it is possible to associate to each statistical order  $q$  a singularity  $\gamma_q$ , and to each singularity  $\gamma$  a statistical order  $q_\gamma$ . The main relations are (see Figure 28 for a graphical interpretation).

$$c(\gamma) = \max_q (q\gamma - K(q)) = q_\gamma \gamma - K(q_\gamma), \text{ where } q_\gamma \text{ is defined by } K'(q_\gamma) = \gamma$$

$$K(q) = \max_\gamma (q\gamma - c(\gamma)) = q\gamma_q - c(\gamma_q), \text{ where } \gamma_q \text{ is defined by } c'(\gamma_q) = q$$

The functions  $K(q)$  and  $c(\gamma)$  characterize the variability through all scales of the studied field.

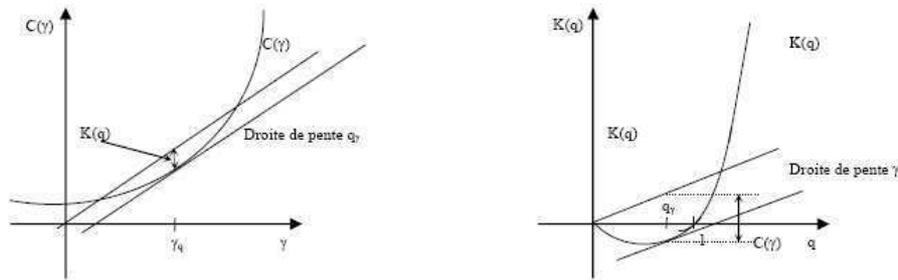


Figure 28 : Illustration of the Legendre transform between  $K(q)$  and  $c(\gamma)$

The spectral analysis, which was introduced in section 4.2 is basically a second order statistic and the spectral exponent  $\beta$  is related to  $K(2)$  by the relation (Schertzer and Lovejoy, 1993):

$$\beta = 1 - K(2) \quad \text{Eq. 15}$$

Let's consider the mean of the process (i.e.  $q = 1$ ), and the corresponding singularity  $\gamma_1$ . Due to the Legendre transform one can obtain  $\langle \varepsilon_\lambda \rangle \approx \lambda^{\gamma_1}$ . Assuming that the process is conserved (which we will always do unless explicitly mentioned), then  $\langle \varepsilon_\lambda \rangle = 1$  independently of scale, which means that  $\gamma_1$  is a fixed point of the codimension function, and tangent to the bisectrix at this point. In the following  $\gamma_1$  will be denoted  $C_1$ . It corresponds to the codimension of singularity associated with the mean of the process. These properties are illustrated Figure 29. We have

$$c(C_1) = C_1 \quad \text{and} \quad c'(C_1) = 1 \quad \text{Eq. 16}$$

$$K(1) = 0 \quad \text{and} \quad K'(1) = C_1 \quad \text{Eq. 17}$$

If  $C_1 > D$ , the dimension of the embedding space, then the mean of the process will be too sparse to be observed. Moreover, since  $c(\gamma)$  is convex it is possible to define at  $C_1$  the local radius of curvature at  $R_c(C_1)$ . It reflects the local rate of change of slope at  $C_1$ , and enables to define the multifractality index  $\alpha$ :

$$R_c(C_1) = \frac{(1 + c'(C_1))^{3/2}}{c''(C_1)} = 2^{2/3} \alpha C_1 \quad \text{Eq. 18}$$

The case  $\alpha = 0$  corresponds to the monofractal  $\beta$ -model for which all the singularities have the same fractal dimension as indicated in the Figure 29. It should be mentioned that in the framework of universal multifractals (see section 6.4) the range of possible  $\alpha$  is limited by an upper bound of 2 (a parabola).

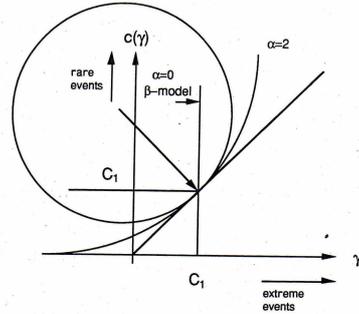


Figure 29 : A schematic illustration showing how the  $c(\gamma)$  curve can be locally characterized near the mean singularity  $C_1$ . (Schertzer and Lovejoy, 1993)

### Proof of the Legendre transform

For a non-negative random variable  $X$  the statistical moments and the probability distribution are linked by a Mellin transform  $M$ :

$$\langle X^{q-1} \rangle = M(p) = \int_0^\infty x^{q-1} p(x) dx \quad \text{Eq. 19}$$

$$p(x) = M^{-1}(\langle X^{q-1} \rangle) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \langle X^{q-1} \rangle x^{-q} dq \quad \text{Eq. 20}$$

Our aim is to obtain  $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)}$  with the help of the relation  $\Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^y) \approx \lambda^{-c(y)}$ . Eq. 19 shows that  $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle = \int \varepsilon_\lambda^q d\Pr(\varepsilon_\lambda)$

Changing the variable from  $\varepsilon_\lambda$  to  $\gamma$  in the integral enables writing this integral as  $\int \lambda^{q\gamma} d\Pr(\gamma)$ . The definition of  $c(\gamma)$  (Eq. 13) yields  $d\Pr(\gamma) \approx \ln(\lambda) c'(\gamma) \lambda^{-c(\gamma)} d\gamma$ . Neglecting the term  $\ln(\lambda) c'(\gamma)$  which is slowly variable with regards to the exponential one, one finds:  $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \approx \int \lambda^{q\gamma - c(\gamma)} d\gamma$

In the asymptotic behaviour ( $\lambda \rightarrow +\infty$ ), which is what we are interested in, this integral is dominated by the maximum exponent, i.e.  $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{\max_\gamma (q\gamma - c(\gamma))}$ . Comparing this expression to the definition of  $K(q)$ , one finds  $K(q) = \max_\gamma (q\gamma - c(\gamma))$ . A similar expansion can be done for the inverse Mellin transform (Eq. 20) to obtain the expression for  $c(\gamma)$ .

*Remark:* If the codimension is not defined for singularities greater than  $\gamma_{\max}$  (i.e. the singularities are bounded), then the scaling moment function is linear for  $q \geq q_{\max} = c'(\gamma_{\max})$ , and  $\forall q \geq q_{\max} K(q) = q\gamma_{\max} - c(\gamma_{\max})$

### **Proof of the convexity of $c(\gamma)$ and $K(q)$**

We show here that  $K(q)$  is a convex function. Since the Legendre transform of a convex function is also convex  $c(\gamma)$  is convex.

The definition of the scaling moment function  $K(q)$  is :  
 $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle = \int \varepsilon_\lambda^q p(\varepsilon_\lambda) d\varepsilon_\lambda = \lambda^{K(q)}$

This yields:

$$- (\ln \lambda) K(q) = \ln \langle \varepsilon_\lambda^q \rangle$$

$$- \frac{\partial \langle \varepsilon_\lambda^q \rangle}{\partial q} = \langle \varepsilon_\lambda^q \ln \varepsilon_\lambda \rangle$$

$$- \frac{\partial^2 \langle \varepsilon_\lambda^q \rangle}{\partial q^2} = \langle \varepsilon_\lambda^q (\ln \varepsilon_\lambda)^2 \rangle$$

$$\text{Thus } (\ln \lambda) \frac{\partial^2 K(q)}{\partial q^2} = \frac{\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \langle \varepsilon_\lambda^q (\ln \varepsilon_\lambda)^2 \rangle - \langle \varepsilon_\lambda^q \ln \varepsilon_\lambda \rangle^2}{\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle^2}$$

By implementing Cauchy-Schwartz's inequality  $(\int fg)^2 \leq (\int f^2)(\int g^2)$  to  $f = (\varepsilon_\lambda^q p(\varepsilon_\lambda))^{1/2}$  and  $g = (\varepsilon_\lambda^q p(\varepsilon_\lambda))^{1/2} \ln(\varepsilon_\lambda)$ , one obtains  $(\ln \lambda) \frac{\partial^2 K(q)}{\partial q^2} \geq 0$ .

Since  $\lambda \geq 1$ , one finds  $\frac{\partial^2 K(q)}{\partial q^2} \geq 0$ , which is the definition for convexity.

## **6.2. Singular limit of cascade process and divergence of the fluxes**

As previously  $\varepsilon_\lambda$  is the studied field at a resolution  $\lambda$ . We assume that it is normalized, i.e.  $\langle \varepsilon_\lambda \rangle = 1$  independently of scale. If  $\varepsilon_\lambda$  is the results of a multifractal process, then it exhibits a behaviour similar to (Halsey et al., 1986; Parisi and Frish, 1985; Schertzer and Lovejoy, 1987b):

$$\varepsilon_\lambda \approx \lambda^\gamma \quad \text{Eq 21}$$

Where ' $\approx$ ' denotes asymptotic convergence and absorbs factors slowly variable with  $\lambda$  and normalization constants. As a consequence for any  $\gamma > 0$ ,  $\varepsilon_\lambda \rightarrow +\infty$  as  $\lambda \rightarrow +\infty$ . It should be mentioned that for  $\gamma < 0$  the corresponding point is more a regularity than a singularity, but in practice exponents  $\gamma < 0$  are also called singularities.

This singular behaviour means that if a limit exists, it is not in the sense of functions since the singularities will prevent usual convergence of the density.  $\varepsilon_\lambda$  is actually a mathematical measure, which means that there is convergence of the fluxes. Indeed, the  $d$ -

dimensional integration of the density  $\varepsilon_\lambda$  over a compact set  $A$  (embedded in a  $d$ -dimensional space) converge as  $\lambda \rightarrow +\infty$  :

$$\Pi_\infty(A) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Pi_\lambda(A) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_A \varepsilon_\lambda d^d \underline{x} \quad \text{Eq. 21}$$

However moment orders  $q$  of the flux will converge only if  $q$  is smaller than a critical moment  $q_D$  because with higher moments a stronger relative weight is affected to higher singularities which exhibit a singular limit. We have:

$$\exists q_D > 1, \forall q > q_D : \langle \Pi_\infty(A)^q \rangle = +\infty \quad \text{Eq. 22a}$$

Whereas:

$$\forall \lambda < +\infty : \langle \Pi_\lambda(A)^q \rangle < +\infty \quad \text{Eq. 22b}$$

The critical moment  $q_D$  is dependent on the dimension of the integration. It is important to note that the divergence of the moments is equivalent to a power-law fall-off of the probability distribution with an exponent equal to  $q_D$  :

$$\exists q_D > 1, \pi \gg 1 : Pr(\Pi_\infty(A) > \pi) \approx \pi^{-q_D} \quad \text{Eq. 23}$$

### Proof of the divergence of the fluxes for $q > q_D$

Let's consider the flux  $\Pi_\lambda(A) = \int_A \varepsilon_\lambda d^D x$  of  $\varepsilon_\lambda$  through the compact set  $A$  embedded in a  $D$ -dimensional space.  $\varepsilon_\lambda$  is a conservative field, i.e.  $\langle \varepsilon_\lambda \rangle = 1$ , independently of scale.

The goal is to determine under which condition the ensemble average of the  $q$ -power ( $q$  being an integer) of the flux diverges

$$\langle \Pi_\lambda^q(A) \rangle = \left\langle \left[ \int_A \varepsilon_\lambda d^D x \right]^q \right\rangle = \left\langle \int_A \dots \int_A \varepsilon_\lambda(x_1) \dots \varepsilon_\lambda(x_q) d^D x_1 \dots d^D x_q \right\rangle$$

This integral is very complex to evaluate, which is why we only consider the trace of this expression, i.e. the integral for  $x_1 = x_2 = \dots = x_q$  :

$$Tr_A R_\lambda^q = \int_A \langle \varepsilon_\lambda^q \rangle d^D x$$

Since the studied field  $\varepsilon_\lambda$  is positive, the Jensen's inequalities are valid, i.e.:

$$\begin{aligned} \langle \Pi_\lambda^q(A) \rangle &\geq Tr_A \varepsilon_\lambda^q \text{ when } q > 1 \\ \langle \Pi_\lambda^q(A) \rangle &\leq Tr_A \varepsilon_\lambda^q \text{ when } q < 1 \end{aligned}$$

The trace integral at a resolution  $\lambda$  can be evaluated as a sum of  $\lambda^D$  terms. This yields:

$$Tr_A \varepsilon_\lambda^q = \lambda^{K(q) - (q-1)D}$$

As a consequence the study of the asymptotic behaviour  $\lambda \rightarrow +\infty$  consists in studying the sign of the exponent in the previous expression. Before doing this let's mention few properties of the function  $q \rightarrow \frac{K(q)}{q-1}$ . Since  $K(q)$  is convex and  $K(0) = K(1) = 0$  (the studied

field is conservative),  $\frac{K(q)}{q-1}$  is the slope of the chord of  $K$  between 1 and  $q$  (see Figure 30 for

an illustration). The convexity of  $K$  means  $q \rightarrow \frac{K(q)}{q-1}$  is an increasing function. Moreover

this function is continuous in 1, where it is equal to  $K'(1) = C_1$  (a Taylor expansion enables showing that). Therefore, there is a  $q_D$  (possibly infinite) define by

$$K(q_D) = (q_D - 1)D \quad \text{Eq. 24}$$

So that  $C_1 > D \Leftrightarrow q_D < 1$  and  $C_1 < D \Leftrightarrow q_D > 1$

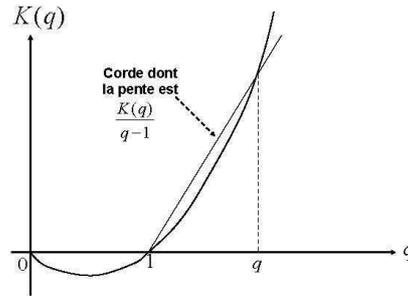


Figure 30 : Illustration of the properties of the function  $q \rightarrow \frac{K(q)}{q-1}$

It is now possible to analyse the behaviour of the trace moment for different values of  $q$ , and to obtain the wanted properties for the fluxes:

	$\frac{K(q)}{q-1} \geq D \Leftrightarrow q > q_D$	$\frac{K(q)}{q-1} \leq D \Leftrightarrow q < q_D$
$q > 1$	$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} Tr_A \mathcal{E}_\lambda^q = +\infty$ $\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Pi_\lambda^q(A) = +\infty$	$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} Tr_A \mathcal{E}_\lambda^q = 0$ No consequences for $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Pi_\lambda^q(A)$
$q < 1$	$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} Tr_A \mathcal{E}_\lambda^q = 0$ $\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Pi_\lambda^q(A) = 0$ The processed is « degenerated » which means that the mean is almost never observed. It can't be normalized.	$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} Tr_A \mathcal{E}_\lambda^q = +\infty$ No consequences for $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Pi_\lambda^q(A)$

### 6.3. Bare vs. dressed and divergence of moments

Because of the singular limit of the cascade process it is necessary to distinguish the properties of “bare” cascades (obtained after the cascade has proceeded down to finite resolution  $\lambda$ ) and “dressed” cascades (obtained after integrating a completed cascade over the same scale  $l=L/\lambda$ ) (Schertzer and Lovejoy, 1987b). The “dressed” quantities are defined by  $\mathcal{E}_{\lambda^{(d)}} = \frac{\Pi_\infty(B_\lambda)}{\text{vol}(B_\lambda)}$ , where  $B_\lambda$  is a  $D$ -dimensional cube of size  $\lambda^{-1}$  (and hence of volume  $\lambda^{-D}$ ). It

is very important to understand that “dressed” quantities take into account small scale variability, which is not the case of “bare” quantities. To be more precise, it is possible (and that is what is done with actual data) to define “partially dressed” quantities from a finite resolution  $\Lambda$ . They are denoted  $\varepsilon_{\lambda, \Lambda(d)}$ . Completely dressed quantities are retrieved with  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . The multiplicative properties of cascade process enables to factor a dressed quantity into its bare part and a hidden part, which correspond to a flux of a cascade from  $L$  to  $L\lambda/\Lambda$  rescaled with a contraction operator (see Figure 32):

$$\varepsilon_{\lambda, \Lambda(d)} = \varepsilon_{\Lambda} \varepsilon_{\Lambda/\lambda(b)} \quad \text{Eq. 25a}$$

$$\varepsilon_{\Lambda/\lambda(b)} = \frac{\Pi_{\Lambda \rightarrow \lambda}(B_{\lambda})}{\text{vol}(B_{\lambda})} = \frac{\Pi_{\Lambda/\lambda}(B_1)}{\text{vol}(B_1)} = \Pi_{\Lambda/\lambda}(B_1) \quad \text{Eq. 25b}$$

Let’s now consider the statistical moment of order  $q$  of the dressed quantities. If  $q < q_D$  then the hidden part acts as a prefactor and dressed quantities exhibit the same behaviour as bare quantities. If  $q \geq q_D$  then the hidden part diverge and dressed quantities inherits its singular behaviour. As a consequence, when  $q \geq q_D$  dressed quantities exhibit the following three equivalent properties:

- $\langle \varepsilon_{\lambda}^q \rangle = +\infty$  ;  $K(q) = +\infty$
- The probability distribution exhibit a power-law fall off of exponent  $q_D$  :  
 $x \gg 1 \quad \Pr(\varepsilon_{\lambda} \geq x) \approx x^{-q_D}$
- $c(\gamma)$  is linear for singularities greater than the corresponding  $\gamma_D$  ;  
 $c(\gamma) = q_D(\gamma - \gamma_D) + c(\gamma_D)$  (this is easily obtained with the help of the Lengendre transform).

This transition for dressed quantities  $q \geq q_D$  enables retrieving the properties of self-organized criticality (Bak et al., 1988). Multifractals exhibiting a divergence of high order statistical moments are called “hard”, by contrast with “soft” ones for which the  $D$ -dimensional integration smoothed out rare high order singularities (Schertzer and Lovejoy, 1992).

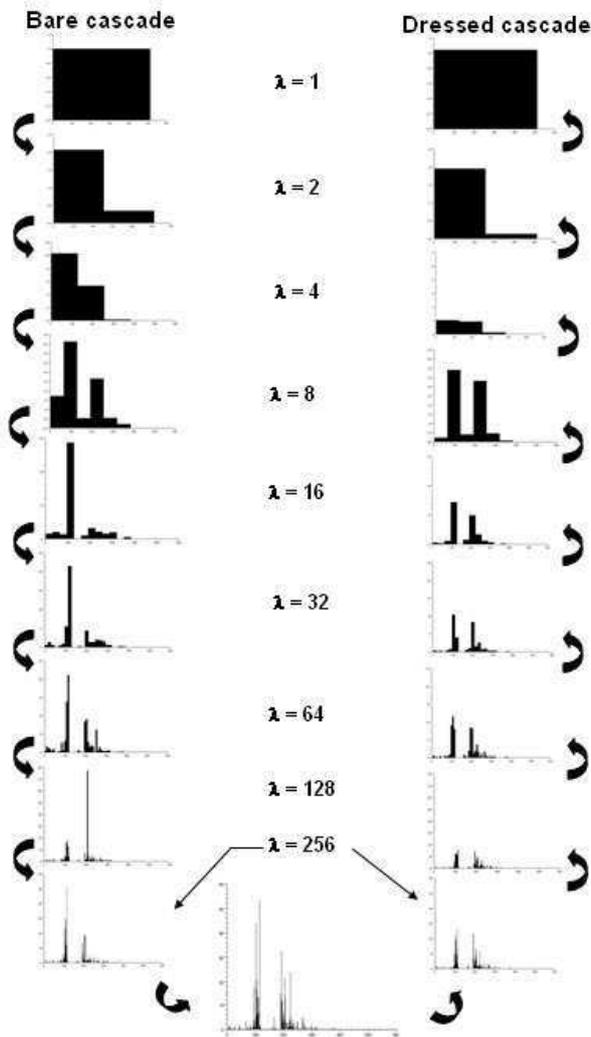


Figure 31 : Illustration of bare and dressed cascades

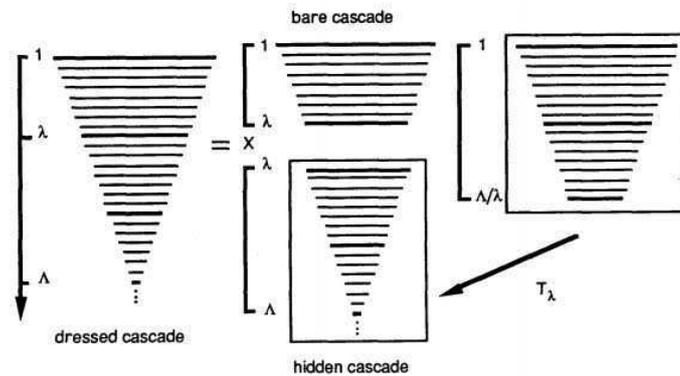


Figure 32 : Illustration of the “hidden part” of a cascade (see text for more description) (Schertzer and Lovejoy, 1993)

Let's illustrate these properties with rainfall measurement. They indeed correspond to dressed quantities over a finite resolution, which take into account small scale variability. For example Hubert (2001) analysed the 87 annual rainfall time series with mean length of 166 years. He estimated  $q_D$  by plotting a log-log diagram of the empirical probabilities of exceeding a threshold against the corresponding threshold. Figure 33 displays these curves for the longest available time series. The existence of the power-law fall-off strengthens the idea that rainfall is generated through a cascade process. Concerning the numerical value they are found to be slightly greater than 3 (in agreement with those found by other authors), which suggests that it is an intrinsic rainfall feature. The clear departure from the Gaussian law indicates that extremes would be strongly under-estimated if Gaussian approximation would be used. De Lima and Grasmán (1999) obtained similar results on 15-min time series from Vale Poroso (Portugal) between 1963 and 1985 (Figure 34). The multifractal phase transition is also clearly visible on the 12 hour resolution rainfall time series (between 1949 and 1992) of Nimes-Courbessac, France (Ladoy et al., 1993). Indeed Figure 35 displays a comparison between the theoretical and empirical co-dimension function  $c(\gamma)$ . For  $\gamma > 0.8 \pm 0.1$  the co-dimension function becomes linear with a slope  $q_D = 3.0 \pm 0.2$ .

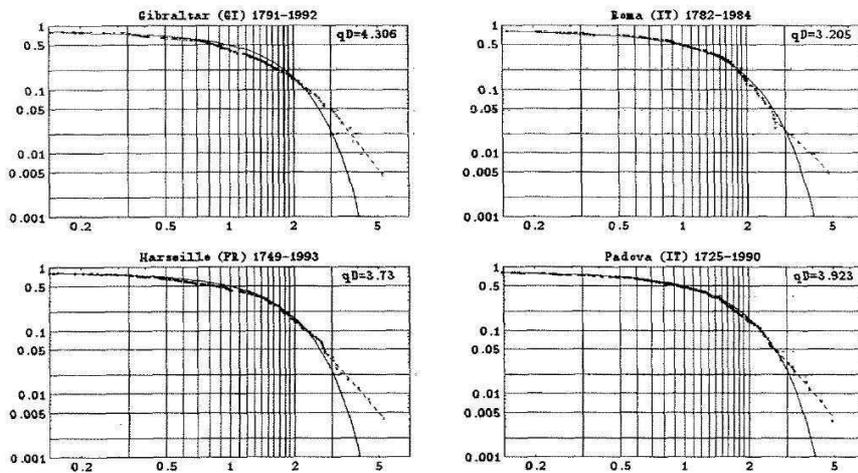


Figure 33 : A log-log plot of empirical probabilities and Gaussian fitting of Padova, Marseilles, Rome and Gibraltar rainfall time series. The normalized annual precipitations are drawn along the horizontal axis, and the exceeding probabilities along the vertical one. The dots represent the empirical values, whereas solid curves indicate the best Gaussian fit. The coefficient of linear fitting for the distribution tails are represented by the values  $q_D$ . (Hubert, 2001)

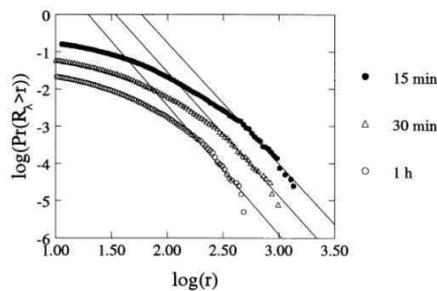


Figure 34 : Histograms of rainfall on time scales (from top to bottom) of 15 min, 30 min, and 1 h (the histograms were offset vertically so as not to overlap). The absolute slopes of the algebraic tails of the histograms are (also from top to bottom) 3.08, 3.06 and 3.17. The data are 15-min rainfall from Vale Formoso, from 1963 to 1985. (de Lima and Grasman, 1999)

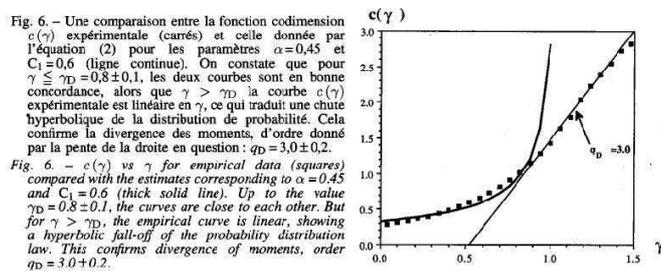


Figure 35 : From Ladoy et al., 1993

Concerning the divergence of moments for  $q > q_D$  it should be mentioned that empirical moments (being averages of empirical values) are always finite. The divergence of moments means that rare individual events will have a dominant contribution on the average, and that therefore the empirical moments increase without limit as the sample size increases.

#### 6.4. Universality

The characteristic scaling function  $K(q)$  and  $c(\gamma)$  should be determined in the general case by a infinite number of parameters. However the relevant parameters can be reduced to two for conservative processes because multiplicative cascade processes converge under rather general conditions to Universal Multifractals (UM) (Schertzer and Lovejoy, 1987a; Schertzer and Lovejoy, 1997) which correspond to a broad generalization of the central limit theorem. In the UM framework, the local description of the scaling function around the mean field ( $q=1$  and the corresponding singularity  $\gamma_1$ , see section 6.1) holds for the whole function. Hence the two UM parameters are:

-  $C_1$  the mean intermittency. It measures the average sparseness of the field. More precisely it is the codimension of the singularity of the average field for a conservative field, that is to say  $C_1 = d - D_1$ , where  $d$  is the embedding dimension of the field and  $D_1$  is the fractal dimension of the support of this singularity ( $\gamma_1$ ). An homogeneous field fills the embedding space and has  $C_1=0$ .

-  $\alpha$  the multifractality index  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ). It measures how fast the intermittency evolves when considering singularities slightly different from the average field singularity.  $\alpha = 0$  corresponds to a monofractal field and  $\alpha = 2$  corresponds to a log-normal field. A more rigorous definition highly relevant for simulations is that  $\alpha$  is the Levy stability index of the cascade generator.

In the UM framework, the scaling moment function and the codimension function are given by:

$$K(q) = \begin{cases} \frac{C_1}{\alpha-1}(q^\alpha - q) & \alpha \neq 1 \\ C_1 q \ln q & \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{Eq. 26}$$

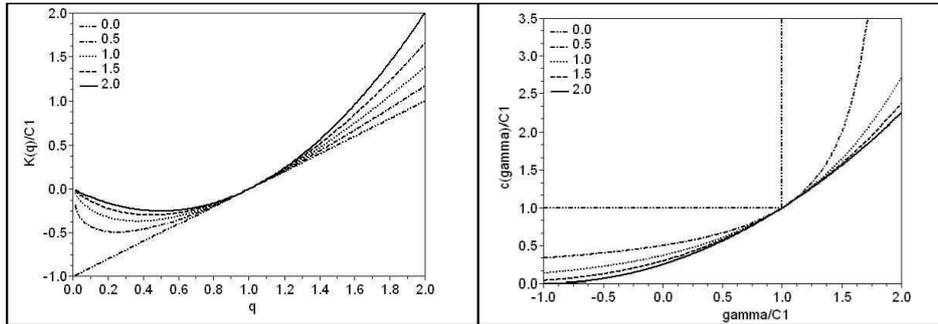
$$c(\gamma) = \begin{cases} C_1 \left( \frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right)^\alpha & \alpha \neq 1 \\ C_1 \exp \left( \frac{\gamma}{C_1} - 1 \right) & \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{Eq. 27}$$

$$\text{where } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$$

Let's denote  $\gamma_0 = -\frac{C_1 \alpha'}{\alpha}$ . In the definition of  $c$ , there are two cases:

- If  $\alpha > 1$ , then  $c$  is defined by the previous equation for  $\gamma > \gamma_0$ , and equal to zero for  $\gamma \leq \gamma_0$
- If  $\alpha < 1$ , then  $c$  is defined by the previous equation for  $\gamma < \gamma_0$ , and infinite for  $\gamma \geq \gamma_0$

Graphical representation of these function are displayed Figure 36.



**Figure 36:** Illustration of the scaling moment functions in the case of Universal Multifractals for different parameter set.

### 6.5. Sampling dimension

It is well known that the size of the sample limits the insight one can get of a statistical process by analyzing data. For multifractal processes this will result in a maximum singularity  $\gamma_s$  and moment order  $q_s$  beyond which the values of the statistical estimates of respectively the codimension and scaling moment function are not considered as reliable (Lovejoy and Schertzer, 1989; Lovejoy and Schertzer, 2007).

More precisely, let's consider  $N_s$  independent samples with a resolution  $\lambda$ . In a  $D$ -dimensional space, there are  $\lambda^D$  values per sample. The maximum singularity ( $\gamma_s$ ) that one can expect to observe is defined by:

$$N_s \lambda^D \Pr(R_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx 1 \quad \text{Eq. 28}$$

By introducing the notion of sampling dimension  $D_s$  :  $N_s = \lambda^{D_s}$  ( $D_s = 0$  for a single sample), one obtains a relationship that enables to estimate  $\gamma_s$  :

$$c(\gamma_s) = D + D_s \quad \text{Eq. 29}$$

For  $\gamma > \gamma_s$  one expects that  $c(\gamma) = +\infty$ , which means that the estimates of  $c(\gamma)$  will not be reliable (Figure 37). As a consequence of the Legendre transform, the estimates of  $K(q)$  will become linear for  $q > q_s = c'(\gamma_s)$  :  $K(q) = \gamma_s(q - q_s) + K(q_s)$

In the framework of universal multifractals we find:

$$\gamma_s = \alpha' C_1 \left( \frac{D + D_s}{C_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{C_1}{\alpha - 1} \quad \text{Eq. 30a} ; \quad q_s = \left( \frac{D + D_s}{C_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{Eq. 30b}$$

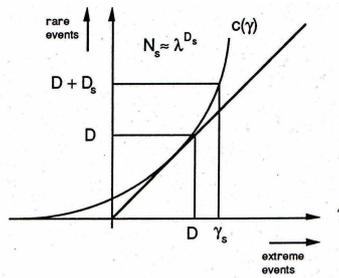


Figure 37: Schematic illustration of sampling dimension and how it imposes a maximum order of singularities  $\gamma_s$ . (Schertzer and Lovejoy, 1993)

An example of use of this notion is found in Royer et al. (2008). In order to investigate the impact of climate change on rainfall extremes, they analysed the daily time series of 12 grid points (Figure 38.a) over France simulated by the climate model CNRM-CM3 of Météo France in a coupled climate scenario A2 over the period 1860–2100. They found that the mean intermittency ( $C_1$ ) tends to increase, whereas the multifractality ( $\alpha$ ) decreases. Since these trends have contradictory effects on the extremes they computed the maximum observable singularity. The results are displayed in Figure 38.b.  $\gamma_s$  appears to increase for most of grid points, which means that the mean intermittency has a dominant effects and one is to expect slightly stronger rainfall extremes for the next hundred years. Other authors (Douglas and Barros, 2003; Hubert et al., 1993) used this notion to estimate Probable Maximum Precipitation.

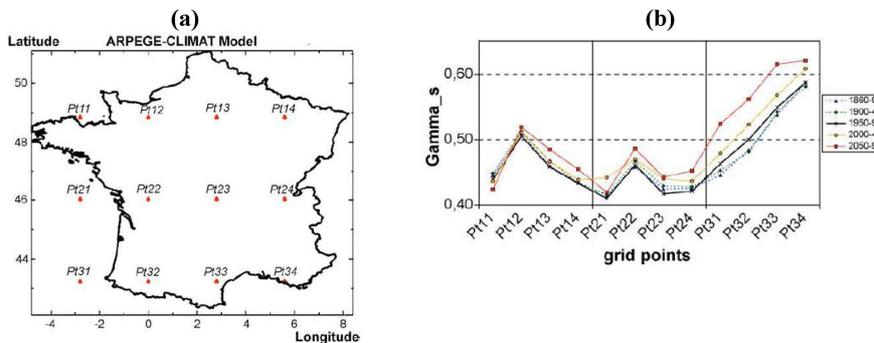


Figure 38: (a) Geographical position of the model grid points  $Pt_{ij}$  with:  $i = 1,4$  (longitude: from west to east);  $j = 1,3$  (latitude, from north to south). (b) Variations of the maximal probable singularity  $\gamma_s$  depending on the grid points and the time range over which they are estimated. (Royer et al., 2008)

## 6.6. Tutorial : multifractal data analysis techniques

The aim of this sub-section is to present multifractal data analysis techniques. This is done through the analysis of the rainfall time series presented in the introduction (of which the fractal dimension of the rainfall support was already evaluated)

### 6.6.1. Up-scaling of the field

Before going on it should be explained how the studied field  $\varepsilon_\lambda$  at different resolution  $\lambda$  is retrieved. The explanation is done in 2 dimensions, but the principle is the same for any dimension.  $\varepsilon_\lambda$  is obtained by up-scaling (some author call it dressing)  $\varepsilon_\Lambda$ , the field measured at the maximum resolution  $\Lambda = \frac{L}{l_\Lambda}$  (where  $l_\Lambda$  is the size of the pixels). More precisely the following steps are performed to evaluate the field at resolution  $\Lambda/2$  (see Figure 39 for an illustration):

- The studied area is divided into pixels of size  $2l_\Lambda$ . Hence each pixel at resolution  $\Lambda/2$  is made of  $2^D (=4)$  pixels of the field at resolution  $\Lambda$ .
- The value  $\varepsilon_{\Lambda/2}$  affected to a pixel at resolution  $\Lambda/2$  is the mean of the values of the pixels at resolutions  $\Lambda$  of which it is made.

The process is then iterated until the resolution  $\hat{\lambda}=1$  is reached. The up-scaling process is conservative.

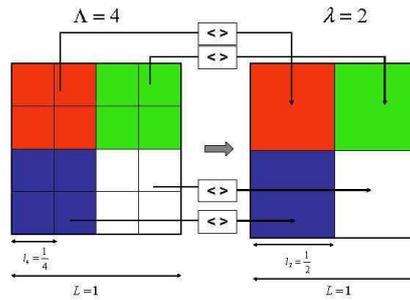


Figure 39: Illustration of a step of the up-scaling process of the field  $\varepsilon_\Lambda$

### 6.6.2. Scaling moment function

This section aims at presenting the Trace Moment technique, which enables to evaluate  $K(q)$  for any  $q$ , relying on the relation  $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)}$ .

In the TM technique, for any  $q > 0$  the following is implemented (see Figure 40 for an illustration):

- For each resolution  $\lambda$  the empirical statistical of moment of order  $q$  is evaluated

$\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle = \frac{\sum \varepsilon_\lambda^q}{\lambda^D}$  (the elements corresponds to either time steps in 1D or pixels in 2D). If the data contains several samples, then they are up-scaled independently and an average  $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle$  is taken into account.

- The logarithm of  $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle$  versus the logarithm of  $\lambda$  is plotted.
- A linear regression is performed and the slope gives  $K(q)$

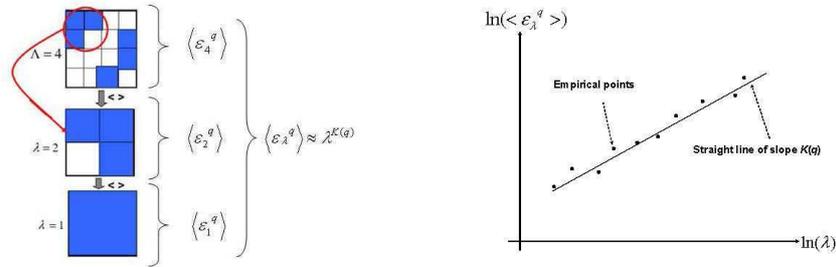


Figure 40 : Illustration of the Trace-Moment technique

This technique is called “Trace Moment” because the empirical statistical moment basically (except for a ratio of  $\lambda^{(q-1)D}$ ) corresponds the trace moment of the fluxes.

The UM parameters can then be estimated by fitting the theoretical expression of  $K(q)$  (Eq. 26) to the empirical one. This can be done by using standard fitting techniques on the portion of the curve where  $q < \min(q_D, q_S)$  (indeed multifractal transitions affect the validity of the theoretical formula for greater  $q$ , see next two questions for more details). Another solution consists in using theoretical properties of the curve.  $C_1$  is then given by  $K'(1) = C_1$ ,

and  $\alpha$  by either  $K''(1) = \alpha C_1$  or by  $q_{\min} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$  where  $q_{\min}$  defines the minimum value of  $K(q)$  (i.e. :  $K(q_{\min}) = \min_{q>0} K(q)$ )

**Question:**

Use the scilab function “TM” to evaluate  $K(q)$  for  $q$  ranging from 0 to 5. Comment the scaling. Estimate  $\alpha$  and  $C_1$  with the help of the first and second differentiate of  $K(q)$  near  $q=1$

**Answer:**

Figure 41 displays Eq. 14 in a log-log plot. The scaling is very good ( $R^2 > 0.99$ ) up to  $\lambda=256$  (roughly 11 days). This maximum scale corresponds to the synoptic scale, i.e. the standard life time of planetary scale meteorological structures. The UM parameters  $\alpha$  and  $C_1$  are estimated as follow:

$$C_1 = K'(1) \approx \frac{K(1.1) - K(0.9)}{0.2} \approx 0.54$$

$$\alpha = \frac{K''(1)}{K'(1)} \approx \frac{0.2}{0.1^2} \frac{K(1.1) + K(0.9)}{K(1.1) - K(0.9)} \approx 0.51$$

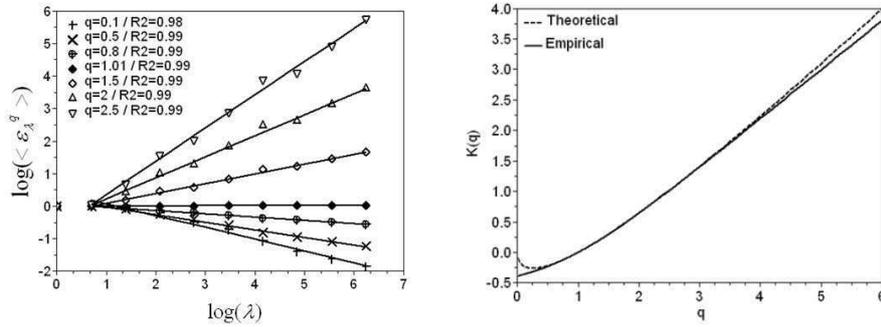


Figure 41 : Illustration of the TM technique for the studied rainfall field.

**Question:**

Plot the theoretical  $K(q)$ . For this use the parameters  $\alpha=0.54$  and  $C_1=0.54$  which will be found with the help of the Double Trace Moment and are more reliable than the ones estimated in the previous question. Use the notion of maximum observable singularity to comment on the differences between the empirical and theoretical curve for  $q>3.5$ .

**Answer:**

The theoretical and empirical curves are plotted Figure 41. It appears that the empirical curve is below the one plotted with the estimated UM parameters for moment greater than roughly 3.5. This phenomenon can be explained theoretically with the help of the notion of maximum observable singularity (See section ??).

With this rainfall data,  $K(q)$  is indeed linear ( $R^2$  of the linear regression equal  $1-10^{-5}$ ) with a slope equal to 0.80 for  $q$  roughly greater than 3 – 3.5. These observations are in agreement with the theoretical predictions of  $q_s = 3.07$  and  $\gamma_s = 0.80$ . (Eq 30 with the estimated  $\alpha$  and  $C_1$ )

Finally it should be mentioned that the discrepancies for small moments are due to a multifractal phase transition associated with the influence of the numerous zeros in the data.

**6.6.3. Direct estimation of UM parameters  $\alpha$  and  $C_1$**

This section aims at presenting the double trace moment (DTM) technique (Lavallée et al., 1993) which enables to directly estimate UM parameters  $\alpha$  and  $C_1$ . It relies on the assumption that the studied field is conservative and exhibits a universal multifractal behaviour

Let's consider the renormalized  $\eta$ -power of the field ( $\eta \in ]0, +\infty[$ ):  $\varepsilon_\lambda^{(\eta)} = \frac{\varepsilon_\lambda^\eta}{\langle \varepsilon_\lambda^\eta \rangle}$ .

The statistical moment of order  $q$  of  $\varepsilon_\lambda^{(\eta)}$  also scales with the resolution:

$$\langle \varepsilon_\lambda^{(\eta)q} \rangle \approx \lambda^{K(q,\eta)} \quad \text{Eq. 31}$$

$$\text{With } K(q,\eta) = K(\eta q) - qK(\eta) \quad \text{Eq. 32}$$

$$\text{Indeed } \langle \varepsilon_\lambda^{(\eta)q} \rangle = \frac{\langle \varepsilon_\lambda^\eta \rangle^q}{\langle \varepsilon_\lambda^\eta \rangle^q} \approx \frac{\lambda^{K(\eta)}}{\lambda^{qK(\eta)}} = \lambda^{K(q,\eta)}$$

In the specific framework of Universal Multifractal, we find

$$K(q,\eta) = \eta^\alpha K(q) \quad \text{Eq. 33}$$

The field obtained by up-scaling the  $\eta$ -power of the field at the maximum resolution  $\Lambda$  also scales as in Eq. 31-32. As a consequence, the following steps are performed to implement the Double Trace Moment technique:

- For each  $q$  and  $\eta$  the TM technique is implemented on the field  $\varepsilon_\Lambda$  raised to the power  $\eta$ . This enables to retrieve an estimate of  $K(q,\eta)$
- For a given  $q$ , a log-log plot of  $K(q,\eta)$  vs.  $\eta$  is drawn (Figure 42). The slope and the intercept of the linear portion of the graph give  $\alpha$  and  $C_1$  (because for UM fields  $K(q,\eta) = \eta^\alpha \frac{C_1}{\alpha-1} (q^\alpha - q)$ )

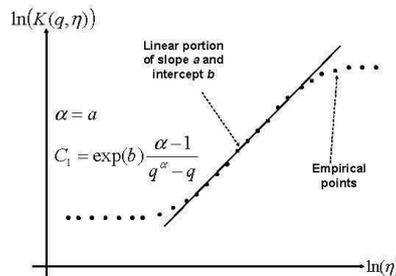


Figure 42 : Determination curve of UM parameters in the DTM technique

**Question:**

Use the Scilab function “DTM” to implement the DTM technique. For  $\eta$  ranging from  $10^{-2}$  to 10, try different  $q$ , and comment the results. Explain why the determination curve is constant for great  $\eta$ .

**Answer:**

Figure 43 displays the results of the DTM technique analysis on the rainfall time series. It appears that as for the TM technique, the scaling is very good on scales ranging from 1h to 11 days. As expected with Eq. 33, the estimates of  $\alpha$  and  $C_1$  do not depend on which  $q$  is chosen as long as multifractal phase transitions do not affect the curve. Usually the analysis is done with  $q=1.5$ .

Concerning the plateau visible for great  $\eta$ , the explanation lies in the multifractal phase transition associated with maximum observable singularities. Indeed, as seen in section 6.5  $K(q)$  will become linear for  $q > q_s$ :  $K(q) = \gamma_s(q - q_s) + K(q_s)$ . Since  $K(q,\eta) = K(\eta q) - qK(\eta)$ , we have  $K(q,\eta) = (q-1)(d + d_s)$ , for  $\eta \geq \eta_+(q) = ((d + d_s)/C_1)^{1/\alpha}$ , which does not depends on  $\eta$ . Similarly, the plateau for small  $\eta$  is due to the multifractal

phase transition associated with the influence of the numerous zeros in the data. These two phenomena narrow the range of available  $\eta$  to estimate  $\alpha$  and  $C_1$ .

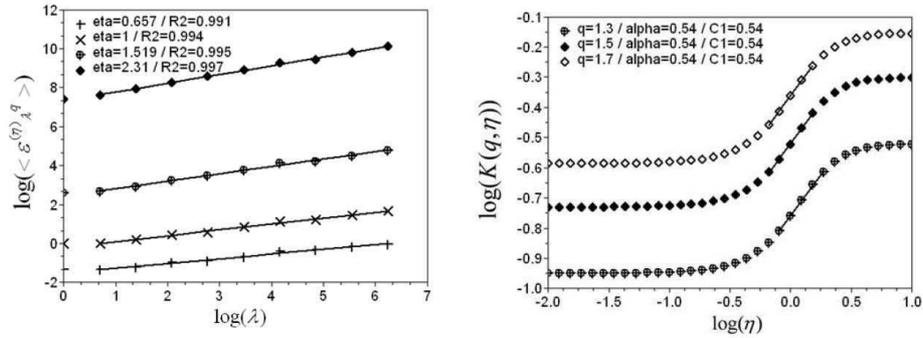


Figure 43 : Scaling in the DTM technique for  $q=1.5$  (left) and determination curves of UM parameters (right) for the studied rainfall time series.

#### 6.6.4. The codimension function

The aim of this section is to present the Probability Distribution Multiple Scaling (PDMS) technique (Lavallée, 1991; Schertzer and Lovejoy, 1989) which enables to estimate  $c(\gamma)$  for any  $\gamma$ , relying on the basic equation  $\Pr(\epsilon_{\lambda} \geq \lambda^{\gamma}) \approx \lambda^{-c(\gamma)}$ . To achieve this, the following is implemented:

- For each resolution  $\lambda$ , the number of elements (time steps or pixels) where  $\epsilon_{\lambda} \geq \lambda^{\gamma}$  denoted  $N_{\lambda}(\epsilon_{\lambda} \geq \lambda^{\gamma})$ , is evaluated. The corresponding probability is deduced with the help of the relation  $\Pr(\epsilon_{\lambda} \geq \lambda^{\gamma}) = \frac{N_{\lambda}(\epsilon_{\lambda} \geq \lambda^{\gamma})}{\lambda^D}$ , where  $\lambda^D$  is total number of elements at resolution  $\lambda$ . If the data contains several samples, then they are up-scaled independently and an average  $N_{\lambda}(\epsilon_{\lambda} \geq \lambda^{\gamma})$  is taken into account.

- The logarithm of  $\Pr(\epsilon_{\lambda} \geq \lambda^{\gamma})$  versus the logarithm of  $\lambda$  is plotted (Figure 44)
- A linear regression is performed and the slope gives  $-c(\gamma)$

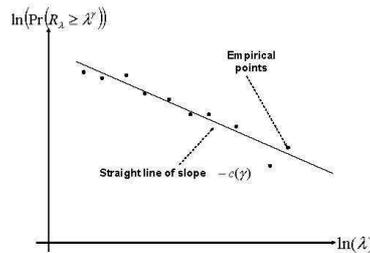


Figure 44 : Illustration of the PDMS technique

**Question:**

Use the scilab function “PDMS” to evaluate  $c(\gamma)$  for  $\gamma$  ranging from -2 to 1. Comment the scaling and the estimated curves.

**Answer:**

Figure 45 displays Eq. 13 in a log-log plot. As indicated by the values of the R2, the scaling is worse than for the moment scaling function (question in section 6.2.2). Furthermore only scales ranging from 1h to 2.7 days are taken into account. Indeed too many singularities are not observed at smaller resolution. This reflects the fact that this technique is less reliable than the Trace Moment.

Concerning the co-dimension function, since  $\alpha < 0$  there is a maximum theoretical singularity ( $\gamma_0 = -\frac{C_1}{\alpha - 1}$ ), which is visible on the curve ( $\gamma_0 = 1.17$  in that case). In the empirical curve, it was expected that singularities greater than  $\gamma_s (=0.80)$  would not be observed, but  $c(\gamma)$  cannot be computed for  $\gamma$  greater than approximately 0.65. This is due to the fact that some great singularities are not observed at all the scales (especially large ones) which prevents us from computing  $c(\gamma)$ . For small singularity,  $c(\gamma)$  should theoretically become equal to zero. This is not observed because there are numerous zeros in the observed field, and therefore  $\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} c(\gamma) = c_F$ , where  $c_F (=0.43)$  is the fractal co-dimension of the rainfall support (see question in section 4.4).

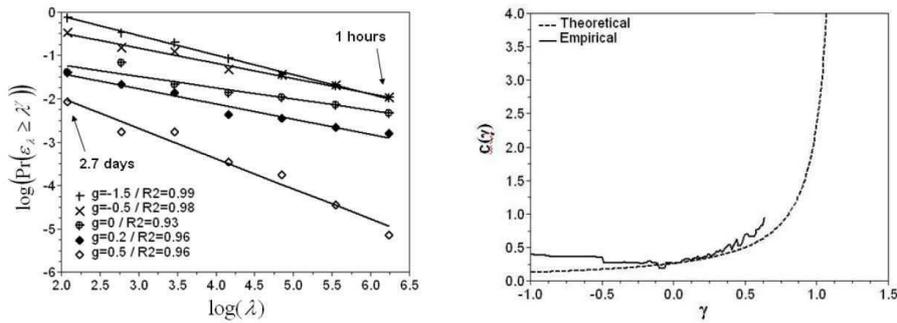


Figure 45 : Illustration of the PDMS technique implemented on the studied rainfall time series.

**6.7. Tutorial: non-conservative fields**

The description of how to deal with non-conservative fields is done through the analysis of a discharge time series obtained by inputting a simulated rainfall event lasting roughly 4 hours, with  $\alpha=1.52$  and  $C_1=0.14$  to a semi-distributed urban hydrology/hydraulic model (see Figure 46) of a 3400 ha urban area located in Seine-Saint-Denis (North-East of Paris). The average total rainfall depth over the catchment is 15.1 mm. The studied link is located in the East of the catchment. The studied time series is displayed Figure 47.a.

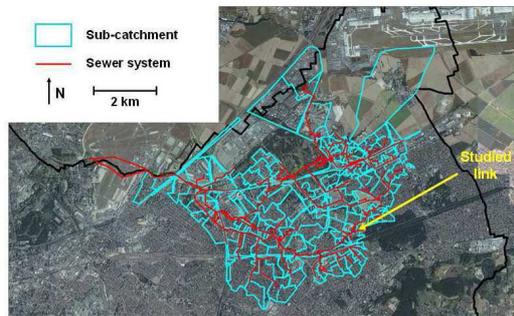


Figure 46 : Illustration of the urban hydrologic/hydraulic model with which the studied discharge time series was simulated.

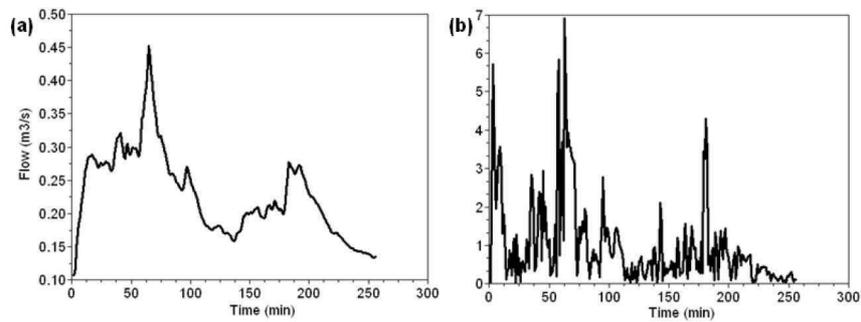


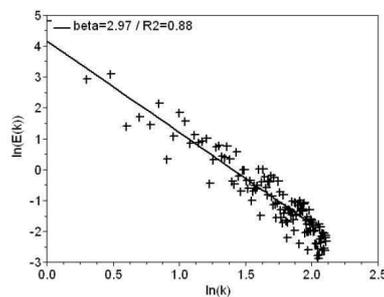
Figure 47 : Studied discharge time series (a) and the renormalized absolute value of its fluctuations (b)

**Question:**

Use the Scilab function “spectral\_analysis” and evaluate the spectral exponent  $\beta$  of the studied discharge series. Interpret the results.

**Answer:**

Figure 48 displays the spectra estimated directly on the studied discharge time series. With a  $R^2$  equal to 0.88 for wave numbers  $k$  ranging from 1 to 100 (which corresponds respectively to 256 and 2.6 min; scale in minutes = outer scale in minutes / wave number) the scaling is rather good. We find  $\beta=2.97$  which reflects a strongly non-conservative field.



**Figure 48 : Illustration of the spectral analysis directly on the studied discharge time series**

A spectral slope  $\beta > 1$  for  $\phi_\lambda$  indicate a non-conservative field (i.e.  $\langle \phi_\lambda \rangle \neq 1$ ). In that case,  $\phi_\lambda$  can be written as:

$$\phi_\lambda = \varepsilon_\lambda^a \lambda^{-H} \quad \text{Eq. 34}$$

where  $\varepsilon_\lambda$  is a conservative field of moment scaling function  $K_c(q)$ , and  $H$  the non-conservation parameter.  $K_c(q)$  only depends on UM parameters  $C_1$  and  $\alpha$ . The value of the exponent  $a$  is usually unknown. For pedagogical purposes, we work under the simple assumption that  $a=1$  in the following ( $\phi_\lambda = \varepsilon_\lambda \lambda^{-H}$ ).  $H$  characterises the scale dependence of the average field, i.e.  $\langle \phi_\lambda \rangle \approx \lambda^{-H}$ .  $H$  is equal to zero for conservative fields.

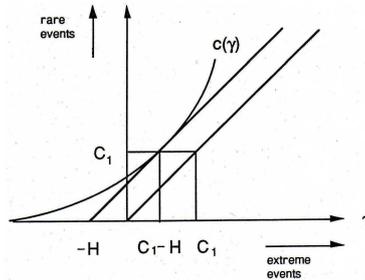
The moment scaling function  $K(q)$  of  $\phi_\lambda$  is given by:

$$K(q) = K_c(q) - Hq \quad \text{Eq. 35}$$

$$\text{Indeed } \lambda^{K(q)} \propto \langle \phi_\lambda^q \rangle = \langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \lambda^{-Hq} \propto \lambda^{K_c(q)} \lambda^{-Hq}$$

Concerning the codimension function, there is simply a shift in singularities by  $-H$  for the non-conserved density, with regards to the conserved density (see Figure 49 for an illustration). Thus we have (see section 6.1 for more details about the parameters):  $c(C_1 - H) = C_1$  and  $c'(C_1 - H) = 1$

$$c(\gamma - H) = \begin{cases} C_1 \left( \frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right)^\alpha & \alpha \neq 1 \\ C_1 \exp\left(\frac{\gamma}{C_1} - 1\right) & \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{Eq. 36}$$



**Figure 49: A schematic illustration showing the shift in  $c(\gamma)$  of  $H$  for non conserved process (Schertzer and Lovejoy, 1993)**

Retrieving  $\varepsilon_\lambda$  from  $\phi_\lambda$  requires theoretically a fractional integration of order  $H$  (equivalent to a multiplication by  $k^H$  in the Fourier space). A common approximation, which provides reliable results (Lavallée et al., 1993), consists in taking  $\varepsilon_\lambda$  as the absolute value of the fluctuations of  $\phi_\lambda$  at the maximum resolution and renormalizing it, i.e.:

$$- \varepsilon_\lambda = \frac{|\phi_\lambda(i+1) - \phi_\lambda(i)|}{\langle |\phi_\lambda(i+1) - \phi_\lambda(i)| \rangle} \text{ in 1D, \quad Eq. 37a}$$

$$- \varepsilon_\lambda = \frac{\sqrt{(R(i+1, j) - R(i-1, j))^2 + (R(i, j+1) - R(i, j-1))^2}}{\langle \sqrt{(R(i+1, j) - R(i-1, j))^2 + (R(i, j+1) - R(i, j-1))^2} \rangle}, \text{ in 2D \quad Eq. 37b}$$

Because the power spectrum is the Fourier transform of the auto-correlation function, and because a fractional integration of order  $H$  is equivalent to a multiplication by  $k^H$  in the Fourier space,  $H$  can be estimated with the help of the following formula (Tessier et al., 1993):

$$\beta = 1 + 2H - K(2) \quad \text{Eq. 38}$$

**Question:**

Perform a spectral analysis on the corresponding conservative field  $\varepsilon_\lambda$  of the studied discharge time series. Interpret the result

**Answer:**

Figure 50 displays the spectra for the fluctuations of the studied discharge time series. It appears that the scaling is worse than directly on the field ( $R^2=0.47$  for  $k$  ranging from 1 to 100). This should be qualified by the fact that a spectral analysis is theoretically valid with longer samples, or on average with numerous samples, and that for pedagogical purposes, a single sample is used here. We find  $\beta=1.11$  which corresponds to a clear decrease with regards to the previous question.

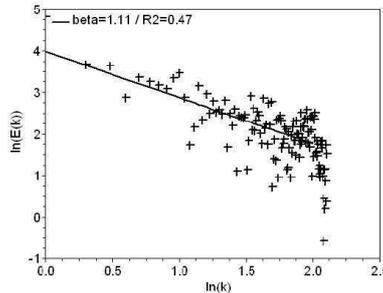


Figure 50 : Illustration of the spectral analysis on the fluctuations of the studied discharge time series

**Question**

Use the Scilab functions previously defined to perform a TM and a DTM analysis on the corresponding conservative field. Estimate  $H$ .

**Answer**

Figure 51 Displays the results of the TM analysis performed the fluctuations of the studied discharge time series. The scaling is very good on the whole range of scales ( $\lambda$  belonging to  $[1;256]$ ). The agreement between the empirical  $K(q)$  is also very good, even for

small values. Indeed the discrepancies observed for the rainfall field, which are associated with the numerous zeros, are not visible here. The DTM analysis (Figure 52) confirms these observations and yields to  $\alpha=1.78$  and  $C_1=0.09$ . Applying Eq. 38, we find  $H=1.07$ . Figure 53 displays the TM analysis performed directly on the field, which as expected does not enable to visualize the underlying scaling.

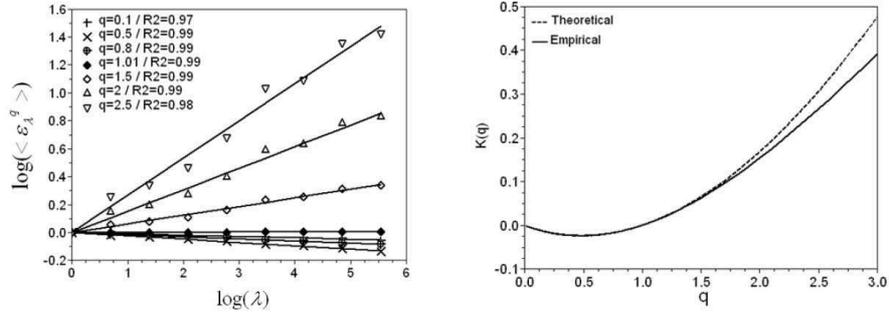


Figure 51 : Illustration of the TM analysis on the fluctuations of the studied discharge time series

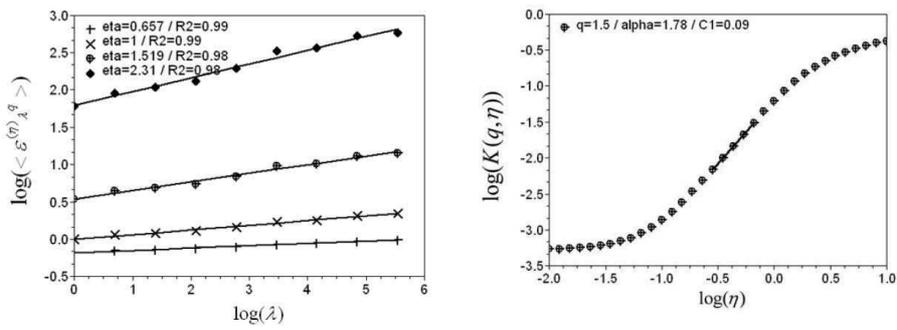


Figure 52 : Illustration of the DTM analysis on the fluctuations of the studied discharge time series

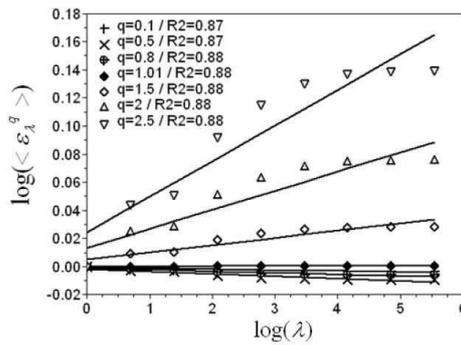


Figure 53 : TM analysis on directly on the studied discharge time series

## 7. Simulations of UM fields

### 7.1. How to build discrete multifractal cascades

The simulation of multifractal fields is achieved by building a random multiplicative cascade. For the pedagogical purposes we will only present its discrete case which is easier to manipulate. Within a discrete multiplicative cascade, as explained in section 5.1, at each step of the cascade process:

- Each time step (in 1D) or each pixel (in 2D) is divided into  $\lambda_0$  steps or  $\lambda_0^2$  pixels respectively (see Figure 23). We will use the common scale ratio  $\lambda_0 = 2$ , although this is not mandatory.
- The value affected to the new time step is the one of the former time step multiplied by a random multiplicative increment  $\mu\varepsilon$ .

As a consequence, after  $n$  steps (the resolution of the cascade is  $\lambda = \lambda_0^n$ ) the value of a given time step (or a pixel) is the product of the random factor of each  $n$  previous steps of the cascade. To obtain a UM field of parameter  $C_1$  and  $\alpha$ , one has to use  $\mu\varepsilon = \exp\left[\left(\frac{C_1 \ln(\lambda_0)}{|\alpha-1|}\right)^{1/\alpha} L(\alpha)\right] / \lambda_0^{C_1/\alpha-1}$  (Eq. 39).  $L(\alpha)$  being an extremal Lévy-stable random variable of index  $\alpha$  (i.e.  $\langle \exp(qL(\alpha)) \rangle = \exp(q^\alpha)$ ) that can be generated with the help of the procedure given by Chambers et al. (1976).

### 7.2. Tutorials: simulating UM fields

#### Question:

Show that the resulting field indeed exhibits a UM behaviour.

#### Answers:

After  $n$  steps, the resolution is  $\lambda = \lambda_0^n$ , and  $\varepsilon_\lambda$  is the product of  $n$  terms:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda &= \prod_{i=1}^n \exp\left[\left(\frac{C_1 \ln(\lambda_0)}{|\alpha-1|}\right)^{1/\alpha} L(\alpha)\right] / \lambda_0^{C_1/\alpha-1} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \exp\left[\left(\frac{C_1 \ln(\lambda_0)}{|\alpha-1|}\right)^{1/\alpha} L(\alpha)\right]\right) / \lambda_0^{n \frac{C_1}{\alpha-1}} \end{aligned}$$

Evaluating the moment of order  $q$ , we find:

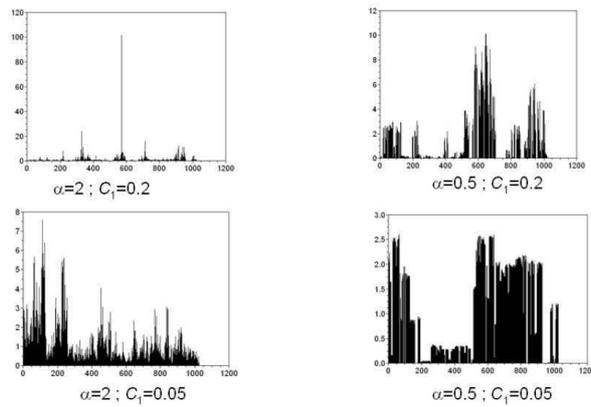
$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_\lambda^q \rangle &= \left(\prod_{i=1}^n \left\langle \exp\left[\left(\frac{C_1 \ln(\lambda_0)}{|\alpha-1|}\right)^{1/\alpha} qL(\alpha)\right]\right\rangle\right) / \lambda_0^{q \frac{C_1}{\alpha-1}} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{C_1 \ln(\lambda_0)}{\alpha-1} q^\alpha\right)\right) / \lambda_0^{q \frac{C_1}{\alpha-1}} \\ &= \lambda_0^{\frac{C_1}{\alpha-1}(q^\alpha-1)} \end{aligned}$$

**Question:**

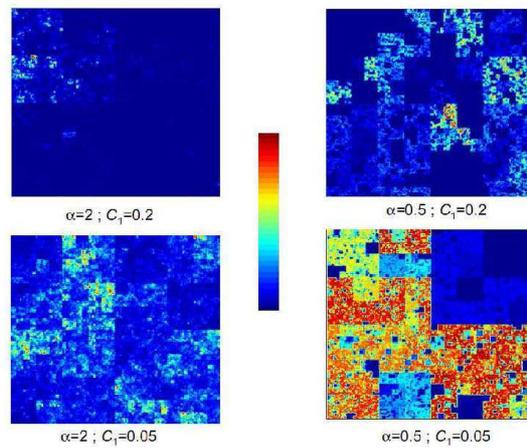
Use the Scilab function `simulate_UM` to simulate UM fields. Try different  $C_1$  and  $\alpha$ . Implement DTM on those simulated fields. Comment the results. Simulate several fields with  $\alpha=0.51$  and  $C_1=0.54$  and compare with the studied rainfall data (Figure 1)

**Answer:**

Examples of simulated fields with various  $C_1$  and  $\alpha$  are shown in Figure 54 (in 1D) and Figure 55 (in 2D). In the 2D case, it is visible that discrete cascades involve straight construction lines that result in non-physical square structure. To avoid this, it is necessary to use continuous cascades, obtained by scale densification of discrete cascades. More details can be found in Pecknold et al. (1993), and Lovejoy and Schertzer (2010a).



**Figure 54 : Examples of 1D simulated UM fields**



**Figure 55 : Examples of 2D simulated UM fields**

1000 fields of length 4096 were simulated with  $\alpha=1.8$  and  $C_1=0.5$ . The DTM technique was then implemented on each field, and the histograms of the results are shown in Figure 56. The distribution of  $\alpha$  is centred on the value used for the simulations, whereas the  $C_1$  tends to be slightly smaller than the value of 0.5 used in the simulations. These distributions illustrate the fact that UM behaviour is a property that is true on average on an infinite number of samples. To confirm this, a DTM analysis was performed on average on the 1000 independent samples (i.e. the samples are up-scaled interdentally and are considered on average in Eq. 31) and yielded  $\alpha=1.78$  and  $C_1=0.47$ , which is very similar to the values used for the simulations.

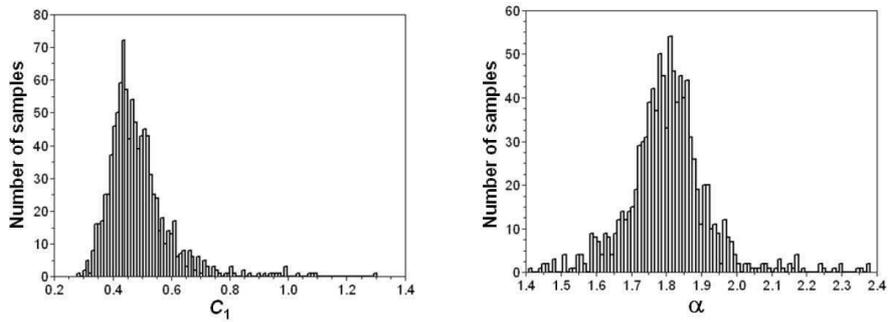


Figure 56 : Distribution of the estimated UM parameters among the 1000 samples simulated with  $\alpha=1.8$  and  $C_1=0.5$

Figure 57 displays the renormalized rainfall time series and three samples of simulated discrete UM fields with the parameters estimated on the actual data (i.e.  $\alpha=0.54$  and  $C_1=0.54$ ). It can be seen that the overall patterns are rather similar.

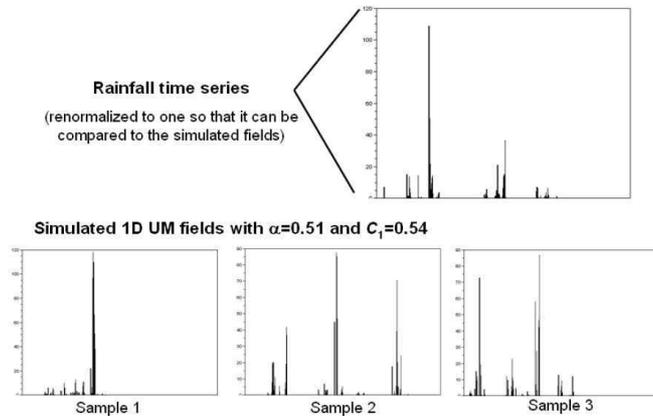


Figure 57 : Comparison of the studied rainfall time series and simulated UM fields

### 7.3. Levy variables and generalized central limit theorem

Let's consider  $n$  independent identically distributed random variables  $X_i$ . In the following the symbol  $\stackrel{d}{=}$  means equality in probability distribution.

The random variables  $X_i$  are said to be stable fixed point of renormalized sum if for any integer  $n \geq 2$ , there exists a positive  $b_n$  and a real  $a_n$  such that :

$$\sum_{i=1}^n X_i \stackrel{d}{=} b_n X_1 + a_n \quad \text{Eq. 40}$$

First, let's consider a finite variance, i.e.  $\langle X_i^2 \rangle < \infty$ . The central limit theorem states that even if the  $X_i$  are not Gaussian, their renormalized sum of  $X_i$  converge toward a Gaussian distribution  $X$ , i.e.:

$$X \stackrel{d}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{b_n} - a_n \quad \text{Eq. 41}$$

With:

- $X$  is a Gaussian variable
- $\langle X^2 \rangle = \langle X_i^2 \rangle < \infty$
- $b_n = n^{1/2}$ , and  $a_n = n\langle X_i \rangle - \langle X \rangle$

Hence the Gaussian variables are attractive, and constitute a universality class for the addition of random variables.  $X$  is completely independent of the details of the distribution of  $X_i$ . Gaussian variables are stable fixed points with  $b_n = n^{1/2}$ , and  $a_n = (n-1)\langle X_i \rangle$ .

The assumption of finite variance can be relaxed in the context of the generalized central limit theorem. Let's consider an order of divergence  $\alpha$  ( $\in [0,2]$  called Lévy index) for the moments of the random variables  $X_i$ , i.e.:

$$\langle X_i^q \rangle < \infty, \text{ for } q < \alpha$$

$$\langle X_i^q \rangle = \infty, \text{ for } q \geq \alpha \quad (\text{equivalent to } \Pr(|X_i| \geq s) \approx s^{-\alpha}, s \gg 1)$$

In that case, the renormalized sum of  $X_i$  converges toward a Lévy distribution  $L$ , i.e.:

$$L \stackrel{d}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{b_n} - a_n \quad \text{Eq. 42}$$

With:  $b_n = n^{1/\alpha}$  (and for  $\alpha > 1$ ,  $a_n = n\langle X_i \rangle - \langle X \rangle$ )

Lévy variables are stable fixed points of renormalized sums of i.i.d. hyperbolic variables (i.e. their probability distribution exhibit an algebraic fall-off). Note that for  $\alpha \leq 1$ , the expectation of the  $X_i$  is not defined, and the sum is divergent. The Gaussian case is retrieved with  $\alpha=2$ .

## 8. Conclusions

*“Why to accept the relevance of multifractal cascade models to analyse and simulate geophysical fields extremely variables over a wide range of scales?”*

As mentioned by Lovejoy and Schertzer (2010b) there are mainly 4 reasons:

- There is a large and compelling body of evidence to validate this theoretical framework on various geophysical fields (rainfall, river discharge, hydraulic conductivity, wind, plankton concentration...)
- This theoretical framework relies on rather simple physically and mathematically based principle, and enables to explain complex phenomenon without ad hoc models or reasoning.
- The most advanced numerical models generate fields in agreement with this theoretical framework on almost their whole range of scales. So rejecting cascades models would also mean rejecting numerical models.
- Stochastic models are increasingly needed for application (example: see the shift from deterministic to ensemble forecast that was witnessed in numerical weather prediction over the last twenty years).

*“What are the remaining challenges?”*

Fortunately for scientists of this field this rather simple theoretical framework still needs some improvements. Here is a list of few challenges that need to be achieved, some being more theoretical and some being more practical

- Rigorously derive the cascade phenomenology from the governing dynamical equations of the atmosphere.
- Modify the multifractal framework to better take into account some specific features of certain geophysical fields (ex: the zeros of rainfall, ...).
- Improve the understanding of the link between the characteristic parameters found for different geophysical fields.
- Develop sensors and network of sensors to fully grasp the very small scale (<10-100 m) variability of geophysical fields.
- Develop method to implement multifractals in practical applications (ex: weather forecast, flood frequency estimation, IDF curves, wind turbine optimization, design of sensors network...) so that it does not remain only a theoretical issue.

## 9. References

- Bak, P., Tang, C. and Wessensfeld, K., 1988. Self-Organized Criticality. Phys. Rev. Lett., 38: 364-374.
- Bendjoudi, H. and Hubert, P., 2002. Le coefficient de compacite de Gravelius: analyse critique d'un indice de forme des bassins versants. Hydrological Sciences Journal- Journal Des Sciences Hydrologiques, 47(6): 921-930.
- Chambers, J.M., Mallows, C.L. and Stuck, B.W., 1976. Method for simulating stable random-variables. Journal of the American Statistical Association, 71(354): 340-344.

- Davis, A., Marshak, A., Wiscombe, W. and Cahalan, R., 1994. Multifractal characterization of nonstationarity and intermittency in geophysical fields - observed, retrieved or simulated. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, 99(D4): 8055-8072.
- de Lima, M.I.P. and Grasman, J., 1999. Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal. *Journal of Hydrology*, 220(1-2): 1-11.
- Douglas, E.M. and Barros, A.P., 2003. Probable maximum precipitation estimation using multifractals: Application in the eastern United States. *Journal of Hydrometeorology*, 4(6): 1012-1024.
- Fischer, R.A. and Tippett, L.H.C., 1928. Limiting forms of the frequency distribution of the largest and smallest member of a sample. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 24: 180-190.
- Fraedrich, K. and Larnder, C., 1993. Scaling regimes of composite rainfall time-series. *Tellus Series a-Dynamic Meteorology and Oceanography*, 45A(4): 289-298.
- Frisch, U., Sulem, P.L. and Nelkin, M., 1978. Simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 87(AUG): 719-736.
- Georgakakos, K.P., Carsteanu, A.A., Sturdevant, P.L. and Cramer, J.A., 1994. Observation and analysis of midwestern rain rates. *Journal of Applied Meteorology*, 33(12): 1433-1444.
- Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2010. Analyses multifractales et spatio-temporelles des précipitations du modèle Méso-NH et des données radar. *Hydrological Sciences Journal-Journal Des Sciences Hydrologiques*, in press.
- Halsey, T.C., Jensen, M.H., Kadanoff, L.P., Procaccia, I. and Shraiman, B.I., 1986. Scaling measures and singularities. *Phys. Rev. A*(33): 1141.
- Harris, D., Menabde, M., Seed, A. and Austin, G., 1996. Multifractal characterization of rain fields with a strong orographic influence. *J. Geophys. Res.*, 101: 26405-26414.
- Hubert, P., 2001. Multifractals as a tool to overcome scale problems in hydrology. *Hydrological Sciences Journal-Journal Des Sciences Hydrologiques*, 46(6): 897-905.
- Hubert, P. and Carbonnel, J.P., 1989. Dimensions fractales de l'occurrence de pluie en climat soudanoshélien. *Hydrologie continentale*, 4: 3-10.
- Hubert, P., Friggit, F. and Carbonnel, J.P., 1995. Multifractal structure of rainfall occurrence in west Africa. In: Z.W. Kundzewicz (Editor), *New Uncertainty Concepts in Hydrology and Water Resources*. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 109-113.
- Hubert, P., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., Bendjoudi, H. and Lovejoy, S., 2007. Predetermination of floods. In: O.F. Vasiliev, P. VanGelder, E.J. Plate and M.V. Bolgov (Editors), *Extreme Hydrological Events: New Concepts for Security*. NATO Science Series IV Earth and Environmental Sciences, pp. 185-198.
- Hubert, P. et al., 1993. Multifractals and extreme rainfall events. *Geophys. Res. Lett.*, 20: 931-934.
- Jennings, A.H., 1950. World's greatest observed point rainfall. *Mon. Weath. Rev.*, 78: 4-5.
- Kolesnikov, V.N. and Monin, A.S., 1965. Spectra of meteorological field fluctuation. *Izv. Acad. Sci. USSR Atmos. Oceanic Phys*, 1: 653-669.
- Ladoy, P., Lovejoy, S. and Schertzer, D., 1991. Extreme fluctuations and intermittency in climatological temperatures and precipitation. In: D. Schertzer and S. Lovejoy (Editors), *Scaling, fractals and non-linear variability in geophysics*. Kluwer Academic Publisher, The Netherlands, pp. 241-250.
- Ladoy, P., Schmitt, F., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1993. The multifractal temporal variability of nimes rainfall data. *Comptes Rendus de l'Academie Des Sciences Serie II*, 317(6): 775-782.
- Lavallée, D., 1991. *Multifractal techniques: analysis and simulation of turbulent fields*, McGill University, Montréal (Quebec, Canada).

- Lavallée, D., Lovejoy, S. and Ladoy, P., 1993. Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. In: L. de Cola and N. Lam (Editors), *Fractas in geography*. Prentice-Hall, pp. 171-205.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 1989. Comments on Are rain rate processes self-similar? *Wat. Resour. Res.*, 25: 577-579.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 1990. Our multifractal atmosphere: a unique laboratory for nonlinear dynamics. *Physics in Canada*, 46(4): 62-71.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 2007. Scaling and multifractal fields in the solid earth and topography. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 14(4): 465-502.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 2010a. On the simulation of continuous in scale universal multifractals, part I Spatially continuous processes. *Computers & Geosciences*, 36(11): 1393-1403.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 2010b. Towards a new synthesis for atmospheric dynamics: Space time cascades. *Atmospheric Research*, 96(1): 1-52.
- Macor, J., 2007. Développement de techniques de prévision de pluie basées sur les propriétés multi-échelles des données radar et satellites., Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Marne La vallée, 193 pp.
- Mandapaka, P.V., Lewandowski, P., Eichinger, W.E. and Krajewski, W.F., 2009. Multiscaling analysis of high resolution space-time lidar-rainfall. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 16(5): 579-586.
- Mandelbrot, B., 1974. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *Journal of Fluid Mechanics*, 62: 331-358.
- Mandelbrot, B., 1975. *Les objets fractals, forme, hasard et dimension*. Flammarion, Paris, 190 pp.
- Mandelbrot, B., 1982. *The fractal geometry of nature*. Freeman, San Francisco, 461 pp.
- Marsan, D., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1996. Causal space-time multifractal processes: Predictability and forecasting of rain fields. *J. Geophys. Res.*, 101: 26333-26346.
- Menabde, M., Harris, D., Seed, A., Austin, G. and Stow, D., 1997. Multiscaling properties of rainfall and bounded random cascades. *Water Resources Research*, 33(12): 2823-2830.
- Nikolopoulos, E.I., Kruger, A., Krajewski, W.F., Williams, C.R. and Gage, K.S., 2008. Comparative rainfall data analysis from two vertically pointing radars, an optical disdrometer, and a rain gauge. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 15(6): 987-997.
- Novikov, E.A. and Stewart, R., 1964. Intermittency of turbulence and spectrum of fluctuations in energy dissipation. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Geofiz*, 3: 408-412.
- Nykanen, D.K. and Harris, D., 2003. Orographic influences on the multiscale statistical properties of precipitation. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, 108(D8).
- Olsson, J., 1996. Validity and applicability of a scale-independent, multifractal relationship for rainfall. *Atmospheric Research*, 42(1-4): 53-65.
- Pandey, G., Lovejoy, S. and Schertzer, D., 1998. Multifractal analysis of daily river flows including extremes for basins of five to two million square kilometres, one day to 75 years. *Journal of Hydrology*, 208(1-2): 62-81.
- Parisi, G. and Frish, U., 1985. A multifractal model of intermittency. In: M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi (Editors), *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics*. Elsevier North Holland, New-York, pp. 111-114.
- Pecknold, S., Lovejoy, S., Schertzer, D., Hooge, C. and Malouin, J.F., 1993. The simulation of universal multifractals. In: J.M. Perdan and A. Lejeune (Editors), *Cellular Automata: Prospects in astrophysical applications*. World Scientific, pp. 228-267.

- Royer, J.-F., Biauou, A., Chauvin, F., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2008. Multifractal analysis of the evolution of simulated precipitation over France in a climate scenario. *C.R Geoscience*, 340: 431-440.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1984. On the dimension of atmospheric motions. In: T. Tatsumi (Editor), *Turbulence and chaotic phenomena in fluids*. Elsevier Science Publishers, pp. 505-512.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1985. The dimension and intermittency of atmospheric dynamics. In: L.J.S. Bradbury, F. Durst, E. Launder, F.W. Schmidt and J.H. Whitelaw (Editors), *Turbulent shear flow 4. Selected papers from the Fourth International Symposium on "Turbulent Shear Flow"*. Springer-Verlag, Berlin, pp. 7-33.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1987a. Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling and multiplicative processes. *J. Geophys. Res.*, 92(D8): 9693-9714.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1987b. Singularités anisotropes, divergences des moments en turbulence: invariance d'échelle généralisée et processus multiplicatifs. *Ann. Sci. Math. Que.*, 11(1): 139-181.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1989. Nonlinear variability in geophysics multifractal analysis and simulations. In: P. L. (Editor), *Fractals Physical Origin and properties*. Plenum Press, New-York, pp. 41-82.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1992. Hard and soft multifractal processes. *Physica A*, 185(1-4): 187-194.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1993. Scaling and multifractal processes, *Lecture notes of Nonlinear Variability in Geophysics 3*.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1997. Universal multifractals do exist!: Comments. *Journal of Applied Meteorology*, 36(9): 1296-1303.
- Takayasu, H., 1990. *Fractals in the physical sciences*. Manchester University Press, Manchester.
- Tessier, Y., Lovejoy, S., Hubert, P., Schertzer, D. and Pecknold, S., 1996. Multifractal analysis and modeling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, 101(D21): 26427-26440.
- Tessier, Y., Lovejoy, S. and Schertzer, D., 1993. Universal Multifractals: theory and observations for rain and clouds. *Journal of Applied Meteorology*, 32(2): 223-250.
- Veneziano, D., Bras, R.L. and Niemann, J.D., 1996. Nonlinearity and self-similarity of rainfall in time and a stochastic model. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, 101(D21): 26371-26392.
- WRC, 2002. A uniform technique for determining flow frequencies, *Water Resour. Council Bill. 15 (1967)*. *AGU EOS Transactions*, 82(5): 56-58.

## 7.2. Annexe 2 : «Analyses multifractales et spatio-temporelles des précipitations du modèle Méso-NH et des données radar» (Hydrological Sciences Journal)

380

Hydrological Sciences Journal – Journal des Sciences Hydrologiques, 56(3) 2011

### Analyses multifractales et spatio-temporelles des précipitations du modèle Méso-NH et des données radar

A. Gires<sup>1</sup>, I. Tchiguirinskaia<sup>1,2</sup>, D. Schertzer<sup>1,3</sup> & S. Lovejoy<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Université Paris-Est, Ecole des Ponts ParisTech, Laboratoire Eau Environnement et Systèmes Urbains (LEESU), 6-8 avenue B. Pascal, Cité Descartes, 77455, Marne-la-Vallée cedex 2, France  
auguste.gires@leesu.enpc.fr

<sup>2</sup>Cemagref, OHAX, Aix-en-Provence, France

<sup>3</sup>Météo-France, CNRM, Paris & Toulouse, France

<sup>4</sup>Physics Department, McGill University, Montreal, Canada

Reçu le 25 Mars 2010; accepté le 7 Janvier 2011; la discussion concernant cet article est ouverte jusqu'au 1er Octobre 2011

**Citation** Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. & Lovejoy, S. (2011) Analyses multifractales et spatio-temporelles des précipitations du modèle Méso-NH et des données radar. *Hydrol. Sci. J.* 56(3), 380–396.

**Résumé** Dans le cadre des multifractals universels, il est possible de caractériser la variabilité spatio-temporelle de la pluie sur une grande gamme d'échelle à l'aide de trois paramètres invariants d'échelles. Dans cette étude, nous avons estimé ces paramètres multifractals sur des simulations numériques effectuées avec le modèle méso-échelle Méso-NH, développé par Météo-France et le Laboratoire d'Aérodynamique (Univ. P. Sabatier, Toulouse, France), et des images radar composites, couvrant le même événement pluvieux, à savoir un orage particulièrement violent, dit de type Cévenol, ayant eu lieu sur la partie sud de la France du 5 au 9 Septembre 2005. La comparaison des résultats montre que les deux types de données présentent des domaines d'invariance d'échelle relativement similaires, et dont les propriétés sont en accord avec les modèles de précipitation spatio-temporels unifiés et scalants les plus simples. Néanmoins l'évaluation de leurs exposants conduit à des valeurs parfois fortement différentes.

**Mots clefs** rainfall; radar; mesoscale model; scaling; multifractal; spatio-temporal analysis

#### Multifractal and spatio-temporal analysis of the rainfall output of the Meso-NH model and radar data

**Abstract** In the framework of universal multifractals, the spatio-temporal variability of rainfall over a wide range of scales is quantified with the help of three scale-invariant parameters. In this paper we estimated these multifractal parameters on numerical simulations performed with the help of Meso-NH, developed by Météo-France and the Laboratory of Aerology (Univ. P. Sabatier, Toulouse, France), and on composite radar images, covering the same heavy rainfall event that occurred on 5–9 September 2005 in the south of France. The comparison of the results shows that both data sets exhibit similar ranges of scaling, whose properties are in agreement with the simplest unified space-time scaling model of rainfall fields. At the same time, some parameter estimates were quite different.

**Key words** precipitation; radar; modèle méso-échelle; invariance d'échelle; multifractal; analyse spatio-temporelle

#### INTRODUCTION

L'objectif précis de cet article est de procéder à une comparaison multi-échelle des précipitations générées par le modèle MESO-NH avec celles observées par le réseau radar de Météo-France. Cet objectif s'insère dans une question plus large: comment valider un modèle météorologique à l'aide de données qui ne sont pas forcément aux mêmes

échelles de temps et d'espace et en évitant la double pénalisation habituelle résultant d'une légère incertitude dans l'espace ou dans le temps? Cela a conduit à rechercher une méthodologie de validation à travers les échelles spatio-temporelles, et non à une échelle donnée, ce qui correspond à comparer la variabilité sur une grande gamme d'échelles du champ simulé et des observations. Si l'extrême variabilité des précipitations sur une grande gamme d'échelle

## INTRODUCTION

L'objectif précis de cet article est de procéder à une comparaison multi-échelle des précipitations générées par le modèle MESO-NH avec celles observées par le réseau radar de Météo-France. Cet objectif s'insère dans une question plus large : comment valider un modèle météorologique à l'aide de données qui ne sont pas forcément aux mêmes échelles de temps et d'espace et en évitant la double pénalisation habituelle résultant d'une légère incertitude dans l'espace ou dans le temps ? Cela a conduit à rechercher une méthodologie de validation *à travers les échelles* spatio-temporelles, et *non à une échelle donnée*, ce qui correspond à comparer la variabilité sur une grande gamme d'échelles du champ simulé et des observations. Si l'extrême variabilité des précipitations sur une grande gamme d'échelle est largement admise, il n'y a pas encore un consensus sur la méthodologie pour la quantifier. Ce travail est donc aussi une contribution au développement de cette méthodologie.

Une motivation supplémentaire de ce travail correspond à la question reconnue comme essentielle dans le dernier rapport du GIEC (Solomon et al., 2007) comment évaluer le changement climatique et ses conséquences à des échelles pertinentes pour l'hydrologie, et notamment l'hydrologie urbaine ? Cela répond d'ailleurs à une demande montante des collectivités locales (AFCN, 2008) qui s'interrogent de plus en plus sur les dimensionnements à prévoir de leurs ouvrages, qui correspondent à de longues périodes d'investissement et de durée de vie. La notion de changement climatique ayant déjà fait évoluer les modes de réflexion à ce niveau, il devient donc indispensable d'apporter les outils nécessaires pour y répondre. Notre travail se situe donc pour une part dans le prolongement des travaux menés dans le cadre de ces projets sur des descentes multifractales d'échelles (Biaou, et al., 2005 ; Royer, et al., 2008). Ces descentes d'échelles ont l'originalité d'être à la fois statistiques (comme celles obtenues par des régressions linéaires ou de rang) et à base physique (modèles de cascade), comme nous allons le discuter. Cependant, se posait la question de valider ce type de descente par rapport à des modèles de méso-échelle et/ou des données radars. Cette présente étude est pour une large part un préalable à cette validation.

Ce travail se situe donc de fait à l'intersection de 3 modes d'évaluation/représentation des précipitations, qui ont souvent porté sur des gammes d'échelles différentes : les données radar, les modèles déterministes de météorologie, et les modèles stochastiques de précipitation.

Il convient ici de souligner quelques caractéristiques des modélisations stochastiques des précipitations. Elles se sont au départ contentées de fournir une représentation plus ou moins *ad hoc* des échelles les plus fines des précipitations – hors d'atteinte des modèles déterministes de météorologie - avec les outils mathématiques alors disponibles (processus ponctuels markoviens, [Waymire and Gupta, 1981]). Mais elles se sont progressivement reposées sur des principes de physique de base sur la variabilité qu'elles étaient censées représenter, notamment autour de la question des échelles [Rodriguez-Iturbe, et al., 1984] et enfin de l'invariance d'échelle [Lovejoy and Mandelbrot, 1985 ; Lovejoy and Schertzer 1985 ; Hubert and Carbonnel, 1988 ; Olsson, et al., 1993]. La rupture la plus profonde étant sans doute intervenue avec l'avènement des modèles multifractals de précipitation [Schertzer and Lovejoy, 1987; Gupta and Waymire, 1993; Tessier, et al., 1993 ; Hubert, et al., 1995; Harris, et al., 1996; Marsan, et al., 1996; Olsson and Niemczynowicz, 1996; Bendjoudi, et al., 1997; Deidda, 2000; Desaulnier-Soucy, et al., 2001; Schertzer, et al., 2002; Macor, et al., 2007, Nykanen, 2008]. Elle correspond à relier l'invariance d'échelles à celles des équations génératrices de la pluie, et non seulement à un postulat phénoménologique, et donc à un basculement de modèles linéaires stochastiques (additions de structures de plus en plus petites) vers des modèles fortement non-linéaires (modulation multiplicative des petites

structures par les plus grosses). Cette rupture a changé par maints aspects le statut scientifique des précipitations : perçues auparavant comme pouvant faire seulement l'objet de statistiques, elles sont devenues le sujet de débats théoriques, par exemple faut-il [Keddem and Chiu, 1987] ou non [Lovejoy and Schertzer, 1989] traiter les valeurs nulles des précipitations à part, y a-t-il [Schertzer and Lovejoy, 1987, 1997] ou non [Mandelbrot, 1989 ; Gupta and Waymire, 1993] des comportements universels ?

Nous commencerons par présenter les données exploitées dans cette étude. Ensuite nous rappellerons les grands principes de l'analyse multifractale qui permet de caractériser la variabilité à travers les échelles à l'aide d'un très petit nombre de paramètres. Enfin, nous comparerons les résultats obtenus en analyse spatiale, temporelle et spatio-temporelle avec les deux types de données.

## LES DONNEES UTILISEES POUR CETTE ETUDE

### Les simulations Méso-NH

Le premier type de données utilisées dans cette étude correspond aux précipitations fournies par une simulation numérique effectuée à l'aide du modèle Méso-NH d'un orage Cévenol (intense événement pluvieux sur le Sud-est de la France, au cours duquel plus de 150 mm d'eau sont tombés en moins de 12h) ayant eut lieu entre le 5 et le 9 septembre 2005. Méso-NH est un modèle de recherche développé conjointement par Météo France et le Laboratoire d'Aérodynamique (Univ. P. Sabatier, Toulouse, France) [Lafore, et al., 1998]. Méso-NH est un modèle méso-échelle ; il permet de traiter des événements météorologiques à l'échelle mésoscopique, qui correspond à une échelle intermédiaire où les distances caractéristiques sont de l'ordre de quelques kilomètres à quelques centaines de kilomètres. C'est un modèle non-hydrostatique, c'est-à-dire que le terme vertical d'accélération n'est pas négligé dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Cette hypothèse non hydrostatique permet d'être plus proche des équations de Navier-Stokes, et notamment de résoudre la convection profonde. Cependant le modèle est anélastique, ce qui signifie que les ondes acoustiques sont filtrées. La résolution numérique est assurée par un schéma temporel de type leap-frog et un schéma d'advection eulérien. Le modèle a déjà été beaucoup utilisé dans le cadre de recherche à l'échelle mésoscopique (une liste des publications liées à Méso-NH est disponible sur le site Internet du modèle : <http://mesonh.aero.obs-mip.fr/mesonh/>), et sa partie physique a été reprise dans le modèle AROME qui est vient de devenir opérationnel à Météo France. La grille utilisée fait 300 \*300 mailles dont la taille de chacune est de 0.0215° (soit environ 2.40Km) en latitude et de 0.0284° (soit environ 3.17Km) en longitude. Les conditions initiales ainsi que les conditions aux limites ont été obtenues à l'aide d'une simulation numérique effectuée avec le modèle Arpège (Météo France) sur une grille de moins haute résolution dans laquelle était emboîtée la grille exploitée par Méso-NH. Les données sont des précipitations cumulées sur des pas de temps d'échantillonnage de 15 minutes sur chaque pixel –alors que le pas de temps de calcul est de l'ordre de quelques secondes– obtenues à partir de sept simulations de 18 heures démarrant toutes les 12 heures

La figure 1 représente l'évolution du taux moyen de précipitation sur la zone étudiée. L'absence de pluie au début de chaque simulation est due au fait qu'à l'initialisation des simulations les rapports de mélange des hydrométéores (glace, graupel, gouttelette, goutte, grêle, neige) sont tous nuls. L'humidité par contre n'est pas nulle, et va commencer à générer les hydrométéores assez rapidement (quelques pas de temps) si les conditions météorologiques l'imposent, mais il faut cependant un certain temps (quelques heures) pour arriver à des précipitations réalistes. Le manque de réalisme de cette mise en route nous a

conduits à ne pas prendre en compte les deux premières heures de chaque simulation dans nos statistiques, i.e. les analyses sont menées sur les 16 dernières heures de chaque simulation

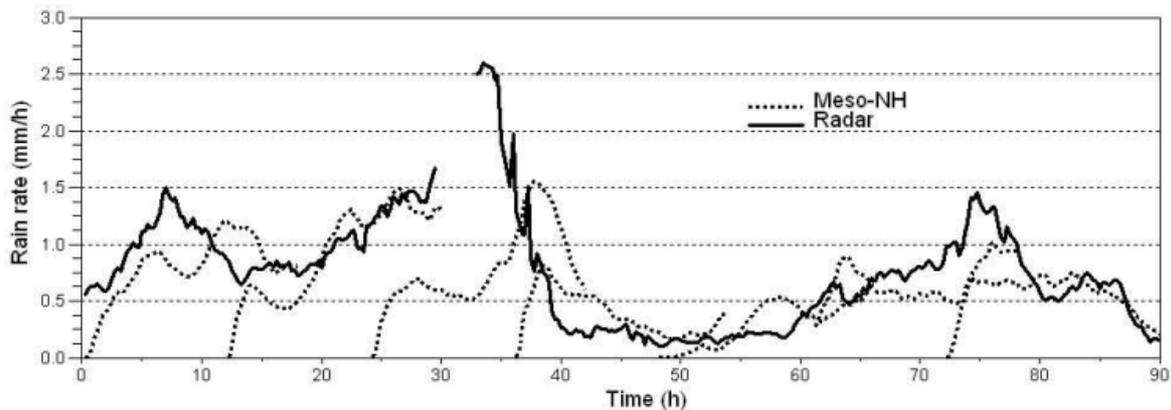


Figure 1 : Evolution de l'intensité moyenne des précipitations sur la zone étudiée au cours de l'évènement étudié pour les deux types de données : simulation Meso-NH (rouge) et données radar (noir)

## Les données Radar

Le deuxième type de données utilisées dans cette étude correspond à des mosaïques radar couvrant la France pendant le même évènement. Une mosaïque radar est une image de la réflectivité radar sur toute la France, obtenue par interpolation des réflectivités mesurées par les radars du réseau ARAMIS (Parent du Châtelet, 2005). Une mosaïque correspond à une coupe plane du champ de précipitation, qui est lui un champ 3D, obtenue par interpolations entre des différentes mesures radar sur un même pixel. La résolution des données est d'un km en espace (en moyenne) et de 15 minutes en temps.

En plus des problèmes de mesure de la réflectivité comme les échos de sol, la propagation anormale ou la zone de fonte, la conversion de la réflectivité radar ( $z$ ) en taux de pluie ( $R$ ) continue de faire débat depuis l'article historique de Marshall et Palmer en 1948 (Marshall and Palmer, 1948) qui a proposé une relation en loi de puissance :

$$z = aR^b \quad (1).$$

La grille de conversion proposée par Météo-France avec les données et utilisée dans cette étude correspond aux choix des paramètres  $a=200$  et  $b=1.59$  ( $z$  étant exprimé en  $\text{mm}^6 \cdot \text{m}^{-3}$  et  $R$  en  $\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$ ). La généralisation prochaine des radars bipolarisés doit permettre de calibrer plus ou moins instantanément ces paramètres (Testud et al., 2000, Le Bouar et al., 2001) en estimant ceux de la distribution des tailles de gouttes, à l'aide des réflectivités horizontale et verticale.

Afin de comparer les résultats à ceux des simulations Meso-NH, nous avons sélectionné une zone de  $512\text{km} \times 512\text{km}$  couvrant le Sud-Est de la France, et correspondant environ à la zone simulée avec le modèle. L'évolution de l'intensité moyenne de pluie radar sur la zone étudiée est comparée à celle Meso-NH sur la figure 1. Il y a 2 heures 30 de données manquantes au niveau du deuxième (et principal) pic de précipitations, après un peu plus de 30h. Même si il y a des différences entre les courbes de Meso-NH et les courbes radar, notamment un facteur 1.5 au niveau du premier pic qui de plus n'intervient pas précisément au même instant, ces intensités moyennes présentent des évolutions relativement similaires.

## METHODOLOGIE

Le support de la pluie, c'est à-dire la portion de l'axe du temps ou de l'espace où il pleut, est un objet géométrique dont il est possible d'estimer la dimension fractale, celle d'occurrence de la pluie ( $D_F$ ) (Hubert 1988). On constate une dépendance de cette dimension fractale par rapport au seuil choisi pour définir le fait qu'il pleuve (Lovejoy et al., 1987, Hubert et al., 1995). Lorsque le seuil augmente, le support (et sa dimension fractale) d'occurrence de la pluie diminue. Ainsi le champ de pluie n'est pas caractérisé par une seule dimension fractale, mais par une infinité ; on parle ainsi de champ multifractal. Dans ce cadre la notion de seuil est remplacée par celle invariante d'échelle de singularité. Les propriétés statistiques (moments, probabilité de distribution) d'un champ multifractal sont définies par des lois d'échelle.

On appelle  $R_\lambda$  le champ de pluie à la résolution  $\lambda(=L/l)$ , défini par le rapport entre l'échelle extérieure  $L$  et l'échelle d'observation  $l$ . Numériquement le champ  $R_\lambda$  à différentes résolutions  $\lambda$  est obtenu en dégradant étape par étape la résolution initiale  $\Lambda$  du champ mesurés  $R_\Lambda$ . Une étape de ce processus consiste à diviser la résolution par 2. La valeur affectée à un pixel de résolution  $\lambda/2$  est égale à la moyenne des  $2^d$  (où  $d$  est la dimension d'étude du champ, dans cette étude :  $d = 1$  ou  $2$ ) pixels de résolution  $\lambda$  qui permettent de le faire. Il est usuel de prendre comme statistiques du champ  $R_\lambda^q$  à différentes résolution  $\lambda$  ses moments statistiques d'ordre  $q < R_\lambda^q >$ . Si le champ étudié est multifractal, alors ces moments sont définies par des lois d'échelle:

$$\langle R_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad (2)$$

Où  $K(q)$  est la fonction d'échelle des moments. Cette fonction est convexe. On peut montrer (Schertzer et Lovejoy, 1987a) que de façon équivalente, les probabilités de dépassement de seuil, définies à partir d'une singularité (arbitraire)  $\gamma$ , sont reliées par la relation :

$$\Pr(R_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad (3),$$

qui définit la fonction codimension  $c(\gamma)$  qui est croissante et convexe. Lorsque  $c(\gamma) < d$ ,  $c(\gamma)$  peut s'interpréter comme la co-dimension fractale du support où la divergence ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) champ est plus rapide que  $\lambda^\gamma$ . Les fonctions  $K(q)$  et  $c(\gamma)$  sont alors reliées par la transformation de Legendre (Parisi et Frisch, 1985).

Les fonctions  $K(q)$  et  $c(\gamma)$  caractérisent la variabilité à travers les échelles du champ étudié et dépendent dans le cas général d'une infinité de paramètres. Dans le cadre des multifractals universels, qui constituent sous des conditions assez générales un attracteur limite pour les cascades multifractales (Schertzer, 1997), ce nombre de paramètre peut être réduit à 3 (Schertzer et Lovejoy, 1987a):

- $H$ , le degré de non-conservation, mesure la dépendance en échelle du champ moyen ( $H=0$  pour un champ conservatif).

- $C_1$  mesure l'intermittence moyenne soit le degré de concentration du champ moyen. Plus précisément,  $C_1$  est la codimension de la singularité moyenne pour un champ conservatif, c'est-à-dire le complément de la dimension fractale  $D_I$  du support de cette singularité par rapport à la dimension de l'espace physique  $d$ :  $C_1=d- D_I$ , et donc  $C_1=0$  pour un champ homogène :

- l'indice de multifractalité  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ), mesure comment évolue l'intermittence lorsqu'on s'écarte progressivement du champ moyen.

Dans ce cadre l'expression analytique de  $K(q)$  est donnée par l'équation suivante :

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) + Hq \quad (4)$$

Des paramètres  $\alpha$  et  $C_1$  grands reflètent des extrêmes prononcés. Ils sont déterminés à l'aide de la méthode du double moment trace (DTM) (Lavallé et al., 1991). Cette méthode repose sur le fait que, dans le cadre des multifractals universels, la fonction d'échelle des moments  $K(q,\eta)$  du champ  $R_\lambda^{(\eta)}$ , obtenu en dégradant la puissance  $\eta$  du champ à la résolution maximale (une analyse avec une méthode DTM modifiée, Veneziano, 1999, a également été faite mais n'apporte pas de changement dans les estimation qui suivent), s'exprime aisément en fonction de  $\alpha$  :

$$\left\langle \left( R_\lambda^{(\eta)} \right)^q \right\rangle \approx \lambda^{K(q,\eta)} = \lambda^{\alpha K(q)} \quad (5)$$

Ainsi  $\alpha$  est la pente de la partie linéaire de  $K(q,\eta)$  en fonction de  $\eta$  dans un graphique log-log. Dans la suite, la portion de la courbe utilisée pour estimer  $\alpha$  est représentée en trait plein sur les courbes de détermination de  $\alpha$ .

La première étape d'une analyse multifractale consiste souvent en une analyse spectrale. La présence d'une pente spectrale  $\beta$  relativement constante sur une gamme de fréquences  $f$  ( $E(f)=f^\beta$ ) correspond à une première confirmation du comportement scalant du champ étudié. Le degré de non conservation  $H$  se déduit de la pente spectrale  $\beta$ , par la relation  $\beta = 1 + 2H - K(2a)$  (Yaglom, 1966, Tessier et al., 1993). Une interprétation du « a » est qu'il existe un champ conservatif  $\varepsilon_\lambda$  tel que  $R_\lambda \propto \varepsilon_\lambda^a \lambda^{-H}$ . Dans cette étude l'approximation classique de a par 1 est utilisée.

Les données spatio-temporelles exploitées, à savoir la pluie en un certain nombre de pixels d'une surface donnée pendant un certain nombre de pas de temps, permettent de mener trois types d'analyses :

- des analyses spatiales : elles consistent à faire, pour chaque pas de temps, l'analyse spatiale 2D du champ de pluie.
- des analyses temporelles : elles consistent à faire, pour chaque pixel, l'analyse de la série temporelle 1D pluviométrique.
- des analyses spatio-temporelles : elles consistent à faire directement l'analyse 1+2 D du champ de pluie.

Pour les trois types d'études, nous avons effectué des analyses échantillon par échantillon (c'est-à-dire pas de temps par pas de temps en analyse spatiale et pixels par pixels en analyse temporelle) et en moyenne d'ensemble. Dans ce cas, chaque échantillon est considéré comme une réalisation du phénomène. La moyenne faite dans les équations 2 et 5 porte alors sur tous les échantillons dégradés indépendamment et non plus sur un seul. Les équations 2 et 5 ne sont à priori valables qu'en moyenne sur un ensemble infini de réalisation. Il existe cependant des propriétés plus fortes qui assurent une convergence rapide. Ainsi les analyses « échantillon par échantillon » sont moins robustes que celles en « moyenne d'ensemble » qui prennent en compte d'avantage d'échantillon, mais elles permettent tout de même de mettre en lumière certains comportements en terme d'évolution temporelle ou de répartition spatiale des paramètres. Ayant des données manquantes pour les données radar pour la période de temps correspondant à la période de la 3<sup>ème</sup> simulation, et voulant pouvoir comparer les résultats entre les deux types de données, nous n'avons pas fait porter la moyenne d'ensemble sur cette période, bien qu'elle corresponde au pic des précipitations.

## ANALYSE SPATIALE

### ANALYSE DU COMPORTEMENT SCALANT

La figure 2 présente le spectre moyen pour les simulations Mésos-NH, et la même grandeur pour les données radar. La présence d'une pente spectrale donne une première confirmation du comportement scalant de la pluie. Les deux types de données semblent cependant présenter une rupture de pente. Pour les données radar, cette rupture aurait lieu entre les nombres d'onde 25 et 35, soit pour des distances comprises entre 14 et 20km. Pour les simulations Mésos-NH, cette rupture est moins évidente et en ajustant comme pour les données radar deux droites de régression linéaire, elle aurait lieu pour des nombres d'onde compris entre 15 et 25, ce qui correspondrait à une rupture en espace comprise entre 30 et 50 km. Il serait même possible de distinguer une deuxième rupture aux alentours du nombre d'onde 80. Quels que soit le type de données et la gamme d'échelle considérée, les pentes spectrales obtenues sont inférieures à la dimension du champ (égale à 2 dans cette analyse spatiale), ce qui signifie que la méthode DTM peut s'appliquer directement au champ de pluie. Dans le cas contraire, il aurait fallu faire une intégration fractionnaire du champ, ou bien analyser les fluctuations (module du gradient) de ce dernier (Nykanen, 2008). La figure 3 illustre la première étape de la méthode DTM ( $q=1.5$ ,  $\eta=0.66$ ;  $1$ ;  $1.52$ ;  $2.31$ ), à savoir la vérification du comportement scalant à travers un graphique log-log du double moment trace en fonction de la résolution. Le fait que les coefficients  $R^2$  de détermination des régressions linéaires deviennent meilleurs, notamment pour les grandes échelles, en considérant une rupture, tend à confirmer la présence de cette rupture de pente et la nécessité de la prendre en compte. Cette rupture a lieu pour la résolution  $\lambda=32$  (soit 25 Km en latitude et 19 Km en longitude) pour les simulations Mésos-NH et pour  $\lambda=32$  (soit 16 Km) pour les données radar. Ceci confirme les résultats de l'analyse spectrale. La présence de cette rupture sur les deux types de données à des échelles spatiales comparables tend à montrer qu'il ne s'agit pas d'un artefact, mais probablement d'un phénomène physique ou d'échantillonnage. Cette dernière cause est possible du fait que nous disposons seulement des hauteurs de pluie cumulées sur 15 minutes, ce qui est assez long par rapport à la résolution spatiale de l'ordre du kilomètre. Cette interprétation serait en accord avec le constat que le scaling est en moyenne légèrement meilleur (3%) pour les échelles supérieures à 20 km que pour les échelles plus petites. Ainsi l'analyse de ces petites échelles est certainement plus complexe à mener avec les données dont nous disposons, mais sont d'autant moins négligeables que Zawadzki (1987) estimait à 20 minutes le temps d'auto-corrélation des orages. Une explication de cette rupture à travers la topographie est a priori exclue, dans la mesure où une analyse multifractal menée sur les données de relief ne met pas en évidence de rupture, au moins entre 2-3km et 150-200km.

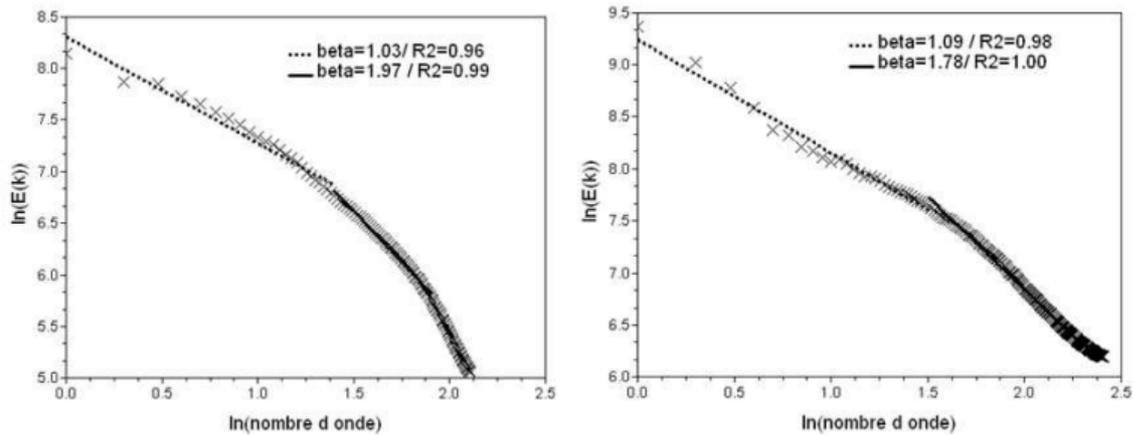


Figure 2 : Moyenne d'ensemble des spectres en analyse spatiale : Mésos-NH (à droite) et radar (à gauche)

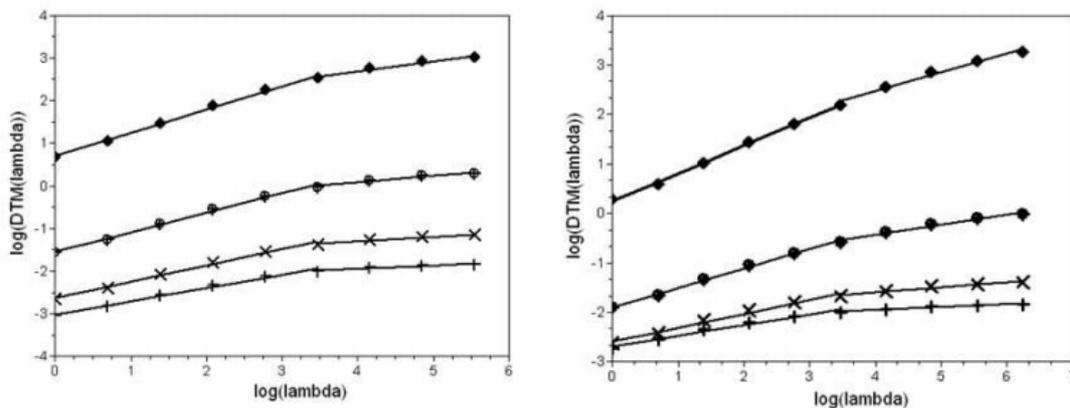
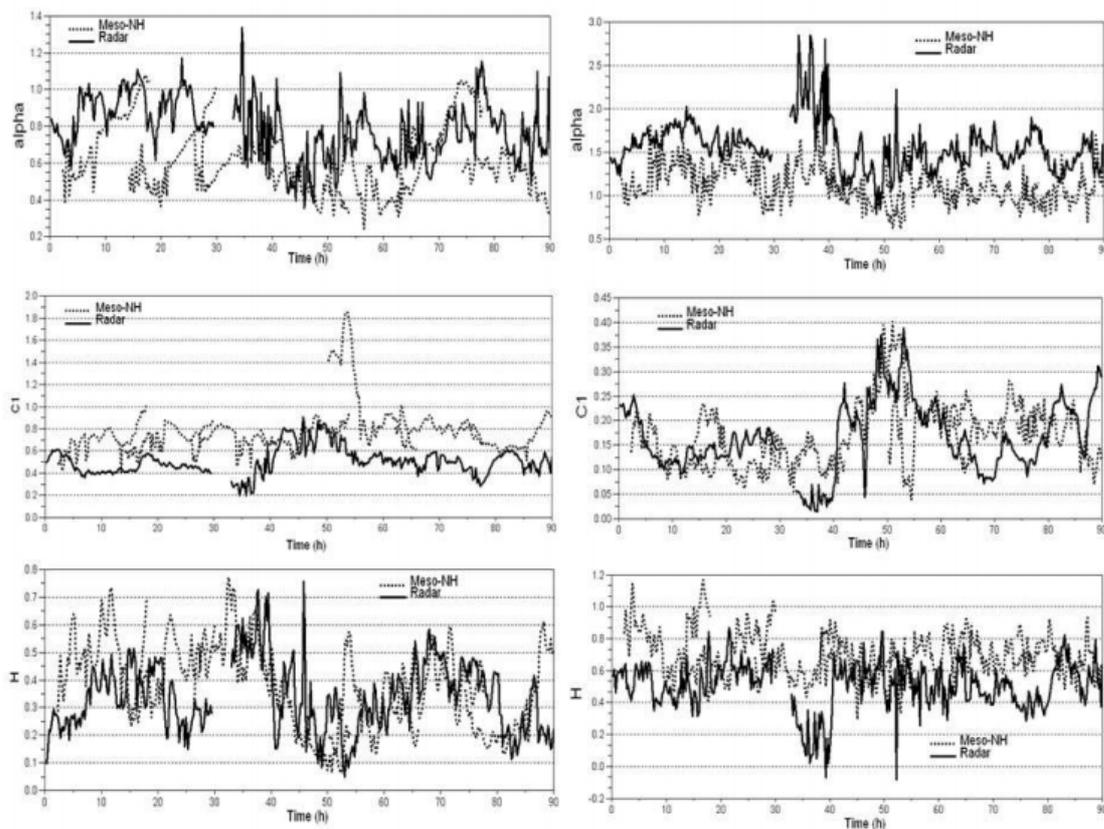


Figure 3 : DTM ( $q=1.5$ ,  $\eta=0.66$ ;  $1; 1.52; 2.31$ ) en fonction de la résolution en graphique log-log pour l'analyse spatiale en moyenne d'ensemble. (à gauche) Simulation Mésos-NH (à droite) Données radar. Les coefficients de régression linéaire  $R^2$  pour les grandes échelles, pour les petites échelles et sans prendre en compte de rupture valent respectivement  $0.99$ ,  $0.96$  et  $0.95$  pour les données Mésos-NH et  $0.99$ ,  $0.96$  et  $0.95$  pour les données radar.

### ANALYSE ECHANTILLON PAR ECHANTILLON

L'évolution temporelle des différents paramètres en grandes et petites échelles pour les simulations Mésos-NH et pour les données radar est représentée sur la figure 4. Le tableau 1 résume les statistiques classiques des estimations de ces paramètres (moyenne, écart-type et coefficient de variations). Il convient de considérer avec prudence ces statistiques pour les simulations Mésos-NH, car elles ont été calculées sur les 64 derniers pas de temps de chaque simulation (pour éviter les problèmes d'initialisation du modèle), si bien qu'il reste un intervalle de recouvrement entre deux simulations successives de 4 h et les pas de temps correspondant interviennent donc deux fois, mais pour deux simulations différentes, ce qui peut légèrement fausser les résultats (en donnant d'une certaine façon un poids double à ces périodes de recouvrement). Une partie de la fluctuation des paramètres est expliquée par les incertitudes sur l'estimation de ces derniers. En effet, en travaillant pas de temps par pas de temps, le nombre de pixels est assez faible notamment en grandes échelles, si bien que les statistiques obtenues ne sont pas très fiables. On constate néanmoins que ces grandeurs fluctuent plus lors de la période de moindre pluie entre la 45<sup>ème</sup> et la 60<sup>ème</sup> heure. Ceci est

probablement causé par une influence plus grande des effets de quantification qui conduit à des incertitudes de détermination plus grandes des paramètres multifractals. Il convient également de noter que les estimations de  $\alpha$  pour le modèle Més0-NH ont tendance, principalement en grandes échelles, à augmenter significativement au cours de chaque période de simulation après une période de relative stabilité d'un peu moins de 10 heures, sans que l'on observe cette tendance sur les données radar des périodes correspondantes. C'est particulièrement visible sur les 3 premières et l'avant dernière périodes de simulation, qui sont les périodes de plus forte pluie. Cette augmentation d' $\alpha$  est assez gênante puisque elle suggère que la variabilité spatiale de la pluie simulée par le modèle Més0-NH a du mal à se stabiliser indépendamment de la durée de simulation du modèle. Mentionnons tout de même qu'en présence de nombreux pixels sans pluie (comme c'est le cas au début de chaque période de simulation Més0-NH), l'estimation de  $\alpha$  par la méthode DTM peut présenter certains biais qui engendrent une sous-estimation de  $\alpha$ . Des éléments d'explication sont fournis dans la partie sur l'analyse temporelle. Signalons pour finir que les valeurs moyennes de  $H \neq 0$  pour les deux types de données témoignent d'un champ légèrement non conservatif.



**Figure 4 :** Evolution temporelle des paramètres  $\alpha$ ,  $C_1$  et  $H$  pour les données radar et les simulations Més0-NH, en analyse spatiale par échantillon. Grandes échelles (à gauche) et petites échelles (à droite).

	Grandes échelles						Petites échelles					
	Més0-NH			Radar			Més0-NH			Radar		
	$\alpha$	$C_1$	$H$	$\alpha$	$C_1$	$H$	$\alpha$	$C_1$	$H$	$\alpha$	$C_1$	$H$
Moyenne	0.61	0.78	0.37	0.78	0.51	0.34	1.12	0.17	0.70	1.56	0.17	0.51
Ecart-type	0.18	0.20	0.15	0.17	0.12	0.13	0.22	0.06	0.14	0.29	0.07	0.12
Coeff. de variation (%)	29	26	40	22	24	38	19	38	20	18	43	24

**Tableau 1 : Statistiques des paramètres  $\alpha$ ,  $C_1$ , et  $H$  pour les données radar et les simulations Més0-NH en analyse spatiale par échantillon**

### ANALYSE EN MOYENNE D'ENSEMBLE

Afin d'avoir des estimations des paramètres multifractals plus fiables, nous avons mis en œuvre la méthode DTM en prenant en compte des moyennes d'ensemble sur les différents pas de temps. Pour les données Més0-NH, les pas de temps pris en compte correspondent aux 64 derniers de chaque simulation, ce qui signifie que les pas de temps simulés deux fois (il reste 4 h de recouvrement entre deux simulations successives), sont d'une certaine façon pris en compte deux fois (une fois dans chaque simulation). Afin de pouvoir comparer sans biais les résultats entre les données radar et Més0-NH et avec l'analyse temporelle menée après, les mêmes pas de temps (avec un poids double pour certains) ont été pris en compte pour les données radar. La figure 2, déjà discutée, représente la première étape de la méthode à savoir l'estimation de  $K(q, \eta)$ . Les courbes de détermination de  $\alpha$  sont sur la figure 5. Les principaux résultats obtenus sont dans le tableau 2. Les valeurs de  $\alpha$  et  $C_1$  sont différentes entre les simulations Més0-NH et les données radar. En effet,  $\alpha$  a tendance à être plus grand et  $C_1$  plus petit pour les données radar que pour les simulations. Ce constat rend assez complexe l'interprétation en termes d'extrême. Il signifie néanmoins que la variabilité de la pluie serait sous-représentée dans les simulations, mais que son intermittence moyenne serait sur-évaluée. Il est possible de raffiner l'analyse en regardant la singularité maximale observable  $\gamma_s$  (Hubert, 1993, Royer, 2008), qui est une grandeur invariante d'échelle. Cette dernière est définie comme la singularité pour laquelle la codimension fractale du support  $c(\gamma_s)$  devient égale à la dimension du champ  $d$  (dans l'analyse spatiale  $d=2$ ). Pour les grandes échelles, on constate que malgré les différences de valeurs entre les exposants multifractals, les singularités maximales observables restent comparables.

Evoquons maintenant les résultats pour les petites échelles, dont on rappelle que l'analyse du comportement scalant est plus complexe du fait que la résolution temporelle de 15 minutes n'est pas vraiment adaptée à la résolution spatiale de l'ordre du kilomètre. Pour les deux types de données, on retrouve des différences similaires de comportement entre les gammes d'échelle :  $\alpha$  est plus grand alors que  $C_1$  et la singularité maximale observable  $\gamma_s$  sont plus petits pour les petites échelles que pour les grandes échelles. L'estimation de la singularité maximale observable en petites échelles diffèrent en fonction du type de données. Elle vaut 0.60 et 0.84 respectivement pour Més0-NH et pour les données radar. Ceci signifie que le modèle a tendance à sous-estimer les extrêmes sur cette gamme d'échelle. Le paramètre  $\alpha > 1$  obtenu quel soit le type de données pour les petites échelles évoque le

comportement non-classique « self-organised critical » (Bak et al., 1988) qui implique que les singularités ne sont plus bornées. Cette différence profonde de comportement entre les gammes d'échelles implique que les statistiques à petites échelles ne peuvent pas toujours être déduites des statistiques obtenues à grandes échelles. Il convient d'ajouter que les valeurs des paramètres multifractals estimées pour le radar ( $\alpha \approx 1.6$ ,  $C_1 \approx 0.16$ ) sont en accord avec celles décrivant habituellement la turbulence (Schmitt, 1992, Lazarev, 1994), ce qui attesterait que la pluie se comporte comme un scalaire passif aux petites échelles.

Afin de confirmer ces résultats, il faudrait mener ce type d'analyse sur des données possédant une résolution temporelle bien meilleure.

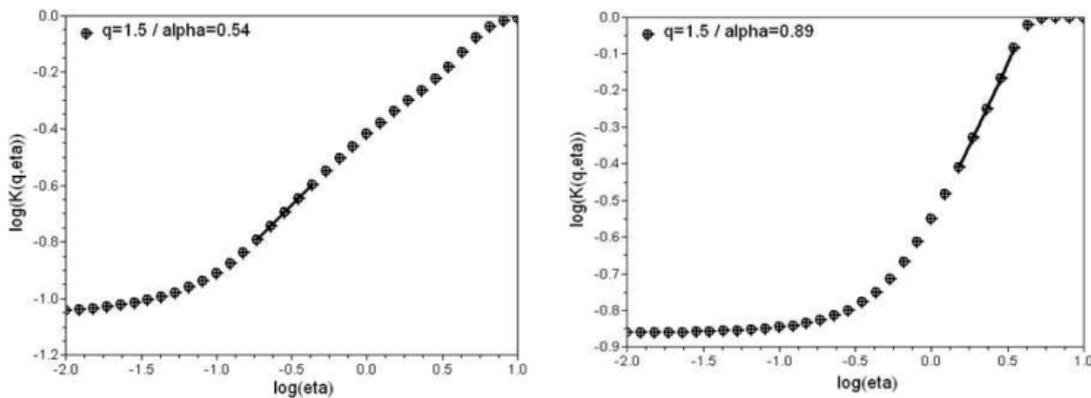


Figure 5 : Courbes de détermination de  $\alpha$  dans la méthode DTM pour l'analyse spatiale en moyenne d'ensemble (sur les différents pas de temps). Més0-NH (à gauche) et Radar (à droite)

	Més0-NH				Radar			
	$\alpha$	$C_1$	$H$	$\gamma_s$	$\alpha$	$C_1$	$H$	$\gamma_s$
Grandes échelles	0.54	0.71	0.36	1.20	0.89	0.45	0.34	1.06
Petites échelles	1.20	0.14	0.58	0.61	1.62	0.16	0.59	0.84

Tableau 2 : Paramètres  $\alpha$ ,  $C_1$ ,  $H$  et  $\gamma_s$  pour les données radar et les simulations Més0-NH, en analyse spatiale, en faisant des moyennes d'ensemble sur les différents pas de temps

## ANALYSE TEMPORELLE

Nous rappelons que les données Més0-NH correspondent à la pluie accumulée toutes les 15 minutes et qu'elles ne sont pas issues d'une seule simulation durant 4 jours, mais de 7 simulations de 18h et démarrant toutes les 12 heures avec des conditions initiales réactualisées. Ainsi les périodes sur lesquelles portent deux simulations successives se superposent pendant 6 heures. Tenant compte qu'il est relativement plus aisé, mais non indispensable, d'agréger les données par une puissance de 2, nous avons analysé les 64 derniers pas de temps d'échantillonnage (de 15 minutes) de chaque simulation. Afin de pouvoir comparer les résultats nous avons pour chaque simulation procédé aux mêmes

analyses sur les pas de temps correspondant pour les données radar. Comme précédemment mentionné, nous n'avons pas analysé les pas de temps correspondant à la 3<sup>ème</sup> simulation Méso-NH car il y avait de nombreuses données radar manquantes à cette période. Nous rappelons que par analyse temporelle, nous entendons l'analyse de la série temporelle de pluie en chaque pixel du modèle Méso-NH ou de l'image radar.

### ANALYSE DU COMPORTEMENT SCALANT

Afin de vérifier le comportement scalant du champ étudié, nous avons travaillé en moyenne d'ensemble pour obtenir les courbes de loi d'échelle. Il ressort de l'analyse spectrale (Figure 6) qu'aussi bien pour les données Méso-NH que pour les données radar le comportement scalant présente une rupture de comportement aux alentours de 1h (correspondant à un nombre d'onde d'environ 15). Pour les données Méso-NH la pente spectrale est supérieure en petites échelles à celle en grandes échelles. Le phénomène inverse est observé pour les données radar. Cette rupture est moins visible sur les courbes de détermination de loi d'échelle (figure 7), mais par cohérence avec l'analyse spectrale, les gammes d'échelles 1h-16h et 15min-1h ont tout de même été étudiées indépendamment. Ceci permet d'améliorer légèrement les coefficients de détermination des courbes. Les résultats de l'analyse DTM en petite échelle ayant été obtenus avec une gamme d'échelle réduite (seulement 3 points) ne sont pas très fiables, et ne seront par conséquent que très brièvement évoqués.

En tenant compte des ruptures spatiale (20 Km) et temporelle (1h), il est possible de définir une vitesse « caractéristique » de l'événement de l'ordre de 6 m/s. Cette grandeur est en accord avec la vitesse caractéristique classique du vent de 10m/s, et correspond à un vent de force 3 sur l'échelle de Beaufort (pour un point de vue multifractal sur l'échelle de Beaufort, Kerman, 1993). Sans prendre en compte de rupture temporelle, on obtient une vitesse caractéristique de l'ordre de 24m/s, soit un vent de force 9, ce qui est très élevé.

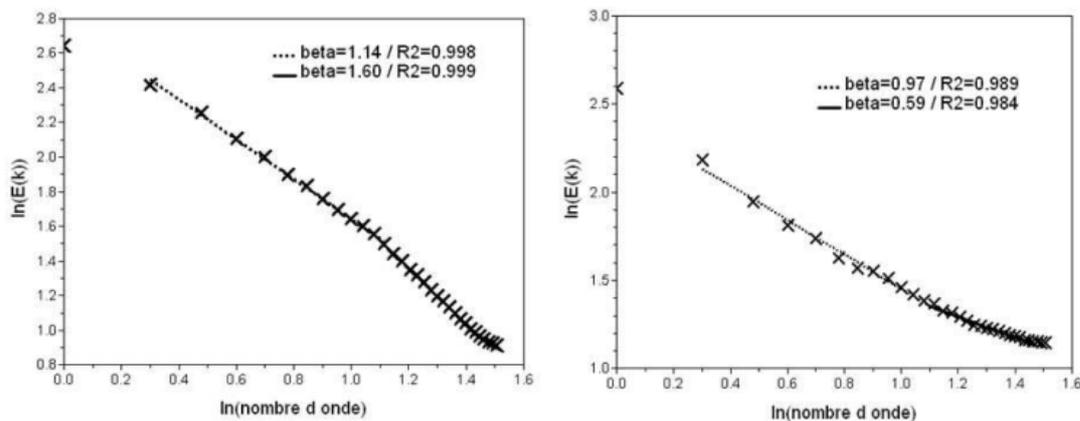


Figure 6 : Moyenne d'ensemble des spectres en analyse temporelle : Méso-NH (à droite) et radar (à gauche)

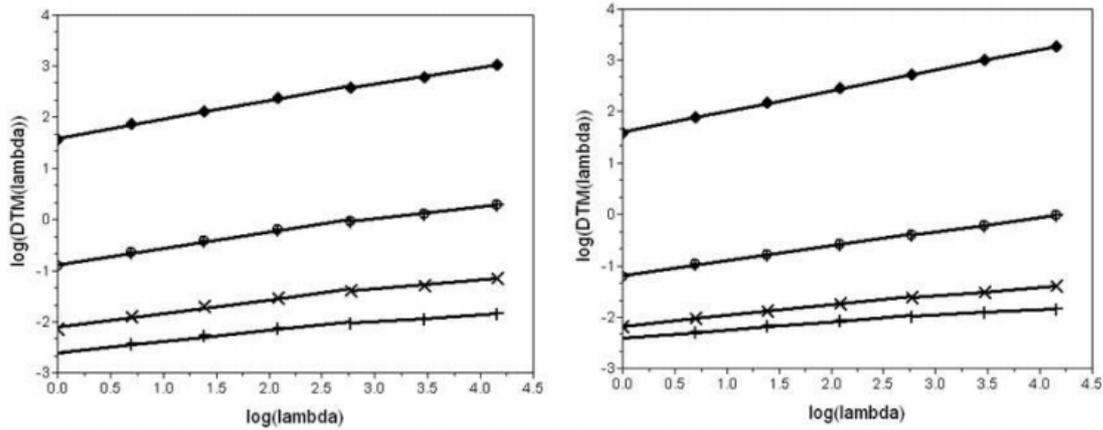


Figure 7 : DTM ( $q=1.5$ ,  $\eta=0.66$ ;  $1; 1.52; 2.31$ ) en fonction de la résolution en graphique log-log pour l'analyse temporelle en moyenne d'ensemble. (à gauche) Simulation Meso-NH (à droite) Données radar. Les coefficients de régression linéaire  $R^2$  pour les grandes échelles, pour les petites échelles et sans prendre en compte de rupture valent respectivement 0.99, 0.99 et 0.98 pour les données Meso-NH et 0.99, 0.99 et 0.99 pour les données radar.

#### ANALYSE ECHANTILLON PAR ECHANTILLON

La figure 8 présente les résultats pour la dernière période de simulations étudiées pour les grandes échelles. Les phénomènes observés sont globalement retrouvés pour toutes les périodes de simulation. Le tableau 3 récapitule les principales statistiques des paramètres en grandes échelles pour cette période, dont la corrélation avec la codimension -fractale- du support de la pluie  $C_F$  ( $C_F = 1 - D_F$ , où  $D_F$  est la dimension fractale du support de la pluie calculée sur l'ensemble des pixels). Comme nous le discuterons au prochain paragraphe, une trop grande codimension du support de la pluie introduit un biais dans l'estimation des paramètres multifractals. En ce qui concerne  $C_1$ , on observe une corrélation entre son estimation et la codimension du support, ce qui correspond à une anti-corrélation avec l'intensité. Cette corrélation est plus prononcée pour les données radar que pour les données Meso-NH. Pour  $\alpha$ , les données radar sont fortement anti-corrélées avec la codimension du support, tandis que c'est nettement moins vrai pour les données Meso-NH. On retrouve ce comportement pour toutes les périodes avec les données radar, et de façon moins prononcée avec les données Meso-NH. Ainsi, les données radar présentent un comportement plus cohérent dans le temps que les données Meso-NH. Compte tenu des différences importantes entre les simulations, et des forts écart-type qu'il y a au sein d'une même période, les estimations moyennes de  $\alpha$  et  $C_1$  sont probablement entachées d'une large incertitude et donc difficilement exploitables.

Les disparités trouvées dans l'estimation de  $\alpha$  et  $C_1$  peuvent résulter de causes physiques et/ou d'incertitude dans l'estimation des paramètres. Avant de poursuivre, il convient d'expliquer la présence des paliers inférieur et supérieur sur la courbe d'estimation de  $\alpha$  dans la méthode DTM (équation 5 et figure 7). Hittinger (2008) a montré que les « transitions de phase multifractales de second ordre » (Schertzer, 1992), induites par la taille finie de l'échantillon, font que l'estimation empirique de  $K(q, \eta)$ , pour un ordre  $q (>1)$  donné et sur un nombre d'échantillons proche de l'unité, devient une constante,

$$K(q, \eta) = (q - 1)d \quad (6)$$

au lieu de la loi de puissance théorique, à partir d'un ordre critique  $\eta_+$ , défini par l'équation :

$$q\eta_+(q) = (d/C_1)^{1/\alpha} \quad (7)$$

où  $d$  est la dimension de l'espace (i.e.,  $d = 1$  dans le cas de séries temporelles). Cela correspond au palier supérieur que l'on peut observer sur la figure 7.

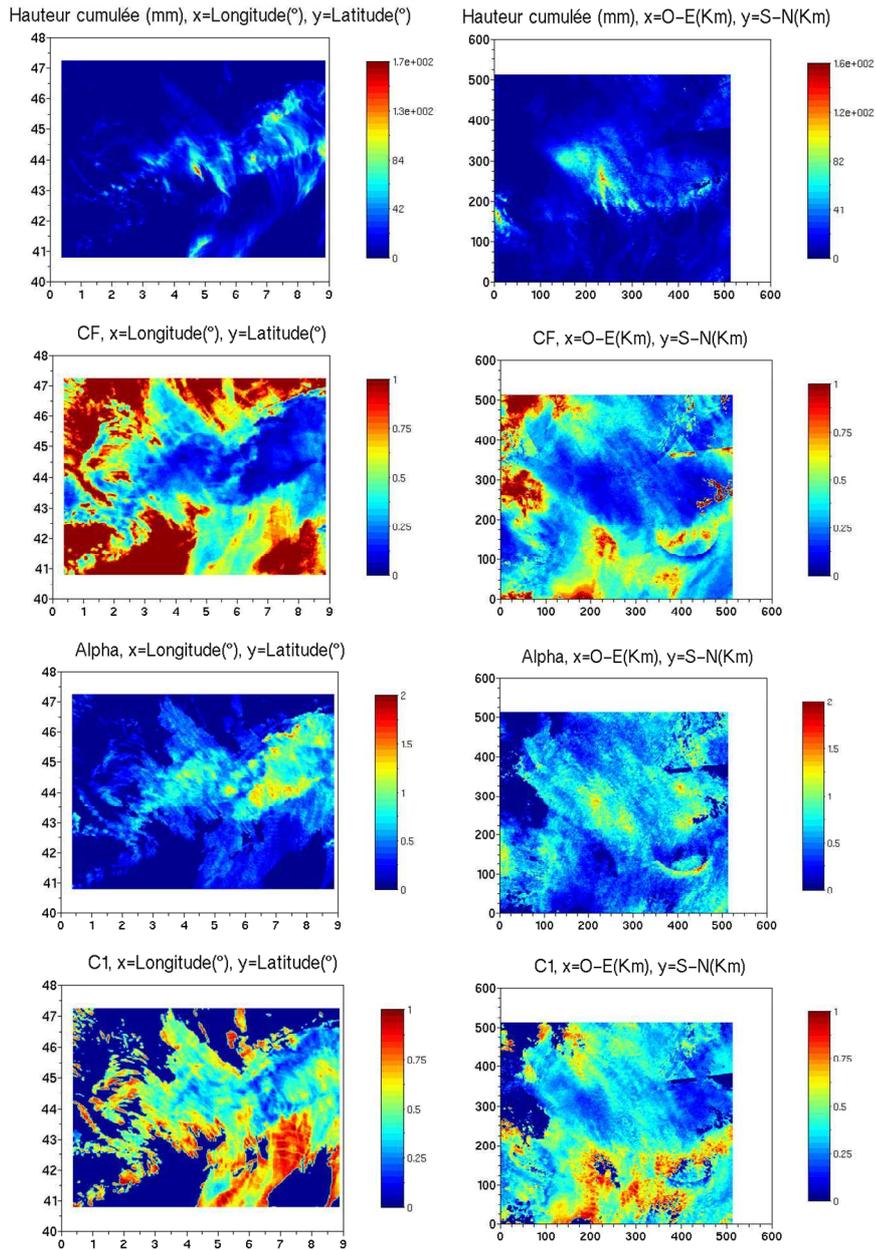
Le palier inférieur peut être expliqué par la présence de nombreux zéros dans les échantillons étudiés. En effet, ces derniers peuvent correspondre au fait qu'il y a une singularité minimale ( $\gamma_{\min}$ ), en dessous de laquelle la pluie n'est pas observée (limite de la dynamique du capteur) ou non enregistrée (problème de quantification) ou encore non simulée (limite de représentation numérique des nombres : « underflow »). Dans ce cas, la fonction codimension  $c(\gamma)$  devient pour  $\gamma < \gamma_{\min}$ , une constante  $c_{\min}$ , la codimension (fractale) du support de la pluie. Par la transformée de Legendre, la fonction d'échelle des moments est linéaire pour des faibles valeurs de  $q$  (de Lima, 1999). Ainsi  $K(q, \eta)$  est une constante

$$K(q, \eta) = (q - 1)c_{\min} \quad (8)$$

jusqu'à l'ordre critique défini par l'équation :

$$\eta_-(q) = (c_{\min} / C_1)^{1/\alpha} \quad (9)$$

Ainsi pour des fortes valeurs de la codimension  $c_{\min}$  du support de la pluie, la zone linéaire de  $K(q, \eta)$  dans un graphique log-log, qui permet d'estimer  $\alpha$ , se trouvera fortement réduite par ces deux paliers horizontaux correspondant à  $\eta \leq \eta_-(q)$  et  $\eta \geq \eta_+(q)$ , qui de plus introduisent des courbures transitoires. Ces deux effets conduisent à des sous-estimations artificielles de la pente  $\alpha$ .



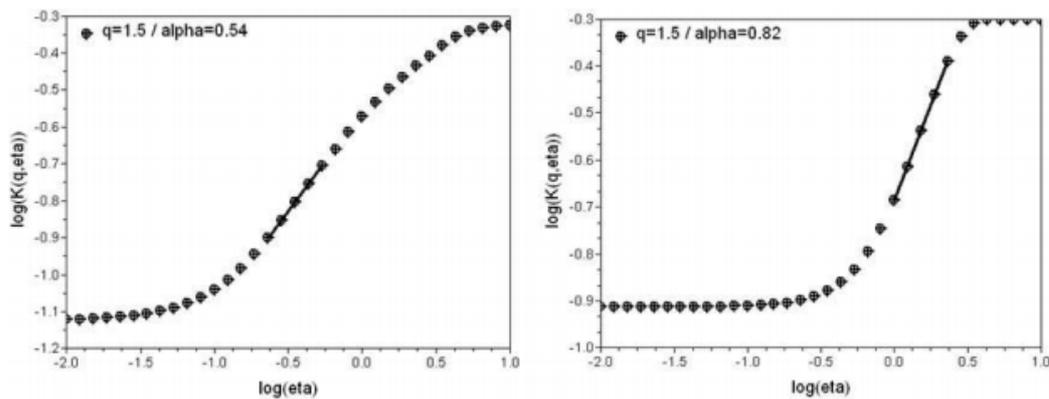
**Figure 8 : Cartes d'analyse temporelle pour les pas de temps correspondant à la dernière période de simulation Meso-NH : simulation Meso-NH (à gauche) et données radar (à droite). Les coordonnées exprimées en latitude et longitude des 4 extrémités de l'image radar sont respectivement 46.3-1.3, 41.5-1.3, 46.2-8.1 et 41.4-7.5.**

	Més0-NH		Radar	
	$\alpha$	$C_1$	$\alpha$	$C_1$
Moyenne	0.49	0.56	0.57	0.41
Ecart-type	0.29	0.19	0.26	0.17
Coeff. de variation (%)	59	34	45	41
Corr. avec $C_F$	-0.86	0.85	-0.78	0.83

**Tableau 3 : Statistiques des paramètres  $\alpha$  et  $C_1$  pour les données radar et Més0-NH pour les la dernière période de simulation en analyse temporelle échantillon par échantillon.**

### ANALYSE EN MOYENNE D'ENSEMBLE

Afin d'avoir des estimations plus fiables, et que l'on puisse comparer à celles obtenues dans l'analyse spatiale, nous avons mis en œuvre la méthode DTM en faisant des moyennes d'ensemble sur un grand nombre d'échantillon (tous les pixels des différentes simulations). La première étape de la méthode DTM est présentée figure 7, et a déjà été discutée. Les courbes de détermination de  $\alpha$  sont présentées figure 9. Les valeurs trouvées sont présentées dans le tableau 4. En grandes échelles, par rapport à l'analyse spatiale, on retrouve pour chaque type de données, les mêmes valeurs de  $\alpha$  (0.54 pour Més0-NH et 0.82 pour radar) et des valeurs de  $C_1$  (0.50 pour Més0-NH et 0.35 pour radar) plus petites. L'interprétation de ces résultats (constance de  $\alpha$ , variation de  $C_1$ ) requière de se placer dans le cadre d'une analyse spatio-temporelle, qui est introduite dans la section suivante. On peut cependant déjà noter que Més0-NH semble sous-estimer la variabilité de la pluie et par contre surestimer légèrement son intermittence moyenne. Concernant les petites échelles, dont on rappelle que les résultats sont peu fiables compte tenu de la gamme d'échelle réduites disponible, on peut simplement noter que comme dans l'analyse spatiale,  $\alpha$  est plus grand et  $C_1$  plus petit que pour les grandes échelles.



**Figure 9 : Courbes de détermination de  $\alpha$  dans la méthode DTM pour l'analyse temporelle en moyenne d'ensemble (sur les pixels des différentes simulations). Més0-NH (à gauche) et Radar (à droite)**

	Més0-NH			Radar		
	$\alpha$	$C_1$	$H$	$\alpha$	$C_1$	$H$
Grandes échelles	0.54	0.50	0.37	0.82	0.35	0.21
Petites échelles	0.73	0.30	0.49	1.16	0.26	-0.01

**Tableau 4 : Statistiques des paramètres  $\alpha$  et  $C_1$  pour les données radar et les simulations Més0-NH en analyse temporelle et en moyenne d'ensemble**

## ANALYSE SPATIO-TEMPORELLE

Les modèles spatio-temporels unifiés et scalant les plus simples de pluie (Marsan, 1996, Deidda, 2000, Macor, 2007, Radkevich, 2008) se basent sur l'hypothèse d'un exposant d'anisotropie entre l'espace et le temps. Ainsi, ils suggèrent que les fonctions d'échelle des moments spatiales et temporelles devraient être proportionnelles, c'est-à-dire

$$K_{\text{espace}}(q) = \frac{K_{\text{temps}}(q)}{1 - H_t} \quad (9)$$

Où  $H_t$  est l'exposant d'anisotropie entre l'espace et le temps. Ceci implique des  $\alpha$  identiques et des  $C_1$  et  $H$  présentant le même rapport.

$$\frac{C_{1,\text{espace}}}{C_{1,\text{temps}}} = \frac{H_{\text{espace}}}{H_{\text{temps}}} = \frac{1}{1 - H_t} \quad (10)$$

Les résultats trouvés dans les analyses temporelles et spatiales aux grandes échelles sont globalement en accord avec ce cadre théorique, notamment pour les données radar. En effet, pour ces dernières le rapport  $C_{1,\text{espace}}/C_{1,\text{temps}}$  obtenu correspond à un exposant d'anisotropie égale à 0.22, tandis que le rapport  $H_{\text{espace}}/H_{\text{temps}}$  mène à un  $H_t$  de 0.38. Ces grandeurs sont comparables et compatibles avec la valeur de 1/3 qui correspondrait à la théorie de Kolmogorov (Kolmogorov, 1962, Marsan, 1996). Pour les données Més0-NH, le rapport entre les  $C_1$  mène à un  $H_t$  de 0.30, ce qui est en accord avec les données radar. En revanche le rapport des  $H$  ne permet pas de rentrer dans ce cadre théorique puisqu'il donne un  $H_t$  de -0.01. Ainsi, on obtient pour les grandes échelles un bon accord des données radar avec le modèle spatio-temporel unifié, mais ce n'est pas le cas pour l'ensemble des paramètres des simulations Més0-NH.

Afin de confirmer ces résultats, des analyses spatio-temporelles ont été faites. Dans ces dernières les dimensions spatiales et temporelles sont prises en compte simultanément. Nous avons considéré une isotropie parfaite entre les deux directions d'espace, et un exposant d'anisotropie espace-temps égal à 1/3 (qui correspondrait à la théorie de Kolmogorov, et qui a été à peu près retrouvé dans les analyses spatiale et temporelle des données). Ainsi dans le DTM, lors de dégradation du champ, lorsque chaque dimension d'espace est divisé par  $\lambda$ , la dimension de temps, est divisée par  $\lambda^{1-1/3}$ . Ici nous avons choisi  $\lambda$  égal à 3, si bien que la dimension temporelle est divisée par 2 ( $3^{2/3} \approx 2.08$ ). Pour les données Més0-NH, nous avons considéré des échantillons de  $3^5 * 3^5 * 2^5 = 243 * 243 * 32$  pixels. Pour les données radar, nous nous sommes ramené à des échantillons de cette taille en dégradant préalablement les deux dimensions d'espace d'un facteur 2. Nous avons travaillé en moyenne d'ensemble avec les échantillons disponibles pour les deux types de données.

La première étape du DTM, qui permet de vérifier le comportement scalant du champ, est présentée figure 10. Une rupture a été prise en compte en  $\lambda = 27$ , ce qui correspond à environ 20Km en espace et 4h en temps. Cette rupture du comportement scalant est équivalente à celles déjà observée dans les analyses spatiales et temporelles.

Les courbes de détermination de  $\alpha$  pour les grandes échelles sont en figure 11. Le tableau 5 fourni les estimations obtenues des paramètres multifractals pour les deux types de données en petites échelles et en grandes échelles. En ce qui concerne les données radar, pour les grandes échelles, nous retrouvons les mêmes valeurs des paramètres que dans l'analyse spatiale, ce qui est parfaitement cohérent avec le modèle spatio-temporelle unifié précédemment évoqué. Pour les données Mésos-NH, la courbe de détermination de  $\alpha$  est nettement moins lisse que pour les données radar et perd même sa convexité, ce qui entraîne des estimations des paramètres moins fiables. On obtient un  $\alpha$  plus grand que dans l'analyse spatiale, et un  $C_1$  nettement plus petit, compris entre celui de l'analyse spatiale et de l'analyse temporelle. Pour les petites échelles, les estimations se rapprochent de celles trouvées dans l'analyse spatiale. Ce résultat est à prendre avec prudence dans la mesure où la résolution temporelle initiale des données, qui est trop faible, y joue un rôle important.

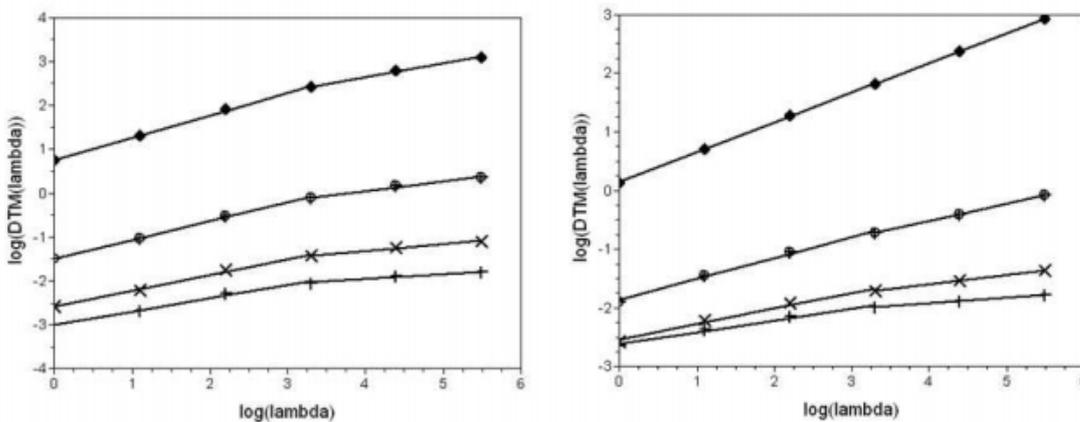


Figure 10 : DTM ( $q=1.5, \eta=0.66 ; 1 ; 1.52 ; 2.31$ ) en fonction de la résolution en graphique log-log pour l'analyse spatio-temporelle en moyenne d'ensemble. (à gauche) Simulation Mésos-NH (à droite) Données radar. Les coefficients de régression linéaire  $R^2$  pour les grandes échelles, pour les petites échelles et sans prendre en compte de rupture valent respectivement 0.99, 0.98 et 0.97 pour les données Mésos-NH et 0.99, 0.99 et 0.98 pour les données radar.

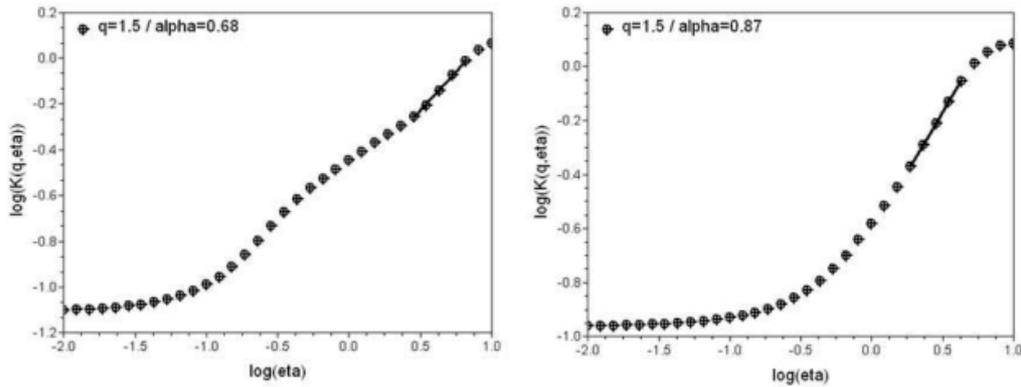


Figure 11: Courbes de détermination de  $\alpha$  dans la méthode DTM pour l'analyse spatio-temporelle en moyenne d'ensemble. Méso-NH (à gauche) et Radar (à droite).

	Méso-NH		Radar	
	$\alpha$	$C_1$	$\alpha$	$C_1$
Grandes échelles	0.68	0.47	0.87	0.42
Petites échelles	1.07	0.21	1.43	0.23

Tableau 5 : Paramètres  $\alpha$  et  $C_1$  pour les données radar et les simulations Méso-NH, en analyse spatio-temporelle, en faisant des moyennes d'ensemble.

## CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons procédé à une analyse multifractale de la variabilité spatio-temporelle de la pluie. Dans le cadre des multifractals universels utilisés, cette variabilité est quantifiée à l'aide de simplement trois paramètres caractérisant les lois d'échelle reliant les statistiques du champ de pluie à différentes résolutions.

L'évènement pluvieux que nous avons étudié est un orage de type Cévenol qui a eu lieu sur la partie Sud - Est de la France du 5 au 9 septembre 2005. Nous avons comparé les résultats obtenus à partir de simulations numériques faites avec le modèle météorologique méso-échelle non hydrostatique Méso-NH, et des données radar couvrant cet évènement météorologique.

Il ressort de l'analyse des données radar des conclusions qui constituent une étape importante en vue de la validation des descentes d'échelle spatio-temporelles et des simulations multifractales des champs de pluie. En effet le comportement observé présente les deux caractéristiques suivantes :

- Une rupture de comportement scalant dans l'analyse spatiale à une échelle d'espace d'environ 20 Km. L'origine de cette dernière est physique ou bien lié au pas de temps d'échantillonnage de la mesure. En effet la résolution temporelle (15min) des données est trop faible par rapport à la résolution spatiale qui est de l'ordre du kilomètre. Une rupture de comportement est également trouvée à environ 1 heure dans l'analyse temporelle.

- La comparaison des estimations des paramètres multifractals obtenues aux grandes échelles dans les analyses spatiales et temporelles est en très bon accord avec les prédictions des modèles de précipitation spatio-temporels unifiés et scalant les plus simples, qui reposent sur un exposant d'anisotropie entre les dimensions spatiales et temporelles. Ce résultat est confirmé par l'analyse spatio-temporelle directe du champ de pluie.

En ce qui concerne les simulations Méso-NH, on retrouve des ruptures similaires de comportement dans les analyses spatiales et temporelles. Certains résultats sont en accord avec le modèle spatio-temporelle unifié, mais il convient de noter que l'accord est moins bon que pour les données radar, particulièrement au niveau du degré de non conservation du champ. En général, les estimations numériques des paramètres multifractals présentent des différences non négligeables avec celles obtenues sur les données radar : la variabilité de la pluie est sous-représentée par le modèle Méso-NH, tandis que l'intermittence moyenne est sur-représentée.

Afin de confirmer ces résultats, il convient de mener ces comparaisons sur d'autres événements pluvieux, avec des données dont la résolution temporelle serait plus grande. Il convient aussi de développer des techniques d'estimations des paramètres multifractals robustes à la présence de nombreux zéros, qui comme nous l'avons vu peuvent introduire des biais dans les méthodes classiques.

## REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient Météo-France pour l'accès aux données de simulation Méso-NH, des données radar dans le cadre du projet MHYM (Multiplicité d'Échelles en Météorologie et Hydrologie, <http://www.enpc.fr/multifractal/projects/MHYM/>) de collaboration scientifique entre l'École des Ponts ParisTech et Météo-France. Ils remercient particulièrement Christine Lac, Véronique Ducroq, Jean-Michel Veisseire, Jacques Parent du Châtelet, Jean-François Royer pour leurs suggestions dans l'exploitation de ces données et leurs commentaires avisés. Cette étude a été effectuée pour une part dans le cadre du projet GARP-3C du programme R2DS. Les auteurs remercient également l'école doctorale Sciences Ingénierie et Environnement pour son soutien. Les auteurs remercient également les deux relecteurs anonymes dont les suggestions et commentaires ont permis d'améliorer la qualité de ce manuscrit.

## BIBLIOGRAPHIE

AFCN (Ed.) (2008), *Adaptation au changement climatique: les risques naturels*, Association Française pour la Prévention des Catastrophes Naturelles (AFPCN).

Bak, P., C. Tang, and K. Weissenfeld, 1988, Self-Organized Criticality, *Phys. Rev. Lett* A38, 364-374

Bendjoudi, H., Hubert, P., Schertzer, D., Lovejoy, S. (1997), Interprétation multifractale des courbes intensité-durée-fréquence des précipitations, Multifractal point of view on rainfall intensity-duration-frequency curves, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIA - Earth and Planetary Science*, 325, 323-326.

Biaou A., Chauvin F., Royer J-F., Schertzer D. (2005) : Analyse multifractale des précipitations dans un scénario GIEC du CNRM. Note de centre GMGEC, CNRM, 101, 45 pp

Deidda, R. (2000), Rainfall downscaling in a space-time multifractal framework, *Water Resour. Res.*, 36, 1779\_1794.

Desaulnier-Soucy, N., Lovejoy, S., Schertzer, D. (2001), The continuum limit in rain and the HYDROP experiment, *J. Atm. Res*, 59-60, 163-197.

- De Lima M.I.P (1998), Multifractals and the temporal structure of rainfall, PhD thesis, Wageningen Agricultural University, 229pp
- De Lima, M.I.P., and Grasman, J. (1999), Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal, *Journal of Hydrology* 220, 1-11
- Gupta, V. K., and E. Waymire (1993), A Statistical Analysis of Mesoscale Rainfall as a Random Cascade, *J. Appl. Meteor.*, 32, 251-267.
- Harris, D., Menabde, M, Seed, A., Austin, G. (1996), Multifractal characterization of rain fields with a strong orographic influence, *J. Geophys. Res.*, 101, 26405-26414.
- Hubert, P., and J. P. Carbonnel (1988), Caractérisation fractale de la variabilité et de l'anisotropie des précipitations tropicales, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 2, 909-914.
- Hubert, P., Tessier, Y., Ladoy, P., Lovejoy, S., Schertzer, D., Carbonnel, J.P, Violette, S., Desurosne, I., Schmitt, F., (1993), Multifractals and extreme rainfall events, *Geophys. Res. Lett.*, 20, 931-934
- Hubert, P., Friggit F., Carbonnel J.P. (1995), Multifractal structure of rainfall occurrence in west Africa, edited by Z. W. Kundzewicz, pp. 109-113., Cambridge University Press, Cambridge.
- Keddem, B., and L. S. Chiu (1987), Are rain rate processes self-similar?, *Wat. Resour. Res.*, 23, 1816-1818.
- Kerman, B. R. (1993), A multifractal equivalent of the Beaufort scale for sea-state, *Geophys. Res. Lett.*, 20(4), 297-300
- Kolmogorov, A.N. (1962), A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in viscous incompressible fluid at high Reynolds number, *J. Fluid. Mech.*, 83 (349)
- Lafore, J.-P., J. Stein, N. Asencio, P. Bougeault, V. Ducrocq, J. Duron, C. Fischer, P. Hérel, P. Mascart, V. Masson, J.-P. Pinty, J.-L. Redelsperger, E. Richard, and J. Vilà-Guerau de Arellano (1998), The Meso-NH Atmospheric Simulation System. Part I: adiabatic formulation and control simulations. Scientific objectives and experimental design, *Ann. Geophys.*, 16, 90-109
- Lavallée, D. (1991), Multifractal techniques: analysis and simulation of turbulent fields, *PhD Thesis, McGill University, Montréal (Québec), Canada.*
- Lavallée, D., Lovejoy, S., Ladoy, P. (1991a), Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation, *Fractals in geography*, L. De Cola et N. Lam (éditeurs). Prentice-Hall, 171-205
- Lavallée, D., Schertzer, D., Lovejoy, S. (1991b), On the determination of the codimension function, *Non-linear variability in geophysics*, Kluwer, Dordrecht, 99-110

- Lavallée, D., S. Lovejoy, D. Schertzer, P. Ladoy, (1993), Nonlinear variability and Landscape topography: analysis and simulation. *Fractals in Geography*, Eds. L. De Cola, N. Lam, 158-192, PTR, Prentice Hall.
- Lazarev, A., D. Schertzer, S. Lovejoy, Y. Chigirinskaya, 1994, Unified multifractal atmospheric dynamics tested in the tropics: part II, vertical scaling and Generalized Scale Invariance, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 1, 115-123.
- Le Bouar E., Testud J., Keenan T.D (2001), Validation of the rain profiling algorithm « ZPHI » from the C-band polarimetric weather radar in Darwin. *J Atmos. Oceanic Tech.*, 18, 1819-1837
- Lovejoy, S., and B. B. Mandelbrot (1985), Fractal properties of rain and a fractal model, *Tellus*, 37 A, 209-232.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., Tsonis, A. A. (1987), Function box-counting and multiple elliptical dimension in rain, *Science*, 235, 1036-1038
- Lovejoy, S., and D. Schertzer (1989), Comments on Are rain rate processes self-similar? *Water Resour. Res.*, 25, 577-579.
- Lovejoy, S., Duncan, M.R., Schertzer, D. (1996), Scalar multifractal radar observer's problem, *J. Geophys. Res.*, 101, 26479-26492.
- Lovejoy, S., Schertzer, D. and Allaire, V., (2008). The remarkable wide range spatial scaling of TRMM precipitation, *J. Atmos. Research*, 90: 10-32
- Macor, A. (2007), Développement de techniques de prévision de pluie basées sur les propriétés multi-échelles des données radar et satellites. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
- Macor, J., Schertzer, D., Lovejoy, S. (2007), Multifractal Methods Applied to Rain Forecast Using Radar Data, *La Houille Blanche*, 4, 92-98.
- Mandelbrot, B. (1989), Fractal geometry: what is it and what does it do? in *Fractals in the Natural Sciences*, edited by D. J. T. M. Fleischman, R. C. Ball, pp. 3-16, Princeton University press., Princeton.
- Marsan, D., Schertzer, D., Lovejoy, S. (1996), Causal space-time multifractal processes: Predictability and forecasting of rain fields, *J. Geophys. Res.*, 101, 26,333-326,346.
- Marshall, J. S., and W. M. Palmer (1948), The distribution of raindrops with size, *J. Meteor.*, 5, 165-166.
- Nykanen, D.K. (2008), Linkages between Orographic Forcing and the Scaling Properties of Convective Rainfall in Mountainous Regions, *J. of hydrometeorology* 9, 327-347
- Olsson, J., and J. Niemczynowicz (1996), Multifractal analysis of daily spatial rainfall distributions, *J. of Hydrol.*, 187, 29-43.

- Olsson, J. , Niemczynowicz, J. and Berndtsson, R. (1993), Fractal analysis of high-resolution rainfall time series. *J. Geophys. Res.* **98** , pp. 23265-23274.
- Parent du Châtelet, J., Tabary, P., Lamargue, P. (2005), Evolution du réseau radar opérationnel de Météo-France pour une meilleure estimation des lames d'eau, *Hydrologie continentale* **49**
- Parisi, G., Frish, U. (1985), A multifractal model of intermittency, dans *Turbulence and predictability* in geophysical fluid dynamics. North Holland, Ghill, M., R. Benzi, and G. Parisi, pp 111-114
- Radkevich, A., S. Lovejoy, K. Strawbridge, D. Schertzer, M. Lilley, 2008: Scaling turbulent atmospheric stratification, Part III: Space-time stratification of passive scalars from lidar data, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **134**, 316-335.
- Rodriguez-Iturbe, I., Gupta, V.K., Waymire, E. (1984), Scale considerations in the modelling of temporal rainfall, *Wat. Resour. Res.*, **20**, 1611-1619.
- Royer, J.F., Biaou, A., Chauvin, F., Schertzer, Lovejoy, S. (2008), Multifractal analysis of the evolution of simulated precipitation over France in a climate scenario, *C.R Geoscience* **340**, 431-440
- Schertzer, D., Lovejoy, S. (1987a), Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling and multiplicative processes, *J. Geophys. Res.* **92(D8)** : 9693-9714
- Schertzer, D., Lovejoy, S. (1987b), Singularités anisotropes, divergences des moments en turbulence: invariance d'échelle généralisée et processus multiplicatifs, *Ann. Sci. Math. Que*, **11(1)** : 139-181
- Schertzer, D., Lovejoy, S. (1989b), Nonlinear variability in geophysics multifractal analysis and simulations, dans *Fractals Physical Origin and properties*, L. Pietronero (Editeurs). Plenum Press, New York, pp 41-82
- Schertzer, D., and S. Lovejoy (1992), Hard and soft multifractal processes, *Physica A*, **185(1-4)**, 187-194
- Schertzer, D., and S. Lovejoy (1997), Universal Multifractals do Exist! *J. Appl. Meteor.*, **36**, 1296-1303
- Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I., Lovejoy, S., Hubert, P., Bendjoudi, H., & Larchevêque, M. (2002), Which chaos in the rain-runoff process? *J. Hydrological Sciences*, **47**, 139-148.
- Schmitt, F., D. Lavallée, D. Schertzer and S. Lovejoy (1992). "Empirical Determination of Universal Multifractal Exponents in Turbulent Velocity Fields." *Physical Review Letter* **68**: 305-308.
- Solomon, S., D. Qin, M. Manning, Z. Chen, M. Marquis, K.B. Averyt, M. Tignor and H.L. Miller (eds.), Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA, 2007 996 pp

Stolle, J., S. Lovejoy, D. Schertzer (2009), The stochastic cascade structure of deterministic numerical models of the atmosphere, *Nonlinear Proc. in Geophys.*, 16, 1-15

Tessier, Y., S. Lovejoy, D. Schertzer (1993), Universal Multifractals: theory and observations for rain and clouds, *J. Appl. Meteor.*, 32, 223-250.

Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., Hubert, P., Bendjoudi, H., Lovejoy, S. (2004), Multiscaling geophysics and sustainable development, *Scales in Hydrology and Water Management, IAHS Publ. 287*, 113-136

Testud, J., Le Bouar, E., Obligis, E., and AliMehenni, M. (2000), The rain profiling algorithm applied to polarimetric weather radar. *J. Atmos. Oceanic Tech.*, 17, 332-356

Veneziano, D, and Furcolo, P., (1999), A modified double trace moment method of multifractal analysis, *Fractals*, 7, 181-195

Waymire, E., and V. K. Gupta (1981), The mathematical structure of rainfall representations, 3, Some applications of the point process theory to rainfall processes, *Wat. Resour. Res.*, 17, 1287-1294.

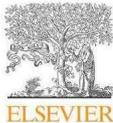
Yaglom, A. M. (1966). "The influence on the fluctuation in energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval." *Sov. Phys. Dokl. 2*: 26-30.

Zawadzki, I., 1987, Fractal versus correlation structure in rain, *Journal of Geophysical Research*, 92, 469-472

## 7.3. Annexe 3 : « Quantifying the impact of small scale unmeasured rainfall variability on urban runoff through multifractal downscaling » (Journal of Hydrology)

Author's personal copy

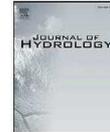
Journal of Hydrology 442–443 (2012) 117–128



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Journal of Hydrology

Journal homepage: [www.elsevier.com/locate/jhydrol](http://www.elsevier.com/locate/jhydrol)



### Quantifying the impact of small scale unmeasured rainfall variability on urban runoff through multifractal downscaling: A case study

A. Gires<sup>a,\*</sup>, C. Onof<sup>b</sup>, C. Maksimovic<sup>b</sup>, D. Schertzer<sup>a</sup>, I. Tchiguirinskaia<sup>a</sup>, N. Simoes<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> Université Paris-Est, Ecole des Ponts ParisTech, LEESU, 6-8 Av Blaise Pascal, Cité Descartes, Marne-la-Vallée 77455 Cx2, France

<sup>b</sup> Imperial College London, Department of Civil and Environmental Engineering, London, United Kingdom

<sup>c</sup> Department of Civil Engineering, University of Coimbra, Coimbra, Portugal

#### ARTICLE INFO

##### Article history:

Received 6 August 2011

Received in revised form 17 February 2012

Accepted 2 April 2012

Available online 7 April 2012

This manuscript was handled by Andras Bardossy, Editor-in-Chief, with the assistance of Uwe Haberland, Associate Editor

##### Keywords:

Rainfall variability

Downscaling

Multifractals

Ensemble predictions

Urban runoff

#### SUMMARY

This paper aims at quantifying the uncertainty on urban runoff associated with the unmeasured small scale rainfall variability, i.e. at a resolution finer than  $1 \text{ km} \times 1 \text{ km} \times 5 \text{ min}$  which is usually available with C-band radar networks. A case study is done on the 900 ha urban catchment of Cranbrook (London). A frontal and a convective rainfall event are analysed. An ensemble prediction approach is implemented, that is to say an ensemble of realistic downscaled rainfall fields is generated with the help of universal multifractals, and the corresponding ensemble of hydrographs is simulated. It appears that the uncertainty on the simulated peak flow is significant, reaching for some conduits 25% and 40% respectively for the frontal and the convective events. The flow corresponding the 90% quantile, the one simulated with radar distributed rainfall, and the spatial resolution are power law related.

© 2012 Elsevier B.V. All rights reserved.

#### 1. Introduction

As the process driving runoff, rainfall is an essential input to hydrological modelling. Thus, the uncertainty that exists on the measured rainfall results in uncertainty on the simulated hydrographs. Unfortunately rain is complex to measure because it is a phenomenon that is extremely variable over a wide range of scales. The first difficulty is to accurately estimate the rain rate especially during extreme events, where the range of possible values is huge. This is a sensitive issue since as pointed out by Vieux and Bedient (2004), who worked on a  $260 \text{ km}^2$  mainly urban catchment with radar data, a systematic linear bias in rainfall measurement leads to non-linear effects on the modelled outlet's hydrograph. The second issue deals with the spatial distribution of rainfall. Numerous studies (Arnaud et al., 2002; Dodov and Foufoula-Georgiou, 2005; Faurès et al., 1995; de Lima and Singh, 2002; Rebera et al., 2006b; Singh, 1997; Smith et al., 2004) were performed on rural catchments to assess the impact of rainfall variability on runoff modelling. Despite contrasted results depending on the rainfall event, as well as the catchment size and characteristics, the overall conclusion suggests a significant impact. In an urban context, with

smaller catchments and a higher proportion of rain becoming effective because of greater impervious areas, the effects are enhanced (Aronica and Cannarozzo, 2000; Segond et al., 2007).

The rainfall resolution provided by the standard radar networks is 1 km. This paper aims at quantifying the uncertainty due to the unknown smaller scale variability on a semi-distributed urban model. To achieve that, the following ensemble prediction approach is adopted:

- (i) Ensembles of realistic downscaled rainfall fields are generated with the help of universal multifractal cascades.
- (ii) Ensembles of hydrographs in sewer conduits are then simulated.
- (iii) The variability among the simulated hydrographs is estimated to quantify the uncertainty.

This approach is implemented on the Cranbrook catchment, which is a 900 ha urban area situated in the east of London, near the 2012 Olympic facilities. A winter and a convective summer rainfall events are analysed. This paper focuses on the impact of small scale rainfall variability, and addresses neither the issue of the rainfall-runoff model spatial resolution (Aronica and Cannarozzo, 2000; Lhomme et al., 2004) nor the errors inherent to the model.

\* Corresponding author. Tel.: +33 1 64 15 36 48.

E-mail address: [auguste.gires@leesu.enpc.fr](mailto:auguste.gires@leesu.enpc.fr) (A. Gires).

## 1) Introduction

As the process driving runoff, rainfall is an essential input to hydrological modelling. Thus, the uncertainty that exists on the measured rainfall results in uncertainty on the simulated hydrographs. Unfortunately rain is complex to measure because it is a phenomenon that is extremely variable over a wide range of scales. The first difficulty is to accurately estimate the rain rate especially during extreme events, where the range of possible values is huge. This is a sensitive issue since as pointed out by Vieux and Bedient (2004), who worked on a 260 km<sup>2</sup> mainly urban catchment with radar data, a systematic linear bias in rainfall measurement leads to non-linear effects on the modelled outlet's hydrograph. The second issue deals with the spatial distribution of rainfall. Numerous studies (Arnaud et al., 2002; Dodov and Foufoula-Georgiou, 2005; Faurès et al., 1995; de Lima and Singh, 2002; Rebora et al., 2006b; Singh, 1997; Smith et al., 2004) were performed on rural catchments to assess the impact of rainfall variability on runoff modelling. Despite contrasted results depending on the rainfall event, as well as the catchment size and characteristics, the overall conclusion suggests a significant impact. In an urban context, with smaller catchments and a higher proportion of rain becoming effective because of greater impervious areas, the effects are enhanced (Aronica and Cannarozzo, 2000; Segond et al., 2007).

The rainfall resolution provided by the standard radar networks is 1 km. This paper aims at quantifying the uncertainty due to the unknown smaller scale variability on a semi-distributed urban model. To achieve that, the following ensemble prediction approach is adopted:

- (i) Ensembles of realistic downscaled rainfall fields are generated with the help of universal multifractal cascades
  - (ii) Ensembles of hydrographs in sewer conduits are then simulated
  - (iii) The variability among the simulated hydrographs is estimated to quantify the uncertainty
- This approach is implemented on the Cranbrook catchment, which is a 900 ha urban area situated in the east of London, near the 2012 Olympic facilities. A winter and a convective summer rainfall events are analysed. This paper focuses on the impact of small scale rainfall variability, and addresses neither the issue of the rainfall-runoff model spatial resolution (Aronica and Cannarozzo, 2000; Lhomme et al., 2004) nor the errors inherent to the model.

The paper is organized as follows. The rainfall input and especially the downscaling techniques implemented are described in section 2. The semi-distributed rainfall-runoff model of the Cranbrook catchment is presented in section 3. The results of the ensemble prediction approach are discussed in section 4.

## 2) Rainfall input

### 2.1) Data description

Two rainfall events are analysed in this paper: a winter frontal one that occurred on February 9<sup>th</sup>, 2009, and a summer convective one that occurred on July 7<sup>th</sup>, 2009. The data are obtained from the Nimrod mosaics, a radar product of the UK Meteorological Office. A radar mosaic is a map of the rain rate obtained by interpolating the rain rate measured by all the C-band radars of the UK network. In the Nimrod processing (Harrisson et al., 2000) the variations in the vertical reflectivity profile are corrected by considering an ideal profile for each radar pixel that takes into account the freezing level height (from UK Met. Office mesoscale model) and cloud top height (from Meteosat IR imagery and mesocale model). An

adjustment with hourly rain gauge data is also performed. The data resolution is 1 km in space and 5 minutes in time, and square areas of size 64 km<sup>2</sup> during 21 hours are studied in this paper. Fig. 1 displays the total rainfall depth for both events. The convective nature of the July event is clearly visible with very localized rainfall cells. The northerly coordinates are slightly different for both events because the studied areas are selected to capture the heaviest rainfall. The temporal evolutions of the average rain rate over the studied areas are shown in fig. 2.

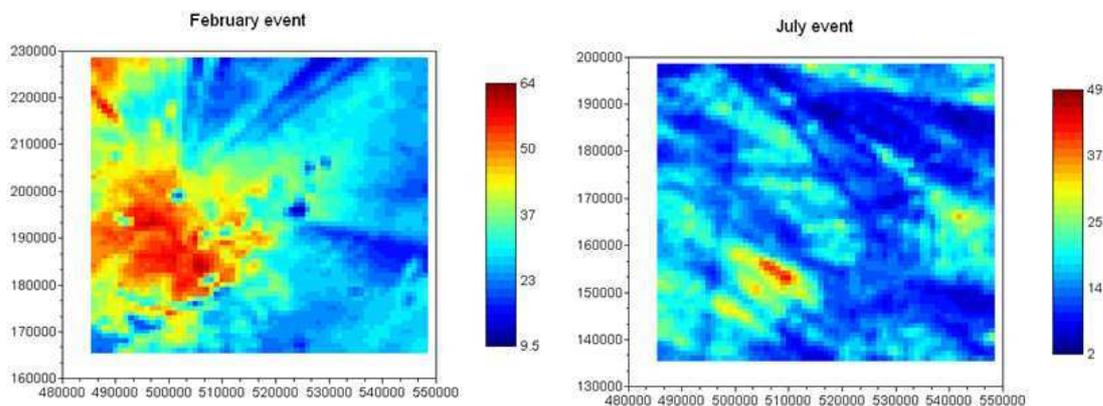


Figure 1: Map of the total rainfall depth (mm) of the studied area for the February (left) and the July (right) events. The coordinate system is the British National Grid (units: m).

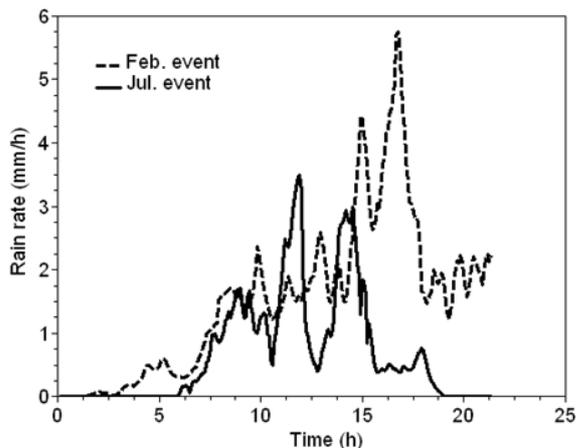


Figure 2: Time evolution of the average rain rate over the studied area for the February and the July events.

## 2.2) Multifractal analysis

Rainfall is extremely variable over a wide range of scales. It is becoming rather standard to understand and simulate this variability with the help of multifractals (for recent reviews respectively in geophysics and hydrology see Schertzer and Lovejoy (2011) and Schertzer et al. 2010), which rely on the concept of multiplicative cascade (Deidda, 2000; Gupta and Waymire, 1993; Schertzer and Lovejoy, 1987a, 1987b). It should be mentioned here that the details of the multifractal model used in this study are not the main focus of this paper and will therefore be presented succinctly. In that framework, the statistical moments of arbitrary  $q$ -th power of the rainfall field  $R_\lambda$  at the resolution  $\lambda$  ( $=L/l$ , the ratio between the

outer scale of the phenomenon and the observation scale) exhibit a scaling behaviour ( $\langle \rangle$  denotes ensemble average):

$$\langle R_\lambda^q \rangle = \lambda^{K(q)} \langle R_1^q \rangle \quad (1)$$

where  $K(q)$  is the scaling moment function.  $K(q)$  quantifies the scaling variability of rainfall. The statistical moments are the Mellin transform of the probability distribution which has two consequences (Schertzer and Lovejoy, 2002, 2011). Firstly, the scaling of the former implies the scaling of the latter and the other way around, i.e. Eq. 1 is equivalent to:

$$\Pr(R_\lambda \geq R_1 \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad (2)$$

$c(\gamma)$  being the codimension function of the singularity  $\gamma$ . Secondly, their respective scaling exponents  $K(q)$  and  $c(\gamma)$  are related by a Legendre transform (Parisi and Frish, 1985). Eq. 1 is a priori valid only on average on an infinite sample of realisation. Here the 2D map of each time step is upscaled independently, and the 256 time steps are taken into account in the ensemble average. We chose the specific framework of universal multifractals (UM) (Schertzer et al., 1987a), because they correspond to the stable and attractive limits of nonlinearly interacting multifractal processes (i.e. a multiplicative generalization of the limit theorem) and are therefore defined with the help of only a few parameters having a strong physical meaning (Schertzer et al., 1997). Due to these properties, they have been extensively used (Desaulnier-Soucy et al., 2001; Harris et al., 1996; de Lima and Grasman, 1999; Lovejoy and Schertzer, 2007 for a review; Marsan, et al., 1996; Nykanen, 2008; Olsson and Niemczynowicz, 1996; Royer et al., 2008),  $K(q)$  can be described with the help of only three scale independent parameters (UM parameters):

- $H$ , the degree of non-conservation, which measures the scale dependency of the average field ( $H=0$  for a conservative field);
- $C_1$ , the mean intermittency co-dimension, which measures the average sparseness of the field (e.g. rain rate). More precisely,  $C_1$  is the fractal co-dimension of the portion of the field exceeding  $\gamma_1$ , the singularity corresponding to  $q=1$ . A homogeneous field fills the embedding space and has  $C_1=0$ ;
- $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ), the multifractality index of the field measures the variability of the intermittency, i.e. its dependence with respect to the considered level of activity. When  $\alpha=0$ , there is no such a dependency: all activity levels have the same intermittency and the field is fractal, i.e. it is defined with the help of a unique fractal dimension.

A more rigorous, but less intuitive description of these parameters, is given in section 2.3.1. In this framework,  $K(q)$  has the following analytical expression:

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) + Hq \quad (3)$$

It can then be shown that larger values of parameters  $\alpha$  and  $C_1$  corresponds to stronger extremes. The Double Trace Moment (DTM) technique (Lavallée et al., 1993) is used to estimate these UM parameters.

Fig. 3 displays eq. 1 in a log-log plot for the July event. The straight lines (the coefficient of determination  $R^2$  is equal to 0.98 on average), whose slope is  $K(q)$ , indicates a good scaling behaviour on scales ranging from 1 to 64 Km. Similar curves (with average  $R^2$  equal to 0.96) are found for the February event. The estimates (which are used in the downscaling of the field) of UM parameters  $C_1$ ,  $\alpha$  and  $H$  are respectively 0.14, 1.62 and 0.56 for the February event and 0.49, 0.92 and 0.57 for the July event. The differences between the parameters reflect a stronger intermittency and a lower multifractality for the convective than for the frontal event. The zero values (either real or associated with a threshold of detection of the radar) could influence the estimates of UM parameters (Gires et al., 2010). Nevertheless, this is not the case for these two selected rainfall events. This was checked by simulating a

UM field, truncating it to reproduce the same percentage of zeros, and analysing the new field. It appeared that  $\alpha$  is slightly underestimated (by roughly 6 and 12 % for respectively the February and the July event) and  $C_1$  is properly retrieved. Concerning  $H$ , we find it to be different from 0, which reflects a non-conservative, smoother and more correlated field. A physical explanation of this is a complex issue which we are currently investigating, and will be the topic a future paper as the focus here is not the multifractal model. A possible interpretation is that the conserved quantity might not be directly the rainfall rate but another quantity such as the total water amount in the atmosphere. There are also indications that the estimated value of  $H$  might be partially affected by the presence of numerous zeros (i.e. non rainy areas). It should be mentioned that numerous authors found  $H \neq 0$  for rainfall. For instance de Montera et al. (2009) analyzed high resolution rainfall time series for different French rainfall events and found  $H$  roughly equal to 0.5. Tessier et al. (1993) analysed daily times series of 30 French rain gauges and found  $H = -0.35$  for large scale (16-4096 days). Verrier et al. (2010) did multifractal space analysis on radar data for African monsoon rainfall event and found  $H$  roughly equal to 0.4. Nykanen (2008) and Nykanen and Harris (2003) analysed radar data of 5 heavy rainfall events in the Rocky Mountains. In these papers they computed the time evolution of  $H$ , which ranges from 0.31 to 0.61.

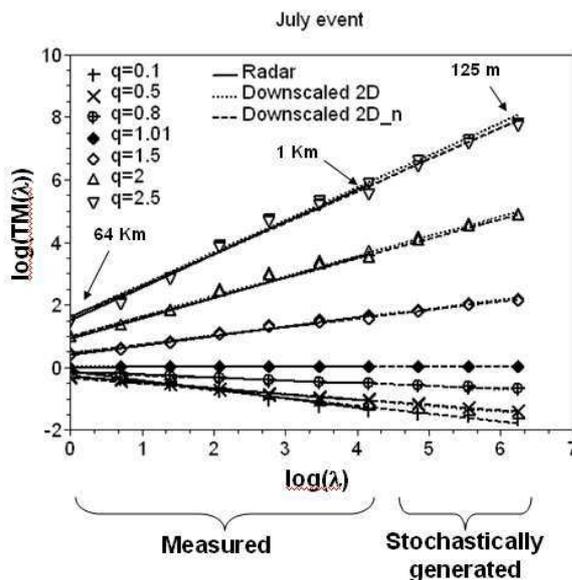


Figure 3: Illustration of the definition of the scaling moment function for the July event. The coefficient of determination of the linear regressions are all greater than 0.98.

## 2.3) Rainfall downscaling implemented in this paper

### 2.3.1) Presentation of the downscaling techniques

Multifractal cascades models are intrinsically downscaling models (Schertzer and Lovejoy, 1987a; Schertzer et al., 2010). At their earlier stages, they were essentially used to analyze and simulate precipitations. However, they were progressively applied to precipitation downscaling (Biaou et al. 2003, Deidda, 2000; Ferraris et al., 2002; Olsson et al., 2001; Reborá et al., 2006a; Royer et al., 2008). In this paper, the rainfall variability is studied in the framework of universal multifractals which is well suited to the problem of downscaling (Biaou et al., 2003). Indeed, the downscaling implemented here basically consists in continuing the cascade beyond the scale of observation. The underlying assumption here is that the scaling features identified over the range of scales 1 km – 64 km

also hold for higher resolutions. This assumption has extensive support in the literature (Mandapaka et al., 2009; Menabde et al., 1997).

More precisely, the UM parameters  $\alpha$  and  $C_1$  are estimated for each event based on the available radar data with a resolution ranging from 1 to 64 km (see previous section). Then in the spatial downscaling (left part of fig. 4) three steps of a random discrete multiplicative cascade with the same UM parameters are performed. One step consists in dividing the pixels into  $\lambda_{xy}^2$  pixels (here  $\lambda_{xy} = 2$ ). The value affected to the new “child” pixel is the one of the “father” pixel multiplied by a random factor. As a consequence, after 3 steps the value of a given pixel is the product of the random factor of each 3 previous steps of the cascade multiplied by the value of the corresponding radar pixel. The final resolution of the field is 125 m in space and 5 min in time. To respect the constraints of universal multifractal statistics (i.e. eq. 1), which enable the generation of realistic small scale variability, the random factor

must be set equal to  $\exp\left[\left(\frac{C_1 \ln(\lambda_0)}{|\alpha - 1|}\right)^{1/\alpha} L(\alpha)\right] / \lambda_0^{C_1/\alpha-1}$ .  $L(\alpha)$  is a an extremal Lévy-stable

random variable of Lévy stability index  $\alpha$  ( i.e.  $\langle \exp(qL(\alpha)) \rangle = \exp(q^\alpha)$ ), which corresponds to a mathematical definition of the multifractality index presented in section 2.2. This index characterizes the family of the cascade generator. The Lévy-stable variable  $L(\alpha)$  is easily

generated with the help of the algorithm given by Chambers et al. (1976).  $\left(\frac{C_1 \ln(\lambda_0)}{|\alpha - 1|}\right)^{1/\alpha}$

rescales the amplitude of the Lévy variables to obtain the desired  $C_1$ , which is therefore a measure of the fluctuations of the cascade generator . More details about generating multifractal fields can be found in Lovejoy and Schertzer (2010) and Pecknold et al. (1993). Apart from the spatial downscaling which serves rather as a first brush approach to downscaling, a spatio-temporal one is also tested (right part of fig. 4). It relies on the same principle as the spatial one, except that the temporal and spatial resolutions are improved at the same time. In the framework of the simplest space-time scaling model that relies on a scaling anisotropy coefficient  $H_t$  (Deidda, 2000; Gires et al., 2011; Macor et al., 2007; Marsan et al., 1996; Radkevich et al., 2008.), when lengths are divided by  $\lambda_{xy}$ , then durations should be divided by  $\lambda_t = \lambda_{xy}^{1-H_t}$ . Relying on Kolmogorov theory (1962) and assuming that rain cells have the same lifetime like eddies, it is possible to show that  $H_t$  is expected to be equal to 1/3 (Marsan et al., 1996), which means (Biaou et al., 2003) the length will be divided by 3 and durations by 2 ( $2^{1-1/3} \approx 2.08$ ). Here for each pixel, two steps of spatio-temporal downscaling are implemented, which means that the final resolution (which will be used in the hydrological model) of the field is 111 m in space and 1.25 min in time.

For both spatial (2D) and spatio-temporal (3D) downscaling, we tested whether or not to normalize the sub-cascade associated to each radar pixel. If normalization is implemented the exact rain rate measured by the radar is retrieved after aggregating the downscaled field up to the radar observation scale of 1 km and 5 min. If the normalization is not implemented this property is true only on average. There has been a long lasting debate over the respective virtues of implementing (corresponding to a micro-canonical conservation) or not (canonical conservation) normalization. The normalized field is likely to be preferred by practitioners, but is less consistent with the theoretical framework of multifractals as it will impact the correlation structure for distance larger than the radar pixel size and more importantly may limit the appearance of large singularity at small scales. Furthermore Schertzer and Lovejoy (1989) pointed out that the micro-canonical assumption combined to scaling rather corresponds in fact to a “pico-conservation”, which is at the same time too demanding (strict conservation at all scales) and limited to a unique dimension (an intersection of the process

with a lower dimension is not micro-canonical, e.g. the 1D components of a 2D microcanonical process are not microcanonical). As a consequence, 4 types of downscaling are implemented and tested: 2D, 2D\_n, 3D and 3D\_n (where the \_n means that it is normalized). Since the downscaled rainfall fields are generated randomly, ensembles of 100 samples for each type of downscaling will be used in the following.

It should be mentioned here that whereas the elementary generators and corresponding multiplicative factors of the downscaling of two consecutive time steps are independent, i.e. the cascades over each pixel are independent, the downscaled variables are interdependent because these factors were applied to common larger scale structures from which they are generated. In this paper, we used the pedagogical and simplistic discrete cascades, instead of the more adequate continuous cascades (Schertzer et al., 1987a). The main advantages of continuous cascades, which are a little bit more involved than discrete ones are that they respect causality (Marsan et al., 1996), as well as the usual metric and Galilean invariance (Schertzer et al., 1997). They therefore do not generate structures with unrealistic straight lines like discrete cascades do. However, the negative consequences of using discrete cascades are not too much drastic over only two or three steps and if we do not perform forecasts.

Fig. 3 displays the definition of the scaling moment function (eq. 1) of the field and one sample of the downscaled field (2D and 2D\_n) for different moments  $q$  in a log-log plot for the July event. Similar curves are obtained for the February event. The straight lines (the coefficients of determination are all greater than 0.97), whose slope is  $K(q)$ , indicate a good scaling behaviour. As expected, the downscaling is represented by an extension of these straight lines to finer scales, which shows that the downscaled fields exhibit the same statistical behaviour. No data at higher resolution were available for these events to enable further confirmation of the reliability of the downscaled field

An example of the downscaled field for an arbitrary time step over the studied area of Cranbrook is presented in fig. 5. The same colour palette is used for both the radar and the downscaled field so that they can be compared. The effect of the downscaling that creates greater or smaller rainfall rate inside a given radar pixel is visible, especially in the south.

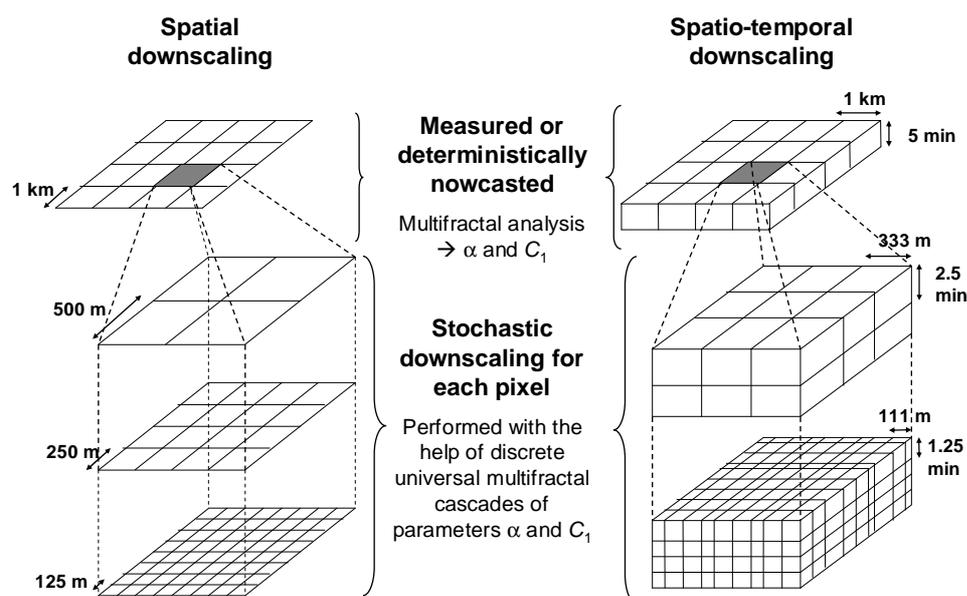


Figure 4: Illustration of the spatial (left) and spatio-temporal (right) downscaling technique.

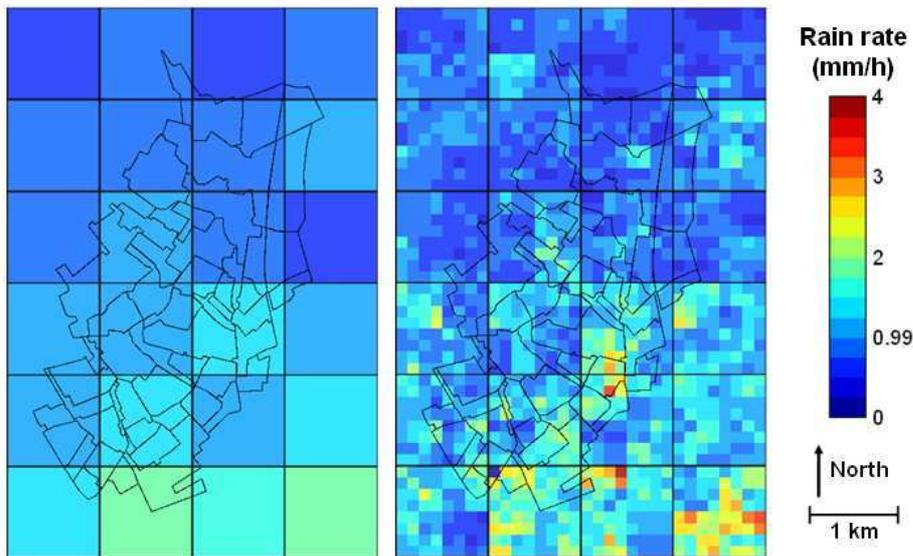


Figure 5: Illustration of the downscaling of the rainfall field over the Cranbrook area for an arbitrary time step of the February event and a 2D downscaling.

### 2.3.2) Comparison of the downscaling techniques

Before continuing, the 4 types of downscaling techniques tested should be compared. This involves comparing the fields obtained after 3 steps of spatial cascades (a map of  $8 * 8$  pixels) and 2 steps of spatio-temporal cascades (4 consecutive maps of  $9 * 9$  pixels), generated with the help of the same UM parameters. The results are discussed for the parameters of the February event, but similar conclusions are found as with the July event. To achieve the comparison 10 000 samples of 2D and 3D sub-cascades are generated, and the mean and maximum values are retrieved.

The probability distributions of the mean values are rather symmetric and the fluctuations around the average over all the samples are equal to 0.25 and 0.13 for respectively the 2D and the 3D non-normalised cascade schemes. The fluctuations around the average are not negligible, and are lost when normalising the fields. However, it should be mentioned that when a not-normalized cascade scheme is implemented, the total rainfall depth over the whole Cranbrook area ( $=19.14$  mm for the February event) estimated with the radar is retrieved since numerous ( $256$  time steps  $* 42$  radar pixels) sub-cascades are generated,. Indeed, averaging over the 100 samples of downscaled field we find  $19.14 \pm 0.07$  mm and  $19.14 \pm 0.04$  mm respectively for the not-normalized 2D and 3D downscaling techniques. This means that the hydrological consequences observed when using the not-normalized field are due to a change in the spatial distribution of rainfall and not to a change of total rainfall amount.

The excess distribution functions of the maximum values for the four cascade schemes are displayed in figure 6. The first conclusion is that, as expected (the ratio between the initial and the final resolution is greater in space and time for the 3D than for the 2D scheme; 9 to 8 in space and 4 to 1 in time) greater values are generated with the 3D scheme, in terms of mm/h over a pixel during a period of time. Nevertheless to actually compare the two schemes in terms of potential hydrological consequences, it seems more relevant to compare the 2D and 3D scheme at the same temporal resolution (the final spatial resolution are similar for

both schemes). Therefore we considered the total amount of rain per pixels of the 3D scheme (i.e. the sum of the contribution of the 4 time steps over each pixel). The curve is denoted 3D→2D and plotted fig. 6. In that case the maximum values generated are smaller than for the 2D scheme. Given that rainfall is a space-time process, it means that implementing the simpler 2D scheme might lead to extreme values greater than the one obtain with the more realistic 3D scheme. This is due to the fact that even if the extremes are greater for the 3D scheme, they remain valid during only 1.25 min whereas the one in the 2D scheme remain valid during 5 min. In the 3D case the extreme values are indeed not generated over the same spatial pixel. Concerning the differences between the normalized and not normalized field the distributions are quite similar. Nevertheless it can be noted that, for normalized fields this distribution is slightly more concentrated (smaller maximum values and greater minimum values).

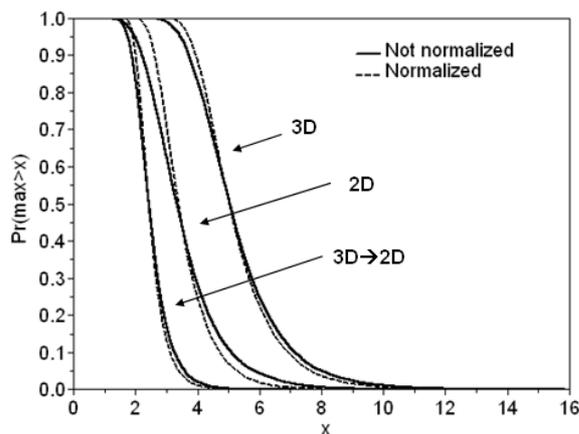


Figure 6: Excess distribution function of the maximum value of the field obtained after 2 steps of spatio-temporal cascade and 3 steps of spatial cascade with the UM parameters of the February event.

### 3) Presentation of the rainfall - runoff model and case study

The case-study area chosen to perform the tests is the Cranbrook catchment in the London Borough of Redbridge. The Cranbrook catchment is a tributary of the Roding River that starts at Molehill Green and discharges into the Thames at Barking Creek. The Cranbrook catchment has a drainage area of approximately 900 ha. It is approximately 5.75 km long, of which 5.69 km is culverted. The catchment is predominantly urban with several parks (it has two lakes) and playing fields. This area has a history of local flooding. The computational rainfall/runoff model used was provided and calibrated by Thames Water Utilities Ltd (2002) and includes the major surface water sewers and associated ancillaries that drain to the River Roding. The area is divided into 51 sub-catchments (with areas ranging from 1 to 62 ha) that are considered homogeneous. The simulations were carried out using the Infoworks CS urban drainage simulation software (Wallingford Software, 2009). The simulation parameters were maintained unchanged for all simulations.

The version of Infoworks CS used here does not accept radar data as rainfall input. Therefore rainfall variability was taken into account by inputting a different time series for each sub-catchment. The average square root of the sub-catchment areas is 380 m, which is greater than the downscaled rainfall resolution of 125 m or 111 m (according to the technique used). This means that some information is lost in the process. Further investigations with a finer rainfall-runoff model and involving a better representation of surface flow (Maksimovic

et al., 2009; Schmitt et al., 2004), should be performed to fully take advantage of the rainfall downscaling. In order to evaluate the rainfall time series corresponding to a sub-catchment, the area of intersection between the sub-catchment and each downscaled pixel ( $A_{ij}$ ) was estimated with the help of a GIS. Then for each time step the rainfall rate ( $R$ ) is estimated as the weighted sum:

$$R = \sum_{i,j} A_{ij} R_{ij} / \sum_{i,j} A_{ij} \quad (4)$$

where  $R_{ij}$  is the rainfall rate of the downscaled pixels. The total rainfall depth during the February event for each sub-catchment is displayed in fig. 7. It ranges from 16 to 23 mm. The rainfall distribution exhibits a similar spatial pattern for the July event, but with greater variation between the sub-catchments (from 4 to 14 mm).

The study is done by analysing the hydrographs of ten conduits. They were selected so that they cover a wide range of characteristic lengths ( $L_{da}$ ), defined as the square root of the area drained by the conduit.  $L_{da}$  is small for upstream pipes and larger for downstream pipes. The relevance of this parameter will appear in section 4. The characteristic lengths of the selected conduits (see fig. 7) range from 370 to 2910 m.

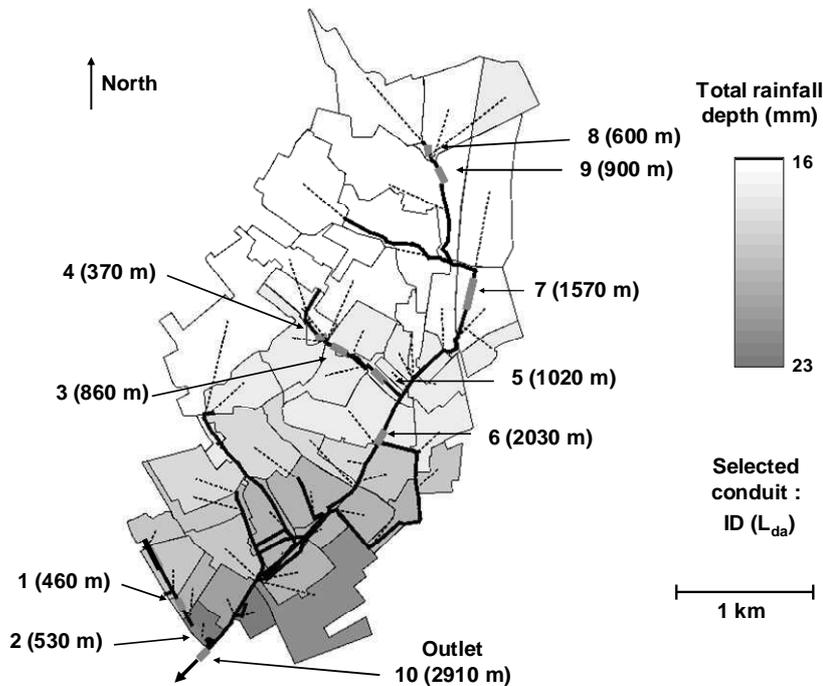


Figure 7: The Cranbrook study case. Total rainfall depth during the February event for the 51 sub-catchments. The black lines represent the modelled underground sewer system.

## 4) Results and discussion

### 4.1) Impact of measured rainfall variability

In this section, the hydrographs obtained by using the radar distributed rainfall data (with the index 'radar') or the average rainfall over the whole Cranbrook catchment (index 'avg') are compared. We focused on the peak flow (PF) and evaluated the relative error:

$$Relative\ error = \frac{PF_{avg} - PF_{radar}}{PF_{radar}} \quad (5)$$

for each selected conduit. Fig. 8 displays the results as a function of the characteristic length of the conduits. It ranges from -30 to +21% for the February event and from -65 to +349% for the July one. These values are large and certainly cannot be neglected, which means that there is a need to generalize the use of radar (see Einfalt et al., 2004, for a roadmap), or dense rain gauge networks, in order to properly simulate and possibly manage flows in sewer systems more efficiently. The relative error is negative for conduits 1, 2 and 10 (the outlet), positive for the others. This is not surprising since the heaviest rainfalls were located in the South during this event, which means that considering the average rainfall corresponds to virtual transfer of water from the South to the North. The absolute value of the relative error has a general tendency (clearer for the February event) to decrease with  $L_{da}$ , which is not surprising since greater drained areas generally tend to damp the effect of rainfall variability. A deeper analysis of this dependency is performed in section 4.2.2. For the July event the outlet is very sensitive to the rainfall resolution and the damping effect that should be observed is not present because the nearest sub-catchments receive the heaviest rainfall. Finally it should be noted that some differences in terms of total volume are observed. They are due to the fact that the coefficients of imperviousness are not the same for all the sub-catchments (generally smaller in the northern part of the Cranbrook area).

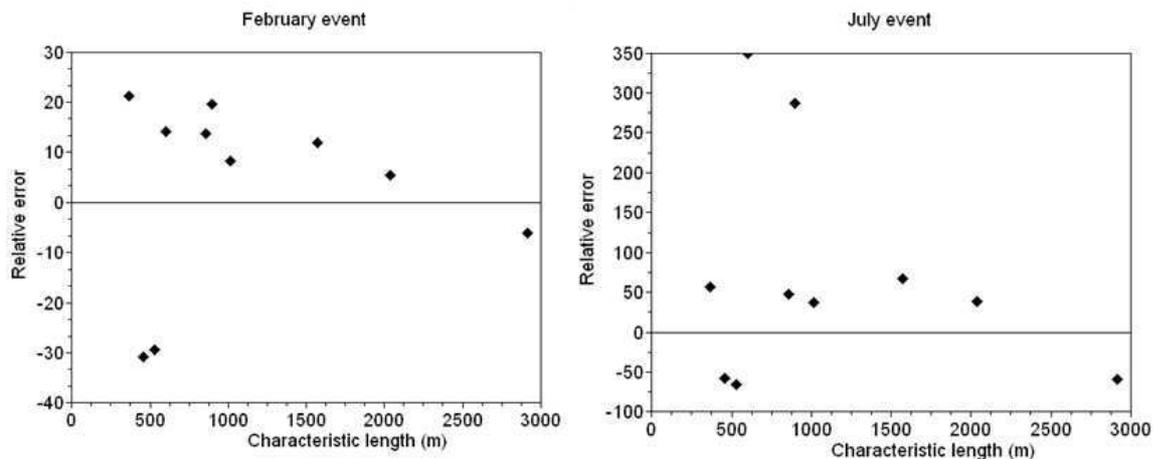


Figure 8: Relative error of  $PF_{avg}$  with regards to  $PF_{radar}$  as a function of the characteristic length ( $L_{da}$ ) of the conduit.

#### 4.2) Impact of small scale unmeasured rainfall variability

In the previous section, it was found that the error made by considering the average rain over the whole Cranbrook area rather than the radar distributed rainfall could not be neglected. It is expected that the same kind of error will occur between the 1 km radar resolution rainfall and higher resolutions. Unfortunately no rainfall data are available to directly confirm that statement. To overcome this difficulty the field is stochastically downscaled. For each type of downscaling technique, an ensemble of 100 samples was generated. The statistical analysis of the corresponding ensemble of simulated hydrographs enables the quantification of the potential uncertainty due to the unknown small scale rainfall variability.

#### 4.2.1) Analysis of the peak flow

Before analysing the whole hydrograph, we first focus on the peak flow, which is of prime interest in the management of sewer systems. For each sample the peak flow and its occurrence time was estimated. Histograms of the peak flow distribution among the 100 samples with the 2D and 3D downscaling technique are displayed in fig. 9 for conduit 2 and the February events. The patterns of these histograms are representative of the other conduits and event. In order to quantify the variability among the samples, the classical coefficient of variation (i.e. the ratio between the standard deviation and the mean) is typically used. However in that specific case, it is more relevant to define a coefficient of variation  $CV'$  with the help of the 10 and 90 % quantiles (denoted respectively  $PF_{0.1}$  and  $PF_{0.9}$ ) to take into account the non gaussianity, in particular the skewness, of the histograms (more pronounced for the spatial than for the spatio-temporal downscaling).  $CV'$  is defined as follows:

$$CV' = \frac{PF_{0.9} - PF_{0.1}}{2 * PF_{radar}} \quad (6)$$

$CV'$  quantifies the uncertainty associated to the unknown high resolution rainfall variability. The use of percentages allows for comparison of the results for all the conduits despite the differences in the values of the peak flow.

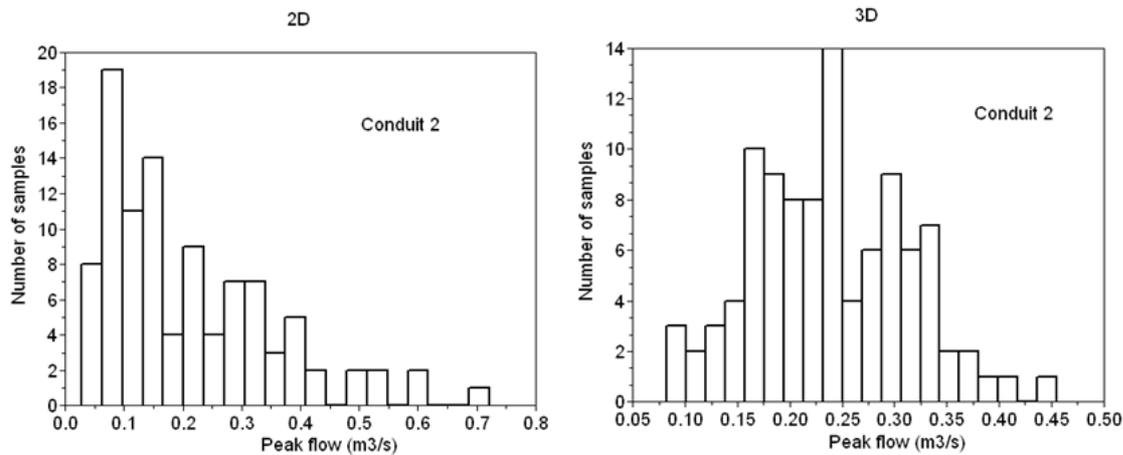


Figure 9: Histograms of the peak flow of the 100 samples for conduit 2, the February event and the 2D and 2D downscaling.

Fig. 10 shows  $CV'$  vs.  $L_{da}$  for the 4 types of downscaling and both events. The order of magnitude of  $CV'$  is comparable to the relative error between averaged and radar rainfall (fig. 8), which was expected. Concerning the differences between the downscaling techniques, mainly two points should be highlighted. First, when the field is normalized so that it equals the measured radar rainfall at the observed resolution of 1 km (either in 2D or 3D), the uncertainty is slightly smaller than when it is not. This is expected since the normalization smoothes a little the natural behaviour of the cascade. Second, the uncertainty is greater for the spatial downscaling (2D and 2D\_n) than for the spatio-temporal one (3D and 3D\_n). This reflects the fact that in the more realistic spatio-temporal downscaling the variability (at similar scale) generated is smaller than in the spatial one (as previously mentioned in section 2.3.2). It means that the greater uncertainty exhibited when implementing the spatial downscaling is likely to be an overestimation. For the February event,  $CV'$  clearly decreases with  $L_{da}$ , which is quite natural since a greater drained area will smooth the effect of small

scale variability. A power law fit to this decrease will be investigated in the next section. This tendency is also observed for the July event, but less clearly, especially for the outlet. This is likely to be due to the fact that the heaviest rainfalls are very localized and near the outlet, which makes it very reactive. It is interesting to note that despite the coarse resolution of the rainfall-runoff model (the average square root of the sub-catchment area is 380 m) with regards to the downscaled rainfall resolution (125 m or 111 m), the uncertainty due to the unknown small scale rainfall variability cannot be neglected. It suggests that this type of ensemble prediction approach should be implemented in real time monitoring of sewer systems.

Finally, it should be mentioned that the effect on the timing of the peak flow is very limited. Since the order of magnitude of the variability was about few minutes, it was not investigated further.

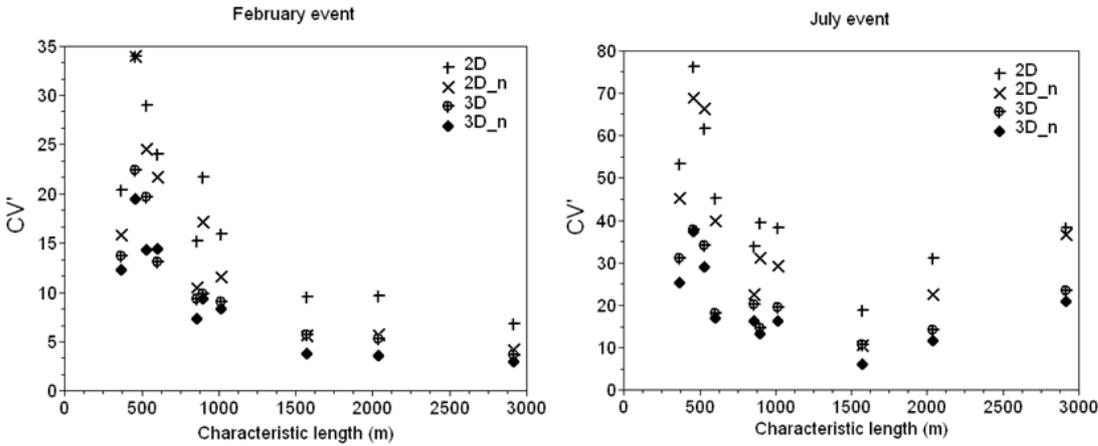


Figure 10:  $CV'$  as a function of the characteristic length  $L_{da}$  for both events.

4.2.2) Analysis of the hydrographs

In this section a similar approach was developed, not only for the peak flow, but also for the whole hydrograph. Twenty hydrographs, centred on the peak flow, arbitrarily selected among the 100 generated are plotted on fig. 11 for conduit 2, for both events under the 3D downscaling scheme. The variability inside the ensemble of simulated hydrographs is visible. In order to clarify these curves, for each time step the 10, 50 (median) and 90% quantiles were estimated, which enables the generation of the corresponding temporal evolution of the flow (respectively  $Q_{0.9}(t)$ ,  $Q_{0.5}(t)$ ,  $Q_{0.1}(t)$ ). Fig. 11 displays these curves and  $Q_{radar}$  for conduit 2, both events and the 3D downscaling. Similar curves are obtained for other conduits and types of downscaling. For the February event, it can be seen that the uncertainty observed for the peak flow is also observed for each smaller peak. The median ( $Q_{0.5}$ ) is also very close to  $Q_{radar}$  (the curves almost cannot be distinguished). For the July event the situation is more complex. First of all,  $Q_{0.5}$  is not always similar to  $Q_{radar}$ . This is probably due to the fact that the histograms of the distribution for each time step are more skewed than for the February event. Moreover  $Q_{0.1}$  and  $Q_{0.9}$  are quite different which means that the range of realistic scenarios covered with the rainfall downscaling is wide, and that there is a huge uncertainty on the actual flow (the one with a perfectly known rainfall). This result suggests that for this type of convective event, the observed resolution of 1 km is not fine enough.

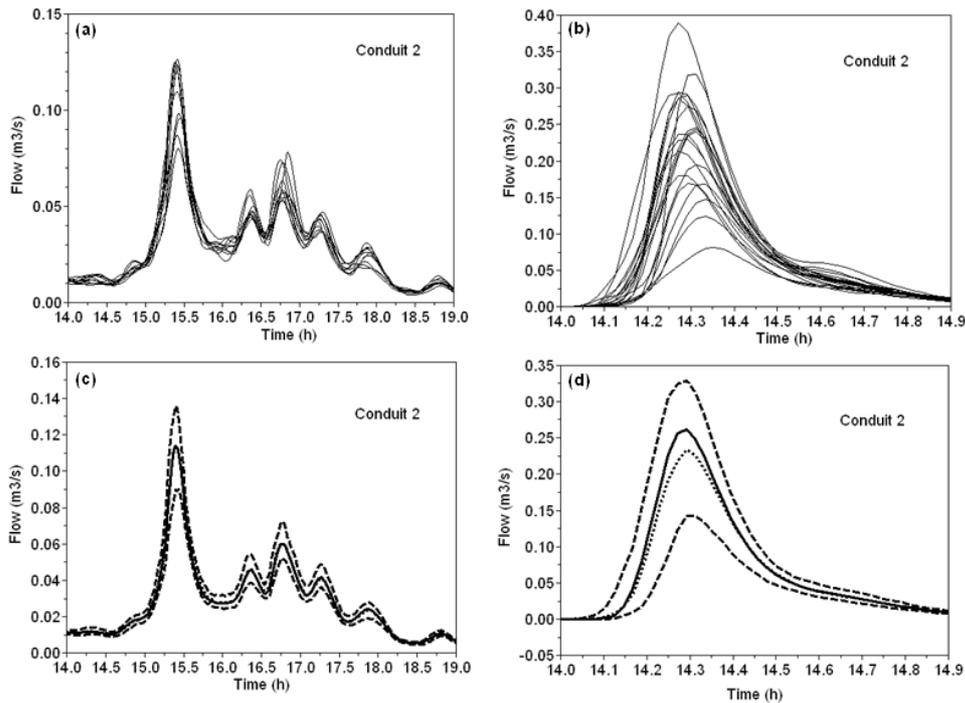


Figure 11: Twenty samples of the ensemble of hydrographs simulated with a 3D downscaling for conduit 2, February (a) and July events (b). Hydrographs  $Q_{0.9}$  (dash),  $Q_{0.5}$  (dash dot),  $Q_{0.1}$  (dash) and  $Q_{\text{radar}}$  for conduit 2 and February (c) and July (d) events.

Real time management of sewer systems, including forecasting, could benefit from taking into account the uncertainty associated with the unknown small scale rainfall variability. These applications require short computational time, which is especially critical in times of flooding. Indeed, one of the critical aspects of flood forecast for emergency management purposes is the period of time available between the acquisition of data, such as rainfall, and the results obtained by hydraulic simulations. Therefore, data transmission, rainfall forecast and hydraulic simulation of the drainage system need to be fast, reliable and as accurate as possible in order to get the best possible estimation of inundation extent, depth and peak time with sufficient time to permit successful operational responses (Simões et al, 2010). It is not at the moment possible to generate 100 samples and simulate the corresponding hydrographs in the sewer system in the available time (it takes roughly one hour on a standard laptop). In order to avoid doing these simulations in real time (where computational time is critical), in the following,  $Q_{0.9}$  is investigated as a function of  $Q_{\text{radar}}$ , with the aim of determining a standard relation between these variables, which could be directly used for assessing the uncertainty associated with the unknown small scale rainfall variability.

The first step is to look at  $Q_{0.9}$  vs.  $Q_{\text{radar}}$  in a log-log plot. Fig. 12 shows this plot for conduit 2 during the February event and for a 3D downscaling. It should be mentioned that only the time steps when  $Q_{\text{radar}}(t) > PF_{\text{radar}}/10$  are considered, to avoid taking into account small flow values which are not relevant here. Similar plots are found for other conduits and types of downscaling. The graphs seem to exhibit a linear pattern, which means that  $Q_{0.9}$  and  $Q_{\text{radar}}$  are linked by a power law of coefficients  $a$  and  $b$  defined as follows:

$$Q_{0.9} = bQ_{\text{radar}}^a \quad (7)$$

For the February event, the coefficient of determination of these linear regressions is equal to  $0.99 \pm 0.01$  on average (depending on the conduits and the type of downscaling) which means that the power law relation is appropriate. For the July event this average is equal to  $0.95 \pm 0.06$ , which remains good. On some of the log-log plots it should be mentioned that some “loops” appear (slightly visible in fig. 12). They correspond to the increasing or decreasing portion of the same peak, which do not exhibit the same behaviour (the differences between  $Q_{0.9}$  and  $Q_{\text{radar}}$  are greater for a decreasing flow). The linear regression does not allow us to model this effect, but rather provides an average measure of the uncertainty.

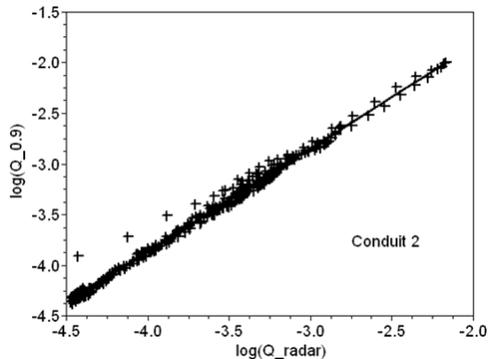


Figure 12: Log-log plot of  $Q_{0.9}$  vs.  $Q_{\text{radar}}$  for conduit 2 and the 3D downscaling of the February event. The coefficient of determination of the linear regression is 0.99, and  $a$  and  $b$  are respectively equal to 1.01 and 1.21

The values of exponent  $a$  are displayed as a function of  $L_{\text{da}}$  in fig. 13. The 95% confidence intervals are greater for the July event because the coefficients of determination are smaller, and also because fewer points are considered in the linear regression (the peak flow lasts roughly 1 h whereas it lasts 5 h for the February event). The first striking feature is that they basically do not significantly depend on the type of downscaling used. There is also no clear evidence of any dependence on  $L_{\text{da}}$ . The average value of  $a$  is roughly 1.0 for the February event and 1.1 for the July one. These values are quite comparable despite the differences in the nature of the events. Note that  $a$  is very close to 1, i.e.  $Q_{0.9}$  is almost linearly related to  $Q_{\text{radar}}$ . It is likely to be due to the fact that, as already mentioned, the spatial resolution of the model does not enable one to fully take into account the generated rainfall variability. Similar behaviour is observed on  $Q_{0.1}$ .

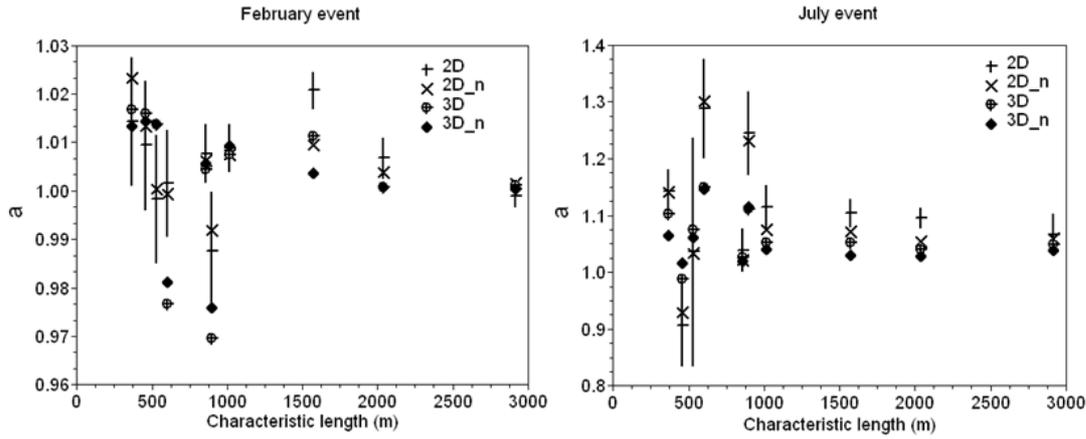


Figure 13:  $a$  vs.  $L_{da}$  for both events. The vertical bars correspond to the confidence interval for the 2D downscaling. They are representative of the other types of downscaling.

As for the values of  $b$ , they are displayed on fig. 14 as a function of  $L_{da}$  in a log-log plot. The graphs seem to exhibit a linear behaviour which means  $b$  would be related to  $L_{da}$  by a power law of coefficients  $c$  and  $d$ , defined as follow:

$$b = dL_{da}^{-c} \quad (8)$$

For both events, conduits 8 and 9, which are located in the North of the catchment where the rain rates are much lower than elsewhere, are not taken into account in the linear regression because they would significantly worsen it. For the February event the coefficients of determination of the linear regression range from 0.85 to 0.91, which means the power law relation is relevant. It means that  $Q_{0,9}$  exhibits a scaling behaviour with regards to the spatial resolution (“represented” here by  $L_{da}$ ). For the July event the coefficients of determination are lower (from 0.26 to 0.80) which implies that the 95 % confidence intervals for the intercept and the slope are broad and the values are less accurate for that event. This could be explained by the fact that, as previously mentioned, the outlet is very reactive, and moreover that the radar rainfall resolution of 1 km does not seem to be high enough. Fig. 15.a and 15.b display the values found for respectively  $c$  and  $d$ . Given the size of the 95 % confidence intervals it is hard to conclude as to the dependency of  $c$  and  $d$  with regard to the events and the type of downscaling. Nevertheless it appears that the values of  $c$  for the July event are slightly greater than for the February event. This indicates a quicker decrease of  $Q_{0,9}$  with larger areas, which reflects the local nature of convective event. Concerning  $d$ , it seems that it is slightly greater for the July event than for the February one, indicating greater uncertainty for convective than for frontal events.  $d$  seems be smaller with the spatio-temporal than for the spatial downscaling reflecting smaller (but certainly more realistic) uncertainty.

As a conclusion to this section, it appears that  $Q_{0,9}$  which quantifies the uncertainty due to the unknown small scale rainfall variability follows the double power law relation:

$$Q_{0,9} = dL_{da}^{-c} Q_{radar}^a \quad (9)$$

where  $a$  ( $\approx 1-1.1$ ) depends neither on the type of downscaling nor the event, which means it is quite robust (given the spatial resolution of the model compared to that of the rainfall). On the other hand,  $c$  and  $d$  depend on the type of downscaling and/or the event, and should therefore be calibrated using the observed rainfall data. Further investigations are required to understand how to calibrate them.

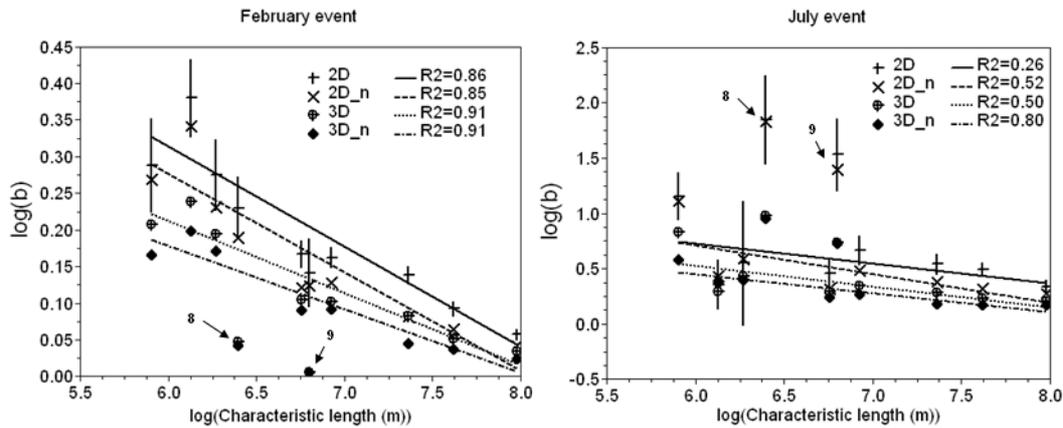


Figure 14:  $b$  vs.  $L_{da}$  in a log-log plot for both events. The vertical bars correspond to the confidence interval for the 2D downscaling. They are representative of the other types of downscaling. Conduit 8 and 9 (pointed in the graphs) are not taken into account in the linear regression.

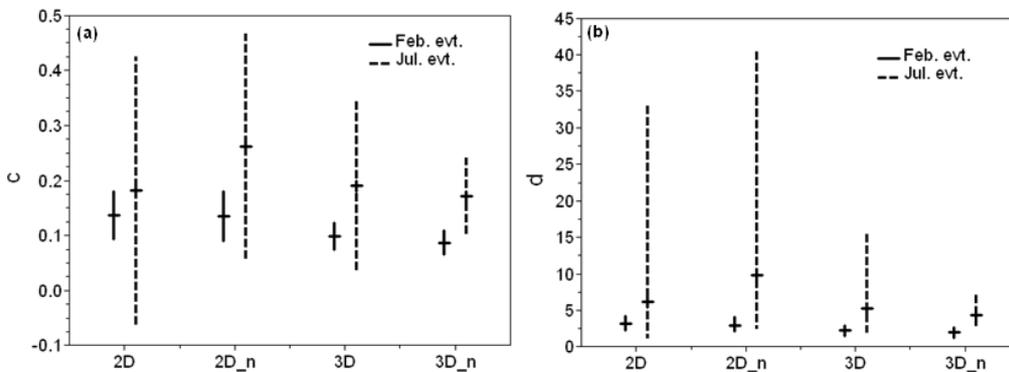


Figure 15:  $c$  (a) and  $d$  (b) with 95% confidence interval for both events and the four downscaling techniques.

## 5) Conclusion

The aim of this paper was to analyse the impact of rainfall variability on the hydrographs of sewer conduits simulated by a semi-distributed urban rainfall-runoff model. The study was performed on the 900 ha urban catchment of Cranbrook in the east of London (United-Kingdom). Two rainfall events were analysed: a convective summer one and a frontal winter one.

The first step of the study consists in comparing the hydrographs obtained by using the radar distributed rainfall field and the average rain over the whole catchment. The relative error produced on the peak flow by using the average rain rather than the radar one is significant. Indeed it ranges from -30 to 21 % for the February event and from -65 to 349 % for the July event.

A kind of ensemble prediction approach was then implemented to quantify the uncertainty due to the unmeasured small scale variability, i.e below the radar resolution. An analysis of the quantiles of the simulated peak flows showed that the uncertainty for the outlet was equal to 3% for the February event and 20% for the July event, and reached respectively 25 % and 40 % for some conduits, with the spatio-temporal downscaling. The uncertainty found with the spatial downscaling is greater but reflects the fact that the spatial downscaling tends to generate stronger rainfall extremes than the more realistic spatio-temporal

downscaling. The same features are retrieved on the whole hydrograph. An ensemble prediction approach is too time-consuming to be implemented in real time management of sewer systems. As a consequence, a quick way of estimating the flow corresponding to the 90 % quantile was developed. It was found that the latter, the flow simulated with the radar rainfall and the characteristic length of the sewer conduit (i.e. the square root of the area it drains) are related by a double power law. These results should be confirmed by other studies with a direct modelling of surface flow and a finer resolution of the rainfall-runoff model.

The results of this study show that it is strongly recommended to use radar distributed rainfall in urban hydrology. The use of X-band radar which allows measuring rainfall at a higher resolution than the standard available one of 1 km should also be generalized. This is especially true for convective events for which the limitations of 1 km resolution are clearly exhibited in this study. Moreover, the uncertainty due to the unknown small scale rainfall variability certainly cannot be neglected and should therefore be taken into account in a probabilistic way in the real time management of sewer systems.

### *Acknowledgements*

A. Gires highly acknowledges the Université Paris-Est, the Chair “Hydrology for Resilient Cities” (sponsored by Veolia) of Ecole des Ponts ParisTech and the EU FP7 SMARTesT project for their financial supports that made possible his visit to Imperial College. A. Gires also acknowledges the EWRE section of Imperial College London, Department of Civil and Environmental Engineering for partial financial support. The research was conducted as part of the Flood Risk Management Research Consortium (FRMRC2, SWP3). The authors would also like to thank the UK Met Office and the universities of Swansea and Bristol for providing the Nimrod data for the study area with which the analysis presented in this article was performed. The authors would like to acknowledge MWH Soft the provision of the software, and Thames Water Utilities Ltd for the runoff model data. N. Simões acknowledges the financial support from the Fundação para a Ciência e Tecnologia - Ministério para a Ciência, Tecnologia e Ensino Superior, Portugal [SFRH/BD/37797/2007].

### *References*

- Arnaud, P., Bouvier, C., Cisneros, L., Dominguez, R., 2002. Influence of rainfall spatial variability on flood prediction. *J. Hydrol.* 260, 216-230.
- Aronica, G., Cannarozzo, M., 2000. Studying the hydrological response of urban catchments using a semi-distributed linear non-linear model. *J. Hydrol.* 238, 35-43.
- Biaou, A., Hubert, P., Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I., Bendjoudi, H., 2003. Fractals, multifractals et prévision des précipitations. *Sud Sciences et Technologies* 10, 10-15.
- Chambers, J.M., Mallows, C.L., Stuck, B.W., 1976. A method for simulating stable random variables. *Journal of the American statistical Association* 71, 340-344.
- Deidda, R., 2000. Rainfall downscaling in a space-time multifractal framework. *Water Resour. Res.* 36, 1779-1794.

- de Lima, J.L.M.P., Singh V.P., 2002. The influence of moving rainstorms on overland flow, *Adv. Water Resour.* 25, 817-828.
- de Lima, M.I.P., Grasman, J., 1999. Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal. *J. Hydrol.* 220, 1-11
- de Montera, L., Barthes, L., Mallet, C., Gole, P., 2009. The Effect of Rain-No Rain Intermittency on the Estimation of the Universal Multifractals Model Parameters. *J. Hydromet.* 10(2), 493-506.
- Desaulnier-Soucy, N., Lovejoy, S., Schertzer, D., 2001. The continuum limit in rain and the HYDROP experiment. *J. Atm. Res.* 59-60, 163-197.
- Dodov, B., Foufoula-Georgiou, E., 2005. Incorporating the spatio-temporal distribution of rainfall and basin geomorphology into nonlinear analyses of streamflow dynamics. *Adv. Water Resour.* 28, 711-728.
- Einfalt, T., Arnbjerg-Nielsen, K., Golz, C., Jensen, N.-E., Quirmbach, M., Vaes, G., Vieux, B., 2004. Towards a roadmap for use of radar rainfall data in urban drainage. *J. Hydrol.* 299, 186-202.
- Faurès, J.-M., Goodrich, D.C., Woolhiser, D.A., Sorooshian, S., 1995. Impact of small-scale spatial rainfall variability on runoff modelling. *J. Hydrol.* 173, 309-326.
- Ferraris, L., Gabellani, S., Rebora, N., Provenzale, A., 2003. A comparison of stochastic models for spatial rainfall downscaling. *Water Resour. Res.* 39, 1368-1384.
- Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., Lovejoy, S., 2010. Influence of the zero-rainfall in the multifractal estimates of the extremes. Submitted to *Adv. Water Resour.*
- Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., Lovejoy, S., 2011. Analyses multifractales et spatio-temporelles des précipitations du modèle Méso-NH et des données radar. *Hydrol. Sci. J.* 56(3), 380-396.
- Gupta, V.K., Waymire, E., 1993. A Statistical Analysis of Mesoscale Rainfall as a Random Cascade. *J. Appl. Meteor.* 32, 251-267.
- Harris, D., Menabde, M., Seed, A., Austin, G., 1997. Factors affecting multiscaling analysis of rainfall time series. *Nonlin. Processes Geophys.* 4, 137-155.
- Harrison, D.L., Driscoll, S.J., Kitchen, M., 2000. Improving precipitation estimates from weather radar using quality control and correction techniques. *Met. Appl.* 7(2), 135-144.
- Kolmogorov, A.N., 1962. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid. Mech.* 13, 82-85.
- Lavallée, D., Lovejoy, S., Ladoy, P., 1993. Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation, in: De Cola, L., Lam, N. (Eds.), *Fractals in geography*. Prentice-Hall, New-York., pp. 171-205.

- Lhomme, J., Bouvier, C., Perrin, J.-L., 2004. Applying a GIS-based geomorphological routing model in urban catchments. *J. Hydrol.* 299, 203–216.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., 2007. Scaling and multifractal fields in the solid earth and topography. *Nonlin. Processes Geophys.* 14, 465-502.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., 2010. On the simulation of continuous in scale universal multifractals, part I: spatially continuous processes, in press *Computers and Geoscience*.
- Macor, J., Schertzer, D., Lovejoy, S., 2007. Multifractal Methods Applied to Rain Forecast Using Radar Data. *La Houille Blanche* 4, 92-98.
- Maksimović, Č., Prodanović, D., Boonya-aroonnet, S., Leitão, J. P., Djordjević, S., Allitt, R., 2009. Overland flow and pathway analysis for modelling of urban pluvial flooding. *Journal of Hydraulic Research* 47(4), 512–523.
- Mandapaka, P.V., Lewandowski, P., Eichinger, W.E., Krajewski, W.F., 2009. Multiscaling analysis of high resolution space-time lidar-rainfall. *Nonlin. Processes Geophys.* 16, 579–586.
- Marsan, D., Schertzer, D., Lovejoy, S., 1996. Causal space-time multifractal processes: Predictability and forecasting of rain fields. *J. Geophys. Res.* 101(26), 333-326.
- Menabde, M., Harris, D., Seed, A., Austin, G., Stow, D., 1997. Multi-scaling properties of rainfall and bounded random cascades. *Water Resour. Res.* 33, 2823–2830.
- Nykanen, D.K., 2008. Linkages between Orographic Forcing and the Scaling Properties of Convective Rainfall in Mountainous Regions. *J. Hydromet.* 9, 327-347.
- Nykanen, D.K., Harris, D., 2003. Orographic influences on the multiscale statistical properties of precipitation. *J. Geophys. Res.*, 108(D8), 8381-8993.
- Olsson, J., Niemczynowicz, J., 1996. Multifractal analysis of daily spatial rainfall distributions. *J. Hydrol.* 187, 29-43.
- Olsson, J., Uvo, C.B., Jinno, K., 2001. Statistical atmospheric downscaling of short-term extreme rainfall by neural networks. *Phys. Chem. Earth (B)* 26(9), 695-700.
- Over, T.M., Gupta, V.K., 1996. A space-time theory of mesoscale rainfall using random cascades. *J. Geophys. Res.* 101(D21), 26319-26331.
- Parisi, G., Frish, U., 1985. A multifractal model of intermittency, in: Ghill, M., Benzi, R., and Parisi, G. (Eds), *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics*. North Holland. p. 111-114.
- Pecknold, S., Lovejoy, S., Schertzer, D., Hooge, C., Malouin, J.F., 1993. The simulation of universal multifractals, in: Perdang, J.M., Lejeune A. (Eds), *Cellular Automata: Prospects in astrophysical applications*. World Scientific, pp 228-267.

- Radkevich, A., Lovejoy, S., Strawbridge, K., Schertzer, D., Lilley, M., 2008. Scaling turbulent atmospheric stratification, Part III: Space-time stratification of passive scalars from lidar data. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 134, 316-335.
- Rebora, N., Ferraris, L., von Hardenberg, J., Provenzale, A., 2006a. The RainFARM: Downscaling LAM predictions by a Filtered AutoRegressive Model. *J. Hydromet.* 7, 724-737.
- Rebora, N., Ferraris, L., von Hardenberg, J., Provenzale, A., 2006b. Rainfall downscaling and flood forecasting: a case study in the Mediterranean area. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 6, 611-619.
- Royer, J.F., Biaou, A., Chauvin, F., Schertzer, D., Lovejoy, S., 2008. Multifractal analysis of the evolution of simulated precipitation over France in a climate scenario. *C.R Geoscience* 340, 431-440.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., 1987a. Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling and multiplicative processes. *J. Geophys. Res.* 92(D8), 9693-9714.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., 1987b. Singularités anisotropes, divergences des moments en turbulence: invariance d'échelle généralisée et processus multiplicatifs. *Ann. Sci. Math. Que.* 11(1), 139-181.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., 1989. Nonlinear variability in geophysics multifractal analysis and simulations, in: Pietronero, L. (Ed), *Fractals Physical Origin and properties*. Plenum Press: New-York., pp. 41-82.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., Schmitt, F., Tchiguirinskaia, I., Marsan, D., 1997. Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency. *Fractals* 5(3), 427-471.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., Hubert, P., 2002. An introduction to stochastic multifractal fields, in: Ern, A. and Liu, W. (Eds), *Isfma symposium on environmental science and engineering with related mathematical problems*. High Education Press: Beijing, pp. 106-179.
- Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I., Lovejoy, S., Hubert, P., 2010. No monsters, no miracles: in nonlinear sciences hydrology is not an outlier!. *Hydrol. Sci. J.* 55(6), 965-979.
- Schertzer, D., Loveloy, S., 2011. Multifractals, generalized scale invariance and complexity in geophysics. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 21(12), 3417-3456.
- Schmitt, F., Vannitsem, S., Barbosa, A., 1998. Modeling of rainfall time series using two-state renewal processes and multifractals. *J. Geophys. Res.* 103(D18), 23181-23193.
- Schmitt, T.G., Thomas, M., Ettrich, N., 2004. Analysis and modeling of flooding in urban drainage systems. *J. Hydrol.* 298, 300-311.
- Segond, M.L., Wheeler, H.S., Onof, C., 2007. The significance of small-scale spatial rainfall variability on runoff modelin. *J. Hydrol.* 173, 309-326.

Simões, N.E., Leitão, J.P., Maksimović, Č., Sá Marques, A., Pina, R., 2010. Sensitivity Analysis of Surface Runoff Generation in Urban Floods Forecasting. *Water Science & Technology* 61(10), 2595–2601.

Singh, V.P., 1997. Effect of spatial and temporal variability in rainfall and watershed characteristics on stream flow hydrograph. *Hydrol. Process.* 11, 1649-1669.

Smith, M.B., Koren, V.I., Zhang, Z., Reeda, S.R., Panb J.J., Moredaa, F., 2004. Runoff response to spatial variability in precipitation: an analysis of observed data. *J. Hydrol.* 298, 267-286.

Tessier, Y., Lovejoy, S., Schertzer, D., 1993. Universal Multifractals: theory and observations for rain and clouds. *J. Appl. Meteor.* 32(2), 223-250.

Thames Water Utilities Ltd Engineering, 2002. Surface Water Model Of CranBrook And Seven Kings Water For London Borough Of Redbridge Appendix B, Model Development Report.

Verrier, S., de Montera, L., Barthes, L., Mallet, C., 2010. Multifractal analysis of African monsoon rain fields, taking into account the zero rain-rate problem. *J. Hydrol.* 389(1-2), 111-120.

Vieux, B.E., Bedient, P.B., 2004. Assessing urban hydrologic prediction accuracy through event reconstruction. *J. Hydrol.* 299, 217–236.

Wallingford Software, 2009. Infoworks CS Help documentation.

## **7.4. Annexe 4 : «Influence of the zero-rainfall on the assessment of the multifractal parameters» (Advances in Water Resources)**



### **Influence of the zero-rainfall on the assessment of the multifractal parameters**

A. Gires<sup>a,b,\*</sup>, I. Tchiguirinskaia<sup>a,b</sup>, D. Schertzer<sup>a,b</sup>, S. Lovejoy<sup>c</sup>

<sup>a</sup> U. Paris-Est, Ecole des Ponts ParisTech, LEESU, Marne-la-Vallée Cedex, France

<sup>b</sup> 6-8 Av Blaise Pascal, Cité Descartes, 77455 Marne-la-Vallée Cedex 2, France

<sup>c</sup> McGill U., Physics Dept., 3600 University St., H3A 2T8, Montreal, Quebec, Canada

#### **ARTICLE INFO**

Article history:  
Available online 4 April 2012

Keywords:  
Zero rainfall  
Scale invariance  
Multifractals  
Truncated fields  
Multifractal phase transition

#### **ABSTRACT**

Rainfall data contains numerous zero values, either real or spurious, especially at high resolution. This paper investigates how a truncation of a multifractal field affects the scaling analysis. Synthetic multifractal fields are used. The main result, which is theoretically expected and empirically observed, is that the truncated fields exhibit a multifractal phase transition for small moments. This implies an under-estimation of the multifractality index, and consequently of the extremes. This framework enables one to retrieve most of the features observed on radar data corresponding to a heavy rainfall event that occurred in September 2005 in the South of France. Finally a new technique is proposed to improve the estimation of characteristic multifractal parameters. It yields imperfect but encouraging results.

© 2012 Elsevier Ltd. All rights reserved.

### **1) Introduction**

Rain is extremely variable over a wide range of scales in space and time. Because of this feature the rainfall intensity is complex not only to analyze and to model, but furthermore to measure. A common way of representing such variability is to use stochastic multifractals [1-5] that basically rely on the concept of multiplicative cascades [6,7]. In the specific framework of universal multifractals (UM) that has been extensively used [1, 8-16] the scaling variability of the rainfall is quantified with the help of only three scale independent parameters.

Authors have often pointed out deviations from the UM model when the rainfall field possesses numerous zeroes (i.e. numerous time steps or spatial pixels with no rain detected). Indeed, low order statistical moments are found to reflect measurement effects, such as a threshold of detection, rather than real properties of rainfall fields [11,12]. Tessier et al. [17] also mentioned that the standard technique used to estimate UM parameters might be quite sensitive to the weak events. Some authors even suggest that the threshold effect might lead to a spurious break in the scaling behaviour [18,19]. In spite of the concerns that measurement effects may distort natural behaviour and properties of rainfall fields, these effects remain often ignored and are rarely quantified.

In reality, these deviations from the established multifractal behaviour are quite disturbing, and should therefore be addressed in depth. Although, the zero values do not influence the values of the extremes. They nevertheless influence the statistical estimates of the parameters that are used to estimate the extremes, and this can have drastic consequences. Moreover, the nature of the zeros is also usually unknown, as they can be either true zeros in a non-rainy area, or spurious ones simply related to a threshold of detection of the rainfall measurement devices. For instance, for most common tipping bucket rain gauges, three

problems are well known that strongly affect the recording of light rainfall: (a) the need to wet the surface of the funnel and the two buckets after a dry period, (b) evaporation losses due to the fact that exposed water surface is usually large in relation to its volume, and (c) the discontinuous nature of the measurement [20]. Concerning radar measurements, the relation between the measured quantity (reflectivity) and desirable quantity (rain rate) is less precise for smaller rain rates (although in a logarithmic scale). The radar rainfall data is often considered to have a limit of detection of 0.2 mm/h. This detection limit was not much improved by recent dual polarization radar, since algorithms used to estimate rain rate from vertical and horizontal reflectivity do not work for rain rates below around 1.5 mm/h [21]. It is worth mentioning that the effects of zero values becomes more evident with higher space-time resolution of available data, when zero values become much more numerous compared to lower resolutions.

For multifractals defined as the small scale limit of the multiplicative cascade processes, the difference between infinitesimally small and zero values generally remain crucial with respect to many practical applications. Therefore, in this paper we investigate the threshold effect on simulated multifractal fields, mainly in terms of their influence on the scaling behaviour and estimates of the UM parameters. No assumption on the nature of the threshold (i.e. associated with either a physical limit or a detection limit) is made. The universal multifractals framework is shortly presented in section 2, and theoretical predictions concerning the influence of truncations are made in section 3. The multifractal properties of the radar rainfall data corresponding to a heavy rainfall event that occurred in the south of France on September 5<sup>th</sup>, 2005 are discussed in section 4. This shows the relevance of studying the threshold effect. The theoretical predictions are then confirmed with the help of simulated UM fields with known properties (section 5). At last a new modified method to estimate UM parameters is suggested and tested (section 6).

## 2) Multifractal cascades and methodology

We intend to discuss the fundamental difference between the multifractal fields having a full hierarchy of scales that results in some infinitesimally small values at small scales and the truncated multifractal fields with zero values below a threshold. We will denote by  $R_\lambda$  the field under investigation (i.e., either radar rainfall data or simulated multifractal fields) at the resolution  $\lambda=L/l$ , which is defined as the ratio between the outer scale  $L$  of the studied phenomenon and the observation scale  $l$ . The simulation of multifractal fields is generally achieved by building a random multiplicative cascade. For the pedagogical purposes we will use in this paper only its discrete case: while being easier to manipulate it remains sufficient to investigate the phenomena associated with the truncation of small values.

Within a discrete multiplicative cascade, each time step (in 1D) or each pixel (in 2D) is divided into  $\lambda_0$  steps or  $\lambda_0^2$  pixels respectively. We will use the scale ratio  $\lambda_0 = 2$ , which is rather usual although not mandatory. Furthermore, we will limit the explanations to the simplest 1D case. At each step of the cascade process, the value affected to the new time step is the one of the “parent” time step multiplied by a random factor. As a consequence, after  $n$  steps (the resolution of the cascade is  $\lambda = \lambda_0^n$ ) the value of a given time step is the product of the random factors of each  $n$  previous steps of the cascade. Because multiplicative cascade processes converge under rather general conditions to Universal Multifractals (UM) [1,2,8], we use a UM cascade. In the multifractal framework, universal multifractals correspond to a broad generalization of the central limit theorem. Their two main parameters  $C_1$  and  $\alpha$  statistically characterize the mean intermittency and multifractality of a field. More precisely,

the co-dimension  $C_1$  characterizing the mean intermittency; it is the codimension of the singularity of the average field i.e.  $C_1 = d - D_1$ , where  $d$  is the embedding dimension of the field and  $D_1$  is the fractal dimension of the support of this singularity, hence  $C_1 = 0$  for a homogeneous field. The multifractality index  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ) measures how fast the intermittency varies when considering singularities slightly different from the average field singularity. A multiplicative random factor of a UM cascade is indeed fully defined by  $C_1$  and  $\alpha$  as being  $\exp\left[\left(\frac{C_1 \ln(\lambda_0)}{|\alpha - 1|}\right)^{1/\alpha} L(\alpha)\right] / \lambda_0^{C_1/\alpha - 1}$  with  $L(\alpha)$  being an extremal Lévy-stable random variable of index  $\alpha$  (i.e.  $\langle \exp(qL(\alpha)) \rangle = \exp(q^\alpha)$ ) that can be generated with the help of the procedure given by [22].

These two parameters will also be sufficient to simulate a field exhibiting a change in its scaling behaviour by changing the values of  $\alpha$  and/or  $C_1$  after a pre-determined number of cascade steps. It is important to mention that the result of discrete multiplicative cascades is a conservative field, i.e. with the fixed parameter value  $H=0$ . In the more general case of geophysical fields, the degree of non-conservation  $H$  measures the scale dependency of the average field. More details on the procedure for building multiplicative cascades, including continuous cascades and anisotropic space-time cascades, can be found in [23-25].

### 3) Expected multifractal behaviour and phase transitions

The rainfall support corresponds to the geometric set of time and/or space with a non-zero rainfall value. Let's consider the field at resolution  $\lambda$  ( $=L/l$  where  $L$  is the outer scale of the phenomenon and  $l$  the observation scale), and regular time steps (in 1D) or boxes (in 2D) of size  $l$ . The "box counting" method [26-28] is based on the idea that the number of boxes needed ( $N_\lambda$ ) to cover the rainfall support at resolution  $\lambda$  scales as :

$$N_\lambda \propto \lambda^{d-c_{\min}} \quad (1)$$

where  $c_{\min}$  is the fractal codimension of the support and  $d$  the dimension of the embedding space.

In a more general way, it is possible to analyze the probability of exceeding not only zero but a scale-dependant threshold ( $\lambda^\gamma$ ) defined with the help of the scale invariant notion of singularity ( $\gamma$ ). If the field is multifractal, then these probabilities scale with the resolution [2] as:

$$\Pr(R_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad (2)$$

this defines the statistical codimension function  $c(\gamma)$ . This function is necessarily increasing and convex. When  $c(\gamma) < d$ ,  $c(\gamma)$  can be interpreted as the fractal co-dimension of the support of the field where it exceeds  $\lambda^\gamma$  [2]. It can be shown [1] that this is equivalent to the scaling of statistical moments of arbitrary  $q^{\text{th}}$  power:

$$\langle R_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad (3)$$

which defines the scaling moment function  $K(q)$ . This function is convex. The functions  $K(q)$  and  $c(\gamma)$  are linked by the Legendre transform generalizing the relation found for geometric multifractals [29].

Let's consider a truncation of a multifractal field at a given resolution  $\Lambda$  with a threshold  $T = \Lambda^{\gamma_{\min}}$  (where  $\gamma_{\min}$  is the singularity associated with the threshold). All the values below  $T$  are artificially set to zero which corresponds to setting singularities  $\gamma \leq \gamma_{\min}$  to  $-\infty$ . The codimension function becomes bounded by a minimum value  $c_{\min} > 0$ , defined by

$c(\gamma_{\min}) = c_{\min}$ , at least at the resolution  $\Lambda$ . In the framework of universal multifractals [1,2,8], the codimension function  $c(\gamma)$  is given by:

$$c(\gamma) = \frac{C_1}{\alpha-1} \left( \frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha'} \quad (4)$$

( $C_1$  and  $\alpha$  are defined in the previous section and  $\alpha'$  satisfies  $1/\alpha' + 1/\alpha = 1$ ) while the scaling moment function  $K(q)$  corresponds to:

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha-1} (q^\alpha - q) \quad (5)$$

Eq. (4) yields:

$$\gamma_{\min} = \frac{C_1 \alpha}{\alpha-1} \left( \frac{c_{\min}}{C_1} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - \frac{C_1}{\alpha-1} \quad (6)$$

Because of the Legendre transform, there is a corresponding critical order of statistical moments:

$$q_{\min} = c'(\gamma_{\min}) = \left( \frac{c_{\min}}{C_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (6b)$$

below which the scaling moment function  $K(q)$  is linear:

$$K(q) = q\gamma_{\min} - c_{\min} \quad (7)$$

As a consequence a linear regression of  $K(q)$  for small  $q$  yields estimates of  $\gamma_{\min}$  and  $c_{\min}$ . As pointed out by a few authors [12,30,31], this behaviour of truncated multifractal fields is typical of a multifractal phase transition [8,32]. More precisely, it corresponds to a second order multifractal phase transition and is analogous to that of the probable maximum order of singularity due to finite sample size [14,33-35]. Indeed with a limited number of samples, the singularities greater than  $\gamma_s$  (maximum observable singularity) will not be observed and the statistical moments for  $q$  greater than  $q_s$  (the corresponding maximum observable moment) will not be reliable. More quantitatively this ‘‘sampling effect’’ yields to  $c(\gamma) = +\infty$  for  $\gamma > \gamma_s$ , with  $c(\gamma_s) = d + d_s$  ( $d_s$  is the sample dimension,  $\Lambda^{d_s}$  being equal to the number of samples). As a consequence, for  $q > q_s = c'(\gamma_s)$ :

$$K(q) = q\gamma_s - c(\gamma_s) \quad (7b)$$

The linearity of  $K(q)$  for small and large moments has a striking consequence for the Double Trace Moment (DTM) technique that is used to estimate the parameters  $C_1$  and  $\alpha$  [36]. This technique is based on the fact that for multifractal fields, the scaling moment function  $K(q, \eta)$  of the field  $R_\lambda^{(\eta)}$ , obtained by upscaling the  $\eta^{\text{th}}$  power of the maximum resolution field,

$$\left\langle \left( R_\lambda^{(\eta)} \right)^q \right\rangle \approx \mathcal{L}^{K(q, \eta)} \quad (8)$$

is related in a simple manner to  $K(q, l) = K(q)$ :

$$K(q, \eta) = K(\eta q) - qK(\eta) \quad (8a)$$

which yields for universal multifractals (eq. 5):

$$K(q, \eta) = \eta^\alpha K(q) \quad (8b)$$

Therefore the multifractality index  $\alpha$  corresponds to the slope so-called DTM curve, which is the log-log plot of  $K(q, \eta)$  vs.  $\eta$  for fixed  $q$ . With the help of Eq. (8a), the linear expressions of  $K(q)$  in Eqs. (7-7b) yield the respective values of the two plateaus of  $K(q, \eta)$  for small  $\eta$  ( $\eta \leq \eta_-(q)$ ) and large  $\eta$  ( $\eta \geq \eta_+(q)$ ):

$$- K(q, \eta) = (q-1)c_{\min}, \text{ for } \eta \leq \eta_-(q) = (c_{\min} / C_1)^{1/\alpha} \quad (8c)$$

$$- K(q, \eta) = (q-1)(d + d_s), \text{ for } \eta \geq \eta_+(q) = ((d + d_s) / C_1)^{1/\alpha} \quad (8d)$$

Thus the greater the fractal co-dimension of the rainfall support  $c_{\min}$ , the greater the plateau of  $K(q, \eta)$  corresponding to small  $\eta$  ( $\eta \leq \eta_-(q)$ ), and the narrower the range of available  $\eta$  ( $\eta_-(q) \leq \eta \leq \eta_+(q)$ ) over which it is legitimate to estimate  $\alpha$  (linear portion of the DTM curve). As a consequence, these two plateaus can lead to large underestimation of  $\alpha$ , especially given that they are associated with transitory curvatures narrowing furthermore the range of available  $\eta$ .

We now have a theoretical framework for directly analyzing the effects on the multifractal analysis of fields truncated at a given resolution  $\Lambda$ , as it is the case with rainfall. The only limitations are with respect to resolutions  $\lambda < \Lambda$  due to the fact that the corresponding fields are obtained by aggregation of the initial field at resolution  $\Lambda$ , hence having singularities  $-\infty \leq \gamma < \gamma_{\min}$ . Numerical simulations are therefore helpful to check that these singularities are statistically irrelevant.

#### 4) Multifractal analysis of rainfall fields

To perform simulations of multifractal fields we first need to determine an appropriate range of multifractal parameters that would allow a comparison of the simulated fields with real rainfall fields. The rainfall data analyzed in this paper corresponds to a heavy rainfall event that occurred in the south-east of France on September 5<sup>th</sup>, 2005, over an area well-known for frequent occurrences of heavy flash floods. The size of the area studied is 512 x 512 km<sup>2</sup>. Sixteen hours of the event are analyzed. The data were obtained as radar mosaics from Météo-France [37]; i.e. composite maps of the reflectivities obtained – in regions of overlapping radar ranges - by interpolation. As suggested by Meteo-France, the rain rate ( $R$ ) is estimated from the reflectivity ( $Z$ ) with the help of the classical Marshall–Palmer relation  $Z = aR^b$  [38], with  $a = 200$  and  $b = 1.6$  (for  $Z$  in mm<sup>6</sup>.m<sup>-3</sup> and  $R$  in mm.h<sup>-1</sup>). The spatial resolution of the data is 1 km in space and the temporal sampling resolution is 15 minutes (much larger than the temporal measurement resolution of the radar which is of the order of  $\mu$ s). A more precise description of the data can be found in [31]. Fig. 1 displays the total rainfall depth during the analyzed event. Spatial 2D analysis was performed on average on the whole event (i.e. each time step is seen as a realization of the same phenomenon and the average in Eq. (3) and (8) is performed on the 64 samples).

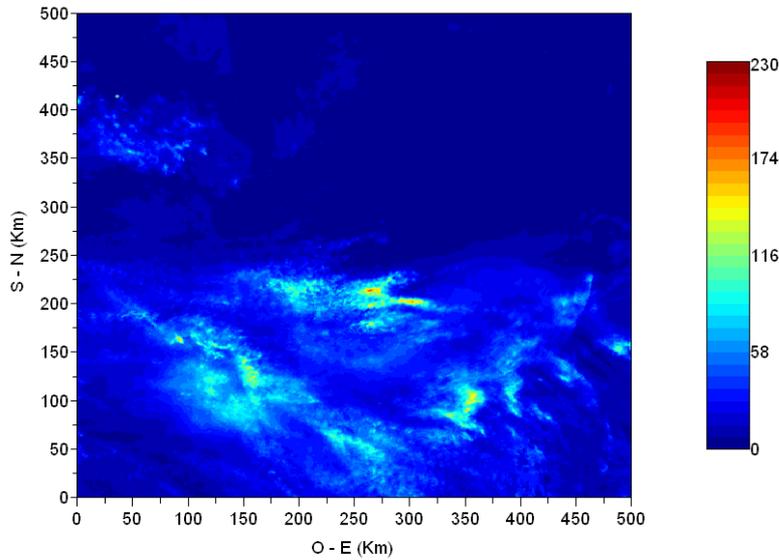


Figure 1: Total rainfall depth (mm) during the analysed event. The coordinates (in °, Réseau géodésique français 1993 system) of the four corners are 46.3-1.3, 41.5-1.3, 46.2-8.1 et 41.4-7.5.

The degree of non-conservation  $H$  is estimated with the help of a spectral analysis. Indeed for fields exhibiting a scaling behaviour, the spectra possess a constant spectral slope over a large range of frequencies ( $E(f) \propto f^{-\beta}$ ).  $H$  and  $\beta$  are linked by the relation  $\beta = 1 + 2H - K(2)$  [17,39], which allows evaluating  $H$ .

The main results of the multifractal analysis of the radar data are shown on Fig. 2. It appears that there is not a unique scaling behaviour over the whole range of studied scales, and a break occurs at around 20 km (Fig. 2(a)). Such breaks are commonly reported [12,17,40]. Therefore, in the following small scale (1-20 km) and large scale (20-500 km) regimes have been distinguished. For instance,  $\alpha$  is greater and  $C_1$  smaller for small scale than for large scale (Fig 2(c)). The aim of this paper is not to analyze the cause behind this break, but only to focus on the role of the zeroes. It is important to note that the estimates of  $c_{\min}$  found using either the linear behaviour of  $K(q)$  near zero (Fig. 2(b)), or box counting (Fig. 2(d)) are in excellent agreement.

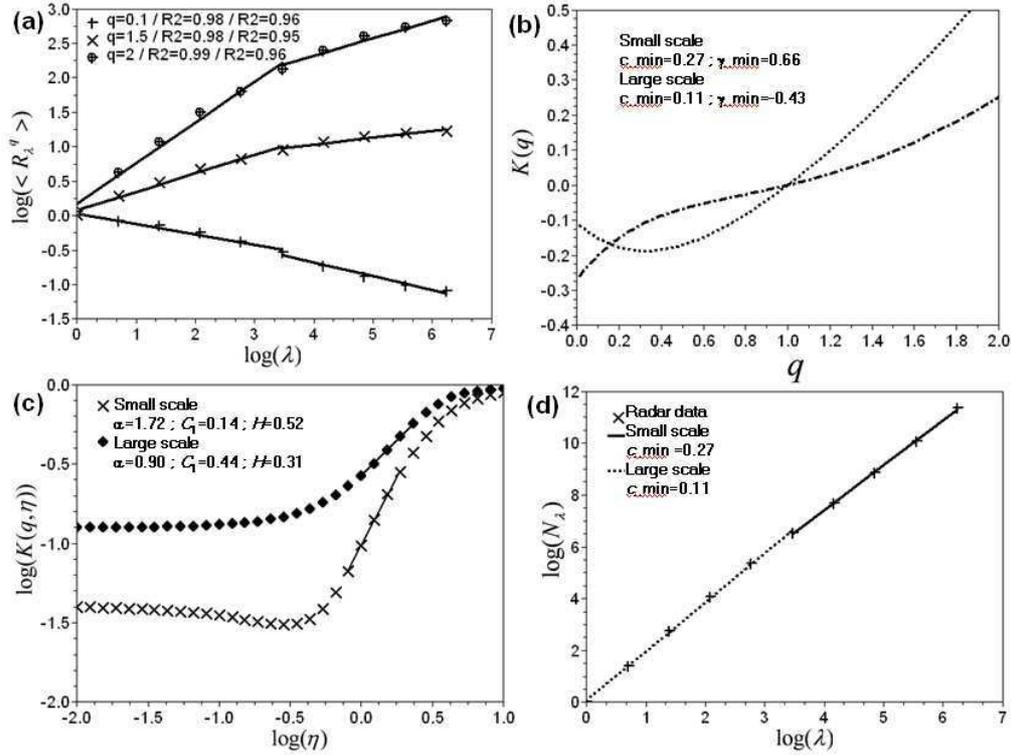


Figure 2: Multifractal analysis of the radar data. (a) Scaling curve, i.e. Eq. (3) in a log-log plot. Large and small scales correspond respectively to the left and right part of the graph. (b) Scaling moment function  $K(q)$  for  $0 \leq q \leq 1$  (c) DTM curve. (d) Illustration of the box counting method (Eq. (1)).

We should start from the question of relations between the zeros of an observed data set and the main properties of UM. Let us first emphasize that with  $\alpha > 1$ , UM fields contain already extremely small values (especially for large resolutions  $\lambda$ 's), which become much more numerous and smaller with  $\alpha < 1$ . These small values can be often considered as zero values, at least numerically. In the literature there are mainly two models to introduce extra zeros if needed within a simulated UM field  $M$  with  $\alpha \neq 0$ : (i) thresholding  $M$  [18,19,41], (ii) multiplying  $M$  in various contexts [42,43] by an independent field  $S$  supported by a fractal set, such as the  $\beta$ -model which is a UM field with  $\alpha = 0$  and therefore with a unique remaining parameter  $c = C_1 < 2$ , the fractal co-dimension of the support. Because the dimension of the support is  $2 - c < 2$ , its area is zero for an infinite resolution and converges to this value for larger and larger resolutions. In the following, both models are tested with the help of numerical simulations consisting of 64 fields of size 512x512 pixels, with different sets of the UM parameters and fractal co-dimension  $c$ .

The first step to test the  $\beta$ -model hypothesis (i.e. to fit such a model) consists in retrieving the parameters of the underlying UM field [43]. In that context the rainrate field is assumed to be the product of a UM field ( $M$ ) and a fully independent support ( $S$ ):  $R = MS$ . Under the hypothesis of statistical independence of  $R$  and  $S$ , the scaling moment function of the rainfall  $R = MS$  is equal to the sum of the scaling moment functions of  $M$   $K_M(q)$  (given by Eq. (5)) and  $S$   $K_S(q) = c(q-1)$ , i.e.  $K_R(q) = K_M(q) + K_S(q)$ . Eq. (8) then yields:

$$K_R(q, \eta) = \eta^\alpha K(q) + c(q-1) \quad (9)$$

where  $c$  is the fractal co-dimension of the rainfall support. Once it has been estimated with the help of the box counting technique (Eq. (1)), the contribution  $c(q-1)$  can be removed from the

observed  $K_R(q, \eta)$  before estimating the UM parameters. Applying this method on the radar data, we found  $\alpha=1.09$  and  $C_1=0.34$  for the large scales. Concerning the small scales, it appears that the correction creates a sharp decrease on the linear part of the DTM-curve indicating an  $\alpha$  value higher than its theoretical maximum of 2, and  $C_1$  value biased low. This is the first indication that the  $\beta$ -model does not fit the radar data.  $\alpha$  and  $C_1$  are therefore fixed to respectively 2 and 0.1 for small scale. Then 64 fields of size 512x512 are simulated with these estimated parameters for the underlying UM field. With the DTM technique applied to these simulated fields the designed UM parameters are well retrieved (we find  $\alpha=1.99$  and  $C_1=0.09$  for small scales and  $\alpha=1.09$  and  $C_1=0.34$  for large scales).

Concerning the  $c$  parameter of the  $\beta$ -model, two sets of values were tested. The first set has  $c=0.27$  for small scales and  $c=0.11$  for large scales (this option is called  $\beta$ -model 1 in the following), which corresponds to the estimated box counting dimensions for the radar data. This leads to 69% of zeros, which is similar to the 68% of the radar data. It is important to note here the same range of scales was used for the simulated fields as for the observed ones, indeed in the very small scale limit the percentage of zero would tend toward 0. Fig. 3 displays the resulting DTM curves. They are quite different from those of the radar rainfall, and lead to  $\alpha=1.08$  and  $C_1=0.29$  for small scales and  $\alpha=0.94$  and  $C_1=0.42$  for large scales. The discrepancies for small scales indicate that this  $\beta$ -model does not fit the data. It should be mentioned that the implementation of the correction suggested by Eq. (9) enables one to retrieve the correct UM parameters. To improve the fit of the DTM curves, a second set with  $c=0.05$  for both small and large scales (this option is called  $\beta$ -model 2 in the following) was tested. It leads to 28% of zeros. The DTM curves (Fig. 3) are closer to the observed ones and lead to more realistic UM parameter estimates (i.e.  $\alpha=1.37$  and  $C_1=0.17$  for small scales and  $\alpha=0.85$  and  $C_1=0.48$  for large scales). However the co-dimension of the rainfall support and the percentage of zeros do not fit the rainfall data. Hence it appears that the two  $\beta$ -models tested do not fit the rainfall data set, especially for small scales where the underestimation of  $\alpha$  and overestimation of  $C_1$  generated by different values of  $c$  is unrealistic.

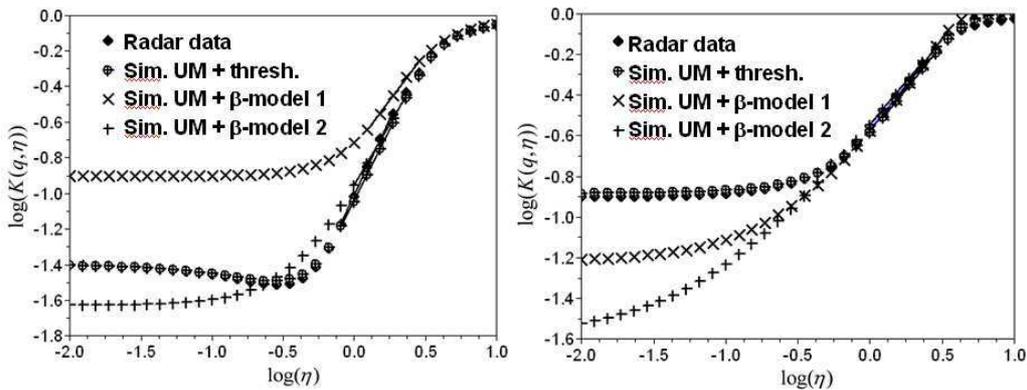


Figure 3: DTM curves for the observed radar data, for a simulated UM field multiplied by the  $\beta$ -model 1 or the  $\beta$ -model 2 (which correspond to two  $\beta$ -models with different values of codimensions of the non-zero support), and a thresholded UM field. Small scales are on the left and large scales are on the right.

The other model for introducing zeros in a UM field, consists in thresholding it. To test it we simulated a multifractal field with the UM parameters estimated on the radar data. A threshold of 0.25 is then implemented on the normalized field (with regards to the studied rainfall field, it would corresponds to a threshold of 0.06 mm/hr which is quite close from the

actual non-zero minimum value of 0.075mm/hr) which yields 69% of zeros. The co-dimension of the support is then 0.18 for small scale and 0.20 for large scale. The DTM curves are displayed on Fig. 3. The patterns of these curves are very similar to the ones of the radar data. Indeed for both truncated simulated and observed fields the curve is constant for small and great  $\eta$ , and moreover there is the same slight decrease for  $-1 \leq \eta \leq -0.5$ . The UM parameter estimates (i.e. we find  $\alpha=1.60$  and  $C_1=0.13$  for small scales and  $\alpha=0.87$  and  $C_1=0.43$  for large scale) are rather similar to the one used for the simulation. This shows that the truncated simulated UM field enables to retrieve the properties of the observed radar data, and that for this specific data set the UM parameter estimates are not significantly affected by the threshold. It should be mentioned here that the potential effect of  $H$  (equal to zero the simulated field, and to 0.3 and 0.5 respectively for small and large scale for radar data) is not investigated in this paper.

As a conclusion of this section, it appears that the model consisting of a thresholding of the multifractal field almost perfectly mimics the observed behaviour, whereas the hypothesis of independent support generated with the help of a  $\beta$ -model does not work. This fact certainly does not answer to whether the threshold corresponds to a limit of detection of the rainfall measurement device (the zero values would then be spurious) or is associated to a threshold in the physical process (the zero value would then be real). Nevertheless it shows that the zeros of the rainfall are certainly not independent from the rest of the rainfall field and hence justifies the idea that the underlying multifractal process is indeed affected by some threshold. Therefore, it seems relevant to investigate how such threshold affects the multifractal analysis.

## 5) Simulated multifractal fields

In this section the theoretical predictions (see section 3) are tested with the help of simulated multifractal fields. For a given pair of UM parameters  $\alpha$  and  $C_1$ , 1000 simulations of 4096 ( $=2^{12}$ ) time steps are performed, and are then considered as independent samples of the same phenomenon. The above figures could be understood as 40 year records of 5 minute data that was sub-divided into separate samples in order to evaluate the scaling behaviour from 5 minutes to two weeks. The 1000 samples were ensemble averaged and normalized to unity, which allows keeping the variability among the samples. Then the truncated multifractal fields were obtained by implementing a threshold on the fields at their maximum resolution, the field was normalized again as usually done with observed rainfall data. However the mean is generally decreased by only around 1% even with the greatest thresholds that were implemented. Finally it should be mentioned that the analysis is performed on the dressed fields, i.e. the fields aggregated to a lower resolution.

### 5.1) Unique scaling regime with $\alpha > 1$

Based on the results of the multifractal analysis obtained from the rainfall data over the large scales, we first discuss the case of simulated multifractal fields with  $\alpha=1.8$  and  $C_1=0.5$  over the full range of scales, i.e. displaying a unique scaling regime. Five different thresholds were used on the normalized fields:  $0-10^{-5}-10^{-3}-10^{-2}-10^{-1}$ , corresponding respectively to percentages of zeros equal to 0-5.4-27-51-76% in the generated field. The main curves showing the effect of the zeroes are in Fig. 4. As suggested by [9] the smallest and largest scale are not included in the linear regression used to estimate  $K(q)$  because they often deviate from the scaling behaviour. As seen in Fig. 4(a) and (b) that display Eq. (3) in a log-log plot, the scaling behaviour is excellent (determination coefficients  $-R^2-$  are greater

than 0.998) on the actual field. On the truncated one, there is no change for  $q > 1$  whereas the scaling is worse for small  $q$  ( $R^2=0.95$  for  $q=0.1$ ). This phenomenon is expected since large order moments focus on extremes which are not affected by the thresholds, whereas small order moments focus on the small values. The curvature on the scaling curve for small  $q$  (especially visible for  $q=0.1$ ) means that small scales are more affected by the threshold than large scales. At resolution  $\Lambda$ , this is a direct consequence of the truncation of the singularities, for lower resolution this is more indirect due to the upscaling process that tends to remove zero-values as the resolution decreases. This is related to the fact that the threshold is implemented at a given resolution which breaks the scaling.

For large moment orders  $q$ , the scaling moment function,  $K(q)$ , it is not affected by the thresholds (Fig. 4(c)), as argued above. For small orders, the expected multifractal phase transition occurs, and the linearity of  $K(q)$  enables us to retrieve the intercept ( $-c_{\min}$ , the fractal codimension) and the slope ( $\gamma_{\min}$ , the minimum observable singularity). As expected  $c_{\min}$  and  $\gamma_{\min}$  increase with the threshold. It is possible to evaluate these parameters with the help of another method:  $c_{\min}$  is obtained by functional box counting (Eq. (1)), and then  $\gamma_{\min}$  is estimated with Eq. (6) (using the parameter values  $\alpha$  and  $C_1$  of the simulation). The results are displayed on Fig. 4(f). Despite the poor scaling for small  $q$ ,  $c_{\min}$  and  $\gamma_{\min}$  obtained by both methods are respectively in excellent and good agreement, which confirms the existence of the multifractal phase transition as described in the previous section. Nevertheless the observed  $\gamma_{\min}$  are larger than the expected one with the formula  $T = \Lambda^{\gamma_{\min}}$ , where  $T$  is the threshold. This is likely to be due to perturbations arising in the dressing process, and the fact that the threshold alters the quality of the scaling for small moments. It should be mentioned that the estimated spectral slope does not change when the field is truncated. This is not surprising since the power spectrum is equivalent to a moment of order 2, which as previously said is not affected if  $\gamma_{\min}$  is low enough. More precisely it can theoretically be expected that statistical moments of order  $q > q_{\min}$  should not be too affected, with  $q_{\min} = c'(\gamma_{\min})$ , but empirically we observe an effect for higher orders.

On the DTM curve (Fig. 4(e)), the correct  $\alpha$  and  $C_1$  (respectively 1.79 and 0.47) are found when there is no threshold. As expected the curve levels off for large  $\eta$  values. The increase of the minimum value of  $K(q, \eta)$  (which is in agreement with the expected value of  $(q-1)c_{\min}$ ) with the threshold, narrows the range of available  $\eta$  to evaluate  $\alpha$  (the linear portion of the curve), whose estimations strongly decreases (1.33 for the greatest threshold). On the contrary, the estimates of  $C_1$  are not significantly affected.

The same analysis performed on fields with  $\alpha=1.8, 1.5$  or  $1.2$  and  $C_1=0.5$  or  $0.2$  yield similar results as long as  $\gamma_{\min}$  is not too close from  $C_1$  ( $C_1 - \gamma_{\min} \leq 0.2$  for instance). In these cases it means that too much significant portion of the field has been removed by the truncation. In these cases, even greater moments are affected.

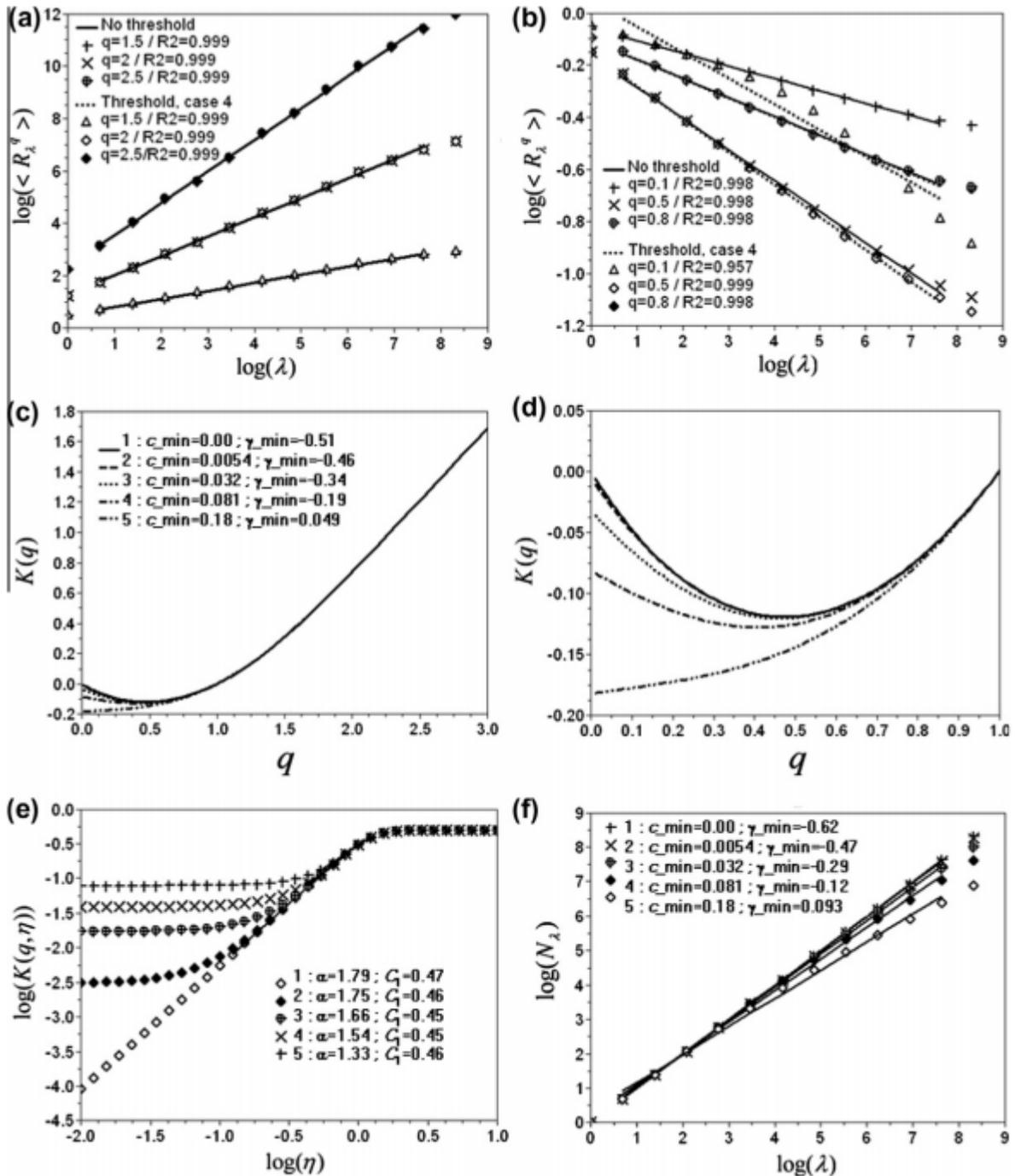


Figure 4: Effects of the truncation (cases 1 to 5 are tested, corresponding respectively to thresholds of 0,  $10^{-5}$ , 0.001, 0.01 and 0.1) on a simulated field with  $\alpha=1.8$  and  $C_1=0.5$ . (a) Scaling curve, i.e. Eq. (3) in a log-log plot for  $q>1$ . (b) Same as in (a) for  $q<1$ . (c) Scaling moment function  $K(q)$  for  $0 \leq q \leq 3$  (d) Scaling moment function  $K(q)$  for  $0 \leq q \leq 1$  (e) DTM curve. (f) Illustration of the box counting method (Eq. (1)), the determination coefficients of the curves are all above 0.995.

## 5.2) Unique scaling regime with $\alpha < 1$

The same expected behaviour is observed on simulations with  $\alpha < 1$ . Nevertheless there are few differences which are illustrated on Fig. 5. It displays the main curves showing the effect of a threshold for the simulated fields with  $\alpha=0.5$  and  $C_1=0.2$ . Five different thresholds

are used  $10^{-80}$ - $10^{-10}$ - $10^{-5}$ - $10^{-3}$ - $10^{-1}$ , corresponding respectively to percentages of zeros equal to 19-47-59-67-79% in the generated field. It is important to note that as  $\alpha$  and  $C_1$  decrease,  $\eta_+(q) = ((d + d_s)/C_1)^{1/\alpha}$  increases. As a consequence the DTM curve starts to level off for larger  $\eta$ , which widens the range of available  $\eta$  to evaluate  $\alpha$ . Thus the estimates of  $\alpha$  are less affected by the zeroes. This effect is visible on Fig. 5(c). It should also be mentioned that few difficulties arise for small thresholds when estimating  $\gamma_{\min}$  from  $K(q)$ . Indeed the linearity of  $K(q)$  is not very good for  $q$  around 0 (Fig. 5(b)). This is likely to be due to the fact that for  $\alpha < 1$  theoretically  $K'(0) = -\infty$ , which is hard to deviate from. As for the case  $\alpha > 1$ , if  $\gamma_{\min}$  is too close to  $C_1$ , then even large moments (i.e.  $q > 1.5$ ) are affected. This is illustrated by the case with the largest threshold (case number 5) on Fig. 5(a), where  $\gamma_{\min} = 0.19$  and  $C_1 = 0.2$ , and  $K(q)$  differs from its theoretical value for  $q > 1.5$ . Similar results are found for fields simulated with  $\alpha = 0.5$  and  $C_1 = 0.5$ .

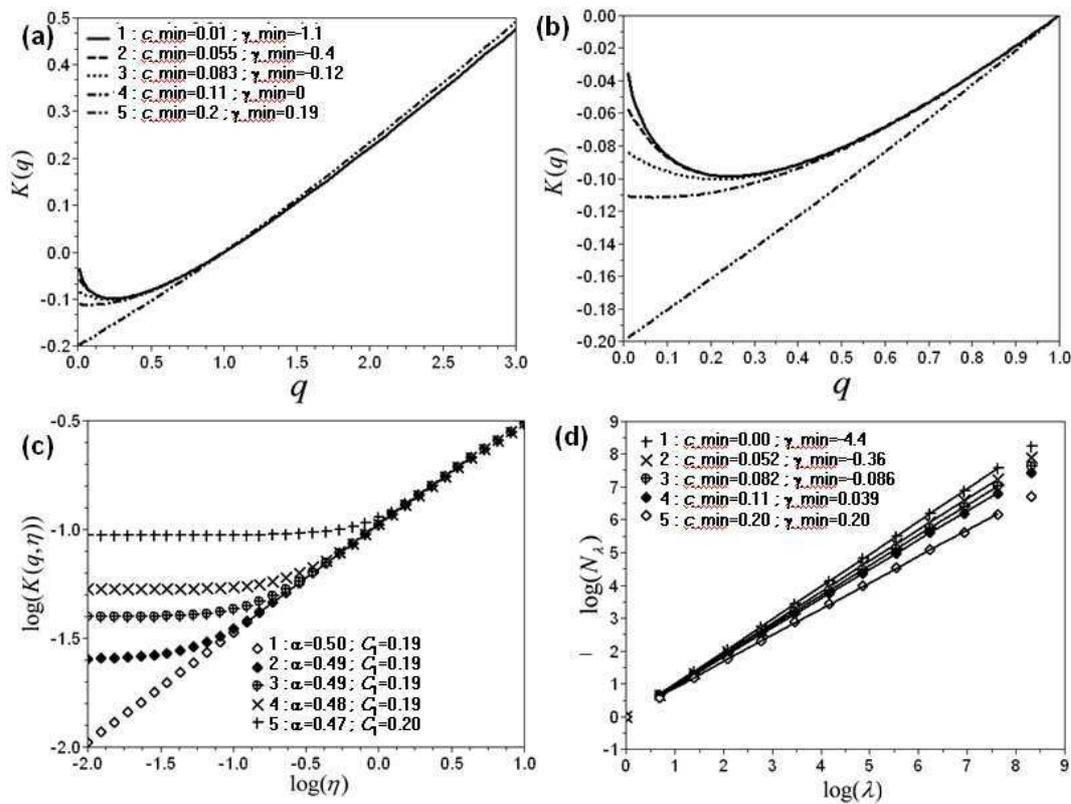


Figure 5: Effects of the truncation (cases 1 to 5 are tested, corresponding respectively to thresholds of  $10^{-80}$ ,  $10^{-10}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-3}$  and  $10^{-1}$ ) on a simulated field with  $\alpha = 0.5$  and  $C_1 = 0.2$ . (a) Scaling moment function  $K(q)$  for  $0 \leq q \leq 3$  (b) Scaling moment function  $K(q)$  for  $0 \leq q \leq 1$  (c) DTM curve. (d) Illustration of the box counting method (Eq. (1)), the determination coefficients of the curves are all above 0.995.

### 5.3) Results with a scaling break

It appears that the rainfall data exhibits a scaling break (see section 4). This section aims at discussing some of the features of a truncated multifractal field simulated with a scaling break. The scaling break is introduced first by a change of the mean co-dimension only, and then of the multifractality parameter as well. In the first case, the same  $\alpha$  ( $=1.7$ ) was chosen on the whole range of scales, whereas  $C_1 = 0.1$  for small scales and  $C_1 = 0.4$  for large

scales. The break is observed on the scaling curve (Fig. 6(a)) and the original UM parameters are retrieved with the DTM technique for both range of scale (Fig 6(c)). When the field is truncated, the estimates of  $c_{\min}$  found with the help of the linear behaviour of  $K(q)$  near zero (Fig. 6(b)), and box counting (Fig. 6(d)) are in excellent agreement, whereas the agreement (unlike in the case of the fields with no breaks) between  $\gamma_{\min}$  is not very good.  $C_1$  remains unaffected by the threshold. It is striking to note that simply by putting a threshold, significant differences are found in the estimates of  $\alpha$  for small ( $\alpha=1.65$ ) and large ( $\alpha=1.17$ ) scale, whereas they are equal on the original field. This is due to the fact that as pointed out in the previous section, for a given  $\alpha$ , the estimates of UM exponents of fields with greater  $C_1$  are more affected by a threshold. It should be noted that for small scale, despite the fact that  $\gamma_{\min}$  ( $=0.24$  by estimating it with the help of the linear regression on  $K(q)$  for small  $q$ ) is quite superior to  $C_1$  ( $=0.082$ ) (although it should be qualified by the fact that with the box counting dimension and Eq. (6) one find  $\gamma_{\min} = 0.11$ ), the estimates of  $\alpha$  remains valid (equal to 1.65 instead of 1.70). This quite surprising feature is due to the fact that the determination curve of  $\alpha$  slightly decreases for  $-1 \leq \eta \leq -0.5$ , which extends the range of available  $\eta$  to estimate  $\alpha$ . This is likely to come from the fact that some singularities that were removed at the maximum resolution were reintroduced by the up-scaling process.

Then tests with  $\alpha$  and  $C_1$ , both being different according to the range of scales, are performed. Simulated fields with  $\alpha=1.8$  and  $C_1=0.1$  for small scale and  $\alpha=1.1$  and  $C_1=0.4$  for large scale are used. The results are displayed on Fig. 7. The comments of the previous paragraph made on the field with the same  $\alpha$  for both range of scales concerning the observation of the break (Fig. 7(a)),  $c_{\min}$  and  $\gamma_{\min}$  (Fig. 7(b) and 7(d)) remain valid. The estimates of  $\alpha$  for both ranges of scales are affected (1.67 for small scales, and 0.93 for small scale). As previously mentioned in section 4, the pattern of the DTM curve (Fig. 7(c)) is very similar to the one of rainfall radar (Fig. 2(c)).

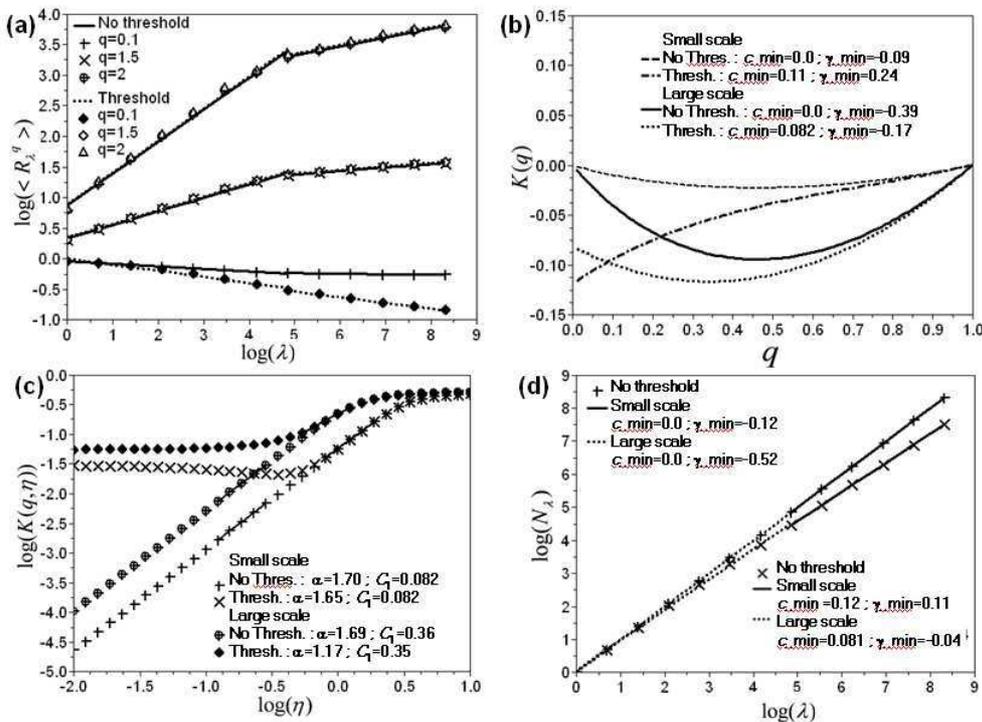


Figure 6: Same as is Fig. 2 but for a simulated field with  $\alpha=1.7$  and  $C_1=0.1$  for small scale and  $\alpha=1.7$  and  $C_1=0.4$  for large scale.

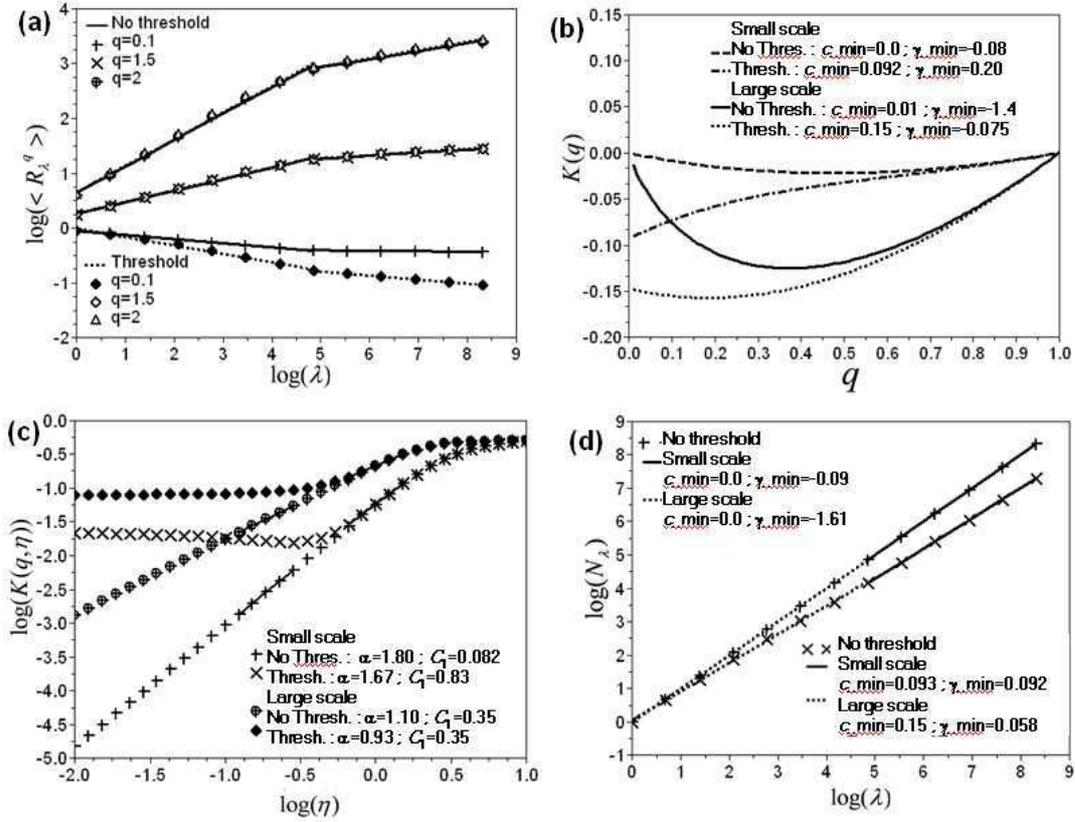


Figure 7: Same as is Fig. 2 but for a simulated field with  $\alpha=1.8$  and  $C_1=0.1$  for small scale and  $\alpha=1.1$  and  $C_1=0.4$  for large scale.

## 6) Correction of the bias introduced by the zeroes

### 6.1) Correction of the field

In the previous sections, the influence of the threshold effect on multifractal analysis was underlined. This section aims at presenting a technique to thwart this effect (i.e. that enables to retrieve the actual UM exponents), that provides encouraging results while exhibiting some limitations. The actual field (without truncation) is denoted by  $R_\lambda$  and  $R_\lambda^{(m)}$  is the measured field (with truncation). Both fields are normalized, i.e.:  $\langle R_\lambda \rangle = \langle R_\lambda^{(m)} \rangle = 1$ . Before going on, it should be reminded that the definition of the codimension functions (Eq. (2)) leads to:

$$\langle R_\lambda \rangle \propto \int_{-\infty}^{+\infty} c'(\gamma) \lambda^{\gamma-c(\gamma)} d\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma, \alpha, C_1, \lambda) d\gamma \quad (10)$$

As pointed out in the previous section the measured field does not take into account the singularities smaller than  $\gamma_{\min}$ . We therefore suggest modifying the measured field at the highest resolution ( $\Lambda$ ) to give an estimate of the actual field by renormalizing it and adding a random contribution to represent the truncated singularities. Given the three parameters  $\alpha$ ,  $C_1$  and  $\gamma_{\min}$  the measured field is corrected as follows:

$$\hat{R}_\Lambda = R_\Lambda^{(m)} \frac{\int_{\gamma_{\min}}^{+\infty} f(\gamma, \alpha, C_1, \Lambda) d\gamma}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma, \alpha, C_1, \Lambda) d\gamma} + S_\Lambda^{\gamma < \gamma_{\min}}(\alpha, C_1) \frac{\int_{-\infty}^{\gamma_{\min}} f(\gamma, \alpha, C_1, \Lambda) d\gamma}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma, \alpha, C_1, \Lambda) d\gamma} \quad (11)$$

Where  $\hat{R}_\Lambda$  is an estimate of  $R_\lambda$ .  $S_\Lambda^{\gamma < \gamma_{\min}}$  mimics the variability generated by the truncated singularities. To obtain this truncated field, an independent UM multifractal field with parameters  $\alpha$  and  $C_1$  is simulated. Then at the highest resolution, the pixels whose singularity is greater than  $\gamma_{\min}$  (i.e. the value is greater to  $\Lambda^{\gamma_{\min}}$ ) are set to zero. Finally the field is normalized to one (i.e.  $\langle S_\Lambda^{\gamma < \gamma_{\min}} \rangle = 1$ ). The weight factors with the integrals were chosen to ensure the normalization to unity of the estimate of the actual field  $\hat{R}_\Lambda^{(a)}$ . Fig. 8 illustrates Eq. (11).

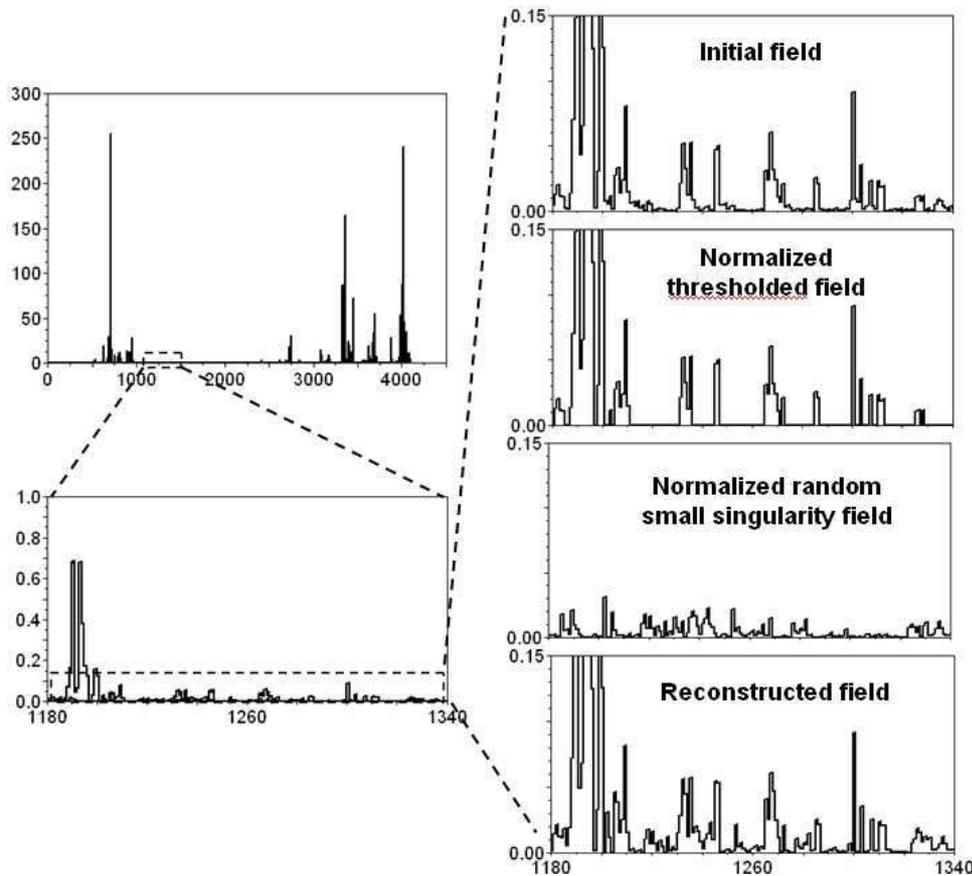


Figure 8: Illustration of Eq. (11) for a sample with the UM parameters  $\alpha=1.8$ ,  $C_1=0.5$ , and a threshold of 0.01. The graphics labelled “normalized thresholded field” and “normalized random small singularity field” correspond respectively to the first and second term of the right part of Eq. (11). The “reconstructed field” is the sum of the latter two. On the left part of the figure, all the fields which are shown in separate graphs on the right part of the figure are superposed, and the vertical scale does not enable to highlight any visible differences.

In order to evaluate the UM exponents of a measured field a first guess estimate is obtained by implementing the standard DTM technique. Then a DTM analysis is performed on the field corrected according to Eq. (11) with the help of the parameters of the first parameters guess, and so on. The iterations are stopped when the difference between two successive estimates of  $\alpha$  is below 0.01. Since the algorithm does not always converge, it is also stopped after a pre-determined number of steps (from the first implementation of the

DTM technique). Details are provided below. The scaling moment function  $K(q)$  is evaluated on the field corrected with the help of the final estimate of  $\alpha$  and  $C_1$ .

## 6.2) Results on synthetic multifractal fields

The algorithm was tested on the truncated simulated fields. Fig. 9 displays the main results for the simulation with  $\alpha=1.8$  and  $C_1=0.5$ , which is representative of the other cases. The main differences will be pointed out below. Fig. 9(a) shows a clear improvement of the scaling behaviour for small moments (increase of  $R^2$  with the correction), which leads to a quite good correction of  $K(q)$  (Fig 9b). As expected, large order moments remain unaffected by this technique. Concerning the DTM method, the successive iterations for the fourth threshold (table 1) are displayed on Fig 9(c). It can be seen that the correction widens the range of available  $\eta$  to estimate  $\alpha$ . The value of  $\alpha$  obtained with the standard DTM is 1.53, and the algorithm converges towards 1.75 in three iterations, which is quite close from the value of 1.79 found on the actual field. With the fifth threshold, the algorithm doesn't converge. The first six estimations of  $\alpha$  are 1.33, 1.62, 1.76, 1.85, and 1.87. This lack of convergence is also observed with large thresholds on the simulations with other UM parameters, especially when  $C_1 - \gamma_{\min} \leq 0.2$ . The divergence is faster for smaller  $\alpha$  and greater  $C_1$ . A close analysis of the results shows that it is relevant to limit the number of iterations according to the range of available  $\eta$  ( $\Delta \log(\eta)$ ), evaluated on the DTM curve of the truncated field (see Fig. 9(d) for an illustration). If  $1.2 \leq \Delta \log(\eta)$  no iteration is required. If  $0.8 \leq \Delta \log(\eta) < 1.2$  then one iteration is performed. If  $\Delta \log(\eta) < 0.8$  then two iterations are performed. These rules enable to perform enough iterations to obtain the correct value when the algorithm converges, and to stop it before it diverges (or converges toward a too large value of  $\alpha$ ) when necessary.

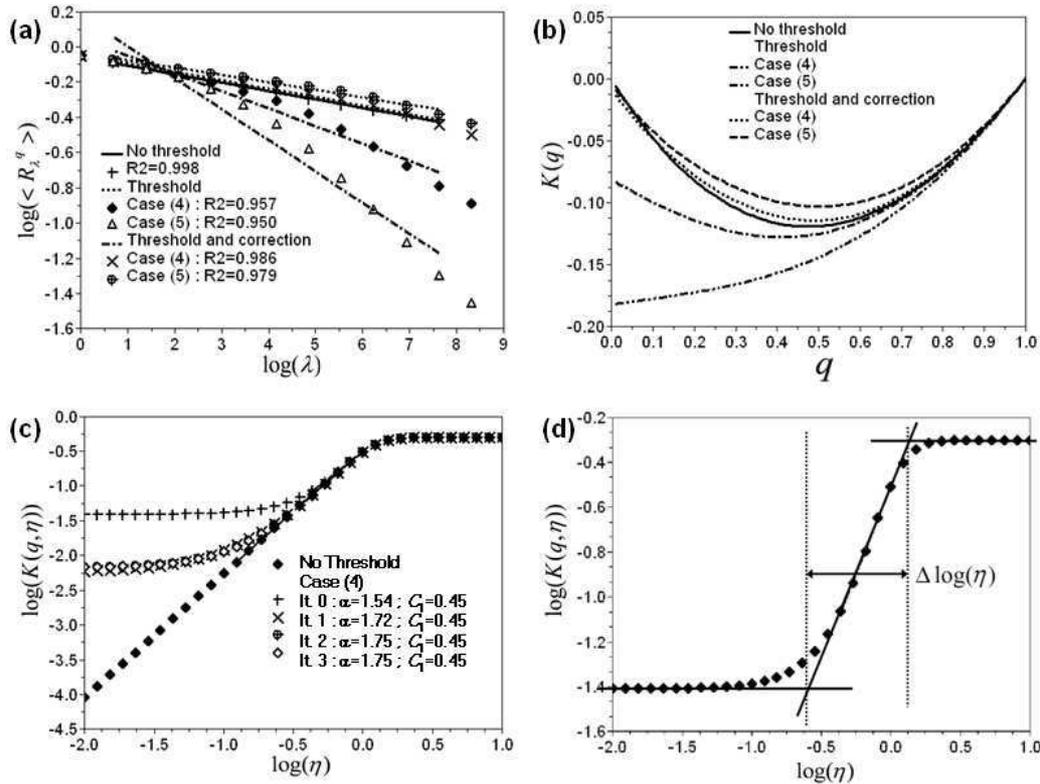


Figure 9: Results of the multifractal analysis on the simulated field with  $\alpha=1.8$  and  $C_1=0.5$ . (a) Scaling curve, i.e. Eq. (3) in a log-log plot for  $q < 1$  for the 4<sup>th</sup> and 5<sup>th</sup> threshold. (b) Scaling moment function  $K(q)$  for  $0 \leq q \leq 1$  for the 4<sup>th</sup> and 5<sup>th</sup> threshold. (c) DTM curve in the DTM\_0 method for 4<sup>th</sup> threshold. (d) Determination curve of  $\alpha$  on the truncated field and definition of  $\Delta \log(\eta)$ .

Table 1 displays the results obtained with the new algorithm (DTM\_0) for all the simulations. The results are on the whole quite encouraging. The DTM\_0 technique is more efficient for greater  $\alpha$  and  $C_1$  (for example, for the simulations with an actual  $\alpha$  of 1.8 the estimations of  $\alpha$  are better for an actual  $C_1$  of 0.5 rather than of 0.2), that is to say when the influence of the zeroes is the strongest.  $C_1$  estimates tend to be slightly decreased by the DTM\_0 technique, but not significantly. It should be reminded that when  $C_1 - \gamma_{\min} \leq 0.2$ , the obtained estimates should be cautiously considered since a too significant part of the field has been removed.

A limitation of the DTM\_0 technique is that the stochastic field added to represent the unobserved singularities does not preserve the multiplicative structure of the original process. Moreover the robustness of the DTM\_0 technique with regard to the random nature of the simulated low values should be tested. Both limitations are checked by implementing many times the DTM\_0 technique on the same samples. It appears that whatever the size of the sample, the variability among the obtained estimates of UM exponents is smaller than the one existing among different samples simulated with the same UM exponents. This means that the error associated with the non-preservation of the multiplicative structure is much smaller than the one introduced by a truncation.

Sim. UM par.	Thresh.	$c_{\min}$	$\gamma_{\min}$	$\Delta \log(\eta)$	With threshold		Corrected	
					$\alpha$	$C_1$	$\alpha$	$C_1$
$\alpha=1.8$ $C_1=0.5$	0	0.00	-0.51	--	1.79	0.47	1.79	0.47
	$10^{-5}$	0.01	-0.47	1.22	1.75	0.46	1.81	0.47
	0.001	0.03	-0.34	0.87	1.66	0.45	1.76	0.46
	0.01	0.08	-0.19	0.72	1.54	0.45	1.75	0.45
	0.1	0.18	0.05	0.60	1.33	0.46	1.76	0.44
$\alpha=1.8$ $C_1=0.2$	0	0.00	-0.22	--	1.80	0.19	1.80	0.19
	0.01	0.01	-0.16	1.07	1.73	0.19	1.76	0.19
	0.1	0.06	-0.06	0.79	1.57	0.20	1.66	0.19
	0.3	0.11	0.04	0.69	1.42	0.22	1.65	0.19
$\alpha=1.5$ $C_1=0.5$	0	0.00	-0.72	--	1.49	0.47	1.49	0.47
	0.001	0.06	-0.30	0.87	1.36	0.45	1.53	0.46
	0.1	0.21	0.09	0.66	1.12	0.46	1.57	0.43
$\alpha=1.5$ $C_1=0.2$	0	0.00	-0.30	--	1.51	0.19	1.51	0.19
	0.1	0.07	-0.03	0.86	1.31	0.20	1.44	0.18
	0.5	0.15	0.12	0.73	1.16	0.22	1.51	0.17
$\alpha=1.2$ $C_1=0.5$	0	0.00	-1.00	--	1.19	0.47	1.19	0.47
	0.1	0.15	-0.09	0.84	0.99	0.44	0.99	0.44
	1	0.36	0.34	0.68	0.72	0.48	1.12	0.40
$\alpha=1.2$ $C_1=0.2$	0	0.00	-0.44	--	1.20	0.19	1.20	0.19
	0.01	0.05	-0.11	1.10	1.15	0.19	1.26	0.19
	0.1	0.09	0.00	0.90	1.11	0.19	1.24	0.18

Table 1: Multifractal parameters for the simulated fields

### 6.3) Results on a case with a scaling break

The DTM\_0 is slightly modified when implemented on multifractal fields exhibiting a scaling break. The random field added to represent unobserved singularities ( $S_{\Lambda}^{\gamma < \gamma_{\min}}$ , Eq. (11)) is generated with a break. The large scale  $\gamma_{\min}$  is used. The number of iterations is determined according to the  $\Delta \log(\eta)$  for large scales. The small scale  $\gamma_{\min}$ , which as pointed out in section 5.3 is surprisingly large, was tested and yielded worse results.

The results for the field with  $\alpha=1.8$  and  $C_1=0.1$  for small scale and  $\alpha=1.1$  and  $C_1=0.4$  for large scale are displayed on Fig. 10. The DTM\_0 technique enables to retrieve the correct value of  $\alpha$  for large scales (1.04 is found whereas the first guess was 0.93, Fig 10(a)), but has almost no impact on small scale estimates (Fig. 10(b)). Concerning the correction of the scaling moment function  $K(q)$ , the correction is quite good for large scales (Fig. 10(c)) and not very good for small scales (Fig. 10(d)).

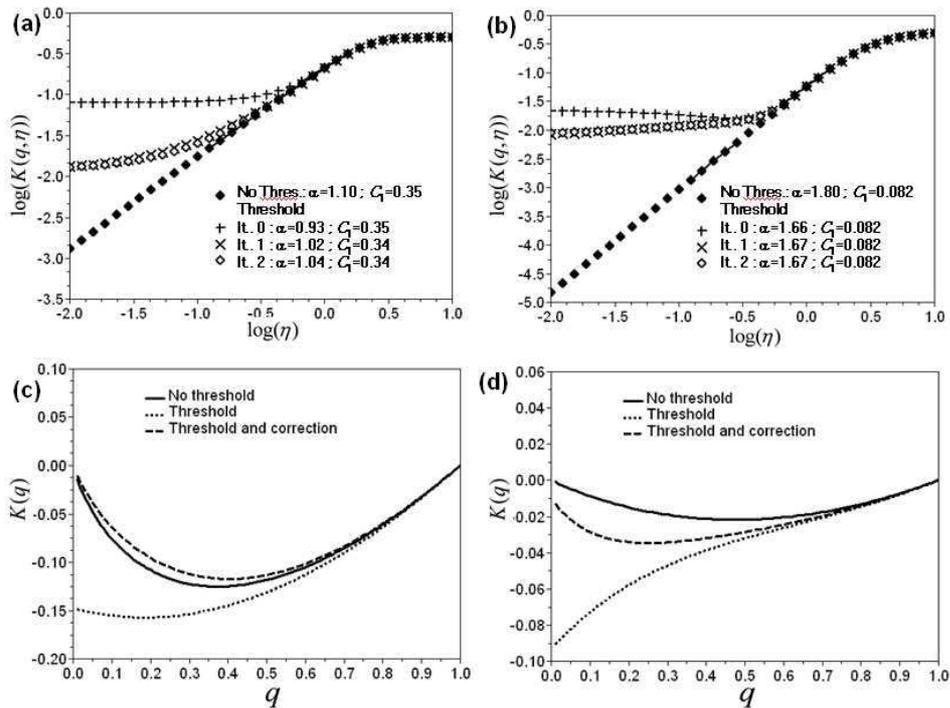


Figure 10: Corrected multifractal analysis for the simulated field with  $\alpha=1.8$  and  $C_1=0.1$  for small scale and  $\alpha=1.1$  and  $C_1=0.4$  for large scale. (a) DTM curve in the DTM\_0 method for large scale. (b) Same as in (a) for small scale. (c) Scaling moment function  $K(q)$  for  $0 \leq q \leq 1$  for large scale. (d) Same as in (c) for small scale.

The results of the DTM\_0 technique implemented on the radar data are shown in Fig. 11. The estimates are similar to that obtained with the standard DTM (basically no change is found). This tends to confirm the results of section 4 that the estimates of UM parameters of this specific data set are not affected by the zero values or are strongly affected by the parameter  $H$ . Further investigations on other observed rainfall fields should be performed to assess the impact of the threshold of detection on UM parameter estimates of actual measured fields.

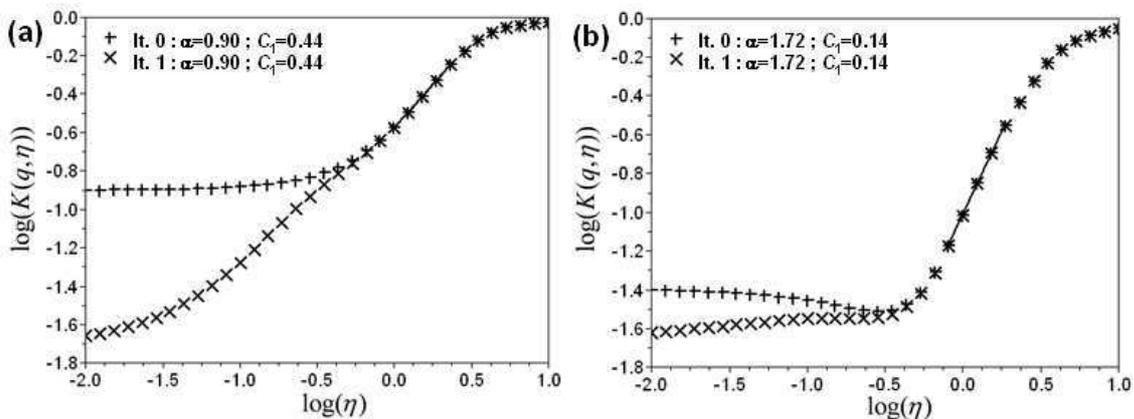


Figure 11: Corrected multifractal analysis for the radar data. (a) DTM curve in the DTM\_0 method for large scale. (b) Same as in (a) for small scale.

## 6) Conclusion

We analyzed the effects of numerous zeros (either real or spurious) of a high-resolution rainfall field on multifractal analyses and simulations, especially with the help of the Universal Multifractals (UM). We first clarify the possible sources of the discrepancy on the proportion of zeros between observations and models, including the detection limitations. Indeed, only the monofractal  $\beta$ -model, i.e. the exceptional UM having a multifractality index  $\alpha=0$ , has a fractal support. However, not only this model is too simplistic (only one level of rain), but we show that its multiplication with an independent UM field is not relevant, although it yields a fractal support of the same type of the  $\beta$ -model.

We therefore closely analysed the alternative that corresponds to thresholding a UM field. The following features are theoretically expected and observed on simulations:

- thresholding a multifractal field is rather similar to truncating its lowest singularities, i.e setting to  $-\infty$  the singularities below a singularity  $\gamma_{\min}$  corresponding to the threshold, and therefore to increasing the codimension of its support to  $c_{\min} = c(\gamma_{\min})$ .

- this corresponds to a second order multifractal phase transition for small moment orders  $q$ 's: the scaling moment function becomes linear for the order  $q$  close to zero, and the intercept with the vertical axis ( $q=0$ ) and the slope of  $K(q)$  are respectively equal to  $c_{\min}$  and  $\gamma_{\min}$ ;

- the scaling is deteriorated for small order moments, whereas large order moments are not affected as long as  $C_1 - \gamma_{\min} \leq 0.2$ . Otherwise it implies that a too large proportion of the field has been removed by the threshold;

- as a consequence, the range of available moments to safely estimate UM exponents becomes narrower and this easily lead to a significant under-estimation of  $\alpha$ . The corresponding semi-analytical estimates of the extremes are therefore affected, more precisely under-estimated

- the larger  $\alpha$  and  $C_1$ , the larger the influence of the zeroes is.

Observed radar rainfall data, corresponding to a heavy rainfall event that occurred in the south of France in September 2005, exhibit a more complex behaviour with a scaling break at about 20km. On the whole, the multifractal phase transition is observed for both small and large scales. Most of the features of observed rainfall fields are retrieved with the help of simulated fields generated with a break (different  $\alpha$  and  $C_1$  for small and large scales) and then truncated.

A new multifractal analysis technique is suggested and tentatively tested to improve the estimates of UM exponents. It basically relies on renormalizing the field, adding a small random multifractal field to represent the unobserved, low singularities, and iterating the process. The technique, tested on truncated simulated fields with known exponents, enables to significantly improve the estimates as long as  $C_1 - \gamma_{\min} \leq 0.2$ . The results are much more contrasted on fields exhibiting a scaling break. Indeed small scale estimates are almost not corrected (but are also less affected by the threshold), and large scale estimates are improved. Despite clear limitations (mainly a lack of convergence treated by limiting the number of iterations, and scaling breaks difficulties) the new techniques provides encouraging results and might be step forward in dealing with the zeroes. However further investigations are still required to improve the estimates of UM exponents in the presence of numerous zeros.

These results mean that one should be very careful when performing a multifractal analysis on high resolution rainfall fields which contain numerous zeros. Indeed a standard analysis will lead to an under-estimate of  $\alpha$ . The influence of the multifractal phase transition

for small moments should be checked to evaluate the reliability of the UM parameters estimates. A way of doing that is to implement the suggested new multifractal analysis technique.

## References

- [1] Schertzer D, Lovejoy S. Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling and multiplicative processes. *J Geophys Res* 1987a;92(D8):9693-9714.
- [2] Schertzer D, Lovejoy S. Singularités anisotropes, divergences des moments en turbulence: invariance d'échelle généralisée et processus multiplicatifs. *Ann Sci Math Que* 1987b;11(1):139-181.
- [3] Gupta VK, Waymire E. A Statistical Analysis of Mesoscale Rainfall as a Random Cascade. *J Appl Meteor* 1993;32:251-267.
- [4] Deidda R. Rainfall downscaling in a space-time multifractal framework. *Water Resour Res* 2000;36:1779-1794.
- [5] Schertzer D, Tchiguirinskaia I, Lovejoy S, Hubert P. No monsters, no miracles: in nonlinear sciences hydrology is not an outlier! *Hydrological Sciences Journal* 2010;55(6):965-979.
- [6] Yaglom AM. The influence on the fluctuation in energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval. *Sov Phys Dokl* 1966;2:26-30.
- [7] Mandelbrot B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *Journal of Fluid Mechanics* 1974;62:331-350.
- [8] Schertzer D, Lovejoy S, Schmitt F, Tchiguirinskaia I, Marsan D. Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency. *Fractals* 1997;5(3):427-471.
- [9] Marsan D, Schertzer D, Lovejoy S. Causal space-time multifractal processes: Predictability and forecasting of rain fields. *J Geophys Res* 1996;101:26,333-326,346.
- [10] Olsson J, Niemczynowicz J. Multifractal analysis of daily spatial rainfall distributions, *J Hydrol* 1996;187:29-43.
- [11] Harris D, Menabde M, Seed A, Austin G. Factors affecting multiscaling analysis of rainfall time series. *Nonlin Processes Geophys* 1997;4:137-155.
- [12] de Lima MIP, Grasman, J. Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal. *J Hydrol* 1999;220:1-11.
- [13] Desaulnier-Soucy N, Lovejoy S, Schertzer D. The continuum limit in rain and the HYDROP experiment. *J Atm Res* 2001;59-60:163-197.
- [14] Lovejoy S, Schertzer D. Scaling and multifractal fields in the solid earth and topography, *Nonlin Processes Geophys* 2007;14:465-502.

- [15] Nykanen DK. Linkages between Orographic Forcing and the Scaling Properties of Convective Rainfall in Mountainous Regions. *J of hydrometeorology* 2008;9:327-347.
- [16] Royer JF, Biaou A, Chauvin F, Schertzer D, Lovejoy S. Multifractal analysis of the evolution of simulated precipitation over France in a climate scenario. *C.R Geoscience* 2008;340:431-440.
- [17] Tessier Y, Lovejoy S, Hubert P, Schertzer D, Pecknold S. Multifractal analysis and modeling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions. *J Geophys Res* 1996;31D:26,427-26,440.
- [18] Larnder C. Observer problems in multifractals: the example of rain. M.Sc. Thesis, McGill Univ., Montreal, Canada, 1995.
- [19] de Montera L, Barthes L, Mallet C, Gole P. The Effect of Rain-No Rain Intermittency on the Estimation of the Universal Multifractals Model Parameters. *J. of Hydrometeorology* 2009;10(2):493-506.
- [20] WMO. Guide to meteorological instruments and methods of observations, WMO-No.8, 7<sup>th</sup> edition; 2008.
- [21] Testud J, Le Bouar E, Obligis E, AliMehenni M. The rain profiling algorithm applied to polarimetric weather radar. *J Atmos Oceanic Tech* 2000;17:332-356.
- [22] Chambers JM, Mallows CL, Stuck BW. A method for simulating stable random variables, *Journal of the American statistical Association* 1976;71:p340.
- [23] Pecknold, S., Lovejoy S, Schertzer D, Hooge C, Malouin JF. The simulation of universal multifractals. In: Perchang JM, Lejeune A, editors. *Cellular Automata: Prospects in astrophysical applications*, World Scientific; 1993, p 228-267.
- [24] Lovejoy S, Schertzer D. On the simulation of continuous in scale universal multifractals, part I: spatially continuous processes. *Computers and Geoscience* 2010; In press.
- [25] Schertzer D, Lovejoy S. Multifractals, Generalized Scale Invariance and Complexity in Geophysics. *Journal of Bifurcation and Chaos* 2011; In press.
- [26] Hentschel HE, and Proccacia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. *Physica* 1983;8D:435-444
- [27] Lovejoy S, Schertzer D, Tsonis AA. Functional box-counting and multiple elliptical dimensions in rain. *Science* 1987;235:1036-1038
- [28] Hubert P, Carbonnel JP. Caractérisation fractale de la variabilité et de l'anisotropie des précipitations tropicales. *C. R. Acad. Sci. Paris* 1988;2:909-914.

- [29] Parisi G, Frish U. A multifractal model of intermittency. In: Ghill M, Benzi R, Parisi G, editors. Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics, North Holland;1985 , p. 111-114.
- [30] Hittinger F. Intercomparaison des incertitudes dans l'Analyse de Fréquence de Crues classique et l'Analyse Mutlifractale de Fréquence de Crues. ENSHMG. Grenoble, Institut National Polytechnique de Grenoble. Ing. Dipl. 1997: 35 pp.
- [31] Gires A, Tchiguirinskaia I, Schertzer D, Lovejoy S. Analyses multifractales et spatio-temporelles des précipitations du modèle Méso-NH et des données radar. Hydrol Sci J 2010 ;56(3) : 380-396.
- [32] Schertzer D, Lovejoy S. Hard and Soft Multifractal processes. Physica A 1992;185(1-4):187-194.
- [33] Schertzer D, Lovejoy S. Nonlinear variability in geophysics: multifractal analysis and simulations. In: Pietronero editor. Fractals: Their physical origins and properties, Plenum Press, New York;1989, p. 49-79.
- [34] Hubert P, Tessier Y, Lovejoy S, Schertzer D, Schmitt F, Ladoy P, Carbonnel JP, Violette S. Multifractals and extreme rainfall events. Geophys. Lett. 1993;20:931-934.
- [35] Douglas E, Barros, A. Probable Maximum Precipitation Estimation using Multifractals : Application in the Eastern United States. Journal of Hydrometeorology 2003;4:1012-1024.
- [36] Lavallée D, Lovejoy S, Ladoy P. Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. In: de Colas L, Lam N, editors. Fractas in geography, New-York: Prentice-Hall; 1993, p. 171-205.
- [37] Parent du Châtelet J, Tabary P, Lamargue P. Evolution du réseau radar opérationnel de Météo-France pour une meilleure estimation des lames d'eau. Hydrologie continentale 2005;49.
- [38] Marshall JS, Palmer WM. The distribution of raindrops with size. J Meteor 1948;5:165-166.
- [39] Tessier Y, Lovejoy S, Schertzer D. Universal Multifractals: theory and observations for rain and clouds. Journal of Applied Meteorology 1993;32(2):223-250.
- [40] Pathirana A, Herath S, Yamada T. Estimating rainfall distributions at high temporal resolutions using a multifractal model. Hydrology and Earth System Sciences 2003;7(5):668-679.
- [41] Lovejoy S, Schertzer D., Allaire V. The remarkable wide range spatial scaling of TRMM precipitation. J Atmos Research 2008;90:10-32.
- [42] Over TM, Gupta VK. A space-time theory of mesoscale rainfall using random cascades. J. Geophys. Res. 1996;101(D21):26319-26331.

[43] Schmitt F, Vannitsem S, Barbosa A. Modeling of rainfall time series using two-state renewal processes and multifractals. *J. Geophys. Res.* 1998;103(D18):23181-23193.

## **7.5. Annexe 5 : «Impact de la variabilité non-mesurée des précipitations sur les débits en hydrologie urbaine : un cas d'étude dans le cadre multifractal » (La Houille Blanche)**

La Houille Blanche, n° 4, 2011, p. 37-42

DOI 10.1051/lhb/2011039

### **Impact de la variabilité non-mesurée des précipitations sur les débits en hydrologie urbaine : un cas d'étude dans le cadre multifractal**

Auguste GIRES<sup>(1)</sup>, Daniel SCHERTZER<sup>(1)</sup>, Ioulia TCHIGUIRINSKAIA <sup>(1)</sup>, Shaun LOVEJOY<sup>(2)</sup>,  
Cedo MAKSIMOVIC<sup>(3)</sup>, Christian ONOF<sup>(3)</sup>, Nuno SIMOES<sup>(3,4)</sup>

<sup>(1)</sup> Université Paris-Est Ecole des Ponts ParisTech LEESU, 6-8 Av Blaise Pascal Cité Descartes, Marne-la-Vallée, 77455 Cx2, France – e-mail : auguste.gires@leesu.enpc.fr

<sup>(2)</sup> McGill U., Physics dept., Montreal, PQ, Canada

<sup>(3)</sup> Imperial College London, Dept of Civil and Environmental Engineering, United-Kingdom

<sup>(4)</sup> Department of Civil Engineering, University of Coimbra, Coimbra, Portugal

**RÉSUMÉ.** – Cet article utilise les propriétés multifractales d'un événement pluvieux dans la région de Londres le 9 février 2009, pour mieux comprendre et quantifier l'incertitude associée à la variabilité spatio-temporelle des précipitations non mesurées par les radars météorologiques en bande C, dont la résolution estimée est de 1 km\*1 km\*5min, et comment elle se transfère aux prévisions des débits en réseaux d'assainissement. Le cas d'étude hydrologique est celui du bassin versant urbain de 900 hectares de Cranbrook (Londres). Les propriétés multifractales sont en accord avec le modèle spatio-temporel le plus simple, reposant sur un exposant d'anisotropie entre l'espace et le temps. Ceci permet de désagréger le champ de précipitation à l'aide de cascades multifractales spatio-temporelles. Un ensemble de champs de précipitations désagrégés réalistes est alors généré à l'aide des multifractals universels, puis l'ensemble des hydrogrammes correspondants est obtenu par un modèle urbain pluie-débit semi-distribué. Il apparaît que les queues de probabilité issues de l'analyse de 100 échantillons de précipitation présentent un comportement en loi de puissance, qui est retrouvé sur les débits de pointe mais avec des exposants différents

**Mots-clés :** variabilité spatio-temporelle, désagrégation, multifractals, loi de puissance, ensemble stochastique, hydrologie urbaine.

#### **1) Introduction**

Un mode classique de représentation, en relation avec la notion de cascade ([1] pour une revue récente) conduit à analyser et simuler l'extrême variabilité des processus géophysiques sur de grandes gammes d'échelle, en particulier la pluie, dans le cadre des multifractals universels, à l'aide d'un nombre réduit de paramètres [2,3]. De telles analyses menées sur les débits et/ou les précipitations, ont permis d'éclairer la compréhension de la relation pluie-débit en comparant leurs paramètres multifractals respectifs [4,5,6,7] ainsi que le comportement de leurs extrêmes [8]. Par ailleurs, de nombreuses études d'hydrologie plus classiques [9,10,11,12,13] suggèrent un impact significatif de la variabilité spatio-temporelle sur les débits même si des nuances sont à apporter en fonction du type d'événements pluvieux, de la taille du bassin versant et de ses caractéristiques. En hydrologie urbaine, avec des bassins versants plus petits et une proportion plus grande de pluie efficace en raison de coefficients d'imperméabilisation supérieurs, les effets semblent plus importants [14,15].

Cet article met en œuvre les méthodes multifractales en hydrologie urbaine afin de mieux comprendre comment l'incertitude sur la variabilité spatio-temporelle à très haute résolution de la pluie (i.e. au-delà de la résolution de 1km\*1km\*5min classiquement disponible avec les réseaux radars à bande C des services météorologiques) se reflète dans les résultats de simulation d'un modèle semi-distribué d'hydrologie urbaine. Le cas d'étude est celui du

bassin versant de Cranbrook une zone urbaine de 900 hectares située dans l'Est de Londres, et déjà utilisée dans [16]. Dans un premier temps, les propriétés multifractales spatio-temporelles de l'évènement de la région londonienne du 9 février 2010 sont analysées. Ensuite, une démarche reposant sur des ensembles stochastiques est adoptée : (i) Un ensemble de champs réalistes de précipitations désagrégées à la résolution 111m\*111m\*1.25min est généré à l'aide de cascades multifractales universelles ; (ii) Les hydrogrammes correspondants sont simulés. Ces ensembles de réalisation permettent enfin de caractériser l'incertitude d'abord sur les pluies puis sur les débits de pointe. Cet article s'intéresse principalement aux échantillons extrêmes générés, c'est-à-dire aux queues de probabilité.

## 2) Quantification de la variabilité spatio-temporelle de la pluie

### 2.1) Les données de pluie

Les données de pluie utilisées dans cette étude sont issues des mosaïques radar Nimrod, un produit du UK Meteorological Office. Le traitement Nimrod des données radar contient principalement une interpolation des données issues de tous les radars à bande C du réseau britannique, des corrections à base physique, et un ajustement avec le réseau de pluviomètres [17]. La résolution affichée des données Nimrod est de 1km en espace et 5 min en temps. Une zone de 64km\*64km\*21h centrée sur la partie la plus intense de l'évènement du 9 février a été analysée. Une carte de la hauteur totale précipitée est en Fig. 1a.

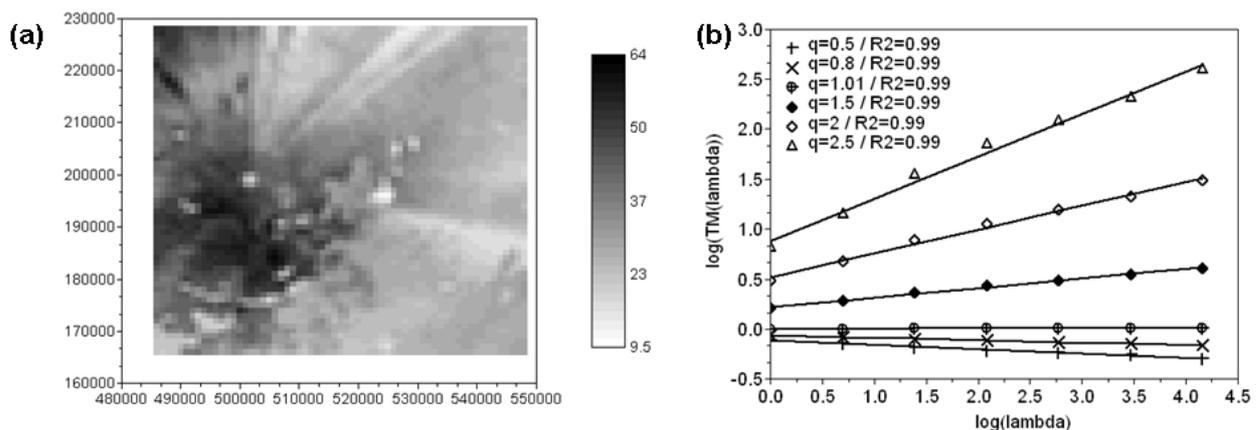


Figure 1: (a) Hauteur totale précipitée (en mm) sur la zone d'étude pour l'évènement considéré. Le système de coordonnées est le « British National Grid » (<http://www.ordnancesurvey.co.uk/>). (b) Illustration du comportement scalant (eq. 1 dans un graphique log-log) en analyse spatiale.

### 2.2) Analyse spatio-temporelle multifractale

Pour un champ multifractal stochastique les moments statistiques d'ordre  $q$  du champ de précipitation  $R_\lambda$  à la résolution  $\lambda$  ( $=L/l$ , le rapport entre l'échelle extérieure et celle d'observation du phénomène) présente le comportement scalant suivant ( $\langle \cdot \rangle$  désigne l'espérance mathématique ou moyenne d'ensemble) :

$$\langle R_\lambda^q \rangle = \lambda^{K(q)} \langle R_1^q \rangle, \quad (1)$$

où  $K(q)$  est la fonction des moments d'échelle. Cette expression n'est a priori valable qu'en moyenne sur un ensemble infini de réalisations, Ici deux types d'analyse en moyenne

d'ensemble sont menées : une analyse spatiale (une réalisation est alors le champ 2D observé à un chaque pas de temps) et une temporelle (une réalisation est alors la série temporelle 1D observée à chaque pixels radar). Dans le cadre des multifractals universels [2,3], la fonction  $K(q)$  ne dépend que de trois paramètres  $C_1$ ,  $\alpha$ , et  $H$ .  $C_1$  mesure l'intermittence moyenne ( $C_1=0$  pour un champ homogène),  $\alpha$  la multifractalité ( $\alpha=0$  pour un champ monofractal et  $\alpha=2$  pour le cas limite log-normal), et  $H$  la non-conservation ( $H=0$  pour un champ conservatif).  $K(q)$  est alors donné par l'expression :

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) + Hq, \quad (2)$$

Les paramètres multifractals sont estimés grâce à l'analyse de la pente spectrale et à la méthode DTM [18].

La Fig. 1b représente l'Eq. 1 dans un graphique en échelle log-log pour l'analyse spatiale. Il convient de préciser que pour tenir compte du fait que le champ observé n'est pas conservatif (on trouvera  $H=0.56$ ) cette courbe a été tracée pour les fluctuations du champ et non pas le champ directement. Les lignes droites (coefficient R2 de 0.99 en moyenne) reflètent un comportement scalant, au moins sur la gamme d'échelle allant de 1 à 64 km. Les pentes sont égales à  $K_{espace}(q)$ . Les valeurs de  $\alpha$ ,  $C_1$  et  $H$  valent respectivement 1.62, 0.14 et 0.56.

Une courbe similaire à celle de la Fig. 1b mais en analyse temporelle confirme la présence d'un comportement scalant (coefficient R2 allant de 0.98 à 0.99 pour les  $q$  compris entre 0.8 et 2.5) pour une gamme d'échelle allant de 5min à 11h. Les estimations des paramètres  $\alpha$ ,  $C_1$  et  $H$  valent respectivement 1.52, 0.10 et 0.21. Ces résultats sont en accord avec le cadre du modèle spatio-temporel unifié et scalant le plus simple de pluie [19,20,21], qui se base sur l'hypothèse d'un exposant d'anisotropie entre l'espace et le temps. Ce dernier suggère que les fonctions d'échelle des moments spatiale et temporelle devraient être proportionnelles, c'est-à-dire

$$K_{espace}(q) = \frac{K_{temps}(q)}{1 - H_t}, \quad (3)$$

Où  $H_t$  est l'exposant d'anisotropie entre l'espace et le temps. Ceci implique des  $\alpha$  identiques et des  $C_1$  et  $H$  présentant le même rapport.

$$\frac{C_{1,espace}}{C_{1,temps}} = \frac{H_{espace}}{H_{temps}} = \frac{1}{1 - H_t}, \quad (4)$$

Ici, les  $\alpha$  sont proches et les rapports des  $C_1$  et des  $H$  correspondent à un  $H_t$  de respectivement 0.29 et 0.62, ce qui est proche (surtout pour  $C_1$  dont les estimations sont plus fiables) de la valeur théorique de 1/3 obtenue avec la théorie de Kolmogorov en considérant la pluie comme un scalaire passif [19].

### 3) Caractérisation de l'incertitude sur la pluie associée à la variabilité non mesurée de la pluie

#### 3.1) Désagrégation spatio-temporelle du champ de pluie

En l'absence de mesure de pluie à très haute résolution (environ 100 m) il est classique d'utiliser une désagrégation stochastique [20,22,23,24,25]. Le cadre des cascades est particulièrement adapté à cet exercice [26]. En effet la désagrégation consiste alors simplement à poursuivre stochastiquement la cascade au-delà de l'échelle d'observation. Plus

précisément, pour chaque pixel 2 étapes de cascade spatio-temporelle [19,27], avec les paramètres  $\alpha$  et  $C_1$  estimés sur la gamme d'échelle allant de 1 à 64 km, sont réalisées. Pour le modèle spatio-temporel, dont la pertinence a été validée sur cet évènement dans la section précédente, lorsque la résolution spatiale est divisée par  $\lambda_x$ , la résolution temporelle est divisée par  $\lambda_t = \lambda_x^{1-Ht}$ . Ainsi à chaque étape d'un tel processus un pixel-parent est divisé en 18 pixels-enfants, en divisant la résolution spatiale par 3 et la résolution temporelle par 2 ( $2^{1-1/3} \approx 2,08$ ). La valeur affectée à chacun des pixels-enfants est celle du pixel-parent multipliée par un coefficient aléatoire permettant de respecter les équations 1 et 2. Ce processus, illustré en Fig. 2a permet de passer d'une résolution de 1km\*1km\*5min à 111m\*111m\*1.25min. La valeur moyenne d'une sous-cascade est égale à un en moyenne d'ensemble. Un exemple de désagrégation pour un pas de temps est donné en Fig. 2b. La même palette de couleur a été utilisée pour l'image radar et le champ désagrégé afin de pouvoir les comparer. L'effet de la désagrégation qui génère des intensités plus ou moins fortes au sein d'un pixel radar est visible, particulièrement dans la zone de forte intensité au sud. Il convient de noter que si les désagrégations de deux pas de temps successifs sont indépendantes (i.e., les cascades générées pour chaque sous-pixel sont effectivement indépendantes), il n'en reste pas moins que les valeurs désagrégées restent dépendantes du fait que les structures à plus grandes échelles le sont. Nous nous sommes contentés dans ce papier de cascades discrètes (rapport d'échelle élémentaire  $\lambda_x$ ), alors qu'en toute rigueur il faudrait recourir à des cascades continues pour respecter la causalité [3].

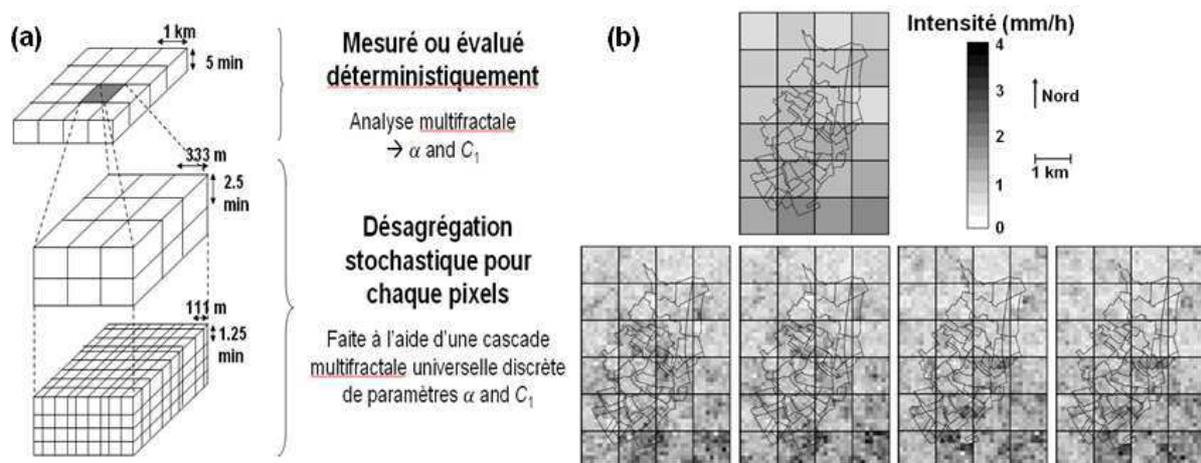


Figure 2 : Illustration (a) et exemple sur la zone de Cranbook (b) du processus de désagrégation spatio-temporelle pour un pas de temps. L'image radar de résolution spatiale 1km (haut) est remplacée par 4 images successives (bas) possédant une résolution spatiale de 111m.

### 3.2) Caractérisation de l'incertitude sur la pluie

A partir des mêmes données radar à la résolution 1km\*1km\*5min, cent échantillons de pluie réaliste à plus haute résolution ont été générés pour mettre en œuvre une approche de type prévision d'ensemble. L'incertitude sur la pluie du fait de la limite de résolution du radar est caractérisée par la variabilité observée au sein de l'ensemble d'échantillons. Avant de poursuivre, il convient de mentionner que la hauteur totale moyenne de précipitation est égale à  $19.14 \pm 0.04$  mm sur les différents échantillons, sachant que la valeur obtenue avec les données radar est de 19.14 mm. Ceci signifie que la désagrégation, bien que non strictement conservative, ne perturbe que très légèrement l'accumulation totale de la pluie et donc que les

effets hydrologiques observés sont dus à des différences de répartition spatiale. Dans la suite, les hydrogrammes de dix canalisations sont analysés. La racine carrée de la surface drainée par une canalisation définit la longueur caractéristique de son bassin versant associé  $L_{sd}$ . La première étape consiste à définir pour chacun des échantillons de pluie et chaque canalisation une valeur particulière de la pluie. Deux types d'extrêmes du champ de précipitation ont été choisis dans cet article pour mener l'analyse :

- l'intensité désagrégée maximale obtenue sur la surface drainée par la canalisation et sur tout l'événement. Cette valeur est dénommée « pluie maximale » dans la suite.
- l'intensité maximale sur tout l'événement de l'intensité moyenne évaluée sur la zone drainée par la canalisation pour chaque pas de temps. Cette valeur est dénommée « pluie moyenne maximale » dans la suite.

Une fois définie une valeur par échantillon et par canalisation, il est possible de tracer les histogrammes correspondants. En Fig. 3a ce trouve celui pour la pluie maximale de la canalisation 2 (qui est au sud du bassin versant, proche des zones d'intensité pluvieuse maximale). Les courbes obtenues pour les autres canalisations et la pluie moyenne maximale sont similaires. Une première étape pour caractériser l'histogramme de la Fig. 3.a consiste à estimer un coefficient de variation ( $CV'$ ) défini de la façon suivante :

$$CV' = \frac{X_{0.95} - X_{0.05}}{2 * X_{0.5}}, \quad (5)$$

à partir des quantiles à 5 ( $X_{0.05}$ ) et 95% ( $X_{0.95}$ ), et de la médiane ( $X_{0.5}$ ). On trouve que  $CV'$  varie de 33 à 60% pour la pluie maximale et de 24 à 38% pour la pluie moyenne maximale. Dans cet article nous nous intéressons plus spécifiquement aux échantillons extrêmes ; i.e. la partie droite des histogrammes. On constate qu'elles sont caractérisées par un comportement en loi de puissance, c'est-à-dire que l'on a :

$$\Pr(X > x) \propto x^{-k}, \quad (6)$$

où  $k$  est l'exposant caractéristique. Afin de vérifier l'ajustement d'une loi de puissance, les intensités (moyennes) maximales simulées pour chaque échantillon ont été triées par ordre décroissant, et l'intensité en fonction du rang divisée par le nombre d'échantillon est tracée dans un graphique en échelle log-log. La Fig 3b représente cette courbe pour la pluie maximale de la canalisation 2, et est représentative des autres. La ligne droite observée pour les grandes intensités reflète la loi de puissance sous-jacente. Les coefficients de détermination des régressions linéaires valent en moyenne (sur les 10 canalisations) 0,98 pour l'intensité maximale et 0,97 pour l'intensité moyenne maximale ce qui valide la caractérisation par une loi de puissance.

Les valeurs numériques des  $k$  trouvées pour la pluie maximale ( $k_{\text{pluie max}}$ ) et la pluie moyenne maximale ( $k_{\text{pluie moy max}}$ ) sont indiquées en Fig. 3c ainsi que celles des exposants trouvés pour les débits (cf. section suivante). Une valeur élevée de  $k$  reflète des queues de probabilité moins épaisses et donc des extrêmes moins prononcés. On n'observe pas de forte dépendance de  $k_{\text{pluie max}}$  avec  $L_{sd}$ , ce qui reflète que la pluie possède des propriétés statistiques comparables aux différentes échelles d'observation. En revanche  $k_{\text{pluie moy max}}$  a tendance à augmenter avec  $L_{sd}$ , ce qui signifie, comme on pouvait s'y attendre, que plus la surface drainée par la canalisation est grande, plus l'effet de la variabilité non-mesurée de la pluie est amorti. On retrouve naturellement que  $k_{\text{pluie max}}$  est inférieur à  $k_{\text{pluie moy max}}$ , puisque la moyenne faite dans l'analyse de l'intensité moyenne maximale amortie les extrêmes observés dans l'analyse de l'intensité maximale brute.

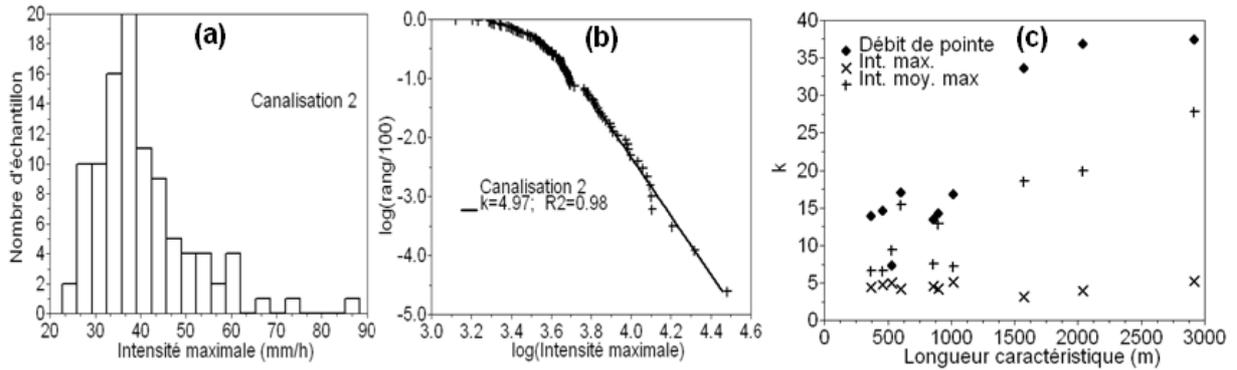


Figure 3 : Histogrammes (a) et mise en évidence (en coordonnées logarithmiques) de son comportement en loi de puissance (b) pour les 100 échantillons de précipitation pour la canalisation 2 (pluie maximale). (c) Exposant  $k$  de la loi de puissance pour l'intensité maximale de la pluie, l'intensité moyenne maximale, et le débit de pointe en fonction de l'échelle du sous-bassin  $L_{sd}$

#### 4) Transfert des incertitudes sur le débit

##### 4.1) Présentation du modèle pluie-débit

Le cas d'étude analysé dans cet article reprend celui de [16], dans lequel il est décrit avec plus de précision. Il correspond au bassin versant de versant de Cranbrook, à Redbridge (Londres, Royaume-Unis), un bassin essentiellement urbain d'environ 900 hectares, connu pour être un lieu fréquent d'inondations urbaines. Le modèle pluie-débit semi-distribué utilisé a été fourni et calibré par Thames Water Utilities Ltd [28]. Le modèle décompose le bassin versant de Cranbrook en 51 sous-bassins considérés comme homogènes (de 1 à 62 hectares, avec des temps de concentration de l'ordre de quelques minutes à une dizaine de minutes) et prend en compte le réseau d'assainissement principal (Fig. 4). Les simulations sont réalisées à l'aide du logiciel d'hydrologie urbaine Infoworks CS [29]. Le paramétrage du modèle n'a pas été changé dans cette étude. La répartition spatiale du cumul total de pluie (via des images radar) au cours de l'évènement pluvieux est présentée en Fig. 4. Elle varie de 16 à 23 mm en fonction du sous-bassin versant avec d'avantage de pluie au sud, à proximité de l'exutoire. Dans cette étude les hydrogrammes de 10 canalisations sont analysés. Elles ont été sélectionnées de façon à couvrir une large gamme de  $L_{sd}$ . Ici  $L_{sd}$  varie de 370 à 2910m (Fig. 4).

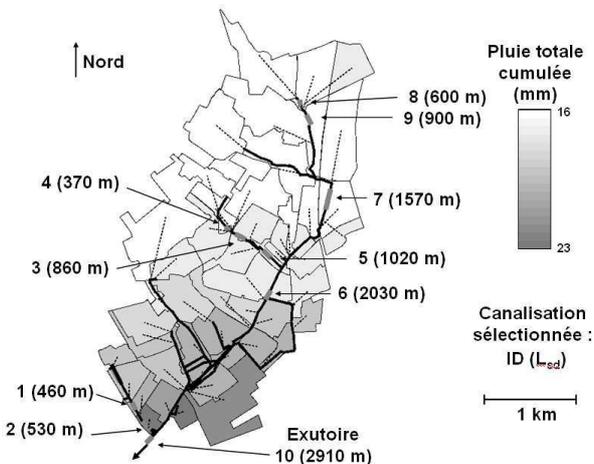


Figure 4: Le bassin versant de Cranbrook, et son réseau d'assainissement modélisé, ainsi que le cumul de précipitation au cours de l'évènement pluvial pour chaque sous-bassin versant.

#### 4.2) Caractérisation des incertitudes sur les débits de pointe

Pour l'ensemble des simulations de pluie désagrégée, les hydrogrammes des canalisations sont calculés. L'objet de cette section est d'analyser la variabilité au sein de l'ensemble d'hydrogrammes simulés et de comprendre en quoi elle reflète celle des pluies. On s'intéresse au débit de pointe, une grandeur fondamentale dans le dimensionnement et la gestion des réseaux d'assainissement. Pour chaque échantillon le débit de pointe et son heure d'occurrence ont été estimés. Aucune influence significative n'est observée sur les heures d'occurrence, si bien qu'aucune étude supplémentaire n'est faite dans la suite. Pour les débits de pointe, la même analyse que pour les précipitations est faite. Le coefficient  $CV$  vaut de 5 (à l'aval) à 26 % (à l'amont). Des courbes similaires à celles en Fig. 3a (histogramme des valeurs) et 3b (courbe de détermination de l'exposant  $k$  de la loi de puissance) sont obtenues. Les coefficients de détermination des régressions linéaires valent en moyenne (sur les 10 canalisations) 0,98 ce qui valide la caractérisation par une loi de puissance. Les exposants  $k$  ( $k_{\text{débit}}$ ) sont présentés Fig. 3c.

Il est notable de constater que la relation pluie-débit conserve le comportement statistique en loi de puissance observé sur les précipitations, mais en change les exposants caractéristiques. L'observation de loi de puissance signifie que les queues de probabilité associées à la variabilité spatio-temporelle non mesurée à petite échelle sont épaisses et ne peuvent donc pas être négligées. Ceci implique qu'elles doivent être prises en compte dans le dimensionnement et la gestion des réseaux d'assainissement. Il est remarquable de noter que malgré la faible résolution spatiale du modèle pluie-débit (en moyenne la racine carrée de l'aire des sous-bassins versant vaut 380 m) par rapport à la résolution des précipitations désagrégées (111m), qui fait qu'une partie de l'information issue de la désagrégation est perdue, et de probables limitations dans la modélisation pluie-débit, les incertitudes associées à la variabilité non mesurée de la pluie sont significatives.

On retrouve pour l'exposant  $k_{\text{débit}}$  la croissance avec  $L_{\text{sd}}$  observée pour  $k_{\text{pluie moy max}}$ , et les valeurs numériques sont globalement supérieures pour le débit, mais restent comparables. En revanche  $k_{\text{pluie maximale}}$  est inférieur à  $k_{\text{débit}}$  pour toutes les canalisations. Ceci semble montrer que les débits ne reproduisent pas les extrêmes de la pluie maximale, mais ceux de la pluie moyenne maximale. Ces derniers sont assez peu affectés par le passage en réseau. Pour obtenir une analyse plus fine des résultats, il conviendrait de mener de futures études avec un modèle pluie-débit possédant une meilleure résolution spatiale et prenant en compte les interactions entre les flux de surface et les flux dans les canalisations [30,31] pour profiter pleinement de la désagrégation du champ de précipitation.

### 5) Conclusion

La première conclusion de cette étude est que les données radar de l'événement pluvieux du 9 février 2010 de la région londonienne sont en accord avec le modèle spatio-temporel scalant le plus simple reposant sur un exposant d'anisotropie entre l'espace et le temps. Cet accord a permis la mise en place d'une désagrégation spatio-temporelle réaliste du champ de précipitations. L'approche reposant sur des ensembles stochastiques mise en œuvre a permis de quantifier l'incertitude associée à la variabilité spatio-temporelle non-mesurée des précipitations, et comment elle se transfère aux hydrogrammes du réseau d'assainissement du bassin versant urbain de Cranbrook (Londres). Il apparaît que la distribution de probabilités des extrêmes de la pluie désagrégée est en loi de puissance. Ce type de loi est retrouvé pour les débits de pointe simulés, ce qui par ailleurs signifie que l'incertitude associée à la

variabilité non mesurée du champ de pluie ne peut pas être négligée dans la gestion et le dimensionnement des réseaux d'assainissement. Cela souligne l'intérêt d'implanter des radars à bande X en milieu urbain, puisqu'ils permettent d'obtenir une résolution spatiale de l'ordre de 100 m. En revanche, l'établissement d'un lien clair entre les exposants des lois de distribution des extrêmes des précipitations et des débits nécessite l'analyse de davantage de cas d'étude et d'événements pluvieux. Par ailleurs, cette étude ouvre une piste pour tester autrement les modèles hydrologiques, en s'assurant qu'ils sont capables à partir de différentes pluies extrêmes de reproduire le comportement statistique observé sur les débits associés.

## 6) Remerciements

A. Gires remercie l'Université Paris-Est pour son soutien financier. Il remercie également l'Imperial College London pour son soutien financier partiel. A. Gires, I. Tchiguirinskaia et D. Schertzer remercient la chaire « Hydrologie pour une ville résiliente » de l'Ecole des Ponts ParisTech en partenariat avec Véolia, pour son soutien financier. Les auteurs remercient MWH Soft, Thames Water Utilities Ltd et le UK Met Office pour les données. N. Simões remercie la Fundação para a Ciência e Tecnologia - Ministério para a Ciência, Tecnologia e Ensino Superior, Portugal [SFRH/BD/37797/2007] pour son soutien financier.

## 7) Références

- [1] Lovejoy, S., & Schertzer, D. (2007). *Scale, scaling and multifractals in geophysics: twenty years on. Nonlinear dynamics in Geosciences*, Ed. A.A. Tsonis, J. Elsner, Springer, 311-337.
- [2] Schertzer, D., & Lovejoy, S. (1987). - Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling and multiplicative processes. *J. Geophys. Res.*, **92**(D8), 9693-9714.
- [3] Schertzer, D., Lovejoy, S., Schmitt, F., Tchiguirinskaia, I., & Marsan, D. (1997). - Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency. *Fractals*, **5**(3), 427-471.
- [4] Tessier, Y., Lovejoy, S., Hubert, P., Schertzer, D., & Pecknoldl, D. (1996).- Multifractal analysis and modeling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions. *J. Geophys. Res.*, **101**(D21), 26,427-26,440.
- [5] Pandey, G., Lovejoy, S., & Schertzer, D. (1998). - Multifractal analysis including extremes of daily river flow series for basins one to a million square kilometres, *J. Hydrol.*, **208**(1-2), 62-81.
- [6] Labat, D., Mangin, A., & Ababou, R. (2002). - Rainfall-runoff relations for karstic springs: multifractal analyses. *J. Hydrol.*, **256**, 176-195.
- [7] Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., Hubert, P., Bendjoudi, H., & Lovejoy, S. (2007). - Potential of multifractal modelling of ungauged basins. PUB Kick-Off Meeting. D. Schertzer et al. Wallingford, UK, IAHS Press. **309**, 298-308
- [8] Schertzer, D., Bernardara, P., Biaou, A., Tchiguirinskaia, I., Lang, M., Sauquet, E., Bendjoudi, H., Hubert, P., Lovejoy, S., & Veysseire, J.M. (2006). - Extrêmes et multifractals en hydrologie : résultats, validations et perspectives. *La Houille Blanche*, **5**, 112-119

- [9] Faurès, J.-M., Goodrich, D.C., Woolhiser, D.A., & Sorooshian, S. (1995). - Impact of small-scale spatial rainfall variability on runoff modeling. *J. Hydrol.*, **173**, 309-326
- [10] Singh, V.P. (1997). - Effect of spatial and temporal variability in rainfall and watershed characteristics on stream flow hydrograph. *Hydrol. Process*, **11**, 1649-1669.
- [11] Arnaud, P., Bouvier, C., Cisneros L., & Dominguez, R. (2002). - Influence of rainfall spatial variability on flood prediction. *J. Hydrol.*, **260**, 216-230.
- [12] Smith, M.B., Koren, V.I., Zhang, Z., Reeda, S.R., Panb J-J., & Moreadaa, F. (2004). - Runoff response to spatial variability in precipitation: an analysis of observed data. *J. Hydrol.*, **298**, 267-286.
- [13] Reborá, N., Ferraris, L., von Hardenberg, J., & Provenzale, A. (2006 b). Rainfall downscaling and flood forecasting: a case study in the Mediterranean area. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, **6**, 611–619.
- [14] Aronica, G., & Cannarozzo, M. (2000). - Studying the hydrological response of urban catchments using a semi-distributed linear non-linear model, *J. Hydrol.*, **238**, 35-43.
- [15] Segond, M-L., Wheeler, H.S., & Onof C. (2007). - The significance of small-scale spatial rainfall variability on runoff modelin. *J. Hydrol.*, **173**, 309-326
- [16] Gires, A., Onof, C., Maksimovic, C., Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I., & Simoes, N. (2011). - Quantifying the impact of small scale unmeasured rainfall variability on urban hydrology through multifractal downscaling: a case study. Soumis dans *J. Hydrol.*
- [17] Harrison D.L., Driscoll, S.J., & Kitchen, M. (2000). - Improving precipitation estimates from weather radar using quality control and correction techniques. *Met Appl*, **7(2)** , 135–144.
- [18] Lavallée, D., Lovejoy, S., & Ladoy, P. (1993). - Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation, *Fractals in geography*, L. De Cola and N. Lam Eds. Prentice-Hall, 171-205
- [19] Marsan, D., Schertzer, D., & Lovejoy, S. (1996). - Causal space-time multifractal processes: Predictability and forecasting of rain fields. *J. Geophys. Res.*, **101**, 26,333-326,346.
- [20] Deidda, R. (2000). - Rainfall downscaling in a space-time multifractal framework. *Water Resour. Res.*, **36**, 1779-1794.
- [21] Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., & Lovejoy, S. (2011). - Analyses multifractales et spatio-temporelles des précipitations du modèle Mésó-NH et des données radar. *Hydrol. Sci. J.*, **56(3)**, 380-396
- [22] Venugopal, V., Foufoula Georgiou, E., & Sapozhnikov, V. (1999). - A space-time downscaling model for rainfall. *J. Geophys. Res.*, **104** (D16), 19705-19721.
- [23] Olsson, J., Uvo, C.B., & Jinno, K. (2001). - Statistical atmospheric downscaling of short-term extreme rainfall by neural networks. *Phys. Chem. Earth (B)*, **26(9)**, 695-700

- [24] Ferraris, L., Gabellani, S., Rebora, N., & Provenzale, A. (2003). - A comparison of stochastic models for spatial rainfall downscaling. *Water Resour. Res.*, **39**, 1368–1384.
- [25] Rebora, N., Ferraris, L., von Hardenberg, J., & Provenzale, A. (2006). - The RainFARM: Downscaling LAM predictions by a Filtered AutoRegressive Model, *J. Hydromet.* **7**, 724-737
- [26] Biaou, A., Hubert, P., Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I., & Bendjoudi, H. (2003). - Fractals, multifractals et prévision des précipitations. *Sud Sciences et Technologies*, **10**, 10-15.
- [27] Macor, J., Schertzer, D., & Lovejoy, S. (2007). - Multifractal methods applied to rain forecast using radar data | [Méthodes multifractales appliquées à la prévision de pluie en utilisant des données radar, *Houille Blanche*, **4**, 92-98
- [28] Thames Water Utilities Ltd Engineering (2002). - Surface Water Model Of CranBrook And Seven Kings Water For London Borough Of Redbridge Appendix B, Model Development Report.
- [29] Wallingford Software (2009). Infoworks CS Help documentation.
- [30] Maksimović, Č, Prodanović, D., Boonya-aroonnet, S., Leitão, J. P., Djordjević, S., & Allitt, R. (2009). - Overland flow and pathway analysis for modelling of urban pluvial flooding, *Journal of Hydraulic Research*, **47** (4), 512–523
- [31] El Tabach, E., Tchiguirinskaia, I., Mahmood, O., & Schertzer, D. (2009). - Multi-Hydro: a spatially distributed numerical model to assess and manage runoff processes in peri-urban watersheds, Proc. Final conference of the COST Action C22 Urban Flood Management, Paris 26/27.11.2009, France.

## **7.6. Annexe 6 : «Impact of small scale rainfall uncertainty on urban discharge forecasts» (IAHS Red Book, Publ. 351)**

400

*Weather Radar and Hydrology*  
(Proceedings of a symposium held in Exeter, UK, April 2011) (IAHS Publ. 351, 2012).

### **Impact of small-scale rainfall uncertainty on urban discharge forecasts**

**A. GIRES<sup>1</sup>, D. SCHERTZER<sup>1</sup>, I. TCHIGUIRINSKAIA<sup>1</sup>, S. LOVEJOY<sup>2</sup>, C. ONOF<sup>3</sup>,  
C. MAKSIMOVIC<sup>3</sup> & N. SIMOES<sup>3,4</sup>**

<sup>1</sup> *Université Paris-Est, Ecole des Ponts ParisTech, LEESU, 6-8 Av Blaise Pascal Cité Descartes, Marne-la-Vallée, 77455 Cx2, France*  
[auguste.gires@leesu.enpc.fr](mailto:auguste.gires@leesu.enpc.fr)

<sup>2</sup> *McGill University, Physics Department, Montreal, PQ, Canada*

<sup>3</sup> *Imperial College London, Department of Civil and Environmental Engineering, UK*

<sup>4</sup> *Department of Civil Engineering, University of Coimbra, Coimbra, Portugal*

**Abstract** We used a multifractal characterization of two heavy rainfall events in the London area to quantify the uncertainty associated with the rainfall variability at scales smaller than the usual C-band radar resolution ( $1 \text{ km}^2 \times 5 \text{ min}$ ) and how it transfers to sewer discharge forecasts. The radar data are downscaled to a higher resolution with the help of a multifractal cascade whose exponent values correspond to the estimates obtained from the radar data. A hundred downscaled realizations are thus obtained and input into a semi-distributed urban hydrological model. Both probability distributions of the extremes are shown to follow a power-law, which corresponds to a rather high dispersion of the results, and therefore to a large uncertainty. We also discuss the relationship between the respective exponents. In conclusion, we emphasize the corresponding gain obtained by higher resolution radar data.

**Key words** multifractals; rainfall downscaling; urban hydrology; power law

## **INTRODUCTION**

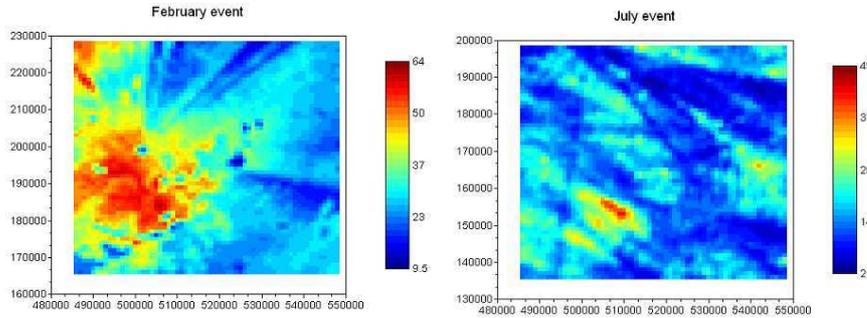
This paper implements multifractal techniques (see Lovejoy & Schertzer, 2007 for a recent review), which are standard tools to analyse and simulate geophysical fields, e.g. rainfall, that are extremely variable over a wide range of scales, and in urban hydrology to quantify the impact of small scale unmeasured rainfall variability. Indeed numerous hydrological studies (see Singh, 1997 for a review) show that rainfall variability has an impact on the modelled flows, which is more or less significant according to the rainfall event and the catchment size and features. In urban areas the effects are enhanced because of greater impervious coefficients and shorter response times (Aronica & Cannarozzo, 2000; Segond *et al.*, 2007).

In this paper we study the mainly urban 910-ha Cranbrook catchment, situated in the London Borough of Redbridge, and known for regular local flooding (Gires *et al.*, 2010b). The rainfall data are obtained from the Nimrod composites, a radar product of the Met Office in the UK (Harrison *et al.*, 2000), whose resolution is 1 km in space and 5 min in time. Here a winter frontal rainfall event (9 February 2009) and a summer convective one (7 July 2009) are investigated. Square areas of size  $64 \text{ km}^2$  during 21 hours, centred on the heaviest rainfalls of these events, are analysed. Figure 1 displays the total rainfall depth for both events. The very localized rainfall cells of the convective July event are clearly visible.

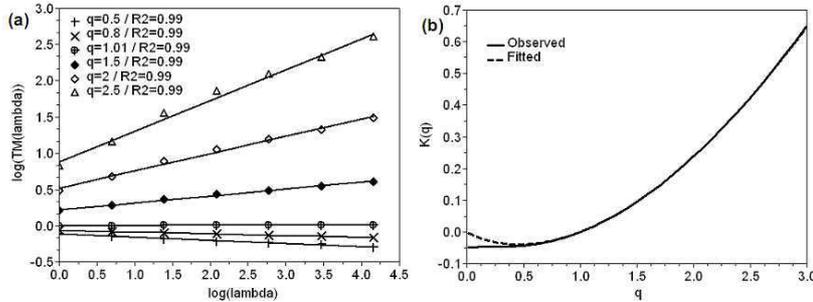
In the next sections, first the multifractal properties of the rainfall fields are analysed for both events. Then an ensemble of realistic spatially downscaled (to the scale of 125 m) rainfall fields is generated with the help of universal multifractal cascades, and the corresponding ensemble of hydrographs is simulated. The variability among these ensembles is used to characterize the uncertainty due to small-scale unmeasured rainfall variability, mainly on the peak flow.

## MULTIFRACTALS AND RAINFALL DOWSCALING

In this section, the multifractal analysis of the rainfall events and the implemented downscaling technique are briefly presented. More details can be found in Gires *et al.* (2010b).



**Fig. 1** Map of the total rainfall depth (in mm) over the studied area for the February (left) and July (right) events. The coordinate system is the British National Grid (unit: m)



**Fig. 2** For the February event: (a) definition of the scaling moment function (equation (1)) and (b) plot of  $K(q)$ .

### Multifractals

In this paper the rainfall field is investigated with the help of universal multifractals, which have been extensively used to analyse geophysical fields that are extremely variable over a wide range of scales (Lovejoy & Schertzer, 2007; Royer *et al.*, 2008; Nykanen, 2008; Gires *et al.*, 2010a). They basically rely on the concept of multiplicative cascades. In that framework the statistical moment of arbitrary  $q$ th power of the rainfall field  $R_\lambda$  at the resolution  $\lambda$  ( $=L/l$ , the ratio between the outer scale of the phenomenon and the observation scale) exhibits a scaling behaviour:

$$\langle R_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad (1)$$

where  $\langle \rangle$  denotes ensemble average (over the different time steps analysed), and  $\approx$  asymptotic equivalence.  $K(q)$  is the scaling moment function and quantifies the scaling variability of the rainfall field. Figure 2(a) displays equation (1) in a log-log plot for the February event. The straight lines (the coefficient of determination are all  $>0.99$ ), whose slopes are  $K(q)$ , indicate a good scaling behaviour and show the relevance of this analysis. Similar curves are found for the July event.  $K(q)$  for the February event is plotted Fig. 2(b).

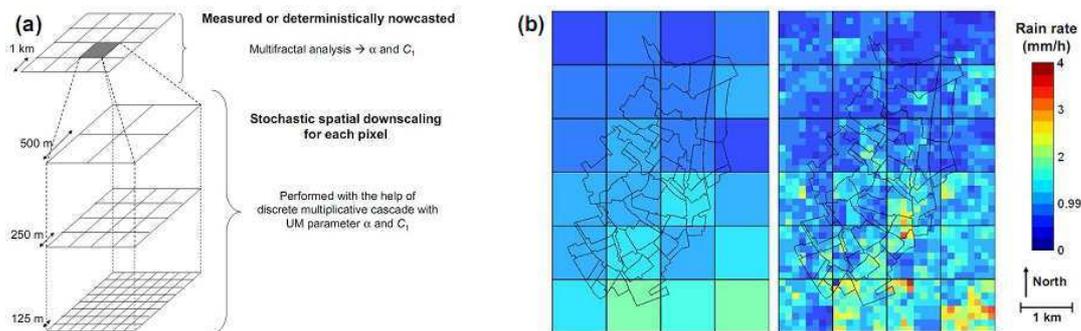
In the specific framework of universal multifractals (Schertzer *et al.*, 1997),  $K(q)$  is described by three scale independent parameters (UM parameters):  $C_1$  the mean intermittency ( $C_1 = 0$  for a uniform field),  $\alpha$  the multifractality index ( $\alpha = 0$  for a monofractal field, and  $\alpha = 2$  for the extreme log-normal case), and  $H$  the non-conservation ( $H = 0$  for a conservative field).  $K(q)$  is given by:

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) + Hq \quad (2)$$

Greater values of  $C_1$  and  $\alpha$  correspond to strong extremes. The parameters are estimated with the help of the DTM technique and spectral slope (Lavallée *et al.*, 1993). Here the numerical values of the UM parameters are quite different for both event. The estimates of  $\alpha$ ,  $C_1$  and  $H$  are 1.62, 0.14 and 0.56, respectively, for the February event and 0.92, 0.49 and 0.57, respectively, for the July event.  $K(q)$  plotted with the estimated UM parameters for the February event is displayed in Fig. 2(b). The agreement with the empirical curve is very good, and the discrepancies for small moments are explained by a multifractal phase transition associated to the influence of the numerous zeros (i.e. a pixel of a time step with no rain) (Gires *et al.*, 2010a). The rainfall events exhibit two different statistical behaviours (Hubert *et al.*, 1993): indeed for the February event  $\alpha > 1$  which indicates that the extreme values are not bounded whereas for the July event  $\alpha < 1$  indicates bounded extreme values. In the multifractal framework, the probability distribution of the extreme values observed on a given dataset are expected to follow a power-law (or equivalently, the statistical moments cannot be estimated for moments greater than the power law exponent) whose exponent strongly depends on  $C_1$ . Here  $C_1$  for the July event is more than three times greater than  $C_1$  for the February event, indicating a lower theoretical exponent. The effect is partially compensated by the greater value of  $\alpha$  for the February event. This means that extreme values will be observed more frequently for the July event.

### Multifractal spatial downscaling of the rainfall field

A stochastic downscaling technique is used to generate realistic high-resolution rainfall fields (Venugopal *et al.*, 1999; Deidda, 2000; Olsson *et al.*, 2001; Ferraris *et al.*, 2002; Rebora *et al.*, 2006). The framework of the cascade process is well suited to this problem (Biaou *et al.*, 2003), since continuing the cascade beyond the observation resolution enables generating a realistic high-resolution rainfall field. More precisely, for each pixel of  $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$  three steps of discrete UM cascades (Pecknold *et al.*, 1993) are simulated with the UM parameters estimated on the available data (i.e. on a range of scale from 1 to 64 km). The final resolution is  $125 \text{ m} \times 125 \text{ m}$ . This process is illustrated in Fig. 3(a). An example of downscaling (which generates rainfall variability inside a radar pixel) over the modelled area for a time step of the February event is displayed in Fig. 3(b). The downscaling of two consecutive time steps is independent, but the obtained variables remain dependant because they are generated from larger structures that are dependent.

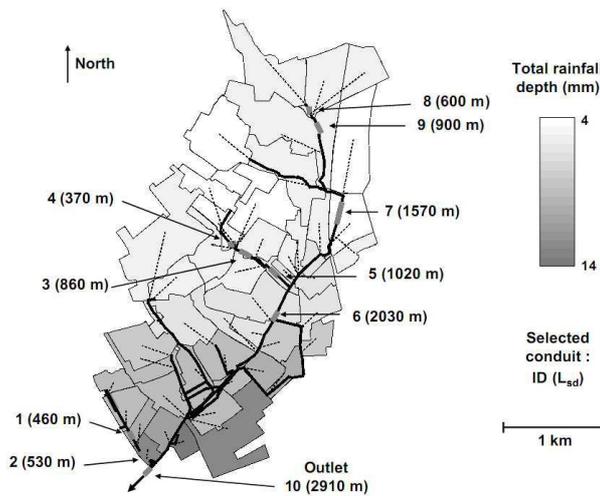


**Fig. 3** Illustration (a) and example over the Cranbrook area for a time step of the February event (b) of the downscaling technique implemented.

### RAINFALL-RUNOFF MODEL

For the Cranbrook catchment, Infoworks CS (Wallingford Software, 2009) was used by Thames Water Utilities (2002) to calibrate a semi-distributed (i.e. the area is divided into 51 sub-catchments of size ranging from 1 to 62 ha) model that includes the major surface water sewers (Fig. 4). Sub-catchments are

defined by sewer nodes and are considered as being homogeneous. Their discharge is computed from the rainfall with the help of a double linear reservoir model. The main parameters are the slope and the length (represented with dashed lines in Fig. 4). The simulation parameters were maintained unchanged for all simulations. The total rainfall depth over the 51 sub-catchments for the July event is also displayed in Fig. 4. It ranges from 4 to 14 mm, with the heaviest rainfall situated in the south near the outlet. A similar distribution with values ranging from 16 to 23 mm is observed for the February event. Conduits drain the water from one (for upstream conduits) or several sub-catchment(s) (for downstream conduits), and their characteristic length  $L_{da}$  is defined as the square root of the area drained by the conduit. In this paper the hydrographs of 10 conduits with  $L_{da}$  ranging from 370 to 2910 m are analysed (Fig. 4). This enables us to study the impact of the size of the studied area on the uncertainty associated with small scale rainfall variability.



**Fig. 4** The Cranbrook Catchment and its underground sewer system. The total rainfall depth over the 51 sub-catchments for the July event is also displayed.

## QUANTIFYING THE IMPACT OF SMALL-SCALE UNMEASURED RAINFALL VARIABILITY

An ensemble of 100 realistic downscaled rainfall fields and the corresponding ensemble of hydrographs were simulated. The uncertainty associated with small-scale unmeasured rainfall variability is quantified by investigating the variability among the ensembles.

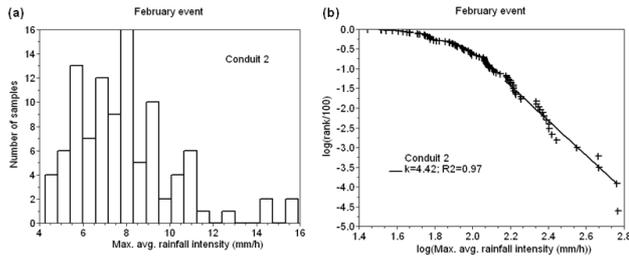
### Variability among the ensemble of rainfall fields

To give an insight of the uncertainty on the rainfall fields, for each conduit we evaluated the maximum average rainfall intensity ( $R_{max}$ ) over the drained area for each sample of downscaled fields. The histogram of these values (one per sample) for the conduit 2 and the February event is shown in Fig. 5(a). Similar curves are found for the other conduits and for the July event. It appears that the extreme cases (i.e. the right part of the histogram) exhibit a power-law behaviour of the form:

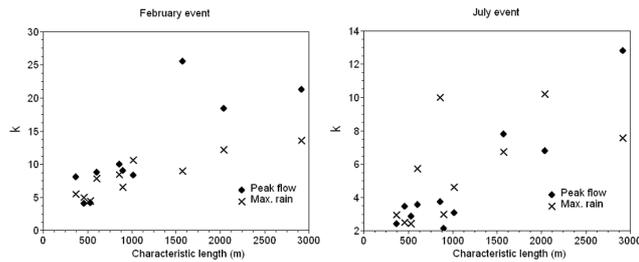
$$\Pr(R_{max} > x) \approx x^{-k} \quad (3)$$

Indeed, this relation in a log-log plot is displayed in Fig 5(b), and the determination coefficient of the straight line describing the fall-off of the probability distribution is very good ( $0.98 \pm 0.01$  and  $0.97 \pm 0.01$  for the February and the July event, respectively, according to the conduit). The values  $k_{rain}$  found are plotted against  $L_{da}$  in Fig. 6. First it appears that  $k_{rain}$  increases with  $L_{da}$ , which implies a thinner probability fall-off for larger drained area. It means that the effect of small-scale rainfall variability is damped for larger area, which was expected. Second, in general  $k_{rain}$  is smaller for the July event,

which reflects the fact that the variability among the ensemble of downscaled rainfall fields is greater for the convective event than for the frontal event, which was expected due to greater values of  $C_1$ .



**Fig. 5** Histograms (a) and determination curve of  $k_{rain}$  (b) for the maximum average rainfall rate of the conduit 2 for the February event.



**Fig. 6**  $k_{rain}$  and  $k_{flow}$  vs.  $L_{da}$  for the February event (right) and the July event (left).

## Variability among the ensemble of simulated peak flow

A similar analysis was performed on the ensemble of simulated hydrographs. For each selected conduit, the peak flow and its time of occurrence was retrieved. The first point is that no significant influence was found on the time of occurrence. Concerning the peak flow, as for the maximum average rainfall, the probability distribution exhibits power-law fall-off (curves similar to Fig. 5(b) but for the peak flow are found, with  $R^2$  equal to  $0.97 \pm 0.01$  for both events according to the conduit). The power-law behaviour means that the uncertainty on the simulated peak flow associated to unmeasured small-scale rainfall variability cannot be neglected. It is striking to see that the uncertainties are significant despite the coarse resolution of the hydrological model (the average square root of sub-catchment area is 380 m) with regard to the resolution of the downscaled rainfall fields (125 m). Nevertheless further investigations with hydrological models with greater spatial resolution and taking into account the interaction between surface flow and the sewer system (El Tabach *et al.*, 2009; Maksimovic *et al.*, 2009) would be needed to fully take advantage of the spatial downscaling. Figure 6 displays the exponent  $k_{flow}$  vs the characteristic length of the conduit  $L_{da}$  for both events. As for  $k_{rain}$ ,  $k_{flow}$  tends to increase with  $L_{da}$ . Independently of the event and  $L_{da}$ , the variability among the ensemble of rainfall fields is transferred to the ensemble of peak flow with the same qualitative features (i.e. a power-law fall-off of the probability distribution). Quantitatively it appears that  $k_{flow}$  is often (i.e. most of the conduits for the February event and some for the July event) greater than  $k_{rain}$ , which would mean that the rainfall–runoff process slightly dampens the variability of the ensemble of rainfall fields. Finally it appears that the variability observed for the July event is similar to the one observed up to 1 km for the February event.

## CONCLUSION

Multifractal cascades are used to generate an ensemble of realistic downscaled rainfall fields of a convective and a frontal rainfall event (after validating this framework for both events). The probability distribution of the generated rainfall extremes exhibits a power-law fall-off, which is also retrieved on the peak flow of the corresponding simulated ensemble of hydrographs. It means that the uncertainty

associated with small-scale rainfall variability cannot be neglected. As a consequence it is recommended to either take into account this uncertainty in the real-time management of sewer networks or to improve the resolution of rainfall data in urban areas by implementing X-band radars whose spatial resolution is roughly 100 m. Concerning the numerical values of the characteristic exponents of the power-law fall-off it seems that they are greater for peak flow than for rainfall, and for larger areas. They are greater for the frontal event than for the convective one. Nevertheless further investigations with other case studies and rainfall events are required to clarify this point.

**Acknowledgements** A. Gires greatly acknowledges the Université Paris-Est and Imperial College London for financial and partial financial support. A. Gires, D. Schertzer and I. Tchiguirinskaia greatly acknowledge partial support from the Chair “Hydrology for Resilient Cities” (sponsored by Veolia) of Ecole des Ponts ParisTech (<http://www.enpc.fr/hydrologie-pour-une-ville-resiliente>). The authors thank the Met Office for the Nimrod data, MWH Soft and Thames Water Utilities Ltd. N. Simões acknowledges the financial support from the Fundação para a Ciência e Tecnologia – Ministério para a Ciência, Tecnologia e Ensino Superior, Portugal [SFRH/BD/37797/2007].

## REFERENCES

- Aronica, G. & Cannarozzo M. (2000) Studying the hydrological response of urban catchments using a semi-distributed linear non-linear model. *J. Hydrol.* 238, 35–43.
- Biaou, A., Hubert, P., Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I. & Bendjoudi, H. (2003) Fractals, multifractals et prévision des précipitations. *Sud Sciences et Technologies* 10, 10–15.
- Deidda, R. (2000) Rainfall downscaling in a space-time multifractal framework, *Water Resour. Res.* 36, 1779–1794.
- El Tabach, E., Tchiguirinskaia, I., Mahmood, O. & Schertzer, D. (2009) Multi-Hydro: a spatially distributed numerical model to assess and manage runoff processes in peri-urban watersheds, Proceedings Final conference of the COST Action C22 Urban Flood Management, Paris 26/27.11.2009, France.
- Ferraris, L., Gabellani, S., Rebora, N. & Provenzale, A. (2003) A comparison of stochastic models for spatial rainfall downscaling. *Water Resour. Res.* 39, 1368–1384.
- Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. & Lovejoy, S. (2010a) Analyses multifractales et spatio-temporelles des précipitations du modèle Méso-NH et des données radar. *Hydrol. Sci. J.* 56(3), 380–396.
- Gires, A., Onof, C., Maksimovic, C., Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I. & Simoes N. (2010b) Quantifying the impact of small scale unmeasured rainfall variability on urban hydrology through multifractal downscaling: a case study. *J. Hydrol.* (in press).
- Harrison, D.L., Driscoll, S.J. & Kitchen, M. (2000) Improving precipitation estimates from weather radar using quality control and correction techniques, *Met Appl* 7(2), 135–144.
- Hubert, P., Tessier, Y., Lovejoy, S., Schertzer, D., Schmitt, F., Ladoy, P., Carbonnel, J.P. & Violette, S. (1993) Multifractals and extrem rainfall events. *Geophys. Lett.* 20, 931–934.
- Lavallée, D., Lovejoy, S. & Ladoy, P. (1993) Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. In: *Fractals in geography* (ed. By L. De Cola & N. Lam), 158–192. Prentice-Hall, New York, USA.
- Lovejoy, S. & Schertzer, D. (2007) Scale, scaling and multifractals in geophysics: twenty years on. In: *Nonlinear Dynamics in Geosciences* (ed. By A. A. Tsonis & J. Elsner), 311–337. Springer.
- Maksimović, Č., Prodanović, D., Boonya-aroonnet, S., Leitão, J. P., Djordjević, S. & Allitt, R. (2009) Overland flow and pathway analysis for modelling of urban pluvial flooding. *J. Hydraul. Res.* 47(4), 512–523.
- Nykanen, D.K. (2008) Linkages between orographic forcing and the scaling properties of convective rainfall in mountainous regions, *J. Hydromet.* 9, 327–347.
- Pecknold, S., Lovejoy, S., Schertzer, D., Hooge, C. & Malouin, J. F. (1993) The simulation of universal multifractals. In: *Cellular Automata: Prospects in astrophysical applications* (ed. by J. M. Perdag & A. Lejeune), 228–267. World Scientific.
- Olsson, J., Uvo, C. B. & Jinno, K. (2001) Statistical atmospheric downscaling of short-term extreme rainfall by neural networks, *Phys. Chem. Earth* (B) 26(9), 695–700.
- Pandey, G., Lovejoy, S. & Schertzer, D. (1998) Multifractal analysis including extremes of daily river flow series for basins one to a million square kilometres. *J. Hydrol.* 208(1–2), 62–81.
- Rebora, N., Ferraris, L., von Hardenberg, J. & Provenzale, A. (2006) The RainFARM: Downscaling LAM predictions by a Filtered Autoregressive Model, *J. Hydromet.* 7, 724–737.
- Royer, J.-F., Biaou, A., Chauvin, F., Schertzer, D. & Lovejoy, S. (2008) Multifractal analysis of the evolution of simulated precipitation over France in a climate scenario, *C. R. Geoscience* 92(D8), 9693–9714.
- Schertzer, D., Lovejoy, S., Schmitt, F., Tchiguirinskaia, I., & Marsan, D. (1997) Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency. *Fractals* 5(3), 427–471.
- Segond, M.-L., Wheeler, H.S. & Onof, C. (2007) The significance of small-scale spatial rainfall variability on runoff modelling, *J. Hydrol.* 173, 309–326.
- Singh V.P. (1997) Effect of spatial and temporal variability in rainfall and watershed characteristics on stream flow hydrograph. *Hydrol. Processes* 11, 1649–1669.
- Thames Water Utilities Ltd Engineering (2002) Surface water model of Cranbrook and Seven Kings Water for London Borough of Redbridge Appendix B, Model Development Report.
- Venugopal, V., Fofoula Georgiou, E. & Sapozhnikov, V. (1999) A space-time downscaling model for rainfall. *J. Geophys. Res.* 104(D16), 19705–19721.
- Wallingford Software (2009) Infoworks CS Help documentation.

## **7.7. Annexe 7 : «Multifractal analysis of a semi-distributed urban hydrological model» (Urban Water Journal)**

*Urban Water Journal*  
2012, 1–14, 1First article



### RESEARCH ARTICLE

#### **Multifractal analysis of a semi-distributed urban hydrological model**

A. Gires<sup>a</sup>, I. Tchiguirinskaia<sup>a</sup>, D. Schertzer<sup>a</sup> and S. Lovejoy<sup>b</sup>

<sup>a</sup>University Paris-Est, Ecole des Ponts ParisTech, Marne-la-Vallée, France; <sup>b</sup>McGill University, Physics department, Montreal, PQ, Canada

(Received 6 December 2011; final version received 25 July 2012)

The aim of this paper is to quantify the sensitivity of an operational semi-distributed urban hydrological/hydraulic model to rainfall variability. A 3400 ha urban area located in Seine-Saint-Denis (North-East of Paris, France), is used as a case study. First, spatio-temporal multifractal downscaling techniques are implemented on the C-band radar data (whose resolution is 1 km in space and 5 min in time) of the 9 February 2009 rainfall event to quantify the uncertainty associated with small scale unmeasured rainfall variability. It appears that the variability should not be neglected. This finding highlights the need to implement X-band radars (whose resolution is hectometric) in urban areas. Then, multifractal tools are used on both rainfall and simulated discharges that also exhibit a scaling behaviour. It appears that the rainfall drainage system basically transmits the rainfall variability without damping it, at least in terms of multifractal statistics.

**Keywords:** rainfall variability; urban hydrology; multifractals; spatio-temporal downscaling

### **1) Introduction**

Over the last decades, real time control (RTC) of urban drainage systems has experienced a fast development (see Schütze et al., 2004 for a review). Its traditional aim was to limit urban flooding and overflow. In the context of stronger regulations such as the Water Framework Directive (Council of European Communities, 2000), RTC is more and more dedicated to reducing urban pollution. This implies for instance limiting combined sewer overflows, which are a major source of river pollution (Pléau et al., 2005), or controlling discharge to optimize the efficiency of treatment plants (Schütze et al., 2004). In order to achieve these objectives RTC processes usually involve the use of urban hydrologic-hydraulic models.

The aim of this paper is to use the multifractal framework to test the sensitivity of such models to the spatio-temporal variability of the rainfall input. Universal multifractals (UM), which rely on concept of multiplicative cascades, are a standard statistical tool to analyze and simulate geophysical processes extremely variable over a wide range of scales with the help of a reduced number of parameters (see Lovejoy and Schertzer, 2007 for a recent review; Schertzer and Lovejoy, 1987, 1997). Such tools have been implemented on both rainfall and river discharge data. The comparison of their characteristic parameters (Tessier et al, 1996; Pandey et al., 1998; Labat et al., 2002; Tchiguirinskaia et al., 2007) and the behaviour of their extremes (Schertzer et al., 2006) have enabled to improve the understanding of the rainfall/runoff relationship. To our knowledge these tools have not been implemented in the specific context of urban hydrology, where the impact of rainfall variability on discharge is enhanced. Indeed urban catchments are smaller with shorter

response time, and the coefficients of imperviousness are greater leading to a greater proportion of quickly effective rainfall (Aronica and Cannarozzo, 2000; Segond et al., 2007).

In this paper we use an operational urban rainfall/runoff model that was calibrated on a 3,400 ha dominantly urban catchment, located in the county of Seine-Saint-Denis (North-East of Paris, France). With the use of radar rainfall estimate, this county has been implementing real time control of sewer networks since 1986 (Andrieux and Jacquet. 1987, Browne et al. 1998) to reduce overflow and pollution problems. The rainfall event of February 9<sup>th</sup>, 2009 is analyzed in this paper.

The paper is organized as follows. First the multifractal methodology is briefly presented (section 2). Then the rainfall event and the operational urban rainfall/runoff model are presented (section 3). The uncertainties associated with small scales rainfall variability are analysed in section 4. A focus on the variability occurring at scales smaller than 1 km x 1 km x 5 min, which is the usual resolution available with standard C-band radar networks, is made. Finally multifractal analysis on both rainfall and simulated discharges are performed to analyse whether the model reproduces or not the observed rainfall variability (section 5).

## 2) Multifractal methodology

The multifractal framework is presented with the help of rainfall fields, but it can be used to study or simulate any other geophysical field that is extremely variable over wide range of scales. The rainfall support, i.e. the portion of the field where it rains, can be characterized with the help of a fractal dimension  $d_F$  (Hubert and Carbonnel, 1988; Olson et al., 1993). Indeed the number of boxes  $N_\lambda$  needed to cover the rainfall support at a resolution  $\lambda$  ( $=L/l$ , the ratio between the outer scale  $L$  and the observation scale  $l$ ) scales like:

$$N_\lambda \propto \lambda^{d_F} \quad (1)$$

The fractal co-dimension  $c_F$  is defined as the difference ( $d-d_F$ ) where  $d$  is the dimension of the embedding space ( $d=1$  for time series and  $d=2$  for maps). It appears that this fractal dimension decreases when the threshold defining the occurrence of rainfall increases (Lovejoy et al., 1987; Hubert et al., 1995). Thus a single fractal dimension is not enough to characterize rainfall process, and an infinite number of fractal dimensions are needed. In the framework of multifractals, one expects the field  $R_\lambda$  to behave as  $\lambda^\gamma$  where  $\gamma$  is called ‘‘singularity’’ and is a scale invariant notion. The statistical properties such as the probability of exceeding not a threshold but a singularity (Eq. 2) or a statistical moment of order  $q$  of the field  $R_\lambda$  (Eq. 3) are power-law related to the resolution (Schertzer and Lovejoy, 1987):

$$\Pr(R_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad (2)$$

$$\langle R_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad (3)$$

Where  $c(\gamma)$  and  $K(q)$  are respectively the co-dimension function and the moment scaling function. These functions are related by the Legendre transform, and fully characterize the scaling variability of the studied process. When  $c(\gamma) < d$ ,  $c(\gamma)$  can be interpreted as the fractal co-dimension of the support of the field where it exceeds  $\lambda^\gamma$ .

For conservative Universal Multifractals (UM) (Schertzer and Lovejoy, 1987, 1997),  $K(q)$  is characterized with the help of only 2 parameters:

- $C_1$ , the mean intermittency co-dimension, which measures the clustering (intermittency) of the (average) intensity at smaller and smaller scales ( $C_1=0$  for a homogeneous field);
- $\alpha$ , the multifractality index ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ), which measures the clustering variability with respect to intensity level.

The functions  $c(\gamma)$  and  $K(q)$  are then given by:

$$c(\gamma) = \frac{C_1}{\alpha - 1} \left( \frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha'} \quad (4)$$

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) \quad (5)$$

where  $1/\alpha' + 1/\alpha = 1$ . The DTM technique (Lavallée et al., 1993) was used to estimate the UM parameters.

In this paper, discrete multiplicative cascades are implemented to simulate UM (Pecknold et al., 1993). To achieve this, at each step of the cascade process, a structure such as a time step (in 1D) or a pixel (in 2D) is divided into  $\lambda_0$  steps (in 1D) or  $\lambda_0^2$  (in 2D) pixels respectively. The scale ratio  $\lambda_0 = 2$  is commonly used, although this is not mandatory. The value affected to the sub-structure is the one of the parent structure multiplied by a random factor, chosen so that Eq. 3 and 5 remain valid. As a consequence, after  $n$  steps (the resolution of the cascade is  $\lambda = \lambda_0^n$ ) the value of a given structure is the product of the random factors of the  $n$  previous steps of the cascade. Space and time can be considered at once in a cascade process. In the simplest space-time model (Marsan et al., 1996; Deidda, 2000; Biaoou et al., 2003; Gires et al., 2011a, 2012a), when the spatial resolution is divided by  $\lambda_x$ , then the temporal one is divided by  $\lambda_t = \lambda_x^{H_t}$ , where  $H_t$  is the scaling anisotropy exponent between space and time (with  $H_t=1/3$  for the rainfall). Thus a common choice is  $\lambda_x = 3$  and  $\lambda_t = 2$  ( $3^{1-1/3} \approx 2.08$ ), which means that a structure is divided into 18 sub-structures at each step.

### 3) The case study

#### 3.1) 9<sup>th</sup> February 2009 rainfall event

The rainfall event analyzed in this paper occurred in the Paris area on February 9<sup>th</sup>, 2009. The data comes from the C-band radar of Trappes operated by Météo-France, and located west of Paris at about 45 km from the studied catchment. The Météo-France processing includes correction of ground clutter, partial beam blocking and vertical profile of reflectivity effects (Tabary, 2007; Tabary et al., 2007). The resolution of the rainfall estimates is 1 km in space and 5 min in time. A square area of size 256 by 256 km centred on the radar during about 13 hours is analyzed. Figure 1 displays the estimated total rainfall depth (in mm) observed during this event. Characteristic radial features are visible and the results might be sensitive to them. Nevertheless the studied catchment (black box on Fig. 1), being close to the radar, should not be too affected. The use of dense X-band radar network could help overcome these difficulties, but such data are not available at the moment.

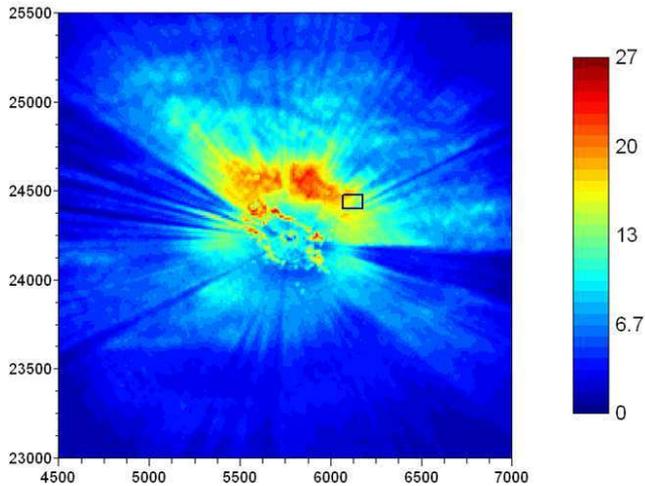


Figure 1. Map of the total rainfall depth (in mm) during the rainfall event of February 9<sup>th</sup>, 2009. The area is of size 256 Km, and the coordinate system is the “extended Lambert II” system (unit = hm). The Meteo-France C-band radar of Trappes is located in the centre of the image. The studied catchment is indicated by the black box.

The validity of the multifractal framework is verified by displaying the statistical moments vs. the resolution for the rainfall data (see Eq. 3) in a log-log plot (Fig. 2a). The scaling behaviour is good over two distinct ranges of scales: 1-16 km (the coefficient of determination  $R^2$  of the straight lines is equal to 0.96 on average) and 16-256 km (average  $R^2$  equal to 0.97). Such scaling break was observed for other rainfall events in the Paris area (Tchiguirinskaia et al., 2011) or for a heavy rainfall event that occurred in the South of France on September 5-9<sup>th</sup>, 2005 (Gires et al., 2011a). The DTM technique (Lavallée et al., 1993) was implemented to estimate the UM parameters.  $C_1$  and  $\alpha$  were found to be equal respectively to 0.28 and 1.08 for large scales, and 0.056 and 1.52 for small scales. The empirical and theoretical (Eq. 5, with the estimated UM parameters) moment scaling functions  $K(q)$  are plotted in Fig. 2b. The theoretical fitting is very good, except for small moments where the presence of numerous zeros generates a multifractal phase transition that biases the empirical estimate of  $K(q)$ . This behaviour is well retrieved by simply implementing a threshold on a simulated multifractal field (see Gires et al., 2012b for more details). Let us mention that these small moments are not used in the DTM technique, so that in that case the UM parameters estimates are not significantly affected, especially for the small scales, which are used in the downscaling technique.

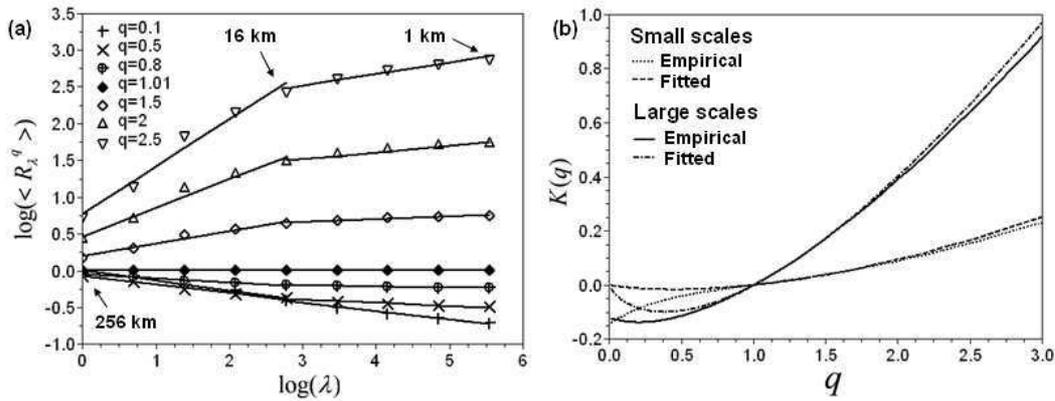


Figure 2. (1) Illustration of the definition of the scaling moment function (Eq. 3) for the rainfall event of February 9<sup>th</sup>, 2009. (2) Empirical and theoretically fitted  $K(q)$  functions for both small and large scales.

### 3.2) The urban hydrologic/hydraulic urban model

The studied catchment is a predominantly urban area of approximately 3,400 ha located in the French county of Seine-Saint-Denis (North-East of Paris). The calibrated hydrologic/hydraulic model of the area (displayed in Fig. 3) was provided by the “Direction Eau et Assainissement de Seine-Saint-Denis” (the local authority in charge of urban drainage in this area). It is used operationally. The outlet is located in the West of the area. The semi-distributed model Canoe (Allison, 2005) was calibrated on this area. The catchment is divided into 198 sub-catchments which are considered as homogenous. Their size ranges from 0.9 to 92 ha, except for two of size 347 and 404 ha. The average size is 17 ha. The mean coefficient of imperviousness is 41%, with values ranging from 0 to 95%. The rainfall / runoff model for a sub-catchment is a linear reservoir. The major sewers are modelled leading to 69 km of links. Water flow in links is represented with the help of Saint-Venant equations. A basic feature of this area is its flatness. Indeed the mean slope of the links is about 0.009 m/m. The total rainfall depth during the event ranges from 19 mm in the North-West corner to 9 mm in the South East corner.

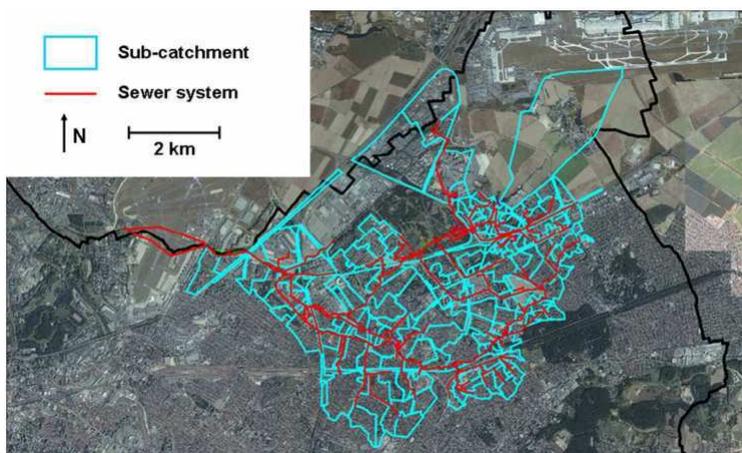


Figure 3. The studied portion of the Seine-Saint-Denis county and the modelled underground sewer system (this figure was obtained with the help of Julien Richard).

The modelled network exhibits a scaling behaviour and a fractal dimension can be computed with the help of the box counting method. To achieve this, a grid of pixels of size 20 m x 20 m was generated, and the pixels intersecting a link are considered to represent the network. A matrix of size 256 x 256 is then extracted (Fig. 4a) and the fractal dimension  $d_F$  is computed with the help of Eq. 1 (Fig. 4b displays this equation in a log-log plot). The scaling behaviour is good on two distinct ranges of scales separated by a break. Indeed the coefficients of determination of the straight lines, whose slopes are the fractal dimensions  $d_F$ , are equal to 0.994 and 0.999 for respectively small and large scales. For scales ranging from 20 to 160 m,  $d_F$  is equal to 1.09 which is quite close to 1. It implies that over small scales the fractal dimension describes only the linear structure of individual pipes and not the structure of the whole sewer system. The size of 20 m x 20 m of the pixels of the original grid is likely to be too small with regards to the resolution of the modelled sewer network. For scales ranging from 160 m to 5 km,  $d_F$  is found to be equal to 1.68. The pluvial drainage network of the Val-de-Marne County (South-East of Paris) exhibits a similar behaviour with a fractal dimension equal to 1.67 for scales ranging from 290 m to 18 km (Sarkis, 2008). Such scaling behaviour is also observed on natural river networks but with different characteristic parameter  $d_F$ . For instance Takayasu (1990) implemented the box counting technique on the Amazon and Nile Rivers and found fractal dimensions equal to respectively 1.85 and 1.4.

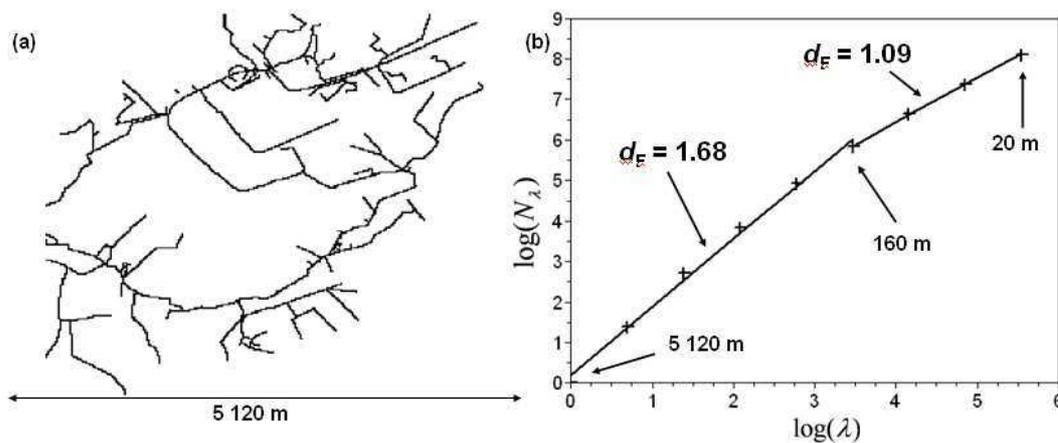


Figure 4. (a) Representation of a portion of the modelled sewer network with the help of boxes of 20 m size. (b) Determination of the fractal dimension of the sewer network with the help of box counting method (Eq. 1)

#### 4) Quantifying the uncertainty associated with small scale rainfall variability

The aim of this section is to use the multifractal properties of rainfall to assess the uncertainty on sewer discharge associated with small scale rainfall variability, especially the one occurring at scales smaller than the C-band radar resolution ( $1 \text{ km}^2 \times 5 \text{ min}$ ), which is commonly provided by national meteorological services. More precisely the sensitivity of the semi-distributed urban hydrological/hydraulic model to rainfall resolution is tested. Assuming that the model properly represents the rainfall/runoff relation, it corresponds to the investigated uncertainty. The methodology implemented here is based on Gires et al. (2011b, 2012a). It basically consists in:

- (i) Generating an ensemble of 100 realistic samples of stochastically downscaled rainfall field. The downscaling is achieved by stochastically continuing the space-time cascade process that was established over the available range of scales (section 3.1). Discrete cascades are implemented, with the UM parameters found for the small scales. The final resolution of the field is  $111 \text{ m} \times 111 \text{ m} \times 1.25 \text{ min}$ .
- (ii) Simulating the corresponding ensemble of hydrographs with the help of the calibrated hydrological/hydraulic model (section 3.2). It should be mentioned that for technical reasons the temporal resolution is nevertheless degraded to the original 5 min.

The variability among these ensembles, which reflects the uncertainty associated with small scale rainfall variability, is then analyzed.

Two types of rainfall fields are used as initial input for the downscaling process. The first case corresponds to the raw radar estimates whose resolution is  $1 \text{ km} \times 1 \text{ km} \times 5 \text{ min}$ . For the second case the same radar field was up-scaled (in space and time) to the resolution of  $9 \text{ km} \times 9 \text{ km} \times 20 \text{ min}$ . As a consequence, 2 steps of space-time cascades are implemented in the first case, and 4 steps are implemented in the second one. Figure 5 illustrates the downscaling of the rainfall field for both cases for an arbitrary time step. The same colour palette was used for the radar and downscaled fields to facilitate the comparison between the two. The variability created inside each radar pixel is clearly visible. The radar rainfall pixels are visible, and the discrete downscaling preserves this pixelization. The use of a continuous cascade (e.g., Schertzer et al., 1987) would have smoothed the spatial structure of the rainfall. As it can be seen on Fig. 5, in the second case a pixel of  $9 \text{ km} \times 9 \text{ km}$  almost covers the studied catchment, which means that the rainfall could be basically considered as uniform (in space). It should be mentioned that the downscaling technique ensures conservation on average. Indeed in the first case the average rainfall depth is equal to  $15.1 \pm 0.01 \text{ mm}$  according to the sample and in the second case it is equal to  $15.1 \pm 0.2 \text{ mm}$ . This means that the observed variability does not come from differences in the total rainfall amounts but from the differences in space-time rainfall distribution. The results of the first case are then compared with the ones of a similar study performed on a 900 ha urban area in Cranbrook in the North of London (see Gires et al., 2012a for more details). The rainfall event analysed in this case study occurred on the same day of February 9<sup>th</sup>, 2009. The data used are the Nimrod radar mosaics, a product of United-Kingdom Met Office.

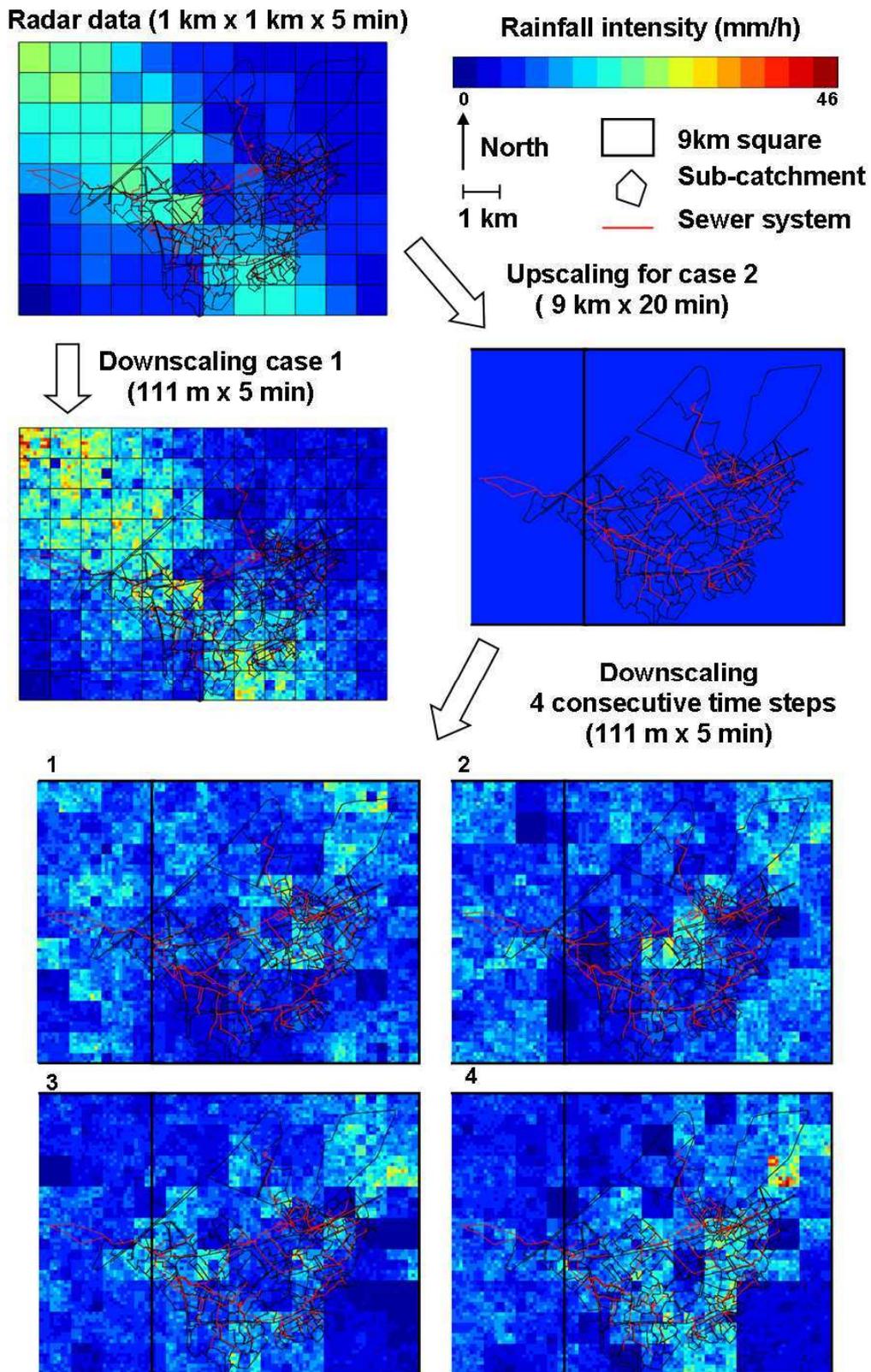


Figure 5. Illustration of the space-time downscaled rainfall fields (from a resolution of  $1 \text{ km}^2 \times 5 \text{ min}$ , and from one of  $9 \text{ km} \times 9 \text{ km} \times 20 \text{ min}$ ) over the studied area for an arbitrary time step.

Figure 6a displays the ensemble of hydrographs for both cases (in red for the first case and in black for the second case) for link 87 which is located in the West of the catchment. It appears that although exhibiting a similar overall pattern, the details of the curves are different. To clarify the disparities among these details, which are due to the uncertainty associated with small-scale rainfall variability, the 10 and 90% quantiles were evaluated for each time step. For both cases, the obtained curves (denoted respectively  $Q_{0.1}$  and  $Q_{0.9}$ ), are plotted with  $Q_{\text{radar}}$  (the flow simulated with the radar data at resolution 1 km x 1 km x 5 min and 9 km x 9 km x 20 min as rainfall input for the first and second cases respectively) in Fig. 6b. This figure provides a visual insight into the uncertainty, which is visible on the whole hydrograph and tends to increase with flow. As expected the curves for the first case are embedded in the ones of the second case, which reflects the fact that the uncertainty is greater for the reduced initial rainfall resolution (i.e. with 9 km x 9 km x 20 min grid size).

A more quantitative approach is implemented for the peak flow for both cases. First the time of occurrence  $t_{PF, \text{radar}}$  of the peak flow with the radar rainfall input is retrieved. Then for each simulation the flow at  $t_{PF, \text{radar}}$  is evaluated, and the corresponding histogram is plotted. This is illustrated in Fig. 6c and 6d for respectively the first and second cases, and with the same scale, so that they can be compared. As expected the histogram is much wider in the second case. The variability among the ensemble is quantified with the help of a pseudo coefficient of variation, defined as:

$$CV'_{(1)} = \frac{Q_{0.9}(t_{PF, \text{radar}}) - Q_{0.1}(t_{PF, \text{radar}})}{2 * PF_{\text{radar}}} \quad (6)$$

The corresponding indicator for the second case ( $CV'_{(2)}$ ) is also evaluated.  $CV'$  characterizes the middle portion of the histogram. A greater  $CV'$  corresponds to greater variability among the ensemble of peak flows and therefore to stronger uncertainty.

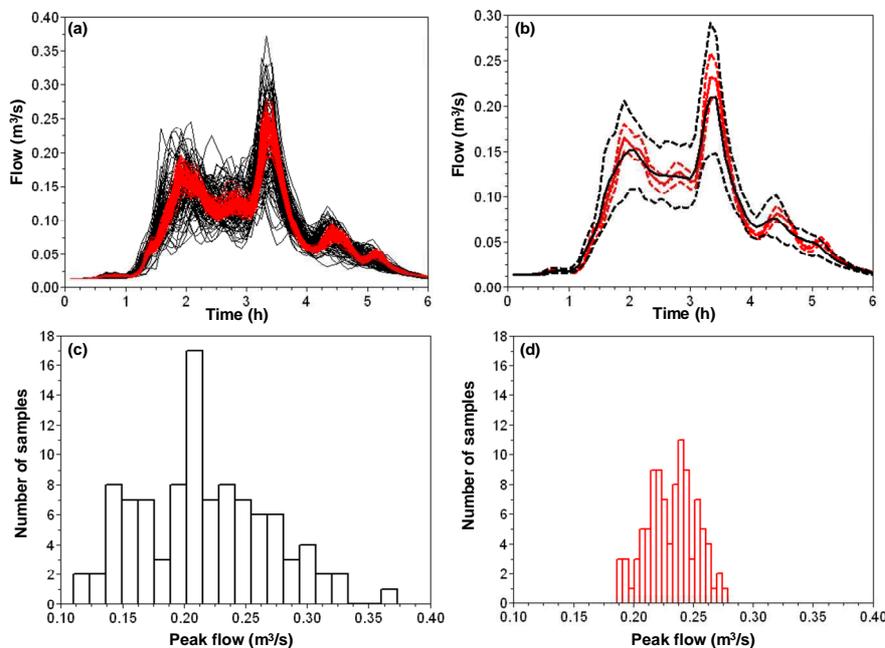


Figure 6. All the graphs are for link 87. The red and black curves correspond to the first and second cases respectively. (a) 100 samples of simulated hydrographs. (b) Hydrographs  $Q_{0.9}$  (dash),  $Q_{0.1}$  (dash), and  $Q_{\text{radar}}$  (solid). (c) and (d) Histogram of the peak flow of the 100 samples.

A map of the coefficient  $CV'_{(1)}$  is shown in Fig. 7. It appears that as expected  $CV'$  tends to decrease with downstream links, which reflects the fact that the uncertainty associated with small scale unmeasured rainfall variability becomes smaller with greater drained area.  $CV'$  is almost negligible for the outlet and reaches approximately 25 % for many upstream links. It should be noted that relatively great values are found for upstream links despite the coarse resolution of the model (the square root of the average catchment area is 412 m) with respect to the resolution of the downscaled rainfall field (111 m), which in itself does not enable to fully represent rainfall variability. These results are similar to the ones obtained on the London case study where  $CV'$  was equal to 3.4% for the outlet (the size of the studied area is roughly four times smaller than the one of the Paris case study) and reached 20% for upstream conduits, with an increase in between according the area drained by the conduit (see Fig. 10 of Gires et al., 2012a for a visual illustration). Concerning  $CV'_{(2)}$  a map exhibiting a similar pattern, but with greater values, is obtained. To clarify this point Fig. 8 displays  $CV'_{(1)}$  and  $CV'_{(2)}$  in a scatter plot. Although no clear tendency is visible on the graph, it appears that  $CV'_{(2)}$  is more than twice greater than  $CV'_{(1)}$ . Figure 8 enables to quantify the improvement provided by the use of a C-band radar whose resolution is 1 km x 1 km x 5 min rather than an almost uniform rainfall over the catchment. It is interesting to note that the values of  $CV'$  found are of the same order of magnitude as the relative error (in absolute value) made on the peak flow by inputting the radar rainfall at a resolution of 9 km x 9 km x 20 min rather than the available one of 1 km x 1 km x 5 min. Indeed this relative error is greater than 10% and 20% for more than respectively a third and a tenth of the modelled links. The use of X-band radar whose spatial resolution is about 100 m would enable to limit the uncertainty assessed with  $CV'_{(1)}$ . This shows that the uncertainty associated with small scale rainfall variability cannot be neglected and should therefore be taken into account in real time management of storm water sewer networks.

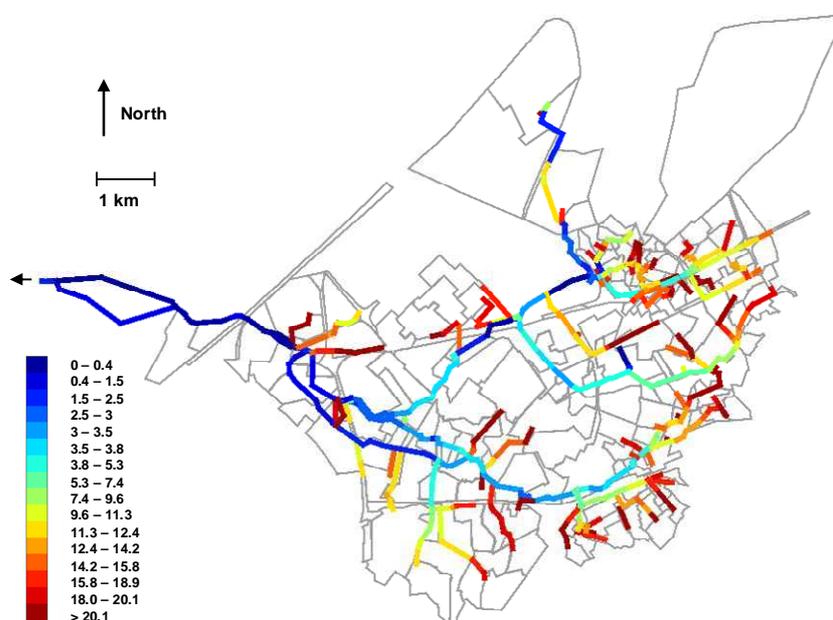


Figure 7. Map of  $CV'_{(1)}$  for all the modelled links.

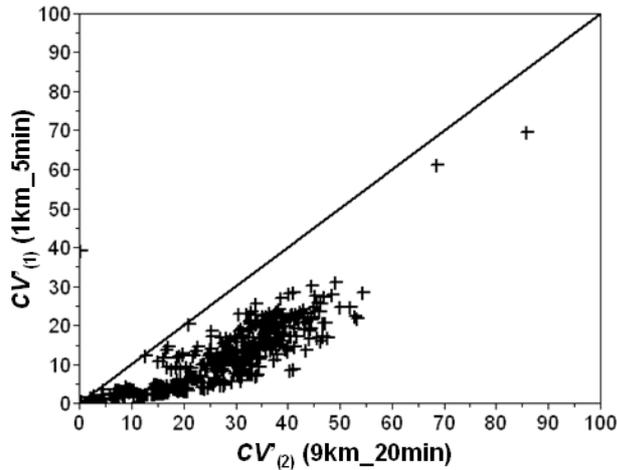


Figure 8. Scatter plot of  $CV'_{(1)}$  and  $CV'_{(2)}$

Although the aim of this section was to test the sensitivity of the model to rainfall resolution, its validity was also verified. To achieve that, the water level measurement by a gauge located in the storage basin 1 (see Fig. 9b for a scheme of the local configuration) is compared with the water level simulated in the large link that represents it (Fig. 9c). The water reaching this link comes from a 256 ha area, which is divided into 4 sub-catchments in the model (Fig. 9a). It should be mentioned that these sub-catchments are among the greatest, which may affect the reliability of the simulated flow. As it can be seen on Fig 9b, the filling of the basins strongly depends on the management of the two gates. Figure 9d shows the temporal evolution of the measured water level. Two ways of managing the gates are tested: the standard one (this is the one usually used in this study, in blue on Fig. 9d), and the one that was actually implemented during this event (in red on Fig 9d). The overall behaviour is quite similar. The differences are mainly visible in the timing of the beginning of the water level increase and of the opening of gate 1 that triggers the sharp decrease in water level at the end of the simulation. These events are more realistically reproduced when the actual management of the gates is implemented. In the following of this section, we will only discuss this case. The increase of water level is rather well represented by the model. Nevertheless, after 5.5h of simulation the model simulates first a decreasing and then steady water level, whereas the measurements indicate an increasing one, although increasing slower than during the period of first 5.5h. This is likely to be due to the differences between the actual configuration of the basins (Fig. 9b) and its representation in the model (Fig. 9c), which does not enable to accurately simulate flow. Indeed the two basins are modelled by two large pipes, and furthermore in the model gate 2 does not link the second basin directly to the first one, but to the node PMB0. As a consequence when gate 2 is opened in the model (as it is the case after 5.5h in our case) the water is not released to the first basin, and instead goes directly to the node PMB0. Thus the water level does not increase in the first basin as it was measured. The impact of the small scale rainfall variability (starting with a rainfall resolution of  $1\text{km} \times 1\text{km} \times 5\text{min}$ ) is illustrated with the help of the curves in dashed red in Fig. 9d, which represent the 10 and 90% quantiles for each time step in the ensemble of simulated hydrographs (see previously in the section for more details about the methodology). This uncertainty is basically visible only during the period with the highest water levels. It should be noted that the rather great size of these sub-catchments does not enable to fully take advantage of the rainfall downscaling.

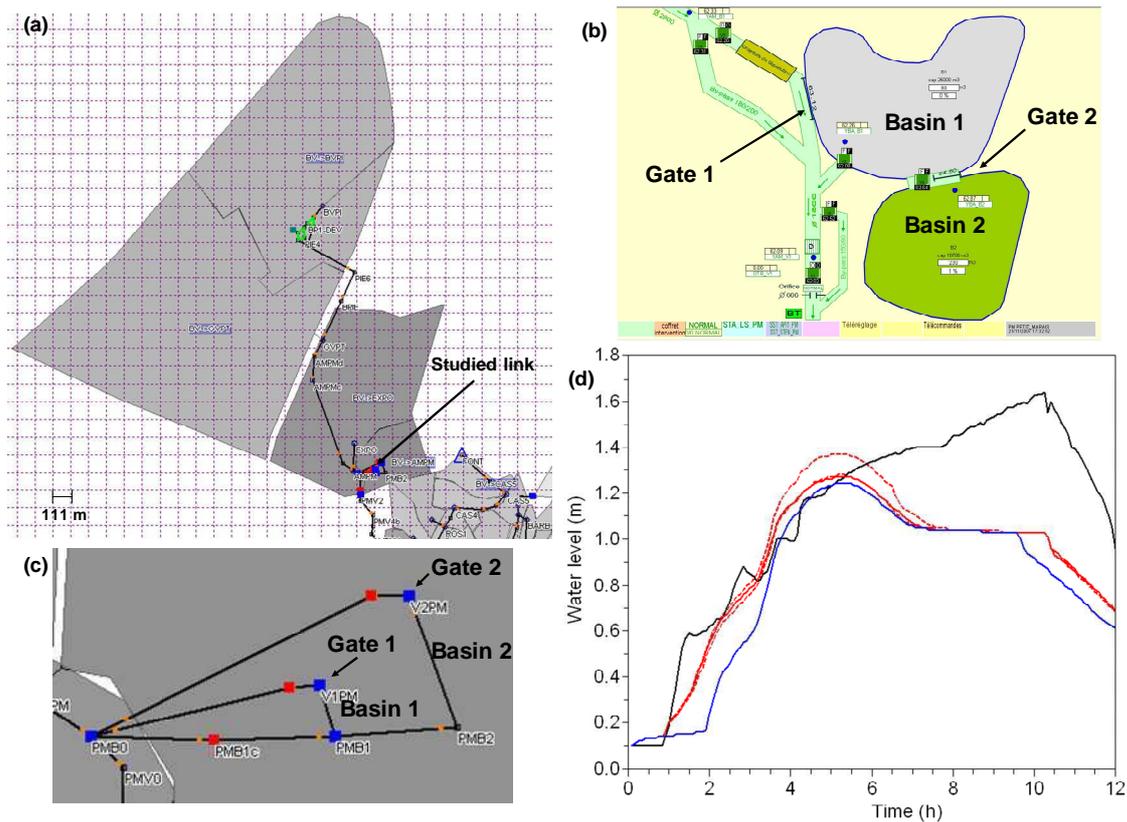


Figure 9. (a) Snapshot of the Canoe model of the 4 sub-catchments whose water is drained toward the link with available water level measurements. (b) Actual configuration of the two basins, where water level measurements are available. (c) Representation of these basins in the Canoe model. (d) Temporal evolution of the water level in the studied link (which corresponds to the basin 1): measured (black), simulated with standard gate management (blue), simulated with actual gate management (solid red) and the corresponding uncertainty associated with small scale rainfall variability (dashed red).

### 5) Retrieving the rainfall multifractal behaviour on discharges

The aim of this section is to use the multifractal tools to analyse the output of the studied hydrological/hydraulic urban model. A preliminary analysis was performed on hydrographs simulated with the 9<sup>th</sup> February 2009 rainfall event (see previous section). As suggested by Tessier et al. (1996) the analysis is done not directly on the discharge, but on the fluctuations of the discharge. Indeed the multifractal techniques that are implemented here assume that the studied field is conservative. Non-conservative field are represented as a conservative one (characterized by  $C_1$  and  $\alpha$ ) multiplied by non-conservative part characterized with the help of an additional parameter  $H$ . In order to retrieve robust estimates of the UM parameters  $C_1$  and  $\alpha$  of non conservative fields (such as discharge time series) one has to perform the analysis on the underlying conservative field which is commonly approximated by the absolute value of the fluctuation (for each time step, the value is replaced by the absolute value of the difference between this value and the one of the next time step) (Lavallée et al., 1993). The analysis is done on 128 time steps of 5 min (roughly 11 h). It appears that although limited in range of scales, a scaling behaviour is visible for all the links. There is no clear tendency for the scale at which the break occurs according to the Gate position of

the link in the network (either upstream or downstream). It seems that there are basically no differences in the scaling behaviour between the hydrographs simulated with the help of the raw rainfall field or the downscaled one. Given the very low amount of data (i.e., a sample of 128 time step values), these results may not be very reliable. They only give an indication that the model seems to simulate hydrographs exhibiting a scaling behaviour. To confirm this and to investigate the consequences, the following methodology was implemented:

- (i) Generation of 100 high resolution (111 m x 111 m x 1 min) realistic rainfall events lasting 256 min and exhibiting a scaling behaviour.
- (ii) Simulation of the corresponding hydrographs with the help of the calibrated hydrological/hydraulic model (see section 3.2)
- (iii) Performing a multifractal analysis on the ensemble of 100 hydrographs. Each hydrograph is considered as a realisation of the same phenomenon, up-scaled independently and then taken into account in Eq. 3, which theoretically is valid for an ensemble average, with a large number of realisations.

The rainfall fields are generated with the help of space time discrete UM cascades. The UM parameters used are those estimated for the small scales of the studied rainfall event ( $\alpha=1.52$ ,  $C_1=0.056$ ) without any break. Indeed the outer scale of the studied catchment is 12 km, which is smaller than the scale at which the break occurs for the rainfall field (16 km). The final resolution of the simulated field is 111 m x 111 m x 1 min, and the event lasts 256 min. The fields are renormalized so that the mean total rainfall depth over the studied area is the same for all the events and corresponds roughly to a 5 years return period event. As suggested by “1’Instruction Technique de 1977” (1977), which is a technical document issued by the French government and describing the rules that should be implemented to design a sewer system, the Montana Formula was used:

$$I(D,T) = a(T)D^{b(T)} \quad (7)$$

where  $D$  (min) is the duration of the rainfall event,  $T$  (year) is the return period, and  $I$  (mm/min) is the intensity. For the Paris area,  $a = 5$  and  $b = -0.61$  for a 5 year return period. This leads to a mean rainfall rate of 10.2 mm/h that corresponds to a total rainfall depth of 43.5 mm during the entire event. There is no need to correct this value for such size of studied area (9 km x 12 km) and duration (256 min). Indeed the ratio between the average rainfall over the area and the point rainfall given by the Montana formula would be greater than 0.95 (Roux, 1996). Anyway taking it into account would simply mean that the total rainfall depth considered corresponds to a rainfall event of return period slightly greater than 5 years.

Before discussing the UM parameters estimates, it is necessary to assess the quality of the scaling behaviour. For some links, scaling is not observed on the whole range of scales (1min – 256 min). Indeed a break is visible at scales ranging from 2 to 16 min according to the link. As a consequence, an automatic algorithm was developed to determine the scale at which the break occurs: (i) The scaling curve (i.e. Eq. 3 in a log-log plot) is plotted (ii) The mean coefficient of determination ( $R^2$ ) for large scales (i.e. the left part of the graph) is evaluated when a break is considered at 1, 2, 4, 8, and 16 min. (iii) At the beginning no break is considered. Then if  $R^2(\text{break at 2 min}) - R^2(\text{break at 1 min}) < 0.04$ , then no break is considered. Otherwise a break is considered at 2 min and the process is iterated with  $R^2(\text{break at 4 min})$  to check whether it should be at 4 min. And so on if needed up to 16 min. This process enables to take into account the largest relevant range of scales.

A good scaling behaviour is retrieved for large scales (the mean  $R^2$  is equal to 0.98). An illustration for link 87 is given in Fig. 10. In the following the small scales are not taken

into account because their behaviour would be assessed with the help of a too low number of points, and furthermore for links where there are 3 or more points the average  $R^2$  is equal to 0.95 which is quite low. Figure 11a displays a map with the scale at which the break occurs for all the links. The characteristic scale of the break tends to be larger with downstream links. Basically no break is observed for upstream links. Near the outlet, the separation of the flow in two parallel links breaks the scaling behaviour, which is retrieved downstream. Overall the discharges simulated with the model basically do not reproduce the rainfall scaling behaviour for scales smaller than 5 min. This is likely to be due to the damping effect of the lumped model that is used for each sub-catchment.

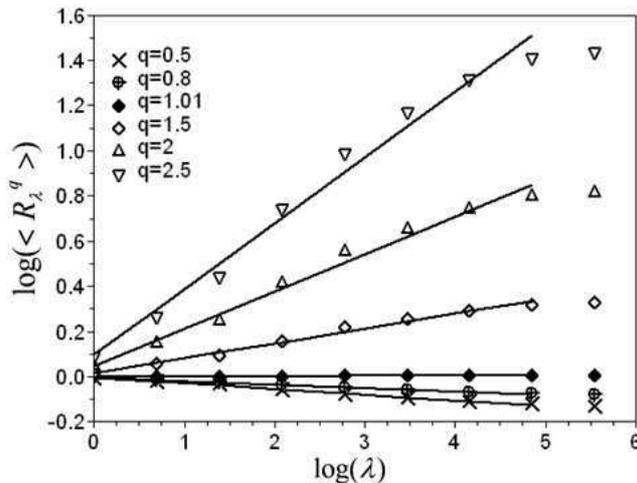


Figure 10. Illustration of the scaling behaviour (i.e. Eq. 2 in a log-log plot) for the simulated discharge of link 87. Here the break occurs at 2 min.

The UM parameters were estimated for all the links. For most of the conduits  $\alpha$  and  $C_1$  belong respectively to the range 1.6-1.9 and 0.05-0.1. Figures 11b and 11c display maps of  $\alpha$  and  $C_1$ . There is no clear tendency over the distribution of the values in the network. It is striking to note that both UM parameters used to simulate the rainfall fields (i.e.  $\alpha=1.52$  and  $C_1=0.056$ ) seem to be smaller than the ones found for discharge. This single fact does not mean that the extremes are strengthened in the sewer network with regards to rainfall. Indeed the dimension of the embedding space which is different for the discharge time series and the space-time rainfall should be taken into account. To clarify this issue, let us consider the scale invariant notion of maximum probable singularity  $\gamma_s$ , which assesses the extremes (Hubert et al., 1993, Douglas and Barros, 2003, Royer et al., 2008, Gires et al., 2011a). It is defined as the maximum probable singularity observable on a unique sample of phenomenon. It corresponds to the singularity for which the fractal codimension of the support  $c(\gamma_s)$  becomes equal to the dimension  $d$  of the embedding space. Here,  $d = 1$  for the discharge time series, and  $d = 8/3 = 2+2/3$  for the space-time simulated rainfall fields.  $\gamma_{s,rainfall}$  is equal to 0.51 and Fig. 11d displays a map of  $\gamma_s$  for all the links. It appears that  $\gamma_{s,rainfall}$  is comparable to  $\gamma_s$  for most of the links, may be with a tendency to be slightly greater. This means that the sewer network basically reproduces rainfall extremes and does not damp them or only slightly does.

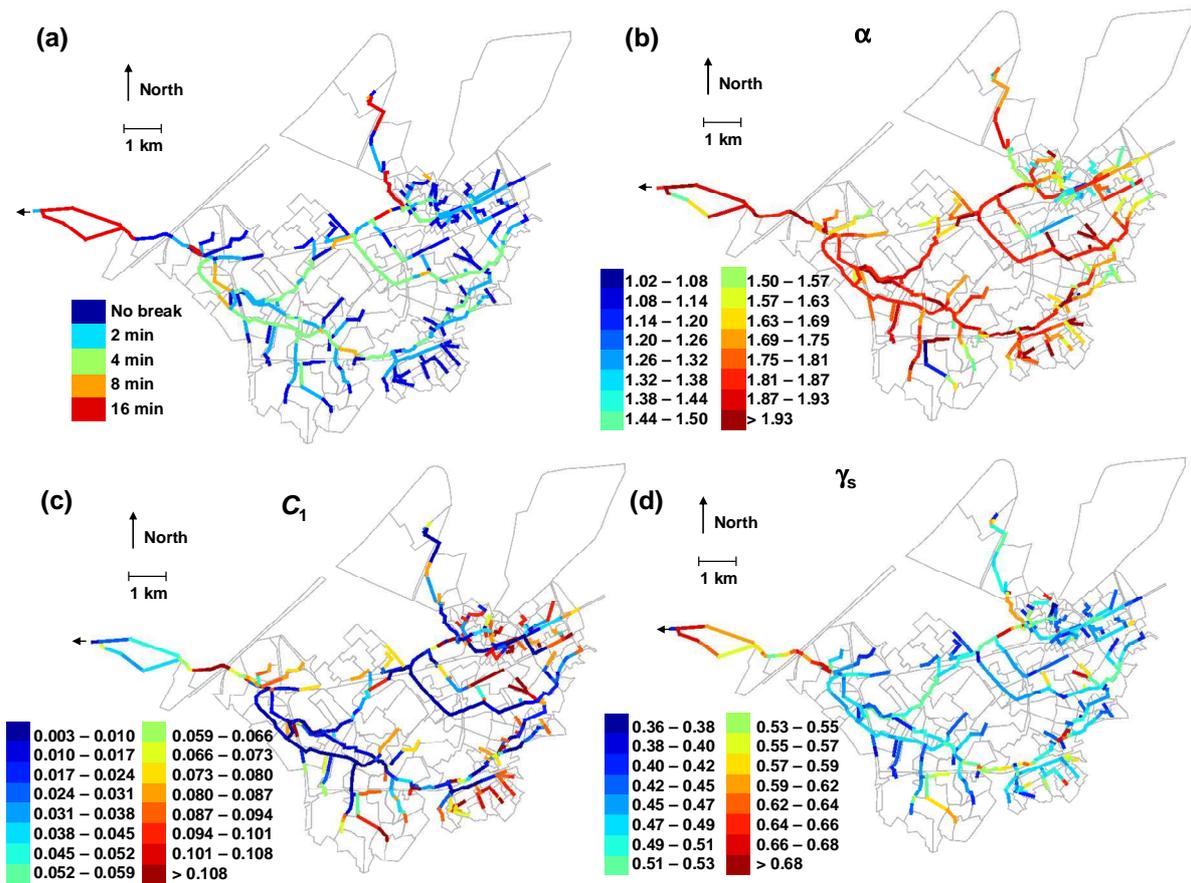


Figure 11. Maps of the temporal scale of the scaling break (a),  $\alpha$  (b),  $C_1$  (c), and  $\gamma_s$  (d) for all the modelled links of the sewer system.

## 6) Conclusion

The aim of the paper was to test, with the help of multifractal tools, the sensitivity of an operational urban rainfall/runoff model to the rainfall spatio-temporal variability. The study was conducted on a 3 400 ha urban area located in Seine-Saint-Denis, in the North of Paris (France). The rainfall event of February 9<sup>th</sup>, 2009 was used.

First a stochastic ensemble approach was implemented to quantify the uncertainty of discharge estimates, associated with the rainfall variability occurring at scales smaller than 1 km x 1 km x 5 min which are usually available with C-band radar networks. An analysis of the quantiles of the simulated peak flow showed that the uncertainty exceeds 20 % for upstream links. A similar analysis, but starting with a rainfall resolution of 9 km x 9 km x 20 min, showed a clear decrease in uncertainty when the C-band radar resolution is used. This analysis highlights the interest of implementing X-band radars in urban areas. Indeed such radars provide data with a hectometric resolution that would enable a better management of storm water. Meanwhile the uncertainty associated with small scale unmeasured rainfall variability, which cannot be neglected, should be taken into account in a probabilistic way in the real time management of sewer systems. Further investigations should be carried out with other types of rainfall, especially more convective ones with more localized rain cells for which greater uncertainty is expected.

Second the multifractal properties of the simulated hydrographs were analysed with the help of simulated rainfall fields of resolution 111 m x 111 m x 1 min, lasting 4 hours, and corresponding to a 5 year return period event. On the whole, the discharges exhibit a good scaling behaviour on the range 4 h – 5 min. Both UM parameters tend to be greater for the discharge than for rainfall. The notion of maximum probable singularity was used to clarify the consequences on the assessment of extremes. It appears that the sewer network basically reproduces the extremes, or only slightly damps them, at least in terms of multifractal statistics.

This paper suggests a new way of testing hydrological models. Further investigations involving other models with greater spatial resolution and taking into account the interactions between surface and sewer flows (Maksimovic et al., 2009) and event sub-surface flows (El Tabbach et al., 2009) should be performed.

### *Acknowledgements*

The authors acknowledge Météo-France for providing the radar rainfall estimates in an easily exploitable format, and especially Jacques Parent du Chatelet, Gilbert Gayraud and Catherine Hamet, and the “Direction Eau et Assainissement” of Seine-Saint-Denis for providing a calibrated hydrological-hydraulic model the studied area, and the help of the Julien Richard (LEESU) to obtain the Fig 3. The authors greatly acknowledge partial financial support from the Chair “Hydrology for Resilient Cities” (sponsored by Veolia) of Ecole des Ponts ParisTech, EU FP7 SMARTeST project ([www.floodresilience.eu](http://www.floodresilience.eu)), and EU NWE Interreg IV RainRain project ([www.raingain.eu](http://www.raingain.eu)).

### *References*

- Allison, INSA Lyon, SOGREAH Consultants, [www.canoe-hydro.com](http://www.canoe-hydro.com) (2005). Manuel d'utilisation de Canoe.
- Andrieu, H. and Jacquet, G., 1987. Le radar météorologique de Trappes et l'estimation des intensités pluvieuses en Seine-Saint-Denis. Intérêt pour la gestion des réseaux d'assainissement. *La Houille Blanche*, 6 (Sept. 1987), 447-457.
- Aronica, G. and Cannarozzo, M., 2000. Studying the hydrological response of urban catchments using a semi-distributed linear non-linear model. *J. Hydrol.*, 238, 35-43.
- Biaou, A., Hubert, P., Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I. and Bendjoudi, H., 2003. Fractals, multifractals et prévision des précipitations. *Sud Sciences et Technologies*, 10, 10-15.
- Browne, O., Auriaux, G., Idier, F. and Delattre, J.M., 1998. Un système d'aide à la décision pour la conduite du réseau d'assainissement de Seine-Saint-Denis. *Novatech'98 Proceedings*, Lyon, May 4-6<sup>th</sup> 1998.

CEC—Council of the European Communities, 2000. Directive of establishing a framework for community action in the field of water policy. EC Directive No. 2000/60/EEC of 23 October 2000.

Deidda, R., 2000. Rainfall downscaling in a space-time multifractal framework. *Water Resour. Res.*, 36, 1779-1794.

Douglas, E and Barros, A., 2003. Probable Maximum Precipitation Estimation using Multifractals : Application in the Esatern United States. *Journal of Hydrometeorology*, 4, 1012-1024.

El Tabach, E., Tchiguirinskaia, I., Mahmood, O. and Schertzer, D., 2009. Multi-Hydro: a spatially distributed numerical model to assess and manage runoff processes in peri-urban watersheds. Proceedings Final conference of the COST Action C22 Urban Flood Management, Paris 26/27.11.2009, France.

Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2011a. Analyses multifractales et spatio-temporelles des précipitations du modèle Méso-NH et des données radar. *Hydrol. Sci. J.*, 56 (3), 380-396.

Gires, A., Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I., and Lovejoy, S., Maksimovic, C., Onof, C. and Simoes, N., 2011b. Impact de la variabilité non-mesurée des précipitations en hydrologie urbaine: un cas d'étude dans le cadre multifractal. *La houille Blanche*, 4, 37-42.

Gires, A., Onof, C., Maksimovic, C., Schertzer, D., Tchiguirinskaia, I. and Simoes, N., 2012a. Quantifying the impact of small scale unmeasured rainfall variability on urban hydrology through multifractal downscaling: a case study. *J. Hydrol.*, 442-443, 117-128.

Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., and Lovejoy, S., 2012b. Influence of the zero-rainfall on the assessment of the multifractal parameters. *Adv. Water Resour.*, *In press* <http://dx.doi.org/10.1016/j.advwatres.2012.03.026>

Hubert, P. and Carbonnel, J.P., 1988. Caractérisation fractale de la variabilité et de l'anisotropie des précipitations tropicales. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 2, 909-914.

Hubert, P., Tessier, Y., Lovejoy, S., Schertzer, D., Schmitt, F., Ladoy, P., Carbonnel, J.P. and Violette, S., 1993. Multifractals and extrem rainfall events. *Geophys. Lett.*, 20, 931-934.

Hubert, P., Friggit, F., Carbonnel, J.P., 1995. Multifractal structure of rainfall occurrence in west Africa. In: Z. W. Kundzewicz, ed. *New uncertainty concepts in hydrology and water resources*. Cambridge: Cambridge University Press, 109-113.

Instruction Technique, 1977. Instruction technique relative aux réseaux d'assainissement des agglomérations, Imprimerie nationale, juin 1977.

Labat, D., Mangin, A. and Ababou, R., 2002. Rainfall–runoff relations for karstic springs: multifractal analyses. *J. Hydrol.*, 256, 176–195.

- Lavallée, D., Lovejoy, S. & Ladoy, P., 1993. Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. In: L. De Cola and N. Lam, eds. *Fractals in geography*. New York: Prentice-Hall, 158-192.
- Lovejoy, S., Schertzer, D., and Tsonis, A.A., 1987. Function box-counting and multiple elliptical dimension in rain. *Science*, **235**(4792), 1036-1038.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 2007. Scale, scaling and multifractals in geophysics: twenty years on. In: A.A. Tsonis & J. Elsner, eds. *Nonlinear dynamics in Geosciences*. Springer, 311-337.
- Maksimović, Č., Prodanović, D., Boonya-aroonnet, S., Leitão, J. P., Djordjević, S. and Allitt, R., 2009. Overland flow and pathway analysis for modelling of urban pluvial flooding. *Journal of Hydraulic Research*, 47 (4), 512–523.
- Marsan, D., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1996. Causal space-time multifractal processes: Predictability and forecasting of rain fields. *J. Geophys. Res.*, 101, 26,333-326,346.
- Olsson, J., Niemczynowicz, J. and Berndtsson, R., 1993. Fractal analysis of high-resolution rainfall time series. *J. Geophys. Res.*, 98, 23265-23274.
- Pecknold, S., Lovejoy, S., Schertzer, D., Hooge, C. and Malouin, J.F., 1993. The simulation of universal multifractals. In: J.M. Perchang and A. Lejeune, eds. *Cellular Automata: Prospects in astrophysical applications*. World Scientific, 228-267.
- Pandey, G., Lovejoy, S. and Schertzer, D., 1998. Multifractal analysis including extremes of daily river flow series for basins one to a million square kilometres. *J. Hydrol.*, 208 (1-2), 62–81.
- Pléau, M., Colas, H., Lavallée, P., Pelletier, G. and Bonin, R., 2005. Global optimal real-time control of the Quebec urban drainage system. *Environmental Modelling & Software*, 20, 401-413.
- Roux, C., 1996 Analyse des précipitations en hydrologie urbaine. Exemple de la Seine-Saint-Denis. PhD Thesis, Ecole des Ponts ParisTech, Marne-la-Vallée, France. p.290.
- Royer, J.F., Biau, A., Chauvin, F., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2008. Multifractal analysis of the evolution of simulated precipitation over France in a climate scenario. *C.R Geoscience* 340, 431-440.
- Sarkis, B., 2008. *Etude multi-échelle des réseaux d'assainissement*. MSc Thesis. Ecole des Ponts ParisTech.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1987. Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling and multiplicative processes. *J. Geophys. Res.*, 92(D8), 9693-9714.
- Schertzer, D., and Lovejoy, S., 1997. Universal multifractals do exists!: Comments. *Journal of Applied Meteorology*, 36(9), 1296-1303.

Schertzer, D., Bernardara, P., Biauou, A., Tchiguirinskaia, I., Lang, M., Sauquet, E., Bendjoudi, H., Hubert, P., Lovejoy, S. and Veysseire, J.M., 2006. Extrêmes et multifractals en hydrologie : résultats, validations et perspectives. *La Houille Blanche*, 5, 112-119.

Schütze, M., Campisano, A., Colas, H., Schilling, W. and Vanrollegheme, P.A., 2004. Real time control of urban wastewater systems—where do we stand today? *J. Hydrol*, 299, 335–348

Segond, M-L., Wheeler, H.S. and Onof, C., 2007. The significance of small-scale spatial rainfall variability on runoff modeling. *J. Hydrol.*, 173, 309-326.

Tabary, P. (2007). The new French operational radar rainfall product. Part I: Methodology. *Wea. Forecasting*, 22, 393–408.

Tabary, P., Desplats, J., Do Khac, K., Eideliman, F., Gueguen, C., and Heinrich, J.-C., 2007. The new French operational radar rainfall product. Part II: Validation. *Wea. Forecasting*, 22, 409–427.

Takayasu, H., 1990. *Fractals in the Physical Sciences*. Manchester University Press, Manchester.

Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., Hoang, C.T. and Lovejoy, S., 2011. Multifractal study of three storms with different dynamics over the Paris region. Proceedings of Weather radar and hydrology symposium, Exeter, UK, April 2011.

Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., Hubert, P., Bendjoudi, H. and Lovejoy, S., 2007. Potential of multifractal modelling of ungauged basins. PUB Kick-Off Meeting. D. Schertzer et al. Wallingford, UK, IAHS Press. 309: 298-308.

Tessier, Y., Lovejoy, S., Hubert, P., Schertzer, D., Pecknold, S., 1996. Multifractal analysis and modeling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions. *J. Geophys. Res.*, 101 (D21), 26,427-26,440.

## **7.8. Annexe 8 : « Impact of small scale unmeasured rainfall variability in urban areas: a case study with 1D and 1D/2D hydrological models in a multifractal framework» (soumis Journal of Hydraulic Research)**

### **Impacts of small scale rainfall variability in urban areas: a case study with 1D and 1D/2D hydrological models in a multifractal framework**

Auguste Gires<sup>1</sup>, Agathe Giangola-Murzyn<sup>2</sup>, Ioulia Tchiguirinskaia<sup>3</sup>, Daniel Schertzer<sup>4</sup>, Shaun Lovejoy<sup>5</sup>

1 U. Paris-Est, Ecole des Ponts ParisTech, LEESU, France, [auguste.gires@leesu.enpc.fr](mailto:auguste.gires@leesu.enpc.fr)

2 U. Paris-Est, Ecole des Ponts ParisTech, LEESU, France, [agathe.giangola-murzyn@leesu.enpc.fr](mailto:agathe.giangola-murzyn@leesu.enpc.fr)

3 U. Paris-Est, Ecole des Ponts ParisTech, LEESU, France, [ioulia@leesu.enpc.fr](mailto:ioulia@leesu.enpc.fr)

4 U. Paris-Est, Ecole des Ponts ParisTech, LEESU, France, [daniel.schertzer@enpc.fr](mailto:daniel.schertzer@enpc.fr)

5 McGill U., Physics dept., Montreal, PQ, Canada, [lovejoy@physics.mcgill.ca](mailto:lovejoy@physics.mcgill.ca)

#### **ABSTRACT**

In this paper the sensitivity to small scale unmeasured rainfall variability (i.e. scales smaller than 1km in space and 5 min in time, which are usually available with C-band radars) of a 1D/2D model with a 10 m resolution and a semi-distributed 1D model of the same 1.47 km<sup>2</sup> urban area is analyzed. The 1D/2D model is the open source numerical platform Multi-Hydro, which couples (open source) distributed models of involved hydrological/hydraulic processes and is currently being developed at Ecole des Ponts ParisTech. The methodology implemented to evaluate the uncertainties consists in generating an ensemble of realistic rainfall fields downscaled to a resolution of 12.3 m in space and 18.75 s in time with the help of a stochastic universal multifractal model. The corresponding ensemble of hydrographs is then simulated. It appears that the uncertainty is significant and that Multi-Hydro unveils much more uncertainty than the simpler 1D model. This points out a need to develop high resolution distributed modelling in urban areas.

#### **KEYWORDS**

Rainfall variability, 1D/2D modelling, multifractals, space-time downscaling

#### **1) INTRODUCTION**

Rainfall variability has a significant impact on river discharges (see Singh, 1997 for a review). This impact is enhanced in urban areas where the response times of catchments are shorter and the coefficient of imperviousness are larger meaning that a significant fraction of the rainfall is immediately active (Aronica and Cannarozzo, 2000; Segond et al., 2007). The under-representation of rainfall variability in input data of models affects the confidence one should have in its predictions. A better understanding of rainfall variability in urban areas and its impact on simulated flow is needed both theoretically and operationally. Indeed Real Time Control (RTC, see Schütze et al., 2004 for a review of its rapid development over the last decades) of sewer networks, which aims at reducing urban flooding and pollution, relies on the use of such models.

In recent papers Gires et al. (2012a, 2012b) quantified the impact of small scale unmeasured rainfall variability (i.e. at scales smaller than the C-band radar resolution of 1 km x 1 km x 5 min, which is usually provided by national meteorological services of Western Europe

countries) on urban discharges simulated with the help of semi-distributed urban hydrological / hydraulic 1D models. Two urban areas were studied: a 3400 ha one located near Paris and a 900 ha one located in the North of London. The methodology implemented relies on the generation and analysis of realistic ensembles: (i) generation of an ensemble of realistic rainfall fields through a stochastic multifractal downscaling of the radar data, (ii) Simulation of the corresponding ensemble of hydrographs with a semi-distributed 1D model, (iii) Quantification of the variability among these ensembles. A limitation of these works was that the size of the sub-catchments (roughly 17 ha on average), which are considered as homogenous objects, did not enable to fully grasp the actual rainfall spatial variability. In this paper we implement the same methodology on a portion of size 144 ha of the previous Paris area case study (see Figure 1). Two types of models are used: the same semi-distributed operational one and a 1D/2D fully distributed one called Multi-Hydro. It is a numerical platform currently being developed at Ecole des Ponts ParisTech and validated in the framework of FP 7 SMARTeST European Project (v1 El Tabach et al., 2009; v2 Giangola-Murzin et al., 2012). The aim of the paper is mainly to develop a methodology to take into account small scale unmeasured rainfall, and test how two different models quantify the associated uncertainty on a single rainfall event.

The rainfall event and data are described in section 2.1. Section 2.2 briefly presents of Multi-Hydro. The 144 ha studied urban area and its representation with the two models is presented in section 2.3. Section 2.4 describes the implemented methodology. Results are discussed in section 3.



Figure 1: Picture of the 144 ha studied area, located in the city of Sevrans (North-East of Paris)

## 2) DATA AND METHODS

### 2.1) Rainfall data

The rainfall event studied in this paper occurred over the Paris area on February 9<sup>th</sup>, 2009. The rainfall data is the Météo-France radar mosaic whose resolution is 1 km in space and 5 min in time. The rainfall rate  $R$  is basically computed from the radar reflectivity  $Z$  with the help of a standard  $Z=aR^b$  relationship with  $a=200$  and  $b=1.6$  ( $Z$  in  $\text{mm}^6.\text{m}^{-3}$  and  $R$  in  $\text{mm}.\text{h}^{-1}$ ). Details about the additional corrections which are implemented can be found in Tabary et al. (2007). The studied catchment is located at approximately 45 km of the C-band radar of Trappes (West of Paris) meaning that the rainfall estimates are still reliable. The temporal evolution of the average rain rate over the studied catchment is displayed Fig. 2. The event lasted approximately 4 hours and the average rainfall depth is of 7.3 mm. This roughly corresponds to a 1 month return period event for this area.

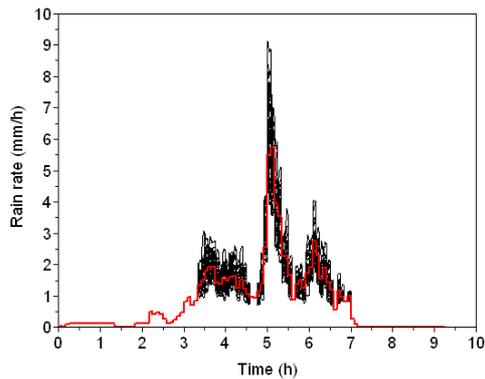


Figure 2: Temporal evolution of the average rain rate over the studied catchment for the raw radar data (in red) and the 50 downscaled (to a resolution of 12.3 m in space and 18.75 s in time) rainfall fields (in black).

## 2.2) Short presentation of Multi-Hydro

There is a growing interest for taking into account more precisely the interactions between surface and sewer flow in the field of urban hydrology (Hsu et al. 2000; Jankowsky 2011; Leandro et al., 2009; Maksimovic et al., 2009; Rodriguez et al., 2008). In that context, Multi-hydro is a numerical platform currently under development that makes interact several open source software packages each of them representing a portion of the water cycle in urban environment. The second version that is used in this paper consists in an interactive coupling between a 2D model representing surface runoff and infiltration (TRES, Two dimensional Runoff, Erosion and eXport model, Velleux et al., 2011) and a 1D model of sewer networks (SWMM, Storm Water Management Model, Rossman, 2007). Only the hydraulic part of SWMM is used to model water flow in pipes, and not the hydrologic one. The main input data is a precise description of the sewer network, the topography, and the land use distribution. In this case study six different classes of land use are used (wood, grass, water, roads, building and gullies), each being fully characterized by its hydraulic conductivity (m/s), capillary suction (m), moisture deficit (no unit, ranging from 0 to 1), Manning coefficient ( $\text{s.m}^{-1/3}$ ) and depth of interception (mm). Concerning the topography the digital terrain model used was provided by the Institut National Géographique, and does not take into account anthropogenic elevation modification. As a consequence, the raw elevation of the road pixels is decreased by 15 cm and the building pixels one is increased by 5 m to prevent water from running through these pixels. The rainfall collected by the building pixels is directly routed to the nearest gully. The interactions between the sewer system and surface flow are handled through the gullies where water can circulate in both ways, i.e. from surface to sewer in standard situation, and the other way in case of sewer overload. More details about Multi-Hydro can be found in Giangola-Murzyn et al. (2012).

## 2.3) Studied area and its representation with the help of two models

The studied catchment is a roughly 1.4-1.5 km<sup>2</sup> urban area located in the city of Sevran (Seine-Saint-Denis county, North-East of Paris). This area is known for regular sewer overflows, and there is a project to build a storm water storage basin to limit them and also to limit water transfer during heavy rainfall to the downstream area just north of it which suffers frequent pluvial flooding. There is a flow gauge in the conduit above the former Kodak factory that drains all the East part of the catchment (about 2/3 of the total area). It should be mentioned that the data quality may not be very good because it was mainly installed to study the flow features just downstream a screen.

Figure 3 displays the land use distribution for various sizes of the pixels. Significant differences are visible. This is due to the fact that each pixel corresponds to only one land use

class. Therefore an order of priority must be set to determine the land use of a pixel actually containing several ones (in the vector GIS data). The order set here is gully, road, buildings, water, wood and grass. As a consequence with pixels of sizes 20 m x 20 m the gardens attending the houses are almost not visible. An illustration of the strong hydrological consequences is the percentage of impervious area (pixels gully, road and buildings), which reflects the portion of storm water rapidly active. It is equal to 87, 83, 77, 63, 53, 47, 40 % respectively for pixels of size 20, 15, 10, 5, 3, 2, 1 m. The size of the modelled area ranges from 1.49 km<sup>2</sup> with a 20 m pixels to 1.42 km<sup>2</sup> with 1 m pixels. It is interesting to note that such behaviour is rather standard of a fractal set. Such set is characterized by a fractal dimension  $D_F$  defined with the help of the following equation:

$$N_\lambda \approx \lambda^{D_F} \quad (1)$$

Where  $N_\lambda$  is the number of boxes of size  $l$  needed to completely cover it and  $\lambda$  is the resolution ( $\lambda = L/l$ , with  $L$  the outer scale of the set). Here  $N_\lambda$  was computed on the impervious pixels of a 1024 m x 1024 m area of the 1m grid (Figure 4). The straight line ( $R^2$  greater than 0.99) reflects that it is a fractal set, and the slope equal to 1.85 corresponds to the fractal dimension.

The Direction Eau et Assainissement of Seine-Saint-Denis (the local authority in charge of urban drainage) calibrated and runs operationally the semi-distributed 1D model Canoe (Allison et al., 2005) on this area. In Canoe the hydrologic response of each sub-catchment is modelled with the help of a lumped model (a linear reservoir) and the flow in the pipes is modelled with the help of a numerical solution of Saint-Venant equations. The studied area (see Figure 3.d) is divided into 16 sub-catchments whose size is ranging from 4 to 14.5 ha. The total area studied with the 1D model is 1.39 km<sup>2</sup> (the difference with Multi-Hydro come from side effects), and the average coefficient of imperviousness is equal to 53% which roughly corresponds to the value found with pixels of size 3 m in Multi-Hydro.

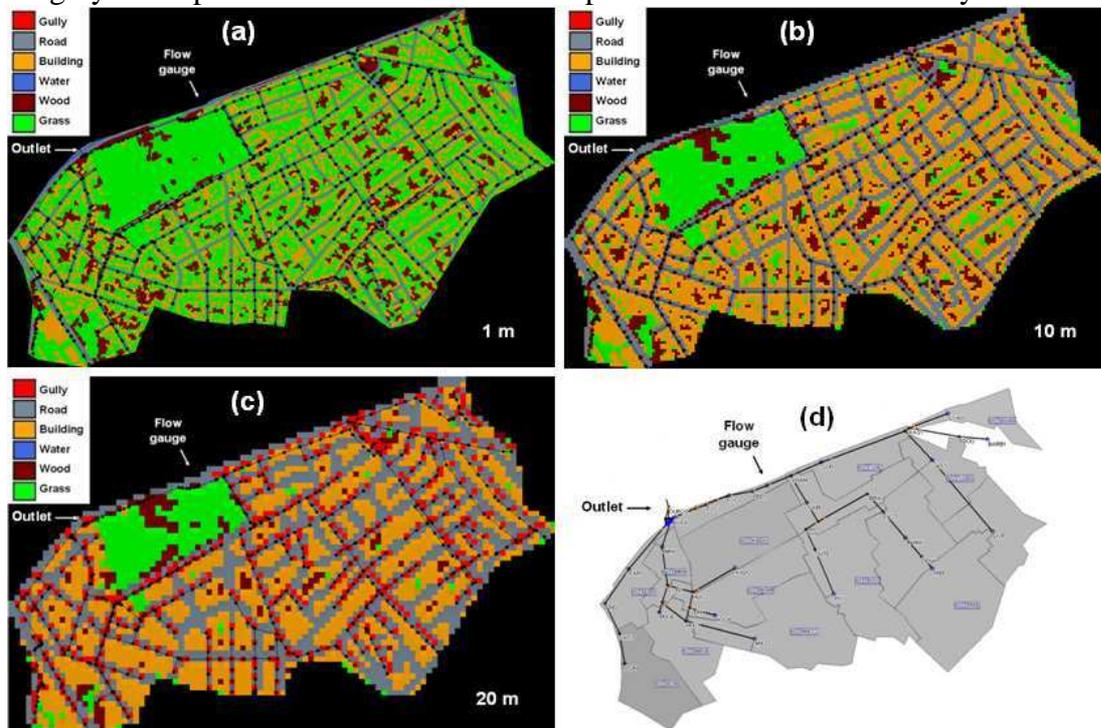


Figure 3: (a) Map of the land use distribution inputted in Multi-Hydro with pixels of size 1 m x 1 m. The sewer network modelled with SWMM is superposed to this map (the nodes and conduits are visible along most of the roads). (b) As is (a) with pixels of size 10 m x 10 m. (c)

As is (a) with pixels of size 20 m x 20 m. (d) Snapshot of the representation of this area with the 1D model Canoe. The sub-catchments and the modelled sewer network are visible.

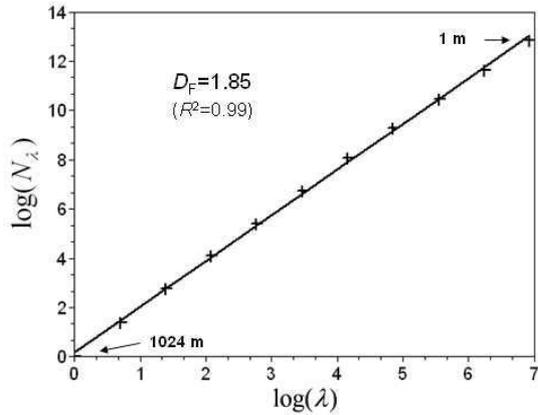


Figure 4: Estimation of the fractal dimension (Eq. 1 in a log-log plot) of the impervious portion of the studied catchment.

## 2.4) Methodology

In order to quantify the uncertainty associated with small scale unmeasured rainfall variability, the following methodology is implemented: (i) An ensemble of 50 realistic downscaled rainfall fields with a resolution of 12.3 m in space and 18.75 s in time (for the semi-distributed model, given the size of the homogeneous sub-catchments the rainfall was only downscaled only to 111 m in space and 1.25 min in time) is generated. (ii) The corresponding ensemble of hydrographs is then simulated for each model. (iii) The variability among the hydrographs is characterized with the help of the envelop curves  $Q_{0.1}$ ,  $Q_{0.25}$ ,  $Q_{0.75}$  and  $Q_{0.9}$ , which are respectively made of the 10, 25, 75 and 90% quantiles (in  $m^3/s$ ) estimated for each time step. Finally we compute for the peak flow a pseudo coefficient of variation defined as:

$$CV' = \frac{Q_{0.9}(t_{PF,radar}) - Q_{0.1}(t_{PF,radar})}{2 * PF_{radar}} \quad (2)$$

The downscaling technique relies on the very convenient framework of Universal Multifractals (Schertzer and Lovejoy, 1987), which has been extensively used (Schertzer and Lovejoy, 2011 for a recent reviews; de Lima and de Lima, 2009, and Verrier et al., 2010, for applications in hydrology) to analyse and simulate geophysical fields extremely variable over wide range of scales. In this framework it is assumed that rainfall is generated through a space-time multiplicative cascade process characterized with the help of only two parameters;  $C_1$  the mean intermittency (which measures the average sparseness of the field) and  $\alpha$  the multifractality index (which measures the variability of the intermittency, i.e. its dependence with respect to the considered level of activity). The downscaling implemented in this paper simply consists in stochastically continuing the cascade process that is assessed over the available data. Discrete cascades are used. The UM parameters used here are  $\alpha=1.8$  and  $C_1=0.1$  which corresponds to the ones usually found focusing the analysis on the rainy portion of the rainfall field (de Montera et al, 2009; Mandapaka et al., 2009; Verrier et al., 2010, Gires et al., 2012c). The downscaling process is implemented only on the pixels with intensity greater than 1 mm/h. More details on the downscaling process can be found in Gires et al. 2012b. More details on the simulation of Universal Multifractal fields can be found in Pecknold et al. 1993 and Lovejoy and Schertzer 2010.

### 3) RESULTS AND DISCUSSION

Let us first compare the temporal evolution of the flow simulated with the different models (Multi-Hydro 10 m and 5 m, and Canoe) and the flow measurements (see Figure 3 for the location of the flow gauge). Hydrographs are displayed Figure 5. It should be emphasised that this rainfall event does not generate any sewer overflow. The curves for the different models exhibit rather comparable patterns. The differences in terms of numerical values are essentially due to the variations of the percentage of impervious area. There is no significant time shift between these curves. Concerning the comparison with the measurements, the Nash-Sutcliffe coefficient is equal to 0.40 for MH 10m, 0.68 for MH 5m, and 0.78 for Canoe. The three models react too quickly at the beginning of the rainfall which is likely to be due to a misrepresentation of the initial losses. The three models also miss the first measured peak (slightly before 5h of simulations). There is no clear explanation for this. This could be due errors in the rainfall measurements or the flow measurements. Anyway more events should be tested to properly validate these models. However Figure 5 shows that the models are roughly consistent and that it makes sense to analyse their sensitivity to the rainfall input resolution which is the aim of this paper.

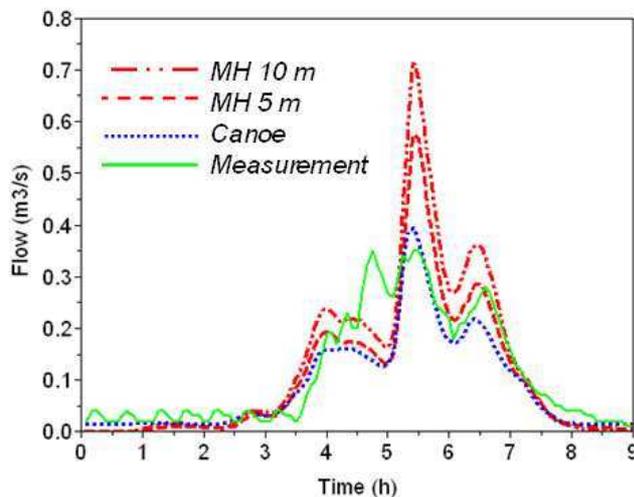


Figure 5: Comparison of measured flow and the simulated one by the different models

Lets now discuss the results about the quantification of the uncertainty associated with small scale unmeasured rainfall variability. Figure 6 displays the flow simulated with raw radar data ( $Q_{\text{radar}}$ ) and the uncertainty intervals ( $Q_{0.1}$ ,  $Q_{0.25}$ ,  $Q_{0.75}$  and  $Q_{0.9}$ ) for Multi-Hydro 10 m and Canoe. For Multi-Hydro the analysis was done with pixels of 10 m even tough the simulated flow are less accurate than with 5 m because the computation time for each sample is much smaller (roughly 1h versus 4h on standard laptop). Before going on, it should be mentioned that the observed differences between the hydrographs are not due to variations in the total rainfall amount, but to variations in the spatio-temporal distribution of rainfall. Figure 2 displays the temporal evolution of the average rainfall over the studied area for the 50 generated samples (in black) and for the raw radar data (in red). The disparities are much smaller than the one observed on the simulated discharges. The raw radar total rainfall amount is of 7.34 mm, whereas it is of  $7.37 \pm 0.21$  mm (coefficient of variation of 2.9%) for the generated downscaled rainfall fields. The uncertainty intervals are much larger with Multi-Hydro than for the 1D model indicating that it enables to unveil much more uncertainty during the whole event and not only during the peak flow. This is confirmed by  $CV$  which is equal to 17% for the Multi-Hydro 10m and to 8% for the semi-distributed model. This means

that the results provided by the 1D model are simply falsely reassuring and that there is a clear need for taking into account small scale phenomenon in urban hydrology.

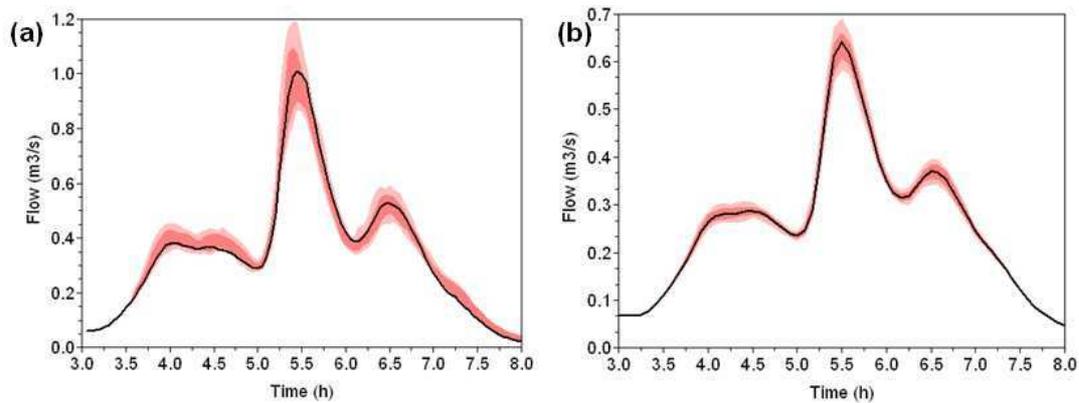


Figure 6: Simulated flow with the raw radar data (black),  $Q_{0.25}$  and  $Q_{0.75}$  (dark colour),  $Q_{0.1}$  and  $Q_{0.9}$  (light colour) for the outlet of the studied catchment with Multi-Hydro (a) and the 1D-model (b)

Finally the uncertainty according to the position (i.e. upstream or downstream) of the conduit in the sewer network is analysed. Figure 7 displays the simulated flow and the uncertainty intervals for 5 conduits. As expected the uncertainty increases with upstream conduits. However high values of  $CV'$  were not necessarily expected especially for such a moderate rainfall as the studied one. This means that a better rainfall input is needed to improve not only flood management but also water quality control.

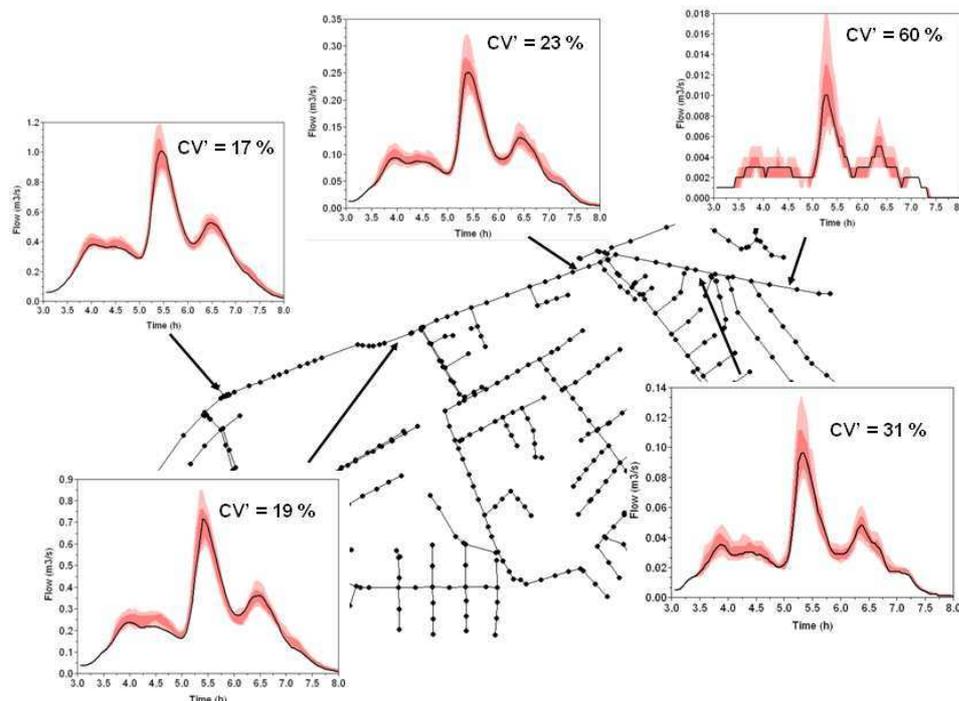


Figure 7: As in Figure 6.a for five conduits of the sewer network

#### 4) CONCLUSION

Universal multifractals are used to quantify the uncertainty associated with small scale unmeasured (i.e. occurring at scales smaller than 1 km in space and 5 min in time) rainfall variability on the outputs of Multi-Hydro, a newly developed fully distributed urban hydrologic/hydraulic numerical platform, and a standard semi-distributed 1D model implemented on the same 1.44 km<sup>2</sup> urban area located in Sevran, near Paris (France). The methodology basically consists in generating an ensemble of realistic downscaled rainfall fields and simulating the corresponding ensemble of hydrographs. This enables to quantify the uncertainty. It appears that the uncertainty is significant and cannot be neglected. For example CV' it is equal to 17% at the outlet and more than 50 % for upstream conduit. Furthermore the Multi-Hydro model unveils much more uncertainty not only during the peak flow, but during the whole event. This high level of uncertainty was not expected for such a moderate rainfall (1 month return). If confirmed on other rainfall events and catchments, it would require small scale phenomenon to be taken into account much more carefully in urban hydrology and not only for flood management. This also points out that in terms of modelling the use of fully distributed models should be developed especially for applications dedicated RTC of sewer networks. The use of the notion of fractal dimension to characterize some features of the inputs of the model also suggests that the implementation of such tools, which are rather common in geophysics, should be developed in urban hydrology. In terms of rainfall, there is a need for higher resolution data in urban areas. To achieve this, the use of X-band radars which provide hectometric resolution would be highly beneficial. Further investigations with heavier rainfall events that generate urban pluvial flooding should also be performed to confirm this need for high resolution modelling.

#### ACKNOWLEDGMENT

The authors acknowledge Julien Richard (LEESU) for his help in facilitating and reworking the terrain and sewer network data. The authors acknowledge Météo-France for providing the radar rainfall estimates in an easily exploitable format, and especially Pierre Tabary and Valérie Vogt, and the "Direction Eau et Assainissement" of Seine-Saint-Denis for providing the 1D calibrated hydrological-hydraulic model the studied area. The authors greatly acknowledge partial financial support from the Chair "Hydrology for Resilient Cities" (sponsored by Veolia) of Ecole des Ponts ParisTech, EU FP7 SMARTesT project, and EU INTERREG RainGain Project.

#### REFERENCES

- Allison, INSA Lyon, SOGREAH Consultants, [www.canoe-hydro.com](http://www.canoe-hydro.com) (2005). Manuel d'utilisation de Canoe.
- Aronica G. and Cannarozzo M. (2000). Studying the hydrological response of urban catchments using a semi-distributed linear non-linear model. *J. Hydrol.*, 238, 35-43.
- El Tabach E., Tchiguirinskaia I., Mahmood O. and Schertzer D. (2009). Multi-Hydro: a spatially distributed numerical model to assess and manage runoff processes in peri-urban watersheds. Proceedings Final conference of the COST Action C22 Urban Flood Management, Paris 26/27.11.2009, France.
- Giangola-Murzyn A., Gires A., Hoang C.T., Tchiguirinskaia I. and Schertzer D. (2012). Multi-Hydro: physically based modelling to assess flood resilience across scales, case studies in Paris region. Proceedings of 10<sup>th</sup> Urban Drainaige conference, Belgrade 3-7 Sept. 2012, Serbia.

- Gires A., Onof C., Maksimovic C., Schertzer D., Tchiguirinskaia I. and Simoes N. (2012a). Quantifying the impact of small scale unmeasured rainfall variability on urban hydrology through multifractal downscaling: a case study. *J. Hydrol.* 442-443, p 117-128.
- Gires A., Tchiguirinskaia I., Schertzer D. and Lovejoy S. (2012b). Multifractal analysis of an urban hydrological model on a Seine-Saint-Denis study case. *Urban Water Journal*. In press
- Gires A., Tchiguirinskaia I., Schertzer D. and Lovejoy S. (2012c). A toy model to deal with zero rainfall in a Universal Multifractal framework. In preparation for submission to *Nonlinear Processes in Geophysics*
- Hsu M.H., Chen S.H. and Chang T.J. (2000). Inundation simulation for urban drainage basin with storm sewer system. *J hydrol*, 234, 27-31.
- Jankowfsky, S., 2011. Understanding and modelling of hydrological processes in small peri-urban catchments using an object-oriented and modular distributed approach. Application to the Chaudanne and Mercier sub-catchments (Yzeron catchment, France). PhD Thesis., Lyon, France
- de Lima M.I.P. and de Lima J. (2009). Investigating the multifractality of point precipitation in the Madeira archipelago. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 16(2), 299-311.
- de Montera, L., Barthes, L., Mallet, C. and Gole, P., 2009. The Effect of Rain-No Rain Intermittency on the Estimation of the Universal Multifractals Model Parameters. *Journal of Hydrometeorology*, 10(2): 493-506.
- Leandro J., Chen A., Djordjević S., and Savić, D. (2009). Comparison of 1D/1D and 1D/2D Coupled (Sewer/Surface) Hydraulic Models for Urban Flood Simulation. *J. Hydraul. Eng.*, 135(6), 495–504.
- Lovejoy S. and Schertzer D. (2010). On the simulation of continuous in scale universal multifractals, part I : Spatially continuous processes. *Computers & Geosciences*, 36(11), 1393-1403.
- Maksimović Č., Prodanović D., Boonya-aroonnet S., Leitão J.P., Djordjević S. and Allitt R. (2009). Overland flow and pathway analysis for modelling of urban pluvial flooding. *Journal of Hydraulic Research*, 47 (4), 512–523
- Mandapaka, P.V., Lewandowski, P., Eichinger, W.E. and Krajewski, W.F., 2009. Multiscaling analysis of high resolution space-time lidar-rainfall. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 16(5): 579-586.
- Pecknold S., Lovejoy S., Schertzer D., Hooge C. and Malouin J.F. (1993). The simulation of universal multifractals. In: *Cellular Automata: Prospects in astrophysical applications*, J.M. Perdan and A. Lejeune (Eds), World Scientific, pp 228-267.
- Rodriguez F., Andrieu H. and Morena F. (2008). A distributed hydrological model for urbanized areas - model development and application to case studies. *J Hydrol.*, 351, 268-287
- Rossman L.A. (2010). Storm Water Management Model, User's Manual. Version 5.0. U.S. Environmental Protection Agency, EPA/600/R-05/040.
- Schertzer D. and Lovejoy S. (1987). Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling and multiplicative processes. *J. Geophys. Res.*, 92(D8), 9693-9714.

- Schertzer D. and Lovejoy S. (2011). Multifractals, Generalized Scale Invariance and Complexity in Geophysics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(12): 3417–3456.
- Schüetze M., Campisano A., Colas H., Schilling W. and Vanrolleghem P.A. (2004). Real time control of urban wastewater systems—where do we stand today? *J. Hydrol*, 299, 335–348.
- Segond M.L., Wheater H.S., Onof C. (2007). The significance of small-scale spatial rainfall variability on runoff modelin. *J. Hydrol.*, 173, 309-326.
- Singh, V.P. (1997). Effect of spatial and temporal variability in rainfall and watershed characteristics on stream flow hydrograph. *Hydrol. Process.*, 11, 1649-1669.
- Tabary, P. (2007). The new French operational radar rainfall product. Part I: Methodology. *Wea. Forecasting*, 22, 393–408.
- Velleux M.L., England J.F. and Julien P.Y. (2011), TREX Watershed Modelling Framework User's Manual: Model Theory and Description. Department of civil engineering, Colorado State University, Fort Collins, January, 106p.
- Verrier S., de Montera L., Barthes L. and Mallet C. (2010). Multifractal analysis of African monsoon rain fields, taking into account the zero rain-rate problem. *J. Hydrol*, 389(1-2), 111-120

## **7.9. Annexe 9 : « A toy model to deal with zero rainfall in a Universal Multifractal framework» (soumis Nonlinear Processes in Geophysics)**

Title: A toy model to deal with zero rainfall in a Universal Multifractal framework

Authors: Gires A., Schertzer D., Tchiguirinskaia I., Lovejoy S.

Abstract:

High resolution rainfall fields contain numerous zeros (i.e pixels or time steps with no rain) which are either real or spurious that is to say associated with the limit of detection of the rainfall measurement device. In this paper we revisit the long lasting discussion on the source of this intermittency, e.g. whether it requires a specific modelling. We implement the framework of Universal multifractals (UM), which are commonly used to analyse and simulate geophysical fields exhibiting extreme variability over wide range of scales with the help of reduced number of parameters. However this framework does not enable to properly take into account these numerous zeros. For example it has been shown that not taking them into account can worsen the quality of the scaling and lead to severe bias in the estimates of UM parameters. In this paper we propose a new toy model to deal with this issue. It is a UM discrete cascade process, where at each step if the simulated intensity is below a given level (defined in a scale invariant manner), it only has a predetermined probability to survive and is otherwise set to zero. A threshold can then be implemented at the maximum resolution to model the limit of detection of the rainfall measurement device. Also imperfect, this simple toy model enables to explain most of the observed behaviour e.g. the presence of scaling breaks, or the difference between event statistics and overall statistics

Keywords:

Zero rainfall, scale invariance, multifractals, toy model

### 1) Introduction

Stochastic multifractals have been extensively used to analyze, model, and simulate rainfall fields and more generally geophysical fields extremely variable over wide range of scales (Schertzer and Lovejoy, 1987; Schertzer et al., 1997; Marsan et al., 1997; Olsson and Niemczynowicz, 1996; Harris et al. 1997; de Lima and Grassman, 1999; de Lima and de Lima, 2009; Lovejoy and Schertzer, 2007 for a review; Nykanen, 2008; Royer et al. 2008). It is based on the idea that rainfall is generated through a cascade process. In the discrete case, which is used in this paper, a step of such process consists in dividing a “parent” structure into “daughter” structures, and affecting to them the value of the “parent” structure multiplied by a random factor. Such processes are scale invariant in that the way structures are divided, and the probability distribution of the random multiplicative increment are the same at each step of the process. In the specific framework of Universal Multifractals (Schertzer and Lovejoy, 1987, 1997) the underlying cascade process is fully characterized with the help of only three scale invariant parameters:

- $H$ , the degree of non-conservation, which measures the scale dependency of the average field ( $H=0$  for a conservative field);
- $C_1$ , the mean intermittency co-dimension, which measures the clustering of the (average) intensity at smaller and smaller scales.  $C_1=0$  for an homogeneous field;
- the multifractality index  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 2$ ), which measures the clustering variability with regards to intensity level.

Another facet of rainfall intermittency is the succession of wet and dry periods. In a high resolution rainfall data set there are many zeros (a pixel or time step where no rain has been recorded). For instance in France typical long (many years) high resolution (5 min) rain gauge time series contain roughly 96 – 98% of zeros (Hoang, 2011). The nature of these zeros is especially tricky since some are real ones whereas others are spurious and simply associated with the limit of detection of any rainfall measurement device. To stress the importance of this threshold let us simply mention that a typical rain gauge limit of detection is 0.2 mm/h (one tipping of bucket during an hour), which is roughly 2-3 times greater than the average rainfall in Paris (roughly 650 mm per year).

How to deal with the numerous zeros of the rainfall fields in this multifractal framework has been discussed for more than 20 years. For example, in the late eighties there was a theoretical debate over whether zero values should be considered separately from the other values (Kedem and Chui, 1987), or not (Lovejoy and Schertzer, 1989). Since then numerous authors have suggested methods, which are often contradictory between themselves! Let us first mention the issue of how to model the zeros. Some authors suggest that the rainfall field results from the multiplication of a multifractal field by an independent binary field corresponding to the rainfall support. Different models have been published for the rainfall support: a so called random cascade  $\beta$ -model in a discrete (Over and Gupta, 1996) or continuous (Schmitt et al., 1998) form, or a two-state renewal process to represent wet and dry periods (Schmitt et al., 1998). Olsson (1998) introduces the zeros within the cascade process by explicitly affecting a strictly positive probability for zero values at each step of the process. Contrary to the other previously mentioned models, this probability depends on the properties of the simulated rainfall field. More precisely it is adjusted according the intensity of the time step (it a 1D model for time series) and its position in the sequence of dry and wet periods. Other authors (Lovejoy et al., 2008; de Montera et al., 2009) disagree and state that a simple threshold implemented at the maximum resolution enables to reproduce observed properties. Some authors report that the threshold introduces a break in the scaling behaviour (Larnder, 1995; de Montera et al., 2009). There is an overall agreement over the fact that the numerous (either spurious or not) zeros affect the estimates of UM parameters by introducing a bias that leads to an underestimation of  $\alpha$  and an overestimation of  $C_1$ . Nevertheless, there is no agreement on how to retrieve the correct underlying UM parameters and various techniques are found in the literature: taking into account only the fractal support over which some rain was actually recorded (Schmitt et al., 1998), doing event based analysis to limit the number of zeros (de Montera et al. 2009, Verrier et al., 2010), a kind of bootstrap method relying on a first guess estimate and use multifractal simulations (Lovejoy et al., 2008), or implementing a iterative process whose main step consists in adding a random simulated multifractal field to simulated the unobserved small values (Gires et al., 2012b). This iterative process enables to improve the estimations of the underlying UM parameters but a serious limitation is that the convergence is not ensured and that it must be stopped after a pre-determined number of steps.

In section 2 the theoretical framework of UM is briefly reminded. Discrepancies between this framework and observed rainfall data are presented in section 3. A new toy model to generate a rainfall field with its associated zeroes is suggested in section 4. Results for a given parameter set are discussed in section 5. Finally the sensitivity of the new toy model to its parameters is analyzed in section 6.

## 2) Brief reminder of the theoretical framework of multifractals

Before going on, we will briefly present the theoretical framework of UM. For more details, see Lovejoy and Schertzer (2007) and Schertzer and Lovejoy (2002). The explanations are given in 1D, but they are also valid in 2D or 3D. The rainfall support, i.e. the portion of time where some rain is recorded, exhibits a scaling behaviour (Lovejoy and Mandelbrot, 1985; Olsson et al., 1993). More precisely the number  $N_\lambda$  of rainy segments at resolution  $\lambda$  ( $=L/l$ , where  $l$  is the observation scale and  $L$  the outer scale of the phenomenon), scales as:

$$N_\lambda \approx \lambda^{D_F} \quad (1)$$

Where  $D_F$  defines the fractal dimension. As pointed by Lovejoy et al. (1987) or Hubert and Carbonnel (1995),  $D_F$  is strongly dependent on the threshold defining the occurrence or not of rainfall ( $D_F$  decreases with increasing thresholds), indicating that more than one fractal dimension is needed to fully characterize the rainfall field.

$\varepsilon_\lambda$  denotes a conservative field at resolution  $\lambda$ . If  $\varepsilon_\lambda$  is a multifractal field, then the probability of exceeding a scale dependent threshold ( $\lambda^\gamma$ ) defined with the help a singularity  $\gamma$ , scales with the resolution as

$$\Pr(\varepsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad (2)$$

Where  $c(\gamma)$  is the codimension function. It can be shown (Schertzer and Lovejoy, 1987) that this is equivalent to the scaling of the statistical moment of order  $q$ :

$$\langle \varepsilon_\lambda \rangle \approx \lambda^{K(q)} \quad (3)$$

Where  $K(q)$  is the moment scaling function. The functions  $K(q)$  and  $c(\gamma)$  fully characterize the variability through scales of the field  $\varepsilon_\lambda$ , and are linked by a Legendre transform (Parisi and Frish, 1985).

In the specific framework of Universal Multifractals, towards which most multiplicative processes converge (this a broad generalization of the central limit theorem, Schertzer and Lovejoy, 1987, 1997),  $K(q)$  is given by:

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) \quad (4)$$

Where  $C_1$  and  $\alpha$  have been defined in the introduction.

UM parameters  $C_1$  and  $\alpha$  are estimated with the help of the Double Trace Moment (DTM) technique (Lavallée et al., 1993). This technique is based on the fact that if  $\varepsilon_\lambda$  is a multifractal field, then the field  $\varepsilon_\lambda^{(\eta)}$ , obtained by upscaling the  $\eta^{\text{th}}$  power of the field at maximum resolution, also scales

$$\langle (R_\lambda^{(\eta)})^q \rangle \approx \lambda^{K(q,\eta)} \quad (5)$$

With

$$K(q,\eta) = K(\eta q) - qK(\eta) \quad (6)$$

For Universal Multifractals, this yields:

$$K(q,\eta) = \eta^\alpha K(q) \quad (7)$$

Therefore the multifractality index  $\alpha$  corresponds to the slope of the so-called DTM curve, which is the log-log plot of  $K(q, \eta)$  vs.  $\eta$  for fixed  $q$ .

Finally, let us mention the standard framework to deal with a non-conservative field, denoted  $\phi_\lambda$  (i.e. we have  $\langle \phi_\lambda \rangle \neq 1$ ). In that case, it is usually assumed that it can be written as:

$$\phi_\lambda = \varepsilon_\lambda \lambda^{-H} \quad (8)$$

where  $\varepsilon_\lambda$  is a conservative field of moment scaling function  $K_c(q)$ , and  $H$  the non-conservation parameter.  $K_c(q)$  only depends on UM parameters  $C_1$  and  $\alpha$ .  $H$  characterizes the scale dependence of the average field, i.e.

$$\langle \phi_\lambda \rangle \approx \lambda^{-H} \quad (9)$$

$H$  is equal to zero for a conservative field. The moment scaling function  $K(q)$  of  $\phi_\lambda$  is given by:

$$K(q) = K_c(q) - Hq \quad (10)$$

The DTM technique should theoretically be implemented on  $\varepsilon_\lambda$ , however if  $H < 0.5$ , it can be implemented directly on  $\phi_\lambda$ , and will not generate biased estimates. In case of greater  $H$ ,  $\varepsilon_\lambda$  should be used. Retrieving  $\varepsilon_\lambda$  from  $\phi_\lambda$  theoretically requires a fractional integration of order  $H$  (equivalent to a multiplication by  $k^H$  in the Fourier space). A common approximation, which provides reliable results (Lavallée et al., 1993), consists in taking  $\varepsilon_\lambda$  as the absolute value of the fluctuations of  $\phi_\lambda$  at the maximum resolution and renormalizing it, i.e.:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{|\phi_\lambda(i+1) - \phi_\lambda(i)|}{\langle |\phi_\lambda(i+1) - \phi_\lambda(i)| \rangle} \text{ in 1D,} \quad (11)$$

Then  $\varepsilon_\lambda$  is obtained by upscaling  $\varepsilon_\lambda$ .

$H$  can be estimated with the help of the following formula (Tessier et al., 1993):

$$\beta = 1 + 2H - K_c(2) \quad (12)$$

Where  $\beta$  is the spectral slope that characterizes the power spectrum of a scaling field, which follows a power law over a wide range of wave numbers:

$$E(k) \propto k^{-\beta} \quad (13)$$

### 3) Discrepancies with the theoretical framework

The first discrepancy with this theoretical framework, which assumes scale invariance, is the occurrence of scaling breaks, enabling to distinguish two or more ranges of scales over which the theoretical framework is validated with different parameters. For instance, most authors report a break in Eq. 1 (Olsson et al., 1993; Hubert and Carbonnel, 1995; de Lima and de Lima, 1999). It appears that for the large scales the fractal dimension is equal to the dimension of the embedding space (1 in 1D with time series, 2 in 2D with maps), indicating that there is some rain everywhere. A break is also often observed in Eq. 3. For instance Gires et al. 2011 reported one at 16 km on radar data of a heavy rainfall event (a Cevenol episode) that occurred in the South of France 5-9<sup>th</sup> September, 2005. Such break was also observed on 3 rainfall events in the Paris area (Tchiguirinskaia et al., 2011). In temporal analysis, Fraedrich and Larnder (1993) reported a break at 2-3 hours, and one at 3 days on Postdam

(Germany) rainfall time series. De lima and Grassman (1999) also reported one at roughly 1h on a 15 min resolution long rainfall time series of Val Poroso, Portugal. Concerning the UM parameter estimates, it appears that  $\alpha$  is greater and  $C_1$  smaller for small scales than for large scales.

Secondly let us mention the issue of  $H > 0$ , indicating a non-conservative, smoother and more correlated field. Indeed numerous authors report  $H > 0$  for various rainfall events. For instance de Montera et al. (2009) estimated  $H$  roughly equal to 0.5 for high resolution time series of different French rainfall events. Verrier et al. (2010) found  $H$  roughly equal to 0.4 in a multifractal spatial analysis on African monsoon radar data. Nykanen (2008) and Nykanen and Harris (2003) analysed radar data of 5 heavy rainfall events in the Rocky Mountains. In these papers they computed the time evolution of  $H$ , which ranges from 0.31 to 0.61. Gires et al. (2011, 2012a) found  $H$  roughly equal to 0.3-0.6 for a Cevenol episode and rainfall event over the London area. It appears that no physical explanation for this non-zero  $H$  is provided by these authors. One of the goals of the model presented in section 4 is to suggest one.

Thirdly it appears that the UM parameters found in the spatial analysis of radar rainfall maps are quite different from the ones found in temporal analysis of rain gauge time series. Indeed, in spatial analysis common values are  $\alpha \approx 1.5 - 1.7$ ,  $C_1 \approx 0.05 - 0.2$  and  $H \approx 0.3 - 0.6$  (Gires et al., 2011, 2012, Verrier et al, 2010, Tessier et al., 1993), whereas in temporal analysis they are  $\alpha \approx 0.5 - 0.7$ ,  $C_1 \approx 0.3 - 0.5$ , and  $H \approx 0 - 0.3$  (de Lima and de Lima, 2009; de Lima and Grasman, 1999; Fraedrich and Larnder, 1993; Ladoy et al., 1993; Olsson, 1995; Tessier et al., 1996). These differences are not in agreement with the simplest space – time scaling model of rainfall which relies on an anisotropy scaling exponent  $H_t$  between space and time. Indeed in this framework (Deidda, 2000; Gires et al., 2011; Macor et al., 2007; Marsan et al., 1996; Radkevich et al., 2008), one should find:

$$K_{space}(q) = \frac{K_{time}(q)}{1 - H_t} \quad (14)$$

Hence

$$\alpha_{space} = \alpha_{time} \quad (15a)$$

$$\frac{C_{1,space}}{C_{1,time}} = \frac{H_{space}}{H_{time}} = \frac{1}{1 - H_t} \quad (15b)$$

With the help of Kolmogorov theory (1962) and assuming that rain cells have the same lifetime like eddies, it can be shown that  $H_t$  is expected to be equal to 1/3 (Marsan et al., 1996). This disagreement might be due to a bias inherent to the fact that studied radar data have been selected to correspond to a rainfall event, whereas rain gauge time series are usually long (few months or years) and therefore include many dry periods, which are not appropriately represented in the standard UM framework. When the studied period corresponds to a rainfall event, UM parameters similar to “usual” spatial one are retrieved. For instance, Montera et al., 2009 analyzed 30 s resolution rainfall time series of few rainfall events and found  $\alpha = 1.7$ ,  $C_1 = 0.13$  and  $H = 0.53$ .

Lastly, it should be mentioned that implementing a threshold on a UM field has a significant impact on the estimates of the UM parameters one can retrieve from this field. To illustrate this, let's consider two simulated conservative UM field with different sets of UM parameters:  $\alpha = 1.7$  and  $C_1 = 0.2$  for case 1, and  $\alpha = 0.6$  and  $C_1 = 0.45$  for case 2. Two hundreds independent samples of mean (on all the samples) equal to one are generated for both cases. A

threshold of respectively 9 and 10 is implemented in case 1 and 2, leading to 98.1% of zeros in both cases. This percentage is commonly observed on high resolution (typically time steps lower than 5 min) long (few years) rain gauge time series. The DTM is then applied to these thresholded fields. The obtained estimates are  $\alpha = 0.55$  and  $C_1 = 0.38$  for case 1, and  $\alpha = 0.45$  and  $C_1 = 0.44$  for case 2. This is due to the fact a threshold implemented on a multifractal field results in a multifractal phase transition that affects low moments and introduces a strong bias in the estimates (see Gires et al., 2012 for a detailed analysis of this effect). It should be noted that the scaling observed (linearity of Eq. 3 in a log-log plot) for both cases is rather good, with coefficients of determination greater than 0.99. This fact is quite disturbing since two processes with very different statistical properties, exhibit similar ones once they are thresholded, meaning that it is complex to determine the accurate underlying UM parameters. At first thought the case 1 with  $\alpha = 1.7$  and  $C_1 = 0.2$  seems a better candidate since it explains the parameter for event analysis and also longer time series analysis. However a simple threshold (associated either with a limit of detection or a physical limit) at the maximum resolution does not explain in a satisfactory way the presence of real zero or scaling break, meaning that there is a need for developing a new model that explains both the scaling properties and the zeros.

#### 4) A toy model

In the previous section we highlighted the fact that the standard framework of UM implemented on rainfall data does not properly explain the presence of scaling breaks, the observation of non-conservative fields and the discrepancies between spatial (usually event based) and temporal analysis (usually on long time series). In this section we present a new toy model, denoted UM+0, to generate rainfall and its zeros in a multifractal framework. Before introducing it, let's briefly remind how to build a discrete universal multifractal field. We will denote it  $W$  here (see below for an explanation). See Fig. 1 for an illustration.

At each step of the cascade process, each time step is divided into  $\lambda_1$  time steps. Although it is not mandatory,  $\lambda_1$  is usually equal to two. After  $n$  steps, the field is denoted  $W_{n,i}$ , where  $i=1, \dots, \lambda_1^n$ . The value affected to each sub-pixel is the value of the parent pixel multiplied by a random value  $\mu w_{n,i}$ , i.e.

$$W_{n,i} = W_{n-1,j} \mu w_{n,i}$$

Where proper choice of  $i$  and  $j$  ensures the connection between parent and daughter structures. The  $\mu w_{n,i}$  are independent and identically distributed. To generate a UM field (Eq. 3 and 4 valid) with parameters  $C_1$  and  $\alpha$ , one must choose as random multiplicative increment  $\mu w =$

$$\exp\left[\left(\frac{C_1 \ln(\lambda_0)}{|\alpha - 1|}\right)^{1/\alpha} L(\alpha)\right] / \lambda_1^{C_1/\alpha-1}$$

with  $L(\alpha)$  being an extremal Lévy-stable random variable of

index  $\alpha$  ( i.e.  $\langle \exp(qL(\alpha)) \rangle = \exp(q^\alpha)$ ) that can be generated with the help of the procedure given by Chambers et al. (1975). More details about generation of discrete and the more general continuous UM fields can be found in Pecknold et al. (1993) and Lovejoy and Schertzer (2010).

Let us now explain how the zeros of rainfall are introduced to simulate a rain rate field  $R$  from the UM field  $W$ . As said in the introduction, mainly two techniques have been suggested,

either to multiply by an independent random support or to threshold the simulated field at the maximum resolution. Both techniques have serious limitations: the independence assumption is not correct in the first one, and both do not properly take into account the distinction between actual and spurious zeros. In this paper we suggest to introduce the zeros within the cascade process (as done in Olsson, 1998) and not independently from the simulated values, and then to threshold the field at the maximum resolution. The two underlying assumptions are:

- The conserved quantity is not directly the rain rate but the total amount of water (in all its phases) in the atmosphere, and only a portion of it becomes rain. The UM+0 cascade process provides a scale invariant way of determining which portion and where. This is why the UM field is denoted  $W$ , and the one with the zeros  $R$ . They stand respectively for “Water” and “Rain rate”. This should not be taken accurately but more as a general idea.
- At each step of the cascade process, if the rainfall process is below a certain intensity (defined with the help of a singularity  $\gamma_0$ ), then it is not certain to “survive” (defined with the help of a probability  $p_0$ ). This would represent a kind of physical limit to rainfall processes.

More precisely  $R$  is derived from  $W$  as follows ( $\mu r$  and  $\mu w$  denote the random multiplicative increment for respectively  $R$  and  $W$ ):

- $R_0 = W_0$ ,  $R_1 = W_1$
- If  $W_{n-1} \leq (\lambda_1^{n-1})^{\gamma_0}$  then  $\mu r_{n,i} = \mu w_{n,i}$  with probability  $p_0$  or  $\mu r_{n,i} = 0$  with probability  $1 - p_0$
- If  $W_{n-1} > (\lambda_1^{n-1})^{\gamma_0}$  then  $\mu r_{n,i} = \mu w_{n,i}$  anyway.

$\gamma_0$  and  $p_0$  are parameters that characterize the process generating the actual zeros of the rainfall field. It should be noted that since it is a multiplicative process, once the rainfall process has been set to zero at a given resolution, it will remain equal to zero at the higher resolution. This aims at representing long dry periods. Finally a threshold ( $T$ ) is implemented at the maximum resolution to mimic the limit of detection of any rainfall measurement device.

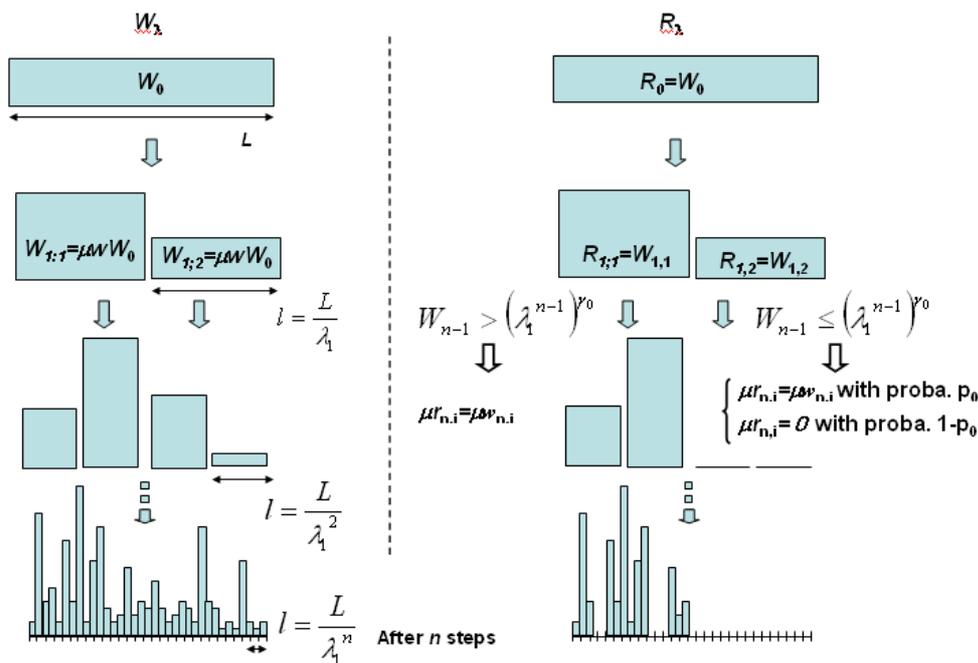


Figure 1: Illustration of the cascade processes to generate  $W_\lambda$  and  $R_\lambda$ .

## 5) Results for a set of parameters

The aim of this section is to discuss the results of a multifractal analysis performed on a field generated with the UM+0 cascade process. The UM parameters used are  $C_1=0.1$  and  $\alpha=1.9$ . These values are typically obtained for analysis focusing on portions of time series or maps where there are (almost) no zeros. For example de Montera et al. (2010) reported  $C_1=0.13$  and  $\alpha=1.7$  for a 30s time series, Mandapaka et al. (2009) reported  $C_1=0.18$  and  $\alpha=1.9$  for spatial and temporal analysis performed on high resolution (2.5m, 1s) Lidar data, and Verrier et al. (2010) reported  $C_1=0.12$  and  $\alpha=1.78$  for spatial analysis of radar data (1 km resolution). Concerning the additional parameters introduced in the new model,  $\gamma_0=0.1$  and  $p_0=0.5$  are tested in this section. Tests are performed with or without a threshold of 10 implemented on the field UM+0 previously normalized to one on average. The thresholded field is denoted UM+0+T in the following. The influence of these parameters will be discussed in section 5. The analysis is performed on an ensemble of 1000 independent 1D samples of length 4096. Unless otherwise mentioned, the analysis is performed on the dressed field, i.e. the one obtained by re-aggregating the field from its maximum resolution. Only few parameters are computed on the bare fields, i.e. the one obtained at each resolution through the cascade process which is not accessible with actual rainfall data.

The percentage of zero is equal to 95% and 97% for respectively the UM+0 and UM+0+T field. This would mean that with such a limit of detection, the rainfall measurement devices misses slightly more than a third of the rainy time steps. This seems plausible but it is very complex to actually check. Fractal analysis (Eq. 1 in a log-log plot) is performed and displayed Fig. 1 for the UM+0 field. By taking into account the whole range of scales,  $D_F$  is estimated to 0.67 (with a coefficient of determination  $R^2$  greater than 0.99), which is in agreement with standard values. However, when considering a break at  $\lambda = 128$ , one finds  $D_F = 0.78$  for small scales and  $D_F = 0.59$  for large scales. This does not reproduce the behaviour of actual rainfall fields which usually exhibit greater fractal dimensions for large scales than for small ones. This is a serious limitation of this model. As expected the estimated fractal dimensions are slightly smaller with a threshold (0.72 and 0.57 for respectively small and large scales), but they exhibit similar overall behaviour.

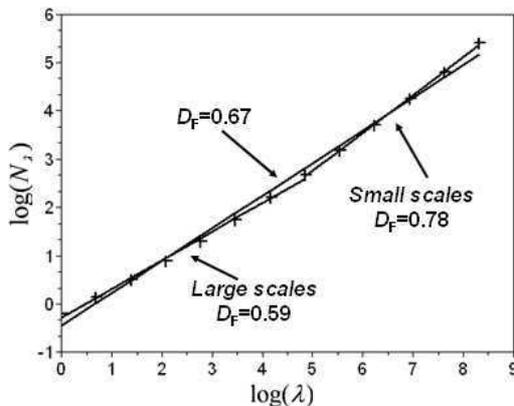


Figure 2: Computation of the fractal dimension (Eq. 1 in a log-log plot) of  $R_\lambda$  for  $C_1=0.1$ ,  $\alpha=1.9$ ,  $\gamma_0=0.1$  and  $p_0=0.5$

TM (Eq. 3 in a log-log plot) and DTM analysis are performed on the field dressed from the maximum resolution of 4096, as it is done with actual rainfall data. Fig. 3.a displays TM

analysis for the UM field. As expected the scaling is excellent ( $R^2 > 0.997$  for all the statistical moment orders), and the DTM analysis (Fig. 3.d) yields  $C_1=0.094$  and  $\alpha=1.91$ , which is very close from the parameters inputted in the simulations. With the UM+0 field, the scaling is worsened as it can be seen on Fig. 3.b, where a curvature is visible for all the statistical moment orders. For example the  $R^2$  for  $q=2$  without considering any break is equal to 0.95. In the following this parameter will be taken as an indicator of the quality of the scaling. When taking into account a break at  $\lambda=128$ , this same  $R^2$  is equal to 0.98 and 0.97 for respectively small and large scales.  $K(q)$  (see Fig. 3.c) of the UM+0 field for small scales remains rather similar to the one of UM field except for small moments where the multifractal phase transition associated with numerous zeros introduces a bias. For large scales, the discrepancies are much greater even for great moments, and the curvature of  $K(q)$ , which reflects the multifractality of the associated field, is almost lost. The determination curve of UM parameters in the DTM analysis (Eq. 7 in a log-log plot) are displayed Fig. 3.d, where the linear portion used to estimate  $C_1$  and  $\alpha$  is highlighted. This leads to  $C_1=0.32$  and  $\alpha=0.69$  for large scales and  $C_1=0.11$  and  $\alpha=1.33$  for small scales. When a threshold is implemented the quality of the scaling remains similar and the UM parameters are slightly more affected. Indeed one finds  $C_1=0.33$  and  $\alpha=0.65$  for large scales and  $C_1=0.13$  and  $\alpha=1.22$  for small scales. This simple toy models reproduces the scaling break and the main variations of UM parameters between small and large scales. Finally it should be noted the behaviour observed on small scales enables to retrieve much more accurately the estimates of the underlying UM field.

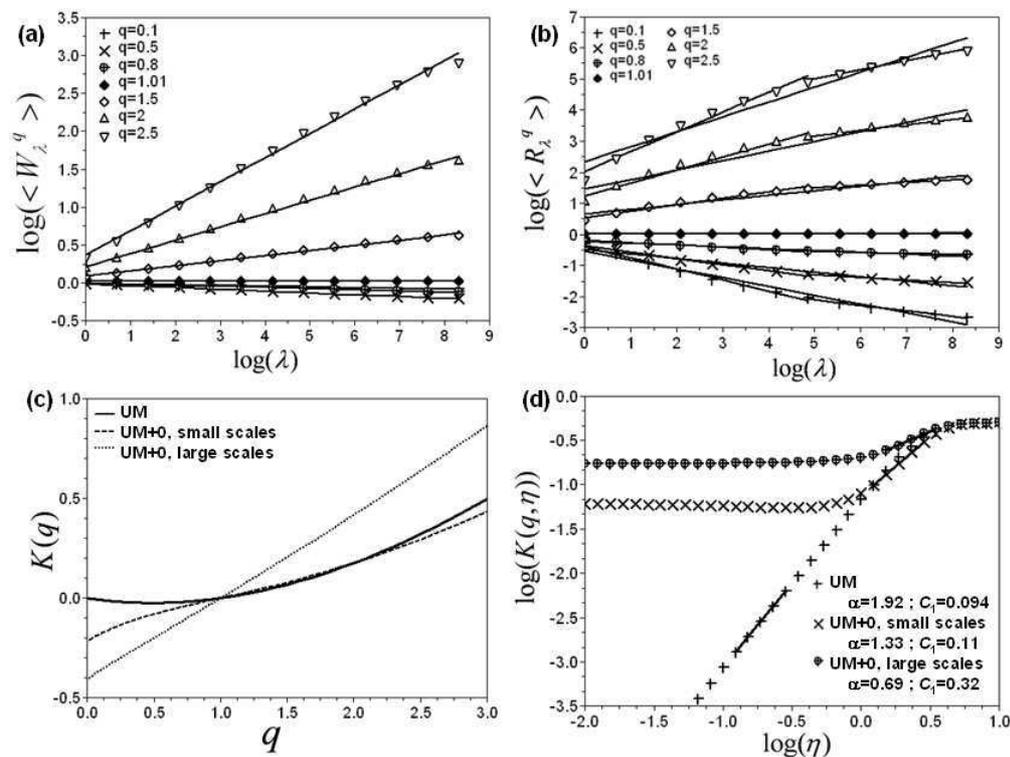


Figure 3 : (a) Scaling of  $W_\lambda$ , (b) Scaling of  $R_\lambda$ , (c)  $K(q)$  for  $R_\lambda$ , and (d) Determination curve of  $C_1$  and  $\alpha$ , for simulation parameters  $C_1=0.1$ ,  $\alpha=1.9$ ,  $\gamma_0=0.1$  and  $p_0=0.5$

One of the main features of the UM+0 cascade process is that it is not conservative, i.e. since some time steps (with small singularities) are set to zero at each step, the average mean decreases with the number of cascade steps. To analyze more precisely this effect Fig. ?a

displays the mean of the process computed on the bare field, for the UM and UM+0 process, vs. the resolution in a log-log plot. Linear regressions are furthermore performed to evaluate non-conservation parameters  $H$  as defined in Eq. 8 (it will be called  $H$  bare in the following). As expected for the UM field which is conservative,  $H$  bare is roughly equal to 0. For the UM+0 field the mean decreases with greater resolutions. However the curve does not exhibit a linear behaviour in this log-log plot, indicating that the standard framework of Eq. 8 with a single  $H$  for the whole range of scales is not appropriate for this model (and may be not also for rainfall). Estimating  $H$  bare on two ranges of scales (which is not perfectly accurate since the curve exhibits more a curvature than two linear portions), one finds  $H=0.09$  for small scales and  $H=0.25$  for large ones. This is not what is observed in the literature where the estimates of  $H$  are usually smaller for large scales. It should be mentioned that smaller values of  $H$  are found when estimated on the dressed field with the help of the spectral slope (Eq. 12) (it will be called  $H$  dressed in the following). Fig. 4.b displays the power spectrum for the UM+0 field. A break was considered (for  $k=128$ , which corresponds to  $\lambda=128$ ) to be consistent with the TM analysis, but similar values of  $\beta$  are found for both ranges of scales (roughly  $\beta=1$ ), which indicates that there is basically no need for a break. We find  $H = 0.09$  for small scales and  $H = 0.17$  for large ones. The differences between both ranges of scales are not due to  $\beta$  but to the multifractal correction in Eq. 12. Furthermore the estimates of  $\beta$  are basically equal to those on the UM field indicating that the toy model does not modify the spectral behaviour. Similar results are found on the UM+0+T fields. This toy model does not reproduce the spectral behaviour and the values of  $H$  for the dressed field according to the range of scales reported in the literature. Nevertheless, this model provides a framework to explain the fact that  $H \neq 0$  on many observed rainfall fields, which is not the case for the models consisting in a simple threshold or a multiplication by an independent support. A possible improvement of this toy model could be to introduce a vertical velocity component as suggested in Lovejoy and Schertzer (2008), where the authors developed a rain rate model, consisting in a product of a Liquid Water Content and a vertical velocity, which reproduced the spectral properties of actual rainfall fields.

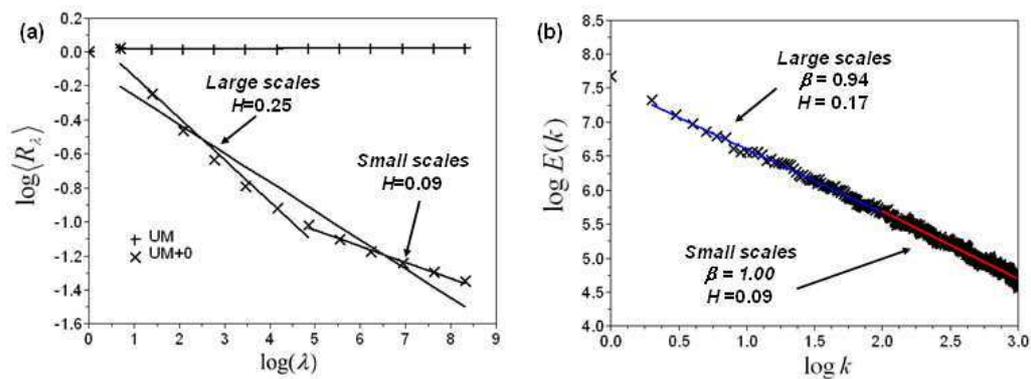


Figure 4: Estimation of the non-conservation parameter  $H$  bare (a) and  $H$  dressed through the spectral behaviour (b) for simulation parameters  $C_1=0.1$ ,  $\alpha=1.9$ ,  $\gamma_0=0.1$  and  $p_0=0.5$

In order to mimic what is done when rainfall event based analysis are performed, a multifractal analysis is performed only on the portion of the field with the heaviest simulated rainfall. To achieve this, the 128 consecutive time steps with the maximum cumulated rainfall depth are selected for each of the 1000 independent samples of size 4096. Then only the 50 with the greatest depth are kept for the analysis. Fig. 5.a displays the TM analysis, and shows

that no scaling break should be considered ( $R^2 > 0.99$  for  $q > 0.5$ ). Concerning  $K(q)$ , the curves obtained with only the heaviest rainfalls of the UM+0 and UM+0+T fields are rather similar to the one of the UM field (see Fig. 5.b). Concerning the UM parameters estimates (Fig. 5.c), one finds  $C_1=0.094$  and  $\alpha=1.60$  for the heaviest rainfall of the UM+0 field. The estimates are slightly more biased for the heaviest rainfall of the UM+0+T field ( $C_1=1.01$  and  $\alpha=1.49$ ), but remain much closer to the estimates of the underlying UM field than when the analysis is performed on the whole field. It is interesting to note that this simple toy model reproduces UM parameters estimates found in the literature for both long time series analysis (with its large scale results when the whole field is considered) and event based analysis (by selecting only the heaviest rainfalls). Finally it should be mentioned that such analysis on the heaviest rainfall was performed on simulated UM field with  $C_1=0.5$  and  $\alpha=0.5$  as input and lead to  $C_1=0.31$  and  $\alpha=0.57$ . This confirms that the standard UM parameters retrieved from long time series cannot be used to explain event based ones.

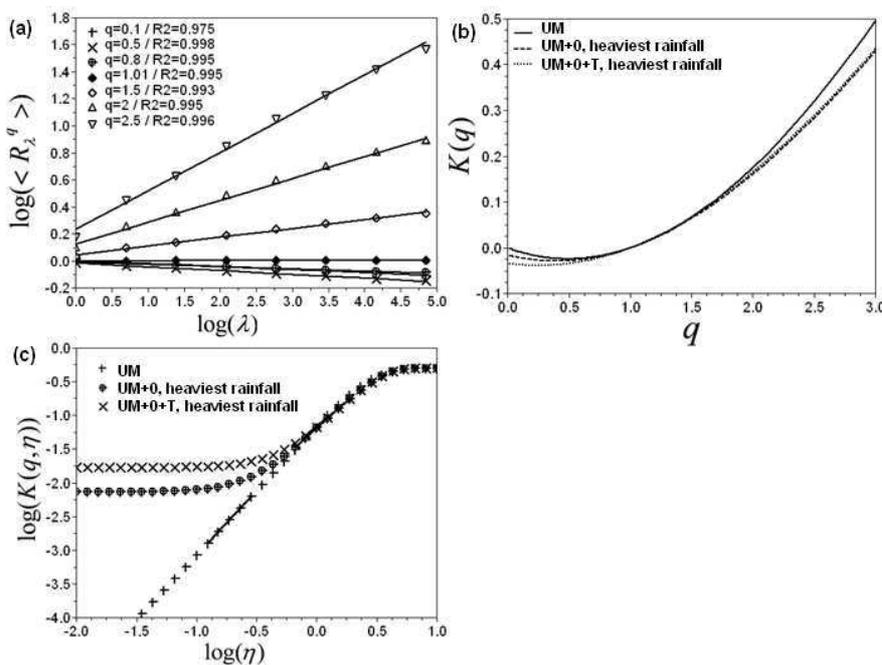


Figure 5: When considering only the heaviest rainfall : (a) Scaling of  $R_\lambda$ , (b)  $K(q)$  and (c) Determination curve of  $C_1$  and  $\alpha$ , for simulation parameters  $C_1=0.1$ ,  $\alpha=1.9$ ,  $\gamma_0=0.1$  and  $p_0=0.5$

## 6) Influence of the various parameters

In this section, the sensitivity of the model to the parameters  $\gamma_0$  and  $p_0$  is analyzed. All the possible combinations with  $\gamma_0 = -0.1 ; 0 ; 0.1 ; 0.2$  and  $p_0 = 0.1 ; 0.3 ; 0.5 ; 0.7 ; 0.9$  are tested, always keeping  $C_1=0.1$  and  $\alpha=1.9$ . Concerning the threshold, we proceed as follow: (i) Normalization of the generated UM+0 field on average (ii) Implementation of a threshold  $T=10$  (the same for all the parameter sets). Figure 6.a displays the percentage of zeros at the maximum resolution ( $A=4096$ ). As expected without any threshold, the percentage of zeros increases with  $\gamma_0$  and decreases with  $p_0$ . For small  $p_0$  (roughly  $< 0.5$ ) the influence is not really significant. When a threshold is implemented the differences basically disappear between the different fields, with percentage of zeros always greater than 95%. The fractal dimensions for large and small scales are displayed respectively Fig. 6.b and Fig. 6.c. For small scales,

without any threshold, as expected  $D_F$  decreases with  $\gamma_0$  and the influence of  $p_0$  is not really significant. An inverse behaviour is observed with a threshold. The differences between fields thresholded and not are much greater for small  $\gamma_0$  and  $p_0$ , i.e. where the proportion of “real” zeros is greater. For example, for  $p_0=0.1$ , the fields with  $\gamma_0 = 0.2$  exhibit the same small scale fractal dimension, whereas for  $\gamma_0 = -0.1$   $D_F$  is equal to 0.93 for un-thresholded field and to 0.50 for the thresholded one. Basically similar behaviour is observed for large scales, with values slightly smaller than for small scales, which is (as mentioned in the previous section) contrary to the observations on actual rainfall.

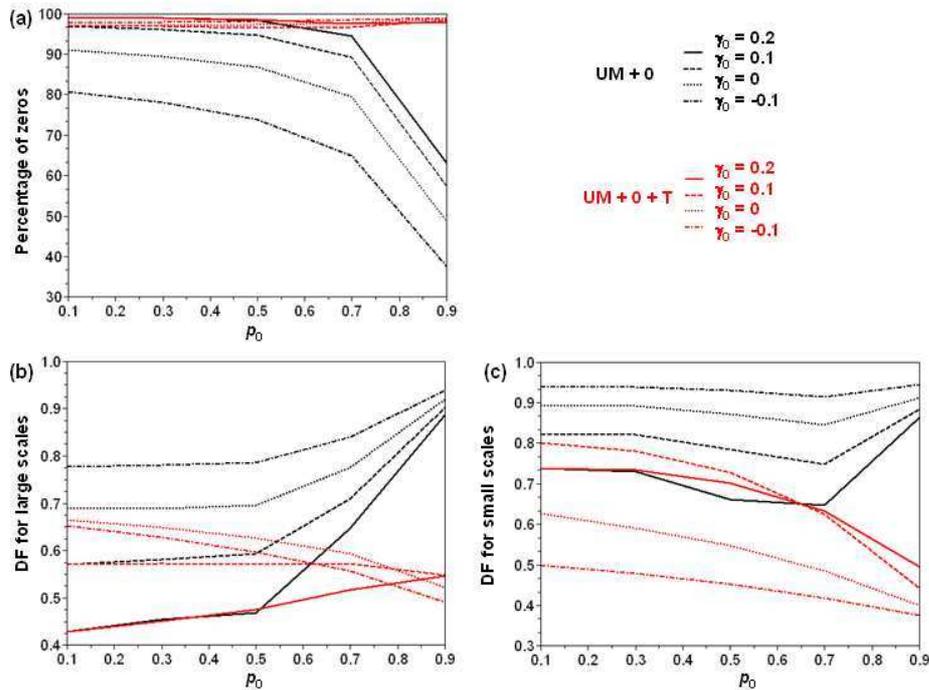


Figure 6: Analysis of the sensitivity to  $\gamma_0$  and  $p_0$ : percentage of zero (a),  $D_F$  for large scales (b) and  $D_F$  for small scales (c)

Fig. 7.a displays the coefficient of determination  $R^2$  of the linear regression which gives  $K(q)$  (eq. in a log-log plot) for  $q=2$  when no break is taken into account. It is an indicator of the quality of the scaling, and the necessity to consider a break. It decreases with greater  $\gamma_0$  and smaller  $p_0$ . There is a slight but not significant improvement when a threshold is implemented. Anyway the values remain always rather low and a break at  $\lambda=128$  is therefore taken into account in the following. For small scales (Fig. 7.c and 7.e), when there is no threshold the estimate of  $\alpha$  decreases and the one of  $C_1$  increases with greater  $\gamma_0$  and smaller  $p_0$ . The differences are smaller for  $C_1$  than for  $\alpha$ . Similar behaviour is retrieved for large scales with stronger bias (Fig. 7.b and 7.d). When a threshold is implemented, inverse behaviour is observed, indicating that estimates are more biased when the proportion of zeros due to the threshold (i.e. false ones) is greater. It should be noted that with a threshold the disparities due to  $\gamma_0$  and  $p_0$  are damped. Finally it should be mentioned that the curves with  $\gamma_0 = 0.2$  exhibit quite different patterns than the others especially when a threshold is implemented. This is likely to be due to the fact that in that case  $\gamma_0 > C_1$ , meaning that a too significant proportion of the field was removed by the UM+0 process and that therefore the threshold has a smaller influence.

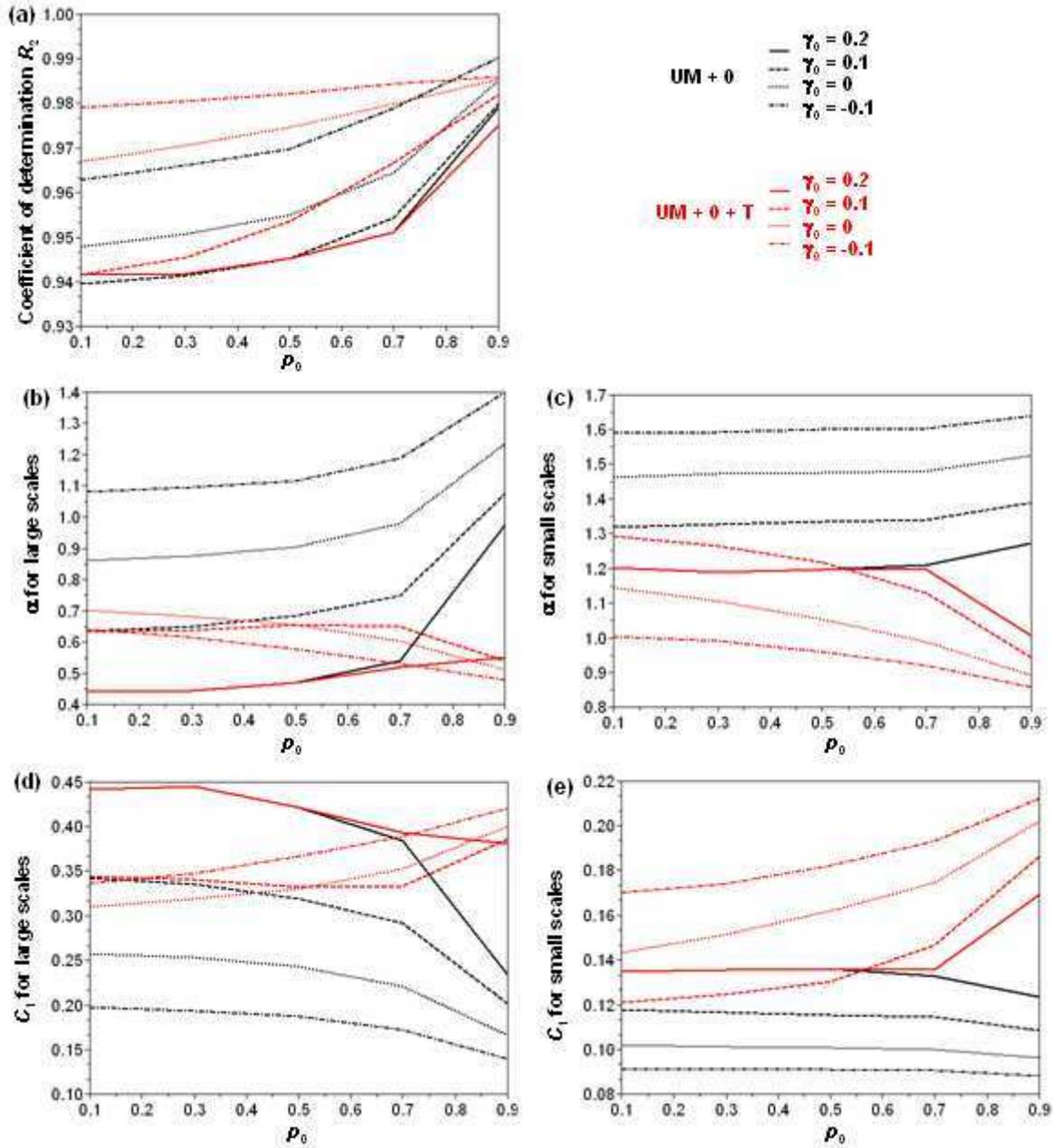


Figure 7 : Analysis of the sensitivity to  $\gamma_0$  and  $p_0$ : coefficient of determination  $R^2$  for  $q=2$  (a),  $\alpha$  and  $C_1$  for large and small scales (b,c,d,e)

The coefficients of non-conservation  $H$  bare and  $H$  dressed of the UM+0 fields, are displayed Fig. 8. For both small and large scales they increase with greater  $\gamma_0$  and smaller  $p_0$  (i.e. with more real zeros generated). However the dependency in  $p_0$  for small scales is not significant. As discussed in the previous section,  $H$  is greater for large scales than for small scales, which is contrary to what is observed on actual rainfall fields. The values found on the dressed fields are smaller than the bare ones and do not reach the ones found in the literature (0.3-0.6). Considering the bare ones, it seems that one should have  $p_0 > 0.5$  and  $\gamma_0 > 0.1$  for actual rainfall fields.

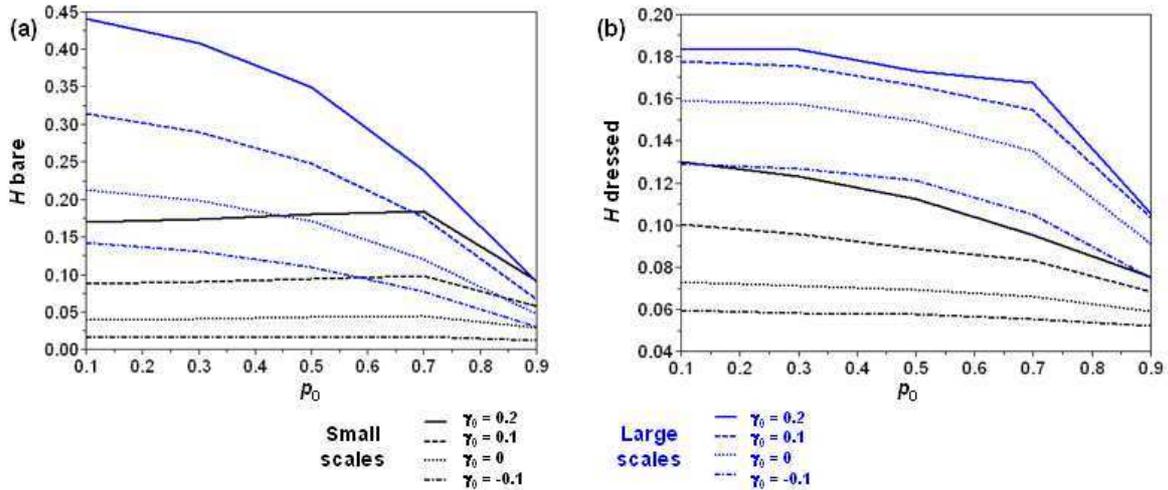


Figure 8: Analysis of the sensitivity to  $\gamma_0$  and  $p_0$ :  $H_{bare}$  and  $H_{dressed}$

Fig. 9 displays  $C_1$  and  $\alpha$  estimated only on the heaviest rainfalls. The same comment concerning the dependencies in  $\gamma_0$  and  $p_0$  as for the estimates of  $C_1$  and  $\alpha$  directly on the field could be made. The main differences are that the estimates are much less biased.

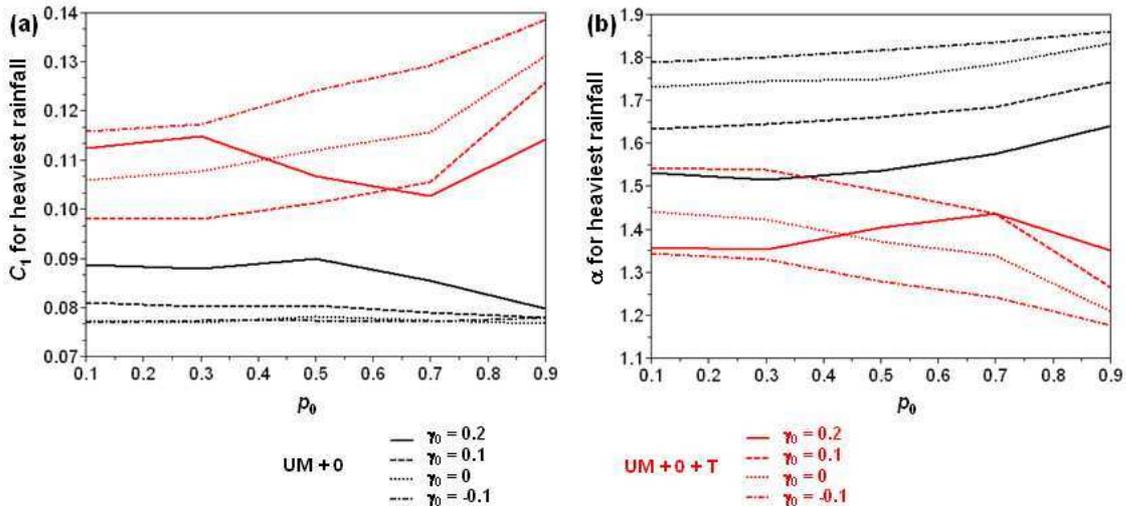


Figure 9: Analysis of the sensitivity to  $\gamma_0$  and  $p_0$ :  $C_1$  (a) and  $\alpha$  (b) for the heaviest rainfall

Finally it should be said the same analysis was performed with UM parameters  $C_1=0.2$  and  $\alpha=1.7$  instead of  $C_1=0.1$  and  $\alpha=1.9$ , and that similar results were found. The main differences consist in a slightly better scaling (that nevertheless requires the introduction of a scaling break), smaller estimates of  $H$  (which suggest the UM parameter set presented more in details in this paper is more relevant), and of course slightly smaller values of  $\alpha$  and greater ones for  $C_1$ .

## 7) Conclusions

In this paper a new toy model to simulate the numerous zeros of rainfall fields in the framework of discrete universal multifractal cascades is presented. The real zeros are explicitly distinguished from the spurious ones. The zeros are generated within the cascade process, in a scale invariant way, and not independently from the rainfall values. It basically consists in setting to zero with a probability  $1-p_0$  the rainfall field if it is smaller than a given singularity  $\gamma_0$ , at each step of the cascade process. This process is called UM+0. The underlying assumptions are that the conserved quantity is the total amount of water in all its phase in the atmosphere and not the rain rate and that if there is not enough water then the rainfall process is not certain to occur. In that way the model can be physically justified. Finally the field is thresholded at its maximum resolution to mimic the limit of detection of any rainfall measurement device.

This rather simple scale invariant model enables us to retrieve many of the properties observed on actual rainfall fields: a scaling break, non-conservation (only a portion of it is explained), differences between UM parameters for small and large scales and discrepancies between events based analysis and long time series analysis. Nevertheless some of the properties of the generated fields are not in agreement with the ones of actual rainfall fields: the spectral behaviour is not modified, the coefficient of non-conservation is greater for large scales than for small scales and its dressed values are too small, and the fractal dimension is greater for small scales than for large ones. This means that this UM+0 model should be considered as nothing more than an interesting and encouraging toy model.

More generally the results found with this toy model suggest that the underlying UM parameters for rainfall are rather constant ( $\alpha = 1.7 - 1.9$  and  $C_1 = 0.1 - 0.2$ ), and what would change from one place to another or from one data set to another is the way the zeros are generated. This process would explain most of the discrepancies between the theoretical multifractal framework and observed rainfall behaviour.

To confirm these results further investigation are needed: (i) multifractal analysis of total water amount in all its phase in the atmosphere and not only rain rate should be performed (ii) the model generating zeros should be refined to retrieve all the observed properties (iii) a way to accurately estimate the parameters of the model should be developed. One of the goals of this paper is to foster research on these issues.

## Acknowledgements

The authors greatly acknowledge partial financial support from the Chair “Hydrology for Resilient Cities” (sponsored by Veolia) of Ecole des Ponts ParisTech, and EU NWE Interreg IV RainRain project ([www.raingain.eu](http://www.raingain.eu)).

## References

Chambers, J.M., Mallows, C.L. and Stuck, B.W., 1976. Method for simulating stable random-variables. *Journal of the American Statistical Association*, 71(354): 340-344.

- de Lima, M.I.P. and Grasman, J., 1999. Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal. *Journal of Hydrology*, 220(1-2): 1-11.
- de Montera, L., Barthes, L., Mallet, C. and Gole, P., 2009. The Effect of Rain-No Rain Intermittency on the Estimation of the Universal Multifractals Model Parameters. *Journal of Hydrometeorology*, 10(2): 493-506.
- Deidda, R., 2000. Rainfall downscaling in a space-time multifractal framework. *Water Resour. Res.*, 36: 1779-1794.
- Fraedrich, K. and Larnder, C., 1993. Scaling regimes of composite rainfall time-series. *Tellus Series a-Dynamic Meteorology and Oceanography*, 45A(4): 289-298.
- Harris, D., Menabde, M., Seed, A. and Austin, G., 1997. Factors affecting multiscaling analysis of rainfall time series. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 4: 137-155.
- Hoang, T., 2011. Prise en compte des fluctuations spatio-temporelles pluies-débits pour une meilleure gestion de la ressource en eau et une meilleure évaluation des risques, Univ. Paris Est, Marne-la-Vallée.
- Hubert, P., Friggit, F. and Carbonnel, J.P., 1995. Multifractal structure of rainfall occurrence in west Africa. In: Z.W. Kundzewicz (Editor), *New Uncertainty Concepts in Hydrology and Water Resources*. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 109-113.
- Gires A., Tchiguirinskaia I., Schertzer D. and Lovejoy S. (2011). Analyses multifractales et spatio-temporelles des précipitations du modèle Méso-NH et des données radar. *Hydrol. Sci. J.*, 56 (3), 380-396.
- Gires A., Onof C., Maksimovic C., Schertzer D., Tchiguirinskaia I. and Simoes N. (2012a). Quantifying the impact of small scale unmeasured rainfall variability on urban hydrology through multifractal downscaling: a case study. *J. Hydrol.* 442-443, p 117-128.
- Gires, A., Tchiguirinskaia I., Schertzer D. and Lovejoy S. (2012b) Influence of the zero-rainfall on the assessment of the multifractal parameters. *Advances in Water Resources*, In press.
- Keddem, B. and Chiu, L.S., 1987. Are rain rate processes self-similar? *Wat. Resour. Res.*, 23: 1816-1818.
- Kolmogorov, A.N., 1962. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid. Mech.*, 83: 349.
- Ladoy, P., Schmitt, F., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1993. The multifractal temporal variability of nimes rainfall data. *Comptes Rendus de l'Academie Des Sciences Serie Ii*, 317(6): 775-782.
- Larnder, C., 1995. *Observer problems in multifractals: the example of rain*, McGill Univ., Montreal, Canada.
- Lavallée, D., Lovejoy, S. and Ladoy, P., 1993. Nonlinear variability and landscape topography: analysis and simulation. In: L. de Cola and N. Lam (Editors), *Fractals in geography*. Prentice-Hall, pp. 171-205.
- Lovejoy, S. and Mandelbrot, B., 1995. Fractal properties of rain and a fractal model. *Tellus*, 37(A): 209-232.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 1989. Comments on Are rain rate processes self-similar? *Wat. Resour. Res.*, 25: 577-579.
- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 2007. Scaling and multifractal fields in the solid earth and topography. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 14(4): 465-502.

- Lovejoy, S. and Schertzer, D., 2010. On the simulation of continuous in scale universal multifractals, part I Spatially continuous processes. *Computers & Geosciences*, 36(11): 1393-1403.
- Lovejoy, S., Schertzer, D. and Allaire, V., 2008. The remarkable wide range spatial scaling of TRMM precipitation. *J. Atmos. Research*, 90: 10-32.
- Lovejoy, S., D. Schertzer, 2008: Turbulence, rain drops and the  $l^{**1/2}$  number density law, *New J. of Physics*, 10, 075017(32pp), doi:10.1088/1367-2630/10/7/075017.
- Lovejoy, S., Schertzer, D. and Tsonis, A.A., 1987. Function box-counting and multiple elliptical dimension in rain. *Science*, 235(4792): 1036-1038.
- Macor, J., 2007. Développement de techniques de prévision de pluie basées sur les propriétés multi-échelles des données radar et satellites., Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Marne La vallée, 193 pp.
- Mandapaka, P.V., Lewandowski, P., Eichinger, W.E. and Krajewski, W.F., 2009. Multiscaling analysis of high resolution space-time lidar-rainfall. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 16(5): 579-586.
- Marsan, D., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1996. Causal space-time multifractal processes: Predictability and forecasting of rain fields. *J. Geophys. Res.*, 101: 26333-26346.
- Nykanen, D.K., 2008. Linkages between Orographic Forcing and the Scaling Properties of Convective Rainfall in Mountainous Regions. *J. of hydrometeorology* 9: 327-347.
- Nykanen, D.K. and Harris, D., 2003. Orographic influences on the multiscale statistical properties of precipitation. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, 108(D8).
- Olsson, J., 1995. Limits and characteristics of the multifractal behavior of a high-resolution rainfall time series. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2: 23-29.
- Olsson, J., 1998. Evaluation of a scaling cascade model for temporal rainfall disaggregation. *Hydrology and Earth System Sciences*, 2(1): 19-30.
- Olsson, J. and Niemczynowicz, J., 1996. Multifractal analysis of daily spatial rainfall distributions. *J. of hydrology*, 187: 29-43.
- Olsson, J., Niemczynowicz, J. and Berndtsson, R., 1993. Fractal analysis of high-resolution rainfall time series. *J. Geophys. Res.*, 98: 23265-23274.
- Over, T.M. and Gupta, V.K., 1996. A space-time theory of mesoscale rainfall using random cascades. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, 101(D21): 26319-26331.
- Parisi, G. and Frish, U., 1985. A multifractal model of intermittency. In: M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi (Editors), *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics*. Elsevier North Holland, New-York, pp. 111-114.
- Pecknold, S., Lovejoy, S., Schertzer, D., Hooge, C. and Malouin, J.F., 1993. The simulation of universal multifractals. In: J.M. Perchang and A. Lejeune (Editors), *Cellular Automata: Prospects in astrophysical applications*. World Scientific, pp. 228-267.
- Radkevich, A., Lovejoy, S., Strawbridge, K.B., Schertzer, D. and Lilley, M., 2008. Scaling turbulent atmospheric stratification. III: Space-time stratification of passive scalars from lidar data. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 134(631): 317-335.
- Royer, J.-F., Biaou, A., Chauvin, F., Schertzer, D. and Lovejoy, S., 2008. Multifractal analysis of the evolution of simulated precipitation over France in a climate scenario. *C.R Geoscience*, 340: 431-440.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1987. Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling and multiplicative processes. *J. Geophys. Res.*, 92(D8): 9693-9714.
- Schertzer, D. and Lovejoy, S., 1997. Universal multifractals do exist!: Comments. *Journal of Applied Meteorology*, 36(9): 1296-1303.

- Schertzer, D., Lovejoy, S., Schmitt, F., Chigirinskaya, Y. and Marsan, D., 1997. Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency. *Fractals-Complex Geometry Patterns and Scaling in Nature and Society*, 5(3): 427-471.
- Schertzer D., Lovejoy S., Hubert P., 2002. An Introduction to Stochastic Multifractal Fields. *Mathematical Problems in Environmental Science and Engineering*, A. Ern and L. Weiping, editors, Series in Contemporary Applied Mathematics, Higher Education Press, Beijing , 106-179.
- Schmitt, F., Vannitsem, S. and Barbosa, A., 1998. Modeling of rainfall time series using two-state renewal processes and multifractals. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, 103(D18): 23181-23193.
- Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., Hoang, T. and Lovejoy, S., 2011. Multifractal study of three storms with different dynamics over the Paris region., *Proceedings of Weather radar and hydrology symposium*, Exeter, UK, April 2011.
- Tessier, Y., Lovejoy, S., Hubert, P., Schertzer, D. and Pecknold, S., 1996. Multifractal analysis and modeling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*, 101(D21): 26427-26440.
- Tessier, Y., Lovejoy, S. and Schertzer, D., 1993. Universal Multifractals: theory and observations for rain and clouds. *Journal of Applied Meteorology*, 32(2): 223-250.
- Verrier, S., de Montera, L., Barthes, L. and Mallet, C., 2010. Multifractal analysis of African monsoon rain fields, taking into account the zero rain-rate problem. *Journal of Hydrology*, 389(1-2): 111-120.