



**HAL**  
open science

# Estimations a posteriori pour l'équation de convection-diffusion-réaction instationnaire et applications aux volumes finis

Nancy Chalhoub

► **To cite this version:**

Nancy Chalhoub. Estimations a posteriori pour l'équation de convection-diffusion-réaction instationnaire et applications aux volumes finis. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Est, 2012. Français. NNT : 2012PEST1065 . pastel-00794392

**HAL Id: pastel-00794392**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00794392>**

Submitted on 25 Feb 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ECOLE DOCTORALE MSTIC  
MATHEMATIQUES, SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DE L'INFORMATION ET DE LA COMMUNICATION

## T H E S E

pour obtenir le titre de

**Docteur ès Sciences**

de l'Université Paris-Est

**Mention : Mathématiques Appliquées**

Présentée et soutenue le 17 décembre 2012 par

**Nancy Chalhoub**

# Estimations a posteriori pour l'équation de convection–diffusion–réaction instationnaire et applications aux volumes finis

Thèse dirigée par Alexandre ERN et Toni SAYAH

et co-encadrée par Martin VOHRALÍK

préparée au CERMICS, Ecole des Ponts ParisTech et CNRS Libanais

### **Jury :**

<i>Président :</i>	Laurence HALPERN	-	LAGA, Université PARIS 13
<i>Rapporteurs :</i>	Emmanuel CREUSÉ	-	Laboratoire Paul Painlevé, Université Lille 1
	Pascal OMNES	-	Institut Galilée Université Paris 13
<i>Examineurs :</i>	Florence HUBERT	-	LATP, Université de Provence
	Martin VOHRALÍK	-	Projet Pumdapi, INRIA Paris-Rocquencourt
<i>Directeurs :</i>	Alexandre ERN	-	CERMICS, Université Paris-Est
	Toni SAYAH	-	Université Saint Joseph, Liban



# Estimations *a posteriori* pour l'équation de convection–diffusion–réaction instationnaire et applications aux volumes finis

---

## Résumé

---

On considère l'équation de convection–diffusion–réaction instationnaire. On s'intéresse à la dérivation d'estimations d'erreur *a posteriori* pour la discrétisation de cette équation par la méthode des volumes finis centrés par mailles en espace et un schéma d'Euler implicite en temps. Les estimations, qui sont établies dans la norme d'énergie, bornent l'erreur entre la solution exacte et une solution post-traitée à l'aide de reconstructions  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conformes du flux diffusif et du flux convectif, et d'une reconstruction  $H_0^1(\Omega)$ -conforme du potentiel. On propose un algorithme adaptatif qui permet d'atteindre une précision relative fixée par l'utilisateur en raffinant les maillages adaptativement et en équilibrant les contributions en espace et en temps de l'erreur. On présente également des essais numériques. Enfin, on dérive une estimation d'erreur *a posteriori* dans la norme d'énergie augmentée d'une norme duale de la dérivée en temps et de la partie antisymétrique de l'opérateur différentiel. Cette nouvelle estimation est robuste dans des régimes dominés par la convection et des bornes inférieures locales en temps et globales en espace sont également obtenues.

---

## Mots clés

---

convection–diffusion–réaction, problèmes paraboliques, méthodes des volumes finis, estimation d'erreur *a posteriori*, algorithme adaptatif



# *A posteriori* error estimates for the time-dependent convection–diffusion–reaction equation and application to finite volume methods

---

## Abstract

---

We consider the time-dependent convection–diffusion–reaction equation. We derive *a posteriori* error estimates for the discretization of this equation by the cell-centered finite volume scheme in space and a backward Euler scheme in time. The estimates are established in the energy norm and they bound the error between the exact solution and a locally postprocessed approximate solution, based on  $\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$ -conforming diffusive and convective flux reconstructions, as well as an  $H_0^1(\Omega)$ -conforming potential reconstruction. We propose an adaptive algorithm which ensures the control of the total error with respect to a user-defined relative precision by refining the meshes adaptively while equilibrating the time and space contributions to the error. We also present numerical experiments. Finally, we derive another *a posteriori* error estimate in the energy norm augmented by a dual norm of the time derivative and the skew symmetric part of the differential operator. The new estimate is robust in convective-dominated regimes, and local-in-time and global-in-space lower bounds are also derived.

---

## Key words

---

convection–diffusion–reaction, parabolic problems, finite volume methods, *a posteriori* error estimates, adaptive algorithm



A mes parents.

A Jad.



# Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à mes deux directeurs de thèse, Alexandre Ern et Toni Sayah. Je les remercie pour l'aide qu'ils m'ont apportée, pour leur disponibilité, leur patience et leurs encouragements.

Je remercie le CNRS libanais et l'École des Ponts qui m'ont offert la possibilité de faire cette thèse dans le cadre d'un programme commun. Je remercie en particulier Mikhail Balabane pour son aide dans tous les aspects liés à ce programme.

Je suis très reconnaissante à Martin Vohralík du temps qu'il m'a consacré et des très nombreuses discussions qui m'ont permis de réaliser les objectifs de cette thèse.

Je remercie Pascal Omnes de m'avoir donné la possibilité d'utiliser son code pour le schéma DDFV et pour l'aide qu'il m'a offerte pour le modifier et puis l'intégrer dans mon algorithme adaptatif.

Je le remercie également avec Emmanuel Creusé du temps qu'ils m'ont consacré en tant que rapporteurs sur cette thèse. Mes remerciements s'adressent également à Laurence Halpern et Florence Hubert pour leur présence dans le jury, et à l'ensemble des membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je salue aussi mes collègues du CERMICS, du Laboratoire Jacques-Louis Lions et de la Faculté des Sciences, et les remercie pour leur bonne humeur, leur soutien et leurs conseils.

Je suis infiniment reconnaissante à Abdo et Saydeh pour m'avoir accueilli chez eux, et à Sabine, Serge et Sandre pour avoir partagé leur petite chambre avec moi. Je vous remercie pour votre soutien et votre hospitalité.

Enfin, mes pensées vont à mes parents et à mon frère. Bien qu'ils étaient parfois loins, ils m'ont toujours soutenue et encouragée. Et merci à mon mari. Vivre séparés pour une longue période était certainement d'ur. Sans son support, sa patience et sa compréhension infinie, je n'aurai jamais achever ma thèse.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Motivations . . . . .	1
1.2	L'équation de convection–diffusion–réaction . . . . .	3
1.2.1	Espaces fonctionnels et hypothèses sur les données . . . . .	4
1.2.2	Problème faible . . . . .	6
1.3	Les méthodes des volumes finis . . . . .	7
1.4	L'analyse d'erreur <i>a posteriori</i> . . . . .	10
1.4.1	Principes généraux et propriétés . . . . .	10
1.4.2	Estimations d'erreur <i>a posteriori</i> pour la méthode des éléments finis . . . . .	13
1.4.3	Estimations d'erreur <i>a posteriori</i> pour les méthodes des volumes finis . . . . .	13
1.4.4	Estimations d'erreur <i>a posteriori</i> pour les problèmes instationnaires . . . . .	16
1.5	Plan de la thèse . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Estimation en norme d'énergie</b>	<b>21</b>
2.1	Cadre discret . . . . .	22
2.1.1	Pas de temps et maillages variant en temps . . . . .	22
2.1.2	Espace de Raviart–Thomas–Nédélec . . . . .	23
2.1.3	Espace de Sobolev $H^1$ brisé, gradient brisé et norme d'énergie brisée . . . . .	25
2.1.4	Notations pour les données . . . . .	26
2.2	Reconstructions pour les schémas volumes finis . . . . .	26
2.2.1	Le schéma volumes finis modifié . . . . .	27
2.2.2	Reconstruction des flux . . . . .	27
2.2.3	Solution post-traitée . . . . .	29
2.2.4	Reconstruction $H_0^1(\Omega)$ -conforme du potentiel . . . . .	30
2.3	Borne supérieure de l'erreur . . . . .	32
2.3.1	Inégalités utiles . . . . .	32
2.3.2	Estimateurs d'erreur . . . . .	33
2.3.3	Résultat principal . . . . .	34
2.3.4	Distinction entre l'erreur en espace et l'erreur en temps . . . . .	39
2.4	Exemples de schémas volumes finis . . . . .	41
2.4.1	Schéma volumes finis à quatre points . . . . .	41
2.4.2	Schéma DDFV . . . . .	43

<b>3</b>	<b>Algorithme et résultats numériques</b>	<b>51</b>
3.1	Algorithme adaptatif . . . . .	51
3.1.1	Structure globale . . . . .	52
3.1.2	Techniques de marquage, de raffinement et de déraffinement . . . . .	54
3.1.3	Algorithme . . . . .	57
3.2	Résultats numériques . . . . .	64
3.2.1	Cas test avec solution analytique . . . . .	64
3.2.2	Cas test avec couche intérieure et couche limite . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Estimation et efficacité en norme augmentée</b>	<b>95</b>
4.1	Equivalence entre le résidu et l'erreur . . . . .	95
4.2	Borne supérieure de l'erreur . . . . .	98
4.2.1	Hypothèses sur le problème . . . . .	98
4.2.2	Inégalités utiles . . . . .	99
4.2.3	Les indicateurs d'erreur . . . . .	100
4.2.4	Résultat principal . . . . .	100
4.3	Borne inférieure de l'erreur . . . . .	105
4.3.1	Hypothèses sur les maillages espace-temps . . . . .	105
4.3.2	Notations . . . . .	106
4.3.3	Hypothèses sur les reconstructions du potentiel et des flux . . . . .	108
4.3.4	Borne inférieure . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>121</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>123</b>

# Introduction

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Motivations</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>L'équation de convection–diffusion–réaction</b>	<b>3</b>
1.2.1	Espaces fonctionnels et hypothèses sur les données	4
1.2.2	Problème faible	6
<b>1.3</b>	<b>Les méthodes des volumes finis</b>	<b>7</b>
<b>1.4</b>	<b>L'analyse d'erreur <i>a posteriori</i></b>	<b>10</b>
1.4.1	Principes généraux et propriétés	10
1.4.2	Estimations d'erreur <i>a posteriori</i> pour la méthode des éléments finis	13
1.4.3	Estimations d'erreur <i>a posteriori</i> pour les méthodes des volumes finis	13
1.4.4	Estimations d'erreur <i>a posteriori</i> pour les problèmes instationnaires	16
<b>1.5</b>	<b>Plan de la thèse</b>	<b>17</b>

## 1.1 Motivations

De nombreux phénomènes physiques sont modélisés par des équations aux dérivées partielles. Certaines de ces équations peuvent être résolues analytiquement et leurs solutions exactes sont connues. Toutefois, pour un nombre important d'équations, la solution exacte est inconnue. C'est dans cette optique que les recherches se sont penchées sur les méthodes numériques pour pouvoir approcher les solutions de ces équations. Ces méthodes fournissent des solutions approchées qui sont le plus souvent des fonctions appartenant à un espace fonctionnel de dimension finie. La discrétisation de ces équations par ces méthodes numériques donne lieu en général à des systèmes de grandes dimensions. La résolution des grands systèmes étant coûteuse en termes de temps de calcul et de ressources informatiques, deux questions importantes se posent.

Tout d'abord, est-ce que la résolution de ce système fournit une solution approchée de bonne qualité? Dans le cas des solutions numériques des équations aux dérivées partielles, cette question est reliée au problème d'estimer et de contrôler l'erreur due à la discrétisation entre la solution exacte et la solution approchée. En d'autres termes, il s'agit de déterminer la précision de la méthode numérique.

La deuxième question qui se pose est la suivante : est-ce que les ressources informatiques disponibles sont bien utilisées ? En effet, dans plusieurs cas, la solution d'un problème physique présente un comportement local dû par exemple à la discontinuité des coefficients, à des sources localisées, à des conditions de bord... Dans ce cas, la précision globale de la méthode numérique peut se détériorer. Une solution évidente pour remédier à ce problème est de raffiner les régions du maillage où ce comportement local se présente. On est alors face à deux problèmes, en premier, repérer les régions du comportement singulier et en second, raffiner de façon à ce que l'erreur globale soit uniformément répartie sur tout le domaine.

Les réponses à ces questions peuvent être décisives dans la construction des ponts et barrages, la fabrication des voitures et avions, les prévisions de la météo, l'exploitation du pétrole et du gaz naturel, la dépollution des sols et océans, les applications biomédicales, les simulations de la dynamique des populations, les prévisions économiques et financières etc... En effet, la décision est souvent prise sur la base du résultat numérique ; cf., par exemple, Babuška et Oden [15] et Oden, Babuška, Nobile, Feng, et Tempone [85] pour une discussion générale sur les erreurs dans les simulations.

Dans cette direction de raisonnement, on se propose de concevoir un algorithme permettant la réalisation de ces deux objectifs :

1. Le contrôle global de l'erreur due à la discrétisation du problème.
2. L'utilisation efficace des ressources informatiques disponibles.

L'analyse d'erreur *a posteriori* contribue à la satisfaction de ces objectifs. En effet, le but des estimations d'erreur *a posteriori* est de donner des bornes sur l'erreur entre l'approximation numérique et la solution exacte qui peuvent être calculées en pratique, une fois que la solution approchée est connue, cf. Verfürth [105], Ainsworth et Oden [9], Babuška et Strouboulis [18], Neittaanmäki et Repin [80], ou Repin [94]. Cette analyse peut alors fournir des critères d'arrêt qui garantissent le contrôle global de l'erreur.

Un autre point important permettant de réaliser des calculs efficaces est de distinguer et d'estimer séparément les différentes composantes de l'erreur. Par exemple, dans le cas des problèmes instationnaires, il y a d'habitude une erreur provenant de la discrétisation en espace et une erreur provenant de la discrétisation en temps. Pour traiter ce point, il faut ajuster les paramètres du calcul (par exemple les maillages en espace ou les pas de temps) de telle sorte que ces deux erreurs soient de grandeur comparable et qu'elles soient distribuées de façon équilibrée, cf. Ladevèze et Moës [74], Ladevèze [72], Verfürth [107], Bergam, Bernardi et Mghazli [24], et Ern et Vohralík [53].

Pour conclure cette petite introduction, on cite Baxter et Iserles [22, p. 273] : “Le but d'un calcul n'est pas de produire une solution avec l'erreur la plus petite possible, mais de produire, de façon fiable, robuste et abordable, une solution avec une précision spécifiée par l'utilisateur”.

## 1.2 L'équation de convection–diffusion–réaction

La distribution de certaines quantités en espace et en temps dépend de différents processus et peut être modélisée par des principes physiques. Une classe importante de ces principes exprime la conservation d'une certaine quantité et donne lieu à des lois de conservation. L'équation de convection–diffusion–réaction exprime la conservation de la concentration  $u$  d'une certaine substance dont les variations en espace et en temps résultent de processus de diffusion, convection et réaction, par exemple dans un milieu poreux. Cette équation se rencontre également dans la modélisation du transfert de chaleur à travers un milieu perméable, ou du transport d'un polluant à travers l'atmosphère. Elle prend la forme intégrale suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_V u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} ds = \int_V F(u, \mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (1.1)$$

où

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) := -\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \nabla u(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\beta} u(\mathbf{x}, t), \quad (1.2)$$

et

$$F(u, \mathbf{x}, t) := f(\mathbf{x}, t) - r(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, t). \quad (1.3)$$

Ici  $V$  est une partie arbitraire et suffisamment régulière du domaine  $\Omega$ . Le premier terme de gauche dans l'équation (1.1) représente le taux de variation de  $u$  dans  $V$ , le second est le flux de  $u$  à travers  $\partial V$  dans la direction sortante. La fonction  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ , souvent appelée flux, exprime le mécanisme avec lequel  $u$  est distribué en espace :  $-\mathbf{S} \nabla u$  représente le mécanisme de distribution de  $u$  par la diffusion–dispersion donnée par le tenseur  $\mathbf{S}$ , et  $\boldsymbol{\beta} u$  représente le mécanisme de distribution de  $u$  par un écoulement dont  $\boldsymbol{\beta}$  est le champ de vitesse. Le terme de droite dans (1.1) donne le taux de création ou de disparition de la quantité  $u$ . La fonction scalaire  $F(u, \mathbf{x}, t)$ , souvent appelée terme source, peut modéliser, selon le problème, une source de chaleur, une réaction chimique, des puits d'injection/production, etc. On considère ici une dépendance linéaire de  $F$  en  $u$ .

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , un domaine polygonal (polyédrique pour  $d = 3$ ) ouvert et borné, de frontière  $\partial\Omega$ , et  $(0, T)$  un intervalle de temps. On considère l'équation de convection–diffusion–réaction instationnaire dans sa forme conservative locale

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\mathbf{S} \nabla u) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\beta} u) + ru = f \quad \text{p.p. dans } Q_T := \Omega \times (0, T), \quad (1.4)$$

que l'on complète par une condition initiale

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (1.5)$$

et une condition limite, par exemple sous la forme

$$u = 0 \quad \text{p.p. sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (1.6)$$

Dans ce qui suit,  $u$  est appelé le potentiel,  $\boldsymbol{\Theta} := -\mathbf{S} \nabla u$  le flux diffusif et  $\boldsymbol{\Psi} := \boldsymbol{\beta} u$  le flux convectif.

### 1.2.1 Espaces fonctionnels et hypothèses sur les données

Pour un ouvert  $S \subset \Omega$  d'intérieur non vide et un réel  $1 \leq l \leq +\infty$ , on dénote par  $L^l(S)$  et  $\mathbf{L}^l(S) := [L^l(S)]^d$  les espaces de Lebesgue, par  $(\cdot, \cdot)_S$  le produit scalaire dans  $L^2(S)$  ou  $\mathbf{L}^2(S)$ , et par  $\|\cdot\|_S$  la norme associée. On désigne par  $|S|$  la mesure de Lebesgue de  $S$  et par  $|\sigma|$  la mesure de Lebesgue de dimension  $(d-1)$  de  $\sigma \subset H \cap S$ , où  $H$  est un hyperplan. Enfin,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\sigma$  désigne le produit scalaire dans  $L^2(\sigma)$ .

Ensuite,  $H^l(S)$  désigne l'espace de Sobolev engendré par les fonctions dont les dérivées faibles jusqu'à l'ordre  $l$  sont dans  $L^2(S)$ ;  $H_0^1(S)$  est le sous-espace de  $H^1(S)$  des fonctions dont la trace est nulle sur  $\partial S$ . Finalement,  $H^{-1}(\Omega)$  désigne le dual de  $H_0^1(\Omega)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  décrit la dualité entre  $H^{-1}(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$ .

L'espace  $\mathbf{H}(\text{div}, S)$  désigne l'espace engendré par les fonctions à valeurs vectorielles dont la divergence faible est de carré intégrable :

$$\mathbf{H}(\text{div}, S) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(S); \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(S)\}.$$

Cet espace est muni de la norme suivante :

$$\|\mathbf{v}\|_{\text{div}, S}^2 := \|\mathbf{v}\|_S^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_S^2. \quad (1.7)$$

On précise les principales hypothèses sur les données du problème.

**Hypothèse 1.1.** (A1)  $\mathbf{S}_{ij} \in L^\infty(Q_T)$ ,  $1 \leq i, j \leq d$ , et, p.p. dans  $Q_T$ ,  $\mathbf{S}$  est un tenseur symétrique et uniformément défini positif.

(A2)  $\beta \in \mathbf{L}^\infty(Q_T)$  et  $\nabla \cdot \beta \in L^\infty(Q_T)$ .

(A3)  $r \in L^\infty(Q_T)$ .

(A4)  $\frac{1}{2} \nabla \cdot \beta + r \geq 0$ , p.p. dans  $Q_T$ .

(A5)  $f \in L^2(Q_T)$ .

(A6)  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ .

Soit  $w \in H_0^1(\Omega)$ . On définit la fonctionnelle  $\mathcal{B}(w) \in H^{-1}(\Omega)$  par

$$\langle \mathcal{B}(w), \varphi \rangle := (\mathbf{S} \nabla w, \nabla \varphi) - (\beta w, \nabla \varphi) + (r w, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.8)$$

Il est utile de décomposer  $\mathcal{B}$  selon ses parties symétrique et antisymétrique. Pour tout  $w \in H_0^1(\Omega)$ , on définit les fonctionnelles  $\mathcal{B}_S(w)$  et  $\mathcal{B}_A(w) \in H^{-1}(\Omega)$  par

$$\langle \mathcal{B}_S(w), \varphi \rangle := (\mathbf{S} \nabla w, \nabla \varphi) + ((\frac{1}{2} \nabla \cdot \beta + r) w, \varphi), \quad (1.9)$$

$$\langle \mathcal{B}_A(w), \varphi \rangle := -(\beta w, \nabla \varphi) - (\frac{1}{2} (\nabla \cdot \beta) w, \varphi), \quad (1.10)$$

pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  et on remarque que

$$\langle \mathcal{B}(w), \varphi \rangle = \langle \mathcal{B}_S(w), \varphi \rangle + \langle \mathcal{B}_A(w), \varphi \rangle, \quad (1.11)$$

pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ . On constate que, pour tout  $w \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\langle \mathcal{B}_A(w), w \rangle = 0. \quad (1.12)$$

De plus, grâce aux hypothèses (A1) et (A4), on a  $\langle \mathcal{B}_S(w), w \rangle \geq 0$  pour tout  $w \in H_0^1(\Omega)$  et  $\langle \mathcal{B}_S(w), w \rangle > 0$  pour tout  $w \neq 0$ , et on peut poser

$$\|w\|^2 := \langle \mathcal{B}_S(w), w \rangle. \quad (1.13)$$

On a donc

$$\langle \mathcal{B}(w), w \rangle = \|w\|^2, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \quad (1.14)$$

La norme  $\|\cdot\|$  est équivalente à la norme canonique de  $H_0^1(\Omega)$ . On munit  $H^{-1}(\Omega)$  de la norme duale  $\|\cdot\|_*$  définie pour tout  $w' \in H^{-1}(\Omega)$  par

$$\|w'\|_* := \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle w', \varphi \rangle}{\|\varphi\|}. \quad (1.15)$$

Pour une fonction espace-temps  $v : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction  $v(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sera notée  $v(t)$ . On introduit l'espace

$$X := L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (1.16)$$

et son dual

$$X' := L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad (1.17)$$

la dualité entre  $X'$  et  $X$  étant notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$ . On équipe l'espace  $X$  de la norme

$$\|v\|_X^2 := \int_0^T \|v(t)\|^2 dt, \quad \forall v \in X, \quad (1.18)$$

qu'on appellera norme d'énergie. La norme canonique de l'espace  $X'$  est

$$\|v\|_{X'} := \sup_{\varphi \in X} \frac{\langle v, \varphi \rangle_{X', X}}{\|\varphi\|_X}, \quad \forall v \in X'. \quad (1.19)$$

En observant que  $\langle v, \varphi \rangle_{X', X} = \int_0^T \langle v(t), \varphi(t) \rangle dt$ , on montre facilement que

$$\|v\|_{X'} = \left\{ \int_0^T \left( \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle v(t), \psi \rangle}{\|\psi\|} \right)^2 dt \right\}^{1/2}. \quad (1.20)$$

En effet, on a d'une part

$$\begin{aligned} \|v\|_{X'}^2 &= \left( \sup_{\varphi \in X} \frac{1}{\|\varphi\|_X} \int_0^T \langle v(t), \varphi(t) \rangle dt \right)^2 \\ &\leq \left( \sup_{\varphi \in X} \frac{1}{\|\varphi\|_X} \int_0^T \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle v(t), \psi \rangle}{\|\psi\|} \|\varphi(t)\| dt \right)^2 \\ &\leq \left( \sup_{\varphi \in X} \frac{1}{\|\varphi\|_X} \left[ \int_0^T \left( \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle v(t), \psi \rangle}{\|\psi\|} \right)^2 dt \right]^{1/2} \|\varphi\|_X \right)^2 \\ &\leq \int_0^T \left( \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle v(t), \psi \rangle}{\|\psi\|} \right)^2 dt. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout  $t \in (0, T)$ , soit  $Rv(t) \in H_0^1(\Omega)$  le représentant de Riesz de  $v(t) \in H^{-1}(\Omega)$  pour le produit scalaire associé à la norme  $\|\cdot\|$ . Il vient

$$\begin{aligned} \int_0^T \left( \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle v(t), \psi \rangle}{\|\psi\|} \right)^2 dt &= \int_0^T \|Rv(t)\|^2 dt \\ &= \|Rv(t)\|_X^2 \\ &= \int_0^T \langle v(t), Rv(t) \rangle dt \\ &\leq \|v\|_{X'} \|Rv(t)\|_X, \end{aligned}$$

d'où

$$\left\{ \int_0^T \left( \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle v(t), \psi \rangle}{\|\psi\|} \right)^2 dt \right\}^{1/2} \leq \|v\|_{X'}.$$

Enfin, on introduit l'espace

$$Z := \{v \in X; \partial_t v \in X'\}, \quad (1.21)$$

équipé de la norme

$$\|v\|_Z = \|v\|_X + \|\partial_t v\|_{X'}. \quad (1.22)$$

Un résultat classique (cf. Aubin [14]) montre que  $Z$  s'injecte continûment dans  $C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ . Enfin, pour  $v \in Z$ , on définit la norme d'énergie augmentée

$$\|v\|_{\oplus} := \|v\|_X + \|\partial_t v + b_A(v)\|_{X'}, \quad (1.23)$$

où, pour tout  $\varphi \in X$ ,

$$\langle b_A(v), \varphi \rangle_{X', X} := \int_0^T \langle \mathcal{B}_A(v(t)), \varphi(t) \rangle dt. \quad (1.24)$$

On observe que, pour  $v \in Z$ ,

$$b_A(v) = \nabla \cdot (\beta v) - \frac{1}{2} (\nabla \cdot \beta) v. \quad (1.25)$$

Dans cette thèse, on va estimer à la fois l'erreur en norme d'énergie (1.18) et dans la norme augmentée (1.23).

### 1.2.2 Problème faible

On définit la solution faible  $u$  du problème (1.4)–(1.6) comme une fonction  $u \in Z$  telle que  $u(0) = u_0$  et pour presque tout  $t \in (0, T)$  et tout  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\langle \partial_t u(t), \varphi \rangle + \langle \mathcal{B}(u(t)), \varphi \rangle = \langle f(t), \varphi \rangle. \quad (1.26)$$

Sous l'Hypothèse 1.1, le problème faible admet une unique solution. Cette solution vérifie l'estimation de stabilité suivante :

$$\|u(T)\|^2 + \|u\|_X^2 \leq \|u_0\|^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^T \|f(\tau)\|^2 d\tau, \quad (1.27)$$

où  $\alpha > 0$  est tel que  $\alpha \|w\|^2 \leq \|w\|_{\oplus}^2$  pour tout  $w \in H_0^1(\Omega)$ , cf. Quarteroni et Valli [93].

**Remarque 1.1** (Coercivité de la forme bilinéaire). *L'hypothèse (A4) assure la coercivité dans  $H_0^1(\Omega)$  de la forme bilinéaire  $\mathcal{B}$ , cf. (1.14). Dans le cas où la condition (A4) n'est pas vérifiée, la forme bilinéaire  $\mathcal{B}$  est dite faiblement coercive dans  $H_0^1(\Omega)$ , c'est-à-dire, il existe deux constantes  $\alpha > 0$  et  $\lambda \geq 0$  telles que*

$$\langle \mathcal{B}(w), w \rangle + \lambda \|w\|^2 \geq \alpha \|\nabla w\|^2 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \quad (1.28)$$

*Cette inégalité est appelée inégalité de Gårding. On introduit dans ce cas la fonction suivante, cf. Quarteroni et Valli [93] :*

$$\tilde{u}_\lambda := \exp(-\lambda t)u. \quad (1.29)$$

*On récrit alors l'équation (1.4) pour la nouvelle variable  $\tilde{u}_\lambda$  et on obtient*

$$\partial_t \tilde{u}_\lambda - \nabla \cdot (\mathbf{S} \nabla \tilde{u}_\lambda) + \nabla \cdot (\beta \tilde{u}_\lambda) + (\lambda + r) \tilde{u}_\lambda = \exp(-\lambda t) f \quad t \in (0, T), \quad (1.30)$$

*avec  $\tilde{u}_\lambda(\cdot, 0) = u_0$ . La forme bilinéaire  $\mathcal{B}_\lambda(w, v) := \mathcal{B}(w, v) + \lambda(w, v)$  associée au nouveau problème (1.30) est coercive dans  $H_0^1(\Omega)$  pour  $\lambda$  assez grand. Les estimations obtenues dans cette thèse seront vérifiées alors pour la variable  $\tilde{u}_\lambda$ , et les estimations pour la solution  $u$  seront multipliées par un facteur  $\exp(\lambda t)$ .*

### 1.3 Les méthodes des volumes finis

Il existe plusieurs méthodes numériques pour la discrétisation d'une équation aux dérivées partielles. Parmi ces méthodes, les plus utilisées sont la méthode des *différences finies*, la méthode des *éléments finis* et la méthode des *volumes finis*.

Pour la méthode des différences finies (cf. Thomée [100]), le domaine  $\Omega$  est représenté par un nombre fini de points  $\{\mathbf{x}_i\} = \Omega_h$  appelés nœuds du maillage. La solution du problème est représentée par un ensemble de valeurs  $u_i$  approchant  $u(\mathbf{x}_i)$ . La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences ou combinaisons de ces valeurs ponctuelles de la fonction à l'aide de développements de Taylor tronqués. L'avantage de cette méthode est sa grande simplicité d'écriture et son faible coût de calcul. Elle est pratique et facile d'accès. Un inconvénient est qu'on se limite en général à des géométries simples, et l'utilisation de cette méthode devient difficile dans le cas où les coefficients associés aux données du problème sont discontinus comme par exemple dans le cas de milieux hétérogènes.

Pour la méthode des éléments finis (cf. Ciarlet [37] ou Ern et Guermond [50]), le domaine  $\Omega$  est partitionné en un nombre fini d'éléments  $\mathcal{T} := \{K_i\}$  tels que  $\bigcup K_i = \bar{\Omega}$ ; l'ensemble  $\mathcal{T}$  est appelé maillage. Cette méthode s'appuie sur une formulation variationnelle de l'équation aux dérivées partielles. Cette formulation variationnelle est obtenue en multipliant l'équation principale par une "fonction test" puis en intégrant sur  $\Omega$ . L'idée de base de cette méthode est de remplacer l'espace  $V$  sur lequel est posée la formulation variationnelle par un sous-espace de dimension finie  $V_h$ . Le problème approché posé sur  $V_h$  se ramène à la résolution d'un système linéaire. La solution est alors approchée par

$$u_h = \sum a_i \varphi_i(\mathbf{x}), \quad (1.31)$$

où les fonctions  $\varphi_i$  sont typiquement des polynômes sur chaque élément  $K_i$ . Les inconnues sont les coefficients  $a_i$  dans (1.31). La famille  $\{\varphi_i\}$  forme une base de  $V_h$ . En général, une fonction  $\varphi_i$  est continue et son support s'étend sur un nombre fini d'éléments. La méthode des éléments finis demande plus de calculs que la méthode des différences finies mais elle est plus puissante et utilisable sur des maillages généraux.

La méthode des volumes finis est une méthode de discrétisation bien adaptée pour la simulation des lois de conservation. Le domaine  $\Omega$  est également partitionné en un nombre fini de volumes  $\mathcal{T} := \{K_i\}$  tels que  $\bigcup K_i = \bar{\Omega}$ . L'idée de base pour la construction d'un schéma volumes finis est d'intégrer l'équation sur chaque volume dit volume de contrôle. Une formule de Green est ensuite utilisée pour transformer l'intégrale de la divergence d'un flux sur le volume de contrôle en une intégrale de la composante normale de ce flux sur la frontière de ce volume. Ensuite, cette intégrale est approchée en utilisant les inconnues locales autour de cette frontière. Il existe plusieurs catégories distinctes de méthodes des volumes finis en fonction du placement des inconnues : les volumes finis *centrés par mailles* (cell-centered) (cf. par exemple, Eymard, Gallouët et Herbin [56] ou Lazarov, Mishev et Vassilevski [76]), les volumes finis *centrés par sommets* (vertex-centered) (cf. par exemple, Morton et Süli [79]), les schémas boîte (cf. par exemple, Croisille [42] ou Croisille et Greff [43]) ... Dans cette thèse, on s'intéresse uniquement aux volumes finis centrés par mailles qu'on va appeler volumes finis tout court. La solution est alors approchée par

$$u_h = \sum a_i \varphi_i(\mathbf{x}), \quad (1.32)$$

où  $\varphi_i$  est la fonction caractéristique sur le volume  $K_i$  définie par

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{si } \mathbf{x} \in K_i, \quad (1.33)$$

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \notin K_i. \quad (1.34)$$

En comparaison avec la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis est également peu coûteuse en termes de calcul mais elle peut être utilisée sur des géométries plus complexes. Il est parfois possible de discrétiser les flux aux bords des volumes de contrôle par la méthode des différences finies. Dans ce cas, la méthode des volumes finis est souvent appelée différences finies ou différences finies centrées par maille. Cependant, la spécificité des volumes finis par rapport aux différences finies est que la discrétisation est faite sur les équations de bilan locales et non pas sur l'équation aux dérivées partielles : ce sont les flux aux bords des volumes de contrôle qui sont discrétisés et non pas l'opérateur différentiel.

La méthode des volumes finis ressemble à la méthode des éléments finis dans le fait qu'elle peut être utilisée sur des géométries arbitraires en utilisant des maillages structurés ou non structurés. Elle possède cependant une propriété supplémentaire importante qui est la *conservativité locale* sur chaque volume de contrôle (la méthode des éléments finis possède également une propriété de conservativité locale, mais celle-ci s'exprime sur une maille et ses voisins).

La méthode des volumes finis pour l'approximation de l'équation de convection-diffusion-réaction (1.4)–(1.6) est basée sur une discrétisation des flux de diffusion et de convection. Ces flux sont évalués numériquement aux interfaces des volumes de contrôle du maillage. Une approche générale consiste à combiner un flux numérique upwind (décentrement amont) pour le terme de convection avec un flux numérique adéquat pour le terme de diffusion. Un schéma général volumes finis pour la discrétisation du problème de convection-diffusion-réaction instationnaire (1.4)–(1.6) est donné par : étant donné  $\bar{u}_h^0$ , l'approximation de la condition initiale  $u_0$ , constante sur chaque élément  $K \in \mathcal{T}^0$ , pour tout  $1 \leq n \leq N$ , chercher  $\bar{u}_h^n$ , constante sur chaque  $K \in \mathcal{T}^n$ , vérifiant

$$\frac{1}{\tau^n} (\bar{u}_h^n - \bar{u}_h^{n-1}, 1)_K + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} S_{K,\sigma}^n + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} W_{K,\sigma}^n + r_K^n (\bar{u}_h^n, 1)_K = f_K^n |K| \quad \forall K \in \mathcal{T}^n. \quad (1.35)$$

Ici,  $\mathcal{T}^n$  désigne le maillage sur lequel est approchée  $\bar{u}_h^n$  (l'indice supérieur  $n$  faisant référence au fait que le maillage peut changer à chaque pas de temps) et

$$f_K^n = \frac{1}{\tau^n} \frac{1}{|K|} \int_{I^n} \int_K f(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} dt, \quad (1.36)$$

$$r_K^n = \frac{1}{\tau^n} \frac{1}{|K|} \int_{I^n} \int_K r(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} dt. \quad (1.37)$$

De plus,  $S_{K,\sigma}^n$  et  $W_{K,\sigma}^n$  sont, respectivement, les flux diffusifs et convectifs à travers un côté (face en dimension 3)  $\sigma$  d'un élément  $K$ , l'ensemble des côtés de  $K$  étant regroupé dans l'ensemble  $\mathcal{E}_K$ . Ces flux, qui sont des fonctions de  $\bar{u}_h^n$ , vérifient la relation de conservativité suivante :

$$S_{K,\sigma}^n + S_{L,\sigma}^n = 0, \quad (1.38)$$

$$W_{K,\sigma}^n + W_{L,\sigma}^n = 0, \quad (1.39)$$

où  $\sigma = \partial K \cap \partial L$  est l'interface séparant les mailles  $K$  et  $L$ .

Le calcul du flux numérique diffusif nécessite d'approcher les valeurs de  $\mathbf{S} \nabla u \cdot \mathbf{n}$  sur les côtés des mailles. Dans le cas où la ligne joignant les centres de deux mailles adjacentes est perpendiculaire à l'interface entre ces deux éléments et  $\mathbf{S} = s \mathbf{Id}$  avec  $s > 0$ , la valeur approchée de  $\nabla u \cdot \mathbf{n}$  peut être calculée en utilisant des différences finies. C'est le cas des maillages "admissibles" décrits par Eymard, Gallouët et Herbin dans [56, Définition 9.1]. Dans le cas de maillages généraux, le calcul est plus compliqué. L'idée générale consiste à reconstruire tout le gradient et pas uniquement sa composante normale. On peut citer par exemple Aavatsmark, Barkve, Bøe et Mannseth [1, 2] pour les schémas MPFA "Multi-Point Flux Approximation", Coudière, Vila et Villedieu [40] pour les schémas diamants, Domelevo et Omnes [45] pour les schémas DDFV "Discrete Duality Finite Volumes", et Eymard, Gallouët et Herbin [58] pour les schémas SUSHI "Scheme Using Stabilization and Hybrid Interfaces".

Détaillons brièvement quelques aspects des méthodes utilisant des mailles diamants pour la reconstruction du gradient. Dans les méthodes étudiées par Coudière, Vila et Villedieu dans [40] et par Coudière et Villedieu dans [41], on associe à

chaque côté  $\sigma$  d'un élément  $K$  du maillage, un quadrilatère diamant en dimension 2 construit en reliant les sommets du côté  $\sigma$  aux centres des mailles partageant le côté  $\sigma$ . La valeur moyenne des flux est définie en fonction des valeurs aux centres et aux sommets du maillage. La valeur de la fonction discrète aux sommets des éléments des mailles est approchée par une interpolation linéaire des valeurs aux centres des éléments voisins par la méthode des moindres carrés. L'avantage de ce schéma est la possibilité d'être utilisé sur des maillages presque arbitraires. Le désavantage principal est que le schéma résultant n'est pas symétrique et par suite la résolution du système linéaire pour le calcul de la solution approchée est plus coûteuse. De plus, la convergence de la solution approchée vers la solution exacte est obtenue si le système discret est coercif, ce qui est prouvé sous certaines conditions géométriques sur le maillage (maillage en quadrilatères presque parallélogramme dans le cas de [40], et maillage de rectangles localement raffinés avec une borne supérieure et inférieure sur le rapport d'aspect des rectangles dans le cas de [41]).

Dans la méthode DDFV développée par Domelevo et Omnes [45], la méthode des mailles diamants est également utilisée pour la reconstruction du gradient. Cependant, dans cette méthode, les valeurs aux sommets du maillage appelé "maillage primal" ne sont pas interpolées en fonction des valeurs aux centres des mailles mais elles sont traitées comme des *inconnues supplémentaires* du schéma numérique. On doit donc écrire des équations supplémentaires dont le nombre est égal au nombre de sommets. Ces équations sont obtenues en intégrant l'équation de Laplace sur les éléments d'un maillage dual. Chaque élément du maillage dual est associé à un sommet et est typiquement obtenu en joignant les centres des mailles et les centres des interfaces partageant ce sommet. De plus, un opérateur de divergence discret peut être défini sur le maillage primal et sur le maillage dual et cet opérateur est l'adjoint du gradient défini sur les mailles diamants, ce qui signifie que ces deux opérateurs vérifient une formule de Green discrète. Ainsi, le schéma est symétrique et coercif. De par ces propriétés intéressantes, nous privilégions dans cette thèse les schémas DDFV comme applications de nos estimations d'erreur *a posteriori*.

## 1.4 L'analyse d'erreur *a posteriori*

### 1.4.1 Principes généraux et propriétés

Une simulation réalisée par une méthode numérique peut prendre beaucoup de temps. Une phase délicate dans ce processus est la construction du maillage. En effet, si le maillage est trop grossier, la durée des calculs sera courte, mais le résultat ne sera pas satisfaisant car trop approximatif. Par contre, si le maillage est très fin, il y a deux inconvénients : premièrement le fait que le calcul sera peut être inutilement long car certaines zones ne nécessitent pas un maillage fin ; deuxièmement, le processus lui-même risque de se terminer par une interruption extérieure (limite de temps dépassée par exemple). Il faut donc trouver un bon compromis de manière à ce que le maillage soit fin uniquement là où cela est nécessaire.

Les estimations d'erreur *a priori* fournissent des bornes sur la différence entre la

solution exacte (qu'on appelle  $u$ ) et la solution approchée (qu'on appelle  $u_h$ ) dans une certaine norme  $\|\cdot\|$  sous la forme

$$\|u - u_h\| \leq Ch^\alpha \|u\|_\star, \quad (1.40)$$

où  $\|\cdot\|_\star$  diffère en général de  $\|\cdot\|$  (et fait appel à des dérivées d'ordre supérieur). Ces estimations sont utilisées afin de justifier théoriquement la convergence de la méthode numérique. Elles sont établies en supposant certaines régularités sur la solution exacte (ces régularités peuvent ne pas être vérifiées en pratique, par exemple à cause de la présence de chocs, des singularités géométriques, ...). De plus, la constante générique  $C$  qui apparaît dans l'estimation (1.40) est, soit inconnue, soit difficile à estimer. Cependant, la difficulté la plus importante est que la norme de la solution exacte  $\|u\|_\star$  n'est pas calculable, simplement parce que la solution exacte est inconnue. Donc, en pratique, la borne supérieure (1.40) ne permet pas le contrôle effectif de l'erreur et par suite ne peut pas servir comme critère d'arrêt pour un algorithme de résolution.

Pour pouvoir développer une méthode adaptative, on va avoir recours à des estimations d'erreur *a posteriori*. L'intérêt de ces estimations est de fournir des bornes sur l'erreur qui peuvent être évaluées dès que la solution approchée a été calculée. En effet, ces bornes sont évaluées uniquement en fonction de la solution calculée, des données du problème et des données du maillage. Ainsi,  $\eta(\mathcal{T}_h, D, u_h)$  est un estimateur d'erreur *a posteriori* si

$$\|u - u_h\| \leq \eta(\mathcal{T}_h, D, u_h), \quad (1.41)$$

où  $\mathcal{T}_h$  est le maillage et  $D$  est l'ensemble des données du problème.

Pour les estimations d'erreur *a posteriori*, on peut formuler plusieurs propriétés importantes qu'il convient de satisfaire.

1. Une première propriété que doit vérifier un estimateur d'erreur *a posteriori* est de fournir *une borne supérieure garantie*, en d'autres termes, une borne supérieure qui soit entièrement calculable, sans aucune constante inconnue.
2. On définit l'indice d'efficacité  $I_{\text{eff}}$  par

$$I_{\text{eff}} := \frac{\eta(\mathcal{T}_h, D, u_h)}{\|u - u_h\|}. \quad (1.42)$$

Un indice d'efficacité proche de 1 implique que l'erreur n'a pas été trop sur-évaluée. Lorsque  $\lim_{h \rightarrow 0} I_{\text{eff}} = 1$ , on parle *d'exactitude asymptotique*.

3. Un estimateur d'erreur *a posteriori* doit pouvoir être localisé, par exemple sur chaque élément du maillage sous la forme

$$\eta(\mathcal{T}_h, D, u_h) = \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K(h_K, D, u_h))^2 \right\}^{1/2}. \quad (1.43)$$

Les quantités  $\eta_K(h_K, D, u_h)$  sont appelées indicateurs locaux de l'erreur. Pour que ces indicateurs soient utiles, il faut qu'il ne surestiment pas trop l'erreur

localement. Cette propriété s'exprime en montrant que les indicateurs locaux fournissent une borne inférieure de l'erreur locale à une constante multiplicative près, ce qu'on appelle *efficacité locale*. Cette propriété nécessite de pouvoir localiser la norme  $\|\cdot\|$  sous la forme

$$\|u - u_h\| = \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - u_h\|_K^2 \right\}^{1/2}. \quad (1.44)$$

Idéalement, on aurait sur chaque élément  $K \in \mathcal{T}_h$ ,

$$c_1 \eta_K(h_K, D, u_h) \leq \|u - u_h\|_K, \quad (1.45)$$

où  $c_1$  est une constante positive. En général, on obtient une majoration de l'indicateur local par l'erreur locale en considérant également les éléments les plus proches, c'est-à-dire

$$c_1 \eta_K(h_K, D, u_h) \leq \sum_{K' \in \Delta_K} \|u - u_h\|_{K'}, \quad (1.46)$$

où  $\Delta_K$  indique un ensemble d'éléments autour de  $K$ , par exemple, les éléments partageant un sommet ou une face avec  $K$ . La propriété (1.46) justifie de concentrer plus d'efforts dans la partie du domaine où les indicateurs locaux sont grands. En pratique, le maillage est raffiné là où la valeur des indicateurs locaux est grande, ce qui introduit la notion de raffinement adaptatif du maillage. Il est aussi possible de déraffiner le maillage dans les régions où ces indicateurs sont les plus petits.

4. Il est souhaitable que la constante  $c_1$  dans la propriété d'efficacité locale (1.46) soit indépendante des paramètres du problème et de leurs variations. Dans ce cas, l'estimateur d'erreur *a posteriori* est dit *robuste*. Dans des problèmes réels, les paramètres et coefficients (diffusivité, réactivité, convection, taille relative des échelles d'espace et de temps, ...) peuvent varier sur plusieurs ordres de grandeur. Un estimateur robuste assure que l'estimation d'erreur *a posteriori* va être de la même qualité dans toutes les situations.
5. Enfin, même si l'adaptation du maillage est un bon moyen pour obtenir une solution plus précise avec moins de calcul, il faut garantir que le coût d'évaluation de l'estimateur d'erreur *a posteriori* soit beaucoup plus petit que le coût requis pour obtenir la solution approchée elle-même (rappelons que d'habitude, un problème global doit être résolu afin d'obtenir la solution approchée). Dans ces conditions, un bon estimateur d'erreur *a posteriori* doit se décomposer en des indicateurs locaux pouvant être évalués localement et dont *le coût de calcul est négligeable* par rapport à la résolution du problème global.

Pour la réalisation d'une stratégie adaptative efficace, une autre question importante est la distinction entre les différentes composantes de l'erreur. En particulier, pour un problème instationnaire, il s'agit de distinguer et estimer séparément l'erreur provenant de la discrétisation en espace et celle provenant de la discrétisation

en temps de sorte que, en adaptant le maillage et/ou le pas de temps, ces deux composantes de l'erreur puissent être distribuées de façon équilibrée et qu'elles soient du même ordre de grandeur.

#### 1.4.2 Estimations d'erreur *a posteriori* pour la méthode des éléments finis

Pour la méthode des éléments finis, les estimations d'erreur *a posteriori* ont été développées depuis plus de trente ans. Elles ont été initiées par Babuška et Rheinboldt [16, 17] à la fin des années 70, et une vaste littérature existe sur ce sujet. On réfère, par exemple, aux livres de Verfürth [105] ou de Ainsworth et Oden [9]. Plusieurs techniques ayant été développées, on retrouve plusieurs classes d'estimations *a posteriori*. Les *estimations par résidu*, initiées par Babuška et Rheinboldt [16] et détaillées par Verfürth [105], sont probablement les plus populaires. Les bornes supérieures sont en général des bornes calculables multipliées par une constante indépendante de la solution exacte et du pas du maillage mais dont la valeur est difficile à calculer explicitement ; citons toutefois les travaux de Verfürth [106], Carstensen et Funken [31], et Veese et Verfürth [101]. L'estimation n'est donc pas en général garantie. Les *estimations par résidu équilibré*, cf. Ainsworth et Oden [9], suppriment ce désavantage sous la condition que des problèmes locaux de dimension infinie puissent être résolus. Cela n'est pas possible en pratique, et les solutions de ces problèmes doivent être approchées et par suite on perd la borne garantie et le coût de calcul est augmenté. Les *estimations par moyenne*, comme celles de Zienkiewicz–Zhu [118], sont basées sur des moyennes locales calculables facilement. Ces estimations sont souvent asymptotiquement exactes mais ne sont pas garanties. Les *estimations fonctionnelles*, cf. Neittaanmäki et Repin [80] et Repin [94], donnent des bornes garanties par construction. Cependant, il est difficile d'assurer l'exactitude asymptotique avec un coût de calcul qui reste négligeable. Les estimations d'erreur *a posteriori* les plus proches de la démarche privilégiée ici sont basées sur la reconstruction locale de flux équilibrés comme celles développés par Ladevèze [71, 72], Ladevèze et Leguillon [73], Destuynder et Métivet [44], Luce et Wohlmuth [78], Braess et Schöberl [27], ou Ern et Vohralík [53].

#### 1.4.3 Estimations d'erreur *a posteriori* pour les méthodes des volumes finis

L'étude des estimations d'erreur *a posteriori* pour la méthode des volumes finis est plus récente que pour la méthode des éléments finis. L'un des premiers résultats a été obtenu par Angermann [13]. Dans ce travail, Angermann a étudié des estimations d'erreur *a posteriori* pour la discrétisation des équations de convection–diffusion stationnaires en dimension 2 par la méthode des volumes finis sur des maillages de Voronoï. Son estimateur d'erreur est dérivé en utilisant l'idée d'un travail précédent du même auteur sur la méthode des éléments finis [12].

Pour les schémas volumes finis centrés par sommets, les liens avec le cas des

éléments finis sont en général exploités pour obtenir des estimations d'erreur *a posteriori*. Ces estimations ne sont pas (en général) garanties. Afif, Bergam, Mghazli et Verfürth [6] considèrent l'équation de diffusion et donnent une borne supérieure globale et une borne inférieure locale de l'erreur en utilisant les propriétés de l'opérateur d'interpolation de Clément. Les indicateurs sont calculables mais la borne supérieure fait apparaître une constante inconnue. C'est le cas également des travaux de Xu, Zhu et Zou [114] : des estimateurs par résidu sont proposés en utilisant les propriétés de l'opérateur de Scott–Zhang, et en utilisant une orthogonalité de Petrov–Galerkin pour la méthode des volumes finis. Les auteurs proposent également un algorithme adaptatif et montrent sa convergence.

En ce qui concerne l'équation de convection–diffusion–réaction, Lazarov et Tomov [75] présentent une estimation d'erreur *a posteriori* par résidu, l'erreur étant calculée en norme  $H^1$ . La preuve de la borne supérieure est aussi basée sur une orthogonalité de Petrov–Galerkin pour la méthode des volumes finis. D'autres types d'estimateurs sont décrits : des estimateurs par résidu basés sur la dualité, des estimateurs basés sur la résolution de problèmes de Dirichlet locaux, et des estimateurs du type Zienkiewicz–Zhu. Ces types d'estimations d'erreur sont repris par Carstensen, Lazarov et Tomov [32] dans le cadre de la norme d'énergie, ainsi que des estimations d'erreur en norme  $L^2$  en utilisant des techniques de dualité. On peut également citer Ju, Tian et Wang [67] qui prouvent une estimation d'erreur (non garantie) pour le problème de convection–réaction–diffusion défini sur des surfaces de  $\mathbb{R}^3$  et prouvent son efficacité. Finalement, on cite Afif, Amaziane, Kunert, Mghazli, et Nicaise [5] qui proposent des estimations pour le problème de réaction–diffusion perturbé sur des maillages anisotropes. Les estimations proposées sont robustes par rapport à la dominance de la réaction ainsi qu'à l'anisotropie du maillage. Une autre technique est présentée par Cheddadi, Fučík, Prieto et Vohralík [34] pour un problème de réaction–diffusion singulièrement perturbé. Les estimations proposées sont basées sur une reconstruction  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conforme du flux diffusif. Elles sont garanties, localement efficaces et robustes par rapport à la dominance de la réaction. Enfin, pour les problèmes non linéaires, on cite Bergam, Mghazli et Verfürth [25] et Bi et Ginting [26]. Des estimateurs d'erreur par résidu sont proposés. L'estimation donnée ne fournit pas une borne garantie et fait apparaître une constante inconnue.

Yang [116] dérive des estimations d'erreur *a posteriori* dans les normes  $H^1$  et  $L^2$  pour une équation de convection–diffusion–réaction stationnaire, la méthode des volumes finis utilisée étant celle des volumes finis centrés par face. Ye [117] utilise une méthode particulière des volumes finis basée sur des idées de la méthode de Galerkin discontinue. Des bornes supérieure et inférieure de l'erreur sont proposées, la borne supérieure n'étant pas garantie. Liu, Mu et Ye [77] démontrent la convergence d'un algorithme adaptatif basé sur ces estimations.

Pour les schémas volumes finis centrés par mailles, plusieurs techniques ont été utilisées pour dériver des estimations d'erreur *a posteriori*. Une équivalence avec les méthodes des éléments finis est considérée par plusieurs auteurs. Agouzal et Oudin [7] exploitent des relations entre les éléments finis mixtes de Raviart–Thomas de plus bas ordre, les éléments finis non conformes de plus bas ordre et les méthodes

des volumes finis centrées par maille sur des maillages triangulaires pour obtenir un indicateur de l'erreur. Cet indicateur n'est pas une borne supérieure pour l'erreur mais est asymptotiquement exact. Des estimations d'erreur *a posteriori* ont été obtenues par Achdou, Bernardi et Coquel [4] pour deux schémas particuliers en utilisant une équivalence de ces schémas avec des méthodes d'éléments finis conformes et non conformes. Omnes, Penel et Rosenbaum [89] dérivent des estimations d'erreur *a posteriori* pour le problème de diffusion sur des maillages en deux dimensions très généraux en utilisant la méthode DDFV. Ces estimations sont obtenues en norme  $H^1$  en utilisant une équivalence entre cette méthode et un schéma éléments finis et une décomposition de Helmholtz de l'erreur ; l'erreur étant calculée en utilisant le gradient discret. Estep, Pernice, Pham, Tavener et Wang [54] dérivent des estimations d'erreur *a posteriori* pour l'équation de convection–diffusion–réaction en utilisant une équivalence avec la méthode des éléments finis mixtes et cela en résolvant un problème adjoint.

Une autre technique consiste à post-traiter la solution constante par morceaux fournie par la méthode des volumes finis pour obtenir une solution ayant plus de régularité. Nicaise [81, 82] présente un estimateur d'erreur par résidu pour la méthode des volumes finis centrés par maille pour un schéma particulier, le schéma à quatre-points restreint à une classe particulière de maillages dits “admissibles” (au sens de [56, Définition 9.1]) dans [81] et dans un cas général dans [82]. L'idée est de reconstruire une interpolation de Morley de la solution volumes finis qu'on note  $\tilde{u}_h$ . L'erreur entre la solution exacte et l'interpolé de Morley de la solution volumes finis est mesurée dans la semi-norme  $H^1$  discrète et une équivalence entre l'erreur et l'estimateur est prouvée. La preuve de la borne supérieure utilise une décomposition de Helmholtz de l'erreur et des relations de quasi-orthogonalité. Or, pour l'interpolé de Morley, seules les moyennes des flux à travers les côtés du maillage sont continues. Il faut alors prendre en compte dans l'estimation le double fait que  $-\mathbf{S}\nabla\tilde{u}_h$  est non conforme et que  $\tilde{u}_h$  est non conforme. On note cependant que, dans certains cas, l'interpolé de Morley est conforme. Nicaise étend ces estimations pour l'équation de convection–diffusion–réaction dans [83]. Dans ce travail, l'interpolé de Morley est contenu dans  $H_0^1(\Omega)$  contrairement à [81, 82]. Erath et Praetorius [48] utilisent les mêmes idées pour présenter une estimation d'erreur *a posteriori* pour le problème de diffusion avec des conditions de bord mixtes et pour des maillages quasi-réguliers. Vohralík [112] obtient une estimation d'erreur *a posteriori* dans la norme d'énergie pour le problème de convection–diffusion–réaction pour des méthodes localement conservatives et en particulier pour la méthode des volumes finis centrés par maille. Suite aux résultats de Eymard, Gallouët et Herbin [57] et de Vohralík [111], l'idée est de construire une solution post-traitée qui préserve exactement les flux diffusifs discrets et dont la valeur moyenne ou la valeur en un point fixe dans chaque maille est fixée par la solution constante par morceaux fournie par le schéma volumes finis. L'intérêt de ce post-traitement est double. En premier lieu, on obtient une solution approchée adaptée à la mesure d'erreur par la norme d'énergie (on rappelle que le gradient sur chaque élément de la solution donnée par la méthode des volumes finis centrés par maille est nul, donc la mesure d'erreur par la norme d'énergie dans ce

cas n'est pas adéquate). D'autre part, le flux diffusif relié à cette construction appartient à l'espace  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ . Cette approche a été également utilisée par Vohralík [113] pour des problèmes de diffusion avec des coefficients de diffusion constants par morceaux sur les éléments du maillage mais discontinus à travers les interfaces entre les éléments. Ces estimations sont obtenues dans la norme d'énergie et dans une norme duale et sont basées sur la reconstruction d'un flux  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conforme.

En ce qui concerne les autres types d'estimations d'erreur *a posteriori*, on cite par exemple, Cochez-Dhondt, Nicaise et Repin [38] qui présentent des estimations d'erreur basées sur des estimations fonctionnelles pour un problème elliptique.

Enfin, dans le cadre de la séparation des différentes composantes de l'erreur, on cite Jiránek, Strakoš et Vohralík [66] qui dérivent des estimations d'erreur *a posteriori* prenant en compte la résolution inexacte du système linéaire associé au problème.

#### 1.4.4 Estimations d'erreur *a posteriori* pour les problèmes instationnaires

Pour les problèmes instationnaires, plusieurs travaux ont été effectués dans le cadre de la méthode des éléments finis conformes. On cite entre autres, Picasso [91], Verfürth [107] et Bergam, Bernardi et Mghazli [24] pour l'équation de la chaleur et Verfürth [108] pour l'équation de convection–diffusion–réaction. Cascón, Ferragut, et Asensio [33] obtiennent une estimation d'erreur *a posteriori* pour l'équation de la chaleur discrétisée par des éléments finis mixtes et Nicaise et Soualem [84] pour la méthode des éléments finis non conformes. Dans le cadre des méthodes de Galerkin discontinues, on cite Sun et Wheeler [99], Ern et Proft [51], Yang et Chen [115], et Chen et Yang [35], qui dérivent des estimations d'erreur *a posteriori* pour le problème de convection–diffusion instationnaire, et Georgoulis, Lakkis, et Virtanen [60] qui présentent une estimation d'erreur *a posteriori* pour un problème de diffusion instationnaire. Houston et Süli [64] dérivent des estimations d'erreur *a posteriori* pour un problème de convection–diffusion instationnaire et la méthode de Lagrange–Galerkin.

En ce qui concerne la méthode des volumes finis, une équivalence avec les méthodes des éléments finis est parfois utilisée pour dériver des estimation d'erreur *a posteriori*. Amara, Nadau et Trujillo [10] présentent une estimation d'erreur *a posteriori* pour l'équation de la chaleur discrétisée par la méthode des volumes finis centrés par maille sur un maillage rectangulaire en utilisant les schémas à 5 ou 9 points. Ces estimations sont établies en utilisant une interprétation du schéma volumes finis en termes d'une méthode d'éléments finis mixtes. L'étude est basée sur les travaux de Bergam, Bernardi et Mghazli [24] où l'erreur est décomposée en erreur temporelle et erreur spatiale et ensuite chacune de ces composantes est bornée par un indicateur. Cette technique de séparation des erreurs est également utilisée par Aboulaich, Achchab et Darouichi [3] qui considèrent un problème de transport unidimensionnel discrétisé par les volumes finis centrés par sommets. Ces estimations d'erreur *a posteriori* sont dérivées pour la norme d'énergie de l'erreur.

On cite également Amaziane, Bergam, El Ossmani et Mghazli [11] qui dérivent des estimations d'erreur *a posteriori* dans la norme d'énergie pour le problème de convection–diffusion–réaction discrétisé en espace par la méthode des volumes finis centrés par sommets. Ces estimations d'erreur ne sont pas garanties.

L'estimation d'erreur *a posteriori* peut borner également l'erreur en norme  $L^1$ . Ohlberger obtient une estimation d'erreur *a posteriori* dans cette norme pour des problèmes non linéaires pour les méthodes des volumes finis centrés par maille et par sommet respectivement dans [86] et [87]. Bürkle et Ohlberger [29] considèrent un problème d'écoulement en milieu poreux discrétisé par les éléments finis mixtes de Raviart–Thomas et la méthode des volumes finis centrés par sommet et présentent une estimation d'erreur *a posteriori* dans la norme  $L^1$  pour la concentration et proposent également un algorithme adaptatif. On cite également Ohlberger et Rohde [88] et Herbin et Ohlberger [61] où une interpolation de la solution donnée par la méthode des volumes finis est utilisée dans la mesure de l'erreur.

Une autre classe d'estimations d'erreur *a posteriori* pour les problèmes paraboliques est basée sur une reconstruction  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conforme des flux de diffusion et de convection. Ce type d'estimations fournit des bornes garanties de l'erreur. Dans cette catégorie, Ern et Vohralík [53] présentent une estimation d'erreur *a posteriori* pour l'équation de la chaleur dans un cadre unifié recouvrant des méthodes non conformes telles que Galerkin discontinu, les volumes finis centrés par maille ou par face, et les éléments finis mixtes, mais également les méthodes conformes et localement conservatives telles que les volumes finis centrés par sommets et sous certaines modifications les éléments finis conformes et non conformes. Suivant l'approche proposée par Verfürth [107], l'erreur est mesurée dans la norme d'énergie augmentée d'une norme duale de la dérivée en temps. Ces estimations d'erreur sont basées sur la reconstruction d'un potentiel  $H_0^1$ -conforme, continu et affine par morceaux en temps, et la reconstruction d'un flux diffusif  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conforme, constant par morceaux en temps. L'idée de la reconstruction du flux a été reprise par Hilhorst et Vohralík [62] pour l'équation de convection–diffusion–réaction instationnaire pour dériver une estimation d'erreur *a posteriori* pour la méthode des volumes finis centrés par sommets. Suite au travail de Ern, Stephansen et Vohralík [52], une reconstruction  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conforme du flux convectif a également été utilisée. L'erreur est mesurée dans la norme d'énergie et dans une norme augmentée d'une norme duale de la dérivée en temps et de la partie antisymétrique de l'opérateur différentiel, et ceci en étendant l'approche introduite par Verfürth [108]. Un algorithme adaptatif a également été proposé, permettant d'obtenir une précision relative donnée tout en équilibrant les erreurs provenant de la discrétisation en espace et en temps.

## 1.5 Plan de la thèse

Dans le chapitre 2, on dérive une estimation d'erreur *a posteriori* garantie (ne contenant pas de constantes inconnues) pour la discrétisation de (1.4)–(1.6) par la méthode des volumes finis en espace et le schéma d'Euler implicite en temps. On

autorise des maillages et des pas de temps variant en temps. L'erreur est mesurée dans la norme d'énergie espace-temps  $\|\cdot\|_X$  définie par (1.18) qui correspond essentiellement à une norme  $L^2$  en temps et  $H^1$  en espace. La borne supérieure est globale en espace et en temps et permet le contrôle effectif de l'erreur globale. Quant aux estimateurs, ils sont locaux en espace et en temps et peuvent être utilisés dans un algorithme adaptatif en espace et en temps. La méthode des volumes finis fournit un ensemble de valeurs discrètes dont l'interprétation la plus simple en termes de fonctions est une fonction constante par morceaux en espace et affine par morceaux en temps. Dans ce manuscrit, cette fonction sera appelée reconstruction canonique de la solution car elle est largement utilisée dans la littérature : c'est la reconstruction en temps naturelle dans le cadre d'un schéma d'Euler implicite. Cependant, la reconstruction en espace n'est pas adéquate pour la mesure d'erreur par la norme d'énergie, car le gradient brisé de cette reconstruction est identiquement nul. Une première étape sera alors de post-traiter de manière différente la solution donnée par la méthode des volumes finis. Ce post-traitement, introduit par Vohralík [112] dans le cas stationnaire, conduit à une solution quadratique par morceaux en espace (et affine par morceaux en temps). On va alors borner, par des estimations d'erreur *a posteriori*, l'erreur entre la solution exacte et la nouvelle solution post-traitée. Cette nouvelle solution est non conforme en espace contrairement à la solution exacte. Par suite, ces estimations d'erreur seront basées sur la définition de deux types de reconstructions. Le premier type est une reconstruction  $H_0^1(\Omega)$ -conforme du potentiel. Cette reconstruction est un polynôme par morceaux en espace qui est continu et affine par morceaux en temps. Le deuxième type de reconstruction consiste en la définition d'un flux de diffusion et d'un flux de convection  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conformes et localement conservatifs. Les reconstructions des flux appartiennent à l'espace de Raviart–Thomas–Nédélec de plus bas degré et sont constantes par morceaux en temps. Ces reconstructions sont supposées vérifier deux hypothèses importantes. La première est reliée à la conservativité locale du schéma à travers la reconstruction des flux diffusif et convectif. La deuxième relie localement les valeurs moyennes de la reconstruction conforme du potentiel à celles de la solution post-traitée.

Dans le chapitre 3, on propose un algorithme adaptatif basé sur les estimations d'erreur *a posteriori* présenté dans le chapitre 2. L'intérêt de cet algorithme est double. D'une part, il permet le contrôle de l'erreur en norme d'énergie par le biais des bornes supérieures calculables explicitement provenant de l'estimation d'erreur *a posteriori*, et ceci en raffinant adaptivement le maillage et le pas de temps de façon à ce que les calculs soient efficaces. D'autre part, il permet d'équilibrer les erreurs provenant de la discrétisation en espace et de la discrétisation en temps, les estimations étant dérivées de telle sorte que les deux composantes, spatiale et temporelle, de l'erreur sont calculées séparément. On présente également deux cas tests illustrant les résultats obtenus sur la borne supérieure. Dans le premier cas test, on considère un problème avec solution analytique. Ce cas test nous permet de comparer l'erreur exacte avec l'erreur estimée. Il permet également la comparaison entre les deux stratégies de raffinement adaptatif et uniforme. Dans le deuxième cas

test, on considère une solution avec une couche intérieure et une couche limite. Ce cas test permet l'étude de la localisation de l'erreur.

Dans le chapitre 4, on dérive une estimation d'erreur *a posteriori* robuste pour la discrétisation du problème de convection–diffusion–réaction (1.4)–(1.6) par des méthodes localement conservatives en espace et le schéma d'Euler implicite en temps. Comme dans le chapitre 2, on autorise des maillages et des pas de temps variant en temps. Suivant l'approche proposée par Verfürth dans le cadre des méthodes d'éléments finis conformes [108], l'erreur est mesurée dans une norme d'énergie (brisée) augmentée par une norme duale de la dérivée en temps et de la partie anti-symétrique de l'opérateur différentiel. Cette norme est donnée par (1.23). La contribution essentielle de ce chapitre est l'obtention d'une borne supérieure pour l'erreur mesurée dans la norme augmentée qui est robuste par rapport à la convection, c'est à dire que l'estimateur fournit également une borne inférieure de l'erreur indépendante de la valeur du nombre de Péclet. L'utilisation d'une norme duale en espace conduit à une borne inférieure locale en temps et globale en espace, alors que la borne supérieure obtenue au Chapitre 2, qui n'était pas robuste par rapport à la convection, était locale en temps et en espace. Les estimations présentées dans ce chapitre sont également basées sur la définition d'une reconstruction  $H_0^1(\Omega)$ -conforme du potentiel, continue et affine par morceaux en temps, et d'une reconstruction localement conservative et  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conforme des flux convectif et diffusif, constante par morceaux en temps. Une propriété importante de cette approche est qu'elle permet une étude dans un cadre unifié : l'étude *a posteriori* est faite sous trois hypothèses précises sur la reconstruction du potentiel et des flux sans se référer à une méthode particulière de discrétisation en espace. Etant donné un schéma particulier, il suffit de vérifier ces trois hypothèses pour pouvoir appliquer l'analyse présentée dans ce chapitre. La première condition exprime la conservativité locale du schéma à travers la reconstruction des flux, la deuxième lie localement les valeurs moyennes de la reconstruction du potentiel à celles de la solution discrète, et la troisième repose sur une propriété d'approximation locale pour les reconstructions des flux.



# Estimation en norme d'énergie

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Cadre discret</b> . . . . .	<b>22</b>
2.1.1	Pas de temps et maillages variant en temps . . . . .	22
2.1.2	Espace de Raviart–Thomas–Nédélec . . . . .	23
2.1.3	Espace de Sobolev $H^1$ brisé, gradient brisé et norme d'énergie brisée . . . . .	25
2.1.4	Notations pour les données . . . . .	26
<b>2.2</b>	<b>Reconstructions pour les schémas volumes finis</b> . . . . .	<b>26</b>
2.2.1	Le schéma volumes finis modifié . . . . .	27
2.2.2	Reconstruction des flux . . . . .	27
2.2.3	Solution post-traitée . . . . .	29
2.2.4	Reconstruction $H_0^1(\Omega)$ -conforme du potentiel . . . . .	30
<b>2.3</b>	<b>Borne supérieure de l'erreur</b> . . . . .	<b>32</b>
2.3.1	Inégalités utiles . . . . .	32
2.3.2	Estimateurs d'erreur . . . . .	33
2.3.3	Résultat principal . . . . .	34
2.3.4	Distinction entre l'erreur en espace et l'erreur en temps . . . . .	39
<b>2.4</b>	<b>Exemples de schémas volumes finis</b> . . . . .	<b>41</b>
2.4.1	Schéma volumes finis à quatre points . . . . .	41
2.4.2	Schéma DDFV . . . . .	43

---

Dans ce chapitre, on dérive une estimation d'erreur *a posteriori* en norme d'énergie pour la méthode des volumes finis. Dans la section 2.1, on présente les différents maillages et pas de temps considérés ainsi que l'espace de Raviart–Thomas–Nédélec, les espaces de Sobolev brisés et la norme d'énergie brisée. Ensuite, on présente dans la section 2.2 les reconstructions  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conformes des flux ainsi que le post-traitement et la reconstruction  $H_0^1(\Omega)$ -conforme du potentiel en suivant les travaux de Vohralík [112], Ern, Stephansen et Vohralík [52] et Ern et Vohralík [53]. La borne supérieure de l'erreur mesurée en norme d'énergie est obtenue dans la section 2.3. Enfin, dans la section 2.4, on étudie plus en détail deux méthodes de volumes finis : le schéma à quatre points, voir par exemple Eymard, Gallouët et Herbin [56], et le schéma DDFV présenté par Domelevo et Omnes [45] et Coudière et Manzini [39].

## 2.1 Cadre discret

Dans cette section, on précise la construction des pas de temps et des maillages, puis on définit les principaux espaces utilisés pour dériver l'estimation d'erreur *a posteriori* dans le cadre de la méthode des volumes finis et, enfin, on présente les principales notations reliées aux données du problème.

### 2.1.1 Pas de temps et maillages variant en temps

On considère une suite strictement croissante de temps discrets notés  $\{t^n\}_{0 \leq n \leq N}$  telle que  $t^0 = 0$  et  $t^N = T$  et on définit, pour tout  $1 \leq n \leq N$ , l'intervalle discret  $I^n := (t^{n-1}, t^n]$  et le pas de temps  $\tau^n := t^n - t^{n-1}$ . En ce qui concerne la discrétisation en espace, on définit un ensemble de maillages  $\{\mathcal{T}^n\}_{0 \leq n \leq N}$  de  $\Omega$  correspondant aux différents pas de temps  $\{t^n\}_{0 \leq n \leq N}$ . Ces maillages sont tels que, pour tout  $0 \leq n \leq N$ ,

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}^n} K. \quad (2.1)$$

Les éléments du maillage sont par convention des fermés et ils sont tels que l'intersection des intérieurs de deux éléments distincts est vide. Pour simplifier, on suppose que les maillages sont triangulaires et conformes (dans le sens où ils ne contiennent pas des "nœuds orphelins"). Ces maillages sont supposés réguliers. Cela signifie que, pour tout  $0 \leq n \leq N$ , si  $h_K$  désigne le diamètre d'un élément  $K \in \mathcal{T}^n$  et  $\rho_K$  désigne le diamètre de la boule inscrite dans  $K$ , alors il existe une constante  $\kappa$  indépendante des maillages  $\{\mathcal{T}^n\}_{0 \leq n \leq N}$  telle que

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \kappa, \quad \forall K \in \mathcal{T}^n. \quad (2.2)$$

Le maillage initial  $\mathcal{T}^0$  désigne le maillage utilisé pour approcher la condition initiale alors que les maillages  $\mathcal{T}^n$ , pour tout  $1 \leq n \leq N$ , désignent les maillages utilisés pour passer du temps  $t^{n-1}$  au temps  $t^n$ . Les temps discrets ainsi que les maillages peuvent être construits à l'aide d'un algorithme adaptatif dans le cadre d'une marche en temps. En particulier, le maillage  $\mathcal{T}^n$  est obtenu à partir du maillage  $\mathcal{T}^{n-1}$  en raffinant certains éléments et en déraffinant d'autres. Un algorithme sera présenté au Chapitre 3. Dans ce chapitre 2, on considère que les maillages et les pas de temps sont donnés. Pour tout  $1 \leq n \leq N$ , on dénote par  $\mathcal{T}^{n-1,n}$  un raffinement commun à  $\mathcal{T}^{n-1}$  et  $\mathcal{T}^n$ . La figure 2.1 illustre les différents maillages dépendant du temps en dimension 1 d'espace.

**Remarque 2.1** (Maillages généraux). *Dans cette thèse, on se restreint au cas des maillages triangulaires et conformes. Le cas des maillages polygonaux et arbitraires a été considéré par Vohralík [112] dans le cadre de la méthode des volumes finis et l'équation de convection–diffusion–réaction stationnaire.*

Pour tout  $0 \leq n \leq N$ , on associe à chaque maillage  $\mathcal{T}^n$  son pas noté

$$h^n := \max_{K \in \mathcal{T}^n} h_K. \quad (2.3)$$

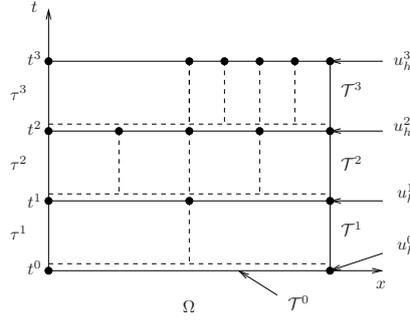


FIGURE 2.1 – Maillages dépendant du temps.

Pour deux éléments  $K$  et  $L \in \mathcal{T}^n$  tels que  $L \neq K$ , mais tels que  $\partial K \cap \partial L$  possède une mesure de Lebesgue non nulle en dimension  $(d - 1)$ , on note l'intersection par

$$\sigma_{K,L} := \partial K \cap \partial L. \quad (2.4)$$

Pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ , on dénote par  $\mathcal{E}_K$  l'ensemble de ses côtés. Ensuite, on dénote par  $\mathcal{E}^n$  l'ensemble de tous les côtés du maillage, par  $\mathcal{E}_{\text{int}}^n$  l'ensemble des côtés situés à l'intérieur de  $\Omega$  et par  $\mathcal{E}_{\text{ext}}^n$  l'ensemble des côtés se trouvant sur la frontière de  $\Omega$ . Pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$  et pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}_K$ , on fixe  $\mathbf{n}_{K,\sigma}$  comme étant le vecteur unitaire normal au côté  $\sigma$  et dirigé vers l'extérieur de  $K$ . Enfin, pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}$ , on fixe une normale unitaire à  $\sigma$  notée  $\mathbf{n}_\sigma$ . Son orientation est arbitraire (mais fixée une fois pour toutes) si  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^n$  et  $\mathbf{n}_\sigma$  est dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$  si  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}^n$ .

Soit  $W$  un espace de fonctions définies sur  $\Omega$ . Alors,  $\mathcal{P}_\tau^1(W)$  dénote l'espace des fonctions  $v : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{R}^d$ ) telles que, pour tout  $t \in [0, T]$ , la fonction  $v(t)$  prend ses valeurs dans  $W$  et est continue et affine par morceaux en temps. Les fonctions dans  $\mathcal{P}_\tau^1(W)$  sont uniquement définies par les  $(N + 1)$  fonctions  $\{v^n := v(t^n)\}_{0 \leq n \leq N}$  dans  $W$ . De même,  $\mathcal{P}_\tau^0(W)$  dénote l'espace des fonctions  $v : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  telles que, pour tout  $t \in (0, T)$ , la fonction  $v(t)$  prend ses valeurs dans  $W$  et est constante par morceaux en temps. Les fonctions dans  $\mathcal{P}_\tau^0(W)$  sont uniquement définies par les  $N$  fonctions  $\{v^n := v(t)|_{I^n}\}_{1 \leq n \leq N}$  dans  $W$ .

Enfin, on observe que si  $v \in \mathcal{P}_\tau^1(W)$ , alors  $\partial_t v \in \mathcal{P}_\tau^0(W)$  est tel que, pour tout  $1 \leq n \leq N$ ,

$$\partial_t^n v := \partial_t v|_{I^n} = \frac{1}{\tau^n} (v^n - v^{n-1}). \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Espace de Raviart–Thomas–Nédélec

La motivation de cet espace est qu'il s'agit de l'espace fonctionnel naturel où l'on reconstruit les flux diffusif et convectif dans les méthodes de volumes finis. Pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ , on pose  $\mathbf{RTN}^0(K) := [\mathbb{P}_0(K)]^d + \mathbf{x}\mathbb{P}_0(K)$ . Il s'agit de l'espace de Raviart–Thomas–Nédélec de plus bas degré, local sur  $K$ . Une fonction  $\mathbf{v} \in \mathbf{RTN}^0(K)$  s'écrit

sous la forme suivante en un point  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in K$  :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (a_K + d_K x, b_K + d_K y), \quad \text{pour } d = 2, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (a_K + d_K x, b_K + d_K y, c_K + d_K z), \quad \text{pour } d = 3. \quad (2.7)$$

L'espace  $\mathbf{RTN}_{-1}^0(\mathcal{T}^n)$  est alors donné par

$$\mathbf{RTN}_{-1}^0(\mathcal{T}^n) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \mathbf{v}|_K \in \mathbf{RTN}^0(K), \forall K \in \mathcal{T}^n\}. \quad (2.8)$$

L'espace de Raviart–Thomas–Nédélec de plus bas degré  $\mathbf{RTN}^0(\mathcal{T}^n)$  est le sous-espace de  $\mathbf{RTN}_{-1}^0(\mathcal{T}^n)$  où on impose la continuité de la composante normale à travers tous les côtés  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^n$ . Ceci permet d'assurer la conformité de  $\mathbf{RTN}^0(\mathcal{T}^n)$  dans  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ . On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{RTN}^0(\mathcal{T}^n) &:= \mathbf{RTN}_{-1}^0(\mathcal{T}^n) \cap \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \\ &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega); \mathbf{v}|_K \in \mathbf{RTN}^0(K), \forall K \in \mathcal{T}^n\}. \end{aligned}$$

Pour l'espace  $\mathbf{RTN}^0(\mathcal{T}^n)$ , il existe une unique fonction de base notée  $\mathbf{v}_\sigma$  associée à chaque côté  $\sigma \in \mathcal{E}^n$  telle que  $\int_\sigma \mathbf{v}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma = 1$ . Plus précisément, pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^n$  avec  $\sigma = \partial K \cap \partial L$ , cette fonction (voir figure 2.2) prend la forme suivante ( $\mathbf{n}_\sigma$  est ici orientée de  $K$  vers  $L$ ) :

$$\mathbf{v}_\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{d|K|}(\mathbf{x} - \mathbf{V}_K) \quad \text{si } \mathbf{x} \in K, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{v}_\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{d|L|}(\mathbf{V}_L - \mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in L, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{v}_\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{sinon.} \quad (2.11)$$

Ici  $\mathbf{V}_K$  désigne le sommet de  $K$  opposé au côté  $\sigma$  et  $\mathbf{V}_L$  désigne le sommet de  $L$  opposé au côté  $\sigma$ . Pour un côté  $\sigma$  inclus dans la frontière, i.e.  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}^n$ , le support de  $\mathbf{v}_\sigma$  consiste en l'unique élément  $K \in \mathcal{T}^n$  tel que  $\sigma = \partial K \cap \partial\Omega$  et on a

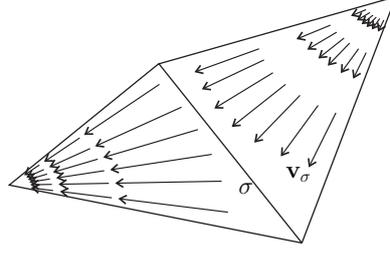
$$\mathbf{v}_\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{d|K|}(\mathbf{x} - \mathbf{V}_K) \quad \text{si } \mathbf{x} \in K, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{v}_\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{sinon.} \quad (2.13)$$

Les degrés de liberté de l'espace  $\mathbf{RTN}^0(\mathcal{T}^n)$  sont les flux de la composante normale à travers les côtés du maillage : une fonction  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{RTN}^0(\mathcal{T}^n)$  est uniquement déterminée par les quantités suivantes :

$$\langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_\sigma, 1 \rangle_\sigma, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}^n. \quad (2.14)$$

Pour plus de détails sur les espaces de Raviart–Thomas–Nédélec, on réfère à Brezzi et Fortin [28].

FIGURE 2.2 – Fonction  $\mathbf{v}_\sigma$  sur deux éléments voisins.

### 2.1.3 Espace de Sobolev $H^1$ brisé, gradient brisé et norme d'énergie brisée

Les espaces de Sobolev brisés sont des espaces naturels pour travailler avec la méthode des volumes finis et plus généralement, avec les méthodes où le potentiel n'est pas traité comme une fonction conforme en espace. Pour tout  $0 \leq n \leq N$ , l'espace de Sobolev  $H^1$  brisé associé au maillage  $\mathcal{T}^n$  est noté  $H^1(\mathcal{T}^n)$  et est défini par

$$H^1(\mathcal{T}^n) := \{\varphi \in L^2(\Omega); \varphi|_K \in H^1(K) \forall K \in \mathcal{T}^n\}. \quad (2.15)$$

Clairement, on a l'inclusion

$$H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathcal{T}^n). \quad (2.16)$$

Pour tout  $0 \leq n \leq N$ , on introduit l'opérateur de gradient brisé  $\nabla^n$  défini pour toute fonction  $w \in H^1(\mathcal{T}^n)$  par

$$(\nabla^n w)|_K := \nabla(w|_K), \quad \forall K \in \mathcal{T}^n. \quad (2.17)$$

On a

$$\nabla^n w \in \mathbf{L}^2(\Omega). \quad (2.18)$$

Pour tout  $1 \leq n \leq N$ , l'opérateur de gradient brisé  $\nabla^{n-1,n}$  sur le maillage  $\mathcal{T}^{n-1,n}$  est défini d'une façon similaire pour toute fonction  $w \in H^1(\mathcal{T}^{n-1,n})$ .

La notation  $v \in L^2(0, T; H^1(\mathcal{T}))$  signifie que, pour tout  $1 \leq n \leq N$ ,  $v|_{I^n} \in L^2(t^{n-1}, t^n; H^1(\mathcal{T}^{n-1,n}))$ . La norme d'énergie espace-temps brisée pour une fonction  $v \in L^2(0, T; H^1(\mathcal{T}))$  est définie par

$$\|v\|_{\tau, X}^2 := \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^{n-1,n}} \|v(t)\|_K^2 dt, \quad (2.19)$$

où, pour tout  $w \in H^1(\mathcal{T}^{n-1,n})$  et pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ ,

$$\|w\|_K^2 := \sum_{K' \in \mathcal{T}^{n-1,n}; K' \subset K} \|\mathbf{S}^{1/2} \nabla w\|_{K'}^2 + \|(\frac{1}{2} \nabla \cdot \boldsymbol{\beta} + r)^{1/2} w\|_{K'}^2. \quad (2.20)$$

En particulier, si  $w \in H^1(\mathcal{T}^n)$ , on a

$$\|w\|_K^2 = \|\mathbf{S}^{1/2} \nabla w\|_K^2 + \|(\frac{1}{2} \nabla \cdot \boldsymbol{\beta} + r)^{1/2} w\|_K^2. \quad (2.21)$$

On remarque que, lorsque  $v \in X$ , on a

$$\|v\|_{\tau, X} = \|v\|_X. \quad (2.22)$$

#### 2.1.4 Notations pour les données

On précise les principales notations reliées aux données du problème : Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$  et pour tout  $D \subset \Omega$ , on pose

(N1)

$$c_{\mathbf{S}, D}^n := \inf_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \inf_{(\mathbf{x}, t) \in D \times (t^{n-1}, t^n]} \frac{\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}, \quad (2.23)$$

$$C_{\mathbf{S}, D}^n := \sup_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \sup_{(\mathbf{x}, t) \in D \times (t^{n-1}, t^n]} \frac{\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}; \quad (2.24)$$

(N2)

$$C_{\beta, D}^n := \sup_{(\mathbf{x}, t) \in D \times (t^{n-1}, t^n]} |\beta(\mathbf{x}, t)|; \quad (2.25)$$

(N3)

$$C_{r, D}^n := \sup_{(\mathbf{x}, t) \in D \times (t^{n-1}, t^n]} |r(\mathbf{x}, t)|; \quad (2.26)$$

(N4)

$$c_{\beta, r, D}^n := \inf_{(\mathbf{x}, t) \in D \times (t^{n-1}, t^n]} \left\{ \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta(\mathbf{x}, t) + r(\mathbf{x}, t) \right\}. \quad (2.27)$$

**Remarque 2.2** (Signe de  $c_{\beta, r, D}^n$ ). *On rappelle que, par l'hypothèse (A4),*

$$c_{\beta, r, D}^n \geq 0. \quad (2.28)$$

## 2.2 Reconstructions pour les schémas volumes finis

Dans cette section, on présente une modification du schéma volumes finis proposé dans la section 1.3 pour la discrétisation en espace du problème de convection–diffusion–réaction instationnaire (1.4)–(1.6); la discrétisation en temps étant réalisée par le schéma d'Euler implicite. La forme précise du schéma volumes finis n'est pas nécessaire pour l'étude de l'estimation d'erreur *a posteriori*. Des exemples de schémas sont donnés dans la section 2.4. On définit également les reconstructions  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conformes des flux de convection et de diffusion. Ensuite, on définit une solution post-traitée qui servira plus tard comme la base de notre estimation d'erreur *a posteriori*. Finalement, on présente la reconstruction  $H_0^1(\Omega)$ -conforme du potentiel.

### 2.2.1 Le schéma volumes finis modifié

Le nouveau schéma s'écrit sous la forme suivante : pour tout  $1 \leq n \leq N$ , chercher  $\bar{u}_h^n$ , constante par morceaux en espace, vérifiant

$$\frac{1}{\tau^n} (\bar{u}_h^n - u_h^{n-1}, 1)_K + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} S_{K,\sigma}^n + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} W_{K,\sigma}^n + r_K^n (\bar{u}_h^n, 1)_K = f_K^n |K| \quad \forall K \in \mathcal{T}^n. \quad (2.29)$$

La modification consiste à utiliser la fonction post-traitée  $u_h^{n-1}$  sur le pas de temps précédent. Cette fonction post-traitée appartient à un espace de fonctions quadratiques par morceaux sur le maillage  $\mathcal{T}^{n-1}$ , noté  $V_h^{n-1}$ . La fonction  $u_h^{n-1}$  et l'espace  $V_h^{n-1}$  sont définis plus précisément dans la section 2.2.3. Pour la condition initiale, on pose

$$u_h^0 := \Pi_{V_h^0} u_0, \quad (2.30)$$

où  $\Pi_{V_h^0} u_0$  est la projection  $L^2$ -orthogonale de  $u_0$  sur  $V_h^0$ . En outre, pour tout  $1 \leq n \leq N$ , la fonction  $u_h^n$  a la même moyenne que  $\bar{u}_h^n$  sur chaque élément  $K$  du maillage  $\mathcal{T}^n$ . Elle vérifie donc l'égalité suivante

$$(u_h^n, 1)_K = (\bar{u}_h^n, 1)_K \quad \forall K \in \mathcal{T}^n, \quad (2.31)$$

Ainsi, les deux schémas (1.35) et (2.29) coïncident lorsque les deux maillages  $\mathcal{T}^{n-1}$  et  $\mathcal{T}^n$  sont les mêmes. Cependant, comme  $u_h^{n-1}$  est une sorte de régularisation de la fonction constante par morceaux  $\bar{u}_h^{n-1}$ , il est raisonnable de l'utiliser sur le maillage  $\mathcal{T}^n$  lorsque celui-ci est différent de  $\mathcal{T}^{n-1}$ .

Pour nos estimations d'erreur *a posteriori*, nous n'avons pas besoin de la forme spécifique des flux diffusif et convectif mais uniquement de leur continuité à travers les côtés internes (propriété de conservativité),

$$S_{K,\sigma_{K,L}}^n = -S_{L,\sigma_{K,L}}^n, \quad (2.32)$$

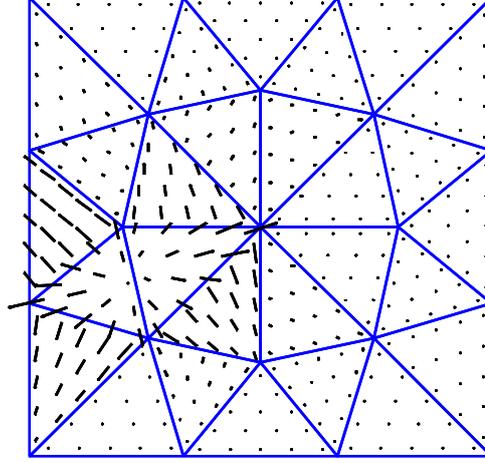
$$W_{K,\sigma_{K,L}}^n = -W_{L,\sigma_{K,L}}^n, \quad (2.33)$$

pour tout côté interne  $\sigma_{K,L} = \partial K \cap \partial L$ .

### 2.2.2 Reconstruction des flux

L'idée d'utiliser une reconstruction  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conforme des flux dans les estimations d'erreur *a posteriori* remonte aux années 40 avec le travail de Prager et Synge [92]. Des estimations de ce type peuvent être trouvées, par exemple, dans les travaux de Ladevèze [71], Ladevèze et Leguillon [73], Hlaváček, Haslinger, Nečas et Lovíšek [63], Repin [95], Destuynder et Métivet [44], Luce et Wohlmuth [78], Ainsworth [8], Vejchodský [102], Korotov [69], Braess et Schöberl [27], Ern, Stephansen et Vohralík [52], et Ern et Vohralík [53].

Comme dans Ern, Stephansen et Vohralík [52] pour le cas stationnaire, on reconstruit sur chaque intervalle de temps  $I^n$ , pour tout  $1 \leq n \leq N$ , un flux de diffusion approché qu'on note  $\theta_h^n$  et un flux de convection approché qu'on note

FIGURE 2.3 – Exemple de flux reconstruit dans  $\mathbf{RTN}^0(\mathcal{T}^n)$ .

$\psi_h^n$ , tous les deux appartenant à l'espace  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ . Plus précisément, ces flux reconstruits appartiennent à l'espace de Raviart–Thomas–Nédélec  $\mathbf{RTN}^0(\mathcal{T}^n)$ . Pour définir ces flux, on impose que la valeur moyenne de la composante normale du flux diffusif (resp. convectif) reconstruit sur un côté  $\sigma$  d'un élément  $K$  soit égale au flux diffusif (resp. convectif) du schéma volumes finis à travers ce côté  $\sigma$ . Ceci se traduit par les équations suivantes : Pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$  et pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}_K$ ,

$$\langle \boldsymbol{\theta}_h^n \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}, 1 \rangle_\sigma = S_{K,\sigma}^n, \quad (2.34)$$

$$\langle \boldsymbol{\psi}_h^n \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}, 1 \rangle_\sigma = W_{K,\sigma}^n. \quad (2.35)$$

Les fonctions  $\boldsymbol{\theta}_h^n$  et  $\boldsymbol{\psi}_h^n$  sont bien dans  $\mathbf{RTN}^0(\mathcal{T}^n)$  grâce à la continuité des flux donnée par (2.32)–(2.33). La figure 2.3 présente un exemple de reconstruction de flux dans l'espace de Raviart–Thomas–Nédélec  $\mathbf{RTN}^0(\mathcal{T}^n)$ .

On définit le flux diffusif global en temps  $\boldsymbol{\theta}_{h,\tau}$  et le flux convectif global en temps  $\boldsymbol{\psi}_{h,\tau}$  dans  $\mathcal{P}_\tau^0(\mathbf{H}(\text{div}, \Omega))$  par

$$\boldsymbol{\theta}_{h,\tau}|_{I^n} := \boldsymbol{\theta}_h^n, \quad (2.36)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{h,\tau}|_{I^n} := \boldsymbol{\psi}_h^n, \quad (2.37)$$

pour tout  $1 \leq n \leq N$ .

Les flux diffusif  $\boldsymbol{\theta}_{h,\tau}$  et convectif  $\boldsymbol{\psi}_{h,\tau}$  étant définis en fonction des flux numériques de diffusion et de convection, ils vérifient, d'après la forme générale du schéma volumes finis, la propriété de conservativité suivante : Pour tout  $1 \leq n \leq N$ ,

$$(\tilde{f}^n - \frac{1}{\tau^n}(\bar{u}_h^n - u_h^{n-1}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - r_K^n \bar{u}_h^n, 1)_K = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}^n, \quad (2.38)$$

où

$$\tilde{f}^n := \frac{1}{\tau^n} \int_{I^n} f(\cdot, t) dt. \quad (2.39)$$

Il est commode d'introduire  $\tilde{f} \in \mathcal{P}_\tau^0(L^2(\Omega))$  tel que  $\tilde{f}|_{I^n} := \tilde{f}^n$  pour tout  $1 \leq n \leq N$ .

**Remarque 2.3** (Coût de la reconstruction). *On note que la reconstruction proposée des flux est locale sur chaque élément. On construit le polynôme de Raviart–Thomas–Nédélec sur chaque  $K \in \mathcal{T}^n$  à partir des degrés de liberté donnés par les flux du schéma volumes finis. Le coût de ce calcul est donc négligeable devant le coût de chaque pas de temps qui nécessite une résolution globale.*

**Remarque 2.4** (Distinction entre diffusion et convection). *Ces reconstructions des flux diffusif et convectif sont définies séparément pour plus de clarté. Toutefois, seule leur somme, qui est une reconstruction du flux diffusif–convectif, est utilisée dans nos estimations d'erreur a posteriori.*

### 2.2.3 Solution post-traitée

La solution donnée par la méthode des volumes finis centrés par mailles  $\bar{u}_h^n$  est constante par morceaux en espace. Or, notre objectif est de dériver une estimation d'erreur *a posteriori* dans la norme d'énergie de l'erreur. On ne peut donc pas utiliser cette solution dans notre estimation d'erreur car son gradient brisé est nul.

En utilisant la technique présentée par Vohralík dans [112], on introduit, pour tout  $1 \leq n \leq N$ , une approximation quadratique par morceaux  $u_h^n$  vérifiant pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ ,

$$-\mathbf{S}\nabla u_h^n|_K = \boldsymbol{\theta}_h^n|_K, \quad (2.40)$$

$$(u_h^n, 1)_K = (\bar{u}_h^n, 1)_K. \quad (2.41)$$

Soit  $\mathbb{P}_1(\mathcal{T}^n)$  l'espace des fonctions polynômiales de degré 1 sur chaque élément du maillage  $\mathcal{T}^n$ . Quand  $\mathbf{S} = s\mathbf{Id}$ ,  $u_h^n$  appartient à l'espace  $\mathbb{P}_{1,2}(\mathcal{T}^n)$  qui est l'espace  $\mathbb{P}_1(\mathcal{T}^n)$  enrichi, élément par élément, par la fonction  $\sum_{i=1}^d x_i^2$ . Ainsi,

$$u_h^n|_K = a_K^n(x^2 + y^2) + b_K^n x + c_K^n y + d_K^n \quad \text{pour } d = 2, \quad (2.42)$$

$$u_h^n|_K = a_K^n(x^2 + y^2 + z^2) + b_K^n x + c_K^n y + d_K^n z + e_K^n \quad \text{pour } d = 3. \quad (2.43)$$

Quand  $\mathbf{S} \neq s\mathbf{Id}$ ,  $u_h^n$  vérifiant (2.40) et (2.41) est un polynôme complet du second ordre sur chaque élément  $K \in \mathcal{T}^n$  (la symétrie de  $\mathbf{S}$  est importante dans ce cas), cf. Vohralík [112].

On définit  $V_h^n$  comme l'espace des fonctions quadratiques par morceaux résultant du post-traitement (2.40)–(2.41). On note également que ce post-traitement est local si bien que son coût de calcul est négligeable. La figure 2.4 représente une solution constante par mailles donnée par la méthode des volumes finis (à gauche) et la nouvelle solution post-traitée (à droite).

Enfin, on définit la solution post-traitée globale en temps  $u_{h,\tau}$  donnée par les  $(N+1)$  valeurs  $u_h^n$  en chaque temps discret  $t^n$ , pour tout  $0 \leq n \leq N$ . Cette fonction  $u_{h,\tau} : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que, pour tout  $1 \leq n \leq N$  et pour tout  $t \in I^n$ ,

$$u_{h,\tau}(t) := (1 - \rho(t))u_h^{n-1} + \rho(t)u_h^n, \quad \rho(t) = \frac{1}{\tau^n}(t - t^{n-1}). \quad (2.44)$$

On utilise la notation  $u_{h,\tau} \in \mathcal{P}_\tau^1(H^1(\mathcal{T}))$ .

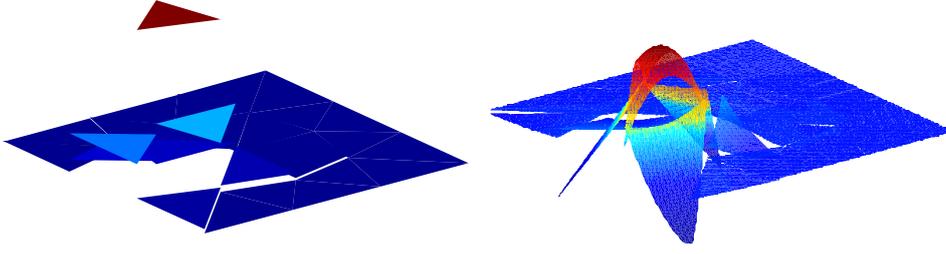


FIGURE 2.4 – Solution constante par morceaux  $\bar{u}_h^n$  (à gauche) et solution post-traitée  $u_h^n$  (à droite)

### 2.2.4 Reconstruction $H_0^1(\Omega)$ -conforme du potentiel

Pour tout  $0 \leq n \leq N$ , on remarque que la solution post-traitée  $u_h^n$  est non conforme :  $u_h^n \in H^1(\mathcal{T}^n)$ , mais en général  $u_h^n \notin H_0^1(\Omega)$ . Dans nos estimations d'erreur *a posteriori*, on va utiliser une reconstruction  $H_0^1(\Omega)$ -conforme basée sur un opérateur d'interpolation par moyenne sur les nœuds du maillage

$$\mathcal{I}_{\text{av}}^n : \mathbb{P}_m(\mathcal{T}^n) \rightarrow \mathbb{P}_m(\mathcal{T}^n) \cap H_0^1(\Omega), \quad (2.45)$$

où  $\mathbb{P}_m(\mathcal{T}^n)$  est l'ensemble des polynômes par morceaux sur le maillage  $\mathcal{T}^n$ , de degré inférieur ou égal à  $m$ . Cet opérateur a été analysé par Achdou, Bernardi et Coquel [4], Karakashian et Pascal [68] et Burman et Ern [30]. Il associe à une fonction  $\varphi_h^n \in \mathbb{P}_m(\mathcal{T}^n)$  discontinue polynomiale par morceaux de degré inférieur ou égal à  $m$  son interpolé  $H_0^1(\Omega)$ -conforme  $\mathcal{I}_{\text{av}}^n(\varphi_h^n)$  (continu dans  $\Omega$  et nul au bord). Il est défini comme suit : pour toute fonction  $\varphi_h^n \in H^1(\mathcal{T}^n)$ ,  $\mathcal{I}_{\text{av}}^n(\varphi_h^n)$  est un polynôme par morceaux de degré inférieur ou égal à  $m$  sur le maillage  $\mathcal{T}^n$ , qui est globalement continu sur  $\Omega$  et nul au bord. La fonction  $\mathcal{I}_{\text{av}}^n(\varphi_h^n)$  est spécifiée par ses valeurs aux points d'interpolation (de Lagrange) d'ordre  $m$  dans les triangles (ou tétraèdres) du maillage  $\mathcal{T}^n$ . Pour un nœud  $\mathbf{V}$  se trouvant à l'intérieur de  $\Omega$ , les valeurs moyennes de  $\varphi_h^n$  en ce point sont prescrites selon

$$\mathcal{I}_{\text{av}}^n(\varphi_h^n)(\mathbf{V}) = \frac{1}{|\mathcal{T}_{\mathbf{V}}^n|} \sum_{K \in \mathcal{T}_{\mathbf{V}}^n} \varphi_h^n|_K(\mathbf{V}), \quad (2.46)$$

où  $\mathcal{T}_{\mathbf{V}}^n := \{K \in \mathcal{T}^n; \mathbf{V} \in K\}$  et  $|\mathcal{T}_{\mathbf{V}}^n|$  dénote le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{T}_{\mathbf{V}}^n$ . Pour un nœud  $\mathbf{V}$  se trouvant sur la frontière de  $\Omega$ , on pose

$$\mathcal{I}_{\text{av}}^n(\varphi_h^n)(\mathbf{V}) = 0. \quad (2.47)$$

On remarque que  $\mathcal{I}_{\text{av}}^n(\varphi_h^n)(\mathbf{V}) = \varphi_h^n|_K(\mathbf{V})$  pour un nœud  $\mathbf{V}$  se trouvant à l'intérieur d'un élément  $K$ .

Nous suivons les travaux de Ern et Vohralík [53] où la reconstruction du potentiel utilise cet opérateur plus une certaine correction par des fonctions bulles dont le but est de relier, sur chaque élément du maillage  $\mathcal{T}^n$ , la moyenne de la dérivée temporelle

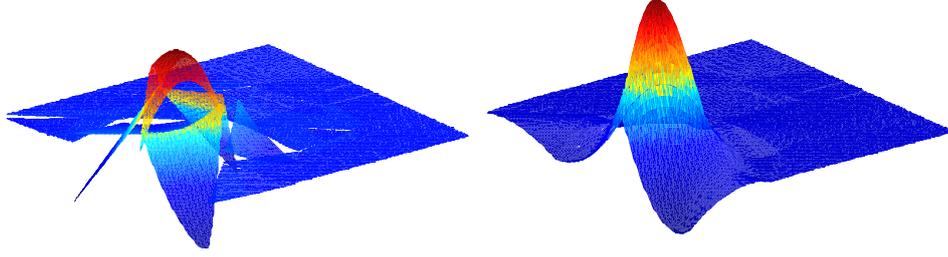


FIGURE 2.5 – Solution post-traitée  $u_h^n$  (à gauche) et reconstruction  $H_0^1(\Omega)$ -conforme  $s_h^n$  (à droite)

de la solution post-traitée et celle de sa reconstruction  $H_0^1(\Omega)$ -conforme. On dénote par  $s_h^n$  la reconstruction de la solution post-traitée  $u_h^n$  pour tout  $0 \leq n \leq N$ . Cette reconstruction est basée sur l'opérateur d'interpolation  $\mathcal{I}_{\text{av}}^n$  mais elle est supposée satisfaire une hypothèse supplémentaire importante permettant de relier les valeurs moyennes de la reconstruction  $s_h^n$  à celles de la solution post-traitée  $u_h^n$  sur chaque élément du maillage commun  $\mathcal{T}^{n,n+1}$ . En particulier, on suppose que, pour tout  $0 \leq n \leq N$ ,

$$(s_h^n, 1)_K = (u_h^n, 1)_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}^{n,n+1}, \quad (2.48)$$

avec la convention  $\mathcal{T}^{N,N+1} := \mathcal{T}^N$ .

Pour obtenir la propriété (2.48), des fonctions bulles sont ajoutées à l'interpolé  $\mathcal{I}_{\text{av}}^n(u_h^n)$ . Pour tout  $K' \in \mathcal{T}^{n,n+1}$ , soit  $b_{K'}$  la fonction bulle standard (indépendante du temps) dont le support est  $K'$ . Cette fonction est définie comme le produit des coordonnées barycentriques de  $K'$ , et normalisée de sorte que sa valeur maximale soit égale à 1. On pose

$$s_h^n := \mathcal{I}_{\text{av}}^n(u_h^n) + \sum_{K' \in \mathcal{T}^{n,n+1}} \alpha_{K'}^n b_{K'}. \quad (2.49)$$

Pour tout  $0 \leq n \leq N$  et pour tout  $K' \in \mathcal{T}^{n,n+1}$ , les coefficients  $\alpha_{K'}^n$  sont déterminés comme suit :

$$\alpha_{K'}^n := \frac{1}{(b_{K'}, 1)_{K'}} (u_h^n - \mathcal{I}_{\text{av}}^n(u_h^n), 1)_{K'}. \quad (2.50)$$

Cette définition de  $\alpha_{K'}^n$  permet d'obtenir la propriété (2.48). La figure 2.5 représente une solution post-traitée  $u_h^n$  (à gauche) et sa reconstruction  $H_0^1(\Omega)$ -conforme  $s_h^n$  (à droite).

On définit la reconstruction du potentiel globale en temps  $s_{h,\tau}$  comme étant la fonction continue et affine par morceaux en temps et spécifiée par les  $(N+1)$  valeurs  $s_h^n$  aux temps discrets  $t^n$ , pour tout  $0 \leq n \leq N$ . On a donc

$$s_{h,\tau} \in \mathcal{P}_\tau^1(H_0^1(\Omega)). \quad (2.51)$$

En effet, pour tout  $0 \leq n \leq N$ ,  $\mathcal{I}_{\text{av}}^n(u_h^n) \in H_0^1(\Omega)$  et la partie contenant les fonctions bulles appartient également à  $H_0^1(\Omega)$ . On obtient alors que  $s_h^n \in H_0^1(\Omega)$  pour tout  $0 \leq n \leq N$ .

Une conséquence importante de (2.48) est le résultat suivant :

**Lemme 2.1.** *On suppose que  $s_{h,\tau}$  vérifie (2.48) et (2.51). Alors, pour tout  $1 \leq n \leq N$ , on a*

$$(\partial_t^n s_{h,\tau}, 1)_K = (\partial_t^n u_{h,\tau}, 1)_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}^n. \quad (2.52)$$

*Démonstration.* On observe que, pour tout  $1 \leq n \leq N$ ,

$$\partial_t^n (s_{h,\tau} - u_{h,\tau}) = \frac{1}{\tau^n} [(s_h^n - u_h^n) - (s_h^{n-1} - u_h^{n-1})].$$

Par (2.48),  $s_h^n$  et  $u_h^n$  possèdent les mêmes valeurs moyennes sur tous les éléments de  $\mathcal{T}^n$  et  $\mathcal{T}^{n+1}$ . De même,  $s_h^{n-1}$  et  $u_h^{n-1}$  possèdent les mêmes valeurs moyennes sur tous les éléments de  $\mathcal{T}^n$  et  $\mathcal{T}^{n-1}$ . Par conséquent,  $(s_h^n - s_h^{n-1})$  et  $(u_h^n - u_h^{n-1})$  possèdent les mêmes valeurs moyennes sur tous les éléments de  $\mathcal{T}^n$ . D'où (2.52).  $\square$

**Remarque 2.5** (Evaluation de  $s_h^n$ ). *La condition (2.48) utilise le maillage  $\mathcal{T}^{n+1}$  qui n'est pas encore connu au temps discret  $t^n$ . En pratique, il suffit d'ajuster les moyennes de  $s_h^n$  uniquement sur les éléments du maillage actuel  $\mathcal{T}^n$  (en posant temporairement  $\mathcal{T}^{n+1} := \mathcal{T}^n$ ). Ensuite, au pas de temps suivant  $t^{n+1}$ , et uniquement s'il existe des éléments de  $\mathcal{T}^{n+1}$  qui sont des raffinements des éléments de  $\mathcal{T}^n$ , des fonctions bulles supplémentaires sont ajoutées à  $s_h^n$ , comme stipulé par (2.49) et (2.50).*

## 2.3 Borne supérieure de l'erreur

Le but de cette section est de dériver une estimation d'erreur *a posteriori* pour la discrétisation du problème (1.4)–(1.6) avec la méthode de volumes finis en espace donnée par le schéma (2.29). Notre estimation borne l'erreur calculée en norme d'énergie brisée entre la solution exacte  $u$  et la solution post-traitée  $u_{h,\tau}$ . Cette estimation d'erreur est formulée en termes des reconstructions du potentiel  $s_{h,\tau}$ , du flux diffusif  $\theta_{h,\tau}$  et du flux convectif  $\psi_{h,\tau}$ .

### 2.3.1 Inégalités utiles

On commence par rappeler quelques inégalités qu'on va utiliser par la suite. Soit  $K \subset \mathbb{R}^d$  un polygone. L'inégalité de Poincaré fournit l'estimation

$$\|\varphi - \varphi_K\|_K \leq C_{P,K} h_K \|\nabla \varphi\|_K, \quad \forall \varphi \in H^1(K), \quad (2.53)$$

où

$$\varphi_K := \frac{(\varphi, 1)_K}{|K|} \quad (2.54)$$

est la moyenne de la fonction  $\varphi$  sur le polygone  $K$ . La constante  $C_{P,K}$  peut être évaluée par  $1/\pi$  lorsque  $K$  est convexe, cf. Payne et Weinberger [90] et Bebendorf [23].

Soit  $K \subset \mathbb{R}^d$  un polygone, tel que  $|\partial\Omega \cap \partial K| \neq 0$ . Alors, on a l'inégalité de Friedrichs suivante, cf. Vohralík [110, Remarque 5.9],

$$\|\varphi\|_K \leq C_{F,K,\Omega} h_K \|\nabla\varphi\|_K, \quad \forall \varphi \in H^1(K) \text{ telle que } \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial K. \quad (2.55)$$

Lorsque  $K$  et  $\partial\Omega$  sont tels qu'il existe un vecteur  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$  tel que, pour presque tout  $\mathbf{x} \in K$ , la première intersection de  $\mathcal{B}_{\mathbf{x}}$  et  $\partial K$  appartient à  $\partial\Omega$ , où  $\mathcal{B}_{\mathbf{x}}$  est la demi-droite définie par son origine  $\mathbf{x}$  et le vecteur  $\mathbf{b}$ , la constante  $C_{F,K,\Omega}$  peut être évaluée par 1, cf. Vohralík [110, Remarque 5.8]. L'évaluation de  $C_{F,K,\Omega}$  dans le cas général est plus compliquée mais reste possible, cf. Vohralík [110, Remarque 5.9] ou Carstensen et Funken [31, Section 3]. En particulier, quand  $K = \Omega$ , l'inégalité de Friedrichs s'écrit

$$\|\varphi\| \leq C_{F,\Omega} h_\Omega \|\nabla\varphi\|, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad (2.56)$$

avec  $C_{F,\Omega} = 1$ .

**Lemme 2.2 (Inégalité de Poincaré en norme triple).** *Soient  $1 \leq n \leq N$ ,  $K \in \mathcal{T}^n$  et  $\varphi \in H^1(K)$ . Soit  $\varphi_K$  la moyenne de  $\varphi$  sur  $K$  donnée par (2.54). Alors,*

$$\|\varphi - \varphi_K\| \leq m_K^n \|\varphi\|_K, \quad (2.57)$$

où

$$m_K^n := \min\{C_{P,K} h_K (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-\frac{1}{2}}, (c_{\beta,r,K}^n)^{-\frac{1}{2}}\}. \quad (2.58)$$

Ici,  $C_{P,K}$  est la constante de Poincaré de l'inégalité (2.53), tandis que  $c_{\mathbf{S},K}^n$  et  $c_{\beta,r,K}^n$  sont définis par (2.23) et (2.27).

*Démonstration.* On présente la preuve donnée par Vohralík [112]. L'inégalité de Poincaré (2.53) et la définition de la norme d'énergie spatiale (2.21) impliquent

$$\|\varphi - \varphi_K\|_K \leq C_{P,K} h_K \|\nabla\varphi\|_K \leq C_{P,K} h_K (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_K.$$

De plus, l'estimation

$$\|\varphi - \varphi_K\|_K \leq \|\varphi\|_K \leq (c_{\beta,r,K}^n)^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_K$$

provient du fait que  $\varphi_K$  est la projection  $L^2(K)$ -orthogonale de  $\varphi$  sur l'espace des fonctions constantes sur  $K$  et de la définition (2.21) de la norme d'énergie spatiale.  $\square$

### 2.3.2 Estimateurs d'erreur

Soit  $1 \leq n \leq N$ ,  $t \in I^n$  et  $K \in \mathcal{T}^n$ . On rappelle que  $\tilde{f}^n$  est donnée par (2.39). On définit l'estimateur résiduel par

$$\eta_{R,K}^n := m_K^n \|\tilde{f}^n - \partial_t^n s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - r_K^n s_h^n\|_K, \quad (2.59)$$

l'estimateur des flux de convection et de diffusion par

$$\eta_{F,K}^n(t) := \|\mathbf{S}^{\frac{1}{2}} \nabla s_{h,\tau}(t) + \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\theta}_h^n - \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\beta} s_{h,\tau}(t) + \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\psi}_h^n\|_K, \quad (2.60)$$

et l'estimateur de non conformité par

$$\eta_{\text{NC},K}^n(t) := \|u_{h,\tau}(t) - s_{h,\tau}(t)\|_K. \quad (2.61)$$

Soit

$$\bar{m}^n := \min\{C_{\text{F},\Omega} h_{\Omega} (c_{\text{S},\Omega}^n)^{-\frac{1}{2}}, (c_{\beta,r,\Omega}^n)^{-\frac{1}{2}}\}, \quad (2.62)$$

où  $C_{\text{F},\Omega}$  est la constante de Friedrichs de l'inégalité (2.56) et  $c_{\text{S},\Omega}^n$  et  $c_{\beta,r,\Omega}^n$  sont définies par (2.23) et (2.27) respectivement. On introduit également la fonction  $\bar{r}_h^n$ , constante par morceaux en espace et en temps, définie de la manière suivante : Pour tout  $0 \leq n \leq N$  et pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ ,

$$\bar{r}_h^n|_K := r_K^n. \quad (2.63)$$

L'estimateur de quadrature est défini par

$$\eta_{\text{Q}}^n(t) := \bar{m}^n \|f(t) - \tilde{f}^n - r s_{h,\tau}(t) + \bar{r}_h^n s_h^n\|. \quad (2.64)$$

Enfin, on définit l'estimateur de la condition initiale par

$$\eta_{\text{IC}} := 2^{-\frac{1}{2}} \|s_h^0 - u_0\|. \quad (2.65)$$

### 2.3.3 Résultat principal

On va présenter maintenant notre résultat concernant la borne supérieure de l'erreur. Notre estimation d'erreur *a posteriori* borne l'erreur entre la solution faible  $u$  du problème (1.4)–(1.6) et la solution post-traitée  $u_{h,\tau} \in \mathcal{P}_{\tau}^1(H^1(\mathcal{T}^n))$  dans la norme d'énergie brisée.

**Théorème 2.1 (Estimation d'erreur *a posteriori* en norme d'énergie).** *Soit  $\eta_{\text{R},K}^n$ ,  $\eta_{\text{F},K}^n$ ,  $\eta_{\text{NC},K}^n$ ,  $\eta_{\text{Q}}^n$ , et  $\eta_{\text{IC}}$  définis par (2.59)–(2.61), (2.64) et (2.65). Alors,*

$$\begin{aligned} \|u - u_{h,\tau}\|_{\tau,X} &\leq \eta := \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\text{R},K}^n + \eta_{\text{F},K}^n(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\text{NC},K}^n(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} (\eta_{\text{Q}}^n(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \eta_{\text{IC}}. \end{aligned}$$

La preuve de ce théorème est décomposée en plusieurs étapes. On commence par donner une borne supérieure abstraite en fonction de la norme duale du résidu. Dans une deuxième étape, on borne la norme duale du résidu pour obtenir une borne calculable.

Soit  $s \in X \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ . On a donc  $\partial_t s \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$  et par suite  $s \in Z$ . On définit le résidu  $\mathcal{R}(s) \in X'$  par

$$\langle \mathcal{R}(s), \varphi \rangle_{X',X} := \int_0^T \left\{ (f - \partial_t s - r s, \varphi) - (\mathbf{S} \nabla s - \beta s, \nabla \varphi) \right\} (t) dt, \quad (2.66)$$

pour tout  $\varphi \in X$ .

**Lemme 2.3 (Borne par le résidu).** *Pour tout  $s \in X \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ , on a*

$$\|u - u_{h,\tau}\|_{\tau,X} \leq \|u_{h,\tau} - s\|_{\tau,X} + \|\mathcal{R}(s)\|_{X'} + 2^{-\frac{1}{2}}\|u_0 - s(0)\|. \quad (2.67)$$

*Démonstration.* On commence par borner  $\|u - s\|_X$ . Comme  $u - s$  est dans  $Z$ , on a (cf. Evans [55, Théorème 5.9.3]),

$$\frac{1}{2}\|u - s\|^2(T) = \frac{1}{2}\|u_0 - s(0)\|^2 + \int_0^T \langle \partial_t(u - s), u - s \rangle(t) dt, \quad (2.68)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \|u - s\|_X^2 &\leq \frac{1}{2}\|u(T) - s(T)\|^2 + \|u - s\|_X^2 \\ &= \frac{1}{2}\|u_0 - s(0)\|^2 + \int_0^T \langle \partial_t(u - s), u - s \rangle(t) dt + \int_0^T \|u - s\|^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2}\|u_0 - s(0)\|^2 + \int_0^T \left\{ \langle \partial_t(u - s), u - s \rangle + \langle \mathcal{B}_S(u - s), u - s \rangle \right\} dt. \end{aligned}$$

On a  $\langle \mathcal{B}_A(u - s), u - s \rangle = 0$  car  $\mathcal{B}_A$  est antisymétrique sur  $H_0^1(\Omega)$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} \|u - s\|_X^2 &\leq \int_0^T \left\{ \langle \partial_t(u - s) + \mathcal{B}_S(u - s) + \mathcal{B}_A(u - s), u - s \rangle \right\}(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\|u_0 - s(0)\|^2 \\ &= \int_0^T \left\{ \langle \partial_t(u - s) + \mathcal{B}(u - s), u - s \rangle \right\}(t) dt + \frac{1}{2}\|u_0 - s(0)\|^2 \\ &= \int_0^T \left\{ \langle (f - \partial_t s - rs), u - s \rangle \right\}(t) dt \\ &\quad - \int_0^T \left\{ \langle (\mathbf{S}\nabla s - \beta s, \nabla(u - s)) \rangle \right\}(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\|u_0 - s(0)\|^2 \\ &= \langle \mathcal{R}(s), u - s \rangle_{X',X} + \frac{1}{2}\|u_0 - s(0)\|^2, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'équation (1.4) et la définition (2.66) du résidu  $\mathcal{R}$ . Grâce à la définition de la norme duale (1.19), on obtient

$$\|u - s\|_X^2 \leq \|\mathcal{R}(s)\|_{X'} \|u - s\|_X + \frac{1}{2}\|u_0 - s(0)\|^2. \quad (2.69)$$

Comme  $x^2 \leq ax + b^2$  implique  $x \leq a + b$  pour des réels positifs  $a$  et  $b$ , on obtient

$$\|u - s\|_X \leq \|\mathcal{R}(s)\|_{X'} + 2^{-\frac{1}{2}}\|u_0 - s(0)\|.$$

Comme  $u - s \in X$ , et en utilisant (2.22), l'inégalité triangulaire conclut la preuve.  $\square$

La norme duale  $\|\mathcal{R}(s)\|_{X'}$  dans l'estimation d'erreur abstraite (2.67) n'est pas facilement calculable. On va donner une borne calculable à cette quantité dans le cas où  $s = s_{h,\tau}$  est la reconstruction  $H_0^1(\Omega)$ -conforme du potentiel introduite en section 2.2.4, en utilisant les flux reconstruits  $\boldsymbol{\theta}_{h,\tau}$  et  $\boldsymbol{\psi}_{h,\tau}$ , le schéma numérique et les propriétés de  $s_{h,\tau}$ .

Pour tout  $1 \leq n \leq N$ , on définit, pour tout  $t \in I^n$  et pour tout  $\varphi \in X$ , le résidu local en temps comme

$$\langle \mathfrak{R}^n(s_{h,\tau}), \varphi \rangle(t) := (f - \partial_t^n s_{h,\tau} - r s_{h,\tau}, \varphi)(t) - (\mathbf{S}\nabla s_{h,\tau} - \boldsymbol{\beta} s_{h,\tau}, \nabla \varphi)(t). \quad (2.70)$$

On commence par donner une forme équivalente du résidu local en temps.

**Lemme 2.4 (Forme équivalente du résidu).** *Pour tout  $1 \leq n \leq N$ , pour tout  $t \in I^n$  et pour tout  $\varphi \in X$ , on a,*

$$\langle \mathfrak{R}^n(s_{h,\tau}), \varphi \rangle(t) = T_{\mathbf{R}}^n(\varphi)(t) + T_{\mathbf{F}}^n(\varphi)(t) + T_{\mathbf{Q}}^n(\varphi)(t), \quad (2.71)$$

avec

$$T_{\mathbf{R}}^n(\varphi)(t) := (\tilde{f}^n - \partial_t^n s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - \bar{r}_h^n s_h^n, \varphi(t)), \quad (2.72)$$

$$T_{\mathbf{F}}^n(\varphi)(t) := -(\mathbf{S}\nabla s_{h,\tau}(t) + \boldsymbol{\theta}_h^n + \boldsymbol{\psi}_h^n - \boldsymbol{\beta} s_{h,\tau}(t), \nabla \varphi(t)), \quad (2.73)$$

$$T_{\mathbf{Q}}^n(\varphi)(t) := (f(t) - \tilde{f}^n - r s_{h,\tau}(t) + \bar{r}_h^n s_h^n, \varphi(t)). \quad (2.74)$$

*Démonstration.* On ajoute et on soustrait  $(\nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n, \varphi)$  et  $(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n, \varphi)$  à la définition (2.70) de  $\mathfrak{R}^n(s_{h,\tau})$  et on utilise le théorème de Green pour obtenir (on omet la dépendance en temps)

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{R}^n(s_{h,\tau}), \varphi \rangle &= (f - \partial_t^n s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - r s_{h,\tau}, \varphi) \\ &\quad - (\mathbf{S}\nabla s_{h,\tau} + \boldsymbol{\theta}_h^n + \boldsymbol{\psi}_h^n - \boldsymbol{\beta} s_{h,\tau}, \nabla \varphi) \\ &= (\tilde{f}^n - \partial_t^n s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - \bar{r}_h^n s_h^n, \varphi) \\ &\quad - (\mathbf{S}\nabla s_{h,\tau} + \boldsymbol{\theta}_h^n + \boldsymbol{\psi}_h^n - \boldsymbol{\beta} s_{h,\tau}, \nabla \varphi) \\ &\quad + (f - \tilde{f}^n - r s_{h,\tau} + \bar{r}_h^n s_h^n, \varphi). \end{aligned}$$

Les définitions de  $T_{\mathbf{R}}^n(\varphi)$ ,  $T_{\mathbf{F}}^n(\varphi)$  et  $T_{\mathbf{Q}}^n(\varphi)$  concluent la preuve.  $\square$

On borne maintenant les quantités  $T_{\mathbf{R}}^n(\varphi)$ ,  $T_{\mathbf{F}}^n(\varphi)$  et  $T_{\mathbf{Q}}^n(\varphi)$  à l'aide des estimateurs introduits dans la section 2.3.2 et la norme triple de  $\varphi$ .

**Lemme 2.5 (Estimateur résiduel).** *Pour tout  $1 \leq n \leq N$ , pour tout  $t \in I^n$  et pour tout  $\varphi \in X$ , on a*

$$T_{\mathbf{R}}^n(\varphi)(t) \leq \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \eta_{\mathbf{R},K}^n \|\varphi(t)\|_K. \quad (2.75)$$

*Démonstration.* Par la propriété (2.48) de conservation des moyennes entre le potentiel reconstruit et la solution post-traitée sur les éléments du maillage  $\mathcal{T}^n$ , on a

$$(\bar{r}_h^n s_h^n, 1)_K = (\bar{r}_h^n u_h^n, 1)_K$$

ce qui conduit en utilisant (2.31) et (2.52) avec la propriété de conservation (2.38) à l'égalité suivante :

$$(\tilde{f}^n - \partial_t^n s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - \bar{r}_h^n s_h^n, 1)_K = 0. \quad (2.76)$$

On obtient alors

$$T_R^n(\varphi)(t) = \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\tilde{f}^n - \partial_t^n s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - \bar{r}_h^n s_h^n, (\varphi - \varphi_K)(t))_K.$$

Par suite, en appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient

$$T_R^n(\varphi)(t) \leq \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \|\tilde{f}^n - \partial_t^n s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - \bar{r}_h^n s_h^n\|_K \|(\varphi - \varphi_K)(t)\|_K.$$

Le résultat est obtenu par une application de l'inégalité (2.57) de Poincaré en norme triple, et la définition (2.21) de la norme d'énergie.  $\square$

**Lemme 2.6 (Estimateur des flux de convection et de diffusion).** *Pour tout  $1 \leq n \leq N$ , pour tout  $t \in I^n$  et pour tout  $\varphi \in X$ , on a*

$$T_F^n(\varphi)(t) \leq \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \eta_{F,K}^n(t) \|\varphi(t)\|_K. \quad (2.77)$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} T_F^n(\varphi)(t) &= - \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\mathbf{S} \nabla s_{h,\tau}(t) + \boldsymbol{\theta}_h^n + \boldsymbol{\psi}_h^n - \boldsymbol{\beta}_{s_{h,\tau}}(t), \nabla \varphi(t))_K \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\mathbf{S}^{\frac{1}{2}} \nabla s_{h,\tau}(t) + \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\theta}_h^n + \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\psi}_h^n - \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\beta}_{s_{h,\tau}}(t), \mathbf{S}^{\frac{1}{2}} \nabla \varphi(t))_K. \end{aligned}$$

On utilise une inégalité de Cauchy–Schwarz et la définition (2.21) de la norme d'énergie pour obtenir

$$T_F^n(\varphi)(t) \leq \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \|\mathbf{S}^{\frac{1}{2}} \nabla s_{h,\tau}(t) + \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\theta}_h^n + \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\psi}_h^n - \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\beta}_{s_{h,\tau}}(t)\|_K \|\varphi(t)\|_K.$$

D'où le résultat.  $\square$

**Remarque 2.6** (Robustesse de  $\eta_{F,K}^n$ ). *Dans un régime de convection ou réaction dominante, cet estimateur des flux de convection et de diffusion ne sera pas robuste, cf. Verfürth [109]. Une deuxième méthode pour calculer cet estimateur sera proposée dans le chapitre 4.*

**Lemme 2.7 (Estimateur de quadrature).** *Pour tout  $1 \leq n \leq N$ , pour tout  $t \in I^n$  et pour tout  $\varphi \in X$ , on a*

$$T_Q^n(\varphi)(t) \leq \eta_Q^n(t) \|\varphi(t)\|. \quad (2.78)$$

*Démonstration.* D'une part, on a

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{Q}}^n(\varphi)(t) &\leq \|f(t) - \tilde{f}^n - r s_{h,\tau}(t) + \bar{r}_h^n s_h^n\| \|\varphi(t)\| \\ &\leq (c_{\beta,r,\Omega}^n)^{-\frac{1}{2}} \|f(t) - \tilde{f}^n - r s_{h,\tau}(t) + \bar{r}_h^n s_h^n\| \|\varphi(t)\| \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy–Schwarz et la définition (2.21) de la norme d'énergie. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{Q}}^n(\varphi)(t) &\leq \|f(t) - \tilde{f}^n - r s_{h,\tau}(t) + \bar{r}_h^n s_h^n\| \|\varphi(t)\| \\ &\leq C_{F,\Omega} h_{\Omega} \|f(t) - \tilde{f}^n - r s_{h,\tau}(t) + \bar{r}_h^n s_h^n\| \|\nabla\varphi(t)\| \\ &\leq C_{F,\Omega} (c_{S,\Omega}^n)^{-\frac{1}{2}} h_{\Omega} \|f(t) - \tilde{f}^n - r s_{h,\tau}(t) + \bar{r}_h^n s_h^n\| \|\varphi(t)\| \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, l'inégalité de Friedrichs (2.56) et la définition (2.21) de la norme d'énergie. On conclut en prenant l'infimum de ces deux majorations.  $\square$

**Lemme 2.8 (Estimateur de non conformité).** *Pour tout  $1 \leq n \leq N$ , pour tout  $t \in I^n$  et pour tout  $\varphi \in X$ , on a*

$$\|u_{h,\tau} - s_{h,\tau}\|_{\tau,X} = \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\text{NC},K}^n(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.79)$$

*Démonstration.* Le résultat est immédiat par la définition (2.19) de norme  $\|\cdot\|_{\tau,X}$ .  $\square$

**Preuve du Théorème 2.1.** Soit  $\varphi \in X$  avec  $\|\varphi\|_X = 1$ . On utilise la définition (2.66) du résidu  $\mathcal{R}$  et la définition (2.70) du résidu local  $\mathfrak{R}^n$  pour écrire

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}(s_{h,\tau}), \varphi \rangle_{X',X} &= \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \left\{ (f(t) - \partial_t s_{h,\tau}(t) - r s_{h,\tau}(t), \varphi(t)) \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{S}\nabla s_{h,\tau}(t) - \beta s_{h,\tau}(t), \nabla\varphi(t)) \right\} dt \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \langle \mathfrak{R}^n(s_{h,\tau})(t), \varphi(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Par le lemme 2.4, donnant une écriture équivalente du résidu local, on obtient

$$\langle \mathcal{R}(s_{h,\tau}), \varphi \rangle_{X',X} = \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \{T_{\mathbb{R}}^n(\varphi)(t) + T_{\mathbb{F}}^n(\varphi)(t) + T_{\mathbb{Q}}^n(\varphi)(t)\} dt.$$

On utilise les lemmes 2.5–2.7 pour borner les quantités  $T_{\mathbb{R}}^n(\varphi)$ ,  $T_{\mathbb{F}}^n(\varphi)$  et  $T_{\mathbb{Q}}^n(\varphi)$ . Une

inégalité de Cauchy–Schwarz permet alors d'obtenir

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{R}(s_{h,\tau}), \varphi \rangle_{X',X} &\leq \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\mathbb{R},K}^n + \eta_{\mathbb{F},K}^n(t)) \|\varphi(t)\|_K dt \\
&\quad + \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \eta_{\mathbb{Q}}^n(t) \|\varphi(t)\| dt \\
&\leq \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\mathbb{R},K}^n + \eta_{\mathbb{F},K}^n(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_X \\
&\quad + \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} (\eta_{\mathbb{Q}}^n(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_X.
\end{aligned}$$

La norme duale du résidu est alors bornée par

$$\|\mathcal{R}(s_{h,\tau})\|_{X'} \leq \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\mathbb{R},K}^n + \eta_{\mathbb{F},K}^n(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} (\eta_{\mathbb{Q}}^n(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

L'utilisation du Lemme 2.3 conclut la preuve.  $\square$

### 2.3.4 Distinction entre l'erreur en espace et l'erreur en temps

Il est important de distinguer l'erreur provenant de la discrétisation en espace de celle provenant de la discrétisation en temps. L'idée de la décomposition de l'erreur en erreur spatiale et erreur temporelle est classique dans le cadre de l'estimation d'erreur *a posteriori* pour les problèmes paraboliques. On cite par exemple, Picasso [91], Verfürth [107], Bergam, Bernardi et Mghazli [24], Ern et Vohralík [53], Hilhorst et Vohralík [62]... Pour simplifier, on suppose que  $\mathbf{S}$  et  $\beta$  sont constants en temps. Pour séparer les deux contributions de l'erreur, l'estimateur des flux de diffusion et de convection  $\eta_{\mathbb{F},K}^n(t)$  est divisé en deux contributions (voir la preuve ci-dessous, notamment (2.84)). On définit, pour tout  $1 \leq n \leq N$ ,

$$(\eta_{\text{sp}}^n)^2 := 2 \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \left\{ \tau^n (\eta_{\mathbb{R},K}^n + \eta_{\mathbb{F},1,K}^n)^2 + \int_{I^n} (\eta_{\mathbb{N}C,K}^n(t))^2 dt \right\}, \quad (2.80)$$

$$(\eta_{\text{tm}}^n)^2 := 2 \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \left\{ \frac{\tau^n}{3} \|\mathbf{S}^{\frac{1}{2}} \nabla (s_h^n - s_h^{n-1}) - \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \beta (s_h^n - s_h^{n-1})\|_K^2 + \int_{I^n} (\eta_{\mathbb{Q}}^n(t))^2 dt \right\}, \quad (2.81)$$

où

$$\eta_{\mathbb{F},1,K}^n := \|\mathbf{S}^{\frac{1}{2}} \nabla s_h^n + \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \theta_h^n - \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \beta s_h^n + \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \psi_h^n\|_K. \quad (2.82)$$

En procédant comme dans Ern et Vohralík [53], on obtient l'estimation suivante qui distingue l'erreur en espace et en temps :

**Corollaire 2.1 (Estimation d'erreur *a posteriori* distinguant l'erreur en espace et l'erreur en temps).** *Soient  $\eta_{\text{sp}}^n$  et  $\eta_{\text{tm}}^n$  définis par (2.80) et (2.81) et*

$\eta_{\text{IC}}$  défini par (2.65). On a alors

$$\|u - u_{h,\tau}\|_{\tau,X} \leq \left\{ \sum_{n=1}^N \{(\eta_{\text{sp}}^n)^2 + (\eta_{\text{tm}}^n)^2\} \right\}^{1/2} + \eta_{\text{IC}}. \quad (2.83)$$

*Démonstration.* Pour tout  $1 \leq n \leq N$ , pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ , et pour tout  $t \in I^n$ , soit

$$\eta_{\text{F},2,K}^n(t) := \|\mathbf{S}^{1/2} \nabla(s_{h,\tau}(t) - s_h^n) - \mathbf{S}^{-1/2} \beta(s_{h,\tau}(t) - s_h^n)\|_K.$$

En reprenant les définitions (2.60) et (2.82) de  $\eta_{\text{F},K}^n(t)$  et  $\eta_{\text{F},1,K}^n$ , l'inégalité triangulaire donne

$$\eta_{\text{F},K}^n(t) \leq \eta_{\text{F},1,K}^n + \eta_{\text{F},2,K}^n(t). \quad (2.84)$$

Une deuxième inégalité triangulaire avec  $A^2 := \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\text{R},K}^n + \eta_{\text{F},K}^n(t))^2 dt$  donne

$$\begin{aligned} A &\leq \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\text{R},K}^n + \eta_{\text{F},1,K}^n + \eta_{\text{F},2,K}^n(t))^2 dt \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\text{R},K}^n + \eta_{\text{F},1,K}^n)^2 dt \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \eta_{\text{F},2,K}^n(t)^2 dt \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite peut être facilement intégré en temps, ce qui donne

$$A \leq \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \tau^n (\eta_{\text{R},K}^n + \eta_{\text{F},1,K}^n)^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \eta_{\text{F},2,K}^n(t)^2 dt \right\}^{1/2}.$$

Par ailleurs, on observe que

$$\int_{I^n} \eta_{\text{F},2,K}^n(t)^2 dt = \frac{\tau^n}{3} \|\mathbf{S}^{1/2} \nabla(s_h^n - s_h^{n-1}) - \mathbf{S}^{-1/2} \beta(s_h^n - s_h^{n-1})\|_K^2.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} A &\leq \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \tau^n (\eta_{\text{R},K}^n + \eta_{\text{F},1,K}^n)^2 \right\}^{1/2} \\ &\quad + \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{\tau^n}{3} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \|\mathbf{S}^{1/2} \nabla(s_h^n - s_h^{n-1}) - \mathbf{S}^{-1/2} \beta(s_h^n - s_h^{n-1})\|_K^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

On obtient alors le résultat suivant, grâce au Théorème 2.1,

$$\begin{aligned}
\|u - u_{h,\tau}\|_{\tau,X} &\leq \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \tau^n (\eta_{R,K}^n + \eta_{F,1,K}^n)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \frac{\tau^n}{3} \|\mathbf{S}^{1/2} \nabla (s_h^n - s_h^{n-1}) - \mathbf{S}^{-1/2} \boldsymbol{\beta} (s_h^n - s_h^{n-1})\|_K^2 \right\}^{1/2} \\
&+ \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} (\eta_Q^n(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{NC,K}^n(t))^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&+ \eta_{IC}.
\end{aligned}$$

Le résultat final (2.83) s'en déduit en regroupant les première et quatrième sommes de droite ainsi que les deuxième et troisième, et en utilisant le fait que

$$a + b \leq (2(a^2 + b^2))^{1/2}, \quad (2.85)$$

pour des réels positifs  $a$  et  $b$ .  $\square$

**Remarque 2.7** (Dépendance en temps). *Dans le cas où  $\mathbf{S}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  dépendent du temps, on introduit les fonctions suivantes :*

$$\tilde{\mathbf{S}}^n(\mathbf{x}) := \frac{1}{\tau^n} \int_{I^n} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) dt, \quad (2.86)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}^n(\mathbf{x}) := \frac{1}{\tau^n} \int_{I^n} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, t) dt. \quad (2.87)$$

*Les indicateurs sont alors exprimés en fonction de  $\tilde{\mathbf{S}}^n$  et  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^n$ , et les variations en temps de  $\mathbf{S}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  sont incorporées dans l'estimateur de quadrature.*

## 2.4 Exemples de schémas volumes finis

Dans cette section, on présente deux exemples de méthodes volumes finis pour la discrétisation de l'équation de convection–diffusion–réaction instationnaire : le schéma volumes finis à quatre points valable pour des maillages particuliers (dits admissibles), voir par exemple Eymard, Gallouët et Herbin [56], et le schéma DDFV valable pour des maillages généraux introduit par Domelevo et Omnes dans [45] dans le cadre de l'équation de Laplace et étendu par Coudière et Manzini [39] pour l'équation de convection–diffusion.

### 2.4.1 Schéma volumes finis à quatre points

On considère dans cette sous-section des maillages admissibles au sens de Eymard, Gallouët et Herbin [56, Définition 9.1]. Pour les maillages triangulaires traités

ici, la condition d'admissibilité est satisfaite sur le maillage  $\mathcal{T}^n$  quand il existe un point  $\mathbf{x}_K$  à l'intérieur de chaque  $K \in \mathcal{T}^n$  tel que la droite reliant  $\mathbf{x}_K$  et  $\mathbf{x}_L$  pour deux éléments voisins  $K$  et  $L$  est orthogonale à l'arête commune  $\sigma_{K,L}$  et finalement quand une condition d'orthogonalité similaire est vérifiée sur le bord. La figure 2.6 présente un exemple d'un élément d'un maillage admissible. En outre, on suppose dans cette sous-section que  $\mathbf{S}$  est indépendant du temps et constant par morceaux à valeurs dans les matrices proportionnelles à l'identité ; on a donc  $\mathbf{S}|_K = s_K \mathbf{Id}$  pour tout  $1 \leq n \leq N$  et pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ . Dans ces conditions, les choix suivants pour  $S_{K,\sigma}^n$  et  $W_{K,\sigma}^n$  sont possibles :

$$S_{K,\sigma}^n = -s_{K,L} \frac{|\sigma|}{d_{K,L}} (u_L^n - u_K^n) \quad \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{int}}^n, \quad (2.88)$$

$$S_{K,\sigma}^n = s_K \frac{|\sigma|}{d_{K,\sigma}} u_K^n \quad \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}^n, \quad (2.89)$$

$$W_{K,\sigma}^n = u_\sigma^n w_{K,\sigma} \quad \sigma \in \mathcal{E}_K, \quad (2.90)$$

où  $d_{K,L} = |\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_L|$  est la distance Euclidienne entre  $\mathbf{x}_K$  et  $\mathbf{x}_L$ ,  $d_{K,\sigma}$  est la distance Euclidienne entre  $\mathbf{x}_K$  et  $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}^n$ , et

$$w_{K,\sigma} := \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_\sigma \quad (2.91)$$

est le flux du vecteur de convection  $\boldsymbol{\beta}$  à travers un côté  $\sigma$  de  $K$ . Pour les valeurs de  $s_{K,L}$ , on utilise en général la moyenne harmonique du coefficient de diffusion,

$$s_{K,L} := \frac{2s_K s_L}{s_K + s_L}. \quad (2.92)$$

Finalement,  $u_\sigma^n$  est la valeur upwind pondérée, qui est donnée par

$$u_\sigma^n := \nu_\sigma \hat{u}_\sigma^n + (1 - \nu_\sigma) \bar{u}_\sigma^n, \quad (2.93)$$

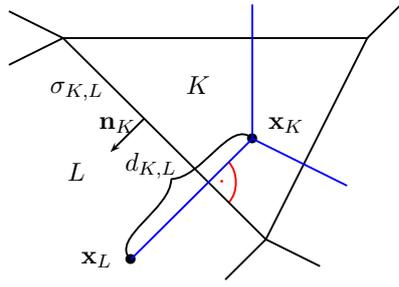
où  $\hat{u}_\sigma^n$  est la valeur upwind et  $\bar{u}_\sigma^n$  la valeur centrée, données respectivement par

$$\hat{u}_\sigma^n := \begin{cases} u_K^n & \text{if } w_{K,\sigma} \geq 0, \\ u_L^n & \text{if } w_{K,\sigma} < 0, \end{cases} \quad \bar{u}_\sigma^n := \frac{1}{2}(u_K^n + u_L^n), \quad (2.94)$$

si  $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_{\text{int}}^n$  et

$$\hat{u}_\sigma^n := \begin{cases} u_K^n & \text{if } w_{K,\sigma} \geq 0, \\ 0 & \text{if } w_{K,\sigma} < 0, \end{cases} \quad \bar{u}_\sigma^n := \frac{1}{2}(u_K^n), \quad (2.95)$$

si  $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}^n$ . Le paramètre  $\nu_\sigma \in [0, 1]$  est un coefficient de pondération. Le schéma amont pour  $\nu_\sigma = 1$  est classique, cf. Eymard, Gallouët et Herbin [56, Section 9]. Le paramètre  $\nu_\sigma$  est introduit dans le but de maintenir la stabilité du schéma tout en réduisant la diffusion numérique due au schéma amont. Un choix optimal pour  $\nu_\sigma$  (cf. Chénier, Eymard et Nicolas [36] et Eymard, Hilhorst et Vohralík [59]) est donné par (pour  $w_{K,\sigma} \neq 0$ , sinon  $\nu_\sigma := 1$ ) :

FIGURE 2.6 – Exemple d'un élément  $K$  d'un maillage admissible.

$$\nu_\sigma := \begin{cases} 1 - \min\left\{\frac{2s_{K,L}|\sigma|}{d_{K,L}|w_{K,\sigma}|}, 1\right\} & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_{\text{int}}^n, \\ 1 - \min\left\{\frac{2s_K|\sigma|}{d_{K,\sigma}|w_{K,\sigma}|}, 1\right\} & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}^n \text{ et } w_{K,\sigma} > 0, \\ 1 & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}^n \text{ et } w_{K,\sigma} < 0. \end{cases} \quad (2.96)$$

On dit que le schéma ci-dessus est à quatre points car, en deux dimensions, sur des maillages triangulaires, le stencil du schéma contient quatre points.

## 2.4.2 Schéma DDFV

Le schéma à quatre points présenté à la Section 2.4.1 possède l'avantage d'être un schéma compact, ne faisant intervenir pour chaque élément du maillage  $K \in \mathcal{T}^n$  que les inconnues aux éléments voisins. Cependant, le raffinement adaptatif devient compliqué, du fait que les maillages raffinés doivent également être admissibles. Un choix alternatif est d'utiliser une méthode de volumes finis qui ne nécessite pas cette condition d'admissibilité sur les maillages. Dans cette thèse, on considère comme exemple de schéma dans cette classe la méthode DDFV.

### 2.4.2.1 Notations et définitions

On commence par donner quelques notations reliées aux maillages. On se place en deux dimensions d'espace. Soit  $0 \leq n \leq N$ . À chaque triangle  $K \in \mathcal{T}^n$ , on associe un point  $\mathbf{x}_K$  se trouvant à l'intérieur de  $K$ . Ce point peut être le barycentre de  $K$ , mais cela n'est pas nécessaire. Pour tout côté  $\sigma \in \mathcal{E}^n$ , on désigne par  $\mathbf{s}_{\sigma,1}$  et  $\mathbf{s}_{\sigma,2}$  ses deux sommets. On note  $\mathcal{V}^n$  l'ensemble des sommets du maillage  $\mathcal{T}^n$  et on introduit l'ensemble  $\mathcal{V}_{\text{ext}}^n$  des sommets  $\mathbf{s} \in \mathcal{V}^n$  se trouvant sur la frontière de  $\Omega$  et l'ensemble  $\mathcal{V}_{\text{int}}^n$  des sommets  $\mathbf{s} \in \mathcal{V}^n$  se trouvant dans  $\Omega$ . À chaque sommet  $\mathbf{s} \in \mathcal{V}^n$ , on associe le polygone noté  $P_{\mathbf{s}}$  obtenu en joignant les points  $\mathbf{x}_K$  associés aux éléments  $K \in \mathcal{T}^n$  dont  $\mathbf{s}$  est sommet et ceci en passant par les points milieux des côtés  $\sigma \in \mathcal{E}^n$  dont  $\mathbf{s}$  est sommet. De manière générale, le point milieu du côté

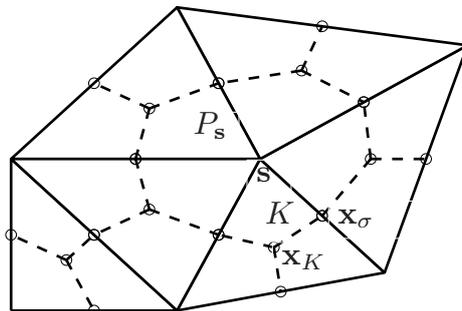


FIGURE 2.7 – Un maillage primal et son maillage dual associé.

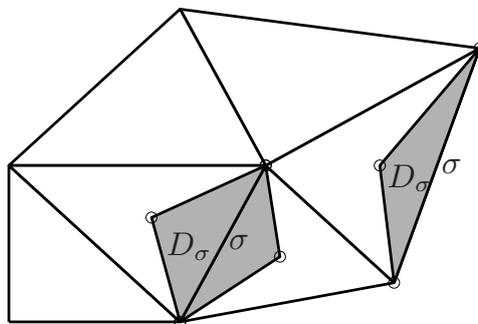


FIGURE 2.8 – Maille diamant associée à un côté interne ou à un côté sur la frontière.

$\sigma \in \mathcal{E}^n$  est noté  $\mathbf{x}_\sigma$ . L'ensemble de ces éléments forme une nouvelle partition de  $\Omega$  appelé maillage dual. La figure 2.7 montre un maillage primal et son maillage dual associé. Pour le traitement des conditions aux limites, il sera commode de voir chaque côté  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}^n$  comme un triangle dégénéré (i.e. un segment). On note alors  $K \in \mathcal{T}_{\text{ext}}^n$  ces mailles, et on désigne par  $\mathbf{x}_K$  le point milieu de  $K$ . On pose enfin  $\mathcal{T}_*^n = \mathcal{T}^n \cup \mathcal{T}_{\text{ext}}^n$ .

À tout côté  $\sigma \in \mathcal{E}^n$ , on associe un quadrilatère appelé maille diamant qu'on note  $D_\sigma$ . Lorsque  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^n$ , cette maille diamant est obtenue en joignant les sommets  $\mathbf{s}_{\sigma,1}$  et  $\mathbf{s}_{\sigma,2}$  de  $\sigma$  avec les points  $\mathbf{x}_K$  et  $\mathbf{x}_L$  associés aux éléments partageant le côté  $\sigma$ . Lorsque  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}^n$ , la maille diamant est obtenue en joignant les sommets  $\mathbf{s}_{\sigma,1}$  et  $\mathbf{s}_{\sigma,2}$  de  $\sigma$  avec le point  $\mathbf{x}_K$  associé au seul élément dont  $\sigma$  est côté et dans ce cas, la cellule diamant associée à  $\sigma$  est un quadrilatère dégénéré (i.e. un triangle). La figure 2.8 représente une maille diamant associée à un côté interne et à un côté sur la frontière. Les mailles  $D_\sigma$  forment une troisième partition de  $\Omega$  qu'on appelle maillage diamant.

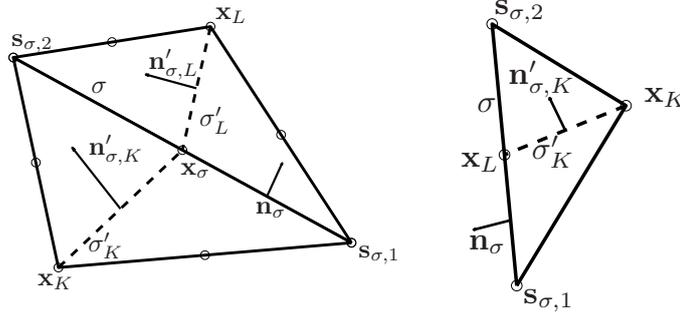


FIGURE 2.9 – Notation pour une maille diamant interne (à gauche) et une maille diamant frontière (à droite).

On note  $\sigma'_K$  (resp.  $\sigma'_L$ ) le segment joignant  $\mathbf{x}_K$  (resp.  $\mathbf{x}_L$ ) au point  $\mathbf{x}_\sigma$  associé à  $\sigma$ . Le vecteur normal associé à  $\sigma'_K$  (resp.  $\sigma'_L$ ), dirigé de  $\mathbf{s}_{\sigma,1}$  vers  $\mathbf{s}_{\sigma,2}$ , est noté  $\mathbf{n}'_{\sigma,K}$  (resp.  $\mathbf{n}'_{\sigma,L}$ ). Dans le cas d'une cellule diamant située sur la frontière,  $\sigma'_L$  ne joue aucun rôle. La figure 2.9 montre les notations pour une maille diamant. On désigne par  $\sigma'$  le segment joignant  $\mathbf{x}_K$  et  $\mathbf{x}_L$  et par  $\mathbf{n}'_\sigma$  sa normale dirigée de  $\mathbf{s}_{\sigma,1}$  vers  $\mathbf{s}_{\sigma,2}$ . On a

$$|\sigma'| \mathbf{n}'_\sigma = |\sigma'_K| \mathbf{n}'_{\sigma,K} + |\sigma'_L| \mathbf{n}'_{\sigma,L}. \quad (2.97)$$

Pour tout sommet  $\mathbf{s} \in \mathcal{V}^n$ , on définit  $\mathcal{E}_\mathbf{s}$  comme l'ensemble des côtés  $\sigma \in \mathcal{E}^n$  dont  $\mathbf{s}$  est sommet. Pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}^n$  et pour tout  $\mathbf{s} \in \mathcal{V}^n$  tel que  $\sigma \in \mathcal{E}_\mathbf{s}$ , on définit les réels  $s'_{\sigma,K,\mathbf{s}}$  et  $s'_{\sigma,L,\mathbf{s}}$  qui prennent les valeurs 1 ou  $-1$  selon si  $\mathbf{n}'_{\sigma,K}$  et  $\mathbf{n}'_{\sigma,L}$  est orienté vers l'extérieur ou vers l'intérieur de  $P_\mathbf{s}$ . Similairement, pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$  tel que  $\sigma \in \mathcal{E}_K$ , on définit le réel  $s_{\sigma,K}$  qui prend les valeurs 1 ou  $-1$  selon si  $\mathbf{n}_\sigma$  est orienté vers l'extérieur ou vers l'intérieur de  $K$ . Toutes ces notations sont résumées dans le tableau 2.1.

#### 2.4.2.2 Produits scalaires et opérateurs différentiels discrets

On note  $k$  le nombre d'éléments du maillage primal,  $s$  le nombre d'éléments du maillage dual,  $j$  le nombre d'éléments du maillage diamant et  $j^{\partial\Omega}$  le nombre de côtés du maillage primal se trouvant sur la frontière. À tout point  $\mathbf{x}_K$  ( $K \in \mathcal{T}_*^n$ ) et à tout sommet  $\mathbf{s}$  ( $\mathbf{s} \in \mathcal{V}^n$ ), on associe des inconnues discrètes qu'on note respectivement  $u_K^n$  et  $u_\mathbf{s}^n$ . On peut alors définir le produit scalaire discret suivant pour tout  $(u_h^n, v_h^n) = ((u_K^n, u_\mathbf{s}^n)_{(K,\mathbf{s}) \in \mathcal{T}^n \times \mathcal{V}^n}, (v_K^n, v_\mathbf{s}^n)_{(K,\mathbf{s}) \in \mathcal{T}^n \times \mathcal{V}^n}) \in (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s)^2$  (les composantes associées aux mailles  $K \in \mathcal{T}_{\text{ext}}^n$  ne sont pas utilisées pour ce produit scalaire) :

$$(u_h^n, v_h^n)_{\mathcal{T}^n, \mathcal{V}^n} := \frac{1}{2} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}^n} |K| u_K^n v_K^n + \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{V}^n} |P_\mathbf{s}| u_\mathbf{s}^n v_\mathbf{s}^n \right). \quad (2.98)$$

De même, on définit un produit scalaire discret sur le maillage diamant pour

Symbole	Description
$K \in \mathcal{T}^n$	Élément du maillage primal
$K \in \mathcal{T}_{\text{ext}}^n$	Côté du bord considéré comme une maille primale dégénérée
$\mathbf{x}_K, K \in \mathcal{T}^n$	Point associé à la maille primale $K$
$\mathbf{x}_K, K \in \mathcal{T}_{\text{ext}}^n$	Milieu de $K$
$\mathbf{s} \in \mathcal{V}^n$	Sommet du maillage primal = Point associé à la maille duale
$P_{\mathbf{s}}, \mathbf{s} \in \mathcal{V}^n$	Élément du maillage dual
$D_{\sigma}, \sigma \in \mathcal{E}^n$	Élément du maillage diamant
$\sigma = [\mathbf{s}_{\sigma,1}\mathbf{s}_{\sigma,2}]$	Côté du maillage primal = Diagonale de la maille diamant $D_{\sigma}$
$\sigma' = [\mathbf{x}_K\mathbf{x}_L]$	Diagonale de la maille diamant $D_{\sigma}$
$\sigma'_K$	Côté du maillage dual reliant $\mathbf{x}_K$ au milieu de $\sigma$
$\sigma'_L$	Côté du maillage dual reliant $\mathbf{x}_L$ au milieu de $\sigma$
$\mathbf{n}_{\sigma}, \sigma \in \mathcal{E}^n$	Vecteur unitaire normal à $\sigma$ orienté tel que $\mathbf{x}_K\mathbf{x}_L \cdot \mathbf{n}_{\sigma} \geq 0$
$\mathbf{n}'_{\sigma}$	Vecteur unitaire normal à $\sigma'$ orienté tel que $\mathbf{s}_{\sigma,1}\mathbf{s}_{\sigma,2} \cdot \mathbf{n}'_{\sigma} \geq 0$
$\mathbf{n}'_{\sigma,K}, \sigma \in \mathcal{E}^n$	Vecteur unitaire normal à $\sigma'_K$ orienté tel que $\mathbf{s}_{\sigma,1}\mathbf{s}_{\sigma,2} \cdot \mathbf{n}'_{\sigma,K} \geq 0$
$\mathbf{n}'_{\sigma,L}, \sigma \in \mathcal{E}^n$	Vecteur unitaire normal à $\sigma'_L$ orienté tel que $\mathbf{s}_{\sigma,1}\mathbf{s}_{\sigma,2} \cdot \mathbf{n}'_{\sigma,L} \geq 0$
$\mathcal{E}_K, K \in \mathcal{T}^n$	L'ensemble des $\sigma \in \mathcal{E}^n$ tels que $\sigma$ est un côté de $K$
$\mathcal{E}_{\mathbf{s}}, \mathbf{s} \in \mathcal{V}^n$	L'ensemble des $\sigma \in \mathcal{E}^n$ tels que $\mathbf{s}$ est sommet de $\sigma$
$s_{\sigma,K}, K \in \mathcal{T}^n, \sigma \in \mathcal{E}_K$	Égal à +1 ou -1 selon si $\mathbf{n}_{\sigma}$ est sortant ou rentrant à $K$
$\mathbf{n}_{\sigma,K}, K \in \mathcal{T}^n, \sigma \in \mathcal{E}_K$	Égal à $s_{\sigma,K}\mathbf{n}_{\sigma}$ = vecteur unitaire normal à $\sigma$ et sortant de $K$
$s'_{\sigma,K,\mathbf{s}}, \mathbf{s} \in \mathcal{V}^n, \sigma \in \mathcal{E}_{\mathbf{s}}$	Égal à +1 ou -1 selon si $\mathbf{n}'_{\sigma,K}$ est sortant ou rentrant à $P_{\mathbf{s}}$
$\mathbf{n}_{\sigma,K,\mathbf{s}}, \mathbf{s} \in \mathcal{V}^n, \sigma \in \mathcal{E}_{\mathbf{s}}$	Égal à $s'_{\sigma,K,\mathbf{s}}\mathbf{n}'_{\sigma,K}$ = vecteur unitaire normal à $\sigma'_K$ et sortant de $P_{\mathbf{s}}$
$s'_{\sigma,L,\mathbf{s}}, \mathbf{s} \in \mathcal{V}^n, \sigma \in \mathcal{E}_{\mathbf{s}}$	Égal à +1 ou -1 selon si $\mathbf{n}'_{\sigma,L}$ est sortant ou rentrant à $P_{\mathbf{s}}$
$\mathbf{n}_{\sigma,L,\mathbf{s}}, \mathbf{s} \in \mathcal{V}^n, \sigma \in \mathcal{E}_{\mathbf{s}}$	Égal à $s'_{\sigma,L,\mathbf{s}}\mathbf{n}'_{\sigma,L}$ = vecteur unitaire normal à $\sigma'_L$ et sortant de $P_{\mathbf{s}}$

TABLE 2.1 – Liste des notations.

tout  $(\phi_h^n, \psi_h^n) = ((\phi_\sigma^n)_{\sigma \in \mathcal{E}^n}, (\psi_\sigma^n)_{\sigma \in \mathcal{E}^n}) \in (\mathbb{R}^j \times \mathbb{R}^j)^2$  par

$$(\phi_h^n, \psi_h^n)_{\mathcal{E}^n} := \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^n} |D_\sigma| \phi_\sigma^n \cdot \psi_\sigma^n, \quad (2.99)$$

et un produit scalaire discret sur la frontière pour  $(v_h^n, w_h^n) = ((v_\sigma^n)_{\sigma \in \mathcal{E}^n}, (w_\sigma^n)_{\sigma \in \mathcal{E}^n}) \in \mathbb{R}^j \times \mathbb{R}^j$  définis (au moins) sur la frontière  $\partial\Omega$  par

$$(v_h^n, w_h^n)_{\mathcal{E}_{\text{ext}}^n} := \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}^n} |\sigma| v_\sigma^n w_\sigma^n. \quad (2.100)$$

Le gradient discret, noté  $\nabla_h^n$ , agit de  $\mathbb{R}^{k+j^{\partial\Omega}} \times \mathbb{R}^s$  dans  $(\mathbb{R}^j)^2$ . Pour une fonction  $u_h^n = (u_K^n, u_{\mathbf{s}}^n)_{(K, \mathbf{s}) \in \mathcal{T}_*^n \times \mathcal{V}^n}$ , le gradient discret  $\nabla_h^n u_h^n$  est défini par ses valeurs sur les mailles diamants. Il prend la forme suivante (cf. Domelevo et Omnes [45]) : Pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}^n$ ,

$$(\nabla_h^n u_h^n)_\sigma := \frac{1}{2|D_\sigma|} \left\{ [u_{\mathbf{s}_{\sigma,2}}^n - u_{\mathbf{s}_{\sigma,1}}^n] (|\sigma'_K| \mathbf{n}'_{\sigma,K} + |\sigma'_L| \mathbf{n}'_{\sigma,L}) + [u_L^n - u_K^n] |\sigma| \mathbf{n}_\sigma \right\}, \quad (2.101)$$

où pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}^n$ ,  $K \in \mathcal{T}^n$  et  $L \in \mathcal{T}_{\text{ext}}^n$  (si bien que  $|\sigma'_L| = 0$ ). On note que la formule (2.101) est exacte pour les fonctions affines. Le calcul du gradient discret nécessite uniquement les valeurs de  $u_h^n$  aux noeuds du maillage primal et du maillage dual.

L'opérateur de divergence discret, noté  $\nabla_h^n \cdot := (\nabla_h^{n,\mathcal{T}} \cdot, \nabla_h^{n,\mathcal{V}} \cdot)$ , agit de  $(\mathbb{R}^j)^2$  dans  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^s$ . Pour un champ de vecteur  $\phi_h^n = (\phi_\sigma^n)_{\sigma \in \mathcal{E}^n}$ , sa divergence discrète  $\nabla_h^n \cdot \phi_h^n$  est définie par ses valeurs sur les éléments du maillage primal et du maillage dual. Il prend la forme suivante (cf. Domelevo et Omnes [45]) : Pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ ,

$$(\nabla_h^{n,\mathcal{T}} \cdot \phi_h^n)_K := \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| \phi_\sigma^n \cdot \mathbf{n}_{\sigma,K}, \quad (2.102)$$

et pour tout  $\mathbf{s} \in \mathcal{V}^n$ ,

$$(\nabla_h^{n,\mathcal{V}} \cdot \phi_h^n)_\mathbf{s} := \frac{1}{|P_\mathbf{s}|} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathbf{s}} (|\sigma'_K| \phi_\sigma^n \cdot \mathbf{n}'_{\sigma,K,\mathbf{s}} + |\sigma'_L| \phi_\sigma^n \cdot \mathbf{n}'_{\sigma,L,\mathbf{s}}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathbf{s} \cap \mathcal{E}_{\text{ext}}^n} \frac{1}{2} |\sigma| \phi_\sigma^n \cdot \mathbf{n}_\sigma \right). \quad (2.103)$$

On note que les quantités  $(\nabla_h^{n,\mathcal{T}} \cdot \phi)_K$  pour  $K \in \mathcal{T}^n$  (resp.  $(\nabla_h^{n,\mathcal{V}} \cdot \phi)_\mathbf{s}$  pour  $\mathbf{s} \in \mathcal{V}^n$ ) sont les valeurs moyennes exactes sur les cellules primales  $K$  (respectivement sur les cellules duales intérieures  $P_\mathbf{s}$ ) de la divergence d'un champ continu  $\hat{\phi}(\mathbf{x})$  sous la condition suffisante que

$$\begin{aligned} |\sigma| \phi_\sigma^n \cdot \mathbf{n}_{\sigma,K} &= \int_\sigma \hat{\phi} \cdot \mathbf{n}_\sigma(\gamma) d\gamma \text{ et} \\ |\sigma'_K| \phi_\sigma^n \cdot \mathbf{n}'_{\sigma,K,\mathbf{s}} + |\sigma'_L| \phi_\sigma^n \cdot \mathbf{n}'_{\sigma,L,\mathbf{s}} &= \int_{\sigma'_K} \hat{\phi} \cdot \mathbf{n}'_{\sigma,K}(\gamma) d\gamma + \int_{\sigma'_L} \hat{\phi} \cdot \mathbf{n}'_{\sigma,L}(\gamma) d\gamma. \end{aligned}$$

Il est prouvé par Domelevo et Omnes [45] que les opérateurs de gradient et de divergence discrets vérifient la proposition suivante :

**Proposition 2.1.** *Les opérateurs de gradient et de divergence discrets vérifient la formule de Green discrète suivante : Pour tout  $\phi_h^n \in (\mathbb{R}^j)^2$  et pour tout  $u_h^n = (u_K^n, u_S^n)_{(K,S) \in \mathcal{T}_*^n \times \mathcal{V}^n} \in \mathbb{R}^{k+j^{\partial\Omega}} \times \mathbb{R}^s$ ,*

$$(\nabla_h^n \cdot \phi_h^n, u_h^n)_{\mathcal{T}^n, \mathcal{V}^n} = -(\phi_h^n, \nabla_h^n u_h^n)_{\mathcal{E}^n} + (\phi_h^n \cdot \mathbf{n}, \tilde{u}_\sigma^n)_{\mathcal{E}_{\text{ext}}^n}, \quad (2.104)$$

où pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}^n$  de sommets  $\mathbf{s}_{\sigma,1}$  et  $\mathbf{s}_{\sigma,2}$  et d'élément associé dans  $\mathcal{T}_{\text{ext}}^n$  noté  $L$ , on a posé

$$\tilde{u}_\sigma^n = \frac{1}{4}(u_{\mathbf{s}_{\sigma,1}}^n + 2u_L^n + u_{\mathbf{s}_{\sigma,2}}^n). \quad (2.105)$$

### 2.4.2.3 Flux numériques de diffusion et de convection

Ces constructions de flux numériques de diffusion et de convection sont données par Domelevo et Omnes [45] et Coudière et Manzini [39] pour la diffusion et par Coudière et Manzini [39] pour la convection. On suppose qu'il existe une constante positive  $C_S$  indépendante de  $h$  telle que pour toute maille diamant  $D_\sigma$ , on peut trouver une matrice constante  $\mathbf{S}_{D_\sigma}$  vérifiant

$$\max_{i,l=1,2} \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in D_\sigma} |(\mathbf{S}_{D_\sigma})_{il} - \mathbf{S}_{il}(\mathbf{x})| \leq C_S h_{D_\sigma}, \quad (2.106)$$

où  $C_S$  peut dépendre de la régularité des composantes de  $\mathbf{S}$  et  $h_{D_\sigma}$  désigne le diamètre de la maille diamant  $D_\sigma$ . Par exemple, si  $\mathbf{S}_{il} \in W^{1,p}(\Omega)$  avec  $p > 2$  et  $D_\sigma$  convexe ou si  $\mathbf{S}_{il} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , on peut choisir

$$(\mathbf{S}_{D_\sigma})_{il} := \frac{1}{|D_\sigma|} \int_{D_\sigma} \mathbf{S}_{il}(\mathbf{x}) dx. \quad (2.107)$$

Le flux de diffusion numérique qu'on note  $\mathbf{F}_h^d(u_h^n)$  est donné par

$$\mathbf{F}_h^d(u_h^n) := (\mathbf{S}_{D_\sigma} (\nabla_h^n u_h^n)_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}^n} \in (\mathbb{R}^j)^2, \quad (2.108)$$

et le flux numérique de convection qu'on note  $\mathbf{F}_h^c(u_h^n)$  est donné par

$$\mathbf{F}_h^c(u_h^n) := (\mathbf{F}_{D_\sigma}^c)_{\sigma \in \mathcal{E}^n} \in (\mathbb{R}^j)^2, \quad (2.109)$$

où

$$\mathbf{F}_{D_\sigma}^c \cdot |\sigma| \mathbf{n}_\sigma := F_\sigma^c, \quad (2.110)$$

$$\mathbf{F}_{D_\sigma}^c \cdot (|\sigma'_K| \mathbf{n}'_{\sigma,K} + |\sigma'_L| \mathbf{n}'_{\sigma,L}) := F_{\sigma'}^c. \quad (2.111)$$

Pour définir les flux  $F_\sigma^c$  et  $F_{\sigma'}^c$ , on introduit les notations suivantes pour le terme de convection  $\beta$  : pour  $e \in \{\sigma, \sigma'_K, \sigma'_L\}$  :

$$\beta_e := \int_e \beta \cdot \mathbf{n}_e(\gamma) d\gamma, \quad (2.112)$$

ainsi que

$$\beta_{\sigma'} := \beta_{\sigma'_K} + \beta_{\sigma'_L}. \quad (2.113)$$

On définit ensuite les valeurs (upwind)  $^+$  et (downwind)  $^-$  de  $\beta_\sigma$  et  $\beta_{\sigma'}$  par  $\beta_\sigma^\pm = (\beta_\sigma \pm |\beta_\sigma|)/2$  et  $\beta_{\sigma'}^\pm = (\beta_{\sigma'} \pm |\beta_{\sigma'}|)/2$  respectivement. Les valeurs de  $F_\sigma^c$  et  $F_{\sigma'}^c$  sont alors données par

$$F_\sigma^c = |\sigma|(\beta_\sigma^+ u_K^n + \beta_\sigma^- u_L^n), \quad (2.114)$$

$$F_{\sigma'}^c = (|\sigma'_K| \beta_{\sigma'_K} + |\sigma'_L| \beta_{\sigma'_L})^+ u_{s_{\sigma,1}}^n + (|\sigma'_K| \beta_{\sigma'_K} + |\sigma'_L| \beta_{\sigma'_L})^- u_{s_{\sigma,2}}^n. \quad (2.115)$$

**Remarque 2.8** (Flux de convection). *On note que le flux de convection ainsi défini n'est pas exactement celui qui a été proposé par Coudière et Manzini [39], la différence (mineure) portant sur le fait que, pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}^n$ ,  $F_\sigma^c$  est défini comme étant la somme des valeurs pondérées de  $\beta_{\sigma'_K}$  et  $\beta_{\sigma'_L}$  au lieu de la valeur pondérée de la somme. Coudière et Manzini [39] proposent également un flux de convection d'ordre plus élevé basé sur une reconstruction d'ordre 1 de la solution, basée sur des gradients par cellule (primale ou duale) calculés comme moyenne des gradients DDFV des cellules diamants qui intersectent la cellule (primale ou duale) considérée.*

Le schéma volumes finis correspondant à la méthode DDFV est donné par : Pour tout  $1 \leq n \leq N$ , chercher  $(\bar{u}_h^n) = ((u_K^n), (u_s^n))_{(K,s) \in \mathcal{T}_*^n \times \mathcal{V}^n}$  tel que

$$\frac{1}{\tau^n} (u_K^n - u_K^{n-1}) + (\nabla_h^{n,\mathcal{T}} \cdot (\mathbf{F}_h^c(u_h^n) + \mathbf{F}_h^d(u_h^n)))_K + r_K^n u_K^n = f_K^n \quad \forall K \in \mathcal{T}^n, \quad (2.116)$$

$$\frac{1}{\tau^n} (u_s^n - u_s^{n-1}) + (\nabla_h^{n,\mathcal{V}} \cdot (\mathbf{F}_h^c(u_h^n) + \mathbf{F}_h^d(u_h^n)))_s + r_s^n u_s^n = f_s^n \quad \forall s \in \mathcal{V}_{\text{int}}^n, \quad (2.117)$$

où  $r_K^n$  et  $f_K^n$  sont respectivement donnés par (1.37) et (1.36), et

$$r_s^n := \frac{1}{\tau^n} \frac{1}{|P_s|} \int_{I^n} \int_{P_s} r(\mathbf{x}, t) dx dt \quad \text{et} \quad f_s^n := \frac{1}{\tau^n} \frac{1}{|P_s|} \int_{I^n} \int_{P_s} f(\mathbf{x}, t) dx dt. \quad (2.118)$$

Les conditions de Dirichlet homogènes sont imposées par

$$u_K^n = 0 \quad \text{pour tout } K \in \mathcal{T}_{\text{ext}}^n, \quad (2.119)$$

$$u_s^n = 0 \quad \text{pour tout } s \in \mathcal{V}_{\text{ext}}^n. \quad (2.120)$$

Le système possède alors  $k + j^{\partial\Omega} + s$  inconnues et le même nombre d'équations données par (2.116)–(2.120).

**Remarque 2.9** (Cas des maillages admissibles). *Si, pour chaque maille diamant  $D_\sigma$ , les segments  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont orthogonaux (ce qui est le cas par exemple pour les maillages de Voronoï ou les maillages admissibles au sens de Eymard, Gallouët et Herbin [56, Définition 9.1]), le schéma se découple en deux sous systèmes et se réduit aux schémas usuels présentés dans [56]. En effet, on obtient  $\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}'_\sigma = 0$  et  $|D_\sigma| = \frac{|\sigma||\sigma'|}{2}$ , si bien que*

$$(\nabla_h^n \bar{u}_h^n)_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = \frac{u_L^n - u_K^n}{|\sigma'|}, \quad (2.121)$$

ce qui est une évaluation avec une différence finie de la composante normale du gradient sur  $\sigma$ .



# Algorithme et résultats numériques

---

## Sommaire

<b>3.1 Algorithme adaptatif</b> . . . . .	<b>51</b>
3.1.1 Structure globale . . . . .	52
3.1.2 Techniques de marquage, de raffinement et de déraffinement . . . . .	54
3.1.3 Algorithme . . . . .	57
<b>3.2 Résultats numériques</b> . . . . .	<b>64</b>
3.2.1 Cas test avec solution analytique . . . . .	64
3.2.2 Cas test avec couche intérieure et couche limite . . . . .	84

---

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 3.1, on commence par présenter une structure générale d'un algorithme adaptatif pour un problème instationnaire et on décrit les différentes techniques de marquage, de raffinement et de déraffinement présentes dans la littérature avant d'exposer l'algorithme développé dans le cadre de cette thèse. Dans la section 3.2, on présente deux cas tests, un premier avec solution analytique et un deuxième avec une couche intérieure et une couche limite.

## 3.1 Algorithme adaptatif

Notre but est de concevoir un algorithme permettant de garantir que l'erreur (relative) en norme d'énergie entre la solution exacte et la solution approchée est inférieure à une certaine tolérance donnée. On rappelle la borne supérieure obtenue dans le Corollaire 2.1 :

$$\|u - u_{h,\tau}\|_{\tau,X} \leq \left\{ \sum_{n=1}^N \{(\eta_{\text{sp}}^n)^2 + (\eta_{\text{tm}}^n)^2\} \right\}^{1/2} + \eta_{\text{C}},$$

où, pour tout  $1 \leq n \leq N$ ,

$$(\eta_{\text{sp}}^n)^2 := 2 \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \left\{ \tau^n (\eta_{\text{R},K}^n + \eta_{\text{F},1,K}^n)^2 + \int_{I^n} (\eta_{\text{NC},K}^n)^2(t) dt \right\}, \quad (3.1)$$

$$(\eta_{\text{tm}}^n)^2 := 2 \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \left\{ \frac{\tau^n}{3} \|\mathbf{S}^{\frac{1}{2}} \nabla (s_h^n - s_h^{n-1}) - \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\beta} (s_h^n - s_h^{n-1})\|_K^2 \right\} + \int_{I^n} (\eta_{\text{Q}}^n(t))^2 dt, \quad (3.2)$$

avec

$$\eta_{\mathbb{R},K}^n := m_K^n \|\tilde{f}^n - \partial_t^n s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - r_K^n s_h^n\|_K, \quad (3.3)$$

$$\eta_{\mathbb{F},1,K}^n := \|\mathbf{S}^{\frac{1}{2}} \nabla s_h^n + \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\theta}_h^n - \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\beta} s_h^n + \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\psi}_h^n\|_K, \quad (3.4)$$

$$\eta_{\mathbb{NC},K}^n(t) := \| |u_{h,\tau}(t) - s_{h,\tau}(t)| \|_K, \quad (3.5)$$

$$\eta_{\mathbb{Q}}^n(t) := \bar{m}^n \|f(t) - \tilde{f}^n - r s_{h,\tau}(t) + \bar{r}_h^n s_h^n\|. \quad (3.6)$$

On souhaite que l'erreur relative soit inférieure à une tolérance  $\varepsilon > 0$  donnée. Ceci se traduit par l'inégalité suivante :

$$\|u - u_{h,\tau}\|_{\tau,X} \leq \varepsilon \|u_{h,\tau}\|_{\tau,X}. \quad (3.7)$$

En ce qui concerne l'indicateur de la condition initiale, on suppose que

$$\eta_{\mathbb{IC}} \leq \varepsilon' \|u_{h,\tau}\|_{\tau,X}, \quad (3.8)$$

où, pour simplifier,  $\varepsilon'$  est une tolérance négligeable par rapport à  $\varepsilon$ . Dans le but d'obtenir (3.7), on impose

$$\frac{\left\{ \sum_{n=1}^N \{(\eta_{\text{sp}}^n)^2 + (\eta_{\text{tm}}^n)^2\} \right\}^{1/2}}{\|u_{h,\tau}\|_{\tau,X}} \leq \varepsilon. \quad (3.9)$$

On définit la norme  $\|u_{h,\tau}\|_{\tau,X}$  sur les différents pas de temps, ce qui donne

$$\|u_{h,\tau}\|_{\tau,X}^2 = \sum_{n=1}^N \|u_{h,\tau}\|_{X(t^{n-1},t^n)}^2, \quad (3.10)$$

avec

$$\|u_{h,\tau}\|_{X(t^{n-1},t^n)}^2 := \int_{I^n} \| |u_{h,\tau}(t)| \| ^2 dt. \quad (3.11)$$

L'objectif est alors, pour un temps discret  $t^{n-1}$ , de construire le maillage  $\mathcal{T}^n$  et de choisir le pas de temps  $\tau^n$  de façon à vérifier les deux inégalités suivantes :

$$\eta_{\text{sp}}^n \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon \|u_{h,\tau}\|_{X(t^{n-1},t^n)}, \quad (3.12)$$

$$\eta_{\text{tm}}^n \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon \|u_{h,\tau}\|_{X(t^{n-1},t^n)}. \quad (3.13)$$

### 3.1.1 Structure globale

À un temps discret  $t^{n-1}$  donné, l'algorithme adaptatif en espace possède la structure générale suivante :

- (e1) Considérer pour  $\mathcal{T}^n$  le maillage initial  $\mathcal{T}^{n-1}$ . Poser  $k := 0$  et  $\mathcal{T}_k := \mathcal{T}^{n-1}$ .
- (e2) Résoudre le problème sur  $\mathcal{T}_k$ .
- (e3) Pour tout  $K \in \mathcal{T}_k$ , calculer les indicateurs d'espace locaux  $\eta_{\text{sp},K}^n$  ainsi que l'indicateur d'espace global  $\eta_{\text{sp}}^n$ .

- (e4) Si l'estimateur global  $\eta_{\text{sp}}^n$  vérifie (3.12), alors **arrêter** et poser  $\mathcal{T}^n := \mathcal{T}_k$ .  
Sinon, choisir les éléments à raffiner et construire le nouveau maillage  $\mathcal{T}_{k+1}$ .  
Remplacer  $k$  par  $(k + 1)$  et reprendre à l'étape (e2).

Le problème étant instationnaire, deux nouveaux points doivent être considérés :

- (t1) Le processus de raffinement doit combiner le contrôle du pas d'espace et du pas de temps.  
(t2) Des déraffinements dans certaines régions du maillage peuvent être souhaitables lorsque la solution évolue en temps.

On va alors considérer la stratégie globale suivante :

- (et1) Pour un pas de temps donné, raffiner adaptativement le maillage en utilisant les étapes (e1)–(e4).  
(et2) Si (3.13) n'est pas vérifié, raffiner le pas de temps et reprendre l'étape (et1). Sinon, déraffiner adaptativement le maillage et passer au temps discret suivant.

Deux aspects importants de la stratégie globale ci-dessus doivent être considérés plus en détail au niveau de l'implémentation.

- Dans le cas où la tolérance  $\varepsilon$  est très petite, l'algorithme peut exiger un temps de calcul élevé et peut éventuellement rentrer dans une boucle très longue dans le but d'assurer le contrôle de l'erreur par (3.7). On introduit alors les niveaux maximaux de raffinement en espace  $N_{\text{sp}}$  et en temps  $N_{\text{tm}}$  qui ne peuvent pas être dépassés par l'algorithme.
- Souvent, le déplacement des zones de singularité dans le domaine nécessite plusieurs pas de temps pour traverser les mailles où le maillage est couramment raffiné. Il n'est donc pas intéressant de déraffiner le maillage à chaque pas de temps. Ainsi, on effectuera un déraffinement du maillage après un certain nombre de pas de temps. Ceci permet d'alléger le temps de calcul sans nuire à la qualité de la solution calculée.

Un dernier point essentiel que l'algorithme doit vérifier est l'équilibre des deux composantes de l'erreur, spatiale et temporelle. Comme les deux indicateurs  $\eta_{\text{sp}}^n$  et  $\eta_{\text{tm}}^n$  sont complètement calculables, ceci est possible dans notre cas. On choisit alors un paramètre  $\gamma_{\text{equ}} \in (0, 1)$ . Les conditions utilisées pour équilibrer les indicateurs  $\eta_{\text{sp}}^n$  et  $\eta_{\text{tm}}^n$  sont les suivantes :

$$(\gamma_{\text{equ}})^{-1} \eta_{\text{tm}}^n \geq \eta_{\text{sp}}^n \geq \gamma_{\text{equ}} \eta_{\text{tm}}^n. \quad (3.14)$$

Ainsi, les maillages et les pas de temps seront choisis de telle sorte que les conditions (3.12), (3.13) et (3.14) soient vérifiées.

### 3.1.2 Techniques de marquage, de raffinement et de déraffinement

Disposant d'un estimateur d'erreur *a posteriori*, la question qui se pose est de décider quels éléments du maillage doivent être raffinés ou déraffinés : on parle de technique de marquage. Il faut ensuite choisir les techniques de raffinement et de déraffinement des éléments qui ont été marqués.

#### 3.1.2.1 Critères de marquage

On trouve dans la littérature plusieurs techniques de marquage.

La stratégie dite *du maximum* consiste à poser

$$\eta_{\max}^n := \max_{K \in \mathcal{T}^n} \eta_{\text{sp},K}^n. \quad (3.15)$$

Un élément  $K \in \mathcal{T}^n$  est alors marqué pour raffinement si

$$\eta_{\text{sp},K}^n \geq \gamma_{\text{ref}} \eta_{\max}^n, \quad (3.16)$$

où  $\gamma_{\text{ref}} \in (0, 1)$  est donné. Cette stratégie sélectionne les éléments dont la valeur de l'indicateur est plus grande que l'indicateur maximal multiplié par le paramètre  $\gamma_{\text{ref}}$ . Pour des valeurs élevées de  $\gamma_{\text{ref}}$  (proches de 1), la stratégie devient très sélective alors que les valeurs petites de  $\gamma_{\text{ref}}$  (proches de 0) correspondent au choix d'une grande partie des éléments du maillage. Typiquement, une valeur de  $\gamma_{\text{ref}} = 0.5$  est utilisée ; voir, par exemple, Verfürth [104]. Inversement, un élément  $K$  est marqué pour déraffinement si

$$\eta_{\text{sp},K}^n \leq \gamma_{\text{deref}} \eta_{\max}^n, \quad (3.17)$$

avec  $0 < \gamma_{\text{deref}} < \gamma_{\text{ref}}$ .

Une autre stratégie dite *à la Dörfler* ou *Guaranteed Error Reduction Strategy* a été proposée par Dörfler [46] dans le cadre des approximations par éléments finis pour l'équation de Poisson. Un ensemble de mailles  $\mathcal{M}_{\text{ref}}^n \subset \mathcal{T}^n$  est marqué pour raffinement si

$$\eta_{\mathcal{M}_{\text{ref}}^n} \geq \gamma_{\text{ref}} \eta_{\text{sp}}^n, \quad (3.18)$$

où  $\eta_{\mathcal{M}_{\text{ref}}^n} := \left\{ \sum_{K \in \mathcal{M}_{\text{ref}}^n} (\eta_{\text{sp},K}^n)^2 \right\}^{1/2}$  et  $\gamma_{\text{ref}} \in (0, 1)$ . Dörfler montre que cette stratégie permet de réduire l'erreur à chaque étape de raffinement par un facteur donné, étant donné un maillage initial suffisamment fin. La condition sur le maillage initial est donnée explicitement. Inversement, un ensemble de mailles  $\mathcal{M}_{\text{deref}}^n \subset \mathcal{T}^n$  est marqué pour déraffinement si

$$\eta_{\mathcal{M}_{\text{deref}}^n} \leq \gamma_{\text{deref}} \eta_{\text{sp}}^n, \quad (3.19)$$

où  $0 < \gamma_{\text{deref}} < \gamma_{\text{ref}}$ , cf. Dörfler [47].

La *stratégie d'équidistribution* (Eriksson et Johnson [49]) consiste à marquer l'ensemble  $\mathcal{M}_{\text{ref}}^n \subset \mathcal{T}^n$  vérifiant la condition suivante : Soit  $\eta > 0$  une tolérance donnée pour  $\eta_{\text{sp}}^n$ . Un élément  $K$  appartient à  $\mathcal{M}_{\text{ref}}^n$  si

$$\eta_{\text{sp},K}^n \geq \frac{\gamma_{\text{ref}} \eta}{\sqrt{|\mathcal{T}^n|}}, \quad (3.20)$$

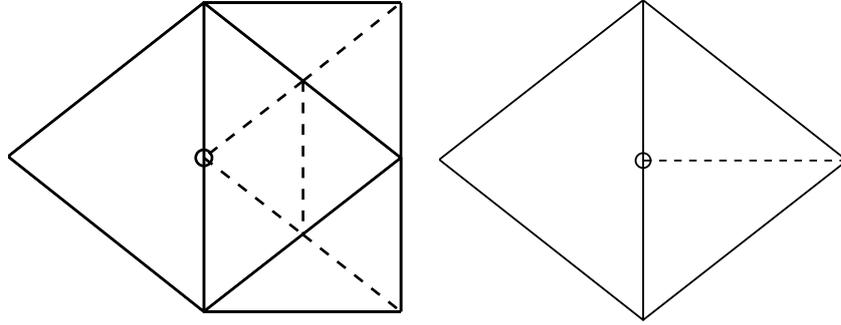


FIGURE 3.1 – Raffinement (R2) à gauche et (R1) à droite ; nœuds orphelins notés par  $\circ$ .

où  $|\mathcal{T}^n|$  désigne le nombre d'éléments du maillage  $\mathcal{T}^n$  et  $\gamma_{\text{ref}} \in (0, 1)$  (en général  $\gamma_{\text{ref}} \approx 1$ ), et un élément  $K$  appartient à  $\mathcal{M}_{\text{deref}}^n$  si

$$\eta_{\text{sp},K}^n \leq \frac{\gamma_{\text{deref}} \eta}{|\mathcal{T}^n|}, \quad (3.21)$$

où  $\gamma_{\text{deref}} \in (0, 1)$ . Cette stratégie est basée sur l'idée d'une équidistribution de l'erreur locale sur tous les éléments du maillage motivée par Babuška et Rheinboldt [16]. On retrouve également la *stratégie d'équidistribution modifiée*. Dans la condition (3.20), la tolérance  $\eta > 0$  est remplacée par  $\eta_{\text{sp}}^n$  et la condition de marquage d'un élément  $K \in \mathcal{T}^n$  sera la suivante :

$$\eta_{\text{sp},K}^n \geq \frac{\gamma_{\text{ref}} \eta_{\text{sp}}^n}{|\mathcal{T}^n|}. \quad (3.22)$$

Il existe également d'autres techniques de marquage comme celle introduite par Jarausch [65] et la stratégie d'extrapolation introduite par Babuška et Rheinboldt [16]. Dans cette thèse, on utilise la stratégie du maximum.

### 3.1.2.2 Techniques de raffinement

Pour des maillages triangulaires, il existe essentiellement deux stratégies de raffinement permettant de préserver la régularité du maillage :

- (R1) Diviser les triangles en joignant le milieu de l'arête la plus longue au sommet opposé à cette arête (*longest edge bisection*).
- (R2) Diviser les triangles en 4 en joignant les milieux des 3 arêtes (*regular refinement*).

Dans cette thèse, on utilise la stratégie (R2) ou raffinement régulier décrite par Bank [19], Bank, Sherman et Weiser [21], Bank [20] et Verfürth [103]. Elle possède l'avantage que les sous-triangles provenant du raffinement d'un triangle "père" sont

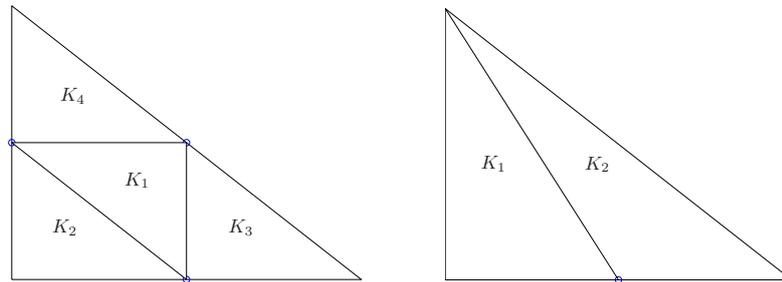


FIGURE 3.2 – Raffinement rouge (à gauche) et raffinement vert (à droite).

géométriquement similaires à celui-ci. La stratégie (R1) est décrite en détail par Rivara [96].

La stratégie (R2) (tout comme la stratégie (R1)) introduit dans un premier temps des nœuds orphelins; voir figure 3.1. Pour maintenir la conformité du maillage, on rajoute une étape supplémentaire dans le processus de raffinement. On dit que la division d'un triangle suit un raffinement vert si le triangle est divisé en deux en joignant le milieu d'un côté au sommet opposé à ce côté. Un raffinement régulier est appelé, par opposition, raffinement rouge. Ces deux raffinements sont illustrés à la figure 3.2. Une possibilité permettant d'assurer la conformité du maillage est que le processus de raffinement suive les règles suivantes :

- (RR1) Un triangle possédant 2 ou 3 nœuds orphelins est divisé par un raffinement rouge.
- (RR2) Un triangle possédant un nœud orphelin est divisé par un raffinement vert.
- (RR3) Un triangle, déjà divisé par un raffinement vert et possédant un nœud orphelin, doit être divisé par un raffinement rouge.

La règle (RR3) vise à maintenir le nombre de triangles divisés par un raffinement vert le plus petit possible.

**Remarque 3.1** (Autre stratégie de raffinement). *On peut également marquer les arêtes plutôt que les éléments et diviser les triangles en joignant le milieu d'une arête marquée au sommet opposé à cette arête (marked edge bisection), voir par exemple Kossaczky [70].*

### 3.1.2.3 Techniques de déraffinement

En ce qui concerne le déraffinement, on considère les règles suivantes :

- (D1) Les raffinements verts sont inversés : ce processus consiste à refusionner les deux triangles issus d'un raffinement vert (introduits suivant la règle (RR2) pour supprimer les nœuds orphelins provenant des raffinements rouges) en

Paramètre	Signification
$N_{sp}$	Niveau maximal de raffinement en espace
$N_{tm}$	Niveau maximal de raffinement en temps
$\gamma_{ref}$	Pourcentage de mailles pour le raffinement en espace
$\gamma_{deref}$	Pourcentage de mailles pour le déraffinement en espace
$\gamma_{equi}$	Paramètre de comparaison de $\eta_{sp}^n$ et $\eta_{tm}^n$
DerefTm	Pourcentage de l'erreur pour le déraffinement en temps
StepsSpRef	Nombre de pas de temps pour le raffinement en espace
StepsSpDeref	Nombre de pas de temps pour le déraffinement en espace
StepsTmDeref	Nombre de pas de temps pour le déraffinement en temps

TABLE 3.1 – Paramètres de l'algorithme.

Variable	Signification
$N_{el}$	Nombre d'éléments du maillage $\mathcal{T}^n$
ItSpRefIni	Numéro de l'itération de raffinement du maillage initial
ElemNref	Tableau du niveau de raffinement des éléments du maillage
LevTmRef	Niveau de raffinement en temps
ItSpRef	Numéro de l'itération de raffinement du maillage
Crit	$\frac{\varepsilon \ u_{h,\tau}\ _{X(t^{n-1}, t^n)}}{\sqrt{2}}$

TABLE 3.2 – Variables de l'algorithme.

leur triangle “père”.

- (D2) Un élément est déraffiné uniquement s'il provient d'un raffinement précédent. En d'autres termes, les éléments du maillage initial ne peuvent pas être déraffinés.
- (D3) Le déraffinement ne se produit que si les 4 triangles provenant d'un raffinement rouge d'un élément “père” sont marqués pour déraffinement.
- (D4) À l'issue de l'étape de déraffinement, un raffinement suivant les règles (RR1)–(RR3) est utilisé pour supprimer les éventuels nœuds orphelins.

**Remarque 3.2** (Règle (D4)). *Il est possible que des triangles marqués pour déraffinement ne soient pas in fine déraffinés. Ceci se produit dans le cas où le déraffinement conduit à deux nœuds orphelins, ce qui demande à l'étape (RR1) un raffinement rouge pour maintenir la conformité du maillage.*

### 3.1.3 Algorithme

Les différents paramètres de l'algorithme sont donnés dans le tableau 3.1, et les variables utilisées sont données dans le tableau 3.2.

### 3.1.3.1 Initialisation

On choisit un maillage de départ  $\mathcal{T}^0$ . Ce maillage est construit de façon à ce que la condition initiale  $u_0$  et sa reconstruction  $H_0^1(\Omega)$ -conforme  $s_h^0$  vérifient (3.8). La construction de ce maillage se fait à l'aide d'une boucle permettant le raffinement adaptatif du maillage de départ en utilisant l'indicateur  $\eta_{IC}$  :

```

while ( $\eta_{IC} \geq \text{CritIni}$  &  $\text{ItSpRefIni} \leq N_{\text{sp}}$ )
  if ( $\text{ItSpRefIni} > 0$ )
     $\mathcal{M}_{\text{ref}} = \text{markElementsIni}(\mathcal{T}^0, (\eta_{IC})_{K \in \mathcal{T}^0})$ 
     $\mathcal{T}^0 = \text{refineInitialGrid}(\mathcal{M}_{\text{ref}}, \mathcal{T}^0)$ 
     $\text{makePdemesh}$ 
  end
   $u_h^0 = \text{makePostInit}(u_0)$ 
   $s_h^0 = \text{conformSol}(u_h^0, \mathcal{T}^0)$ 
   $(\eta_{IC}, (\eta_{IC})_{K \in \mathcal{T}^0}) = \text{calculateEstimatorIni}(u_0, s_h^0, \mathcal{T}^0)$ 
   $\text{CritIni} = \varepsilon'$ 
   $\text{ItSpRefIni} = \text{ItSpRefIni} + 1$ 
end

```

où les valeurs initiales des paramètres sont données par

```

CritIni = 1
 $\eta_{IC} = 1$ 
ItSpRefIni = 0

```

permettant ainsi une entrée pour au moins une fois dans la boucle. Dans cette boucle `while`, on a plusieurs fonctions :

`markElementsIni` choisit les éléments qu'il faut raffiner en fonction de la valeur des indicateurs  $\eta_{IC,K}$  de l'élément  $K$  ainsi que le niveau de raffinement de chaque élément donné par le tableau `ElemNref`. En particulier, la valeur de l'indicateur en cet élément doit vérifier  $\eta_{IC,K} > \gamma_{\text{ref}} * \max_{K \in \mathcal{T}^0}(\eta_{IC,K})$  et aussi que le niveau de raffinement `ElemNref(K)` est plus petit que le niveau maximal permis  $N_{\text{sp}}$  ;

`refineInitialGrid` raffine les éléments marqués par `markElementsIni` et ajuste le niveau de raffinement `ElemNref` des éléments raffinés ;

`makePdemesh` crée les éléments de la géométrie nécessaires à la résolution du problème, à l'évaluation des indicateurs et au calcul de la solution post-traitée et de la solution conforme ;

`makePostInit` construit  $u_h^0$  en faisant une projection de la condition initiale  $u_0$  sur l'espace  $V_h^0$ , l'espace des solutions post-traitées par la formule (2.30) ;

`conformSol` construit  $s_h^0$ , l'interpolation conforme de  $u_h^0$ , par la formule (2.49) et ceci en assurant que les moyennes de l'interpolation conforme et de  $u_h^0$  sont égales sur tous les éléments du maillage par l'utilisation des fonctions bulles ;

`calculateEstimatorIni` calcule l'indicateur  $\eta_{IC}$  défini par (2.65) en fonction de la condition initiale  $u_0$  et de l'interpolé conforme  $s_h^0$  et retourne la valeur globale de l'indicateur  $\eta_{IC}$  ainsi que sa valeur locale en chaque élément du maillage  $\eta_{IC,K}$  ;

Une fois sortis de la boucle, on pose  $\mathcal{T}^0$  le dernier maillage obtenu.

### 3.1.3.2 Boucle en temps

On initialise d'abord tous les paramètres utilisés dans la boucle en temps de l'algorithme. En particulier, on choisit un pas de temps initial  $\tau^1$ , et on pose

$$t^0 := 0 \text{ et } t^1 := \tau^1,$$

$$n := 1 \text{ et } \mathcal{T}^1 := \mathcal{T}^0,$$

$$\text{LevTmRef} := 0,$$

$$\eta := 0, \eta_{NC} := 0, \eta_Q := 0, \eta_R := 0 \text{ et } \eta_F := 0,$$

$$\eta_{sp} := 0 \text{ et } \eta_{tm} := 0,$$

$$\text{Count} := 0,$$

$$\eta_{sp,a}^1 := 1 \text{ et } \eta_{tm,a}^1 := 0,$$

où, de façon plus générale, pour tout  $1 \leq n \leq N$ ,  $\eta_{sp,a}^n$  et  $\eta_{tm,a}^n$  sont donnés par

$$\eta_{sp,a}^n := \frac{\eta_{sp}^n}{\sqrt{\tau^n}}, \quad (3.23)$$

$$\eta_{tm,a}^n := \frac{\eta_{tm}^n}{\sqrt{\tau^n}}. \quad (3.24)$$

Ces quantités sont introduites dans le but d'obtenir deux grandeurs comparables car les indicateurs spatial  $\eta_{sp}^n$  et temporel  $\eta_{tm}^n$  peuvent avoir été calculés avec des valeurs de  $\tau^n$  différentes. La boucle en temps constitue le corps du code. À chaque pas de temps  $t^n$ , la forme générale d'une étape de cette boucle est de la forme

Résoudre  $\rightarrow$  Estimer  $\rightarrow$  Marquer  $\rightarrow$  Raffiner/Déraffiner.

Cette boucle est destinée à être répétée jusqu'à ce que les conditions (3.12)–(3.13) soient assurées. Cependant, comme on a spécifié un niveau maximal de raffinement, cette boucle peut être arrêtée prématurément sans que cette condition soit vérifiée.

Le code de la boucle en temps est donné ci-dessous (il s'agit d'avancer de  $t^{n-1}$  à  $t^n$ ) :

```
while ( $t^n \leq T$ )
   $\eta_{sp}^n := 1$ 
  Crit := 1
  ItSpRef := 1
  loopInitialization
  while ( $\eta_{sp}^n \geq \text{Crit} \ \& \ \text{ItSpRef} \leq N_{sp} + 1 \ \& \ \eta_{sp,a}^n > \gamma_{equi} * \eta_{tm,a}^n$ )
    if ((ItSpRef > 1) & Count  $\equiv$  StepsSpRef)
```

```

        refineSpace
    end
    solveEstimate
     $\eta_{sp,a}^n = \eta_{sp}^n / \sqrt{\tau^n}$ 
    Crit =  $\varepsilon * \text{SolNorm} / \sqrt{2}$ 

    if (Count  $\equiv$  StepsSpRef)
        ItSpRef = ItSpRef + 1
    else
        break
    end
end
 $\eta_{tm,a}^n = \eta_{tm}^n / \sqrt{\tau^n}$ 

if ( $\eta_{tm}^n \geq \text{Crit} \ \& \ \text{LevTmRef} < N_{tm} \ \& \ \eta_{tm,a}^n > \gamma_{\text{equi}} * \eta_{sp,a}^n$ )
     $t^n := t^n - \tau^n$ 
    refineTime
else
    Count=Count+1
    calculateGlobalEstimators
    if (Count  $\equiv$  StepsSpDeref)
        coarsenSpace
    end
    if (Count  $\equiv$  StepsTmDeref &  $\eta_{tm,a}^n < \text{DerefTm} * \gamma_{\text{equi}} * \eta_{sp,a}^n$ )
        coarsenTime
    end
     $\mathcal{T}^{n+1} := \mathcal{T}^n$ 
end
adjustTimeStep
 $t^{n+1} := t^n + \tau^n$ 
n := n + 1
end

```

Cette boucle est formée de plusieurs fonctions.

1. La fonction `loopInitialization` initialise les paramètres nécessaires à la procédure de raffinement en espace. Elle sauvegarde également les données relatives à la solution et au maillage pour une restauration possible dans le cas d'un raffinement en temps. Elle possède la structure suivante :

```

 $\mathcal{T}^k := \mathcal{T}^n$ 
makeInit
makePdemesh

```

où

`makeInit` enregistre les données de départ pour une restauration possible dans le cas où la composante principale de l'erreur est temporelle et non spatiale ;

`makePdemesh` est définie en section 3.1.3.

2. La fonction `solveEstimate` regroupe les étapes de résolution et de l'estimation. Au premier passage dans la boucle interne, on résout le système (2.29) sur le maillage  $\mathcal{T}^k$ , et on estime l'erreur sur ce maillage. La structure globale est la suivante :

$$\begin{aligned} \bar{u}_h^n &= \text{solveProb}(u_h^{n-1}, \mathcal{T}^k) \\ (\theta_h^n, \psi_h^n) &= \text{calculateFlux}(\bar{u}_h^n) \\ u_h^n &= \text{postprocessSol}(\theta_h^n, \bar{u}_h^n) \\ s_h^n &= \text{conformSol}(u_h^n) \\ \|u_{h,\tau}\|_{X(t^{n-1}, t^n)} &= \text{calculateNorm}(u_h^{n-1}, u_h^n) \\ (\eta_{R,K}^n, \eta_{F,K}^n, \eta_{NC,K}^n) &= \text{calculateEstimators}(u_h^{n-1}, u_h^n, s_h^{n-1}, s_h^n, \theta_h^n, \psi_h^n) \end{aligned}$$

avec les sous-fonctions suivantes :

`solveProb` résout le problème sur un maillage donné. Cette résolution est faite par la méthode des volumes finis. Cette fonction contient plusieurs étapes : l'envoi de la géométrie et de la solution post-traitée  $u_h^{n-1}$  au temps discret  $t^{n-1}$ , le calcul des coefficients de la matrice, du second membre et la résolution du système linéaire dans Matlab ;

`calculateFlux` calcule les flux de convection et de diffusion donnés par la méthode des volumes finis telle que décrite dans la section 2.2.2. Elle est consituée de plusieurs étapes : le calcul des flux numériques à partir de la solution au temps discret  $t^n$  et la reconstruction du flux de diffusion  $\theta_h^n$  et du flux de convection  $\psi_h^n$  à partir des flux numériques provenant de la méthode volumes finis par les formules (2.34) et (2.35) ;

`postprocessSol` reconstruit  $u_h^n$ , la solution post-traitée, en utilisant la reconstruction du flux de diffusion et la solution constante par morceaux donnée par la méthode des volumes finis selon les équations (2.40) et (2.41) ;

`conformSol` reconstruit la solution conforme  $s_h^n$  associée à la solution post-traitée  $u_h^n$  par la formule (2.49), assurant ainsi que les moyennes de  $s_h^n$  et de  $u_h^n$  sont égales sur tous les éléments du maillage par l'utilisation des fonctions bulles ;

`calculateNorm` calcule la norme de la solution post-traitée  $u_{h,\tau}$  sur l'intervalle de temps  $I^n$  pour calculer le critère d'arrêt ;

`calculateEstimators` calcule les indicateurs  $\eta_Q^n$ ,  $\eta_{R,K}^n$ ,  $\eta_{F,1,K}^n$ ,  $\eta_{F,2,K}^n$  et  $\eta_{NC,K}^n$  en fonction de la solution post-traitée, de la solution conforme et des reconstructions des flux de convection et de diffusion.

**Remarque 3.3** (Méthode volumes finis). *La méthode des volumes finis utilisée est la méthode DDFV. La résolution se fait à l'aide d'un code Fortran développé par P. Omnes dans le cadre de l'équation de Laplace [45] et étendu dans le cadre de cette thèse à l'équation de convection–diffusion instationnaire.*

3. La fonction `refineSpace` permet de marquer les éléments à raffiner, de les raffiner, d'interpoler les données sur le nouveau maillage et de créer les nouveaux éléments de la géométrie. On peut ne pas raffiner à chaque pas de temps mais uniquement aux pas de temps tels que `Count` est multiple de `StepsSpRef` (la notation `Count`  $\equiv$  `StepsSpRef` signifie que `Count` est un multiple entier de `StepsSpRef` et cette condition permet de rester dans ou de sortir de la boucle selon la valeur de `Count`). Dans ce cas, on pourra faire au plus  $N_{\text{sp}}$  raffinements en espace. Elle possède la structure suivante :

```
markElementsRefine
refineInterpolateGrid
makePdesh
changeConf
```

où

`markElementsRefine` marque les éléments à raffiner en fonction de la valeur de l'indicateur  $\eta_{\text{sp}}^n$  ainsi que du niveau de raffinement de chaque élément.

En particulier, il faut que la valeur de l'indicateur en l'élément  $K$  vérifie  $\eta_{\text{sp},K}^n > \gamma_{\text{ref}} * \max_{K \in \mathcal{T}^n}(\eta_{\text{sp},K}^n)$  et aussi que le niveau de raffinement `ElemNref` soit plus petit que le niveau maximal de raffinement fixé ;

`refineInterpolateGrid` raffine les éléments marqués et interpole les différentes fonctions utilisées sur le maillage ;

`changeConf` a pour but de modifier la fonction  $s_h^n$  dans le sens de la remarque 2.5. En particulier, on rappelle que la reconstruction de  $s_h^n$  impose la condition que les moyennes de  $u_h^n$  et  $s_h^n$  soient égales sur tous les éléments du maillage commun  $\mathcal{T}^{n,n+1}$ . Donc, après chaque raffinement, il faut modifier  $s_h^n$  sur les éléments raffinés pour assurer cette condition.

4. Si, après ces  $N_{\text{sp}}$  raffinements en espace, l'erreur en temps est toujours trop grande par rapport au seuil de tolérance fixé, on effectue un raffinement en temps par la fonction `refineTime`

```
 $\tau^n = \tau^n / 2$ 
LevTmRef = LevTmRef + 1
restoreInit
```

qui divise le pas de temps par deux et augmente le niveau de raffinement en temps. La fonction `restoreInit` restaure alors les données de départ, et on résout le problème de nouveau sur le maillage  $\mathcal{T}^n$ . Dans le cas où un raffinement en temps n'est pas effectué, les nouvelles données sont alors enregistrées et le nombre d'inconnues espace-temps est augmenté du nombre d'éléments du maillage final pour le pas de temps donné.

5. Ensuite, la fonction `calculateGlobalEstimators`

$$\begin{aligned}(\eta_Q)^2 &= (\eta_Q)^2 + (\eta_Q^n)^2 \\(\eta_R)^2 &= (\eta_R)^2 + (\eta_R^n)^2 \\(\eta_{NC})^2 &= (\eta_{NC})^2 + (\eta_{NC}^n)^2 \\(\eta_F)^2 &= (\eta_F)^2 + (\eta_F^n)^2 \\(\eta_{sp})^2 &= (\eta_{sp})^2 + 2 * ((\eta_R^n)^2 + (\eta_{F,1}^n)^2 + (\eta_{NC}^n)^2) \\(\eta_{tm})^2 &= (\eta_{tm})^2 + 2 * (\eta_{F,2}^n)^2\end{aligned}$$

permet de calculer la valeur globale des indicateurs.

6. Dans le cas où `Count` est un multiple entier de `StepsSpDeref`, on effectue un déraffinement du maillage par la fonction `coarsenSpace` dont la structure est la suivante

```
markElementsCoarsen
coarsenInterpolateGrid
makePdemesh
```

où

`markElementsCoarsen` marque les éléments à déraffiner en fonction de la valeur de l'indicateur  $\eta_{sp}^n$ . En particulier, il faut que la valeur de l'indicateur en cet élément vérifie  $\eta_{sp,K}^n < \gamma_{deref} * \max_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{sp,K}^n)$  et que cet élément soit préalablement issu d'un raffinement ;

`coarsenInterpolateGrid` déraffine les éléments marqués et interpole les différentes fonctions utilisées sur le maillage.

7. Finalement, la fonction `coarsenTime`

```
if (T - t^n - \tau^n * 2 \ge 0)
  \tau^n = \tau^n * 2
else
  \tau^n = T - t^n
end
LevTmRef = LevTmRef - 1
```

augmente le pas de temps dans le cas où l'erreur spatiale est plus élevée que l'erreur temporelle et ajuste le niveau de raffinement en temps. Dans ce cas, le nouveau pas de temps doit être ajusté de sorte que le temps final ne soit pas dépassé. C'est le cas également de la fonction `adjustTimeStep`

```
if (t^n + \tau^n > T & t^n < T)
  \tau^n = T - t^n
end
```

## 3.2 Résultats numériques

On applique dans cette section les estimations d'erreur *a posteriori* du chapitre 2 et l'algorithme adaptatif présenté dans la section 3.1 à deux problèmes. Le premier a été considéré par Hilhorst et Vohralík [62] avec la méthode des volumes finis centrés par sommet, et le second a été considéré par Houston et Süli [64] pour la discrétisation du problème de convection–diffusion non stationnaire par la méthode de Lagrange–Galerkin.

**Remarque 3.4** (Solveur itératif). *L'approche de raffinement adaptatif en espace-temps peut être combinée avec un solveur linéaire itératif, où l'estimation d'erreur a posteriori prend en compte la solution non exacte du système linéaire et contient un terme supplémentaire relié à cette composante supplémentaire de l'erreur, appelée erreur algébrique. Ainsi, pour gagner plus en temps de calcul, les itérations peuvent être arrêtées lorsque l'erreur algébrique ne contribue plus significativement à l'erreur globale, cf. Jiránek, Strakoš et Vohralík [66]. Cette approche n'est pas poursuivie ici.*

### 3.2.1 Cas test avec solution analytique

On considère un problème modèle dont la solution exacte est connue. On pose

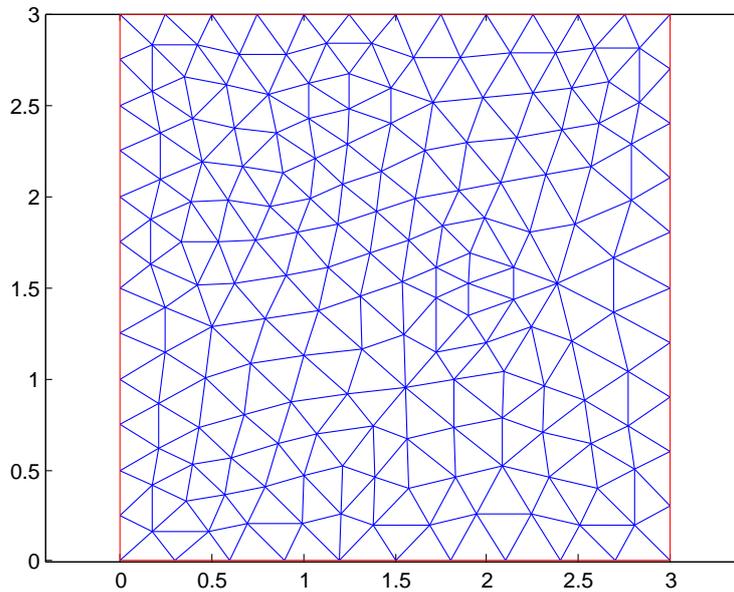
$$\begin{aligned}\Omega &= (0, 3) \times (0, 3), \\ \mathbf{S} &= \nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\beta} &= (\beta_1, \beta_2), \\ r &= 0, \\ f &= 0,\end{aligned}$$

où  $\beta_1 = 0.8$  et  $\beta_2 = 0.4$  sont les deux composantes constantes du vecteur de convection  $\boldsymbol{\beta}$  et le paramètre  $\nu > 0$  détermine la valeur du coefficient de diffusion. On considère les deux cas  $\nu = 10$  et  $\nu = 0.001$ . La condition initiale  $u_0$ , ainsi que la condition de Dirichlet (non homogène) sur la frontière  $\partial\Omega$ , sont données par la solution exacte suivante :

$$u(x, y, t) = \frac{1}{200\nu t + 1} e^{-50 \frac{(x-x_0-\beta_1 t)^2 + (y-y_0-\beta_2 t)^2}{200\nu t + 1}}. \quad (3.25)$$

Cette solution correspond à une Gaussienne centrée au point  $(x_0, y_0)$  au temps  $t = 0$ , déplacée dans le domaine  $\Omega$  par le vecteur convectif  $\boldsymbol{\beta}$ , et diffusant avec une intensité donnée par le paramètre  $\nu$ . On utilise en particulier  $x_0 = 0.33$ ,  $y_0 = 1.125$ . Le temps maximal de simulation est  $T = 1.8$ . L'erreur due à la condition de Dirichlet non homogène est négligée.

On commence par un pas de temps initial  $\tau = 0.2$  et un maillage initial non structuré formé de 336 triangles présenté dans la figure 3.3. On raffine le maillage soit uniformément soit adaptativement. Dans le premier cas, chaque triangle est

FIGURE 3.3 – Maillage initial  $\mathcal{T}^0$  avant raffinement adaptatif.

divisé en quatre sous triangles (raffinement rouge), et le pas de temps est divisé par 2. Dans le deuxième cas, l'algorithme décrit dans la section 3.1 est utilisé.

On choisit  $\text{StepsSpDeref} = 6$ ,  $\text{StepsTmDeref} = 6$ ,  $\text{DerefTm} = 0.5$ ,  $\gamma_{\text{ref}} = 0.5$ ,  $\gamma_{\text{deref}} = 0.05$  et  $\gamma_{\text{equi}} = 0.7$ . On va considérer différentes valeurs de  $N_{\text{sp}}$  et  $N_{\text{tm}}$  (définitions dans le tableau 3.1). Comme on limite le nombre maximal de raffinements en espace et en temps, la tolérance donnée  $\epsilon$  n'est pas nécessairement atteinte.

On considère tout d'abord  $\nu = 0.001$ . Dans ce cas, le problème est fortement dominé par la convection avec un très petit coefficient de diffusion. La valeur maximale de la condition initiale est 1, alors que la valeur maximale au temps  $t = 0.6$  est environ 0.9. La figure 3.4 présente la solution exacte aux temps  $t = 0$ ,  $t = 0.6$ ,  $t = 1.2$  et  $t = 1.8$ . La figure 3.5 présente à ces mêmes temps la solution approchée provenant d'un raffinement uniforme et les figures 3.6, 3.7 et 3.8 présentent, toujours à ces mêmes temps, les solutions approchées provenant d'un raffinement adaptatif (avec  $N_{\text{tm}} = N_{\text{sp}} = 3$ ,  $N_{\text{tm}} = N_{\text{sp}} = 4$  et  $N_{\text{tm}} = N_{\text{sp}} = 5$  respectivement). Les figures 3.6 et 3.7 permettent ainsi de comparer visuellement les stratégies de raffinement adaptatif pour deux niveaux maximaux de raffinement. On observe que dans le premier cas, la diffusion numérique est importante, alors que dans le second cas, la solution approchée commence à mieux capturer la solution exacte, la diffusion numérique restant toutefois relativement importante (voir remarque 3.5). L'augmentation ultérieure des niveaux maximaux de raffinement  $N_{\text{tm}}$  et  $N_{\text{sp}}$  améliore encore les résultats. Les figures 3.5 et 3.7 permettent de comparer les deux stratégies de raffinement : uniforme ou adaptatif. On remarque que, malgré le fait

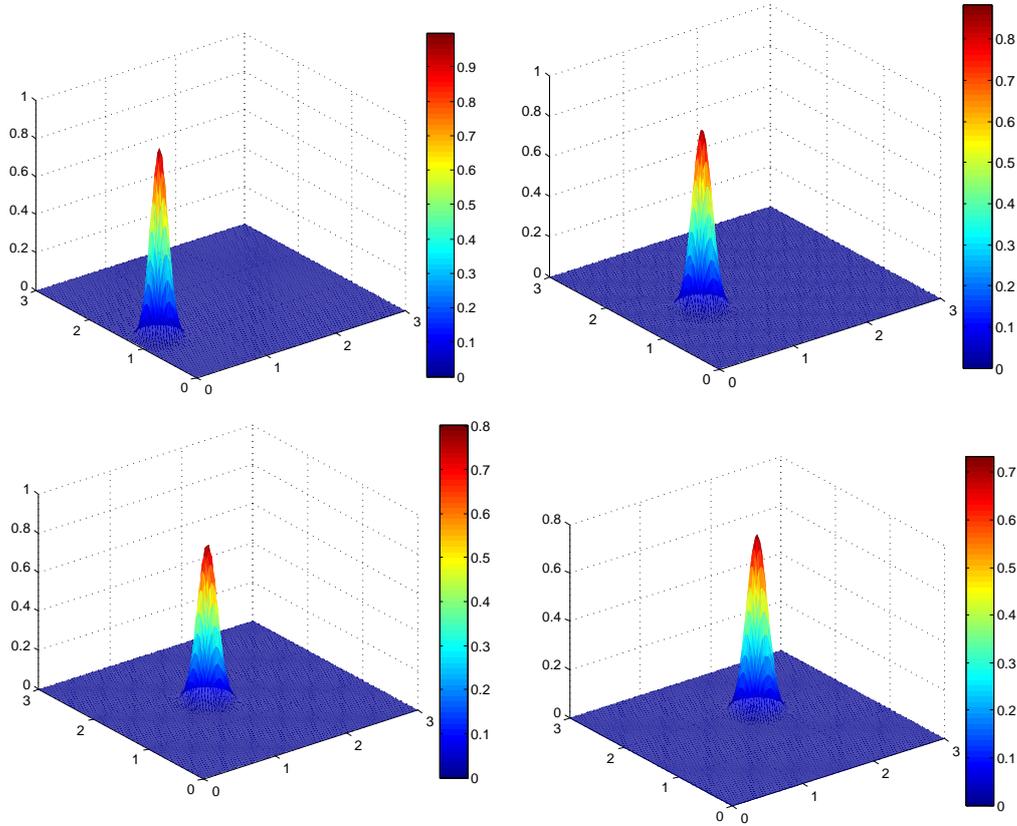


FIGURE 3.4 – Solution exacte pour  $\nu = 0.001$  à  $t = 0$ ,  $t = 0.6$ ,  $t = 1.2$  et  $t = 1.8$ .

que le raffinement uniforme avec  $N_{\text{tm}} = N_{\text{sp}} = 3$  utilise plus d'inconnues que le raffinement adaptatif avec  $N_{\text{tm}} = N_{\text{sp}} = 4$ , l'approche adaptative conduit à de meilleurs résultats.

**Remarque 3.5** (Décentrement utilisant le nombre de Péclet local). *La diffusion numérique excessive provient surtout de l'utilisation du décentrement amont pour le terme de convection. L'utilisation du décentrement utilisant le nombre de Péclet local permet de réduire cette diffusion numérique essentiellement à la quantité minimale nécessaire pour assurer la stabilité du schéma, cf. Eymard, Hilhorst et Vohralík [59].*

La figure 3.9 compare la distribution spatiale de l'erreur réelle (c'est-à-dire évaluée à partir de la solution exacte) avec celle de l'erreur prédite par notre estimation *a posteriori* dans le cas d'un raffinement adaptatif avec  $N_{\text{sp}} = N_{\text{tm}} = 5$  et au temps  $t = 0.3$ . On remarque que la distribution spatiale de l'erreur est correctement prédite : circulaire avec des valeurs plus petites au centre du cercle. Par contre, la localisation de l'erreur n'est pas prédite exactement, l'erreur estimée étant plus étendue. Ceci pourrait provenir du fait que la solution approchée est plus diffusée. L'augmentation des niveaux de raffinement maximaux  $N_{\text{sp}}$  et  $N_{\text{tm}}$

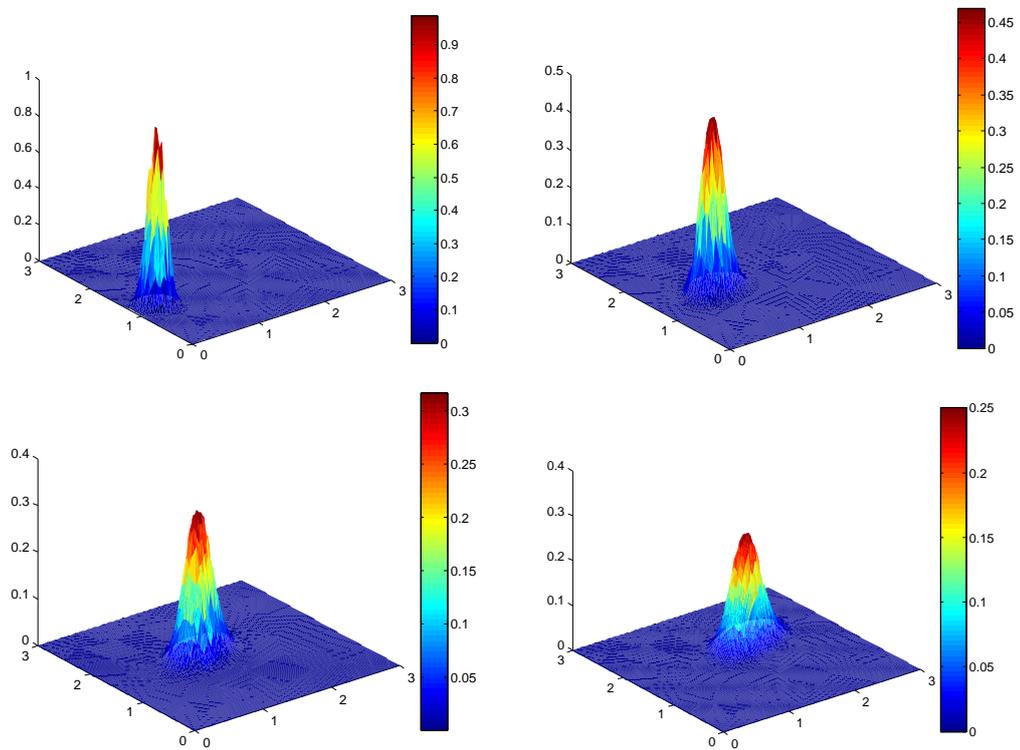


FIGURE 3.5 – Solution approchée obtenue par une stratégie de raffinement uniforme pour  $\nu = 0.001$  et  $N_{\text{sp}} = N_{\text{tm}} = 3$  à  $t = 0$ ,  $t = 0.6$ ,  $t = 1.2$  et  $t = 1.8$ .

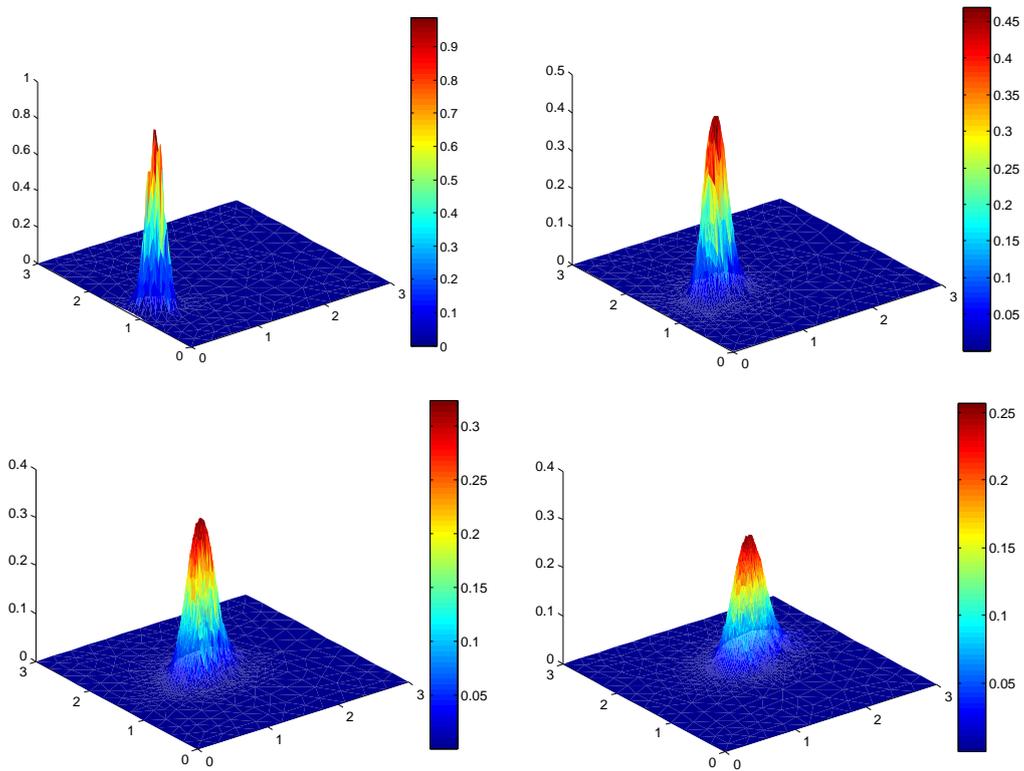


FIGURE 3.6 – Solution approchée obtenue par une stratégie de raffinement adaptatif pour  $\nu = 0.001$  et  $N_{\text{sp}} = N_{\text{tm}} = 3$  à  $t = 0$ ,  $t = 0.6$ ,  $t = 1.2$  et  $t = 1.8$ .

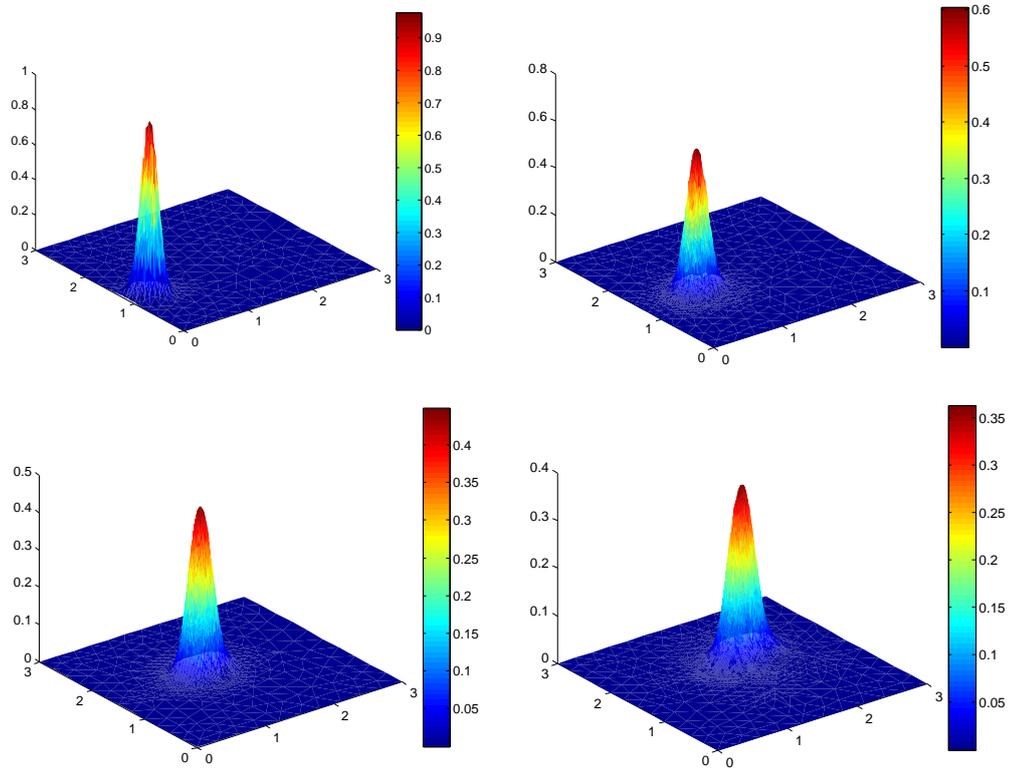


FIGURE 3.7 – Solution approchée obtenue par une stratégie de raffinement adaptatif pour  $\nu = 0.001$  et  $N_{\text{sp}} = N_{\text{tm}} = 4$  à  $t = 0$ ,  $t = 0.6$ ,  $t = 1.2$  et  $t = 1.8$ .

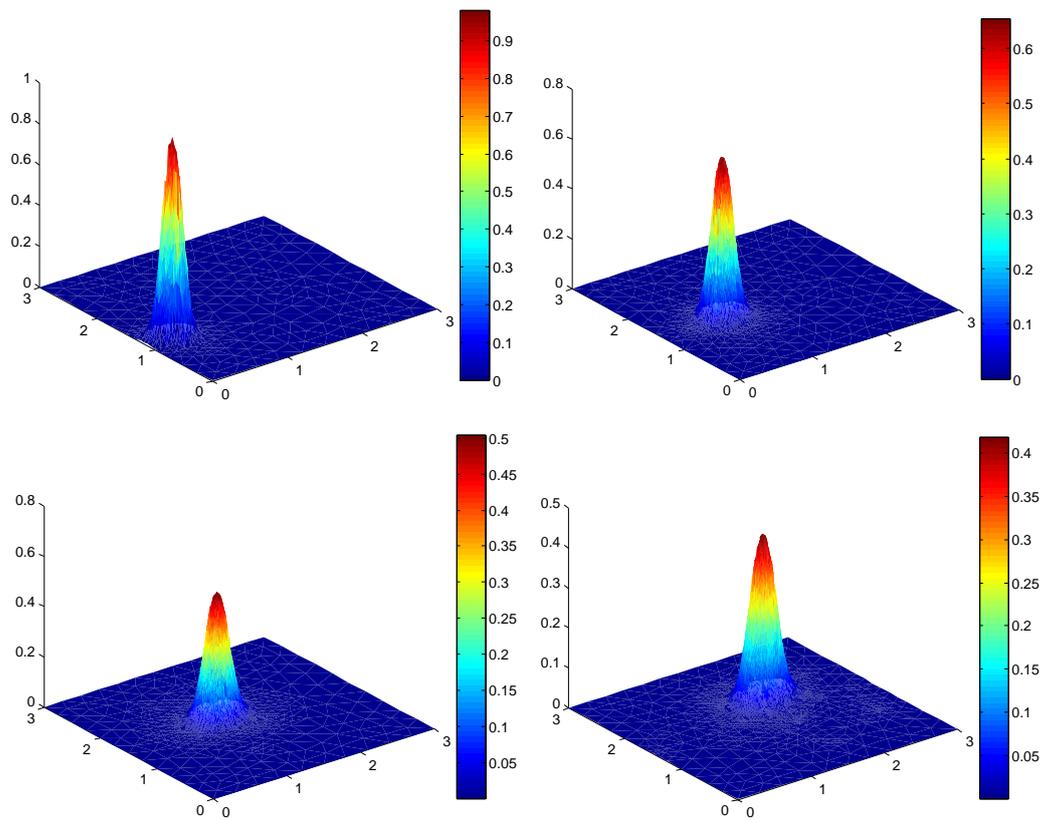


FIGURE 3.8 – Solution approchée obtenue par une stratégie de raffinement adaptatif pour  $\nu = 0.001$  et  $N_{\text{sp}} = N_{\text{tm}} = 5$  à  $t = 0$ ,  $t = 0.6$ ,  $t = 1.2$  et  $t = 1.8$ .

améliore ce point. Les figures 3.10, 3.11 et 3.12 représentent la distribution spatiale des différents estimateurs  $\eta_{R,K}^n$ ,  $\eta_{F,K}^n$  et  $\eta_{NC,K}^n$ . On remarque que l'estimateur des flux  $\eta_{F,K}^n$  est le terme dominant alors que l'estimateur résiduel  $\eta_{R,K}^n$  est le plus diffusé.

Ensuite, dans la figure 3.13, on compare l'erreur réelle  $\|u - u_{h,\tau}\|_{\tau,X}$  avec l'erreur estimée  $\eta$  sur des maillages raffinés uniformément et adaptativement. En utilisant la stratégie de raffinement adaptatif, on remarque qu'on obtient la même précision pour un nombre d'inconnues espace-temps largement inférieur que dans le cas du raffinement uniforme. Dans la figure 3.14, on présente les indices d'efficacité correspondants (ces indices sont définis par le rapport entre l'erreur estimée et l'erreur réelle). On remarque que les valeurs de ces indices sont élevées. En effet, ces indices d'efficacité dépendent du nombre de Péclet local donné par

$$\text{Pe}_K^n := h_K \frac{C_{\beta,K}^n}{c_{S,K}^n}, \quad (3.26)$$

pour  $K \in \mathcal{T}^n$ . Leurs valeurs sont améliorées en raffinant le maillage (le nombre de Péclet devient plus petit). Cette dépendance en le nombre de Péclet local est prévisible dans le cas de la norme d'énergie dont l'estimation d'erreur *a posteriori* n'est pas robuste dans des régimes dominés par la convection. Une solution possible de cette situation est le recours vers les normes duales, présenté au chapitre 4.

Dans les figures 3.15 à 3.18, on présente les résultats à des temps plus élevés :  $t = 1.2$  et  $t = 1.8$ . On observe des résultats similaires, avec en particulier des indices d'efficacité presque identiques. Notre estimation *a posteriori* pour la norme d'énergie apparaît donc comme robuste par rapport au temps final de simulation.

La figure 3.19 montre l'erreur en norme d'énergie dans le cas d'une stratégie de raffinement adaptatif et d'une stratégie de raffinement uniforme en fonction du temps total de calcul. Le gain dû à l'adaptativité est significatif. Cette conclusion doit toutefois être tempérée en gardant à l'esprit que ces résultats dépendent de l'implémentation de l'algorithme.

La figure 3.20 présente le nombre d'inconnues spatiales en fonction du temps de simulation pour les temps finaux  $T = 0.6$  et  $T = 1.2$  et pour des niveaux de raffinement maximaux  $N_{\text{sp}} = N_{\text{tm}} = 4$ . On remarque que, pour le pas de temps initial  $\tau^1 = 0.2$ , l'algorithme raffine 4 fois en espace. Le critère d'arrêt n'étant pas satisfait, le pas de temps est ensuite raffiné de nouveau et ainsi de suite jusqu'à arriver au plus petit pas de temps accepté  $\tau^n = 0.2/2^4$  (comme  $N_{\text{tm}} = 4$ ). En même temps, l'algorithme augmente le nombre d'inconnues spatiales de 336 à presque 1500 inconnues. On remarque également qu'après tous les 5 pas de temps, le nombre d'inconnues spatiales diminue pour augmenter de nouveau au pas de temps suivant. Cela est dû au fait que l'algorithme déraffine le maillage à chaque `StepsSpDeref` pas de temps (on rappelle qu'on a choisi

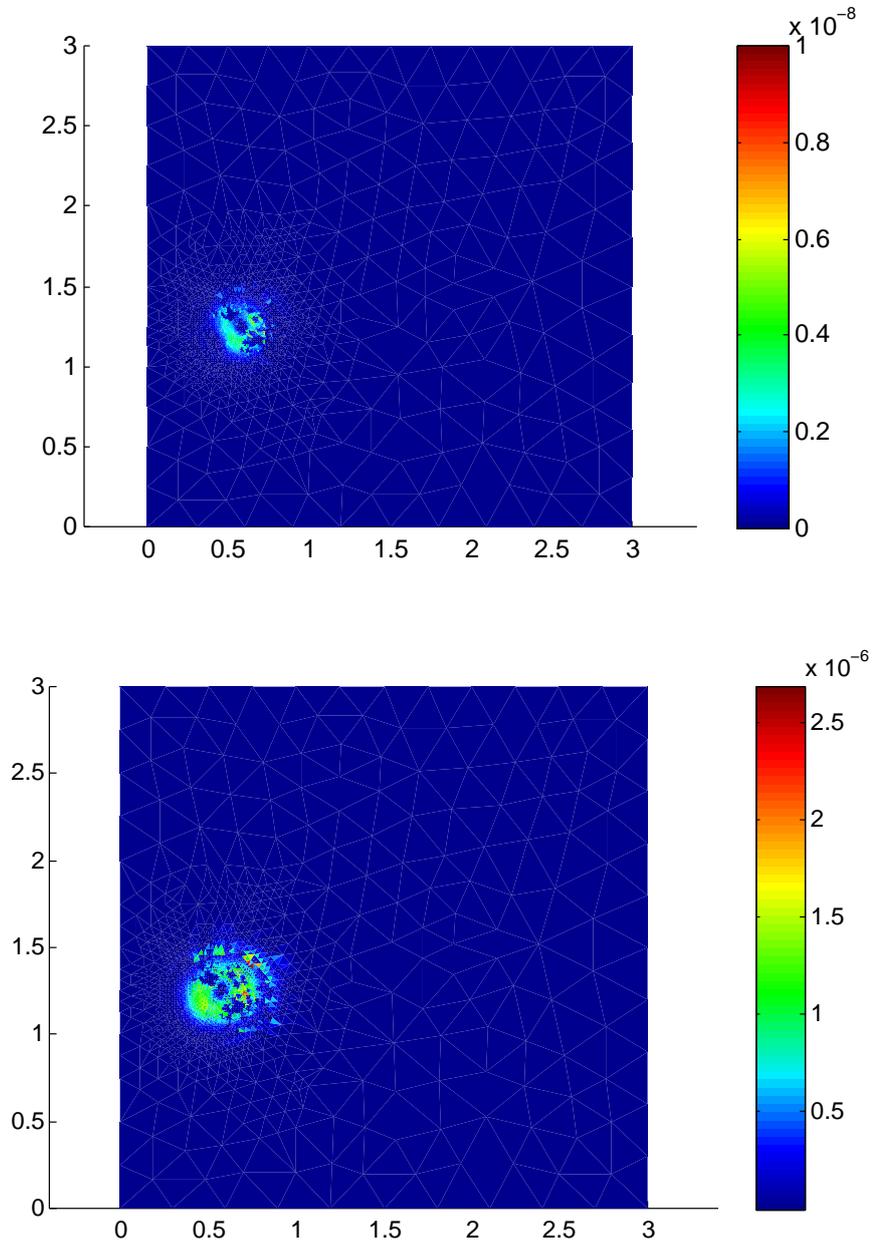


FIGURE 3.9 – Distributions spatiale de l'erreur en norme d'énergie obtenues sur des maillages raffinés adaptativement à  $t = 0.3$  pour  $\nu = 0.001$  et  $N_{\text{sp}} = N_{\text{tm}} = 5$ . En haut : évaluation exacte de l'erreur ; en bas : estimateur

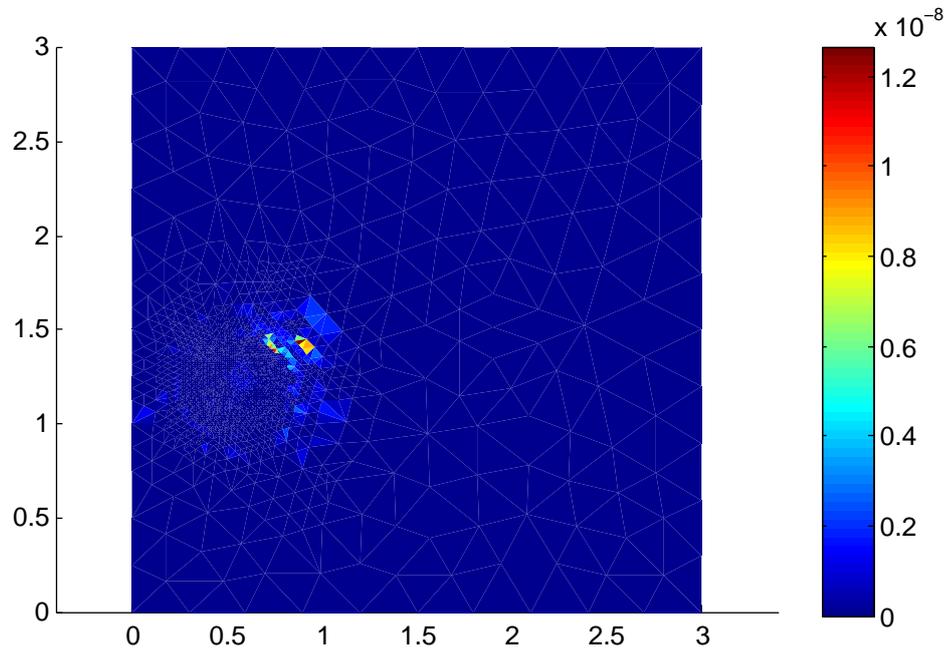


FIGURE 3.10 – Distribution spatiale de l'estimateur résiduel  $\eta_{R,K}^n$  sur des maillages raffinés adaptativement à  $t = 0.3$  pour  $\nu = 0.001$  et  $N_{sp} = N_{tm} = 5$ .

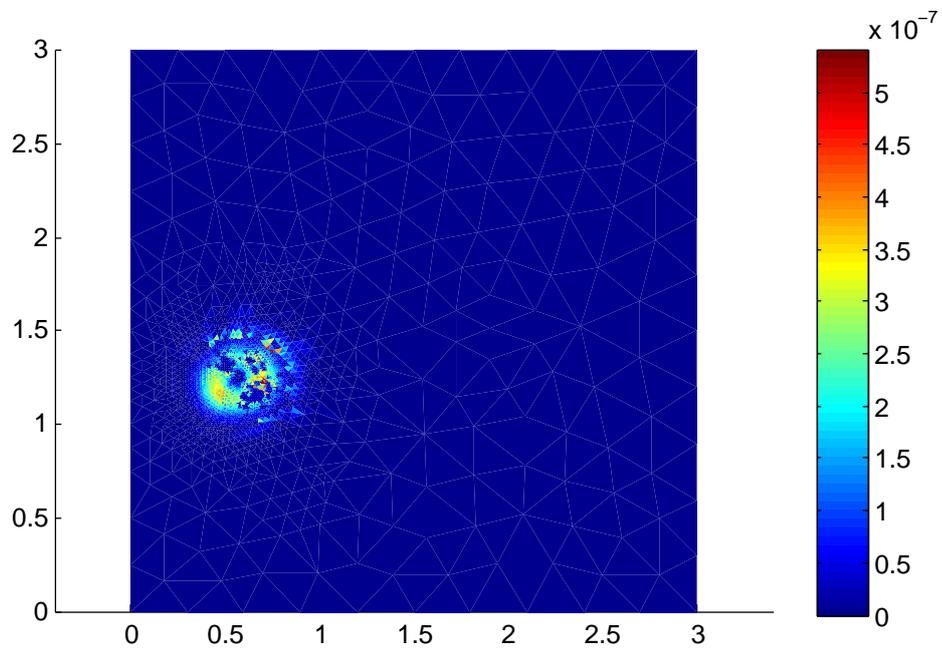


FIGURE 3.11 – Distribution spatiale de l'estimateur des flux  $\eta_{F,K}^n$  sur des maillages raffinés adaptativement à  $t = 0.3$  pour  $\nu = 0.001$  et  $N_{sp} = N_{tm} = 5$ .

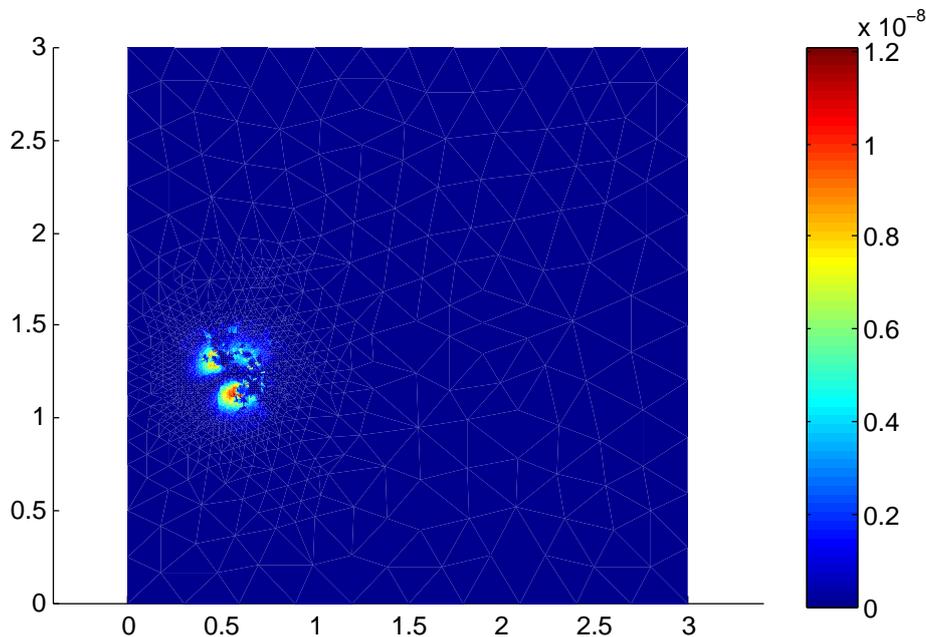


FIGURE 3.12 – Distribution spatiale de l’estimateur de non conformité  $\eta_{NC,K}^n$  sur des maillages raffinés adaptativement à  $t = 0.3$  pour  $\nu = 0.001$  et  $N_{sp} = N_{tm} = 5$ .

ici `StepsSpDeref = 5`). Il supprime ainsi les éléments du maillage où l’erreur est suffisamment petite et ensuite raffine de nouveaux éléments où l’erreur est élevée.

Finalement, on présente le maillage  $\mathcal{T}^0$  dans la figure 3.21 et les maillages adaptatifs aux temps  $t = 0.6$ ,  $t = 1.2$  et  $t = 1.8$  dans les figures 3.22, 3.23 et 3.24 pour  $N_{sp} = N_{tm} = 4$ . On observe que le raffinement adaptatif suit bien le déplacement de la solution.

On présente pour conclure quelques résultats dans le cas d’une diffusion dominante  $\nu = 10$  et on considère le temps final  $T = 1.5$ . Dans ce cas, la stratégie de raffinement adaptatif ne donne pas (comme attendu) des améliorations importantes et par suite on présente uniquement le cas d’un raffinement uniforme. La figure 3.25 présente les erreurs réelle et estimée. Les indices d’efficacité sont présentés dans la figure 3.26. On remarque que les valeurs des indices sont proches de 1. En effet, l’estimation en norme d’énergie surestime considérablement l’erreur dans le cas de la convection dominante, alors que cette estimation est très proche de l’erreur réelle dans le cas de la diffusion dominante. Finalement, la figure 3.27 représente les différents indicateurs. On remarque que la valeur de l’estimateur des flux est la plus élevée alors que l’estimateur résiduel et l’estimateur de non conformité sont super-convergeants.

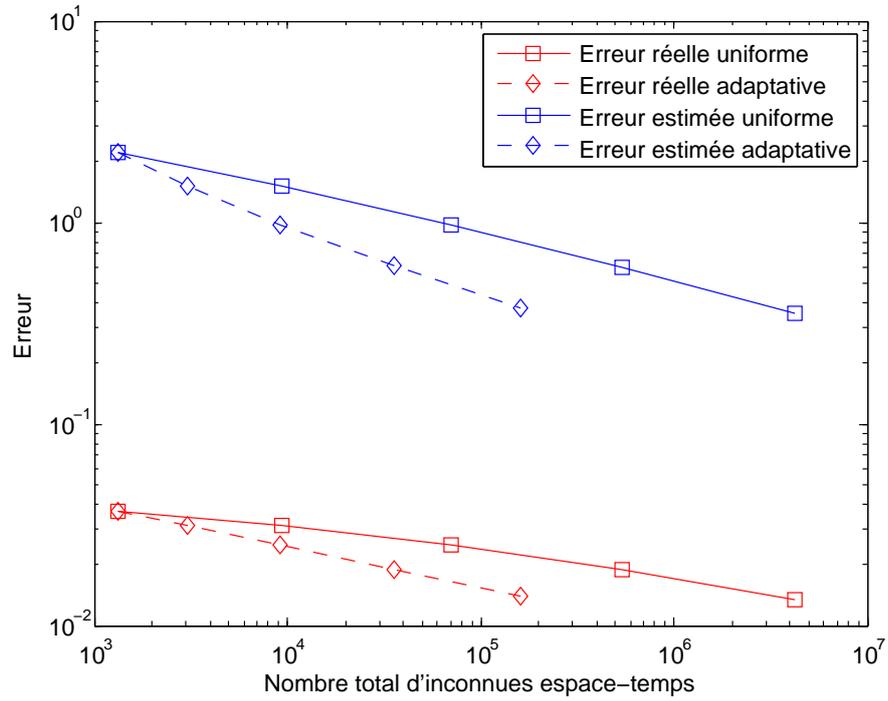


FIGURE 3.13 – Erreur en norme d'énergie réelle et estimée en utilisant des stratégies de raffinement adaptatif ou uniforme pour  $N_{sp} = N_{tm} = 4$ ,  $\nu = 0.001$  et  $t = 0.6$ .

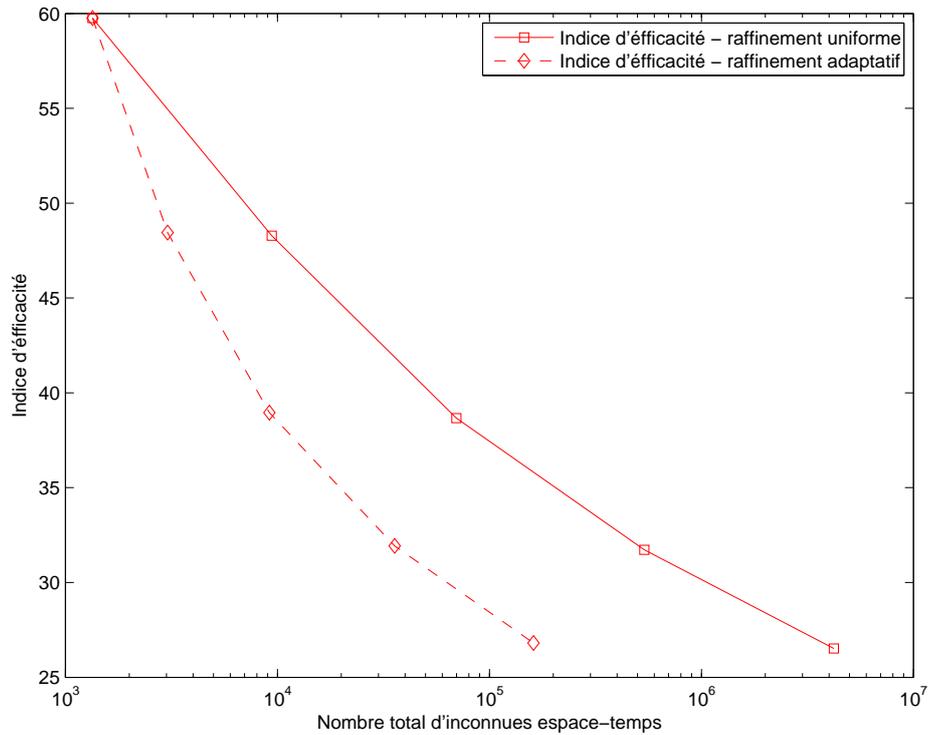


FIGURE 3.14 – Indices d'efficacité correspondant à des stratégies de raffinement adaptatif ou uniforme pour  $N_{sp} = N_{tm} = 4$ ,  $\nu = 0.001$  et  $t = 0.6$ .

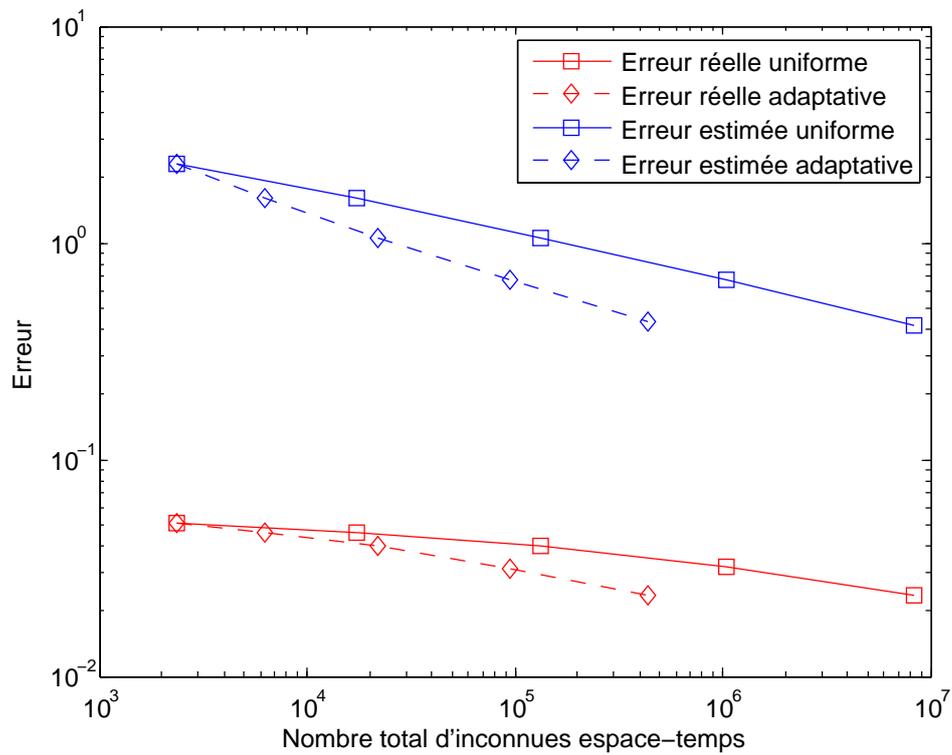


FIGURE 3.15 – Erreur en norme d'énergie réelle et estimée en utilisant des stratégies de raffinement adaptatif ou uniforme pour  $N_{sp} = N_{tm} = 4$ ,  $\nu = 0.001$  et  $t = 1.2$ .

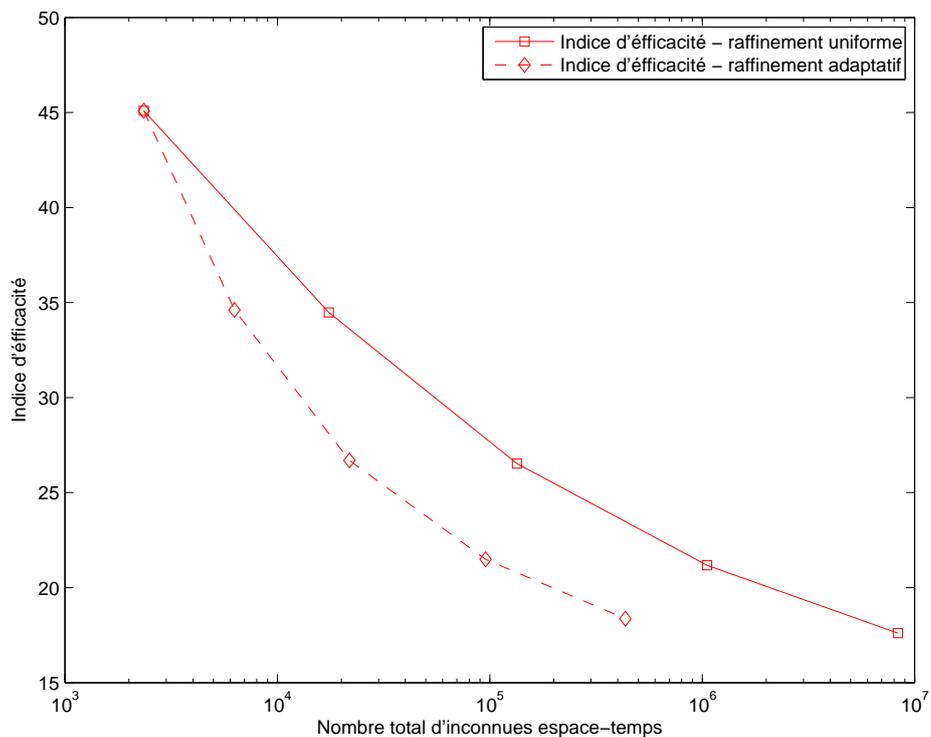


FIGURE 3.16 – Indices d'efficacité correspondant à des stratégies de raffinement adaptatif ou uniforme pour  $N_{sp} = N_{tm} = 4$ ,  $\nu = 0.001$  et  $t = 1.2$ .

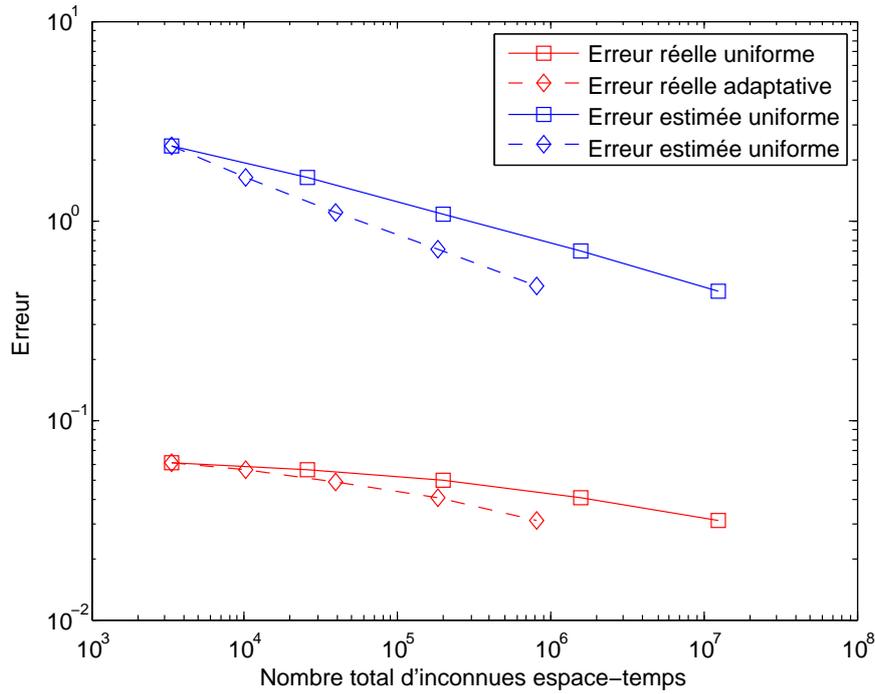


FIGURE 3.17 – Erreur d'énergie réelle et estimée en utilisant des stratégies de raffinement adaptatif ou uniforme pour  $N_{sp} = N_{tm} = 4$ ,  $\nu = 0.001$  et  $t = 1.8$ .

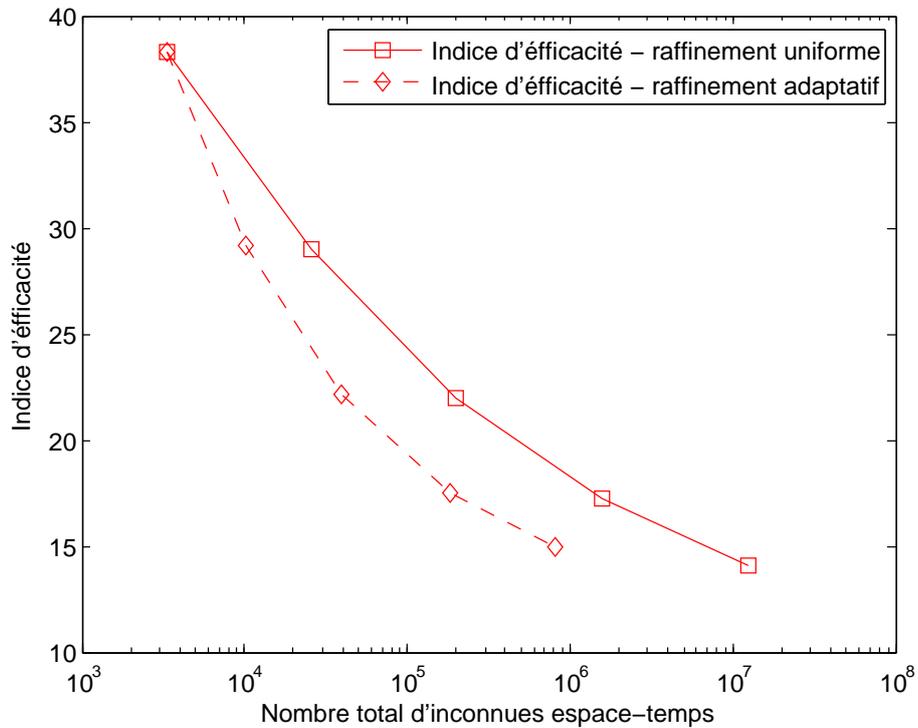


FIGURE 3.18 – Indices d'efficacité correspondant à des stratégies de raffinement adaptatif ou uniforme pour  $N_{sp} = N_{tm} = 4$ ,  $\nu = 0.001$  et  $t = 1.8$ .

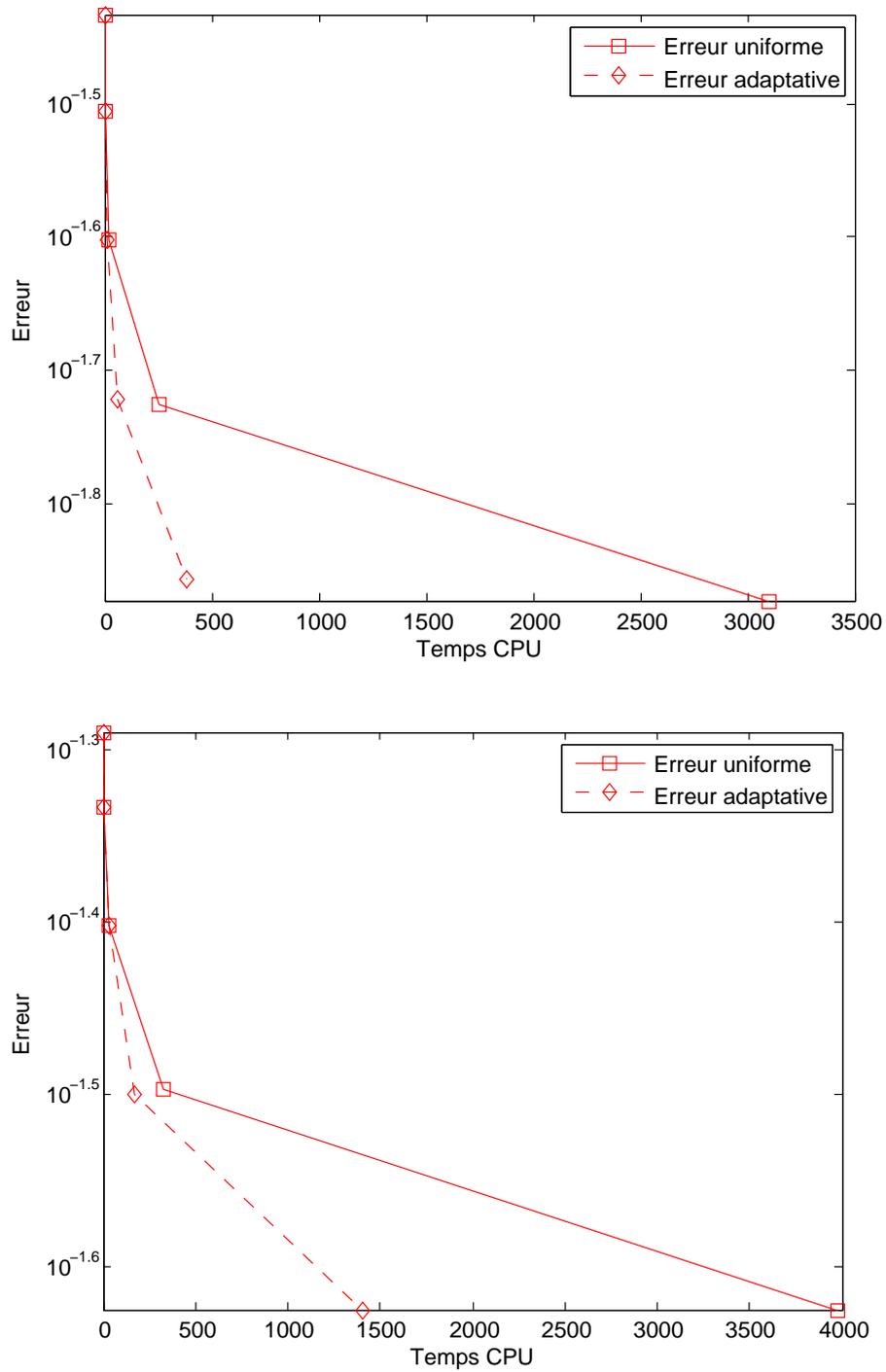


FIGURE 3.19 – Erreur en norme d'énergie en fonction du temps CPU pour les stratégies de raffinement adaptatif ou uniforme pour  $N_{sp} = N_{tm} = 4$ ,  $\nu = 0.001$  et  $t = 0.6$  (en haut) et  $t = 1.2$  (en bas).

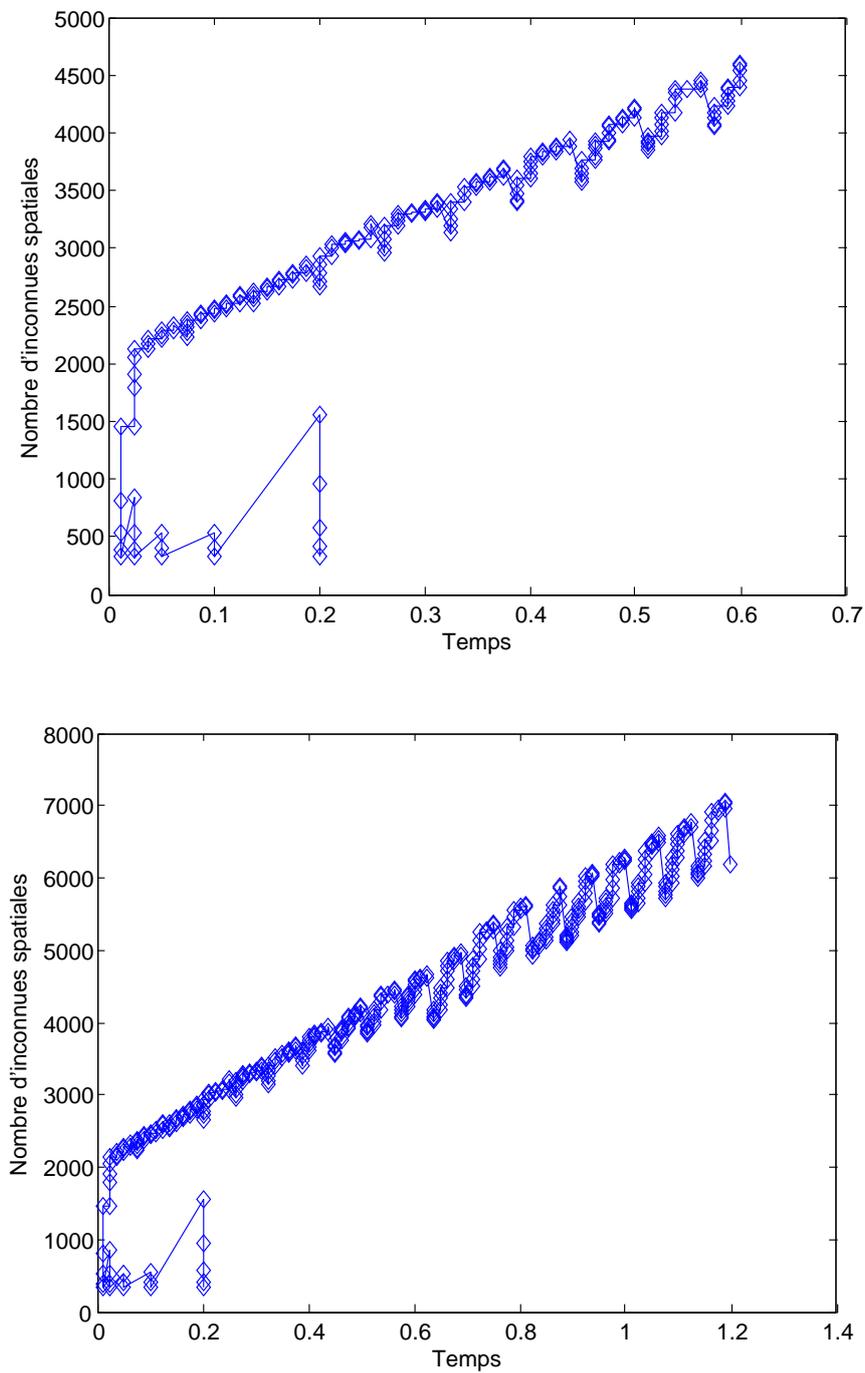


FIGURE 3.20 – Evolution du nombre d'inconnues spatiales en fonction du temps de simulation pour  $N_{sp} = N_{tm} = 4$ ,  $\nu = 0.001$  et  $T = 0.6$  (en haut) et  $T = 1.2$  (en bas).

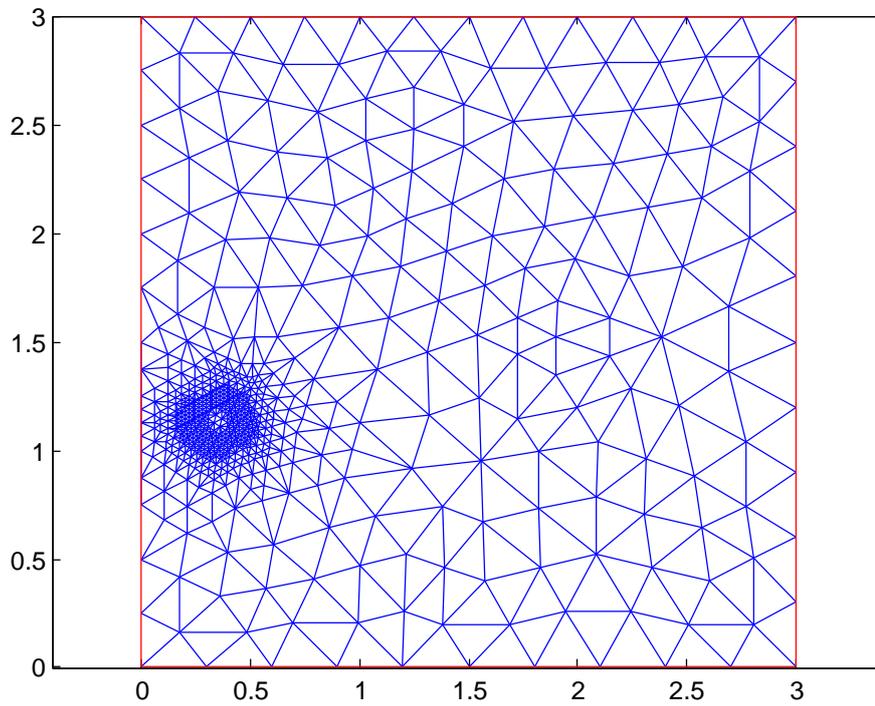


FIGURE 3.21 – Maillage initial  $\mathcal{T}^0$  après raffinement adaptatif pour  $N_{\text{sp}} = N_{\text{tm}} = 4$  et  $\nu = 0.001$ .

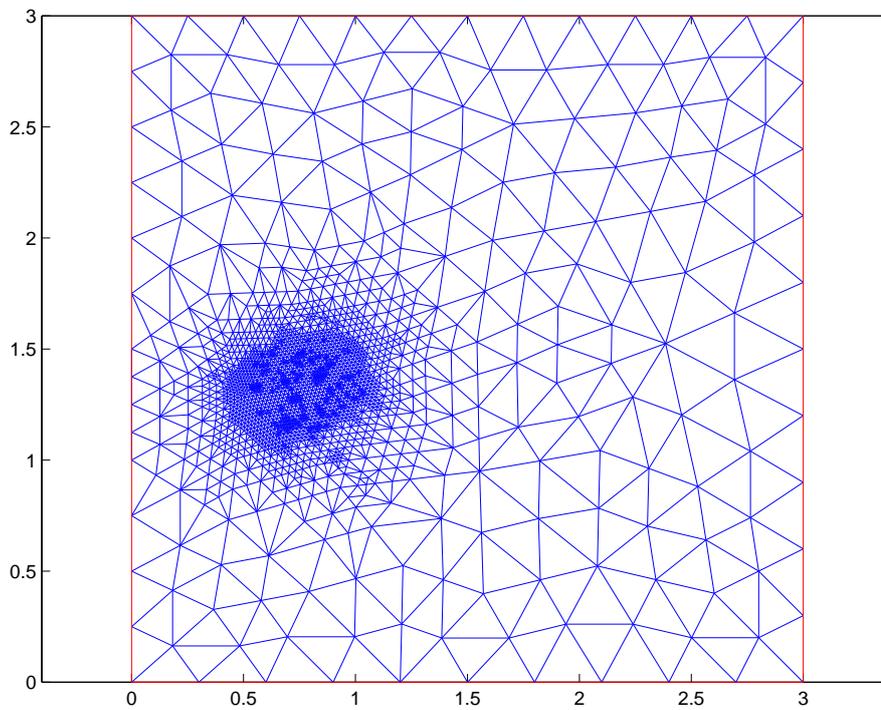
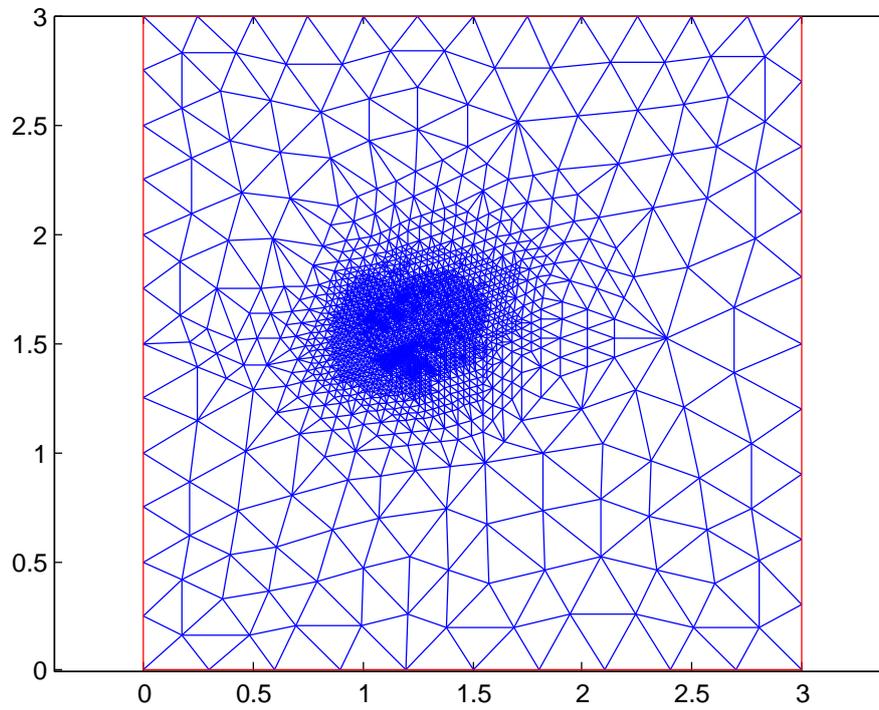
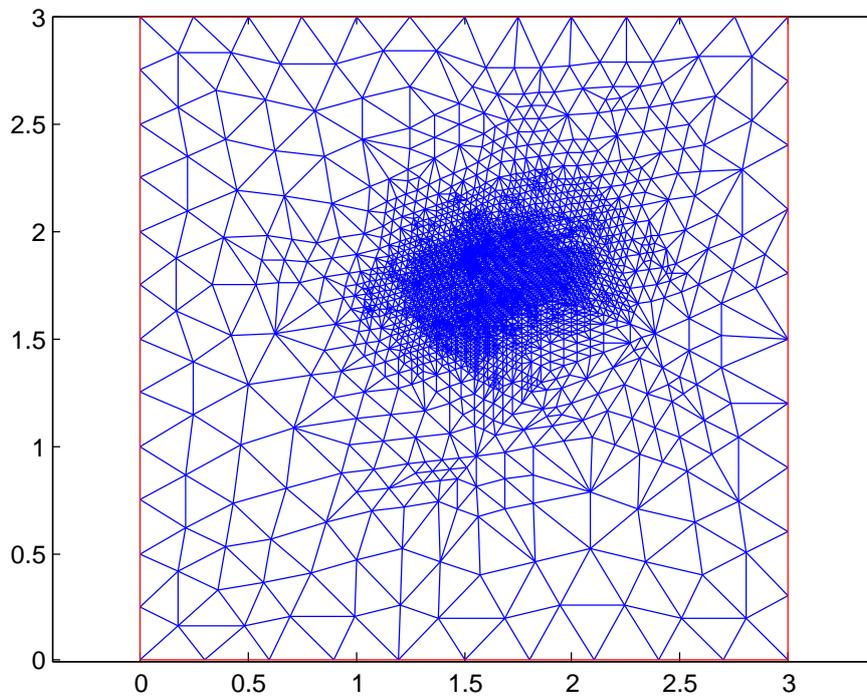


FIGURE 3.22 – Maillage à  $t = 0.6$  pour  $N_{\text{sp}} = N_{\text{tm}} = 4$  et  $\nu = 0.001$ .

FIGURE 3.23 – Maillage à  $t = 1.2$  pour  $N_{\text{sp}} = N_{\text{tm}} = 4$  et  $\nu = 0.001$ .FIGURE 3.24 – Maillage à  $t = 1.8$  pour  $N_{\text{sp}} = N_{\text{tm}} = 4$  et  $\nu = 0.001$ .

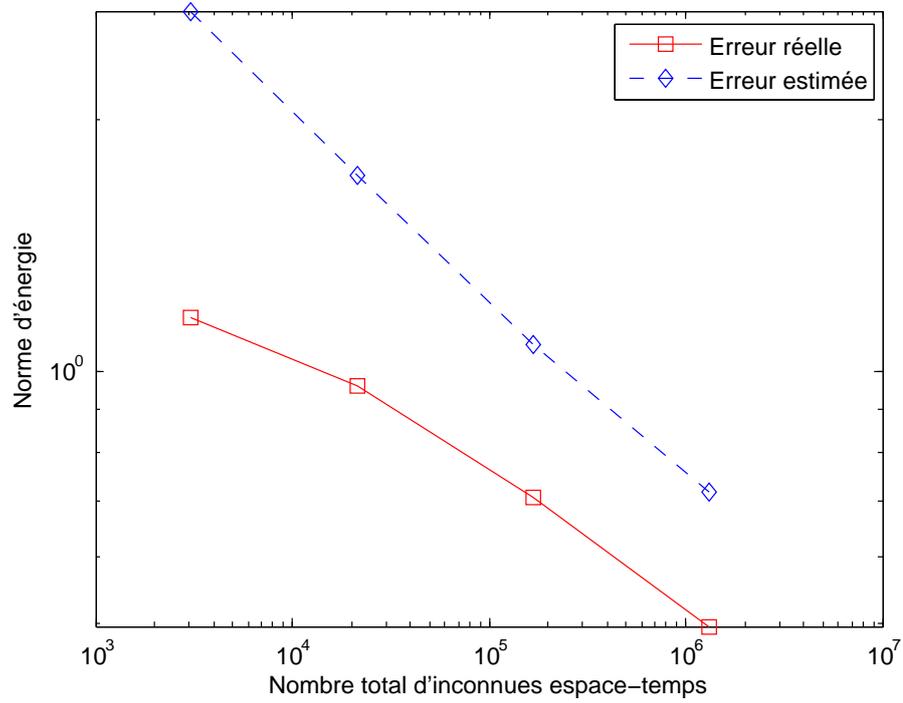
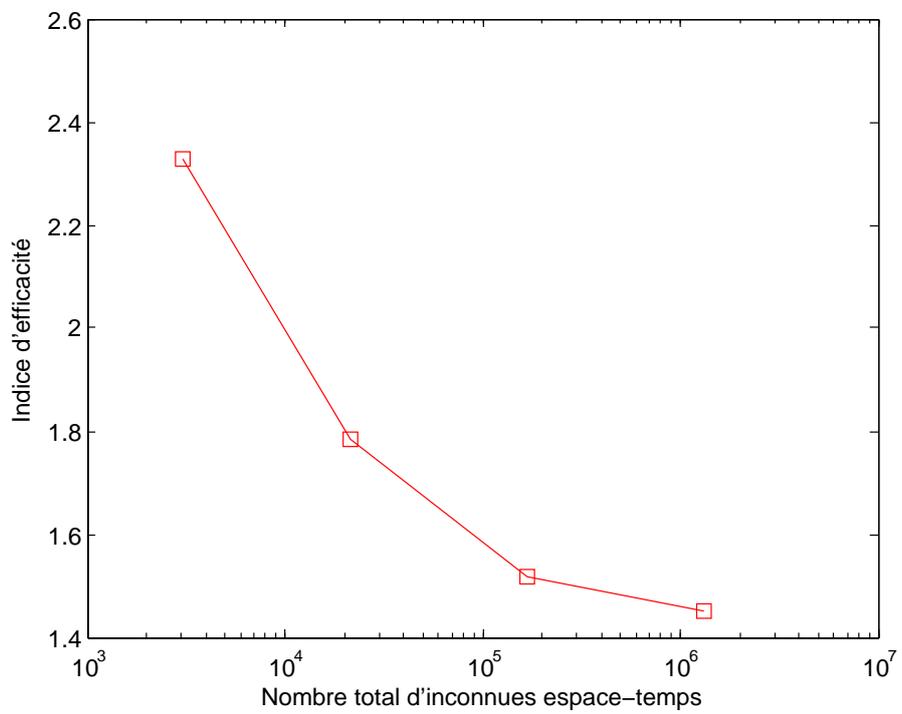


FIGURE 3.25 – Erreur réelle et erreur estimée dans le cas  $\nu = 10$ , raffinement uniforme.

FIGURE 3.26 – Indices d'efficacité dans le cas  $\nu = 10$ , raffinement uniforme.

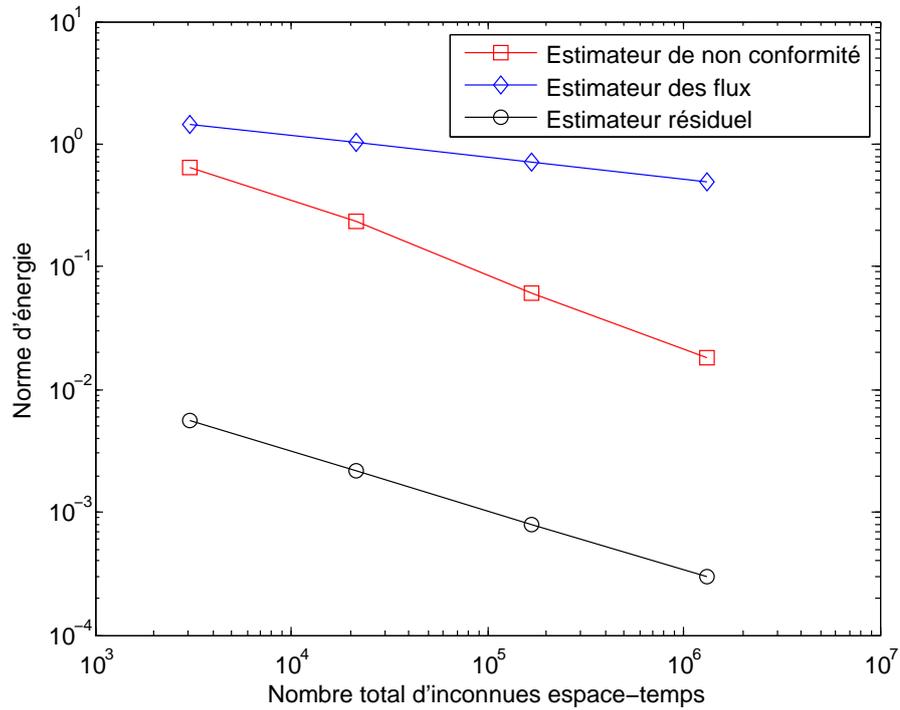


FIGURE 3.27 – Indicateurs d'erreur dans le cas  $\nu = 10$ , raffinement uniforme.

### 3.2.2 Cas test avec couche intérieure et couche limite

On pose

$$\Omega = (0, 1) \times (0, 1),$$

$$\mathbf{S} = \nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2),$$

$$r = 0,$$

$$f = 0,$$

où  $\beta_1 = 2$  et  $\beta_2 = 1$  sont les deux composantes constantes du vecteur de convection  $\boldsymbol{\beta}$  et le paramètre  $\nu = 0.001$  désigne le coefficient de diffusion.

$$\Omega_\delta = (\delta, 1) \times (0, 1 - \delta).$$

$u_0$  est telle que, pour  $\mathbf{x} \in \Omega_\delta$ ,

$$u_0(\mathbf{x}) = 0,$$

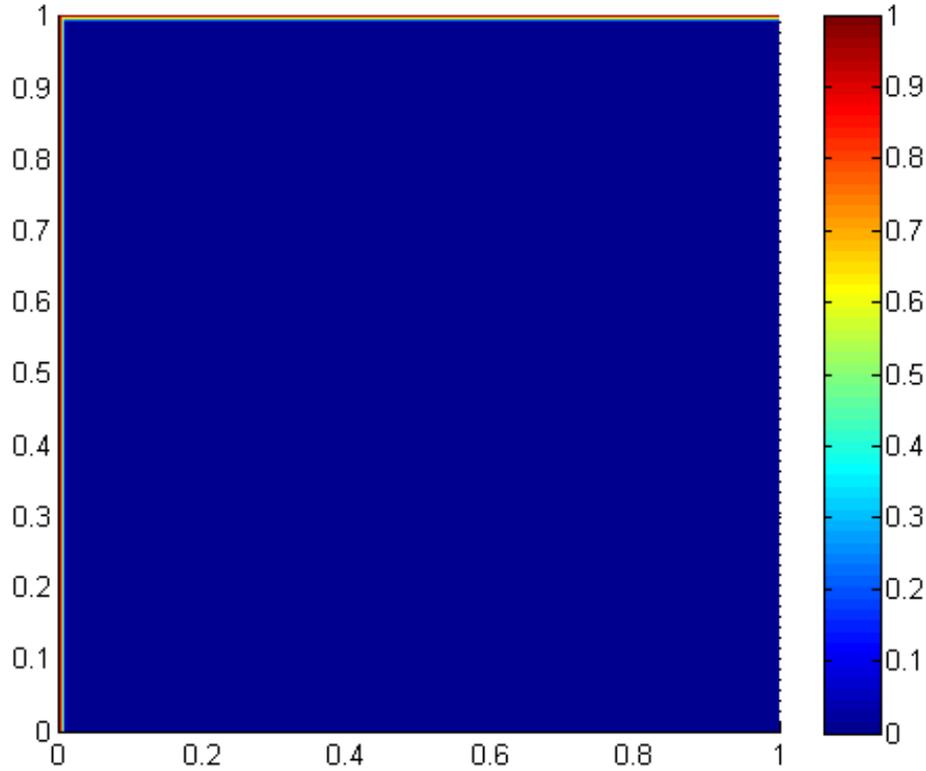


FIGURE 3.28 – Condition initiale.

et pour  $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_\delta$ , La condition initiale  $u_0(\mathbf{x})$  est donnée par la fonction affine par morceaux suivante

$$u_0(\mathbf{x}) = u_0(x, y) = \begin{cases} (\delta - x)/\delta & \text{pour } 0 \leq x \leq \delta, y \leq 1 - x \\ (y - 1 + \delta)/\delta & \text{pour } 1 - \delta \leq y \leq 1, x \geq 1 - y \\ 0 & \text{pour } \delta \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - \delta. \end{cases}$$

On considère  $\delta = 7.8125 \times 10^{-3}$ . La condition initiale (figure 3.28) présente des couches limites le long des lignes  $\{x = 0\}$  et  $\{y = 1\}$ .

Le maillage initial est un maillage structuré formé de 128 triangles (figure 3.29) et le pas de temps initial est donné par  $\tau = 0.1$ . Le maillage initial est raffiné adaptativement en utilisant l'indicateur de la condition initiale  $\eta_{IC}$  suivant l'algorithme proposé dans la section 3.1.3 et le nombre de triangles augmente à 3120 pour  $N_{sp} = 5$ . On observe des raffinements sur les côtés  $\{x = 0\}$  et  $\{y = 1\}$  où sont présentes les couches limites (figure 3.30). La condition initiale approchée est présentée à la figure 3.31.

La figure 3.32 présente la solution approchée au temps  $t = 0.2$ . On observe dans la figure 3.33 que le maillage est concentré dans les régions où la solution présente des singularités. On remarque toutefois des raffinements résiduels à proximité de

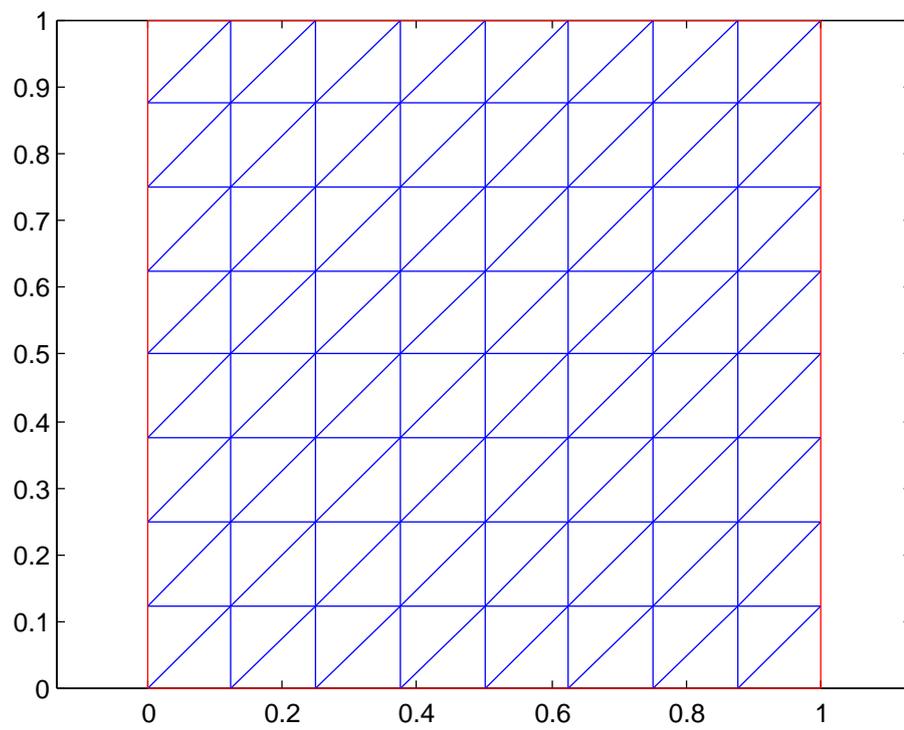
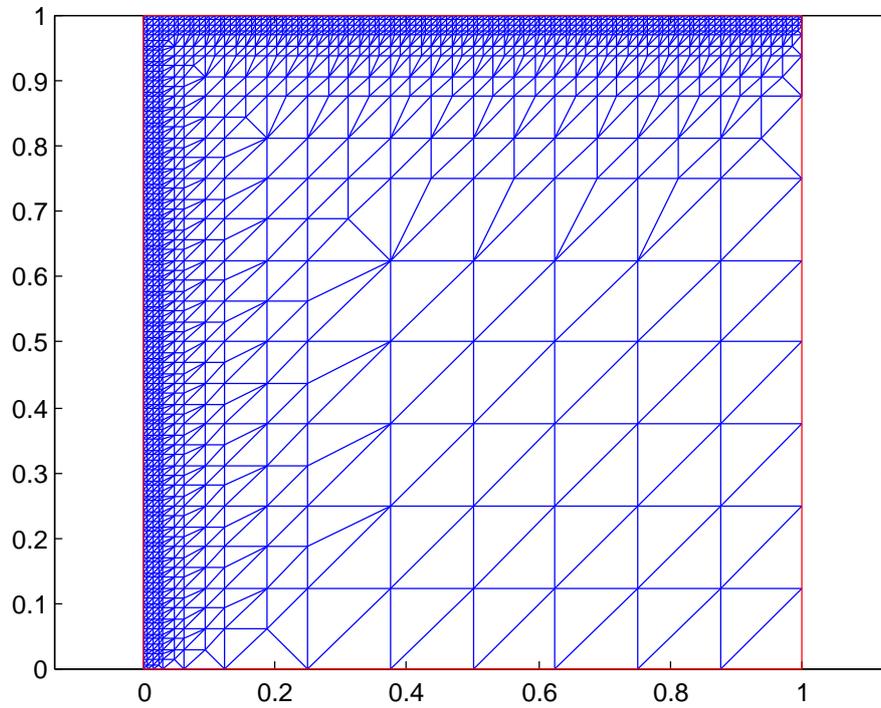
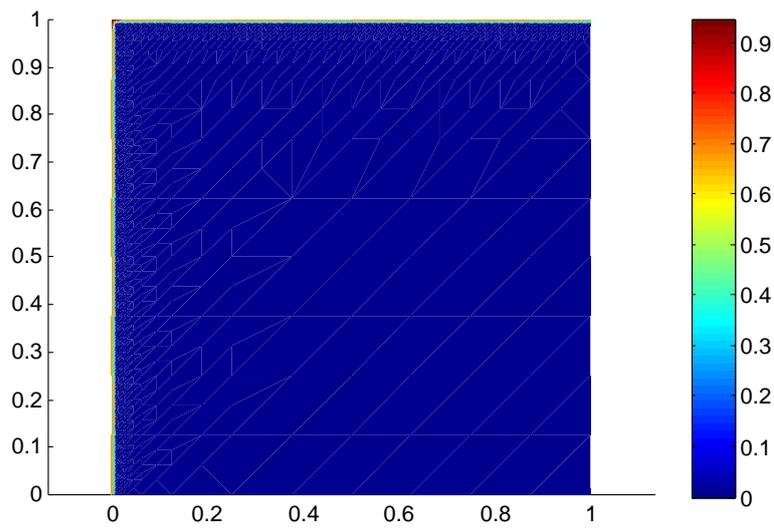


FIGURE 3.29 – Maillage initial.

FIGURE 3.30 – Maillage initial  $\mathcal{T}^0$  raffiné adaptativement.FIGURE 3.31 – Condition initiale approchée pour  $N_{sp} = 5$ .

la ligne  $\{x = 0\}$ , car comme observé à la figure 3.34, l'erreur estimée reste élevée dans cette partie du domaine. En particulier, en regardant de plus près les différents indicateurs, on observe que l'indicateur résiduel (figure 3.35) et l'indicateur de non conformité (figure 3.37) sont ceux qui prennent des valeurs élevées dans cette région alors que l'estimateur des flux (figure 3.36) prend des valeurs plus petites. Pour un temps  $t = 0.4$ , la solution approchée sur des maillages raffinés adaptativement est présentée à la figure 3.38 et le maillage correspondant à la figure 3.39. On observe également des raffinements dans les zones de singularité de la solution approchée ainsi que des raffinements près des axes  $\{x = 0\}$  et  $\{y = 1\}$ . Ceci résulte à nouveau d'une erreur estimée élevée sur ces axes.

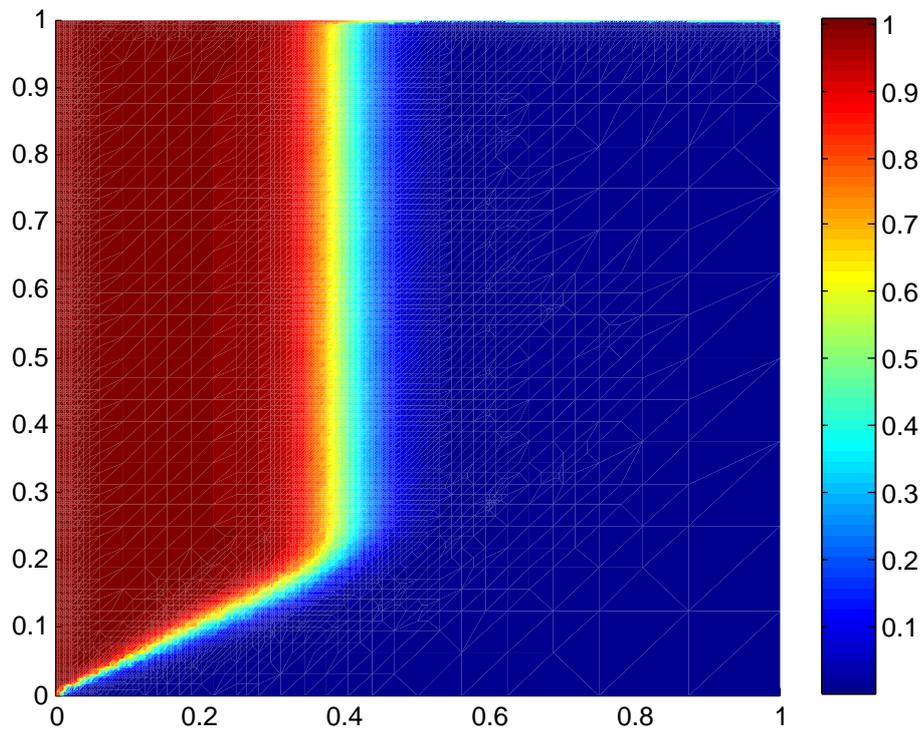


FIGURE 3.32 – Solution approchée sur des maillages raffinés adaptativement à  $t = 0.2$  pour  $N_{\text{sp}} = N_{\text{tm}} = 5$ .

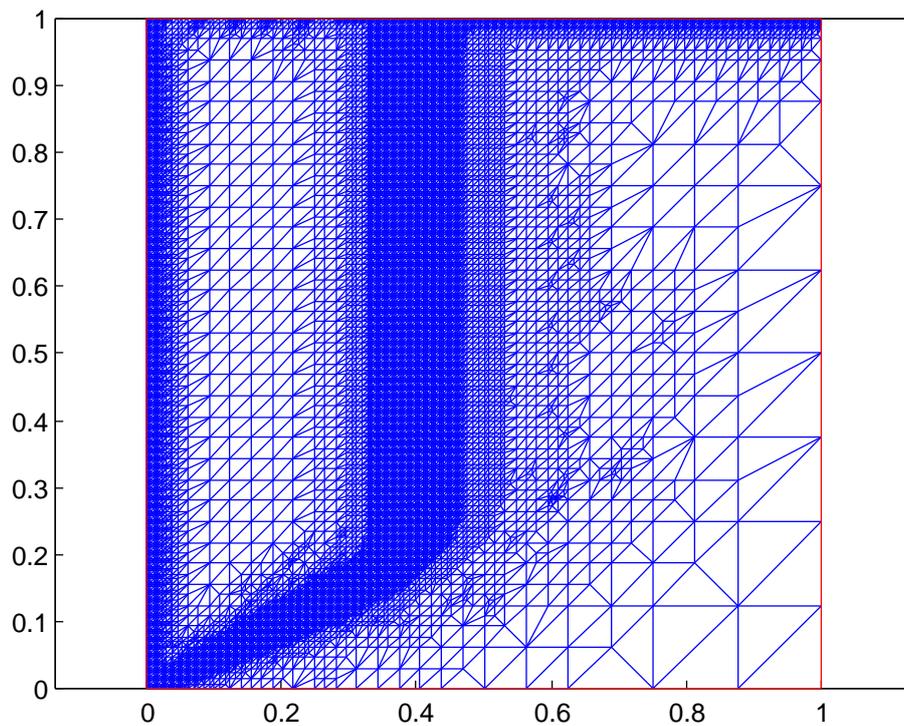


FIGURE 3.33 – Maillage raffiné adaptativement à  $t = 0.2$ .

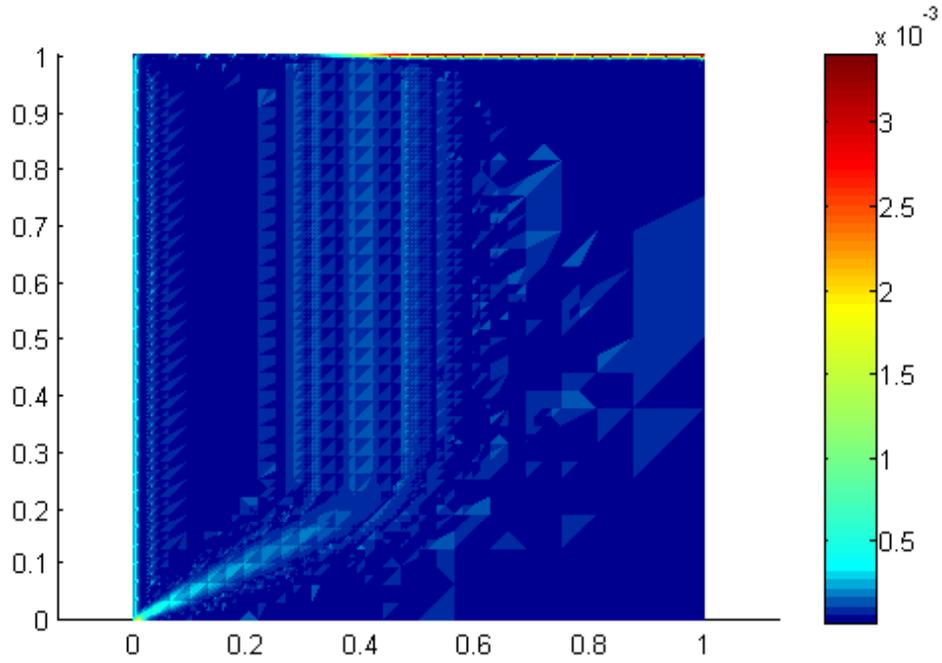


FIGURE 3.34 – Distribution de l’estimateur d’erreur en norme d’énergie obtenue sur un maillage raffiné adaptativement à  $t = 0.2$  pour  $N_{sp} = N_{tm} = 5$ .

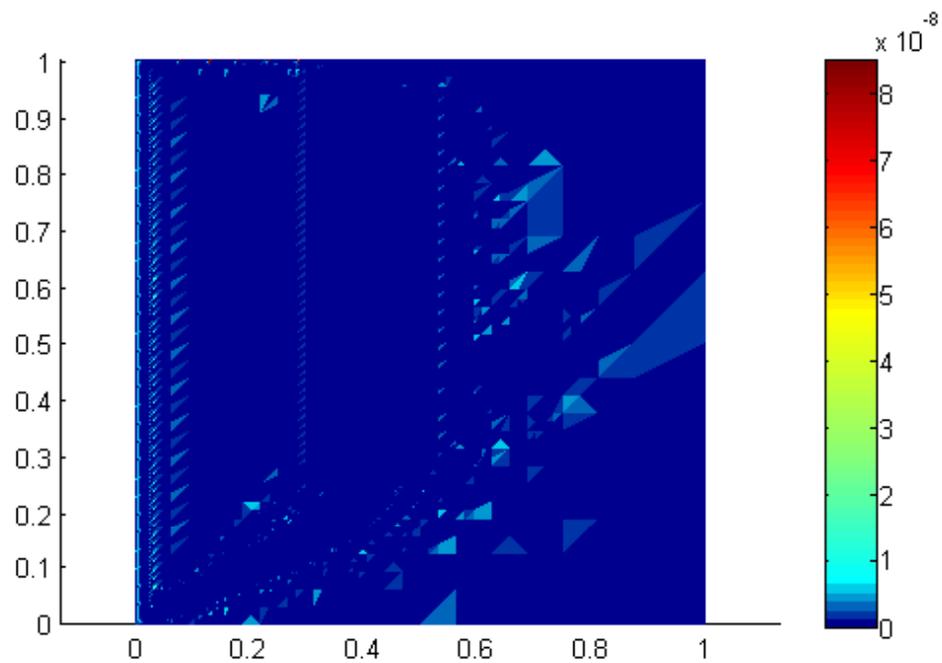


FIGURE 3.35 – Distribution de l’estimateur résiduel  $\eta_{R,K}^n$  sur des maillages raffinés adaptativement à  $t = 0.2$  pour  $N_{sp} = N_{tm} = 5$ .

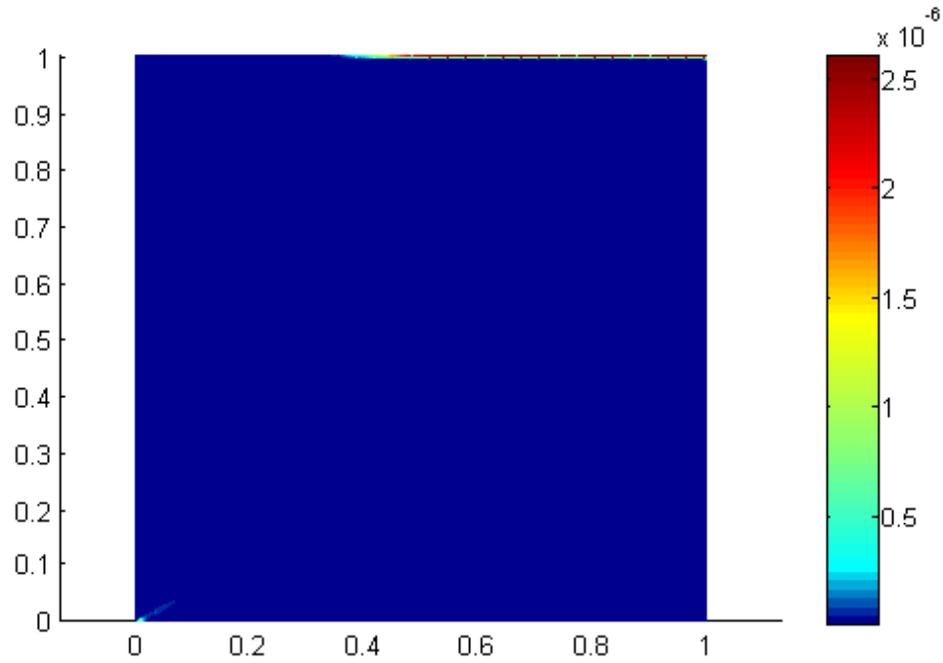


FIGURE 3.36 – Distribution de l'estimateur des flux  $\eta_{F,K}^n$  sur des maillages raffinés adaptativement à  $t = 0.2$  pour  $N_{sp} = N_{tm} = 5$ .

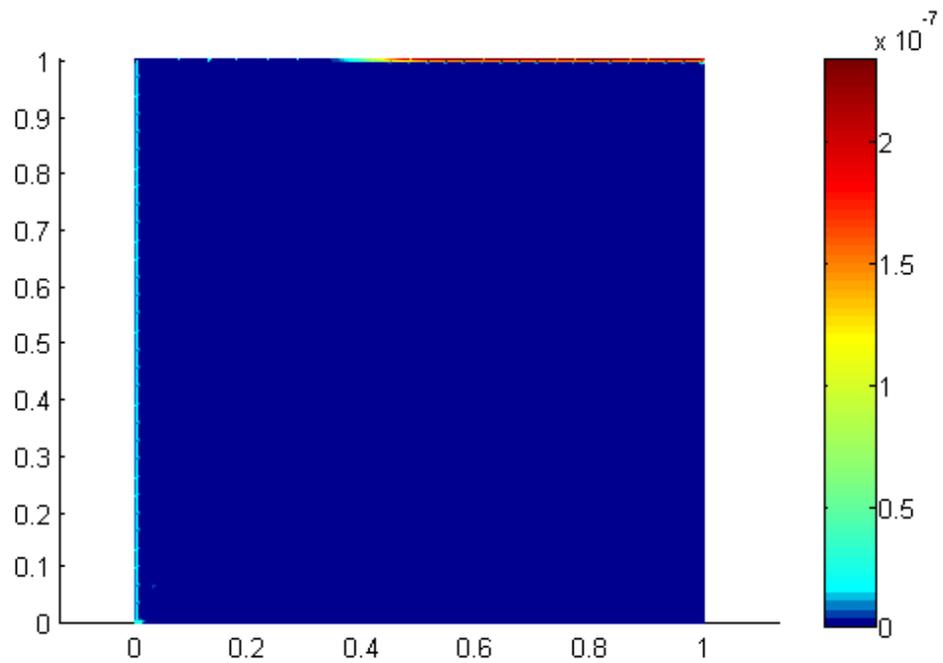


FIGURE 3.37 – Distribution de l'estimateur de non conformité  $\eta_{NC,K}^n$  sur des maillages raffinés adaptativement à  $t = 0.2$  pour  $N_{sp} = N_{tm} = 5$ .

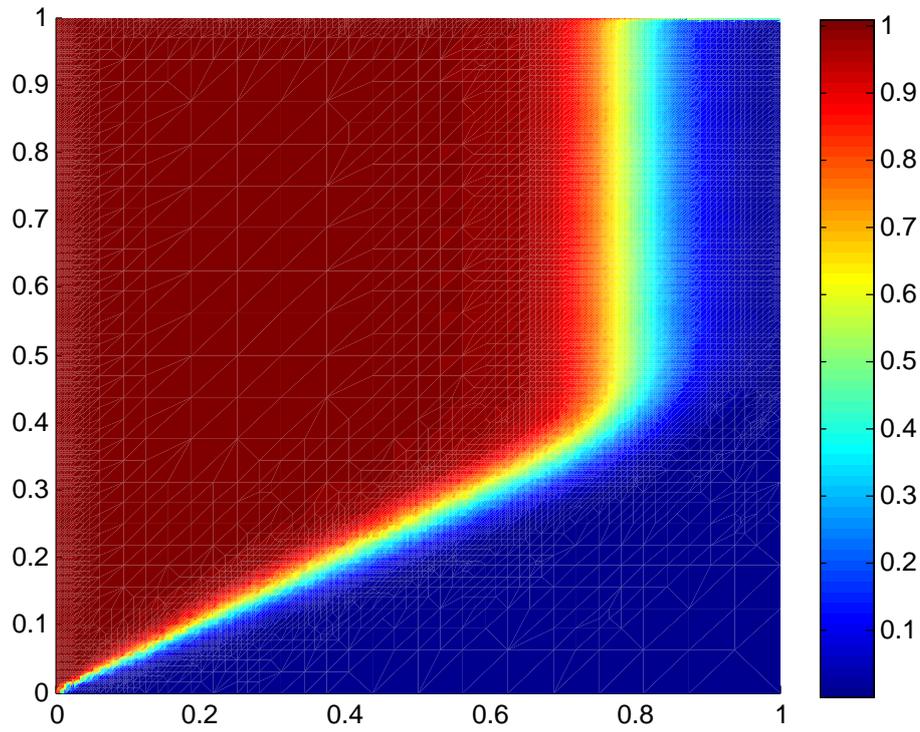


FIGURE 3.38 – Solution approchée sur des maillages raffinés adaptativement à  $t = 0.4$  pour  $N_{\text{sp}} = N_{\text{tm}} = 5$ .

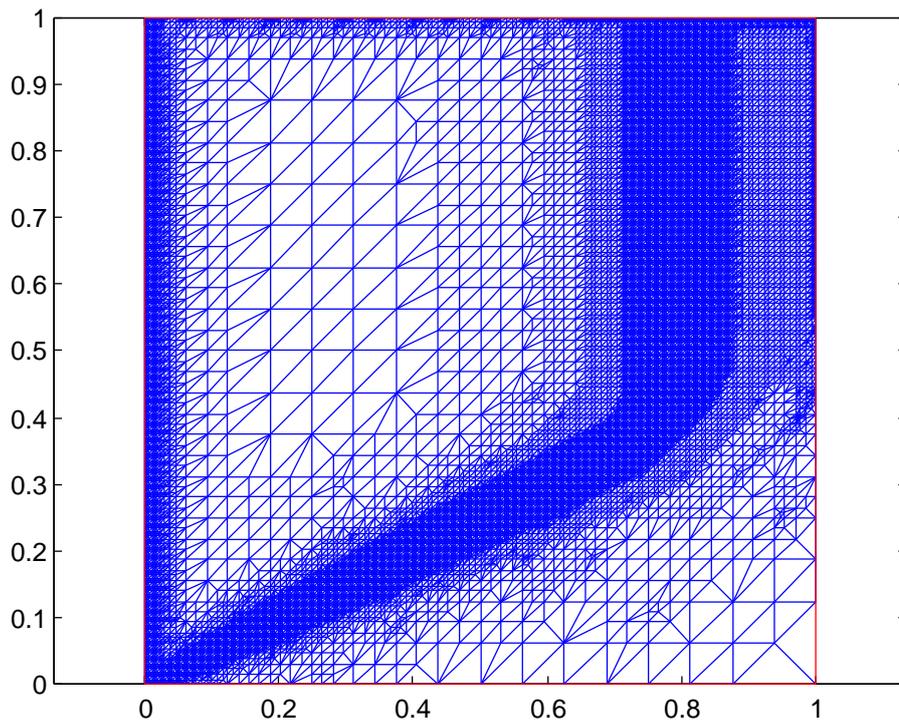


FIGURE 3.39 – Maillage raffiné adaptativement à  $t = 0.4$ .

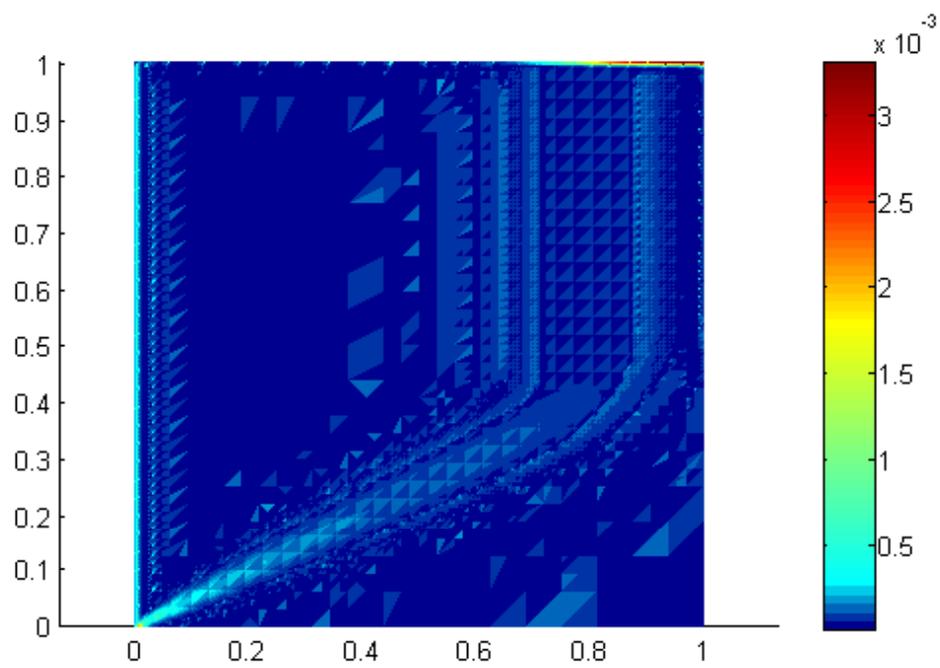


FIGURE 3.40 – Distribution de l'estimateur d'erreur en norme d'énergie obtenue sur un maillage raffiné adaptativement à  $t = 0.4$  pour  $N_{sp} = N_{tm} = 5$ .



# Estimation et efficacité en norme augmentée dans un cadre abstrait

---

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Equivalence entre le résidu et l’erreur</b>	<b>95</b>
<b>4.2</b>	<b>Borne supérieure de l’erreur</b>	<b>98</b>
4.2.1	Hypothèses sur le problème	98
4.2.2	Inégalités utiles	99
4.2.3	Les indicateurs d’erreur	100
4.2.4	Résultat principal	100
<b>4.3</b>	<b>Borne inférieure de l’erreur</b>	<b>105</b>
4.3.1	Hypothèses sur les maillages espace-temps	105
4.3.2	Notations	106
4.3.3	Hypothèses sur les reconstructions du potentiel et des flux	108
4.3.4	Borne inférieure	108

---

On rappelle l’équation de convection–diffusion–réaction instationnaire

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\mathbf{S} \nabla u) + \nabla \cdot (\beta u) + ru = f \quad \text{p.p. dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.1a)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (4.1b)$$

$$u = 0 \quad \text{p.p. sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (4.1c)$$

Dans ce chapitre, on commence par établir dans la section 4.1 une équivalence entre le résidu et l’erreur : une borne supérieure et une borne inférieure de l’erreur dans une norme augmentée sont formulées en fonction de la norme duale du résidu. Ensuite, dans la section 4.2, on propose une borne supérieure de l’erreur dans cette norme et dans la section 4.3, on prouve l’efficacité de cette estimation de l’erreur. Dans ce chapitre (hormis la section 4.1), on suppose pour simplifier que  $\beta$  est à divergence nulle.

## 4.1 Equivalence entre le résidu et l’erreur

On rappelle la définition (1.8) de la fonctionnelle  $\mathcal{B}$  ainsi que les définitions (1.9) et (1.10) de ses parties symétrique  $\mathcal{B}_S$  et antisymétrique  $\mathcal{B}_A$ . On rappelle la définition

du résidu  $\mathcal{R}(s) \in X'$  pour tout  $s \in Z$  :

$$\langle \mathcal{R}(s), \varphi \rangle_{X',X} := \int_0^T \{ (f - \partial_t s - r s, \varphi) - (\mathbf{S} \nabla s - \beta s, \nabla \varphi) \} (t) dt, \quad (4.2)$$

pour tout  $\varphi \in X$  et la norme d'énergie augmentée

$$\|s\|_{\oplus} = \|s\|_X + \|\partial_t s + b_A(s)\|_{X'}. \quad (4.3)$$

On étend la définition de l'opérateur  $b_A$  défini dans l'égalité (1.24) à l'espace brisé sous la forme

$$\langle b_A(v_{h,\tau}), \varphi \rangle_{X',X} := \int_0^T \langle \mathcal{B}_A(v_{h,\tau}(t)), \varphi(t) \rangle dt, \quad (4.4)$$

pour  $v_{h,\tau} \in L^2(0, T, H^1(\mathcal{T}))$ . On utilisera la norme d'énergie brisée  $\|\cdot\|_{\tau,X}$  définie par (2.19) ainsi que la définition (4.4) pour le terme  $b_A$  car la norme augmentée (4.3) servira pour mesurer l'erreur  $(u - u_{h,\tau})$ . Notons également que, de par la définition de la norme  $X'$ ,

$$\begin{aligned} \|s\|_{\oplus} &= \|s\|_{\tau,X} + \sup_{\varphi \in X; \|\varphi\|_X=1} \langle \partial_t s + b_A(s), \varphi \rangle_{X',X} \\ &= \|s\|_{\tau,X} + \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega); \|\varphi\|=1} \int_0^T \{ \langle \partial_t s, \varphi \rangle + \langle \mathcal{B}_A(s), \varphi \rangle \} dt. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Le lemme suivant montre que le résidu et l'erreur mesurée dans la norme augmentée (4.3) sont équivalents.

**Lemme 4.1.** *Soit  $s \in X \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Alors, on a la borne inférieure suivante sur la différence  $(u - s)$  :*

$$\|\mathcal{R}(s)\|_{X'} \leq \|u - s\|_{\oplus}. \quad (4.6)$$

*Inversement, cette différence peut être bornée par*

$$\|u - s\|_{\oplus} \leq 2^{1/2} \|u_0 - s(0)\| + 3 \|\mathcal{R}(s)\|_{X'}. \quad (4.7)$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in X$  tel que  $\|\varphi\|_X = 1$ . L'équation (4.1a) et la définition (4.2) du résidu impliquent que

$$\langle \mathcal{R}(s), \varphi \rangle_{X',X} = \int_0^T \{ \langle \partial_t(u - s), \varphi \rangle + (\mathbf{S} \nabla(u - s) - \beta(u - s), \nabla \varphi) + (r(u - s), \varphi) \} (t) dt. \quad (4.8)$$

On ajoute et retranche  $(\frac{1}{2}(\nabla \cdot \beta)(u - s), \varphi)$  et on obtient

$$\langle \mathcal{R}(s), \varphi \rangle_{X',X} = \int_0^T \{ \langle \partial_t(u - s), \varphi \rangle + \langle \mathcal{B}_S(u - s), \varphi \rangle + \langle \mathcal{B}_A(u - s), \varphi \rangle \} (t) dt. \quad (4.9)$$

En prenant le supremum sur les  $\varphi \in X$  tels que  $\|\varphi\|_X = 1$ , on obtient

$$\|\mathcal{R}(s)\|_{X'} \leq \|u - s\|_X + \|\partial_t(u - s) + b_A(u - s)\|_{X'} = \|u - s\|_{\oplus}.$$

Passons à la preuve de la borne inférieure. En utilisant l'égalité (4.9) avec  $\varphi = u - s$  et en intégrant en temps entre 0 et  $T$ , on a (cf. Evans [55, Théorème 5.9.3]),

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}(s), u - s \rangle_{X', X} &= \int_0^T \{ \langle \partial_t(u - s) + \mathcal{B}_S(u - s) + \mathcal{B}_A(u - s), u - s \rangle \} dt \\ &= \frac{1}{2} \|u(T) - s(T)\|^2 - \frac{1}{2} \|u_0 - s(0)\|^2 + \|u - s\|_X^2 \\ &\quad + \int_0^T \langle \mathcal{B}_A(u - s), u - s \rangle(t) dt. \end{aligned}$$

Comme  $\langle \mathcal{B}_A(u - s), u - s \rangle = 0$  car  $\mathcal{B}_A$  est antisymétrique sur  $H_0^1(\Omega)$ , il vient

$$\langle \mathcal{R}(s), u - s \rangle_{X', X} = \frac{1}{2} \|u(T) - s(T)\|^2 - \frac{1}{2} \|u_0 - s(0)\|^2 + \|u - s\|_X^2.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \|u - s\|_X^2 &\leq \|u - s\|_X^2 + \frac{1}{2} \|u(T) - s(T)\|^2 \\ &= \langle \mathcal{R}(s), u - s \rangle_{X', X} + \frac{1}{2} \|u_0 - s(0)\|^2. \end{aligned}$$

On utilise la définition de la norme duale pour obtenir

$$\|u - s\|_X^2 \leq \|\mathcal{R}(s)\|_{X'} \|u - s\|_X + \frac{1}{2} \|u_0 - s(0)\|^2.$$

Le fait que si  $x^2 \leq ax + b^2$  pour  $a, b > 0$  alors  $x \leq a + b$  implique

$$\|u - s\|_X \leq 2^{-1/2} \|u_0 - s(0)\| + \|\mathcal{R}(s)\|_{X'}. \quad (4.10)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t(u - s) + \mathcal{B}_A(u - s), \varphi \rangle(t) dt &= \int_0^T \langle \partial_t(u - s) + \mathcal{B}(u - s) - \mathcal{B}_S(u - s), \varphi \rangle(t) dt \\ &= \langle \mathcal{R}(s), \varphi \rangle_{X', X} - \int_0^T \langle \mathcal{B}_S(u - s), \varphi \rangle(t) dt. \end{aligned}$$

En prenant le supremum sur les  $\varphi \in X$  tels que  $\|\varphi\|_X = 1$ , on obtient

$$\|\partial_t(u - s) + \mathcal{B}_A(u - s)\|_{X'} \leq \|\mathcal{R}(s)\|_{X'} + \|u - s\|_X. \quad (4.11)$$

On borne maintenant  $\|u - s\|_{\oplus}$ . On a

$$\begin{aligned} \|u - s\|_{\oplus} &= \|u - s\|_X + \|\partial_t(u - s) + \mathcal{B}_A(u - s)\|_{X'} \\ &\leq \|u - s\|_X + \|\mathcal{R}(s)\|_{X'} + \|u - s\|_X \\ &\leq 2\|u - s\|_X + \|\mathcal{R}(s)\|_{X'}. \end{aligned}$$

On utilise la borne (4.10) sur  $\|u - s\|_X$  pour conclure.  $\square$

## 4.2 Borne supérieure de l'erreur

Le but de cette section est de dériver une estimation d'erreur *a posteriori* dans un cadre unifié indépendant du schéma numérique utilisé pour la discrétisation du problème (4.1a)–(4.1c). Cette estimation est formulée en termes d'une reconstruction  $H_0^1(\Omega)$ -conforme du potentiel notée,  $s_{h,\tau}$ , d'une reconstruction  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conforme du flux diffusif, notée  $\boldsymbol{\theta}_{h,\tau}$ , et d'une reconstruction  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conforme du flux convectif, notée  $\boldsymbol{\psi}_{h,\tau}$ .

### 4.2.1 Hypothèses sur le problème

Pour tout  $0 \leq n \leq N$ , la solution approchée au temps  $t^n$  est notée  $u_h^n$ . Cette solution est telle que  $u_h^n \in V_h^n$  où  $V_h^n := V_h(\mathcal{T}^n)$  est l'espace discret relié au maillage  $\mathcal{T}^n$ . Les espaces  $V_h^n$  contiennent des fonctions polynomiales par morceaux dont le degré est fixé. Dans ce qui suit,  $\Pi_0^n$  désigne la projection  $L^2$ -orthogonale sur l'espace des fonctions constantes par morceaux sur  $\mathcal{T}^n$  et  $\Pi_{V_h^n}$  est la projection  $L^2$ -orthogonale sur  $V_h^n$ . La fonction  $u_{h,\tau} : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , continue et affine par morceaux en temps est donnée, pour tout  $1 \leq n \leq N$  et pour tout  $t \in I^n$ , par

$$u_{h,\tau}(\cdot, t) = (1 - \rho(t))u_h^{n-1} + \rho(t)u_h^n, \quad \rho(t) = \frac{1}{\tau^n}(t - t^{n-1}). \quad (4.12)$$

On va supposer que  $\mathbf{S}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  et  $r$  sont constants par morceaux en temps. Ces hypothèses sont utilisées uniquement pour simplifier la présentation. Dans le cas où elles ne sont pas vérifiées, on introduit des fonctions  $\tilde{\mathbf{S}}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$  et  $\tilde{r}$  définies par  $\tilde{\mathbf{S}}|_{I^n} = \tilde{\mathbf{S}}^n$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}|_{I^n} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}^n$  et  $\tilde{r}|_{I^n} = \tilde{r}^n$  où les quantités  $\tilde{\mathbf{S}}^n$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^n$  et  $\tilde{r}^n$  sont données par

$$\tilde{\mathbf{S}}^n(\mathbf{x}) := \frac{1}{\tau^n} \int_{I^n} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) dt, \quad (4.13)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}^n(\mathbf{x}) := \frac{1}{\tau^n} \int_{I^n} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, t) dt, \quad (4.14)$$

$$\tilde{r}^n(\mathbf{x}) := \frac{1}{\tau^n} \int_{I^n} r(\mathbf{x}, t) dt. \quad (4.15)$$

Ces quantités sont alors prises en compte dans un indicateur relatif aux oscillations en temps des données du problème. On suppose également que  $\boldsymbol{\beta}$  est à divergence nulle et que  $\mathbf{S}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  et  $r$  sont des polynômes par morceaux en espace (quitte à introduire un terme relatif aux oscillations des données en espace). En particulier, on suppose que  $r$  est constante par morceaux en espace.

On suppose l'existence d'une reconstruction du potentiel  $s_{h,\tau}$ , d'une reconstruction du flux diffusif  $\boldsymbol{\theta}_{h,\tau}$  et d'une reconstruction du flux convectif  $\boldsymbol{\psi}_{h,\tau}$  vérifiant

$$s_{h,\tau} \in \mathcal{P}_\tau^1(H_0^1(\Omega)), \quad \boldsymbol{\theta}_{h,\tau}, \boldsymbol{\psi}_{h,\tau} \in \mathcal{P}_\tau^0(\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)). \quad (4.16)$$

La reconstruction du potentiel  $s_{h,\tau}$  est déterminée par les  $(N + 1)$  fonctions  $s_h^n \in H_0^1(\Omega)$  associées aux temps discrets  $\{t^n\}_{0 \leq n \leq N}$  et les reconstructions des flux  $\boldsymbol{\theta}_{h,\tau}$  et  $\boldsymbol{\psi}_{h,\tau}$  sont déterminées respectivement par les  $N$  fonctions  $\boldsymbol{\theta}_h^n$  et  $\boldsymbol{\psi}_h^n$  associées aux intervalles de temps discrets  $\{I^n\}_{1 \leq n \leq N}$ .

De plus, on suppose que les reconstructions du potentiel et des flux satisfont deux hypothèses supplémentaires. Premièrement, les valeurs moyennes de la reconstruction du potentiel  $s_h^n$  sont reliées à celles de  $u_h^n$ , de sorte que, pour tout  $0 \leq n \leq N$ ,

$$(s_h^n, 1)_K = (u_h^n, 1)_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}^{n,n+1}, \quad (4.17)$$

avec la convention  $\mathcal{T}^{N,N+1} := \mathcal{T}^N$ . Par conséquent, on a (cf. lemme 2.1),

$$(\partial_t^n s_{h,\tau}, 1)_K = (\partial_t^n u_{h,\tau}, 1)_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}^n. \quad (4.18)$$

En second lieu, on suppose que les reconstructions des flux  $\theta_{h,\tau}$  et  $\psi_{h,\tau}$  vérifient la propriété de conservativité suivante : Pour tout  $1 \leq n \leq N$ ,

$$(\tilde{f}^n - \partial_t^n u_{h,\tau} - \nabla \cdot \theta_h^n - \nabla \cdot \psi_h^n - r u_h^n, 1)_K = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}^n, \quad (4.19)$$

où  $\tilde{f}^n$  est définie par (2.39).

### 4.2.2 Inégalités utiles

Dans cette section, on rappelle quelques propriétés et inégalités utiles par la suite. On commence par l'inégalité de Poincaré en norme triple, cf. lemme 2.2,

$$\|\varphi - \varphi_K\| \leq m_K^n \|\varphi\|_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}^n, \quad (4.20)$$

où  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\varphi_K$  est la moyenne de  $\varphi$  sur  $K$  et

$$m_K^n := \min\{C_{P,K} h_K (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-\frac{1}{2}}, (c_{\beta,r,K}^n)^{-\frac{1}{2}}\}, \quad (4.21)$$

les quantités  $c_{\mathbf{S},K}^n$  et  $c_{\beta,r,K}^n$  étant définies à la section 2.1.4. On rappelle également l'inégalité suivante, cf. Cheddadi, Fučík, Prieto et Vohralík [34],

$$\|\varphi - \varphi_K\|_\sigma \leq (C_{t,K,\sigma})^{1/2} (\tilde{m}_K^n)^{1/2} \|\varphi\|_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}^n, \sigma \in \mathcal{E}_K, \quad (4.22)$$

avec

$$\tilde{m}_K^n := \min\{(C_{P,K} + C_{P,K}^{1/2}) h_K (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1}, h_K^{-1} (c_{\beta,r,K}^n)^{-1} + (c_{\beta,r,K}^n c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/2}/2\}, \quad (4.23)$$

et  $C_{t,K,\sigma}$  est la constante de l'inégalité de trace suivante :

$$\|\varphi\|_\sigma^2 \leq C_{t,K,\sigma} (h_K^{-1} \|\varphi\|_K + \|\varphi\|_K \|\nabla \varphi\|_K), \quad (4.24)$$

valable pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ ,  $\varphi \in H^1(K)$ , et  $\sigma \in \mathcal{E}_K$ , avec  $C_{t,K,\sigma} = |\sigma| h_K / |K|$  pour un triangle  $K$  et un côté  $\sigma \in \mathcal{E}_K$  (Stephansen [97, Lemme 3.2]).

De plus, on a les deux propriétés suivantes :

$$(\mathbf{S} \nabla v, \nabla v) + (\nabla \cdot (\beta v), v) + (r v, v) = \|v\|^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (4.25)$$

$$(\mathbf{S} \nabla v, \nabla w) + ((\frac{1}{2}(\nabla \cdot \beta) + r)v, w) \leq \|v\| \cdot \|w\| \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega). \quad (4.26)$$

### 4.2.3 Les indicateurs d'erreur

Pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ , l'indicateur des flux est défini par

$$\eta_{\mathbb{F},K}^n := \min\{\eta_{\mathbb{F},1,K}^n, \eta_{\mathbb{F},2,K}^n\}, \quad (4.27)$$

$$\eta_{\mathbb{F},1,K}^n := \|\mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{a}_h^n\|_K, \quad (4.28)$$

$$\eta_{\mathbb{F},2,K}^n := m_K^n \|(I - \Pi_0^n) \nabla \cdot \mathbf{a}_h^n\|_K + (\tilde{m}_K^n)^{1/2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (C_{t,K,\sigma})^{1/2} \|\mathbf{a}_h^n \cdot \mathbf{n}_\sigma\|_\sigma, \quad (4.29)$$

où

$$\mathbf{a}_h^n := \boldsymbol{\theta}_h^n + \boldsymbol{\psi}_h^n + \mathbf{S} \nabla s_h^n - \boldsymbol{\beta} s_h^n, \quad (4.30)$$

$m_K^n$  et  $\tilde{m}_K^n$  étant définis par (4.21) et (4.23). Les indicateurs de non conformité sont définis par

$$\eta_{\text{NC},K}^n := \| |u_{h,\tau} - s_{h,\tau} | \|_K, \quad (4.31)$$

$$\eta_{\text{NC},\tau,K}^n := m_K^n \|\partial_t(u_{h,\tau} - s_{h,\tau})\|_K, \quad (4.32)$$

$$\eta_{\widetilde{\text{NC}},K}^n := \min\{\eta_{\widetilde{\text{NC}}1,K}^n, \eta_{\widetilde{\text{NC}}2,K}^n\}, \quad (4.33)$$

$$\eta_{\widetilde{\text{NC}}1,K}^n := \|\mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{b}_{h,\tau}\|_K, \quad (4.34)$$

$$\eta_{\widetilde{\text{NC}}2,K}^n := m_K^n \|(I - \Pi_0^n) \nabla \cdot \mathbf{b}_{h,\tau}\|_K + (\tilde{m}_K^n)^{1/2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (C_{t,K,\sigma})^{1/2} \|\mathbf{b}_{h,\tau} \cdot \mathbf{n}_\sigma\|_\sigma, \quad (4.35)$$

où

$$\mathbf{b}_{h,\tau} := \boldsymbol{\beta}(u_{h,\tau} - s_{h,\tau}). \quad (4.36)$$

On définit l'indicateur résiduel par

$$\eta_{\mathbb{R},K}^n := m_K^n \|\tilde{f}^n - \partial_t^n s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - r s_h^n\|_K, \quad (4.37)$$

où  $\tilde{f}^n$  est défini par (2.39) et l'indicateur de la condition initiale par

$$\eta_{\text{IC}} := 2^{\frac{1}{2}} \|s_h^0 - u_0\|. \quad (4.38)$$

Enfin, l'indicateur temporel  $\eta_{\mathbb{T}}^n$  est défini par

$$\eta_{\mathbb{T}}^n := \left(\frac{2}{3} \tau^n\right)^{1/2} \left\{ \| |s_h^n - s_h^{n-1} | \|^2 + \| |\nabla \cdot (\boldsymbol{\beta}(s_h^n - s_h^{n-1})) | \|^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.39)$$

Rappelons que la norme  $\| |\cdot | \|_\star$  est définie par (1.15).

### 4.2.4 Résultat principal

On peut maintenant formuler notre résultat en ce qui concerne la borne supérieure de l'erreur en norme augmentée.

**Théorème 4.1** (Borne supérieure de l'erreur). *On suppose que les reconstructions du potentiel  $s_{h,\tau}$  et des flux  $\theta_{h,\tau}$  et  $\psi_{h,\tau}$  vérifient les propriétés (4.16), (4.17) et (4.19). Soient les indicateurs d'erreur  $\eta_{\mathbb{F},K}^n$ ,  $\eta_{\text{NC},K}^n$ ,  $\eta_{\text{NC},\tau,K}^n$ ,  $\eta_{\widetilde{\text{NC}},K}^n$ ,  $\eta_{\mathbb{R},K}^n$ ,  $\eta_{\text{IC}}$  et  $\eta_{\text{T}}^n$  définis par (4.27), (4.31)–(4.33), et (4.37)–(4.39). Alors,*

$$\begin{aligned} \|u - u_{h,\tau}\|_{\oplus} &\leq 3 \left\{ \sum_{n=1}^N \tau^n \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\mathbb{R},K}^n + \eta_{\mathbb{F},K}^n)^2 \right\}^{1/2} \\ &\quad + \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\text{NC},K}^n(t))^2 dt \right\}^{1/2} \\ &\quad + \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\widetilde{\text{NC}},K}^n(t) + \eta_{\text{NC},\tau,K}^n(t))^2 dt \right\}^{1/2} \\ &\quad + 3 \left\{ \sum_{n=1}^N (\eta_{\text{T}}^n)^2 \right\}^{1/2} + \eta_{\text{IC}} + 3\|f - \tilde{f}\|_{X'}. \end{aligned}$$

**Remarque 4.1.** *L'indicateur  $\eta_{\text{T}}^n$  a été introduit dans le but d'obtenir des bornes inférieures robustes en section 4.3. Il présente cependant le désavantage d'être non calculable car il fait apparaître une norme duale. Une borne supérieure calculable pour le terme  $\eta_{\text{T}}^n$  permettant de maintenir la robustesse de l'estimation peut être établie suivant Verfürth [108, Section 8], et cela en résolvant un problème auxiliaire de réaction–diffusion stationnaire.*

On commence la preuve du théorème 4.1 par le lemme suivant :

**Lemme 4.2** (Borne sur la norme augmentée). *Soient  $u$  la solution faible du problème,  $u_{h,\tau}$  la solution discrète, et  $s_{h,\tau}$  la reconstruction du potentiel. Alors,*

$$\begin{aligned} \|u - u_{h,\tau}\|_{\oplus} &\leq 2^{1/2} \|u_0 - s_h^0\| + 3\|\mathcal{R}(s_{h,\tau})\|_{X'} + \|u_{h,\tau} - s_{h,\tau}\|_{\tau,X} \\ &\quad + \sup_{\varphi \in X; \|\varphi\|_X=1} \langle \partial_t(u_{h,\tau} - s_{h,\tau}) + b_A(u_{h,\tau} - s_{h,\tau}), \varphi \rangle_{X',X}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* En utilisant une inégalité triangulaire, on obtient

$$\|u - u_{h,\tau}\|_{\oplus} \leq \|u - s_{h,\tau}\|_{\oplus} + \|u_{h,\tau} - s_{h,\tau}\|_{\oplus}.$$

Le lemme 4.1 borne le premier terme du membre de droite et donne

$$\|u - s_{h,\tau}\|_{\oplus} \leq 2^{1/2} \|u_0 - s_h^0\| + 3\|\mathcal{R}(s_{h,\tau})\|_{X'}. \quad (4.40)$$

Par la définition (4.3) de la norme augmentée, on a

$$\|u_{h,\tau} - s_{h,\tau}\|_{\oplus} = \|u_{h,\tau} - s_{h,\tau}\|_{\tau,X} + \sup_{\varphi \in X; \|\varphi\|_X=1} \langle \partial_t(u_{h,\tau} - s_{h,\tau}) + b_A(u_{h,\tau} - s_{h,\tau}), \varphi \rangle_{X',X}. \quad (4.41)$$

D'où le résultat en combinant l'inégalité (4.40) et l'égalité (4.41).  $\square$

On présente maintenant la preuve de la borne supérieure.

**Preuve du Théorème 4.1.** On commence par borner  $\|u_{h,\tau} - s_{h,\tau}\|_{\tau,X}$ . Il est clair par la définition (2.19) de la norme  $\|\cdot\|_{\tau,X}$  et la définition (4.31) de l'indicateur  $\eta_{\text{NC},K}^n$  que

$$\|u_{h,\tau} - s_{h,\tau}\|_{\tau,X} = \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\text{NC},K}^n(t))^2 dt \right\}^{1/2}. \quad (4.42)$$

Par ailleurs, soit  $\varphi \in X$  tel que  $\|\varphi\|_X = 1$ . Pour simplifier les notations, on omet dans les calculs en espace la dépendance en temps. D'une part, on a, pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ ,

$$-(\mathbf{b}_{h,\tau}, \nabla \varphi)_K \leq \|\mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{b}_{h,\tau}\|_K \|\varphi\|_K = \eta_{\widetilde{\text{NC1}},K}^n \|\varphi\|_K.$$

D'autre part, en intégrant par parties sur chaque  $K \in \mathcal{T}^n$ , pour tout  $1 \leq n \leq N$ , on obtient

$$\begin{aligned} -(\mathbf{b}_{h,\tau}, \nabla \varphi)_K &= -(\mathbf{b}_{h,\tau}, \nabla(\varphi - \varphi_K))_K \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{b}_{h,\tau}, \varphi - \varphi_K)_K - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (\mathbf{b}_{h,\tau} \cdot \mathbf{n}_\sigma, \varphi - \varphi_K)_\sigma \\ &= ((I - \Pi_0^n) \nabla \cdot \mathbf{b}_{h,\tau}, \varphi - \varphi_K)_K - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (\mathbf{b}_{h,\tau} \cdot \mathbf{n}_\sigma, \varphi - \varphi_K)_\sigma. \end{aligned}$$

On utilise alors l'inégalité de Poincaré en norme triple (4.20) pour borner le premier terme de droite

$$((I - \Pi_0^n) \nabla \cdot \mathbf{b}_{h,\tau}, \varphi - \varphi_K)_K \leq m_K^n \|(I - \Pi_0^n) \nabla \cdot \mathbf{b}_{h,\tau}\|_K \|\varphi\|_K, \quad (4.43)$$

et l'inégalité (4.22) pour borner le second terme

$$(\mathbf{b}_{h,\tau} \cdot \mathbf{n}_\sigma, \varphi - \varphi_K)_\sigma \leq (C_{t,K,\sigma})^{1/2} (\tilde{m}_K^n)^{1/2} \|\mathbf{b}_{h,\tau} \cdot \mathbf{n}_\sigma\|_\sigma \|\varphi\|_K. \quad (4.44)$$

Par suite,

$$-(\mathbf{b}_{h,\tau}, \nabla \varphi)_K \leq \eta_{\widetilde{\text{NC2}},K}^n \|\varphi\|_K.$$

On obtient alors la borne supérieure suivante

$$-(\mathbf{b}_{h,\tau}, \nabla \varphi) \leq \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \eta_{\widetilde{\text{NC}},K}^n \|\varphi\|_K. \quad (4.45)$$

Par ailleurs, en utilisant la construction de  $s_{h,\tau}$  et l'égalité (4.18) sur chaque élément  $K \in \mathcal{T}^n$ , on obtient

$$\begin{aligned} \langle \partial_t(u_{h,\tau} - s_{h,\tau}), \varphi \rangle &= \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\partial_t(u_{h,\tau} - s_{h,\tau}), \varphi)_K \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\partial_t(u_{h,\tau} - s_{h,\tau}), \varphi - \varphi_K)_K. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Poincaré en norme triple (4.20), il vient

$$\begin{aligned} \langle \partial_t(u_{h,\tau} - s_{h,\tau}), \varphi \rangle &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}^n} m_K^n \|\partial_t(u_{h,\tau} - s_{h,\tau})\|_K \|\varphi\|_K \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \eta_{\text{NC},\tau,K}^n \|\varphi\|_K. \end{aligned} \quad (4.46)$$

On combine les inégalités (4.45) et (4.46) et on utilise des inégalités de Cauchy–Schwarz pour obtenir

$$\begin{aligned} & \sup_{\varphi \in X; \|\varphi\|_X=1} \langle \partial_t(u_{h,\tau} - s_{h,\tau}) + b_A(u_{h,\tau} - s_{h,\tau}), \varphi \rangle_{X',X} \\ & \leq \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\text{NC},K}^n(t) + \eta_{\text{NC},\tau,K}^n(t))^2 dt \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

On borne maintenant la norme duale du résidu  $\|\mathcal{R}(s_{h,\tau})\|_{X'}$ . Soit  $\varphi \in X$  tel que  $\|\varphi\|_X = 1$ . Alors, en ajoutant et retranchant  $(\boldsymbol{\theta}_{h,\tau}, \nabla\varphi)$  et  $(\boldsymbol{\psi}_{h,\tau}, \nabla\varphi)$  dans l'intégrale pour presque tout  $t \in (0, T)$  et en utilisant le théorème de Green, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}(s_{h,\tau}), \varphi \rangle_{X',X} &= \int_0^T \{ (f - \partial_t s_{h,\tau} - r s_{h,\tau}, \varphi) - (\mathbf{S}\nabla s_{h,\tau} - \boldsymbol{\beta} s_{h,\tau}, \nabla\varphi) \}(t) dt \\ &= \int_0^T \{ (f - \partial_t s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_{h,\tau} - r s_{h,\tau}, \varphi) \\ & \quad - (\mathbf{S}\nabla s_{h,\tau} + \boldsymbol{\theta}_{h,\tau} + \boldsymbol{\psi}_{h,\tau} - \boldsymbol{\beta} s_{h,\tau}, \nabla\varphi) \}(t) dt \\ &= \int_0^T \{ (f - \tilde{f}, \varphi) + (\tilde{f} - \partial_t s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_{h,\tau} - r s_{h,\tau}, \varphi) \\ & \quad - (\mathbf{S}\nabla s_{h,\tau} + \boldsymbol{\theta}_{h,\tau} + \boldsymbol{\psi}_{h,\tau} - \boldsymbol{\beta} s_{h,\tau}, \nabla\varphi) \}(t) dt \\ &=: T_1 + T_2 + T_3. \end{aligned}$$

On a clairement

$$|T_1| \leq \|f - \tilde{f}\|_{X'} \|\varphi\|_X = \|f - \tilde{f}\|_{X'}.$$

Par ailleurs, en utilisant (4.16), on peut écrire

$$T_2 = \sum_{n=1}^N \int_{I^n} (\tilde{f}^n - \partial_t^n s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - r s_{h,\tau}, \varphi)(t) dt.$$

Pour tout  $1 \leq n \leq N$ , en utilisant les égalités (4.17), (4.18) et (4.19) et comme  $r$  est constant par morceaux en espace, on obtient la propriété suivante sur tout  $K \in \mathcal{T}^n$  :

$$(\tilde{f}^n - \partial_t^n s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - r s_{h,\tau}, 1)_K = 0.$$

Alors, pour tout  $t \in I^n$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} & (\tilde{f}^n - \partial_t^n s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - r s_{h,\tau}, \varphi) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\tilde{f}^n - \partial_t^n s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - r s_{h,\tau}, \varphi - \varphi_K)_K \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \eta_{\text{R},K}^n \|\varphi\|_K, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Poincaré en norme triple (4.20) et la définition (4.37) de  $\eta_{\text{R},K}^n$ . On obtient alors

$$T_2 \leq \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \eta_{\text{R},K}^n \|\varphi(t)\|_K dt - \sum_{n=1}^N \int_{I^n} (r(s_{h,\tau}(t) - s_h^n), \varphi(t)) dt.$$

On borne maintenant le terme  $T_3$ . On écrit

$$\begin{aligned} -T_3 &= \int_0^T (\mathbf{S}\nabla s_{h,\tau} + \boldsymbol{\theta}_{h,\tau} + \boldsymbol{\psi}_{h,\tau} - \boldsymbol{\beta}_{s_{h,\tau}}, \nabla\varphi)(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \{(\mathbf{a}_h^n, \nabla\varphi) - (\boldsymbol{\beta}(s_{h,\tau} - s_h^n), \nabla\varphi) + (\mathbf{S}\nabla(s_{h,\tau} - s_h^n), \nabla\varphi)\}(t) dt \end{aligned}$$

où  $\mathbf{a}_h^n$  est définie par (4.30). On va borner le premier terme  $(\mathbf{a}_h^n, \nabla\varphi)$ . D'une part, pour tout  $1 \leq n \leq N$  et pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ , on a

$$-(\mathbf{a}_h^n, \nabla\varphi)_K \leq \|\mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{a}_h^n\|_K \|\varphi\|_K.$$

D'autre part, en intégrant par parties sur  $K \in \mathcal{T}^n$ , on obtient

$$\begin{aligned} -(\mathbf{a}_h^n, \nabla\varphi)_K &= -(\mathbf{a}_h^n, \nabla(\varphi - \varphi_K))_K \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{a}_h^n, \varphi - \varphi_K)_K - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (\mathbf{a}_h^n \cdot \mathbf{n}_\sigma, \varphi - \varphi_K)_\sigma \\ &= ((I - \Pi_0^n) \nabla \cdot \mathbf{a}_h^n, \varphi - \varphi_K)_K - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (\mathbf{a}_h^n \cdot \mathbf{n}_\sigma, \varphi - \varphi_K)_\sigma. \end{aligned}$$

L'utilisation de l'inégalité de Poincaré en norme triple (4.20) et de l'inégalité (4.22) donne la borne supérieure suivante :

$$-\int_{I^n} (\mathbf{a}_h^n, \nabla\varphi) \leq \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \int_{I^n} \eta_{\mathbb{F},K}^n(t) \|\varphi(t)\|_K dt.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} T_2 + T_3 &\leq \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\mathbb{R},K}^n + \eta_{\mathbb{F},K}^n(t)) \|\varphi(t)\|_K dt \\ &\quad - \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \{(r(s_{h,\tau} - s_h^n), \varphi) + (\mathbf{S}\nabla(s_{h,\tau} - s_h^n), \nabla\varphi)\}(t) dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \int_{I^n} (\boldsymbol{\beta}(s_{h,\tau} - s_h^n), \nabla\varphi)(t) dt. \end{aligned}$$

Reste à borner les deux derniers termes. La propriété (4.26) permet d'écrire

$$(\mathbf{S}\nabla(s_{h,\tau} - s_h^n), \nabla\varphi) + (r(s_{h,\tau} - s_h^n), \varphi) \leq \|s_{h,\tau} - s_h^n\| \|\varphi\|.$$

Par ailleurs, on intègre par parties sur  $\Omega$  (rappelons que  $\varphi(t)$  est dans  $H_0^1(\Omega)$ ) et on utilise la définition (1.15) de la norme duale  $\|\cdot\|_\star$ . On obtient alors

$$(\boldsymbol{\beta}(s_{h,\tau} - s_h^n), \nabla\varphi) \leq \|\nabla \cdot (\boldsymbol{\beta}(s_{h,\tau} - s_h^n))\|_\star \|\varphi\|.$$

On note alors

$$S_{h,\tau} := \|s_{h,\tau} - s_h^n\| + \|\nabla \cdot (\boldsymbol{\beta}(s_{h,\tau} - s_h^n))\|_\star. \quad (4.48)$$

$\beta$  étant constant en temps et  $s_{h,\tau}$  étant affine, l'intégration sur l'intervalle  $I^n$  donne

$$\begin{aligned} \int_{I^n} (S_{h,\tau})^2(t) dt &\leq 2 \int_{I^n} \left( \| \|s_{h,\tau} - s_h^n\|^2 + \| \nabla \cdot (\beta(s_{h,\tau} - s_h^n)) \|_*^2 \right) (t) dt \\ &= \frac{2\tau^n}{3} \left( \| \|s_h^n - s_h^{n-1}\|^2 + \| \nabla \cdot (\beta(s_h^n - s_h^{n-1})) \|_*^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(s_{h,\tau})\|_{X'} &\leq \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{R,K}^n + \eta_{F,K}^n(t))^2 dt \right\}^{1/2} + \|f - \tilde{f}\|_{X'} \\ &\quad + \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{2\tau^n}{3} (\| \|s_h^n - s_h^{n-1}\|^2 + \| \nabla \cdot (\beta(s_h^n - s_h^{n-1})) \|_*^2) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Le résultat suit en combinant les trois inégalités (4.42), (4.47) et (4.49).  $\square$

### 4.3 Borne inférieure de l'erreur

Le but de cette section est de dériver des bornes supérieures locales en temps pour les indicateurs figurant dans le Théorème 4.1 en termes de l'erreur  $\|u - u_{h,\tau}\|_{\oplus, I^n}$  (définie par (4.60) ci-dessous), des données et des semi-normes de sauts de la solution discrète  $u_{h,\tau}$ .

Ces bornes sont obtenues pour un choix spécifique de la reconstruction du potentiel  $s_{h,\tau}$  basé sur un opérateur d'interpolation par moyenne et des propriétés d'approximation particulières pour les reconstructions des flux  $\theta_{h,\tau}$  et  $\psi_{h,\tau}$ . Des hypothèses (régularité et condition de transition) doivent également être introduites sur les maillages espace-temps.

#### 4.3.1 Hypothèses sur les maillages espace-temps

On suppose que les différents maillages  $\mathcal{T}^n$ , pour tout  $0 \leq n \leq N$ , vérifient les conditions suivantes :

- (M1) Régularité : les maillages ( $\mathcal{T}^n$ ) sont réguliers uniformément en  $n$  : Il existe  $\kappa > 0$  appelé paramètre de régularité tel que, pour tout  $0 \leq n \leq N$  et pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ ,

$$\rho_K \geq \kappa h_K, \quad (4.50)$$

où  $\rho_K$  désigne le diamètre du cercle inscrit dans  $K$ .

- (M2) Condition de transition : Pour tout  $1 \leq n \leq N$ , les maillages communs  $\mathcal{T}^{n-1,n}$  sont également réguliers uniformément en  $n$  et tels que

$$\Xi := \sup_{1 \leq n \leq N} \sup_{K \in \mathcal{T}^{n-1} \cup \mathcal{T}^n} \sup_{K' \in \mathcal{T}^{n-1,n}; K' \subset K} \frac{h_K}{h_{K'}} < +\infty. \quad (4.51)$$

- (M3) Pour tout  $1 \leq n \leq N$ ,  $(h^n)^2 \leq \Upsilon \tau^n$  pour une constante  $\Upsilon > 0$ .

On suppose pour simplifier que tous les maillages  $(\mathcal{T}^n)_{0 \leq n \leq N}$  sont des raffinements d'un maillage triangulaire de base  $\mathcal{T}^*$  et que le maillage  $\mathcal{T}^n$ ,  $n \geq 1$ , est obtenu en effectuant des raffinements et déraffinements du maillage  $\mathcal{T}^{n-1}$ . Par exemple, la méthode *newest bisection* maintient les propriétés (M1) et (M2), cf. par exemple, Stevenson [98].

**Remarque 4.2** (Condition de transition). *Dans la condition de transition (4.51),  $K \in \mathcal{T}^{n-1}$  dans le deuxième supremum restreint le raffinement, alors que  $K \in \mathcal{T}^n$  restreint le déraffinement. Cela signifie que les changements des maillages en temps ne peuvent pas être trop brusques.*

### 4.3.2 Notations

Par la suite,  $C$  dénote une constante générique dont la valeur peut changer à chaque occurrence. Cette valeur peut dépendre de la régularité des maillages, de la constante de transition  $\Xi$  dans (4.51), de la constante  $\Upsilon$  dans (M3), et du degré des polynômes utilisés pour contruire les espaces  $V_h^n$ , mais elle est indépendante des pas des maillages  $\mathcal{T}^n$ , des pas de temps  $\tau^n$  et des données  $\mathbf{S}$ ,  $\beta$  et  $r$ ;  $C$  peut toutefois dépendre des oscillations locales de ces données ainsi que du rapport  $C_{\mathbf{S},K}^n/c_{\mathbf{S},K}^n$  mesurant l'anisotropie locale du tenseur de diffusion (ce rapport est égal à un en cas de diffusion isotrope). L'inégalité  $A \leq CB$  sera en général écrite  $A \lesssim B$ .

Pour tout  $0 \leq n \leq N$ , pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}^n$  et pour une fonction  $v$  suffisamment régulière mais discontinue à travers  $\sigma$ , on définit le saut de  $v$  sur  $\sigma$  par

$$[[v]] := v|_K - v|_L, \quad (4.52)$$

où  $K, L \in \mathcal{T}^n$  sont tels que  $K \cap L = \sigma$ . Le signe de ce saut est laissé arbitraire et ne joue pas de rôle par la suite. Pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}^n$ ,

$$[[v]] := v|_K, \quad (4.53)$$

où  $K$  est l'unique élément de  $\mathcal{T}^n$  tel que  $\sigma \in \mathcal{E}_K$ . Pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ , on définit l'ensemble des côtés  $\sigma$  ayant une intersection non nulle avec  $K$ ,

$$\mathfrak{E}_K := \{\sigma \in \mathcal{E}^n; \sigma \cap K \neq \emptyset\}, \quad (4.54)$$

et l'ensemble des éléments  $K'$  ayant une intersection non nulle avec  $K$ ,

$$\mathfrak{T}_K := \{K' \in \mathcal{T}^n; K' \cap K \neq \emptyset\}. \quad (4.55)$$

Pour un sous-ensemble  $\mathfrak{E} \subset \mathcal{E}^n$  et un sous-ensemble  $\mathfrak{T} \in \mathcal{T}^n$ , on introduit les notations

$$\|v\|_{\mathfrak{E}}^2 := \sum_{\sigma \in \mathfrak{E}} \|v\|_{\sigma}^2, \quad (4.56)$$

$$\|v\|_{\mathfrak{T}}^2 := \sum_{K \in \mathfrak{T}} \|v\|_K^2. \quad (4.57)$$

Comme les maillages sont réguliers, pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$  et pour tout  $\sigma \in \mathfrak{E}_K$ , le diamètre de  $\sigma$  noté  $h_\sigma$  est équivalent à  $h_K$  dans le sens où  $h_\sigma \lesssim h_K$  et  $h_K \lesssim h_\sigma$ .

Pour tout  $1 \leq n \leq N$ . On introduit la seminorme des sauts suivante :

$$\begin{aligned} \|u_{h,\tau}\|_{\sharp,n}^2 &:= \tau^n \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \{ (C_{\mathbf{S},K}^n + (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1}) h_K^{-1} + m_K^n (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/2} \|\beta\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}^2 \\ &\quad + r_K^n (r_K^n (m_K^n)^2 + 1) h_K \} \| [u_h^n] \|_{\mathfrak{E}_K}^2 \\ &+ \tau^n \sum_{K \in \mathcal{T}^{n-1}} \{ (C_{\mathbf{S},K}^n + (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1}) h_K^{-1} + m_K^n (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/2} \|\beta\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}^2 \\ &\quad + r_K^n h_K \} \| [u_h^{n-1}] \|_{\mathfrak{E}_K}^2. \end{aligned} \quad (4.58)$$

De plus, on localise en temps la norme  $\|\cdot\|_{\tau,X}$  et la norme augmentée  $\|\cdot\|_{\oplus}$  comme suit :

$$\|y\|_{\tau,X(I^n)}^2 := \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^{n-1,n}} \|y(t)\|_K^2 dt, \quad (4.59)$$

$$\|y\|_{\oplus,I^n} := \|y\|_{\tau,X(I^n)} + \|\partial_t y + b_A(y)\|_{X'(I^n)}, \quad (4.60)$$

où

$$\|z\|_{X'(I^n)}^2 := \int_{I^n} \|z\|_{\star}^2(t) dt. \quad (4.61)$$

Finalement, pour tout  $1 \leq n \leq N$ , on définit le terme d'oscillation espace-temps de la donnée  $f$  par

$$(\mathcal{E}_f^n)^2 := \|f - \tilde{f}\|_{X'(I^n)} + \tau^n \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (m_K^n)^2 \|\tilde{f}^n - \tilde{f}_h^n\|_K^2, \quad (4.62)$$

où  $\tilde{f}_h^n$  est la projection  $L^2$  de  $\tilde{f}^n$  sur  $V_h^n$ .

On définit la version locale en temps et globale en espace des indicateurs. En particulier, on définit

$$(\eta_{\mathbf{R}}^n)^2 := \tau^n \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\mathbf{R},K}^n)^2, \quad (4.63)$$

$$(\eta_{\mathbf{F}}^n)^2 := \tau^n \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\mathbf{F},K}^n)^2, \quad (4.64)$$

$$(\eta_{\mathbf{NC}}^n)^2 := \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\mathbf{NC},K}^n(t))^2 dt, \quad (4.65)$$

$$(\eta_{\mathbf{NC},\tau}^n)^2 := \tau^n \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\mathbf{NC},\tau,K}^n)^2, \quad (4.66)$$

$$(\eta_{\widetilde{\mathbf{NC}}}^n)^2 := \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\widetilde{\mathbf{NC}},K}^n(t))^2 dt, \quad (4.67)$$

et on définit la quantité  $\eta^n$ , locale en temps et globale en espace, par

$$(\eta^n)^2 := (\eta_{\mathbf{R}}^n)^2 + (\eta_{\mathbf{F}}^n)^2 + (\eta_{\mathbf{NC}}^n)^2 + (\eta_{\mathbf{NC},\tau}^n)^2 + (\eta_{\widetilde{\mathbf{NC}}}^n)^2 + (\eta_{\mathbf{T}}^n)^2, \quad (4.68)$$

avec l'indicateur temporel  $\eta_{\mathbf{T}}^n$  est défini par (4.39).

Finalement, on introduit les quantités suivantes :

$$\mathcal{E}_{R,K}^n := \tau^n m_K^n \|\tilde{f}_h^n - \partial_t^n u_{h,\tau} + \nabla \cdot (\mathbf{S} \nabla u_h^n) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\beta} u_h^n) - r u_h^n\|_{\mathfrak{I}_K}, \quad (4.69)$$

$$\mathcal{E}_{J,K}^n := \tau^n (m_K^n)^{1/2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4} \|\llbracket \mathbf{S} \nabla u_h^n \cdot \mathbf{n} \rrbracket\|_{\mathfrak{E}_K}, \quad (4.70)$$

et on pose  $(\mathcal{E}_R^n)^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\mathcal{E}_{R,K}^n)^2$  et  $(\mathcal{E}_J^n)^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\mathcal{E}_{J,K}^n)^2$ . Ces quantités prennent la forme des estimateurs usuels pour les estimations d'erreur *a posteriori* basées sur les résidus, cf. Verfürth [108].

### 4.3.3 Hypothèses sur les reconstructions du potentiel et des flux

Pour tout  $0 \leq n \leq N$  et pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ , on suppose que la reconstruction  $H_0^1(\Omega)$ -conforme du potentiel se fait selon la définition (2.49) :

$$s_h^n := \mathcal{I}_{\text{av}}^n(u_h^n) + \sum_{K' \in \mathcal{T}^{n,n+1}} \alpha_{K'}^n b_{K'}, \quad (4.71)$$

où pour tout  $0 \leq n \leq N$  et pour tout  $K' \in \mathcal{T}^{n,n+1}$ , les coefficients  $\alpha_{K'}^n$  sont donnés par

$$\alpha_{K'}^n = \frac{1}{(b_{K'}, 1)_{K'}} (u_h^n - \mathcal{I}_{\text{av}}^n(u_h^n), 1)_{K'}, \quad (4.72)$$

permettant ainsi la satisfaction de (4.17) et par suite de (4.18).

Par ailleurs, pour tout  $1 \leq n \leq N$  et pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ , on suppose que les reconstructions des flux vérifient

$$\|\mathbf{S} \nabla u_h^n + \boldsymbol{\theta}_h^n\|_K \lesssim h_K^{1/2} \|\llbracket \mathbf{S} \nabla u_h^n \cdot \mathbf{n}_\sigma \rrbracket\|_{\mathfrak{E}_K}, \quad (4.73)$$

$$\|\boldsymbol{\beta} u_h^n - \boldsymbol{\psi}_h^n\|_K \lesssim \|\boldsymbol{\beta}\|_{L^\infty(K)} h_K^{1/2} \|\llbracket u_h^n \rrbracket\|_{\mathfrak{E}_K}. \quad (4.74)$$

Les propriétés (4.73) et (4.74) signifient que le terme  $\|\mathbf{S} \nabla u_h^n + \boldsymbol{\theta}_h^n\|_K$  est une borne inférieure pour un estimateur classique du type résiduel connu dans les méthodes conformes (cf. Verfürth [108]), et  $\|\boldsymbol{\beta} u_h^n - \boldsymbol{\psi}_h^n\|_K$  est une borne inférieure pour le terme des sauts connu dans l'analyse d'erreur *a posteriori* des méthodes non conformes (cf., par exemple, Karakashian et Pascal [68]).

### 4.3.4 Borne inférieure

Comme la borne inférieure de l'erreur est locale en temps, on fixe dans cette section l'entier  $1 \leq n \leq N$ . On commence par donner quelques inégalités utilisées dans la dérivation de la borne inférieure.

**Lemme 4.3.** *On suppose que les maillages satisfont (M1) et (M2). Soit  $u_h^n$  la solution approchée du problème (4.1a)–(4.1c) et  $s_h^n$  la reconstruction  $H_0^1(\Omega)$ -conforme du potentiel donnée par (4.71). Alors, pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ ,*

$$\|\nabla(s_h^n - u_h^n)\|_K \lesssim h_K^{-1/2} \|\llbracket u_h^n \rrbracket\|_{\mathfrak{E}_K}.$$

*Démonstration.* Soit  $i_h^n := \mathcal{I}_{\text{av}}^n(u_h^n)$  et  $\delta_h^n := \sum_{K' \in \mathcal{T}^{n,n+1}} \alpha_{K'}^n b_{K'}$ . Il est clair que  $s_h^n - u_h^n = (i_h^n - u_h^n) + \delta_h^n$ . Des propriétés d'approximation classiques pour  $\mathcal{I}_{\text{av}}^n$ , on déduit, cf. Achdou, Bernardi et Coquel [4], Karakashian et Pascal [68], et Burman et Ern [30], pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$

$$\|\nabla(i_h^n - u_h^n)\|_K \lesssim h_K^{-1/2} \|\llbracket u_h^n \rrbracket\|_{\mathfrak{E}_K}, \quad (4.75)$$

$$\|i_h^n - u_h^n\|_K \lesssim h_K^{1/2} \|\llbracket u_h^n \rrbracket\|_{\mathfrak{E}_K}. \quad (4.76)$$

On va maintenant estimer la contribution des fonctions bulles, cf. Ern et Vohralík [53]. Soit  $K' \in \mathcal{T}^{n,n+1}$  tel que  $K' \subset K$ . En utilisant la définition de  $\delta_h^n$  et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|\nabla \delta_h^n\|_{K'} = |\alpha_{K'}^n| \|\nabla b_{K'}\|_{K'} \leq \left( h_{K'} \frac{\|\nabla b_{K'}\|_{K'} |K'|^{1/2}}{(b_{K'}, 1)_{K'}} \right) h_{K'}^{-1} \|i_h^n - u_h^n\|_{K'}.$$

Grace à la régularité du maillage  $\mathcal{T}^{n,n+1}$ , le facteur entre parenthèses est borné uniformément, on obtient alors

$$\|\nabla \delta_h^n\|_{K'} \lesssim h_{K'}^{-1} \|i_h^n - u_h^n\|_{K'}.$$

On utilise maintenant la condition de transition (4.51), la régularité des maillages et la propriété d'approximation (4.76) pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\nabla \delta_h^n\|_K^2 &= \sum_{K' \in \mathcal{T}^{n,n+1}; K' \subset K} \|\nabla \delta_h^n\|_{K'}^2 \\ &\lesssim \sum_{K' \in \mathcal{T}^{n,n+1}; K' \subset K} h_{K'}^{-2} \|u_h^n - i_h^n\|_{K'}^2 \\ &\lesssim \Xi^2 h_K^{-2} \sum_{K' \in \mathcal{T}^{n,n+1}; K' \subset K} \|u_h^n - i_h^n\|_{K'}^2 \\ &= \Xi^2 h_K^{-2} \|u_h^n - i_h^n\|_K^2 \\ &\lesssim h_K^{-1} \|\llbracket u_h^n \rrbracket\|_{\mathfrak{E}_K}^2. \end{aligned}$$

La preuve est complète.  $\square$

**Lemme 4.4.** *On suppose que les maillages satisfont (M1) et (M2). Soit  $u_h^n$  la solution approchée du problème (4.1a)–(4.1c) et  $s_h^n$  la reconstruction  $H_0^1(\Omega)$ -conforme du potentiel donnée par (4.71). Alors, pour tout  $K \in \mathcal{T}^n$ ,*

$$\|s_h^n - u_h^n\|_K \lesssim h_K^{1/2} \|\llbracket u_h^n \rrbracket\|_{\mathfrak{E}_K}.$$

*Démonstration.* En utilisant les notations du lemme 4.3 et la propriété d'approximation (4.76) ainsi que le fait que  $\frac{\|b_{K'}\|_{K'} |K'|^{1/2}}{(b_{K'}, 1)_{K'}}$  est borné uniformément, on obtient  $\|\delta_h^n\|_K^2 \lesssim h_K \|\llbracket u_h^n \rrbracket\|_{\mathfrak{E}_K}^2$ . La conclusion est immédiate.  $\square$

**Théorème 4.2** (Borne inférieure de l'erreur). *On suppose que les maillages satisfont (M1)–(M3), que la reconstruction du potentiel  $s_{h,\tau}$  est donnée par (4.71), et que les reconstructions des flux  $\boldsymbol{\theta}_{h,\tau}$  et  $\boldsymbol{\psi}_{h,\tau}$  vérifient les propriétés d'approximation (4.73) et (4.74). Soit  $\mathcal{E}_f^n$  défini par (4.62) et soit  $\|u_{h,\tau}\|_{\sharp,n}^2$  définie par (4.58). Finalement, soit  $\eta^n$  l'indicateur local en temps et global en espace défini par (4.68). Alors,*

$$\eta^n \lesssim \|u - u_{h,\tau}\|_{\oplus, I^n} + \mathcal{E}_f^n + \|u_{h,\tau}\|_{\sharp,n}. \quad (4.77)$$

La preuve du théorème 4.2 est décomposée en plusieurs étapes.

**Lemme 4.5** (Borne sur  $\eta_{\mathbb{R}}^n$ ). *On suppose les propriétés d'approximation (4.73) pour la reconstruction du flux diffusif et (4.74) pour la reconstruction du flux convectif. Alors,*

$$(\eta_{\mathbb{R}}^n)^2 \lesssim (\mathcal{E}_{\mathbb{R}}^n)^2 + (\mathcal{E}_{\mathbb{J}}^n)^2 + \|u_{h,\tau}\|_{\sharp,n}^2 + (\eta_{\text{NC},\tau})^2 + (\mathcal{E}_f^n)^2. \quad (4.78)$$

*Démonstration.* En utilisant des inégalités triangulaires, on a

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbb{R},K}^n &= m_K^n \|\tilde{f}^n - \partial_t^n s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - r s_h^n\|_K \\ &\leq m_K^n \|\tilde{f}_h^n - \partial_t^n u_{h,\tau} + \nabla \cdot (\mathbf{S}\nabla u_h^n) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\beta} u_h^n) - r u_h^n\|_K \\ &\quad + m_K^n \|\tilde{f}^n - \tilde{f}_h^n\|_K \\ &\quad + m_K^n \|\partial_t^n (s_{h,\tau} - u_{h,\tau})\|_K \\ &\quad + m_K^n \|\nabla \cdot (\mathbf{S}\nabla u_h^n + \boldsymbol{\theta}_h^n)\|_K \\ &\quad + m_K^n \|\nabla \cdot (\boldsymbol{\beta} u_h^n - \boldsymbol{\psi}_h^n)\|_K \\ &\quad + m_K^n \|r(u_h^n - s_h^n)\|_K. \end{aligned}$$

$\mathbf{S}\nabla u_h^n + \boldsymbol{\theta}_h^n$  étant un polynôme par morceaux sur  $K$ , une inégalité inverse et la propriété d'approximation (4.73) permettent d'écrire

$$\|\nabla \cdot (\mathbf{S}\nabla u_h^n + \boldsymbol{\theta}_h^n)\|_K \lesssim h_K^{-1} \|\mathbf{S}\nabla u_h^n + \boldsymbol{\theta}_h^n\|_K \lesssim h_K^{-1} h_K^{1/2} \|[\mathbf{S}\nabla u_h^n \cdot \mathbf{n}]\|_{\mathbf{e}_K}.$$

D'après la définition (4.21) de  $m_K^n$ , on observe que

$$m_K^n \lesssim (m_K^n)^{1/2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4} h_K^{1/2}.$$

En multipliant par  $h_K^{-1/2}$  on obtient

$$m_K^n h_K^{-1/2} \lesssim (m_K^n)^{1/2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4}. \quad (4.79)$$

On utilise alors cette borne pour écrire

$$m_K^n \|\nabla \cdot (\mathbf{S}\nabla u_h^n + \boldsymbol{\theta}_h^n)\|_K \lesssim (\tau^n)^{-1} \mathcal{E}_{\mathbf{J},K}^n.$$

En utilisant les mêmes arguments et la propriété d'approximation (4.74),

$$m_K^n \|\nabla \cdot (\boldsymbol{\beta} u_h^n - \boldsymbol{\psi}_h^n)\|_K \lesssim (m_K^n)^{1/2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4} \|\boldsymbol{\beta}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)} \|[\mathbf{u}_h^n]\|_{\mathbf{e}_K}.$$

Finalement, par le lemme 4.4, on obtient

$$m_K^n \|r(u_h^n - s_h^n)\|_K \lesssim m_K^n r_K^n h_K^{1/2} \|\llbracket u_h^n \rrbracket\|_{\mathbf{e}_K}.$$

On combine ces résultats avec la définition (4.32) de l'indicateur de non conformité  $\eta_{\text{NC},\tau,K}^n$  et la définition (4.58) de la semi-norme des sauts pour conclure.  $\square$

Suivant l'idée de Verfürth [108], on divise le résidu en résidu temporel et résidu spatial. On définit le résidu sur l'intervalle  $I^n$  par :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}^n(s_{h,\tau}), \varphi \rangle_{X'(I^n), X(I^n)} &:= \int_{I^n} \{ (f, \varphi) - \langle \partial_t^n s_{h,\tau}, \varphi \rangle - (\mathbf{S}\nabla s_{h,\tau}, \nabla \varphi) + (\beta s_{h,\tau}, \nabla \varphi) \\ &\quad - (r s_{h,\tau}, \varphi) \} (t) dt. \end{aligned} \quad (4.80)$$

On décompose ce résidu en résidu temporel  $\mathcal{R}_\tau^n(s_{h,\tau})$  et résidu spatial  $\mathcal{R}_h^n(s_{h,\tau})$  tels que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_\tau^n(s_{h,\tau}), \varphi \rangle_{X'(I^n), X(I^n)} &:= \int_{I^n} \{ (\mathbf{S}\nabla(s_h^n - s_{h,\tau}) - \beta(s_h^n - s_{h,\tau}), \nabla \varphi) \\ &\quad + (r(s_h^n - s_{h,\tau}), \varphi) \} (t) dt, \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_h^n(s_{h,\tau}), \varphi \rangle_{X'(I^n), X(I^n)} &:= \int_{I^n} \{ (f, \varphi) - \langle \partial_t^n s_{h,\tau}, \varphi \rangle - (\mathbf{S}\nabla s_h^n, \nabla \varphi) + (\beta s_h^n, \nabla \varphi) \\ &\quad - (r s_h^n, \varphi) \} (t) dt. \end{aligned} \quad (4.82)$$

De cette décomposition, on obtient

$$\langle \mathcal{R}^n(s_{h,\tau}), \varphi \rangle_{X'(I^n), X(I^n)} = \langle \mathcal{R}_\tau^n(s_{h,\tau}), \varphi \rangle_{X'(I^n), X(I^n)} + \langle \mathcal{R}_h^n(s_{h,\tau}), \varphi \rangle_{X'(I^n), X(I^n)}. \quad (4.83)$$

On commence par estimer le résidu temporel dans le lemme suivant.

**Lemme 4.6** (Estimation du résidu temporel). *Pour tout  $1 \leq n \leq N$  et tout réel  $\delta \in (0, 1)$ , il existe une fonction  $z_{n,\delta} \in X$  telle que l'estimation suivante est vérifiée sur l'intervalle de temps  $I^n$  :*

$$\langle \mathcal{R}_\tau^n(s_{h,\tau}), z_{n,\delta} \rangle_{X'(I^n), X(I^n)} \geq \frac{\delta}{3(\delta+1)} \tau^n \left( \| \|s_h^n - s_h^{n-1}\| \|^2 + \delta \| \| \nabla \cdot (\beta(s_h^n - s_h^{n-1})) \| \|^2 \right), \quad (4.84)$$

et

$$\left\{ \int_{I^n} \| \| z_{n,\delta} \| \|^2(t) dt \right\}^{1/2} \lesssim (\tau^n)^{1/2} \left\{ \| \|s_h^n - s_h^{n-1}\| \|^2 + \| \| \nabla \cdot (\beta(s_h^n - s_h^{n-1})) \| \|^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.85)$$

*Démonstration.* On pose  $v_h^n = s_h^n - s_h^{n-1}$ . On suit la technique de Verfürth [108, Lemme 6.1] et on définit  $x_n \in H^{-1}(\Omega)$  par

$$\langle x_n, \varphi \rangle := (\mathbf{S}\nabla v_h^n, \nabla \varphi) + (\nabla \cdot (\beta v_h^n), \varphi) + (r v_h^n, \varphi), \quad (4.86)$$

pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ . D'après la définition (1.15) de la norme duale  $\|\cdot\|_*$ , il existe, pour tout  $\delta \in (0, 1)$ , une fonction  $\varphi_{n,\delta} \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$\|\varphi_{n,\delta}\| = \|\nabla \cdot (\beta v_h^n)\|_*, \quad (4.87)$$

$$(\nabla \cdot (\beta v_h^n), \varphi_{n,\delta}) \geq \delta \|\nabla \cdot (\beta v_h^n)\|_*^2. \quad (4.88)$$

On pose

$$\xi_{n,\delta} := v_h^n + \gamma \varphi_{n,\delta}, \quad (4.89)$$

où  $\gamma$  est une constante qu'on va préciser plus tard. On a clairement

$$\|\xi_{n,\delta}\| \leq \max\{1, \gamma\} \left( \|v_h^n\| + \|\nabla \cdot (\beta v_h^n)\|_* \right). \quad (4.90)$$

En utilisant l'égalité (4.25), on obtient

$$(\mathbf{S}\nabla v_h^n, \nabla v_h^n) + (\nabla \cdot (\beta v_h^n), v_h^n) + (r v_h^n, v_h^n) = \|v_h^n\|^2.$$

En utilisant les inégalités (4.26) (on rappelle que  $\beta$  est de divergence nulle) et (4.88) d'une part, et l'égalité (4.87) d'autre part, on obtient

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{S}\nabla v_h^n, \nabla \varphi_{n,\delta}) + \gamma(\nabla \cdot (\beta v_h^n), \varphi_{n,\delta}) + \gamma(r v_h^n, \varphi_{n,\delta}) \\ \geq \gamma \delta \|\nabla \cdot (\beta v_h^n)\|_*^2 - \gamma \|v_h^n\| \|\nabla \cdot (\beta v_h^n)\|_*. \end{aligned}$$

En combinant ces deux inégalités il vient,

$$\begin{aligned} \langle x_n, \xi_{n,\delta} \rangle &\geq \|v_h^n\|^2 + \gamma \delta \|\nabla \cdot (\beta v_h^n)\|_*^2 - \gamma \|v_h^n\| \|\nabla \cdot (\beta v_h^n)\|_* \\ &\geq \|v_h^n\|^2 + \gamma \delta \|\nabla \cdot (\beta v_h^n)\|_*^2 - \gamma \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|v_h^n\| \sqrt{\delta} \|\nabla \cdot (\beta v_h^n)\|_* \\ &\geq (1 - \frac{1}{2}\gamma\delta^{-1}) \|v_h^n\|^2 + \frac{1}{2}\gamma\delta \|\nabla \cdot (\beta v_h^n)\|_*^2. \end{aligned}$$

On choisit maintenant

$$\gamma = \frac{2\delta}{\delta + 1}$$

et on obtient

$$\|\xi_{n,\delta}\| \leq \left( \|v_h^n\| + \|\nabla \cdot (\beta v_h^n)\|_* \right), \quad (4.91)$$

$$\langle x_n, \xi_{n,\delta} \rangle \geq \frac{\delta}{\delta + 1} \left( \|v_h^n\|^2 + \delta \|\nabla \cdot (\beta v_h^n)\|_*^2 \right). \quad (4.92)$$

Cherchons maintenant une fonction  $z_{n,\delta}$  vérifiant (4.84) et (4.85). Comme la fonction  $t \rightarrow s_{h,\tau}(t)$  est continue et affine par morceaux en temps à valeurs dans  $H_0^1(\Omega)$ , on obtient, pour  $t \in I^n$

$$s_h^n - s_{h,\tau}(t) = \left( \frac{t^n - t}{\tau^n} \right) v_h^n. \quad (4.93)$$

Une intégrale en temps donne

$$\int_{I^n} \left[ \frac{t^n - t}{\tau^n} \right]^2 dt = \frac{\tau^n}{3}. \quad (4.94)$$

D'autre part, d'après la définition (4.81) de  $\mathcal{R}_\tau^n(s_{h,\tau})$  et la définition (4.86) de  $x_n$  ainsi que l'égalité (4.93), on a

$$\langle \mathcal{R}_\tau^n(s_{h,\tau}), \varphi \rangle_{X'(I^n), X(I^n)} = \int_{I^n} \left[ \frac{t^n - t}{\tau^n} \right] \langle x_n, \varphi(t) \rangle dt. \quad (4.95)$$

L'inégalité (4.92), et les égalités (4.94) et (4.95) montrent que la fonction

$$z_{n,\delta} = \left[ \frac{t^n - t}{\tau^n} \right] \xi_{n,\delta}$$

vérifie (4.84) et (4.85). En effet,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_\tau^n(s_{h,\tau}), z_{n,\delta} \rangle_{X'(I^n), X(I^n)} &= \langle x_n, \xi_{n,\delta} \rangle \int_{I^n} \left[ \frac{t^n - t}{\tau^n} \right]^2 dt \\ &\geq \frac{\tau^n}{3} \frac{\delta}{\delta + 1} \{ \|v_h^n\|^2 + \delta \|\nabla \cdot (\beta v_h^n)\|_*^2 \}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{I^n} \|z_{n,\delta}(t)\|^2 dt &= \|\xi_{n,\delta}\|^2 \int_{I^n} \left[ \frac{t^n - t}{\tau^n} \right]^2 dt \\ &\leq \frac{\tau^n}{3} \{ \|v_h^n\| + \|\nabla \cdot (\beta v_h^n)\|_* \}^2 \\ &\leq \frac{2\tau^n}{3} \{ \|v_h^n\|^2 + \|\nabla \cdot (\beta v_h^n)\|_*^2 \}. \end{aligned}$$

La preuve est complète.  $\square$

**Lemme 4.7** (Borne sur  $\eta_{\text{T}}^n$ ). *On a*

$$\eta_{\text{T}}^n \lesssim \left\{ \|u - u_{h,\tau}\|_{\oplus, I^n}^2 + (\eta_{\text{NC}}^n)^2 + (\eta_{\text{NC}}^n)^2 + (\eta_{\text{NC},\tau}^n)^2 + (\eta_{\text{R}}^n)^2 + (\eta_{\text{F}}^n)^2 + (\mathcal{E}_f^n)^2 \right\}^{1/2}.$$

*Démonstration.* On utilise l'égalité (4.84) et la définition (4.81) de  $\mathcal{R}_\tau^n(s_{h,\tau})$  pour écrire

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{3(\delta + 1)} \tau^n \{ \|s_h^n - s_h^{n-1}\|^2 + \delta \|\nabla \cdot \beta(s_h^n - s_h^{n-1})\|_*^2 \} \\ \leq \langle \mathcal{R}_\tau^n(s_{h,\tau}), z_{n,\delta} \rangle_{X'(I^n), X(I^n)} \\ = \langle \mathcal{R}^n(s_{h,\tau}) - \mathcal{R}_h^n(s_{h,\tau}), z_{n,\delta} \rangle_{X'(I^n), X(I^n)}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition (1.15) de la norme duale et (4.85), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}^n(s_{h,\tau}), z_{n,\delta} \rangle_{X'(I^n), X(I^n)} \\ \lesssim (\tau^n)^{1/2} \{ \|s_h^n - s_h^{n-1}\|^2 + \|\nabla \cdot \beta(s_h^n - s_h^{n-1})\|_*^2 \}^{1/2} \|\mathcal{R}^n(s_{h,\tau})\|_{X'(I^n)}. \end{aligned}$$

D'après (4.6), on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}^n(s_{h,\tau}), z_{n,\delta} \rangle_{X'(I^n), X(I^n)} \\ \lesssim (\tau^n)^{1/2} \{ \|s_h^n - s_h^{n-1}\|^2 + \|\nabla \cdot \beta(s_h^n - s_h^{n-1})\|_*^2 \}^{1/2} \|u - s_{h,\tau}\|_{\oplus, I^n}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{R}_h^n(s_{h,\tau}), z_{n,\delta} \rangle_{X'(I^n), X(I^n)} \\ & \lesssim (\tau^n)^{1/2} \{ \|\|s_h^n - s_h^{n-1}\|\|^2 + \|\|\nabla \cdot \boldsymbol{\beta}(s_h^n - s_h^{n-1})\|\|_*^2 \}^{1/2} \|\mathcal{R}_h^n(s_{h,\tau})\|_{X'(I^n)}. \end{aligned}$$

En ajoutant et retranchant  $(\boldsymbol{\theta}_h^n + \boldsymbol{\psi}_h^n, \nabla \varphi)$  dans la définition de  $\mathcal{R}_h^n(s_{h,\tau})$  et en utilisant le théorème de Green on obtient, cf. l'équivalence (1.20),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_h^n(s_{h,\tau})\|_{X'(I^n)}^2 &= \int_{I^n} \left\{ \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega); \|\|\varphi\|\|=1} \{ (f - \tilde{f}^n, \varphi) \right. \\ & \quad + (\tilde{f}^n - \partial_t^n s_{h,\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}_h^n - \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_h^n - r s_h^n, \varphi) \\ & \quad \left. - (\boldsymbol{\theta}_h^n + \boldsymbol{\psi}_h^n + \mathbf{S} \nabla s_h^n - \boldsymbol{\beta} s_h^n, \nabla \varphi) \} \right\}^2 (t) dt \\ & \lesssim \int_{I^n} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\mathbb{R},K}^n + \eta_{\mathbb{F},K}^n(t))^2 dt + \|f - \tilde{f}\|_{X'(I^n)}^2. \end{aligned}$$

Comme  $\delta \in (0, 1)$  est arbitraire, on fait tendre  $\delta$  vers 1 et on combine ces deux bornes pour obtenir

$$\begin{aligned} & (\tau^n)^{1/2} \left\{ \|\|s_h^n - s_h^{n-1}\|\|^2 + \|\|\nabla \cdot \boldsymbol{\beta}(s_h^n - s_h^{n-1})\|\|_*^2 \right\}^{1/2} \\ & \lesssim \left\{ \|u - s_{h,\tau}\|_{\oplus, I^n}^2 + (\eta_{\mathbb{R}}^n)^2 + (\eta_{\mathbb{F}}^n)^2 + \|f - \tilde{f}\|_{X'(I^n)}^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

En utilisant aussi une inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbb{T}}^n & \lesssim \left\{ \|u - u_{h,\tau}\|_{\oplus, I^n}^2 + \|u_{h,\tau} - s_{h,\tau}\|_{\oplus, I^n}^2 + (\eta_{\mathbb{R}}^n)^2 + (\eta_{\mathbb{F}}^n)^2 + \|f - \tilde{f}\|_{X'(I^n)}^2 \right\}^{1/2} \\ & \lesssim \left\{ \|u - u_{h,\tau}\|_{\oplus, I^n}^2 + (\eta_{\mathbb{NC}}^n)^2 + (\eta_{\mathbb{NC}}^n)^2 + (\eta_{\mathbb{NC},\tau}^n)^2 + (\eta_{\mathbb{R}}^n)^2 + (\eta_{\mathbb{F}}^n)^2 \right. \\ & \quad \left. + \|f - \tilde{f}\|_{X'(I^n)}^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

en utilisant la borne sur  $\|u_{h,\tau} - s_{h,\tau}\|_{\oplus, I^n}^2$  obtenue comme la somme de (4.42) et (4.47).  $\square$

**Lemme 4.8** (Borne sur  $\eta_{\mathbb{F}}^n$ ). *On suppose que les maillages satisfont (M1) et (M2) et les propriétés d'approximation (4.73) pour la reconstruction du flux diffusif et (4.74) pour la reconstruction du flux convectif. Alors,*

$$\eta_{\mathbb{F}}^n \lesssim \tau^n \left\{ \|u_{h,\tau}\|_{\sharp, n}^2 + (\mathcal{E}_{\mathbb{J}}^n)^2 \right\}^{1/2}.$$

*Démonstration.* Soit  $K \in \mathcal{T}^n$ . On borne  $\eta_{\mathbb{F},2,K}^n$ . En utilisant le fait que  $\|(I - \Pi_0^n)\varphi\|_K \leq \|\varphi\|_K$ , on a

$$\eta_{\mathbb{F},2,K}^n \leq m_K^n \|\nabla \cdot \mathbf{a}_h^n\|_K + (\tilde{m}_K^n)^{1/2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (C_{t,K,\sigma})^{1/2} \|\mathbf{a}_h^n \cdot \mathbf{n}_\sigma\|_\sigma.$$

Ensuite, en utilisant les inégalités inverses

$$\begin{aligned}\|\nabla \cdot \mathbf{a}_h^n\|_K &\lesssim h_K^{-1} \|\mathbf{a}_h^n\|_K, \\ \|\mathbf{a}_h^n \cdot \mathbf{n}_\sigma\|_\sigma &\lesssim h_K^{-1/2} \|\mathbf{a}_h^n\|_K,\end{aligned}$$

et la majoration

$$m_K^n h_K^{-1/2} + (\tilde{m}_K^n)^{1/2} \lesssim (m_K^n)^{1/2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4}$$

obtenue par Cheddadi, Fučík, Prieto, et Vohralík [34, Preuve du théorème 5.1 ], il vient

$$\begin{aligned}\eta_{\mathbb{F},2,K}^n &\lesssim (m_K^n)^{1/2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4} h_K^{-1/2} \|\boldsymbol{\theta}_h^n + \boldsymbol{\psi}_h^n + \mathbf{S}\nabla s_h^n - \beta s_h^n\|_K \\ &\lesssim (m_K^n)^{1/2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4} h_K^{-1/2} (\|\boldsymbol{\theta}_h^n + \mathbf{S}\nabla s_h^n\|_K + \|\boldsymbol{\psi}_h^n - \beta s_h^n\|_K).\end{aligned}$$

On va maintenant borner chacun des termes du membre de droite séparément. En utilisant une inégalité triangulaire, la propriété d'approximation (4.73) pour  $\boldsymbol{\theta}_h^n$  et le lemme 4.3, on a

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\theta}_h^n + \mathbf{S}\nabla s_h^n\|_K &\leq \|\mathbf{S}\nabla(s_h^n - u_h^n)\|_K + \|\boldsymbol{\theta}_h^n + \mathbf{S}\nabla u_h^n\|_K \\ &\leq C_{\mathbf{S},K}^n h_K^{-1/2} \|[u_h^n]\|_{\boldsymbol{\epsilon}_K} + h_K^{1/2} \|\mathbf{S}\nabla u_h^n \cdot \mathbf{n}\|_{\boldsymbol{\epsilon}_K}.\end{aligned}$$

Similairement, en utilisant une inégalité triangulaire, la propriété d'approximation (4.74) pour  $\boldsymbol{\psi}_h^n$  et le lemme 4.4, on a

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\psi}_h^n - \beta s_h^n\|_K &\leq \|\boldsymbol{\psi}_h^n - \beta u_h^n\|_K + \|\beta(u_h^n - s_h^n)\|_K \\ &\lesssim \|\beta\|_{\mathbf{L}^\infty(K)} h_K^{1/2} \|[u_h^n]\|_{\boldsymbol{\epsilon}_K}.\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\eta_{\mathbb{F},2,K}^n &\lesssim (m_K^n)^{1/2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4} h_K^{-1/2} \|\boldsymbol{\theta}_h^n + \boldsymbol{\psi}_h^n + \mathbf{S}\nabla s_h^n - \beta s_h^n\|_K \\ &\lesssim (m_K^n)^{1/2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4} h_K^{-1/2} (C_{\mathbf{S},K}^n h_K^{-1/2} \|[u_h^n]\|_{\boldsymbol{\epsilon}_K} + h_K^{1/2} \|\mathbf{S}\nabla u_h^n \cdot \mathbf{n}\|_{\boldsymbol{\epsilon}_K}) \\ &\quad + (m_K^n)^{1/2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4} h_K^{-1/2} \|\beta\|_{\mathbf{L}^\infty(K)} h_K^{1/2} \|[u_h^n]\|_{\boldsymbol{\epsilon}_K}.\end{aligned}$$

Or, comme  $(m_K^n)^{1/2} \lesssim (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4} h_K^{1/2}$ , on obtient

$$(m_K^n)^{1/2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4} h_K^{-1} C_{\mathbf{S},K}^n \lesssim (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/2} h_K^{-1/2} C_{\mathbf{S},K}^n.$$

Comme le rapport  $\frac{C_{\mathbf{S},K}^n}{c_{\mathbf{S},K}^n}$  peut être englobé dans la constante générique  $C$ , il vient

$$\begin{aligned}\eta_{\mathbb{F},2,K}^n &\lesssim (C_{\mathbf{S},K}^n)^{1/2} h_K^{-1/2} \|[u_h^n]\|_{\boldsymbol{\epsilon}_K} + (m_K^n)^{1/2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4} \|\mathbf{S}\nabla u_h^n \cdot \mathbf{n}\|_{\boldsymbol{\epsilon}_K} \\ &\quad + (m_K^n)^{1/2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4} \|\beta\|_{\mathbf{L}^\infty(K)} \|[u_h^n]\|_{\boldsymbol{\epsilon}_K}.\end{aligned}$$

La preuve est complète d'après les définitions (4.58) et (4.70).  $\square$

**Lemme 4.9** (Expression équivalente pour  $\eta_{\text{NC}}^n$ ). *Soit  $v := s_{h,\tau} - u_{h,\tau}$ . Alors*

$$\tau^n \frac{1}{6} (\|v_h^{n-1}\|_{\mathcal{K}}^2 + \|v_h^n\|_{\mathcal{K}}^2) \leq \int_{I^n} \|v(t)\|_{\mathcal{K}}^2 dt \leq \tau^n \frac{1}{2} (\|v_h^{n-1}\|_{\mathcal{K}}^2 + \|v_h^n\|_{\mathcal{K}}^2). \quad (4.96)$$

*Démonstration.* Soit  $K \in \mathcal{T}^{n-1,n}$ . Comme  $v$  est affine par morceaux en temps et continue sur  $K$ , il vient

$$\begin{aligned} \int_{I^n} \|v(t)\|_{\mathcal{K}}^2 dt &= \tau^n \int_0^1 \|v_h^{n-1} + \tau(v_h^n - v_h^{n-1})\|_{\mathcal{K}}^2 d\tau \\ &= \frac{1}{3} \tau^n \left( \|v_h^{n-1}\|_{\mathcal{K}}^2 + \|v_h^n\|_{\mathcal{K}}^2 + \mathcal{B}_{\mathbf{S},K}(v_h^{n-1}, v_h^n) \right), \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{B}_{\mathbf{S},K}(v, \varphi) := (\mathbf{S}\nabla v, \nabla \varphi)_K + (rv, \varphi)_K.$$

Alors,

$$\tau^n \frac{1}{6} \left( \|v_h^{n-1}\|_{\mathcal{K}}^2 + \|v_h^n\|_{\mathcal{K}}^2 \right) \leq \int_{I^n} \|v(t)\|_{\mathcal{K}}^2 dt \leq \tau^n \frac{1}{2} \left( \|v_h^{n-1}\|_{\mathcal{K}}^2 + \|v_h^n\|_{\mathcal{K}}^2 \right).$$

Une sommation sur  $K \in \mathcal{T}^{n-1,n}$  donne (4.96).  $\square$

**Lemme 4.10** (Borne sur  $\eta_{\text{NC}}^n$ ). *On suppose que les maillages satisfont (M1) et (M2). Alors,*

$$\eta_{\text{NC}}^n \lesssim \|u_{h,\tau}\|_{\sharp,n}.$$

*Démonstration.* En utilisant la borne supérieure sur  $\eta_{\text{NC}}^n$  obtenue au lemme 4.9, il suffit de prouver que, pour  $m \in \{n-1, n\}$  et pour tout  $K \in \mathcal{T}^m$ ,

$$\|s_h^m - u_h^m\|_{\mathcal{K}}^2 \lesssim \left\{ C_{\mathbf{S},K}^n h_K^{-1} + r_K h_K \right\} \| [u_h^m] \|_{\mathfrak{E}_K}^2.$$

Ce résultat est une conséquence immédiate des lemmes 4.3 et 4.4.  $\square$

**Lemme 4.11** (Borne sur  $\eta_{\text{NC},\tau}^n$ ). *On suppose que les maillages satisfont (M1)–(M3). Alors,*

$$\eta_{\text{NC},\tau}^n \lesssim \|u_{h,\tau}\|_{\sharp,n}.$$

*Démonstration.* On pose  $v = u_{h,\tau} - s_{h,\tau}$ . En utilisant la condition de transition (4.51) et une inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (m_K^n)^2 \|\partial_t^n v\|_{\mathcal{K}}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (m_K^n)^2 \sum_{K' \in \mathcal{T}^{n-1,n}; K' \subset K} \left\| \frac{1}{\tau^n} (v_h^n - v_h^{n-1}) \right\|_{\mathcal{K}'}^2 \\ &\lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}^{n-1}} (m_K^n)^2 (\tau^n)^{-2} \|v_h^{n-1}\|_{\mathcal{K}}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (m_K^n)^2 (\tau^n)^{-2} \|v_h^n\|_{\mathcal{K}}^2. \end{aligned}$$

On considère le second terme du membre de droite. On a, par le lemme 4.4,

$$\|v_h^m\|_{\mathcal{K}}^2 \lesssim h_K \| [u_h^m] \|_{\mathfrak{E}_K}^2,$$

pour  $m \in \{n-1, n\}$ . Ainsi, en utilisant la régularité des maillages et la condition (M3), il vient

$$(m_K^n)^2 (\tau^n)^{-2} \|v_h^n\|_K^2 \leq \Upsilon^2 (m_K^n)^2 h_K^{-4} h_K \|[u_h^n]\|_{\mathfrak{E}_K}^2.$$

Comme  $(m_K^n)^2 h_K^{-4} \lesssim h_K^{-2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1}$ , on obtient

$$\sum_{K \in \mathcal{T}^n} (m_K^n)^2 (\tau^n)^{-2} \|v_h^n\|_K^2 \lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}^n} h_K^{-1} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1} \|[u_h^n]\|_{\mathfrak{E}_K}^2.$$

Le terme en  $t^{n-1}$  est traité similairement.  $\square$

**Lemme 4.12** (Borne sur  $\eta_{\text{NC}}^n$ ). *On suppose que les maillages satisfont (M1) et (M2). Alors,*

$$\eta_{\text{NC}}^n \lesssim \|u_{h,\tau}\|_{\sharp,n}.$$

*Démonstration.* Similairement à la preuve du lemme 4.8, on a

$$\eta_{\text{NC}2,K}^n \lesssim (m_K^n)^{1/2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4} h_K^{-1/2} \|\mathbf{b}_{h,\tau}\|_K.$$

Comme  $\mathbf{b}_{h,\tau}$  est affine en temps, il vient

$$\begin{aligned} \int_{I^n} \|\mathbf{b}_{h,\tau}\|_K^2 &\lesssim \tau^n \left( \|u_h^n - s_h^n\|_K^2 + \|u_h^{n-1} - s_h^{n-1}\|_K^2 \right) \|\beta\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}^2 \\ &\lesssim \tau^n h_K \|\beta\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}^2 \left( \|[u_h^n]\|_{\mathfrak{E}_K}^2 + \|[u_h^{n-1}]\|_{\mathfrak{E}_K}^2 \right), \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 4.4. Ceci conclut la preuve.  $\square$

**Lemme 4.13** (Borne sur  $\mathcal{E}_R^n$  et  $\mathcal{E}_J^n$ ). *On suppose les propriétés d'approximation (4.73) pour la reconstruction du flux diffusif et (4.74) pour la reconstruction du flux convectif et on suppose que les maillages satisfont (M1)–(M3). On a,*

$$\mathcal{E}_R^n + \mathcal{E}_J^n \lesssim \|u - u_{h,\tau}\|_{\oplus, I^n} + \mathcal{E}_f^n + \|u_{h,\tau}\|_{\sharp,n}.$$

*Démonstration.* On utilise la technique des fonctions bulles sur les éléments et sur les côtés introduite par Verfürth [105, 108], en procédant comme dans [108], on obtient

$$(\mathcal{E}_R^n)^2 + (\mathcal{E}_J^n)^2 \leq C(\|u - u_{h,\tau}\|_{\oplus, I^n}^2 + (\mathcal{E}_f^n)^2) + \epsilon^2 \|\mathcal{R}_\tau^n(u_{h,\tau})\|_{X'(I^n)}^2,$$

où  $\epsilon$  peut être choisi aussi petit que nécessaire. On va maintenant borner le dernier terme du membre de droite. On a, pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\|\varphi\| = 1$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_\tau^n(u_{h,\tau}), \varphi \rangle &= (\mathbf{S}\nabla(u_h^n - u_{h,\tau}), \nabla\varphi) - (\beta(u_h^n - u_{h,\tau}), \nabla\varphi) + (r(u_h^n - u_{h,\tau}), \varphi) \\ &= (\mathbf{S}\nabla(u_h^n - s_h^n), \nabla\varphi) + (\mathbf{S}\nabla(s_{h,\tau} - u_{h,\tau}), \nabla\varphi) + (\mathbf{S}\nabla(s_h^n - s_{h,\tau}), \nabla\varphi) \\ &\quad - (\beta(u_h^n - s_h^n), \nabla\varphi) - (\beta(s_{h,\tau} - u_{h,\tau}), \nabla\varphi) - (\beta(s_h^n - s_{h,\tau}), \nabla\varphi) \\ &\quad + (r(u_h^n - s_h^n), \varphi) + (r(s_{h,\tau} - u_{h,\tau}), \varphi) + (r(s_h^n - s_{h,\tau}), \varphi) \\ &= R_1(\varphi) + R_2(\varphi) + R_3(\varphi), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} R_1(\varphi) &:= (\mathbf{S}\nabla(u_h^n - s_h^n), \nabla\varphi) - (\boldsymbol{\beta}(u_h^n - s_h^n), \nabla\varphi) + (r(u_h^n - s_h^n), \varphi), \\ R_2(\varphi) &:= (\mathbf{S}\nabla(s_{h,\tau} - u_{h,\tau}), \nabla\varphi) - (\boldsymbol{\beta}(s_{h,\tau} - u_{h,\tau}), \nabla\varphi) + (r(s_{h,\tau} - u_{h,\tau}), \varphi), \\ R_3(\varphi) &:= (\mathbf{S}\nabla(s_h^n - s_{h,\tau}), \nabla\varphi) - (\boldsymbol{\beta}(s_h^n - s_{h,\tau}), \nabla\varphi) + (r(s_h^n - s_{h,\tau}), \varphi). \end{aligned}$$

Pour le terme  $R_1(\varphi)$ , on remarque que

$$(\mathbf{S}\nabla(u_h^n - s_h^n), \nabla\varphi) + (r(u_h^n - s_h^n), \varphi) \leq \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \|u_h^n - s_h^n\|_K^2 \right\}^{1/2} \|\varphi\|,$$

et  $\|u_h^n - s_h^n\|_K$  est bornée dans la preuve du lemme 4.10 par

$$\|u_h^n - s_h^n\|_K^2 \lesssim \left\{ C_{\mathbf{S},K}^n h_K^{-1} + r_K h_K \right\} \|[u_h^n]\|_{\mathfrak{E}_K}^2.$$

De plus, suivant la preuve du théorème 4.1, on obtient

$$-(\boldsymbol{\beta}(u_h^n - s_h^n), \nabla\varphi) \leq \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\widetilde{\text{NC}},K}^n(t^n))^2 \right\}^{1/2} \|\varphi\|,$$

avec

$$\eta_{\widetilde{\text{NC}},K}^n(t^n) \lesssim (m_K^n)^{1/2} (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/4} \|\boldsymbol{\beta}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)} \|[u_h^n]\|_{\mathfrak{E}_K}.$$

Par suite,

$$R_1(\varphi) \lesssim \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}^n} \left\{ C_{\mathbf{S},K}^n h_K^{-1} + r_K h_K + m_K^n (c_{\mathbf{S},K}^n)^{-1/2} \|\boldsymbol{\beta}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}^2 \right\} \|[u_h^n]\|_{\mathfrak{E}_K}^2 \right\}^{1/2} \|\varphi\|. \quad (4.97)$$

D'autre part, comme dans la preuve du théorème 4.1, on a

$$(\mathbf{S}\nabla(s_{h,\tau} - u_{h,\tau}), \nabla\varphi) + (r(s_{h,\tau} - u_{h,\tau}), \varphi) \leq \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\text{NC},K}^n(t))^2 \right\}^{1/2} \|\varphi\|,$$

et

$$-(\boldsymbol{\beta}(s_{h,\tau} - u_{h,\tau}), \nabla\varphi) \leq \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\widetilde{\text{NC}},K}^n(t))^2 \right\}^{1/2} \|\varphi\|.$$

Par suite,

$$R_2(\varphi) \lesssim \left( \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\widetilde{\text{NC}},K}^n(t))^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}^n} (\eta_{\text{NC},K}^n(t))^2 \right\}^{1/2} \right) \|\varphi\|. \quad (4.98)$$

Finalement, pour le terme  $R_3(\varphi)$ , comme dans la preuve du théorème 4.1, on a

$$R_3(\varphi) \leq (\|s_h^n - s_{h,\tau}\| + \|\nabla \cdot \boldsymbol{\beta}(s_h^n - s_{h,\tau})\|_{\star}) \|\varphi\|. \quad (4.99)$$

En sommant les inégalités (4.97)–(4.99), en prenant le supremum sur les  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  tels que  $\|\varphi\| = 1$ , en intégrant en temps sur l'intervalle  $I^n$ , et en utilisant la définition (1.20) de la norme duale et la définition (4.58) de  $\|u_{h,\tau}\|_{\sharp,n}$ , on obtient

$$\|\mathcal{R}_\tau^n(u_{h,\tau})\|_{X'(I^n)}^2 \lesssim (\eta_{\text{T}}^n)^2 + (\eta_{\text{NC}}^n)^2 + (\eta_{\text{NC}}^n)^2 + \|u_{h,\tau}\|_{\sharp,n}^2.$$

En utilisant la borne supérieure sur  $\eta_{\text{T}}^n$  du lemme 4.7 on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_\tau^n(u_{h,\tau})\|_{X'(I^n)}^2 &\lesssim \|u - u_{h,\tau}\|_{\oplus, I^n}^2 + (\eta_{\text{NC}}^n)^2 + (\eta_{\text{NC}}^n)^2 + (\eta_{\text{NC},\tau}^n)^2 + (\eta_{\text{R}}^n)^2 + (\eta_{\text{F}}^n)^2 \\ &\quad + (\mathcal{E}_f^n)^2 + \|u_{h,\tau}\|_{\sharp,n}^2. \end{aligned}$$

On utilise les lemmes 4.5, 4.8 et 4.10–4.12

$$(\mathcal{E}_{\text{R}}^n)^2 + (\mathcal{E}_{\text{J}}^n)^2 \lesssim C(\|u - u_{h,\tau}\|_{\oplus, I^n}^2 + (\mathcal{E}_f^n)^2) \quad (4.100)$$

$$+ \epsilon^2 \left( (\mathcal{E}_{\text{R}}^n)^2 + (\mathcal{E}_{\text{J}}^n)^2 + (\mathcal{E}_f^n)^2 + \|u_{h,\tau}\|_{\sharp,n}^2 \right). \quad (4.101)$$

On choisit alors  $\epsilon$  de façon à éliminer les termes  $\mathcal{E}_{\text{R}}^n$  et  $\mathcal{E}_{\text{J}}^n$  du membre de droite. En combinant les lemmes 4.5, 4.8 et 4.10–4.12 et en prenant la racine carrée, le théorème est prouvé.  $\square$

**Remarque 4.3** (Équivalence robuste). *En ajoutant la semi-norme des sauts à la norme mesurant l'erreur, on peut formuler notre résultat sous la forme d'une équivalence robuste entre l'erreur et l'estimation d'erreur a posteriori. Ainsi, en définissant la semi-norme des sauts globale en temps par*

$$\|u_{h,\tau}\|_{\sharp}^2 := \sum_{n=1}^N \|u_{h,\tau}\|_{\sharp,n}^2, \quad (4.102)$$

sous les hypothèses des théorèmes 4.1 et 4.2, on a

$$\|u - u_{h,\tau}\|_{\oplus} + \|u - u_{h,\tau}\|_{\sharp} \leq \eta + \|u_{h,\tau}\|_{\sharp} \lesssim \|u - u_{h,\tau}\|_{\oplus} + \|u - u_{h,\tau}\|_{\sharp}. \quad (4.103)$$



# Conclusion et perspectives

---

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'estimation d'erreur *a posteriori* pour l'équation de convection–diffusion–réaction linéaire et instationnaire discrétisée en espace par la méthode des volumes finis centrés par mailles et le schéma d'Euler implicite en temps. Ces estimations, calculées dans la norme d'énergie, sont basées sur trois idées. La solution du schéma volumes finis étant constante par morceaux en espace, la première idée consiste à la post-traiter localement. Ce post-traitement donne une solution polynômiale par morceaux en espace. L'erreur sera alors calculée par rapport à cette solution. La méthode des volumes finis étant localement conservative, la deuxième idée consiste à reconstruire des flux diffusif et convectif  $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ -conformes en utilisant les flux provenant du schéma volumes finis. Finalement, comme la solution post-traitée n'est pas conforme en espace, la troisième idée consiste à reconstruire un potentiel  $H_0^1(\Omega)$ -conforme. Le but de nos estimations d'erreur *a posteriori* est double : permettre le contrôle global de l'erreur par le biais de bornes calculables et fournir des indicateurs permettant le raffinement adaptatif en espace et en temps. Nous avons proposé un algorithme adaptatif basé sur ces estimations et présenté des essais numériques qui montrent l'efficacité de la stratégie adaptative. L'estimation en norme d'énergie ne fournissant pas une estimation d'erreur *a posteriori* robuste en régime de convection dominante, nous avons dérivé une nouvelle estimation d'erreur mesurée dans la norme d'énergie augmentée d'une norme duale de la dérivée en temps et de la partie anti-symétrique de l'opérateur différentiel. La nouvelle estimation est robuste en régime de convection dominante.

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées pour cette thèse. Tout d'abord, l'estimation d'erreur en norme augmentée fait apparaître un indicateur en norme duale. Cet indicateur n'étant pas calculable, la prochaine étape serait de montrer, dans l'esprit de Verfürth [108], une équivalence robuste de cet indicateur par la résolution d'un problème de diffusion–réaction stationnaire à chaque pas de temps. Une fois obtenue une borne supérieure calculable et robuste, il serait intéressant d'implémenter les estimateurs proposés et de tester leur efficacité dans le cadre d'une stratégie de raffinement adaptative. Ces résultats seront aussi améliorés par la prise en considération de la solution inexacte du système linéaire, en suivant les idées de Jiránek, Strakoš et Vohralík [66]. L'estimation d'erreur contiendra alors un terme supplémentaire relié à cette erreur, appelée erreur algébrique. Enfin, une autre étape importante serait d'étendre ce travail aux problèmes non linéaires.



# Bibliographie

- [1] AAVATSMARK, I., BARKVE, T., BØE, Ø., AND MANNSETH, T. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. I. Derivation of the methods. SIAM J. Sci. Comput. 19, 5 (1998), 1700–1716 (electronic). (Cité en page 9.)
- [2] AAVATSMARK, I., BARKVE, T., BØE, Ø., AND MANNSETH, T. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. II. Discussion and numerical results. SIAM J. Sci. Comput. 19, 5 (1998), 1717–1736 (electronic). (Cité en page 9.)
- [3] ABOULAICH, R., ACHCHAB, B., AND DAROUICHI, A. A posteriori error estimate for a one-dimensional pollution problem in porous media. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 347, 19-20 (2009), 1217–1222. (Cité en page 16.)
- [4] ACHDOU, Y., BERNARDI, C., AND COQUEL, F. A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of Darcy’s equations. Numer. Math. 96, 1 (2003), 17–42. (Cité en pages 15, 30 et 109.)
- [5] AFIF, M., AMAZIANE, B., KUNERT, G., MGHAZLI, Z., AND NICAISE, S. A posteriori error estimation for a finite volume discretization on anisotropic meshes. J. Sci. Comput. 43, 2 (2010), 183–200. (Cité en page 14.)
- [6] AFIF, M., BERGAM, A., MGHAZLI, Z., AND VERFÜRTH, R. A posteriori estimators for the finite volume discretization of an elliptic problem. Numer. Algorithms 34, 2-4 (2003), 127–136. International Conference on Numerical Algorithms, Vol. II (Marrakesh, 2001). (Cité en page 14.)
- [7] AGOUZAL, A., AND OUDIN, F. A posteriori error estimator for finite volume methods. Appl. Math. Comput. 110, 2-3 (2000), 239–250. (Cité en page 14.)
- [8] AINSWORTH, M. A synthesis of a posteriori error estimation techniques for conforming, non-conforming and discontinuous Galerkin finite element methods. In Recent advances in adaptive computation, vol. 383 of Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 1–14. (Cité en page 27.)
- [9] AINSWORTH, M., AND ODEN, J. T. A posteriori error estimation in finite element analysis. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000. (Cité en pages 2 et 13.)
- [10] AMARA, M., NADAU, L., AND TRUJILLO, D. A posteriori error estimator for finite volume schemes. In VIII Journées Zaragoza-Pau de Mathématiques Appliquées et de Statistiques, vol. 31 of Monogr. Semin. Mat. García Galdeano. Prensas Univ. Zaragoza, Zaragoza, 2004, pp. 21–30. (Cité en page 16.)
- [11] AMAZIANE, B., BERGAM, A., EL OSSMANI, M., AND MGHAZLI, Z. A posteriori estimators for vertex centred finite volume discretization of a convection-diffusion-reaction equation arising in flow in porous media. Internat. J. Numer. Methods Fluids 59, 3 (2009), 259–284. (Cité en page 17.)

- [12] ANGERMANN, L. An a posteriori estimation for the solution of elliptic boundary value problems by means of upwind FEM. IMA J. Numer. Anal. 12, 2 (1992), 201–215. (Cité en page 13.)
- [13] ANGERMANN, L. Balanced a posteriori error estimates for finite-volume type discretizations of convection-dominated elliptic problems. Computing 55, 4 (1995), 305–323. (Cité en page 13.)
- [14] AUBIN, J.-P. Un théorème de compacité. C. R. Acad. Sci. Paris 256 (1963), 5042–5044. (Cité en page 6.)
- [15] BABUŠKA, I., AND ODEN, J. T. Verification and validation in computational engineering and science : basic concepts. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 193, 36-38 (2004), 4057–4066. (Cité en page 2.)
- [16] BABUŠKA, I., AND RHEINBOLDT, W. C. Error estimates for adaptive finite element computations. SIAM J. Numer. Anal. 15, 4 (1978), 736–754. (Cité en pages 13 et 55.)
- [17] BABUŠKA, I., AND RHEINBOLDT, W. C. A posteriori error estimates for the finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering 12, 10 (1978), 1597–1615. (Cité en page 13.)
- [18] BABUŠKA, I., AND STROUBOULIS, T. The finite element method and its reliability. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2001. (Cité en page 2.)
- [19] BANK, R. E. The efficient implementation of local mesh refinement algorithms. In Adaptive computational methods for partial differential equations (College Park, Md., 1983). SIAM, Philadelphia, PA, 1983, pp. 74–81. (Cité en page 55.)
- [20] BANK, R. E. PLTMG : a software package for solving elliptic partial differential equations, vol. 7 of Frontiers in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1990. Users' guide 6.0. (Cité en page 55.)
- [21] BANK, R. E., SHERMAN, A. H., AND WEISER, A. Refinement algorithms and data structures for regular local mesh refinement. In Scientific computing (Montreal, Que., 1982), IMACS Trans. Sci. Comput., I. IMACS, New Brunswick, NJ, 1983, pp. 3–17. (Cité en page 55.)
- [22] BAXTER, B. J. C., AND ISERLES, A. On the foundations of computational mathematics. In Handbook of numerical analysis, Vol. XI, Handb. Numer. Anal., XI. North-Holland, Amsterdam, 2003, pp. 3–34. (Cité en page 2.)
- [23] BEBENDORF, M. A note on the Poincaré inequality for convex domains. Z. Anal. Anwendungen 22, 4 (2003), 751–756. (Cité en page 32.)
- [24] BERGAM, A., BERNARDI, C., AND MGHAZLI, Z. A posteriori analysis of the finite element discretization of some parabolic equations. Math. Comp. 74, 251 (2005), 1117–1138. (Cité en pages 2, 16 et 39.)

- [25] BERGAM, A., MGHAZLI, Z., AND VERFÜRTH, R. Estimations a posteriori d'un schéma de volumes finis pour un problème non linéaire. Numer. Math. 95, 4 (2003), 599–624. (Cité en page 14.)
- [26] BI, C., AND GINTING, V. A residual-type a posteriori error estimate of finite volume element method for a quasi-linear elliptic problem. Numer. Math. 114, 1 (2009), 107–132. (Cité en page 14.)
- [27] BRAESS, D., AND SCHÖBERL, J. Equilibrated residual error estimator for edge elements. Math. Comp. 77, 262 (2008), 651–672. (Cité en pages 13 et 27.)
- [28] BREZZI, F., AND FORTIN, M. Mixed and hybrid finite element methods, vol. 15 of Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991. (Cité en page 24.)
- [29] BÜRKLE, D., AND OHLBERGER, M. Adaptive finite volume methods for displacement problems in porous media. Comput. Vis. Sci. 5, 2 (2002), 95–106. (Cité en page 17.)
- [30] BURMAN, E., AND ERN, A. Continuous interior penalty  $hp$ -finite element methods for advection and advection-diffusion equations. Math. Comp. 76, 259 (2007), 1119–1140. (Cité en pages 30 et 109.)
- [31] CARSTENSEN, C., AND FUNKEN, S. A. Constants in Clément-interpolation error and residual based a posteriori error estimates in finite element methods. East-West J. Numer. Math. 8, 3 (2000), 153–175. (Cité en pages 13 et 33.)
- [32] CARSTENSEN, C., LAZAROV, R., AND TOMOV, S. Explicit and averaging a posteriori error estimates for adaptive finite volume methods. SIAM J. Numer. Anal. 42, 6 (2005), 2496–2521 (electronic). (Cité en page 14.)
- [33] CASCÓN, J. M., FERRAGUT, L., AND ASENSIO, M. I. Space-time adaptive algorithm for the mixed parabolic problem. Numer. Math. 103, 3 (2006), 367–392. (Cité en page 16.)
- [34] CHEDDADI, I., FUČÍK, R., PRIETO, M. I., AND VOHRALÍK, M. Guaranteed and robust a posteriori error estimates for singularly perturbed reaction-diffusion problems. M2AN Math. Model. Numer. Anal. 43, 5 (2009), 867–888. (Cité en pages 14, 99 et 115.)
- [35] CHEN, Y., AND YANG, J. A posteriori error estimation for a fully discrete discontinuous Galerkin approximation to a kind of singularly perturbed problems. Finite Elem. Anal. Des. 43, 10 (2007), 757–770. (Cité en page 16.)
- [36] CH NIER, E., EYMARD, R., AND NICOLAS, X. A finite volume scheme for the transport of radionuclides in porous media. Comput. Geosci. 8, 2 (2004), 163–172. Simulation of Transport Around a Nuclear Waste Disposal Site : The COUPLEX Test Cases. (Cité en page 42.)
- [37] CIARLET, P. G. The finite element method for elliptic problems. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4. (Cité en page 7.)

- [38] COCHEZ-DHONDT, S., NICAISE, S., AND REPIN, S. A posteriori error estimates for finite volume approximations. Math. Model. Nat. Phenom. 4, 1 (2009), 106–122. (Cité en page 16.)
- [39] COUDIÈRE, Y., AND MANZINI, G. The discrete duality finite volume method for convection-diffusion problems. SIAM J. Numer. Anal. 47, 6 (2010), 4163–4192. (Cité en pages 21, 41, 48 et 49.)
- [40] COUDIÈRE, Y., VILA, J., AND VILLEDIEU, P. Convergence rate of a finite volume scheme for a two-dimensional convection-diffusion problem. M2AN Math. Model. Numer. Anal. 33, 3 (1999), 493–516. (Cité en pages 9 et 10.)
- [41] COUDIÈRE, Y., AND VILLEDIEU, P. Convergence rate of a finite volume scheme for the linear convection-diffusion equation on locally refined meshes. M2AN Math. Model. Numer. Anal. 34, 6 (2000), 1123–1149. (Cité en pages 9 et 10.)
- [42] CROISILLE, J.-P. Finite volume box schemes and mixed methods. M2AN Math. Model. Numer. Anal. 34, 5 (2000), 1087–1106. (Cité en page 8.)
- [43] CROISILLE, J.-P., AND GREFF, I. Some nonconforming mixed box schemes for elliptic problems. Numer. Methods Partial Differential Equations 18, 3 (2002), 355–373. (Cité en page 8.)
- [44] DESTUYNDER, P., AND MÉTIVET, B. Explicit error bounds in a conforming finite element method. Math. Comp. 68, 228 (1999), 1379–1396. (Cité en pages 13 et 27.)
- [45] DOMELEVO, K., AND OMNES, P. A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids. M2AN Math. Model. Numer. Anal. 39, 6 (2005), 1203–1249. (Cité en pages 9, 10, 21, 41, 47, 48 et 62.)
- [46] DÖRFLER, W. A convergent adaptive algorithm for Poisson’s equation. SIAM J. Numer. Anal. 33, 3 (1996), 1106–1124. (Cité en page 54.)
- [47] DÖRFLER, W. A time- and space-adaptive algorithm for the linear time-dependent Schrödinger equation. Numer. Math. 73, 4 (1996), 419–448. (Cité en page 54.)
- [48] ERATH, C., AND PRAETORIUS, D. A posteriori error estimate and adaptive mesh refinement for the cell-centered finite volume method for elliptic boundary value problems. SIAM J. Numer. Anal. 47, 1 (2008/09), 109–135. (Cité en page 15.)
- [49] ERIKSSON, K., AND JOHNSON, C. Adaptive finite element methods for parabolic problems. I. A linear model problem. SIAM J. Numer. Anal. 28, 1 (1991), 43–77. (Cité en page 54.)
- [50] ERN, A., AND GUERMOND, J.-L. Theory and Practice of Finite Elements. Springer, 2004. (Cité en page 7.)
- [51] ERN, A., AND PROFT, J. A posteriori discontinuous Galerkin error estimates for transient convection-diffusion equations. Appl. Math. Lett. 18, 7 (2005), 833–841. (Cité en page 16.)

- [52] ERN, A., STEPHANSEN, A. F., AND VOHRALÍK, M. Guaranteed and robust discontinuous Galerkin a posteriori error estimates for convection-diffusion-reaction problems. J. Comput. Appl. Math. 234, 1 (2010), 114–130. (Cité en pages 17, 21 et 27.)
- [53] ERN, A., AND VOHRALÍK, M. A posteriori error estimation based on potential and flux reconstruction for the heat equation. SIAM J. Numer. Anal. 48, 1 (2010), 198–223. (Cité en pages 2, 13, 17, 21, 27, 30, 39 et 109.)
- [54] ESTEP, D., PERNICE, M., PHAM, D., TAVENER, S., AND WANG, H. A posteriori error analysis of a cell-centered finite volume method for semilinear elliptic problems. J. Comput. Appl. Math. 233, 2 (2009), 459–472. (Cité en page 15.)
- [55] EVANS, L. C. Partial differential equations, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. (Cité en pages 35 et 97.)
- [56] EYMARD, R., GALLOUËT, T., AND HERBIN, R. Finite volume methods. In Handbook of Numerical Analysis, Vol. VII. North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 713–1020. (Cité en pages 8, 9, 15, 21, 41, 42 et 49.)
- [57] EYMARD, R., GALLOUËT, T., AND HERBIN, R. Finite volume approximation of elliptic problems and convergence of an approximate gradient. Appl. Numer. Math. 37, 1-2 (2001), 31–53. (Cité en page 15.)
- [58] EYMARD, R., GALLOUËT, T., AND HERBIN, R. Discretization of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general nonconforming meshes SUSHI : a scheme using stabilization and hybrid interfaces. IMA J. Numer. Anal. 30, 4 (2010), 1009–1043. (Cité en page 9.)
- [59] EYMARD, R., HILHORST, D., AND VOHRALÍK, M. A combined finite volume–nonconforming/mixed-hybrid finite element scheme for degenerate parabolic problems. Numer. Math. 105, 1 (2006), 73–131. (Cité en pages 42 et 66.)
- [60] GEORGOULIS, E. H., LAKKIS, O., AND VIRTANEN, J. M. A posteriori error control for discontinuous Galerkin methods for parabolic problems. SIAM J. Numer. Anal. 49, 2 (2011), 427–458. (Cité en page 16.)
- [61] HERBIN, R., AND OHLBERGER, M. A posteriori error estimate for finite volume approximations of convection diffusion problems. In Proceedings of the 3rd International Symposium on Finite Volumes for Complex applications (2002), Hermes Penton Ltd, London, pp. 753 – 760. (Cité en page 17.)
- [62] HILHORST, D., AND VOHRALÍK, M. A posteriori error estimates for combined finite volume-finite element discretizations of reactive transport equations on nonmatching grids. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 200, 5-8 (2011), 597–613. (Cité en pages 17, 39 et 64.)
- [63] HLAVÁČEK, I., HASLINGER, J., NEČAS, J., AND LOVIŠEK, J. Solution of variational inequalities in mechanics, vol. 66 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1988. Translated from the Slovak by J. Jarník. (Cité en page 27.)

- [64] HOUSTON, P., AND SÜLI, E. Adaptive Lagrange-Galerkin methods for unsteady convection-diffusion problems. Math. Comp. 70, 233 (2001), 77–106. (Cité en pages 16 et 64.)
- [65] JARAUSCH, H. On an adaptive grid refining technique for finite element approximations. SIAM J. Sci. Statist. Comput. 7, 4 (1986), 1105–1120. (Cité en page 55.)
- [66] JIRÁNEK, P., STRAKOŠ, Z., AND VOHRALÍK, M. A posteriori error estimates including algebraic error and stopping criteria for iterative solvers. SIAM J. Sci. Comput. 32, 3 (2010), 1567–1590. (Cité en pages 16, 64 et 121.)
- [67] JU, L., TIAN, L., AND WANG, D. A posteriori error estimates for finite volume approximations of elliptic equations on general surfaces. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 198, 5-8 (2009), 716–726. (Cité en page 14.)
- [68] KARAKASHIAN, O. A., AND PASCAL, F. A posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin approximation of second-order elliptic problems. SIAM J. Numer. Anal. 41, 6 (2003), 2374–2399. (Cité en pages 30, 108 et 109.)
- [69] KOROTOV, S. Two-sided a posteriori error estimates for linear elliptic problems with mixed boundary conditions. Appl. Math. 52, 3 (2007), 235–249. (Cité en page 27.)
- [70] KOSSACZKÝ, I. A recursive approach to local mesh refinement in two and three dimensions. J. Comput. Appl. Math. 55, 3 (1994), 275–288. (Cité en page 56.)
- [71] LADEVÈZE, P. Comparaison de modèles de milieux continus. Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 1975. (Cité en pages 13 et 27.)
- [72] LADEVÈZE, P. Constitutive relation error estimators for time-dependent nonlinear FE analysis. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 188, 4 (2000), 775–788. IV WCCM, Part II (Buenos Aires, 1998). (Cité en pages 2 et 13.)
- [73] LADEVÈZE, P., AND LEGUILLON, D. Error estimate procedure in the finite element method and applications. SIAM J. Numer. Anal. 20, 3 (1983), 485–509. (Cité en pages 13 et 27.)
- [74] LADEVÈZE, P., AND MOËS, N. A new a posteriori error estimation for nonlinear time-dependent finite element analysis. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 157, 1-2 (1998), 45–68. (Cité en page 2.)
- [75] LAZAROV, R., AND TOMOV, S. A posteriori error estimates for finite volume element approximations of convection-diffusion-reaction equations. Comput. Geosci. 6, 3-4 (2002), 483–503. Locally conservative numerical methods for flow in porous media. (Cité en page 14.)
- [76] LAZAROV, R. D., MISHEV, I. D., AND VASSILEVSKI, P. S. Finite volume methods for convection-diffusion problems. SIAM J. Numer. Anal. 33, 1 (1996), 31–55. (Cité en page 8.)
- [77] LIU, J., MU, L., AND YE, X. An adaptive discontinuous finite volume method for elliptic problems. J. Comput. Appl. Math. 235, 18 (2011), 5422–5431. (Cité en page 14.)

- [78] LUCE, R., AND WOHLMUTH, B. I. A local a posteriori error estimator based on equilibrated fluxes. SIAM J. Numer. Anal. **42**, 4 (2004), 1394–1414 (electronic). (Cité en pages 13 et 27.)
- [79] MORTON, K. W., AND SÜLI, E. Finite volume methods and their analysis. IMA J. Numer. Anal. **11**, 2 (1991), 241–260. (Cité en page 8.)
- [80] NEITTAANMÄKI, P., AND REPIN, S. Reliable methods for computer simulation, vol. 33 of Studies in Mathematics and its Applications. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2004. Error control and a posteriori estimates. (Cité en pages 2 et 13.)
- [81] NICAISE, S. A posteriori residual error estimation of a cell-centered finite volume method. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **338**, 5 (2004), 419–424. (Cité en page 15.)
- [82] NICAISE, S. A posteriori error estimations of some cell-centered finite volume methods. SIAM J. Numer. Anal. **43**, 4 (2005), 1481–1503 (electronic). (Cité en page 15.)
- [83] NICAISE, S. A posteriori error estimations of some cell centered finite volume methods for diffusion-convection-reaction problems. SIAM J. Numer. Anal. **44**, 3 (2006), 949–978 (electronic). (Cité en page 15.)
- [84] NICAISE, S., AND SOUALEM, N. A posteriori error estimates for a nonconforming finite element discretization of the heat equation. M2AN Math. Model. Numer. Anal. **39**, 2 (2005), 319–348. (Cité en page 16.)
- [85] ODEN, J. T., BABUŠKA, I., NOBILE, F., FENG, Y., AND TEMPONE, R. Theory and methodology for estimation and control of errors due to modeling, approximation, and uncertainty. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **194**, 2-5 (2005), 195–204. (Cité en page 2.)
- [86] OHLBERGER, M. A posteriori error estimate for finite volume approximations to singularly perturbed nonlinear convection–diffusion equations. Numer. Math. **87**, 4 (2001), 737–761. (Cité en page 17.)
- [87] OHLBERGER, M. A posteriori error estimates for vertex centered finite volume approximations of convection–diffusion–reaction equations. M2AN Math. Model. Numer. Anal. **35**, 2 (2001), 355–387. (Cité en page 17.)
- [88] OHLBERGER, M., AND ROHDE, C. Adaptive finite volume approximations for weakly coupled convection dominated parabolic systems. IMA J. Numer. Anal. **22**, 2 (2002), 253–280. (Cité en page 17.)
- [89] OMNES, P., PENEL, Y., AND ROSENBAUM, Y. A posteriori error estimation for the discrete duality finite volume discretization of the Laplace equation. SIAM J. Numer. Anal. **47**, 4 (2009), 2782–2807. (Cité en page 15.)
- [90] PAYNE, L. E., AND WEINBERGER, H. F. An optimal Poincaré inequality for convex domains. Arch. Rational Mech. Anal. **5** (1960), 286–292 (1960). (Cité en page 32.)

- [91] PICASSO, M. Adaptive finite elements for a linear parabolic problem. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 167, 3-4 (1998), 223–237. (Cité en pages 16 et 39.)
- [92] PRAGER, W., AND SYNGE, J. L. Approximations in elasticity based on the concept of function space. Quart. Appl. Math. 5 (1947), 241–269. (Cité en page 27.)
- [93] QUARTERONI, A., AND VALLI, A. Numerical approximation of partial differential equations, vol. 23 of Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1994. (Cité en pages 6 et 7.)
- [94] REPIN, S. A posteriori estimates for partial differential equations, vol. 4 of Radon Series on Computational and Applied Mathematics. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008. (Cité en pages 2 et 13.)
- [95] REPIN, S. I. A posteriori error estimation for nonlinear variational problems by duality theory. Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 243, Kraev. Zadachi Mat. Fiz. i Smezh. Vopr. Teor. Funktsii. 28 (1997), 201–214, 342. (Cité en page 27.)
- [96] RIVARA, M.-C. Mesh refinement processes based on the generalized bisection of simplices. SIAM J. Numer. Anal. 21, 3 (1984), 604–613. (Cité en page 56.)
- [97] STEPHANSEN, A. F. Méthodes de Galerkin discontinues et analyse d’erreur a posteriori pour les problèmes de diffusion h et erog ene. Ph.D. thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chauss ees, 2007. (Cité en page 99.)
- [98] STEVENSON, R. The completion of locally refined simplicial partitions created by bisection. Math. Comp. 77, 261 (2008), 227–241 (electronic). (Cité en page 106.)
- [99] SUN, S., AND WHEELER, M. F.  $L^2(H^1)$  norm a posteriori error estimation for discontinuous Galerkin approximations of reactive transport problems. J. Sci. Comput. 22/23 (2005), 501–530. (Cité en page 16.)
- [100] THOM EE, V. Finite differences for linear parabolic equations. Handbook of Numerical Analysis, I. North-Holland, Amsterdam, 1991. (Cité en page 7.)
- [101] VEESER, A., AND VERFÜRTH, R. Explicit upper bounds for dual norms of residuals. SIAM J. Numer. Anal. 47, 3 (2009), 2387–2405. (Cité en page 13.)
- [102] VEJCHODSK Y, T. Guaranteed and locally computable a posteriori error estimate. IMA J. Numer. Anal. 26, 3 (2006), 525–540. (Cité en page 27.)
- [103] VERFÜRTH, R. A posteriori error estimators for the Stokes equations. Numer. Math. 55, 3 (1989), 309–325. (Cité en page 55.)
- [104] VERFÜRTH, R. A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. In Proceedings of the Fifth International Congress on Computational and Applied Mathematics (Leuven, 1992) (1994), vol. 50, pp. 67–83. (Cité en page 54.)
- [105] VERFÜRTH, R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Teubner-Wiley, Stuttgart, 1996. (Cité en pages 2, 13 et 117.)

- [106] VERFÜRTH, R. Error estimates for some quasi-interpolation operators. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis **33** (6 1999), 695–713. (Cité en page 13.)
- [107] VERFÜRTH, R. A posteriori error estimates for finite element discretizations of the heat equation. Calcolo **40**, 3 (2003), 195–212. (Cité en pages 2, 16, 17 et 39.)
- [108] VERFÜRTH, R. Robust a posteriori error estimates for nonstationary convection-diffusion equations. SIAM J. Numer. Anal. **43**, 4 (2005), 1783–1802 (electronic). (Cité en pages 16, 17, 19, 101, 108, 111, 117 et 121.)
- [109] VERFÜRTH, R. A note on constant-free a posteriori error estimates. SIAM J. Numer. Anal. **47**, 4 (2009), 3180–3194. (Cité en page 37.)
- [110] VOHRALÍK, M. On the discrete Poincaré-Friedrichs inequalities for nonconforming approximations of the Sobolev space  $H^1$ . Numer. Funct. Anal. Optim. **26**, 7-8 (2005), 925–952. (Cité en page 33.)
- [111] VOHRALÍK, M. A posteriori error estimates for lowest-order mixed finite element discretizations of convection-diffusion-reaction equations. SIAM J. Numer. Anal. **45**, 4 (2007), 1570–1599. (Cité en page 15.)
- [112] VOHRALÍK, M. Residual flux-based a posteriori error estimates for finite volume and related locally conservative methods. Numer. Math. **111**, 1 (2008), 121–158. (Cité en pages 15, 18, 21, 22, 29 et 33.)
- [113] VOHRALÍK, M. Guaranteed and fully robust a posteriori error estimates for conforming discretizations of diffusion problems with discontinuous coefficients. J. Sci. Comput. **46**, 3 (2011), 397–438. (Cité en page 16.)
- [114] XU, J., ZHU, Y., AND ZOU, Q. New adaptive finite volume methods and convergence analysis. Preprint AM296, Mathematics Department, Penn State, 2006. (Cité en page 14.)
- [115] YANG, J.-M., AND CHEN, Y.-P. A unified a posteriori error analysis for discontinuous Galerkin approximations of reactive transport equations. J. Comput. Math. **24**, 3 (2006), 425–434. (Cité en page 16.)
- [116] YANG, M. A posteriori error analysis of nonconforming finite volume elements for general second-order elliptic PDEs. Numer. Methods Partial Differential Equations **27**, 2 (2011), 277–291. (Cité en page 14.)
- [117] YE, X. A posteriori error estimate for finite volume methods of the second order elliptic problem. Numer. Methods Partial Differential Equations **27**, 5 (2011), 1165–1178. (Cité en page 14.)
- [118] ZIENKIEWICZ, O. C., AND ZHU, J. Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. Internat. J. Numer. Methods Engrg. **24**, 2 (1987), 337–357. (Cité en page 13.)