



**HAL**  
open science

# Étude de la résistance et de la stabilité des tôles courbes cylindriques en acier : applications aux ouvrages d'art

Khanh Le Tran

## ► To cite this version:

Khanh Le Tran. Étude de la résistance et de la stabilité des tôles courbes cylindriques en acier : applications aux ouvrages d'art. Autre. Université Paris-Est, 2012. Français. NNT : 2012PEST1163 . pastel-00808411

**HAL Id: pastel-00808411**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00808411>**

Submitted on 5 Apr 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UNIVERSITÉ — — PARIS-EST

Thèse présentée pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'Université Paris-Est**

Spécialité : Génie Civil

par

**Khanh Le TRAN**

Ecole Doctorale : SCIENCES, INGÉNIERIE ET ENVIRONNEMENT

## ÉTUDE DE LA RÉSISTANCE ET DE LA STABILITÉ DES TÔLES COURBES CYLINDRIQUES EN ACIER. APPLICATION AUX OUVRAGES D'ART

Thèse soutenue le 20 decembre 2012 devant le jury composé de :

|                 |                  |                                    |                      |
|-----------------|------------------|------------------------------------|----------------------|
| M.              | JEAN-PAUL LEBET  | Prof. EPFL, Suisse                 | (Président)          |
| M.              | ALI LIMAM        | Prof. INSA Lyon, France            | (Rapporteur)         |
| M.              | MOHAMMED HJIAJ   | Prof. INSA Rennes, France          | (Rapporteur)         |
| M <sup>me</sup> | LAURENCE DAVAINÉ | Ingérop, France                    | (Examineur)          |
| M.              | JULIEN DALLOT    | SNCF, France                       | (Examineur)          |
| M.              | CYRIL DOUTHE     | IFSTTAR, France                    | (Examineur)          |
| M.              | KARAM SAB        | Prof. Université Paris-Est, France | (Directeur de thèse) |



*"Plus on va loin,  
plus la connaissance baisse".  
Lao-Tseu, V<sup>e</sup> av. J.-C.*



# REMERCIEMENTS

**P**AR ces quelques lignes, je tiens à montrer ma reconnaissance envers tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont accompagné et aidé au cours de mes années de travail.

Je tiens à adresser en premier lieu mes remerciements à mon directeur de thèse, M. Karam SAB, pour avoir dirigé cette thèse et m'avoir permis de la réaliser dans les meilleures conditions. Je tiens particulièrement à le remercier de sa confiance et de la liberté qu'il m'a laissée pendant ces trois années de thèse.

Je souhaite exprimer mes remerciements à M. Mohammed HJIAJ et M. Ali LIMAM, d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Ils ont contribué par leurs nombreuses remarques et suggestions à améliorer la qualité de ce mémoire, et je leur en suis très reconnaissant. J'exprime également ma profonde gratitude à M. Jean-Paul LEBET qui a accepté de présider mon jury de thèse.

J'aimerais remercier énormément Laurence DAVAINÉ pour ses précieux conseils, ses immenses connaissances dans le domaine de la stabilité qui m'ont permis de mener à bien cette recherche. Je lui suis aussi reconnaissant par les opportunités qu'elle m'a accordées de pouvoir présenter mes travaux au comité de normalisation Européenne.

Je remercie sincèrement Cyril DOUTHE pour sa disponibilité et pour ses précieux conseils de rédaction de ce manuscrit.

Mes remerciements s'adressent ensuite à Julien DALLOT pour sa disponibilité, pour ses échanges quotidiens sympathiques tant sur le plan scientifique qu'amical.

Un merci tout particulier à Michel TRIQUET, l'initiateur de projet, sans le soutien de qui ce travail n'aurait sans doute pas pu voir le jour. J'ai également beaucoup apprécié ses disponibilités malgré son emploi du temps très chargé.

J'aimerais adresser des remerciements chaleureux au département des Ouvrages d'Art de la SNCF, en particulier l'équipe de recherche : Luc DIELEMAN, Suzhe YANG et Céline ANICOTTE, de m'avoir accueilli avec tant de chaleur pendant mes années d'études là-bas.

J'ai sûrement oublié de remercier beaucoup d'autres personnes méritantes, des personnes qui m'ont offert leur amitié, qui m'ont ouvert leur coeur, qui m'ont ouvert leur porte, qu'elles trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude et de mon amitié la plus sincère.

Je conclurai en remerciant de tout coeur ma famille qui m'a fortement encouragé dans mon travail et toujours soutenu.

Paris, le 10 février 2013.

# TABLE DES MATIÈRES

|  |      |
|--|------|
| TABLE DES MATIÈRES   | vii  |
| LISTE DES FIGURES  | xi   |
| NOTATIONS  | xvii |
| INTRODUCTION   | 1    |
| 1 VOILEMENT DES PLAQUES : ÉTAT DE L'ART  | 5    |
| 1.1 NOTION DE LA STABILITÉ DES STRUCTURES . . . . .                            | 7    |
| 1.2 RAPPEL SUR LA THÉORIE DU VOILEMENT DES PLAQUES . . . . .                   | 8    |
| 1.2.1 Contrainte critique de voilement élastique . . . . .                     | 9    |
| 1.2.2 Contrainte ultime . . . . .  | 10   |
| 1.3 COMPORTEMENT DES PLAQUES RAIDIES . . . . .                                 | 13   |
| 1.3.1 État de l'art . . . . .  | 14   |
| 1.3.2 Aspects normatifs pour les plaques raidies . . . . .                     | 17   |
| 1.4 DIMENSIONNEMENT D'UNE PLAQUE RAIDIE SELON L'EN 1993-1-5 . . . . .          | 19   |
| 1.4.1 Détermination de l'aire efficace résultant du voilement local . . . . .  | 19   |
| 1.4.2 Détermination de l'aire efficace résultant du voilement global . . . . . | 22   |
| 1.4.3 Section efficace vis-à-vis du voilement . . . . .                        | 25   |
| 1.5 CHOIX ACTUEL DES RAIDISSEURS LONGITUDINAUX . . . . .                       | 26   |
| 1.6 CONCLUSION . . . . .   | 29   |
| 2 ÉVALUATION DE LA DÉMARCHE DE L'EUROCODE PAR ÉLÉMENTS FINIS                   | 31   |
| 2.1 MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS . . . . .                                  | 33   |
| 2.1.1 Logiciel . . . . .   | 33   |
| 2.1.2 Choix du type d'élément . . . . .  | 33   |
| 2.1.3 Matériau . . . . .   | 34   |
| 2.1.4 Conditions aux limites . . . . .   | 36   |
| 2.1.5 Chargement . . . . .   | 37   |
| 2.1.6 Imperfections . . . . .  | 38   |
| 2.1.7 Algorithmes de résolution . . . . .                                      | 42   |
| 2.2 ÉVALUATION DE LA DÉMARCHE DE L'EUROCODE . . . . .                          | 45   |
| 2.2.1 Discussion du comportement critique de voilement . . . . .               | 46   |
| 2.2.2 Discussion du comportement ultime . . . . .                              | 49   |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 2.2.3    | Influence de la forme d'interpolation . . . . .                                | 59         |
| 2.2.4    | Conclusion . . . . .   | 59         |
| 2.3      | RECOMMANDATIONS POUR UNE AMÉLIORATION DE LA DÉMARCHE DE L'EURO-CODE . . . . .  | 60         |
| 2.3.1    | Contrainte critique de voilement . . . . .                                     | 60         |
| 2.3.2    | Formule d'interpolation . . . . .  | 63         |
| 2.3.3    | Raidisseur de faible rigidité . . . . .  | 68         |
| 2.4      | CONCLUSION . . . . .   | 70         |
| <b>3</b> | <b>TÔLES CYLINDRIQUES NON-RAIDIES SOUMISES À UNE COMPRESSION LONGITUDINALE</b> | <b>73</b>  |
| 3.1      | GÉNÉRALITÉS SUR LES TÔLES COURBES . . . . .                                    | 75         |
| 3.1.1    | Etat de l'art . . . . .  | 75         |
| 3.1.2    | Comportement des éléments courbes . . . . .                                    | 76         |
| 3.1.3    | Choix du paramètre de courbure . . . . .                                       | 78         |
| 3.2      | MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS . . . . .                                      | 81         |
| 3.2.1    | Type d'éléments . . . . .  | 81         |
| 3.2.2    | Construction de la géométrie du modèle d'éléments finis . . . . .              | 82         |
| 3.2.3    | Conditions aux limites . . . . .   | 83         |
| 3.3      | COMPORTEMENT CRITIQUE DE VOILEMENT ÉLASTIQUE LINÉAIRE . . . . .                | 85         |
| 3.3.1    | Généralités sur le voilement des tôles courbes . . . . .                       | 85         |
| 3.3.2    | Expression de la contrainte de voilement . . . . .                             | 87         |
| 3.4      | ÉTUDE NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT ULTIME . . . . .                               | 91         |
| 3.4.1    | Influence de la forme des imperfections . . . . .                              | 93         |
| 3.4.2    | Etude paramétrique . . . . .   | 96         |
| 3.5      | COURBE CARACTÉRISTIQUE DE VOILEMENT . . . . .                                  | 97         |
| 3.5.1    | Par modification de l'EN 1993-1-5 . . . . .                                    | 98         |
| 3.5.2    | Par modification de l'EN 1993-1-6 . . . . .                                    | 104        |
| 3.5.3    | Comparaison des deux approches . . . . .                                       | 107        |
| 3.6      | COEFFICIENT DE SÉCURITÉ . . . . .  | 111        |
| 3.6.1    | Etat de l'art . . . . .  | 111        |
| 3.6.2    | Principe d'évaluation . . . . .  | 112        |
| 3.6.3    | Evaluation du coefficient de sécurité sur le modèle $n^{\circ}1$ . . . . .     | 114        |
| 3.7      | CONCLUSION . . . . .   | 114        |
| <b>4</b> | <b>ADAPTATION DE LA DÉMARCHE EUROCODE AUX TÔLES COURBES RAIDIES</b>            | <b>117</b> |
| 4.1      | ÉTAT DE L'ART SUR LE DIMENSIONNEMENT DES TÔLES COURBES RAIDIES . . . . .       | 119        |
| 4.1.1    | Revue bibliographique . . . . .  | 119        |
| 4.1.2    | Récapitulatif des travaux expérimentaux . . . . .                              | 120        |
| 4.1.3    | Etudes numériques . . . . .  | 126        |
| 4.2      | ÉTUDE PRÉLIMINAIRE PAR ÉLÉMENTS FINIS . . . . .                                | 128        |
| 4.2.1    | Génération du modèle d'éléments finis . . . . .                                | 128        |
| 4.2.2    | Comportement critique de voilement . . . . .                                   | 128        |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 4.2.3 | Comportement ultime . . . . .   | 131 |
| 4.3   | MÉTHODOLOGIE DE DIMENSIONNEMENT DES TÔLES COURBES RAIDIES . . . . .                             | 133 |
| 4.4   | COMPORTEMENT DE TYPE COLONNE . . . . .  | 134 |
| 4.5   | COMPORTEMENT DE TYPE PLAQUE . . . . .   | 137 |
| 4.5.1 | Contrainte critique de voilement . . . . .  | 138 |
| 4.5.2 | Courbe de réduction . . . . .   | 139 |
| 4.6   | COMPORTEMENT INTERPOLÉ . . . . .  | 141 |
| 4.7   | RECAPITULATIF DE LA MÉTHODE PROPOSÉE . . . . .  | 142 |
| 4.7.1 | Détermination de la section efficace vis-à-vis du voilement local . . . . .                     | 142 |
| 4.7.2 | Réduction due au voilement global . . . . .   | 142 |
| 4.7.3 | Résistance ultime . . . . .   | 144 |
| 4.8   | CONCLUSION . . . . .  | 144 |
| 5     | DU BON USAGE DES PLANS D'EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES POUR LES<br>ÉTUDES DE LA STABILITÉ . . . . .    | 147 |
| 5.1   | MÉTHODOLOGIE DES PLANS D'EXPÉRIENCE . . . . .   | 151 |
| 5.1.1 | Etat de l'art . . . . .   | 151 |
| 5.1.2 | Des plans d'expériences classiques aux plans d'expériences numériques . . . . .                 | 152 |
| 5.2   | PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL NUMÉRIQUE . . . . .  | 153 |
| 5.2.1 | Choix des points d'expérience . . . . .   | 154 |
| 5.2.2 | Choix du modèle approché . . . . .  | 156 |
| 5.3   | NOTIONS DE STATISTIQUE POUR L'ÉVALUATION DES MODÈLES . . . . .                                  | 157 |
| 5.3.1 | Estimation des paramètres . . . . .   | 158 |
| 5.3.2 | Evaluation globale du modèle . . . . .  | 159 |
| 5.3.3 | Pertinence du modèle approché par l'analyse des résidus . . . . .                               | 160 |
| 5.4   | APPLICATION AUX PANNEAUX CYLINDRIQUES SOUS COMPRESSION LONGITUDI-<br>NALE ET UNIFORME . . . . . | 161 |
| 5.4.1 | <b>Etape 1</b> : Identification du problème . . . . .   | 162 |
| 5.4.2 | <b>Etape 2</b> : Choix du modèle approché . . . . .   | 163 |
| 5.4.3 | <b>Etape 3</b> : Choix des points expérimentaux . . . . .                                       | 164 |
| 5.4.4 | <b>Etape 4</b> : Evaluation des coefficients inconnus . . . . .                                 | 164 |
| 5.4.5 | <b>Etape 5</b> : Validation du modèle . . . . .   | 165 |
| 5.4.6 | <b>Etape 6</b> : Conclusion . . . . .   | 166 |
| 5.5   | RECOMMANDATIONS POUR AMÉLIORER LA PRÉCISION DU MODÈLE APPROCHÉ . . . . .                        | 169 |
| 5.5.1 | Nombre d'échantillons . . . . .   | 169 |
| 5.5.2 | Méthode de régression . . . . .   | 171 |
| 5.5.3 | Modèles alternatifs . . . . .   | 173 |
| 5.6   | APPLICATION AUX PANNEAUX CYLINDRIQUES SOUS COMPRESSION TRANSVER-<br>SALE NON-UNIFORME . . . . . | 175 |
| 5.6.1 | Etat de l'art . . . . .   | 175 |
| 5.6.2 | Identification du problème . . . . .  | 177 |
| 5.6.3 | Résistance ultime . . . . .   | 178 |

|       |  |            |
|-------|--|------------|
| 5.7   | APPLICATION À L'OPTIMISATION DES PANNEAUX CYLINDRIQUES RAIDIS SOUS COMPRESSION LONGITUDINALE . . . . . | 180        |
| 5.7.1 | Formulation du problème d'optimisation . . . . .   | 180        |
| 5.7.2 | Résistance ultime des tôles courbes raidies . . . . .  | 182        |
| 5.7.3 | Optimisation des tôles courbes raidies . . . . .   | 183        |
| 5.8   | CONCLUSION . . . . .   | 186        |
|       | <b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>   | <b>189</b> |
|       | <b>BIBLIOGRAPHIE</b>   | <b>193</b> |
|       | <b>ANNEXES</b>   | <b>205</b> |
| A.1   | EXEMPLE DE CALCUL DE LA CHARGE ULTIME D'UNE PLAQUE PLANE RAIDIE SELON L'EN 1993-1-5 . . . . .          | 207        |
| A.1.1 | Aire efficace résultant du voilement local . . . . .   | 207        |
| A.1.2 | Réduction due au voilement global . . . . .  | 209        |
| A.1.3 | Capacité portante . . . . .  | 212        |
| A.2   | THÉORIE NON-LINÉAIRE DE COQUE DE DONNEL. APPLICATION AUX PANNEAUX CYLINDRIQUES . . . . .               | 214        |
| A.2.1 | Théorie de coque mince de Donnel . . . . .   | 214        |
| A.2.2 | Expression linéarisée . . . . .  | 217        |
| A.2.3 | Application aux panneaux cylindriques - Expressions de Batdorf . . . . .                               | 218        |
| A.3   | VOILEMENT DES CYLINDRES RAIDIS SOUMIS À UNE COMPRESSION AXIALE . . . . .                               | 220        |
| A.3.1 | Contrainte critique de voilement . . . . .   | 221        |
| A.3.2 | Courbe de réduction . . . . .  | 223        |
| A.4   | PLAN D'EXPÉRIENCE NUMÉRIQUE : SUITE À FAIBLE DISCRÉPANCE . . . . .                                     | 224        |
| A.4.1 | Naissance des suites à faible discrédance . . . . .  | 224        |
| A.4.2 | La méthode de quasi-Monte Carlo : des suites à faible discrédance . . . . .                            | 225        |
| A.4.3 | Construction de la suite de Sobol' . . . . .   | 226        |

# LISTE DES FIGURES

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Caractérisation de l'équilibre . . . . .   | 7  |
| 1.2  | Différents types de la stabilité . . . . .   | 8  |
| 1.3  | Effet membrane stabilisant de plaque . . . . .   | 9  |
| 1.4  | Coefficient de voilement $k_\sigma$ pour une plaque comprimée . . . . .  | 10 |
| 1.5  | Comportement réel tenant en compte la plasticité du matériau de la plaque soumis à la compression . . . . .            | 11 |
| 1.6  | Distribution réelle des contraintes à l'état déformé de la plaque voilée . . . . .                                     | 12 |
| 1.7  | Mode de voilement élastique des plaques raidies . . . . .  | 15 |
| 1.8  | Approche par modèle de type poure-poteau . . . . .   | 16 |
| 1.9  | Approche par modèle de type plaque . . . . .   | 17 |
| 1.10 | Comparaison des résultats des différentes normes aux résultats expérimentaux (tiré dans le guide de ABS [6]) . . . . . | 18 |
| 1.11 | Partie efficace de la plaque . . . . .   | 19 |
| 1.12 | Représentation adimensionnelle de la contrainte de voilement élastoplastique d'une paroi parfaitement plane . . . . .  | 20 |
| 1.13 | Classification de la section selon le rapport l'élancement . . . . .   | 21 |
| 1.14 | Aire efficace résultant du voilement local . . . . .   | 22 |
| 1.15 | Caractéristique géométrie du modèle de type Colonne . . . . .  | 23 |
| 1.16 | Interpolation des deux comportements de type Colonne et Plaque . . . . .   | 25 |
| 1.17 | Démarche du dimensionnement d'une plaque raidie selon l'EN 1993-1-5 . . . . .  | 27 |
| 1.18 | Prévention du flambement par torsion pour raidisseur de type simple plat . . . . .                                     | 29 |
| 2.1  | Elément Plaque - SHELL 181 . . . . .   | 33 |
| 2.2  | Etude de convergence de la densité du maillage pour une plaque plane non-raïdie . . . . .                              | 34 |
| 2.3  | Comportement type de l'acier en traction . . . . .   | 35 |
| 2.4  | Modèles des matériaux selon EN 1993-1-5 . . . . .  | 36 |
| 2.5  | Modèle d'une plaque raidie soumis à une compression axiale uniforme . . . . .  | 36 |
| 2.6  | Influence de la condition de maintien rectiligne des bords non-chargés . . . . .                                       | 37 |
| 2.7  | Chargement de compression . . . . .  | 38 |
| 2.8  | Attache soudée des raidisseurs au diaphragme . . . . .   | 38 |
| 2.9  | Imperfections géométriques équivalentes selon EN 1993-1-5 . . . . .  | 39 |
| 2.10 | Mode de voilement global des raidisseurs . . . . .   | 40 |
| 2.11 | Mode de voilement local des sous-panneaux . . . . .  | 41 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.12 | Mode de voilement local du raidisseur par torsion . . . . .  | 41 |
| 2.13 | Mode "tripling" du raidisseur . . . . .  | 42 |
| 2.14 | Comparaison des algorithmes de résolution numérique . . . . .  | 43 |
| 2.15 | La méthode de longueur d'arc . . . . .   | 44 |
| 2.16 | Critère de convergence . . . . .   | 45 |
| 2.17 | Influence de la rigidité flexionnelle du raidisseur sur le coefficient critique de voilement . . . . .                 | 47 |
| 2.18 | Comparaison des différentes méthodes d'évaluation de la contrainte critique de premier mode de voilement . . . . .     | 48 |
| 2.19 | Imperfection globale des raidisseurs : (a) vers l'extérieure et (b) vers l'intérieur                                   | 50 |
| 2.20 | Imperfection locale des sous-panneaux : modèles (2a) et (2b) . . . . .   | 50 |
| 2.21 | Imperfection locale des raidisseurs par torsion . . . . .  | 50 |
| 2.22 | Influence de la direction d'imperfection . . . . .   | 51 |
| 2.23 | Courbe chargement-déplacement de différentes combinaisons de l'imperfection . . . . .                                  | 52 |
| 2.24 | Evolution de la charge ultime par rapport le coefficient d'aspect $\alpha$ . . . . .                                   | 54 |
| 2.25 | Mode de ruine de type colonne . . . . .  | 55 |
| 2.26 | Mode combinaison de ruine : Interaction de type colonne et plaque . . . . .  | 56 |
| 2.27 | Mode de ruine de type plaque . . . . .   | 56 |
| 2.28 | Type des raidisseurs . . . . .   | 57 |
| 2.29 | Influence de la rigidité du raidisseur à la charge ultime . . . . .  | 58 |
| 2.30 | Risque de sur-évaluation de l'approche plaque raidie pour une plaque non-raïdie . . . . .                              | 58 |
| 2.31 | Interpolation du comportement ultime . . . . .   | 59 |
| 2.32 | Notations relatives aux plaques raidies longitudinalement . . . . .  | 61 |
| 2.33 | Comparaison de la contrainte critique du logiciel EBPlate après correction de la largeur effective . . . . .           | 62 |
| 2.34 | Caractéristique géométrique d'une section représentative : raidisseur + largeur collaborante . . . . .                 | 63 |
| 2.35 | Evolution du coefficient $\zeta$ en fonction de $\alpha$ et $\gamma$ . . . . .   | 65 |
| 2.36 | Proposition de Maquoi et De Ville De Goyet [93] . . . . .  | 66 |
| 2.37 | Courbe d'interpolation . . . . .   | 67 |
| 2.38 | Nouvelle expression d'interpolation . . . . .  | 67 |
| 2.39 | Risque de surévaluation du modèle de résistance d'une plaque raidie . . . . .  | 68 |
| 2.40 | Solution modifiée . . . . .  | 69 |
| 3.1  | Courbe d'évolution de contrainte pour plaque, tôle courbe et cylindre (tiré de Gerard et Becker [66]) . . . . .        | 77 |
| 3.2  | Trajectoires d'équilibre pour un panneau cylindrique en compression uniaxiale uniforme - tiré de Maquoi [92] . . . . . | 77 |
| 3.3  | Essais de Wenzek [13] . . . . .  | 78 |
| 3.4  | Flèche maximale du panneau courbe . . . . .  | 80 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 3.5  | Modèle d'un panneau cylindrique soumis à une compression axiale uniforme   | 81  |
| 3.6  | Type d'élément de Plaque   | 82  |
| 3.7  | Etude de convergence des éléments SHELL 181 et SHELL 281 (Braun [31])  | 82  |
| 3.8  | Construction de la courbure  | 83  |
| 3.9  | Conditions d'appui sur un exemple réel   | 84  |
| 3.10 | Influence des conditions d'appui des bords rectilignes sur le comportement des tôles courbes                     | 85  |
| 3.11 | Premier mode de voilement pour différentes valeurs de la courbure $Z$  | 86  |
| 3.12 | Apparition du moment secondaire de flexion due à la courbure   | 87  |
| 3.13 | Influence du coefficient d'aspect pour une plaque courbe   | 88  |
| 3.14 | Comparaison du coefficient de voilement  | 90  |
| 3.15 | Analyse de convergence du comportement asymptotique des tôles cylindriques                                       | 91  |
| 3.16 | L'expression théorique de Stowell en comparaison aux résultats d'essais  | 92  |
| 3.17 | Résistance caractéristique de voilement $F_{ck}$   | 93  |
| 3.18 | Influence des différentes configuration d'imperfection   | 95  |
| 3.19 | Courbes de voilement des panneaux cylindriques soumis à une compression uniaxiale                                | 96  |
| 3.20 | Coefficient de réduction de voilement des tôles courbes élancées   | 98  |
| 3.21 | Poteau comprimé en position déformée   | 99  |
| 3.22 | Courbe de flambement d'Ayrton-Perry  | 100 |
| 3.23 | Transformation du modèle de Plaque pour une application de la méthode Ayrton-Perry (tiré dans Davaine [46])      | 101 |
| 3.24 | Identification du paramètre $\bar{\lambda}_0$ - longueur du palier plastique                                     | 102 |
| 3.25 | Calibrage du paramètre $\alpha_Z$  | 103 |
| 3.26 | Variation du coefficient d'imperfection $\alpha_Z$ en fonction de la courbure $Z$                                | 104 |
| 3.27 | Courbe de résistance typique des coques de révolution (tiré de Lagae et Vanlaere [87])                           | 105 |
| 3.28 | Forme alternative de la courbe de résistance - Proposition de Rotter [120]                                       | 106 |
| 3.29 | Philosophie de l'approche selon l'EN 1993-1-6  | 107 |
| 3.30 | Comparaison de la pertience des deux modèles (2/2)   | 110 |
| 3.31 | Comparaison de la résistance ultime estimée par les deux modèles sur l'ensemble des résultats numériques         | 111 |
| 3.32 | Coefficient partiels dans l'EN 1990  | 112 |
| 3.33 | Diagramme $r_e - r_t$  | 113 |
| 3.34 | Calcul du coefficient de sécurité - Base de données numériques   | 115 |
| 4.1  | Configuration des tôles raidies [d'après Gall [65]]  | 121 |
| 4.2  | Influence de la courbure sur la résistance des tôles courbes raidies [d'après Gall [65]]                         | 121 |
| 4.3  | Comparaison de la résistance maximale des tôles courbes aux plaques planes équivalentes [d'après Lundquist [89]] | 122 |
| 4.4  | Configuration du panneau courbe [d'après Ramberg <i>et al.</i> [114]]  | 123 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 4.5  | L'influence de la courbure à la charge ultime des tôles courbes raidies [d'après Ramberg <i>et al.</i> [114]] . . . . .                           | 124 |
| 4.6  | Géométrie de la tôle étudiée [d'après Soderquist [141]] . . . . .   | 125 |
| 4.7  | Coefficient de voilement en fonction de la courbure [d'après Soderquist [141]]  | 125 |
| 4.8  | Résistance ultime triée en fonction du rapport $\frac{b}{t}$ [d'après Soderquist [141]] .   | 126 |
| 4.9  | Distribution des imperfections initiales d'après Soderquist [141] . . . . .   | 127 |
| 4.10 | Génération du maillage . . . . .  | 129 |
| 4.11 | Contrainte critique de voilement des tôles courbes raidies en fonction du paramètre de courbure $Z$ . . . . .                                     | 129 |
| 4.12 | Coefficient de voilement en fonction du coefficient d'aspect . . . . .  | 130 |
| 4.13 | Différentes formes d'imperfection globale des raidisseurs selon la courbure .   | 131 |
| 4.14 | Influence de la courbure à la charge ultime des tôles courbes raidies à l'aide de la simulation numérique . . . . .                               | 132 |
| 4.15 | Influence du type des raidisseurs . . . . .   | 133 |
| 4.16 | Des potentiels modes de ruine de tôle courbe raidie . . . . .   | 134 |
| 4.17 | Borne inférieure obtenue par l'approche de type Colonne . . . . .   | 135 |
| 4.18 | Moment d'inertie des tôles raidies multiples . . . . .  | 136 |
| 4.19 | Comparaison du moment d'inertie . . . . .   | 137 |
| 4.20 | Comparaison de l'expression approché de la contrainte critique (l'expression 4.2) au résultats numériques . . . . .                               | 138 |
| 4.21 | Borne supérieure obtenue par l'approche de type Plaque . . . . .  | 140 |
| 4.22 | Interpolation du comportement des tôles courbes raidies . . . . .   | 141 |
| 4.23 | Comparaison de la résistance ultime théorique sur l'ensemble des résultats numériques . . . . .   | 145 |
| 5.1  | Processus des expériences numériques (reproduction de Simpson <i>et al.</i> [139])  | 153 |
| 5.2  | Plan d'expérience classique et "Space-Filling" Design . . . . .   | 155 |
| 5.3  | Tôle courbe intrados - Pont Renault, île Séguin en France . . . . .   | 162 |
| 5.4  | Echantillonnage par la suite de Sobol' (ronde bleue) et addition points aux coins (triangle rouge) . . . . .                                      | 165 |
| 5.5  | Variation des résidus par ordre d'apparition . . . . .  | 166 |
| 5.6  | Distribution normale des résidus . . . . .  | 167 |
| 5.7  | Comparaison de la valeur estimée par la méthode des plans d'expérience et par la méthode semi-analytique par rapport aux éléments finis . . . . . | 168 |
| 5.8  | Intervalle de confiance en fonction de : (a) Coefficients du polynôme $\beta$ et (b) nombre d'échantillon . . . . .                               | 170 |
| 5.9  | Influence des points aberrants . . . . .  | 171 |
| 5.10 | Comportement de la surface de réponse issue d'un krigeage dans le cas d'une régression linéaire constante - tiré de Jourdan [82] . . . . .        | 174 |
| 5.11 | Pont sur la rivière St-Etienne, île de réunion (2010) . . . . .   | 176 |
| 5.12 | Tôle courbe sous une compression transversale non-uniforme . . . . .  | 177 |

|  |     |
|--|-----|
| 5.13 Etude de la significative des coefficients de régression $\beta$ par diagramme de Pareto . . . . .      | 184 |
| A.1 Dimension de la plaque raidie étudiée . . . . .  | 207 |
| A.2 Composition des sous-panneaux de l'intrados . . . . .  | 208 |
| A.3 Aire efficace résultant du voilement local . . . . .   | 209 |
| A.4 Section d'une colonne isolée . . . . .   | 209 |
| A.5 Flambement de colonne par E.F. . . . .   | 213 |
| A.6 Voilement de plaque par E.F. . . . .   | 213 |
| A.7 Charge de ruine par E.F. . . . .   | 213 |
| A.8 Résultant d'effort d'un élément coque . . . . .  | 215 |
| A.9 Abaque de Batdorf - Coefficient de voilement d'une tôle cylindrique sous la compression axiale . . . . . | 219 |
| A.10 Coque cylindrique raidie longitudinalement . . . . .  | 220 |
| A.11 Echantillonnage par hypercube latin . . . . .   | 224 |
| A.12 Risque éventuel d'un échantillonnage par hypercube latin . . . . .                                      | 225 |
| A.13 Echantillonnage par une suite de Sobol' : $n = 64$ . . . . .  | 226 |
| A.14 Echantillonnage par la suite de Sobol' en dimension 1 . . . . .   | 228 |
| A.15 Echantillonnage par la suite de Sobol . . . . .   | 229 |



# NOTATIONS

## Minuscules latines

|                 |  |
|-----------------|--|
| $a$             | longueur du panneau                          |
| $b$             | largeur du panneau                           |
| $b_e$           | largeur efficace                             |
| $b_s$           | largeur de la semelle d'un raidisseur en T   |
| $d$             | espacement entre des raidisseurs             |
| $d_{bord}$      | espacement entre raidisseur et bord libre    |
| $e$             | excentricité du centre de gravité            |
| $f_y$           | limite d'élasticité                          |
| $h_s$           | hauteur du raidisseur                        |
| $i$             | rayon de giration                            |
| $k_{(\bullet)}$ | coefficient de voilement                     |
| $n$             | nombre des raidisseurs                       |
| $t$             | épaisseur                                    |
| $t_p$           | épaisseur de la plaque                       |
| $t_s$           | épaisseur du raidisseur                      |
| $t_f$           | épaisseur de la semelle d'un raidisseur en T |
| $u$             | déplacement longitudinal                     |
| $v$             | déplacement transversale                     |
| $w$             | déplacement hors-plan                        |

## Majuscules latines

|                 |   |
|-----------------|---|
| $A$             | aire  |
| $A_{c,eff}$     | aire de section transversale efficace                         |
| $A_{c,eff,loc}$ | aire de section transversale efficace pour le voilement local |
| $A_s$           | aire d'un raidisseur  |
| $D$             | rigidité flexionnelle d'une plaque                            |
| $E$             | module d'Young  |
| $H$             | hat-matrice   |
| $K$             | matrice de rigidité   |
| $N$             | charge appliquée  |

|           |  |
|-----------|--|
| $N_{cr}$  | charge critique                                      |
| $N_{pl}$  | charge plastique                                     |
| $N_{ult}$ | charge de ruine                                      |
| $R$       | rayon de courbure                                    |
| $R^2$     | coefficient de détermination                         |
| $Q^2$     | coefficient de validation croisée                    |
| $I$       | inertie  |
| $I_{sl}$  | inertie flexionnelle totale de l'ensemble du panneau |
| $X$       | variable d'entrée                                    |

### Minuscules grecques

|                   |  |
|-------------------|--|
| $\alpha$          | coefficient d'aspect                                       |
| $\alpha_e$        | facteur d'imperfection pour le flambement                  |
| $\alpha_Z$        | facteur d'imperfection pour le voilement d'une tôle courbe |
| $\beta$           | facteur d'interaction pour le voilement d'une tôle courbe  |
| $\gamma$          | raidieur flexionnelle relative des raidisseurs             |
| $\gamma_M$        | coefficient partiel de sécurité                            |
| $\bar{\lambda}$   | élancement réduit  |
| $\bar{\lambda}_0$ | longueur du plateau plastique                              |
| $\nu$             | coefficient de Poisson de l'acier                          |
| $\rho$            | coefficient réducteur d'un panneau                         |
| $\rho_c$          | coefficient réducteur global d'une tôle raidie             |
| $\sigma$          | contrainte   |
| $\sigma_{cr}$     | contrainte critique  |
| $\sigma_{cr,p}$   | contrainte critique d'une plaque                           |
| $\sigma_{cr,c}$   | contrainte critique d'une colonne                          |
| $\sigma_{cr,sp}$  | contrainte critique d'un sous-panneau                      |
| $\sigma_E$        | contrainte critique de référence d'Euler                   |
| $\sigma_{ult}$    | contrainte ultime  |
| $\xi$             | rapport de contrainte critique                             |
| $\chi$            | coefficient réducteur vis-à-vis du flambement              |
| $\psi$            | rapport de contrainte appliquée                            |

# INTRODUCTION

Les tôles courbes sont de plus en plus fréquemment utilisées dans le domaine des ouvrages d'art tant pour raisons esthétiques que pour leurs performances mécaniques et aérodynamiques. On les trouve essentiellement en intrados des ponts à tablier orthotrope, par exemple dans le pont Charles de Gaulle à Paris ou le pont Renault sur l'île Séguin à Boulogne-Billancourt, etc (c.f les figures). Pour le dimensionnement de tels panneaux, l'ingénieur cherche habituellement le meilleur compromis entre l'économie du projet (en jouant sur l'épaisseur et le nombre de raidisseurs) et la sécurité de celui-ci. Ces éléments pouvant être fortement comprimés en particulier au niveau des appuis, il devra vérifier qu'aucun phénomène d'instabilité n'apparaît ou du moins que ses effets sont limités.



(a) Pont Charles de Gaulle à Paris (75)



(b) Pont Renault à Boulogne-Billancourt (78)

Cependant, la vérification de leur stabilité s'avère ardue notamment en raison de l'absence de normes dédiées à l'étude de ce phénomène pour les tôles courbes. En effet, les normes actuelles, notamment les Eurocodes qui sont en vigueur de France depuis plusieurs années, ne sont pas applicables directement aux tôles courbes. A titre d'illustration, l'Eurocode 3 (relatif aux calculs de structures métalliques) possède deux parties qui évoquent le phénomène :

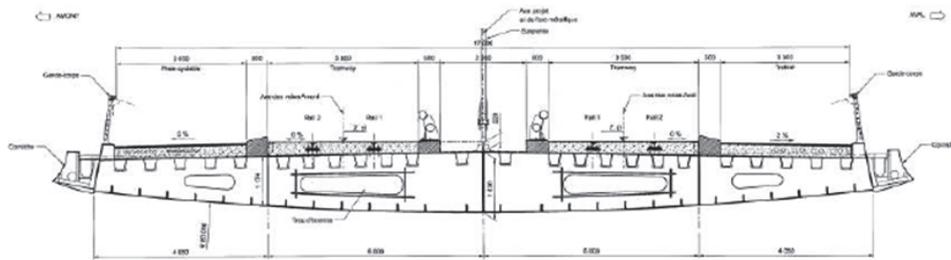
- L'EN 1993-1-5 [3] qui ne traite que des plaques planes ou quasi-planes. La note 4 de la clause 1.1 (2) indique que « les plaques simples peuvent être considérées comme planes lorsque le rayon de courbure  $R$  satisfait :  $R > b^2/t$  » où  $b$  et  $t$  sont respectivement la largeur et l'épaisseur du panneau. Il faut noter ici que la norme anglaise (BS5400 [33]) est plus sévère et fixe cette valeur limite à  $R > 2b^2/t$ .
- L'EN 1993-1-6 [4] qui ne concerne que les coques de révolution. La clause 1.1 indique que « les panneaux cylindriques, coniques et sphériques ne sont pas explicitement couverts par la présente Partie 1.6 ».

Les panneaux courbes visés par ce travail sont donc situés entre ces deux cas limites et ne peuvent donc être traités directement par l'une ou l'autre partie de l'Eurocode comme l'illustre le cas du pont Confluences sur la Maine à Angers (France), qui est construit pour accueillir principalement le tramway.

Il s'agit d'un pont en arc à tablier intermédiaire de 293 m de long, dont 149 m suspendus. La section transversale de l'ouvrage est un caisson de quatre cellules de largeur constante. Les âmes (longerons) sont verticales. La largeur entre âmes de la cellule est de 5 m. La géométrie de l'intrados est un arc de cercle de rayon de 80 m qui contribue à l'aspect en "aile d'avion" de la structure. Cette forme permet d'avoir un écoulement plus lisse du vent, et par conséquent une portance moins importante sur la structure. Les tôles de fond sont constituées d'une tôle d'épaisseur variable de 12 mm à mi-travée à 20 mm sur appui. Ces caractéristiques géométriques donnent un ratio variant de  $b^2/Rt = 15,6$  à 26,1 qui est bien situé en dehors du domaine d'application de l'EN 1993-1-5 (l'EN 1993-1-6 n'étant pas non plus applicable car il ne s'agit pas de cylindres de révolution complet).



(c) Pont Confluences sur la Maine à Angers, France



(d) Section transversale du tablier

Les calculs d'exécution de la charpente métallique de ce pont ont été menés par le Département des Ouvrages d'Art de la SNCF, qui a donc été confronté au problème de vide normatif sur le sujet. La solution retenue a été un calcul par éléments finis non linéaire de chaque panneau relativement fastidieux, d'où la volonté d'IGOA (Département des Ouvrages d'Art de la SNCF) de vouloir lancer un travail de recherche sur ce sujet.

Du côté des mécaniciens, les publications académiques relatives aux panneaux courbes ne sont pas non plus nombreuses en comparaison de celles consacrées aux plaques planes ou aux coques de révolution. De plus, la plupart de ces travaux a été menée dans le domaine aéronautique ou celui de la construction navale et très peu dans le domaine des

ouvrages d'art. Cela est dû à l'utilisation très tardive dans ce domaine de plaques et de tôles courbes raidies. La nécessité de maîtriser la conception des plaques raidies a été ressentie après plusieurs effondrements d'ouvrages dans les années 70 (Åkesson [8]). Les types et les configurations des tôles utilisées dans ces domaines sont assez différentes. En effet, en aéronautique, les tôles sont très minces et très courbées (faible valeur du rayon de courbure); elles sont donc limitées à la charge critique de voilement. Aussi, comme les tôles sont notamment en matériaux composites, le mode de ruine est souvent lié à la connexion par rivetage de la tôle de fond et des raidisseurs (différents de la connexion). Dans le domaine de la construction navale, les tôles sont très épaisses de sorte que la ruine est souvent dominée par la plastification des sections avant l'apparition de voilement. Par ailleurs, le mode de chargement est aussi différent notamment à cause de la pression de l'eau. Les théories développées pour l'aéronautique et la construction navale ne sont pas tout à fait applicables aux ouvrages d'art.

En résumé, on constate qu'il n'existe pas, à l'heure actuelle, une expression de la charge ultime des panneaux cylindriques satisfaisante tant pour l'ingénieur que pour le théoricien. Le recours à la modélisation devient alors nécessaire. Le développement d'ordinateurs performants et de méthodes numériques efficaces ces dernières décennies permet aujourd'hui de calculer ces structures de coque, quelle que soit la complexité de leur géométrie. Cependant, la prise en compte de la complexité géométrique de la structure s'avère couteuse en temps de calcul, en particulier lorsqu'une analyse non linéaire est requise. En outre, bien souvent, la qualité et la précision des résultats vont dépendre de l'expérience de l'utilisateur. Zhang et Khan [161] ont d'ailleurs constaté dans leur étude que la différence entre les résultats numériques obtenus par différents utilisateurs pouvait atteindre 15% à 20% pour un même modèle éléments finis avec les mêmes conditions aux limites et les mêmes imperfections initiales.

La mise au point d'une méthode simple qui donnerait la résistance ultime de tels panneaux avec une précision raisonnable semble donc souhaitable pour les applications pratiques. C'est ce à quoi le présent travail est dédié. Le traitement du problème se fait dans le respect du formalisme de l'Eurocode, après une présentation et une analyse critique de ce dernier. Les outils existants en bureau d'études sur les plaques sont donc adaptés au cas des tôles courbes. On suit la méthode des largeurs effectives, aussi appelée la méthode  $\chi - \bar{\lambda}$ , présentée dans l'Eurocode 3 pour la vérification de la stabilité des charpentes métalliques (Davaine [46], Maquoi et Skaloud [96], Schmidt [131]). Cette méthode des largeurs effectives permet de prendre en compte le comportement post-critique de la structure en tenant compte de la redistribution du chargement après voilement : la prédiction de la capacité ultime de la structure est donc plus réaliste.

Le présent mémoire comportera donc cinq chapitres :

- Le chapitre 1 aborde un certain nombre de généralités utiles pour une bonne compréhension de la problématique d'instabilité en général et du voilement des plaques en particulier. Comme la méthodologie adoptée pour les tôles courbes est construite par

- analogie avec celle développée pour le voilement des plaques planes dans les Eurocodes, les différentes étapes du dimensionnement d'une plaque selon l'EN 1993-1-5 sont également détaillées ici.
- Le chapitre 2 est dédié à une analyse critique et une évaluation de la démarche de l'Eurocode pour les plaques raidies par comparaison avec des résultats de calcul par éléments finis. Pour s'assurer de la pertinence du modèle de calcul aux éléments finis retenus, les différentes étapes de la construction du modèle sont d'abord détaillées. Une série de simulations numériques est ensuite entreprise pour identifier les inconvénients de la démarche de l'Eurocode. Ce chapitre se termine par des recommandations d'amélioration afin de faciliter la mise en œuvre de la vérification et de mieux l'appliquer dans l'étude des tôles courbes raidies.
  - Le chapitre 3, le plus important de ce travail, traite du comportement des tôles courbes non-raïdiées. L'étude préliminaire par simulation numérique montre que la courbure influence significativement la stabilité de la plaque. Sur la base de données numériques, des expressions semi-analytiques sont proposées pour évaluer la résistance ultime des tôles courbes non-raïdiées. Elles serviront aussi dans la démarche de vérification des tôles courbes raidies.
  - Le chapitre 4 concerne l'étude des tôles courbes raidies. En se basant sur les résultats numériques, la méthode proposée est une mise à jour de l'approche de l'Eurocode EN 1993-1-5 pour les plaques raidies à laquelle on ajoute l'influence de la courbure. Un exemple pratique est donné afin de mieux illustrer la démarche proposée.
  - Malgré la bonne précision, la démarche analytique développée aux chapitres 3 et 4 étant difficile à reproduire dans l'usage quotidienne des ingénieurs confrontés à de nouveaux problèmes tel que la combinaison des chargements. Ce chapitre 5 propose une méthode alternative basée sur la méthode des plans d'expériences numériques, qui permet à partir d'un nombre limité de simulations numériques de déduire des résultats à caractères généraux. Ce chapitre commence par une présentation succincte de la méthodologie des plans d'expériences numériques. Quelques exemples d'application de cette méthodologie sont ensuite présentés afin de : (1) montrer sa validité pour la problématique de la stabilité des tôles courbes ; (2) présenter sa facilité d'adaptation face à un nouveau problème et (3) montrer l'intérêt de la méthode quant au problème de l'optimisation du raidissage.

Enfin, le document se terminera sur un résumé des conclusions les plus importantes de ce travail et sur les perspectives qu'il serait judicieux d'explorer.

# VOILEMENT DES PLAQUES : ÉTAT DE L'ART

1

## SOMMAIRE

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 1.1   | NOTION DE LA STABILITÉ DES STRUCTURES . . . . .                          | 7  |
| 1.2   | RAPPEL SUR LA THÉORIE DU VOILEMENT DES PLAQUES . . . . .                 | 8  |
| 1.2.1 | Contrainte critique de voilement élastique . . . . .                     | 9  |
| 1.2.2 | Contrainte ultime . . . . .  | 10 |
| 1.3   | COMPORTEMENT DES PLAQUES RAIDIES . . . . .                               | 13 |
| 1.3.1 | État de l'art . . . . .  | 14 |
| 1.3.2 | Aspects normatifs pour les plaques raidies . . . . .                     | 17 |
| 1.4   | DIMENSIONNEMENT D'UNE PLAQUE RAIDIE SELON L'EN 1993-1-5 . . . . .        | 19 |
| 1.4.1 | Détermination de l'aire efficace résultant du voilement local . . . . .  | 19 |
| 1.4.2 | Détermination de l'aire efficace résultant du voilement global . . . . . | 22 |
| 1.4.3 | Section efficace vis-à-vis du voilement . . . . .                        | 25 |
| 1.5   | CHOIX ACTUEL DES RAIDISSEURS LONGITUDINAUX . . . . .                     | 26 |
| 1.6   | CONCLUSION . . . . .   | 29 |

**L**ES éléments structuraux métalliques rencontrés dans la construction se distinguent très généralement de ceux constitués d'autres matériaux de constructions traditionnels (tels que le béton, le bois et la maçonnerie) par leur grand élancement. Lorsqu'une structure est soumise à la compression, sa résistance est affectée, de manière défavorable, par les effets de son élancement. Cette réduction de la résistance des éléments structuraux en raison de leur élancement est le fait de phénomènes d'instabilité structurelle. L'étude de ces phénomènes est non seulement d'un grand intérêt, mais aussi une nécessité pour assurer la fiabilité de toute construction métallique.

Cette section, largement inspirée des travaux de Bedair [24], Jones [80] et Maquoi [92], est constituée d'une brève présentation de la problématique de la stabilité en général et

puis du voilement des plaques planes. Le dimensionnement d'une plaque plane raidie selon l'EN 1993-1-5 est aussi détaillé dans ce chapitre.

## 1.1 NOTION DE LA STABILITÉ DES STRUCTURES

Lorsqu'un élément de structure élancé est soumis à une compression, il présente potentiellement un danger d'instabilité. Le mot instabilité est un terme générique utilisé pour désigner un ensemble de phénomènes et ce, indépendamment du type de structure que ces phénomènes concernent. Des termes spécifiques sont utilisés pour différencier plus précisément les phénomènes d'instabilité élémentaire, tels que : le flambement pour une poutre soumise à une compression longitudinale, le déversement pour une poutre soumise à une flexion ou le voilement pour les plaques et coques. Il faut noter que le terme voilement s'applique aussi bien aux plaques qu'aux coques, mais leurs comportements peuvent fréquemment être différenciés, en particulier leurs comportements postcritiques respectifs.

La notion d'instabilité ou de stabilité est toujours associée au concept d'équilibre, une des notions de base essentielle de la mécanique du solide. D'une manière générale, la stabilité peut être définie comme la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est perturbé légèrement. La stabilité peut être illustrée à travers l'exemple bien connu de la bille sur un support courbe (figure 1.1). Si la bille repose sur une surface concave, l'équilibre est stable (figure 1.1a) : si l'on donne à la bille une vitesse initiale faible, elle commencera à osciller, mais restera à proximité de son état d'équilibre. À l'inverse, lorsque, dans le second cas, la bille repose au sommet d'une surface convexe (figure 1.1b), le fait de lui donner une impulsion va conduire très rapidement à de grands déplacements : on dit alors que le système est instable. Si la bille repose sur un plan horizontal, l'équilibre est dit "neutre" : la perturbation appliquée à la bille conduit à un autre état d'équilibre (figure 1.1c).

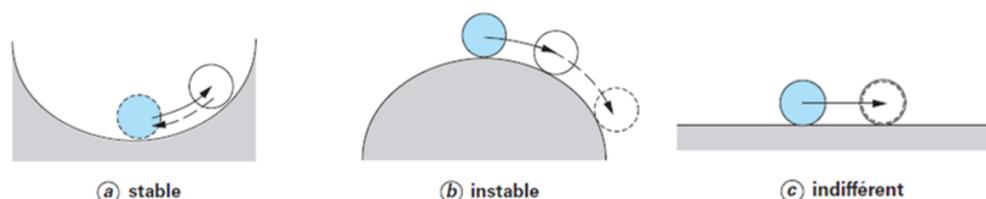


FIGURE 1.1 – Caractérisation de l'équilibre

L'exemple intuitif de la bille permet aussi d'illustrer une notion fondamentale de la stabilité : un état d'équilibre stable d'une structure est obtenu lorsque son énergie potentielle atteint une valeur minimale. Cette notion est la base des méthodes énergétiques de résolution des problèmes d'instabilité. Il existe bien sûr d'autres méthodes, telle que la méthode de relaxation dynamique (Douthe [51], Frieze et Dowling [60]). Cependant, ces dernières sont beaucoup moins courantes que la méthode de minimisation de l'énergie potentielle, la méthode qui sera appliquée à l'étude du voilement des plaques présentée dans la prochaine section.

## 1.2 RAPPEL SUR LA THÉORIE DU VOILEMENT DES PLAQUES

Le comportement d'une structure peut être étudié au moyen d'un diagramme charge-déplacement où le chargement appliqué est présenté en fonction du déplacement d'un point de référence choisi, a priori quelconque. En pratique, ce point est choisi parce qu'une valeur significative du déplacement est attendue, par exemple le raccourcissement de la section chargée ou le déplacement transversal du point au milieu. Lorsque la charge est appliquée de manière croissante depuis une valeur nulle, la relation charge-déplacement obtenue constitue ce qu'on appelle une trajectoire d'équilibre.

La figure 1.2 présente les diagrammes typiques chargement-déflexion latérale (a) et chargement-raccourcissement (b) de trois types de structure : colonne (courbe n° 1), plaque (courbe n° 2) et cylindre (courbe n° 3). Pour toute charge inférieure à la charge critique ( $F < F_{cr}$ ), aucun déplacement latéral n'est observé ; la structure reste parfaitement plane. Le comportement de la structure est un comportement linéaire, avec la tangente proportionnelle au module d'Young  $E$ . Au-delà de cette charge critique, le déplacement devient différent de 0. Le comportement postcritique est pourtant différent pour ces trois types de structure. Une colonne ou un cylindre atteignant leur charge critique prend subitement une déformation transversale et le raccourcissement de la structure se produit à charge décroissante. Cette valeur de la charge critique correspond donc à la charge de ruine. Une plaque qui atteint sa charge critique de voilement peut encore supporter une augmentation de la charge avant d'atteindre la ruine proprement dite.

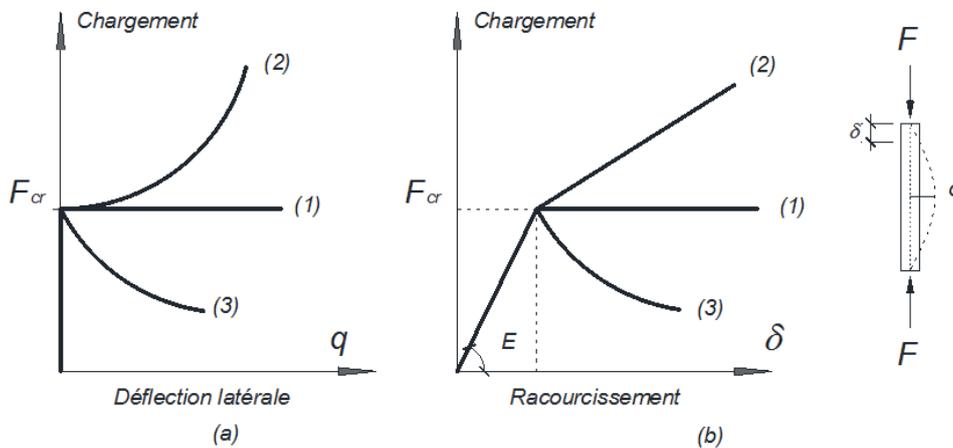


FIGURE 1.2 – Différents types de la stabilité

Les plaques planes possèdent donc ce que l'on appelle une réserve post-critique. Celle-ci est due à l'effet membrane qui tend à stabiliser la plaque après son voilement. Pour comprendre ce comportement, il convient de remplacer la plaque par un système de bandes dans deux directions perpendiculaires ; les bandes longitudinales sont comprimées et sont donc susceptibles de flamber. Le raccourcissement libre de la plaque dans la direction transversale étant bloqué au niveau des bords longitudinaux, le voilement crée

une augmentation de longueur des bandes transversales ; ceci crée des forces de traction de membrane dans les bandes transversales. Ces bandes tendues jouent dès lors le rôle d'une fondation élastique pour les bandes comprimées et exercent par conséquent un effet stabilisateur sur ces bandes (figure 1.3). Ceci explique pourquoi la plaque peut atteindre un état d'équilibre stable au-delà de sa charge critique de voilement élastique. Cet effet des contraintes membranaires se développe avec une intensité d'autant plus grande que la configuration des appuis assure un meilleur ancrage (Van der Burg [150]). Pour avoir cet effet, il faut donc que les bords non chargés de la plaque soient au moins simplement appuyés ; un appui simple avec empêchement de déplacement dans le plan de la plaque ou un encastrement sont des configurations encore plus propices à l'apparition de contraintes membranaires.

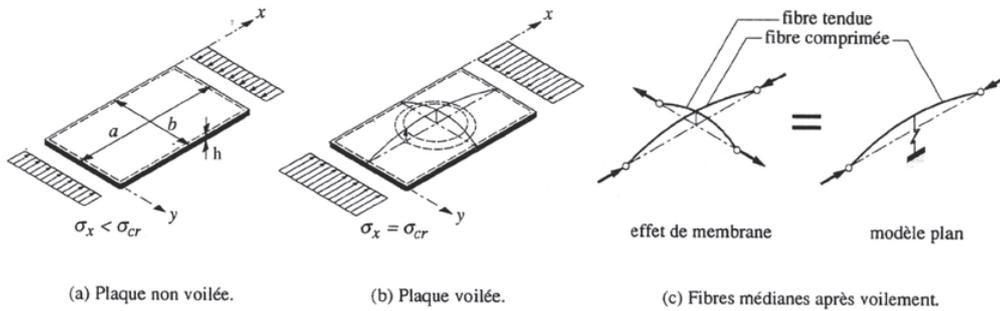


FIGURE 1.3 – Effet membrane stabilisant de plaque

### 1.2.1 Contrainte critique de voilement élastique

La théorie linéaire du voilement est susceptible de fournir l'expression de la charge élastique de voilement. La contrainte critique de voilement est obtenue par l'équation 1.1 :

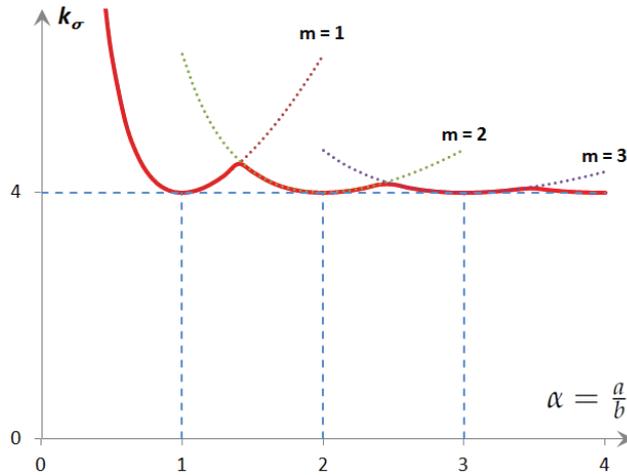
$$\sigma_{cr} = k_{\sigma} \sigma_E \quad (1.1)$$

où :  $\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2$  est la contrainte critique d'Euler, et  $k_{\sigma}$  est le coefficient de voilement. Ce coefficient de voilement  $k_{\sigma}$  dépend en général des conditions d'appuis, de la distribution des contraintes, du rapport géométrie de la plaque (i.e coefficient d'aspect de longueur sur largeur :  $\alpha = \frac{a}{b}$ ). Pour une plaque idéale (matériaux élastique linéaire, plaque parfaitement plane) simplement appuyée sur quatre côtés et soumise à une compression uniforme ce coefficient de voilement  $k_{\sigma}$  s'écrit comme suit :

$$k_{\sigma} = \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m}\right)^2 \quad (1.2)$$

où  $m$  désigne le nombre de demi-ondes qui apparaissent dans la direction de chargement.

On constate que quel que soit le nombre  $m$  de demi-ondes,  $k_{\sigma}$  prend une valeur minimum constante égale à 4 si  $m = \alpha$ . La courbe de  $k_{\sigma}$  correspondant au voilement en  $m$  demi-ondes est représenté à la figure 1.4. Il n'y a lieu de retenir que l'enveloppe inférieure

FIGURE 1.4 – Coefficient de voilement  $k_\sigma$  pour une plaque comprimée

de ces courbes, représentées en trait plein. Les zones tracées en pointillées correspondant à des charges critiques plus élevées qui n'ont aucune importance pratique.

De ce qui précède, il est déduit que si la longueur  $a$  de la plaque est exactement un multiple de sa largeur  $b$ , le voilement se fait en demi-ondes carrées. Pour des rapports  $\alpha$  supérieurs à 1 mais non entiers, le voilement en ondes carrées est impossible et la charge critique devient légèrement supérieure ( $k_\sigma > 4$ ). La différence n'est toutefois pas grande et elle est d'autant moins significative que le rapport  $\alpha$  augmente. En revanche, pour  $\alpha > 1$ , le relèvement de la charge critique peut devenir appréciable. Bien que ce domaine d'utilisation soit moins courant, il est intéressant d'examiner à quoi correspond physiquement le comportement de plaques très courtes ( $\alpha \rightarrow 0$ ). Dans ce cas, on a évidemment  $m = 1$  et on peut négliger  $\alpha$  devant  $\frac{1}{\alpha}$  ; il reste donc :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12a^2 t} \frac{1}{1 - \nu^2} \quad (1.3)$$

Ce résultat ne représente rien d'autre que la charge critique de flambement d'une série de colonnes jointives découpées dans le sens de la compression, jouissant d'une rigidité majorée par l'effet de plaque (i.e, l'effet coefficient de Poisson  $\nu$ ) et ne bénéficiant pratiquement d'aucun support de la part des bords non chargés (i.e effet membranaire).

### 1.2.2 Contrainte ultime

Comme présenté sur la figure 1.2, l'atteinte de la charge critique de voilement ne signifie pas la ruine de la plaque grâce à l'existence de l'effet membrane. Cependant, aucun matériau ne possède une élasticité infinie, il existe donc une charge à partir de laquelle le matériau se plastifie, ce qui rend la structure plus flexible et accroît le gradient de la déformée transversale en fonction de la charge. La courbe de comportement postcritique finit donc par s'incurver pour franchir une valeur maximum de la charge qui est la charge de ruine, après quoi le déplacement s'accroît sous charge décroissante (figure 1.5).

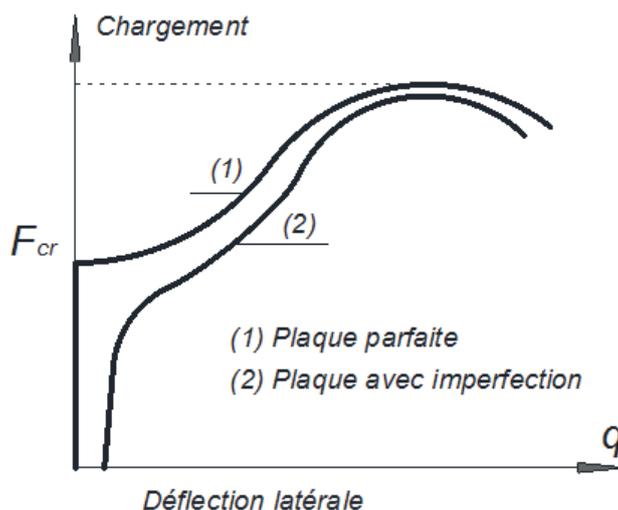


FIGURE 1.5 – Comportement réel tenant en compte la plasticité du matériau de la plaque soumise à la compression

Il est évident que le comportement d'une plaque au-delà de la charge critique, ne peut être représenté par la théorie linéaire à cause des grandes déformations. Quand une plaque se voile, il y a une interaction des déplacements dans le plan et hors du plan, d'où un comportement non linéaire. En effet, dans le domaine élastique et en-dessous de la charge critique, la distribution des contraintes est uniforme. Dès que la plaque a voilé, la plaque se dérobe à la compression au fur et à mesure que la charge s'accroît. Il en résulte une distribution non uniforme des contraintes qui diminuent de plus en plus au milieu de la plaque (figure 1.6). Les fibres situées le long des bords non chargés ont une raideur spécifique plus grande que les fibres de la zone centrale, où la plaque a une plus grande liberté pour sortir de son plan. Un raccourcissement axial identique sur la largeur  $b$  de la plaque introduit donc des contraintes plus élevées au voisinage des bords longitudinaux qu'à mi-largeur. Seules les fibres proches des bords non chargés sont susceptibles d'atteindre la limite d'élasticité dans le domaine postcritique.

De plus, les processus de mise en œuvre et de fabrication d'une plaque donnent lieu à des imperfections géométriques inévitables (par exemple, défaut de planéité) et à des contraintes résiduelles. Ces imperfections initiales vont aussi perturber le comportement postcritique de la plaque. Elles modifient l'allure du comportement au début de la mise en charge et vont permettre une plastification prématurée de certaines zones (figure 1.5).

À cause de la présence de la non-linéarité mentionnées dessus, l'étude en domaine postcritique de la plaque devient rapidement complexe et se heurte très tôt à des difficultés d'ordre mathématique. Von-Karman est le premier à proposer une solution pour déterminer la charge de ruine. Par commodité de calcul, il propose de remplacer le diagramme de contrainte non uniforme par un diagramme de compression uniforme agissant sur une largeur effective  $b_e$  avec une intensité égale à la contrainte maximum  $\sigma_{max}$  agissant

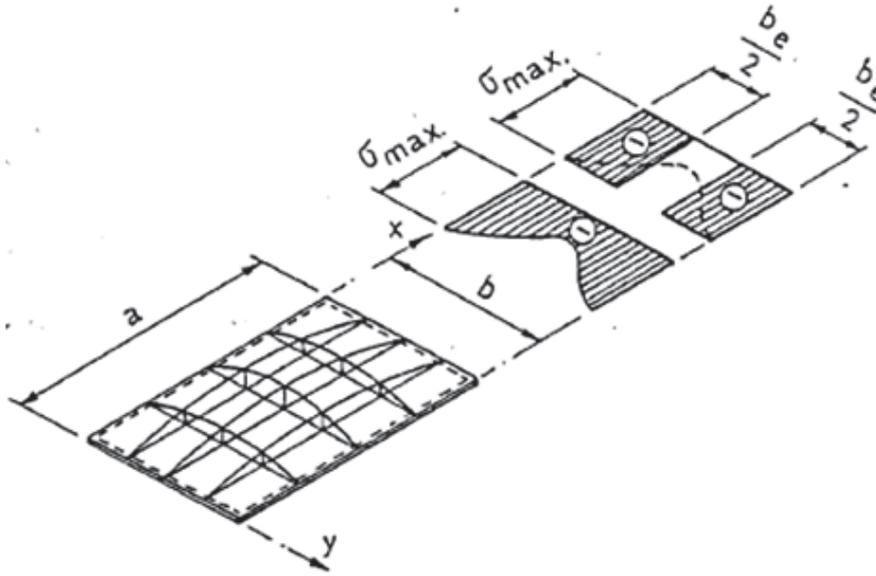


FIGURE 1.6 – Distribution réelle des contraintes à l'état déformé de la plaque voilée

sur les bords non chargés :

$$\int_0^b \sigma_x t dy = \sigma_{max} t b_e \quad (1.4)$$

La moyenne des contraintes exercées sur la surface est donnée par :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{bt} \int_0^b \sigma_x t dy \quad (1.5)$$

Dès lors, on tire :

$$b_e = \frac{1}{\sigma_{max}} \int_0^b \sigma_x dy = b \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{max}} \quad (1.6)$$

À la ruine, Von-Karman admet que cette contrainte maximum  $\sigma_{max}$  vaut la limite d'élasticité  $f_y$  et suppose que la plaque de largeur  $b_e$  voilerait pour une contrainte critique égale à la limite d'élasticité. Il vient dès lors :

$$\sigma_{cr, b_e} = \sigma_{max} \quad (1.7)$$

avec :

$$\begin{aligned} \sigma_{cr, b_e} &= k_c \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b_e} \right)^2 \\ &= k_c \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \left( \frac{b}{b_e} \right)^2 \\ &= \sigma_{cr} \left( \frac{b}{b_e} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

d'où l'on tire la formule de Von-Karman permettant de définir la largeur effective :

$$\frac{b}{b_e} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{f_y}} \quad (1.9)$$

Il est alors commode d'introduire, par analogie avec la théorie du flambement, un élanement de plaque adimensionnel  $\bar{\lambda}$ , défini par :

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{cr}}} \quad (1.10)$$

et une contrainte réduite de la plaque :

$$\rho = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{max}} \quad (1.11)$$

En général, on pose  $\sigma_{max}$  égal à la limite d'élasticité  $f_y$ , ce qui fournit une valeur sécuritaire de  $b_e$ . Toutefois, dans certains cas, on ne peut pas atteindre cette limite d'élasticité parce que d'autres phénomènes d'instabilité se sont développés avant (par exemple pour les tôles courbes sous compression transversale). La relation de Von-Karman prend alors la forme simple suivante :

$$\rho = \frac{1}{\bar{\lambda}} \quad \text{avec} \quad \bar{\lambda} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} \quad (1.12)$$

Ce coefficient  $\rho$  n'est autre que le coefficient réducteur permettant de déterminer la perte d'efficacité de la plaque plane par suite de son voilement. Par conséquent, il permet d'en déterminer la charge de ruine. Bien que la théorie de Von-Karman ait acquis une réputation de bonne méthode à l'utilisation, elle reste une méthode strictement théorique car elle est basée sur l'hypothèse d'une plaque parfaite qui n'existe pas dans la pratique. Des écarts par rapport aux résultats expérimentaux ont en effet été constatés. La théorie de Von-Karman peut donc présenter des risques de surestimation de la charge ultime surtout pour les plaques élancées. De ce fait, plusieurs modifications (les expressions de Winter, Faulkner et Gérard, récapitulée dans Dubas et Gehri [53]) basées sur la formule 1.12 ont été données en calibrant le coefficient de réduction  $\rho$  par rapport à des résultats d'essai. Une des plus connues, qui est largement adoptée dans plusieurs normes dont l'Eurocode EN-1993-1-5 pour le cas d'une compression simple, est celle de Winter (1947) :

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{\lambda} \leq 0,673 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{0,22}{\bar{\lambda}^2} & \text{si } \bar{\lambda} > 0,673 \end{cases} \quad (1.13)$$

### 1.3 COMPORTEMENT DES PLAQUES RAIDIES

L'utilisation d'une plaque non-raïdie de grande dimension est cependant peu fréquente dans la pratique car elle est trop sensible aux phénomènes d'instabilité. Par exemple, pour une plaque métallique de 4 mètres de largeur et 20 millimètres d'épaisseur, la contrainte critique de voilement est égale à  $\sigma_{cr} = 19\text{MPa}$ , ce qui donne un coefficient de réduction

$\rho = 0,22$ , soit un taux de travail de 22%. Une plaque bien dimensionnée est celle qui peut atteindre la charge plastique ( $\rho = 1$ ), qui fait travailler la section à 100%. Cela signifie que cette plaque perd 78% de sa capacité ultime par rapport à la résistance plastique ( $f_y$ ) rien qu'à cause du problème de voilement. Pour assurer une intensité importante de chargement, il est possible de changer la nuance de l'acier pour une classe supérieure, c'est à dire d'augmenter la limite d'élasticité  $f_y$ . Pourtant, cette solution coûte très chère. Une autre solution est d'augmenter la contrainte critique de voilement jusqu'à 760 MPa afin que  $\bar{\lambda} \leq 0,673$  et  $\rho = 1$  : il n'y a pas de réduction vis-à-vis du problème de voilement. Selon l'équation 1.1, la contrainte critique de voilement d'une plaque dépend de deux paramètres importants : la largeur de chargement  $b$  et l'épaisseur de la plaque  $t$ . Si on fixe la largeur de chargement à sa valeur initiale ( $b = 4 \text{ m}$ ), la valeur minimale de l'épaisseur pour atteindre 760 MPa devrait être égale à 140 mm (7 fois plus que l'épaisseur initiale). Cette valeur conduit à une structure lourde et chère (du fait de la complexité de fabrication des tôles épaisses) qui n'est pas optimale pour des structures en acier. En revanche, si l'épaisseur initiale est inchangée, on n'a besoin que de diminuer 2,5 fois la largeur  $b$  de chargement pour arriver à une même valeur de contrainte critique de voilement. Ceci s'obtient facilement en ajoutant des raidisseurs. Ces derniers ne représentent qu'une petite fraction du poids total de la structure, mais ils contribuent substantiellement à la résistance et à la stabilité de la structure. En outre, le développement des techniques de soudure permet la fabrication aisée de plaques raidies qui peuvent ainsi d'être utilisées dans plusieurs domaines.

La première application concrète des plaques raidies dans le domaine des ouvrages d'art a été établie dans le pont-caisson du Britannia (1850) qui relie l'Angleterre à l'Irlande, bien avant que la théorie sur le comportement des plaques raidies n'ait été développée. Les panneaux raidis de cette époque sont simplement dimensionnés par la théorie élastique de la résistance des matériaux. Cependant, durant quatre années entre 1969 et 1973, plusieurs ponts caissons s'écroulent pendant leur construction (Akesson [7]). Suite à des effondrements, des enquêtes ont été menées et ont conclu que les règles pour la conception de panneaux raidis étaient insuffisantes. Dès lors, les efforts de recherche se sont orientés vers le développement d'outils théoriques pour améliorer les pratiques existantes pour le dimensionnement.

### 1.3.1 État de l'art

Les développements théoriques sur le voilement des plaques raidies s'avèrent particulièrement difficiles. Outre les difficultés rencontrées pour les plaques non-raïdiées (la présence d'imperfection inévitables dus à la fabrication, la nécessité d'une théorie non-linéaire en grande déformation, etc.), la présence des raidisseurs complexifie le comportement des plaques raidies. En effet, selon la rigidité relative des raidisseurs par rapport la plaque de fond, une plaque raidie peut voiler selon plusieurs modes. La figure 1.7 illustre ce phénomène. Si les raidisseurs ont de faibles rigidités, ils voilent avec la plaque, donnant lieu à un mode global (figure 1.7a). Si les raidisseurs sont rigides, le voilement se produit dans

un mode local des sous-panneaux (figure 1.7d). Si les raidisseurs sont minces, le voilement par torsion ou le voilement local des composants des raidisseurs peut se produire sans la participation de la plaque (figure 1.7e et 1.7f). Les modes de voilement des figures 1.7b et 1.7c sont les modes d'interaction où les raidisseurs sont rigides en flexion mais faibles en torsion.

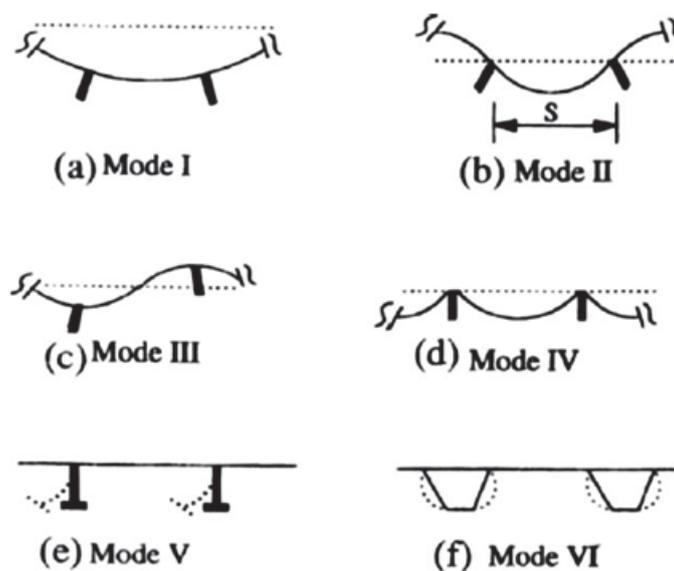


FIGURE 1.7 – Mode de voilement élastique des plaques raidies

De plus, la complexité augmente si les raidisseurs ne sont pas identiques ou inégalement espacés. Une telle configuration peut être rencontrée en cas de chargement non uniforme, où les raidisseurs sont utilisés à proximité des régions fortement chargées pour des raisons économiques. Par conséquent, les études sur le comportement des plaques raidies sont pour la plupart sous forme semi-analytique voire empirique. Un résumé très riche en terme de références (plus de 400) sur l'état de l'art des plaques raidies peut être trouvé dans Bedair [24]. Il récapitule les résultats des nombreuses études depuis les débuts des recherches jusqu'à aujourd'hui. D'après Bedair [24], les travaux sur les plaques raidies peuvent être classés en deux catégories basées essentiellement sur leurs modes de voilement mentionnés ci-dessus : soit sur un modèle de poutre-poteau (en anglais *the strut model*), soit sur un modèle de plaque orthotrope.

### 1.3.1.1 Approche poutre-poteau individuel

Dans cette approche, les plaques raidies sont traitées comme une série de poutres individuelles constituées par le raidisseur et une largeur efficace la plaque associée comme sur la figure 1.8. Cette approche a été utilisée principalement pour les plaques courtes possédant un grand nombre de raidisseurs ou pour les plaques ayant des raidisseurs de grande rigidité. Une telle configuration est fréquemment rencontrée dans la construction

navale car les raidisseurs sont dimensionnés pour résister aussi à la pression hors-plan de sorte que le mode de voilement local du sous-panneau soit le premier. Pour ce type de plaque, l'effet de membrane stabilisant dans le sens transversal est négligeable. En conséquence, tous les raidisseurs possèdent une déformée identique à l'état ultime sauf une petite partie à proximité des bords non chargés où l'effet stabilisant de la membrane n'est pas négligeable. La problématique se réduit donc à la détermination de la charge ultime d'une partie représentative, qui est le modèle de poutre-poteau constitué par le raidisseur et une partie effective de la plaque adjointe.

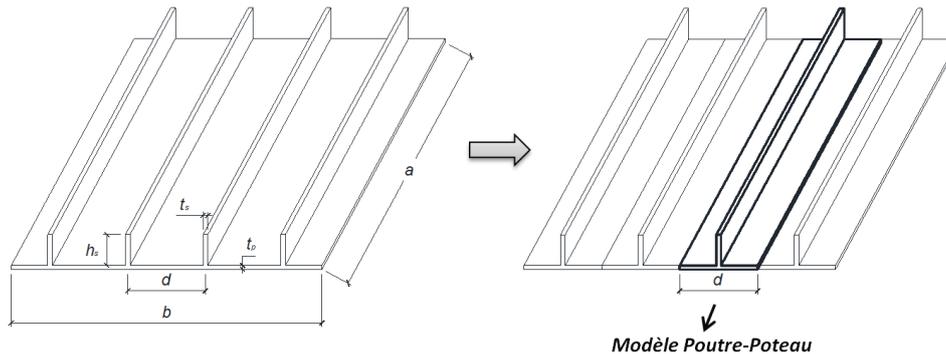


FIGURE 1.8 – Approche par modèle de type poutre-poteau

Cette approche est fréquemment utilisée dans la pratique (Dowling [52], Dwight et Little [55], Murray [103]) du fait de sa simplicité et de la facilité de mise en œuvre. Le fait de ne considérer qu'une partie représentative de la plaque permet de ramener le problème de plaque raidie à un problème de flambement d'un poteau qui est très bien connu. Cependant, la méthode est critiquée car elle est basée sur l'hypothèse que le voilement local se produit toujours en premier. Or pour les panneaux raidis longs, le voilement local n'est pas forcément le premier mode critique. De plus, en traitant la plaque comme en un ensemble de poutres-poteaux individuels, les conditions aux limites de la structure n'influencent pas sur le comportement du modèle. L'effet membranaire stabilisant est supprimé dans cette approche qui rend donc le résultat très conservatif (c'est-à-dire la charge ultime est sous-estimée).

### 1.3.1.2 Approche plaque orthotrope équivalente

Dans cette approche, la plaque raidie est traitée comme une plaque orthotrope équivalente ayant une épaisseur constante (figure 1.9). Cette épaisseur, normalement plus grande que l'épaisseur réelle, est obtenue en "tartinant" les raidisseurs. Plusieurs techniques de tartinage sont proposées, soit par une section transversale équivalente (méthode la plus simple) ou pour un moment d'inertie de flexion équivalent (la méthode utilisée le plus couramment). Contrairement à l'approche précédente, cette méthode est plutôt valable si le mode de voilement global domine les autres modes, ce qui est très commun dans les panneaux raidis légers ou les plaques longues.

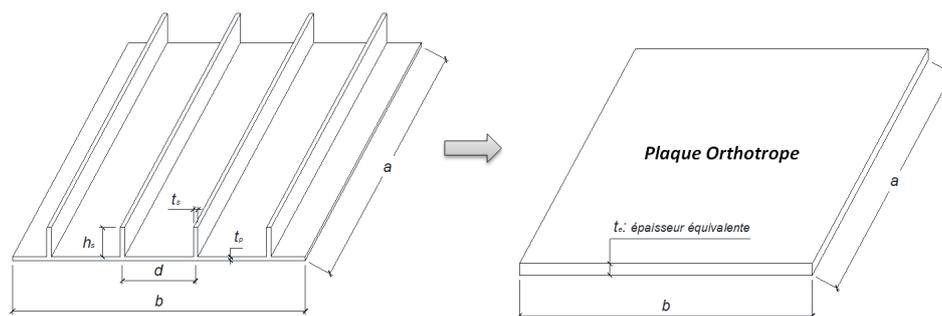


FIGURE 1.9 – Approche par modèle de type plaque

Il est noté que l'avantage majeur de cette méthode est qu'elle prend en compte l'effet stabilisant de membrane qui est ignoré par le modèle poutre précédent. En revanche, cette approche ne permet pas de distinguer le mode de ruine, c'est-à-dire de savoir si la ruine a lieu au niveau de la plaque ou du raidisseur. Le fait d'assimiler les modes de ruine de plaque et de raidisseur peut aboutir à des résultats très favorables. Un autre inconvénient de cette méthode se présente si les raidisseurs ne sont pas identiques car elle conduit à la non-uniformité de l'épaisseur équivalente. Des applications de cette approche peuvent être trouvées dans Maquoi et Massonnet [94] et Jetteur [76].

En parallèle aux deux approches précédentes et suite aux développements des outils informatiques, de nombreux auteurs ont utilisé une voie numérique pour étudier le comportement des plaques raidies. Un des avantages de cette méthode numérique est qu'elle permet d'étudier le comportement de structures à "l'échelle réelle" avec plusieurs possibilités de conditions aux limites qui ne sont pas forcément réalisables au laboratoire. Les différents paramètres intervenants dans le problème peuvent aussi être considérés en même temps dans la modélisation. Bien que les méthodes numériques aient des capacités de prédiction pour le comportement de structures complexes, leur applications se restreignent plutôt au domaine de la recherche (notamment pour vérifier l'exactitude des normes proposées).

### 1.3.2 Aspects normatifs pour les plaques raidies

Plusieurs études (Bonello *et al.* [29], Grondin *et al.* [68], Balaz et Murray [17], Sheikh *et al.* [136]) ont été menées afin de comparer les différentes normes actuelles pour les plaques raidies, à savoir : la norme norvégienne pour les navires DNV [48], la norme pour les structures offshore aux Etats-Unis API [14], la norme américaine pour les navires ABS [6], la norme anglaise pour la construction métallique BS5400 [33] et la convention européenne de la construction métallique ECCS (Dubas et Gehri [53]).

Il est intéressant de noter que la plupart des normes ont opté pour une approche de type poutre-poteau du fait de sa simplicité. La résistance ultime est déduite en se basant sur le principe de Perry-Robertson, qui consiste à faire tendre vers la limite d'élasticité la contrainte maximale obtenue pour une colonne comprimée en prenant en compte un

défaut géométrique. Les différentes normes proposent des variations sur la formule de Perry-Robertson, notamment de l'expression de l'imperfection généralisée (Guedes Soares et Gordo [70]). En général, les prédictions de ces normes ont tendance à être proches les unes des autres et présentent un bon accord avec les résultats d'essais. La figure 1.10 est un exemple de comparaison des résultats des normes actuelles dans le domaine de la construction navale avec 359 résultats expérimentaux (Frieze [59]), y compris les essais de compression sur une plaque de fond d'une poutre-caisson utilisée en ouvrages d'art.

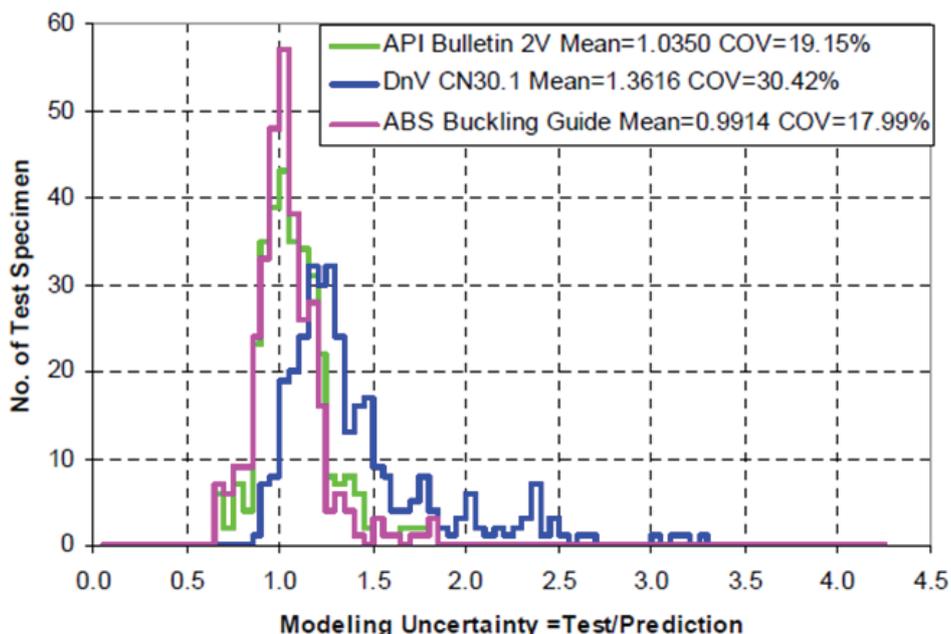


FIGURE 1.10 – Comparaison des résultats des différentes normes aux résultats expérimentaux (tiré dans le guide de ABS [6])

Peu de normes (ECCS uniquement) sont basées sur la théorie de plaque orthotrope. La raison est que cette approche peut donner des valeurs qui surestiment la capacité réelle de la plaque. Balaz et Murray [17] ont constaté en effet jusqu'à 35% d'écart.

Récemment, il a été constaté que le comportement des plaques raidies peut présenter à la fois un comportement de type colonne (approche par modèle poutre-poteau) et un comportement de type plaque (approche par modèle de plaque orthotrope équivalente). L'évaluation par un seul comportement devient donc soit trop sévère (sous-estimation de la charge ultime) ou soit trop favorable (surestimation) pour certaines configurations (les détails seront donnés dans la suite au chapitre 2). C'est pourquoi l'EN 1993-1-5 propose une démarche permettant d'unifier les deux approches afin d'obtenir une procédure unique et universelle pour tout type de plaque raidie. Cette méthodologie est détaillée dans la section suivante.

## 1.4 DIMENSIONNEMENT D'UNE PLAQUE RAIDIE SELON L'EN 1993-1-5

La démarche proposée par l'EN 1993-1-5 permet de calculer la résistance des sections raidies susceptibles de voiler. Deux méthodes de dimensionnement sont proposées dans l'Eurocode : la méthode des sections efficaces (sections 4 à 7 dans l'EN 1993-1-5) et la méthode de la contrainte réduite (section 10 dans l'EN 1993-1-5). Cette dernière méthode n'est pas abordée dans ce travail car elle est conservatrice (Simon-Talero et Caballero [137] et Johansson *et al.* [78]) : elle limite la contrainte appliquée à la contrainte critique de voilement.

Cette section décrit donc la méthode des sections efficaces. Le concept de la méthode est basé essentiellement sur le travail de Von-Karman. À l'état de ruine de la plaque, la distribution des contraintes normales est non-uniforme à travers la plaque, avec des contraintes aux bords plus élevée qu'au centre. Les bords sont plus raides et drainent les contraintes normales. En poussant le raisonnement à l'extrême, on peut imaginer que la rigidité de la partie voilée est nulle. Toutes les contraintes normales sont alors reprises par les bords : la partie centrale est dite inefficace tandis que les bords sont efficaces (c.f la figure 1.11). Les parties efficaces sont calibrées de telle manière que le produit de la limite d'élasticité par leur aire soit égal à l'effort ultime dans la plaque.

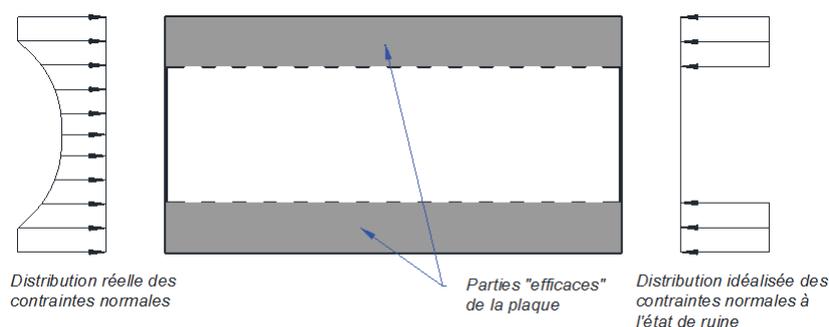


FIGURE 1.11 – Partie efficace de la plaque

Ce principe est étendu de sorte que, pour toute configuration de section, raidie ou non, sous une distribution quelconque de contraintes normales, la section efficace est obtenue en supprimant les parties de la zone comprimée affectées par le voilement. Les propriétés mécaniques de la section efficace permettent ensuite de calculer la résistance caractéristique de la structure.

### 1.4.1 Détermination de l'aire efficace résultant du voilement local

Selon la méthode proposée par l'EN 1993-1-5, la première étape consiste à déterminer l'aire efficace résultant d'un voilement local des différents panneaux secondaires (sous-panneaux) et des raidisseurs. En règle générale, les panneaux de classe 1, 2 ou 3 sont considérés comme entièrement efficaces : la section efficace est égale à la section brute. Les

panneaux de classe 4 sont sensibles au voilement local et une réduction de leur section doit effectuée.

La classification de la section est une notion adoptée dans l'EN 1993-1-1 [2] selon le risque d'apparition prématurée ou tardive du phénomène de voilement dans les parois comprimées des sections. Elle dépend de l'élancement de chaque élément (défini par un rapport largeur/épaisseur) et de la distribution des contraintes de compression (uniforme ou linéaire). Elle peut être introduite à travers la courbe de voilement d'Euler pour une plaque parfaite (c.f la figure 1.12) où la réduction de la contrainte ultime  $\rho$  est présentée en fonction de l'élancement réduit  $\bar{\lambda}_p$  :  $\rho = \frac{1}{\bar{\lambda}_p^2}$ .

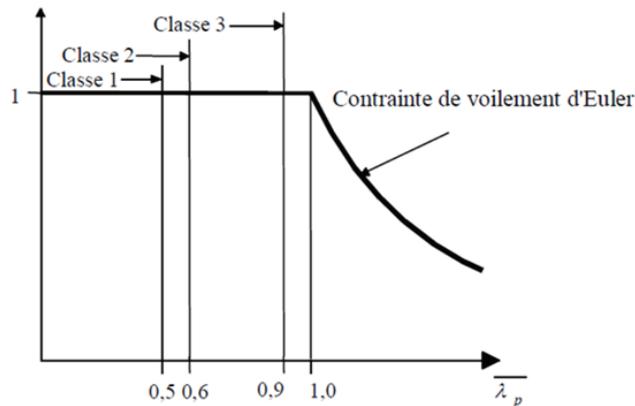


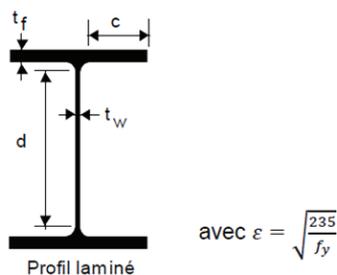
FIGURE 1.12 – Représentation adimensionnelle de la contrainte de voilement élasto-plastique d'une paroi parfaitement plane

La valeur limite de l'élancement réduit est fixée afin de retarder l'apparition du voilement local jusqu'à ce qu'ait été atteinte la nécessaire redistribution des contraintes dans la section qui peut être une plastification au niveau de la fibre extrême (classe 3) ou une distribution plastique sur la section entière. L'élancement réduit pour une nuance d'acier quelconque  $\bar{\lambda}$  peut s'exprimer sous la forme :

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \frac{1}{28,4\varepsilon\sqrt{k_\sigma}} \frac{\bar{b}}{t} \quad (1.14)$$

avec  $\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$ . En introduisant dans l'équation 1.14 les valeurs appropriées du coefficient de voilement  $k_\sigma$  et la valeur de  $\bar{\lambda}$  correspondant à chaque classe, les rapports largeur/hauteur limites peuvent être déduits. La figure 1.13 présente un extrait des valeurs limites des sections sous une compression uniforme. Il faut noter que la classification des sections en console ou interne est différente à cause de la différence du coefficient de voilement  $k_\sigma$ .

La section transversale efficace est prise égale à la section brute à laquelle on a soustrait la partie inefficace : des trous sont créés en retirant de la matière. La largeur efficace des éléments sous compression uniforme peut être évaluée au moyen d'un coefficient de



| Élément       | Classe 1                   | Classe 2                   | Classe 3                    |
|---------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| Semelle       | $c / t_f = 9 \varepsilon$  | $c / t_f = 10 \varepsilon$ | $c / t_f = 14 \varepsilon$  |
| Ame comprimée | $d / t_w = 33 \varepsilon$ | $d / t_w = 38 \varepsilon$ | $d / t_w = 42 \varepsilon$  |
| Ame fléchie   | $d / t_w = 72 \varepsilon$ | $d / t_w = 83 \varepsilon$ | $d / t_w = 124 \varepsilon$ |

FIGURE 1.13 – Classification de la section selon le rapport l'élanement

réduction  $\rho$  de la façon suivante :

$$\rho = \begin{cases} \frac{\bar{\lambda} - 0,22}{\bar{\lambda}^2} \leq 1 & \text{parois en internes} \\ \frac{\bar{\lambda} - 0,188}{\bar{\lambda}^2} \leq 1 & \text{parois en console} \end{cases} \quad (1.15)$$

L'application du coefficient de réduction  $\rho$  à une paroi interne ou en console est indiquée au tableau 1.1.

TABLE 1.1 – Largeur effective des parois comprimées

|                    | Répartition des contraintes | Largeur effective  |
|--------------------|-----------------------------|--|
| Parois en internes |                             | $b_{eff} = \rho \cdot \bar{b}$<br>$b_{e1} = 0,5 \cdot b_{eff}$<br>$b_{e2} = 0,5 \cdot b_{eff}$ |
| Parois en console  |                             | $b_{eff} = \rho b_{eff}$   |

Pour une plaque non raidie, la section efficace calculée précédemment est directement celle qui doit être utilisée dans les vérifications de la résistance de la section. À l'inverse, lorsqu'il s'agit d'une paroi raidie, il faut tenir compte aussi du voilement global. Pour cela, la section efficace est déterminée selon la figure 1.14 avec les notations suivantes (utilisées dans l'EN 1993-1-5) :

- $A_c$  : Aire brute de la partie comprimée de la paroi, y compris les raidisseurs, obtenue en retranchant à chaque extrémité une partie égale à la moitié de la distance au bord libre.
- $A_{c,eff,loc}$  : Aire efficace pour le voilement local de la partie de plaque définie par  $A_c$ .
- $b_{edge,eff}$  : Largeur de la partie efficace (au sens du voilement local) rattachée à un bord de la plaque.

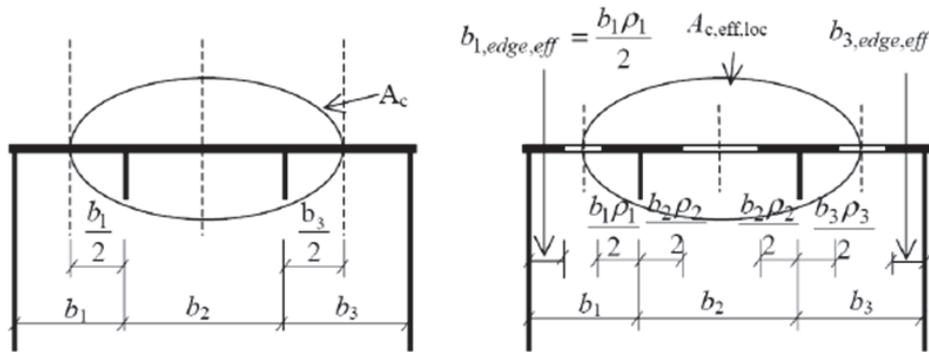


FIGURE 1.14 – Aire efficace résultant du voilement local

La section efficace d'une plaque raidie en compression uniforme se compose donc de deux parties : une partie centrale  $A_{c,eff,loc}$  se composant des aires des sections efficaces de tous les raidisseurs et des panneaux secondaires se trouvant dans la zone comprimée et une partie au bord de largeur  $b_{edge,eff}$ .

## 1.4.2 Détermination de l'aire efficace résultant du voilement global

Pour définir la sensibilité aux effets du voilement global, l'EN 1993-1-5 impose de traiter indépendamment les deux types de comportement : colonne et plaque. Le premier est un comportement sans aucune résistance postcritique, tandis que le second présente une réserve postcritique. Enfin, il indique comment considérer l'interaction de ces deux types de comportement. Ces aspects sont traités ci-après.

### 1.4.2.1 Comportement de type colonne

Le comportement de type colonne est obtenu en supposant simplement que les bords longitudinaux (bords non-chargés) ne sont pas appuyés. La plaque n'est donc appuyée que le long des deux bords chargés. La contrainte critique de voilement n'est alors rien d'autre que la contrainte de flambement d'une colonne. Dans la pratique, les raidisseurs sont identiques, la détermination de la contrainte critique peut être effectuée sur une partie représentative se composant du raidisseur seul et d'une largeur collaborante de la plaque la plus proche du bord le plus comprimé. La colonne obtenue est supposée simplement appuyée sur ses bords chargés : la longueur de flambement est donc égale à la longueur de

plaque  $a$ . La contrainte critique est alors donnée par la relation suivante :

$$\sigma_{cr,c} = \frac{\pi^2 EI_{sl,1}}{A_{sl,1} a^2} \quad (1.16)$$

où  $I_{sl,1}$  et  $A_{sl,1}$  sont respectivement l'inertie et l'aire de la section transversale brute du raidisseur et des parties adjacentes de la plaque (c.f la figure 1.15).

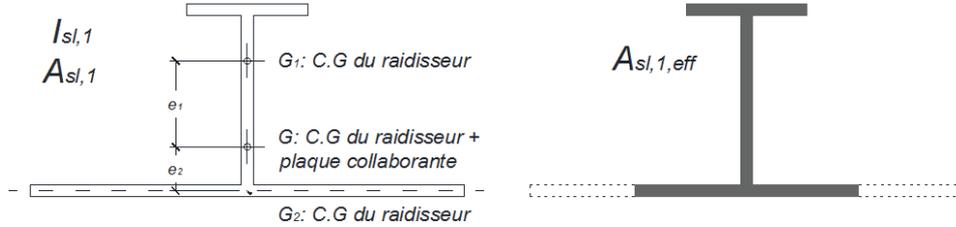


FIGURE 1.15 – Caractéristique géométrie du modèle de type Colonne

L'élanement réduit de la plaque vis-à-vis du flambement du poteau est ensuite défini comme suit :

$$\bar{\lambda}_c = \sqrt{\frac{\beta_{A,c} f_y}{\sigma_{cr,c}}} \quad \text{où} \quad \beta_{A,c} = \frac{A_{sl,1,eff}}{A_{sl,1}} \quad (1.17)$$

avec  $A_{sl,1}$  l'aire brute de la section du poteau définie auparavant et  $A_{sl,1,eff}$  l'aire efficace (vis-à-vis du voilement local) de la même section. Le coefficient de réduction  $\beta_{A,c}$  permet de tenir compte du voilement local éventuel des panneaux secondaires.

Le coefficient de réduction  $\chi_c$  propre à ce mode d'instabilité se détermine à l'aide des courbes de flambement, définie dans la clause 6.3.1.2 (1) de l'EN 1993-1-1 [2] et reproduite ci-dessous :

$$\chi_c = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}_c^2}} \quad \text{et} \quad \phi = 0,5 \left[ 1 + \alpha_e (\bar{\lambda}_c - 0,2) + \bar{\lambda}_c^2 \right] \quad (1.18)$$

Le facteur d'imperfection équivalente  $\alpha_e$  intègre d'une part le facteur d'imperfection  $\alpha$  du poteau (où  $\alpha = 0,34$  pour une section fermée et  $\alpha = 0,49$  pour les raidisseurs à section ouverte) et d'autre part un terme de majoration destiné à prendre en compte l'excentricité du centre de gravité du poteau par rapport au plan moyen de la plaque principale. Le facteur d'imperfection  $\alpha_e$  est finalement donné par la relation suivante :

$$\alpha_e = \alpha + \frac{0,09}{i} \quad (1.19)$$

où  $i = \sqrt{\frac{I_{sl,1}}{A_{sl,1}}}$  est le rayon de giration et  $e = \max(e_1; e_2)$  dont  $e_1$  et  $e_2$  sont respectivement les distances de l'axe neutre du raidisseur seul et du plan moyen de la plaque mesurées par rapport à l'axe neutre de la section efficace constituée du raidisseur et des parties adjacentes de plaque (figure 1.15).

### 1.4.2.2 Comportement de type plaque

Pour évaluer l'efficacité de la tôle raidie dans le cas d'un comportement de type plaque, l'Eurocode propose de remplacer la tôle raidie réelle par une plaque dite "*plaque orthotrope équivalente*". Cette plaque équivalente est obtenue en "tartinant" les raidisseurs le long de la largeur de plaque. On évalue ensuite la contrainte critique de voilement élastique de cette plaque orthotrope équivalente :

$$\sigma_{cr,p} = k_{\sigma,p} \sigma_E \quad (1.20)$$

où  $\sigma_E$  est la contrainte de référence d'Euler de la tôle et  $k_{\sigma,p}$  est le coefficient de voilement global de la plaque orthotrope équivalente avec les raidisseurs tartinés sur la plaque. La difficulté réside dans la détermination de ce dernier coefficient. Il peut être obtenu soit à partir d'abaques appropriées (i.e les abaques de Klöppel (Galéa [61])), soit à partir de simulations numériques ou de formules approchées. L'annexe A de l'EN 1993-1-5 donne des formules analytiques dans le cas d'une plaque ayant plus de trois raidisseurs longitudinaux également espacés (cadre visé de ce travail) et soumise à une compression uniforme. Elles s'expriment par :

$$k_{\sigma,p} = \begin{cases} \frac{(1 + \alpha^2)^2 + \gamma - 1}{\alpha^2 (1 + \delta)} & \text{si } \alpha \leq \sqrt[4]{\gamma} \\ \frac{2 (1 + \sqrt{\gamma})}{(1 + \delta)} & \text{si } \alpha \geq \sqrt[4]{\gamma} \end{cases} \quad (1.21)$$

Le coefficient  $k_{\sigma,p}$  dépend donc :

- du rapport d'aspect  $\alpha = \frac{a}{b}$  de la tôle ;
- du rapport entre la raideur flexionnelle de l'ensemble de la plaque raidie  $I_{sl}$  et celle de la tôle seule :  $\gamma = \frac{I_{sl}}{I_p}$  ;
- et du rapport entre l'aire brute des raidisseurs et celle de la tôle seule :  $\delta = \frac{\sum A_{sl}}{A_p}$ .

Connaissant la contrainte critique de voilement élastique de la plaque orthotrope équivalente, il est possible de déterminer l'élancement réduit  $\bar{\lambda}_p$  :

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{\beta_{A,c} f_y}{\sigma_{cr,p}}} \quad (1.22)$$

où le coefficient réducteur  $\beta_{A,c}$  est défini à nouveau par  $\beta_{A,c} = \frac{A_{c,loc,eff}}{A_c}$ . Le coefficient de réduction  $\rho$  associé à ce mode de voilement global est calculé avec la fonction de réduction classique d'une plaque donnée en équation 1.13.

### 1.4.2.3 Interpolation

On peut obtenir maintenant les deux facteurs de réductions :  $\chi_c$  pour un comportement de type colonne et  $\rho$  pour un comportement de type plaque. Le facteur de réduction global  $\rho_c$  est obtenu par interpolation entre les deux facteurs  $\chi_c$  et  $\rho$  :

$$\rho_c = \chi_c + (\rho - \chi_c) (2 - \xi) \xi \quad (1.23)$$

où  $\xi$  est une mesure de la distance entre les contraintes critiques (de type colonne par l'expression 1.16 et de plaque par l'expression 1.20 et 1.21) ci-dessus :

$$\xi = \frac{\sigma_{cr,p}}{\sigma_{cr,c}} - 1. \quad (1.24)$$

Théoriquement, la contrainte critique de voilement de type plaque  $\sigma_{cr,p}$  est toujours supérieure à celle de type colonne  $\sigma_{cr,c}$  car l'effet favorable du maintien par les bords longitudinaux est négligé dans cette dernière. De ce fait, le coefficient  $\xi$  est toujours positif. Dans la pratique, il peut arriver que  $\sigma_{cr,p}$  soit légèrement inférieur à  $\sigma_{cr,c}$  du fait du calcul à partir de l'aire d'un seul raidisseur.

Pour une grande valeur de  $\xi$  ( $\xi \geq 1$ ), c'est-à-dire pour une contrainte critique de plaque deux fois plus grande par rapport à celle de la colonne, l'influence du comportement de type poteau peut être négligée. Le coefficient d'interpolation  $\xi$  est donc compris entre 0 et 1 :  $0 \leq \xi \leq 1$ . La courbe résultant de cette règle d'interpolation est représentée sur la figure 1.16.

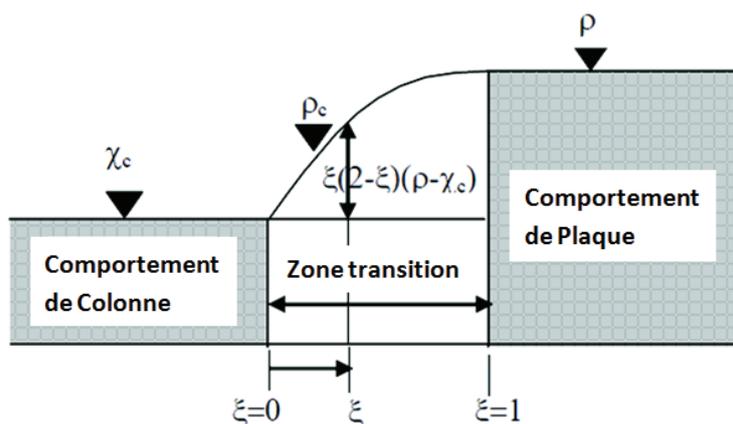


FIGURE 1.16 – Interpolation des deux comportements de type Colonne et Plaque

### 1.4.3 Section efficace vis-à-vis du voilement

Une fois obtenu le coefficient de réduction  $\rho_c$ , l'aire efficace vis-à-vis du voilement global s'obtient par la relation suivante :

$$A_{c,eff} = \rho_c A_{c,eff,loc} + \sum b_{edge,eff} t \quad (1.25)$$

On remarque que le coefficient de réduction  $\rho_c$  prenant en compte l'effet du voilement global ne s'applique qu'à l'aire  $A_{c,eff,loc}$  et pas à la partie efficace rattachée au bord ; cela signifie que la résistance des parties comprimées de la plaque rattachées à un bord n'est réduite que par le voilement local et n'est pas affectée par le voilement global.

Il est à noter que si le panneau est une tôle de fond, le phénomène de trainage au cisaillement doit être pris en compte également. Ce phénomène traduit le fait que dans

la semelle d'une section en flexion, plus une fibre longitudinale est éloignée de l'âme, plus elle présente un retard de déformation dans le plan de la semelle, par rapport à la fibre longitudinale située au droit de l'âme. Il en découle une distribution transversale non uniforme des contraintes normales dans la semelle. Plus la semelle est large et plus cet effet est important. En pratique, on calcule la contrainte normale dans la semelle au droit de l'âme en supposant que cette contrainte est uniforme sur une largeur réduite de semelle. Cette largeur efficace est obtenue à travers un coefficient de réduction  $\beta^k$ , de façon à égaliser l'effort repris par la semelle efficace sous contrainte uniforme et par la semelle brute sous la véritable distribution de contrainte. La détermination de ce coefficient est effectuée selon la clause 3.3 de l'EN 1993-1-5 (mais n'est pas l'objectif de ce travail). La résistance ultime de la plaque raidie est enfin évaluée par la relation suivante :

$$N_{ult} = A_{c,eff} \frac{f_y}{\gamma_{M1}} \quad (1.26)$$

où  $\gamma_{M1} = 1,1$  est le coefficient de sécurité (voir la définition à la section 6 du chapitre 3). La démarche de dimensionnement des plaques raidies selon l'EN 1993-1-5 peut être récapitulée par le logigramme à la figure 1.17. Un exemple d'application numérique de cette démarche est donné en annexe 1 afin de faciliter la compréhension d'utilisation de la méthode.

## 1.5 CHOIX ACTUEL DES RAIDISSEURS LONGITUDINAUX

Il est déduit que les raidisseurs longitudinaux jouent un rôle extrêmement important dans la résistance des tôles de fond de caisson vis-à-vis des problèmes de voilement. Les raidisseurs peuvent être classés en deux catégories selon leur géométrie (c.f figures 1.18a et 1.18b). Dans le passé, les raidisseurs longitudinaux étaient généralement des sections ouvertes, dont l'inertie de torsion est très faible. Une étude récente (Chen et Yang [38]) a montré que les raidisseurs de section fermée possèdent plus d'avantages d'un point de vue structurel et économique.

La pratique courante pour le dimensionnement des fonds de caisson à raidisseurs longitudinaux est encore très différente selon les différents pays européens et elle dépend des traditions et techniques de construction locales (selon COMBRI [42]). Il est difficile de donner des recommandations générales concernant le nombre et les dimensions des raidisseurs, car ils dépendent de nombreux facteurs, par exemple de la distance entre les diaphragmes.

En France, pour les grands ponts construits depuis 1995, les raidisseurs longitudinaux de la semelle inférieure des poutres-caisson sont soit des raidisseurs plats, soit des augets (section trapézoïdale), soit des raidisseurs en T. Ces raidisseurs sont continus sur toute la longueur du pont.

En Allemagne, les normes nationales ne donnent aucune recommandation directe concernant le dimensionnement et les détails constructifs des plaques inférieures à rai-

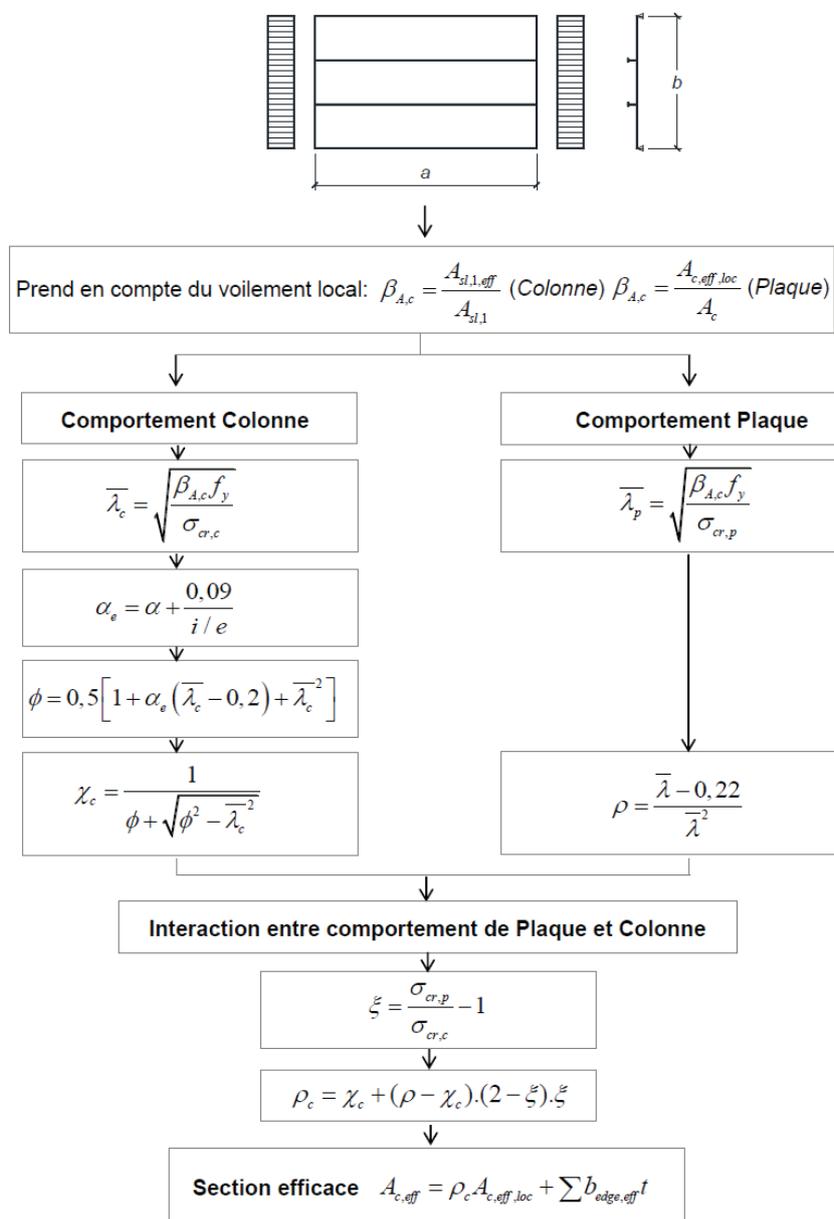
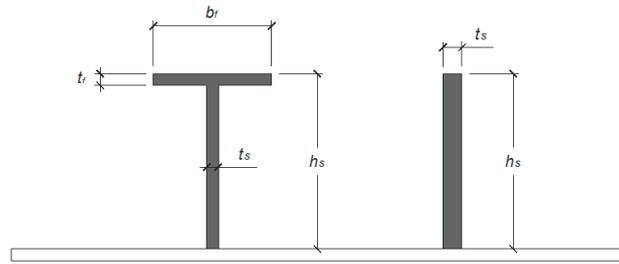
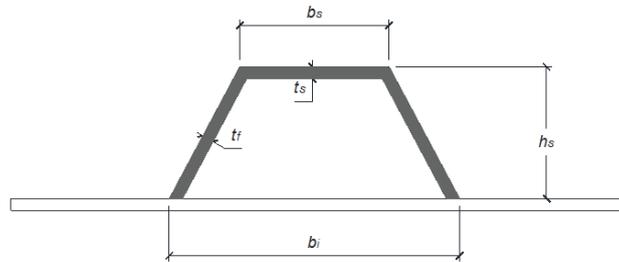


FIGURE 1.17 – Démarche du dimensionnement d’une plaque raidie selon l’EN 1993-1-5



(a) Section ouverte : Raidisseurs en T ou en simple plat



(b) Section fermée : Auget

(c) Types des raidisseurs longitudinaux

disseurs longitudinaux. Le dimensionnement de ces plaques est réglementé uniquement en ce qui concerne les exigences statiques de la plaque, comme sa résistance au flambement. Aucune recommandation spécifique n'est donnée en ce qui concerne les dimensions et le nombre des raidisseurs. La pratique courante en Allemagne consiste à utiliser des raidisseurs trapézoïdaux possédant des sections de classe 3. Jusqu'à présent, l'utilisation de raidisseurs de dimensions supérieures à section transversale de classe 4 est très peu répandue en Allemagne, et limitée aux ponts de très grandes dimensions. Des raidisseurs plats à sections transversales de classe 1 sont également utilisés, mais principalement pour des ponts ferroviaires.

Plus la raideur flexionnelle sera importante, plus la charge critique sera élevée et moins vite le raidisseur sera emporté par la tôle. Pour assurer au raidisseur une efficacité maximum, on conçoit aisément qu'il doit créer des lignes nodales immobiles et, en conséquence, n'autorise que le voilement des sous-panneaux (entre les deux raidisseurs). Ceci diminue la largeur de voilement de la plaque et rend donc plus efficace la section. Cela permet de diminuer l'épaisseur des tôles de fond de caisson et de rendre plus légère la structure. Pourtant, aucune des pratiques Européennes ne donne des indications sur la valeur optimale de la rigidité du raidisseur car cette dernière dépend de plusieurs paramètres, tels que le coefficient d'aspect  $\alpha$ , le rapport de la section des raidisseurs et de la plaque de fond ( $\delta = \frac{A_s}{A}$ ), etc. Dans une étude récemment publiée par Galéa et Martin [64], une valeur de la rigidité flexionnelle relative  $\gamma_L = \frac{EI_s}{bD}$  d'un raidisseur égale à 25 est suffisante pour que le raidisseur soit considéré comme rigide. Évidemment, cette valeur est moins représentative car elle est influencée par plusieurs paramètres. Une expression plus élaborée peut être trouvée dans Choi *et al.* [40] où le moment d'inertie minimal requis

doit être d'au moins :

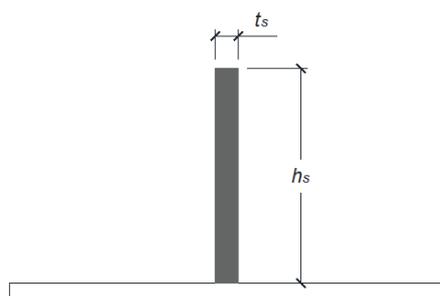
$$I_s = 0,3 \left(\frac{a}{d}\right)^2 \sqrt{nt_p^3 d} \quad (1.27)$$

où  $a$  est la longueur de la plaque,  $d$  est la largeur du souspanneau,  $n$  est le nombre de raidisseurs,  $t_p$  est l'épaisseur de la tôle de fond.

L'Eurocode ne donne aucune information sur l'optimisation du raidisseur. De plus, il n'exige pas de vérification supplémentaire pour les raidisseurs parce que leur résistance sous des contraintes directes est incluse dans la démarche de dimensionnement pour les plaques raidies (i.e, calcul du comportement de type de colonne selon l'EN 1993-1-5). Cependant, des exigences supplémentaires relatives au flambement par torsion peuvent être nécessaires. À moins d'une justification plus élaborée vis-à-vis du flambement par torsion des raidisseurs à section transversale ouverte, il convient de satisfaire au critère suivant :

$$\frac{I_T}{I_p} \geq 5,3 \frac{f_y}{E} \quad (1.28)$$

où  $I_p$  est l'inertie polaire du raidisseur seul par rapport au bord fixé à la plaque et  $I_T$  est l'inertie torsion de St-Venant du raidisseur seul. Cette condition, dans le cas simple d'un raidisseur en plat, est équivalente à limiter le rapport de la hauteur sur l'épaisseur du raidisseur (c.f la figure 1.18).



$$I_p = \frac{h_s^3 t_s}{3} + \frac{t_s^3 h_s}{12} \approx \frac{h_s^3 t_s}{3}$$

$$I_T = \frac{h_s t_s^3}{3}$$

$$\frac{I_T}{I_p} = \left(\frac{t_s}{h_s}\right)^2 \geq \frac{5,3 f_y}{E}$$

$$\frac{h_s}{t_s} \leq \sqrt{\frac{E}{5,3 f_y}} = \begin{cases} 13,0 & (S235) \\ 10,5 & (S355) \end{cases}$$

FIGURE 1.18 – Prévention du flambement par torsion pour raidisseur de type simple plat

## 1.6 CONCLUSION

On a présenté un état de l'art sur le voilement des plaques raidies dans ce chapitre. Il s'agit d'un problème complexe où plusieurs paramètres interviennent. De façon générale, les plaques raidies possèdent à la fois un comportement de type flambement de colonne et un comportement de type voilement de plaque (différenciés par le comportement post-critique) variant selon la rigidité flexionnelle du raidisseur et le rapport d'aspect de la plaque.

Les modèles pour la détermination de la charge ultime d'une plaque raidie basés sur l'un des deux comportements extrêmes présentent des inconvénients : surestimation ou sousévaluation de la résistance ultime réelle de la plaque. C'est pourquoi l'Eurocode EN

1993-1-5 propose une démarche permettant d'unifier les deux comportements. Le comportement réel de la plaque est interpolé entre ces deux cas extrêmes : colonne ou plaque orthotrope équivalente en fonction du rapport des contraintes critiques des deux types de comportement.

La discussion et l'évaluation par éléments finis de cette démarche est l'objectif du prochain chapitre.

# ÉVALUATION DE LA DÉMARCHE DE L'EUROCODE PAR ÉLÉMENTS FINIS

# 2

## SOMMAIRE

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 2.1   | MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS . . . . .                          | 33 |
| 2.1.1 | Logiciel . . . . .   | 33 |
| 2.1.2 | Choix du type d'élément . . . . .                                  | 33 |
| 2.1.3 | Matériau . . . . .   | 34 |
| 2.1.4 | Conditions aux limites . . . . .                                   | 36 |
| 2.1.5 | Chargement . . . . .   | 37 |
| 2.1.6 | Imperfections . . . . .  | 38 |
| 2.1.7 | Algorithmes de résolution . . . . .                                | 42 |
| 2.2   | ÉVALUATION DE LA DÉMARCHE DE L'EUROCODE . . . . .                  | 45 |
| 2.2.1 | Discussion du comportement critique de voilement . . . . .         | 46 |
| 2.2.2 | Discussion du comportement ultime . . . . .                        | 49 |
| 2.2.3 | Influence de la forme d'interpolation . . . . .                    | 59 |
| 2.2.4 | Conclusion . . . . .   | 59 |
| 2.3   | RECOMMANDATIONS POUR UNE AMÉLIORATION DE LA DÉMARCHE DE L'EUROCODE | 60 |
| 2.3.1 | Contrainte critique de voilement . . . . .                         | 60 |
| 2.3.2 | Formule d'interpolation . . . . .                                  | 63 |
| 2.3.3 | Raidisseur de faible rigidité . . . . .                            | 68 |
| 2.4   | CONCLUSION . . . . .   | 70 |

COMME on l'a expliqué dans l'introduction, la méthodologie adoptée dans le présent travail sur le voilement des tôles courbes est construite par analogie avec celle développée pour le voilement des plaques dans les Eurocodes (EN 1993-1-5 en particulier). L'évaluation de cette démarche par comparaison avec des calculs par éléments finis est l'objectif principal du présent chapitre.

Pour s'assurer de la pertinence du modèle de calcul par éléments finis (E.F.) retenu, les différentes étapes de la construction de la modélisation sont d'abord détaillées. Ensuite, une série de simulations numériques sur la configuration de plaque développée dans l'annexe 1 a été entreprise. Différents paramètres de la plaque ont été particulièrement étudiés, d'une part pour comprendre le comportement de la plaque raidie via la simulation, et d'autre part, pour évaluer la démarche de l'Eurocode. Certains inconvénients de la démarche de l'Eurocode actuelle ont été identifiés. En attendant des modifications lors de la prochaine version de l'Eurocode (prévue en 2015), des recommandations d'amélioration de la méthode sont proposées à la fin du chapitre afin de faciliter la mise en œuvre de la vérification et de servir de base pour la prochaine étude des tôles courbes raidies (c.f chapitre 4).

## 2.1 MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS

Parmi les méthodes numériques utilisables en calcul de structures, la méthode de calcul par E.F. est largement utilisée pour l'analyse des structures métalliques. L'expérience actuelle de ce type de calcul permet d'affirmer que cette méthode se révèle particulièrement bien adaptée pour l'étude des phénomènes de voilement des structures en plaques comme évoqué dans Davaine [46]. Le développement de la puissance de calcul des nouveaux ordinateurs et des nouveaux logiciels de calcul par E.F. permet l'utilisation de cette méthode relativement simplement.

### 2.1.1 Logiciel

Le logiciel choisi est la version 11 du logiciel ANSYS [13] commercialisé par ANSYS, Inc. Il est l'un des logiciels les plus utilisés et les plus connus au monde pour ses différentes fonctionnalités. Avec un large choix de types d'éléments, de modèles de matériau, ce logiciel permet de couvrir un éventail conséquent de problèmes d'ingénierie actuels, notamment pour l'analyse non-linéaire des structures.

### 2.1.2 Choix du type d'élément

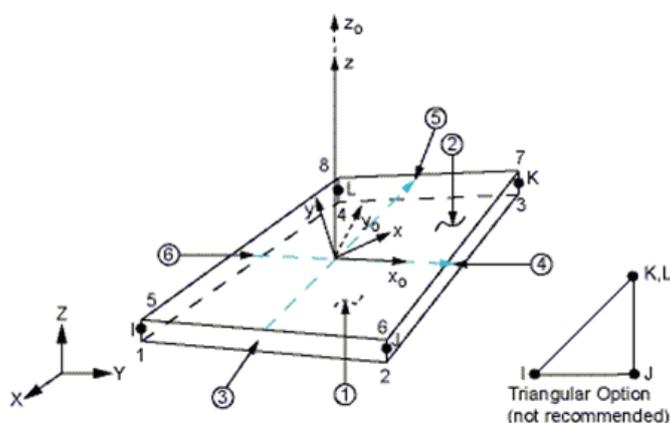


FIGURE 2.1 – Élément Plaque - SHELL 181

La plaque raidie est modélisée entièrement par un ensemble d'éléments de plaque (2D), y compris les raidisseurs. Ce modèle, plus "riche" par rapport à un modèle où des éléments de poutre (1D) modélisent les raidisseurs, permet de capter plus finement le comportement réel de la structure étudiée. Les éléments de plaque utilisés sont des éléments Shell 181, fréquemment utilisés pour le comportement des plaques non-linéaires. Il s'agit d'un élément quadrangulaire à quatre noeuds (six degrés de liberté par noeud) adapté pour les calculs non-linéaires (plasticité et grands déplacements).

Concernant la densité du maillage, plus le maillage est fin, plus la précision s'améliore

mais le temps de calcul augmente en conséquence. Une analyse de convergence pour une plaque carrée non-raïdie en compression uni-axiale est effectuée. Les résultats (la contrainte critique de voilement et la contrainte ultime), obtenus en changeant la densité du maillage, sont comparés à la valeur théorique (l'expression 1.1). La figure 2.2 montre qu'un maillage composé d'au moins 30 éléments par côté est suffisant pour obtenir un bon compromis entre précision et temps de calcul. Cette densité de maillage sera adoptée dans la suite de ce travail.

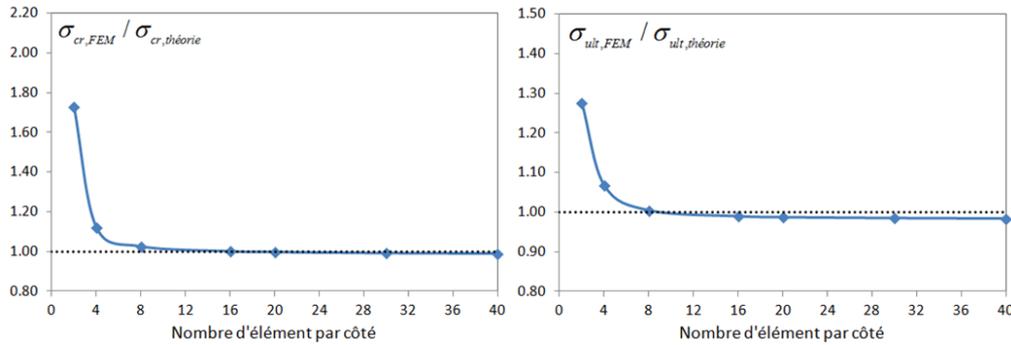


FIGURE 2.2 – Etude de convergence de la densité du maillage pour une plaque plane non-raïdie

### 2.1.3 Matériau

Les panneaux étudiés sont tous en acier de nuance S355, tel qu'habituellement utilisés dans les ponts métalliques. Ses caractéristiques mécaniques sont les suivantes :

- Module d'Young  $E = 210 \text{ GPa}$ ,
- Coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ ,
- Limite d'élasticité  $f_y = 355 \text{ MPa}$ . Il faut noter que cette valeur limite est donnée en fonction de l'épaisseur et qu'elle diminue légèrement pour les plaques épaisses (selon EN 1993-1-1).

Le modèle de comportement du matériau dépend ensuite du type d'analyse effectué. Dans ce travail, trois modèles de matériau sont utilisés selon l'indication de l'EN 1993-1-5 Annexe C. D'abord, un modèle élastique linéaire pour la recherche de la charge critique de voilement  $F_{cr}$ . Ce modèle de matériau n'est pas réaliste pour la recherche de la résistance ultime car tous les matériaux sont limités en résistance et non infiniment linéaires. En réalité, le comportement de l'acier, dit comportement ductile, est non-linéaire et présente un palier plastique. Il est souvent déterminé par un essai de traction jusqu'à la rupture. La figure 2.3 présente la courbe contrainte-déformation (allongement relatif) d'un tel essai. Plusieurs phases dans ce comportement sont mises en exergue :

- Une première phase, dite élastique, où les déformations sont réversibles et proportionnelles à la sollicitation (loi de Hooke). La tangente est la valeur du module d'Young  $E$ .
- Une deuxième phase, dite plastique, où des déformations irréversibles apparaissent. Ces déformations sont très importantes (plusieurs %). Si l'on procède à une décharge

puis que l'on sollicite à nouveau le matériau, celui-ci se comporte comme si sa limite élastique était égale au niveau maximal de contrainte atteint avant décharge. C'est ce phénomène que l'on appelle écrouissage. Il peut être utilisé pour augmenter la limite élastique des aciers.

- Une troisième phase de striction qui précède la rupture de l'éprouvette et qui apparaît lorsque l'écrouissage ne compense plus l'augmentation de contrainte causée par la diminution de section. Ce phénomène, instable, se localise dans une section qui diminue alors fortement et où survient la rupture.

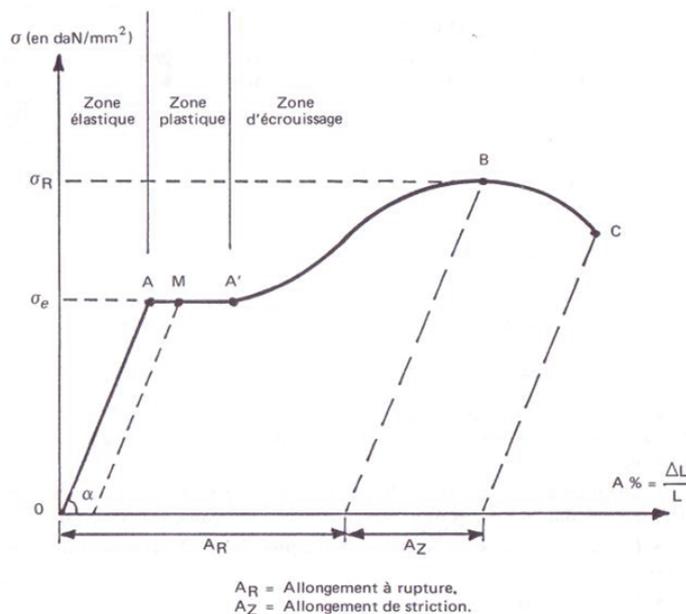


FIGURE 2.3 – Comportement type de l'acier en traction

Il faut noter que la capacité d'écrouissage n'est pas fixée et dépend de plusieurs paramètres, tels que la teneur en carbone de l'acier (plus de réserve d'écrouissage pour les aciers doux, c'est-à-dire avec moins de 0.2% de carbone) ou la méthode de fabrication (laminage à chaud ou à froid). Par souci de simplicité, l'Annexe C de l'EN 1993-1-5 recommande des modèles simplifiés dont deux (figure 2.4) seront utilisés dans la suite :

- un modèle élastique-parfaitement plastique pour la recherche de la résistance plastique  $F_{pl}$ .
- un modèle élasto-plastique avec écrouissage linéaire isotrope pour la recherche de la résistance ultime  $F_{ult}$ .

Le comportement élastique-parfaitement plastique (figure 2.4a) exprime le fait que le matériau est incapable de supporter une contrainte plus importante que celle qui correspond à l'écoulement plastique  $f_y$ . A contrario, le comportement élastique-plastique linéaire (figure 2.4b) caractérise la capacité du matériau à se durcir avec la déformation plastique. La pente de la courbe déformation-contrainte pour des contraintes supérieures à  $f_y$  s'appelle le module élasto-plastique, noté  $E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ . Ce dernier est pris égal à  $E_T = \frac{E}{100}$ .

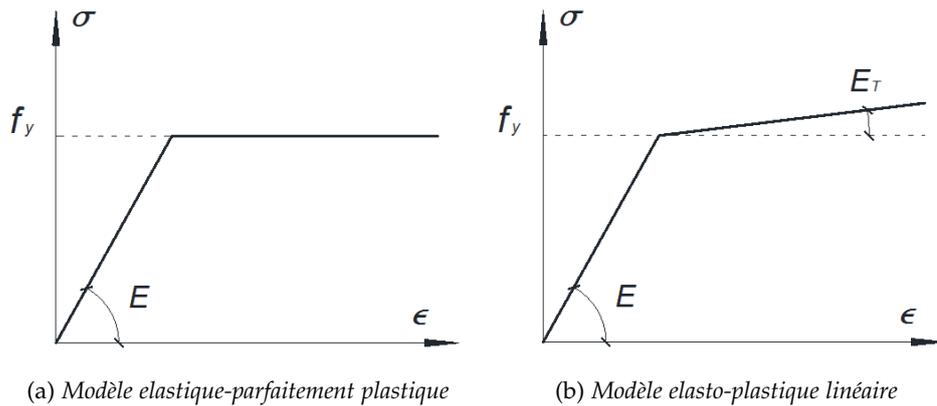


FIGURE 2.4 – Modèles des matériaux selon EN 1993-1-5

#### 2.1.4 Conditions aux limites

Dans ce travail, les conditions aux limites choisies, en cohérence avec les éléments normatifs de l'Eurocode, sont les suivantes : appui simple sur les quatre bords de la plaque. Ces conditions aux limites sont défavorables pour la résistance ultime (par rapport à un encastrement) mais elles sont assez proches des conditions d'appuis de ces éléments dans les structures d'ouvrages d'art. En effet, les tôles concernées ici constituent la partie inférieure de poutres-caissons. Leurs bords sont donc soudés aux âmes du caisson en une liaison que l'on peut qualifier d'encastrement élastique. Le degré d'encastrement est souvent difficile à identifier, mais comme ces âmes sont peu rigides transversalement, il peut être supposé très faible de sorte que les appuis sont réduits à un simple blocage des déplacements verticaux.

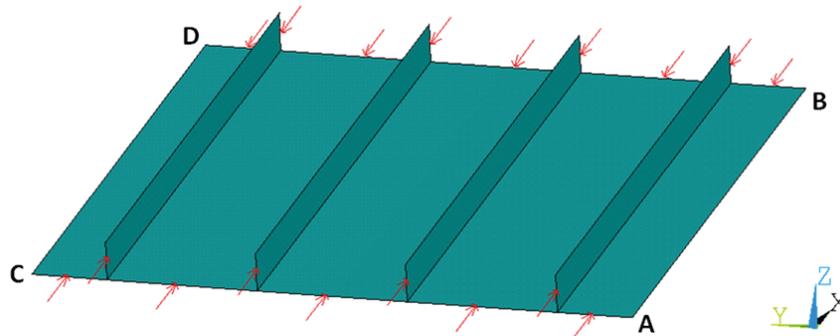


FIGURE 2.5 – Modèle d'une plaque raidie soumise à une compression axiale uniforme

Les conditions aux limites se traduisent pour le modèle éléments finis, dans le repère global dont l'axe longitudinal OX est sur le bord AB, de la façon suivante (cf. figure 2.5) :

- Appui simple sur tous les bords : déplacement vertical nul  $u_z = 0$ .
- Le long des bords chargés (bords AC et BD) : tous les noeuds sont contraints de se déplacer de manière uniforme selon l'axe de compression  $u_x = cste$ .
- Le long des bords non-chargés (bords AB et CD) : déformations transversales libres  $u_y \neq 0$ .

Il est à noter qu'un déplacement uniforme des bords non chargés augmenterait la capacité ultime de la plaque plane (Braun [31]), surtout quand les tôles sont élancées (figure 2.6) par apparition de contraintes membranaires. Pourtant, le degré de maintien de ces bords est incertain dans la réalité (on peut difficilement soutenir que la présence des âmes suffit pour maintenir droits les bords du fond de caisson). Pour notre étude, on s'est donc placé dans la situation la plus défavorable.

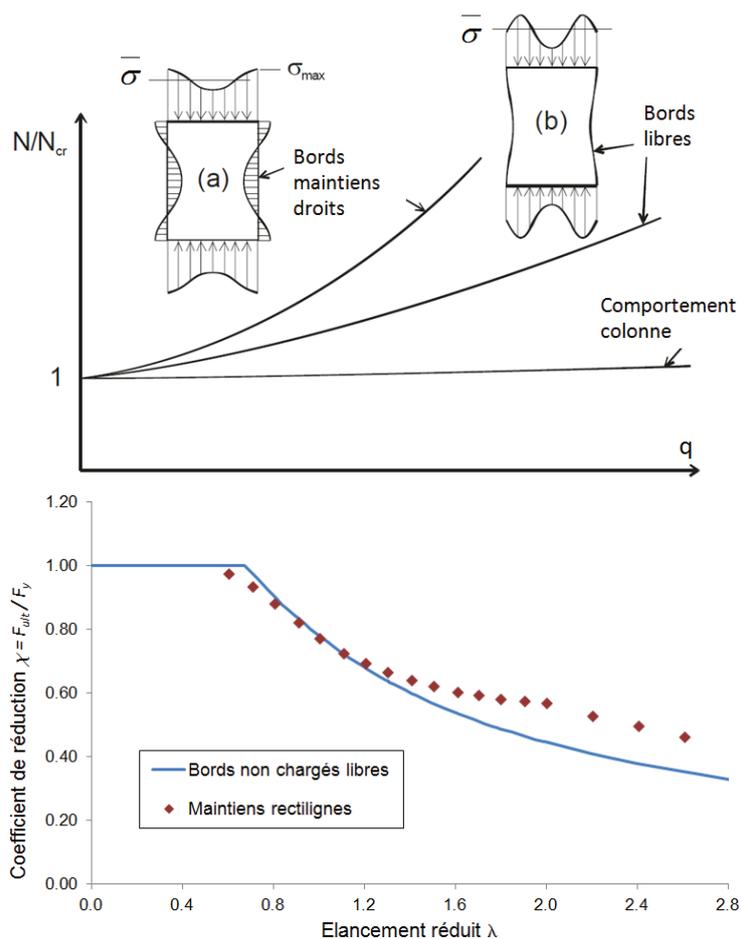
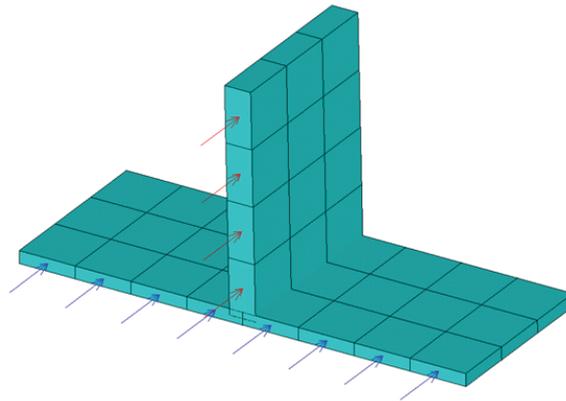


FIGURE 2.6 – Influence de la condition de maintien rectiligne des bords non-chargés

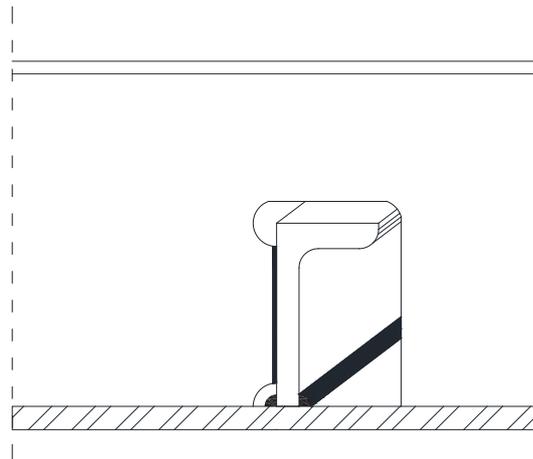
### 2.1.5 Chargement

Concernant le chargement, on se limite ici à un chargement uniforme dans le sens longitudinal, étant donné qu'il s'agit du chargement dominant pour les tôles d'intrados d'un pont en caisson (ce chargement de compression est dû aux contraintes de flexion longitudinale du pont).

Le chargement est introduit dans le modèle éléments finis au travers d'une pression suivant l'axe longitudinal (figure 2.7). Il est appliqué non seulement sur la partie de la plaque de fond, mais aussi sur les raidisseurs du fait de leur participation au comporte-

FIGURE 2.7 – *Chargement de compression*

ment mécanique global. En réalité, dans un pont, les forces de compression s'exerçant sur les tôles de fond arrivent à travers les diaphragmes et les âmes, qui permettent de relier intrados et extrados du pont. Par construction, les raidisseurs, dans la plupart des cas, sont continus et attachés par soudure aux diaphragmes (figure 2.8) : ils reprennent donc une partie de la charge de compression.

FIGURE 2.8 – *Attache soudée des raidisseurs au diaphragme*

### 2.1.6 Imperfections

Un des paramètres les plus importants causant des divergences entre les théories et la pratique dans les problèmes d'instabilité est la présence de défauts initiaux dans la structure. Dans le cas général, ils diminuent la capacité ultime de la structure (c.f figure 1.7 du chapitre I). En pratique, ces imperfections ne peuvent pas être évitées. Elles se présentent sous deux formes :

- Imperfections géométriques telles que l'écart par rapport à la forme géométrique nominale ; irrégularité au niveau des épaisseurs.

- Imperfections matérielles dues principalement au processus de fabrication (i.e contraintes résiduelles provoquées par le soudage).

Idéalement, la configuration d'étude donnant les résultats les plus précis devrait être fondée sur les imperfections réelles de structure. Cependant, dans la plupart des cas, ces informations ne sont pas faciles à obtenir, voire inconnues car les imperfections sont des variables aléatoires. Pour chaque cas d'étude, il conviendrait de faire une mesure du défaut ou au moins d'être capable de normaliser toutes les imperfections dues à la chaîne de fabrication et de disposer d'une base de données suffisamment large pour différents types de structures. Mais même dans ce cas, cette méthode resterait toujours idéalisée et difficile d'application. C'est pourquoi l'Eurocode propose de revenir à des considérations plus simples. Les imperfections sont introduites au moyen d'un mode d'imperfection équivalent, qui est calibré afin de couvrir à la fois les imperfections géométriques et les imperfections résiduelles (ces types d'imperfections, présentée la figure 2.9, sont décrites dans l'Annexe EN 1993-1-5-Annexe C).

Il est à noter que les imperfections peuvent être introduites comme des séries trigonométriques, pratique largement utilisée dans le domaine de la construction de navale (Zhang et Khan [161]). Ces imperfections sont issues de séries de mesures effectuées par Smith *et al.* [140]. Cependant, on n'adoptera pas cette approche dans ce travail car elle nécessite d'utiliser un maillage très fin afin d'assurer la compatibilité géométrique (i.e, la planéité de l'élément). De plus, cela alourdit le modèle par éléments finis.

| Type d'imperfection | Composant   | Forme                    | Amplitude                     |
|---------------------|---|--------------------------|-------------------------------|
| Globale             | élément de longueur $\ell$                        | arc                      | voir EN 1993-1-1, Tableau 5.1 |
| Globale             | raidisseur longitudinal de longueur $a$           | arc                      | $\min(a/400, b/400)$          |
| Locale              | panneau ou panneau secondaire de côtés $a$ et $b$ | mode propre de voilement | $\min(a/200, b/200)$          |
| Locale              | raidisseur ou semelle soumis à la torsion         | torsion en arc           | 1/50                          |

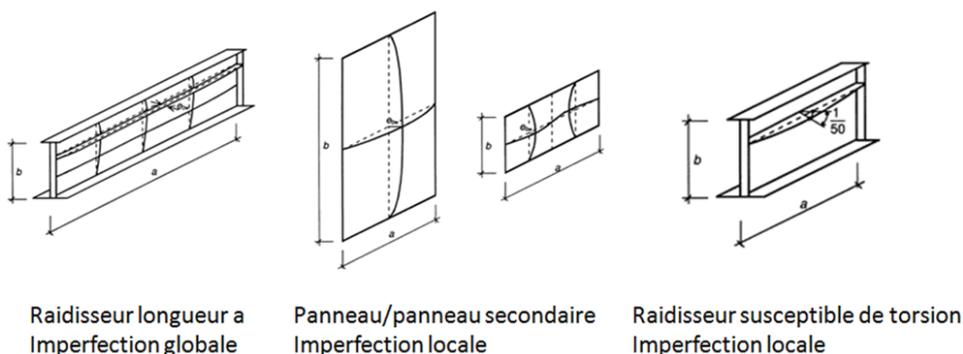


FIGURE 2.9 – Imperfections géométriques équivalentes selon EN 1993-1-5

Pour les structures composées, telles que la plaque raidie, l'Eurocode recommande l'utilisation de combinaisons d'imperfections. Comme les imperfections sont aléatoires, il est difficile de savoir quelle imperfection (mode global ou local) sera la plus pénalisante. Il convient donc de sélectionner une imperfection principale, les autres imperfections étant

considérées comme associées (réduites de 30% pour être plus réaliste selon l'EN 1993-1-5 [3]). Il est alors nécessaire de considérer toutes les combinaisons possibles et de retenir celle produisant la charge ultime la plus faible. Ceci implique de démultiplier les calculs pour chaque configuration. Plus les éléments constitutifs de la structure sont nombreux, plus les combinaisons sont abondantes. L'introduction des imperfections pour les plaques raidies est donc un point délicat.

Dans la pratique, les imperfections équivalentes sont définies normalement au modèle d'éléments finis via le premier mode d'instabilité de structure (par introduction de défauts proportionnels à la déformée du mode de voilement de la structure). Cette démarche pose toutefois des problèmes pour les tôles raidies car le comportement au voilement des plaques raidies est complexe. En effet, pour les plaques courtes, le calcul des modes critiques de voilement fournit un grand nombre de modes locaux avant l'apparition des premiers modes globaux. La situation est inversée pour les plaques longues. Les amplitudes à affecter de manière différenciée aux contributions locales et globales sont donc particulièrement malaisées à gérer. Afin de limiter l'impact de ces problèmes, la procédure suivante sera utilisée par la suite :

a. *L'imperfection globale*

L'imperfection globale est définie, soit sur la base du résultat d'un calcul élastique linéaire sous charge transversale (hors plan) ou soit par le calcul des modes de voilement pour les plaques longues ( $\alpha \geq 2$ ). Si les raidisseurs ne sont pas symétriques par rapport au plan de la plaque, deux directions d'imperfection (vers l'extérieur ou l'intérieur de la plaque) doivent être considérées.

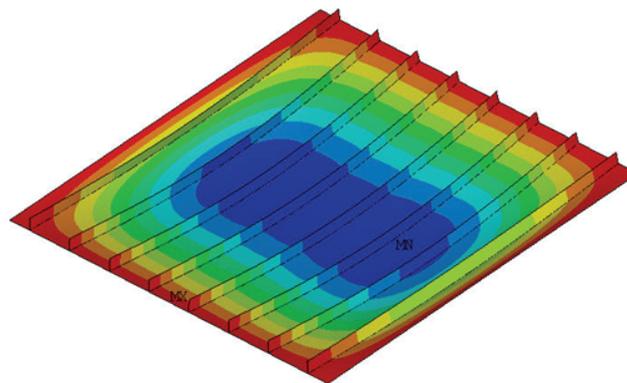


FIGURE 2.10 – Mode de voilement global des raidisseurs

b. *L'imperfection locale des sous-panneaux*

L'imperfection locale est systématiquement définie sur la base du premier mode critique obtenu en bloquant le déplacement des raidisseurs perpendiculairement au plan de la plaque. Cela permet de dissocier complètement les imperfections de sous-panneaux des mouvements de raidisseur.

c. *Imperfection locale des raidisseurs*

L'imperfection locale par torsion du raidisseur est introduite par une force horizontale

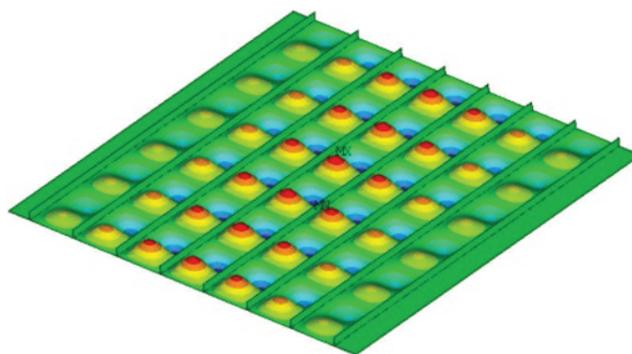


FIGURE 2.11 – Mode de voilement local des sous-panneaux

au milieu des raidisseurs. Cependant, les raidisseurs sont encastrés à la jonction avec la plaque de fond afin de dissocier complètement l'imperfection du raidisseur de la déformation de la plaque de fond.

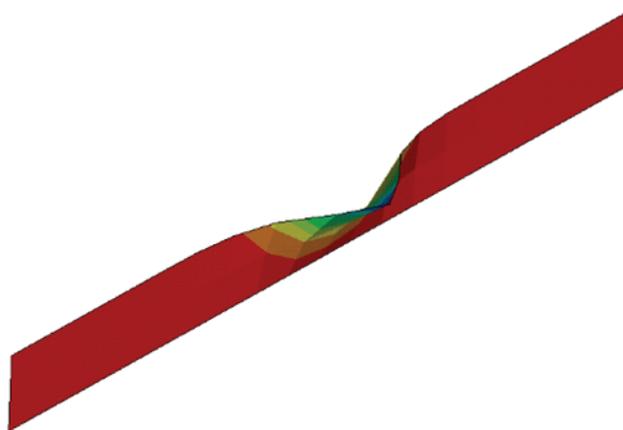


FIGURE 2.12 – Mode de voilement local du raidisseur par torsion

Il convient de mentionner aussi que, lorsque les raidisseurs sont longs, il y a des risques d'introduire des déformations sous la forme de plusieurs ondes (figure 2.13). Ce mode d'imperfection n'est pas indiqué dans l'Eurocode mais on l'a pris en compte tout de même dans notre calcul. Ce mode d'imperfection est obtenu en faisant une analyse de voilement élastique sur un modèle où les raidisseurs sont bloqués en déplacement vertical à la jonction avec la plaque et où le chargement est appliqué seulement aux raidisseurs.

Les modes d'imperfection mentionnés ci-dessus sont aisément introduits dans le modèle via la commande "UPGEOM" (UPdate GEOMetry) dans ANSYS. Cette commande met à jour la géométrie du modèle éléments finis en fonction des résultats des déplacements de l'analyse précédente et crée une géométrie révisée sur la base de la configuration déformée. Cette commande fonctionne sur tous les noeuds ou sur un ensemble choisi de noeuds. Si cette commande est émise à plusieurs reprises, une géométrie révisée du modèle éléments finis d'une manière cumulative est créée, c'est-à-dire que les résultats des déplacements sur la géométrie s'additionnent, ce qui est souhaité ici.

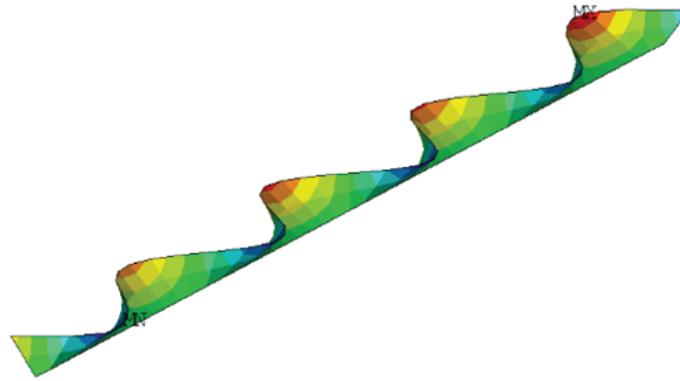


FIGURE 2.13 – Mode "tripling" du raidisseur

### 2.1.7 Algorithmes de résolution

Le comportement d'une structure vis-à-vis du problème d'instabilité est souvent examiné au moyen d'un diagramme charge-déplacement. Cependant, le calcul de cette trajectoire de chargement peut être difficile en raison de l'existence des points critiques. Au voisinage de ce point critique, la tangente de la matrice de rigidité devient mal conditionnée. À cet égard, la technique ordinaire de la méthode Newton-Raphson avec une méthode de contrôle d'effort standard (force imposée à chaque incrément de temps) s'avère inapplicable pour dépasser ce point et simuler la phase instable. Il existe dans la littérature d'autres algorithmes pour palier aux limites des méthodes de contrôle d'effort (Jorabchi et Suresh [81]). Ces méthodes sont connues sous le nom de méthodes de continuation, initialement développées pour traiter des problèmes de fortes non-linéarités. Parmi ces méthodes, la méthode de longueur d'arc (*arc-length method* en anglais) est la méthode la plus utilisée (Armentani *et al.* [15]) car elle pilote à la fois le déplacement et le chargement. En plus, le facteur de chargement varie à chaque itération de façon à ce que la solution suive parfaitement la trajectoire. Cette méthode de résolution est retenue dans la suite de ce travail pour les analyses du comportement ultime de la structure.

#### 2.1.7.1 Théorie de la méthode de longueur d'arc

La méthode de longueur d'arc peut être considérée comme une mise à jour de la méthode Newton-Raphson ordinaire (figure 2.14). Toutes les notions fondamentales de la méthode de Newton-Raphson servent de base pour la résolution.

On rappelle que le problème d'équilibre se ramène à la résolution d'un système d'équations non linéaires en déplacement de la forme :

$$F_{int}(U) - F_{ext} = 0 \quad (2.1)$$

avec  $U$  le vecteur des déplacements nodaux et  $F_{int}$  le vecteur des efforts intérieurs et  $F_{ext}$  le vecteur des efforts extérieurs. Cette équation d'équilibre peut être réécrite en introduisant un facteur scalaire multiplicatif des efforts extérieurs, appelé facteur de chargement  $\lambda$  et

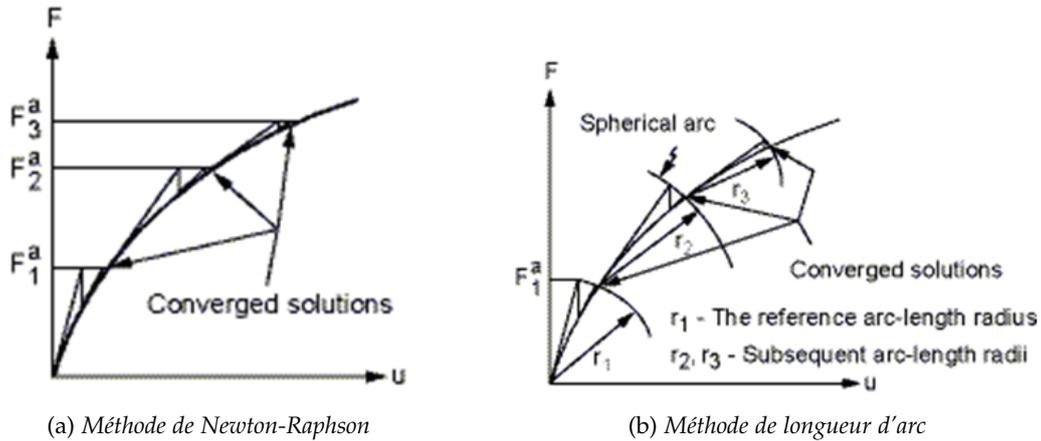


FIGURE 2.14 – Comparaison des algorithmes de résolution numérique

défini par :

$$F_{int}(U) - \lambda f_{ext} = 0. \quad (2.2)$$

Si le principe de la méthode Newton-Raphson de contrôle en force consiste à imposer un niveau de chargement et à chercher l'équilibre, le principe de méthode de longueur d'arc considère le facteur de chargement  $\lambda$  comme une inconnue supplémentaire du problème. Pour que le problème soit bien posé, une équation scalaire supplémentaire est alors nécessaire. Cette équation, appelée fonction contrainte, définit l'équation d'une courbe dont l'intersection avec la courbe de charge détermine le point d'équilibre. Le système initialement de dimension  $n$  (avec  $n$  le nombre de degrés de liberté) est transformé en un problème de dimension  $(n + 1)$  défini par :

$$\begin{cases} F_{int}(U) - \lambda f_{ext} = 0 \\ f(U, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Il est noté que le vecteur effort extérieur  $f_{ext}$  n'est pas actualisé au cours des itérations, seule l'intensité est changée à travers l'actualisation du facteur de chargement  $\lambda$ . La forme incrémentale de la fonction contrainte associée à la méthode de la longueur d'arc est introduite initialement par Riks [116] et s'écrit :

$$f(U, \lambda) = \Delta U_i^T \Delta U_i + \Delta \lambda_i^2 \psi^2 f_{ext}^T f_{ext} - \Delta l^2 = 0 \quad (2.4)$$

Cette expression revient à imposer que la norme du vecteur  $(\Delta U, f_{ext})$  soit égale au rayon  $\Delta l$ . Le coefficient  $\psi$  sert à harmoniser le vecteur effort avec le champ de déplacement. La détermination de l'incrément du facteur de chargement se réduit donc à la résolution d'une équation quadratique :

$$a_1 \delta \lambda_i^2 + a_2 \delta \lambda_i + a_3 = 0 \quad (2.5)$$

où les constantes  $(a_1, a_2, a_3)$  sont définies par :

$$\begin{cases} a_1 = \delta U_i^{iT} \delta U_i^i + \psi^2 f_{ext}^T f_{ext} \\ a_2 = 2 \delta U_i^{iT} (\Delta U_i + \delta U_{II}^i) + 2 \Delta \lambda_i \psi^2 f_{ext}^T f_{ext} \\ a_3 = (\Delta U_i + \delta U_{II}^i)^T (\Delta U_i + \delta U_{II}^i) - \Delta l^2 + \Delta \lambda_i \psi^2 f_{ext}^T f_{ext} \end{cases} \quad (2.6)$$

La définition des deux composants du déplacement  $\delta U_i^I$  et  $\delta U_i^{II}$ , présentée graphiquement à la figure 2.15, sont la suivante :

$$\begin{cases} K_i \delta U_i^I &= f_{ext} \\ K_i \delta U_i^{II} &= -R_i \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur usuelle. L'incrément de déplacement total s'écrit :

$$\delta U_i = \delta \lambda_i \delta U_i^I + \delta U_i^{II} \quad (2.8)$$

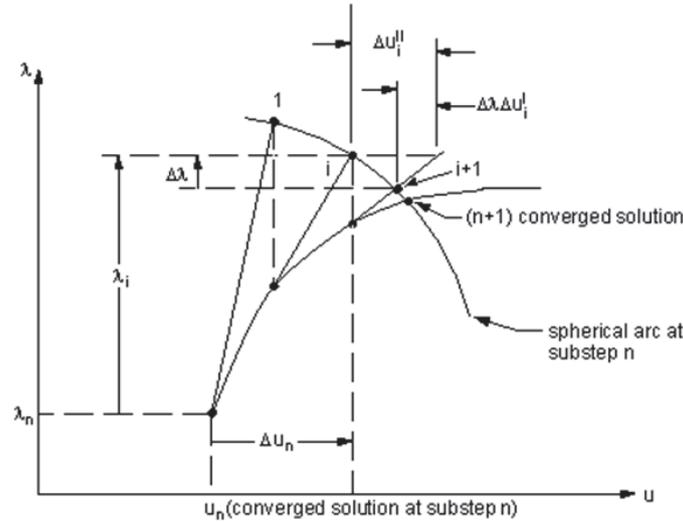


FIGURE 2.15 – La méthode de longueur d'arc

La résolution de l'équation 2.5 du second degré en  $\delta \lambda$  pose, en généralement, le problème du choix de la racine appropriée lorsque celle-ci admet deux racines réelles. La sélection adéquate de la racine est l'un des enjeux clés de cette méthode de longueur d'arc. Il existe des méthodes pour résoudre approximativement l'incrément du facteur de chargement  $\delta \lambda$ , telle que celle est proposée par Forde et Stierner [58]. Cette méthode, dite méthode de longueur d'arc linéarisée ou méthode d'orthogonalité, permet de faciliter l'obtention de l'incrément du facteur de chargement :

$$\delta \lambda = \frac{R_i - \{\Delta U_n\}^T \{\Delta U_i^{II}\}}{\beta^2 \lambda_i + \{\Delta U_n\}^T \{\Delta U_i^I\}} \quad (2.9)$$

où  $\beta$  est un facteur d'homogénéisation. Cette proposition est retenue et implantée dans logiciel Ansys.

### 2.1.7.2 Implémentation dans le code

L'utilisation de la méthode de longueur d'arc dans le logiciel d'Ansys nécessite l'introduction d'un rayon de référence et des facteurs multiplicatifs minimal et maximal de ce rayon pour piloter le rayon de calcul à chaque itération.

Dans ce travail de thèse, le rayon de référence est pris égal à  $1/100^{me}$  de la charge totale. Cette valeur est aussi la valeur initiale du premier chargement. À chaque sous-étape, une nouvelle valeur du rayon est calculée en se basant sur la valeur de l'itération précédente et sur le comportement de la structure. Elle est modifiée de manière à ce qu'elle se situe dans la plage de variation qui est délimitée par une borne supérieure égale à 20 fois le rayon de référence ( $MAXARC = 20$ ) et une borne inférieure égale à 0,001 fois le rayon de référence ( $MINARC = 0,001$ ). Ces valeurs ont été sélectionnées pour une optimisation du temps de calcul et de la précision en présence de point de limite dans la trajectoire du chargement-déplacement.

### 2.1.7.3 Critère de convergence

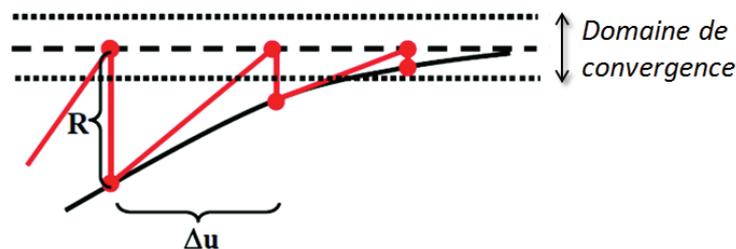


FIGURE 2.16 – Critère de convergence

Le processus itératif se poursuit jusqu'à la convergence de l'algorithme qui est jugée suffisante lorsque la condition suivante est vérifiée (figure 2.16) :

$$\|\{R\}\| < \varepsilon_R R_{ref} \quad (2.10)$$

où  $\{R\} = \{F^a\} - \{F^{nr}\}$  est le vecteur des résidus et  $\|\|\|$  est la norme  $L_2$ . L'équation 2.10 peut s'exprimer de façon alternative en disant que la convergence est obtenue lorsque la taille du résidu est inférieure à  $10^{-3}$  (avec  $\varepsilon_R = 0,001$  et  $R_{ref} = 1$ ).

## 2.2 ÉVALUATION DE LA DÉMARCHE DE L'EUROCODE

La configuration de la plaque raidie servant à évaluer la démarche de l'EN 1993-1-5 est prise identique à celle étudiée dans l'annexe 1. La plaque considérée a une largeur  $b = 4800 \text{ mm}$ , une épaisseur  $t_p = 12 \text{ mm}$ . Les raidisseurs sont de type simple plat et espacés régulièrement d'une distance  $d = 600 \text{ mm}$  (8 raidisseurs au total). Les autres dimensions (longueur  $a$ , hauteur du raidisseur  $h_s$ ) sont variables pour étudier l'influence des différents paramètres du comportement des plaques raidies.

La modélisation par éléments finis est effectuée suivant les différentes étapes présentées à la section 1. Sur ce modèle, plusieurs aspects de la démarche du dimensionnement des plaques raidies selon l'Eurocode sont discutés.

## 2.2.1 Discussion du comportement critique de voilement

### 2.2.1.1 Etude préliminaire par éléments finis

La détermination de la contrainte critique de voilement est un point clé dans la démarche du dimensionnement de plaque raidie car celui-ci se base sur le mode de voilement global, c'est-à-dire le mode qui implique en même temps l'instabilité de la plaque de fond et des raidisseurs. On a vu à la section 3.1 du chapitre 1 que le mode de voilement des plaques raidies est déterminé par la rigidité des raidisseurs. La figure 2.17 présente l'évolution de la contrainte critique de voilement en fonction de la rigidité flexionnelle relative des raidisseurs  $\gamma = \frac{EI_s I}{bD}$ . La hauteur du raidisseur  $h_s$  varie entre 0 et 300 mm pour changer la valeur de  $\gamma$ .

La courbe bleue en trait continu avec les losanges jaunes est celle qui correspond au premier mode de voilement (dit mode "naturel") issu d'une analyse modale par éléments finis. Cette courbe met en évidence deux possibilités pour le mode de voilement :

- Pour une valeur faible de  $\gamma$ , correspondant à un raidisseur flexible, le résultat est un mode de voilement global dans lequel les raidisseurs flambent avec la plaque.
- À partir d'une certaine valeur de  $\gamma$ , notée  $\gamma^*$  (dans cet exemple,  $\gamma^* \geq 500$ ), le raidisseur est suffisamment rigide pour modifier le comportement critique de la plaque. Les raidisseurs ne flambent plus avec la plaque et le mode de voilement est un mode local de chacun des sous-panneaux. Les raidisseurs peuvent être considérés comme des supports rigides supplémentaires.

On peut constater que la contrainte "naturelle" de la figure 2.17 a tendance à diminuer au-delà de la valeur critique de  $\gamma$ . En effet, quand la hauteur du raidisseur augmente, les raidisseurs deviennent très rigides en flexion mais moins en torsion. Le mode de voilement local est par conséquent lié au mode de voilement local des raidisseurs et non au mode voilement des sous-panneaux (c.f mode IV dans la figure 1.9). La contrainte critique de voilement pour ce mode local des raidisseurs est évalué par l'équation suivante :

$$\sigma_{cr,raidi} = k_\sigma \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t_s}{h_s} \right)^2. \quad (2.11)$$

où  $k_\sigma = 0,43$  est le coefficient de voilement d'une console, donné par l'EN 1993-1-5. La contrainte critique du voilement local des raidisseurs diminue avec l'augmentation de la hauteur  $h_s$  du raidisseur : de  $\sigma_{cr,raidi} = 522 \text{ MPa}$  pour  $h_s = 200 \text{ mm}$  ( $\gamma = 375$ ) à  $\sigma_{cr,raidi} = 286 \text{ MPa}$  pour  $h_s = 270 \text{ mm}$  ( $\gamma = 842$ ). Cette dernière est inférieure à la valeur critique des sous-panneaux. Cet effet ne peut être mis en lumière que si les raidisseurs sont modélisés par des éléments de type plaque (la section serait supposée indéformable en les modélisant par des éléments de type poutre).

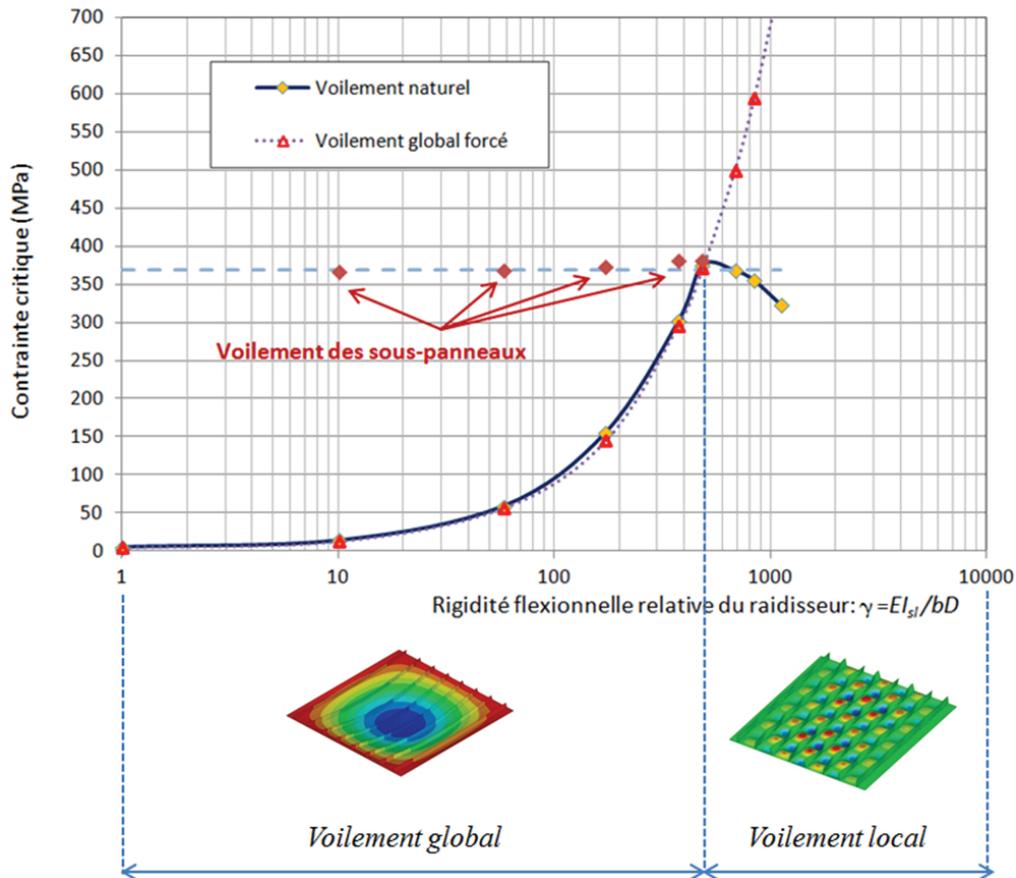


FIGURE 2.17 – Influence de la rigidité flexionnelle du raidisseur sur le coefficient critique de voilement

Par définition, la contrainte critique visée dans la démarche de l'EN 1993-1-5 correspond au premier mode global de plaque quelle que soit la rigidité du raidisseur (figure 2.18 - courbe en pointillé avec losanges bleus). L'utilisation d'un modèle par éléments finis pose des difficultés si la rigidité  $\gamma$  est supérieure à la valeur limite  $\gamma^*$ . Dans certains cas, l'identification du mode de voilement global peut être obtenue pour des modes d'ordres supérieurs, or la sélection systématique d'un des modes "globaux apparemment" peut conduire à une insécurité ou une sur-sécurité marquée (Galéa et Martin [63]).

À cet effet, Galéa et Martin [63] ont suggéré de supprimer la possibilité de voilement local des sous-panneaux et d'imposer le flambement des raidisseurs dans le continuum élastique de la plaque. Pour cela, toutes les charges agissant sur la plaque de fond seront transférées aux raidisseurs. Par cette transformation, l'effet déstabilisant des contraintes de compression dans la plaque est "transféré" de la plaque vers les raidisseurs situés dans la zone de compression. Les raidisseurs conservent, par ailleurs, les contraintes qui leur sont directement transmises du fait de leur aire de section transversale. Les valeurs obtenues par ce changement d'effort (figure 2.18 - courbe en pointillé avec triangle en rouge vif) sont capables de prédire correctement le comportement global de la plaque en comparaison avec d'autres méthodes de calcul que l'on verra dans le prochain paragraphe.

### 2.2.1.2 Evaluation des méthodes de calcul

La détermination de la contrainte critique de voilement global est complexe à cause de la présence des raidisseurs. Des méthodes de calcul simplifiées ont été développées, à savoir la méthode analytique de l'Annexe A de l'EN 1993-1-5 sous certaines hypothèses, les abaques de Klöppel (Galéa [61]) et la méthode de calcul par logiciel EBPlate (Galéa et Martin [62]). Ce dernier est aujourd'hui un outil fréquemment utilisé par les bureaux d'études français de structure pour traiter le problème du voilement des plaques raidies. Créé par le CTICM dans le cadre du projet COMBRI (COMpetitive BRIdges), le logiciel EBPlate permet de calculer les contraintes critiques de voilement de plaques planes rectangulaires chargées dans leur plan. La méthode de détermination du seuil de bifurcation est assurée par la méthode énergétique (principe de minimisation de l'énergie potentielle comme dans le travail de Klöppel). Le logiciel EBPlate possède l'avantage d'être utilisable quelle que soit la quantité, la section transversale et la disposition des raidisseurs longitudinaux de la plaque ou la distribution de la contrainte, ce qui n'est pas le cas de la formule analytique de l'annexe A (développée pour un chargement de compression).

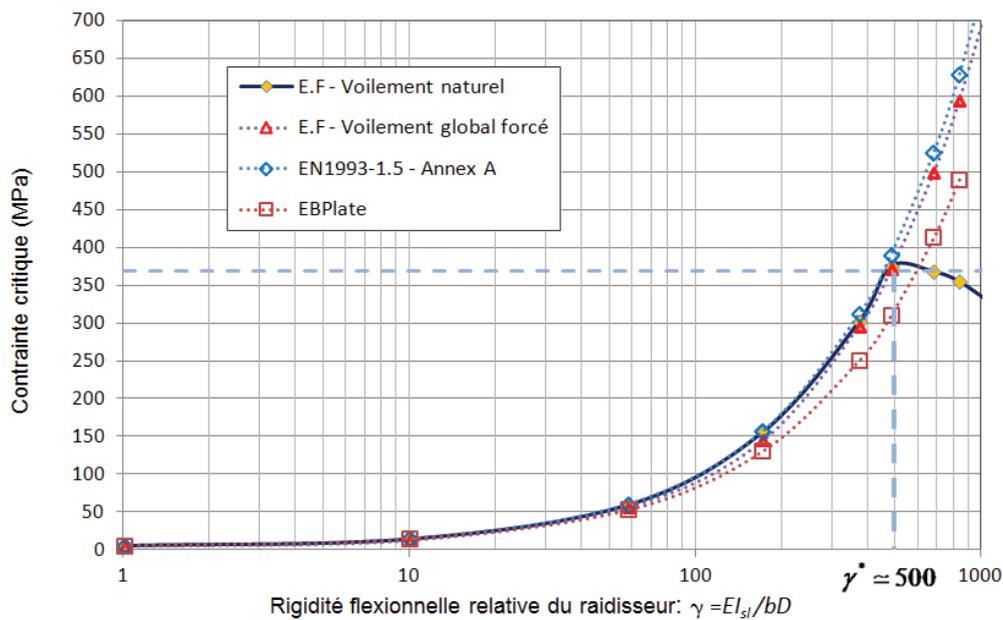


FIGURE 2.18 – Comparaison des différentes méthodes d'évaluation de la contrainte critique de premier mode de voilement

Les résultats estimés par ces deux méthodes sont comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis mentionnée ci-dessus (figure 2.18). La méthode analytique proposée dans l'annexe A de l'EN 1993-1-5 donne des valeurs très cohérentes avec celles déduites par éléments finis (avec moins de 5% d'écart). L'estimation de la contrainte critique par le logiciel EBPlate quant à elle est plus petite que la valeur numérique correspondante (écart maximal -22%). Ces écarts induisent peu de variation sur le coefficient de réduction de type plaque mais ils ont une grande influence sur l'estimation du comportement

interpolé de la plaque étudiée (voir section 4.2.3 du chapitre I pour le détail du comportement interpolé). L'utilisation d'une valeur supérieure de la contrainte critique de type plaque conduit à un comportement interpolé plus proche de celui des plaques et donc à un risque de surévaluation. En revanche, l'utilisation d'une valeur plus petite est plus sécuritaire mais moins optimale. L'ingénieur doit donc avoir conscience des conséquences de la méthode utilisée.

### 2.2.2 Discussion du comportement ultime

On s'intéresse dans cette section au comportement ultime des plaques raidies. Des analyses non-linéaires (GMNIA) prenant en compte le comportement réel du matériau ont été conduites pour identifier la charge ultime des plaques. Le comportement ultime des plaques raidies est complexe car il est influencé par plusieurs paramètres (voir les études paramétriques de Grondin *et al.* [68], Carlsen [36] et Ghavami [67]). Dans cette section, seulement trois paramètres ont été choisis pour étudier la sensibilité du comportement ultime de plaque : l'imperfection initiale, le coefficient d'aspect et la rigidité du raidisseur. Ces trois paramètres sont retenus non seulement pour leur rôle important dans ce comportement des plaques, mais aussi pour leur pertinence dans l'évaluation de la démarche de l'Eurocode. La plaque étudiée est toujours celle présentée dans l'exemple d'application de l'annexe 1.

#### 2.2.2.1 Influence des imperfections

Plusieurs types d'imperfections ont été considérés selon les indications de l'EN 1993-1-5 (récapitulés dans la section 1.6 de ce chapitre). Les quatre combinaisons des modèles typiques sont les suivantes :

a. **Modèle  $n^{\circ} 1$**  : Mode global des raidisseurs

Il s'agit une déformation en arc globale avec une demi-longueur d'onde sur la longueur de la plaque, avec une amplitude égale à  $\min(a/400; b/400) = 12 \text{ mm}$ . Comme les raidisseurs sont disposés asymétriquement, deux directions d'imperfection (vers l'extérieur et vers l'intérieur de la plaque) sont considérées (figure 2.19).

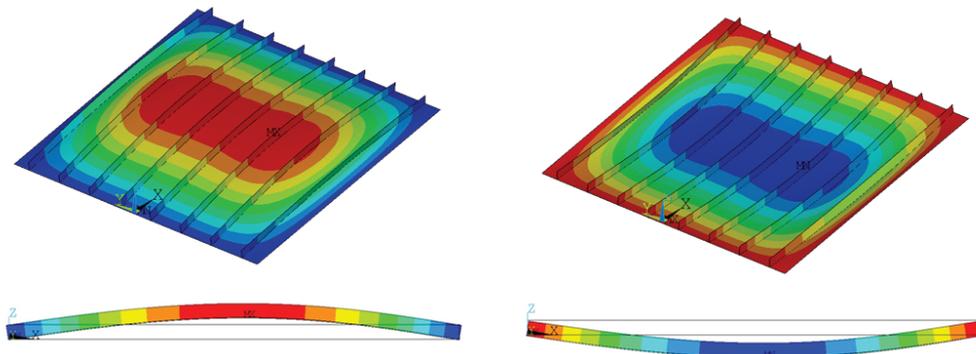


FIGURE 2.19 – Imperfection globale des raidisseurs : (a) vers l'extérieur et (b) vers l'intérieur

b. **Modèle n° 2** : Mode local des sous-panneaux

L'imperfection locale des panneaux secondaires est introduite au moyen de modes de voilement local du sous-panneau, dont deux (c.f figure 2.20) sont retenus dans cette étude, avec une amplitude égale à  $w_0 = \min(a/200; d/200) = 3 \text{ mm}$  où  $a$  et  $d$  sont la longueur et la largeur (égale à l'espacement des raidisseurs) des sous-panneaux.

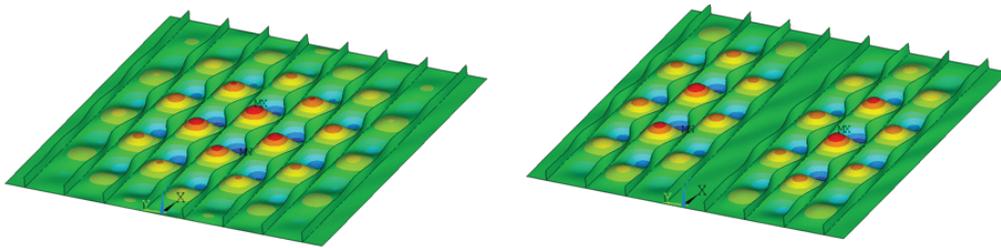


FIGURE 2.20 – Imperfection locale des sous-panneaux : modèles (2a) et (2b)

c. **Modèle n° 3** : Mode local des raidisseurs

Deux modes d'imperfection locale par torsion des raidisseurs sont étudiées avec une amplitude de déplacement transversale égale à  $\frac{h_s}{50} = 3 \text{ mm}$

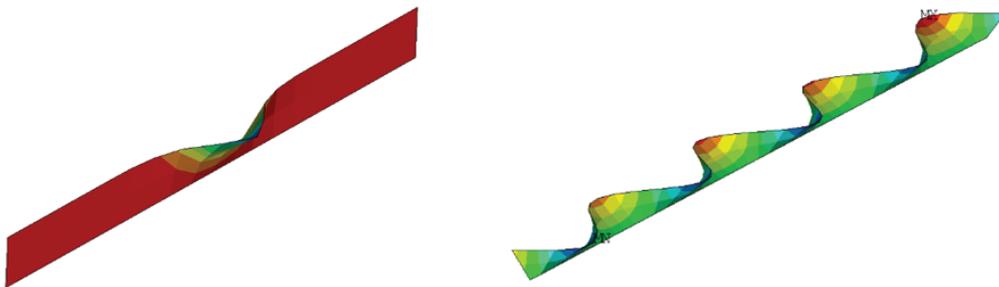


FIGURE 2.21 – Imperfection locale des raidisseurs par torsion

d. **Modèle n° 4** : Combinaison des imperfections

Les trois modèles ci-dessus sont considérés comme des défauts élémentaires. Pour ce quatrième modèle, des combinaisons de ces défauts élémentaires sont effectuées en choisissant une imperfection dominante, à laquelle on affecte la totalité de l'amplitude

du défaut, et une imperfection d'accompagnement à laquelle on affecte un coefficient 0,7.

Les résultats de cette étude sont récapitulés dans le tableau 2.1. La dernière colonne indique, en pourcentage, l'écart observé par rapport à la charge de ruine minimale de tous ces modèles.

TABLE 2.1 – Charge ultime pour différents mode d'imperfection

| Modèle | Description        | Cas élémentaire                       | $N_{ult}$   | % Écart     |
|--------|--------------------|---------------------------------------|-------------|-------------|
| 1      | Global raidisseur  | (1a) : Vers l'extérieur               | 11,50       | 41,4%       |
|        |                    | (1b) : Vers l'intérieur               | 8,13        | 0,0%        |
| 2      | Local sous-panneau | (2a)                                  | 13,24       | 62,9%       |
|        |                    | (2b)                                  | 13,34       | 64,1%       |
| 3      | Local raidisseur   | (3a) : par torsion                    | 13,63       | 67,7%       |
|        |                    | (3b) : par tripping                   | 11,55       | 42,1%       |
| 4      | Combinaison        | (4a) = 1 * (1a) + 0,7* (2a)           | 8,17        | 0,5%        |
|        |                    | (4b) = 1 * (1a) + 0,7* (3b)           | 8,21        | 1,0%        |
|        |                    | (4c) = 1 * (1a) + 0,7*( (2a) + (3b) ) | 8,19        | 0,8%        |
|        |                    | (4d) = 1 * (2a) + 0,7* (1b)           | 8,74        | 7,6%        |
|        |                    |                                       | $N_{ult} =$ | <b>8,13</b> |

La charge ultime minimale retenue est égale à  $N_{ult} = 8,13$  MN pour le modèle n° 1b, le cas où l'imperfection est vers l'intérieur de la plaque. Cette configuration est évidemment la plus défavorable car les raidisseurs y sont globalement en compression et sont susceptibles de flamber. Dans le cas inverse, l'imperfection vers l'extérieur engendre des efforts de traction dans le raidisseur lorsque la plaque voile (c.f la figure 2.22) et la plaque peut atteindre une charge de ruine supérieure.

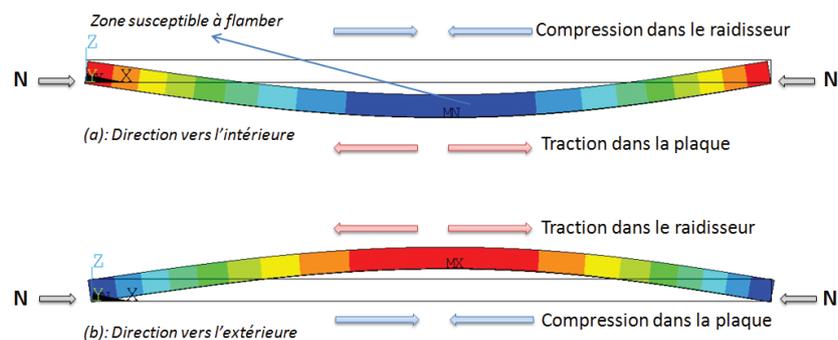


FIGURE 2.22 – Influence de la direction d'imperfection

Concernant le modèle n° 2, les différentes formes des imperfections ne donnent pas de grande variation de la charge de ruine. L'amplitude de ces défauts est petite de sorte qu'elle n'intervient pas sur le comportement. De même, le modèle n° 3 n'influence pas beaucoup la charge ultime. Cependant, le mode ayant plusieurs ondes de déformations (modèle n° 3b) a plus d'influence.

Il est noté que le modèle n° 4 donne une valeur très proche de la charge ultime minimale. Deux remarques sont tirées dans ce cas des combinaisons d'imperfection. Premièrement, l'influence des imperfections vient plutôt de leur forme que de leur amplitude. L'imperfection de sous-panneau seule (modèle n° 2a) ne donne pas grande d'influence (valeur égale à 13,24 MN), mais elle devient significative en accompagnement du modèle n° 1b réduit à 70% d'amplitude (valeur égale à 8,17 MN pour le modèle n° 4a). Deuxièmement, la combinaison des imperfections n'est pas dans tous les cas le mode le plus critique car il est possible que certains des modes d'accompagnement aient un effet favorable, qui a tendance à réduire l'influence du mode principal. Par exemple pour le modèle n° 4a, le mode d'imperfection de sous-panneau se compose des demi-ondes vers le haut et vers le bas de la plaque de fond. Les parties vers le haut ont pour effet de diminuer l'amplitude introduite par le mode global des raidisseurs, donc le mode sera moins critique.

Il est constaté que le mode d'imperfection a une influence significative sur la résistance ultime de la plaque raidie. Le pourcentage maximal d'écart entre la valeur la plus grande et la plus petite est égal à 67,7%. Afin de comprendre l'influence des imperfections sur le comportement des plaques raidies, la figure 2.23 présente le diagramme chargement-déplacement des quatre modèles d'imperfections ci-dessus (on ne retient que le cas où l'influence est la plus importante). Il est constaté que le mode d'imperfection peut modifier significativement le comportement de la plaque. En effet, deux familles de courbe ont été observées.

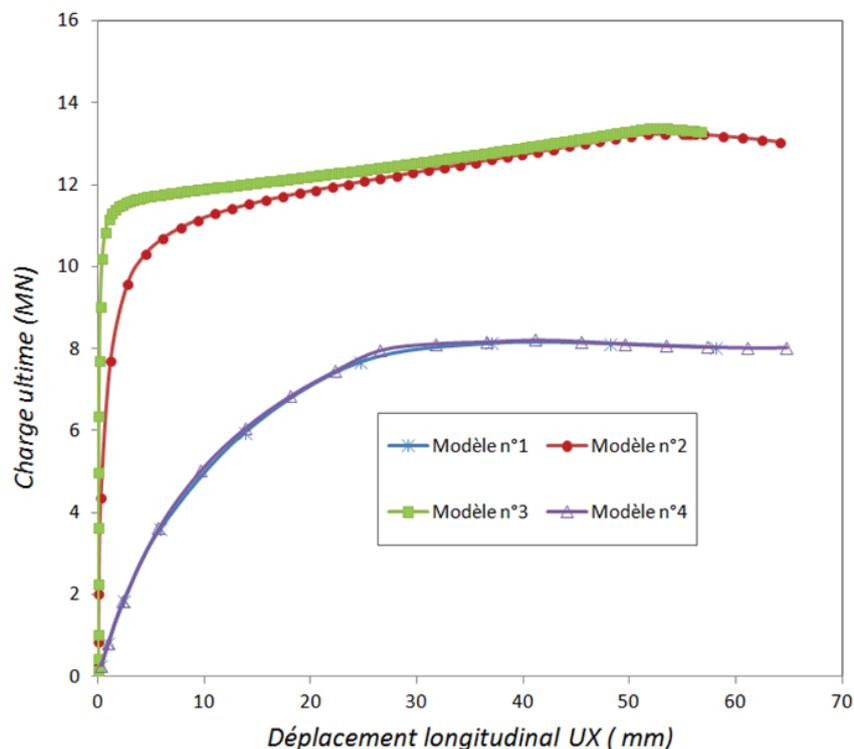


FIGURE 2.23 – Courbe chargement-déplacement de différentes combinaisons de l'imperfection

Le premier type est obtenu pour le modèle n° 2 et n° 3. L'influence de l'imperfection dans ce cas est supposée mineure. La courbe décrite par ces deux modèles est similaire avec celle d'une plaque parfaite (c.f figure 2.23). En effet, la première déviation de la trajectoire du modèle n° 3 correspond ( $N_{E.F.} = 11,5 MN$ ) à la charge critique de voilement :

$$\sigma_{cr,p} = 156 MPa \Leftrightarrow N_{app} = \sigma_{cr,p}A = 12 MN. \quad (2.12)$$

Le deuxième type de courbe est identifié pour les modèles n° 1 et n° 4. L'imperfection dans ces cas facilite le déplacement hors-plan, donc elle engendre un comportement non-linéaire en grande déformation. Par conséquence, la plaque atteint plus vite la charge ultime. Il est à noter que, lorsque le chargement atteint sa valeur maximale, la structure prend très facilement un déplacement important même en maintenant la charge appliquée (la trajectoire de la courbe devient horizontale). On reconnaît donc un comportement typique d'un flambement de poteau (le flambement des raidisseurs).

En conclusion, ces résultats démontrent l'influence relativement importante que peut avoir l'imperfection initiale sur la valeur de la charge de ruine. Selon le choix de la forme du défaut, son influence peut être significative ou non (l'écart des modes d'imperfection peut atteindre 67,7%). En choisissant la bonne forme critique du défaut initial, la modélisation des imperfections équivalentes selon l'Eurocode permet d'obtenir un résultat de la résistance ultime en cohérence avec celui calculé par la démarche simplifiée de l'Eurocode :  $N_{ult}^{E.F} = 8,13 MN$  et  $N_{ult}^{thorie} = 7,94 MN$ , soit 2,3% de différence.

Pour une structure complexe qui se compose de plusieurs structures secondaires comme les plaques raidies, il est difficile de déduire systématiquement lequel des modes est le mode le plus critique sans avoir fait des analyses complètes de tous les modes possibles des imperfections. Néanmoins pour les raidisseurs de type simple plat, il nous semble logique de considérer que le mode d'imperfection entraînant un flambement global des raidisseurs est le mode prépondérant. Ce mode d'imperfection peut donc être étudié tout seul ou mieux accompagné par un mode d'imperfection des sous-panneaux. On en déduit aussi à travers de cette étude que le mode torsion des raidisseurs en simple plat est négligeable. C'est ce qui sera fait par la suite dans le processus de vérification par éléments finis.

### 2.2.2.2 Influence du coefficient d'aspect $\alpha$

Plusieurs simulations ont été effectuées en faisant varier la longueur de la plaque de 0,5 (plaque courte) à 4 (plaque longue) fois la largeur. Pour chaque configuration de plaque, on ne retient que la valeur ultime minimale de tous les modes d'imperfections ci-dessus. Il convient de souligner dans cette analyse, l'utilisation d'un nombre de demi-ondes de voilement à considérer dans le sens de la longueur de la plaque égal à la valeur de  $\alpha$ . Comme la ruine est conditionnée par le comportement global, Martin *et al.* [98] ont constaté une sensibilité (environ 10%) du résultat par rapport au nombre de demi-ondes définissant l'imperfection d'ensemble.

Les résultats sont reportés sur la figure 2.24 où la charge ultime est tracée en fonction du coefficient d'aspect de la plaque. Les deux courbes : bleue en bas et rouge en haut, sont les comportements de type plaque  $\rho$  et de type colonne  $\chi_c$  calculés respectivement selon la démarche Eurocode.

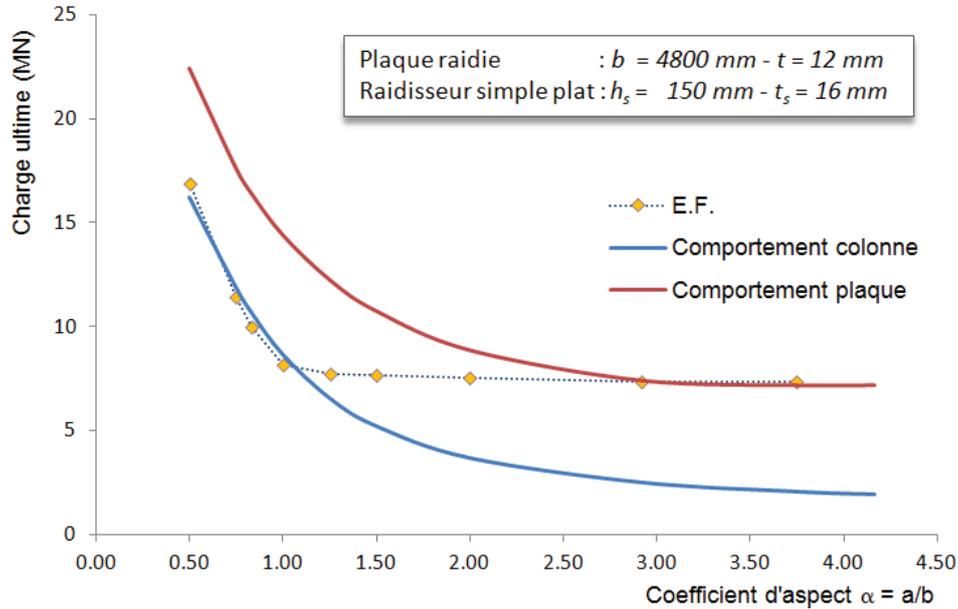


FIGURE 2.24 – Evolution de la charge ultime par rapport le coefficient d'aspect  $\alpha$

Les points en jaune représentent les résultats numériques. La ligne pointillée reliant ces points numériques interpole l'évolution de la charge ultime. Il est aisément constaté que, pour une plaque courte, les points se trouvent sur la courbe de type colonne, le comportement s'approche du comportement de type colonne. En augmentant la valeur du coefficient d'aspect, ces points s'écartent de plus en plus de la courbe de comportement de colonne et convergent vers le comportement de type plaque pour une plaque suffisamment longue. La notion de plaque longue ou courte est cependant difficile à déterminer. Ces deux courbes (colonne et plaque) constituent donc les bornes supérieures et inférieures du comportement réel de la plaque raidie. C'est la raison pour laquelle, l'utilisation seule d'une approche, telle qu'elle est développée dans les normes DNV [48] ou API [14], de type colonne est trop sévère pour les plaques longues et l'utilisation seule de la théorie des plaques orthotropes surévalue la résistance ultime des plaques courtes.

De plus, dans cette analyse, il est constaté que pour de grandes valeurs du coefficient d'aspect, la courbe d'évolution de la charge ultime tend asymptotiquement vers une ligne horizontale : la résistance ultime devient une constante. Cette remarque, constatée dans le travail d'André *et al.* [12] semble représenter l'évolution typique du comportement ultime des plaques raidies multiples (nombre des raidisseurs plus grand que trois tel indiqué dans l'EN 1993-1-5).

Les figures 2.25 à 2.27 présentent la distribution des contraintes à l'instant de la ruine.

Les zones en rouge indiquent les zones plastifiées où les contraintes atteignent la limite d'élasticité  $f_y$ .

a Plaque courte ( $\alpha = 0,5$ ) - Figure 2.25

Les zones plastifiées (en rouge) se trouvent seulement sur les raidisseurs. La plaque de fond ne retient qu'une petite partie du chargement. Un comportement de type colonne est donc identifié dans ce cas.

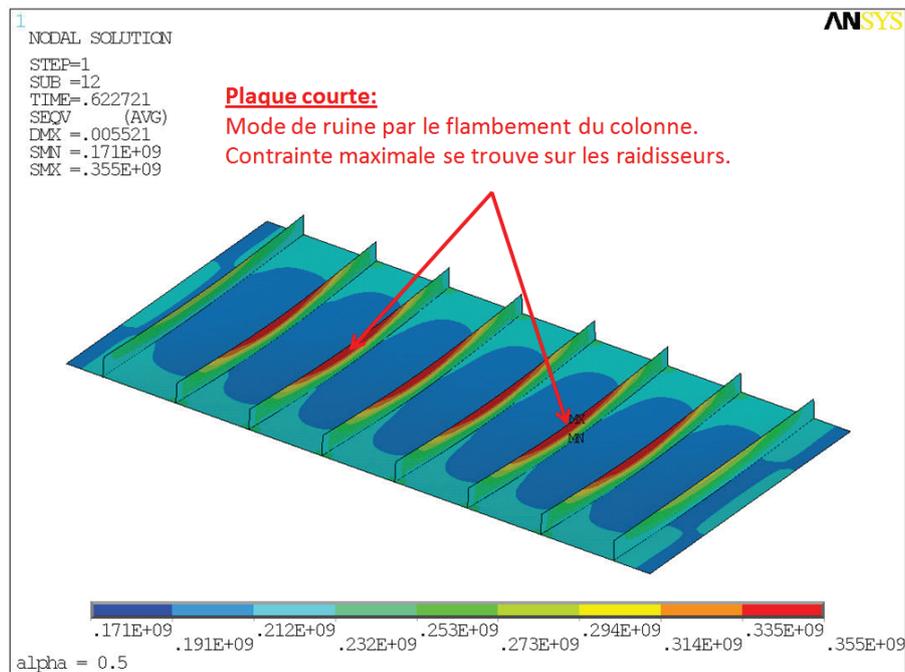


FIGURE 2.25 – Mode de ruine de type colonne

b Plaque intermédiaire ( $\alpha = 1,5$ ) - Figure 2.26

Les zones plastifiées se trouvent à la fois au milieu des raidisseurs et le long des deux bords non-chargés. La partie centrale de la plaque de fond n'est pas capable de reprendre le chargement (contrainte de 1 à 100 MPa). Cette distribution de contrainte est due à l'interaction du mode de ruine de type colonne (flambement de la partie centrale) et de type plaque (redistribution du chargement le long des deux bords longitudinaux).

c Plaque longue ( $\alpha = 3,75$ ) - Figure 2.27

Dans ce dernier cas, les zones plastifiées se trouvent seulement le long des deux bords non-chargés. La déformée de la plaque prend la forme d'une cloche, la déformation dans la partie centrale des raidisseurs est presque identique l'un à l'autre.

On a montré dans cette partie, l'influence du coefficient d'aspect  $\alpha$  sur le comportement réel des plaques raidies. Pour une section transversale identique de la plaque raidie, son comportement est proche d'un comportement de type colonne pour les plaques courtes et converge vers un comportement de type plaque pour les plaques longues. L'utilisation

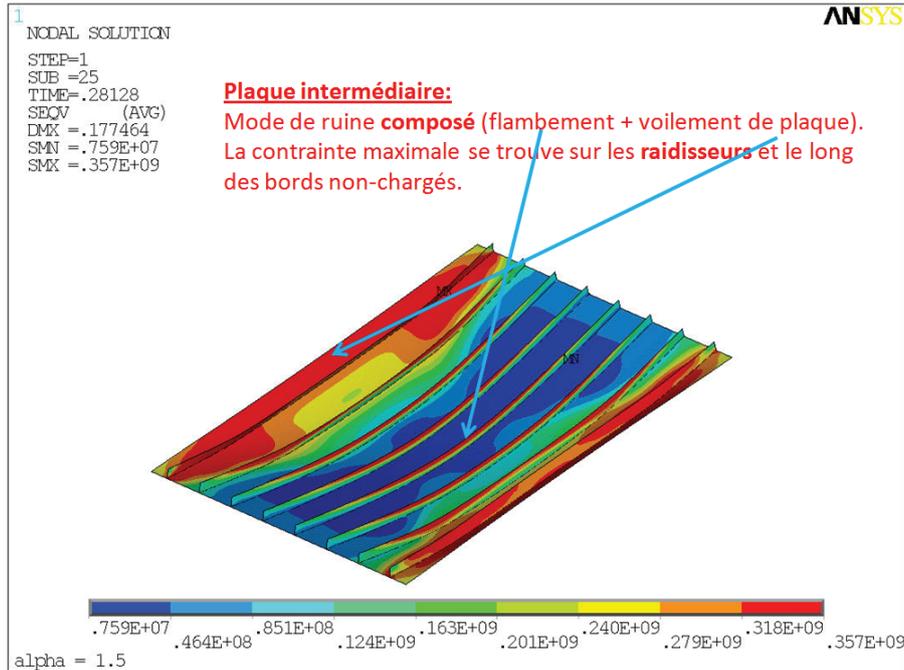


FIGURE 2.26 – Mode combinaison de ruine : Interaction de type colonne et plaque

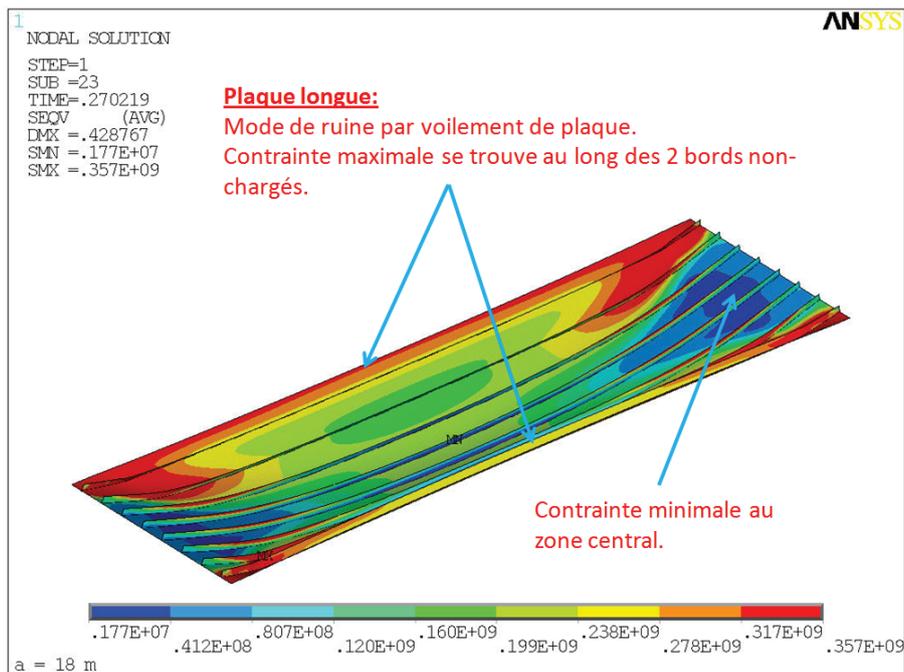


FIGURE 2.27 – Mode de ruine de type plaque

seul d'une approche de type colonne ou de type Plaque, adoptée aux normes DNV ou API, n'est donc pas générale. C'est ce qui a conduit à la définition d'un comportement interpolé dans la démarche de l'Eurocode (c.f 2.2.2.4).

### 2.2.2.3 Influence de la rigidité du raidisseur

La figure 2.17 a montré que la rigidité du raidisseur est un paramètre important dans la détermination de mode de voilement élastique. Il semble par ailleurs logique que la résistance de la plaque soit augmentée proportionnellement à la rigidité du raidisseur. C'est pourquoi les raidisseurs en simple plat sont remplacés par des raidisseurs en T dans ce paragraphe. Leur section a été choisie de sorte que leur aire soit la même mais leur moment d'inertie différent (c.f figure 2.28). Comme les semelles des raidisseurs sont mises loin de l'axe neutre, les raidisseurs en T apportent plus d'inertie de flexion par rapport ceux en simple plat pour une quantité de matière égale.

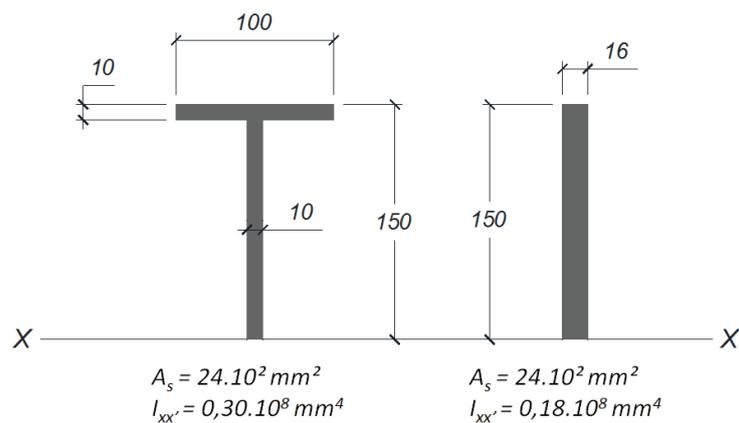


FIGURE 2.28 – Type des raidisseurs

Les résultats des simulations sont présentés à la figure 2.29 qui trace la charge ultime en fonction du coefficient d'aspect. La courbe bleue correspond au comportement de plaques raidies par des raidisseurs en simple plat et la courbe rouge à celles raidies par des raidisseurs en T. Les résultats dans le cas des raidisseurs en T ont la même allure que ceux en simple plat. La courbe rouge est juste une translation de la courbe bleue vers le haut, ce qui veut dire que les raidisseurs en T apportent une résistance ultime plus grande. Si on considère que le prix de la structure provient seulement du prix de l'acier, et que l'on oublie le prix de fabrication, les deux types de raidisseur étudiés ici ont le même prix (leur section transversale est identique) mais l'utilisation d'un raidisseur en T est beaucoup plus performante que celle d'un raidisseur en simple plat (le gain est de l'ordre de 40% de la charge de ruine pour  $\alpha = 1$ ).

On remarque également figure 2.29 que le point de déviation du comportement de colonne (déviations vers une ligne horizontale) dans le cas des raidisseurs en T est retardé quand le coefficient d'aspect devient plus grand. Cela veut dire que plus les raidisseurs sont rigides, plus le comportement de type colonne est dominant.

On en déduit naturellement que dans le cas inverse, où les raidisseurs ont une faible rigidité, la courbe du comportement est transposée vers le bas et tend vers la courbe des plaques non-raidies (courbe verte). L'étude de vérification est effectuée pour le cas où la

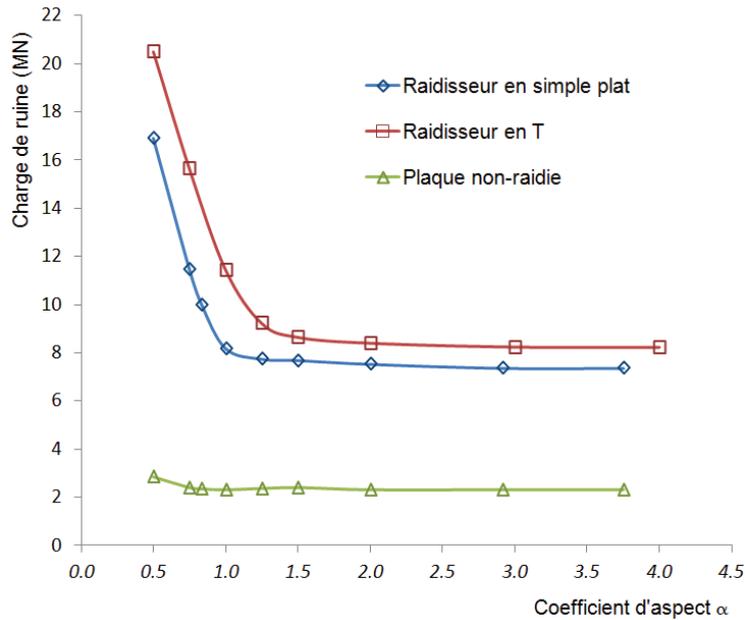


FIGURE 2.29 – Influence de la rigidité du raidisseur à la charge ultime

hauteur du raidisseur est assimilée à une valeur nulle  $h_s \rightarrow 0 \text{ mm}$ . Les autres dimensions de la plaque raidie sont maintenues constantes. Les résultats de la figure 2.30 montrent que l'application de la démarche de l'EN 1993-1-5 d'une plaque raidie en cas d'absence de raidisseurs ne donne pas un résultat concordant avec le modèle de plaque non-raïdie de l'Eurocode. Les deux approches ont la même allure mais l'approche de plaque raidie surestime la capacité réelle de la plaque. Ce résultat, insécuritaire, vient du fait que le modèle de résistance des plaques raidies de l'EN 1993-1-5 a été calibré en supposant que les raidisseurs sont suffisamment rigides et que le coefficient de réduction dû au voilement global n'affecte pas la partie adjacente aux bords. Ce risque d'une surévaluation de la résistance ultime est aussi constaté dans le travail de Martin *et al.* [98].

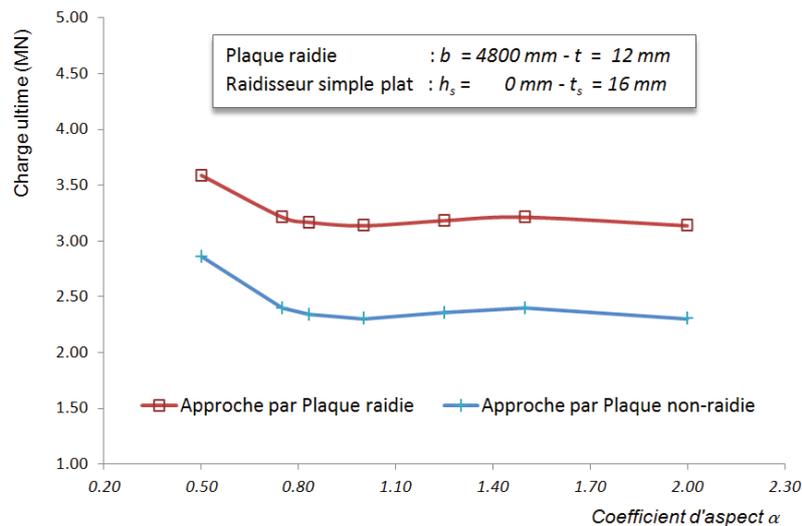


FIGURE 2.30 – Risque de sur-évaluation de l'approche plaque raidie pour une plaque non-raïdie

### 2.2.3 Influence de la forme d'interpolation

La démarche de l'Eurocode propose d'évaluer la contrainte ultime des plaques raidies lorsque le comportement de celle-ci présente à la fois des propriétés de type colonne et de type plaque. Le coefficient de réduction global de la tôle raidie est calculé par une interpolation du second degré entre l'efficacité  $\rho$  pour le comportement de type plaque et l'efficacité  $\chi_c$  pour le comportement de type colonne :

$$\rho_c = \chi_c + (\rho - \chi_c) (2 - \zeta_c) \zeta \quad (2.13)$$

$\zeta$  est le facteur qui mesure l'importance des contraintes critiques relatives à chaque comportement l'une par rapport à l'autre :

$$\zeta = \frac{\sigma_{cr,p}}{\sigma_{cr,c}} - 1. \quad (2.14)$$

Le résultat de l'interpolation est présenté à la figure 2.31 où la résistance ultime est reportée en fonction du coefficient d'aspect  $\alpha = \frac{a}{b}$ . L'interpolation de l'Eurocode (courbe verte) est capable de prédire correctement la charge ultime pour les plaques courtes ( $\alpha < 1$ ) et longues ( $\alpha > 3$ ). Cependant, dans la zone intermédiaire, l'interpolation de l'Eurocode est trop sévère (côté sécurité) : elle sous-estime la capacité réelle de la plaque jusqu'à 50% ( $\alpha = 2$  par exemple). En outre, cette interpolation a également l'inconvénient d'être non-monotone contrairement au cas des plaques ou des colonnes.

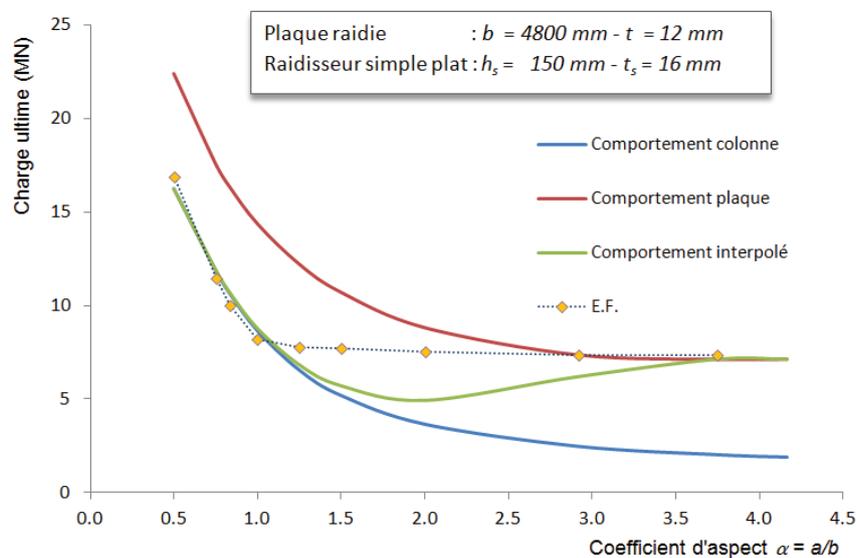


FIGURE 2.31 – Interpolation du comportement ultime

### 2.2.4 Conclusion

A ce stade, notre analyse sur la démarche de l'Eurocode EN 1993-1-5, via la comparaison avec le modèle aux E.F nous amène aux conclusions suivantes :

- Pour la détermination de la contrainte critique de voilement, l'expression donnée par l'annexe A de l'Eurocode EN 1993-1-5 donne des valeurs très cohérentes avec celles obtenues par éléments finis. Cependant, certains travaux (De Ville De Goyet *et al.* [47]) montrent que l'utilisation de cette valeur théorique peut conduire à surévaluer le comportement de plaque raidie, et en conséquence utiliser une valeur critique plus petite (par exemple pour EBPlate, la largeur effective est plus petite que l'espacement des raidisseurs).
- Le comportement d'une plaque raidie s'approche du comportement de type colonne si la plaque est courte et converge vers le comportement de type plaque si la plaque est longue. L'utilisation d'un comportement interpolé proposé par la démarche de l'Eurocode semble plus correcte que celle de DNV ou API où un seul type de comportement est considéré. Le domaine d'utilisation de la démarche de l'Eurocode est par conséquent plus large.
- La formule interpolée a pourtant des défauts : l'interpolation est sévère pour les plaques de longueur intermédiaire et son évolution est non-monotone.
- L'hypothèse d'un appui rigide assurée par les raidisseurs et d'un coefficient de réduction qui n'affecte pas la partie aux bords, devient insécuritaire dans le cas de raidisseurs de faible rigidité.

Ces défauts mentionnés ci-dessus donnent suite à des recommandations dans la prochaine section.

## 2.3 RECOMMANDATIONS POUR UNE AMÉLIORATION DE LA DÉMARCHE DE L'EUROCODE

Compte tenu des différentes remarques relevées à la section précédente, ce paragraphe a l'objectif de donner des recommandations afin de faciliter l'application de la démarche de l'Eurocode tout en assurant une bonne sécurité dans la pratique quotidienne. Les recommandations portent essentiellement sur les trois aspects suivants : la contrainte critique de voilement, l'expression du comportement interpolé et le traitement dans le cas des raidisseurs de faible rigidité.

### 2.3.1 Contrainte critique de voilement

Selon les études préliminaires par éléments finis de la section précédente, les différentes méthodes pour évaluer la contrainte critique de voilement ne donnent pas le même résultat : l'écart peut atteindre jusqu'à 22%. Afin de pouvoir donner des recommandations pour faciliter l'application de la démarche de l'Eurocode, il convient de revenir sur les théories de base des différentes méthodes proposées, à savoir la méthode analytique de l'EN 1993-1-5 et la méthode de EBPlate.

Les équations proposées dans l'annexe A de l'EN 1993-1-5 sont obtenues à l'aide de la

théorie des plaques orthotropes équivalentes. Maquoi et Massonnet [94] sont considérés comme les pères fondateurs de cette théorie. Bien évidemment, comme toute nouvelle théorie dans un domaine relativement inexploré, la proposition de Maquoi et Massonnet [94] a des inconvénients, par exemple aucune distinction de la direction de voilement n'est faite. Le travail de Jetteur [76] complète ce manque, sa proposition, adoptée dans l'annexe A de l'EN 1993-1-5, s'exprime dans le cas d'une compression uniforme comme suit :

$$k_{\sigma,p} = \begin{cases} \frac{(1 + \alpha^2)^2 + \gamma - 1}{\alpha^2 (1 + \delta)} & \text{si } \alpha \leq \sqrt[4]{\gamma} \\ \frac{2(1 + \sqrt{\gamma})}{(1 + \delta)} & \text{si } \alpha \geq \sqrt[4]{\gamma} \end{cases} \quad (2.15)$$

où  $k_{\sigma,p}$  est le coefficient de voilement,  $\alpha = \frac{a}{b}$  est le coefficient d'aspect,  $\delta = \frac{A_{sl}}{A}$  est le rapport de la section des raidisseurs à la section de plaque de fond et  $\gamma = \frac{I_{sl}}{I_p}$  est la rigidité flexionnelle relative des raidisseurs.

Le moment d'inertie  $I_{sl}$  utilisé dans ce calcul correspond à l'inertie de flexion totale de la plaque raidie. Si les raidisseurs sont identiques et sont régulièrement espacés, le calcul du moment d'inertie de la plaque raidie peut se réduire au calcul d'une section représentative se composant d'un raidisseur seul et d'une partie collaborante de la plaque de fond. Cette largeur participante est égale à l'espacement des raidisseurs d'après l'Eurocode (Figure 2.32) :

$$b_{1,inf} = \frac{3 - \psi}{5 - \psi} = \frac{b_1}{2} \quad (2.16)$$

dans le cas d'une compression uniforme ( $\psi = 1$ ) où  $b_1$  est l'espacement des raidisseurs.

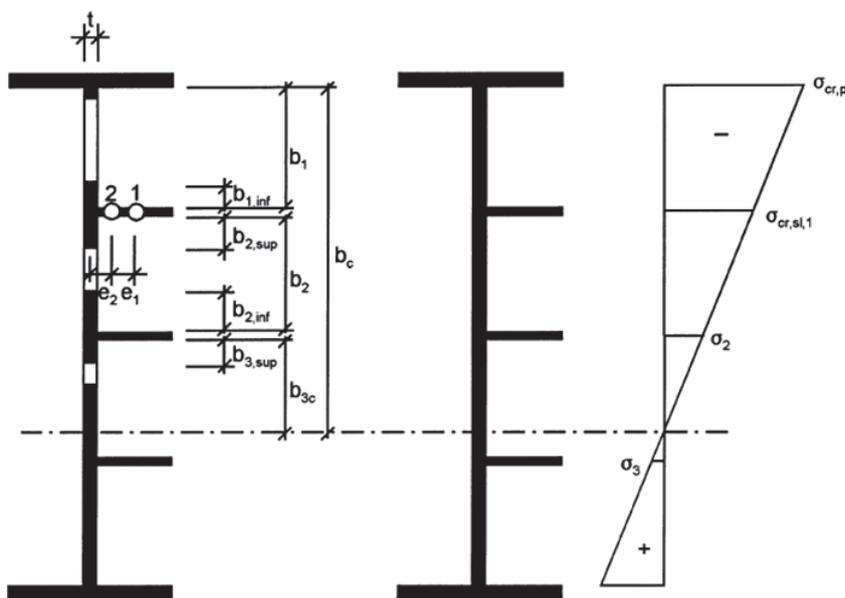


FIGURE 2.32 – Notations relatives aux plaques raidies longitudinalement

Dans la méthode de résolution par EBPlate, la contrainte critique de voilement est obtenue par une méthode énergétique (principe de minimisation l'énergie potentielle comme

dans le travail de Klöppel (Galéa [61])). Cependant, ce logiciel ne considère qu'une petite partie de la largeur collaborante, ce qui engendre la différence avec la solution analytique dans l'annexe. Dans le logiciel EBPlate, après calibration par des simulations numériques, cette largeur effective est prise égale à 10 fois l'épaisseur de la plaque de fond. Les résultats montrent que la largeur effective n'est pas identique pour toutes les configurations étudiées (voir détail de l'analyse dans Martin et Galéa [99]). Néanmoins, une valeur de 10 fois l'épaisseur de la plaque semble être plus appropriée et est ensuite intégrée dans le logiciel EBPlate.

En appliquant ces définitions de la largeur collaborante dans notre exemple, la largeur effective dans EBPlate est égale à  $2 \cdot t_p + t_s = 240 \text{ mm}$ . Cette valeur est nettement inférieure à la valeur de l'annexe A de l'EN 1993-1-5 (espacement des raidisseurs égal à  $600 \text{ mm}$ ), ce qui conduit donc à un coefficient de voilement plus petit. En utilisant la largeur effective d'EBPlate dans la formule de l'Eurocode, on obtient donc les valeurs prédites par EBPlate. Les résultats sont affichés à la figure 2.33 où les points se trouvent sur la diagonale. Ces résultats permettent de conclure que l'écart entre EBPlate et la théorie de l'EN 1993-1-5 est dû seulement à l'hypothèse qui est faite sur la largeur effective, et non à la méthode de résolution.

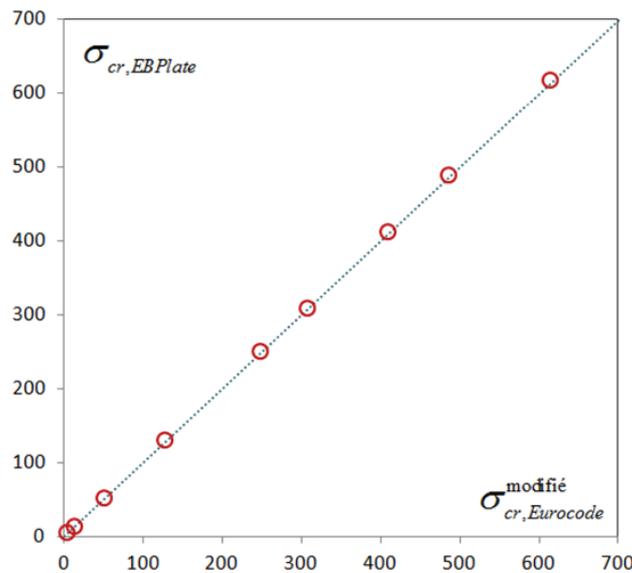


FIGURE 2.33 – Comparaison de la contrainte critique du logiciel EBPlate après correction de la largeur effective

Il est enfin utile de mentionner l'expression analytique de l'inertie flexionnelle du raidisseur car celle-ci n'est pas indiquée dans Eurocode. Ce moment d'inertie est calculé par rapport à son axe propre passant par le centre de gravité de la section composée (figure 2.34). L'inertie d'un raidisseur est donné par :

$$I_s = \frac{t_s h_s^3}{12} + t_s h_s \left( \frac{h_s}{2} + \frac{t_p}{2} - Z_G \right)^2 + \frac{dt_p^3}{12(1-\nu^2)} + dt_p Z_G^2 \quad (2.17)$$

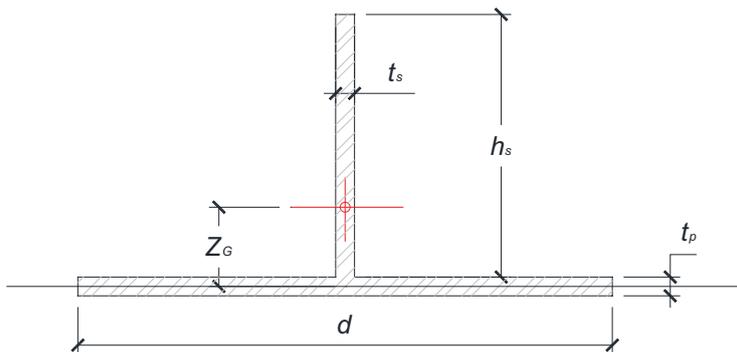


FIGURE 2.34 – Caractéristique géométrique d'une section représentative : raidisseur + largeur collaborante

Les deux premiers termes correspondent à l'inertie d'un raidisseur seul et les deux derniers termes à la participation de la plaque. Néanmoins dans la démarche du logiciel EBPlate, seul le terme de transport ( $dt_p Z_G^2$ ) est pris en considération. En effet, le bilan d'énergie est calculé d'une part par la plaque de fond et d'autre part par le raidisseur avec une largeur de plaque collaborante. En conséquence, le terme du moment d'inertie propre de la plaque ( $\frac{dt_p^3}{12(1-\nu^2)}$ ) devrait être supprimé. Le fait d'ajouter ou de supprimer ce terme du moment d'inertie propre n'a pas de grande influence pour les plaques raidies utilisées couramment dans les ouvrages d'art. Par exemple pour la plaque étudié dans l'annexe 1, ce terme est égal à  $864 \text{ mm}^4$ , soit 0,5% de l'inertie totale de la plaque raidie ( $I_s = 0,164 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ ). Cependant, l'effet de ce terme devient important dans le cas où il n'existe plus de raidisseurs pour assurer la continuité des deux approches. D'après l'expression de l'annexe A de l'EN 1993-1-5, en l'absence de raidisseurs, l'inertie  $I_s$  tend vers  $I_p$  donc  $\gamma = 1$ . L'expression du coefficient de voilement pour la plaque raidie converge par conséquent vers celle utilisée pour la plaque non-raïdie (c.f chapitre 1) :

$$k_\sigma = \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \quad (2.18)$$

Or avec la méthode de EBPlate si  $I_s$  tend vers 0, la valeur du coefficient du voilement  $k_c = 2$  est plus petite que la valeur minimale d'une plaque non-raïdie où  $k_c = 4$ .

En conclusion, malgré l'existence de la remarque de (De Ville De Goyet *et al.* [47]) pour lesquelles l'utilisation de la méthode théorique de l'annexe A peut conduire à une valeur insécuritaire sur la résistance ultime, l'expression de la contrainte critique dans l'Annexe A peut être utilisée pour son exactitude en comparaison aux éléments finis (moins de 5% d'écart). Le risque découvert par De Ville De Goyet *et al.* [47], selon notre avis, semble lié surtout à l'hypothèse forte des raidisseurs rigides que l'on présentera dans la suite.

### 2.3.2 Formule d'interpolation

Le comportement d'interpolation des plaques raidies est obtenu à l'aide du paramètre  $\xi$  :

$$\rho_c = \chi_c + (\rho - \chi_c) (2 - \xi_c) \xi \quad (2.19)$$

où  $\zeta$  est le facteur qui mesure l'importance des contraintes critiques relatives à chaque comportement l'un par rapport à l'autre :

$$\zeta = \frac{\sigma_{cr,p}}{\sigma_{cr,c}} - 1. \quad (2.20)$$

Cette forme d'interpolation a une évolution qui n'est pas monotone et devient trop sévère pour certaines plaques de longueur intermédiaire (voir figure 2.30). Les discussions dans cette section porteront sur deux aspects : le choix du paramètre  $\zeta$  et le choix de l'expression interpolée.

### 2.3.2.1 Justification du choix du paramètre $\zeta$

La contrainte critique de flambement peut être écrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{cr,c} &= \frac{\pi^2 E I_{sl}}{A a^2} = \underbrace{\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{t^2}{b^2}}_{\sigma_E} \underbrace{\frac{I_{sl}}{b t^3 / 12(1-\nu^2)}}_{\gamma} \underbrace{\frac{b^3 t}{A a^2}}_{\frac{1}{a^2} \frac{1}{1+\delta}} \\ &= \sigma_E \frac{\gamma}{a^2(1+\delta)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

La contrainte critique du comportement de type Plaque s'est exprimée comme suit :

$$\sigma_{cr,p} = \sigma_E k_{\sigma,p} \quad (2.22)$$

avec

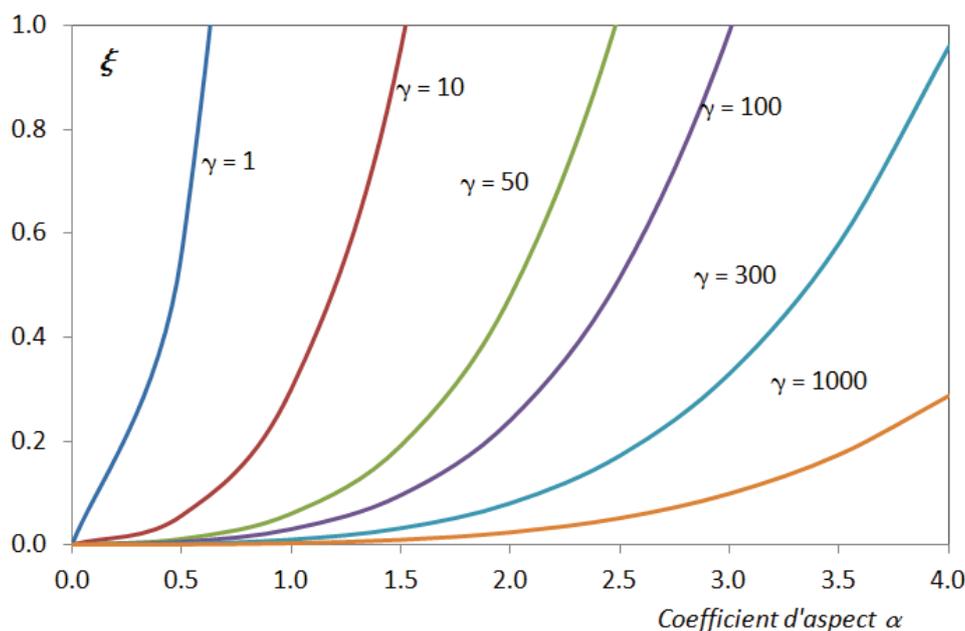
$$k_{\sigma,p} = \begin{cases} \frac{(1+\alpha^2)^2 + \gamma - 1}{\alpha^2(1+\delta)} & \text{si } \alpha \leq \sqrt[4]{\gamma} \\ \frac{2(1+\sqrt{\gamma})}{(1+\delta)} & \text{si } \alpha \geq \sqrt[4]{\gamma} \end{cases} \quad (2.23)$$

En remplaçant les expressions des contraintes 2.21 et 2.23 dans l'équation 2.19, le coefficient  $\zeta$  peut s'exprimer en fonction du coefficient d'aspect  $\alpha$  :

$$\zeta = \begin{cases} \frac{(1+\alpha^2)^2 - 1}{\gamma} & \text{si } \alpha \leq \sqrt[4]{\gamma} \\ \frac{2(1+\sqrt{\gamma})}{\gamma} \alpha^2 - 1 & \text{si } \alpha \geq \sqrt[4]{\gamma} \end{cases} \quad (2.24)$$

On en déduit que la valeur théorique de  $\zeta$  est strictement positive, quelle que soit la valeur de  $\alpha$  et de  $\gamma$ . Cette remarque correspond au fait que la contrainte critique de plaque est plus élevée que la contrainte critique de colonne, ce qui est physiquement correct puisque la contrainte critique de colonne ne prend pas en compte l'effet favorable de la condition de maintien des bords.

On trace ensuite l'évolution de  $\zeta$  par rapport aux deux paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  (Figure 2.35). Plusieurs valeurs de  $\gamma$  sont étudiées : lorsque  $\gamma = 1$ , la plaque est non raidie, tandis que  $\gamma = 5$  ou 10 signifie une plaque légèrement raidie,  $50 \leq \gamma \leq 200$  est une plaque normalement rigide et des valeurs plus grandes de  $\gamma$  représentent les plaques fortement raidies.

FIGURE 2.35 – Evolution du coefficient  $\xi$  en fonction de  $\alpha$  et  $\gamma$ 

Le paramètre  $\xi$  varie paraboliquement avec le coefficient d'aspect  $\alpha$ . Pour les petites valeurs du rapport d'aspect  $\alpha$ , le paramètre  $\xi$  est proche de 0, le comportement de type colonne est donc dominant. Dans le cas d'une plaque non-raïdie ( $\gamma = 1$ ), le coefficient  $\xi$  augmente rapidement et atteint la valeur limite 1 pour  $\alpha = 0,7$ . Cela signifie que pour toutes valeurs de  $\alpha > 0,7$ , une plaque non raïdie aura un comportement de type plaque. Quant aux plaques légèrement raïdies, le comportement de type plaque prévaut lorsque  $\alpha$  se trouve entre 1,0 et 1,5. Des plaques normalement raïdies atteignent le comportement de plaque pour de grandes valeurs de  $\alpha$ , tandis que les plaques raïdies fortement restent dans le domaine du comportement de type colonne. Dans le domaine des ouvrages d'art, dans la plupart des cas, les plaques raïdies s'approchent du comportement de type colonne car les raidisseurs sont rigides et le coefficient d'aspect se trouve dans la fourchette de 0,8 à 1,5. Le choix du paramètre  $\xi$  semble donc correct et est retenu car il correspond à la physique du problème.

### 2.3.2.2 Choix de l'expression d'interpolation

L'inconvénient principal de l'expression Eurocode est dû à la sous-estimation de la capacité réelle de la plaque de longueur intermédiaire et que son évolution n'est pas monotone. C'est pourquoi Maquoi et De Ville De Goyet [93] ont proposé une expression alternative pour le coefficient de réduction :

$$\rho_c = \max(\chi_c, \rho_\infty) \quad (2.25)$$

$\rho_\infty$  est la valeur minimale de  $\rho$  correspondant à la valeur de  $\sigma_{cr,p}$  quand le coefficient d'aspect  $\alpha \geq \alpha_{lim} = \sqrt[4]{\gamma}$ . Cette proposition corrige bien l'écart due à la formule actuelle de l'Eurocode (figure 2.36).

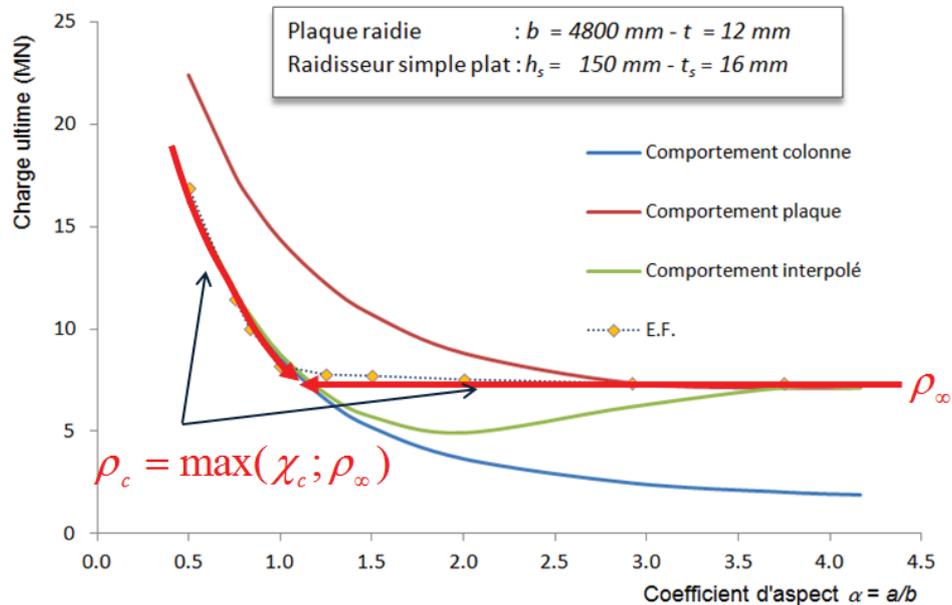


FIGURE 2.36 – Proposition de Maquoi et De Ville De Goyet [93]

Grâce à sa meilleure précision, la proposition par l'équation 2.24 a été déjà prise en compte dans la version provisoire du nouvel EC XP ENV 1993-1-5 (version publiée en Décembre 2000). Cependant, elle a été retirée de la dernière version officielle (version 2007). Pour cette raison, on mène dans ce travail une recherche sur la forme d'interpolation similaire à celle de l'Eurocode, qui servira aussi pour la prochaine étude sur les tôles courbes raidies. Posons  $Y = \frac{\rho_{E.F.} - \chi_c}{\rho - \chi_c}$ . On recherche ensuite la liaison entre  $Y$  et  $\zeta$ . La figure 2.37 présente toutes les valeurs numériques de  $Y$ , issues des études paramétriques ci-dessus, en fonction de  $\zeta$ . On en déduit d'abord que  $Y$  sera une fonction non-linéaire de  $\zeta$ , qui vérifie les deux conditions aux limites :  $Y = 0$  si  $\zeta = 0$  et  $Y \rightarrow 1$  si  $\zeta > 1$ .

La distribution des points numériques de la figure 2.37 suggère une expression de la forme :

$$X^n + Y^n = 1 \quad (2.26)$$

avec  $X = 1 - \zeta$  (changement des abscisses). Trois courbes pour les valeurs de  $n$  égales : 1, 2 et 3 sont présentées sur la figure 2.37. On ajoute aussi la courbe d'interpolation de l'Eurocode (courbe orange), qui se trouve en dessous des valeurs numériques pour prendre en compte une certaine la sécurité. Parmi ces courbes, l'interpolation quadratique ( $n = 2$ ) semble la plus appropriée. Cependant, il existe quand même quelques points en dessous de cette courbe. Une nouvelle expression est donc proposée sous la forme suivante :

$$Y = \frac{\rho_c - \chi_c}{\rho - \chi_c} = \frac{1}{0,95 + \frac{0,04}{\zeta} + \frac{0,01}{\zeta^2}} \quad (2.27)$$

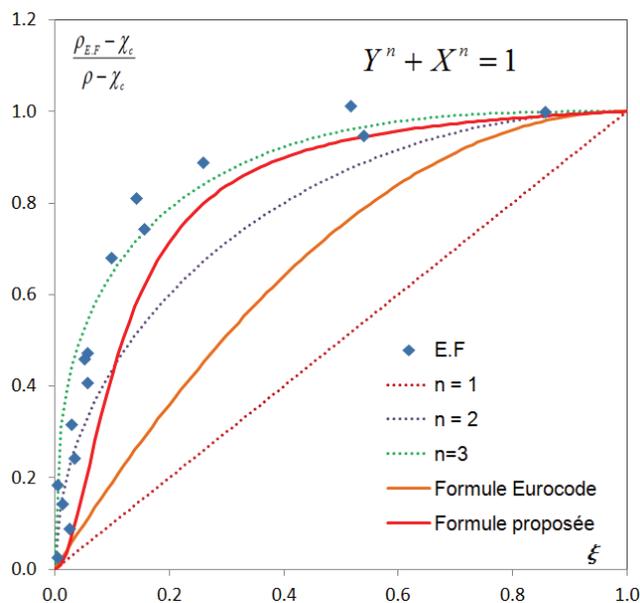


FIGURE 2.37 – Courbe d'interpolation

Cette courbe suit bien les points numériques. D'après le nouveau modèle, le coefficient de réduction d'une plaque raidie s'écrit donc :

$$\rho_c = \chi_c + (\rho - \chi_c) \frac{1}{0,95 + \frac{0,04}{\xi} + \frac{0,01}{\xi^2}} \tag{2.28}$$

Cette nouvelle proposition permet de corriger la moitié de l'écart par rapport à la proposition de l'Eurocode. Elle est donc retenue et sera utilisée dans la suite de ce travail.

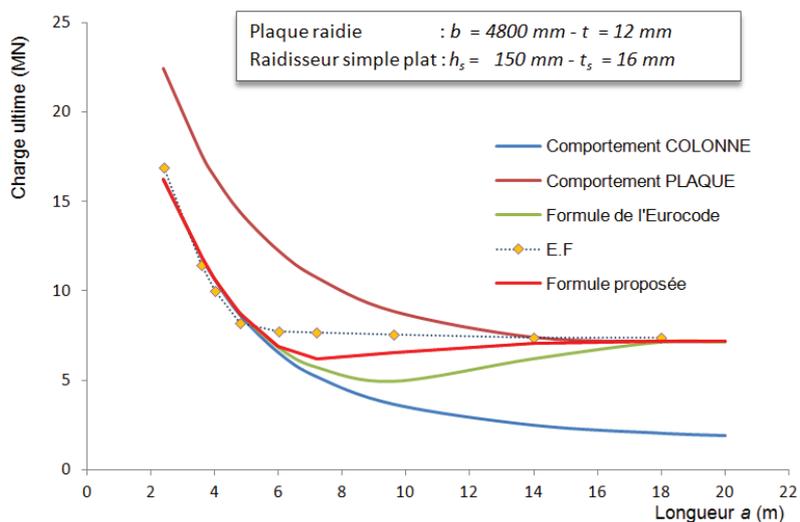


FIGURE 2.38 – Nouvelle expression d'interpolation

### 2.3.3 Raidisseur de faible rigidité

Comme on a vu à la section 2.2.2.3, l'utilisation du modèle de résistance d'une plaque raidie selon l'EN 1993-1-5 peut conduire à un risque de surévaluation de la charge ultime lorsque des raidisseurs de faible rigidité sont utilisés. Dans la pratique, ce problème a peu de chances d'apparaître car les raidisseurs sont conçus pour être très rigide afin de compenser un coût de mise en œuvre, qui est aussi important (par fois plus) que le prix de la fourniture de l'acier seul. Néanmoins, dans certains cas, il est probable que dans le cas d'une rénovation de structure ancienne, les raidisseurs soient de faible inertie. Intuitivement, la première solution est de considérer une plaque de faible taux de raidissage comme une plaque non raidie. Cependant, cette méthode est défavorable comme constatée sur la figure 2.39 (raidisseur de faible rigidité  $\gamma = EI_{sl}/bD = 13$ ) où l'approche de plaque non-raïdie sous-estime la résistance d'environ 30%.

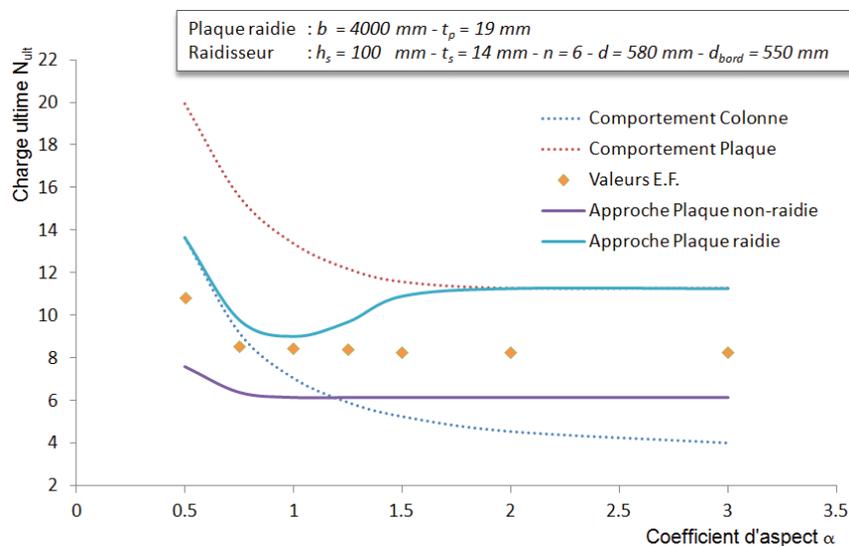


FIGURE 2.39 – Risque de surévaluation du modèle de résistance d'une plaque raidie

La figure 2.39 permet également de constater que les valeurs numériques se trouvent en dessous de la borne inférieure (ligne bleue pointillée), décrite par le comportement de type colonne, pour les petites valeurs de  $\alpha$  et ne convergent pas vers le comportement de type plaque (ligne rouge pointillée) pour des grandes valeurs de  $\alpha$ . Une idée pour améliorer le modèle est de diminuer la rigidité de la plaque raidie. Cette solution est envisageable en affectant un coefficient de réduction au moment d'inertie de la plaque raidie,  $I_{sl}$ , comme proposé par De Ville De Goyet *et al.* [47]. Plus les raidisseurs sont souples, plus le coefficient de réduction du moment d'inertie est important. En revanche, cette méthode nécessite de très nombreuses simulations pour pouvoir donner la bonne courbe d'approximation de l'inertie, car celle-ci doit être valable pour toutes les configurations de la plaque raidie. C'est la raison pour laquelle, on préfère adopter ici la proposition de Martin *et al.* [98].

En revenant sur la théorie du modèle de résistance de l'EN 1993-1-5 des plaques raidies,

Martin *et al.* [98] ont montré que l'origine de la surestimation de la résistance provient de l'utilisation d'une hypothèse implicite du modèle de l'EN 1993-1-5 qui suppose que la largeur efficace des plaques rattachées aux appuis soit indépendante de la rigidité des raidisseurs, hypothèse qui est prise en défaut quand les raidisseurs ont une faible rigidité. Une légère modification du modèle de résistance est proposée suite à cette remarque afin que le coefficient de voilement global,  $\rho_c$ , s'applique également aux parties situées aux bords pour le cas des plaques de faible taux du raidissage. Cette modification peut être réalisée par l'utilisation d'une valeur de contrainte critique naturelle,  $\sigma_{cr,nat}$ , pour évaluer la largeur effective aux bords. Elle a pour expression :

$$\sigma_{cr,nat} = \min(\sigma_{cr,p}; \sigma_{cr,sp}). \quad (2.29)$$

L'avantage de cette amélioration est qu'elle affecte seulement les plaques raidies par des raidisseurs souples. En effet, pour un raidisseur rigide,  $\sigma_{cr,p} > \sigma_{cr,sp}$ , le modèle modifié aboutit aux mêmes valeurs de résistance que le modèle actuel, ce qui permet d'en conserver la calibration. En revanche, pour un raidisseur souple, dont le mode de voilement naturel entraîne les raidisseurs dans la déformée modale ( $\sigma_{cr,nat} = \sigma_{cr,p} < \sigma_{cr,sp}$ ), l'éclatement réduit est augmenté et par conséquent la largeur effective au bord réduite.

Par cette modification, on arrive à pallier le risque de surévaluation du modèle de résistance d'une plaque raidie de l'EN 1993-1-5 pour le cas des plaques de faible taux du raidissage (c.f figure 2.40). Il faut remarquer par ailleurs que le grand écart observé dans le cas des plaques de longueur intermédiaire peut être corrigé par l'utilisation de l'interpolation de Maquoi et De Ville De Goyet [93].

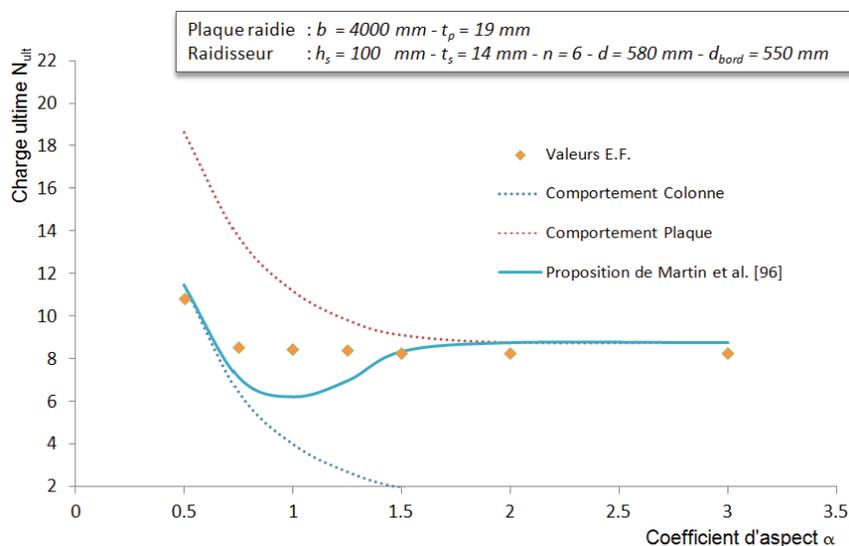


FIGURE 2.40 – Solution modifiée

## 2.4 CONCLUSION

L'évaluation de la démarche de l'Eurocode EN 1993-1-5 par la méthode des éléments finis pour les plaques raidies sous compression longitudinale a été présentée dans ce chapitre. Il s'agit d'un problème complexe dans lequel plusieurs paramètres interviennent. L'étude numérique a montré que le comportement réel peut être à la fois : un comportement de type colonne et de type plaque, selon la rigidité du raidisseur et le coefficient d'aspect de la plaque. L'approche proposée par l'EN 1993-1-5 permet en général d'évaluer la résistance ultime des plaques raidies avec une précision acceptable. Néanmoins, quelques difficultés ont été identifiées et des recommandations pour l'ingénieur ont été données pour y remédier :

- Le moment d'inertie total  $I_{sl}$  de la plaque raidie, pour lequel le coefficient de voilement est évalué, est calculé en considérant toute la section de la plaque. Dans le cas où les raidisseurs sont identiques et régulièrement espacés, le calcul de  $I_{sl}$  peut être effectué sur le modèle réduit composé d'un raidisseur seul et d'une largeur participante égale à l'espacement des raidisseurs.
- Le calcul du moment d'inertie  $I_{sl}$  devrait prendre en compte le terme du moment propre de la plaque (i.e le terme  $\frac{bt^3}{12(1-\nu^2)}$  de l'équation 2.16) pour que la solution théorique de l'EN 1993-1-5 annexe A soit cohérente avec la théorie des plaques non-raidies (cas où on fait tendre les raidisseurs vers zéro).
- Pour le calcul de la contrainte critique de voilement global de type plaque, la formule théorique peut être utilisée pour le cas où les plaques ont des raidisseurs multiples :  $n \geq 3$ . Cette expression est capable de prédire correctement la valeur critique de voilement d'une plaque raidie en comparaison avec la méthode des éléments finis.
- Dans le cas où la plaque n'est pas dans le domaine de validité de l'annexe A de l'EN 1993-1-5 (par exemple lorsque le chargement est complexe ou lorsque les raidisseurs ne sont pas espacés régulièrement), le logiciel EBPlate ou un calcul par E.F. peut être utilisé en alternative. Toutefois, il faut bien prendre conscience que la valeur donnée par EBPlate est très sévère car ce logiciel ne considère qu'une petite valeur de largeur participante (qui est égale à 10 fois l'épaisseur de la tôle pour chaque côté).
- La courbe de transition proposée par l'Eurocode est sévère pour les plaques se trouvant dans la zone de transition d'une plaque courte à une plaque longue. Il convient d'utiliser l'interpolation de Maquoi et De Ville De Goyet [93],  $\rho_c = \max(\chi_c, \rho_\infty)$ . Cette proposition, dans le cadre des plaques raidies multiples, est la solution optimale car elle suit parfaitement les résultats numériques.
- Cependant, pour les tôles courbes raidies que l'on verra au chapitre 4, la déviation du comportement de colonne vers le comportement de plaque est plus lisse et moins brutale (c.f figure 4.22) que dans le cas des plaques raidies. L'utilisation de la proposition de Maquoi et De Ville De Goyet [93] est donc moins intéressante. C'est pourquoi une nouvelle forme d'interpolation a été proposée ici :

$$\rho_c = \chi_c + (\rho - \chi_c) \frac{1}{0,95 + \frac{0,04}{\xi} + \frac{0,01}{\xi^2}} \quad (2.30)$$

- Dans le cas où les raidisseurs sont de faible inertie, l'hypothèse de base d'un appui rigide, assuré par les raidisseurs, de la démarche d'Eurocode n'est pas satisfaite. L'utilisation de cette démarche peut conduire à des résultats insécuritaires. Dans ce cas, il suffit d'adopter la proposition de Martin *et al.* [98], qui consiste à calculer la section efficace aux bords à l'aide d'une contrainte critique égale à :

$$\sigma_{cr,nat} = \min(\sigma_{cr,p}; \sigma_{cr,sp}). \quad (2.31)$$

où  $\sigma_{cr,p}$  est la contrainte critique de voilement global de plaque raidie et  $\sigma_{cr,sp}$  est la contrainte critique du sous-panneau.

Toutes ces recommandations seront prises en compte dans l'étude des tôles courbes raidies.



# TÔLES CYLINDRIQUES NON-RAIDIES

## SOUMISES À UNE COMPRESSION

### LONGITUDINALE

# 3

#### SOMMAIRE

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 3.1   | GÉNÉRALITÉS SUR LES TÔLES COURBES . . . . .                                | 75  |
| 3.1.1 | Etat de l'art . . . . .  | 75  |
| 3.1.2 | Comportement des éléments courbes . . . . .                                | 76  |
| 3.1.3 | Choix du paramètre de courbure . . . . .                                   | 78  |
| 3.2   | MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS . . . . .                                  | 81  |
| 3.2.1 | Type d'éléments . . . . .  | 81  |
| 3.2.2 | Construction de la géométrie du modèle d'éléments finis . . . . .          | 82  |
| 3.2.3 | Conditions aux limites . . . . .   | 83  |
| 3.3   | COMPORTEMENT CRITIQUE DE VOILEMENT ÉLASTIQUE LINÉAIRE . . . . .            | 85  |
| 3.3.1 | Généralités sur le voilement des tôles courbes . . . . .                   | 85  |
| 3.3.2 | Expression de la contrainte de voilement . . . . .                         | 87  |
| 3.4   | ÉTUDE NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT ULTIME . . . . .                           | 91  |
| 3.4.1 | Influence de la forme des imperfections . . . . .                          | 93  |
| 3.4.2 | Etude paramétrique . . . . .   | 96  |
| 3.5   | COURBE CARACTÉRISTIQUE DE VOILEMENT . . . . .                              | 97  |
| 3.5.1 | Par modification de l'EN 1993-1-5 . . . . .                                | 98  |
| 3.5.2 | Par modification de l'EN 1993-1-6 . . . . .                                | 104 |
| 3.5.3 | Comparaison des deux approches . . . . .                                   | 107 |
| 3.6   | COEFFICIENT DE SÉCURITÉ . . . . .  | 111 |
| 3.6.1 | Etat de l'art . . . . .  | 111 |
| 3.6.2 | Principe d'évaluation . . . . .  | 112 |
| 3.6.3 | Evaluation du coefficient de sécurité sur le modèle $n^{\circ}1$ . . . . . | 114 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 3.7 CONCLUSION . . . . . | 114 |
|--------------------------|-----|

**L**ES tôles courbes sont de plus en plus fréquemment utilisées dans le domaine des ouvrages d'art à la fois pour raisons esthétiques mais aussi pour leurs performances mécaniques. Leur dimensionnement vis-à-vis de la stabilité au voilement est cependant rendu difficile par l'absence de méthode dédiée dans les normes européennes. Ce chapitre vise donc à développer une méthode simplifiée de dimensionnement.

La méthodologie utilisée est basée sur la démarche générale de l'Eurocode 3 pour tous les types de vérifications de stabilité. De nombreuses simulations numériques ont été menées, d'abord pour identifier l'influence de la courbure et puis pour alimenter une base de données sur les panneaux courbes. Celle-ci a ensuite été utilisée pour la mise au point de formules semi-empiriques pour l'évaluation de la charge critique de voilement élastique et de la résistance ultime. Ces propositions serviront aussi dans la démarche de vérification des tôles courbes raidies. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de deux publications dans des journaux de constructions métalliques (Tran *et al.* [148, 149]).

## 3.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES TÔLES COURBES

### 3.1.1 Etat de l'art

Les publications académiques relatives aux panneaux courbes ne sont pas si nombreuses en comparaison de celles consacrées aux plaques planes ou aux coques de révolution. Sur le plan chronologique, elles peuvent être divisées en deux périodes principales. La première période qui commence au début des années 30, est caractérisée par le fait que les auteurs assimilent la charge critique de voilement et la charge ultime du panneau. Cette hypothèse repose sur l'idée que les panneaux courbes sont des portions de cylindre de révolution et que leur comportement devrait donc ressembler à celui des cylindres. C'est dans le cadre de cette hypothèse que sont élaborées les deux premières expressions analytiques de leur résistance ultime par Redshaw [115] et Timoshenko et Gere [147]. Ces expressions sont bornées d'un côté par le comportement des plaques et de l'autre côté par le comportement des cylindres. Par la suite Stowell [143] a suggéré de modifier l'expression de Redshaw en tenant compte aussi de l'influence des conditions aux limites. D'autres expressions similaires à celle de Timoshenko ont également été obtenues en utilisant l'équation de Donnell (Donnell [50]) ou le critère de Schapitz (Spier *et al.* [142]). Les données expérimentales recueillies par Cox et Clenshaw [44], Crate et Levin [45], Jackson et Hall [73], Welter [155] et Schuette [133] présentent cependant des différences significatives avec ces valeurs théoriques. Ces différences sont restées inexplicables jusqu'au travail de Batdorf *et al.* [20] qui ont calibré de nouvelles expressions sur les essais de Crate et Levin [45] et Cox et Clenshaw [44]. Ces expressions modifiées qui sont présentées sous forme d'abaques, souvent appelées courbes de Batdorf, ont été largement utilisées dans l'aéronautique (Bruhn [32]).

La seconde période quant à elle débute avec les essais de Wenzek [156] qui s'interroge justement sur cette identité entre la charge critique de voilement et la charge ultime pour tous les panneaux courbes, quel que soit leur rayon de courbure. En effet, on pourrait penser que, au moins pour les panneaux à faible courbure (ceux à la géométrie proche d'une plaque plane), le comportement sera proche de celui des plaques et que, une fois voilé, le panneau courbe pourra encore reprendre de la charge, si bien que la charge ultime sera supérieure à la charge de voilement. Diverses expressions prenant en compte ce comportement post-critique ont donc été proposées par Pope [110], Sekine et Tamate [135] et Gerard et Becker [66]. Ces expressions analytiques ne sont cependant que des approximations ou ont un domaine de validité limité car l'étude du comportement à l'état de ruine nécessite l'utilisation d'une théorie non-linéaire en grandes transformations et conduit donc à la résolution de systèmes d'équations non-linéaires complexes.

Aujourd'hui, le développement d'ordinateurs performants et de méthodes numériques efficaces lors de ces dernières décennies permet de calculer ces structures de coque, quelle que soit la complexité de leur géométrie. Domb et Leigh [49] ont ainsi pu réactualiser le guide de conception de la N.A.S.A. et proposer une mise à jour des abaques de Batdorf en

s'appuyant sur une base de données numériques et expérimentales. Yumura *et al.* [159] ont également étudié numériquement le comportement élastique et plastique des panneaux courbes cylindriques. Les travaux de Park *et al.* [104, 105, 106] ont quant à eux établi une méthode simplifiée pour l'estimation de la résistance ultime. Leur expression repose sur la formule de Faulkner pour les plaques mais la valeur d'élançement réduit est modifiée afin de prendre en compte l'effet de la courbure.

D'autres études dans le domaine de la construction navale ont également été menées (Maeno *et al.* [91]) mais il faut noter qu'à la différence du domaine aéronautique, les tôles mises en oeuvre en construction navale sont tellement épaisses que le voilement élastique se produit très rarement et que le mode de ruine est dominé par le voilement plastique. Dans certains cas cependant (comme par exemple pour les tôles endommagées dont l'épaisseur est diminuée par la corrosion), la connaissance du comportement élasto-plastique peut s'avérer indispensable.

En conclusion, on constate que les travaux précédemment mentionnés n'ont pas abouti à une expression de la charge ultime des panneaux cylindriques satisfaisante tant pour l'ingénieur que pour le théoricien. Le présent chapitre vise donc au développement d'une telle expression.

### 3.1.2 Comportement des éléments courbes

Sur le plan qualitatif, un panneau courbe peut être considéré comme une configuration intermédiaire entre une plaque plane et un cylindre de révolution. Il est donc souhaitable que le comportement des tôles courbes soit proche de celui des plaques planes pour les tôles de faible courbure, et tende vers le comportement des cylindres si la courbure est importante. La figure figure 3.1 illustre bien cette idée : la courbe caractéristique du comportement d'une tôle courbe est bien comprise entre celle d'une plaque plane ( $0 \rightarrow 1 \rightarrow B$ ) et celle du cylindre ( $0 \rightarrow 1 \rightarrow C$ ). Selon que la courbure est forte ou faible, on se rapproche plus de la courbe C ou de la courbe B qui définissent donc les deux comportements limites de cette étude.

Sur le plan quantitatif, les équations de Von Karman - Donnell permettent de décrire la tendance d'évaluation de la contrainte à proximité du point critique (Maquoi [92]) ; elles peuvent être représentées par l'expression approchée suivante :

$$\frac{\sigma}{\sigma_{cr}} = 1 - \frac{10E}{3\pi^2 R \sigma_{cr}} q \quad (3.1)$$

où  $q$  est le déplacement transversal hors plan,  $\sigma$  est la contrainte appliquée et  $\sigma_{cr}$  est la contrainte critique déterminée par l'équation suivante :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 (1 + \theta^4) \quad (3.2)$$

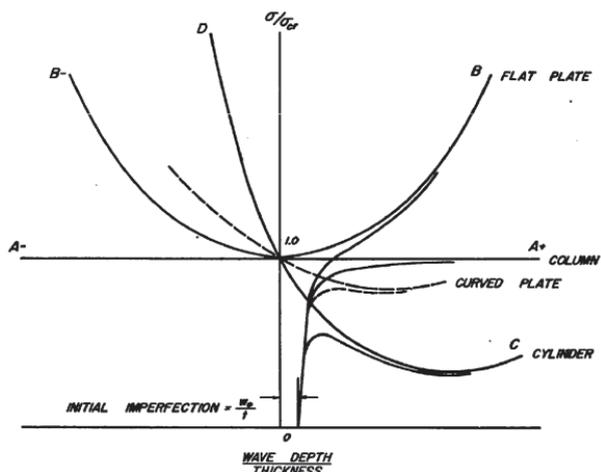


FIGURE 3.1 – Courbe d'évolution de contrainte pour plaque, tôle courbe et cylindre (tiré de Gerard et Becker [66])

Le paramètre  $\theta$  de l'équation 3.2 traduit les effets de la courbure initiale du panneau :

$$\theta = \frac{b}{\pi} \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{4R^2t^2}} \tag{3.3}$$

Si on se place dans le repère des coordonnées  $\sigma - q$  comme présenté à la figure 3.2, l'équation 3.1 correspond à une droite dont la tangente (l'angle) dépend étroitement du rayon de courbure  $R$ . On remarque que quand  $R$  tend vers l'infini, la pente de la trajectoire à l'état déformé tend vers zéro. Cette valeur correspond aussi à une plaque plane dont la tangente est horizontale en zéro (courbe B de la figure 3.1).

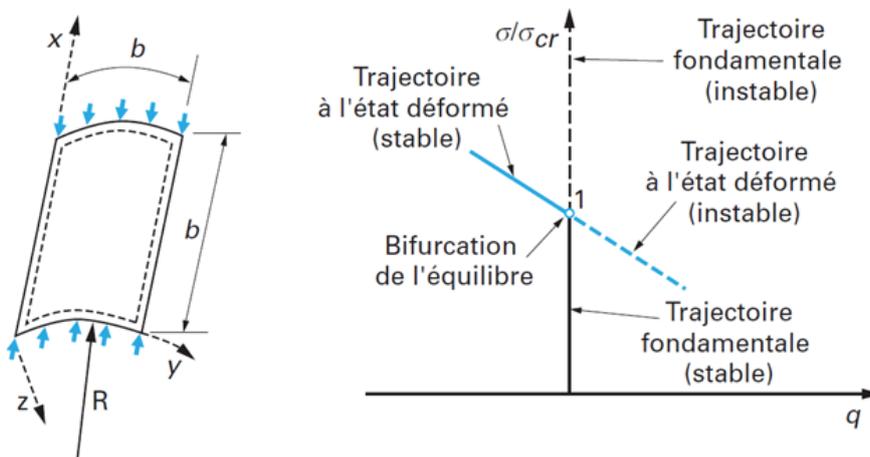


FIGURE 3.2 – Trajectoires d'équilibre pour un panneau cylindrique en compression uni-axiale uniforme - tiré de Maquoi [92]

L'expression 3.1 a été établie dans une configuration peu réaliste de la plaque en l'absence d'imperfections et dans l'hypothèse des petites déformations et de l'élasticité linéaire. Néanmoins, cette expression permet de montrer l'évolution du chargement des

tôles courbes après voilement. Ce comportement est bien limité par les deux comportements caractéristiques de plaque plane et de coque cylindre.

Cette intuition d'un comportement intermédiaire pour les tôles courbes a été consolidée par Wenzek [13], qui a réalisé plusieurs essais avec différentes valeurs de l'angle de courbure ( $\phi = b/R$ ). Le résumé de ses résultats est présenté par la figure 3.3, dans laquelle le ratio de la déformation actuelle à la déformation à l'état critique de voilement est défini par  $\frac{\epsilon}{\epsilon_{cr}}$ . D'après ses résultats, tous les panneaux dont l'angle de courbure est inférieur à  $23^\circ$  peuvent être classés dans la catégorie des plaques planes, c'est-à-dire que la charge s'augmente après voilement. Les panneaux dont l'angle de courbure  $\phi$  est supérieur à  $23^\circ$ , peuvent quant à eux être rangés dans la catégorie cylindre, c'est-à-dire que la charge diminue après voilement. La valeur de  $\phi = b/R = 23^\circ$  peut ainsi être considérée comme une valeur de démarcation entre deux catégories de phénomènes d'instabilité.

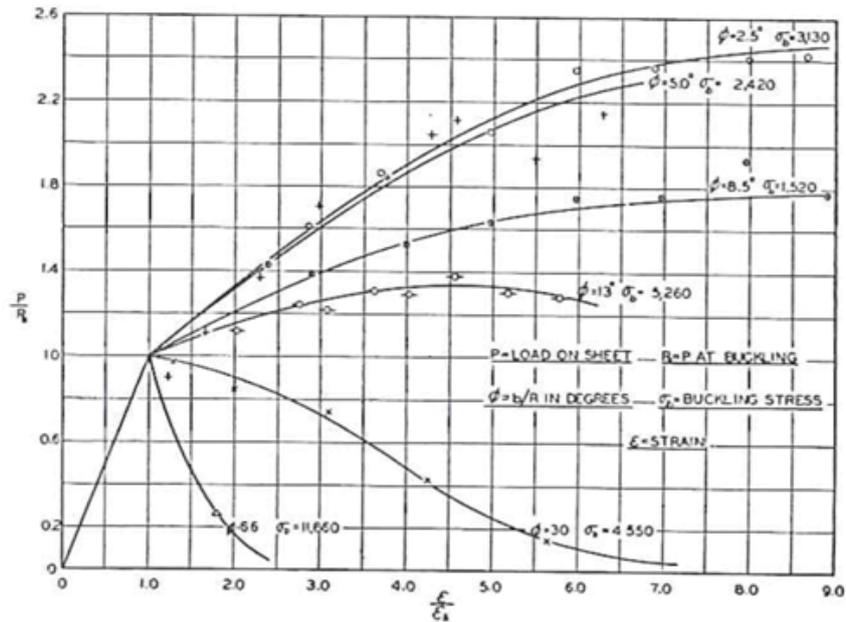


FIGURE 3.3 – Essais de Wenzek [13]

### 3.1.3 Choix du paramètre de courbure

Ce résultat de Wenzek [156] a montré l'importance de la courbure dans la caractérisation du comportement des tôles courbes et de la définition d'un paramètre caractéristique. Ce n'est cependant pas l'angle de courbure qui sera retenu par la suite, car il n'intègre pas certains phénomènes ou grandeurs qui ont une influence importante sur la charge de ruine, notamment par ce que le problème de voilement dépend aussi de l'épaisseur  $t$  et de la largeur de chargement  $b$ . Il est intéressant de noter ici que pour les cylindres, quel que soit le chargement (compression axiale, pression latérale, torsion), le résultat du voilement est toujours exprimé en fonction d'un même paramètre  $Z_L = \frac{L^2}{Rt} \sqrt{1 - \nu^2}$  où  $L$

est la longueur du cylindre, appelé paramètre de Batdorf. Ce paramètre n'est pas choisi au hasard mais résulte directement de l'équation différentielle d'équilibre. Il semble donc que, pour trouver le paramètre de courbure le plus pertinent pour les tôles courbes, il soit intéressant de partir des équations de base des éléments coques. L'équation différentielle linéaire de Donnell (c.f Annexe 2), dans le cas général, s'écrit comme suit :

$$D\nabla^8 w + \frac{Et}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - t\nabla^4 \left( \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\sigma_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.4)$$

où  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  est la rigidité de la plaque,  $w$  est le déplacement hors plan (selon l'axe Oz). En faisant le changement des paramètres :

$$\begin{cases} \frac{x}{b} &= \xi \\ \frac{y}{b} &= \eta \\ \nabla_G^2 &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \end{cases} \quad (3.5)$$

et en donnant l'expression du coefficient de voilement  $k_{(\bullet)} = \frac{\sigma_{(\bullet)} b^2 t}{\pi^2 D}$ , on obtient une nouvelle expression :

$$\nabla_G^8 w + 12(1-\nu^2) \frac{b^4}{R^2 t^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - \pi^2 \nabla_G^4 \left( k_x \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2k_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) = 0 \quad (3.6)$$

Sans entrer dans le détail de la résolution, il est évident que l'expression théorique de  $w$  devra dépendre des paramètres :  $b, R, t, k, \xi$  et  $\eta$ . En introduisant le paramètre  $Z_b = \frac{b^2}{Rt} \sqrt{1-\nu^2}$ , Batdorf [21] a montré qu'il existe toujours une fonction telle que  $f(Z_b, k, \alpha = \frac{a}{b}) = 0$ . Dans le cas où le ratio d'aspect  $\alpha = \frac{a}{b}$  est donné, le coefficient de voilement  $k$  ne dépend que de  $Z_b$ , que Batdorf désigne ensuite comme le paramètre de courbure.

Récemment, le guide du groupe de travail européen sur la stabilité des coques TWG 8.4 [5] a proposé de retenir une version modifiée de ce paramètre car il présente des inconvénients. Par exemple, le paramètre de Batdorf n'est pas linéaire en fonction de la longueur, il prend en compte le coefficient de Poisson  $\nu$  alors que celui-ci n'a qu'un effet très mineur et enfin il apparaît souvent sous la forme  $Z^{1/2}$  ou  $Z^{3/2}$  dans les équations. Pour cette raison, le paramètre de courbure proposé dans la norme l'EN 1993-1-6 sur les coques de révolutions, est donné par :

$$w = \frac{L}{\sqrt{Rt}} \quad (3.7)$$

Une variante de ce paramètre, désigné  $\theta$ , peut également être dérivée de l'équation 3.3. Ce paramètre  $\theta$  obtenu est très semblable à  $\omega$  si l'on néglige le terme constant :

$$\theta = \frac{b}{\sqrt{Rt}} \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{4\pi^4}} \quad (3.8)$$

En conclusion, on s'aperçoit que, quelle que soit la forme proposée, le paramètre de courbure dépend impérativement de la largeur  $b$ , de l'épaisseur  $t$  et du rayon  $R$ . Dans le cadre

de ce travail de thèse, le paramètre de courbure, noté  $Z$ , sera donc définie par :

$$Z = \frac{b^2}{Rt} \quad (3.9)$$

Ce nouveau paramètre n'est qu'une modification du paramètre de Batdorf après suppression de l'effet mineur dû au coefficient de Poisson. Il a, certes, des inconvénients mais a le grand avantage de présenter une signification physique directe pour le problème des tôles cylindriques : il mesure l'écart de planéité d'une tôle courbe par rapport à une plaque plane que l'on considère en effet à la figure 3.4. Cette figure représente un panneau courbe cylindrique de longueur d'arc  $b$ , de rayon de courbure  $R$  et l'épaisseur  $t$ . La flèche maximale  $f$  du panneau courbe par rapport à sa corde est calculée par (développement limite) :

$$f = R \left\{ 1 - \cos \left( \frac{b}{2R} \right) \right\} \simeq \frac{b^2}{8R} \quad (3.10)$$

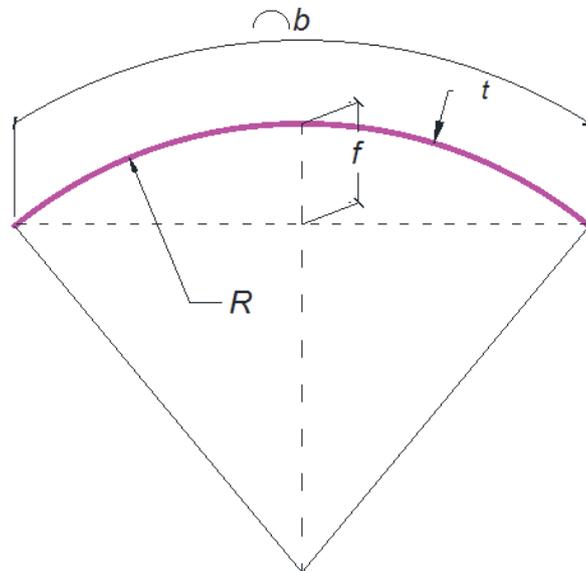


FIGURE 3.4 – Flèche maximale du panneau courbe

Le rapport de cette flèche  $f$  à l'épaisseur  $t$  du panneau, donne  $Z = b^2/Rt$ , qui mesure donc bien la déviation de la planéité d'un panneau courbe. Quand  $R$  tend vers l'infini, ce rapport est égal à 0, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de déviation par rapport la plaque plane, donc le panneau consiste en une plaque plane. Le paramètre  $Z$  semble donc bien caractériser la courbure et la physique du problème étudié ici.

Après avoir choisi correctement le paramètre représentant la courbure, l'étude du comportement des tôles courbes non-raïdiées sous compression uniaxiale sera donc effectuée à l'aide d'une modélisation par éléments finis.

La modélisation numérique sera d'abord présentée à la prochaine section. Puis, de nombreuses simulations numériques, établies sur ce modèle numérique développé, seront

menées pour alimenter une base de données sur les panneaux courbes. Cette base de données sera ensuite utilisée pour la mise au point des formules semi-empiriques pour l'évaluation de la charge critique de voilement élastique et de la résistance ultime.

## 3.2 MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS

L'essentiel des paramètres de la modélisation est identique à ceux présentés au chapitre 2 pour les plaques planes : le logiciel utilisé, les différents modèles de matériau, le chargement, la méthode de résolution, etc. Les quelques modifications nécessaires lorsque les tôles modélisées sont courbes, sont détaillées dans les paragraphes qui suivent.

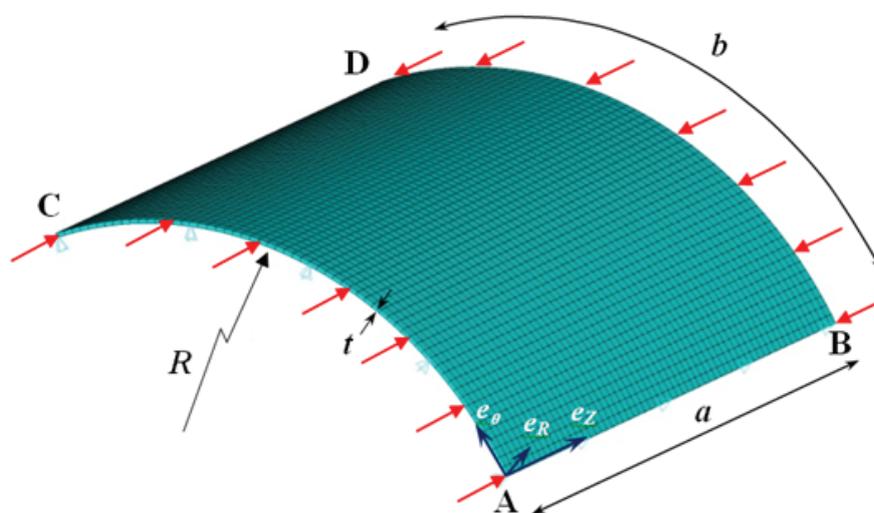


FIGURE 3.5 – Modèle d'un panneau cylindrique soumis à une compression axiale uniforme

### 3.2.1 Type d'éléments

La tôle est modélisée par des éléments de type Plaque (SHELL 181 à 4 nœuds). On peut mentionner qu'il existe d'autres possibilités de modéliser les tôles courbes via l'élément SHELL 281 à 8 nœuds (figure 3.6). Ce type d'élément (SHELL 281) n'est pas plan et est censé représenter la courbure de l'élément.

L'étude de comparaison des deux types d'éléments est effectuée dans le travail de Braun [31]. La figure 3.7 présente les résultats des études de convergence : une pour la charge critique de voilement et l'autre pour la charge ultime, de ces deux éléments. L'écart des résultats obtenus par éléments finis par rapport à ceux donnés par théorie (i.e indiqués dans la norme) est tracé en fonction de nombre d'élément sur chaque côté. Ce nombre d'élément signifie également la densité du maillage. Il est aisément constaté qu'un maillage fin conduit à une diminution des écarts numériques/théories. De plus, l'élément de type SHELL 281 donne une convergence plus rapide par rapport l'élément SHELL 181. Ce-

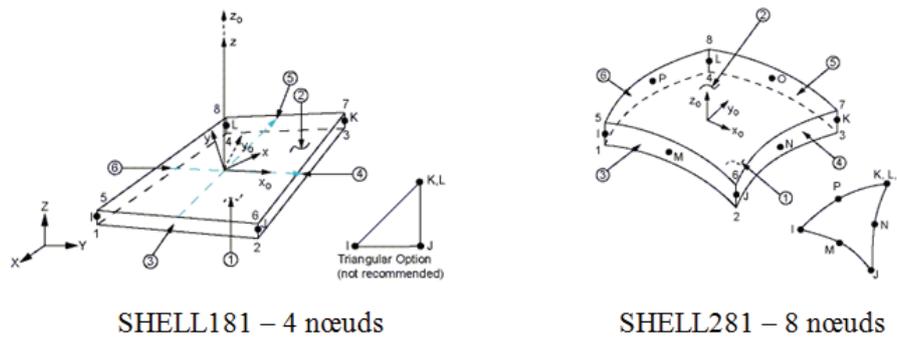


FIGURE 3.6 – Type d'élément de Plaque

pendant, quand le maillage est suffisamment fin (nombre d'élément plus élevé), les deux types d'éléments donnent des résultats très similaires car la courbure de chaque élément devient négligeable. Pour cette raison, en choisissant une densité de maillage suffisamment fine, l'élément SHELL 181 est utilisé dans ce travail.

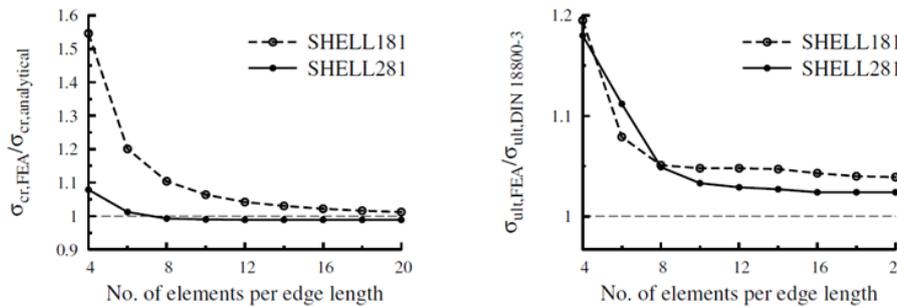


FIGURE 3.7 – Etude de convergence des éléments SHELL 181 et SHELL 281 (Braun [31])

### 3.2.2 Construction de la géométrie du modèle d'éléments finis

La construction géométrique de la tôle courbe est cependant différente de celle de la plaque. Le tracé courbe de la tôle est approché par un tracé polygonal (figure 3.8). Les nœuds de chaque élément sont situés sur le tracé théorique de la courbe (ligne courbe tirée). Les éléments sont donc des cordes de la courbure (ligne rouge). Plus le nombre d'élément est grand, plus la modélisation s'approche de la courbe théorique. Cette remarque explique la nécessité d'un maillage fin constaté à la section précédente.

Les noeuds sont numérotés dans l'ordre de 1 à  $n + 1$  avec  $n$  taille d'élément ( $n + 2$  noeuds en total sur la largeur). Les coordonnées du noeud  $j$  de la tôle sont aisément déterminées par :

$$\begin{cases} Z_j = R \cos(\phi_i) - R \cos(\phi) \\ Y_j = R \sin(\phi_i) \end{cases} \quad (3.11)$$

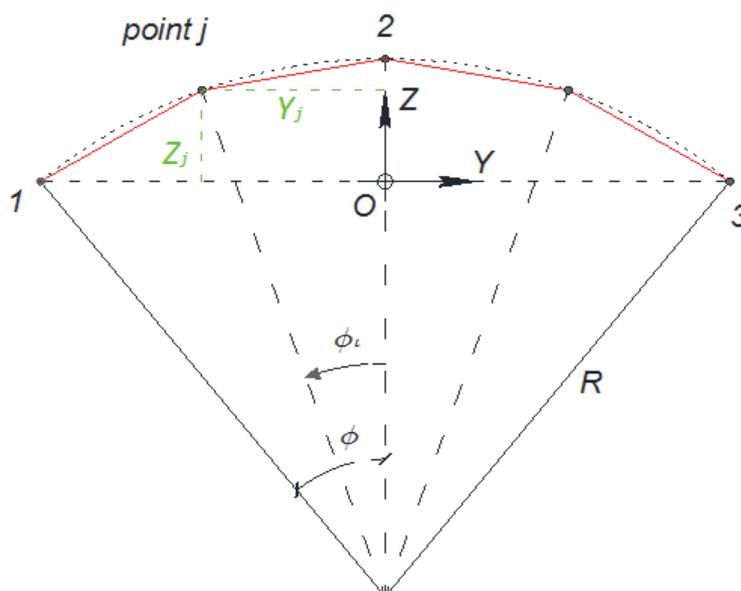


FIGURE 3.8 – Construction de la courbure

avec  $\phi_j$  est l'angle d'un noeud  $j$ , calculé par :

$$\phi_j = \frac{j - \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \phi \quad (3.12)$$

Grâce à cette méthode de construction, il est possible d'appliquer le modèle numérique pour les plaques planes en faisant simplement tendre le rayon de courbure  $R$  vers une valeur infinie. L'idée est de calibrer le modèle d'éléments finis par rapport à la théorie du voilement des plaques planes non-raidiées, qui est bien maîtrisée.

### 3.2.3 Conditions aux limites

Comme les tôles planes, les tôles courbes étudiées sont supposées être simplement appuyées aux quatre bords. Compte tenu de la courbure, ces conditions aux limites sont écrites dans le repère cylindrique de la tôle, dont l'axe longitudinal est sur le bord AB (cf. figure 3.5), de la façon suivante :

- Appui simple sur tous les bords, déplacement radial nul  $u_R = 0$ .
- Le long des bords chargés (AC et BD), tous les noeuds sont contraints de se déplacer de manière uniforme selon l'axe de compression  $u_Z = cste$ .
- Le long des bords non-chargés (AB et CD), déformation circonférentielles selon  $u_\theta$  libres.

Dans le cas des tôles courbes situées à l'intrados de caisson de pont, la condition d'appui de blocage radial sur les deux bords AB et CD s'éloigne cependant un peu de la réalité à cause de la courbure de la tôle. En effet, les lignes d'appui AB et CD sont définies par les âmes du caisson qui sont en général verticales dans le repère global (figure 3.9) ;

le déplacement est donc libre dans la direction perpendiculaire aux âmes, pas dans la direction circonférentielle comme introduite dans le repère local.

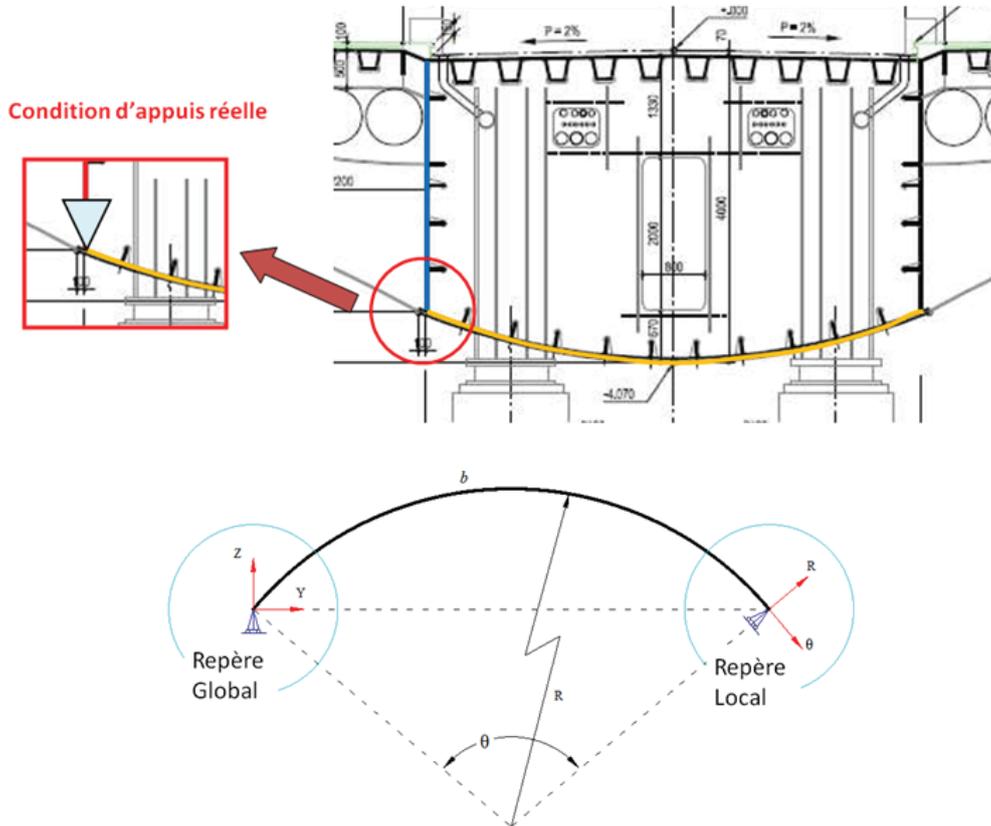


FIGURE 3.9 – Conditions d'appui sur un exemple réel

Cette différence entre ces conditions d'appui ne modifie cependant le comportement des tôles qu'à la marge comme on peut le voir sur la figure 3.10 qui illustre les écarts observés en termes de charges critiques et de charges ultimes, à rayon constant, lorsque l'angle augmente (de la plaque plane au quart de cylindre). Pour une courbure de  $90^\circ$  (quart de cylindre), des appuis longitudinaux suivant le repère global donnent un écart positif de 1% pour la charge critique de voilement, et de moins de 8% pour la charge ultime (figure 3.10), par rapport au cas avec des appuis longitudinaux suivant le repère local. En remarquant fait que les tôles courbes dans le domaine des ouvrages d'art dépassent rarement une courbure de  $90^\circ$ , on déduit pour la suite que l'utilisation de conditions d'appui selon le repère cylindrique local ( $u_R = 0$ ) est acceptable.

Maintenant qu'on a terminé la description du modèle, le comportement de la tôle courbe sera examiné à travers ce modèle d'éléments finis. De nombreuses simulations numériques (élastiques et élasto-plastique) seront effectuées pour alimenter la base de données sur les panneaux courbes.

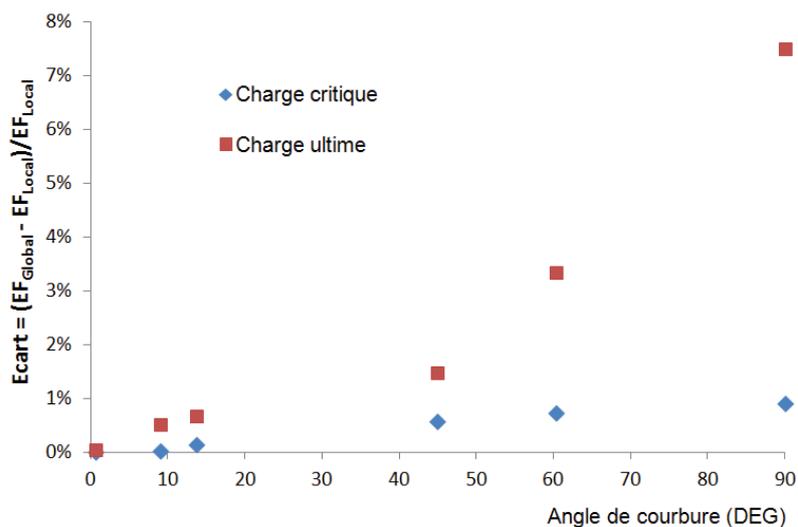


FIGURE 3.10 – Influence des conditions d'appui des bords rectilignes sur le comportement des tôles courbes

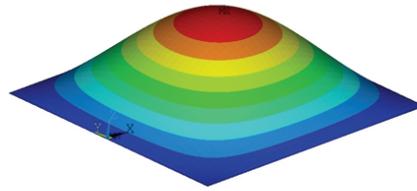
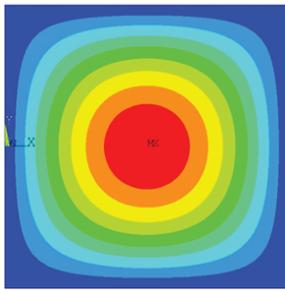
### 3.3 COMPORTEMENT CRITIQUE DE VOILEMENT ÉLASTIQUE LINÉAIRE

#### 3.3.1 Généralités sur le voilement des tôles courbes

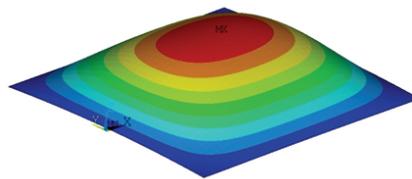
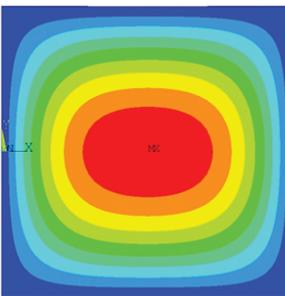
Une série d'analyses de voilement élastique linéaire (LBA) est réalisée afin d'étudier l'instabilité élastique des panneaux courbes en compression uniforme. Les panneaux étudiés ont une largeur constante de  $b = 3m$  et une épaisseur constante de  $t = 20mm$ . Les paramètres variables sont donc : le rayon de courbure  $R$  pour modifier la courbure des panneaux et la longueur  $a$  pour étudier l'influence du coefficient d'aspect.

Les résultats de la forme du premier mode de voilement et de la contrainte critique de voilement élastique sont reportés la figure 3.11 dans les quatre cas ( $Z$  varie de 0 à 100). La figure 3.11 montre que le paramètre de courbure  $Z$  a une influence sur la forme du premier mode de voilement. Le cas  $Z = 0$  correspond à une plaque plane avec une seule onde au centre de la plaque (figure 3.11a). Pour de petites valeurs de  $Z$ , le mode de voilement des panneaux courbes reste semblable à celui des plaques (figure 3.11b). Lorsque la valeur de  $Z$  augmente, le mode de voilement évolue : la déformation hors-plan diminue dans la partie centrale du panneau et se concentre le long des deux bords chargés (figure 3.11c, 3.11d). Ceci est dû à l'apparition de moments secondaires hors-plan (i.e, le moment  $M_{\theta\theta}$  dans le repère local cylindrique de la figure 3.12) aux bords chargés. Ce moment facilite en conséquence l'apparition de la déflexion transversale dont la valeur maximale s'approche du bord de chargement : l'influence du moment secondaire n'est pas uniforme le long de la plaque. Plus la courbure est grande, plus cet effet est significatif. La courbure influence aussi la contrainte critique de voilement. On obtient une augmentation de contrainte critique quand la courbure croît ( $\sigma_{cr}^{Z=0} = 34 \text{ MPa} < \sigma_{cr}^{Z=100} = 290 \text{ MPa}$ ).

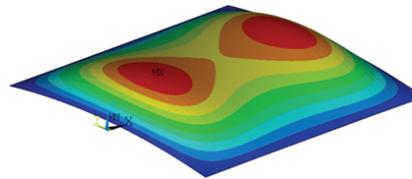
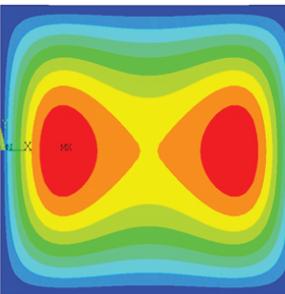
L'influence du coefficient d'aspect  $\alpha$  est présentée figure 3.13 dans le cas où la longueur  $a$  est un multiple entier de la largeur  $b$ . On observe que pour une plaque plane ( $Z =$



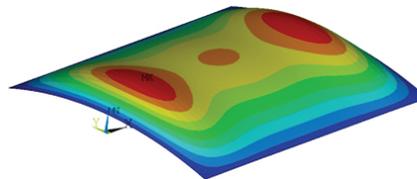
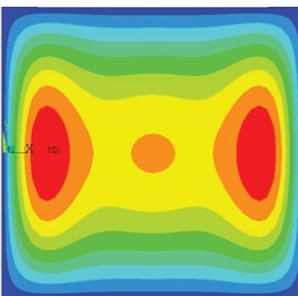
(a)  $R = \infty \rightarrow Z = 0 : \sigma_{cr} = 34 \text{ MPa}$



(b)  $R = 22,5 \text{ m} \rightarrow Z = 20 : \sigma_{cr} = 67 \text{ MPa}$



(c)  $R = 9 \text{ m} \rightarrow Z = 50 : \sigma_{cr} = 150 \text{ MPa}$



(d)  $R = 4,5 \text{ m} \rightarrow Z = 100 : \sigma_{cr} = 290 \text{ MPa}$

FIGURE 3.11 – Premier mode de voilement pour différentes valeurs de la courbure  $Z$

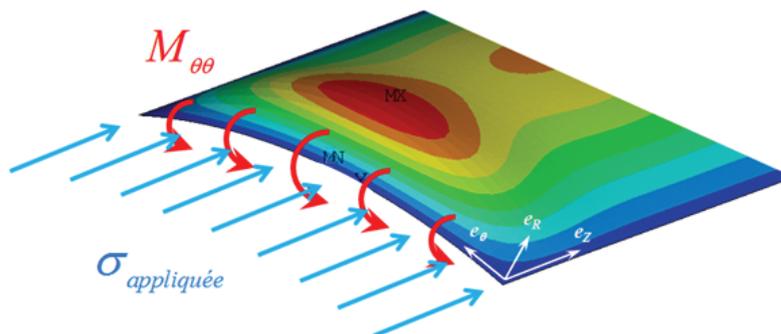


FIGURE 3.12 – Apparition du moment secondaire de flexion due à la courbure

0) le voilement se fait en demi-ondes carrées avec un nombre de demi-ondes égal au coefficient d'aspect  $\alpha$  (figure 3.13a). L'interaction de la courbure  $Z$  et du coefficient d'aspect  $\alpha$  est la plus importante pour les valeurs moyennes de la courbure (par exemple pour  $Z = 50$ ). La courbure dans ce cas modifie légèrement le mode de voilement, qui reste antisymétrique quelle que soit la valeur de  $\alpha$  (figure 3.13b et 3.13f). En revanche, pour une valeur suffisamment grande de la courbure ( $Z = 100$  pour  $\alpha = 2$  et  $Z = 200$  pour  $\alpha = 3$ ), le mode de voilement devient symétrique (figure 3.13c et 3.13h). La déflexion maximale diminue et se localise vers les bords de chargements, comme illustré figure 3.11d. Ce mode de voilement maintient sa forme pour toute augmentation de la courbure (figure 3.13c et 3.13d). On en déduit que dans cette configuration, l'influence de la courbure est très grande et détermine la forme de voilement.

On constate que la valeur de la contrainte critique augmente en fonction de la courbure, et que les valeurs des contraintes critiques sont presque indépendantes du coefficient d'aspect  $\alpha$ , si  $\alpha$  est un nombre entier quelle que soit la courbure. Cela est en accord avec la théorie des plaques planes qui montre que la contrainte de voilement est presque constante pour toutes les valeurs entières de  $\alpha \geq 1$  (voir la théorie au chapitre 1). Cette caractéristique semble donc conservée pour les tôles courbes (pour  $Z = 200$ ,  $\sigma_{cr} = 572$  MPa pour  $\alpha = 2$  et  $\sigma_{cr} = 573$  MPa pour  $\alpha = 3$ ).

### 3.3.2 Expression de la contrainte de voilement

Afin de quantifier l'influence de la courbure, les valeurs numériques de la charge critique de voilement sont présentées en fonction du paramètre  $Z$  sur la figure 3.14. Cette figure comprend également les courbes caractéristiques des principaux modèles de force critique de voilement, à savoir ceux de Redshaw [115], Timoshenko et Gere [147], Stowell [143] et Domb et Leigh [49] mentionnées dans l'introduction. Il faut noter que le modèle de Batdorf n'est pas représenté parce que la théorie sur laquelle il repose est similaire à celle de Timoshenko et qu'une modification de ce modèle a été proposée dans le travail de Domb et Leigh [49]. Ces courbes permettent non seulement d'identifier l'influence de la courbure, mais aussi de vérifier la pertinence des différentes expressions théoriques.

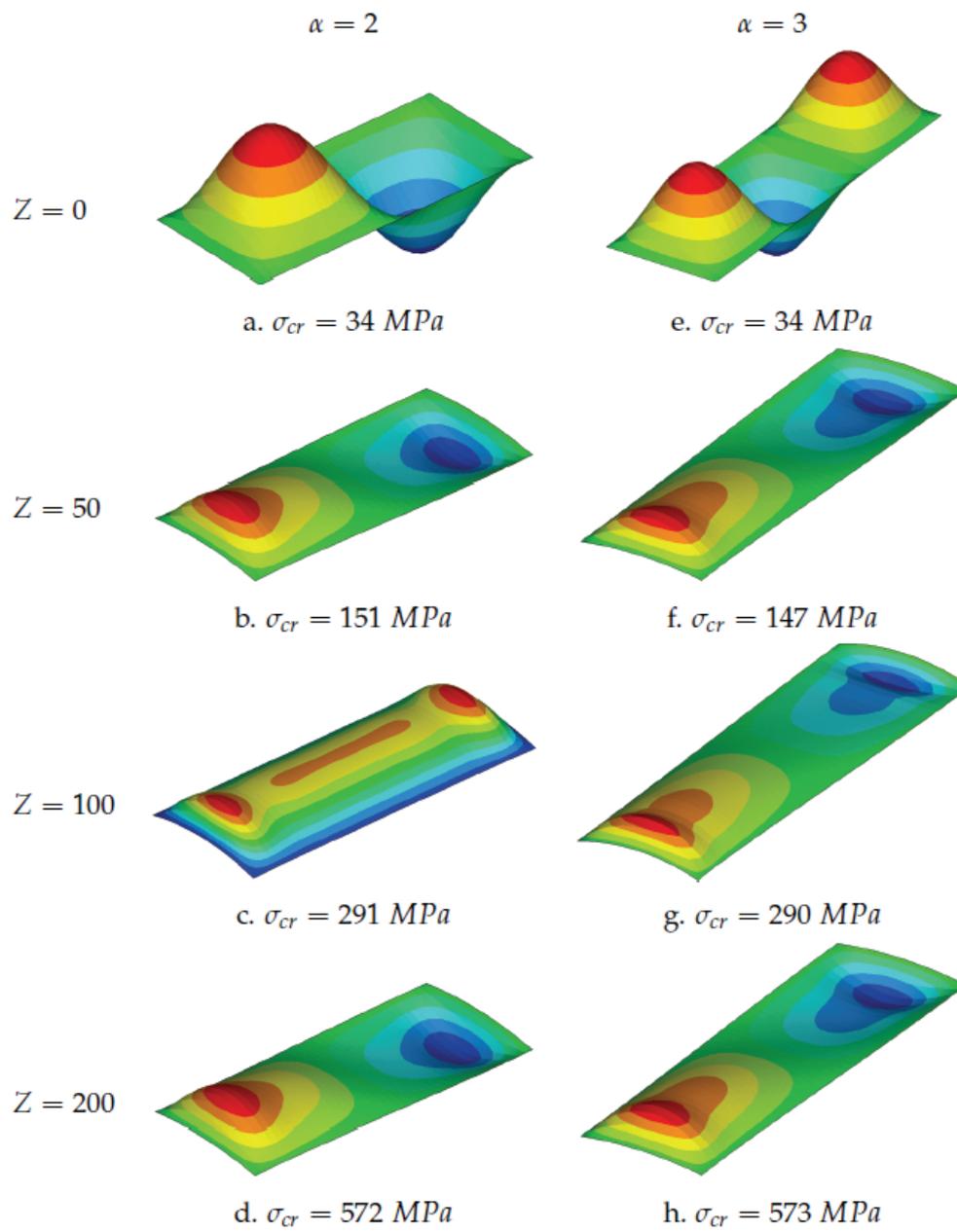


FIGURE 3.13 – Influence du coefficient d'aspect pour une plaque courbe

De façon générale, la contrainte critique de voilement  $\sigma_{cr}$  est définie comme le produit de la contrainte critique d'Euler  $\sigma_E$  et d'un coefficient de voilement  $k_c$  dont l'expression varie d'un auteur à l'autre (l'exposant  $(\bullet)^Z$  indiquant l'influence de la courbure) :

$$\sigma_{cr}^Z = k_c^Z \sigma_E \quad (3.13)$$

où  $\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2$  est la contrainte critique d'Euler. Les principales expressions  $k_c^Z$  sont énumérées ci-dessous avec un bref résumé de l'approche utilisée pour les obtenir :

- Redshaw a utilisé une approche énergétique :

$$k_{c,Redshaw}^Z = 2 \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} Z^2} \right) \quad (3.14)$$

- Timoshenko a utilisé des champs de déplacements approchés vérifiant les conditions aux limites mais pas l'équation de compatibilité qu'il a remplacée par les équations d'équilibre afin d'obtenir la charge critique en écrivant la nullité du déterminant de ces équations :

$$k_{c,Timoshenko}^Z = \begin{cases} 4 + \frac{3(1-\nu^2)}{\pi^4} Z^2 & \text{si } Z \leq \frac{2\pi^4}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \\ \frac{4\sqrt{3}}{\pi^2} Z & \text{si non} \end{cases} \quad (3.15)$$

- Stowell a proposé une modification de l'équation de Redshaw en ajoutant l'effet des conditions aux limites :

$$k_{c,Stowell}^Z = \frac{k_c^{plaque}}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{48(1-\nu^2)}{\pi^4 (k_c^{plaque})^2} Z^2} \right) \quad (3.16)$$

- L'expression de Domb et Leigh quant à elle est calibrée empiriquement sur une base de données numériques :

$$k_{c,DL}^Z = \begin{cases} 10 \sum_{i=0}^3 c_i (\log Z_b)^i & \text{si } 1 \leq Z_b \leq 23,15 \\ c (Z_b)^d & \text{si } 23,15 \leq Z_b \leq 200 \end{cases} \quad (3.17)$$

avec  $c_0 = 0,6021$ ,  $c_1 = 0,005377$ ,  $c_2 = 0,192495$ ,  $c_3 = 0,00267$ ,  $c = 0,4323$  et  $d = 0,9748$  et  $Z_b$  est le paramètre de Batdorf :  $Z_b = \frac{b^2}{Rt} \sqrt{1-\nu^2}$

Ces différentes expressions du coefficient de voilement sont reportées la figure 3.14 et exprimées en fonction du paramètre de courbure  $Z$ . Comme  $Z$  varie en fonction du carré de la largeur  $b$ , sa valeur devient grande d'où la nécessité de présenter le résultat avec une abscisse logarithmique.

De la comparaison des courbes de la figure 3.14, on peut tirer les conclusions suivantes :

- Toutes les courbes convergent vers la valeur correspondant à une plaque plane ( $k_c^{plaque} = 4$ ) quand  $Z$  tend vers 0, ce qui est logique et nécessaire.
- Le coefficient de voilement  $k_c^Z$  augmente quand  $Z$  augmente, ce qui est dû à l'apparition d'une contrainte circonférentielle qui maintient le déplacement radial : plus la tôle est courbe, plus cet effet est grand.

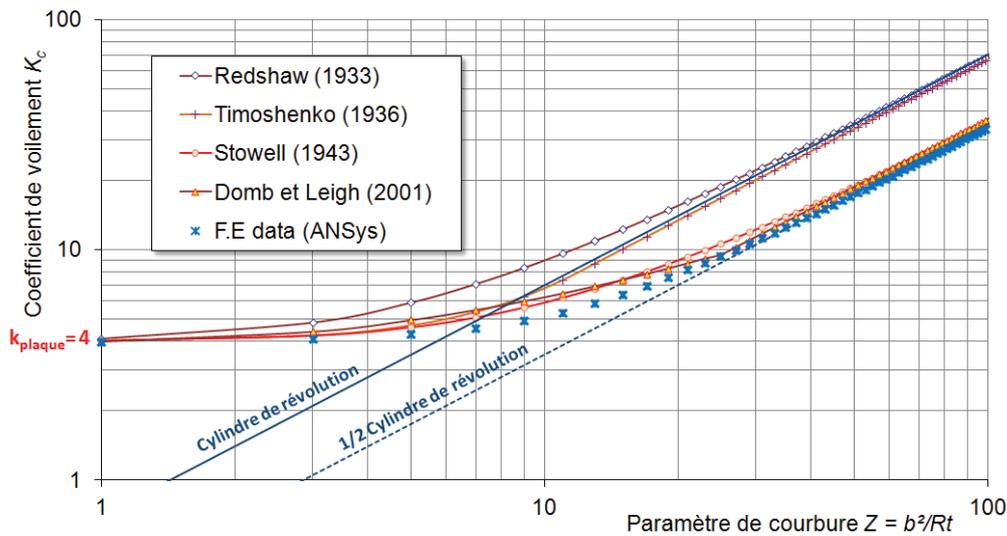


FIGURE 3.14 – Comparaison du coefficient de voilement

- Le comportement asymptotique (vers les grandes valeurs de  $Z$ ) de ces expressions est cependant différent : les expressions de Redshaw et Timoshenko convergent vers une droite dont la pente est égale au coefficient de voilement d'un cylindre de révolution alors que les expressions de Domb et Leigh, de Stowell et les résultats numériques convergent vers une valeur inférieure. Cet écart peut être expliqué par la différence de conditions aux limites entre les modèles. En effet, les panneaux cylindriques ont quatre bords tandis que les cylindres de révolution n'en ont que deux ; le développement des contraintes membranaires se fait donc de façon différente (contraintes circonférentielles de traction pour les panneaux courbes et contraintes de compression pour les cylindres de révolution).
- Seules les expressions de Stowell et de Domb et Leigh sont en accord avec les résultats numériques, qui convergent vers la moitié de la valeur théorique de la contrainte critique d'un cylindre. Une analyse complémentaire est donc effectuée sur des panneaux courbes dont la longueur, le rayon et l'épaisseur sont constants ( $a = 9m$ ,  $R = 3m$ ,  $t = 15mm$ ) mais dont la largeur  $b$  varie de 0 à  $2\pi R$ , le dernier panneau ( $b = 2\pi R$ ) correspondant à un cylindre de révolution entaillé verticalement sur toute sa longueur. Le rapport de la contrainte critique du panneau courbe à celle du cylindre ( $\sigma_{courbe}/\sigma_{cylinder}$ ) est ainsi présenté sur la figure 3.15 en fonction du paramètre de courbure  $Z$ . Ce rapport diminue lorsque  $Z$  augmente : de l'infini pour  $Z = 0$  (i.e.  $b = 0$ ) à 0,5 pour  $Z = 4\pi^2 R/t$  (soit  $Z = 7895$ ). On remarque que, dans ce cas précis, la valeur 0,5 est quasiment atteinte (moins de 2% d'écart) dès  $Z \geq 40$ , soit pour une largeur  $b$  de 1,34m, ce qui est loin d'être la valeur supérieure de  $b$  ( $2\pi R = 18,85m$ ). Ceci confirme bien que la charge critique de voilement des tôles courbes tend bien vers la moitié de celle d'un cylindre de révolution quand la courbure devient grande.
- L'expression de Domb et Leigh est définie directement par calibrage numérique ce qui rend sa forme complexe et peu intuitive. L'expression de Stowell est en ce sens

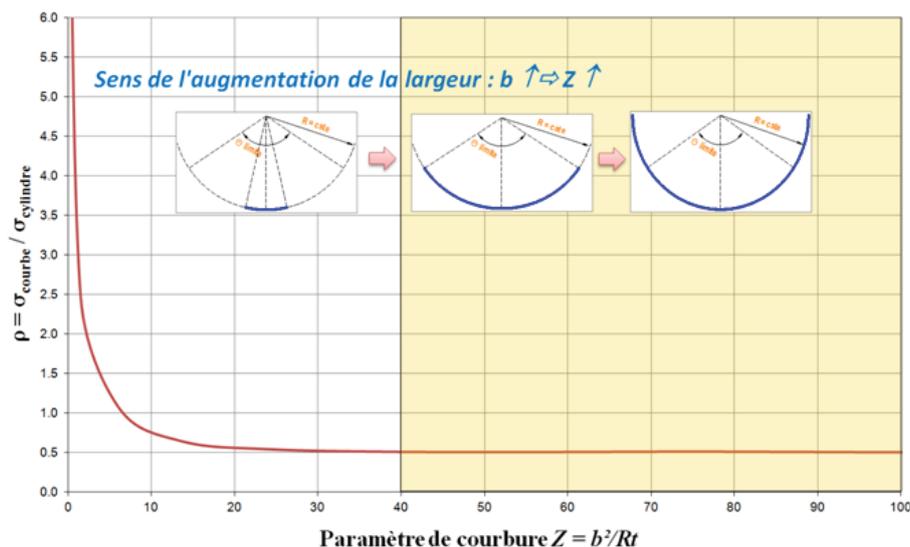


FIGURE 3.15 – Analyse de convergence du comportement asymptotique des tôles cylindriques

beaucoup plus intéressante : elle est simple et fait clairement apparaître les comportements asymptotiques des tôles courbes. Pour les valeurs moyennes de la courbure ( $Z \simeq 10$ ), l'approximation est moins bonne avec des écarts qui restent malgré tout inférieur à 15%. Si l'on compare la formule de Stowell aux résultats expérimentaux de Cox et Clenshaw [44], Crate et Levin [45] et Peterson et Whitley [109] (figure 3.16), on observe que les points d'essais sont plus dispersés, mais que l'expression de Stowell passe par la valeur moyenne. C'est parce que les conditions aux limites ne sont pas exactement identiques : le montage d'un appui simple est difficile à réaliser pour les deux bords non chargés, surtout quand les tôles sont courbes.

L'approximation de Stowell est donc tout à fait convenable et sera donc prise comme référence pour la suite. Ces imprécisions sont d'autant moins préjudiciables que l'on verra dans la section 4 où ces écarts peuvent être récupérés lors de la calibration du comportement élasto-plastique.

### 3.4 ÉTUDE NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT ULTIME

La résistance ultime du panneau est évaluée comme celles des plaques planes à l'aide d'une analyse incluant des non-linéarités matérielles, c'est-à-dire comportement élasto-plastique des aciers, et géométriques de la structure imparfaite, c'est-à-dire tenir compte des imperfections et de la déformation en grand déplacement de structure (*GMNIA* en anglais). La méthode numérique utilisée pour décrire l'ensemble du comportement post-critique des tôles courbes est la méthode dite de longueur d'arc (c.f section 1.7 du chapitre 1). Sur la courbe contrainte-déformation, la charge ultime est facilement identifiée comme la valeur maximale (le sommet) de la courbe (Figure 3.17a et 3.17b).

Selon les configurations, la forme des imperfections, les courbes contrainte-

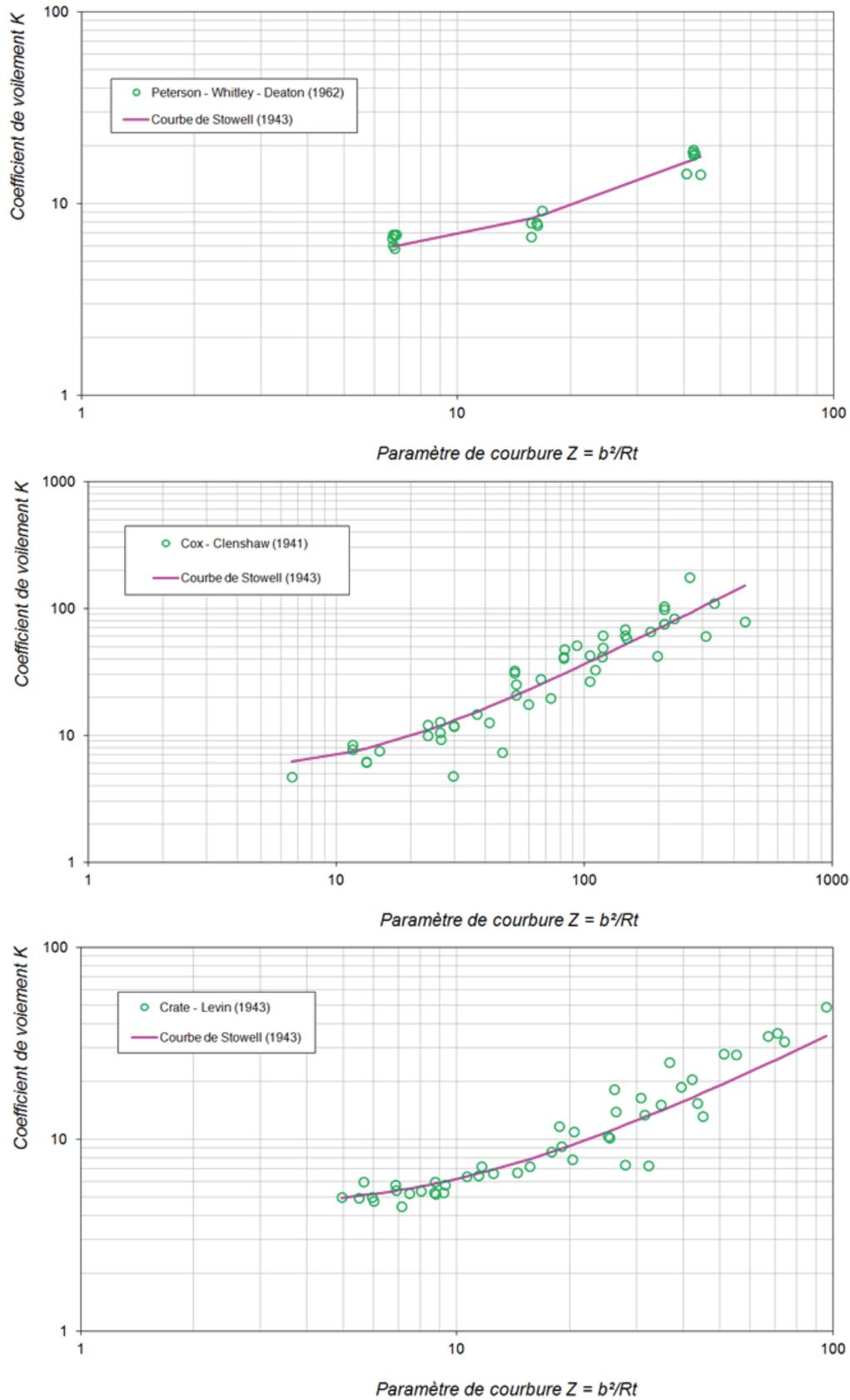
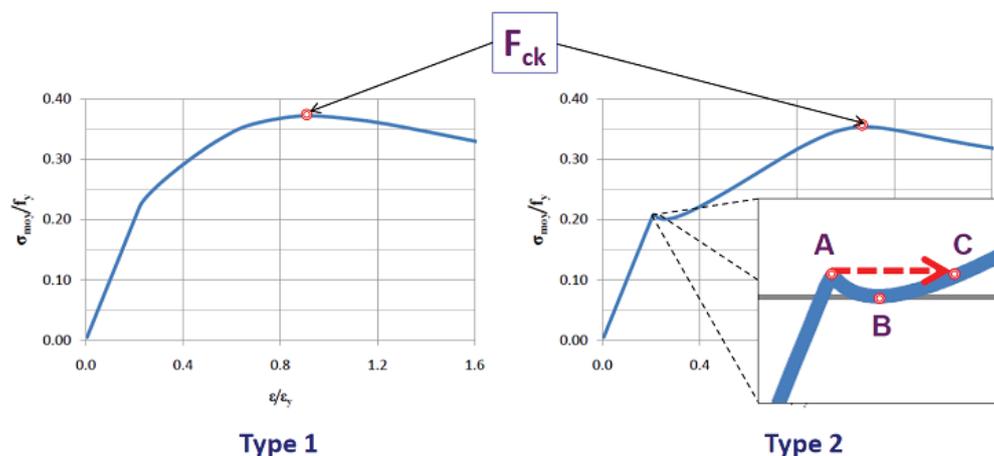


FIGURE 3.16 – L'expression théorique de Stowell en comparaison aux résultats d'essais

FIGURE 3.17 – Résistance caractéristique de voilement  $F_{ck}$ 

déformation des panneaux pourront présenter un profil de type 1 ou type 2. Le type 1 correspond à une instabilité de type bifurcation ; le type 2 à une instabilité par point limite ou l'instabilité par "claquement" (*snap-through* en anglais). En ce point, toute augmentation de la charge fait passer la structure d'une configuration d'équilibre donnée à une autre configuration distante mais en équilibre. De ce fait, ce point limite n'est pas considéré comme la charge maximale de structure, mais comme une "réserve de capacité" de la structure vis-à-vis du problème de voilement. Dans la réalité, la structure se comporte de manière à ce que, une fois atteint le premier pic, la charge passe "brutalement" d'un état équilibre (point A) à un autre état équilibre (point C), sans besoin de diminuer la charge et de passer par le point B. Ce changement s'accompagne d'un bruit sonore, d'où le terme de "claquement".

### 3.4.1 Influence de la forme des imperfections

Comme dans de nombreux problèmes d'instabilité, la question de la modélisation des imperfections initiales est donc primordiale. Pourtant, l'influence de la forme des imperfections dans les tôles courbes a été très peu étudiée. Une première étude a été conduite par Featherston [56] par la méthode des éléments finis, mais, à notre avis, le problème reste encore mal compris. Si l'on remarque que le processus de fabrication des panneaux courbes est semblable à celui des plaques, on peut raisonnablement penser que les modèles d'imperfections géométriques équivalentes pour les plaques (préconisés par l'EN 1993-1-5) resteront valables pour les tôles courbes à défaut d'avoir des données plus précises (par exemple des mesures de contraintes résiduelles ou de défauts géométriques). Quelques essais numériques préliminaires ont ainsi été menés afin d'analyser l'influence de la forme de cette imperfection géométrique équivalente sur la charge de ruine de la coque.

Dans ces essais, les dimensions de la tôle sont  $3\text{ m} \times 3\text{ m} \times 25\text{ mm}$  avec un rayon de courbure de  $R = 18\text{ m}$ . Les tôles sont appuyées simplement sur les quatre bords. Elles

sont faites en acier S355 élasto-plastique linéaire. Le type d'élément utilisé est un élément plaque à 4 nœuds (SHELL 181). Le seul paramètre qui varie est donc la forme des imperfections géométriques introduites au début du calcul GMNIA. Dans l'idéal, la configuration devrait être basée sur les imperfections réelles de structure obtenues par relevé sur le panneau, ce dont on ne dispose pas en général. Il faut donc définir une méthode générale pour la définition d'un défaut type. Pour assurer la sécurité des ouvrages, ce défaut devra être celui qui sera le plus défavorable pour certains critères donnés (Lanzo [88]). L'étude de cette forme critique "idéale" n'est cependant pas simple, car elle dépend du type de structure et de la nature du chargement. Parmi les différentes méthodes existantes à l'heure actuelle, les trois solutions les plus utilisées sont :

- Dans la plupart des cas, le premier mode d'instabilité est pris comme le mode le plus défavorable (Featherston [56]) car il demande le minimum d'énergie pour engendrer l'instabilité de la structure. C'est ce mode qui est recommandé par Eurocode 3 (EN 1993-1-5 annexe C) pour l'étude des structures imparfaites et ce comme préalable à toute recherche d'un autre mode éventuellement plus défavorable. L'avantage de cette méthode est évidemment sa simplicité.
- La deuxième approche consiste à exprimer les imperfections comme des fonctions trigonométriques, souvent sous forme de séries sinusoïdales. Dans la mesure où toutes les configurations peuvent être transformées en série de sinusoïdale, cette méthode devrait aboutir à la détermination de la configuration la plus défavorable (Rotter [118]). Néanmoins la précision du résultat va dépendre du nombre de termes pris en compte et ce nombre dépend de la complexité des structures étudiées.
- La dernière méthode est basée sur l'analyse du mode de ruine (*en anglais* quasi-collapse-affine imperfection) comme présenté dans Schneider *et al.* [132]. En effet, l'analyse du mode de ruine de structure parfaite révèle " les points faibles " de la structure. L'idée est donc d'affaiblir ces points par des imperfections pour obtenir une réduction maximale de la capacité de structure. Dans cette méthode, l'influence des non-linéarités du matériau et de la géométrie est aussi intégrée. Cette méthode est cependant très coûteuse en temps de calcul car il faut lancer deux fois le calcul non-linéaire.

Ces trois types de forme d'imperfection seront toutes étudiées dans cette étude préliminaire. Quant à l'amplitude maximale du défaut initial, désignée par  $w_0$ , l'Eurocode indique les valeurs référentielles suivantes :

- EN 1993-1-5 :  $w_0 = \min(a/200; b/200)$ ,
- EN 1993-1-6 :  $w_0 = 4\sqrt{Rt}U_{0,max}$ .

avec  $U_{0,max}$  dépend de la classe de qualité de tolérances de fabrication (valeur donnée à la section 8.4.4 de l'EN 1993-1-6). En se référant au domaine des ouvrages d'art où le rayon de courbure est assez grand, on s'aperçoit que les défauts initiaux seront plus proches de la partie 1-5 que de la partie 1-6. A titre d'exemple, la configuration de l'intrados du pont Confluences sur la Maine à Angers en France : longueur  $a = 5 m$ , largeur  $b = 5 m$ , épaisseur  $t = 16 mm$  et le rayon de courbure de  $R = 80m$ . En supposant que la qualité de fabrication est normale ( $U_{0,max} = 0,016$ ), l'amplitude du défaut initial sera  $w_0 = 72 mm$

selon l'EN 1993-1-6. Cette valeur est trop défavorable : 3 fois plus grand par rapport la valeur calculée par l'EN 1993-1-5 :  $w_0 = 25 \text{ mm}$ . C'est la raison pour laquelle, dans la suite de ce travail, l'amplitude maximale de l'imperfection sera choisie comme conseillé dans l'EN 1993-1-5 :  $w_0 = \min(a/200; b/200)$ .

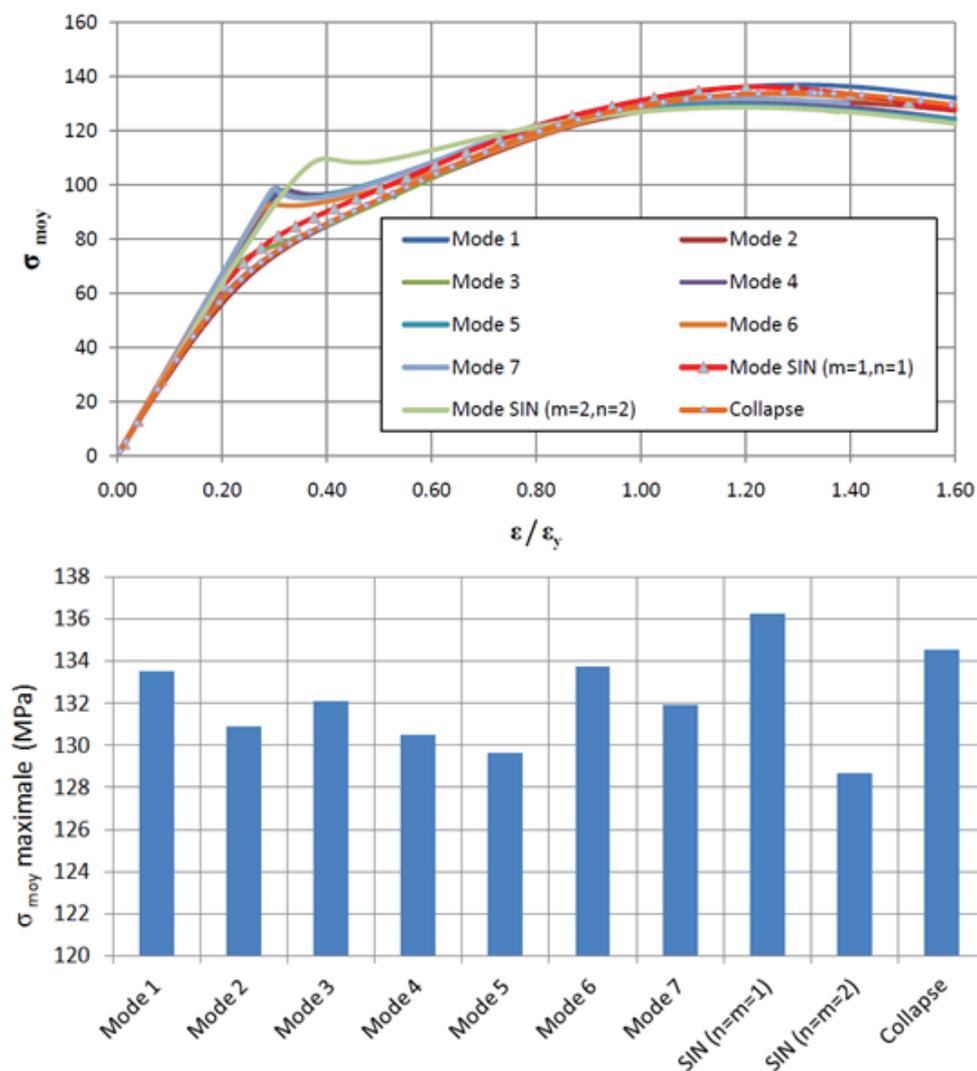


FIGURE 3.18 – Influence des différentes configuration d'imperfection

Les résultats des différentes simulations sont présentés figure 3.18. On constate que la charge maximale de la structure ainsi que le type d'instabilité varie avec la forme de l'imperfection. La charge ultime minimale a été obtenue pour le mode sinusoïdal à deux demies ondes de chaque côté de la coque moyenne. Le premier mode de voilement n'est donc pas forcément toujours le mode le plus critique. Cependant, les écarts observés entre cette valeur minimale et les autres valeurs ne sont pas importants : seulement 3% au maximum.

L'utilisation du premier mode de voilement comme forme d'imperfection reste donc

acceptable et, comme elle a l'avantage d'être simple à mettre en œuvre sur le plan numérique, c'est celle qui sera retenue pour l'étude paramétrique envisagée ensuite.

### 3.4.2 Etude paramétrique

L'objectif de cette partie est la détermination de la résistance ultime des panneaux au moyen d'une étude paramétrique numérique de type GMNIA. Les quatre paramètres variables sont : la longueur  $a$ , la largeur  $b$ , l'épaisseur  $t$  et le rayon de courbure  $R$  du panneau de sorte que le paramètre de courbure  $Z$  varie de 1 à 100 et le coefficient d'aspect  $\alpha$  varie de 0,8 à 3. Ces données géométriques ont été choisies afin de couvrir tout le domaine d'application des panneaux courbes utilisés dans les ponts métalliques. Les résultats numériques obtenus sont présentés sur la figure 3.19 où le facteur de réduction  $\rho$  est reporté en fonction de l'élancement réduit  $\bar{\lambda}$ . Le facteur de réduction  $\rho$  est déterminé comme le rapport de la charge ultime  $F_{ult}$  (identifiée comme la valeur maximale atteinte par la courbe force-déplacement issue de l'analyse numérique) et de la résistance plastique  $F_y$ . La figure 3.19 présente également les deux courbes de la norme européenne : l'EN 1993-1-5 pour les plaques (courbe rouge supérieure), de l'EN 1993-1-6 pour les coques de révolution (courbe rouge inférieure) ainsi que le comportement de colonne (courbe Euler  $\frac{1}{\lambda^2}$ ).

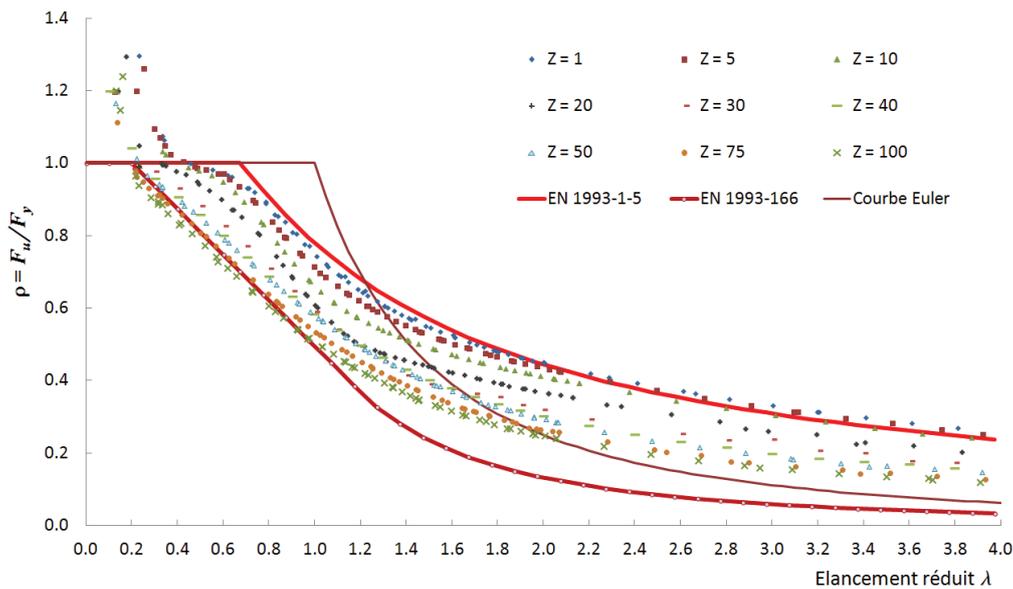


FIGURE 3.19 – Courbes de voilement des panneaux cylindriques soumis à une compression uniaxiale

On constate tout d'abord que pour une courbure  $Z$  donnée, on peut définir un coefficient de réduction  $\rho$  pour une tôle courbe, de la même manière que pour une plaque ou une coque de révolution, ce qui confirme la pertinence du choix du paramètre  $Z$  dans l'étude de ce problème d'instabilité. On remarque ensuite que le paramètre de courbure  $Z$  a une grande influence sur la valeur du coefficient de réduction  $\rho$ . Pour une valeur donnée de  $\bar{\lambda}$ , plus la valeur de la courbure est grande, plus on s'éloigne de la résistance ultime

de la plaque correspondante ( $Z = 0$ ). On remarque également que tous les points numériques sont situés entre les deux courbes issues des normes européennes. Pour des petites valeurs de  $Z$ , les panneaux courbes se comportent comme des plaques (EN 1993-1-5) et pour des grandes valeurs de  $Z$ , le comportement des panneaux courbes tend vers celui des cylindres de révolution (EN 1993-1-6).

Par ailleurs, il faut noter que la distribution des points pour  $Z = 1$  suit plus ou moins la courbe de voilement donnée par l'EN 1993-1-5, ce qui confirme la validité de la clause 1.1 (2) de l'EN 1993-1-5 qui indique  $Z \leq 1$  comme limite d'application de la norme. Clairement, l'utilisation de l'EN 1993-1-5 au-delà de cette limite pour les grandes courbures  $Z$  conduit à une surestimation significative de la résistance ultime réelle. De même, pour des grandes valeurs de  $Z$  ( $Z \geq 40$ ), la norme EN 1993-1-6 fournit une bonne approximation du coefficient de réduction pour les petites valeurs d'élanement ( $\bar{\lambda} \leq 1$ ). Lorsque l'élanement devient important ( $\bar{\lambda} \geq 1$ ), il y a un écart non négligeable entre la courbe de la norme et les résultats numériques : l'EN 1993-1-6 devient trop conservatrice. Cet écart est lié principalement au comportement postcritique des tôles courbes qui provient du développement de contraintes membranaires circonférentielles.

On s'intéresse ensuite plus particulièrement au comportement des panneaux pour de forts élanements (cf. figure 3.20). Sur cette figure, on a tracé en sus des résultats des simulations numériques, une famille de courbes en  $\frac{1}{\lambda}$  (courbes pointillées) qui représentent le comportement post-critique des plaques. Il apparaît que, suivant la valeur de la courbure  $Z$ , les résultats numériques suivent une de ces courbes. Un coefficient de proportionnalité  $\beta$  est donc défini pour caractériser ce comportement. Celui-ci diminue lorsque la courbure  $Z$  augmente (il est égal à 1 pour  $Z = 0$  (comportement plaque) et tend vers 0,5 pour de grandes valeurs de la courbure). Cette diminution de la capacité ultime des panneaux courbes ne s'explique pas par l'influence des imperfections géométriques qui est assez peu significative pour de forts élanements mais plutôt par la présence de moments secondaires de flexion hors-plan dont l'amplitude est proportionnelle à la courbure. Le paramètre  $\beta$  peut donc être interprété comme un facteur d'imperfection qui représente l'effet de la courbure, et plus précisément l'interaction des contraintes membranaires et du moment hors-plan.

### 3.5 COURBE CARACTÉRISTIQUE DE VOILEMENT

Les observations précédentes conduisent à la nécessité d'une nouvelle expression de coefficient de réduction  $\rho$ , de nouvelles courbes caractéristiques de voilement, qui permette de combler l'écart avec les deux normes EN 1993-1-5 et EN 1993-1-6. Cette nouvelle expression est bien évidemment dépendante du paramètre de courbure  $Z$ .

D'après la figure 3.19, les points numériques se trouvent tous dans la zone limitée par les deux normes de l'EN 1993 partie 1-5 (borne inférieure) et partie 1-6 (borne supérieure). Deux modifications des expressions analytiques de  $\rho$  peuvent être envisagées en consé-

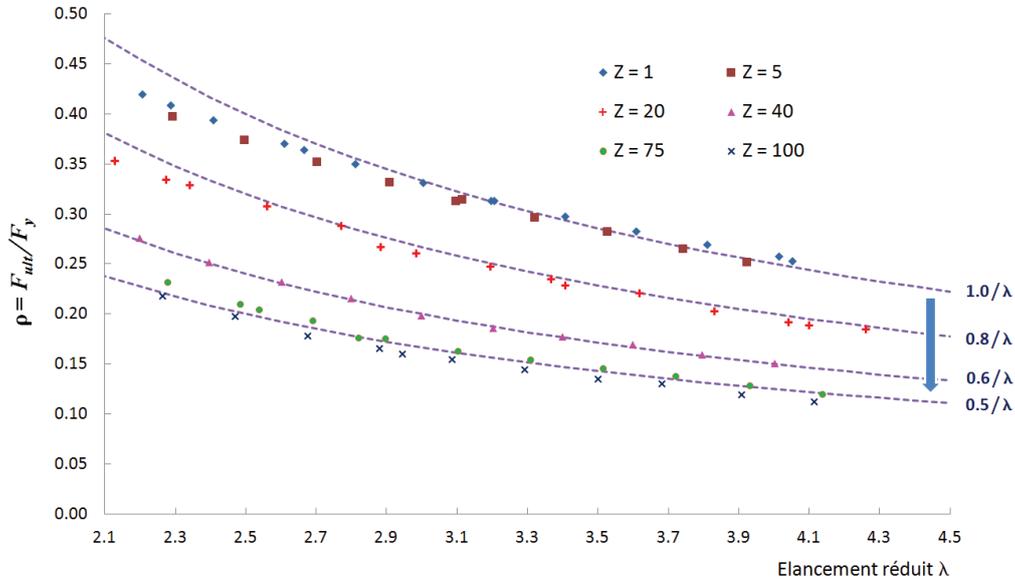


FIGURE 3.20 – Coefficient de réduction de voilement des tôles courbes élancées

quence, qui sont classées selon l’origine de l’expression du départ : soit à partir de la courbe de l’EN 1993-1-5 ; soit à partir de celle de l’EN 1993-1-6.

### 3.5.1 Par modification de l’EN 1993-1-5

#### 3.5.1.1 Formulation d’Ayrton-Perry du flambement des colonnes

Dans cette approche, l’expression mathématique de  $\rho$  est issue de la méthode de détermination des courbes européennes de flambage de l’EN 1993-1-1, qui est basée sur une formulation de type Ayrton-Perry (Maquoi et Rondal [95], Rondal et Maquoi [117]). Cette formulation se traduit dans le cas d’une compression d’un poteau biarticulé de longueur  $l$  comme suit.

L’imperfection structurelle dans ce modèle est supposée comme un défaut de rectitude ayant la forme d’une demi-onde sinusoïdale d’amplitude  $e_0$  (figure 3.21). Le déplacement transversal le long du poteau, avant chargement, s’exprime donc comme suit :

$$y_0 = e_0 \sin \frac{\pi x}{l} \tag{3.18}$$

L’équation différentielle de la déformation d’un tel poteau biarticulé soumis à un effort axial  $N$  s’écrit :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{N(y + y_0)}{EI} = 0 \tag{3.19}$$

En combinant cette dernière avec l’expression de  $y_0$  et en tenant compte des conditions d’appui, on déduit la solution suivante de l’équation différentielle :

$$y = \frac{e_0}{\frac{N_{cr}}{N} - 1} \sin \frac{\pi x}{l} \tag{3.20}$$

La déformée totale maximale,  $e$ , du poteau vaut alors :

$$e = e_0 + \frac{e_0}{\frac{N_{cr}}{N} - 1} = \frac{e_0}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \quad (3.21)$$

et le rapport  $\frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}}$  est généralement appelé le "facteur d'amplification".

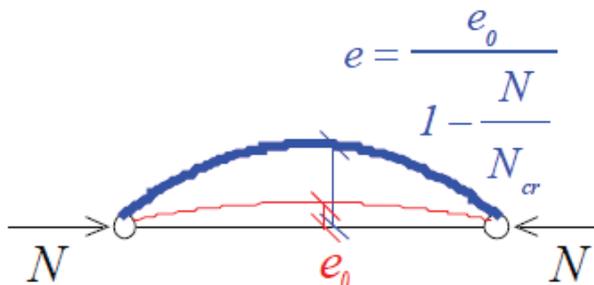


FIGURE 3.21 – Poteau comprimé en position déformée

En adoptant, comme critère de ruine, l'atteinte de la limite élastique au point de contrainte maximale (ici le milieu de la colonne) on obtient l'équation d'équilibre de contrainte :

$$\frac{N}{A} + \frac{Ne_0}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \frac{1}{W} = f_y \quad (3.22)$$

ou :

$$\frac{N}{Af_y} + \frac{Ne_0}{1 - \frac{Af_y}{N_{cr}} \frac{N}{Af_y}} \frac{1}{Wf_y} = 1 \quad (3.23)$$

En introduisant  $N_y = Af_y$ ;  $N = \chi N_y$ ;  $\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_y}{N_{cr}}}$  et  $\eta = \frac{e_0 A}{W}$  avec  $W$  le module d'inertie, on obtient l'équation de type d'Ayrton-Perry :

$$(1 - \chi) (1 - \chi \bar{\lambda}^2) = \eta \chi \quad (3.24)$$

Le paramètre  $\eta = \frac{e_0 A}{W}$  est désigné comme l'imperfection géométrique généralisée ; elle dépend de la géométrie du poteau et de l'imperfection initiale. Son influence est illustrée sur la figure 3.22. La valeur  $\eta = 0$  fournit une borne supérieure des courbes de flambement des barres comprimées, composée d'un plateau de plastification parfaite ( $\chi = 1$ ) et d'une courbe issue de la théorie d'Euler :  $\chi = \frac{1}{\bar{\lambda}^2}$ . Pour les valeurs de  $\eta$  croissante, la courbe de flambement se décale vers le bas, ce qui signifie que l'influence des imperfections devient de plus en plus importante.

Diverses propositions ont été formulées pour représenter cette imperfection généralisée  $\eta$  mais c'est l'expression  $\eta = \alpha_c (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)$  qui a été retenue dans l'EN 1993-1-1 car elle permet d'avoir une bonne corrélation avec les essais expérimentaux.

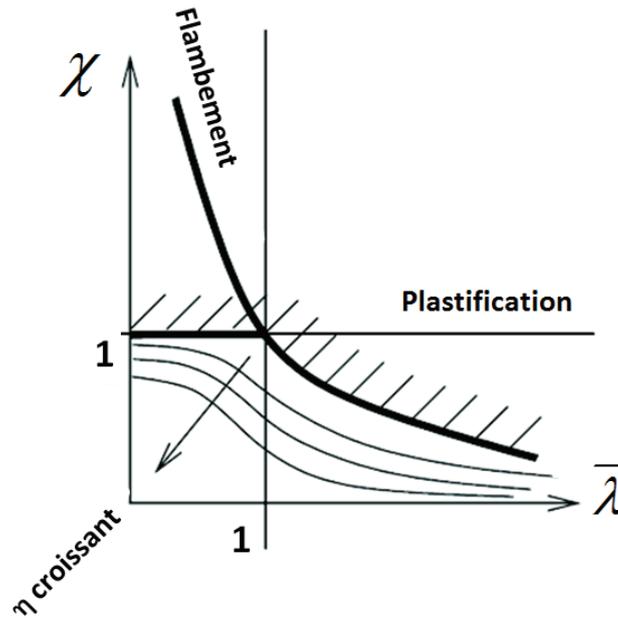


FIGURE 3.22 – Courbe de flambement d'Ayrton-Perry

### 3.5.1.2 Adaptation de la formulation d'Ayrton-Perry pour le voilement des plaques

En transposant la démarche mentionnée ci-dessus des colonnes aux plaques planes, on peut espérer déterminer une courbe caractéristique de voilement sous une forme de type d'Ayrton-Perry. Pour cela, on remplace le comportement asymptotique d'Euler  $\chi = \frac{1}{\bar{\lambda}^2}$  par la courbe de Von-Karman  $\rho = \frac{1}{\bar{\lambda}}$  plus adapté aux plaques. On obtient aussi :

$$(1 - \rho) (1 - \rho \bar{\lambda}) = \eta \rho \quad (3.25)$$

Cette transformation a été adoptée dans le travail de Davaine [46] pour le développement d'une courbe de voilement lors du lancement d'un pont-poutre. En amont du remplacement pur et simple de l'asymptote, il est possible de revenir à l'écriture des contraintes dans la plaque comme ont pu le faire Ayrton-Perry pour le flambement de colonne. Pour cela, on intègre directement l'hypothèse de Von-Karman en considérant une bande de plaque de largeur réduite  $b_{eff} = \frac{b}{\bar{\lambda}}$  soumise à un effort de compression  $N^* = N \frac{b_{eff}}{b} = \rho N_y \frac{1}{\bar{\lambda}}$ ,  $N$  étant l'effort normal uniforme introduit sur la longueur  $b$  de la plaque complète. Le défaut initial maximal  $w_0$  au centre de la plaque augmente avec un facteur  $\frac{1}{1 - \frac{N^*}{N_{cr}}}$  au cours du chargement (figure 3.23).

Par analogie, l'équation d'Ayrton-Perry s'applique à cette plaque :

$$\frac{N^*}{A^*} + \frac{N^* w_0}{1 - \frac{N^*}{N_{cr}}} \frac{1}{W^*} = f_y \quad (3.26)$$

En introduisant  $N^* = \rho \frac{N_y}{\bar{\lambda}}$ ;  $A^* = \frac{A}{\bar{\lambda}}$ ;  $\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_y}{N_{cr}}}$ , on arrive donc à l'équation 3.25.

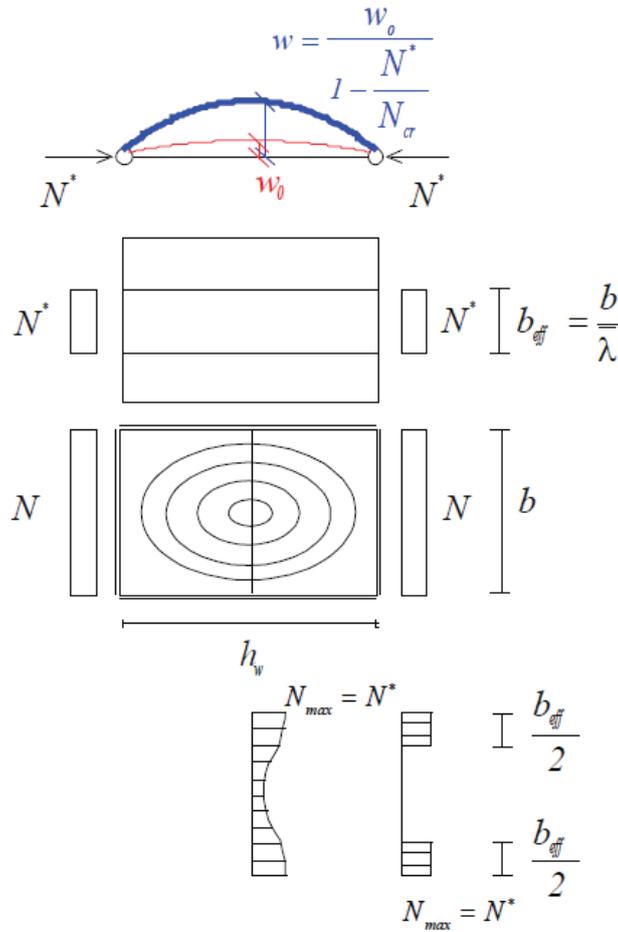


FIGURE 3.23 – Transformation du modèle de Plaque pour une application de la méthode Ayrton-Perry (tiré dans Davaine [46])

### 3.5.1.3 Adaptation de la formulation d’Ayrton-Perry pour le voilement des tôles courbes

Quant aux tôles courbes cylindriques, les résultats numériques de la figure 3.20 montre que les courbes caractéristiques de voilement convergent vers les courbes  $\rho = \frac{\beta}{\lambda}$  avec  $\beta \leq 1$  représentant l’effet de la courbure. En introduisant ce comportement asymptotique dans l’expression 3.25, on obtient une expression de la courbe de voilement pour les tôles courbes cylindriques sous la forme :

$$(1 - \rho) (\beta - \rho\bar{\lambda}) = \eta\rho \quad (3.27)$$

où  $\eta$  et  $\beta$  sont des paramètres à identifier. Le paramètre  $\eta$ , de la même façon que dans les courbes de flambement Européennes, est pourtant choisi couramment :

$$\eta = \rho\alpha_Z (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0) \quad (3.28)$$

$\alpha_Z$  est le facteur d’imperfection élastique,  $\bar{\lambda}_0$  définit la largeur du plateau de plastification (associé avec la valeur de  $\chi = 1$ ). La résolution de l’équation 3.27 en introduisant

L'expression 3.28 donne l'expression finale du coefficient de réduction  $\rho$  :

$$\rho = \frac{2\beta}{\beta + \bar{\lambda} + \sqrt{(\beta + \bar{\lambda})^2 - 4\beta(\bar{\lambda} - \alpha_Z(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0))}} \quad (3.29)$$

L'expression 3.29 définit une série de courbes indexées par le paramètre d'imperfection  $\alpha_Z$ . Cette série de courbes admet deux bornes limites,  $\rho = 1$  pour le mode de ruine plastique ( $\bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}_0$ ) et  $\rho = \frac{\beta}{\bar{\lambda}}$  pour le comportement asymptotique et ruine par voilement élastique ( $\bar{\lambda} \rightarrow \infty$ ).

### 3.5.1.4 Identification des paramètres

La nouvelle expression fait intervenir trois paramètres :  $\beta$ ,  $\bar{\lambda}_0$  et  $\alpha_Z$  qui dépendent de la courbure  $Z$ . Les deux paramètres  $\beta$  et  $\bar{\lambda}_0$  sont aisément identifiés à partir des résultats numériques car ils correspondent à deux modes de ruine différents. Pour une valeur donnée de  $Z$ , le coefficient  $\bar{\lambda}_0$  est déterminé par l'intersection de la courbe numérique avec la ligne horizontale ( $\rho = 1$ ) correspondant à la plastification pure du panneau (cf. figure 3.24). Les points se trouvant au-dessus de la ligne horizontale représentent l'effet de l'écroutissement du matériau et ne sont pas pris en compte dans la formule (ce qui va dans le sens de la sécurité).

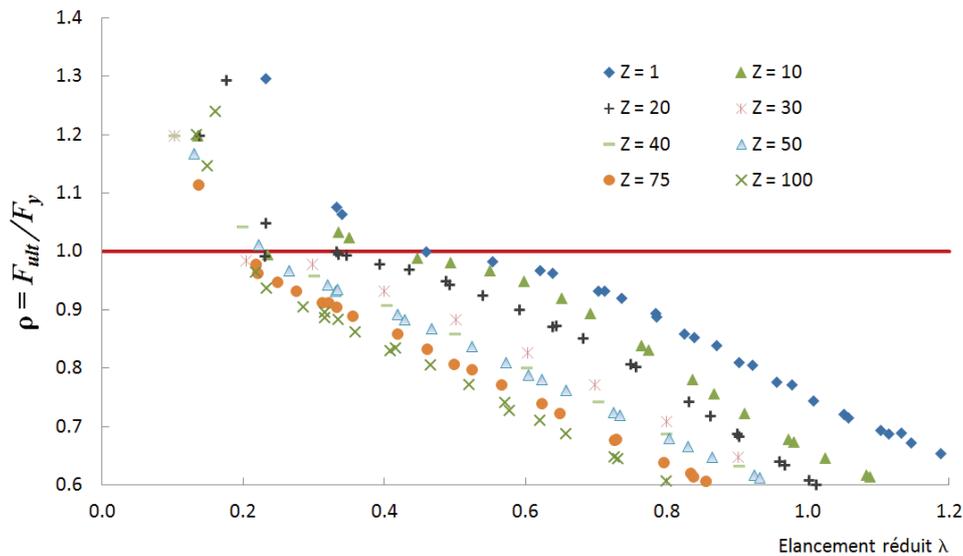


FIGURE 3.24 – Identification du paramètre  $\bar{\lambda}_0$  - longueur du palier plastique

De même pour une valeur donnée de  $Z$ , le coefficient  $\beta$  représente le comportement asymptotique pour les grandes valeurs de  $\bar{\lambda}$ , le facteur de réduction  $\rho$  tendant vers  $\frac{\beta}{\bar{\lambda}}$  (figure 3.20). On propose ainsi pour  $\beta$  et  $\bar{\lambda}_0$  les expressions approchées qui tiennent compte des deux bornes limites ( $Z = 0$  et  $Z \rightarrow \infty$ ) données par l'EN 1993-1-5 et l'EN 1993-1-6

respectivement :

$$\bar{\lambda}_0 = 0,2 + 0,473 \cdot e^{-\frac{Z}{20}} \quad (3.30)$$

$$\beta = \frac{1 + e^{-\frac{Z}{33}}}{2} \quad (3.31)$$

Le dernier paramètre  $\alpha_Z$  caractérise l'écart du comportement réel à la courbe  $\frac{\beta}{\lambda}$ . Il est calibré de façon à minimiser l'écart entre les valeurs données par l'expression 3.29 et les valeurs numériques. Cet écart est mesuré par la somme des carrés des différences entre ces valeurs. Les variations de  $\alpha_Z$  en fonction de  $Z$  sont présentées sur la figure 3.25.

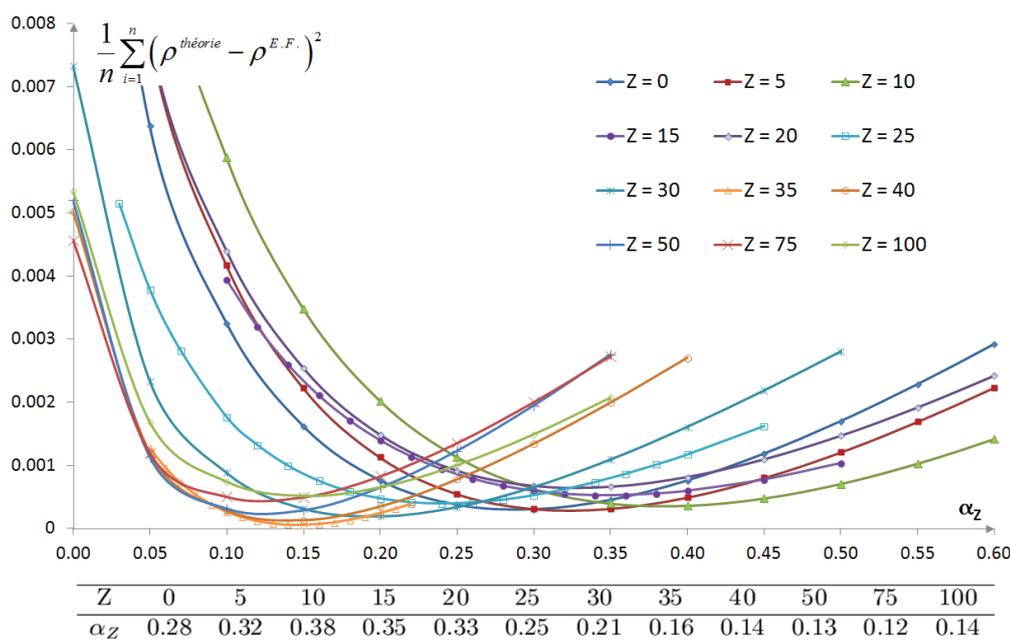
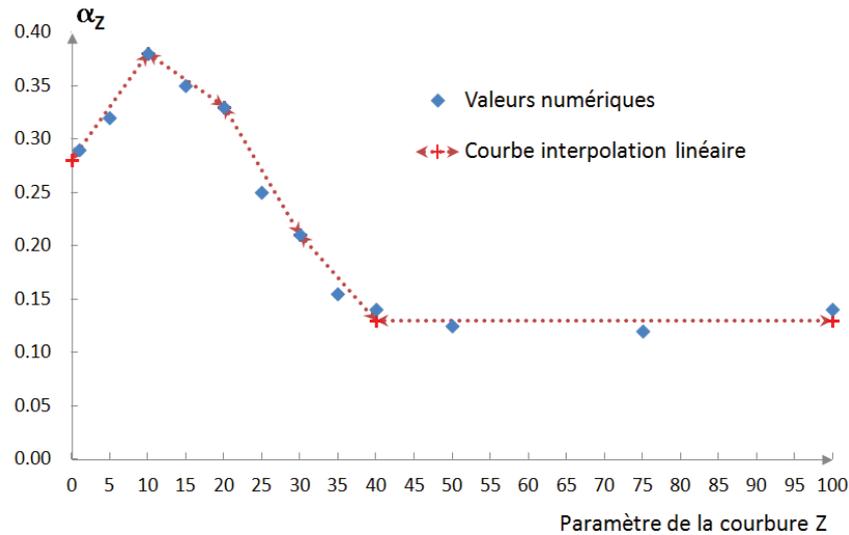


FIGURE 3.25 – Calibrage du paramètre  $\alpha_Z$

La variation du coefficient  $\alpha_Z$  n'est pas uniforme en fonction du paramètre de courbure  $Z$  (figure 3.26). Ce coefficient augmente dans un premier temps (pour  $Z < 10$ ), diminue dans un deuxième temps et devient presque constant pour de grandes valeurs de courbure ( $Z \geq 40$ ). La valeur  $Z = 10$  peut être considérée comme la valeur critique au-delà de laquelle le comportement des tôles courbes s'approche de celui d'un cylindre (cf. figure 3.14), entraînant une variation non-uniforme du coefficient  $\alpha_Z$ . Il est à noter que  $\alpha_Z$  est déterminé aussi en fonction du paramètre  $\beta$ , qui est lui-même une fonction non-linéaire de  $Z$ . Afin d'assurer une certaine simplicité d'utilisation des différentes formules, il est proposé de réduire le nombre de valeurs caractéristiques de  $\alpha_Z$  à cinq et d'interpoler linéairement pour les valeurs intermédiaires (cf. tableau 3.1). La qualité de cette approximation sera estimée dans la section suivante.

FIGURE 3.26 – Variation du coefficient d'imperfection  $\alpha_Z$  en fonction de la courbure ZTABLE 3.1 – Valeur proposée pour le paramètre  $\alpha_Z$ 

| Z          | 0    | 10   | 20   | 30   | $\geq 40$ |
|------------|------|------|------|------|-----------|
| $\alpha_Z$ | 0.28 | 0.38 | 0.33 | 0.21 | 0.13      |

### 3.5.2 Par modification de l'EN 1993-1-6

#### 3.5.2.1 Equation de la fonction retenue

La nouvelle norme européenne l'EN 1993-1-6, version 2007 propose une courbe de voilement sous une forme universelle, de sorte qu'elle peut capter largement le domaine de variation des configurations (géométrie et chargement). Elle est présentée en fonction de l'élanement réduit de la coque de la façon suivante :

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \lambda \leq \lambda_0 \\ 1 - \beta \left( \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_p - \lambda_0} \right)^n & \text{lorsque } \lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_p \\ \frac{\alpha}{\lambda^2} & \text{lorsque } \lambda_p \leq \lambda \end{cases} \quad (3.32)$$

où :  $\lambda_0$  est l'élanement réduit associé à la charge limite plastique (ou la longueur du plateau plastique) ;  $\alpha$  est le facteur de réduction d'imperfection élastique ;  $\beta$  est le facteur du domaine plastique et  $\eta$  est un exposant d'interaction élasto-plastique.

Ces courbes de voilement ne résultent pas de la résolution d'un problème analytique simplifié (Rotter [121]), ni d'un ajustement empirique à des données d'essai comme cela a pu être le cas nombreuses courbes semblables dans le passé (i.e ECCS 1988, NASA 1998). Au contraire, il s'agit de courbes universelles qui peuvent s'adapter aux caractéristiques clés d'une grande variété de structures de coque par identification d'un petit nombre de paramètres (i.e  $\lambda_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta$ ) à partir des caractéristiques géométriques, du chargement et du

matériau de la structure (Rotter [119]). Par exemple, dans l'Annexe D de l'EN 1993-1-6, on trouve pour un cylindre sous compression axiale,  $\lambda_0 = 0,2$ ;  $\eta = 1$  et  $\beta = 0,6$ .

Ces courbes de voilement sont présentées qualitativement sur la figure 3.27. Elles se composent donc de trois parties. Pour un élancement réduit  $\lambda \leq \lambda_0$ , la résistance est égale à la résistance plastique (i.e limite d'élasticité  $f_y$ ). Pour  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_p$ , le comportement est de type interaction voilement élastique-plastique. Pour  $\lambda_p \leq \lambda$ , le comportement est essentiellement dû au voilement élastique. La valeur de  $\lambda_p$  est déduite par continuité :

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\beta}} \quad (3.33)$$

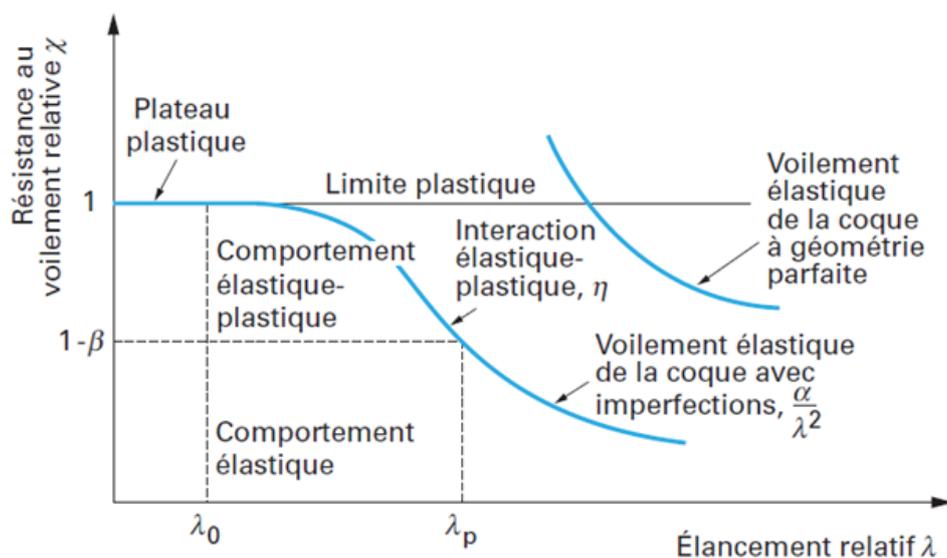


FIGURE 3.27 – Courbe de résistance typique des coques de révolution (tiré de Lagae et Vanlaere [87])

Cette courbe de voilement universelle étant valable pour tous les éléments de type coque, elle l'est aussi pour les tôles courbes cylindriques sera donc estimée sous compression uniforme qu'il va falloir identifier.

### 3.5.2.2 Identification des paramètres

L'utilisation des courbes de l'EN 1993-1-6 (expression 3.32) nécessite l'identification de quatre paramètres :  $\lambda_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\eta$ . Cette tâche étant relativement délicate à effectuer sur une représentation du type de celle de la figure 3.27. Rotter [120] en a proposé une forme alternative où l'abscisse est remplacée par le rapport de la charge ultime à la charge critique :  $F_{ult}/F_{cr}$  (figure 3.28). Grâce à cette présentation, les paramètres du problème sont facilement déterminés.

Cette présentation n'est cependant utile que pour les tôles de très grandes courbures, dont le comportement est semblable à celui des cylindres, mais elle devient inutile pour

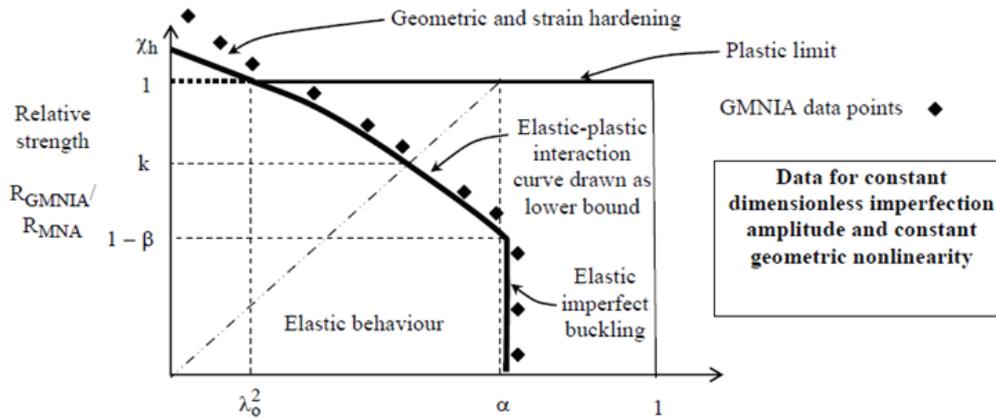


FIGURE 3.28 – Forme alternative de la courbe de résistance - Proposition de Rotter [120]

les tôles de faible (même moyenne) courbure qui présentent une réserve postcritique importante. L’identification des paramètres sera donc effectuée progressivement, d’abord par calibrage des comportements asymptotiques et ensuite par ajustement des facteurs d’imperfection et plastique.

On note tout d’abord que le comportement des plaques planes se décompose en seulement deux modes de ruine : ruine plastique si  $\lambda \leq \lambda_0$  ou voilement élastique pour  $\lambda \geq \lambda_0$  (figure 3.29). Dans le formalisme de l’EN 1993-1-6, cela se traduit par la disparition du domaine d’interaction élasto-plastique (c.f équation 3.32), c’est-à-dire par  $\lambda_0 = \lambda_p$ . On obtient ainsi deux bornes en  $Z = 0$  pour  $\lambda_0$  et  $\lambda_p$ . L’évolution de  $\lambda_0$  est identique ici à celle du paragraphe 5.1.2, elle est déterminé par intersection des courbes  $Z = cste$  et de  $\chi = 1$ , de sorte que  $\bar{\lambda}_0 = 0,2 + 0,473 \cdot e^{-\frac{Z}{20}}$ . L’identification de  $\lambda_p$  est plus délicate et exige auparavant l’étude du comportement élasto-plastique des panneaux.

On remarque aussi sur la figure 3.19, que lorsque la courbure augmente, la longueur du palier plastique diminue, et celle du voilement élastique augmente, ce qui est illustré figure 3.29. Dans la zone élasto-plastique ( $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_p$ ), on observe que le coefficient de réduction varie linéairement en fonction de  $\lambda$ , ce qui indiquerait un facteur d’interaction  $\eta = 1$ . Cette valeur serait en accord avec le comportement asymptotique de type cylindre pour lequel on a aussi  $\eta = 1$  (l’EN 1993-1-6 annexe D). C’est donc cette valeur qui est choisie.

Partant de là, on identifie conjointement sur la figure 3.19 les paramètres  $\beta$  et  $\lambda_p$  en traçant des droites d’origine  $\lambda_0$  :  $\beta$  représente la pente et  $\lambda_p$  est l’élancement pour lequel les points s’écartent de la droite. Les expressions de  $\beta$  et  $\lambda_p$  sont donc obtenues par les relations suivantes :

$$\lambda_p = 0,673 + 0,54 \cdot e^{-\frac{4}{Z}} \tag{3.34}$$

$$\beta = 0,57 \cdot e^{-\frac{2,7}{Z}} \tag{3.35}$$

Enfin, pour la troisième partie de la courbe, l’existence d’un comportement postcritique pour les panneaux courbes comme pour les plaques planes nécessite que le paramètre  $\alpha$

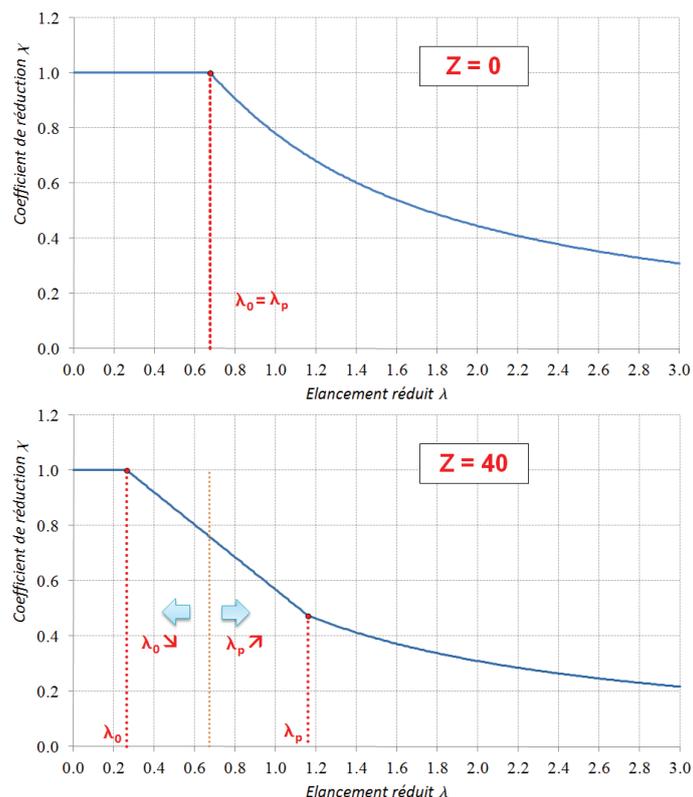


FIGURE 3.29 – Philosophie de l'approche selon l'EN 1993-1-6

soit une fonction de  $\lambda$  et non une constante comme pour les cylindres. L'expression de  $\alpha$  est donc cherchée sous la forme :

$$\alpha(Z) = A_Z \lambda + B_Z \quad (3.36)$$

Ainsi, si  $Z = 0$  on prend  $A_Z = 1$  et  $B_Z = -0,22$ , on retrouve bien l'expression des plaques planes. On pourrait cependant prendre  $A_Z = \beta$  de la section précédente (5.1.2) car les deux paramètres décrivent bien le comportement asymptotique en  $\frac{1}{\lambda}$  :

$$A_Z = \frac{1 + e^{-\frac{Z}{33}}}{2} \quad (3.37)$$

La valeur de  $B_Z$  est ensuite déterminée en écrivant la continuité des courbes en  $\lambda = \lambda_p$  :

$$B_Z = (1 - \beta)\lambda_p^2 - A_Z \lambda_p \quad (3.38)$$

### 3.5.3 Comparaison des deux approches

Selon l'origine de l'expression du départ, la résistance des tôles courbes cylindriques peut être exprimée selon deux modèles :

– Le premier modèle (modèle  $n^{\circ}1$ ) est déduit suivant l'EN 1993-1-5 :

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}_0 \\ \frac{2\beta}{\beta + \bar{\lambda} + \sqrt{(\beta + \bar{\lambda})^2 - 4\beta(\bar{\lambda} - \alpha_Z(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0))}} & \text{si non} \end{cases} \quad (3.39)$$

avec :

$$\bar{\lambda}_0 = 0,2 + 0,473 \cdot e^{-\frac{Z}{20}} \quad (3.40)$$

$$\beta = \frac{1 + e^{-\frac{Z}{33}}}{2} \quad (3.41)$$

et la valeur de  $\alpha_Z$  donnée par le tableau 3.1

– Le deuxième modèle (modèle  $n^{\circ}2$ ) est évalué suivant l'EN 1993-1-6 :

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \lambda \leq \lambda_0 \\ 1 - \beta \left( \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_p - \lambda_0} \right)^n & \text{lorsque } \lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_p \\ \frac{\alpha}{\lambda^2} & \text{lorsque } \lambda_p \leq \lambda \end{cases} \quad (3.42)$$

avec :

$$\lambda_0 = 0,2 + 0,473 \cdot e^{-\frac{Z}{20}} \quad (3.43)$$

$$\lambda_p = 0,673 + 0,54 \cdot e^{-\frac{4}{Z}} \quad (3.44)$$

$$\beta = 0,54 \cdot e^{-\frac{2Z}{Z}} \quad (3.45)$$

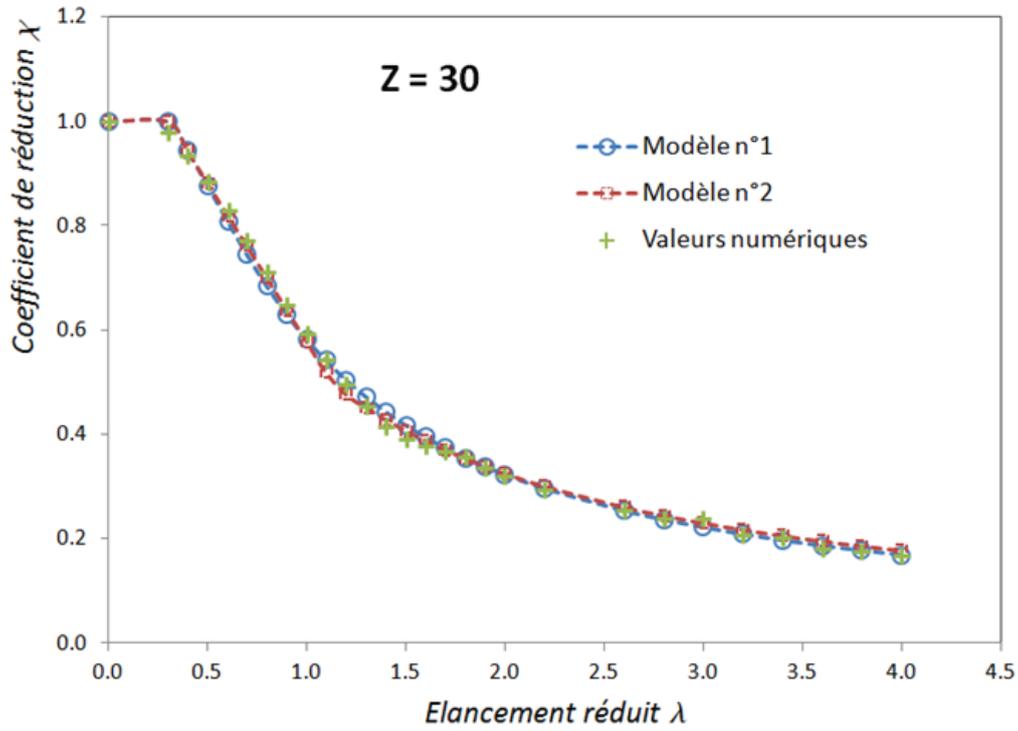
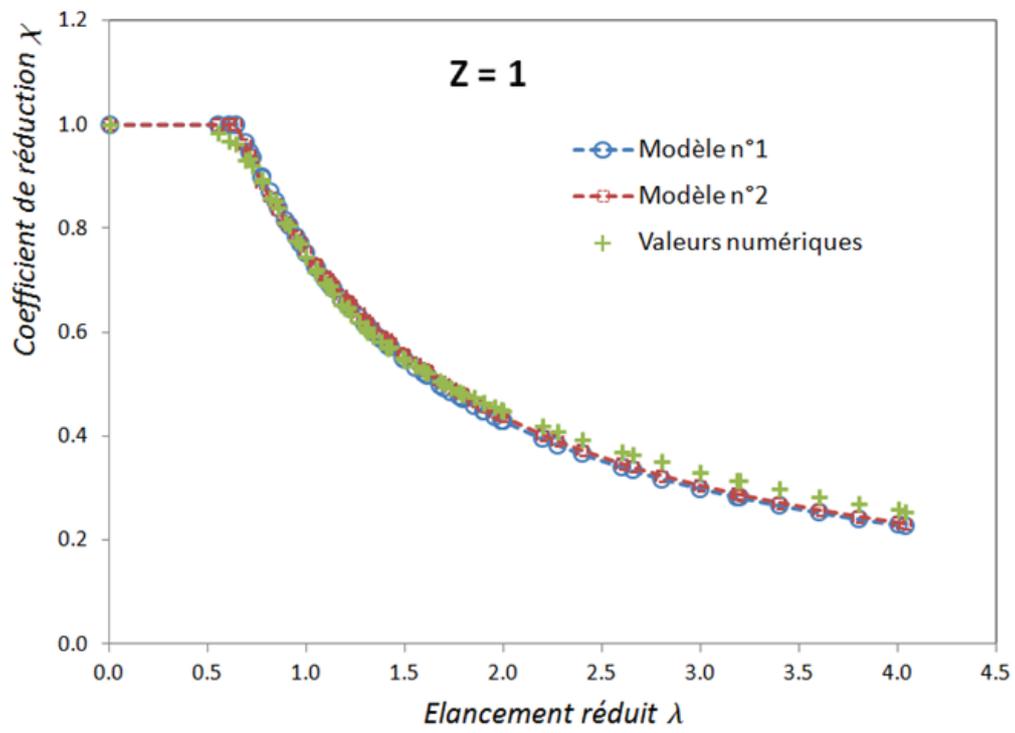
$$A_Z = \frac{1 + e^{-\frac{Z}{33}}}{2} \quad (3.46)$$

$$B_Z = (1 - \beta)\lambda_p^2 - A_Z\lambda_p \quad (3.47)$$

La comparaison entre les deux modèles est présentée figure 3.30. On constate que les deux modèles sont capables de prédire avec précision les valeurs numériques. Il est évident que selon la valeur de la courbure (grande ou petite), l'un des deux modèles sera légèrement plus performant que l'autre car l'expression déduite de la courbe de résistance est calibrée en partant d'une origine différente.

Sur l'ensemble des résultats numériques (524 simulations au total), les deux modèles prédisent bien la résistance ultime (figure 3.31). Leurs valeurs moyennes sur 524 d'essais sont proches de 1 avec un écart type très faible : environ 4,5% pour les deux modèles. Bien que la qualité de l'estimation des deux modèles soit équivalente, on décide d'utiliser l'expression basée sur l'EN 1993-1-5 (modèle  $n^{\circ}1$ ) dans la suite de ce travail. D'une part ce modèle se compose de moins de paramètres à manipuler (trois paramètres contre cinq dans le modèle  $n^{\circ}2$ ), et d'autre part, la détermination des paramètres est plus justifiable et moins qualitative comme obtenu pour le modèle  $n^{\circ}2$ . De plus le domaine des ouvrages d'art conduit plus les tôles courbes à se rapprocher de plaques planes.

Le modèle de résistance ultime développé ici doit respecter les exigences de sécurité requises par l'EN 1990 [1] pour être conforme aux standards européens, au même titre que les parties 1-5 et 1-6. Ces exigences seront satisfaites à condition d'appliquer un coefficient



Comparaison de la pertence des deux modèles (1/2)

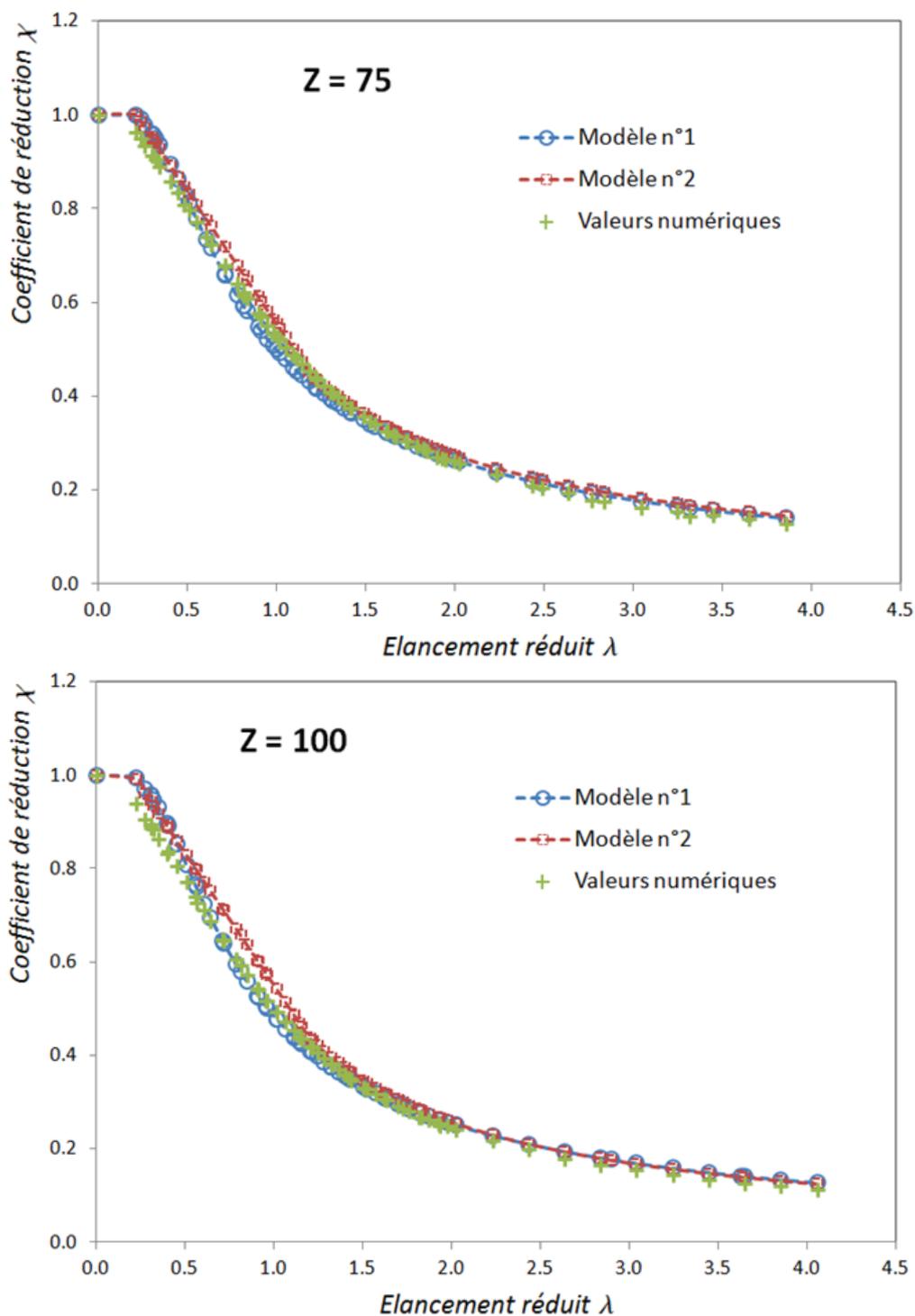


FIGURE 3.30 – Comparaison de la pertience des deux modèles (2/2)

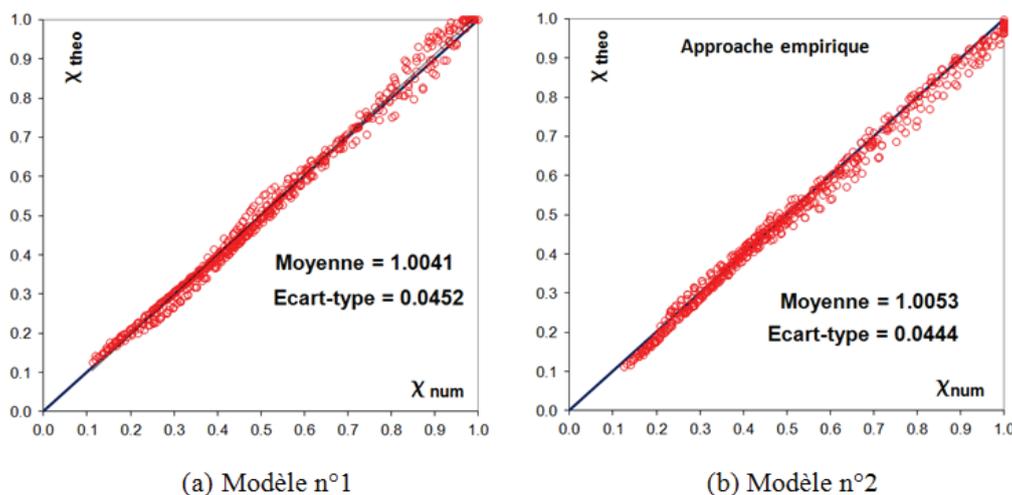


FIGURE 3.31 – Comparaison de la résistance ultime estimée par les deux modèles sur l'ensemble des résultats numériques

de sécurité  $\gamma_M$  (destiné à couvrir les différentes incertitudes du modèle de calcul) sur la valeur théorique de la charge de ruine, obtenue directement par application des modèles de calcul proposés. L'évaluation de ce coefficient de sécurité sera l'objectif de la prochaine section.

## 3.6 COEFFICIENT DE SÉCURITÉ

### 3.6.1 Etat de l'art

Historiquement, l'idée de la sécurité d'un ouvrage est introduite par une analyse déterministe de la sécurité. Cette analyse utilisée dans les anciens règlements, consistait à vérifier que la contrainte maximale dans la partie la plus sollicitée de l'ouvrage ne dépassait pas une contrainte admissible  $\sigma_{adm}$  obtenue en divisant la contrainte de ruine  $\sigma_R$  du matériau par un coefficient de sécurité  $K$  fixé de façon conventionnelle :

$$\sigma \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_R}{K}. \quad (3.48)$$

On s'est aperçu (Calgaro [35]) que l'utilisation d'un seul coefficient de sécurité pour caractériser le risque n'est pas suffisante et qu'il faut en réalité utiliser plusieurs critères. Une approche probabiliste a donc été développée sur les bases du congrès de Liège de l'IABSE (Association internationale des Ponts et Charpentes Métallique) en 1948. Selon cette approche, un ouvrage est réputé sûr si sa probabilité de ruine est inférieure à une valeur donnée à l'avance, valeur qui dépend de nombreux facteurs comme la durée de vie escomptée de l'ouvrage, les conséquences engendrées par sa ruine, le coût d'entretien, etc. La méthode probabiliste d'analyse de la sécurité est très séduisante, mais elle conduit à des difficultés d'applications multiples. Par exemple, le calcul de la structure réelle fait intervenir plusieurs variables et il n'est pas toujours facile d'attribuer à tous

ces facteurs d'incertitude une loi de distribution statistique. C'est pourquoi la réglementation actuelle (Eurocode ou norme américaine AASHTO-LRFD) est basée sur une analyse semi-probabiliste (mélange des deux approches précédentes) de la sécurité des structures (Calgaro [35]).

Le contexte de l'approche semi-probabiliste est que chaque valeur des actions et des propriétés mécaniques est considérée comme une variable probabiliste. Cela signifie que chaque paramètre (chargement et résistance) a une valeur moyenne (considérée dans l'approche déterministe), mais également une fonction de distribution (par exemple, normale ou log-normale), le plus souvent caractérisée par une variance ou un écart-type. L'intersection de ces distributions, qui constitue la probabilité de défaillance, est évaluée en faisant appel à un code de dimensionnement semi-probabiliste. Le principe d'attribution des coefficients de sécurité selon l'Eurocode est présenté la figure 3.32.

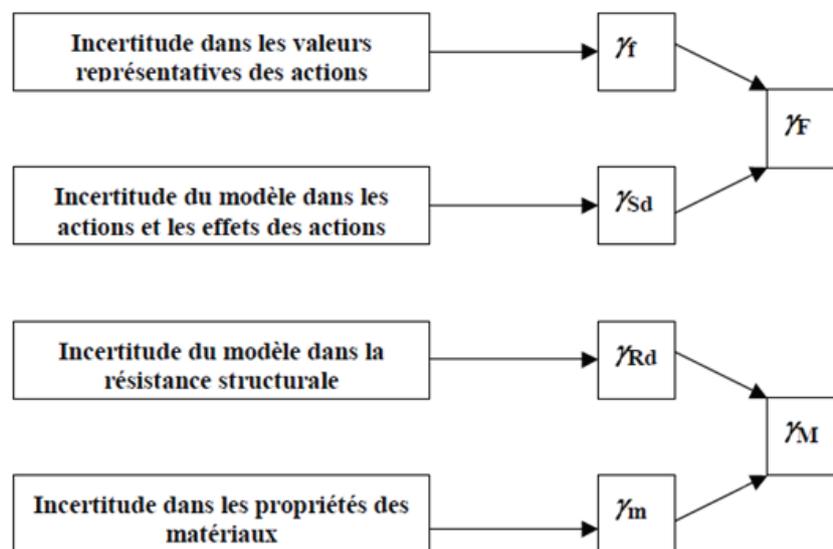


FIGURE 3.32 – Coefficient partiels dans l'EN 1990

### 3.6.2 Principe d'évaluation

Les principes pour l'évaluation de ce coefficient de sécurité  $\gamma_M$  sont détaillés dans les annexes B (Gestion de la fiabilité structurale pour les constructions), C (Base pour la méthode des coefficients partiels et l'analyse de la fiabilité) et D (Dimensionnement assisté par l'expérimentation) de l'EN 1990. Pour une population de  $n$  essais réalisés de façon expérimentale, le procédé est résumé en succinctement comme suit (Johansson *et al.* [77]).

À la première étape, on établit une fonction de résistance théorique appelée  $r_t = g_{Rt}(\underline{X})$ , où  $\underline{X}$  représente les variables indépendantes de base influant sur la résistance à l'état-limite concerné. Cette fonction de résistance  $r_t$  correspond à la résistance du modèle de calcul dont on évaluera le coefficient de sécurité. Il convient ensuite de comparer cette

résistance théorique  $r_t$  à la résistance expérimentale  $r_e$  (voir la figure 3.33) pour chacun des  $n$  essais. Si la fonction de résistance est exacte et complète, tous les points se situeront sur la ligne droite  $r_e = r_t$ . Dans la pratique, les points révéleront une certaine dispersion et la résistance  $r_e$  peut être ajustée par l'équation  $r_e = \bar{b}r_t$ , où  $\bar{b}$  est la valeur moyenne du facteur de correction, évaluée par la méthode des moindres carrés.

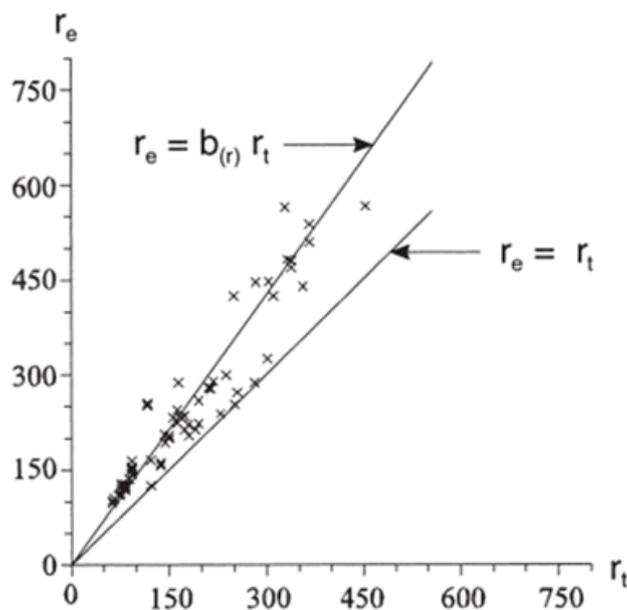


FIGURE 3.33 – Diagramme  $r_e - r_t$

On définit le modèle probabiliste  $R$  du  $r_t$  par la relation :  $R = \bar{b}r_t\delta$ , où  $\delta$  est le terme d'erreur. Ce terme d'erreur  $\delta$  est supposé suivre une loi normale ayant le coefficient de variation  $\nu_\delta$ . En théorie, ce coefficient est censé représenter la variation du modèle de résistance théorique  $r_t$ . En réalité, le nombre d'essais est souvent limités et par conséquent, ne sont pas suffisamment riches afin de couvrir toute la variation du modèle. Pour tenir compte aussi de la variation des paramètres (correspondants aux variables aléatoire  $X_j$ ), le coefficient de variation  $\nu_R$  de la résistance doit être augmenté. La valeur moyenne  $X_j$  et le coefficient  $\nu_{X_i}$  retenus pour chaque variable sont supposés connus et donnés par l'Eurocode (voir tableau 3.2). On en déduit donc le coefficient de variation  $\nu_R$  du modèle de résistance par la relation suivante :

$$\nu_r^2 = \nu_\delta^2 + \nu_{r_t}^2 \quad \text{avec} \quad \nu_{r_t}^2 = \sum_{i=1}^n \nu_{X_i}^2 \quad (3.49)$$

TABLE 3.2 – Moyenne et coefficient de variation pour les variables de base selon l'Eurocode 3

| Nature de la variable aléatoire | $\bar{X}_i$     | $\nu_{X_i}$ |
|---------------------------------|-----------------|-------------|
| Limite d'élasticité $f_y$       | $1,14f_{y,nom}$ | 0,07        |
| Epaisseur de plaque $t$         | $t_{nom}$       | 0,05        |
| Largeur de plaque $b$           | $b_{nom}$       | 0,005       |

La résistance caractéristique  $R_k$  à 5% du modèle probabiliste  $R$  est donnée :

$$R_k = \bar{m}_R \exp \left( -1,64\sigma_R - 0,5\sigma_R^2 \right) \quad (3.50)$$

avec  $m_R$  et  $\sigma_R$  respectivement la valeur moyenne et l'écart-type du modèle  $R$  ( $R$  est supposé suivre une loi normale). Par le même principe, la résistance de calcul  $R_d$  du modèle probabiliste  $R$  est déterminé de façon suivant :

$$R_d = \bar{m}_R \exp \left( \alpha_R \beta \sigma_R - 0,5\sigma_R^2 \right) \quad (3.51)$$

avec le coefficient  $\alpha_R = 0,8$  et l'indice de fiabilité  $\beta = 3,8$  indiqués dans l'Eurocode 1990 [1]. Le coefficient partiel de sécurité est enfin déduit par le rapport de deux valeurs de résistances :

$$\gamma_M = \frac{R_k}{R_d} \quad (3.52)$$

### 3.6.3 Evaluation du coefficient de sécurité sur le modèle $n^{\circ}1$

Lorsque les valeurs  $r_{e,i}$  ne sont pas issues d'essais en laboratoire mais de la simulations numériques par éléments finis, un complément de l'annexe D de l'EN 1990 1990 [1] a suggéré de remplacer simplement  $r_{ei}$  par  $r_{FEM,i}$  obtenus par le modèle numérique. La démarche dessus reste valable. Cette proposition n'est cependant après tout qu'une hypothèse de calcul. Il faut toutefois tenir compte aussi des incertitudes du modèle de calcul par éléments finis. Cela conduit à ajouter un terme à la somme des coefficients de variation pour obtenir celui du modèle de résistance :

$$v_r^2 = v_\delta^2 + v_{rt}^2 + v_{FEM}^2. \quad (3.53)$$

Pourtant, cette démarche nécessite toujours d'alimenter la base de données avec quelques points expérimentaux (un petit nombre suffit). Néanmoins, une évaluation de  $\gamma_M$  a été faite en considérant que la variation expérimentale est nulle ( $v_{rt} = 0$ ) de sorte que la démarche de l'annexe D a conduit à un coefficient de sécurité égal à  $\gamma_M = 1,07$  (figure 3.34).

Vu que la distribution des points théoriques/numériques est très alignée sur la droite (figure 3.31 et figure 3.34) et en attendant que des essais expérimentaux soient réalisés, on propose d'utiliser le coefficient de sécurité  $\gamma_{M,1} = 1,1$  qui est fréquemment utilisé pour les problèmes d'instabilités de structures métalliques (indiqué dans Eurocode 1993-1-1 [2]).

## 3.7 CONCLUSION

Dans ce chapitre, le comportement critique de voilement et la résistance ultime des panneaux courbes cylindriques ont été étudiés à l'aide de la méthode des éléments finis. Les principaux résultats sont résumés ci-dessous :

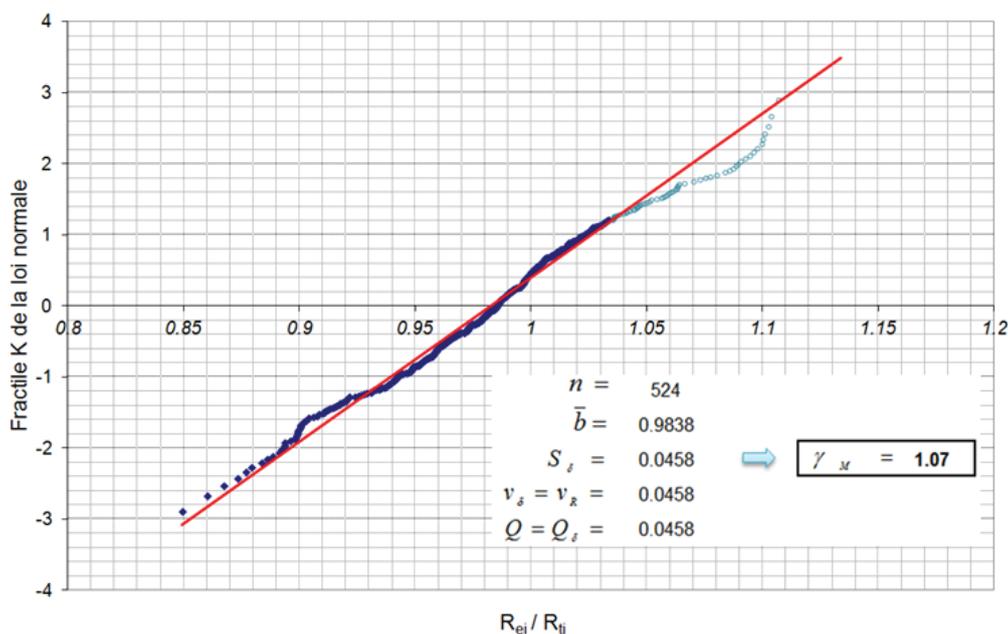


FIGURE 3.34 – Calcul du coefficient de sécurité - Base de données numériques

- La contrainte critique de voilement augmente avec la courbure, représentée par le paramètre  $Z = \frac{b^2}{Rl}$ . Celle-ci peut être estimée avec une précision satisfaisante à l'aide de la formule de Stowell.
- Les imperfections initiales (géométriques et matérielles) peuvent être réduites comme indiqué dans l'EN 1993-1-5 à une imperfection géométrique équivalente suivant la forme du premier mode de voilement avec une amplitude maximale  $w_0$  égale au minimum de  $a/200$  et  $b/200$ .
- Les tôles courbes, comme les plaques planes, possèdent une réserve post-critique et, pour de forts élancements, leur comportement élastique peut être considéré comme proportionnel à  $\frac{\beta}{\lambda}$  où  $\beta$  est un paramètre qui caractérise l'influence des imperfections et dont la valeur, qui dépend de la courbure  $Z$ , est comprise entre 0,5 et 1 (pour une plaque plane,  $\beta$  est égal à 1).
- Des nouvelles expressions du coefficient de réduction  $\rho$  ont été développées en suivant la méthodologie existante pour les courbes de flambage européennes et pour les coques de révolutions. Les différents paramètres de ces expressions ont été calibrés à l'aide d'une base de données numériques couvrant l'ensemble du domaine d'application des ponts métalliques (i.e. la courbure est inférieure à 100 :  $Z \leq 100$  et le coefficient d'aspect  $\alpha$  est compris entre [0,8-3]). Ces deux approches sont en bon accord avec les résultats numériques.
- Par absence de données expérimentales, le calcul du coefficient de sécurité de la méthode proposée est rendu difficile. Pourtant, en supposant que les valeurs numériques jouent le rôle des données expérimentales, il est déduit que la valeur du coefficient de sécurité soit égale à  $\gamma_{M,1} = 1,1$ , la valeur commune de tous les problèmes d'instabilité des charpentes métalliques.



# ADAPTATION DE LA DÉMARCHE EUROCODE AUX TÔLES COURBES RAIDIES

## SOMMAIRE

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 4.1   | ETAT DE L'ART SUR LE DIMENSIONNEMENT DES TÔLES COURBES RAIDIES . . . . .    | 119 |
| 4.1.1 | Revue bibliographique . . . . .   | 119 |
| 4.1.2 | Récapitulatif des travaux expérimentaux . . . . .                           | 120 |
| 4.1.3 | Etudes numériques . . . . .   | 126 |
| 4.2   | ÉTUDE PRÉLIMINAIRE PAR ÉLÉMENTS FINIS . . . . .                             | 128 |
| 4.2.1 | Génération du modèle d'éléments finis . . . . .                             | 128 |
| 4.2.2 | Comportement critique de voilement . . . . .                                | 128 |
| 4.2.3 | Comportement ultime . . . . .   | 131 |
| 4.3   | MÉTHODOLOGIE DE DIMENSIONNEMENT DES TÔLES COURBES RAIDIES . . . . .         | 133 |
| 4.4   | COMPORTEMENT DE TYPE COLONNE . . . . .                                      | 134 |
| 4.5   | COMPORTEMENT DE TYPE PLAQUE . . . . .                                       | 137 |
| 4.5.1 | Contrainte critique de voilement . . . . .                                  | 138 |
| 4.5.2 | Courbe de réduction . . . . .   | 139 |
| 4.6   | COMPORTEMENT INTERPOLÉ . . . . .  | 141 |
| 4.7   | RECAPITULATIF DE LA MÉTHODE PROPOSÉE . . . . .                              | 142 |
| 4.7.1 | Détermination de la section efficace vis-à-vis du voilement local . . . . . | 142 |
| 4.7.2 | Réduction due au voilement global . . . . .                                 | 142 |
| 4.7.3 | Résistance ultime . . . . .   | 144 |
| 4.8   | CONCLUSION . . . . .  | 144 |

**L**E comportement des tôles courbes raidies est un problème complexe. Outre la difficulté liée à la présence des raidisseurs ou celle due à la courbure que l'on a identifiées aux

chapitres précédents sur les plaques planes raidies et sur les tôles courbes non-raïdies, la complexité augmente du fait de l'interaction de les deux paramètres. Les travaux scientifiques sur ce sujet sont très peu nombreux et aucune expression simplifiée ne permet à ce jour de dimensionner de tels panneaux. Pourtant, les tôles courbes raidies sont utilisées dans la pratique. Inévitablement, ce sont les expressions de la résistance pour des plaques planes raidies qui sont utilisées pour leur dimensionnement en négligeant les effets de la courbure. Cette hypothèse est elle cependant légitime ? Ce présent chapitre a pour but de répondre à cette question.

Après une brève revue bibliographique sur le problème, le comportement des tôles courbes raidies sera examiné à l'aide de simulations numériques. Puis, supposant que le comportement des tôles courbes raidies utilisées dans les ouvrages d'art est effectivement voisin de celui en plaques planes, une méthode de dimensionnement sera développée par adaptation de la démarche de l'EN 1993-1-5. La pertinence de la méthode proposée sera évaluée à travers les résultats numériques. Un exemple d'application récapitulera la méthode proposée à la fin de ce chapitre.

## 4.1 ETAT DE L'ART SUR LE DIMENSIONNEMENT DES TÔLES COURBES RAIDIES

### 4.1.1 Revue bibliographique

On a vu au chapitre 2 que la vérification d'instabilité d'une plaque raidie est un problème complexe et n'est pas encore maîtrisée dans la norme européenne actuelle. Ces difficultés viennent notamment de la complexité de la géométrie, de la non-linéarité du matériau de construction et de la sensibilité aux imperfections initiales. On a aussi remarqué au chapitre 3 que le passage d'une plaque plane à une tôle courbe non-raïdie n'est d'ailleurs pas évident à cause de la forte influence de la courbure. La complexité est accentuée par la présence des raidisseurs. Par conséquent, les études sur les tôles courbes raidies sont très peu nombreuses dans la littérature (le faible nombre est due aussi à l'utilisation tardive de ces tôles raidies).

Les recherches sur le sujet ne commencent qu'à partir des années 40 pour des cas simples, avec par exemple un seul raidisseur au milieu de la plaque. Les travaux de Batdorf et Schildcrout [22] et Schildcrout et Stein [130] dans cette période ont montré que, d'une part, l'utilisation du raidisseur est importante afin de lutter contre le voilement et, d'autre part, que l'effet de la courbure augmente aussi la résistance critique de voilement. En revanche, plus la courbure augmente, moins le rôle du raidisseur est assuré. En effet, quand la courbure est grande, le nombre de demi-ondes dans la direction circonférentielle augmente et avec lui la probabilité que le raidisseur soit situé sur une ligne nodale. Le mode de voilement global tend vers le mode local des sous-panneaux (voir la figure 2.9 : différents modes de voilement des plaques raidies). Le raidisseur reste donc droit. L'augmentation de la rigidité du raidisseur dans ce cas n'a pas d'effet sur la résistance de voilement.

En 1958, Becker [23] a résumé tous les travaux concernant les tôles courbes raidies dans son guide de dimensionnement des structures vis-à-vis du problème d'instabilité. Ce travail relève qu'il n'existe aucune solution analytique pour dimensionner les tôles courbes raidies et qu'il y a très peu d'essais expérimentaux. Ces essais ont été mené par Gall [65], Lundquist [89], Ramberg *et al.* [114]. Les résultats montrent qu'en général, la courbure augmente la résistance ultime des tôles courbes. Pourtant, certains résultats ont montré une tendance à la diminution de la résistance ultime quand la courbure augmente contrairement aux attentes (Ramberg *et al.* [114]). Malgré l'apparente contradiction de ces résultats, d'autres essais n'ont pas été entrepris, soit à cause de la complexité du dispositif d'essais requis pour les tôles courbes (condition de maintien aux bords libres), soit simplement par manque d'argent (les applications des tôles courbes à l'époque étaient peu nombreuses).

Récemment, le problème des tôles courbes raidies a connu un regain d'intérêt grâce à la modélisation par éléments finis tels les travaux de Cho *et al.* [39], Khedmati et Edalat [84], et Park *et al.* [107, 108]. Leurs travaux sont cependant restreints à une étude paramétrique.

Plusieurs paramètres sont pris en compte pour éclaircir le comportement mais aucune expression simplifiée et fiable de la résistance n'est proposée. Le dimensionnement des tôles courbes reste toujours dans le flou.

Il faut mentionner qu'il existe d'autres recherches théoriques et expérimentales sur les tôles courbes en composite pour l'aéronautique comme celles effectuées dans le cadre du projet européen POISICOSS ( Zimmermann *et al.* [163], Zimmermann et Rolfes [164]). En effet, la réduction du poids d'un avion sans préjudice des coûts et de la durée de vie de structure est un objectif primordial de l'industrie aéronautique aujourd'hui. Les matériaux composites renforcés par les fibres de carbone (CFRP) ont en effet des propriétés mécaniques supérieures à celles de l'aluminium mais elles sont anisotropes. De plus, l'attache des raidisseurs à la tôle de fond est assurée par rivetage et non par soudage. Le mode de ruine dans les structures composites est donc essentiellement un décollement des différents composants ou un dysfonctionnement du rivet. Les formules de vérification sont donc déduites de ces modes de ruine, de sorte que ces résultats ne s'appliquent pas aux tôles rencontrées dans le génie civil.

#### 4.1.2 Récapitulatif des travaux expérimentaux

Les principaux essais sont récapitulés dans ce paragraphe selon l'ordre chronologique. Il faut souligner que ces essais ont été effectués plus dans l'objectif de montrer qualitativement l'influence de la courbure que d'évaluer quantitativement cet effet. Aucune expression de la résistance ultime n'est déduite suite à ces essais.

##### 4.1.2.1 Le travail de Gall

Le but principal de Gall [65] était d'esquisser une procédure à suivre pour toutes les recherches de structure de type plaque en aluminium dans le domaine aéronautique. L'influence de la courbure a été ajoutée en complément de cette étude.

Trois configurations de tôle courbes (de 2, 3 et 4 raidisseurs) ont été testées. Les raidisseurs sont de la forme en U, attachés à la plaque par les rivets (c.f figure 4.1). Les résultats d'essais sont donnés dans la figure 4.2 où la charge maximale est présentée en fonction du rapport rayon/épaisseur de tôle  $R/t$ . Les lignes horizontales sont les valeurs théoriques de résistance de plaque plane de configuration équivalente. Il a constaté que la résistance de la tôle courbe augmente avec l'augmentation du rapport  $R/t$ . Pourtant, si le rapport  $R/t$  est supérieur à 937, les tôles courbes résistent moins par rapport aux plaques planes équivalentes. Aucune tentative n'a été faite afin de déterminer quantitativement cet effet de courbure.

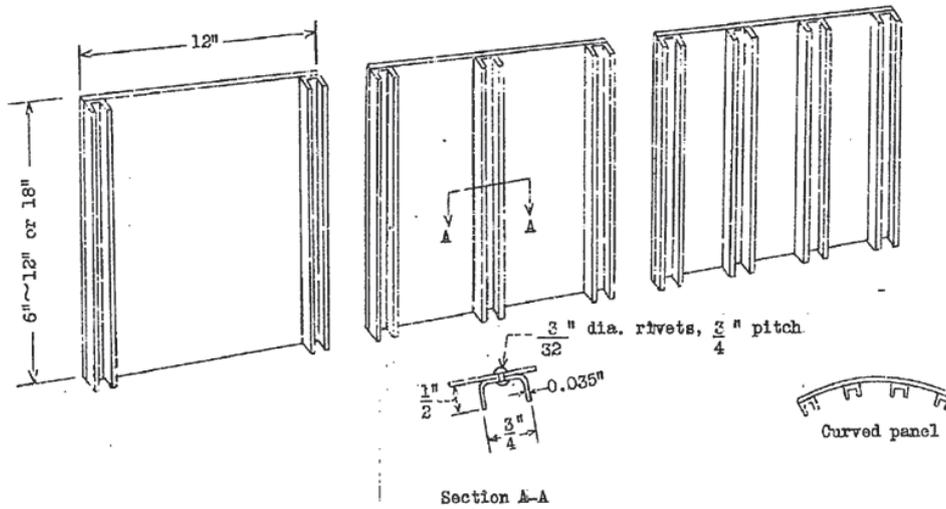


FIGURE 4.1 – Configuration des tôles raidies [d'après Gall [65]]

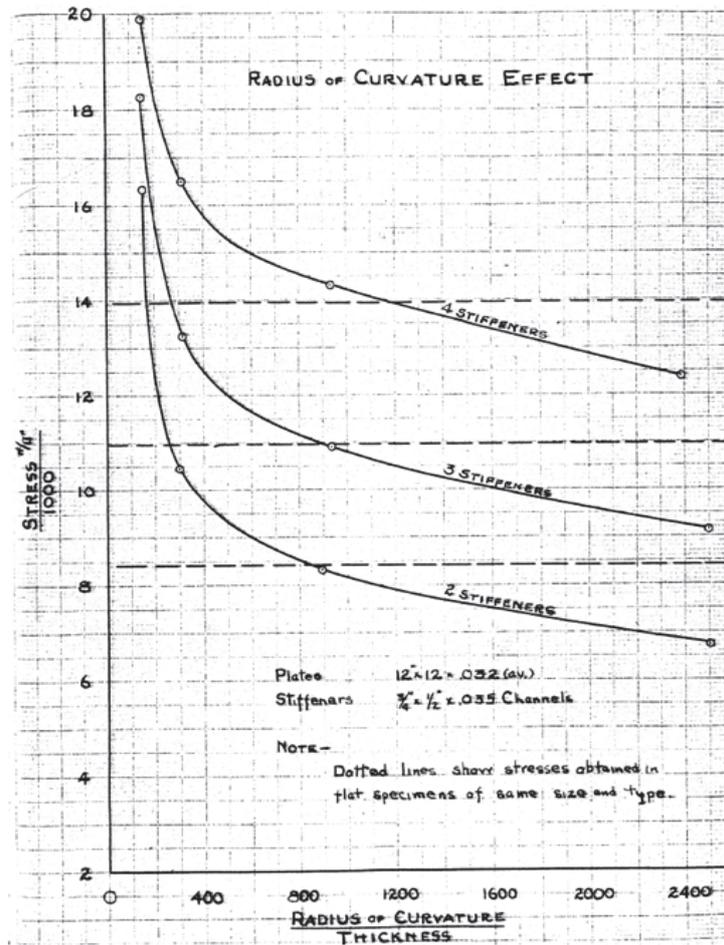


FIGURE 4.2 – Influence de la courbure sur la résistance des tôles courbes raidies [d'après Gall [65]]

### 4.1.2.2 Le travail de Lundquist

Les panneaux étudiés sont tous en alliage d'aluminium. La configuration des tôles est similaire à celle utilisée dans le travail de Gall [65]. L'objectif essentiel de Lundquist [89] est de vérifier l'exactitude des méthodes proposées pour une plaque plane raidie à cette époque et puis d'essayer de les appliquer à des tôles de faible courbure.

Comme les tôles sont de faible courbure, les résultats (c.f figure 4.3) des essais ont montré que la résistance à la compression du panneau courbe est proche de celle des panneaux plats pour des grandes valeurs du rapport rayon/épaisseur ( $\frac{R}{t} \geq 1200$ ). Quelques panneaux ont une résistance de 10% à 15% inférieure à celle des panneaux plats correspondants.

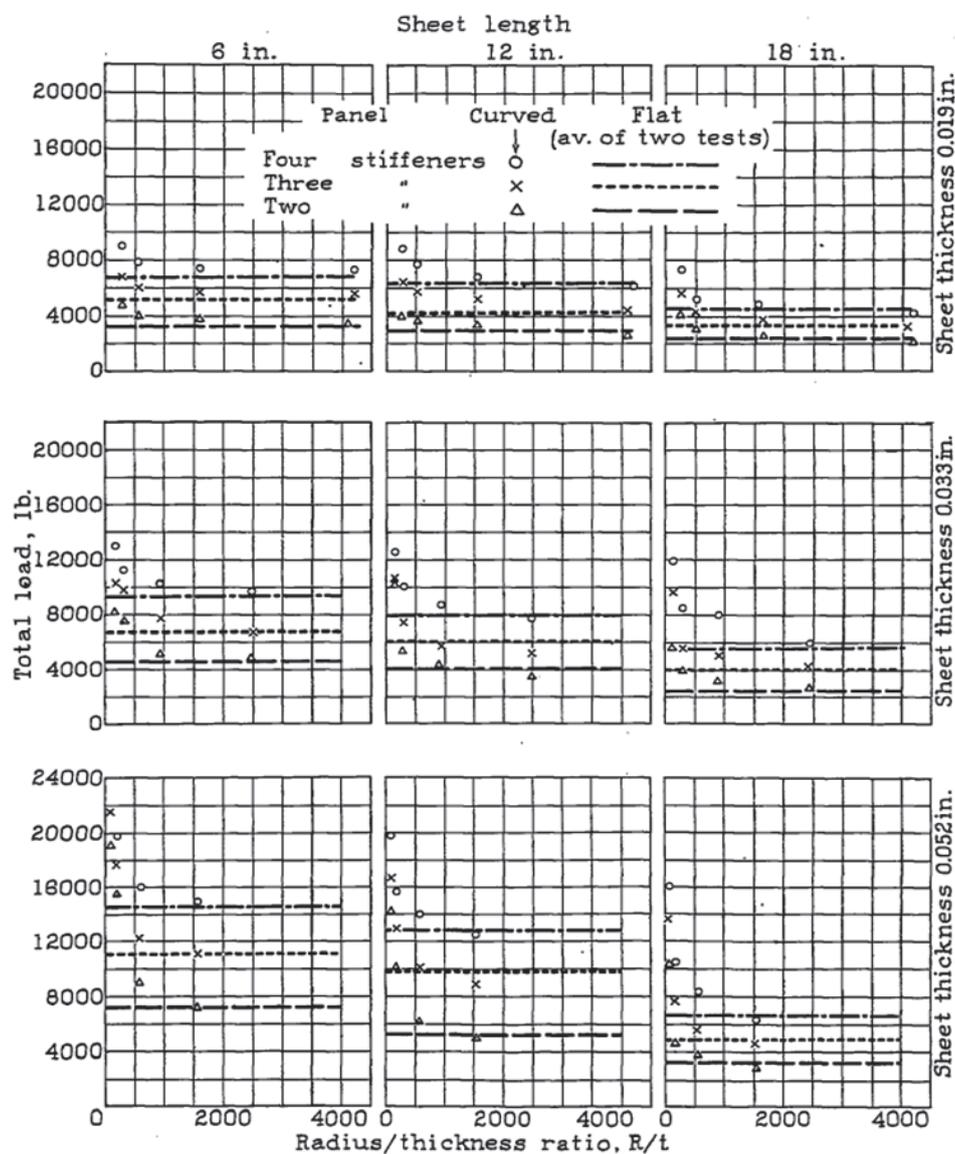


FIGURE 4.3 – Comparaison de la résistance maximale des tôles courbes aux plaques planes équivalentes [d'après Lundquist [89]]

### 4.1.2.3 Le travail de Ramberg *et al.*

Toujours dans le domaine aéronautique, Ramberg *et al.* [114] ont effectué des essais sur des tôles en aluminium (24S-T) renforcées à l'aide de rivetage par des raidisseurs de forme en Z. La configuration des tôles étudiées est présentée dans la figure 4.4. Les différents paramètres de l'étude sont le rayon de courbure  $R$ , l'épaisseur de la tôle  $t$  et la densité des rivets (i.e, l'espacement entre les deux rivets successifs) sont variés dans cet étude.

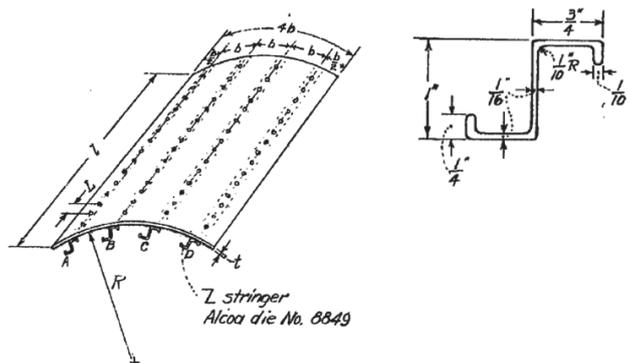


FIGURE 4.4 – Configuration du panneau courbe [d'après Ramberg *et al.* [114]]

Plusieurs modes de voilement ont été constatés dans ces essais : voilement local des sous-panneaux : entre les raidisseurs et entre deux rivets ; voilement local des raidisseurs et voilement global de l'ensemble de la tôle. Ce dernier type de voilement est aperçu seulement pour un échantillon dont la plaque de fond est épaisse. Dans ce cas, l'épaisseur de la tôle est si épaisse que les raidisseurs ne sont plus capables d'empêcher le déplacement hors plan de la tôle.

Quant au mode de ruine, la plupart des essais sont dominées par la ruine des raidisseurs (15/21 tôles étudiées). Seulement un essai périt par voilement des sous-panneaux, les autres par disfonctionnement (décollement) du rivet. L'influence de la courbure est reportée figure 4.5 où le rapport de la résistance ultime d'une tôle courbe à la plaque équivalente est tracé en fonction du paramètre de courbure  $Z_b = \frac{b^2}{Rt}$  avec  $b$  l'espacement des raidisseurs. Les résultats montrent en moyenne que l'effet de la courbure peut être considéré comme petit. Pour une valeur de  $Z_b$  inférieure à 10, la résistance de la tôle courbe augmente avec la courbure, mais le gain de résistance dû à la courbure n'est pas grand (6% en valeur moyenne et 15% au maximum). Au dessus de cette valeur de  $Z_b$ , la résistance ultime a pourtant tendance à diminuer avec l'augmentation de la courbure. Des essais supplémentaires sont aussi effectués par Sechler et Dunn [134]. Cependant, la dispersion de leurs résultats est grande. On observe néanmoins toujours une tendance à la hausse de la résistance ultime avec  $Z_b$  même si cette augmentation ne peut pas être évaluée avec précision.

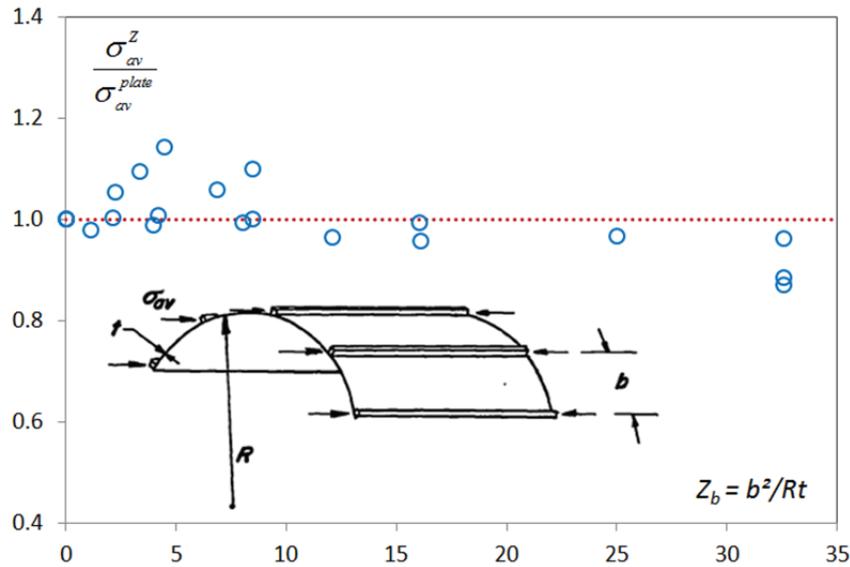


FIGURE 4.5 – L'influence de la courbure à la charge ultime des tôles courbes raidies [d'après Ramberg et al. [114]]

#### 4.1.2.4 Le travail de Soderquist

Le travail de Soderquist [141] prend la suite du travail de Ramberg *et al.* [114]. Une série de 19 plaques planes et courbes a été testée en compression. La configuration des tôles est identique à celle utilisée dans Ramberg *et al.* [114] à l'exception de la forme des raidisseurs. En fait, dans le travail précédent, la plupart des panneaux (15/21 panneaux testés) ont été dominés par la ruine locale des raidisseurs, les raidisseurs utilisés ici ont une section transversale rectangulaire (figure 4.6) afin d'éliminer les risques d'instabilité locale. Ces raidisseurs sont conçus pour empêcher la déviation de la plaque. La liaison avec la plaque de fond est réalisée par boulonnage (les raidisseurs ont subi un traitement de la surface pour qu'ils s'adaptent à la courbure de plaque).

Le coefficient de voilement  $k_c$  est présenté en fonction du paramètre de la courbure à la figure 4.7. La ligne droite représente la contrainte critique de voilement du cylindre donnée dans Becker [23]. Les résultats sont triés par sous groupes suivant le rapport du rayon de courbure et de l'épaisseur ( $R/t$ ), afin de vérifier s'il existe une corrélation entre ces deux paramètres comme dans le cas du cylindre complet. On observe que le coefficient de voilement  $k_c$  ne montre aucune tendance cohérente avec  $R/t$ . On observe également que pour de grandes valeurs de la courbure, le comportement des tôles courbes raidies tend vers celui de cylindres raidis. Aucune tentative n'a cependant été faite pour donner une expression analytique de ce coefficient de voilement, en raison du nombre insuffisant de points expérimentaux.

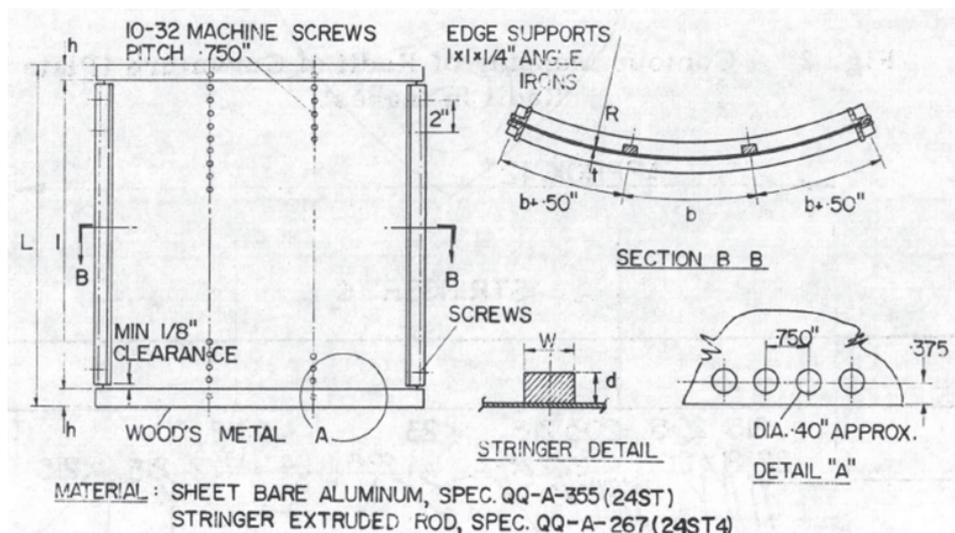


FIGURE 4.6 – Géométrie de la tôle étudiée [d'après Soderquist [141]]

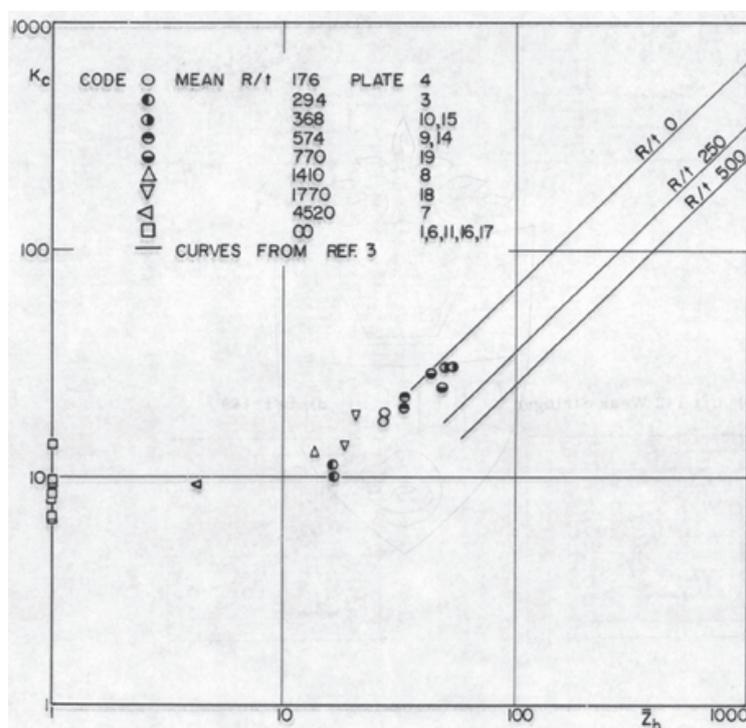


FIGURE 4.7 – Coefficient de voilement en fonction de la courbure [d'après Soderquist [141]]

Pendant les essais, les plaques ont été soumises à une charge croissante jusqu'au point où une charge supplémentaire n'a pu être reprise par la tôle : la résistance ultime de la plaque est donc identifiée. Les résultats sont présentés à la figure 4.8, où le rapport de la charge ultime (tôle courbe raidie à la plaque raidie de configuration équivalente) est reporté en fonction de la courbure  $Z_b$ . Les résultats sont triés suivant les valeurs de  $\frac{b}{t}$  (équivalent à l'élancement de plaque). Ils montrent une forte dépendance de la charge

ultime vis-à-vis du paramètre de courbure et du rapport  $\frac{b}{t}$ . Par exemple, pour  $Z_b = 27,8$  et  $\frac{b}{t} = 70,6$ , la résistance ultime de la tôle courbe est 154% plus grande que celle de la plaque correspondante. Pour une valeur constante de la courbure (e.g,  $Z_b = 30$ ), la résistance ultime diminue quand le rapport  $\frac{b}{t}$  augmente : le rapport est égal à 1,57 pour  $\frac{b}{t} = 70,6$  et 1,18 si  $\frac{b}{t} = 142$ . Cela signifie que la courbure a plus d'effet sur les plaques peu élancées que sur les plaques élancées. Aucune expression analytique de la résistance n'a été donnée en conclusion de ce travail.

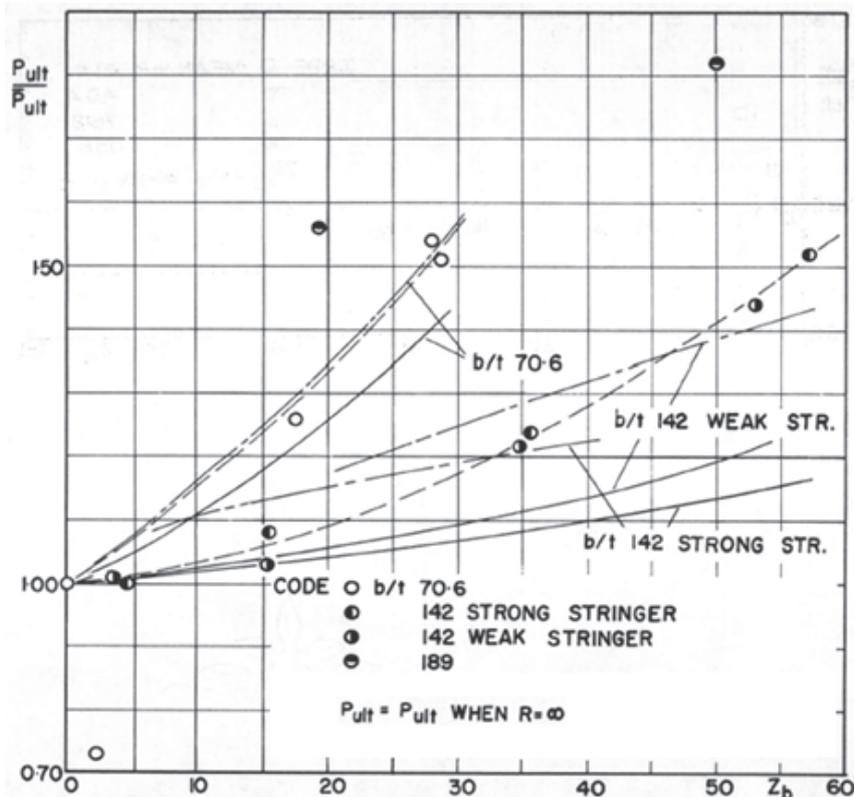


FIGURE 4.8 – Résistance ultime triée en fonction du rapport  $\frac{b}{t}$  [d'après Soderquist [141]]

### 4.1.3 Etudes numériques

Ces dernières années, grâce aux performances croissantes des méthodes numériques, le problème des tôles courbes raidies a connu un regain d'intérêt avec les travaux de Cho *et al.* [39], Khedmati et Edalat [84], et Park *et al.* [107, 108]. Ces travaux numériques sont un complément intéressant aux essais expérimentaux car plusieurs paramètres peuvent y être aisément étudiés. Néanmoins, du fait de la présence des imperfections initiales qui ne sont pas facile à introduire dans le modèle numérique (la complexité de la distribution aléatoire du défaut initial est présentée à la figure 4.9) ou les conditions d'essais (c'est-à-dire, surface de contact n'est pas parfaitement plane), il est possible que le modèle numérique ne donne pas de valeurs comparables à celles obtenues lors des essais expérimentaux comme constaté par Cho *et al.* [39].

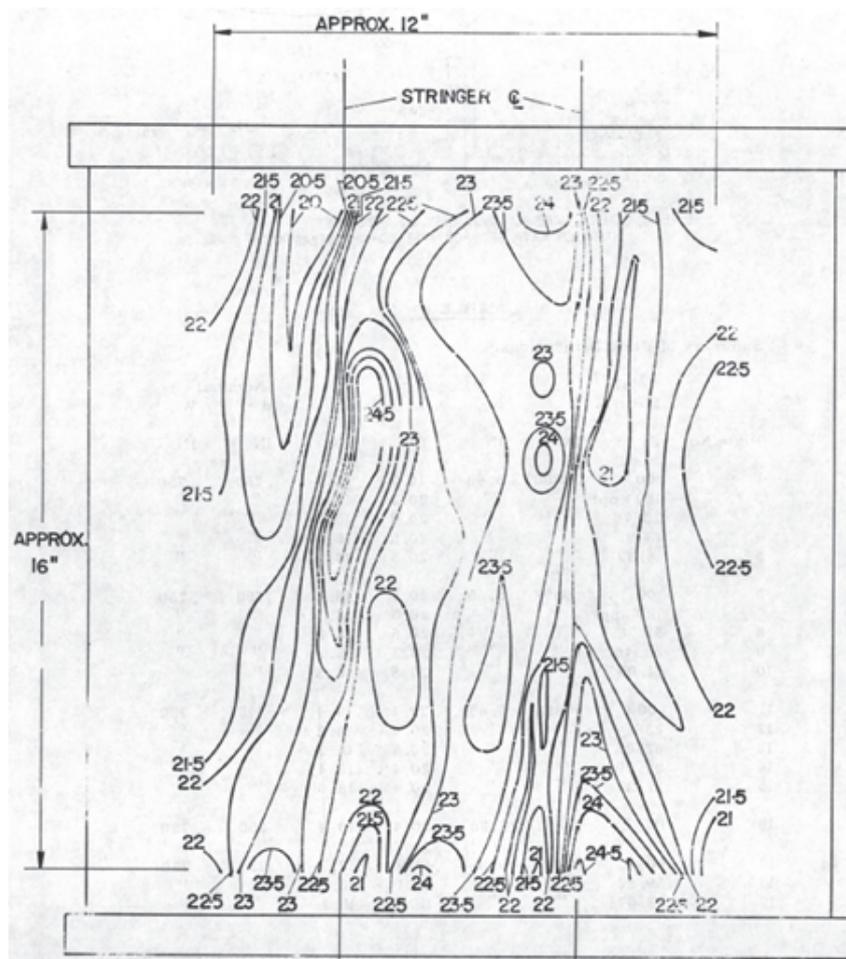


FIGURE 4.9 – Distribution des imperfections initiales :  $\frac{R_{max}-R_{min}}{R_{nominal}} = \frac{24,5-20}{22} = 20,45\%$  [d'après Soderquist [141]]

Néanmoins, différentes conclusions ont été retirées de ces analyses numériques :

- La courbure a un effet significatif et augmente la résistance ultime des tôles raidies. Cet effet augmente en général avec la courbure. Son intensité dépend toutefois de plusieurs paramètres : la courbure, la rigidité du raidisseur, etc.
- L'effet de la courbure sur la résistance ultime devient plus significatif quand les tôles courbes sont longues.
- L'augmentation de l'épaisseur de la tôle de fond diminue en général l'effet de la courbure.

En conclusion de cette section, le problème de la stabilité des tôles courbes raidies est un problème complexe et l'interaction des différents paramètres (imperfection, courbure, rigidité des raidisseurs, etc.) rend difficile la recherche d'une solution analytique si bien qu'aucune formule approchée n'existe à ce jour pour la prédiction de la résistance ultime. De plus, la plupart des études jusqu'à ce jour se sont concentrées sur les cas des tôles utilisées dans l'aéronautique qui sont beaucoup plus fines que celles utilisées en ouvrage d'art. On peut alors se demander si les observations qui ont été faites restent valables

dans le domaine du génie civil. On se propose donc d'étudier numériquement plusieurs configurations caractéristiques dans le paragraphe suivant.

## 4.2 ÉTUDE PRÉLIMINAIRE PAR ÉLÉMENTS FINIS

Cette section est consacrée à l'étude du comportement des tôles courbes raidies à l'aide de simulations numériques. Deux principaux aspects sont étudiés : le voilement élastique et la résistance ultime. Les principaux paramètres sont : le coefficient d'aspect, la rigidité du raidisseur et la courbure. La configuration de base de la tôle est similaire à celle étudiée dans l'annexe 1. Pour rappel, la plaque considérée est fixée pour une largeur  $b = 4800 \text{ mm}$ , l'épaisseur  $t_p = 12 \text{ mm}$ . Les raidisseurs sont de type simple plat et espacés régulièrement d'une distance de  $d = 600 \text{ mm}$  (8 raidisseurs au total). En outre, les résultats numériques obtenus fourniront une base de données pour la calibration de la méthode simplifiée de dimensionnement de la section 4.3.

### 4.2.1 Génération du modèle d'éléments finis

La modélisation des tôles courbes raidies reste de façon générale identique à celle développée dans les chapitres précédents. La seule différence est liée à présence de raidisseurs dont les nœuds du maillage doivent coïncider avec ceux de la tôle de fond. Par la méthode de construction précédente, la génération directe du maillage à partir des nœuds et des éléments devient donc un point délicat, difficile à automatiser si l'on souhaite comme ici paramétrer les dimensions du problème (par exemple, pour changer l'espacement des raidisseurs). De ce fait, on adopte dans cette partie une méthode de construction plus générale permettant de surmonter ce problème. Par cette méthode, on conçoit d'abord la géométrie de la structure étudiée par des points clés de construction, et puis par des lignes et des surfaces dans cet ordre. Le maillage du modèle géométrique est ensuite fait automatiquement sur ces surfaces en contrôlant la taille des éléments, choisie afin que le nombre d'éléments soit supérieur à 30 sur toute la largeur de chargement pour éviter les problèmes de convergence et de sensibilité au maillage (c.f section 2 du chapitre 2). Il est ensuite très facile d'affecter un type d'élément (ici SHELL 181) aux différentes entités (par exemple SHELL 281). La méthode est illustrée à la figure 4.10 pour le cas simple de deux raidisseurs en simple plat.

### 4.2.2 Comportement critique de voilement

Les résultats d'une première analyse qualitative du voilement élastique sont reportés sur la figure 4.11, où la contrainte critique est tracée en fonction du paramètre de courbure  $Z$ . Seul le rayon de courbure  $R$  varie dans cette analyse afin d'identifier l'influence de la courbure sur le voilement élastique de la tôle. On constate que, comme dans le cas

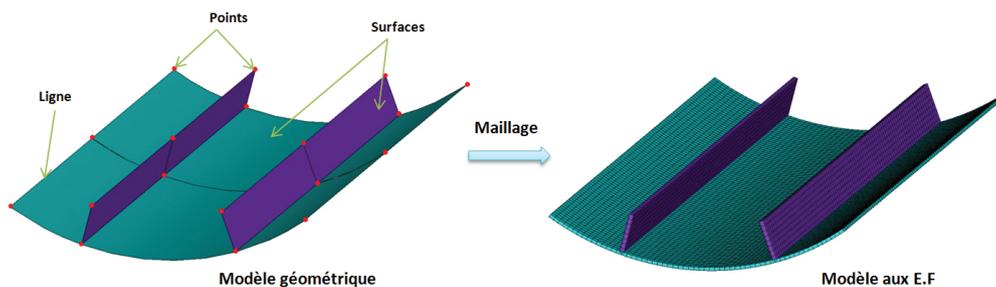
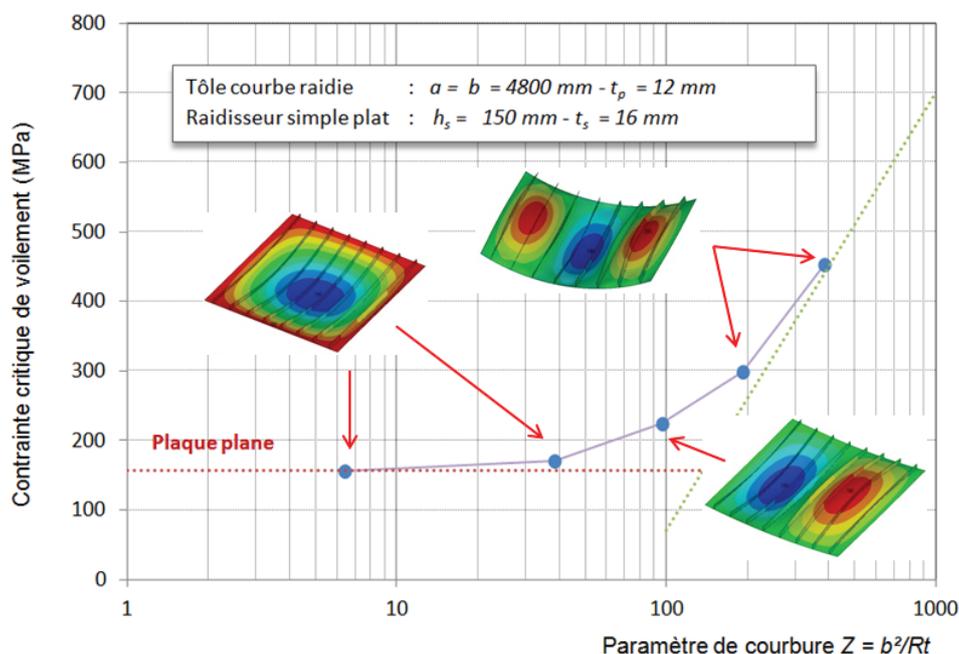


FIGURE 4.10 – Génération du maillage

des tôles courbes non-raïdiées, la courbure a pour effet d'augmenter la contrainte critique de voilement. Pour les grandes valeurs de la courbure  $Z$ , l'évolution de la contrainte peut être assimilée à une ligne droite, proportionnelle à la contrainte de voilement d'un cylindre raidi complet (la même remarque a été faite sur les essais de Soderquist [141], présentée à la figure 4.6).

FIGURE 4.11 – Contrainte critique de voilement des tôles courbes raidies en fonction du paramètre de courbure  $Z$ 

De plus, la courbure modifie le mode de voilement : quand la courbure devient importante, le mode de voilement a tendance à se développer non seulement dans le sens longitudinal, mais aussi dans le sens circonférentiel (augmentation du nombre de demi-ondes sur la largeur de chargement). Cette remarque confirme les observations de Schildcrout et Stein [130] et le fait que, pour de fortes courbures, ce mode de voilement est similaire au mode de voilement global des cylindres raidis sous compression axiale (c.f annexe 3).

De façon plus quantitative, la figure 4.12 présente l'influence du coefficient d'aspect

$\alpha = \frac{a}{b}$  pour différentes valeurs du rayon de courbure  $R$ . Pour cette étude, on fait varier la longueur de la plaque considérée ci-dessus (de 1 à 5 fois la largeur). Comme dans le cas des plaques raidies, la contrainte critique de voilement diminue avec l'augmentation du coefficient d'aspect  $\alpha$ . Aussi, les courbes d'évolution de la contrainte présentent une asymptote horizontale pour les grandes valeurs de  $\alpha$ . Ceci signifie qu'il semble exister une valeur limite du coefficient d'aspect au-delà de laquelle, la variation du coefficient de voilement reste stable comme dans le cas des plaques raidies.

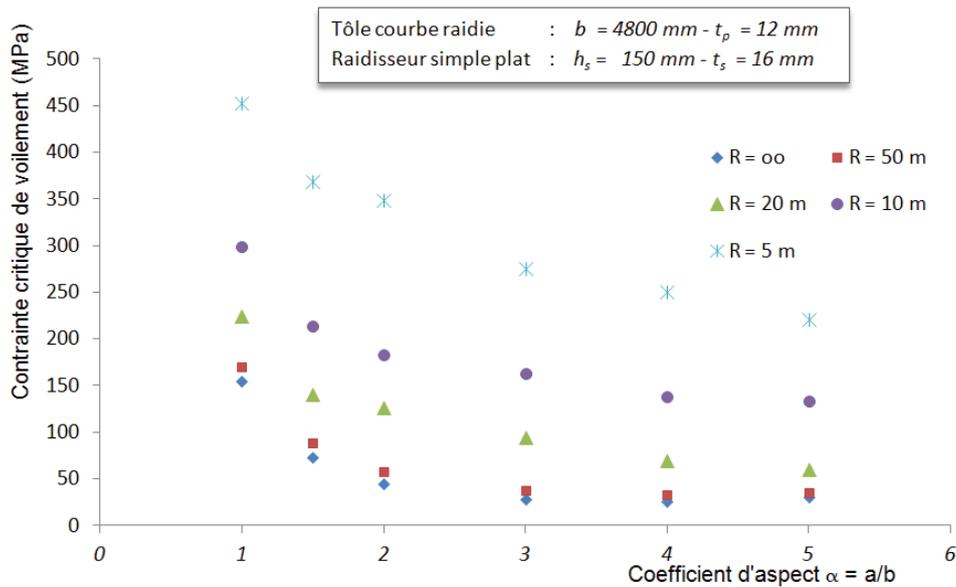


FIGURE 4.12 – Coefficient de voilement en fonction du coefficient d'aspect

Les résultats montrent également que cette valeur limite augmente avec la courbure, ce qui signifie que la rigidité flexionnelle des tôles courbes raidies augmente avec la courbure. En effet, si on revient à l'expression théorique de la contrainte critique des plaques raidies (annexe A de l'EN 1993-1-5), la valeur limite de  $\alpha_{lim}$  est proportionnelle à la rigidité flexionnelle relative  $\gamma = \frac{EI_{st}}{bD}$  des raidisseurs par la relation suivante :  $\alpha_{lim} = \sqrt[4]{\gamma}$ .

Le tableau 4.1 présente différemment les résultats numériques de la figure 4.12 où le rapport de ces deux coefficients de voilement ( $\frac{k_c^Z}{k_c^{plaque}}$ ) est exprimé en fonction de deux paramètres  $Z$  et  $\alpha$ . On constate que les deux paramètres, la courbure  $Z$  et le coefficient d'aspect  $\alpha$ , ont des contributions significative et interagissent entre eux : l'influence de la courbure est plus importante si la longueur de plaque augmente. Par exemple, pour une tôle courbe carrée ( $\alpha = 1$ ), le coefficient de voilement d'une tôle courbe ( $Z = 384$ ) est augmenté 3 fois par rapport celui d'une plaque plane de même dimension ( $Z = 0$ ). Ce facteur est cependant égal à 11 si le coefficient d'aspect est pris égal à  $\alpha = 3$ .

TABLE 4.1 – Résultats numériques du coefficient de voilement

| R   | Z    | $\alpha = 1,0$ | $\alpha = 1,5$ | $\alpha = 2,0$ | $\alpha = 3,0$ |
|-----|------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 300 | 6,4  | 1,11           | 1,12           | 1,13           | 1,11           |
| 50  | 38,4 | 1,21           | 1,36           | 1,47           | 1,50           |
| 20  | 96   | 1,60           | 2,16           | 3,17           | 3,75           |
| 10  | 192  | 2,14           | 3,30           | 4,52           | 6,53           |
| 5   | 384  | 3,11           | 5,69           | 8,80           | 10,99          |

### 4.2.3 Comportement ultime

Dans la recherche de la résistance ultime, la prise en compte des imperfections est toujours le point primordial. Pour les tôles courbes raidies, les imperfections sont prises identiques à celles de plaques planes raidies. Lorsque la courbure est grande, le mode de voilement ayant grand nombre de demi-ondes dans le sens circonférentielle (c.f figure 4.13) sera aussi pris en compte comme une imperfection globale du raidisseur. Seule la valeur minimale sera retenue comme charge de ruine.

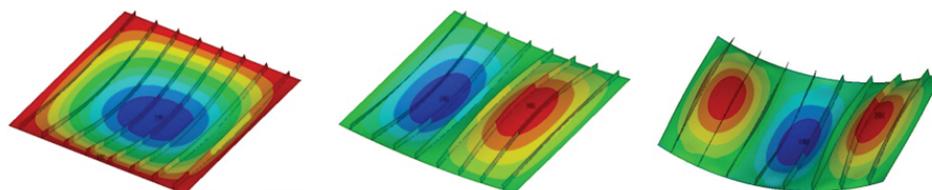


FIGURE 4.13 – Différentes formes d'imperfection globale des raidisseurs selon la courbure

La figure 4.14 présente les valeurs des charges ultimes en fonction du coefficient d'aspect pour trois valeurs du rayon de courbure : (1)  $R = 1920 \text{ m}$  ( $Z = \frac{b^2}{Rt} = 1$ ); (2)  $R = 30 \text{ m}$  ( $Z_d = \frac{d^2}{Rt} = 1$ ) et (3)  $R = 10 \text{ m}$ . Les deux premiers cas ( $R = 1920 \text{ m}$  et  $R = 30 \text{ m}$ ) ont pour but d'examiner la limite du domaine d'application de l'EN 1993-1-5. On ajoute sur cette figure la courbe du comportement d'une plaque plane équivalente estimée selon l'EN 1993-1-5 (expression du comportement interpolé recommandée au chapitre 2).

Ces résultats inspirent les remarques suivantes :

- Tout d'abord, il est constaté que la courbure augmente la charge ultime de la tôle, ce qui confirme les résultats mentionnés dans la bibliographie.
- La résistance ultime des tôles courbes raidies est influencée significativement par le coefficient d'aspect  $\alpha = \frac{a}{b}$  : elle décroît en fonction de  $\alpha$ .
- Pour  $Z = \frac{b^2}{Rt} = 1$ , les résultats numériques coïncident avec la norme européenne. On en déduit que le domaine de validité de l'EN 1993-1-5 défini par la condition  $\frac{b^2}{Rt} < 1$  convient bien.
- Pour  $Z_d = \frac{d^2}{Rt} = 1$ , les points numériques se trouvent au-dessus de la courbe de la norme européenne. Si on ne prend pas en compte cette augmentation (c'est-à-dire si on se place du côté de la sécurité), le domaine d'application de l'EN 1993-1-5 peut être élargi en ajoutant la condition  $\frac{d^2}{Rt} < 1$  avec  $d$  l'espacement libre (entre deux

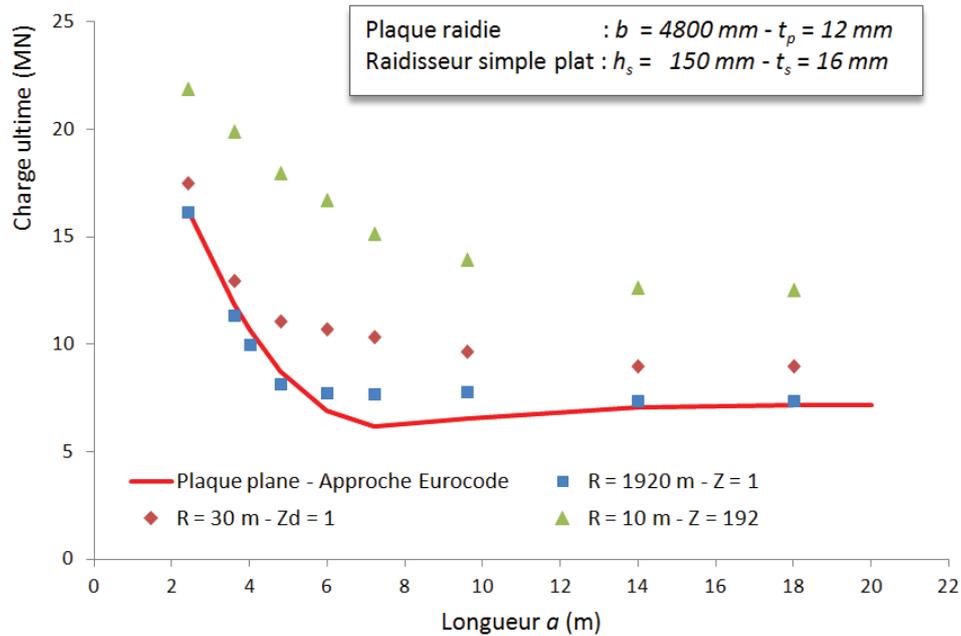


FIGURE 4.14 – Influence de la courbure à la charge ultime des tôles courbes raidies à l'aide de la simulation numérique

raidisseurs ou entre deux bords libres). Par cette modification, la plupart des tôles courbes raidies dans le domaine des ouvrages d'art peuvent être traités comme des plaques planes raidies.

- Le cas  $R = 10\text{ m}$  correspond à une plaque ayant une courbure significative. Dans ce cas, la charge ultime est beaucoup plus grande que celle de la plaque plane équivalente (environ 100% d'augmentation dans la zone intermédiaire). Le fait de ne pas considérer la courbure dans le dimensionnement, tel qu'actuellement à cause d'un manque de norme dédiée, devient donc non optimal.

On a constaté au chapitre 2 que l'utilisation des raidisseurs en T est plus performante que celle de raidisseurs en simple plat (d'environ +40% par les raidisseurs en T). La figure 4.15 présente la comparaison de deux types du raidisseur : en plat simple (point en losange rouge) et en T (point en triangle vert) pour  $R = 10\text{ m}$ . L'écart des résultats n'est pas significatif : seulement +8% pour les raidisseurs en T. La raison, que l'on détaillera à la section 4, est que la position du centre de gravité de la section change, la courbure fait monter le centre de gravité vers le centre de courbure, qui est plus proche des semelles des raidisseurs, ce qui diminue l'efficacité des raidisseurs en T.

D'après les études paramétriques menées ci-dessus, on en déduit que la courbure augmente donc la résistance ultime des plaques, au moins pour les tôles utilisées dans le domaine des ouvrages d'art. L'effet de la courbure est marginal pour les ouvrages où les tôles courbes raidies peuvent être traitées comme des plaques planes raidies équivalentes. Néanmoins, en fonction du coefficient d'aspect  $\alpha$ , l'augmentation de la résistance ultime peut être importante. C'est pourquoi, pour optimiser le dimensionnement, l'effet de la courbure doit être pris en compte dans le dimensionnement. La suite de ce chapitre est

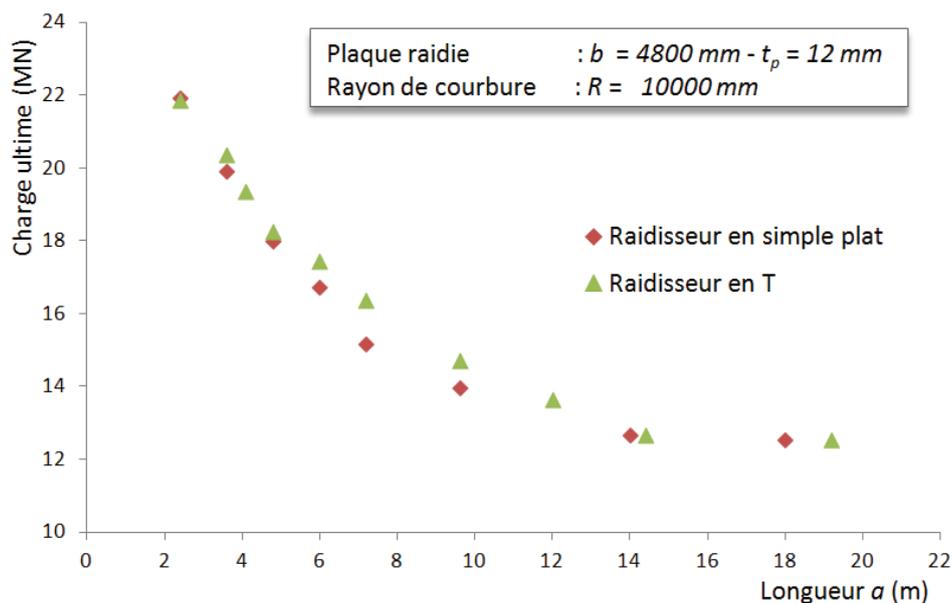


FIGURE 4.15 – Influence du type des raidisseurs

donc destinée à la définition d'une méthode simplifiée pour le dimensionnement de tels panneaux.

### 4.3 METHODOLOGIE DE DIMENSIONNEMENT DES TÔLES COURBES RAIDIES

Le comportement ultime d'une tôle courbe raidie peut être divisé en trois comportements élémentaires illustrée la figure 4.16, la résistance ultime correspondant à la charge minimale de ces trois modes de ruine de :

- Mode n° 1 : Ruine par voilement des sous-panneaux.
- Mode n° 2 : Ruine par flambement du raidisseur.
- Mode n° 3 : Ruine par voilement de l'ensemble de la tôle.

Parmi ces trois modes, le mode n° 1 correspond au cas des tôles courbes non-raïdiées traité au chapitre 3. Le mode n° 2 est un mode de de flambement de colonne et est couvert par les courbes européennes de flambements. Il ne reste donc qu'à traiter le modèle n° 3.

Les quelques exemples présentés dans les deux sections précédentes ont montré que les tôles courbes dans le domaine des ouvrages d'art ne présentent pas de grandes différences par rapport aux plaques planes. La démarche proposée ici est donc naturellement dérivée de la démarche de vérification des plaques planes raidies selon l'EN 1993-1-5 à laquelle on ajoute l'effet de la courbure. Les modifications principales sont les suivantes :

- Pour le comportement de type colonne : les caractéristiques géométriques de la section sont adaptées aux tôles courbes, le coefficient de réduction est ensuite déterminé par les courbes de flambement.

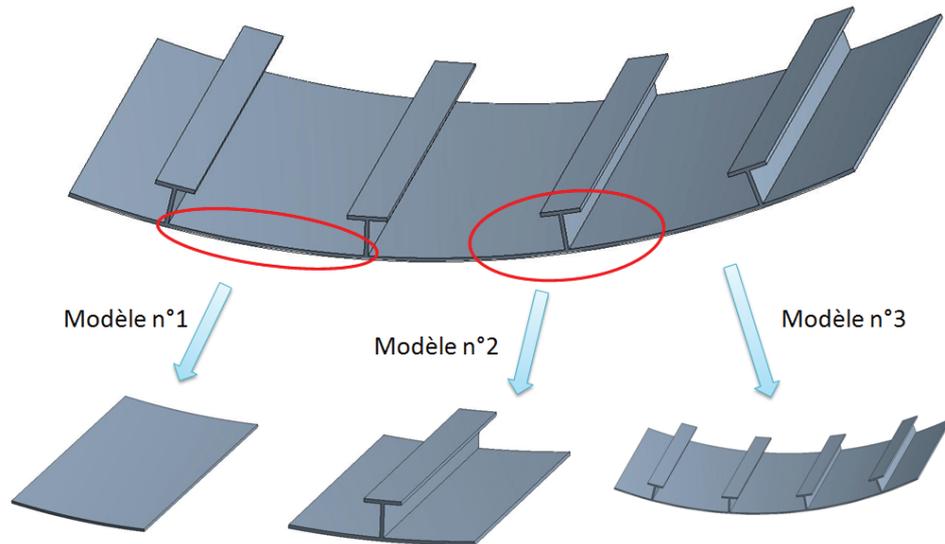


FIGURE 4.16 – Des potentiels modes de ruine de tôle courbe raidie

- Pour le comportement de type plaque, la contrainte critique de voilement global est définie par transformation de la tôle raidie en une tôle non-raïdie orthotrope ; le comportement ultime est ensuite déterminé par les courbes de voilement proposées au chapitre 3.
- Enfin, le comportement réel de la tôle est obtenu par interpolation de ces deux comportements de colonne et de plaque ci-dessus.

#### 4.4 COMPORTEMENT DE TYPE COLONNE

L'approche par un comportement de type colonne repose sur l'hypothèse que les conditions d'appui des deux bords longitudinaux non-chargés sont supprimées. La plaque étudiée ne possède plus l'effet stabilisant lié aux contraintes membranaires de sorte que l'approche de type colonne permet d'obtenir une borne inférieure de la charge ultime des tôles courbes raidies (figure 4.17 pour  $R = 30 m$  et  $R = 10 m$ ). Dans ce cas, la plaque courbe peut être considérée comme une colonne droite ayant une section transversale courbe. L'utilisation des courbes européennes de flambement est donc valable. Il suffit donc de calculer les propriétés géométriques appropriées de la section (c'est-à-dire, aire de la section transversale, moment d'inertie et position du centre de gravité). Ces valeurs géométriques sont facilement obtenues par un logiciel de dessin quelconque (par exemple logiciel Auto-cad).

Il est intéressant de discuter plus en détail l'influence du moment d'inertie sur le comportement des tôles courbes raidies. Pour cela, on considère les deux configurations de la figure 4.18 : une plaque plane ( $R = \infty$ ) et une tôle courbe ( $R = 10 m$ ). Les deux panneaux ont la même section transversale dont la largeur égale à  $4,8 m$ , l'épaisseur de  $12 mm$  et sont raidis par 8 raidisseurs en simple plat (l'hauteur de  $150 mm$  et une épaisseur de  $16 mm$ ).

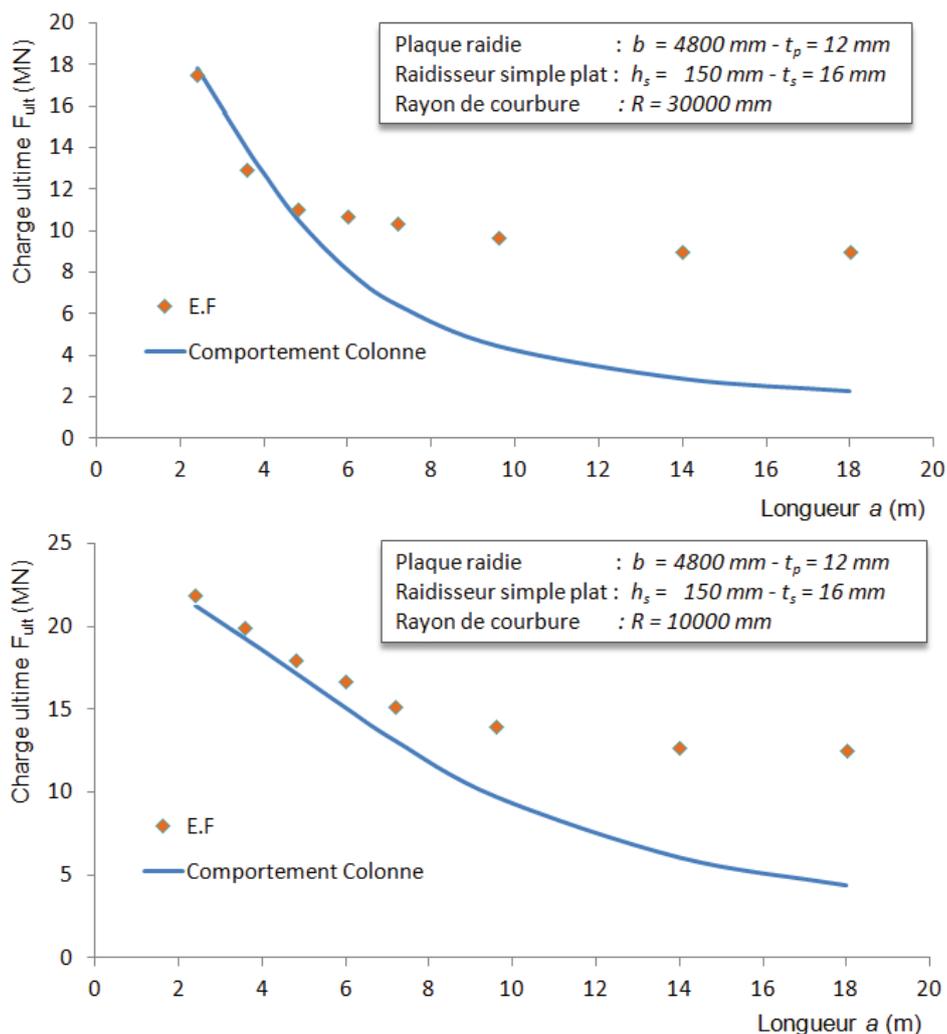


FIGURE 4.17 – Borne inférieure obtenue par l'approche de type Colonne

Le moment d'inertie de la tôle courbe est plus de 5 fois plus grand que celui d'une plaque plane équivalente ( $I_{sl,courbe} = 5,13 \cdot I_{sl,plaque}$ ). Cette remarque peut expliquer l'augmentation de la charge ultime des tôles courbes raidies constatée à la section précédente (figure 4.17).

À cause de la courbure, la position du centre de gravité (par rapport à l'axe passant par la fibre moyenne de plaque plane équivalente) est augmentée :  $121,9$  mm pour  $R = 10$  m au lieu de  $26,8$  mm pour une plaque plane. Cette variation conduit à une diminution de l'efficacité des raidisseurs (c.f figure 4.15). Afin d'illustrer cette remarque, le tableau 4.2 présente les valeurs du moment d'inertie des deux types de raidisseurs : en plat simple ( $h_s = 150$  mm et  $t_s = 16$  mm) et en T ( $h_s = 100$  mm,  $b_s = 150$  mm,  $t_s = t_f = 10$  mm). Les raidisseurs ont été choisis de sorte que le rapport de la section  $\delta$  soit identique (section transversale d'un raidisseur est égale  $A_{sl} = 2400$  mm<sup>2</sup>). Le moment d'inertie d'une plaque non-raïdie est aussi indiqué afin de mieux mettre en évidence l'efficacité des raidisseurs. Les remarques peuvent être tirées du tableau 4.2 :

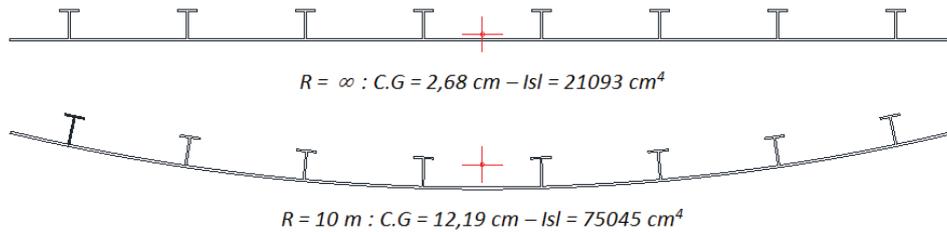


FIGURE 4.18 – Moment d'inertie des tôles raidies multiples

- Pour une plaque plane, l'utilisation de raidisseurs est extrêmement utile car elle permet d'augmenter la résistance de structure sans à l'alourdir. Un facteur de 190 est ainsi obtenu simplement par la présence de raidisseurs en simple plat. L'inertie propre de la plaque de fond est négligeable en présence de raidisseurs (sa participation au moment d'inertie reste inférieure à 1%).
- Toujours dans le cas des plaques planes, les raidisseurs en T augmentent de +61% l'inertie par rapport aux raidisseurs en plat simple : une bonne partie de la matière (de semelle) est reportée loin du centre de gravité. Par conséquent, pour une même section, ou pour un prix de fourniture de l'acier équivalent, l'utilisation du raidisseur en T sera est plus efficace.
- Quant aux tôles courbes, la courbure augment significativement la rigidité de la tôle :  $I_{sl} = 42172 \text{ cm}^4$  quand  $R = 10 \text{ m}$  contre  $I_{sl} = 69 \text{ cm}^4$  pour  $R = \infty$  (plus de 600 fois).
- Les raidisseurs jouent un rôle moins important pour les tôles courbes. Ils apportent toujours de la rigidité mais cela n'est pas aussi efficace que dans le cas des plaques planes. Quand  $R = 10 \text{ m}$ , l'inertie de la plaque de fond ( $I_{sl} = 42172 \text{ cm}^4$ ) participe à près de 60% à l'inertie totale de la tôle raidie (raidisseur en simple plat).
- L'utilisation de raidisseurs en T n'apporte que 11,35% d'inertie en plus par rapport à celle des raidisseurs en simple plat pour la tôle courbe  $R = 10 \text{ m}$ . Le centre de gravité étant plus élevé, il s'approche des semelles des raidisseurs et diminue leur efficacité. L'utilisation de raidisseurs en plat simple semble donc plus économique dans le cas des tôles courbes.

TABLE 4.2 – Moment d'inertie ( $\text{cm}^4$ )

|                    | Sans raidisseur | Type plat simple | Type en T |
|--------------------|-----------------|------------------|-----------|
| $R = \infty$       | 69              | 13116            | 21093     |
| $R = 10 \text{ m}$ | 42172           | 67394            | 75045     |

Une dernière remarque, l'influence de la courbure sur le moment d'inertie doit être faite quant à la détermination de la section étudiée. Dans le cas des plaques planes ayant des raidisseurs identiques, le calcul du moment d'inertie peut se réduire à celui d'une partie représentative composée d'un raidisseur et d'une largeur collaborante de la plaque de fond. Cette démarche n'est pas applicable aux tôles courbes raidies car la position de chaque raidisseur par rapport le centre de gravité de la section n'est pas identique. Le fait de calculer sur une structure réduite pourrait conduire à une sous estimation du moment d'inertie. C'est ce qu'illustre la figure 4.19 qui compare deux configurations de plaque

plane et de tôle courbe. La plaque de fond est de  $800\text{ mm}$  de large et de  $12\text{ mm}$  d'épaisseur. Le raidisseur est en forme de T de  $150\text{ mm}$  d'hauteur,  $100\text{ mm}$  de largeur de la semelle. L'épaisseur de l'âme et de la semelle du raidisseur est égale à  $10\text{ mm}$ . Le rayon de courbure est égal à  $R = 10\text{ m}$ .

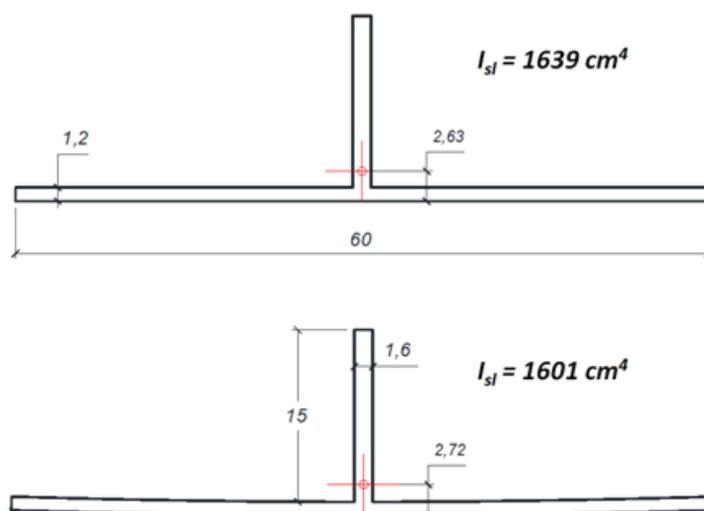


FIGURE 4.19 – Comparaison du moment d'inertie

Le centre de gravité est estimé par rapport à la fibre inférieure de la plaque de fond. Sa position est calculée pour chaque modèle réduit : ce n'est donc pas celle du centre de gravité de l'ensemble de la tôle. On constate une diminution du moment d'inertie, même si la différence n'est pas significative (de 15% pour  $R = 10\text{ m}$  tout de même). Cette remarque confirme les observations de Von Karman *et al.* [153]. Le calcul à l'aide d'un modèle réduit conduit donc à une sous-estimation des tôles courbes raidies.

En conclusion, la courbure a pour effet d'augmenter le moment d'inertie et la rigidité de la tôle si les raidisseurs sont identiques et régulièrement espacés. L'évaluation des propriétés géométriques doit impérativement être effectuée sur l'ensemble de la tôle étudiée et non sur une portion représentative comme dans le cas de plaque raidie.

## 4.5 COMPORTEMENT DE TYPE PLAQUE

Maintenant que la borne inférieure de la résistance ultime de tôle courbe raidie est obtenue par l'approche de type colonne, on s'intéresse ensuite à la recherche de la borne supérieure.

### 4.5.1 Contrainte critique de voilement

La détermination de la contrainte critique de voilement est un point important dans la recherche du comportement de type plaque. Certains auteurs (Peterson et Whitley [109]) croient que les tôles courbes raidies se comportent de la même manière que les tôles non-raidies, c'est-à-dire que leur résistance élastique converge à une extrémité vers celle des plaques planes raidies (quand la courbure tend vers 0) et à l'autre extrémité vers celle d'un cylindre raidi (si la courbure est grande). Une première expression de la contrainte critique de voilement est ainsi proposée dans le travail de Peterson et Whitley [109] et se présente comme suivant :

$$k_Z = k_\infty + \frac{12}{\pi^4} \frac{Z_b^2}{k_\infty} \quad (4.1)$$

avec  $Z_b = \frac{b^2}{Rt} \sqrt{1 - \nu^2}$  paramètre de courbure de Batdorf et  $k_\infty$  coefficient de voilement de la plaque plane équivalente. Ce coefficient  $k_\infty$  prend en compte la configuration raidie de la plaque et peut être obtenu à l'aide de la méthode de distribution du moment (Lundquist *et al.* [90]). Cette expression 4.1 est très semblable à celle de Timoshenko et Gere [147] utilisée pour les tôles courbes non-raidie (voir chapitre 3). Les résultats expérimentaux de Soderquist [141], présentés figure 4.6, semblent valider cette hypothèse. C'est pourquoi il est proposé d'adopter pour le coefficient de voilement des tôles courbes raidies la forme suivante :

$$k_c^Z = \frac{k_\infty}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{48 \cdot (1 - \nu^2)}{\pi^4 (k_c^\infty)^2} Z^2} \right) \quad (4.2)$$

où  $k_c^\infty$  est le coefficient de voilement d'une plaque plane raidie équivalente, dont l'expression analytique est donnée dans l'annexe A de l'EN 1993-1-5. Une comparaison de cette expression avec les résultats numériques est présentée à la figure 4.20 où seuls les panneaux longs ( $\alpha \geq 3$ ) sont considérés afin que le premier mode soit un mode de voilement global.

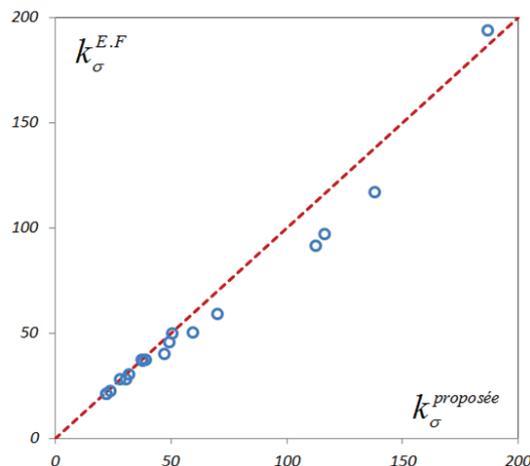


FIGURE 4.20 – Comparaison de l'expression approchée de la contrainte critique (l'expression 4.2) aux résultats numériques

L'expression 4.2 peut prédire assez correctement la contrainte critique d'une tôle courbe raidie avec un maximum d'écart est de 18% (du côté de la sécurité). Pour rappel, cet écart de 15% dans le cas des tôles courbes non-raïdiées. Ces écarts seront récupérés par la calibration de la contrainte ultime. Cette expression sera donc utilisée dans la suite de ce travail.

#### 4.5.2 Courbe de réduction

Dans l'approche de type plaque, la tôle courbe raidie est transformée en une tôle courbe non-raïdiée orthotrope équivalente. Dès lors, il est souhaitable que le comportement ultime de cette tôle courbe transformée soit identique à celui d'une tôle non-raïdiée, c'est-à-dire qu'il suive la courbe de réduction des tôles courbes non-raïdiées développées au chapitre 4. Comme la valeur du coefficient de réduction s'exprime en fonction du paramètre de courbure, il est donc intéressant de savoir quelle valeur de la courbure doit être utilisée dans le cas des tôles courbes raidies car on peut définir deux paramètres de courbure :  $Z = \frac{b^2}{Rt}$  pour la tôle entière et  $Z_d = \frac{d^2}{Rt}$  pour les sous-panneaux.

Pour identifier le paramètre, on adopte la démarche suivante. D'abord, on ne s'intéresse qu'aux tôles courbes assez longue de sorte que le comportement réel de la tôle courbe sera moins influencé par le comportement de type colonne. Ensuite, on évalue leur résistance ultime à l'aide des équations 3.30 pour les tôles courbes non-raïdiées selon deux valeurs de courbures  $Z$  et  $Z_d$ . Les résultats obtenus seront enfin comparés aux valeurs numériques obtenues par analyse non linéaire (GMNIA) afin de trouver le bon paramètre de courbure.

La configuration de la tôle courbe étudiée est prise égale à :  $b = 4800 \text{ mm}$ ,  $a/b = 4$ ,  $t_p = 12 \text{ mm}$ ,  $h_s = 150 \text{ mm}$ ,  $t_s = 16 \text{ mm}$ ,  $n = 8$ ,  $d = 600 \text{ mm}$  et  $R = 10000 \text{ mm}$ . L'analyse non-linéaire GMNIA donne une résistance ultime égale à  $N_{ult}^{E,F} = 12,2 \text{ MN}$ . La contrainte critique de voilement  $\sigma_{cr,p}^Z$  évaluée par l'expression 4.2 est de  $117 \text{ MPa}$ , soit 15% d'écart de celle obtenue par E.F ( $\sigma_{cr,p}^{E,F} = 137 \text{ MPa}$ ). L'élancement réduit est égal à :

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr,p}^Z}} = \sqrt{\frac{355}{117}} = 1,75 \quad (4.3)$$

Les résistances ultimes théorique correspondant à  $Z = \frac{b^2}{Rt} = 192$  et  $Z_d = \frac{d^2}{Rt} = 3$  sont présentés au tableau 4.3). L'utilisation du paramètre de courbure  $Z$  est donc trop défavorable, et  $Z_d$  semble plus adopté au résultat numérique. Dans la suite, la résistance ultime de type plaque des tôles courbes raidies sera donc évaluée en fonction du paramètre de courbure  $Z_d = \frac{d^2}{Rt}$ . L'exactitude de cette hypothèse est vérifiée pour l'ensemble des résultats numériques de la figure 4.23. Avec cette modification, on est donc en mesure de construire une borne supérieure du comportement réel des tôles courbes raidies (figure 4.21).

TABLE 4.3 – Évaluation de la résistance ultime

|                     | $Z = \frac{b^2}{Rt} = 192$ | $Z_d = \frac{d^2}{Rt} = 3$ |
|---------------------|----------------------------|----------------------------|
| $\bar{\lambda}_p =$ | 1,75                       | 1,75                       |
| $\bar{\lambda}_0 =$ | 0,2                        | 0,61                       |
| $\beta =$           | 0,5                        | 0,96                       |
| $\alpha_Z =$        | 0,13                       | 0,30                       |
| $\rho =$            | 0,29                       | 0,47                       |
| $N_{ult} =$         | 7,10 MN                    | 11,3 MN                    |

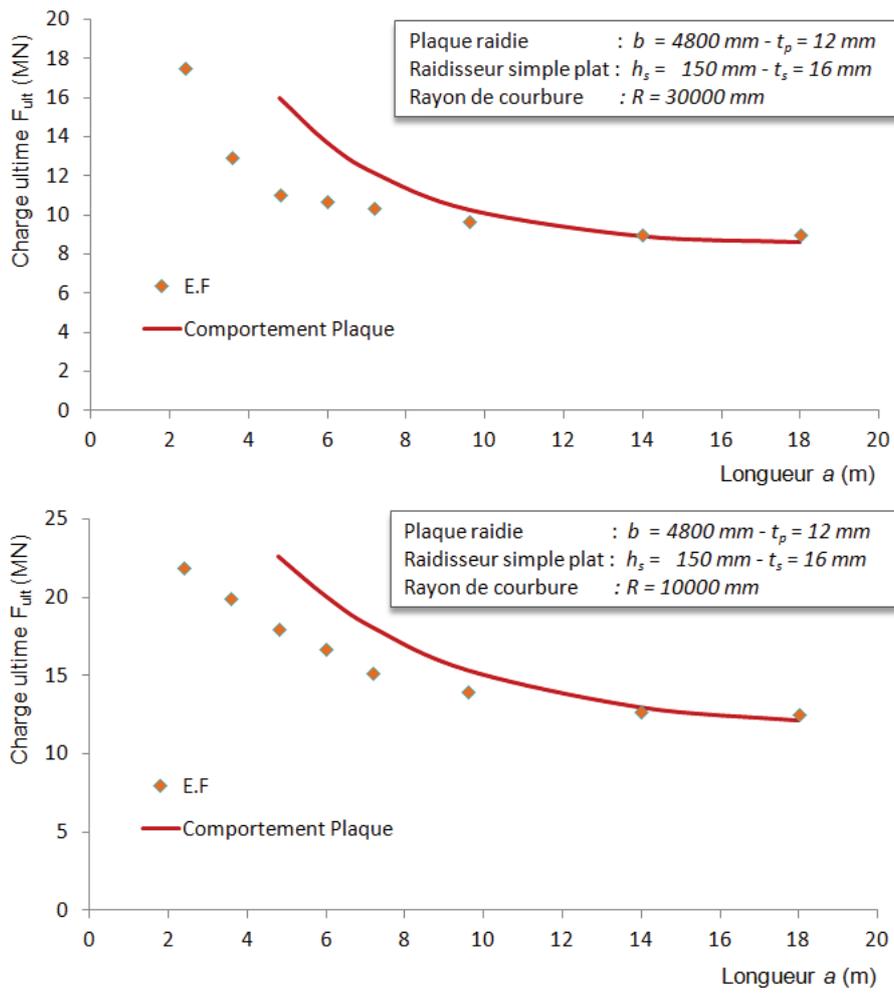


FIGURE 4.21 – Borne supérieure obtenue par l'approche de type Plaque

## 4.6 COMPORTEMENT INTERPOLÉ

Le comportement réel des tôles courbes raidies est obtenu par le même type d'interpolation que celle développée pour les plaques raidies (l'expression 2.28) :

$$\rho_c = \chi_c + (\rho - \chi_c) \frac{1}{0,95 + \frac{0,04}{\xi} + \frac{0,01}{\xi^2}} \quad (4.4)$$

où  $\xi$  est toujours le facteur qui mesure l'importance des contraintes critiques relatives à chaque comportement :

$$\xi = \frac{\sigma_{cr,p}}{\sigma_{cr,c}} - 1. \quad (4.5)$$

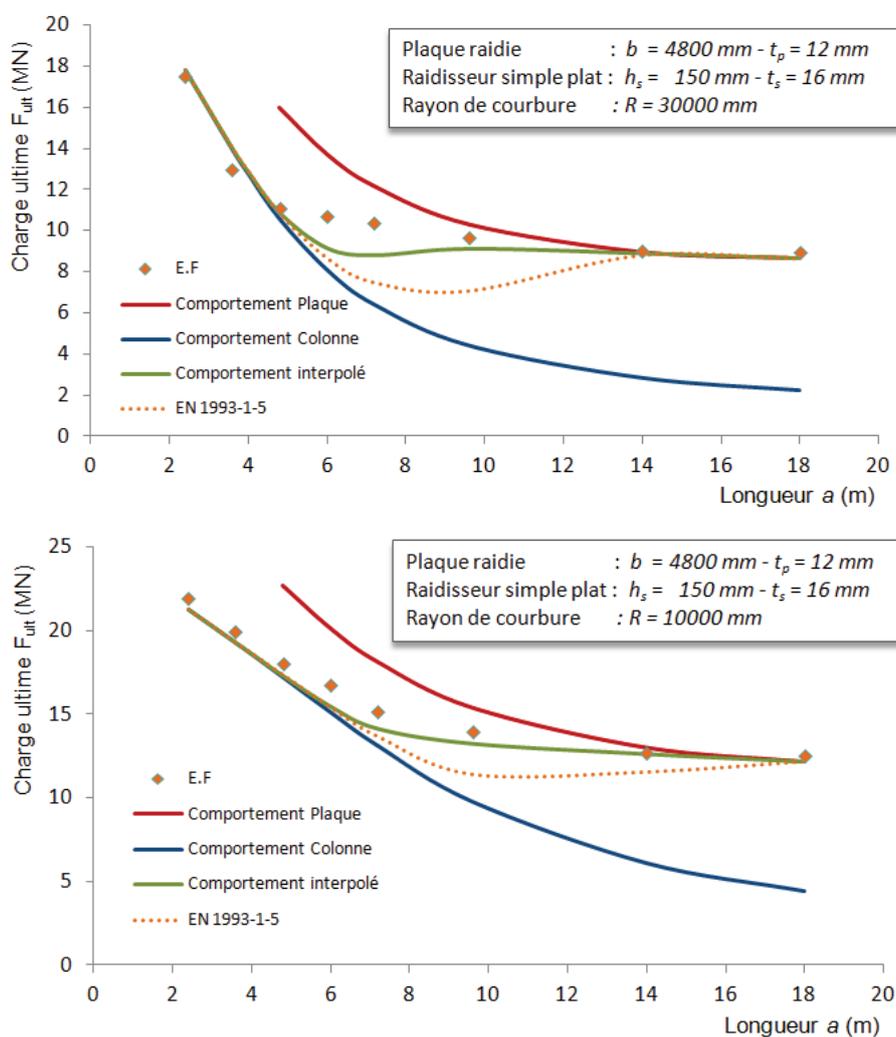


FIGURE 4.22 – Interpolation du comportement des tôles courbes raidies

Le résultat obtenu par cette interpolation, présentée dans la figure 4.22, est très comparable aux résultats numériques. Dans la zone de la longueur intermédiaire, l'interpolation est toujours plus sévère : les résistances ultimes évaluées se trouvent en dessous de la

valeur numériques. Cependant, avec l'utilisation de l'expression 4.4 proposée au chapitre 2, ces écarts deviennent moins importants par rapport à ceux estimés par l'expression de l'EN 1993-1-5 (ligne orange).

## 4.7 RECAPITULATIF DE LA MÉTHODE PROPOSÉE

La modification de la démarche Eurocode pour les plaques raidies en ajoutant l'effet de la courbure permet de prédire correctement le comportement des tôles courbes raidies. Afin d'illustrer la méthode proposée, un exemple de calcul de la capacité ultime d'un panneau courbe raidi est présenté ici. La géométrie du panneau étudié est similaire à celle utilisée dans l'annexe 1 sauf le rayon de courbure  $R$  qui vaut  $10\text{ m}$ . Ce panneau mesure  $480\text{ cm}$  de long et de large ( $\alpha = 1$ ),  $12\text{ mm}$  d'épaisseur. Il est raidi par huit raidisseurs ( $n = 8$ ) de type simple plat : hauteur  $h_s = 150\text{ mm}$  et épaisseur  $t_s = 16\text{ mm}$ .

La démarche du dimensionnement est similaire à celle présentée au chapitre I en intégrant l'influence de la courbure. Elle se traduit comme suit :

### 4.7.1 Détermination de la section efficace vis-à-vis du voilement local

Les sous-panneaux dans ce cas sont des panneaux courbes. Comme la courbure de ces sous-panneaux est faible ( $Z_d = \frac{d^2}{Rt} = 3$ ), le comportement est très similaire à celui de la plaque plane (voir chapitre 3). Les résultats de la section efficace donnés dans l'annexe 1 pour la plaque plane raidie peuvent donc être ré-utilisés :  $A_c = 7,32 \cdot 10^4\text{ mm}^2$  et  $A_{c,eff,loc} = 5,99 \cdot 10^4\text{ mm}^2$ .

### 4.7.2 Réduction due au voilement global

#### 4.7.2.1 Comportement de type Colonne

Les caractéristiques géométriques de la section sont les suivantes (le calcul est effectué sur l'ensemble de la section, pas sur une section représentative comme montré à la section 4) :

– Section brute :

$$\text{Aire : } A_{sl} = 7,68 \cdot 10^4\text{ mm}^2.$$

$$\text{Inertie : } I_{sl} = 6,74 \cdot 10^8\text{ mm}^4.$$

$$\text{Centre de gravité de la section : } G = 115\text{ mm}.$$

$$\text{Centre de gravité des raidisseurs seuls : } G_1 = 174\text{ mm}.$$

– Section efficace :  $A_{sl,eff} = 6,27 \cdot 10^4\text{ mm}^2$

La contrainte critique de flambement est égale à :

$$\sigma_{cr,c} = \frac{\pi^2 EI_{sl,1}}{A_{sl,1} a^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210000 \cdot 6,74 \cdot 10^8}{7,68 \cdot 10^4 \cdot 4,8^2 \cdot 10^6} = 789\text{ MPa}. \quad (4.6)$$

L'élanement réduit est calculé comme suit :

$$\bar{\lambda}_c = \sqrt{\beta_{Ac} \frac{f_y}{\sigma_{cr,c}}} = 0,61 \quad \text{avec} \quad \beta_{Ac} = \frac{A_{sl,eff}}{A_{sl}} = \frac{6,27 \cdot 10^4}{7,68 \cdot 10^4} = 0,82 \quad (4.7)$$

Le rayon de giration de la section brute du poteau vaut :

$$i = \sqrt{\frac{I_{sl,1}}{A_{sl,1}}} = \sqrt{\frac{6,74 \cdot 10^8}{7,68 \cdot 10^4}} = 93,7 \text{ mm}. \quad (4.8)$$

À partir des positions des centres de gravités des sections, on calcule les excentremets suivants :

$$\begin{aligned} e_1 &= G_1 - G = 59 \text{ mm} \\ e_2 &= G = 115 \text{ mm} \end{aligned} \quad (4.9)$$

d'où :

$$e = \max(e_1; e_2) = e_2 = 115 \text{ mm}. \quad (4.10)$$

Les raidisseurs sont des simples plats de section ouverte, on utilise donc la courbe de flambement c ( $\alpha = 0,49$ ) de l'EN 1993-1-1. Le facteur d'imperfection d'équivalent est donné par :

$$\alpha_e = \alpha + \frac{0,09}{i/e} = 0,6. \quad (4.11)$$

Finalement, le coefficient de réduction  $\chi_c$  se calcule suivant l'EN 1993-1-1 :

$$\phi = 0,5 \left[ 1 + \alpha_e (\bar{\lambda}_c - 0,2) + \bar{\lambda}_c^2 \right] = 0,81 \quad (4.12)$$

$$\chi_c = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}_c^2}} = 0,75. \quad (4.13)$$

#### 4.7.2.2 Comportement de type Plaque

La contrainte critique de voilement obtenue par l'équation 4.2 s'écrit en fonction de la courbure  $Z = 192$  :

$$k_c^Z = \frac{k_\infty}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{48 \cdot (1 - \nu^2)}{\pi^4 (k_c^\infty)^2} Z^2} \right). \quad (4.14)$$

La rigidité flexionnelle relative est égale à :  $\gamma = \frac{I_{sl}}{bt^3} = 887$ . Le coefficient de voilement  $k_c^\infty = 667$  est obtenue par l'expression dans l'annexe A de l'EN 1993-1-5. En remplaçant dans l'expression 4.14, le coefficient de voilement pour cette tôle courbe raidie est égale à :  $k_c^Z = 674$ . La contrainte critique d'Euler est donnée par la relation suivante :

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 = 1,19 \text{ MPa}. \quad (4.15)$$

Par conséquent, la contrainte critique de tôle courbe raidie est égale à :

$$\sigma_{cr,p} = k_\sigma^Z \cdot \sigma_E = 799 \text{ MPa}. \quad (4.16)$$

L'élanement réduit est déduit comme suit :

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\beta_{Ac} \frac{f_y}{\sigma_{cr,p}}} = 0,60 \quad \text{avec} \quad \beta_{Ac} = \frac{A_{c,eff,loc}}{A_c} = \frac{0,599 \cdot 10^4}{7,32 \cdot 10^4} = 0,82. \quad (4.17)$$

Les paramètres  $\bar{\lambda}_0$ ,  $\beta$  et  $\alpha_Z$  sont ensuite évalués en fonction de la courbure  $Z_d$  :

$$\bar{\lambda}_0 = 0,2 + 0,473 \cdot \left( \exp^{-\frac{Z_d}{20}} \right) = 0,605 \quad (4.18)$$

$$\beta = \frac{1 + \exp^{-\frac{Z_d}{33}}}{2} = 0,956 \quad (4.19)$$

$$\alpha_Z = 0,3 \quad (4.20)$$

Comme  $\bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}_0$ , le coefficient de réduction est égal à 1 ( $\rho = 1$ ).

### 4.7.2.3 Interpolation du comportement

Le rapport des contraintes critiques est donné par expression 4.16 et 4.6 :

$$\zeta = \frac{\sigma_{cr,p}}{\sigma_{cr,c}} - 1 = \frac{799}{789} - 1 = 0,0127. \quad (4.21)$$

Le coefficient de réduction  $\rho_c$  prenant en compte l'effet de voilement global se calcule par interpolation entre les valeurs des deux types de comportement :

$$\rho_c = \chi_c + (\rho - \chi_c) \frac{1}{0,95 + \frac{0,04}{\zeta} + \frac{0,01}{\zeta^2}} = 0,754 \quad (4.22)$$

Le coefficient de réduction  $\rho_c = 0,754$  s'applique donc sur l'épaisseur de toutes les tôles composant de la section  $A_{c,eff,loc}$ .

### 4.7.3 Résistance ultime

L'aire efficace des intrados avec prise en compte des effets du voilement est donc de :

$$\begin{aligned} A_{c,eff} &= \rho_c A_{c,eff,loc} + \sum b_{edge,eff} t \\ &= 0,754 \cdot 5,99 \cdot 10^4 + 2 \cdot 150 \cdot 12 = 4,88 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

La charge ultime caractéristique de la tôle courbe raidie est évaluée à :

$$N_{Rk} = f_y \cdot \frac{A_{c,eff}}{\gamma_{M1}} = 15,76 \text{ MN}. \quad (4.24)$$

## 4.8 CONCLUSION

Le comportement des tôles courbes raidies est un problème complexe. Outre les difficultés liées aux raidisseurs et à la courbure étudiées dans les chapitres précédents, s'ajoute

ici celle liée à leur interaction. Les travaux sur le sujet sont peu nombreux ainsi que les essais expérimentaux. Aucune expression théorique voire empirique permettant le dimensionnement de ces tôles n'a été proposée.

L'étude proposée ici est basée sur des simulations numériques. Les résultats montrent en général que la courbure augmente le moment d'inertie de la tôle et donc la rigidité, la charge critique de voilement et la résistance ultime. Ceci est en accord avec les résultats expérimentaux.

Cette amélioration du comportement grâce à la courbure est parfois significative et ne doit pas être négligée si on cherche à optimiser les sections. Une démarche simplifiée a donc été proposée à partir de celle de l'Eurocode pour les plaques raidies à laquelle on ajoute l'effet de la courbure. La plupart des expressions sont conservées, sauf les deux points suivants :

- La détermination des propriétés géométriques de la section doit être effectuée sur l'ensemble de la section (l'évaluation sur une section représentative réduite comme dans le cas des plaques raidies peut conduire à une sous-estimation significative du comportement réel de la tôle).
- La contrainte critique de voilement global est déterminée à partir de la courbure globale  $Z$  et de la contrainte critique de la plaque plane orthotrope équivalente. Elle permet ensuite d'obtenir le coefficient de réduction de type plaque (borne supérieure) par la méthode développée au chapitre 3 basée sur la courbure des sous-panneaux.

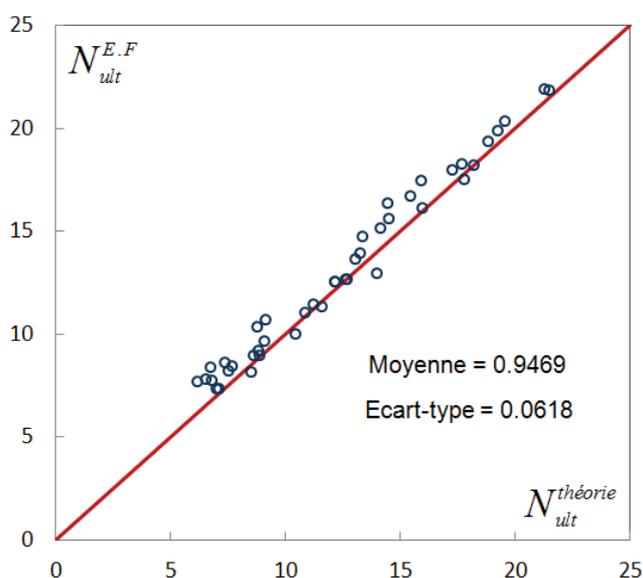


FIGURE 4.23 – Comparaison de la résistance ultime théorique sur l'ensemble des résultats numériques

Avec ces deux changements, l'estimation de la résistance ultime d'une tôle courbe raidie est en bon accord avec la valeur obtenue par simulation numérique : la valeur moyenne sur 44 simulations (pour les raidisseurs en simple plat et en T) est proche de 1 et un écart-type est de 6,18%. Vu que la distribution des points théoriques/numériques est alignée

sur une droite, et que la valeur obtenue de la méthode proposée a tendance à être inférieure à la valeur numérique, on propose d'utiliser le coefficient de sécurité  $\gamma_{M1} = 1,1$ .

# DU BON USAGE DES PLANS D'EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES POUR LES ÉTUDES DE LA STABILITÉ

## SOMMAIRE

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 5.1   | MÉTHODOLOGIE DES PLANS D'EXPÉRIENCE . . . . .  | 151 |
| 5.1.1 | Etat de l'art . . . . .  | 151 |
| 5.1.2 | Des plans d'expériences classiques aux plans d'expériences numériques . . . . .            | 152 |
| 5.2   | PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL NUMÉRIQUE . . . . .   | 153 |
| 5.2.1 | Choix des points d'expérience . . . . .  | 154 |
| 5.2.2 | Choix du modèle approché . . . . .   | 156 |
| 5.3   | NOTIONS DE STATISTIQUE POUR L'ÉVALUATION DES MODÈLES . . . . .                             | 157 |
| 5.3.1 | Estimation des paramètres . . . . .  | 158 |
| 5.3.2 | Evaluation globale du modèle . . . . .   | 159 |
| 5.3.3 | Pertinence du modèle approché par l'analyse des résidus . . . . .                          | 160 |
| 5.4   | APPLICATION AUX PANNEAUX CYLINDRIQUES SOUS COMPRESSION LONGITUDINALE ET UNIFORME . . . . . | 161 |
| 5.4.1 | <b>Etape 1</b> : Identification du problème . . . . .                                      | 162 |
| 5.4.2 | <b>Etape 2</b> : Choix du modèle approché . . . . .  | 163 |
| 5.4.3 | <b>Etape 3</b> : Choix des points expérimentaux . . . . .                                  | 164 |
| 5.4.4 | <b>Etape 4</b> : Evaluation des coefficients inconnus . . . . .                            | 164 |
| 5.4.5 | <b>Etape 5</b> : Validation du modèle . . . . .  | 165 |
| 5.4.6 | <b>Etape 6</b> : Conclusion . . . . .  | 166 |
| 5.5   | RECOMMANDATIONS POUR AMÉLIORER LA PRÉCISION DU MODÈLE APPROCHÉ . . . . .                   | 169 |
| 5.5.1 | Nombre d'échantillons . . . . .  | 169 |
| 5.5.2 | Méthode de régression . . . . .  | 171 |
| 5.5.3 | Modèles alternatifs . . . . .  | 173 |

- 5.6 APPLICATION AUX PANNEAUX CYLINDRIQUES SOUS COMPRESSION TRANSVERSALE NON-UNIFORME . . . . . 175
  - 5.6.1 Etat de l'art . . . . . 175
  - 5.6.2 Identification du problème . . . . . 177
  - 5.6.3 Résistance ultime . . . . . 178
- 5.7 APPLICATION À L'OPTIMISATION DES PANNEAUX CYLINDRIQUES RAIDIS SOUS COMPRESSION LONGITUDINALE . . . . . 180
  - 5.7.1 Formulation du problème d'optimisation . . . . . 180
  - 5.7.2 Résistance ultime des tôles courbes raidies . . . . . 182
  - 5.7.3 Optimisation des tôles courbes raidies . . . . . 183
- 5.8 CONCLUSION . . . . . 186

LE chapitre 3 précédent consacré à l'étude des tôles courbes non-raïdiées en compression axiale a abouti à la proposition d'une formule semi-analytique permettant d'évaluer leur résistance ultime. Cette formule a été établie suivant la procédure générale de normalisation européenne pour tous les types de vérification de la stabilité. Son expression mathématique est déduite par un raisonnement de la résistance des matériaux et est obtenue sous la forme (3.29) :

$$\chi = \frac{2\beta}{\beta + \bar{\lambda} + \sqrt{(\beta + \bar{\lambda})^2 - 4\beta(\bar{\lambda} - \alpha_Z(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0))}}$$

où  $\bar{\lambda}_0, \beta, \alpha_Z$  sont les trois paramètres du problème et sont à calibrer avec les résultats des simulations numériques. Ces simulations incluent l'utilisation d'un matériau non-linéaire et une analyse au second ordre de la structure avec des imperfections (en anglais, connu sous le sigle GMNIA). Un total de 524 simulations a été testé pour différentes configurations de tôles courbes. Chaque calcul nécessite entre 10 et 15 minutes selon la finesse du maillage, soit un total de 100 heures de calcul (sans compter les heures de modélisation et de traitement des résultats). À la fin, après calibration des paramètres  $\bar{\lambda}_0, \beta, \alpha_Z$ , l'estimation de la résistance ultime par l'équation 5.1 a une très bonne précision par rapport aux résultats numériques : la moyenne est proche de 1 et l'écart-type de 4,52%.

Malgré cette bonne précision, la méthodologie développée au chapitre 3 semble difficile à reproduire face à un nouveau problème dans la pratique quotidienne des ingénieurs. D'une part, l'expression analytique de la résistance ultime n'est, en générale, pas explicite ou facile à déduire par exemple du fait de la complexité de la structure étudiée. D'autre part, cette méthodologie manque de robustesse : elle ne permet pas de connaître le minimum de simulations nécessaires. Certes, plus les simulations sont nombreuses, plus la précision est grande mais le temps du calcul est long. Quelle sera l'influence du nombre des simulations sur la précision du modèle évalué? Est-t-il possible d'économiser du temps de calcul sans perdre en précision? Beaucoup de questions de ce genre se posent, en particulier lorsque l'on considère que cette étude n'était qu'une première étape dans une étude générale visant à étudier d'autres configurations : autres chargement (compression

---

transversale, cisaillement ou une combinaison de charges) et surtout en présence des raidisseurs. Il apparaît donc clairement qu'il faut une stratégie plus robuste pour justifier du choix de l'ensemble des modèles testés et pour faciliter la mesure de la précision du modèle approché.

Une telle stratégie existe pour la conception des expériences physiques ainsi que pour des expériences numériques. Elle est connue sous le nom de méthode des "Plans d'expériences". L'objectif de ce chapitre est d'adapter la méthode des plans d'expérience et de proposer une méthodologie clé en main pour les études numériques des tôles courbes en particulier et de problèmes du génie civil influencés par un grand nombre de paramètres en général.

Les caractéristiques des plans d'expériences numériques et en particulier leurs différences avec les plans d'expérience physiques, seront tout d'abord présentées. Quelques notions essentielles de statistique seront ensuite rappelées afin de juger de la précision des modèles obtenus par cette méthodologie, ces notions resteront ciblées vers des applications pratiques. Plusieurs exemples d'application illustreront enfin la faisabilité, la facilité et l'efficacité de la méthode dans la détermination de la résistance ultime des tôles courbes. Quelques recommandations seront formulées en conclusion du chapitre qui permettent d'améliorer la précision de la formule proposée.



## 5.1 MÉTHODOLOGIE DES PLANS D'EXPÉRIENCE

### 5.1.1 Etat de l'art

Une grande partie de nos connaissances sur les sciences et la technologie est obtenue à l'aide de l'expérimentation. Une expérience est une série de tests effectués d'une manière systématique afin d'accroître la compréhension d'un phénomène d'un processus existant ou à explorer un nouveau produit ou procédé. Traditionnellement, les essais sont effectués de manière séquentielle en faisant varier les composants du système étudié l'un après l'autre sans planification préalable de l'ensemble des essais à réaliser. Il en résulte que la décision d'arrêter ou de continuer les essais repose essentiellement sur des résultats obtenus pas à pas. Cette méthode traditionnelle est souvent appelée la méthode "essais-erreurs". Cependant, avec les développements ultra-rapides de la technologie moderne, les problèmes étudiés sont de plus complexes et bien que l'utilisation de la méthode essais-erreurs reste envisageable, elle nécessite une durée de campagne expérimentale longue et donne une connaissance très relative des influences des différents facteurs. Cette méthode manque de formalisme pour capitaliser et valoriser les résultats des expériences, d'où la naissance de stratégies d'optimisation connue sous le nom de méthode des plans d'expériences.

La méthode des plans d'expériences peut donc être décrite comme un ensemble de techniques complémentaires aidant son utilisateur dans la détermination des expériences à réaliser ainsi que dans la compréhension et l'exploitation des résultats obtenus. Ces outils, qui s'appuient essentiellement sur des bases statistiques et algébriques, permettent d'obtenir la meilleure précision possible avec le minimum d'essais. La première occurrence de la méthode des plans d'expériences moderne est due aux travaux du mathématicien britannique Sir Fisher [57] au début des années 30. Cette méthode développée dans l'objectif de quantifier l'effet de facteurs contrôlés par l'expérimentateur dans un contexte soumis à de nombreuses sources d'hétérogénéité : il cherche à augmenter les rendements agricoles en combinant divers types d'engrais, de variétés végétales, de méthodes de cultures, de types de sols. Ces travaux constituent le point de départ de la méthode théorique des plans d'expériences. Divers chercheurs ont par la suite marché dans les traces de Fisher afin de promouvoir et développer l'utilisation des techniques de planification expérimentale dans d'autres domaines que l'agronomie. Après 1945, les plans d'expériences suscitent de nombreuses publications et recherches dans le monde anglo-saxon (Kleijnen [85]). Mais ce sont certainement les travaux de Taguchi *et al.* [144] qui ont permis une vaste diffusion des plans d'expérience, notamment dans le milieu industriel. A cette époque, un produit ayant la marque "Fabriqué au Japon" était automatiquement synonyme de qualité médiocre. C'est donc une démarche d'amélioration de la qualité, qui l'amène à inclure des expérimentations au sein d'une démarche plus large de "qualité totale". De plus, Taguchi a également valorisé cette méthodologie et il a réalisé des tables de configurations expérimentales de référence facilement utilisables par des non-spécialistes (à cette époque,

seuls des statisticiens spécialistes pouvaient mettre en œuvre la méthode des plans d'expériences). L'outil de Taguchi est devenu aujourd'hui un des outils les plus utilisés pour l'amélioration des processus et procédés industriels.

Les applications des plans d'expériences ont tendance actuellement à se diversifier, notamment via l'adaptation de la méthode pour les expériences numériques que l'on proposera d'utiliser essentiellement dans la suite de ce chapitre.

### 5.1.2 Des plans d'expériences classiques aux plans d'expériences numériques

Au cours des vingt dernières années, les progrès de la puissance de calcul des ordinateurs ont conduit à l'étude des phénomènes physiques au travers d'expériences simulées par ordinateur. Dans certains cas même, des expériences numériques sont réalisables alors que des expériences physiques sont quasi impossibles, par exemple pour l'étude de la propagation d'un feu en milieu fermé (Jourdan [82]) ou simplement pour des raisons de coûts lorsque le nombre de variables est trop grand : l'étude de chocs de voiture par exemple. Malgré les progrès des outils informatiques, le temps de calcul pour une expérience numérique reste très long. La question du comment choisir les expériences de façon à recueillir un maximum d'informations en un minimum de simulations reste toujours la question importante dans cette démarche. La problématique centrale des plans d'expérience numérique est donc proche de celle rencontrée en expérimentation physique mais certaines particularités doivent être prises en compte.

La différence fondamentale entre les plans d'expériences numériques et les plans physiques développés en laboratoire réside dans le fait qu'en laboratoire, on suppose la présence d'erreurs aléatoires dues aux mesures, aux conditions expérimentales, etc. Ce n'est en principe pas le cas avec une expérience numérique qui produira des réponses identiques pour le même jeu de paramètres initiaux : les processus sont ici *déterministes*. L'erreur est liée au modèle et pas à l'expérimentation (Jourdan [82]), elle n'est plus aléatoire. Or la plupart des outils statistiques pour l'évaluation de la précision des modèles et l'étude de l'influence des paramètres sont basées sur des erreurs aléatoires, leur utilisation pour les expériences numériques est donc discutable et devient un sujet important dans la recherche. Néanmoins, il a été montré que, dans de nombreux cas, l'erreur systématique entre un modèle déterministe et son approximation a une distribution normale, de sorte que les techniques statistiques usuelles peuvent toujours être appliquées (Sacks *et al.* [125]). Plusieurs auteurs (Sacks *et al.* [125, 126], Santner *et al.* [128]) ont également insisté sur le fait que le choix des paramètres entrés dans l'expérience numérique est toujours un problème de conception de base des expériences classiques. La conception d'une expérience informatique est donc à la frontière d'un problème physique et statistique dont les spécificités seront soulignées dans la section suivante.

## 5.2 PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL NUMÉRIQUE

De façon schématique, un modèle numérique peut être considéré comme un processus : l'utilisateur spécifie des combinaisons de variables  $X$  (valeurs d'entrée) pour le simulateur numérique à partir duquel  $Y$  réponses (valeurs de sortie) sont générées en sortie. Pour faciliter les représentations graphiques, la figure 5.1 illustre ce processus dans le cas simple où il n'y a que deux valeurs d'entrée ( $X_1$  et  $X_2$ ). Il est ensuite facile d'étendre les notions introduites à des espaces multidimensionnels.

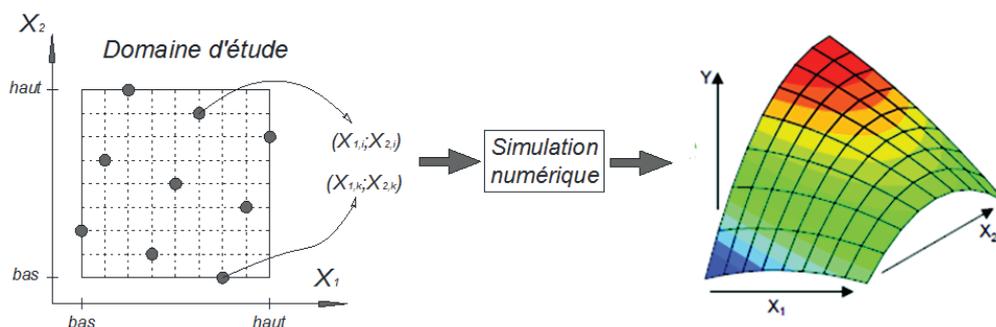


FIGURE 5.1 – Processus des expériences numériques (reproduction de Simpson et al. [139])

Chaque facteur peut être représenté par un axe gradué et orienté. Sa variation est souvent limitée entre deux bornes : la borne inférieure est le niveau bas et la borne supérieure est le niveau haut. L'ensemble de toutes les valeurs que peut prendre le facteur entre le niveau bas et le niveau haut, s'appelle le *domaine de variation du facteur* ou plus simplement le *domaine d'étude*. A l'intérieur de ce domaine, toutes les valeurs sont théoriquement possibles. Une expérience donnée est alors représentée par un point de coordonnées  $(X_{1,i}, X_{2,i})$ . C'est la raison pour laquelle une expérience est souvent désignée par l'expression *point d'expérience* ou même simplement *point*. Un plan d'expérience est donc représenté par un ensemble de points expérimentaux. A chaque point du domaine d'étude  $(X_{1,i}, X_{2,i})$ , le simulateur fournit une réponse  $Y_i$ . A l'ensemble de tous les points du domaine d'étude correspond un ensemble de réponses qui se localise sur une surface, appelée *surface de réponse*.

En général, on ne connaît que quelques réponses, celles qui correspondent aux points expérimentaux. On interpole à l'aide d'un modèle mathématique les réponses inconnues pour obtenir la surface de réponse approximative. Cette surface de réponse approchée (ou modèle approché) sert à faciliter les études avancées, tels que l'optimisation ou l'analyse de fiabilité. Les points d'expériences retenus par la théorie des plans d'expériences assurent la meilleure précision possible sur la forme et la position de la surface de réponse. Le choix du nombre et de l'emplacement des points d'expériences dans le domaine d'étude est donc le problème fondamental des plans d'expériences (on reviendra en détail sur ce point dans la prochaine section).

Les différents étapes d'un plan d'expériences numériques sont résumées comme suit :

- **Étape 1** : Identification du problème.
- **Étape 2** : Choix du modèle mathématique des réponses.
- **Étape 3** : Choix des expériences à réaliser.
- **Étape 4** : Construction du modèle approché.
- **Étape 5** : Validation de la précision du modèle obtenu.
- **Étape 6** : Conclusions.

Ce processus n'est pas nécessairement linéaire et peut être appliqué de manière itérative si le modèle ne répond pas à la précision souhaitée. Ces étapes sont généralement similaires à celles rencontrées dans les expériences classiques sauf le choix des expériences (**étape 3**) et celui du modèle approché (**étape 4**). Ces deux étapes sont les deux points de différence majeure entre les expériences physiques et numériques du fait du caractère déterministe des expériences numériques. Ces deux questions seront développées dans les paragraphes suivants.

### 5.2.1 Choix des points d'expérience

Le succès des plans d'expériences réside dans la diminution du nombre nécessaire d'essais pour obtenir une information avec une précision donnée. Le choix des essais est en conséquence fondamental pour l'obtention d'une précision optimale dans la détermination des coefficients du modèle approché. Pour les expériences physiques, il existe des plans qui possèdent d'excellentes qualités statistiques et qui permettent de modéliser les réponses dans les meilleures conditions ; les plans connus sont : les plans factoriels, les plans composites centrés, les plans de Box-Behnken (livre de Montgomery [102]). La majorité de ces expériences reposent sur trois principes fondamentaux : échantillonnage aléatoire ou randomisation, répétition et contrôle local qui visent à diminuer l'influence des erreurs aléatoires.

L'échantillonnage aléatoire garantit l'élimination des erreurs systématiques dues par exemple à un équipement défectueux ou la fatigue de l'observateur. Par répétition, on entend la répétition d'une expérience dans des conditions identiques. Plus le nombre de répétitions est grand, plus la précision de l'expérience est grande. La dernière technique de contrôle local est aussi un dispositif visant à réduire ou à maîtriser la variation due à des facteurs externes et à accroître la précision de l'expérience. Ces techniques conduisent à un choix des points près du périmètre du domaine d'étude et de coordonnées multiples (répétitions) comme indiqué dans la figure 5.2a.

La plupart de ces techniques n'est plus pertinente pour les expériences numériques qui sont *déterministes*. Il n'y a pas besoin de répétition d'expérience puisque celles-ci donnent la même réponse. Il est inutile de répartir au hasard les expériences car les conditions expérimentales n'influent pas sur la réponse. L'objectif attendu pour le choix des points est donc principalement le remplissage uniforme de l'espace et la non redondance des points projetés sur les sous-espaces (figure 5.2b), ce qui conduit au développement de nouveaux plans connus sous le nom de "Space-Filling Design". On trouve essentiellement

deux types de ces plans dans la bibliographie (Jourdan [82]) : les plans à marges uniformes tels que les hypercubes latins et les suites de faible discrédance.

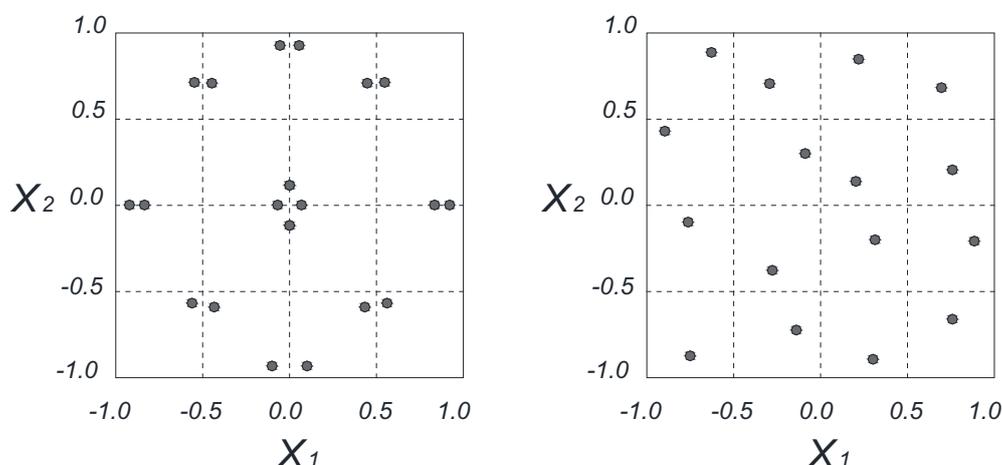


FIGURE 5.2 – Plan d'expérience classique et "Space-Filling" Design

La méthode d'échantillonnage par hyper cube latin (LHS) est souvent utilisée pour la méthode de plan d'expériences numériques grâce à sa simplicité d'usage et de construction. Elle permet d'assurer la non redondance de l'information au travers d'une bonne répartition des projections sur les axes factoriels. Toutefois, les points construits ne sont pas forcément bien répartis dans l'espace. C'est pourquoi on préfère aussi souvent des plans construits à partir de suites à faible discrédance (Thiérmard [146]) : les points d'expériences sont choisis de telle manière que la distance entre les points est aussi petite que possible. Ces suites de points sont initialement utilisées pour remplacer les suites aléatoires dans la méthode de Monte-Carlo (MC) que l'on dénomme alors méthode de quasi Monte-Carlo (QMC). Ces suites sont générées par des algorithmes déterministes afin d'obtenir des points répartis le plus uniformément possible dans le domaine étudié. Blatman *et al.* [27] ont montré que pour atteindre une précision donnée la méthode de quasi-MC est plus performante que les méthodes classiques de MC ou LHS : quand la surface de réponse est choisie sous une forme polynômiale, le choix des points d'expérience par la méthode quasi-MC permet d'avoir un gain du temps de calcul d'un facteur 10 en moyenne.

Des exemples de suites à faibles discrédance sont donnés par Halton (1960), Hammersley (1960), Sobol' (1967), Faure (1982) et Niederreiter (1987). Parmi ces méthodes, la construction des points à l'aide de suites de Sobol' est la plus fréquemment utilisée, car elles sont faciles à construire par sa nature binaire de construction (cf annexe 4) et rapides à converger (Krykova [86]). Ces suites de Sobol' ont aussi l'avantage de préserver leur uniformité de distribution lorsque le nombre des points est augmenté (table 5.1). En conséquence, on peut construire une suite de Sobol' à partir d'une suite plus courte en ajoutant des points supplémentaires, par exemple, les quatre premiers termes de la suite  $n = 8$  sont de la suite  $n = 4$ . Ce n'est pas le cas de la méthode LHS, où le processus d'échantillonnage doit être refait à nouveau intégralement. Cette propriété se conserve

aussi pour les suites de grande dimension ( $n \geq 2$ ) où la construction est effectuée par une permutation des suites de dimension 1 (c.f table 5.2).

TABLE 5.1 – Suite de Sobol' en 1D

| n = 4 | n = 8 | n = 16 |
|-------|-------|--------|
| 0,0   | 0,0   | 0,0    |
| 0,5   | 0,5   | 0,5    |
| 0,25  | 0,25  | 0,25   |
| 0,75  | 0,75  | 0,75   |
|       | 0,125 | 0,125  |
|       | 0,625 | 0,625  |
|       | 0,375 | 0,375  |
|       | 0,875 | 0,875  |
|       |       | 0,0625 |
|       |       | 0,5625 |
|       |       | 0,3125 |
|       |       | 0,8125 |
|       |       | 0,1825 |
|       |       | 0,6875 |
|       |       | 0,4375 |
|       |       | 0,9375 |

TABLE 5.2 – Suite de Sobol' en 2D

| X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 0,0            | 0,0            | 0,0            | 0,0            |
| 0,5            | 0,5            | 0,5            | 0,5            |
| 0,25           | 0,75           | 0,25           | 0,75           |
| 0,75           | 0,25           | 0,75           | 0,25           |
| 0,125          | 0,625          | 0,125          | 0,625          |
| 0,625          | 0,125          | 0,625          | 0,125          |
| 0,375          | 0,375          | 0,375          | 0,375          |
| 0,875          | 0,875          | 0,875          | 0,875          |
|                |                | 0,0625         | 0,9375         |
|                |                | 0,5625         | 0,4375         |
|                |                | 0,3125         | 0,1875         |
|                |                | 0,8125         | 0,6875         |
|                |                | 0,1825         | 0,3125         |
|                |                | 0,6875         | 0,8125         |
|                |                | 0,4375         | 0,5625         |
|                |                | 0,9375         | 0,0625         |

### 5.2.2 Choix du modèle approché

Après avoir sélectionné les points expérimentaux appropriés (variables d'entrée X) et effectué les simulations numériques nécessaires (réponses y), il convient donc de choisir un modèle approché. Ce modèle approché doit être simple par sa forme et capable de représenter adéquatement la réponse du problème étudié. Ces dernières années, beaucoup de travaux ont été faits sur des modèles approchés, les familles les plus connues sont (Simpson *et al.* [139]) : la méthode de surfaces de réponse (en anglaise *Response surface method*), le Krigeage (du nom du statisticien inventeur) et les réseaux de neurones (en anglais *Neural Networks*). Malgré la variété des approximations disponible, des études comparatives de ces approches sont peu nombreuses (Simpson *et al.* [138]) et, selon la complexité du problème et l'objectif recherché, telle ou telle méthode sera plus appropriée et recommandée par la communauté.

Il semble cependant que, malgré la complexité des modèles numériques, dans bien des cas un simple modèle polynomial peut être suffisant pour approcher la réponse du simulateur (Allen *et al.* [10]). En effet, si une surface de réponse polynomiale est adaptée à la réponse étudiée, alors cette approche est celle qui nécessite le moins de simulations. Et même si la surface de réponse n'est pas de bonne qualité, le modèle polynomial peut

être utile pour effectuer une analyse de sensibilité ce qui permet tout de même de trier par ordre d'importance la contribution des variables d'entrée influant sur la réponse (Iman et Helton [72]). En outre, l'utilisation de la surface de réponse polynomiale pour des études telles que l'analyse de fiabilité (Dubourg *et al.* [54], Guan et Melchers [69], Rajashekhar et Ellingwood [112], Zheng et Das [162]) et l'optimisation (Roux *et al.* [123], Zeng *et al.* [160]) est relativement facile. Enfin les modèles polynomiaux sont bien connus des ingénieurs et leur interprétation physique est simple. Toutes ces raisons font que ce modèle approché par polynômes sera retenu dans la suite de ce travail. Il s'écrit sous la forme générale suivante :

$$y^i = \sum_{k=1}^m \beta_k f_k(x^i) + \varepsilon^i \quad (5.1)$$

où :  $x^i = \{X_1^i, \dots, X_p^i\}$  est le vecteur définissant les valeurs des facteurs d'entrée, linéairement indépendantes ;  $\beta_k$  est le vecteur des coefficients inconnus à estimer ;  $\varepsilon^i$  est l'écart au modèle et  $f_k(x^i)$  sont les premières fonctions d'une base de l'espace  $\mathbb{L}^2$ . Par exemple, si on choisit une base polynomiale de deux variables  $x = \{X_1; X_2\}$ , les premières fonctions de base s'écrivent :

$$\begin{cases} f_1(x) = 1 \\ f_2(x) = X_1 \\ f_3(x) = X_2 \\ f_4(x) = X_1 \cdot X_2 \\ f_5(x) = X_1^2 \\ f_6(x) = X_2^2 \end{cases} \quad (5.2)$$

et la relation (5.1) devient :

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \beta_3 \cdot X_1 \cdot X_2 + \beta_4 \cdot X_1^2 + \beta_5 \cdot X_2^2 + \varepsilon(x) \quad (5.3)$$

### 5.3 NOTIONS DE STATISTIQUE POUR L'ÉVALUATION DES MODÈLES

Après avoir construit un modèle, la question de sa validité se pose. Cette étape est très importante dans la procédure d'expérience. En effet, il est nécessaire de veiller à ce que le modèle ajusté fournisse une approximation suffisante et vérifie qu'aucune des hypothèses de régression (s'il y en a) ne soit violée. Pour cela, différents outils sont disponibles. La présentation qui en est faite ici est limitée aux seules notions statistiques nécessaires pour la compréhension et la mise en œuvre de la méthode. Les notions supplémentaires peuvent être trouvées dans l'ouvrage de Saporta [129].

Le modèle d'approximation peut être mis sous la forme matricielle suivante, conséquence de la formule 5.1 :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.4)$$

où :

$$\begin{aligned}
 Y_{(n \times 1)} &= \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix}, \quad X_{(n \times m)} = \begin{pmatrix} f_1(x^1) & f_2(x^1) & \cdots & f_m(x^1) \\ f_1(x^2) & f_2(x^2) & \cdots & f_m(x^2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x^n) & f_2(x^n) & \cdots & f_m(x^n) \end{pmatrix}, \\
 \varepsilon_{(n \times 1)} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \beta_{(m \times 1)} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

avec :

- $n$  est le nombre total des observations,
- $m$  est le nombre d'inconnues du problème,
- la variable  $y_i$  désigne la réponse observée pour l'essai  $i$ ,
- la variable  $f_j(x^i)$  est la valeur de fonction de base  $f_j(x)$  pour l'essai  $i$ .

On se place dans la suite dans le cas où  $m < n$ , c'est-à-dire système surdéterminé à une solution, et on cherche à déterminer  $\beta$  pour minimiser  $\varepsilon$  au sens des moindres carrés.

### 5.3.1 Estimation des paramètres

Conditionnellement à la connaissance des valeurs des  $X$ , les paramètres inconnus  $\beta$  du modèle sont estimés. Dans le cas où les nombres d'essais sont supérieurs au nombre d'inconnues, d'habitude la résolution du système se fait par la méthode des moindres carrés dans laquelle il s'agit de minimiser  $SS_E$ , la somme des carrés des résidus :

$$SS_E = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n \left( y^i - \sum_{k=1}^m \beta_k f_k(x^i) \right)^2 \tag{5.5}$$

Par dérivation matricielle de l'équation 5.5 et en donnant la valeur nulle à cette dérivation, l'estimation  $\hat{\beta}$  des paramètres  $\beta_i$  est obtenue par :

$$\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t Y \tag{5.6}$$

Les estimateurs des moindres carrés  $\hat{\beta}$  sont des estimateurs sans biais de  $\beta$ . Sous les hypothèses de normalité et d'indépendance, ces estimateurs sont uniques et uniformément meilleurs (Saporta [129]).

Les valeurs  $\hat{Y}$  estimées de  $Y$  ont alors pour expression :

$$\begin{aligned}
 \hat{Y} &= X \hat{\beta} \\
 &= X (X^t X)^{-1} X^t y \\
 &= H Y
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

La matrice  $H = X (X^t X)^{-1} X^t$  est appelée "hat-matrix". Les éléments diagonaux  $h_{ii}$  de cette matrice mesurent l'importance du rôle que joue  $y_i$  dans l'estimation de  $\hat{y}_i$ . Dans la

méthode de régression linéaire, la valeur moyenne de  $h_{ii}$  est donnée par  $\bar{h} = \frac{m}{n}$ . Cette valeur sert à évaluer l'influence des observations : un point est important si la valeur correspondante de  $h_{ii}$  satisfait la condition 5.8. Ce point sera discuté en section 5.5 sur les points aberrants.

$$h_{ii} \geq 2\bar{h} = \frac{2m}{n} \quad (5.8)$$

### 5.3.2 Evaluation globale du modèle

Pour évaluer la qualité du modèle approché, il existe des critères permettant de tester la bonne adéquation entre les observations et les prévisions à partir des paramètres d'entrée utilisés pour la construction du modèle. Le coefficient de détermination  $R^2$  est le critère généralement utilisé en régression linéaire pour tester l'ajustement du modèle. Ce coefficient est défini par :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y^i - \hat{y}^i)^2}{\sum_{i=1}^n (y^i - \bar{y})^2} \quad (5.9)$$

où  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y^i$  est une estimation de la moyenne de la réponse.  $R^2$  varie entre 0 et 1. Ce coefficient s'interprète comme la part de la variance de la variable  $y$  expliquée par la régression. Ce critère permet de mesurer le pourcentage de la variabilité totale de la réponse expliquée par le modèle. En règle générale, un  $R^2$  proche de 1 permet de dire que l'ajustement est bon. Pourtant cette conclusion n'est pas suffisante. En effet  $R^2$  augmente lorsque le nombre de termes grandit même si toutes les observations additionnelles ne sont pas significatives (on risque alors de sur-estimer la qualité du modèle (Blatman [26], Rousson et Gosoniu [122])). Pour parer à ce problème, on utilise en complément la validation croisée (Quan [111]).

La validation croisée implique le retrait de quelques valeurs de la base de données, la construction d'un modèle avec les données restantes, puis l'application de ce modèle pour prédire les valeurs retirées. La forme la plus simple de validation croisée est l'approche "Leave-One-Out" (LOO), où une seule observation est retirée. Répéter cette démarche pour l'ensemble des valeurs de données successivement conduit à un  $R^2$  validé par croisement, noté  $Q^2$ . La définition de  $Q^2$  s'écrit comme suit :

$$Q^2 = 1 - \frac{PRESS}{\sum_{i=1}^n (y^i - \bar{y})^2} \quad (5.10)$$

Le terme PRESS, initialement proposé par Allen [9], est la somme des erreurs quadratiques de prédiction et est calculée par la relation suivante :

$$PRESS = \sum_{i=1}^n (y^i - \hat{y}^{(i)})^2 \quad (5.11)$$

où  $\hat{y}^{(i)}$  est la prédiction de  $y^i$  calculée sans tenir compte de la  $i$ -ième observation. Il est démontrable que dans le cas d'une régression linéaire par moindres carrés, le PRESS

peut être approché par :

$$PRESS = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\varepsilon_i}{1 - h_{ii}} \right)^2 \tag{5.12}$$

avec  $\varepsilon_i$  le résidu et  $h_{ii}$  le terme diagonal de la "hat-matrix"  $\mathbf{H}$  définie précédemment (expression 5.7). Sur la base de ce critère, le meilleur modèle est celui qui a la plus petite valeur de PRESS.

Si  $R^2$  est une mesure de la justesse de la corrélation,  $Q^2$  est une mesure de la justesse de la prédiction (Rousson et Gosoni [122]). La valeur de  $Q^2$  est en général inférieure à celle obtenue par  $R^2$ . Une grande différence entre  $R^2$  et  $Q^2$  indique qu'il existe potentiellement quelques observations ayant une influence inattendue sur le modèle de régression.

### 5.3.3 Pertinence du modèle approché par l'analyse des résidus

Le coefficient de détermination  $R^2$  ne donne qu'une indication sur la qualité globale du modèle. Pour tester la pertinence de chaque paramètre (par exemple les coefficients de régression), il faut avoir recours aux tests statistiques d'hypothèses, en général un test de Student ou t-test. Cependant, la validité de ces tests dépend directement des hypothèses liées au terme d'erreur, à savoir que :

- sa distribution doit suivre une loi normale ;
- sa variance est constante ;
- les erreurs  $\varepsilon_i$  sont indépendantes.

Il est donc primordial de vérifier chacune des hypothèses sous-jacentes et d'utiliser des méthodes adéquates pour les valider. Le diagnostic graphique est un outil puissant pour valider ces hypothèses. Il fournit un nombre important d'informations que les indicateurs statistiques ( $R^2$  ou  $Q^2$ ) appréhendent mal. Ces outils graphiques sont basés non pas sur les résidus "brutes",  $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$ , qui n'ont pas souvent les mêmes variances mais sur des résidus studentisés  $t_i$  :

$$t_i = \frac{\varepsilon_i}{\sigma \sqrt{1 - h_{ii}}} \tag{5.13}$$

où  $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y^i - \hat{y}^i)^2}{n - m}$  est l'écart-type du modèle approché et  $h_{ii}$  est la valeur diagonale de la matrice  $\mathbf{H}$ . Il existe plusieurs types de graphiques pertinents selon l'information que l'on porte en abscisse (les résidus sont toujours portés en ordonnée sauf pour la vérification de normalité). En principe, les résidus doivent être répartis aléatoirement autour de la valeur 0 et ne présenter aucune forme de régularité dans le nuage de points. Les discussions de ces graphes peuvent être trouvés dans Cornillon et Matzner-Lober [43] et seront détaillées dans les exemples d'application qui suivent (voir paragraphe 5.4).

Une fois que les hypothèses sont vérifiées, les tests statistiques peuvent être utilisés. Un test statistique (ou test d'hypothèse) est une démarche qui a pour but de fournir une règle de décision permettant, sur la base de résultats d'échantillons, de faire un choix entre deux hypothèses statistiques : hypothèse nulle  $H_0$  et hypothèse alternative  $H_1$ . L'hypothèse nulle

$H_0$  du test est que le paramètre évalué est égal à zéro. L'hypothèse  $H_1$  est celle que l'on espère être la bonne, le paramètre méritant bien sa place dans l'équation, avec la valeur qu'on lui a trouvée. Le problème se formule dans le cas d'un test de signification d'un coefficient, par le test bilatéral de Student, comme suit :

$$\begin{cases} H_0 & : \beta_i = 0 \\ H_1 & : \beta_i \neq 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

On rejette  $H_0$  si l'observation de la statistique de test, noté  $T_i = \frac{\beta_i}{\sigma_i}$  est telle que :

$$|T_i| \geq t_{n-m+1}^{1-\frac{\alpha}{2}} \quad (5.15)$$

où  $\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 \cdot (\mathbf{X}^t \mathbf{X})_{ii}^{-1}}$  est l'écart-type du coefficient de régression  $\beta_i$ ,  $\alpha$  est le niveau de signification ( $\alpha = 5\%$  dans la plupart des problèmes du génie civil) et  $t_{n-m+1}^{1-\frac{\alpha}{2}}$  est le quantile d'ordre  $(1 - \frac{\alpha}{2})$  d'une loi de Student à  $(n - m + 1)$  degré de liberté.

Pour chacun des coefficients de régression, on peut aussi construire un intervalle de confiance bilatéral à  $(1 - \alpha) \times 100\%$  par la formule suivante :

$$\beta_i \pm t_{n-m+1}^{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_i \quad (5.16)$$

La largeur de cet intervalle, calculée par  $w_i = 2 \cdot t_{n-m+1}^{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_i$ , a une grande importance car elle permet de définir une marge d'erreur et d'évaluer la précision de l'estimation d'un paramètre statistique sur un échantillon.

Maintenant que les principales étapes de la méthode d'expériences numériques ont été exposées, elles vont être illustrées par des exemples liés à la détermination des résistances ultimes des panneaux cylindriques vis-à-vis du problème du voilement. Le premier concerne un problème pour lequel la solution est déjà connue (celle étudiée au chapitre 3). Cet exemple sert à valider l'exactitude et la pertinence de la méthode des plans d'expériences numériques pour les tôles courbes. Le deuxième exemple a pour objectif de démontrer la facilité d'application de la méthode face à un nouveau problème : un changement de direction du chargement dans cet exemple. La dernière application montre la puissance de la méthode pour l'optimisation des panneaux cylindriques raidis, ce qui est un problème pratique de conception d'une grande importance.

## 5.4 APPLICATION AUX PANNEAUX CYLINDRIQUES SOUS COMPRESSION LONGITUDINALE ET UNIFORME

Ce premier exemple vise à appliquer la méthode des plans d'expérience à l'étude de la résistance des tôles courbes non-raïdiées sous compression uniforme longitudinale pour laquelle une solution théorique a été développée au chapitre 3. L'objectif de ce premier

exemple est d'illustrer la méthodologie de la méthode de planification d'expérience numérique (section 3) et de vérifier sa pertinence pour les problèmes des tôles courbes traitées dans cette thèse.

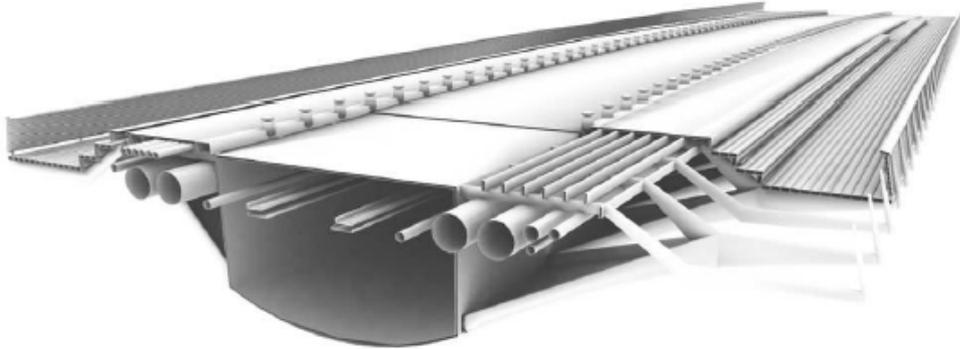


FIGURE 5.3 – Tôle courbe intrados - Pont Renault, île Séguin en France

#### 5.4.1 Etape 1 : Identification du problème

La première étape consiste à identifier le problème étudié. Il s'agit ici de déterminer la résistance ultime d'une tôle courbe soumise à une compression uniforme longitudinale. On identifie ensuite tous les facteurs possibles ayant une influence sur le résultat, ainsi que leurs domaines de variation. L'étude paramétrique du chapitre 3 a montré que la résistance ultime est influencée par la géométrie des panneaux (y compris leurs imperfections), les propriétés matérielles, les conditions aux limites et la nature du chargement. Comme l'objectif de cet exemple n'est que de valider et d'illustrer la pertinence de la méthode de plan d'expérience aux tôles courbes, il convient de conserver ici les mêmes restrictions qu'au chapitre 3, à savoir :

- L'imperfection est choisie selon l'EN 1993-1-5 : la forme est celle du premier mode de voilement et l'amplitude est :  $w_0 = \min(a/200, b/200)$ .
- Le matériau est un acier de construction S355 tel que fréquemment utilisé dans le domaine des ouvrages d'art.
- Le panneau est supposé simplement appuyé sur les quatre côtés.
- Le chargement est une compression uniforme le long du bord courbe.

Seules les dimensions du panneau varieront donc à savoir la longueur  $a$ , la largeur  $b$ , l'épaisseur  $t$  et le rayon de courbure  $R$ . En appliquant le théorème de Vaschy-Buckingham qui permet de dire combien de nombres adimensionnels indépendants peuvent être construits dans un problème physique de  $n$  variables, la contrainte ultime est obtenue par une fonction comme suit :

$$\frac{\sigma_{ult}}{f_y} = f\left(\frac{a}{b}; \frac{t}{b}; \frac{b}{R}\right) \quad (5.17)$$

La contrainte ultime peut donc être exprimée en fonction de trois variables adimensionnelles. Maintenant que les variables ont été définies, il est essentiel de définir le domaine de

variation dans lequel ces paramètres peuvent évoluer. Il convient de le choisir le plus faible possible car l'amplitude du domaine conditionne directement la précision de l'expression approchée obtenue. Pour cet exemple, les valeurs suivantes semblent raisonnables pour couvrir la plupart des applications de ces panneaux aux ouvrages d'art :

- $a/b \in [0,6;1,6]$ , ce paramètre désigne le coefficient d'aspect  $\alpha = a/b$
- $t/b \in [0,01;0,04]$ , ce paramètre correspond à l'élancement du panneau,
- $b/R \in [0;1]$ , ce paramètre correspond l'angle de la courbure du panneau.

Comme les domaines de variations des trois facteurs étudiés sont différents, il convient de remplacer ces paramètres naturels par des variables centrées réduites de sorte que toutes les variables auront le même domaine de variation (entre  $-1$  et  $+1$ ) ce qui permettra de comparer entre eux l'effet des facteurs :

$$\begin{cases} X_1 &= 2\frac{a}{b} - 2,2 \\ X_2 &= 66,67\frac{t}{b} - 1,67 \\ X_3 &= 2\frac{b}{R} - 1 \end{cases} \quad (5.18)$$

Un autre intérêt de ce changement de variable est de pouvoir présenter les plans d'expériences de la même manière quels que soient les domaines d'étude retenus et quels que soient les facteurs. La théorie des plans d'expériences présente ainsi une grande généralité.

#### 5.4.2 Etape 2 : Choix du modèle approché

Le modèle approché peut être infiniment varié et dépend du type de problème étudié. Ce modèle ne doit pas être trop complexe car il serait alors trop long à estimer. Il doit être choisi de façon à être simple par son expression et capable d'estimer la réponse de manière acceptable. La connaissance de la physique du problème est très utile pour donner une forme a priori du modèle. En faisant référence à la norme existante de l'EN 1993-1-5, on sait que la résistance d'une plaque plane est liée à l'élancement réduit  $\bar{\lambda}$  (voir chapitre 1) par un polynôme du second ordre :

$$\frac{\sigma_{ult}}{f_y} = \frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{0,22}{\bar{\lambda}^2} \quad (5.19)$$

Il est à noter que l'élancement réduit  $\bar{\lambda}$  (c.f la définition dans section 1.1.2) est relié aux deux variables  $X_1$  et  $X_2$  (définies par l'expression 5.18) par la relation suivante :

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \sqrt{\frac{f_y}{\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)}}} \cdot \sqrt{\underbrace{\frac{1}{k(a/b)}}_{X_1}} \cdot \underbrace{\frac{b}{t}}_{X_2} \quad (5.20)$$

avec  $k(\alpha)$  donné par l'expression simplifiée suivante :

$$k(\alpha) = \begin{cases} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 & \text{si } \alpha \leq 1 \\ 4 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} \quad (5.21)$$

On peut donc penser qu'un polynôme du second ordre fournira une bonne approximation de la résistance ultime d'une tôle courbe. Le modèle approché sera donc cherché sous la forme suivante :

$$\hat{y} = \beta_0 + \sum_{i=1}^3 \beta_i X_i + \sum_{i,j=1}^3 \beta_{ij} X_i X_j \quad (5.22)$$

où  $\hat{y}$  est la valeur estimée de la réponse  $y$ ,  $X_i$  sont les facteurs et  $\beta_i$  sont les inconnues du polynômes.

### 5.4.3 Etape 3 : Choix des points expérimentaux

Le choix des points expérimentaux comprend deux aspects : le choix du nombre de points et celui de leur distribution dans le domaine étudié. L'échantillonnage est effectué à l'aide d'une suite de Sobol' car celle-ci assure une répartition uniforme des points expérimentaux (voir section 5.2.1). En outre, la génération de ces points est facile grâce à des outils statistique standard comme la "Statistics toolbox" de Matlab (Jones et MathWorks [79]). Quant au nombre de simulations  $n$ , il dépend de la complexité du phénomène étudié ainsi que de la complexité du modèle approché. Mathématiquement le nombre minimal de points expérimentaux doit être supérieur ou égal au nombre de paramètres inconnus du modèle approché. Néanmoins, pour atteindre une bonne précision, le nombre de points doit être plus grand. Malheureusement, il n'existe pas d'expression claire permettant de relier le nombre de points expérimentaux nécessaires au nombre de variables inconnues. Certains auteurs (d'après Bowman *et al.* [30]) suggèrent d'utiliser  $n = 3 \cdot m + 1$  points pour le modèle polynomial d'ordre 2, où  $m = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$  est le nombre de coefficients inconnus du polynôme et  $p$  est le nombre de variables du problème. Suivant cette suggestion, le présent exemple pourrait être évalué avec une bonne précision avec 31 expériences ( $p = 3$  et  $m = 10$ ).

Il faut noter qu'avec cette méthode de construction des points expérimentaux (c.f annexe 4), les valeurs extrêmes (niveau haut ou de valeur +1) des variables ne peuvent être atteintes sauf pour un nombre infini des points. Certains points supplémentaires situés aux coins du cube sont donc ajoutés (voir figure 5.4). Ceci n'est pas indispensable, mais permet de couvrir la totalité du domaine d'étude en donnant plus de poids aux limites du domaine (on vérifiera cette hypothèse au paragraphe 5.6). Au total, 7 points sont ajoutés (8 coins pour une hyper cube 3D mais un point de départ  $(-1; -1; -1)$  est déjà généré par la construction de suite). Le nombre total de points expérimentaux est égal à  $n = 38$ . La répartition de ces points est donnée la figure 5.4.

### 5.4.4 Etape 4 : Evaluation des coefficients inconnus

Le modèle de réponse est ici recherché sous la forme d'un polynôme du second ordre des trois variables  $X_i$  donnés par l'équation 5.21. Les paramètres inconnus  $\beta_i$  doivent être

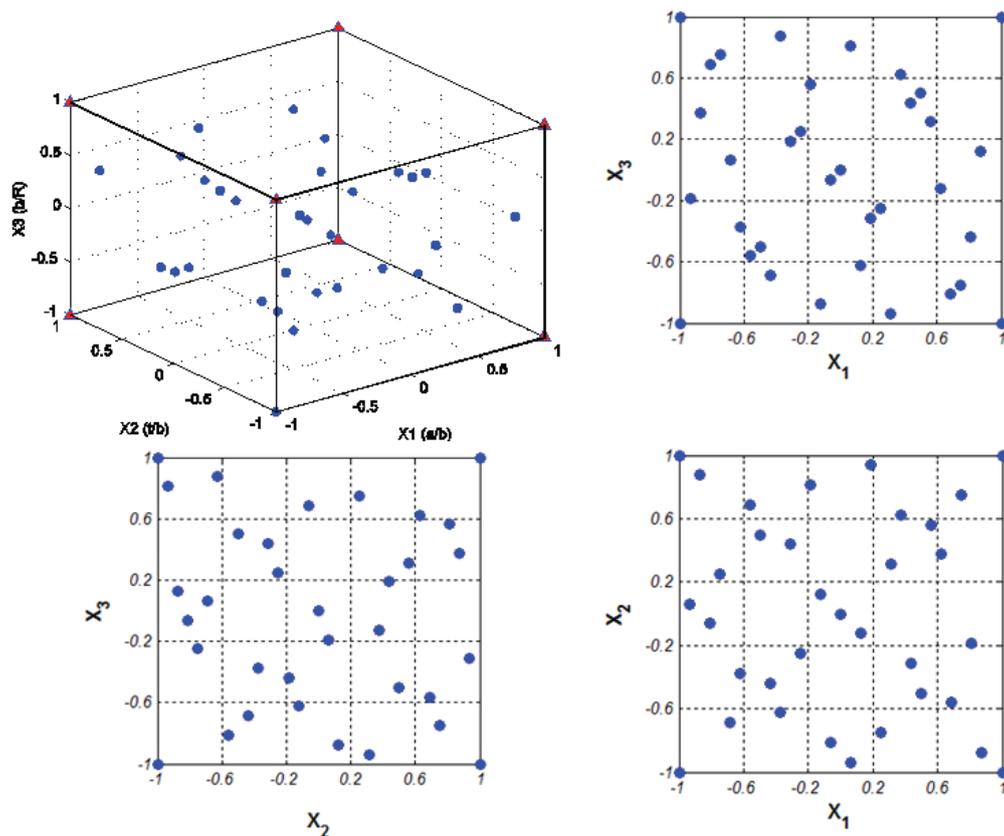


FIGURE 5.4 – Echantillonnage par la suite de Sobol' (ronde bleue) et addition points aux coins (triangle rouge)

identifiés à partir des simulations numériques (ici  $n = 38$  simulations numériques). L'estimation de ces inconnues est effectuée par une méthode de régression, basée ici sur la méthode des moindres carrés détaillé en 3.1. Les coefficients de la régression sont calculés par Matlab. La résistance ultime d'une tôle courbe peut ainsi être approchée par l'expression suivante :

$$\hat{y} = 0,879 + 0,002 \cdot X_1 + 0,212 \cdot X_2 + 0,052 \cdot X_3 - 0,001 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0,063 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0,004 \cdot X_3 \cdot X_1 - 0,037 \cdot X_1^2 - 0,100 \cdot X_2^2 - 0,003 \cdot X_3^2 \quad (5.23)$$

### 5.4.5 Etape 5 : Validation du modèle

Le modèle obtenu à l'étape précédente (par l'expression 5.23) fournit donc une valeur approchée de la résistance ultime dont il s'agit d'estimer la validité sur l'ensemble du domaine étudié. Pour ce faire, il existe des critères (voir section 5.3.2) permettant de tester la bonne adéquation entre les observations  $y$  et les valeurs prédites  $\hat{y}$  sur les données utilisées lors de la construction du modèle. Le coefficient de détermination est d'abord calculé :  $R^2 = 0,977$  et puis le coefficient de validation-croisée :  $Q^2 = 0,969$ . Le fait que  $R^2$  et  $Q^2$  soient très proches de 1 et que les deux coefficients soient proches l'un de l'autre indique que le modèle de régression correspond bien aux données. On effectue également

la régression en éliminant les 7 points ajoutés aux coins pour combler le domaine d'étude. On note que la précision du modèle approché n'est pas affectée énormément :  $R^2 = 0,971$  ;  $Q^2 = 0,9422$ . La diminution de ces deux coefficients  $R^2$  et  $Q^2$  est une conséquence directe de la diminution du nombre d'échantillons (7 sur 38 échantillons sont supprimés). Le résultat de cette comparaison montre qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter les points supplémentaires aux coins du domaine d'étude si le nombre d'échantillon est suffisamment grand.

Pour terminer cette étape de validation, les hypothèses de la méthode de régression linéaire sont vérifiées. La figure 5.5 présente les résidus studentisés (expression 5.13) par ordre d'apparition. On voit que les résidus sont dispersés de manière aléatoire autour de 0 (l'hypothèse de linéarité est vérifiée) et que la variance des erreurs est à peu près constante au fil du temps (l'hypothèse d'homoscédasticité est vérifiée).

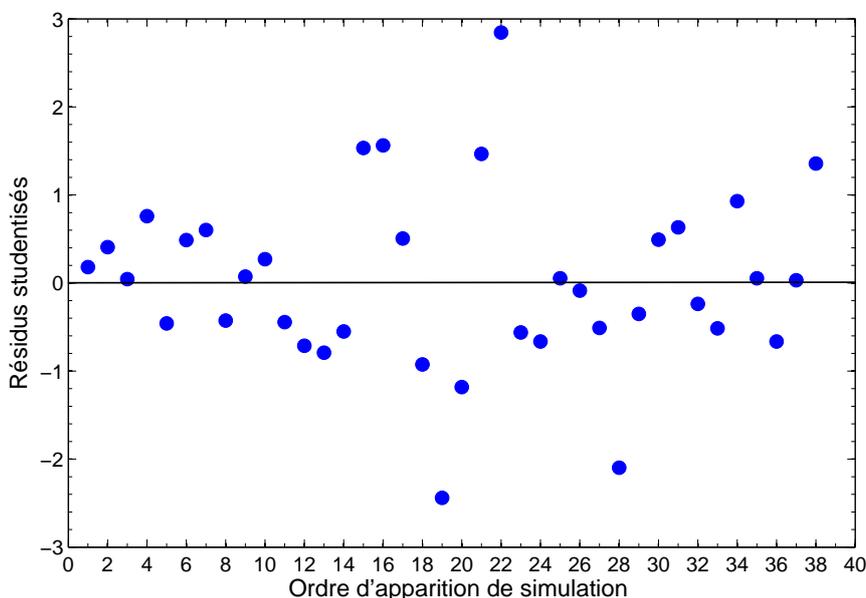


FIGURE 5.5 – Variation des résidus par ordre d'apparition

Enfin, le graphique de distribution normale de la figure 5.6 montre que les résidus suivent à peu près une ligne droite, sauf pour trois points isolés avec une très faible probabilité d'apparition (< 5% et > 95%); on peut donc raisonnablement conclure que la distribution des résidus suit une loi normale et que l'expression approchée dans 5.23 est valide d'un point de vue statistique.

### 5.4.6 Etape 6 : Conclusion

L'expression obtenue en 5.23 permet l'évaluation de la résistance ultime de tôles courbes sous compression axiale avec une bonne précision. Cependant en regardant at-

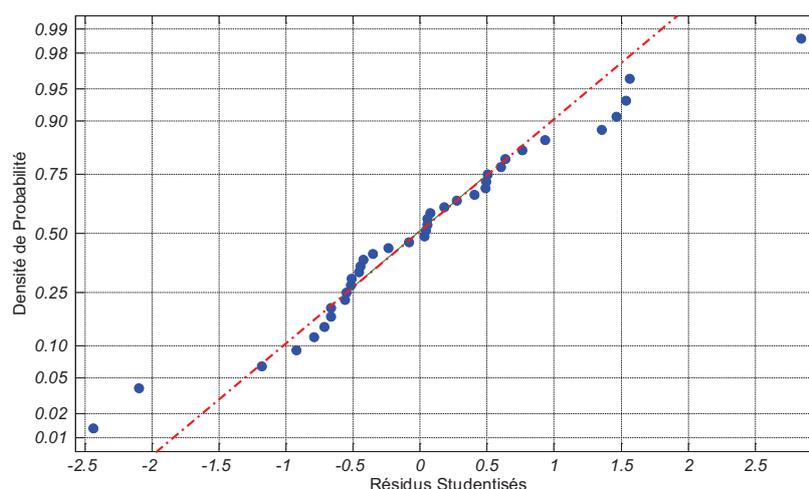


FIGURE 5.6 – Distribution normale des résidus

tentivement, on remarque que les coefficients  $\beta_i$  dans 5.23 ne sont pas tous du même ordre de grandeur et que leur contribution n'est pas équivalente. Plutôt que d'essayer de formuler le modèle avec tous ses coefficients, on peut naturellement se demander si certains termes peuvent être exclus du modèle initial sans altérer de manière significative la précision de l'ensemble du modèle.

Lorsque les hypothèses de normalité et d'indépendance sont vérifiées, le critère d'exclusion peut être basé sur des tests statistiques (i.e t-test du paragraphe 5.3.3). D'après ce critère (voir le tableau 5.3), les termes  $\beta_1$ ,  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{13}$  et  $\beta_{33}$  sont donc non-significatifs ( $|t_{valeur}| < t_{n-m+1}^{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,05$ ) et peuvent être négligés. Le modèle approché peut donc être mis sous la forme suivante :

$$\hat{y} = 0,879 + 0,212 \cdot X_2 + 0,052 \cdot X_3 - 0,063 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0,037 \cdot X_1^2 - 0,100 \cdot X_2^2. \quad (5.24)$$

TABLE 5.3 – Coefficients de régression  $\beta$ 

|           | Coef.        | Valeurs | Ecart-type | t-valeur | Sig.       |
|-----------|--------------|---------|------------|----------|------------|
| Cste      | $\beta_0$    | 0,879   | 0,0079     | 111,17   | Oui        |
| $X_1$     | $\beta_1$    | 0,002   | 0,0068     | 0,29     | <b>Non</b> |
| $X_2$     | $\beta_2$    | 0,212   | 0,0066     | 32,20    | Oui        |
| $X_3$     | $\beta_3$    | 0,052   | 0,0069     | 7,50     | Oui        |
| $X_1 X_2$ | $\beta_{12}$ | -0,001  | 0,0085     | -0,05    | <b>Non</b> |
| $X_2 X_3$ | $\beta_{23}$ | -0,063  | 0,0086     | -7,42    | Oui        |
| $X_1 X_3$ | $\beta_{31}$ | -0,004  | 0,0087     | -0,42    | <b>Non</b> |
| $X_1^2$   | $\beta_{11}$ | -0,037  | 0,0157     | -2,35    | Oui        |
| $X_2^2$   | $\beta_{22}$ | -0,100  | 0,0158     | -6,33    | Oui        |
| $X_3^2$   | $\beta_{33}$ | -0,003  | 0,0155     | -0,16    | <b>Non</b> |

Ce nouveau modèle conserve toujours une bonne précision ( $R^2 = 0,976$  et  $Q^2 = 0,9674$ ). En introduisant les paramètres physiques de 5.18 dans l'expression 5.24, la résistance ultime des tôles courbes non-raïdiées en compression axiale est donnée par :

$$\frac{\sigma_{ult}}{f_y} = \left(-0,09 + 0,03 \cdot \alpha - 0,15 \cdot \alpha^2\right) + (40,6 + 0,31 \cdot Z) \frac{t}{b} - (444 + 8,4 \cdot Z) \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (5.25)$$

où  $Z = \frac{b^2}{Rt}$  désigne le paramètre de courbure et  $\alpha = \frac{a}{b}$  est le coefficient d'aspect.

Il est alors intéressant de comparer la précision de la charge ultime estimée par deux méthodes, présentée sur la figure 5.7 : les plans d'expérience (carrés rouges) et la méthode semi-analytique développé au chapitre 3 (triangles verts) par rapport aux valeurs numériques. On remarque que les deux méthodes prédisent correctement les résultats numériques : moins de 5% d'écart (en valeur absolue). Cependant quelques observations ( $n^\circ 19, n^\circ 22$  et  $n^\circ 28$ ) estimées par la méthode des plans d'expériences présentent un écart plus grand (de 8% à 10%) que dans la méthode semi-analytique dont les écarts restent inférieure à 5,5%. En effet, bien que le modèle semi-analytique ne soit pas plus riche (seulement trois paramètres inconnus à calibrer de  $\bar{\lambda}_0, \beta$  et  $\alpha_Z$ ), son expression est issue d'un modèle analytique du comportement de la structure, elle est plus complexe et par conséquent s'adapte mieux au problème réel. Ce constat prouve donc l'importance cruciale du choix des paramètres et de la forme du modèle approché dans la méthode des plans d'expérience.

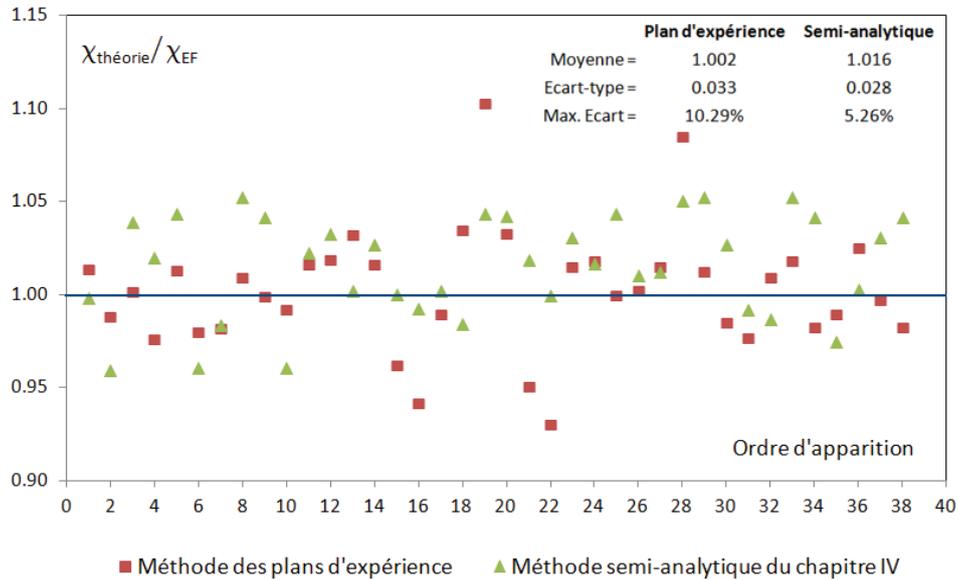


FIGURE 5.7 – Comparaison de la valeur estimée par la méthode des plans d'expérience et par la méthode semi-analytique par rapport aux éléments finis

Ces écarts doivent cependant être relativisés par le fait que dans de nombreuses structures complexes telles que les plaques raidies, la différence entre l'Eurocode et les résultats des simulations numériques peuvent atteindre jusqu'à 20%, parfois du côté sécurité, par-

fois non (André *et al.* [12], De Ville De Goyet *et al.* [47]). L'expression du modèle de la charge ultime donné par 5.25 est donc tout à fait valable et utilisable en pratique.

## 5.5 RECOMMANDATIONS POUR AMÉLIORER LA PRÉCISION DU MODÈLE APPROCHÉ

Ce premier exemple a montré que, sur la base de quelques observations ( $n = 38$ , environ 14 fois moins de simulations qu'au chapitre 3 où  $n = 524$ ), la méthode des plans d'expérience permet d'estimer la charge ultime avec une précision acceptable (moins de 10% en écart maximal). Néanmoins, une plus grande précision pourrait être requise. C'est dans ce but que quelques techniques simples sont reprises et discutées dans ce paragraphe.

### 5.5.1 Nombre d'échantillons

Intuitivement, il semblerait que la manière la plus simple pour augmenter la précision du modèle est d'augmenter le nombre de points d'essais. Cette idée n'est cependant pas totalement correcte si le modèle approché ne contient pas toute la complexité du problème étudié. En réalité, l'augmentation du nombre d'échantillons (i.e de simulations numériques) influence généralement la taille de l'intervalle de confiance des coefficients du modèle.

Ceci est illustré dans le tableau 5.4 qui montre la comparaison des prédictions par plans d'expérience aux résultats par éléments finis dans trois cas :  $n = 38$ ,  $n = 70$  et  $n = 100$ . On constate que les trois modèles fournissent une bonne approximation : le coefficient de détermination  $R^2$  est proche de 1 et l'écart-type est très faible. Cependant, la précision globale des modèles est presque la même et elle n'est pas améliorée par rapport au modèle basé sur 38 simulations. Il y a encore quelques observations avec des erreurs supérieures à 5% (8 simulations pour  $n = 70$  et 12 simulations pour  $n = 100$ ) et seulement une simulation dont l'erreur est supérieure à 10% pour les deux modèles. On conclut donc que l'augmentation du nombre d'échantillons n'améliore pas la précision du modèle (dans cet exemple) si le nombre initial est correctement choisi. Cependant, l'augmentation du

TABLE 5.4 – Influence du nombre d'échantillons sur la précisions du modèle approché

| Nombre d'échantillon | $R^2$  | Ecart-type | Max. résidu |
|----------------------|--------|------------|-------------|
| 38                   | 0,9771 | 0,0275     | 9,78%       |
| 70                   | 0,9688 | 0,0281     | 13,89%      |
| 100                  | 0,9713 | 0,0259     | 13,2%       |

nombre de simulation a un intérêt direct, à l'égard de l'intervalle de confiance de chaque coefficient de régression, qui qualifie l'exactitude de chaque terme du modèle approché.

Comme on le voit sur la figure 5.8a, la largeur de l'intervalle  $w_i$  (voir définition dans

section 5.3) de confiance n'est pas le même pour tous les coefficients de régression : les termes quadratiques ont un intervalle de confiance plus large, l'incertitude de ces paramètres est donc plus grande. Toutefois, la taille de l'intervalle de confiance tend vers 0 lorsque le nombre d'échantillons augmente (figure 5.8b). En première approximation, on peut estimer que la largeur de l'intervalle diminue proportionnellement à l'inverse de la racine carrée du nombre d'échantillon  $n$  ( $\sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ ). Donc, en ce sens, l'augmentation du nombre de simulations rend les résultats estimés plus précis. Des propositions plus avancées quant au nombre optimal, basées sur l'analyse de puissance, peuvent être trouvées dans Kelley et Maxwell [83], Cohen *et al.* [41] et Maxwell [100]. Cependant d'après nos connaissances, cette méthode n'a pas encore été appliquée à des expériences numériques.

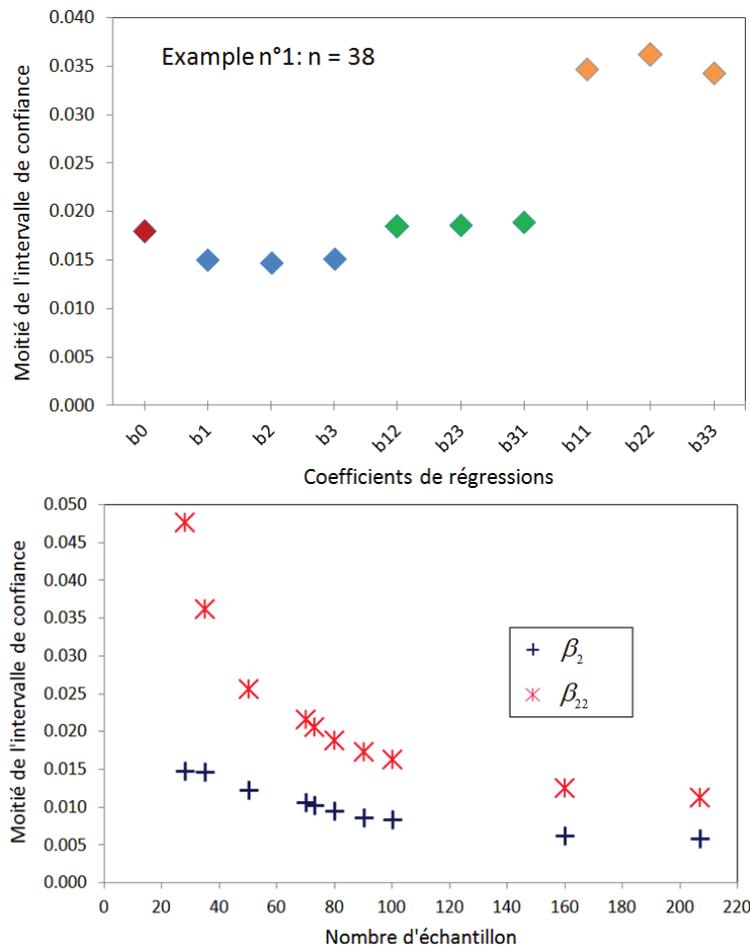


FIGURE 5.8 – Intervalle de confiance en fonction de : (a) Coefficients du polynôme  $\beta$  et (b) nombre d'échantillon

En conclusion, la précision du modèle approché doit être déterminée et ajustée selon la précision ciblée de chaque étude. Si c'est une précision globale qui est recherchée, un petit nombre de points expérimentaux peut être suffisant. Les coefficients  $R^2$  et  $Q^2$  fournissent de bonnes indications sur la précision globale du modèle et éventuellement sur la nécessité d'augmenter le nombre d'échantillons. Au contraire, si l'objectif visé est la détermination

de l'influence des variables d'entrée et de leurs interactions, une plus grande précision sera nécessaire.

Il convient de rappeler enfin que le temps de calcul est lié directement au nombre d'échantillons. Il est donc intéressant de construire les échantillons de façon à pouvoir réutiliser les résultats en les complétant par d'autres échantillons si une précision plus grande est requise. Les suites de Sobol' assurent cette propriété : par exemple, pour les analyses de  $n = 70$  ou  $n = 100$ , on peut conserver les résultats des 38 simulations effectuées dans le premier exemple. Ceci renforce donc le choix de la suite de Sobol'.

### 5.5.2 Méthode de régression

La figure 5.7 a montré qu'il existe quelques simulations dont le résidu est relativement grand par rapport aux autres réalisations. La présence de ces points peut influencer significativement le résultat de la régression comme illustrés à la figure 5.9.

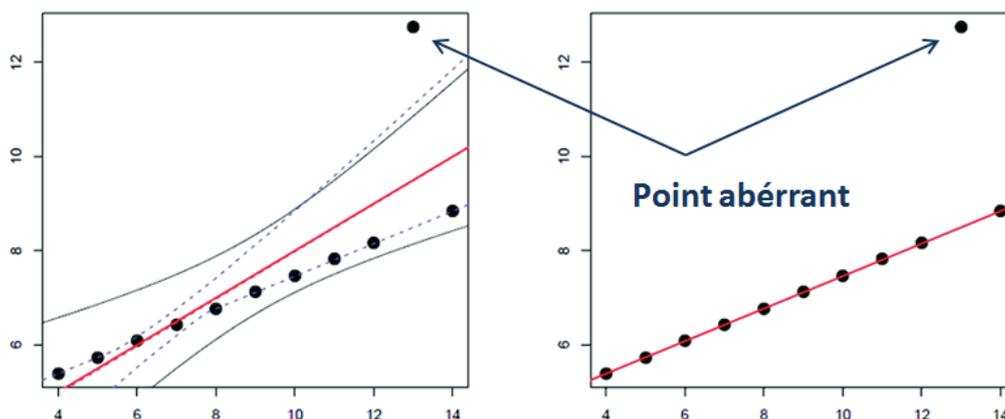


FIGURE 5.9 – Influence des points aberrants

Pour les expériences physiques (ou en laboratoire), ces observations peuvent être considérées comme des points aberrants (Barnett et Lewis [18]), qui peuvent correspondre à des données incorrectes, dues éventuellement à des erreurs de mesure. Pour les expériences numériques, comme les simulations sont déterministes, elles ne sont pas influencées par des erreurs aléatoires ; les grandes valeurs de résidu peuvent donc provenir : soit de la méthode de régression qui n'est pas appropriée (c'est-à-dire que certaines des hypothèses de la régression par les moindres carrés ne sont pas assurées) ; soit du modèle approché qui n'est pas assez riche (ce point sera développé dans la prochaine section 5.3).

La meilleure façon de déterminer l'influence des points aberrants dans les expériences classiques est d'évaluer le modèle sans prendre en compte ces points, et puis de comparer les résultats obtenus avec la solution initiale (cf figure 5.9 à gauche avec points aberrants, à droite sans ces points). Si les deux résultats sont proches, on peut conclure que l'influence de ces points aberrants est mineure. Dans le cas contraire, il faut refaire ces expériences (pour les mêmes valeurs d'entrées ou en utilisant des valeurs proches de ce point). Une

autre technique, équivalente mais moins agressive, est d'affecter à ces points aberrants une faible participation dans la régression. Cette méthode est, dite "méthode de régression robuste" (intégrée dans Matlab) : elle est développée pour mieux résister à la présence des points atypiques. La pondération est effectuée automatiquement et de manière itérative en utilisant un algorithme basé sur la méthode des moindres carrés pondérés (Holland et Welsch [71]). Dans la première itération, un même poids est affecté à chaque point et les coefficients du modèle sont estimés en utilisant la méthode des moindres carrés. A l'itération suivante, les poids sont recalculés de sorte qu'un poids plus petit est donné aux points s'éloignant du modèle approché dans l'itération précédente. Les coefficients du modèle sont ensuite recalculés. Le processus se poursuit jusqu'à ce que les valeurs des estimations de coefficients convergent dans une tolérance spécifiée.

Ces deux techniques ont été développées pour les plans d'expériences classiques. Cependant, le rejet d'observations n'a pas de sens pour des expériences numériques car les erreurs ne sont pas liées au processus de simulation (il n'y a pas d'erreur de mesure). Pour améliorer la précision, on peut donc envisager de changer la norme utilisée pour la détermination des coefficients. En effet, dans le premier exemple, la régression par moindres carrés, basée sur la norme  $L_2$ , est utilisée en raison de sa simplicité et de sa vitesse de convergence. Pourtant, cette simplicité implique des hypothèses fortes, en particulier celle de la normalité qui est sensible à la présence de grands résidus. Si plusieurs points aberrants sont détectés, l'utilisation de la méthode des moindres carrés devient discutable. On peut alors réfléchir à utiliser une autre norme du type :

$$L_p(f) = \|f\|_p = \left( \sum_{i=1}^m |f(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (5.26)$$

En fonction de la valeur de  $p$ , la régression prend les noms suivants :

- $p = 1 \Rightarrow$  Least Absolute Value : minimisation de la somme des valeurs absolues des résidus.
- $p = 2 \Rightarrow$  Least Square : minimisation de la somme quadratique des résidus.
- $p = \infty \Rightarrow$  Minimax approximation : minimisation de valeur maximale des résidus.

La norme  $L_2$  est strictement convexe, de sorte que la solution est unique et facile à déterminer. En revanche, les normes  $L_1$  et  $L_\infty$  ne sont pas strictement convexe, elles conduisent potentiellement à plusieurs solutions, mais elles sont plus robustes et adaptées en cas de grande divergence des observations (Cerezci et Gokpinar [37], Marošević [97]).

Une comparaison des différentes propositions mentionnées dessus est donnée au tableau 5.5. Le problème est toujours celui des tôles courbes sous compression uniforme. L'estimation des coefficients de régression  $\beta$  est effectuée sur la base de 38 points. Le tableau 5.5 montre que tous les modèles alternatifs ont globalement le même degré de précision (la valeur moyenne se rapproche de 1, l'écart-type reste assez petit et l'erreur maximale reste de l'ordre de 10%). Il faut mentionner que la notion des coefficients  $R^2$  ou  $Q^2$  est valable seulement pour la régression de moindre carré. Les principaux coefficients de régression sont aussi à peu près identiques. Étant donné que ces méthodes alternatives

TABLE 5.5 – Comparaison des méthodes de régressions

| Coefficients | Sans points<br>aberrants | Régression<br>robuste | norme<br>$L_1$ | norme<br>$L_2$ | norme<br>$L_\infty$ |
|--------------|--------------------------|-----------------------|----------------|----------------|---------------------|
| $\beta_0$    | 0,886                    | 0,877                 | 0,884          | 0,879          | 0,884               |
| $\beta_1$    | 0,004                    | 0,001                 | -0,023         | 0,002          | 0,009               |
| $\beta_2$    | 0,207                    | 0,210                 | 0,203          | 0,212          | 0,226               |
| $\beta_3$    | 0,045                    | 0,054                 | 0,032          | 0,052          | 0,070               |
| $\beta_{12}$ | -0,002                   | 0,000                 | 0,003          | 0,000          | 0,004               |
| $\beta_{23}$ | -0,057                   | -0,061                | -0,062         | -0,063         | -0,082              |
| $\beta_{31}$ | -0,005                   | -0,003                | -0,025         | -0,004         | -0,011              |
| $\beta_{11}$ | -0,037                   | -0,028                | -0,053         | -0,037         | -0,033              |
| $\beta_{22}$ | -0,111                   | -0,091                | -0,098         | -0,100         | -0,115              |
| $\beta_{33}$ | 0,006                    | -0,019                | -0,026         | -0,003         | 0,020               |
| Moyenne =    | 0,975                    | 0,999                 | 0,999          | 1,001          | 1,008               |
| Ecart-type = | 0,024                    | 0,031                 | 0,033          | 0,032          | 0,046               |
| Er. max. =   | 12,62 %                  | 8,88%                 | 10,23%         | 9,78%          | 11,54%              |

de régression sont utilisées en raison de leur robustesse à la présence de valeurs aberrantes, on peut conclure que les trois valeurs aberrantes détectées à la section 4 n'ont pas d'influence particulière sur le modèle approché.

### 5.5.3 Modèles alternatifs

Comme mentionné dans l'introduction de cette section, si la précision du modèle global approché n'est pas satisfaisante, cela peut également signifier que le modèle approché n'est pas assez riche pour capter la complexité de la réponse. Il peut ainsi être nécessaire de faire appel à des modèles statistiques plus sophistiqués tels que les réseaux de neurones ou le "krigeage" (Simpson *et al.* [139]). Ce dernier a été fréquemment utilisé pour la planification d'expériences numériques par Sacks *et al.* [126]. La méthode de krigage présente l'avantage d'être une méthode interpolante aboutissant à la construction d'un modèle probabiliste. Elle consiste à construire un interpolateur qui est une fonction linéaire des observations tenant compte de la structure spatiale des données. Le modèle d'interpolation dans sa forme générale est :

$$y(X) = \sum_{j=0}^d \beta_j f_j(X) + Z(X) \quad (5.27)$$

où  $f_i(x)$  sont des fonctions de base connues,  $\beta$  est un vecteur de coefficients estimés et  $Z$  est un processus gaussien stationnaire centré et de forme de covariance factorisée gaussienne.

La figure 5.10 montre que l'approche par krigage semble bien appropriée aux ex-

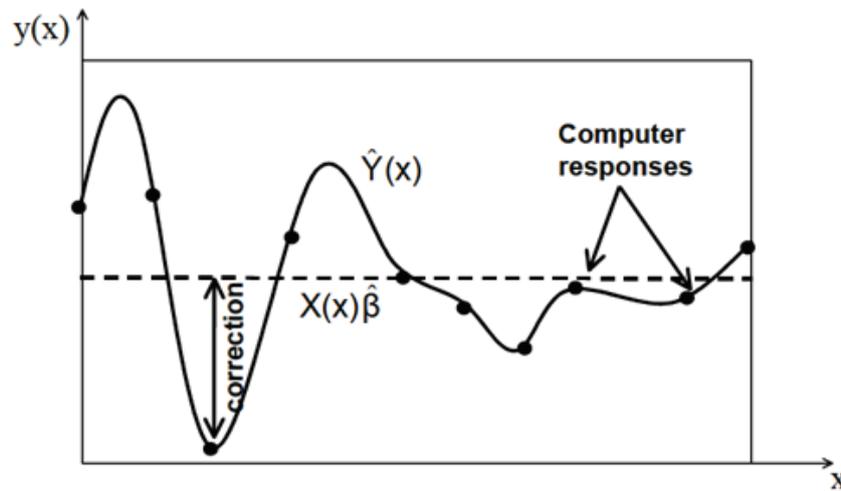


FIGURE 5.10 – Comportement de la surface de réponse issue d'un krigeage dans le cas d'une régression linéaire constante - tiré de Jourdan [82]

périences numériques parce qu'elle est interpolante. Cependant, ce type de modèle statistique est plus sophistiqué, il demande en conséquence plus de simulations pour estimer ses paramètres et nécessite un logiciel de calcul avancé en mathématique que les ingénieurs n'ont pas forcément à leur disposition dans la pratique quotidienne. Ainsi, l'enrichissement du modèle approché sera plutôt recherché sous la forme d'un polynôme d'ordre supérieur.

Un modèle polynômial d'ordre 3 est donc étudié ici sur la base des 38 points utilisés précédemment complétés par 30 nouveaux points supplémentaires. Après calcul et suppression des termes non significatifs (ceux qui ont une valeur absolue inférieure à 2%), on remarque que les valeurs des coefficients de premier et deuxième degrés sont semblables à celles du polynôme du second ordre (voir 5.24) et que seuls deux nouveaux coefficients ( $X_2^2 \cdot X_3$  et  $X_2 \cdot X_3^2$ ) ont une valeur significative. Le modèle alternatif approché est donc donné par :

$$\hat{y} = 0,881 + 0,225 \cdot X_2 + 0,061 \cdot X_3 - 0,073 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0,028 \cdot X_1^2 - 0,106 \cdot X_2^2 - 0,013 \cdot X_3^2 + 0,035 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0,047 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \quad (5.28)$$

Ce nouveau modèle a une précision légèrement améliorée par rapport au modèle quadratique précédent :  $R^2 = 0,978$ , écart-type = 0,026 avec une erreur maximale de 10,96% contre  $R^2 = 0,977$ , écart-type = 0,0275 et erreur maximale de 9,78%. En introduisant les paramètres physiques de 5.18 dans l'expression 5.28, la résistance ultime s'écrit donc :

$$\frac{\sigma_{ult}}{f_y} = \left( -0,30 + 0,25 \cdot \alpha - 0,11 \cdot \alpha^2 \right) + (54,3 + 0,93 \cdot Z) \frac{t}{b} - (627 + 37,8 \cdot Z + 0,37 \cdot Z^2) \left( \frac{t}{b} \right)^2 + (311 \cdot Z + 12,5 \cdot Z^2) \left( \frac{t}{b} \right)^3 \quad (5.29)$$

Les coefficients des expressions 5.29 et 5.25 sont très différents. C'est une conséquence du

passage des variables centrées aux variables physiques, les valeurs des résistances seront proches parce que les deux expressions 5.28 et 5.24 sont très proches.

En conclusion de cette section, différentes tentatives pour améliorer la précision du modèle approché ont été présentées. Les résultats obtenus ne montrent pas de grand gain par rapport à la solution initiale car le choix initial était bien approprié. La méthodologie présentée dans la section 2 est correcte et fiable. Sa simplicité rend son utilisation économique dans la pratique, au moins comme point de départ. Ensuite, si le modèle approché n'est pas assez précis (c'est-à-dire, faible valeur de  $R^2$  et  $Q^2$ ), les méthodes alternatives mentionnées ci-dessus peuvent être considérées.

## 5.6 APPLICATION AUX PANNEAUX CYLINDRIQUES SOUS COMPRESSION TRANSVERSALE NON-UNIFORME

### 5.6.1 Etat de l'art

Dans ce deuxième exemple, on se concentre sur le problème des tôles courbes en compression non-uniforme transversale. Ces configurations sont rencontrées fréquemment dans les âmes des ponts mixtes courbés en plan comme celui de la figure 5.11.

L'utilisation de ponts mixtes bi-poutres a augmenté au cours des 25 dernières années. Malgré leur utilisation extensive, la prédiction du comportement au voilement de ces éléments courbes reste une tâche difficile. L'expérience en analyse reportée des poutres courbées horizontalement remonte aux travaux de Saint Venant (1843) qui ont donné lieu par la suite de nombreuses d'études (une revue complète sur l'état de l'art peut être trouvée dans Zureick et Naqib [165]). La plupart des études se concentre sur la stabilité globale de la poutre courbe, c'est-à-dire que le calcul prend en compte l'âme et les semelles de poutres principales qui ont un effet favorable vis-à-vis du problème d'instabilité d'âme. Très peu en revanche ont été consacrées au voilement local des âmes (Jacques *et al.* [74], Yabuki *et al.* [157, 158]).

En suivant la méthodologie présentée à la section 5.2, cet exemple vise donc à proposer une expression simplifiée pour prédire la résistance ultime d'un panneau courbe en compression non-uniforme. La résolution analytique du problème traité ici est plus difficile, plus complexe. En effet, la combinaison de la courbure et de la compression tangente induit une "poussée au vide" dans les tôles étudiées ce qui diminue l'efficacité du panneau (Jacques *et al.* [74]). Cette force apparaît immédiatement lorsque le chargement est appliqué et génère une distribution non uniforme de la charge dès le début du chargement. Cette poussée est limitée par les semelles et les raidisseurs verticaux des âmes. D'un point de vue numérique, ces raidisseurs seront modélisés par des éléments rigides le long des bords droits ce qui garantira que les noeuds des bords restent alignés. Ces éléments rigides peuvent être considérés comme des éléments fictifs orthotropes avec une rigidité très éle-

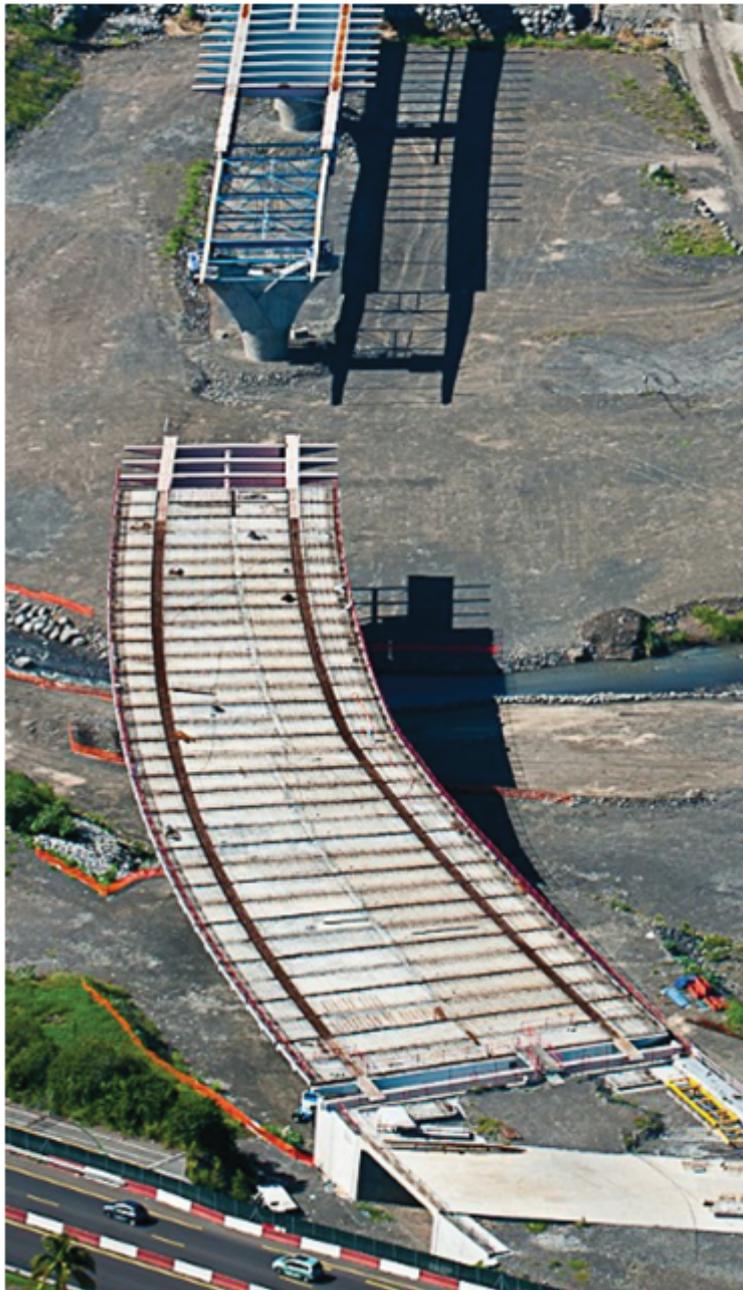


FIGURE 5.11 – Pont sur la rivière St-Etienne, île de réunion (2010)

vée en flexion (suivant l'axe  $e_R$ ) et aucune rigidité dans le sens longitudinal (direction  $e_Z$  dans la figure 5.12). Le reste des paramètres de la modélisation est identique à ceux utilisés dans le premier exemple.

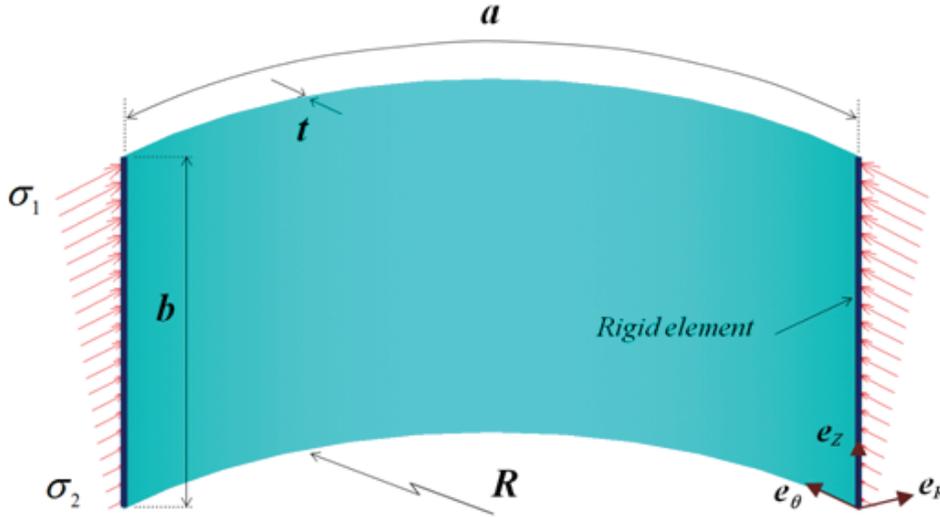


FIGURE 5.12 – Tôle courbe sous une compression transversale non-uniforme

### 5.6.2 Identification du problème

Le choix des facteurs est basé sur le même argument que dans le premier exemple. Trois paramètres adimensionnels  $a/b$ ,  $t/b$  et  $a/R$  sont utilisés pour caractériser la géométrie des panneaux. Le domaine de variation de chaque variable est pris identique, sauf pour le ratio d'aspect  $a/b$  dont le domaine de variation sera plus grand. En outre, la définition de  $a$  et  $b$  a été inversée dans cet exemple afin de préserver le fait que  $b$  correspond toujours à la largeur de chargement. Un nouveau paramètre est ajouté, noté  $\psi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$  avec  $\sigma_1 > \sigma_2$ , pour caractériser la non-uniformité de la compression :  $\psi = 1$  correspond à une compression pure,  $\psi = -1$  à une flexion pure. On note que pour les plaques planes dans l'EN 1993-1-5,  $\psi$  varie de  $-3$  à  $1$  et que la non-uniformité de la compression augmente la résistance des plaques : le coefficient de voilement  $k_c$  augmente de  $4$  pour  $\psi = 1$  à  $95,68$  pour  $\psi = -3$ . Dans cette étude, le paramètre  $\psi = 1$  est donc limité au cas où aucune tension n'apparaît ( $\psi \in [0; 1]$ ). Ainsi, sous une forme adimensionnelle, les paramètres sont donnés par :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \in [1; 3] &\Rightarrow X_1 = \frac{a}{b} - 2 \\ \frac{t}{b} \in [0,01; 0,04] &\Rightarrow X_2 = 66,67 \frac{t}{b} - 1,67 \\ \frac{a}{R} \in [0; 1] &\Rightarrow X_3 = 2 \frac{a}{R} - 1 \\ \psi \in [1; 3] &\Rightarrow X_4 = 2\psi - 1 \end{aligned} \quad (5.30)$$

En ce qui concerne le choix des paramètres de réponse, il a été démontré que sous une charge de compression non-uniforme, les caractéristiques des contraintes dans les plaques

planes à l'état post-critique sont différentes de celles sous compression uniforme (Bedair et Sherbourne [25]). En général, le calcul de la section efficace nécessite une procédure itérative où la force axiale et le moment de flexion agissent simultanément. Cependant, la démarche de l'Eurocode tolère un processus simplifié, dans lequel le calcul des largeurs effectives est réalisé en deux étapes séparées : d'une part une section transversale efficace  $A_{eff}$  est calculée pour les contraintes dues à la compression pure et d'autre part une module efficace  $W_{eff}$  est calculé pour les contraintes dues à la flexion pure. Si ce concept était adopté ici, plusieurs études élémentaires seraient nécessaires : une pour la compression pure, une pour la flexion pure et une pour interpoler les deux comportements. Afin de montrer la performance de la méthode de plan d'expérience, une étude unique simplifiée sera préférée ici. La réponse sera basée sur la contrainte de compression maximale dont on cherchera une expression de la forme suivante :

$$\frac{\sigma_{ult}}{f_y} = f \left( \frac{a}{b}; \frac{t}{b}; \frac{a}{R}; \psi \right) \quad (5.31)$$

L'expression 5.31 permettra de prédire la valeur maximale de la compression, issue du calcul préliminaire élastique, qui pourrait être appliquée au panneau. Cette expression revient au calcul d'une largeur effective classique dans le cas de la compression pure ( $\psi = 1$ ).

Concernant la forme de l'expression approchée, un polynôme du second ordre est suggéré pour sa simplicité et pour la qualité des résultats obtenus précédemment (ces performances sont discutées à la section 5.3). Comme il y a maintenant  $p = 4$  variables et  $m = 15$  paramètres inconnus, le nombre d'échantillons sera égal à  $n = 46$  d'après la suggestion de la section 2. Aucun point aux coins n'est ajouté car l'étude précédente a montré que ce n'était pas pertinent. Les paramètres d'entrée de ces 46 échantillons sont générés à l'aide d'une suite de Sobol'.

### 5.6.3 Résistance ultime

Les résultats de la régression (par la méthode des moindres carrés) sont présentés au tableau 5.6. Il est remarqué que l'expression approchée s'adapte très bien aux résultats numériques : le coefficient de détermination  $R^2 = 0,996$  et la valeur de  $Q^2 = 0,993$  sont très proches de 1. Aucune correction supplémentaire n'est à effectuer d'après les études de la section 5. La sélection des paramètres pertinents est ensuite effectuée suivant le même critère que celui de la section 5.4.6, illustré dans les 2 dernières colonnes du tableau 5.6. Les termes ( $\beta_{12}$ ,  $\beta_{13}$ ,  $\beta_{14}$  et  $\beta_{11}$ ) sont donc moins significatifs. Le modèle approché est donc donné comme suit :

$$\hat{y} = 0,542 + 0,071 \cdot X_1 + 0,204 \cdot X_2 - 0,263 \cdot X_3 - 0,110 \cdot X_4 - 0,042 \cdot X_2^2 - 0,084 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0,053 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0,149 \cdot X_3^2 + 0,034 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,021 \cdot X_4^2 \quad (5.32)$$

TABLE 5.6 – Coefficients de régression  $\beta$ 

|          | Coef.        | Valeurs | Ecart-type | t-Student | Sig.       |
|----------|--------------|---------|------------|-----------|------------|
| Cste     | $\beta_0$    | 0,542   | 0,0060     | 89,78     | Oui        |
| $X_1$    | $\beta_1$    | 0,071   | 0,0046     | 15,40     | Oui        |
| $X_2$    | $\beta_2$    | 0,204   | 0,0046     | 44,47     | Oui        |
| $X_3$    | $\beta_3$    | -0,263  | 0,0046     | -53,39    | Oui        |
| $X_4$    | $\beta_4$    | -0,110  | 0,0047     | -23,28    | Oui        |
| $X_1X_2$ | $\beta_{12}$ | 0,012   | 0,0086     | 1,43      | <b>Non</b> |
| $X_1X_3$ | $\beta_{13}$ | -0,011  | 0,0077     | -1,42     | <b>Non</b> |
| $X_1X_4$ | $\beta_{14}$ | -0,011  | 0,0088     | -1,19     | <b>Non</b> |
| $X_2X_3$ | $\beta_{23}$ | -0,084  | 0,0082     | -10,28    | Oui        |
| $X_2X_4$ | $\beta_{24}$ | -0,053  | 0,0086     | -6,14     | Oui        |
| $X_3X_4$ | $\beta_{34}$ | 0,034   | 0,0085     | 3,93      | Oui        |
| $X_1^2$  | $\beta_{11}$ | -0,009  | 0,0099     | -0,93     | <b>Non</b> |
| $X_2^2$  | $\beta_{22}$ | -0,042  | 0,0091     | -4,58     | Oui        |
| $X_3^2$  | $\beta_{33}$ | 0,149   | 0,0093     | 16,07     | Oui        |
| $X_4^2$  | $\beta_{44}$ | 0,021   | 0,0089     | 2,37      | Oui        |

ou de manière équivalente en fonction du coefficient d'aspect  $\alpha = \frac{a}{b}$ , du paramètre de courbure  $Z = \frac{b^2}{Rt}$ , de  $\psi$  et  $\frac{t}{b}$  :

$$\begin{aligned} \sigma_1^{\max} = & 0,29 + 0,07 \cdot \alpha - 0,2 \cdot \psi + 0,08 \cdot \psi^2 \\ & + (32 - 0,9 \cdot \alpha \cdot Z - 7,1 \cdot \psi + 0,136 \cdot \alpha \cdot Z \cdot \psi) \frac{t}{b} \\ & - (186 + 11,2 \cdot \alpha \cdot Z - 0,6 \cdot \alpha^2 \cdot Z^2) \left( \frac{t}{b} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Il faut souligner que la définition du paramètre  $Z = \frac{b^2}{Rt}$  dans l'expression 5.33 est similaire à celle adoptée dans le travail de Jacques *et al.* [74]. Cette définition a ses origines dans la résolution des équations différentielles, caractéristiques du problème discuté à la section 2 du chapitre 3 (choix du paramètre de courbure). Elle pourrait être remplacée par le paramètre  $Z_a = \frac{a^2}{Rt}$  en changeant  $\alpha Z$  en  $\frac{1}{\alpha} Z_a$ .

L'expression obtenue par la méthode des plans d'expériences 5.33 a des avantages par rapport à la solution de Jacques *et al.* [74]. D'abord, son domaine d'application est plus large (limité à la valeur  $Z < 3,5$  dans l'étude de Jacques). Ensuite, cette expression révèle l'interaction du coefficient d'aspect et de courbure  $Z$ , ce qui n'est pas le cas dans le travail de Jacques *et al.* [74]. Ainsi, grâce à peu de simulations numériques ( $n = 46$ ), la méthode des plans d'expérience fournit rapidement un modèle approximatif simple mais de précision élevée.

## 5.7 APPLICATION À L'OPTIMISATION DES PANNEAUX CYLINDRIQUES RAIDIS SOUS COMPRESSION LONGITUDINALE

Le chapitre 2 a montré comment l'utilisation des raidisseurs dans une tôle raidie permet à celle-ci de mieux résister au chargement appliqué. En ajoutant très peu de matière, les raidisseurs permettent une amélioration très nette de la résistance, une amélioration supérieure à celle qu'apporterait le même poids d'acier réparti sur toute la tôle. Si l'on ne prend en compte que le poids de l'acier dans le coût, alors il serait beaucoup plus avantageux d'utiliser des raidisseurs que des tôles épaisses. Or, l'ajout de raidisseur nécessite de nombreuses soudures et découpes qui augmenterait beaucoup le coût de production des tôles. Il y a donc un compromis à trouver entre coût des matériaux et coût de fabrication et ce afin de proposer la conception la plus économique et la plus performante. Pour ce faire, il faut résoudre un problème d'optimisation sous contrainte. Cette classe de problème est fréquemment utilisée dans le domaine aéronautique avec pour objectif principal la légèreté des tôles raidies mises en œuvre dans la structure (Bushnell et Bushnell [34]).

Par définition, la théorie de l'optimisation est un ensemble d'outils mathématiques qui permet de trouver et d'identifier la meilleure solution à partir d'un ensemble de variables. Des algorithmes ont été développés pour assurer cette tâche (Barthelemy et Haftka [19], Ramaswamy [113], Roy *et al.* [124]). Dans le cas où l'intégration des codes d'analyse et d'optimisation est difficile (par exemple lorsque la fonction à optimiser n'est pas connue de façon explicite comme dans le cas traité dans la suite), cette démarche peut être très longue et nécessite une consommation très importante de temps de calcul. Le recours à une surface de réponse approchée devient alors une alternative possible. L'objectif de l'application développée ici est de montrer la facilité et l'efficacité de la méthode des plans d'expériences pour la résolution de problèmes d'optimisation. D'autres applications d'optimisation par la méthode des plans d'expériences (ou la méthode de surface de réponse) peuvent être trouvées dans Vitali *et al.* [152] et Balabanov et Venter [16].

### 5.7.1 Formulation du problème d'optimisation

Un problème d'optimisation est défini par une fonction objectif  $f(x)$ , appelé aussi fonction coût, dépendant des variables de conception  $x$  que l'on cherche à optimiser (minimiser ou maximiser) par rapport aux variables concernées  $x$ , dans un espace borné ou non, sous un certain nombre de contraintes d'inégalité  $g(x) \leq 0$ . Il s'en suit que la forme générale du problème d'optimisation peut être posée sous la forme :

$$\text{Minimiser } f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (5.34)$$

sous la contrainte :

$$g_i(x) \leq 0 \quad (5.35)$$

avec :

$$x_i^{inf} \leq x \leq x_i^{sup}. \quad (5.36)$$

$x_i^{inf}$  et  $x_i^{sup}$  traduisent les bornes de variation inférieure et supérieure, respectivement, des variables  $x_i$ . La solution du problème d'optimisation est alors donnée par un ensemble  $x^*$  pour lequel la fonction objectif présente une valeur minimale, en respectant les contraintes d'inégalité. Dans l'application aux tôles courbes raidies que l'on souhaite faire ici, les fonctions objectif et les contraintes sont définies comme suit.

### 5.7.1.1 Fonction objectif

La fonction objectif pour les tôles courbes raidies est définie comme le coût de fabrication de la pièce, noté  $\mathbf{K}$ , qui se compose d'une part du coût des matériaux  $\mathbf{K}_m$  (prix de l'acier) et d'autre part du coût de fabrication  $\mathbf{K}_f$  (prix de mise en œuvre des raidisseurs). D'après l'étude de Jarmai [75], la fonction de coût peut s'écrire comme une fonction des dimensions de la tôle par la relation suivante :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_f = k_m \rho V + k_f \sum T_i \quad (5.37)$$

où  $\rho$  est la densité du matériau ;  $V$  est le volume total de la tôle ;  $k_m$  et  $k_f$  sont les coefficients des coûts du matériau et de la fabrication.  $T_i$  désigne le temps de fabrication. Ici, on ne retient que trois facteurs principaux pour  $T_i$  :

- $T_1$  : le temps de préparation, de montage et d'assemblage des pièces :

$$T_1 = \Theta_d \sqrt{\kappa \rho V} \quad (5.38)$$

avec  $\Theta_d$  facteur caractérisant la difficulté de soudage et  $\kappa$  le nombre de structures élémentaires à assembler.

- $T_2$  : le temps de soudage et  $T_3$  le temps supplémentaire prévu pour le changement des électrodes. On peut considérer  $T_3 \approx 0,3T_2$ , ce qui donne :

$$T_2 + T_3 = 1,3 \sum C_{2i} a_{wi}^n L_{wi} \quad (5.39)$$

où  $L_{wi}$  est la longueur de soudure,  $a_{wi} = \max(0,4t_s, 4 \text{ mm})$  est la dimension du cordon de soudure. La valeur de  $C_{2i} a_{wi}^n$  est estimée en fonction de la technique de soudure (Jarmai [75]). Par exemple, pour le soudage à l'arc submergé (SAW), la valeur de  $C_{2i} a_{wi}^n$  est égale à  $0,2349 a_{wi}^2$ .

### 5.7.1.2 Fonction contrainte

La fonction de contrainte  $g(x)$  est déterminée par la condition de stabilité de la tôle :

$$g(x) = \frac{N_{app}}{\frac{N_{ult}}{\gamma_{M1}}} - 1 \leq 0 \quad (5.40)$$

où  $N_{app}$  est la charge appliquée (valeur connue de projet  $N_{ELU}$ ),  $\gamma_{M1}$  est le coefficient de sécurité et  $N_{ult}$  est la résistance ultime de la structure. Cette dernière grandeur est peu ou mal connue et sera évaluée ici à l'aide de la méthode des plans d'expériences.

Une contrainte supplémentaire est ajoutée pour prévenir le voilement local des raidisseurs. Elle se traduit par une limitation de la classe de section des panneaux secondaires du raidisseur à la classe 3 (voir la classification des sections au chapitre 1).

### 5.7.2 Résistance ultime des tôles courbes raidies

Peu d'expressions à l'heure actuelle permettent de prédire correctement la charge ultime des tôles courbes raidies dans le domaine des ouvrages d'art. La démarche développée au chapitre 3 peut être utilisée mais elle est longue et complexe. Pour cette raison et aussi pour montrer l'efficacité de la méthode des plans d'expérience, la résistance des tôles courbes sera estimée à l'aide de la méthodologie développée dans ce chapitre.

Les paramètres du problème sont ici restreints aux paramètres géométriques de la tôle : la longueur  $a$ , la largeur  $b$ , l'épaisseur  $t_p$  et le rayon  $R$  et des raidisseurs qui sont ici de type des simples plats : de hauteur  $h_s$  et l'épaisseur  $t_s$  espacés régulièrement d'une distance  $d$ . Cette restriction du nombre de paramètres provient d'une question pratique et non théorique, la méthode des plans d'expériences proposée n'est pas limitée de ce point de vue.

On pourrait, comme dans les deux applications précédentes, chercher à construire des paramètres adimensionnels à partir des 7 paramètres indépendants. L'étude paramétrique des plaques raidies a d'ailleurs montré que les raidisseurs en simple plat peuvent être caractérisés par deux paramètres adimensionnels :  $\gamma$  le rapport de la rigidité et  $\delta$  le rapport des sections. Néanmoins on a observé que pour un même rapport  $b/t = 50$ , les deux configurations : (a)  $b = 200 \text{ cm}$ ,  $t = 4 \text{ cm}$ ,  $n = 5$ ,  $d = 40 \text{ cm}$  et (b)  $b = 100 \text{ cm}$ ,  $t = 2 \text{ cm}$ ,  $n = 5$ ,  $d = 20 \text{ cm}$  semblent se comporter différemment. Il y a concurrence entre le comportement de type plaque et celui de type poteau de sorte que la valeur absolue des paramètres joue un rôle, pas seulement sa valeur relative. On préfère donc travailler ici avec les paramètres bruts. L'inconvénient principal lié à l'utilisation de paramètres bruts est que l'expression développée ne sera pas transposable telle quelle à une autre application, à d'autres domaines de variation des paramètres. Les domaines identifiés ici, pour couvrir les tôles courantes dans les ouvrages d'art sont récapitulés dans le tableau 5.7. L'expression empirique de la charge ultime est cherchée sous la forme d'un polynôme d'ordre 2. Le nombre de coefficients inconnus du polynôme est de  $m = \frac{(7+1)(7+2)}{2} = 36$ , de sorte que  $n = 3 \cdot m + 1 = 109$  points expérimentaux sont générés par la suite de Sobol'. L'estimation des coefficients de régression est effectuée par la méthode des moindres carrés. Tout comme dans les deux précédents exemples, les coefficients ne sont pas tous du même ordre de grandeur. Cependant, la sélection des paramètres pertinents est effectuée par un nouveau critère. Lorsque toutes les variables sont centrées et normées (entre -1 à 1), on peut par exemple considérer que la contribution du terme est négligeable si son rapport, en valeur absolue, à la valeur maximale des coefficients,  $\frac{\beta_k}{\max_{i=1 \rightarrow m} (\beta_i)}$ , est en dessous d'une seuil que l'on fixera ici à 5%. Les résultats sont présentés figure 5.13. Les coefficients

TABLE 5.7 – Plage de variation des paramètres pour les tôles courbes raidies dans les ponts courants  
(dimension en mètre)

| Variable | Description                | Domaine de variation      |
|----------|----------------------------|---------------------------|
| $a$      | Longueur                   | $4 \leq a \leq 6$         |
| $b$      | Largueur                   | $4 \leq b \leq 6$         |
| $t_p$    | Épaisseur de plaque        | $0,01 \leq t_p \leq 0,02$ |
| $1/R$    | Courbure                   | $0 \leq 1/R \leq 0,1$     |
| $d$      | Espacement des raidisseurs | $0,3 \leq d \leq 0,8$     |
| $h_s$    | Hauteur du raidisseur      | $0,1 \leq h_s \leq 0,2$   |
| $t_s$    | Épaisseur du raidisseur    | $0,01 \leq t_s \leq 0,02$ |

y sont classés par ordre d'importance relative. On remarque d'une part que tous les paramètres ont une influence sur le résultat et d'autre part que les interactions des paramètres  $b$  et  $1/R$  avec les autres sont significatives.

La charge ultime  $N_{ult}$  de la tôle courbe est donc exprimée par la fonction suivante :

$$\begin{aligned}
 N_{ult} = & 13,45 - 3,43 \cdot b + 541 \cdot t_p - 116 \cdot \frac{1}{R} - 161 \cdot h_s - 1440 \cdot t_s \\
 & + 34 \cdot \frac{b}{R} - 6,1 \cdot b \cdot d + 37,7 \cdot b \cdot h_s + 201 \cdot b \cdot t_s + 5764 \cdot \frac{t_p}{R} \\
 & - 117 \cdot \frac{d}{R} + 462 \cdot \frac{h_s}{R} - 77,8 \cdot d \cdot h_s + 5824 \cdot h_s \cdot t_s
 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Aucune amélioration du modèle approché n'est nécessaire car les coefficients  $R^2 = 0,986$  et  $Q^2 = 0,978$  sont très proches de 1. Cette expression 5.41 sera donc retenue dans la suite pour le problème d'optimisation en lieu et place des calculs éléments finis complexes et couteux en temps.

### 5.7.3 Optimisation des tôles courbes raidies

La plaque à optimiser est supposée de longueur  $a = 6 \text{ m}$ , de largeur  $b = 4 \text{ m}$ , d'un rayon de courbure  $R = 20 \text{ m}$ . Elle est soumise à une compression uniforme  $N_{app} = 10 \text{ MN}$ . On cherche à optimiser les raidisseurs (leur section et leur espacement) ainsi que l'épaisseur de la tôle pour que la tôle raidie puisse supporter la charge appliquée en prenant en compte la réduction de la résistance ultime par voilement. Le problème d'optimisation global se résume donc au tableau 5.8. En réalité, les variables du problème ne sont pas continues mais discrètes pour des raisons de la mise en œuvre sur chantier : par exemple, l'espacement du raidisseur est souvent un multiple de 5 (50 cm, 55 cm ou 60 cm). C'est pourquoi, le pas d'avancement des paramètres est modifié dans l'algorithme d'optimisation (l'algorithme de l'optimisation est effectué par Matlab).

Concernant la fonction de coût, en l'absence des données précises pour  $k_m$  et  $k_f$ , on utilise une présentation adimensionnel de  $\frac{k_f}{k_m}$ . Un rapport  $\frac{k_f}{k_m} = 0$  signifie que seulement le poids de la structure est considéré ; une grande valeur de  $\frac{k_f}{k_m}$  indique que le prix de mise en

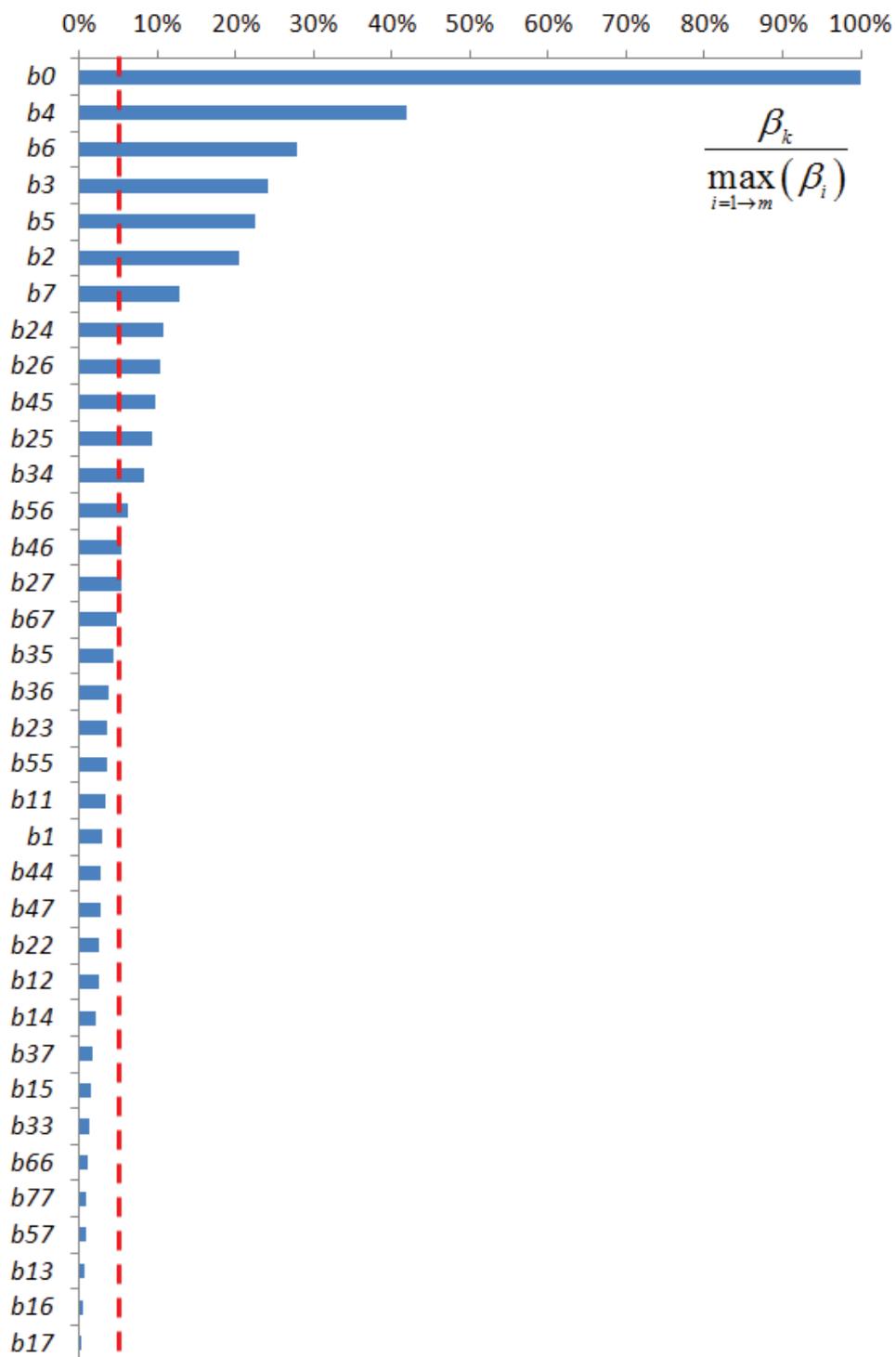


FIGURE 5.13 – Etude de la significative des coefficients de régression  $\beta$  par diagramme de Pareto

TABLE 5.8 – Optimisation des tôles courbes raidies

|                              |  |
|------------------------------|--|
| <b>Fonction objective :</b>  | Minimiser le coût $K$ de la structure (évalué par 5.37)  |
| <b>Variable :</b>            | $t_p, d, h_s, t_s$   |
| <b>avec :</b>                | $0,01 \leq t_p \leq 0,02$ : pas $\delta = 0,001 m$<br>$0,3 \leq d \leq 0,8$ : pas $\delta = 0,05 m$<br>$0,1 \leq h_s \leq 0,2$ : pas $\delta = 0,01 m$<br>$0,01 \leq t_s \leq 0,02$ : pas $\delta = 0,001 m$ |
| <b>Fonction contrainte :</b> | $\frac{N_{app}}{\frac{N_{ult}}{\gamma_{M1}}} - 1 \leq 0$ : condition de stabilité globale<br>$\frac{h_s}{t_s} \leq 14 \sqrt{\frac{235}{f_y}}$ : classe de section inférieure à 3                             |

œuvre est important par rapport au prix de l'acier de la structure seule (au Japon ou aux USA,  $\frac{k_f}{k_m} = 2$  et en Europe  $\frac{k_f}{k_m}$  varie de 1,0 à 1,5). Le résultat du processus d'optimisation est donné au tableau 5.9 en fonction des coûts relatif  $\frac{k_f}{k_m}$ .

TABLE 5.9 – Résultat d'optimisation pour  $N_{app} = 12 MN$ 

| $\frac{k_f}{k_m}$ | $t_p$ | $d$  | $n$ | $h_s$ | $t_s$ | $K$  |
|-------------------|-------|------|-----|-------|-------|------|
| 0,0               | 0,014 | 0,55 | 7   | 0,16  | 0,015 | 3429 |
| 0,5               | 0,015 | 0,75 | 5   | 0,18  | 0,016 | 4242 |
| 1,0               | 0,016 | 0,90 | 4   | 0,19  | 0,017 | 4969 |
| 2,0               | 0,018 | 0,90 | 4   | 0,17  | 0,015 | 6170 |

La recherche d'une solution optimale est un problème complexe du fait de la forte influence de chacune des variables et surtout de leurs interactions. Néanmoins, quelques remarques peuvent être retirées du tableau 5.9 :

- Les raidisseurs sont plus nombreux dans le cas où seul le prix de l'acier est considéré :  $n = 7$  pour le rapport  $\frac{k_f}{k_m} = 0$ . Ce nombre des raidisseurs est augmenté à  $n = 11$  si la charge appliquée est moins importante ( $N_{app} = 10 MN$ ) comme présenté le tableau 5.10.
- Si  $\frac{k_f}{k_m}$  est différent de 0, on a tendance d'utiliser les raidisseurs plus rigides pour réduire le nombre des raidisseurs (avec par conséquence, moins de soudure à faire) : nombre des raidisseurs réduit à 4 pour  $\frac{k_f}{k_m} = 2$ .
- On se constate également que l'optimisation est d'augmenter l'épaisseur de la tôle. En effet, l'augmentation de l'épaisseur de la tôle conduit à l'augmentation de la contrainte critique de voilement à moindre coût car cette solution n'a pas besoin de soudures supplémentaires. C'est à cette conclusion qu'étaient arrivés aussi De Ville De Goyet *et al.* [47].

Ce dernier est confirmé par le tableau 5.10 où l'intensité du chargement est augmentée en ne considérant que le prix de l'acier pour la fonction d'objectif ( $\frac{k_f}{k_m} = 0$ ). Les résultats montrent que l'intensité du chargement est proportionnel linéairement à l'épaisseur de la tôle de fond. Il est noté également que, lorsque le chargement augmente, l'optimisation est

obtenue en cherchant via augmenter la rigidité des raidisseurs (raidisseur de plus grande section) et non à l'espacement des raidisseurs (équivalent au nombre des raidisseurs).

TABLE 5.10 – Résultat d'optimisation pour  $\frac{k_f}{k_m} = 0$

| $N_{app}$ | $t_p$ | $d$  | $n$ | $h_s$ | $t_s$ | K    |
|-----------|-------|------|-----|-------|-------|------|
| 10        | 0,012 | 0,35 | 11  | 0,13  | 0,012 | 3069 |
| 12        | 0,014 | 0,55 | 7   | 0,16  | 0,015 | 3429 |
| 14        | 0,015 | 0,55 | 7   | 0,18  | 0,016 | 3776 |
| 16        | 0,016 | 0,55 | 7   | 0,19  | 0,017 | 4079 |
| 18        | 0,017 | 0,50 | 8   | 0,20  | 0,018 | 4559 |
| 20        | 0,019 | 0,55 | 7   | 0,20  | 0,020 | 4898 |

On voit ainsi tout l'intérêt de la méthode des plans d'expériences pour les problèmes d'optimisation. Sa performance est indiscutable tant en terme de rapidité et que de précision des résultats. Dans cet exemple, le test de toutes les combinaisons possible aurait nécessité près de 20000 simulations. L'utilisation d'algorithmes classiques d'optimisation aurait nécessité la création d'une interface complexe entre un logiciel de calcul scientifique (Matlab) et un logiciel de calcul par éléments finis (Ansys) avec génération automatique de maillage, etc ce qui n'est pas à la portée de n'importe qui. Ici, avec la méthode des plans d'expériences, on n'a besoin que de 109 simulations numériques (de 30 minutes environ chacune) pour déduire une expression générale de la résistance ultime d'une tôle courbe raidie. L'utilisation de cette expression approchée dans un code d'optimisation permet alors d'obtenir rapidement la réponse optimale en moins d'une minute. Sa facilité de mise en œuvre, sa rapidité et sa précision confère à la méthode des plans d'expériences numériques un énorme potentiel pour les problèmes avancés d'ingénierie civile .

## 5.8 CONCLUSION

Les chapitres précédents étaient consacrés au développement de méthodes semi-analytiques pour la conception des tôles courbes sous compression uniforme. Les formules et expressions proposées y sont en accord avec les standards des recommandations de l'Eurocode et conduisent à une conception sûre et efficace. Cependant les démarches proposées restent complexes, en particulier pour les tôles raidies et ne permettent pas d'effectuer un pré-dimensionnement rapide et encore moins d'optimiser rationnellement les structures. C'est pourquoi une méthodologie générale pour l'obtention de formules approchées par la méthode des plans d'expérience a été développée dans ce chapitre. L'efficacité et la pertinence de la méthode présentée a été illustrée à plusieurs titres :

- Elle permet un gain de temps considérable par rapport à la méthode mise en œuvre au chapitre 3 : une expression de la résistance ultime des tôles courbes sous compression longitudinale d'une précision comparable à celle du chapitre 3 a été obtenue avec 14 fois moins de simulations.

- Elle est d'une très grande facilité de mise en œuvre : une formule générale pour le dimensionnement des tôles courbes sous compression transversale non-uniforme ainsi été développée avec moins de 50 simulations (cette expression est applicable sur l'ensemble du domaine des ouvrages d'art).
- Elle permet en pratique l'optimisation de solutions constructives, en utilisant les modèles complexes par éléments finis uniquement pour obtenir une solution approchée et non pas pour l'ensemble du problème d'optimisation et en basant la recherche de l'optimum sur cette expression approchée. Le nombre de simulations est considérablement réduit et l'implémentation de la méthode est facile pour peu que l'on dispose d'un outil de calcul scientifique permettant de résoudre des problèmes d'optimisation sous contrainte.

Les principales étapes de la méthodologie présentée sont les suivantes :

- (a) Choix des paramètres et de leur domaine de variation (aussi réduit que possible) et transformation de ces derniers en variables centrées réduites (afin de générer plus facilement les échantillons).
- (b) Choix du modèle : en général, un polynôme d'ordre 2 fournit une bonne approximation. Si  $p$  est le nombre de paramètres du modèle, il y aura  $m = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$  paramètres à identifier.
- (c) Choix des points expérimentaux :  $n = 3 \cdot m + 1$  points générés à l'aide d'une suite de Sobol' (voir annexe 4) permettront de couvrir uniformément le domaine et d'obtenir une bonne précision.
- (d) Estimation des paramètres du modèle par la méthode des moindres carrés 5.6 qui est la méthode la plus répandue. Sa précision est très bonne pour le type de problème rencontré en ingénierie des structures.
- (e) Validation du modèle par le calcul des coefficients  $R^2$  (expression 5.9) et  $Q^2$  (expression 5.10);
- (f) Calcul des intervalles de confiance des coefficients 5.26 et exclusion des coefficients non-significatifs pour l'obtention de l'expression approchée finale.

L'application de cette méthodologie à l'exemple traité au chapitre 3 montre un gain énorme de temps : seulement 38 simulations ont été nécessaires contre 524 observations. L'utilisation d'un modèle approximatif dont la forme est un polynôme d'ordre 2 peut donner de bons résultats. De plus, si les échantillons (points expérimentaux) sont intelligemment choisis, la signification physique du problème pourrait être trouvée. Cette application avait pour but de montrer la faisabilité et la pertinence de la méthode des plans d'expériences numériques dans l'étude du comportement des tôles courbes vis-à-vis du phénomène d'instabilité. Quelques recommandations ont été données à la fin de cette application pour augmenter la précision du modèle approché. Elles servent aussi à consolider la méthodologie proposée dans ce chapitre. Face à un nouveau problème, la reproduction de cette méthodologie est simple et rapide. De plus, on a aussi montré la pertinence de la méthodologie proposée dans le traitement des problèmes d'optimisation.

Pour conclure, la stratégie proposée dans ce chapitre est capable de prédire correctement la résistance ultime des panneaux courbes. La méthode est facile à implanter et gagnerait à être utilisée comme une méthode alternative et fiable.

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Les panneaux cylindriques dans le domaine du génie civil sont de plus en plus fréquemment utilisés notamment en intrados des ponts à tablier orthotrope (par exemple dans le pont Charles de Gaulle à Paris, le pont Confluences à Angers ou le pont Renault sur l'île Séguin à Boulogne-Billancourt, etc.). La vérification de leur stabilité au voilement est cependant difficile, surtout quand les panneaux sont fortement raidis, en raison de l'absence de méthode dédiée, en particulier dans les normes européennes. Les publications académiques relatives aux panneaux courbes ne sont pas nombreuses et aucune solution analytique n'a été exprimée, du fait de la complexité du problème.

Le recours à la modélisation par éléments finis devient alors nécessaire. La prise en compte de la complexité géométrique de la structure s'avère cependant coûteuse en temps de calcul, en particulier lorsqu'une analyse non linéaire est requise. Bien souvent, la qualité et la précision des résultats vont dépendre de l'expérience de l'utilisateur. La mise au point d'une méthode simple qui donnerait la résistance ultime de tels panneaux avec une précision raisonnable semble donc souhaitable pour les applications pratiques, d'où vient le présent travail.

La démarche générale de ce travail suit la méthode des largeurs effectives de l'Eurocode 3 pour la vérification de la stabilité des charpentes métalliques. Cette méthode permet de prendre en compte le comportement post-critique de la structure en tenant compte de la redistribution du chargement après voilement, la capacité ultime des structures obtenues sera plus réaliste.

En l'absence manifeste de données expérimentales sur les tôles utilisées en génie civil, de nombreuses simulations numériques ont été menées afin d'étudier l'influence de la courbure sur les contraintes critiques et ultimes et d'alimenter une base de données sur les panneaux courbes. Cette dernière a été utilisée pour la mise au point de formules semi-empiriques. Par raison de simplicité, ce travail est restreint à l'étude du comportement des panneaux cylindriques (non-raidis et raidis) sous compression uni axiale. Les caractéristiques du comportement de ces tôles qui ont été identifiées comme les plus importants sont résumées ci-dessous :

## 1. **Panneaux cylindriques non-raidis**

L'étude du comportement des tôles courbes non raidies a été effectuée dans un premier temps. Bien que l'utilisation de tôles non raidies soit peu fréquente dans la pratique, cette première étude est extrêmement importante pour identifier l'influence de la cour-

bure sur la contrainte critique de voilement et sur la résistance ultime. En outre, les résultats de cette étude sont utilisés dans la démarche du dimensionnement des tôles courbes raidies développée plus tard.

La courbure est caractérisée par un paramètre adimensionnel, noté  $Z = b^2/Rt$ . Ce paramètre est une modification de Batdorf dans lequel l'effet du coefficient de Poisson est négligé.

a. *Comportement critique de voilement*

Une série d'analyses du voilement élastique linéaire (LBA) a été réalisée afin d'étudier l'instabilité élastique des panneaux courbes en compression uniforme. Il a été constaté que la courbure modifie qualitativement et quantitativement le comportement élastique critique des panneaux.

En ce qui concerne la forme du premier mode de voilement, pour de petites valeurs de  $Z$ , elle reste semblable à celle des plaques. Lorsque la valeur de  $Z$  augmente, le mode de voilement évolue : la déformation hors-plan diminue dans la partie centrale du panneau et se concentre le long des deux bords chargés. Ceci est dû à l'apparition de moments secondaires de flexion dans les bords chargés. Plus la courbure est grande, plus cet effet est significatif.

Quant à la valeur de la contrainte critique de voilement, elle augmente quand  $Z$  augmente. Le comportement asymptotique (vers les grandes valeurs de  $Z$ ) converge vers une droite dont la pente n'est égale qu'à la moitié de la valeur de la contrainte critique d'un cylindre de révolution. Parmi les expressions analytiques existantes, seule l'expression de Stowell est en bon accord avec les résultats numériques. Elle est donc prise comme référence pour le calcul de la contrainte critique de voilement d'un panneau cylindrique sous compression axiale.

b. *Comportement ultime*

La résistance ultime est évaluée à l'aide d'une analyse de la structure imparfaite incluant des non-linéarités matérielles et géométriques. Une série de 524 simulations numériques au total a été effectuée pour une large palette de courbures :  $Z$  varie entre 0 (plaque plane) et 100, afin de couvrir tout le domaine d'application des panneaux courbes utilisés dans les ponts métalliques.

Pour les petites valeurs de  $Z$ , les panneaux courbes se comportent comme des plaques planes (EN 1993-1-5) et pour les grandes valeurs de  $Z$ , le comportement des panneaux courbes tend vers celui des cylindres de révolution (EN 1993-1-6).

Plus la valeur de la courbure est grande, plus on s'éloigne de la résistance ultime de la plaque correspondante ( $Z = 0$ ). Par conséquent, l'utilisation de l'EN 1993-1-5 au-delà de cette limite pour les grandes courbures  $Z$  conduit à une surestimation significative de la résistance ultime réelle.

Un écart non négligeable entre les résultats numériques et les résultats fournis par la norme est également constaté pour les grandes valeurs de  $Z$  où l'EN 1993-1-6 devient trop conservatrice. Cet écart est lié principalement au comportement postcritique des

tôles courbes qui provient du développement de contraintes membranaires circonférentielles.

Les tôles courbes, comme les plaques planes, possèdent une réserve post-critique et, pour de forts élancements, leur comportement élastique peut être considéré comme proportionnel à  $\frac{\beta}{\lambda}$  où  $\beta$  est un paramètre qui caractérise l'influence de la courbure, et plus précisément l'interaction des contraintes membranaires et du moment hors-plan. La valeur de  $\beta$  diminue lorsque la courbure  $Z$  augmente : il est égal à 1 pour une plaque plane ( $Z = 0$ ) et tend vers 0,5 pour de grandes valeurs de la courbure.

Les observations précédentes nous ont conduit à chercher de nouvelles courbes caractéristiques de voilement  $\rho$ , permettant de combler l'écart avec les deux normes EN 1993-1-5 et EN 1993-1-6. Des nouvelles expressions ont été proposées et ont montré la dépendance du coefficient de réduction en fonction du paramètre de courbure  $Z$ . Les résultats estimés sont en bon accord avec les valeurs numériques.

## 2. Panneaux cylindriques raidis

Le comportement des tôles courbes raidies est un problème délicat. Outre les difficultés liées à la présence des raidisseurs et à la courbure, la complexité est aggravée par l'interaction entre ces deux paramètres. De plus, l'utilisation relativement récente de ces tôles dans le domaine du génie civil entraîne un certain manque de littérature à ce sujet.

Grâce aux études préliminaires par éléments finis, on constate globalement une augmentation des contraintes de voilement et ultimes de ces panneaux par rapport aux plaques planes raidies de même configuration géométrique. Par conséquent, si le domaine d'application de l'EN 1993-1-5 est modifiée par la condition  $\frac{b^2}{Rt}$ , où  $b$  est : la largeur totale de chargement dans le cas des tôles non-raïdiées ou l'espacement entre deux raidisseurs dans le cas des tôles raidies, la plupart des tôles courbes raidies utilisées dans les ouvrages d'art peuvent être traités comme des plaques planes raidies.

En revanche, pour optimiser le dimensionnement, l'effet de la courbure doit être pris en compte. La démarche proposée dans ce travail est naturellement dérivée de la démarche de vérification des plaques planes raidies selon l'EN 1993-1-5 à laquelle on ajoute l'effet de la courbure. Pour cela, une évaluation de la démarche de l'Eurocode (chapitre 2) pour les plaques raidies a d'abord été discutée à l'aide de simulation numérique puis des recommandations ont été suggérées afin de faciliter l'application de la méthode aux tôles courbes raidies. Une proposition de méthodologie de dimensionnement de type Eurocode a été finalement présentée.

## 3. Utilisation de la méthode des plans d'expérience numérique

Malgré leur bonne précision, les méthodologies développées précédemment selon le formalisme de l'Eurocode semblent difficiles à reproduire face à un nouveau problème dans la pratique quotidienne des ingénieurs. D'une part, l'expression analytique de la résistance ultime n'est pas, en général, explicite ou facile à réduire. D'autre part, cette méthodologie manque de robustesse, car la question demande de savoir combien de simulations numériques sont nécessaires pour calibrer une formule semi-empirique ?

C'est pour cette raison qu'une méthodologie générale pour l'obtention de formules approchées par la méthode des plans d'expérience a été développée dans ce travail. Cette démarche, qui s'appuie essentiellement sur des bases statistiques et algébriques, permet d'obtenir la meilleure précision possible avec un minimum d'essais. Le gain de temps est remarquable : le nombre de simulation est considérablement réduit, moins de 14 fois, pour arriver à la même précision de l'expression donnée au chapitre 3 par exemple. En remplaçant les modèles complexes par des solutions approchées, l'implémentation de la méthode aux problèmes d'optimisation sous contrainte devient facile.

On en déduit, à travers les exemples d'application que la stratégie proposée est capable de prédire correctement la résistance ultime des panneaux courbes avec un nombre de simulations réduit. La méthode est facile à implémenter et mériterait d'être utilisée comme une méthode alternative et fiable.

Les formules développées dans ce travail montrent globalement un bon accord avec les résultats numériques. Cependant, il y a un besoin impératif de données expérimentales car un grand manque dans ce domaine a été constaté. Ces données sont nécessaires pour quantifier l'influence des imperfections initiales et pour mesurer l'exactitude du modèle proposé.

Ce mémoire de thèse présenté ici ne traite que d'une petite partie des problèmes posés par les tôles courbes. D'autres cas de charge ou configurations mériteraient d'être étudiés. Par exemple, l'étude de la stabilité : sous un chargement de cisaillement, cas rencontré fréquemment dans les âmes des ponts mixtes poutre en I; sous compression bi-axiale pour les intrados des ponts caissons sur appuis; ou bien de formes complexes dans les ouvrages d'art moderne.



*Exemples des panneaux courbes aux ouvrages d'art modernes (en Chine)*

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] EN 1990. Bases de calcul des structures. Annexe D : Dimensionnement assisté par l'expérimentation, 2003.
- [2] EN 1993-1-1. Calcul des structures en acier, Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments, 2005.
- [3] EN 1993-1-5. Calcul des structures en acier, Partie 1-5 : Plaque planes, 2007.
- [4] EN 1993-1-6. Calcul des structures en acier, Partie 1-6 : Résistance et stabilité des structures en coque, 2007.
- [5] TWG 8.4. Structural stability : Buckling of steel shells. Rapport technique, ECCS Technical Committee 8 - technical working group 8.4 (5th), 2008.
- [6] ABS. Guide for buckling and ultimate strength assessment for offshore structures, 2004.
- [7] B. Akesson. *Plate buckling in bridges and other structures*. Taylor and Francis Group, 2007.
- [8] B. Åkesson. *Understanding bridge collapses*. CRC Press, 2008.
- [9] D.M. Allen. The prediction sum of squares as a criterion for selecting predictor variables. Rapport technique, University of Kentucky, Dept. of Statistics, 1971.
- [10] T.T. Allen, M.A. Bernshteyn, et K. Kabiri-Bamoradin. Constructing metamodells for computer experiments. *Journal of Quality Technology*, 35 :264-274, 2003.
- [11] Marco Amabili. *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. Cambridge University Press, 2008.
- [12] I. André, H. Degée, V. De Ville De Goyet, et R. Maquoi. Effect of initial imperfections in numerical simulations of collapse behaviour of stiffened plates under compression. Dans *Proceedings of the Third European Conference on Steel Structures*, pages 503-512, 2002.
- [13] ANSYS. User's theory manual v11, 2007.
- [14] API. Bulletin on design of flat plate structures. API Bulletin 2v, 2000.

- [15] E. Armentani, C. Calí, G. Cricrí, F. Caputo, et R. Esposito. Numerical solution techniques for structural instability problems. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, 19(1), 2006.
- [16] V.O. Balabanov et G. Venter. Response surface optimization with discrete variables. Dans *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials*, 2004.
- [17] I. Balaz et N.W. Murray. A comparison of some design rules with results from tests on longitudinally stiffened deck plates of box-girders. *Journal of Constructional Steel Research*, 23(1-3) :31–54, 1992.
- [18] V. Barnett et T. Lewis. Outliers in statistical data. *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Applied Probability and Statistics*, Chichester : Wiley, 1984, 2nd ed., 1, 1984.
- [19] J.F.M. Barthelemy et R.T. Haftka. Approximation concepts for optimum structural design : A review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 5(3) :129–144, 1993.
- [20] S. S. Batdorf, M. Schildcrout, et M. Stein. Critical combinations of shear and longitudinal direct stress for long plates with transverse curvature. *National Advisory Committee for Aeronautics, TN-1347*, 1947.
- [21] S.S Batdorf. A simplified method of elastic-stability analysis for thin cylindrical shells. Rapport technique, National Advisory Committee for Aeronautics, Rep. 847, 1947.
- [22] S.S. Batdorf et M. Schildcrout. Critical axial-compressive stress of a curved rectangular panel with a central chordwise stiffener. Rapport technique, 1948.
- [23] H. Becker. Handbook of structural stability. Part VI : Strength of stiffened curved plates and shells. Rapport technique, New York University, Washington, 1958.
- [24] O. Bedair. Analysis and limit state design of stiffened plates and shells : A world view. *Applied Mechanics Reviews*, 62(2) :020801–16, 2009.
- [25] OK Bedair et A. Sherbourne. On the stability of plates under combined compression and in-plane bending. *Computers and structures*, 53(6) :1453–1464, 1994.
- [26] G. Blatman. *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis*. PhD thesis, Université Blaise Pascal, 2009.
- [27] G. Blatman, B. Sudret, et M. Berveiller. Quasi random numbers in stochastic finite element analysis. *Mécanique and Industries*, 8(3) :289–297, 2007.
- [28] D.L. Block, M.F. Card, et M.M. Mikulas. Buckling of eccentrically stiffened orthotropic cylinders. *National Advisory Committee for Aeronautics, TND-2960*, 1965.

- [29] M.A. Bonello, M.K. Chryssanthopoulos, et P.J. Dowling. Ultimate strength design of stiffened plates under axial compression and bending. *Marine structures*, 6(5-6) : 533–552, 1993.
- [30] K.P. Bowman, J. Sacks, et Y.F. Chang. Design and analysis of numerical experiments. *Journal of the atmospheric sciences*, 50(9) :1267–1267, 1993.
- [31] B.T. Braun. *Stability of steel plates under combined loading*. PhD thesis, University of Stuttgart, 2010.
- [32] E. F. Bruhn. *Analysis and design of flight vehicle structures*. Jacobs Pub, 1973.
- [33] BS5400. Bs 5400 : Steel, Concrete and Composite Bridges, 1980.
- [34] D. Bushnell et W.D. Bushnell. Approximate method for the optimum design of ring and stringer stiffened cylindrical panels and shells with local, inter-ring, and general buckling modal imperfections. *Computers and Structures*, 59(3) :489–527, 1996.
- [35] J.A. Calgaro. *Introduction aux Eurocodes : sécurité des constructions et bases de la théorie de la fiabilité*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996.
- [36] C.A. Carlsen. A parametric study of collapse of stiffened plates in compression. *The structural engineer*, 58(2) :33–40, 1980.
- [37] E. Cerezci et F. Gokpinar. A comparison of three linear programming models for computing least absolute value estimates. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 34 :95–102, 2005.
- [38] S.J. Chen et K.C. Yang. Inelastic behavior of orthotropic steel deck stiffened by u-shaped stiffeners. *Thin-walled structures*, 40(6) :537–553, 2002.
- [39] S.R. Cho, H.Z. Park, H.S. Kim, et J.S. Seo. Experimental and numerical investigations on the ultimate strength of curved stiffened plates. Dans *Proceeding 10th International Symposium on Practical Design of Ships and Other Floating Structures*, 2007.
- [40] B.H. Choi, M. Hwang, T. Yoon, et C.H. Yoo. Experimental study of inelastic buckling strength and stiffness requirements for longitudinally stiffened panels. *Engineering Structures*, 31(5) :1141–1153, 2009.
- [41] J. Cohen, P. Cohen, S.G. West, et L.S. Aiken. *Applied Multiple Regression/Correlation Analysis for the Behavioral Sciences (3rd edition)*. Lawrence Earlbaum Associates, Mahwah, NJ, 2003.
- [42] COMBRI. Competitive Steel and Composite Bridges by improved steel plated structures. Final Report. Rapport technique, 2007.
- [43] P.A. Cornillon et E. Matzner-Lober. *Régression : théorie et applications*. Springer France Editions, 2006.

- [44] H.L. Cox et W.J. Clenshaw. *Compression tests on curved plates of thin sheet duralumin*. HM Stationery Off, 1941.
- [45] H. Crate et L. Levin. Data on buckling strength of curved sheet in compression. Rapport technique, NACA WR L-557, 1943.
- [46] L. Davaine. *Formulations de la résistance au lancement d'une âme métallique de pont raidie longitudinalement*. PhD thesis, Mémoire de thèse, INSA de Rennes, 2005.
- [47] V. De Ville De Goyet, R. Maquoi, Fr. Bachy, et I. André. Ultimate load of stiffened compressed plates : Effects of some parameters and discussion concerning the ec3 rules. Dans *Proceedings of the Third European Conference on Steel Structures*, volume 1, pages 591–600, 2002.
- [48] DNV. Classification Notes no. 30.1 : Buckling strength plated structures, 2002.
- [49] M. M. Domb et B. R. Leigh. Refined design curves for compressive buckling of curved panels using nonlinear finite element analysis, 2001.
- [50] L.H. Donell. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. *Transaction of the ASME*, 56 :795–806, 1934.
- [51] C. Douthe. *Etude de structures élancées précontraintes en matériaux composites : application à la conception des gridshells*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2007.
- [52] P.J. Dowling. Strength of steel box-girder bridges. *Journal of the Structural Division*, 101(ASCE 11550 Proceeding), 1975.
- [53] P. Dubas et E. Gehri. *Behaviour and design of steel plated structures*. Applied Statics and Steel Structures, Swiss Federal Institute of Technology, 1986.
- [54] V. Dubourg, J.M. Bourinet, et B. Sudret. Analyse fiabiliste du flambage des coques avec prise en compte du caractère aléatoire et de la variabilité spatiale des défauts de forme et d'épaisseur, et des propriétés matériaux. Dans *19ème Congrès Français de Mécanique*, 2007.
- [55] J.B. Dwight et G.H. Little. Stiffened steel compression flanges - A simpler approach. *The structural engineer*, 54(12) :501–509, 1976.
- [56] CA. Featherston. Imperfection sensitivity of curve panels under combined compression and shear. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38 :225–238, 2003.
- [57] R.A. Fisher. *The design of experiments*. Oliver and Boyd, Edinburgh, Scotland, 1935.
- [58] B.W.R. Forde et S.F. Stiemer. Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. *Computers and Structures*, 27(5) :625–630, 1987.
- [59] P A Frieze. Assessment of ABS SVR results using test database. Rapport technique, ABS, 2002.

- [60] P.A. Frieze et P.J. Dowling. Interactive buckling analysis of box sections using dynamic relaxation. *Computers and Structures*, 9(5) :431–439, 1978.
- [61] Y. Galéa. Voilement des plaques rectangulaires raidies : utilisation des abaques de klöppel, scheer et möller. *Revue Construction Métallique*, (3) :99–107, 1985.
- [62] Y. Galéa et P.O. Martin. Contraintes critiques de voilement de plaques rectangulaires. présentation du logiciel ebplate. *Revue Construction Métallique*, 44(3) :33–74, 2007.
- [63] Y. Galéa et P.O. Martin. Application de l'en 1993-1-5 aux plaques raidies longitudinalement : proposition d'une méthode de calcul de la contrainte critique. *Revue Construction métallique*, 4(4) :3–22, 2008.
- [64] Y. Galéa et P.O. Martin. Longitudinally stiffened plates in eurocode 3 : Calculation of the global critical buckling stress. *Journal of Constructional Steel Research*, 66(11) : 1345–1353, 2010.
- [65] H.W. Gall. *Compressive strength of stiffened sheets of aluminum alloy*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1930.
- [66] G. Gerard et H. Becker. Handbook of structural stability. Part III : Buckling of curved plates and shells. Rapport technique, New York University, 1957.
- [67] K. Ghavami. Experimental study of stiffened plates in compression up to collapse. *Journal of Constructional Steel Research*, 28(2) :197–221, 1994.
- [68] G.Y. Grondin, A.E. Elwi, et J.J.R. Cheng. Buckling of stiffened steel plates - A parametric study. *Journal of Constructional Steel Research*, 50(2) :151–175, 1999.
- [69] X. L. Guan et R. E. Melchers. Effect of response surface parameter variation on structural reliability estimates. *Structural safety*, 23(4) :429–444, 2001.
- [70] C. Guedes Soares et JM Gordo. Design methods for stiffened plates under predominantly uniaxial compression. *Marine structures*, 10(6) :465–497, 1997.
- [71] P.W. Holland et R.E. Welsch. Robust regression using iteratively reweighted least squares. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 6(9) :813–827, 1977.
- [72] R. Iman et J.C. Helton. An investigation of uncertainty and sensitivity analysis techniques for computer models. *Risk analysis*, 8 :71–90, 1988.
- [73] K.V. Jackson et A.H. Hall. Curved plates in compression. *National Research Council*, 1947.
- [74] Th Jacques, R. Maquoi, et G. Fonder. Buckling of unstiffened compression curved plates. *Journal of Constructional Steel Research*, 3(1) :28–34, 1983.
- [75] Karoly Jarmai. Optimum design of stiffened plates. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 1(1) :49–69, 2000.

- [76] P. Jetteur. A new design method for stiffened compression flanges of box girders. *Thin-walled structures*, 1(3) :189–210, 1983.
- [77] B. Johansson, R. Maquoi, et G. Sedlacek. New design rules for plated structures in eurocode 3. *Journal of Constructional Steel Research*, 57(3) :279–311, 2001.
- [78] B. Johansson, R. Maquoi, G. Sedlacek, C. Müller, et D. Beg. Commentary and worked examples to en 1993-1-5 "plated structural elements". Rapport technique, JRC Scientific and Technical Reports, 2007.
- [79] B. Jones et Inc MathWorks. *MATLAB : Statistics Toolbox User's Guide*. MathWorks, 1993.
- [80] R.M. Jones. *Buckling of bars, plates, and shells*. Bull Ridge Corporation, 2006.
- [81] K. Jorabchi et K. Suresh. A robust continuation method to pass limit-point instability. *Finite elements in analysis and design*, 47(11) :1253–1261, 2011.
- [82] A. Jourdan. Planification d'expériences numériques. *Département de Mathématiques - Revue MODULAD*, 2005.
- [83] K. Kelley et S.E. Maxwell. Sample size for multiple regression : Obtaining regression coefficients that are accurate, not simply significant. *Psychological Methods*, 8(3) :305, 2003.
- [84] M.R. Khedmati et P. Edalat. A numerical investigation into the effects of parabolic curvature on the buckling strength and behaviour of stiffened plates under in-plane compression. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 7(3) :249, 2010.
- [85] J.P.C. Kleijnen. Design and analysis of computational experiments : Overview. *Experimental Methods for the Analysis of Optimization Algorithms*, page 51, 2010.
- [86] I. Krykova. *Evaluating of path-dependent securities with low discrepancy methods*. PhD thesis, WORCESTER POLYTECHNIC INSTITUTE, 2003.
- [87] G. Lagae et W. Vanlaere. *Instabilité des coques*. Techniques Ingénieur, 2009.
- [88] A.D. Lanzo. A koiter's perturbation strategy for the imperfection sensitivity analyssi of thin-walled structures with residual stresses. *Thin-walled structures*, 37 :77–95, 2000.
- [89] E.E. Lundquist. Comparison of three methods for calculating the compressive strength of flat and slightly curved sheet and stiffener combinations. Rapport technique, National Advisory Committee for Aeronautics, TC 455, 1933.
- [90] E.E. Lundquist, E.Z. Stowell, et E.H. Schuette. Principles of moment distribution applied to stability of structures composed of bars or plates. Rapport technique, 1945.

- [91] Y. Maeno, H. Yamaguchi, Y. Fujii, et T. Yao. Buckling - plastic collapse behaviour and strength of bilge circle and its contribution to ultimate longitudinal strength of ship's hull girder. Dans *Proceeding of the fourteenth International Offshore and Polar Engineering Conference, Toulon, France*, pages 296–302, 2004.
- [92] R. Maquoi. Instabilités structurales : Principes généraux. *Techniques de l'ingénieur. Construction*, (C2510), 2009.
- [93] R. Maquoi et V. De Ville De Goyet. Some tracks for possible improvement and implementation of eurocode 3. *Stahlbau*, 68(11) :880–888, 1999.
- [94] R. Maquoi et C. Massonnet. Théorie non-linéaire de la résistance postcritique des grandes poutres en caisson raidies. *IABSE Publications*, 31(II) :91–140, 1971.
- [95] R. Maquoi et J. Rondal. Mise en équation des nouvelles courbes Europeennes de flambement. *Revue Construction Métallique*, 1 :17–30, 1978.
- [96] R. Maquoi et M. Skaloud. Stability of plates and plated structures : General report. *Journal of Constructional Steel Research*, 55 :45–68, 2000.
- [97] T. Marošević. A choice of norm in discrete approximation. *Mathematical Communications*, 1(2) :147–153, 1996.
- [98] P.O. Martin, H. Degee, et J. Naumes. Proposition d'une formulation améliorée pour le calcul de la partie efficace d'une section raidie longitudinalement. *Construction métallique*, 46(3) :29–46, 2009.
- [99] P.O. Martin et Y. Galéa. Effective widths of stiffeners. CTICM document no. 7.054. Rapport technique, 2007.
- [100] S.E. Maxwell. Sample size and Multiple regression analysis. *Psychological Methods*, 5 (4) :434–458, 2000.
- [101] C.D. Miller. Buckling stress of ring and stringer stiffened cylindrical shells under axial compressive load. Rapport technique, Chicago Iron and Bridge Company, 1977.
- [102] D.C. Montgomery. *Design and analysis of experiments*. John Wiley and Sons Inc, 2008.
- [103] N.W. Murray. Analysis and design of stiffened plates for collapse load. *The structural engineer*, 53(3) :153–158, 1975.
- [104] J. S. Park, M. Fujikubo, K. Iijima, et T. Yao. Prediction of the secondary buckling strength and ultimate strength of cylindrically curved plate under axial compression, 2009.
- [105] J. S. Park, K. Iijima, et T. Yao. Characteristics of buckling and ultimate strength and collapse behaviour of cylindrically curved plates subjected to axial compression. *Advanced Materials Research*, 33 :1195–1200, 2008.

- [106] J. S. Park, K. Yumura, S. Katsura, K. Iilima, et T. Yao. Buckling and post-buckling behaviour of cylindrically curved plates under axial compression, 2006.
- [107] J.S. Park, K. Iijima, et T. Yao. Estimation of buckling and collapse behaviours of stiffened curved plates under compressive load. International Society of Offshore and Polar Engineers, USA, 2008.
- [108] J.S. Park, K. Iijima, et T. Yao. Buckling/ultimate strength and progressive collapse behaviour comparison of unstiffened and stiffened curved plates subjected to axial compression. *International Journal of Computer Applications in Technology*, 41(1) :60–72, 2011.
- [109] J.P. Peterson et R.O. Whitley. Local buckling of longitudinally stiffened curved plates. Rapport technique, NASA TN D-750, 1961.
- [110] G.G. Pope. On the axial compression of long, slightly curved panel. *British aeronautical research council, RM-3392*, 1963.
- [111] N.T. Quan. The prediction sum of squares as a general measure for regression diagnostics. *Journal of Business and Economic Statistics*, pages 501–504, 1988.
- [112] M.R. Rajashekhar et B.R. Ellingwood. A new look at the response surface approach for reliability analysis. *Structural safety*, 12(3) :205–220, 1993.
- [113] R.S.B. Ramaswamy. *Optimal design of stiffened plates*. PhD thesis, University of Toronto, 1999.
- [114] W. Ramberg, S. Levy, et K.L. Fienup. Effect of curvature on strength of axially loaded sheet-stringer panels. Rapport technique, NACA-Technical note 944, 1944.
- [115] S.C Redshaw. The elastic instability of a thin curved panel subjected to an axial thrust, its axial and circumferential edges being simply supported. *British aeronautical research council, RM-1565*, 1933.
- [116] E. Riks. The application of newton's method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, 39 :1060, 1972.
- [117] J. Rondal et R. Maquoi. Formulation d'Ayrton-Perry pour le flambement des barres métalliques. *Revue Construction Métallique*, 4 :41–53, 1979.
- [118] J.M. Rotter. Shell structures : the new european standard and current research needs. *Thin-walled structures*, 31(1-3) :3–23, 1998.
- [119] J.M. Rotter. Proposal for generalisation of the elastic-plastic buckling interaction rule in Eurocode 3- Part 1.6. Rapport technique, 1999.
- [120] J.M. Rotter. Shell buckling and collapse analysis for structural design. *Solid mechanics and its applications*, 104 :355–378, 2002.

- [121] J.M. Rotter. The practical design of shell structures exploiting different methods of analysis. *Shell Structures : Theory and Applications*, pages 71–86, 2005.
- [122] V. Rousson et N.F. Gosoniu. An r-square coefficient based on final prediction error. *Statistical Methodology*, 4(3) :331–340, 2007.
- [123] W.J. Roux, N. Stander, et R.T. Haftka. Response surface approximations for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(3) :517–534, 1998.
- [124] R. Roy, S. Hinduja, et R. Teti. Recent advances in engineering design optimisation : Challenges and future trends. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 57(2) :697–715, 2008.
- [125] J. Sacks, S.B. Schiller, et W.J. Welch. Designs for computer experiments. *Technometrics*, pages 41–47, 1989.
- [126] J. Sacks, W.J. Welch, T.J. Mitchell, et H.P. Wynn. Design and analysis of computer experiments. *Statistical science*, 4(4) :409–423, 1989.
- [127] L.A. Samuelson, D. Vandepitte, et R. Paridaens. The background to the ECCS Recommendations for buckling of stringer-stiffened cylinders. Dans *Proceeding Int. Col. Stability of Plate and Shell structures*, pages 513–522, 1987.
- [128] T.J. Santner, B.J. Williams, et W. Notz. *The design and analysis of computer experiments*. Springer Verlag, 2003.
- [129] G. Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Editions Technip, 2006.
- [130] M. Schildcrout et M. Stein. Critical axial-compressive stress of a curved rectangular panel with a central longitudinal stiffener. Rapport technique, NACA Technical Note 1879, 1949.
- [131] H. Schmidt. Stability of steel shell structures : General report. *Journal of Constructional Steel Research*, 55 :159–181, 2000.
- [132] W. Schneider, I. Timmel, et K. Höhn. The conception of quasi-collapse-affine imperfections : A new approach to unfavourable imperfections of thin-walled shell structures. *Thin-walled structures*, 43 :1202–1224, 2005.
- [133] E.H. Schuette. Buckling of curved sheet in compression and its relation to the secant modulus. *Journal of the aeronautic sciences*, 15(1) :18–22, 1948.
- [134] E.E. Sechler et L.G. Dunn. *Airplane structural analysis and design*. John Wiley and Sons, Inc., 1942.
- [135] H. Sekine et O. Tamate. Postbuckling behavior of thin curved panels under axial compression. *Japan Society Mechanical Engineering*, 12 :415–420, 1969.

- [136] I.A. Sheikh, G.Y. Grondin, et A.E. Elwi. Stiffened steel plates under uniaxial compression. *Journal of Constructional Steel Research*, 58(5) :1061–1080, 2002.
- [137] J. M. Simon-Talero et A. Caballero. Plate buckling according to Eurocode 3. Comparison of the effective width method and the reduced stress method, 2010.
- [138] T.W. Simpson, D.K.J. Lin, et W. Chen. Sampling strategies for computer experiments : design and analysis. *International Journal of Reliability and Applications*, 2(3) :209–240, 2001.
- [139] T.W. Simpson, J.D. Poplinski, P.N. Koch, et J.K. Allen. Metamodels for computer-based engineering design : Survey and Recommendations. *Engineering with computers*, 17(2) :129–150, 2001.
- [140] C.S. Smith, P.C. Davidson, et J.C. Chapman. Strength and stiffness of ships plating under in-plane compression and tension. *Royal Institution of Naval Architects Transactions*, 129 :227–296, 1987.
- [141] ABT Soderquist. *Experimental investigation of stability and post buckling behaviour of stiffened curved plates*. Institute of Aerophysics, University of Toronto, 1960.
- [142] EE Spier, GW Smith, et RT Sullins. Manual for structural stability analysis of sandwich plates and shells. Rapport technique, NASA CR-1457, 1969.
- [143] E. Z. Stowell. Critical compressive stress for curved sheet supported along all edges and elastically restrained against rotation along the unloaded edges. *National Advisory Committee for Aeronautics*, WR L-691, 1943.
- [144] G. Taguchi, S. Chowdhury, et Y. Wu. *Taguchi's quality engineering handbook*. John Wiley and Sons Hoboken, NJ, 2005.
- [145] J.L. Taylor. Stability of a monocoque in compression. *British aeronautical research council*, RM-1679, 1935.
- [146] E. Thiémond. *Sur le calcul et la majoration de la discrédance à l'origine*. PhD thesis, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 2000.
- [147] S.P. Timoshenko et J.M. Gere. *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill, New York, 1961.
- [148] K.L. Tran, L. Davaine, C. Douthe, et K. Sab. Stability of curved panels under uniform axial compression. *Journal of constructional steel research*, 69(1) :30–38, 2012.
- [149] K.L. Tran, L. Davaine, C. Douthe, K. Sab, et J. Dallot. Étude de la résistance et de la stabilité des panneaux cylindriques non-raidis soumis à une compression uniforme : application aux ouvrages d'art. *Revue Construction Métallique*, 50(1) :3–17, 2012.
- [150] M.J.M. Van der Burg. *Plate buckling in design codes. The difference between NEN 6771 and NEN-EN 1993-1-5*. PhD thesis, Delft - University of Technology, 2011.

- [151] A. Van der Neut. The general instability of stiffened cylindrical shells under axial compression. Report and Transaction S57, National Aeronautical Research Institute, 1947.
- [152] R. Vitali, O. Park, R.T. Haftka, B.V. Sankar, et C.A. Rose. Structural optimization of a hat-stiffened panel using response surfaces. *Journal of aircraft*, 39(1) :158–166, 2002.
- [153] T. Von Karman, E.E. Sechler, et LH Donnell. The strength of thin plates in compression. *Transactions of ASME*, 54(2) :53–57, 1932.
- [154] A.C. Walker et S. Sridharan. Analysis of the behaviour of axially compressed stringer-stiffened cylindrical shells. Dans *ICE*, volume 69, pages 447–472. ICE, 1980.
- [155] G. Welter. The effect of the radius of curvature and preliminary artificial eccentricities on buckling loads of curved thin aluminum-alloy sheets for monocoque constructions. *Journal of the aeronautic sciences*, 13 :593–596, 1946.
- [156] W. Wenzek. The effective width of curved sheet after buckling. *Luftfahrtforschung*, 15 :340–343, 1938.
- [157] T. Yabuki, Y. Arizumi, T. Shimozato, et Y. Nagamine. Bucklings modes of plate-girders curved in plan. *Structural and Earthquake Eng.*, 12(2) :67–72, 1995.
- [158] T. Yabuki, Y. Arizumi, et S. Yashiro. Ultimate strength and its practical evaluation of cylindrical steel shell panels under various compression. *Structural Engineering and Earthquake Engineering*, 11(1) :11–21, 1994.
- [159] K. Yumura, S. Katsura, K. Iijima, et T. Yao. Simulation of buckling collapse behaviour of cylindrically curved plates under axial compression. Dans *The Nineteenth Asian Technical Exchange and Advisory Meeting on Marine Structures, Singapore*, pages 482–489, 2005.
- [160] G. Zeng, S. H. Li, Z. Q. Yu, et X. M. Lai. Optimization design of roll profiles for cold roll forming based on response surface method. *Materials and Design*, 30(6) :1930–1938, 2009.
- [161] S. Zhang et I. Khan. Buckling and ultimate capability of plates and stiffened panels in axial compression. *Marine structures*, 22(4) :18, 2009.
- [162] Y. Zheng et P. K. Das. Improved response surface method and its application to stiffened plate reliability analysis. *Engineering Structures*, 22(5) :544–551, 2000.
- [163] R. Zimmermann, H. Klein, et A. Kling. Buckling and postbuckling of stringer stiffened fibre composite curved panels : tests and computations. *Composite Structures*, 73(2) :150–161, 2006.
- [164] R. Zimmermann et R. Rolfes. POSICOSS-improved postbuckling simulation for design of fibre composite stiffened fuselage structures. *Composite Structures*, 73(2) :171–174, 2006.

- [165] A. Zureick et R. Naqib. Horizontally curved steel I-girders state-of-the-art analysis methods. *Journal of Bridge Engineering*, 4 :38, 1999.

# ANNEXES

## SOMMAIRE

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| A.1   | EXEMPLE DE CALCUL DE LA CHARGE ULTIME D'UNE PLAQUE PLANE RAIDIE SELON L'EN 1993-1-5 . . . . . | 207 |
| A.1.1 | Aire efficace résultant du voilement local . . . . .  | 207 |
| A.1.2 | Réduction due au voilement global . . . . .   | 209 |
| A.1.3 | Capacité portante . . . . .   | 212 |
| A.2   | THÉORIE NON-LINÉAIRE DE COQUE DE DONNEL. APPLICATION AUX PANNEAUX CYLINDRIQUES . . . . .      | 214 |
| A.2.1 | Théorie de coque mince de Donnel . . . . .  | 214 |
| A.2.2 | Expression linéarisée . . . . .   | 217 |
| A.2.3 | Application aux panneaux cylindriques - Expressions de Batdorf . . . . .                      | 218 |
| A.3   | VOILEMENT DES CYLINDRES RAIDIS SOUMIS À UNE COMPRESSION AXIALE . . . . .                      | 220 |
| A.3.1 | Contrainte critique de voilement . . . . .  | 221 |
| A.3.2 | Courbe de réduction . . . . .   | 223 |
| A.4   | PLAN D'EXPÉRIENCE NUMÉRIQUE : SUITE À FAIBLE DISCRÉPANCE . . . . .                            | 224 |
| A.4.1 | Naissance des suites à faible discrédance . . . . .   | 224 |
| A.4.2 | La méthode de quasi-Monte Carlo : des suites à faible discrédance . . . . .                   | 225 |
| A.4.3 | Construction de la suite de Sobol' . . . . .  | 226 |



## A.1 EXEMPLE DE CALCUL DE LA CHARGE ULTIME D'UNE PLAQUE PLANE RAIDIE SELON L'EN 1993-1-5

Dans cette section, un exemple d'application est présenté de manière à illustrer la méthode proposée dans l'Eurocode 3. Il s'agit d'une tôle d'intrados d'un pont en caisson de dimensions définies à la figure A.1. La tôle de fond possède une largeur  $b$  de 4800 mm et une épaisseur  $t$  de 12 mm. La longueur de la plaque est égale à l'espacement de deux diaphragmes successifs  $a = 6000$  mm, donc le coefficient d'aspect  $\alpha = \frac{a}{b} = 1,25$ . Les raidisseurs utilisés sont des plats simples de hauteur 150 mm et d'épaisseur de 16 mm. Ils sont disposés régulièrement sur la largeur de l'intrados avec espacement de 600 mm. Le matériau est un acier de construction de nuance S355, avec les caractéristiques suivantes : module d'Young  $E = 210$  GPa et coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ . La plaque est supposée en la compression longitudinale et uniforme. La démarche de vérification selon l'EN 1993-1-5 se traduit comme suit.

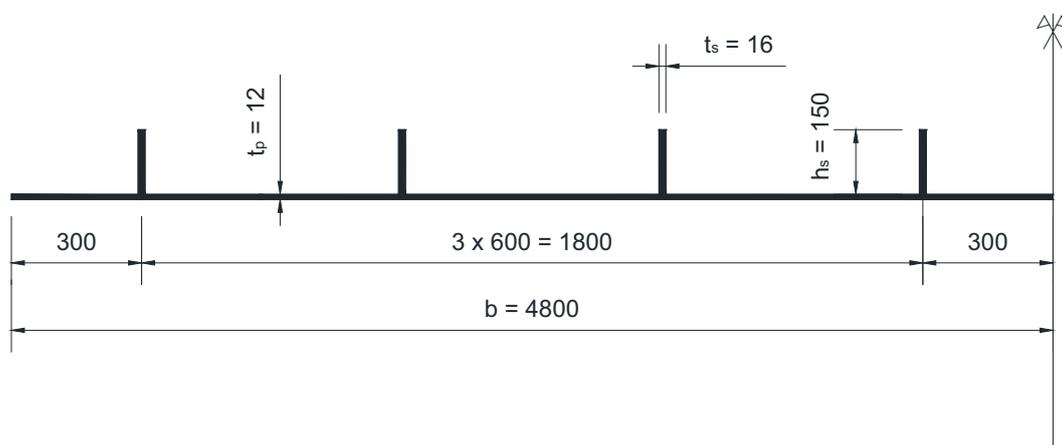


FIGURE A.1 – Dimension de la plaque raidie étudiée

### A.1.1 Aire efficace résultant du voilement local

Conformément aux indications données en section 4 du chapitre 1, on commence par déterminer la section efficace due au voilement local des panneaux secondaires et des raidisseurs.

#### a. Identification des sous-panneaux

Les sous-panneaux constituant les intrados sont les suivants (figure A.2) :

- 7 sous-panneaux (1) entre raidisseurs : type 1 ;
- 2 sous-panneaux (2) entre le raidisseur et le bord libre de la plaque : type 2 ;
- 8 panneaux de raidisseur (3) en plat simple : type 3.

#### b. Classe de sous-panneau

La classification des sections a été présentée au tableau A.11 suivant la définition de

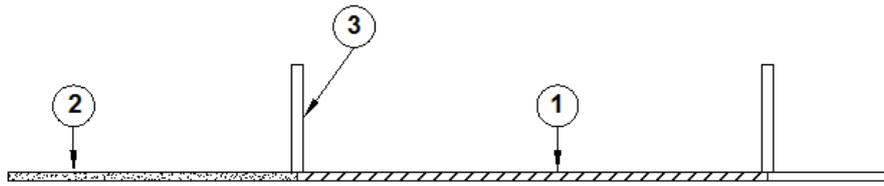


FIGURE A.2 – Composition des sous-panneaux de l'intrados

l'Eurocode EN 1993-1-1 (tableau 5.2). On constate que les sous-panneaux entre les deux raidisseurs est de classe 4 (susceptibles de voilement). Il est donc nécessaire de calculer leur section efficace réduite vis-à-vis du voilement local.

TABLE A.11 – Classe des sous-panneaux

| Sous-panneaux                          | n° 1<br>(Paroi interne)      | n° 2<br>(Paroi interne)      | n° 3<br>(Paroi en console)                          |
|--|------------------------------|------------------------------|---|
| Épaisseur $t$ (mm)                     | 12                           | 12                           | 16  |
| Longueur $c$ (mm)                      | $600-16 = 584$               | $300-16/2 = 292$             | 150   |
| $c/t$                                  | 48,67                        | 24,33                        | 9,38  |
| $\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$ | 0,814                        | 0,814                        | 0,814   |
| Comparaison                            | $c/t > 42 \cdot \varepsilon$ | $c/t < 33 \cdot \varepsilon$ | $10 \cdot \varepsilon < c/t < 14 \cdot \varepsilon$ |
| Classe                                 | 4                            | 1                            | 3   |

c. Traitement des sous-panneaux de classe 4

Les sous-panneaux sont entièrement comprimés ( $\chi = 1$ ), avec  $b = 584 \text{ mm}$ ,  $t = 12 \text{ mm}$ .

La largeur efficace est donc déterminée ainsi :

→ Coefficient de voilement :  $k = 4$  (compression uniforme)

→ Elancement réduit :  $\bar{\lambda}_p = \frac{b}{t} \frac{1}{28,4\varepsilon\sqrt{k}} = 1,05$

→ Coefficient de réduction :  $\rho = \frac{1}{\bar{\lambda}_p} - \frac{0,22}{\bar{\lambda}_p^2} = 0,75$

⇒ La largeur efficace :  $b_{e1} = b_{e2} = 0,75 \cdot \frac{584}{2} = 220 \text{ mm}$  (c.f figure A.3).

d. Section efficace vis-à-vis du voilement local

La section efficace de l'intrados vis-à-vis du voilement local est représentée à la figure A.3. Les sous-panneaux sont choisis volontierement de classe 4 à des fins pédagogique. Pour un dimensionnement correct, on aurait cherché à rendre pleinement efficaces tous les sous-panneaux du fond de caisson (en augmentant leur épaisseur par exemple).

L'aire brute de la plaque est obtenue en retranchant les deux demi-aires brutes des sous-panneaux aux extrémités de la paroi de l'aire brute totale (tôle de fond + raidisseurs) :

$$\begin{aligned} A_c &= A - A_{1/2 \text{ tôle au bord}} \\ &= (4800 \cdot 12 + 8 \cdot 150 \cdot 16) - 2 \cdot 150 \cdot 12 = 7,32 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Comme seule la section des tôles de type n° 1 est réduite du fait du voilement local,

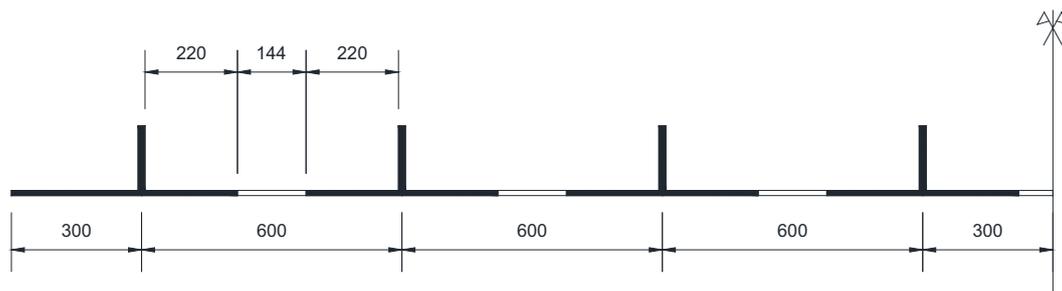


FIGURE A.3 – Aire efficace résultant du voilement local

l'aire efficace  $A_{c,eff,loc}$  est évaluée par :

$$A_{c,eff,loc} = 73200 - 7 \cdot 12 \cdot 144 = 6,11 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 \quad (\text{A.2})$$

## A.1.2 Réduction due au voilement global

### A.1.2.1 Comportement de type COLONNE

Lorsque les raidisseurs sont identiques (dimensions et espacement) et que le chargement est une compression uniforme, il est possible d'étudier une section représentative (figure A.4). Cette section se compose du raidisseur seul et d'une largeur collaborante de la plaque de fond égale à l'espacement entre deux raidisseurs. Ses caractéristiques sont les suivantes :

- Raidisseur seul  
Position du centre de gravité / fibre moyenne de la plaque :  $Z_{G12} = 81 \text{ mm}$ .
- Section brute du poteau  
Position du centre de gravité / fibre moyenne de la plaque :  $Z_G = 20,3 \text{ mm}$ .  
Aire :  $A_{sl,1} = 0,96 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$  et moment d'inertie  $I_{sl,1} = 1,64 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$ .
- Section efficace du poteau  
Aire :  $A_{sl,1,eff} = 0,78 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$ .

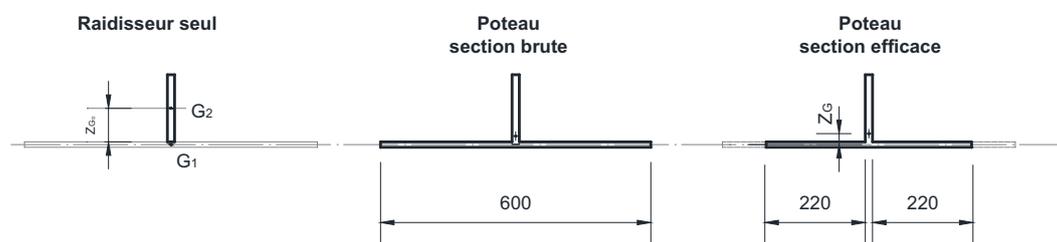


FIGURE A.4 – Section d'une colonne isolée

La longueur de flambement du poteau à considérer est la distance entre les diafragmes bordant la section  $a = 4800 \text{ mm}$ . La contrainte critique de flambement est égale

à :

$$\sigma_{cr,c} = \frac{\pi^2 EI_{sl,1}}{A_{sl,1} a^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210000 \cdot 1,64 \cdot 10^7}{0,96 \cdot 10^4 \cdot 6^2 \cdot 10^6} = 98 \text{ MPa.} \quad (\text{A.3})$$

L'élancement réduit est calculé comme suit :

$$\bar{\lambda}_c = \sqrt{\beta_{Ac} \frac{f_y}{\sigma_{cr,c}}} = 1,72 \quad \text{avec} \quad \beta_{Ac} = \frac{A_{sl,1,eff}}{A_{sl,1}} = \frac{0,78 \cdot 10^4}{0,96 \cdot 10^4} = 0,82 \quad (\text{A.4})$$

Le rayon de giration de la section brute du poteau vaut :

$$i = \sqrt{\frac{I_{sl,1}}{A_{sl,1}}} = \sqrt{\frac{1,64 \cdot 10^7}{0,96 \cdot 10^4}} = 41,3 \text{ mm.} \quad (\text{A.5})$$

A partir des positions des centres de gravités des sections, on calcul les excentrement suivants :

$$\begin{aligned} e_1 &= 60,7 \text{ mm} \\ e_2 &= 20,3 \text{ mm} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

D'où :

$$e = \max(e_1; e_2) = e_2 = 60,7 \text{ mm.} \quad (\text{A.7})$$

Les raidisseurs sont de simples plats de section ouverte, on utilise donc la courbe de flambement c ( $\alpha = 0,49$ ) de l'EN 1993-1-1. Le facteur d'imperfection équivalent est donné par :

$$\alpha_e = \alpha + \frac{0,09}{i/e} = 0,62. \quad (\text{A.8})$$

Finalement, le coefficient de réduction  $\chi_c$  se calcul suivant l'EN 1993-1-1 :

$$\phi = 0,5 \left[ 1 + \alpha_e (\bar{\lambda}_c - 0,2) + \bar{\lambda}_c^2 \right] = 2,45 \quad (\text{A.9})$$

$$\chi_c = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}_c^2}} = 0,238. \quad (\text{A.10})$$

### A.1.2.2 Comportement de type PLAQUE

Le comportement de type plaque consiste essentiellement à la recherche de la contrainte critique de voilement associée à la plaque orthotrope équivalente. Lorsque la plaque raidie étudiée est composée de plus de trois raidisseurs identiques, on peut utiliser la méthode de l'annexe A de l'EN 1993-1-5. La contrainte critique de voilement est donc calculée par la relation classique d'une plaque non-raïdie, c'est-à-dire sous la forme :

$$\sigma_{cr,p} = k_{\sigma,p} \sigma_E \quad (\text{A.11})$$

où  $k_{\sigma,p}$  est le coefficient de voilement conforme à la théorie des plaques orthotropes avec les raidisseurs "tartinés" sur la plaque. D'après l'annexe A de l'EN 1993-1-5, ce coefficient est donné par :

$$k_{\sigma,p} = \begin{cases} \frac{(1 + \alpha^2)^2 + \gamma - 1}{\alpha^2 (1 + \delta)} & \text{si } \alpha \leq \sqrt[4]{\gamma} \\ \frac{2(1 + \sqrt{\gamma})}{(1 + \delta)} & \text{si } \alpha \geq \sqrt[4]{\gamma} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Application numérique :

$\psi = 1$  : il s'agit d'une compression uniforme.

$I_{sl} = 1,306.10^4 \text{ cm}^4$  : Inertie de l'ensemble de la plaque raidie.

$I_p = 75,96 \text{ cm}^4$  : Inertie de flexion de plaque.

$$\Rightarrow \gamma = \frac{I_{sl}}{I_p} = 172.$$

$A_{sl} = 192 \text{ cm}^2$  : somme des aires brutes des raidisseurs longitudinaux individuels.

$A_p = 576 \text{ cm}^2$  : aire brute de la plaque seule.

$$\rightarrow \delta = \frac{\sum A_{sl}}{A_p} = 0,33$$

Comme le coefficient d'aspect  $\alpha = \frac{a}{b} = 1,25$  est inférieur à  $\sqrt[4]{\gamma} = 3,6$ , le coefficient de voilement de la plaque est calculé par l'expression suivante :

$$k_{\sigma,p} = \frac{(1 + \alpha^2)^2 + \gamma - 1}{\alpha^2 (1 + \delta)} = 85,2 \quad (\text{A.13})$$

La contrainte critique d'Euler est donnée par la relation :

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 = 1,19 \text{ MPa}. \quad (\text{A.14})$$

Par conséquent, la contrainte critique de la plaque raidie est égale à :

$$\sigma_{cr,p} = k_{\sigma,p} \cdot \sigma_E = 101 \text{ MPa}. \quad (\text{A.15})$$

L'élanement réduit est ensuite déduit par :

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\beta_{Ac} \frac{f_y}{\sigma_{cr,p}}} = 1,69 \quad \text{avec} \quad \beta_{Ac} = \frac{A_{c,eff,loc}}{A_c} = \frac{5,99.10^4}{7,32.10^4} = 0,82. \quad (\text{A.16})$$

Cette valeur est supérieure à la valeur limite de voilement plastique ( $\bar{\lambda}_0 = 0,673$ ), donc le coefficient de réduction est calculé par l'expression ci-dessous :

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,22}{\bar{\lambda}_p^2} = 0,514. \quad (\text{A.17})$$

### A.1.2.3 Comportement interpolé

Le coefficient de réduction  $\rho_c$  prenant en compte l'effet de voilement global se calcul par interpolation entre les deux valeurs des deux types comportements :

$$\rho_c = \chi_c + (\rho - \chi_c) (2 - \xi_c) \xi = 0,255 \quad (\text{A.18})$$

avec :

$$\xi = \frac{\sigma_{cr,p}}{\sigma_{cr,c}} - 1 = \frac{101}{98} - 1 = 0,03 \quad (\text{A.19})$$

### A.1.3 Capacité portante

Le coefficient de réduction  $\rho_c$  prenant en compte l'effet global ne s'applique qu'à l'aire effective au milieu de la plaque et pas à la partie efficace rattachée aux bords. L'aire efficace des intrados due aux effets du voilement est donc :

$$A_{c,eff} = \rho_c A_{c,eff,loc} + \sum b_{edge,eff} t \quad (\text{A.20})$$

$$= 0,255 \cdot 5,99 \cdot 10^4 + 2 \cdot 150 \cdot 12 = 1,89 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 \quad (\text{A.21})$$

La réduction par trainage de cisaillement n'est pas prise en considération et supposée négligeable. La charge ultime de la plaque raidie est donc égale à :

$$N_{ult} = \frac{f_y A_{c,eff}}{\gamma_{M1}} = \frac{355 \cdot 1,89 \cdot 10^{-2}}{1,1} = 6,1 \text{ MN}. \quad (\text{A.22})$$

Les valeurs obtenues par le modèle de résistance d'une plaque raidie de l'Eurocode EN 1993-1-5 sont en bon accord aux résultats numériques. La théorie permet d'évaluer correctement les contraintes critiques de flambement (comportement type colonne) et de voilement (comportement de plaque) par rapport les valeurs numériques (c.f figures A.5 et A.6). La charge ultime théorique est, quand à elle, inférieure à celle évaluée par éléments finis (du côté sécurité). Mais comme la configuration de la plaque étudiée se trouve dans la zone de transition, cet écart est dû aussi à la forme d'interpolation. L'utilisation de la proposition de Maquoi et De Ville De Goyet [93] permet corriger cet écart en donnant une valeur très proche au résultat numérique (c.f figure A.7).

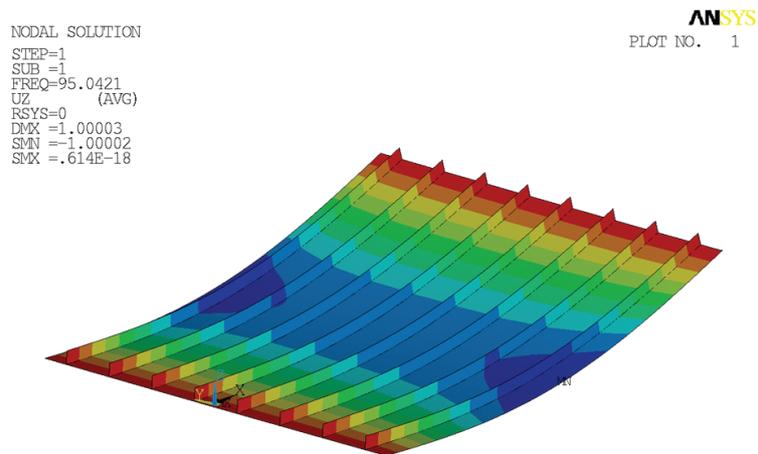


FIGURE A.5 – Flambement de colonne :  $\sigma_{cr,c}^{E.F.} = \sigma_{cr,c}^{thorie} = 95 \text{ MPa}$

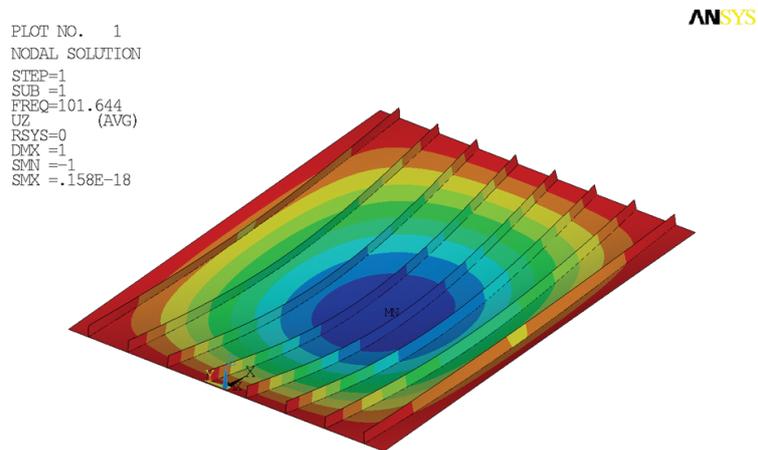


FIGURE A.6 – Voilement de plaque :  $\sigma_{cr,p}^{E.F.} = \sigma_{cr,p}^{thorie} = 101 \text{ MPa}$

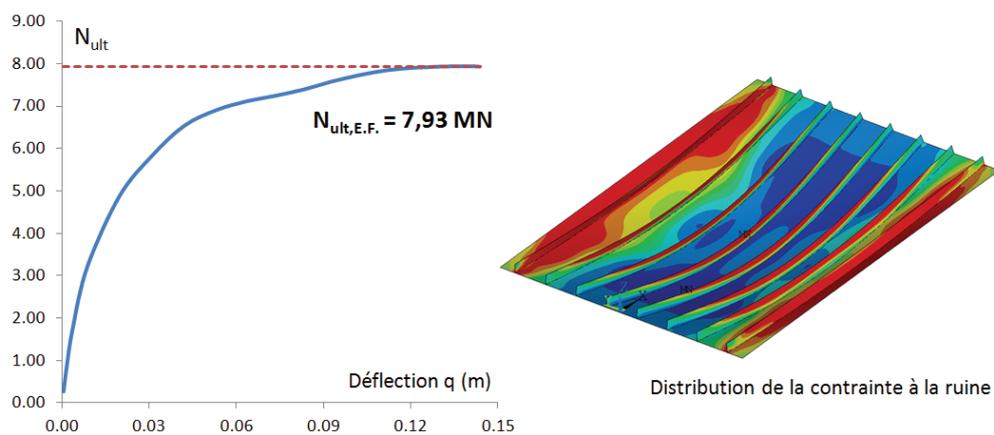


FIGURE A.7 – Charge de ruine :  $N_{ult}^{E.F.} = 7,93 \text{ MN} \simeq N_{ult}^{Maquoi} = 7,15 \text{ MN}$

## A.2 THÉORIE NON-LINÉAIRE DE COQUE DE DONNEL. APPLICATION AUX PANNEAUX CYLINDRIQUES

### A.2.1 Théorie de coque mince de Donnell

La présentation de la théorie de stabilité des coques minces, élaborée par Donnell [50], qui est faite dans cette annexe est fortement inspirée celles qui ont fait par Amabili [11] et se limite aux éléments qui ont un intérêt direct pour ce travail.

Une coque est considérée mince si son épaisseur  $t$  est faible vis-à-vis du rayon de courbure  $R$  de la surface moyenne (en pratique,  $t/R < 1/10$ ). Cette caractéristique géométrique permet d'un point de vue mécanique de ramener le problème tridimensionnel de la détermination des déformations d'un milieu continu à un problème bidimensionnel, dans lequel la détermination du champ de déplacement  $U$  de la surface moyenne suffit à décrire correctement le comportement de la structure. La réduction d'une coque à deux dimensions a donné naissance à diverses théories Amabili [11], dont les écarts reposent entre autres sur les termes du champ déplacement considérés pour le calcul des déformations, ainsi que sur les termes du tenseur des contraintes pris en compte.

#### A.2.1.1 Les hypothèses de comportement

Donnell se place dans le cadre de déformations modérées subies par une coque de rayon  $R$ , de longueur  $L$  et d'épaisseur  $t$ , constituée d'un matériau homogène, isotrope et élastique ayant un module de Young  $E$  et un coefficient de Poisson  $\nu$ .

Les champs de déplacements sont notés  $u, v, w$ , dans les directions longitudinale, transversale et verticale respectivement dans le système de coordonnées  $\{x, y, z\}$  tel que défini sur la figure A.8.

La théorie des coques de Donnell repose sur les hypothèses suivantes :

- H1 La coque est suffisamment mince : l'épaisseur est petite devant le rayon de courbure et la longueur ( $t \ll R, t \ll a, b$ ).
- H2 Les déformations sont petites, les principes de l'élasticité linéaire (i.e le loi de Hook) s'appliquent.
- H3 Les lignes droites normales à la surface moyenne non déformée restent droites et normales à la surface moyenne déformée, leur longueur est inchangée.
- H4 Les contraintes normales agissant perpendiculairement à la surface normale peuvent être négligées comparativement aux contraintes agissant dans le plan de la surface moyenne :

$$\sigma_{ZZ} \ll \sigma_{XX} \quad \text{et} \quad \sigma_{ZZ} \ll \sigma_{YY}$$

H5 Les déplacements du  $u$  et  $v$  sont négligeables, le déplacement  $w$  est du même ordre de grandeur que l'épaisseur  $t$  de la coque :

$$u \ll t, v \ll t \quad \text{et} \quad |w| = O(t)$$

H6 Les dérivées de  $w$  sont petites, mais leur carrés et leurs produits sont du même ordre que les déformations considérées :

$$\left\{ \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \right\} \ll 1 \quad \text{et} \quad \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \left| \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right| \right\} = O(\varepsilon)$$

H7 Les changements de courbure sont petits et l'influence de  $u$  et  $v$  est négligeable, de sorte qu'ils peuvent être représentés par des fonctions linéaires de  $w$  seulement.

Les hypothèses H3 et H4 constituent les hypothèses classiques dites de Love-Kirchhoff. Les hypothèses H5 à H7 traduisent le fait que les déformations sont essentiellement liées au déplacement radial  $w$ .

### A.2.1.2 Equations d'équilibre

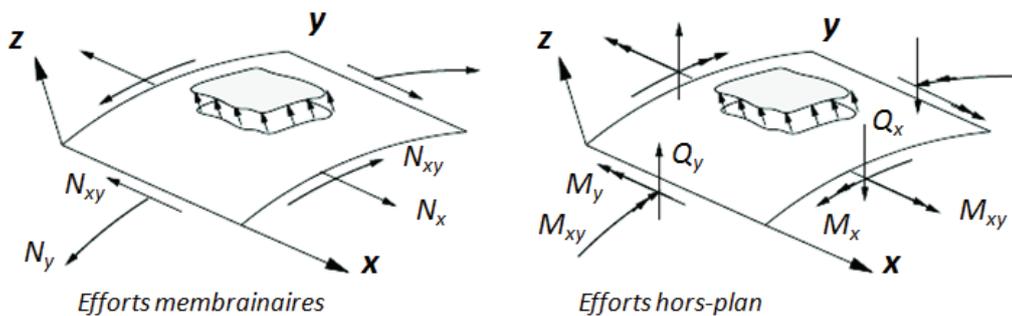


FIGURE A.8 – Résultant d'effort d'un élément coque

L'hypothèse de Kirchhoff-Love implique que les déformations dues aux moments de flexion de chacun des points mesurés depuis la membrane sont calculées par les expressions :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -zK_{xx} \\ \varepsilon_{yy} &= -zK_{yy} \\ \varepsilon_{xy} &= -zK_{xy} \end{aligned} \tag{A.23}$$

dans lesquels  $K_{xx}, K_{xy}, K_{yy}$  représentent les courbures. De façon identique à la plaque, la relation moment-courbure est obtenue par :

$$\begin{aligned} M_{xx} &= D (K_{xx} + \nu K_{yy}) \\ M_{yy} &= D (K_{yy} + \nu K_{xx}) \\ M_{xy} &= D (1 - \nu) K_{xy} \end{aligned} \tag{A.24}$$

où  $M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}$  sont les moments de flexion et  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  est la rigidité de flexion. En utilisant l'hypothèse des petites déformations (H2), l'expression de la courbure est calculée par :

$$\begin{aligned} K_{xx} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ K_{yy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left[ \frac{w}{R^2} \right] \\ K_{xy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left[ \frac{1}{2} \frac{w}{R \partial x} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Les expressions entre crochets représentent une petite correction par rapport à la théorie de plaque et sont souvent négligeables sauf dans le cas où le rayon de courbure est suffisamment petit.

La loi de Hook s'écrit ensuite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \frac{Et}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \\ N_{yy} &= \frac{Et}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \\ N_{xy} &= \frac{Et}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

où les déformations de la membrane sont calculées comme dans le cas d'une plaque :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Les termes entre crochets sont la source des non linéarités et sont pris en compte dans l'expression de l'énergie potentielle pour avoir une meilleure précision.

Les équations d'équilibre local s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= Q_x \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} &= Q_y \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_N &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

où  $M_{(\bullet)}$  est le moment,  $Q_{(\bullet)}$  est la force transversale,  $N_{(\bullet)}$  est la compression membranaire et  $p_N$  est la pression normale due aux chargements membranaires d'un élément coque. Ces équations d'équilibre peuvent être ramenées à une seule relation :

$$p_N = -\frac{N_{yy}}{R} + \left( N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.30})$$

Les équations A.24 à A.30 représentent les équations principales du problème. La solution est obtenue à l'aide de la fonction d'Airy, noté  $F$ , qui doit vérifier les conditions :

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ N_{yy} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ N_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

La condition de compatibilité pour les déformations membranaires est :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{A.32})$$

En remplaçant les équations A.26 et A.31 dans l'équation A.32, on obtient la première équation différentielle du problème :

$$\frac{1}{Et} \nabla^4 F = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{A.33})$$

La deuxième équation différentielle est obtenue en introduisant l'équation A.25 dans A.24, puis dans l'équation A.30 :

$$D \nabla^4 w = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (\text{A.34})$$

Les deux équations A.33 et A.34 sont désignées comme les équations de Donnel. Dans le cas extrême où le rayon de courbure tend vers l'infini  $R \rightarrow \infty$ , ces deux équations deviennent les équations de Von Karman-Flöppel pour le voilement non-linéaire des plaques planes.

### A.2.2 Expression linéarisée

Selon Donnell, l'étude de la stabilité d'une coque cylindrique mince peut être effectuée à partir des équations d'équilibre en appliquant le critère de l'équilibre adjacent. On suppose alors que les variables  $w$  et  $F$  introduites dans le paragraphe précédent peuvent s'écrire :  $F = F + F^\circ$  et  $w = w + w^\circ$  où  $F^\circ, w^\circ$  représentent l'état initial dans l'équation A.34. En injectant ces expressions dans les équations d'équilibre et en soustrayant à la même équation écrite pour  $F^\circ, w^\circ$ , Donnell a obtenu une nouvelle relation :

$$\frac{1}{Et} \nabla^4 F = 2 \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{A.35})$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur et en supposant que le cylindre est parfait à l'état initial ( $\frac{\partial w^\circ}{\partial x^2} = \frac{\partial w^\circ}{\partial x \partial y} = \frac{\partial w^\circ}{\partial y^2} \simeq 0$ ), l'équation A.35 s'écrit :

$$\frac{1}{Et} \nabla^4 F = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{A.36})$$

En appliquant l'opérateur Laplacien  $\nabla^4$  à l'équation A.34 et remplaçant l'expression de  $F$  dans l'équation A.35, on obtient l'équation linéarisée de Donnell pour élément de coque cylindrique :

$$D \nabla^8 w + \frac{Et}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - t \nabla^4 \left( \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\sigma_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \nabla^4 p = 0 \quad (\text{A.37})$$

L'équation A.37, appelée équation linéarisée de Donnell, n'est valable que dans le cas d'un cylindre parfait. Elle sert à calculer la contrainte critique. Il faut noter qu'une telle situation n'est jamais rencontrée en réalité à cause de l'existence de défauts initiaux.

### A.2.3 Application aux panneaux cylindriques - Expressions de Batdorf

Pour un cylindre sous la compression axiale ( $N_y = N_{xy} = 0$  et  $p = 0$ ), l'équation A.37 se traduit simplement par :

$$D \nabla^8 w + \frac{Et}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - t \nabla^4 \left( \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (\text{A.38})$$

La solution de cette équation différentielle est recherchée sous une forme où elle vérifie les conditions d'appuis simples sur le bord :

$$w = w_0 \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{ny}{R}. \quad (\text{A.39})$$

Dans cette équation,  $m$  est le nombre de demi-ondes dans la direction longitudinale du chargement et  $n$  est le nombre entier d'ondes dans la direction circonférentielle. En introduisant A.40 dans l'équation de Donnell, la contrainte critique de voilement peut être déduite :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \frac{(m^2 + \bar{n}^2)}{m^2} + \frac{12Z_b^2 m^2}{\pi^4 (m^2 + \bar{n}^2)^2} \quad (\text{A.40})$$

où  $\bar{n} = \frac{\pi R n}{b}$ ,  $k$  est le nombre de demi-ondes dans le sens circonférentiel,  $b$  est la largeur de la tôle et  $Z_b = \frac{b^2}{Rt} \sqrt{1-\nu^2}$  est le paramètre de Batdorf caractérisant la courbure. La valeur critique de voilement est identifiée comme la valeur qui minimise l'équation A.40 :

$$\frac{(m^2 + \bar{n}^2)^2}{m^2} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} Z_b. \quad (\text{A.41})$$

De la sorte, la contrainte critique de voilement est donnée par :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \left( 4 + \frac{3Z_b^2}{\pi^4} \right) \quad (\text{A.42})$$

La dernière parenthèse de l'équation A.42 est le coefficient de voilement d'une tôle courbe cylindrique sous une compression axiale :

$$k_c = 4 + \frac{3Z_b^2}{\pi^4} \tag{A.43}$$

Si le rayon de courbure tend vers l'infini ( $R \rightarrow \infty$ ), cette expression converge vers la valeur de voilement d'une plaque plane :  $k_c = 4$ .

Il faut noter que l'expression A.44 n'est valable que si  $Z_b \leq \frac{2\pi^2}{\sqrt{3}}$ . Pour couvrir tout l'intervalle de variation de  $Z_b$ , une version modifiée approximative du coefficient de voilement est proposé sous la forme :

$$k_c = 4\sqrt{1 + \frac{3Z_b^2}{\pi^4}} \tag{A.44}$$

ou sous la forme d'abaques (nommée souvent abaques de Batdorf) présentée à la figure A.9.

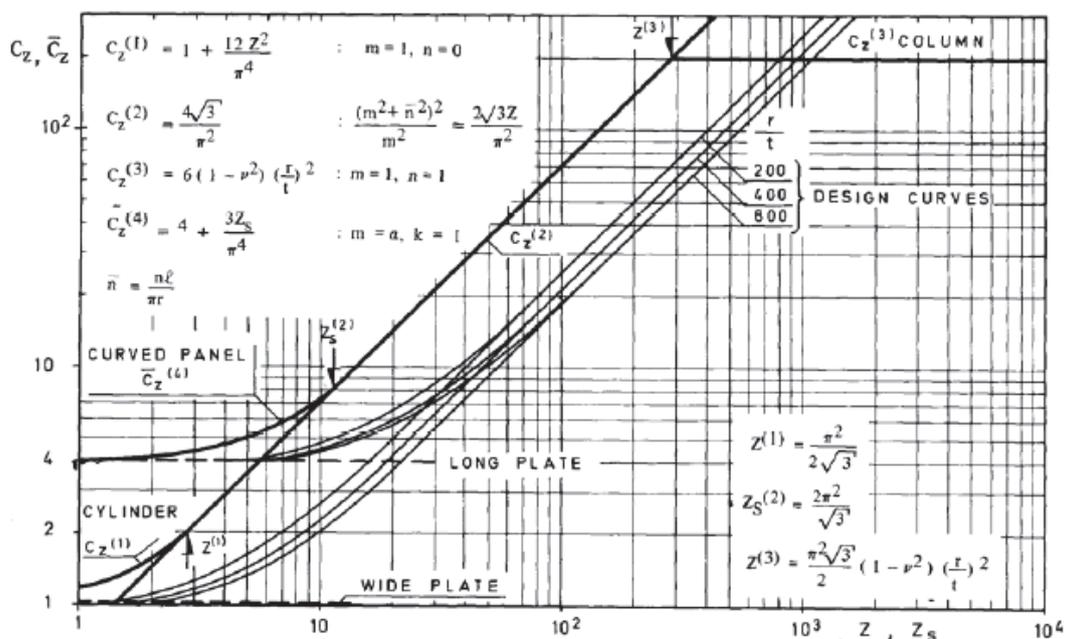


FIGURE A.9 – Abaque de Batdorf - Coefficient de voilement d'une tôle cylindrique sous la compression axiale

### A.3 VOILEMENT DES CYLINDRES RAIDIS SOUMIS À UNE COMPRESSION AXIALE

L'état-de-l'art du dimensionnement d'un cylindre raidi soumis à une compression axiale est présenté dans cette section. Il s'agit d'une coque cylindrique (figure A.10) d'épaisseur constante  $t$ , raidie par des raidisseurs longitudinaux régulièrement espacés d'une distance  $b$ . Les raidisseurs ont une section constante  $A_s$  identique sur toute la longueur du cylindre.

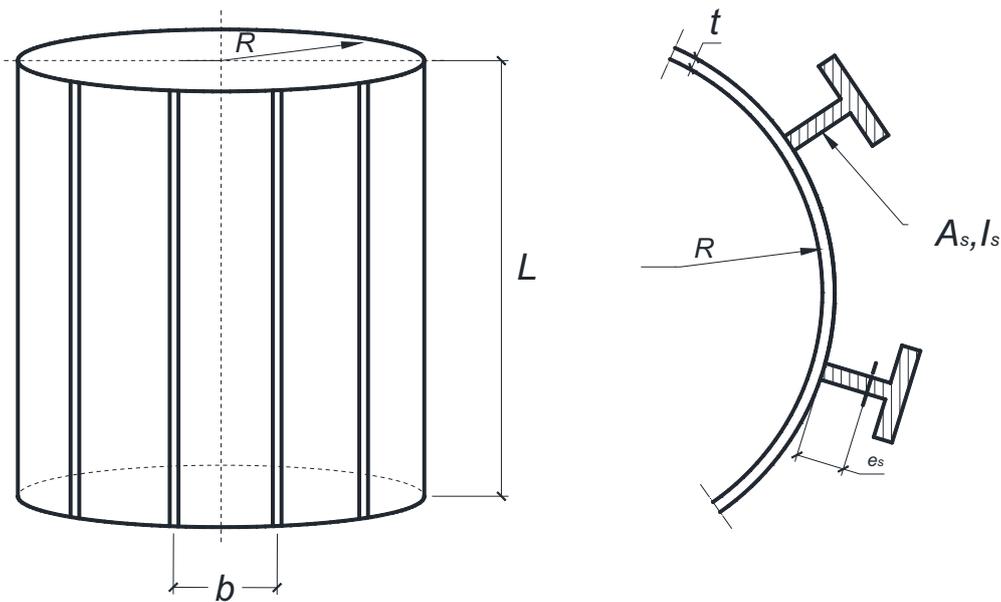


FIGURE A.10 – Coque cylindrique raidie longitudinalement

Ce problème est résolu à l'aide de la théorie des coques orthotropes de la sorte que le domaine de validité est limité par les conditions suivantes :

$$\frac{A_s}{bt} \leq 2$$

$$\frac{I_s}{bt^3} \leq 15 \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{I_{ts}}{bt^3} \leq 2,4 \quad (\text{A.46})$$

En dehors de ces limites, les cylindres sont considérés comme fortement raidis, et en conséquence, peuvent être traités comme des colonnes en flambement.

L'ensemble des prochaines notions est essentiellement retiré du guide de conception donné par le groupe de travail ECCS TWG 8.4 sur le voilement des coques car ce cas de figure n'a pas encore été intégré dans la norme actuelle de l'Eurocode (EN 1993-1-6 dernière version en Juillet 2007).

### A.3.1 Contrainte critique de voilement

La première solution, donnée par Taylor [145], est obtenue en utilisant l'équation différentielle de Donnell (A.37). L'effet des raidisseurs est intuitivement représenté par le nouveau terme  $\frac{EI_{eff}}{s} \frac{\partial^4 x}{\partial x^4}$ , où  $EI_{eff}$  est la rigidité du raidisseur. L'expression de la contrainte critique est obtenue sous la forme :

$$k_x = \frac{1}{1 + \frac{A}{st}} \left( \gamma + \frac{4\sqrt{3}}{\pi^2} Z \right) \quad (\text{A.47})$$

où  $\gamma = \frac{12(1-\nu^2)I_s}{st^3}$  représente la contribution des raidisseurs, tandis que  $\frac{4\sqrt{3}}{\pi^2} Z_s$  représente l'effet de la courbure sur le cylindre seul.

L'avantage de cette solution est sa simplicité. Cependant, la position du raidisseur (sur la surface concave ou convexe de la coque) n'est pas prise en compte. Or, d'après Van der Neut [151], l'influence du raidisseur n'est pas exactement la même selon sa position du raidisseur, les écarts peuvent atteindre jusqu'à 50%. Pour cette raison, Block *et al.* [28] ont étudié l'effet de l'excentricité dans ce qui deviendra par la suite la théorie de référence des travaux ultérieurs, en particulier de l'expression de Miller [101] retenue dans le guide de ECCS :

$$\sigma_x = \min \left[ A_{33} + \frac{A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} A_{13} + \frac{A_{12}A_{13} - A_{11}A_{23}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} A_{23} \right] \frac{1}{(n\pi/L)^2} \frac{1}{t_m} \quad (\text{A.48})$$

où :

$$t_m = t + \frac{A_s}{b} \quad \text{est l'épaisseur équivalente;} \quad (\text{A.49})$$

$$b_{eff} = 1,9t\sqrt{E f_y}; \quad (\text{A.50})$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= K_x \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + K_{x\theta} \left( \frac{m}{r} \right)^2 \\ A_{22} &= K_\theta \left( \frac{m}{r} \right)^2 + K_{\theta x} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \\ A_{12} &= (K_v + K_{x\theta}) \frac{n\pi}{L} \frac{m}{r} \\ A_{13} &= \frac{K_v}{r} \frac{n\pi}{L} + K_s \left( \frac{n\pi}{L} \right)^3 \\ A_{23} &= \frac{K_\theta}{r} \frac{m}{r} \\ A_{33} &= D_x \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 + D_{x\theta} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{m}{r} \right)^2 + D_\theta \left( \frac{m}{r} \right)^4 + \frac{K_\theta}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

et les rigidités sont :

$$\begin{aligned}
K_x &= \frac{Et}{1-\nu^2} \frac{b_{eff}}{b} + \frac{EA_s}{b} \\
K_v &= \frac{\nu Et}{1-\nu^2} \\
K_\theta &= \frac{Et}{1-\nu^2} \\
K_{x\theta} &= K_{\theta x} = 0,5Gt \left( \frac{b_{eff}}{b} + 1 \right) \\
K_s &= \frac{EA_s e_s}{b} \\
D_x &= \left[ \frac{Et^3 b_{eff}}{12(1-\nu^2)} + EI_s + EA_s e_s^2 \right] \frac{1}{b} \\
D_{x\theta} &= \left[ \frac{\nu Et^3 b}{6(1-\nu^2)} + Gt^3 \frac{b + b_{eff}}{6} + GI_{ts} \right] \frac{1}{b} \\
D_\theta &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}
\end{aligned} \tag{A.52}$$

$m$  et  $n$  sont des nombres de demi-onde (nombre entier) dans le sens circonférentiel et longitudinal respectivement. L'expression A.48 n'est valable que si la valeur minimale obtenue de  $m$ , noté  $m_{cr}$ , satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{cases} m_{cr} \geq 4 \\ m_{cr} \leq \frac{n_s}{3,5} \end{cases} \tag{A.53}$$

La première condition,  $m_{cr} \geq 4$ , est donnée pour que la théorie de Donell soit en accord par comparaison avec les résultats d'essais. La deuxième condition signifie que l'espace-ment des raidisseurs est petit par rapport à la longueur d'onde de voilement théorique pour que l'hypothèse de "tartinage" soit applicable. Si la valeur de  $m_{cr}$  ne remplit pas les deux conditions, la contrainte critique peut être évaluée par l'expression suivante :

$$\sigma_x = \frac{\pi^2 EI_{se}}{L^2 b t_m} + \psi \alpha_x \sigma_{x,cr} \tag{A.54}$$

où :

$$\psi = \begin{cases} 1 & \text{pour les raidisseurs externes} \\ \frac{1}{1 + \frac{A_s}{bt}} & \text{pour les raidisseurs internes} \end{cases} \tag{A.55}$$

$$\alpha_x = \frac{0,62}{1 + 1,91 \left( \frac{\Delta w_k}{t_m} \right)^{1,44}} \tag{A.56}$$

avec :

$$\frac{\Delta w_k}{t_m} = \frac{1}{25} \sqrt{r t_m} \tag{A.57}$$

et

$$\sigma_{x,cr} = 0,605 \frac{Et}{r} \tag{A.58}$$

Cette équation est une approximation qui peut être attribuée au travail de Walker et Sridharan [154]. Elle a été reformulée par Samuelson *et al.* [127] pour la mettre en conformité

avec l'EN 1993-1-6. Dans cette expression, la contrainte critique de voilement d'un cylindre raidi est obtenue en sommant les deux valeurs critiques : (1) de flambement des raidisseurs seuls (y compris une largeur efficace de la tôle) et (2) de voilement d'un cylindre non-raidi seule. La valeur obtenue de la contrainte critique est en général très sévère, à cause de ce que l'effet du support élastique radial des raidisseurs longitudinaux, assuré par l'effet membranaire de la coque, n'est pas pris en compte.

### A.3.2 Courbe de réduction

Une fois que la contrainte critique de voilement est obtenue, le coefficient de réduction  $\chi$  par voilement global est évalué par les expressions suivantes :

$$\chi = 1 \quad \text{lorsque} \quad \lambda \leq \lambda_0 \quad (\text{A.59})$$

$$\chi = 1 - \beta \left( \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_p - \lambda_0} \right)^n \quad \text{lorsque} \quad \lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_p \quad (\text{A.60})$$

$$\chi = \frac{\alpha}{\lambda^2} \quad \text{lorsque} \quad \lambda_p \leq \lambda \quad (\text{A.61})$$

où la valeur des paramètres dépend du rapport  $\frac{A_s}{b t}$  :

– Pour un cylindre fortement raidi,  $\frac{A_s}{b t} > 0,2$  :

$$\alpha = 0,65$$

$$\lambda_0 = 0,40$$

$$\beta = 0,60$$

$$\eta = 1,0$$

– Pour un cylindre légèrement raidi,  $\frac{A_s}{b t} < 0,06$ , ce sont les paramètres du cylindre non-raidi qui sont utilisés :

$$\alpha = \alpha_x \quad \text{de l'expression A.56}$$

$$\lambda_0 = 0,20$$

$$\beta = 0,60$$

$$\eta = 1,0$$

– Pour un cylindre moyennement raidi, les paramètres sont obtenus par interpolation linéaire entre les deux séries précédentes, en utilisant le rapport de la section  $\frac{A_s}{b t}$  comme paramètre d'interpolation.

## A.4 PLAN D'EXPÉRIENCE NUMÉRIQUE : SUITE À FAIBLE DISCRÉPANCE

### A.4.1 Naissance des suites à faible discrédance

Les plans d'expérience numérique diffèrent des plans physiques développés en laboratoire par leur caractère déterministe. Les répétitions d'expérience sont inutiles puisque celles-ci donnent la même réponse. Il est de plus inutile de répartir au hasard les expériences car les conditions expérimentales n'influent pas sur la réponse. L'objectif attendu pour le choix des points est donc principalement le remplissage uniforme de l'espace étudié et la non-redondance des points projetés sur les sous-espaces. Plusieurs plans sont développés pour parvenir à cet objectif, notamment les plans Hypercubes Latins qui sont initialement très utilisés pour leur simplicité d'usage et de construction.

L'échantillonnage par hypercube latin, connu également sous le nom d'échantillonnage stratifié, consiste à découper l'espace des variables d'entrée  $[0, 1]$  en  $n$  segments de même longueur. En faisant le produit cartésien de ces intervalles, on obtient un maillage de  $n^d$  cellules de même taille où  $d$  est le nombre de variable d'entrée. Ensuite, on choisit  $n$  cellules parmi les  $n^d$  possibles de telle manière que les cellules soient représentées une fois chacune. Enfin, on tire un point au hasard dans chaque cellule présélectionnée. La figure A.11 illustre un échantillonnage par hypercube latin en dimension 2. Par cette construction, les  $n$  valeurs obtenues pour la variable  $X_1$  sont couplées aux  $n$  valeurs de la variable  $X_2$  de manière aléatoire et équiprobable pour chaque combinaison.

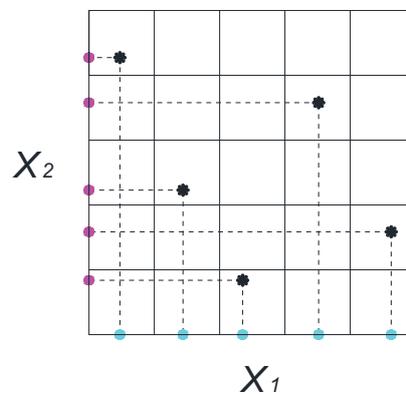


FIGURE A.11 – Échantillonnage par hypercube latin

Les points d'un hypercube latin ont la propriété intéressante d'être uniformément distribués sur les axes des variables. Cependant, cette propriété n'assure pas l'uniformité des points sur tout le domaine d'étude. C'est le cas par exemple de l'hypercube latin de la figure A.12 où les points sont placés sur l'une des diagonaux du domaine expérimental. Si la réponse réelle est une fonction de  $(X_2 - X_1)$ , alors l'information donnée par ce plan d'expériences se réduit à un point au lieu de cinq.

Comme on l'a évoqué au chapitre 5 pour la méthode de planification numérique, le caractère aléatoire des points est moins important que leur distribution uniforme. D'où

l'idée de remplacer les points aléatoires par des points issus de suites déterministes ayant une distribution plus uniforme. C'est ce qui a donné naissance aux méthodes des quasi-Monte Carlo.

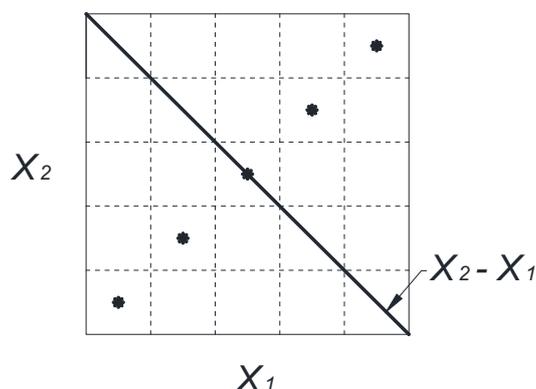


FIGURE A.12 – Risque éventuel d'un échantillonnage par hypercube latin

#### A.4.2 La méthode de quasi-Monte Carlo : des suites à faible discrédance

Étudier l'uniformité d'une distribution de points est un travail difficile, voire même impossible en grande dimension. Il est donc utile de se référer à des critères afin de pouvoir décider si une distribution est uniforme ou non et de vérifier le bon remplissage de l'espace. Pour quantifier l'écart à l'uniformité d'une suite finie de points, la méthode de quasi-Monte Carlo utilise un critère appelé *discrédance*. Pour cet effet, la méthode quasi-Monte Carlo est aussi appelée la méthode des suites à faible discrédance.

Par définition, la discrédance est une mesure de l'écart existant entre une situation de référence (l'uniformité théorique) et une configuration donnée. Elle est définie pour une suite finie de  $n$  points  $x = (x_1, \dots, x_n)$  dans  $[0, 1]$  comme suit :

$$D_n(x) = \sup_{t \in [0, 1]^s} \left| \frac{A(t, x)}{n} - \prod_{j=1}^s t^j \right| \quad (\text{A.62})$$

où  $A(t, x)$  est le nombre de points de  $x$  qui appartiennent au pavé  $P = [0, t^1[ \times \dots \times [0, t^s[$ . Il en déduit qu'une suite  $x_n$  est considérée comme uniformément distribuée si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(x) = 0 \quad (\text{A.63})$$

La figure A.13 illustre la définition de la discrédance d'une suite de Sobol' de  $n = 64$  points. Par exemple, pour le pavé  $P$ , il y a 17 points se trouvant à l'intérieur de  $P$ , la discrédance de ce cas est de :

$$D_n(x) = \frac{17}{64} - 0,5 \times 0,5 = 0,0156$$

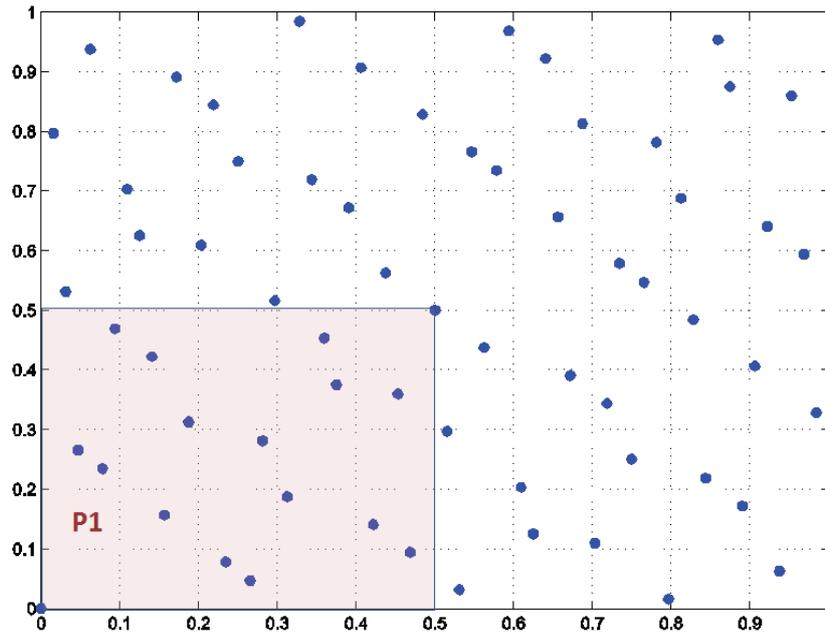


FIGURE A.13 – Echantillonnage par une suite de Sobol' :  $n = 64$

En faisant varier le pavé  $P_i$ , on obtiendra la valeur maximale de la discrédance de cette suite. Il est démontrable que la discrédance des  $N$  premiers termes d'une suite quasi-aléatoire a la forme suivante :

$$D_N(x^1, x^2, \dots, x^N) \leq C_s (\log N)^s + O\left((\log N)^{s-1}\right), \quad \text{pour } N \geq 2 \quad (\text{A.64})$$

Le principe des suites à faible discrédance est donc de minimiser le plus possible le constant  $C_s$ . Plusieurs techniques sont développées pour atteindre cet objectif. Des exemples de suites à faible discrédance sont données par Halton (1960), Hammersley (1960), Sobol' (1967), Faure (1982) et Niederreiter (1987). Ces suites sont toutes simples à mettre en œuvre et garantissent une faible discrédance. Dans la prochaine section, on présentera la construction des suites de Sobol' qui ont été adoptées dans ce travail de thèse.

### A.4.3 Construction de la suite de Sobol'

Proposée par un mathématicien russe I.M. Sobol en 1967, la suite de Sobol' semble être la plus utilisée parmi les suites de faible discrédance à l'heure actuelle. Pour pouvoir décrire la génération de cette suite, on a besoin des notions complémentaires suivantes.

#### A.4.3.1 Notions préliminaires

##### a. Fonction XOR

La fonction XOR (fonction OU exclusif), fréquemment utilisée en informatique, est un opérateur logique de l'algèbre de Boole. Son symbole est traditionnellement  $\oplus$ . À deux

opérandes, qui peuvent avoir chacune la valeur VRAI ou FAUX, elle associe un résultat qui a lui-même la valeur VRAI si seulement si les deux opérandes ont des valeurs distinctes.

*Exemple :*

$$\begin{aligned} 5 \oplus 3 &= 6 & (101 \oplus 11 &= 110) \\ 12,5 \oplus 4,25 &= 8,75 & (1100,1 \oplus 100,01 &= 1000,11) \end{aligned}$$

#### b. Polynôme primitif

Dans la construction des suites de Sobol', il convient d'utiliser des polynômes primitifs. On rappelle à cet effet la définition d'un polynôme primitif : "un polynôme est dit primitif s'il est irréductible et si le plus petit entier  $n$  pour lequel il divise  $x^n + 1$  est égal à  $n = 2^s - 1$ ".

*Exemple :*

Considérons le polynôme  $f(x) = 1 + x + x^2$ . Ce polynôme est *irréductible* sur le corps  $Z_2$  ( $Z_2$  signifie que les coefficients du polynôme ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1). Il est *primitif* car il divise complètement  $x^3 + 1$  et son ordre  $n$  est égal à 3 ( $n = 2^2 - 1 = 3$ ).

#### c. Nombre de direction $v_k$

Le paramètre  $v_k$  est défini par :  $v_k = \frac{m_k}{2^k}$  où  $m_k$  est obtenu à l'aide de la fonction récursive :

$$m_k = 2a_1 m_{k-1} \oplus 2^2 a_2 m_{k-2} \oplus \dots \oplus 2^{sj-1} a_{sj-1} m_{k-sj+1} \oplus 2^{sj} m_{k-sj} \oplus m_{k-sj} \quad (\text{A.65})$$

où  $a_k$  est le coefficient du polynôme primitif  $f(x)$  mentionné ci-dessus. La valeur de  $m_k$  devrait être un nombre entier, impair et inférieur à  $2^k$  :  $0 < m_k < 2^k$ .

*Exemple :*

Supposons un polynôme primitif de forme  $f(x) = x^3 + x + 1$ , donc les deux coefficients  $a_k$  sont :  $a_1 = 0$  et  $a_2 = 1$ . On en déduit facilement que :  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 3$  et  $m_3 = 7$ , ce qui donne  $v_1 = 1/2^1 = 0,5$ ,  $v_2 = 3/2^2 = 0,75$  et  $v_3 = 7/2^3 = 0,875$ . Les autres valeurs de  $m_k$  sont obtenues par l'expression A.65 comme suit (après avoir introduit les coefficients du polynôme  $f(x)$ ) :

$$m_k = 4m_{k-2} \oplus 8m_{k-3} \oplus m_{k-3}.$$

De ce fait,

$$\begin{aligned} m_4 &= 12 \oplus 8 \oplus 1 = 101 = 5 \\ \Rightarrow v_4 &= \frac{5}{2^4} = 0,3125 \end{aligned}$$

#### d. Gray Code

Le "Gray Code" d'un nombre entier  $j$ , noté  $G(j)$ , est défini comme suit :

$$G(j) = j \oplus \text{int} \left[ \frac{j}{2} \right]. \quad (\text{A.66})$$

où  $\text{int} \left[ \frac{j}{2} \right]$  représente le plus grand nombre entier.

**Exemple :**

$$\begin{aligned} G(1) &= 1 \oplus 1 = 1 \\ G(2) &= 2 \oplus 1 = (1 \times 2^1 + 0) \oplus 1 = 10 \oplus 1 = 11 = 3 \\ G(3) &= 3 \oplus 2 = (1 \times 2^1 + 1) \oplus (1 \times 2^1 + 0) = 11 \oplus 10 = 10 = 2 \\ G(4) &= 4 \oplus 2 = (1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0) \oplus (1 \times 2^1 + 0) = 100 \oplus 10 = 110 = 6 \\ G(5) &= 5 \oplus 3 = (1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1) \oplus (1 \times 2^1 + 1) = 101 \oplus 11 = 111 = 7 \end{aligned}$$

### A.4.3.2 Construction d'une suite de Sobol'

Avec ces outils, les suites de Sobol' sont faciles à générer. Une suite de Sobol' en dimension 1 est définie comme suit :

$$x_n = g_1 v_1 \oplus g_2 v_2 \oplus g_3 v_3 \dots \dots \dots \tag{A.67}$$

où  $\dots g_3 g_2 g_1$  est la représentation binaire de  $G(n)$ . Par cette définition, on a :

$$\begin{aligned} n = 1 : G(1) = 1(1) &\rightarrow \begin{cases} g(1) = 1, v_1 = 0,5 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1 \times 0,5 = 0,5 \\ n = 2 : G(2) = 3(11) &\rightarrow \begin{cases} g(1) = 1, v_1 = 0,5 \\ g(2) = 1, v_2 = 0,75 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 0,5 \oplus 0,75 = 0,25 \\ n = 3 : G(3) = 2(10) &\rightarrow \begin{cases} g(1) = 0, v_1 = 0,5 \\ g(2) = 1, v_2 = 0,75 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 0 \oplus 0,75 = 0,75 \\ n = 4 : G(4) = 6(110) &\rightarrow \begin{cases} g(1) = 0, v_1 = 0,5 \\ g(2) = 1, v_2 = 0,75 \\ g(3) = 1, v_3 = 0,875 \end{cases} \Rightarrow x_4 = 0,75 \oplus 0,875 = 0,125 \end{aligned} \tag{A.68}$$

et ainsi de suite ...

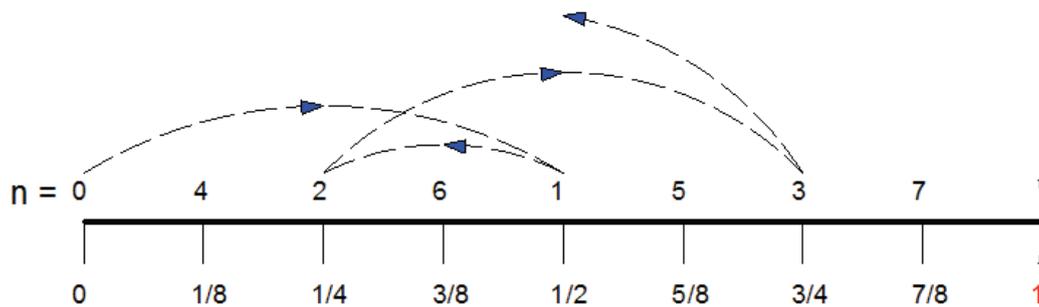


FIGURE A.14 – Echantillonnage par la suite de Sobol' en dimension 1

L'exemple précédent est illustré à la figure A.14. La construction d'une suite de Sobol' de dimension 1 est similaire à la suite de Van de Corput. Pour les suites de grande di-

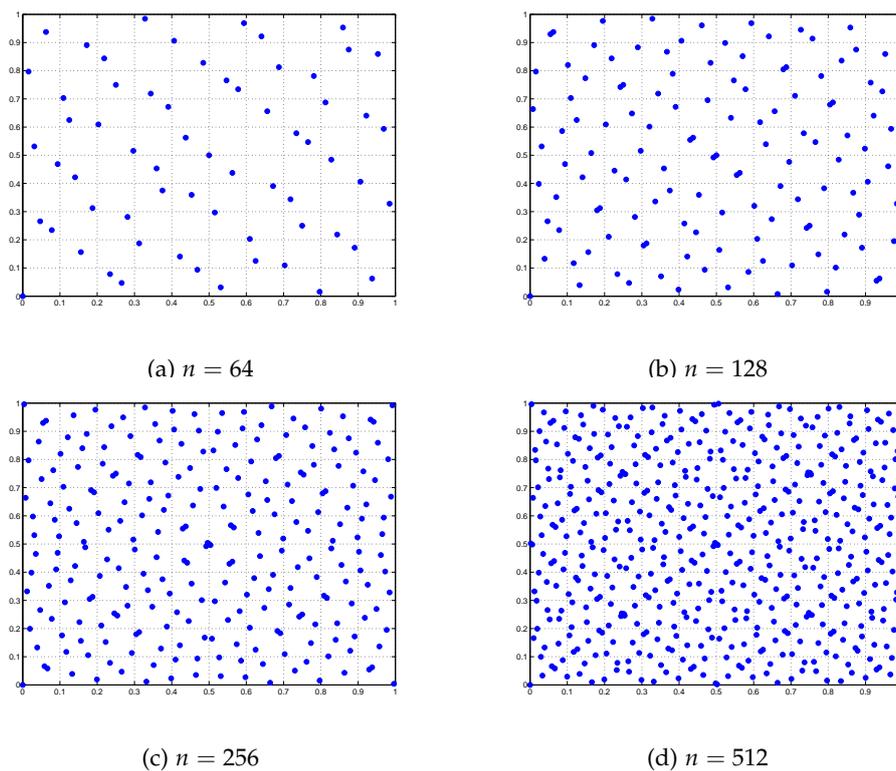


FIGURE A.15 – Echantillonnage par la suite de Sobol

mension ( $n \geq 2$ ), la construction est facilement obtenue par une permutation des suites de dimension 1. Dans ce cas, la position d'un point  $x_{i,j}$  est déterminée par :

$$x_{i,j} = g_{i,1}v_{1,j} \oplus g_{i,2}v_{2,j} \oplus g_{i,3}v_{3,j} \cdots \quad (\text{A.69})$$

avec :

$$v_{k,j} = \frac{m_{k,j}}{2^k} \quad (\text{A.70})$$

$$m_{k,j} = 2a_{1,j}m_{k-1,j} \oplus 2^2a_{2,j}m_{k-2,j} \oplus \cdots \oplus 2^{s_j}m_{k-s_j,j} \oplus m_{k-s_j,j} \quad (\text{A.71})$$

Ces suites de Sobol' ont l'avantage d'être rapides à construire car la nature binaire des ordinateurs permet de réduire le temps de calcul. Elles ont aussi l'avantage de préserver, généralement, l'uniformité de la distribution lorsque la dimension augmente.

Ce projet est effectué dans un cadre d'une thèse CIFRE entre la SNCF et l'IFSTTAR



## Résumé

Les tôles courbes sont de plus en plus fréquemment utilisées dans le domaine des ouvrages d'art à la fois pour raisons esthétiques et pour leurs performances mécaniques. Leur dimensionnement est cependant difficile du fait de l'absence de méthode dédiée dans les normes européennes, en particulier en ce qui concerne le voilement de l'Eurocode 3. Le recours à la modélisation par éléments finis est donc nécessaire mais bien souvent couteux. La présente étude vise ainsi à développer une méthode simplifiée pour le dimensionnement des panneaux cylindriques soumis à une compression uniaxiale. La méthodologie utilisée est basée sur la démarche générale de l'Eurocode 3 pour tous les types de vérifications de stabilité. L'expression analytique obtenue est en bon accord avec les standards des recommandations de l'Eurocode. Cependant, cette démarche peut être difficile à reproduire dans la pratique quotidienne des ingénieurs face à un nouveau problème tel qu'une combinaison de chargements par exemple. Une méthode alternative basée sur la méthode des plans d'expérience numérique a donc été développée. Basée sur des outils statistiques, l'application de cette méthode permet facilement d'obtenir un résultat avec une bonne précision tout en nécessitant que peu simulations.

**Mots-clé :** Panneau cylindrique, Instabilité, Résistance ultime, Pont métallique, GMNIA, Eurocode 3, Plan d'expérience numérique.

## Abstract

The use of curved panels for the construction of steel bridges has become more and more popular due to structural performance, traffic and aesthetic requirements. Their design is however made difficult due to a lack of specifications, especially in European Standards. The use of finite element modeling is often necessary. This however requires very sophisticated and expensive models in terms of calculation times. The present study aims thus at developing a method for predicting the ultimate strength of cylindrical curved panels subjected to uniform axial compression. This method is based on the formal procedure recommended by Eurocode 3 for all types of stability verifications. The agreement with the numerical results is thus very good. However, this approach seems complex to reproduce in practice user when confronting a new problem such a combination of loading. An alternative method based on design of computer experiment is thus developed. Based on statistic notions, this turnkey methodology provides good results with the fewest simulations possible.

**Keywords :** Cylindrical Panels, Buckling, Ultimate strength, Steel Bridge, GMNIA, Eurocode 3, Design of computer experiments.