



HAL
open science

Propagation d'incertitudes et analyse de sensibilité pour la modélisation de l'infiltration et de l'érosion

Marie Rousseau

► **To cite this version:**

Marie Rousseau. Propagation d'incertitudes et analyse de sensibilité pour la modélisation de l'infiltration et de l'érosion. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Est, 2012. Français. NNT : 2012PEST1101 . pastel-00788360

HAL Id: pastel-00788360

<https://pastel.hal.science/pastel-00788360>

Submitted on 14 Feb 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE DOCTORALE MSTIC
MATHÉMATIQUES, SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DE LA COMMUNICATION

T H È S E

pour obtenir le titre de

Docteur

de l'Université Paris-Est

Mention : Mathématiques Appliquées

Présentée et soutenue le 17 décembre 2012 par

Marie Rousseau

Propagation d'incertitudes et analyse de sensibilité pour la modélisation de l'infiltration et de l'érosion

Thèse dirigée par Alexandre ERN et co-dirigée par Olivier LE MAÎTRE
préparée au BRGM et au CERMICS, Ecole des Ponts ParisTech

Jury :

<i>Président :</i>	Jocelyne ERHEL	- INRIA, Rennes
<i>Rapporteurs :</i>	Philippe ACKERER	- LHyGeS, Strasbourg
	Olivier PLANCHON	- IRD, Montpellier
<i>Examineurs :</i>	Nicole GOUTAL	- EDF-R&D, Chatou
	Jean-Marc MARTINEZ	- CEA, Saclay
	Pierre SOCHALA	- BRGM, Orléans
<i>Directeurs :</i>	Alexandre ERN	- CERMICS, Université Paris-Est
	Olivier LE MAÎTRE	- LIMSI, CNRS
<i>Invité :</i>	Olivier CERDAN	- BRGM, Orléans

Propagation d'incertitudes et analyse de sensibilité pour la modélisation de l'infiltration et de l'érosion

Résumé

Nous étudions la propagation et la quantification d'incertitudes paramétriques au travers de modèles hydrologiques pour la simulation des processus d'infiltration et d'érosion en présence de pluie et/ou de ruissellement. Les paramètres incertains sont décrits dans un cadre probabiliste comme des variables aléatoires indépendantes dont la fonction de densité de probabilité est connue. Cette modélisation probabiliste s'appuie sur une revue bibliographique permettant de cerner les plages de variations des paramètres. L'analyse statistique se fait par échantillonnage Monte Carlo et par développements en polynômes de chaos. Nos travaux ont pour but de quantifier les incertitudes sur les principales sorties du modèle et de hiérarchiser l'influence des paramètres d'entrée sur la variabilité de ces sorties par une analyse de sensibilité globale. La première application concerne les effets de la variabilité et de la spatialisation de la conductivité hydraulique à saturation du sol dans le modèle d'infiltration de Green–Ampt pour diverses échelles spatiales et temporelles. Notre principale conclusion concerne l'importance de l'état de saturation du sol. La deuxième application porte sur le modèle d'érosion de Hairsine–Rose. Une des conclusions est que les interactions paramétriques sont peu significatives dans le modèle de détachement par la pluie mais s'avèrent importantes dans le modèle de détachement par le ruissellement.

Mots clés

Infiltration, érosion, incertitudes paramétriques, analyse de sensibilité, Monte Carlo, polynômes de chaos.

Uncertainty propagation and sensitivity analysis for infiltration and erosion modeling

Abstract

We study parametric uncertainty propagation and quantification in hydrological models for the simulation of infiltration and erosion processes in the presence of rainfall and/or runoff. Uncertain input parameters are treated in a probabilistic framework, considering them as independent random variables defined by a fixed probability density function. This probabilistic modeling is based on a literature review to identify the range of variation of input parameters. The output statistical analysis is realized by Monte Carlo sampling and by polynomial chaos expansions. Our analysis aims at quantifying uncertainties in model outputs and establishing a hierarchy within input parameters according to their influence on output variability by means of global sensitivity analysis. The first application concerns the variability and spatial localization of the soil saturated hydraulic conductivity in the Green-Ampt infiltration model at different spatial and temporal scales. Our main conclusion is the importance of the soil saturation state. The second application deals with the Harisine–Rose erosion model. One conclusion is that the parametric interactions are not significant in the rainfall detachment model, but they prove to be important in the runoff detachment model.

Key words

Infiltration, erosion, parametric uncertainties, sensitivity analysis, Monte Carlo, polynomial chaos.

À la mémoire de mon père.

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à mes encadrants envers qui je suis profondément reconnaissante : Alexandre Ern, Olivier Le Maître, Olivier Cerdan et Pierre Sochala. Leur implication dans ce travail de thèse a permis la mise en place d'une collaboration qui a été très enrichissante humainement et scientifiquement. Merci à Alexandre pour avoir accepté de diriger cette thèse et un grand merci pour tous ses conseils, son suivi, sa disponibilité et son esprit de rigueur qui aura, je l'espère, un peu déteint sur moi. Merci à Olivier (Olm) pour avoir été si présent et pour avoir apporté la touche "incertitudes" à ce sujet, me faisant ainsi découvrir cet univers, j'ai beaucoup apprécié travailler et apprendre à ses côtés. Je tiens aussi à remercier Pierre pour avoir proposé ce sujet à Alexandre, sans cela cette thèse n'aurait pas pris cette direction. Enfin, un merci particulier à Olivier C. sans qui je n'aurais sans doute pas continué en thèse, merci pour tout, pour toutes ces discussions et échanges plus ou moins "scientifiques", la rédaction me pique toujours autant les doigts mais j'espère avoir un peu progressé. . .

Je tiens aussi à remercier Philippe Ackerer et Olivier Planchon pour avoir accepté de rapporter ce travail de thèse et pour le temps qu'ils y ont consacré (particulièrement Olivier Planchon). Les discussions et les questions soulevées n'ont pu être que bénéfiques et m'ont permis de porter un autre regard sur mon travail. Je profite aussi de l'occasion pour remercier Nicole Goutal et Jean-Marc Martinez pour avoir accepté de participer au jury ainsi que Jocelyne Erhel pour avoir présidé la soutenance. Je remercie ainsi tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Mes remerciements se tournent ensuite vers les personnes qui m'ont entourée et soutenue quotidiennement durant ces trois années au sein du BRGM.

Un grand merci aux auvergnats qui envahissent Orléans! Merci à Olivier B. pour m'avoir épaulée, "supportée", nourrie de nombreux soirs et surtout pour avoir toujours cru en moi et ce surtout vers la fin. Un grand merci aussi à Magalie, co-bureau, co-locataire, nos fins de thèses et contrats respectifs ne nous ont pas forcément laissé de répit ni de temps pour profiter mais ce n'est que partie remise! Merci aussi à Pasc pour tous ces échanges mailiens/musicaux et ces soirées "calmes".

Je tiens ensuite à remercier mes deux co-bureau de fin de thèse et compagnons de galère (vous comprendrez bientôt), j'ai nommé : ma petite Aurore et mon petit Julien, merci pour tous ces fous rires, ces échanges de mails et de musique interminables qui m'ont "parfois" rendu la tâche plus difficile mais permis au moins de bien relâcher la pression! Vive le 311 et désolée pour le reste de l'étage qui a dû, quelques fois, nous supporter. . . Un merci particulier à Tof qui s'est proposé à la relecture de ce manuscrit et à la chasse aux erreurs, tes corrections faites dans l'avion, photographiées puis mailées m'ont beaucoup touchée!

Pour finir avec le BRGM, merci à Élodie, Dani et Camille pour toutes les pauses café, repas, soirées et même ébauches de répétitions musicales !

Bien que n'ayant passé que peu de temps au CERMICS, je tiens à saluer mes collègues du labo, avec un merci particulier à Julie et à Rémi.

Une pensée aussi à mes amis plus ou moins présents physiquement mais qui m'ont aidée sans le savoir à tenir jusqu'à la fin de la fameuse "dernière ligne droite". Merci à : Aurél, Paksouille, Gégé, la tikanmême, mon Stany, Mélissa, et sûrement d'autres que j'ai oubliés...

Je remercie "quand même" toutes les incertitudes qui ont rempli ces années de thèse...

Enfin je tiens à remercier ma famille pour son soutien et sa compréhension pendant ces longues années d'études. Un grand merci à vous les rourou (comprenez aussi les K.), en particulier pour ces dernières vacances au bled et désolée d'avoir manqué quelques repas, c'était pour la bonne cause !

Pour n'oublier personne, un merci général aux personnes qui m'ont soutenue de près ou de loin durant ces trois années : **à tous merci !**

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Problématiques et objectifs	1
1.2	Les modèles	3
1.2.1	Écoulements de surface	4
1.2.2	Infiltration	7
1.2.3	Érosion	9
1.3	Modélisation et propagation des incertitudes	11
1.3.1	Analyse des incertitudes <i>a posteriori</i>	13
1.3.2	Méthodes directes pour l'analyse d'incertitudes	14
1.4	Description des travaux et contributions	18
2	Modélisation déterministe et résolution numérique	21
2.1	Modélisation physique	21
2.1.1	Écoulements surfaciques (Saint-Venant)	21
2.1.2	Infiltration (Green-Ampt)	23
2.1.3	Érosion (Hairsine-Rose)	24
2.2	Résolution numérique	27
2.2.1	Écoulements surfaciques et infiltration	27
2.2.2	Écoulements surfaciques, infiltration et érosion	32
2.3	Illustration des processus	35
2.3.1	Infiltration	36
2.3.2	Érosion	41
3	Méthodes probabilistes et outils statistiques	45
3.1	Quelques éléments et définitions de la théorie des probabilités	45
3.1.1	Cadre probabiliste	45
3.1.2	Variables aléatoires réelles	47
3.1.3	Vecteurs aléatoires réels	49
3.2	Quantification des incertitudes sur les sorties du modèle	51
3.2.1	Cadre mathématique	52

3.2.2	Caractérisation de la variabilité	53
3.2.3	Analyse de la variance (ANOVA) et indices de sensibilité	54
3.3	Méthodes numériques	56
3.3.1	Propagation des incertitudes par Monte Carlo	56
3.3.2	Méthode des Polynômes de Chaos	61
4	Propagation des incertitudes dans le modèle d’infiltration	65
4.1	Motivations et modèle stochastique	66
4.1.1	Motivations du choix du paramètre incertain	66
4.1.2	Modèle stochastique	67
4.2	Cas test : “Trois-champs”	68
4.2.1	Description du cas test	68
4.2.2	Influence de la durée de l’événement pluvieux	70
4.2.3	Influence de la distribution spatiale	72
4.2.4	Analyse de sensibilité globale	77
4.2.5	Influence de la loi de distribution des K_s	79
4.2.6	Influence de la longueur du domaine d’étude	84
4.3	Cas test : “Bandes Enherbées”	87
4.3.1	Description du cas test	87
4.3.2	Influence de la durée de l’événement pluvieux	88
4.3.3	Estimation des quantiles	92
4.3.4	Influence de la loi de distribution des K_s	95
4.3.5	Influence de la perméabilité des bandes enherbées	98
4.4	Conclusion	102
5	Propagation des incertitudes dans le modèle d’érosion de Hairsine–Rose	105
5.1	Analyse paramétrique du modèle HR	106
5.1.1	Présentation du modèle	106
5.1.2	Principaux paramètres du modèle	107
5.1.3	Synthèse	117
5.2	Propagation des incertitudes	118
5.2.1	Modèle stochastique	118

5.2.2	Choix des valeurs des paramètres	119
5.2.3	Choix des fonctions de densité de probabilité	120
5.3	Cas tests unidimensionnels	122
5.3.1	Paramètres communs à tous les cas tests	122
5.3.2	Érosion par la pluie	122
5.3.3	Érosion par le ruissellement	129
5.3.4	Érosion par la pluie et par le ruissellement	133
5.4	Cas test bidimensionnel	137
5.5	Discussion	141
6	Conclusion générale et perspectives	145
	Bibliographie	149

Introduction

“On mesure l’intelligence d’un individu à la quantité d’incertitudes qu’il est capable de supporter.”

Emmanuel Kant

Sommaire

1.1	Problématiques et objectifs	1
1.2	Les modèles	3
1.2.1	Écoulements de surface	4
1.2.2	Infiltration	7
1.2.3	Érosion	9
1.3	Modélisation et propagation des incertitudes	11
1.3.1	Analyse des incertitudes <i>a posteriori</i>	13
1.3.2	Méthodes directes pour l’analyse d’incertitudes	14
1.4	Description des travaux et contributions	18

1.1 Problématiques et objectifs

Les transferts de sédiments et le ruissellement représentent une préoccupation croissante et revêtent une importance majeure pour l’aménagement du territoire, le contrôle de la pollution, ou plus généralement la protection de l’environnement. En effet, le ruissellement joue un rôle essentiel dans les écosystèmes. Il représente le principal mécanisme dans les transferts d’éléments minéraux et organiques des paysages. En cas de zones modifiées par les activités humaines (*e.g.* imperméabilisation des sols), ou d’événements climatiques extrêmes d’une durée suffisamment importante, les excès de ruissellement peuvent engendrer de sérieux problèmes environnementaux tels que les inondations de zones urbanisées (Boardman *et al.* [15], Evrard *et al.* [42]) ou la pollution des masses d’eau (Boardman et Poesen [14]). Aussi, les transferts de sédiments sont-ils un processus clef dans la compréhension et la prédiction de la redistribution des sols, des nutriments (Förstner *et al.* [48], Owens *et al.* [110]) et jouent aussi un rôle majeur dans la dynamique des cycles biogéochimiques (Ludwig *et al.* [90], Van Oost *et al.* [144]). Ainsi, dans le contexte actuel de changement climatique et d’occupation des sols, il paraît essentiel d’être capable d’établir les bilans de ces flux d’eau et de matières (Walling [152], Owens [109], Panin [111]). De plus, depuis les dernières décennies, une



FIGURE 1.1 – Illustrations des phénomènes de ruissellement et d'érosion.

augmentation significative des problèmes environnementaux résultant de l'érosion des sols sur des terres agricoles, tels que l'eutrophisation, la pollution des masses d'eau et des réservoirs de sédimentation (Boardman et Poesen [14]), a été observée en Europe. Ces problèmes sont préoccupants aussi bien en raison de leur fréquence que des nuisances qu'ils occasionnent. Parmi ces impacts hors site, les coulées boueuses affectent de nombreux villages de la ceinture de Loess du nord-ouest de l'Europe et induisent des coûts élevés (Boardman *et al.* [15], Evrard *et al.* [42]). Afin de prévenir ou d'atténuer de tels événements, il est nécessaire d'obtenir des modèles fiables et capables d'évaluer l'impact des mesures de conservation des sols et de l'eau et de prédire aussi bien la dynamique que l'étendue spatiale de la production de ruissellement et de transferts (Souchère *et al.* [137]). Des récents travaux (Jetten *et al.* [70], Merritt *et al.* [96]) sur l'évaluation de différents modèles d'érosion ont montré la difficulté de décrire correctement la réalité, l'érosion étant le résultat d'interactions complexes entre de nombreux paramètres présentant de fortes variabilités spatiales et temporelles souvent méconnues (ou/et imprévisibles). Depuis quelques années, des efforts sont entrepris afin d'améliorer les prédictions des modèles et de réduire leurs incertitudes, la modélisation de tels processus souffrant à la fois de notre manque de connaissances sur la physique détaillée des processus mis en jeu, mais aussi sur un nombre important de données d'entrée requises par le modèle.

L'objectif de cette thèse est de mieux comprendre et quantifier l'impact des incertitudes relatives aux paramètres d'entrée sur les prédictions des modèles hydrologiques. En particulier, il s'agit de propager ces incertitudes au travers d'un modèle donné et d'analyser leurs influences sur les variables de sortie en déterminant la sensibilité des sorties du modèle aux différents paramètres pris en compte. Du point de vue numérique, le code implémentant le modèle considéré est utilisé comme une boîte noire et les

incertitudes sont propagées par une méthode dite non intrusive. Une étape préalable est donc l'obtention d'un code numérique permettant de modéliser à la fois les écoulements de surface, l'infiltration et les différents processus d'érosion. L'étape suivante consiste en la mise en place d'un modèle probabiliste permettant de propager les incertitudes paramétriques au travers du modèle hydrologique donné. Enfin, il est nécessaire d'établir une méthode d'analyse de sensibilité afin d'étudier et de quantifier l'impact et l'influence de ces incertitudes sur les sorties du modèle.

1.2 Les modèles

Différentes approches de modélisation hydrologique ont été mises en place, de complexité plus ou moins importante. Ces modèles peuvent être classés en trois catégories, en fonction de la description des processus utilisée :

1. Les modèles empiriques, *i.e.* basés sur des relations observées entre les entrées et les sorties des systèmes hydrologiques considérés, par exemple en établissant une relation pluie/débit grâce à un jeu de données. Ces modèles sont les plus simples et visent à reproduire la dynamique des variables de sortie en fonction des variables d'entrée sans description des processus physiques élémentaires. Ils n'ont donc pas de paramètres à signification physique (*e.g.* USLE pour Universal Soil Loss Equation, Wischmeier et Smith [156]).
2. Les modèles conceptuels, *i.e.* basés sur la perception de l'hydrologue ; ils représentent raisonnablement les processus hydrologiques majeurs en utilisant des paramètres physiques. Typiquement, ces modèles représentent un bassin versant comme un assemblage de stockages interconnectés (structure à réservoirs). Ils décrivent de manière simple et abstraite les processus (ou seulement une partie de ceux-ci) dans le système hydrologique par un ensemble de concepts hydrologiques qui sont ensuite reliés entre eux (*e.g.* STREAM pour Sealing and Transfert by Runoff and Erosion in relation with Agricultural Management, Cerdan *et al.* [27]).
3. Les modèles dits "à base physique", *i.e.* basés sur une "physique" relativement complète. Les processus sont décrits par un système d'équations exprimant des principes physiques (tels que la conservation des masses d'eau). Il existe, selon les modèles, différents niveaux de complexité (*e.g.* EUROSEM pour European Soil Erosion, Morgan *et al.* [100] ; LISEM pour LIMburg Soil Erosion model, De Roo et Jetten [33] ; WEPP pour Water Erosion Prediction Project Lafen *et al.* [79]).

La distinction entre les différentes catégories de modélisation n'est pas tranchée et des classes intermédiaires peuvent exister, par exemple un modèle peut être conceptuel tout en utilisant des principes empiriques ou "physiques".

Dans la mesure où les modèles dits "à base physique" s'appuient sur des paramètres mesurables ayant un sens physique, il est plus facile de leur attribuer des incertitudes. Pour cette raison, nous choisissons ces modèles pour prédire les écoulements de surface et les processus érosifs. L'objectif n'est pas la création ou l'amélioration d'un modèle hydrologique mais le couplage d'une modélisation stochastique et d'un modèle hydrologique déjà établi. Dans les sous-sections suivantes, nous présentons donc brièvement

d’une part les contextes de modélisation des processus physiques nous intéressant ainsi que les raisons qui ont motivé nos choix et d’autre part la description des modèles utilisés dans le cadre de cette thèse.

1.2.1 Écoulements de surface

Les équations de Saint-Venant [125], aussi appelées “Shallow Water” en anglais, modélisent les écoulements de fluides à surface libre en milieux peu profonds. Ces équations sont fréquemment utilisées dans la simulation de nombreux phénomènes (inondation, pollution environnementale, avalanche, ...). Ces équations ont été publiées pour la première fois en 1871 par Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant, ingénieur des Ponts et Chaussées, dans un *Compte Rendu* de l’Académie des sciences sur les équations de Navier–Stokes. Le système de Saint-Venant est obtenu à partir des équations tridimensionnelles de Navier–Stokes incompressibles par prise de moyenne sur la verticale, dans le cadre de certaines hypothèses et approximations, notamment sur le profil vertical de vitesse et la pression hydrostatique (Hervouet [63], Viollet *et al.* [147]).

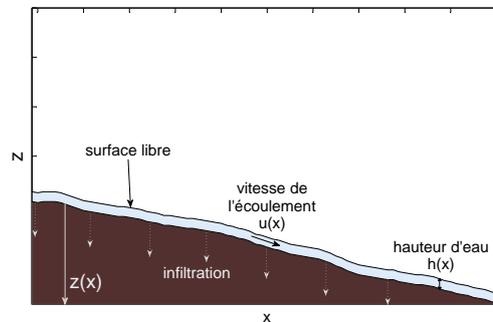


FIGURE 1.2 – Illustration des variables du système de Saint-Venant.

Ces équations de Saint-Venant peuvent elles-mêmes être simplifiées ultérieurement dans de nombreuses formes (Moussa et Bocquillon [101]) dont la plus simple est le modèle de l’onde cinématique (Singh [133, 134]), deux autres étant le modèle de l’onde diffusive et celui de l’onde dynamique (Chow [31]). La forme la plus classique des équations de Saint-Venant est la suivante, ici pour une représentation unidimensionnelle des équations de continuité (1.1a) et quantité de mouvement (1.1b) :

$$\partial_t h + \partial_x h u = S \quad (1.1a)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{accélération locale} & & \text{convection} & & \text{pression} & & \text{gravité + frottement} \\
\overbrace{\partial_t hu} & + & \overbrace{\partial_x(hu^2)} & + & \overbrace{\partial_x\left(\frac{gh^2}{2}\right)} & - & \overbrace{gh(S_0 - S_f)} = 0 \\
& & & & \underbrace{\hspace{10em}} & & \underbrace{\hspace{10em}} \\
& & & & \text{Onde dynamique} & & \text{Onde cinématique} \\
& & & & \underbrace{\hspace{15em}} & & \\
& & & & \text{Onde diffusive} & &
\end{array} \tag{1.1b}$$

où h [L] est la hauteur d'eau, u [L/T] la vitesse moyenne de l'écoulement sur la colonne de hauteur h , S_0 [L/L] le gradient de pente calculé directement à partir de la topographie donnée par la côte du fond z , S_f [L/L] le terme de frottement, et S [L/T] le terme source qui est fonction de l'infiltration (que nous présentons dans la prochaine sous-section) et des apports en eau (pluie). On rappelle entre crochets les dimensions des diverses grandeurs, où L est une longueur et T un temps.

En raison de sa simplicité et de son faible coût de calcul, l'onde cinématique est la simplification la plus couramment utilisée en hydrologie, notamment dans la modélisation des bassins versants (LISEM De Roo et Jetten [33], KINEROS (pour KINematic Runoff and EROsion) Woolhiser *et al.* [157], WEPP Lafen *et al.* [79]). Elle consiste à négliger plusieurs des termes dans l'équation de quantité de mouvement : l'accélération locale, la convection et le terme de pression. Par suite, la gravité et les forces de frottement se compensent mutuellement sous la forme $S_0 = S_f$ (Liu *et al.* [89]). Cependant, l'onde cinématique présente certaines limites (Moussa et Bocquillon [101]). Par exemple, elle ne permet pas de modéliser correctement des configurations définies sur des topographies complexes ou présentant d'importantes hétérogénéités paramétriques (Rousseau *et al.* [124]). En outre, l'équation $S_0 = S_f$ implique l'annulation des débits sur les parties du domaine ayant une pente nulle.

Ces dernières années ont vu se développer un engouement pour la résolution numérique des équations de Saint-Venant. Ces équations étant plus complètes, elles permettent une meilleure représentation et description des processus physiques. Aussi, en raison de leur efficacité numérique et de leur validité expérimentale largement reconnues, les équations de Saint-Venant sont-elles de plus en plus utilisées dans les applications hydrologiques : PSEM_2D (pour Plot Soil Erosion Model, Esteves *et al.* [41]), Fielder et Ramirez [45], Nguyen *et al.* [107]), TELEMAC-2D (Hervouet et Bates [64]) ...

Ces équations (Saint-Venant et quelques unes de ses simplifications) étant fortement non-linéaires, elles n'admettent pas de solutions analytiques globales. Il faut alors les approcher par des méthodes numériques telles que les différences finies, les éléments finis ou les volumes finis pour la discrétisation spatiale, diverses méthodes de différences finies étant généralement employées pour la discrétisation temporelle. Jusqu'à présent, la méthode des différences finies reste la plus populaire. Elle présente l'avantage d'être la plus simple et la plus intuitive mais requiert des géométries relativement simples en raison du maillage structuré qui la supporte. Une étape clé consiste à remplacer les

dérivées du problème continu par des combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction évaluées en différents points du maillage, ceci reposant sur des développements en série de Taylor. La méthode des éléments finis est basée sur la formulation faible du système et consiste à rechercher les composantes de la solution sur une base d'un espace fonctionnel de dimension finie. Lorsque la méthode de Galerkin est utilisée dans la formulation faible avec des fonctions de base continues en espace, la méthode des éléments finis est mal adaptée aux problèmes d'ordre un comme les lois de conservation. Plusieurs solutions existent, basées sur la notion de stabilisation (utilisant des fonctions de base continues ou discontinues). La méthode des éléments finis peut traiter des géométries relativement complexes car le maillage qui la supporte peut être non structuré. De plus, cette méthode est localement conservative, soit à l'échelle de la maille pour des fonctions de base discontinues soit à l'échelle d'une macro-maille (chaque maille et ses voisines) pour des fonctions de base continues. Enfin, la méthode des volumes finis consiste à intégrer l'équation de conservation sur chaque volume de contrôle du maillage (volumes en 3D, surfaces en 2D et segments en 1D) puis à se donner des flux numériques sur les bords de ces volumes. Cette méthode peut s'appliquer sur des maillages non structurés et elle est conservative à l'échelle de la maille car le flux entrant dans un volume donné est égal au flux sortant du volume adjacent.

En raison de l'intérêt croissant pour les simulations numériques, il est possible de trouver une multitude de codes résolvant le système de Saint-Venant (1.1), utilisant une large panoplie des méthodes ci-dessus. Par exemple, pour modéliser les écoulements Hortonien sur de petites parcelles, Nord et Esteves [108] proposent une approche (PSEM_2D) basée sur une discrétisation spatiale par différences finies et un schéma Mac Cormack pour le système bidimensionnel de Saint-Venant couplé au modèle d'infiltration de Green–Ampt [21, 51] (décrit dans la sous-section suivante). Ils obtiennent des résultats en accord avec les mesures sur de petites parcelles sableuses. Liu *et al.* [89] utilisent un modèle d'onde cinématique bidimensionnel simulant la génération de ruissellement et de concentration des flux basé sur la méthode des éléments finis. Leurs comparaisons avec les observations expérimentales, sur un bassin versant recevant une pluie artificielle, sont aussi satisfaisantes. Tatard *et al.* [138] comparent sur une parcelle expérimentale des champs de vitesses pour trois codes différents : PSEM_2D (Nord et Esteves [108]), MAHLERAN (pour Model for Assessing Hillslope-Landscape Erosion Runoff And Nutrients, Wainwright *et al.* [151]) qui repose sur un modèle unidimensionnel de l'onde cinématique dans la direction de la pente couplé à un algorithme 2D, et RillGrow2 (Favis *et al.* [44]) basé sur un algorithme empirique de ruissellement (proche de l'équation de l'onde diffusive en 2D). Les résultats concluent que PSEM_2D est le plus satisfaisant, et MAHLERAN, bien que simple, obtient lui aussi de bons résultats. Nguyen *et al.* [107] considèrent un modèle de Saint-Venant bidimensionnel basé sur la méthode des volumes finis (non structurés). Les résultats des cas test, à la fois analytiques et expérimentaux, montrent la capacité de simuler les équations de Saint-Venant sur des topographies arbitraires et complexes. Afin de modéliser la prédiction d'écoulement d'averses sur des bassins de forêts humides, Jinkang *et al.* [73] développent un modèle pluie–ruissellement à large échelle, utilisant l'approximation de l'onde cinématique unidimensionnelle résolue par schéma implicite aux différences finies. De plus,

pour améliorer les performances numériques, il est possible d'utiliser à la fois les modèles de l'onde cinématique et de l'onde diffusive. Par exemple, Najafi [104] proposent un modèle distribué conceptuel physiographique, basé sur la méthode des différences finies pour les deux modèles (ondes diffusive et cinématique) en fonction de la décomposition du bassin versant en sous-bassins (par rapport aux aires de drainage).

Dans cette thèse, nous nous intéressons en outre à la modélisation de l'érosion, impliquant des variations de topographies à la fois temporelle et spatiale et pouvant ainsi générer des configurations relativement complexes. Afin d'obtenir une modélisation adaptée et efficace, nous privilégions donc les équations uni- ou bidimensionnelles de Saint-Venant (1.1) pour la modélisation des écoulements. Nous utilisons de plus la méthode des volumes finis puisqu'elle présente l'intérêt de s'adapter facilement à l'aspect discontinu des solutions mais aussi au caractère hyperbolique et conservatif du système de Saint-Venant. Le modèle et la méthode de résolution numérique utilisés sont décrits plus en détail dans le chapitre 2.

1.2.2 Infiltration

Nous nous intéressons à la vitesse à laquelle l'eau s'infiltré dans le sol, c'est-à-dire à la vitesse d'infiltration, pour évaluer le terme source S du modèle d'écoulement (1.1). Cette vitesse n'est pas constante en temps mais dépend de la capacité d'infiltration (ou infiltrabilité) du sol. Lors d'un apport d'eau (par pluie ou apport d'eau par l'amont), si l'intensité de pluie ou le débit fourni est inférieur à la capacité d'infiltration, on suppose que toute l'eau est absorbée dans le sol. Au début du processus d'infiltration, l'infiltrabilité décroît assez rapidement pour tendre progressivement vers une valeur limite, le potentiel d'infiltration à saturation. À partir du moment où cette infiltrabilité devient inférieure au débit d'eau fourni, le sol n'absorbe que la quantité qu'il lui est possible d'absorber et l'excédent stagne à la surface du sol, formant ainsi des flaques, ou s'écoule vers l'aval (en fonction de la topographie du domaine). Le problème est donc de définir l'infiltrabilité d'un sol. De nombreuses études menées à ce sujet présentent différents modèles pour estimer l'évolution de l'infiltrabilité à la surface du sol lors d'un épisode pluvieux. On distingue deux familles de modèles : les modèles empiriques (Kustiakov [78], Horton [68], Holton [66]) et les modèles physiques (entre autres Richards [117], Green–Ampt [51], Philip [112]). Le modèle de Richards [117], qui est basé sur une généralisation de la loi de Darcy en régime non saturé en eau, permet de décrire une grande variété d'écoulements en milieu poreux, la phase gazeuse restant à pression atmosphérique. Bien que permettant une description assez complète, il présente l'inconvénient de nécessiter un nombre important de données d'entrée et sa résolution numérique demande certains efforts. Pour ne citer que quelques études, le modèle de Richards est utilisé dans le modèle hydrologique SHE (pour Système Hydrologique Européen, Beven [12]), Smith et Woolhiser [135], Weill [154], Un autre modèle basé sur la loi de Darcy est le modèle de Green–Ampt [51]. Couramment utilisé (LISEM De Roo et Jetten [33], PSEM_2D Esteves *et al.* [108], WEPP Lafflen *et al.* [79]), il présente un compromis intéressant entre simplicité et capacité à reproduire la réalité physique. Il schématise le processus d'infiltration par un front moyen se dé-

plaçant verticalement vers le bas et suppose que le sol est saturé au passage de ce front. L'une des principales hypothèses est que la teneur en eau dans la zone de transmission reste uniforme en temps et en espace et correspond à la porosité du sol (voir Figure 1.3). La capacité d'infiltration du sol I_c , qui permet de déterminer les quantités infiltrées, s'exprime comme suit :

$$I_c = K_s \frac{(Z_f + h_f + h)}{Z_f},$$

où K_s [L/T] est la conductivité hydraulique à saturation, Z_f [L] la hauteur d'eau atteinte par le front d'humidification, h_f [L] la charge de pression au front d'humidification, h la pression hydrostatique causée par le ruissellement (égale à la hauteur d'eau verticale locale du modèle de Saint-Venant).

Dans cette thèse, nous intégrons la formulation de Green–Ampt (GA) développée dans Mein et Larson [95] pour un modèle prédictif de pluie/ruissellement, utilisé également dans Esteves *et al.* [41]. Nous supposons donc l'existence d'un front d'humidification séparant une zone totalement saturée d'une zone à l'humidité initiale du sol. La formulation du modèle de GA utilisée ainsi que sa résolution numérique sont détaillés dans le chapitre 2.

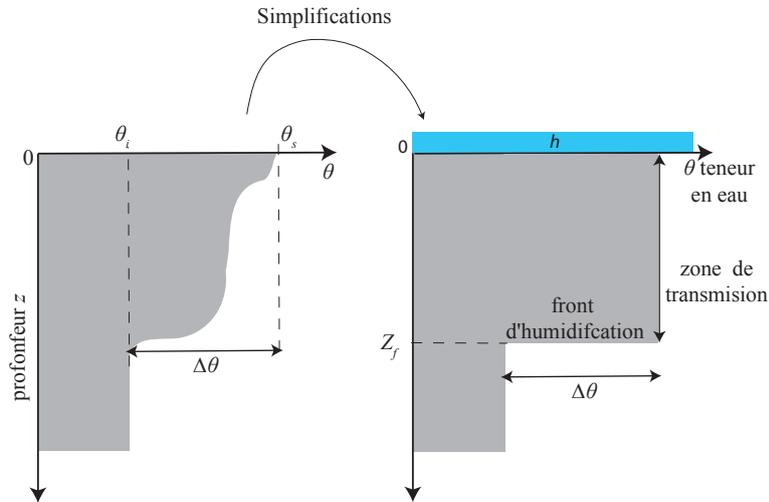


FIGURE 1.3 – Schématisation du processus d'infiltration pour la représentation par le modèle de Green–Ampt.

Il est à noter qu'indépendamment du modèle choisi, la conductivité hydraulique à saturation, K_s , est le principal paramètre régissant le processus d'infiltration (Cerdan *et al.* [26]). Il fournit une mesure quantitative de la capacité du sol à transmettre l'eau et correspond à la valeur maximale du taux d'infiltration obtenue pour un état de sol saturé. De nombreuses études montrent d'ailleurs que la conductivité hydraulique à saturation est le paramètre d'entrée le plus influent pour les modèles prédictifs de pluie-ruissellement (Cerdan *et al.* [26], Sheikh *et al.* [132]). Cependant, la conductivité

hydraulique à saturation est difficilement mesurable et peut présenter une forte variabilité à la fois spatiale et temporelle. Différentes méthodes ont été mises en place pour la mesurer directement, mais les valeurs obtenues pour K_s dépendent souvent de la méthodologie retenue. En outre, la représentativité spatiale de ces mesures reste assez limitée (Wosten *et al.* [158]). Dans beaucoup d'applications, les valeurs de K_s sont estimées au travers de l'application de fonctions de pédo-transfert utilisant des propriétés basiques du sol (Bouma [18], Bouma et van Lanen [19], Van Genuchten [142]). Testant différentes fonctions de pédo-transfert pour prédire K_s , Tietje et Hennings [141] concluent que prédire K_s par l'utilisation de fonctions de pédo-transfert n'est pas toujours précis en raison de la variabilité inhérente de ce paramètre. De plus, Baroni *et al.* [8] comparent différentes méthodes de mesure et d'estimation de K_s à partir d'un ensemble de données, et observent une forte variabilité de K_s (supérieure à 79%). Pour combler ce manque de précision, une approche possible consiste en la calibration de ce paramètre, mais les valeurs qui en résultent ne sont souvent valides que pour la configuration considérée et des variations modérées autour de celle-ci.

Afin de mieux comprendre dans quelle mesure les incertitudes sur les valeurs de K_s impactent le ruissellement, nous nous intéressons dans cette thèse à la propagation de ces incertitudes au travers du modèle de pluie écoulement/infiltration que nous avons retenu. Par ailleurs, en raison de la forte variabilité spatiale que peut présenter le paramètre K_s et de son importance indépendamment du modèle d'infiltration choisi, il est intéressant d'étudier quel peut être l'impact de sa localisation spatiale sur l'écoulement. Nous nous intéressons à l'ensemble de ces questions dans le chapitre 4.

1.2.3 Érosion

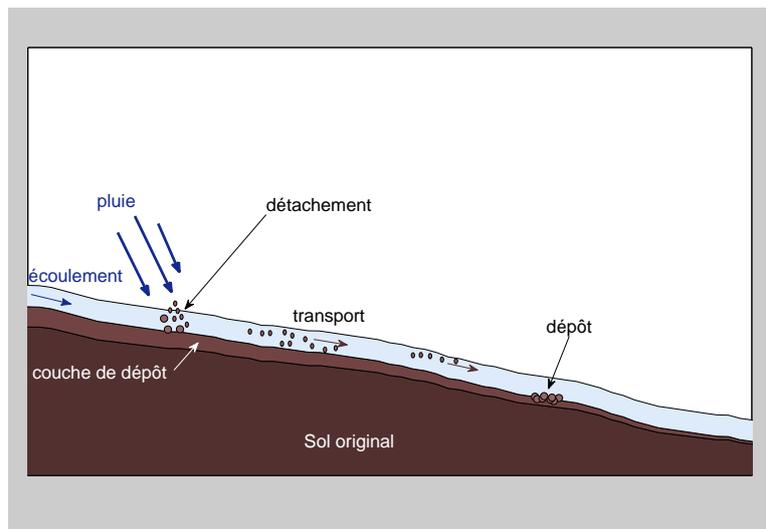


FIGURE 1.4 – Illustration des différentes étapes conceptuelles du processus d'érosion.

L'érosion représente l'ensemble des processus qui modifient les paysages par dégradation des sols. Cette dégradation peut être causée par différents agents : l'eau (érosion

hydrique), le vent (érosion éolienne), le travail du sol (érosion aratoire). Les problèmes liés à l'érosion hydrique représentent un enjeu majeur dans le monde entier et il existe un réel besoin de mieux comprendre et prédire les différents processus qu'elle fait intervenir. Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'érosion hydrique des sols engendrée par la pluie et le ruissellement. Le processus d'érosion se décompose alors en trois étapes distinctes, représentées sur la Figure 1.4 :

1. Le détachement : il peut être dû soit à l'impact des gouttes de pluie (effet splash), soit au ruissellement, soit à une combinaison des deux. L'énergie requise pour le détachement des particules est généralement plus importante que pour le transport.
2. Le transport : il représente le déplacement des sédiments vers l'aval. Lors du détachement par la pluie ce déplacement a lieu dans l'air, alors que lors du détachement par le ruissellement il s'effectue dans l'eau.
3. Le dépôt : les sédiments transportés par le ruissellement peuvent se déposer. Ce dépôt est fonction de la vitesse d'écoulement et de la granulométrie des particules transportées, les plus fines se déposant plus loin du fait d'une sédimentation plus lente.

Les modèles d'érosion peuvent ne représenter qu'une ou plusieurs de ces trois étapes et peuvent être classés selon les trois types de modèles vus précédemment : empiriques, conceptuels, et "à base physique". Depuis quelques années, avec l'amélioration constante des techniques de calcul et la puissance des ordinateurs, l'intérêt porté aux modèles d'érosion et de transport de sédiments a fortement augmenté. De nombreux modèles ont été développés, de complexités différentes par le choix des processus considérés, mais aussi par la description choisie pour les représenter. Merritt *et al.* [96] réalisent un inventaire décrivant une large gamme de ces modèles d'érosion et de transport de sédiments. Pour n'en citer que quelques-uns : USLE utilise un modèle empirique (Wischmeier et Smith [156]), STREAM (Cerdan *et al.* [27]) et KINEROS (Woolhiser *et al.* [157]) utilisent tous deux des modèles conceptuels, alors que EUROSEM (Morgan *et al.* [100]), GUEST (Griffith University Erosion System Template, Rose *et al.* [120]), LISEM (De Roo et Jetten [33]) et WEPP (Lafren *et al.* [79]) utilisent des modèles "à base physique".

Les modèles de transport "base physique" distribués sont basés sur le principe de conservation de la masse sédimentaire (*e.g.* Bennett [9]) afin de décrire l'évolution temporelle de la topographie et de la concentration sédimentaire dans l'écoulement. En considérant que la concentration sédimentaire est suffisamment petite pour ne pas modifier les propriétés physiques du fluide considéré (ici l'eau), l'évolution de la topographie résulte seulement des processus de détachement et de dépôt, comme représentés sur la Figure 1.4. Elle est donnée par l'équation de conservation pour la couche de dépôt, souvent appelé équation d'Exner [43] :

$$\partial_t z = \frac{1}{\rho_s(1 - \Phi)}(D - E), \quad (1.2)$$

où ρ_s [M/L³] est la densité des sédiments (M indique une unité de masse), Φ la porosité

du sol (sans dimension), D [M/L²/T] le taux de dépôt, et E [M/L²/T] le taux de détachement. L'évolution de la concentration moyenne sur la colonne d'eau est donnée par l'équation de conservation de la masse sédimentaire dans l'écoulement. Supposant que les sédiments se déplacent à la même vitesse que le fluide, elle se formule ainsi :

$$\partial_t(ch) + \operatorname{div}(c\mathbf{q}) = E - D, \quad (1.3)$$

où $\mathbf{q} = (hu, hv)$ [L²/T] est le vecteur débit et c [M/L³] est la concentration des sédiments en suspension.

Dans cette thèse, nous utilisons le modèle complet de Hairsine–Rose [54–56] (HR). Ce modèle permet de considérer séparément les trois processus d'érosion suivants : le détachement par la pluie, le détachement par le ruissellement et le dépôt des sédiments à la surface du sol. De plus, ce modèle admet que les sédiments détachés se déposant à la surface du sol forment une couche de dépôt (ou de recouvrement) ayant des propriétés érosives différentes de celles du sol original. Ainsi, une particule ayant déjà été arrachée sera plus facilement détachable. Le modèle HR permet aussi de considérer différentes classes de tailles de sédiments, supposant ainsi que les sédiments peuvent être conceptuellement classés en K classes en fonction de leur diamètre de grain. En raison de la nature sélective du processus de dépôt au niveau de la taille des grains, la distribution des sédiments composant la couche de dépôt sera différente de celle du sol. Le modèle HR admet donc autant d'équations de conservation de la masse en sédiments dans l'écoulement et dans la couche de dépôt que de classes de taille de sédiments. L'évolution de la surface du sol sera alors la somme de ces différents processus de détachement et de dépôt. Le modèle et sa formulation sont détaillés dans le chapitre 2.

Contrairement au processus de ruissellement qui est relativement bien compris, la modélisation de l'érosion reste moins bien décrite et requiert un nombre plus important de paramètres d'entrée. Les mécanismes d'érosion sont très complexes et les interactions entre les trois étapes qui le composent demeurent jusqu'à présent peu connues. De plus, les paramètres et variables les influençant sont très nombreux, ils sont aussi difficilement mesurables directement et n'ont d'ailleurs pas toujours de sens physique. Etant données toutes ces zones d'ombre, intégrer l'analyse d'incertitudes dans les modèles d'érosion apparaît essentiel. Dans cette thèse, nous nous intéressons donc à la propagation de ces incertitudes, dans un premier temps au travers du processus d'infiltration (chapitre 4), puis dans un second temps au travers du modèle d'érosion où l'analyse d'incertitudes prend alors pleinement son sens (chapitre 5).

1.3 Modélisation et propagation des incertitudes

Les modèles en général présentent trois types d'incertitudes ou d'erreurs. Une première classe est dite “structurelle” ou “incertitude de modèle”, et représente les incertitudes résultant du passage entre le processus physique réel et le modèle physique qui fait souvent l'objet d'hypothèses simplificatrices. Une seconde classe regroupe les “erreurs numériques” qui proviennent de la discrétisation (en espace et en temps) du modèle

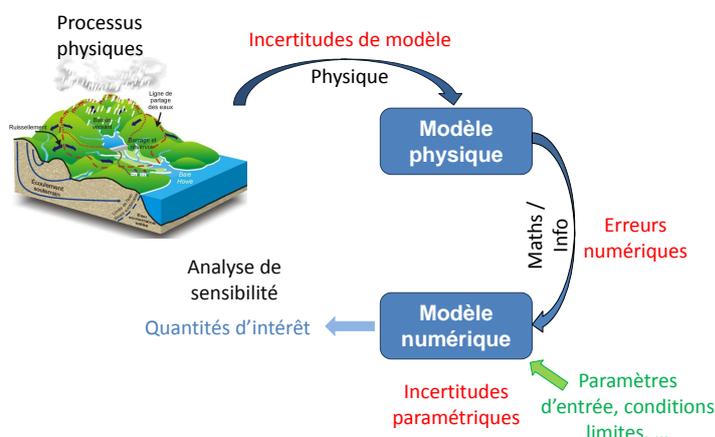


FIGURE 1.5 – Illustration des différents types d’incertitudes dans la modélisation.

physique et de sa résolution numérique. Grâce à la puissance des ordinateurs, il est souvent possible de réduire considérablement les erreurs numériques et, dans certains cas, de les rendre négligeables par rapport aux autres types d’erreurs. Enfin, une troisième classe d’incertitudes est celle des “incertitudes paramétriques”, *i.e.* résultant des erreurs dans la paramétrisation du modèle. En effet, il est souvent difficile de définir précisément les valeurs des paramètres d’entrée : les constantes physiques, les valeurs initiales, les conditions aux limites, la géométrie initiale,...(Nearing [105]). Cette difficulté représente une source d’incertitude non négligeable. Ainsi, d’après Jetten *et al.* [71], la qualité des modèles d’érosion spatialement distribués dépend de la forte variabilité spatiale et temporelle des processus et des incertitudes sur les paramètres d’entrée. Il est donc important de connaître l’influence des différents paramètres d’entrée sur la réponse du modèle, cette étude portant le nom de “propagation d’incertitudes” (Saltelli [126]). Ces dernières années, l’intérêt pour la propagation d’incertitudes paramétriques et ses effets sur les prédictions hydrologiques s’est considérablement accru.

L’analyse d’incertitudes considère en général les paramètres incertains d’un modèle comme un objet aléatoire, avec pour objectif de calculer ou caractériser la variabilité induite dans la solution du modèle ou des quantités d’intérêt en sortie du modèle. Pour des données à forte variabilité, propagées dans des modèles non linéaires, comme pour les applications hydrologiques, il est nécessaire d’utiliser des méthodes dites globales qui étudient les effets de tous les paramètres simultanément. Une étape essentielle en analyse d’incertitudes est la définition du modèle aléatoire. Des modèles aléatoires de niveau de complexité différent peuvent être considérés. Une distinction doit être faite entre les méthodes d’analyse des incertitudes *a posteriori* notamment les statistiques Bayésiennes, où les observations sont utilisées afin de mieux cerner les valeurs des paramètres d’entrée, et les méthodes de propagation directe des incertitudes, qui n’utilisent pas d’observations et se focalisent, notamment grâce à l’analyse de sensibilité, sur l’impact des paramètres d’entrée sur les sorties du modèle. Contrairement à l’approche Bayésienne qui nécessite d’avoir des échantillons de données observées suffisamment riches, les méthodes directes sont mieux adaptées aux problèmes où peu d’observations

sont disponibles. L’acquisition de données d’érosion est souvent difficile et entachée d’erreurs de mesures. Aussi, au vu du peu de données à notre disposition, l’approche directe est-elle retenue pour cette thèse. Toutefois, en raison de leur importance, nous présentons d’abord une brève revue bibliographique sur les méthodes d’analyse d’incertitudes *a posteriori*.

1.3.1 Analyse des incertitudes *a posteriori*

La méthode statistique la plus traditionnelle en hydrologie est “the first-order approximation” et permet d’approcher les intervalles de confiance des paramètres incertains (Kuczera et Parent [76]). Elle présente cependant un inconvénient : elle ne tient pas compte de la corrélation existant entre les paramètres (Kuczera et Parent [76], Vrugt et Bouten [150]). Les intervalles de confiance des paramètres peuvent aussi être calculés par la méthode de génération de “contour plot”, comme l’échantillonnage par grille uniforme, par exemple à l’aide du Sequential Uncertainty Fitting algorithm (SUFI) (Abbaspour *et al.* [1], Vrugt *et al.* [148]). Ces méthodes, bien que robustes, peuvent requérir d’importantes ressources de calcul pour de grandes dimensions d’espace des paramètres.

La méthode de Monte Carlo (Lewis et Orav [86]) est très souvent utilisée en analyse d’incertitudes, et notamment dans les sciences environnementales. Elle présente l’avantage d’être simple et robuste et peut être intégrée dans différents cadres probabilistes. Par exemple, une approche relativement simple est la procédure GLUE (Generalized Likelihood Uncertainty Estimation, Beven et Binley [13]) qui est une méthode de Monte Carlo générant des jeux de paramètres de taille importante pour comparer les réponses prédites par les modèles aux réponses observées. Il s’agit ensuite d’accepter ou non les simulations au travers de quelques mesures de probabilité. La procédure GLUE est appliquée dans de nombreuses études hydrologiques (Brazier *et al.* [22], Muleta et Nicklow [102], Vigiak *et al.* [146], Freni *et al.* [47]). S’agissant d’une approche Bayésienne, cette mesure de probabilité peut être mise à jour pour chaque nouveau jeu de données de réponses observées. Dans les statistiques Bayésiennes, les paramètres d’entrée sont considérés comme des variables probabilistes ayant une fonction de densité de probabilité (pdf) jointe *a posteriori* (Huard et Mailhot [69], Kuczera et Parent [76], Laloy et Bielders [81], Thiemann *et al.* [140]). Il existe différentes méthodes pour échantillonner ces pdf’s *a posteriori*. L’échantillonnage par Monte Carlo Markov Chain (MCMC) est souvent utilisé dans les applications hydrologiques, la toute première méthode générale (et la plus populaire) étant l’algorithme MetropolisHastings (Kanso *et al.* [75], Laloy et Bielders [81], Schmelter [130]). En hydrologie, plusieurs études récentes ont voulu améliorer l’échantillonneur MCMC : l’algorithme SCEM (Shuffled Complex Evolution Metropolis, Vrugt *et al.* [149]), qui est une version modifiée de l’algorithme d’optimisation globale SCE (Shuffled Complex Evolution, Duan *et al.* [36]), ou l’algorithme DREAM (Differential Evolution Adaptive Metropolis algorithm, Vrugt *et al.* [149]). Pour citer une autre méthode moins utilisée en contexte hydrologique, Castrignano *et al.* [25] appliquent une méthode “turning bands”, qui est une technique de simulation gaussienne visant à faire une analyse d’incertitudes spatiale où chaque variable est

transformée en une distribution normale. Ces auteurs utilisent des simulations conditionnelles pour générer des réalisations tenant compte des structures de corrélation des données par krigeage.

Afin de faciliter l'inférence dans les situations complexes où la dimension des échantillons de sortie est restreinte, il est possible d'utiliser la méthode de bootstrapping. C'est une technique récente de ré-échantillonnage donnant des indications sur un estimateur ou des statistiques autres que ses valeurs (variance, écart type) (Efron [39]), pour connaître la précision des simulations. Elle présente l'avantage de ne pas nécessiter de nouvelles observations pour simuler la distribution des paramètres. Cette technique, encore peu utilisée en hydrologie, est utilisée dans les études de Kuhnert *et al.* [77], où ces auteurs proposent une méthodologie pour traiter des erreurs dans la modélisation de l'érosion ravinatoire, et par Li *et al.* [87], qui comparent la méthode du bootstrapping avec l'approche Bayésienne plus communément utilisée. Cette dernière étude établit que, pour les deux méthodes, les incertitudes paramétriques contribuent peu aux incertitudes de simulation, ceci montrant qu'il existe d'autres sources d'incertitudes plus importantes en modélisation hydrologique. En effet, il est aussi reconnu que la structure du modèle et la qualité des données contribuent aux incertitudes des simulations du modèle. Cependant, cette étude ne permet pas de conclure sur leurs contributions. D'autres méthodes ont été développées mais sont peu appliquées dans le domaine de l'hydrologie, par exemple le "Point Estimate Method" (Rosenblueth [122]). Il s'agit d'une technique permettant d'évaluer les moments des fonctions de variables aléatoires en fonction des premiers moments de ces variables. Elle est appliquée pour l'analyse de sensibilité du modèle WEPP dans Chaves et Nearing [28]. Par ailleurs Quinton [116] utilise deux méthodes pour réduire les incertitudes prédictives dans le cadre du modèle EUROSEM. La première est une méthode de calibration par des jeux de paramètres multiples, et non un jeu de données comme pour une calibration standard, nommée "Improve Parameter Set Selection". L'autre méthode permet de dériver les paramètres physiques des hydrographes observés, pour une conductivité hydraulique à saturation constante. La conclusion est que ces deux méthodes, bien que réduisant avec succès la largeur des bandes des sorties du modèle (conséquence de l'incertitude paramétrique sur la réponse), ne sont pas capables de la diminuer sans réduire la coïncidence avec les données observées.

Un récapitulatif des méthodes d'analyse des incertitudes *a posteriori* est présenté dans le tableau de la figure 1.6.

1.3.2 Méthodes directes pour l'analyse d'incertitudes

Dans ces méthodes, on considère les paramètres inconnus comme des variables aléatoires définies par une pdf fixée *a priori* (Veihe et Quinton [145] pour le modèle EUROSEM, Hantush et Kalin [57] pour KINEROS2, Eckhard *et al.* [38]). Cette approche ne requiert aucune donnée observée mais le choix d'une loi de distribution pour caractériser les paramètres considérés comme incertains. Une fois établi le cadre probabiliste, il reste à caractériser la variabilité des sorties du modèle en fonction de la variabilité des

Méthode de Monte Carlo	Méthode du Bootstrapping
Procédure GLUE	Bootstrap simple
– Muleta and Nicklow [102] *	– Kuhnert <i>et al.</i> [77]
– Brazier <i>et al.</i> [22]	Modèle basé sur la méthode du bootstrapping (pour préserver la dépendance des données)
– Vigiak <i>et al.</i> [146]	– Li <i>et al.</i> [87] (comparaison avec la méthode Bayésienne)
– Freni <i>et al.</i> [47]	“Point Estimate Method”
Description par une pdf fixée	– Chaves et Nearing [28]
– Veihe et Quinton [145]	Autres
– Hantush et Kalin [57]	– Quinton [116] *
– Eckhard <i>et al.</i> [38] *	
Approche Bayésienne	
– Laloy et Bieters [81] *	
– Schmelter <i>et al.</i> [130]	
Propagation d’erreur Gaussienne	
– Tetzlaff et Wendland [139]	
Méthode “Turning bands”	
– Castrignaño <i>et al.</i> [25]	

FIGURE 1.6 – Récapitulatif des différentes techniques utilisées dans l’analyse d’incertitudes en hydrologie (* fait référence aux études utilisant aussi la calibration).

entrées. Pour ce faire, les méthodes de Monte Carlo sont souvent employées puisqu’elles fournissent une méthodologie efficace et robuste pour générer des jeux de solutions du modèle en échantillonnant les paramètres d’entrée. Les simulations de Monte Carlo sont aussi utilisées pour tracer la propagation des erreurs, comme dans Tetzlaff et Wendland [139]. Ces auteurs utilisent la Propagation d’Erreur Gaussienne pour identifier les paramètres critiques, pointer la paramétrisation qui génère la plus forte incertitude en raison des dépendances paramétriques et des incertitudes statistiques inhérentes, et ainsi trouver des possibilités pour améliorer la modélisation. Une autre méthodologie récente est basée sur les méthodes stochastiques spectrales (Ghanem et Spanos [50], Le Maître et Knio [84]). Elle permet d’obtenir une description probabiliste plus complète mais devient coûteuse quand les entrées sont décrites par un nombre important de variables aléatoires. Dans cette thèse, nous considérons certains paramètres d’entrée comme des variables aléatoires décrites par une pdf fixée *a priori*. Nous avons alors besoin d’autant de variables aléatoires que de paramètres supposés incertains. Ces variables aléatoires sont supposées statistiquement indépendantes. Leurs pdf’s peuvent suivre des lois de probabilité différentes. Ces lois sont choisies en fonction de la nature des paramètres et des intervalles de valeurs qu’ils peuvent prendre. Par exemple, nous attribuons des lois uniformes aux variables définies sur des intervalles de valeurs étroits en termes d’ordre de grandeur. Pour l’échantillonnage des variables aléatoires, nous utilisons la méthode de Monte Carlo, nos configurations de cas tests ne demandant pas des temps de calcul trop importants pour la résolution du modèle déterministe.

Pour comprendre le comportement d'un modèle par rapport à ses données d'entrée et déterminer les principales sources d'incertitudes sur la réponse du modèle, il est possible de réaliser une analyse de sensibilité qui vise à quantifier l'importance de chaque paramètre d'entrée sur la réponse du modèle. Il existe différents types d'analyse de sensibilité, dépendant des objectifs et du modèle que l'on considère. En général, on les classe en deux catégories :

1. L'analyse de sensibilité locale : elle permet d'analyser le comportement du modèle en fonction de perturbations au niveau des paramètres d'entrée autour d'une valeur fixée, par exemple, la méthode OAT (One-Factor-At-A-Time) pour laquelle on fait varier un paramètre à la fois.
2. L'analyse de sensibilité globale : elle consiste à déterminer la part de variabilité de la réponse du modèle due à un sous-ensemble de variables d'entrée. Elle permet de hiérarchiser la contribution des variables d'entrée et de leurs interactions à la variabilité de la réponse du modèle. En outre, elle fait varier tous les paramètres simultanément et tient compte de leurs distributions.

Une différence importante entre les approches locales et globales concerne l'objet de l'étude. Pour l'approche locale, on s'intéresse à la valeur de la réponse alors que pour l'approche globale, on s'intéresse à la variabilité de la réponse.

En modélisation de l'érosion, de nombreuses études montrent que les sorties des modèles (aussi bien les quantités relatives à l'écoulement que celles relatives à l'érosion) sont très sensibles aux paramètres hydrologiques, particulièrement à la conductivité hydraulique à saturation (pour le modèle WEPP, Nearing *et al.* [106] ; pour le modèle LISEM, De Roo *et al.* [34] ; pour le modèle EUROSEM, Veihe et Quinton [145]). La majorité de ces études de sensibilité sont réalisées en utilisant des méthodes locales dites OAT. Les principales études de sensibilité appliquées à l'érosion sont référencées dans le tableau de la figure 1.7. Parmi les travaux utilisant les méthodes locales OAT, on peut citer : Nearing *et al.* [106] pour le modèle WEPP, De Roo *et al.* [34] pour le modèle LISEM, Folly *et al.* [46] pour le modèle EUROSEM, Nord et Estheves [108] pour le modèle PSEM_2D, Hantush *et al.* [57] pour le modèle KINEROS2, Wei *et al.* [153] pour le modèle RHEM et Dussaillant [37]. L'approche OAT reste encore populaire mais présente deux inconvénients majeurs. Elle ne tient pas compte des interactions paramétriques pouvant exister au sein des paramètres d'entrée, ce qui peut fausser les résultats dans la mesure où un paramètre peut ne pas influencer les sorties individuellement mais avoir une influence importante lorsqu'il interagit avec d'autres paramètres. De plus, l'approche étant locale, elle ne permet de couvrir qu'une partie de l'espace des paramètres d'entrée. En effet, elle s'intéresse au comportement du modèle par rapport à un paramètre dont la valeur de référence varie autour d'une valeur nominale, \pm un pourcentage de variation, fixant les autres paramètres à leurs valeurs de référence. En d'autres termes, l'approche locale univariée n'est donc justifiée que pour des modèles linéaires et ne permet pas de considérer les effets des interactions paramétriques (Saltelli *et al.* [127]). Ainsi, les résultats obtenus par une analyse de sensibilité locale ne reflètent généralement pas la complexité du modèle considéré puisqu'ils sont obtenus sans tenir compte des distributions des paramètres d'entrée (leur pdf), de leurs intervalles de valeur et de leurs interactions.

Analyse de sensibilité locale univariée	Analyse de sensibilité globale
– Nearing <i>et al.</i> [106] pour WEPP (OAT, sensibilité pour 3 paramètres)	– Veihe et Quinton [145] pour EUROSEM
– De Roo <i>et al.</i> [34] pour LISEM (OAT avec 20% de variation pour les 10 paramètres) **	– Laloy [80] pour CREHDYS (Sobol)**
– Folly <i>et al.</i> [46] pour EUROSEM (OAT avec 10% de variation pour 6 paramètres)**	– Gumiere [53] pour MHYDAS-Erosion (Sobol)**
– Hantush <i>et al.</i> [57] pour KINEROS2 (9 paramètres, 6 sorties, calcul du “condition number”) **	
– Nord <i>et al.</i> [108] pour PSEM_2D (OAT pour 8 paramètres, % de variation) **	
– Wei <i>et al.</i> [153] pour RHEM (OAT pour 14 paramètres)	
– Morgan et Duzant [99] (OAT pour 26 paramètres)	
– Dussaillant [37] **	

FIGURE 1.7 – Récapitulatif des différentes techniques utilisées dans l’analyse de sensibilité en hydrologie (** fait référence aux études utilisant aussi la calibration).

Jusqu'à présent, les méthodes de sensibilité globales restent très peu utilisées dans les applications hydrologiques. À notre connaissance, seules quelques études proposent leur utilisation. Une première est réalisée par Veihe et Quinton [145] sur le modèle EUROSEM au moyen de la méthode d'échantillonnage de Monte Carlo sur différents paramètres hydrologiques et d'érosion. Cependant, la méthode globale que les auteurs utilisent suppose que le modèle est linéaire. Gumiere *et al.* [53], proposent une analyse de sensibilité globale basée sur l'analyse de la variance du modèle MHYDAS-Erosion. Ils estiment des indices de sensibilité par la méthode de Sobol. Cette méthode est bien adaptée puisqu'elle ne nécessite aucune hypothèse sur le modèle considéré. Enfin, Laloy et Bielders [81] appliquent cette même méthode au modèle CREHDYS considérant quatre paramètres d'érosion et quatre paramètres hydrologiques. Ils obtiennent comme résultat que certains paramètres peuvent n'avoir que peu d'influence et présenter une incertitude très importante (la plus forte), ceci indiquant que ces paramètres ne sont pas identifiables par une procédure de calibration. De plus, ces auteurs relient leurs résultats à ceux obtenus précédemment dans différentes études (Nearing *et al.* [106], De Roo *et al.* [34], ...) et précisent que les méthodes locales univariées menées par De Roo *et al.* [34], Hantush *et al.* [57] et Folly *et al.* [46] ne sont pas applicables à des modèles non linéaires tels que LISEM, EUROSEM et KINEROS2.

Dans cette thèse, afin de tenir compte de ces interactions paramétriques et de caractériser au mieux la sensibilité du modèle, nous réalisons donc des études de sensibilité globales. Au vu du comportement non linéaire des modèles hydrologiques, il est préférable d'utiliser une approche générale ne nécessitant aucune hypothèse sur le modèle considéré. Nous nous intéressons donc aux méthodes basées sur l'étude de la variance qui consistent à déterminer quelle part de la variance de la réponse est due à la variance de chaque paramètre d'entrée ou groupe de paramètres. Ces méthodes quantifient l'influence des paramètres par le calcul des indices de sensibilité globale. Différentes méthodes existent pour calculer ces indices (FAST Cukier *et al.* [32], McKay [94], Sobol [136]). Cependant, seule la méthode de Sobol permet de quantifier la sensibilité du modèle aux interactions paramétriques. Pour ces raisons, nous choisissons d'utiliser la méthode d'estimation des indices de sensibilité globale de Sobol.

1.4 Description des travaux et contributions

L'objectif de cette thèse est d'étudier les incertitudes relatives aux données d'entrée des modèles hydrologiques et de les propager au travers du modèle mathématique considéré, notamment afin de réaliser une analyse de sensibilité globale des sorties du modèle en fonction de ses variables d'entrée.

Dans le chapitre 2, nous décrivons plus en détail les différents modèles physiques utilisés pour la prédiction du ruissellement/érosion ainsi que leur résolution numérique. Afin d'illustrer les différents processus physiques mis en jeu, nous présentons également quelques cas tests dans un cadre déterministe. Les différents outils statistiques utilisés pour la propagation et la quantification des incertitudes paramétriques sont présentés dans le chapitre 3. Nous esquissons brièvement la cadre probabiliste sous-jacent, puis

nous décrivons comment les quantités statistiques des diverses sorties du modèle (variance, pdf, quantiles, indices de sensibilité) s’obtiennent à partir d’échantillons Monte Carlo.

Le chapitre 4 porte sur les incertitudes relatives au processus d’infiltration. Le paramètre le plus influent du processus d’infiltration étant la conductivité hydraulique à saturation K_s , nous étudions comment les incertitudes sur les valeurs de K_s et sur sa localisation spatiale peuvent impacter les surfaces de ruissellement pendant différents types d’événements pluvieux. Une description probabiliste générale de K_s consiste à la modéliser comme un champ aléatoire. Bien que très riche, ce type de modélisation demande cependant un nombre considérable d’informations pour sa paramétrisation et n’est donc pas bien adapté au contexte hydrologique de cette étude. De plus, extraire des informations simples de cette représentation en vue d’applications en hydrologie n’est souvent pas chose aisée. Pour ces raisons, nous nous appuyons sur un modèle probabiliste plus simple où le domaine d’écoulement est découpé en sous-domaines reflétant l’organisation spatiale du territoire (*e.g.*, champs agricoles, bandes enherbées), et la conductivité hydraulique à saturation est décrite par des variables aléatoires statistiquement indépendantes sur chaque sous-domaine. Il en résulte que la conductivité hydraulique à saturation K_s est décrite par un ensemble fini de variables aléatoires indépendantes, dont le cardinal est égal au nombre de sous-domaines considérés pour la simulation. Cette idéalisation est motivée par la réalité physique. En considérant les sous-domaines comme des parcelles agricoles, la variabilité du K_s à l’intérieur de chaque sous-domaine est généralement négligeable comparée à la variabilité d’un sous-domaine à l’autre en raison de l’homogénéisation créée par les pratiques agricoles. En outre, ce modèle peut être amélioré ultérieurement, en introduisant par exemple de la variabilité à l’intérieur des sous-domaines si des informations additionnelles sur les propriétés du sol sont disponibles. Dans chaque sous-domaine, une pdf pour K_s doit alors être choisie pour fixer le modèle probabiliste. Nous considérons des distributions uniformes en raison des variations relativement modestes (en ordre de grandeur) des valeurs prises par K_s dans chaque sous-domaine. Cependant, d’importants contrastes sont imposés entre les sous-domaines. En modélisation hydrologique, K_s est souvent supposé suivre une distribution log-normale (Law [82], Rogowski [118], Sharma, Gander, et Hunt [131]). Nous incluons dans nos cas tests une vérification que les deux choix de distribution (uniforme et log-normale) conduisent aux mêmes conclusions hydrologiques. Concernant les sorties du modèle, nous nous intéressons au débit maximal à l’exutoire Q_{\max} ainsi qu’au coefficient de ruissellement CR qui correspond au rapport entre le volume d’eau ruisselé et le volume d’eau de pluie. Nous considérons des cas tests présentant différentes échelles spatiales et temporelles afin d’analyser les effets de ces échelles sur la propagation des incertitudes. Nous considérons différentes possibilités pour l’organisation spatiale, analysant ainsi l’effet de cette organisation sur la variabilité des sorties. Les résultats de ce chapitre font l’objet d’une publication (Rousseau *et al.* [124]).

Le chapitre 5 est consacré à la propagation des incertitudes paramétriques au travers du modèle d’érosion de Hairsine–Rose (HR). Nous présentons au préalable une étude paramétrique du modèle HR afin de mieux comprendre la signification de chaque paramètre du modèle et l’intérêt de l’intégrer au modèle probabiliste. Nous utilisons une

méthode directe de propagation des incertitudes, les paramètres considérés comme incertains sont représentés par des variables aléatoires décrites par une fonction de densité de probabilité fixée. En outre, l'étude paramétrique permet de motiver le choix de ces pdf's ainsi que leurs intervalles de valeurs. Pour les mêmes raisons que pour le chapitre 4, la description probabiliste consiste à considérer les paramètres incertains uniformes sur le domaine, la représentation par un champ aléatoire nécessitant un nombre trop important d'informations. Contrairement à la modélisation du ruissellement, la modélisation de l'érosion reste moins bien décrite en raison de la complexité des mécanismes qui la composent et du nombre important de paramètres qu'ils nécessitent. De plus, les interactions entre ces différents mécanismes sont méconnues. La plupart des études les traitent séparément pour ensuite les additionner. Dans notre étude, nous considérons plusieurs cas tests unidimensionnels dans lesquels nous étudions séparément les processus du modèle HR : le détachement par la pluie uniquement, le détachement par le ruissellement uniquement et le modèle HR complet. Un dernier cas test bidimensionnel permet de considérer le modèle HR complet sur une topographie réaliste. Les quantités d'intérêt sont la masse érodée spatialisée $m_{ero}(x)$, la masse totale érodée M_{ero} ainsi que la masse totale déposée M_{depo} . La hiérarchisation des paramètres d'entrée est réalisée par une analyse de sensibilité globale où les différents indices de sensibilité sont estimés par la méthode du développement en Polynômes de Chaos. Nous proposons aussi de comparer cette méthode d'estimation avec la méthode d'échantillonnage de Monte Carlo.

Modélisation déterministe et résolution numérique

Sommaire

2.1 Modélisation physique	21
2.1.1 Écoulements surfaciques (Saint–Venant)	21
2.1.2 Infiltration (Green–Ampt)	23
2.1.3 Érosion (Hairsine–Rose)	24
2.2 Résolution numérique	27
2.2.1 Écoulements surfaciques et infiltration	27
2.2.2 Écoulements surfaciques, infiltration et érosion	32
2.3 Illustration des processus	35
2.3.1 Infiltration	36
2.3.2 Érosion	41

Dans ce chapitre, nous décrivons dans un premier temps les modèles physiques choisis pour les trois principaux processus physiques mis en jeu : les écoulements surfaciques, l’infiltration et l’érosion. Nous renvoyons au Chapitre 1 pour une discussion sur les motivations de l’approche de modélisation retenue. Dans un second temps, nous détaillons les différentes étapes de la résolution numérique pour les codes écoulement/infiltration et écoulement/infiltration/érosion. Enfin, nous présentons quelques résultats où les paramètres prennent des valeurs déterministes afin d’illustrer les principaux processus.

2.1 Modélisation physique

2.1.1 Écoulements surfaciques (Saint–Venant)

Le système de Saint–Venant est un système d’équations aux dérivées partielles permettant de modéliser les écoulements à surface libre en eaux peu profondes ; c’est-à-dire lorsque la hauteur d’eau est très petite comparée à la taille horizontale caractéristique du domaine d’étude. Ce système est obtenu en moyennant selon la verticale les équations de Navier–Stokes (Hervouet [62], Viollet *et al.* [147]) sous certaines hypothèses simplificatrices. On suppose ici que la topographie est relativement lisse, ce qui permet de considérer la même direction comme verticale dans l’ensemble du domaine. Tout d’abord, la pression est supposée hydrostatique, *i.e.* le gradient de pression équilibre la gravité. Cette hypothèse permet d’interpréter la pression comme proportionnel à

la hauteur d'eau. On suppose également que la vitesse verticale est négligeable ce qui permet de ne pas la représenter dans le système d'équations. Les équations de Navier-Stokes (à masse volumique constante et avec pression hydrostatique) sont moyennées sur la verticale, par intégration depuis le fond jusqu'à la surface libre sous une hypothèse sur la forme du profil vertical des composantes horizontales de la vitesse (par exemple, un profil constant). On obtient alors un système d'équations bidimensionnelles moins complexe que celui des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles parce que la dynamique de la surface libre est contenue dans une des variables du système (hauteur d'eau).

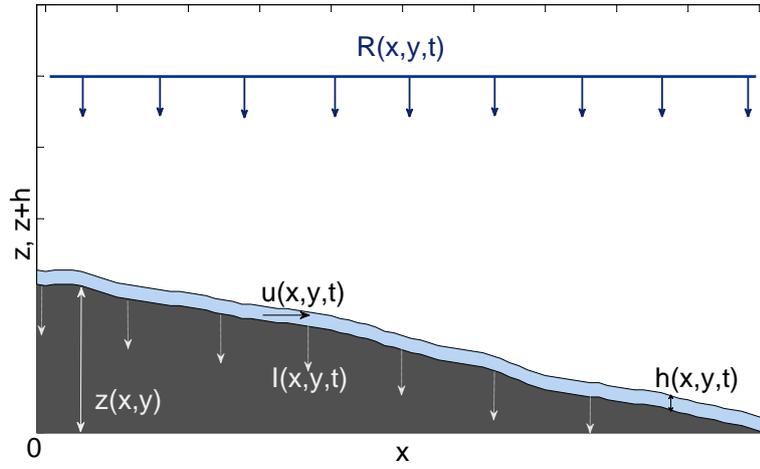


FIGURE 2.1 – Principales notations.

Dans cette thèse, nous considérons le système de Saint-Venant avec prise en compte de la topographie, des frottements, de la pluie et de l'infiltration. Le système, composé des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, s'écrit alors :

$$\partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = R - I, \quad (2.1a)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{gh^2}{2}) + \partial_y(huv) = -gh(S_{0x} + S_{fx}), \quad (2.1b)$$

$$\partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y(hv^2 + \frac{gh^2}{2}) = -gh(S_{0y} + S_{fy}). \quad (2.1c)$$

Avec

- h [L] la hauteur d'eau locale ;
- u et v [L/T] les composantes de la vitesse locale ;
- R [L/T] le taux de pluie ;
- I [L/T] le taux d'infiltration ;
- S_{0x} et S_{0y} [L/L] les gradients de pente ($S_{0_{x,y}} = \partial_{x,y}z$ où z [L] est la topographie du sol) ;

– S_{f_x} et S_{f_y} [L/L] les termes de frottement.

Dans le cas de l'érosion, la topographie et donc les gradients de pente dépendent également du temps. Leur évolution temporelle découle du couplage entre le système de Saint–Venant et l'équation de conservation de la masse sédimentaire (ou équation d'Exner) décrite à la sous-section 2.1.3.

Dans les équations (2.1b)-(2.1c), S_{f_x} et S_{f_y} sont les termes de frottement. Nous avons considéré deux formulations souvent utilisées en applications hydrologiques : la loi de Manning (2.2) et la loi de Darcy-Weisbach (2.3) (Esteves *et al.* [41], Fielder et Ramirez [45], MacDonald *et al.* [91, 92]). Ces deux lois découlent de considérations empiriques (Chow [30], Viollet *et al.* [147]) :

$$S_{f_x} = K^2 \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{f_y} = K^2 \frac{v\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad (2.2)$$

$$S_{f_x} = f \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{8gh}, \quad S_{f_y} = f \frac{v\sqrt{u^2 + v^2}}{8gh}, \quad (2.3)$$

où K et f sont respectivement le coefficient de frottement de Manning et de Darcy-Weisbach. Ces coefficients dépendent des propriétés du sol et sont estimés à partir de calibrations ou de valeurs publiées (voir par exemple les tables dans le livre de Chow [30, p. 98–114]). Ces coefficients sont ici supposés constants en temps.

2.1.2 Infiltration (Green–Ampt)

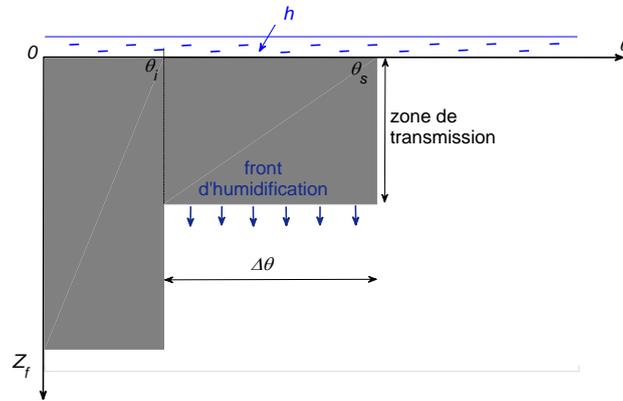


FIGURE 2.2 – Illustration du modèle de Green–Ampt.

Nous utilisons la formulation de Green–Ampt (GA) développée par Mein et Larson [95] et utilisée par Esteves *et al.* [41]. Le modèle d'infiltration permet de calculer le terme d'infiltration I dans l'équation (2.1a). Les paramètres et variables nécessaires pour le modèle d'infiltration sont les suivants :

– $I^*(x, y, t)$ [L], l'infiltration cumulée, fournit la quantité totale d'eau infiltrée dans le sol entre les instants t_0 (l'instant initial) et t .

- $I_c(x, y, t)$ [L/T], la capacité d'infiltration, représente le volume d'eau maximal que le sol est capable d'infiltrer.
- K_s [L/T], la conductivité hydraulique à saturation, fait référence à la perméabilité du sol à saturation. Il s'agit d'une mesure quantitative de la capacité du sol à transmettre l'eau quand il est soumis à un gradient de pression. Ce paramètre correspond à la valeur maximale du taux d'infiltration.
- Z_f [L], la cote du front d'humidification.
- $h(x, y, t)$ et h_f [L], respectivement, la hauteur d'eau causée par le ruissellement et la charge au front d'humidification.
- θ_i et θ_s [-], les teneurs en eau initiale et à saturation.

Dans la formulation GA, si le volume d'eau disponible sur la cellule (pluie et/ou apport amont) est plus petit que la capacité d'infiltration du sol I_c , alors toute l'eau est infiltrée. Sinon, le volume infiltré est égal à la capacité d'infiltration et l'excédent ruisselle ou stagne selon la topographie locale. Le taux d'infiltration sur un intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ est (on omet la dépendance en les variables spatiales pour simplifier l'écriture) :

$$I(t) = \min(R + h(t)/\Delta t, I_c(t)). \quad (2.4)$$

La capacité d'infiltration du sol s'exprime comme suit :

$$I_c(t) = K_s \frac{(Z_f + h_f + h(t))}{Z_f}, \quad (2.5)$$

d'après la loi de Darcy. Le front d'humidification Z_f dépend de la teneur en eau à saturation et peut être écrit sous la forme

$$Z_f = \frac{I^*(t)}{\theta_s - \theta_i} = \frac{I^*(t)}{\Delta\theta}. \quad (2.6)$$

D'où l'expression de la capacité d'infiltration du sol à l'instant t ,

$$I_c(t) = K_s \left(1 + \Delta\theta \frac{h_f + h(t)}{I^*(t)} \right). \quad (2.7)$$

Des valeurs pour ces paramètres d'infiltration sont données pour différentes classes de sol dans le livre de Chow [31, p.115].

Quelques cas test déterministes sont présentés à la section 2.3.1 pour mieux comprendre le modèle d'infiltration et ses conséquences sur les sorties du modèle.

2.1.3 Érosion (Hairsine–Rose)

Le modèle complet de Hairsine–Rose (HR) [54–56] est utilisé dans cette thèse pour la prédiction des processus érosifs. Nous rappelons les principaux points qui ont motivé notre choix :

- Ce modèle considère séparément les processus érosifs du détachement par la pluie, du détachement par le ruissellement et le dépôt des sédiments à la surface du sol.

- Il admet que les particules du sol détachées se déposant à la surface du sol forment une couche de dépôt (ou de recouvrement) présentant des caractéristiques érosives différentes de celles du sol original. Ainsi, une particule ayant déjà été arrachée sera plus facilement détachable.
- Il considère différentes classes de tailles de sédiments, supposant ainsi que les sédiments peuvent être conceptuellement séparés en K classes en fonction de leur diamètre de grain. En raison de la nature sélective du processus de dépôt au niveau de la taille des grains, la distribution des sédiments composant la couche de dépôt sera donc différente de celle du sol.

Le modèle HR admet autant d'équations de conservation de la masse en sédiments dans l'écoulement, *cf.* (2.8a), et dans la couche de dépôt, *cf.* (2.8b), que de classes de taille de sédiments. Ces classes sont indiquées par k allant de 1 à K . L'évolution de la surface du sol résulte alors de la somme de ces différents processus de détachement et de dépôt, *cf.* (2.8c). Le modèle unidimensionnel s'exprime sous la forme suivante :

$$\forall 1 \leq k \leq K, \quad \partial_t(c_k h) + \partial_x(c_k h u) = e_{s_k} + e_{c_k} + r_{s_k} + r_{c_k} - d_k, \quad (2.8a)$$

$$\forall 1 \leq k \leq K, \quad \partial_t m_k = \begin{cases} e_{s_k} & \text{si } h = 0, \\ d_k - e_{c_k} - r_{c_k} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.8b)$$

$$\partial_t z = \frac{1}{\rho_s(1 - \Phi)} \left(\sum_{k=1}^K d_k - e_{s_k} - r_{s_k} - e_{c_k} - r_{c_k} \right), \quad (2.8c)$$

où c_k [M/L³] est la concentration en sédiments de la classe k , m_k [M/L²] la masse des sédiments déposés par unité de surface, ρ_s [M/L³] la densité des sédiments, Φ la porosité du sol et (h, u, z) les variables du système de Saint–Venant vues précédemment. Dans les termes sources [M/(L²T)], l'indice s fait référence au sol et c à la couche de sédiments déposés. Les termes sources e_s et e_c sont dus à l'action de la pluie, et r_s et r_c à celle du ruissellement, voir la figure 2.3. Les quantités m_k interviennent dans le calcul des termes sources (voir ci-dessous).

Les cinq termes sources du système d'équations (2.8a)-(2.8c) sont dus aux différents processus d'érosion du sol original et de la couche de dépôt pour la classe k de sédiments :

1. e_{s_k} est le taux de détachement du sol original par la pluie

$$e_{s_k} = (1 - H)p_k a R,$$

avec

- $H = \min(m_t/m_t^*, 1)$ [-] le degré de protection fourni par les sédiments déposés,
- m_t^* [M/L²] la masse de sédiments déposés par unité de surface requis pour protéger le sol,
- $m_t = \sum_k m_k$ [M/L²] la masse totale des sédiments déposés par unité de surface,

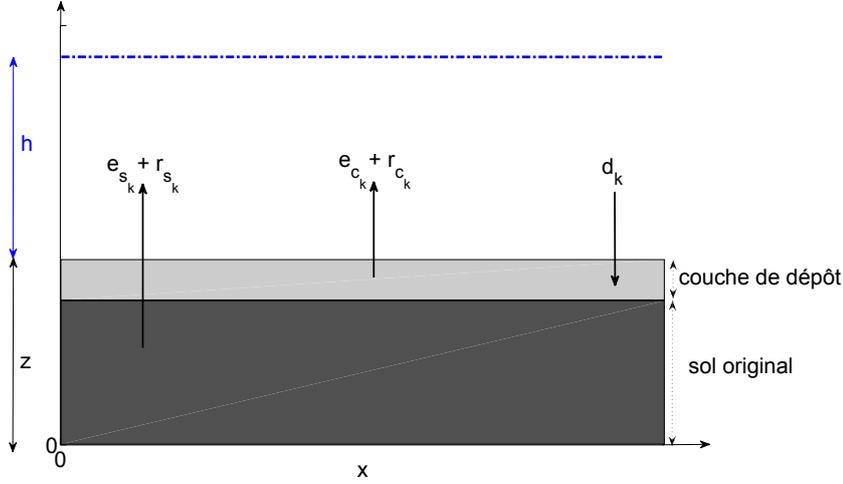


FIGURE 2.3 – Représentation schématique des différents processus d'érosion.

- p_k [-] la proportion de la classe de sédiments k dans le sol original,
 - a [M/L³] la détachabilité du sol original.
2. e_{c_k} est le taux de re-détachement de la couche de dépôt par la pluie

$$e_{c_k} = H \frac{m_k}{m_t} a_d R,$$

où a_d [M/L³] est la détachabilité de la couche de sédiments déposés.

Les détachabilités du sol et de la couche de dépôt ainsi que la masse de sédiments déposés requis pour protéger complètement le sol original dépendent d'une hauteur d'eau critique h_0 sous la forme

$$a = \begin{cases} a_0 & \text{si } h \leq h_0, \\ a_0 \frac{h_0}{h} & \text{si } h > h_0, \end{cases} \quad a_d = \begin{cases} a_{d0} & \text{si } h \leq h_0, \\ a_{d0} \frac{h_0}{h} & \text{si } h > h_0, \end{cases} \quad m_t^* = \begin{cases} m_{t0}^* & \text{si } h \leq h_0, \\ m_{t0}^* \frac{h_0}{h} & \text{si } h > h_0, \end{cases} \quad (2.9)$$

où a_0 et a_{d0} sont appelées les détachabilités, respectivement, du sol et de la couche non cohésive.

3. r_{s_k} est le taux de détachement du sol original par le ruissellement

$$r_{s_k} = (1 - H) p_k \frac{F(\Omega - \Omega_{cr})_+}{J},$$

avec

- F [-] la fraction d'excès du stream power effectif en entraînement et ré-entraînement,
 - $\Omega = \rho_w g h u S_f$ [M/T³] le stream power, ρ_w [M/L³] étant la densité de l'eau,
 - Ω_{cr} [M/T³] le stream power critique,
 - J [L²/T²] l'énergie requise par unité de masse en sédiments pour l'entraînement.
- Le modèle suppose que Ω doit être supérieur à sa valeur critique Ω_{cr} pour que le détachement se produise, d'où l'évaluation de la partie positive de $(\Omega - \Omega_{cr})$

notée $(\Omega - \Omega_{cr})_+$.

4. r_{c_k} est le taux de détachement de la couche de dépôt par le ruissellement

$$r_{c_k} = H \frac{m_k}{m_t} \frac{F(\Omega - \Omega_{cr})_+}{\frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_s} gh},$$

où Ω doit à nouveau être supérieur à sa valeur critique pour qu'il y ait détachement.

5. d_k est le taux de dépôt qui dépend à la fois de la vitesse de chute ν_k [L/T] et de la concentration en sédiments c_k de la classe associée

$$d_k = \nu_k c_k.$$

Nous précisons que e_{s_k} et e_{c_k} dépendent des variables d'état (h, u, c_k) par le taux de dépôt m_k , r_{s_k} et r_{c_k} dépendent directement des variables d'état (h, u, c_k) , et d_k ne dépend que de c_k .

2.2 Résolution numérique

Dans cette section, nous décrivons l'ensemble des méthodes numériques pour la résolution de notre modèle écoulement/infiltration/érosion.

2.2.1 Écoulements surfaciques et infiltration

Les équations de Saint–Venant constituent un système hyperbolique et nous utilisons un schéma basé sur la méthode des volumes finis pour le discrétiser en espace de façon conservative. Le schéma utilisé est dit “well–balanced” car il préserve les états d'équilibre au repos. Il conserve également la positivité de la hauteur d'eau. Dans cette thèse, nous utilisons un code orienté objet écrit en C^{++} appelé FullSWOF_2D (pour Full Shallow Water equations for Overland Flow in 2D¹) pour simuler les écoulements sans évolution temporelle de la topographie. Il a été développé notamment dans le cadre du projet ANR METHODE², voir [35, 40, 123].

Nous considérons le système de Saint–Venant (2.1) et introduisons les cinq vecteurs suivants pour une écriture plus compacte :

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad G(U) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix},$$

$$B_{R,I} = \begin{pmatrix} R - I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{S_0}(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_{0x} \\ -ghS_{0y} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_{S_f}(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_{fx} \\ -ghS_{fy} \end{pmatrix}.$$

1. disponible sur <http://www.univ-orleans.fr/mapmo/soft/FullSWOF/>

2. projet ANR-07-BLAN-0232 financé par l'Agence Nationale de la Recherche

U est le vecteur des variables conservatives ; F et G sont les vecteurs flux dans chaque direction spatiale ; $B_{R,I}$, B_{S_0} et B_{S_f} correspondent aux termes sources, les deux derniers dépendant de U (par le biais de h et en raison du frottement). Nous séparons le terme source en trois parties puisque celui relatif à la topographie nécessite un traitement spécifique dans le cadre d'un schéma "well balanced" et que celui relatif aux termes de frottement nécessite un traitement spécifique pour la discrétisation en temps. Avec ces notations, le système de Saint–Venant (2.1) s'écrit

$$\partial_t U + \partial_x F(U) + \partial_y G(U) = B_{R,I} + B_{S_0}(U) + B_{S_f}(U). \quad (2.10)$$

Nous considérons un maillage cartésien, présenté à la figure 2.4 pour le cas bidimensionnel. Les cellules $C_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{i-1/2}, y_{i+1/2}]$ sont centrées en les points (x_i, y_j) où les suites de points $(x_{i+1/2})_{i \in \mathcal{I}}$ et $(y_{j+1/2})_{j \in \mathcal{J}}$ sont définies récursivement par $x_{i+1/2} = x_{i-1/2} + \Delta x$ et $y_{j+1/2} = y_{j-1/2} + \Delta y$, avec Δx et Δy les pas d'espace dans chaque direction (pris constants pour simplifier) et où \mathcal{I} et \mathcal{J} sont des ensembles finis. La formulation volumes finis semi-discrétisée en espace du système (2.10) est

$$\frac{d}{dt} U_{i,j} + \frac{1}{\Delta x} (F_{i+1/2,j}^* - F_{i-1/2,j}^*) + \frac{1}{\Delta y} (G_{i,j+1/2}^* - G_{i,j-1/2}^*) = B_{R,I_{i,j}} + B_{S_{0i,j}} + B_{S_{fi,j}}, \quad (2.11)$$

où $U_{i,j}$ est l'approximation de U dans la cellule $C_{i,j}$, $F_{i+1/2,j}^*$ (resp. $G_{i,j+1/2}^*$) le flux numérique à l'interface entre $C_{i,j}$ et $C_{i+1,j}$ (resp. entre $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$) et $B_{R,I_{i,j}}$, $B_{S_{0i,j}}$ et $B_{S_{fi,j}}$ les discrétisations des termes sources. Le terme $B_{R,I_{i,j}}$ se discrétise de manière élémentaire ; la discrétisation des deux autres termes sources sera présentée ultérieurement.

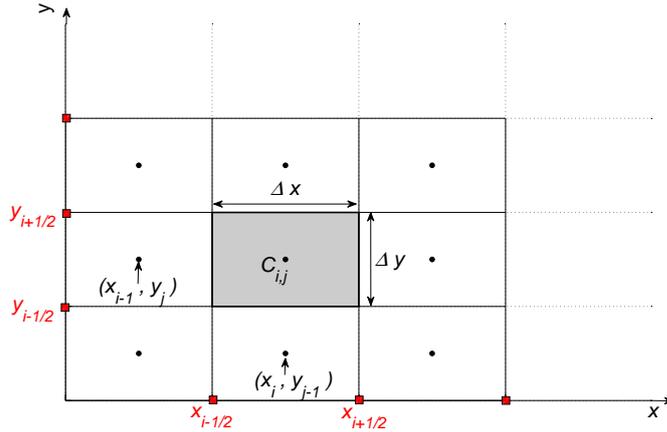


FIGURE 2.4 – Maillage cartésien.

Par souci de simplicité, nous continuons la description de la discrétisation dans le cas unidimensionnel. Nous présentons dans ce qui suit les différentes étapes pour

l'obtention du schéma utilisé, *i.e.* un schéma volumes finis “well-balanced” du second ordre (en espace et en temps).

Flux numérique

Nous utilisons le flux numérique HLL (Harten *et al.* [59]) qui est relativement simple d'implémentation et permet une bonne précision tout en étant peu coûteux en temps de calcul. Ce flux s'écrit sous la forme

$$\mathcal{F}(U_l, U_r) = \begin{cases} F(U_l) & \text{si } \sigma_1 > 0, \\ \frac{\sigma_2 F(U_l) - \sigma_1 F(U_r)}{\sigma_2 - \sigma_1} + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} (U_r - U_l) & \text{si } \sigma_1 < 0 < \sigma_2, \\ F(U_r) & \text{si } \sigma_2 < 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

où

$$\sigma_1 = \inf_{U \in \{U_l, U_r\}} \inf_{j \in \{1, 2\}} \lambda_j(U), \quad \sigma_2 = \sup_{U \in \{U_l, U_r\}} \sup_{j \in \{1, 2\}} \lambda_j(U),$$

et $\lambda_1(U) = u - \sqrt{gh}$, $\lambda_2(U) = u + \sqrt{gh}$ sont les valeurs propres de la jacobienne du système donnée par

$$\frac{\partial F}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{pmatrix}.$$

L'utilisation la plus simple du flux numérique consiste à poser dans (2.11)

$$F_{i+1/2}^* = \mathcal{F}(U_i, U_{i+1}), \quad (2.13)$$

mais nous allons maintenant modifier les arguments de \mathcal{F} afin d'assurer d'une part une montée en ordre et d'autre part un schéma “well balanced”.

Ordre deux en espace

Afin d'obtenir une précision du second ordre en espace, nous reconstruisons nos variables par une reconstruction ENO modifiée linéaire et un limiteur de pente minmod. Il s'agit d'une méthode classique pour étendre la précision d'un schéma volumes finis (voir par exemple Leveque [85], Bouchut [16] et Delestre [35]).

Soit y une fonction scalaire à valeurs réelles. La reconstruction ENO modifiée du second ordre est définie comme suit :

$$y_{i-1/2+} = y_i - \frac{\Delta x}{2} D_{\text{eno}, \mathbf{m}}(y)_i, \quad y_{i+1/2-} = y_i + \frac{\Delta x}{2} D_{\text{eno}, \mathbf{m}}(y)_i, \quad (2.14)$$

avec

$$D_{\text{eno}, \mathbf{m}}(y)_i = \minmod(D_{\text{eno}}(y)_i, \alpha_{\text{eno}, \mathbf{M}} D_{\text{mm}}(y)_i), \quad (2.15)$$

l'opérateur minmod suivant :

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} \min(a, b) & \text{si } a, b \geq 0, \\ \max(a, b) & \text{si } a, b \leq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.16)$$

et où $D_{\text{mm}}(y)_i$ et $D_{\text{eno}}(y)_i$ sont les pentes respectives de la reconstruction MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Law, Van Leer [143]) et ENO (Essentially Non Oscillatory, Harten *et al.* [58]). Nous choisissons la reconstruction ENO modifiée car elle offre un bon compromis entre précision et stabilité. En effet, l'opérateur de reconstruction MUSCL, bien que stable, peut engendrer une perte de précision alors que l'opérateur ENO est en général plus précis mais peut introduire des instabilités et engendrer une perte du principe du maximum. La dérivée discrète MUSCL est définie par

$$D_{\text{mm}}(y)_i = \text{minmod} \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right), \quad (2.17)$$

alors que la dérivée discrète ENO s'écrit

$$D_{\text{eno}}(y)_i = \text{minmod} \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} + \alpha_{\text{eno}} \frac{\Delta x}{2} D^2(y)_{i-1/2}, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} - \alpha_{\text{eno}} \frac{\Delta x}{2} D^2(y)_{i+1/2} \right), \quad (2.18)$$

avec

$$D^2(y)_{i+1/2} = \text{minmod} \left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2}, \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{\Delta x^2} \right). \quad (2.19)$$

Comme conseillé dans Bouchut [17], nous prenons $\alpha_{\text{eno}} = 0.25$ dans l'équation (2.18) et $\alpha_{\text{eno},\text{M}} = 1.8$ dans l'équation (2.15).

Dans le cas des équations de Saint-Venant (2.11), nous appliquons cette reconstruction ENO modifiée aux variables h , u et $h+z$ (ce qui conduit également par soustraction à une reconstruction de z , permettant de traiter correctement les interfaces sec/mouillé (Audusse *et al.* [7])). De nouvelles variables reconstruites sont alors obtenues, notées $h_{i+1/2\pm}$, $u_{i+1/2\pm}$ et $z_{i+1/2\pm}$. Ces reconstructions vérifient les relations de conservation

$$\frac{h_{i-1/2+} + h_{i+1/2-}}{2} = h_i \quad \text{et} \quad \frac{h_{i-1/2+}u_{i-1/2+} + h_{i+1/2-}u_{i+1/2-}}{2} = h_i u_i. \quad (2.20)$$

Schéma “well-balanced”

Il n'est pas évident d'obtenir un schéma préservant les états d'équilibre (en particulier les équilibres au repos). Cette particularité est réputée importante dans un contexte de modélisation du ruissellement. En l'absence de frottement et de termes source dus à la pluie ou à l'infiltration, les états d'équilibre sont caractérisés par

$$\begin{cases} \partial_t h = 0, \\ \partial_t u = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_x(h + z + u^2/g) = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Pour simplifier, nous nous restreignons aux états d'équilibre au repos ($u \ll \sqrt{gh}$) caractérisés par les relations $u = 0$ et $h + z = cst$.

Afin de préserver les états d'équilibre, l'idée depuis Greenberg et Leroux [52] consiste à modifier les arguments du flux numérique \mathcal{F} en lien avec une évaluation particulière du terme source B_{S_0} . Suite aux travaux de Audusse *et al.* [7], Bouchut [16] et Marche [93], on introduit les reconstructions hydrostatiques suivantes :

$$\begin{cases} h_{i+1/2L} = \max(0, h_{i+1/2-} + z_{i+1/2-} - \max(z_{i+1/2-}, z_{i+1/2+})), \\ h_{i-1/2R} = \max(0, h_{i-1/2+} + z_{i-1/2+} - \max(z_{i-1/2-}, z_{i-1/2+})), \\ U_{i+1/2L} = (h_{i+1/2L}, h_{i+1/2L}u_{i+1/2-})^t, \\ U_{i-1/2R} = (h_{i-1/2R}, h_{i-1/2R}u_{i-1/2+})^t. \end{cases} \quad (2.22)$$

Puis (toujours en l'absence de frottement), on écrit le schéma (2.11) sous la forme

$$\frac{d}{dt}U_i + \frac{1}{\Delta x}(F_{i+1/2L}^* - F_{i-1/2R}^*) = B_{R,I_i} + B_{S_{0i}}, \quad (2.23)$$

avec

$$F_{i+1/2L}^* = \mathcal{F}(U_{i+1/2L}, U_{i+1/2R}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2}((h_{i+1/2-})^2 - (h_{i+1/2L})^2) \end{pmatrix}, \quad (2.24a)$$

$$F_{i-1/2R}^* = \mathcal{F}(U_{i-1/2L}, U_{i-1/2R}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2}((h_{i-1/2+})^2 - (h_{i-1/2R})^2) \end{pmatrix}, \quad (2.24b)$$

et

$$B_{S_{0i}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{2}(h_{i-1/2+} + h_{i+1/2-})(z_{i+1/2-} - z_{i-1/2+}) \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Discretisation en temps

Le schéma d'Euler explicite pour (2.23) s'écrit sous la forme

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \Phi^n, \quad (2.26)$$

avec

$$\Phi^n = -\frac{1}{\Delta x}(F_{i+1/2L}^{*n} - F_{i-1/2R}^{*n}) + B_{R,I_i}^n + B_{S_{0i}}^n, \quad (2.27)$$

où l'indice supérieur n au membre de droite signifie une évaluation avec U^n .

Pour obtenir un schéma d'ordre deux en temps, nous utilisons le schéma de Heun, qui est une méthode de prédiction-corrrection du second ordre simple d'implémentation et possédant de bonnes propriétés de stabilité (sous condition CFL). Le schéma de

Heun s'écrit

$$\begin{aligned}\hat{U}^{n+1} &= U^n + \Delta t \Phi^n, \\ \check{U}^{n+1} &= \hat{U}^{n+1} + \Delta t \hat{\Phi}^{n+1}, \\ U^{n+1} &= \frac{U^n + \check{U}^{n+1}}{2},\end{aligned}\tag{2.28}$$

où $\hat{\Phi}^{n+1}$ est évalué comme dans (2.27) en utilisant \hat{U}^{n+1} comme argument.

Le terme de frottement est traité de manière semi-implicite pour des raisons de stabilité et de préservation des états d'équilibre au repos. Pour plus de détails, on pourra se référer à Bristeau et Coussin [23]. Pour le schéma de Heun d'ordre deux, l'idée consiste à décomposer chacun des sous-pas en une première étape explicite sans friction (utilisant la technique de reconstruction hydrostatique ci-dessus) et une deuxième étape semi-implicite avec la friction seule. Ainsi, le premier sous-pas du schéma de Heun est décomposé selon

$$\begin{cases} \hat{U}^{n+1*} = U^n + \Delta t \Phi^n, \\ \hat{U}^{n+1} = \hat{U}^{n+1*} + \Delta t \Psi(U^n, \hat{U}^{n+1*}, \hat{U}^{n+1}). \end{cases}\tag{2.29}$$

Dans le cas de la loi de frottement de Manning (2.2), on prend

$$\Psi(U^n, \hat{U}^{n+1*}, \hat{U}^{n+1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gK^2 \frac{(\widehat{hu})^{n+1} |u^n|}{(\hat{h}^{n+1*})^{4/3}} \end{pmatrix}\tag{2.30}$$

dont la deuxième composante fournit une approximation consistante de $-ghK^2 u|u|/h^{4/3}$. Dans le cas de la loi de frottement de Darcy-Weisbach (2.3), on prend

$$\Psi(U^n, \hat{U}^{n+1*}, \hat{U}^{n+1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f \frac{(\widehat{hu})^{n+1} |u^n|}{8\hat{h}^{n+1*}} \end{pmatrix}\tag{2.31}$$

dont la deuxième composante fournit une approximation consistante de $-fu|u|/8$. Le deuxième sous-pas du schéma de Heun est traité de manière analogue.

2.2.2 Écoulements surfaciques, infiltration et érosion

Nous considérons le modèle couplé des équations de Saint-Venant avec le modèle HR pour la prédiction des processus de ruissellement et d'érosion. La résolution numérique s'appuie sur les travaux de thèse de Minh Le [83]. Nous séparons le système d'équations complet en deux groupes : le premier, *cf.* (2.32a), concerne le ruissellement et le transport de sédiments, le second *cf.* (2.32b)-(2.32c), concerne l'érosion et le dépôt ainsi que l'évolution de la topographie. Pour simplifier l'écriture, la résolution est décrite dans le cas unidimensionnel. Le système complet s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} (hu) = R - I, \\ \frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2 + \frac{gh^2}{2}) = -ghS_0 - S_f, \\ \partial_t (hc_k) + \partial_x (hc_k u) = e_{s_k} + e_{l_k} + r_{s_k} + r_{l_k} - d_k, \quad \forall 1 \leq k \leq K, \end{cases} \quad (2.32a)$$

$$\forall 1 \leq k \leq K, \quad \partial_t m_k = w_k := \begin{cases} e_{s_k} & \text{si } h = 0, \\ d_k - e_{c_k} - r_{c_k} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.32b)$$

$$\partial_t z = \frac{1}{\rho_s(1-\Phi)} \sum_{k=1}^K (d_k - e_{s_k} - r_{s_k} - e_{c_k} - r_{c_k}). \quad (2.32c)$$

Nous introduisons les sept vecteurs suivants :

$$W = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hc_1 \\ \vdots \\ hc_K \end{pmatrix}, \quad F_c(W) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \\ huc_1 \\ \vdots \\ huc_K \end{pmatrix}, \quad B_{SV}(W) = \begin{pmatrix} R - I \\ -ghS_0 - ghS_f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$W_c = \begin{pmatrix} hc_1 \\ \vdots \\ hc_K \end{pmatrix}, \quad B_{ero}(W_c) = \begin{pmatrix} e_{s_1} + e_{l_1} + r_{s_1} + r_{l_1} - d_1 \\ \vdots \\ e_{s_K} + e_{l_K} + r_{s_K} + r_{l_K} - d_K \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_K \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_K \\ \frac{1}{\rho_s(1-\Phi)} \sum_{k=1}^K (d_k - e_{s_k} - r_{s_k} - e_{l_k} - r_{l_k}) \end{pmatrix}.$$

Le système complet se réécrit ainsi sous la forme compacte

$$\partial_t W + \partial_x F_c(W) = B_{SV}(W), \quad (2.33a)$$

$$\partial_t W_c = B_{ero}(W_c) \quad \text{et} \quad \partial_t M = D. \quad (2.33b)$$

À chaque pas de temps, la résolution numérique se décompose en deux étapes : (1) la résolution du système de Saint-Venant couplé aux K équations de transport pour les sédiments dans l'écoulement, *cf.* (2.33a) (on notera l'absence de termes sources dans les équations de transport pour les sédiments); (2) la résolution du système d'équations différentielles (2.33b) décrivant la contribution de l'érosion et l'évolution de la topographie.

Résolution écoulement surfacique/transport de sédiments

La résolution du système (2.33a) est réalisée au moyen d'un schéma volumes fins "well-balanced" du second ordre en espace et du premier ordre en temps. Elle a été réalisée dans le cadre de la thèse de Minh Le [83]. Nous reprenons les mêmes notations qu'à la sous-section 2.2.1 pour l'écoulement surfacique. Hormis l'utilisation du schéma d'Euler explicite à la place du schéma de Heun (2.26)-(2.27), il s'agit essentiellement de la même méthode qu'à la section 2.2.1. Afin d'éviter les répétitions, les différentes étapes sont énumérées mais non détaillées.

- Reconstruction des variables h , u , $z + h$ et c_k , $\forall 1 \leq k \leq N$, par l'opérateur de reconstruction MUSCL. On obtient les nouvelles variables $h_{i+1/2\pm}$, $u_{i+1/2\pm}$, $z_{i+1/2\pm}$ et $c_{k,i+1/2\pm}$.
- Reconstruction hydrostatique des variables h et u pour obtenir un schéma "well-balanced". Les variables $h_{i+1/2L,R}$ et $u_{i+1/2L,R}$ sont toujours reconstruites selon (2.22).
- Résolution du système de Saint-Venant (en l'absence de frottement) avec les variables reconstruites. On obtient alors le schéma (2.23) avec le flux numérique HLL (2.24a)-(2.24b) et le terme source modifié (2.25).
- Traitement semi-implicite du terme de frottement B_{S_f} . La friction est traitée de manière semi-implicite dans le cadre du schéma d'Euler explicite (2.26)-(2.27) en prenant

$$\begin{cases} U^{n+1*} = U^n + \Delta t \Phi^n, \\ U^{n+1} = U^{n+1*} + \Delta t \Psi(U^n, U^{n+1*}, U^{n+1}). \end{cases} \quad (2.34)$$

- Résolution des K équations du transport des sédiments, $\forall 1 \leq k \leq K$,

$$(hc_k)_i^{*n+1} - (hc_k)_i^n = -\frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{k,i+1/2L}^{*n} - F_{k,i-1/2R}^{*n}), \quad (2.35)$$

avec

$$\begin{aligned} F_{k,i+1/2L}^{*n} &= (F_h^{*n})_{i+1/2L} c_{k,i+1/2-}^n, \\ F_{k,i-1/2R}^{*n} &= (F_h^{*n})_{i-1/2R} c_{k,i-1/2+}^n, \end{aligned} \quad (2.36)$$

F_h^{*n} étant la première composante du vecteur flux donné par (2.24a)-(2.24b).

Nous employons la notation $(hc_k)^{*n+1}$ dans (2.35) pour indiquer que les termes sources doivent encore être pris en compte dans l'équation de transport des sédiments. Les indices supérieurs n font référence au pas n du schéma d'Euler et Δt représente le pas de temps.

Résolution des processus d'érosion

Après avoir résolu le système (2.33a) et obtenu les variables h^{n+1} , u^{n+1} et $(hc_k)^{*n+1}$, la seconde étape consiste à résoudre le système (2.33b) relatif aux processus de déta-

chement et de dépôt. Ce système admet un traitement différent si l'on est en situation de ruissellement ou non. Dans la suite, nous distinguons donc les deux situations : $h^{n+1} = 0$ et $h^{n+1} > 0$. Dans ce qui suit, les différentes variables ne sont pas discrétisées en espace pour ne pas surcharger les notations.

Sans ruissellement ($h^{n+1} = 0$)

Les sédiments détachés par l'impact des gouttes de pluie ne sont pas transportés mais s'accumulent dans la couche de dépôt. Il n'y a pas d'évolution de la topographie. La concentration sédimentaire est nulle et seule l'incrément de la variable m_k est nécessaire

$$\begin{cases} (hc_k)^{n+1} = 0, \\ m_k^{n+1} = m_k^n + \Delta t e_{s_k}^{n+1}. \end{cases} \quad (2.37)$$

L'indice supérieur ($n + 1$) sur les termes sources indique que leur évaluation se fait en utilisant l'état de l'écoulement au temps ($n + 1$).

Avec ruissellement ($h^{n+1} > 0$)

Lorsque l'eau ruisselle à la surface du sol, les sédiments détachés sont transportés. Cependant, seuls les sédiments dont le diamètre est inférieur à la hauteur de l'écoulement sont en suspension, les autres sont assimilés à la couche de dépôt. La résolution du système (2.32b) dépend donc du diamètre d_{s_k} de la classe de sédiment k :

– si $d_{s_k} \geq h^{n+1}$

$$\begin{cases} (hc_k)^{n+1} = 0, \\ m_k^{n+1} = m_k^n + (hc_k)^n + \Delta t e_{s_k}^{n+1}, \end{cases} \quad (2.38)$$

ce qui revient à prendre $e_{c_k}^n = r_{c_k}^n = r_{s_k} = 0$, $d_k^n = \frac{1}{\Delta t} (hc_k)^{*n+1}$ et à négliger le transport advectif.

– si $d_{s_k} < h^{n+1}$

$$\begin{cases} (hc_k)^{n+1} = (hc_k)^{*n+1} + \Delta t (e_{s_k} + e_{c_k} + r_{s_k} + r_{c_k} - d_k)^{n+1}, \\ m_k^{n+1} = m_k^n + \Delta t (d_k - e_{c_k} - r_{c_k})^{n+1}. \end{cases} \quad (2.39)$$

– Mise à jour de la topographie :

$$z^{n+1} = z^n + \frac{\Delta t}{\rho_s(1 - \Phi)} \sum_{\{k|d_{s_k} < h^{n+1}\}} (d_k - e_{s_k} - r_{s_k} - e_{c_k} - r_{c_k})^{n+1}. \quad (2.40)$$

2.3 Illustration des processus

Dans cette section, nous présentons quelques cas tests déterministes afin d'illustrer les processus d'infiltration et d'érosion qui sont étudiés en détail dans les Chapitres 4 et 5 dans le cadre d'une modélisation stochastique.

2.3.1 Infiltration

Comme évoqué à la section 1.2.2 du chapitre introductif, la conductivité hydraulique à saturation K_s joue un rôle prépondérant dans le processus d'infiltration, et ceci indépendamment du modèle choisi. K_s représente la valeur maximale du taux d'infiltration et il est clair qu'au vu de l'équation (2.7), la capacité d'infiltration $I_c(t)$ tend vers K_s lorsque t est suffisamment grand. Nous nous focalisons tout d'abord sur cette valeur limite et nous nous intéressons à l'évolution temporelle de la capacité d'infiltration et de l'infiltration cumulée $I^*(t)$ calculée *via* l'équation (2.7) pour un apport d'eau provenant d'une pluie de 60 mm.h^{-1} d'intensité et les valeurs de paramètres suivantes :

$$\theta_s - \theta_i = 0.3, \quad h_f = 0.023 \text{ m.}$$

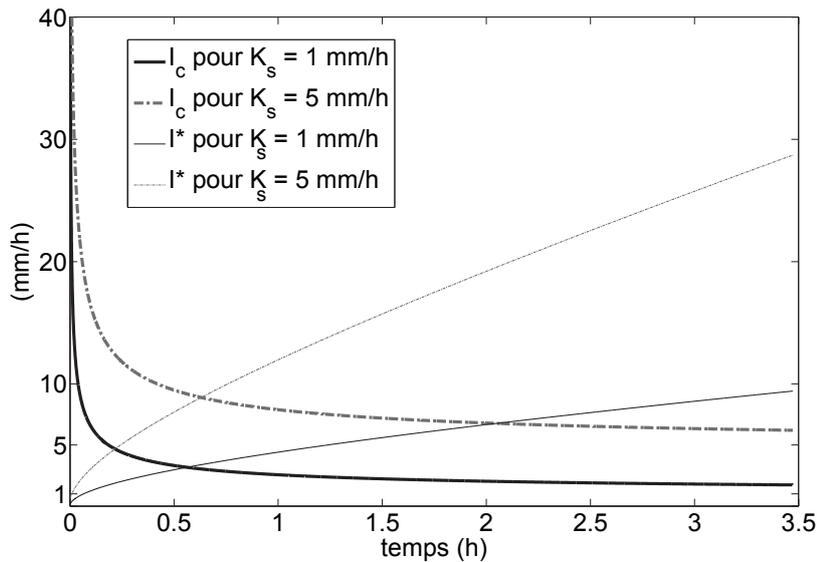


FIGURE 2.5 – Évolution temporelle de la capacité d'infiltration $I_c(t)$ et de l'infiltration cumulée $I^*(t)$ lors d'un apport d'eau de taux égal à 60 mm.h^{-1} .

La figure 2.5 représente l'évolution temporelle de $I_c(t)$ et $I^*(t)$ pour deux valeurs de K_s ($K_s = 1$ et 5 mm.h^{-1}). On observe bien la convergence des capacités d'infiltration vers la valeur de la conductivité hydraulique à saturation. Les valeurs de I_c décroissent très rapidement au début de l'événement puis leur convergence vers K_s ralentit significativement. On voit que dans le cas présent, les valeurs de I_c étant inférieures à l'apport d'eau (60 mm.h^{-1}), nous sommes tout de suite en présence de ruissellement. Concernant le taux d'infiltration cumulé I^* , son comportement est plus uniforme.

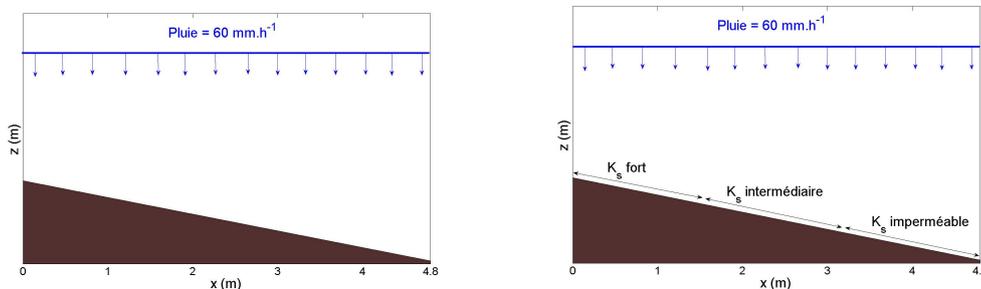
Configuration de référence et hydrogramme type

Une fois la convergence de I_c vers K_s vérifiée, nous nous intéressons maintenant aux allures des hydrogrammes de sortie lors d'un événement pluvieux en faisant varier les valeurs de K_s . Cette étude est motivée par le fait que K_s présente en général une très forte variabilité spatiale (voir section 1.2.2). Nous considérons un plan unidimensionnel de longueur $L = 4.8$ m et de pente constante $\partial_x z = 2\%$ sur lequel nous simulons une pluie constante, uniforme, de taux égal à 60 mm.h^{-1} sur une durée de 125 s. La configuration initiale est présentée sur la figure 2.6(a). Les paramètres du sol, excepté K_s , sont supposés uniformes le long du domaine et prennent les valeurs suivantes :

$$f = 0.25 \text{ (pour la loi de Darcy-Weisbach)}, \quad \theta_s - \theta_i = 0.3, \quad h_f = 0.023 \text{ m.}$$

L'hydrogramme (débit à l'exutoire) d'un événement pluvieux se décompose en trois phases, présentées sur la figure 2.7 pour une configuration de sol imperméable :

1. Montée : il s'agit de la phase transitoire au cours de laquelle le débit à l'exutoire croît jusqu'à atteindre sa valeur limite.
2. Équilibre : il s'agit de la phase pendant laquelle le débit à l'exutoire est égal à sa valeur limite et l'écoulement est stationnaire. Cette phase débute quand toutes les caractéristiques se propageant vers l'aval ont atteint l'exutoire.
3. Assèchement : il s'agit de la phase transitoire au cours de laquelle le débit à l'exutoire décroît jusqu'à devenir nul. Cette phase débute à l'arrêt de la pluie.



(a) Configuration initiale pour des paramètres uniformes. (b) Configuration initiale pour des K_s distribués.

FIGURE 2.6 – Configurations initiales.

Impact des valeurs de K_s sur les hydrogrammes

Dans le cas de la configuration initiale décrite précédemment (voir la figure 2.6(a)), nous prenons différentes valeurs pour le paramètre K_s , uniformes sur tout le domaine. Les différents hydrogrammes obtenus sont présentés sur la figure 2.8. Les valeurs de la conductivité hydraulique à saturation modifient considérablement l'allure des hydrogrammes. Les hydrogrammes obtenus sur des sols perméables montrent que l'état d'équilibre n'est pas atteint. Une partie (ou la totalité) de l'eau provenant de la pluie

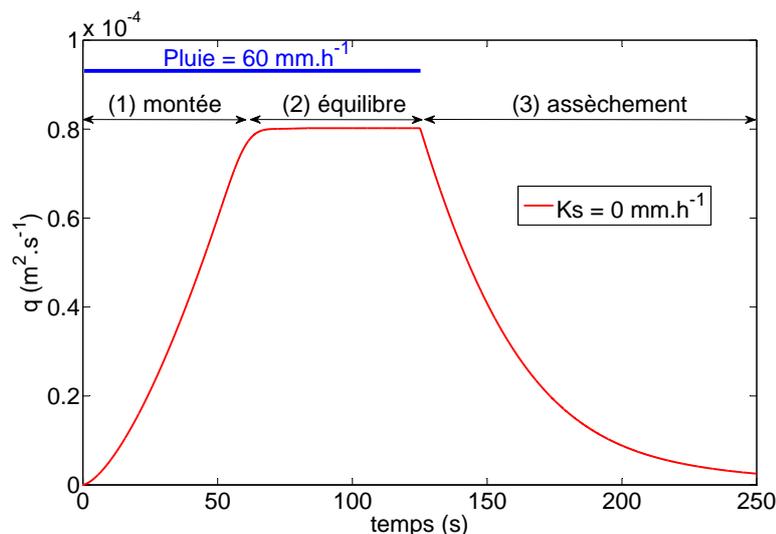


FIGURE 2.7 – Hydrogramme type (débit à l'exutoire) pour une configuration imperméable.

s'infiltrant dans le sol, le ruissellement n'apparaît pas dès le début de la pluie et les débits à l'exutoire sont largement diminués, si bien que la seconde phase de l'hydrogramme (équilibre) n'est pas atteinte. Changer la valeur de K_s impacte donc considérablement le débit maximal obtenu à l'exutoire. Par rapport à un sol imperméable ($K_s = 0 \text{ mm.h}^{-1}$), celui-ci est diminué de 20% pour $K_s = 1 \text{ mm.h}^{-1}$ et de moitié pour $K_s = 4 \text{ mm.h}^{-1}$. En outre, la valeur de K_s impacte fortement l'aire sous la courbe des débits qui représente le volume d'eau ruissellée. Par rapport au cas $K_s = 0 \text{ mm.h}^{-1}$, cette aire décroît respectivement de 40%, 60% et 77% pour les valeurs de K_s égales à 1, 4 et 10 mm.h^{-1} .

Impact de la distribution des K_s sur les hydrogrammes

Comme la conductivité hydraulique à saturation peut présenter une variabilité spatiale relativement importante, nous nous intéressons à l'impact de la distribution de K_s sur l'allure des hydrogrammes. Nous considérons maintenant la configuration initiale décrite à la figure 2.6(b). Le domaine est découpé en trois sous-domaines de longueur égale et auxquels une valeur de K_s différente est attribuée. Il est alors possible, par exemple, de considérer un sol fortement infiltrant en amont, imperméable en aval et intermédiaire au milieu. Dans un premier temps, nous choisissons deux configurations où le sous-domaine aval est imperméable alors que l'eau peut s'infiltrer sur le reste du domaine. Les courbes de débit obtenues sont présentées sur la figure 2.9. Les débits calculés avec les conductivités hydrauliques à saturation spatialisées, en plus d'être inférieurs à celui de la configuration imperméable, présentent différents paliers. Ces paliers correspondent à la contribution en eau des sous-domaines en amont de l'exutoire. Par exemple, les premières parties des hydrogrammes sont égales à celle de la configuration

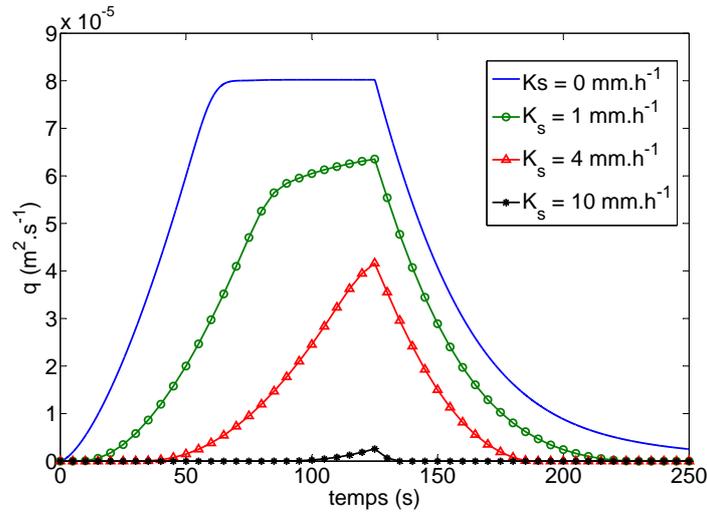


FIGURE 2.8 – Hydrogrammes (débits à l'exutoire) obtenus pour différentes valeurs de K_s sur la configuration initiale avec K_s uniforme en espace.

imperméable. Ceci s'explique par le fait que, au début d'un événement pluvieux, seul le bas du domaine approvisionne l'exutoire en eau. L'aval du domaine étant imperméable, les courbes sont donc superposées jusqu'au moment où l'eau provenant de l'amont atteint l'exutoire et contribue au débit à l'exutoire. Ainsi, la distribution des K_s le long du domaine a un impact significatif sur l'apport en eau au niveau de l'exutoire et donc sur la forme des hydrogrammes de sortie.

Dans un second temps, nous choisissons trois valeurs de K_s pour représenter trois types de sol bien différents : $K_s = 1 \text{ mm.h}^{-1}$ pour une infiltration faible, $K_s = 10 \text{ mm.h}^{-1}$ pour une infiltration intermédiaire et $K_s = 40 \text{ mm.h}^{-1}$ pour une infiltration forte. Ces trois valeurs de K_s sont attribuées à chacun des trois sous-domaines. Nous observons ainsi les débits à l'exutoire en fonction de la distribution des K_s . Les résultats obtenus pour quatre des différentes distributions des trois valeurs de K_s sont présentés à la figure 2.10. "faible - inter. - forte" signifie que le sous-domaine amont admet une infiltration faible, celui du milieu une infiltration intermédiaire et celui en aval une infiltration forte. Clairement, la distribution des K_s influence considérablement les débits à l'exutoire. Par exemple, la configuration où le sous-domaine relatif à la forte infiltration est situé en aval conduit à des débits nuls à l'exutoire, alors que si celui-ci est localisé au milieu du domaine, le débit de sortie est non nul et son hydrogramme prend la forme d'un plateau bien marqué. Cette différence s'explique par le fait que l'on assigne au sous-domaine aval une valeur de K_s suffisamment élevée pour lui permettre d'infiltrer toute l'eau de pluie tombant localement plus toute l'eau s'écoulant de l'amont. Les débits ainsi que leurs maxima sont très différents d'un choix de distribution à l'autre. Les mêmes remarques peuvent être faites pour les volumes d'eau ruisselée, correspondant aux aires sous les courbes de débits. Ainsi, distribuer différemment trois mêmes valeurs de K_s le long d'un domaine peut changer significativement les débits et les volumes d'eau ruisselée.

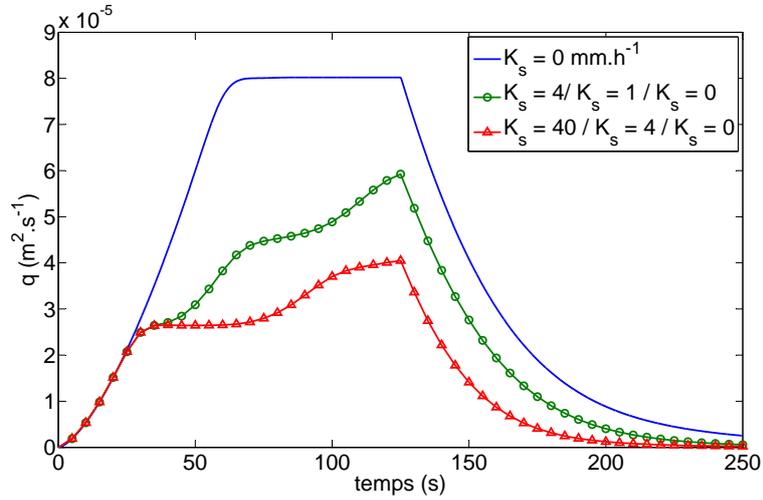


FIGURE 2.9 – Hydrogrammes (débits à l'exutoire) obtenus pour différentes distributions de K_s sur trois sous-domaines, le sous-domaine aval étant imperméable.

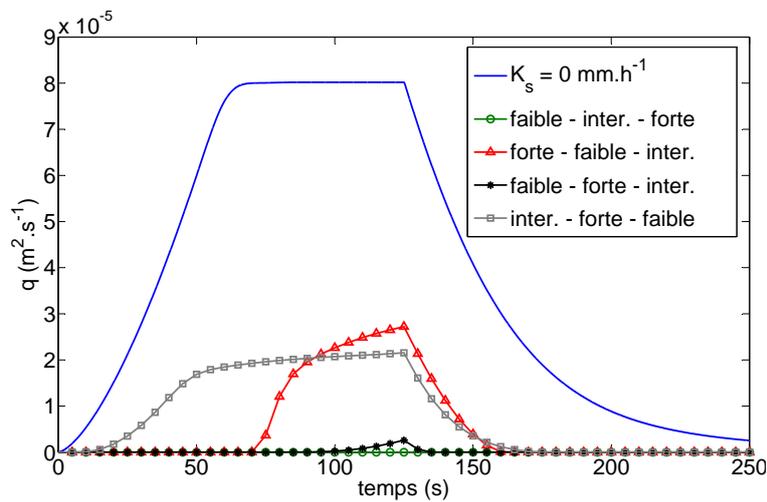


FIGURE 2.10 – Hydrogrammes (débits à l'exutoire) obtenus pour différentes distributions de K_s sur trois sous-domaines.

2.3.2 Érosion

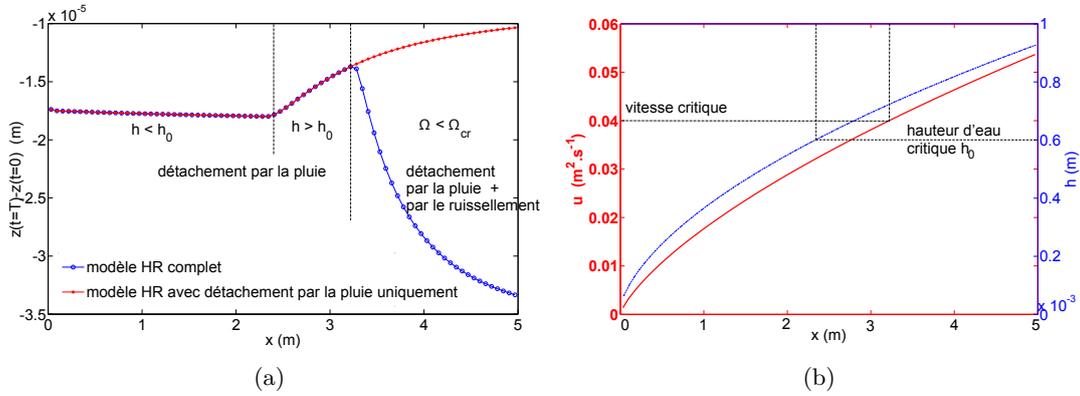


FIGURE 2.11 – Résultats : (a) variation de la topographie entre les instants $t = 0$ s et $t = 600$ s pour le modèle HR complet et le modèle HR avec détachement par la pluie uniquement ; (b) distribution spatiale de la hauteur d'eau et de la vitesse au temps $T = 600$ s.

Nous avons vu à la section 1.2.3 du chapitre introductif que le processus érosif peut être décomposé en trois étapes distinctes qui sont le détachement par la pluie, le détachement par le ruissellement et le dépôt. En outre, les interactions existant entre ces trois étapes sont jusqu'à présent méconnues et la plupart des études les traitent séparément. Les cas tests déterministes qui suivent visent en particulier à illustrer l'importance du choix de la description. Notre démarche consiste ici à ne considérer qu'une, deux ou trois de ces étapes. Tout d'abord, nous considérons un plan unidimensionnel de 5 m de long et de pente constante $\partial_x z = 5\%$, sur lequel nous simulons une pluie uniforme et constante de $60 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$ sur une durée $T = 600$ s. Tous les paramètres sont pris uniformes. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 2.11(a) et 2.11(b). La différence entre la topographie à l'instant T (où la pluie est arrêtée) et la topographie initiale à l'instant $t = 0$ s est présentée sur la figure 2.11(a) pour les deux modèles (complet et détachement par la pluie uniquement). Les profils de hauteur d'eau et vitesse à l'instant $T = 600$ s sont présentés à la figure 2.11(b) (ces profils sont pratiquement indépendants du modèle d'érosion). Les deux courbes de la figure 2.11(a) sont parfaitement superposées sur les deux tiers amont du domaine, elles sont relativement constantes sur la première moitié puis croissent. Ce comportement est typique du détachement par la pluie. En effet, lors d'une pluie sur un plan unidimensionnel, les hauteurs d'eau ainsi que les vitesses présentent des profils croissants le long du domaine, l'eau s'accumule vers l'aval et l'écoulement gagne de la vitesse en descendant la pente. Ainsi, pour le modèle HR avec détachement par la pluie uniquement, les sédiments sont arrachés par l'impact des gouttes de pluie selon un taux uniforme sur la partie amont du domaine (proportionnel au paramètre de détachabilité a_0 , voir la sous-section 2.1.3). Ensuite, ce taux de détachement diminue car la hauteur d'eau crée une couche protégeant le sol des impacts des gouttes. Le point de cassure de la courbe rouge (figure 2.11(a)) correspond au point où le profil de la hauteur d'eau atteint la hauteur d'eau critique

h_0 (voir l'équation (2.9)). Dans le cas du modèle HR complet, sur la partie amont du domaine, le détachement ne provient que de la pluie car la vitesse d'écoulement n'est pas assez importante pour arracher des sédiments, ce qui explique que les courbes des deux modèles sont confondues sur les deux tiers amont du domaine sur la figure 2.11(a). Le point à partir duquel la différence de topographie change de tendance et augmente significativement, correspond au point où la vitesse atteint une valeur limite. Cette valeur limite correspond à un stream power Ω supérieur au stream power critique Ω_{cr} , ce qui permet ainsi le détachement par le ruissellement qui est une fonction croissante des vitesses. Au vu des résultats sur la variation de la topographie pour un simple cas test unidimensionnel, le choix du modèle d'érosion apparaît déjà essentiel.

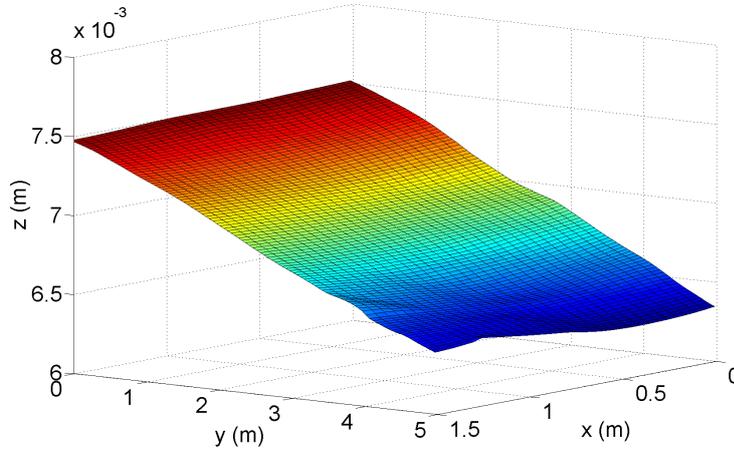


FIGURE 2.12 – Topographie initiale de la parcelle.

Le cas test précédent étant relativement simple, nous nous intéressons maintenant à une configuration bidimensionnelle présentant des microtopographies. Nous considérons une parcelle de 5 m de long et 1.5 m de large extraite du modèle numérique de terrain (MNT) d'un bassin versant et présentée sur la figure 5.23. Nous simulons le même événement pluvieux que précédemment, à savoir une pluie constante et uniforme de 60 mm.h^{-1} d'intensité sur une durée $T = 600 \text{ s}$. Les résultats obtenus avec le modèle HR complet et le modèle HR avec détachement par la pluie uniquement sont présentés sur la figure 2.13. Tout d'abord, les hauteurs d'eau et les champs de vitesses sont similaires pour les deux modèles d'érosion. Les hauteurs d'eau et les vitesses à l'instant final sont présentés en haut de la figure 2.13. Les microtopographies de la parcelle entraînent la formation d'une rigole où l'écoulement se concentre et les vitesses sont plus grandes. La variation de la topographie entre les instants initial et final est présentée en bas de la figure 2.13, à gauche pour le modèle HR complet, à droite pour le modèle HR avec détachement par la pluie uniquement. Une nette différence apparaît entre les deux modèles au niveau de la rigole alors que sur le reste du domaine, les résultats sont semblables. Le modèle HR complet prédit un arrachement sur l'ensemble du domaine et ne conduit pas à une zone de dépôt à l'aval de la rigole comme pour le modèle HR

avec détachement par la pluie uniquement. En effet, l'eau accumulée à l'aval de la rigole forme une couche protectrice contre les impacts des gouttes de pluie. Ainsi, le deuxième modèle conduit à un taux d'arrachement moindre ou nul, ce qui permet aux sédiments de se déposer. De plus, au niveau de la rigole, les champs de vitesses sont plus élevés permettant ainsi le détachement des sédiments par le ruissellement notamment dans le cas du modèle HR complet. Les quantités érodées et déposées sont fournies dans le tableau 2.1. Le détachement est clairement plus important dans le cas du modèle HR complet alors que les quantités de sédiments en suspension sont comparables.

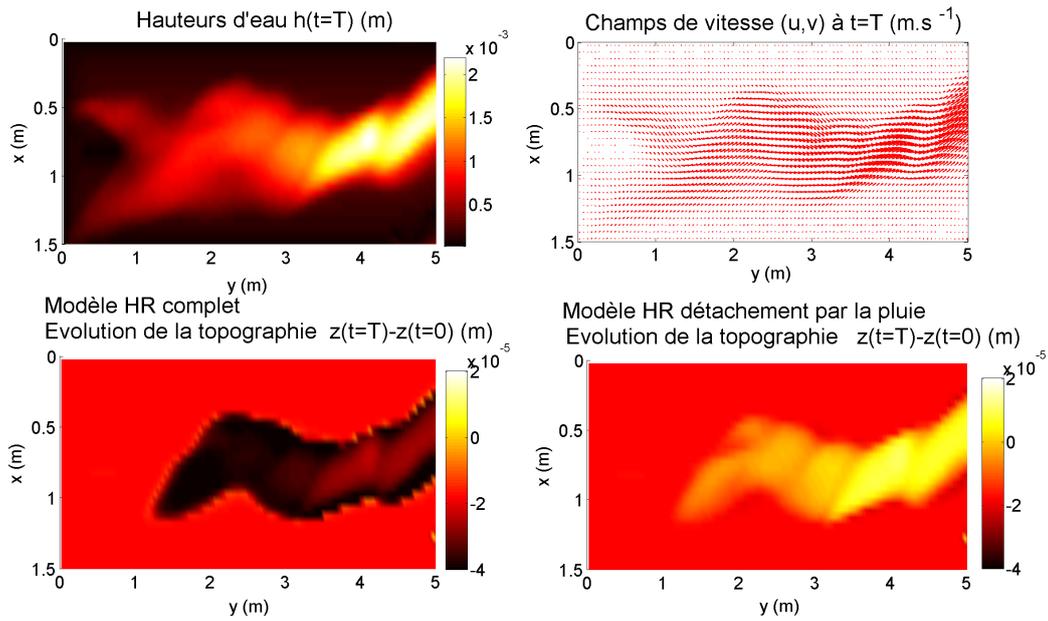


FIGURE 2.13 – Résultats pour la topographie initiale de la figure 5.23. En haut : hauteur d'eau (à gauche) et vitesse (à droite) à l'instant final $t = T$. En bas : variation de la topographie entre les instants final et initial, à gauche pour le modèle HR complet, à droite pour le modèle HR avec détachement par la pluie uniquement.

Tableau 2.1 Bilan sédimentaire pour les trois configurations testées : (1) événement pluvieux et modèle HR complet, (2) événement pluvieux et modèle HR avec détachement par la pluie uniquement et (3) apport d'eau en amont et modèle HR de détachement par le ruissellement.

Modèle HR	quantité sortie (g)	quantité déposée (g)	quantité détachée (g)	quantité en suspension (g)
(1) complet	230	0	249	19
(2) pluie	141	5	163	16
(3) ruissellement	158	0	160	2

Enfin, pour mieux observer la différence entre les processus de détachement par la pluie et par le ruissellement, nous simulons sur cette même parcelle un écoulement généré par une hauteur d'eau de 2 cm imposée en amont du domaine. Ici, il n'est plus question de détachement par la pluie, les résultats ne sont donc pas comparables quantitativement avec les précédents. La figure 2.14 présente la hauteur d'eau et la vitesse à l'instant final $t = T$ ainsi que la variation de la topographie entre les instants initial et final. Les quantités hydrauliques (hauteur et vitesse) sont plus importantes car l'eau provient d'un apport en amont. Les hauteurs d'eau sont sensiblement plus importantes au niveau de la rigole et les champs de vitesses sont clairement plus élevés sur tout le domaine. D'ailleurs, la distinction au niveau de la rigole, où l'on avait des vitesses plus importantes, est moins évidente. Dans cette configuration, il n'y a pas de dépôt de sédiments, l'arrachement se fait sur tout le domaine et la rigole semble plus étalée et moins marquée. On peut remarquer dans le tableau 2.1 que les quantités détachées sont comparables à celles obtenues pour le modèle HR avec détachement par la pluie uniquement. De plus, la masse de sédiments en suspension est plus faible dans le cas du détachement par le ruissellement uniquement.

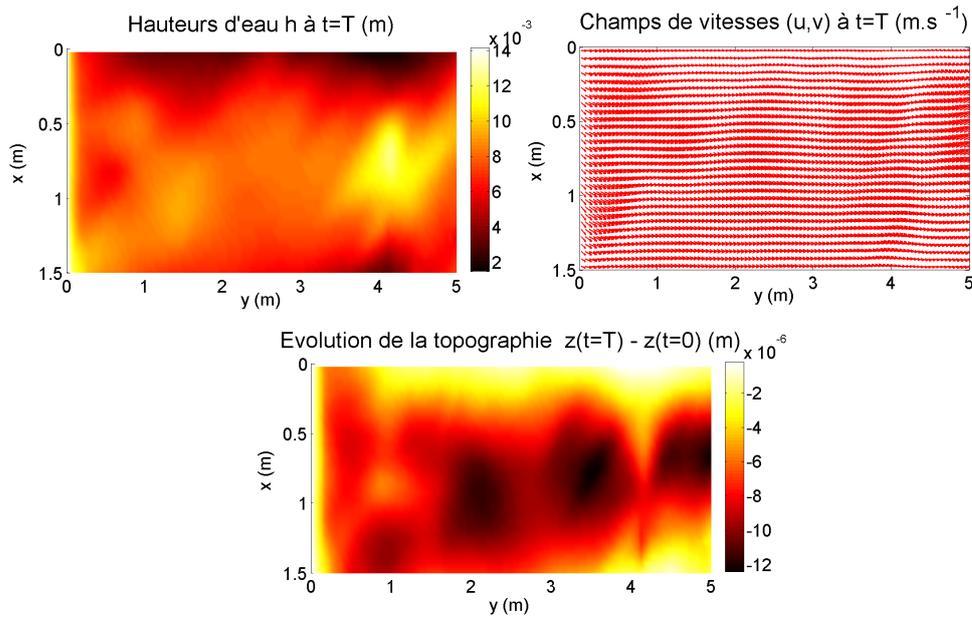


FIGURE 2.14 – Résultats pour le modèle HR avec détachement par le ruissellement, avec une hauteur d'eau amont imposée à 2 cm. En haut : hauteur d'eau (à gauche) et vitesse (à droite) à l'instant final $t = T$. En bas : variation de la topographie entre les instants final et initial.

Méthodes probabilistes et outils statistiques

Sommaire

3.1	Quelques éléments et définitions de la théorie des probabilités	45
3.1.1	Cadre probabiliste	45
3.1.2	Variables aléatoires réelles	47
3.1.3	Vecteurs aléatoires réels	49
3.2	Quantification des incertitudes sur les sorties du modèle	51
3.2.1	Cadre mathématique	52
3.2.2	Caractérisation de la variabilité	53
3.2.3	Analyse de la variance (ANOVA) et indices de sensibilité	54
3.3	Méthodes numériques	56
3.3.1	Propagation des incertitudes par Monte Carlo	56
3.3.2	Méthode des Polynômes de Chaos	61

Dans ce chapitre, nous définissons et détaillons le cadre probabiliste ainsi que les outils statistiques utilisés pour la propagation et quantification des incertitudes paramétriques.

3.1 Quelques éléments et définitions de la théorie des probabilités

3.1.1 Cadre probabiliste

Espace de probabilité

Nous nous plaçons dans un espace de probabilité $\mathcal{P} := (\Theta, \Sigma, P)$ tel que Θ est un ensemble d'événements aléatoires, Σ sa σ -algèbre associée, et P une mesure de probabilité. Un tel espace de probabilité est dit complet s'il vérifie :

$$A, B \in \Sigma \text{ avec } A \subset B \text{ et } P(B) = 0 \Rightarrow P(A) = 0. \quad (3.1)$$

Un espace de probabilité pouvant toujours être complété, nous supposons donc implicitement les espaces de probabilité complets. L'espace (Θ, Σ, P) admet les propriétés suivantes : $P(\Theta) = 1$ et pour tout $A, B \in \Sigma$,

- $P(A) \leq P(B)$ pour $A \subseteq B$,

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, où $\bar{A} = \Theta \setminus A$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

On dit qu'une propriété est satisfaite presque sûrement en θ (en abrégé, *p.s.* en θ) si elle est satisfaite pour tout $\theta \in \bar{A}$ où $P(A) = 0$. En cas d'événements indépendants dans des ensembles $\Theta_1, \dots, \Theta_N$, on peut définir l'espace de probabilité produit (Θ, Σ, P) à partir des espaces $(\Theta_k, \Sigma_k, P_k)$ pour $k = 1, \dots, N$, tel que

$$\begin{aligned}\Theta &= \Theta_1 \times \dots \times \Theta_N, \\ \Sigma &= \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_N, \\ P &= P_1 \times \dots \times P_N.\end{aligned}$$

Dans le cas où les espaces $(\Theta_k, \Sigma_k, P_k)$ sont identiques, l'espace produit associé sera noté $(\Theta^N, \Sigma^N, P^N)$.

Soient (Θ, Σ_Θ) et $(\Theta', \Sigma_{\Theta'})$ deux espaces mesurables. La fonction $h : \Theta \rightarrow \Theta'$ est dite mesurable de (Θ, Σ_Θ) dans $(\Theta', \Sigma_{\Theta'})$ si, pour tout événement B de $\Sigma_{\Theta'}$, on a

$$h^{-1}(B) \equiv \{\theta \in \Theta : h(\theta) \in B\} \in \Sigma_\Theta. \quad (3.2)$$

Variables et vecteurs aléatoires

Soient un espace de probabilité (Θ, Σ, P) et une fonction $X : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable de (Θ, Σ, P) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, où \mathcal{B} est la tribu borélienne de \mathbb{R} (l'utilisation de la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R} notée dx , étant sous-entendue). Alors, X est une variable aléatoire à valeurs réelles notée $X(\theta)$. On définit la distribution (ou loi de probabilité) de X , notée $Q : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, comme étant la mesure de probabilité induite par la transformation X de Θ dans \mathbb{R} sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$:

$$Q(B) = P(X^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}. \quad (3.3)$$

Cette définition implique alors que X est une variable aléatoire si et seulement si $X^{-1}((-\infty, x]) \in \Sigma, \forall x \in \mathbb{R}$.

Il est possible d'étendre cette définition aux fonctions \mathbf{X} \mathbb{R}^d -mesurables de (Θ, Σ) dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$. Ainsi, si toutes les composantes de \mathbf{X} sont des variables aléatoires, alors \mathbf{X} est appelé vecteur aléatoire.

Intégrabilité

Pour $X : (\Theta, \Sigma, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, où \mathcal{B} est la tribu borélienne de \mathbb{R} , l'intégrale de X par rapport à P sur l'événement $A \in \Sigma$ s'écrit

$$\int_{\Theta} \mathbf{1}_A(\theta) X(\theta) dP(\theta) = \int_A X(\theta) dP(\theta), \quad (3.4)$$

où $\mathbb{1}_A$ est la fonction indicatrice de A . Si cette intégrale existe et est finie, X est alors dite P -intégrable sur A . On note $X \in L^1(\Theta, \Sigma, P)$ lorsque X est P -intégrable sur Θ . Un vecteur aléatoire \mathbf{X} est dit P -intégrable sur A si toutes ses composantes sont individuellement P -intégrables sur A .

Espérance

Dans le cas particulier où le domaine d'intégration est $A = \Theta$, l'intégrale (3.4) ci-dessus représente l'opérateur espérance que nous noterons $E[\cdot]$:

$$E[X] \equiv \int_{\Theta} X(\theta) dP(\theta). \quad (3.5)$$

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur l'espace de probabilité (Θ, Σ, P) et P -intégrables sur Θ . L'espérance admet les propriétés suivantes :

- linéarité : $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^2$,
- $X \geq 0$ (ce qui signifie $X(\theta) \geq 0$ *p.s.* en θ) $\implies E[X] \geq 0$,
- $Y \leq X \implies E[Y] \leq E[X]$,
- $|E[X]| \leq E[|X|]$.

Espace L^2

On note $L^2(\Theta, \Sigma, P)$ l'espace des variables aléatoires réelles X du second ordre définies sur (Θ, Σ, P) , c'est-à-dire telles que $E[|X|^2] < \infty$. Une propriété importante de $L^2(\Theta, \Sigma, P)$ (utilisée par la suite), est qu'il peut être équipé d'un produit scalaire grâce à l'opérateur d'espérance en posant, pour tout $X, Y \in L^2(\Theta, \Sigma, P)$, $(X, Y)_{L^2} := E[XY]$. La norme associée est notée $\|X\|_{L^2} = E[X^2]^{1/2}$.

3.1.2 Variables aléatoires réelles

Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle

Soient (Θ, Σ, P) un espace de probabilité et X une variable aléatoire réelle de distribution. La fonction de répartition, ou loi de distribution, de X , notée $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) := Q((-\infty, x]). \quad (3.6)$$

On a donc $F_X(x) = P(X \leq x)$. La fonction de répartition est croissante, à valeurs dans $[0, 1]$ et elle admet les propriétés suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0,$
- Pour tout $a \leq b, P(a < x \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \geq 0$ et $P(a \leq x < b) = F_X(b) - F_X(a) + P(x = a) - P(x = b) \geq 0.$

De plus, F_X admet un nombre dénombrable de discontinuités et est continue en x si pour tout $x \in \mathbb{R}, P(X = x) = 0.$

Fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle

On suppose par la suite que la fonction de répartition F_X est suffisamment régulière (au moins continue si bien que $P(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) pour pouvoir définir sa dérivée (au moins dans un sens faible que nous ne précisons pas). Cette dérivée est appelée fonction de densité de probabilité (pdf) et est notée f_X . En calculant l'intégrale de f_X sur un intervalle (a, b) , on obtient la probabilité de trouver X dans cet intervalle, soit

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x) dx, \quad \forall a \leq b. \quad (3.7)$$

La pdf admet les propriétés suivantes :

- $f_X(x) \geq 0,$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1.$

Pour un accroissement dx suffisamment petit, on a, à l'ordre 1,

$$P(X \in [x, x + dx]) \approx f_X(x) dx.$$

Moments d'une variable aléatoire

Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité (Θ, Σ, P) et g une fonction mesurable telle que $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Alors, $Y = g \circ X$ est une variable aléatoire réelle définie sur l'espace (Θ, Σ, P) dont l'espérance s'exprime en fonction de la fonction g et de la pdf de X :

$$E[Y] = \int_{\Theta} g(X(\theta)) dP(\theta) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx. \quad (3.8)$$

Considérons maintenant le cas particulier

$$Y = g(X) = X^r, \quad \forall r \geq 1. \quad (3.9)$$

Puisque g est continue, elle est mesurable dans la tribu borélienne et $Y = X^r$ est une

variable aléatoire réelle. L'espérance de Y est alors appelée le moment d'ordre r de X . Il est noté $m_r(X)$ et est donné par

$$m_r(X) = E[X^r] = \int_{\mathbb{R}} x^r dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x^r f_X(x) dx. \quad (3.10)$$

Le moment d'ordre r de X existe et est fini si $X \in L^r(\Theta, \Sigma, P)$. En prenant $r = 1$, on obtient le moment d'ordre 1 qui est l'espérance de X . La quantité $E[(X - m_1(X))^r]$, qui est l'espérance de la variable aléatoire $Y = (X - m_1(X))^r$, correspond au moment centré d'ordre r . Le moment centré d'ordre 2 correspond à la variance de X et est noté $V(X)$. On a donc $V(X) = E[(X - m_1(X))^2]$, et un résultat classique est

$$V(X) = E[X^2] - m_1(X)^2 = m_2(X) - m_1(X)^2. \quad (3.11)$$

3.1.3 Vecteurs aléatoires réels

Fonction de répartition jointe

Soit \mathbf{X} un vecteur aléatoire réel. La notion de fonction de répartition jointe de \mathbf{X} est l'extension au cas de plusieurs variables de la notion de fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Cette fonction est définie par

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P\left(\bigcap_{i=1}^N \{X_i \leq x_i\}\right), \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N. \quad (3.12)$$

La fonction de répartition jointe d'un vecteur aléatoire \mathbf{X} admet les propriétés suivantes :

- $\lim_{x_k \rightarrow -\infty} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 0$, $\forall k = 1, \dots, N$, les composantes de \mathbf{x} hormis la k -ième étant fixées.
- $x_k \mapsto F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ est croissante, $\forall k = 1, \dots, N$, les composantes de \mathbf{x} hormis la k -ième étant fixées.

On supposera pour la suite que la fonction $\mathbf{x} \mapsto F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ est continue sur \mathbb{R}^N .

Fonction de densité de probabilité jointe

La pdf jointe est, elle aussi, l'extension de la notion de pdf d'une variable aléatoire réelle. Cette fonction est définie par

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^N F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\partial x_1 \dots \partial x_N}. \quad (3.13)$$

La probabilité que le vecteur aléatoire prenne ses valeurs dans le pavé $[x_1, x_1 + dx_1] \times$

$\dots \times [x_N, x_N + dx_N]$, pour un vecteur d'accroissements $\mathbf{dx} = (dx_1, \dots, dx_N)$ est, à l'ordre 1,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^N \{X_i \in (x_i, x_i + dx_i]\}\right) \approx f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\mathbf{dx}, \quad (3.14)$$

où $\mathbf{dx} = dx_1 \dots dx_N$.

Marginalisation

Chaque sous-ensemble de composantes du vecteur aléatoire \mathbf{X} est caractérisé par ses fonctions de répartition ou de densité de probabilité marginales. Ces fonctions marginales peuvent être obtenues à partir des fonctions de répartition ou de densité de probabilité jointe en constatant que, pour tout $1 \leq k \leq N$, la fonction de répartition jointe du vecteur aléatoire $\mathbf{X}_{|k} = (X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_N)$ de \mathbb{R}^{N-1} est

$$F_{\mathbf{X}_{|k}}(\mathbf{x}_{|k}) = \lim_{x_k \rightarrow +\infty} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \quad (3.15)$$

où $\mathbf{x}_{|k} = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_N)$. On écrit par la suite $\mathbf{x} = (x_k, \mathbf{x}_{|k})$. La pdf marginale résulte d'une intégration par rapport à x_k ,

$$f_{\mathbf{X}_{|k}}(\mathbf{x}_{|k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(x_k, \mathbf{x}_{|k}) dx_k. \quad (3.16)$$

De manière analogue, pour tout $1 \leq i \leq N$, les composantes X_i ont pour fonction de répartition marginale

$$F_{X_i}(x_i) = F_{\mathbf{X}}(\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty), \quad (3.17)$$

et pour pdf marginale

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f_{\mathbf{X}}(x_i, \mathbf{x}_{|i}) d\mathbf{x}_{|i}, \quad (3.18)$$

où $d\mathbf{x}_{|i} = dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_N$.

Indépendance

De manière générale, soient I un ensemble d'indices et X_i , $i \in I$, une famille de variables aléatoires réelles définies sur l'espace de probabilité (Θ, Σ, P) . On dit que ces variables sont indépendantes si et seulement si

$$P(X_i \leq x_i, \forall i \in J) = \prod_{i \in J} P(X_i \leq x_i), \quad \forall J \subseteq I, \forall i \in J, \forall x_i \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Pour un ensemble fini d'indices $I = \{1, \dots, N\}$, la famille de variables aléatoires peut être considérée comme un vecteur aléatoire \mathbf{X} à valeurs dans \mathbb{R}^N . Dans ces conditions, l'hypothèse d'indépendance implique la factorisation de la fonction de répartition jointe

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N F_{X_i}(x_i), \quad (3.20)$$

et de la pdf jointe

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N f_{X_i}(x_i). \quad (3.21)$$

Moments d'un vecteur aléatoire

Les notions de moments d'ordre un et deux ont une extension naturelle aux vecteurs aléatoires. Le vecteur moyenne \mathbf{m} est tel que $\mathbf{m} = E[\mathbf{X}] = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ où on a posé $\mu_i = E[X_i]$ pour tout $1 \leq i \leq N$. La matrice de corrélation \mathbf{r} est définie telle que

$$\mathbf{r} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^t] \quad \text{si bien que} \quad r_{ij} = E[X_i X_j]. \quad (3.22)$$

La matrice de covariance \mathbf{c} est définie telle que

$$\mathbf{c} = E[(\mathbf{X}-\mathbf{m})(\mathbf{X}-\mathbf{m})^t], \quad \text{si bien que} \quad c_{ij} = E[(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)] = r_{ij} - \mu_i\mu_j. \quad (3.23)$$

Pour ces deux matrices, des termes nuls ont la signification suivante : si $c_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, alors X_i et X_j sont dits non corrélés ; si $r_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, X_i et X_j sont dits orthogonaux. De plus, si X_i et X_j sont indépendants, on a

$$c_{ij} = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = E[X_i - \mu_i]E[X_j - \mu_j] = 0. \quad (3.24)$$

Ainsi, des variables aléatoires indépendantes sont non corrélées ; cependant, des variables aléatoires non corrélées ne sont pas nécessairement indépendantes. En normalisant c_{ij} par les écarts type de X_i et X_j , notés $\sigma_i = \sqrt{V(X_i)}$ et $\sigma_j = \sqrt{V(X_j)}$, on obtient le coefficient de corrélation entre X_i et X_j donnée par

$$\rho_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}. \quad (3.25)$$

Par construction, on a $\rho_{ij} \in [-1, 1]$ et si $|\rho_{ij}| = 1$, alors il existe une relation linéaire entre les deux variables aléatoires X_i et X_j qui permet d'écrire $X_i = aX_j + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) avec $V(X_i) = a^2V(X_j)$.

3.2 Quantification des incertitudes sur les sorties du modèle

Dans cette thèse, nous considérons des incertitudes paramétriques liées aux données d'entrée X d'un modèle \mathcal{M} , et notre objectif est de quantifier l'impact de ces incertitudes sur les quantités de sortie Y . La relation entre les données d'entrée et les quantités de sortie est écrite sous la forme $Y = \mathcal{M}(X)$. Pour la suite, nous notons les quantités

déterministes par des minuscules et les quantités aléatoires par des majuscules. Par exemple, une réalisation déterministe du modèle est notée $y = \mathcal{M}(x)$. Pour simplifier, nous supposons que Y est à valeurs dans \mathbb{R} , l'extension au cas des valeurs dans \mathbb{R}^m étant immédiate.

3.2.1 Cadre mathématique

Afin de propager les incertitudes liées aux paramètres d'entrée d'un modèle, il nous faut d'abord paramétriser ces données d'entrée en définissant un cadre probabiliste.

On suppose que l'ensemble des paramètres d'entrée incertains peut être décrit par N variables aléatoires réelles X_i , $1 \leq i \leq N$. Pour tout $1 \leq i \leq N$, la variable aléatoire X_i est définie sur l'espace de probabilité $(\Theta_i, \Sigma_i, P_i)$. Les variables aléatoires sont supposées indépendantes et de pdf's connues f_{X_i} . On regroupe ces variables aléatoires dans le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$, défini sur l'espace de probabilité produit (Θ, Σ, P) tel que $\Theta = \Theta_1 \times \dots \times \Theta_N$, $\Sigma = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_N$ et $P = P_1 \times \dots \times P_N$.

Comme les X_i sont supposées indépendantes, la pdf jointe du vecteur aléatoire \mathbf{X} se factorise sous la forme

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N f_{X_i}(x_i). \quad (3.26)$$

Les fonctions f_{X_i} étant supposées connues, la fonction $f_{\mathbf{X}}$ est une donnée du problème.

Soit Y une sortie du modèle. On suppose que le modèle \mathcal{M} est une fonction mesurable $\mathcal{M} : (\Theta, \Sigma, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, si bien que

$$Y(\theta) = \mathcal{M}(\mathbf{X}(\theta)), \quad \text{p.s. en } \theta. \quad (3.27)$$

L'équation (3.27) montre que la sortie Y est une variable aléatoire dépendante de \mathbf{X} . Par abus de notation, on notera $Y(\theta) = Y(\mathbf{X}(\theta))$ ou plus simplement $Y(\mathbf{X})$, c'est à dire que Y est vue comme une fonctionnelle de \mathbf{X} . Plutôt que de travailler dans l'espace abstrait (Θ, Σ, P) , on préfère travailler dans l'espace image $(\Xi, \mathcal{B}^N, f_{\mathbf{X}} dx)$ où $\Xi = \prod_{1 \leq i \leq N} \Xi_i \subset \mathbb{R}^N$ est le codomaine de \mathbf{X} (l'ensemble des valeurs prises par \mathbf{X}), Ξ_i étant le codomaine de X_i . On note $L^2(\Xi, \mathcal{B}^N, f_{\mathbf{X}} dx)$ l'espace des variables aléatoires Y du second ordre muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Xi, \mathcal{B}^N, f_{\mathbf{X}} dx)}$, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour simplifier l'écriture et défini par

$$\langle Y, Y' \rangle = \int_{\Xi} Y(x) Y'(x) f_{\mathbf{X}}(x) dx, \quad \forall Y, Y' \in L^2(\Xi, \mathcal{B}^N, f_{\mathbf{X}} dx). \quad (3.28)$$

Il est alors possible d'exprimer l'espérance et la variance de Y dans l'espace image sous la forme

$$E[Y] = E[Y(\mathbf{X})] = \int_{\Theta} Y(\mathbf{X}(\theta)) dP(\theta) = \int_{\Xi} Y(x) f_{\mathbf{X}}(x) dx, \quad (3.29)$$

et

$$V(Y) = E[(Y - E[Y])^2] = \int_{\Theta} (Y(\mathbf{X}(\theta)) - E[Y])^2 dP(\theta) = \int_{\Xi} (Y(x) - E[Y])^2 f_{\mathbf{X}}(x) dx. \quad (3.30)$$

3.2.2 Caractérisation de la variabilité

Fonction de densité de probabilité

La pdf de la variable aléatoire de sortie Y est telle que la probabilité que Y soit dans l'intervalle réel $[a, b]$ est donnée par

$$P(a \leq Y \leq b) = \int_a^b f_Y(y) dy = \int_{\Xi} \mathbb{1}_{[a,b]}(Y(x)) f_{\mathbf{X}}(x) dx. \quad (3.31)$$

On suppose ici que la fonction de répartition Y est continue, si bien que $P(Y = y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Corrélation

Quand plusieurs variables de sortie sont considérées, il est intéressant d'étudier les corrélations entre ces variables. D'après (3.50), la covariance de deux variables aléatoires Y et Y' est donnée par

$$\text{cov}(Y, Y') = E[(Y - E[Y])(Y' - E[Y'])]. \quad (3.32)$$

Le coefficient de corrélation des deux variables aléatoires, $\rho(Y, Y')$, est obtenu d'après (3.25) en normalisant la covariance par les écarts type de Y et de Y' , notés $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$ et $\sigma(Y') = \sqrt{V(Y')}$, ce qui donne

$$\rho(Y, Y') = \frac{\text{cov}(Y, Y')}{\sigma(Y)\sigma(Y')}. \quad (3.33)$$

On vérifie finalement que $\rho(Y, Y') \in [-1, 1]$.

Quantiles

Soit Y une variable aléatoire réelle et soit $\alpha \in]0; 100[$. On définit le α -ième quantile Q_{α} comme étant la valeur telle que la probabilité pour qu'on ait $Y \leq Q_{\alpha}$ soit égale à α (en pourcentage). On a alors

$$P(Y \leq Q_{\alpha}) = \alpha \quad (\text{en pourcentage}). \quad (3.34)$$

Les quantiles, pour des valeurs de α bien choisies, fournissent des indications fort utiles sur la distribution de la variable aléatoire Y .

3.2.3 Analyse de la variance (ANOVA) et indices de sensibilité

Comme annoncé au Chapitre 1, afin de mieux comprendre le comportement d'un modèle par rapport à ses données d'entrée, il est possible de réaliser une Analyse de Sensibilité (AS) permettant d'étudier comment réagit la sortie du modèle lors de perturbations sur ses paramètres d'entrée. L'AS vise à quantifier l'importance de chaque paramètre d'entrée, identifiant ainsi les paramètres clé en établissant leur hiérarchisation. Deux grandes classes d'AS existent. L'AS locale, bien que très classique et souvent utilisée pour les applications hydrologiques, ne permet pas de considérer les interactions paramétriques et s'intéresse aux valeurs des réponses lorsque les paramètres varient un à un. L'AS globale étudie la variabilité de la réponse du modèle par rapport à la variation de tous les paramètres simultanément et permet de considérer la densité de probabilité imposée à chaque variable d'entrée. Nous rappelons qu'ici les variables d'entrée sont supposées indépendantes.

Dans cette thèse, nous nous intéressons donc aux méthodes d'AS globale qui sont basées sur l'étude de la variance appelée ANOVA (ANalysis Of VAriance). L'ANOVA de la sortie $Y(\mathbf{X})$ permet de caractériser l'influence des composantes de \mathbf{X} , ou des groupes de composantes sur la variabilité de la sortie Y . Elle repose sur la décomposition de Sobol–Hoeffding [136] de Y .

Décomposition de Sobol–Hoeffding

Soit $Y(\mathbf{X}) \in L^2(\Xi, \mathcal{B}^N, f_{\mathbf{X}} d\mathbf{x})$ où $f_{\mathbf{X}}$ présente une structure produit, c'est-à-dire que \mathbf{X} est un vecteur aléatoire de composantes indépendantes. Y admet alors une unique décomposition hiérarchique orthogonale de la forme

$$Y(\mathbf{X}) = Y_0 + \sum_{i=1}^N Y_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} Y_{ij}(X_i, X_j) + \dots + Y_{12\dots N}(X_1, \dots, X_N), \quad (3.35)$$

où Y_0 est une constante.

On introduit la notation ensembliste suivante. Pour un ensemble d'indices $\mathbf{i} \subseteq \{1, \dots, N\}$, on pose $\sim \mathbf{i} = \{1, \dots, N\} \setminus \mathbf{i}$. Les composantes de \mathbf{X} sont regroupées sous la forme $(\mathbf{X}_{\mathbf{i}}, \mathbf{X}_{\sim \mathbf{i}})$ avec la décomposition hiérarchique de Y se ré-écrit alors sous une forme plus compacte

$$Y(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{i} \subseteq \{1, \dots, N\}} Y_{\mathbf{i}}(\mathbf{X}_{\mathbf{i}}). \quad (3.36)$$

Par convention, Y_{\emptyset} est une constante notée Y_0 . Les intégrales des fonctions de la décomposition de Sobol–Hoeffding vérifient

$$\int_{\Xi_l} Y_{\mathbf{i}}(\mathbf{X}_{\mathbf{i}}) f_{X_l}(x_l) dx_l = 0, \quad \forall \mathbf{i} \subseteq \{1, \dots, N\}, \forall l \in \mathbf{i}, \quad (3.37)$$

$$\int_{\Xi} Y_{\mathbf{i}}(\mathbf{X}_{\mathbf{i}}) Y_{\mathbf{j}}(\mathbf{X}_{\mathbf{j}}) f_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{i}, \mathbf{j} \subseteq \{1, \dots, N\} \text{ et } \mathbf{i} \neq \mathbf{j}. \quad (3.38)$$

Ainsi, les fonctions de la décomposition $Y_{\mathbf{i}}$ sont orthogonales et Y_0 est la valeur moyenne

de la variable aléatoire Y ,

$$Y_0 = \int_{\Xi} Y(\mathbf{X}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.39)$$

Il est possible d'interpréter les fonctions Y_i en termes d'espérance conditionnelle. On note

$$E[Y|\mathbf{X}_i] = \int Y(\mathbf{X}) f_{\mathbf{X}_{\sim i}}(\mathbf{x}_{\sim i}) d\mathbf{x}_{\sim i}, \quad (3.40)$$

où $f_{\mathbf{X}_{\sim i}}(y) = \prod_{l \notin i} f_{X_l}(y_l)$. L'espérance conditionnelle $E[Y|\mathbf{X}_i]$ correspond donc à la marginalisation de $Y(\mathbf{X})$ vis à vis de ses composantes $\mathbf{X}_{\sim i}$. On a alors les expressions suivantes pour les différentes fonctions Y_i :

$$Y_\emptyset = E[Y|X_\emptyset] = E[Y], \quad (3.41)$$

$$Y_{\{j\}} = E[Y|X_{\{j\}}] - E[Y], \quad \forall 1 \leq j \leq N, \quad (3.42)$$

$$Y_i = E[Y|\mathbf{X}_i] - \sum_{j \subseteq i} Y_j, \quad \forall \mathbf{i} \subseteq \{1, \dots, N\} \text{ avec } \text{card}(\mathbf{i}) \geq 2. \quad (3.43)$$

En utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions de la décomposition de Sobol-Hoeffding, on peut exprimer la variance totale $V(Y)$ comme suit

$$V(Y) = \sum_{\substack{\mathbf{i} \subseteq \{1, \dots, N\} \\ \mathbf{i} \neq \emptyset}} V_i, \quad V_i = E[Y_i^2]. \quad (3.44)$$

V_i mesure ainsi la part de la variance de Y due aux interactions entre les entrées X_j , $j \in \mathbf{i}$, ce qui n'est pas pris en compte dans l'AS locale. On définit alors les indices de sensibilité globaux pour exprimer la sensibilité de $Y(\mathbf{X})$ aux composantes \mathbf{X}_j de \mathbf{X} et hiérarchiser leur influence. Ils sont définis comme suit :

$$S_i = \frac{V_i}{V(Y)}, \quad (3.45)$$

et sont donc tels que

$$\sum_{\mathbf{i} \subseteq \{1, \dots, N\} \setminus \emptyset} S_i = 1. \quad (3.46)$$

Pour tout $\mathbf{i} \subseteq \{1, \dots, N\}$ avec $\text{card}(\mathbf{i}) = n$ où $1 \leq n \leq N$, on dit que S_i est un indice de sensibilité d'ordre n . Pour le cas de N paramètres d'entrée, il y a au total $2^N - 1$ indices de sensibilité d'ordre 1 à N , si bien que l'analyse devient particulièrement riche quand N augmente. Dans cette thèse, nous utiliserons uniquement les indices de sensibilité du premier ordre $S_{\{i\}}$, pour tout $1 \leq i \leq N$, notés par la suite S_i pour alléger l'écriture, et les indices de sensibilité totaux que nous allons maintenant définir.

Pour tout $1 \leq i \leq N$, l'indice de sensibilité total T_i (Homma et Saltelli [67]) quantifie, comme son nom l'indique, l'influence totale de l'entrée X_i , au sens où il mesure la fraction de la variance qui est due non seulement à X_i seule (c'est-à-dire l'indice du premier ordre S_i) mais aussi à toutes ses interactions avec les autres entrées.

Cet indice est défini par

$$T_i = \sum_{i \ni \{i\}} S_i. \quad (3.47)$$

Observons que $\sum_{i=1}^N T_i \geq 1$.

En se basant sur la définition (3.47), l'évaluation des N indices totaux implique le calcul de tous les indices de sensibilité, ce qui est peu pratique. Cependant, il est possible d'exprimer T_i plus simplement à partir des variances conditionnelles et ainsi l'estimer sans calcul d'indices d'ordre supérieur à un. On a en effet

$$\begin{aligned} T_i &= \sum_{i \ni \{i\}} S_i = 1 - \sum_{i \subseteq \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}} S_i = 1 - \frac{1}{V(Y)} \sum_{i \subseteq \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}} V_i \\ &= 1 - \frac{E[E[Y|X_{\sim i}]^2] - E[Y]^2}{V(Y)}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Cette dernière expression est utilisée dans la section 3.3 pour estimer les indices de sensibilité totaux par la méthode de Monte Carlo.

Les principales conclusions que nous pouvons obtenir *via* l'estimation des indices de sensibilité du premier ordre et totaux sont les suivantes. D'une part, une valeur petite (resp. élevée) d'un indice de sensibilité du premier ordre S_i signifie que l'entrée X_i influence peu (resp. fortement) la variable de sortie Y individuellement. D'autre part, le rapport S_i/T_i permet de quantifier l'influence des interactions paramétriques associées à X_i . En effet, un rapport proche de 1, $S_i/T_i \approx 1$, indique que les interactions paramétriques ne sont pas significatives. À l'inverse, un rapport très petit devant 1, $S_i/T_i \ll 1$, témoigne de l'importance des interactions paramétriques dans la sensibilité du modèle par rapport au paramètre d'entrée X_i . Ainsi, l'influence de X_i sera négligeable (devant celle des autres paramètres) uniquement si T_i est très petit devant 1, mais pas nécessairement si S_i est très petit devant 1.

3.3 Méthodes numériques

3.3.1 Propagation des incertitudes par Monte Carlo

Dans cette thèse, nous utilisons la méthode de Monte Carlo afin de propager les incertitudes paramétriques. La méthode de Monte Carlo est fréquemment utilisée, surtout dans les applications hydrologiques. Elle présente l'avantage d'être simple à implémenter puisqu'elle ne demande pas de modifications du code de calcul déterministe. Elle requiert par contre de nombreuses exécutions du code déterministe. Un point négatif est donc qu'elle reste assez coûteuse en temps de calcul. En effet, le taux de convergence de la méthode, typiquement $\mathcal{O}(1/\sqrt{M})$ pour estimer l'espérance, ne dépend pas de la dimension paramétrique mais est relativement lent comparé à d'autres méthodes sur lesquelles nous reviendrons à la section 3.3.2.

Le principe de la méthode Monte Carlo consiste à se servir du modèle comme d'une boîte noire. On génère un ensemble de M réalisations d'un événement aléatoire θ , par la loi de probabilité choisie, afin d'obtenir un ensemble de M réalisations des données d'entrée incertaines $\{\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(M)}\}$. On obtient alors le M -échantillon $\{Y^{(1)}, \dots, Y^{(M)}\}$ correspondant aux sorties du modèle déterministe telles que

$$Y^{(j)} := Y(\mathbf{X}^{(j)}) = \mathcal{M}(\mathbf{X}^{(j)}), \quad \forall j \in \{1, \dots, M\}. \quad (3.49)$$

Ensuite, une fois obtenu cet M -échantillon de sorties du modèle, il est possible d'estimer les différentes valeurs statistiques définies précédemment. Les méthodes utilisées pour ces estimations sont décrites dans la suite de cette sous-section. On utilisera la notation \widehat{Q} pour indiquer l'estimateur empirique (basé sur le M -échantillon) de la quantité Q .

Estimation des premiers moments

Soit une variable aléatoire Y admettant un moment du second ordre fini. D'après les équations (3.29)-(3.30), il est possible d'estimer l'espérance et la variance de Y par les expressions suivantes :

$$\widehat{E[Y]} := \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M Y^{(j)}, \quad (3.50)$$

$$\widehat{V(Y)} := \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left(Y^{(j)^2} - \widehat{E[Y]}^2 \right). \quad (3.51)$$

Corrélation

La covariance et le coefficient de corrélation de deux variables aléatoires Y et Y' sont estimés comme suit :

$$\widehat{cov(Y, Y')} := \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left(Y^{(j)} - \widehat{E[Y]} \right) \left(Y'^{(j)} - \widehat{E[Y']} \right), \quad (3.52)$$

$$\widehat{\rho(Y, Y')} := \frac{\widehat{cov(Y, Y')}}{\sqrt{\widehat{V(Y)} \widehat{V(Y')}}}. \quad (3.53)$$

Quantiles

Les quantiles d'une variable aléatoire Y peuvent être estimés à partir d'un échantillon Monte Carlo de taille suffisamment élevée, à partir de la fonction de répartition

empirique de Y . La fonction quantile qui à $\alpha \in]0, 100[$ associe Q_α s'estime comme suit :

$$\widehat{Q}_\alpha = \inf \left\{ Y^{(j)} \text{ tel que } \text{card}\{Y^{(k)} \leq Y^{(j)}\} \geq \alpha M/100 \right\}. \quad (3.54)$$

En pratique, le calcul des quantiles est relativement simple : il consiste à trier l'échantillon des variables Y de sortie par ordre croissant pour obtenir les statistiques d'ordre et donc les différents quantiles simultanément. Ces quantiles permettent d'obtenir une visualisation de la distribution de Y . Par exemple, \widehat{Q}_{50} représente la médiane, valeur centrale de l'échantillon : il y a autant de valeurs qui lui sont supérieures que de valeurs qui lui sont inférieures. Pour des distributions symétriques, la valeur de la médiane est égale à celle de la moyenne. Comme la médiane représente mieux l'échantillon que la moyenne, elle est souvent utilisée pour des distributions asymétriques. La médiane présente aussi l'avantage d'être plus robuste que la moyenne pour des échantillons présentant des valeurs extrêmes.

On peut aussi représenter la distribution de manière compacte en mettant en évidence les valeurs de différents niveaux de quantiles grâce aux boxplots, aussi appelés en français boîtes à moustaches ou diagrammes en boîtes. Cette représentation a l'allure d'une boîte, ses extrémités représentant la valeur des quartiles (\widehat{Q}_{25} et \widehat{Q}_{75}) et se prolongeant par des segments (moustaches) de longueurs déterminées par exemple par les premier et neuvième déciles (\widehat{Q}_{10} et \widehat{Q}_{90}) ou par des valeurs extrêmes, comme illustré à la figure 3.1.

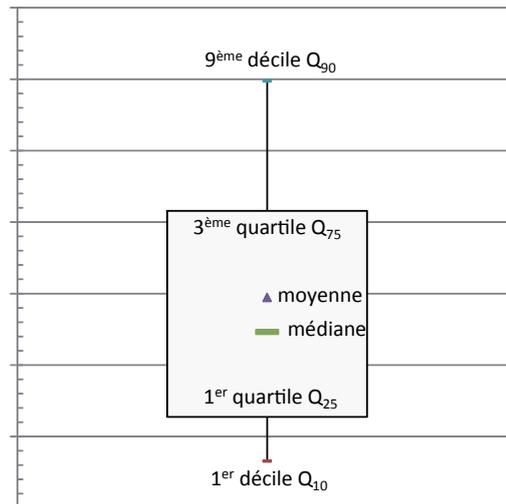


FIGURE 3.1 – Exemple de représentation sous forme de boîte à moustaches, aussi appelée boxplot.

Fonction de densité de probabilité

Afin d'analyser la distribution de Y , il est possible d'estimer sa pdf. Ici, nous utilisons la méthode d'estimation par noyau, aussi appelée méthode de Parzen–Rozenblatt, qui est une généralisation de la méthode par histogramme (Bowman et Azzalini [20]). Le principe de cette dernière est le suivant : on approche en un point y la pdf de Y par la proportion d'observations se trouvant à proximité du point y en regardant le nombre d'observations appartenant à une boîte de largeur η centrée en y . Cette méthode dépend alors du paramètre de lissage η et présente l'inconvénient de ne pas conduire à une pdf continue. Afin d'obtenir la continuité de la pdf, on généralise cette méthode en remplaçant les boîtes centrées en chaque point y et de largeur η par des courbes centrées en y de forme dépendant d'un noyau choisi *a priori*, par exemple des courbes en cloche pour un noyau Gaussien.

La pdf de Y est alors estimée comme suit :

$$\hat{f}_{Y_\eta}(y) := \frac{1}{M\eta} \sum_{j=1}^M G\left(\frac{y - Y^{(j)}}{\eta}\right), \quad (3.55)$$

où G est une pdf spécifique, utilisée comme noyau et η est un paramètre de lissage. Le noyau le plus couramment utilisé est la fonction Gaussienne $G(z) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}z^2)$. Nous optons pour ce choix dans cette thèse.

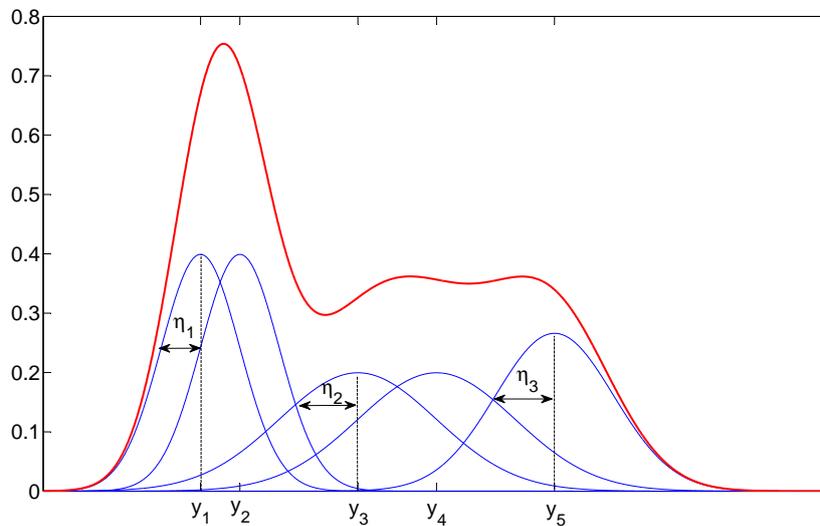


FIGURE 3.2 – Exemple d'estimation d'une fonction de densité de probabilité à partir des points $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$, d'un noyau gaussien et d'une fenêtre de lissage variable (η_1, η_2, η_3) .

La pdf au point y est donc estimée par le nombre d'observations proches de y et contrebalancée par la distance entre y et ces observations. La fonction de distribution du noyau alloue un poids plus important aux observations proches du point y et un poids plus faible aux observations distantes. Le paramètre η fixe la largeur de la fonction

noyau et contrôle donc le lissage de la pdf estimée \widehat{f}_{Y_η} . Plus ce paramètre est petit, plus l'estimation de la pdf est précise ; cependant, de trop faibles valeurs de η peuvent générer des artefacts si l'échantillon n'est pas suffisamment grand.

Estimations des indices de sensibilité

Nous estimons ici les indices de sensibilité au moyen de la méthode d'échantillonnage de Monte Carlo. Nous nous intéressons aux indices de sensibilité de Sobol du premier ordre et totaux. Il faut alors estimer les quantités V_i et $V_{\sim i}$ telles que

$$S_i = \frac{V_i}{V(Y)} = \frac{E[E[Y|X_i]^2] - E[Y]^2}{V(Y)}, \quad (3.56)$$

$$T_i = 1 - \frac{V_{\sim i}}{V(Y)} = 1 - \frac{E[E[Y|\mathbf{X}_{\sim i}]^2] - E[Y]^2}{V(Y)}. \quad (3.57)$$

Précédemment, nous avons estimé l'espérance de Y par $\widehat{E[Y]}$ définie par (3.50), et sa variance par $\widehat{V(Y)}$ définie par (3.51). Il reste maintenant à déterminer les variances des espérances conditionnelles de Y sachant les valeurs de X_i et $\mathbf{X}_{\sim i}$ (resp. $E[E[Y|X_i]^2]$ et $E[E[Y|\mathbf{X}_{\sim i}]^2]$). Afin de réduire les coûts de calcul pour ces évaluations, Sobol [136] propose d'estimer ces espérances conditionnelles comme des espérances classiques, le conditionnement au paramètre X_i étant obtenu en faisant varier toutes les variables d'entrée excepté le paramètre X_i . Ainsi, ces espérances conditionnelles sont calculées en utilisant uniquement deux échantillons indépendants de variables d'entrée de dimension M , $\{X^{(1)}, \dots, X^{(M)}\}$ et $\{X^{*(1)}, \dots, X^{*(M)}\}$ selon les formules

$$\widehat{V}_i := \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M Y(\mathbf{X}^{(m)}) \times Y(X_i^{(m)}, \mathbf{X}_{\sim i}^{*(m)}) - \widehat{E[Y]}^2, \quad (3.58)$$

$$\widehat{V}_{\sim i} := \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M Y(\mathbf{X}^{(m)}) \times Y(X_i^{*(m)}, \mathbf{X}_{\sim i}^{(m)}) - \widehat{E[Y]}^2. \quad (3.59)$$

Finalement, les indices de sensibilité du premier ordre S_i et les indices de sensibilité totaux T_i sont estimés par les formules

$$\widehat{S}_i := \frac{\widehat{V}_i}{\widehat{V(Y)}}, \quad \widehat{T}_i := 1 - \frac{\widehat{V}_{\sim i}}{\widehat{V(Y)}}. \quad (3.60)$$

En pratique, la procédure pour le calcul des N indices S_i et des N indices T_i requiert deux échantillons de paramètres d'entrée, chacun de dimension M , et $M \times (2N + 1)$ évaluations du modèle déterministe pour l'estimation des indices du premier ordre et totaux. Cette méthode, bien qu'efficace, devient rapidement coûteuse lorsque l'on augmente significativement le nombre de paramètres d'entrée N et nécessite d'avoir des temps de simulation suffisamment courts pour la résolution du modèle déterministe.

3.3.2 Méthode des Polynômes de Chaos

Une autre possibilité pour l'obtention des différents indices de sensibilité de Sobol est le développement en Polynômes de Chaos (PC) des sorties du modèle, qui permet de déduire directement les valeurs des indices de sensibilité. Cette approche permet également l'estimation des autres quantités statistiques considérées ci-dessus (moments, quantiles, pdf, ...).

Le développement PC est une méthode probabiliste qui consiste à projeter les sorties du modèle sur une base de polynômes orthogonaux en les paramètres d'entrée. Ce développement est basé sur la théorie du Chaos Homogène introduit par Wiener [155] et sur les travaux de Cameron et Martin [24]. Il permet d'approcher toute variable aléatoire du second ordre par une série de polynômes en les variables d'entrée \mathbf{X} . Le développement en série s'écrit sous la forme générique

$$Y(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \Phi_{\alpha}(\mathbf{X}(\theta)), \quad (3.61)$$

où les Φ_{α} sont des polynômes en les variables aléatoires et les y_{α} sont appelés les coefficients déterministes du développement spectral de Y , ou encore appelés modes stochastiques.

Nous ne rentrons pas dans les détails de cette méthode mais présentons brièvement les différentes étapes nécessaires à l'obtention des indices de Sobol.

Développement PC

Soit $\{X_i\}_{i=1}^N$ un ensemble de N variables Gaussiennes centrées, normalisées, mutuellement orthogonales, définies sur l'espace de probabilité \mathcal{P} et de densité de probabilité jointe $f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N f_{X_i}(x_i)$. Soit $\widehat{\Gamma}_{N_o}$ l'espace de tous les polynômes en $\{X_i\}_{i=1}^N$ de degré total au plus égal à $N_o > 0$ et pour $N_o \geq 1$, soient $\widetilde{\Gamma}_{N_o}$ le supplémentaire orthogonal de $\widehat{\Gamma}_{N_o-1}$ dans $\widehat{\Gamma}_{N_o}$ et \mathcal{B}_{N_o} une base orthogonale de $\widetilde{\Gamma}_{N_o}$. On a alors

$$\widehat{\Gamma}_{N_o} = \widehat{\Gamma}_{N_o-1} \oplus \widetilde{\Gamma}_{N_o}, \quad L^2(\Xi, \mathcal{B}^N, f_{\mathbf{X}} d\mathbf{x}) = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} \widetilde{\Gamma}_i, \quad (3.62)$$

en posant conventionnellement $\widetilde{\Gamma}_0 = \widehat{\Gamma}_0$. Le sous-espace $\widetilde{\Gamma}_{N_o}$ de $L^2(\Xi, \mathcal{B}^N, f_{\mathbf{X}} d\mathbf{x})$ est alors appelé le N_o -ième Chaos Homogène de dimension N et Γ_{N_o} le Chaos Polynomial d'ordre N_o (et de dimension N). Le sous-espace $\widetilde{\Gamma}_{N_o}$ est composé de tous les polynômes d'ordre égal à N_o , faisant intervenir toutes les combinaisons possibles des variables aléatoires $\{X_i\}_{i=1}^N$.

Chaque variable aléatoire du second ordre $Y \in L^2(\Xi, \mathcal{B}^N, f_{\mathbf{X}} d\mathbf{x})$ admet la représen-

tation suivante en fonction des polynômes de chaos (Cameron et Martin [24]) :

$$\begin{aligned}
Y(\mathbf{X}) &= y_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^N y_{i_1} \Gamma_1(X_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^{i_1} y_{i_1 i_2} \Gamma_2(X_{i_1}, X_{i_2}) \\
&+ \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} y_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}) \\
&+ \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \sum_{i_4=1}^{i_3} y_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Gamma_4(X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}, X_{i_4}) + \dots
\end{aligned} \tag{3.63}$$

où Γ_{N_o} est un polynôme de la base \mathcal{B}_{N_o} .

Afin d'obtenir une expression plus compacte du développement en PC, on définit une relation univoque entre les fonctionnelles $\Gamma(\cdot)$ et de nouvelles fonctionnelles $\Phi(\cdot)$ telle que

$$Y(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha} y_{\alpha} \Phi_{\alpha}(\mathbf{X}), \tag{3.64}$$

où les y_{α} sont appelés les modes stochastiques et les Φ_{α} sont ordonnés par ordre polynomial croissant. Les polynômes Φ_{α} sont orthogonaux pour la mesure $f_{\mathbf{X}} d\mathbf{x}$:

$$\langle \Phi_{\alpha}, \Phi_{\alpha'} \rangle_{L^2(\Xi, \mathcal{B}^N, f_{\mathbf{X}} d\mathbf{x})} \equiv \int_{\Xi} \Phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \Phi_{\alpha'}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{\alpha\alpha'} \langle \Phi_{\alpha}, \Phi_{\alpha} \rangle_{L^2(\Xi, \mathcal{B}^N, f_{\mathbf{X}} d\mathbf{x})} \tag{3.65}$$

La décomposition en polynômes de chaos s'étend au cas général de variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_N indépendantes suivant des pdf's connues. Afin de construire les polynômes de chaos N -dimensionnels homogènes engendrant le sous-espace $\tilde{\Gamma}_{N_o}$, la procédure consiste à tensoriser partiellement des polynômes unidimensionnels. Pour chaque $1 \leq i \leq N$, les polynômes en X_i sont construits de sorte à être orthogonaux pour la pdf de X_i . On obtient alors une famille de polynômes, définis par le choix de la distribution imposée aux variables aléatoires $\{X_i\}_{i=1}^N$ et orthogonaux pour la pdf $f_{\mathbf{X}}$. Dans cette thèse, nous nous intéressons seulement à des distributions Gaussiennes ou uniformes. Les familles de polynômes associées sont respectivement la famille des polynômes de Hermite $\{H_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ et la famille des polynômes de Legendre $\{L_l\}_{l \in \mathbb{N}}$. Soit α un multi-indice tel que

$$\alpha \in \mathbb{N}^N, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i. \tag{3.66}$$

Les polynômes de Chaos $\Phi_{\alpha}(X)$ sont orthogonaux pour la pdf $f_{\mathbf{X}}$ et ont pour expression générique

$$\forall \alpha, \quad \Phi_{\alpha}(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^N \Phi_{\alpha_i}^{(i)}(X_i), \tag{3.67}$$

où $\{\Phi_{l \in \mathbb{N}}^{(i)}\}$ est la famille de polynômes orthogonaux pour la pdf de X_i (polynômes de

Hermite ou de Legendre), $\Phi_l^{(i)}$ étant le polynôme de degré l . On a donc

$$\int_{\Xi_i} \Phi_j^{(i)} \Phi_k^{(i)} f_{X_i}(x_i) dx_i = \delta_{kj} \int_{\Xi_i} (\Phi_j^{(i)})^2 f_{X_i}(x_i) dx_i, \quad (3.68)$$

où Ξ_i est le codomaine de X_i .

Le développement tronqué à l'ordre N_o de Y , noté Y^P , est donné par

$$Y(\mathbf{X}) \approx Y^P(\mathbf{X}) = \sum_{|\alpha| \leq N_o} y_\alpha \Phi_\alpha(\mathbf{X}). \quad (3.69)$$

On cherche donc une approximation de Y sur l'espace \mathcal{S}^P tel que

$$\mathcal{S}^P = \text{span} \{ \Phi_\alpha, |\alpha| \leq N_o \} \subset L^2(\Xi, \mathcal{B}^N, f_{\mathbf{X}} d\mathbf{x}), \quad (3.70)$$

où P est la dimension de \mathcal{S}^P qui est donnée par

$$\dim(\mathcal{S}^P) = P = \frac{(N + N_o)!}{N! N_o!}. \quad (3.71)$$

Les coefficients y_α de l'approximation définissent le projeté de Y dans \mathcal{S}^P . Par orthogonalité de la base de \mathcal{S}^P , ils ont pour expression

$$y_\alpha = \frac{\langle Y, \Phi_\alpha \rangle}{\langle \Phi_\alpha, \Phi_\alpha \rangle}. \quad (3.72)$$

Les facteurs de normalisation $\langle \Phi_\alpha, \Phi_\alpha \rangle$ sont connus analytiquement. Dans la pratique, $Y(\mathbf{X})$ n'est pas explicitement connue si bien que l'intégrale

$$\langle Y, \Phi_\alpha \rangle = \int_{\Xi} Y(\mathbf{x}) \Phi_\alpha(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.73)$$

doit être approchée.

Dans cette thèse, plutôt que de procéder par évaluation numérique des intégrales définissant les modes stochastiques y_α , on suivra une approche par régression qui est mieux adaptée aux échantillonnages par Monte Carlo. Cette approche est maintenant présentée avant de revenir sur l'estimation des indices de sensibilité.

Méthode des moindres carrés

La détermination des modes stochastiques du développement PC peut être vue comme un problème de minimisation au sens des moindres carrés. De manière générale, l'estimation par moindres carrés est une méthode assez populaire qui consiste à déterminer les paramètres d'un modèle à partir d'un jeu de mesures ou d'observations. L'ensemble des observations est ici défini par les couples $\{(\mathbf{X}^{(j)}, Y^{(j)})\}_{j \in \{1, \dots, M\}}$, où $Y^{(j)} := \mathcal{M}(\mathbf{X}^{(j)})$ est une observation de la sortie du modèle. Dans cet esprit, on peut approcher les modes stochastiques $\mathbf{Y}^P = \{y_\alpha\}_{|\alpha| \leq N_o}$ par la solution du problème de

minimisation de la somme des carrés des résidus

$$R^2(\mathbf{Y}^P) \equiv \sum_{j=1}^M \left(Y^{(j)} - \sum_{|\alpha| \leq N_o} y_\alpha \Phi_\alpha(\mathbf{X}^{(j)}) \right)^2. \quad (3.74)$$

Le minimum est obtenu en résolvant le système de dimension P suivant :

$$(Z^t Z) \mathbf{Y}^P = Z^t \mathbf{Y}, \quad (3.75)$$

où \mathbf{Y} est le vecteur d'observations $\{Y^{(i)}\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$ et la matrice rectangulaire Z a pour entrées

$$Z_{i\alpha} = \phi_\alpha(X^{(i)}), \quad |\alpha| \leq N_o, \quad i \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.76)$$

Estimation des indices de sensibilité

Connaissant l'approximation Y^P de Y , l'approximation de la décomposition de Sobol–Hoeffding (3.36) est immédiate. En effet, on a

$$Y_i(\mathbf{X}_i) \approx Y_i^P(\mathbf{X}_i) = \sum_{\alpha \in K_i} y_\alpha \Phi_\alpha(\mathbf{X}), \quad \forall \mathbf{i} \subseteq \{1, \dots, N\}, \quad (3.77)$$

avec

$$K_i := \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq N_o, \alpha_l \geq 1 \text{ si } l \in \mathbf{i} \text{ et } \alpha_l = 0 \text{ si } l \notin \mathbf{i} \right\}. \quad (3.78)$$

De même, on a pour la variance conditionnelle

$$V_i^P = \sum_{\alpha \in K_i} (y_\alpha)^2 \langle \Phi_\alpha, \Phi_\alpha \rangle, \quad (3.79)$$

et la variance

$$V(Y) \approx V^P = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq N_o} (y_\alpha)^2 \langle \Phi_\alpha, \Phi_\alpha \rangle. \quad (3.80)$$

On obtient alors l'estimation des indices de sensibilité du premier ordre selon

$$S_i^P = \frac{\sum_{\alpha \in K_i} (y_\alpha)^2 \langle \Phi_\alpha, \Phi_\alpha \rangle}{\sum_{1 \leq |\alpha| \leq N_o} (y_\alpha)^2 \langle \Phi_\alpha, \Phi_\alpha \rangle}, \quad (3.81)$$

où

$$K_i := \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq N_o, \alpha_i \geq 1 \text{ et } \alpha_l = 0 \text{ si } l \neq i \right\}, \quad (3.82)$$

et l'estimation des indices de sensibilité totaux

$$T_i^P = \frac{\sum_{\alpha \in K_{T_i}} (y_\alpha)^2 \langle \Phi_\alpha, \Phi_\alpha \rangle}{\sum_{1 \leq |\alpha| \leq N_o} (y_\alpha)^2 \langle \Phi_\alpha, \Phi_\alpha \rangle}, \quad (3.83)$$

où

$$K_{T_i} := \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^N, 1 \leq |\alpha| \leq N_o, \alpha_i \geq 1 \right\}. \quad (3.84)$$

Propagation des incertitudes dans le modèle d'infiltration

Sommaire

4.1 Motivations et modèle stochastique	66
4.1.1 Motivations du choix du paramètre incertain	66
4.1.2 Modèle stochastique	67
4.2 Cas test : “Trois-champs”	68
4.2.1 Description du cas test	68
4.2.2 Influence de la durée de l'événement pluvieux	70
4.2.3 Influence de la distribution spatiale	72
4.2.4 Analyse de sensibilité globale	77
4.2.5 Influence de la loi de distribution des K_s	79
4.2.6 Influence de la longueur du domaine d'étude	84
4.3 Cas test : “Bandes Enherbées”	87
4.3.1 Description du cas test	87
4.3.2 Influence de la durée de l'événement pluvieux	88
4.3.3 Estimation des quantiles	92
4.3.4 Influence de la loi de distribution des K_s	95
4.3.5 Influence de la perméabilité des bandes enherbées	98
4.4 Conclusion	102

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la propagation des incertitudes au travers du processus d'infiltration de Green–Ampt. Nous utilisons notre modèle écoulement/infiltration décrit à la section 2.2.1. Nous étudions l'effet des échelles spatiale et temporelle dans la propagation des incertitudes sur le paramètre clé de l'infiltration, à savoir la conductivité hydraulique à saturation, ainsi que l'effet de sa distribution spatiale sur la variabilité des sorties. Nous présentons dans la section 4.1 les motivations du choix de la conductivité hydraulique à saturation comme paramètre incertain ainsi que le modèle stochastique qui a été retenu. Puis, nous réalisons deux cas tests pour évaluer ces effets ; décrits et analysés aux sections 4.2 et 4.3.

4.1 Motivations et modèle stochastique

4.1.1 Motivations du choix du paramètre incertain

Comme nous l'avons vu à la section 1.2.2, la conductivité hydraulique à saturation est reconnue dans la littérature comme étant un paramètre clé, voire même le plus influent, du processus d'infiltration. Afin de vérifier cette hypothèse, nous présentons une étude montrant que ce paramètre est bien le plus influent dans le modèle considéré.

Pour ce faire, une analyse de sensibilité est réalisée pour le modèle d'écoulement/infiltration de la section 2.2.1, en considérant comme incertains les trois principaux paramètres du modèle d'infiltration de Green–Ampt : K_s la conductivité hydraulique à saturation, h_f la pression capillaire du front d'humidité et $\theta_s - \theta_i$ la différence entre l'humidité à saturation et initiale. Les conditions initiales de cette étude sont choisies identiques à celles du cas test de la section suivante 4.2. Nous considérons un plan unidimensionnel de longueur $L = 4.8$ m et de pente constante $\partial_x z = 2\%$ sur lequel une pluie constante et uniforme de 60 mm.h^{-1} est simulée pendant 1600 s. La durée de simulation est de 1800 s. Le coefficient de friction est fixé à 0.25 pour la loi de Darcy–Weisbach et les trois paramètres nécessaires au processus d'infiltration sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme telles que

$$K_s(\text{mm.h}^{-1}) \sim \mathcal{U}[5, 10], \quad h_f(\text{m}) \sim \mathcal{U}[0.025, 0.05], \quad \theta_s - \theta_i \sim \mathcal{U}[0.2, 0.4].$$

Ces valeurs numériques ont été sélectionnés en se basant sur le tableau de la figure 4.1 et correspondent à du limon. Nous examinons les quantités d'intérêt suivantes : le débit maximal à l'exutoire Q_{\max} et le coefficient de ruissellement CR (égal au quotient du volume d'eau ruisselée sur le volume d'eau de pluie). Les intervalles de valeurs des lois uniformes sont choisis afin qu'il n'y ait pas trop d'infiltration. L'idée étant qu'il puisse y avoir un ruissellement significatif à la surface du sol et que les valeurs des quantités d'intérêt ne soient pas trop faibles ce qui pourrait induire des difficultés d'interprétation. De plus, nous nous plaçons dans une configuration assez éloignée de l'état de saturation, en prenant une différence de teneur en eau bien différente de 0.

La méthode utilisée pour propager les incertitudes de ces trois paramètres est celle décrite au Chapitre 1. Pour résumer brièvement, les trois paramètres (K_s , h_f , et $\theta_s - \theta_i$), considérés comme des variables aléatoires indépendantes, sont échantillonnés par la méthode de Monte Carlo suivant la loi de probabilité les définissant, afin d'obtenir des échantillons des variables de sortie. La méthode de sensibilité globale utilisée est décrite à la section 3.2.3.

Les résultats de l'analyse de sensibilité montrent que la conductivité hydraulique à saturation est le paramètre le plus influent pour les deux variables de sortie considérées. La figure 4.2 présente les valeurs des différents indices de sensibilité du premier ordre pour les deux variables de sortie *via* la résolution numérique du modèle pluie-ruissellement-infiltration. On voit clairement que l'indice relatif à K_s est le plus élevé, 55% pour Q_{\max} et 49% pour CR , alors que ceux relatifs à h_f et $\theta_s - \theta_i$ sont similaires avec des valeurs de l'ordre de à 20% pour Q_{\max} et 25% pour CR . De plus, on constate que la somme

Soil class	Porosity η	Effective porosity θ_e	Wetting front soil suction head ψ (cm)	Hydraulic conductivity K (cm/h)
Sand	0.437 (0.374–0.500)	0.417 (0.354–0.480)	4.95 (0.97–25.36)	11.78
Loamy sand	0.437 (0.363–0.506)	0.401 (0.329–0.473)	6.13 (1.35–27.94)	2.99
Sandy loam	0.453 (0.351–0.555)	0.412 (0.283–0.541)	11.01 (2.67–45.47)	1.09
Loam	0.463 (0.375–0.551)	0.434 (0.334–0.534)	8.89 (1.33–59.38)	0.34
Silt loam	0.501 (0.420–0.582)	0.486 (0.394–0.578)	16.68 (2.92–95.39)	0.65
Sandy clay loam	0.398 (0.332–0.464)	0.330 (0.235–0.425)	21.85 (4.42–108.0)	0.15
Clay loam	0.464 (0.409–0.519)	0.309 (0.279–0.501)	20.88 (4.79–91.10)	0.10
Silty clay loam	0.471 (0.418–0.524)	0.432 (0.347–0.517)	27.30 (5.67–131.50)	0.10
Sandy clay	0.430 (0.370–0.490)	0.321 (0.207–0.435)	23.90 (4.08–140.2)	0.06
Silty clay	0.479 (0.425–0.533)	0.423 (0.334–0.512)	29.22 (6.13–139.4)	0.05
Clay	0.475 (0.427–0.523)	0.385 (0.269–0.501)	31.63 (6.39–156.5)	0.03

FIGURE 4.1 – Valeurs des paramètres du modèle de Green-Ampt en fonction du type de sol (extrait de Chow *et al.* pg 115 [31])

de ces indices du premier ordre est proche de 1, ceci impliquant qu’il n’existe que très peu d’interactions paramétriques (moins de 5%). L’hypothèse faite sur l’importance de la conductivité hydraulique à saturation est donc bien vérifiée pour cette distribution.

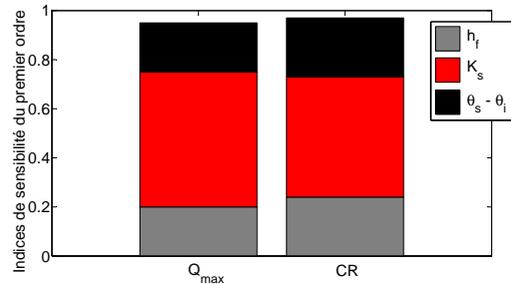


FIGURE 4.2 – Indices de sensibilité du premier ordre estimés pour les trois principaux paramètres du modèle de Green-Ampt ; les quantités d’intérêt sont le débit maximal à l’exutoire Q_{\max} et pour le coefficient de ruissellement CR .

4.1.2 Modèle stochastique

Notre modèle stochastique consiste à subdiviser le domaine physique en p (typiquement on prend $p = 2$ ou 3 pour nos cas tests) sous-domaines et à attribuer à chaque sous-domaine un paramètre incertain K_s , variable aléatoire de densité de probabilité connue. On suppose donc que le champ aléatoire $K_s(x, \theta)$, où θ est un évènement aléa-

toire, s'écrit

$$K_s(x, \theta) = \sum_{i=1}^p \mathbb{1}_{\Omega_i}(x) K_{s,i}(\theta), \quad (4.1)$$

où $\mathbb{1}_{\Omega_i}$ est la fonction indicatrice du i -ème sous-domaine et $\{K_{s,i}(\theta)\}_{1 \leq i \leq p}$ est un ensemble de variables aléatoires réelles et positives qui sont regroupées en un seul vecteur aléatoire tel que $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p) = (K_{s,1}, \dots, K_{s,p})$. Les variables aléatoires X_i sont supposées indépendantes si bien que la pdf de \mathbf{X} se factorise sous la forme suivante

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p), \quad p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^p p_{X_i}(x_i). \quad (4.2)$$

Il reste à fixer la pdf p_{X_i} sur chaque sous-domaine. Nous considérons une pdf uniforme sur chaque sous-domaine dont les paramètres dépendent du sous-domaine, c'est-à-dire que chaque variable aléatoire X_i prend ses valeurs sur un intervalle différent. Ces intervalles sont choisis de manière à être représentatifs de sols fortement, moyennement ou faiblement infiltrants. Enfin, nous vérifions que les principales conclusions obtenues avec des pdf's uniformes restent inchangées si on considère à la place des pdf's log-normales dont la moyenne et la variance sont choisies de manière cohérente avec la paramétrisation des pdf's uniformes.

4.2 Cas test : “Trois-champs”

4.2.1 Description du cas test

Dans un premier cas test, nommé “Three-field”, on considère un plan unidimensionnel de longueur $L = 4.8$ m et de pente constante $\partial_x z = 2\%$. Les paramètres du sol sont supposés uniformes (excepté le K_s) et les valeurs suivantes ont été choisies :

$$f = 0.25 \text{ (pour la loi de Darcy-Weisbach)}, \quad \theta_s - \theta_i = 0.3, \quad h_f = 0.023 \text{ m.}$$

Une pluie constante d'intensité $R(t)$ [L/T] est imposée pendant une durée T_R [T] puis stoppée. Le temps de simulation total est noté T [T]. Nous considérons deux événements pluvieux : SRE (pour “Short Rainfall Event”) et LRE (pour “Long Rainfall Event”). Les valeurs de l'intensité de pluie R , la durée de pluie T_R , et le temps de simulation sont indiqués dans le tableau 4.1.

Le domaine (c'est-à-dire le plan incliné de longueur $L = 4.8$ m) est divisé en trois sous-domaines, ayant chacun sa propre conductivité hydraulique à saturation $K_{s,i}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, qui est une variable aléatoire indépendante de $K_{s,j}$, $j \neq i$. Pour chaque sous-domaine, $K_{s,i}$ suit une loi de distribution uniforme

$$\forall 1 \leq i \leq 3, \quad K_{s,i} \sim \mathcal{U}[K_{s,i}^{\min}, K_{s,i}^{\max}],$$

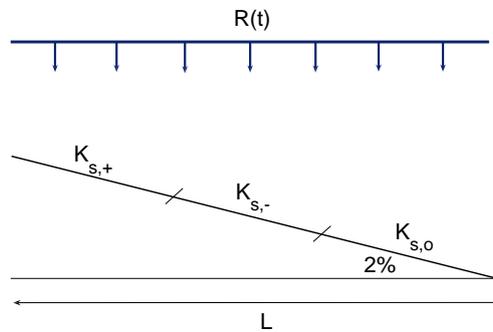
où $K_{s,i}^{\min}$ et $K_{s,i}^{\max}$ sont les valeurs minimale et maximale de $K_{s,i}$.

Tableau 4.1 Cas test “Trois-champs”, données pour les deux événements pluvieux : intensité de pluie R , durée de pluie T_R , et temps total de simulation T .

	R (m.s ⁻¹)	T_R (s)	T (s)
Événement SRE	$1.66 \cdot 10^{-5}$	125	250
Événement LRE	$1.66 \cdot 10^{-5}$	1 250	2 500

Pour attribuer ces valeurs, on considère trois intervalles de valeurs possibles, chacun représentant des valeurs réalistes pour un type de sol donné (voir le tableau de la figure 4.1), un sol très peu infiltrant, un sol moyennement infiltrant et un sol fortement infiltrant (en se plaçant en dehors des valeurs pour un sol sableux). On fait référence à ces choix en utilisant un index $-$, o ou $+$ indiquant respectivement des valeurs faible, intermédiaire ou forte pour K_s . Les valeurs correspondant à ces trois types de sol sont listées dans le tableau 4.2.

Ensuite, on considère les six distributions spatiales qui sont possibles pour les trois sous-domaines : $[+o-]$, $[+-o]$, $[o+-]$, $[o-+]$, $[-+o]$ et $[-o+]$. Par exemple, $[+-o]$ signifie que la variable aléatoire $K_{s,+}$ est attribuée au sous-domaine en amont (et il est donc le plus perméable), la variable aléatoire $K_{s,-}$ au sous-domaine du milieu et la variable aléatoire $K_{s,o}$ à celui en aval, voir la figure 4.3.

FIGURE 4.3 – Cas test “Trois-champs” : configuration initiale pour la distribution spatiale $[+-o]$.**Tableau 4.2** Cas test “Trois-champs” : valeurs minimale et maximale des K_s en m.s⁻¹ (en mm.h⁻¹) pour les trois types de sol.

	$-$	o	$+$
K_s^{\min}	$2.78 \cdot 10^{-7}$ (1)	$2.78 \cdot 10^{-6}$ (10)	$1.10 \cdot 10^{-5}$ (40)
K_s^{\max}	$1.10 \cdot 10^{-6}$ (4)	$5.50 \cdot 10^{-6}$ (20)	$1.66 \cdot 10^{-5}$ (60)

Les variables aléatoires d'entrée $K_{s,+}/K_{s,o}/K_{s,-}$ sont alors échantillonnées par la méthode de Monte Carlo avec une taille d'échantillon $M = 100000$ et ce pour les six distributions spatiales et pour les deux événements pluvieux. Ainsi, *via* la résolution numérique du modèle pluie-ruisellement-infiltration, nous obtenons des échantillons de variables de sorties (Q_{\max} , CR) que nous analysons.

4.2.2 Influence de la durée de l'événement pluvieux

Un premier résultat est que la durée de l'événement pluvieux a un impact important sur les sorties du modèle. En effet, les variables de sorties des six distributions spatiales (*i.e.* $[+-o]$, $[+o-]$, etc ...) s'organisent différemment selon la durée de l'événement pluvieux.

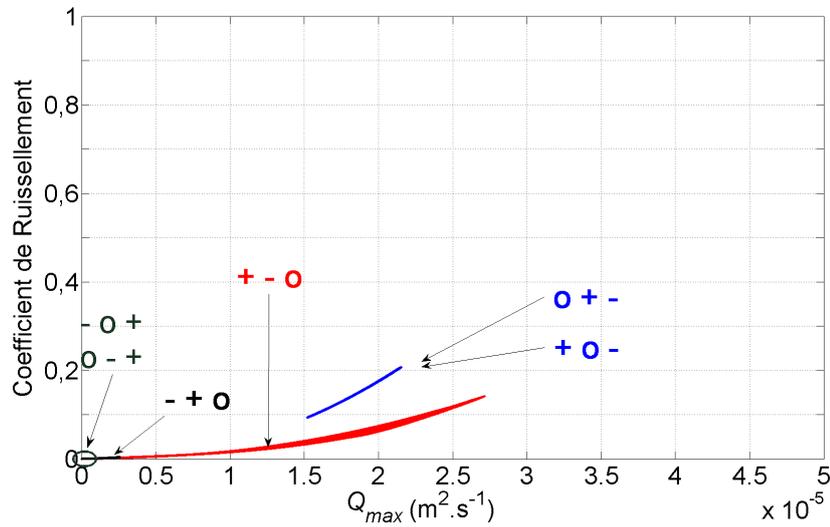


FIGURE 4.4 – Cas test “Trois-champs” avec le SRE : pics de débit Q_{\max} et coefficients de ruissellement CR pour les six distributions spatiales possibles des types de sol.

Dans un premier temps, nous étudions les nuages de points résultant de l'échantillonnage par Monte Carlo. Les figures 4.4 et 4.5 représentent les 100000 couples (Q_{\max}, CR) pour les six distributions spatiales et les deux événements pluvieux (SRE et LRE). Une première observation générale est, comme attendu, l'existence d'une très forte corrélation entre les deux sorties Q_{\max} et CR pour chacune des distributions spatiales. Tous les coefficients de corrélation ont en effet une valeur supérieure à 0.9. Plus précisément, pour le SRE, les coefficients de corrélation sont les suivants : 0.999 pour $[o+-]$ et $[+o-]$, 0.944 pour $[+-o]$ et 0.988 pour $[-+o]$; et pour le LRE les suivants : 0.934 pour $[+o-]$, 0.936 pour $[+-o]$, 0.973 pour $[o+-]$, 0.994 pour $[-+o]$, 0.998 pour $[o+-]$ et $[-+o]$. Concernant le SRE (figure 4.4), les simulations donnent lieu à des sorties tellement corrélées que les points s'alignent le long de courbes plus ou moins longues en fonction de la variabilité des sorties (la distribution $[-+o]$ n'a que très peu de variabilité en sortie comparée à $[+-o]$ par exemple).

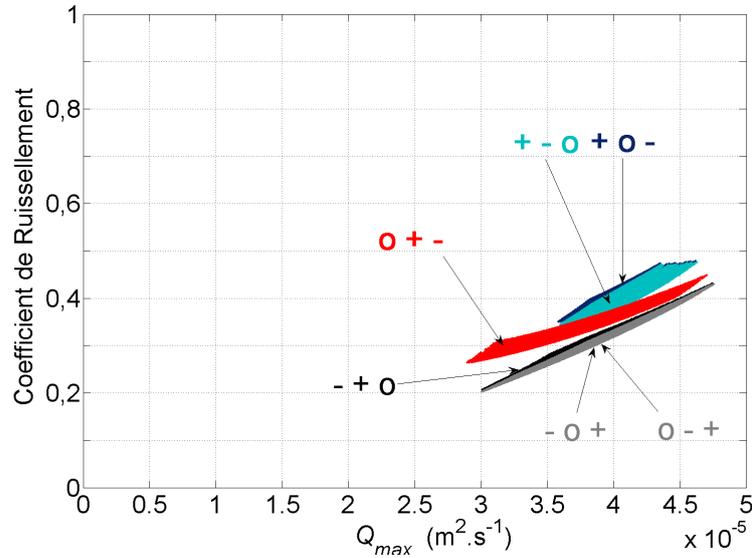


FIGURE 4.5 – Cas test “Trois-champs” avec le LRE : pics de débit Q_{\max} et coefficients de ruissellement CR pour les six distributions spatiales possibles des types de sol.

Concernant le SRE (figure 4.4), on constate que les nuages de points s’organisent par paires.

- Paire (1) : on observe que $Q_{\max} = 0$ quand le sous-domaine relatif à $K_{s,+}$ est localisé en aval du domaine. Ceci est dû à l’infiltration complète de la pluie et du ruissellement provenant de l’amont. En effet, $K_{s,+}$ prend des valeurs suffisamment élevées qui permettent d’infiltrer toute l’eau provenant de la pluie, plus celle provenant des sous-domaines en amont.
- Paire (2) : le nuage de points pour la distribution spatiale $[+ - 0]$ contient celui pour $[- + 0]$ qui correspond aux plus faibles débits.
- Paire (3) : lorsque le sous-domaine relatif à $K_{s,-}$ est localisé en aval du domaine, les résultats sont similaires étant donné que $K_{s,+}$ et $K_{s,o}$ sont suffisamment importants pour infiltrer toute la pluie.

Les nuages de points pour le SRE semblent donc dépendre essentiellement du K_s relatif au sous-domaine localisé en aval.

Concernant le LRE (figure 4.5), Q_{\max} et CR prennent des valeurs plus grandes que pour le SRE puisque l’événement pluvieux est plus long. Il en résulte que l’influence de $K_{s,+}$ est plus prononcée que pour le SRE, ce paramètre contribuant davantage aux débits à l’exutoire, alors que l’influence de $K_{s,-}$ diminue. En effet, l’événement pluvieux générant plus d’eau, la capacité d’infiltration du sol diminue et le sous-domaine où l’on attribue $K_{s,+}$ n’est alors plus capable d’absorber toute l’eau. L’excédent d’eau va donc ruisseler et $K_{s,+}$ va contribuer aux débits à l’exutoire. De plus, les nuages de points pour le LRE dépendent essentiellement de la position du sous-domaine le plus infiltrant. Lorsque ce dernier est localisé en aval du domaine, les deux nuages de points (en fonction du positionnement relatif de $K_{s,o}$ et $K_{s,-}$) sont identiques, alors que lorsqu’il se situe en amont les deux nuages sont très proches et de forme semblable.

Les figures 4.4 et 4.5 soulignent donc l'importance de la distribution spatiale des types de sol puisque les sorties du modèle sont fortement influencées par l'infiltration au niveau du sous-domaine en aval pour le SRE, et par le sous-domaine le plus infiltrant pour le LRE.

On peut aussi constater l'influence de la durée de l'événement pluvieux sur les sorties du modèle en regardant quelques valeurs statistiques des échantillons des variables de sortie. La tableau 4.3 présente la moyenne μ , l'écart type σ , le coefficient de variation $cov = \sigma/\mu$, la médiane Q_{50} et le 90ème percentile Q_{90} relatif à Q_{\max} (lignes blanches) et CR (lignes grises). Dans l'ensemble, il y a plus de dispersion pour les valeurs obtenues pour le SRE. Par exemple, cov est égal à 10% pour $[+o-]$ et $[o+-]$, 42% pour $[+-o]$ et 217% pour $[-+o]$. En outre, les valeurs sont plus élevées pour le SRE. L'augmentation de la durée de la pluie conduit à une diminution des valeurs de dispersion. De plus, pour le SRE, la distribution n'est pas uniforme quand $K_{s,o}$ est attribué au sous-domaine en aval puisque la médiane et la moyenne sont différentes. Finalement, des conclusions identiques sont obtenues pour la sortie CR . On observe également que pour les deux événements pluvieux, cov prend des valeurs plus importantes pour CR que pour Q_{\max} .

Tableau 4.3 Cas test "Trois-Champs" : moyenne $\mu = \hat{E}[Q_{\max}]$, écart type $\sigma = \sqrt{\hat{V}(Q_{\max})}$, coefficient de variation $cov = \sigma/\mu$, médiane Q_{50} , et 90ème percentile Q_{90} pour le pic de débit Q_{\max} (lignes blanches) et le coefficient de ruissellement CR (lignes grises).

	SRE				LRE					
	$K_{s,-}$ en aval		$K_{s,o}$ en aval		$K_{s,+}$ en amont		$K_{s,+}$ au milieu		$K_{s,+}$ en aval	
	$+o-$	$o+-$	$+ - o$	$- + o$	$+o-$	$+ - o$	$o+-$	$- + o$	$o - +$	$- o +$
μ	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$2.6 \cdot 10^{-7}$	$4.0 \cdot 10^{-5}$	$4.0 \cdot 10^{-5}$	$3.8 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$
	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$8.7 \cdot 10^{-5}$	$5.9 \cdot 10^{-7}$	$8.2 \cdot 10^{-3}$	$8.1 \cdot 10^{-3}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$
σ	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$6.1 \cdot 10^{-6}$	$5.6 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$3.4 \cdot 10^{-6}$	$3.3 \cdot 10^{-6}$	$3.3 \cdot 10^{-6}$	$3.3 \cdot 10^{-6}$
	$6.3 \cdot 10^{-5}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$	$6.1 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$5.2 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$	$6.6 \cdot 10^{-4}$	$8.2 \cdot 10^{-4}$	$8.3 \cdot 10^{-4}$	$8.3 \cdot 10^{-4}$
cov	10%	10%	42%	217%	5%	5%	9%	9%	9%	8%
	22%	22%	70%	250%	6%	7%	10%	13%	13%	13%
Q_{50}	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	0	$4.0 \cdot 10^{-5}$	$4.0 \cdot 10^{-5}$	$3.8 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$
	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$7.8 \cdot 10^{-5}$	0	$8.2 \cdot 10^{-3}$	$8.1 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$
Q_{90}	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$4.3 \cdot 10^{-5}$
	$3.8 \cdot 10^{-4}$	$3.8 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$	$8.9 \cdot 10^{-3}$	$8.8 \cdot 10^{-3}$	$7.8 \cdot 10^{-3}$	$7.4 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$

4.2.3 Influence de la distribution spatiale

Pour mieux comprendre l'influence de la durée de la pluie, nous nous sommes intéressés au processus d'infiltration le long du domaine en regardant l'état de saturation du sol. Cet état de saturation peut être analysé en calculant l'indice de saturation I_c/K_s . En effet, l'équation (2.7) implique que le rapport I_c/K_s tend vers 1 lorsque le volume d'eau infiltrée tend vers l'infini (correspondant à un sol saturé). En étudiant ce

rapport, nous pouvons donc savoir si les sols sont plus ou moins proches de leur état de saturation et les comparer entre eux.

La figure 4.6 présente les intervalles de confiance (obtenus à partir des valeurs minimales et maximales pour les 100000 réponses du modèle) du rapport I_c/K_s au temps final, en fonction de la position spatiale, en gris pour le SRE et en noir pour le LRE. Comme attendu, le sol est clairement plus saturé pour le LRE puisque le rapport est plus proche de 1. En outre, la variabilité de l’intervalle de confiance est, en général, la plus forte pour le sous-domaine le moins infiltrant, et la plus faible pour le sous-domaine le plus infiltrant. Les intervalles de confiance sont plus étendus pour le sous-domaine relatif au $K_{s,-}$. Comme précédemment pour la dispersion des variables de sortie, la variabilité décroît en fonction de la saturation du sol. En effet, plus le sol est saturé, plus la variabilité est faible, excepté pour quelques cas limite où il n’y a pas de ruissellement sur le sous-domaine concerné. C’est le cas par exemple lors du SRE pour des distributions spatiales où le sous-domaine relatif à $K_{s,+}$ se situe en aval ou au milieu du domaine.

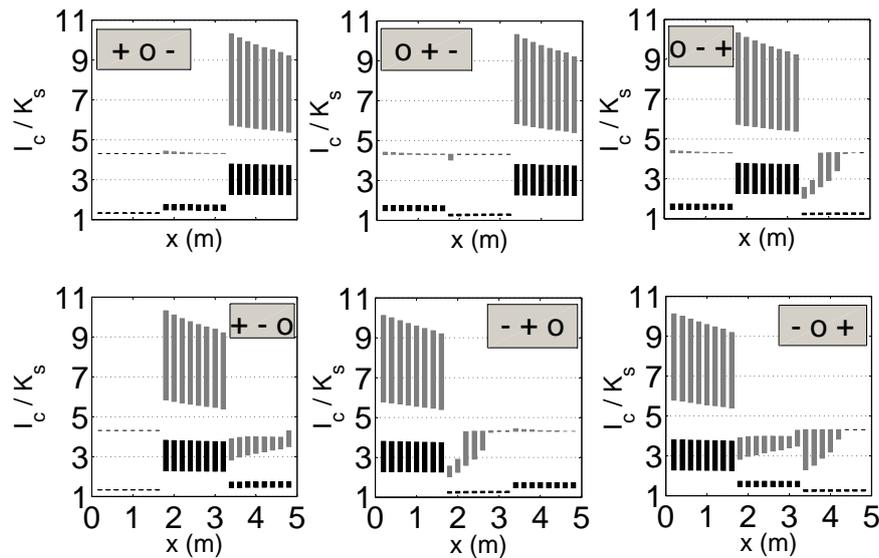


FIGURE 4.6 – Cas test “Trois-champs” : intervalles de confiance du rapport I_c/K_s au temps final en fonction de la position spatiale pour les six distributions spatiales possibles des types de sol ; SRE (en gris) et LRE (en noir).

Les figures 4.7 et 4.8 représentent les pdf’s de Q_{\max} estimées par la méthode de Parzen-Rozenblatt *via* des échantillons de sorties standardisés et les pdf’s sont représentées par groupe en fonction du K_s qui influence le plus les débits à l’exutoire. Un premier point important est que l’allure des pdf’s montre que les processus étudiés ne sont pas Gaussiens. Concernant le SRE, les distributions spatiales des sous-domaines qui produisent des nuages de points corrélés et uniformément distribués dans la figure 4.4 (ceux où le sous-domaine le moins infiltrant se situe en aval du domaine), génèrent des pdf’s étalées ressemblant à la fonction rectangulaire. La pdf obtenue pour

la distribution $[-+o]$ présente en revanche un pic marqué qui est dû aux nombreuses simulations conduisant à des débits nuls. La pdf pour la distribution $[+-o]$ est plus étalée et présente un pic moins important qui correspond lui aussi aux simulations donnant des débits nuls en sortie.

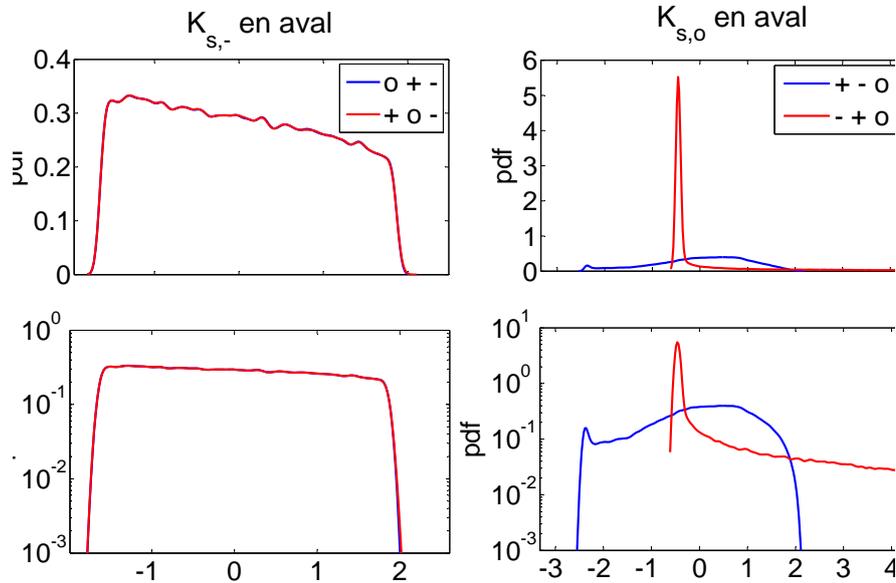


FIGURE 4.7 – Cas test “Trois-champs” : fonctions de densité de probabilité du pic de débit Q_{\max} pour le SRE estimées avec une fenêtre de lissage $\eta = 0.05$ pour des échantillons de sorties standardisés; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas).

Concernant le LRE, les six courbes de la figure 4.8 sont très proches les unes des autres et ont la forme d’une cloche aplatie sur le dessus. Ces courbes sont symétriques par rapport à zéro (*i.e.* par rapport à la moyenne car les échantillons sont standardisés). Donc, contrairement au SRE, la distribution spatiale de K_s n’influence pas la distribution de Q_{\max} pour le LRE. Les estimations des pdf’s pour CR conduisent aux mêmes conclusions (voir les figures 4.9 et 4.10).

On peut donc conclure que les dispersions calculées dans le tableau 4.3 pour le SRE sont confirmées par les distributions non-uniformes obtenues pour les courbes des pdf’s.

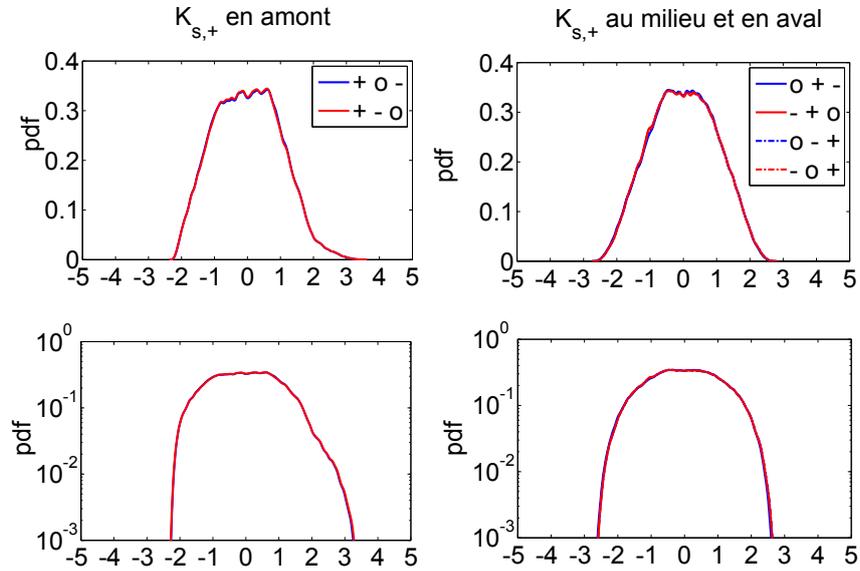


FIGURE 4.8 – Cas test “Trois-champs” : fonctions de densité de probabilité du pic de débit Q_{\max} pour le LRE estimées avec une fenêtre de lissage $\eta = 0.05$ pour des échantillons de sorties standardisés; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas).

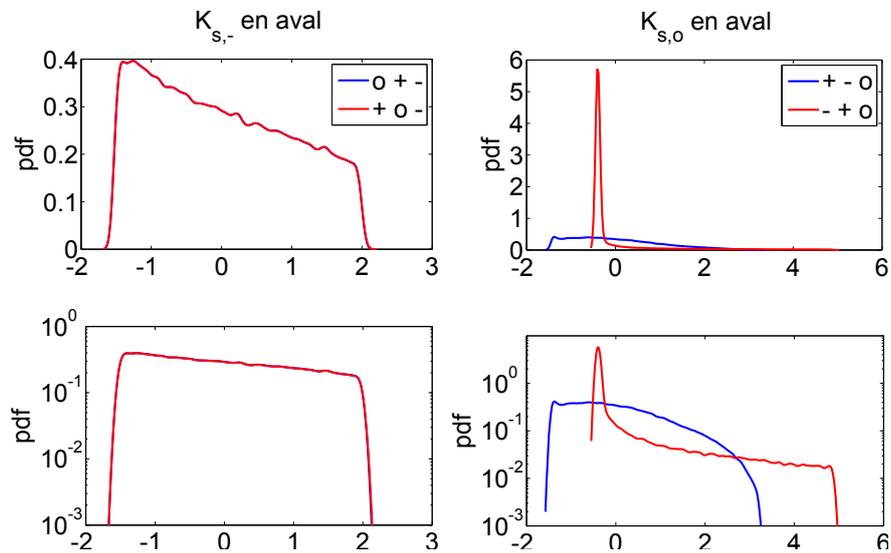


FIGURE 4.9 – Cas test “Trois-champs” : fonctions de densité de probabilité du coefficient de ruissellement CR pour le SRE estimées avec une fenêtre de lissage $\eta = 0.05$ pour des échantillons de sorties standardisés; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas).

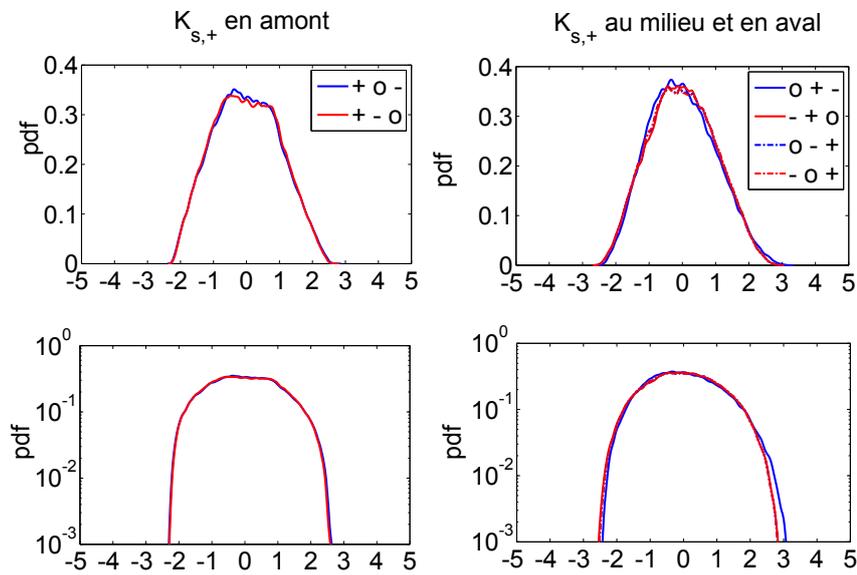


FIGURE 4.10 – Cas test “Trois-champs” : fonctions de densité de probabilité du coefficient de ruissellement CR pour le LRE estimées avec une fenêtre de lissage $\eta = 0.05$ pour des échantillons de sorties standardisés ; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas).

4.2.4 Analyse de sensibilité globale

Un aspect important de notre étude est l’analyse de sensibilité globale car celle-ci permet de hiérarchiser les paramètres d’entrée tout en tenant compte des interactions paramétriques, elle est présentée à la Section 3.2.3. La méthode numérique utilisée pour l’estimation des indices de sensibilité est celle de Monte Carlo, comme présentée à la Section 3.3.1. Nous présentons ici les résultats obtenus pour le calcul des indices de sensibilité de Sobol du premier ordre et totaux. Nous rappelons que l’indice de sensibilité du premier ordre S_i estime l’influence individuelle du paramètre X_i sur la variable de sortie considérée. Cet indice est compris entre 0 et 1. Un indice S_i égal à 1 signifie que seul le paramètre X_i influence la variable de sortie, à l’inverse 0 signifie que l’influence individuelle est nulle. L’indice total T_i permet, quant à lui, d’estimer l’effet total du paramètre X_i sur la sortie, *i.e.* son effet individuel plus l’effet de ses interactions paramétriques. Il est lui aussi compris entre 0 et 1.

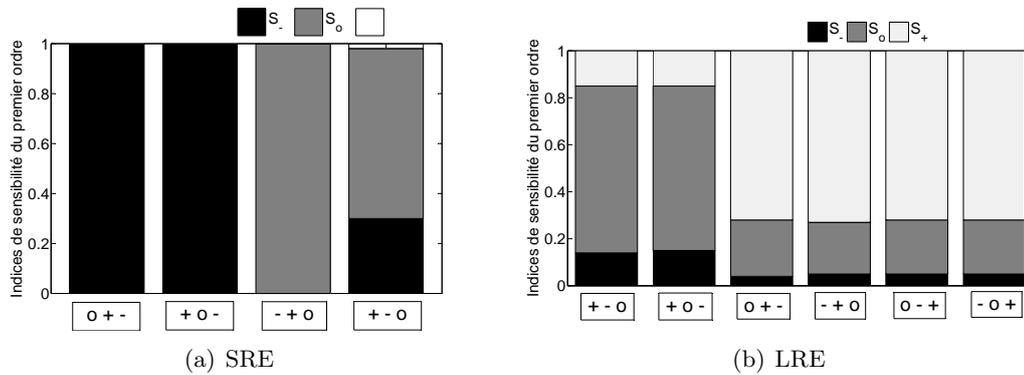


FIGURE 4.11 – Cas test “Trois-champs” : indices de sensibilité du pic de débit Q_{\max} ; (a) SRE; (b) LRE.

Les figures 4.11(a) et 4.11(b) présentent les indices de sensibilité du premier ordre estimés à partir de l’échantillon des 100000 sorties du modèle et ce pour les deux événements pluvieux. La variable de sortie considérée est le pic de débit Q_{\max} . Les indices de sensibilité relatifs à $K_{s,+}$, $K_{s,o}$ et $K_{s,-}$ sont respectivement notés S_+ , S_o et S_- . Une première observation est que la somme des indices du premier ordre est presque égale à 1 (excepté pour la distribution spatiale $[+-o]$ lors du SRE correspondant à la petite partie blanche au dessus des parties grisées de la figure 4.11(a)), ceci impliquant que la somme des indices d’ordres supérieurs est pratiquement nulle. Les indices de sensibilité totaux sont donc égaux à leur indice du premier ordre correspondant et on a $T_i \approx S_i$. Ces égalités signifient qu’il n’y a pas d’interactions significatives entre les paramètres d’entrée.

Concernant le SRE, l’indice le plus élevé correspond au paramètre K_s localisé en aval du domaine, ceci corroborant les conclusions précédentes sur le K_s le plus influent. Comme l’illustre la figure 4.4, pour la distribution spatiale où le sous-domaine le moins infiltrant est situé en aval, les nuages de points ne dépendent pas de la localisation de $K_{s,o}$ et $K_{s,+}$. Ceci signifie que seul $K_{s,-}$ influence le débit à l’exutoire et en effet on

obtient bien les indices S_- égaux à 1. Dans le cas où le sous-domaine relatif au $K_{s,o}$ (intermédiaire) est en aval, on a $S_o = 1$ si le sous-domaine le plus infiltrant est situé juste en amont. En effet, de par les grandes valeurs prises par $K_{s,+}$, toute l'eau de pluie plus celle provenant de l'amont est infiltrée, si bien que seul le sous-domaine situé en aval régit le débit à l'exutoire. Par contre, si le sous-domaine le plus infiltrant est situé en amont du domaine, alors les deux autres sous-domaines contribuent aux débits à l'exutoire, $K_{s,o}$ ayant plus d'effet avec $S_o = 68\%$ que $K_{s,-}$ avec $S_- = 30\%$. Dans cette situation, l'analyse de sensibilité globale permet d'affirmer les conclusions tirées de l'étude du nuage de points.

Concernant le LRE, puisque la durée de pluie est prolongée, les sous-domaines les plus perméables génèrent plus de ruissellement en raison de la diminution de la capacité d'infiltration et contribuent donc d'avantage aux débits à l'exutoire, *i.e.* aux variables de sortie. La conséquence est que, contrairement au SRE, le sous-domaine relatif à $K_{s,+}$ influence les sorties, ceci se traduisant dans l'analyse de sensibilité par le fait que les indices de sensibilité S_+ ne sont plus nuls. Dans la figure 4.11(b), on constate deux scénaris en fonction de la position du $K_{s,+}$. Soit le sous-domaine le plus perméable (relatif à $K_{s,+}$) est situé en amont et le paramètre le plus influent est $K_{s,o}$ avec $S_o = 70\%$, $K_{s,+}$ et $K_{s,-}$ ayant un effet comparable ($S_+ \approx S_- \approx 15\%$). Soit la hiérarchisation est la suivante : $K_{s,+}$ est le plus influent avec $S_+ = 72\%$, puis $K_{s,o}$ avec $S_o = 22\%$ et enfin $K_{s,-}$ avec $S_- = 4\%$.

Concernant le coefficient de ruissellement CR (voir les figures 4.12(a) et 4.12(b)), les résultats obtenus par l'analyse de sensibilité sont pratiquement identiques. La seule différence significative concerne le LRE, lorsque le sous-domaine le plus infiltrant se situe en amont, l'effet de son K_s ($K_{s,+}$) est négligeable sur le CR ($S_+ \approx 0$) alors qu'une influence est perceptible sur Q_{\max} (S_+ de l'ordre de quelques %). Ceci est dû au fait que l'excédent d'eau du sous-domaine en amont ne va pas beaucoup varier en raison de la forte perméabilité du domaine et donc ne va pas modifier le ruissellement à l'exutoire. Par contre, cette eau provenant de l'amont va permettre à l'écoulement de prendre de la vitesse, augmentant ainsi le débit maximal à l'exutoire.

Ces conclusions signifient qu'en pratique, en cas de sols présentant de faibles niveaux de saturation (pour le SRE), il est important de concentrer les mesures (en vue d'une meilleure caractérisation du sol) sur le sous-domaine le plus proche de l'exutoire, là où le paramètre influence le plus les sorties du modèle. Concernant des sols plus saturés (pour le LRE), les mesures doivent être focalisées sur le sous-domaine contenant le sol le plus perméable.

Enfin, nous vérifions que le nombre de simulations utilisé, $M = 100000$, pour l'échantillonnage par Monte Carlo est bien suffisant pour déterminer avec précision les indices de sensibilité. La figure 4.13 présente les indices de sensibilité totaux et du premier ordre pour Q_{\max} , pour une des distributions avec le SRE ($[+o]$) en fonction du nombre de simulations M . Les indices du premier ordre et totaux convergent très rapidement. Pour $M = 1000$, une bonne convergence des résultats est déjà observée. De plus, on constate bien que les indices totaux convergent vers les mêmes valeurs que les indices du premier ordre correspondants, puisque nous avons vu qu'il y a peu d'interactions

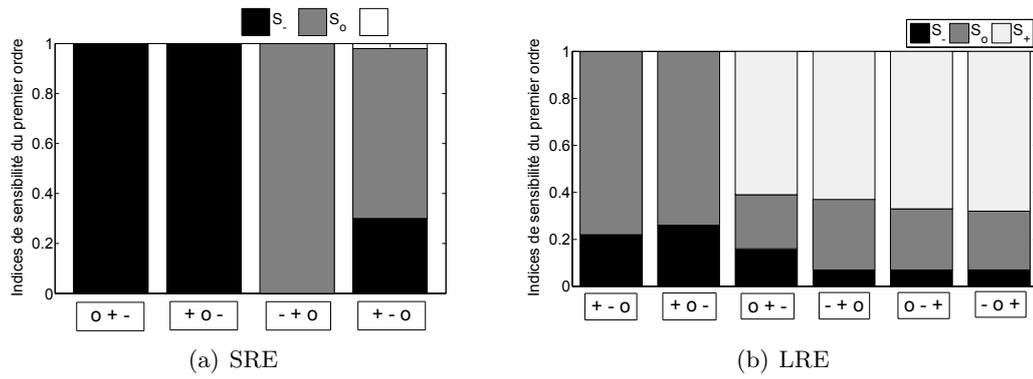


FIGURE 4.12 – Cas test “Trois-champs” : indices de sensibilité du coefficient de ruissellement CR ; (a) SRE; (b) LRE.

paramétriques sur les sorties du modèle.

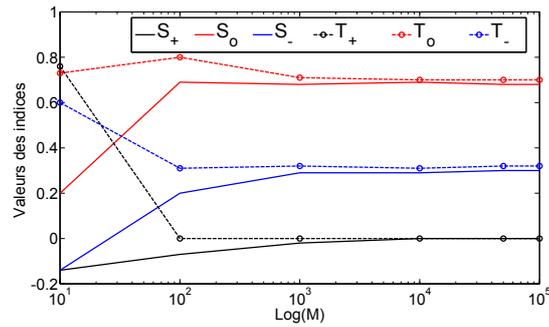


FIGURE 4.13 – Cas test “Trois-champs” : convergence des indices de sensibilité de Sobol du premier ordre (S_i) et totaux (T_i) en fonction du nombre de simulations M pour la méthode de Monte Carlo.

4.2.5 Influence de la loi de distribution des K_s

Les résultats précédents sont obtenus pour des variables aléatoires suivant une loi uniforme. Comme dans la littérature la loi log-normale est plus fréquemment utilisée, nous vérifions que nos conclusions ne dépendent pas du choix des pdf’s fixées pour K_s . Dans ce but, nous simulons les mêmes cas tests en utilisant une distribution log-normale de moyenne et variance telles que K_s appartient à l’intervalle spécifié pour la distribution uniforme avec une probabilité 0.9958. La figure 4.14 présente les distributions uniforme et log-normale utilisées pour la variable aléatoire $K_{s,-}$.

Les figures 4.15 et 4.16 représentent les 100000 couples (Q_{\max}, CR) pour les six distributions spatiales des trois types de sol et ce pour les deux événements pluvieux (SRE et LRE). On constate que l’allure des nuages de points est très proche de celle

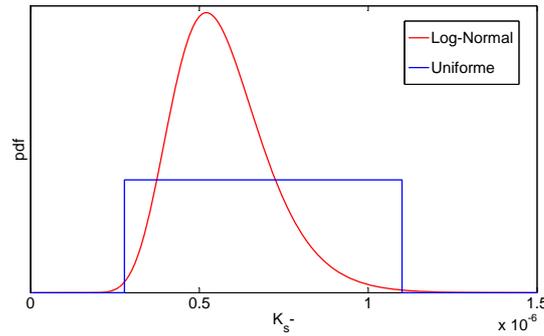


FIGURE 4.14 – Fonction de densité de probabilité du paramètre d'entrée K_s^- .

obtenue pour la loi de distribution uniforme aux figures 4.4 et 4.5. On peut donc en tirer les mêmes conclusions, *i.e.* que les deux variables de sortie CR et Q_{\max} sont fortement corrélées et que la durée de l'événement pluvieux joue un rôle important dans l'organisation des sorties du modèle.

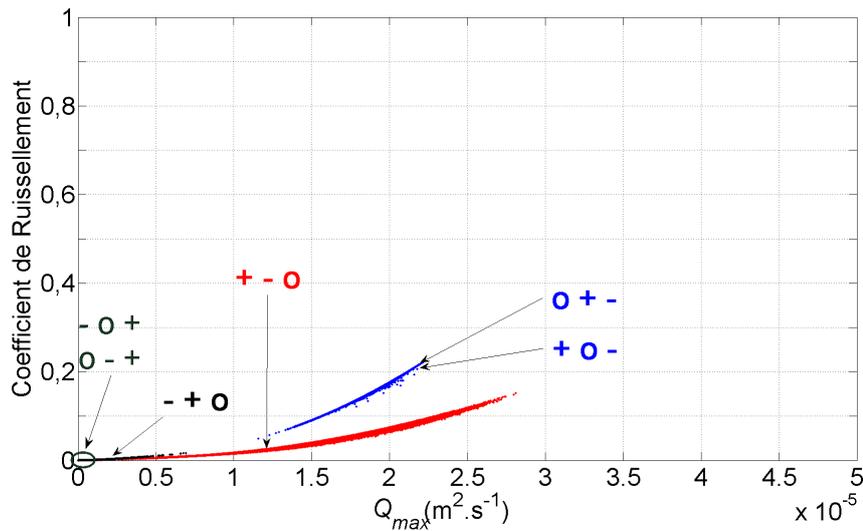


FIGURE 4.15 – Cas test “Trois-champs” (pour une distribution log-normale) : pics de débit Q_{\max} et coefficients de ruissellement CR pour les six distributions spatiales possibles des types de sol pour le SRE.

Les figures 4.17 à 4.20 présentent les pdf's de Q_{\max} et de CR estimées par la méthode de Parzen-Rozenblatt *via* des échantillons de sorties standardisés. Ces pdf's sont représentées par groupes en fonction du K_s qui influence le plus les débits à l'exutoire comme pour les figures 4.7 à 4.10. La comparaison avec les pdf's obtenues avec les lois uniformes en entrée montre des différences, mais celles-ci portent essentiellement sur les valeurs faibles des pdf's qui concernent les événements rares. Par contre, le comportement global des pdf's est similaire.

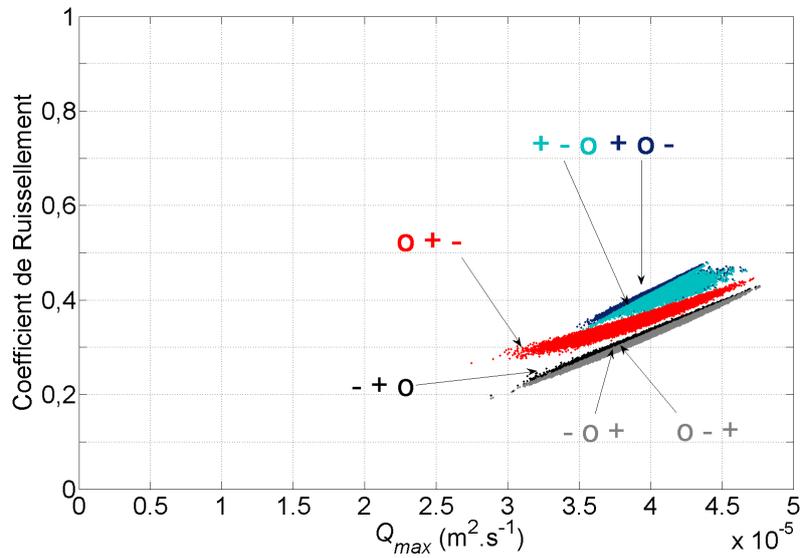


FIGURE 4.16 – Cas test “Trois-champs” (pour une distribution log-normale) : pics de débit Q_{max} et coefficients de ruissellement CR pour les six distributions spatiales possibles des types de sol pour le LRE.

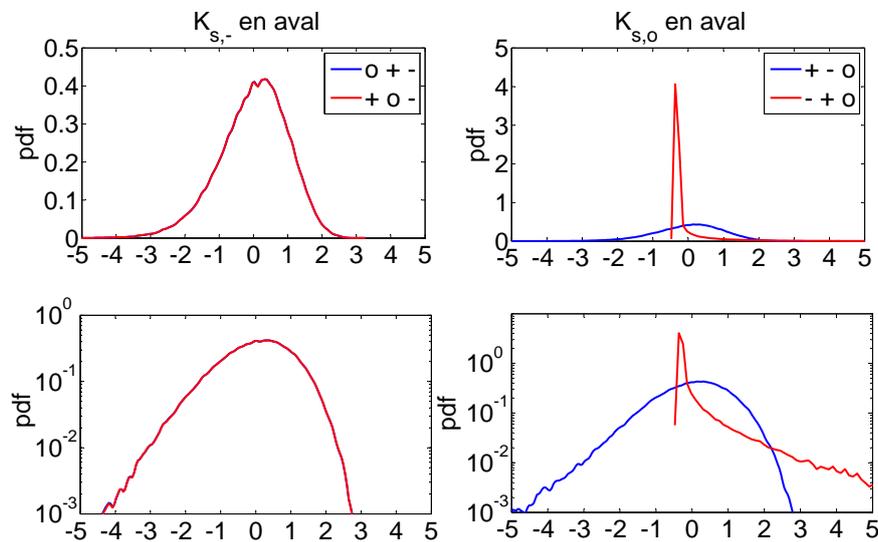


FIGURE 4.17 – Cas test “Trois-champs” (pour une distribution log-normale) : fonctions de densité de probabilité du pic de débit Q_{max} pour le SRE estimées avec une fenêtre de lissage $\eta = 0.05$ pour des échantillons de sorties standardisés ; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas).

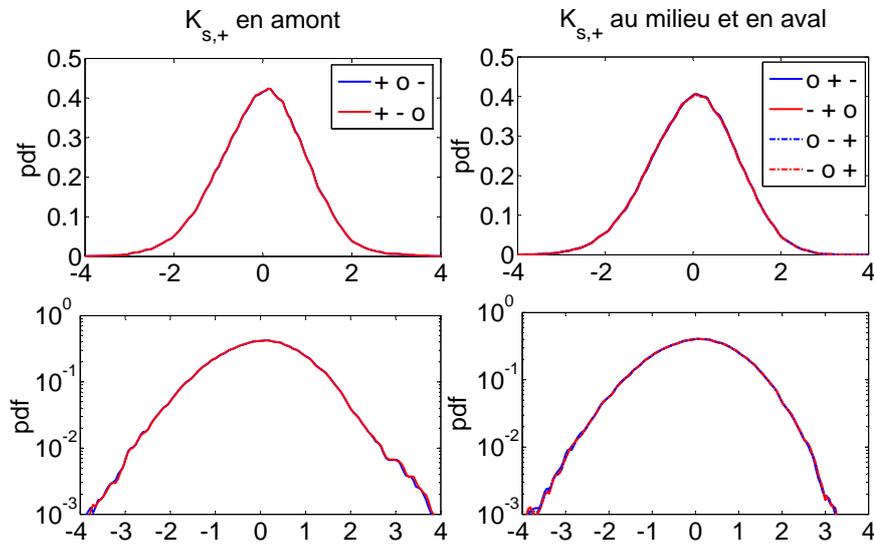


FIGURE 4.18 – Cas test “Trois-champs” (pour une distribution log-normale) : fonctions de densité de probabilité du pic de débit Q_{\max} pour le LRE estimées avec une fenêtre de lissage $\eta = 0.05$ pour des échantillons de sorties standardisés ; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas).

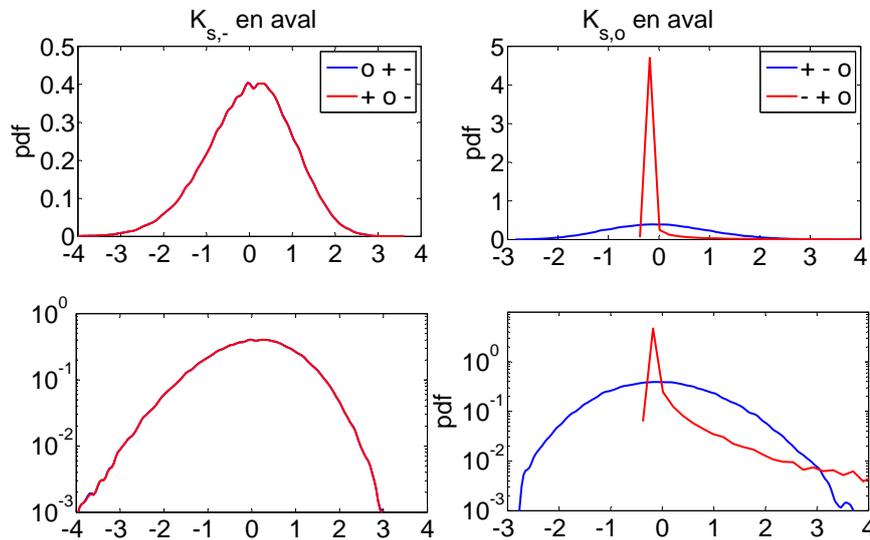


FIGURE 4.19 – Cas test “Trois-champs” (pour une distribution log-normale) : fonctions de densité de probabilité du coefficient de ruissellement CR pour le SRE estimées avec une fenêtre de lissage $\eta = 0.05$ pour des échantillons de sorties standardisés ; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas).

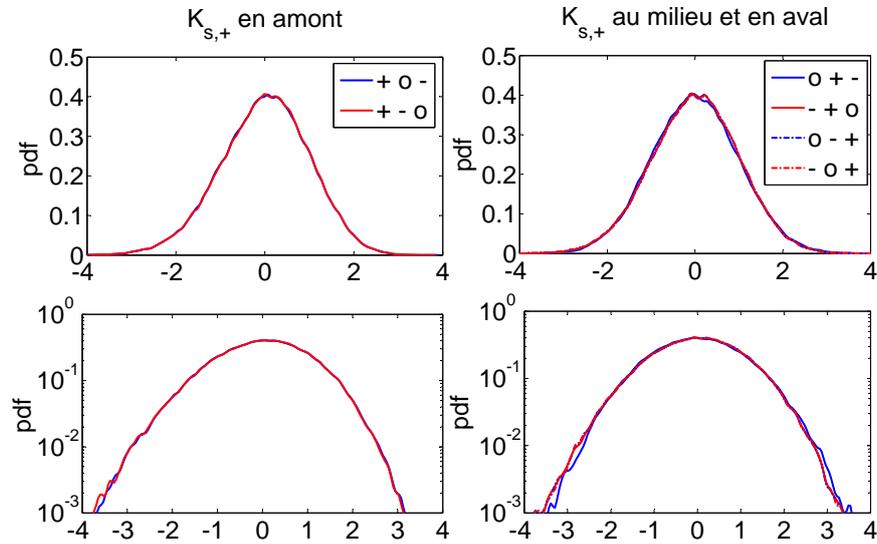


FIGURE 4.20 – Cas test “Trois-champs” (pour une distribution log-normale) : fonctions de densité de probabilité du coefficient de ruissellement CR pour le LRE estimées avec une fenêtre de lissage $\eta = 0.05$ pour des échantillons de sorties standardisés ; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas).

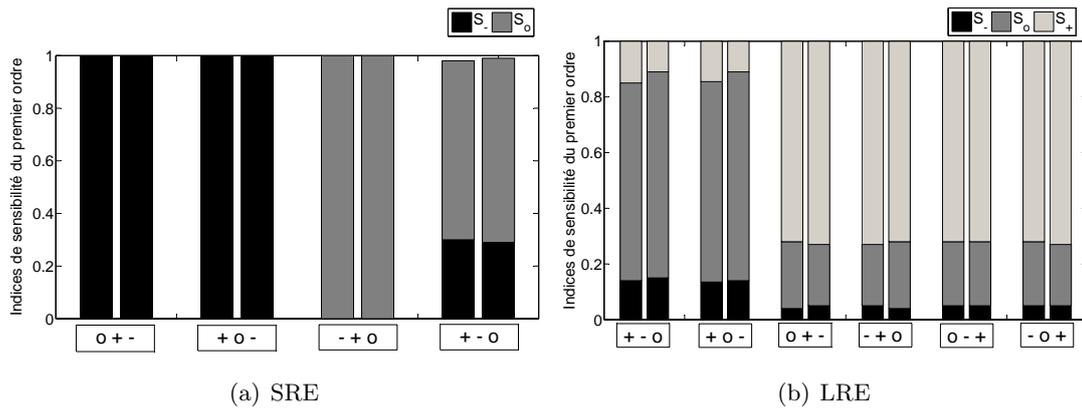


FIGURE 4.21 – Cas test “Trois-champs” (pour une distribution log-normale) : indices de sensibilité du pic de débit Q_{\max} ; (a) SRE ; (b) LRE. Pour chaque distribution spatiale, les résultats obtenus pour la distribution uniforme sont représentés sur la colonne de gauche et ceux pour la distribution log-normale sur la colonne de droite.

Les figures 4.21(a) et 4.21(b) comparent les indices de sensibilité du premier ordre obtenus avec les deux distributions (uniforme et log-normale) pour les deux événements pluvieux. Des résultats très proches sont obtenus, conduisant ainsi aux mêmes conclusions, à savoir que le paramètre ayant le plus d'effet sur les sorties dépend de l'état de saturation du sol. Pour un sol (très) peu saturé, le K_s le plus influent est celui se situant en aval du domaine alors que pour un sol plus proche de la saturation, le K_s le plus influent est généralement le plus infiltrant.

4.2.6 Influence de la longueur du domaine d'étude

Le cas test “Trois-champs” étant réalisé sur un domaine de simulation relativement petit, nous nous sommes intéressés à l'effet de l'échelle spatiale du domaine sur les résultats. Pour étudier l'impact de la longueur du domaine, nous reprenons ce cas test pour une configuration de longueur dix fois plus grande, *i.e.*, $L = 48$ m avec le LRE, le SRE étant trop court pour un domaine aussi long. La conclusion générale est que la longueur du domaine n'affecte pas les résultats obtenus. Une première observation intéressante est que les nuages de points et les pdf's ont les mêmes allures, aussi bien pour la sortie Q_{\max} que CR (voir les figures 4.22, 4.23 et 4.24).

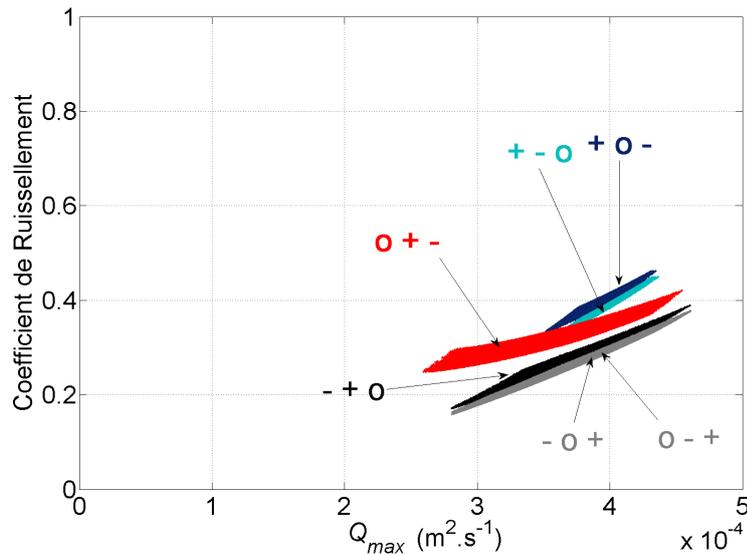


FIGURE 4.22 – Cas test “Trois-champs” (pour un domaine dix fois plus long et le LRE) : pics de débit Q_{\max} et coefficients de ruissellement CR pour les six distributions spatiales possibles des types de sol.

En comparant les intervalles de confiance de l'indice de saturation du sol (I_c/K_s), on remarque également que ces derniers sont très proches pour les deux longueurs du domaine et suivent les mêmes variations (voir la figure 4.25). En outre, l'analyse de sensibilité conduit elle aussi aux mêmes résultats concernant le paramètre le plus influent (voir les figures 4.26(a) et 4.26(b)). La seule différence significative est que l'indice de sensibilité pour $K_{s,+}$ s'annule lorsque le sous-domaine le plus perméable est situé en

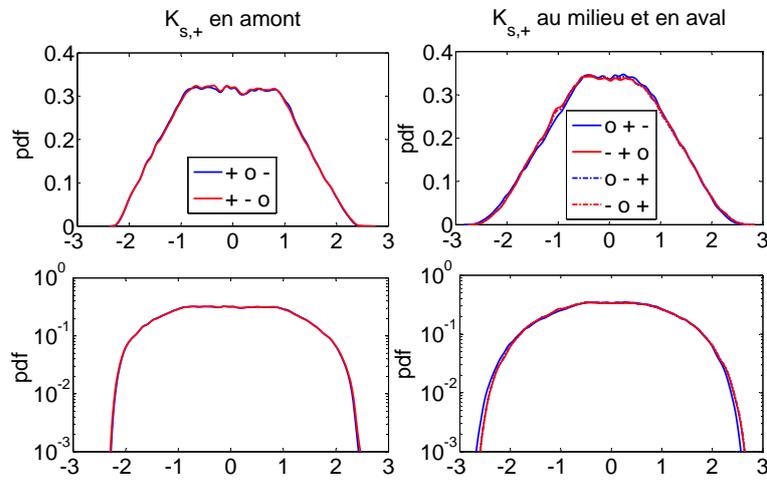


FIGURE 4.23 – Cas test “Trois-champs” (pour un domaine dix fois plus long et le LRE) : fonctions de densité de probabilité du pic de débit Q_{\max} estimées avec une fenêtre de lissage $\eta = 0.05$ pour des échantillons de sorties standardisés ; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas).

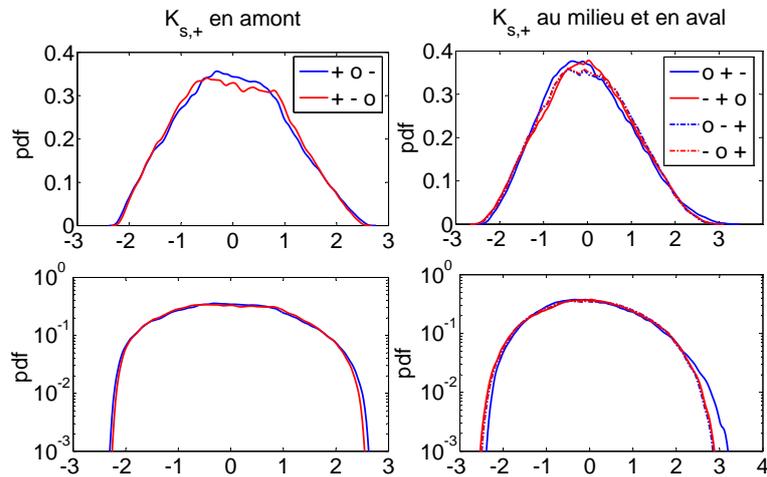


FIGURE 4.24 – Cas test “Trois-champs” (pour un domaine dix fois plus long et le LRE) : fonctions de densité de probabilité du coefficient de ruissellement CR estimées avec une fenêtre de lissage $\eta = 0.05$ pour des échantillons de sorties standardisés ; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas).

amont (ce qui était déjà le cas pour CR avec le LRE). Ce résultat peut être expliqué par le fait que la longueur importante du domaine conduit à une augmentation de la distance entre le sous-domaine en amont et l'exutoire, diminuant ainsi sa contribution aux débits à l'exutoire.

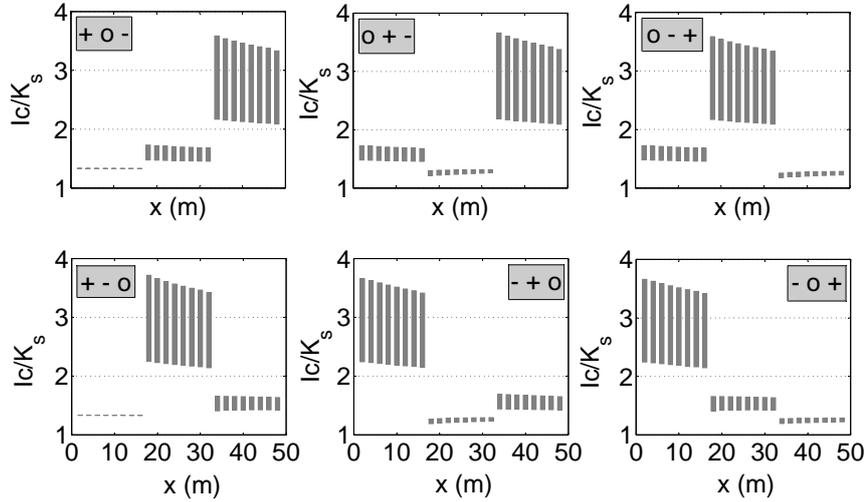


FIGURE 4.25 – Cas test “Trois-champs” (pour un domaine dix fois plus long et le LRE) : intervalles de confiance du rapport I_c/K_s au temps final en fonction de la position spatiale pour les six distributions spatiales possibles des types de sol.

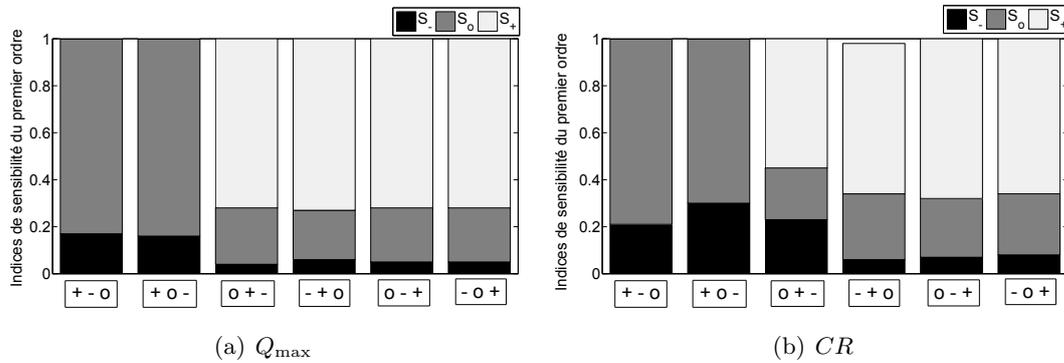


FIGURE 4.26 – Cas test “Trois-champs” (pour un domaine dix fois plus long et le LRE) : indices de sensibilité de Sobol ; (a) pour le débit maximal à l'exutoire (Q_{\max}) ; (b) pour le coefficient de ruissellement (CR).

4.3 Cas test : “Bandes Enherbées”

4.3.1 Description du cas test

Dans cette section, un deuxième cas test nommé “Bandes Enherbées” est étudié. On considère un plan unidimensionnel de longueur $L = 318$ m et de pente constante $\partial_x z = 2\%$. Les paramètres du sol sont uniformes (excepté le K_s) et les valeurs suivantes ont été choisies :

$$f = 0.25, \quad \theta_s - \theta_i = 0.3, \quad h_f = 0.023 \text{ m.}$$

Une pluie constante d’intensité $R(t)$ [L/T] est simulée pendant une durée T_R [T] puis stoppée. Le temps de simulation total est noté T [T]. On considère deux événements pluvieux : SRE (pour “Short Rainfall Event”) et LRE (pour “Long Rainfall Event”). Les valeurs de l’intensité de pluie R , la durée de pluie T_R et le temps de simulation sont indiqués dans le tableau 4.4.

Tableau 4.4 Cas test “Bandes Enherbées”, données pour les deux événements pluvieux : intensité de la pluie R , durée de la pluie T_R , et temps total de simulation T .

Événement	R (m.s ⁻¹)	T_R (s)	T (s)
SRE	$8.33 \cdot 10^{-6}$	3,600	5,000
LRE	$1.11 \cdot 10^{-5}$	8,500	9,500

Le domaine contient des bandes enherbées (BE) d’une longueur totale de 6 m. Deux distributions spatiales des BE sont considérées, comme représentées dans la figure 4.27 : soit trois BE larges de 2 m de long situées respectivement à l’exutoire, à un tiers et deux tiers de la longueur du domaine en partant de l’exutoire, soit une seule BE large de 6 m de long localisée à l’exutoire. Une valeur de conductivité hydraulique à saturation est attribuée à la (les) BE(s) et une autre pour le reste du domaine que nous appelons “champ”. Les deux K_s sont des variables aléatoires indépendantes suivant une distribution uniforme. Pour le champ et la (les) BE(s), $K_{s,i}$ suit une loi de distribution uniforme

$$K_{s,i} \sim \mathcal{U}[K_{s,i}^{\min}, K_{s,i}^{\max}], \quad i \in \{champ, BE\}$$

où $K_{s,i}^{\min}$ et $K_{s,i}^{\max}$ sont les valeurs minimale et maximale de $K_{s,i}$. Ces valeurs sont listées dans le tableau 4.5 et correspondent à des valeurs représentatives de valeurs obtenues pour des BE utilisées en aménagement du territoire afin de diminuer les effets du ruissellement en ralentissant les écoulements.

On considère donc deux configurations spatiales possibles pour les BE et deux événements pluvieux, on obtient alors quatre combinaisons possibles : 1 BE avec le SRE, 3 BE avec le SRE, 1 BE avec le LRE et enfin 3 BE avec le LRE.

Tableau 4.5 Cas test “Bandes Enherbées” : valeurs minimales et maximales de K_s en $m.s^{-1}$ (en $mm.h^{-1}$).

	champ	BE
K_s^{\min}	$3.57 \cdot 10^{-6}$ (13)	$2.22 \cdot 10^{-5}$ (80)
K_s^{\max}	$6.35 \cdot 10^{-6}$ (23)	$3.33 \cdot 10^{-5}$ (120)

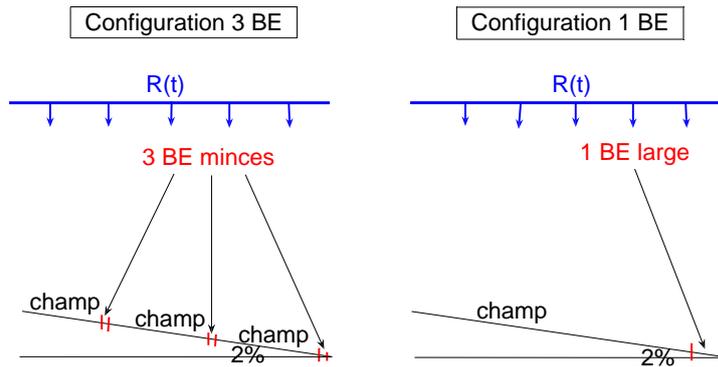


FIGURE 4.27 – Cas test “Bandes Enherbées” : localisations des bandes enherbées ; trois bandes enherbées régulièrement réparties (gauche) ou une bande enherbée trois fois plus large à l’aval (droite).

Les deux variables aléatoires d’entrée $K_{s,i}$ relatives au champ et aux BE sont échantillonnées par la méthode de Monte Carlo avec une taille d’échantillon $M = 100000$ et ce pour les deux configurations spatiales et les deux événements pluvieux. Les échantillons obtenus pour les variables de sorties (Q_{\max} , CR) sont analysés. Les résultats sont présentés dans les sous-sections suivantes.

4.3.2 Influence de la durée de l’événement pluvieux

Tout comme pour le cas test précédent, la durée de l’événement pluvieux s’avère importante au regard des réponses du modèle. Nous présentons différents résultats, comme la corrélation des variables de sortie (Q_{\max} et CR), leurs distributions ou encore différents quantiles pour évaluer les événements rares.

La figure 4.28 représente les couples (Q_{\max} , CR) correspondant aux 100000 réponses du modèle pour les quatre configurations (1 ou 3 BE ; SRE ou LRE). Pour chaque configuration, les deux sorties Q_{\max} et CR sont si fortement corrélées que les points s’alignent le long de courbes. Les coefficients sont respectivement : 0.959 pour 1 BE avec le SRE, 0.985 pour 3 BE avec le SRE, 0.999 pour 1 BE avec le LRE et 0.995 pour 3 BE avec le LRE. De plus, comme attendu, les valeurs prises par Q_{\max} et CR sont plus grandes pour le LRE car, l’événement pluvieux étant plus long, il génère plus d’eau donc plus de ruissellement que pour le SRE.

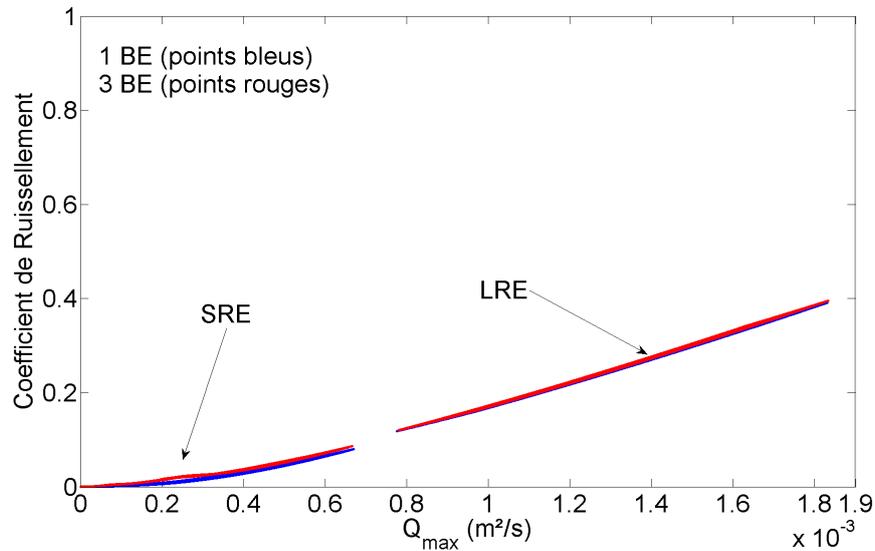


FIGURE 4.28 – Cas test “Bandes Enherbées” avec le SRE et le LRE : pics de débit Q_{\max} et coefficients de ruissellement CR pour les deux configurations (une large bande enherbée à l’aval (1 BE), ou trois bandes enherbées étroites (3 BE)).

Concernant Q_{\max} , pour le SRE et le LRE, les valeurs sont contenues approximativement dans le même intervalle indépendamment de la distribution spatiale des BE. Pour le SRE on a : $0 < Q_{\max} < 6.7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et pour le LRE : $7.7 \cdot 10^{-4} < Q_{\max} < 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Concernant CR , les valeurs sont légèrement plus grandes pour la configuration avec 1 BE et cette différence est plus significative pour le SRE. Pour le SRE on a : $0 < CR < 8\%$ pour la configuration à 1 BE et $0 < CR < 8.6\%$ pour celle à 3 BE ; pour le LRE on a : $11.8 < CR < 39.1\%$ pour la configuration à 1 BE et $12 < CR < 39.5\%$ pour les 3 BE. On peut donc conclure que l’influence de la distribution spatiale des BE est faible concernant la variabilité du ruissellement et presque nulle concernant les débits à l’exutoire.

Le tableau 4.6 présente les estimations statistiques des valeurs suivantes pour Q_{\max} (lignes blanches) et CR (lignes grises) : la moyenne μ , l’écart type σ , le coefficient de variation $cov = \sigma/\mu$, la médiane Q_{50} et le 90ème percentile Q_{90} . En ce qui concerne Q_{\max} , ces valeurs confirment le fait que les configurations spatiales avec 1 BE ou 3 BE donnent lieu à des résultats similaires pour le LRE et très proches pour le SRE. À noter que pour le SRE, la présence des 3 BE diminue très légèrement toutes les valeurs de Q_{\max} exceptée la médiane. À l’inverse, toutes les valeurs de CR sont plus élevées pour la configuration à 3 BE, excepté le coefficient de variation et ce plus significativement lors du SRE. L’impact de la distribution spatiale des BE dépend donc de la sortie que l’on considère. Répartir les 3 BE sur le domaine diminue légèrement les valeurs moyennes des débits maximaux à l’exutoire mais augmente sensiblement celles du ruissellement. En outre, alors que les estimations de la moyenne et de la médiane sont différentes

Tableau 4.6 Cas test “Bandes Enherbées” : moyenne $\mu = \hat{E}[Q_{\max}]$, écart type $\sigma = \sqrt{\hat{V}(Q_{\max})}$, coefficient de variation $cov = \sigma/\mu$, médiane Q_{50} , et 90ème percentile Q_{90} pour le pic de débit Q_{\max} (lignes blanches) et le coefficient de ruissellement CR (lignes grises).

	SRE		LRE	
	1 BE	3 BE	1 BE	3 BE
μ	1.49·10 ⁻⁴	1.44·10 ⁻⁴	1.30·10 ⁻³	1.30·10 ⁻³
	1.10·10 ⁻²	1.30·10 ⁻²	2.48·10 ⁻¹	2.51·10 ⁻¹
σ	1.92·10 ⁻⁴	1.81·10 ⁻⁴	2.53·10 ⁻⁴	2.53·10 ⁻⁴
	1.76·10 ⁻²	1.91·10 ⁻²	6.65·10 ⁻²	6.71·10 ⁻²
cov	129%	125%	19%	19%
	160%	147%	27%	27%
Q_{50}	0	5.05·10 ⁻⁵	1.30·10 ⁻³	1.30·10 ⁻³
	0	2.18·10 ⁻³	2.45·10 ⁻¹	2.49·10 ⁻¹
Q_{90}	4.63·10 ⁻⁴	4.52·10 ⁻⁴	1.64·10 ⁻³	1.65·10 ⁻³
	4.06·10 ⁻²	4.49·10 ⁻²	3.40·10 ⁻¹	3.44·10 ⁻¹

pour le SRE, les mêmes valeurs sont obtenues pour le LRE, ce qui est en accord avec l'allure des pdf's décrites ci-dessous (voir les figures 4.29(a) et 4.29(b)). Pour les deux variables de sortie, la dispersion est beaucoup plus importante pour le SRE, entre 125 et 160%, alors qu'elle est inférieure à 27% pour le LRE. Tout comme pour le cas test “Trois-champs”, l'augmentation de la durée de la pluie conduit à une diminution de la dispersion.

À ce stade, nous pouvons conclure que la présence d'une unique BE permet de diminuer significativement le coefficient de ruissellement CR lors du SRE. Cependant, cette tendance semble s'inverser au regard du pic de débit Q_{\max} .

Les figures 4.29(a) et 4.29(b) représentent les pdf's, respectivement, de Q_{\max} et CR , estimées par la méthode de Parzen-Rozenblatt *via* des échantillons de sorties standardisés pour les quatre configurations (1 ou 3 BE ; SRE ou LRE). Notons que les résultats pour Q_{\max} et CR sont très semblables, aussi les commentaires et conclusions qui suivent sont faits pour ces deux sorties simultanément afin d'éviter les répétitions. Cette similitude corrobore le fait que les corrélations obtenues pour les deux variables de sortie sont très élevées (supérieures à 0.995) et que les nuages de points s'alignent sur une droite. Cependant, il est à noter une différence significative entre 1 BE et 3 BE concernant la pdf de Q_{\max} pour le SRE sur la figure 4.29(a). Les deux pdf's présentent

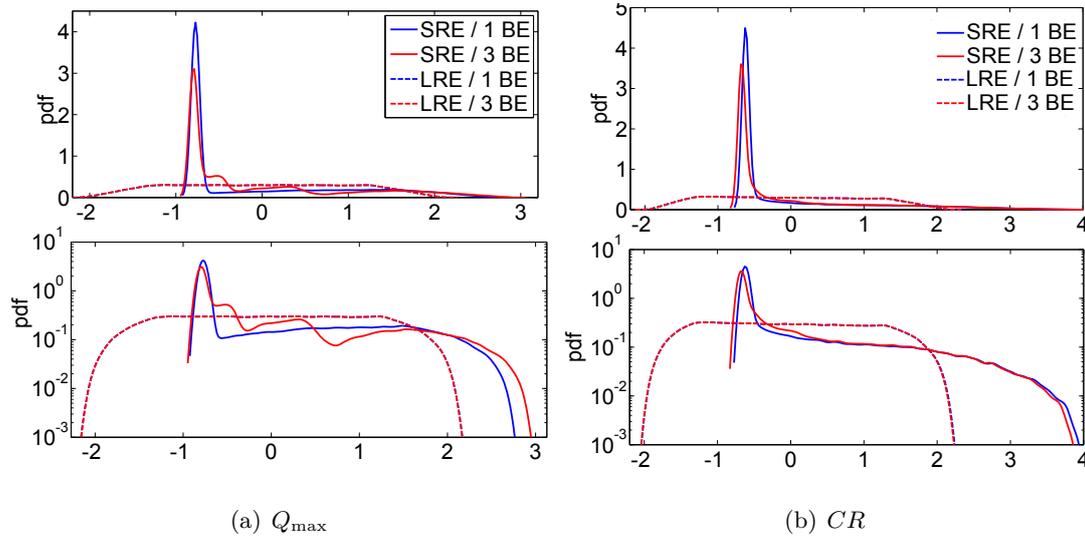


FIGURE 4.29 – Cas test “Bandes Enherbées” : fonctions de densité de probabilité estimées avec une fenêtre de lissage $\eta = 0.05$ pour des échantillons de sorties standardisés ; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas) ; (a) sortie Q_{\max} ; (b) sortie CR .

toutes deux un pic marqué en début de distribution mais alors que la pdf pour 1 BE devient régulière et comparable à la distribution uniforme, celle pour 3 BE oscille avant de converger vers la même allure en queue de distribution.

Le SRE et le LRE génèrent des distributions de sorties très différentes, la durée de l'événement pluvieux impacte donc la distribution des variables de sortie. Concernant le LRE, les distributions des variables de sortie sont similaires pour les deux configurations de BE (1 BE et 3 BE). La configuration spatiale des BE n'a pas d'effet sur la distribution des variables de sorties. En outre, les distributions ressemblent à la fonction rectangulaire, elles se rapprochent de la loi uniforme avec des pdf's voire essentiellement plates. On peut d'ailleurs constater dans le tableau 4.6 l'égalité des valeurs pour l'estimation de la moyenne et l'estimation de la médiane.

Concernant le SRE, les pdf's estimées sont différentes bien qu'ayant des allures comparables. Ceci signifie que la répartition des BE impacte la distribution des deux variables de sortie. De plus, elles sont beaucoup plus marquées et présentent un pic relativement important autour de l'abscisse -1, ce qui correspond aux nombreuses simulations générant des débits nuls à l'exutoire. Les échantillons étant centrés et normés, ces pics se situent autour d'une valeur égale à un écart type en dessous de la moyenne (0). Le nombre important de réponses nulles n'est pas visible sur la figure 4.28 car une représentation à l'aide de nuages de points ne permet pas de visualiser l'occurrence des sorties contrairement à l'analyse des distributions. De plus, ces pics marqués non centrés en 0 traduisent une distribution non symétrique, ce qui explique la différence entre la moyenne et la médiane dans le tableau 4.6. Il est à noter aussi que les valeurs moyennes des sorties du modèle sont différentes des sorties du modèle pour les valeurs moyennes des paramètres (non représentées ici). Ceci souligne l'importance des

processus non linéaires.

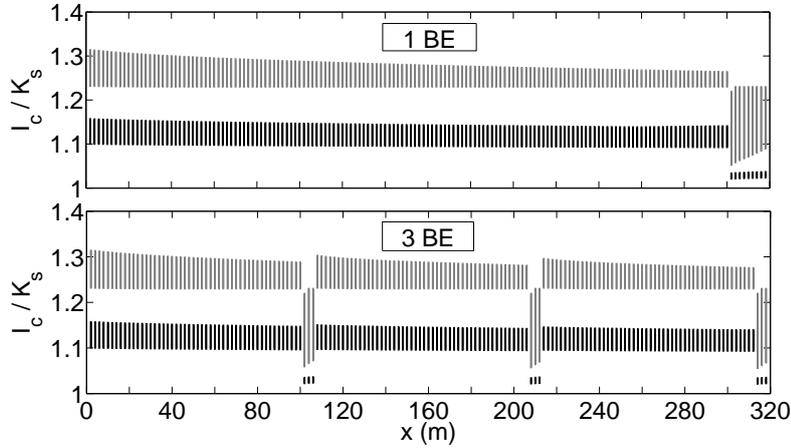


FIGURE 4.30 – Cas test “Bandes Enherbées” : intervalles de confiance du rapport I_c/K_s a temps final en fonction de la position spatiale pour les deux configurations (une large bande enherbée en aval (1 BE), ou trois bandes enherbées étroites (3 BE)); SRE (en gris) et LRE (en noir).

Comme pour le cas test “Trois-champs”, la durée de l’événement pluvieux a un impact important sur les variables de sortie. Nous nous intéressons donc un peu plus en détail au processus d’infiltration en analysant la spatialisation des états de saturation des sols. La figure 4.30 présente les intervalles de confiance (pour les 100000 réponses du modèle) du rapport I_c/K_s au temps final, en fonction de la position spatiale, en gris pour le SRE et en noir pour le LRE. Comme attendu, en raison de la prolongation de la durée de pluie, les rapports sont plus proches de 1 pour le LRE. Ils sont d’ailleurs plus proches de 1 que ceux obtenus lors du cas test “Trois-champs” (voir la figure 4.6), signifiant que le sol est très proche de la saturation. Pour chaque événement pluvieux, les intervalles de confiance des deux configurations spatiales (1 BE and 3 BE) sont semblables. De plus, alors que pour le SRE la variabilité du rapport I_c/K_s est plus forte au niveau des BE (deux à quatre fois plus élevée) que pour le champ, pour le LRE elle est plus élevée au niveau du champ (approximativement trois fois plus importante) que pour les BE. Enfin, concernant le SRE, un résultat intéressant est que le fait de répartir 3 BE au lieu d’en imposer une seule à l’exutoire, revient en quelque sorte à homogénéiser le niveau de variabilité de I_c/K_s le long du domaine.

4.3.3 Estimation des quantiles

Les résultats précédents ne concernant que les débits à l’exutoire, il est intéressant de mieux comprendre ce qui se passe le long du domaine. En effet, deux simulations peuvent donner lieu à des sorties identiques concernant l’exutoire mais sensiblement différentes ailleurs sur le domaine. Nous nous intéressons aux débits spatialisés et plus précisément à leurs maxima sur la durée de simulation.

Les figures 4.31 et 4.32 présentent les trois estimateurs statistiques μ , Q_{50} et Q_{90} pour le pic de débit $\max_t Q(x, t)$ en fonction de la position spatiale et des deux valeurs déterministes de cette quantité (avec $K_s = K_s^{\min}$ ou K_s^{\max}). Les courbes pour Q_{50} coïncident presque avec celles de $\max_t Q(x, t)$ obtenues pour $K_s = K_s^{\text{mean}} = \frac{1}{2}(K_s^{\min} + K_s^{\max})$ (non représentées pour ne pas surcharger les figures). Contrairement au LRE où l’on obtenait l’égalité, pour le SRE la médiane est inférieure à la moyenne pour 3 BE et supérieure puis inférieure pour 1 BE. Pour les deux configurations, la distribution n’est donc pas uniforme en espace. De plus, pour le SRE et le LRE, CR est légèrement plus grand pour la configuration avec 1 BE. Bien que les volumes de ruissellement soient comparables pour 1 BE et 3 BE, la distribution spatiale du débit maximal varie. En effet, pour les deux figures 4.31 et 4.32, les débits le long du domaine spatial sont plus faibles pour 3 BE en raison de la présence des trois BE qui ralentissent l’écoulement. En outre, cet effet est plus significatif pour le SRE, ceci étant dû à la saturation du sol. Ainsi, pour des processus tels que l’érosion qui sont influencés par les débits maximaux, le résultat principal de la figure 4.31 est que la configuration avec 3 BE réduit (spécifiquement pour le SRE) la probabilité d’obtenir de fortes valeurs pour $\max_t Q$. De plus, une information pertinente obtenue grâce à l’approche stochastique est que, pour le SRE (resp. le LRE), le 90ème percentile est 33% (resp. 11%) plus faible pour la configuration à 3 BE que pour celle à 1 BE.

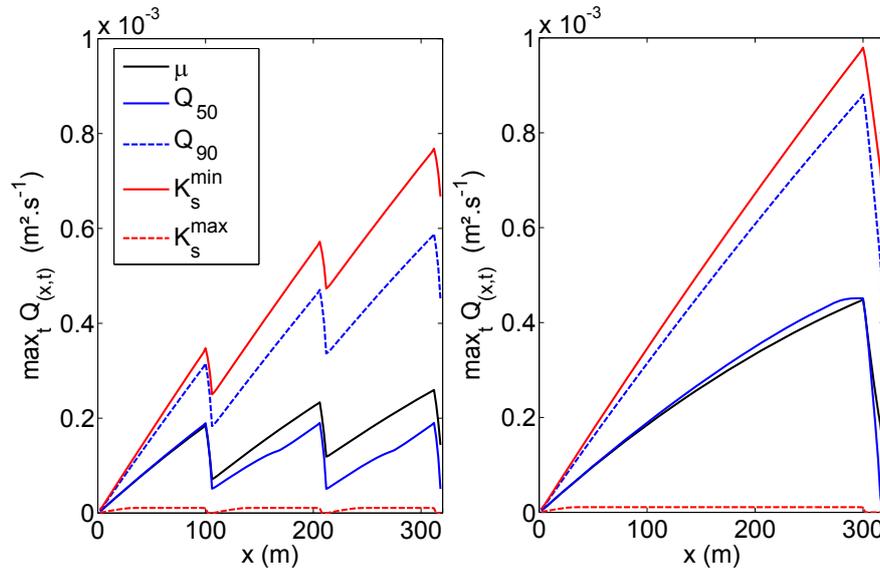


FIGURE 4.31 – Cas test “Bandes Enherbées” (3 BE à gauche, 1 BE à droite) : estimations statistiques des pics de débit $\max_t Q(x, t)$ en fonction de la position spatiale (moyenne $\mu = \hat{E}[\max_t Q(x, t)]$, médiane Q_{50} , et 90ème percentile Q_{90}) et quelques valeurs déterministes de ces quantités (avec $K_s = K_s^{\min}$ ou K_s^{\max}) pour le SRE.

Les résultats de l’analyse de sensibilité pour les quatre configurations (1 BE ou 3 BE; SRE ou LRE) montrent que les indices de sensibilité du premier ordre relatifs au champ sont plus forts (compris entre 92 et 96%) que ceux relatifs aux BE. Ceci signifie

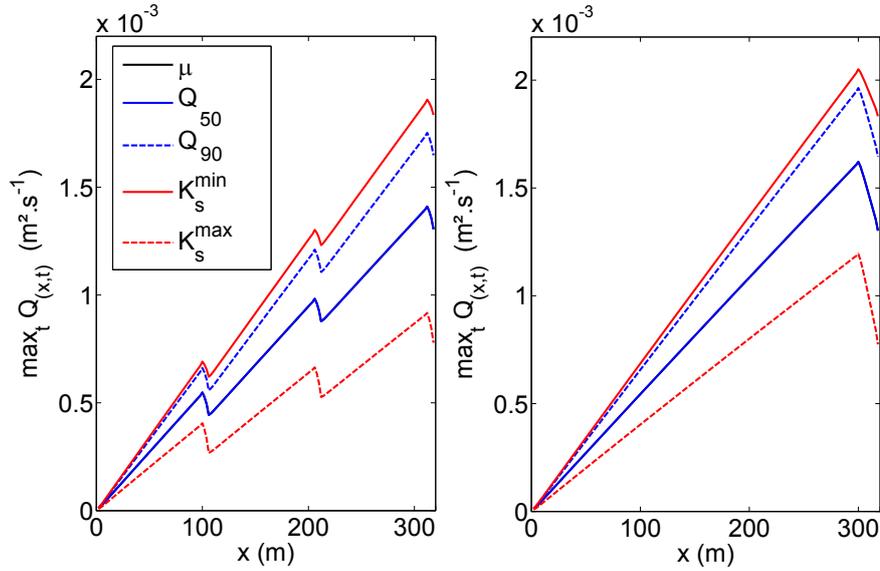


FIGURE 4.32 – Cas test “Bandes Enherbées” (3 BE à gauche, 1 BE à droite) : estimations statistiques des pics de débit $\max_t Q(x, t)$ en fonction de la position spatiale (moyenne $\mu = \hat{E}[\max_t Q(x, t)]$, médiane Q_{50} , et 90ème percentile Q_{90}) et quelques valeurs déterministes de ces quantités (avec $K_s = K_s^{\min}$ ou K_s^{\max}) pour le LRE.

que seul le K_s du champ est un paramètre influent. Ce résultat était attendu au vu des valeurs élevées pour les capacités d’infiltration des BE. En effet, celles-ci infiltrant presque toute l’eau, elles ne contribuent que très peu aux débits à l’exutoire.

4.3.4 Influence de la loi de distribution des K_s

La loi log-normale étant fréquemment utilisée en applications hydrologiques, nous vérifions que nos conclusions ne dépendent pas du choix de la loi de distribution choisie pour les K_s . Nous simulons donc le même cas test en utilisant une distribution log-normale de moyenne et variance telles que K_s appartient à l’intervalle prescrit par la distribution uniforme avec une probabilité 0.9958.

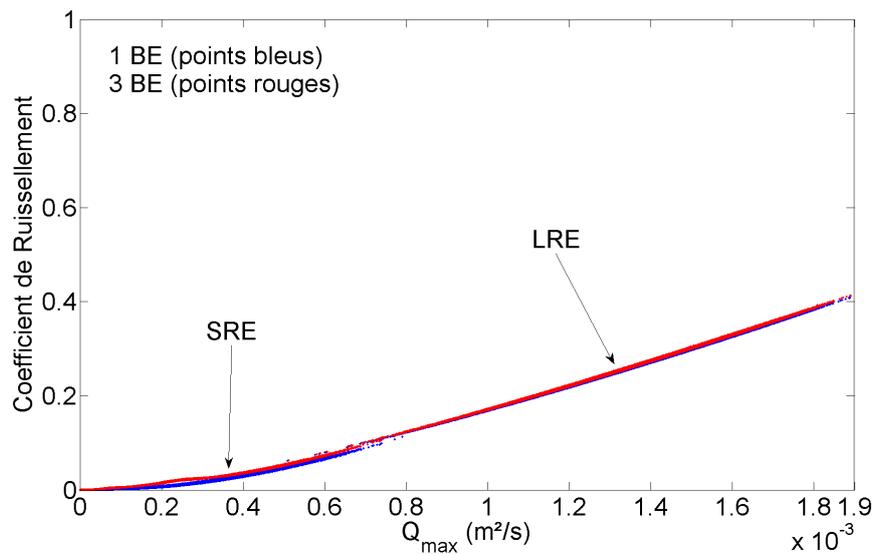


FIGURE 4.33 – Cas test “Bandes Enherbées” (pour une distribution log-normale) : pics de débit Q_{\max} et coefficients de ruissellement CR pour les deux configurations (une large bande enherbée à l’aval (1 BE), ou trois bandes enherbées étroites (3 BE)).

Les résultats sur la très forte corrélation entre les deux variables de sortie et la faible influence de l’organisation spatiale des BE sont maintenus. En effet, sur la figure 4.33 représentant les 100000 couples (Q_{\max}, CR) , les nuages de points sont quasiment identiques à ceux obtenus pour les distributions uniformes sur la figure 4.28. De plus, les conclusions tirées des distributions obtenues pour les variables de sortie restent inchangées (voir les figures 4.34(a) et 4.34(b)). La configuration spatiale des BE n’a que très peu d’impact (voire pas du tout pour le LRE) sur les distributions des réponses du modèle. Il en est de même concernant les indices de saturation du sol, les commentaires et remarques faits pour la figure 4.30 restent valables pour la figure 4.35.

La distribution log-normale ne modifie pas non plus les conclusions concernant l’occurrence des événements rares. Les estimations statistiques des maxima des débits spatialisés sont similaires à celles obtenues pour la distribution uniforme (voir les figures 4.36(a) et 4.36(b)), avec un changement relatif de 10 à 20%. Les enveloppes contenant ces estimations sont moins larges dans le cas de distributions log-normales : la médiane Q_{50} est plus grande et le 90ème percentile Q_{90} est plus petit. Ces changements qualitatifs étaient attendus puisque la distribution log-normale assigne plus de

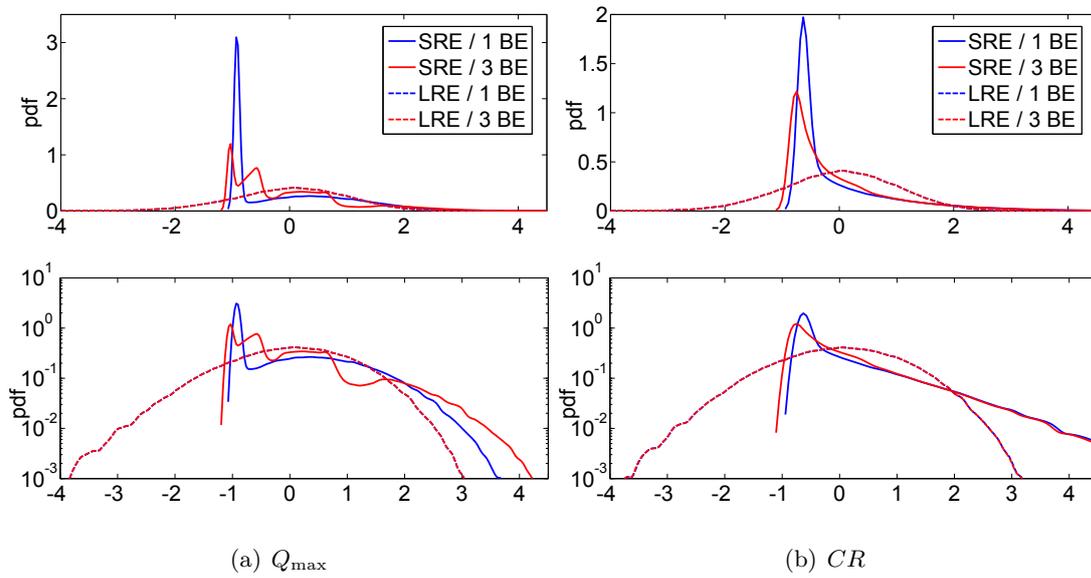


FIGURE 4.34 – Cas test “Bandes Enherbées” (pour une distribution log-normale) : fonctions de densité de probabilité estimées avec une fenêtre de lissage $\eta = 0.05$ et des échantillons de sorties standardisés pour le SRE et le LRE ; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas) ; (a) sortie Q_{\max} ($\eta = 0.05$) ; (b) sortie CR ($\eta = 0.05$ pour SRE et $\eta = 0.1$ pour LRE).

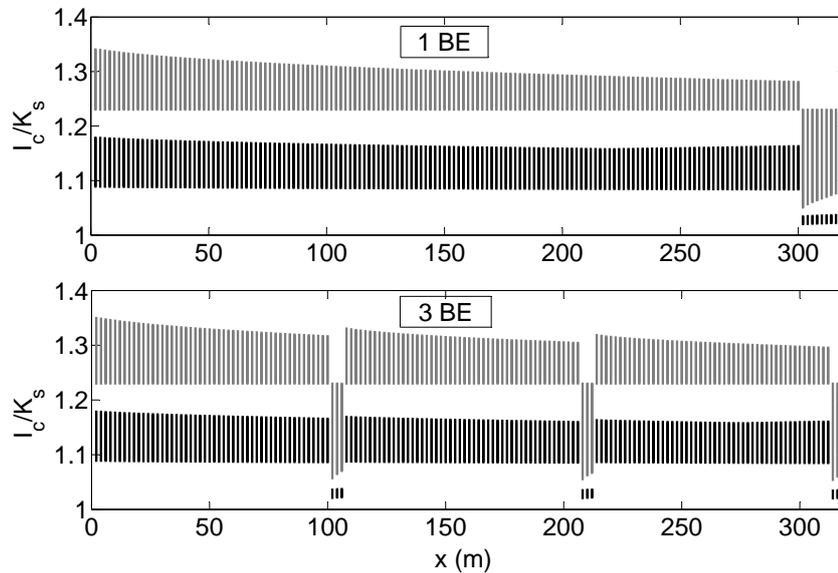
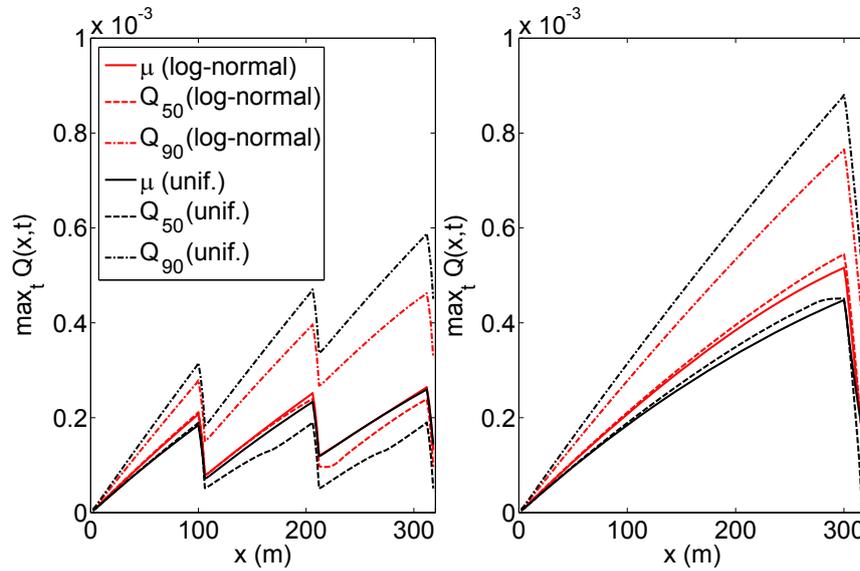
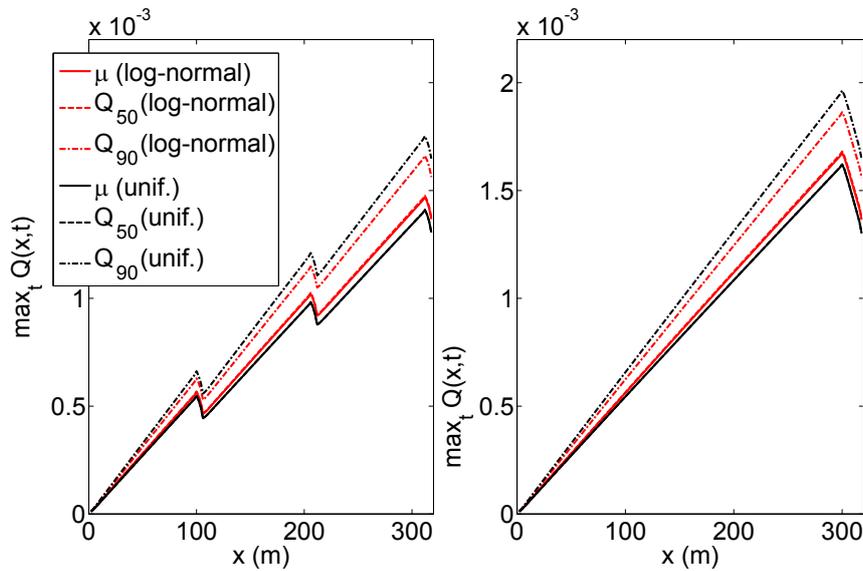


FIGURE 4.35 – Cas test “Bandes Enherbées” (pour une distribution log-normale) : intervalles de confiance du rapport I_c/K_s au temps final en fonction de la position spatiale pour les deux configurations (une large bande enherbée à l’aval (1 BE) ou trois bandes enherbées étroites (3 BE)) ; SRE (en gris) et LRE (en noir).



(a) SRE



(b) LRE

FIGURE 4.36 – Cas test “Bandes Enherbées” (pour une distribution log-normale) : estimations statistiques des pics de débit $\max_t Q(x, t)$ en fonction de la position spatiale (moyenne $\mu = \hat{E}[\max_t Q(x, t)]$, médiane Q_{50} et 90ème percentile Q_{90}) ; à gauche pour trois bandes enherbées étroites (3 BE) et à droite pour une large bande enherbée en aval (1 BE) ; (a) pour le SRE ; (b) pour le LRE.

pois aux petites valeurs de K_s , ce qui conduit à de plus fortes valeurs pour les taux de ruissellement. Cependant, le principal point de notre conclusion reste inchangé, à savoir que la présence des 3 BE diminue la probabilité d'occurrence des valeurs extrêmes pour les débits spatialisés et ce plus significativement pour le SRE.

4.3.5 Influence de la perméabilité des bandes enherbées

Nous nous intéressons enfin à l'influence des intervalles de valeurs retenues dans la paramétrisation de la loi uniforme. Pour étudier l'effet de ces valeurs minimales et maximales, considérées dans le tableau 4.5, nous simulons ce même cas test pour des valeurs moins perméables au niveau des BE, référencées dans le tableau 4.7.

Tableau 4.7 Cas test “Bandes Enherbées” (pour une perméabilité des BE plus faible) : valeurs minimales et maximales de K_s en $m.s^{-1}$ (en $mm.h^{-1}$).

	champ	BE
K_s^{\min}	$4.40 \cdot 10^{-6}$ (16)	$1.11 \cdot 10^{-5}$ (40)
K_s^{\max}	$7.18 \cdot 10^{-6}$ (26)	$1.67 \cdot 10^{-5}$ (60)

Les résultats obtenus corroborent les observations précédentes. Les descriptions et les commentaires des différentes observations (figure 4.37 pour la corrélation des sorties, figures 4.38(a) et 4.38(b) pour les distributions des variables de sortie, figure 4.39 pour les indices de saturation du sol et figures 4.40(a) et 4.40(b) pour l'occurrence des pics de débits spatialisés) sont les mêmes que précédemment. Les deux conclusions principales restent inchangées : d'une part il n'y a pas de différence significative en termes de ruissellement et de débit à l'exutoire entre 1 BE et 3 BE et d'autre part la présence des 3 BE ralentit les débits le long du domaine et diminue la probabilité d'occurrence de valeurs extrêmes de débit à l'intérieur du domaine.

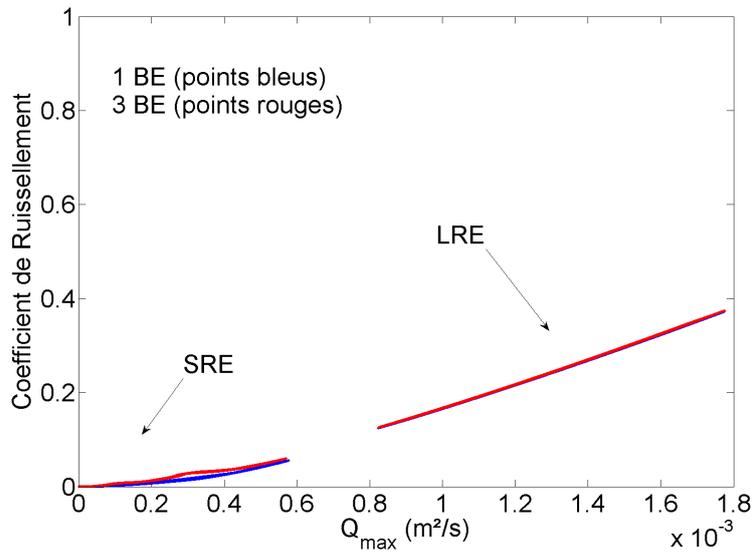


FIGURE 4.37 – Cas test “Bandes Enherbées” (pour une perméabilité plus faible des BE) : pics de débit Q_{\max} et coefficients de ruissellement CR pour les deux configurations (une large bande enherbée en aval (1 BE) ou trois bandes enherbées étroites (3 BE)).

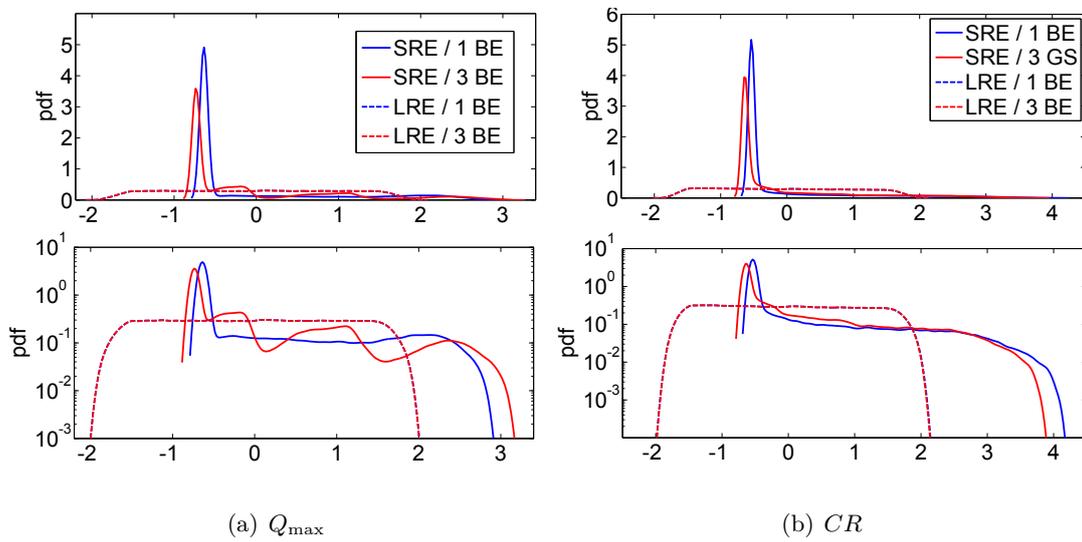


FIGURE 4.38 – Cas test “Bandes Enherbées” (pour une perméabilité plus faible des BE) : fonctions de densité de probabilité estimées avec une fenêtre de lissage $\eta = 0.05$ et des échantillons de sorties standardisés pour le SRE et le LRE ; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas) ; (a) sortie Q_{\max} ; (b) sortie CR .

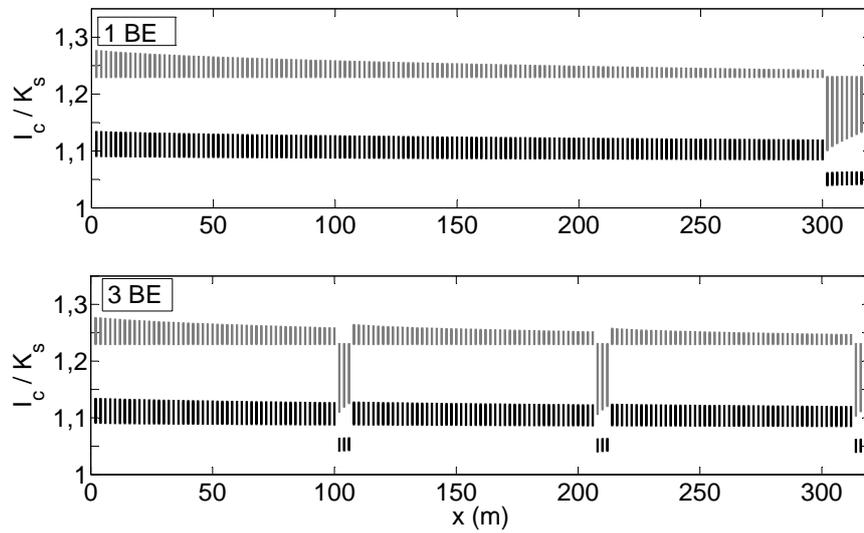
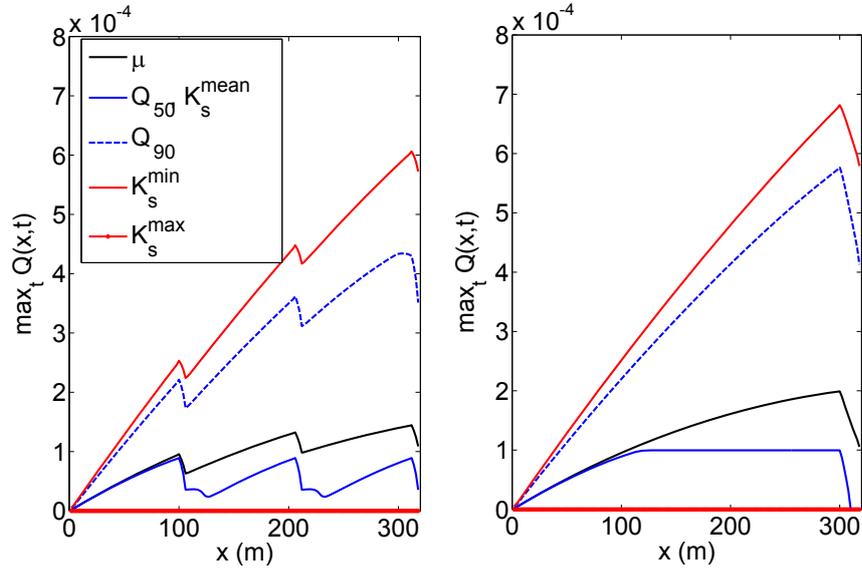
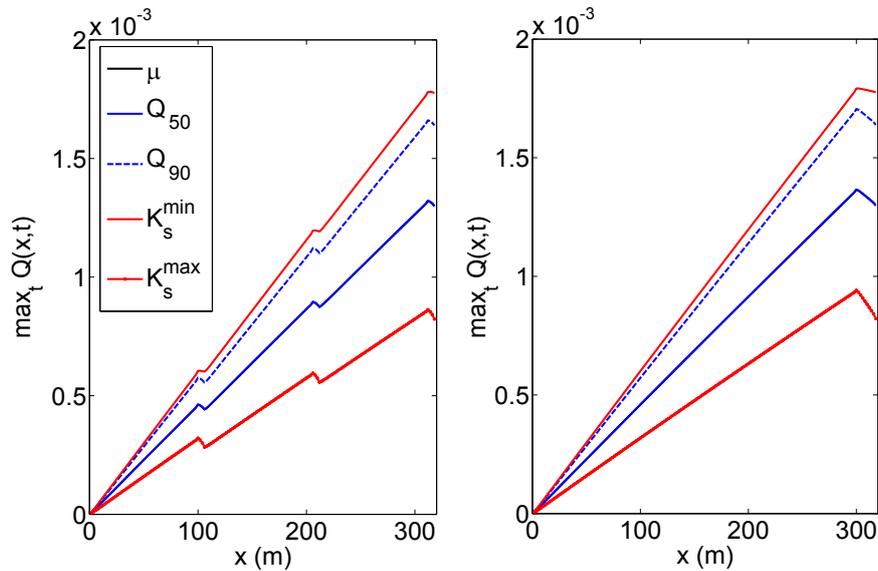


FIGURE 4.39 – Cas test “Bandes Enherbées” (pour une perméabilité plus faible des BE) : intervalles de confiance du rapport I_c/K_s au temps final en fonction de la position spatiale pour les deux configurations (une large bande enherbée à l’aval (1 BE) ou trois bandes enherbées étroites (3 BE)); SRE (en gris) et LRE (en noir).



(a) SRE



(b) LRE

FIGURE 4.40 – Cas test “Bandes Enherbées” (pour une perméabilité plus faible des BE) : estimations statistiques des pics de débit $\max_t Q(x, t)$ en fonction de la position spatiale (moyenne $\mu = \hat{E}[\max_t Q(x, t)]$, médiane Q_{50} , et 90ème percentile Q_{90}) et quelques valeurs déterministes de ces quantités (prenant $K_s = K_s^{\min}$ ou K_s^{\max}) (3 BE à gauche, 1 BE à droite); (a) pour le SRE; (b) pour le LRE.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'impact de la variabilité des propriétés du sol sur les écoulements à surface libre causés par des événements pluvieux. Nous avons considéré la conductivité hydraulique à saturation K_s comme paramètre d'entrée incertain dans le cadre du modèle d'infiltration de Green–Ampt. Pour modéliser les incertitudes, le domaine d'écoulement a été découpé en sous-domaines reflétant l'organisation spatiale du territoire (*e.g.*, sous-domaines agricoles, bandes enherbées) et la conductivité hydraulique à saturation a été décrite par des variables aléatoires statistiquement indépendantes et uniformément distribuées, avec une variable aléatoire attribuée à chaque sous-domaine. Concernant les quantités de sortie, nous nous sommes intéressés aux débits à l'exutoire (pic de débit et coefficient de ruissellement) et aussi aux pics de débit en temps à l'intérieur du domaine. Deux cas tests, nommés “Trois-champs” et “Bandes Enherbées” ont été étudiés.

Le cas test “Trois-champs” analyse le rôle de l'organisation spatiale des différents types de sol dans la propagation des incertitudes. Les conclusions dépendent des niveaux de saturation du sol. Pour des longs événements pluvieux générant des sols fortement saturés, la variabilité des sorties du modèle reste modérée. En outre, le paramètre d'entrée le plus influent est le K_s prenant les plus grandes valeurs, sauf quand le sous-domaine le plus perméable est en amont, auquel cas c'est le K_s intermédiaire qui est le plus influent. Pour des courts événements pluvieux avec des sols modérément saturés, le paramètre le plus influent, indépendamment de ses valeurs relatives, est celui en aval, qui est le plus proche de l'exutoire.

Le cas test “Bandes Enherbées” compare les incertitudes de ruissellement obtenues avec deux distributions spatiales de bandes enherbées, à savoir trois bandes enherbées étroites régulièrement réparties le long du domaine ou une seule bande plus large située au niveau de l'exutoire. Une première conclusion est que la durée de la pluie impacte considérablement l'allure des fonctions de densité de probabilité des réponses du modèle. Spécifiquement, des pdf's fortement piquées sont obtenues pour de courts événements pluvieux (et des sols modérément saturés), alors que les pdf's sont relativement étalées et plates pour de longs événements pluvieux (et des sols fortement saturés). Une seconde conclusion est que la distribution des bandes enherbées n'impacte pas la variabilité des sorties du modèle. Cependant, une différence importante concerne la distribution spatiale des débits maximaux en temps puisque la configuration avec trois BE conduit à des valeurs extrêmes moins probables, comme le montrent les valeurs plus faibles du 90ème percentile.

Cette observation est pertinente dans une perspective de disposer les BE en vue de limiter le risque d'érosion puisque le détachement des particules du sol est très sensible aux pics de débit.

Les applications pratiques de ce travail sont doubles. La première permet de déterminer où les efforts doivent être concentrés dans la collecte des paramètres d'entrée pour réduire les incertitudes des sorties lors de la modélisation du ruissellement sur un domaine composé de différents types de sol de capacité d'infiltration différentes. Cette

étude montre que les conclusions dépendent de l'état de saturation du sol. Si le sol n'est que peu saturé, il est pertinent de focaliser les mesures près de l'exutoire. À l'inverse, si le sol est fortement saturé, il convient de concentrer les mesures sur les parties les plus perméables du domaine. La seconde application concerne l'aménagement du territoire. Décider de la répartition spatiale des bandes enherbées dans un sous-domaine où la capacité d'infiltration est incertaine dépend de l'objectif envisagé. Quand le but est de réduire le ruissellement, la répartition des BE n'a que peu d'importance en raison de la variabilité modérée des sorties. En revanche, quand il s'agit de réduire le risque érosif, des bandes enherbées régulièrement réparties sont plus efficaces pour réduire l'occurrence des valeurs extrêmes pour les pics de débit (le détachement des particules du sol étant très sensible à ces valeurs).

Propagation des incertitudes dans le modèle d'érosion de Hairsine–Rose

Sommaire

5.1 Analyse paramétrique du modèle HR	106
5.1.1 Présentation du modèle	106
5.1.2 Principaux paramètres du modèle	107
5.1.3 Synthèse	117
5.2 Propagation des incertitudes	118
5.2.1 Modèle stochastique	118
5.2.2 Choix des valeurs des paramètres	119
5.2.3 Choix des fonctions de densité de probabilité	120
5.3 Cas tests unidimensionnels	122
5.3.1 Paramètres communs à tous les cas tests	122
5.3.2 Érosion par la pluie	122
5.3.3 Érosion par le ruissellement	129
5.3.4 Érosion par la pluie et par le ruissellement	133
5.4 Cas test bidimensionnel	137
5.5 Discussion	141

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la propagation et à la quantification des incertitudes paramétriques au travers du modèle d'érosion proposé par Hairsine–Rose (HR) [54–56]. C'est un modèle dit “à base physique” opérant une séparation conceptuelle sur les différents processus de détachement et de dépôt. Il nécessite un certain nombre de paramètres d'entrée qui sont pour certains peu connus et non-mesurables. Ces paramètres sont généralement calibrés grâce à des jeux de données observées. La difficulté de paramétrer le modèle HR, ou tout autre modèle d'érosion, représente une source d'incertitudes non négligeable amoindrissant les capacités prédictives du modèle. D'après Jetten *et al.* [71], la qualité des modèles d'érosion spatialement distribués est fortement impactée par la forte variabilité spatiale et temporelle des processus mis en jeu, mais aussi par les incertitudes relatives aux valeurs des paramètres d'entrée. À notre connaissance, il n'existe que peu d'études sur l'analyse d'incertitudes dans les modèles d'érosion (*cf.* la section 1.3). Nous proposons une étude permettant de quantifier la sensibilité du modèle HR à différents paramètres d'entrée. Au préalable, pour définir notre modèle probabiliste, il est important de mieux comprendre la portée des différents paramètres d'entrée et de considérer l'intérêt de les intégrer ou non à l'analyse. Nous présentons donc une analyse paramétrique du modèle HR permettant de motiver nos choix sur les paramètres à intégrer ainsi que leur modélisation probabiliste.

5.1 Analyse paramétrique du modèle HR

5.1.1 Présentation du modèle

Le modèle HR est un modèle multi-classes permettant de distinguer le détachement par la pluie, le détachement par le ruissellement et le dépôt à la surface du sol qui entraîne la formation d'une couche de recouvrement plus érosive que le sol original. Le modèle est défini par le système (2.8) décrit dans la sous-section 2.1.3. Nous rappelons ici l'expression des cinq termes source représentant les différents processus d'érosion du sol original et de la couche de recouvrement pour la k -ième classe de diamètre de sédiment (le nombre total de classes est noté K) :

1. Le taux de détachement du sol original par la pluie

$$e_{s_k} = (1 - H)p_k a P, \quad (5.1)$$

2. Le taux de détachement de la couche de dépôt par la pluie

$$e_{c_k} = H \frac{m_k}{m_t} a_d P, \quad (5.2)$$

3. Le taux de détachement du sol original par le ruissellement

$$r_{s_k} = (1 - H)p_k \frac{F(\Omega - \Omega_{cr})}{J}, \quad (5.3)$$

4. Le taux de détachement de la couche de dépôt par le ruissellement

$$r_{c_k} = H \frac{m_k}{m_t} \frac{F(\Omega - \Omega_{cr})}{m_t \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_s} g h}, \quad (5.4)$$

5. Le taux de dépôt

$$d_k = \nu_k c_k. \quad (5.5)$$

Le modèle HR nécessite un certain nombre de paramètres d'entrée, plus ou moins faciles à déterminer ou à mesurer, servant pour certains de paramètres de calage lors de la validation des modèles. Nous proposons de les classer en trois catégories :

- **Paramètres à mesure directe** : cette première classe regroupe les paramètres physiques mesurables directement. Ils sont admis depuis longtemps et répertoriés dans des tables. De plus, ils sont utilisés dans de nombreux domaines et sont, en général, indépendants du choix de modélisation.
- **Paramètres à mesure indirecte** : cette seconde classe regroupe les paramètres bien définis physiquement, mais plus difficilement mesurables en pratique et dont il n'existe pas de valeur précise. Ils dépendent généralement de trop nombreux facteurs pour pouvoir être déterminés précisément. Ils sont généralement évalués expérimentalement et intégrés dans un modèle de calibration.
- **Paramètre de calage** : cette troisième classe regroupe les paramètres clairement empiriques, qui sont certes associés à un concept physique, mais il n'existe

actuellement pas de techniques pour leur mesure directe (Rose *et al.* [121]).

Nous classons ainsi les paramètres du modèle HR :

- Paramètres à mesure directe : g , ρ_s , ρ_w , Φ et Ω ,
- Paramètres à mesure indirecte : a , a_d , Ω_{cr} , ν et d_{s_k} , $1 \leq k \leq K$,
- Paramètres de calage : m_t^* , J et F .

Il y a peu d'intérêt à intégrer dans l'analyse d'incertitudes les paramètres que nous considérons à mesure directe. Dans la suite de cette section, nous nous intéressons donc aux paramètres dits “à mesure indirecte” et “de calage”, que nous regroupons sous la vocable “principaux paramètres”.

5.1.2 Principaux paramètres du modèle

Dans cette sous-section, nous décrivons chacun des paramètres d'entrée (les paramètres principaux) du modèle HR susceptibles d'intégrer notre analyse d'incertitude afin de mieux comprendre sa signification et son rôle dans le modèle. Nous nous intéressons également aux valeurs attribuées à ces paramètres dans la littérature et essayons de comprendre les raisons des différences (parfois relativement importantes) existant entre celles-ci. Enfin, en vue de la modélisation probabiliste, nous examinons les éventuelles dépendances entre les paramètres.

a et a_d , les détachabilités respectives du sol et de la couche de dépôt

Les détachabilités du sol a et de la couche de dépôt a_d par l'impact de la pluie représentent l'aptitude d'un sol à être fractionné en particules susceptibles d'être transportées. Ces deux détachabilités sont réputées dépendantes de la hauteur d'eau disponible h , cette dernière protégeant le sol ou la couche de l'impact des gouttes de pluie. Nous choisissons de considérer une hauteur d'eau critique h_0 telle que pour des hauteurs d'eau qui lui sont inférieures, les détachabilités restent constantes, puis diminuent à partir de cette valeur critique. Ces détachabilités s'expriment donc comme suit (comme dans les études de Proffitt *et al.* [115], Hairsine et Rose [54] et Heng *et al.* [60]) :

$$a = \begin{cases} a_0 & \text{si } h \leq h_0, \\ a_0 \frac{h_0}{h} & \text{si } h > h_0, \end{cases} \quad a_d = \begin{cases} a_{d0} & \text{si } h \leq h_0, \\ a_{d0} \frac{h_0}{h} & \text{si } h > h_0. \end{cases} \quad (5.6)$$

La hauteur d'eau critique, h_0 , est fonction du diamètre des gouttes de pluie. Suivant Mutchler et Hansen [103], la plupart des modèles existant considèrent $h_0 = 0.33D_r$ où D_r représente le diamètre d'une goutte de pluie ($D_r \approx 2$ mm en général). C'est ce que nous avons choisi de considérer ici.

Les relations (5.6) ont été étudiées par Gao *et al.* [49]. L'étude montre que, lorsque le ruissellement est inférieur à une hauteur d'eau critique, la détachabilité du sol due à la pluie est bien constante pour un type de sol et une teneur en eau donnés. Par contre,

en cas de ruissellement supérieur à ce seuil, la détachabilité devient décroissante en fonction de la hauteur d'eau ruisselant. Misra et Rose [97] estiment différents paramètres d'érosion, dont les détachabilités, en utilisant le modèle GUEST et en se basant sur la théorie de Hairsine et Rose et des données expérimentales. Ils obtiennent la croissance des valeurs de a et a_d en fonction de la croissance de la pente, avec pour a une moyenne de 94.5 en cas de sol faiblement cohésif et 31 en cas de sol fortement cohésif (compacté) et pour a_d respectivement des valeurs de 55800 et 19700 ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$). Il existe donc un facteur 3 entre un sol compacté et non compacté. De plus, les valeurs de a_d sont presque 1000 fois plus élevées que celles de a , indiquant que la couche de dépôt est beaucoup plus facilement détachable que le sol original.

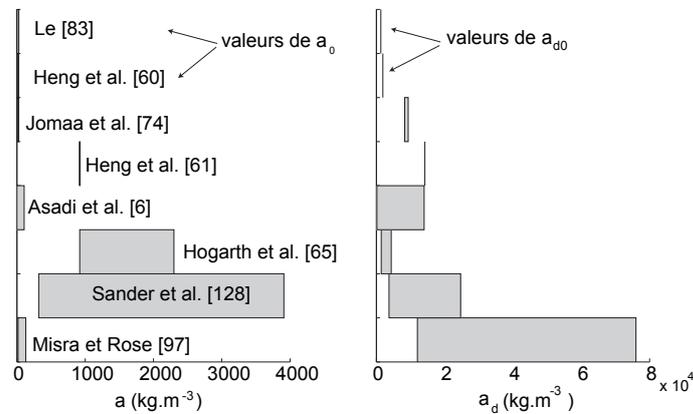


FIGURE 5.1 – Intervalles de valeurs prises par les paramètres a et a_d pour différentes études du modèle HR.

Les paramètres a et a_d peuvent prendre des valeurs très différentes dans la littérature. Quelques-unes sont répertoriées dans la figure 5.1 où pour différentes études, les intervalles de valeurs prises par les paramètres de détachabilité sont représentés. Il est à noter que ces valeurs correspondent aux a et a_d et non aux a_0 et a_{d0} , excepté pour l'article de Heng *et al.* [60] et la thèse de Le [83]. En effet, ces derniers utilisent des détachabilités à seuil, comme exprimées dans l'équation (5.6).

L'intervalle obtenu par Sander *et al.* [128] se situe dans des plages de valeurs beaucoup plus élevées que le reste et son amplitude est assez importante. Ces valeurs ont été obtenues par calage d'une approximation de la solution analytique de HR sur les données expérimentales de Proffitt *et al.* [115]. Elles sont d'ailleurs plus importantes que celles rapportées expérimentalement. Les auteurs expliquent ceci par le fait que les valeurs expérimentales de a sont basées sur une valeur d'équilibre obtenue par observation visuelle avec $H = 0.9$. Hogarth *et al.* [65] ont aussi étudié ces mêmes données et l'intervalle des valeurs qu'ils obtiennent par calage de leur modèle, bien que différent, est inclus dans celui de Sander *et al.* [128]. Heng *et al.* [61] n'ont qu'une valeur représentée à la figure 5.1 car ils reprennent une des configurations des données de Proffitt *et al.* [115] en prenant les valeurs obtenues par Hogarth *et al.* [65]. Ces trois études conduisent donc à des valeurs beaucoup plus importantes que les quatre autres études

référéncées ici.

Pour l'étude de Asadi *et al.* [6], les valeurs des détachabilités qu'ils obtiennent par calcul sont plus faibles. Ceci corrobore le fait qu'ils se placent dans une configuration où le sol est compacté au préalable, impliquant donc qu'il est plus difficile à détacher. Pour l'étude de Jomaa *et al.* [74], les valeurs, obtenues par optimisation, sont aussi plus petites. Les tailles des particules composant le sol étant ici plus grosses que pour les autres expérimentations, il est donc plus difficile de les arracher, ce qui corrobore le fait que les détachabilités soient plus faibles. De plus, la hauteur d'eau à la surface du sol est maintenue à $h = 9$ mm, ce qui peut constituer une couche protectrice diminuant l'arrachement des particules par l'impact des gouttes de pluie. Enfin, pour l'étude de Heng *et al.* [60], les valeurs des détachabilités calibrées sont, elles aussi, plus faibles mais restent comparables avec celles de Asadi *et al.* [6] et Jomaa *et al.* [74]. Le sol d'étude admet un pourcentage d'argile plus faible (4.5%) comparé aux autres études, par exemple dans Proffitt *et al.* [115] le pourcentage est égal à 32.2% ou à 62.2%. Cependant, les sols argileux sont plutôt plus difficiles à détacher et devraient présenter une détachabilité moindre. En outre, il est à noter que dans cette étude, contrairement aux autres, Heng *et al.* [60] modélisent le détachement à la fois par la pluie et par le ruissellement. Les détachabilités par la pluie deviennent donc moins importantes puisque le ruissellement va, lui aussi, contribuer à l'érosion. Les valeurs calibrées vont alors dépendre de plus de paramètres et l'importance des détachabilités dans la calibration va diminuer. C'est d'ailleurs dans une étude du modèle HR complet que Le [83] obtient des valeurs de détachabilités du même ordre pour différents types de croûtes sur de petites parcelles sableuses.

Les détachabilités a et a_d (ainsi que a_0 et a_{d_0}) dépendent à la fois de la compaction du sol, de la taille des sédiments et de la pente. Ces paramètres sont fonction de différentes caractéristiques du sol.

m_t^* , la masse de sédiments déposés requis pour la protection totale du sol

La masse de sédiments déposés requis pour protéger complètement le sol original, m_t^* , diminue en fonction de la décroissance de l'érosivité de la pluie. Elle est donc implicitement une fonction de la hauteur d'eau h (Heng *et al.* [60]). En fait, on observe ce comportement tant que le rapport m_t^*/a_d reste constant (Lisle *et al.* [88]). m_t^* est donc une fonction de h , typiquement de même forme que a_d . Nous considérons, comme dans l'étude de Heng *et al.* [60], que

$$m_t^* = \begin{cases} m_{t0}^* & \text{si } h \leq h_0, \\ m_{t0}^* \frac{h_0}{h} & \text{si } h > h_0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Dans la littérature, on trouve des valeurs plus ou moins étalées pour le paramètre m_t^* . Ces valeurs sont représentées dans la figure 5.2 pour différentes études. On constate

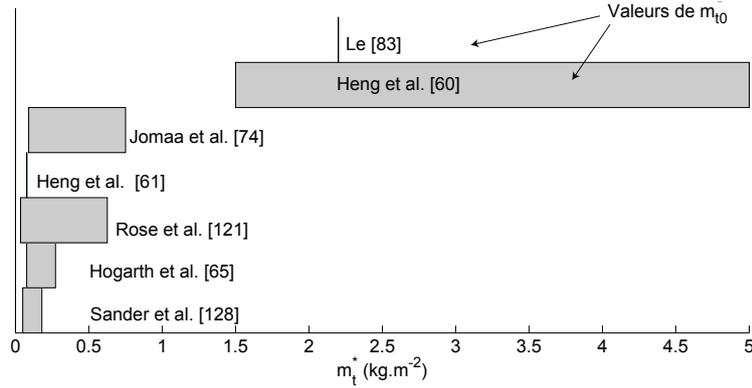


FIGURE 5.2 – Intervalles de valeurs prises par le paramètre m_t^* pour différentes études du modèle HR.

que les valeurs utilisées par Heng *et al.* [60], bien que physiquement réalistes, sont beaucoup plus élevées (un à deux ordres de grandeur) que celles utilisées dans les autres études. Les auteurs expliquent cette différence par le fait que les autres études (Sander *et al.* [128], Hogarth *et al.* [65] ...) supposent que le paramètre m_t^* est indépendant de la hauteur d'eau h et donc intègrent l'effet de h dans la calibration de m_t^* . En effet, Heng *et al.* [60] utilisent la formulation (5.7) pour m_t^* et fournissent donc des valeurs de m_{t0}^* et non de m_t^* . En prenant une hauteur d'eau supérieure à la hauteur d'eau critique d'un ordre de grandeur plus élevé dans (5.7), on retrouve bien des valeurs cohérentes. Heng *et al.* [60] expliquent d'ailleurs qu'une limite inférieure physiquement raisonnable pour m_{t0}^* est de 1 kg.m^{-2} . En effet, une couche de sédiments déposés d'un millimètre d'épaisseur correspond à une masse par unité de surface d'environ 1.4 kg.m^{-2} . Ainsi, la couche de dépôt requise pour protéger complètement le sol original ne peut être plus fine que cette dernière (d'après Armstrong *et al.* [4]). Le [83], utilisant la même formulation que Heng *et al.* [60] pour m_t^* , obtient une valeur égale à 2.2 kg.m^{-2} .

Les valeurs obtenues dans les études de Sander *et al.* [128], Hogarth *et al.* [65], Rose *et al.* [121] ainsi que Heng *et al.* [61], conduisent à des intervalles plus ou moins proches car tous ces auteurs utilisent les mêmes données expérimentales (celles de Proffitt *et al.* [115]) et réalisent une calibration sur ce paramètre. Par exemple, Heng *et al.* [61] n'ayant simulé qu'une seule des configurations, une valeur unique est représentée. Dans leur étude, Sander *et al.* [128] constatent que les valeurs obtenues sont plus petites qu'attendu et qu'il n'apparaît pas de relation uniforme entre ce paramètre et la hauteur d'eau. Ils remettent alors en question la définition du degré de protection $H(t)$. Leurs résultats obtenus par calibration restent cependant relativement proches de ceux obtenus par Hogarth *et al.* [65]. Pour Rose *et al.* [121], les valeurs de m_t^* résultant de leur calibration sur les données de Proffitt *et al.* [115] sont beaucoup plus élevées que celles de Sander *et al.* [128] et Hogarth *et al.* [65] (environ trois fois plus grandes). Ceci peut être expliqué par le fait que ces auteurs utilisent une solution approchée des équations de Hairsine et Rose et qu'ils optimisent leurs résultats grâce entre autres au paramètre m_t^* . En outre, la borne inférieure de l'intervalle de valeurs provient d'un autre jeu de données pour lequel les auteurs obtiennent une valeur plus petite ($\approx 0.02 \text{ kg.m}^{-2}$). Il

est difficile de comprendre cette différence, car il n'existe pas de différences importantes entre la nature des sols et les hauteurs d'eau. D'ailleurs, la pente étant plus élevée pour cette configuration (2% au lieu de 0.5%), la valeur de m_t^* devrait être plus élevée.

Pour l'étude de Jomaa *et al.* [74], l'intervalle des valeurs est plus large que celui de Sander *et al.* [128] et Hogarth *et al.* [65]. Jomaa *et al.* [74] estiment le paramètre m_t^* par la relation $m_t^* = (1-\eta)\rho_s z_d$, où ρ_s est la densité des sédiments, η la porosité de la couche de dépôt et z_d la hauteur de la couche de dépôt. Ils utilisent trois modèles pour ajuster ainsi la valeur de m_t^* . L'intervalle présenté à la figure 5.2 comprend donc les valeurs résultant des trois modèles d'ajustement. De plus, ces résultats sont obtenus pour des canaux de largeurs différentes. Les plus grandes valeurs de m_t^* sont obtenues pour des canaux d'une largeur plus petite où la couche de dépôt nécessaire pour protéger complètement le sol n'est jamais atteinte. Ceci est dû au fait que les sédiments se déposent sur les bords du canal et manquent donc à la formation de la couche. Ainsi, les valeurs les plus physiquement réalistes seraient de 0.2 et 0.4 kg.m⁻², ce qui est légèrement supérieur aux valeurs précédentes, tenant compte du fait que les hauteurs d'eau sont plus importantes (h est fixée à 9 mm) et la pente légèrement plus élevée (autour de 2% et entre 0.2 et 1% pour les deux autres).

m_t^* semble dépendre de la pente et de la hauteur d'eau. En outre, Jomaa *et al.* [74] l'expriment en fonction de la densité des sédiments et de la porosité et hauteur de la couche de dépôt.

Ω_{cr} , le stream power critique

Le stream power critique, Ω_{cr} , représente le seuil à partir duquel le détachement par le ruissellement a lieu. Il est montré que sa valeur dépend de la pente : plus le sol est pentu, plus il est facile d'arracher des sédiments, c'est-à-dire que Ω_{cr} diminue en fonction de la pente. Les valeurs que l'on peut trouver dans la littérature pour Ω_{cr} s'étalent sur plusieurs ordres de grandeur. La figure 5.3 représente les valeurs obtenues dans différentes études, soit expérimentales soit par calage.

Proffitt *et al.* [114], dans leur étude expérimentale, déterminent Ω_{cr} pour deux types de sol de pente 0.1% et ce pour une surface non érodée ainsi qu'une surface saturée déjà érodée au préalable. Les valeurs obtenues sont $\Omega_{cr} = 0.008 \text{ W.m}^{-2}$ pour le sol de texture argile lourde et 0.009 W.m^{-2} pour celui de type limon argilo-sableux. Le fait que le lit soit ou non déjà érodé n'entraîne pas de différences significatives pour les deux sols. Dans leur étude, Misra et Rose [97] se sont d'ailleurs basés sur ces résultats pour fixer la valeur $\Omega_{cr} = 0.007 \text{ W.m}^{-2}$ (leurs pentes étant plus élevées et la nature du sol différente).

Clairement, les valeurs obtenues par Beuselinck *et al.* [10, 11] sont beaucoup plus grandes, de plus d'un ordre de grandeur. Ces auteurs expliquent ceci par le fait que, contrairement à Proffitt *et al.* [114] qui observent Ω_{cr} comme étant le seuil pour le

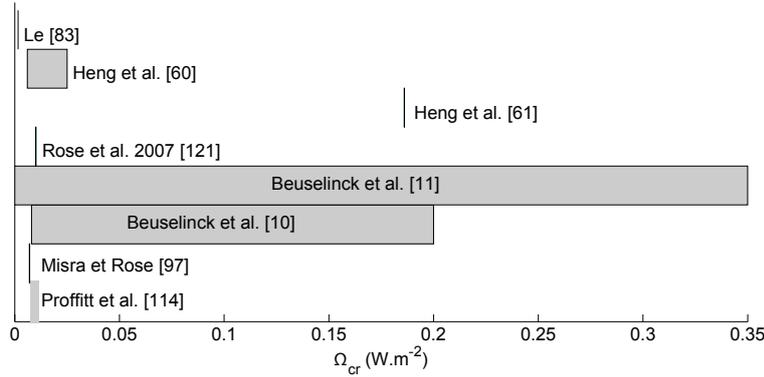


FIGURE 5.3 – Intervalles de valeurs prises par le paramètre Ω_{cr} pour différentes études du modèle HR.

mouvement initial, considérant ainsi à la fois l'entraînement et le ré-entraînement, eux ne tiennent pas compte du détachement initial car le flux qu'ils imposent en amont est préalablement chargé en sédiments. Beuselinck *et al.* [11] reprennent cette expérimentation et calibrent leur modèle de dépôt à une classe, ajustant les paramètres F et Ω_{cr} , les valeurs de Ω_{cr} obtenues varient alors de 0 à 0.35 W.m^{-2} , la meilleure estimation étant obtenue avec la valeur $\Omega_{cr} = 0.185 \text{ W.m}^{-2}$. Cette dernière valeur est d'ailleurs reprise par Heng *et al.* [61] dans la vérification de leur modèle sur ce même cas test.

Heng *et al.* [60] estiment Ω_{cr} via la formulation de Abrahams *et al.* [2],

$$\Omega_{cr} = \frac{1}{F} 5.74 \rho_w (\theta_c D_s g R)^{3/2} \log(12.3 \frac{\theta_c R}{S_0}),$$

où θ_c est le paramètre de Shields (contrainte de frottement locale) critique pour le mouvement initial, D_s est la taille médiane des particules et $R = (\rho_s - \rho_w)/\rho_w$ la densité relative. Ces auteurs obtiennent ainsi les valeurs du stream power critique en fonction du paramètre F qui est considéré ci-dessous, soit $\Omega_{cr} = F \times 1.9 \cdot 10^{-4} \text{ W.m}^{-2}$ pour une pente de 3%, $\Omega_{cr} = F \times 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ W.m}^{-2}$ pour une pente de 6% et $\Omega_{cr} = F \times 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ W.m}^{-2}$ pour une pente de 9%. Leurs valeurs, qui sont alors comprises entre 0.006 et 0.019 W.m^{-2} , sont comparables à celles de Proffitt *et al.* [114] qui considèrent eux aussi les différents processus d'érosion.

La valeur prise par Rose *et al.* [121] est comparable à celles de Proffitt *et al.* [114].

Le [83] obtient $\Omega_{cr} = 0.0016 \text{ W.m}^{-2}$ en utilisant, comme Heng *et al.* [60], la formulation de Abrahams *et al.* [2]. Cependant, cette valeur est plus petite car Le [83] considère un F plus grand ($F = 0.1$) en raison de la présence de microtopographies (parcelle réelle et non chenal en laboratoire).

Enfin, une valeur de Ω_{cr} assez élevée peut être due à des processus de détachement seulement par la pluie, comme dans l'étude de Jomaa *et al.* [74] où Ω_{cr} est compris entre 0.15 et 0.20 W.m^{-2} .

Ω_{cr} dépend de la pente, de la densité des sédiments ainsi que de leur taille. Il apparaît que ce paramètre dépend aussi de la configuration, à savoir si l'on considère le mouvement ou seulement le ré-entraînement. De plus, Heng *et al.* [60] expriment une relation avec un autre paramètre du modèle HR, à savoir F .

F , la fraction de l'excès du stream power effectif

La fraction de l'excès du stream power ($\Omega - \Omega_{cr}$) effectif dans l'entraînement et le ré-entraînement, F , consiste à supposer que tout l'excès du stream power ($\Omega - \Omega_{cr}$) n'est pas utilisé pour l'érosion mais qu'une partie est perdue par dissipation. Le paramètre F est difficile à évaluer expérimentalement (Misra et Rose [98]). Il peut être estimé à partir d'études en canaux avec pluie à taux constant (Proffitt *et al.* [114], Misra et Rose [97]). En outre, ce paramètre dépend du comportement de l'écoulement (Proffitt *et al.* [114]) mais on peut aussi le supposer dépendant de la friction en raison des effets de la topographie sur l'écoulement et ainsi supposer qu'il augmente avec l'importance des microtopographies dans le domaine.

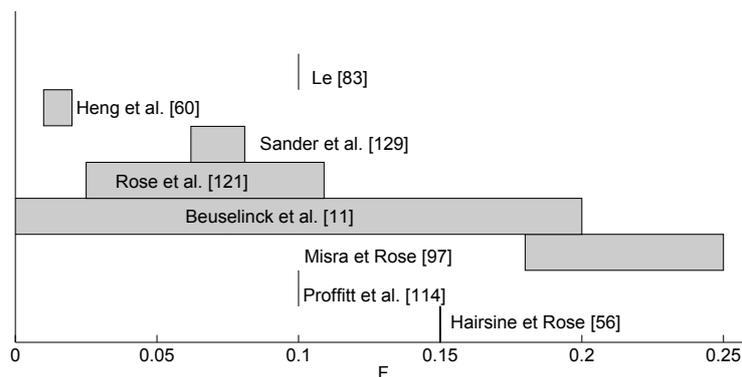


FIGURE 5.4 – Intervalles des valeurs prises par le paramètre F pour différentes études du modèle HR.

Les valeurs de F imposées ou calculées dans différentes études, sont représentées sur la figure 5.4. L'intervalle de valeurs le plus grand est celui obtenu par Beuselinck *et al.* [11], par calibration des paramètres F et Ω_{cr} où ils obtiennent $F = 0.0075$ comme meilleure valeur. Proffitt *et al.* [114] obtiennent $F = 0.1$ pour des écoulements turbulents grâce à des données de simulateurs de pluie. Cette valeur est consistante avec celle calculée par Hairsine et Rose [56] (0.15) mais diffère de celle de Beuselinck *et al.* [11] ($F = 0.0075$). Cependant, cette différence peut être expliquée par la différence de méthode pour estimer le paramètre, mais aussi par le type de sol. En effet, Beuselinck *et al.* [11] utilisent des sédiments plus fins et complètement dispersés, contrairement à Proffitt *et al.* [114] qui utilisent des sédiments plus grossiers.

De même, Misra et Rose [97], en utilisant les valeurs de concentration sédimentaire

de leur expérience, estiment la valeur de F entre 0.18 et 0.25. Ces valeurs sont comparables à celles obtenues par Proffitt *et al.* [114] ($F = 0.1$) pour les sols de type argile lourde et limon argilo-sableux. Le [83] obtient d'ailleurs la même valeur, $F = 0.1$, sur des sols sableux.

Les valeurs de Rose *et al.* [121] sont assez étalées car ces auteurs testent deux jeux de données. Pour le premier jeu, qui est celui de Proffitt *et al.* [114], ils obtiennent $F \approx 0.1$ pour les deux types de sol (argile lourde et limon argilo-sableux). Pour le second jeu sur de l'argile, ils obtiennent une valeur plus petite, $F = 0.0246$. Ceci peut s'expliquer par exemple par le type d'écoulement. En effet, le débit imposé en amont est plus faible que pour la première expérience (0.000615 au lieu de 0.001 $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) et on peut supposer que l'écoulement est en conséquence plus diffus.

Sander *et al.* [129] obtiennent des valeurs légèrement plus petites que Proffitt *et al.* [114]. Les débits qu'ils imposent en amont sont plus petits. Ils obtiennent quatre valeurs différentes pour F correspondant au choix de deux débits et si l'eau entrante est chargée ou non en sédiments.

Heng *et al.* [60] déduisent de Abrahams et Parsons [3] que F doit être inférieur à 0.1. Ils obtiennent des valeurs calibrées comprises entre 0.01 et 0.02, ce qui est assez petit comparé aux valeurs précédentes.

F semble dépendre de la taille des sédiments, du débit imposé en amont, de la concentration sédimentaire initiale et du stream power. En outre, d'après Proffitt *et al.* [114], la dépendance en fonction de la déposabilité du sol, de la rugosité et du couvert végétal doivent être étudiées. De plus, Heng *et al.* [60] expriment une relation entre F et Ω_{cr} . Il apparaît envisageable que F soit relié à Ω_{cr} puisqu'il représente le facteur de diffusion, considérant que tout le stream power effectif ne sert pas au processus de détachement mais qu'une partie est perdue en dissipation.

J , l'énergie dépensée pour l'entraînement

L'énergie dépensée dans l'entraînement d'une unité de masse de sédiments cohésifs, J , est un paramètre d'érodibilité entraînée par le ruissellement, qui, comme attendu, dépend de la résistance du sol. Il n'est pas possible de mesurer directement la valeur de J , elle doit être estimée expérimentalement (Hairsine et Rose [55]). Les valeurs rencontrées dans la littérature sont assez disparates et semblent dépendre des configurations. Elles sont pour la plupart établies par calibration, quelques-unes sont présentées sur la figure 5.5.

Misra et Rose [97] estiment la valeur de J en considérant le paramètre F constant égal à 0.25 et en utilisant le modèle GUEST pour un sol meuble et un sol compacté. Il n'apparaît pas de corrélation avec les valeurs de pente. Par contre, les valeurs de J augmentent avec le degré de compaction du sol (comme prédit par Rose *et al.* [119]).

En cas de sol meuble, la valeur moyenne de J est estimée à 8.5 J.kg^{-1} , alors qu'en cas de sol compacté, elle atteint 70.6 J.kg^{-1} . Dans une autre étude, Misra *et al.* [98] étudient la sensibilité de leur modèle d'érosion complet au paramètre J . Ils obtiennent que J est le plus sensible à la longueur de la pente et que sa sensibilité peut dépendre de la présence ou non de rigole (ravine). En effet, en cas d'absence de ravine, pour un ruissellement donné, les hauteurs d'eau et les stream power sont plus faibles, ce qui rend l'érosion par la pluie dominante et donc J moins sensible.

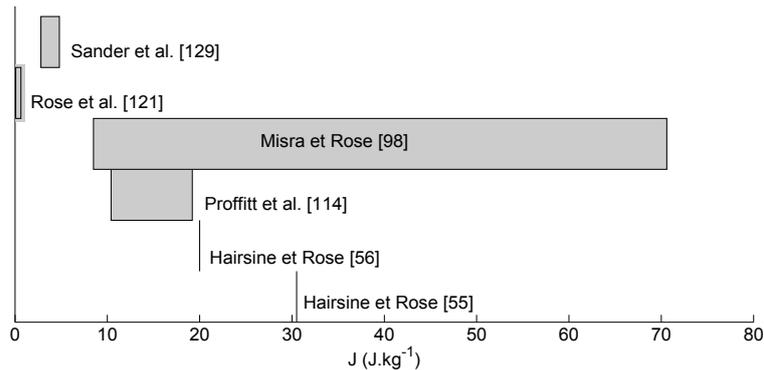


FIGURE 5.5 – Intervalles des valeurs prises par le paramètre J pour différentes études du modèle HR.

Proffitt *et al.* [114] évaluent le paramètre J pour deux types de sol (de type argile lourde ou limon argilo-sableux) en utilisant la concentration sédimentaire minimum à l'équilibre. Ils imposent des débits entrants avec ou sans ajout d'une pluie simulée. Les valeurs moyennes évaluées (utilisant les concentrations sédimentaires minimum à l'équilibre pour les expérimentations avec ou sans pluie pour des écoulements diffus et concentrés) sont respectivement de 12.2 J.kg^{-1} et 10.4 J.kg^{-1} . Elles ont ensuite été réévaluées à 19.2 J.kg^{-1} et 14.4 J.kg^{-1} en supposant une valeur physique plus réaliste pour F . Ces valeurs diffèrent significativement de celles obtenues par optimisation par Rose *et al.* [121] (0.632 J.kg^{-1} et 0.224 J.kg^{-1}) où ces auteurs testent leur solution approchée des équations complètes de Hairsine et Rose pour ces mêmes données expérimentales. Ici, cette différence peut provenir du fait que J est l'un des paramètres utilisés pour l'optimisation, mais aussi que, contrairement à Proffitt *et al.* [114] qui évaluent J pour l'ensemble des données (avec ou sans pluie), Rose *et al.* [121] n'ont utilisé que celles où l'apport provient d'un débit en amont (et non de la pluie).

Hairsine et Rose évaluent le paramètre J comme étant égal à 30.5 dans [55] et $20 \pm 5 \text{ J.kg}^{-1}$ dans [56].

Sander *et al.* [129] testent leur modèle HR en reprenant les données de Polyakov et Nearing [113]. Les valeurs imposées pour J sont assez petites (4.8 et 2.8 J.kg^{-1}) et dépendent du débit imposé en amont. Ces valeurs peuvent peut-être s'expliquer par le fait que le sol est de pente plus importante que les autres études (7%). De plus, il est préalablement mouillé pour arriver à saturation et le protocole expérimental prévoit d'atteindre l'équilibre, ce qui peut faciliter le détachement.

Heng *et al.* [60] mettent en relation les paramètres J et a_0 en considérant la détachabilité du sol original (kg.m^{-3}) comme étant le rapport entre l'énergie cinétique par unité de pluie (J.m^{-3}) et l'énergie requise pour détacher une unité de masse du sol d'origine (J.kg^{-1})

$$J = \frac{0.5\rho_w\nu_R^2}{a_0},$$

où ν_R est la vitesse de l'impact de la pluie. En prenant $\nu_R = 5.5 \text{ m.s}^{-1}$ et $\rho_w = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, ces auteurs obtiennent la contrainte paramétrique suivante : $J \approx 15000/a_0$. Ceci entraîne des valeurs très fortement supérieures aux autres répertoriées ci-dessus. En effet, pour les valeurs de a_0 considérées par Heng *et al.* [60], J serait compris entre 555 et 16666 J.kg^{-1} . Cette différence peut paraître surprenante, mais en mettant en relation les valeurs de J avec celles de la détachabilité du sol original a , on obtient une cohérence dans les résultats. En effet, si un sol admet une faible détachabilité, comme c'est le cas pour Heng *et al.* [60], le détachement du sol nécessitera une énergie plus importante. De plus, l'expérience de Proffitt *et al.* [115], qui aboutit à des valeurs de détachabilité beaucoup plus importantes que celles de Heng *et al.* [60], considère bien des valeurs de J plus faibles. Il est aussi à noter qu'une valeur très forte de J peut être compensée en prenant une valeur pour F plus petite. En effet, le taux d'entraînement par le ruissellement du sol original, r_{s_k} , est clairement défini comme proportionnel au rapport F/J . Or, ces deux paramètres sont la plupart du temps calibrés simultanément.

J dépend de la compaction du sol, de la force de cohésion du sol, de la longueur de pente et de la présence ou non de rigoles. Le paramètre semble également dépendre de la détachabilité du sol ainsi que du débit amont imposé.

ν , vitesse de chute ou de sédimentation

Les vitesses de chute utilisées sont souvent établies soit expérimentalement et répertoriées dans des tables en fonction du diamètre de grain, soit calculées par des formules empiriques. Il existe de nombreuses formulations (Cheng [29], Jimenez et Madsen [72]) de vitesse de chute dérivées de la formule de Stokes, celle-ci s'appliquant à des écoulements à faible nombre de Reynolds et à des particules sphériques. Ces vitesses sont fortement liées à la taille des particules composant le sol. Dans notre modèle, nous choisissons d'intégrer la formulation classique de Stokes en considérant le diamètre de chaque classe de particules composant le sol, d_{s_k} , comme un paramètre incertain.

d_{s_k} , $1 \leq k \leq K$, le diamètre attribué à chaque classe de sédiments

Même si, en principe, le diamètre d'un grain de sédiment pris individuellement peut être mesuré directement, regrouper les grains en K classes auxquelles on attribue un diamètre relève d'une conceptualisation. De plus, les études sont généralement basées

sur des définitions de classes texturales de sol dont les limites sont approximatives dans le sens où elles regroupent une gamme de tailles de grains, indiquant ainsi une valeur caractéristique et non une loi de distribution.

5.1.3 Synthèse

Tableau 5.1 Analyse paramétrique du modèle HR : principales études avec les processus d'érosion considérés, les caractéristiques de l'apport d'eau, le type de sol étudié et les paramètres estimés.

Article	Type d'érosion	Apport d'eau	Type de sol	Paramètres estimés
Misra et Rose [97]	pluie + ruissellement + dépôt	pluie (100 mm.h ⁻¹)	penne de 1.7-10.5%, sol compacté ou non (sable argilo-limoneux)	a, a_d, J, F
Sander et al. [128]	pluie+dépôt	pluie (56 et 100 mm.h ⁻¹)	Proffitt et al. [115] (2 sols, pente de 0.1-1%)	a et a_d (avec $H = 0.9$)
Beuselinck et al. [11]	ruissellement + dépôt	apport amont d'eau et de limon ($q = 2.5 \cdot 10^{-4}$ ou $1.7 \cdot 10^{-3}$ m ² .s ⁻¹)	penne de 1% et 8%, sol limoneux	F et Ω_{cr} (seulement réentraînement)
Hogarth et al. [65]	pluie + dépôt	pluie (100 mm.h ⁻¹)	Proffitt et al. [115]	a, a_d , et m_t^*
Rose et al. [121]	ruissellement + dépôt	apport amont ($h < 7$ mm)	Proffitt et al. [115] (2 sols, pente de 0.5%) et Asadi et al. [5] (1 sol argileux, pente de 2%)	F, J, m_t^*
Asadi et al. [6]	pluie + dépôt	pluie (25-110mm.h ⁻¹)	3 sols (loam argilo-sableux et sable), penne de 0.5%	a et a_d (H fixé à 0.9)
Heng et al. [60]	pluie + ruissellement + dépôt	pluie (47 mm.h ⁻¹)	loam limoneux, penne de 3-6 et 9% (Armstrong et al. [4])	$a_0, a_{d_0}, m_{i0}^*, F$
Jomaa et al. [74]	pluie	pluie (60 mm.h ⁻¹)	loam agricole, penne de 2.2%	a, a_d , et m_t^* (pour $h \approx 9$ mm)
Le [83]	pluie + ruissellement + dépôt	pluie (60 mm.h ⁻¹ et 120 mm.h ⁻¹)	sable, penne moyenne de 3.6 et 4.6%	$a_0, m_{i0}^*, \Omega_{cr}, F$ et h_0

Les principales études ayant servi à l'analyse paramétrique du modèle HR sont répertoriées dans le tableau 5.1. En général, les processus de détachement par la pluie et par le ruissellement sont étudiés séparément et simplement ajoutés. Les interactions existant entre ces deux processus sont à ce jour peu connues. D'ailleurs, Misra et Rose [97] insistent sur le fait qu'il existe des incertitudes dans l'ordre de grandeur des paramètres d'érodibilité (relatifs au détachement par le ruissellement) lorsque l'on est en présence de détachement à la fois par la pluie et par le ruissellement. En effet, ayant fixé une valeur de stream power critique, bien qu'il soit possible que les stream power calculés restent inférieurs à ce seuil, on ne peut être certain de l'origine du détachement

des sédiments, par l'entraînement et/ou le ré-entraînement. De plus, lorsque les paramètres sont intégrés dans la méthode de calibration, les valeurs obtenues dépendent très fortement des choix initiaux et du modèle utilisé. En outre, leur importance dépend des processus que l'on choisit d'intégrer à l'étude et des hypothèses faites sur les configurations considérées. Par exemple, dans le cas où l'un des processus est dominant, les paramètres le caractérisant auront plus d'influence et n'auront donc pas le même impact sur la calibration que les paramètres relatifs aux autres processus.

L'étude paramétrique du modèle HR montre que les paramètres que nous considérons "à mesure indirecte" ne dépendent que des caractéristiques du sol (la configuration initiale du sol : la pente, la longueur de pente, la compaction du sol, la taille des sédiments, . . .) alors que les paramètres "de calage" semblent dépendre aussi des conditions relatives à l'écoulement (les hauteurs d'eau imposées ou engendrées, les débits imposés en amont, . . .). Même si ces dépendances ne sont jusqu'à présent pas précisément établies, ces paramètres se révèlent être clairement multifactoriels. Constatant cela, il est d'autant plus difficile d'en obtenir une estimation ou une évaluation précise. Il apparaît donc intéressant de considérer les incertitudes relatives aux paramètres "à mesure indirecte" ou "de calage" : a_0 , a_{d_0} , $m_{t_0}^*$, Ω_{cr} , F , J et le diamètre des particules du sol d_{s_k} , pour $1 \leq k \leq K$. Notons que nous utilisons les relations (5.6) pour obtenir les détachabilités a et a_d et la relation (5.7) pour obtenir la quantité m_t^* . La hauteur d'eau critique est fixée à $h_0 = 0.33 \times 2$ mm.

5.2 Propagation des incertitudes

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéressons à la propagation des incertitudes paramétriques au travers du modèle d'érosion HR. Dans un premier temps, nous étudions sur une configuration unidimensionnelle les processus de détachement séparément : le détachement par la pluie, le détachement par le ruissellement puis le modèle HR complet. Dans un second temps, nous nous intéressons à un cas test bidimensionnel pour le modèle HR complet. Nous utilisons le modèle d'écoulement/infiltration/érosion décrit à la section 2.2.2. Nous étudions et quantifions l'impact des incertitudes relatives aux principaux paramètres d'entrée : a_0 , a_{d_0} , $m_{t_0}^*$, Ω_{cr} , F , J et $\mathbf{d}_s = (d_{s_k})_{1 \leq k \leq K}$ où K est le nombre de classes de tailles de sédiments. Nous commençons par décrire le modèle stochastique retenu.

5.2.1 Modèle stochastique

Le modèle stochastique consiste à considérer les principaux paramètres d'érosion comme des variables aléatoires indépendantes et de fonction de densité de probabilité (pdf) connues. Ces paramètres sont supposés uniformes en espace. Nous introduisons le vecteur \mathbf{X} dont les composantes sont les variables aléatoires réelles et positives telles que

$$\mathbf{X} = (X_i)_{1 \leq i \leq K+6} = (a_0, a_{d_0}, m_{t_0}^*, \omega_{cr}, F, J, d_{s_1}, \dots, d_{s_K}). \quad (5.8)$$

Il reste alors à fixer la pdf f_{X_i} pour chacune des variables aléatoires X_i , $1 \leq i \leq K + 6$. Les X_i étant supposées indépendantes, la pdf de \mathbf{X} se factorise sous la forme

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{K+6}), \quad f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{K+6} f_{X_i}(x_i). \quad (5.9)$$

5.2.2 Choix des valeurs des paramètres

Chaque variable aléatoire X_i prend ses valeurs dans un intervalle qui lui est propre et que nous déterminons en fonction de l'étude paramétrique de la section 5.1 et de la nature du sol choisi pour les cas tests.

Les détachabilités a_0 et a_{d_0} : Ces détachabilités du sol sont déterminées en fonction de la nature du sol en se basant sur les études de Asadi *et al.* [6], Jomaa *et al.* [74], Heng *et al.* [60] et Le [83]. Les fortes valeurs prises dans les études de Hogarth *et al.* [65] et Sander *et al.* [128] ne sont pas retenues ici. Nous choisissons des valeurs comprises entre 3 et 50 kg.m^{-3} pour la détachabilité du sol original et des valeurs comprises entre 500 et 5000 kg.m^{-3} pour la détachabilité de la couche de dépôt. Ce choix est motivé par le fait que l'on considère un sol de type limon, présentant une cohésion plus importante que des sables et donc des valeurs de détachabilités plutôt petites. Par rapport aux valeurs répertoriées dans la figure 5.1, nous avons choisi des intervalles situés dans la partie inférieure.

La masse de sédiments requis pour protéger le sol $m_{t_0}^*$: Nous choisissons de considérer (*cf.* figure 5.2) un intervalle de valeurs comparable à celui de Heng *et al.* [60] dont le minimum est légèrement inférieur à la valeur limite qu'ils déterminent. Nous fixons l'intervalle à $[0.5, 4.5] \text{ kg.m}^{-2}$.

Le stream power critique Ω_{cr} : Il est moins facile d'après les études rapportées de conclure sur un intervalle précis. Les valeurs sont relativement disparates et il apparaît difficile de restreindre la plage de variation (*cf.* figure 5.3). Nous choisissons donc de considérer un intervalle assez large pour couvrir l'ensemble des possibilités et rester le plus général possible. La plage de variation est comprise entre 0.001 et 0.2 W.m^{-2} .

La fraction d'excès du stream power F : Il s'agit typiquement d'un paramètre de calage et les valeurs obtenues par calibration dans les différentes études s'étalent sur plusieurs ordres de grandeur (*cf.* figure 5.4). Nous n'avons pas voulu restreindre l'intervalle de ses valeurs que nous choisissons comprises entre 0.001 et 0.25.

L'énergie requise pour l'entraînement J : De même que pour F , nous autorisons une grande plage de variation pour J . Dans la littérature (*cf.* figure 5.5), les valeurs plus faibles étant beaucoup plus nombreuses, nous prenons une borne inférieure égale à 10 J.kg^{-1} . La borne supérieure est fixée à 5000 J.kg^{-1} afin de correspondre à la valeur de détachabilité minimale définie par Heng *et al.* [60].

Les diamètres des sédiments d_s : Nous considérons un sol limoneux composé de deux classes ($K = 2$) avec 30% de particules ayant un diamètre moyen relativement petit de 4 μm et 70% de particules plus grosses ayant un diamètre moyen de 41 μm . Nous

choisissons de ne considérer que deux classes de tailles de sédiments afin de distinguer les petites particules des plus grosses sans pour autant augmenter excessivement le nombre de paramètres incertains.

5.2.3 Choix des fonctions de densité de probabilité

Pour les paramètres a_0 , a_{d_0} et $m_{t_0}^*$, nous fixons une loi de distribution uniforme. Ceci est motivé par le fait que nous n'avons pas de valeurs de référence pouvant définir la moyenne d'une loi normale. De plus, les intervalles choisis sont relativement petits et ne s'étalent pas sur plus d'un ordre de grandeur. Pour les paramètres Ω_{cr} , F et J , nous choisissons une loi log-uniforme. La plage de variation de ces paramètres étant importante, le passage au logarithme permet d'obtenir une équiprobabilité sur les différentes décades de l'intervalle. De plus, tout comme pour les paramètres précédents (a_0 , a_{d_0} et $m_{t_0}^*$), nous n'avons pas de valeurs de référence auxquelles accorder plus d'importance. Enfin, pour les diamètres des particules, nous avons retenu des lois log-normales en raison de l'importante variabilité de ces paramètres et de la valeur moyenne que nous voulons leur attribuer. Nous adaptons les variances de la loi log-normale pour que les distributions des deux classes de sédiments ne se coupent pas ($d_{s_1} < d_{s_2}$ avec une très forte probabilité). Les lois de distribution des différents paramètres sont

$$a_0(\text{kg.m}^{-3}) \sim \mathcal{U}[3, 50], \quad a_{d_0}(\text{kg.m}^{-3}) \sim \mathcal{U}[500, 5000], \quad m_{t_0}^*(\text{kg.m}^{-2}) \sim \mathcal{U}[0.5, 4.5], \quad (5.10a)$$

$$\log \Omega_{cr}(\text{W.m}^{-2}) \sim \mathcal{U}[\log(0.001), \log(0.2)], \quad \log F \sim \mathcal{U}[\log(0.001), \log(0.25)], \quad (5.10b)$$

$$\log J(\text{J.kg}^{-1}) \sim \mathcal{U}[\log(10), \log(5000)], \quad (5.10c)$$

$$\log d_{s_1}(\mu\text{m}) \sim \mathcal{N}\left(-12.5, (0.4)^2\right) \text{ et } \log d_{s_2}(\mu\text{m}) \sim \mathcal{N}\left(-10.1, (0.25)^2\right), \quad (5.10d)$$

et leurs fonctions de densité de probabilités sont présentées à la figure 5.6.

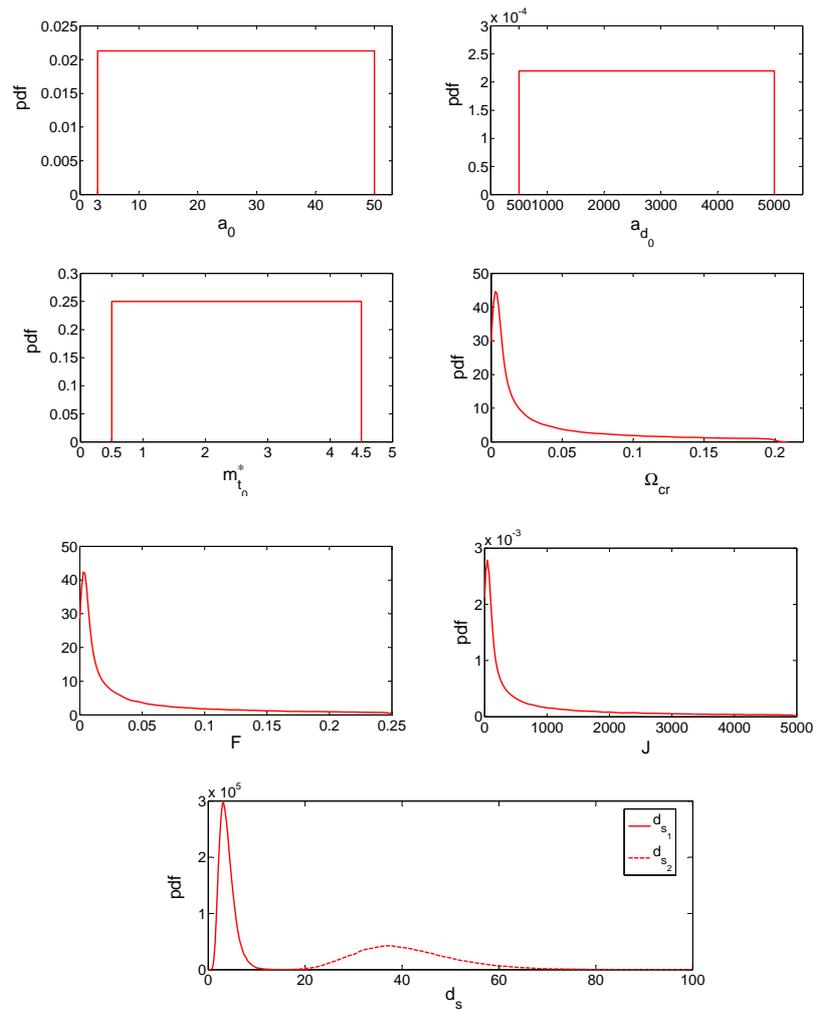


FIGURE 5.6 – Fonctions de densité de probabilité des variables aléatoires associées aux principaux paramètres d'entrée incertains du modèle d'érosion HR.

5.3 Cas tests unidimensionnels

Dans cette section, nous nous intéressons à des cas tests unidimensionnels et nous commençons par étudier séparément les processus d'érosion par la pluie et par le ruissellement. Nous considérons un plan unidimensionnel de longueur $L = 5$ m et de pente constante $\partial_x z = 4\%$. L'ensemble des paramètres est supposé uniforme en espace. Les paramètres d'entrée incertains $(a_0, a_{d_0}, m_{t_0}^*, \Omega_{cr}, F, J, d_{s_1}, d_{s_2})$ sont décrits par des variables aléatoires réelles suivant les lois de probabilité présentées à la section 5.2.3. Le vecteur aléatoire \mathbf{X} est échantillonné par la méthode de Monte Carlo avec une dimension d'échantillon $M = 100000$. Le nombre de paramètres aléatoires N dépend alors du processus de détachement que nous étudions, $N = 5$ dans le cas du détachement par la pluie uniquement, $N = 6$ dans le cas du détachement par le ruissellement uniquement et $N = 8$ pour le modèle HR complet. *Via* la simulation du modèle écoulement/infiltration/érosion, nous obtenons des échantillons des variables de sortie. Nous nous intéressons à la masse érodée spatialisée par unité de largeur $m_{ero}(x)$ (g/m) ainsi qu'à la masse érodée totale par unité de largeur M_{ero} (g/m). Par la suite le terme "par unité de largeur" sera sous-entendu.

5.3.1 Paramètres communs à tous les cas tests

Les paramètres relatifs au processus d'infiltration (la conductivité hydraulique à saturation varie en fonction du cas test) sont les suivants

$$\Psi = 0.15 \text{ m}, \quad \theta_s - \theta_i = 0.12, \quad K_s = 1 - 4 - 5 \text{ mm.h}^{-1}.$$

Les paramètres à mesure directe relatifs au processus d'érosion sont

$$\rho_s = 2400 \text{ kg.m}^{-3}, \quad \rho_w = 1000 \text{ kg.m}^{-3}, \quad \Phi = 0.42.$$

On rappelle que le stream power Ω est défini au point 3 de la section 2.1.3.

5.3.2 Érosion par la pluie

Description du cas test

Pour étudier et propager les incertitudes paramétriques au travers du modèle HR avec détachement par la pluie uniquement, une pluie constante et uniforme de taux égal à $R(t) = 60 \text{ mm.h}^{-1}$ est imposée sur une durée de 4 min puis stoppée. Le temps total de simulation est de 5 min. La configuration initiale est représentée sur la figure 5.7. Le coefficient de frottement pour la loi de Manning est fixé à $K = 0.015$ et la conductivité hydraulique à saturation à $K_s = 5 \text{ mm.h}^{-1}$.

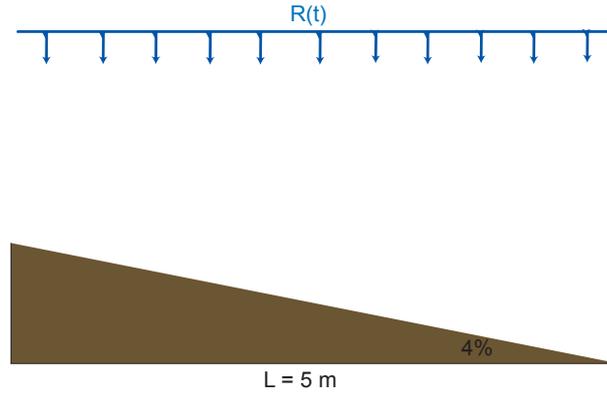


FIGURE 5.7 – Configuration initiale pour le cas test avec détachement par la pluie uniquement et pour l’étude du modèle HR complet.

Distribution de la masse érodée

La figure 5.8(a) présente la pdf de la masse totale érodée M_{ero} . Cette pdf est estimée par la méthode de Parzen-Rozenblatt et l’échantillon Monte Carlo de dimension $M = 100000$ de la variable de sortie M_{ero} . Un premier point est que l’allure de la pdf montre que le processus que nous étudions n’est ni Gaussien ni uniforme. Cependant, la forme de la pdf peut être rapprochée d’une loi de distribution log-normale pour une variance assez importante. En effet, la pdf présente une croissance rapide ayant la forme d’une cloche piquée sur la partie gauche de l’intervalle et son étalement est important sur sa partie décroissante. De plus, cette observation est en accord avec les résultats présentés dans la boxplot de la figure 5.8(b). Cette dernière présente les valeurs du premier et neuvième déciles, du premier et troisième quartiles ainsi que les moyenne et médiane du M échantillon de la masse totale érodée. L’écart relatif de la moyenne à la médiane est $\approx 20\%$, cette différence est significative et indique que la distribution de M_{ero} n’est pas symétrique, ce que corrobore l’allure de la pdf. En outre, le fait que la moyenne est supérieure à la médiane est expliquée par l’existence de valeurs extrêmes. En effet, la valeur du neuvième décile est approximativement 120 g, en la reportant sur le graphe de la pdf sur la figure 5.8(a), on voit que la pdf s’étale encore au delà de cette valeur. Ceci indique l’existence d’événements extrêmes conduisant à de fortes valeurs pour la masse érodée. De plus, la différence $\widehat{Q}_{90} - \widehat{Q}_{75}$ est plus importante que $\widehat{Q}_{25} - \widehat{Q}_{10}$.

La figure 5.9 présente la moyenne et la variance de la masse érodée spatialisée $m_{ero}(x)$. On remarque que le profil est décroissant le long du domaine, le détachement par la pluie est plus important à l’amont du domaine où la masse de sédiments déposés est plus faible. Les sédiments détachés forment une couche de dépôt protégeant le sol de l’impact des gouttes de pluie, cf. section 2.1.3 où le paramètre H désigne le degré de protection fourni par la couche de dépôt. La variance suit la même tendance et le calcul du coefficient de variation cov (égal au rapport de l’écart type σ sur la moyenne \widehat{E}) montre que la dispersion est relativement importante, $cov = 71\%$.

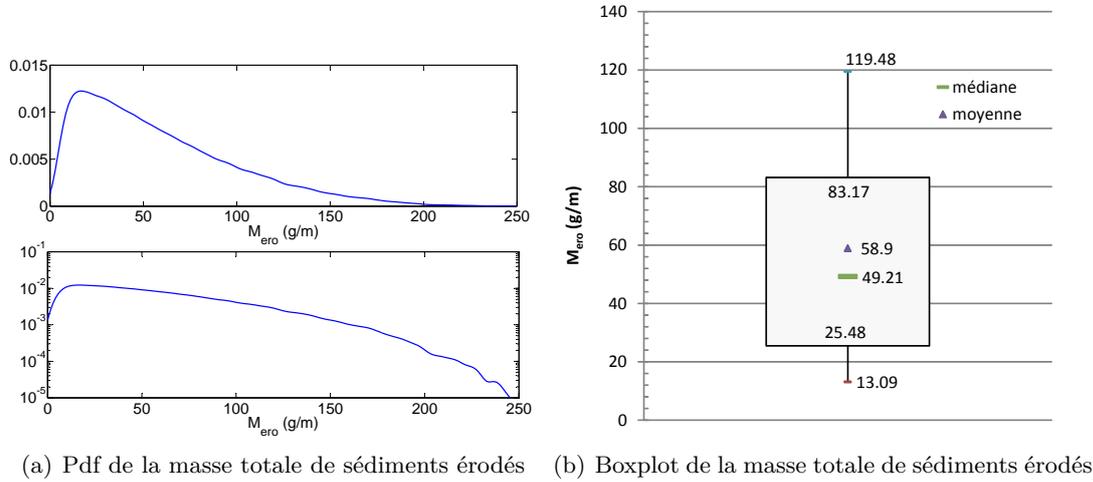


FIGURE 5.8 – Étude du détachement par la pluie : estimations statistiques pour l'échantillon de la masse totale de sédiments érodés par unité de largeur M_{ero} (g/m) ; (a) fonction de densité de probabilité estimée avec une fenêtre de lissage $\eta = 3$; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas) ; (b) boxplot représentant les valeurs suivantes : 1^{er} et 9^{ème} déciles (\widehat{Q}_{10} et \widehat{Q}_{90}), 1^{er} et 3^{ème} quartiles (\widehat{Q}_{25} et \widehat{Q}_{75}), médiane (\widehat{Q}_{50}) et moyenne ($E[\widehat{M}_{ero}]$).

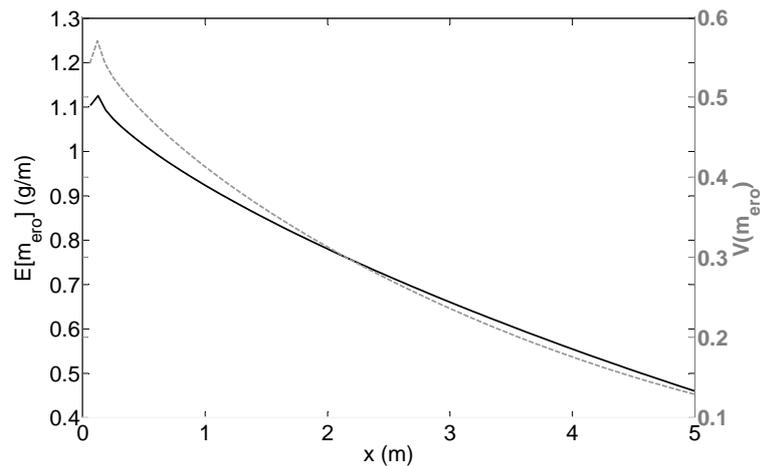


FIGURE 5.9 – Étude du détachement par la pluie : estimations de la moyenne et de la variance spatialisées pour la masse de sédiments détachés $m_{ero}(x)$ (g/m).

Analyse de sensibilité globale

Notre objectif est maintenant d'étudier l'influence des principaux paramètres incertains dans le modèle HR par une analyse de sensibilité globale permettant de hiérarchiser les paramètres d'entrée, tenant compte des interactions paramétriques. Rappelons brièvement que l'indice de sensibilité du premier ordre S_i , qui est compris entre 0 et 1, représente la sensibilité de la sortie du modèle au paramètre X_i pris individuellement, une valeur égale à 0 signifiant que X_i n'est pas influent individuellement et une valeur égale à 1 que X_i influence à lui seul la variabilité de la sortie. L'indice de sensibilité totale T_i estime, quant à lui, l'influence totale du paramètre X_i , à savoir son influence individuelle plus l'influence de ses interactions avec les autres paramètres. La figure 5.10 présente les indices de sensibilité du premier ordre S_i de la variable de sortie $m_{ero}(x)$. Ils sont spatialisés et estimés par la méthode de Monte Carlo à partir d'un échantillon de 100000 sorties du modèle. L'indice de sensibilité le plus élevé est celui relatif à la détachabilité du sol a_0 avec une valeur supérieure à 40% sur toute la longueur du domaine; vient ensuite l'indice relatif au diamètre des sédiments de la classe 1, d_{s_1} , qui regroupe les sédiments les plus petits. La spatialisation des indices de sensibilité permet de voir que l'influence directe de la détachabilité a_0 décroît le long du domaine alors que celle du paramètre d_{s_1} augmente. Ainsi, l'indice de sensibilité du premier ordre de la détachabilité diminue de 54% à l'amont à 40% à l'aval du plan, alors que d_{s_1} voit son indice varier de 15% à l'amont à 34% à l'aval. La variation en fonction de x de ces indices de sensibilité peut s'expliquer par l'existence d'une hauteur d'eau critique. En effet, l'impact des gouttes de pluie qui est à l'origine du détachement des sédiments, décroît le long de la pente car la hauteur d'eau crée une couche protectrice qui augmente le long du domaine. Nous renvoyons à la section 2.3.2 où ce point a déjà été discuté. Par ailleurs, bien que les sédiments plus gros (classe $k = 2$) soient présents en plus grande proportion dans la composition du sol, leur diamètre d_{s_2} obtient un indice de sensibilité nul. Étant de taille plus importante, les sédiments sont plus difficilement détachables par l'impact des gouttes de pluie et l'effet de leur diamètre est négligeable. Pour finir, la masse érodée spatialisée n'est que peu sensible à la détachabilité de la couche de dépôt a_{d_0} et à la masse requise pour protéger le sol $m_{t_0}^*$. Leurs indices de sensibilité du premier ordre sont compris entre 6 et 10%. Une dernière observation est que la somme de ces indices du premier ordre est proche de 0.9, ce qui signifie que les interactions paramétriques sont relativement faibles.

Les interactions paramétriques peuvent être appréhendées en comparant les indices du premier ordre et totaux, S_i et T_i . La figure 5.11 présente ces indices pour la masse totale érodée cumulée sur la domaine M_{ero} . À noter que M_{ero} représente la somme de toutes les masses érodées m_{ero} . Le paramètre d_{s_2} qui n'est pas influent individuellement ne l'est pas non plus par ses interactions avec d'autres paramètres car ses deux indices sont nuls; son impact sur M_{ero} est donc négligeable. Les indices totaux T_i ne sont que légèrement supérieurs aux indices du premier ordre S_i ($S_i/T_i \approx 0.8$). Les interactions paramétriques concernent les paramètres, énoncés par ordre croissant d'importance, a_0 , d_{s_1} , a_{d_0} et $m_{t_0}^*$.

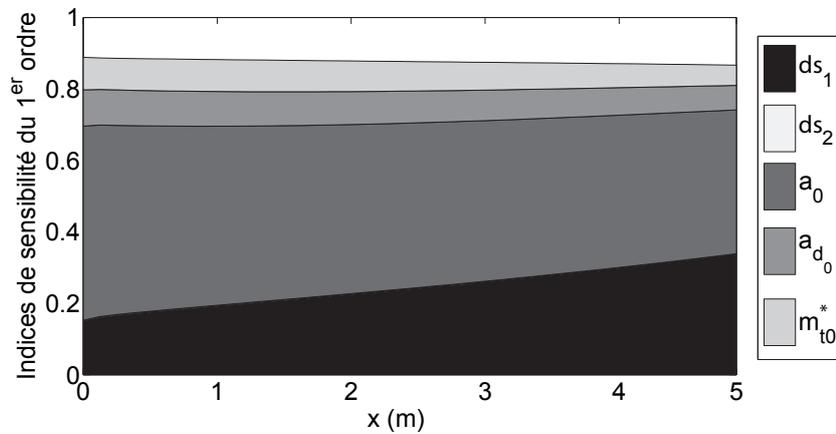


FIGURE 5.10 – Étude du détachement par la pluie : indices de sensibilité du premier ordre spatialisés pour la masse totale de sédiments détachés $m_{ero}(x)$ (g/m).

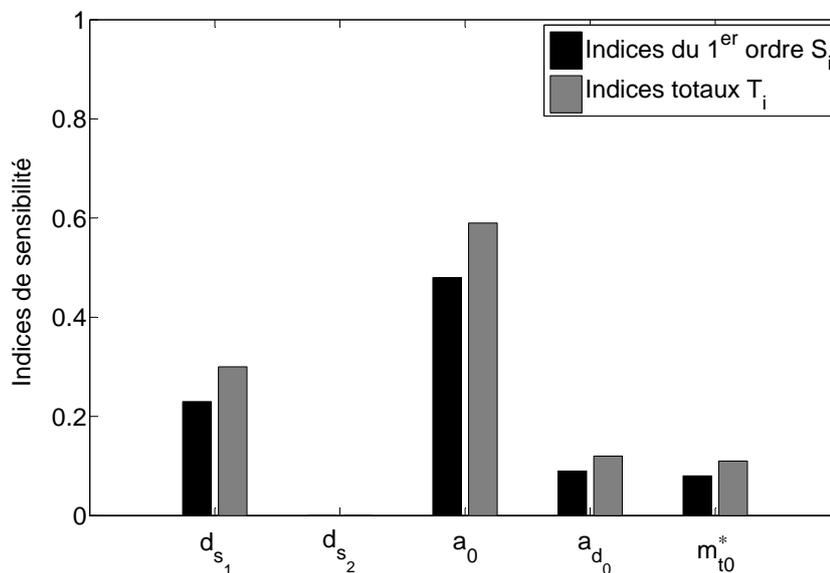


FIGURE 5.11 – Étude du détachement par la pluie : indices de sensibilité du premier ordre et totaux estimés pour la masse totale de sédiments détachés M_{ero} (g/m).

Efficacité de l'approche par Polynômes de Chaos

Cette section est consacrée à la comparaison des méthodes d'estimation des indices de sensibilité. En effet, comme énoncé et présenté à la section 3.3.2, une autre possibilité pour l'estimation des différents indices de sensibilité est la décomposition de la sortie du modèle en Polynômes de Chaos (PC) au moyen de l'estimation par les moindres carrés. Nous comparons donc les méthodes d'estimation des indices de sensibilité par Monte Carlo et par les PC.

Tout d'abord, nous avons vérifié la bonne convergence de l'estimation par Monte Carlo des indices de sensibilité du premier ordre et totaux pour la masse érodée totale en fonction de la taille de l'échantillon M . Cette convergence est illustrée à la figure 5.12. Les indices S_i et T_i convergent très rapidement et le nombre de simulations utilisé, $M = 100000$, pour l'échantillonnage par Monte Carlo est bien suffisant pour les déterminer avec précision. Pour $M = 5000$, une bonne convergence des résultats est déjà observée. Nous prenons donc pour valeurs de référence les valeurs des indices estimés avec $M = 100000$.

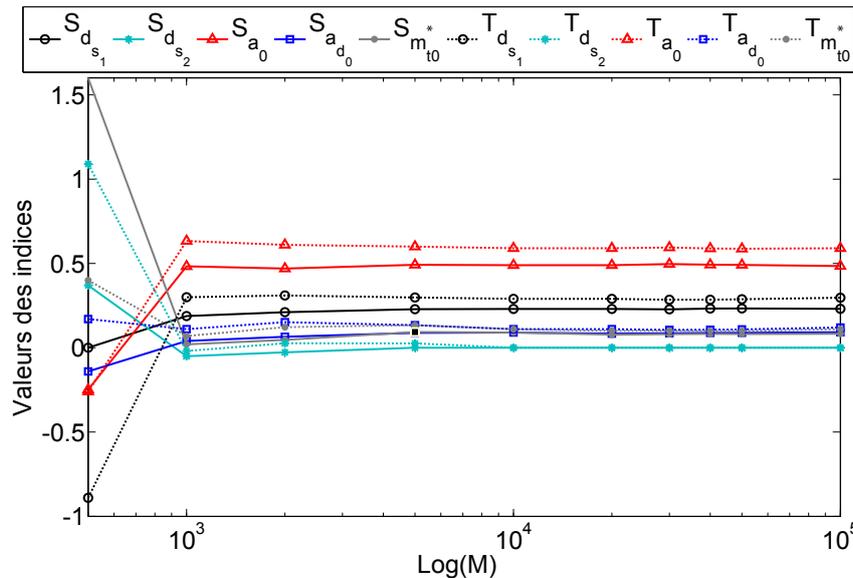


FIGURE 5.12 – Étude du détachement par la pluie : convergence des indices de sensibilité du premier ordre (S_i) et totaux (T_i) pour la masse érodée totale M_{ero} en fonction de la taille de l'échantillon M pour la méthode de Monte Carlo.

La figure 5.13 présente la convergence des indices de sensibilité du premier ordre S_i et totaux T_i estimés par le développement PC pour une taille d'échantillon $M = 2000$ en fonction de l'ordre de troncature N_o du développement. Les valeurs de référence sont les valeurs obtenues par l'estimation Monte Carlo pour une dimension d'échantillon $M = 100000$. On constate que la convergence est très rapide, dès $N_o = 3$ les indices estimés sont très bons et ce pour une dimension d'échantillon relativement petite. La

convergence en fonction de la dimension de l'échantillon est d'ailleurs illustrée sur la figure 5.14 qui présente les indices de sensibilité du premier ordre et totaux estimés par le développement PC pour un ordre de troncature $N_o = 3$. La précision de l'estimation est très bonne dès $M = 500$. On peut ainsi voir que l'estimation des indices de sensibilité par les PC est très précise et ce pour un ordre de troncature N_o et une dimension d'échantillon M relativement petits. En outre, alors que la méthode par PC requiert un seul échantillon de dimension M pour l'estimation de la totalité des indices de sensibilité, celle par Monte Carlo requiert $2N + 1$ échantillons de dimension M pour l'estimation des indices du premier ordre et totaux. Le gain en coût de calcul est donc considérable.

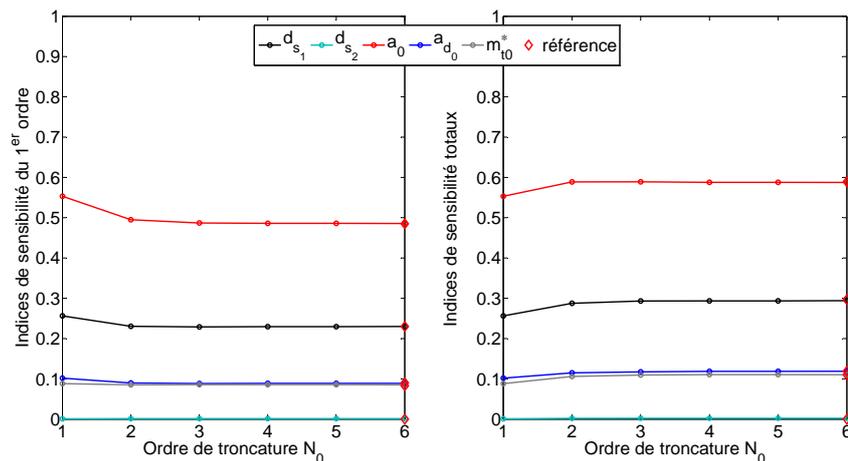


FIGURE 5.13 – Étude du détachement par la pluie : convergence des indices de sensibilité de la masse totale érodée estimés par le développement en Polynômes de Chaos pour une dimension $M = 2000$ en fonction de l'ordre de troncature N_o ; à gauche les indices du premier ordre ; à droite les indices totaux.

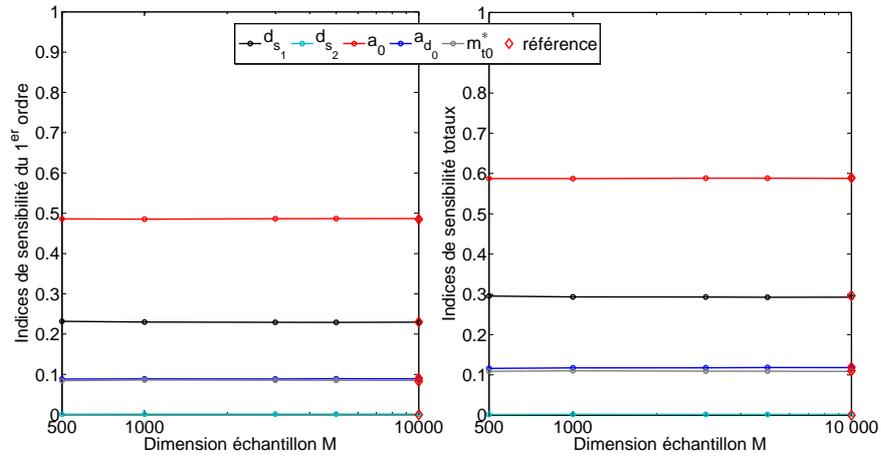


FIGURE 5.14 – Étude du détachement par la pluie : convergence des indices de sensibilité de la masse totale érodée estimés par le développement en Polynômes de Chaos pour un ordre de troncature $N_o = 3$ en fonction de la dimension de l'échantillon M ; à gauche les indices du premier ordre ; à droite les indices totaux.

5.3.3 Érosion par le ruissellement

Description du cas test

Pour l'étude des incertitudes paramétriques au travers du modèle HR avec détachement par le ruissellement uniquement, une hauteur d'eau égale à 3 cm est imposée en amont du plan unidimensionnel sans vitesse initiale (*cf.* figure 5.15). Cet apport d'eau est stoppé au bout de 4 min et le temps total de simulation est égal à 5 min. Tous les paramètres sont supposés uniformes en espace. La conductivité hydraulique à saturation est égale à $K_s = 5 \text{ mm.h}^{-1}$ et le coefficient de frottement pour la loi de Darcy-Weisbach est fixé à $f = 0.3$.

La modélisation probabiliste des paramètres d'entrée est quelque peu modifiée par rapport à la section 5.2. F et J suivent des lois log-uniformes sur les intervalles, respectivement, $[0.001, 0.15]$ et $[60, 5000]$ (J.kg^{-1})

$$\log(F) \sim \mathcal{U}[\log(0.001), \log(0.15)], \quad \log(J) \sim \mathcal{U}[\log(60), \log(5000)]. \quad (5.11)$$

Les intervalles de valeurs ont été réduits (au niveau de la borne supérieure de F et de la borne inférieure de J) pour éviter les configurations conduisant à des quantités érodées trop extrêmes pour lesquelles le code présente des difficultés de convergence.

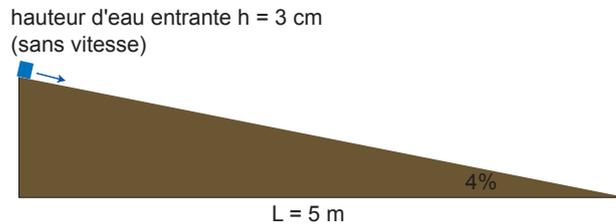
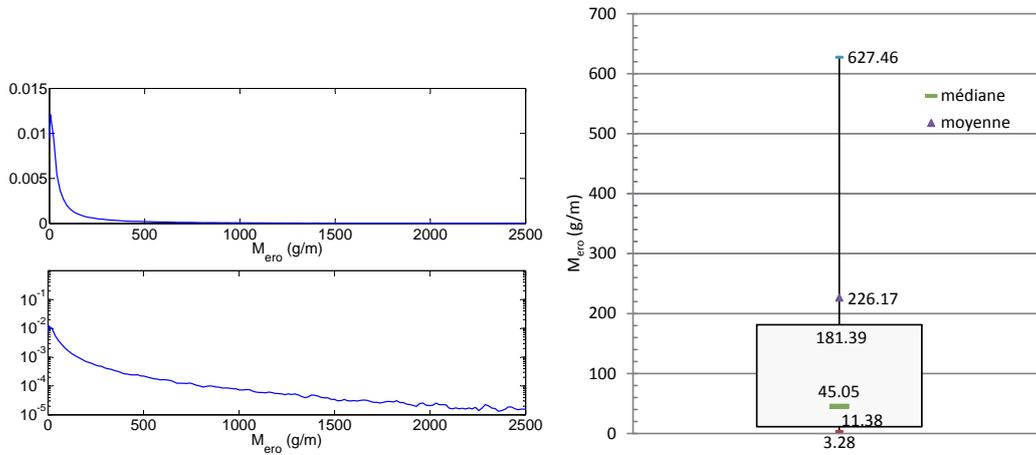


FIGURE 5.15 – Configuration initiale pour l'étude du modèle HR avec détachement par le ruissellement uniquement.

Forte dispersion au niveau de la masse érodée

Tout d'abord, il est à noter que les sorties du modèle présentent une très forte dispersion, les masses totales érodées par unité de largeur M_{ero} présentent des valeurs allant du gramme à quelques kilogrammes. Cette importante dispersion est d'ailleurs visible sur les différentes estimations statistiques. La figure 5.16(a) présente la pdf de la masse totale érodée M_{ero} estimée par la méthode de Parzen-Rozenblatt et l'échantillon Monte Carlo de dimension $M = 100000$. Un premier point est que l'allure de la pdf illustre très bien le fait que l'échantillon de la variable de sortie admet une forte variabilité car l'étalement de la pdf est très important, au-delà du kilogramme par mètre. Cet étalement est d'ailleurs en accord avec la grandeur de la moustache supérieure de la boxplot présentée à la figure 5.16(b). De plus, la pdf présente un pic marqué qui est dû aux nombreuses simulations conduisant à de très faibles quantités érodées. Ceci est d'ailleurs à mettre en relation avec l'estimation des différents quantiles de la figure 5.16(b). En effet, on peut y voir que les valeurs des premiers décile et quartile sont très petites, respectivement, 3.28 g/m et 11.38 g/m alors que la valeur du neuvième décile atteint 627.46 g/m. De plus, l'importance des valeurs extrêmes est corroborée par l'écart relatif de la moyenne à la médiane qui est environ égal à 400%. La moyenne est d'ailleurs supérieure au troisième quartile !

La figure 5.17 présente la moyenne et la variance de la masse érodée spatialisée $m_{ero}(x)$. On remarque que le profil est relativement uniforme le long du domaine. De plus, les valeurs de la variance sont élevées et le calcul du coefficient de variation cov (égal au rapport de l'écart type σ sur la moyenne \hat{E}) conduit à une valeur très importante, $cov = 217\%$, ce qui signifie que la dispersion des valeurs de la masse érodée est très importante.



(a) Pdf de la masse totale de sédiments érodés (b) Boxplot de la masse totale de sédiments érodés

FIGURE 5.16 – Étude du détachement par le ruissellement : estimations statistiques pour le M échantillon de la masse totale de sédiments érodés M_{ero} (g/m) ($M = 100000$); (a) fonction de densité de probabilité estimée avec une fenêtre de lissage $\eta = 10$; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas); (b) boxplot représentant les valeurs suivantes : 1^{er} et 9^{ème} déciles (\widehat{Q}_{10} et \widehat{Q}_{90}), 1^{er} et 3^{ème} quartiles (\widehat{Q}_{25} et \widehat{Q}_{75}), médiane (\widehat{Q}_{50}) et moyenne ($E[M_{ero}]$).

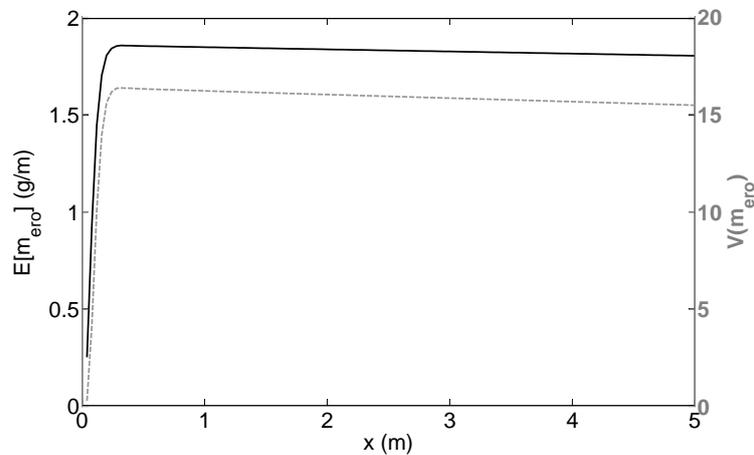


FIGURE 5.17 – Étude du détachement par le ruissellement : estimations de la moyenne et de la variance spatialisées pour la masse de sédiments érodés $m_{ero}(x)$ (g/m).

Influence des paramètres F et J

Concernant l'analyse de sensibilité globale, contrairement au cas test précédent, nous ne présentons pas les indices de sensibilité spatialisés, les résultats des indices étant identiques en tous points de l'espace. La figure 5.18 présente les indices de sensibilité du

premier ordre S_i et totaux T_i pour la masse totale érodée M_{ero} (g/m). Ces indices sont estimés par le développement en PC pour une dimension d'échantillon $M = 3000$ et un ordre de troncature $N_o = 3$. Les résultats montrent que seuls les paramètres F et J influencent la variabilité de la masse érodée. On peut de plus remarquer que l'indice du premier ordre relatif au paramètre F est égal à 33% et est légèrement supérieur à celui relatif au paramètre J qui est égal à 27%. Ceci s'explique par le fait que le paramètre F intervient à la fois dans le détachement par le ruissellement du sol original mais aussi dans celui de la couche de dépôt, alors que le paramètre J n'apparaît que dans le détachement du sol. En outre, la somme de ces deux indices atteint 60%, ce qui signifie que 40% de la variabilité de la masse érodée provient d'interactions paramétriques essentiellement dues aux paramètres F et J . L'impact de ces deux paramètres est donc considérable. Au vu de leur très forte influence sur les sorties et leur définition ne permettant pas de mesure directe, nous pouvons nous demander s'il ne serait pas préférable de re-paramétriser cette partie du modèle. La question est abordée dans la discussion de ce chapitre et des perspectives sont envisagées pour approfondir l'analyse dans le chapitre 6.

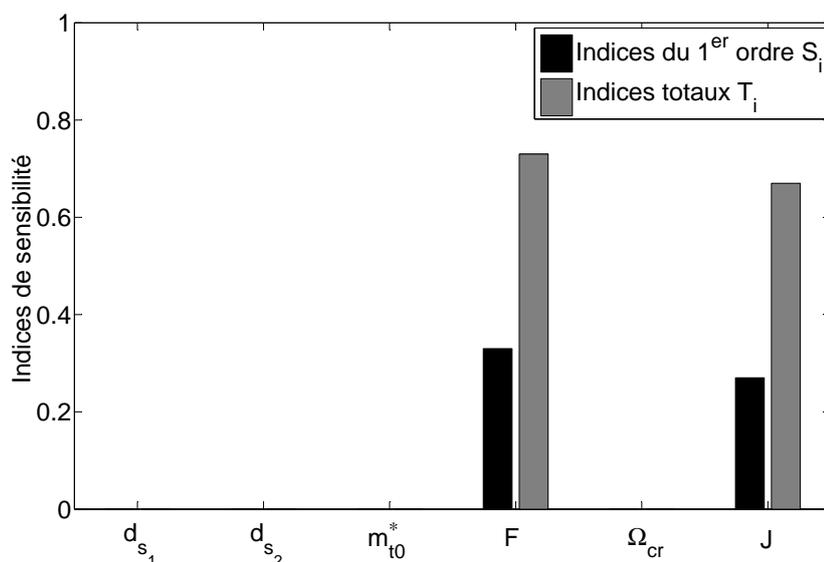


FIGURE 5.18 – Étude du détachement par le ruissellement : indices de sensibilité du premier ordre et totaux estimés pour la masse totale de sédiments détachés par unité de largeur M_{ero} (g/m) par la méthode des Polynômes de Chaos pour un échantillon de dimension $M = 3000$ et un ordre de troncature $N_o = 3$.

5.3.4 Érosion par la pluie et par le ruissellement

Description du cas test

Pour l'étude du modèle HR complet, nous considérons une pluie constante et uniforme de taux égal à $R(t) = 100 \text{ mm.h}^{-1}$ sur une durée de 4 min. Le temps total de simulation est de 5 min. La configuration initiale est à nouveau celle présentée à la figure 5.7. Le coefficient de frottement pour la loi de Manning est fixé à $K = 0.015$ et la conductivité hydraulique à saturation à $K_s = 1 \text{ mm.h}^{-1}$. Comparé au cas test sur le modèle HR avec détachement par la pluie uniquement, nous prenons un taux de pluie plus important et une infiltration moindre pour favoriser le ruissellement et permettre ainsi d'engendrer plus de détachement par le ruissellement.

Distribution quasi uniforme de la masse érodée

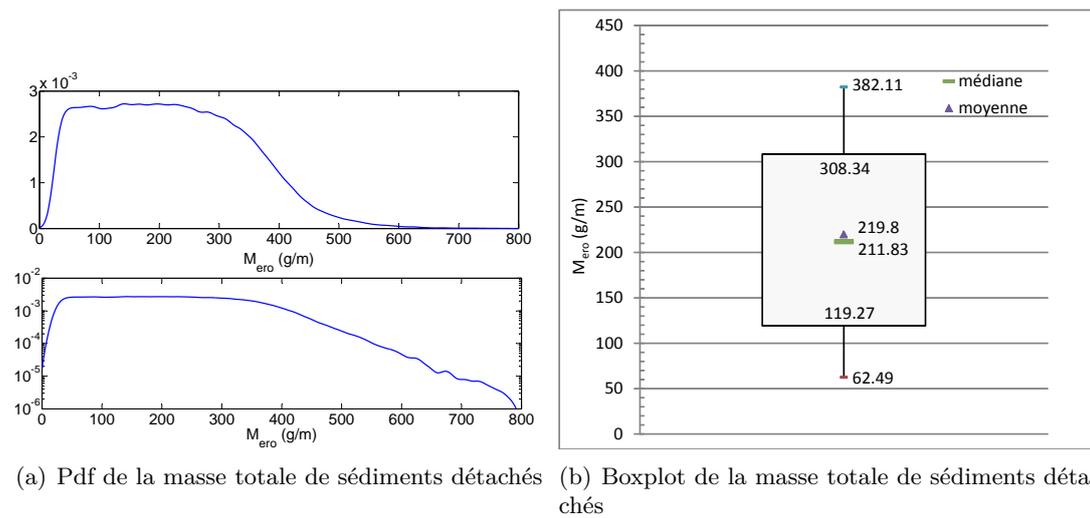


FIGURE 5.19 – Étude du modèle HR complet : estimations statistiques pour le M échantillon de la masse totale de sédiments érodés M_{ero} (g/m) ($M = 100000$); (a) fonction de densité de probabilité estimée avec une fenêtre de lissage $\eta = 3$; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas); (b) boxplot représentant les valeurs suivantes : 1^{er} et 9^{ème} déciles (\widehat{Q}_{10} et \widehat{Q}_{90}), 1^{er} et 3^{ème} quartiles (\widehat{Q}_{25} et \widehat{Q}_{75}), médiane (\widehat{Q}_{50}) et moyenne ($\widehat{E}[M_{ero}]$).

La figure 5.19(a) présente la pdf de la masse totale érodée M_{ero} par la méthode de Parzen-Rozenblatt *via* l'échantillon Monte Carlo de la variable de sortie. Tout d'abord, notons que l'allure de la pdf permet de conclure que le processus étudié peut être rapproché d'une loi uniforme sur sa partie gauche. La pdf atteint un plateau mais la partie décroissante est légèrement plus étalée que dans le cas d'une loi uniforme. Ceci est en accord avec les estimations des différentes valeurs statistiques présentées sur le boxplot de la figure 5.19(b). En effet, la moustache inférieure ainsi que le boxplot

correspond à une distribution uniforme puisque $\frac{\widehat{Q}_{25} - \widehat{Q}_{10}}{\widehat{Q}_{75} - \widehat{Q}_{25}} = 0.3$ ($\approx \frac{15}{50}$) alors que ce rapport est légèrement plus élevé pour la partie supérieure où $\frac{\widehat{Q}_{90} - \widehat{Q}_{75}}{\widehat{Q}_{75} - \widehat{Q}_{25}} = 0.39$ (> 0.3). On peut d'ailleurs rapprocher cette légère asymétrie l'écart relatif entre la moyenne et la médiane qui est environ égal à 4%, ce qui est relativement faible comparé aux cas tests précédents.

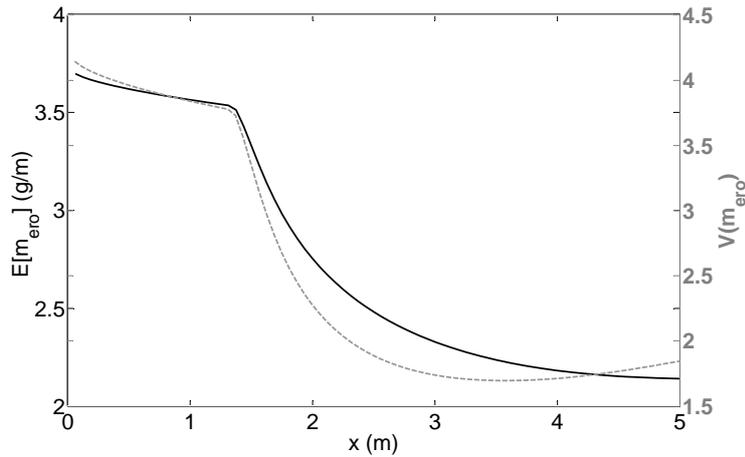


FIGURE 5.20 – Étude du modèle HR complet : estimations des moyenne et variance spatialisées pour la masse de sédiments détachés $m_{ero}(x)$ (g/m).

La figure 5.20 présente la moyenne et la variance de la masse érodée spatialisée $m_{ero}(x)$ (g/m). Le profil de l'espérance de la masse érodée n'est pas uniforme, il est très faiblement décroissant à l'amont du domaine puis décroît fortement. En effet, comme l'intensité de la pluie est plus élevée, elle engendre des hauteurs d'eau plus importantes qui créent une couche de protection. Le point de cassure du profil correspond au point où la hauteur d'eau atteint la valeur critique h_0 à partir de laquelle la détachabilité décroît (*cf.* équation (5.6)). D'autre part, l'amont du domaine est principalement érodé par l'impact des gouttes de pluie car les vitesses ne sont pas assez élevées pour permettre le détachement des sédiments par le ruissellement. Concernant le coefficient de variation, il est ici égal à $cov = 55\%$, ce qui signifie une dispersion assez importante des valeurs de masse érodée. Cependant, il reste largement inférieur à celui obtenu pour le cas du détachement par le ruissellement uniquement.

Influence de la détachabilité du sol a_0

La figure 5.21 présente l'estimation des indices de sensibilité du premier ordre pour la masse érodée spatialisée par le développement en PC. L'indice de sensibilité du premier ordre le plus élevé est celui relatif à la détachabilité du sol a_0 , viennent ensuite ceux relatifs aux paramètres a_{d_0} , $m_{t_0}^*$, d_{s_1} et d_{s_2} . La spatialisation des indices de sensibilité

permet de voir que l'influence de la détachabilité a_0 décroît le long du domaine avec une valeur comprise entre 82% à l'amont et 64% à l'aval. Tout comme pour le cas test sur le détachement par la pluie uniquement (*cf.* figure 5.10), cette décroissance s'explique par l'existence d'une hauteur d'eau critique protégeant le sol de l'impact des gouttes de pluie. On peut d'ailleurs constater cette décroissance pour les indices relatifs aux paramètres a_{d_0} et $m_{t_0}^*$, ainsi que la tendance inversée pour le paramètre d_{s_1} . Cependant, comme ces derniers indices sont relativement faibles (moins de 5%), on peut conclure que les paramètres a_{d_0} , $m_{t_0}^*$, d_{s_1} et d_{s_2} ont très peu d'influence directe sur la masse totale érodée. La spatialisation des indices de sensibilité permet aussi d'observer que les indices des paramètres relatifs au détachement par le ruissellement sont nuls à l'amont du domaine mais prennent des valeurs significatives à l'aval du domaine. Ceci est typique du détachement par le ruissellement, comme illustré à la section 2.3.2 : à partir d'un certain point du domaine, l'écoulement atteint une vitesse critique qui permet de détacher les sédiments. Ce seuil est représenté dans le modèle HR par le stream power critique Ω_{cr} . Le paramètre J a un indice de sensibilité du premier ordre nul, ce qui signifie qu'il n'est pas influent (au moins de manière directe) et peut laisser penser que le détachement par le ruissellement se fait majoritairement au niveau de la couche de dépôt et non au niveau du sol original (le paramètre J n'intervenant que dans le détachement du sol contrairement aux paramètres F et Ω_{cr}). Concernant les interactions paramétriques, la somme des indices de sensibilité du premier ordre est très proche de un à l'amont du domaine, ce qui signifie qu'il n'existe que très peu d'interactions. Cependant, cette somme décroît en présence de détachement par le ruissellement et on peut ainsi observer que les interactions paramétriques sont plus présentes à l'aval du domaine. La figure 5.21(b) présente les indices totaux de la masse érodée spatialisée et montre que les interactions paramétriques proviennent en majorité des paramètres F et Ω_{cr} et donc du processus de détachement par le ruissellement.

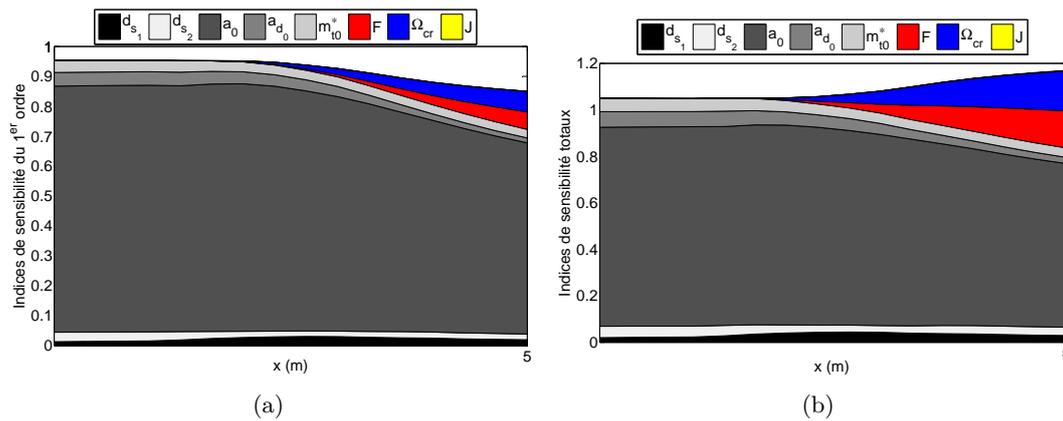


FIGURE 5.21 – Étude du modèle HR complet : indices de sensibilité spatialisés estimés pour la masse de sédiments détachés $m_{ero}(x)$ (g/m) par la méthode des Polynômes de Chaos pour un échantillon de dimension $M = 3000$ et un ordre de troncature $N_o = 3$; (a) indices de sensibilité du premier ordre; (b) indices de sensibilité totaux.

Concernant la sensibilité de la masse totale érodée M_{ero} , l'estimation des indices de sensibilité totaux et du premier ordre sont présentés sur la figure 5.22. Les résultats montrent que celle-ci n'est pas influencée par les paramètres relatifs au détachement par le ruissellement. En effet, la configuration dans laquelle nous nous plaçons engendre du détachement par la pluie sur tout le domaine et très peu de détachement par le ruissellement qui a lieu seulement sur la partie aval du domaine. Le taux de pluie étant important, l'impact des gouttes de pluie l'est aussi et l'écoulement engendré ne permet pas de détachement par le ruissellement pour l'ensemble des simulations. De plus, ici le détachement par le ruissellement se fait majoritairement au niveau de la couche de dépôt et non du sol original. Ainsi, le paramètre le plus important est la détachabilité du sol a_0 avec un indice égal à 81%, viennent en suite a_{d_0} et m_{t0}^* . La somme des indices du premier ordre est égale à 93% ce qui signifie que les interactions paramétriques n'ont que peu d'effet sur la variabilité de la masse totale érodée.

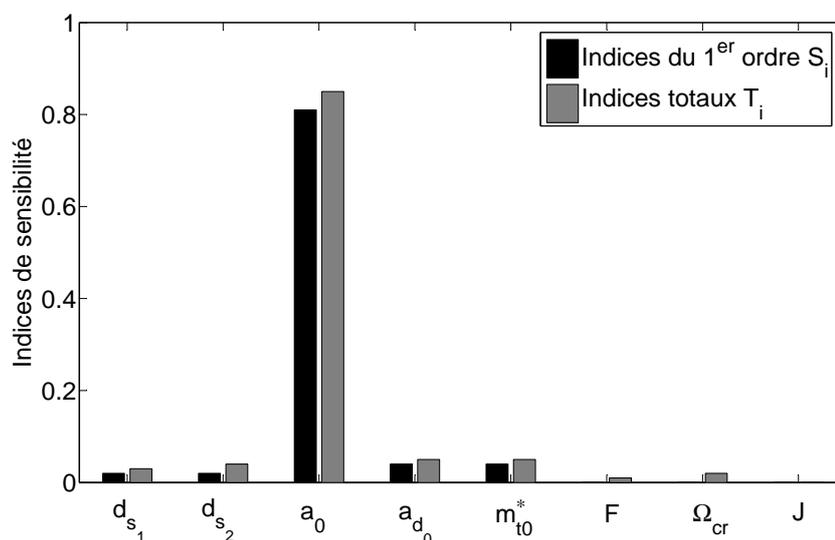


FIGURE 5.22 – Étude du modèle HR complet : indices de sensibilité du premier ordre et totaux estimés pour la masse totale de sédiments détachés M_{ero} (g/m) par la méthode des Polynômes de Chaos pour un échantillon de dimension $M = 3000$ et un ordre de troncature $N_o = 3$.

5.4 Cas test bidimensionnel

Description du cas test

Dans cette section, nous considérons un cas test bidimensionnel avec le modèle HR complet pour lequel la topographie utilisée est extraite d'un modèle numérique de terrain. Le domaine est une parcelle mesurant 5 m de long et 1.5 m de large présentée à la figure 5.23. Les paramètres du sol sont tous considérés uniformes, leurs valeurs sont celles précisées à la section 5.3.1. Comme à la section 5.3.4, le coefficient de frottement pour la loi de Manning est fixé à $K = 0.015$ et la conductivité hydraulique à saturation à $K_s = 1 \text{ mm.h}^{-1}$. Nous considérons une pluie constante et uniforme de taux égal à $R(t) = 100 \text{ mm.h}^{-1}$ sur une durée de 4 min et le temps de simulation est de 5 min. Cette configuration présentant un domaine spatial plus grand et un maillage plus raffiné, les temps de calcul sont donc plus importants, si bien que la dimension de l'échantillon étudié est $M = 24000$. Nous nous intéressons à la masse totale des sédiments érodés sur l'ensemble de la parcelle, M_{ero} (g), ainsi qu'à la masse totale des sédiments déposés M_{depo} (g).

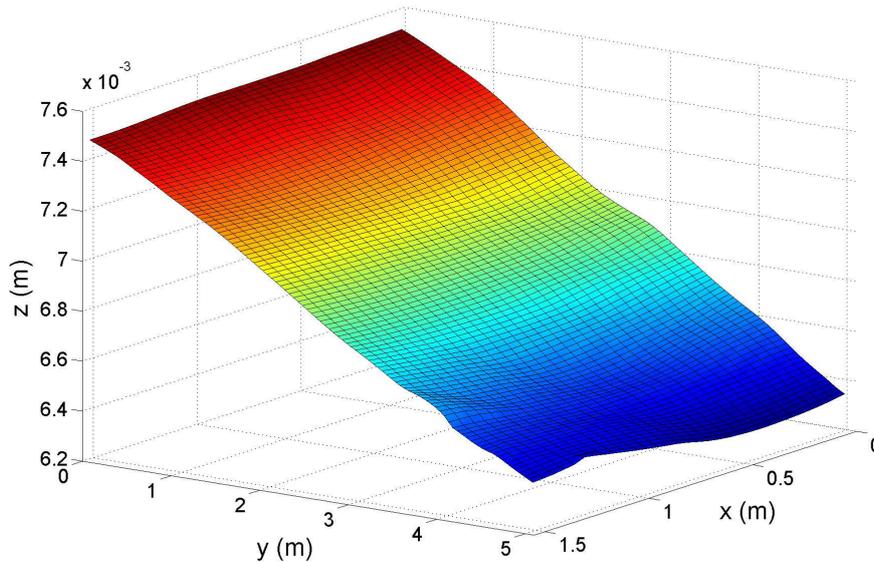


FIGURE 5.23 – Topographie initiale de la parcelle.

Impact des gouttes de pluie : source principale de détachement

Les figures 5.24(a) et 5.24(b) présentent les pdf's, respectivement, de la masse totale érodée M_{ero} et de la masse totale déposée M_{depo} , estimées par la méthode de Parzen-Rozenblatt *via* l'échantillon Monte Carlo de la variable de sortie. Tout d'abord, notons que l'allure des pdf's permet de conclure que les processus étudiés ne sont ni Gaussiens, ni uniformes, ni même symétriques. Concernant la variable de sortie M_{ero} , la forme

de la pdf ressemble à celle d'une loi de distribution log-normale dans le cas d'une variance élevée, une forte croissance sur la partie gauche ainsi qu'un étalement sur la partie droite étant typiques d'une telle distribution. En outre, ce comportement corrobore la forme de la boxplot obtenue pour cette variable de sortie, présentée à la figure 5.25(a) ; la moustache supérieure est plus grande que la moustache inférieure, signifiant l'étalement de la distribution vers des valeurs plus élevées. De plus, l'écart relatif de la moyenne à la médiane est significatif avec une valeur égale à $\approx 13\%$. Les conclusions établies grâce à la pdf et à la boxplot sont comparables à celles obtenues dans le cas de l'étude du détachement par la pluie uniquement sur les figures 5.8(a) et 5.8(b). Concernant la variable de sortie M_{depo} , la pdf estimée présente un pic marqué autour de zéro qui correspond aux nombreuses simulations conduisant à des dépôts nuls. En effet, nous nous plaçons dans une configuration où le dépôt est très faible et où la probabilité d'occurrence d'un dépôt nul est importante. Ceci se traduit sur la boxplot de la figure 5.25(b) par une médiane proche de zéro. De plus, la moyenne est ici largement supérieure à la médiane et même proche du premier quartile. Ceci est dû aux valeurs extrêmes que l'on peut constater par la grandeur de la moustache supérieure.

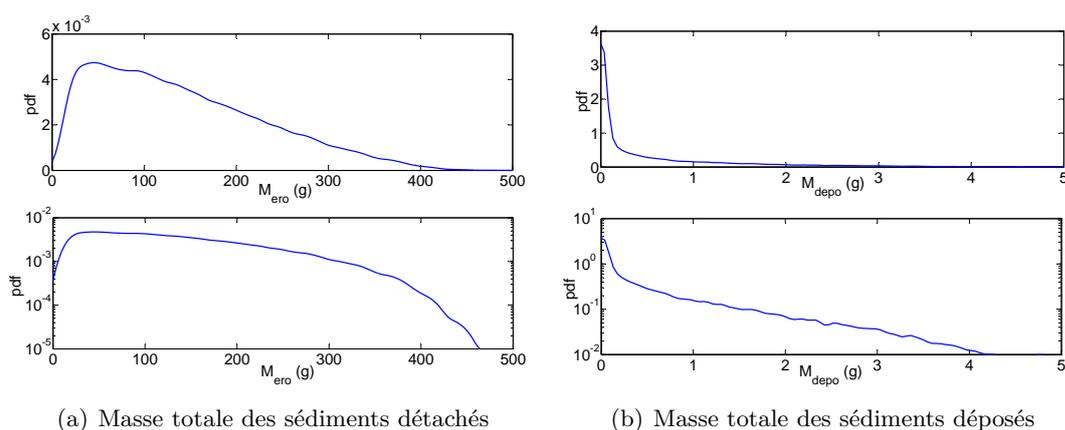


FIGURE 5.24 – Étude du modèle HR complet sur une petite parcelle : fonctions de densité de probabilité estimées avec une fenêtre de lissage η ; échelle linéaire (en haut) et logarithmique (en bas) ; (a) pour la masse totale de sédiments érodés M_{ero} (g) et $\eta = 7$; (b) pour la masse totale de sédiments déposés M_{depo} (g) et $\eta = 0.05$.

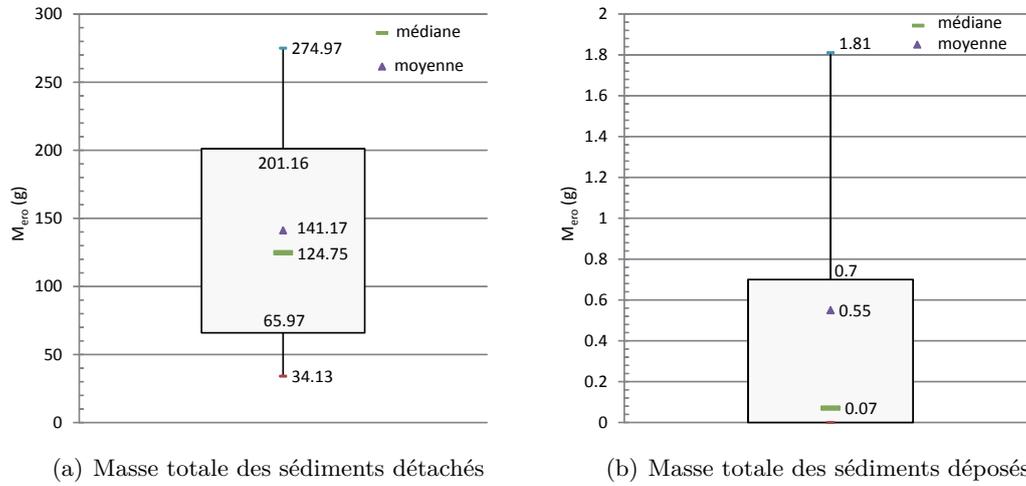


FIGURE 5.25 – Étude du modèle HR complet sur une petite parcelle : boxplots représentant les valeurs suivantes : 1^{er} et 9^{ème} déciles (\widehat{Q}_{10} et \widehat{Q}_{90}), 1^{er} et 3^{ème} quartiles (\widehat{Q}_{25} et \widehat{Q}_{75}), médiane (\widehat{Q}_{50}) et moyenne ($\widehat{E}[\cdot]$) pour l'échantillon des variables de sortie; (a) pour la masse totale de sédiments érodés M_{ero} (g); (b) pour la masse totale de sédiments déposés M_{depo} (g).

Influence de la détachabilité du sol et du diamètre des sédiments

La figure 5.26(a) présente les indices de sensibilité du premier ordre S_i et totaux T_i de la variable de sortie M_{ero} estimés à partir d'un échantillon de dimension $M = 3000$ et un ordre de troncature $No = 3$ par la méthode des PC. L'indice de sensibilité le plus élevé est celui relatif à la détachabilité du sol a_0 avec une valeur égale à 60%. En comparant les résultats avec ceux obtenus pour l'étude unidimensionnelle du modèle complet (voir la figure 5.22), on observe que a_0 a une influence moins importante et la valeur de son indice décroît de 81% à 60%. En outre, les paramètres d_{s1} , a_{d0} et m_{t0}^* ont une influence plus significative et leurs indices de sensibilité du premier ordre sont égaux, respectivement, à 15%, 8% et 8%. La différence avec les résultats du cas test unidimensionnel est plus marquée pour le diamètre des sédiments les plus petits, d_{s1} . Le paramètre influence la masse totale érodée dans le cas d'une configuration bidimensionnelle, alors que son influence est presque nulle pour le plan unidimensionnel. Ceci peut être expliqué par le fait que dans le cas d'une topographie plus réaliste, la présence de microtopographies favorise l'apparition de rigole(s) où l'écoulement se concentre et les vitesses sont plus élevées favorisant ainsi le détachement par le ruissellement mais aussi le dépôt des sédiments au niveau des "bosses". La détachabilité du sol a alors moins d'impact contrairement au diamètre des sédiments qui contribue aux processus de dépôt et de détachement par la formation de la couche de dépôt. Concernant les interactions paramétriques, les conclusions sont les mêmes que pour le cas unidimensionnel, la somme des indices du premier ordre étant égale à 91%, les interactions n'influencent que très peu la variabilité de M_{ero} . En outre, les interactions concernent

les paramètres ayant une influence individuelle, c'est-à-dire a_0 , d_{s_1} , a_{d_0} et $m_{t_0}^*$.

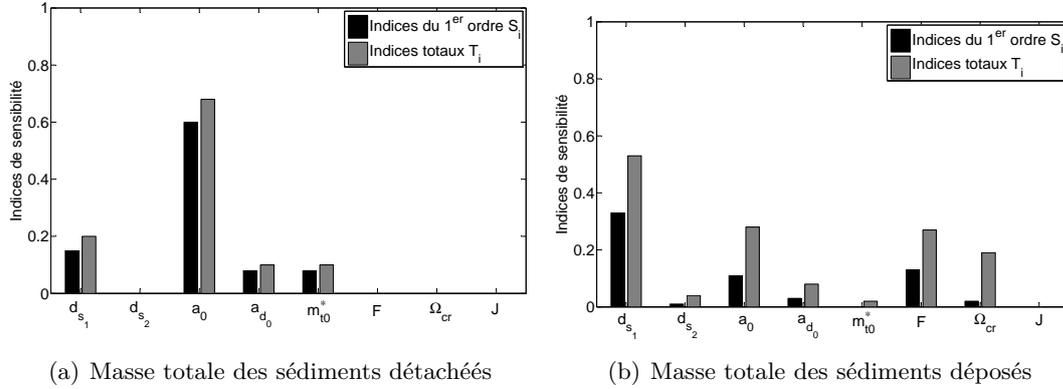


FIGURE 5.26 – Étude du modèle HR complet sur une petite parcelle : indices de sensibilité du premier ordre et totaux estimés par la méthode des Polynômes de Chaos pour un échantillon de dimension $M = 3000$ et un ordre de troncature $N_o = 3$; (a) pour la masse totale de sédiments détachés M_{ero} (g); (b) pour la masse totale de sédiments déposés M_{depo} (g).

Concernant la masse totale de sédiments déposés, bien que présentant de faibles valeurs, nous nous sommes intéressés à sa sensibilité vis à vis des différents paramètres du modèle HR. Les résultats des estimations des indices de sensibilité du premier ordre et totaux sont présentés sur la figure 5.26(b). Tout d'abord, comme attendu, le paramètre ayant le plus d'influence est le diamètre des sédiments de la classe 1, d_{s_1} , avec un indice de sensibilité du premier ordre égal à 33%. En effet, la vitesse de sédimentation dépend fortement de ce paramètre. On peut constater que le paramètre a_0 est beaucoup moins influent sur la variabilité de la masse déposée que sur celle de la masse érodée. On a vu à la section 2.3.2, que le dépôt se faisait principalement à l'aval de la rigole et ce pour le modèle de détachement par la pluie uniquement et pour des valeurs déterministes des paramètres. Ainsi, dans des configurations où les paramètres relatifs au détachement par le ruissellement ne permettent pas de détacher, la configuration est comparable au cas du détachement par la pluie uniquement et le dépôt a lieu. De plus, la somme des indices de sensibilité du premier ordre est égale à 63%, ce qui signifie que pour la masse totale déposée, l'impact des interactions paramétriques est significatif. Les indices de sensibilité totaux nous montrent que ces interactions proviennent des paramètres déjà importants individuellement, d_{s_1} , F , a_0 , mais aussi du stream power critique Ω_{cr} .

5.5 Discussion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé une étude paramétrique du modèle d'érosion de Hairsine–Rose (HR) qui est un modèle multi-classes permettant de considérer séparément le détachement par la pluie, le détachement par le ruissellement ainsi que le dépôt. Nous avons tout d'abord présenté une analyse paramétrique du modèle HR dans laquelle nous nous sommes intéressés aux paramètres que nous avons considérés comme “à mesure indirecte” ou “de calage” et que nous avons regroupés sous le terme “paramètres principaux” (les paramètres dits “à mesure directe” présentant moins d'intérêts pour l'analyse d'incertitudes). Les paramètres principaux du modèle HR sont difficilement mesurables et sont généralement intégrés à un modèle de calibration, les valeurs obtenues peuvent parfois perdre de leur sens physique. De plus, les plages de valeurs que nous avons répertoriées pour les différents paramètres sont relativement étendues. Nous avons donc intégré huit paramètres au modèle probabiliste de propagation d'incertitudes dans un modèle HR à deux classes : la détachabilité du sol a_0 , la détachabilité de la couche de dépôt a_{d_0} , la masse de sédiments déposés requise pour protéger complètement le sol $m_{t_0}^*$, le stream power critique Ω_{cr} , la fraction de l'excès du stream power effectif F , l'énergie dépensée pour l'entraînement J , d_{s_1} et d_{s_2} les diamètres respectifs des deux classes de sédiments. Dans notre étude, nous avons considéré d'abord des cas tests unidimensionnels dans lesquels nous avons étudié séparément le modèle HR avec détachement par la pluie uniquement, le modèle HR avec détachement par le ruissellement uniquement et enfin le modèle HR complet. Un dernier cas test bidimensionnel a été réalisé afin de considérer le modèle HR complet sur une topographie réaliste extraite d'un modèle numérique de terrain. Pour les quantités d'intérêt, nous nous sommes intéressés à la masse érodée spatialisée par unité de largeur $m_{ero}(x)$ (g/m) ainsi qu'à la masse totale érodée par unité de largeur M_{ero} (g/m) pour les cas tests unidimensionnels et aux masses totales de sédiments détachés et déposés, respectivement M_{ero} (g) et M_{depo} (g), pour le cas test bidimensionnel.

Concernant les processus de détachement séparés, l'analyse de sensibilité globale lors du détachement par la pluie uniquement montre que la détachabilité du sol a_0 et le diamètre de la classe des sédiments les plus petits d_{s_1} sont les paramètres les plus influents. Concernant le détachement par le ruissellement uniquement, seuls les paramètres F et J influencent la sortie. De plus, la dispersion de la masse érodée est très élevée (217%), sa distribution est très étalée. Par exemple, la moyenne est supérieure au neuvième décile, ce qui montre l'importance des valeurs extrêmes. Au vu des résultats et des valeurs relevées pour les paramètres F et J , ces paramètres peuvent être considérés comme des paramètres de calage. Le modèle d'érosion HR, bien qu'étant essentiellement un modèle “à base physique”, utilise donc deux paramètres de calage qui influencent à eux seuls le détachement par le ruissellement. Observant les équations du modèle (5.3)-(5.4), on voit que le taux de détachement du sol original par le ruissellement est proportionnel au rapport F/J et que le taux de détachement de la couche de dépôt par le ruissellement est proportionnel à F . J est l'énergie dépensée pour l'entraînement d'une unité de masse de sédiments cohésifs et F la fraction d'excès du stream power effectif. En outre, l'utilisation du même paramètre F pour deux processus de

détachement différents, du sol et de la couche de dépôt, n'est pas évident. Au vu de l'impact considérable et de la définition initiale des paramètres F et J , il serait peut-être envisageable de ne considérer qu'un paramètre par équation et remplacer ainsi ce rapport. Nous proposons de considérer un unique paramètre qui tiendrait compte à la fois de l'effet de dissipation du stream power effectif mais aussi de l'énergie dépensée. On pourrait alors définir F_s comme la fraction d'excès du stream power effectif pour le sol original qui remplacerait F/J dans l'équation (5.3), et F_c qui serait la fraction d'excès du stream power effectif de la couche de dépôt et remplacerait F dans l'équation (5.4). L'étude du détachement par le ruissellement uniquement pourrait être ainsi reparamétrée.

En configuration de détachement à la fois par la pluie et par le ruissellement sur un plan unidimensionnel, l'analyse de sensibilité globale montre que le paramètre a_0 influence majoritairement la variabilité de la masse totale érodée (à environ 80%) et que les paramètres relatifs au détachement par le ruissellement ont une influence négligeable. En outre, les interactions paramétriques sont peu significatives et représentent 7% de la variabilité. Il est à noter, pour comprendre ces résultats et modérer leur impact, que dans le cas test considéré l'apport d'eau provient d'un événement pluvieux relativement court (4 min) et intense. Ainsi, l'impact des gouttes de pluie est la source principale du détachement des sédiments du sol original. De plus, le détachement par le ruissellement se fait majoritairement au niveau de la couche de dépôt. Cependant, la spatialisation des indices de sensibilité permet de constater que les paramètres F et Ω_{cr} (relatifs au détachement par le ruissellement) ont un impact significatif lorsque l'on se rapproche de l'aval du domaine. En effet, comme évoqué à la section 2.3.2, la vitesse de l'écoulement augmente le long du domaine et atteint une vitesse critique permettant de détacher les sédiments par le ruissellement, le seuil étant caractérisé par la valeur du stream power critique. La spatialisation permet aussi de remarquer que les interactions paramétriques sont plus significatives sur le dernier tiers du domaine. En effet, les interactions paramétriques ont un impact beaucoup plus prononcé en présence du détachement par le ruissellement (5% à l'amont et 15% à l'aval) et cette différence provient principalement des paramètres F et Ω_{cr} .

Concernant le cas test bidimensionnel, les conclusions obtenues sont légèrement différentes de celles obtenues à partir du cas test unidimensionnel. La détachabilité a_0 reste le paramètre qui influence le plus la masse totale érodée (la valeur de son indice de sensibilité du premier ordre est de 60%). Cependant, le diamètre de la plus petite classe de sédiments composant le sol apparaît lui aussi important (la valeur de son indice de sensibilité du premier ordre est de 15%). Ceci peut s'expliquer par la présence de microtopographies et l'existence d'une rigole où l'écoulement se concentre au bas du domaine (*cf.* la section 2.3.2), ce genre de phénomènes ne pouvant pas avoir lieu en configuration unidimensionnelle. Ce résultat peut d'ailleurs être mis en parallèle avec l'analyse de sensibilité globale réalisée par Laloy et Bièdiers [81] sur leur modèle d'érosion. Ces auteurs obtiennent 15 % pour l'indice de sensibilité S_i du diamètre moyen des sédiments qui apparaît ainsi comme le paramètre relatif à l'érosion le plus important. De plus, ce cas test est le seul qui nous permet d'obtenir des masses de sédiments déposées non nulles. La présence de microtopographies permet d'arrêter les sédiments

contrairement au plan unidimensionnel où il est normalement impossible d'obtenir du dépôt. Les masses de sédiments déposés sont relativement faibles et présentent une forte probabilité d'être nulles. L'analyse de sensibilité globale montre que le diamètre d_{s_1} des sédiments les plus petits est le paramètre le plus influent, viennent ensuite F , a_0 , les autres paramètres n'ayant pas d'influence significative individuellement. Une remarque importante concerne les interactions paramétriques. En effet, celles-ci ont beaucoup plus d'effet sur la masse déposée (37%) que sur la masse érodée (9%) et proviennent autant des paramètres d_{s_1} et a_0 que des paramètres F et Ω_{cr} .

Ce chapitre a permis de réaliser une étude de sensibilité globale pour le modèle d'érosion HR, ce qui n'avait pas encore été fait à notre connaissance, les analyses de sensibilité des modèles d'érosion étant pour la plupart locales. Les résultats montrent que les paramètres du modèle HR qui influencent le plus la variabilité de la masse des sédiments érodés ou déposés sont a_0 , d_{s_1} , F , J ainsi que Ω_{cr} dans une moindre mesure. De plus, une des conclusions de cette étude est que les interactions paramétriques sont peu significatives dans le modèle de détachement par la pluie mais s'avèrent importantes dans le modèle de détachement par le ruissellement. L'apport du cas test bidimensionnel sur une topographie plus réaliste est intéressant. Les configurations unidimensionnelles sont certes utiles pour une meilleure compréhension des processus car elles facilitent la visualisation des résultats. En effet, le profil spatial de la masse érodée a , par exemple, permis de détecter l'influence de paramètres relatifs au détachement par le ruissellement qui apparaissaient comme négligeables concernant la masse totale érodée sur tout le domaine. Cependant, le passage au cas bidimensionnel semble important car il permet d'obtenir des configurations plus réalistes mais surtout il rend possible le processus de dépôt. En effet, les études sur des plans unidimensionnels ne peuvent conduire à des dépôts définitifs, dans le sens où les sédiments peuvent être déposés sur un plan mais sont toujours re-détachés en raison de l'écoulement vers l'aval. De plus, il convient de souligner l'importance des conditions initiales imposées. En effet, dans la configuration que nous avons retenue pour l'étude de la parcelle, les processus de détachement par la pluie sont dominants si bien que les paramètres relatifs au détachement par le ruissellement ne sont pas importants. Par contre, Nord et Esteves [108] étudient une configuration où les processus de détachement par le ruissellement sont dominants et montrent, par une analyse de sensibilité locale, que leur modèle d'érosion est plus sensible aux paramètres relatifs au détachement par le ruissellement.

Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse nous avons étudié la propagation et la quantification des incertitudes paramétriques au travers de modèles hydrologiques pour la simulation d'écoulements en présence d'infiltration et/ou d'érosion. Les apports de ce travail sont doubles et concernent à la fois la méthodologie mathématique et l'hydrologie.

Pour revenir sur l'aspect méthodologique, nous avons utilisé une méthode de propagation directe considérant certains paramètres d'entrée comme des variables aléatoires indépendantes décrites par une fonction de densité de probabilité fixée *a priori*. Le choix de ces lois a été basé sur une revue bibliographique. Nous avons choisi un modèle probabiliste relativement simple, considérant un domaine d'écoulement soit uniforme, soit découpé en sous-domaines reflétant l'organisation spatiale du territoire. Pour l'échantillonnage des variables aléatoires, nous avons utilisé la méthode de Monte Carlo, la résolution du modèle déterministe ne demandant pas un coût de calcul trop élevé. En outre, l'utilisation des Polynômes de Chaos (PC), plus récente et plus efficace, a aussi été utilisée pour estimer les indices de sensibilité globale par le développement en PC de la sortie du modèle. Ces approches ont permis notamment de hiérarchiser l'influence des paramètres d'entrée sur les quantités de sortie.

Dans le chapitre 4, cette méthodologie a été appliquée au modèle écoulement/infiltration au travers duquel nous avons propagé les incertitudes relatives au paramètre clé du modèle d'infiltration de Green–Ampt, à savoir la conductivité hydraulique à saturation K_s . Les conclusions pratiques d'un premier cas test concernent la collecte des paramètres d'entrée, à savoir où concentrer les efforts de mesure, dans le cas d'un domaine présentant une capacité d'infiltration non uniforme, afin de réduire les incertitudes des variables de sortie. En effet, nous avons montré que, en cas de sol peu saturé, il est préférable de concentrer les mesures près de l'exutoire. À l'inverse, si le sol est fortement saturé, il convient de focaliser les mesures sur les parties les plus perméables du domaine. Un second cas test a montré que la distribution spatiale de bandes enherbées le long d'un plan n'a pas d'impact significatif sur la variabilité des quantités relatives au ruissellement. Cependant, la répartition des bandes enherbées le long du domaine diminue la probabilité d'occurrence des valeurs extrêmes des débits maximaux temporels et permet ainsi de réduire le risque érosif.

Le chapitre 5 a été consacré à l'étude paramétrique du modèle d'érosion de Hairsine–Rose (HR) qui est un modèle multi-classes permettant de considérer séparément le détachement par la pluie, le détachement par le ruissellement ainsi que le dépôt. Concernant l'analyse de sensibilité sur la masse érodée, sur huit paramètres d'entrée considérés

comme incertains, il résulte que seuls cinq sont influents sur la variabilité des sorties comme la masse érodée. Un point important concerne l'influence considérable de deux paramètres relatifs au détachement par le ruissellement, F et J , qui apparaissent comme des paramètres de calage. De plus, l'étude de sensibilité globale a permis de montrer que les interactions paramétriques n'ont pas d'impact significatif lors du processus de détachement par la pluie mais s'avèrent importantes lors du processus de détachement par le ruissellement.

Perspectives

À l'issue de ce travail, différents points pourraient être approfondis, tant du point de vue de la méthodologie mathématique que de l'hydrologie.

Concernant la méthodologie mathématique, il serait souhaitable d'approfondir les résultats de notre analyse de sensibilité globale du détachement par le ruissellement uniquement qui montrent que seuls les paramètres F et J sont influents. Ces résultats ayant été obtenus pour des distributions fixées, ils peuvent être remis en question en se demandant s'ils ne sont pas influencés par notre paramétrisation initiale. L'étude des surfaces de réponse permettrait de répondre à ces questions et d'étudier la sensibilité des lois. Par exemple, nous pourrions regarder la variabilité des sorties du modèle en imposant d'autres lois de distribution pour les paramètres d'entrée ou bien en fixant un ou plusieurs paramètres. L'utilisation du développement en PC donnerait la possibilité de réaliser cette étude sans avoir besoin de ré-échantillonner. De plus, cette perspective permettrait de répondre à des questions hydrologiques concernant l'influence des autres paramètres relatifs au détachement par le ruissellement. Concernant l'utilisation des PC pour l'estimation des indices de sensibilité globale, une perspective envisageable serait l'utilisation d'une méthode autre que les moindres carrés pour l'obtention des différents modes stochastiques du développement de la sortie du modèle. Par exemple, la méthode d'estimation par Compressed Sensing pourrait présenter l'avantage d'être plus efficace.

D'un point de vue hydrologique, nous avons vu que la conductivité hydraulique à saturation K_s influençait grandement les pics de débits spatialisés et la probabilité d'occurrence des valeurs extrêmes auxquelles les mécanismes d'érosion des sols sont très sensibles. Il serait donc intéressant d'intégrer à l'analyse d'incertitudes du modèle d'érosion HR un paramètre d'infiltration incertain. De plus, l'utilisation de l'analyse de sensibilité globale permettrait de hiérarchiser les paramètres d'entrée et de voir si le paramètre hydrologique K_s impacte plus ou moins les quantités érodées. Il serait aussi possible d'estimer les interactions paramétriques, ce qui n'a pas vraiment été réalisé jusqu'à présent en hydrologie. Concernant l'étude du modèle HR complet, il serait envisageable de refaire l'analyse d'incertitudes en modifiant les conditions initiales du cas test pour permettre plus de détachement par le ruissellement et diminuer l'intensité de la pluie. Le but serait de hiérarchiser les différents paramètres du modèle HR dans une configuration sans processus de détachement dominant. Il serait aussi souhaitable d'approfondir l'analyse d'incertitudes sur des configurations plus réalistes, par exemple sur des topographies réelles. Nos conclusions portant sur des événements pluvieux rela-

tivement courts, il serait aussi intéressant d'étudier des événements pluvieux plus longs, engendrant plus de ruissellement et des états du sol plus saturés. Dans le chapitre 4, nous avons montré que les conclusions établies dépendent de la saturation du sol. La continuité de ce travail serait d'étudier l'impact de la saturation des sols sur les quantités érodées. De plus, l'utilisation des PC pour l'estimation des indices de sensibilité globale rend cette perspective envisageable car le nombre de simulations qu'elle requiert est largement diminué.

Bibliographie

- [1] K. ABBASPOUR, M. VAN GENUCHTEN, R. SCHULIN & E. SCHLÄPPI – « A sequential uncertainty domain inverse procedure for estimating subsurface flow and transport parameters », Water Resources Research **33** (1997), p. 1879–1892. (Cité en page 13.)
- [2] A. ABRAHAMS, G. LI, C. KRISHNAN & J. ATKINSON – « Predicting sediment transport by interrill overland flow on rough surfaces », Earth Surface Processes Landforms **23** (1998). (Cité en page 112.)
- [3] A. ABRAHAMS & A. PARSONS – « Hydraulics of interrill overland flow on stone-covered desert surfaces », Catena **23** (1994). (Cité en page 114.)
- [4] A. ARMSTRONG, J. QUINTON, B. HENG & J. CHANDLER – « Variability of interrill erosion at low slopes », Earth Surface Processes and Landforms **36** (2010). (Cité en pages 110 et 117.)
- [5] H. ASADI, H. GHADIRI, C. ROSE & H. ROUHIPOUR – « Interill soil erosion processes and their interaction on low slope », Earth Surface Processes and Landforms **32** (2007). (Cité en page 117.)
- [6] H. ASADI, H. ROUHIPOUR, G. RAFAHI & H. GHADIRI – « Testing a mechanistic soil erosion model for three selected soil types from iran », Journal of Agricultural Science and Technology **10** (2008). (Cité en pages 109, 117 et 119.)
- [7] E. AUDUSSE, F. BOUCHUT, M. BRISTEAU, R. KLEIN & B. PERTHAME – « A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows », SIAM Journal on Scientific Computing **25** (2004), p. 2050–2065. (Cité en pages 30 et 31.)
- [8] G. BARONI, A. FACCHI, C. GANDOLFI, B. ORTUANI, D. HORESCHI & J. VAN DAM – « Uncertainty in the determination of soil hydraulic parameters and its influence on the performance of two hydrological models of different comple », Hydrology and Earth System Sciences **14** (2010), p. 251–270. (Cité en page 9.)
- [9] J. BENNETT – « Concepts of mathematical modeling of sediment yield », Water Resources Research **10** (1974), p. 485–492. (Cité en page 10.)
- [10] L. BEUSELINCK, G. GOVERS, A. STEEGEN & T. QUINE – « Sediment transport by overland flow over an area of net deposition », Journal of Hydrology **13** (1999). (Cité en page 111.)
- [11] L. BEUSELINCK, P. HAIRSINE, G. GOVERS & J. POESEN – « Evaluating a single-class net deposition equation in overland flow conditions », Water Resources Research **38** (2002), no. 7. (Cité en pages 111, 112, 113 et 117.)
- [12] J. BEVEN – « Distributed model », in Hydrologic Forecasting (M. Anderson & T. Burt, éd.), Wiley, 1985. (Cité en page 7.)
- [13] K. BEVEN & A. BINLEY – « The future of distributed models : Model calibration and uncertainty prediction », Hydrological Processes **6** (1992), no. 3, p. 279–298. (Cité en page 13.)

- [14] J. BOARDMAN & J. POESEN – « Soil erosion in europe : Major processes, causes and consequences », p. 477–487, John Wiley & Sons, Ltd, 2006. (Cité en pages 1 et 2.)
- [15] J. BOARDMAN, G. VERSTRAETEN & C. BIELDERS – « Muddy floods », p. 743–755, John Wiley & Sons, Ltd, 2006. (Cité en pages 1 et 2.)
- [16] F. BOUCHUT – Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources, Birkhäuser Basel, 2004. (Cité en pages 29 et 31.)
- [17] — , « Chapter 4. efficient numerical finite volume schemes for shallow water models », in Nonlinear Dynamics of Rotating Shallow Water : Methods and Advances (V. Zeitlin, éd.), Edited Series on Advances in Nonlinear Science and Complexity, vol. 2, Elsevier Science, 2007, p. 189–256. (Cité en page 30.)
- [18] J. BOUMA – « Using soil survey data for quantitative land evaluation », Advances in Soil Science (1989), p. 177–213. (Cité en page 9.)
- [19] J. BOUMA & H. VAN LANEN – « Transfer functions and threshold values : from soil characteristics to land qualities », in Workshop by ISSS/SSSA on Quantified Land Evaluation, 1987, p. 106–110. (Cité en page 9.)
- [20] A. BOWMAN & A. AZZALINI – Applied smoothing techniques for data analysis, New York : Oxford University Press, 1997. (Cité en page 59.)
- [21] D. BRAKENSIEK & W. RAWLS – « Agricultural management effects on soil water processes. part 2, green ampt parameters for crusting soils », Transactions of the American Society of Agricultural and Biological Engineers **26** (1983), no. 6. (Cité en page 6.)
- [22] R. BRAZIER, K. BEVEN, S. ANTHONY & J. ROWAN – « Implications of model uncertainty for the mapping of hillslope-scale soil erosion predictions », Earth Surface Processes and Landforms **26** (2001), p. 1333–1352. (Cité en pages 13 et 15.)
- [23] M. BRISTEAU & B. COUSSIN – « Boundary Conditions for the Shallow Water Equations solved by Kinetic Schemes », Research Report RR-4282, INRIA, 2001, Projet M3N. (Cité en page 32.)
- [24] R. CAMERON & W. MARTIN – « The orthogonal development of nonlinear functionals in series of fourier-hermite functionals », Annals of Mathematics **48** (1947). (Cité en pages 61 et 62.)
- [25] A. CASTRIGNANO, G. BUTTAFUOCO, A. CANU, C. ZUCCA & S. MADRAU – « Modelling spatial uncertainty of soil erodibility factor using joint stochastic simulation », Land Degradation Development **19** (2008), p. 198–213. (Cité en pages 13 et 15.)
- [26] O. CERDAN, N. BAGHDADI, J. DENUX, J. DESPRATS, M. GAY, C. ALBERGEL, I. DUBUS, F. DUPROS, N. HOLAH & M. EL HAJJ – « Apibar : Appui à la prévision des inondations cas des bassins rapides du sud de la france », Rapport Final BRGM/RP-54218-FR, BRGM, 2006. (Cité en page 8.)

- [27] O. CERDAN, V. SOUCHÈRE, V. LECOMTE, A. COUTURIER & Y. LE BISSONNAIS – « Incorporating soil surface crusting processes in an expert-based runoff model : Sealing and transfer by runoff and erosion related to agricultural management », Catena **46** (2002). (Cité en pages 3 et 10.)
- [28] H. CHAVES & M. NEARING – « Uncertainty analysis of the wepp soil erosion model », Transactions of the ASAE **34** (1991), no. 6, p. 2437–2444. (Cité en pages 14 et 15.)
- [29] N. CHENG – « A simplified settling velocity formula for sediment particle », Journal of Hydraulic Engineering, ASCE **123** (1997), no. 2. (Cité en page 116.)
- [30] V. CHOW – Open channel hydraulics, McGraw-Hill College, 1959. (Cité en page 23.)
- [31] V. CHOW, D. MAIDMENT & L. MAYS – Applied hydrology, McGraw-Hill Book Compagny, 1988. (Cité en pages 4, 24 et 67.)
- [32] R. CUKIER, C. FORTUIN, K. SHULER, A. PETSCHER & J. SCHAIBLY – « Study of sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. 1 », Theory Journal Of Chemical Physics **59** (1973), p. 3873–3878. (Cité en page 18.)
- [33] A. DE ROO & V. JETTEN – « Calibrating and validating the lisem model for two data sets from the netherlands and south africa », CATENA **37** (1999), p. 477 – 493. (Cité en pages 3, 5, 7 et 10.)
- [34] A. DE ROO, R. OFFERMANS & N. CREMERS – « Lisem : A single-event, physically based hydrological and soil erosion model for drainage basins. ii : Sensitivity analysis, validation and application », Hydrological Processes **10** (1996). (Cité en pages 16, 17 et 18.)
- [35] O. DELESTRE – « Simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles », Thèse, Université d'Orléans, available from : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00587197/fr/>, 2010. (Cité en pages 27 et 29.)
- [36] Q. DUAN, S. SOROOSHIAN & V. GUPTA – « Effective and efficient global optimization for conceptual rainfall-runoff models », Water Resources Research **28** (1992), no. 4, p. 1015–1031. (Cité en page 13.)
- [37] A. DUSSAILLANT – « Estimation of combined splash, interrill, and rill erosion using a hillslope erosion numerical model : An application to dry lands of chile », Journal of soil and water conservation **66** (2011), p. 142–147. (Cité en pages 16 et 17.)
- [38] K. ECKHARDT, L. BREUER & H. FREDE – « Parameter uncertainty and the significance of simulated land use change effects », Journal of Hydrology **273** (2003), p. 164–176. (Cité en pages 14 et 15.)
- [39] B. EFRON – « Bootstrap method : another look at the jackknife », The Annals of Statistics **7** (1979), p. 1–26. (Cité en page 14.)
- [40] M. EL BOUAJAJI – Modélisation des écoulements à surface libre : étude du ruissellement des eaux de pluie, Mémoire, Université Louis Pasteur, available from : <http://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00459336/fr/>, Strasbourg, 2007. (Cité en page 27.)

- [41] M. ESTEVES, X. FAUCHER, S. GALLE & M. VAUCLIN – « Overland flow and infiltration modelling for small plots during unsteady rain : numerical results versus observed values », Journal of Hydrology **228** (2000), no. 3-4, p. 265–282. (Cité en pages 5, 8 et 23.)
- [42] O. EVRARD, C. BIELDERS, K. VANDAELE & B. VAN WESEMAEL – « Spatial and temporal variation of muddy floods in central belgium, off-site impacts and potential control measures », CATENA **70** (2007), no. 3, p. 443–454. (Cité en pages 1 et 2.)
- [43] F. EXNER – « Über die wechselwirkung zwischen wasser und geschiebe in flüssen », Sitzungsber., Akad. Wissenschaften **pt. IIa, Bd. 134** (1925). (Cité en page 10.)
- [44] D. FAVIS-MORTLOCK, J. BOARDMAN, A. PARSONS & B. LASCELLES – « Emergence and erosion : a model for rill initiation and development », Hydrological Processes **14** (2000), no. 11-12, p. 2173–2205. (Cité en page 6.)
- [45] F. FIEDLER & J. RAMIREZ – « A numerical method for simulating discontinuous shallow flow over an infiltrating surface », International Journal for Numerical Methods in Fluids **32** (2000), p. 219–239. (Cité en pages 5 et 23.)
- [46] A. FOLLY, J. QUINTON & R. SMITH – « Evaluation of the eurosem model using data from the catsop watershed, the netherlands », CATENA **37** (1999), p. 507–519. (Cité en pages 16, 17 et 18.)
- [47] G. FRENI, G. MANNINA & G. VIVIANI – « Uncertainty assessment of sewer sediment erosion modelling », Urban Water Journal **5** (2008), p. 21–31. (Cité en pages 13 et 15.)
- [48] U. FÖRSTNER, S. HEISE, R. SCHWARTZ, B. WESTRICH & W. AHLF – « Historical contaminated sediments and soils at the river basin scale. examples from the elbe river catchment area », Journal of Soils Sediments **4** (2004), no. 4. (Cité en page 1.)
- [49] B. GAO, M. WALTER, T. STEENHUIS, J. PARLANGE, K. NAKANO, C. ROSE & W. HOGARTH – « Investigating ponding depth and soil detachability for a mechanistic erosion model using a simple experiment », Journal of Hydrology **277** (2003). (Cité en page 107.)
- [50] R. GHANEM & P. SPANOS – Stochastic finite elements : a spectral approach, Dover, 2003. (Cité en page 15.)
- [51] W. GREEN & G. AMPT – « Studies on soil physics : 1, flow of air and water through soils. », Journal of Agricultural Science **4** (1911), p. 1–24. (Cité en pages 6 et 7.)
- [52] J. M. GREENBERG & A. Y. LEROUX – « A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations », SIAM Journal on Numerical Analysis **33** (1996), no. 1, p. 1–16. (Cité en page 31.)
- [53] S. GUMIERE, Y. LE BISSONNAIS & D. RACLOT – « Soil resistance to interrill erosion : Model parameterization and sensitivity », CATENA **77** (2009). (Cité en pages 17 et 18.)

- [54] P. HAIRSINE & C. ROSE – « Rainfall detachment and deposition : Sediment transport in the absence of flow-driven processes », Soil Science Society of America Journal **55** (1991), p. 320–324. (Cité en pages 11, 24, 105 et 107.)
- [55] — , « Modeling water erosion due to overland flow using physical principles : I. sheet flow », Water Resources Research **28** (1992), p. 237–243. (Cité en pages 11, 24, 105, 114 et 115.)
- [56] — , « Modeling water erosion due to overland flow using physical principles : II. rill flow », Water Resources Research **28** (1992), p. 245–250. (Cité en pages 11, 24, 105, 113 et 115.)
- [57] M. HANTUSH & L. KALIN – « Uncertainty and sensitivity analysis of runoff and sediment yield in a small agricultural watershed with kinos2 », Hydrological Sciences Journal **50** (2005). (Cité en pages 14, 15, 16, 17 et 18.)
- [58] A. HARTEN, B. ENQUIST, S. OSHER & S. R. CHAKRAVARTHY – « Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, iii », Journal of Computational Physics **71** (1987). (Cité en page 30.)
- [59] A. HARTEN, P. LAX & B. VAN LEER – « On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws », SIAM Review **25** (1983). (Cité en page 29.)
- [60] P. HENG, G. SANDER, A. ARMSTRONG, J. QUINTON, J. CHANDLER & C. SCOTT – « Modeling the dynamics of soil erosion and size-selective sediment transport over nonuniform topography in flume-scale experiments », Water Resources Research **47** (2011), no. W02513. (Cité en pages 107, 108, 109, 110, 112, 113, 114, 116, 117 et 119.)
- [61] P. HENG, G. SANDER & C. SCOTT – « Modeling overland flow and soil erosion on nonuniform hillslopes : A finite volume scheme », Water Resources Research **45** (2009), no. W05423. (Cité en pages 108, 110 et 112.)
- [62] J. HERVOUET – Hydrodynamique des écoulements à surface libre : Modélisation numérique avec la méthode des éléments finis, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2003. (Cité en page 21.)
- [63] — , Hydrodynamics of free surface flows, modelling with the finite element method., vol. ISBN 978-0-470-03558, Editions Wiley & Sons, 2007. (Cité en page 4.)
- [64] J. HERVOUET & P. BATES – « The telemac modelling system (special issue) », Hydrological Processes **14** (2000). (Cité en page 5.)
- [65] W. HOGARTH, C. ROSE, J. PARLANGE, G. SANDER & G. CAREY – « Soil erosion due to rainfall impact with no inflow : a numerical solution with spatial and temporal effects of sediment settling velocity characteristics », Journal of Hydrology **294** (2004). (Cité en pages 108, 110, 111, 117 et 119.)
- [66] H. HOLTON – « A concept for infiltration estimates in watershed engineering », USDAARS (1961), p. 41–51. (Cité en page 7.)
- [67] T. HOMMA & A. SALTELLI – « Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models », Reliability Engineering & System Safety **52** (1996), no. 1, p. 1–17. (Cité en page 55.)

- [68] R. HORTON – « The role of infiltration in the hydrologic cycle », Eos, Transactions, American Geophysical Union **14** (1933). (Cité en page 7.)
- [69] D. HUARD & A. MAILHOT – « Calibration of hydrological model gr2m using bayesian uncertainty analysis », Water Resources Research **44** (2008), p. 1–19. (Cité en page 13.)
- [70] V. JETTEN, A. DE ROO & D. FAVIS-MORTLOCK – « Evaluation of field-scale and catchment-scale soil erosion models », CATENA **37** (1999). (Cité en page 2.)
- [71] V. JETTEN, G. GOVERS & R. HESSEL – « Erosion models : quality of spatial predictions », Hydrological Processes **17** (2003), p. 887–900. (Cité en pages 12 et 105.)
- [72] J. JIMENEZ & O. MADSEN – « A simple formula to estimate settling velocity », Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering **129** (2003), no. 2. (Cité en page 116.)
- [73] D. JINKANG, X. SHUNPING, X. YOUPENG, C. XU & V. SINGH – « Development and testing of a simple physically-based distributed rainfall-runoff model for storm runoff simulation in humid forested basins », Journal of Hydrology **336** (2007), p. 334–346. (Cité en page 6.)
- [74] S. JOMAA, D. BARRY, A. BROVELLI, G. SANDER, J. PARLANGE, B. HENG & H. TROMP-VAN MEERVELD – « Effect of raindrop splash and transversal width on soil erosion : Laboratory flume experiments and analysis with the hairsineŰrose model », Journal of Hydrology **395** (2010). (Cité en pages 109, 111, 112, 117 et 119.)
- [75] A. KANSO, G. CHEBBO & B. TASSIN – « Bayesian analysis for erosion modelling of sediments in combined sewer systems », Water Science and Technology **52** (2005). (Cité en page 13.)
- [76] G. KUCZERA & E. PARENT – « Monte carlo assessment of parameter uncertainty in conceptual catchment models : the metropolis algorithm », Journal of Hydrology **211** (1998), no. 1-4, p. 69–85. (Cité en page 13.)
- [77] P. KUHNERT, A. HENDERSON, R. BARTLEY & A. HERR – « Incorporating uncertainty in gully erosion calculations using the random forests modelling approach », Environmetrics **21** (2010), p. 493–509. (Cité en pages 14 et 15.)
- [78] A. N. KUSTIAKOV – « On the dynamics of the coefficient of water percolation in soils and on the necessity for studying it from a dynamic point of view for purposes of amelioration », in Comm. Intern. Soil Sci. Soc., Moscow, Utah, Part A, 1932, p. 17–21. (Cité en page 7.)
- [79] J. LAFLEN, W. ELLIOT, J. SIMANTON, C. HOLZHEY & K. KOHL – « Wepp : Soil erodibility experiments for rangeland and cropland soils », Soil and Water Conservation **46** (1991), p. 39–44. (Cité en pages 3, 5, 7 et 10.)
- [80] E. LALOY – « Measuring and modeling the impact of intercrop management on plot-scale runoff and erosion in a continuous maize cropping system », Thèse, Université catholique de Louvain Faculté d'Ingénierie Biologique, Agronomique et Environnementale Earth and Life Institute, 2010. (Cité en page 17.)

- [81] E. LALOY & C. BIELDERS – « Modelling intercrop management impact on runoff and erosion in a continuous maize cropping system : Part i. model description, global sensitivity analysis and bayesian estimation of parameter identifiability », European Journal of Soil Science **60** (2009). (Cité en pages 13, 15, 18 et 142.)
- [82] J. LAW – « A statistical approach to the interstitial heterogeneity of sand reservoirs », Transactions AIME **155** (1944). (Cité en page 19.)
- [83] M. LE – « Modélisation multi échelle et simulation numérique de l'érosion des sols de la parcelle au bassin versant », Thèse, Université d'Orléans, 2012. (Cité en pages 32, 34, 108, 109, 110, 112, 114, 117 et 119.)
- [84] O. LE MAÎTRE & O. KNIO – Spectral methods for uncertainty quantification, New York, Springer-Verlag, With applications to computational fluid dynamics, 2010. (Cité en page 15.)
- [85] R. J. LEVEQUE – Finite volume methods for hyperbolic problems, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 2002. (Cité en page 29.)
- [86] P. LEWIS & E. ORAV – Simulation methodology for statisticians, operations analysts, and engineers, Wadsworth & Brooks/Cole, 1989. (Cité en page 13.)
- [87] A. LI, Q. SHAO, Z. XU & X. CAI – « Analysis of parameter uncertainty in semi-distributed hydrological models using bootstrap method : A case study of swat model applied to yingluoxia watershed in northwest china », Journal of Hydrology **385** (2010), p. 76–83. (Cité en pages 14 et 15.)
- [88] I. LISLE, C. ROSE, W. HOGARTH, P. HAIRSINE, G. SANDER & J. PARLANGE – « Stochastic sediment transport in soil erosion », Journal of Hydrology **204** (1998). (Cité en page 109.)
- [89] Q. LIU, L. CHEN, J. LI & V. SINGH – « Two-dimensional kinematic wave model of overland-flow », Journal of Hydrology **291** (2004), no. 1-2, p. 28–41. (Cité en pages 5 et 6.)
- [90] W. LUDWIG, J. PROBST & S. KEMPE – « Predicting the oceanic input of organic carbon by continental erosion », Global Biogeochemical Cycles **10** (1996). (Cité en page 1.)
- [91] I. MACDONALD, M. BAINES, N. NICHOLS & P. SAMUELS – « Steady open channel test problems with analytic solutions », Technical report 3, Department of Mathematics-University of Reading, 1995. (Cité en page 23.)
- [92] — , « Analytic benchmark solutions for open-channel flows », Journal of Hydraulic Engineering-asce **123** (1997). (Cité en page 23.)
- [93] F. MARCHE – « Theoretical and numerical study of shallow water models. applications to nearshore hydrodynamics », Thèse, Université de Bordeaux, France, 2005. (Cité en page 31.)
- [94] M. MCKAY – « Evaluating prediciton uncertainty », Technical Report NUREG/CR-6311, US Nuclear Regulatory Commission and Los Alamos National Laboratory, 1995. (Cité en page 18.)
- [95] R. MEIN & C. LARSON – « Modeling infiltration during a steady rain », Water Resources Research **9** (1973), no. 2, p. 384–394. (Cité en pages 8 et 23.)

- [96] W. MERRITT, R. LETCHER & A. JAKEMAN – « A review of erosion and sediment transport models », Environmental Modelling & Software **18** (2003), p. 761–799. (Cité en pages 2 et 10.)
- [97] R. MISRA & C. ROSE – « An examination of the relationship between erodibility parameters and soil strength », Australian Journal of Soil Research **33** (1995). (Cité en pages 108, 111, 113, 114 et 117.)
- [98] — , « Application and sensitivity analysis of process-based erosion model guest », European Journal of Soil Science **47** (1996). (Cité en pages 113 et 115.)
- [99] R. MORGAN & J. DUZANT – « Modified mmf (morgan–morgan–finney) model for evaluating effects of crops and vegetation cover on soil erosion », Earth Surface Processes and Landforms **32** (2008), p. 90–106. (Cité en page 17.)
- [100] R. MORGAN, J. QUINTON & R. SMITH – « The european soil erosion model (eurosem) : a dynamic approach for predicting sediment transport from fields and small catchments », Earth Surface Processes and Landforms **23** (1998). (Cité en pages 3 et 10.)
- [101] R. MOUSSA & C. BOCQUILLON – « Approximation zones of the saint-venant equations for flood routing with overbank flow », Hydrology and Earth System Sciences **4** (2000). (Cité en pages 4 et 5.)
- [102] M. MULETA & J. NICKLOW – « Sensitivity and uncertainty analysis coupled with automatic calibration for a distributed watershed model », Journal of Hydrology **306** (2005), p. 127–145. (Cité en pages 13 et 15.)
- [103] C. MUTCHLER & L. HANSEN – « Splash of a waterdrop the terminal velocity », Science **169** (1970). (Cité en page 107.)
- [104] R. NAJAFI – « Watershed modeling of rainfall excess transformation into runoff », Journal of Hydrology **270** (2003), p. 73–281. (Cité en page 7.)
- [105] M. NEARING – « Evaluating soil erosion models using measured plot data : accounting for variability in the data », Earth Surface Processes and Landforms **25** (2000), p. 1035–1043. (Cité en page 12.)
- [106] M. NEARING, L. DEER-ASCOUGH & J. LAFLEN – « Sensitivity analysis of the wepp hillslope profile erosion model », American Society of Agricultural Engineers **33** (1990). (Cité en pages 16, 17 et 18.)
- [107] D. NGUYEN, Y. SHI, S. WANG & T. NGUYEN – « 2d shallow-water model using unstructured finite-volumes methods », Journal of Hydraulic Engineering **132** (2006), p. 258–269. (Cité en pages 5 et 6.)
- [108] G. NORD & M. ESTEVES – « PSEM_2D : A physically based model of erosion processes at the plot scale », Water Resources Research **41** (2005). (Cité en pages 6, 7, 16, 17 et 143.)
- [109] P. OWENS – « Soil erosion and sediment fluxes in river basins : the influence of anthropogenic activities and climate change », in Soil and Sediment Remediation (P. Lens, T. Grotenhuis, G. Malina & H. Tabak, éd.), IWA Publishing, London, 2005, p. 418–433. (Cité en page 1.)

- [110] P. OWENS, S. APITZ, R. BATALLA, A. COLLINS, M. EISMA, H. GLINDEMANN, S. HOONSTRA, H. KÖTHE, J. QUINTON, K. TAYLOR, B. WESTRICH, S. WHITE & H. WILKINSON – « Sediment management at the river basin scale : synthesis of sednet working group 2 outcome », Journal of Soils and Sediments **4** (2004). (Cité en page 1.)
- [111] A. PANIN – « Land-ocean sediment transfer in paleotimes, and implications for present day natural fluvial fluxes », in Sediment Transfer through the Fluvial System (V. Golosov, V. Belyaev & D. Walling,  ds.), IAHS Press, Wallingford, 2004. (Cité en page 1.)
- [112] J. PHILIP – « The theory of infiltration : 4. sorptivity and algebraic infiltration equations », Soil Science **84** (1957). (Cité en page 7.)
- [113] V. POLYAKOV & M. NEARING – « Sediment transport in rill flow under deposition and detachment conditions », CATENA **51** (2003). (Cité en page 115.)
- [114] A. PROFFITT, P. HAIRSINE & C. ROSE – « Modeling soil erosion by overland flow : Applications over a range of conditions », Transactions of the ASAE **36** (1993), p. 1743–1753. (Cité en pages 111, 112, 113, 114 et 115.)
- [115] A. PROFFITT, C. ROSE & P. HAIRSINE – « Rainfall detachment and deposition : Experiments with low slopes and significant water depths », Soil Science Society of America Journal **55** (1991). (Cité en pages 107, 108, 109, 110, 116 et 117.)
- [116] J. QUINTON – « Reducing predictive uncertainty in model simulations : a comparison of two methods using the european soil erosion model (eurosem) », CATENA **30** (1997), p. 110–117. (Cité en pages 14 et 15.)
- [117] L. RICHARDS – « Capillarity conduction of liquids through porous mediums », Physics **1** (1931). (Cité en page 7.)
- [118] A. S. ROGOWSKI – « Watershed physics : Soil variability criteria », Water Resources Research **8** (1972). (Cité en page 19.)
- [119] C. ROSE, P. HAIRSINE, A. PROFFITT & R. MISRA – « Interpreting the role of soil strength in erosion processes », CATENA Supplement **17** (1990). (Cité en page 114.)
- [120] C. ROSE, J. WILLIAMS, G. SANDERS & D. BARRY – « A mathematical model of soil erosion and deposition process. i. theory for a plane element », Science Society of America Journal **47** (1983). (Cité en page 10.)
- [121] C. ROSE, B. YU, H. GHADIRI, H. ASADI, J. PARLANGE, W. HOGARTH & J. HUSSEIN – « Dynamic erosion of soil in steady sheet flow », Journal of Hydrology **333** (2007). (Cité en pages 107, 110, 112, 114, 115 et 117.)
- [122] E. ROSENBLUETH – « Point estimates for probability moments », Proceedings of the Natural Academy of Sciences of USA **72** (1975), p. 3812–3814. (Cité en page 14.)
- [123] M. ROUSSEAU – Modélisation des  coulements   surface libre :  tude du ruissellement des eaux de pluie, Mémoire, Université de Nantes, available from : <http://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00494243/fr/>, september 2008. (Cité en page 27.)

- [124] M. ROUSSEAU, O. CERDAN, A. ERN, O. LE MAÎTRE & P. SOCHALA – « Study of overland flow with uncertain infiltration using stochastic tools », Advances in Water Resources **38** (2012), p. 1–12. (Cité en pages 5 et 19.)
- [125] A. BARRÉ DE SAINT VENANT – « Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit », Compte Rendu de l'Académie des Sciences, Paris **73** (1871), p. 147–154. (Cité en page 4.)
- [126] A. SALTELLI, K. CHAN & M. SCOTT – Sensitivity analysis, New York, John Wiley & Sons publishers, 2000. (Cité en page 12.)
- [127] A. SALTELLI, M. RATTO, S. TARANTOLA & F. CAMPOLONGO – « Sensitivity analysis practices : Strategies for model-based inference », Reliability Engineering & System Safety **91** (2006), p. 1109 – 1125. (Cité en page 16.)
- [128] G. SANDER, P. HAIRSINE, C. ROSE, D. CASSIDY, J.-Y. PARLANGE, H. W.L. & L. I.G. – « Unsteady soil erosion model, analytical solutions and comparison with experimental results », Journal of Hydrology **178** (1996). (Cité en pages 108, 110, 111, 117 et 119.)
- [129] G. SANDER, J. PARLANGE, D. BARRY, M. PARLANGE & W. HOGARTH – « Limitation of the transport capacity approach in sediment transport modeling », Water Resources Research **43** (2007). (Cité en pages 114 et 115.)
- [130] M. SCHMELTER, M. HOOTEN & D. STEVEN – « Bayesian sediment transport model for unisize bed load », Water Resources Research **47** (2011). (Cité en pages 13 et 15.)
- [131] M. SHARMA, G. GANDER & C. HUNT – « Spatial variability of infiltration in a watershed », Journal of Hydrology **45** (1980), p. 101–122. (Cité en page 19.)
- [132] V. SHEIKH, E. VAN LOON, R. HESSEL & V. JETTEN – « Sensitivity of litem predicted catchment discharge to initial soil moisture content of soil profile », Journal of Hydrology **393** (2010), p. 174–185. (Cité en page 8.)
- [133] V. SINGH – « Kinematic wave modelling in water resources : a historical perspective », Hydrological Processes **15** (2001), p. 671–706. (Cité en page 4.)
- [134] — , « Is hydrology kinematic ? », Hydrological Processes **16** (2002), p. 667–716. (Cité en page 4.)
- [135] R. SMITH & D. WOOLHISER – « Overland flow on an infiltrating surface », Water Resources Research **7** (1971). (Cité en page 7.)
- [136] I. SOBOL – « Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models », Mathematical Modelling and Computational Experiments **1** (1993), p. 407–414. (Cité en pages 18, 54 et 60.)
- [137] V. SOUCHÈRE, O. CERDAN, N. DUBREUIL, Y. LE BISSONNAIS & C. KING – « Modelling the impact of agri-environmental scenarios on overland flow in a cultivated catchment (normandy, france) », CATENA **61** (2005), p. 229–240. (Cité en page 2.)
- [138] L. TATARD, O. PLANCHON, J. WAINWRIGHT, G. NORD, D. FAVIS-MORTLOCK, N. SILVERA, O. RIBOLZI, M. ESTEVES & C. HUANG – « Measurement and

- modelling of high-resolution flow-velocity data under simulated rainfall on a low-slope sandy soil », Journal of Hydrology **48** (2008), p. 1–12. (Cité en page 6.)
- [139] B. TETZLAFF & F. WENDLAND – « Modelling sediment input to surface waters for german states with mephos : Methodology, sensitivity and uncertainty », Water Resources Management **26** (2012), p. 165–184. (Cité en page 15.)
- [140] M. THIEMANN, M. TROSSET, H. GUPTA & S. SOROOSHIAN – « Bayesian recursive parameter estimation for hydrologic models », Water Resources Research **37** (2001), p. 2521–2535. (Cité en page 13.)
- [141] O. TIETJE & V. HENNINGS – « Accuracy of the saturated hydraulic conductivity prediction by pedo-transfer functions compared to the variability within fao textural classes », Geoderma **69** (1996), p. 71–84. (Cité en page 9.)
- [142] M. VAN GENUCHTEN – « A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils », Soil Science Society of America Journal **44** (1980), p. 892–898. (Cité en page 9.)
- [143] B. VAN LEER – « Toward the ultimate conservative difference scheme v. a second order sequel to godunov’s method », Journal of Computational Physics **32** (1979). (Cité en page 30.)
- [144] K. VAN OOST, T. QUINE, G. GOVERS, S. DE GRYZE, J. SIX, J. HARDEN, G. RITCHIE, J.C. MCCARTY, G. HECKRATH, C. KOSMAS, J. GIRALDEZ, J. DA SILVA & R. MERCKX – « The impact of agricultural soil erosion on the global carbon cycle », Science **318** (2007). (Cité en page 1.)
- [145] A. VEIHE & J. QUINTON – « Sensitivity analysis of eurosem using monte carlo simulation i : hydrological, soil and vegetation parameters », Hydrological Processes **14** (2000). (Cité en pages 14, 15, 16, 17 et 18.)
- [146] O. VIGIAK, G. STERK, R. ROMANOWICZ & K. BEVEN – « A semi-empirical model to assess uncertainty of spatial patterns of erosion », CATENA **66** (2006), p. 198–210. (Cité en pages 13 et 15.)
- [147] P. VIOLLET, J. CHABARD, P. ESPOSITO & D. LAURENCE – Mécanique des fluides appliquée, écoulements incompressibles dans les circuits, canaux et rivières, autour des structures et dans l’environnement, Presses de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002. (Cité en pages 4, 21 et 23.)
- [148] J. VRUGT, W. BOUTEN & A. WEERTS – « Information content of data for identifying soil hydraulic parameters from outflow experiments », Soil Science Society of America Journal **65** (2001), p. 19–27. (Cité en page 13.)
- [149] J. VRUGT, C. TER BRAAK, M. CLARK, J. HYMAN & B. ROBINSON – « Treatment of input uncertainty in hydrologic modeling : Doing hydrology backward with markov chain monte carlo simulation », Water Resources Research **44** (2008). (Cité en page 13.)
- [150] W. VRUGT, J.A. AND BOUTEN – « Validity of first-order approximations to describe parameter uncertainty in soil hydrologic models », Soil Science Society of America Journal **66** (2002), p. 1740–1751. (Cité en page 13.)

- [151] J. WAINWRIGHT, A. PARSONS, E. MÜLLER, R. BRAZIER, D. POWELL & B. FENTI – « A transport-distance approach to scaling erosion rates : 3. evaluating scaling characteristics of mahleran », Earth Surface Processes and Landforms **33** (2008), p. 1113–1128. (Cité en page 6.)
- [152] D. WALLING – « Human impact on land-ocean sediment transfer by the world's rivers », Geomorphology **79** (2006). (Cité en page 1.)
- [153] H. WEI, M. NEARING & J. STONE – « A comprehensive sensitivity analysis framework for model evaluation and improvement using a case study of the rangeland hydrology and erosion model », Transactions of the ASABE **50** (2007), p. 945–953. (Cité en pages 16 et 17.)
- [154] S. WEILL, E. MOUCHE & J. PATIN – « A generalized richards equation for surface/subsurface flow modelling », Journal of Hydrology **366** (2009), p. 9–20. (Cité en page 7.)
- [155] N. WIENER – « The homogeneous chaos », American Journal of Mathematics **60** (1938). (Cité en page 61.)
- [156] W. WISCHMEIER & D. SMITH – « Predicting rainfall erosion losses : A guide to conservation planning », USDA Agricultural Handbook (1978). (Cité en pages 3 et 10.)
- [157] D. WOOLHISER, R. SMITH & D. GOODRICH – « KINEROS, a kinematic runoff and erosion model : Documentation and user manual », (1990). (Cité en pages 5 et 10.)
- [158] J. WÖSTEN, Y. PACHEPSKY & W. RAWLS – « Pedotransfer functions : bridging the gap between available basic soil data and missing soil hydraulic characteristics », Journal of Hydrology **251** (2001), p. 123–150. (Cité en page 9.)