



HAL
open science

Modélisation et inversion de données électriques en courant continu : vers une prise en compte efficace de la topographie

Sébastien Penz

► **To cite this version:**

Sébastien Penz. Modélisation et inversion de données électriques en courant continu : vers une prise en compte efficace de la topographie. Sciences de la Terre. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2012. Français. NNT : 2012ENMP0016 . pastel-00796438

HAL Id: pastel-00796438

<https://pastel.hal.science/pastel-00796438>

Submitted on 4 Mar 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole doctorale n° 398 : Géosciences et Ressources Naturelles

Doctorat ParisTech

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École nationale supérieure des mines de Paris

Spécialité "Dynamique et Ressources des Bassins Sédimentaires "

présentée et soutenue publiquement par

Sébastien PENZ

Le 19 décembre 2012

Modélisation et Inversion de données électriques en courant continu : vers une prise en compte efficace de la topographie

Directeur de thèse : Hervé CHAURIS

Co-encadrement de la thèse : **Caroline MEHL**

Jury

M. Olivier KAUFMANN, Professeur, Faculté polytechnique de Mons, Belgique
M. Stéphane GARAMBOIS, Maître de conférence, Université Joseph Fourier Grenoble I
Mme Céline GELIS, Ingénieur-chercheur, IRSN
M. Roger GUERIN, Professeur, Université Pierre et Marie Curie Paris 6
M. Hervé CHAURIS, Professeur, Mines ParisTech
Mme Caroline MEHL, Maître Assistant, Mines ParisTech

Rapporteur
Rapporteur
Examinatrice
Examineur
Examineur
Examinatrice

Modeling and inversion of DC resistivity data: towards an efficient handling of topography

DC resistivity imaging plays an important role for a wide range of applications related to the characterization of the shallow subsurface. Major developments have been made over the last two decades: fast multi-electrode data acquisition systems, optimized experimental design techniques and efficient 2D and 3D resistivity inversions. Nevertheless, even with state-of-the-art technology, acquisition and processing of large-scale data sets still represent a challenging task. In particular if we consider an arbitrary topography, there is a need for further improvements regarding efficiency and accuracy.

In order to better take into account topography, we have developed a new 2.5D/3D tomographic inversion code. It includes methodology improvements related to singularity removal in the case of non-flat topography. We introduced two new formulations to solve this problem. These two formulations are independent of the numerical scheme and allow computation of the electric field with great accuracy and limited computational cost. The first solution takes advantage of an additive decomposition of the electric potential and is really close to classical solutions: differences are restricted to the expression of the free-surface conditions. The second solution uses a multiplicative decomposition; however its discretization still contains unresolved difficulties. The direct problem solver was implemented in the framework of the Generalized Finite Differences Method. The use of unstructured meshes is well suited to a fine representation of topography. The code has been validated through comparisons with analytical and numerical solutions. In particular we compared it with a similar implementation based on the Finite Elements method.

The inversion code uses the adjoint state method to compute the gradient of the misfit function. This is a numerically very efficient technique; we developed it both in 3D and 2.5D. Since we do not compute the sensitivity functions, the choice of the minimization algorithm is restricted to conjugate gradient or Quasi-Newton method. A dual-grid approach is implemented, allowing for a better parametrization of the problem: the modeling computation grid is decoupled from the inverse parameter grid. Several tests using synthetic data sets have assessed the good behavior of this inversion code. For really noisy data, we verified that the ℓ_1 norm gives better results. Finally the code has been tested on real data property of IRSN (the French Institute for Radiological Protection and Nuclear Safety), that were acquired during this thesis. The real data results show the main subsurface structures; moreover, several low resistivity zones are identified and could correspond to fractured areas.

Keywords: resistivity, modeling, finite differences, unstructured meshes, inverse problem.

Modélisation de données électriques en courant continu : vers une prise en compte efficace de la topographie

L'imagerie électrique a connu un fort développement au cours des deux dernières décennies, devenant un outil de plus en plus important pour un large domaine d'applications relatives à la caractérisation de la subsurface proche. D'importants développements ont été réalisés et permettent de disposer aujourd'hui : de dispositifs d'acquisition multielectrodes rapides, de protocoles de mesures optimisés, ainsi que de codes d'inversions 2D et 3D. L'acquisition et le traitement économique de gros jeux de données reste cependant une tâche délicate. Dans ce contexte, nous nous intéressons à la prise en compte de la topographie, non seulement en terme d'efficacité, mais également en terme de qualité de la solution.

Dans le but d'améliorer la prise en compte de la topographie, un nouveau code de tomographie électrique 2.5D et 3D a été développé. Il intègre des développements méthodologiques liés en particulier à la suppression de la singularité à la source en présence d'une topographie non plane. Deux nouvelles formulations ont été proposées pour résoudre ce problème. Toutes deux permettent de calculer, avec précision, le potentiel avec un coût numérique restreint. La première de ces formulations s'appuie sur une décomposition additive du potentiel ; elle est très proche des approches classiques et s'en différencie par l'expression des conditions de surface libre. La seconde formulation utilise une approche multiplicative ; sa discrétisation présente toutefois des difficultés. Les deux approches proposées sont indépendantes du schéma numérique. Le code de calcul direct a été implémenté en utilisant la méthode des Différences Finies Généralisées, approche qui permet de considérer des maillages non structurés particulièrement bien adaptés à une représentation précise de la topographie. Le code est validé par des comparaisons avec des solutions analytiques et d'autres solutions numériques. En particulier il est comparé à une implémentation similaire avec la méthode des Eléments Finis.

Le code d'inversion s'appuie sur le calcul du gradient par la méthode de l'état adjoint. Cette méthode permet un calcul très efficace du gradient ; elle est développée en 3D mais également en 2.5D. En l'absence du calcul des sensibilités, la minimisation de la fonction objective est réalisée en utilisant un algorithme de gradient conjugué ou de Quasi-Newton. Une certaine liberté sur la paramétrisation du problème est obtenue par l'utilisation d'une approche double grille découplant le maillage utilisé pour le calcul direct de celui utilisé pour l'inversion. Plusieurs tests sur des données synthétiques démontrent le bon comportement du code. L'intérêt de l'utilisation de la norme ℓ_1 est vérifié dans le cas de données très bruitées. Enfin le code est appliqué à l'inversion de données réelles de l'IRSN, acquises au cours de la thèse sur le site de Tournemire. Les résultats permettent d'identifier les principales structures géologiques et notamment des zones conductives pouvant correspondre à des zones de fracturation.

Mots clés : résistivité, modélisation, différences finies, maillages non structurés, problème inverse.

Remerciements

En premier lieu je tiens à remercier mon directeur de thèse Hervé Chauris, pour m'avoir fait confiance sur ce sujet, et m'avoir soutenu et orienté dans ce travail de thèse. Je remercie également Caroline Mehl, co-encadrante de cette thèse, pour son soutien et les moments partagés à Fontainebleau ou sur le terrain.

Je remercie Olivier Kaufmann et Stéphane Garambois, rapporteurs de ce mémoire de doctorat, pour avoir accepté de lire et évaluer ce travail. Je remercie également Roger Guérin qui a accepté d'être le président du jury, et pour l'intérêt qu'il a témoigné. Je voudrais remercier Céline Gélis pour m'avoir permis de participer à l'acquisition et travailler sur les données réelles de Tournemire, ainsi que pour sa présence dans ce jury.

J'adresse des remerciements chaleureux à l'ensemble des membres de l'équipe de géophysique : merci à Mark Noble pour ses conseils et son recul, merci à Daniela Dono et Alexandrine Gesret pour leur avis scientifique, merci à Véronique Lachasse pour son aide administrative au quotidien, qui facilite grandement le travail. Merci enfin à mes collègues thésards pour leurs avis scientifiques et les moments partagés dans notre "caverne". Nidahl, Carlos, Elise, Fang, Jiangbo, merci à vous.

Ces trois années à Fontainebleau ont été l'occasion de belles rencontres. A ce titre je souhaite remercier les "voisins" de l'équipe de géologie, en particulier Benjamin, Maxime, Thomas, Pierre, merci pour les bon délire à la cantine et votre amitié ! Merci enfin à Pauline pour les bons moments partagés lors de tes passages à Fontainebleau, ton soutien durant ces trois ans et ton amitié.

J'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, merci pour votre soutien et vos encouragements. Enfin, dans ces remerciements, je n'oublie pas ma famille, mon frère, ma sœur et ma mère, pour leur contribution, leur soutien infaillible et leur patience. Pour terminer je ne peux remercier suffisamment mon père étant donné combien je lui dois. J'aurais aimé que tu puisses lire ces lignes. Merci à toutes et à tous.

À mon père,

Table des matières

1	Introduction	1
2	L'imagerie de résistivité en courant continu	5
2.1	Historique	6
2.2	Propriétés électriques des matériaux	7
2.2.1	Les géomatériaux	7
2.2.2	Les matériaux du génie civil	9
2.2.3	Les tissus biologiques	9
2.3	Acquisition de données	10
2.3.1	Principe de mesure	10
2.3.2	Erreur sur la mesure	11
2.3.3	Les différentes méthodes et types d'acquisition de surface	13
2.3.4	Dispositifs et protocoles de mesure	16
2.3.5	Représentation des données	17
2.4	Sensibilité des dispositifs	18
2.5	Equations fondamentales	19
2.5.1	La loi d'Ohm	19
2.5.2	Equations de l'électromagnétique de Maxwell	21
2.5.3	Equation du potentiel électrique lié à une source ponctuelle	21
2.6	Conclusion	23
3	Résolution du problème direct	25
3.1	Méthodes de résolution	26
3.1.1	Solutions analytiques	26
3.1.2	Méthodes intégrales	26
3.1.3	Autres méthodes numériques	27
3.2	Conditions aux bords et problème 2.5D	29
3.2.1	Conditions aux bords pour un modèle de dimensions finies	29
3.2.2	Approximation 2.5D	30
3.3	Singularité à la source : approche additive	32
3.3.1	Décomposition du potentiel dans le cas d'une topographie plane (Lowry et al., 1989)	32
3.3.2	Cas d'une topographie non plane	34
3.3.3	Calcul du potentiel en utilisant la méthode BEM (Blome, 2009)	34
3.3.4	Nouvelle formulation additive	37
3.4	Singularité à la source : approche multiplicative	39
3.5	Conclusion	43

4	Résolution du problème inverse	45
4.1	Formulation du problème inverse	46
4.1.1	Introduction	46
4.1.2	Les stratégies d'inversions utilisées en tomographie électrique	47
4.1.3	Théorie de l'inversion par optimisation locale	47
4.1.4	Les algorithmes de minimisation par optimisation locale	51
4.2	Calcul des dérivées de Fréchet	53
4.2.1	Méthode des perturbations	53
4.2.2	Méthode des équations de sensibilité	53
4.2.3	Méthode basée sur le théorème de réciprocité	54
4.3	Calcul du gradient par la méthode de l'état adjoint	55
4.3.1	Formulation par le Lagrangien	56
4.3.2	Gradient de la fonction objective	56
4.3.3	Équation de l'état adjoint	57
4.3.4	Cas 2.5D	58
4.3.5	Calcul du gradient de la fonction objective avec des résistivités apparentes	59
4.3.6	Discussion sur la méthode	60
4.4	Paramétrisation et régularisation	60
4.4.1	Choix de paramètres logarithmiques	60
4.4.2	Discrétisation des paramètres	61
4.4.3	Techniques de régularisation	63
4.5	Conclusion	67
5	Problème direct : implémentation et aspects pratiques	69
5.1	Méthode de résolution numérique	70
5.1.1	Différences Finies Généralisées	70
5.1.2	Résolution de l'équation de Poisson à conductivités variables	74
5.2	Implémentation	81
5.2.1	Mise en oeuvre pratique	81
5.2.2	Applications numériques	83
5.3	Comparaison entre les Différences Finies Généralisées et les Eléments Finis	92
5.3.1	Rappels sur la méthode des Eléments Finis dans le cas du problème électrique	92
5.3.2	Tests numériques de comparaison entre les codes en Dif- férences Finies Généralisées (GFDM) et en Eléments Finis (FEM)	94
5.4	Conclusion	108
6	Problème inverse : aspects pratiques et applications	109
6.1	Mise en oeuvre pratique de l'inversion	110
6.1.1	Formulation de la fonction coût	110
6.1.2	Paramétrisation	110

6.1.3	Calcul du gradient de la fonction objective	110
6.1.4	Méthode de descente et de régularisation	111
6.1.5	Calcul du pas et préconditionnement	113
6.1.6	Critère de convergence et d'arrêt	114
6.2	Etudes synthétiques	115
6.2.1	Etude du comportement des normes ℓ_1 et ℓ_2	115
6.2.2	Inversion d'un modèle avec plusieurs hétérogénéités	119
6.2.3	Comparaison des algorithmes de minimisation	123
6.3	Inversion de données réelles	126
6.3.1	Contexte géologique et environnemental du site de Tournemire	126
6.3.2	Acquisition des données	128
6.3.3	Inversion des profils à écartements de 8 m	128
6.4	Conclusion	136
Conclusions et perspectives		137
Annexe : High resolution electrical resistivity tomography in superficial limestones at Tournemire site, France		141
Liste des figures		152
Bibliographie		153

Introduction

La connaissance des structures du sous-sol constitue de nos jours un enjeu essentiel. Les ressources naturelles minérales et les énergies fossiles représentent la matière première de la grande majorité des activités humaines. Dans le monde actuel, l'exploitation des ressources naturelles n'est toutefois pas le seul domaine nécessitant une meilleure connaissance du sous-sol. Le respect des exigences de sécurité imposées pour les grands projets d'infrastructures, la prévention des risques naturels et technologiques, ou encore les problématiques de stockage des déchets requièrent également une compréhension fine de la géologie et des comportements des géomatériaux. La connaissance de la géologie à partir d'observations en surface n'est pas suffisante pour ces problématiques. L'apport d'observations directes est évident mais leurs réalisations sont potentiellement difficiles. En effet cela nécessite des forages qui d'une part mettent en jeu des défis technologiques importants, et d'autre part sont coûteux et induisent des risques de pollution. De plus les forages ne fournissent qu'une information très ponctuelle qui n'est pas nécessairement représentative de l'ensemble de la structure. La géophysique s'intéresse, elle, à la connaissance du sous-sol à partir de l'observation de phénomènes physiques. Cette science repose sur l'interprétation d'observations indirectes et permet d'investiguer de gros volumes du sous-sol.

En fonction de l'échelle des investigations, différents phénomènes physiques peuvent être exploités. Dans le cas de la subsurface proche nous pouvons utiliser les ondes sismiques (c'est également le cas pour de grandes profondeurs) mais également les ondes électromagnétiques. La forte atténuation de ces dernières n'étant pas une limitation à cette échelle. La subsurface se caractérise bien souvent par une très forte hétérogénéité des paramètres physiques. En particulier, dans le cas des ondes sismiques, les contrastes des vitesses de propagation peuvent être très forts, typiquement de 800 m/s à 4000 m/s. De plus, les données sismiques étant, pour des faibles profondeurs, très affectées par les ondes de surface, les méthodes sismiques ne sont pas toujours idéales pour l'étude des faibles profondeurs. Les méthodes électromagnétiques sont en revanche plus robustes vis-à-vis des forts contrastes de résistivités courants pour la subsurface proche. La méthode de prospection électrique en courant continu est en particulier devenue une méthode de choix pour ces problématiques.

La méthode d'imagerie électrique est simple : un courant est injecté, au moyen de deux électrodes, dans le sol, et des différences de potentiel sont mesurées via deux autres électrodes. Le champ électrique, résultant du courant injecté, dépend de la distribution de la résistivité dans le sous-sol. En répétant ces mesures avec différents

positionnements d'électrodes, nous obtenons des données qui une fois interprétées permettent de définir des zones plus ou moins résistantes du sous-sol. Cette méthode a connu un fort développement depuis son invention au début du XX^e siècle ; elle est maintenant couramment utilisée au travers d'applications 2D et 3D.

Les lois de la physique permettent de résoudre le problème direct qui consiste à obtenir les données à partir d'un modèle. L'interprétation des données géophysiques nécessite de considérer le problème dans le sens inverse. Le problème à résoudre est alors appelé problème inverse, et il vise à retrouver les paramètres du modèle à partir des données. Les problèmes inverses géophysiques de manière générale ne sont pas les simples adjoints du problème direct. En effet, du fait des dispositifs d'acquisition, des erreurs sur les mesures et du nombre de données, ces problèmes sont dits « mal posés » ; ils sont de plus bien souvent non linéaires ce qui complique également leur résolution.

Depuis le milieu des années 1990, la réalisation d'acquisitions et d'inversions électriques 2D et 3D est devenue une procédure classique. Les algorithmes d'inversion traditionnellement utilisés souffrent toutefois de limitations pour l'étude de structures de géométries complexes ainsi que pour l'introduction d'information a priori. Comme nous le verrons dans le manuscrit, la topographie affecte la distribution du potentiel dans le sol, et sa prise en compte précise est essentiel afin de réaliser des inversions réalistes. L'intérêt de plus en plus grand pour des acquisitions de grandes échelles nécessite également le développement d'algorithmes spécifiques permettant de traiter de gros jeux de données. Les problèmes envisagés ici sont de bien plus petite dimension que les problèmes traités par l'industrie sismique, toutefois, au regard des utilisateurs habituels de la méthode d'imagerie électrique, il est important que les inversions puissent être réalisées sur un ordinateur de bureau. Dans cette optique le travail entrepris durant cette thèse a visé à développer un algorithme de modélisation et d'inversion permettant de traiter des problèmes de topographies complexes et qui ne soit pas limité par de gros volumes de données.

Ce manuscrit présente différents aspects de développements d'outils et d'applications. Il s'organise en cinq chapitres. Le **chapitre 2** constitue une introduction générale à la méthode de tomographie électrique. J'y présente notamment un historique de la méthode et de ses applications puis les propriétés électriques des matériaux. Une partie est consacrée à l'acquisition des données, et ce chapitre se termine par la présentation des équations fondamentales qui régissent le problème électrique. Le **chapitre 3** est consacré à la résolution du problème direct ; le problème est ici traité d'un point de vue théorique uniquement. J'y présente les différentes méthodes permettant de résoudre le problème direct ; je présente également les problèmes des conditions aux bords et d'approximation 2.5D. Le cœur de ce chapitre se compose de deux sections consacrées au problème de la singularité à la source. Ces sections présentent les approches classiques ainsi que deux formulations nouvelles que je propose pour traiter le problème lié à une topographie quelconque. Le **chapitre 4** se présente comme un état de l'art de la résolution du problème inverse électrique. J'y

étudie les approches linéaires et non linéaires, les méthodes de calcul des sensibilités, ainsi que les problèmes de paramétrisation et de régularisation. Une section importante est également consacrée au calcul du gradient par l'état adjoint ; je détaille en particulier le calcul du gradient de la fonction objective par la méthode de l'état adjoint en 2.5D. Au **chapitre 5** je présente mon implémentation du code de modélisation. L'approche par Différences Finies sur des maillages non structurés est présentée dans une première partie. Une attention particulière a été portée à la discrétisation des équations : où et comment sont calculées les valeurs de résistivité. Le code est ensuite validé en le comparant à des solutions analytiques et numériques. Ce chapitre se termine par des tests croisés entre mon code et un code Eléments Finis, développé en parallèle, permettant de comparer les deux méthodes. Le **chapitre 6** se consacre lui à l'implémentation du problème inverse et à des applications. Je présente quelques points importants relatifs au choix de l'algorithme de minimisation et au choix de paramétrisation. Les applications présentées se composent de trois études sur des données synthétiques et d'une partie finale sur l'inversion de données réelles acquises sur le site de Tournemire.

L'imagerie de résistivité en courant continu

Sommaire

2.1	Historique	6
2.2	Propriétés électriques des matériaux	7
2.2.1	Les géomatériaux	7
2.2.2	Les matériaux du génie civil	9
2.2.3	Les tissus biologiques	9
2.3	Acquisition de données	10
2.3.1	Principe de mesure	10
2.3.2	Erreur sur la mesure	11
2.3.3	Les différentes méthodes et types d'acquisition de surface . .	13
2.3.4	Dispositifs et protocoles de mesure	16
2.3.5	Représentation des données	17
2.4	Sensibilité des dispositifs	18
2.5	Equations fondamentales	19
2.5.1	La loi d'Ohm	19
2.5.2	Equations de l'électromagnétique de Maxwell	21
2.5.3	Equation du potentiel électrique lié à une source ponctuelle .	21
2.6	Conclusion	23

Dans ce chapitre introductif je présente les méthodes d'imagerie électrique. Je commence par un historique, du développement de ces méthodes en géophysique à leur extension à d'autres domaines d'imagerie. Je présente ensuite les propriétés électriques des différents matériaux étudiés par ces méthodes, ainsi que les lois empiriques permettant de relier la résistivité des géomatériaux à certains de leurs paramètres physiques. Je présente ensuite le principe de mesure en géophysique et les différents types d'acquisition existants. J'introduis les protocoles de mesure les plus courants et discute leur sensibilité. Enfin ce chapitre s'achève sur la présentation des équations physiques fondamentales qui régissent le problème électrique.

2.1 Historique

Les bases physiques essentielles au développement de la prospection électrique ont été progressivement élaborées au cours des XVIII^e et XIX^e siècles. Gray et Wheeler furent, vers 1730, les premiers à étudier les propriétés de conductivité et de résistivité de différents matériaux (métaux, végétaux, roches). Watson en 1746, puis Cavendish et Coulomb initièrent l'approche quantitative de l'électricité. En 1813 Poisson effectue une correction de l'équation différentielle de Laplace donnant l'équation de la théorie du potentiel qui porte aujourd'hui son nom. Au cours de la première partie du XIX^e siècle les travaux d'Ohm, d'Ampère et de Faraday aboutirent à la formulation de lois régissant l'électromagnétisme. Enfin en 1881 est reformulée sous sa forme actuelle la théorie unifiée de l'électromagnétisme de Maxwell qui introduit le champ électromagnétique : entité englobant le champ électrique et le champ magnétique.

Le développement de la prospection électrique à proprement parler a commencé au début du XX^e siècle. La naissance et le développement de la méthode sont largement associés à Conrad Schlumberger. En 1912, dans la propriété familiale du Val-Richer en Pays d'Auge, il conduisit la première expérience in situ aboutissant à la création d'une carte d'équipotentiels. Le centenaire de cette première expérimentation a été célébré cette année 2012 à Mines Paristech par un colloque sur l'imagerie électrique (Chauris et al., 2012). Cette première expérience in situ donna naissance à un brevet pour un « Procédé pour la détermination de la nature du sous-sol au moyen de l'électricité » et à une série d'expérimentations qui seront interrompues par la guerre. A la même époque Frank Wenner, aux Etats-Unis, étudia d'un point de vue théorique le système de mesure de la résistivité électrique au moyen de quatre électrodes. En 1920 Conrad Schlumberger et son frère Marcel réalisèrent les premiers relevés de résistivité électrique appliqués à la prospection minière et pétrolière. Les succès de la méthode pour l'exploration aboutirent à la création, en 1926, de la Société de Prospection Électrique qui deviendra plus tard la Compagnie Générale de Géophysique de France (CGG). En 1927 est réalisée la première mesure de résistivité en forage au gisement pétrolier de Pechelbronn en Alsace. L'expansion rapide de cette méthode de logging entraîna la création de la Schlumberger Well Surveying Corporation en 1934 au Texas. Jusqu'aux années 1970 la méthode a peu évolué et l'effort a été porté sur la mise en œuvre et l'interprétation des sondages électriques et des cartes de résistivité.

Au cours des années 1970 apparaît la représentation en deux dimensions des données électriques sous formes de panneaux (Edwards, 1977). Dès lors se sont développées les méthodes d'imagerie électrique 2D et 3D. L'amélioration des moyens informatiques au cours des années 1990 et le développement conjoint d'algorithmes d'inversion rapides (Loke & Barker, 1996a,b) ont permis l'essor de l'imagerie électrique. A l'heure actuelle la prospection électrique est utilisée dans un grand champ d'applications géophysiques. Elle est largement employée afin de caractériser l'hydrogéologie d'un glissement de terrain ou d'une falaise en éboulement (Marescot

et al., 2008; Friedel et al., 2006; Udphuay, 2008; Heincke et al., 2010), d'identifier l'intrusion ou la migration d'eau salée ou de polluants dans le sol (Bevc & Morrison, 1991; Daily & Ramirez, 1995; Chambers et al., 1999; Dahlin et al., 2002; Cassiani et al., 2006). La méthode a également été appliquée à la caractérisation de fractures et à la détection de cavités (Wang et al., 1991; van Schoor, 2002) ainsi que pour diverses utilisations dans le domaine de la géotechnique (Yaramanci, 2000; Kruschwitz & Yaramanci, 2004). L'étude de la résistivité à de faibles profondeurs est également utilisée en archéologie (Panissod et al., 1998; Candansayar & Başokur, 2001; Negri et al., 2008; Tsokas et al., 2008) ou dans le domaine des sciences du sol et de l'agriculture de précision (Dahlin, 2001; Samouëlian et al., 2005). L'imagerie électrique est aussi employée avec succès pour l'auscultation des structures du génie civil (ouvrages en béton, barrages et digues en terre) (Lataste et al., 2003; Sjö Dahl et al., 2008). Un domaine d'application moins connu est le diagnostic de dangerosité des arbres d'ornement (Nicolotti et al., 2003; al Hagrey, 2007); l'imagerie électrique permet de déterminer l'état sanitaire d'un arbre : présence d'éventuelles dégradations ou de cavités causées par des champignons. Nous pouvons également mentionner des utilisations en contrôle des procédés industriels afin de mesurer des flux dans des tuyauteries (Hunt, 2012; Kaipio, 2012). Enfin on peut noter un important dynamisme dans le développement de l'imagerie électrique biomédicale avec des applications telles que l'identification de tumeurs cancéreuses ou le diagnostic du type d'atteinte en cas d'accidents vasculaires cérébraux (Borsic, 2012; Holder, 2012).

2.2 Propriétés électriques des matériaux

Les méthodes de prospection électrique s'intéressent à la détermination de la conductivité électrique σ (S/m) d'une structure ou matériau. En géophysique les résultats sont souvent exprimés en terme de résistivité électrique ρ ($\Omega.m$), l'inverse de la conductivité. La résistivité d'un matériau est une grandeur liée à la structure du matériau et aux mécanismes de conduction électrique qui peuvent s'y dérouler.

La circulation d'un courant électrique peut s'effectuer selon trois types de conduction :

- électronique (dans les matériaux métalliques) ;
- électrolytique (dans le cas d'un fluide circulant dans les pores d'un matériau) ;
- surfacique (mouvement de cations libres dans l'électrolyte le long de la surface de feuillets argileux négativement chargés).

2.2.1 Les géomatériaux

Dans le cas des géomatériaux, la conduction est principalement électrolytique et en partie surfacique (en proportions variables liées à la teneur en argile). La prédominance de la conductivité électrolytique entraîne un lien entre la résistivité et la

viscosité du fluide, elle-même liée à la température. Ainsi la résistivité du matériau décroît quand la température augmente. La résistivité dépend d'autres facteurs tels que la porosité (occluse ou libre), la saturation en eau, la teneur en ions de l'eau interstitielle, la pression, la teneur en argile ainsi que le type d'argile. L'interdépendance entre ces différents paramètres et leurs plages de variations dans les géomatériaux donnent lieu à une large gamme de résistivités (7 ordres de grandeurs) que l'on peut rencontrer en géophysique (Figure 2.1).

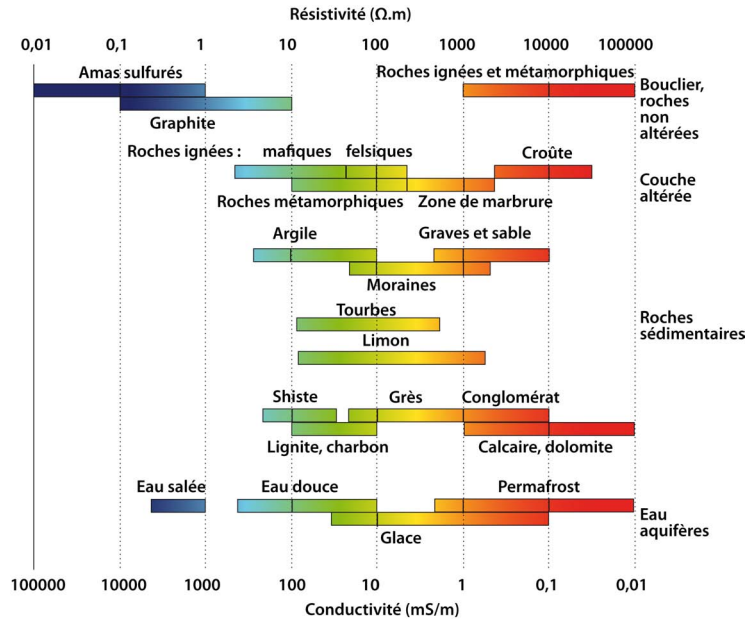


FIGURE 2.1 – Gamme de résistivités des matériaux rencontrés en géophysique (adapté d'après Palacky (1987)).

De nombreuses études ont été menées depuis les années 1940 afin d'établir un lien entre les différents paramètres cités précédemment et la résistivité. Cela a abouti à la formulation de relations empiriques. Une de ces relations fréquemment utilisée est la loi d'Archie (Archie, 1942) qui suppose que la matrice agit comme un isolant et que la conduction s'effectue intégralement via le fluide interstitiel. Initialement proposée pour des matériaux saturés en eau cette loi a été généralisée afin d'intégrer le degré de saturation (Keller & Frischknecht, 1966) :

$$\rho = \rho_w a \Phi^{-m} S_w^{-n} \quad (2.1)$$

où ρ est la résistivité du milieu, ρ_w représente la résistivité de l'eau d'imbibition, Φ symbolise la porosité, a et m sont des coefficients empiriques liés respectivement à la lithologie et à la cimentation, S_w représente le degré de saturation en eau et n est une constante reflétant les propriétés de l'eau et la non-linéarité entre résistivité et saturation en eau. Lorsque le rapport entre la conductivité du liquide et celle de la

matrice ne permet plus de considérer cette dernière comme isolante la formulation suivante peut être considérée (Ward, 1990) :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Phi^m}{\rho_w} + \frac{m(1 - \Phi^m)}{\rho_m} \quad (2.2)$$

où ρ_m est la résistivité de la matrice. Les deux termes de cette expression correspondent respectivement à l'apport du fluide interstitiel et à celui de la matrice. Dans le cas de milieux argileux et partiellement saturés, Simandoux (1963) propose une expression séparant l'effet de l'argile de celui de l'eau :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{V_{arg}}{\rho_{arg}} S_w + \frac{\Phi^m}{a\rho_w} S_w^2 \quad (2.3)$$

où V_{arg} est le volume d'argile et où ρ_{arg} représente la résistivité de l'argile considérée.

Des lois empiriques ont également été établies pour rendre compte de l'effet de la température sur la résistivité. Nous pouvons mentionner celle proposée par Keller & Frischknecht (1966) :

$$\rho_T = \frac{\rho_{18}}{1 + \alpha(T - 18)} \quad (2.4)$$

L'idée de cette loi est d'obtenir la résistivité d'un matériau à la température T en °C par modification de la résistivité de ce matériau à la température référence de 18°C. Le paramètre α (°C⁻¹) ajustant la température peut varier entre 0.02 et 0.03 °C⁻¹.

2.2.2 Les matériaux du génie civil

Tout comme pour les géomatériaux la résistivité des matériaux utilisés en génie civil présente une large plage de variations. Une étude approfondie sur les bétons par Lataste (2002) nous permet d'indiquer quelques valeurs. Le béton est très conducteur lorsqu'il est frais (avant prise) de l'ordre de 1 Ω.m à 10 Ω.m, puis sa résistivité augmente rapidement au cours du durcissement atteignant rapidement des valeurs de l'ordre de 200 Ω.m. La résistivité augmente encore au cours de son vieillissement, en partie du fait de l'endommagement et de la fissuration, pouvant atteindre des valeurs de plusieurs dizaines de milliers d'Ohm.m. Pour les bétons armés, la présence d'armatures métalliques rend les matériaux plus complexes. Le phénomène de corrosion des aciers notamment entraîne une nette augmentation de la conductivité.

2.2.3 Les tissus biologiques

Comme indiqué précédemment l'imagerie électrique médicale (Electrical Impedance Tomography) est un domaine en plein développement. Les tissus biologiques s'avèrent conducteurs du fait du déplacement du champ électrique des ions présents dans l'électrolyte intra et intercellulaire. La résistivité des tissus est fonction de la fréquence du signal, et le paramètre de permittivité (négligeable à basse

fréquence) est également étudié et pris en compte. [Gabriel et al. \(1996\)](#) proposent un modèle liant la résistivité et la permittivité en fonction de la fréquence. Le tableau 2.2 présente des valeurs de résistivité à 50 Hz pour différents tissus, indiquant des valeurs globalement plus faibles que dans le cas des géomatériaux.

50Hz		50Hz	
Organe	ρ [Ω m]	Organe	ρ [Ω m]
Vésicule biliaire	0.71	Rate	11.67
Foie	27.26	Moelle	36.50
Cœur	12.09	Cartilage	5.83
Intestin	1.92	Langue	3.68
Colon	18.34	Oeil	0.67
Os	49.85	Liquide cérébral	0.50
Pancréas	1.92	Tronc cérébral	13.29
Rein	11.21	Cervelet	10.50
Vessie	4.87	Cerveau	18.77
Estomac	1.92	Trachée	3.33
Poumon	14.62	Tissus gras	51.15
Muscle	4.29		

FIGURE 2.2 – Valeurs de résistivité de certains tissus biologiques à 50 Hz ([Gabriel et al., 1996](#)).

Suite à cette présentation des méthodes d'imagerie électrique, de leurs applications et des paramètres des objets étudiés, nous allons maintenant nous concentrer sur les applications géophysiques uniquement.

2.3 Acquisition de données

2.3.1 Principe de mesure

Les mesures liées à la méthode de résistivité électrique consistent en l'injection d'un courant électrique dans le domaine étudié au moyen de deux électrodes (A et B) et la mesure par deux autres électrodes (en M et N) de la différence de potentiel générée par le courant établi (Figure 2.3). Les électrodes utilisées sont généralement métalliques, nécessitant un contact galvanique entre les électrodes et le milieu. Le contact est habituellement obtenu en enfonçant l'électrode dans le milieu. Dans le cas de surfaces dures non endommageables l'utilisation d'électrodes capacitives remplace parfois les électrodes métalliques ([Tabbagh, 2012](#)).

La différence de potentiel est fonction de l'intensité du courant, de la résistivité électrique du milieu étudié et de l'espacement entre les différentes électrodes de courant et de potentiel. Ainsi l'étude du champ de potentiel permet de déterminer la répartition de la résistivité de la structure étudiée. Dans le cas d'un milieu homogène isotrope la résistivité mesurée est la résistivité réelle du matériau constituant le milieu. Ceci reste toutefois dépendant de l'échelle considérée : un même matériau pouvant être considéré comme homogène à une échelle et hétérogène à une autre. Dans le cas d'un milieu hétérogène, la résistivité mesurée n'est pas la résistivité vraie

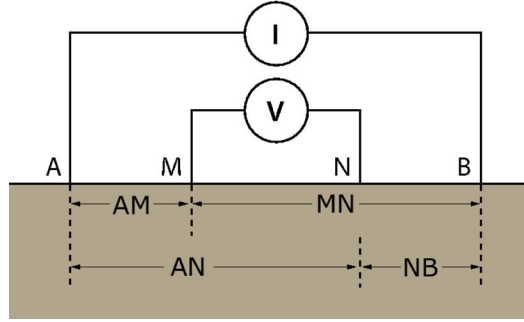


FIGURE 2.3 – Dispositif quadripôle utilisé pour la mesure de résistivité.

du sous-sol, elle tient compte des résistivités de l'ensemble du domaine traversé par les lignes de courant utilisées pour la mesure. Ceci nécessite l'introduction de la notion de résistivité apparente. Par définition, la résistivité apparente est le rapport de la différence de potentiel mesurée (ΔV) à celle calculée (ΔV_0) selon la même géométrie et la même intensité de courant sur un terrain de résistivité homogène $1 \Omega.m$. L'expression analytique du potentiel dans un milieu homogène (Telford et al., 1990) permet de modifier l'expression 2.5 en faisant apparaître l'intensité du courant (I) et un facteur dit géométrique (k).

$$\rho_a = \frac{\Delta V}{\Delta V_0} = k \frac{\Delta V}{I} \quad (2.5)$$

L'existence de solution analytique du potentiel pour des milieux homogènes de géométrie simple permet d'obtenir l'expression du facteur géométrique dans ces cas. Une approximation de la géométrie du domaine est couramment pratiquée afin d'utiliser ces expressions pour obtenir la résistivité apparente. Dans le cas d'un demi-espace homogène et de sources à la surface le facteur géométrique est donné par :

$$k = \frac{2\pi}{\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{BN}} \quad (2.6)$$

Si les électrodes sont régulièrement espacées, $AM = MN = NB = a$, alors $k = 2\pi a$. Dans le cas d'un demi-espace homogène et de sources en profondeur, l'expression du facteur géométrique nécessite l'introduction des points A' et B' , images des points A et B par rapport à la surface, et devient :

$$k = \frac{4\pi}{\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{A'M} - \frac{1}{A'N} - \frac{1}{B'M} + \frac{1}{B'N}} \quad (2.7)$$

2.3.2 Erreur sur la mesure

Avant de discuter des différents types d'acquisition et a fortiori des méthodes d'inversion il est important de s'intéresser aux erreurs pouvant contaminer les don-

nées. En effet le bruit affectant les données complique et limite fortement la résolution d'un problème inverse et une bonne connaissance de l'origine du bruit permet des choix raisonnés de dispositifs d'acquisition visant à le réduire.

L'erreur sur la mesure de résistivité apparente peut être décomposée en trois parties (Günther, 2004) :

$$\frac{\delta\rho_a}{\rho_a} = \frac{\delta k}{k} + \frac{\delta V}{V} + \frac{\delta I}{I} \quad (2.8)$$

Les deux premières sources d'erreurs sont particulièrement intéressantes à étudier. L'erreur sur l'intensité du courant est moins importante, l'intensité du courant injecté étant bien contrôlée par les appareils de mesure actuels.

2.3.2.1 Erreur sur le facteur géométrique

Une partie de l'erreur introduite dans la résolution du problème inverse provient de la mauvaise représentation du dispositif d'acquisition mais également du domaine étudié (mauvaise acquisition de la topographie par exemple). Par sa définition même (Equation 2.5) le facteur géométrique concentre l'ensemble de ces erreurs. Une part de cette erreur provient du mauvais positionnement des électrodes par l'opérateur lors de l'acquisition. Zhou & Dahlin (2003) ont étudié l'importance de ces erreurs de positionnement dans le cas de profils 2D. Ils considèrent deux types d'erreurs de positionnement : des erreurs longitudinales (mauvais écartement dans le sens du profil entre deux électrodes) et des erreurs transversales (erreur d'alignement des électrodes). Dans le cas d'un milieu homogène et isotrope, en ne considérant que des erreurs de positionnement des électrodes, ils proposent la formule suivante pour l'erreur (δk) sur le facteur géométrique :

$$\delta k = \frac{k}{2\pi} \left[\left(\frac{dr_{BN}}{r_{BN}^2} - \frac{dr_{BM}}{r_{BM}^2} \right) - \left(\frac{dr_{AN}}{r_{AN}^2} - \frac{dr_{AM}}{r_{AM}^2} \right) \right] \quad (2.9)$$

où r est la distance entre deux points indiqués en indice et dr représente l'erreur sur cette distance. Au cours d'une acquisition l'erreur de positionnement initial de l'électrode est conservée une fois les électrodes plantées, de ce fait l'erreur relative de placement entre deux électrodes décroît avec l'augmentation de la distance entre les électrodes. Ainsi des configurations d'électrodes avec un faible écartement seront plus bruitées qu'avec de grands écartements (Günther, 2004).

Une seconde part de l'erreur sur le facteur géométrique provient d'une mauvaise représentation du domaine d'étude. Une bonne acquisition de la topographie de la zone d'étude et l'utilisation de méthodes numériques adaptées associées à une fine discrétisation est à considérer pour minimiser cette erreur. La simplification du domaine 3D en domaine 2.5D ou 1D est également source d'erreurs de ce type.

Dans le cas de dispositifs de petites dimensions une dernière source d'erreur systématique peut être vue comme une erreur de représentation du domaine et donc

intégrée dans l'erreur sur le facteur géométrique ; il s'agit de l'erreur sur l'approximation du point source. En effet une électrode (typiquement de 40 cm de longueur et 2 cm de diamètre) plantée de 20 à 30 cm dans le sol ne constitue pas une source ponctuelle. Cette approximation est valable pour des écartements d'électrodes suffisamment grands mais est physiquement peu réaliste pour de petits écartements d'électrodes (de l'ordre de 1 m). Dans ce cas particulier la modélisation de l'électrode au moyen de la méthode du modèle d'électrode complet peut s'avérer nécessaire (Rücker & Günther, 2011).

2.3.2.2 Erreur sur le potentiel

Les erreurs sur la mesure de la différence de potentiel peuvent avoir plusieurs origines. Tout d'abord, elles peuvent provenir de l'existence d'un bruit de fond produit par les courants telluriques ou par des courants électromagnétiques d'origine anthropique (installations industrielles notamment). Une seconde source d'erreur est à associer aux effets de polarisation des électrodes (Dahlin, 2000). Même avec l'utilisation d'électrodes non polarisables, ces dernières ont tendance à enregistrer un niveau de polarisation affectant les mesures. Ce type d'effets est délicat à intégrer dans la résolution numérique du problème et ils sont usuellement envisagés comme du bruit à minimiser. L'injection d'un courant en créneaux au lieu d'un courant continu et la forme des créneaux permettent de limiter ces effets. La répétition et la sommation des mesures (stacking) a également un effet positif sur ce point. Le développement de protocoles d'acquisition optimisés visant par exemple à ne pas mesurer une différence de potentiel à partir d'électrodes ayant servi à injecter du courant peu avant permet également de limiter les effets de polarisation (Wilkinson et al., 2011). Un bon contact entre les électrodes et le milieu est parfois difficile à obtenir ; l'intensité du courant injecté dans le sol étant liée à la surface de contact entre le sol et l'électrode, c'est également une source d'erreur sur la mesure de potentiel. Selon la nature du milieu et la qualité du contact, l'utilisation d'un mélange de bentonite et d'eau éventuellement salée peut permettre d'améliorer artificiellement ce dernier. Enfin l'erreur de mesure est également liée à la précision minimale de l'appareillage utilisé. De manière générale cette erreur est négligeable par rapport aux erreurs de polarisation et de bruit de fond. De plus les appareils récents permettent d'ajuster automatiquement l'intensité du courant injecté pour garantir des différences de potentiels supérieures à une valeur seuil.

2.3.3 Les différentes méthodes et types d'acquisition de surface

2.3.3.1 Le sondage électrique

La méthode de sondage électrique a constitué l'une des premières méthodes utilisées en prospection électrique en courant continu (Stefanescu et al., 1930). Le principe de ce type d'acquisition est d'effectuer des mesures en accroissant progres-

sivement l'écartement entre les électrodes du quadripôle, augmentant ainsi la profondeur d'investigation (Figure 2.4). La répétition des mesures avec des écartements d'électrodes croissants permet de construire une courbe de variation de la résistivité apparente en fonction d'une profondeur d'investigation associée au dispositif. Cette méthode s'intéresse à déterminer des variations de résistivité dans des couches perpendiculaires à la surface. Cela suppose un a priori fort sur la structure du sous-sol. L'interprétation des mesures peut être réalisée au moyen d'abaques permettant de reconstruire un milieu stratifié horizontal à deux ou trois couches. Ce type d'acquisition est rapide à mettre en œuvre mais limité du fait de l'a priori important sur la structure 1D du milieu.

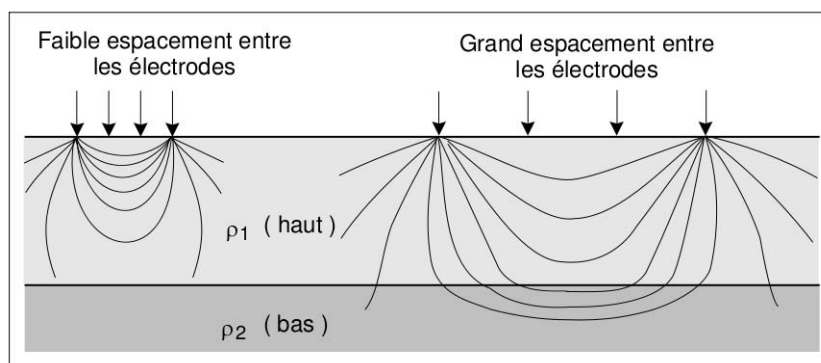


FIGURE 2.4 – Illustration du principe du sondage électrique : les lignes de courant issues d'un espacement d'électrodes plus grand pénètrent plus profondément et sont perturbées par la couche inférieure (d'après [Chouteau & Giroux \(2006\)](#)).

2.3.3.2 La traînée électrique

Cette méthode s'intéresse à la détection de variations latérales de résistivités. Le principe, différent de celui du sondage électrique, est d'effectuer une série de mesures avec le même dispositif (même écartement entre électrodes) en déplaçant ce dernier le long d'un axe. Classiquement plusieurs séries de mesures sont réalisées le long du même axe en utilisant le même dispositif et différents écartements entre électrodes. Les mesures peuvent ensuite être représentées ensemble en fonction de leur position et d'une pseudo-profondeur fonction de la taille du dispositif (Figure 2.5).

Ce type d'acquisition, également appelé profilage électrique, est aujourd'hui essentiellement réalisé aux moyens d'appareillages spécifiques permettant des acquisitions à haut rendement ([Dabas & Caraire, 2012](#)). Ce type d'appareillage est généralement constitué d'un engin de tractage et d'un dispositif de mesure présentant des roues dentées constituant les électrodes ou utilisant des électrodes capacitives. Le profilage électrique peut également être réalisé en milieu aquatique avec des électrodes flottantes ou traînées au fond de l'eau.

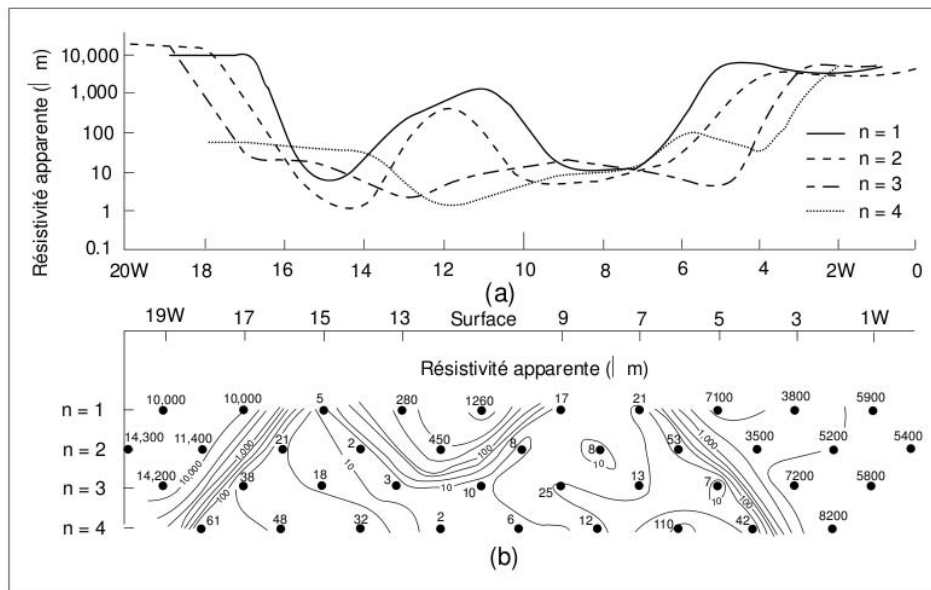


FIGURE 2.5 – Résultats de plusieurs profils de traînée électrique : (a) valeurs des résistivités apparentes pour différents espacements d'électrodes, (b) représentation des données en fonction de leur pseudo-profondeur (d'après Chouteau & Giroux (2006)).

2.3.3.3 L'imagerie électrique 2D

Cette méthode, apparue au cours des années 1980, combine les avantages des méthodes de sondage et de profilage électriques. Son développement a été possible grâce aux progrès réalisés en terme de matériel d'acquisition mais également en terme de traitement informatique. Classiquement l'acquisition consiste à planter avec un espacement constant des électrodes le long d'un axe. Les électrodes peuvent être placées en surface ou dans des forages. L'ensemble des électrodes est ensuite connecté à l'appareil de mesure qui va réaliser des mesures pour différents arrangements d'électrodes selon un protocole préétabli. Les données peuvent être affichées sous forme de panneaux de résistivités apparentes (voir 2.3.5) mais la finalité de la méthode consiste à inverser ces données pour obtenir une coupe 2D de la résistivité du sous-sol. Cette méthode suppose une variation de la résistivité selon deux dimensions, une horizontale et une verticale. Les acquisitions se font généralement perpendiculairement à la dimension ne présentant pas de variation. Les algorithmes de modélisation et d'inversion propres à ce cas sont généralement notés 2.5D (Coggon, 1971; Queralt et al., 1991). La raison de cette dénomination provient du caractère 3D de la source (approximation d'une source ponctuelle) et du caractère 2D du domaine modélisé. En effet une source ponctuelle en 2D correspond à une source 3D infiniment étendue latéralement. La méthode 2.5D permet de résoudre numérique-

ment ce problème au moyen d'une résolution dans le domaine de Fourier ; plus de détails seront donnés au chapitre 3.

2.3.3.4 L'imagerie électrique 3D

Une grande majorité des milieux étudiés en imagerie électrique présente des variations de leur résistivité et de leur géométrie selon trois dimensions. Cela nécessite le développement d'outils de modélisation et d'inversion 3D adaptés. En effet l'application de séries d'inversions 2D par exemple s'avère peu adaptée et occasionne la présence d'artéfacts après inversion du fait de la mauvaise prise en compte du domaine. L'inversion dans un domaine 3D présente un grand nombre de degrés de liberté, il est donc nécessaire d'acquérir un nombre important de données afin de mieux contraindre le problème inverse et obtenir des modèles réalistes. En pratique les électrodes sont disposées régulièrement espacées selon un quadrillage et éventuellement dans des forages. Les données sont ensuite acquises selon un protocole préétabli comme en 2D.

2.3.3.5 L'imagerie électrique 4D ou Time-Lapse

L'idée de l'imagerie Time-Lapse n'est plus, à la différence des méthodes précédentes, de s'intéresser directement à la résistivité électrique mais à sa variation au cours du temps. Cette méthode de suivi est particulièrement bien adaptée au suivi de fluides ou polluants induisant de forts contrastes de résistivité. Cela nécessite de réaliser la même acquisition 2D ou 3D à des instants différents puis à comparer leurs résultats d'inversions. Les inversions peuvent être soit réalisées séparément soit ensemble afin de limiter les artéfacts liés aux différences de données propres aux acquisitions (erreur de la reproductibilité des mesures).

2.3.4 Dispositifs et protocoles de mesure

Comme indiqué en 2.3.1, quatre électrodes au minimum sont nécessaires à la réalisation de mesures électriques. Deux de ces électrodes (A et B) servent à injecter un courant générant un champ de potentiel électrique, deux autres électrodes (M et N) sont utilisées pour la mesure de différence de potentiel. Afin de pouvoir reconstruire la distribution de résistivité dans le sous-sol, une série de mesures distinctes doit être réalisée en faisant varier les positions des électrodes. La position et les écartements variables entre électrodes permettent d'obtenir des mesures ayant des sensibilités différentes à la distribution de la résistivité dans le sous-sol. Il existe un grand nombre de configurations d'électrodes possibles, une classification exhaustive a été réalisée par Szalai & Szarka (2008). De manière simple, nous pouvons considérer trois familles de dispositifs : les quadripôles, les pôles-dipôles, et les pôles-pôles. Les deux derniers se caractérisent par la présence respectivement d'une ou de deux électrodes placées à l'infini (en pratique à une grande distance

de la zone étudiée). Dans la configuration d'électrodes alignées trois dispositifs sont couramment utilisés : Wenner- α , Schlumberger et dipôle-dipôle (Figure 2.6).

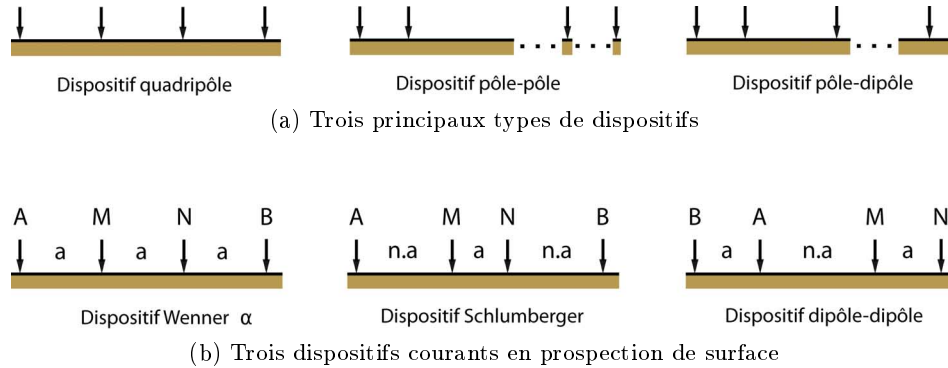


FIGURE 2.6 – Classification simple des dispositifs classiquement utilisés pour des mesures de surface.

La réalisation d'une série de mesures utilisant différents dispositifs permet de définir des protocoles plus ou moins complexes présentant chacun des avantages et des limitations en fonction de la nature des structures étudiées et du bruit affectant les mesures (Dahlin & Zhou, 2004). Il est ainsi largement admis que le protocole dipôle-dipôle présente une profondeur d'investigation plus importante que le protocole Wenner. Ce type de conclusion peut être effectué à partir de l'étude des sensibilités des dispositifs mis en jeu (voir partie 2.4). Le protocole dipôle-dipôle est en revanche plus sensible au bruit du fait des plus faibles écartements des électrodes de potentiel. Le protocole Schlumberger présente lui des caractéristiques intermédiaires aux deux précédents. En pratique l'utilisation du protocole Wenner est recommandée pour la caractérisation de structures horizontales (milieux tabulaires) alors que le protocole dipôle-dipôle est lui recommandé pour la recherche de structures verticales (failles notamment) (Loke, 2011) (voir aussi section 2.4).

2.3.5 Représentation des données

Comme indiqué en 2.3.3.3, les données obtenues lors d'acquisition 2D sont habituellement représentées sous forme de panneaux ou pseudo-sections de résistivité apparente. Ces représentations correspondent à des cartes de résistivités apparentes avec horizontalement la position du dispositif de mesure et verticalement la pseudo-profondeur (voir 2.3.3.2). Ce type de représentation donne une image approximative et déformée de la distribution des résistivités dans le sous-sol. Une réflexion a toutefois été menée sur la construction de ces pseudo-sections afin de les rendre en partie interprétables (Edwards, 1977). Une bonne interprétation des données n'est toutefois possible qu'après inversion, et l'utilisation des pseudo-sections vise surtout à détecter et éliminer de ces profils de mauvaises mesures. L'influence de la résistivité du sous-sol sur la mesure étant la plus importante sous le quadripôle mis en jeu, les points de mesures sont reportés à l'aplomb du centre du dispositif. La profondeur à

laquelle est reportée la mesure peut être discutée mais l'utilisation de la profondeur médiane d'investigation apparaît comme un bon choix (Edwards, 1977). Pour un milieu homogène cette profondeur peut être vue comme la profondeur à laquelle l'influence des terrains au-dessus de cette limite et de ceux en dessous est la même sur la mesure de résistivité. La figure 2.7 schématise le processus de construction d'une pseudo-section pour une acquisition au moyen d'un protocole Wenner.

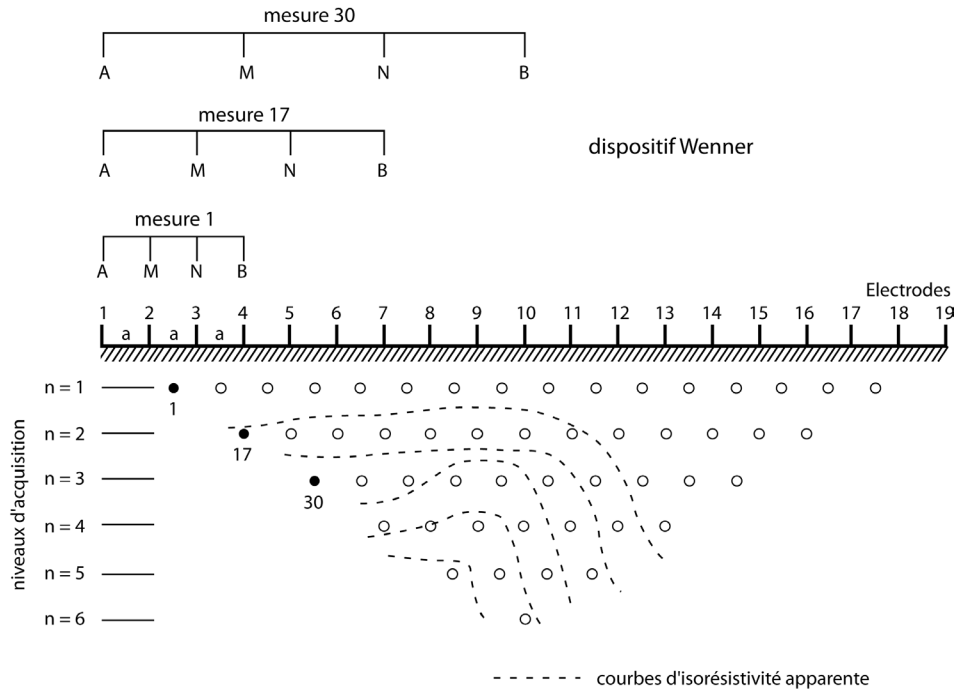


FIGURE 2.7 – Construction d'une pseudo-section pour un protocole Wenner (d'après Marescot (2004))

Pour des mesures sur des structures 3D ou pour des protocoles d'acquisition complexes, il peut être délicat voire impossible de représenter les données sous forme de pseudo-sections. Dans ces circonstances on doit se contenter de représenter les données sous forme de courbes pour en faire l'étude, la détermination de points anormaux (erreurs de mesure) est alors plus délicate.

2.4 Sensibilité des dispositifs

Nous avons évoqué en 2.3.4 que les différents arrangements d'électrodes existants ne collectent pas une information ayant les mêmes caractéristiques. Les propriétés propres à un arrangement d'électrodes peuvent être étudiées en évaluant la sensibilité de la mesure à une variation de la résistivité du milieu. La sensibilité permet de déterminer de quelle manière une variation de la résistivité dans une région influence la différence de potentiel mesurée. Cette fonction de sensibilité peut être évaluée ana-

lytiquement pour un espace ou demi-espace de résistivité homogène (Park & Van, 1991). Dans le cas d'un milieu quelconque elle peut être obtenue numériquement selon différentes formules (Spitzer & Kümpel, 1997; Spitzer, 1998; Zhou & Greenhalgh, 1999).

Nous présentons ici des sensibilités de dispositifs courants (Wenner, Schlumberger, dipôle-dipôle) dans un milieu homogène (Figure 2.8). Ces sensibilités ont été calculées numériquement selon la formule 4.29. Elles ont ici valeur d'exemple pour illustrer certaines caractéristiques des mesures de résistivité apparente ; le propos n'est pas ici d'étudier en profondeur la sensibilité de ces différents dispositifs.

Une première observation valable pour l'ensemble des dispositifs est que les valeurs de sensibilité sont très fortes à proximité des électrodes. De ce fait une perturbation de la distribution de la résistivité du milieu à proximité des électrodes a une influence majeure sur la mesure. Les valeurs de sensibilité peuvent être positives comme négatives, délimitant des régions où une variation positive de la résistivité entraîne une augmentation de la différence de potentiel mesurée et inversement. Les fonctions de sensibilité de ces dispositifs présentent des valeurs et des formes différentes, essentiellement lorsque la distance aux électrodes augmente. En analysant ces fonctions, nous pouvons observer des caractéristiques faisant le lien avec les propriétés des dispositifs entrevues en 2.3.4. Les fonctions de sensibilité du dispositif Wenner présentent des isovaleurs quasi horizontales en dessous des électrodes de potentiel. On peut en déduire une meilleure résolution verticale qu'horizontale. Pour le dispositif dipôle-dipôle nous observons de fortes valeurs de sensibilité concentrées sous les deux dipôles. Les contours de ces zones de fortes sensibilités sont relativement verticaux, cela illustre la bonne résolution latérale du dispositif. La fonction de sensibilité du dispositif Schlumberger présente quant à elle des caractéristiques communes avec celle du dispositif Wenner (isocontours quasi horizontaux en profondeur) et avec celle du dispositif dipôle-dipôle (sensibilité forte et bien délimitée latéralement sous le dipôle de mesure).

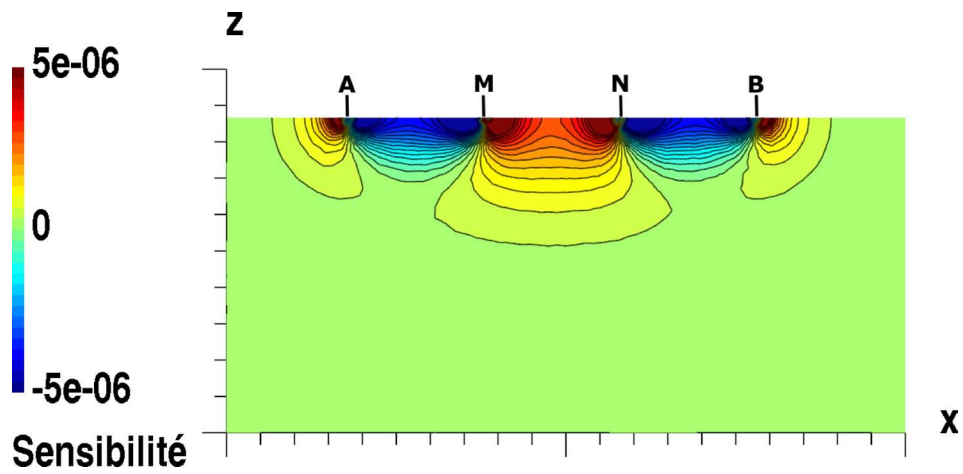
2.5 Equations fondamentales

Nous rappelons ici les équations de base permettant de décrire le comportement du champ électrique dans des milieux hétérogènes. Nous simplifions ensuite leur étude en se limitant au cas du régime stationnaire et établissons le problème de valeurs aux bords régissant le problème électrique.

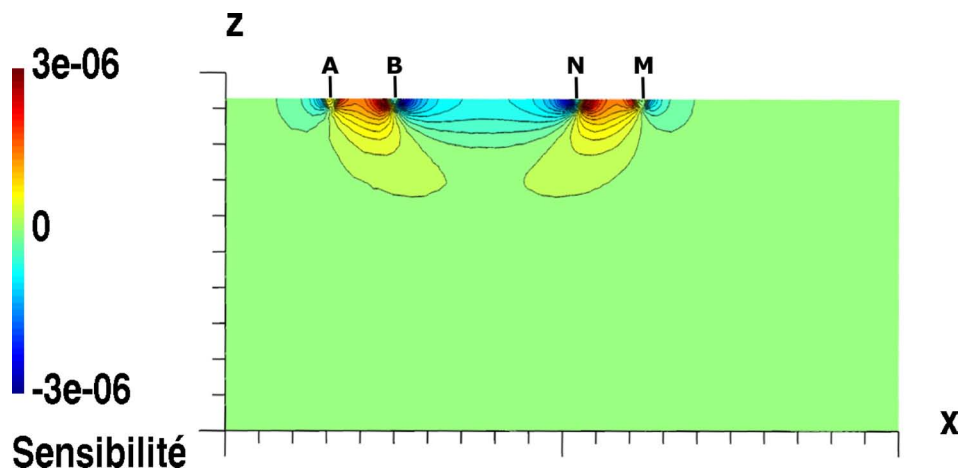
2.5.1 La loi d'Ohm

La loi d'Ohm (Equation 2.10) établit le lien entre la densité de courant \mathbf{J} (A/m²), le champ électrique \mathbf{E} (V/m) et la conductivité électrique σ (S/m). Elle peut également s'exprimer avec la résistivité ρ ($\Omega\cdot\text{m}$).

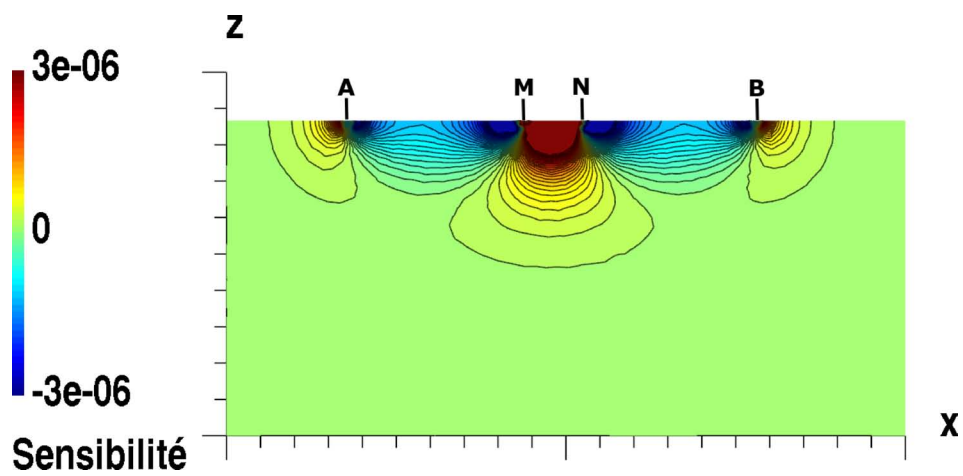
$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} \quad (2.10)$$



(a) Dispositif Wenner



(b) Dispositif dipôle-dipôle



(c) Dispositif Schlumberger

FIGURE 2.8 – Exemples de sensibilités pour des dispositifs électriques classiques en prospection de surface.

La densité de courant et le champ électrique sont des grandeurs vectorielles et la conductivité peut s'exprimer sous forme tensorielle (milieu anisotrope) ou par une grandeur scalaire (milieu isotrope).

2.5.2 Equations de l'électromagnétique de Maxwell

La théorie de l'électromagnétique établie par J.C. Maxwell (1831-1879) se compose de quatre lois ou équations fondamentales. Elle lie entre eux le comportement des différents champs (vectoriels) que sont le champ électrique \mathbf{E} (V/m), le champ magnétique \mathbf{H} (A/m), le champ de déplacement \mathbf{D} (C/m²), le champ d'induction magnétique \mathbf{B} (Wb/m²) et la densité de courant \mathbf{J} (A/m²).

2.5.2.1 Cas général

En l'absence de sources, les équations de Maxwell peuvent s'écrire comme suit :

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{loi d'induction de Faraday} \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad \text{équation d'Ampère-Maxwell} \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.14)$$

où p représente la densité de charges et \times le produit vectoriel.

2.5.2.2 Cas particulier du régime permanent

Dans le cas du régime permanent les équations se simplifient considérablement. Les dérivées partielles par rapport au temps s'annulent toutes et nous obtenons les formulations suivantes :

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.18)$$

2.5.3 Equation du potentiel électrique lié à une source ponctuelle

2.5.3.1 Relations définissant le champ de potentiel

La mesure directe de l'intensité d'un champ électrique étant une opération délicate, les méthodes électriques s'intéressent au champ de potentiel scalaire V . Le

champ électrique peut être défini par la dérivée de ce champ de potentiel :

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (2.19)$$

En combinant les équations 2.17, 2.19 et la loi d'Ohm (Equation 2.10), nous obtenons l'équation régissant le potentiel dans un milieu supposé infini :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = 0. \quad (2.20)$$

Considérons maintenant la présence d'une source de courant électrique. Le courant I (A) est considéré comme étant le flux du vecteur \mathbf{J} à travers une surface S :

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.21)$$

En supposant que la source de courant est ponctuelle et localisée en $\mathbf{x}_s = (x_s, y_s, z_s)$, la combinaison des équations 2.17, 2.19, 2.10 et 2.21 nous donne :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = -I\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (2.22)$$

où δ est la distribution de Dirac et $\mathbf{x} = (x, y, z)$ est un point quelconque de l'espace. Dans un milieu hétérogène, la conductivité et le potentiel sont fonction de leur position dans l'espace. En considérant un domaine hétérogène comme une juxtaposition de sous-domaines homogènes et en considérant deux points \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 situés de part et d'autre d'une frontière entre deux milieux de conductivité σ_1 et σ_2 , l'équation 2.19 nous permet d'écrire :

$$V(\mathbf{x}_1) - V(\mathbf{x}_2) = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.23)$$

Lorsque les deux points sont confondus les potentiels sont égaux :

$$V(\mathbf{x}_1) = V(\mathbf{x}_2). \quad (2.24)$$

De plus la composante normale du flux de courant est continue à la frontière :

$$\sigma_1 \frac{\partial V}{\partial n}(\mathbf{x}_1) = \sigma_2 \frac{\partial V}{\partial n}(\mathbf{x}_2), \quad (2.25)$$

où n est la normale à la frontière entre les deux milieux.

2.5.3.2 Formulation du problème de valeurs aux bords

Les milieux que nous considérons pour la prospection géoélectrique sont considérés comme semi-infinis. Dans ce cas particulier les équations précédentes peuvent être reformulées sous la forme d'un problème de valeurs aux bords :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla V) &= -I\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), \\ \frac{\partial V}{\partial n} &= 0 \quad \text{sur la surface libre } (\Gamma), \\ V &= 0 \quad \text{aux autres bords } (\partial\Omega) \text{ situés à l'infini.} \end{cases} \quad (2.26)$$

$\frac{\partial V}{\partial n}$ représente la dérivée normale à la surface Γ . Les différentes conditions aux bords (Dirichlet, Neumann) seront étudiées de plus près au chapitre 3.

2.5.3.3 Principe de superposition et théorème de réciprocité

A partir des équations précédentes, deux principes importants ont été établis. Le premier appelé principe de superposition indique l'additivité des potentiels liés à différentes sources et peut s'écrire :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = - \sum_s I_s \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s). \quad (2.27)$$

Il en ressort que les différences de potentiels pour différents couples source/récepteur peuvent être reconstruits à partir des distributions de potentiels élémentaires liées à une source. Le théorème d'équivalence indique lui que la différence de potentiel mesurée au moyen d'un quadripôle ne varie pas si l'on intervertit les électrodes de courant et de potentiel. Cette propriété intéressante permet, d'un point de vue pratique, d'effectuer un contrôle lors de l'acquisition ou de définir des mesures d'erreurs numériques de modélisation.

2.6 Conclusion

L'imagerie électrique a connu un important développement depuis son invention au début du XX^e siècle. Initialement utilisée pour la prospection minière et pétrolière, l'imagerie électrique constitue aujourd'hui un outil important dans de nombreux domaines des géosciences (hydrogéologie, géotechnique, ...) mais également en archéologie, en génie civil ou en agriculture. Par ailleurs la méthode de tomographie d'impédance électrique est en fort développement dans le domaine de l'imagerie médicale. La mesure, consistant à injecter un courant dans le sol et à mesurer une différence de potentiel au moyen de quatre électrodes, permet d'obtenir une résistivité apparente du sous-sol. Cette résistivité apparente, différente de la résistivité réelle, représente une moyenne pondérée des résistivités dans la zone parcourue par les lignes de courant. Les acquisitions électriques longtemps effectuées en 1D sont depuis les années 1990 couramment réalisées en 2D et en 3D. Les acquisitions 4D se développent également, le lien fort entre la résistivité et la présence de fluide fait de la méthode électrique un bon outil de monitoring. Les mesures peuvent être réalisées au moyen de différents arrangements d'électrodes (ou dispositifs) présentant des caractéristiques différentes en terme de sensibilité. L'interprétation des mesures de résistivités apparentes nécessite de reconstruire un modèle des résistivités vraies du sous-sol. Ce processus dit d'inversion impose de résoudre numériquement le problème électrique. Nous avons vu qu'il repose sur la théorie de l'électromagnétique de Maxwell en régime permanent. Ce problème consiste à résoudre l'équation de Poisson sous certaines conditions aux limites du domaine. La résolution numérique de ce problème est étudiée en détails dans le chapitre suivant.

Résolution du problème direct

Sommaire

3.1 Méthodes de résolution	26
3.1.1 Solutions analytiques	26
3.1.2 Méthodes intégrales	26
3.1.3 Autres méthodes numériques	27
3.2 Conditions aux bords et problème 2.5D	29
3.2.1 Conditions aux bords pour un modèle de dimensions finies . .	29
3.2.2 Approximation 2.5D	30
3.3 Singularité à la source : approche additive	32
3.3.1 Décomposition du potentiel dans le cas d'une topographie plane (Lowry et al., 1989)	32
3.3.2 Cas d'une topographie non plane	34
3.3.3 Calcul du potentiel en utilisant la méthode BEM (Blome, 2009)	34
3.3.4 Nouvelle formulation additive	37
3.4 Singularité à la source : approche multiplicative	39
3.5 Conclusion	43

Dans ce chapitre je présente le calcul direct du potentiel électrique d'un point de vue général, sans me restreindre à une méthode de calcul en particulier. Je commence par introduire succinctement les différentes méthodes classiquement utilisées pour calculer le potentiel (analytiques et numériques). J'aborde ensuite plusieurs aspects théoriques : les problèmes de conditions aux bords d'une part, l'approximation 2,5D nécessaire à l'obtention d'amplitudes réalistes lors d'un calcul en 2D d'autre part. Pour l'approche 2,5D je présente l'approche classique, ainsi qu'une reformulation du problème intéressante du point de vue de l'implémentation. Pour terminer deux sections sont consacrées au problème de la singularité à la source. J'en présente les différentes approches classiquement utilisées, puis je propose deux nouvelles formulations. Ces formulations permettent de supprimer la singularité pour des cas avec une topographie non plane. La première approche s'appuie sur une décomposition additive du potentiel et est très proche des formulations classiques, la seconde utilise quant à elle une décomposition multiplicative. Cette dernière solution présente des difficultés, liées à la discrétisation du problème, que j'expose.

3.1 Méthodes de résolution

3.1.1 Solutions analytiques

Dans des cas simples il est possible de formuler une solution analytique au système d'équations décrivant le potentiel dans un milieu conducteur (Equation 2.26). Ces milieux possiblement hétérogènes présentent en général des symétries que ce soit par rapport à un point, un axe ou encore un plan, permettant de simplifier le problème.

Dans le cas d'une source d'intensité I enfouie dans un milieu infiniment homogène de conductivité σ_0 , le potentiel est donné par la formule :

$$V = \frac{I}{4\pi\sigma_0 r} \quad (3.1)$$

où r désigne la distance à la source d'un point du milieu. Dans le cas d'un demi-espace infini et d'une source en surface l'expression devient :

$$V = \frac{I}{2\pi\sigma_0 r}. \quad (3.2)$$

La méthode des images permet d'obtenir des solutions pour quelques cas simples (Telford et al., 1990) :

- deux milieux homogènes de conductivités différentes séparés par un contact vertical ;
- un milieu tabulaire composé de couches de conductivités différentes ;
- un dike vertical dans un milieu homogène.

La formulation du problème dans un repère sphérique permet d'obtenir une solution pour le cas d'une sphère homogène enfouie dans un milieu de conductivité différente. L'idée est d'utiliser une analogie avec l'optique géométrique ainsi que l'approximation de Born. Cela revient à négliger les interactions entre la sphère et la surface. De ce fait cette solution constitue une solution approchée valide uniquement si certaines conditions sont respectées (profondeur d'enfouissement de la sphère vis-à-vis de son rayon). Ces solutions analytiques ne sont pas suffisantes pour décrire des structures réalistes généralement plus complexes ; leur utilisation est donc limitée. Nous noterons toutefois leur intérêt afin de valider ou comparer d'autres solutions, intégrales ou numériques.

3.1.2 Méthodes intégrales

Les méthodes intégrales ont constitué l'une des premières approches pour obtenir numériquement le champ de potentiel dans le cas d'un milieu hétérogène (Dieter et al., 1969). Ces méthodes sont utilisées pour résoudre le problème de valeurs aux bords, à l'intérieur ou à l'extérieur d'un domaine de résistivité homogène. Cela nécessite la description du domaine comme une composition de sous-domaines, limitant

sa complexité. Le potentiel est recherché sous forme d'une intégrale sur la frontière du domaine, convolution d'une solution élémentaire (fonction de Green) par une fonction inconnue. L'imposition de conditions aux limites permet d'obtenir une équation intégrale, qui est résolue numériquement. Avec ce type d'approche la dimension du problème est réduite (d'un volume à une surface), d'où une réduction importante du nombre d'inconnues. Si les systèmes linéaires sont de plus petites dimensions, ils sont en revanche moins creux que pour des solutions Éléments Finis ou Différences Finies. Plusieurs auteurs ont utilisé ces méthodes pour étudier les solutions pour des inhomogénéités enfouies dans un milieu homogène (Das & Parasnis, 1987; Hvozdar & Kaikkonen, 1998). La méthode des éléments de frontière (Boundary Element Method : BEM) introduite par Okabe (1981) se présente comme une variante de ces solutions intégrales. L'utilisation d'éléments de base permet toutefois une meilleure discrétisation de structures ou topographies complexes (Ma, 2002; Blome et al., 2009). Cette méthode est utilisée par Blome et al. (2009) pour calculer le potentiel primaire dans le cas de la décomposition du potentiel pour un domaine avec une topographie. Elle est applicable dans un milieu quelconque si l'on connaît les fonctions de Green dans ce milieu. Nous la présentons plus en détail et elle est discutée en 3.3.3.

3.1.3 Autres méthodes numériques

Les méthodes numériques autres qu'intégrales sont largement utilisées depuis les années 1970 pour la modélisation géoélectrique. Elles nécessitent la discrétisation complète du domaine étudié ; cela permet de considérer des milieux très complexes. Ces méthodes sont en revanche plus lourdes d'un point de vue des ressources informatiques, tant en terme de temps de calcul que de ressources mémoires.

3.1.3.1 Différences Finies

La méthode des Différences Finies est couramment employée pour sa simplicité d'implémentation et sa rapidité. De nombreux auteurs ont utilisé cette méthode (Mufti, 1976; Dey & Morisson, 1979; Lowry et al., 1989; Spitzer, 1995; Zhao & Yedlin, 1996; Loke & Barker, 1996a; Wang et al., 2000; Eso & Oldenburg, 2007; Vachiratienchai et al., 2010) mais elle est depuis quelques temps délaissée au profit des Éléments Finis. La méthode des Différences Finies permet de résoudre le problème électrique sous sa forme différentielle. Le domaine est discrétisé sur une grille ; ses mailles sont généralement régulièrement espacées mais des espacements variables sont possibles (Dey & Morisson, 1979). L'utilisation de grilles curvilignes (Lau, 1979; Kwok, 1984) permet une représentation sommaire du milieu si la topographie n'est pas plane. Un développement limité permet d'obtenir des opérateurs de différenciation qui servent ensuite à exprimer le potentiel en un nœud du maillage en fonction de ses valeurs aux nœuds voisins. L'obtention des valeurs du potentiel en chaque point nécessite la résolution d'un système linéaire dont la matrice est en général creuse. Le manque de souplesse de la méthode vis-à-vis de la discrétisa-

tion du milieu (topographie, hétérogénéités internes) explique son relatif abandon en faveur des Éléments Finis. Une augmentation de la densité du maillage peut permettre la représentation de domaines plus complexes ; toutefois la structure du maillage sous forme de grille occasionne alors un surcoût de calcul important. Des méthodes de Différences Finies plus générales existent ; elles permettent notamment de calculer des formules de Différences Finies sur des nuages de points non maillés (Liszka & Orkisz, 1980; Benito et al., 2001; Gavete et al., 2003). Un bon aperçu des différentes méthodes et de leurs différences peut être trouvé dans Seibold (2006). Ces formulations permettent également de travailler avec des maillages (structurés et non structurés). Parmi ces méthodes, la méthode des Différences Finies Généralisées sera présentée plus en détail au chapitre 5.

3.1.3.2 Éléments Finis

La méthode des Éléments Finis constitue actuellement la méthode la plus utilisée pour la résolution du problème direct. Cette méthode est utilisée depuis longtemps pour la modélisation électrique (Coggon, 1971; Fox et al., 1980; Pridmore et al., 1981; Queralt et al., 1991; Sasaki, 1994) et connaît un important développement depuis les années 2000 (Zhou & Greenhalgh, 2001; Yi et al., 2001; Li & Spitzer, 2002; Pain et al., 2002; Marescot, 2004; Tsourlos et al., 2005; Rücker et al., 2006; Ha et al., 2006; Qiang et al., 2007; Blome, 2009; Ren & Tang, 2010; Fargier, 2011). La méthode des Éléments Finis considère une formulation faible de l'équation de Poisson. La solution recherchée est une solution approchée du problème physique ; son existence et son unicité sont assurées par les conditions aux bords imposées sur le potentiel (valeurs imposées et flux imposés). La méthode a pour principaux avantages, par rapport à la méthode des Différences Finies, de pouvoir représenter des domaines et géométries complexes grâce au grand choix possible sur la structure des maillages, ainsi qu'une meilleure gestion des forts contrastes (de conductivité) dans le milieu. Un avantage en lien avec les maillages non structurés qui peuvent être utilisés est la possibilité de réaliser des raffinements locaux et adaptatifs du maillage afin d'améliorer la précision du calcul (Ren & Tang, 2010). L'implémentation de la méthode est néanmoins plus complexe que pour la méthode des Différences Finies et son coût de calcul est plus élevé que pour les méthodes intégrales. La méthode des Éléments Finis représente un cas particulier de la méthode de Galerkin. D'autres extensions de cette méthode sont maintenant couramment utilisées en géophysique, notamment les méthodes des Éléments spectraux et des Galerkin discontinues. Dans le cadre du problème électrique nous pouvons citer Greenhalgh (2008) qui a utilisé une approche dérivée de la méthode des Éléments Spectraux pour modéliser le potentiel dans des milieux anisotropes.

Les méthodes numériques permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles sont nombreuses. Elles présentent toutes des avantages et des limitations soit pour représenter de manière précise des phénomènes physiques complexes, soit en terme de coût de calcul. De ce fait le choix de la méthode numérique à employer

est parfois délicat et doit dépendre de l'application considérée. Virieux et al. (2011) étudient ces différentes méthodes dans le cadre de la sismique ; ils fournissent des indications sur les choix possibles pour différentes applications. Il est notamment indiqué que les méthodes de Différences Finies, sur des grilles potentiellement déformées, constituent encore la méthode de choix pour des problèmes de grande taille en exploration géophysique (notamment en environnement marin). Les méthodes d'Éléments Finis (continues ou discontinues) sont plus flexibles ; elles sont toutefois plus compliquées à implémenter et plus lourdes en terme de coût de calcul. Ces méthodes sont également plus délicates à utiliser du fait de l'influence de la qualité du maillage sur la qualité de la solution.

Nous avons vu les différentes méthodes numériques permettant de résoudre le problème électrique. Dans les prochaines sections nous allons étudier différents points liés à la résolution de ce problème ; nous les présenterons sans nous limiter à une méthode numérique en particulier. Dans une première section nous allons étudier le problème des conditions aux bords ainsi que le problème 2.5D ; deux sections seront ensuite consacrées au problème de la singularité à la source en présence d'une topographie.

3.2 Conditions aux bords et problème 2.5D

Par souci de clarté nous rappelons que le calcul du potentiel nécessite la résolution du problème de valeurs aux bords suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla V) & = -I\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), \\ \frac{\partial V}{\partial n} & = 0 \quad \text{sur la surface libre } (\Gamma), \\ V & = 0 \quad \text{aux autres bords } (\partial\Omega) \text{ situés à l'infini.} \end{cases} \quad (3.3)$$

3.2.1 Conditions aux bords pour un modèle de dimensions finies

Les résolutions numériques du problème électrique en Éléments Finis ou en Différences Finies nécessitent de discrétiser le domaine de calcul. Cela donne lieu à l'utilisation d'un modèle aux dimensions finies (Figure 3.1). Une résolution précise du problème direct nécessite dans ce cas une bonne description des conditions aux bords (Equation 3.3). Le cas des conditions de surface libre sur le bord Γ ne pose pas de problème particulier pour la résolution du problème sous la forme de l'équation 3.3. Nous verrons par la suite que des complications apparaissent lorsque l'on utilise la méthode de suppression de la singularité par perturbation additive. Les conditions sur les bords $\partial\Omega$ sont plus délicates du fait qu'ils sont considérés comme étant à l'infini. Dans le modèle fini il faut donc implémenter des conditions approchées suffisamment proches pour ne pas trop affecter la qualité de la solution. Le potentiel décroît en $1/r$ en s'écartant de la source (pour un milieu homogène). Une solution simple est donc de considérer que suffisamment loin de la source le potentiel peut être considéré comme nul. Cela nécessite l'utilisation d'un modèle étendu pour que

cette approximation soit valable (des dimensions pour cette extension seront données au chapitre 5). Ces conditions de Dirichlet prennent la forme simple :

$$V = 0 \quad \text{sur } (\partial\Omega). \quad (3.4)$$

Pour une même extension du modèle, ces conditions se rapprocheront des conditions réelles pour des milieux de plus en plus conductifs.

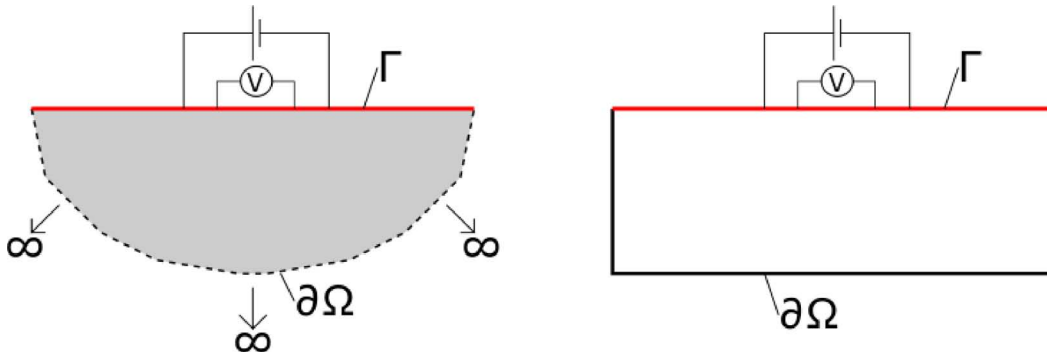


FIGURE 3.1 – Représentation schématique d'un milieu 2D « réel » (gauche) et d'un modèle fini (droite).

Afin d'améliorer la qualité de la solution ou de limiter l'extension du modèle nécessaire pour atteindre une précision donnée, [Dey & Morrisson \(1979\)](#) ont introduit dans leur approche en Différences Finies une autre formulation pour les conditions sur le bord $\partial\Omega$. Ils ont proposé une formulation mixte pour les conditions aux limites qui tient compte de la décroissance en $1/r$ du potentiel :

$$\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\cos \theta}{r} V = 0 \quad \text{sur } (\partial\Omega), \quad (3.5)$$

θ étant ici l'angle entre le rayon r (entre la source et un point sur $\partial\Omega$) et la normale extérieure n . [Blome et al. \(2009\)](#) utilisent eux la méthode des Éléments Finis pour résoudre le potentiel; ils introduisent des éléments infinis au bord $\partial\Omega$ ce qui permet de ne pas tronquer le potentiel aux bords du domaine. Le domaine est considéré comme étant étendu à l'infini. Les fonctions de base des éléments aux bords du domaine sont pour cela modifiées. Les nouvelles fonctions de base tiennent compte de la décroissance en $1/r$ du potentiel; elles sont similaires aux fonctions de base des Éléments Finis dans le plan parallèle au bord et modifiées dans la direction radiale. La combinaison d'éléments infinis et des conditions mixtes permet de réduire sensiblement la taille du modèle sans affecter la qualité de la solution.

3.2.2 Approximation 2.5D

Si le milieu étudié ne présente des variations de conductivité que selon deux dimensions, il peut être intéressant de réduire la dimension du problème direct à deux dimensions également. Dans ce cas un traitement particulier doit être effectué

afin d'obtenir numériquement des amplitudes réalistes. En effet la source ponctuelle est par nature 3D ; résoudre simplement le problème en 2D en considérant cette source 3D revient à résoudre le problème pour un milieu et une source infiniment étendus selon une des trois dimensions. Nous présentons ici l'approche classique (Coggon, 1971) pour calculer le potentiel dans ce cas dit 2.5D.

Considérons un modèle $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(x, z)$ et une source située en $(x_s, 0, z_s)$. Le potentiel est fonction des trois dimensions ; afin de supprimer sa dépendance selon la direction y nous effectuons une transformée de Fourier réelle du potentiel. Le potentiel transformé \tilde{V} est donné par :

$$\tilde{V}(x, k_y, z) = \int_0^\infty V(x, y, z) \cos(k_y y) dy, \quad (3.6)$$

où k_y est le nombre d'ondes (variable transformée). L'équation différentielle 2.26 peut alors être réécrite et prend la forme d'une équation de Helmholtz :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \tilde{V}) - k_y^2 \sigma \tilde{V} = -\frac{I}{2} \delta(x - x_s) \delta(z - z_s), \quad (3.7)$$

où ∇ est un opérateur 2D. Les conditions aux bords du problème 2.26 peuvent être réécrites :

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } (\Gamma), \quad (3.8)$$

$$\tilde{V} = 0 \quad \text{sur } (\partial\Omega). \quad (3.9)$$

L'équation 3.7 avec les conditions limites 3.8 et 3.9 doit être résolue pour plusieurs nombres d'ondes k_y . Enfin le potentiel avec l'amplitude 3D peut être obtenu en effectuant la transformée de Fourier inverse :

$$V(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{V}(x, k_y, z) \cos(k_y y) dk_y. \quad (3.10)$$

Pour que la transformée de Fourier inverse soit bien évaluée et donne donc de bonnes valeurs pour le potentiel 3D, un grand nombre de k_y doit être sélectionné. En pratique et afin de limiter le coût de calcul ce nombre est généralement pris entre 4 et 15 (Coggon, 1971; Queralt et al., 1991; Xu et al., 2000). Un bon choix de ces valeurs et des interpolations permet d'obtenir malgré tout une bonne évaluation du potentiel. Ce point sera éclairé d'un exemple simple au chapitre 5.

L'approche présentée précédemment considère le cas d'un modèle uniforme dans la direction perpendiculaire au profil étudié ; il s'agit de l'application courante de l'imagerie et de la modélisation 2D. Dans le cas où le modèle est uniforme selon une direction parallèle au profil étudié, Queralt et al. (1991) ont proposé une méthode pour calculer le potentiel en 2.5D. La formulation est plus complexe que dans le cas précédent ; le bon choix des valeurs de k_y ainsi que des méthodes d'interpolations employées est alors primordial.

3.3 Singularité à la source : approche additive

L'équation différentielle 2.26 régissant le potentiel présente une singularité du fait du caractère ponctuel de la source. De ce fait le potentiel varie très fortement à proximité de la source et cela occasionne d'importantes erreurs dans cette zone lorsque l'on résout le problème par les Différences Finies ou par les Éléments Finis. Afin d'éviter l'apparition d'un infini dans la solution numérique, la première solution consiste à ne pas placer la source sur un nœud du maillage (Spitzer, 1995). Cette solution nécessite toutefois de fortement raffiner le maillage autour de la source pour réduire les erreurs numériques. Pour réduire les erreurs numériques à proximité de la source, une méthode supprimant la singularité du problème a été proposée par Lowry et al. (1989).

3.3.1 Décomposition du potentiel dans le cas d'une topographie plane (Lowry et al., 1989)

Dans la méthode introduite par Lowry et al. (1989), le potentiel V est décomposé en deux parties : un potentiel primaire V_p contenant la singularité et un potentiel secondaire V_s .

$$V = V_p + V_s. \quad (3.11)$$

Le potentiel primaire est typiquement choisi comme un potentiel connu analytiquement pour une topographie plane (voir 3.1.1) ; il contient donc la singularité. Le potentiel secondaire correspond alors au potentiel généré par les hétérogénéités de résistivité du milieu par rapport au milieu de la solution analytique (V_p). La solution analytique pour un milieu homogène est un choix courant pour le potentiel primaire. Le problème électrique peut alors être réécrit en termes de potentiel secondaire :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla V_s) &= -\nabla \cdot ((\sigma - \sigma_0) \nabla V_p), \\ \frac{\partial V_s}{\partial n} &= 0 \quad \text{sur } (\Gamma), \\ V_s &= 0 \quad \text{sur } (\partial\Omega), \end{cases} \quad (3.12)$$

où σ_0 est la conductivité à la position de la source (Zhao & Yedlin, 1996) et V_p est le potentiel dans un demi-espace de conductivité homogène (Equation 3.2).

Maintenant le problème numérique à résoudre est d'obtenir le potentiel secondaire V_s qui ne présente plus de singularité dans sa solution. En choisissant une solution analytique correspondant à un modèle plus complexe que le milieu homogène, les hétérogénéités entre le milieu étudié et le milieu de référence sont alors moins importantes ; il en résulte un potentiel secondaire de forme plus simple. Un choix judicieux de solution pour le potentiel primaire permet ainsi de réduire les erreurs numériques (Li & Spitzer, 2002). La méthode de décomposition du potentiel présentée ici est limitée à des géométries pour lesquelles on connaît une solution analytique. D'une manière générale cela ne permet pas de considérer des modèles avec une topographie non plane.

Formulation en 2.5D

Nous avons présenté la formulation du problème électrique avec décomposition du potentiel pour le cas 3D. Ici nous développons ce problème dans le cas 2.5D, les notations utilisées étant celles de la section précédente. Nous n'avons pas trouvé trace d'un tel développement dans la littérature, cependant il nous paraît intéressant ; en effet son implémentation est simple et très proche du cas 3D.

L'équation du problème en 3D est $\nabla \cdot (\sigma \nabla V_s) = -\nabla \cdot ((\sigma - \sigma_0) \nabla V_p)$. En considérant un milieu 3D uniforme selon la direction y , nous avons $\sigma = \sigma(x, z)$ et $V_p = I/2\pi r$, avec $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|$. Au moyen d'une identité vectorielle nous développons l'équation différentielle précédente :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V_s) = -\nabla \cdot ((\sigma - \sigma_0) \nabla V_p) = -\nabla(\sigma - \sigma_0) \cdot V_p - (\sigma - \sigma_0) \nabla^2 V_p \quad (3.13)$$

Nous remarquons que le second terme du coté droit de l'équation s'annule : en effet $\nabla^2 V_p = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$ et à la source $\sigma = \sigma_0$. Nous avons alors :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V_s) = -\nabla \sigma \cdot \frac{I}{2\pi} \nabla \frac{1}{r}. \quad (3.14)$$

En définissant maintenant $r_0 = \sqrt{(x - x_s)^2 + (z - z_s)^2}$. Nous développons $\nabla(1/r)$:

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \nabla r = -\frac{1}{2r^3} \nabla r^2 = -\frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} x - x_s \\ y - y_s \\ z - z_s \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Nous procédons de même pour $\nabla(1/r_0)$:

$$\nabla \frac{1}{r_0} = -\frac{1}{r_0^3} \begin{pmatrix} x - x_s \\ z - z_s \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

En introduisant l'équation 3.15 dans l'équation 3.14 nous obtenons :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V_s) = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{r^3} \nabla \sigma \cdot \begin{pmatrix} x - x_s \\ y - y_s \\ z - z_s \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Le gradient de σ selon y étant nul l'expression précédente équivaut à :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V_s) = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{r^3} \nabla \sigma \cdot \begin{pmatrix} x - x_s \\ z - z_s \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

où $\nabla \sigma$ est un opérateur 2D. Nous introduisons maintenant l'équation 3.16 dans l'équation 3.18 et obtenons :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V_s) = -\frac{I}{2\pi} \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \nabla \sigma \cdot \nabla \frac{1}{r_0}. \quad (3.19)$$

La transformée de Fourier réelle nous permet de lever la dépendance selon y , nous avons alors :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \tilde{V}_s) - \sigma k_y^2 \tilde{V}_s = -\frac{I}{2\pi} \nabla \sigma \cdot \nabla \frac{1}{r_0} \int_0^\infty \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \cos(k_y y) dy, \quad (3.20)$$

ou encore :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \tilde{V}_s) - \sigma k_y^2 \tilde{V}_s = -\frac{I}{2\pi} \nabla \sigma \cdot \nabla \frac{1}{r_0} \int_0^\infty \left[1 + \left(\frac{y}{r_0} \right)^2 \right]^{-3/2} \cos(k_y y) dy. \quad (3.21)$$

Nous remarquons que le terme de droite de cette équation est le même que celui de l'équation 3.14, multiplié par un terme ayant la forme de la transformée de Fourier inverse de $(1 + u^2)^{-3/2}$. Ce terme multiplicatif ne dépendant que de la géométrie du problème, cette expression nous paraît intéressante. Il est ainsi possible de la calculer une fois seulement (pour différentes sources), et de résoudre plusieurs problèmes directs différents (différentes distributions de la conductivité dans le milieu). Ceci est intéressant si l'on considère des problèmes d'inversion nécessitant de nombreuses résolutions du problème direct.

3.3.2 Cas d'une topographie non plane

Pour un problème présentant une topographie arbitraire, [Rücker et al. \(2006\)](#) proposent de conserver la formulation 3.12 du problème électrique mais de calculer numériquement le potentiel primaire. Dans leur approche, le potentiel primaire est calculé par Éléments Finis ; le milieu est homogène et le maillage utilisé est différent de celui pour le calcul du potentiel secondaire. La solution recherchée étant l'approximation d'une fonction qui tend vers l'infini, le potentiel primaire est obtenu sur une grille très fortement raffinée autour de la source afin de limiter l'erreur numérique autour de cette dernière. Pour un processus d'inversion, nécessitant plusieurs calculs directs, le potentiel primaire n'est calculé qu'une fois puis stocké en mémoire. La linéarité de l'équation de Laplace permet d'obtenir le nouveau potentiel primaire si la conductivité à la source est modifiée au cours de l'inversion. Le coût de calcul d'une telle approche reste important ([Günther et al., 2006](#)) ; de plus, les potentiels primaire et secondaire n'étant pas calculés aux mêmes points, des erreurs d'interpolation sont introduites lors de l'estimation du potentiel total.

3.3.3 Calcul du potentiel en utilisant la méthode BEM ([Blome, 2009](#))

[Blome et al. \(2009\)](#) ont proposé une approche différente dans le cas d'une topographie non plane. Ils réalisent une décomposition du potentiel en trois termes qui sont calculés distinctement :

$$V = V_p + V_{s1} + V_{s2}. \quad (3.22)$$

Dans cette décomposition V_p est la solution analytique en milieu homogène, V_{s1} est la part du potentiel liée à la topographie et V_{s2} est la part du potentiel liée aux hétérogénéités du milieu. V_{s1} est calculé en utilisant la méthode des éléments de frontière (BEM). V_{s2} est calculé par la méthode des Éléments Finis selon la formulation de [Lowry et al. \(1989\)](#) (Equation 3.12), avec pour potentiel « primaire » la somme $V_p + V_{s1}$.

L'obtention du potentiel primaire par la méthode BEM consiste à résoudre le problème :

$$\begin{cases} \sigma_0 \nabla^2 V_{s1} &= 0, \\ \frac{\partial V_{s1}}{\partial n} &= -\frac{\partial V_p}{\partial n} \quad \text{sur } (\Gamma), \\ V_{s1} &= -V_p \quad \text{aux bords } (\partial\Omega) \text{ situés à l'infini.} \end{cases} \quad (3.23)$$

De la même manière que pour l'approche en Éléments Finis de [Rücker et al. \(2006\)](#) ce problème n'a besoin d'être résolu qu'une fois pour un processus d'inversion. Comme pour les résolutions en Éléments Finis, la méthode BEM utilise le critère de Galerkin pour obtenir l'équation intégrale correspondant au problème de valeurs aux bords 3.23 :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 V_{s1}(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x} = 0. \quad (3.24)$$

Dans l'équation ci-dessus $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ représente les fonctions de Green de l'opérateur Laplacien ∇^2 . Une double intégration par parties permet d'obtenir l'équation intégrale sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} V_{s1}(\mathbf{x}) \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} V_{s1}(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n} d\mathbf{x} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial V_{s1}(\mathbf{x})}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}. \quad (3.25)$$

Les fonctions de Green étant des solutions fondamentales de l'équation de Laplace, le premier terme de l'équation précédente peut être simplifié et vaut $V_{s1}(\mathbf{x}')$ si \mathbf{x}' est dans Ω ou $V_{s1}(\mathbf{x}')/2$ si \mathbf{x}' est sur Γ . L'intégrale de volume ainsi transformée en simple évaluation de fonction, il ne reste plus que des intégrales de surface ; le problème est ainsi réduit d'une dimension. Le potentiel, pour un point dans le domaine, peut alors s'exprimer :

$$V_{s1}(\mathbf{x}') = \int_{\Gamma} \frac{\partial V_{s1}(\mathbf{x})}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} V_{s1}(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n} d\mathbf{x}. \quad (3.26)$$

Du fait de l'absence d'intégrale de volume la position des bords du domaine peut être ajustée. Ainsi en étendant les bords inférieurs du domaine Γ_g à l'infini, l'intégrale sur ces bords s'annule du fait qu'à l'infini le potentiel V_{s1} est nul et que la dérivée par rapport à la normale à ces bords est nulle également. Seule l'intégrale sur la surface libre Γ_s doit donc être calculée. Pour son évaluation, elle peut être tronquée à une distance suffisamment grande de la source, à laquelle le potentiel et sa dérivée par rapport à la normale à la surface libre sont négligeables. Il n'est donc nécessaire que de discrétiser la surface libre étendue de l'ordre de 5 à 10 fois l'écartement maximum entre les électrodes (Figure 3.2).

L'équation 3.25 est résolue en utilisant une formulation faible :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Gamma_s} V_{s1}(\mathbf{x}') \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' &- \int_{\Gamma_g} \int_{\Gamma_s} V_{s1}(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n} \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= - \int_{\Gamma_g} \int_{\Gamma_s} \frac{\partial V_{s1}(\mathbf{x})}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (3.27)$$

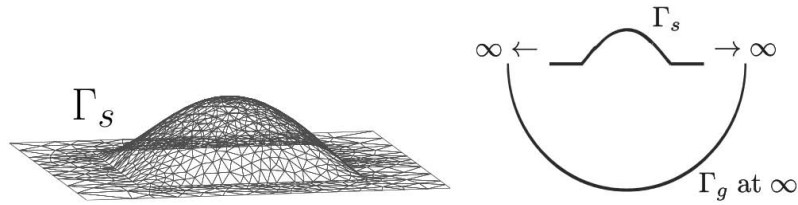


FIGURE 3.2 – Maillage de surface utilisé pour la méthode BEM (gauche) et représentation des bords du domaine (droite) (d’après [Blome \(2009\)](#)).

L’équation 3.27 est ensuite discrétisée sur un maillage triangulaire non structuré ; plus de détails sur la discrétisation peuvent être trouvés dans [Blome \(2009\)](#).

Le problème ainsi résolu donne les valeurs de potentiel V_{s1} à la surface libre ; il doit être résolu une seconde fois pour obtenir les valeurs dans le domaine (aux points du maillage en Éléments Finis). Ce calcul est effectué selon l’équation 3.26 ; le terme de droite pouvant maintenant être évalué, les potentiels à la surface Γ_s étant connus.

Nous pouvons faire plusieurs remarques sur cette méthode. Tout d’abord cette méthode ne supprime pas complètement la présence de singularité dans le problème. En effet les fonctions de Green contiennent une singularité. Si seule la surface Γ_s a besoin d’être discrétisée, elle doit l’être sur un maillage fin afin de permettre une intégration suffisamment fine des fonctions de Green. [Kirkup & Yazdani \(2008\)](#) indiquent une difficulté de la méthode BEM pouvant également compliquer l’implémentation. L’intégrale de surface peut être hypersingulière si la dérivée de la fonction de Green par rapport à la normale est placée directement sous l’intégrale. Il est intéressant de remarquer également que, du fait du couplage des fonctions de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, les matrices obtenues à droite et à gauche de l’équation 3.27 sont pleines. De ce fait les coûts de calcul et de stockage sont sensiblement supérieurs à ceux d’une résolution en Différences Finies ou Éléments Finis pour un problème de même dimension. Afin de pouvoir malgré tout résoudre le problème pour de gros modèles, [Blome et al. \(2009\)](#) utilisent une méthode multipôle s’appuyant sur un développement des fonctions de Green sous forme de sommes de séries, leur permettant ainsi de découpler les variables \mathbf{x} et \mathbf{x}' lorsque les points sont suffisamment distants les uns des autres. Toutefois cette approche complexifie sensiblement la méthode. Enfin, le gradient du potentiel primaire $V_p + V_{s1}$ nécessaire à la résolution de l’équation 3.12 doit être calculé numériquement.

Nous proposons maintenant deux nouvelles formulations pour supprimer la singularité par décomposition du potentiel tout en pouvant considérer des topographies non planes. Nous présentons d’abord une reformulation de l’approche par décomposition qui permet de s’affranchir du calcul numérique du potentiel primaire,

puis nous présentons une approche multiplicative et exposons ses limites actuelles.

3.3.4 Nouvelle formulation additive

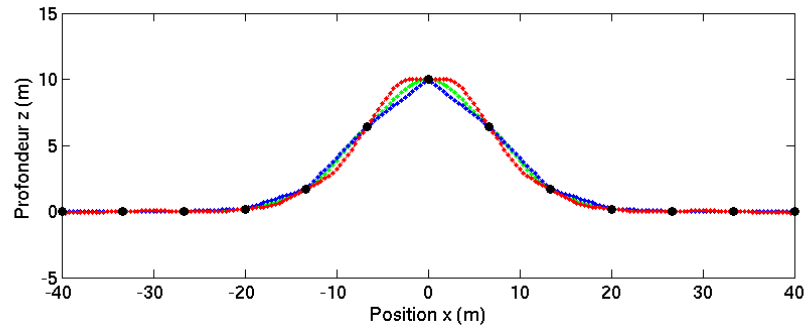
Nous proposons d'utiliser la même décomposition du potentiel que [Lowry et al. \(1989\)](#) $V = V_p + V_s$, avec $V_p = 1/2\pi\sigma_0 r$ quelle que soit la topographie. Afin que le potentiel total satisfasse malgré tout les conditions de Neumann, les conditions de surface libre pour le potentiel secondaire doivent être modifiées. Le problème prend alors la forme :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla V_s) &= -\nabla \cdot ((\sigma - \sigma_0) \nabla V_p), \\ \frac{\partial V_s}{\partial n} &= -\frac{\partial V_p}{\partial n} = -\frac{I}{2\pi\sigma_0} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{n}}{r^3} \quad \text{sur } (\Gamma), \\ V_s &= -V_p \quad \text{sur } (\partial\Omega), \end{cases} \quad (3.28)$$

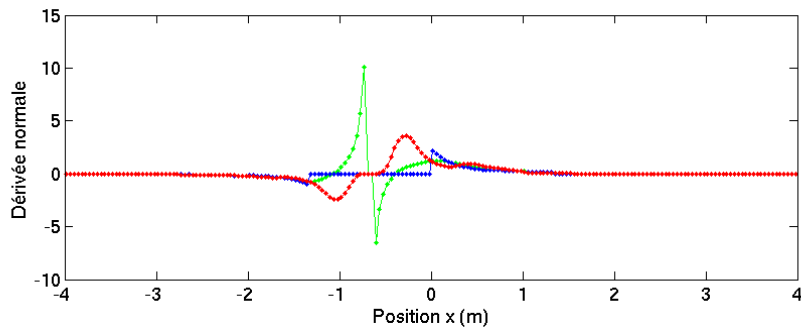
Dans le cas d'une topographie plane $\partial V_s / \partial n = -\partial V_p / \partial n = 0$, nous retrouvons alors l'équation 3.12. Dans le cas d'une topographie quelconque, la singularité est contenue dans V_p ; la valeur de V_s , elle, dépend de la topographie mais aussi des possibles hétérogénéités du modèle. Dans cette approche le potentiel V_s correspond à la somme des potentiels V_{s1} et V_{s2} dans l'approche de [Blome \(2009\)](#). Cette nouvelle approche se veut plus simple puisque le potentiel total est calculé en une fois (sans calcul numérique du potentiel primaire). De plus le potentiel recherché ne présente pas d'infini et aucune intégrale singulière n'a besoin d'être estimée.

En observant plus précisément l'expression $\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{n}}{r^3}$ des nouvelles conditions de Neumann, nous constatons qu'elle peut tendre vers l'infini à proximité de la source. Nous allons ici chercher une méthode pour représenter la topographie qui permette d'éviter de trop fortes valeurs des conditions de Neumann au voisinage de la source, néfastes à la précision de la solution. D'un point de vue numérique, il est souvent préférable de considérer des géométries lisses. Ainsi en considérant une surface Γ dont on connaît la position aux électrodes, nous pouvons la discrétiser de manière plus fine en interpolant avec des B-splines cubiques entre les positions des électrodes (Figure 3.3a, courbe verte). Nous observons alors de fortes valeurs pour les conditions de Neumann à proximité de la source (Figure 3.3c, courbe verte). Avec un raffinement de la discrétisation, les valeurs des conditions de Neumann tendent vers l'infini. Une telle approche n'est donc pas satisfaisante. En travaillant sur la même surface nous cherchons alors à optimiser la manière de l'interpoler entre les positions des électrodes.

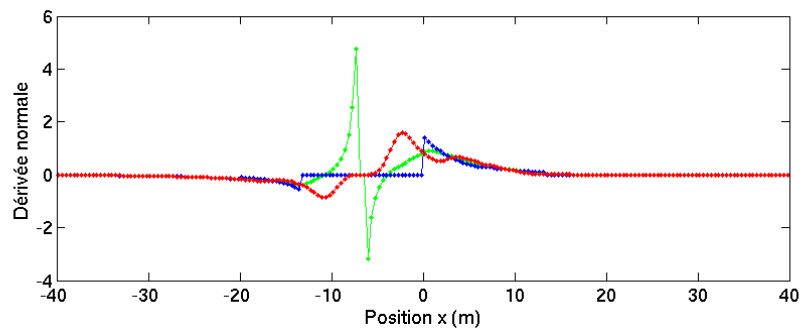
La surface est discrétisée aux points x_k avec k compris entre 1 et N , N étant le nombre total de points décrivant la surface Γ . L'idée est ici de chercher leurs positions verticales z_k optimales minimisant la norme des conditions de Neumann $\|\partial V_s / \partial n\|^2$, avec la contrainte que les positions des électrodes (x_e, z_e) (Figure 3.3a, points noirs) sont fixes (soit $z_k = z_e$). Nous évaluons les conditions de Neumann aux points $\bar{x}_k = (x_k + x_{k+1})/2$. Pour simplifier l'optimisation, nous considérons une forme



(a) Discrétisations de la topographie



(b) Valeurs des conditions de Neumann approchées (à un facteur près)



(c) Valeurs des conditions de Neumann

FIGURE 3.3 – Différentes discrétisations de la topographie et valeurs des conditions de Neumann associées. Les courbes vertes correspondent à l'interpolation par B-splines, les courbes bleues à une interpolation linéaire entre les électrodes, et les courbes rouges à une optimisation avec lissage.

approchée pour l'expression des conditions de Neumann. Le rayon r est remplacé par la distance horizontale $|x_k - x_s|$ et le vecteur normal \mathbf{n} n'est pas normalisé et a pour forme :

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{z_{k+1} - z_k}{x_{k+1} - x_k} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

L'expression des conditions de Neumann devient alors :

$$\frac{\partial V_s}{\partial n} \simeq \frac{W_0}{|\bar{x}_k - x_s|^3} \left(-(\bar{x}_k - x_s) \frac{z_{k+1} - z_k}{x_{k+1} - x_k} + \bar{z}_k - z_s \right), \quad (3.30)$$

où $W_0 = -I/(2\pi\sigma_0)$ et $\bar{z}_k = (z_k + z_{k+1})/2$. L'équation 3.30 est linéaire en fonction de z_k . La résolution du système linéaire nous donne alors les positions optimales.

Il s'avère que la solution de ce problème au sens des moindres carrés nous donne une interpolation linéaire de la topographie entre les positions fixes des électrodes (Figure 3.3a, courbe bleue). Pour une source donnée, les conditions de Neumann sont nulles entre la source et les deux électrodes adjacentes du fait que, dans ce cas, le produit scalaire $(x - x_s) \cdot n = 0$. Dans ces conditions, la valeur maximale des conditions de Neumann ne peut être infinie et est obtenue aux électrodes adjacentes du fait de la décroissance du potentiel en $1/r$. Si nous souhaitons obtenir une topographie lisse nous pouvons résoudre le même système linéaire en y ajoutant une contrainte de lissage. La courbe ainsi obtenue est lisse et faiblement courbée autour des électrodes (Figure 3.3a, courbe rouge) et la courbe des valeurs des conditions de Neumann est également lisse (Figure 3.3b, courbe rouge). Les courbes présentées sur la figure 3.3b correspondent aux valeurs des conditions de Neumann approchées utilisées pour l'optimisation. Les vraies valeurs des conditions de Neumann sont présentées sur la figure 3.3c. Les deux figures présentent les mêmes caractéristiques, essentiellement à un facteur constant près. L'approche utilisée pour l'optimisation est donc correcte.

Nous avons optimisé l'interpolation de la topographie entre deux électrodes, nous avons obtenu deux solutions qui évitent les fortes valeurs des conditions de Neumann qui pouvant apparaître lors d'une simple interpolation cubique. La solution optimisée lisse a de meilleures propriétés d'un point de vue numérique. La solution avec une interpolation linéaire présente, elle, l'avantage d'être très simple à implémenter. Si la topographie montre une structure non négligeable entre deux électrodes, il est simple de l'imposer en ajoutant des points de contrôle supplémentaires. Les deux solutions proposées sont stables si nous raffinons de cette manière la topographie, ce qui n'est pas le cas avec l'interpolation par B-splines cubiques.

3.4 Singularité à la source : approche multiplicative

Les différentes approches pour supprimer la singularité présentées précédemment utilisent toutes une forme additive pour la décomposition du potentiel. Au cours

de la thèse nous avons également envisagé une approche différente s'appuyant sur une décomposition multiplicative du potentiel. Ce type de formulation est utilisé notamment pour les problèmes de propagation d'ondes dans le cas de la résolution de l'équation Eikonal (Fomel et al., 2009). Un des avantages d'une telle solution est de ne pas avoir besoin d'une solution analytique et ainsi de pouvoir facilement gérer des topographies complexes.

En partant du constat que le potentiel décroît en $1/r$ à proximité de la source (si la conductivité est localement homogène au proche voisinage de la source), le multiplier par une fonction proche de r autour de la source permet de supprimer la singularité. La fonction utilisée comme facteur peut être simplement r ou une fonction du type $k(r) = (1 - e^{-\lambda r})/\lambda$. Considérons ici une factorisation par r , nous posons $W(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x})V(\mathbf{x})$. A la source (positionnée en surface) nous obtenons :

$$W_0 = W(\mathbf{x}_s) = \frac{I}{2\pi\sigma_0}, \quad (3.31)$$

et sur le reste du domaine Ω

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \frac{W}{r} = 0. \quad (3.32)$$

En multipliant l'équation 3.32 par r^3 nous obtenons :

$$r^3 \nabla \cdot \sigma \nabla \frac{W}{r} = 0, \quad (3.33)$$

puis en la développant

$$-2r \nabla(\sigma W) \cdot \nabla r + r^2 \nabla \cdot (\sigma \nabla W) = 0. \quad (3.34)$$

Cette expression n'est pas pleinement satisfaisante pour l'implémentation. En effet, si nous considérons une discrétisation en quinconce de la fonction et des paramètres (Figure 3.4), nous avons ici le produit (σW) de termes qui ne sont pas définis aux mêmes points.

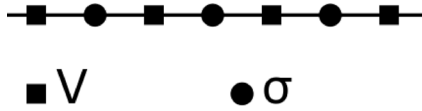


FIGURE 3.4 – Grille en quinconce 1D.

Nous cherchons à modifier l'expression 3.34 pour obtenir une forme compatible avec l'utilisation d'une grille alternée. Pour cela nous cherchons à l'exprimer comme une combinaison de $\nabla \cdot (\sigma \nabla r^\alpha W)$. Le développement de cette dernière expression nous donne :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla r^\alpha W) = \sigma W \nabla^2 r^\alpha + 2 \nabla(\sigma W) \cdot \nabla r^\alpha + r^\alpha \nabla \cdot (\sigma \nabla W) \quad (3.35)$$

En utilisant les relations $\nabla^2 r^\alpha = \alpha(\alpha + 1)r^{\alpha-2}$ et $\nabla r^\alpha = \alpha r^{\alpha-1} \nabla r$, nous obtenons :

$$r^{2-\alpha} \nabla \cdot (\sigma \nabla r^\alpha W) = \alpha(\alpha + 1)\sigma W + 2\alpha r \nabla(\sigma W) \cdot \nabla r + r^2 \nabla \cdot (\sigma W). \quad (3.36)$$

Pour $\alpha = (2, 1, 0)$ nous pouvons alors écrire :

$$\begin{pmatrix} \nabla \cdot (\sigma \nabla(r^2 W)) \\ r \nabla \cdot (\sigma \nabla(r W)) \\ r^2 \nabla \cdot (\sigma \nabla W) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma W \\ r \nabla(\sigma W) \cdot \nabla a \\ r^2 \nabla \cdot (\sigma \nabla W) \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

L'inversion de la matrice nous donne notamment :

$$r \nabla(\sigma W) \cdot \nabla r = -\frac{1}{2} \nabla \cdot (\sigma \nabla(r^2 W)) + \frac{3}{2} r \nabla \cdot (\sigma \nabla(r W)) - r^2 \nabla \cdot (\sigma \nabla W), \quad (3.38)$$

qui une fois introduit dans l'équation 3.34 nous mène à la formulation suivante :

$$r^3 \nabla \cdot \sigma \nabla \frac{W}{r} = 3r^2 \nabla \cdot (\sigma \nabla W) - 3r \nabla \cdot (\sigma \nabla(r W)) + \nabla \cdot (\sigma \nabla(r^2 W)) = 0. \quad (3.39)$$

Cette dernière formulation est compatible avec l'utilisation d'une grille alternée, les opérateurs différentiels ne s'appliquent que sur des grandeurs définies aux mêmes points. Cette formule a de plus l'avantage de conserver la même forme pour son implémentation que la forme classique de l'équation de Poisson $\nabla \cdot (\sigma \nabla V)$.

Bien qu'intéressante par sa forme, l'équation 3.39 cache une difficulté importante. Nous l'illustrons ici mathématiquement puis par des résultats numériques pour une implémentation en Différences Finies sur une grille cartésienne en 3D. Considérons un milieu de conductivité $\sigma(\mathbf{x}) \simeq \sigma_0$ à proximité de la source. Nous pouvons approcher W par un développement limité $W(\mathbf{x}) = W_0 + \nabla W \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + \dots$. En négligeant les termes en $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$ il est possible d'écrire l'équation 3.39 sous la forme

$$\sigma_0 W_0 (3r^2 \nabla^2 1 - 3r \nabla^2 r + \nabla^2 r^2) = 0. \quad (3.40)$$

En remarquant que $\nabla^2 r^2 = 6$ en 3D nous avons alors

$$3\sigma_0 W_0 (2 - r \nabla^2 r) = 0. \quad (3.41)$$

Le terme $r \nabla^2 r$ est à l'origine de la difficulté. Le problème vient de l'estimation numérique de ce terme : avec une discrétisation de plus en plus fine, il tend bien vers 2, à l'exception de la position exacte de la source où il est nul. La figure 3.5 montre le comportement de la fonction $r \nabla^2 r$ en fonction de r lorsqu'elle est calculée numériquement. La position de la source est indiquée par le trait pointillé vertical. Pour illustrer l'impact de cette mauvaise estimation de $r \nabla^2 r$ nous avons calculé numériquement W dans le cas d'un milieu présentant un contact vertical (Figure 3.6). Nous constatons une erreur importante lorsque l'on impose uniquement la valeur de la fonction à la source (cette erreur est ici très importante du fait de la discrétisation grossière). Lorsque l'on impose la valeur de la fonction à la source

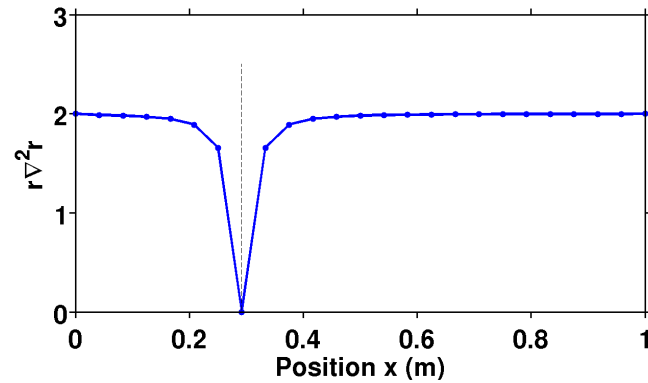
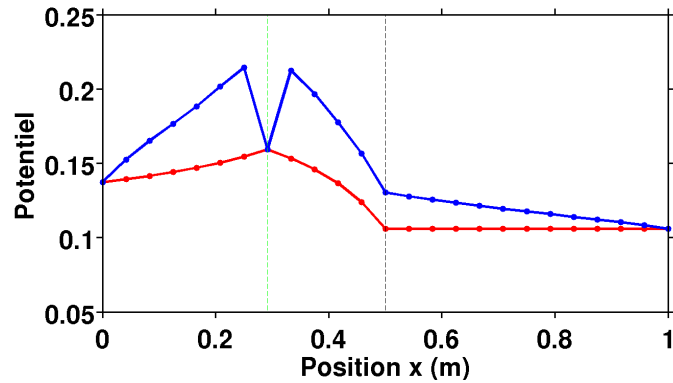


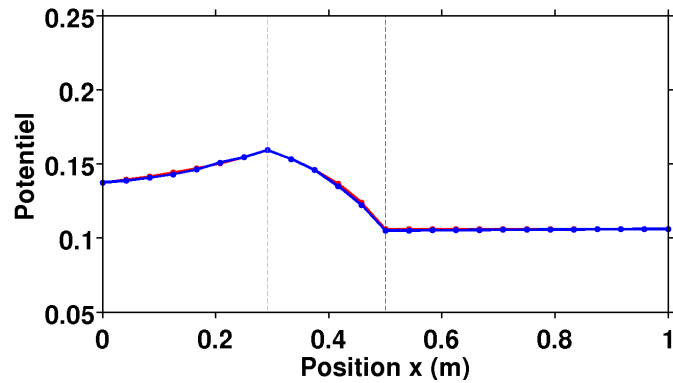
FIGURE 3.5 – Valeurs de la fonction $r\nabla^2 r$, obtenues numériquement, en fonction de la position x et pour $y = 0$ et $z = 0$. La position de la source est indiquée par le trait en pointillés.

ainsi que pour les plus proches points voisins (6 points en 3D) autour de la source l'erreur décroît très nettement.

Nous pouvons conclure cette section en indiquant que bien que cette approche de suppression multiplicative de la singularité soit apparue dans un premier temps séduisante, elle est limitée du fait de difficultés numériques. Cette solution n'est donc pas recommandée à moins de trouver une solution pour obtenir une bonne estimation numérique de $r\nabla^2 r$.



(a) Valeur imposée à la source



(b) Valeur imposée à la source et sur les 6 points adjacents (en 3D)

FIGURE 3.6 – Valeurs de $W(x, y, z)$, pour $y = 0$ et $z = 0$, calculées dans le cas d'un contact vertical. La position de la source est indiquée par le trait en pointillés vert et le contact par le trait en pointillés noir. Les solutions numériques et analytiques sont respectivement tracées en bleu et rouge.

3.5 Conclusion

Le problème direct est une étape essentielle à la procédure d'inversion des données électriques. La complexité du milieu étudié nécessite l'utilisation de solutions numériques pour le résoudre. Les méthodes des Éléments Finis ou des Différences Finies (lorsqu'elles sont adaptées à des grilles non structurées) permettent la modélisation de milieux complexes autant par leur structure interne que par leur géométrie externe. Ces méthodes répondent donc bien aux impératifs imposés par les milieux auscultés en tomographie électrique. La résolution du problème électrique pose plusieurs problèmes importants d'un point de vue théorique. Tout d'abord le fait de le résoudre sur un domaine fini nécessite d'imposer des conditions aux limites reflétant bien le comportement physique du potentiel. Dans le cas d'une modélisation en 2D, une transformée de Fourier est nécessaire pour obtenir des amplitudes réalistes. Nous avons à ce sujet proposé une nouvelle formulation compatible avec la décom-

position du potentiel, et intéressante du point de vue de l'implémentation. Enfin, la nature ponctuelle de la source est à l'origine d'une difficulté dans la résolution du fait de la singularité qu'elle introduit dans la solution. Si les conditions aux bords et le problème 2.5D sont bien résolus par les approches classiques, le problème de la singularité ne l'est pas complètement dans le cas d'une topographie non plane. Nous avons étudié les différentes approches utilisées dans ce cas précis et proposé deux nouvelles approches permettant de résoudre ce point. La première de ces approches, très proche de la méthode classique de décomposition, ne nécessite qu'une reformulation des conditions de surface libre et l'estimation de flux à la surface. Elle a pour principaux avantages sa simplicité, son indépendance vis à vis de la méthode de résolution, et la possibilité de résoudre le problème en une seule étape. Cette méthode sera utilisée par la suite dans le code d'inversion et des exemples de résultats de modélisation seront donnés au chapitre 5. La seconde méthode que nous proposons traite le problème de manière différente en considérant une décomposition multiplicative. Elle permet de s'affranchir complètement de l'utilisation d'une solution de référence. Cette approche est limitée du fait qu'une bonne estimation numérique du terme en $r\nabla^2 r$ est difficile à obtenir après discrétisation ; elle nécessite soit un raffinement important du maillage, soit l'imposition de conditions de Dirichlet sur plusieurs points proches de la source.

Résolution du problème inverse

Sommaire

4.1	Formulation du problème inverse	46
4.1.1	Introduction	46
4.1.2	Les stratégies d'inversions utilisées en tomographie électrique	47
4.1.3	Théorie de l'inversion par optimisation locale	47
4.1.4	Les algorithmes de minimisation par optimisation locale	51
4.2	Calcul des dérivées de Fréchet	53
4.2.1	Méthode des perturbations	53
4.2.2	Méthode des équations de sensibilité	53
4.2.3	Méthode basée sur le théorème de réciprocité	54
4.3	Calcul du gradient par la méthode de l'état adjoint	55
4.3.1	Formulation par le Lagrangien	56
4.3.2	Gradient de la fonction objective	56
4.3.3	Équation de l'état adjoint	57
4.3.4	Cas 2.5D	58
4.3.5	Calcul du gradient de la fonction objective avec des résistivités apparentes	59
4.3.6	Discussion sur la méthode	60
4.4	Paramétrisation et régularisation	60
4.4.1	Choix de paramètres logarithmiques	60
4.4.2	Discrétisation des paramètres	61
4.4.3	Techniques de régularisation	63
4.5	Conclusion	67

Ce chapitre se présente comme un état de l'art de la résolution du problème inverse en tomographie électrique. Je commence par introduire formellement le problème inverse. Partant de la définition générale, je présente les différentes solutions existantes pour résoudre ce problème en tomographie électrique, puis les différents algorithmes de minimisation de la fonction objective. La méthode de Gauss-Newton, très largement utilisée en tomographie électrique, est présentée plus en détail, notamment les méthodes pour le calcul des dérivées de Fréchet. Je présente ensuite la méthode de l'état adjoint pour le calcul direct du gradient de la fonction objective. Un effort tout particulier a été réalisé sur l'explication de cette méthode ; je présente le cas 3D mais également le cas 2,5D que je n'ai pas trouvé dans la littérature. Enfin j'indique les différentes solutions existantes pour paramétrer le problème inverse électrique et régulariser sa solution.

4.1 Formulation du problème inverse

4.1.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre 3 que le problème direct consiste à prédire des données à partir de valeurs arbitraires de paramètres du modèle. Comme son nom l'indique, résoudre le problème inverse, revient à obtenir le meilleur jeu de paramètres expliquant des données observées. Une fonction objective est alors définie pour traduire l'écart entre les données observées et des données calculées avec un modèle synthétique. Les problèmes inverses sont courants dans les domaines de la physique où la connaissance du milieu et de ses propriétés n'est possible qu'au moyen de mesures indirectes. C'est bien évidemment le cas de notre domaine géophysique mais nous retrouvons les mêmes problématiques en imagerie médicale, en astrophysique, en météorologie ou en traitement d'image.

Les problèmes inverses rencontrés en géophysique sont généralement dits « mal posés » ; ils ne satisfont pas les critères établis par (Hadamard, 1902) définissant un problème inverse bien posé, à savoir que :

- il existe une solution exacte ;
- la solution est unique ;
- la solution dépend de façon continue des données du problème.

Dans le cas où la première de ces conditions n'est pas satisfaite il est nécessaire d'envisager la résolution approchée du problème. Cela peut nécessiter la résolution d'un problème plus simple dont la solution existe et dont l'introduction dans le problème sans solution permet d'approcher sa solution. Le problème de la non-unicité de la solution est généralement lié à un manque de données (ou une mauvaise répartition de celles-ci) par rapport au nombre de paramètres. La solution à ce problème passe par l'ajout d'information a priori au sens large dans le problème. Cette information a priori peut être introduite via la distribution des paramètres, l'ajout de contraintes sur la nature de la solution ou encore au préalable dans la définition du dispositif d'acquisition des données. La non-linéarité du problème est le point le plus délicat. Il peut être lié à la faible sensibilité des paramètres aux données ; c'est le cas lorsqu'une petite perturbation dans les données doit être expliquée par une importante modification du modèle. La présence de bruit dans les données accentue le caractère non-linéaire du problème. De la même manière une discrétisation trop grossière du problème ou un modèle physique incorrect ne permettant pas de rendre compte des phénomènes physiques avec suffisamment de précision participent à rendre le problème inverse mal posé.

La recherche d'une solution convenable d'un problème inverse nécessite d'explorer une partie de l'espace des solutions. Deux grands types d'approches peuvent être envisagés pour cela : les méthodes d'optimisation globales et les méthodes d'optimisation locales. L'inversion par optimisation globale vise à effectuer une recherche systématique (plus ou moins aléatoire) de l'ensemble des modèles possibles (méthode

de Monte Carlo, méthodes de réseaux neuronaux par exemple). Les méthodes d'optimisation locales visent, elles, à rechercher de manière itérative un nouveau modèle, dans le voisinage d'un modèle initial, minimisant une fonction objective.

4.1.2 Les stratégies d'inversions utilisées en tomographie électrique

Du fait du nombre relativement important des paramètres mis en jeu (quelques centaines de points en 2D à plusieurs dizaines de milliers en 3D) des méthodes de recherche systématique (Grid Search Methods) ou faisant appel à des processus aléatoires (méthode de Monte Carlo) sont peu envisageables. En effet elles nécessitent un grand nombre de résolutions du problème direct pour explorer l'espace des paramètres. Des méthodes telles que le recuit simulé (Pessel, 2000) ou l'utilisation d'algorithmes génétiques (Schwarzbach et al., 2005; Neyamadpour et al., 2009) sont parfois employées mais restent relativement peu courantes. Les approches utilisant une linéarisation du problème direct ont été utilisées du fait de leur faible coût numérique. Parmi elles nous pouvons mentionner les méthodes de rétropropagation proposées par Shima & Sakayama (1987); Noel & Xu (1991); Barker (1992); Tsourlos et al. (2005) ou celles utilisant un opérateur d'inversion approximé (Li & Oldenburg, 1994). Bien que le problème ainsi formulé converge en principe en une itération il est en général résolu de manière itérative : à chaque itération le problème est linéarisé. L'utilisation d'une forme linéarisée du problème inverse est le choix le plus courant pour la méthode électrique. Ce type d'approche permet l'utilisation de différents algorithmes d'inversion linéaires itératifs (voir sous-section 4.1.4). Certains auteurs utilisent la méthode du gradient conjugué (Zhang, 1995), mais la méthode de Gauss-Newton avec une condition de régularisation est la plus couramment utilisée (Tripp et al., 1984; Park & Van, 1991; Sasaki, 1994; Loke & Barker, 1996a,b; Yi et al., 2001; Pain et al., 2002; Günther et al., 2006; Pidlisecky, 2006; Blome, 2009). Une autre approche passe par l'utilisation d'une méthode d'inversion purement non linéaire telle que la méthode de l'état adjoint (Ellis & Oldenburg, 1994; Marescot, 2004; Ha et al., 2006) que nous présentons en section 4.3.

4.1.3 Théorie de l'inversion par optimisation locale

Approches linéaires et non linéaires La relation entre les données \mathbf{d} provenant lors d'une acquisition électrique et les paramètres \mathbf{m} du sous-sol est non linéaire. Nous pouvons l'exprimer au moyen de l'opérateur direct non linéaire \mathcal{F} comme $\mathbf{d} = \mathcal{F}(\mathbf{m})$ (Tarantola, 1987). Dans la suite nous allons distinguer deux approches, citées précédemment, permettant d'appréhender le problème inverse. Nous distinguerons donc l'inversion non linéaire et l'approche linéaire qui consiste, elle, à linéariser le problème direct. La première approche est aujourd'hui la plus utilisée en inversion électrique ; elle donne en effet de meilleurs résultats mais est numériquement plus coûteuse. L'inversion linéaire ne présente pas les mêmes garanties en terme de convergence que l'inversion non linéaire (Tsourlos et al., 2005). Elle peut

cependant être utilisée comme outil d'interprétation préliminaire ou pour obtenir un modèle de départ pour une inversion non linéaire (Shima, 1992; Tsourlos et al., 2005). Nous allons ici présenter les équations normales associées puis nous comparerons le principe des processus itératifs utilisés pour leur résolution.

L'approche non linéaire

La résolution numérique du problème direct permet d'obtenir les données (résistivités apparentes) :

$$\mathbf{d}^{cal} = \mathcal{F}(\mathbf{m}). \quad (4.1)$$

Définissons l'écart $\Delta \mathbf{d}$ entre les données observées $\mathbf{d}^{obs} = (d_1^{obs}, d_2^{obs}, \dots, d_N^{obs})^t$ et les données calculées avec un modèle $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_M)^t$:

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}^{cal}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{obs}. \quad (4.2)$$

N désigne le nombre d'observations et M le nombre de paramètres utilisés pour discrétiser le milieu. Le modèle \mathbf{m} résulte de la modification du modèle de départ \mathbf{m}_0 par une perturbation additive $\delta \mathbf{m}$ obtenue suite à l'inversion du problème. Les données calculées peuvent donc être réécrites en fonction du modèle initial, à savoir $\mathbf{d}^{cal} = \mathcal{F}(\mathbf{m}) = \mathcal{F}(\mathbf{m}_0 + \delta \mathbf{m})$. L'estimation de la distance entre les données calculées et observées se fait au moyen d'une fonction objective Φ , définie comme une norme des résidus $\Delta \mathbf{d}$, nous considérons ici la norme ℓ_2 :

$$\Phi(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \|\mathcal{F}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{obs}\|^2. \quad (4.3)$$

La linéarisation du problème inverse consiste à effectuer un développement de Taylor au second ordre de la fonction objective au voisinage d'un modèle \mathbf{m}_0 :

$$\Phi(\mathbf{m}) = \Phi(\mathbf{m}_0) + \frac{\partial \Phi(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}} \delta \mathbf{m} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}^2} \delta \mathbf{m}^2 + o(\delta \mathbf{m}^3), \quad (4.4)$$

où $\delta \mathbf{m} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_0$. Un tel développement impose une condition forte pour sa validité, à savoir que les perturbations du modèle $\delta \mathbf{m}$ doivent être suffisamment petites par rapport au modèle \mathbf{m} . L'approximation quadratique de la fonction objective ainsi obtenue n'est pas supposée être valide sur l'ensemble de l'espace mais uniquement localement. La résolution non linéaire du problème inverse consiste ainsi à réaliser un processus itératif et à linéariser la fonction objective à chaque itération. En différenciant l'équation 4.4 par rapport à \mathbf{m} et en négligeant les termes d'ordre 3 nous obtenons :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{m}} = \frac{\partial \phi(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}} + \frac{\partial \Phi(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}^2} \delta \mathbf{m}. \quad (4.5)$$

Le minimum de l'approximation locale de la fonction objective est atteint lorsque la dérivée première de la fonction objective s'annule $\partial \Phi(\mathbf{m}) / \partial \mathbf{m} = 0$. La perturbation du modèle $\delta \mathbf{m}_1$ à l'itération 1 est alors donnée par l'expression :

$$\delta \mathbf{m}_1 = - \left[\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}^2} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}}. \quad (4.6)$$

Le terme $\partial\Phi(\mathbf{m}_0)/\partial\mathbf{m}$ désigne le gradient de la fonction objective au point \mathbf{m}_0 , il définit la direction de sa plus grande pente en ce point. La matrice des dérivées secondes de la fonction objective est appelée le Hessien; elle décrit l'inflexion de la fonction objective à proximité du modèle \mathbf{m}_0 . L'obtention de la remise à jour du modèle nécessite l'inversion du Hessien. En pratique le Hessien n'est pas nécessairement inversible et l'ajout de termes de régularisation est nécessaire. Dans le processus d'inversion non linéaire itératif le même développement que précédemment peut être effectué aux itérations suivantes. Le modèle à une itération k est ainsi lié à celui de l'itération précédente par $\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_{k-1} + \delta\mathbf{m}_k$, où $\delta\mathbf{m}_k$ est défini par :

$$\delta\mathbf{m}_k = - \left[\frac{\partial^2\Phi(\mathbf{m}_{k-1})}{\partial\mathbf{m}^2} \right]^{-1} \frac{\partial\Phi(\mathbf{m}_{k-1})}{\partial\mathbf{m}}. \quad (4.7)$$

Le gradient de la fonction objective peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{m}_{k-1})}{\partial\mathbf{m}} = \left[\frac{\partial\mathcal{F}(\mathbf{m}_{k-1})}{\partial\mathbf{m}} \right]^t (\mathcal{F}(\mathbf{m}_{k-1}) - \mathbf{d}^{obs}) = \mathbf{J}_{k-1}^t \Delta\mathbf{d}_{k-1}, \quad (4.8)$$

où \mathbf{J}_{k-1} est la matrice des dérivées de Fréchet (également appelée Jacobien ou matrice de sensibilité) au point \mathbf{m}_{k-1} . Il est possible d'introduire dans la fonction objective un terme de pondération sur les données; par souci de simplicité nous ne le détaillons pas ici mais le développement est similaire. Le Jacobien se compose des dérivées partielles des données par rapport à \mathbf{m} :

$$\mathbf{J}_{k-1} = \frac{\partial\mathcal{F}(\mathbf{m}_{k-1})}{\partial\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial m_1} & \frac{\partial d_1}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial d_1}{\partial m_M} \\ \frac{\partial d_2}{\partial m_1} & \frac{\partial d_2}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial d_2}{\partial m_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial d_N}{\partial m_1} & \frac{\partial d_N}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial d_N}{\partial m_M} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

L'expression de la matrice Hessienne peut être développée sous la forme (Günther, 2004) :

$$\mathcal{H}_{k-1} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{m}} \left(\mathbf{J}_{k-1}^t (\mathcal{F}(\mathbf{m}_{k-1}) - \mathbf{d}^{obs}) \right) \quad (4.10)$$

$$= \mathbf{J}_{k-1}^t \mathbf{J}_{k-1} + \left(\frac{\partial\mathbf{J}_{k-1}^t}{\partial\mathbf{m}} \right)^t (\mathcal{F}(\mathbf{m}_{k-1}) - \mathbf{d}^{obs}) \quad (4.11)$$

En introduisant les expressions du gradient et du Hessien dans l'équation 4.7 nous obtenons finalement l'équation normale d'inversion à l'itération k :

$$\delta\mathbf{m}_k = - \left[\mathbf{J}_{k-1}^t \mathbf{J}_{k-1} + \left(\frac{\partial\mathbf{J}_{k-1}^t}{\partial\mathbf{m}} \right)^t (\mathcal{F}(\mathbf{m}_{k-1}) - \mathbf{d}^{obs}) \right]^{-1} \mathbf{J}_{k-1}^t \Delta\mathbf{d}_{k-1} \quad (4.12)$$

L'approche linéaire

Les approches d'inversion linéaire en tomographie électrique ne constituent pas une méthode d'imagerie radicalement différente de l'approche non linéaire comme c'est le cas en sismique entre l'inversion de forme d'onde et la migration. Ces approches linéaires s'appuient sur la même stratégie pour la résolution du problème direct, et le problème inverse linéaire est résolu au moyen d'approximations (méthode SIRT par exemple [Tsourlos et al. \(2005\)](#)). Nous présentons ici malgré tout la formulation formelle de l'inversion linéaire. L'approximation linéaire du problème direct suppose qu'un modèle \mathbf{m} peut être vu comme la somme d'un modèle de référence \mathbf{m}_0 et d'une perturbation du modèle $\delta\mathbf{m}$. Cette approximation n'est en pratique valable que si le modèle \mathbf{m} est peu éloigné de \mathbf{m}_0 . La perturbation des données $\delta\mathbf{d}$ associée à la perturbation du modèle $\delta\mathbf{m}$ peut s'écrire :

$$\delta\mathbf{d} = \mathcal{F}(\mathbf{m}_0 + \delta\mathbf{m}) - \mathcal{F}(\mathbf{m}_0). \quad (4.13)$$

En effectuant un développement de Taylor à l'ordre 1 de l'opérateur direct \mathcal{F} autour de \mathbf{m}_0 nous avons :

$$\mathcal{F}(\mathbf{m}) = \mathcal{F}(\mathbf{m}_0) + \frac{\partial\mathcal{F}(\mathbf{m}_0)}{\partial\mathbf{m}}\Delta\mathbf{m}_0 + \circ(\mathbf{m}^2) \simeq \mathcal{F}(\mathbf{m}_0) + \frac{\partial\mathcal{F}(\mathbf{m}_0)}{\partial\mathbf{m}}\Delta\mathbf{m}_0. \quad (4.14)$$

En utilisant les équations 4.9, 4.13 et 4.14 nous obtenons une relation linéaire reliant la perturbation des données à la perturbation du modèle, cette relation est appelée approximation de Born :

$$\delta\mathbf{d} = \mathbf{J}\delta\mathbf{m}. \quad (4.15)$$

En reprenant l'expression de l'écart entre les données observées et calculées nous pouvons la reformuler comme :

$$\Delta\mathbf{d} = \mathbf{d}^{obs} - \mathcal{F}(\mathbf{m}) = \mathbf{d}^{obs} - \mathcal{F}(\mathbf{m}_0) - \mathbf{J}_0\delta\mathbf{m}. \quad (4.16)$$

Le Jacobien \mathbf{J}_0 est calculé dans le milieu de référence \mathbf{m}_0 par le même type d'approche que pour le problème non linéaire (ce n'est pas nécessairement le cas dans toutes les applications, en particulier en sismique). L'opérateur direct \mathcal{F} est approximé à l'ordre 1 ce qui implique que sa dérivée seconde par rapport à \mathbf{m} est nulle. En repartant de la formule 4.5 nous constatons que le gradient de la fonction objective conserve la même forme que dans l'inversion non linéaire (Equation 4.8), en revanche le Hessien se retrouve lui amputé de son second terme et a pour forme :

$$\mathcal{H}_0 = \mathbf{J}_0^t \mathbf{J}_0 \quad (4.17)$$

La différence entre les deux expressions du Hessien est le second terme $\left(\frac{\partial\mathbf{J}_{k-1}^t}{\partial\mathbf{m}}\right)^t (\mathcal{F}(\mathbf{m}_{k-1}) - \mathbf{d}^{obs})$. Il tient compte du caractère non linéaire du Hessien.

Comparaison des approches linéaires et non linéaires

L'approche linéaire utilisant l'approximation de Born est supposée converger en une itération du fait de l'approximation quadratique de l'ensemble de la fonction objective. En pratique une telle approximation n'est que peu satisfaisante en tomographie électrique (Li & Oldenburg, 1992) et des processus itératifs linéaires sont employés pour converger vers le minimum de la fonction Li & Oldenburg (1992, 1994). Les dérivées de Fréchet ne sont calculées qu'une fois dans le modèle initial \mathbf{m}_0 et la perturbation du modèle à l'itération k s'exprime :

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_0 + [\mathbf{J}_0^t \mathbf{J}_0]^{-1} \mathbf{J}_0^t (\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}_{k-1}). \quad (4.18)$$

Dans la pratique l'inverse du Hessien n'est pas toujours recherché dans les inversions linéaires du problème électrique et une approximation est généralement suffisante. Le Jacobien est également parfois recalculé au cours du processus itératif (Tsourlos et al., 2005). Les approches linéaires ainsi adaptées se rapprochent beaucoup dans la pratique des inversions non linéaires et bien qu'elles ne s'appuient pas sur une approximation aussi solide du problème physique, elles parviennent à donner des résultats satisfaisants.

4.1.4 Les algorithmes de minimisation par optimisation locale

Nous présentons ici les différents algorithmes qui permettent de converger vers le minimum de la fonction objective. La rapidité de leur convergence est variable. En revanche tous nécessitent que le modèle initial soit suffisamment proche du minimum global pour assurer la convergence vers ce minimum et ne pas être bloqué dans un minimum local.

4.1.4.1 Méthodes de Newton et de Gauss-Newton

La méthode de Newton consiste à calculer et inverser le Hessien complet (Equation 4.10) ; elle permet d'obtenir la remise à jour du modèle selon la formule 4.12. C'est une méthode coûteuse d'un point de vue numérique et en particulier peu envisageable pour des problèmes de grande taille. La méthode de Gauss-Newton, largement utilisée en inversion électrique, suppose elle de calculer le premier terme du Hessien et de négliger le terme de non-linéarité. Le Hessien complet ou uniquement composé de son premier terme n'est pas nécessairement inversible et l'ajout de termes de régularisation s'avère généralement nécessaire.

4.1.4.2 Méthode du gradient

Une méthode simple et robuste pour trouver le minimum de Φ consiste à parcourir l'espace des paramètres dans la direction de la plus grande pente de Φ . La remise à jour du modèle peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{m}^{k+1} = \mathbf{m}^k - \alpha \mathbf{g}^k, \quad (4.19)$$

où \mathbf{g}^k désigne le gradient de la fonction objective par rapport aux paramètres à l'itération k et α une valeur de pas positive. Le gradient de la fonction Φ peut facilement être obtenu à partir de la matrice Jacobienne (Equation 4.8). Une autre manière de calculer ce gradient sans former la matrice de sensibilité est d'utiliser la méthode de l'état adjoint (voir section 4.3). Le pas α peut être optimisé à chaque itération au moyen d'une recherche linéaire du minimum de la fonction objective à l'itération $k + 1$ (voir 6.1.5). La méthode de plus grande pente présente toutefois une convergence relativement lente, même dans le cas de problèmes quadratiques ; l'utilisation d'autres méthodes lui est souvent préférée.

4.1.4.3 Gradient conjugué non linéaire

La méthode du gradient conjugué, initialement développée pour résoudre des systèmes linéaires, est couramment utilisée pour des problèmes non linéaires (Shewchuck, 1994). Cette méthode propose de déterminer la direction de descente à partir du gradient mais également des directions de descente précédentes. À la première itération la remise à jour du modèle est identique à la méthode de plus grande pente, puis aux itérations suivantes elle prend la forme :

$$\mathbf{m}^{k+1} = \mathbf{m}^k + \alpha \mathbf{s}^k, \quad (4.20)$$

où $\mathbf{s}^k = -\mathbf{g}^k + \beta_k \mathbf{s}^{k-1}$. Le paramètre β peut être déterminé selon différentes formules, les plus connues étant celles de Fletcher-Reeves, Polak-Ribière et Hestenes-Stiefel. La formule de Fletcher-Reeves donne par exemple :

$$\beta_k = \frac{(\mathbf{g}^k)^t (\mathbf{g}^k)}{(\mathbf{g}^{k-1})^t (\mathbf{g}^{k-1})}. \quad (4.21)$$

L'avantage de cette méthode, au moins dans le cas de fonctions quadratiques, est d'obtenir une meilleure vitesse de convergence que par la méthode de plus grande pente, en particulier le gradient conjugué permet de suivre des vallées étroites là où le gradient ralentit très fortement, oscillant d'un bord à l'autre.

4.1.4.4 Méthode Quasi-Newton

Les méthodes de Newton et Gauss-Newton nécessitent de calculer et d'inverser le Hessien à chaque itération, ce qui est une tâche lourde d'un point de vue numérique. Une alternative couramment utilisée est de réaliser une remise à jour du Hessien ou directement de son inverse à partir des gradients précédents. Cette méthode équivalente à une méthode de sécante est alors appelée méthode de Quasi-Newton. Une formule, largement utilisée, de remise à jour du Hessien a été développée par Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno (méthode BFGS). Elle a pour forme :

$$\mathcal{H}^{k+1} = \mathcal{H}^k - \frac{\mathcal{H}^k \Delta \mathbf{m}^k \Delta \mathbf{m}^{k^t} \mathcal{H}^k}{\Delta \mathbf{m}^{k^t} \mathcal{H}^k \Delta \mathbf{m}^k} + \frac{\mathbf{y}^k \mathbf{y}^{k^t}}{\Delta \mathbf{m}^{k^t} \mathbf{y}^k}, \quad (4.22)$$

avec $\Delta \mathbf{m}^k = (\mathcal{H}^k)^{-1} \mathbf{g}^k$ et $\mathbf{y}^k = \mathbf{g}^{k+1} - \mathbf{g}^k$. Loke & Dahlin (2002) ont montré que la méthode de Quasi-Newton est suffisante dans un grand nombre de problèmes de tomographie électrique 2D.

4.2 Calcul des dérivées de Fréchet

Les approches d'inversion les plus courantes en tomographie électrique nécessitent le calcul de la matrice Jacobienne ou de sensibilité. Cette matrice de sensibilité peut être obtenue analytiquement pour un milieu homogène (Loke, 2011). Pour l'obtenir pour un milieu hétérogène, trois solutions existent (McGillivray & Oldenburg, 1990) : la méthode des perturbations, la méthode des équations de sensibilité et la méthode de l'état adjoint. De manière générale, pour des mesures de résistivités apparentes avec trois ou quatre électrodes, les sensibilités peuvent être obtenues par sommations de sensibilités pour des couples d'électrodes (une électrode de courant et une de potentiel) couramment appelées sensibilités pôle-pôle. Les sensibilités pour un couple d'électrodes $i = AM$ peuvent être notées :

$$J_{i,j}^{PP} = \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial m_j} = \frac{\partial V_A(\mathbf{x}_M)}{\partial m_j}, \quad (4.23)$$

où $V_A(\mathbf{x}_M)$ est le potentiel mesuré à l'électrode M avec une source de courant à l'électrode A et $\mathbf{x}_M = (x_M, y_M, z_M)$. Pour un quadripôle $i = ABMN$ les sensibilités s'écrivent alors :

$$J_{i,j} = J_{AM,j}^{PP} - J_{BM,j}^{PP} - J_{AN,j}^{PP} + J_{BN,j}^{PP}. \quad (4.24)$$

Dans la suite de cette section nous nous intéresserons donc au calcul des sensibilités pôle-pôle.

4.2.1 Méthode des perturbations

Une méthode évidente pour obtenir les sensibilités consiste à les approximer par Différences Finies selon l'équation :

$$\mathbf{J}_{ij} \simeq \frac{\mathcal{F}_i(\mathbf{m} + \delta_j \Delta m) - \mathcal{F}_i(\mathbf{m} - \delta_j \Delta m)}{\Delta m}, \quad (4.25)$$

avec δ_j une fonction de Dirac discrète valant 1 en j et 0 ailleurs. Le choix de la perturbation Δm est délicat, elle doit être suffisamment petite pour ne pas trop affecter la qualité de la solution. Cette procédure est très lourde d'un point de vue numérique ; elle nécessite pour chaque cellule perturbée de réaliser autant de calculs directs qu'il y a d'électrodes (on note N_e le nombre d'électrodes). En considérant la réponse $\mathcal{F}(\mathbf{m})$ déjà connue du modèle il faut alors effectuer $N_e \times M$ calculs directs. Le calcul direct étant une procédure relativement lourde numériquement, une telle approche est peu applicable hormis pour des modèles ayant peu de paramètres.

4.2.2 Méthode des équations de sensibilité

La résolution du problème direct, généralement effectuée par Différences Finies ou par Eléments Finis, donne lieu à la résolution d'un système linéaire :

$$\mathbf{A}(\mathbf{m})V(\mathbf{m}) = \mathbf{b}. \quad (4.26)$$

La matrice \mathbf{A} désigne alors la matrice de couplage (Différences Finies) ou de rigidité (Éléments Finis), V le potentiel et \mathbf{b} un terme source. La méthode des équations de sensibilité consiste alors à différencier ce système par rapport à un paramètre m_i . Le vecteur source étant indépendant des paramètres du milieu, nous obtenons :

$$\mathbf{A} \frac{\partial V}{\partial m_i} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial m_i} V. \quad (4.27)$$

Le terme $\frac{\partial V}{\partial m_i}$ correspond à la sensibilité du potentiel V (choisi et connu par le calcul direct) au paramètre m_i , et le terme $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial m_i}$ peut être formulé explicitement. L'équation 4.27 est équivalente à un calcul direct supplémentaire avec une nouvelle source. Cette équation doit être résolue $N_e \times M$ fois pour obtenir la matrice de sensibilité au complet, ce qui est, comme pour la méthode de perturbation, très lourd d'un point de vue calculatoire. Ce coût de calcul peut toutefois être sensiblement réduit. En effet la matrice \mathbf{A} peut être formulée de manière à ne pas dépendre de la source considérée. Il est donc possible de la décomposer selon une décomposition LU et ainsi de résoudre efficacement l'équation 4.27 pour différents termes source. Le développement d'algorithmes de résolution directe parallélisés très efficaces permet maintenant l'utilisation d'une telle approche (Günther, 2004; Blome, 2009).

4.2.3 Méthode basée sur le théorème de réciprocité

Une méthode efficace pour calculer la matrice de sensibilité est basée sur le principe de réciprocité ou état adjoint. La méthode de l'état adjoint est présentée plus en détail par la suite pour le calcul du gradient de la fonction objective. En ce qui concerne le problème électrique, Zhou & Greenhalgh (1999) proposent, pour calculer les sensibilités pôle-pôle pour une source située en \mathbf{x}_s et un récepteur en \mathbf{x}_r , l'expression suivante :

$$\mathbf{J}_{AM,j}^{PP} = \frac{\partial V_A(\mathbf{x}_M)}{\partial m_j} = -I \int_{\Omega_k} (\nabla G(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}) \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_M)) dx. \quad (4.28)$$

m_j désigne ici le paramètre d'inversion (éventuellement constitué de plusieurs cellules de calcul direct), $G(\mathbf{x}_A, \mathbf{x})$ est la fonction de Green liée à une source en \mathbf{x}_A et de la même manière $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_M)$ est la fonction de Green liée à la source adjointe en \mathbf{x}_M . Cette formulation est bien adaptée aux problèmes mettant en jeu des dispositifs multiélectrodes. En effet, les électrodes étant alternativement source et récepteur, la fonction de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_M)$ a déjà été calculée lors d'un calcul direct : il s'agit du potentiel obtenu pour une source positionnée en \mathbf{x}_M . Dans le cas où la discrétisation du problème inverse est différente de celle du problème direct, la sensibilité liée au paramètre m_j est obtenue en sommant les sensibilités liées à l'ensemble des cellules du problème direct constituant la cellule j du problème inverse. Dans le cas 2.5D la formule 4.28 devient :

$$\mathbf{J}_{sr,j} = -\frac{I}{2} F^{-1} \left\{ \int_{\Omega_k} \left(\nabla \tilde{G}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}) \cdot \nabla \tilde{G}(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}) + k_y^2 \tilde{G}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}) \tilde{G}(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}) \right) dx \right\}, \quad (4.29)$$

où F^{-1} désigne la transformée de Fourier inverse par rapport aux nombres d'ondes k_y pour obtenir les sensibilités dans le domaine spatial et les \tilde{G} désignent les transformées de Fourier des fonctions de Green. Le même choix de nombres d'ondes que pour le calcul direct peut être effectué et, comme en 3D, les sensibilités sont obtenues par sommation des sensibilités sur la grille de calcul direct.

Nous avons vu que le calcul des sensibilités est une opération relativement lourde. Les méthodes des équations de sensibilité et de l'état adjoint permettent ce calcul pour des problèmes de grandes taille (1 Go de mémoire permet tout de même de stocker le Jacobien pour un problème de l'ordre de 100 000 points et 1200 sources). Le problème du stockage de la matrice de sensibilité se pose toutefois pour traiter de gros problèmes sur un ordinateur de bureau. Une solution est le stockage creux de cette matrice en négligeant les petites valeurs de sensibilité (Günther et al., 2006). Il est également possible de former le Hessien sans jamais assembler explicitement l'ensemble de la matrice de sensibilité (Blome, 2009). Une autre solution est le calcul direct du gradient de la fonction objective sans passer par la matrice de sensibilité. Le choix de la méthode d'inversion est alors limité à une méthode de gradient ou de Quasi-Newton.

4.3 Calcul du gradient par la méthode de l'état adjoint

Comme nous l'avons vu précédemment, l'inversion du problème électrique est souvent réalisée itérativement en considérant la fonction objective comme localement quadratique. Cette résolution nécessite le calcul des dérivées de Fréchet qui peut être une opération lourde. Si nous considérons le problème de minimisation d'un point de vue purement non linéaire, seul le gradient de la fonction objective doit être obtenu. Dans les années 1970, Chavent (1974) a introduit, pour les problèmes inverses en géophysique, une méthode basée sur l'état adjoint permettant de calculer efficacement le gradient d'une fonction objective. Dans le domaine de la géophysique, plusieurs auteurs ont utilisé cette méthode pour des applications diverses (Lailly, 1983; Chavent & Jacewitz, 1995; Shen et al., 2003); un bon aperçu des possibilités de la méthode est donné par Plessix (2006). Dans le cas de la tomographie électrique, Ellis & Oldenburg (1994); Marescot (2004); Ha et al. (2006) ont notamment utilisé cette approche.

Nous allons maintenant développer les formules liées à la méthode de l'état adjoint dans le cas du problème électrique sur un domaine Ω . Nous considérons la fonction objective au sens des moindres carrés pour une source de courant :

$$\Phi_d(\sigma(\mathbf{x})) = \int_{\Gamma} |V^{obs}(\sigma, \mathbf{x}) - V(\sigma, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \quad (4.30)$$

Ω désigne le domaine d'étude et $\partial\Omega$ l'ensemble de ses bords, y compris la surface libre Γ . Pour ne pas surcharger l'écriture nous supprimerons la notation de la dépendance spatiale des variables, ainsi $V(\sigma, \mathbf{x})$ s'écrira $V(\sigma)$.

4.3.1 Formulation par le Lagrangien

La méthode de l'état adjoint est une méthode générale qui permet d'obtenir le gradient d'une fonction objective après résolution de l'équation adjointe du problème (Plessix, 2006). Cette méthode requiert la définition du Lagrangien \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}(V^*, \lambda^*, \sigma) = \int_{\Gamma} |V^{obs} - V^*|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \lambda^* (\nabla \cdot \sigma \nabla V^* + I\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)) d\mathbf{x}, \quad (4.31)$$

correspondant à un problème de minimisation. Ce problème vise à trouver V minimisant la fonction objective et satisfaisant l'équation du problème direct. V^* et λ^* sont deux variables indépendantes de σ , et représentent un ensemble de solutions non nécessairement physiques.

Si V^* est une solution physique alors $V^* = V$, et $\nabla \cdot \sigma \nabla V = -I\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$ et pour tout λ^* :

$$\mathcal{L}(V, \lambda^*, \sigma) = \int_{\Gamma} |V^{obs} - V|^2 d\mathbf{x} = \Phi_d. \quad (4.32)$$

Par définition nous pouvons écrire le gradient du Lagrangien par rapport à σ sous la forme :

$$\frac{d\mathcal{L}(V, \lambda, \sigma)}{d\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}(V, \lambda, \sigma)}{\partial \sigma} + \frac{\partial V}{\partial \sigma} \frac{\partial \mathcal{L}(V, \lambda, \sigma)}{\partial V} + \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \frac{\partial \mathcal{L}(V, \lambda, \sigma)}{\partial \lambda}. \quad (4.33)$$

Afin d'éviter d'avoir à calculer les termes $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$ et $\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma}$, nous imposons nuls les termes $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V}$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}$. Nous obtenons ainsi l'équation de l'état adjoint :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V}(V, \lambda, \sigma) = 0, \quad (4.34)$$

et l'équation du problème direct :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(V, \lambda, \sigma) = 0. \quad (4.35)$$

Le gradient de la fonction objective s'écrit alors :

$$\frac{\partial \Phi_d}{\partial \sigma}(\sigma) = \frac{d\mathcal{L}}{d\sigma}(V, \lambda, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma}(V, \lambda, \sigma). \quad (4.36)$$

4.3.2 Gradient de la fonction objective

Pour obtenir l'expression du gradient de la fonction objective nous allons tout d'abord modifier l'expression du Lagrangien 4.31. Nous allons nous servir de l'égalité vectorielle suivante issue du théorème flux-divergence :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{F} \cdot \nabla g + g(\nabla \cdot \mathbf{F})) dV = \int_{\partial\Omega} g \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x}, \quad (4.37)$$

où g est un champ scalaire, \mathbf{F} est un champ vectoriel et \mathbf{n} est la normale extérieure à la frontière. En appliquant la relation 4.37 à l'équation 4.31 nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V^*, \lambda^*, \sigma) &= \int_{\Gamma} |V^{obs} - V^*|^2 d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \lambda^* \sigma \nabla V^* \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} \sigma \nabla V^* \cdot \nabla \lambda^* d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \lambda^* I \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

En considérant une solution physique du potentiel nous pouvons annuler l'intégrale $\int_{\partial\Omega} \lambda^* \sigma \nabla V^* \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x}$. En effet $\sigma \nabla V^* \cdot \mathbf{n}$ s'annule sur la surface libre du fait de la physique du potentiel ; pour annuler l'ensemble de cette intégrale nous imposons $\lambda^* = 0$ sur les autres bords du domaine. Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V, \lambda, \sigma) &= \int_{\Gamma} |V^{obs} + V|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \sigma \nabla V \cdot \nabla \lambda d\mathbf{x} \\ &- \int_{\Omega} \lambda I \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Par différenciation de l'équation 4.39 par rapport à σ nous obtenons l'expression du gradient :

$$\frac{\partial \Phi_d}{\partial \sigma}(\sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma}(V, \lambda, \sigma) = \nabla V \cdot \nabla \lambda. \quad (4.40)$$

Dans le cas où N_e sources sont considérées le gradient s'écrit :

$$\frac{\partial \Phi_d}{\partial \sigma}(\sigma) = \sum_{i=1}^{N_e} \nabla V_i \cdot \nabla \lambda_i, \quad (4.41)$$

où V_i et λ_i représentent respectivement le potentiel et la variable adjointe associés à la source i . Pour obtenir le gradient de la fonction objective il faut donc obtenir les valeurs λ_i de la variable adjointe associée à chaque source.

4.3.3 Équation de l'état adjoint

Pour établir l'équation de l'état adjoint, nous repartons de l'équation 4.38. En appliquant une nouvelle fois la relation 4.37 nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V^*, \lambda^*, \sigma) &= \int_{\Gamma} |V^{obs} - V^*|^2 d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \lambda^* \sigma \nabla V^* \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\partial\Omega} V^* \sigma \nabla \lambda^* \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} V^* \nabla \cdot \sigma \nabla \lambda^* d\mathbf{x} \\ &- \int_{\Omega} \lambda^* I \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

L'intégrale $\int_{\partial\Omega} \lambda^* \sigma \nabla V^* \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x}$ s'annule. Nous annulons également l'intégrale $\int_{\partial\Omega} V^* \sigma \nabla \lambda^* \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x}$. Pour cela nous imposons que $\sigma \nabla \lambda^* \cdot \mathbf{n}$ soit nul à la surface libre ; cela nous donne les conditions aux limites pour λ ; sur les autres bords $V = 0$ du

fait des conditions aux limites du potentiel. En dérivant l'équation 4.42 par rapport à V^* nous obtenons l'équation de l'état adjoint :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^*}(V, \lambda, \sigma) = -\nabla \cdot \sigma \nabla \lambda + \frac{\partial \Phi_d}{\partial V} = 0. \quad (4.43)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\sigma \frac{\partial \lambda}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (4.44)$$

et

$$\lambda = 0 \quad \text{aux autres bords } \partial\Omega. \quad (4.45)$$

Les conditions aux bords $\partial\Omega$ peuvent aussi prendre la forme de conditions mixtes comme celles présentées pour le problème direct. Nous reconnaissons ici la même équation que pour le problème direct mais avec un terme source différent, le problème électrique est dit auto-adjoint. Le terme source $\frac{\partial \Phi_d}{\partial V}$ est lié aux résidus. La résolution de cette équation s'effectue donc de la même manière que pour le problème direct.

4.3.4 Cas 2.5D

Dans le cas 2.5D la même approche que précédemment peut être effectuée. Les notations utilisées sont les mêmes qu'au chapitre 3. Nous pouvons poser le Lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{V}, \tilde{\lambda}, \sigma) = & \int_{\Gamma} |V^{obs} - \frac{2}{\pi} \sum_i \tilde{V}_i^*|^2 d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} \frac{2}{\pi} \sum_i \tilde{\lambda}_i^* \left(\nabla \cdot \sigma \nabla \tilde{V}_i^* - k_{y_i}^2 \tilde{V}_i^* + \frac{I}{2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \right) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

où \tilde{V}_i^* et $\tilde{\lambda}_i^*$ représentent respectivement la transformée de Fourier du potentiel et celle de la variable adjointe, associées au nombre d'ondes k_{y_i} . En procédant comme en 3D, une première utilisation de la relation 4.37 nous donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{V}, \tilde{\lambda}, \sigma) = & \int_{\Gamma} |V^{obs} - \frac{2}{\pi} \sum_i \tilde{V}_i^*|^2 d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{2}{\pi} \sigma \sum_i \tilde{\lambda}_i^* \nabla \tilde{V}_i^* \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} \frac{2}{\pi} \sigma \sum_i \nabla \tilde{\lambda}_i^* \cdot \nabla \tilde{V}_i^* d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{2}{\pi} \sigma \sum_i \tilde{\lambda}_i^* k_{y_i}^2 \tilde{V}_i^* d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} \frac{2}{\pi} \sum_i \tilde{\lambda}_i^* \frac{I}{2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Les conditions aux limites des équations de Helmholtz pour chaque nombre d'ondes k_{y_i} annulent l'intégrale sur la surface $\partial\Omega$ ($\nabla \tilde{V}_i^* \cdot \mathbf{n} = 0$ à la surface libre et $\tilde{\lambda}_i^* = 0$ aux autres bords). La différenciation de l'équation 4.47 par rapport à σ nous donne l'expression du gradient de la fonction objective :

$$\frac{\partial \Phi_d}{\partial \sigma}(\sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma}(V, \lambda, \sigma) = \frac{2}{\pi} \sum_i \nabla \tilde{V}_i \cdot \nabla \tilde{\lambda}_i + \frac{2}{\pi} \sum_i k_{y_i}^2 \tilde{V}_i \tilde{\lambda}_i. \quad (4.48)$$

La relation 4.37 est à nouveau appliquée sur l'équation 4.47, cela nous donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{V}, \tilde{\lambda}, \sigma) &= \int_{\Gamma} |V^{obs} - \frac{2}{\pi} \sum_i \tilde{V}_i^*|^2 d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \frac{2}{\pi} \sigma \sum_i \tilde{\lambda}_i^* \nabla \tilde{V}_i^* \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\partial\Omega} \frac{2}{\pi} \sigma \sum_i \tilde{V}_i^* \nabla \tilde{\lambda}_i^* \cdot \mathbf{n} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \frac{2}{\pi} \sum_i \tilde{V}_i^* \nabla \cdot \sigma \nabla \tilde{\lambda}_i^* d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} \frac{2}{\pi} \sigma \sum_i \tilde{\lambda}_i^* k_{y_i}^2 \tilde{V}_i^* d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \frac{2}{\pi} \sum_i \tilde{\lambda}_i^* \frac{I}{2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Les intégrales sur les surfaces s'annulant du fait des conditions aux limites ($\nabla \tilde{\lambda}_i^* \cdot \mathbf{n} = 0$ à la surface libre et \tilde{V}_i^* aux autres bords), la dérivation par rapport à $\tilde{V}_i^* = 0$ nous donne l'équation de l'état adjoint à résoudre pour chaque nombre d'ondes :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{V}_i^*}(\tilde{V}_i, \tilde{\lambda}_i, \sigma) = -\frac{2}{\pi} \nabla \cdot \sigma \nabla \tilde{\lambda}_i + \frac{2}{\pi} k_{y_i}^2 \tilde{\lambda}_i + \frac{\partial \Phi_d}{\partial \tilde{V}_i} = 0. \quad (4.50)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\sigma \frac{\partial \tilde{\lambda}_i}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (4.51)$$

et

$$\tilde{\lambda}_i = 0 \quad \text{aux autres bords } \partial\Omega. \quad (4.52)$$

On retrouve bien la même équation du problème direct 2.5D avec un terme de source différent.

4.3.5 Calcul du gradient de la fonction objective avec des résistivités apparentes

Nous avons vu comment calculer par la méthode de l'état adjoint le gradient d'une fonction objective

$$\Phi_d(\sigma) = \int_{\Gamma} |V^{obs}(\sigma, \mathbf{x}) - V(\sigma, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \quad (4.53)$$

En pratique, les données dont nous disposons ne sont pas directement les valeurs de potentiel mais les résistivités apparentes ; la fonction objective a donc pour forme :

$$\Phi_d(\sigma) = \int_{\Gamma} |\rho_a^{obs}(\mathbf{x}) - \rho_a(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \quad (4.54)$$

La méthode présentée reste tout à fait valable avec cette formulation, seul le terme source de l'équation de l'état adjoint (équations 4.43 et 4.50) est modifié. Rappelons qu'une valeur de résistivité apparente met en jeu quatre valeurs de potentiel et a pour forme :

$$\rho_a = \frac{k}{I} (V_A(\mathbf{x}_M) - V_A(\mathbf{x}_N) - (V_B(\mathbf{x}_M) - V_B(\mathbf{x}_N))). \quad (4.55)$$

Le terme source de l'équation de l'état adjoint a pour forme :

$$\frac{\partial \Phi_d}{\partial V_i(\mathbf{x}_j)} = 2 \sum_{k=1}^{N_d} \frac{\partial \rho_{a_k}}{\partial V_i(\mathbf{x}_j)} \left(\rho_{a_k}^{obs} - \rho_{a_k} \right), \quad (4.56)$$

où N_d désigne le nombre de données (quadripôles). A la lumière de la formulation de la résistivité apparente nous voyons que le terme $\frac{\partial \rho_{a_k}}{\partial V_i(\mathbf{x}_j)}$ prend pour valeur k/I , $-k/I$ ou 0 selon que le potentiel $V_i(\mathbf{x}_j)$ entre positivement, négativement ou pas du tout dans l'expression de la résistivité apparente ρ_{a_k} .

4.3.6 Discussion sur la méthode

La méthode de l'état adjoint est un moyen efficace de calcul du gradient de la fonction objective. En effet seules N_e résolutions supplémentaires, équivalentes à celles du problème direct, sont nécessaires. C'est beaucoup moins que pour la majorité des méthodes calculant les dérivées de Fréchet qui nécessitent $N_e \times M$ résolutions supplémentaires. Dans le cas du problème électrique l'équation adjointe est la même que l'équation du problème direct avec un terme source différent. De ce fait la résolution de l'équation adjointe peut être réalisée avec le même code que pour le calcul direct, rendant cette approche simple à implémenter. En contrepartie le problème de minimisation doit être résolu avec une méthode non linéaire telle que le gradient conjugué ou la méthode de Quasi-Newton. En 3D la méthode ne nécessite que $2 \times N_e$ résolutions du problème direct pour obtenir le gradient ; en 2.5D ce coût peut monter à $3 \times N_e$ selon que l'on puisse stocker les potentiels transformés sur l'ensemble du modèle et pour toutes les sources ou qu'il faille les recalculer. Il est également intéressant de noter qu'il est possible, au prix de sommations sur l'ensemble des sources et l'ensemble des paramètres, d'obtenir le Hessien par la méthode de l'état adjoint (Pratt et al., 1998).

4.4 Paramétrisation et régularisation

Les paramètres choisis pour le problème inverse ainsi que leur discrétisation ont un rôle important dans l'inversion. De bons choix à ce niveau permettent de stabiliser les résultats de l'inversion. La régularisation de l'inversion peut également passer par l'ajout de normes portant sur le modèle dans la fonction objective, ceci est particulièrement important pour assurer que le Hessien soit inversible. Plusieurs méthodes classiques existent que nous présentons ici.

4.4.1 Choix de paramètres logarithmiques

Les paramètres du modèle \mathbf{m} utilisés pour l'inversion peuvent représenter au choix la résistivité ρ ou la conductivité σ . Les densités de probabilité associées à ces paramètres sont différentes et ne sont pas constantes ; ces paramètres bien que valides ont de ce fait un comportement non trivial. Le choix de la conductivité ou de la

résistivité comme paramètre de l'inversion n'est donc pas souhaitable. Une solution pour s'affranchir de ce problème est d'utiliser comme paramètres les logarithmes des résistivités ou des conductivités. L'échelle logarithmique de telles quantités a de meilleures propriétés que l'échelle linéaire ; l'intérêt d'une telle approche est bien expliqué par [Tarantola \(2001\)](#). Un second avantage lié à l'utilisation des logarithmes est que cela impose naturellement une contrainte de positivité sur la résistivité ou la conductivité ; contrainte forte qu'il est plus facile d'introduire ainsi que par optimisation sous contraintes. Considérant le modèle de résistivité ρ^k à l'itération k , nous définissons les paramètres $\mathbf{m}^k = \log(\rho^k/\rho_0)$, où ρ_0 est une constante arbitraire que nous fixons à 1. La remise à jour du $i^{\text{ème}}$ paramètre est donnée par :

$$m_i^{k+1} = m_i^k - \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial m_i}, \quad (4.57)$$

ce qui donne la remise à jour suivante du modèle de résistivité :

$$\rho_i^{k+1} = \rho_i^k \exp\left(-\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial m_i}\right) = \rho_i^k \exp\left(-\alpha \rho_i^k \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_i}\right), \quad (4.58)$$

qui assure que le signe de ρ ne change pas et reste donc toujours positif. La contrainte de non-négativité peut être étendue pour introduire des contraintes de valeurs maximales et/ou minimales pour chaque paramètre. Cette méthode est appelée méthode de la barrière logarithmique ([Li & Oldenburg, 2003](#)). Pour introduire une limite inférieure de résistivité ρ_l au $i^{\text{ème}}$ paramètre nous le définissons comme $m_i = \log[(\rho_i - \rho_l)/\rho_0]$. Si nous souhaitons également introduire une limite supérieure ρ_u à la résistivité nous définissons le paramètre :

$$m_i = \log\left(\frac{\rho_i - \rho_l}{\rho_u - \rho_i}\right).$$

Pour les deux cas précédents la formule de remise à jour du modèle doit être adaptée en conséquence. Pour le cas avec des bornes supérieures et inférieures, la remise à jour de la cellule i du modèle de résistivité peut s'écrire :

$$\frac{\rho_i^{k+1} - \rho_l}{\rho_u - \rho_i^{k+1}} = \frac{\rho_i^k - \rho_l}{\rho_u - \rho_i^k} \exp\left(-\alpha \frac{(\rho_u - \rho_i^k)(\rho_i^k - \rho_l)}{\rho_u - \rho_l} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_i}\right) \quad (4.59)$$

Le développement n'est volontairement pas poussé jusqu'au bout ; en effet on s'aperçoit bien avec cette formule, que lors de la remise à jour, les résistivités sont bornées par les valeurs ρ_u et ρ_l . De manière pratique il est intéressant de définir des vecteurs de bornes supérieures et inférieures de résistivité dont les valeurs peuvent être variables pour les différentes cellules.

4.4.2 Discrétisation des paramètres

La discrétisation du milieu pour le problème inverse nécessite de le décomposer en sous-domaines au sein desquels les paramètres suivent une fonction connue (le

choix courant est une valeur constante). Cette décomposition doit se faire en tenant compte de plusieurs critères. Tout d'abord le domaine discrétisé doit être suffisamment vaste et décomposé en sous-domaines suffisamment petits pour qu'une solution du problème inverse existe sur cette discrétisation. Le nombre de sous-domaines et donc de paramètres ne doit cependant pas être trop important afin de limiter le caractère « mal posé » du problème inverse. Une autre raison à cela provient des limitations imposées par les ressources informatiques. Dans les cas où l'on souhaite inverser le Hessien, limiter le nombre de paramètres en tenant compte de la résolution du problème (Günther & Rücker, 2006) permet de gagner en coût de calcul et en stockage mémoire. Enfin l'arrangement des paramètres doit permettre de définir des fonctions de régularisation ainsi qu'un lien facile avec la discrétisation utilisée pour la résolution du problème direct.

Le maillage considéré pour le problème inverse doit être limité et ses frontières ne correspondent pas nécessairement à celles du modèle utilisé pour le calcul direct. Afin de tenir compte des sensibilités extérieures au dispositif (Maurer & Friedel, 2006) une extension de quelques espacements interélectrodes de part et d'autre du dispositif est nécessaire. La dimension des cellules est variable selon leur localisation. Plusieurs approches peuvent être utilisées afin de déterminer des dimensions satisfaisantes pour les paramètres. Une solution peut être l'étude des sensibilités 1D du dispositif employé (Günther, 2004). Cela permet essentiellement de définir des espacements entre lignes horizontales assez bien adaptés à une discrétisation de type grille. Une seconde solution passe par l'étude de la résolution a priori du problème inverse (Friedel, 2003). Une telle étude permet de définir plusieurs grandeurs donnant des informations sur la qualité de la résolution du problème inverse. L'une de ces grandeurs est le rayon de résolution, rayon que l'on peut utiliser pour définir la dimension des cellules. Ces approches sont toutefois des approches a priori. En effet pour obtenir la matrice de résolution du problème il faut connaître le modèle de résistivité, or le problème est ici de définir la paramétrisation avant de commencer le processus d'inversion. En pratique, pour des cas courants, l'expérience permet en général de se passer de ce type d'approche.

Pour des problèmes 2D et 3D, différentes discrétisations ont été proposées. Nous pouvons faire la différence entre celles où la discrétisation des paramètres s'appuie sur la discrétisation du problème direct et celles où les deux sont découplées. La première solution est la plus utilisée que ce soit pour des approches de type grille (Figures 4.1a et 4.1b) ou suivant des maillages non structurés (Figure 4.1c). Blome (2009) propose de définir une grille de paramètres complètement indépendante du maillage du calcul direct (maillage non structuré). Les cellules constituant le maillage du calcul direct sont ensuite regroupées en cluster de manière à ce que chaque cluster corresponde à une cellule de la grille de paramètres. Cette seconde solution est séduisante par la liberté de définition du modèle qu'elle propose ; cependant elle nécessite un algorithme complexe (Advancing front cluster algorithm) pour regrouper les cellules du calcul direct en zones de paramètre constant (Figure 4.2).

De manière générale, la résolution de la méthode électrique décroissant rapidement avec la profondeur, la dimension des cellules augmente avec la profondeur.

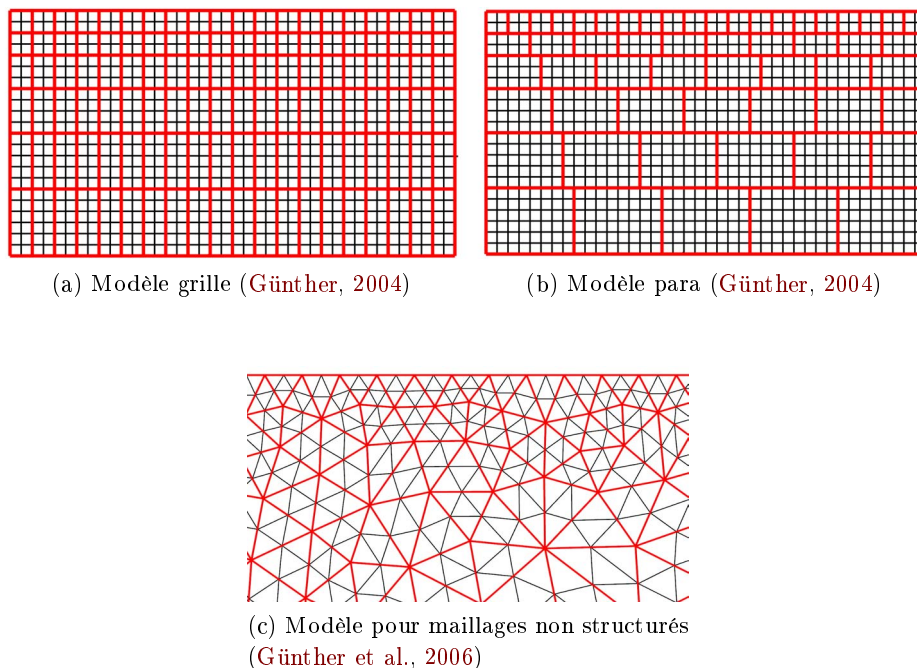


FIGURE 4.1 – Exemples de paramétrisation du problème inverse (maillage en rouge) et du problème direct (maillage en noir) ; les extensions de maillage du problème direct ne sont pas représentées.

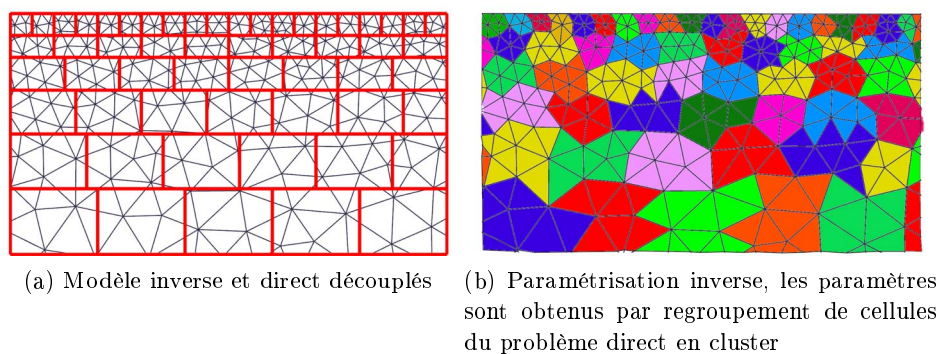


FIGURE 4.2 – Paramétrisation du problème inverse proposé par Blome (2009).

4.4.3 Techniques de régularisation

Les dispositifs d'acquisition en géophysique ne permettent qu'une illumination partielle du domaine étudié. De plus certains problèmes géophysiques (tomographie électrique, tomographie des temps de trajet) possèdent plus de paramètres

que de données. Une conséquence des deux points précédents est que le domaine étudié présente des zones plus ou moins bien résolues, et que de nombreux modèles peuvent alors expliquer les données. La résolution du problème de minimisation par les algorithmes présentés précédemment n'est généralement pas stable et les solutions oscillent fortement d'une itération à l'autre avec de forts contrastes de paramètres. Stabiliser la solution revient à réduire l'ambiguïté sur la nature de la solution. Cela passe par des choix avisés de paramétrisation mais peut également passer par d'autres techniques de régularisation.

Si le problème est résolu par une méthode de sous-espace de Krylov (gradient conjugué par exemple) la régularisation peut être implicite. En effet, ces méthodes ont la particularité de converger plus vite dans les zones où le modèle est lisse que dans les zones non lisses (Günther, 2004). Ainsi, en fonction de l'itération k_{max} à laquelle la résolution est arrêtée, nous pouvons obtenir des modèles aux caractéristiques différentes : lisses pour k_{max} faibles et plus structurés pour des valeurs de k_{max} plus importantes.

La régularisation peut également être introduite de manière explicite dans le problème de minimisation. Cela passe par l'ajout d'une fonction sur le modèle Φ_m dans la fonction objective à minimiser (méthode de régularisation de Tikhonov). La fonction objective prend alors la forme :

$$\Phi = \Phi_d + \mu\Phi_m, \quad (4.60)$$

où μ est un paramètre contrôlant l'intensité de la régularisation. La régularisation peut être vue comme un complément d'information. En plus des données nous introduisons des informations a priori sur la nature du modèle recherché. Parmi tous les modèles expliquant les données de la même manière, celui minimisant la contrainte $\Phi(m)$ est favorisé.

4.4.3.1 Contrainte de régularisation locale ou globale

La contrainte de régularisation peut porter sur la remise à jour du modèle $\Delta\mathbf{m}_k$ à chaque itération, on parle alors de régularisation locale. Chaque sous-problème est traité de manière indépendante comme un problème linéaire devant être régularisé. La fonction sur le modèle est une norme ℓ_2 de la forme :

$$\Phi_m = \|\mathbf{C}(\Delta\mathbf{m})\|^2. \quad (4.61)$$

La matrice de contrainte \mathbf{C} permet d'imposer le comportement souhaité pour la remise à jour du modèle. Une approche simple est d'imposer $\mathbf{C} = \mathbf{I}$. De cette manière la remise à jour du modèle peut être maintenue suffisamment petite pour éviter de fortes oscillations dans le modèle d'une itération à l'autre. Cette méthode est appelée méthode de Marquardt-Levenberg. Elle introduit l'idée de « damping » qui est couramment utilisé en inversion électrique (Loke & Barker, 1996b)

A l'inverse de la régularisation locale, la régularisation globale vise à imposer une contrainte portant sur le modèle lui-même. La fonction de régularisation a pour forme :

$$\Phi_m = \|\mathbf{C}(\mathbf{m})\|^2, \quad (4.62)$$

et elle reste invariante au cours de l'ensemble du processus d'inversion. Différentes contraintes peuvent être appliquées sur le modèle. Il est possible de chercher à le garder proche d'un modèle de référence ou bien de chercher à obtenir un modèle « simple », suivant ainsi le principe de Occam (moine et philosophe écossais du XIV^e siècle) :

« Pluralitas non est ponenda sine necessitate : Une pluralité ne doit pas être posée sans nécessité. »

Quelques approches classiques sont présentées ici mais ne représentent pas une liste exhaustive des méthodes existantes.

Modèle proche d'un modèle de référence

Une première manière de régulariser le problème peut être d'imposer que le modèle ne s'éloigne pas trop d'un modèle de référence \mathbf{m}_{ref} . La fonction objective peut alors s'écrire :

$$\Phi(\mathbf{m}) = \Phi_d(\mathbf{m}) + \mu \|\mathbf{C}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{ref})\|^2, \quad (4.63)$$

avec \mathbf{C} une matrice de contrainte. Cette matrice peut être l'identité ou avoir des éléments diagonaux variables afin de pondérer différemment les différents paramètres. Le modèle de référence peut être choisi à partir d'autres méthodes d'investigation ou de concepts géologiques.

Modèle lisse

La complexité d'un modèle est relativement subjective. Un modèle simple peut tout d'abord être vu comme un modèle lisse. La fonction à minimiser est alors :

$$\Phi(\mathbf{m}) = \Phi_d(\mathbf{m}) + \mu \|\mathbf{C}\mathbf{m}\|^2, \quad (4.64)$$

avec \mathbf{C} une matrice représentant un opérateur de dérivation (classiquement le gradient ou le Laplacien) (Zhang et al., 1996). Des pondérations peuvent être introduites pour les différentes orientations de la matrice de régularisation (Li & Oldenburg, 1999) afin de favoriser des changements du modèle selon certaines directions. En modifiant la matrice \mathbf{C} , il est également possible de découpler certaines cellules et ainsi d'introduire une information de structure (Günther & Rücker, 2006).

4.4.3.2 Variation totale

Un modèle simple peut également être vu comme un modèle présentant un minimum de variations des paramètres. L'approche dite de variation totale permet

d'obtenir des modèles simples en ce sens avec des discontinuités localisées à certains endroits dans l'espace. Le terme de régularisation est ici une mesure du gradient du modèle :

$$\Phi(\mathbf{m}) = \Phi_d(\mathbf{m}) + \mu \|\nabla \mathbf{m}\|_1. \quad (4.65)$$

Le terme $\|\nabla \mathbf{m}\|_1$ est la variation totale du modèle \mathbf{m} au sens de la norme ℓ_1 . Cela permet de mesurer les variations d'un modèle sans pénaliser les discontinuités. Ce terme n'étant pas différentiable en 0, il est en pratique modifié en ajoutant un terme de lissage α , petit par rapport à $\|\nabla \mathbf{m}\|_1$:

$$\|\nabla \mathbf{m}\|_1 = \left\| \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial z}\right)^2 + \alpha^2} \right\|_1. \quad (4.66)$$

Le gradient de la fonction objective devient dans ce cas :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{m}} = \frac{\partial \Phi_d}{\partial \mathbf{m}} + \lambda \nabla \cdot \frac{\nabla \mathbf{m}}{\|\nabla \mathbf{m}\|_1}. \quad (4.67)$$

Ce type de régularisation n'est pas facile à mettre en œuvre du fait des deux termes λ et α qui la contrôlent. Une implémentation permettant une bonne mesure de la variation totale est également cruciale. Plus de détails peuvent être trouvés dans [Martins et al. \(2011\)](#); [Lima et al. \(2011\)](#) où la méthode est appliquée à l'inversion gravimétrique.

4.4.3.3 Utilisation d'autres normes sur les données

Nous avons vu des termes de régularisation utilisant des normes différentes sur le modèle ; différentes normes peuvent également être utilisées pour la mesure de l'erreur sur les données. D'une manière générale on peut définir une norme ℓ_p :

$$\|\mathbf{r}\|_p = \left[\sum_{i=1}^N |r(i)|^p \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (4.68)$$

Le choix d'une bonne norme à utiliser dépend d'un a priori que l'on a sur la nature du bruit affectant les mesures. La norme ℓ_2 suppose que l'erreur sur les données est Gaussienne ; elle a tendance à favoriser un lissage local en pénalisant de fortes discontinuités ([Al-Chalabi, 1992](#)). Dans certains cas, il peut être nécessaire de supprimer des données potentiellement aberrantes afin de rendre le problème compatible avec le critère des moindres carrés. A l'inverse, lorsque l'erreur sur les données n'est pas gaussienne et que certaines données sont potentiellement aberrantes, l'utilisation de la norme ℓ_1 est préférable. Elle permet de plus de mieux préserver de forts contrastes dans le modèle. D'autres normes plus complexes peuvent être utilisées pour réaliser la minimisation ([Farquharson & Oldenburg, 1998](#)). Nous pouvons noter que l'utilisation de différentes normes sur les données est particulièrement facile dans le cas où le gradient de la fonction objective est calculé suivant la méthode de l'état adjoint ; en effet seul le terme source de l'équation 4.43 est modifié.

4.5 Conclusion

Le problème inverse électrique comme beaucoup de problèmes inverses en géophysique, est mal posé. Le problème visant à trouver un modèle expliquant les données se heurte ainsi souvent à l'absence d'une solution unique. Les méthodes de résolution sont en général complétées par différents termes de régularisation et de pondération visant à lever une partie de l'indétermination du problème. La méthode Gauss-Newton est la plus souvent utilisée pour résoudre ce problème inverse. Cet algorithme présente de bonnes propriétés de convergence mais nécessite de calculer la matrice de sensibilité. Ce calcul, selon la méthode employée, peut être très lourd, et dans le cas de problèmes de grandes dimensions les ressources mémoires peuvent être insuffisantes pour le stockage de cette matrice. Une alternative séduisante consiste à utiliser la formulation du champ adjoint au champ de potentiel pour calculer directement le gradient de la fonction objective. Cette approche est particulièrement simple à mettre en oeuvre du fait du caractère auto-adjoint du problème électrique. En pratique l'équivalent de deux calculs directs est nécessaire pour obtenir le gradient. La recherche du minimum est par contre limitée à l'utilisation d'une méthode de descente ou de Quasi-Newton dont la convergence est a priori plus lente que la méthode de Gauss-Newton. La paramétrisation du problème inverse et le choix des paramètres à inverser sont également importants pour stabiliser l'inversion. L'utilisation de logarithmes des résistivités est à ce titre intéressante, tout comme le choix d'une paramétrisation tenant compte de la résolution de la méthode.

Problème direct : implémentation et aspects pratiques

Sommaire

5.1	Méthode de résolution numérique	70
5.1.1	Différences Finies Généralisées	70
5.1.2	Résolution de l'équation de Poisson à conductivités variables	74
5.2	Implémentation	81
5.2.1	Mise en oeuvre pratique	81
5.2.2	Applications numériques	83
5.3	Comparaison entre les Différences Finies Généralisées et les Eléments Finis	92
5.3.1	Rappels sur la méthode des Eléments Finis dans le cas du problème électrique	92
5.3.2	Tests numériques de comparaison entre les codes en Différences Finies Généralisées (GFDM) et en Eléments Finis (FEM)	94
5.4	Conclusion	108

Dans ce chapitre je présente des détails sur l'implémentation du problème direct. Au cours de la thèse, j'ai commencé par travailler en utilisant les Différences Finies en abscisses curvilignes. Cela m'a progressivement amené à des formes plus générales de Différences Finies, applicables sur des maillages non structurés. Je présente ici, dans un premier temps, la méthode des Différences Finies Généralisées que j'ai employée. Je me suis intéressé au problème de la robustesse des Différences Finies vis à vis de forts contrastes de résistivité. Pour cela, j'ai étudié différentes formulations de Différences Finies pour des problèmes d'interfaces et j'ai adapté une de ces approches dans le cadre de mon implémentation. Je présente plusieurs tests simples validant le schéma Différences Finies ainsi obtenu. Dans une seconde section, je donne quelques informations sur la mise en œuvre de cette méthode pour le problème électrique. Des comparaisons avec des solutions analytiques sont présentées et valident l'approche employée. En l'absence de solutions analytiques dans le cas d'une topographie, des résultats de calcul de potentiels sont présentés, et discutés pour des cas simples. La troisième section compare des résultats obtenus avec le code en Différences Finies Généralisées, et ceux obtenus par un code Eléments Finis développé en parallèle par Hervé Chauris.

5.1 Méthode de résolution numérique

5.1.1 Différences Finies Généralisées

Comme indiqué en 3.1.3.1 la principale limitation des Différences Finies est leur limitation à des maillages structurés (grilles principalement). Il est toutefois possible avec une approche en Différences Finies adaptée de travailler sur des maillages non structurés ; de nombreux travaux ont porté sur le sujet au cours des années 1970 (Jensen, 1972; Perrone & Kao, 1975), essentiellement dans le domaine de la mécanique. Ce type d'approche en Différences Finies permet de s'affranchir d'une grille régulière ; c'est essentiel par exemple pour une bonne représentation de la topographie ou pour effectuer des raffinements locaux du maillage (autour de la source ou d'un contraste). Nous avons décidé d'étudier la possibilité d'utiliser de telles méthodes pour résoudre le problème direct électrique. Nous avons utilisé la méthode dite des Différences Finies Généralisées introduite par Liszka & Orkisz (1980). Les Différences Finies Généralisées ont été introduites en étant liées à l'utilisation d'un maillage, toutefois le calcul d'une formule de Différences Finies peut s'effectuer sur un nuage de points sans considérations topologiques. Cette approche dite « meshless » est particulièrement intéressante pour des problèmes dont la géométrie est très variable dans le temps (déplacements de particules dans un fluide, calculs astrophysiques) et a suscité un regain d'intérêt pour cette méthode (Benito et al., 2001; Gavete et al., 2003; Benito et al., 2007). Une étude approfondie des différentes approches par Différences Finies sans maillages a été réalisée par Seibold (2006).

5.1.1.1 Calcul de la formule des Différences Finies sur un nuage de points

Nous présentons ici le calcul de la formule des Différences Finies Généralisées pour un ensemble de m points sélectionnés autour d'un point central (x_c, z_c) (Figure 5.1). Nous effectuons ici le développement en 2D mais l'extension à trois dimensions est sans difficulté.

Le potentiel $V(x, z)$ peut être approché autour d'un point (x_c, z_c) par un développement de Taylor, ici à l'ordre 2 :

$$V = V_c + h \frac{\partial V_c}{\partial x} + k \frac{\partial V_c}{\partial z} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V_c}{\partial x^2} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 V_c}{\partial z^2} + hk \frac{\partial^2 V_c}{\partial x \partial z} + o(\eta^3), \quad (5.1)$$

où $V = V(x, z)$, $V_c = V(x_c, z_c)$, $h = x - x_c$, $k = z - z_c$, $\eta = \sqrt{h^2 + k^2}$.

L'équation 5.1 doit être vérifiée pour chacun des $m + 1$ points (le point central (x_c, z_c) et ses m voisins). Nous obtenons alors un système de $m + 1$ équations linéaires :

$$\mathbf{A} \mathbf{d}_v = \mathbf{v} \quad (5.2)$$

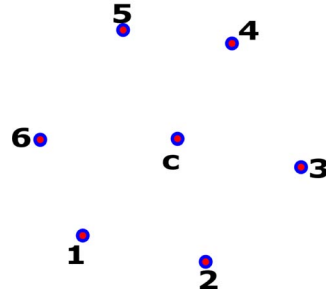


FIGURE 5.1 – Points de l'espace utilisés pour le calcul des dérivées partielles au point central (c).

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h_1 & k_1 & \frac{h_1^2}{2} & \frac{k_1^2}{2} & h_1 k_1 \\ 1 & h_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 1 & h_m & & & & \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{v}^t = (V_c, V_1, V_2, \cdots, V_m), \quad (5.4)$$

et

$$\mathbf{d}_{\mathbf{v}}^t = \left(V_c, \frac{\partial V_c}{\partial x}, \frac{\partial V_c}{\partial y}, \frac{\partial^2 V_c}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V_c}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V_c}{\partial x \partial y} \right). \quad (5.5)$$

Le système d'équation 5.2 est potentiellement surdéterminé; pour obtenir sa solution nous cherchons à minimiser au sens des moindres carrés la norme B par rapport à $\mathbf{d}_{\mathbf{v}}$, avec :

$$B(\mathbf{v}) = \|\mathbf{A}\mathbf{d}_{\mathbf{v}} - \mathbf{v}\|^2. \quad (5.6)$$

Notons qu'il est possible d'introduire dans l'expression de cette norme des pondérations tenant compte de l'éloignement des différents points par rapport au point central. La minimisation de B conduit à un système linéaire de six équations à

six inconnues $\mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{d}_v = \mathbf{A}^t \mathbf{v}$. Plus explicitement ce système s'écrit sous sa forme matricielle :

$$\begin{bmatrix}
 1 & \sum_i h_i & \sum_i k_i & \sum_i \frac{h_i^2}{2} & \sum_i \frac{k_i^2}{2} & \sum_i h_i k_i \\
 \sum_i h_i & \sum_i h_i^2 & \sum_i h_i k_i & \sum_i \frac{h_i^3}{2} & \sum_i \frac{k_i^2 h_i}{2} & \sum_i h_i^2 k_i \\
 \sum_i k_i & \sum_i h_i k_i & \sum_i k_i^2 & \sum_i \frac{h_i^2 k_i}{2} & \sum_i \frac{k_i^3}{2} & \sum_i h_i k_i^2 \\
 \sum_i \frac{h_i^2}{2} & \sum_i \frac{h_i^3}{2} & \sum_i \frac{h_i^2 k_i}{2} & \sum_i \frac{h_i^4}{4} & \sum_i \frac{h_i^2 k_i^2}{4} & \sum_i \frac{h_i^3 k_i}{2} \\
 \sum_i \frac{k_i^2}{2} & \sum_i \frac{h_i k_i^2}{2} & \sum_i \frac{k_i^3}{2} & \sum_i \frac{h_i^2 k_i^2}{4} & \sum_i \frac{k_i^4}{4} & \sum_i \frac{h_i k_i^3}{2} \\
 \sum_i h_i k_i & \sum_i h_i^2 k_i & \sum_i h_i k_i^2 & \sum_i \frac{h_i^3 k_i}{2} & \sum_i \frac{h_i k_i^3}{2} & \sum_i h_i^2 k_i^2
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 V_c \\
 \frac{\partial V_c}{\partial x} \\
 \frac{\partial V_c}{\partial y} \\
 \frac{\partial^2 V_c}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial^2 V_c}{\partial y^2} \\
 \frac{\partial^2 V_c}{\partial x \partial y}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \sum_i V_i \\
 \sum_i V_i h_i \\
 \sum_i V_i k_i \\
 \sum_i V_i \frac{h_i^2}{2} \\
 \sum_i V_i \frac{k_i^2}{2} \\
 \sum_i V_i h_i k_i
 \end{pmatrix}
 \quad (5.7)$$

Nous ne recherchons pas directement les valeurs des dérivées partielles mais les pondérations à appliquer aux différents points $(c, 1, \dots, m)$ pour obtenir leur approximation par Différences Finies. Nous posons $\mathbf{d}_v = \mathbf{W} \mathbf{v}$, avec

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 w_c^x & w_1^x & w_2^x & \dots & w_m^x \\
 w_c^y & w_1^y & w_2^y & \dots & w_m^y \\
 w_c^{xx} & w_1^{xx} & w_2^{xx} & \dots & w_m^{xx} \\
 w_c^{yy} & w_1^{yy} & w_2^{yy} & \dots & w_m^{yy} \\
 w_c^{xy} & w_1^{xy} & w_2^{xy} & \dots & w_m^{xy}
 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Les w représentent ici les poids des Différences Finies de la dérivée partielle indiquée en exposant s'appliquant au point indiqué en indice. Nous obtenons donc $\mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{W} = \mathbf{A}^t$, d'où $\mathbf{W} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t$. La résolution de ce système requiert que $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ soit inversible. En pratique, pour des développements au deuxième ordre, l'utilisation d'au minimum 6 points est nécessaire en 2D, ce nombre de points minimum est de 10 dans le cas 3D. Pour des développements au premier ordre le nombre de points minimum est de 4 en 2D et de 5 en 3D.

5.1.1.2 Utilisation de maillages non structurés

Le calcul d'une formule en Différences Finies est possible sur un ensemble de points non structurés. Toutefois cet ensemble de points doit respecter des condi-

tions sur le nombre de points le composant et l'agencement de ces points dans l'espace (surtout lorsque le système matriciel est très surdéterminé) (Liszka & Orkisz, 1980; Gavete et al., 2003). La recherche, sans information topologique, d'ensemble de points respectant ces critères s'avère lourde d'un point de vue calculatoire. Afin d'éviter cette recherche nous utilisons des maillages triangulaires ou tétraédriques non structurés nous fournissant une information topologique (Geuzaine & Remacle, 2009). Les ensembles de points que nous considérons sont composés d'un point central (où sont estimées les dérivées) et des points qui lui sont directement reliés par une arête (Figure 5.2). Les ensembles de points ainsi sélectionnés sont satisfaisants d'un point de vue agencement des points dans l'espace. L'utilisation de maillages nous permet également de lever le problème de la définition dans l'espace des paramètres ; les conductivités peuvent ainsi être définies de manière simple, constante dans chaque cellule.

Cependant le nombre de points minimum n'est pas toujours atteint. Dans les cas 2D l'utilisation d'un algorithme de maillage de type Delaunay et de l'option « try to avoid 4 triangles nodes », présente dans le logiciel de maillage gmsh (Geuzaine & Remacle, 2009) évitant la création de points communs à quatre triangles, nous permet de régler ce point. Pour des cas 3D, ce problème est plus fréquent ; un réarrangement des connexions du maillage nous permet de le limiter, voire de le résoudre mais sans garantie de succès pour chaque maillage. Les algorithmes de génération de maillage implémentés dans le logiciel gmsh (comme la majorité des algorithmes de génération de maillage non structuré) sont prévus pour la méthode des Éléments Finis. Une adaptation serait nécessaire pour les rendre pleinement efficaces pour les méthodes des Différences Finies Généralisées. Des exemples de répartitions des nombres de connexions pour des maillages 2D et 3D sont donnés à la figure 5.3. Le nombre de connexions est pour ces deux exemples satisfaisant pour tous les points. Dans le cas où des points manquent de connexions, nous avons adopté une correction par régularisation pour ce problème. Nous augmentons le rang de la matrice $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$, jusqu'au rang minimal la rendant inversible, par l'ajout d'un terme de damping. Ainsi nous obtenons $\mathbf{W} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \lambda I)^{-1} \mathbf{A}^t$; cependant cette approche n'est probablement pas optimale.

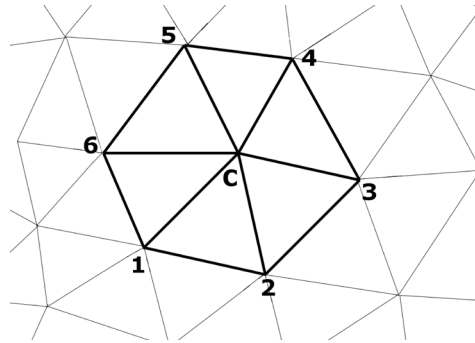


FIGURE 5.2 – Ensemble des points sélectionnés pour le calcul des dérivées partielles au point central (c).

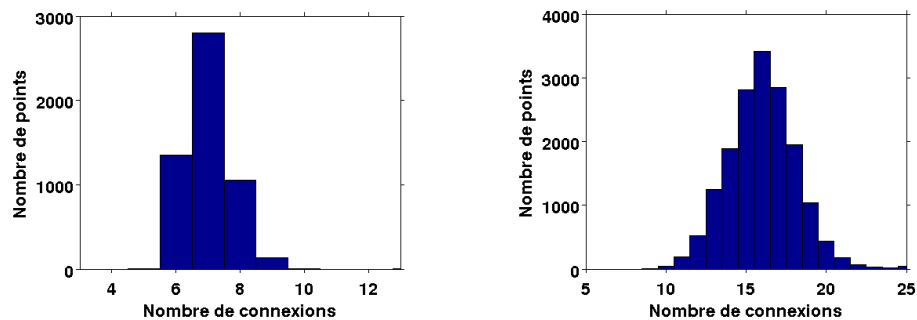


FIGURE 5.3 – Nombre de connexions entre les points pour un maillage 2D de 5390 points (gauche) et un maillage 3D de 16910 points (droite).

Nous avons vu dans cette sous-section comment appliquer la méthode des Différences Finies à des maillages non structurés au moyen de la méthode des Différences Finies Généralisées. Dans la suite de cette section nous allons expliciter la version discrétisée de l'équation de Poisson.

5.1.2 Résolution de l'équation de Poisson à conductivités variables

5.1.2.1 Prise en compte de forts contrastes de paramètres en Différences Finies

Comme nous l'avons vu en 2.2.1, la gamme de résistivités des matériaux qui nous intéresse est très large et de forts contrastes peuvent être rencontrés ; ils doivent donc être modélisés. Ces larges contrastes, de l'ordre de 10 à 10^4 dégradent a priori sévèrement la qualité de la solution en Différences Finies. Nous allons étudier avec soin différentes discrétisations possibles en Différences Finies (définition des conductivités et de leurs moyennes), puis nous allons adapter une de ces approches aux Différences Finies Généralisées. Une comparaison avec la méthode des Eléments

Finis, réputée pour mieux prendre en compte les forts contrastes, sera présentée à la fin de ce chapitre.

Plusieurs solutions existent pour traiter les forts contrastes en Différences Finies sur des grilles cartésiennes. Dans ces approches, les interfaces ou discontinuités ne sont pas nécessairement définies le long de la grille (Figure 5.4). Nous les introduisons ici brièvement puis développons une solution simple compatible avec notre approche en Différences Finies Généralisées.

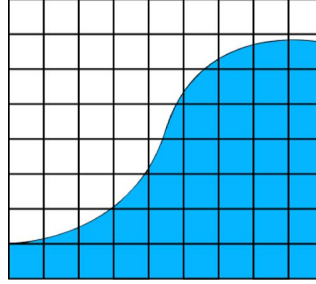


FIGURE 5.4 – Interface intersectant une grille cartésienne.

Solution de lissage et de moyennes harmoniques

Une première solution couramment utilisée dans ce type de problème est la solution de lissage pour des coefficients discontinus (Li, 2003). Considérons un espace à une dimension et un coefficient $\sigma(x)$ qui présente une discontinuité à $x = x_d$, c'est à dire que $[\sigma] = \lim_{x \rightarrow d^+} \sigma(x) - \lim_{x \rightarrow d^-} \sigma(x) \neq 0$. Il est possible de définir :

$$\sigma^- = \begin{cases} \sigma(x), & \text{si } x \leq d, \\ 0, & \text{si } x > d, \end{cases} \quad \sigma^+ = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq d, \\ \sigma(x), & \text{si } x > d. \end{cases} \quad (5.9)$$

Le paramètre σ peut être lissé en utilisant la formule :

$$\sigma_\varepsilon(x) = \sigma^-(x) + (\sigma^+(x) - \sigma^-(x))H_\varepsilon(x - d) \quad (5.10)$$

où H_ε est la fonction de Heaviside lissée

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -\varepsilon \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{\varepsilon} \right), & \text{si } |x| \leq \varepsilon, \\ 1, & \text{si } x > \varepsilon, \end{cases} \quad (5.11)$$

où ε est un petit nombre dépendant du pas du schéma numérique. Cette méthode de lissage n'est pas très précise et a tendance à lisser la solution (Li, 2003) ; de plus l'extension de cette méthode en deux dimensions n'est pas simple à implémenter.

Une seconde solution classique et plus précise est la méthode des moyennes harmoniques pour les coefficients discontinus (Leveque & Li, 1994; Li, 2003). Considérons pour l'exemple l'expression $\nabla \cdot \sigma \nabla V$ en 1D. Sa forme discrète peut s'écrire :

$$\frac{1}{h^2} \left[\sigma_{i+\frac{1}{2}} (V_{i+1} - V_i) - \sigma_{i-\frac{1}{2}} (V_i - V_{i-1}) \right]. \quad (5.12)$$

Si σ est lisse nous pouvons prendre $\sigma_{i+\frac{1}{2}} = \sigma(x_{i+\frac{1}{2}})$, où $x_{i+\frac{1}{2}} = (x_i + x_{i+1})/2$, et maintenir une discrétisation précise au second ordre. Si σ est discontinue sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ la méthode utilise sa moyenne harmonique :

$$\sigma_{i+\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{\sigma(x)} dx \right]^{-1}. \quad (5.13)$$

Cette formulation peut être justifiée par la théorie de l'homogénéisation. Elle est du second ordre dans un cas 1D à condition que l'intégrale soit évaluée avec suffisamment de précision, ce qui n'est pas évident à proximité de l'interface. L'extension à deux dimensions est possible mais ne procure plus dans ce cas une formule valable au second ordre (Li, 2003).

Formulation des Différences Finies pour problèmes d'interfaces

Depuis les années 1970 de nombreux travaux ont porté sur la résolution en Différences Finies, sur des grilles cartésiennes, de problèmes elliptiques à coefficients discontinus et sources singulières. La première approche a été celle de Peskin (1977), utilisée pour modéliser la circulation du flux sanguin dans le cœur. L'idée initiale était de résoudre le problème (équation de Navier-Stokes dans ce cas) sur une grille cartésienne sans tenir compte de la géométrie très variable des parois cardiaques au cours du temps. Cette frontière, que sont les parois, est considérée comme immergée dans un fluide et comme se déplaçant localement à la même vitesse ; la frontière exerce une force sur le fluide qui est concentré sur le bord. Il en résulte que la dérivée normale à la frontière de la vitesse tangentielle est discontinue et présente un saut à l'interface ; c'est également le cas pour la pression. La méthode proposée par Peskin (1977) permet de résoudre ce type de problème dans le cas d'une condition de saut à l'interface mais pas dans le cas d'une discontinuité des coefficients. Plusieurs autres approches ont été développées depuis afin de solutionner ce problème précis ; nous pouvons mentionner l'« immersed interface method » (IIM) (Leveque & Li, 1994), la « ghost fluid method » (Fedkiw et al., 1999), ou encore la « matched interface and boundary method » (MIB) (Yu et al., 2007). Ces méthodes sont relativement proches et se différencient essentiellement par la nature des interfaces qu'elles peuvent prendre en compte : lisse pour la méthode IIM, présentant des angles aigus pour la méthode MIB. Ces méthodes considèrent des interfaces intersectant des grilles cartésiennes, cela permet l'utilisation d'algorithmes de résolution optimisés de l'équation de Poisson valable sur des grilles cartésiennes. Ceci est particulièrement intéressant dans des problèmes dépendants du temps où il s'agit de les résoudre à chaque pas de temps et avec une géométrie de l'interface variable.

5.1.2.2 Schéma des Différences Finies tenant compte d'interfaces le long des cellules

Ici nous nous intéressons à modifier la méthode MIB afin de pouvoir l'appliquer à notre approche en Différences Finies Généralisées. Par simplification nous nous limitons au cas particulier où les interfaces sont alignées avec la grille. Nous étudions d'abord ce cas sur une grille cartésienne puis nous l'étendons au cas d'un maillage non structuré à mailles triangulaires (Penz et al., 2011).

Cas particulier d'une grille cartésienne

Considérons le problème électrique à deux dimensions où le potentiel est continu mais pas nécessairement dérivable. Autour d'un point central (i,j) se situant sur l'interface et que nous considérons comme appartenant au domaine de conductivité σ_1 (Figure 5.5, gauche) nous pouvons écrire la contribution horizontale du Laplacien

$$\partial_x (\sigma \partial_x V) = \sigma_1 (w_{i-1,j}^{xx}, w_{i,j}^{xx}, w_{i+1,j}^{xx}) \cdot (F_{i-1,j}, V_{i,j}, V_{i+1,j})^t \quad (5.14)$$

$$= \frac{\sigma_1}{dx^2} (1, -2, 1) \cdot (F_{i-1,j}, V_{i,j}, V_{i+1,j})^t. \quad (5.15)$$

Dans l'expression précédente $w_{i-1,j}^{xx}$, $w_{i,j}^{xx}$ and $w_{i+1,j}^{xx}$ représentent les pondérations en Différences Finies de la dérivée seconde selon x . Le potentiel $V_{i-1,j}$ n'est pas associé à un point se situant dans le domaine de conductivité σ_1 , il ne peut donc pas être introduit dans la formule des Différences Finies. Nous introduisons une valeur fictive de potentiel $F_{i-1,j}$ à la place. Dans un milieu localement homogène et de conductivité σ_1 , $F_{i-1,j}$ serait égal à $V_{i-1,j}$.

Au point central (i,j) nous pouvons écrire les conditions de saut de part et d'autre de l'interface; elles sont directement reliées aux propriétés physiques du potentiel (Equations 2.24 et 2.25)

$$V_{i,j}^4 = V_{i,j}^1 \quad (5.16)$$

et

$$\sigma_4 \partial_n V_{i,j}^4 = \sigma_1 \partial_n V_{i,j}^1, \quad (5.17)$$

où $V_{i,j}^4$ représente le potentiel au point (i,j) en considérant le point (i,j) comme appartenant au domaine de conductivité σ_4 et $V_{i,j}^1$ représente le potentiel au point (i,j) en considérant le point (i,j) comme appartenant au domaine de conductivité σ_1 . Dans notre cas nous constatons que $V_{i,j} = V_{i,j}^1$, et en utilisant les conditions de saut nous pouvons écrire la condition de continuité au niveau de l'interface :

$$\sigma_1 (V_{i,j} - F_{i-1,j}) = \sigma_4 (V_{i,j} - V_{i-1,j}). \quad (5.18)$$

Nous obtenons ainsi une expression de la valeur fictive $F_{i-1,j}$ que nous pouvons remplacer dans l'expression horizontale du Laplacien (Equation 5.14). En utilisant la

même stratégie pour la composante verticale nous obtenons l'expression du Laplacien suivante :

$$\begin{aligned} \nabla\sigma \cdot \nabla V &= \frac{(\sigma_4 V_{i-1,j} - [\sigma_4 + \sigma_1] V_{i,j} + \sigma_1 V_{i+1,j})}{dx^2} \\ &+ \frac{(\sigma_1 V_{i,j-1} - [\sigma_1 + \sigma_2] V_{i,j} + \sigma_2 V_{i,j+1})}{dz^2}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

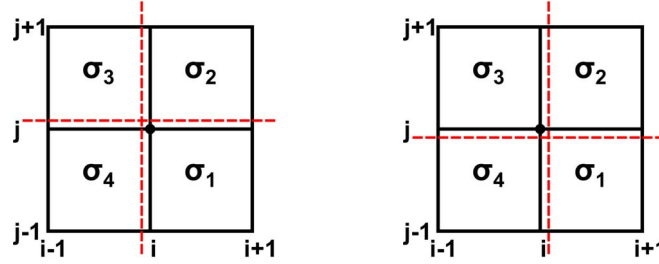


FIGURE 5.5 – Interfaces alignées avec une grille cartésienne.

Afin d'obtenir une expression symétrique, nous effectuons le même développement pour le Laplacien mais en considérant maintenant le point (i,j) comme appartenant au domaine de conductivité σ_3 (Figure 5.5, droite). Finalement nous effectuons la moyenne de ces deux expressions du Laplacien et obtenons :

$$\begin{aligned} \nabla\sigma \cdot \nabla V &= \frac{(\frac{1}{2} [\sigma_4 + \sigma_3] V_{i-1,j} - 2\sigma_m V_{i,j} + \frac{1}{2} [\sigma_1 + \sigma_2] V_{i+1,j})}{dx^2} \\ &+ \frac{(\frac{1}{2} [\sigma_4 + \sigma_1] V_{i,j-1} - 2\sigma_m V_{i,j} + \frac{1}{2} [\sigma_2 + \sigma_3] V_{i,j+1})}{dz^2}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

où $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) / 4$ est la valeur moyenne de la conductivité. Cette expression est utilisée pour tous les points du domaine discrétisé. Les valeurs de conductivités sur les arêtes sont égales à la moyenne des conductivités entre les deux cellules adjacentes.

- Exemple numérique :

Nous considérons l'équation de Poisson sur le domaine 2D : $x = [-1, 1]$; $z = [-1, 1]$ km². La conductivité du domaine est $\sigma_1 = 10^3 \Omega.m$ à l'intérieur d'un cercle de rayon 0.5 km centré en $(0,0)$, et $\sigma_2 = 1 \Omega.m$ à l'extérieur. La solution exacte est $V(r) = (r - 0.5)\sigma(r)$, avec $r = \sqrt{x^2 + z^2}$. Nous calculons la solution numérique sur une grille cartésienne régulière de 37×37 points. Des conditions de Dirichlet sont imposées aux bords du domaine et au centre du cercle. Nous constatons que la solution numérique et la solution analytique sont très proches (Figure 5.6) sans raffinement particulier du maillage. La figure 5.7 montre la différence par rapport à la solution analytique lorsque l'on utilise soit la méthode de lissage harmonique soit la méthode décrite ici. Nous constatons que l'erreur est plus faible et plus localisée avec notre approche. Cela confirme la validité de cette formulation.

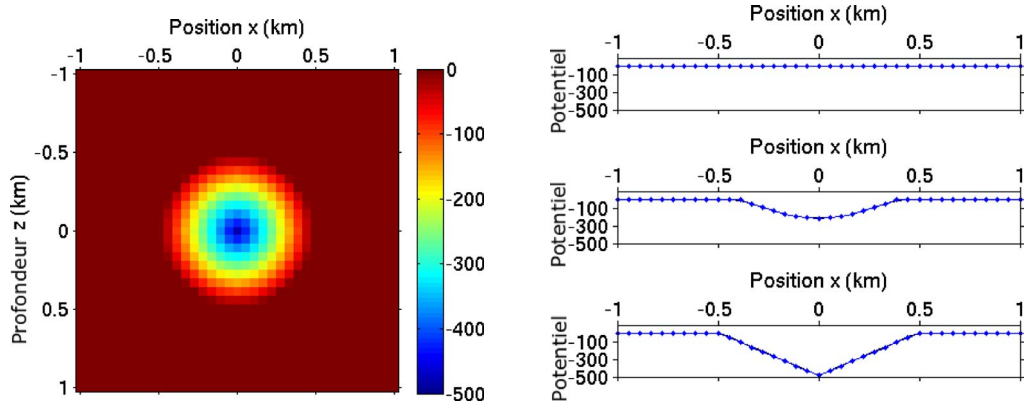


FIGURE 5.6 – Solution numérique du potentiel (gauche) et comparaison entre la solution numérique (noire) et la solution analytique (bleue) pour trois profondeurs $z=-0.5, -0.25$ et 0 km (droite).

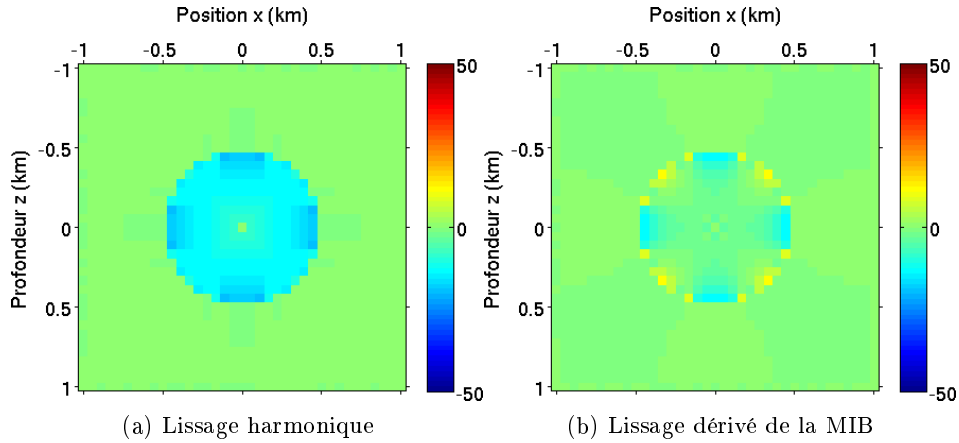


FIGURE 5.7 – Résidus entre la solution numérique et la solution analytique.

Cas des Différences Finies Généralisées sur des maillages non structurés

Dans le cas de maillages non structurés, nous considérons également les paramètres comme définis au centre des cellules. En appliquant la même méthode que pour le cas sur une grille cartésienne nous obtenons la formule généralisée donnée ci-après. La discrétisation en Différences Finies Généralisées 2D du terme de gauche de l'équation 3.28 peut s'écrire :

$$\nabla \cdot \sigma \nabla V_s = - \left(\sum_{k=1}^m (w_k^{xx} + w_k^{zz}) \bar{\sigma}_k \right) V_c + \sum_{k=1}^m (w_k^{xx} + w_k^{zz}) \bar{\sigma}_k V_{sk}, \quad (5.21)$$

où w_k^{xx} et w_k^{zz} sont les pondérations Différences Finies Généralisées des dérivées secondes selon x et z associées au point k . $\bar{\sigma}_k$ représente la conductivité moyenne

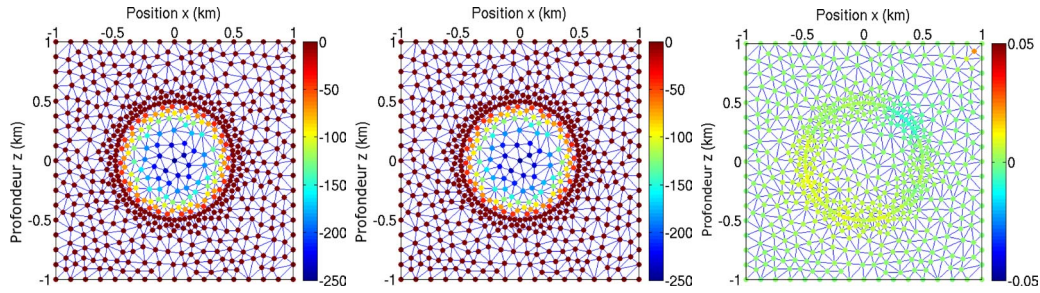


FIGURE 5.9 – Solution analytique (gauche), solution numérique (centre) et différences entre les deux solutions (droite).

des cellules contenant le point central c et le point k (Figure 5.8). Nous pouvons constater que le poids à appliquer au point central peut être obtenu de manière à ce que la somme de l'ensemble des poids soit nulle.

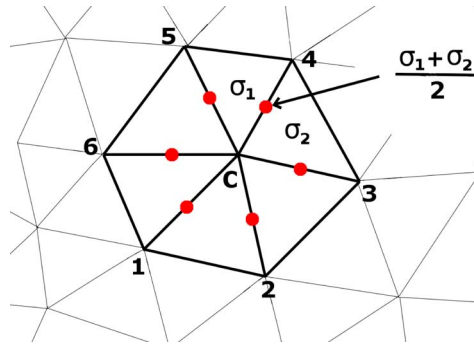


FIGURE 5.8 – Position et définition des résistivités moyennes sur les arêtes (points rouges).

- Exemple numérique :

Nous considérons ici un cas similaire à l'exemple numérique précédent. Seule la solution exacte est différente. Ici elle est égale à $V(r) = (r - 0.5)(1 + g[r - 0.5])/\sigma(r)$, avec $g = 1$ à l'intérieur du cercle et $g = 2$ à l'extérieur. La solution est calculée sur un maillage triangulaire avec 599 points. La solution numérique est également très proche de la solution analytique (Figure 5.9). Les erreurs les plus fortes se trouvent de part et d'autre de l'interface, leur intensité varie en fonction de la dimension des mailles. Nous constatons un point en haut à gauche du domaine où l'erreur est plus importante. Ce point ne satisfait pas le critère sur le nombre de points voisins minimum ; l'approximation des dérivées partielles en ce point n'est donc pas bonne.

5.2 Implémentation

5.2.1 Mise en oeuvre pratique

5.2.1.1 Maillages utilisés

Nous résolvons le problème sur des maillages triangulaires ou tétraédriques générés au moyen du logiciel open-source gmsh (Geuzaine & Remacle (2009), <http://geuz.org/gmsh/>). La densité du maillage est forte au niveau de la zone d'intérêt puis diminue fortement en direction des bords $\partial\Omega$. Les bords sont placés en étendant le maillage de part et d'autre de la zone d'intérêt, l'extension ainsi ajoutée est de l'ordre de dix fois le plus grand espacement interélectrodes. Les figures 5.10a et 5.10b montrent deux maillages typiquement utilisés en 2D et 3D, la zone d'intérêt est bien visible en raison de la forte densité de maillage.

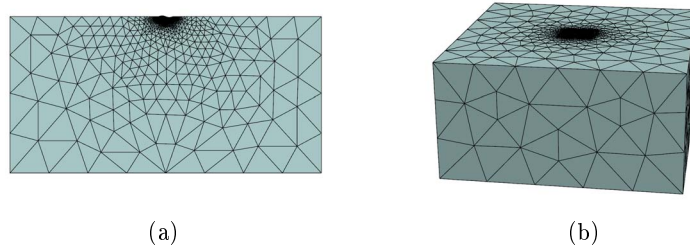


FIGURE 5.10 – Maillages typiquement utilisés en 2D et en 3D.

5.2.1.2 Conditions aux bords

La large extension du maillage nous permet d'imposer des conditions de Dirichlet $V_s = 0$ sur les bords $\partial\Omega$. Pour les conditions de surface libre, nous utilisons une expression en Différences Finies centrée à l'ordre 1 de la dérivée normale à la surface. Pour cela nous créons des triangles (ou tétraèdres) fictifs symétriques des triangles (ou tétraèdres) présentant une arête (ou face) sur la surface Γ . La figure 5.11 montre les triangles fictifs créés pour un schéma centré autour d'un point à la surface. En suivant les notations de la figure 5.11 nous pouvons écrire :

$$V_{s6} - V_{s2} = -(V_{p6} - V_{p2}). \quad (5.22)$$

Nous pouvons procéder de la même manière avec les points 3 et 5. Finalement nous remplaçons dans l'équation 5.21 les potentiels secondaires aux points fictifs par leurs expressions en fonction des potentiels secondaires aux points réels et des potentiels primaires analytiques. Ainsi le problème ne dépend plus des valeurs aux points fictifs. Le cas présenté ici tient compte de la décomposition du potentiel ; pour la résolution de l'équation adjointe il n'y pas de décomposition et le problème est plus simple : nous avons alors simplement $\lambda_{s6} - \lambda_{s2} = 0$.

Dans le cas du problème avec décomposition du potentiel en 2.5D, il est important

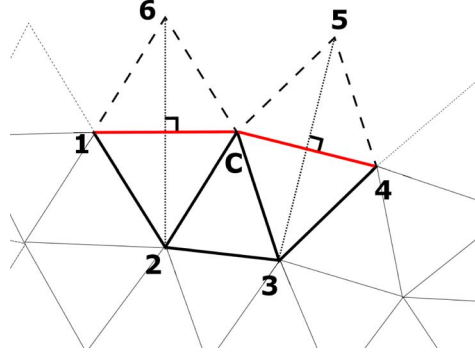


FIGURE 5.11 – Points du schéma en Différences Finies pour un point central en surface montrant les points et les triangles fictifs.

de noter que nous considérons la transformée de Fourier du potentiel primaire. Nous avons alors $\tilde{V}_{s6} - \tilde{V}_{s2} = -(\tilde{V}_{p6} - \tilde{V}_{p2})$. En utilisant une approche similaire à celle présentée en 3.3.1 nous pouvons exprimer le potentiel transformé sous la forme :

$$\tilde{V}_p = \frac{I}{2\pi\sigma_0 r_0} \int_0^\infty \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]^{-1/2} \cos(k_y y) dy, \quad (5.23)$$

ou encore

$$\tilde{V}_p = \frac{I}{2\pi\sigma_0 r_0} \int_0^\infty \left(1 + \frac{y^2}{r_0^2} \right)^{-1/2} \cos(k_y y) dy. \quad (5.24)$$

Comme nous l'avons indiqué en 3.3.1, l'intégrale (légèrement différente ici) peut être calculée une fois uniquement, à l'initialisation du code, puis stockée, pour chaque point et chaque source. En tenant compte de cette formulation du potentiel transformé, la discrétisation des conditions de Neumann pour les points 2 et 6 donne :

$$\tilde{V}_{s6} - \tilde{V}_{s2} = -\frac{I}{2\pi} \left[\frac{1}{\sigma_0(6)r_0(6)} \int_0^\infty \left(1 + \frac{y^2}{r_0(6)^2} \right)^{-1/2} \cos(k_y y) dy - \frac{1}{\sigma_0(2)r_0(2)} \int_0^\infty \left(1 + \frac{y^2}{r_0(2)^2} \right)^{-1/2} \cos(k_y y) dy \right]. \quad (5.25)$$

5.2.1.3 Résolution du système linéaire

La discrétisation en Différences Finies Généralisées du problème 3.28 donne un système linéaire de la forme $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$ où la matrice \mathbf{A} est très creuse. Pour résoudre ce système nous utilisons une méthode itérative de type gradient biconjugué avec un préconditionneur de type Jacobi (Nishida, 2012). Dans le cas 3D, la matrice \mathbf{A} ne dépendant pas de la position de la source, l'utilisation d'un algorithme de résolution direct pourrait permettre d'accélérer le calcul direct en inversant la matrice une seule fois pour l'ensemble des sources.

5.2.2 Applications numériques

5.2.2.1 Comparaison à des solutions analytiques

Afin de valider l'approche et l'implémentation que nous avons décrite précédemment pour la résolution du problème direct nous comparons ici nos résultats à des solutions existantes.

Cas du contact vertical en 2.5D et 3D

Le premier test numérique porte sur le cas d'un modèle présentant un contact vertical entre un milieu à $100 \Omega.m$ et un milieu à $500 \Omega.m$. Les résultats présentés à la figure 5.12 montrent les résistivités apparentes pour un dispositif Schlumberger perpendiculaire au contact. Les électrodes de courant sont espacées de 24 m et les électrodes de potentiel le sont de 4 m. Les solutions numériques 2.5D et 3D sont satisfaisantes. La ligne pointillée noire représentant la solution numérique 2.5-D, la ligne pointillée bleue représentant la solution 3D, et les points rouges représentant la solution analytique se superposent bien. La solution 3D est meilleure que la solution 2.5D ce qui s'explique du fait de l'erreur introduite par le nombre limité de nombres d'ondes utilisés pour la transformée de Fourier. Nous en avons ici sélectionné 12. Un nombre entre 10 et 20 semble par expérience un bon compromis entre la précision de la solution et le coût du calcul. Ce problème du contact vertical sera étudié plus en détail lors de la comparaison avec les Eléments Finis (voir section 5.3). Nous étudierons notamment l'influence sur la solution de certains facteurs tels que la densité du maillage, le choix des nombres d'ondes, l'intensité du contraste.

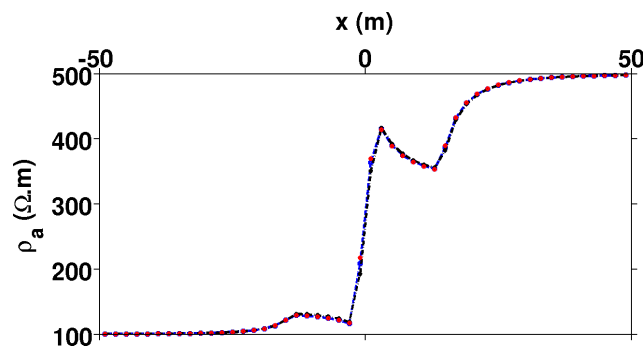


FIGURE 5.12 – Courbes de résistivités apparentes pour un dispositif Schlumberger sur un contact vertical situé à $x = 0$ m.

Cas de la sphère enterrée en 3D

La solution analytique pour le cas d'une sphère enterrée nous permet d'effectuer une seconde vérification des résultats numériques. Un profil de résistivité a été obtenu avec une modélisation 3D dans le cas d'une sphère conductrice de $0.5 \Omega.m$ dans un milieu plus résistant à $10 \Omega.m$. Pour obtenir ce profil, et afin de respecter les conditions de validité de la solution pseudo-analytique (approximation de Born),

deux électrodes de courant sont espacées de 600 m et deux électrodes de potentiel séparées de 2 m sont déplacées au milieu. Ces électrodes ne sont jamais situées à moins de 239 m d’une électrode de courant. Le résultat ainsi obtenu (courbe bleue) montre lui aussi une bonne adéquation avec la solution analytique (points rouges) (voir Figure 5.13).

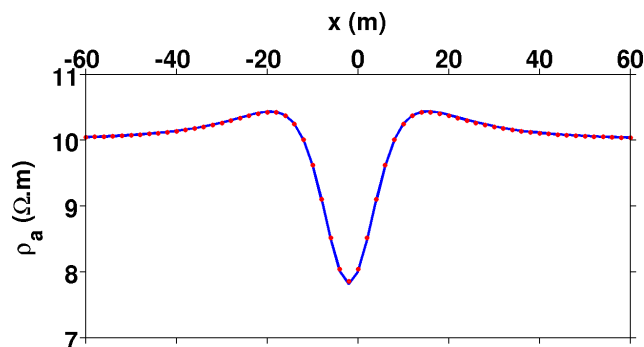


FIGURE 5.13 – Courbes de résistivités apparentes au dessus d’une sphère conductrice enterrée.

5.2.2.2 Exemple de calculs sur des modèles incluant une topographie

Validation de la solution dans le cas d’une topographie arbitraire

Nous ne disposons pas de solution analytique dans le cas d’une topographie non plane. Une première approche pour obtenir une vérification qualitative de la solution est de comparer le signe du potentiel secondaire à celui de la dérivée normale du potentiel à la surface. Le signe de la dérivée peut être obtenu facilement en regardant l’angle formé entre la normale à la surface et les équipotentielles circulaires ayant pour centre la position de la source. La figure 5.14 présente des exemples de signes de la dérivée pour trois positions de source différentes. Nous observons que selon la position de la source le signe peut être soit positif soit négatif autour de celle-ci, pour la troisième position présentée (Figure 5.14c) le signe change de part et d’autre de la source. Cette première approche est qualitative et limitée à la surface ; une meilleure comparaison passe par la comparaison avec une autre solution numérique.

Nous avons comparé notre solution en Différences Finies Généralisées à une solution calculée avec la méthode des solutions fondamentales que nous avons également implémentée (Poullikkas et al., 1998; Tsai et al., 2006). Comme avec la méthode BEM il est ici uniquement nécessaire de discrétiser les frontières du domaine étudié. La méthode, valable en milieu homogène, consiste à calculer le potentiel comme la somme pondérée de fonctions de Green associées à des sources fictives ; ces sources étant positionnées à l’extérieur du domaine. Les poids à associer aux différentes sources sont trouvés de manière à ce que les conditions aux bords (Neumann ou Dirichlet) soient satisfaites. De ce fait seule la discrétisation des frontières de la zone étudiée est nécessaire. Le calcul est ici effectué en terme de potentiel secondaire. Le

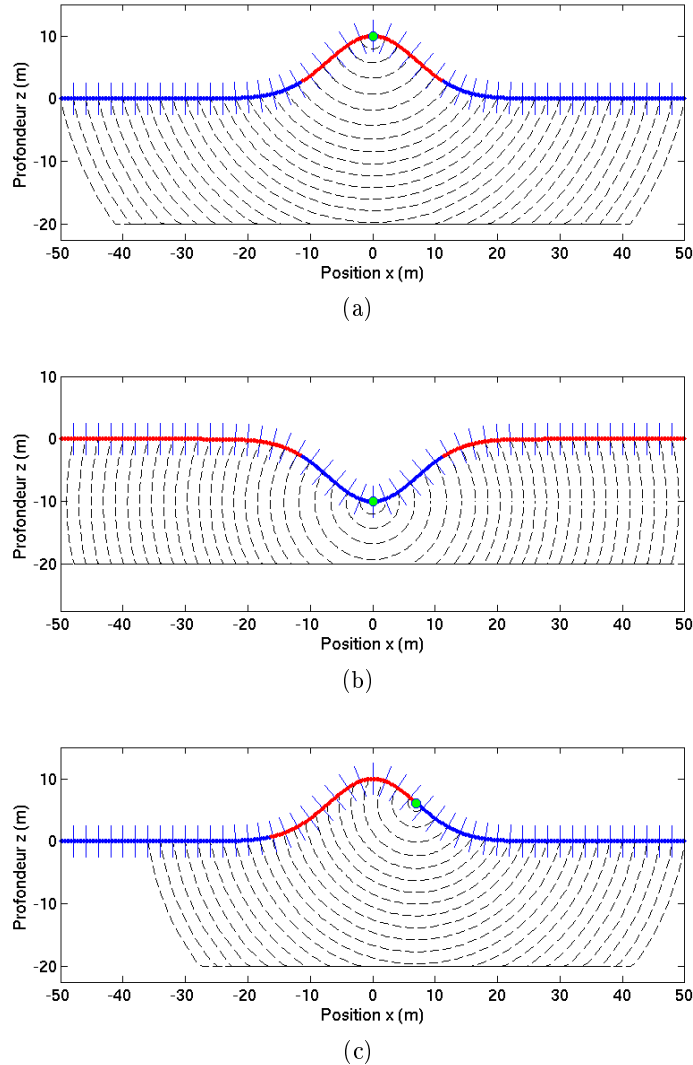


FIGURE 5.14 – Signe de la dérivée normale à la surface du potentiel. Les valeurs en rouge indiquent un signe positif, celles en bleu un signe négatif. La source est indiquée par le point vert.

potentiel primaire (connu) permet le calcul des conditions de bords à vérifier. La résolution d'un problème d'optimisation non linéaire permet d'obtenir les pondérations α_j à appliquer aux différentes fonctions de Green pour obtenir la solution en potentiel secondaire. En 3D, cette solution a pour forme :

$$V_s(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{s}, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{\mathbf{r}(s_j, \mathbf{x})}, \quad (5.26)$$

où \mathbf{s} désigne les positions des sources fictives, \mathbf{x} désigne les positions des points d'évaluation et \mathbf{r} la distance entre un couple de point source/point d'évaluation. En pratique nous commençons par résoudre un problème linéaire nous donnant les

pois α pour les positions initiales de sources. Nous réalisons ensuite un problème de minimisation pour trouver les meilleures positions des sources fictives. Nous réalisons la minimisation par une méthode de gradient ; le gradient est calculé par Différences Finies (cette méthode n'est pas optimale mais nous l'avons réalisée uniquement pour un test). La solution ainsi obtenue (Figure 5.16b) est proche de la solution en Différences Finies Généralisées (Figure 5.16a). La comparaison ne peut toutefois rester que qualitative car la solution dépend des positions des sources fictives et de leur nombre (Lin et al., 2011). Pour cet exemple le nombre de sources est trois fois plus important que le nombre de points où les conditions de bords sont évaluées, une contrainte de lissage est également imposée sur la solution. Une solution optimale consisterait à sélectionner le même nombre de sources que de points de contrôle mais la solution ainsi obtenue est instable et les conditions aux bords difficiles à respecter (Kirkup & Yazdani, 2008).

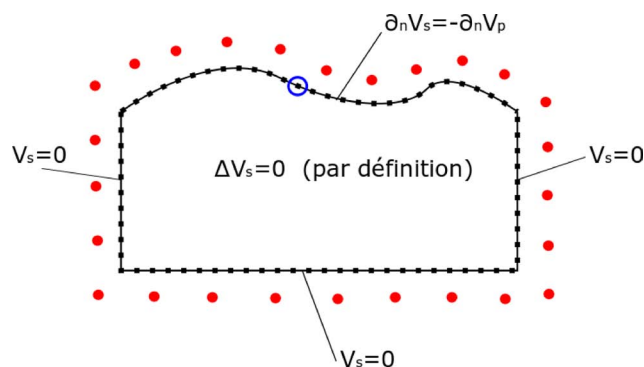


FIGURE 5.15 – Représentation schématique du problème avec le problème des solutions fondamentales. Les sources fictives sont indiquées en rouge, les points d'évaluation en noir, et la source de courant est entourée d'un cercle bleu.

Source en surface

Afin d'illustrer les possibilités de l'algorithme de calcul direct nous présentons ici plusieurs résultats de potentiels secondaires et totaux dans le cas d'une topographie ondulante. Les figures 5.17 et 5.18 montrent ces résultats en 2D et 3D pour différentes positions de sources et un milieu homogène. La forme du potentiel secondaire dépend dans ce cas de la position de la source et de la topographie. Les plus fortes valeurs de potentiel secondaire sont localisées autour de la source puis s'atténuent rapidement du fait de la décroissance en $1/r$ du potentiel primaire. Pour la figure 5.18 les lignes de contour ne sont pas très lisses du fait de la discrétisation relativement grossière du maillage 3D utilisé. Les figures 5.19 et 5.20 illustrent un exemple de calcul avec une géométrie plus complexe montrant une cavité. Nous pouvons vérifier pour ce cas comme pour les figures 5.17 et 5.18 que les équipotentielles du potentiel total sont perpendiculaires aux surfaces libres indiquant là le bon respect des conditions de Neumann. Dans le cas de la cavité le potentiel secondaire est plus complexe et plus fort que pour le milieu plein. En effet, dans le cas d'un milieu homogène, le

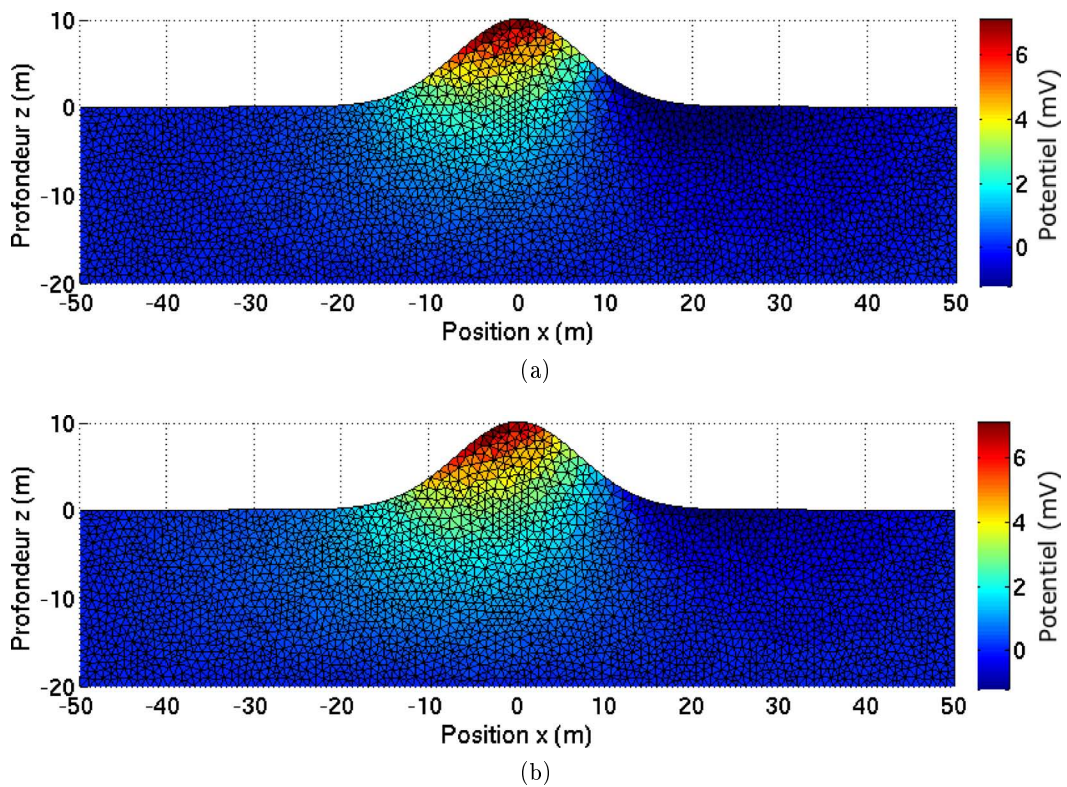


FIGURE 5.16 – Potentiels secondaires liés à la topographie obtenus par Différences Finies Généralisées (a) et par la méthode des solutions fondamentales (b). La source est en $\mathbf{x}_s = (8.0, 5.3)$ m.

potentiel secondaire reflète l'écart entre la géométrie considérée pour le potentiel primaire et la géométrie réelle. La cavité représente une forte perturbation ce qui donne un potentiel secondaire pouvant être 3 à 4 fois plus important (en fonction de la distance de la source à la cavité) que pour le cas sans cavité.

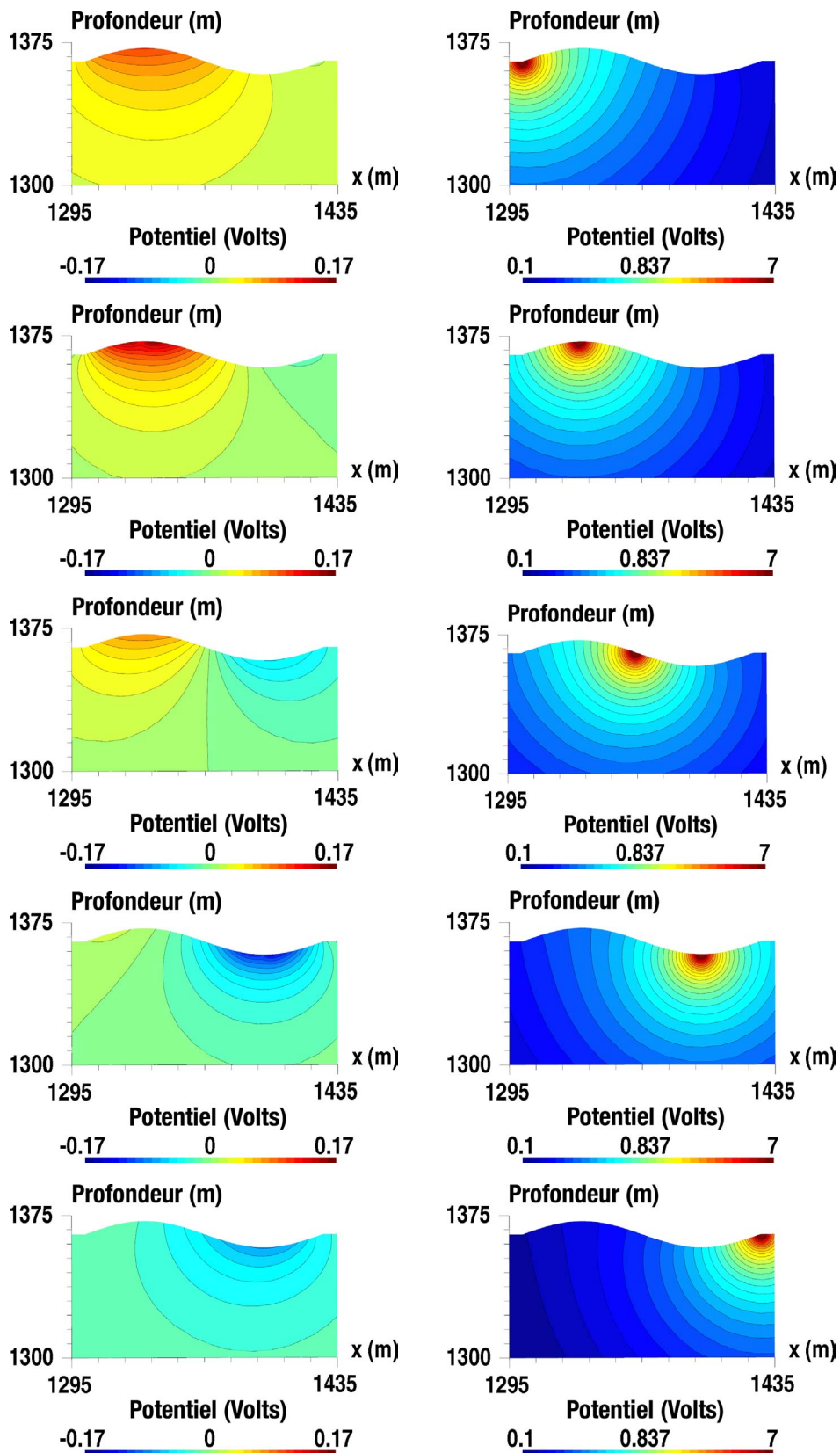


FIGURE 5.17 – Potentiel secondaire (gauche) et logarithme du potentiel total (droite) obtenus pour différentes positions de sources avec le code 2.5D. Le milieu est homogène à $100 \Omega.m$.

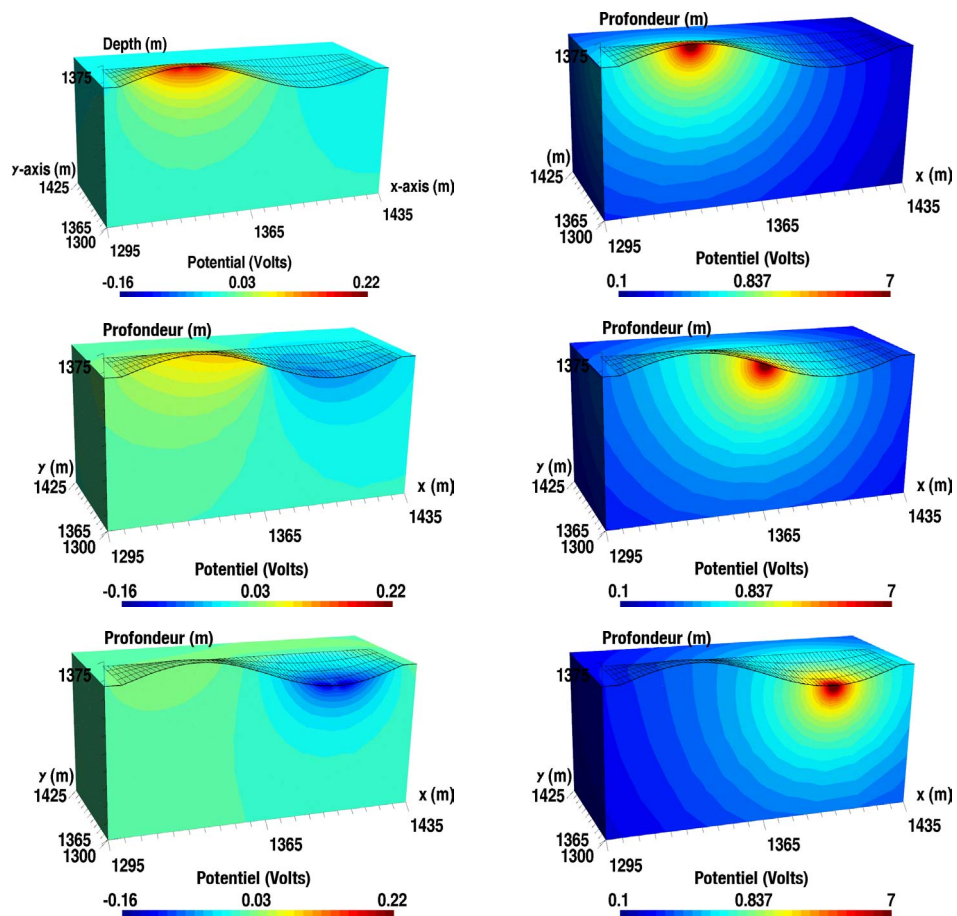


FIGURE 5.18 – Potentiel secondaire (gauche) et logarithme du potentiel total (droite) obtenus pour différentes positions de sources avec le code 3D. Le milieu est homogène à $100 \Omega.m$.

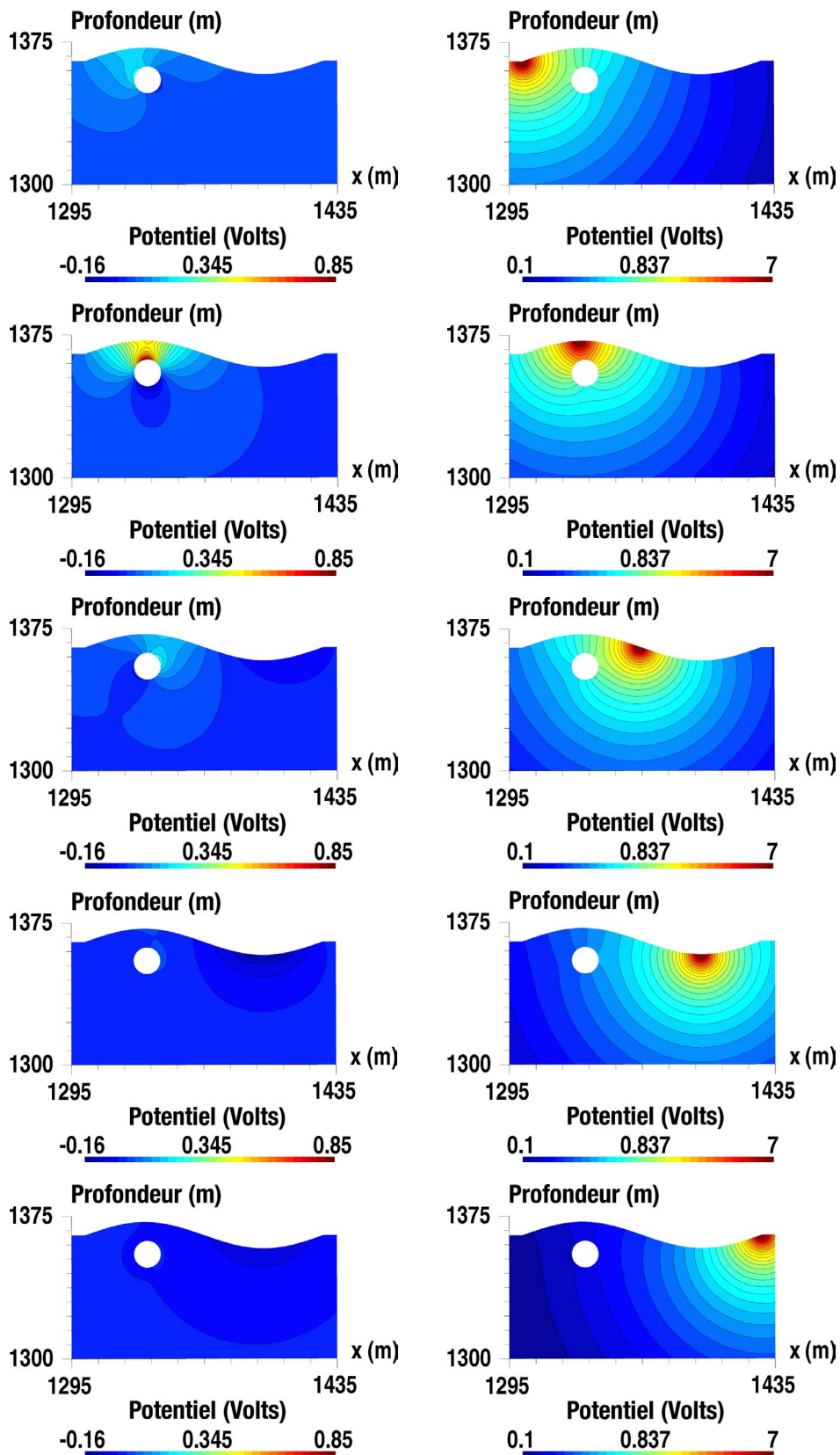


FIGURE 5.19 – Potentiel secondaire (gauche) et logarithme du potentiel total (droite) obtenus pour différentes positions de sources avec le code 2.5D. Le milieu est homogène à $100 \Omega.m$ et présente une cavité.

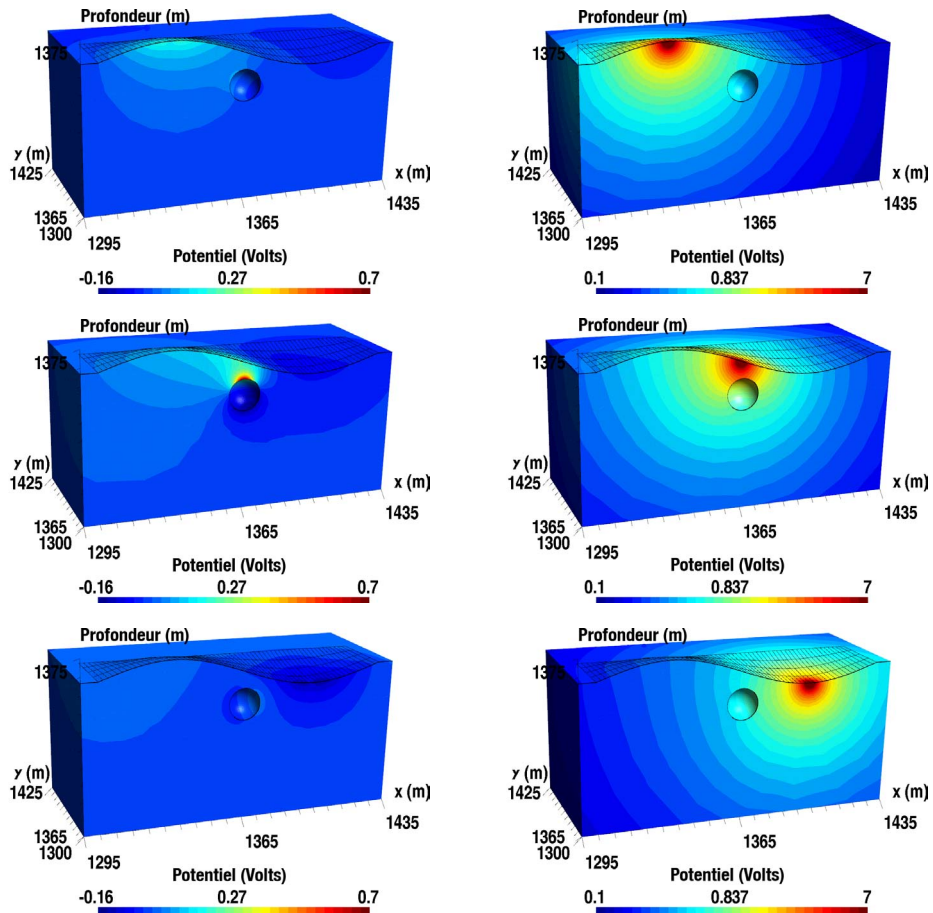


FIGURE 5.20 – Potentiel secondaire (gauche) et logarithme du potentiel total (droite) obtenus pour différentes positions de sources avec le code 3D. Le milieu est homogène à $100 \Omega.m$ et présente une cavité sphérique.

Source enterrée

Si la source n'est pas positionnée en surface mais en profondeur le calcul direct peut s'effectuer selon la même stratégie. Pour supprimer la singularité nous utilisons alors $V_p = I/4\pi\sigma r$ à la place de $V_p = I/2\pi\sigma r$. La forte correction à imposer pour obtenir des conditions de Neumann à la surface, conditions n'existant pas dans la solution du potentiel primaire, donne un potentiel secondaire fort et uniquement positif (Figure 5.21).

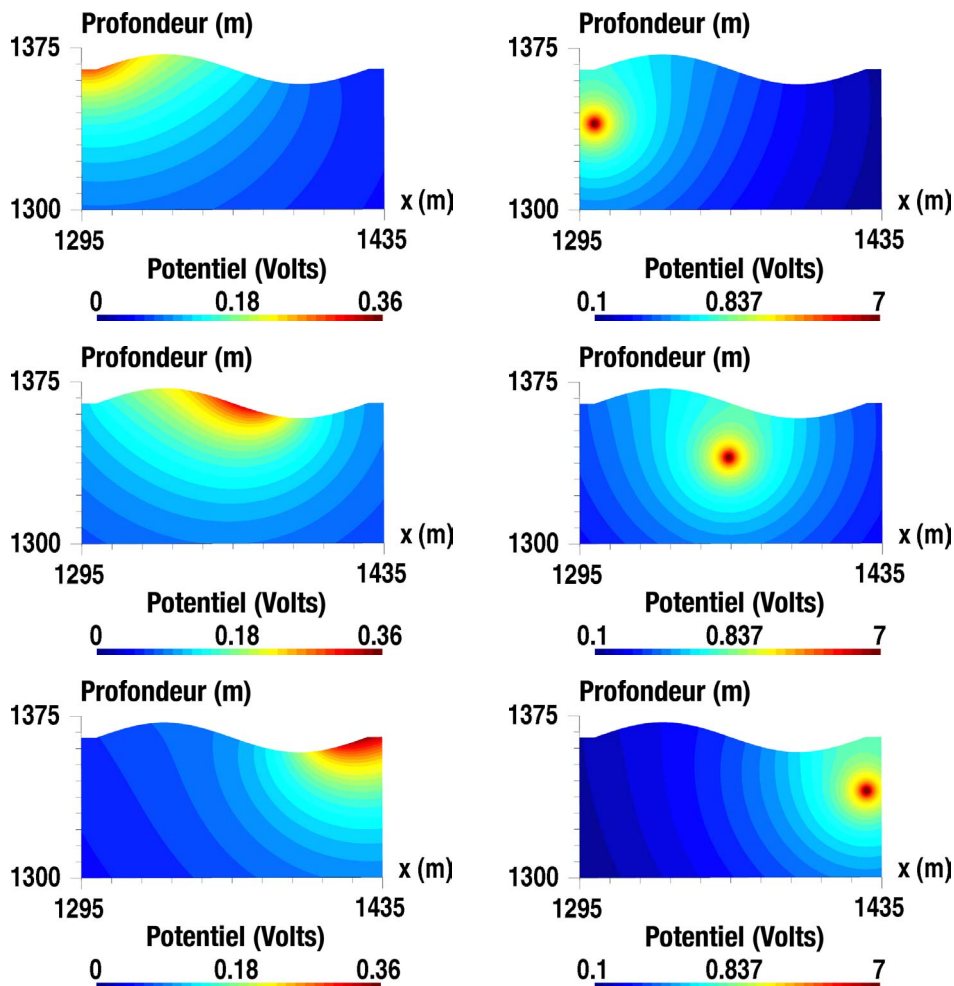


FIGURE 5.21 – Potentiel secondaire (gauche) et logarithme du potentiel total (droite) obtenus pour différentes positions de sources enterrées avec le code 2.5D. Le milieu est homogène à $100 \Omega.m$.

5.3 Comparaison entre les Différences Finies Généralisées et les Eléments Finis

Le code en Eléments Finis utilisé ici a été développé afin de valider et tester notre implémentation en Différences Finies Généralisées. Avant de présenter les résultats de ces comparaisons, nous effectuons un rappel sur la formulation du problème électrique en Eléments Finis.

5.3.1 Rappels sur la méthode des Eléments Finis dans le cas du problème électrique

La méthode des Eléments Finis permet de trouver une solution unique au problème électrique. Cette méthode peut être envisagée selon deux approches : la mé-

thode variationnelle (Pridmore et al., 1981; Sasaki, 1994; Li & Spitzer, 2002) et la méthode des résidus pondérés (Zhou & Greenhalgh, 2001). Ces deux approches entraînent l'écriture d'une formulation dite faible du problème de valeurs aux bords. Cette formulation faible permet le calcul d'une approximation de la solution (ici le potentiel) par sous-domaines et n'impose pas que la dérivée seconde du potentiel soit continue. La méthode des résidus pondérés est une méthode plus générale ; elle est équivalente, dans le cas du problème électrique, à la formulation variationnelle (Zhou & Greenhalgh, 2001).

La solution du problème électrique peut être obtenue en résolvant l'équation intégrale suivante :

$$\int_{\Omega} w_j [\nabla \cdot (\sigma \nabla V) + I\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)] d\mathbf{x} = 0, \quad (5.27)$$

où w_j désigne une fonction de pondération (pour l'instant indéterminée). Après une intégration par partie pour supprimer les dérivées secondes, nous obtenons la formulation faible du problème direct électrique :

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) \nabla w_j(\mathbf{x}) \nabla V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega \cup \Gamma} \sigma(\mathbf{x}) w_j \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} w_j(\mathbf{x}) I\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) d\mathbf{x}. \quad (5.28)$$

Les conditions de Neumann sont automatiquement satisfaites à la surface libre, on parle de conditions de bord naturelles. Si nous considérons des conditions mixtes sur les autres bords, nous les appliquons en posant $\partial V / \partial \mathbf{n} = -V \cos \theta / r$. La formulation faible peut alors s'écrire :

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) \nabla w_j(\mathbf{x}) \nabla V(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x}) w_j(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) \frac{\cos \theta(\mathbf{x})}{r(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} w_j(\mathbf{x}) I\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) d\mathbf{x}, \quad (5.29)$$

et elle doit être résolue pour un ensemble de fonctions de pondération appropriées. Le principe fondamental des Eléments Finis impose que si nous considérons la solution approchée V_h en un ensemble de \mathcal{N} points de l'espace nous avons :

$$V \simeq V_h = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} N_i V_{h_i}, \quad (5.30)$$

où les fonctions de base N représentent des lois d'interpolation pour le potentiel V_h en chaque point. L'indice h peut être interprété comme la plus petite distance entre deux points, ainsi V_h tend vers V lorsque h tend vers 0.

Si l'on applique maintenant l'approximation Eléments Finis (Equation 5.30) à la formulation variationnelle (Equation 5.29), et en appliquant le critère de Galerkin ($w_j = N_j$) (Zienkiewicz, 1977), nous obtenons l'approximation en Eléments Finis du problème direct électrique :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} V_{h_i}(\mathbf{x}) \left(\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) \nabla N_i(\mathbf{x}) \nabla N_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x}) N_i(\mathbf{x}) N_j(\mathbf{x}) \frac{\cos \theta(\mathbf{x})}{r(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \right) \\ & = \int_{\Omega} N_j(\mathbf{x}) I\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) d\mathbf{x} \quad \text{pour } j = 1 \dots \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Décomposons maintenant le domaine en \mathcal{C} éléments, dans chacun desquels la conductivité $\sigma^{(e)}$ est constante et qui définissent \mathcal{B} frontières internes dans le domaine. Le problème peut alors être exprimé sous la forme d'un système linéaire de la forme :

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{b}. \quad (5.32)$$

La matrice \mathbf{A} est symétrique et s'exprime alors ainsi :

$$\mathbf{A} = \sum_{e=1}^{\mathcal{C}} \sigma^{(e)} \mathbf{S}^{(e)} - \sum_{b=1}^{\mathcal{B}} \sigma^{(e)} \frac{\cos \theta(\mathbf{x})}{r(\mathbf{x})} \mathbf{M}^{(b)}, \quad (5.33)$$

le terme source \mathbf{b} a lui pour forme :

$$\mathbf{b} = \sum_{e=1}^{\mathcal{C}} \mathbf{l}^{(e)} I \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), \quad (5.34)$$

et $\mathbf{V}^t = (V_{h_1}, V_{h_2}, \dots, V_{h_{\mathcal{N}}})$. Ces expressions mettent en jeu les matrices locales de rigidité $\mathbf{S}^{(e)}$ pour chaque élément, les matrices de masse des éléments $\mathbf{M}^{(b)}$ pour chaque frontière entre éléments, et le vecteur de charge $\mathbf{l}^{(e)}$ pour les éléments contenant une source de courant. Ces matrices locales ont pour formes :

$$\mathbf{S}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_k \nabla N_l \, d\mathbf{x}, \quad \text{et} \quad \mathbf{l}^{(e)} = \int \Omega^{(e)} N_k \, d\mathbf{x} \quad \text{pour } k, l = 1, \dots, \mathcal{N}^e;$$

$$\mathbf{M}^{(b)} = \int_{\partial\Omega^{(b)}} N_k N_l \, d\mathbf{x} \quad \text{pour } k, l = 1, \dots, \mathcal{N}^{(b)}.$$

Ces matrices dépendent du type d'élément considéré ainsi que des fonctions de base N choisies. Plus de détails sur ces fonctions de base, pour différents éléments 2D (quadrangulaires, triangulaires) et 3D (hexaédraux et tétraédraux) peuvent être trouvés dans (Zienkiewicz, 1977; Zhou & Greenhalgh, 2001; Rücker, 2011). Dans le code en Eléments Finis utilisé dans cette section, les fonctions de base utilisées sont de type « chapeau », cela correspond à des Eléments Finis P1.

5.3.2 Tests numériques de comparaison entre les codes en Différences Finies Généralisées (GFDM) et en Eléments Finis (FEM)

Le développement de deux codes de calcul direct, l'un basé sur la méthode des Différences Finies Généralisées et l'autre basé sur la méthode des Eléments Finis, nous a permis d'effectuer certaines comparaisons entre ces deux méthodes. Du fait du développement en parallèle des deux codes, nous avons eu la chance de pouvoir faire les mêmes choix pour un certain nombre de paramètres (nombres d'ondes, conditions aux bords, maillages). Les conclusions que nous pouvons en tirer sont cependant valables pour le problème électrique uniquement ; pour d'autres problèmes physiques les comportements des méthodes pourraient être différents. Afin de ne pas comparer

uniquement les codes entre eux, nous avons choisi d'étudier le problème d'un contact vertical. Cela nous permet de situer les solutions numériques par rapport à la solution analytique. Pour tous les exemples suivants le dispositif employé est un dispositif Wenner avec un écartement minimum entre électrodes de 1 m. Le nombre d'électrodes est de 32 pour les exemples 2.5D et de 64 pour les exemples 3D. Le contact est toujours situé au centre du profil.

5.3.2.1 Étude de l'influence des nombres d'ondes employés pour le problème 2.5D

La figure 5.22 montre les courbes de résistivité apparente obtenues pour différents choix de nombres d'ondes : le nombre utilisé étant variable, les nombres d'ondes étant toujours sélectionnés dans le même intervalle. Les nombres d'ondes choisis sont les mêmes pour le calcul par Eléments Finis et le calcul par Différences Finies Généralisées. Le contraste considéré ici est faible (contraste de 2). Nous avons fait ce choix afin que la qualité des solutions numériques ne soit pas fortement affectée par le contraste, et que l'effet du choix des nombres d'ondes sur les résistivités apparentes soit prépondérant. Nous constatons une bonne concordance entre les différentes solutions, analytique et numériques. En particulier il est intéressant de constater que les solutions en Eléments Finis et en Différences Finies Généralisées se superposent parfaitement pour les quatre cas étudiés. L'écart entre les solutions numériques et la solution analytique diminue lorsque les nombres d'ondes utilisés sont plus nombreux, la transformée de Fourier du potentiel étant alors mieux estimée. Pour 11 nombres d'ondes l'erreur maximale observée est de l'ordre de 5% pour les deux solutions (FEM et GFDM) ; des interpolations fines entre les 11 valeurs sont toutefois réalisées pour atteindre cette précision (interpolations par polynôme cubique de Hermite). Un choix d'une dizaine de nombres d'ondes est, en pratique, couramment effectué et semble malgré tout satisfaisant (Queralt et al., 1991; Blome, 2009) ; notons toutefois que Xu et al. (2000) proposent une méthode d'optimisation pour réduire ce nombre à quatre. Ce nombre nous paraît faible et d'après nos résultats doit avoir un impact important sur la qualité de la solution. L'observation des différences entre les solutions numériques et analytique, sous forme de pseudosections (Figure 5.23), nous permet d'étudier plus finement la répartition des erreurs dans l'espace. Les erreurs sont très faibles lorsque les quatre électrodes mises en jeu pour la mesure se situent toutes du même côté du contraste. Cette erreur augmente légèrement lorsqu'une des électrodes est très proche du contact. Lorsque les électrodes se situent de part et d'autre du contact l'erreur augmente sensiblement ; les erreurs sont donc globalement plus fortes pour les grandes pseudo-profondeurs. Bien que les erreurs pour les deux codes suivent globalement la même répartition spatiale, les erreurs sont plus faibles avec le code Eléments Finis, et ce pour tous les cas. La solution GFDM présente deux points, en surface et à proximité du contact, avec des erreurs plus fortes, et pour lesquels l'erreur ne diminue que très faiblement même avec beaucoup de nombres d'ondes (Figures 5.23e et 5.23g). La solution FEM présente également ces points, et leur erreur ne diminue également que très

peu lorsque l'on augmente les nombres d'ondes (Figures 5.23f et 5.23h) ; leur erreur reste toutefois beaucoup plus contenue. La figure 5.26a vient compléter l'analyse précédente. Nous vérifions bien que la norme des erreurs est plus faible avec le code FEM qu'avec le code GFDM (et ce quelle que soit la norme) ; l'écart entre les normes des deux méthodes est toutefois assez faible. Le comportement des normes des erreurs, vis à vis des nombres d'ondes, est toutefois le même pour les deux codes : les normes, pour les deux méthodes, décroissent parallèlement les unes aux autres. Enfin il est intéressant de remarquer que l'erreur décroît très fortement lorsque l'on passe de 11 nombres d'ondes à 21, puis la décroissance s'atténue progressivement. Sélectionner beaucoup plus de nombres d'ondes (passé une vingtaine de valeurs) ne constitue plus, du fait de l'augmentation du coût de calcul, une bonne approche pour diminuer l'erreur.

5.3.2.2 Étude de l'influence du contraste

Nous avons, dans la première section de ce chapitre, étudié la robustesse de notre implémentation en Différences Finies Généralisées vis à vis des fort contrastes (section 5.1). Ici nous étudions cette robustesse en la comparant à celle des Eléments Finis. Pour cela nous avons considéré trois contrastes différents : 10, 100, et 1000. Nous avons effectué les mêmes tests avec les codes 2.5D (en sélectionnant 51 nombres d'ondes) et avec les codes 3D. Les figures 5.24 et 5.27 montrent les courbes de résistivités apparentes obtenues respectivement avec les codes 2.5D et les codes 3D. Nous constatons un bon accord des résultats obtenus avec les codes GFDM, les codes FEM et la solution analytique. Même avec le contraste de 1000 les trois courbes se superposent bien. Les figures 5.25 et 5.28 montrent les différences entre les solutions numériques, respectivement 2.5D et 3D, et la solution analytique, affichées en pseudosection. Pour le cas 2.5D (Figure 5.25), comme pour le cas précédent, les erreurs augmentent avec les pseudo-profondeurs à l'exception de quelques points proches de la surface. Pour le cas 3D (Figure 5.28) les erreurs les plus importantes se situent à proximité du contact pour les petits dispositifs. Elles sont essentiellement situées à gauche du contact pour la solution FEM et essentiellement à droite pour la solution GFDM (à l'exception d'une diagonale coté gauche). Il serait nécessaire d'étudier ce problème plus en détail pour expliquer ces différences. Les figures 5.26b et 5.31b montrent les normes des erreurs pour les cas 2.5D et 3D. En 2.5D les erreurs sont légèrement plus importantes pour la solution GFDM et ce pour toutes les normes. En 3D les normes sont très proches pour les deux méthodes à l'exception de la norme ℓ_∞ ; cette norme est toutefois très sensible : une forte erreur localisée en un seul point l'affectant particulièrement.

Remarque : Les maillages 3D utilisés pour ces tests ainsi que pour l'étude suivante ne présentent pas de bonnes propriétés pour l'utilisation des GFDM. En effet initialement quelques pour cent (moins de 5%) des points du maillage ne disposaient pas de suffisamment de voisins pour que le calcul des dérivées soit bien contraint. Pour résoudre le problème nous avons tenté de réorganiser les connexions entre points, en supprimant des connexions à des points en possédant plus que nécessaire,

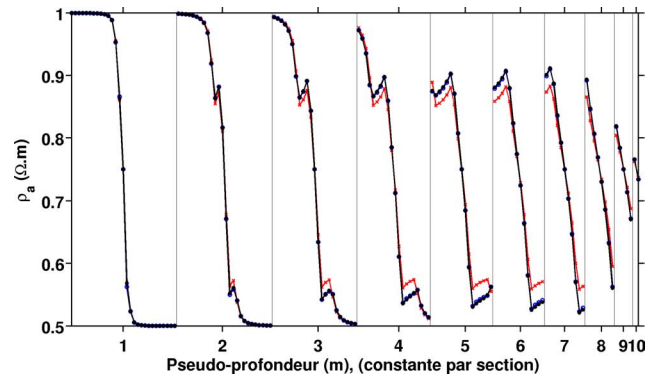
et en ajoutant aux points qui en manquent. L'application d'un tel algorithme ne nous a pas permis de résoudre complètement le problème : quelques points manquaient de voisins (de l'ordre de 2 à 10 points pour un maillage de 16000 points environ). Pour ces points nous avons augmenté artificiellement le rang de la matrice à inverser en y ajoutant un léger damping sur la diagonale. Cette solution n'est pas parfaite et peut être à l'origine des différences observées entre les GFDM et les FEM en 3D.

5.3.2.3 Étude de l'influence de la densité du maillage

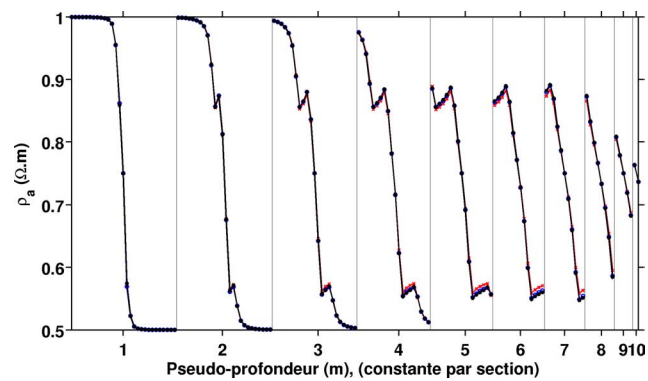
Nous avons effectué des tests pour trois maillages progressivement raffinés en 3D et un faible contraste de 2. Les résultats sont montrés en courbes de résistivité apparente à la figure 5.29 et les erreurs en pseudosection à la figure 5.30. Les courbes de résistivité apparente se superposent à nouveau bien, des petites différences avec la solution analytique sont toutefois visibles à proximité du contraste pour le maillage le moins dense (Figure 5.29c). Comme nous pouvions nous y attendre, les erreurs diminuent lorsque la densité du maillage augmente (Figure 5.30). Les erreurs apparaissent globalement légèrement plus faibles avec la solution FEM qu'avec la solution GFDM, ce que nous vérifions en observant les normes des erreurs (Figure 5.31a).

5.3.2.4 Bilan

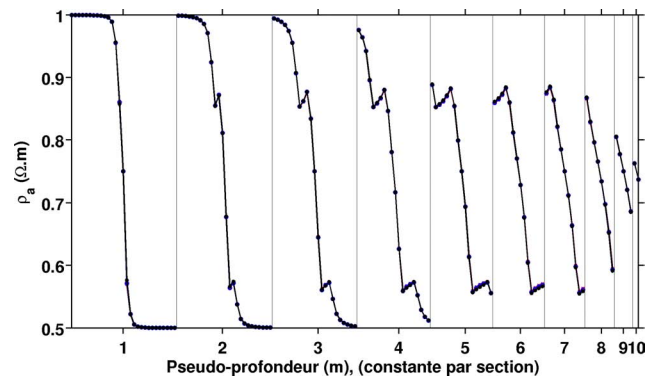
Les différents tests de comparaison montrent un comportement globalement similaire pour les Eléments Finis et les Différences Finies Généralisées. Les erreurs observées sont légèrement plus faibles avec les Eléments Finis et la convergence de cette méthode (en fonction du maillage, ou des nombres d'ondes) est un peu meilleure. Les Eléments Finis apparaissent donc être un meilleur choix pour le problème électrique, de plus les outils de maillages existants leur sont bien adaptés. Malgré tout l'implémentation en Différences Finies Généralisées nous procure une solution, certes non optimale mais satisfaisante pour notre problème, nous l'utiliserons par la suite dans les problèmes d'inversions.



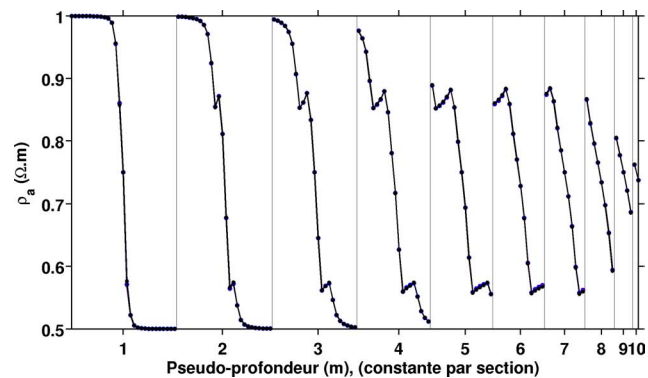
(a) 11 nombres d'ondes



(b) 21 nombres d'ondes



(c) 51 nombres d'ondes



(d) 101 nombres d'ondes

FIGURE 5.22 – Courbes de résistivité apparente, dans le cas d'un contraste vertical de 2 entre deux milieux homogènes. Trois solutions sont présentées : solution analytique (rouge), solution 2.5D FEM (bleue), solution 2.5D GFDM (noire).

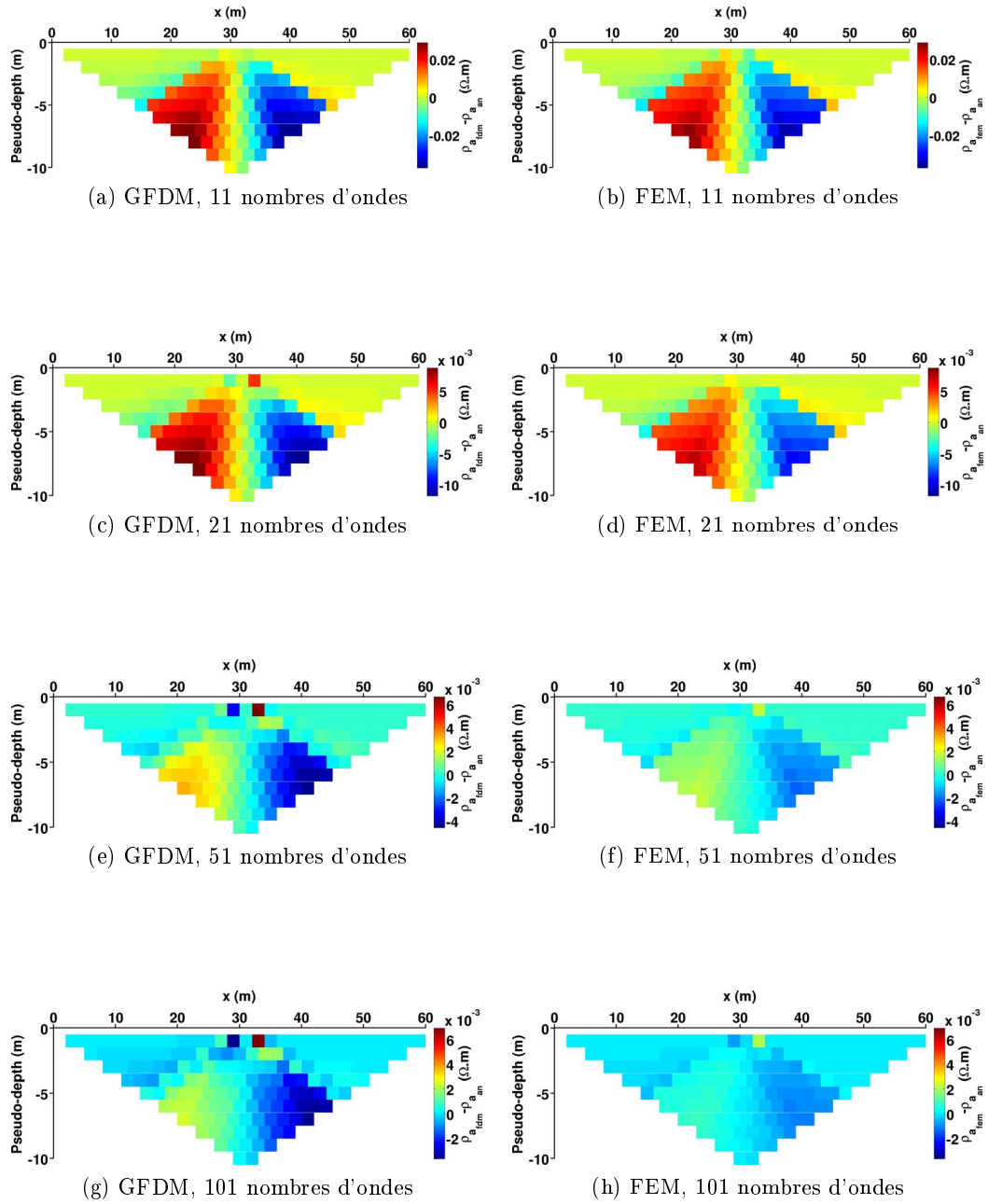
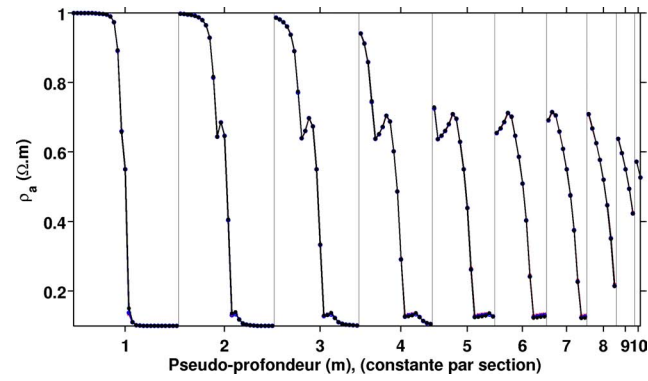
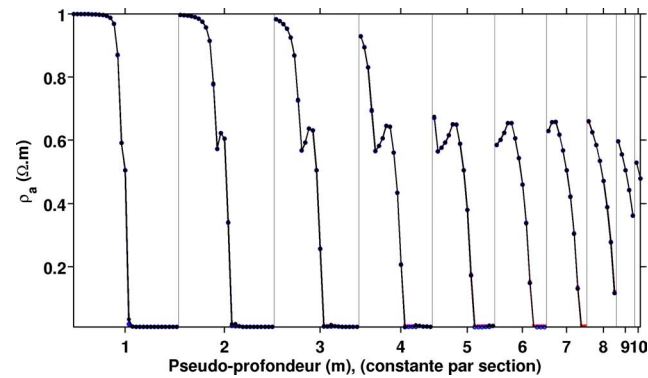


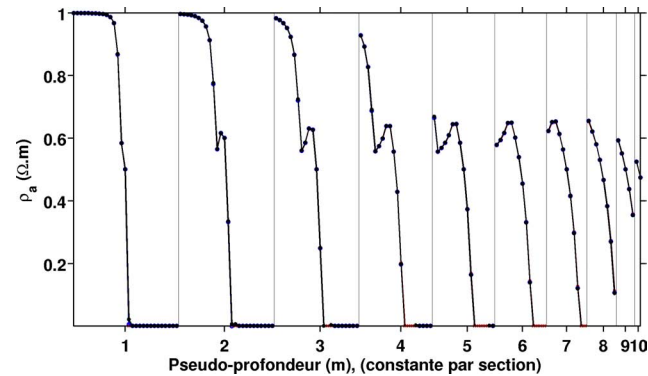
FIGURE 5.23 – Différences entre les solutions numériques 2.5D et la solution analytique pour le contact vertical avec un contraste de 2.



(a) contraste de 10



(b) contraste de 100



(c) contraste de 1000

FIGURE 5.24 – Courbes de résistivité apparente, dans le cas d'un contact vertical entre deux milieux homogènes (contrastes de 10, 100 et 1000). Trois solutions sont présentées : solution analytique (rouge), solution 2.5D FEM (bleue), solution 2.5D GFDM (noire).

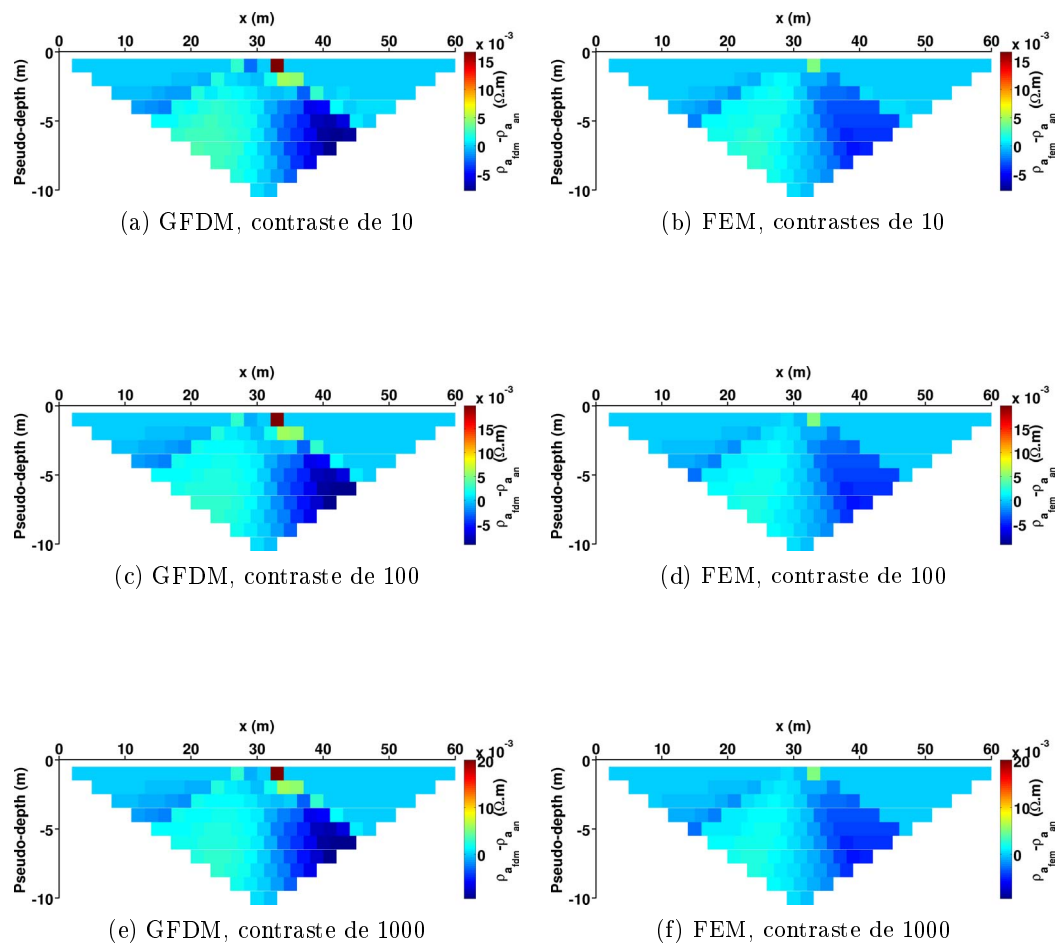
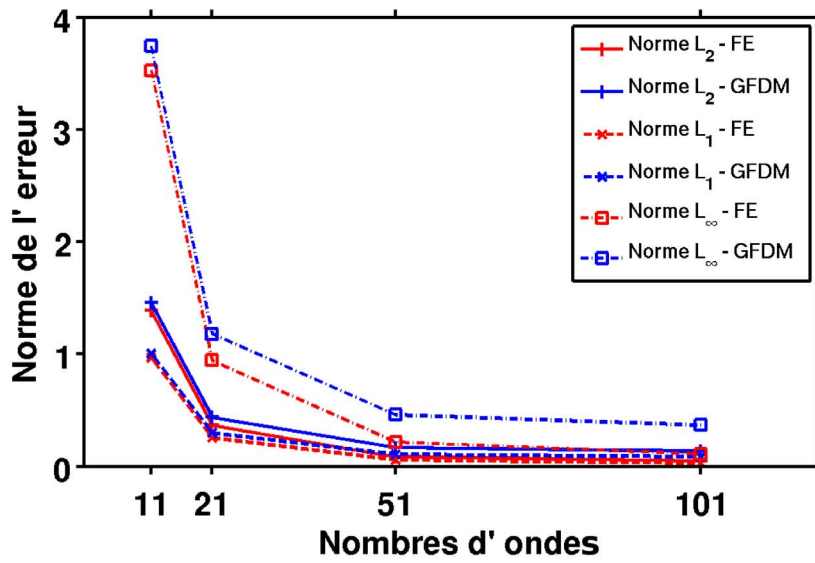
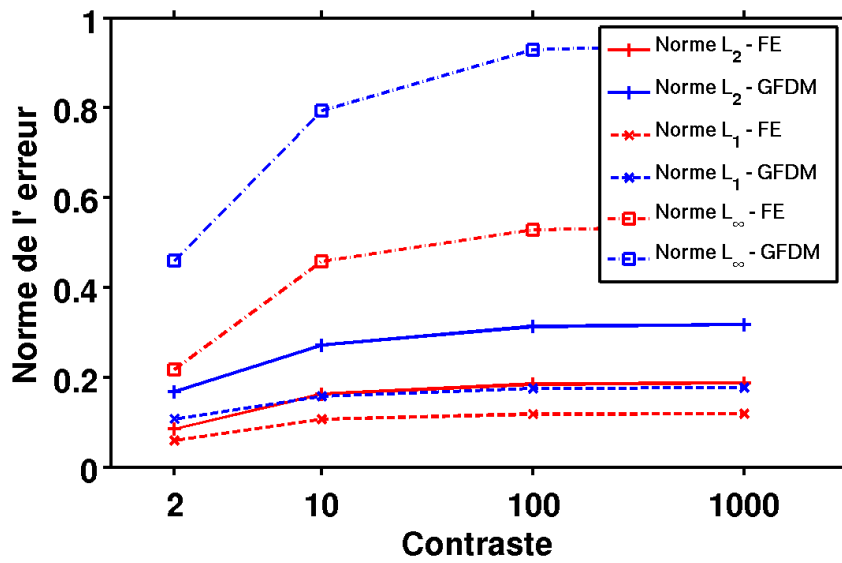


FIGURE 5.25 – Différences entre les solutions numériques 2.5D et la solution analytique pour le contact vertical pour trois contrastes de résistivité.

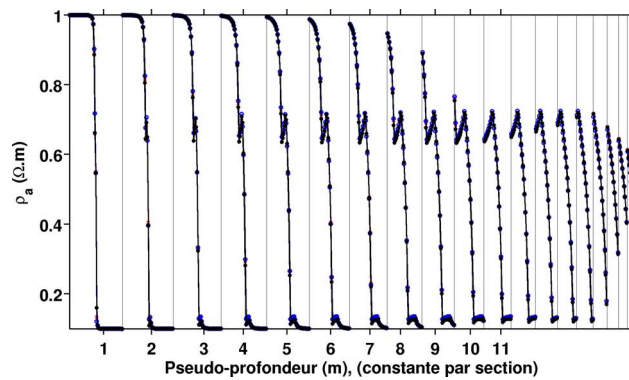


(a) Erreurs en fonction des nombres d'ondes

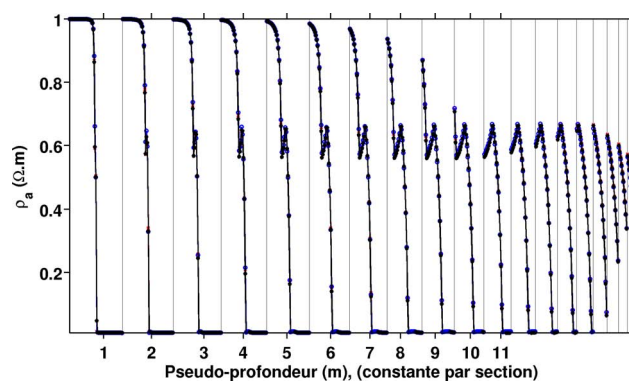


(b) Erreurs en fonction du contraste

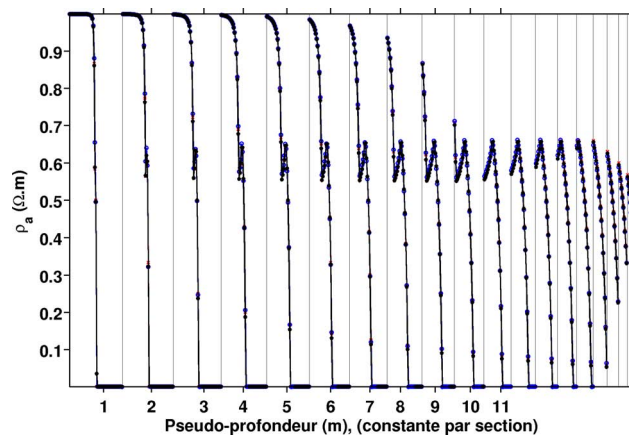
FIGURE 5.26 – Normes des erreurs entre les solutions numériques 2.5D (FEM, GFDM) et la solution analytique pour un contact vertical.



(a) contraste de 10



(b) contraste de 100



(c) contraste de 1000

FIGURE 5.27 – Courbes de résistivité apparente, dans le cas d'un contact vertical (contrastes de 10, 100 et 1000) entre deux milieux homogènes ; le maillage est constitué de 16910 points. Trois solutions sont présentées : solution analytique (rouge), solution 3D FEM (bleue), solution 3D GFDM (noire).

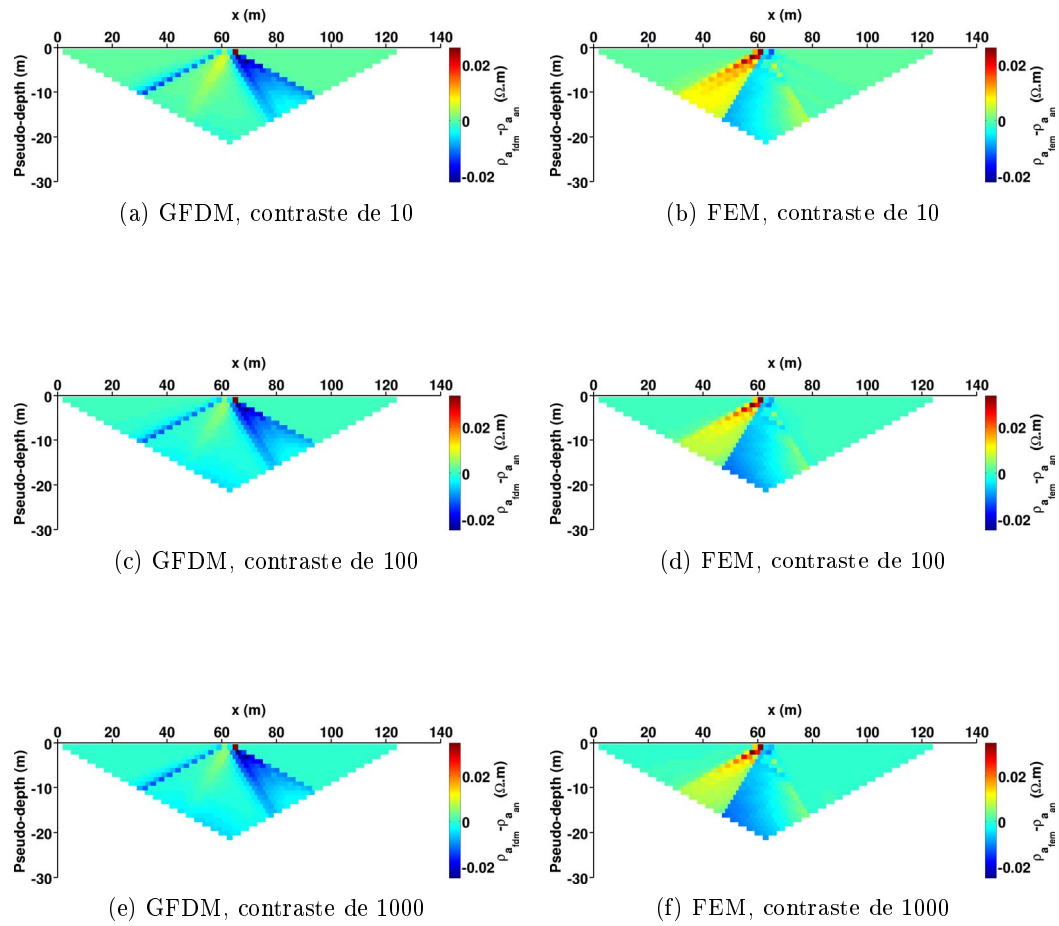
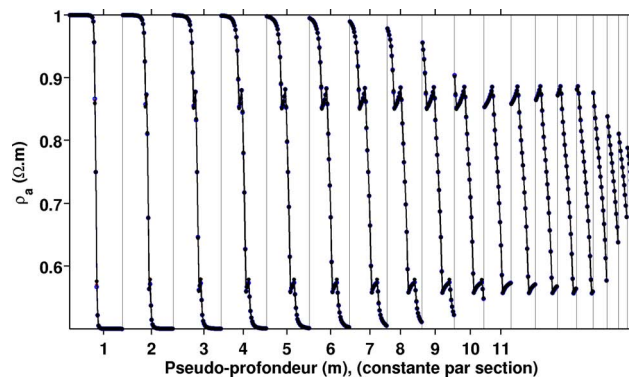
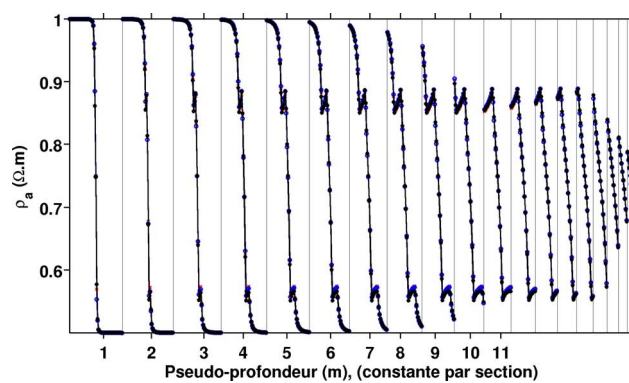


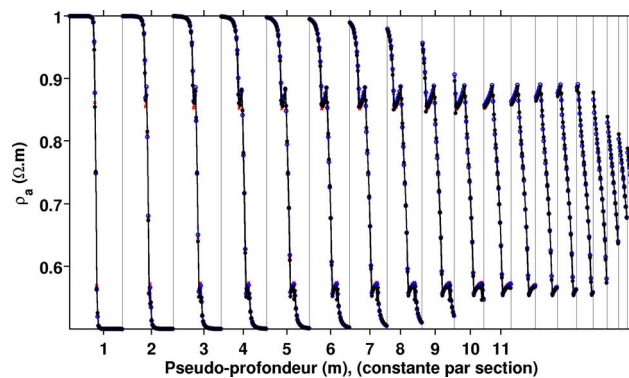
FIGURE 5.28 – Différences entre les solutions numériques 3D et la solution analytique pour un contact vertical (contrastes de 10, 100 et 1000); le maillage est constitué de 16910 points.



(a) 90373 points



(b) 16910 points



(c) 9909 points

FIGURE 5.29 – Courbes de résistivité apparente, dans le cas d'un contact vertical (contraste 2) entre deux milieux homogènes, pour trois densités de maillage différentes. Trois solutions sont présentées : solution analytique (rouge), solution 3D FEM (bleue), solution 3D GFDM (noire).

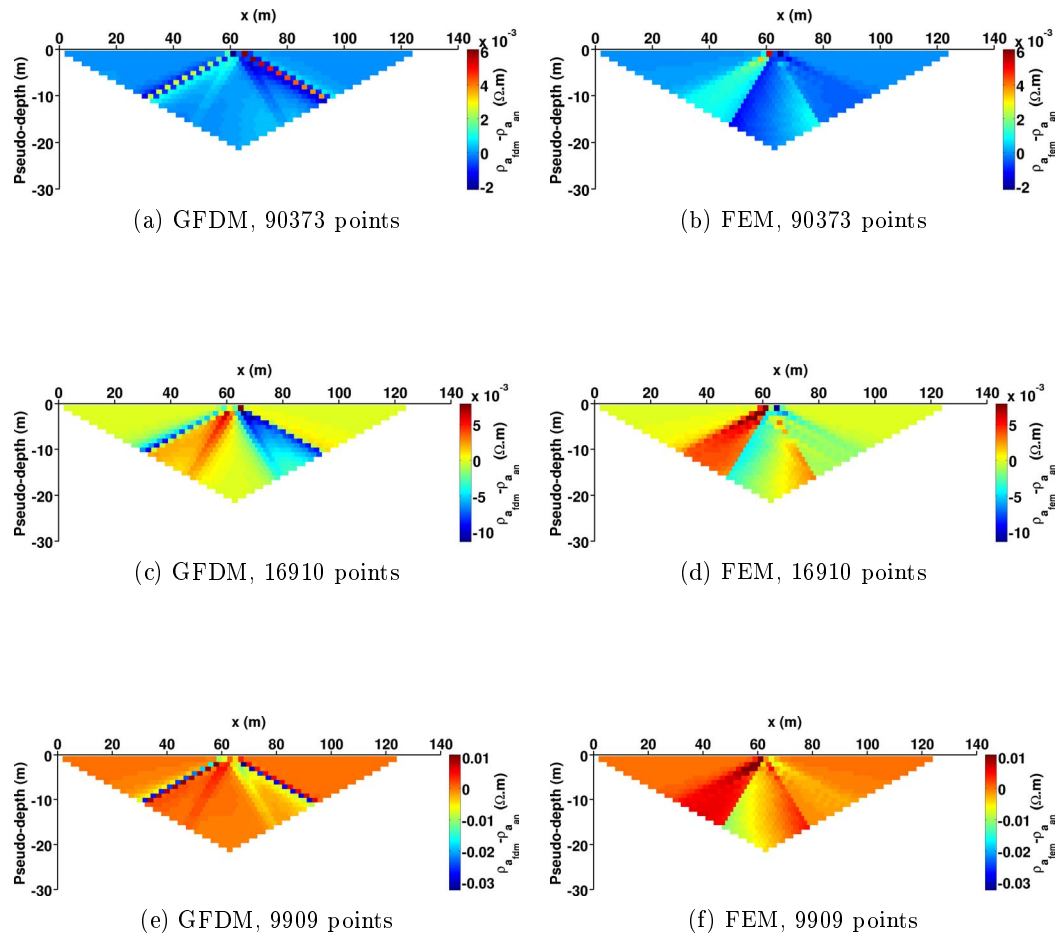
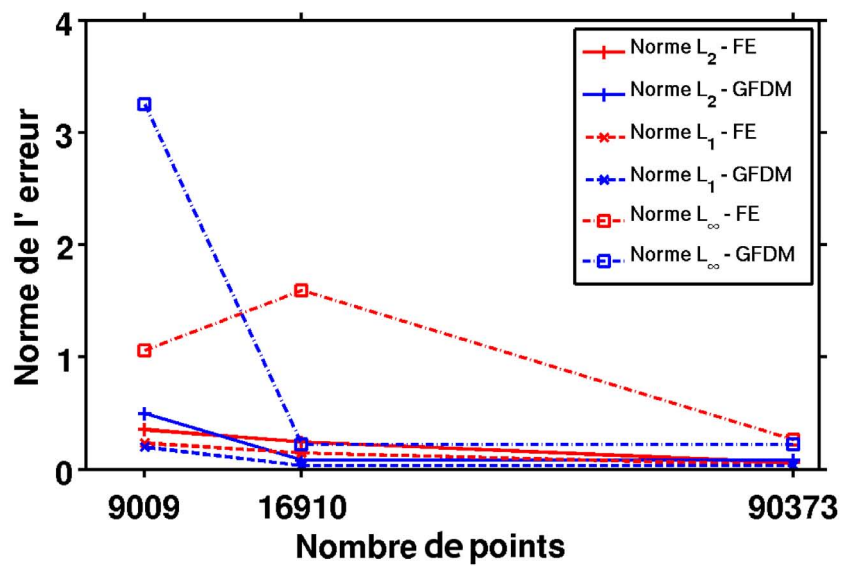
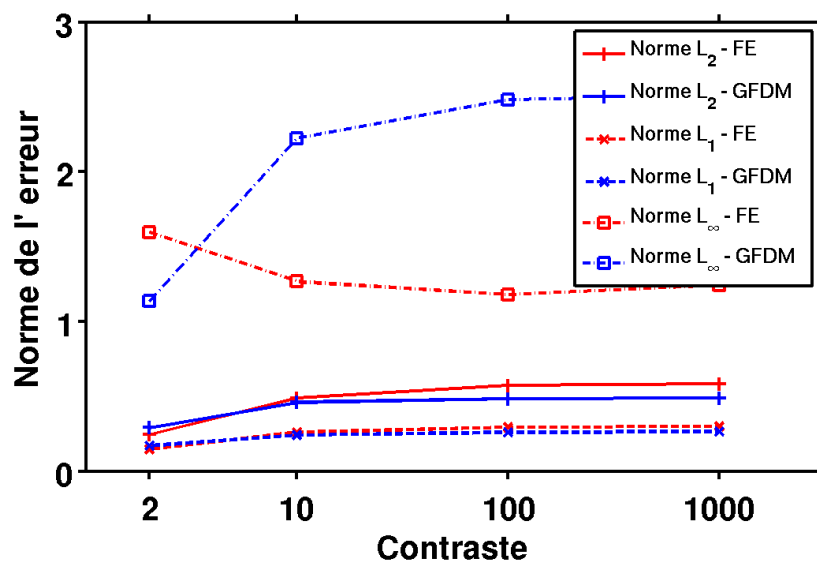


FIGURE 5.30 – Différences entre les solutions numériques 3D et la solution analytique pour le contact vertical pour trois densités de maillage différentes.



(a) Erreurs en fonction de la densité du maillage



(b) Erreurs en fonction du contraste

FIGURE 5.31 – Normes des erreurs entre les solutions numériques 3D (FEM, GFDM) et la solution analytique pour un contact vertical.

5.4 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre que la méthode des Différences Finies peut être adaptée à l'utilisation de maillages non structurés. La méthode des Différences Finies Généralisées a notamment été présentée en détails. L'étude des formulations en Différences Finies pour des problèmes d'interfaces nous a permis d'adapter notre implémentation afin de gérer de forts contrastes de résistivités. Cette implémentation a été validée en comparant les résultats avec des solutions analytiques. La bonne gestion de la topographie a été étudiée. En l'absence de solution analytique, cette étude est essentiellement qualitative. Une approche plus quantitative a été réalisée en comparant avec une solution intégrale (Méthode des Solutions Fondamentales) ; elle confirme la bonne gestion de la topographie. L'approche de suppression de la singularité présentée au chapitre 3 et l'implémentation présentée à ce chapitre ont fait l'objet d'un article (Penz et al., 2012), soumis au Geophysical Journal International, actuellement en révision. Enfin des comparaisons ont été effectuées entre les résultats du code en Différences Finies Généralisées et ceux d'un code en Eléments Finis. Les Eléments Finis présentent de meilleurs résultats (erreurs et convergences). Le code en Différences Finies Généralisées donne toutefois des résultats très proches, la méthode est satisfaisante pour les problèmes que nous étudions. Ce code a servi de base au développement du code d'inversion utilisé dans le chapitre suivant.

Problème inverse : aspects pratiques et applications

Sommaire

6.1	Mise en œuvre pratique de l'inversion	110
6.1.1	Formulation de la fonction coût	110
6.1.2	Paramétrisation	110
6.1.3	Calcul du gradient de la fonction objective	110
6.1.4	Méthode de descente et de régularisation	111
6.1.5	Calcul du pas et préconditionnement	113
6.1.6	Critère de convergence et d'arrêt	114
6.2	Etudes synthétiques	115
6.2.1	Etude du comportement des normes ℓ_1 et ℓ_2	115
6.2.2	Inversion d'un modèle avec plusieurs hétérogénéités	119
6.2.3	Comparaison des algorithmes de minimisation	123
6.3	Inversion de données réelles	126
6.3.1	Contexte géologique et environnemental du site de Tournemire	126
6.3.2	Acquisition des données	128
6.3.3	Inversion des profils à écartements de 8 m	128
6.4	Conclusion	136

Dans ce chapitre je commence par présenter quelques points relatifs à mon implémentation du code d'inversion. Je commence par introduire la fonction objective utilisant les logarithmes des résistivités apparentes. Je compare ensuite le gradient calculé par l'état adjoint au gradient calculé par Différences Finies. Dans la première section j'explique également : l'approche double grille utilisée pour la paramétrisation ; l'utilisation d'une recherche linéaire et d'un préconditionneur pour accélérer la convergence ; et enfin les différents critères d'arrêts possibles pour l'inversion. Dans la seconde section je présente plusieurs tests d'inversion synthétiques. Chaque test se veut indépendant et vise à illustrer certains aspects de la résolution du problème inverse : l'influence de la norme utilisée, celle de la structure du modèle étudié et enfin celle de l'algorithme de minimisation. La dernière section est consacrée à l'inversion de données réelles acquises sur le site de Tournemire.

6.1 Mise en œuvre pratique de l'inversion

6.1.1 Formulation de la fonction coût

Les données de résistivités apparentes peuvent varier sur une plage assez large. Un même pourcentage d'écart entre la résistivité apparente mesurée et celle calculée peut alors se traduire par des valeurs de résidus très différentes. Pour limiter cet effet et donner un poids aux données qui soit peu dépendant de la valeur de résistivité apparente mesurée, nous utilisons comme données les logarithmes de celles-ci (Tripp et al., 1984; Sasaki, 1994; Loke, 2011). Il est également possible, lorsqu'elle est disponible, d'introduire dans la fonction objective une information sur l'erreur affectant la mesure. La fonction objective que nous considérons est alors de la forme (Friedel, 2003) :

$$\Phi_d = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\log \left(\frac{\rho_a^{obs}(i)}{\rho_0} \right) - \log \left(\frac{\rho_a(i)}{\rho_0} \right)}{\log(1 + \sigma_i)} \right)^2, \quad (6.1)$$

où σ_i représente l'écart type associé à la mesure de résistivité apparente i . Notons que dans le cas de résistivités apparentes négatives cette formulation n'est pas applicable. Cela n'est généralement pas le cas pour des acquisitions classiques de surface mais des résistivités apparentes négatives peuvent apparaître pour des dispositifs et des géométries plus complexes.

6.1.2 Paramétrisation

Comme nous l'avons évoqué au chapitre 4 la paramétrisation du problème est importante et peut être vue comme une régularisation du problème. Dans le code d'inversion nous avons utilisé une approche utilisant deux maillages : un pour le calcul direct (calcul des potentiels, calcul des variables adjointes) et un autre pour le problème inverse. Nous avons utilisé l'approche proposée par Günther et al. (2006) (Figure 4.1c) indiquée à la sous-section 4.4.2. Le maillage du problème inverse s'appuie sur le maillage du problème direct. En pratique un premier maillage (étendu) lâche est généré avec le logiciel gmsh ; une portion (la zone d'intérêt uniquement) en est extraite pour former la grille du problème inverse ; le maillage lâche est ensuite raffiné (une à 3 fois en général) pour obtenir la grille du problème direct.

6.1.3 Calcul du gradient de la fonction objective

Nous avons choisi d'utiliser la méthode de l'état adjoint pour le calcul du gradient de la fonction objective. Dans le cas où une fonctionnelle sur le modèle est rajoutée nous calculons son gradient analytiquement. Le calcul du gradient par l'état adjoint ne pose pas de difficulté en 3D ; en 2.5D en revanche il fait intervenir le potentiel et la variable adjointe en plus de leurs gradients (Equation 4.48). Le potentiel et la variable adjointe étant définis aux sommets des éléments nous effectuons la moyenne

pondérée des valeurs aux sommets pour obtenir la valeur au centre d'un élément (Figure 6.1).

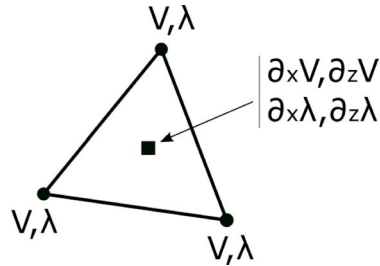


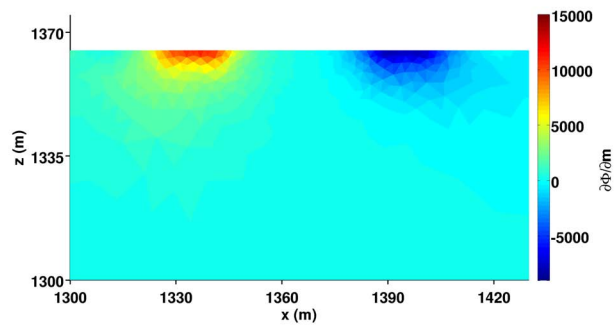
FIGURE 6.1 – Position des variables utilisées pour le calcul du gradient.

Afin de vérifier le calcul du gradient par l'état adjoint nous pouvons le comparer à son calcul par Différences Finies (méthode des perturbations). La figure 6.2 montre les deux gradients à la première itération pour un modèle homogène à $770 \Omega.m$ avec deux blocs affleurant à la surface, l'un à $100 \Omega.m$ et l'autre à $4000 \Omega.m$ (ce modèle correspond au cas synthétique étudié à la sous-section 6.2.3). Le modèle de départ est homogène à $770 \Omega.m$. Les deux gradients ainsi obtenus sont très proches l'un de l'autre. Le gradient obtenu par l'état adjoint est plus focalisé que celui légèrement plus diffus obtenu par la méthode des perturbations. Ceci peut s'expliquer par la moins bonne stabilité du calcul par Différences Finies, le résultat étant lié à l'amplitude de la perturbation élémentaire (dans la pratique, une perturbation de $\pm 50 \Omega.m$ nous a permis d'obtenir des résultats stables). Une seconde explication provient du calcul du gradient par l'état adjoint effectué sur une grille fine (grille du calcul direct) puis extrapolé sur la grille d'inversion, alors que le calcul par Différences Finies a été réalisé en perturbant directement les cellules de la grille d'inversion. Nous constatons également que l'intensité du gradient est très forte à proximité de la surface, et qu'elle s'atténue ensuite très fortement avec la profondeur. Cela indique que des traitements (régularisation, préconditionnement) sont nécessaires pour qu'au cours de l'inversion la remise à jour du modèle ne concerne pas uniquement la proximité de la surface. Le choix de la paramétrisation est très important ; sur une grille plus fine le gradient présente de très fortes valeurs à proximité des électrodes, cet effet est ici atténué par le choix de paramètres suffisamment volumineux en surface.

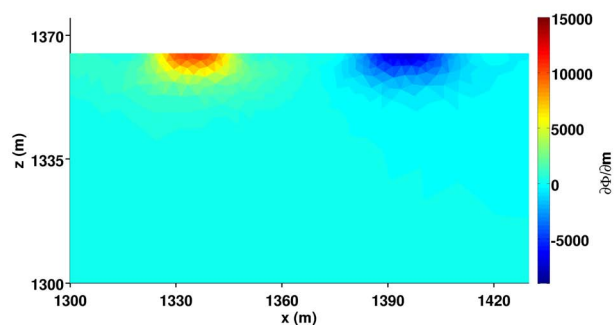
6.1.4 Méthode de descente et de régularisation

Du fait de la connaissance du gradient uniquement, nous utilisons soit un algorithme de gradient conjugué, soit un algorithme de Quasi-Newton pour minimiser la fonction objective. Pour le Quasi-Newton nous avons utilisé la version à mémoire limitée de l'algorithme L-BFGS (Nocedal, 1980). L'ensemble des méthodes de régularisation indiquées à la section 4.4.3 ne sont pas présentées ici.

Comme indiqué dans cette section la méthode du gradient conjugué est régularisée de manière globale et implicite. Nous exploitons ainsi la propriété selon laquelle les composantes lisses convergent plus vite que les zones non lisses du modèle. La



(a) Gradient calculé par Différences Finies



(b) Gradient calculé par la méthode de l'état adjoint

FIGURE 6.2 – Comparaison du gradient de la fonction objective obtenu par Différences Finies et par l'état adjoint.

structure du modèle obtenu dépend ainsi du nombre d'itérations ; le modèle obtenu est globalement lisse pour un faible nombre d'itérations et plus rugueux lorsque le nombre d'itérations est important. En pratique afin d'améliorer la convergence, nous avons trouvé important de lisser le gradient obtenu par l'état adjoint. Un premier niveau de lissage est obtenu en effectuant la moyenne du gradient des cellules du calcul direct pour obtenir celui dans les cellules du problème inverse (la moyenne est pondérée par la surface des cellules). Pour imposer un lissage supplémentaire nous effectuons une moyenne pondérée des valeurs du gradient dans une cellule et ses cellules adjacentes. Nous imposons un lissage important lors des premières itérations puis nous le diminuons progressivement.

Lors des inversions avec l'algorithme de Quasi-Newton, nous avons appliqué une régularisation globale explicite. La matrice de couplage utilisée correspond à un opérateur Laplacien ; nous cherchons ainsi des modèles lisses. Le paramètre de régularisation varie au cours de l'inversion. Nous partons d'une valeur élevée de μ puis la diminuons progressivement au cours des premières itérations.

6.1.5 Calcul du pas et préconditionnement

Afin d'accélérer la convergence du processus d'inversion, avec la méthode du gradient conjugué, nous utilisons d'une part un pas de descente variable et d'autre part un préconditionneur. Un pas de descente « optimal » pour chaque itération est obtenu au moyen d'une recherche linéaire classique. Une fois le gradient calculé nous effectuons deux calculs directs supplémentaires avec des pas α et $\alpha/2$. Les trois points provenant des deux valeurs de la fonction objective obtenues plus celle de l'itération précédente permettent de trouver une parabole dont le minimum nous donne le pas optimal α_{opt} (Figure 6.3).

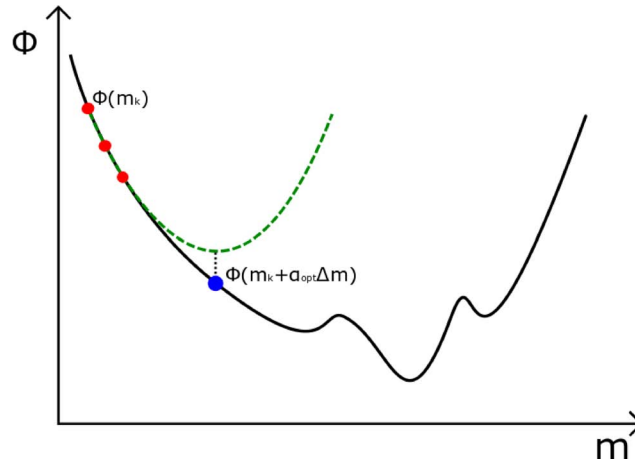


FIGURE 6.3 – Recherche linéaire 1D par ajustement d'une parabole avec 3 points.

Cette méthode permet de limiter le nombre d'itérations mais requiert de nombreux calculs directs supplémentaires (deux de plus par itération). Nous avons également défini une valeur maximale α_{max} pour le pas ; le pas est ainsi obtenu tel que $\alpha = \min(\alpha_{max}, \alpha_{opt})$. L'utilisation d'une valeur maximale permet de stabiliser l'inversion en l'obligeant à faire de petits pas dans la direction de descente. En contrepartie nous ne tirons pas complètement avantage de la recherche linéaire et le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme peut être plus important.

L'utilisation d'un préconditionneur nous permet également d'accélérer la convergence ; c'est particulièrement important lors de l'utilisation du gradient conjugué. L'ajout d'un préconditionneur \mathbf{P} revient à effectuer un changement de variable $\tilde{\sigma} = \mathbf{K}^{-1}\sigma$, où $\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{K}^t$. Nous pouvons ensuite développer l'algorithme du gradient conjugué pour la variable transformée $\tilde{\sigma}$ puis effectuer la conversion pour revenir à la variable σ (Hager & Zhang, 2006). L'itération du gradient conjugué préconditionné s'écrit alors (en reprenant les notations de la sous-section 4.1.4.3) :

$$\sigma^{k+1} = \sigma^k + \alpha \mathbf{s}^k, \quad (6.2)$$

où $\mathbf{s}^k = -\mathbf{P}\mathbf{g}^k + \bar{\beta}_k \mathbf{s}^{k-1}$. Le paramètre $\bar{\beta}$ est modifié par rapport au paramètre β

donné à la sous-section 4.1.4.3. Pour la formule de Fletcher-Reeves il devient :

$$\bar{\beta}_k = \frac{(\mathbf{g}^k)^t \mathbf{P}(\mathbf{g}^k)}{(\mathbf{g}^{k-1})^t \mathbf{P}(\mathbf{g}^{k-1})}. \quad (6.3)$$

Un bon préconditionneur permet de réduire le nombre d'itérations et a l'avantage d'être simple à calculer. L'utilisation de l'inverse de la diagonale du Hessien est un choix couramment effectué (Ha et al., 2006). Nous avons fait le choix d'utiliser simplement la profondeur des cellules comme préconditionneur ; la valeur est progressivement atténuée pour les grandes profondeurs. Nous avons également ajouté un préconditionneur lors de l'utilisation de la méthode de Quasi-Newton, comme recommandé par Plessix & Mulder (2008).

6.1.6 Critère de convergence et d'arrêt

Pour juger de la qualité de la reconstruction résultant de l'inversion, une méthode instructive consiste à comparer, par superposition, les courbes de résistivités apparentes observées et celles calculées. Afin de déterminer quand stopper le processus d'inversion et si le modèle retrouvé est satisfaisant, l'utilisation de critères quantitatifs s'avère nécessaire. Un critère couramment utilisé, le critère RMS (Root Mean Square) mesure la moyenne de l'erreur quadratique relative entre les données observées et calculées (Loke & Barker, 1996a) :

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{d^{obs}(i) - d(i)}{d^{obs}(i)} \right)^2}. \quad (6.4)$$

La valeur de RMS donne un critère sur la qualité de la reconstruction. Une erreur inférieure à 5% est généralement admise comme indiquant une bonne reconstruction ; toutefois ceci indique uniquement que le modèle obtenu explique bien les données mais ne statue en rien sur sa justesse (problème d'équivalence). Afin de déterminer quand stopper l'inversion, Loke (2011) propose d'utiliser la variation du RMS entre deux itérations successives. Il indique qu'une variation inférieure à 5% est un critère d'arrêt généralement satisfaisant. Du fait des méthodes d'optimisation que nous avons utilisées ici (notamment le gradient conjugué), ce critère ne nous paraît pas satisfaisant. En effet il est parfois intéressant de pousser les itérations pour obtenir un modèle plus réaliste (en profitant de l'effet de régularisation implicite) ; or en poussant les itérations de la sorte, l'erreur RMS entre deux itérations successives ne diminue que très légèrement. Dans le cas où une estimation du bruit sur les mesures est connue, il peut être préférable d'étudier la variation de la fonction objective (Equation 6.1) afin de prendre en compte explicitement l'erreur sur la mesure. Il est alors possible de définir une valeur cible de la fonction objective pour laquelle le modèle obtenu explique les données au niveau de leur incertitude (Friedel, 2003). Si nous considérons que les erreurs sur les données sont non corrélées (hypothèse couramment admise (Günther, 2004)) et que le bruit est gaussien, la valeur cible de la fonction objective est égale au nombre de données inversées (N) :

$\Phi_d \simeq N$. Nous pouvons ajouter qu'il est également important d'arrêter l'inversion si la minimisation diverge ou si le nombre d'itérations atteint une valeur maximale d'itérations à réaliser. Il nous a semblé délicat de définir un critère d'arrêt général pour l'ensemble des applications. Dans nos applications nous avons utilisé, selon les cas, un des différents critères précédemment énoncés.

Nous avons présenté quelques points relatifs à l'implémentation et la résolution du problème inverse. Dans la prochaine section, nous allons illustrer l'utilisation de notre code d'inversion au travers de quelques exemples sur des données synthétiques. Chaque application se veut indépendante et vise à étudier sommairement certains aspects de l'inversion.

6.2 Etudes synthétiques

6.2.1 Etude du comportement des normes ℓ_1 et ℓ_2

Nous avons indiqué au chapitre 4 que différentes normes peuvent être utilisées dans la définition de la fonction objective. Nous avons ici testé la norme ℓ_1 et la norme ℓ_2 , sur un modèle très simple, en comparant leur comportement vis-à-vis d'un bruit modéré d'une part et de données fortement aberrantes d'autre part. Le modèle de référence est présenté à la figure 6.4 ; il s'agit d'un bloc à $10 \Omega.m$ dans un milieu homogène à $100 \Omega.m$ avec une légère topographie. Les données synthétiques ont été générées en utilisant un dispositif Schlumberger et 64 électrodes, avec un espacement interélectrodes minimal de 2 m ; l'intensité du courant a été fixée à 1 Ampère. Un bruit gaussien a été ajouté suivant le modèle de bruit additif suivant : 70 mV de bruit blanc plus un bruit relatif de 0.1%. La pseudosection des résistivités apparentes ainsi obtenues est montrée à la figure 6.4.

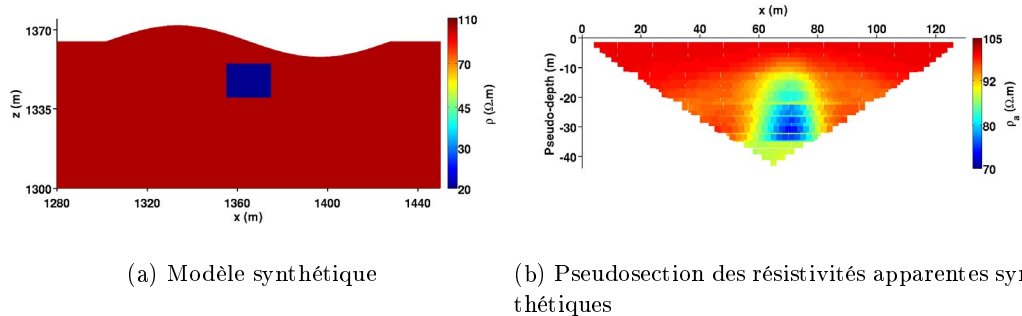


FIGURE 6.4 – Modèle et données synthétiques.

Dans un premier temps, nous avons inversé les données précédentes avec le gradient conjugué et d'une part la norme ℓ_2 , puis d'autre part la norme ℓ_1 . Le modèle initial est un milieu homogène à $100 \Omega.m$. Les résultats (modèle, résistivités apparentes calculées et courbe de convergence) sont respectivement présentés aux figures

6.5a, 6.5c, 6.5e et 6.5b, 6.5d, 6.5f. Nous constatons que les résultats obtenus avec les deux normes sont très proches, tant en termes de modèle obtenu que d'erreur RMS. Les décroissances des fonctions objectives sont également très similaires. Pour les deux normes, l'hétérogénéité conductrice est retrouvée et bien localisée ; ses valeurs de résistivités sont en revanche surévaluées. La limite inférieure du bloc n'est pas clairement définie, en particulier avec la norme ℓ_1 , cela vient de la résolution du problème. Nous pouvons estimer que le bas du bloc est proche de la profondeur maximale de résolution du problème (avec le dispositif employé ici).

Dans un deuxième temps, nous avons arbitrairement perturbé 1/30^e des données synthétiques en augmentant la mesure de résistivité apparente de 500%. De cette manière nous avons cherché à simuler un très mauvais contact d'électrode ; cette simulation n'est pas parfaite car nous avons perturbé les données sans tenir compte de corrélations entre elles, ce qui n'aurait pas été le cas dans la réalité. Nous avons ensuite inversé ces données perturbées. Il est évident que ce test n'est pas bien représentatif d'une application réelle puisque les données aberrantes (qui sont bien visibles dans notre cas) seraient en pratique supprimées par un prétraitement. Les résultats des inversions sont présentés à la figure 6.6. L'inversion avec la norme ℓ_2 a été stoppée après 11 itérations car ne convergeant que très lentement (Figure 6.6e). Le modèle alors obtenu ne présente qu'une hétérogénéité très légèrement plus conductrice que le milieu ; ses dimensions sont également largement sous-estimées (Figure 6.6a). De plus de forts et volumineux artefacts résistifs apparaissent dans la partie supérieure ; les valeurs de résistivités se situent entre 66 et 167 $\Omega.m$. Le modèle à l'itération 11 (Figure 6.6g), bien qu'expliquant légèrement mieux les données, nous semble moins satisfaisant : les artefacts y sont plus importants. Les résistivités sont alors comprises entre 54 et 195 $\Omega.m$. Nous voyons clairement que les données aberrantes ont mis en échec la minimisation suivant la norme ℓ_2 . L'inversion avec la norme ℓ_1 se montre beaucoup plus robuste. Le modèle obtenu après 27 itérations (Figure 6.6b) est très proche de celui obtenu avec les données non perturbées (Figure 6.5b) : les résistivités sont comprises entre 57 et 115 $\Omega.m$. La valeur de la fonction objective n'a pu être réduite qu'à un peu plus de 50% de sa valeur initiale (Figure 6.6f) du fait des fortes erreurs (données aberrantes) que le modèle ne parvient pas à expliquer. Nous remarquons que la décroissance de la fonction objective est moins lisse, en particulier au début de l'inversion. Avec la norme ℓ_1 le terme source de l'équation de l'état adjoint est

$$\frac{\partial \Phi_d}{\partial V_i(\mathbf{x}_j)} = - \sum_{k=1}^N \frac{\partial \log(\rho_{a_k}/\rho_0)}{\partial V_i(\mathbf{x}_j)} \operatorname{sgn} \left[\log \left(\frac{\rho_{a_k}^{obs}}{\rho_0} \right) - \log \left(\frac{\rho_{a_k}}{\rho_0} \right) \right]. \quad (6.5)$$

Pour des résidus faibles il est possible que ce terme source passe alternativement de positif à négatif d'une itération à une autre. Ceci peut expliquer le comportement sensible de la norme ℓ_1 que nous observons. Un moyen d'éviter ce problème serait d'utiliser une norme telle que la norme de Huber qui amortit ce phénomène d'oscillations (Farquharson & Oldenburg, 1998).

Nous avons pu vérifier sur un exemple simple que la norme ℓ_1 est plus robuste

que la norme ℓ_2 vis-à-vis du bruit composé de spikes ou de mesures aberrantes (a priori d'une distribution de Laplace des erreurs), alors que la norme ℓ_2 donne les meilleurs résultats en présence de bruit Gaussien, comme l'indique Tarantola (1987). Le cas ici étudié constitue un cas extrême et il ne faut bien sûr pas en conclure que pour des données faiblement à moyennement bruitées, la norme ℓ_2 a un mauvais comportement. Le modèle étudié ici était très simple (un bloc dans un milieu homogène), dans l'application suivante nous allons considérer un modèle un peu plus complexe.

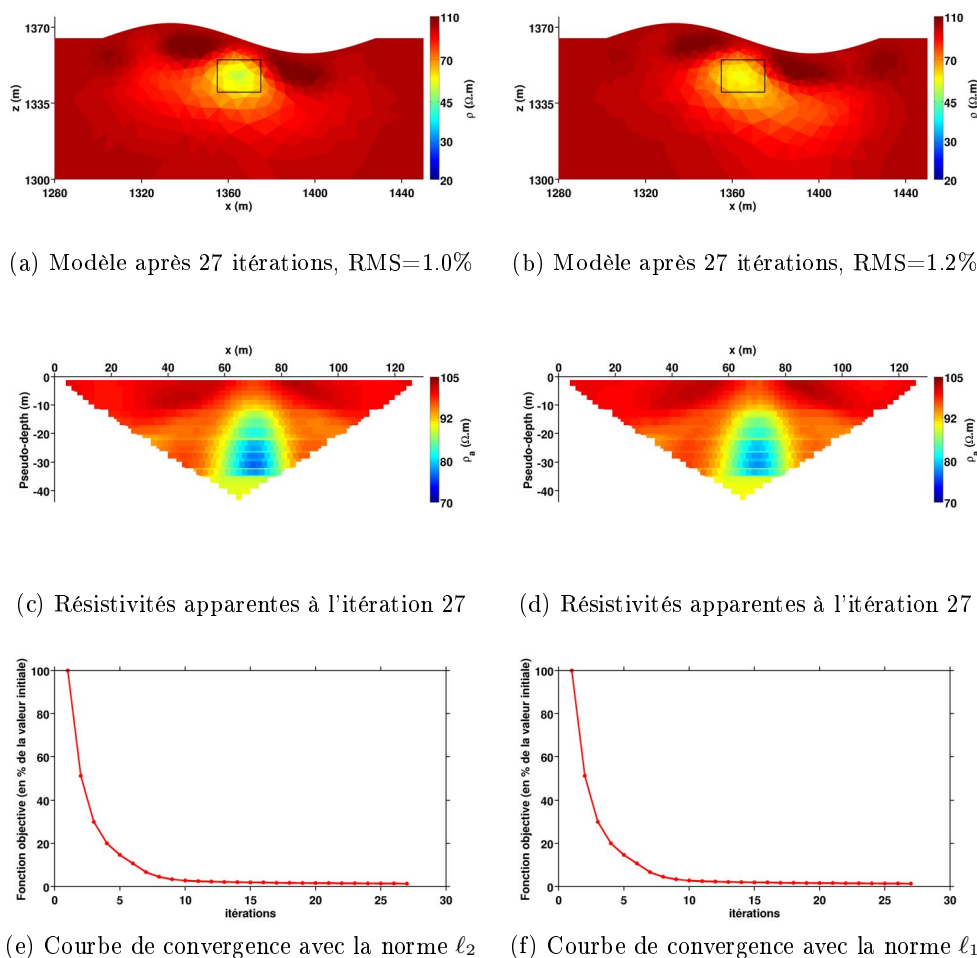
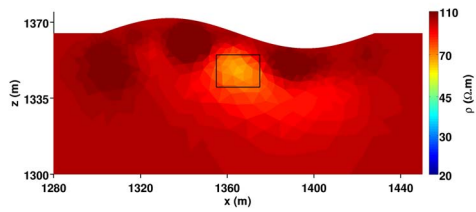
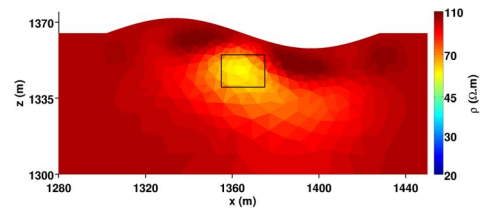


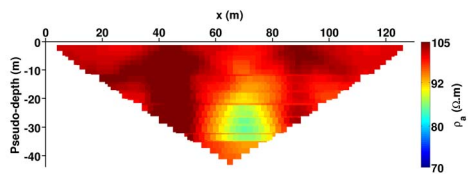
FIGURE 6.5 – Résultats d'inversions sur les données synthétiques avec la norme ℓ_2 (gauche) et avec la norme ℓ_1 (droite).



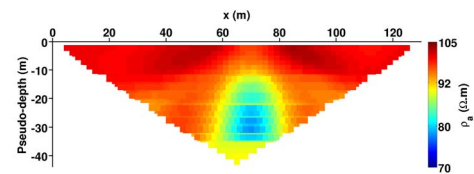
(a) Modèle après 6 itérations, RMS=18.4%



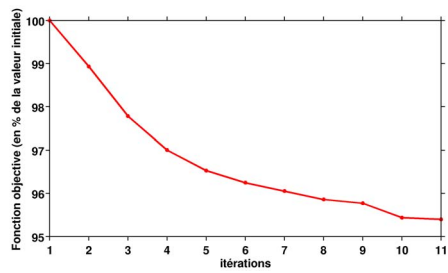
(b) Modèle après 27 itérations, RMS=16.4%



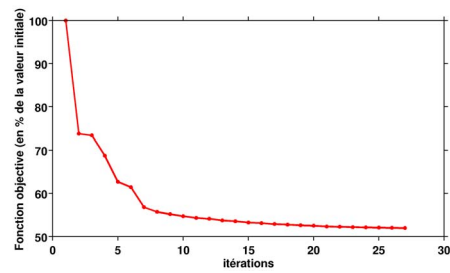
(c) Résistivités apparentes à l'itération 6



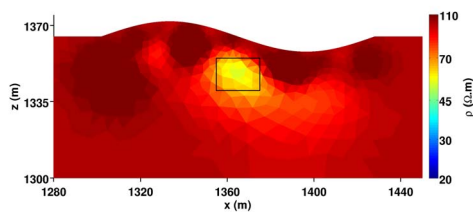
(d) Résistivités apparentes à l'itération 27



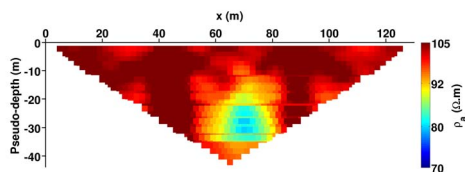
(e) Courbe de convergence avec la norme ℓ_2



(f) Courbe de convergence avec la norme ℓ_1



(g) Modèle après 11 itérations, RMS=18.3%



(h) Résistivités apparentes à l'itération 11

FIGURE 6.6 – Résultats d'inversions sur les données synthétiques perturbées avec la norme ℓ_2 (gauche) et avec la norme ℓ_1 (droite).

6.2.2 Inversion d'un modèle avec plusieurs hétérogénéités

Dans cette seconde application synthétique nous considérons un modèle plus complexe composé de deux blocs, un résistant et un conducteur, dans un milieu globalement homogène avec une fine couche de résistivité différente à la surface. Le modèle présente également une légère topographie. En conservant cette même géométrie, nous avons créé trois modèles synthétiques en considérant des résistivités différentes pour les différents blocs (Figures 6.7a, 6.8a, 6.9a). Les données synthétiques ont pour les trois cas été générées en considérant un dispositif Schlumberger composé de 64 électrodes, avec un espacement interélectrodes minimum de 2 m. Toutes les données sont bruitées selon le même modèle de bruit additif que dans l'application précédente, à savoir : 70 mV de bruit blanc plus un bruit relatif de 0.1%. Les trois jeux de données sont inversés en utilisant un gradient conjugué. Le modèle de départ de chacune des inversions est un milieu homogène.

Le premier modèle est constitué d'un milieu à $100 \Omega.m$ avec une couche supérieure à $300 \Omega.m$ et dans lequel se trouve un gros bloc à $4000 \Omega.m$ ainsi qu'un plus petit à $10 \Omega.m$. La figure 6.7b montre le modèle obtenu après 85 itérations. L'erreur RMS de 4.5% est satisfaisante et les pseudosections de résistivités apparentes calculées et inversées concordent bien (Figures 6.7c et 6.7d). Nous constatons des différences essentiellement pour les faibles pseudo-profondeurs et en particulier pour les données sur les bords extérieurs. Deux raisons peuvent expliquer cela : la plus faible résolution sur les bords du domaine et la faible épaisseur de la couche supérieure (3 m). Sur le modèle inversé la couche supérieure est bien retrouvée, tant en terme de valeurs de résistivité que de dimensions, à l'exception des bords droit et gauche. Le bloc résistant est bien retrouvé et bien cerné en terme de dimensions, sa limite inférieure est par contre sous-estimée car peu résolue. Les valeurs de résistivité retrouvées sont bien inférieures aux valeurs réelles et ce bien que nous ayons poussé les itérations pour accentuer les contrastes (Figure 6.7e). Les valeurs de résistivité du bloc conducteur sont mieux estimées, en revanche sa géométrie est retrouvée de manière plus diffuse. Nous pouvons enfin noter la présence d'artefacts conducteurs juste sous la couche de surface, et d'autres résistants, en profondeur, à proximité du bloc à $4000 \Omega.m$. Remarquons que le nombre d'itérations (85) n'est pas satisfaisant mais s'explique par un choix, sécuritaire, d'une petite valeur pour la limite du pas α_{max} .

Dans le second modèle synthétique nous avons cherché à inverser les contrastes entre les différentes unités. Le milieu est alors à $400 \Omega.m$, la couche supérieure a une résistivité de $1200 \Omega.m$; les blocs de gauche et droite sont respectivement à $40 \Omega.m$ (le contraste est ici plus faible que dans le cas précédent) et $4000 \Omega.m$ (Figure 6.8a). L'inversion a convergé dans un nombre d'itérations comparable à l'exemple précédent. Les principales erreurs restantes concernent également ici les faibles pseudoprofondeurs (Figures 6.8c et 6.8d). La couche supérieure est bien retrouvée mais sa résistivité légèrement sous-estimée. Le sommet du bloc résistant est bien localisé, sa résistivité est en revanche inférieure à la valeur exacte et la limite inférieure du bloc n'est pas bien retrouvée. La résistivité du bloc conducteur n'est pas parfaitement

estimée, mais il est surtout important de noter que le bloc n'est pas bien localisé. En plus de retrouver une hétérogénéité globalement diffuse, nous retrouvons un bloc déformé et décalé vers la gauche. Ce comportement est à mettre en lien avec la résolution du problème, une étude approfondie via la matrice de résolution permettrait de mieux le quantifier (Friedel, 2003). Au delà du dispositif et de la position de l'hétérogénéité (qui tous deux influent sur la résolution du problème) nous pensons que la résistivité de la couche de surface joue ici un rôle important. Nous avons construit un troisième modèle synthétique, identique au second, à l'exception de la résistivité de la couche de surface que nous avons abaissée à $590 \Omega.m$. Les résultats de l'inversion sont présentés à la figure 6.9. Nous constatons que les différentes structures sont bien retrouvées et que le bloc conducteur est ici mieux localisé. Les contrastes ne sont encore une fois pas très bien retrouvés et l'image obtenue plutôt lisse. Nous avons choisi ici un pas maximal α_{max} plus grand ce qui nous a permis de converger vers une erreur RMS légèrement plus faible en deux fois moins d'itérations que dans les deux cas précédents. Notons toutefois que ce pas s'est parfois avéré trop grand (aux itérations 13 et 14) comme l'indique la courbe de convergence (Figure 6.9e).

Nous avons vu au moyen de ces trois exemples que le code d'inversion permet de retrouver les principales structures de modèles assez complexes. Les résistivités des objets retrouvés sont en général atténuées par rapport à leurs valeurs réelles, et le modèle obtenu est globalement lisse et peut présenter des distorsions. La topographie ; relativement faible ici, est toutefois importante, sa bonne prise en compte permet de bien localiser les différentes anomalies. La forme des cibles résistantes est mieux retrouvée que celle des cibles conductrices. Le phénomène est inversé en ce qui concerne les valeurs de résistivité retrouvées. Ce comportement s'explique par la focalisation des lignes de courant vers les hétérogénéités conductrices et le fait qu'elles contournent les zones résistantes. Des comportements équivalents existent dans le cas de la sismique : on retrouve bien les contours des zones de vitesses lentes (contournées par les rais), et on retrouve bien les valeurs des vitesses sismiques des zones de forte vitesses (traversées par les rais).

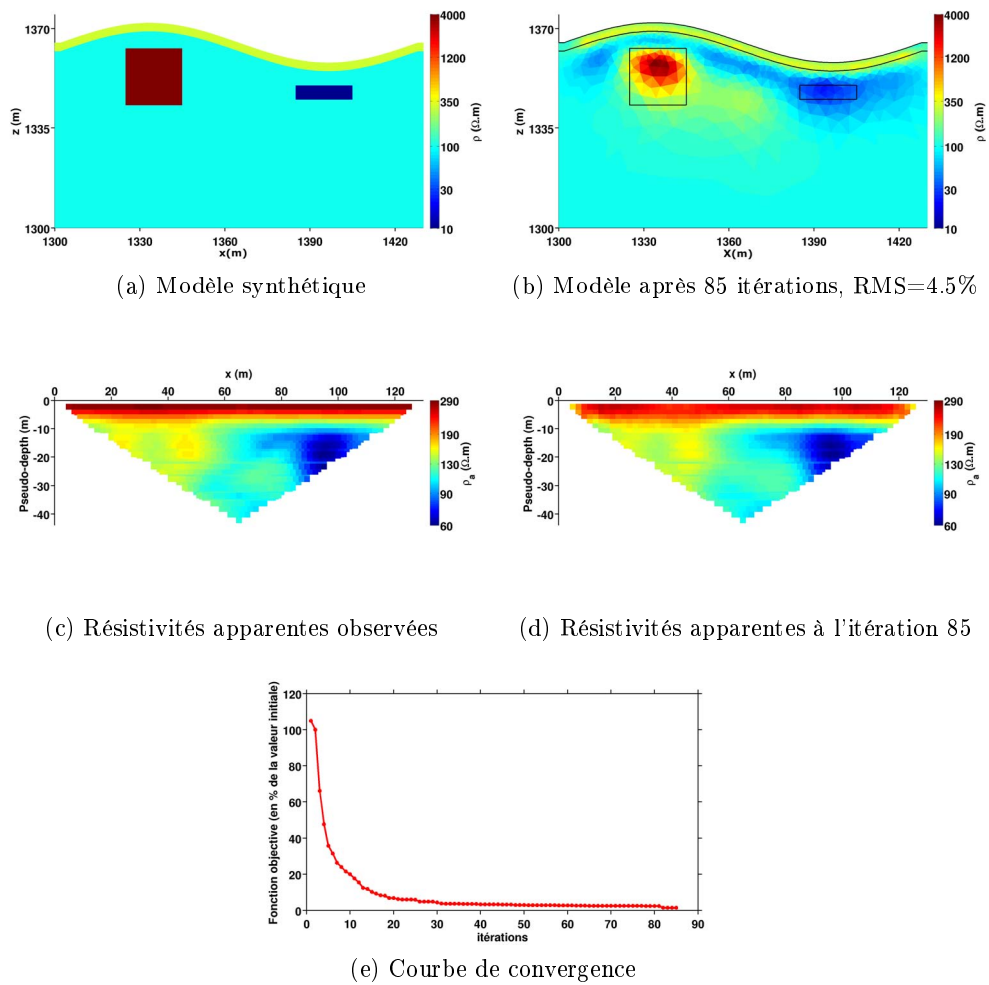


FIGURE 6.7 – Modèle synthétique 1 et résultats d'inversion.

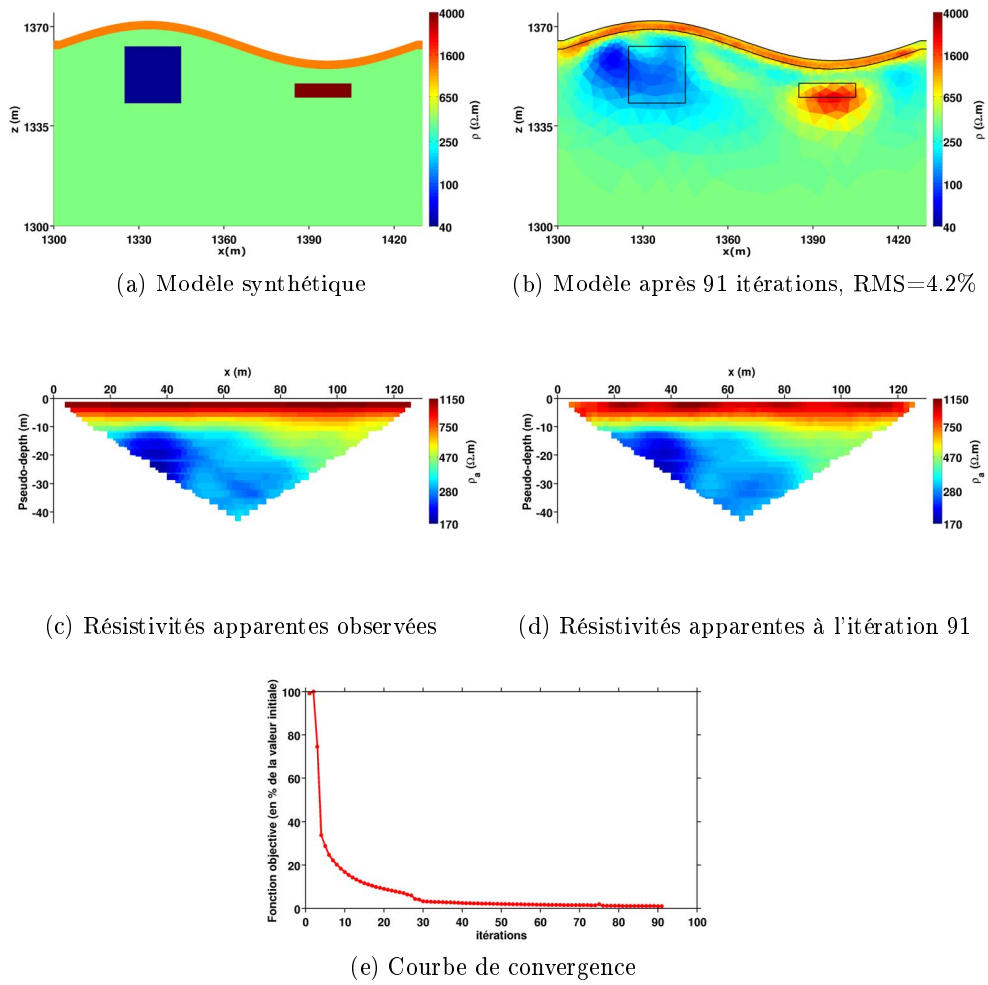


FIGURE 6.8 – Modèle synthétique 2 et résultats d'inversion.

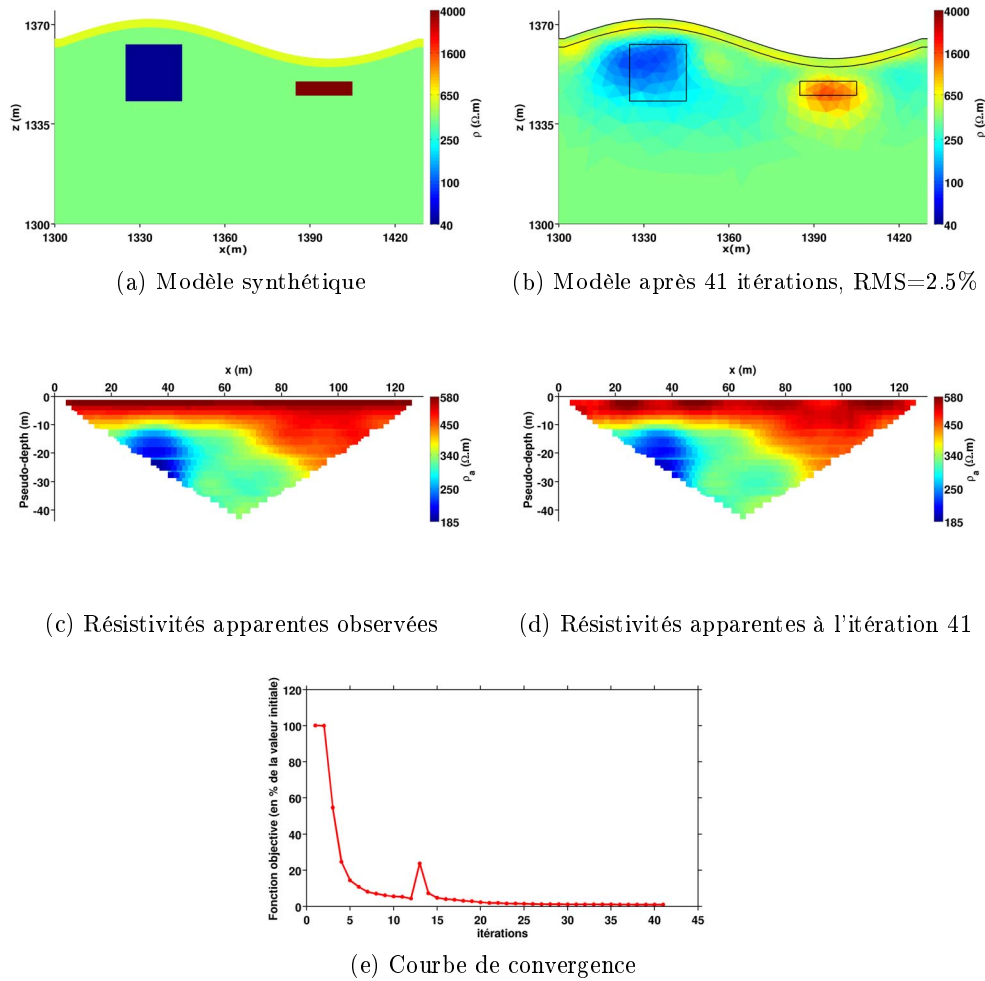
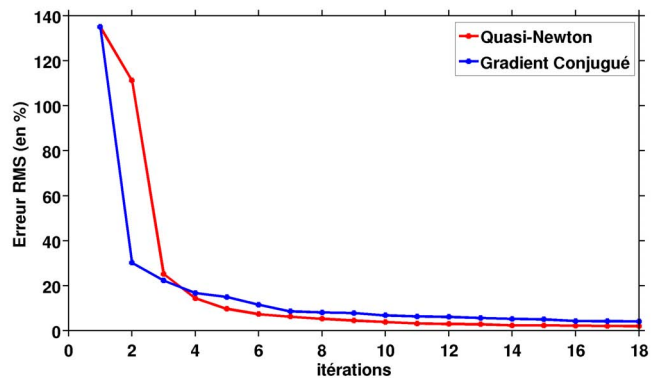
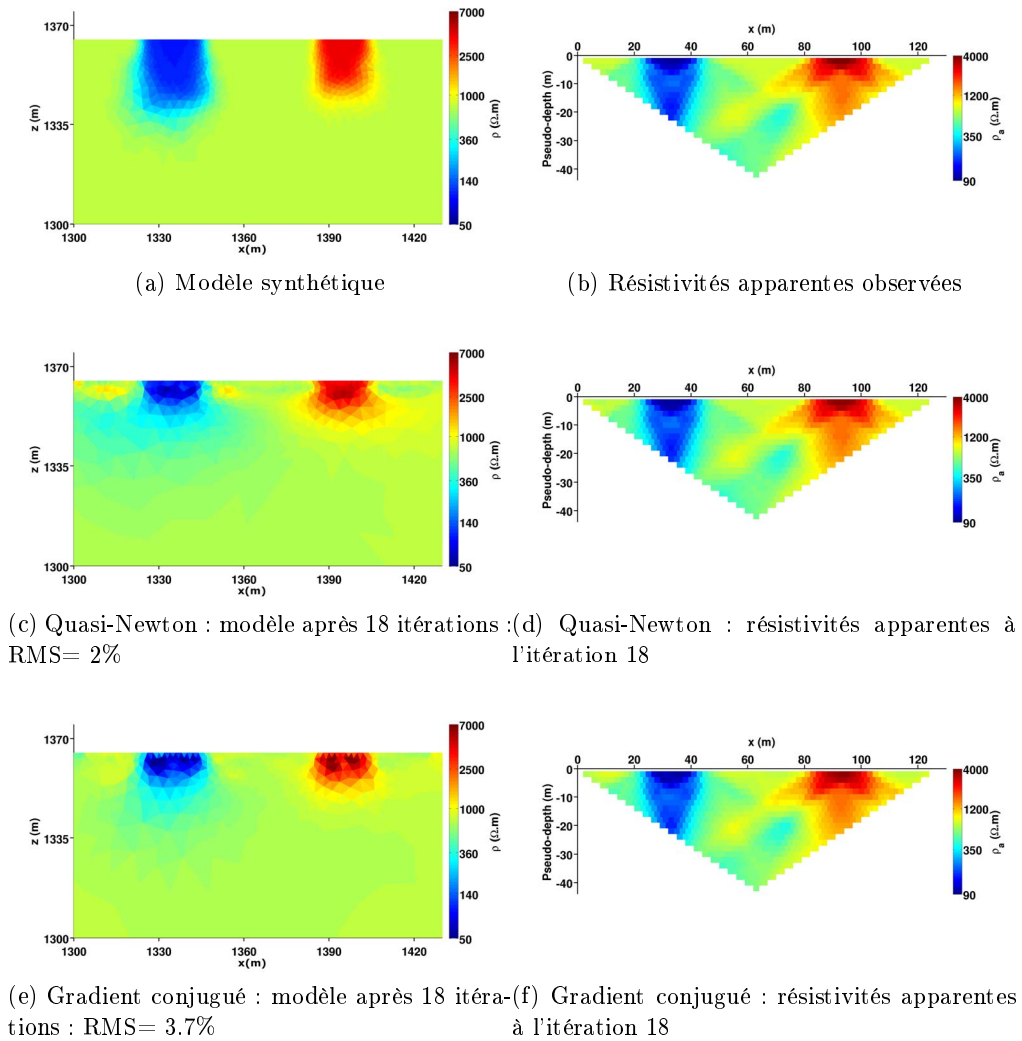


FIGURE 6.9 – Modèle synthétique 3 et résultats d'inversion.

6.2.3 Comparaison des algorithmes de minimisation

Dans cette troisième et dernière application sur des données synthétiques nous avons réalisé l'inversion des mêmes données avec le gradient conjugué utilisé précédemment d'une part, et l'algorithme de Quasi-Newton L-BFGS (Nocedal, 1980) d'autre part. Le modèle de référence est présenté à la figure 6.10a. Il est constitué de deux blocs, un résistant ($4000 \Omega.m$) et un conducteur ($100 \Omega.m$), dans un milieu homogène à $700 \Omega.m$. Les blocs affleurent à la surface et les résistivités à leurs bords sont lissées. Les données synthétiques ont été générées avec un dispositif Wenner de 64 électrodes et un écartement minimal de 2 m. Les données (Figure 6.10b) ont également été perturbées par 2% de bruit gaussien (additif). L'inversion avec l'algorithme L-BFGS a convergé en 18 itérations jusqu'à un modèle avec un RMS de 2% (Figure 6.10c). Le χ^2 ($\chi^2 = \Phi_d/N$) est pour ce modèle de 1, indiquant que les données sont expliquées dans leur niveau de bruit. Après 18 itérations, l'inversion

avec le gradient conjugué a convergé vers un modèle avec un RMS de 3.7% et un χ^2 de 3.4 (Figure 6.10e). Les deux modèles obtenus sont très proches ; nous y retrouvons bien le bloc résistant et le bloc conducteur. Leurs largeurs sont bien respectées, au moins en surface. Au-delà de 25 m de profondeur les deux anomalies ne sont plus imagées et ce par les deux méthodes. Les résistivités dans les anomalies sont plus homogènes avec la méthode de Quasi-Newton du fait du terme de régularisation. Avec le gradient conjugué nous obtenons des valeurs plus extrêmes (fortes et faibles) et la résistivité est globalement moins lisse dans les anomalies indiquant que le lissage du gradient n'a peut-être pas été suffisant ici. Le modèle obtenu avec le Quasi-Newton présente en revanche des artefacts résistants de part et d'autre du bloc conducteur. Ces artefacts ne sont pas visibles avec le gradient conjugué et semblent donc provenir de la régularisation explicite du problème. Pour finir, la figure 6.10g montre la décroissance de l'erreur RMS pour les deux méthodes. Nous voyons que la décroissance est un peu plus rapide avec le Quasi-Newton ; l'utilisation du Quasi-Newton peut donc être avantageuse. En pratique nous avons trouvé qu'en dépit de cette meilleure convergence le gradient conjugué préconditionné constitue une bonne alternative en raison de sa robustesse.



(g) Erreur RMS au cours de l'inversion

FIGURE 6.10 – Modèle synthétique et résultats d'inversions avec les méthodes de Quasi-Newton et du gradient conjugué.

Nous avons réalisé plusieurs inversions sur des données synthétiques. Nous avons pu en tirer des enseignements sur les capacités de l'algorithme d'inversion à retrouver différentes structures. Les formes des anomalies résistantes sont retrouvées de manière plus nette que celles des anomalies conductrices ; pour ces dernières les valeurs de résistivité sont en revanche mieux estimées que pour les anomalies résistantes. L'utilisation de la norme ℓ_1 est plus robuste vis-à-vis de données aberrantes, en revanche elle est plus sensible au choix du pas de descente que la norme ℓ_2 . Enfin le gradient conjugué semble converger moins vite que le Quasi-Newton ; il est en revanche plus robuste ce qui en fait une méthode intéressante. Après avoir réalisé ces tests sur des données synthétiques, il était nécessaire de tester le code sur des données réelles ; c'est l'objet de la prochaine section.

6.3 Inversion de données réelles

Dans cette section nous présentons les résultats de tests d'inversion sur des données réelles. Les données ont été acquises dans le cadre du GNR TRASSE, un projet en collaboration entre l'IRSN, le CNRS et Mines ParisTech, sur le site expérimental de l'Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire (IRSN) de Tournemire. Une première campagne de mesure électrique a eu lieu en 2007 au travers d'une collaboration entre l'IRSN et le CEREGE (Centre Européen de Recherche et d'Enseignement des Géosciences de l'Environnement) ; les résultats sont présentés dans [Gélis et al. \(2010\)](#). Nous nous limitons ici à une description succincte de la géologie du site de Tournemire. Nous présentons des résultats de la campagne de 2011 obtenus avec notre code d'inversion ; nous ne rentrons pas en détail dans leur interprétation géologique. Une interprétation géologique plus détaillée de ces résultats est donnée dans [Gélis et al. \(2012\)](#), que nous avons ajouté en annexe à ce chapitre.

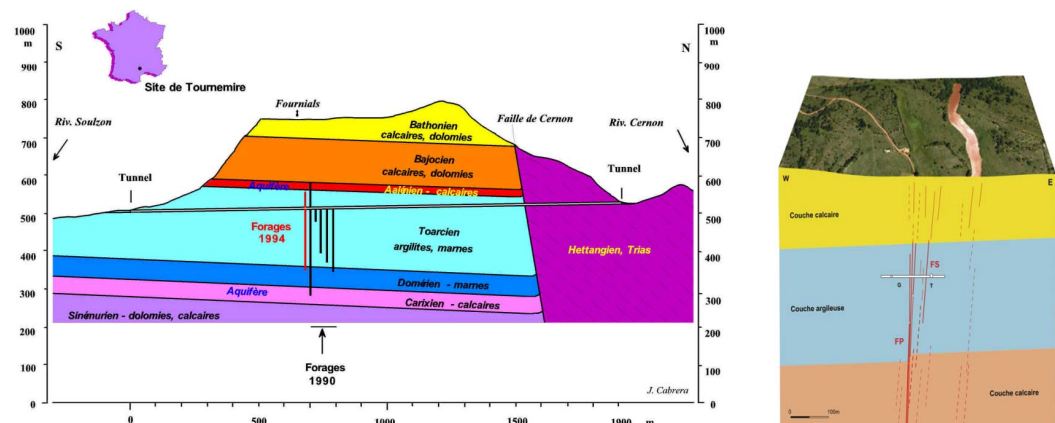
6.3.1 Contexte géologique et environnemental du site de Tournemire

Le milieu argileux est actuellement considéré comme une barrière géologique potentielle pour le stockage profond de déchets radioactifs du fait de ses caractéristiques de faible perméabilité et de rétention de radioéléments. L'Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire (IRSN) est chargé d'effectuer l'expertise du projet de stockage en couche argileuse profonde dont est chargé l'ANDRA (Agence Nationale de Gestion des Déchets Radioactifs), sur le site de Bures en Meuse et Haute-Marne, dans l'est du Bassin Parisien. Afin de développer cette expertise, l'IRSN a mis en place des programmes de recherche sur les propriétés de confinement des argiles dans la station expérimentale de Tournemire (Sud-Aveyron).

Le site de Tournemire a été choisi comme laboratoire d'expérimentation dans le milieu argileux du fait d'un accès facile, via un ancien tunnel ferroviaire de 1885 m de long, à la couche argileuse, et de certaines similarités de ces argiles avec les argiles de Bures. Cette couche épaisse de 250 m est constituée d'argilites et de marnes indurées des formations jurassiques (Toarcien et Domérien). L'ancien tunnel donne

accès directement à la formation du Toarcien, permettant ainsi la réalisation d'expérimentations au sein de la couche argileuse localisée sous une série de roches sédimentaires (calcaires et argiles) d'environ 250 m d'épaisseur.

Le site de Tournemire se caractérise par une structure monoclinale composée, à grande échelle, de trois grandes couches (Figures 6.11a et 6.11b) : une couche inférieure calcaire et dolomitique d'environ 300 m d'épaisseur (Hettangien, Sinémurien et Carixien), la couche argileuse constituée des formations du Toarcien et Domérien, et une couche supérieure calcaire et dolomitique d'environ 250 m d'épaisseur. La couche argileuse est encadrée par deux aquifères calcaires : l'aquifère de l'Aalénien dans la partie supérieure et l'aquifère régional du Carixien dans sa partie inférieure. Ces couches jurassiques sont affectées au Nord du site par une grande faille à l'échelle régionale (la faille de Cernon). En plus de cette faille principale plusieurs zones de fractures secondaires ont été observées dans les galeries ainsi que dans des forages effectués depuis le tunnel (Cabrerá et al., 2001). Ces zones de failles subverticales présentent des déplacements essentiellement sub-horizontaux (faible décalage vertical). Ces zones fracturées, longues de plusieurs centaines de mètres à plusieurs kilomètres, s'étendent jusqu'à la couche de calcaire supérieure où elles s'élargissent et où la fracturation est plus diffuse. Les positions de ces zones de fractures sont reportées à la figure 6.11b.



(a) Coupe géologique Sud-Nord le long du tunnel (Cabrerá et al., 2001)

(b) Bloc schématique Ouest-Est (Gélis et al., 2012)

FIGURE 6.11 – Contexte géologique du site de Tournemire.

L'IRSN étudie la possibilité de détecter les zones fracturées dans les couches superficielles par différentes méthodes géophysiques, dont la méthode d'imagerie de résistivité électrique. Une première acquisition à grande échelle (profils de 2,5 km et écartements interélectrodes de 40 m) a été conduite en 2007 en collaboration avec le CNRS (équipe du CEREGE) (Gélis et al., 2010). Afin d'imager plus précisément les zones fracturées, l'IRSN, en collaboration avec Mines ParisTech, a réalisé une acquisition haute résolution en mai 2011.

6.3.2 Acquisition des données

La campagne de mesures de mai 2011 a permis d'effectuer différentes acquisitions 2D le long d'un même profil Ouest-Est (Gélis et al., 2012). Comme le montre la figure 6.11b, les failles sont globalement orientées Nord-Sud, ce profil nous permet donc, au regard de structures géologiques connues, un bon respect de l'approximation 2.5D. Deux profils de 760 m ont été réalisés avec des écartements interélectrodes de 8 m puis 4 m. Un profil de 510 m a également été réalisé avec un écartement de 2 m. Pour chacun des différents profils les données ont été acquises avec des protocoles Wenner et Schlumberger. Les acquisitions ont été réalisées à l'aide d'un résistivimètre Abem Terrameter LS à 12 canaux et de 64 électrodes. Plusieurs « roll-along » ont été nécessaires pour réaliser chaque profil. Le terrain rencontré sur le plateau présente une alternance de zones cultivées au sol meuble et de zones non cultivées où la couche de calcaire supérieure est affleurante.

6.3.3 Inversion des profils à écartements de 8 m

Nous présentons ici les résultats d'inversion des profils Wenner et Schlumberger avec les écartements d'électrodes de 8 m. Nous avons inversé les données avec notre code d'inversion et l'algorithme de gradient conjugué. L'erreur sur les données étant difficile à estimer nous avons réalisé l'inversion au sens des moindres carrés en faisant l'hypothèse d'un bruit Gaussien. Nous pouvons toutefois suspecter des erreurs de mesures, visiblement corrélées, apparaissant sur les données observées, en particulier sur la pseudosection du dispositif Wenner (Figure 6.12a, entourées en noir). Pour stabiliser et aider la convergence de l'inversion nous avons appliqué une pondération aux données donnant plus de poids aux mesures de faibles pseudo-profondeurs. Le modèle de départ utilisé pour les inversions est un milieu homogène de résistivité $770 \Omega.m$ (obtenue en prenant la moyenne des résistivités apparentes). Les inversions ont convergé jusqu'à des valeurs de RMS relativement élevées : 13.1 % et 9.8 % pour les inversions du profil Wenner présentées et 15.3 % pour le profil Schlumberger. La figure 6.12 montre les résultats de l'inversion du profil Wenner après 41 itérations, le modèle inversé, les données observées et calculées et la courbe de convergence. Les résistivités ont été limitées par une valeur limite supérieure à $13000 \Omega.m$. La figure 6.14 présente les mêmes résultats pour une seconde inversion du profil Wenner, où les résistivités ne sont limitées par une valeur maximale. Les résultats pour le profil Schlumberger sont montrés pour l'itération 31 à la figure 6.16 ; les résistivités sont également dans ce cas limitées à $13000 \Omega.m$ au maximum.

Nous pouvons constater que si les principales caractéristiques des données sont retrouvées après inversion (Figures 6.12a, 6.12b, 6.14b ainsi que 6.16a et 6.16b) les structures fines ne le sont pas parfaitement. Les données de résistivités apparentes faibles (en surface) sont notamment sous-estimées et des anomalies hautes fréquences sont visibles pour les moyennes à grandes pseudo-profondeurs. Les modèles inversés présentent de très forts contrastes de résistivité ce qui peut expliquer en partie les difficultés rencontrées par le code d'inversion. En particulier les forts contrastes

autour des électrodes entraînent des erreurs non négligeables sur le calcul des potentiels. La méthode de suppression de la singularité suppose en effet une conductivité localement homogène à la source. Les différents profils montrent les mêmes structures principales ; elles coïncident bien avec celles obtenues après l'inversion avec le logiciel Res2DInv (Gélis et al., 2012). Nos résultats présentent toutefois, au delà de 40 m de profondeur (pour x entre 250 et 350 m), une zone à environ $300 \Omega.m$ qui est beaucoup plus résistante sur les résultats de Res2DInv. Cette zone, globalement au centre du profil, n'est toutefois pas bien contrainte (du fait du roll-along). Il est possible que cette différence résulte de la convergence de notre code vers un minimum secondaire. Nos résultats indiquent malgré tout la présence de plusieurs zones de faibles résistivités en surface qui peuvent correspondre aux zones fracturées. Les résultats de Res2DInv montrent les mêmes zones conductrices ; ces résultats sont en revanche plus haute fréquence que les nôtres, ceci s'explique en raison de la meilleure convergence de ces inversions.

Les deux inversions du profil Wenner présentées ici (Figures 6.12c et 6.14c) illustrent un phénomène que nous avons constaté à travers des nombreux tests effectués : sans limite maximale imposée l'inversion génère des zones de résistivités extrêmement élevées. En imposant une limite maximale de résistivité nous avons obtenu un modèle (Figure 6.12c) ; sans imposer de limite de résistivité le modèle (Figure 6.14c) est similaire, toutefois les contrastes sont beaucoup plus forts. Les zones respectivement résistantes ou conductrices sont plus volumineuses et encore plus respectivement résistantes ou conductrices. L'erreur RMS du second modèle est plus faible ; il explique mieux les données. Nous pouvons le vérifier visuellement en observant les courbes de résistivités apparentes (Figures 6.13 et 6.15). Les courbes des résistivités apparentes observées et calculées se superposent bien à la Figure 6.15. Des résidus sont encore visibles, essentiellement en surface. Les deux courbes sont notamment nettement séparées, pour les deux premières pseudo-profondeurs, au niveau de deux zones, peu larges et conductrices, à gauche de l'image. Le modèle obtenu à l'itération 41 (en limitant les résistivités à $13000 \Omega.m$) explique moins bien les données. En plus des zones mal expliquées par l'autre modèle, des écarts entre données observées et calculées sont nettement visibles au centre de l'image, pour les premières pseudo-profondeurs, et de manière moins localisée pour les pseudo-profondeurs inférieures. Sans limites de résistivités les valeurs minimales et maximales obtenues sont respectivement de $23 \Omega.m$ et $102000 \Omega.m$ (ce type de valeurs est également obtenu avec l'inversion type ℓ_2 de Res2DInv (Gélis et al., 2012)). Ces valeurs, notamment la valeur maximale, nous semblent peu réalistes. En imposant la limite supérieure, ces valeurs obtenues sont respectivement de $56 \Omega.m$ et $13000 \Omega.m$. La limite imposée par la barrière logarithmique agit ici comme une barrière forte, ceci explique les zones saturées dans le modèle (Figure 6.12c). Ce modèle nous paraît toutefois plus satisfaisant du fait des valeurs de résistivité obtenues.

Nos résultats d'inversion permettent de retrouver les principales structures de la proche subsurface du profil étudié. En particulier différentes zones plus conductrices, pouvant correspondre à des zones de fractures, sont visibles. Une interprétation

géologique plus complète des résultats d'inversion est proposée dans [Gélis et al. \(2012\)](#), joint en annexe 6.4.

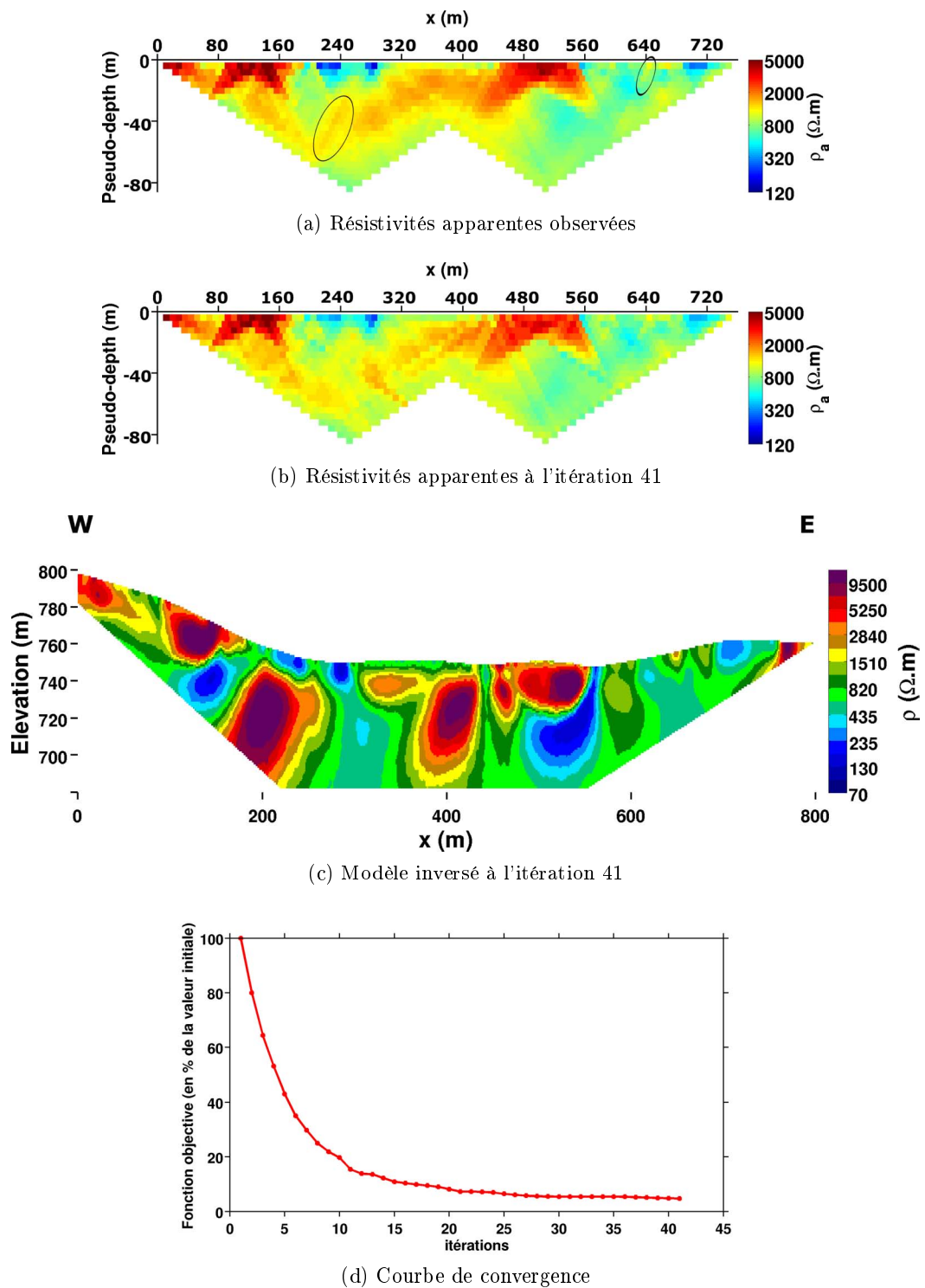


FIGURE 6.12 – Résultats de l'inversion du profil Wenner à écartements de 8 m, $\rho_{max} = 13000 \Omega \cdot m$.

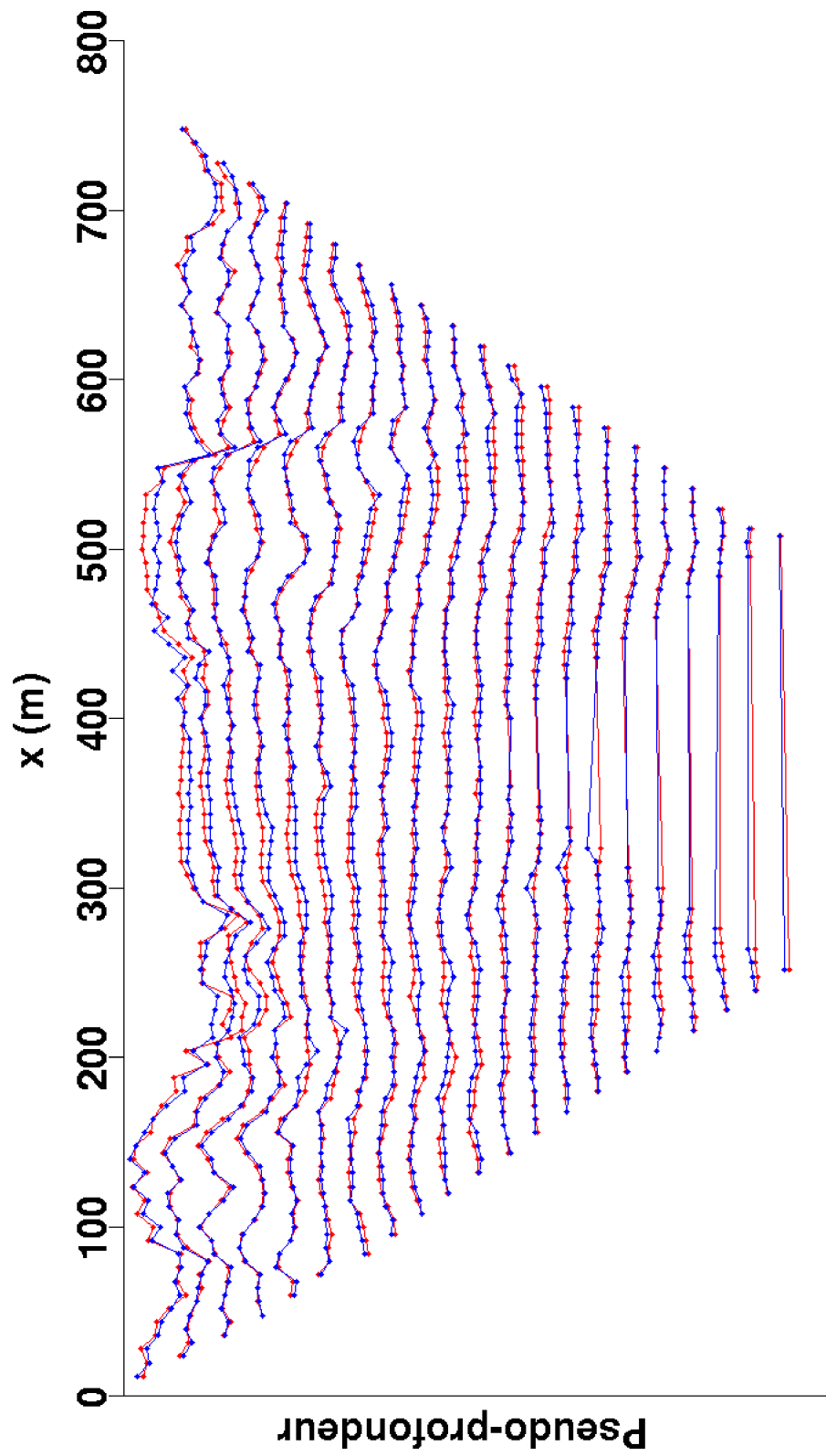


FIGURE 6.13 – Courbes des logarithmes des résistivités apparentes observées (rouges) et calculées (bleues) à l'itération 41.

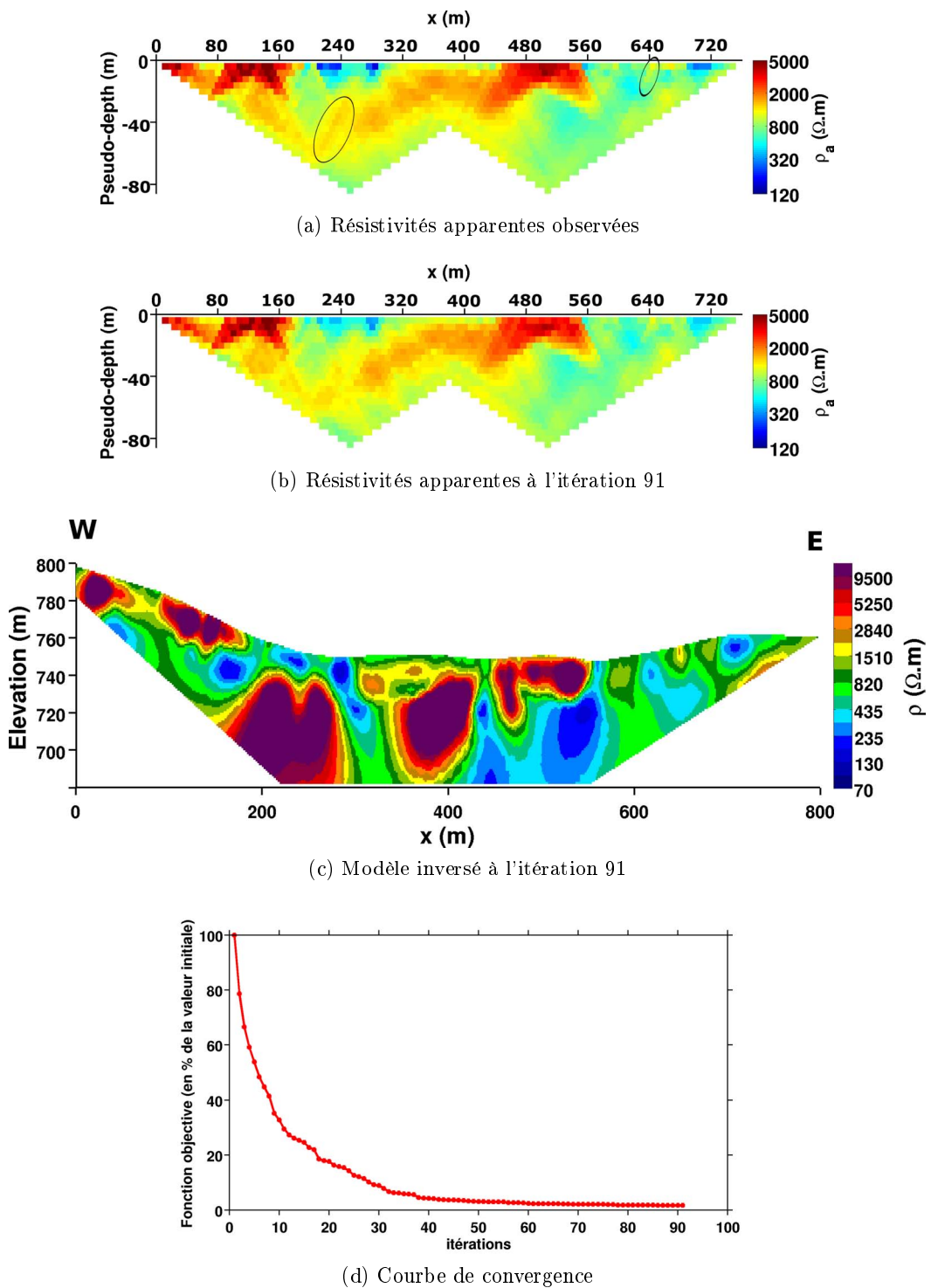


FIGURE 6.14 – Résultats de l'inversion du profil Wenner à écartements de 8 m.

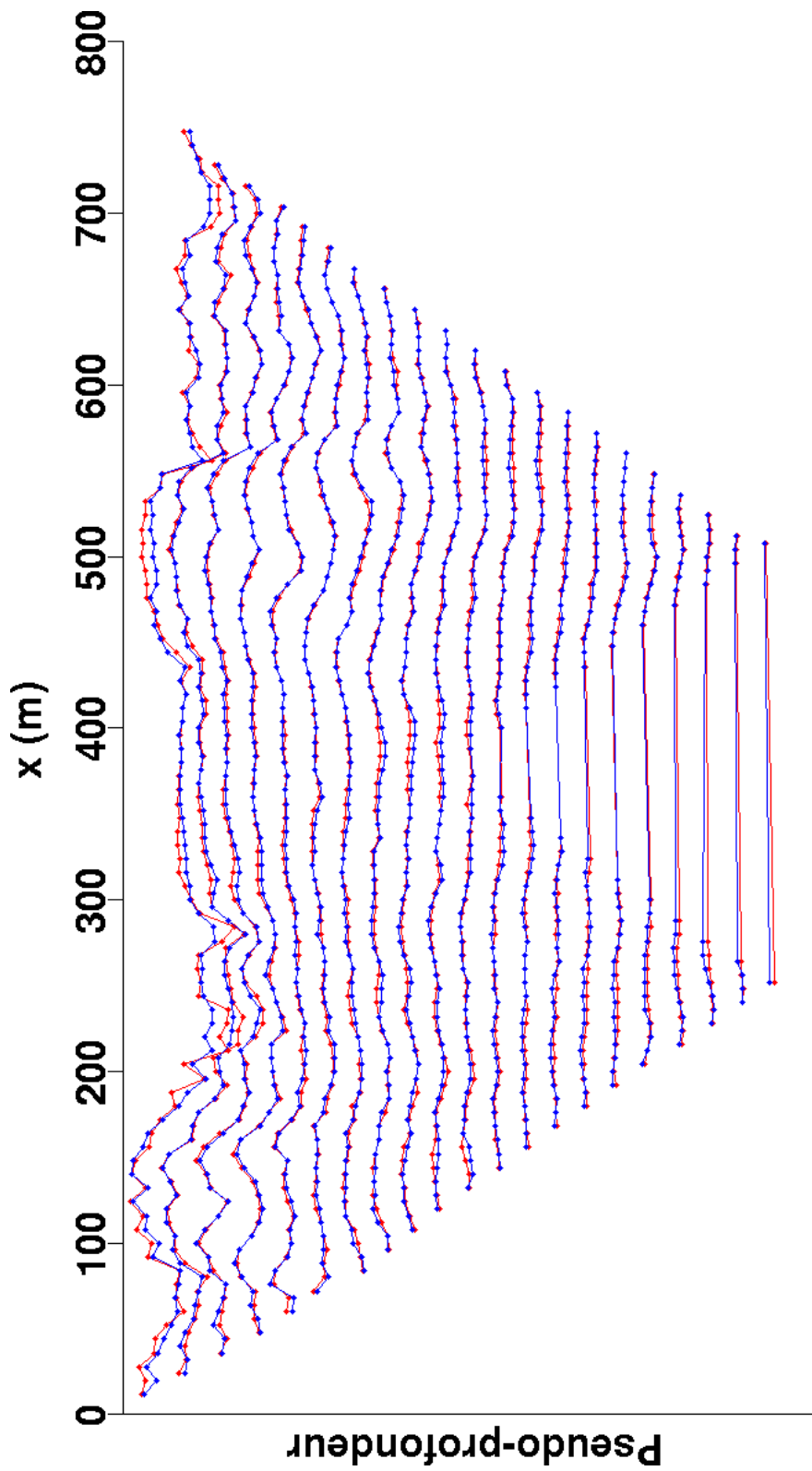


FIGURE 6.15 – Courbes des logarithmes des résistivités apparentes observées (rouges) et calculées (bleues) à l'itération 91. Pas de barrière de résistivité maximale.

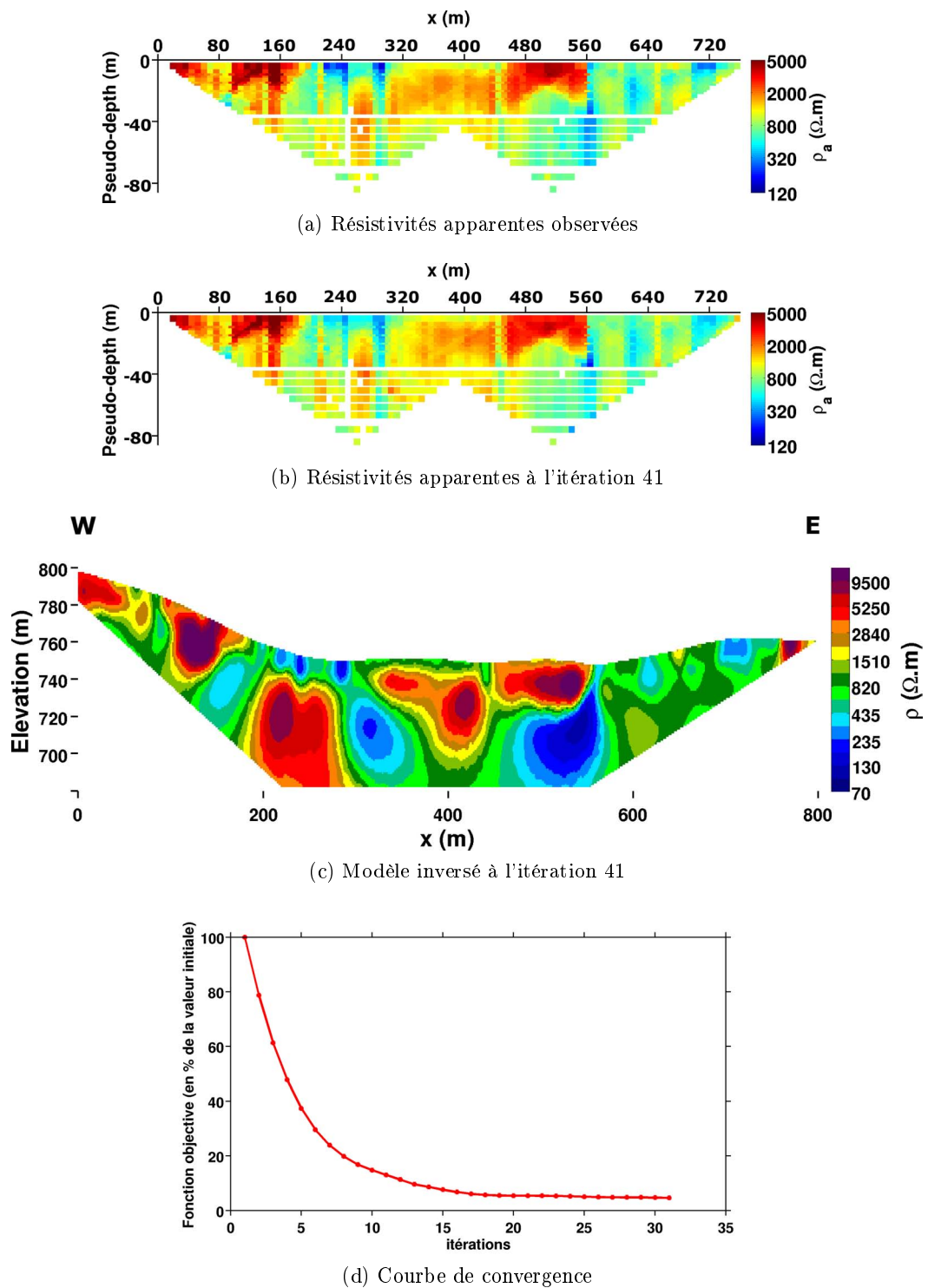


FIGURE 6.16 – Résultats de l'inversion du profil Schlumberger à écartements de 8 m, $\rho_{max} = 13000 \Omega \cdot m$.

6.4 Conclusion

Le code d'inversion que nous avons présenté ici, basé sur le calcul du gradient par l'état adjoint, reprend la même architecture globale que le code de calcul direct. La définition d'une fonction objective utilisant les logarithmes des résistivités apparentes s'avère adaptée aux larges variations de valeurs qu'il est possible de rencontrer. Nous avons vérifié dans ce chapitre le bon calcul du gradient, par la méthode de l'état adjoint, en le comparant au gradient calculé par la méthode des perturbations. Nous avons également présenté l'approche double grille utilisée ; la grille de calcul direct est générée par un raffinement de la grille d'inversion. Ceci permet d'utiliser une paramétrisation, ayant un effet de stabilisation pour le problème inverse, ne sacrifiant pas la précision de la résolution du problème direct. Nous avons utilisé deux algorithmes d'optimisation différents pour l'inversion : le gradient conjugué et la méthode de Quasi-Newton (L-BFGS). L'utilisation d'un préconditionneur et d'une recherche linéaire permet d'accélérer leur convergence. Ceci est essentiel dans le cas du gradient conjugué. Il est difficile de définir un critère d'arrêt général pour l'inversion ; nous en présentons plusieurs ; leur choix repose beaucoup sur l'expérience de l'utilisateur. Nous avons ensuite présenté plusieurs résultats d'inversion sur des exemples synthétiques. Nous avons pu montrer le meilleur comportement de la norme ℓ_1 vis-à-vis de données très bruitées. Les inversions sur un modèle à plusieurs blocs ont montré que les hétérogénéités conductrices sont mieux retrouvées en terme de valeurs que les hétérogénéités résistantes, la géométrie de ces dernières est en revanche mieux cernée. Un dernier exemple a indiqué une meilleure convergence avec l'algorithme de Quasi-Newton qu'avec le gradient conjugué. Le choix des paramètres de régularisation stabilisant cette méthode reste toutefois un problème délicat. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous avons présenté des résultats d'inversion sur des données réelles. Les données ont été acquises dans la station expérimentale de l'IRSN à Tournemire. Les modèles obtenus sont cohérents avec les principales structures de la subsurface proche. Plusieurs zones conductrices pouvant correspondre à des zones fracturées ont pu être identifiées. Les inversions n'ont convergé que jusqu'à des erreurs RMS relativement élevées par rapport à l'erreur que nous pouvons supposer sur les données. Nos résultats sont de ce fait plus basse fréquence que les résultats d'inversion obtenus avec le logiciel Res2DInv. La valeur de RMS ne représente toutefois pas un indicateur de l'exactitude du modèle obtenu ; des valeurs de RMS élevées n'empêchent pas de tirer des informations sur les structures géologiques. La comparaison des résultats avec ceux issus de Res2DInv est intéressante mais il est important de noter que les deux codes n'utilisent pas les mêmes types et paramètres d'inversion. L'utilisation du Quasi-Newton et la recherche de meilleurs paramètres de régularisation et de pondération seraient nécessaires pour améliorer les résultats. La méthode électrique nous a permis d'identifier des potentielles zones de fractures. La rapidité des mesures et la relative légèreté du dispositif d'acquisition nécessaire fait que la méthode électrique constitue pour ce problème une bonne alternative à d'autres méthodes (méthodes sismiques notamment).

Conclusions et perspectives

Conclusions

J'ai présenté un travail de développements méthodologiques et d'applications de la méthode de tomographie électrique en courant continu.

Dans le chapitre 1 j'ai présenté de manière générale la tomographie électrique. Cette méthode a connu un fort développement depuis son invention il y a un siècle. Elle constitue aujourd'hui un outil important pour la reconnaissance géophysique de la proche subsurface et est particulièrement bien adaptée du fait des forts contrastes de résistivités des formations géologiques. Des méthodes très similaires sont également utilisées en imagerie médicale ou pour la tomographie de procédés industriels. Les acquisitions en géophysique ont évolué de problèmes 1D à des problèmes 2D et 3D. Le fort lien entre la résistivité et la présence de fluide est également à l'origine du développement d'acquisitions 4D. L'interprétation des données de résistivités apparentes nécessite la résolution numérique du problème direct qui consiste à résoudre l'équation de Poisson.

J'ai étudié au chapitre 2 le problème de la résolution du problème direct d'un point de vue théorique. L'utilisation de méthodes numériques est nécessaire pour tenir compte de distributions arbitraires de la résistivité du milieu. Les méthodes utilisant des maillages non structurés (Eléments Finis, Différences Finies Généralisées) constituent un choix intéressant ; elles permettent notamment de considérer des géométries complexes et d'effectuer des raffinements localisés du maillage. La source de courant est couramment considérée comme ponctuelle ; il en découle deux problématiques distinctes et importantes. D'une part la résolution du problème en 2D (souhaitable dans certaines circonstances pour limiter le coût de calcul) nécessite de réaliser une transformée de Fourier et de résoudre le potentiel pour différents nombres d'ondes. D'autre part la source ponctuelle crée une singularité qui se traduit par un infini dans la solution. Une méthode pour supprimer la singularité en décomposant le potentiel existe, cependant elle est limitée à des topographies planes. J'ai proposé dans cette partie deux nouvelles formulations de suppression de la singularité compatibles avec des topographies quelconques. La première de ces formulations utilise, comme l'approche classique, une décomposition additive du potentiel ; la différence repose sur l'expression des conditions à la surface libre. La seconde approche proposée utilise une formulation multiplicative. Bien que séduisante cette solution est limitée par des problèmes de discrétisation que j'explique en détail. Elle deviendrait parfaitement applicable si l'on trouvait une solution à ce problème. Les deux approches de suppression de la singularité supposent une résistivité localement homogène autour de la source. Si ce n'est pas respecté et qu'un contraste fort est présent au niveau de la source, l'erreur sur le potentiel peut alors être importante.

La résolution du problème inverse est un problème délicat du fait de sa non-

linéarité et de son caractère « mal posé ». J'ai présenté au chapitre 3 les différentes approches (linéaires et non linéaires) d'inversion par optimisation locale. Différentes méthodes existent pour calculer les sensibilités nécessaires à la résolution du problème inverse. Les approches des équations de sensibilité et du théorème de réciprocité sont les plus efficaces. Une alternative au calcul des sensibilités consiste à calculer directement le gradient de la fonction objective. J'ai présenté la méthode de l'état adjoint qui permet de calculer économiquement ce gradient (au coût d'un calcul direct supplémentaire). J'ai expliqué la méthode dans le cas 3D et l'ai également développée dans le cas de l'approximation 2.5D, point que je n'ai pas trouvé dans la littérature. Dans le cas 2.5D, le calcul du gradient peut nécessiter deux calculs directs supplémentaires si les potentiels ne peuvent être gardés en mémoire. La paramétrisation et la régularisation du problème inverse sont importantes pour faciliter sa résolution ; j'ai à ce propos introduit les méthodes classiquement utilisées.

J'ai implémenté un code de calcul direct en utilisant la méthode des Différences Finies Généralisées. J'ai présenté les détails de cette implémentation au chapitre 4. Un effort particulier a été réalisé pour rendre ce code flexible, notamment vis-à-vis de forts contrastes de résistivité et de géométries complexes. L'utilisation de maillages non structurés a notamment été essentielle pour ce dernier point. Cela a également permis de raffiner localement le maillage, et ainsi de limiter le coût de calcul sans sacrifier la précision. J'ai validé ce code en le comparant à différentes solutions analytiques et numériques. J'ai enfin pu le comparer à un code similaire utilisant la méthode des Eléments Finis. Le comportement des deux codes est très proche. Si le code Eléments Finis donne des résultats légèrement meilleurs l'implémentation en Différences Finies Généralisées reste satisfaisante. Ceci s'explique en raison du travail effectué, sur les moyennes des conductivités, pour un bonne gestion des contrastes).

Au chapitre 5 j'ai présenté quelques détails sur l'implémentation du problème inverse. J'ai utilisé la méthode de l'état adjoint pour calculer le gradient de la fonction objective. Cette méthode en plus d'être économique d'un point de vue numérique est également simple d'implémentation. J'ai principalement utilisé un algorithme de gradient conjugué pour minimiser la fonction objective. Les résultats de tests synthétiques présentés à ce chapitre indiquent cependant que l'utilisation de la méthode de Quasi-Newton permet une meilleure convergence de l'inversion. J'ai également au travers d'exemples synthétiques testé la possibilité d'utiliser de manière simple la norme ℓ_1 et vérifié la bonne convergence du code sur des problèmes où la distribution de résistivité est moyennement complexe. La partie finale consacrée à l'inversion des données provenant du site de Tournemire a permis de tester le code sur des données réelles. Alors que l'inversion a permis de retrouver les principales structures de la subsurface, la convergence des inversions n'a toutefois pas été très bonne. Un travail supplémentaire et l'utilisation éventuelle du Quasi-Newton seraient nécessaires pour obtenir des résultats expliquant mieux les données. Ajoutons qu'un travail d'interprétation des résultats avec l'apport de connaissances géologiques serait important.

Perspectives

Le travail que j'ai présenté permet d'envisager différentes perspectives plus ou moins proches.

L'efficacité de la résolution du problème direct pourrait être améliorée avec l'utilisation de solveurs directs. En formulant la matrice de couplage Différences Finies de manière à ce qu'elle soit indépendante de la source, il est alors possible d'effectuer une décomposition type LU et d'obtenir rapidement les solutions pour toutes les sources par substitution des termes sources. De manière générale l'utilisation de solveur itératif semble un bon choix pour de petits problèmes (en nombre de sources) alors que les solveur direct seront plus efficaces pour des problèmes avec beaucoup de sources (typiquement les problèmes 3D). Il serait également intéressant d'estimer de manière systématique la qualité de la modélisation par le calcul de l'erreur de réciprocité. Cela constituerait un surcoût de calcul mais les possibilités en découlant paraissent intéressantes. Notamment cela permettrait d'envisager d'effectuer des raffinements adaptatifs de manière à ce que la solution satisfasse un critère d'erreur minimale au cours de l'inversion. Enfin l'extension du code, en y intégrant l'anisotropie, permettrait d'étudier de manière plus réaliste la conductivité du sous-sol qui est de manière générale anisotrope.

Au niveau de la résolution du problème inverse, l'utilisation du Quasi-Newton semble être l'approche à privilégier. Il faudrait améliorer sa stabilité et pouvoir déterminer de manière simple le choix des paramètres de régularisation. Je n'ai présenté que des inversions 2D ; l'extension en 3D est directe mais reste en partie à implémenter (la partie calcul direct est déjà implémentée). Le code tel qu'il est implémenté peut maintenant être modifié simplement pour introduire de l'information a priori. L'utilisation de l'état adjoint permet facilement différentes normes. L'implémentation de méthode de régularisation basée sur la variation totale devrait permettre d'obtenir des modèles moins lisses. C'est un point important étant donné que les problèmes diffusifs, tels que le problème électrique, donnent des modèles très lisses avec des inversions au sens des moindres carrés. Il me semble également important de chercher à séparer complètement le maillage du problème direct de la paramétrisation ; toutefois cela compliquerait le problème de l'interpolation du gradient sur la grille de paramètres.

A plus long terme il pourrait être intéressant d'envisager également l'inversion par optimisation globale. Ces méthodes étant coûteuses numériquement, il faudrait limiter l'espace des solutions à parcourir en limitant le nombre de paramètres. Dans certains cas où nous disposons d'un a priori fort sur la structure du sous-sol (présence de cavités, de structures principalement orientées selon une direction), nous pourrions utiliser un résultat d'optimisation locale comme base et chercher une meilleure localisation et définition de ces structures par optimisation globale.

Un dernier point essentiel me semble être l'estimation du bruit affectant les données réelles. Sur le terrain il serait par exemple intéressant d'effectuer systématiquement la mesure selon un protocole et son protocole réciproque. Une estimation rapide de l'erreur pourrait être tirée de ces deux mesures. Une estimation plus juste de l'erreur peut également passer par une répétition plus importante de chaque

mesure lors de la phase de stack : le 2 à 6 mesures classiquement effectuées ne sont pas suffisantes pour cela. Quantifier l'importance des problèmes de polarisation dans les erreurs de mesure est également un point à améliorer.

**Annexe : High resolution electrical
resistivity tomography in
superficial limestones at
Tournemire site, France**

High resolution electrical resistivity tomography in superficial limestones at Tournemire site, France

C. Gélis¹, M. Noble², J. Cabrera¹, H. Chauris², S. Penz², P. Desveaux³

1. IRSN. PRP-DGE. Fontenay aux roses, France.
2. Centre de Geosciences, Mines ParisTech, France
3. Entreprise Martinez

Keywords: Electrical Resistivity Tomography, High Resolution, Fractured Zone detection.

Main objectives: We test the potential of a high- resolution electrical resistivity survey to detect fault or fractured zones in the superficial limestones layers in Tournemire.

New aspects covered: We investigate the near subsurface with a multi-high-resolution acquisition. We identify two subvertical conductive corridors, correlated with fractured zones location inferred from geological data.

Summary : Deep argillaceous formations are considered in many countries as potential host media for high-level long-life radioactive waste due their confining properties. The precise sedimentary, structural and hydrogeological characterization of such potential host sites is a key point in determining their appropriateness for the long-term deep underground disposal of radioactive waste in geological formations. The presence of faults in clay–rock formations should be carefully assessed, since these features could modify the confining properties. This study focuses on testing the potential of the electrical resistivity method to detect fault or fractured zones in the near subsurface layers above an argillaceous formation. We present in this paper results from a high-resolution electrical resistivity survey carried out at the IRSN Tournemire Experimental Platform (TEP). The electrical resistivity profile was located transversely to the fault and fractured zones location, inferred from geological data, that affect the Jurrassic formations at the TEP. Electrical resistivity data were successively acquired with 8m, 4m and 2m-electrode spacing. This multi-resolution acquisition allows to investigate the near subsurface limestones and dolomites to a depth of 100 metres. In particular, two sub vertical conductive corridors reaching the surface through higher resistive layers are correlated with fractured zones.

Introduction

Deep argillaceous formations are considered in many countries as potential host media for high-level long-life radioactive waste due their very low intrinsic permeability and their strong capacity for radionuclide retention. The precise sedimentary, structural and hydrogeological characterization of such potential host sites is a key point in determining their appropriateness for the long-term deep underground disposal of radioactive waste in geological formations (Bonin, 1998). The presence of faults in clay–rock formations should be carefully assessed, since these features could modify the permeability. Site characterization and fracture detection can be carried out using complementary approaches, including geophysical methods. This study focuses on testing the potential of the electrical resistivity method to detect fault or fractured zones in the near subsurface layers above an argillaceous formation. We present in this paper results from a high-resolution electrical resistivity survey carried out at the IRSN Tournemire Experimental Platform.

Context

IRSN (the French Institute for Radiological Protection and Nuclear Safety) is in charge of the expertise of the safety report of the French deep geological disposal site project in the Meuse/Haute-Marne. This site will be operated by ANDRA (the French Radioactive Waste Management Agency). With the goal of understanding the various transport and mechanical properties of clay–rocks, IRSN has conducted research programs at the Tournemire Experimental Platform (TEP, in the Department of Aveyron in the South of France) (Bonin, 1998).

Three major sub-horizontal layers characterize the sedimentary Jurassic formations of the TEP. At the base of the stratigraphic column, we find a sequence of Hettangian, Sinemurian and Carixian limestones and dolomites, that is overlain by an argillaceous formations composed of a 250-m-thick clay–rock layer of Domerian and Toarcian age. Above this layer, there is another sequence of Aalenian, Bajocian and Bathonian limestones and dolomites (Figure 1). The Bajocian and Bathonian formations are locally karstified.

The TEP is characterized by a 2-km-long tunnel, which allows in situ access to the Toarcian clay–rock layer (Figure 1). In addition to the main Cernon fault, secondary fault zones affect the clay–rock formation and have been observed in the galleries and also identified in several underground boreholes (Bonin, 1998; Cabrera et al., 2001). These sub-vertical fault zones or fracture network display mainly subhorizontal offset (decametric scale) and a small vertical one (meter scale). The location of these fault zones (hectometric to kilometric length) is reported in Figure 1. In the upper limestone, these fault zones widen and fracturing becomes more scattered.

In an attempt to detect fault zones in clay–rock layers such as the one described above, IRSN carried out a 3D high-resolution seismic survey from the surface in collaboration with CGG (Cabrera, 2005). Because of the weak seismic impedance contrast in the clay–rock layer and the small vertical offset of the fracture structures, these fault zones could not be identified in the clay–rock formation. However, a sub vertical fault was successfully picked out by the seismic data at the interface between clay–rock formation and underlying limestones. This fault is interpreted as the downward continuation of the fault zone identified in the tunnel (Figure 1). However, because of acquisition geometry, the presence of surface waves, no fault zone could be detected in the upper limestone formation.

In an attempt to assess the potential of the electrical resistivity method to detect fault zones in near subsurface layers, IRSN then conducted a large-scale electrical resistivity (ER) survey test from the surface, in collaboration with the CNRS (Gélis et al., 2010). Three 2.5 km long electrical resistivity profiles were acquired with 40-m electrode spacing in May 2007 with the Wenner array. Electrical resistivity data were processed with the RES2DINV ER tomography program (Locke and Barker, 1996). The ER data detected the different geological units (Bathonian and Bajocian limestones, as well as the Toarcian clay–rock) and provided a good estimate of their thickness. A 500–600 m wide zone with lower resistivity values was interpreted as a fractured zone in the Bajocian limestone in two W–E profiles, possibly delimited by two faults (Figure 2). It was located above the secondary fault zone observed in the tunnel. From this study, Gélis et al. (2010) concluded that the secondary N–S-

trending fault zone observed in the tunnel (Toarcian clay-rock) extended upwards, towards the surface in the upper limestone formations.

The resolution provided by these ER measurements was limited by the large electrode spacing. In an attempt to characterize more precisely the lower resistivity fractured zone in the upper limestones and dolomites layer, IRSN and Mines ParisTech conducted a high resolution (HR) ER acquisition in May 2011. This survey is described in the next section.

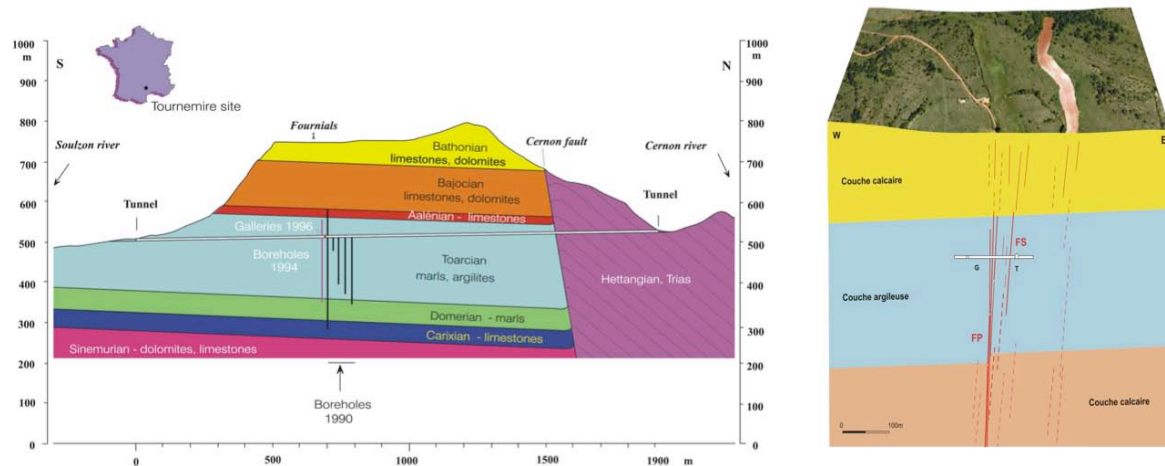


Figure 1: Tournemire Experimental Platform (TEP): (left) N-S cross-section along the tunnel showing the geological setting and (right) 3D schematic block with a E-W cross-section at Fournials (see position on the left figure) with main geological units and fault and fractured zones.

2011 Data acquisition and processing

In order to better understand the relation between fault zones observed in the underground works and fractured zone in the upper limestones and dolomites, the high resolution electrical resistivity acquisition was centred on the western part of the fractured zone in the Bajocian and Bathonian limestones and dolomites above the tunnel (Figure 2). Two 760-meter long profiles were successively sampled with 8-m and 4-m electrode spacing. In addition a 510-meter long profile was acquired with 2-m electrode spacing. Measurements were performed with a 64 electrode multi-channel Abem Terrameter acquisition system, requiring for each profile several roll-alongs.

We tested both Wenner and Schlumberger arrays in order to assess their impact on ER tomography results.

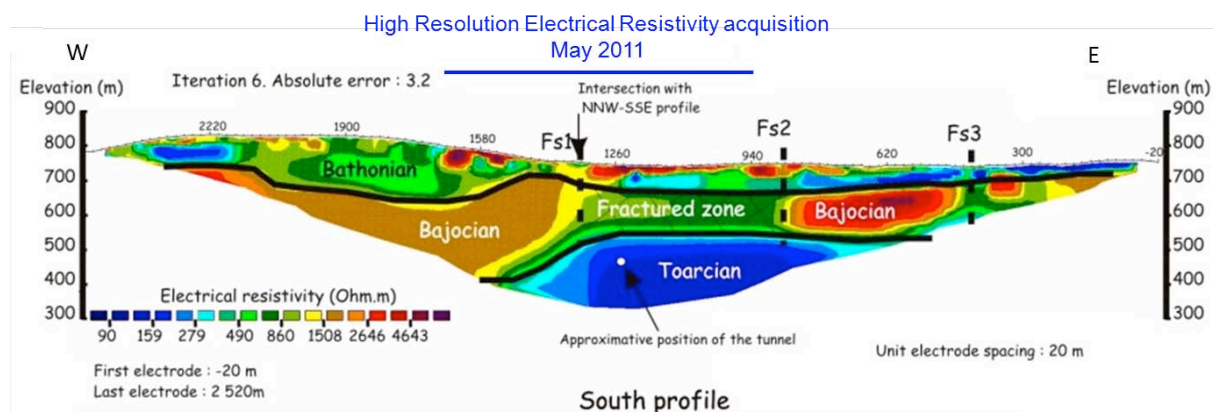


Figure 2: Electrical Resistivity Tomography image obtained with the 2.5 km long acquisition (from Gélis et al., 2010) and location of the high-resolution electrical resistivity acquisition.

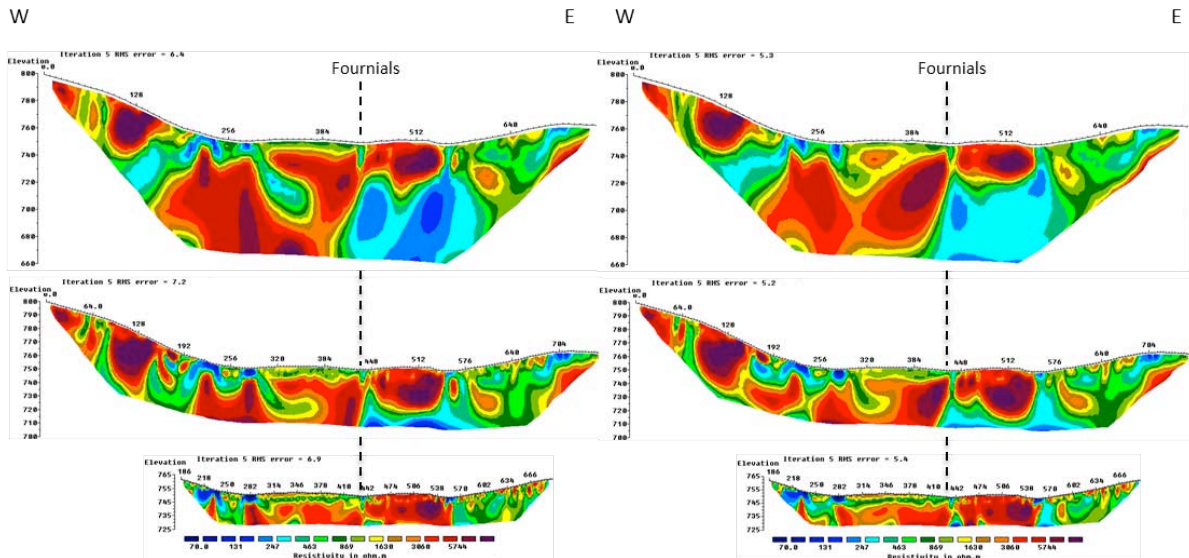


Figure 3 Electrical Resistivity Tomography images obtained with (left column) Schlumberger and (right column) Wenner arrays. Top row corresponds to 8-m electrode spacing, middle to 4-m spacing and bottom to 2-m spacing. All sections are displayed with the same electrical resistivity scale. All figures are displayed at the same spatial scale, vertical scale is two times bigger than the horizontal scale.

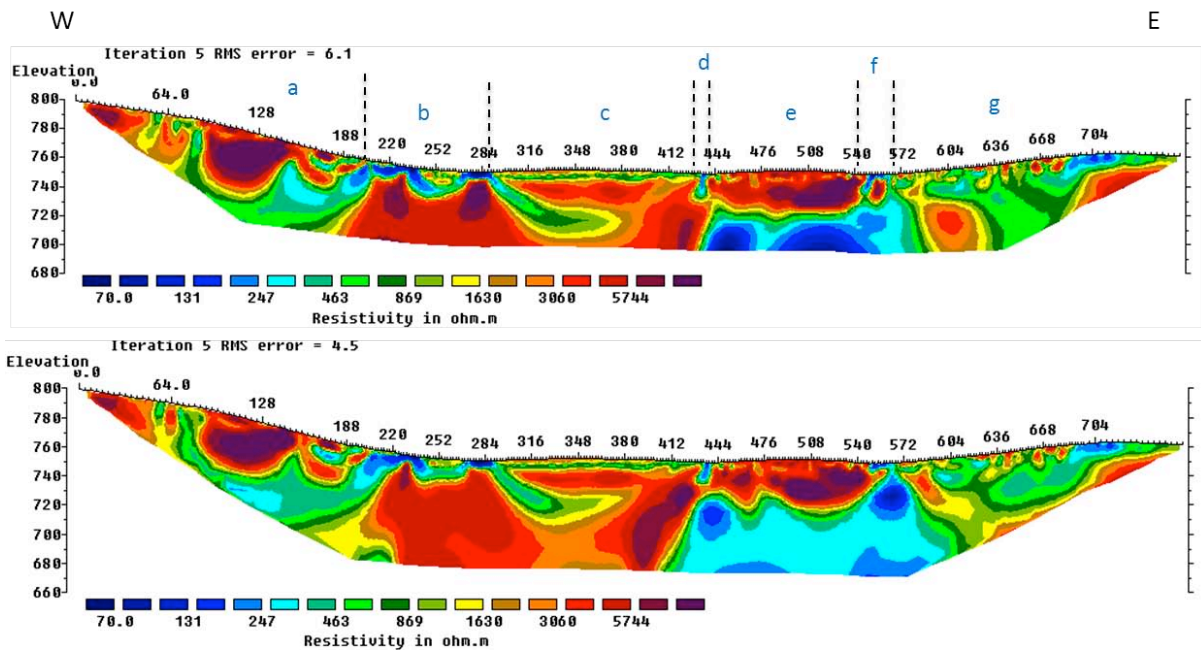


Figure 4 Electrical Resistivity Tomography images obtained with (top) Schlumberger and (bottom) Wenner arrays. Data obtained with 8-m, 4-m and 2-m electrode spacing were inverted together. Both figures are displayed at the same spatial scale. Electrical resistivity scale is the same for both images. Vertical and horizontal scales are equal.

Figure 3 shows the ER tomography profiles for the three electrode spacings (8m, 4m, 2m) and the two arrays (Wenner and Schlumberger). Since high ER contrasts are present in this area, data were inverted with the Marquardt-Occam method following Gélis et al. (2010). The Schlumberger 8-m electrode spacing profile allows to investigate the near subsurface until 100 m depth. It shows different areas with low (lower than 200 Ohm.m) to high (higher than 5000 Ohm.m) ER values. On the whole, the 8-m electrode spacing Wenner array displays the same low to high ER zones. When the electrode spacing decreases, the maximum investigated depth decreases and resolution in the near

subsurface zone increases. At a large scale, ER images display the same low to high ER zones whatever the electrode spacing and acquisition array. This as well indicates that ER images are stable. However, some local differences appear in the higher resolution 4-m and 2-m electrode spacing images. As an example, a superficial 400 to 800 Ohm.m 5-m thick layer appears between two layers whose ER is higher than 1600 Ohm.m between 290 m and 430 m in lateral distance. In order to take advantage of both high resolution and high depth investigation, we combined all data together for each array. Figure 4 shows the results of this multi-scale inversion. ER images obtained with the different acquisition arrays (Wenner and Schlumberger) are very similar, indicating the stability of the results.

Discussion and Conclusion

Several zones of similar ER values can be identified (figure 4). At the Western part, alternative low and high ER values are associated to the presence of altered dolomites (zone a). Then a zone composed of a superficial conductive layer (ER lower than 400 Ohm.m) above a highly resistive layer (higher than 3000 Ohm.m) is identified (zone b). The resistive layer corresponds to Bathonian limestones and the conductive zone may be interpreted as an area of superficial water runoff. A similar zone (zone c) is characterized by shallow lower ER values (400 to 800 Ohm.m) under and above two higher ER values (higher than 1600 Ohm.m). The resistive layers are interpreted as limestones whereas the more conductive zone can be associated to an intercalation of limestone, sandy and argillaceous levels. Then zone e is composed of two main layers: in the shallow one, ER values are higher than 3000 Ohm.m whereas in the deep layer ER values are lower than 350 Ohm.m. The shallow layer is interpreted as a limestones layer; its nearly horizontal basis can be associated to the top of more argillaceous and sandy sedimentary subhorizontal layers. At the Eastern part of the profile (zone g), heterogeneous ER values may be interpreted as a limestone. The narrow d and f zones display a different feature: these subvertical conductive corridors reach the surface and limit zones c, e and g. They are in agreement with fractured zones location inferred from geological data. These zones location could be correlated with the fractured zones identified at depth in underground works (figure 2).

In comparison with the 2007 large-scale ER acquisition (Gélis et al., 2007), this higher resolution survey allows to better investigate the first 100 m at the TEP. ER data can be easily acquired and give useful information for the near subsurface investigation. Next step of this study could be to combine ER tomography results with seismic data available at the site.

Acknowledgments

Support for this work has been provided in part by the French GNR TRASSE IRSN-CNRS/PACEN grants 2010-2F.

References

- Bonin, B. (1998), Deep geological disposal in argillaceous formations: studies at the Tournemire test site, *J. Contam. Hydrol.*, 35, 315-330.
- Cabrera, J., Beaucaire, C., Bruno, G., de Windt, L., Genty, A., Ramambaso, N., Rejeb, A., Savoye, S. and Volant, P. (2001), *Projet Tournemire: synthèse des résultats des programmes de recherche 1995/1999*, In IRSN report.
- Cabrera, J. (2005), Evaluation de la méthode sismique 3D haute résolution pour la détection de failles à déplacement sub-horizontale. In IRSN Unpublished Report DEI/SARG/2005-050.
- Gélis C., Revil A., Cushing M.E., Jougnot D., Lemeille F., Cabrera J., De Hoyos A., and Rocher M. (2010), Potential of Electrical Resistivity Tomography to Detect Fault Zones in Limestone and Argillaceous Formations at the Experimental Platform of Tournemire, France, *Pure Appl. Geophys.*, 167, 1405–1418.
- Loke, M. and Barker, R. (1996), Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudosections by a quasi-Newton method. *Geophys. Prospect.*, 44, 131–152.

Liste des figures

2.1	Gamme de résistivités des matériaux rencontrés en géophysique (adapté d'après Palacky (1987)).	8
2.2	Valeurs de résistivité de certains tissus biologiques à 50 Hz (Gabriel et al., 1996).	10
2.3	Dispositif quadripôle utilisé pour la mesure de résistivité.	11
2.4	Illustration du principe du sondage électrique : les lignes de courant issues d'un espacement d'électrodes plus grand pénètrent plus profondément et sont perturbées par la couche inférieure (d'après Chouteau & Giroux (2006)).	14
2.5	Résultats de plusieurs profils de traînée électrique : (a) valeurs des résistivités apparentes pour différents espacements d'électrodes, (b) représentation des données en fonction de leur pseudo-profondeur (d'après Chouteau & Giroux (2006)).	15
2.6	Classification simple des dispositifs classiquement utilisés pour des mesures de surface.	17
2.7	Construction d'une pseudo-section pour un protocole Wenner (d'après Marescot (2004))	18
2.8	Exemples de sensibilités pour des dispositifs électriques classiques en prospection de surface.	20
3.1	Représentation schématique d'un milieu 2D « réel » (gauche) et d'un modèle fini (droite).	30
3.2	Maillage de surface utilisé pour la méthode BEM (gauche) et représentation des bords du domaine (droite) (d'après Blome (2009)).	36
3.3	Différentes discrétisations de la topographie et valeurs des conditions de Neumann associées. Les courbes vertes correspondent à l'interpolation par B-splines, les courbes bleues à une interpolation linéaire entre les électrodes, et les courbes rouges à une optimisation avec lissage.	38
3.4	Grille en quinconce 1D.	40
3.5	Valeurs de la fonction $r\nabla^2 r$, obtenues numériquement, en fonction de la position x et pour $y = 0$ et $z = 0$. La position de la source est indiquée par le trait en pointillés.	42
3.6	Valeurs de $W(x, y, z)$, pour $y = 0$ et $z = 0$, calculées dans le cas d'un contact vertical. La position de la source est indiquée par le trait en pointillés vert et le contact par le trait en pointillés noir. Les solutions numériques et analytiques sont respectivement tracées en bleu et rouge.	43

4.1	Exemples de paramétrisation du problème inverse (maillage en rouge) et du problème direct (maillage en noir) ; les extensions de maillage du problème direct ne sont pas représentées.	63
4.2	Paramétrisation du problème inverse proposé par Blome (2009).	63
5.1	Points de l'espace utilisés pour le calcul des dérivées partielles au point central (c).	71
5.2	Ensemble des points sélectionnés pour le calcul des dérivées partielles au point central (c).	74
5.3	Nombre de connexions entre les points pour un maillage 2D de 5390 points (gauche) et un maillage 3D de 16910 points (droite).	74
5.4	Interface intersectant une grille cartésienne.	75
5.5	Interfaces alignées avec une grille cartésienne.	78
5.6	Solution numérique du potentiel (gauche) et comparaison entre la solution numérique (noire) et la solution analytique (bleue) pour trois profondeurs $z=-0.5, -0.25$ et 0 km (droite).	79
5.7	Résidus entre la solution numérique et la solution analytique.	79
5.9	Solution analytique (gauche), solution numérique (centre) et différences entre les deux solutions (droite).	80
5.8	Position et définition des résistivités moyennes sur les arêtes (points rouges).	80
5.10	Maillages typiquement utilisés en 2D et en 3D.	81
5.11	Points du schéma en Différences Finies pour un point central en surface montrant les points et les triangles fictifs.	82
5.12	Courbes de résistivités apparentes pour un dispositif Schlumberger sur un contact vertical situé à $x = 0$ m.	83
5.13	Courbes de résistivités apparentes au dessus d'une sphère conductrice enterrée.	84
5.14	Signe de la dérivée normale à la surface du potentiel. Les valeurs en rouge indiquent un signe positif, celles en bleu un signe négatif. La source est indiquée par le point vert.	85
5.15	Représentation schématique du problème avec le problème des solutions fondamentales. Les sources fictives sont indiquées en rouge, les points d'évaluation en noir, et la source de courant est entourée d'un cercle bleu.	86
5.16	Potentiels secondaires liés à la topographie obtenus par Différences Finies Généralisées (a) et par la méthode des solutions fondamentales (b). La source est en $\mathbf{x}_s = (8.0, 5.3)$ m.	87
5.17	Potentiel secondaire (gauche) et logarithme du potentiel total (droite) obtenus pour différentes positions de sources avec le code 2.5D. Le milieu est homogène à $100 \Omega.m$	88
5.18	Potentiel secondaire (gauche) et logarithme du potentiel total (droite) obtenus pour différentes positions de sources avec le code 3D. Le milieu est homogène à $100 \Omega.m$	89

5.19	Potentiel secondaire (gauche) et logarithme du potentiel total (droite) obtenus pour différentes positions de sources avec le code 2.5D. Le milieu est homogène à $100 \Omega.m$ et présente une cavité.	90
5.20	Potentiel secondaire (gauche) et logarithme du potentiel total (droite) obtenus pour différentes positions de sources avec le code 3D. Le milieu est homogène à $100 \Omega.m$ et présente une cavité sphérique.	91
5.21	Potentiel secondaire (gauche) et logarithme du potentiel total (droite) obtenus pour différentes positions de sources enterrées avec le code 2.5D. Le milieu est homogène à $100 \Omega.m$	92
5.22	Courbes de résistivité apparente, dans le cas d'un contraste vertical de 2 entre deux milieux homogènes. Trois solutions sont présentées : solution analytique (rouge), solution 2.5D FEM (bleue), solution 2.5D GFDM (noire).	98
5.23	Différences entre les solutions numériques 2.5D et la solution analytique pour le contact vertical avec un contraste de 2.	99
5.24	Courbes de résistivité apparente, dans le cas d'un contact vertical entre deux milieux homogènes (contrastes de 10, 100 et 1000). Trois solutions sont présentées : solution analytique (rouge), solution 2.5D FEM (bleue), solution 2.5D GFDM (noire).	100
5.25	Différences entre les solutions numériques 2.5D et la solution analytique pour le contact vertical pour trois contrastes de résistivité.	101
5.26	Normes des erreurs entre les solutions numériques 2.5D (FEM, GFDM) et la solution analytique pour un contact vertical.	102
5.27	Courbes de résistivité apparente, dans le cas d'un contact vertical (contrastes de 10, 100 et 1000) entre deux milieux homogènes ; le maillage est constitué de 16910 points. Trois solutions sont présentées : solution analytique (rouge), solution 3D FEM (bleue), solution 3D GFDM (noire).	103
5.28	Différences entre les solutions numériques 3D et la solution analytique pour un contact vertical (contrastes de 10, 100 et 1000) ; le maillage est constitué de 16910 points.	104
5.29	Courbes de résistivité apparente, dans le cas d'un contact vertical (contraste 2) entre deux milieux homogènes, pour trois densités de maillage différentes. Trois solutions sont présentées : solution analytique (rouge), solution 3D FEM (bleue), solution 3D GFDM (noire).	105
5.30	Différences entre les solutions numériques 3D et la solution analytique pour le contact vertical pour trois densités de maillage différentes.	106
5.31	Normes des erreurs entre les solutions numériques 3D (FEM, GFDM) et la solution analytique pour un contact vertical.	107
6.1	Position des variables utilisées pour le calcul du gradient.	111
6.2	Comparaison du gradient de la fonction objective obtenu par Différences Finies et par l'état adjoint.	112
6.3	Recherche linéaire 1D par ajustement d'une parabole avec 3 points.	113

6.4	Modèle et données synthétiques.	115
6.5	Résultats d'inversions sur les données synthétiques avec la norme ℓ_2 (gauche) et avec la norme ℓ_1 (droite).	117
6.6	Résultats d'inversions sur les données synthétiques perturbées avec la norme ℓ_2 (gauche) et avec la norme ℓ_1 (droite).	118
6.7	Modèle synthétique 1 et résultats d'inversion.	121
6.8	Modèle synthétique 2 et résultats d'inversion.	122
6.9	Modèle synthétique 3 et résultats d'inversion.	123
6.10	Modèle synthétique et résultats d'inversions avec les méthodes de Quasi-Newton et du gradient conjugué.	125
6.11	Contexte géologique du site de Tournemire.	127
6.12	Résultats de l'inversion du profil Wenner à écartements de 8 m, $\rho_{max} = 13000 \Omega.m.$	131
6.13	Courbes des logarithmes des résistivités apparentes observées (rouges) et calculées (bleues) à l'itération 41.	132
6.14	Résultats de l'inversion du profil Wenner à écartements de 8 m.	133
6.15	Courbes des logarithmes des résistivités apparentes observées (rouges) et calculées (bleues) à l'itération 91. Pas de barrière de résistivité maximale.	134
6.16	Résultats de l'inversion du profil Schlumberger à écartements de 8 m, $\rho_{max} = 13000 \Omega.m.$	135

Bibliographie

- Al-Chalabi, M., 1992. When least-squares squares least, *Geophysical Prospecting*, **40**(3), 359–378. 66
- al Hagrey, S. A., 2007. Geophysical imaging of root-zone, trunk, and moisture heterogeneity, *Journal of Experimental Botany*, **58**(4), 839–854, Imaging Stress Responses in Plants Special Issue. 7
- Archie, G. E., 1942. The electrical resistivity logs as an aid in determining some reservoir characteristics, *Petroleum Transactions of AIME*, **146**, 54–62. 8
- Barker, R., 1992. A simple algorithm for electrical imaging of the subsurface, *First Break*, **10**, 53–62. 47
- Benito, J. J., Ureña, F., & Gavete, L., 2001. Influence of several factors in the generalized finite difference method, *Applied Mathematical Modelling*, **25**(12), 1039–1053. 28, 70
- Benito, J. J., Ureña, F., & Gavete, L., 2007. Solving parabolic and hyperbolic equations by the generalized finite difference method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **209**(2), 208–233. 70
- Bevc, D. & Morrison, H., 1991. Borehole-to-surface electrical resistivity monitoring of a salt water injection experiment, *Geophysics*, **56**(6), 769–777. 7
- Blome, M., 2009. *Efficient measurement and data inversion strategies for large scale geoelectric surveys*, Ph.D. thesis, Swiss Federal Institute of Technology Zurich. ix, 25, 28, 34, 36, 37, 47, 54, 55, 62, 63, 95, 149, 150
- Blome, M., Maurer, H., & Kersten, S., 2009. Advances on 3D geoelectric forward solver techniques, *Geophysical Journal International*, **176**, 740–752. 27, 30, 34, 36
- Borsic, A., 2012. Imaging the Electrical Properties of the Breast for Cancer Detection Purposes, in *100 Years of Electrical Imaging*, Collection Sciences de la Terre et de l'environnement, Presses des Mines. 7
- Cabrera, J., Beaucaire, C., Bruno, G., de Windt, L., Genty, A., Ramambasoa, N., Rejeb, A., Savoye, S., & Volant, P., 2001. Projet Tournemire : synthèse des résultats des programmes de recherche 1995/1999, Tech. rep., IRSN report, 202 pages. 127
- Candansayar, M. E. & Başokur, A. T., 2001. Detecting small-scale targets by the 2D inversion of two-sided three-electrode data : application to an archaeological survey, *Geophysical Prospecting*, **49**(1), 13–25. 7

- Cassiani, G., Bruno, V., Villa, A., Fusi, N., & Binley, A. M., 2006. A saline trace test monitored via time-lapse surface electrical resistivity tomography, *Journal of Applied Geophysics*, **59**(3), 244 – 259. 7
- Chambers, J., Ogilvy, R., & Meldrum, P., 1999. 3D resistivity imaging of buried oil- and tar-contaminated waste deposits, *European Journal of Environmental and Engineering Geophysics*, **4**(1), 3–14. 7
- Chauris, H., Adler, A., & Lionheart, W., 2012. *100 Years of Electrical Imaging*, Collection Sciences de la Terre et de l'environnement, Presse des Mines. 6
- Chavent, G., 1974. *Identification of function parameters in partial differential equations*, Identification of Parameters in Distributed Systems. 55
- Chavent, G. & Jacewitz, C. A., 1995. Determination of background velocities by multiple migration fitting, *Geophysics*, **60**, 476–490. 55
- Chouteau, M. & Giroux, B., 2006. Géophysique appliquée II - GLQ 3202 - méthodes électriques, notes de cours. École polytechnique montréal. 14, 15, 149
- Coggon, J. H., 1971. Electromagnetic and electrical modeling by the Finite Element Method, *Geophysics*, **36**(1), 132–155. 15, 28, 31
- Dabas, M. & Caraire, G., 2012. Arp Imaging for vulnerability assessment of RTE Grounded high voltage power line, in *100 Years of Electrical Imaging*, Collection Sciences de la Terre et de l'environnement, Presses des Mines. 14
- Dahlin, T., 2000. Short note on electrode charge-up effects in DC resistivity data acquisition using multi-electrode arrays, *Geophysical Prospecting*, **48**(1), 181–187. 13
- Dahlin, T., 2001. The development of DC resistivity imaging techniques, *Computers & Geosciences*, **27**(9), 1019 – 1029. 7
- Dahlin, T., Bernstone, C., & Loke, M. H., 2002. A 3-D resistivity investigation of a contaminated site at Lernacken, Sweden, *Geophysics*, **67**(6), 1692–1700. 7
- Dahlin, T. L. & Zhou, B., 2004. A numerical comparison of 2D resistivity imaging with 10 electrode arrays, *Geophysical Prospecting*, **52**, 379–398. 17
- Daily, W. & Ramirez, A., 1995. Electrical resistance tomography during in-situ trichlorethylene remediation at the Savannah River site, *Journal of Applied Geophysics*, **33**(4), 239–249. 7
- Das, U. & Parasnis, D., 1987. Resistivity and induced polarization responses of arbitrarily shaped 3-D bodies in a two-layered earth, *Geophysical Prospecting*, **35**(1), 98–109. 27
- Dey, A. & Morrison, H. F., 1979. Resistivity modeling for arbitrarily shaped three-dimensional structures, *Geophysics*, **44**(4), 753–780. 27, 30

- Dieter, K., Paterson, N. R., & Grant, F. S., 1969. IP and resistivity type curves for three-dimensional bodies, *Geophysics*, **34**(4), 615–632. 26
- Edwards, L. S., 1977. Modified pseudo-section for resistivity and IP, *Geophysics*, **42**(5), 1020–1036. 6, 17, 18
- Ellis, R. G. & Oldenburg, D. W., 1994. The pole-pole 3-D DC-resistivity inverse problem : a conjugate gradient approach, *Geophysical Journal International*, **119**, 187–194. 47, 55
- Eso, R. A. & Oldenburg, D. W., 2007. Efficient 2.5D resistivity modelling using a quadtree discretization, *Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems*, **20**(1), 1161–1170. 27
- Fargier, Y., 2011. *Développement de l’Imagerie de Résistivité Électrique pour la reconnaissance et la surveillance des Ouvrages Hydrauliques en Terre*, Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Nantes, 274 pages. 28
- Farquharson, C. & Oldenburg, D., 1998. Nonlinear inversion using general measures of data misfit and model structure, *Geophysical Journal International*, **134**, 213–227. 66, 116
- Fedkiw, R., Aslam, B., Merriman, B., & Osher, S., 1999. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multilateral flows (the ghost fluid method), *Journal of Computational Physics*, **152**(2), 457–492. 76
- Fomel, S., Luo, S., & Zhao, H., 2009. Fast sweeping method for the factored eikonal equation, *Journal of Computational Physics*, **228**(17), 6440–6455. 40
- Fox, R. C., Hohmann, G. W., Killpack, T. J., & Rijo, L., 1980. Topographic effects in resistivity and induced polarization surveys, *Geophysics*, **45**(1), 75–93. 28
- Friedel, S., 2003. Resolution, stability and efficiency of resistivity tomography estimated from a generalized inverse approach, *Geophysical Journal International*, **153**(2), 305–316. 62, 110, 114, 120
- Friedel, S., Thielen, A., & Springman, S., 2006. Investigation of a slope endangered by rainfall-induced landslides using 3D resistivity tomography and geotechnical testing, *Journal of Applied Geophysics*, **60**(2), 100–114. 7
- Gabriel, S., Lau, R., & Gabriele, C., 1996. The dielectric properties of biological tissues : III. parametric models for the dielectric spectrum of tissues, *Physics in Medicine and Biology*, **41**, 2271–2293. 10, 149
- Gavete, L., Gavete, M. L., & Benito, J. J., 2003. Improvements of Generalized Finite Difference Method and comparison with other meshless method, *Applied Mathematical Modelling*, **27**(10), 831–847. 28, 70, 73

- Gélis, C., Revil, A., Cushing, M., Jougnot, D., Lemeille, F., Cabrera, J., De Hoyos, A., & Rocher, M., 2010. Potential of Electrical Resistivity Tomography to Detect Fault Zones in Limestone and Argillaceous Formations at the Experimental Platform of Tournemire, France, *Pure and Applied Geophysics*, **167**, 1405–1418. 126, 127
- Gélis, C., Noble, M., Cabrera, J., Chauris, H., Penz, S., & Desveaux, P., 2012. High Resolution Electrical Resistivity Tomography in Superficial Limestones at Tournemire site, France, in *Near Surface Geoscience 2012 – 18th European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics*. 126, 127, 128, 129, 130
- Geuzaine, C. & Remacle, J.-F., 2009. Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **79**(11), 1309–1331. 73, 81
- Greenhalgh, M. S., 2008. *DC resistivity modelling and sensitivity analysis in anisotropic media*, 131 pages, Department of Physics, The University of Adelaide, SA 5005, Australia. 28
- Günther, T., 2004. *Inversion Methods and Resolution Analysis for the 2D/3D Reconstruction of Resistivity Structures from DC Measurements*, Ph.D. thesis, University of Mining and Technology, Freiberg, 150 pages. 12, 49, 54, 62, 63, 64, 114
- Günther, T. & Rücker, C., 2006. A general approach for introducing information into inversion and examples from dc resistivity inversion, in *EAGE Near Surface*. 62, 65
- Günther, T., Rücker, C., & Spitzer, K., 2006. Three-dimensional modelling and inversion of DC resistivity data incorporating topography — II. inversion, *Geophysical Journal International*, **166**(2), 506–517. 34, 47, 55, 63, 110
- Ha, T., Pyun, S., & Shin, C., 2006. Efficient electric resistivity inversion using adjoint state of mixed finite-element method for poisson's equation, *Journal of Computational Physics*, **214**(1), 171–186. 28, 47, 55, 114
- Hadamard, J., 1902. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique., *Princeton University Bulletin*, pp. 49–52. 46
- Hager, W. W. & Zhang, H., 2006. A survey of nonlinear conjugate gradient methods, *Pacific journal of Optimization*, **2**(1), 35–58. 113
- Heincke, B., Günther, T., Dalsegg, E., Rønning, J. S., Ganerød, G. V., & Elvebakk, H., 2010. Combined three-dimensional electric and seismic tomography study on the Åknes rockslide in western Norway, *Journal of Applied Geophysics*, **70**(4), 292–306. 7

- Holder, D., 2012. Electrical Impedance Tomography of brain function, in *100 Years of Electrical Imaging*, Collection Sciences de la Terre et de l'environnement, Presses des Mines. 7
- Hunt, A., 2012. Commercial Flow Measurement using Electrical Capacitance Tomography, in *100 Years of Electrical Imaging*, Collection Sciences de la Terre et de l'environnement, Presses des Mines. 7
- Hvozدارa, M. & Kaikkonen, P., 1998. An integral equations solution of the forward D.C. geoelectric problem for a 3-D body of inhomogeneous conductivity buried in a halfspace, *Journal of Applied Geophysics*, **39**(2), 95–107. 27
- Jensen, P. S., 1972. Finite difference technique for variable grids, *Computers & Structures*, **2**, 17–29. 70
- Kaipio, J., 2012. Electrical impedance tomography : handling model uncertainties in process imaging, in *100 Years of Electrical Imaging*, Collection Sciences de la Terre et de l'environnement, Presses des Mines. 7
- Keller, G. V. & Frischknecht, F. C., 1966. *Electrical methods in geophysical prospecting*, Pergamon Press. 8, 9
- Kirkup, S. & Yazdani, J., 2008. A gentle introduction to the boundary element method in MATLAB/FREEMAT, in *Conference on Mathematical Methods, Computational Techniques and Intelligent Systems*, pp. 46–52, Corfu, Greece. 36, 86
- Kruschwitz, S. & Yaramanci, U., 2004. Detection and characterization of the disturbed rock zone in claystone with the complex resistivity method, *Journal of Applied Geophysics*, **57**(1), 63–79. 7
- Kwok, S. K., 1984. An improved curvilinear finite difference (CFD) method for arbitrary mesh systems, *Computers & Structures*, **18**(4), 719–731. 27
- Lailly, P., 1983. The seismic inverse problem as a sequence of before stack migration, in *Proceedings of Conference on Inverse Scattering, Theory and Applications*, Philadelphia, Pennsylvania. 55
- Lataste, J.-F., 2002. *Evaluation Non Destructive de l'état d'endommagement des ouvrages en béton armé par mesure de résistivité électriques*, Ph.D. thesis, Université de Bordeaux I. 9
- Lataste, J. F., Sirieix, C., Breysse, D., & Frappa, M., 2003. Electrical resistivity measurement applied to cracking assessment on reinforced concrete structures in civil engineering, *NDT & E International*, **36**(6), 383–394. 7
- Lau, P. C. M., 1979. Curvilinear Finite Difference Method for three-dimensional potential problems, *Journal of Computational Physics*, **32**(3), 325–344. 27

- Leveque, R. J. & Li, Z., 1994. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources, *SIAM J. Num. Anal.*, **31**, 1019–1044. 75, 76
- Li, Y. & Oldenburg, D., 1992. Approximate inverse mappings in dc resistivity problems, *Geophysical Journal International*, **109**, 343–362. 51
- Li, Y. & Oldenburg, D., 1994. Inversion of 3-d dc resistivity data using an approximate inverse mapping, *Geophysical Journal International*, **116**, 527–537. 47, 51
- Li, Y. & Oldenburg, D. W., 1999. 3-D inversion of DC resistivity data using an L-curve criterion, *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, **18**(1), 251–254. 65
- Li, Y. & Oldenburg, D. W., 2003. Fast inversion of large-scale magnetic data using wavelet transforms and a logarithmic barrier method, *Geophysical Journal International*, **152**, 251–265. 61
- Li, Y. & Spitzer, K., 2002. Three-dimensional DC resistivity forward modelling using Finite Elements in comparison with Finite-Difference solutions, *Geophysical Journal International*, **151**(3), 924–934. 28, 32, 93
- Li, Z., 2003. An overview of the immersed interface method and its applications, *Taiwanese journal of mathematics*, **7**, 1–49. 75, 76
- Lima, W. A., Martins, C. M., Silva, J. B. C., & Barbosa, V. C. F., 2011. Total variation regularization for depth-to-basement estimate : Part 2 — physicogeologic meaning and comparisons with previous inversion methods, *Geophysics*, **76**(1), I13–I20. 66
- Lin, J., Chen, W., & Wang, F., 2011. A new investigation into regularization techniques for the method for fundamental solutions, *Mathematics and Computers in Simulation*, **81**, 1144–1152. 86
- Liszka, T. & Orkisz, J., 1980. The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics, *Computers and Structures*, **11**(1–2), 83–95. 28, 70, 73
- Loke, M. & Barker, R., 1996a. Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudosections by a quasi-Newton method, *Geophysical Prospecting*, **44**(1), 131–152. 6, 27, 47, 114
- Loke, M. & Barker, R., 1996b. Practical techniques for 3D resistivity surveys and data inversion, *Geophysical Prospecting*, **44**(3), 499–523. 6, 47, 64
- Loke, M. H., 2011. Tutorial : 2-d and 3-d electrical imaging surveys, 136 pages. 17, 53, 110, 114

- Loke, M. H. & Dahlin, T., 2002. A comparison of the gauss-newton and quasi-newton methods in resistivity imaging inversion, *Journal of Applied Geophysics*, **49**(3), 149–162. 52
- Lowry, T., Allen, M. B., & Shive, P. N., 1989. Singularity removal : A refinement of resistivity modeling techniques, *Geophysics*, **54**(6), 766–774. ix, 25, 27, 32, 34, 37
- Ma, Q., 2002. The boundary element method for 3-D DC resistivity modeling in layered Earth, *Geophysics*, **67**(2), 610–617. 27
- Marescot, L., 2004. *Modelisation directe et inverse en prospection électrique sur des structures 3D complexes par la méthode des Elements Finis*, Ph.D. thesis, Université de Nantes, Université de Lausanne, 208 pages. 18, 28, 47, 55, 149
- Marescot, L., Monnet, R., & Chapellier, D., 2008. Resistivity and induced polarization surveys for slope instability studies in the swiss alps, *Engineering Geology*, **98**(1–2), 18–28. 6
- Martins, C., Lima, W., Barbosa, V., & Silva, J., 2011. Total variation regularization for depth-to-basement estimate : Part 1 — mathematical details and applications, *Geophysics*, **76**, 11–112. 66
- Maurer, H. & Friedel, S., 2006. Outer-space sensitivities in geoelectrical tomography, *Geophysics*, **71**(3), G93–G96. 62
- McGillivray, P. R. & Oldenburg, D. W., 1990. Methods for calculating Fréchet derivatives and sensitivities for the non-linear inverse problem : a comparative study, *Geophysical Prospecting*, **38**(5), 499–524. 53
- Mufti, I. R., 1976. Finite-Difference resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures, *Geophysics*, **41**(1), 62–78. 27
- Negri, S., Leucci, G., & Mazzone, F., 2008. High resolution 3D ERT to help GPR data interpretation for researching archaeological items in a geologically complex subsurface, *Journal of Applied Geophysics*, **65**(3-4), 111–120. 7
- Neyamadpour, A., Taib, S., & Abdullah, W. W., 2009. Using artificial neural networks to invert 2D DC resistivity imaging data for high resistivity contrast regions : A MATLAB application, *Computers & Geosciences*, **35**(11), 2268–2274. 47
- Nicolotti, G., Socco, L. V., Martinis, R., Godio, A., & L., S., 2003. Three tomographic techniques for detection of decay in trees, *Journal of Arboriculture*, **29**(2), 66–78. 7
- Nishida, A., 2012. *Lis User Manual Version 1.2.95*, The Scalable Software Infrastructure Project, <http://www.ssisc.org/>, 126 pages. 82

- Nocedal, J., 1980. Updating Quasi-Newton Matrices with Limited Storage, *Mathematics of Computation*, **35**, 773–782. 111, 123
- Noel, M. & Xu, B., 1991. Archaeological investigation by electrical resistivity tomography : a preliminary study, *Geophysical Journal International*, **107**, 95–102. 47
- Okabe, M., 1981. Boundary element method formulations theory arbitrary inhomogeneities problem in electrical prospecting, *Geophysical Prospecting*, **29**(1), 39–59. 27
- Pain, C. C., Herwanger, J. V., Worthington, M. H., & de Oliveira, C. R. E., 2002. Effective multidimensional resistivity inversion using finite-element techniques, *Geophysical Journal International*, **151**, 710–728. 28, 47
- Palacky, G. J., 1987. *Resistivity characteristics of geologic targets*, vol. 1 of **Electromagnetic Methods in Applied Geophysics Theory**, Society of Exploration Geophysicists, 513 pages. 8, 149
- Panissod, C., Dabas, M., Florsch, N., Hesse, A., Jolivet, A., Tabbagh, A., & Tabbagh, J., 1998. Archaeological prospecting using electric and electrostatic mobile arrays, *Archaeological Prospection*, **5**, 239–251. 7
- Park, S. K. & Van, G. P., 1991. Inversion of pole-pole data for 3-D resistivity structure beneath arrays of electrodes, *Geophysics*, **56**(7), 951–960. 19, 47
- Penz, S., Chauris, H., & Donno, D., 2011. Finite difference resistivity modeling on unstructured grids with large conductivity contrasts, in *17th European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics, Near Surface 2011, Leicester, UK*. 77
- Penz, S., Chauris, H., Donno, D., & Mehl, C., 2012. Resistivity modelling with topography, *Geophysical Journal International*, (soumis). 108
- Perrone, N. & Kao, R., 1975. A general finite difference method for arbitrary meshes, *Computers & Structures*, **5**, 45–58. 70
- Peskin, C., 1977. Numerical analysis of blood flow in heart, *Journal of Computational Physics*, **25**, 220–252. 76
- Pessel, M., 2000. *Tomographie de résistivité électrique : développement méthodologiques et applications*, Ph.D. thesis, Université de Rennes I, 177 pages. 47
- Pidlisecky, A., 2006. *Cone-based electrical resistivity tomography*, Ph.D. thesis, Stanford University, 147 pages. 47
- Plessix, R.-E., 2006. A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications, *Geophysical Journal International*, **167**(2), 495–503. 55, 56

- Plessix, R.-E. & Mulder, W. A., 2008. Resistivity imaging with controlled-source electromagnetic data : depth and data weighting, *Inverse Problems*, **24**(3), 034012. 114
- Poullikkas, A., Karageorghis, A., & Georgiou, G., 1998. Methods of fundamental solutions for harmonic and biharmonic boundary value problems, *Computational Mechanics*, **21**, 416–423. 84
- Pratt, R. G., Shin, C., & Hicks, G. J., 1998. Gauss Newton and full Newton methods in frequency space seismic waveform inversion, *Geophysical Journal International*, **133**, 341–362. 60
- Pridmore, D. F., Hohmann, G. W., Ward, S. H., & Sill, W. R., 1981. An investigation of Finite-Element modeling for electrical and electromagnetic data in three dimensions, *Geophysics*, **46**(7), 1009–1024. 28, 93
- Qiang, J., Shen, P., & Luo, Y., 2007. The resistivity FEM numerical modeling on 3-D undulating topography, *Chinese journal of geophysics*, **50**(5), 1378–1386. 28
- Queralt, P., Pous, J., & Marcuello, A., 1991. 2-D resistivity modeling : an approach to arrays parallel to the strike direction, *Geophysics*, **56**(7), 941–950. 15, 28, 31, 95
- Ren, Z. & Tang, J., 2010. 3D direct current resistivity modeling with unstructured mesh by adaptive Finite-Element Method, *Geophysics*, **75**(1), H7–H17. 28
- Rücker, C., 2011. *Advanced electrical resistivity modelling and inversion using unstructured discretization*, Ph.D. thesis, University of Leipzig, 121 pages. 94
- Rücker, C. & Günther, T., 2011. The simulation of finite ert electrodes using the complete electrode model, *Geophysics*, **76**(4), F227–F238. 13
- Rücker, C., Günther, T., & Spitzer, K., 2006. Three-dimensional modelling and inversion of DC resistivity data incorporating topography – I. modelling, *Geophysical Journal International*, **166**, 495–505. 28, 34, 35
- Samouëlian, A., Cousin, I., Tabbagh, A., Bruand, A., & Richard, G., 2005. Electrical resistivity survey in soil science : a review, *Soil and Tillage Research*, **83**(2), 173–193. 7
- Sasaki, Y., 1994. 3-D resistivity inversion using the finite-element method, *Geophysics*, **59**(12), 1839–1848. 28, 47, 93, 110
- Schwarzbach, C., Börner, R., & Spitzer, K., 2005. Two-dimensional inversion of direct current resistivity data using a parallel, multi-objective genetic algorithm, *Geophysical Journal International*, **162**, 685–695. 47
- Seibold, B., 2006. *M-Matrices in Meshless Finite Difference Methods*, Ph.D. thesis, University of Kaiserslautern, Germany, 217 pages. 28, 70

- Shen, P., Symes, W. W., & Stolk, C., 2003. Differential semblance velocity analysis by wave-equation migration, in *Proceedings of the 73th SEG international meeting*, vol. Expanded abstracts, Dallas. 55
- Shewchuck, J. R., 1994. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain, <http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/jrspapers.html>. 52
- Shima, H., 1992. 2-D and 3-D resistivity image reconstruction using crosshole data, *Geophysics*, **57**, 1270–1281. 48
- Shima, H. & Sakayama, T., 1987. Resistivity tomography : An approach to 2-D resistivity inverse problems, in *57th SEG meeting, Expanded abstracts*, pages 204–207. 47
- Simandoux, P., 1963. Dielectric measurements in porous media and application to measurement of water saturations, study of the behavior of argillaceous formations, *Revue de L'Institut Français du Pétrole*, **18**(Supplementary Issue), 193–215. 9
- Sjödahl, P., Dahlin, T., Johansson, S., & Loke, M., 2008. Resistivity monitoring for leakage and internal erosion detection at Hällby embankment dam, *Journal of Applied Geophysics*, **65**(3-4), 155–164. 7
- Spitzer, K., 1995. A 3-D Finite-Difference algorithm for DC resistivity modelling using conjugate gradient methods, *Geophysical Journal International*, **123**(3), 903–914. 27, 32
- Spitzer, K., 1998. The three-dimensional DC sensitivity for surface and subsurface sources, *Geophysical Journal International*, **134**(3), 736–746. 19
- Spitzer, K. & Kümpel, H.-J., 1997. 3D FD resistivity modelling and sensitivity analyses applied to a highly resistive phonolitic body, *Geophysical Prospecting*, **45**(6), 963–982. 19
- Stefanescu, S., Schlumberger, C., & Schlumberger, M., 1930. Sur la distribution électrique potentielle autour d'une prise de terre ponctuelle dans un terrain à couches horizontales homogènes et isotropes, *Journal de Physique et du Radium*, **1**(4), 132–140. 13
- Szalai, S. & Szarka, L., 2008. On the classification of surface geoelectric arrays, *Geophysical Prospecting*, **56**, 159–175. 16
- Tabbagh, A., 2012. 100 Years of Electrical Imaging : Near-surface decametric to sub-metric developments of electrical imaging, in *100 Years of Electrical Imaging*, Collection Sciences de la Terre et de l'environnement, Presses des Mines. 10
- Tarantola, A., 1987. *Inverse problem theory, methods for data fitting and model parameter estimation*, Elsevier, 358 pages. 47, 117

- Tarantola, A., 2001. Logarithmic parameters. 61
- Telford, W., Geldart, L., & Sheriff, R., 1990. *Applied Geophysics Second Edition*, Cambridge University Press, 792 pages. 11, 26
- Tripp, A., Hohmann, G. W., & Swift, C. M., 1984. Two-dimensional resistivity inversion, *Geophysics*, **49**, 1708–1717. 47, 110
- Tsai, C., Lin, J., Young, D., & Atluri, S., 2006. Investigations on the accuracy and condition number for the method of fundamental solutions, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, **16**(2), 103–114. 84
- Tsokas, G. N., Tsourlos, P. I., Vargemezis, G., & Novack, M., 2008. Non-destructive electrical resistivity tomography for indoor investigation : the case of Kapnikarea Church in Athens, *Archaeological Prospection*, **15**(1), 47–61. 7
- Tsourlos, P., Szymanski, J., & Tsokas, G., 2005. A generalized iterative back-projection algorithm for 2-D reconstruction of resistivity data :application to data-sets from archaeological sites, *Journal of Balkan geophysical society*, **8**(2), 37–52. 28, 47, 48, 50, 51
- Udphuay, S., 2008. *3-D electrical resistivity tomography for cliff stability assessment at Pointe du Hoc in Normandy, France*, Ph.D. thesis, Texas A&M University, 150 pages. 7
- Vachirastienchai, C., Boonchaisuk, S., & Siripunvaraporn, W., 2010. A hybrid finite difference–finite element method to incorporate topography for 2D direct current (DC) resistivity modeling, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **183**(3–4), 426–434. 27
- van Schoor, M., 2002. Detection of sinkholes using 2D electrical resistivity imaging, *Journal of Applied Geophysics*, **50**(4), 393 – 399. 7
- Virieux, J., Calandra, H., & Plessix, R.-E., 2011. A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and finite-element modelling techniques for geophysical imaging, *Geophysical Prospecting*, **59**(5), 794–813. 29
- Wang, T., Stodt, J., Stierman, D., & Murdoch, L., 1991. Mapping hydraulic fractures using a borehole-to-surface electrical resistivity method, *Geoprospection*, **28**, 349–369. 7
- Wang, T., Fang, S., & Mezzatesta, A. G., 2000. Three-dimensional Finite-Difference resistivity modeling using an upgridding method, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **38**, 1544–1550. 27
- Ward, S. H., 1990. *Resistivity and induced polarization methods*, vol. Investigations in Geophysics no. 5 : Geotechnical and Environmental Geophysics, vol I., Society of Exploration Geophysicists. 9

- Wilkinson, P., Meldrum, P., Loke, M. H., Chambers, J., Kuras, O., Gunn, D., & Ogilvy, R., 2011. Minimisation of electrode polarisation errors when using optimised or generic resistivity imaging arrays, in *EAGE Near Surface 2011, Leicester, UK, 12-14 Sept 2011*. 13
- Xu, S.-Z., Duan, B.-C., & Zhang, D.-H., 2000. Selection of the wavenumbers k using an optimization method for the inverse fourier transform in 2.5D electrical modelling, *Geophysical Prospecting*, **48**(5), 789–796(8). 31, 95
- Yaramanci, U., 2000. Geoelectric exploration and monitoring in rock salt for the safety assessment of underground waste disposal sites, *Journal of Applied Geophysics*, **44**, 181–196. 7
- Yi, M.-J., Kim, J.-H., Song, Y., Cho, S.-J., Chung, S.-H., & Suh, J.-H., 2001. Three-dimensional imaging of subsurface structures using resistivity data, *Geophysical Prospecting*, **49**(4), 483–497. 28, 47
- Yu, S., Zhou, Y., & Wei, G., 2007. Matched interface and boundary (MIB) method for elliptic problems with sharp-edged interfaces, *Journal of Computational Physics*, **224**(2), 729–756. 76
- Zhang, J., 1995. 3-D resistivity forward modeling and inversion using conjugate gradients, *Geophysics*, **60**, 1313–1325. 47
- Zhang, J., Rodi, W., Mackie, R. L., & Shi, W., 1996. Regularization in 3-D DC resistivity tomography, *Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems*, **9**(1), 687–694. 65
- Zhao, S. & Yedlin, M. J., 1996. Some refinements on the Finite-Difference Method for 3-D DC resistivity modeling, *Geophysics*, **61**(5), 1301–1307. 27, 32
- Zhou, B. & Dahlin, T., 2003. Properties and effects of measurement errors on 2D resistivity imaging surveying, *Near Surface Geophysics*, **1**(3), 105–117. 12
- Zhou, B. & Greenhalgh, S. A., 1999. Explicit expressions and numerical calculations for the Fréchet and second derivatives in 2.5D Helmholtz equation inversion, *Geophysical Prospecting*, **47**(4), 443–468. 19, 54
- Zhou, B. & Greenhalgh, S. A., 2001. Finite Element three-dimensional direct current resistivity modelling : accuracy and efficiency considerations, *Geophysical Journal International*, **145**(3), 679–688. 28, 93, 94
- Zienkiewicz, O., 1977. *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, London, 3rd edition., 787 pages. 93, 94

Modélisation et inversion de données électriques en courant continu : vers une prise en compte efficace de la topographie

RESUME :

L'imagerie électrique est un outil de plus en plus important pour un large domaine d'applications relatives à la caractérisation de la subsurface proche. D'importants développements ont été réalisés au cours des vingt dernières années pour l'amélioration des systèmes d'acquisition et des algorithmes d'inversions. L'acquisition et le traitement de gros jeux de données reste toutefois une tâche délicate, en particulier en présence de topographie.

Afin d'améliorer la gestion de la topographie, nous avons développé un nouvel algorithme d'inversion électrique 2.5D et 3D. Nous avons proposé deux nouvelles formulations pour supprimer la singularité à la source. Le problème direct est résolu en utilisant la méthode des Différences Finies Généralisées et des maillages non structurés, permettant une représentation précise de la topographie. Le code d'inversion utilise la méthode de l'état adjoint pour calculer le gradient de la fonction objective de manière économique. Cette approche a donné de bons résultats avec des données synthétiques. Les premiers résultats sur des données réelles ont permis de retrouver les principales structures de la subsurface, ainsi que plusieurs zones de faibles résistivités pouvant correspondre à des zones fracturées.

Mots clés : résistivité, modélisation, différences finies, maillages non structurés, problème inverse

Modeling and inversion of DC resistivity data: how to cope with topography effects

ABSTRACT :

DC resistivity imaging plays an important role for a wide range of applications related to the characterization of the shallow subsurface. Major developments have been made over the last two decades to improve acquisition systems as well as resistivity inversion. Nevertheless, large-scale data sets still represent a challenging task, in particular with arbitrary topography.

In order to better take into account topography, we have developed a new 2.5D/3D tomographic inversion code. Two new formulations for the singularity removal have been proposed. The direct problem is solved in the framework of the Generalized Finite Differences Method, that allows the use of unstructured meshes yielding a fine representation of topography. The inversion code uses the adjoint state method to compute the gradient of the misfit function in a numerically efficient way, giving good results on synthetic data. First results on real data have shown the main subsurface structures, as well as several low resistivity zones possibly corresponding to fractured areas.

Keywords : resistivity, modeling, finite differences, unstructured meshes, inverse problem