



**HAL**  
open science

# Étude d'écoulements transitionnels et hors équilibre par des approches DNS et RANS.

Célia Laurent

► **To cite this version:**

Célia Laurent. Étude d'écoulements transitionnels et hors équilibre par des approches DNS et RANS.. Autre. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM, 2012. Français. NNT : 2012ENAM0046 . pastel-00834850

**HAL Id: pastel-00834850**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00834850v1>**

Submitted on 17 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n°432 : SMI

**Doctorat ParisTech**

**T H È S E**

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers**

**Spécialité " Sciences des Métiers de l'Ingénieur "**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Célia LAURENT**

le 10 décembre 2012

**Étude d'écoulements transitionnels et hors équilibre  
par des approches DNS et RANS**

Directeurs de thèse : **Daniel ARNAL** et **Alain LERAT**

**Jury**

**M. Serge HUBERSON**, Professeur des Universités, PRIME, Poitiers – ENSMA  
**M. Christophe BRUN**, Maître de conférence, LEGI, Université de Grenoble  
**M. Thomas GATSKI**, Directeur de recherche CNRS, PRIME, Poitiers – ENSMA  
**M. Daniel ARNAL**, Directeur de recherches, DMAE, ONERA  
**M. Vincent GLEIZE**, Ingénieur de recherche, DSNA, ONERA  
**M. Alain LERAT**, Professeur émérite, DynFluid, Arts et Métiers ParisTech  
**M. Ivan MARY**, Ingénieur de recherche, DSNA, ONERA

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

**T  
H  
È  
S  
E**



Je tiens tout d'abord à remercier Serge Huberson qui a accepté de présider le jury de cette thèse et adresser un grand merci à Christophe Brun et Thomas Gatski pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon mémoire et l'attention qu'ils ont mis à l'examiner et le rapporter.

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma gratitude envers Daniel Arnal et Alain Lerat qui ont dirigé cette thèse et y ont chacun apporté durant ces quatre années non seulement leur précieuse expertise mais aussi leur soutien et leurs encouragements.

Mes très sincères remerciements vont à Ivan Mary et Vincent Gleize pour leur investissement, leurs compétences et leur amitié, sans eux ce travail de thèse ne serait pas ce qu'il est.

Je remercie l'ensemble des membres de l'ONERA que j'ai pu côtoyer au cours de ces quatre années, du DAAP, du DMAE et tout particulièrement du DSNA, pour leurs apports scientifiques, leur soutien et leur amitié. Je remercie notamment François Richez ainsi que les collègues du DAAP rencontrés dans le cadre du projet SIMCOS qui ont porté un grand intérêt à mon travail et ont généreusement partagé leur expertise scientifique. Un grand merci aux collègues qui m'ont accompagné au quotidien, Yann, Benoît, Guillaume, Fabien, Manu, Matthieu, Katia, Maxime, Sebastien, Nicolas, et tout particulièrement merci à Sophie et Raphaël dont l'amitié et le soutien m'ont été des plus précieux. Merci à Sebastien H. pour sa générosité et ses compétences, merci à Didier pour son amitié et son support technique et "voilistique", et à Ghislaine pour sa disponibilité et sa bonne humeur. Pour leur soutien, je souhaite remercier Thien-Hiep Lê et Sylvie Plot qui ont dirigé l'unité ETRI et CS2A et Jean-Marie Le Gouez directeur du DSNA. Merci également aux membres de l'équipe du laboratoire DynFluid des Arts et Métiers ParisTech pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes recherches.

Enfin, un grand merci à mes amis et à ma famille et un très grand merci à Tancredi.



# Table des matières

<i>Table des matières</i>	8
<i>Notations</i>	9
<i>Introduction</i>	13
<b>I Contexte</b>	<b>17</b>
<b>1 Décrochage et théorie des écoulements laminaires, transitionnels, turbulents et hors équilibre</b>	<b>19</b>
1.1 Quelques notions de dynamique des fluides et d'aérodynamique . . . . .	20
1.1.1 États du fluide . . . . .	20
1.1.2 Structures cohérentes d'une couche limite turbulente . . . . .	21
1.1.3 Quelques phénomènes modifiant la dynamique du fluide . . . . .	22
1.1.4 Quelques notions utiles d'aérodynamique . . . . .	23
1.2 Le phénomène de décrochage . . . . .	25
1.2.1 Problématique du décrochage . . . . .	25
1.2.2 Mécanismes et causes du décrochage . . . . .	28
1.3 Instabilités et transition des écoulements bidimensionnels cisailés ouverts . . . . .	33
1.3.1 Enjeux . . . . .	33
1.3.2 Classification des écoulements et nature convective/absolue des instabilités	34
1.3.3 Scénarios de transition d'une couche limite . . . . .	36
1.4 Mécanismes d'instabilités et de transition dans un BDL . . . . .	39
1.4.1 Observations générales . . . . .	39
1.4.2 Nature des instabilités . . . . .	40
1.4.3 Identification des instabilités . . . . .	40

<b>II Étude DNS de la transition par BDL</b>	<b>43</b>
<b>2 Méthodes de calcul de l'écoulement et d'analyse de sa stabilité</b>	<b>45</b>
2.1 Équations de conservation de Navier-Stokes . . . . .	45
2.2 Discrétisation des équations de Navier-Stokes par la méthode volumes finis . . . . .	47
2.2.1 Méthode des volumes finis . . . . .	47
2.2.2 Calcul des métriques . . . . .	48
2.2.3 Discrétisation des flux convectifs . . . . .	48
2.2.4 Discrétisation des flux visqueux . . . . .	50
2.2.5 Intégration temporelle : Schéma de Gear . . . . .	52
2.3 Outils d'analyse de la stabilité de l'écoulement . . . . .	53
2.3.1 Méthodes de calcul de la stabilité linéaire par le code CASTET . . . . .	54
2.3.2 Méthode d'analyse spectrale . . . . .	56
<b>3 Base de données DNS</b>	<b>59</b>
3.1 BDL transitionnel sur une plaque plane : détail des calculs . . . . .	61
3.1.1 Reproduction de l'écoulement de bord d'attaque du profil OA209 sur une plaque plane . . . . .	61
3.1.2 Description de l'écoulement de plaque plane . . . . .	65
3.1.3 Paramètres numériques . . . . .	65
3.2 Vérifications préliminaires concernant le choix des paramètres numériques . . . . .	68
3.2.1 Influence des schémas de discrétisation des flux convectifs et diffusifs . . . . .	68
3.2.2 Résolution et échelles de Kolmogorov . . . . .	70
3.2.3 Dimensions en envergure du domaine DNS . . . . .	72
3.3 Convergence en maillage des grandeurs caractéristiques . . . . .	75
3.3.1 Coefficients de frottement et de pression . . . . .	75
3.3.2 Épaisseur de quantité de mouvement et épaisseur de déplacement . . . . .	76
3.3.3 Profils verticaux de vitesse . . . . .	77
3.3.4 Fluctuations . . . . .	78
3.4 Validations théoriques . . . . .	80
3.4.1 Couche limite laminaire . . . . .	80
3.4.2 Équation bilan de l'énergie cinétique turbulente . . . . .	81
3.4.3 Fréquences caractéristiques . . . . .	82
3.5 Processus de transition . . . . .	84
3.5.1 Structures cohérentes . . . . .	84
3.5.2 Nombre de Strouhal de la DNS . . . . .	87
3.5.3 Estimation de la fréquence d'échappement tourbillonnaire d'une couche de mélange équivalente . . . . .	87
3.6 Évolution des composants du bilan d'énergie cinétique turbulente . . . . .	88
3.7 Hypothèses de base des modèles RANS . . . . .	90
3.7.1 Hypothèse de Boussinesq . . . . .	90
3.7.2 Rapport production/dissipation de $k$ . . . . .	91
3.7.3 Isotropie de l'écoulement DNS . . . . .	92
3.8 Reconstruction de $\gamma\nu_t$ à partir de la DNS . . . . .	94

<b>III</b>	<b>Comportement des modèles RANS</b>	<b>97</b>
<b>4</b>	<b>Méthodes et outils numériques pour la modélisation RANS</b>	<b>99</b>
4.1	Équations de Navier-Stokes moyennées : approche RANS . . . . .	99
4.1.1	Application des moyennes . . . . .	99
4.1.2	Équations moyennées . . . . .	100
4.2	Fermeture du système . . . . .	101
4.2.1	Principes . . . . .	101
4.2.2	L'hypothèse de Boussinesq de viscosité de la turbulence pour la fermeture au premier ordre . . . . .	101
4.3	Modèles de turbulence simples . . . . .	102
4.3.1	Modèles algébriques ou à longueur de mélange . . . . .	102
4.3.2	Modèles à une équation de transport de la viscosité de la turbulence . . .	104
4.4	Modèles à équations de transport de $k$ et $\varepsilon$ . . . . .	105
4.4.1	Utilisation de $k$ et $\varepsilon$ pour déterminer $\mu_t$ . . . . .	105
4.4.2	$k - \varepsilon$ de Launder et Sharma . . . . .	106
4.5	Modèles à équations de transport de $k$ et $\omega$ . . . . .	107
4.5.1	Équation de transport pour la dissipation spécifique $\omega$ . . . . .	107
4.5.2	Modèle $k - \omega$ de Wilcox . . . . .	108
4.5.3	Modèle $k - \omega$ TNT de Kok . . . . .	108
4.5.4	Correction Shear-Stress Transport (SST) de Menter . . . . .	109
4.6	Fermeture au second ordre . . . . .	109
4.7	Prise en compte de la transition par les modèles RANS . . . . .	110
4.7.1	Intermittence de la couche limite . . . . .	111
4.7.2	Fonction d'intermittence . . . . .	111
4.7.3	Critères d'entrée et sortie de la région de transition . . . . .	112
4.7.4	Modèles de transition à équations de transport . . . . .	113
<b>5</b>	<b>Influence du modèle de transition sur la modélisation RANS</b>	<b>115</b>
5.1	Description des calculs . . . . .	116
5.1.1	Critères de transition . . . . .	116
5.1.2	Fonctions de transition . . . . .	116
5.2	Évaluation des modèles de turbulence . . . . .	118
5.2.1	Spalart-Allmaras . . . . .	118
5.2.2	$k - \omega$ Wilcox . . . . .	120
5.2.3	$k - \omega$ Kok avec et sans correction SST . . . . .	125
5.2.4	$k - \varepsilon$ Launder et Sharma . . . . .	126
5.2.5	Conclusions sur les modèles de turbulence et de transition testés . . . . .	127
5.3	Analyse de la modélisation RANS dans la couche limite transitionnelle . . . . .	128
5.3.1	Quelques rappels sur la modélisation des équations de Navier Stokes . . .	128
5.3.2	Analyse du modèle $k - \omega$ de Wilcox . . . . .	128
5.3.3	Conclusions relatives à l'influence de la modélisation de $k$ et $\varepsilon$ sur les équations de conservation de la quantité de mouvement . . . . .	134
5.4	Transition naturelle de plaque plane . . . . .	137
5.4.1	Base de données de référence . . . . .	137
5.4.2	Modélisation de la transition naturelle . . . . .	137
5.4.3	Conclusions sur la généralisation de la méthode de modélisation au cas de transition naturelle . . . . .	139
	<i>Conclusions et Perspectives</i>	<b>141</b>

TABLE DES MATIÈRES

<i>Annexes</i>	146
<b>A Équations de transport</b>	<b>147</b>
A.1 Équations de conservation de Navier-Stokes . . . . .	147
A.2 Équations de Navier-Stokes moyennées . . . . .	149
A.3 Équations de transport des tensions de Reynolds . . . . .	151
<b>B Calcul statistique de l'équation aux tensions de Reynolds</b>	<b>155</b>
B.1 Routines et nomenclatures dans le solveur FUNk . . . . .	155
B.2 Moyennes de Reynolds et Favre . . . . .	155
B.3 Équation de transport aux tensions de Reynolds - version Favre Kovaszny . . . . .	156
B.4 Équation de transport aux tension de Reynolds - version 2 . . . . .	161
<b>C Modélisation RANS des équations de transport de <math>k</math> et <math>\varepsilon</math></b>	<b>163</b>
C.1 Prérequis : propriétés des couches limites turbulentes . . . . .	163
C.2 Équation de transport pour l'énergie cinétique de la turbulence $k$ . . . . .	167
C.3 Équation de transport pour la dissipation $\varepsilon$ . . . . .	169
<b>D Propriétés mathématiques</b>	<b>175</b>
D.1 Équation de conservation . . . . .	175
D.2 Dérivée particulaire . . . . .	175
D.3 Théorèmes de Green et Ostrogradsky . . . . .	175
D.4 Théorème de transport . . . . .	176
<b>E Résultats d'Analyse Spectrale</b>	<b>177</b>
E.1 Spectres de pression issus des calculs DNS 200Mp avec et sans forçage . . . . .	177
E.2 Spectres de vitesse longitudinale issus des calculs DNS 200Mp . . . . .	181
E.3 Spectres de vitesse verticale issus des calculs DNS 200Mp . . . . .	183
E.4 Spectres de vitesse transversale issus des calculs DNS 200Mp . . . . .	185
<b>F Loi de paroi <math>h(x)</math></b>	<b>187</b>
F.1 Loi de paroi . . . . .	187
F.2 Coordonnées . . . . .	187
<i>Bibliographie</i>	<b>187</b>

# Notations

## Grandeurs variables de l'écoulement

$t$	temps
$p$	pression
$\rho$	masse volumique
$u_i$	composante de la vitesse dans la direction $i$
$x$	position dans la direction de l'écoulement
$y$	position dans la direction perpendiculaire à la paroi
$z$	position dans la direction transversale (envergure)
$T$	température
$E$	énergie totale spécifique
$\mu$	viscosité dynamique : $\mu = \mu(T) = \mu_{ref} \sqrt{T/T_{ref}} \left( \frac{1+C/T_{ref}}{1+C/T} \right)$ (loi de Sutherland)
$\nu$	viscosité cinématique : $\nu = \mu/\rho$
$\mu_t$	viscosité de la turbulence, n'est pas caractéristique du fluide, c'est une fonction complexe des différentes variables de l'écoulement.

## Grandeurs pariétales

$\tau_w$	taux de cisaillement pariétal : $\tau_w = \mu_w \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right _{y=0}$
$u_\tau$	vitesse de frottement en paroi : $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho_w}$
$u^+$	vitesse en unités pariétales $u^+ = u/u_\tau$
$y^+$	distance à la paroi en coordonnées pariétales $y^+ = y u_\tau/\nu_w$

## Éléments des équations de Navier-Stokes

$\tau_{ij}$	tenseur des contraintes visqueuses
$\tilde{\tau}_{ij}^{sm}$	tenseur des contraintes de sous-maillages
$\tilde{\tau}_{ij}^R$	tenseur des contraintes de Reynolds ou tenseur des contraintes turbulentes
$q_j$	flux de chaleur : $q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j}$
$D_{ij}$	tenseur des déformations $D_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$
$S_{ij}$	$S_{ij} = D_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr}(D_{ij}) \delta_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$
$\Omega_{ij}$	tenseur de vorticité $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$

## Grandeurs caractéristiques de l'évolution longitudinale

$\delta$	épaisseur de couche limite
$\theta$	épaisseur de quantité de mouvement $\theta = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$
$\delta^*$	épaisseur de déplacement $\delta^* = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$
$H$	paramètre de forme $H = \frac{\delta^*}{\theta}$
$C_f$	coefficient de frottement à la paroi : $C_f = \frac{\tau_w}{1/2 \rho_\infty U_e^2}$
$C_p$	coefficient de pression à la paroi : $C_p = \frac{\langle p \rangle - p_\infty}{1/2 \rho_\infty U_e^2}$

## Grandeurs caractéristiques de l'écoulement

$\Re_{d_{ref}}^X$	nombre de Reynolds au point $X$ basé sur la longueur caractéristique $d_{ref}$ : $\Re_{d_{ref}}^X = \frac{\rho_X U_X d_{ref}}{\mu_X}$
$\Re_c$	nombre de Reynolds basé sur la longueur de corde $c$ du profil et sur les grandeurs infinies amont : $\Re_c = \frac{\rho_\infty U_\infty c}{\mu_\infty}$

## Constantes

$Pr$	nombre de Prandtl égal à 0,72 dans l'air
$\mathcal{R}$	constante des gaz parfaits : $\mathcal{R} = 8.3145 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$\mathcal{M}$	masse molaire du gaz considéré : $\mathcal{M} = 2.896 \cdot 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$ pour l'air
$\mathcal{C}_p$	capacité calorifique à pression constante
$\mathcal{C}_v$	capacité calorifique à volume constant
$\gamma$	$\gamma = \frac{\mathcal{C}_p}{\mathcal{C}_v} = 1,4$
$\kappa$	coefficient de conductibilité thermique : $\kappa(T) = \frac{\mu(T) \mathcal{C}_p}{Pr}$

## Indices et exposants

$\cdot_e$	grandeur prise à l'extérieur de la couche limite
$\cdot_w$	grandeur prise en paroi
$\cdot_\infty$	grandeur prise à l'infini (écoulement non perturbé)
$\cdot^+$	grandeur adimensionnée par des grandeurs prises en paroi
$\cdot_t$	grandeur turbulente
$\cdot_S$	grandeur prise au point de décollement
$\cdot_R$	grandeur prise au point de recollement

## Abréviations

<i>BDL</i>	Bulbe de décollement laminaire
<i>GPA</i>	Gradient de pression adverse
<i>DNS</i>	Direct Numerical Simulation
<i>RANS</i>	Reynolds-Averaged Navier-Stokes
<i>LES</i>	Large Eddy Simulation



# Introduction

L'obtention de méthodes numériques de prévision du décrochage des profils aérodynamiques d'aile ou de pale de rotor est aujourd'hui un enjeu industriel essentiel. Le décrochage suscite l'intérêt car c'est un état dans lequel les performances de vol (portance, traînée) sont très dégradées. Ce phénomène, qui est susceptible de se produire sur tout type d'aile volante, pose aujourd'hui un réel problème pour le design des profils de pales de rotors d'hélicoptères, d'éoliennes et de turbomachines, car le décrochage sur ce type de profil est susceptible de se produire dans des conditions d'utilisation normales. Le seuil critique d'apparition du décrochage est fortement dépendant de la forme du profil, c'est pourquoi le design d'un nouveau profil doit nécessairement prendre en compte les risques de décrochage.

Macroscopiquement, l'état décroché consiste en un décollement important de l'écoulement vis-à-vis de la paroi du profil. Ce décollement apparaît quand la couche limite est devenue trop instable en raison de contraintes trop fortes, notamment en raison d'un gradient de pression adverse (GPA) trop important. Différents enchaînements de mécanismes aérodynamiques sont susceptibles de mener au décrochage. Un de ces scénarios appelé décrochage de bord d'attaque est fréquent sur des profils d'épaisseur modérée. Il est initié par l'apparition, dans la zone de bord d'attaque, d'une petite région de recirculation de l'air appelée bulbe de décollement laminaire (BDL). Le BDL est induit par un fort gradient de pression positif qui déséquilibre la couche limite. Il est généralement le siège, et la cause, d'une transition de l'état laminaire vers l'état turbulent. En induisant cette transition vers l'état turbulent qui est plus stable que l'état laminaire, le BDL contribue à stabiliser toute la couche limite en aval de la transition. Une augmentation d'incidence du profil entraîne une augmentation du gradient de pression. Dans le scénario de décrochage de bord d'attaque, si le gradient de pression atteint une valeur critique, le bulbe éclate et la zone de recirculation change brutalement et radicalement de taille, menant à un décollement de l'écoulement sur toute la longueur du profil, c'est-à-dire au décrochage. Le seuil critique d'apparition du décrochage est fortement dépendant de la forme du profil. C'est pourquoi le design d'un nouveau profil doit donc prendre en compte les risques de décrochage. Pour cela deux voies existent : les expérimentations, très onéreuses, et les simulations numériques. Le décrochage de bord d'attaque et les mécanismes qu'il comporte ont fait l'objet de nombreuses études tant expérimentales que numériques. Les études expérimentales ont permis la mise au point de critères empiriques de prévision du décrochage et certaines études numériques récentes ont permis d'enrichir la connaissance des phénomènes physiques mis en jeu. D'autres études plus appliquées ont tenté d'intégrer ces critères aux outils de modélisation numérique, mais les méthodes de calcul du décrochage ainsi obtenues gardent une marge d'erreur très importante.

Les méthodes de simulation numérique reposent sur la résolution des équations de Navier-Stokes, des équations aux dérivées partielles non-linéaires qui décrivent le mouvement des fluides. Ces équations traduisent les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. La méthode DNS (pour «Direct Numerical Simulation») consiste à résoudre directement, comme son nom l'indique, les équations de Navier-Stokes. Cette méthode donne des résultats de grande qualité au prix de maillages extrêmement raffinés qui impliquent des

calculs très coûteux, accessibles uniquement pour des écoulements à faible nombre de Reynolds sur des géométries très simplifiées. Cette méthode n'est donc en aucun cas accessible dans un contexte industriel.

Plusieurs méthodes ont été mises au point pour pallier ce problème, notamment la LES (pour «Large Eddy Simulation») qui résout un système d'équations pour les variables filtrées en espace et calcule l'action des petites échelles non résolues par le biais d'un modèle de sous-maillages. Cette méthode est de plus en plus utilisée mais présente encore un coût de calcul élevé et requiert l'utilisation d'un modèle dont l'exactitude est encore souvent imparfaite.

La méthode RANS (pour «Reynolds Averaged Navier-Stokes») propose de résoudre les équations de Navier-Stokes moyennées en temps. Ces équations font apparaître dans leur formulation un terme non linéaire lié à l'action de la turbulence. Ce terme non résolu requiert une modélisation, c'est-à-dire qu'il est remplacé par un terme simplifié qui reproduit l'action de la turbulence par le biais d'un modèle de turbulence. La méthode RANS, relativement peu coûteuse, est largement utilisée dans le secteur industriel pour le calcul d'écoulements autour de géométries complexes (avion, hélicoptère complet par exemple). Les modèles RANS sont basés sur l'élaboration d'expressions simplifiées à partir de quantités connues qui les rendent très dépendants des hypothèses simplificatrices. Or il se trouve que certaines de ces hypothèses largement utilisées dans la plupart des modèles : décroissance d'une turbulence homogène isotrope, couche limite turbulente en équilibre, s'avèrent totalement inadaptées aux écoulements transitionnels, décollés, ou sujets à un gradient de pression adverse important, comme c'est le cas dans un écoulement de bord d'attaque avec transition par BDL.

Différents auteurs (Spalart et Watmuff [119], Coleman, Kim et Spalart [23]) ont montré les effets importants du gradient de pression sur la couche limite, notamment la modification de la répartition de la turbulence et l'effet de mémoire de la turbulence. Certains modèles, dits à équations de transport ( $k-\varepsilon$ ,  $k-\omega$ , hybride BSL) corrigés (SST, multi-échelles) prennent mieux en compte cet effet d'histoire mais des problèmes persistent.

Owen et Klanfer [93] ou encore McCullough & Gault [83] ont démontré le lien entre le décrochage du profil et l'éclatement du bulbe. Ce dernier étant directement lié au processus de transition, ces études justifient le besoin d'une bonne modélisation des mécanismes de transition dans le BDL.

De nombreux auteurs comme Owen et Klanfer [93], Crabtree [26] ou Gaster [37] se sont penchés sur la recherche d'un critère de prévision de l'éclatement du bulbe sans arriver à obtenir de critère universel. D'autres auteurs tels que Roberts [109], Arnal *et al.* [5] ou encore Gleyzes *et al.* [43] ont axé leurs recherches sur un critère permettant de déterminer le point de transition et ont mis au point des méthodes qui montrent d'assez bons résultats.

Au-delà de la détermination du point de transition, le problème de la prise en compte de la dynamique de la transition et de son influence reste entier. En effet, la région de transition et celle qui la suit ne présentent pas les caractéristiques de la turbulence développée, et ces régions de l'écoulement sont sujettes à une dynamique turbulente très spécifique et dont les conséquences sur l'écoulement aval sont importantes. Les modèles RANS actuels ne sont pas faits pour reproduire cette action de la transition pour une transition naturelle, et encore moins pour une transition par BDL dont la dynamique est assez rapide et violente, avec notamment un phénomène de sur-épaississement de la couche limite très marqué et une forte influence sur le frottement.

Certaines études récentes (Menter [87], Lodefier *et al.* [72], Lardeau *et al.* [62], ...) proposent l'utilisation de modèles de transition calculant des fonctions de transition complexes adaptées aux bulbes transitionnels et qui, dans certaines conditions d'écoulement, sont capables d'aider les modèles RANS à mieux prendre en compte la transition. Cependant ces modèles sont aujourd'hui

d'hui encore à l'état expérimental et demeurent fortement dépendants du cas étudié.

Les études mentionnées ci-dessus font d'une part apparaître qu'il existe des modèles RANS rapides et précis dans des cas d'écoulements standards. Cependant, tous sont plus ou moins inadaptés aux écoulements hors équilibre, en raison de leurs hypothèses inadéquates. D'autre part, quelques études récentes portent sur les fonctions de transition adaptées aux BDL, mais leur précision reste limitée et ces modèles sont encore expérimentaux. En outre, au cours d'une transition par BDL, les grandeurs turbulentes apparaissent et se développent selon une dynamique relativement peu référencée à ce jour et que les modèles de turbulence RANS standards ne peuvent reproduire. Enfin, peu d'études existent dans la littérature concernant l'influence de fonctions de transition simples sur les modèles de turbulence RANS les plus couramment utilisés.

C'est dans ce contexte que cette étude a été développée, ses objectifs sont, dans un premier temps, d'analyser et de documenter l'évolution des grandeurs turbulentes au cours de la transition par BDL, et, dans un second temps, de les utiliser pour étudier les réactions des modèles RANS les plus courants à l'utilisation de fonctions de transition simples.

Dans un souci de consistance avec le domaine d'application (décrochage dynamique des pales de rotor), les caractéristiques de l'écoulement statistiquement bidimensionnel autour du profil OA209 à  $15^\circ$  d'incidence et à un nombre de Reynolds de corde  $\Re_c = 1.8e^6$  sont utilisées dans cette étude. Ce profil, d'épaisseur moyenne, est sujet à un décrochage de bord d'attaque issu d'un BDL transitionnel et offre l'avantage d'être bien documenté par différentes études expérimentales (projet SIMCOS [94, 69]) et numériques (Richez [103], Richter *et al.* [105]). Afin de simplifier la physique des phénomènes mis en jeu sur un tel profil, le choix a été fait dans la présente étude de reproduire l'écoulement autour de ce profil sur une plaque plane, permettant ainsi d'isoler le BDL transitionnel du reste de l'écoulement perturbé.

Des calculs DNS ont ainsi pu être réalisés à l'aide du solveur FUNK de l'ONERA, ils constituent une base de données riche en informations dont l'exploitation constitue une partie de ce mémoire. Ces résultats ont permis dans un second temps l'évaluation des modèles RANS disponibles dans le logiciel de simulation elsA [34] développé par l'ONERA pour la filière aéronautique industrielle (Airbus, Safran, ...), ainsi que l'étude de la sensibilité de ces modèles aux fonctions de transition.

La première partie de ce mémoire présentera le contexte de cette étude. Tout d'abord, quelques rappels seront faits concernant les notions d'écoulement de couche limite, des phénomènes de transition et de décollement, de bulbe et de décrochage, ainsi que des caractéristiques aérodynamiques principales de toute aile volante. Une étude bibliographique sera ensuite effectuée afin de faire le point sur les connaissances actuelles des mécanismes du décrochage et des résultats de modélisation RANS disponibles pour ces écoulements. Une synthèse des connaissances existantes dans la bibliographie concernant les mécanismes d'instabilités et de transition d'une couche limite sera ensuite présentée. Enfin, le lien sera fait avec le cas particulier de la transition par BDL.

La seconde partie de ce mémoire est consacrée à la base de données DNS. Afin d'introduire les calculs qui ont été réalisés, une présentation des méthodes de résolution LES et DNS sera tout d'abord effectuée, et les techniques de discrétisation utilisées seront détaillées. Pour finir, les outils d'analyse spectrale de la stabilité de l'écoulement seront décrits.

La base de données DNS calculée par le solveur FUNK sera finalement présentée. La mise en place du calcul sera expliquée et une analyse et validation des résultats DNS sera effectuée. Pour cela, une étude de convergence en maillage ainsi que des comparaisons avec les théories de la couche limite laminaire, turbulente et avec la théorie de la stabilité linéaire seront menées.

L'évolution des grandeurs turbulentes, le processus de transition ainsi que l'équilibre des bilans de l'énergie cinétique turbulente seront aussi analysés. Finalement, la justification des hypothèses RANS les plus courantes sera discutée à l'aide des informations apportées par la base de données DNS.

La troisième et dernière partie de ce mémoire est consacrée à l'étude des modèles RANS disponibles dans le logiciel elsA. Un descriptif de l'approche RANS sera réalisé, puis les modèles de turbulence utilisés seront présentés, en attachant une importance particulière à la mise en évidence des hypothèses sur lesquels ils reposent. Les méthodes existantes de prise en compte de la transition par les modèles RANS seront finalement décrites.

Enfin, l'évaluation des modèles de turbulence RANS les plus couramment utilisés dans l'aéronautique et développés dans le solveur elsA sera réalisée. Une analyse comparative de ces modèles de turbulence ainsi que leurs réactions vis-à-vis de différentes fonctions de transition simples sera effectuée et les résultats comparés à ceux de la base de données DNS. Le modèle de Wilcox associé à une fonction de transition optimisée sera adopté pour la suite des travaux, qui consistent en une étude poussée de l'évolution des grandeurs turbulentes calculées par ce modèle au cours de la transition par BDL. Pour finir, ce même modèle de turbulence et de transition sera appliqué à un cas de transition naturelle de plaque plane afin de tenter d'évaluer la portée de la méthode de calcul mise au point pour le BDL.

Les travaux présentés dans ce mémoire ont donné lieu à la publication de plusieurs actes de conférences internationales [67, 66] et d'un article dans une revue à comité de lecture [68]. Dans ce dernier, les principaux éléments de validation de la DNS sont explicités (convergence en maillage et analyse spectrale), les bilans des équations de transport de l'énergie cinétique turbulente issus de la DNS sont analysés dans la région de transition et ils sont comparés, dans la région turbulente, à ceux du modèle RANS  $k - \omega$  de Wilcox pondéré par deux fonctions de transition différentes. Les analyses DNS de validité des principales hypothèses sur lesquelles reposent les modèles RANS de premier ordre (Boussinesq, rapport production/dissipation et isotropie de la turbulence) ainsi que l'étude de l'influence des fonctions de transition sur des modèles RANS les plus courants pourront être l'objet de prochaines soumissions d'articles.

Première partie

Contexte



# Chapitre 1

## Décrochage et théorie des écoulements laminaires, transitionnels, turbulents et hors équilibre

Le décrochage est un phénomène aérodynamique qui concerne entre autres les profils de pales de rotors d'hélicoptères, d'éoliennes et de turbomachines. Le seuil critique d'apparition du décrochage est fortement dépendant de la forme du profil, c'est pourquoi le design de tout nouveau profil doit nécessairement prendre en compte les risques de décrochage. Pour cette raison, les industries aéronautiques recherchent des méthodes numériques plus précises pour la prévision du décrochage des profils aérodynamiques.

Dans ce contexte, les écoulements de type bord d'attaque à l'approche du décrochage attirent toute notre attention car leur compréhension est, encore à ce jour, limitée. Ces écoulements mettent en jeu des phénomènes physiques complexes et d'échelles très différentes, notamment la transition laminaire-turbulent et le gradient de pression adverse qui déséquilibre la couche limite. Ces phénomènes comportent des propriétés inhabituelles que les méthodes de modélisation couramment utilisées dans le milieu industriel ne savent pas traiter. Les outils numériques RANS ne sont par conséquent pas capables de prévoir avec précision l'apparition du décrochage sur un profil donné. Dans ce vaste contexte, les écoulements de bord d'attaque de pale d'hélicoptère constituent le cœur de cette étude, et plus particulièrement l'écoulement autour du profil OA209 qui est sujet à un décrochage de bord d'attaque avec bulbe de décollement laminaire transitionnel.

Ce chapitre propose une vue d'ensemble de ces phénomènes, en commençant par quelques définitions du décrochage, du bulbe laminaire, de la couche limite, des structures cohérentes ainsi que des forces impliquées dans l'équilibre aérostatique du profil. Ces notions permettent ensuite de retracer les travaux qui ont permis de comprendre le décrochage, ses mécanismes et ses origines, ainsi que ses conséquences, en s'attardant notamment sur le cas de décrochage du profil de pale d'hélicoptère OA209. Enfin, l'état actuel des capacités de simulation du décrochage sera analysé. Dans un second temps, une présentation générale des notions de transition et d'instabilités de la couche limite est faite afin de mieux comprendre les mécanismes et propriétés physiques habituelles d'une couche limite hors équilibre ou transitionnelle. Enfin, un recueil des travaux sur l'étude des écoulements avec bulbes transitionnels disponibles dans la littérature est présenté pour comprendre les connaissances actuelles de la mécanique mise en jeu dans le cas particulier d'une transition par bulbe de décollement laminaire. L'étude bibliographique menée au cours de ce chapitre mêle de nombreux sujets, chacun d'entre eux ayant fait l'objet de multiples travaux au sein de nombreuses équipes de recherche différentes. Cette synthèse ne peut donc se vanter d'être exhaustive, mais elle tâchera néanmoins de mettre en avant les principaux acteurs et d'aborder l'essentiel des connaissances disponibles dans la littérature.

## 1.1 Quelques notions de dynamique des fluides et d'aérodynamique

Avant d'aborder la description du phénomène de décrochage, il est nécessaire d'introduire et définir un certain nombre de notions essentielles de la dynamique des fluides et de l'aérodynamique.

### 1.1.1 États du fluide

#### 1.1.1.1 Couche limite

La couche limite est la région d'un fluide dont l'écoulement est directement perturbé par la présence d'un corps (solide, ou, par extension, un autre fluide) qui est en déplacement par rapport au fluide. Il s'agit d'un effet de la viscosité du fluide qui adhère au corps et adopte donc localement sa vitesse de déplacement.

#### 1.1.1.2 Écoulement laminaire

Un écoulement est dit laminaire quand chaque particule de fluide s'écoule de manière ordonnée parallèlement à la direction de l'écoulement moyen, et généralement sans subir de perturbations. Néanmoins, des perturbations d'échelle temporelle élevée peuvent exister dans un écoulement laminaire. Dans le régime laminaire, il n'y a pas de mélange entre les différentes couches de l'écoulement.

#### 1.1.1.3 Écoulement turbulent

La turbulence est un comportement temporel chaotique des particules de fluide d'échelle temporelle très petite. La turbulence est associée à un mélange important de fluide. Le nombre de Reynolds quantifie le degré d'inertie d'un fluide en mouvement par rapport à sa viscosité, plus ce nombre est élevé, plus les effets d'inertie sont importants et plus l'écoulement s'approche de l'état turbulent. La couche limite turbulente est caractérisée par un profil vertical de vitesse représenté figure 1.1 qui est organisé en une zone interne et une zone externe. La zone interne est composée d'une sous-couche visqueuse, comprenant une sous-couche laminaire et une région intermédiaire, et d'une région logarithmique. La zone externe correspond à la couche de sillage.

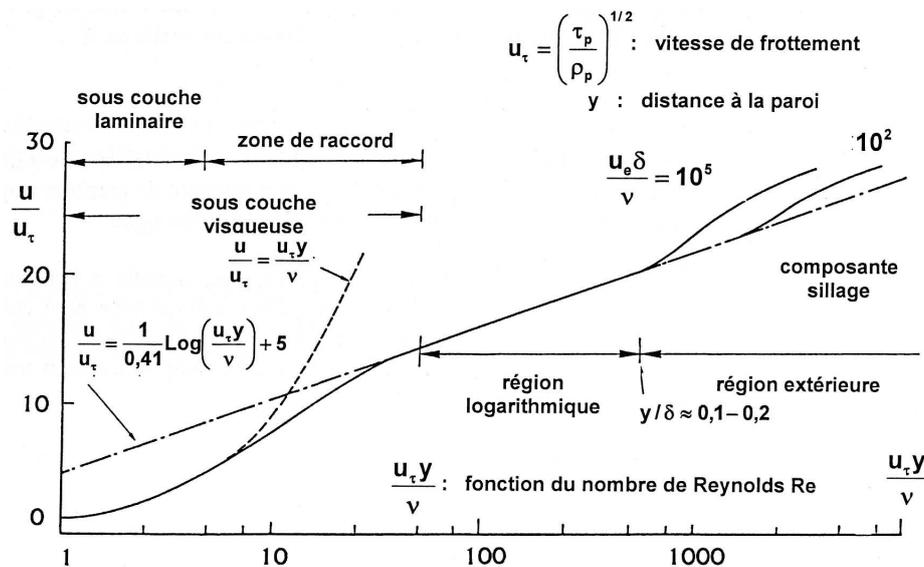


FIGURE 1.1: Structure verticale d'une couche limite turbulente, d'après Delery [29]

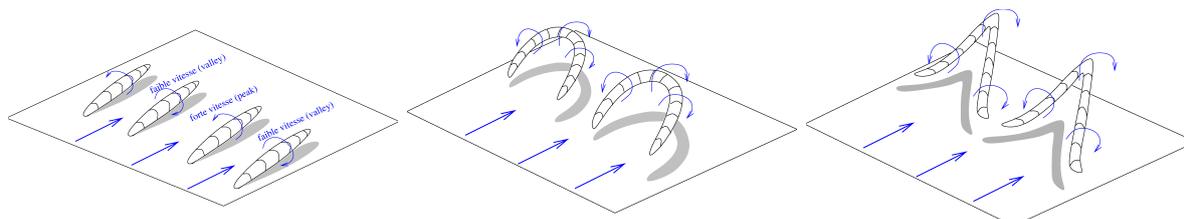
#### 1.1.1.4 Écoulement parallèle

L'écoulement est dit parallèle lorsque la composante verticale (à la paroi) de la vitesse est petite devant la composante longitudinale (dans la direction de l'écoulement), c'est-à-dire de façon plus générale, quand les dérivées longitudinales des grandeurs de l'écoulement sont négligeables par rapport aux dérivées normales à la paroi.

### 1.1.2 Structures cohérentes d'une couche limite turbulente

L'analyse statistique d'un écoulement de couche limite turbulente fait apparaître les composantes du tenseur de Reynolds  $\overline{\rho u'_i u'_j}$ , composantes clés de la fermeture du système des équations de Navier-Stokes. Ces composantes étant non nulles, il apparaît évident que des corrélations privilégiées existent entre les différentes composantes des fluctuations de vitesses, c'est-à-dire que la turbulence d'une couche limite turbulente n'est pas totalement aléatoire et qu'une organisation de mouvements de fluide cohérents y a lieu. La compréhension de ces mécanismes est essentielle, et notamment ceux de la région de proche paroi qui sont à l'origine de la production de turbulence de l'écoulement. Les mouvements cohérents sont aussi à l'origine de l'épaississement de la couche limite au fur et à mesure de son développement vers l'aval.

Les premières études sur le sujet, de nature expérimentale, remontent aux années 1950 (Corsin & Kistler, Favre). Certaines observations sont aujourd'hui communément admises, les structures qu'elles mettent en jeu sont schématisées figure 1.2 :



(a) Structures longitudinales de proche paroi

(b) Structures  $\Lambda$  horse-shoe

(c) Structures  $\Lambda$  hairpin

FIGURE 1.2: Vue schématique des tourbillons de couche limite.

Les structures de la sous-couche, de la zone tampon et de la couche externe (zone log + sillage) ont des mouvements cohérents.

En proche paroi, dans la sous-couche visqueuse, des **streaks**, zones alternées de basses (**valleys**) et hautes (**peaks**) vitesses, sont présents. Ils sont disposés de part et d'autres de tourbillons longitudinaux légèrement inclinés vis-à-vis de la paroi. Ces tourbillons, dont la longueur est de l'ordre de  $2000 \nu/u_\tau$  et la largeur de l'ordre de  $100 \nu/u_\tau$  (par exemple Smith & Metzler 1983), tendent à apparaître par paires de tourbillons contrarotatifs (par exemple Kim et al 1987).

Des bosses apparaissent sur la surface extérieure de la couche limite. Ces bosses (ou **bulges**) surplombent des structures tourbillonnaires en forme de  $\Lambda$  (Willmarth & Tu 1967, 1972) dont l'échelle est grande, de l'ordre de l'épaisseur de couche limite  $\delta$ , et qui sont situées dans la partie externe de la couche limite (zone logarithmique et sillage). Ces structures sont généralement inclinées à  $45^\circ$  entre l'axe vertical et longitudinal et prennent généralement la forme de fers à cheval (**horse-shoes**) dans les écoulements bas Reynolds et s'étirent en épingle à cheveux (**hairpins**) à Reynolds élevé (Head & Bandyopadhyay's (1981)).

L'origine de la production et de la dissipation de la turbulence est dans la zone tampon située sous la région logarithmique (par exemple Laufer en 1953, Klebanoff en 1954). Elle est liée à un processus intermittent (**bursting**) d'éjection de fluide basse vitesse de la paroi vers la

zone externe au-dessus des **valleys**, et d'aspiration (**sweep**) de fluide haute vitesse de la couche externe vers la paroi au-dessus des **peaks**. Ce **bursting** a lieu de part et d'autre de tourbillons longitudinaux de proche paroi, il assure un transfert vertical de quantité de mouvement par les tourbillons de proche paroi.

Il existe une influence entre les structures de proche paroi et les structures  $\Lambda$  de la couche externe, cette influence semble dépendante du nombre de Reynolds. Une question se pose aussi sur le lien entre les tourbillons longitudinaux de proche paroi et les tourbillons  $\Lambda$  de la couche externe, notamment pour savoir lequel des deux est le plus influent sur l'autre.

Aujourd'hui, certaines questions restent encore sans réponse, notamment la nature de l'intermittence spatiale ou temporelle du "bursting" ou encore le lien, s'il existe, entre bursting et instabilité. Citons quelques-uns des travaux plus controversés :

- Black (1968) propose un modèle dans lequel une instabilité de proche paroi est à l'origine du lâcher tourbillonnaire de hairpins qui évoluent en groupe.
- Ofen & Kline (1975) suggèrent l'association de paires de tourbillons contra-rotatifs alignés ou non comme mécanisme de formation des structures  $\Lambda$ .
- Praturi & Brodkey (1978) justifient l'apparition des hairpins par l'action de la région de cisaillement entre la zone de proche paroi et la couche externe qui entraîne l'enroulement des tourbillons transverses.
- Head & Bandyopadhyay's (1981) identifient qu'à haut Reynolds les structures en forme de hairpins sont en groupes de plusieurs structures, alors qu'à plus bas Reynolds, plutôt semblables à des horse-shoes, elles circulent par groupes de une ou deux structures seulement.
- Falco (1983) suggère une influence certaine mais limitée des tourbillons extérieurs sur la production en proche paroi.
- Thomas & Bull (1983) suggèrent que les zones à haute pression en proche paroi, associées au bursting, sont dues au passage de zones de fort cisaillement inclinées par rapport à la paroi.
- Smith (1983) propose que le bursting soit le signe de l'enroulement d'un ou plusieurs tourbillons longitudinaux dans la couche de fort cisaillement de la couche limite. Le haut de ces tourbillons étant advecté rapidement, les jambes du tourbillon s'étirent, formant les tourbillons longitudinaux alternés responsables du bursting.
- Robinson (1990) propose un modèle dans lequel les tourbillons  $\Lambda$  co-existent avec les tourbillons longitudinaux dans la région logarithmique (et sont souvent membres d'une même structure), les premiers dominant au-dessus et les seconds en dessous de la région logarithmique.

### 1.1.3 Quelques phénomènes modifiant la dynamique du fluide

#### 1.1.3.1 Transition

Le phénomène de transition sera décrit de façon plus précise en seconde partie de ce chapitre. Dans un premier temps, il suffit de savoir que la transition est un phénomène de transformation de l'écoulement lorsqu'il passe de l'état laminaire à l'état turbulent. Cette transformation se produit lorsque l'équilibre de la couche limite laminaire est fragilisé à cause de trop fortes contraintes (vitesse élevée, gradient de pression adverse, couche limite trop épaisse, obstacle perturbateur, ...). La transition mène à l'état turbulent dans lequel la couche limite a une meilleure tolérance de ces contraintes.

#### 1.1.3.2 Décollement et recollement

Toute couche limite non contrainte a tendance à s'épaissir au fur et à mesure de son développement vers l'aval. Tout gradient de pression longitudinal modifie cet épaississement : un gradient favorable (négatif) accélère l'écoulement et a donc tendance à limiter l'épaississement de la couche

limite. En revanche, dans le cas d'un gradient de pression positif, les forces de pression s'opposent à l'écoulement et donc le ralentissent, ce qui accentue l'épaississement de la couche limite. Le gradient de pression est alors dit défavorable ou encore adverse. En présence d'un fort gradient de pression adverse, la contrainte exercée par les forces de pression sur la couche limite peut devenir telle que les vitesses longitudinales s'inversent près de la paroi et deviennent négatives, créant une zone de recirculation du fluide. Les lignes de courant se séparent littéralement de la paroi au début de cette zone de recirculation, c'est pourquoi on parle alors d'un phénomène de décollement de la couche limite. Le recollement de la couche limite plus loin en aval peut être induit par la diffusion visqueuse ou par un gradient de pression favorable. Cependant, dans la plupart des cas, le recollement, s'il a lieu, est dû à une augmentation des échanges verticaux de quantité de mouvement générée par la turbulence.

### 1.1.4 Quelques notions utiles d'aérodynamique

#### 1.1.4.1 Profil aérodynamique

Un profil aérodynamique est un objet destiné à être placé dans un écoulement et dont la vue de profil est dessinée de façon à permettre des performances (portance, traînée) optimales. Comme schématisé figure 1.3, l'extrados est la surface supérieure du profil aérodynamique (zone basse pression) et l'intrados la surface inférieure (zone de haute pression). L'écoulement rencontre le profil en amont, en un point appelé point d'arrêt de la zone de bord d'attaque et quitte le profil en aval dans la zone de bord de fuite. On appelle corde le segment de droite (et la distance qui y est associée) entre le bord d'attaque et le bord de fuite. L'angle d'incidence est l'angle formé par l'axe bord d'attaque - bord de fuite, c'est-à-dire la corde, avec la direction de l'écoulement à l'infini amont.

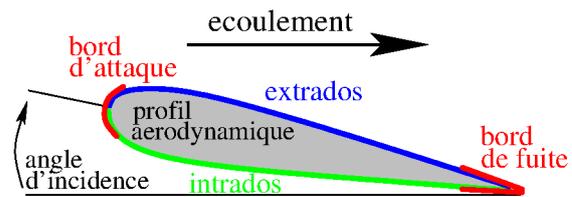


FIGURE 1.3: Description schématique d'un profil aérodynamique.

#### 1.1.4.2 État décroché

Le décrochage se produit quand la couche limite ne parvient pas à recoller. Macroscopiquement, l'état décroché représenté figure 1.4 consiste en un décollement important de l'écoulement vis-à-vis de l'extrados du profil.

Ce décollement apparaît quand la couche limite est devenue trop instable en raison de contraintes trop fortes, notamment en raison d'un gradient de pression trop important. Ce phénomène qui redessine tout l'écoulement autour du profil présente des performances aérodynamiques d'autant plus désastreuses que la zone décollée est étendue.

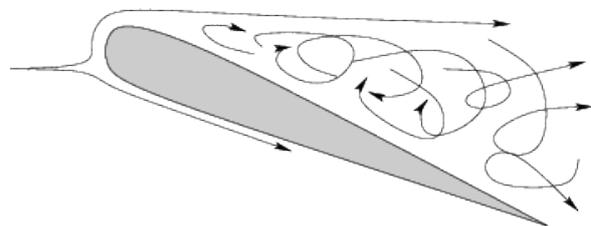


FIGURE 1.4: Profil décroché

#### 1.1.4.3 Bulbe de décollement laminaire

Dans le cas où l'écoulement décolle dès le bord d'attaque et où la couche limite parvient à recoller rapidement, la région de recirculation a une longueur bien inférieure à celle du profil. On parle alors de bulbe de décollement. Lorsque l'écoulement est initialement laminaire (au point de décollement), on parle de bulbe de décollement laminaire (BDL). Le bulbe est le terme utilisé pour définir la région de recirculation située entre le point de décollement et le point de recollement, dont une vue moyennée en temps est schématisée figure 1.5(a). Un BDL est souvent

un phénomène instationnaire, c'est-à-dire qu'il est sujet à un lâcher tourbillonnaire (rouleaux tourbillonnaires éjectés par le bulbe de façon périodique) qui fait varier la position du point de recollement au cours du temps, comme le montre le schéma de vue instantanée figure 1.5(b).

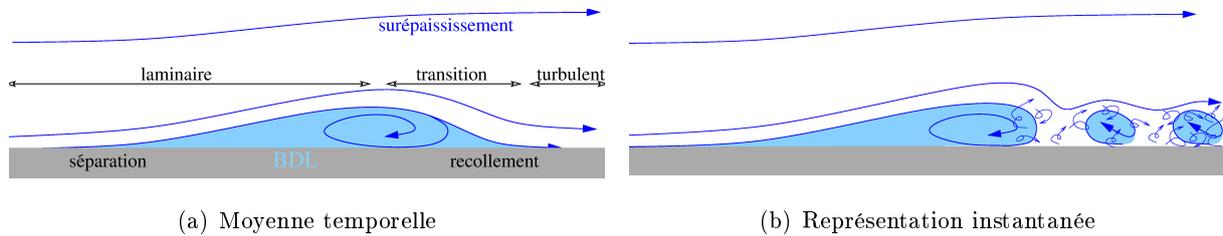


FIGURE 1.5: Schéma représentatif d'un BDL instationnaire

#### 1.1.4.4 Portance, traînée et moment de tangage

Tout corps placé dans un écoulement subit deux forces aérodynamiques, issues de la pression  $p$  et du frottement  $\tau$ , qui s'exercent sur chaque élément surfacique  $ds$  du profil (fig 1.6). En aérodynamique, la résultante de ces forces est souvent décomposée selon une composante perpendiculaire à l'écoulement, la portance, et une composante dans la direction de l'écoulement, la traînée. On note  $\vec{e}_x$  le vecteur unitaire dans la direction de l'écoulement et  $\vec{e}_y$  le vecteur unitaire dans la direction perpendiculaire à l'écoulement.

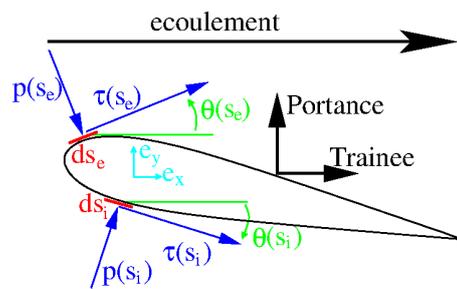


FIGURE 1.6: Décomposition des forces aérodynamiques.

L'expression de la traînée totale est obtenue par projection des forces de pression et de frottement sur l'axe  $\vec{e}_x$ , sa forme est la suivante :

$$\begin{aligned} F_T &= \int_S (\vec{p} + \vec{\tau}) \cdot \vec{e}_x ds \\ &= \int_{extrados} (-|p| \sin(\theta) + |\tau| \cos(\theta)) ds_e + \int_{intrados} (|p| \sin(\theta) + |\tau| \cos(\theta)) ds_i \end{aligned} \quad (1.1)$$

Il sera utile par la suite de définir le coefficient de traînée  $C_T = F_T / (\frac{1}{2} S \rho_\infty V_\infty^2)$ .

La portance s'obtient quant à elle par projection des forces de pression et de frottement sur l'axe  $\vec{e}_y$ , selon l'expression suivante :

$$\begin{aligned} F_P &= \int_S (\vec{p} + \vec{\tau}) \cdot \vec{e}_y ds \\ &= \int_{extrados} (|p| \cos(\theta) + |\tau| \sin(\theta)) ds_e + \int_{intrados} (-|p| \cos(\theta) + |\tau| \sin(\theta)) ds_i \end{aligned} \quad (1.2)$$

On définit aussi le coefficient de portance  $C_P = F_P / (\frac{1}{2} S \rho_\infty V_\infty^2)$

Dans le cas d'une aile ou d'une pale, le design du profil est fait de telle sorte que la portance soit orientée vers le haut pour contrer la force gravitationnelle. La portance est alors issue de la circulation de l'air le long de l'intrados qui induit une surpression et pousse l'aile vers le haut

## 1.2. LE PHÉNOMÈNE DE DÉCROCHAGE

et de la circulation de l'air le long de l'extrados qui induit une dépression et tire également l'aile vers le haut. La force d'aspiration à l'extrados est bien plus forte que la force de poussée à l'intrados, d'où les conséquences importantes sur la portance d'un décollement des lignes de courant de l'extrados.

La traînée est quant à elle une force qui s'oppose au mouvement du profil dans l'écoulement. Elle est induite par les frottements à la paroi et par la forme du profil en raison de la zone de dépression qui se développe en aval de celui-ci.

On peut aussi définir une autre quantité d'intérêt qui sera utilisée par la suite : le moment de tangage. Il rend compte de l'aptitude des forces de pression et de frottement à faire tourner le profil autour de l'axe transversal  $z$ . Son expression s'obtient par l'intégration suivante, où  $X(ds)$  est le point d'application des forces  $\vec{F}_P(ds)$  et  $\vec{F}_T(ds)$  :

$$M_{Tangage} = \int_S (\vec{F}_P + \vec{F}_T) \wedge \vec{OX} ds \quad (1.3)$$

$$= \int_e (y F_{T_e} - x F_{P_e}) ds_e + \int_i (y F_{T_i} - x F_{P_i}) ds_i \quad (1.4)$$

## 1.2 Le phénomène de décrochage

L'étude présentée dans ce mémoire est appliquée au phénomène du décrochage aérodynamique que cette section va tenter de présenter. Les mécanismes d'apparition du décrochage seront décrits, ainsi que leurs conséquences. Les effets du gradient de pression sur la couche limite sont ensuite abordés et pour finir, une synthèse des capacités de modélisation du décrochage existantes sera présentée.

La synthèse bibliographique sur le décrochage présentée dans cette section est inspirée de celle de Richez [103], s'y référer pour plus de précisions.

### 1.2.1 Problématique du décrochage

#### 1.2.1.1 Circulation de l'air autour du profil et décrochage

Les profils aérodynamiques ont une forme particulière qui engendre la présence d'une zone dépressionnaire à l'extrados du profil. Comme mentionné précédemment, cette région de basse pression est à l'origine de la force de portance qui assure la sustentation du profil. Sur l'extrados, le bord d'attaque (un peu en aval du point d'arrêt) est la zone la plus fortement dépressionnaire, et l'écoulement rencontre en aval du bord d'attaque un GPA, gradient de pression adverse (positif) qui s'étend souvent sur tout l'extrados.

De façon générale, portance et traînée sont faibles sur un profil à incidence zéro. L'augmentation de l'incidence entraîne une augmentation importante du GPA, de la portance et une augmentation moindre de la traînée. Le moment de tangage, positif, augmente aussi. L'influence de l'incidence est linéaire jusqu'à une incidence critique pour laquelle les performances aérodynamiques sont optimales.

Au-delà de cette incidence critique, sous l'influence du gradient de pression, la circulation de l'air autour du profil change radicalement. L'écoulement cesse de coller à l'extrados du profil où une grande zone de recirculation s'installe : c'est le décrochage. Ce changement est plus ou moins violent selon les profils, mais s'accompagne toujours d'une forte détérioration des performances aérodynamiques du profil : chute très importante de la portance, forte augmentation de la traînée et dans certains cas inversion du moment de tangage qui devient négatif.

On peut observer figure 1.7 l'évolution du coefficient de pression autour du profil (l'extrados correspond à la courbe du haut et l'intrados à la courbe du bas). On voit que le décrochage change

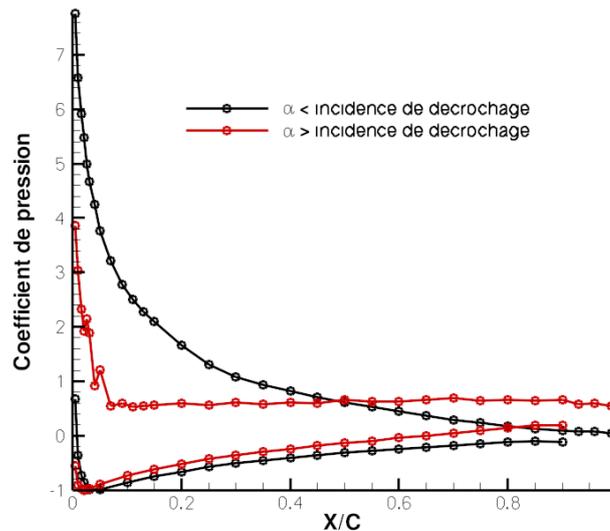


FIGURE 1.7: Évolution du coefficient de pression autour du profil avant et après décrochage, résultats expérimentaux sur le profil OA209 à  $Re = 1.8e^6$ .

radicalement les répartitions de pression sur l'extrados, d'où l'ampleur du bouleversement des caractéristiques aérodynamiques.

L'angle d'incidence critique auquel un profil donné décroche est d'autant plus petit que la vitesse du profil vis-à-vis de l'écoulement est faible. Les industriels ont besoin d'outils qui leur permettent de prévoir, lors du design d'un nouveau type de profil, les conditions de fonctionnement critiques au-delà desquelles se produit le décrochage. Un certain nombre de domaines de l'aéronautique sont concernés par le décrochage ; le cas des pales d'hélicoptères est au centre de cette étude, mais le décrochage des ailes d'avion, des turbines ou encore des éoliennes seront aussi abordés.

### 1.2.1.2 Profil de pale d'hélicoptère

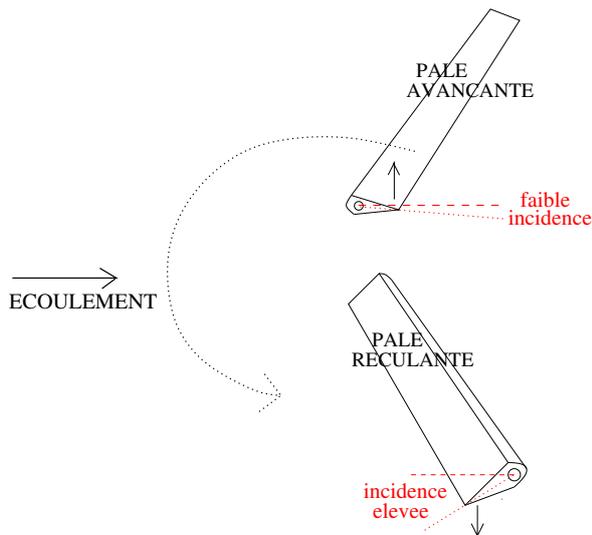
Un hélicoptère en vol d'avancement voit la vitesse et l'angle d'incidence de ses pales varier au cours d'un cycle rotatif. Cette dynamique est représentée figures 1.8 et 1.9. En raison de l'avancement de l'hélicoptère vis-à-vis de l'écoulement extérieur, la vitesse relative de la pale est maximale en phase avançante et minimale en phase reculante.

Les pales d'un hélicoptère sont articulées autour d'un moyeu afin d'éviter une différence de portance due à la différence de vitesse entre les pales avançantes et reculantes. Cette liaison mécanique libre représentée figure 1.8 est la liaison de battement, elle permet de garder une portance constante tout au long du cycle rotatif grâce à une variation de l'incidence de la pale.

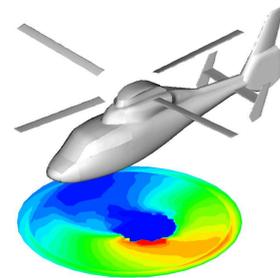
Grâce à cette liaison, la pale avançante s'élève avec l'augmentation de la vitesse, réduisant l'angle d'incidence et donc la portance. À l'inverse la pale reculante en ralentissant se rabaisse, augmentant l'angle d'incidence et donc ainsi la portance. Cette dynamique est représentée figure 1.8. L'incidence maximale de la pale est donc atteinte en pale reculante et l'incidence minimale en pale avançante (voir fig. 1.9).

Au cours de la rotation de la pale, la circulation de l'air autour du profil induit une dépression à l'extrados générant une force de portance qui croît avec l'incidence de la pale, jusqu'à une incidence critique où l'écoulement décroche brutalement et la portance chute (voir fig. 1.10). La plupart du temps, la couche limite du profil décroché subit un lâcher tourbillonnaire, qui induit des difficultés de mesure à l'origine des barres d'erreurs importantes sur les courbes de portance de la figure 1.10. On qualifie le décrochage de dynamique car il n'est pas permanent mais au contraire apparaît et disparaît de façon périodique en fonction de la position de la pale et produit une série de lâchers tourbillonnaires qui perturbent l'écoulement.

## 1.2. LE PHÉNOMÈNE DE DÉCROCHAGE



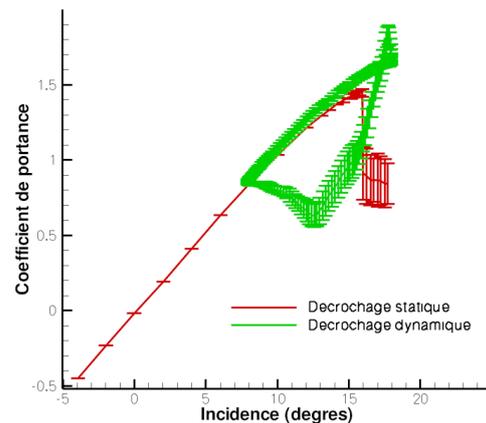
**FIGURE 1.8:** Articulation des pales autour du moyeu au cours d'un cycle rotatif.



**FIGURE 1.9:** Hélicoptère en vol d'avancement et incidence du disque rotor

Le décrochage d'une pale d'hélicoptère suit un cycle d'hystérésis, qu'illustre la figure 1.10 qui représente la variation de portance dans le cas statique et dans le cas dynamique pour une configuration donnée du profil OA209. Le décrochage dynamique se différencie du décrochage statique par les caractéristiques suivantes :

- une sur-portance durant la phase ascendante qui est due à l'effet d'entraînement du profil.
- un retard au décrochage grâce à un tourbillon de bord d'attaque qui prolonge la portance et donc la sustentation en début de phase ascendante, bien que le décollement ait commencé.
- l'effet d'hystérésis qui consiste en une série de lâchers tourbillonnaires créés au bord d'attaque, et ce tout au long de la phase ascendante.



**FIGURE 1.10:** Variation de la portance en fonction de l'angle d'incidence au cours du cycle d'hystérésis, résultats expérimentaux sur le profil OA209 à  $Re_c = 1.8e^6$ .

### 1.2.1.3 Profil d'aile d'avion

Les ailes d'un avion peuvent décrocher si l'avion est ralenti plus que son angle d'incidence n'est diminué, ou si l'angle d'incidence est augmenté sans que l'avion ne soit suffisamment accéléré. Un avion dont les ailes décrochent perd une partie de sa portance, sa sustentation n'est plus assurée, il se met donc à chuter.

Pour retrouver la portance, le pilote doit inverser l'angle d'incidence. L'avion pique alors vers le sol et ainsi reprend de la vitesse ; ce n'est qu'ensuite qu'il peut cabrer, et remonter.

Quelques accidents d'avions de lignes ont été causés par le décrochage, le dernier en date étant celui du Vol 447 d'Air France en 2009. Globalement, tous ces accidents sont survenus soit en raison d'un décrochage qui survient trop près du sol pour que les pilotes puissent parvenir à reprendre suffisamment de vitesse pour remonter, soit en raisons de défaillance des outils d'information de l'écoulement autour de l'avion qui auraient dû indiquer aux pilotes l'approche puis la présence du décrochage et leur permettre d'agir en conséquence.

#### 1.2.1.4 Profil d'aube de turbine de compresseur axial

Les performances d'une turbine de compresseur axial sont limitées par la vitesse relative entre le rotor et le fluide, et la géométrie des aubes. Les profils d'aubes sont dessinés pour être utilisés dans des régimes d'écoulements déterminés (vitesse de rotation des aubes, taux de compression, ...). Les utiliser en dehors de ces conditions pénalise dans un premier temps les performances, et présente des risques d'endommagement et d'arrêt du moteur : si le décrochage se produit sur les aubes du rotor, il se crée dans la turbine un bouchon aérodynamique appelé pompage. Ce phénomène peut provoquer la rupture d'aubes et aller jusqu'à causer l'arrêt du moteur.

#### 1.2.1.5 Profil de pale d'éolienne

Toutes les éoliennes sont équipées de plusieurs systèmes de régulation qui protègent l'éolienne des conséquences d'un vent trop fort. Il s'agit notamment de protéger le générateur électrique contre la surproduction et la surchauffe, et d'éviter une casse mécanique des pales elles-mêmes.

L'un de ces systèmes de régulation utilisé pour la plupart des petites éoliennes consiste en un design spécial des pales afin que le décrochage dynamique se produise au-delà d'une certaine vitesse du vent, modifiant ainsi les efforts exercés sur la pale pour réduire sa vitesse de rotation. Dans ce cas particulier d'application, le décrochage est utilisé comme un élément positif pour le bon fonctionnement de l'appareil.

### 1.2.2 Mécanismes et causes du décrochage

Étant donné les enjeux de la prévision du décrochage, de nombreux auteurs se sont penchés depuis les années 30 sur la compréhension des mécanismes qui le contrôlent et des paramètres qui l'influencent.

#### 1.2.2.1 Les scénarios de décrochage

Les recherches sur les scénarios de décrochage remontent aux années 1930, avec une série d'expérimentations en souffleries sur les effets du nombre de Reynolds et de la turbulence extérieure. En 1933 Millikan et Klein [90] montrent en effet qu'une transition anticipée permet de repousser l'angle critique du maximum de portance, ce qui révèle l'importance de la transition dans le processus de décrochage.

Jones [55, 56] à la suite de résultats expérimentaux obtenus sur différents profils propose de classer les mécanismes de décrochage en trois groupes :

- le décrochage de bord de fuite qui concerne les profils les plus épais,
- le décrochage de bord d'attaque qui concerne les profils d'épaisseur modérée,
- le décrochage dit "de profil mince".

En 1937, Jacobs et Sherman [51] suggèrent le lien entre le type de décollement et les caractéristiques du maximum de portance. Cela sera confirmé en 1948 par Loftin et Bursnall [73] qui, en se basant sur les résultats expérimentaux de Von Doenhoff et Tetervin [125], mettent en évidence l'importance de la zone de recirculation laminaire du bord d'attaque vis-à-vis des effets du nombre de Reynolds sur l'incidence critique.

McCullough & Gault [83] confirment la présence d'un bulbe laminaire (déjà observé par Jones [55, 56]) de très petite taille ( $\leq 1\%$  de corde) sur le bord d'attaque de profils d'épaisseur modérée, peu avant l'incidence de décrochage. Ils suggèrent alors que le décrochage de bord d'attaque est dû à l'échec du processus de recollement du BDL.

Les résultats expérimentaux de McCullough & Gault [83] sont obtenus sur cinq profils d'épaisseurs différentes en faisant pour chacun varier l'angle d'incidence.

En s'appuyant sur ces résultats expérimentaux, McCullough & Gault décrivent les trois scénarios de décrochage, et caractérisent pour chacun l'évolution de l'équilibre aérostatique :

## 1.2. LE PHÉNOMÈNE DE DÉCROCHAGE

**Le décrochage de bord de fuite :** Il est initié, à faible incidence, par l'apparition d'un décollement turbulent au bord de fuite du profil. L'augmentation de l'incidence entraîne une remontée progressive du point de décollement depuis le bord de fuite vers le bord d'attaque. Une augmentation de l'incidence au-delà de l'angle critique entraîne une diminution progressive de la portance alors que traînée et moment de tangage continuent d'augmenter.

**Le décrochage de profil mince :** Il est dû à l'agrandissement progressif d'un décollement partant du bord d'attaque. Pour ce type de profil, la traînée augmente assez rapidement avec l'incidence et la perte de portance à l'angle critique est relativement faible. Le moment de tangage devient négatif autour de l'angle critique puis recommence à augmenter.

**Le décrochage de bord d'attaque :** Il est dû à l'apparition d'un décollement soudain dont l'origine est liée au bord d'attaque. Une infime augmentation de l'incidence au-delà de l'angle critique entraîne une chute brutale de la portance et une augmentation forte et soudaine du frottement avec une inversion brutale du moment de tangage.

Les figures 1.11, 1.12 et 1.13 sont extraites des travaux de McCullough & Gault [83]. Elles présentent l'évolution des coefficient de portance, de traînée et du moment de tangage avec l'augmentation de l'angle d'incidence sur les cinq profils utilisés pour décrire les scénarios de décrochage. Le profil NACA 63-018 (rouge) y est sujet à un décrochage de bord de fuite, le profil NACA 63-012 (bleu) à un décrochage de bord d'attaque et le profil «double wedge» (vert) à un décrochage de profil fin. Les deux autres profils, le NACA 63-009 et le NACA 64A006, ont une attitude moins prononcée, mais le premier semble subir un décrochage de bord d'attaque et le second un décrochage de profil fin.

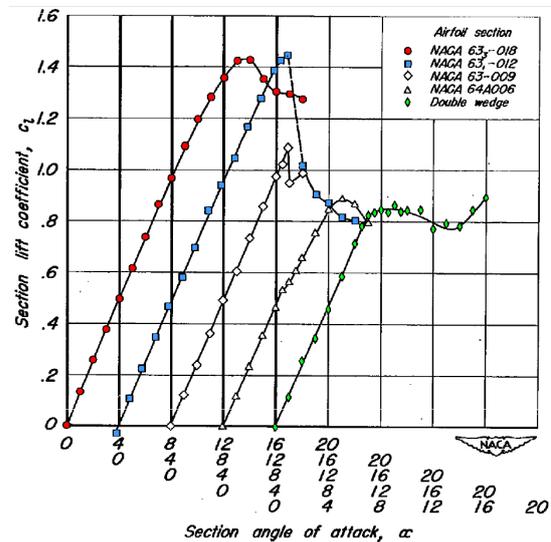


FIGURE 1.11: Polaire du coefficient de portance vis-à-vis de l'angle d'attaque, McCullough & Gault [83]

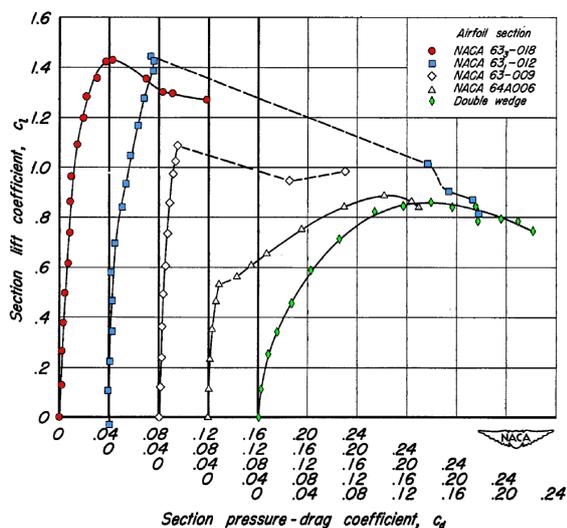


FIGURE 1.12: Polaire du coefficient de portance vis-à-vis du coefficient de traînée [83]

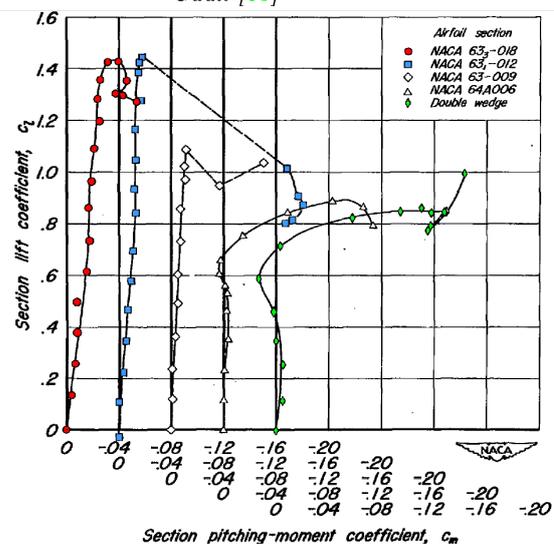


FIGURE 1.13: Polaire du coefficient de portance vis-à-vis du moment de tangage [83]

Le travail mené dans ce mémoire concerne le cas du décrochage de bord d'attaque, ce dernier sera donc plus détaillé que les autres scénarios et nécessitera une étude des mécanismes d'expansion du bulbe qui lui est spécifique.

Le décrochage de bord d'attaque est à ce jour le scénario le moins bien documenté et le plus difficile à prévoir ; ses mécanismes sont les suivants :

À faible vitesse et à partir d'une certaine incidence du profil, le gradient de pression adverse devient tel qu'il déséquilibre la couche limite et entraîne la formation d'un bulbe de décollement laminaire (BDL) près du bord d'attaque (voir fig. 1.14). Ce BDL entraîne la transition vers la turbulence au point de recollement du bulbe ce qui re-stabilise en partie la couche limite.

Si une incidence critique est atteinte, le gradient de pression devient trop fort pour permettre le recollement, la zone décollée s'étend alors brutalement à tout l'extrados. C'est le phénomène du décrochage de bord d'attaque.

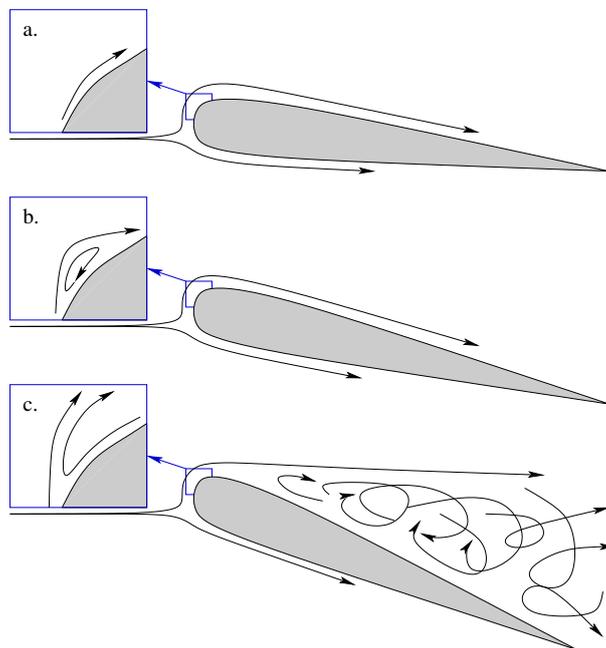


FIGURE 1.14: Profil aérodynamique et dynamique de l'écoulement environnant à l'approche d'un décrochage de type bord d'attaque.

### 1.2.2.2 Bulbe court et bulbe long

Les études d'écoulements décollés font apparaître qu'il existe deux types de bulbes aux propriétés différentes, un bulbe court et un bulbe long.

- Owen et Klanfer [93] (1953) proposent, sur la base de résultats expérimentaux, que la taille longue ou courte du bulbe dépende du nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement  $\delta^* = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} (1 - \frac{u}{u_e}) dy$  de la couche décollée  $\Re_{\delta_S^*} = \frac{U_S \delta_S^*}{\nu}$ . Ils proposent une valeur critique  $\Re_{\delta_S^*}^{crit} = 400 - 500$  en dessous de laquelle se produit l'éclatement qui serait selon eux dû à un changement des propriétés de stabilité de la couche de cisaillement : le bulbe est court si l'écoulement est instable vis-à-vis des petites perturbations et long si l'écoulement est stable. Les auteurs assimilent le décrochage à l'éclatement d'un bulbe court en un bulbe long qui ne parvient pas à recoller et proposent une classification des bulbes longs et courts :
- court si l'étendue du BDL est de l'ordre de  $10^2 \delta_S^*$ ,
- long si l'étendue du BDL est de l'ordre de  $10^4 \delta_S^*$ .

## 1.2. LE PHÉNOMÈNE DE DÉCROCHAGE

- Crabtree [26] (1959) confirme expérimentalement un nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement au point de décollement critique  $\Re_{\delta_s^*}^{crit} \simeq 450 - 500$ , et propose en outre un nouveau paramètre  $\sigma = \frac{C_p^R - C_p^S}{1 - C_p^S}$  basé sur le coefficient de pression  $C_p$ . Il identifie une valeur maximale  $\sigma \simeq 0,35$  que le bulbe court est capable de supporter et au-delà duquel le bulbe devient long indépendamment du Reynolds.
- Gaster [37] (1966) présente un compte rendu d'études expérimentales qui couvrent de larges gammes de Reynolds de la couche limite décollée et de distributions de pression dans la région du bulbe. La forme du bulbe dépend de la distribution de pression qui s'établirait si il n'y avait pas de décollement ; Gaster propose donc d'utiliser le paramètre de gradient de pression adimensionné  $\bar{P} = (\theta_s^2/\nu)(\delta U/\delta x)$  où  $\delta U$  et  $\delta x$  sont relatifs à la longueur du bulbe et  $\theta_s$  est l'épaisseur de quantité de mouvement au point de décollement. Gaster propose d'utiliser  $\Re_{\theta_s}$  comme second paramètre contrôlant le comportement du bulbe. Il suggère qu'un troisième paramètre non identifié lié à l'écoulement amont reste à découvrir. Il semblerait que le décollement apparaisse quand  $\bar{P}^{crit} = -0,09$  pour  $\Re_{\theta_s} < 125$ , et quand  $\bar{P}^{crit} = f(\Re_{\theta_s})$  pour  $\Re_{\theta_s} > 125$ . Dans ces expérimentations, le processus d'expansion du bulbe est graduel, aucun éclatement soudain n'est observé, et aucune différence distinctive entre les régimes "long" et "court" n'est remarquée. Enfin, Gaster note qu'à tous les régimes, la taille de la zone de décollement et celle de la "région triangulaire d'air mort" (dont la fin coïncide avec le point de transition) ne varient pas. En revanche, la région turbulente s'étend d'autant plus que la vitesse diminue.
- Horton [45] (1968) propose, sur la base d'observations expérimentales, une corrélation définissant la longueur de la région laminaire décollée :  $l_{lam} = \frac{4 \cdot 10^4 \theta_s}{\Re_{\theta_s}}$
- Woodward [132] (1970) suggère une relation entre la longueur laminaire du BDL et  $\Re_{\theta_s}$  fonction de la distribution de pression autour du profil. Pour certaines distributions de pression cette relation n'admet pas de solution, c'est alors que se produit l'éclatement. Cette méthode a montré de bons résultats pour certaines études expérimentales.
- Roberts [109] (1980) modifie la méthode de Horton pour qu'elle tienne compte de la turbulence extérieure dans l'évaluation de la longueur laminaire du BDL en proposant la formule suivante :  $l_{lam} = \frac{2.5 \cdot 10^4 \theta_s \log[\coth(17,32 Tu)]}{\Re_{\theta_s}}$ .
- Gleyzes, Cousteix et Bonnet [43] (1985) s'appuient eux aussi sur des calculs de stabilité linéaire pour développer un critère de transition adapté à la transition par bulbe. Ce critère repose sur une expression analytique du taux d'amplification  $n$  de la fréquence la plus instable et sur la valeur critique de ce taux d'amplification  $n_T = -8.43 - 2.4 \ln(Tu)$ . Le taux d'amplification est calculé par la formule  $n = \int_{\Re_{\theta_{cr}}}^{\Re_{\theta}} f_1(H_i) dR_{\theta}$  avec  $\Re_{\theta_{cr}} = f_2(H_i)$  où  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions publiées. Ce critère est efficace à faible taux de turbulence extérieure et permet d'identifier le point de transition par BDL.
- Diwan, Chetan et Ramesh [30] (2006) proposent un nouveau critère unique sous la forme du gradient de pression adimensionné :  $P = \frac{h^2}{\nu} \frac{\Delta U}{\Delta x}$  de valeur critique  $P_{cr} = -28$  où  $h$  est la hauteur maximale du bulbe et  $\frac{\Delta U}{\Delta x}$  est le gradient de vitesse entre le point de décollement et le point de recollement.

### 1.2.2.3 Effets du gradient de pression, difficultés de modélisation

La présence d'un gradient de pression influence l'équilibre d'une couche limite turbulente en modifiant le rapport des termes de production et de dissipation de la turbulence. Clauser (1954) suggère l'utilisation du paramètre  $\beta = (\delta^*/\tau_0) (dP/dx)$  pour définir la nature "à l'équilibre" (si  $\beta = Cste$ ) ou "hors équilibre" de la couche limite.

La présence d'un gradient de pression adverse cause un ralentissement de l'écoulement, et une modification du profil vertical de vitesse de la couche limite avec une réduction de la région

logarithmique et une augmentation de la zone de sillage. Spalart et Watmuff [119] (1993) ainsi que Coleman, Kim et Spalart [23] (2003) montrent que le bilan de l'équation de conservation de l'énergie cinétique se trouve modifié autant dans la zone interne que dans la zone externe :

- forte diminution de la production de  $k$  en zone interne,
- moindre diminution de la dissipation de  $k$  en zone interne,
- augmentation de la production de  $k$  en zone externe.

Cela mène à une diminution des fluctuations turbulentes en proche paroi, et donc à un frottement plus faible, alors que dans la zone externe l'énergie cinétique de turbulence ainsi que, dans une moindre mesure, les tensions de Reynolds, augmentent au fur et à mesure de leur advection. Cette propriété a un impact direct sur la modélisation de la turbulence qui utilise le paramètre de Bradshaw  $a_1 = -\overline{u'v'}/k$  pour calculer les tensions de Reynolds, et modélise  $a_1$  à l'aide du rapport production sur dissipation de  $k$ . Ce paramètre qui vaut 0.3 dans une couche turbulente à l'équilibre diminue dans la zone externe de la couche limite (Aubertine et Eaton [8], 2005) alors que le rapport production sur dissipation de  $k$  augmente dans cette zone, faussant la modélisation qui surestime par conséquent les tensions de Reynolds. La correction SST proposée par Menter [86] propose une solution à ce problème.

Le gradient de pression modifie donc fortement la dynamique de développement de la couche limite turbulente, et par conséquent, l'échelle de vitesse visqueuse  $u_\tau = \sqrt{\nu \partial u / \partial y|_{y=0}}$  qui lui est associée en absence de gradient de pression. En effet, l'utilisation de cette échelle pour normaliser les profils verticaux de vitesse ne permet pas d'observer la convergence des profils vers un profil théorique. De nombreux auteurs suggèrent l'utilisation d'une vitesse basée sur le gradient de pression, comme par exemple  $u_p = [(\nu/\rho)(dP/dx)]^{1/3}$  utilisé par Skote et Henningson [113] (2002). Nagano, Tsuji et Hourra [91] (1997) obtiennent quant à eux de bons résultats en utilisant l'échelle de temps de Taylor  $\tau_E = [2u^2 / (du/dt)^2]^{1/2}$ .

#### 1.2.2.4 Simulation RANS du décrochage

Globalement, toutes les études menées sur le décrochage dynamique de bord d'attaque d'un profil oscillant en incidence (par exemple : Srinivasan et Ekaterinaris [120]) constatent que les modèles RANS échouent à simuler correctement la fin de la phase ascendante (phase d'augmentation de l'incidence) et toute la phase descendante (phase de diminution de l'incidence) : ils surestiment les tensions de Reynolds, surestiment la portance, échouent à calculer correctement la traînée, et présentent un retard sur l'inversion du moment de tangage et donc une surestimation de l'angle de décrochage. Les modèles utilisés dans ces études sont dits "fully turbulents", c'est-à-dire que les couches limites sont toutes calculées comme des couches limites turbulentes, sans prendre en compte les caractères laminaires ou transitionnels.

Ekaterinaris et Menter [33] montrent que la prise en compte correcte du décollement est essentielle, et que la correction SST de Menter permet d'améliorer légèrement les résultats par rapport aux modèles  $k - \omega$  de Wilcox et  $k - \varepsilon$  qui ont tendance à sous-estimer le décollement turbulent. Les auteurs pensent que la mauvaise prévision du tourbillon de bord d'attaque associé à l'éclatement du bulbe est à l'origine du retard de décrochage observé. Ils montrent avec le modèle de Baldwin-Barth qu'une meilleure modélisation de la transition par BDL permet d'améliorer les résultats.

Par ailleurs, plusieurs études ont révélé une grande influence de la résolution spatiale sur la modélisation du décrochage. Un manque de résolution mène à une sous-estimation de la portance qui donne donc, à tort, des résultats en meilleur accord avec l'expérience. On peut donc s'interroger sur la fiabilité des nombreuses études numériques publiées.

En ce qui concerne la prise en compte des effets du gradient de pression adverse et de l'état hors équilibre de la couche limite, deux approches prometteuses sont à mentionner :

Les modèles multi-échelles, introduits par Schiestel [110] et appliqués aux modèles  $k - \varepsilon$  et  $k - \omega$  par Gleize *et al.* [40] et Masson *et al.* [80], proposent une alternative aux modèles de turbulence standards. Ces modèles reposent sur une décomposition des différentes échelles composant le spectre de la turbulence. En se basant sur les propriétés spécifiques à chaque type d'échelles, leur modélisation est alors réalisée de façon distincte. Cette approche permet une modélisation plus adaptée des effets de la turbulence au cours de l'évolution de la couche limite turbulente, étant donné que les écoulements transitionnels et hors équilibre mis en jeu dans les écoulements de bord d'attaque sont caractérisés par l'action de nombreux processus d'échelles très différentes.

Une autre approche intéressante est celle des modèles RSM (Reynolds Stress Models), dont une description peut être trouvée par exemple dans les travaux de Launder [65]. L'approche RSM propose de modéliser de façon distincte les différentes composantes du tenseur de Reynolds, au lieu de faire l'hypothèse d'isotropie de la turbulence et d'utiliser le concept de viscosité de la turbulence. Ces modèles prennent en compte l'anisotropie de la turbulence, c'est-à-dire les différences entre les régimes turbulents des différentes tensions de Reynolds. La couche limite turbulente qui se développe en aval du bulbe a un caractère anisotrope marqué, c'est pourquoi ces modèles permettent d'améliorer parfois considérablement les résultats des simulations.

Le phénomène de décrochage vient d'être décrit et expliqué à hauteur des connaissances scientifiques actuelles. Le cas plus précis du décrochage de bord d'attaque est le thème porteur de ce mémoire ; il a été mis en évidence que la transition par bulbe en est un élément crucial et qu'une correcte modélisation en est indispensable. Le phénomène de transition attirera par conséquent toute l'attention du lecteur dans la suite de ce chapitre.

### 1.3 Instabilités et transition des écoulements bidimensionnels cisailés ouverts

Cette section présente une synthèse des connaissances actuelles des mécanismes d'instabilités et de transition dans des écoulements statistiquement bidimensionnels, se développant dans la direction longitudinale, cisailés dans la direction verticale et que l'on qualifie d'ouverts, c'est-à-dire que les particules de fluide sont advectées au travers du domaine d'intérêt sans y être confinées ni recyclées. La transition par bulbe est un cas particulier qui ne sera abordé que dans la dernière section de ce chapitre.

Pour introduire cette section, il semble intéressant de situer les enjeux de la prévision de la transition qui s'étendent bien au-delà du décrochage. Les mécanismes de la transition seront ensuite décrits, ainsi que les notions d'instabilités qui y jouent un rôle crucial. Les connaissances actuelles sur les différents scénarios de transition d'une couche limite attachée seront ensuite expliqués, ainsi que les notions d'instabilités convectives et absolues.

#### 1.3.1 Enjeux

La prévision de la transition et le contrôle du phénomène de transition est un sujet d'étude crucial dans de nombreux secteurs de l'aérodynamique :

- Un écoulement laminaire présente un frottement beaucoup moins élevé qu'un écoulement turbulent et par conséquent une traînée plus faible, d'où l'intérêt pour les industriels qui cherchent à réduire la consommation des véhicules.
- Les échanges de chaleur sont beaucoup plus élevés dans un écoulement turbulent que dans un écoulement laminaire ce qui présente aussi une donnée extrêmement importante pour

les véhicules à grande vitesse.

- La connaissance des mécanismes de transition est aussi un enjeu majeur dans le domaine de la réduction des nuisances sonores puisque les sources du bruit aérodynamique prennent leur origine dans les tourbillons turbulents.

Dans certains cas il est donc souhaitable de conserver la couche limite laminaire le plus longtemps possible.

En revanche, à plus faible nombre de Reynolds, la couche limite laminaire est particulièrement sensible aux gradients de pression adverses qui peuvent l’amener à décoller de la paroi du profil, entraînant des conséquences désastreuses sur les performances aérodynamiques (portance et traînée). Il est alors souhaitable de provoquer la transition vers l’état turbulent en amont du point de décollement, car la couche limite turbulente, plus stable, ne décollera peut-être pas, ou plus tard. C’est l’enjeu des recherches menées sur le contrôle de la couche limite.

### 1.3.2 Classification des écoulements et nature convective/absolue des instabilités

Les écoulements ouverts sont sujets aux instabilités se développant spatialement ou temporellement. Cette section vise à expliquer comment prévoir quel type de dynamique (convective ou absolue) un écoulement donné va générer, en fonction des propriétés des ondes instables qu’il peut supporter.

Une synthèse des travaux existants en matière d’instabilités convective/absolue des écoulements ouverts est proposée par Huerre et Monkewitz [49].

Les régions de l’écoulement qui ne sont pas soumises à des contraintes trop fortes sont généralement stables, c’est-à-dire qu’elles amortissent temporellement toute perturbation extérieure initiale.

Les régions instables de l’écoulement vont au contraire avoir tendance à amplifier certaines perturbations de l’écoulement. L’écoulement contient des ondes amplifiées et des ondes évanescentes.

On distingue deux types de comportements de l’écoulement :

- les écoulements amplificateurs qui amplifient les perturbations extérieures,
- les écoulements oscillateurs susceptibles de supporter une oscillation auto-entretenu dite mode global.

On distingue par ailleurs deux types de nature de l’instabilité qui se distinguent par l’évolution du paquet d’ondes généré par une perturbation impulsionnelle localisée :

- les instabilités convectives pour lesquelles le paquet d’ondes est amplifié et advecté vers l’aval de l’écoulement,
- les instabilités absolues qui sont caractérisées par l’expansion du paquet d’ondes autour de la source jusqu’à contaminer tout l’écoulement.

Une présentation de la théorie de la stabilité linéaire sera faite au section 2.3.1. En attendant, il suffit de savoir que les grandeurs principales de l’écoulement  $\phi = u, v, w, p$  peuvent être décrites par la somme de leur moyenne temporelle  $\bar{\phi}$  et d’un terme de fluctuation  $\phi'$ , c’est-à-dire  $\phi(x, y, t) = \bar{\phi}(x, y) + \phi'(x, y, t)$ . Le terme fluctuant décrit les perturbations subies par l’écoulement, il est solution des équations linéarisées de Navier-Stokes pour les petites perturbations. Ces solutions ont la forme de modes normaux de fréquence  $\omega$  et de nombre d’onde  $k$  :

$$\phi'(x, y, t) = \hat{\phi}(y)e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.5)$$

### 1.3.2.1 Écoulements amplificateurs et instabilités convectives

Dans le cas d'un écoulement parallèle ou faiblement non-parallèle, si celui-ci est convectivement instable en tout point, il se comportera en amplificateur. La figure 1.15 représente l'évolution d'un paquet d'ondes généré en  $x = 0$  et  $t = 0$  dans un cas d'instabilité convective ;  $\omega_i$  est la partie imaginaire de la fréquence  $\omega$  du mode normal, c'est-à-dire son taux d'amplification temporel.

Dans ce cas la convection domine suffisamment la dispersion pour transporter loin de sa source le paquet d'ondes généré par une source impulsionnelle localisée en espace et en temps, comme le montre l'advection du paquet d'ondes sur la figure 1.15. La vitesse de groupe  $\partial\omega/\partial k$ , qui est la vitesse de propagation de l'énergie, est alors non-nulle.

Dans ce type d'écoulement, certaines harmoniques des perturbations extérieures sont amplifiées à mesure que celles-ci sont convectées, on décrit alors la réponse de l'écoulement en terme d'amplification spatiale des ondes. La perturbation finale (en aval de l'écoulement) est dans ce cas fortement dépendante de la perturbation initiale.

Les couches limites attachées sont généralement convectivement instables au-dessus d'un nombre de Reynolds critique. Sur une plaque plane sans gradient de pression adverse, les instabilités de Tollmien-Schlichting (TS) sont un exemple typique d'instabilité convective.

### 1.3.2.2 Écoulements oscillateurs et instabilités absolues

Dans le cas d'un écoulement parallèle ou faiblement non-parallèle, si une région de l'écoulement est absolument instable, alors l'écoulement est susceptible de se comporter en oscillateur. L'existence d'une région absolument instable est donc une condition nécessaire à l'existence d'un mode global. La figure 1.16 représente l'évolution d'un paquet d'onde généré en  $x = 0$  et  $t = 0$  dans un cas d'instabilité absolue ;  $\omega_i$  est la partie imaginaire de la fréquence  $\omega$  du mode normal.

Un mode global, ou oscillation auto-entretenu, est un paquet d'ondes qui s'est développé dans l'écoulement et pulse à une même fréquence en tout endroit de l'espace, indépendamment de toute perturbation extérieure. En d'autres termes, le paquet d'ondes généré par une source impulsionnelle localisée en espace et en temps reste alors localisé autour du point source tout en se dispersant dans les directions amont et aval, comme le montre l'évolution du paquet d'ondes sur la figure 1.16. La vitesse de groupe  $\partial\omega/\partial k$ , qui est la vitesse de propagation de l'énergie, est alors nulle. La fréquence de pulsation est solution d'un problème aux valeurs propres dans la direction de l'écoulement.

La réponse d'un écoulement se comportant en oscillateur est décrite préférentiellement en termes d'évolution temporelle des ondes.

Le lâcher de von Karman dans le sillage d'un cylindre est un exemple d'oscillation auto-entretenu. Les couches de mélange avec un écoulement de retour suffisant peuvent elles aussi se comporter en oscillateurs. Certains BDL comportent une zone de vitesse négative et pourraient être sujet à une instabilité absolue, mais dans les bulbes standards l'écoulement de retour est généralement trop faible pour supporter une instabilité absolue.

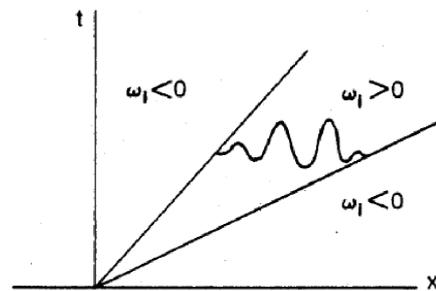


FIGURE 1.15: *Instabilité convective, d'après Huerre et Monkewitz [48]*

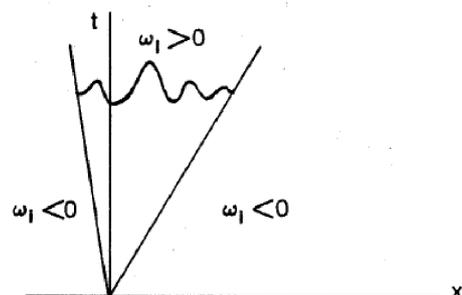


FIGURE 1.16: *Instabilité absolue, d'après Huerre et Monkewitz [48]*

### 1.3.3 Scénarios de transition d'une couche limite

Pour un écoulement bidimensionnel de couche limite, on distingue habituellement deux scénarios de transition associés à des instabilités convectives : la transition naturelle gouvernée par la croissance des modes de Tollmien-Schlichting (modes "TS", décrits ci-dessous) et la transition bypass. Cependant, pour certains écoulements très particuliers il peut arriver que d'autres modes distincts des modes TS soient prédominants dans l'écoulement, on citera le cas de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz pour les écoulements cisailés mais aussi le cas du scénario de transition par modes de Görtler car tous deux sont susceptibles de jouer un rôle dans certains cas de transition par BDL. Le scénario de transition naturelle est le scénario de référence, il sera décrit en détail. Ce scénario est généralement à l'origine du début de l'amplification des modes menant à la transition dans le BDL. En revanche, il semblerait que, dans certains cas, le scénario par modes de Görtler contrôle la fin du processus d'amplification et soit donc en partie responsable de la transition du BDL.

Étant donné que l'écoulement étudié dans ce mémoire a lieu sur une plaque plane, la courbure des lignes de courant est minimale et la possibilité d'une transition par modes de Görtler fortement improbable. Le faible niveau de perturbations extérieures permet aussi d'exclure le cas d'une transition bypass. Ces deux cas de transition ne seront donc que brièvement abordés.

#### 1.3.3.1 Transition naturelle (ou modale) de couche limite

C'est le scénario de transition de référence, il a lieu dans le cas où les perturbations extérieures sont faibles. L'amplitude des modes instables dépend alors de l'amplitude des perturbations initiales.

Dans un écoulement extérieur faiblement perturbé, la transition d'un état laminaire vers un état turbulent est initiée, bien loin en amont de l'apparition du premier spot turbulent, par la croissance de petites perturbations bidimensionnelles. Les premiers auteurs ayant suspecté ces mécanismes sont Rayleigh en 1887 et Prandtl en 1921 ; en 1929 Tollmien propose la première version complète de la théorie des instabilités, complétée en 1933 par les travaux de Schlichting sur l'amplification des fréquences les plus instables. Ce n'est qu'en 1948 que les premiers résultats expérimentaux de Schubauer et Skramstad viennent confirmer ces théories.

Il existe différents types d'instabilités (ou modes instables, modes propres) que les écoulements sont susceptibles d'amplifier, ces instabilités se distinguent notamment par leur origine visqueuse ou non visqueuse, par leur fréquence, leur nombre d'onde et leur direction de propagation.

##### 1.3.3.1.a Différents types d'instabilités

Deux types de modes instables 2D peuvent être distingués :

- **Instabilité visqueuse de Tollmien-Schlichting** : d'origine visqueuse, cette instabilité convective apparaît pour des écoulements sans point d'inflexion. Il s'agit de l'instabilité typique des couches limites laminares soumises à un gradient de pression négatif ou nul.
- **Instabilité non-visqueuse de Kelvin-Helmholtz** : d'origine non-visqueuse, elle se caractérise par un fort taux d'amplification et apparaît quand le profil de vitesses présente un point d'inflexion, à Reynolds élevé et faible viscosité de préférence. Il s'agit de l'instabilité typique des couches de cisaillement (sillages, jets, couches limites décollées)

Aussi bien les modes visqueux que non visqueux sont les solutions des équations de stabilité d'Orr Sommerfeld, on les obtient numériquement de la même façon.

Ces modes bidimensionnels entraînent, dans la région qui précède la transition, l'apparition de rouleaux transverses advectés par l'écoulement.

1.3.3.1.b Phases de réceptivité, de stabilité linéaire et phase non-linéaire

La transition est classiquement décrite par trois étapes, la phase de réceptivité, la phase de stabilité linéaire et la phase non-linéaire. La figure 1.17 illustre les différentes régions où se produisent ces phases de la transition.

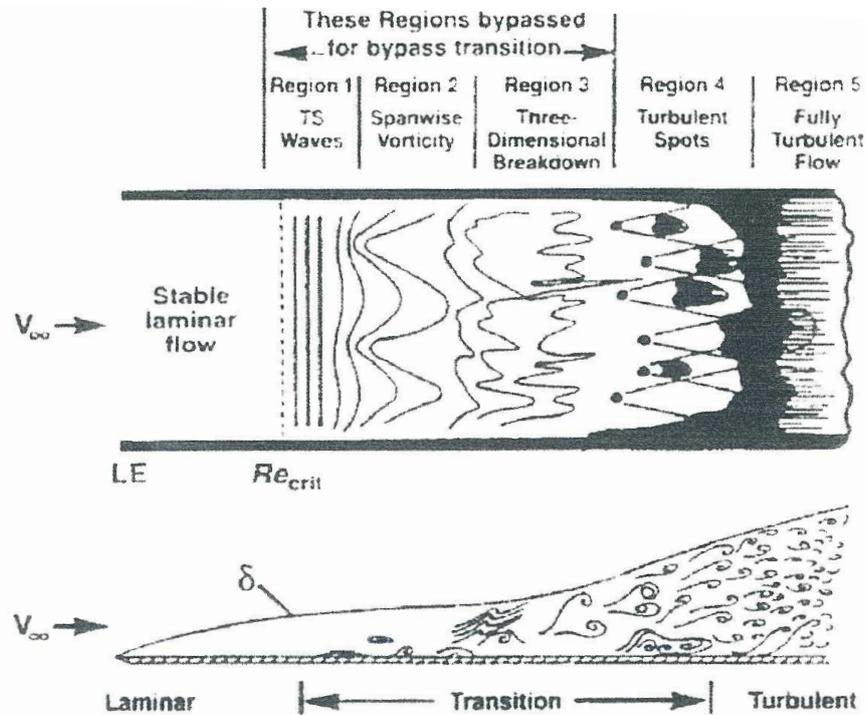


FIGURE 1.17: Scénario de transition naturelle (Schlichting, 1979)

- **Région de réceptivité** : En 1969, Morkovin introduit le concept de réceptivité qui décrit la façon dont de petites perturbations introduites ou naturellement présentes à la paroi ou à l’extérieur de la couche laminaire (vibrations de paroi, bruit, ...) vont naturellement exciter les modes propres de celle-ci, c’est-à-dire créer des ondes stables ou instables selon leur fréquence. La région de réceptivité est représentée figure 1.17 par la région amont de l’écoulement où est indiqué “*Stable laminar flow*”. Dans cette région de l’écoulement, des ondes ou modes propres sont donc générés par la couche limite à partir des perturbations initiales de l’écoulement.
- **Région de stabilité linéaire** : Ces modes propres sont ensuite convectés dans une zone dite région de stabilité linéaire où certains de ces modes sont amplifiés et les autres atténués. Les ondes de fréquences différentes y évoluent indépendamment les unes des autres. Dans cette région de l’écoulement, les modes propres prennent la forme d’ondes périodiques dont l’énergie est advectée par l’écoulement, les ondes stables sont atténuées et les ondes instables sont amplifiées selon la théorie de la stabilité linéaire. La région de stabilité linéaire est représentée figure 1.17 par la *région 1* de l’écoulement où les modes de Tollmien-Schlichting (*TS waves*) se développent. Tant que l’amplitude des modes reste faible, leur amplification peut être en effet être décrite par la théorie de la stabilité linéaire ce qui permet de prévoir la possibilité d’une transition. Cette théorie utilise les équations de Navier-Stokes linéarisées, et cherche des solutions sous forme de modes normaux. Cela mène en incompressible à l’équation d’Orr-Sommerfeld (OS), problème aux valeurs propres dont la résolution donne la fréquence, le taux d’amplification et la forme des modes stables et instables. Les équations

régissant la théorie de la stabilité linéaire seront présentées ultérieurement, section 2.3.1.1. Dans le cas d'une couche limite bidimensionnelle transitionnant naturellement, l'instabilité de Tollmien-Schlichting est responsable de la croissance des modes instables. Dans le cas d'une couche de cisaillement, ce sont les modes de Kelvin-Helmholtz qui entrent en jeu. Dans chacun de ces deux écoulements, les modes TS ou KH se présentent sous la forme de rouleaux transverses qui sont advectés par l'écoulement.

- **Région non-linéaire** : Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires à cause des termes de convection qui font apparaître des termes quadratiques de produits de fluctuations. Les termes non-linéaires sont négligeables dans la région linéaire tant que les perturbations sont petites. Lorsque les ondes amplifiées atteignent une certaine amplitude ces termes quadratiques ne peuvent plus être négligés et l'approximation linéaire cesse d'être valable. La région non linéaire est représentée figure 1.17 par les *régions 2 à 4* de l'écoulement. Les effets non-linéaires n'y sont plus négligeables et déstabilisent l'écoulement, l'apparition de vorticités transversales entraîne la déformation des structures transverses (*régions 2 et 3*), menant à la création de spots de turbulence (*région 4*), et conduisant rapidement à la turbulence (*région 5*).

### 1.3.3.1.c Critères et facteurs de stabilité

Un certain nombre d'études ont été consacrées à l'influence stabilisante ou non des différents types d'écoulements et des conditions de paroi. Citons notamment les études de Lin (1955) qui montrent qu'un gradient de pression favorable a tendance à stabiliser la couche limite bidimensionnelle et un gradient de pression défavorable (positif) à la déstabiliser. En revanche, un gradient de pression défavorable est susceptible de déstabiliser un écoulement tridimensionnel présentant des modes transversaux. Par ailleurs, la présence d'un point d'inflexion sur les profils verticaux de vitesse de l'écoulement de base représente un facteur déstabilisant (théorème du point d'inflexion de Rayleigh). De nombreuses études portent sur l'influence du parallélisme ou non de l'écoulement ; elles mettent en évidence l'influence des effets non-parallèles sur le taux d'amplification des modes 2D ainsi que la stabilité des modes transverses, notamment pour les écoulements décollés soumis à des gradients de pression adverses. Une des conclusions les plus importantes est qu'il n'y a pas de critère universel de stabilité (Fasel & Konzelmann, 1990)

### 1.3.3.2 Transition bypass

Dans un écoulement de couche limite soumis à de plus fortes perturbations extérieures, la croissance des modes TS peut être court-circuitée par l'apparition rapide des effets non-linéaires. On parle alors de transition "bypass", laquelle se produit souvent pour un nombre de Reynolds inférieur au nombre de Reynolds critique prévu par la théorie de stabilité linéaire. Dans ce scénario de transition, de petits tourbillons quasi-longitudinaux stationnaires alternés dans la direction transverse issus de la réceptivité apparaissent en proche paroi. Ces tourbillons sont comparables à ceux d'une couche limite turbulente décrits au paragraphe 1.1.2. Ces tourbillons longitudinaux ont eu aussi un effet "lift-up", c'est-à-dire qu'ils soulèvent du fluide lent et descendent du fluide à forte vitesse, formant ainsi des zones de forte et faible vitesses appelées "streaks". Les tourbillons longitudinaux sont étirés et forment des "horse-shoes" qui se désagrègent en tourbillons plus petits, eux mêmes se désagrégeant en tourbillons encore plus petits, et ainsi de suite, menant à la création de "spots" de turbulence dans l'écoulement. Ces spots remplissent peu à peu l'écoulement jusqu'à l'état de turbulence développée établie. Ces phénomènes court-circuitent la croissance des modes TS et mènent à une transition plus rapide que celle du scénario de transition naturelle.

### 1.3.3.3 Transition par modes de Görtler

Dans certains cas, il arrive que ce ne soit pas les modes TS qui sont les plus amplifiés par l'écoulement, on évoque ici le scénario de transition par modes de Görtler qui peut conduire à une transition semblable au scénario de la transition naturelle. Ce scénario apparaît en présence de courbures des lignes de courant concaves, ce qui peut être le cas pour un écoulement sur une paroi concave ou dans le cas d'un BDL. Ce scénario consiste en l'apparition de paires de tourbillons longitudinaux contrarotatifs dits tourbillons de Görtler, issus des effets centrifuges, et correspondent comme les ondes TS et KH à un mode normal de l'écoulement de base. Les tourbillons de Görtler provoquent eux aussi la transition par effet *lift-up* associé aux streaks et désagrégation de tourbillons  $\Lambda$ .

Maintenant que les mécanismes standards de transition et d'instabilités ont été expliqués, il reste à lier ces propriétés au cas particulier de la transition par BDL, objet de la troisième section de ce mémoire.

## 1.4 Mécanismes d'instabilités et de transition dans un BDL

La plupart des mécanismes mis en jeu au cours d'une transition de couche limite attachée sont de nature convective. Cependant un BDL présente un écoulement de retour qui le rapproche d'une couche de mélange, et est donc susceptible d'être absolument instable si l'écoulement de retour est suffisamment important. D'autre part, l'écoulement dans le bulbe est fortement non-parallèle et donc, aussi pour cette raison, susceptible d'entretenir un mode global. L'étude des écoulements de BDL transitionnels a fait l'objet de nombreuses études expérimentales, ainsi que d'un certain nombre de simulations numériques au cours des dix dernières années. Des études de stabilité linéaire (dont la validité malgré le caractère fortement non parallèle de l'écoulement a été démontrée par Maucher *et al.* [81] ou encore Marxen *et al.* [77] ) ont permis d'identifier une partie des instabilités mises en jeu.

Plusieurs auteurs se sont penchés sur la question du mécanisme de la transition dans un BDL. L'historique des travaux expérimentaux et numériques et leurs résultats sont décrits dans cette section.

### 1.4.1 Observations générales

Nombre d'auteurs, comme Gaster [37] (1966), montrent que la transition débute en amont du bulbe par l'amplification des modes de Tollmien Schlichting, et que le bulbe est le siège d'une amplification spatiale des instabilités.

Arnal, Juillen et Michel [7] (1979), montrent qu'en présence d'un gradient de pression adverse, une couche limite attachée va faire preuve d'une forte amplification des modes TS. Ils observent tout comme nombre d'autres auteurs pour des écoulements de BDL (Gleyzes, Cousteix et Bonnet [43] (1985), Pauley, Moin & Reynolds [97] (1990), ...), que la transition débute par l'apparition de tourbillons 2D transversaux et est suivie de l'apparition de fluctuations turbulentes sur ces tourbillons transversaux. Aucun n'observe l'apparition de spots turbulents comme c'est le cas pour une transition en l'absence de gradient de pression.

Certains auteurs (Gleyzes, Cousteix et Bonnet [43] (1985)) estiment que les tourbillons transversaux sont issus de l'instabilité visqueuse des modes TS de la couche limite ; alors que d'autres (Pauley, Moin & Reynolds [97] (1990), Watmuff (1999), Fasel et Postl [35] (2006) ) estiment que les tourbillons transversaux sont issus d'une instabilité non-visqueuse (du type KH) de la couche de cisaillement décollée.

Alam & Sandham [2] (2000) ainsi que Yang et Voke [134] (2000) observent dans la couche de cisaillement à mi-longueur du bulbe des structures  $\Lambda$  de type hairpins très nettes de l'ordre de grandeur de la longueur du bulbe. Des streaks de proche paroi apparaissent en aval du point de recollement.

Une fréquence fondamentale est observée dans le bulbe par Gleyzes, Cousteix et Bonnet [42] (1980) ; cette fréquence fondamentale est associée aux rouleaux transversaux et au lâcher tourbillonnaire périodique, elle disparaît peu à peu après le recollement au profit des sous-harmoniques.

### 1.4.2 Nature des instabilités

Le type de transition est l'objet d'un désaccord entre les auteurs, certains (Yang et Voke [134] (2000)) estiment qu'une instabilité secondaire est à l'origine de la création des structures tridimensionnelles. Rist [107] (1994) et Alam & Sandham [2] (2000) penchent pour une transition par modes obliques, alors que d'autres encore (Pauley [96] (1994), Marxen, Lang, Rist, Levin et Henningson [76] (2009) ) observent un mécanisme du type modes de Görtler. Enfin, quelques études, comme celle de Maucher, Rist et Wagner [81] (1997) identifient un mécanisme d'instabilité absolue de la zone de recollement comme origine des rouleaux transversaux. Rist [106] (2002) compare deux calculs de Reynolds différents ( $\Re_{\delta_s^*}^s = U_\infty \delta_s^* / \nu = 2400$  et  $1250$ ) avec forçage 2D et 3D par impulsions discrètes isolées dans le temps. Le cas du nombre de Reynolds le plus élevé montre une amplification temporelle de perturbations 3D qui semble provenir d'un nouveau type d'instabilité. La région de recollement semble responsable de la croissance temporelle, la transition est instantanée, sans lâcher tourbillonnaire.

Wissink et Rodi [131] (2006) observent que les erreurs numériques sont suffisantes pour exciter les modes KH de la couche de cisaillement décollée et pour mener à la transition. Ils observent également une réduction de la longueur du bulbe avec l'ajout et l'augmentation de l'intensité du forçage. Jones, Sandberg et Sandham [57] observent l'auto-entretien de la turbulence après l'arrêt du forçage grâce à une boucle de rétroaction acoustique entre le BDL et le bord de fuite. Cependant, les auteurs indiquent que les critères n'annoncent aucun signe d'une instabilité absolue.

Rist [106] (2002) observe que les perturbations 2D sont amplifiées par une instabilité primaire jusqu'à saturation aux  $3/4$  de la longueur du bulbe. Les perturbations 3D sont quant à elles amplifiées par une instabilité primaire jusqu'au point de décollement au-delà duquel elles sont amplifiées par une instabilité secondaire sans atteindre la saturation avant la fin du domaine de calcul.

### 1.4.3 Identification des instabilités

Un écoulement de retour de  $15 - 20\%$  de la vitesse extérieure au minimum est nécessaire à l'apparition d'une instabilité absolue (Niew [92], Gaster [38]). Rist [106] (2002) ajoute que cette restriction est levée si le bulbe est suffisamment épais, c'est-à-dire si la hauteur maximale de la couche d'écoulement de retour  $h_R$  surpasse  $\delta^*/2$ . Il semble aussi y avoir une faible influence du nombre de Reynolds.

Rist [106] (2002) présente des résultats qui permettent de déterminer laquelle des contributions des instabilités TS ou KH est dominante : si l'instabilité TS est dominante, le profil vertical de fluctuations  $\overline{u'}(y)$  présentera un pic en proche paroi prédominant sur le pic de la zone de cisaillement, et vice-versa pour la dominance des modes KH.

## Conclusions

Le contexte du décrochage des profils aérodynamiques a été introduit dans ce chapitre. Il apparaît que la forme du profil, notamment son épaisseur, est déterminante vis-à-vis de la mécanique du scénario menant au décrochage. Pour un profil de section donnée, en revanche, l'apparition du décrochage est fortement dépendante du nombre de Reynolds de l'écoulement et de l'angle d'incidence, mais aussi et surtout de la forme générale du profil (courbures, ...) dont dépend le GPA.

Le cas particulier du décrochage de bord d'attaque a été analysé ; ses mécanismes et conditions d'apparition sont encore à ce jour peu documentés et sa modélisation demeure incertaine. En effet, les modèles RANS sont aujourd'hui largement utilisés et efficaces pour simuler des écoulements pleinement turbulents, attachés et soumis à des gradients de pression modérés. Les écoulements de bord d'attaque à l'approche du décrochage sortent de ce cadre simplifié, et leur simulation par les modèles RANS échoue à reproduire et prendre en compte les conséquences des phénomènes de transition, décollement - recollement dans un gradient de pression adverse intense.

La synthèse bibliographique a permis de mettre en évidence l'importance cruciale du bulbe transitionnel dans le mécanisme de décrochage du bord d'attaque, ainsi que la nécessité d'améliorer sa prise en compte par les méthodes de modélisation RANS. La description du phénomène de transition a ensuite été explorée à travers une synthèse bibliographique des études existantes. À la lumière de ces propriétés, les connaissances actuelles des mécanismes de la transition dans le cas particulier du bulbe transitionnel ont été explorées.

Malgré une littérature abondante, les études tant expérimentales que numériques du décrochage de bord d'attaque peinent à obtenir des informations utiles à l'amélioration des modèles RANS. Les raisons en sont que, d'une part, elles sont souvent faites sur des écoulements qui diffèrent sensiblement en terme de nombre de Reynolds des écoulements aéronautiques, d'autre part que ces études réalisées bien souvent sur des profils aérodynamiques mettent en jeu trop de phénomènes complexes qui, conjugués, rendent très difficile l'interprétation des résultats.

Dans ce contexte, il a été décidé de réaliser une étude complète sur un écoulement typique, en terme de nombre de Reynolds, d'un bord d'attaque à l'approche du décrochage. Une géométrie simplifiée de plaque plane a été définie afin d'isoler le bulbe transitionnel des autres phénomènes complexes d'un écoulement de bord d'attaque habituel, et notamment du GPA en aval du bulbe qui déséquilibre la couche limite turbulente. Cette étude est complète dans le sens où elle comprend dans un premier temps l'obtention et l'analyse d'une base de données DNS, et dans un second temps l'étude des méthodes de modélisation RANS.



Deuxième partie

Étude DNS de la transition par BDL



## Chapitre 2

# Méthodes de calcul de l'écoulement et d'analyse de sa stabilité

Des calculs DNS ont été réalisés dans le cadre de cette étude, ils reposent sur la résolution directe des équations de Navier-Stokes qui régissent la mécanique des fluides. Ces équations aux dérivées partielles transcrivent les principes fondamentaux de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie du fluide. L'approche DNS employée ici repose sur une discrétisation des équations sur un maillage très fin permettant la résolution des échelles les plus petites. Une présentation du système d'équations de Navier-Stokes résolu par la DNS sera tout d'abord réalisée.

Dans un second temps, la technique de discrétisation des équations employée pour l'obtention de la base de données DNS sera décrite. Celle-ci est basée sur la méthode des volumes finis. Une version hybride centré/décentré [79] modifiée précise au second ordre du schéma AUSM+(P) est employée pour la discrétisation des flux convectifs et un schéma centré d'ordre deux lui aussi pour les flux visqueux. L'intégration temporelle des équations a été réalisée de façon implicite par un schéma de Gear [39] et validée par la comparaison avec les résultats d'une résolution explicite par un schéma de Runge-Kutta compact à trois pas de Shu et Osher [112].

L'exploitation de la base de données DNS et sa validation, objets du chapitre suivant, font intervenir des outils dont la description constitue la dernière section de ce chapitre. Il s'agit d'une méthode de calcul de la stabilité linéaire de l'écoulement réalisée par le code CASTET [3, 99], ainsi que d'une technique d'analyse du contenu spectral de l'écoulement mise au point par Larchevêque [60].

### 2.1 Équations de conservation de Navier-Stokes

Les équations régissant la dynamique et la thermodynamique d'un fluide compressible, visqueux, conducteur de la chaleur et non pesant sont les équations de Navier-Stokes ; elles expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Le détail de l'obtention du système d'équations de Navier-Stokes se trouve dans l'annexe A.1. En notation indicielle, ce système peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} = 0 \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_k + \delta_{ik} p)}{\partial x_k} - \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (i = \{1, 2, 3\}) \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho E u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial p u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} - \frac{\partial \tau_{kl} u_l}{\partial x_k} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Ces équations, écrites ici en repère cartésien, font intervenir le temps  $t$ , l'unité de longueur  $x_i$  dans la direction  $i$ , la masse volumique  $\rho$ , la vitesse  $u_i$  dans la direction  $i$ , la pression  $p$ , la température  $T$ , l'énergie totale spécifique  $E$ , et le flux de chaleur  $q_i$  dans la direction  $i$ . L'écriture du système 2.1 est simplifiée par l'utilisation de la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés (pour les indices  $k$  et  $l$  du système 2.1).

Il apparaît aussi dans ces équations le tenseur des contraintes visqueuses  $\tau_{ij}$ , qui s'écrit pour un fluide newtonien :

$$\tau_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les deux coefficients de viscosité du fluide. En supposant vérifiée l'hypothèse de Stokes (i.e.  $3\lambda + 2\mu = 0$ ), le tenseur des contraintes s'exprime finalement :

$$\tau_{ij} = \mu(T) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (2.3)$$

où  $\mu(T)$  est la viscosité dynamique du fluide, qui est reliée à la température suivant la loi de Sutherland :

$$\mu(T) = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1/2} \frac{1 + 110,4/T_0}{1 + 110,4/T} \quad (2.4)$$

avec  $T_0 = 273,16$  K et  $\mu_0 = 1,711 \cdot 10^{-5}$  kg.m<sup>-1</sup>.s<sup>-1</sup>.

On remarque que l'expression de  $\tau$  fait apparaître le tenseur des déformations

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.5)$$

qui constitue la partie symétrique  $D = \frac{1}{2} [\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u}) + {}^t\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u})]$  du tenseur  $\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u})$ . Il sera par la suite utile de mentionner le tenseur de vorticité  $\Omega = \frac{1}{2} [\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u}) - {}^t\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u})]$  qui constitue la partie antisymétrique du tenseur  $\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{u})$  :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.6)$$

Le flux de chaleur est donn e par l'expression :

$$q_i = -\mathcal{K}(T) \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.7)$$

où  $\mathcal{K}(T) = \frac{\mu(T)C_p}{Pr}$  est le coefficient de conductibilité thermique.

L'énergie totale du fluide s'exprime en fonction de l'énergie interne  $e$  :

$$E = e + \frac{1}{2} u_k u_k \quad (2.8)$$

Le système (2.1) est compl et e par l'équation des gaz parfaits (2.9). L'air, bien qu'étant un gaz réel, donc non parfait, est caract eris e par des distances intermoléculaires élevées par rapport

à la taille des molécules et à la portée des forces d'interaction. Cette caractéristique octroie à l'air un comportement très voisin de celui d'un gaz parfait. La loi des gaz parfaits s'écrit :

$$p = \rho RT \quad (2.9)$$

où  $R = \mathcal{R}/\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{R}$  étant la constante des gaz parfaits et  $\mathcal{M}$  la masse molaire du gaz considéré.

Pour un tel gaz, l'énergie interne est exprimée par :

$$e = C_v T = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (2.10)$$

## 2.2 Discrétisation des équations de Navier-Stokes par la méthode volumes finis

Cette section s'applique à définir la façon dont les équations ont été prises en compte numériquement par le biais d'une discrétisation selon la méthode des volumes finis pour des maillages structurés.

On présentera succinctement les méthodes numériques utilisées dans cette étude pour discrétiser les équations de Navier-Stokes filtrées. Pour plus de détails sur ces méthodes, on pourra se référer aux travaux de Larchevêque [60], Mary [78] et Raverdy [101].

Les schémas présentés seront ordre deux au minimum.

### 2.2.1 Méthode des volumes finis

Dans un espace à trois dimensions de base orthonormale  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  discrétisé en petits volumes élémentaires, la méthode des volumes finis consiste à résoudre des équations en considérant les variables constantes dans chaque volume élémentaire et sur chacun de ses bords.

Le système des équations de Navier-Stokes 2.1 peut être réécrit sous la forme compacte suivante :

$$\partial_t \vec{\mathcal{Q}} + \partial_{x_j} \vec{F}_{c_j}(\vec{\mathcal{Q}}) = \partial_{x_j} \vec{F}_{d_j}(\vec{\mathcal{Q}}) \quad (2.11)$$

où les termes  $F_{c_j}$  et  $F_{d_j}$  sont respectivement les flux convectifs (flux d'Euler) et diffusifs (flux visqueux), et où  $\vec{\mathcal{Q}}$  est le vecteur des variables conservatives :

$$\vec{F}_{c_j}(\vec{\mathcal{Q}}) = \begin{bmatrix} \rho u_j \\ \rho u_1 u_j + p \\ \rho u_2 u_j + p \\ \rho u_3 u_j + p \\ (\rho E + p) u_j \end{bmatrix}, \quad \vec{F}_{d_j}(\vec{\mathcal{Q}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ \tau_{3j} \\ \tau_{ij} u_i - q_j \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \vec{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

où on utilise la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés  $i$  et  $j$ .

Le système 2.11 est intégré sur un volume  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ , de normale extérieure  $\vec{n}$ , donnant sous sa forme condensée l'égalité suivante :

$$\iiint_{\Omega} \partial_t \vec{\mathcal{Q}} d\Omega + \iiint_{\Omega} \partial_{x_j} \vec{F}_{c_j}(\vec{\mathcal{Q}}) d\Omega = \frac{1}{\Re} \iiint_{\Omega} \partial_{x_j} \vec{F}_{d_j}(\vec{\mathcal{Q}}) d\Omega \quad (2.13)$$

Grâce à la formule d'Ostrogradski, cette formulation devient :

$$\iiint_{\Omega} \partial_t \vec{\mathcal{Q}} d\Omega + \iint_{\Gamma} \vec{F}_{c_j}(\vec{\mathcal{Q}}) n_j d\Gamma = \frac{1}{\Re} \iint_{\Gamma} \vec{F}_{d_j}(\vec{\mathcal{Q}}) n_j d\Gamma \quad (2.14)$$

où  $\vec{n}$  représente le vecteur unité normal à  $\Gamma$  et pointant vers l'extérieur de  $\Omega$ .

Cette équation peut être appliquée à chaque volume hexaédrique  $\Omega_k$  de frontière  $\Gamma_{kl}$  du domaine : puisque  $\vec{F}_{c_j}$  et  $\vec{F}_{d_j}$  sont constants sur chacune des six frontières  $\Gamma_{kl}$  de surface  $S_{kl}$  de la cellule  $\Omega_k$ , le système discret d'équations de conservation 2.14 appliquées au volume  $\Omega_k$  s'écrit en dimension trois :

$$\left. \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} \right|_{\Omega_k} + R = 0 \quad (2.15)$$

où  $R$  représente l'opérateur spatial des équations de Navier-Stokes :

$$R = \frac{1}{\Omega_k} \left( \sum_{l=1}^6 (S_{kl} \vec{F}_{c_j} \Big|_{\Gamma_{kl}} n_j \Big|_{\Gamma_{kl}}) - \frac{1}{\Re} \sum_{l=1}^6 (S_{kl} \vec{F}_{d_j} \Big|_{\Gamma_{kl}} n_j \Big|_{\Gamma_{kl}}) \right) \quad (2.16)$$

où  $n_j \Big|_{\Gamma_{kl}}$  correspond à la projection du vecteur unité  $\vec{n}$  normal à  $\Gamma_{kl}$  qui pointe vers l'extérieur de  $\Omega_k$  sur le vecteur  $\vec{e}_j$  de la base :  $n_j \Big|_{\Gamma_{kl}} = \vec{e}_j \cdot \vec{n}_{\Gamma_{kl}}$ .

Dans la suite de ce chapitre, l'indice  $k$  qui indique la cellule de calcul est omis pour alléger la présentation.

### 2.2.2 Calcul des métriques

Pour discrétiser le domaine de calcul, des maillages structurés multi-blocs curvilignes seront utilisés. Les termes de métrique (normales  $n_j \Big|_{\Gamma}$ , surfaces  $S_l$  et volume  $\Omega$ ) qui apparaissent dans l'équation 2.15 doivent être estimés. Ces termes de métrique doivent vérifier certaines identités géométriques, sous peine d'affecter la solution. Ces identités sont des lois de conservation géométrique. Pour les approximations ou les calculs de ces métriques on peut pour plus de détails se référer à la thèse de Péchier [98].

### 2.2.3 Discrétisation des flux convectifs

La discrétisation des flux convectifs joue un rôle crucial dans la précision des simulations instationnaires de type DNS ou LES. Elle doit permettre de capturer des structures turbulentes ayant des grandeurs caractéristiques de quelques cellules  $\Omega_k$ . Pour cela, il est avant tout nécessaire de limiter au maximum la dissipation numérique du schéma. En effet, cette dernière interagit avec la dissipation physique et peut conduire à des résultats erronés [36]. L'idéal serait d'utiliser un schéma non dissipatif et d'ordre élevé. Hélas l'utilisation d'un schéma d'ordre élevé dans une méthode des volumes finis est très difficile à mettre en place et s'avère souvent d'un coût numérique très important, qui lui enlève tout intérêt : il est concrètement plus efficace de travailler avec des schémas d'ordre deux en utilisant des maillages plus denses que d'employer des schémas d'ordre plus élevé sur des maillages plus grossiers. Le recours à une approche de type différences finies pourrait rendre l'emploi d'un schéma d'ordre élevé compétitif car la molécule de calcul est plus réduite que dans l'approche volumes finis et l'efficacité des supercalculateurs actuels basés sur des processeurs superscalaires dépend fortement de la taille de la molécule de calcul, particulièrement pour les calculs 3D très gourmands en accès mémoire. Dans l'attente de premières conclusions sur l'intérêt concret des schémas d'ordre élevé pour des simulations instationnaires [46], il a été décidé de ne recourir qu'à des schémas précis au second ordre pour l'ensemble des études numériques réalisées dans cette thèse.

Afin de limiter la dissipation numérique du schéma, l'approche hybride centré/décentré initialement proposée dans [79] et employée depuis dans de nombreuses simulations instationnaires à caractère fondamental ou applicatif [102, 61, 95, 104] a été retenue. En effet, ce schéma construit à partir du schéma décentré AUSM+(P) [32] réalise un bon compromis entre précision et robustesse.

### 2.2.3.1 Schéma AUSM+(P) simplifié

Dans le cadre de notre étude, c'est-à-dire un écoulement qui est classé dans la catégorie des écoulements à faible nombre de Mach, soit quasi-incompressibles, nous avons utilisé un schéma particulièrement adapté à cette situation. L'utilisation de la LES dans une configuration complexe nécessite un schéma simple qui ne soit pas d'un coût algorithmique important. Le schéma retenu est dérivé d'une simplification de la méthode AUSM (*Advection Upstream Splitting Method*). La méthode AUSM, proposée initialement par Liou et Stefen en 1993 [71], fait partie de la famille des schémas *Flux Vector Splitting* (FVS). Ce schéma AUSM+ de capture de chocs se base sur la séparation du flux  $F^c$  en un terme convectif et un terme de pression aux interfaces  $l$ .

$$\vec{F}_{c_j} n_j \Big|_l = F^{conv} \Big|_l + P \Big|_l \quad (2.17)$$

Le schéma AUSM+(P), développé par Edwards et Liou [32], a été adapté du schéma AUSM+ initial pour garantir un couplage vitesse/pression efficace et une précision satisfaisante pour l'ensemble des régimes d'écoulements.

Une analyse précise du comportement de ce schéma est disponible dans Mary [78]. Des modifications importantes ont été introduites pour optimiser la précision et le coût numérique. Étant donné que dans notre étude nous n'avons pas la présence de choc, une formulation simplifiée a été développée pour approximer les flux convectifs sur l'interface  $l$  représentés par :

$$F^{conv} \Big|_l = U_l(Q_L + Q_R)/2 - |U_{dis}|(Q_R - Q_L)/2 \quad (2.18)$$

où  $Q$  est le vecteur  $Q = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho E + p)$ . Les indices  $L/R$  indiquent l'état gauche et droit de l'interface  $l$ .  $U_l$  représente une projection de la vitesse sur la normale à l'interface.

$$U_l = \vec{n} \cdot (\vec{u}_L + \vec{u}_R)/2 - c_2(p_R - p_L) \quad (2.19)$$

où  $c_2$  une constante numérique et le terme de pression est donné par

$$P \Big|_l = (p_R + p_L)/2 (0, \vec{n}_l \cdot \vec{e}_1, \vec{n}_l \cdot \vec{e}_2, \vec{n}_l \cdot \vec{e}_3, 0)^t$$

Le paramètre  $|U_{dis}|$  qui indique une vitesse locale, caractérise l'action de la dissipation numérique sur les composantes de la vitesse, soit :

$$U_{dis} = \max(|U_l|, c_1) \quad (2.20)$$

où  $c_1$  est une constante. Les valeurs de  $c_1$  et  $c_2$  sont choisies aussi petites que possible afin de minimiser la dissipation numérique, mais elles ne peuvent être mises à zéro pour des raisons de stabilité. Des valeurs optimales ont été déterminées dans Mary [78] :

$$c_1 \approx 0,04U_{ref}, c_2 \approx \frac{0,04}{\rho_{ref}U_{ref}} \quad (2.21)$$

où  $\rho_{ref}$  et  $U_{ref}$  sont des constantes représentant une masse volumique et une vitesse caractéristiques de l'écoulement étudié. Par exemple pour une couche limite, il s'agit des grandeurs mesurées à l'extérieur de la couche limite. Ce schéma décentré sert de socle pour la fabrication d'un schéma hybride centré/décentré.

### 2.2.3.2 Hybridations centré/décentré du schéma AUSM+(P)

Les calculs DNS ou LES demandent généralement l'utilisation de schémas non dissipatifs donc centrés, qui génèrent très facilement des oscillations paire/impair non physiques. Ces oscillations parasites détériorent la précision, mais surtout elles peuvent conduire à une instabilité du calcul qui empêche l'obtention de tout résultat numérique exploitable. Afin de minimiser la dissipation numérique du schéma tout en conservant de bonnes propriétés de robustesse, un schéma hybride centré/décentré a été proposé par Mary [79]. A chaque instant, la dissipation numérique du schéma est pilotée par un senseur qui scrute la présence d'éventuelles oscillations numériques et définit une fonction binaire  $\Phi$ .

Pour construire  $\Phi$ , la régularité des variables primitives  $\phi = (\rho, u_1, u_2, u_3, p)^t$  est évaluée dans chacune des trois directions  $i, j$  et  $k$  du bloc structuré. Pour la direction  $i$  et pour l'interface  $l = i + \frac{1}{2}$ ,  $\Phi$  est déterminée comme suit :

$$\Delta_{\phi}^i = \begin{cases} -1 & \text{si } (\phi_{i+2} - \phi_{i+1})(\phi_{i+1} - \phi_i) < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$W_{\phi_m} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta_{\phi_m}^i + \Delta_{\phi_m}^{i-1} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\Phi_l = \max(W_{\phi_m}) \quad \text{pour } m = 1, 5$$

Le pilotage de la dissipation numérique du schéma AUSM+(P) modifié se fait alors en modifiant  $U_{dis}$  défini dans l'Éq. 2.20 :

$$U_{dis} = \max(|U_l|, c_1) \times \Phi_l \quad (2.23)$$

Il est important de noter que dans ce schéma proposé par Mary [79], la vitesse dans la direction normale à l'interface définie dans l'Éq. 2.19 introduit toujours une dissipation numérique sur le champ de pression (second terme de l'équation), même si toutes les variables primitives sont régulières ( $\Phi = 0$ ). Une variante du schéma a donc été introduite dans le cadre de ce travail de thèse pour que, sur une solution régulière, le schéma dégénère correctement vers un schéma purement centré. Pour cela la vitesse dans la direction normale à l'interface a été redéfinie :

$$U_l = \vec{n} \cdot (\vec{u}_L + \vec{u}_R) / 2 - c_2(p_R - p_L) \times \Phi_l \quad (2.24)$$

### 2.2.3.3 Extension au troisième ordre

La détermination des flux nécessite la connaissance des états  $Q^L$  et  $Q^R$  de part et d'autre de cette interface. Pour traiter les écoulements turbulents sans choc, une interpolation MUSCL précise au troisième ordre est retenue. Ceci conduit aux définitions suivantes pour toute quantité  $\varphi$  à gauche et à droite de l'interface  $l = i + \frac{1}{2}$  :

$$\varphi_{i+\frac{1}{2}}^L = \frac{4\varphi_{i+1} + 10\varphi_i - 2\varphi_{i-1}}{12}, \quad \varphi_{i+\frac{1}{2}}^R = \frac{4\varphi_i + 10\varphi_{i+1} - 2\varphi_{i+2}}{12} \quad (2.25)$$

## 2.2.4 Discrétisation des flux visqueux

Le calcul des flux visqueux  $\vec{F}_{d_j}$  de l'Éq.2.16 nécessite la connaissance des variables primitives, mais aussi des gradients suivant les trois directions de l'espace des trois composantes de vitesse et de la température. La nature dissipative des termes visqueux permet l'utilisation robuste de schémas centrés précis à l'ordre deux qui peuvent s'obtenir de différentes façons.

Les gradients des variables conservatives sont ici calculés selon une idée de Chakravarty [19] à l'aide d'une formule de Green-Ostrogradski sur des volumes de contrôle  $\Omega_c$  :

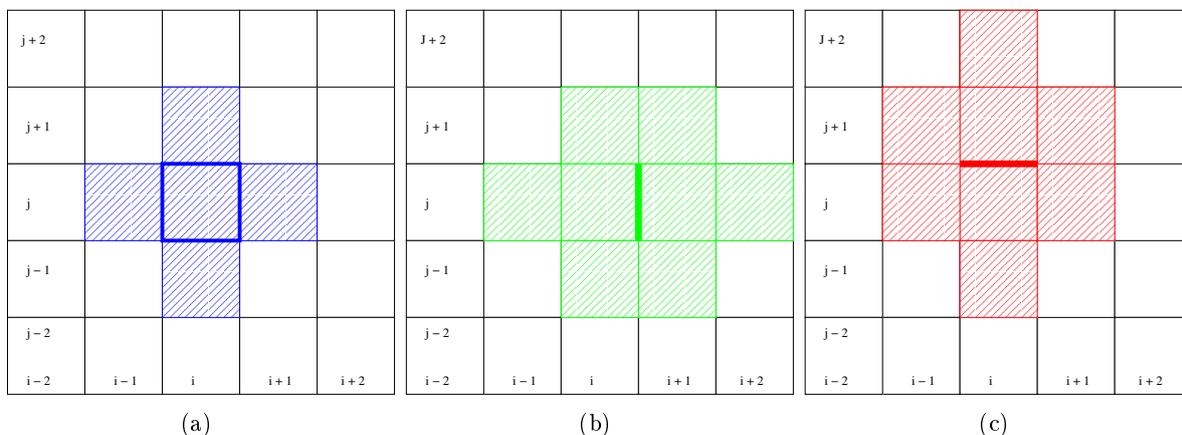
$$\partial_i \phi|_{\Omega_c} \simeq \frac{1}{\Omega_c} \int_{\Omega_c} \partial_i \phi d\Omega \quad (2.26)$$

$$\simeq \frac{1}{\Omega_c} \oint_{\partial\Omega_c} \phi n_i dS = \frac{1}{\Omega_c} \iint_{\Gamma_{\Omega_c}} \phi n_i d\Gamma \quad (2.27)$$

$$= \frac{1}{\Omega_c} \sum_{l=1}^6 \phi|_{\Gamma_l} n_i|_{\Gamma_l} \quad (2.28)$$

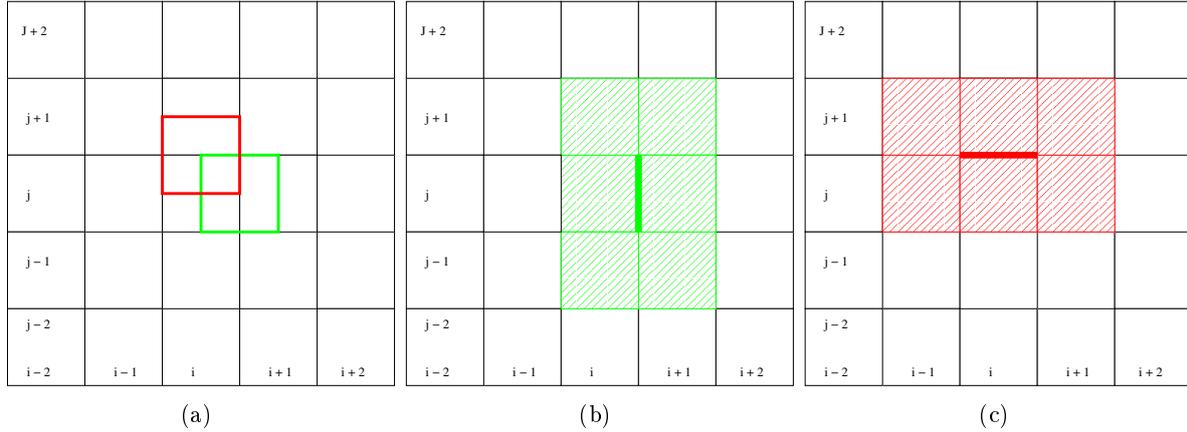
Ces volumes  $\Omega_c$  peuvent être soit des cellules du maillage [74], soit à cheval sur des cellules du maillage [121] :

- Dans le premier cas illustré sur la figure 2.1(a) dans le cas d'un maillage 2D, le gradient est calculé au centre de chaque cellule du maillage et la valeur à l'interface est calculée comme la moyenne des deux gradients calculés aux centres des cellules adjacentes. Les molécules de calcul du gradient aux interfaces  $l = (i + \frac{1}{2}, j)$  et  $l = (i, j + \frac{1}{2})$  sont présentées sur les figures 2.1(b) et (c). Dans la direction normale à l'interface, le stencil du schéma est égal à 4. Comme le calcul de  $\vec{F}_{d_j}$  de l'Éq.2.16 requiert le gradient aux interfaces  $l = (i - \frac{1}{2}, j)$  et  $l = (i, j - \frac{1}{2})$ , le stencil servant à calculer les termes visqueux est au final égal à 5. L'avantage de cette approche est son coût de calcul raisonnable. Son inconvénient réside dans son stencil large qui peut conduire à l'estimation d'un gradient nul, quand la grandeur à dériver oscille un point sur deux.



**FIGURE 2.1:** Molécules du schéma 5p pour le calcul d'un gradient a) au centre de la cellule  $(i, j)$  ; b) à l'interface  $(i + \frac{1}{2}, j)$  ; c) à l'interface  $(i, j + \frac{1}{2})$

- Dans le deuxième cas illustré sur la figure 2.2(a), la valeur de la dérivée est directement calculée à l'interface, grâce au positionnement judicieux du volume de contrôle  $\Omega_c$  représenté en vert à l'interface  $l = (i + \frac{1}{2}, j)$  et en rouge à l'interface  $l = (i, j + \frac{1}{2})$ . Les molécules de calcul du gradient aux interfaces  $l = (i + \frac{1}{2}, j)$  et  $l = (i, j + \frac{1}{2})$  sont présentées sur les figures 2.2(b) et (c). Dans la direction normale à l'interface, le stencil du schéma est égal à 2, conduisant à un stencil compact de 3 pour le calcul de  $\vec{F}_{d_j}$  de l'Éq.2.16. Même si l'ordre du schéma est aussi égal à 2, il est néanmoins plus précis et robuste du fait de sa compacité. L'inconvénient réside dans son coût trois fois plus important, car pour chaque cellule de calcul la formule de Green est appliquée à trois volumes de contrôle différents (en 3D) dont on doit aussi calculer les métriques.



**FIGURE 2.2:** Schéma 3p pour le calcul d'un gradient a) Volume de contrôle pour l'interface  $(i + \frac{1}{2}, j)$  (vert) et l'interface  $(i, j + \frac{1}{2})$  (rouge) b) molécule à l'interface  $(i + \frac{1}{2}, j)$  c) molécule à l'interface  $(i, j + \frac{1}{2})$

### 2.2.5 Intégration temporelle : Schéma de Gear

Le schéma implicite de Gear [39], obtenu par une approche de type *backward*, est retenu pour cette étude car il est précis au deuxième ordre et offre de bonnes propriétés de stabilité (Daude, [27]). L'utilisation de méthodes d'intégration implicite en temps n'est pas incompatible avec les calculs DNS à condition de limiter la taille du pas de temps de manière à ce que le CFL "convectif" ne dépasse pas 2 ou 3 [27]. Le schéma de Gear peut s'écrire sous la forme discrète  $\mathcal{F}_d$  suivante :

$$\frac{3 \mathcal{Q}^{n+1} - 4\mathcal{Q}^n + \mathcal{Q}^{n-1}}{2 \Delta t} + R^{n+1} = \mathcal{F}_d(\mathcal{Q}^{n+1}, \mathcal{Q}^n, \mathcal{Q}^{n-1}) = 0 \quad (2.29)$$

#### 2.2.5.1 Résolution du système non linéaire

Une méthode de Newton approchée est utilisée pour résoudre à chaque pas de temps le problème non linéaire 2.29. Cette méthode, basée sur un processus itératif, permet de conserver le deuxième ordre en temps tout en utilisant des formes approchées de la matrice Jacobienne [78, 98, 27].

La méthode de Newton est basée sur la création à partir de  $\vec{\mathcal{Q}}^n$  d'une suite de vecteurs  $\vec{\mathcal{Q}}^{n,m}$  convergeant vers  $\vec{\mathcal{Q}}^{n+1}$ . Pour calculer  $\vec{\mathcal{Q}}^{n,m}$ , on effectue un développement de Taylor de  $\vec{\mathcal{F}}_d$  autour de la position  $\vec{\mathcal{Q}}^{n,m}$  :

$$\vec{\mathcal{F}}_d(\vec{\mathcal{Q}}^{n,m+1}) \approx \vec{\mathcal{F}}_d(\vec{\mathcal{Q}}^{n,m}) + (\vec{\mathcal{Q}}^{n,m+1} - \vec{\mathcal{Q}}^{n,m}) \left. \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}_d}{\partial \vec{\mathcal{Q}}} \right|_{\vec{\mathcal{Q}}^{n,m}} \quad (2.30)$$

L'estimation de la sous-itération  $m + 1$  passe donc par la résolution du système linéaire :

$$\left[ \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}_d}{\partial \vec{\mathcal{Q}}} \Big|_{\vec{\mathcal{Q}}^{n,m}} \right] (\vec{\mathcal{Q}}^{n,m+1} - \vec{\mathcal{Q}}^{n,m}) = -\vec{\mathcal{F}}_d(\vec{\mathcal{Q}}^{n,m}) \quad (2.31)$$

On réitère les sous-itérations jusqu'à vérifier le critère :

$$\|\vec{\mathcal{F}}_d(\vec{\mathcal{Q}}^{n+1,m+1})\|_{\infty} \leq \epsilon_{convergence} \|\vec{\mathcal{F}}_d(\vec{\mathcal{Q}}^{n+1,0})\|_{\infty} \quad (2.32)$$

avec un  $\epsilon_{convergence}$  à déterminer qui est généralement équivalent à 0,1 (Daude [27]). En pratique, pour éviter des temps de calculs trop longs du fait d'une convergence fine très lente, on fixe plutôt

le nombre de sous-itérations à effectuer et on vérifie à posteriori l'ordre de grandeur des résidus.

Il faut résoudre sur chaque domaine de calcul d'un maillage multi-bloc un système matriciel de grande dimension au niveau de l'équation 2.31. Cette résolution qui implique l'inversion d'une matrice de dimension  $n_{ijk} \times n_{ijk}$  (avec  $n_{ijk}$ , le nombre de cellules du bloc) est coûteuse en temps CPU et en encombrement mémoire. Aussi les deux étapes suivantes sont faites afin d'obtenir une résolution rapide et précise :

- La matrice  $\frac{\partial \vec{\mathcal{F}}_d}{\partial \vec{\mathcal{Q}}}$  est calculée de manière approchée. Pour les termes convectifs, la technique proposée dans [135] est retenue, tandis que pour les termes visqueux l'approximation proposée par Coakley est retenue [22]. Ces approximations ont l'avantage de rendre scalaires les bloc diagonaux de la matrice.
- Le système simplifié est résolu par une méthode LU-SGS, voir [135]. Notons maintenant respectivement  $L, D, U$  la partie strictement inférieure, la partie diagonale et la partie strictement supérieure de la matrice implicite globale. La méthode LU-SGS est obtenue lorsque le membre de gauche est factorisé de la façon suivante :

$$(L + D + U)\Delta Q \approx (L + D)D^{-1}(U + D)\Delta Q = -R \quad (2.33)$$

Il y a un terme d'erreur lié à la factorisation  $LD^{-1}U$ . La résolution du système (2.33) s'effectue alors en trois étapes :

- La première étape est l'inversion d'un système triangulaire inférieur par bloc de taille  $n_{ijk} \times n_{ijk}$  :  $(L + D)\Delta Q^* = -R$ .
- La deuxième étape est une multiplication par une matrice diagonale par bloc :  $D^{-1}\Delta Q^{**} = \Delta Q^*$  qu'on peut écrire :  $\Delta Q^{**} = D\Delta Q^*$ .
- La troisième étape est l'inversion d'une matrice triangulaire supérieure par bloc :  $(U + D)\Delta Q = \Delta Q^{**}$ .

Compte tenu du choix de la méthode LU-SGS pour la résolution du système linéaire, les incréments  $\Delta Q^{n+1,m} = Q^{n+1,m+1} - Q^{n+1,m}$  sont gelés à zéro au bord des domaines de calcul pour la résolution du système linéaire. Les conditions aux limites sont donc traitées implicitement au travers du processus de Newton, ce qui peut introduire un bruit numérique au niveau des raccords, si le processus de Newton n'est pas suffisamment convergé, surtout dans le cas d'écoulements transitionnels particulièrement sensibles aux petites perturbations [27].

## 2.3 Outils d'analyse de la stabilité de l'écoulement

La position et l'étendue de la région de transition laminaire-turbulent d'un écoulement dépendent de nombreux facteurs tels que par exemple le gradient de pression ou encore le taux de turbulence extérieur. Les premières méthodes de prévision de la transition mises au point reposent sur des corrélations empiriques établies expérimentalement sur différents écoulements, mais ces méthodes manquent d'universalité. Pour des écoulements à faible taux de turbulence extérieur, la théorie de la stabilité linéaire permet, en résolvant les équations de Navier-Stokes linéarisées, de calculer la fréquence et le taux d'amplification des modes instables dans la région dite de stabilité linéaire (évoquée au paragraphe 1.3.3.1.b) et ainsi d'estimer la position de la transition (moyennant le choix empirique d'un taux d'amplification critique). Le code CASTET [3, 99] qui résout ces équations a été utilisé dans le cadre de cette étude pour valider les modes propres prédominants observés dans l'écoulement calculé par la DNS. Ces modes propres ont été identifiés par la méthode d'analyse spectrale de Burg, qui sera présentée en dernière partie de ce chapitre.

### 2.3.1 Méthodes de calcul de la stabilité linéaire par le code CASTET

Le code CASTET de l'ONERA/DMAE résout les équations de la stabilité linéaire locale pour des écoulements compressibles de couche limite laminaire tridimensionnelle. Ce code a été utilisé dans le cadre de cette étude pour calculer, en s'appuyant sur les profils de vitesse laminares des calculs DNS, les taux d'amplification des fréquences les plus instables et le facteur  $N$  associé à chacune de ces fréquences.

#### 2.3.1.1 Équations régissant la théorie de la stabilité linéaire

Rappelons la forme incompressible des équations de transport de la masse et de la quantité de mouvement (où  $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ ) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \left[ \nabla^2 \vec{u} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})}_0 \right] \end{cases} \quad (2.34)$$

Nous allons utiliser les variables adimensionnées suivantes :

$$\begin{cases} u_i \rightarrow u_i * U_{ref} \\ x \rightarrow x * L_{ref} \\ p \rightarrow p * U_{ref}^2 / \rho_{ref} \end{cases} \quad (2.35)$$

qui permettent d'écrire le système adimensionné suivant :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla} p + \frac{1}{\Re} \nabla^2 \vec{u} \end{cases} \quad (2.36)$$

où on note  $\Re = \frac{U_{ref} L_{ref}}{\nu_{ref}}$  le nombre de Reynolds adimensionné.

#### 2.3.1.2 Système d'équations pour les petites perturbations

L'étude de l'évolution des instabilités consiste en une étude du comportement des fluctuations qui sont superposées au champ moyen de l'écoulement. Pour réaliser cette étude, il est nécessaire de décomposer les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement en fonction des petites perturbations  $u', v', w', p'$  de l'écoulement. On considère ici une approche dite locale pour laquelle l'écoulement moyen dépend seulement de  $y$ .

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \bar{u}(y) + u'(x, y, t) \\ v(x, y, t) = \bar{v}(y) + v'(x, y, t) \\ w(x, y, t) = \bar{w}(y) + w'(x, y, t) \\ p(x, y, t) = \bar{p}(y) + p'(x, y, t) \end{cases} \quad (2.37)$$

Dans l'hypothèse d'un écoulement bidimensionnel,  $\bar{v} = \bar{w} = 0$  et  $\bar{u} = U(y)$ . On peut alors réécrire le système adimensionné 2.36 sous la forme ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} U+u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} U+u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} U+u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (\bar{p} + p') + \frac{1}{\Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} U+u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.38)$$

### 2.3. OUTILS D'ANALYSE DE LA STABILITÉ DE L'ÉCOULEMENT

Le champ de base  $(U(y), \bar{p})$  est solution de 2.36, c'est à dire que

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \bar{p} + \frac{1}{\Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

On peut alors réécrire le système 2.38, en lui soustrayant les termes de l'équation du champ de base 2.39 et en annulant les dérivées spatiales nulles de  $U(y)$  ainsi que les termes non linéaires  $u'_i \frac{\partial}{\partial x_i} (u'_j)$  pour obtenir finalement le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} + U \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v' \frac{\partial}{\partial y} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} p' + \frac{1}{\Re} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.40)$$

#### 2.3.1.3 Problème aux valeurs propres

Le système 2.40 doit être invariant par translation dans le temps et l'espace, il convient de chercher des solutions sous la forme de modes normaux de fréquence complexe  $\omega$  et de nombre d'onde complexe  $k$  :

$$\begin{cases} u'(x, y, t) = \hat{u}(y) e^{i(kx - \omega t)} \\ v'(x, y, t) = \hat{v}(y) e^{i(kx - \omega t)} \\ w'(x, y, t) = \hat{w}(y) e^{i(kx - \omega t)} \\ p'(x, y, t) = \hat{p}(y) e^{i(kx - \omega t)} \end{cases} \quad (2.41)$$

On suppose ici que le nombre d'onde n'a pas de composante dans la direction  $z$  (envergure), hypothèse justifiée en incompressible. En introduisant ces expressions dans le système 2.40 on aboutit au nouveau système suivant :

$$\begin{cases} ik \hat{u} + \partial_y \hat{v} = 0 \\ -i\omega \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} + iUk \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} + \hat{v} \partial_y U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} ik\hat{p} \\ \partial_y \hat{p} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\Re} (-k^2 + \partial_y^2) \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.42)$$

soit un système de 4 équations différentielles ordinaires pour les variables  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}$ . Ce système possède des solutions non triviales pour certaines valeurs des paramètres  $k^R, k^I, \omega^R, \omega^I$ , valeurs propres du problème (où  $^R$  et  $^I$  désignent les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe). Le nombre de paramètres étant trop grand, il faut faire certaines hypothèses avant de le résoudre, notamment choisir entre l'approche spatiale ou temporelle :

##### 2.3.1.3.a approche temporelle

Pour  $k$  donné, réel ( $k^I = 0$ ), on cherche les valeurs de  $\omega$  (complexe) sous la forme  $\omega_j(k) = \omega_j^R(k) + i\omega_j^I(k)$  tel que  $\omega^R$  et  $\omega^I$  sont valeurs propres du système 2.42. Ces modes décrivent l'évolution temporelle d'une perturbation initiale périodique sinusoïdale d'axe transversal et de nombre d'onde  $k$ .  $\omega_j^I(k)$  est alors le taux d'amplification temporel et  $\omega_j^R/k$  la vitesse de phase. Si il existe une valeur de  $j$  et  $k$  pour laquelle  $\omega_j^I > 0$ , alors l'écoulement  $U(y)$  est linéairement instable, autrement il est linéairement stable.

### 2.3.1.3.b approche spatiale

Pour  $\omega$  donné, réel ( $\omega^I = 0$ ), on cherche les valeurs de  $k$  (complexe) sous la forme  $k_j(\omega) = k_j^R(\omega) + ik_j^I(\omega)$  tel que  $k^R$  et  $k^I$  sont valeurs propres du système 2.42. Ces modes décrivent l'évolution spatiale dans la direction de l'écoulement d'une perturbation initiale périodique sinusoïdale d'axe transversal et de fréquence  $\omega$  déterminée pour  $x$  fixé.  $-k_j^I(\omega)$  est alors le taux d'amplification spatial et  $\omega/k_j^R$  la vitesse de phase.

C'est l'approche spatiale, plus physique pour des écoulements de type couche limite, qui est retenue et résolue par le code CASTET. Une fois les paramètres fixés, les fonctions  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}$  solutions du problème doivent être déterminées. À la frontière de la couche limite où les conditions limites sont connues, les équations se simplifient et permettent d'obtenir des solutions analytiques dépendantes des paramètres retenus. À partir de ces solutions, les équations sont ensuite résolues par intégration depuis les frontières du domaine jusqu'à la surface par une méthode Runge-Kutta d'ordre 4. On itère sur le nombre d'onde  $k$  jusqu'à ce que les conditions aux limites à la paroi soient satisfaites.

### 2.3.1.4 Méthode du $e^N$

En théorie spatiale, à une fréquence  $f$  donnée, avec  $\omega = \frac{2\pi f \delta_1}{U_e}$ , si on ne s'intéresse qu'aux instabilités longitudinales, le facteur  $N$  est défini en tout point  $X > X_0$  par l'expression suivante :

$$N(X, f) = \int_{X_0}^X (-k^I(f)) dx \quad (2.43)$$

où  $X_0$  est la position de début d'amplification de l'instabilité et  $-k^I(f)$  est le taux d'amplification dans la direction longitudinale de l'instabilité de fréquence  $f$ .

La définition de  $N$  permet de déterminer l'amplification totale

$$\frac{A}{A_0}(X, f) = e^{N(X, f)} \quad (2.44)$$

introduite par Smith et Gamberoni [115] et Van Ingen [124].

Où  $A$  et  $A_0$  sont les amplitudes respectives des ondes aux positions  $X$  et  $X_0$ .

Des études [115, 5] ont montré que les valeurs atteintes par le facteur  $N$  sont corrélées à la position de la transition, d'où l'intérêt de l'utiliser pour estimer le degré d'amplification des instabilités d'une fréquence donnée en un point donné.

## 2.3.2 Méthode d'analyse spectrale

L'analyse spectrale consiste comme son nom l'indique à analyser le spectre c'est à dire les différentes ondes qui se développent dans l'écoulement, en identifiant en chaque point du domaine quelles sont les fréquences caractéristiques des ondes d'amplitudes les plus élevées.

La technique d'estimation du spectre qui est utilisée dans ce travail repose sur la méthode de Burg [15, 16] dite méthode du maximum d'entropie. Cette méthode est bien adaptée au calcul de spectres présentant des pics marqués et peu de régions fréquentielles de très faible énergie, et permet en outre d'obtenir une représentation spectrale convaincante avec assez peu d'échantillons. Une présentation succincte de la méthode est faite ci-dessous ; pour plus de détails sur l'implémentation de cette technique de traitement du signal se référer aux travaux de Larchevêque [60].

Les signaux instantanés de vitesse et de pression recueillis en différents points du maillage sont traités en leur soustrayant leur valeur moyennée temporellement, afin de ne garder que le signal instantané perturbé.

### 2.3. OUTILS D'ANALYSE DE LA STABILITÉ DE L'ÉCOULEMENT

La méthode de Burg repose sur une modélisation du signal instantané  $F(t_i)$  au moyen d'une prévision linéaire auto-régressive paramétrique. Le signal instantané  $F(t_i)$  est modélisé par une combinaison linéaire du signal aux  $m$  instants précédents, avec une erreur de modélisation  $E(t)$  qui apparaît sous forme d'un bruit blanc de variance  $\sigma^2 = \langle E_n^2 \rangle$  décorrélé de  $F(t)$  :

$$F_i = \sum_{j=1}^m a_j F_{i-j} + E_i \quad (2.45)$$

En utilisant cette modélisation, l'estimation du signal est exprimée dans l'espace de Fourier par l'expression suivante :

$$\hat{F}(f) = \frac{\hat{E}(f)}{1 + \sum_{j=1}^m a_j e^{2i\pi f j \Delta t}} \quad (2.46)$$

et l'estimation de la densité spectrale d'énergie  $S_F(f) = 2\hat{F}(f)\hat{F}^*(f)$  par l'expression suivante :

$$S_F(f) = \frac{2\sigma^2 \Delta t}{\left\| 1 + \sum_{j=1}^m a_j e^{2i\pi f j \Delta t} \right\|^2} \quad (2.47)$$

Les coefficients  $a_j$  sont obtenus par une approche récursive itérative sur l'indice  $k = 1, \dots, m$  et sont basés sur une formule qui garantit une minimisation au sens des moindres carrés de l'erreur  $\langle E_n^2 \rangle_k$ . Le spectre défini par les coefficients  $a_{j,m}$  ainsi obtenus est celui qui possède la plus grande entropie.



## Chapitre 3

# Base de données DNS

Dans un souci de consistance avec le domaine d'application (décrochage dynamique des pales de rotor), les caractéristiques de l'écoulement autour du profil OA209 sont utilisées dans cette étude. Ce profil, d'épaisseur moyenne, est sujet à un décrochage issu d'un BDL transitionnel et offre l'avantage d'être bien documenté par différentes études expérimentales et numériques (projet SIMCOS [94, 69], Richez [103]). Il a été montré dans la première partie de ce mémoire que le bulbe transitionnel du bord d'attaque a un rôle fondamental, et que l'amélioration de sa compréhension et de sa modélisation est nécessaire. Le sujet d'étude de ce mémoire est donc l'écoulement autour d'un profil d'épaisseur modérée sujet à un décrochage de type bord d'attaque, plus précisément lorsque ce profil se trouve à une incidence précédant de peu l'incidence d'apparition du décrochage.

Le choix est fait d'étudier l'écoulement de BDL transitionnel sur une plaque plane et non directement sur un profil aérodynamique pour simplifier l'analyse de l'écoulement en isolant le BDL transitionnel d'autres phénomènes mis en jeu sur un profil et dont les effets peuvent s'avérer complexes.

Les gradients de vitesse et de pression sur la plaque plane sont contrôlés par une paroi supérieure dont la distance vis-à-vis de la plaque plane varie. Une condition de glissement est appliquée sur cette paroi supérieure. Un schéma de la configuration de cet écoulement de plaque plane est présenté sur la figure 3.1.

L'approche plaque plane sélectionnée permet de s'affranchir des effets de courbure de la paroi d'un profil aérodynamique, ou encore des perturbations issues du bord d'attaque et du bord de fuite. Dans cette même optique, la simulation du gradient de pression est réduite à la région de recirculation, comme le montre la comparaison entre le coefficient de pression à l'extrados du profil OA209 et celui de la plaque plane figure 3.2. Sur un profil aérodynamique, le GPA s'étend en effet sur toute la longueur de l'extrados, ce qui complique considérablement le problème étant

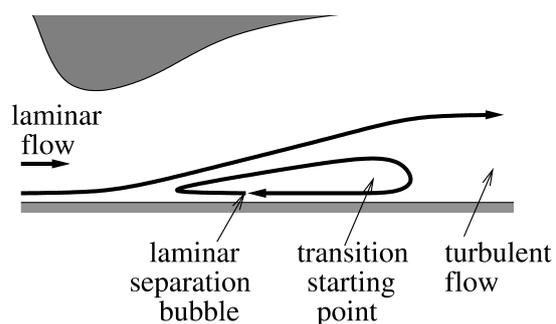
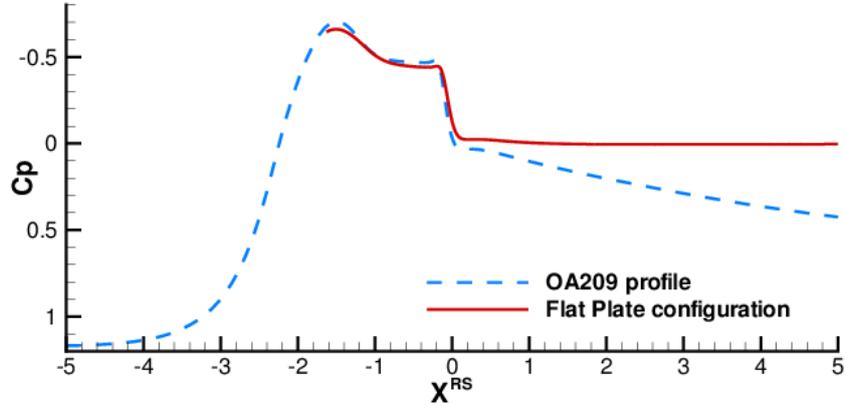


FIGURE 3.1: Structure de l'écoulement

donné les difficultés qu'ont les modèles RANS à prendre en compte les effets du GPA.

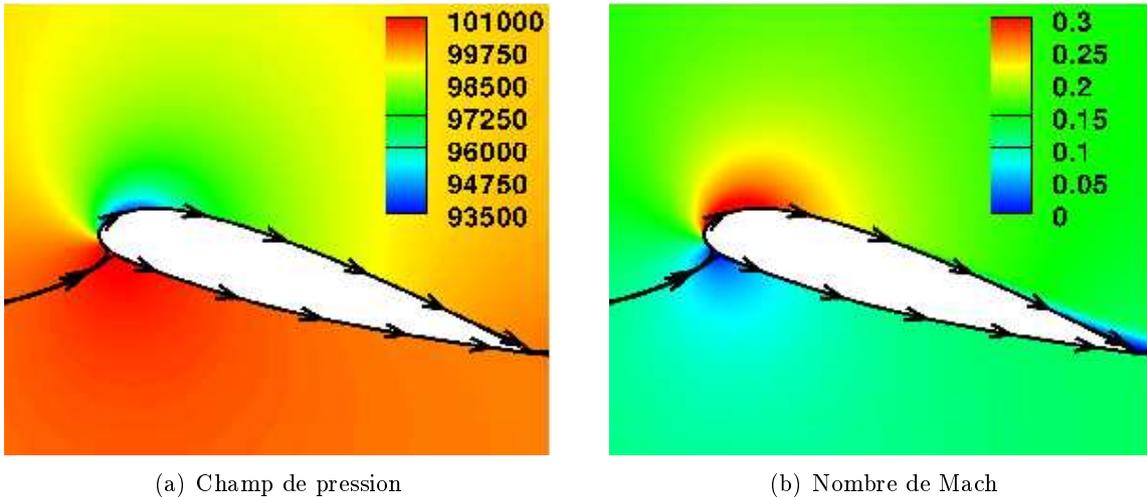


**FIGURE 3.2:** Coefficient de pression, comparaison entre la plaque plane et l'extrados du profil OA209 à  $15^\circ$  d'incidence,  $\Re_{c_\infty} = 1.8 \cdot 10^6$  et  $\mathcal{M}_\infty = 0.16$ .

Le gradient de pression (dans la région du bulbe), le nombre de Mach et le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement  $\Re_{e_\theta}$  de l'écoulement de plaque plane sont caractéristiques de ceux de l'écoulement au bord d'attaque du profil OA209 à  $\Re_{c_\infty} = 1.8 \cdot 10^6$  et  $\mathcal{M}_\infty = 0.16$  à un angle d'incidence de  $15^\circ$ , soit à l'approche du décrochage (figure 3.3). Si on assimile le décrochage à l'éclatement du bulbe, l'écoulement de plaque plane présente un bulbe court transitionnel dans des conditions proches de l'éclatement en bulbe long.

Les calculs DNS de grande résolution présentés dans ce mémoire offrent la possibilité d'étudier le BDL transitionnel isolé, c'est-à-dire sans influence de l'écoulement extérieur et notamment du GPA et ce, dans des conditions très réalistes.

Les équations de Navier-Stokes compressibles sont résolues pour cette DNS, bien que les effets de la compressibilité soient ici relativement négligeables.



**FIGURE 3.3:** Topologie de l'écoulement autour du profil OA209 à  $15^\circ$  d'incidence,  $\Re_{c_\infty} = 1.8 \cdot 10^6$  et  $\mathcal{M}_\infty = 0.16$

### 3.1 BDL transitionnel sur une plaque plane : détail des calculs

#### 3.1.1 Reproduction de l'écoulement de bord d'attaque du profil OA209 sur une plaque plane

Cette section décrit les moyens mis en œuvre pour créer une configuration permettant de reproduire sur plaque plane un bulbe de décollement laminaire de bord d'attaque. Idéalement, cette configuration devrait être telle qu'aucun effet venant de l'écoulement aval ne perturbe le bulbe et permettre un contrôle très précis des grandeurs caractéristiques de l'écoulement telles que les gradients de pression et de vitesse.

Les grandeurs et gradients de l'écoulement ont été choisis de manière à reproduire la dynamique du bord d'attaque de l'OA209 observée dans les études expérimentales du projet SIMCOS [94, 69] et simulées par Richez [103] à l'aide de méthodes LES.

Différentes techniques numériques ont été testées pour imposer les gradients de vitesse et de pression caractéristiques de l'écoulement recherché.

##### 3.1.1.1 Tentatives de contrôle du décollement par aspiration

Cette méthode, employée avec succès par certains auteurs tels que Alam et Sandham [2] ou encore Spalart et Strelets [116] dans des DNS d'écoulements incompressibles, consiste à appliquer sur la paroi supérieure du domaine une condition limite (CL) de glissement avec une zone d'aspiration qui permet de contrôler le gradient de pression longitudinal. Cette configuration est schématisée figure 3.4.

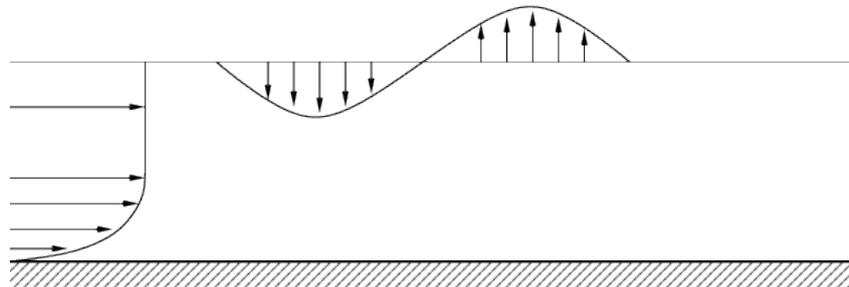


FIGURE 3.4: Contrôle du décollement par aspiration

Plusieurs tentatives ont été menées, sur des domaines de différentes dimensions, en imposant des conditions aux limites d'entrée et sortie de fluide aux bords gauche et droit du domaine, une condition d'adhérence au bord inférieur où se trouve la plaque plane, et une condition d'aspiration au bord supérieur du domaine réalisée en imposant des gradients de vitesse et/ou de pression.

Les résultats se sont avérés peu satisfaisants car la condition limite d'aspiration était peu contrôlable étant donné que le solveur adapte les valeurs des grandeurs des mailles du bord du domaine en fonction de la dynamique de l'écoulement. En effet des conditions limites non réfléchissantes sont employées (Thompson [122, 123]) basées sur le traitement des variables caractéristiques, la vitesse normale à l'interface est quasi nulle, ce qui fait que la condition limite est tantôt une condition limite d'entrée, tantôt une condition limite de sortie en fonction du temps et de l'espace. La méthode de contrôle du décollement par aspiration a été rapidement mise de côté.

##### 3.1.1.2 Contrôle du décollement par une paroi haute déformée surplombant la plaque plane

Une seconde possibilité de contrôler de façon plus sûre le décollement est de placer une paroi de hauteur variable au dessus de la paroi visqueuse et d'y imposer une condition de glissement.

Ainsi, on imagine un domaine comportant une paroi supérieure dont la hauteur va d'abord décroître puis réaugmenter, c'est-à-dire une sorte de tuyère présentant un rétrécissement suivi d'un élargissement de section (figure 3.5).

La diminution de la section va entraîner une accélération du fluide et un gradient de pression favorable dans la première partie de l'écoulement. Ensuite, l'augmentation de la section va ralentir le fluide et imposer un gradient de pression adverse. Cette dynamique d'accélération puis ralentissement, et de gradient de pression favorable puis adverse, est celle rencontrée sur l'extrados des profils dans la zone de bord d'attaque.

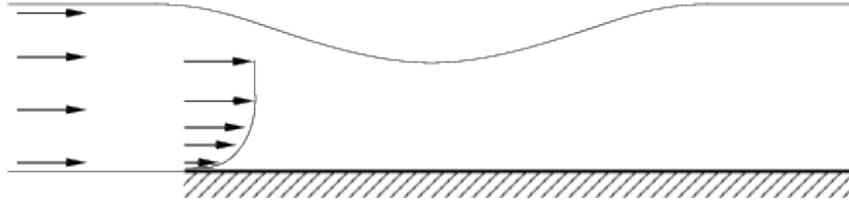


FIGURE 3.5: Écoulement dans une tuyère présentant un rétrécissement suivi d'un élargissement de section

### 3.1.1.2.a Détermination de la forme de la paroi haute à partir d'une ligne de courant

Afin d'obtenir une forme cohérente pour la paroi supérieure, deux possibilités ont été testées ; la première consiste à "aplanir" le champ de Richez [103] (voir fig.3.6), c'est-à-dire l'exprimer en coordonnées pariétales, et utiliser une ligne de courant pour définir la forme de la paroi supérieure. Cette ligne de courant doit être sélectionnée de façon à n'être ni trop proche de la paroi, pour éviter de gêner le développement de la couche limite et limiter les réflexions parasites, ni trop éloignée pour que l'effet du rétrécissement ne reste pas local à la paroi supérieure du domaine mais au contraire influe sur l'écoulement de la couche limite en paroi inférieure. La difficulté liée au choix de la ligne de courant a rapidement écarté cette méthode.

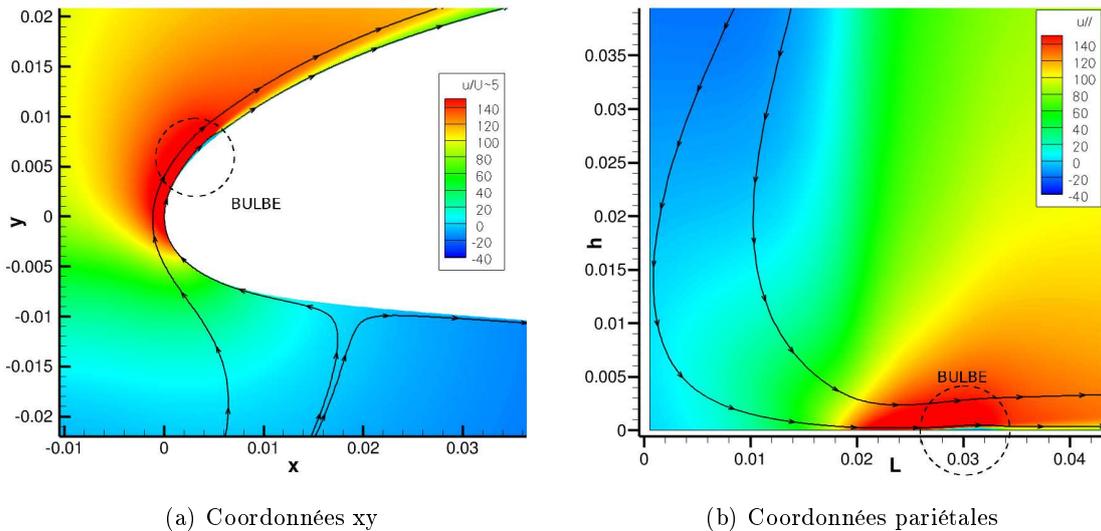


FIGURE 3.6: Aplanissement des champs de données et extraction de lignes de courant. On note la distance à la paroi  $h = \|\vec{x} - \vec{x}_w\|$  et on note l'abscisse curviligne  $L = \int_{\vec{x}_{BA}}^{\vec{x}_{BF}} dL$  où l'intégration est faite le long de la surface supérieure du profil, entre le bord d'attaque et le bord de fuite ( $dL^2 = dx^2 + dy^2$ ). Ces distances sont exprimées en mètres, la longueur de corde étant de 1 mètre.

### 3.1. BDL TRANSITIONNEL SUR UNE PLAQUE PLANE : DÉTAIL DES CALCULS

#### 3.1.1.2.b Détermination de la forme de la paroi haute à partir d'une méthode inverse

La seconde méthode, retenue ici, consiste à calculer la variation de section de tuyère nécessaire pour obtenir les gradients de pression favorable puis adverse désirés.

Le gradient de pression issu du calcul de Richez présente un plateau dû à la présence du bulbe, plateau qui ne doit pas être considéré dans la forme de la paroi supérieure ; c'est pourquoi une répartition du gradient de pression sans présence du bulbe est utilisée (voir figure 3.7), laquelle est obtenue à l'aide d'un résultat de calcul VIS fully turbulent (couplage visqueux / non-visqueux) de conditions identiques à celles de Richez.

En utilisant la répartition de pression  $P(x)$ , la loi de Bernoulli et la loi de conservation du débit, on obtient la hauteur théorique  $h(x)$  d'une tuyère qui reproduirait  $P(x)$  pour un fluide parfait (non visqueux).

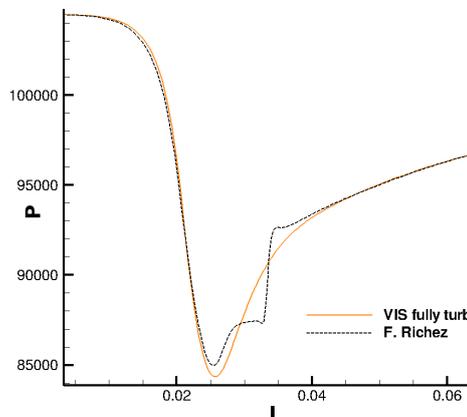


FIGURE 3.7: Gradient de pression (issu d'un calcul VIS fully turbulent) d'amplitude similaire à celui de Richez.

Rappelons la loi de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = C_1$$

et la loi de conservation du débit devient pour un fluide parfait dans une tuyère de section  $S$ , de hauteur  $h$  et d'envergure constante :

$$\iint_S \rho \vec{v} d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho v h = C_2$$

Le long de l'écoulement, on a donc :

$$v(x) = \frac{C_2}{\rho(x)h(x)} \quad \Rightarrow \quad p + \frac{1}{2} \frac{C_2^2}{\rho(x)h(x)^2} = C_1 \quad \Rightarrow \quad h(x) = \frac{C_2}{\sqrt{2\rho(x)(C_1 - p(x))}}$$

avec  $C_1 = p(x_0) + \frac{1}{2}\rho(x_0)v(x_0)^2$  et  $C_2 = \rho(x_0)v(x_0)h(x_0)$ .

Les écoulements étudiés étant affectés par la viscosité, la perte de débit de la couche limite nécessite une adaptation de la hauteur de la paroi. Cette adaptation est réalisée de façon empirique à travers une succession de calculs qui ont permis de converger vers une loi  $h(x)$  optimale engendrant un gradient de pression satisfaisant. La configuration finale du domaine retenu est représentée figure 3.8 ; les coordonnées  $h_i(x)$  de la tuyère sont renseignées dans l'annexe F.2.

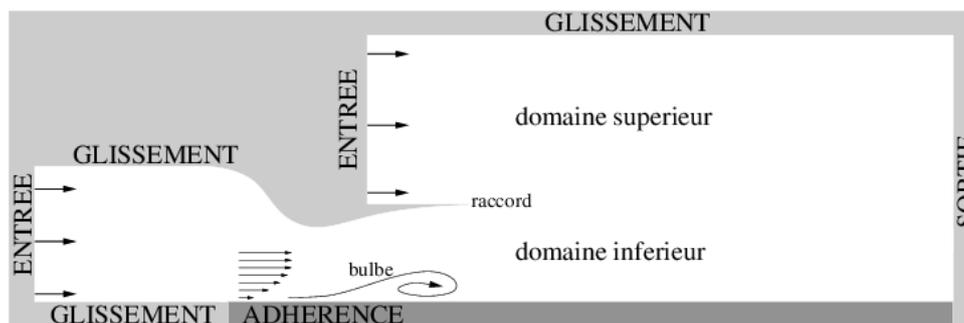


FIGURE 3.8: Configuration du domaine de calcul et conditions aux limites.

### 3.1.1.3 Coordonnée adimensionnée $X^{RS}$

La coordonnée adimensionnée  $X^{RS} = \frac{X-X^R}{X^R-X^S}$  dont les valeurs sont illustrées figure 3.9 sera utilisée par la suite pour représenter la position longitudinale.  $X^S$  et  $X^R$  sont respectivement les positions de décollement (en anglais : separation) et recollement de l'écoulement.

Lors de comparaisons entre différents calculs, les coordonnées de référence sont celles de la simulation sur le maillage le plus fin (200 Millions de points) :  $X_{200Mp}^S$  et  $X_{200Mp}^R$ . Par définition,  $X^{RS}$  prend pour valeur :

- $X^{RS} = -1$  au point de décollement
- $X^{RS} = 0$  au point de recollement
- $X^{RS} = \xi$  à une distance de  $\xi$  longueurs de bulbe après le recollement.

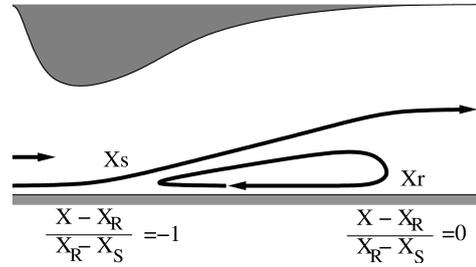


FIGURE 3.9: Coordonnée adimensionnée  $X^{RS}$

### 3.1.1.4 Conditions aux limites

En entrée du domaine de calcul, un écoulement uniforme est imposé, les quantités  $\rho = 1.215 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $u = 47.88 \text{ m.s}^{-1}$  et  $p = 101371 \text{ Pa}$  étant sélectionnées de manière à obtenir les valeurs adéquates de ces quantités dans la région de GPA. À la paroi inférieure, une condition de glissement est appliquée en amont jusqu'en  $X^{RS} = -4.3$ , puis une condition d'adhérence est appliquée en aval à partir de cette position.

En aval de la transition, le domaine de calcul d'intérêt est raccordé à un domaine supérieur afin de permettre à la couche limite de s'épaissir sans être gênée par la paroi supérieure et d'annuler aussi tôt que possible le gradient de pression de l'écoulement en aval du bulbe (dû à la hauteur de section non constante) et ainsi stabiliser la couche limite. En entrée du domaine supérieur, on impose en entrée une vitesse  $u = 135.7 \text{ m.s}^{-1}$ , une masse volumique  $\rho = 1.13 \text{ kg.m}^{-3}$  et une pression  $p = 91960 \text{ Pa}$ . Dans ce domaine la résolution du maillage décroît rapidement afin d'assurer une propagation avec un minimum de retour de perturbations de l'aval vers l'amont.

La position du raccord (plus ou moins tardive) entre le domaine inférieur et le domaine supérieur a fait l'objet de quelques tests, dont les résultats sont présentés figure 3.10, afin de s'assurer que le raccourcissement de la paroi supérieure et donc de la région soumise au GPA n'influait pas le bulbe de manière gênante.

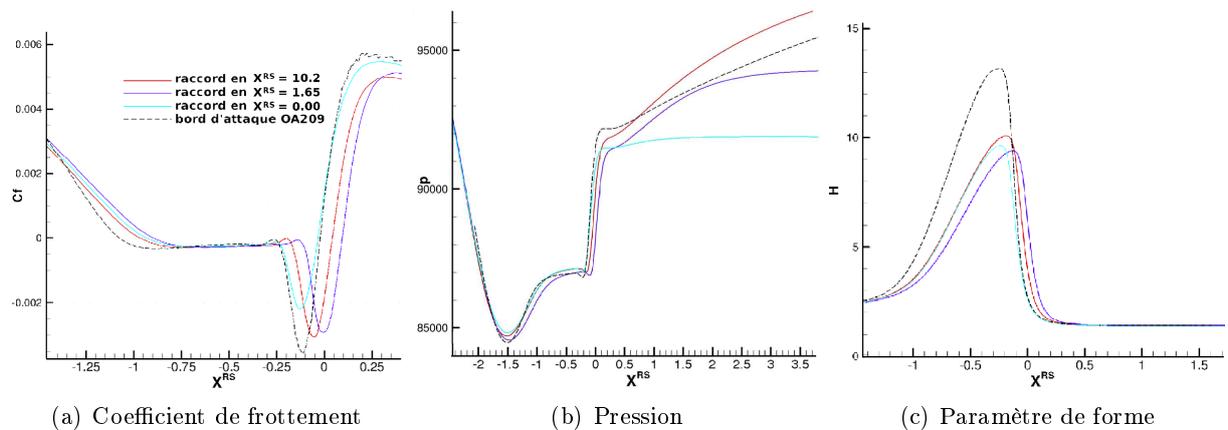


FIGURE 3.10: Étude de l'influence de la position du raccord avec le domaine supérieur.

La figure montre que le raccourcissement de la région de GPA aval a tendance à légèrement raccourcir le bulbe et diminuer le pic négatif de frottement, mais sans modification fondamentale du régime. Le raccord en  $X^{RS} = 0.00$  sera conservé pour la suite de l'étude.

### 3.1.2 Description de l'écoulement de plaque plane

Les grandeurs physiques de l'écoulement, c'est-à-dire vitesse, densité et pression, ainsi que leurs gradients, sont ceux du bord d'attaque du profil aérodynamique OA209 à l'approche du décrochage, à  $15^\circ$  d'incidence,  $\Re_{e_\infty} = 1.8e6$  et  $\mathcal{M}_\infty = 0.16$ .

L'écoulement sur plaque plane ainsi obtenu peut aussi être caractérisé par le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement au point de décollement  $\Re_{e_{\delta_s^*}} = 835$  et le nombre de Mach  $\mathcal{M} = 0.4$  au dessus de la couche limite turbulente se développant en aval. La figure 3.11 présente l'évolution longitudinale des principales grandeurs caractéristiques de l'écoulement.

On peut y voir, dans le bulbe entre  $X^{RS} = -1$  et  $X^{RS} = 0$ , des plateaux marqués sur chacune des variables tracées, tout particulièrement sur le profil de pression. Au recollement, en  $X^{RS} = 0$ , la vitesse extérieure chute, la pression et la masse volumique grimpent brusquement, et le  $\Re_\theta$  indique un brutal surépaississement. Après le recollement, les gradients de vitesse extérieure, de masse volumique et de pression s'annulent rapidement, ils sont totalement nuls dès une longueur et demi de bulbe après le recollement, en  $X^{RS} = 1.5$ . Notons la faible amplitude des variations de la masse volumique, de l'ordre de 5%, qui indique un écoulement dans lequel les effets de compressibilité sont relativement négligeables.

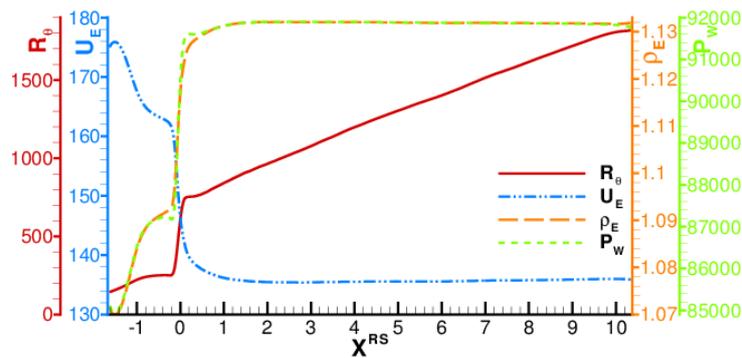


FIGURE 3.11: Correspondance entre  $X_{RS}$ ,  $\Re_\theta$ , la vitesse externe  $U_E$ , la densité externe  $\rho_E$  et le gradient de pression à la paroi  $P_W$ . (DNS 200 Millions de points).

La figure 3.12 représente une vue bidimensionnelle du champ de vitesse longitudinale, ainsi qu'un zoom sur la région du bulbe transitionnel, lequel est facilement identifiable par les valeurs négatives de la vitesse dans la zone proche paroi du BDL où l'écoulement est renversé.

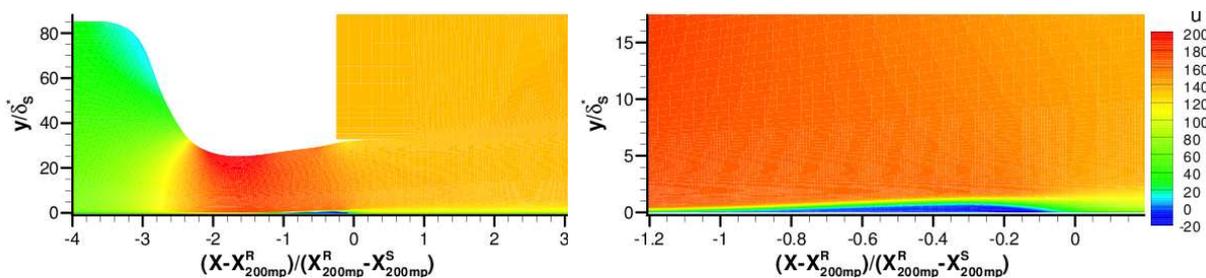


FIGURE 3.12: Champ de vitesse longitudinale obtenu sur la plaque plane et zoom sur le bulbe transitionnel.

### 3.1.3 Paramètres numériques

Le domaine de calcul d'intérêt s'étend loin en aval, jusqu'à une zone où la turbulence est traitée par une méthode RANS utilisant le modèle de Spalart-Allmaras qui sert de condition limite au domaine DNS. Dans cette zone RANS, la résolution décroît rapidement.

### 3.1.3.1 Découpage des domaines de calcul

Les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles ne sont pas résolues sur l'intégralité de la zone de calcul car cette opération serait trop coûteuse et relativement inutile. Seules les zones proches de la paroi du bulbe et de la couche limite turbulente qui se développe en aval sont discrétisées sur des domaines 3D. L'assemblage des domaines de calcul est représenté figure 3.13.

Les simulations DNS et assimilées sont faites sur un domaine tridimensionnel qui commence au début de la région de gradient adverse, dans la région d'écoulement laminaire, en  $X^{RS} = -1.6$  soit 0.6 longueur de bulbe avant le point de décollement. Ce domaine de calcul s'étend en aval jusqu'en  $X^{RS} = 10.2$  soit à 10.2 longueurs de bulbe après le recollement, suffisamment loin pour laisser le temps à la couche limite turbulente de s'établir. La hauteur du domaine de calcul est supérieure en tout point à deux fois l'épaisseur de la couche limite.

En amont, et au dessus de ce domaine DNS 3D, l'écoulement est laminaire ce qui permet d'utiliser des domaines de calcul laminaires 2D pour fournir des conditions de raccord au domaine DNS. En aval, les équations RANS utilisant le modèle de Spalart-Allmaras sont résolues sur un domaine 2D pour fournir au domaine RANS une condition de sortie qui évacue les perturbations turbulentes (Quéméré [100]). Le domaine DNS s'étend en envergure sur  $3mm$  et dispose d'une condition de raccord périodique en envergure.

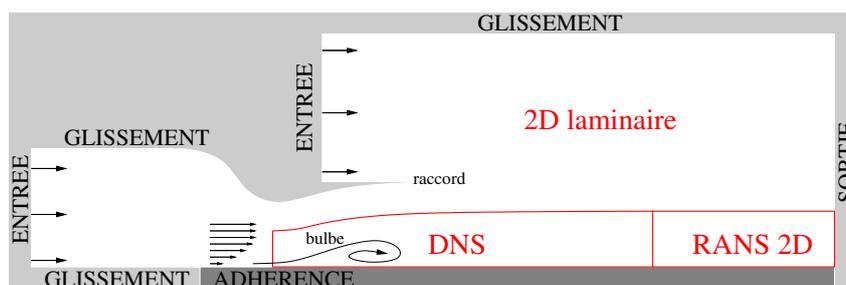


FIGURE 3.13: Schéma des domaines de calcul

### 3.1.3.2 Forçage à la paroi

Une première série de calculs DNS ont été réalisés sans forçage extérieur. L'écoulement non forcé présentait comme prévu un bulbe court transitionnel, mais dont la taille ne convergait pas avec l'augmentation de la résolution du maillage. Dans ces calculs non forcés, la transition est excitée uniquement par les petites perturbations issues des erreurs de troncature numériques liées à la convergence du processus de Newton de l'intégration temporelle implicite (Éq. 2.32) et à l'implémentation des conditions aux limites. Il n'est donc pas surprenant que d'un maillage à l'autre, la taille initiale de ces petites perturbations diffère, et induise une position de la transition, et donc du recollement, qui varie.

Face à cette situation, il a été décidé de forcer l'écoulement avec une condition d'éjection et aspiration de fluide à la paroi. Ce forçage sinusoïdal et périodique est de la forme  $v_f(x, z, t) = |v_f|e^{-\alpha(x-x_0)^2} \cos(2\pi z/\Delta_z) \sin(2\pi t f)$  avec  $|v_f|/U_\infty = 1.5 \cdot 10^{-3}$  et  $\alpha = 10\Delta_x$ , où  $\Delta_x$  est l'étendue longitudinale de la région de forçage et  $\Delta_z$  est la dimension en envergure de la boîte de calcul. Un bruit blanc de l'ordre de 2.5% de  $|v_f|$  est ajouté à ce forçage pour casser la symétrie dans la troisième dimension de la turbulence ainsi créée. L'amplitude du forçage est choisie aussi faible que possible mais suffisamment grande par rapport à celle des perturbations issues des erreurs numériques pour gommer leur influence sur la position de la transition. L'amplitude retenue est  $|v_f|/U_\infty < 1.5 \cdot 10^{-3}$ , ce qui correspond à environ un dixième des amplitudes de forçage utilisées dans les études d'écoulements contrôlés tels que par exemple celle d'Alam et Sandham [2] ( $|v_f|/U_\infty < 3 \cdot 10^{-2}$ ) ou encore de Marxen *et al.* [76]

### 3.1. BDL TRANSITIONNEL SUR UNE PLAQUE PLANE : DÉTAIL DES CALCULS

( $|v_f|/U_\infty < 1.12 \cdot 10^{-2}$ ). L'expression de  $v_f(x, z, t)$  citée ci-dessus est sinusoïdale en  $z$  et est périodique en temps, tout comme celles retenues par ces mêmes auteurs qui sont elles aussi du type  $v_f(x, z, t) = |v_f|e^{-\alpha(x-x_0)^2} \cos(\beta z) \sin(\omega t)$ . Plusieurs études et notamment celle de Rist & Maucher [108] ont en effet montré que l'utilisation d'un forçage oblique au lieu d'un forçage principalement longitudinal conduit à écoulement plus proche des résultats expérimentaux.

Une fréquence  $f = 80\text{kHz}$  a été retenue pour le forçage, car d'une part l'analyse de l'écoulement non forcé a montré que cette fréquence est prédominante dans la région pré-transitionnelle, et d'autre part car une étude de stabilité linéaire de l'écoulement non forcé a montré qu'il s'agit de la fréquence du mode le plus instable. Les détails de ces études seront présentés section 3.4.3.1.

#### 3.1.3.3 Résolution temporelle

Le pas de temps des calculs DNS est égal à  $15 \cdot 10^{-8} \text{s}$ , ce qui correspond à un nombre CFL  $\Delta t(|u|/\Delta x + |w|/\Delta z) = 2$ . Les DNS de couches limites turbulentes réalisées par d'autres auteurs sont du même ordre de grandeur, nous citerons par exemple Wu et Moin [133] avec un CFL égal à 1.35, et Spalart [117] avec un CFL égal à 2. La norme  $L_\infty$  du résidu de l'algorithme de Newton est réduite d'au moins un ordre de grandeur ce qui, selon le maillage, requiert jusqu'à 40 sous-itérations de l'algorithme. Les quantités statistiques présentées par la suite sont moyennées sur une période  $T$  qui est telle que  $T U_e / L_B = 16$ .

#### 3.1.3.4 Résolution spatiale

La simulation DNS d'un processus de transition demande une résolution beaucoup plus élevée que celle d'un écoulement turbulent. Par conséquent, une attention particulière a été portée à la résolution de la région de transition, et tout particulièrement autour du point de recollement du BDL. Une étude de convergence en maillage est menée sur cinq maillages de résolution croissante, dont les détails sont donnés dans le tableau 3.14.

Millions de mailles	4.6	12	20	60	200
$N_x$	964	1276	1436	1680	3189
$N_y$	73	105	125	150	180
$N_z$	60	85	110	220	332
Longueur	$276 \delta_S = 11.8 L_B$				
Hauteur	$5 - 21 \delta_S; h(x) > 2\delta(x)$				
Profondeur transverse	$12 \delta_S = 0.5 L_B$				
$\Delta_x^+$ (région du BDL)	24	15	12	9	6
$\Delta_y^+$ (région du BDL)	2.1	1.5	1	0.6	0.45
$\Delta_z^+$ (région du BDL)	23	17	13	6.5	4.3
$\Delta_x^+$ (aval)	42	32	35	27	11
$\Delta_y^+$ (aval)	2.1	1.5	1	0.7	0.65
$\Delta_z^+$ (aval)	17	13	10	5	3

**FIGURE 3.14:** Résolution des maillages du bloc DNS 3D.  $L_B = 5.9 \text{ mm}$  : longueur du BDL ;  $h(x)$  : hauteur du domaine DNS ;  $\delta_S = 0.207 \text{ mm}$  : épaisseur de couche limite au point de décollement (grandeurs de référence liées à l'écoulement sur le profil OA209 pour une longueur de corde égale à 1m).

#### 3.1.3.5 Convergence temporelle des calculs

Les tourbillons apparaissent avec une période moyenne égale à  $T = 1/f = 1/80000 = 0,0000125$  secondes, le temps nécessaire à un tourbillon pour traverser la région turbulente du calcul DNS est d'environ  $54T$ . Les calculs sont initiés grâce à des champs instationnaires établis

issus de précédents calculs réalisés sur des maillages plus grossiers et interpolés sur le nouveau maillage. Une phase transitoire est calculée pendant un temps minimal de  $193T$  afin d'atteindre un régime permanent. Les statistiques sont ensuite calculées sur une période correspondant à un temps minimal de  $192T$ .

### 3.1.3.6 Calcul haute performance

Les simulations DNS ont été réalisées sur deux supercalculateurs de l'ONERA :

- Une machine vectorielle NEC SX8
  - parallèle à base OpenMP
  - parallélisme limité à 8 processeurs (Nœud non interconnecté)
  - temps cpu pour une itération et une cellule de calcul :  $0.1\mu s$
- Une machine superscalaire SGI Altix à base de processeurs Nehalem
  - parallèle MPI
  - jusqu'à 256 processeurs
  - nécessite du redécoupage de domaines
  - temps cpu pour une itération et une cellule de calcul :  $0.7\mu s$
  - pour calculer  $\delta t = L_B/U_e \simeq 3.5T$  (soit 289 pas de temps) sur le maillage le plus fin (200Mp), chacun des 256 processeurs occupe la machine pendant environ 2h45m.

## 3.2 Vérifications préliminaires concernant le choix des paramètres numériques

### 3.2.1 Influence des schémas de discrétisation des flux convectifs et diffusifs

Une analyse des composants du bilan de l'équation de conservation de l'énergie cinétique turbulente  $k$  (que nous analyserons plus en détail section 3.4.2) a été menée grâce aux résultats des simulations DNS. La somme des composants du bilan de  $k$  doit tendre à s'annuler si le calcul de chacun des composants est convergé. Ce bilan s'est rapidement montré non négligeable, ce qui a conduit à remettre en question les méthodes numériques employées. L'influence de la taille de la molécule utilisée pour le calcul des flux visqueux et l'influence du schéma de calcul des flux convectifs ont ainsi été évaluées.

#### 3.2.1.1 Activité du senseur : décentrement les flux visqueux

Les figures 3.15 et 3.16 présentent, pour la simulation DNS de 200 Millions de points, en  $X^{RS} = 0$  et  $X^{RS} = 9$ , les profils verticaux de la moyenne temporelle de  $\Phi_l$  (voir Éq.2.22).

Cette moyenne représente le pourcentage de temps pendant lequel le senseur est actif dans les directions longitudinale  $i$  (fig.(a)), normale à la paroi  $j$  (fig.(b)) et transverse  $k$  (fig.(c)) vis-à-vis du temps de calcul total, ce qui correspond au pourcentage d'itérations durant lesquelles le schéma est décentré amont au lieu d'être centré. Ces profils sont tracés pour trois versions du schéma numérique :

- en rouge celle utilisant la molécule 5 points (figure 2.1) pour le calcul des flux visqueux et la version modifiée du schéma AUSM+P pour laquelle  $U_l$  est fonction de  $\Phi$  (équation 2.24) ;
- en bleu la version utilisant la molécule 3 points (figure 2.2) pour le calcul des flux visqueux et la version originale du schéma AUSM+P (équation 2.19) ;
- en noir la version utilisant la molécule 3 points (figure 2.2) pour le calcul des flux visqueux et la version modifiée du schéma AUSM+P pour laquelle  $U_l$  est fonction de  $\Phi$  (équation 2.24).

Les graphiques montrent que l'utilisation de la molécule 3 points au lieu de la 5 points (courbe noire par rapport à la rouge) entraîne une activation beaucoup moins fréquente du senseur. Le schéma convectif dissipe donc moins avec la molécule 3 points qu'il ne dissipe avec la molécule

### 3.2. VÉRIFICATIONS PRÉLIMINAIRES CONCERNANT LE CHOIX DES PARAMÈTRES NUMÉRIQUES

5 points. Cela est vraisemblablement à l'origine de la différence des profils de vitesse proches de la paroi dans la région qui suit de peu le recollement (symboles rouges figure 3.15).

Par ailleurs, il apparaît aussi que l'utilisation de la version modifiée du schéma AUSM+P au lieu de la version originale (courbe noire par rapport à la bleue) entraîne une activation plus fréquente du senseur dans la direction perpendiculaire à la paroi ainsi que, dans une moindre mesure, dans la direction transversale. La version modifiée du schéma AUSM+P, contrairement à la version originale, utilise un schéma purement centré dans les régions où la solution est régulière. La version modifiée est par conséquent moins dissipative que la version originale, ce qui peut entraîner un branchement plus fréquent de la diffusion numérique pour stabiliser l'écoulement.

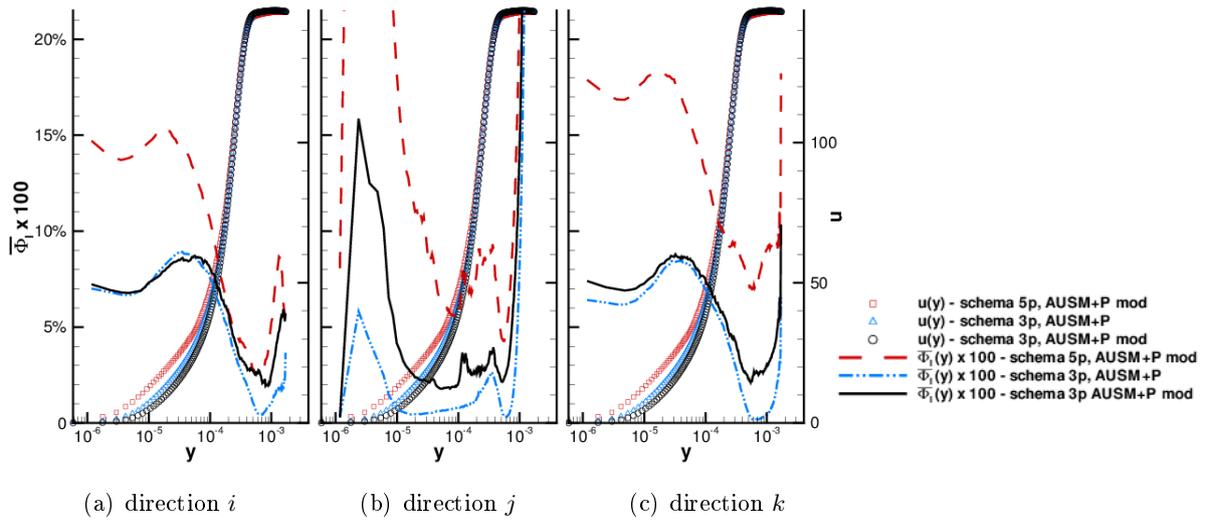


FIGURE 3.15: Moyenne temporelle de  $\Phi_l$  en  $X^{RS} = 0$  dans chacune des trois directions, pour 3 schémas numériques différents.

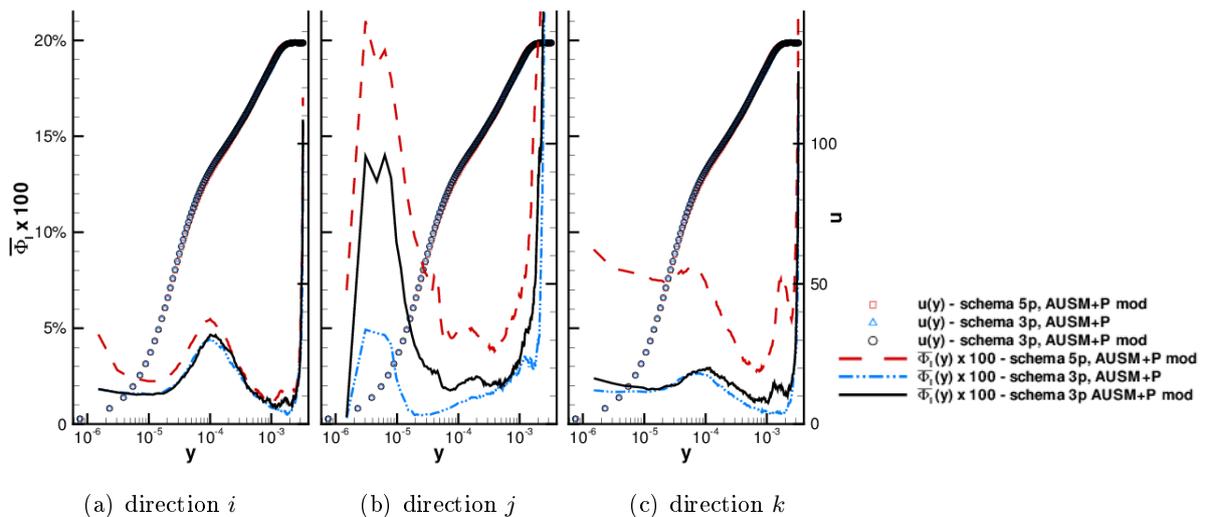


FIGURE 3.16: Moyenne temporelle de  $\Phi_l$  en  $X^{RS} = 9$  dans chacune des trois directions, pour 3 schémas numériques différents.

### 3.2.1.2 Influence sur les composants du bilan de l'énergie cinétique turbulente

Les figures 3.17 présentent, au point de recollement et dans la région turbulente, les profils verticaux des termes composant le bilan de l'énergie cinétique turbulente  $k$ . Ces profils sont tracés pour chacune des versions des schémas utilisés dans le paragraphe ci-dessus.

L'utilisation de la molécule 5 points (figure 2.1) dans le schéma des flux visqueux entraîne une surestimation de la dissipation par les fluctuations turbulentes proches de la paroi, ce qui aboutit à un bilan de l'énergie cinétique non nul. L'utilisation de la molécule 3 points (figure 2.2) permet de résoudre ce problème.

La modification du schéma AUSM+P a tendance à augmenter légèrement le terme de dissipation du bilan dans la région turbulente. Cela va dans le sens d'une réduction de la somme des composants du bilan, et donc d'une amélioration du calcul du bilan. Cette observation indique que, bien que le senseur se branche plus souvent dans la version modifiée, le schéma de l'AUSM+P modifié (équation 2.24) est globalement moins dissipatif et laisse à la turbulence un rôle dissipatif plus grand que ne le fait la version originale du schéma AUSM+P (équation 2.19).

Les calculs présentés dans la suite de ce mémoire reposent sur une discrétisation des flux visqueux utilisant la molécule 3 points et sur une discrétisation des flux convectifs basée sur la version modifiée du schéma AUSM+P.

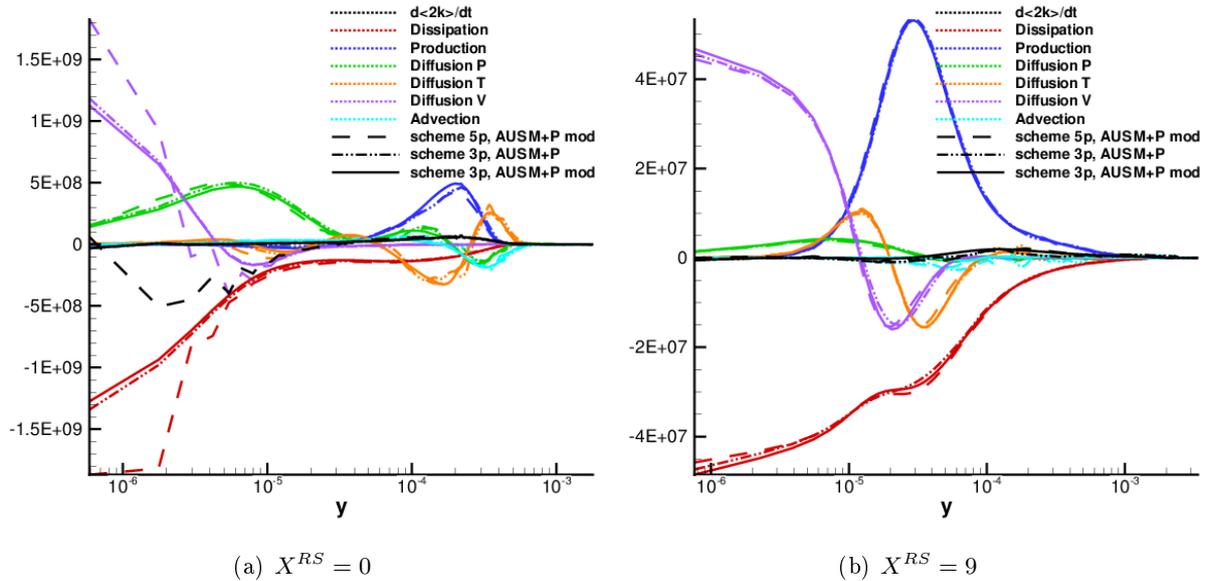


FIGURE 3.17: Effet du schéma numérique sur les composants du bilan de l'énergie cinétique turbulente.

## 3.2.2 Résolution et échelles de Kolmogorov

### 3.2.2.1 Théorie de Richardson Kolmogorov

La théorie de Richardson Kolmogorov concerne les écoulements turbulents et s'appuie sur le fait que ceux-ci sont constitués de structures tourbillonnaires de différentes tailles et vitesses.

Selon la théorie de Richardson, aujourd'hui largement reconnue, les grosses structures anisotropes de taille  $L$  puisent leur énergie de l'écoulement moyen ; ces structures sont instables et se désagrègent rapidement en tourbillons de plus petite taille, induisant ainsi un transfert d'énergie vers des échelles de plus en plus petites. Cette énergie est ainsi transférée jusqu'aux plus petites

### 3.2. VÉRIFICATIONS PRÉLIMINAIRES CONCERNANT LE CHOIX DES PARAMÈTRES NUMÉRIQUES

structures de l'écoulement au niveau desquelles l'énergie est dissipée en chaleur par action de la viscosité.

Kolmogorov suggère l'idée qu'à haut nombre de Reynolds, les structures turbulentes de petites tailles sont statistiquement isotropes (que leurs propriétés sont invariantes dans toutes les directions de l'espace), ce qui n'est évidemment pas le cas des grandes structures qui sont fortement dépendantes de la configuration de l'écoulement. Il propose alors la formulation d'échelles caractéristiques de la turbulence des plus petites échelles, obtenues par analyse dimensionnelle en s'appuyant sur la dimension de la viscosité cinématique  $\nu \propto \mathcal{L}^2/\mathcal{T}$  et celle du taux de dissipation  $\varepsilon \propto \mathcal{L}^2/\mathcal{T}^3$ . Ces échelles ne dépendent que de la viscosité cinématique  $\nu = \mu/\rho$  et du taux de dissipation  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \text{une échelle de longueur} \quad \eta_K &= \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \\ \text{une échelle de temps} \quad \tau_K &= \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \\ \text{une échelle de vitesse} \quad u_K &= (\nu\varepsilon)^{1/4} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Kolmogorov propose une notion d'universalité de la turbulence des petites échelles, il postule que cette turbulence est identique pour tout écoulement, sous condition d'un Reynolds suffisamment élevé. Il stipule aussi que les échelles intermédiaires  $l$  ( $\eta \ll l \ll L$ ) sont très peu sujettes aux effets de la viscosité et elles sont aussi universelles et déterminées uniquement par leur dimension  $l$  et par le taux de dissipation  $\varepsilon$  de l'énergie cinétique turbulente.

Les échelles de Kolmogorov définissent donc la taille des plus petites structures turbulentes, elles ont été calculées sur le domaine de calcul du maillage 200Mp et sont présentées figures 3.18. L'échelle spatiale est comparée aux tailles de mailles du maillage 200Mp figure 3.19.

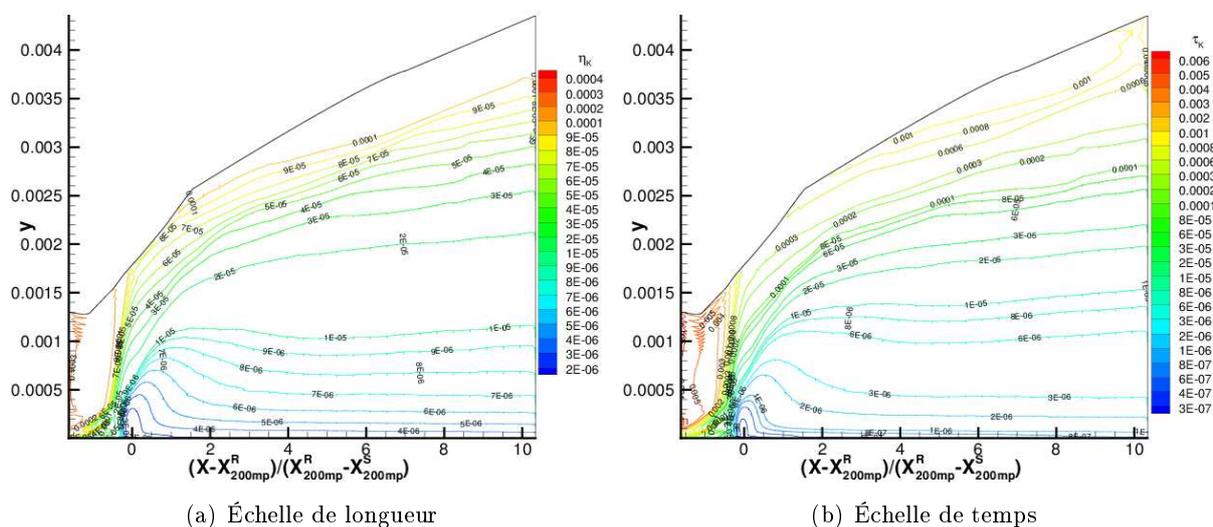
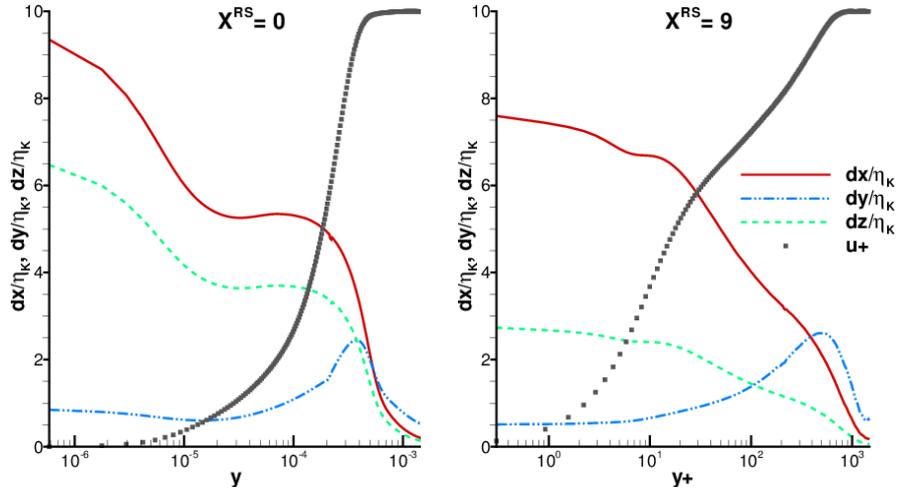


FIGURE 3.18: Échelles de Kolmogorov

#### 3.2.2.2 Échelles spatiales

Pour que la DNS soit en mesure de représenter toutes les structures turbulentes jusqu'aux plus petites, les dimensions du maillage (figure 3.19) devraient idéalement être de l'ordre de grandeur de l'échelle de longueur de Kolmogorov (figure 3.18(a)) et le pas de temps ( $1.5 \cdot 10^{-7}$ ) devrait être de l'ordre de grandeur de l'échelle de temps de Kolmogorov (figure 3.18(b)).



**FIGURE 3.19:** Rapport des tailles de mailles dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  de la DNS 200Mp avec l'échelle spatiale de Kolmogorov  $\eta = \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}$  où  $\varepsilon$  est la dissipation massique.

En pratique, cependant, Jimenez [52] suggère qu'une résolution 5 fois plus grande que l'échelle de Kolmogorov dans la direction longitudinale et 1.5 fois plus grande dans la direction normale à la paroi serait suffisante pour résoudre n'importe quelle structure turbulente.

Dans le cas présent, la figure 3.19 montre que la résolution normale à la paroi satisfait le critère dans la sous-couche visqueuse mais pas dans la région externe où les tailles de mailles vont jusqu'à deux fois l'échelle de Kolmogorov. Dans la direction longitudinale, en revanche, c'est dans la région interne que la résolution dépasse là encore l'échelle de Kolmogorov, alors que dans la zone externe le critère de Jimenez est respecté.

Selon les critères de Jimenez, ces faiblesses de résolution indiquent que le maillage n'est probablement pas assez fin pour résoudre les structures les plus petites, mais, comme cela sera démontré par la suite, cette résolution est suffisante pour atteindre une convergence en maillage très satisfaisante et une erreur minimale sur le calcul des budgets de l'énergie cinétique turbulente (détails section 3.4.2). La base de données que constitue cette DNS s'avère amplement suffisante pour servir à la validation de modèles de turbulence RANS.

### 3.2.2.3 Échelle temporelle

Le pas de temps de la simulation DNS est fixé à  $1.5 \cdot 10^{-7}$  et est donc en tout point du maillage inférieur à la moitié de l'échelle de temps de Kolmogorov présentée figure 3.18(b), ce qui est plus que suffisant.

## 3.2.3 Dimensions en envergure du domaine DNS

L'étendue transversale du domaine de calcul DNS doit être suffisante pour que les plus gros tourbillons de la couche limite turbulente (ceux situés dans la partie supérieure de la couche limite) n'interfèrent pas de façon gênante en raison du raccord périodique en envergure. Afin de vérifier si la taille du domaine est suffisante dans la direction de l'envergure, il faut d'une part comparer la dimension du domaine avec l'épaisseur de couche limite qui est l'échelle caractéristique des plus grosses structures et, d'autre part, vérifier la décorrélation en envergure des signaux de pression.

### 3.2.3.1 Profondeur de la boîte DNS et épaisseur de couche limite

L'échelle caractéristique des plus gros tourbillons d'une couche limite turbulente est celle de l'épaisseur de la couche limite elle-même. Afin de s'assurer que la taille du domaine est suffisante en envergure, il faut s'assurer que ces tourbillons ont la place de se développer, et donc que la longueur de l'envergure est supérieure en tout point à l'épaisseur de la couche limite. La figure 3.20 présente le rapport entre l'épaisseur de couche limite et la longueur transversale de la boîte DNS.

Ce rapport reste rigoureusement inférieur à 0.8, et même inférieur à 0.7 jusqu'à 8 longueurs de bulbe après le recollement. Cela confirme que la dimension transversale de la boîte de calcul est suffisante au développement des plus grosses structures de la couche limite.

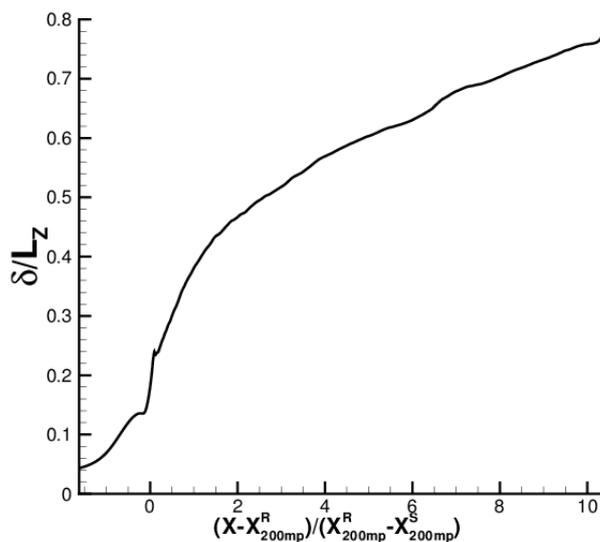


FIGURE 3.20: Rapport entre l'épaisseur de couche limite et la longueur transversale de la boîte DNS

### 3.2.3.2 Décorrélation en envergure

#### 3.2.3.2.a Définition

La corrélation de pression en deux points selon l'envergure caractérise la façon dont les signaux issus de différentes positions en envergure interfèrent entre eux. La corrélation de pression en envergure, à une position longitudinale et verticale donnée, entre un point B d'envergure  $z_B$  variable et un point de référence A d'envergure  $z_A$  fixe, est donnée par l'expression suivante :

$$\mathcal{R}_{P_A}(z_B) = \frac{\sum_{i=1}^N [(P_{A_i} - \langle P_A \rangle)(P_{B_i} - \langle P_B \rangle)]}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (P_{A_i} - \langle P_A \rangle)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (P_{B_i} - \langle P_B \rangle)^2}} \quad (3.2)$$

la somme étant faite sur  $N$  échantillons collectés au cours du temps au point d'envergure  $z_B$ . Le point de référence A est choisi en bord de domaine et la corrélation est tracée sur une demi longueur d'envergure du domaine et moyennée avec la corrélation sur l'autre demi-longueur d'envergure.

Les résultats de l'étude de corrélation menée sur le maillage 200Mp sont présentés figure 3.21. Si la corrélation  $\mathcal{R}_{P_A}$  décroît jusqu'à s'annuler en  $z_B$ , cela signifie que les signaux de pression présents en  $z_B$  sont totalement décorrélés, c'est-à-dire indépendants, de ceux présents en  $z_A$ . En

revanche, si  $\mathcal{R}_{P_A}$  ne s'annule pas même sur les points  $z_B$  les plus éloignés de  $z_A$ , cela indique que les signaux en ces deux points sont corrélés, c'est-à-dire liés.

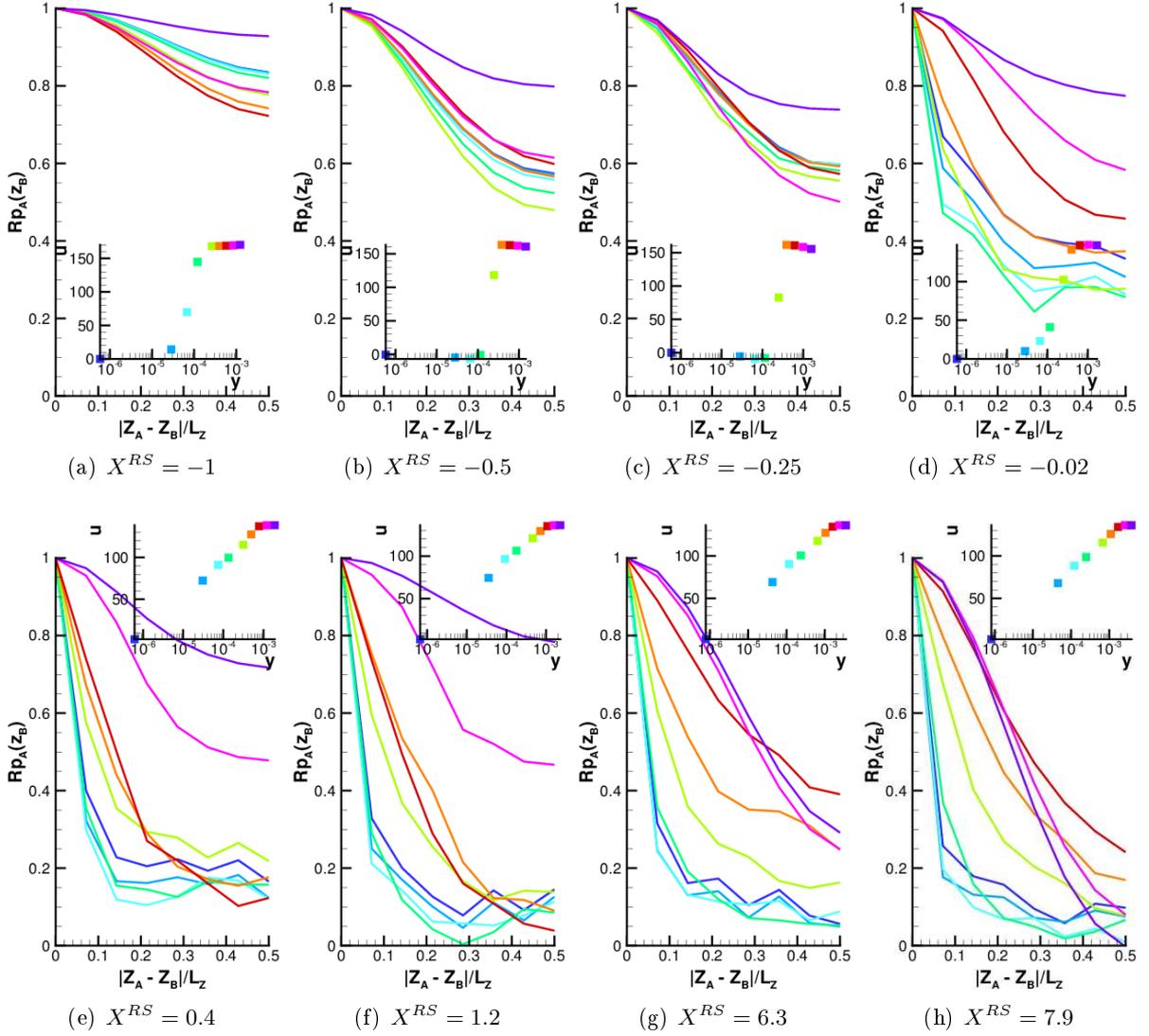


FIGURE 3.21: Corrélation de pression en envergure

### 3.2.3.2.b Interprétation des résultats

On peut voir figure 3.21(a) que, dans la zone laminaire, l'écoulement est quasiment corrélé en envergure, ce qui est typique d'une région laminaire exempte de structures turbulentes. Au début de la zone de transition, figures 3.21(b) et 3.21(c), la corrélation diminue mais est encore loin de s'annuler, ce qui est pleinement justifié par l'existence de gros tourbillons longitudinaux dans la couche limite transitionnelle.

Au fur et à mesure que ces tourbillons se désagrègent en plus petites structures, l'écoulement perd sa corrélation en envergure (figures 3.21(d) 3.21(e)). La décorrélation en envergure commence à se faire près de la paroi une longueur de bulbe après le recollement (figure 3.21(f)).

En fin de domaine DNS, figures 3.21(g) et 3.21(h), cette décorrélation est effective au sein de la couche limite (une certaine corrélation persiste à la frontière de la couche limite, ce qui se justifie par le caractère laminaire de l'écoulement dans cette région).

### 3.3 Convergence en maillage des grandeurs caractéristiques

#### 3.3.1 Coefficients de frottement et de pression

Les figures 3.22.a et 3.22.b présentent les coefficients de frottement et de pression sur toute l'étendue du domaine DNS ainsi que, pour chacun, une vue rapprochée de la région du bulbe.

La position longitudinale est adimensionnée par les positions de décollement et recollement du BDL obtenues pour la DNS la plus résolue (200 Mp) afin d'évaluer la convergence en maillage de la taille du bulbe.

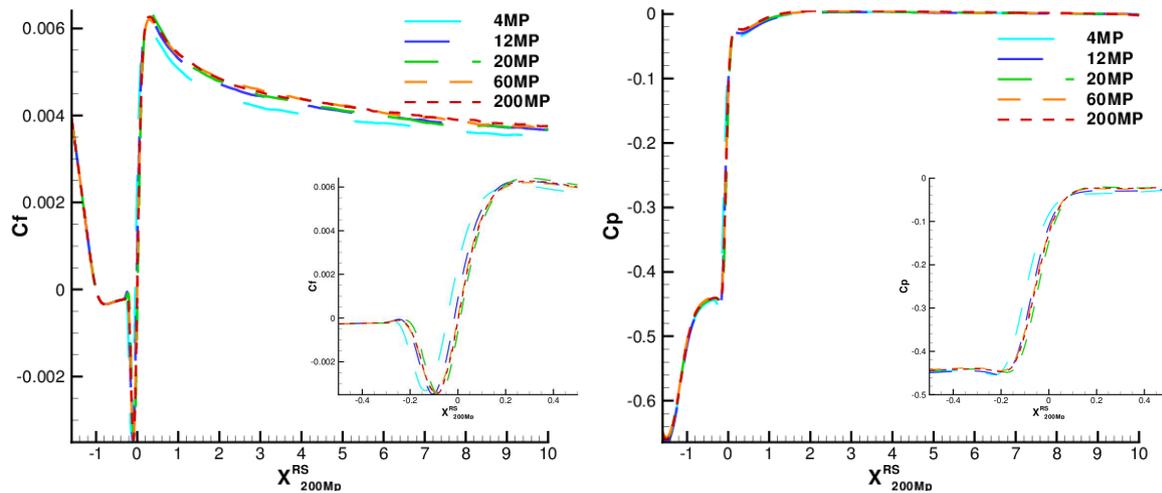


FIGURE 3.22: Convergence en maillage des coefficients de frottement (gauche) et pression (droite).

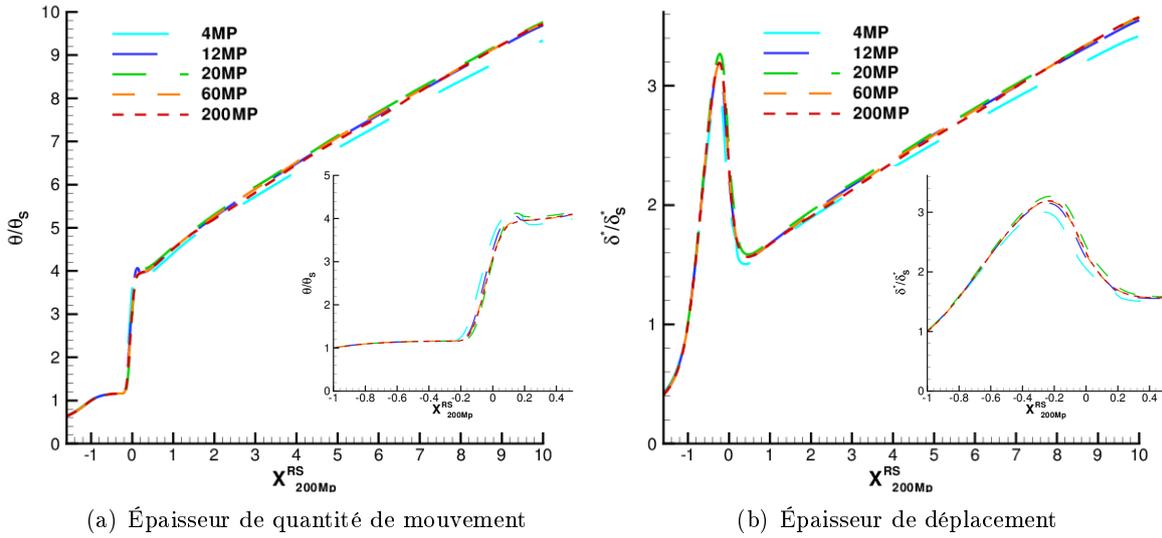
Le coefficient de frottement décroît en amont, dans la partie laminaire. Il s'annule au point de décollement puis présente un plateau négatif dans la zone décollée laminaire. La transition débute en  $X^{RS} = -0,25$  approximativement, il s'ensuit un pic négatif de frottement qui peut être assimilé au passage périodique d'un gros rouleau transverse, lequel se désagrège autour du point de recollement, où le coefficient de frottement redevient positif et grimpe brusquement. Après ce pic, le coefficient de frottement se relaxe lentement en aval, au fur et à mesure de l'établissement de la couche limite turbulente.

La comparaison des résultats des différents maillages montre que le point de décollement reste inchangé par l'augmentation de la résolution, en revanche le point de recollement recule avec l'augmentation de la résolution et semble converger dès le calcul 60 Mp. Le retard au recollement peut être facilement expliqué par la présence des erreurs de troncatures numériques dont la taille diminue avec l'augmentation de la résolution. La taille des petites perturbations initiales de l'écoulement diminuant, le processus «réceptivité - amplification linéaire - breakdown non-linéaire» est légèrement plus lent, retardant l'abscisse de transition, ce qui par conséquent repousse le point de recollement vers l'aval.

Le processus de décollement de l'écoulement est quant à lui visiblement indépendant de la taille des petites perturbations et donc du processus de transition. Les dimensions du bulbe sont approximativement  $L_B = 5,9$  mm en longueur soit  $L_B/\delta_S^* \simeq 73$  et  $h_B = 0,206$  mm en hauteur soit  $h_B/\delta_S^* \simeq 2,6$ . Le maximum de l'écoulement de retour atteint 12,5 % de la vitesse externe. Rappelons que nous avons vu au paragraphe 1.4.3 qu'un minimum de 15 % est requis pour l'apparition d'une instabilité absolue, cependant d'après Rist [106], le fait que  $h_B/\delta_S^*$  dépasse la valeur 0.5 peut lever cette restriction.

### 3.3.2 Épaisseur de quantité de mouvement et épaisseur de déplacement

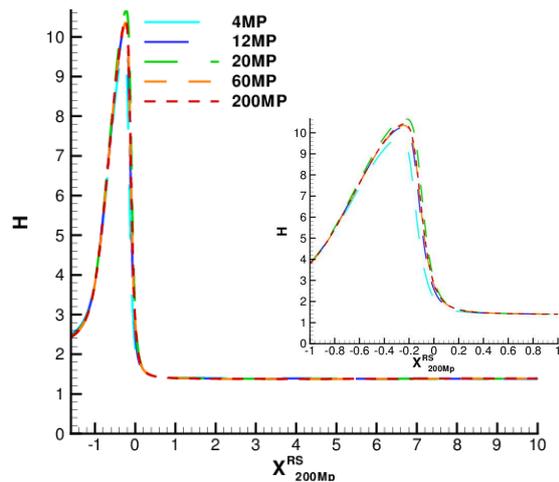
La figure 3.23 montre l'évolution longitudinale des épaisseurs de quantité de mouvement et de déplacement adimensionnées par leurs valeurs respectives au point de décollement de l'écoulement.



**FIGURE 3.23:** Convergence en maillage des épaisseurs caractéristiques de la couche limite adimensionnées par leurs valeurs respectives au point de décollement :  $\theta_S = 2,13 \cdot 10^{-5}$  et  $\delta_S^* = 8,05 \cdot 10^{-5}$ .

L'épaisseur de quantité de mouvement, croissante dans la région laminaire, présente un plateau au niveau de la zone laminaire du bulbe, de  $X^{RS} = -1$  à  $X^{RS} = -0,25$ . Pendant le processus de transition, de  $X^{RS} = -0,25$  à  $X^{RS} = +0,25$ , l'épaisseur de quantité de mouvement grimpe brutalement. Ce phénomène bien connu correspond à un sur-épaississement de la couche limite qui se produit au point de recollement d'un BDL. La convergence en maillage semble ici aussi atteinte dès le calcul 60Mp. Même si la résolution influe sur le point de recollement et donc sur la position du sur-épaississement, il apparaît que, excepté sur la maillage le moins résolu, cet effet n'a pas de conséquences sur l'épaississement dans la zone turbulente aval.

La figure 3.24 montre l'évolution longitudinale du paramètre de forme  $H = \delta^*/\theta$ . Il atteint son maximum  $H_{max} = 10,45$  en  $X^{RS} = -0,23$ . En aval dans la zone turbulente, le paramètre de forme atteint la valeur asymptotique 1,39.



**FIGURE 3.24:** Convergence en maillage du paramètre de forme  $H = \delta^*/\theta$ .

### 3.3.3 Profils verticaux de vitesse

#### 3.3.3.1 Évolution longitudinale

La figure 3.25 représente des profils verticaux de vitesse tracés à différentes positions longitudinales autour et dans le bulbe, et ce pour chacun des maillages. On peut y voir la diminution de la vitesse externe due à la forme particulière de la tuyère qui induit un gradient de pression adverse dans cette région. On peut constater l'évolution rapide des profils de vitesse. Le profil en  $X^{RS} = -1$  est encore laminaire, bien que très aplati près de la paroi car l'écoulement est sur le point de décoller. En  $X^{RS} = -0,5$ , l'écoulement est décollé et un écoulement de retour est présent jusqu'à mi hauteur de la couche limite. En  $X^{RS} = 0$ , au point de recollement, le profil de vitesse est là aussi très aplati près de la paroi et est encore très loin du profil turbulent, dont une esquisse apparaît déjà une demi longueur de bulbe après le recollement, en  $X^{RS} = 0.5$ . Par ailleurs, on peut constater que la convergence en maillage est déjà très satisfaisante dès le maillage 20 Mp.

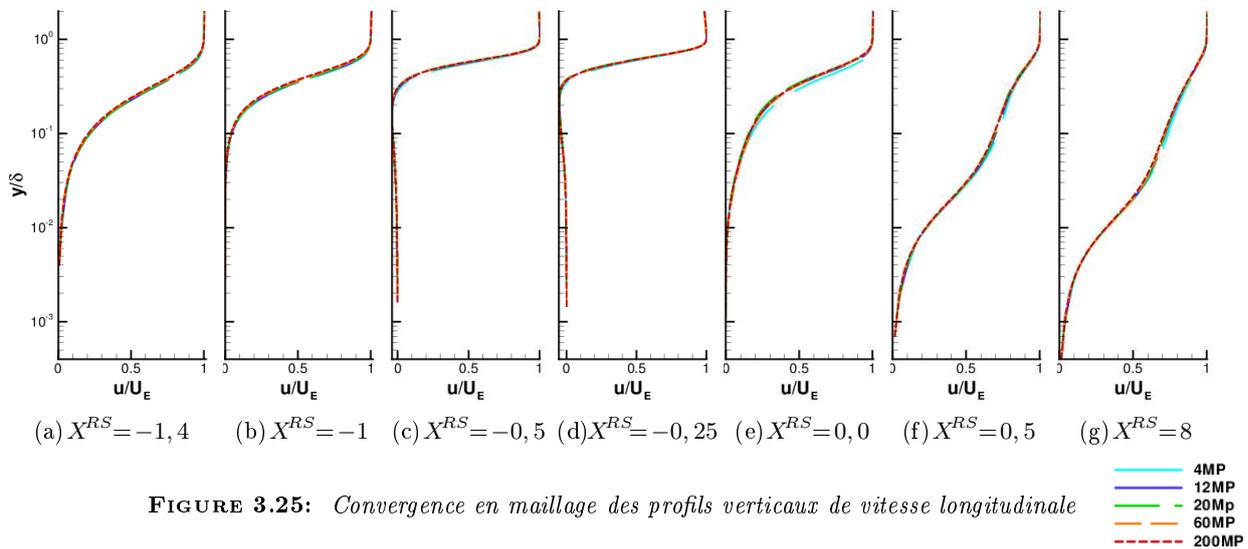


FIGURE 3.25: Convergence en maillage des profils verticaux de vitesse longitudinale

#### 3.3.3.2 Profils de vitesse turbulents

La figure 3.26 montre l'évolution avec l'augmentation de la résolution des profils verticaux de vitesse dans la région turbulente.

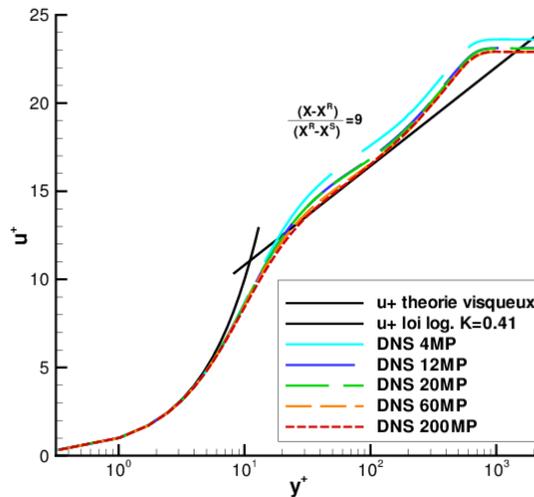


FIGURE 3.26: Convergence en maillage des profils verticaux de vitesse dans la région turbulente, en  $X^{RS} = 9$ . La loi visqueuse  $u_{vis}^+ = y^+$  est tracée dans la région près de la paroi, et la loi  $\log u_{log}^+ = \frac{1}{0,41} \ln(y^+) + 5,2$  est tracée dans la région logarithmique.

Les profils verticaux de vitesse montrent une très bonne convergence vers la loi logarithmique  $u_{log}^+ = \frac{1}{0,41} \ln(y^+) + 5,2$  avec l'augmentation de la résolution. Cette loi est atteinte pour le profil du calcul à 200 Millions de points entre  $y^+ = 40$  et  $y^+ = 150$ . La loi visqueuse est quant à elle correctement prévue par l'ensemble des calculs.

### 3.3.4 Fluctuations

Les figures 3.27, 3.28, 3.29 et 3.30 présentent les profils verticaux des fluctuations de vitesse normalisées par la valeur de la vitesse externe au point de décollement.

En amont, dans la région laminaire qui précède le décollement, les fluctuations de vitesse longitudinales présentent déjà un maximum dans la zone de cisaillement (figures 3.27(a) et 3.27(b)). Les fluctuations verticales (figures 3.28(a) et 3.28(b)) sont nulles en dehors du bruit numérique à la limite supérieure du domaine de calcul. De même pour les fluctuations transversales (figures 3.29(a) et 3.29(b)), très faibles, et qui présentent en outre un pic plus proche de la paroi que celui des fluctuations longitudinales. Les fluctuations croisées (figures 3.30(a) et 3.30(b)) présentent elles aussi du bruit numérique en haut du domaine ainsi qu'un pic dans la zone externe de la région de cisaillement.

Globalement, la zone de cisaillement semble plus riche en fluctuations que la sous-couche visqueuse, ce qui indiquerait une prédominance de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz avant même le point de décollement. Globalement, la plupart des études s'accordent à dire que dans la couche limite laminaire en amont du bulbe la croissance des instabilités est dominée par les modes TS et que dans la région séparée ce sont les modes KH qui deviennent prédominants et sont à l'origine du lâcher tourbillonnaire ( Yang & Voke [134], Hatman et Wang [44], Rist [106]).

Dans le bulbe, les fluctuations longitudinales (figures 3.27(c), 3.27(d), 3.27(e)) voient le pic de la zone de cisaillement disparaître au profit de l'apparition d'un pic dans la région d'écoulement renversé. Au fur et à mesure de la transition, le profil des fluctuations se gonfle de plus en plus à la paroi (figure 3.27(f)), jusqu'à présenter, dans la région turbulente (figure 3.27(g)), une nette prédominance des fluctuations de la région visqueuse proche de la paroi.

Les fluctuations de vitesse transversale (figures 3.28(c), 3.28(d), 3.28(e)) ont elles aussi deux pics mais tous deux dans la zone de cisaillement. Le pic le plus proche de la paroi devient peu à peu prédominant (figure 3.27(f)), et se développe dans ce qui devient, dans la région turbulente, la zone logarithmique (figure 3.28(g)). Les fluctuations verticales sont moins présentes près de la paroi que les fluctuations longitudinales.

Les fluctuations transversales conservent elles aussi deux pics de taille importante jusqu'au point de recollement (figures 3.29(c), 3.29(d), 3.29(e)), puis le pic le plus proche de la paroi se développe de façon préférentielle, à mi hauteur entre le pic de fluctuations longitudinales et le pic de fluctuations verticales.

Les profils de fluctuations croisées conservent en revanche un pic élevé en zone de cisaillement, et ce jusqu'en  $X^{RS} = 0,5$  (figures 3.30(c), 3.30(d), 3.30(e) et 3.30(f)). Ce pic se rapproche petit à petit de la paroi et se stabilise à mi-hauteur de la couche limite (figure 3.30(g)).

Globalement, les profils de fluctuations dans les différentes directions augmentent rapidement d'intensité jusqu'au point de recollement, puis diminuent de plus en plus lentement au fur et à mesure que la turbulence se développe. Les fluctuations les plus intenses sont dans la direction de l'écoulement.

L'influence du maillage diminue dans la dernière partie du bulbe et à partir du point de recollement la convergence en maillage est très satisfaisante.

### 3.3. CONVERGENCE EN MAILLAGE DES GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES

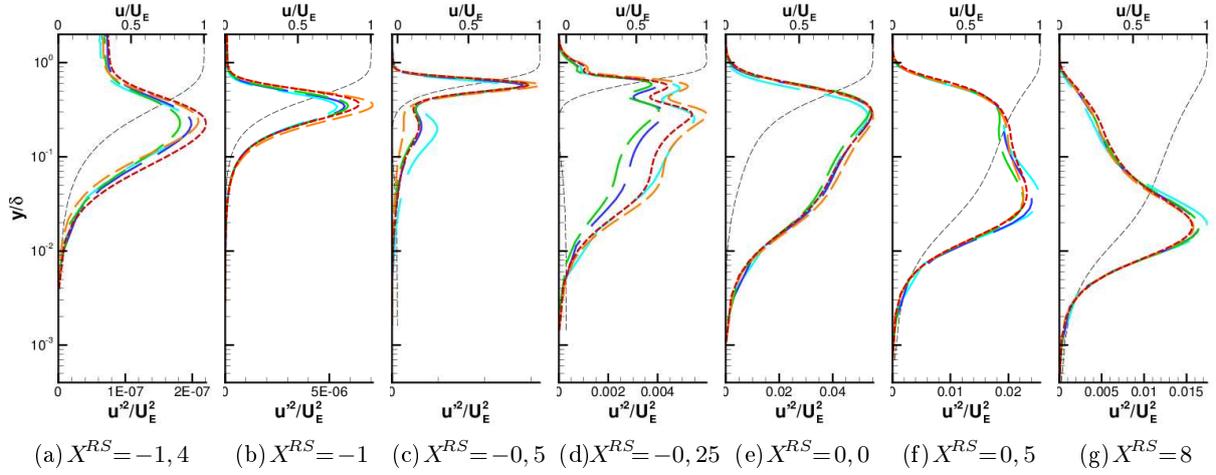


FIGURE 3.27: Fluctuations longitudinales (couleur) et profil de vitesse 200Mp (noir)

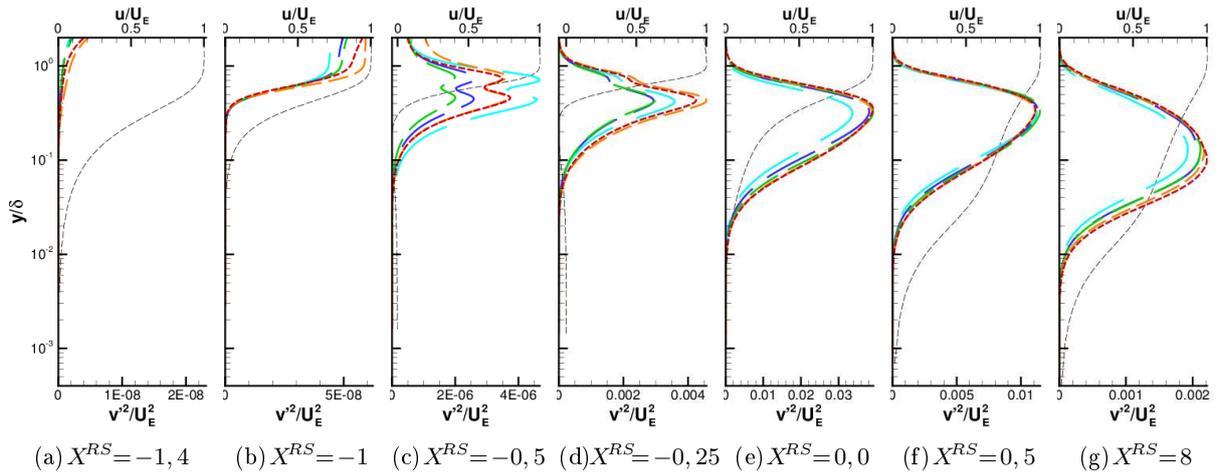
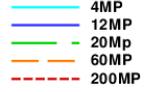


FIGURE 3.28: Fluctuations verticales (couleur) et profil de vitesse 200Mp (noir)

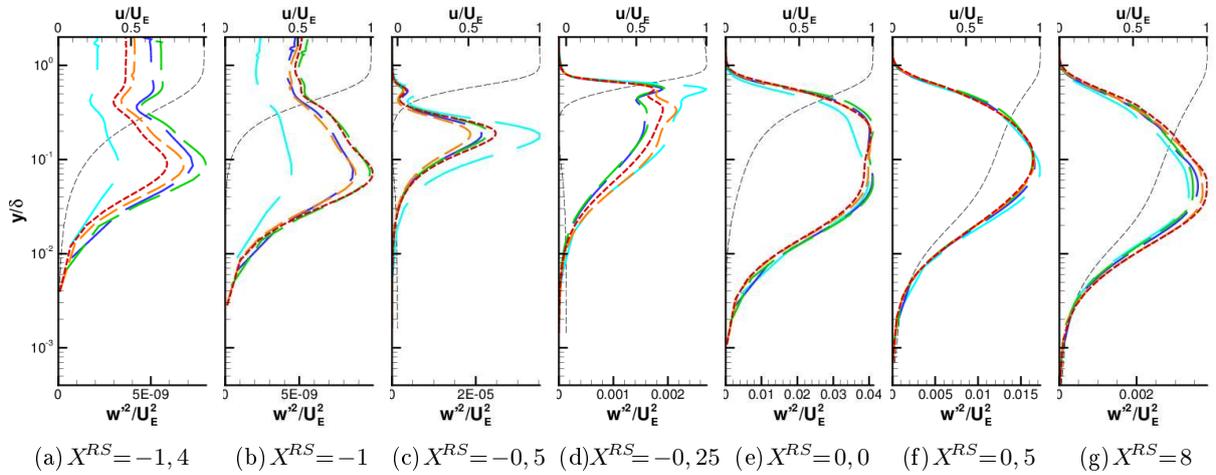
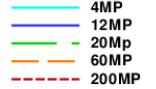
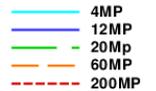


FIGURE 3.29: Fluctuations transversales (couleur) et profil de vitesse 200Mp (noir)



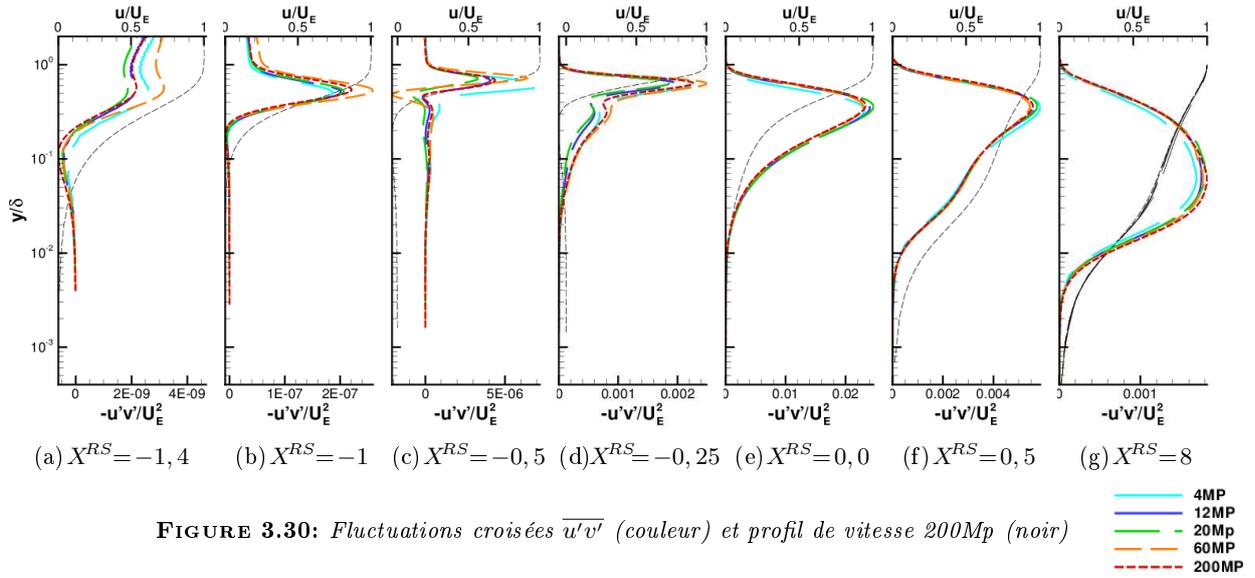


FIGURE 3.30: Fluctuations croisées  $\overline{u'v'}$  (couleur) et profil de vitesse 200Mp (noir)

## 3.4 Validations théoriques

### 3.4.1 Couche limite laminaire

Les figures 3.31 montrent une comparaison des résultats du calcul sur le maillage 60Mp avec les résultats d'un calcul de couche limite (code 3C3D développé à l'ONERA) utilisant le gradient de pression longitudinal de la DNS.

Ces comparaisons permettent de valider la partie laminaire du calcul DNS, puisque les profils DNS se montrent rigoureusement identiques aux prévisions théoriques de la théorie de la couche limite. Le calcul de couche limite s'arrête bien entendu au décollement.

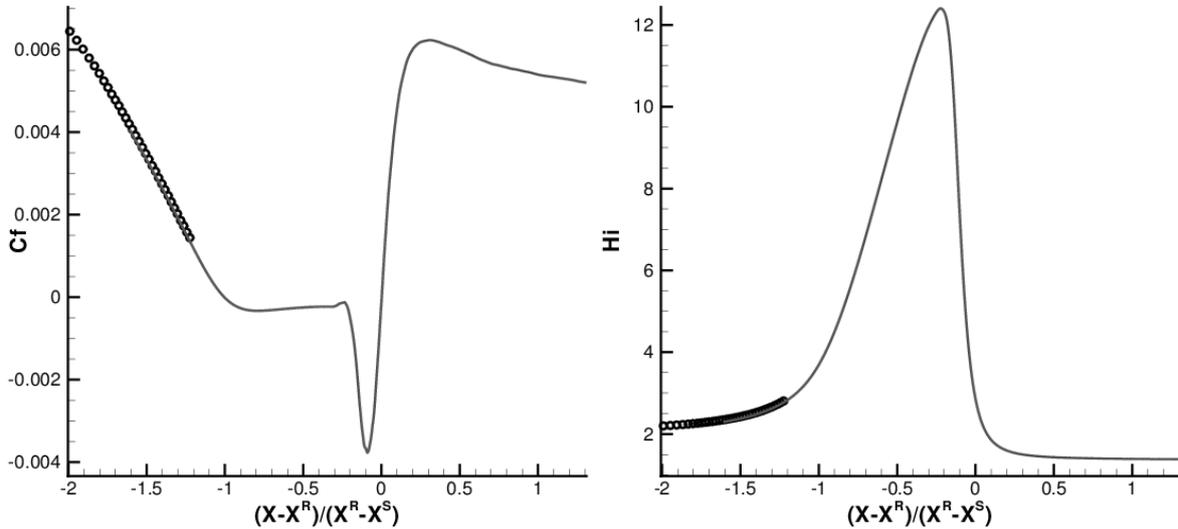


FIGURE 3.31: Comparaison du coefficient de frottement et du facteur de forme de la DNS (courbes grises) avec les prévisions d'un calcul de couche limite (symboles noirs).

### 3.4.2 Équation bilan de l'énergie cinétique turbulente

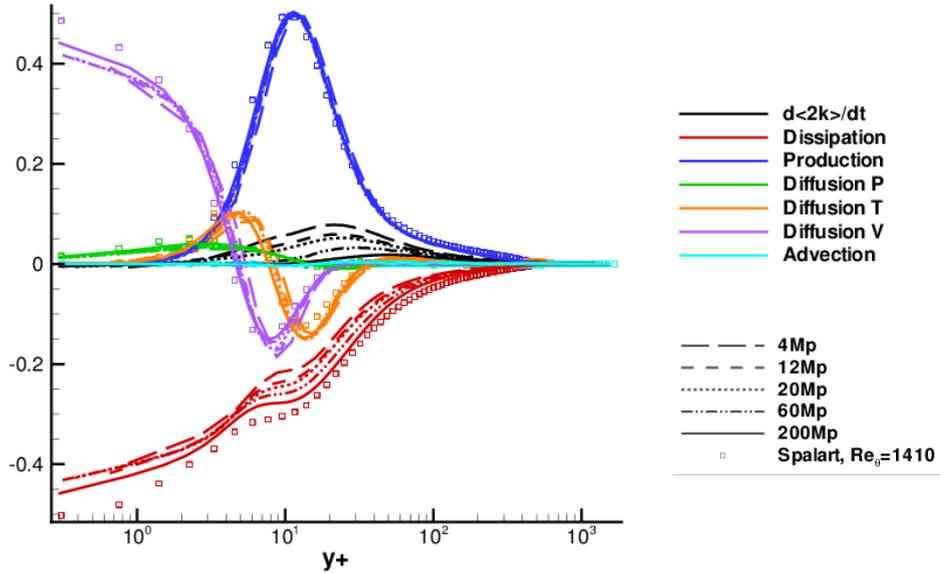
L'équation de transport des tensions de Reynolds  $\overline{\rho u_i'' u_j''}$  peut être dérivée des équations de Navier-Stokes (voir démonstration dans l'annexe A.3).

L'équation de transport de l'énergie cinétique  $\overline{\rho u_i'' u_i''}$  en est directement issue, elle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \overline{\rho u_i'' u_i''}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \widetilde{u}_k \overline{\rho u_i'' u_i''}}{\partial x_k}}_{\text{convection}} &= \underbrace{-2 \overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_k}}_{\text{production}} - \underbrace{2 \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \overline{\tau_{ik}}}_{\text{dissipation}} \\
 &+ \underbrace{2 \frac{\partial u_i'' \overline{\tau_{ik}}}{\partial x_k}}_{\text{diffusion visqueuse}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{\rho u_i'' u_i'' u_k''}}{\partial x_k}}_{\text{diffusion turbulente}} - \underbrace{2 \frac{\partial u_i' \overline{\delta_{ik} p'}}{\partial x_k}}_{\text{diffusion par la pression}} \\
 &\underbrace{-2 \overline{u_i''} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + 2 \overline{p'} \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} + 2 \overline{u_i''} \frac{\partial \widetilde{\tau_{ik}}}{\partial x_k}}_{\text{termes négligeable}}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Les termes exacts composant l'équation de transport de l'énergie cinétique ont été calculés statistiquement pour chacune des DNS réalisées dans cette étude. Les méthodes implémentées dans le logiciel FUNk pour le stockage des variables statistiques et le calcul des termes du bilan sont détaillés dans l'annexe B. En pratique, le calcul des

Les composants du bilan extraits des cinq simulations ‘‘DNS’’ de résolution croissante sont comparés, dans la région turbulente, aux résultats de Spalart [117] figure 3.32. Les profils DNS sont tracés pour un nombre de Reynolds  $\Re_{\theta} = 1410$  tout comme ceux de Spalart.



**FIGURE 3.32:** Convergence en maillage des composants de l'équation de transport de  $k = \overline{\rho u_i'' u_i''}$ . Comparaison avec les profils de Spalart [117] à  $\Re_{\theta} = 1410$ . Les quantités sont adimensionnées par  $u_{\tau}^4 \rho / \nu$ .

Les termes négligeables de l'équation 3.3 ne sont pas tracés mais sont néanmoins calculés et pris en compte dans la somme des termes de droite de l'équation 3.3, somme tracée sous

le sigle  $d\langle 2k \rangle / dt$  sur la figure 3.32. Ce terme est représentatif de la précision du calcul des composants du bilan de l'équation 3.3. Il devrait tendre vers zéro si chacun des composants était convergé. On constate figure 3.32 que le terme  $d\langle 2k \rangle / dt$  s'annule presque pour le maillage 200Mp, ce qui montre une erreur minimale sur le calcul des composants de l'équation 3.3. Par ailleurs, on observe que les profils convergent vers ceux de Spalart, seule la dissipation semble ne pas être parfaitement convergée et auquel cas mériterait, pour être parfaitement calculée, un maillage encore plus résolu qui devrait permettre d'annuler totalement la somme des composants  $d\langle 2k \rangle / dt$  du bilan de  $k$ .

Cependant, les résultats DNS obtenus par Wu et Moin [133] diffèrent eux aussi légèrement de ceux de Spalart, les conclusions sur la convergence sont donc à relativiser. Quoiqu'il en soit, dans l'optique de l'obtention d'une base de données pour le calcul RANS, la précision des résultats obtenus ici est plus que suffisante pour permettre une analyse fine des composants du bilan de l'équation 3.3.

Les calculs DNS montrent que ces profils sont déjà atteints en  $X^{RS} = 2$  c'est-à-dire pour  $\Re_\theta = 1000$ , ce qui démontre une transition violente et rapide de l'écoulement avec BDL.

### 3.4.3 Fréquences caractéristiques

#### 3.4.3.1 Résultats d'analyse spectrale

Les signaux instantanés de vitesse et de pression ont été extraits des calculs DNS 200Mp :

- sur 85 périodes de lâcher tourbillonnaire pour le calcul forcé
- sur 150 périodes de lâcher tourbillonnaire pour le calcul non forcé

Les résultats sont présentés dans leur totalité Annexe E où les graphiques sont tracés pour différentes positions longitudinales et verticales, pour le cas forcé (à gauche) et le cas non forcé (à droite). Les figures présentées ci-dessous en sont extraites. La seule différence entre les cas forcé et non forcé apparaissant sur les spectres consiste en la présence à la paroi d'une trace du forçage à 80kHz en amont du domaine ( $X^{RS} = [-0.5, -1]$ ) qui n'est pas présente dans le cas non forcé. Cette trace est visible depuis la paroi (fig 3.33) jusqu'à la région d'écoulement extérieur (fig 3.34).

Les spectres de pression et de vitesse longitudinale montrent que les perturbations de fréquence 70-90kHz sont les plus présentes dans le cas forcé comme dans le cas non forcé. Les figures 3.33 et 3.34 montrent que l'amplification de ces perturbations est progressive jusqu'en  $X_{RS} = -0.3$  ; l'amplitude de ces perturbations atteint un maximum entre  $X_{RS} = -0.2$  et  $X_{RS} = 0$ , puis diminue au delà du point de recollement. Cette prédominance est particulièrement visible sur toute la hauteur de la couche limite comme le montrent les spectres de pression tracés en  $y/\delta = 0.005$  et  $y/\delta = 1.5$  sur les figures 3.33 et 3.34.

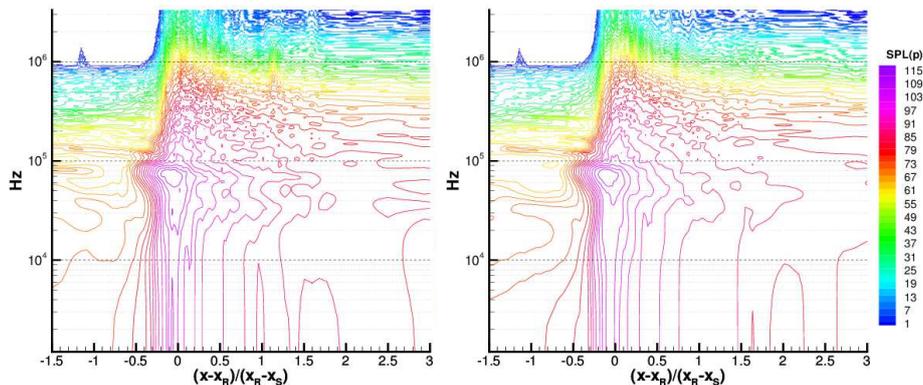


FIGURE 3.33: Spectres de pression tracés en  $y/\delta = 0.005$ , avec (à gauche) et sans (à droite) forçage.

### 3.4. VALIDATIONS THÉORIQUES

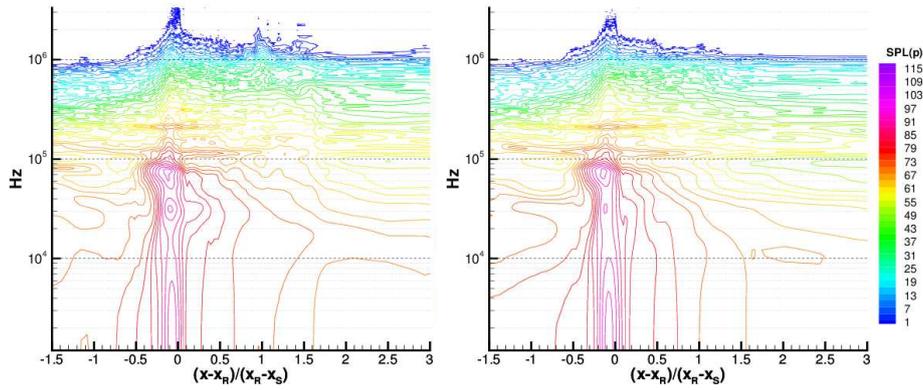


FIGURE 3.34: Spectres de pression tracés en  $y/\delta = 1.5$ , avec (à gauche) et sans (à droite) forçage.

Verticalement, le maximum d'amplitude des spectres se situe dans la couche de fort cisaillement autour de  $y/\delta = 0.5$ , comme le montrent les spectres de pression des figures 3.35(a) et 3.35(b). La prédominance des fréquence 70-80kHz a déjà quasiment disparu en  $X_{RS} = 0.4$  (figure 3.35(c)).

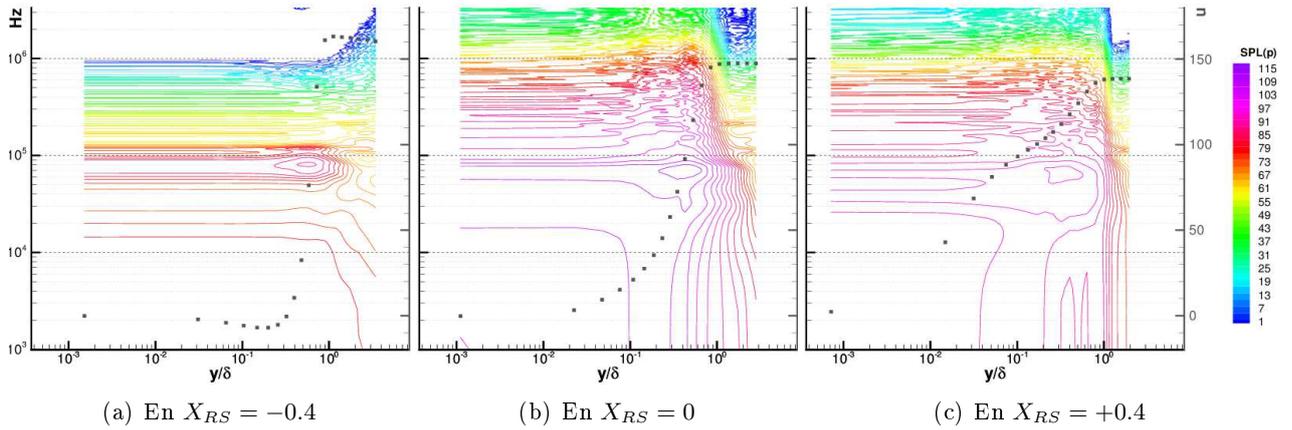


FIGURE 3.35: Spectres de pression tracés à différentes positions longitudinales pour le cas forcé.

Peu avant la transition, les spectres de vitesse longitudinale dans la gamme de fréquence 70-90kHz laissent apparaître un pic en proche paroi en plus du pic de la couche de cisaillement (figure 3.36).

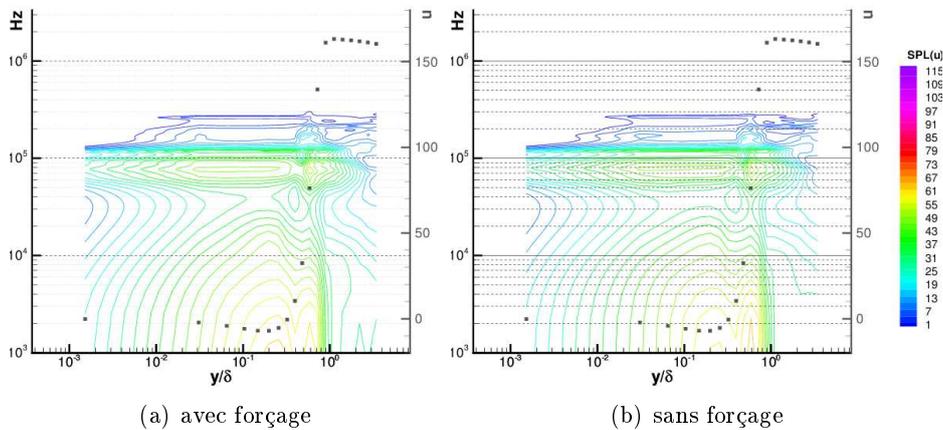


FIGURE 3.36: Spectres de vitesse longitudinale en  $X_{RS} = -0.4$ .

### 3.4.3.2 Analyse de stabilité linéaire locale

L'étude de stabilité linéaire réalisée par le code CASTET (ONERA/DMAE) dont les résultats sont présentés figure 3.37(a) prévoit une amplification totale  $N$  maximale pour  $f = 70 - 90$  kHz. Ces prévisions théoriques sont comparées aux valeurs  $N = \log(A/A_0)$  où  $A$  et  $A_0$  sont les amplitudes aux positions  $X^{RS}(x)$  et  $X_0^{RS} = -1.3$  des spectres de pression (figure 3.37(b)) et vitesse longitudinale (figure 3.37(c)).

Les résultats décrits dans la section 3.4.3.1 montrent une prédominance des fluctuations de fréquence  $f = 70 - 90$  kHz dont l'amplitude est croissante jusqu'à la transition. Les figures 3.37(b) et 3.37(c) montrent une amplification totale dont la croissance est légèrement plus lente que celle prévue par l'étude théorique, mais en relativement bon accord sur les fréquences favorisées. Ils sont donc en bon accord avec les prévisions de la théorie de la stabilité linéaire.

Dans la région de transition, l'amplitude maximale des fluctuations de fréquence  $f = 70 - 90$  kHz a été identifiée sur les spectres du paragraphe 3.4.3.1 dans la couche de fort cisaillement, c'est donc vraisemblablement l'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui est responsable du déclenchement de la transition.

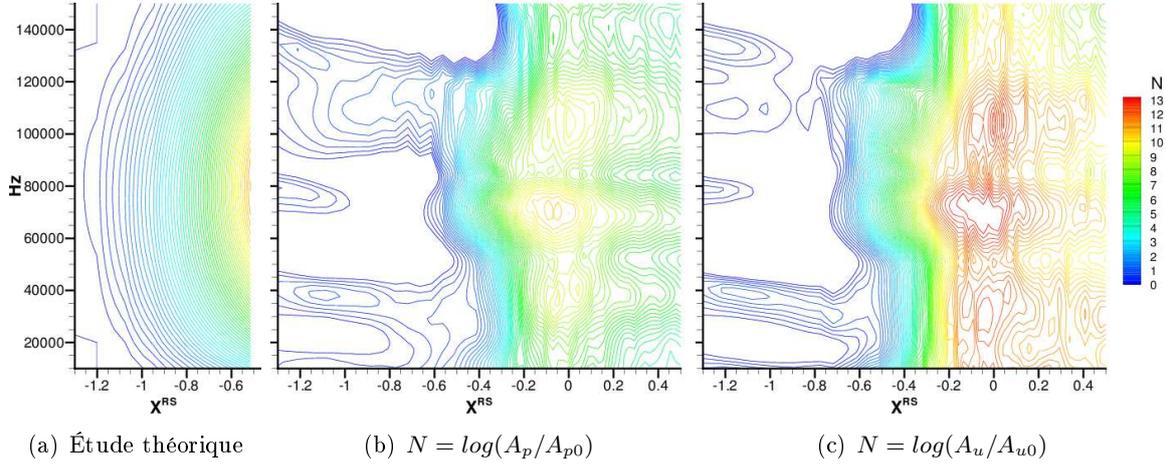


FIGURE 3.37: Amplification totale  $N$ , étude de stabilité linéaire et résultats d'analyse spectrale.

## 3.5 Processus de transition

### 3.5.1 Structures cohérentes

La figure 3.38 présente une vue des structures cohérentes se développant dans le BDL, tracées par des isosurfaces du critère  $Q = \frac{1}{2}(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - D_{ij}D_{ij}) = -\frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ . L'écoulement provient du coin bas-gauche de la figure et s'écoule vers le haut-droit de la figure. La coloration noire en paroi indique la zone de vitesse négative qui permet d'identifier la position du BDL.

Des rouleaux bidimensionnels transverses apparaissent dans la deuxième moitié du BDL, ils présentent une vitesse positive en surface supérieure et négative près de la paroi. Ils sont éjectés de façon périodique par la couche limite cisillée avec une fréquence moyenne de 80kHz. Il s'agit vraisemblablement de structures issues de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz dont la trace a été observée dans la région de cisaillement sur les profils verticaux de fluctuations (section 3.3.4) et sur les résultats d'analyse spectrale (section 3.4.3.1). Cependant, il n'est pas exclu que l'instabilité de Görtler ait une part de responsabilité dans l'apparition des tourbillons transversaux conduisant à la transition puisque dans la couche de cisaillement de la région de séparation les lignes de courant présentent une courbure convexe et le profil de vitesse est concave.

L'intensité de chacune de ces structures transverses s'amplifie au fur et à mesure de son

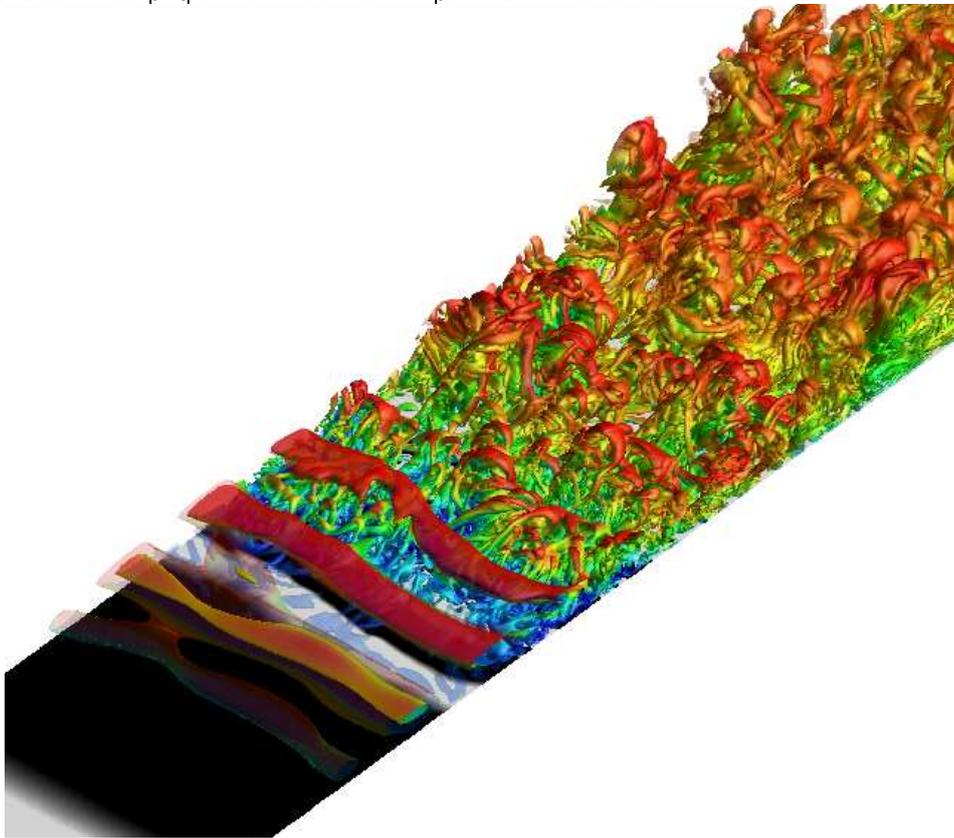
advection dans le bulbe, et devient maximale juste avant le recollement. Le passage périodique de ce rouleau d'assez forte amplitude de l'écoulement de retour semble à l'origine du pic de frottement négatif présent juste avant le recollement sur le profil de frottement moyenné en temps de la figure 3.22.

Les rouleaux transverses perdent leur cohérence au niveau de la position moyenne du point de recollement, et se désagrègent ensuite en tourbillons de plus en plus petits. Dans la zone de recollement, sous les rouleaux semi-transparentes de la figure 3.38, de petites structures turbulentes sont présentes très proches de la paroi. Celles-ci remontent très lentement l'écoulement, advectées vers l'amont à chaque passage d'un rouleau transverse.

Les figures 3.39(a) et (b) présentent, pour deux instants différents et pour deux angles de vue différents, une représentation similaire à celle de la figure 3.38 à l'aide d'une isosurface du critère  $Q$  mais de valeur supérieure à celle de la figure 3.38. Cette vue permet d'effacer les rouleaux transverses pour ne voir que les structures plus petites mais de plus grande intensité qui apparaissent au sein des rouleaux dans la zone de recollement.

Les figures 3.39(a) et (b) montrent l'apparition de structures  $\Lambda$  très nettes et très nombreuses. Elles se dressent face à l'écoulement (les deux jambes généralement à la même hauteur), avec une inclinaison verticale dans la direction longitudinale, tout comme celles schématisées figure 1.2. Ces structures  $\Lambda$  apparaissent périodiquement lors de l'éjection d'un rouleau transverse, sous forme d'un paquet de la dimension du rouleau évanescant. Certaines de ces structures se suivent de près, mais elles sont principalement rangées côte à côte le long de lignes transversales correspondant aux rouleaux bidimensionnels évanescents. Dès le point de recollement, les structures  $\Lambda$  sont étirées par le cisaillement de la couche limite, elles s'enroulent autour de ce qui reste des rouleaux transversaux et finissent souvent éclatées par un spot de vorticité advection par les rouleaux.

Les figures 3.40 mettent en image cette dynamique par une série de vues instantan es illustrant le devenir d'un paquet de structures après le recollement.



**FIGURE 3.38:** Rouleaux transversaux en fin de BDL et transition vers la turbulence identifiés par des isosurfaces du critère  $Q$  de valeurs  $3.1 \cdot 10^{10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  (opaque) et  $1.0 \cdot 10^9 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  (transparent).

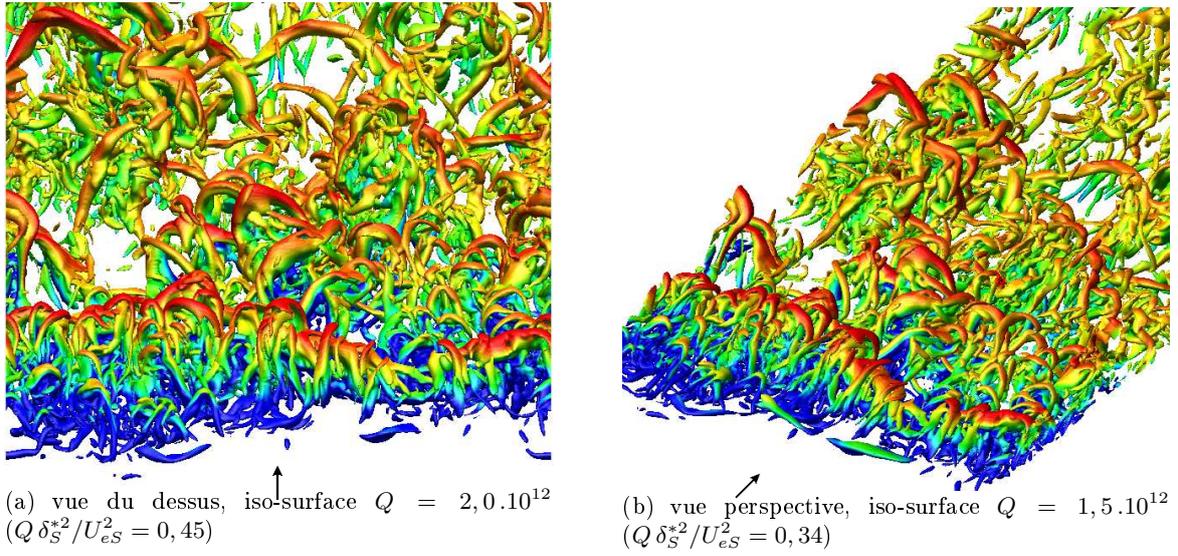


FIGURE 3.39: Structures  $\Lambda$  issues des rouleaux transversaux identifiées par des isosurfaces du critère  $Q$ .

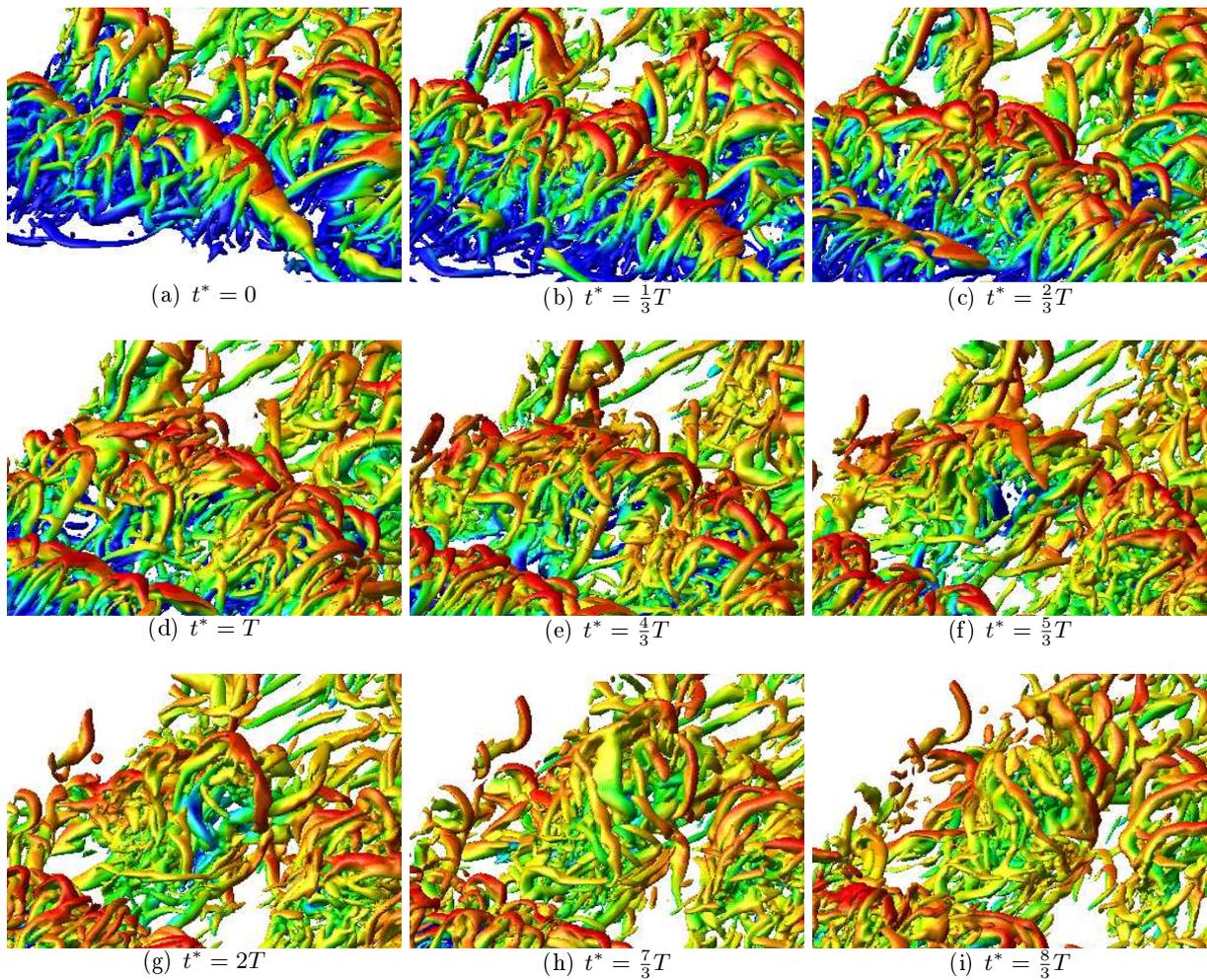


FIGURE 3.40: Suivi d'un paquet de structures par vues instantanées d'une isosurface du critère  $Q$  au fur et à mesure de l'advection de ce paquet par l'écoulement pendant un temps égal à huit tiers de la période  $T$  du lâcher tourbillonnaire.

### 3.5.2 Nombre de Strouhal de la DNS

La période du lâcher tourbillonnaire observé dans la DNS est  $f = 80$  kHz environ. En considérant  $L_B = 5.9 \cdot 10^{-3} m$  la longueur du bulbe et  $U_{e,B} = 163 m.s^{-1}$  la valeur moyenne de la vitesse extérieure au dessus du bulbe, on détermine le nombre adimensionné de Strouhal suivant :

$$S_t = \frac{f L_B}{U_{e,B}} \simeq 2.9 \quad (3.4)$$

Le Strouhal ainsi formulé est égal à la fraction du temps  $T_{e,B}$  mis par une particule de l'écoulement extérieur pour être advectée sur la longueur du bulbe divisée par la période  $T_{LT}$  du lâcher tourbillonnaire.  $S_t = \frac{T_{e,B}}{T_{LT}} = 2.9$  signifie donc que pendant le temps nécessaire pour qu'une particule de l'écoulement extérieur survole le bulbe, il se produit 2.9 lâchers tourbillonnaires de fréquence 80kHz.

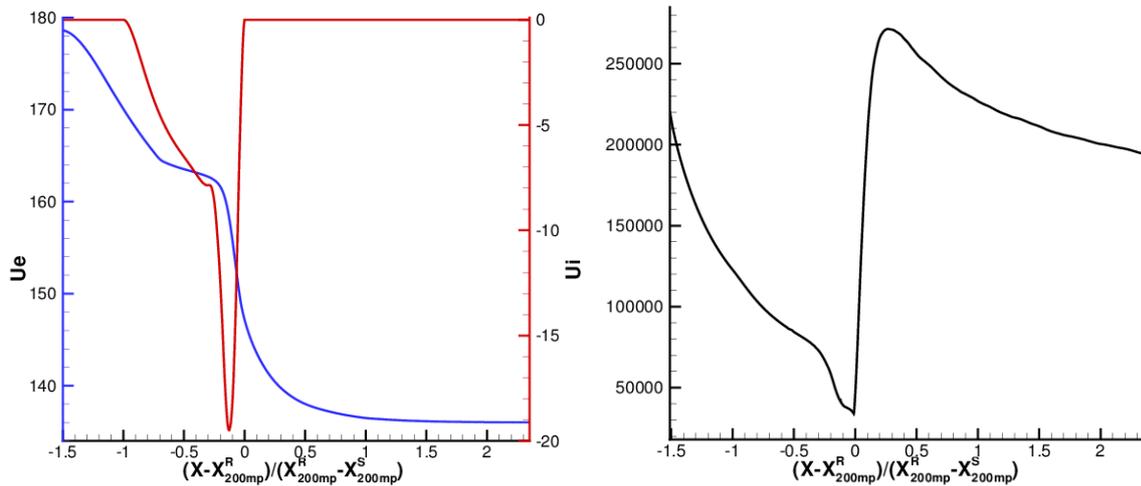
Des nombres de Strouhal plus faibles, de l'ordre de 0.1 à 1.14 ont été observés par différents auteurs (voir Yang & Voke [134]).

### 3.5.3 Estimation de la fréquence d'échappement tourbillonnaire d'une couche de mélange équivalente

Il est possible d'approcher la fréquence du lâcher tourbillonnaire d'une couche de mélange par l'expression suivante :

$$f_{LT} = \frac{1}{2} \frac{U_e + U_i}{7} \frac{\max(\partial u / \partial y)}{U_e - U_i} \quad (3.5)$$

où on note  $U_e(x)$  la vitesse extérieure et  $U_i(x)$  la vitesse minimale atteinte à l'intérieur de la couche limite : nulle en dehors du bulbe (paroi) et égale au maximum de l'écoulement retour dans le bulbe. Ces vitesses sont tracées figure 3.41(a). La fréquence de lâcher tourbillonnaire estimée par la relation 3.5 est présentée sur le graphique 3.41(b).



(a)  $U_e(x)$  : vitesse extérieure et  $U_i(x)$  : vitesse minimale (b) Fréquences  $f_{LT}$  estimées pour une couche de mélange équivalente à celle de l'écoulement dans la couche limite

**FIGURE 3.41:** Estimation de la fréquence du lâcher tourbillonnaire d'une couche de mélange équivalente à celle de l'écoulement dans le BDL.

On voit que la fréquence la plus amplifiée par une couche de mélange présentant la même inflexion maximale du profil de vitesse serait entre  $110 kHz$  (estimation au point de décollement) et  $30 kHz$  (estimation au point de recollement). La fréquence  $80 kHz$  observée dans les résultats

DNS correspond à l'estimation de la fréquence de lâcher tourbillonnaire de la couche de mélange équivalente en  $X^{RS} = -0.4$ . Ce calcul très approximatif permet néanmoins de valider de façon satisfaisante l'ordre de grandeur du lâcher tourbillonnaire de  $80kHz$  observé dans la DNS.

### 3.6 Évolution des composants du bilan d'énergie cinétique turbulente

Les composants du bilan de l'équation 3.3 de transport de l'énergie cinétique  $k = \frac{1}{2}\overline{\rho u_i'' u_i''}$  ont été calculés en chaque point du domaine DNS. Leur évolution longitudinale est présentée figure 3.42.

Les composants de l'équation de transport subissent une forte amplification dans le bulbe, et atteignent leurs maximums en  $X^{RS} = [-0.08, -0.06]$ . En amont, au point de décollement, (Fig 3.42(a)), la production et l'advection dominent le bilan dans la région de cisaillement et se compensent, alors que près de la paroi les termes de dissipation et diffusion visqueuse s'équilibrent l'un l'autre, mais restent faibles. Au fur et à mesure de l'avancement de l'écoulement dans le bulbe (figures 3.42(b) et 3.42(c)), les termes de dissipation et de diffusion visqueuse augmentent à la paroi, et la diffusion par la pression augmente aux dépens du terme d'advection. Dans la zone de transition (figures 3.42(c) et 3.42(d)), la diffusion turbulente apparaît et croît rapidement dans la zone de cisaillement. L'amplitude de la production continue d'augmenter mais perd petit à petit sa supériorité vis-à-vis des autres termes. Dans la zone du recollement (figures 3.42(d) et 3.42(e)), la diffusion est due principalement aux effets visqueux proches de la paroi, à la pression dans la zone tampon intermédiaire et à l'action de la turbulence dans la zone de cisaillement. La diffusion de l'énergie cinétique turbulente se fait principalement depuis la zone de cisaillement où elle est produite vers la paroi où la dissipation est la plus forte. Plus en aval, en  $X^{RS} = 1$  (figure 3.42(f)), la turbulence est déjà en partie établie car les composants du bilan ressemblent fortement à ceux de la région turbulente observés en  $X^{RS} = 9$  (figure 3.32). En  $X^{RS} = 1$ , la diffusion par la pression a fortement diminué, de même que l'advection, (qui s'annule totalement dans la région turbulente). L'advection est forte dans la zone de transition qui est la zone principale de production, elle assure le transport de l'énergie cinétique turbulente vers l'aval de l'écoulement. Le pic de production, jusqu'alors localisé dans la couche de cisaillement, s'est rapproché de la paroi et se situe désormais dans la zone tampon. La dissipation a augmenté dans la zone tampon mais demeure plus forte à la paroi.

Tout au long de l'écoulement, la valeur de  $d\langle 2k \rangle / dt$  reste faible par rapport aux composants du bilan, ce qui indique une résolution très satisfaisante de la grille de calcul.

Le pic de production reste tout au long de l'écoulement localisé dans la région de cisaillement de la couche limite.

### 3.6. ÉVOLUTION DES COMPOSANTS DU BILAN D'ÉNERGIE CINÉTIQUE TURBULENTE

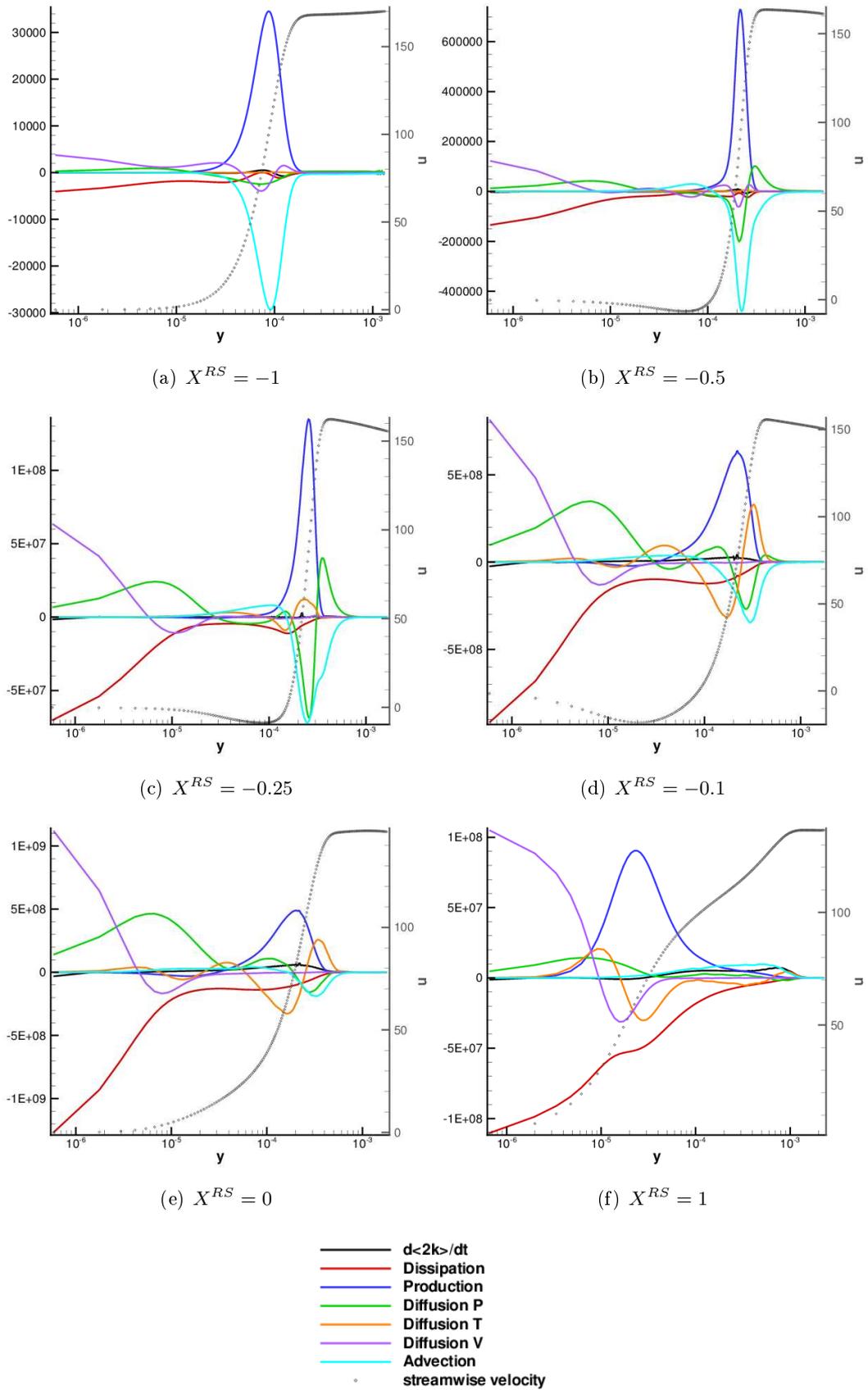


FIGURE 3.42: Évolution longitudinale des composants du bilan de l'équation de transport de  $2k = \overline{\rho u_i'' u_i''}$  (DNS 200Mp)

## 3.7 Hypothèses de base des modèles RANS

### 3.7.1 Hypothèse de Boussinesq

Afin de voir dans quelle mesure l'hypothèse de Boussinesq est vérifiée, on utilise l'indicateur suivant proposé par Schmitt [111] :

$$ratio_{RS} = \frac{\|RS\|}{\|R\| \cdot \|S\|}$$

où

$$\|RS\| = \left| \sum_{i,j} R_{ij} S_{ij} \right|, \quad \|R\| = \sqrt{\left| \sum_{i,j} R_{ij}^2 \right|} \quad \text{et} \quad \|S\| = \sqrt{\left| \sum_{i,j} S_{ij}^2 \right|}$$

avec

$$R_{ij} = -\overline{u'_i u'_j} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad \text{et} \quad S_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

L'indicateur  $ratio_{RS}$  vaut 1 dans les régions où l'hypothèse de Boussinesq est parfaitement vérifiée et 0 si elle ne l'est pas. On observe sur les figures 3.43 ci-dessous que dans la couche limite turbulente établie (fig. 3.43(e)), cet indicateur ne dépasse pas 0.7 dans la région logarithmique (vers  $y/\delta = 2 - 4 \cdot 10^{-1}$ ) ce qui est légèrement supérieur aux observations de Schmitt. L'indicateur  $ratio_{RS}$  diminue dans la sous-couche visqueuse et tend naturellement vers zéro à la paroi.

Cet indicateur perd sa signification dans la région laminaire où les tensions de Reynolds sont très faibles. En revanche il est intéressant de voir que l'indicateur varie beaucoup dans la zone de transition, il présente un pic de valeur 0.9 dans la zone de cisaillement et dans la zone d'écoulement de retour maximal, avec des valeurs plus faibles (0.5) entre les deux pics. L'indicateur prend, dans la zone du recollement, une allure semblable à celle de la zone turbulente, mais avec des valeurs plus élevées allant jusqu'à 0.9.

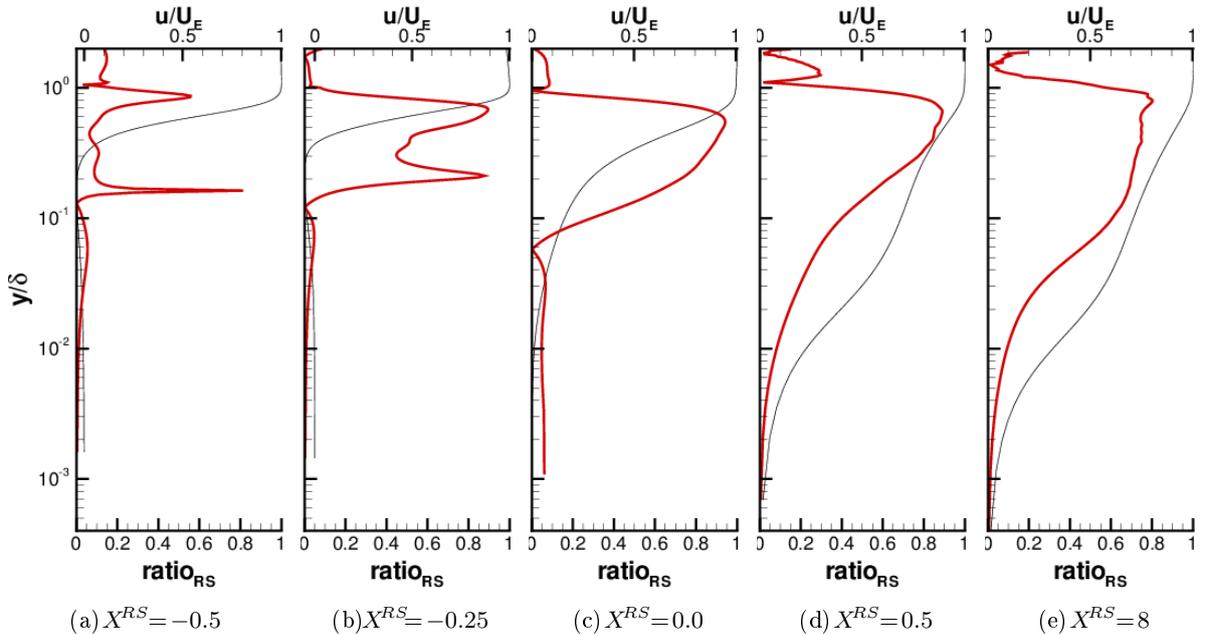


FIGURE 3.43: Indicateur de Schmitt [111] (rouge) et profil de vitesse (noir) pour la simulation DNS de 200Mp.

### 3.7.2 Rapport production/dissipation de $k$

Le rapport entre la production et la dissipation de l'énergie cinétique turbulente,  $k$ , a aussi été tracé ci-dessous, figure 3.44, dans l'idée de vérifier dans quelle mesure ce rapport vaut 1 dans la région logarithmique (hypothèse largement utilisée dans l'élaboration des modèles de l'équation de transport de  $k$ ).

La figure 3.44 présente l'évolution longitudinale de profils verticaux de  $P_k/\varepsilon_k$ . Ce rapport tend naturellement vers 0 à la paroi où la production est nulle. Il reste pour la même raison faible dans la sous-couche visqueuse tout au long de l'écoulement.

Dans la région de cisaillement, en revanche, ce rapport varie beaucoup.

Dans la région de transition, le rapport  $P_k/\varepsilon_k$  est très élevé et diminue au fur et à mesure de l'établissement de la turbulence. Dans la zone logarithmique de la région turbulente établie, le rapport  $P_k/\varepsilon_k$  approche la valeur unitaire pour le maillage le plus résolu.

L'augmentation de la résolution fait baisser le rapport  $P_k/\varepsilon_k$ , puisque la figure 3.32 a montré que la dissipation n'est pas parfaitement convergée en maillage et continuerait vraisemblablement d'augmenter quelque peu. On peut imaginer qu'un rapport  $P_k/\varepsilon_k$  convergé permettrait donc d'étendre légèrement la zone d'équilibre production/dissipation.

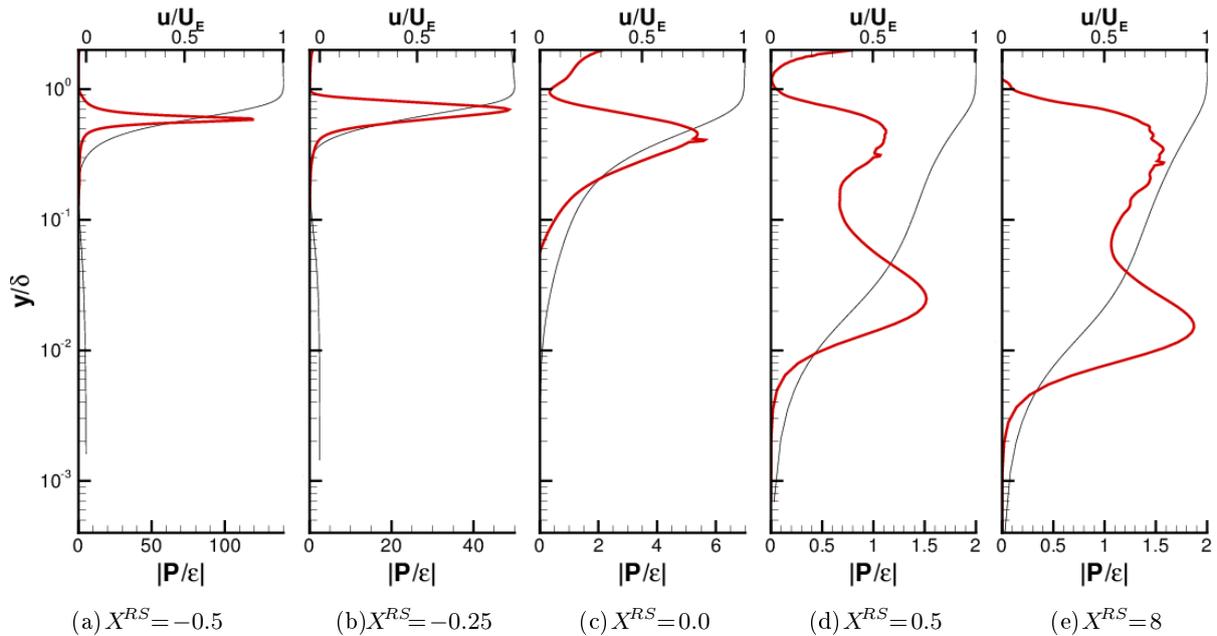


FIGURE 3.44: Rapport  $P_k/\varepsilon_k$  (rouge) et profil de vitesse (noir) pour la simulation DNS de 200Mp

### 3.7.3 Isotropie de l'écoulement DNS

Les modèles basés sur l'hypothèse de Boussinesq reposent sur une hypothèse d'isotropie des tensions de Reynolds à travers l'hypothèse de Boussinesq  $\overline{u'_i u'_j} = \mu_t S_{ij}$ , ce qui est pourtant rarement le cas. En outre, les conditions de réalisabilité d'un modèle de turbulence incluent des conditions sur le tenseur d'anisotropie, un modèle qui ne les respecte pas fournira des résultats non physiques.

Soit  $b_{ij}$  le tenseur d'anisotropie,  $II_b$  et  $III_b$  ses invariants d'ordre 2 et 3 :

$$b_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j} - 2/3 k \delta_{ij}}{2k} \quad , \quad II_b = \sum_i \sum_j b_{ij} b_{ji} \quad \text{et} \quad III_b = \sum_i \sum_j \sum_k b_{ik} b_{kj} b_{ji}$$

En traçant  $II_b^* = -II_b/2$  en fonction de  $III_b^* = III_b/3$ , on peut représenter le degré d'anisotropie en chaque point de l'écoulement.

- L'origine du graphique représente l'état de turbulence isotrope
- La limite bi-composante correspond à une turbulence à deux composantes (une des trois valeurs propres de  $b_{ij}$  est nulle)
- L'expansion axisymétrique correspond à l'existence d'une seule valeur propre positive de  $b_{ij}$  : le tenseur de Reynolds a alors une structure en 'cigare' avec une composante 'axiale' prépondérante sur les 2 composantes 'radiales'.
- La contraction axisymétrique, avec un invariant  $III_b^*$  négatif, correspond à une structure en 'disque' avec deux composantes 'radiales' prépondérantes sur la composante 'axiale'.

Le diagramme de Lumley représentant  $II_b^* = -II_b/2$  en fonction de  $III_b^* = III_b/3$  a été tracé à différentes positions de l'écoulement, figure 3.45. Sur chaque figure, les valeurs de  $II_b^*$  ( $III_b^*$ ) ont été tracées sur toute la hauteur de la couche limite, la position de chaque point étant identifiable par sa couleur à l'aide du profil vertical de vitesse longitudinale associé à chaque figure (les points proches de la paroi étant bleus et ceux de la frontière de la couche limite étant rouges).

Les diagrammes de Lumley figures 3.45 (e) et (f) montrent que, dans la région turbulente, la frontière de la couche limite tend vers un état axisymétrique de type contraction, c'est-à-dire vers une structure en disque qui peut être assimilée à la partie supérieure des gros tourbillons de la couche externe qui s'enroule autour d'un axe transversal. La région logarithmique de la couche limite s'approche de l'état de turbulence isotrope, mais sans l'atteindre complètement. En allant vers la paroi, la turbulence s'éloigne de l'état isotrope en passant par un état de turbulence axisymétrique de type expansion, c'est-à-dire vers une structure en cigare qui fait penser à la structure des tourbillons longitudinaux proches de la paroi décrits figure 1.2(a). À la paroi, la turbulence tend vers la limite bicomposante puisque les fluctuations normales à la paroi y sont nulles. Ces résultats sont très similaires à ceux observés par d'autres auteurs ([20], [53]).

En revanche en amont, dans la région de transition figures 3.45 (c) et (d) , on voit que l'isotropie n'est approchée que sur une très petite zone verticale de la couche limite. En  $X^{RS} = -0.25$ , au début de la transition, cette zone proche de l'isotropie semble correspondre à la région de vitesse nulle située au centre du BDL. Au point de recollement figure 3.45(d), la sous-couche visqueuse tend vers un état de contraction axisymétrique que l'on peut s'imaginer lié au lâcher tourbillonnaire de rouleaux transversaux. Là aussi, à la paroi, la turbulence tend vers la limite bicomposante.

Avant la transition, figures 3.45 (a) et (b), la turbulence n'existant pas encore l'analyse des graphiques perd de son sens.

3.7. HYPOTHÈSES DE BASE DES MODÈLES RANS

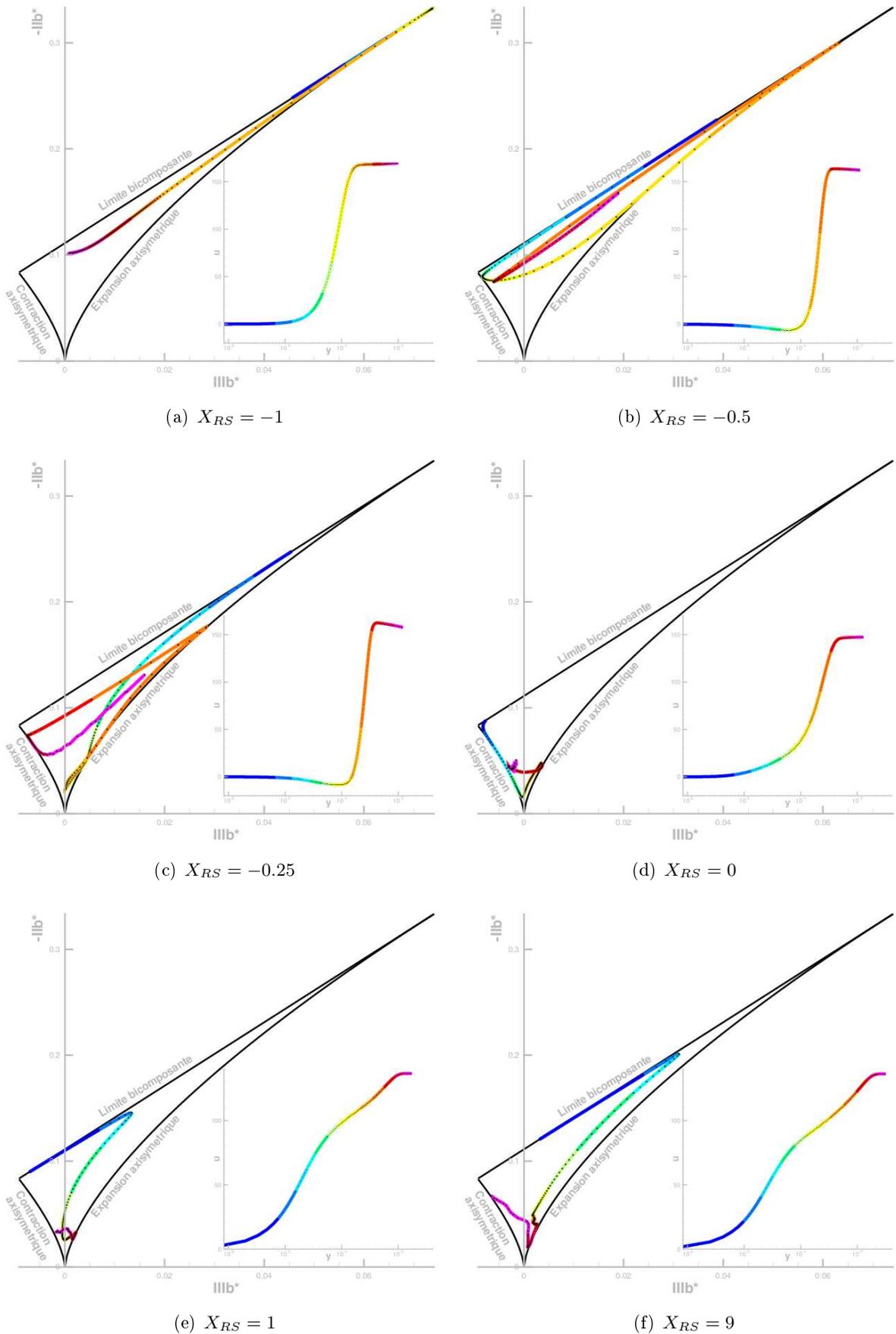


FIGURE 3.45: Diagramme de Lumley à différentes positions de l'écoulement

### 3.8 Reconstruction de $\gamma\nu_t$ à partir de la DNS

On verra dans le chapitre suivant que l'approximation de Boussinesq basée sur le concept de viscosité de la turbulence  $\nu_t$  permet de modéliser le tenseur de Reynolds  $\tau_{ij}^R = -\overline{\rho u_i'' u_j''}$  à l'aide d'une fonction d'intermittence pour prendre en compte la transition selon l'expression suivante :

$$\gamma\nu_{ij}^t = \frac{\tau_{ij}^R + \frac{2}{3}\bar{\rho}k\delta_{ij}}{2S_{ij}} \quad (3.6)$$

où  $k$  est l'énergie cinétique de la turbulence et  $S_{ij}$  le tenseur des déformations :

$$k = \frac{1}{2} \sum \widetilde{u_k'' u_k''} \quad , \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (3.7)$$

Les modèles de turbulence à deux équations de transport estiment la valeur de  $\nu_t$  à l'aide de l'énergie cinétique turbulente  $k$  et de sa dissipation  $\varepsilon$  :

$$\nu_{k\varepsilon}^t = 0.09 \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.8)$$

Cette expression de  $\nu_t$  permet d'évaluer à l'aide des données DNS la valeur que devrait prendre la fonction  $\gamma_{k\varepsilon} = \frac{\nu_{12}^t}{\nu_{k\varepsilon}^t}$  pour restituer une tension de Reynolds  $\tau_{12}^R = -\overline{u'v'}$  correcte, sous condition d'une modélisation correcte de  $k$  et  $\varepsilon$ . La figure 3.46 présente une représentation bidimensionnelle de  $\nu_{12}^t$  (figure de droite) et de  $\gamma_{k\varepsilon} = \nu_{12}^t / \nu_{k\varepsilon}^t$  (figure de gauche) avec  $\nu_{12}^t = \tau_{12}^R / (\partial u / \partial y)$ . L'épaisseur de la couche limite  $\delta$  et la frontière supérieure du bulbe sont tracées sur la figure 3.46. Ces figures montrent que la fonction d'intermittence  $\gamma_{k\varepsilon}$  d'un modèle à deux équations de transport  $k\varepsilon$  ou  $k\omega$  devrait avoir l'allure suivante :

- nulle en amont du bulbe
- élevée (localement supérieure à 1.5) dans la zone de fort cisaillement entre les deux écoulements de vitesse inversée (dead air region)
- maximale (jusqu'à 2 voire même plus) entre  $X^{RS} = -0.4$  et  $X^{RS} = -0.2$
- de valeur unitaire dans la région logarithmique ou assimilée de la couche limite turbulente en aval du recollement
- de faible valeur (inférieure à 0.2) dans la sous-couche visqueuse ou assimilée de la couche limite turbulente en aval du recollement

Les valeurs élevées de  $\gamma_{k\varepsilon}$  observées dans la région externe de la couche limite ne sont à priori pas significatives car liées à de très faibles valeurs de  $k\varepsilon$ .

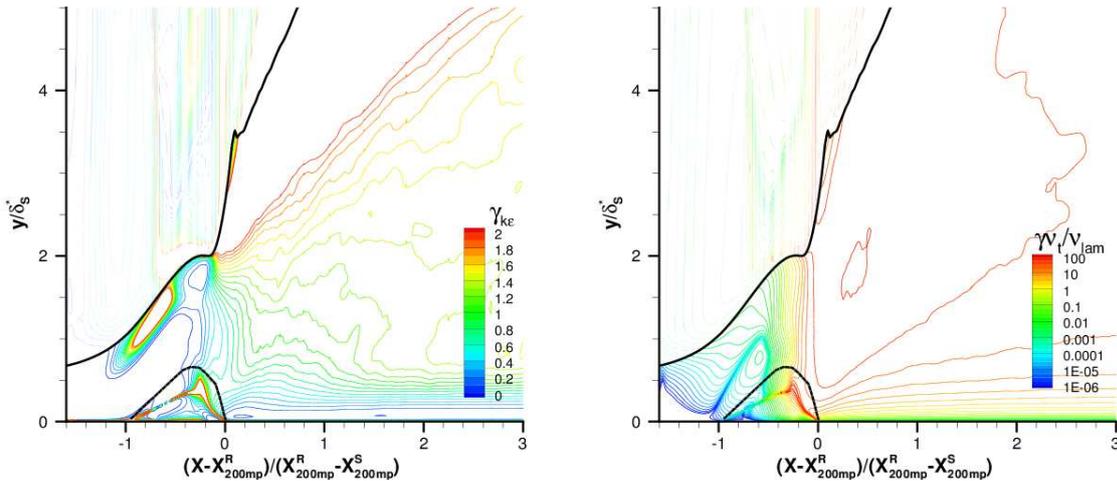


FIGURE 3.46: Reconstruction de  $\gamma_{k\varepsilon}$  et  $\gamma\nu_{12}^t$  à partir de la DNS. L'épaisseur de la couche limite  $\delta$  et la frontière supérieure du bulbe sont tracés en noir.

## Conclusions

Un écoulement de BDL transitionnel semblable à ceux observés sur le profil OA209 à l’approche du décrochage (à  $15^\circ$  d’incidence,  $\Re_{c_\infty} = 1.8 \cdot 10^6$  et  $\mathcal{M}_\infty = 0.16$ ) a été mis en place sur une plaque plane en contrôlant les gradients de vitesse et de pression à l’aide d’un paroi courbe surplombant l’écoulement. Cet écoulement a été simulé sur cinq maillages différents de résolution croissante afin d’analyser la convergence en maillage du calcul instationnaire. Une discrétisation reposant sur la molécule 3 points (figure 2.2) a été retenue pour le calcul des flux visqueux et la version modifiée du schéma AUSM+(P) (équation 2.24) a été retenue pour le calcul des flux convectifs.

Sur le maillage le plus fin (200 millions de points), la convergence en maillage est obtenue pour le champs moyen ( $C_f$ ,  $C_p$ ,  $\theta$ ,  $\delta^*$ ,  $H$ ,  $u(y)$ ), les fluctuations et les composants du bilan d’énergie cinétique turbulente. Une validation du calcul par comparaison avec les résultats d’un calcul de couche limite laminaire a été réalisée dans la région amont et une étude d’analyse spectrale a permis de valider le développement des instabilités. Ce dernier calcul à 200 millions de points, qui satisfait les critères d’une DNS, a été l’objet d’une étude poussée. La résolution du maillage et le pas de temps du calcul se sont montrés satisfaisants vis-à-vis des échelles de Kolmogorov. La dimension de la boîte de calcul DNS en envergure a pu être validée.

Une analyse spectrale a permis de mettre en évidence la prédominance des fluctuations de fréquence 80kHz dans des calculs DNS antérieurs réalisés sans forçage ; laquelle fréquence a pu être validée par une analyse de stabilité linéaire locale. Cette fréquence est celle qui a par conséquent été utilisée pour forcer les écoulements présentés dans le chapitre 3. Dans la région de transition, la prédominance des fluctuations de fréquence 80kHz apparaît essentiellement dans la région de cisaillement de la couche limite, ce qui laisse penser que l’instabilité de Kelvin-Helmholtz est principalement responsable de la transition.

La création de la turbulence a pu être observée en image grâce aux iso-surfaces du critère  $Q$ . Celles-ci ont permis de mettre en évidence la présence de tourbillons transversaux advectés par l’écoulement dans la seconde partie du bulbe, l’apparition de tourbillons  $\Lambda$  couplée aux rouleaux transverses dans la zone de recollement et la désagrégation en turbulence des structures transverses.

L’analyse des composants du bilan de l’énergie cinétique turbulente a pu être réalisée en différentes positions de l’écoulement, mettant ainsi en évidence l’évolution des composants du bilan au fur et à mesure de la transition. Une importante influence du schéma numérique de discrétisation des flux visqueux a pu être constatée sur la convergence du bilan de l’énergie cinétique turbulente. L’utilisation d’une molécule 5 points (figure 2.1) entraîne en effet une surestimation de la dissipation proche de la paroi qui aboutit à un bilan de l’énergie cinétique non nul alors que l’utilisation d’une molécule 3 points (figure 2.2) permet une convergence satisfaisante du bilan.

Une évaluation de l’hypothèse de Boussinesq ( $P_k/\varepsilon_k = 1$ ) dans différentes régions de l’écoulement a été réalisée, ce qui a permis de constater que, jusqu’au point de recollement, cette hypothèse est totalement inadaptée car la production de  $k$  y est bien plus importante que sa dissipation. En aval du recollement, on observe que  $P_k/\varepsilon_k$  atteint rapidement (dès  $X^{RS} = 0.5$ ) la valeur 1 dans la région logarithmique et s’annule à la paroi. Une étude de l’isotropie de l’écoulement a permis entre autres d’observer que la région logarithmique de la couche limite turbulente s’approche de l’état isotrope mais sans l’atteindre complètement. Pour finir, une estimation a été réalisée de la valeur que prendrait la fonction de transition  $\gamma_{k\varepsilon} = \nu_{12}^t / \nu_{k\varepsilon}^t$  d’une modélisation basée sur l’hypothèse de Boussinesq. Cette fonction bidimensionnelle  $\gamma_{k\varepsilon}(x, y)$  est nulle dans la région laminaire, atteint un maximum supérieur à 2 dans la région de cisaillement qui se situe au sein du BDL, prend la valeur unitaire au delà du recollement et s’annule à la paroi.



Troisième partie

Comportement des modèles RANS



## Chapitre 4

# Méthodes et outils numériques pour la modélisation RANS

Les outils de modélisation RANS sont à ce jour les seuls accessibles dans un contexte industriel mais, à cause des hypothèses de modélisation fortes nécessaires à leur formulation, ils ne peuvent prétendre calculer fidèlement les écoulements transitionnels et hors équilibre tels que ceux qui sont mis en jeu lors dans les écoulements de bord d'attaque des profils d'épaisseur modérée à l'approche du décrochage que nous étudions ici. Les méthodes RANS consistent à résoudre le système de Navier-Stokes moyenné en temps, le principe et le détail de cette approche seront tout d'abord expliqués et les modèles de turbulence utilisés par la suite seront décrits. Les méthodes de prise en compte de la transition par les modèles RANS les plus répandues seront également présentées.

### 4.1 Équations de Navier-Stokes moyennées : approche RANS

Une façon de résoudre les équations de Navier-Stokes 2.1 consiste à ne s'intéresser qu'à l'écoulement moyenné et à reproduire l'action de la turbulence sur l'écoulement moyen de façon globale grâce à un modèle de turbulence.

#### 4.1.1 Application des moyennes

Les équations RANS s'obtiennent en appliquant la moyenne d'ensemble  $\bar{\cdot}$  définie par

$$\bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k \quad (4.1)$$

ce qui permet de décomposer les grandeurs  $f$  de l'écoulement en une partie moyenne ( $\bar{f}$ ) et une partie fluctuante ( $f'$ ) :

$$f = \bar{f} + f' \quad \text{avec} \quad \bar{f}' = 0 \quad (4.2)$$

Pour les fluides compressibles, afin de simplifier le système d'équations obtenues on utilise plutôt la moyenne de Favre  $\tilde{f}$  :

$$f = \tilde{f} + f'' \quad \text{avec} \quad \tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \quad (4.3)$$

où  $f''$  est la partie fluctuante.

## 4.1.2 Équations moyennées

En appliquant l'opérateur de moyenne on peut réécrire le système d'équations de Navier-Stokes 2.1 sous la forme moyennée suivante (démonstration Annexe A.2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{u}_k) = 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_k + \bar{p} \delta_{ik} - \tilde{\tau}_{ik}^*) = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho u_i'' u_k''})}_{\alpha_1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\tau}_{ik} - \tilde{\tau}_{ik}^*)}_{\alpha_2} \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{E} \tilde{u}_k + \bar{p} \tilde{u}_k - \tilde{\tau}_{kl}^* \tilde{u}_l + \tilde{q}_k^*) = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_k} ((\overline{\rho e''} + p) u_k'')}_{\beta_1} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho u_k'' u_l''} \tilde{u}_l)}_{\beta_2} \\ \quad + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\tau_{kl} u_l''})}_{\beta_3} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\tau_{kl} \tilde{u}_l} - \tilde{\tau}_{kl}^* \tilde{u}_l)}_{\beta_4} \\ \quad + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{2} \overline{\rho u_l'' u_l'' u_k''} \right)}_{\beta_5} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{q}_k - \tilde{q}_k^*)}_{\beta_6} \end{array} \right. \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad k &= \frac{1}{2} \overline{u_l'' u_l''} \\ \bar{\rho} \tilde{E} &= \bar{\rho} \tilde{e} + \frac{1}{2} \overline{\rho \tilde{u}_l \tilde{u}_l} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_l'' u_l''} \\ \tilde{\tau}_{ij}^* &= -\frac{2}{3} \mu(\tilde{T}) \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu(\tilde{T}) \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ \tilde{q}_i^* &= -\mathcal{K}(\tilde{T}) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (4.5)$$

On néglige l'influence des fluctuations de viscosité, ce qui élimine  $\alpha_2$  et  $\beta_4$  ; ainsi que l'influence de la non-linéarité du flux de chaleur, ce qui élimine  $\beta_6$ . Les termes  $\beta_3$  et  $\beta_5$  étant d'ordre supérieur, ils peuvent eux aussi être négligés. Ces hypothèses mènent au système simplifié suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{u}_k) = 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_k + \bar{p} \delta_{ik} - \tilde{\tau}_{ik}^*) = \frac{\partial \tilde{\tau}_{ik}^R}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{E} \tilde{u}_k + \bar{p} \tilde{u}_k - \tilde{\tau}_{kl}^* \tilde{u}_l + \tilde{q}_k^*) = -\frac{\partial \tilde{q}_{t_k}}{\partial x_k} + \frac{\partial (\tilde{\tau}_{kl}^R \tilde{u}_l)}{\partial x_k} \end{array} \right. \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \tilde{\tau}_{ij}^R &= -\overline{\rho u_i'' u_j''} \quad \text{le tenseur des contraintes turbulentes} \\ \tilde{q}_{t_j} &= \overline{(\rho e'' + p) u_j''} \quad \text{le flux de chaleur turbulent} \end{aligned} \quad (4.7)$$

## 4.2 Fermeture du système

### 4.2.1 Principes

#### 4.2.1.1 Rôle du modèle de turbulence

Pour fermer le système 4.6, il reste désormais à modéliser le tenseur de Reynolds ou tenseur des contraintes turbulentes  $\tilde{\tau}_{ij}^R = -\overline{\rho u_i'' u_j''}$  et le flux de chaleur turbulent  $\tilde{q}_{tj} = \overline{(\rho e'' + p) u_j''}$ . C'est le rôle attribué aux modèles de turbulence qui vont introduire des hypothèses de fermeture permettant d'obtenir un nombre d'inconnues égal à celui du système 4.6 moyennant la détermination de coefficients numériques.

#### 4.2.1.2 Deux grandes classes de modèles peuvent être distinguées :

- les modèles du premier ordre, basés sur l'hypothèse de Boussinesq de viscosité de la turbulence. Ils expriment les tensions de Reynolds et le flux de chaleur turbulent en fonction notamment d'un coefficient de viscosité et de la déformation moyenne. Ces grandeurs sont alors résolues soit de façon algébrique soit à l'aide d'équations de transport de quantités permettant de caractériser la turbulence.
- les modèles du second ordre dits "RSM" (Reynolds stress model). Ils utilisent une approche différente en choisissant de résoudre directement ces équations de transport pour les composantes  $\tilde{\tau}_{ij}^R$  du tenseur de Reynolds. Ces équations font cependant apparaître des termes de fluctuation d'ordre supérieur qui nécessitent à leur tour d'être modélisés.

Les modèles utilisés dans cette étude sont des modèles du premier ordre, car aucun modèle du second ordre n'est à ce jour disponible dans le logiciel elsA. Ces modèles du premier ordre seront présentés en détails dans ce chapitre, mais de brefs rappels seront faits sur quelques autres modèles courants pour mieux situer les modèles sélectionnés vis-à-vis de ceux qui sont disponibles dans la littérature.

### 4.2.2 L'hypothèse de Boussinesq de viscosité de la turbulence pour la fermeture au premier ordre

#### 4.2.2.1 Viscosité de la turbulence et échelles caractéristiques

Boussinesq propose le concept de viscosité de la turbulence, une grandeur liée à la viscosité cinématique de la turbulence. Cette viscosité traduit de façon globale et isotrope l'effet de la turbulence sur le champ moyen. Par analogie avec la viscosité moléculaire, elle peut être exprimée en fonction d'une échelle de vitesse  $\mathcal{U}_{\mu_t}$  et d'une échelle de longueur  $\mathcal{L}_{\mu_t}$  :

$$\boxed{\mu_t = \rho \nu_t = \rho C_{\mu_t}^{ste} \mathcal{U}_{\mu_t} \mathcal{L}_{\mu_t}} \quad (4.8)$$

La viscosité de la turbulence est une grandeur de l'écoulement et non du fluide, sa détermination demande donc d'exprimer  $\mathcal{U}_{\mu_t}$  et  $\mathcal{L}_{\mu_t}$  en fonction des grandeurs caractéristiques de la turbulence.

#### 4.2.2.2 Approximation de Boussinesq pour le tenseur de Reynolds

Boussinesq, le premier, suggère d'exprimer les tensions de Reynolds en fonction de la viscosité de la turbulence à l'aide de la relation suivante :

$$\boxed{\tilde{\tau}_{ij}^R - \frac{1}{3} \tilde{\tau}_{kk}^R \delta_{ij} = 2\mu_t \tilde{S}_{ij} = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)} \quad (4.9)$$

ou encore l'expression équivalente :

$$\boxed{\tilde{\tau}_{ij}^R = -\widetilde{\rho u_i'' u_j''} = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}} \quad (4.10)$$

Cette formulation de la viscosité de la turbulence permet de simplifier la modélisation du tenseur de Reynolds en la réduisant à la modélisation des scalaires  $k$  et  $\mu_t$ .

Notons que le terme  $-\frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$  disparaît dans le cas incompressible. Certaines des modélisations les plus simples choisissent même de regrouper la trace du tenseur de Reynolds  $\tilde{\tau}_{kk}^R = -2\rho k$  avec le terme de pression ce qui aboutit finalement à l'hypothèse de Boussinesq simplifiée :

$$-\widetilde{\rho u_i'' u_j''} = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.11)$$

#### 4.2.2.3 Expression du flux de chaleur turbulent par une "loi de Fourier" turbulente

Pour exprimer le flux de chaleur turbulent  $\tilde{q}_{t_j}$ , on définit le coefficient de conductivité thermique turbulent  $\mathcal{K}_t$  tel que :

$$\boxed{\tilde{q}_{t_j} = -\mathcal{K}_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad , \quad \mathcal{K}_t = \frac{\mu_t C_p}{Pr_t}} \quad (4.12)$$

Cette formulation permet de simplifier la modélisation du flux de chaleur turbulent en la réduisant à la modélisation des scalaires  $\mu_t$  et  $Pr_t$ . En pratique  $Pr_t$  est généralement estimé constant et égal à 0.9.

Les sections 4.3 et 4.4 présentent un résumé détaillé des modèles RANS qui s'appuie sur le travail de synthèse réalisé par Aupoix [9]. Les modèles algébriques et à une équation de transport pour la viscosité de la turbulence seront présentés dans un premier temps. Dans un second temps, les équations de transport des variables turbulentes  $k$ ,  $\varepsilon$ , et  $\omega$  seront décrites, et quelques modèles à deux équations de transport seront finalement présentés.

## 4.3 Modèles de turbulence simples

Dans cette partie, l'appellation modèles de turbulence simples regroupe les modèles algébriques du premier ordre où les échelles de longueur et de vitesse caractéristiques de la turbulence sont résolues directement par des relations algébriques. Nous incluons également les modèles à une équation de transport portant sur la viscosité de la turbulence elle-même.

### 4.3.1 Modèles algébriques ou à longueur de mélange

Les modèles algébriques aussi appelés modèles à longueur de mélange sont en général robustes et peu coûteux, mais la simplicité de leur formulation avec notamment une absence totale d'histoire de la turbulence rend leur domaine de validité très limité.

Il existe un certain nombre de modèles basés sur le concept de longueur de mélange, aucun ne sera utilisé dans cette étude, mais les plus importants d'entre eux seront néanmoins présentés succinctement pour permettre au lecteur de mieux comprendre l'historique des recherches menées sur les modèles RANS et de mieux appréhender les hypothèses simplificatrices existantes.

Le choix de la longueur de mélange par analogie au libre parcours moyen est critiquable car le libre parcours moyen, contrairement à la longueur de mélange, ne dépend que des conditions thermodynamiques du fluide. D'autre part, le calcul de la distance à la paroi peut poser problème

### 4.3. MODÈLES DE TURBULENCE SIMPLES

en cas de géométries complexes. Enfin, cette expression de  $\mu_t$  ne prend pas en compte l'histoire de la turbulence.

#### Modèle standard de Prandtl

Prandtl suggère, en 1925, le choix d'une longueur analogue au libre parcours moyen des particules pour représenter l'échelle de longueur  $\mathcal{L}_{\mu_t}$ . Il propose pour cela le concept de longueur de mélange  $l_m$ , correspondant à la distance durant laquelle une quantité de fluide peut être identifiée avant qu'elle ne se mélange. L'échelle de vitesse  $\mathcal{U}_{\mu_t}$  est alors exprimée en fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement :  $\mathcal{U}_{\mu_t} = \mathcal{L}_{\mu_t} \frac{\partial u}{\partial y} = l_m \frac{\partial u}{\partial y}$ . Le modèle de longueur de mélange repose donc sur l'expression suivante pour la modélisation de la viscosité de la turbulence :

$$\mu_t = C_{\mu_t}^{ste} \rho l_m^2 |D| \quad , \quad |D| = \sqrt{2 D_{ij} D_{ij}} \quad (\text{norme du tenseur des déformations})$$

La longueur de mélange  $l_m$  doit être déterminée, elle est généralement assimilée à une fonction de la distance à la paroi la plus proche (caractéristique de la taille des plus grosses structures) en zone interne et à une fonction de l'épaisseur de couche limite dans la zone externe.

Dans les régions interne et externe de la couche limite, Prandtl propose d'exprimer  $l_m$  sous les formes :  $l_m^i = \kappa y$  et  $l_m^e = 0.085 \delta$ , ce qui mène à l'expression globale suivante

$$\mu_t = \rho l_m^2 F_{VD}^2 |D| \quad ; \quad l_m = \min(\kappa y, 0.085 \delta)$$

où  $F_{VD}$  est la fonction d'amortissement de Van Driest  $F_{VD} = (1 - e^{-y^+/A^+})$ .

#### Modèle de Michel [50]

En 1969, Michel et al. proposent d'utiliser une longueur de mélange universelle permettant de décrire la région interne et la région externe :

$$l_m = 0.085 \delta \tanh\left(\frac{\kappa y}{0.085 \delta}\right)$$

Cette expression est cohérente en  $y = 0$  et en  $y/k \rightarrow 1$  au comportement proposé par Prandtl.

#### Modèle de Cebeci-Smith [114]

Afin d'éviter une surestimation de la longueur de mélange et donc de la viscosité de la turbulence pour les couches limites soumises à des gradients de pression positifs, Cebeci et Smith utilisent, dans la région externe de la couche limite, la relation de Clauser pour le maximum de viscosité de la turbulence :

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_t^i = \rho(\kappa y)^2 F_{VD}^2 |D| & \text{pour } y < y_{crossover} \\ \mu_t^e = \rho C_{Clauser} u_e \delta_1 \gamma(y, \delta) & \text{pour } y > y_{crossover} \end{cases}$$

Où  $C_{Clauser} = 0.0168$  et  $\gamma(y, \delta) = [1 + 5.5 (y/\delta)^6]^{-1}$  est une fonction limitant la viscosité de la turbulence, inspirée de la fonction de Klebanoff pour la prise en compte de l'intermittence de frontière de la turbulence. On note  $y_{crossover}$  la plus petite distance à la paroi pour laquelle les viscosités interne et externe  $\mu_t^i$  et  $\mu_t^e$  sont égales.

#### Modèle de Baldwin-Lomax [10]

Devant les difficultés inhérentes au calcul numérique de l'épaisseur de couche limite de certains écoulements, notamment les écoulement de sillage, Baldwin et Lomax proposent en 1978 un nouveau modèle inspiré de celui de Cebeci et Smith, qui met en jeu la norme du tenseur de vorticité  $|\Omega| = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}}$ , où  $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ . Ce modèle repose sur l'expression de la viscosité de la turbulence suivante :

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_t^i = \rho (\kappa y)^2 F_{VD}^2 |\Omega| & \text{pour } y < y_{crossover} \\ \mu_t^e = \rho C_{Clauser} C_{cp} u_e F_{Wake} F_{Kleb} & \text{pour } y > y_{crossover} \end{cases}$$

où on note  $F_{Wake} = \min(y|_{F_{max}} F_{max} ; C_{WK} y|_{F_{max}} u_{DIF}^2 / F_{max})$  la fonction de sillage où  $y|_{F_{max}}$  et  $F_{max}$  sont issus du maximum de  $F(y) = y|\Omega|(1 - e^{(-y^+/A^+)})$ . La fonction de Klebanoff est notée  $F_{Kleb} = (1 + 5.5(y C_{Kleb}/y|_{F_{max}})^6)^{-1}$ , les constantes  $C_{cp} = 1.6$ ,  $C_{WK} = 0.25$ ,  $C_{Kleb} = 0.3$ , et enfin on note  $u_{DIF}$  la différence de vitesse entre les deux écoulements d'un sillage.

Ce modèle présente un certain nombre d'inconvénients qui mènent à une surestimation du tenseur des contraintes turbulentes pour les écoulements décélérés et une surestimation pour les écoulements approchant la séparation.

### Modèle de Johnson et King [54]

Pour mieux prendre en compte les effets d'advection et de diffusion, ce modèle propose d'utiliser le maximum de la tension turbulente  $-\overline{u'v'}_{max}$  comme échelle de longueur dans le modèle de Cebeci-Smith :

$$\mu_t = \mu_t^e \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\mu_t^i}{\mu_t^e}\right) \right] \quad \begin{cases} \mu_t^i = \rho \kappa y F_{VD}^2 \sqrt{-\overline{u'v'}_{max}} \\ \mu_t^e = C_{ste} \gamma(y, \delta) \end{cases} \quad (4.13)$$

Le maximum de la tension turbulente est évalué par résolution de l'équation de transport de l'énergie cinétique de la turbulence en supposant  $-\overline{u'v'}_{max}$  et  $k_{max}$  proportionnels.

Ce modèle a montré de bons résultats pour les écoulements séparés, mais pas pour les écoulements attachés. Il reste en outre peu robuste et relativement compliqué à implémenter.

### 4.3.2 Modèles à une équation de transport de la viscosité de la turbulence

Il n'est évidemment pas possible de déduire des équations de Navier-Stokes une équation exacte de transport de la viscosité de la turbulence qui n'est pas une grandeur physique. Cependant, différents auteurs ont tenté de créer des modèles basés sur cette équation. Deux types d'approches peuvent être trouvées dans la littérature, l'une d'elle introduite par Baldwin et Barth [11] consiste à dériver une équation de transport pour la viscosité de la turbulence à partir d'équations de transport exactes, citons notamment le modèle de Menter pour lequel l'équation de transport de  $\mu_t$  est dérivée des équations de conservation de  $k$  et  $\varepsilon$ , cette équation s'écrit  $\frac{d\nu_t}{dt} = c_1 \nu_t \Omega - c_2 \left(\frac{\nu_t}{L_{VK}}\right)^2 + \text{div}\left(\frac{\nu_t}{\sigma} \overrightarrow{\text{grad}} \nu_t\right)$  avec  $\nu_t = \mu_t/\rho$  et où  $\Omega$  est la norme du vecteur vorticité et  $L'_{VK}$  une échelle de longueur.

La seconde approche consiste à construire empiriquement l'équation de transport de  $\mu_t$ . C'est ainsi que Spalart et Allmaras ont développé le modèle suivant, modèle qui sera utilisé dans le dernier chapitre de ce mémoire.

#### 4.3.2.1 Modèle de Spalart Allmaras

Le modèle de Spalart Allmaras [118] propose de résoudre une équation de transport pour une pseudo-viscosité, cette équation est la suivante :

$$\frac{d\tilde{\nu}}{dt} = C_{b1} \|\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}\| \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left( \text{div}(\tilde{\nu} \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{\nu}) + C_{b2} \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{\nu} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{\nu} \right) \quad (4.14)$$

Cette équation est construite en améliorant terme à terme le modèle pour l'adapter à des écoulements de complexité croissante (écoulement homogène, écoulement cisailé, région logarithmique,

#### 4.4. MODÈLES À ÉQUATIONS DE TRANSPORT DE $k$ ET $\varepsilon$

région de proche paroi)

Nous présentons ci-dessous le modèle adapté aux écoulements compressibles par Deck [28] :

$$\begin{aligned} \mu_t &= \rho \tilde{\nu} f_{v1} \\ \frac{D(\rho \tilde{\nu})}{Dt} &= C_{b1}(1 - f_{t2}) \tilde{S} \rho \tilde{\nu} + \frac{C_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} - \left( C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \rho \frac{\tilde{\nu}^2}{d^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{\sigma} (\mu + \rho \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

avec

$$\begin{aligned} f_{v1} &= \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3} \quad ; \quad f_{t2} = C_{t3} \exp(C_{t4} \chi^2) \quad ; \quad \chi = \frac{\rho \tilde{\nu}}{\mu} \\ \tilde{S} &= \|\text{rot} \vec{U}\| + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad ; \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \\ f_w &= g \left( \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6} \quad ; \quad g = r + C_{w2}(r^6 - r) \quad ; \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2} \end{aligned}$$

où  $d$  représente la distance à la paroi et les valeurs des constantes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} C_{b1} &= 0,1355 \quad ; \quad C_{b2} = 0,622 \quad ; \quad \sigma = 2/3 \quad ; \quad \kappa = 0,41 \\ C_{w1} &= C_{b1}/\kappa^2 + (1 + C_{b2})/\sigma \quad ; \quad C_{w1} = 0,3 \quad ; \quad C_{w2} = 2 \\ C_{v1} &= 7,1 \quad ; \quad C_{t1} = 1 \quad ; \quad C_{t2} = 2 \quad ; \quad C_{t3} = 1,1 \quad ; \quad C_{t4} = 2 \end{aligned}$$

Ce modèle relativement simple, robuste et efficace prend en compte l'histoire de la turbulence. Ses faiblesses reposent sur le choix empirique de l'échelle de longueur et aux difficultés liées à l'extension au cas tridimensionnel, ce qui ne l'empêche pas d'être très employé dans l'industrie aéronautique.

## 4.4 Modèles à équations de transport de $k$ et $\varepsilon$

### 4.4.1 Utilisation de $k$ et $\varepsilon$ pour déterminer $\mu_t$

Rappelons que la fermeture du système RANS 4.6 requiert l'évaluation des grandeurs  $k$  et  $\mu_t$ . On cherche à évaluer la viscosité de la turbulence  $\mu_t$  à travers une échelle de vitesse  $\mathcal{U}_{\mu_t}$  et une échelle de longueur  $\mathcal{L}_{\mu_t}$  qui dépendent des grandeurs caractéristiques de la turbulence de l'écoulement :

$$\mu_t = \rho \nu_t = \rho C_{\mu_t}^{ste} \mathcal{U}_{\mu_t} \mathcal{L}_{\mu_t}$$

Une approche distincte de celles qui ont été abordées dans la partie 4.3 consiste à exprimer les échelles de longueur et de vitesse en fonction de grandeurs turbulentes.

L'énergie cinétique de la turbulence  $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$  est l'énergie cinétique moyenne des fluctuations de vitesses contenues dans les grosses structures. Elle apparaît donc intuitivement comme une grandeur caractéristique idéale pour définir l'échelle de vitesse  $\mathcal{U}_{\mu_t}$  :

$$\mathcal{U}_{\mu_t} = \sqrt{k} \quad \rightarrow \quad \nu_t = C_{\mu_t}^{ste} \sqrt{k} \mathcal{L}_{\mu_t} \quad (4.16)$$

On verra section C.3.1 que, moyennant une hypothèse d'équilibre, l'échelle de longueur  $\mathcal{L}_{\mu_t}$  peut alors être directement reliée au taux de dissipation  $\varepsilon$  de l'énergie cinétique de turbulence :

$$\mathcal{L}_{\mu_t} \propto \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (4.17)$$

D'où les expressions suivantes de la viscosité de la turbulence et de la viscosité cinématique de la turbulence :

$$\boxed{\mu_t = \rho C_{\mu}^{ste} \frac{k^2}{\varepsilon}} \quad \boxed{\nu_t = C_{\mu}^{ste} \frac{k^2}{\varepsilon}} \quad (4.18)$$

Les équations de transport sont introduites pour modéliser les grandeurs  $k$  et  $\varepsilon$ . Le lecteur trouvera en annexe C la description de la méthode d'obtention de ces équations modélisées ainsi que le détail des principales hypothèses de modélisation liées aux couches limites turbulentes.

Le modèle de Launder et Sharma décrit ci-dessous est le modèle  $k - \varepsilon$  le plus connu, il sera utilisé dans les calculs présentés dans le prochain et dernier chapitre.

Dans la suite de ce mémoire, les équations seront présentées avec une masse volumique  $\rho$  variable mais en négligeant les effets de compressibilité pour être cohérent avec le code de calcul elsA utilisé.

#### 4.4.2 $k - \varepsilon$ de Launder et Sharma

La modélisation de l'équation exacte pour  $\varepsilon$  a été proposée par Chou [21] en 1945 ; mais le modèle le plus connu est celui proposé initialement par Jones-Launder [58] en 1972 et modifié par Launder et Sharma [64] en 1974.

Avec une masse volumique variable, ce modèle s'écrit :

$$\frac{d\rho\varepsilon}{dt} = \underbrace{C_{\varepsilon 1} \frac{P_k \varepsilon}{k}}_{P_\varepsilon} - \underbrace{C_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon^2}{k}}_{\varepsilon_\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right] \quad ; \quad \begin{cases} P_k = \rho C_{\mu}^{ste} \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 \\ \mu_t = \rho C_{\mu}^{ste} \frac{k^2}{\varepsilon} \end{cases}$$

Les expressions de  $\mu_t$  et de  $\varepsilon_\varepsilon$  sont respectivement pondérées par des fonctions d'amortissement  $f_\mu$  et  $f_2$  afin de tenir compte de la décroissance des tensions turbulentes dans la sous-couche visqueuse :

$$\begin{aligned} \mu_t = \rho C_{\mu}^{ste} \frac{k^2}{\varepsilon} &\Rightarrow \mu_t = \rho C_{\mu}^{ste} f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad f_\mu = \exp \left( -\frac{2,5}{1 + \Re_{e_t}/50} \right) \\ \varepsilon_\varepsilon = \rho C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} &\Rightarrow \varepsilon_\varepsilon = \rho C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad \text{avec} \quad f_2 = 1,0 - 0,3 \exp(-\Re_{e_t}^2) \end{aligned}$$

où  $\Re_{e_t} = k^2/(\nu\varepsilon)$  est le nombre de Reynolds turbulent (Éq.C.15).

Afin de traiter les écoulements inhomogènes de paroi où les effets de viscosité ne sont pas négligeables il faut tenir compte du terme de production par le gradient de vitesse moyenne de l'équation C.31. Ce terme est modélisé par Jones et Launder de la façon suivante :

$$E = 2 \mu \mu_t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2$$

Ce terme permet d'adapter le comportement du modèle de turbulence dans la couche limite où les effets de viscosité sont prépondérants.

Enfin, pour des raisons de commodité numérique liée à la difficulté de formuler une condition de paroi pour  $\varepsilon$ , qui varie asymptotiquement comme  $1/y^2$  près de la paroi, Jones et Launder choisissent de formuler une équation de transport équivalente pour la quantité  $\tilde{\varepsilon}$  plutôt que  $\varepsilon$ . Cette quantité peut être vue comme une dissipation isotrope qui tend vers 0 à la paroi.  $\tilde{\varepsilon}$  s'écrit

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \varepsilon_D$$

où  $\varepsilon_D$  est défini par :

$$\varepsilon_D = \frac{\nu}{2k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

La quantité  $\varepsilon_D$  s'annule loin de la paroi et varie comme  $\varepsilon$  quand  $y \rightarrow 0$ . La nouvelle variable  $\tilde{\varepsilon}$  est donc équivalente au taux de dissipation  $\varepsilon$  loin de la paroi et tend vers zéro à la paroi.

En introduisant  $\tilde{\varepsilon}$  dans l'équation de  $k$  on obtient :

$$\frac{D \rho k}{Dt} = \rho P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \rho \tilde{\varepsilon} - \rho \varepsilon_D$$

L'équation de  $\rho \tilde{\varepsilon}$  s'écrit :

$$\frac{D \rho \tilde{\varepsilon}}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \rho \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon 2} f_2 \rho \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + \rho E$$

avec les constantes numériques suivantes :  $C_\mu = 0,09$  ;  $\sigma_k = 1,0$  ;  $\sigma_\varepsilon = 1,3$  ;  $C_{\varepsilon 1} = 1,55$  ;  $C_{\varepsilon 2} = 2,0$ . Ces constantes respectent les relations démontrées précédemment. Remarquons que d'après l'équation C.38, la valeur de  $C_{\varepsilon 2}$  permet d'obtenir une décroissance de  $k$  en  $t^{-1}$  pour une turbulence homogène isotrope. La relation de Bradshaw C.8 menant à  $C_\mu^{ste} = \sqrt{2 a_1}$  est respectée.

À la paroi, on impose la valeur des quantités turbulentes :  $\rho k = 0$  et  $\rho \tilde{\varepsilon} = 0$ .

L'équation de conservation exacte de  $\varepsilon$  est connue, rendant plus structurée l'établissement de l'équation modélisée. C'est pourquoi le modèle  $k - \varepsilon$  peut être considéré comme un modèle de référence, mais en pratique son usage est rendu difficile numériquement car il requiert l'utilisation de fonctions d'amortissement en proche paroi, souvent difficiles à discrétiser de manière générale et peu robustes.

La dissipation spécifique  $\omega = \varepsilon/k$  proposée par Kolmogorov comme alternative à l'utilisation de  $\varepsilon$  a permis le développement de modèles plus pratiques à utiliser.

## 4.5 Modèles à équations de transport de $k$ et $\omega$

### 4.5.1 Équation de transport pour la dissipation spécifique $\omega$

La dissipation spécifique  $\omega = \varepsilon/k$  correspond au taux de dissipation par unité d'énergie cinétique de la turbulence, ou encore à une fréquence caractéristique de la turbulence. Kolmogorov, le premier, suggère l'idée de l'utiliser comme échelle de longueur dans l'expression 4.8 qui exprime la viscosité de la turbulence  $\mu_t$  sous la forme  $\mu_t = \rho C_{\mu_t}^{ste} \mathcal{U}_{\mu_t} \mathcal{L}_{\mu_t}$ . L'échelle de longueur peut en effet s'écrire :

$$\mathcal{L}_{\mu_t} \propto \frac{\sqrt{k}}{\omega} \quad (4.19)$$

L'échelle de vitesse reste définie par l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  selon l'expression 4.16. La viscosité de la turbulence s'écrit alors :

$$\mu_t = \rho C_{\mu_t}^{ste} \frac{k}{\omega} \quad (4.20)$$

Différents modèles basés sur les équations  $k - \omega$  existent, ces modèles étant créés de toutes parts aucune équation exacte de  $\omega$  ne sera présentée ici. Le modèle  $k - \omega$  de Wilcox et les corrections qui y ont été apportées par d'autres auteurs vont maintenant être présentés.

Le premier modèle à deux équations qui fut construit (Kolmogorov, 1942) était basé sur les équations  $k - \omega$ , dont la version ultérieure proposée par Wilcox est encore aujourd'hui très populaire dans le secteur aéronautique. Ce modèle étant l'un des plus simples et des plus robustes parmi les modèles à deux équations, c'est par lui qu'il convient de commencer.

### 4.5.2 Modèle $k - \omega$ de Wilcox

Comme il vient d'être dit, l'équation de conservation de  $\omega$  est construite terme à terme, par estimations successives des différentes composantes : convection, production, diffusion et dissipation. Wilcox s'est, pour cela, basé sur des considérations dimensionnelles et intuitives. L'équation de conservation de  $k$  est quant à elle issue de l'équation exacte présentée au paragraphe C.2.

Le modèle ainsi construit par Wilcox en 1988 [130] s'écrit :

$$\frac{d\rho k}{dt} = \underbrace{\rho P_k}_{\text{Production}} - \underbrace{\beta^* \rho \omega k}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]}_{\text{Flux Diffusifs}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma^* = 1/2 \\ \beta^* = 0.09 \end{cases} \quad (4.21)$$

Le terme de production  $P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$  est modélisé en utilisant l'hypothèse de Boussinesq :

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = -2/3 \overline{\rho} k \delta_{ij} + \mu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - 2/3 \mu_t \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (4.22)$$

ou tout simplement :

$$P_k = C_{\mu_t}^{ste} \frac{k}{\omega} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \quad (4.23)$$

Le terme de dissipation  $\varepsilon$  est formulé en fonction de  $\omega$  puisque  $\varepsilon = C_{ste} \omega k$

L'équation de conservation de  $\omega$ , construite terme à terme par Wilcox, prend la forme suivante :

$$\frac{d\rho \omega}{dt} = \underbrace{\frac{\alpha}{\nu_t} P_k}_{\text{Production}} - \underbrace{\beta \rho \omega^2}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]}_{\text{Flux Diffusifs}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma = 1/2 \\ \beta = 0.09 \\ \alpha = \beta / \beta^* - \sigma \kappa^2 / \sqrt{\beta^*} \end{cases} \quad (4.24)$$

Le choix de la valeur de  $\beta$  commande une décroissance de  $k$  en  $t^{-6/5}$  ; celle de  $\alpha$  découle des équations régissant la région logarithmique. Dans la sous-couche linéaire  $k$  varie comme  $y^2$ ,  $k = 0$  étant imposé à la paroi.

Ce modèle bien que simple et robuste présente une faiblesse majeure, son extrême sensibilité aux valeurs de  $\omega$  à la frontière de la couche limite (Menter [84]). L'origine de cette sensibilité provient d'un manque de diffusion dans la région de cisaillement lié à la formulation du modèle.

### 4.5.3 Modèle $k - \omega$ TNT de Kok

En étudiant le cas d'une interface entre des régions turbulentes et non turbulentes, Kok [59] met à jour des conditions sur les constantes des termes de diffusion que le modèle de Wilcox ne respecte pas. En effet, la transformation par changement de variable de l'équation de transport de  $\varepsilon$  vers l'équation de transport de  $\omega$  fait apparaître un terme supplémentaire absent du modèle de Wilcox. Kok propose alors en 2000 une nouvelle version du modèle  $k - \omega$  qu'il appelle le modèle TNT (Turbulent/Non Turbulent), lui aussi peu sensible aux valeurs de  $\omega$  à la frontière de la couche limite par l'ajout, dans l'équation de  $\omega$ , d'un terme de diffusion croisée actif dans la région externe de la couche limite :

$$\frac{d\rho k}{dt} = \rho P_k - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (4.25)$$

$$\frac{d\rho \omega}{dt} = \frac{\alpha}{\nu_t} P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\rho \sigma_d}{\omega} \max \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j}; 0 \right\}$$

## 4.6. FERMETURE AU SECOND ORDRE

avec les mêmes conditions en paroi que le modèle de Wilcox et la calibration suivante :

$$\sigma^* = 2/3 \quad , \quad \beta^* = 0.09 \quad , \quad \sigma = 1/2 \quad , \quad \beta = 3/40 \quad , \quad \sigma_d = 1/2 \quad , \quad \alpha = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\sigma \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}$$

### 4.5.4 Correction Shear-Stress Transport (SST) de Menter

Menter [85] constate que les modèles à deux équations de transport utilisant le concept de viscosité de la turbulence expriment le rapport entre la contrainte turbulente de cisaillement  $\overline{u'v'}$  et  $k$  par la relation :

$$\frac{-\overline{u'v'}}{k} = 2 a_1 \sqrt{\frac{P_k}{\varepsilon}} \quad ; \quad a_1 \approx 0.15 \quad (4.26)$$

(puisque  $-\overline{u'v'} = \frac{P_k}{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}$  et qu'on a vu équations C.19 et C.25 que  $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \sqrt{\frac{P_k}{C_{\mu}^{ste}} \frac{\varepsilon}{k^2}}$  où  $C_{\mu}^{ste} = (2 a_1)^2$ )

Remarquons que  $2 a_1$  correspond à  $\sqrt{C_{\mu}}$  pour le modèle k- $\varepsilon$  et  $\sqrt{\beta^*}$  pour le modèle k- $\omega$ .

Dans la région logarithmique d'une couche limite sans gradient de pression adverse (GPA), le rapport de la production sur la dissipation de  $k$  vaut 1. On retrouve alors la relation d'équilibre de Bradshaw :

$$-\overline{u'v'} = 2 a_1 k \quad ; \quad a_1 = 0.15 \quad (4.27)$$

Dans le cas de couche limite soumis à un GPA, le rapport  $P_k/\varepsilon$  peut être nettement supérieur à 1 dans la région externe. Or, Driver [31] observe expérimentalement que le rapport  $-\overline{u'v'}/(2 a_1 k)$  diminue dans la région externe sous l'action d'un GPA. La relation 4.26 conduit donc à une incohérence. Pour remédier à ce problème, Menter [86] propose alors de limiter le coefficient de viscosité de la turbulence de manière à ce que le rapport  $-\overline{u'v'}/(2 a_1 k)$  ne puisse pas dépasser 1 :

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\max\{\omega; F_2 \Omega / a_1\}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_1 = 0,155 \\ \Omega = \|\text{rot} \vec{U}\| \\ F_2 = \tanh \iota^2 \\ \iota = \max\left(2 \frac{\sqrt{k}}{0,09 \omega y}; \frac{500 \nu}{\omega y^2}\right) \end{cases} \quad (4.28)$$

La fonction  $F_2$  est ainsi construite de manière à valoir 0 près de la paroi et 1 dans la zone externe de la couche limite et dans les sillages.

Notons que la valeur de  $2 a_1$ , théoriquement prévue égale à  $\sqrt{C_{\mu}} = \sqrt{\beta^*} = 0.3$ , est finalement fixée par Menter à 0.31.

## 4.6 Fermeture au second ordre

Comme nous avons pu le voir au paragraphe 4.2, la fermeture du système d'équations RANS repose sur la modélisation du tenseur de Reynolds ou tenseur des contraintes turbulentes  $\tilde{\tau}_{ij}^R = -\overline{\rho u'_i u'_j}$  et du flux de chaleur turbulent  $\tilde{q}_t = \overline{(\rho e' + p) u'_j}$ .

Les modèles de turbulence dits du premier ordre reposent sur l'hypothèse de Boussinesq qui modélise les composantes du tenseur de Reynolds  $\tilde{\tau}_{ij}^R$  par une expression dépendant de la viscosité

de la turbulence qui n'est en fait pas à même de prévoir correctement que la composante  $\tilde{\tau}_{12}^R = -\overline{\rho u'v'}$ . Pour un écoulement de couche limite à l'équilibre, cette composante est effectivement la seule ayant une contribution significative dans les équations de Navier-Stokes. En revanche, dans des écoulements hors équilibre, le rapport  $P_k/\varepsilon$  peut devenir élevé et conduire à des valeurs non physiques des tensions de Reynolds exprimées par l'hypothèse de Boussinesq. Enfin, les modèles du premier ordre à deux équations de transport ne font apparaître aucune dépendance au tenseur de vortacité  $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ , ce qui les rend insensibles aux effets rotatifs.

Par ailleurs ces modèles sont relativement performants pour des écoulements de couche limite attachés pour lesquels seule la composante  $\tilde{\tau}_{12}^R = -\overline{\rho u'v'}$  a une contribution significative. En dehors de ce contexte simplifié, l'utilisation de modèles RSM (Reynolds Stress Models) devient nécessaire pour une modélisation correcte de chacune des tensions de Reynolds. Pour plus d'informations sur ces modèles, se référer à la synthèse réalisée par Wallin [126].

Les modèles RSM dits du second ordre sont basés sur les équations exactes de transport des tensions de Reynolds introduites dans l'annexe A.

Dans l'expression des équations de transport des tensions de Reynolds A.12, le terme de production est explicite, les autres termes nécessitent en revanche quant à eux une modélisation. Le terme de redistribution exerce un transfert d'énergie entre les différentes composantes du tenseur de Reynolds, une modélisation même sommaire de ce terme constitue déjà une avancée significative vis-à-vis des modèles du premier ordre.

Le tenseur de Reynolds est souvent exprimé et modélisé préférentiellement par son tenseur d'anisotropie  $a_{ij}$  :

$$a_{ij} = -\frac{1}{\bar{\rho}k} \left[ \tilde{\tau}_{ij}^R - \frac{1}{3} \tilde{\tau}_{kk}^R \delta_{ij} \right] = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (4.29)$$

La résolution des équations de transport du tenseur d'anisotropie  $a_{ij}$  constitue une alternative à la résolution des équations de transport des tensions de Reynolds.

## 4.7 Prise en compte de la transition par les modèles RANS

Les modèles RANS sont faits pour calculer l'évolution d'une couche limite turbulente et leurs hypothèses de modélisation ne leur permettent pas de calculer des écoulements laminaires ou transitionnels. En présence d'une couche limite laminaire, ces modèles RANS créent de la turbulence selon une dynamique qui leur est propre et qui dépend en outre de l'initialisation des variables turbulentes dans la région supposée laminaire. Cela conduit à une transition dont la position, généralement anticipée, est extrêmement dépendante du modèle et des conditions d'entrée des variables turbulentes. Les conséquences d'une mauvaise estimation de la position de la transition peuvent être grandes, ne serait-ce que par le fait que les profils de pression et frottement en paroi (et donc les coefficients de portance et traînée) diffèrent entre un écoulement laminaire et un écoulement turbulent. Pour des calculs d'écoulements autour de profils à l'approche du décrochage, les conséquences sont encore plus importantes car la couche limite turbulente ne décollera pas au même GPA que la couche limite laminaire. Les profils de pression et frottement en paroi en seront fortement modifiés et les conséquences sur les coefficients de frottement et de traînée seront importantes. L'incidence d'apparition du décrochage en sera forcément altérée. Notons que certains modèles de turbulence bas-Reynolds (Savill 2002 ; Chen *et al.* 1998) sont à même de prévoir avec assez d'exactitude les phénomènes de transition by-pass. Dans d'autres scénarios de transition, il est indispensable de pouvoir contrôler la position de la transition. Pour cela, les calculs RANS sont habituellement couplés avec une fonction  $\gamma$  dite fonction de transition qui pondère certaines variables turbulentes. Cette fonction de transition est inspirée du phénomène d'intermittence de la turbulence dans la région de transition.

### 4.7.1 Intermittence de la couche limite

Rappelons qu'entre les régions laminaire et turbulente se situe la région de transition dans laquelle l'écoulement passe de l'état laminaire à l'état turbulent car il s'y développe des bouffées de turbulence localisées. L'intermittence de la turbulence est un phénomène qui concerne la région de transition, il correspond au passage de bouffées de turbulence dans une zone d'écoulement encore laminaire. En début de région de transition, les premières bouffées de turbulence apparaissent, elles deviennent ensuite de plus en plus nombreuses, jusqu'à remplir complètement l'écoulement en fin de région de transition. Le facteur d'intermittence que tente de copier la fonction de transition est défini par la fraction du temps pendant lequel un point donné est traversé par une bouffée de turbulence sur le temps total pendant lequel l'écoulement est analysé. Ce facteur vaut zéro dans la région laminaire et prend la valeur 1 dans la zone turbulente.

### 4.7.2 Fonction d'intermittence

La fonction d'intermittence  $\gamma$  couramment utilisée pour les modèles RANS vaut zéro dans la région laminaire, prend la valeur 1 dans la zone turbulente et passe plus ou moins abruptement de la valeur zéro à la valeur 1 dans la zone de transition. La stratégie généralement utilisée pour les modèles basés sur l'hypothèse de Boussinesq consiste à multiplier  $\mu_t$  par  $\gamma$  dans l'expression des tensions de Reynolds :  $\mu_t^* = \gamma\mu_t$ . Quelques auteurs ont étudié le phénomène d'intermittence et cherché à en tirer une fonction d'intermittence :

- Arnal et Juillen [6] (1977) présentent une étude du phénomène d'intermittence de la transition naturelle d'une couche limite attachée (passage de spots de turbulence dans une région encore laminaire). Sur la base de résultats expérimentaux, les auteurs obtiennent une représentation du facteur d'intermittence  $\gamma$  définie par son intervention dans l'expression des fluctuations issue de l'analyse conditionnelle, comme par exemple pour l'intensité des fluctuations de vitesse longitudinale :  $\overline{u'^2} = \gamma\overline{u_t'^2} + (1 - \gamma)\overline{u_l'^2} + \gamma(1 - \gamma)(U_t - U_l)^2$ . L'analyse conditionnelle sur laquelle repose cette expression consiste à identifier à chaque instant et en chaque endroit de la région de transition si une bouffée de turbulence est ou non présente. Cette analyse permet de considérer l'écoulement instantané soit turbulent ( $u = U_t + u_t'$ ) soit laminaire ( $u = U_l + u_l'$ ). Les auteurs montrent qu'il est ainsi possible d'extraire de l'analyse de l'écoulement un facteur d'intermittence nul dans la région laminaire, croissant dans la région de transition et de valeur unitaire dans la région turbulente.
- Arnal, Coustols et Juillen [4] (1984) présentent des résultats expérimentaux de transition sur une aile en flèche d'envergure infinie. Ces données sont comparées aux résultats théoriques de méthodes de calcul résolvant les équations soit locales, soit globales, de la couche limite. Ces méthodes utilisent un coefficient de pondération du type "facteur d'intermittence" qui est fonction du rapport  $\theta_{11}/\theta_{11T}$ . Ce coefficient est traditionnellement nul dans la partie laminaire et égal à 1 dans la région turbulente. Pour la résolution des équations locales les auteurs utilisent un coefficient atteignant la valeur inhabituelle 1.5 dans la région de transition, à cause de la composante  $\gamma(1 - \gamma)(U_t - U_l)^2$ , en se basant sur l'étude de Coustols [25] pour laquelle ce coefficient élevé avait démontré les meilleurs résultats en bidimensionnel.
- Gleyzes, Cousteix et Bonnet [43] (1985) étudient expérimentalement l'influence du bulbe sur l'écoulement autour d'un profil d'aile à bas nombre de Reynolds. Les auteurs présentent les résultats d'une étude théorique : ils couplent un calcul non visqueux (en mode inverse) au calcul visqueux. Ils appliquent la transition en pondérant les résultats des calculs laminaires et turbulents par la fonction d'intermittence proposée par Arnal *et al.* [4]. Cette méthode de calcul s'est montrée très satisfaisante vis-à-vis des résultats expérimentaux.

### 4.7.3 Critères d'entrée et sortie de la région de transition

En fournissant au calcul des points de début et de fin de la région de transition, la pondération de certaines variables turbulentes du modèle par une fonction d'intermittence permet aux calculs RANS de prendre en compte la transition de la couche limite.

Les positions du début et de la fin de la région de transition sont généralement déterminées par l'utilisation d'un critère de transition basé soit sur des corrélations empiriques, soit sur des résultats d'études de stabilité linéaire. Bien qu'il existe de nombreux travaux sur le sujet, nous ne citerons ici que ceux ayant mené aux critères les plus aboutis pour les types de transition naturelle et by-pass : le critère AHD pour la transition naturelle, le critère d'Abu-Ghannam & Shaw pour la transition naturelle et by-pass, ainsi que le critère de Gleyzes *et al.* adapté à la transition par BDL.

- Arnal, Habiballah et Coustols [5] (1984) présentent une étude théorique de stabilité linéaire de la transition naturelle d'une couche limite attachée. Ils établissent un critère communément appelé critère AHD qui est inspiré du critère de Granville  $\Re_{\theta_T} - \Re_{\theta_{cr}} = f(\overline{\Lambda_T})$  où  $\overline{\Lambda_T} = \frac{1}{x_T - x_{cr}} \int_{x_{cr}}^{x_T} \frac{\theta^2}{\nu} \frac{d|U_e|}{dx}$  est la valeur moyenne du paramètre de gradient de pression de Pohlhausen  $\Lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{d|U_e|}{dx}$ . Le critère AHD prend en compte le taux de turbulence  $Tu$  issu de la relation de Mack  $n_T = -8.43 - 2.4 \ln(Tu)$  où  $n = \max_f [\ln(A/A_0)]$ . Ce critère prévoit la transition de l'écoulement dès que le Reynolds  $\Re_{\theta}$  atteint la valeur  $\Re_{\theta_T}$ , telle que  $\Re_{\theta_T} - \Re_{\theta_{cr}} = -206 \exp(25.7\overline{\Lambda_T}) [\ln(16.8 Tu) - 2.77\overline{\Lambda_T}]$  où  $\Re_{\theta_{cr}} = \exp(52/H_i - 14.8)$ . Le critère AHD permet une bonne estimation de la transition pour les écoulements à faible taux de turbulence soumis à des gradients de pression modérés.
- Abu-Ghannam & Shaw [1] proposent un critère capable de prévoir la transition naturelle et by-pass. Ils définissent un nombre de Reynolds critique pour caractériser la position de la transition :  $\Re_{\theta_T} = 163 + \exp[F(\Lambda) - \frac{F(\Lambda)}{6.91} Tu_{\infty}]$  où  $\Lambda$  est le paramètre de Pohlhausen et  $F$  la fonction suivante :  $F(\Lambda) = 6.91 + 12.75\Lambda + 63.64\Lambda^2$  si  $\Lambda \leq 0$  et  $F(\Lambda) = 6.91 + 2.48\Lambda - 12.27\Lambda^2$  si  $\Lambda \geq 0$
- Gleyzes, Cousteix et Bonnet [43] (1985) s'appuient sur des calculs de stabilité linéaire pour développer un critère de transition adapté à la transition par bulbe. Leur critère repose sur une expression analytique du taux d'amplification de la fréquence la plus instable  $n = \int_{\Re_{\theta_{cr}}}^{\Re_{\theta}} f_1(H_i) dR_{\theta}$  avec  $\Re_{\theta_{cr}} = f_2(H_i)$  où  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions publiées. La transition se produit quand ce taux d'amplification atteint la valeur critique  $n_T = -8.43 - 2.4 \ln(Tu)$ . Ce critère efficace à faible taux de turbulence extérieure est adapté à la transition par BDL.

Par ailleurs, il existe aussi des critères permettant d'estimer la longueur laminaire du bulbe, citons notamment l'expression empirique de Roberts [109], inspirée des travaux de Horton, qui propose d'exprimer la longueur laminaire du bulbe par la formule  $l_{lam}/\theta_s = 2.5 \cdot 10^4 \log[\coth(17.32 Tu)]/\Re_{\theta_s}$  qui permet, connaissant l'abscisse de séparation et la valeur de l'épaisseur de quantité de mouvement en ce point, de déterminer l'abscisse de transition :  $x_t = x_s + l_{lam}$ .

Les critères de transition reposent malheureusement sur des formulations dépendant d'épaisseurs caractéristiques de la couche limite dont le calcul s'avère compliqué dans les solveurs récents qui utilisent des grilles non structurées ou encore du calcul parallèle massif. Certaines approches consistent à évaluer les épaisseurs de couche limite par un calcul de couche limite couplé au calcul RANS, mais cette méthode est limitée à des cas de géométries relativement simples, présente un coût supplémentaire et n'est valable que dans la région qui précède le point de séparation car le calcul de couche limite n'est valable que pour une couche limite laminaire attachée.

Pour s'affranchir de l'utilisation de critères, certains solveurs sont couplés à un code de stabilité linéaire capable de prévoir avec beaucoup d'exactitude la transition naturelle de la couche limite par le biais de la méthode  $e^N$ . Cette approche requiert cependant elle aussi la connaissance de l'écoulement de couche limite laminaire, et donc un calcul de couche limite

supplémentaire, ou, à défaut, l'utilisation des champs de données statistiques du calcul RANS quand ils sont accessibles. Cependant la précision des résultats RANS reste limitée alors qu'une grande exactitude des profils de vitesse est nécessaire pour un calcul de stabilité linéaire précis.

#### 4.7.4 Modèles de transition à équations de transport

Ces dernières années, quelques auteurs se sont penchés sur la recherche de nouvelles méthodes de prévision de la transition. Les deux approches les plus populaires seront décrites ici.

##### 4.7.4.1 Calcul de la transition laminaire turbulent par deux équations de transport pour $\gamma$ et $\Re_{\theta t}$

Pour pallier le problème du calcul des épaisseurs intégrales sur lequel repose la plupart des critères et fonctions de transition, et prendre en compte des types de transition variés et non plus seulement la transition by-pass ou naturelle, Menter et Langtry [89] proposent un modèle de transition qu'ils couplent au modèle  $k - \omega$  SST de Menter. Dans ce modèle de transition, la fonction de transition  $\gamma$  et le nombre de Reynolds  $\Re_{\theta t}$  caractéristique du point de transition sont chacun déterminés par une équation de transport. Au-delà d'une valeur critique de  $\Re_{\theta t}$ , les termes de production de l'équation de transport de  $\gamma$  sont activés. La fonction de transition  $\gamma$  ainsi obtenue est appliquée en pondération des termes de production dans l'équation de transport de  $k$  et non en pondération de  $\mu_t$  comme c'est généralement le cas.

##### 4.7.4.2 Calcul de la transition laminaire turbulent par une équation de transport pour l'énergie cinétique laminaire

En 1997, Mayle et Schulz [82] suggèrent de prendre en compte l'énergie cinétique laminaire  $k_l$  et non plus seulement la contribution turbulente  $k_t$  dans l'expression de l'énergie cinétique totale de l'écoulement :  $k_{tot} = k_l + k_t$ . Pour cela, ils proposent une équation de transport pour l'énergie cinétique laminaire  $k_l$  issue de l'équation de transport des tensions de Reynolds simplifiée par des hypothèses de laminarité. Les auteurs essaient ainsi de prendre en compte la croissance des perturbations longitudinales dans la couche limite laminaire et l'influence du contenu spectral de la turbulence de l'écoulement externe.

En se basant sur ce concept, Walters *et al.* [128, 127] mettent au point un modèle de transition qui consiste en l'ajout à un modèle de turbulence  $k-\omega$  de la résolution d'une équation de transport supplémentaire pour l'énergie cinétique laminaire. Cette équation est couplée à l'équation de transport de l'énergie cinétique de la turbulence du modèle de turbulence par un terme de transfert d'énergie fonction de  $k_l$  et  $k_{tot}$  qui est commun aux deux équations, et qui apparaît aussi dans l'équation de  $\omega$ . Ce modèle propose en outre une distinction des contributions petite et grande échelle de l'énergie cinétique totale :  $k_{tot} = k_p + k_g$ . La viscosité de la turbulence est alors déterminée par une expression dépendant des variables  $k_l$ ,  $k_p$  et  $k_{tot}$ .

Récemment, Lardeau *et al.* [63] constatent un échec de ce modèle à prévoir la transition de couche limite séparée en raison de sa formulation qui prévoit une forte production d'énergie cinétique laminaire en très proche paroi alors que la transition d'une couche limite séparée est généralement issue d'une instabilité de type KH de la couche de cisaillement. Les auteurs proposent un nouveau modèle avec une formulation de l'équation de transport de  $k_l$  adaptée aux transitions de couche limite séparée.

Ces modèles s'affranchissent des épaisseurs intégrales, ils sont "locaux", et offrent une alternative intéressante aux modèles basés sur des corrélations. Ils sont plutôt destinés à la prévision de la transition by-pass et éventuellement à la prévision de la transition de couche limite séparée, mais ils ne prévoient pas correctement la transition naturelle. Enfin, ces modèles de transition ont été chacun développés pour un modèle de turbulence donné, et leur utilisation sur d'autres modèles demeure incertaine.



## Chapitre 5

# Influence du modèle de transition sur la modélisation RANS

Une étude de l'influence de la prise en compte du BDL transitionnel par les calculs RANS est présentée dans ce chapitre. L'objectif est d'analyser les principales quantités macroscopiques calculées par les méthodes RANS afin d'étudier leur sensibilité au modèle de turbulence, à la forme de la fonction de transition, et à la stratégie d'utilisation de la fonction de transition.

Des calculs RANS ont été menés avec différents modèles sur un maillage 2D basé sur le maillage  $60Mp$  de la DNS. Les résultats sont comparés aux résultats DNS du maillage  $200Mp$ .

Afin de traiter la sensibilité au modèle de turbulence, les modèles les plus fiables parmi ceux disponibles dans le solveur elsA ont été testés, en commençant par le modèle de Spalart-Allmaras, puis les modèles  $k-\omega$  de Wilcox et Kok ainsi que la correction SST de Menter, et enfin la version de Launder-Sharma du modèle  $k-\varepsilon$ . Afin de traiter la sensibilité à la forme de la fonction de transition, chaque modèle de turbulence a été testé avec des fonctions de formes et valeurs variées. L'analyse des résultats de chacune de ces formes de modélisation est focalisée sur l'évolution de deux paramètres cruciaux : le coefficient de frottement et l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite. Le frottement entre dans l'estimation de la portance et de la traînée et est donc un élément clef dans l'analyse de l'aérodynamique d'un profil en vol. L'épaisseur de quantité de mouvement, très largement utilisée dans la littérature, permet de caractériser avec précision l'évolution de l'écoulement. Le modèle  $k-\omega$  de Wilcox s'est avéré donner les résultats les plus proches de la DNS, et a donc été l'objet d'une analyse plus poussée. Afin de traiter la sensibilité à la stratégie d'application du modèle de transition, la fonction de transition est appliquée sur différents éléments du modèle  $k-\omega$  de Wilcox : avec ou sans application au coefficient  $\mu_t$ , et avec ou sans application au terme de production de l'énergie cinétique  $P_k$ . Une analyse de l'évolution des grandeurs turbulentes a ensuite été menée afin d'identifier plus précisément les faiblesses du modèle  $k-\omega$  de Wilcox. Une étude a aussi été menée sur l'influence de la fonction de transition sur le calcul RANS d'un écoulement de plaque plane sujet à une transition naturelle sans gradient de pression afin de regarder si les conclusions faites sur la transition par BDL pourraient s'appliquer aussi à la transition naturelle. Pour cette étude, les résultats RANS utilisant le modèle  $k-\omega$  de Wilcox ont été comparés aux résultats DNS de Wu et Moin [133].

## 5.1 Description des calculs

Les calculs RANS présentés dans ce chapitre ont été réalisés à l’aide du solveur volumes-finis multibloc elsA [34]. Celui-ci utilise, pour les équations de Navier-Stokes, les mêmes schémas de discrétisation décrits section 2.2 que le solveur FUNk qui a calculé les DNS. Les calculs RANS d’écoulements transitionnels sont généralement réalisés soit en “fully turbulent” (les propriétés laminaires de la couche limite sont négligées et le modèle de turbulence est appliqué en tout point du domaine) soit par utilisation d’une fonction de transition qui commande l’application du modèle seulement au-delà d’une position décidée à l’aide d’un critère, tel qu’expliqué précédemment section 4.7. L’utilisation de critères de transition s’est avérée impossible pour le calcul de l’écoulement considéré dans cette étude, une fonction de transition adaptée et utilisable sans critères a donc dû être créée. C’est ce qu’expliquent les deux prochains paragraphes.

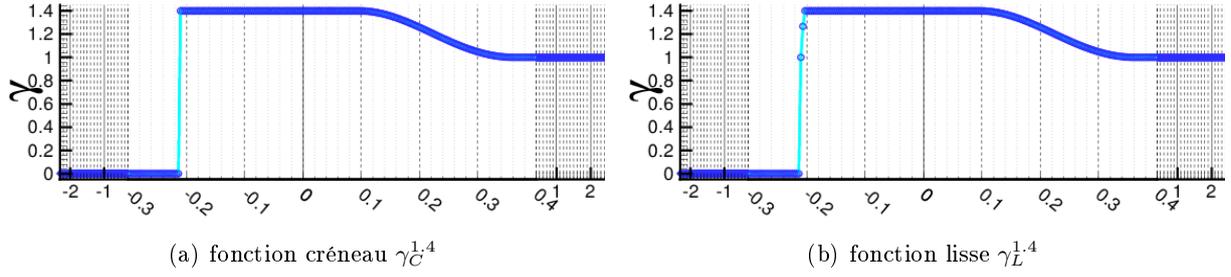
### 5.1.1 Critères de transition

Sur chacun des modèles de turbulence utilisés dans cette étude, le calcul du point de transition a dans un premier temps été réalisé à l’aide d’une combinaison des critères de transition AHD [5] et Gleyzes [43] décrits au paragraphe 4.7.3. Pour l’écoulement considéré, ces critères se sont avérés inutilisables car ils prévoient dans tous les cas une position de la transition anticipée par rapport aux résultats DNS et ce pour des raisons non physiques. En effet, ces critères sont basés sur des quantités intégrées sur la hauteur de la couche limite, or les méthodes de calcul de l’épaisseur de couche limite implémentées dans le code elsA échouent par endroits à évaluer la position de la frontière de la couche limite dans la région de transition. La frontière de la couche limite est en effet habituellement identifiée par la quasi-annulation des gradients verticaux de vitesse. L’origine de l’échec du calcul de l’épaisseur de la couche limite dans la région de transition vient vraisemblablement de l’importance des gradients verticaux de vitesse en dehors de la couche limite qui sont dus aux fortes contraintes subies par l’écoulement : forte décélération liée au GPA, couche limite peu épaisse, courbure des lignes de courant et proximité de la paroi supérieure non-visqueuse.

### 5.1.2 Fonctions de transition

Les critères de transition s’étant avérés inutilisables pour le cas considéré dans cette étude, une fonction de transition a dû être créée. Comme il a été décrit section 4.7.2, les fonctions de transition communément utilisées sont nulles dans la région laminaire et prennent la valeur unitaire dans la région turbulente. Les résultats DNS présentés section 3.8 justifient l’utilisation d’une fonction dépassant localement la valeur unitaire dans le bulbe, tout comme l’ont suggéré Arnal, Coustols et Juillen [4]. Par ailleurs, la bidimensionnalité de  $\gamma(x, y)$  observée figure 3.46 suggère l’utilisation d’une fonction bidimensionnelle pour le RANS. Cependant, étant donné que le maximum de production de la turbulence a lieu dans la région de fort cisaillement, c’est-à-dire dans la région du maximum de  $\gamma$  observé figure 3.46, l’utilisation d’une fonction de transition monodimensionnelle  $\gamma(x)$  semble être une approximation raisonnable. Pour cela, la position approximative de la transition a été estimée aux trois quarts de la longueur du bulbe, là où le paramètre de forme atteint son maximum, puis une succession de calculs a été réalisée afin d’optimiser la forme de la fonction, sa valeur maximale (1.0 ou 1.4) ainsi que la position exacte du point de transition. Deux fonctions de transition optimisées pour le modèle de Wilcox ont été retenues, l’une est une fonction créneau :  $\gamma_C$  représentée figure 5.1(a) et la seconde une fonction plus lisse :  $\gamma_L$  représentée figure 5.1(b). Ces fonctions atteignent la valeur 1.4 dans la région de transition. Dans les cas où une fonction limitée à la valeur 1.0 sera utilisée, cette limitation à 1 sera mentionnée clairement en légende.

## 5.1. DESCRIPTION DES CALCULS



**FIGURE 5.1:** Fonctions de transition créneau et lisse, les symboles représentent les points du maillage 200Mp.

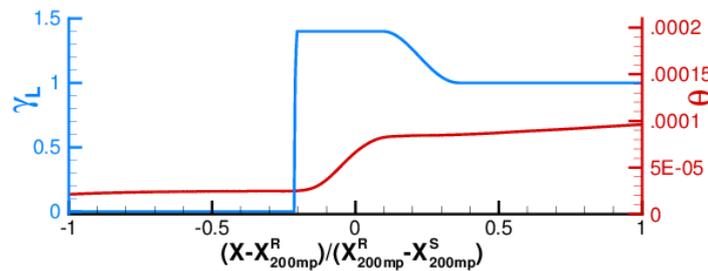
Ces fonctions peuvent toutes deux s'écrire sous la forme suivante :

$$\gamma^{1.4} = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq X^{t1} \\ \gamma(x) & \text{pour } X^{t1} \leq x < X^{t2} \\ 1.4 & \text{pour } X^{t2} \leq x < X^{t3} \\ \propto \sin(\alpha x^2) & \text{pour } X^{t3} < x < X^{t4} \\ 1 & \text{pour } x > X^{t4} \end{cases} \quad (5.1)$$

La fonction  $\gamma_C$  est une fonction créneau entre  $X^{t1}$  et  $X^{t2}$ , c'est-à-dire que  $X^{t1}$  et  $X^{t2}$  sont les abscisses de deux cellules successives du maillage. La fonction plus lisse  $\gamma_L$  présente quant à elle un passage légèrement plus progressif de la valeur 0 à la valeur 1.4 puisque  $X^{t2}$  est reculé de deux mailles vers l'aval et que ces deux cellules intermédiaires entre  $X^{t1}$  et  $X^{t2}$  prennent des valeurs de  $\gamma$  intermédiaires entre 0 et 1.4.

Les abscisses  $X^{t1}$  et  $X^{t2}$  commandant le début de la transition ont été déterminées par optimisation des résultats des calculs RANS avec le modèle de Wilcox. D'autres calculs dont les résultats ne sont pas présentés ici ont montré que le modèle de Wilcox est relativement peu sensible aux abscisses  $X^{t3}$  et  $X^{t4}$  entre lesquelles la fonction passe de la valeur 1.4 à la valeur 1.

Au-delà d'une définition de ces fonctions de transition dépendant uniquement des points de séparation et recollement, on peut remarquer sur la figure 5.2 que les fonctions optimales sélectionnées pour cette étude sont caractérisées d'une part par une abscisse  $X^{t1} \simeq X^{t2}$  coïncidant avec la fin du plateau de l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta$  dans la zone décollée, et d'autre part par une région  $[X^{t3}, X^{t4}]$  qui coïncide avec la zone intermédiaire entre le pic de sur-épaissement et l'établissement d'un épaissement de couche limite turbulente standard. Comme évoqué au paragraphe 4.7.3, de nombreux auteurs ont proposé, sur des cas de transition naturelle, des critères de transition basés sur  $\theta$ ; par ailleurs Arnal, Coustols et Juillen [4] ont quant à eux mis au point une fonction de transition définie par sa dépendance à  $\theta$ . Dans le cas présent, on observe figure 5.2 que l'abscisse  $X^{t1} \simeq X^{t2}$  de la fonction de transition  $\gamma_L$  se situe à la fin de la zone plateau de  $\theta$  correspondant au plateau de pression, cette zone plateau s'étend sur toute la seconde moitié du bulbe et l'évolution de  $\theta$  y est quasi-nulle. C'est vraisemblablement la position de la transition, et donc dans le cas du calcul RANS la position du pic de la fonction de transition, qui commandent la position de la fin du plateau, la position du début du sur-épaissement ainsi que celle du recollement.



**FIGURE 5.2:** Fonction de transition lisse  $\gamma_L$  et épaisseur de quantité de mouvement  $\theta$

## 5.2 Évaluation des modèles de turbulence

Une évaluation des principaux modèles de turbulence disponibles dans le logiciel elsA a été réalisée, pour chacun de ces modèles plusieurs calculs ont été menés en faisant varier la fonction de transition et, pour les modèles donnant les résultats les plus satisfaisants, en analysant l'influence de la méthode de pondération par  $\gamma$ . Les résultats RANS sont comparés à ceux de la base de données DNS du calcul  $200Mp$ . La prise en compte du taux de turbulence extérieur est nécessaire aux calculs RANS.

Les calculs DNS ont permis d'estimer un taux de turbulence  $Tu = \sqrt{\sum \overline{u_k'^2}} / \sqrt{\sum \overline{u_k^2}}$  valant approximativement 0.05% à la frontière de la couche limite au-dessus de la partie laminaire du BDL, c'est cette valeur du taux de turbulence qui a été utilisé pour les calculs RANS. Les calculs DNS ont aussi permis d'évaluer le rapport  $\mu_t/\mu$  qui prend la valeur moyenne 0.1 à la frontière de la couche limite au-dessus de la partie laminaire du BDL, cette valeur est celle utilisée pour les calculs RANS. Le taux de turbulence et le rapport  $\mu_t/\mu$  associé aux valeurs externes des quantités macroscopiques sont les grandeurs utilisées pour la définition des valeurs externes des variables turbulentes  $k$ ,  $\omega$  et  $\varepsilon$  résolues par les modèles RANS.

### 5.2.1 Spalart-Allmaras

Des calculs RANS utilisant le modèle de Spalart-Allmaras ont été réalisés avec différentes fonctions de transition  $\gamma$ , et différentes méthodes de pondération par  $\gamma$ . Les résultats de l'ensemble de ces calculs sont présentés figures 5.3, 5.4 et 5.5.

La prise en compte de la transition par le modèle de Spalart est généralement effectuée par pondération par  $\gamma$  du terme de production de  $\tilde{\mu}$  dans son équation de transport (cas  $[\mu_t; \gamma P_{\tilde{\mu}}]$ , courbes roses). L'ajout d'une pondération par  $\gamma$  supplémentaire : celle de  $\mu_t$  directement (cas  $[\gamma \mu_t; \gamma P_{\tilde{\mu}}]$ , courbes bleues), n'apporte quasiment aucune modification de l'écoulement, hormis une très légère avancée du point de recollement.

Une fonction  $\gamma_C$  créneau culminant à la valeur 2.0 (courbes rouges) au lieu de 1.4 (courbes bleues) a aussi été testée, elle entraîne un recollement plus rapide et donc en meilleur accord avec les résultats DNS sur ce point, mais malheureusement aussi un sur-épaississement moins fort au recollement, ce qui détériore en fait la qualité du résultat vis-à-vis de la DNS. Le pic de frottement au recollement n'est guère plus marqué que celui de la fonction  $\gamma_C$  culminant à 1.4, ce qui ne constitue pas là non plus en une amélioration.

Ces résultats ainsi que ceux d'autres calculs non présentés ici montrent clairement qu'un recollement anticipé aboutit à un sur-épaississement moins marqué (ce n'est pas la valeur élevée de  $\gamma_C^{2.0}$  qui en est l'origine).

Enfin, il apparaît que le modèle de Spalart-Allmaras est peu sensible à la raideur de la fonction de transition, puisque les calculs utilisant d'une part la fonction créneau  $\gamma_C$  (courbes bleues) et d'autre part la fonction plus lisse  $\gamma_L$  (courbes vertes) donnent des résultats quasiment identiques.

Pour résumer, plusieurs points importants sont à noter au vu des résultats :

Il s'agit d'une part de l'indépendance apparente :

- de la valeur du coefficient de frottement en aval du recollement ( $X^{RS} > 0$ )
- du taux d'accroissement de l'épaisseur de quantité de mouvement dans la zone turbulente
- du profil vertical de vitesse dans la région turbulente

vis-à-vis de la position du point de transition, de la raideur et de la valeur maximale atteinte par la fonction de transition au point de recollement.

## 5.2. ÉVALUATION DES MODÈLES DE TURBULENCE

D'autre part, la valeur absolue du sur-épaississement au point de recollement est quant-à elle très fortement dépendante du point de transition. Le taux d'épaississement en aval du recollement étant identique pour tous les calculs, cette différence de niveau initiale sur la valeur de  $\theta$  perdue dans la couche limite turbulente aval.

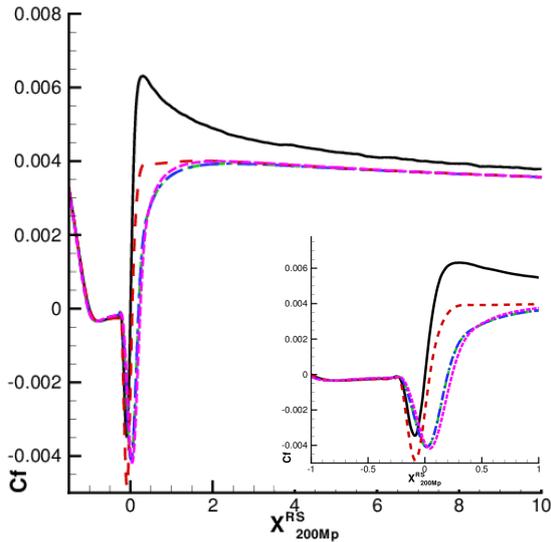


FIGURE 5.3: Coefficient de frottement

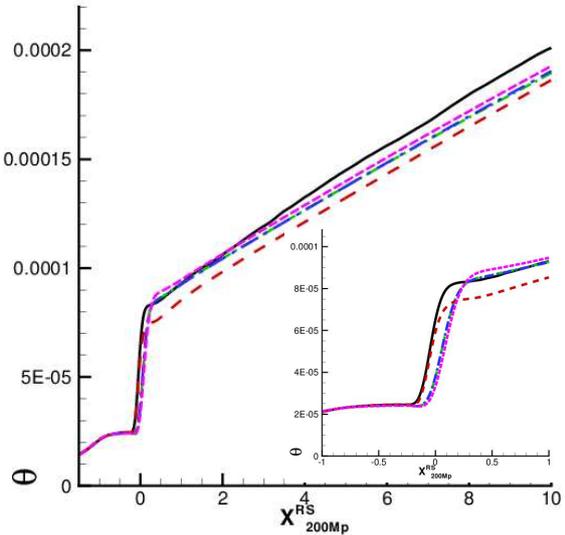


FIGURE 5.4: Épaisseur de quantité de mouvement

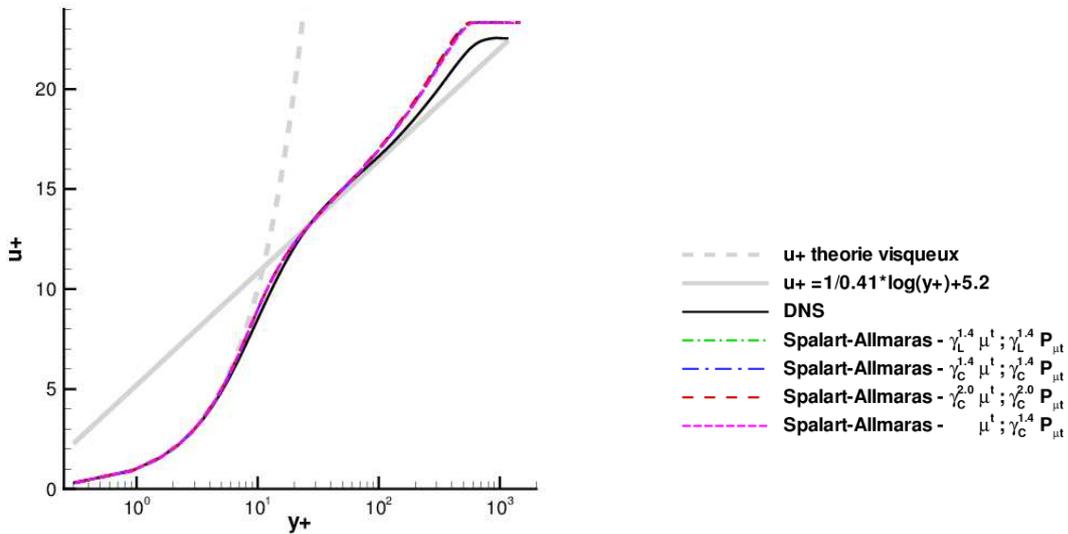


FIGURE 5.5: Profil vertical de la composante longitudinale de la vitesse en  $X^{RS} = 7$

Dans l'ensemble, le modèle de Spalart-Allmaras calcule un écoulement relativement proche de celui qui est prévu par la DNS. Des différences notables sont cependant visibles, notamment l'absence de pic de frottement au recollement, un frottement légèrement sous-estimé dans la région turbulente, et un taux d'épaississement dans la région turbulente légèrement sous-estimé.

### 5.2.2 $k - \omega$ Wilcox

Dans le cas de modèles de turbulence à plusieurs équations de transport, on peut facilement concevoir que la transition peut être commandée par la pondération de  $\mu_t$  ou bien par la pondération de certains termes de production ou dissipation dans les équations des variables turbulentes du modèle.

Richez [103] a montré qu'une bonne prévision de la transition par bulbe peut être obtenue en pondérant par  $\gamma$  non seulement la viscosité de la turbulence  $\mu_t$ , mais aussi le terme de production de  $k$  dans son équation de transport ainsi que la production de la dissipation spécifique  $\omega$ .

Différentes stratégies de prise en compte de la transition dans le modèle de Wilcox ont été analysées :

- pondération par  $\gamma$  du terme de production de  $k$  dans son équation de transport (cas [ $\mu_t$  ;  $\gamma P_k$ ]) ce qui pondère aussi la production de  $\omega$ .
- pondération par  $\gamma$  de  $\mu_t$  uniquement (cas [ $\gamma \mu_t$  ;  $P_k$ ]) ce qui influe directement sur les tensions de Reynolds modélisées ainsi que sur les termes de diffusion turbulente du modèle  $k - \omega$ .
- cumul de ces deux techniques de pondération (cas [ $\gamma \mu_t$  ;  $\gamma P_k$ ])

En cumulant les deux techniques, le modèle  $k - \omega$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + u \frac{\partial \rho k}{\partial x_i} &= \rho \gamma P_k - \beta_k \rho k \omega + \nabla [(\mu + \sigma^* \gamma \mu_t) \nabla k] \\ \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \rho \omega}{\partial x_i} &= \alpha \rho \gamma P_k \frac{\omega}{k} - \beta_\omega \rho \omega^2 + \nabla [(\mu + \sigma \gamma \mu_t) \nabla \omega] \\ \mu_t \Rightarrow \gamma \mu_t \quad , \quad \rho P_k \Rightarrow \rho \gamma P_k &= \gamma \left[ \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial u_j} - \frac{\partial u_j}{\partial u_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial u_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right] \\ \text{avec } \alpha &= \frac{5}{9} \quad , \quad \beta_k = 0.09 \quad , \quad \beta_\omega = \frac{3}{40} \quad , \quad \text{and } \sigma = \sigma^* = 1/2 \end{aligned}$$

#### 5.2.2.1 Influence du point de transition sur la longueur du bulbe

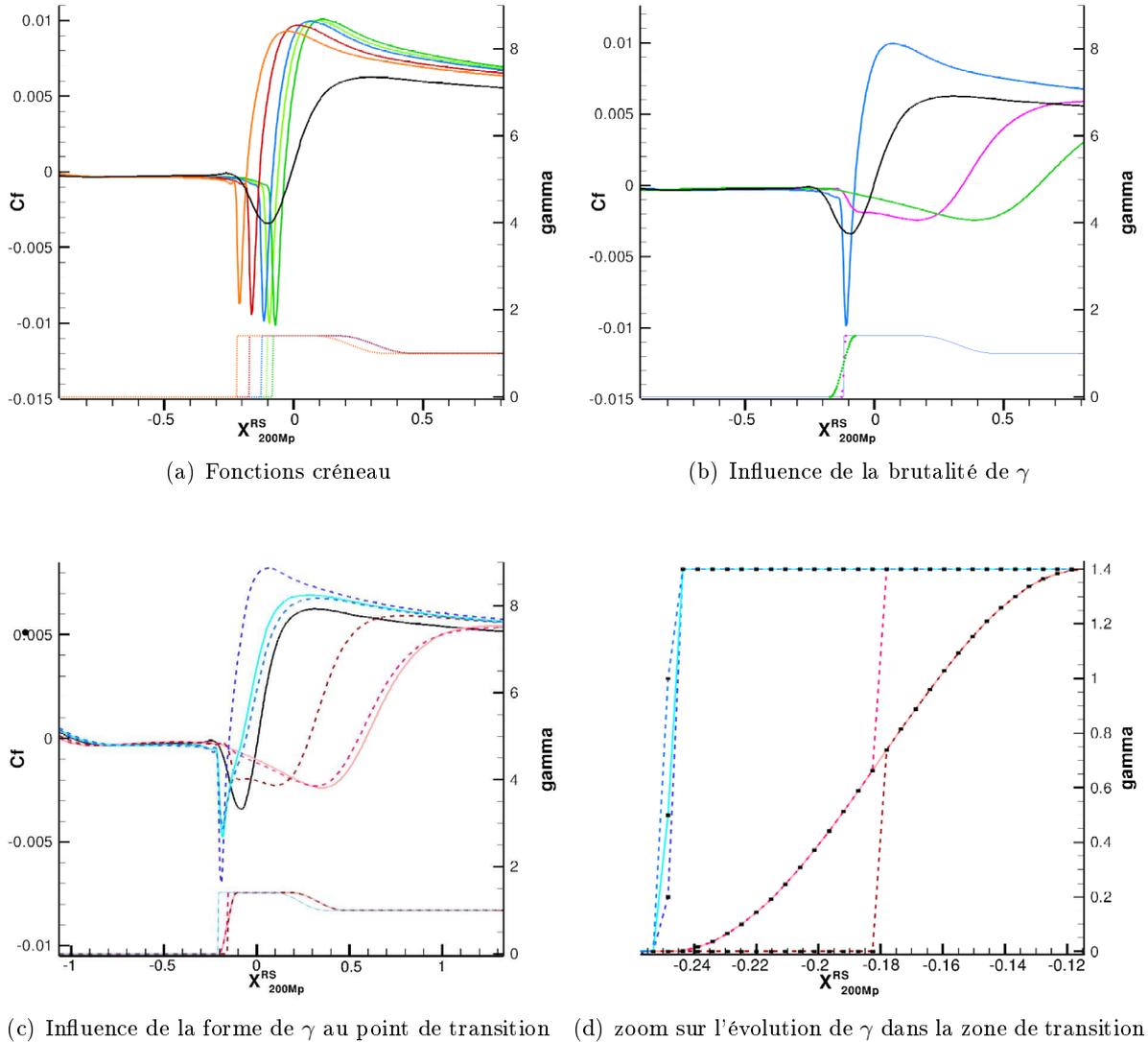
Des tests sur l'influence de la forme et de la position de la fonction  $\gamma$  croissante entre  $X^{t1}$  et  $X^{t2}$  (voir fig.5.1) ont été réalisés en utilisant une pondération de type [ $\gamma \mu_t$  ;  $\gamma P_k$ ] sur le modèle  $k - \omega$  de Wilcox, leurs résultats sont présentés figures 5.6.

Avant de débiter l'analyse de l'influence de la brutalité de la fonction et de la position de la transition, on peut déjà constater à la vue de la figure 5.6 que, bien que le pic de frottement du recollement soit mal reproduit, les valeurs absolues du frottement en aval sont relativement satisfaisantes bien que légèrement surestimées.

L'analyse de la figure 5.6 montre en outre les propriétés suivantes :

- La figure 5.6(a) montre que l'utilisation d'une fonction créneau entraîne un recollement trop rapide,
- La figure 5.6(b) montre que l'utilisation d'une fonction lissée retarde le recollement bien au-delà de la position à laquelle la fonction  $\gamma$  atteint son maximum
- La figure 5.6(c) montre qu'une fonction  $\gamma$  qui croît sur 2 ou 3 mailles seulement donne les meilleurs résultats,
- La distance  $X_R - X_T$  entre les points de transition et recollement est inchangé par translation de  $\gamma$  (figure 5.6(a)),
- Le taux d'accroissement de  $\gamma$  sur les premières mailles de la région de transition semble être un paramètre très influant sur la dynamique de l'écoulement (figures 5.6(c) et 5.6(d)).

## 5.2. ÉVALUATION DES MODÈLES DE TURBULENCE



**FIGURE 5.6:**  $k - \omega$  Wilcox : influence du point de transition sur la longueur du bulbe. (frottement dans la partie supérieure des graphiques (a), (b) et (c); fonction de transition dans la partie inférieure)

### 5.2.2.2 Influence de la technique de pondération par $\gamma$

Les figures 5.7, 5.8 et 5.9 présentent les résultats de calculs utilisant le modèle de Wilcox pour chacune des trois méthodes de pondération, et ce pour deux fonctions  $\gamma$ , l'une  $\gamma_L^{1.4}$  (smooth) culminant à 1.4 et la seconde  $\gamma^{1.0}$  ne dépassant pas la valeur 1.

Il semble qu'un recollement anticipé aboutisse à un sur-épaississement moins marqué. La comparaison des calculs montre aussi clairement que le recollement est plus violent quand la fonction de transition est appliquée sous forme  $[\gamma \mu_t; \gamma P_k]$  par rapport au cas  $[\mu_t; \gamma P_k]$

À première vue, il apparaît tout de suite que la seconde méthode de pondération appliquée à  $\mu_t$  seulement  $[\gamma \mu_t; P_k]$  donne les moins bons résultats : recollement retardé, trop de frottement, surévaluation du sur-épaississement au recollement, mauvais taux d'épaississement.

La première méthode consistant à pondérer seulement le terme de production  $P_k$   $[\mu_t; \gamma P_k]$  donne des résultats indépendants de la valeur maximale (1.0 ou 1.4) atteinte par  $\gamma$ . Cette méthode de pondération pour un point de transition identique pour  $\gamma_L^{1.0}$  et  $\gamma_L^{1.4}$  mène à un recollement trop

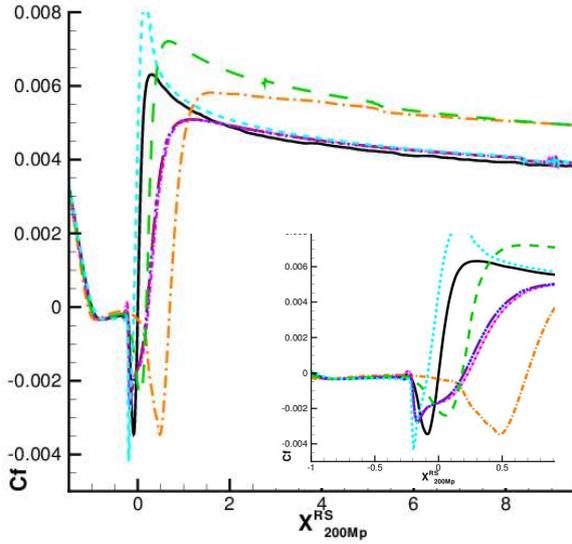


FIGURE 5.7: Coefficient de frottement

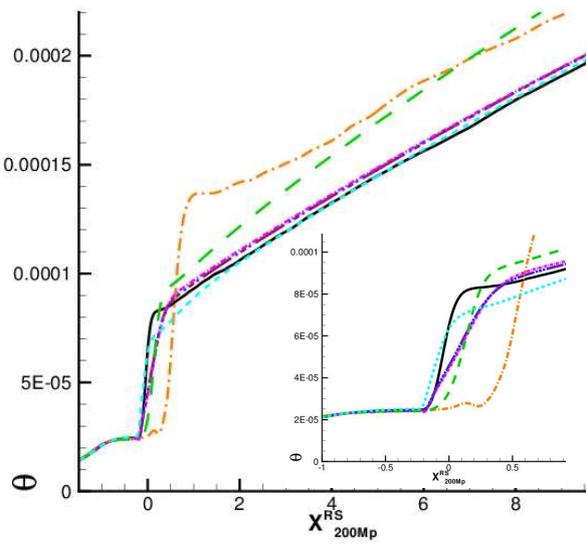


FIGURE 5.8: Épaisseur de quantité de mouvement

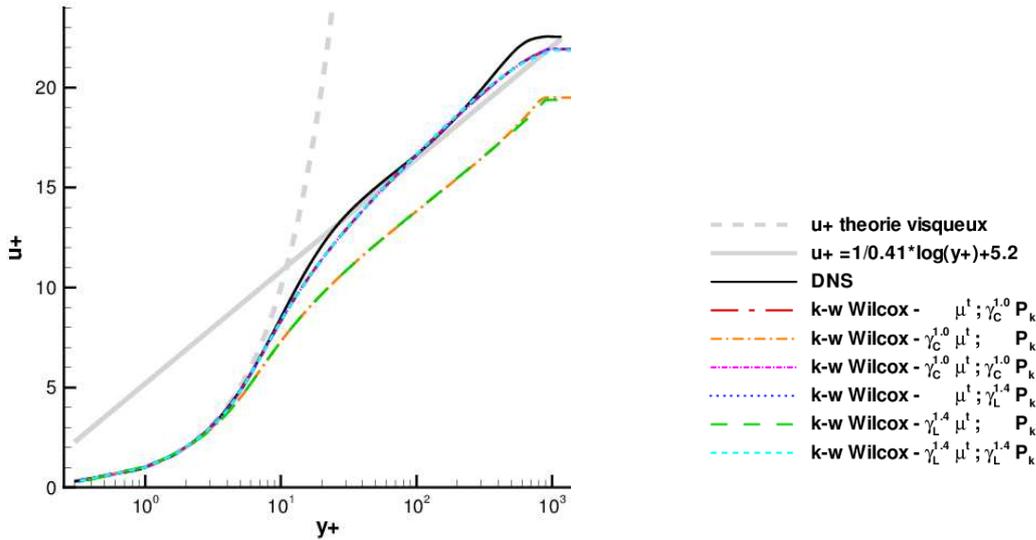


FIGURE 5.9: Profil vertical de la composante longitudinale de la vitesse en  $X^{RS} = 7$

tardif, une sous-évaluation du pic de frottement et un sur-épaississement correct bien qu'assez lent. Cependant, malgré ces erreurs de modélisation dans la zone de transition, l'écoulement turbulent se développant en aval reste très correct.

Enfin, la troisième méthode apporte deux informations principales : D'une part le fait que le cas  $[\gamma_1 \mu_t ; \gamma_1 P_k]$  donne un résultat quasi identique aux cas  $[\mu_t ; \gamma P_k]$  indique que la pondération supplémentaire de  $\mu_t$  est inutile si la valeur de  $\gamma$  ne dépasse pas la valeur 1, ce qui confirme que la pondération des termes de production du modèle  $k-\omega$  a bien l'effet escompté. D'autre part, la pondération supplémentaire de  $\mu_t$  par une fonction  $\gamma$  dépassant la valeur 1 a pour effet d'accélérer le recollement, de produire un pic de frottement plus élevé, mais un pic de sur-épaississement plus faible. La fonction lissée  $\gamma^{1.4}$  employée ici semble même trop forte pour reproduire de façon idéale les résultats DNS.

Pour résumer, il apparaît que :

## 5.2. ÉVALUATION DES MODÈLES DE TURBULENCE

- la pondération des termes de production du modèle  $k - \omega$  est nécessaire.
- la valeur maximale atteinte (dans l'intervalle 1.0 - 1.4) par le  $\gamma$  pondérant les termes de production du modèle  $k - \omega$  n'a pas d'influence.
- la pondération de  $\mu_t$  par  $\gamma$  a un effet si  $\gamma$  dépasse la valeur 1 dans la zone de transition.
- la pondération de  $\mu_t$  par  $\gamma > 1$  booste la transition et améliore globalement les résultats : recollement plus rapide, pic de frottement plus élevé, mais cette méthode induit malheureusement un pic de sur-épaissement plus faible.

### 5.2.2.3 Influence de la correction SST

L'ajout de la correction SST au modèle de Wilcox a pour premier effet de retarder le recollement. Effectivement, avec la correction SST la fonction créneau n'est même pas suffisante pour retrouver le point de recollement de la DNS.

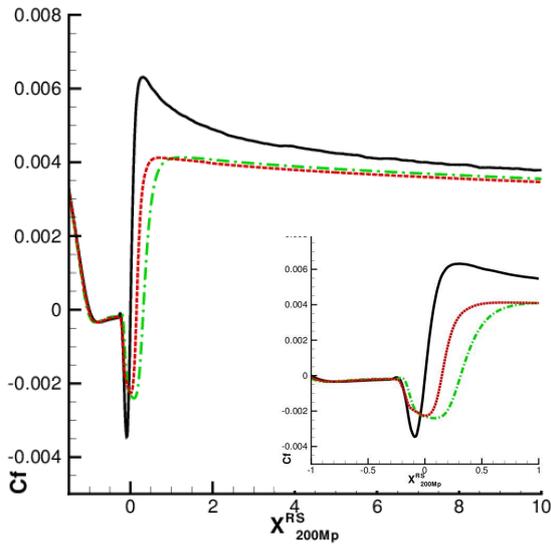


FIGURE 5.10: Coefficient de frottement

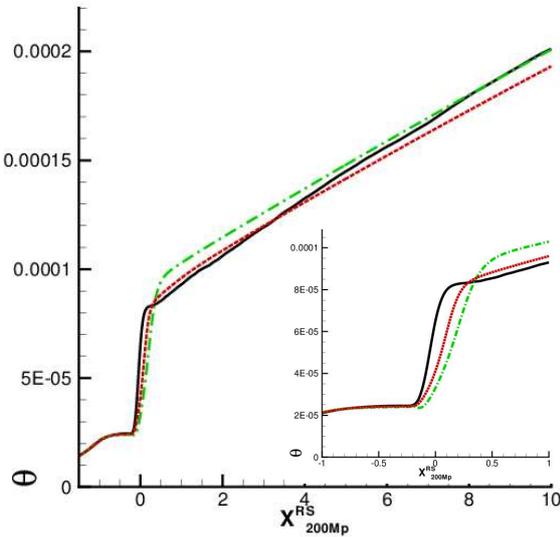


FIGURE 5.11: Épaisseur de quantité de mouvement

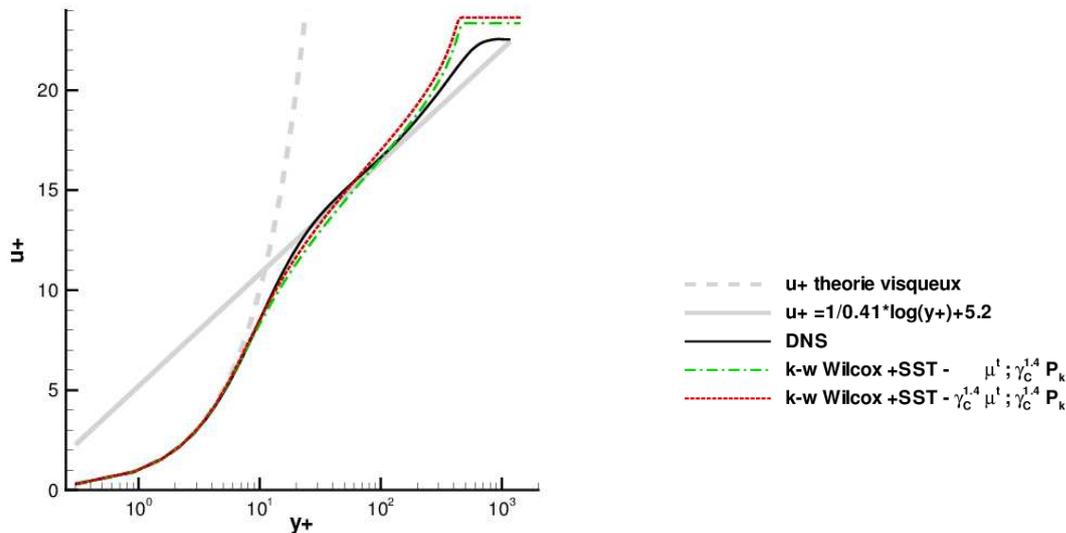


FIGURE 5.12: Profil vertical de la composante longitudinale de la vitesse en  $X^{RS} = 7$

Comme on peut s'y attendre, on observe qu'une pondération simple du terme de production de  $k$  conduit à un recollement plus tardif. Le pic de frottement est largement sous-estimé, en revanche le sur-épaississement au recollement est légèrement sous-estimé.

En pondérant aussi  $\mu_t$  en plus du terme de production  $P_k$ , on observe un recollement plus avancé, même si cela reste encore insuffisant vis-à-vis de la DNS.

La correction SST proposée par Menter est étudiée pour limiter la sur-estimation des tensions de Reynolds par le modèle  $k - \omega$  en présence d'un gradient de pression adverse sur une couche limite turbulente. On peut constater au vu des résultats que cette limitation des tensions de Reynolds qui modère la turbulence de l'écoulement retarde la transition et n'est donc pas adaptée à l'écoulement de BDL transitionnel considéré dans cette étude. En effet quelle que soit la dynamique de la transition, ce modèle présente dans la région turbulente un taux d'épaississement trop faible, et sous-estime le frottement ainsi que les fluctuations turbulentes.

#### 5.2.2.4 Conclusions relatives au modèle $k - \omega$ de Wilcox

Le modèle  $k - \omega$  de Wilcox utilisant la pondération de  $\mu_t$  et  $P_k$  par la fonction de transition  $\gamma_L^{1.4}$  au lieu d'une fonction standard culminant à la valeur 1.0 permet d'obtenir une modélisation très satisfaisante de la position du recollement, ainsi que du frottement et de l'épaississement dans la zone turbulente. La pondération du terme de production de  $k$  s'avère indispensable, en revanche le modèle est peu sensible à la valeur maximale atteinte par la fonction de transition pondérant  $P_k$ . Le modèle de Wilcox est en revanche extrêmement sensible à la forme plus ou moins abrupte et à la valeur maximale de la fonction de transition appliquée en pondération de  $\mu_t$ . L'ensemble des observations faites sur les différentes versions du modèle  $k - \omega$  de Wilcox montre très clairement que l'amplitude du pic de frottement est d'autant plus grande et le sur-épaississement est d'autant plus faible que le recollement se produit tôt.

La correction SST n'améliore pas la modélisation de l'écoulement considéré dans cette étude, elle conduit à une sous-estimation de la turbulence qui retarde le recollement et dégrade le frottement ainsi que le taux d'épaississement de la couche limite turbulente.

### 5.2.3 $k - \omega$ Kok avec et sans correction SST

Le modèle TNT est lui aussi censé résoudre les problèmes de sensibilité du  $k - \omega$  aux valeurs de  $\omega$  dans la région externe de la couche limite par l'ajout d'un terme de diffusion croisée manquant dans la formulation du modèle de Wilcox. Son utilisation pour le calcul de BDL transitionnel sur plaque plane mis en place dans cette étude conduit aux résultats présentés figures 5.13, 5.14 et 5.15.

Bien que censé résoudre le problème de dépendance du modèle de Wilcox aux valeurs externes de  $\omega$ , le modèle  $k - \omega$  de Kok conduit à une sous-estimation du frottement et du taux d'épaissement dans la région turbulente. La correction SST n'apporte ici encore aucune amélioration.

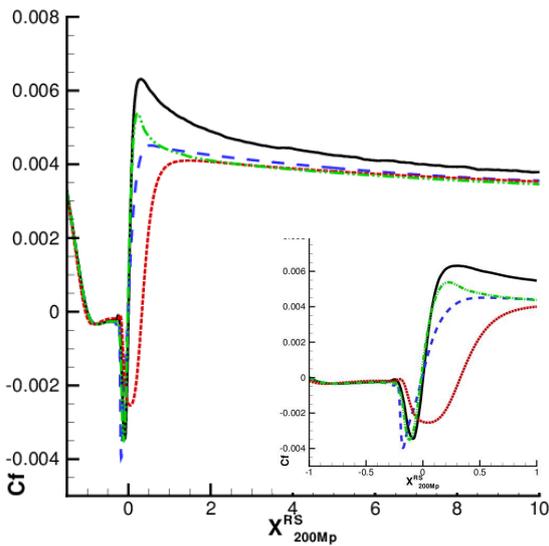


FIGURE 5.13: Coefficient de frottement

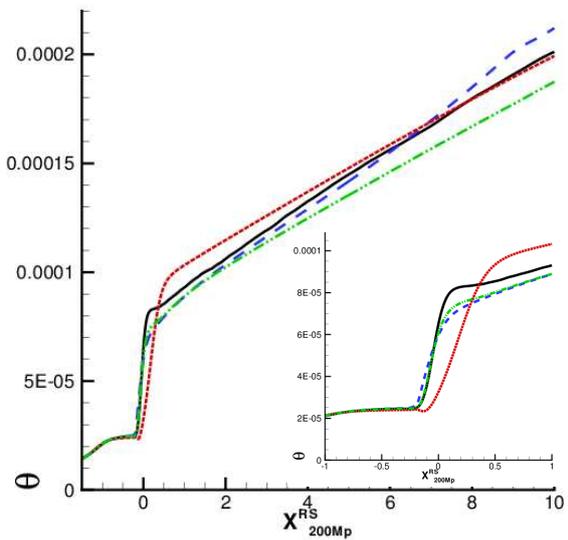


FIGURE 5.14: Épaisseur de quantité de mouvement

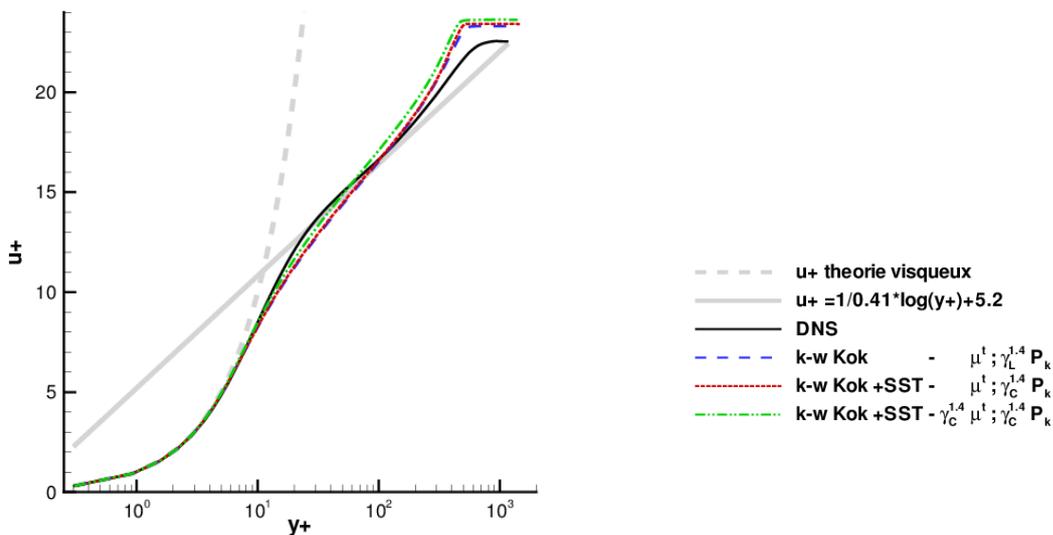


FIGURE 5.15: Profil vertical de la composante longitudinale de la vitesse en  $X^{RS} = 7$

### 5.2.4 $k - \varepsilon$ Launder et Sharma

Le modèle  $k - \varepsilon$  de Launder et Sharma a été utilisé avec les mêmes fonctions de transition que celles appliquées au modèle  $k - \omega$ , en pondérant la variable  $\mu_t$ . Un exemple de ces résultats est présenté sur les figures 5.16, 5.17 et 5.18. On peut observer que ce modèle se montre totalement insensible aux fonctions de transition qui ont été utilisées. Les modèles  $k - \varepsilon$  transitionnent naturellement, mais avec une position de transition généralement trop tardive. Il est probable que le modèle  $k - \varepsilon$  de Launder et Sharma soit insensible à toute fonction de transition qui agisse en amont de la position à laquelle le modèle transitionne naturellement.

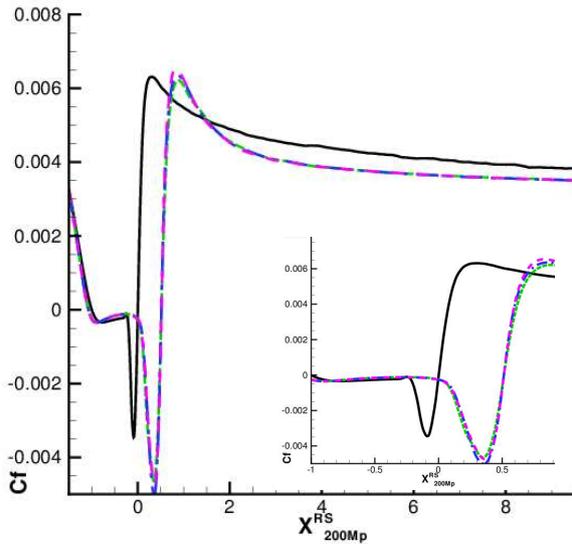


FIGURE 5.16: Coefficient de frottement

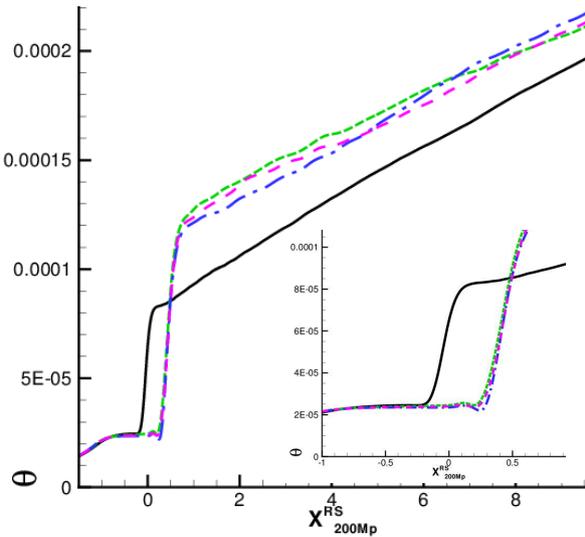


FIGURE 5.17: Épaisseur de quantité de mouvement

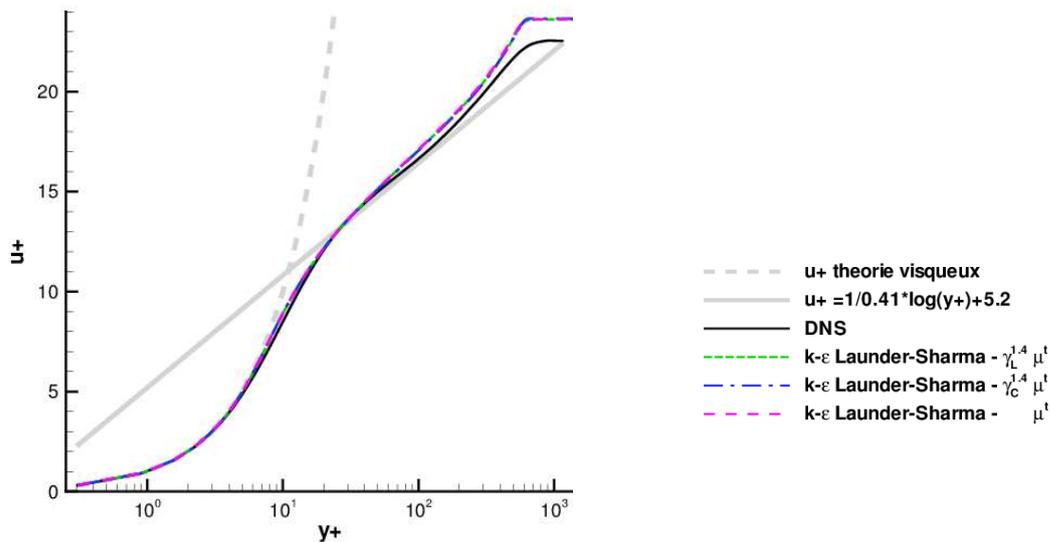


FIGURE 5.18: Profil vertical de la composante longitudinale de la vitesse en  $X^{RS} = 7$

### 5.2.5 Conclusions sur les modèles de turbulence et de transition testés

Le modèle  $k - \omega$  de Wilcox utilisant la pondération de  $\mu_t$  et  $P_k$  par la fonction de transition  $\gamma_L^{1.4}$  a permis d'obtenir une modélisation très satisfaisante de la position du recollement, ainsi que du frottement et de l'épaississement dans la zone turbulente. L'ajout de la correction SST ou du terme de diffusion croisée (modèle de Kok) a conduit à une détérioration du frottement et du taux d'épaississement de la couche limite turbulente.

Le modèle  $k - \varepsilon$  de Launder et Sharma a été évalué avec différentes fonctions de transition et a montré un retard important du recollement et une forte indépendance aux fonctions de transition utilisées. Ces résultats sont en accord avec l'étude de Huang et Bradshaw [47] qui ont mis en évidence la supériorité des modèles  $k - \omega$  vis-à-vis des modèles  $k - \varepsilon$  en présence de gradients de pression positifs. En effet, les modèles  $k - \omega$  présentent une dissipation plus importante dans les régions d'intense production, réduisant ainsi la turbulence et le transfert de quantité de mouvement vers la paroi, ce qui aboutit à une meilleure modélisation de la séparation.

Pour ces raisons, le modèle  $k - \omega$  de Wilcox s'est avéré le plus approprié à la poursuite de l'étude. Ce modèle présente bien des défauts mais il a donné les résultats les plus proches de la DNS et s'est montré être le plus stable numériquement pour le calcul de l'écoulement considéré dans cette étude. Bien que les conditions des calculs RANS aient été reproduites le plus fidèlement possible à partir de la DNS (et donc l'estimation de  $\omega$  dans la zone externe), il convient de garder à l'esprit que le modèle  $k - \omega$  de Wilcox comporte bien des défauts, principalement sa forte dépendance aux valeurs externes de  $\omega$ , et donc de considérer de façon relative son succès vis-à-vis des autres modèles testés.

Concernant l'origine des différences observées sur le coefficient de frottement en fonction des fonctions de transitions utilisées, on notera que l'influence sur les calculs de la distance  $X^{t2} - X^{t1}$  et de la forme  $f(x)$  de la fonction  $\gamma$  entre ces deux abscisses est forcément dépendante de la discrétisation.

### 5.3 Analyse de la modélisation RANS dans la couche limite transitionnelle

L'idée maîtresse de cette section est de tenter d'évaluer et analyser un modèle RANS dans la couche limite transitionnelle. Le choix du modèle et de la fonction de transition découle de l'étude faite dans la section précédente, c'est celui du "meilleur" modèle avec la "meilleure" fonction de transition : le modèle  $k - \omega$  de Wilcox utilisant une fonction de transition  $\gamma_L^{1.4}$  en pondération de  $\mu_t$  et  $P_k$ . Les résultats issus du couplage de ces modèles de turbulence et transition ont été présentés au paragraphe 5.2.2.2 (courbes cyan figures 5.7, 5.8 et 5.9).

Les bilans de l'équation de conservation de  $k$  modélisée seront analysés et comparés aux bilans DNS. Le lien sera fait avec les différences entre les profils DNS et RANS de  $k$  et  $\varepsilon$  et les profils verticaux des tensions de Reynolds modélisées seront analysés. Enfin, l'influence des tensions de Reynolds modélisées ainsi que celle de  $k$  dans les bilans des équations de conservation de la quantité de mouvement seront discutées.

#### 5.3.1 Quelques rappels sur la modélisation des équations de Navier Stokes

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est exprimée par la seconde équation du système 2.1 ; elle devient pour la composante  $\rho u_1$ , dans le cas d'un écoulement statistiquement bidimensionnel :

$$\frac{\partial \widetilde{\rho u_1}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{\rho u_1 u_k}}{\partial x_k} + \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_1} - \frac{\partial \widetilde{\tau_{11}^*}}{\partial x_1} - \frac{\partial \widetilde{\tau_{12}^*}}{\partial x_2} - \frac{\partial \widetilde{\tau_{11}^R}}{\partial x_1} - \frac{\partial \widetilde{\tau_{12}^R}}{\partial x_2} = 0 \quad (5.2)$$

et pour la composante  $\rho u_2$  dans le cas d'un écoulement statistiquement bidimensionnel :

$$\frac{\partial \widetilde{\rho u_2}}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{\rho u_2 u_k}}{\partial x_k} + \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_2} - \frac{\partial \widetilde{\tau_{12}^*}}{\partial x_1} - \frac{\partial \widetilde{\tau_{22}^*}}{\partial x_2} - \frac{\partial \widetilde{\tau_{12}^R}}{\partial x_1} - \frac{\partial \widetilde{\tau_{22}^R}}{\partial x_2} = 0 \quad (5.3)$$

La modélisation du tenseur des contraintes de Reynolds exprimée Éq.4.10 repose sur l'approximation de Boussinesq du concept de viscosité de la turbulence  $\mu_t$ .

Rappelons que la viscosité de la turbulence modélisée est obtenue à l'aide de la relation de modélisation suivante (calculable pour la DNS et le RANS) qui fait intervenir la dissipation de l'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon$  :

$$\mu^t = 0.09 \bar{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5.4)$$

#### 5.3.2 Analyse du modèle $k - \omega$ de Wilcox

Les figures 5.19, 5.20, 5.21, 5.22 et 5.23 présentent l'évolution longitudinale de profils verticaux tracés pour la base de données DNS d'une part (traits continus), et pour les résultats RANS avec le modèle  $k - \omega$  de Wilcox d'autre part (traits pointillés). Ces profils verticaux sont ceux des bilans de l'équation de conservation de  $k$  (figure 5.19), de  $k^2$  et  $\varepsilon$  (figure 5.20), des tensions de Reynolds (figure 5.21) et des bilans de l'équation de conservation de  $\rho u$  (figure 5.22) et  $\rho v$  (figure 5.23).

##### 5.3.2.1 Évolution longitudinale des bilans de l'équation de conservation de $k$

L'analyse de la figure 5.19 montre que, dans la région turbulente, la dissipation tend à la paroi vers une valeur nulle pour le RANS et non-nulle pour la DNS. Wilcox [129] explique que le modèle  $k - \omega$  induit un accroissement vertical de l'énergie cinétique turbulente  $k$  proportionnel à  $v'^2$  en proche paroi, ce qui correspond à un accroissement vertical de  $k$  proportionnel à  $y^{3.23}$ , alors que la DNS indique un accroissement vertical de  $k$  selon  $y^2$ . Dans le modèle, la dissipation

est proportionnelle à l'énergie cinétique turbulente :  $\varepsilon \propto \omega k$  et la dissipation spécifique croît verticalement selon  $\omega \propto y^{-2}$ . Pour cette raison, la dissipation  $\varepsilon \propto \omega k$  du modèle RANS s'annule à la paroi alors que celle de la DNS tend vers une valeur finie non-nulle.

Les trois premières sous-figures : 5.19(a) (b) et (c) montrent que les bilans de  $k$  du calcul RANS sont négligeables par rapport aux bilans de la DNS, jusqu'en  $X^{RS} = -0.2$  inclus. Cela s'explique aisément par la position tardive ( $X^{RS} \simeq -0.21$ ) à partir de laquelle la fonction de transition du modèle RANS n'est plus nulle et donc à partir de laquelle les bilans commencent à croître. Un dixième de longueur de bulbe avant le recollement, figure 5.19(d), les bilans calculés par le modèle RANS ont atteint une amplitude comparable à celle des bilans de la base de données DNS. Les bilans du RANS demeurent néanmoins globalement plus faibles que ceux de la DNS, et ce sur toute l'étendue longitudinale de la couche limite (figures (d) à (i)).

Une comparaison qualitative permet de mettre en évidence un certain nombre de différences entre les bilans RANS et DNS :

- En premier lieu, on peut remarquer l'importance du terme DNS de diffusion par la pression dans la région de transition (figures (d) à (f) principalement), alors que ce terme n'est pas calculé par le modèle RANS, car supposé négligeable dans les hypothèses de modélisation.
- En second lieu, on remarque les valeurs importantes en paroi de la dissipation et de la diffusion visqueuse issues de la DNS, alors que les hypothèses RANS du modèle  $k - \omega$  conduisent à annuler ces deux termes à la paroi.
- La diffusion visqueuse modélisée par le RANS est bien moins importante que celle de la DNS sur toute l'étendue verticale de la couche limite et quelle que soit la position longitudinale.
- La diffusion turbulente modélisée par le RANS est bien plus faible que celle de la DNS dans la région de cisaillement.
- Le pic de convection du RANS est plus proche de la paroi que celui de la DNS.
- Dans la région turbulente (figures (g) (h) et (i)), le pic de production modélisée par le RANS est comparable en amplitude au pic de la dissipation modélisée. Ces deux pics se situent tous deux dans la zone de cisaillement. En revanche, la base de données DNS indique que le pic de production de la zone de cisaillement devrait être plus important que la valeur de la dissipation à la même distance de la paroi.

Pour résumer, le modèle RANS calcule une dynamique de l'évolution des bilans qui diffère des résultats DNS par le fait que les hypothèses de modélisation conduisent à ce que la production et la dissipation aient lieu au même endroit de la couche limite, c'est-à-dire dans la zone de cisaillement. Par conséquent les différents termes de diffusion modélisés sont beaucoup plus faibles qu'ils ne devraient. La base de données DNS indique que l'essentiel de la dissipation a lieu en proche paroi, d'où l'importance des termes de diffusion qui transportent l'énergie cinétique turbulente  $k$  depuis son lieu de production (couche de cisaillement) vers son lieu de dissipation (proche paroi). Par ailleurs la DNS indique une production plus importante que celle modélisée par le RANS puisque l'énergie cinétique turbulente de la DNS est plus dissipée que celle modélisée par le RANS ( $\int_0^\delta |\varepsilon_{DNS}| dy > \int_0^\delta |\varepsilon_{RANS}| dy$ ).

Enfin, on peut rappeler la différence d'épaisseur de la couche limite dans la zone de transition observée précédemment figure 5.8 pour le profil cyan : en raison d'un sur-épaississement plus brutal pour la DNS que pour le RANS, dans la région de transition la couche limite calculée par la DNS est plus épaisse que celle modélisée par le RANS, ce qui apparaît aussi clairement sur les profils verticaux de vitesse de la figure 5.19. Par conséquent, les bilans de l'équation de conservation de l'énergie cinétique turbulente modélisés par le RANS sont moins étendus dans la direction normale à la paroi que les bilans calculés par la DNS.

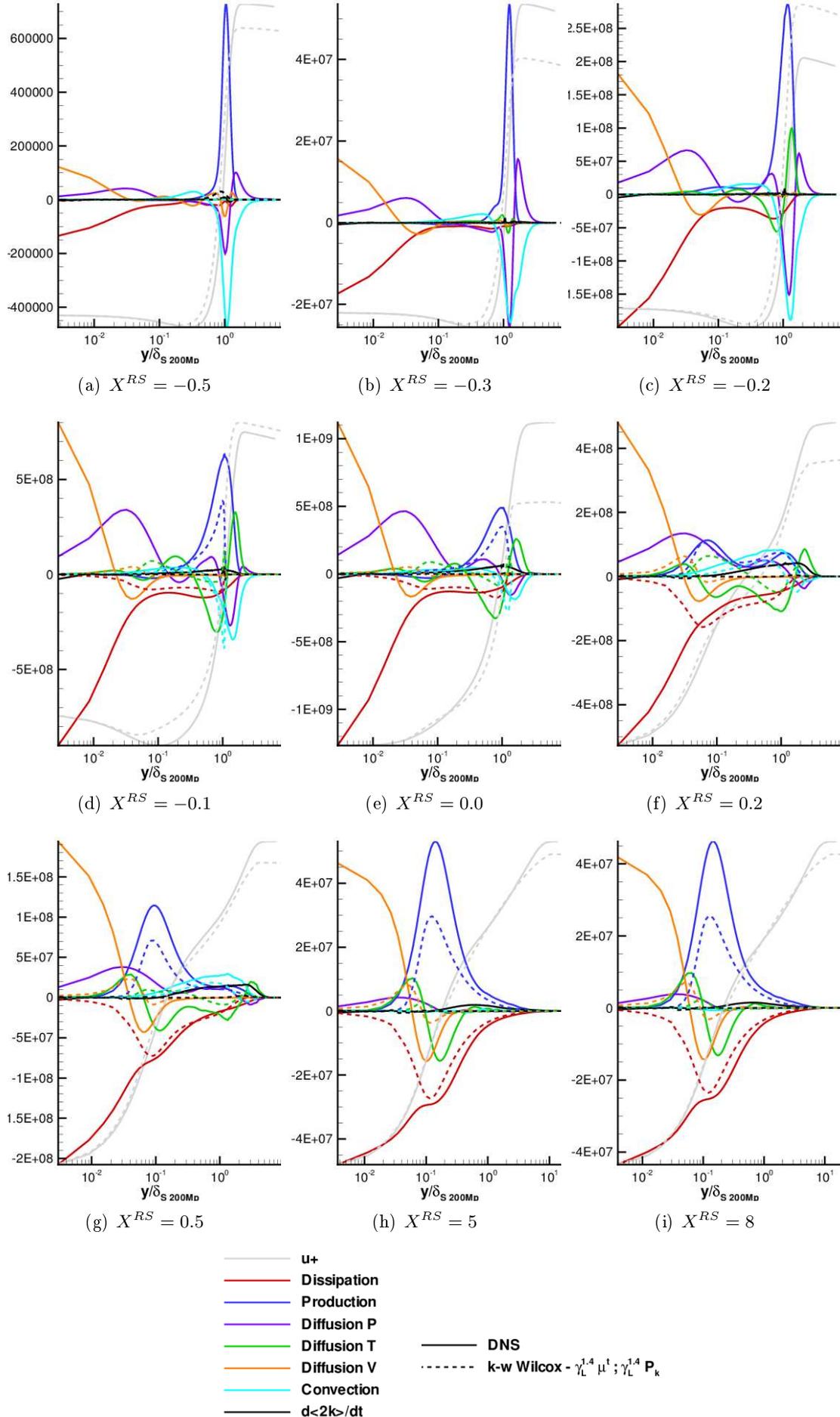


FIGURE 5.19: Bilans de l'équation de conservation de  $k$

### 5.3.2.2 Évolution longitudinale de $k^2$ et $\varepsilon$

Le groupe de figures 5.20 présente l'évolution longitudinale des profils verticaux de  $k^2$  et  $\varepsilon$ . Comme on peut s'y attendre au vu des bilans issus du RANS (figure 5.19) qui sont nuls jusqu'en  $X^{RS} = -0.2$  inclus, on constate figures 5.20(a) à (c) que  $k^2$  et  $\varepsilon$  sont nuls jusqu'en  $X^{RS} = -0.2$  inclus. Un dixième de longueur de bulbe avant le recollement, figure 5.20(d), on observe que le pic d'énergie cinétique turbulente modélisé par le modèle RANS est moitié moindre que celui prévu par la DNS, vraisemblablement en raison du rapport production sur dissipation modélisé qui est inférieur à celui de la DNS. On observe aussi qu'à chacune des positions à partir de  $X^{RS} = -0.1$ , le pic de  $k^2$  modélisé par le RANS est plus étroit que celui qui est prévu par la DNS, ce qui s'explique aisément par l'absence de dissipation à la paroi et par la faiblesse conséquente des termes de diffusion. L'écart d'amplitude du pic de  $k^2$  entre le RANS et la DNS diminue progressivement : au fur et à mesure de la transition, l'amplitude du pic de production croît plus vite que celui de la DNS (figures (d) et (e)), puis au-delà du recollement décroît plus vite que celui de la DNS. Cela s'explique par le faible niveau de dissipation calculé par le modèle RANS. L'écart d'amplitude du pic de  $k^2$  entre le RANS et la DNS réapparaît dans la couche limite turbulente établie (figures (h) et (i)) et se justifie pleinement par les écarts de production et de dissipation de  $k$  mentionnés précédemment. Par ailleurs, on observe que dans la région de transition, l'épaisseur de couche limite sous estimée par le modèle RANS implique que les profils verticaux de  $k^2$  et  $\varepsilon$  modélisés s'annulent plus proche de la paroi que ceux prévus par la DNS.

### 5.3.2.3 Évolution longitudinale des tensions de Reynolds

Le groupe de figures 5.21 présente l'évolution longitudinale des profils verticaux des tensions de Reynolds exactes  $\tilde{\tau}_{ij}^R = -\bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''}$  de la DNS qui sont comparés aux tensions de Reynolds  $\tilde{\tau}_{ij}^R{}_{k\varepsilon} = \bar{\rho} \nu_{k\varepsilon}^t \tilde{S}_{ij} - 2/3 \bar{\rho} k \delta_{ij} = 0.09 \bar{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon} \tilde{S}_{ij} - 2/3 \bar{\rho} k \delta_{ij}$  modélisées par le RANS. Étant donné le branchement en  $X^{RS} = -0.21$  de la fonction de transition mentionné précédemment, il semble normal d'observer que les tensions de Reynolds modélisées sont nulles jusqu'en  $X^{RS} = -0.2$  inclus. Au point de recollement, figure 5.21(e), on peut constater la grande ressemblance entre les profils DNS et RANS des tensions croisées  $\tau_{12}^R$ , mis à part le fait que les profils verticaux des tensions de Reynolds modélisées s'annulent plus proche de la paroi que ceux prévus par la DNS en raison vraisemblablement de la sous-estimation par le modèle RANS de l'épaisseur de couche limite dans la région de transition. Le profil vertical de la tension croisée  $\tau_{12}^R$  modélisée par le RANS diminue d'amplitude moins rapidement que celui de la DNS dans la région qui suit de peu le recollement, figure 5.21(f), mais atteint finalement dans la région turbulente la même amplitude que le profil DNS. En revanche, la tension croisée  $\tau_{12}^R$  présente peu après le recollement un plateau trop marqué entre la sous-couche visqueuse et la zone logarithmique qui aura des conséquences évidentes sur l'équation bilan de  $\rho u$ .

Les profils modélisés des tensions  $\tau_{11}^R$  et  $\tau_{22}^R$  diffèrent considérablement de ceux prévus par la DNS. Même dans la région turbulente, les profils des tensions  $\tau_{11}^R$  et  $\tau_{22}^R$  modélisées sont identiques et ne ressemblent à aucun des profils  $\tau_{11}^R$  ni  $\tau_{22}^R$  de la DNS.

Comme on le verra dans les paragraphes suivants, l'erreur de modélisation de  $\tau_{11}^R$  a peu d'importance car l'implication de ce terme est très faible dans l'équation bilan de  $\rho u$ . En revanche il n'en va pas de même de  $\tau_{22}^R$  dont l'influence est essentielle dans l'équation bilan de  $\rho v$ .

La tension de Reynolds  $\tau_{22}^R$  modélisée croît plus rapidement que celle prévue par la DNS dans la direction normale à la paroi, cette différence de taux d'accroissement vertical augmentant au fur et à mesure du développement de la couche limite turbulente. Dans la région de transition, la tension de Reynolds  $\tau_{22}^R$  modélisée croît plus rapidement que celle prévue par la DNS dans la direction longitudinale également, puisque le profil de  $\tau_{22}^R$  modélisé est inférieur en valeur absolue à celui de la DNS en  $X^{RS} = -0.1$  et supérieur à celui de la DNS en  $X^{RS} = 0.2$ .

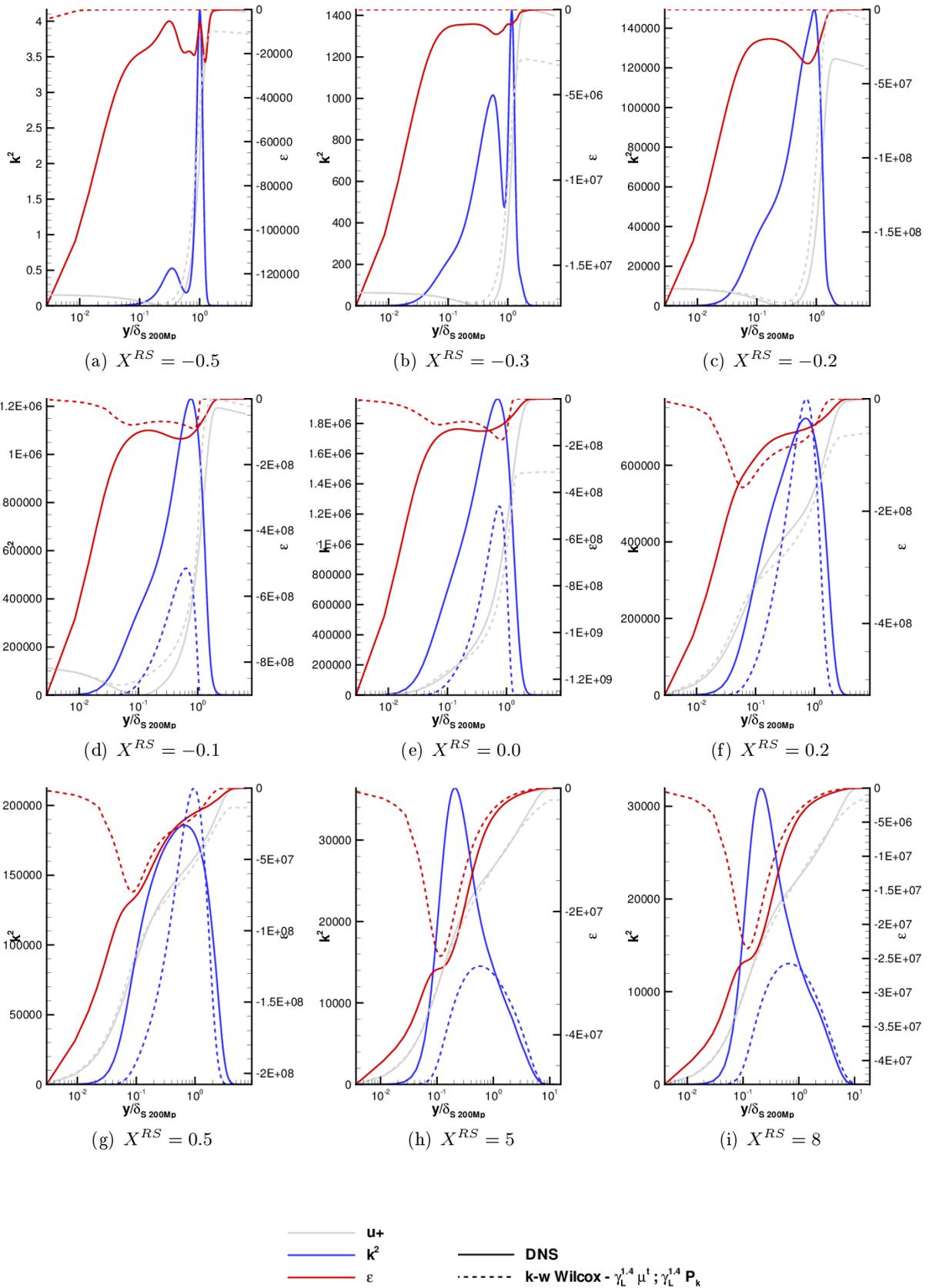


FIGURE 5.20: Profils verticaux de  $k^2$  et  $\epsilon$

5.3. ANALYSE DE LA MODÉLISATION RANS DANS LA COUCHE LIMITE TRANSITIONNELLE

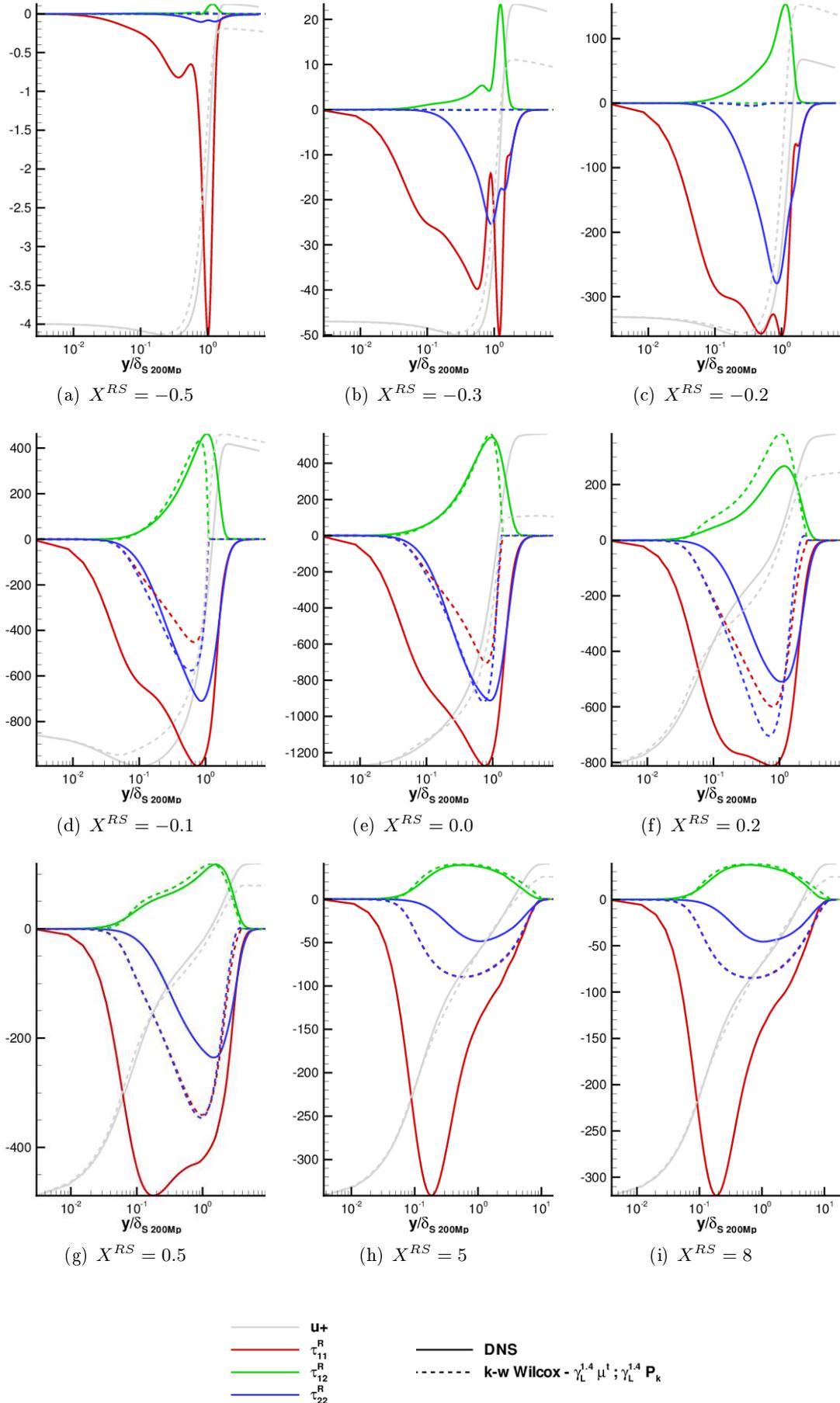


FIGURE 5.21: Profils verticaux des tensions de Reynolds

### 5.3.2.4 Évolution longitudinale des bilans de l'équation de conservation de $\rho u$

Le groupe de figures 5.22 présente l'évolution longitudinale des bilans de l'équation de conservation de  $\rho u$ . En  $X^{RS} = -0.5$ , figure 5.22(a), les bilans DNS et RANS sont très similaires, vraisemblablement en raison du caractère encore fortement laminaire de la couche limite DNS. En  $X^{RS} = -0.2$ , figure 5.22(c), les bilans DNS sont fortement modifiés par le processus de transition qui est en cours, avec notamment l'apparition des deux termes impliquant les composantes du tenseur de Reynolds  $-d(\tau_{11}^R)/dx$  et  $-d(\tau_{12}^R)/dy$  qui sont alors prépondérants. En raison du branchement tardif de la fonction de transition du modèle RANS, les bilans RANS ne montrent l'apparition de ces deux termes qu'à partir de  $X^{RS} = -0.1$ , figure 5.22(d). À partir de cette position longitudinale, les différences les plus flagrantes entre les bilans DNS et RANS, visibles notamment dans la région turbulente établie, concernent les termes prépondérants  $-d(\tau_{12}^R)/dy$  et  $-d(\tau_{12})/dy$ . Cette erreur sur les bilans est à relier au plateau trop marqué de  $\tau_{12}$  observé précédemment entre la sous-couche visqueuse et la zone logarithmique.

### 5.3.2.5 Évolution longitudinale des bilans de l'équation de conservation de $\rho v$

Le groupe de figures 5.23 présente l'évolution longitudinale des bilans de l'équation de conservation de  $\rho v$ .

En  $X^{RS} = -0.5$ , figure 5.23(a), les bilans DNS et RANS sont très similaires, vraisemblablement en raison du caractère encore fortement laminaire de la couche limite DNS. Dès  $X^{RS} = -0.3$ , figure 5.23(b), les bilans DNS sont fortement modifiés par le processus de transition qui est en cours, avec notamment l'apparition dans la région interne de la couche limite de la diffusion turbulente dans la direction verticale  $-d(\tau_{22}^R)/dy$  ainsi que la diffusion par la pression avec le terme  $d(p)/dy$ . En raison du branchement tardif de la fonction de transition du modèle RANS, les bilans RANS ne montrent l'apparition de ces deux termes qu'à partir de  $X^{RS} = -0.1$ , figure 5.23(d). À partir de cette position longitudinale, les termes  $-d(\tau_{22}^R)/dy$  et  $d(p)/dy$  demeurent prépondérants dans les bilans DNS et RANS, et diminuent au fur et à mesure du développement de la couche limite turbulente vers l'aval. Les maximums de chacun de ces deux termes se trouvent plus proches de la paroi dans les bilans RANS vis-à-vis des bilans DNS, ce qui est en toute logique lié au profil de la tension de Reynolds  $\tau_{22}$  qui croît trop rapidement en proche paroi. Ces maximums diminuent moins rapidement dans les bilans RANS par rapport aux bilans DNS, conduisant à une importante différence de niveau dans la région turbulente établie, figure 5.23(i).

## 5.3.3 Conclusions relatives à l'influence de la modélisation de $k$ et $\varepsilon$ sur les équations de conservation de la quantité de mouvement

L'analyse comparative des différents profils DNS exacts avec les profils RANS issus de la modélisation de  $k$  et  $\varepsilon$  ont permis de mettre en évidence quelques points remarquables. Le pic d'énergie cinétique turbulente modélisé par le modèle RANS est moitié moindre que celui prévu par la DNS, vraisemblablement en raison du rapport production sur dissipation modélisé qui est localement inférieur à celui de la DNS. Le pic d'énergie cinétique turbulente  $k$  modélisé par le RANS est plus étroit que celui qui est prévu par la DNS, ce qui s'explique aisément par l'absence dans le modèle de dissipation de  $k$  en paroi et par la faiblesse conséquente des termes de diffusion.

5.3. ANALYSE DE LA MODÉLISATION RANS DANS LA COUCHE LIMITE TRANSITIONNELLE

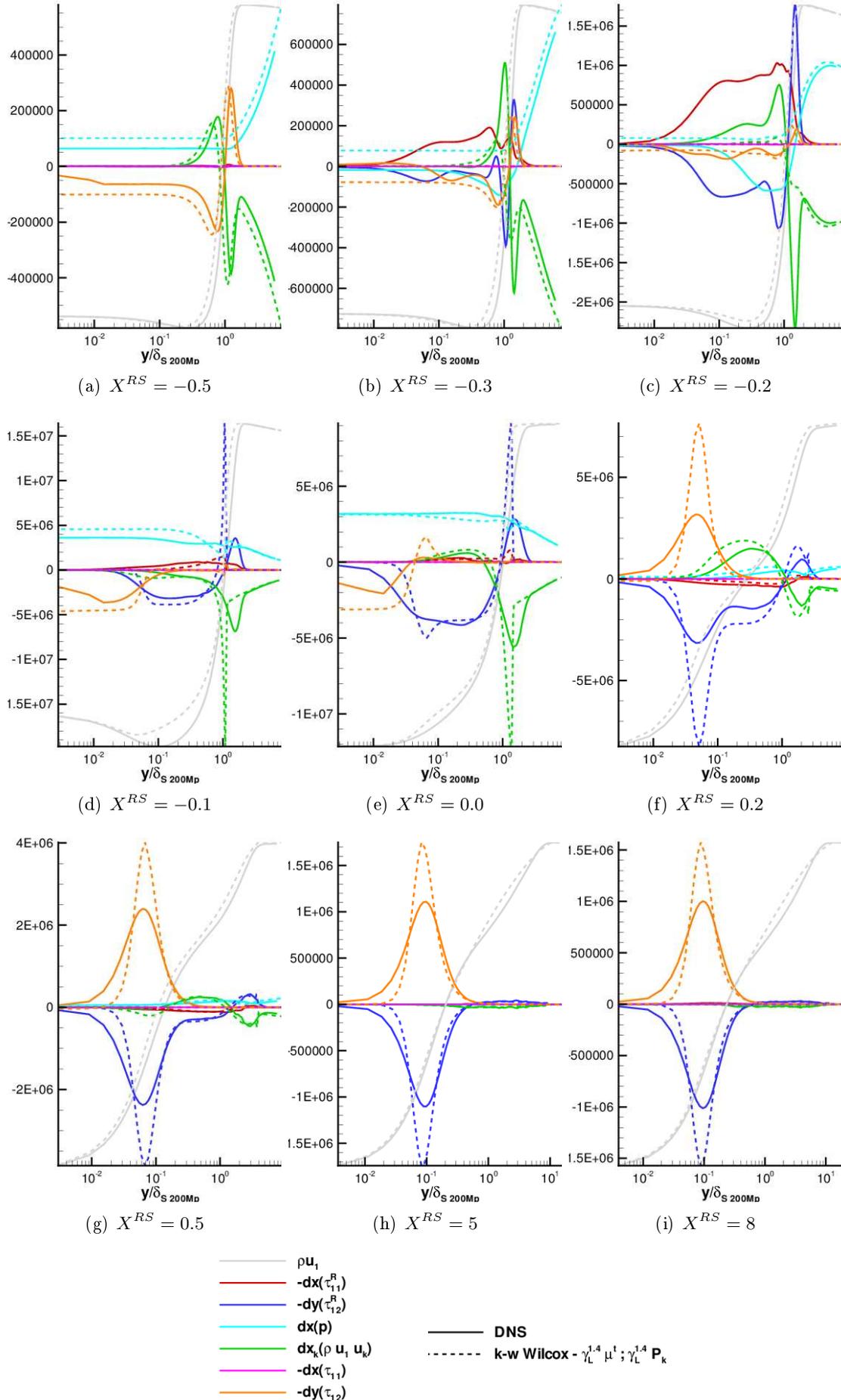


FIGURE 5.22: Bilans de l'équation de conservation de  $\rho u$   
135

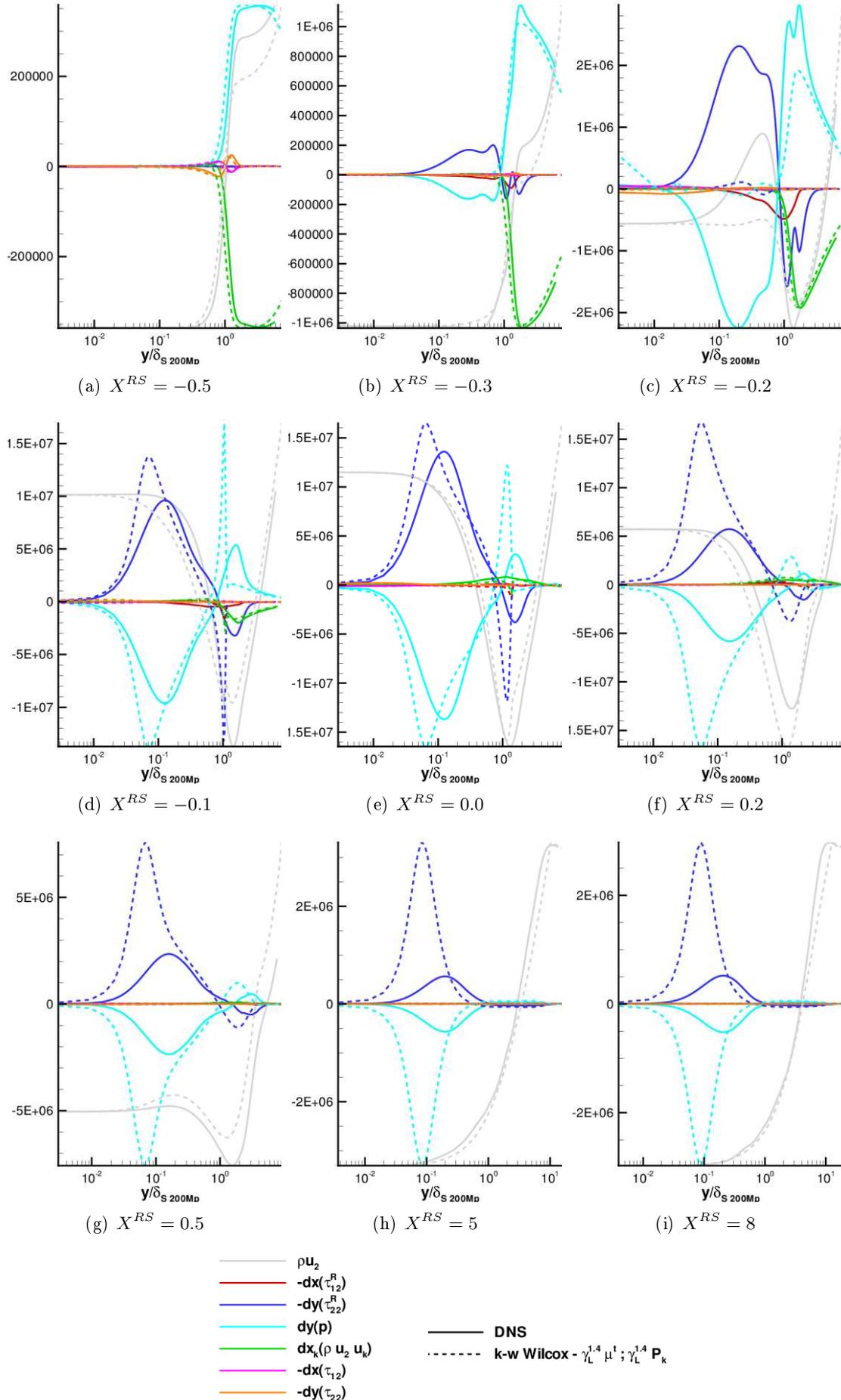


FIGURE 5.23: Bilans de l'équation de conservation de  $pv$

## 5.4 Transition naturelle de plaque plane

Une étude vient d'être menée sur la transition par BDL, celle-ci a permis de mettre au point une méthode de modélisation de la transition basée sur le modèle  $k - \omega$  de Wilcox associé à une fonction de transition  $\gamma_L^{1.4}$  pondérant la viscosité de la turbulence  $\mu_t$  et la production de l'énergie cinétique turbulente  $P_k$ . Les résultats plutôt satisfaisants obtenus sur le cas de transition par BDL soulèvent la question de la généralisation de cette méthode de modélisation à un scénario de transition naturelle.

### 5.4.1 Base de données de référence

Les calculs DNS réalisés par Wu et Moin [133] sont utilisés comme base de données de référence. Il s'agit de calculs DNS incompressibles d'une transition naturelle sur plaque plane en absence de gradients de pression. Ces calculs ont fait l'objet d'une validation expérimentale. Ils utilisent un forçage turbulent dont l'intensité est de l'ordre de  $0.6 U_\infty$  dans chacune des trois dimensions. Ils sont réalisés pour un nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement valant entre 80 en début de boîte de calcul et 940 en fin de boîte, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que les calculs de BDL transitionnel réalisés dans ce mémoire. La fiabilité de ces résultats ainsi que leur gamme de Reynolds semblable à celle des calculs de BDL transitionnel sujets de cette étude en font une base de données de référence idéale pour étudier l'application de la méthode de modélisation mise au point dans la première partie de ce chapitre.

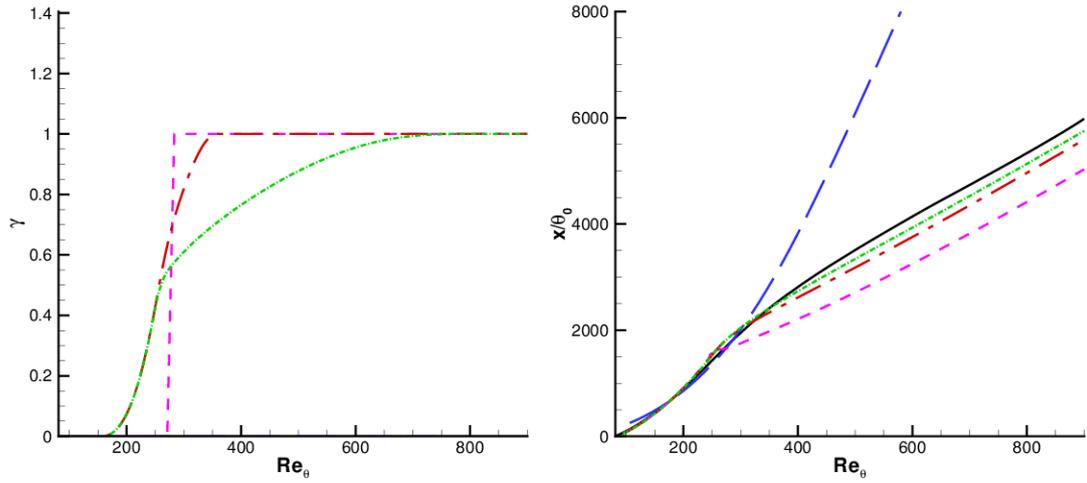
### 5.4.2 Modélisation de la transition naturelle

Les résultats de Wu et Moin sont présentés dans leur article sous forme d'évolution des paramètres caractéristiques de la couche limite en fonction du nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement  $\Re_\theta$ , c'est donc ainsi que seront comparés les résultats RANS et DNS de cette étude. La figure 5.24(a) montre l'évolution en fonction de  $\Re_\theta$  des différentes fonctions de transition RANS utilisées pour cette analyse comparative. Les figures 5.24(b) à 5.24(f) montrent les résultats DNS de Wu et Moin (en noir), les résultats d'un calcul laminaire (en bleu) et enfin les résultats des calculs RANS transitionnels associés aux fonctions de transition de la figure 5.24(a).

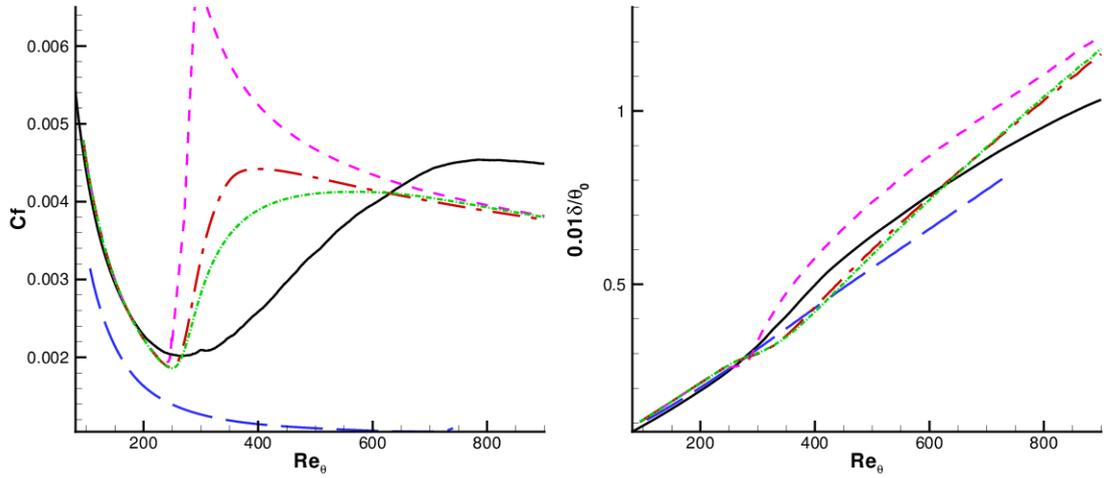
Le calcul laminaire est mené sur ce nouveau cas de transition naturelle pour pouvoir par la suite caractériser plus facilement la transition vers la turbulence. Afin de reproduire au mieux la stratégie de modélisation mise au point sur le cas de transition par BDL, la fonction  $\gamma_L^{1.4}(\Re_\theta)$  définie sur le maillage du calcul de BDL est interpolée sur le nouveau maillage en fonction de l'évolution de  $\Re_\theta$  issue du calcul laminaire. Cette fonction est limitée à la valeur 1.0 car la transition naturelle est un phénomène progressif, et non intense et violent comme la transition par BDL, ne justifiant pas l'utilité d'une fonction dépassant l'unité.

La résolution du maillage destiné au calcul de transition naturelle est plus grossière que celle du calcul de transition par BDL, le nouveau maillage n'est pas assez fin pour reproduire la répartition  $\gamma(x)$  entre  $X^{t1}$  et  $X^{t2}$ , une fonction créneau  $\gamma_C^{1.0}$  (courbe violette figure 5.24(a)) est donc substituée à  $\gamma_L^{1.4}$ . Ces deux fonctions transitionnent toutes deux à la même abscisse, en  $\Re_\theta \simeq 250$ .

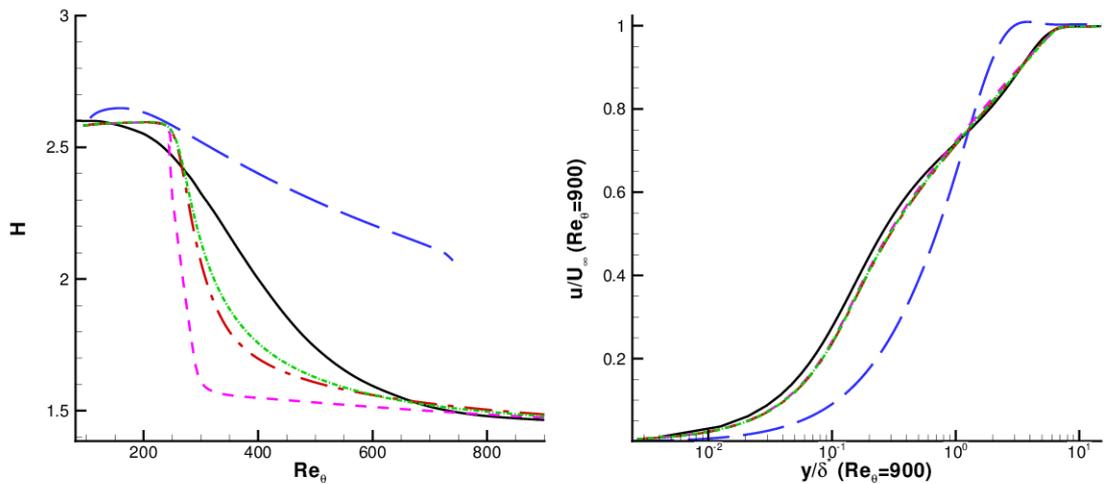
Les résultats obtenus avec cette fonction de transition sont représentés en violet figures 5.24(b) à 5.24(f). On constate rapidement que cette méthode de modélisation conduit à une transition beaucoup plus rapide que celle définie par les calculs DNS de Wu et Moin. Le coefficient de frottement modélisé présente un pic de frottement absent de la DNS (fig. 5.24(c)), un sur-épaississement trop marqué (fig. 5.24(d)) et une chute trop brutale du paramètre de forme  $H$  (fig. 5.24(e)).



(a) Fonctions de transition utilisées pour simuler une transition naturelle de plaque plane (b) Évolution de  $Re_\theta$  vis-à-vis de la position longitudinale adimensionnée par  $\theta_0$



(c) Évolution longitudinale du coefficient de frottement (d) Évolution longitudinale de l'épaisseur de couche limite adimensionnée



(e) Évolution longitudinale du paramètre de forme (f) Profils verticaux de vitesse adimensionnés par la vitesse externe en  $Re_\theta = 900$



FIGURE 5.24: Comparaisons RANS - Wu et Moin.

Les profils de vitesse turbulents en aval (fig. 5.24(f)) n'en sont cependant pas trop altérés. À noter que l'abscisse de transition  $\Re_\theta \simeq 250$  issue du calcul de BDL correspond bel et bien au plateau de frottement indiquant la fin de la laminarité et semble donc tout à fait appropriée.

Au vu de ces résultats, une seconde fonction notée  $\gamma_{L2}^{1.0}$  plus progressive (courbe rouge fig. 5.24(a)) a été créée de façon à ce que cette fonction prenne la valeur 0.5 en  $\Re_\theta \simeq 250$ . Les résultats de ce calcul sont présentés en rouge figures 5.24(b) à 5.24(f). Cette fonction apporte une amélioration évidente mais encore insuffisante, puisque la transition bien que plus progressive demeure encore trop violente. L'observation de l'influence de cette fonction sur le coefficient de frottement (fig. 5.24(c)) incite à penser que c'est la section de  $\gamma$  située au-delà de  $\Re_\theta \simeq 250$  qui commande la brutalité du pic de frottement. Une troisième fonction de transition  $\gamma_{L3}^{1.0}$  (tracée en vert) a donc été créée, elle vérifie elle aussi  $\gamma(\Re_\theta \simeq 250) = 0.5$  et a la particularité d'être plus progressive entre  $\gamma = 0.5$  et  $\gamma = 1$ . Là encore cette fonction entraîne une modélisation de la transition plus progressive mais encore trop violente, malgré une fonction de transition très lente.

L'analyse comparative des profils RANS et DNS permet en outre de mettre en évidence un certain nombre de caractéristiques communes à toutes les fonctions de transition utilisées pour cette étude :

- Figure 5.24(b), la pente de  $\Re_\theta$  en fonction de  $x$  est correctement modélisée par le RANS dans la région turbulente, mais la position de la transition est très influente sur la valeur absolue du Reynolds en une abscisse donnée.
- Figure 5.24(c), la valeur asymptotique du frottement turbulent est sous-estimée par les calculs RANS transitionnels.
- Figure 5.24(d), le taux d'épaississement de la couche limite turbulente est sur-estimé par chacun des calculs RANS.
- Figure 5.24(e), le paramètre de forme estimé par les calculs RANS présente un plateau laminaire persistant, c'est-à-dire un retard au début de la transition. La diminution rapide du paramètre de forme prévue par le RANS indique par ailleurs le calcul d'une transition plus rapide que celle de la DNS.
- Figure 5.24(f), les calculs RANS prévoient globalement des profils de vitesse turbulents très proches du profil DNS.

### 5.4.3 Conclusions sur la généralisation de la méthode de modélisation au cas de transition naturelle

Pour résumer, plusieurs calculs RANS de transition naturelle basés sur le  $k-\omega$  de Wilcox ont été réalisés en utilisant des fonctions plus ou moins abruptes transitionnant à la même abscisse  $\Re_\theta \simeq 250$  que la fonction utilisée pour le calcul de BDL. Ces fonctions ont été limitées à la valeur 1.0 car la transition naturelle ne présente pas les mêmes particularités d'intensité de création de turbulence qu'un cas de transition par BDL. Cette valeur 1.0 s'est avérée amplement suffisante car les modélisations ainsi réalisées se sont malgré cela montrées trop violentes vis-à-vis des résultats issus de la base de données DNS de référence de Wu et Moin.



# Conclusions et Perspectives

Le décrochage est un phénomène aérodynamique susceptible d'apparaître sur de nombreuses ailes volantes, il consiste en un décollement de l'écoulement vis-à-vis de la paroi du profil de l'aile. Ce décollement fait chuter la force de portance du profil, c'est-à-dire que celui-ci n'est plus porté par le fluide environnant. Le décrochage pose problème pour les profils de pales d'hélicoptères, d'éoliennes ou de rotors pour lesquels il se produit dans des conditions d'utilisation normales, dégrade considérablement les performances de vol et peut aller jusqu'à entraîner des endommagements matériels. Les risques de décrochage d'un profil donné dépendent fortement de son design, justifiant un besoin d'outils de simulation numérique accessibles dans un contexte industriel. Les expérimentations et, plus récemment, les outils numériques DNS (Direct Numerical Simulation) et LES (Large Eddy Simulation), ont permis d'enrichir la connaissance des mécanismes mis en jeu dans le décrochage. Il s'agit entre autres de la présence, et de l'importance, juste avant l'apparition du décrochage, d'une petite zone de recirculation au bord d'attaque du profil appelée bulbe de décollement laminaire (BDL) où se produit la transition de l'état laminaire vers l'état turbulent. Ces techniques ont permis une meilleure compréhension des phénomènes mais elles demeurent trop coûteuses pour calculer des configurations complexes. Pour cela des outils de modélisation existent, notamment les méthodes RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) qui sont largement utilisées par les industriels. Malheureusement, les méthodes RANS reposent sur des hypothèses de modélisation (décroissance d'une turbulence homogène isotrope, couche limite turbulente en équilibre, ...) qui ne sont pas adaptées aux écoulements mis en jeu à l'approche du décrochage, faussant les résultats des calculs et justifiant la recherche d'améliorations de ces méthodes.

De nombreux travaux expérimentaux et numériques d'étude du décrochage existent dans la littérature, mais ils sont souvent soit réalisés sur des écoulements différant sensiblement des écoulements aéronautiques en terme de nombre de Reynolds, soit réalisés sur des profils entiers mettant en jeu beaucoup de phénomènes complexes qui rendent difficiles l'interprétation des résultats. Le choix a été fait dans ce mémoire d'étudier par simulation DNS un écoulement caractéristique du bord d'attaque d'un profil de pale d'hélicoptère à l'approche du décrochage et d'isoler le phénomène de transition par BDL pour mieux l'analyser. Pour cela, l'écoulement de bord d'attaque du profil 0A209 à  $15^\circ$  d'incidence a été fidèlement reproduit sur une plaque plane en créant un BDL transitionnel grâce à un gradient de vitesse et de pression local induit par une paroi courbe fictive surplombant le domaine de calcul. L'écoulement instationnaire obtenu ne présente ainsi ni bord d'attaque ni gradient de pression en aval du recollement. Plusieurs

simulations de résolution croissante ont été réalisées pour aboutir à une DNS sur un maillage de 200 millions de points, laquelle a requis pour 256 processeurs Nehalem : 150 heures de calcul pour converger les résultats et 150 heures de calcul supplémentaires pour obtenir une base de données statistiquement convergée. Les résultats de cette simulation ont été l’objet de nombreuses vérifications. La convergence en maillage du champ moyen, des fluctuations et des bilans d’énergie cinétique turbulente a pu être validée et une analyse spectrale a permis de valider la fréquence du lâcher tourbillonnaire observé.

Des iso-surfaces du paramètre  $Q$  ont montré la présence dans la seconde moitié du BDL de tourbillons transversaux advectés par l’écoulement ainsi que l’apparition, dans la région de recollement, de rangées de tourbillons  $\Lambda$  s’enroulant autour des structures transversales. Au fur et à mesure de leur advection les structures transversales et les tourbillons  $\Lambda$  se déforment et leur organisation devient de plus en plus chaotique jusqu’à l’état de turbulence établie. Une analyse de l’évolution des composants du bilan d’énergie cinétique turbulente  $k$  au fur et à mesure de la transition a été réalisée afin de servir de base de données pour l’amélioration des modèles RANS. Cette étude DNS a permis d’identifier l’influence de la résolution et l’influence des schémas de discrétisation des flux des équations de Navier-Stokes sur la convergence du calcul du bilan de l’énergie cinétique turbulente  $k$ . Il s’agit notamment de l’importance du choix de la molécule de calcul pour la discrétisation des flux convectifs, l’utilisation d’une molécule 5 points (figure 2.1) ayant montré une surestimation de la dissipation proche de la paroi conduisant à un bilan de l’énergie cinétique non nul alors que l’utilisation d’une molécule 3 points (figure 2.2) a permis une convergence satisfaisante du bilan. L’exactitude de l’hypothèse de Boussinesq a été analysée, celle-ci n’apparaît relativement justifiée que dans la région de cisaillement, et semble étrangement presque plus juste au point de recollement que dans la région turbulente établie. L’exactitude de l’hypothèse d’équilibre production/dissipation ( $P_k/\varepsilon_k = 1$ ) de l’énergie cinétique turbulente a aussi été évaluée. Cette hypothèse apparaît totalement inadaptée à la région transitionnelle où ce rapport atteint des valeurs très élevées dans la zone de cisaillement. Ce n’est que dans la couche limite turbulente établie que le rapport  $P_k/\varepsilon_k$  tend vers la valeur unitaire dans la région logarithmique. Les diagrammes de Lumley ont montré que dans la région logarithmique de la couche limite turbulente, la turbulence approche l’état isotrope mais sans l’atteindre réellement. Une évaluation a été faite de la valeur que prendrait une fonction d’intermittence  $\gamma$  pondérant la viscosité de la turbulence  $\nu_t$  d’un modèle de type  $k-\omega$  ou  $k-\varepsilon$ . Cette fonction bidimensionnelle dépend à la fois de la distance à la paroi et de la position longitudinale. Elle est nulle dans la région laminaire et prend la valeur unitaire dans la région turbulente établie. Cette fonction d’intermittence croît dans la zone de cisaillement située au centre du BDL, atteignant des valeurs supérieures à 2 entre  $X^{RS} = -0.4$  et  $X^{RS} = -0.2$ .

Dans un second temps, ces résultats DNS ont été utilisés pour évaluer le comportement des principaux modèles RANS développés dans le logiciel elsA pour ce même cas d’écoulement de BDL transitionnel sur plaque plane. Afin d’inciter ces modèles à reproduire l’intensité de création de turbulence observée dans les résultats DNS au moment de la transition, les grandeurs turbulentes des modèles ont été pondérées d’une fonction de transition mono-dimensionnelle dépassant localement la valeur unitaire dans la région de transition.

Plusieurs fonctions d’intermittence et plusieurs méthodes de pondération des grandeurs turbulentes ont été testées sur plusieurs modèles de turbulence. Globalement, cette analyse comparative a permis d’observer que chaque modèle requiert une fonction de transition qui lui soit adaptée, et certains modèles seront peu, ou pas du tout influencés par ces fonctions de transition. Le modèle  $k-\omega$  de Wilcox associé à une pondération par une fonction  $\gamma_L$  de la viscosité de la turbulence  $\nu_t$  et de la production d’énergie cinétique turbulente  $P_k$  (et donc de  $P_\omega$ ) a montré les résultats les plus proches de ceux prévus par la DNS, avec cependant une tendance notable

à la sur-réaction vis-à-vis de la fonction de transition. Ce modèle de turbulence et transition a ensuite été l'objet d'une analyse plus poussée.

Une analyse des bilans de l'énergie cinétique turbulente  $k$  a montré que la diffusion par la pression absente du modèle de Wilcox était loin d'être négligeable dans la région de transition. Le modèle de Wilcox annule la dissipation et la diffusion visqueuse à la paroi alors que ces deux termes tendent vers des valeurs finies non nulles dans la DNS. Les diffusions visqueuse et turbulente sont globalement sous-estimées par le modèle RANS. Le pic de convection du RANS est plus proche de la paroi que celui de la DNS et la dissipation du RANS a lieu uniquement dans la zone de cisaillement. Globalement, les hypothèses du modèle de Wilcox induisent à un manque de diffusion lié à une dissipation de la turbulence à l'endroit même de sa production, dans la zone de cisaillement de la couche limite. Par conséquent, les profils de  $k$  modélisés sont limités à la région de cisaillement au lieu de s'étendre aussi vers la paroi comme le font les profils issus de la DNS. Les profils DNS montrent une apparition rapide de l'énergie cinétique turbulente dans la dernière partie du bulbe alors que l'énergie cinétique turbulente issue du modèle RANS est beaucoup plus lente à apparaître et diminue trop rapidement après le recollement, vraisemblablement en raison de la dissipation prévue par le modèle RANS qui a lieu uniquement dans la zone de cisaillement. Les tensions de Reynolds  $\tau_{12}$  et  $\tau_{22}$  sont respectivement de première importance dans le bilan des équations de conservation de la composante longitudinale et verticale de la quantité de mouvement. La tension  $\tau_{12}$  modélisée présente peu après le recollement un plateau trop marqué entre la sous-couche visqueuse et la zone logarithmique, induisant un pic trop intense dans les profils du bilan de  $\rho u$ . La tension de Reynolds  $\tau_{22}$  croît quand à elle trop rapidement en proche paroi, entraînant un décalage vers la paroi des bilans de  $\rho v$ .

Enfin, le modèle de turbulence et transition retenu pour la modélisation du BDL a été évalué sur un cas de transition naturelle sans gradient de pression en prenant comme base de données de référence la DNS sur plaque plane de Wu et Moin. La méthode de modélisation utilisée est donc basée sur le modèle de turbulence de Wilcox associé à une pondération par une fonction  $\gamma_L$  de la viscosité de la turbulence  $\nu_t$  et de la production d'énergie cinétique turbulente  $P_k$  (et donc de  $P_\omega$ ). La fonction d'intermittence de ce nouveau calcul est limitée à la valeur 1 car la transition naturelle, très progressive, ne justifie pas l'emploi d'une fonction d'intermittence dépassant l'unité. Plusieurs fonctions plus ou moins abruptes transitionnant à la même position en terme de  $Re_\theta$  que celle du calcul par BDL ont été utilisées, mais pour chacune les résultats de la modélisation montrent une transition encore trop intense et rapide par rapport aux résultats de Wu et Moin.

Les résultats RANS obtenus bien que très intéressants à étudier en terme d'influence de la modélisation, rappellent combien les modèles de transition basiques utilisés ici demeurent dépendants de leurs hypothèses intrinsèques et donc peu généralisables. D'autant plus que l'utilisation de critères de transition, indispensable pour un calcul RANS sans base de données de référence, rajouterai une marge d'erreur supplémentaire. L'étude DNS a mis en évidence la nécessité d'utiliser, pour calculer des écoulements de BDL transitionnels, des modèles plus évolués s'affranchissant des hypothèses d'isotropie, de viscosité de la turbulence de Boussinesq ou encore d'équilibre production/dissipation. Dans cette optique, les modèles de fermeture au second ordre dits Reynolds Stress Models (RSM) semblent aujourd'hui incarner la voie la plus prometteuse.

Par ailleurs, les résultats DNS ont mis en évidence la bidimensionnalité de la fonction de transition, laquelle ne dépend pas seulement de la coordonnée longitudinale  $x$  mais aussi de la coordonnée verticale à la paroi  $y$ . Cette caractéristique essentielle de la transition vers la turbulence justifierait l'étude de l'influence de la bidimensionnalité de la fonction de transition sur les résultats de modélisation RANS. Des recherches récentes ont été menées sur des modèles de transition, comme celui de Menter [88] qui est basé sur une équation de transport de la

fonction d'intermittence, ou encore comme les modèles à une équation de transport pour l'énergie cinétique laminaire de Walters [128, 127] ou Lardeau [63]. La base de données DNS pourrait servir de base de validation pour l'adaptation de ce type de modèles aux écoulements de BDL transitionnels. D'autant plus que la configuration de calcul de cette DNS pourrait être facilement modifiée en y ajoutant un gradient de pression en aval du recollement ou en modifiant le nombre de Reynolds.

Enfin, rappelons que le décrochage est un phénomène instationnaire dont la dynamique doit être prise en compte. Aussi dans l'hypothèse où un modèle RANS associé à une fonction de transition puisse reproduire fidèlement dans un futur proche des BDL stationnaires, il faudrait alors s'assurer que ce modèle permet aussi de modéliser correctement l'éclatement d'un bulbe de bord d'attaque sous l'effet d'une augmentation d'incidence.





# Annexe A

## Équations de transport

### A.1 Équations de conservation de Navier-Stokes

La dynamique et la thermodynamique d'un fluide compressible, visqueux, conducteur de la chaleur et non pesant sont régies par le système des cinq équations scalaires de Navier-Stokes. Ces équations sont issues des principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

#### A.1.1 Conservation de la masse

La loi de conservation de la masse (appelée aussi loi de continuité) dit que *la masse de fluide contenue dans un volume  $\Omega(t)$  est constante au cours du temps*, c'est-à-dire que

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho d\Omega(t) = 0 \quad (\text{A.1})$$

L'application à la masse volumique, notée  $\rho$ , de l'expression issue du théorème de transport (Eq. D.5) puis celui de Green (Eq. D.3) permet de réécrire l'équation A.1 sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega(t) + \int_{\partial\Omega(t)} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} d\Omega(t) = 0 \\ &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega(t) + \int_{\Omega(t)} \text{div}(\rho \vec{U}) d\Omega(t) = 0 \end{aligned}$$

D'où la forme locale de l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0 \quad (\text{A.2})$$

#### A.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

La seconde loi de Newton dit que *dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un objet ponctuel est égale au produit de la masse  $\rho$  de l'objet par son vecteur accélération  $\frac{d\vec{u}}{dt}$* .

Dans le cas présent, les forces appliquées à un volume de fluide  $\Omega(t)$  sont les forces surfaciques exercées sur la surface  $\partial\Omega(t)$  de normale  $\vec{n}$  du volume  $\Omega(t)$  : il s'agit de la pression  $p$  et des efforts visqueux représentés par le tenseur des contraintes visqueuses  $\tau$ . Si des forces volumiques sont appliquées, on les identifiera par le vecteur  $\vec{F}$ .

Le bilan de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\int_{\Omega(t)} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} d\Omega(t) = \int_{\Omega(t)} \rho \vec{F} d\Omega(t) + \int_{\partial\Omega(t)} -p \vec{n} \partial\Omega(t) + \int_{\partial\Omega(t)} \tau \vec{n} \partial\Omega(t) \quad (\text{A.3})$$

On a montré (Eq. D.10) que  $\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\rho\vec{u}}{dt}$ . En l'absence de forces volumiques, et en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky (Eq. D.4) on obtient alors l'expression suivante pour le bilan :

$$\int_{\Omega(t)} \frac{d\rho\vec{u}}{dt} d\Omega(t) = - \int_{\Omega(t)} \overrightarrow{\text{grad}}(p) d\Omega(t) + \int_{\Omega(t)} \text{div}(\tau) d\Omega(t) \quad (\text{A.4})$$

En appliquant l'équivalence (Eq. D.11) à chacun des  $\rho u_i$ , on peut écrire

$$\frac{d\rho\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{u} \otimes \vec{u}) = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) + \text{div}(\tau) \quad (\text{A.5})$$

### A.1.3 Conservation de l'énergie

L'énergie totale  $E$  d'un ensemble de particules fluides est la somme de leur énergie interne  $e$  liée à l'agitation thermique des particules et de leur énergie cinétique  $\frac{1}{2}u^2$ .

Le premier principe de la thermodynamique dit que *au cours d'une transformation quelconque d'un système fermé, la variation de son énergie est égale à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur, sous forme de chaleur et sous forme de travail.*

Le travail échangé avec le milieu extérieur correspond aux puissances des efforts énumérés au paragraphe précédent. En notant  $\vec{q}$  le flux de chaleur, on écrit alors l'équation bilan intégrale suivante :

$$\int_{\Omega(t)} \frac{d\rho E}{dt} d\Omega(t) = \int_{\Omega(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{u} d\Omega(t) - \int_{\partial\Omega(t)} p \vec{n} \cdot \vec{u} \partial\Omega(t) + \int_{\partial\Omega(t)} (\tau \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u} \partial\Omega(t) - \int_{\partial\Omega(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} \partial\Omega(t) \quad (\text{A.6})$$

En l'absence de forces volumiques extérieures, en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky (Eq. D.4) on obtient finalement la relation suivante :

$$\frac{d\rho E}{dt} = -\text{div}(p\vec{u}) + \text{div}(\tau \cdot \vec{u}) - \text{div}(\vec{q}) \quad (\text{A.7})$$

qui peut aussi s'écrire, à l'aide des équivalences (Eq. D.10 et D.11)

$$\rho \frac{dE}{dt} = \frac{\partial\rho E}{\partial t} + \text{div}(\rho E \vec{u}) = -\text{div}(p\vec{u}) + \text{div}(\tau \cdot \vec{u}) - \text{div}(\vec{q}) \quad (\text{A.8})$$

## A.2 Équations de Navier-Stokes moyennées

### A.2.1 Moyennes

Les équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) s'obtiennent en appliquant la moyenne d'ensemble  $\bar{\cdot}$  définie par

$$\bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k \quad (\text{A.9})$$

ce qui permet de décomposer les grandeurs  $f$  de l'écoulement en une partie moyenne ( $\bar{f}$ ) et une partie fluctuante ( $f'$ ) :

$$f = \bar{f} + f' \quad \text{avec} \quad \overline{f'} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Cette moyenne suit les règles de Reynolds :

$$\begin{aligned} \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g} & \overline{f g} &= \bar{f} \bar{g} + \overline{f' g'} & \overline{\overline{f g}} &= \bar{f} \bar{g} \\ \overline{a \cdot f} &= a \bar{f} & \overline{\frac{\partial f}{\partial \xi}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi} \end{aligned}$$

avec  $a$  scalaire et  $\xi$  variable d'espace ou de temps.

Pour les fluides compressibles, afin de simplifier le système d'équations obtenues on utilise plutôt la moyenne de Favre  $\tilde{\cdot}$  :

$$f = \tilde{f} + f'' \quad \text{avec} \quad \tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \quad (\text{A.11})$$

où  $f''$  est la partie fluctuante. Ces moyennes suivent les règles suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{\rho f''} &= 0 \\ \overline{f''} &= -\frac{\overline{\rho' f'}}{\bar{\rho}} = (\bar{f} - \tilde{f}) \neq 0 \\ \overline{\rho f g} &= \bar{\rho} \tilde{f} \tilde{g} + \overline{\rho f'' g''} \quad \text{avec} \quad \overline{\rho f'' g''} = \overline{\rho f'' g''} \end{aligned}$$

### A.2.2 Application aux équations de Navier-Stokes

L'application de la moyenne d'ensemble  $\bar{\cdot}$  aux équations de Navier-Stokes conduit aux formulations utilisées pour les calculs RANS :

L'équation de conservation de la masse :

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho)} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k)} &= 0 \\ \overline{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho})} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{\rho} \frac{\rho}{\bar{\rho}} u_k)} &= 0 \\ \overline{\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho})} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{\rho} \widetilde{u_k})} &= 0 \end{aligned}$$

l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour  $i = \{1, 2, 3\}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\rho u_i u_k + \delta_{ik} p}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\tau_{ik}}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\frac{\bar{\rho}}{\rho} \rho u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\rho u_i u_k + \delta_{ik} \bar{p}}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\tau_{ik} + \widetilde{\tau}_{ik}^* - \tau_{ik}^*}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\bar{\rho} \widetilde{u}_i}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\bar{\rho} \widetilde{u}_i \widetilde{u}_k + \bar{\rho} \widetilde{u}_i'' \widetilde{u}_k'' + \delta_{ik} \bar{p}}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\tau_{ik}^*}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\tau_{ik} - \tau_{ik}^*}) &= 0 \end{aligned}$$

l'équation de conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho E}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\rho E u_k}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{p u_k}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{q_k}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\tau_{kl} u_l}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\bar{\rho} \widetilde{E}}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\bar{\rho} \widetilde{E} u_k}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{p(\widetilde{u}_k + u_k'')}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\bar{q}_k + \widetilde{q}_k^* - \tau_{kl}^*}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\tau_{kl}(\widetilde{u}_l + u_l'')}) + \overline{\tau_{kl}^* \widetilde{u}_l - \tau_{kl}^* u_l} &= 0 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \overline{\rho E u_k} &= \overline{\rho(e + \frac{1}{2} u_l u_l) u_k} \\ &= \overline{\rho e u_k} + \frac{1}{2} \overline{\rho(\widetilde{u}_l \widetilde{u}_l + u_l'' u_l'' + 2 \widetilde{u}_l u_l'')} u_k \\ &= (\overline{\bar{\rho} \widetilde{e} \widetilde{u}_k} + \overline{\rho e'' u_k''}) + (\frac{1}{2} \overline{\widetilde{u}_l \widetilde{u}_l \bar{\rho} u_k} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_l'' u_l'' u_k} + \overline{\widetilde{u}_l \rho u_l'' u_k}) \\ &= \overline{\bar{\rho} \widetilde{e} \widetilde{u}_k} + \overline{\rho e'' u_k''} + \frac{1}{2} \overline{\bar{\rho} \widetilde{u}_l \widetilde{u}_l \widetilde{u}_k} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_l'' u_l'' (\widetilde{u}_k + u_k'')} + \overline{\widetilde{u}_l \rho u_l'' (\widetilde{u}_k + u_k'')} \\ &= \overline{\bar{\rho} \widetilde{e} \widetilde{u}_k} + \overline{\rho e'' u_k''} + \frac{1}{2} \overline{\bar{\rho} \widetilde{u}_l \widetilde{u}_l \widetilde{u}_k} + (\frac{1}{2} \overline{\widetilde{u}_k \rho u_l'' u_l''} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_l'' u_l'' u_k''}) + (\overline{\widetilde{u}_l \rho u_l'' u_k''} + \overline{\widetilde{u}_l \widetilde{u}_k \underbrace{\rho u_l''}_{=0}}) \\ &= \overline{\bar{\rho} \widetilde{E} \widetilde{u}_k} + \overline{\rho e'' u_k''} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_l'' u_l'' u_k''} + \overline{\bar{\rho} \widetilde{u}_l \widetilde{u}_l \widetilde{u}_k} \end{aligned}$$

ce qui permet de réécrire l'équation de conservation de l'énergie sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\bar{\rho} \widetilde{E}}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\bar{\rho} \widetilde{E} \widetilde{u}_k} + \overline{\rho(e'' + \frac{1}{2} u_l'' u_l'') u_k''} + \overline{\bar{\rho} \widetilde{u}_l \widetilde{u}_l \widetilde{u}_k''}) \\ + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\bar{\rho} \widetilde{u}_k} + \overline{p u_k''}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\bar{q}_k + \widetilde{q}_k^* - \tau_{kl}^*}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\tau_{kl} \widetilde{u}_l} + \overline{\tau_{kl} u_l''} + \overline{\tau_{kl}^* \widetilde{u}_l} - \overline{\tau_{kl}^* u_l}) &= 0 \end{aligned}$$

## A.3 Équations de transport des tensions de Reynolds

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{\partial \rho u_i'' u_j''}}{\partial t} &= \frac{\overline{\partial \rho u_i u_j}}{\partial t} - \frac{\overline{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j}}{\partial t} \quad \text{On décompose ces fractions tq } \frac{\partial fg}{\partial t} = f \frac{\partial g}{\partial t} + g \frac{\partial f}{\partial t} \text{ pour écrire :} \\
&= \left[ \frac{\overline{\partial \rho u_i u_j}}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} \right] - \left[ \frac{\overline{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j}}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \right] \quad \text{On utilise le fait que } \frac{\partial \rho u}{\partial t} = u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} \text{ pour écrire :} \\
&= \left[ u_j \left( \frac{\overline{\partial \rho u_i}}{\partial t} \right) + u_i \left( \frac{\overline{\partial \rho u_j}}{\partial t} - u_j \left( \frac{\overline{\partial \rho}}{\partial t} \right) \right) \right] - \left[ \tilde{u}_j \left( \frac{\overline{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}}{\partial t} \right) + \tilde{u}_i \left( \frac{\overline{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}}{\partial t} - \tilde{u}_j \left( \frac{\overline{\partial \bar{\rho}}}{\partial t} \right) \right) \right] \quad \text{qui s'écrit grâce à 2.1 et 4.4 :} \\
&= \left[ u_j \left( - \frac{\overline{\partial (\rho u_i u_k + \delta_{ik} p)}}{\partial x_k} + \frac{\overline{\partial \tau_{ik}}}{\partial x_k} \right) + u_i \left( - \frac{\overline{\partial (\rho u_j u_k + \delta_{jk} p)}}{\partial x_k} + \frac{\overline{\partial \tau_{jk}}}{\partial x_k} \right) - u_j \left( - \frac{\overline{\partial \rho u_k}}{\partial x_k} \right) \right] \\
&\quad - \left[ \tilde{u}_j \left( - \frac{\overline{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_k + \bar{\rho} \tilde{u}_i'' \tilde{u}_k'' + \delta_{ik} \bar{p})}}{\partial x_k} + \frac{\overline{\partial \bar{\tau}_{ik}}}{\partial x_k} \right) + \tilde{u}_i \left( - \frac{\overline{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_k + \bar{\rho} \tilde{u}_j'' \tilde{u}_k'' + \delta_{jk} \bar{p})}}{\partial x_k} + \frac{\overline{\partial \bar{\tau}_{jk}}}{\partial x_k} \right) - \tilde{u}_j \left( - \frac{\overline{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_k}}{\partial x_k} \right) \right] \\
&= - u_j \frac{\overline{\partial \rho u_i u_k}}{\partial x_k} - u_j \frac{\overline{\partial \delta_{ik} p}}{\partial x_k} + u_j \frac{\overline{\partial \tau_{ik}}}{\partial x_k} - u_i \frac{\overline{\partial \rho u_j u_k}}{\partial x_k} - u_i \frac{\overline{\partial \delta_{jk} p}}{\partial x_k} + u_i \frac{\overline{\partial \tau_{jk}}}{\partial x_k} + u_i u_j \frac{\overline{\partial \rho u_k}}{\partial x_k} \\
&\quad + \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_k}}{\partial x_k} + \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i'' \tilde{u}_k''}}{\partial x_k} + \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \delta_{ik} \bar{p}}}{\partial x_k} - \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \bar{\tau}_{ik}}}{\partial x_k} + \tilde{u}_i \frac{\overline{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_k}}{\partial x_k} + \tilde{u}_i \frac{\overline{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j'' \tilde{u}_k''}}{\partial x_k} + \tilde{u}_i \frac{\overline{\partial \delta_{jk} \bar{p}}}{\partial x_k} - \tilde{u}_i \frac{\overline{\partial \bar{\tau}_{jk}}}{\partial x_k} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_k}}{\partial x_k} \\
&= \underbrace{\left( - u_j \frac{\overline{\partial \rho u_i u_k}}{\partial x_k} + \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_k}}{\partial x_k} \right)}_{\alpha_{ij}} + \underbrace{\left( - u_j \frac{\overline{\partial \delta_{ik} p}}{\partial x_k} + \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \delta_{ik} \bar{p}}}{\partial x_k} \right)}_{\beta_{ij}} + \underbrace{\left( u_j \frac{\overline{\partial \tau_{ik}}}{\partial x_k} - \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \bar{\tau}_{ik}}}{\partial x_k} \right)}_{\gamma_{ij}} \\
&\quad + \underbrace{\left( - u_i \frac{\overline{\partial \rho u_j u_k}}{\partial x_k} + \tilde{u}_i \frac{\overline{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_k}}{\partial x_k} \right)}_{\alpha_{ji}} + \underbrace{\left( - u_i \frac{\overline{\partial \delta_{jk} p}}{\partial x_k} + \tilde{u}_i \frac{\overline{\partial \delta_{jk} \bar{p}}}{\partial x_k} \right)}_{\beta_{ji}} + \underbrace{\left( u_i \frac{\overline{\partial \tau_{jk}}}{\partial x_k} - \tilde{u}_i \frac{\overline{\partial \bar{\tau}_{jk}}}{\partial x_k} \right)}_{\gamma_{ji}} \\
&\quad + \underbrace{\left( u_i u_j \frac{\overline{\partial \rho u_k}}{\partial x_k} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_k}}{\partial x_k} \right)}_{\varphi} + \underbrace{\left( \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i'' \tilde{u}_k''}}{\partial x_k} + \tilde{u}_i \frac{\overline{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j'' \tilde{u}_k''}}{\partial x_k} \right)}_{\psi}
\end{aligned}$$

On ré-exprime les termes identifiés ci-dessus en fonction des fluctuations :

$$\begin{aligned}
\beta_{ij} &= - u_j \frac{\overline{\partial \delta_{ik} p}}{\partial x_k} + \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \delta_{ik} \bar{p}}}{\partial x_k} & \gamma_{ij} &= u_j \frac{\overline{\partial \tau_{ik}}}{\partial x_k} - \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \bar{\tau}_{ik}}}{\partial x_k} \\
&= - u_j \frac{\overline{\partial p}}{\partial x_i} + \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \bar{p}}}{\partial x_i} \quad (\zeta) & &= (\tilde{u}_j + u_j'') \frac{\overline{\partial \tau_{ik}}}{\partial x_k} - \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \bar{\tau}_{ik}}}{\partial x_k} \\
&= - \left( \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial p}}{\partial x_i} + u_j' \frac{\overline{\partial p'}}{\partial x_i} \right) + \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \bar{p}}}{\partial x_i} & &= \cancel{\tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \tau_{ik}}}{\partial x_k}} + u_j'' \frac{\overline{\partial \tau_{ik}}}{\partial x_k} - \cancel{\tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \bar{\tau}_{ik}}}{\partial x_k}} \quad (\varsigma) \\
&= (\tilde{u}_j - \bar{u}_j) \frac{\overline{\partial p}}{\partial x_i} - u_j' \frac{\overline{\partial p'}}{\partial x_i} & &= \frac{\overline{\partial u_j'' \tau_{ik}}}{\partial x_k} - \frac{\overline{\partial u_j'' \tau_{ik}}}{\partial x_k} \\
&= - u_j'' \frac{\overline{\partial p}}{\partial x_i} - \left( \frac{\overline{\partial u_j' p'}}{\partial x_i} - p' \frac{\overline{\partial u_j'}}{\partial x_i} \right) & \gamma_{ji} &= \frac{\overline{\partial u_i'' \tau_{jk}}}{\partial x_k} - \frac{\overline{\partial u_i'' \tau_{jk}}}{\partial x_k} \\
&= - u_j'' \frac{\overline{\partial p}}{\partial x_i} - \frac{\overline{\partial u_j' \delta_{ik} p'}}{\partial x_k} + p' \frac{\overline{\partial u_j'}}{\partial x_i} \\
\beta_{ji} &= - u_i'' \frac{\overline{\partial p}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial u_i' \delta_{jk} p'}}{\partial x_k} + p' \frac{\overline{\partial u_i'}}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

On remarque qu'en partant des expressions (ζ) et (ς) on pourrait choisir les écritures alternatives suivantes :

$$\begin{aligned}
\beta_{ij} &= - (\cancel{\tilde{u}_j} + u_j'') \frac{\overline{\partial p}}{\partial x_i} + \tilde{u}_j \frac{\overline{\partial \bar{p}'}}{\partial x_i} & \gamma_{ij} &= u_j'' \frac{\overline{\partial \tau_{ik}}}{\partial x_k} + u_j'' \frac{\overline{\partial \tau_{ik}''}}{\partial x_k} \text{ ou encore } u_j'' \frac{\overline{\partial \tau_{ik}}}{\partial x_k} + u_j'' \frac{\overline{\partial \tau_{ik}'}}{\partial x_k} \\
&= - u_j'' \frac{\overline{\partial p}}{\partial x_i} = - u_j'' \frac{\overline{\partial p}}{\partial x_i} - u_j'' \frac{\overline{\partial p'}}{\partial x_i} & &= \frac{\overline{\partial u_j'' \tau_{ik}}}{\partial x_k} + \frac{\overline{\partial u_j'' \tau_{ik}''}}{\partial x_k} - \tau_{ik}' \frac{\overline{\partial u_j''}}{\partial x_k} \\
&= - u_j'' \frac{\overline{\partial p}}{\partial x_i} - \frac{\overline{\partial u_j'' p'}}{\partial x_i} + p' \frac{\overline{\partial u_j''}}{\partial x_i} & \text{ou encore} & \frac{\overline{\partial u_j'' \tau_{ik}}}{\partial x_k} + \frac{\overline{\partial u_j'' \tau_{ik}'}}{\partial x_k} - \tau_{ik}' \frac{\overline{\partial u_j''}}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

ANNEXE A. ÉQUATIONS DE TRANSPORT

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} &= -\overline{u_j \frac{\partial \rho u_i u_k}{\partial x_k}} + \widetilde{u_j} \frac{\partial \widetilde{\rho u_i u_k}}{\partial x_k} \\
&= -\left( \overline{\widetilde{u_j} \frac{\partial \rho u_i'' \widetilde{u_k}}{\partial x_k}} + \overline{u_j'' \frac{\partial \widetilde{\rho u_i} \widetilde{u_k}}{\partial x_k}} + \overline{\widetilde{u_j} \frac{\partial \widetilde{\rho u_i} u_k''}{\partial x_k}} + \overline{u_j'' \frac{\partial \widetilde{\rho u_i} u_k''}{\partial x_k}} + \overline{\widetilde{u_j} \frac{\partial \rho u_i'' u_k''}{\partial x_k}} + \overline{u_j'' \frac{\partial \rho u_i'' \widetilde{u_k}}{\partial x_k}} + \overline{u_j'' \frac{\partial \rho u_i'' u_k''}{\partial x_k}} + \overline{\widetilde{u_j} \frac{\partial \rho u_i'' u_k''}{\partial x_k}} \right) + \widetilde{u_j} \frac{\partial \widetilde{\rho u_i} \widetilde{u_k}}{\partial x_k} \\
&= -\left( \overline{\widetilde{u_j} \frac{\partial \rho u_i'' \widetilde{u_k}}{\partial x_k}} + \overline{u_j'' \frac{\partial \widetilde{\rho u_i} \widetilde{u_k}}{\partial x_k}} + \overline{\widetilde{u_j} \frac{\partial \widetilde{\rho u_i} u_k''}{\partial x_k}} + \overline{u_j'' \frac{\partial \widetilde{\rho u_i} u_k''}{\partial x_k}} + \overline{\widetilde{u_j} \frac{\partial \rho u_i'' u_k''}{\partial x_k}} + \overline{u_j'' \frac{\partial \rho u_i'' \widetilde{u_k}}{\partial x_k}} + \overline{u_j'' \frac{\partial \rho u_i'' u_k''}{\partial x_k}} \right) \\
\alpha_{ji} &= -\left( \overline{\widetilde{u_i} \frac{\partial \rho u_j'' \widetilde{u_k}}{\partial x_k}} + \overline{u_i'' \frac{\partial \widetilde{\rho u_j} \widetilde{u_k}}{\partial x_k}} + \overline{\widetilde{u_i} \frac{\partial \widetilde{\rho u_j} u_k''}{\partial x_k}} + \overline{u_i'' \frac{\partial \widetilde{\rho u_j} u_k''}{\partial x_k}} + \overline{\widetilde{u_i} \frac{\partial \rho u_j'' u_k''}{\partial x_k}} + \overline{u_i'' \frac{\partial \rho u_j'' \widetilde{u_k}}{\partial x_k}} + \overline{u_i'' \frac{\partial \rho u_j'' u_k''}{\partial x_k}} \right) \\
\varphi &= \overline{u_i u_j \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k}} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \frac{\partial \widetilde{\rho u_k}}{\partial x_k} \\
&= \left( \overline{u_i'' \widetilde{u_j} \frac{\partial \widetilde{\rho u_k}}{\partial x_k}} + \overline{\widetilde{u_i} u_j'' \frac{\partial \widetilde{\rho u_k}}{\partial x_k}} + \overline{\widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \frac{\partial \rho u_k''}{\partial x_k}} + \overline{\widetilde{u_i} u_j'' \frac{\partial \rho u_k''}{\partial x_k}} + \overline{u_i'' \widetilde{u_j} \frac{\partial \rho u_k''}{\partial x_k}} + \overline{u_i'' u_j'' \frac{\partial \rho u_k''}{\partial x_k}} + \overline{u_i'' u_j'' \frac{\partial \rho u_k''}{\partial x_k}} + \overline{\widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \frac{\partial \rho u_k''}{\partial x_k}} \right) - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \frac{\partial \widetilde{\rho u_k}}{\partial x_k} \\
\psi &= \overline{\widetilde{u_j} \frac{\partial \rho u_i'' u_k''}{\partial x_k}} + \overline{\widetilde{u_i} \frac{\partial \rho u_j'' u_k''}{\partial x_k}} \\
&= \overline{\widetilde{u_j} \frac{\partial \rho u_i'' u_k''}{\partial x_k}} + \overline{\widetilde{u_i} \frac{\partial \rho u_j'' u_k''}{\partial x_k}}
\end{aligned}$$

On rappelle que

$$\frac{\partial fgh}{\partial x} = fg \frac{\partial h}{\partial x} + fh \frac{\partial g}{\partial x} + gh \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{or} \quad fh \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial fgh}{\partial x} - g \frac{\partial fh}{\partial x} \quad \text{et} \quad gh \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial fgh}{\partial x} - f \frac{\partial gh}{\partial x}$$

$$\text{d'où : } \frac{\partial fgh}{\partial x} = fg \frac{\partial h}{\partial x} + \left( \frac{\partial fgh}{\partial x} - g \frac{\partial fh}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial fgh}{\partial x} - f \frac{\partial gh}{\partial x} \right)$$

ce qui permet de poser l'égalité suivante :

$$fg \frac{\partial h}{\partial x} - g \frac{\partial fh}{\partial x} - f \frac{\partial gh}{\partial x} = -\frac{\partial fgh}{\partial x}$$

On rappelle d'autre part que :

$$\frac{\partial fh}{\partial x} = f \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et donc par conséquent :} \quad -g \frac{\partial fh}{\partial x} + fg \frac{\partial h}{\partial x} = -gh \frac{\partial f}{\partial x}$$

Pour simplifier la somme  $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} + \varphi + \psi$  on regroupe les termes similaires et on simplifie à l'aide des formules A.12 et A.12

$$\begin{aligned}
&\overline{-\widetilde{u_j} \frac{\partial \rho u_i'' \widetilde{u_k}}{\partial x_k} - u_i'' \frac{\partial \widetilde{\rho u_j} \widetilde{u_k}}{\partial x_k} + u_i'' \widetilde{u_j} \frac{\partial \widetilde{\rho u_k}}{\partial x_k}} = \overline{\frac{\partial \rho u_i'' \widetilde{u_j} \widetilde{u_k}}{\partial x_k}} \\
&\overline{-u_j'' \frac{\partial \widetilde{\rho u_i} \widetilde{u_k}}{\partial x_k} - \widetilde{u_i} \frac{\partial \rho u_j'' \widetilde{u_k}}{\partial x_k} + \widetilde{u_i} u_j'' \frac{\partial \widetilde{\rho u_k}}{\partial x_k}} = \overline{\frac{\partial \widetilde{\rho u_i} u_j'' \widetilde{u_k}}{\partial x_k}} \\
&\overline{-\widetilde{u_j} \frac{\partial \widetilde{\rho u_i} u_k''}{\partial x_k} - \widetilde{u_i} \frac{\partial \widetilde{\rho u_j} u_k''}{\partial x_k} + \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \frac{\partial \rho u_k''}{\partial x_k}} = \overline{\frac{\partial \widetilde{\rho u_i} \widetilde{u_j} u_k''}{\partial x_k}} \\
&\overline{-u_j'' \frac{\partial \widetilde{\rho u_i} u_k''}{\partial x_k} - \widetilde{u_i} \frac{\partial \rho u_j'' u_k''}{\partial x_k} + \widetilde{u_i} u_j'' \frac{\partial \rho u_k''}{\partial x_k} + \widetilde{u_i} \frac{\partial \rho u_j'' u_k''}{\partial x_k}} = \overline{-\rho u_j'' u_k'' \frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_k}} \\
&\overline{-\widetilde{u_j} \frac{\partial \rho u_i'' u_k''}{\partial x_k} - u_i'' \frac{\partial \widetilde{\rho u_j} u_k''}{\partial x_k} + u_i'' \widetilde{u_j} \frac{\partial \rho u_k''}{\partial x_k} + \widetilde{u_j} \frac{\partial \rho u_i'' u_k''}{\partial x_k}} = \overline{-\rho u_i'' u_k'' \frac{\partial \widetilde{u_j}}{\partial x_k}} \\
&\overline{-u_j'' \frac{\partial \rho u_i'' \widetilde{u_k}}{\partial x_k} - u_i'' \frac{\partial \rho u_j'' \widetilde{u_k}}{\partial x_k} + u_i'' u_j'' \frac{\partial \widetilde{\rho u_k}}{\partial x_k}} = \overline{\frac{\partial \rho u_i'' u_j'' \widetilde{u_k}}{\partial x_k}} \\
&\overline{-u_j'' \frac{\partial \rho u_i'' u_k''}{\partial x_k} - u_i'' \frac{\partial \rho u_j'' u_k''}{\partial x_k} + u_i'' u_j'' \frac{\partial \rho u_k''}{\partial x_k}} = \overline{\frac{\partial \rho u_i'' u_j'' u_k''}{\partial x_k}}
\end{aligned}$$

la somme  $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} + \varphi + \psi$  est donc égale à :

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} + \alpha_{ji} + \varphi + \psi &= \overline{\frac{\partial \rho u_i'' \tilde{u}_j \tilde{u}_k}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\partial \rho \tilde{u}_i u_j'' \tilde{u}_k}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\partial \rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j u_k''}{\partial x_k}} - \overline{\rho u_j'' u_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}} - \overline{\rho u_i'' u_k \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\partial \rho u_i'' u_j'' \tilde{u}_k}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\partial \rho u_i'' u_j'' u_k''}{\partial x_k}} \\ &= \overline{\frac{\partial \rho \tilde{u}_i' u_j'' \tilde{u}_k}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\partial \rho \tilde{u}_j' \tilde{u}_i u_k''}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\partial \rho \tilde{u}_k' \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\rho u_j'' u_k}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\rho u_i'' u_k}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\partial \rho u_i'' u_j'' \tilde{u}_k}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\partial \rho u_i'' u_j'' u_k''}{\partial x_k}} \end{aligned}$$

On obtient finalement le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho u_i'' u_j''}}{\partial t} &= \overline{-\rho u_j'' u_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}} - \overline{\rho u_i'' u_k \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\partial \rho u_i'' u_j'' \tilde{u}_k}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\partial \rho u_i'' u_j'' u_k''}{\partial x_k}} \\ &\quad - \overline{u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} - \overline{u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}} - \overline{\frac{\partial u_j' \delta_{ik} p'}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\partial u_i' \delta_{jk} p'}{\partial x_k}} + \overline{p' \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}} + \overline{p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \\ &\quad + \overline{\frac{\partial u_j'' \tau_{ik}}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_i'' \tau_{jk}}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\partial u_j'' \tau_{ik}}{\partial x_k}} - \overline{\frac{\partial u_i'' \tau_{jk}}{\partial x_k}} \end{aligned}$$

Qui peut s'écrire de façon plus explicite sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho u_i'' u_j''}}{\partial t} &+ \underbrace{\overline{\tilde{u}_k \frac{\partial \rho u_i'' u_j''}{\partial x_k}}}_{\text{Advection*(-1)}} + \underbrace{\overline{\rho u_i'' u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}}}_{\text{Production*(-1)}} \quad (I) \tag{A.12} \\ &+ \underbrace{\overline{\frac{\partial \rho u_i'' u_j'' u_k''}{\partial x_k}}}_{\text{Diffusion Turbulente*(-1)}} \quad (II) \\ &+ \underbrace{\frac{2}{3} \left( \overline{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu u_j'' \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right)} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu u_i'' \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)} \right)}_{\text{Diffusion Visqueuse*(-1)}} \quad (IIIa) \\ &- \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\mu u_j'' \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \overline{\mu u_i'' \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)} \right)}_{\text{Diffusion visqueuse*(-1)}} \quad (IIIb) \\ &+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\left( u_i' \delta_{jk} + u_j' \delta_{ik} \right) p'} \right)}_{\text{Diffusion par la pression*(-1)}} \quad (IV) \\ &+ \underbrace{\overline{\rho u_k'' u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{\rho u_k'' u_i'' \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k}}}_{\text{Production*(-1)}} \quad (V) \\ &= \underbrace{\overline{p' \left( \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)}}_{\text{Redistribution}} \quad (VI) \\ &+ \underbrace{\frac{2}{3} \left( \overline{\mu \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} + \overline{\mu \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} \right)}_{\text{Dissipation}} \quad (VIIa) \\ &- \underbrace{\left( \overline{\mu \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \overline{\mu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)} \right)}_{\text{Dissipation}} \quad (VIIb) \\ &- \overline{u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} - \overline{u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}} \quad (VIII) \end{aligned}$$

ANNEXE A. ÉQUATIONS DE TRANSPORT

On peut choisir le système équivalent suivant (où la seconde version de  $\gamma_{ij}$  est utilisée) :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\partial \rho u_i'' u_j''}}{\partial t} = & -\overline{\rho u_j'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} - \overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} - \frac{\overline{\partial \rho u_i'' u_j'' \tilde{u}_k}}{\partial x_k} - \frac{\overline{\partial \rho u_i'' u_j'' u_k''}}{\partial x_k} \\ & -\overline{u_j''} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \overline{u_i''} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\partial u_j' \delta_{ik} p'}}{\partial x_k} - \frac{\overline{\partial u_i' \delta_{jk} p'}}{\partial x_k} + p' \frac{\overline{\partial u_j'}}{\partial x_i} + p' \frac{\overline{\partial u_i'}}{\partial x_j} \\ & +\overline{u_j''} \frac{\partial \bar{\tau}_{ik}}{\partial x_k} + \overline{u_i''} \frac{\partial \bar{\tau}_{jk}}{\partial x_k} + \frac{\overline{\partial u_j'' \tau'_{ik}}}{\partial x_k} + \frac{\overline{\partial u_i'' \tau'_{jk}}}{\partial x_k} - \overline{\tau'_{ik}} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} - \overline{\tau'_{jk}} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \end{aligned}$$

## Annexe B

# Calcul statistique de l'équation aux tensions de Reynolds

### B.1 Routines et nomenclatures dans le solveur FUNk

La routine *cpmys.f* calcule les moyennes basiques, l'indice de stockage de ses éléments dans le tableau *moy()* sera renseigné en bleu dans la suite du document.

La routine *cpmy\_rij.f* calcule les moyennes des grandeurs spécifiques aux équations de transport des tensions de Reynolds, l'indice de stockage de ses éléments dans le tableau *moy2()* sera renseigné en rouge dans la suite du document.

Les termes exacts des équations de transport des tensions de Reynolds sont calculés par *m\_cpmyo2.f* à partir des moyennes issues de *cpmy\_rij.f*, leur extraction utilisera les notations suivantes :

$$DU = divU = du/dx + dv/dy + dw/dz \quad (B.1)$$

$$Sa = S_{11}, Sb = S_{12}, Sc = S_{13} \quad (B.2)$$

$$Se = S_{21}, Sf = S_{22}, Sg = S_{23} \quad (B.3)$$

$$Sk = S_{31}, Sm = S_{32}, Sn = S_{33} \quad (B.4)$$

$$Mu = M = \mu, Ro = R = \rho \quad (B.5)$$

Les notations de chaque terme, déterminées par les routines *xpatmy.f* et *skmy.f* sont renseignées en vert dans la suite du document.

### B.2 Moyennes de Reynolds et Favre

On définit la moyenne de Reynolds :

$$\bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k \quad (B.6)$$

qui permet de décomposer les grandeurs  $f$  de l'écoulement en une partie moyenne et une partie fluctuante :

$$f = \bar{f} + f' \quad \text{avec} \quad \bar{f}' = 0 \quad (B.7)$$

Cette moyenne suit les règles de Reynolds :

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} \quad \overline{f g} = \bar{f} \bar{g} + \overline{f' g'} \quad \overline{\bar{f} g} = \bar{f} \bar{g}$$

$$\overline{a.f} = a\bar{f} \qquad \overline{\frac{\partial f}{\partial \xi}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi}$$

avec  $a$  scalaire et  $\xi$  variable d'espace ou de temps.

Afin de simplifier le système d'équations obtenues, on utilise aussi la moyenne de Favre  $\tilde{\cdot}$  :

$$f = \tilde{f} + f'' \quad \text{avec} \quad \tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \quad (\text{B.8})$$

qui suit les règles suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{\rho f''} &= 0 \\ \overline{f''} &= -\frac{\overline{\rho' f'}}{\bar{\rho}} = (\bar{f} - \tilde{f}) \neq 0 \\ \overline{\rho f g} &= \bar{\rho} \tilde{f} \tilde{g} + \overline{\rho f'' g''} \quad \text{avec} \quad \overline{\rho f'' g''} = \bar{\rho} \widetilde{f'' g''} \end{aligned}$$

### B.3 Équation de transport aux tensions de Reynolds - version Favre Kovasznay

On utilise la version révisée de l'Eq. 3.64 (B) écrite page 52 du Favre Kovasznay suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho u_i'' u_j''}}{\partial t} + \tilde{u}_k \frac{\partial \overline{\rho u_i'' u_j''}}{\partial x_k} &+ \overline{\rho u_i'' u_j''} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \quad (\text{I}) \\ &+ \frac{\partial \overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''}}{\partial x_k} \quad (\text{II}) \\ &+ \frac{2}{3} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{\mu u_j'' \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\mu u_i'' \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} \right) \right) \quad (\text{IIIa}) \\ &- \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\mu u_j'' \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \overline{\mu u_i'' \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)} \right) \quad (\text{IIIb}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\left( u_i' \delta_{jk} + u_j' \delta_{ik} \right) p'} \right) \quad (\text{IV}) \\ &+ \overline{\rho u_k'' u_j''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \overline{\rho u_k'' u_i''} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} \quad (\text{V}) \\ &= \\ &\overline{p' \left( \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)} \quad (\text{VI}) \\ &+ \frac{2}{3} \left( \overline{\mu \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} + \overline{\mu \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} \right) \quad (\text{VIIa}) \\ &- \left( \overline{\mu \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \overline{\mu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)} \right) \quad (\text{VIIb}) \\ &- \overline{u_j''} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \overline{u_i''} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \quad (\text{VIII}) \end{aligned}$$

### B.3.1 calcul de (I)

On a besoin de  $\tilde{u}_i$  et  $\overline{\rho u_i'' u_j''}$  pour évaluer (I).

D'après l'expression de la moyenne de Favre (équation B.8) :

$$\rho u_i'' u_j'' = \rho u_i u_j - \rho u_i \tilde{u}_j - \rho u_j \tilde{u}_i + \rho \tilde{u}_j \tilde{u}_i$$

Comme  $\tilde{\phi}$  ne dépend pas du temps, l'application de l'opérateur de moyenne temporelle entraîne :

$$\overline{\rho u_i'' u_j''} = \overline{\rho u_i u_j} - \overline{\rho u_i \tilde{u}_j} - \overline{\rho u_j \tilde{u}_i} + \overline{\rho \tilde{u}_j \tilde{u}_i} = \overline{\rho u_i u_j} - \overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \overline{\rho \tilde{u}_j \tilde{u}_i} + \overline{\rho \tilde{u}_j \tilde{u}_i}$$

Au final, la tension de Reynolds  $r_{ij}$  se calcule de la manière suivante :

$$r_{ij} = \boxed{\overline{\rho u_i'' u_j''}} = \overline{\rho u_i u_j} - \overline{\rho \tilde{u}_j \tilde{u}_i} \quad (\text{B.9})$$

Le terme  $\tilde{u}_i$  se calcule par définition :

$$\tilde{u}_i = \boxed{\frac{\overline{\rho u_i}}{\bar{\rho}}} \quad (\text{B.10})$$

Ces deux expressions nécessitent le calcul des moyennes temporelles (et donc le stockage en mémoire tableau) des grandeurs suivantes :

variables	nb tab	contenu de tab	permet de calculer
$\bar{\rho}$	1	4 : $\bar{\rho}$	$\bar{\rho}$ ( rho ) et $\tilde{u}_i = \overline{\rho u_i} / \bar{\rho}$ ( u~ )
$\overline{\rho u_i}$	3	1-3 : $\overline{\rho u_i}$ (i=1,3)	
$\overline{\rho u_i u_j}$	6	8 : $\overline{\rho u_1 u_1}$ , 9 : $\overline{\rho u_2 u_2}$ , 10 : $\overline{\rho u_3 u_3}$ , 11 : $\overline{\rho u_1 u_2}$ , 12 : $\overline{\rho u_1 u_3}$ , 13 : $\overline{\rho u_2 u_3}$	$\overline{\rho u_i'' u_j''}$ d'après Eq. B.9 ( RoU'U', RoU'V', ... )

### B.3.2 calcul de (II)

On a besoin de  $\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''}$  pour évaluer (II).

D'après l'expression de la moyenne de Favre (équation B.8) :

$$\rho u_i'' u_j'' u_k'' = \rho u_i u_j u_k - \rho u_i u_k \tilde{u}_j - \rho u_k u_j \tilde{u}_i - \rho u_i u_j \tilde{u}_k + \rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j u_k + \rho \tilde{u}_k \tilde{u}_j u_i + \rho \tilde{u}_k \tilde{u}_i u_j - \rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j \tilde{u}_k$$

Comme  $\tilde{\phi}$  ne dépend pas du temps, l'application de l'opérateur de moyenne temporelle entraîne :

$$\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} = \overline{\rho u_i u_j u_k} - \overline{\tilde{u}_j \rho u_i u_k} - \overline{\tilde{u}_i \rho u_j u_k} - \overline{\tilde{u}_k \rho u_i u_j} + 2 \overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j \tilde{u}_k} \quad (\text{B.11})$$

variables	nb tab	contenu de tab	permet de calculer
$\overline{\rho u_i u_j u_k}$	10	1 : $\overline{\rho u_1 u_1 u_1}$ , 2 : $\overline{\rho u_2 u_2 u_2}$ , 3 : $\overline{\rho u_3 u_3 u_3}$ , 4 : $\overline{\rho u_1 u_1 u_2}$ , 5 : $\overline{\rho u_1 u_1 u_3}$ , 6 : $\overline{\rho u_2 u_2 u_1}$ , 7 : $\overline{\rho u_2 u_2 u_3}$ , 8 : $\overline{\rho u_3 u_3 u_1}$ , 9 : $\overline{\rho u_3 u_3 u_2}$ , 10 : $\overline{\rho u_1 u_2 u_3}$	$\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''}$ d'après Eq. B.11 ( RoU'U'U', RoU'V'W', ... )

**B.3.3 calcul de (IIIa)**

On a besoin de  $\overline{\mu u_i'' \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}$ .

D'après l'expression de la moyenne de Favre (équation B.8), on peut écrire :

$$\boxed{\overline{\mu u_i'' \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} = \overline{\mu u_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \tilde{u}_i \overline{\mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}} \quad (\text{B.12})$$

variables	nb tab	contenu de tab	permet de calculer
$\overline{\frac{\partial u_l}{\mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}}$	1	<b>11</b> : $\overline{\mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}$	$\overline{\mu u_i'' \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}$ d'après Eq. B.12
$\overline{\mu u_i \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}$	3	<b>12</b> : $\overline{\mu u_1 \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}$ , <b>13</b> : $\overline{\mu u_2 \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}$ , <b>14</b> : $\overline{\mu u_3 \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}$	( <b>MuU'divU</b> , <b>MuV'divU</b> , ... )

**B.3.4 calcul de (IIIb)**

On a besoin de :

$$\overline{\mu u_j'' \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \overline{\mu u_i'' \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)} = \overline{\mu (u_j - \tilde{u}_j) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \overline{\mu (u_i - \tilde{u}_i) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)}$$

$$\boxed{\overline{\mu u_j'' \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \overline{\mu u_i'' \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)} = \overline{f(u_i, u_j, u_k)} - \left( \tilde{u}_j \overline{g(u_i, u_k)} + \tilde{u}_i \overline{g(u_j, u_k)} \right)} \quad (\text{B.13})$$

avec les définitions suivantes de f et g :

$$f(u_i, u_j, u_k) = f_{ijk} = \mu u_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \mu u_i \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = \mu u_j s_{ik} + \mu u_i s_{jk} \quad (\text{B.14})$$

$$g(u_i, u_k) = g_{ik} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = \mu s_{ik} \quad (\text{B.15})$$

où  $s_{ik}$  est défini dans l'eq. (B.18). Ces 2 fonctions vérifient les propriétés suivantes de "parité" :

$$f_{ijk} = f_{jik} \quad \text{et} \quad g_{ik} = g_{ki}$$

variables	nb tab	contenu de tab	permet de calculer
$\overline{f_{ijk}}$	18	<b>15</b> : $\overline{f_{111}}$ , <b>16</b> : $\overline{f_{222}}$ , <b>17</b> : $\overline{f_{333}}$ , <b>18</b> : $\overline{f_{112}}$ , <b>19</b> : $\overline{f_{113}}$ , <b>20</b> : $\overline{f_{221}}$ , <b>21</b> : $\overline{f_{223}}$ , <b>22</b> : $\overline{f_{331}}$ , <b>23</b> : $\overline{f_{332}}$ , <b>24</b> : $\overline{f_{123}}$ , <b>25</b> : $\overline{f_{122}}$ , <b>26</b> : $\overline{f_{121}}$ , <b>27</b> : $\overline{f_{133}}$ , <b>28</b> : $\overline{f_{132}}$ , <b>29</b> : $\overline{f_{131}}$ , <b>30</b> : $\overline{f_{231}}$ , <b>31</b> : $\overline{f_{232}}$ , <b>32</b> : $\overline{f_{233}}$	$\overline{\mu u_j'' \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \overline{\mu u_i'' \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)}$ d'après l'Eq.B.13  ( $i, j, k = 1, 1, 1 \rightarrow$ <b>2MuU'Sa</b> )
$\overline{g_{ik}}$	6	<b>33</b> : $\overline{g_{11}}$ , <b>34</b> : $\overline{g_{22}}$ , <b>35</b> : $\overline{g_{33}}$ , <b>36</b> : $\overline{g_{12}}$ , <b>37</b> : $\overline{g_{13}}$ , <b>38</b> : $\overline{g_{23}}$	( $i, j, k = 1, 2, 3 \rightarrow$ <b>MuVScUSg</b> )

### B.3.5 calcul de (IV)

On a besoin de calculer  $\overline{(u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik}) p'}$ .

D'après l'expression de la moyenne de favre (équation B.8), le terme non moyenné en temps peut s'écrire :

$$\begin{aligned} (u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik}) p' &= ((u_i - \bar{u}_i) \delta_{jk} + (u_j - \bar{u}_j) \delta_{ik}) (p - \bar{p}) \\ &= p(u_i \delta_{jk} + u_j \delta_{ik}) - p(\bar{u}_i \delta_{jk} + \bar{u}_j \delta_{ik}) - \bar{p}(u_i \delta_{jk} + u_j \delta_{ik}) + \bar{p}(\bar{u}_i \delta_{jk} + \bar{u}_j \delta_{ik}) \end{aligned}$$

on déduit alors que :

$$\overline{(u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik}) p'} = \overline{p(u_i \delta_{jk} + u_j \delta_{ik})} - \bar{p} \overline{(u_i \delta_{jk} + u_j \delta_{ik})}$$

$$\boxed{\overline{(u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik}) p'} = \overline{p u_i} \delta_{jk} + \overline{p u_j} \delta_{ik} - \bar{p} (\bar{u}_i \delta_{jk} + \bar{u}_j \delta_{ik})} \quad (\text{B.16})$$

Il faut donc stocker les variables suivantes :

variables	nb tab	contenu de tab	permet de calculer
$\overline{h_{ijk}}$	3	39 : $\overline{p u_1}$ , 40 : $\overline{p u_2}$ , 41 : $\overline{p u_3}$	$\overline{(u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik}) p'}$ d'après l'Eq.B.16 ( $\mathbf{U'P'}$ , ..., $\mathbf{u,v,w}$ et $\mathbf{p}$ )
$\bar{u}_i$	3	42 : $\bar{u}_1$ , 43 : $\bar{u}_2$ , 44 : $\bar{u}_3$	
$\bar{p}$	1	5 : $\bar{p}$	

### B.3.6 calcul de (VI)

On a besoin de calculer  $p' \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)$ .

D'après l'expression de la moyenne de favre (équation B.8), le terme non moyenné en temps peut s'écrire :

$$p' \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) = p \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - p \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \bar{p} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \bar{p} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)$$

on déduit alors que :

$$\boxed{p' \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) = \overline{p s_{ij}} - \bar{p} \overline{s_{ij}}} \quad (\text{B.17})$$

avec

$$s_{ij} = \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (\text{B.18})$$

variables	nb tab	contenu de tab	permet de calculer
$\overline{p s_{ij}}$	6	45 : $\overline{p s_{11}}$ , 46 : $\overline{p s_{22}}$ , 47 : $\overline{p s_{33}}$ , 48 : $\overline{p s_{12}}$ , 49 : $\overline{p s_{13}}$ , 50 : $\overline{p s_{23}}$	$\overline{p' \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)}$ d'après l'Eq.B.17 ( $\mathbf{P'Sa'}$ , $\mathbf{P'Sf'}$ , ... )
$\overline{s_{ij}}$	6	51 : $\overline{s_{11}}$ , 52 : $\overline{s_{22}}$ , 53 : $\overline{s_{33}}$ , 54 : $\overline{s_{12}}$ , 55 : $\overline{s_{13}}$ , 56 : $\overline{s_{23}}$	

**B.3.7 calcul de (VIIa)**

On a besoin de calculer  $\overline{\mu \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \frac{\partial u_l''}{\partial x_l}} + \overline{\mu \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_l''}{\partial x_l}} = \overline{\mu s_{ij}'' \frac{\partial u_l''}{\partial x_l}}$ , où  $s_{ij}''$  est défini grâce à l'Eq. B.18.

D'après l'expression de la moyenne de Favre (équation B.8), le terme non moyenné en temps peut s'écrire :

$$\mu s_{ij}'' \frac{\partial u_l''}{\partial x_l} = \mu s_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \mu s_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} - \mu \tilde{s}_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \mu \tilde{s}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l}$$

on déduit alors que :

$$\overline{\mu \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \frac{\partial u_l''}{\partial x_l}} + \overline{\mu \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_l''}{\partial x_l}} = \boxed{\overline{\mu s_{ij}'' \frac{\partial u_l''}{\partial x_l}} = \overline{\mu s_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} - \overline{\tilde{s}_{ij} \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} - \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \overline{\mu s_{ij}} + \tilde{s}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \overline{\mu}} \quad (\text{B.19})$$

Comme  $\overline{\mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}$  et  $\overline{\mu s_{ij}}$  ont déjà été stockés pour le calcul de (IIIa) et (IIIb), le calcul de (VIIa) nécessite le stockage suivant :

variables	nb tab	contenu de tab	permet de calculer
$\overline{\mu s_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}$	6	$57 : \overline{\mu s_{11} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}, 58 : \overline{\mu s_{22} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}, 59 : \overline{\mu s_{33} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}},$ $60 : \overline{\mu s_{12} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}, 61 : \overline{\mu s_{13} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}, 62 : \overline{\mu s_{23} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}$	$\overline{\mu \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \frac{\partial u_l''}{\partial x_l}} + \overline{\mu \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_l''}{\partial x_l}}$ d'après l'Eq.B.19
$\overline{\mu}$	1	81 : $\overline{\mu}$	( MuSa'DU', ... )

**B.3.8 calcul de (VIIb)**

On a besoin de calculer  $\overline{\mu \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)} + \overline{\mu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)} = \overline{\mu \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} s_{ik}} + \overline{\mu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} s_{jk}}$

D'après l'expression de la moyenne de Favre (équation B.8), le terme non moyenné en temps peut s'écrire :

$$\mu \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} s_{ik} + \mu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} s_{jk} = \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} s_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} s_{jk} \right) - \mu \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} s_{ik} - \mu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} s_{jk}$$

on déduit alors que :

$$\boxed{\overline{\mu \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} s_{ik} + \mu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} s_{jk}} = \overline{l_{ijk}} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} \overline{\mu s_{ik}} - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \overline{\mu s_{jk}}} \quad (\text{B.20})$$

avec

$$l_{ijk} = \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} s_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} s_{jk} \right) \quad (\text{B.21})$$

Comme d'une part  $\overline{\mu s_{jk}}$  et  $\overline{\mu s_{ik}}$  ont déjà été stockés pour le calcul de (VIIa) et que d'autre part  $l_{ijk} = l_{jik}$ , le calcul de (VIIb) nécessite le stockage suivant :

variables	nb tab	contenu de tab	permet de calculer
$\overline{l_{ijk}}$	18	$63 : \overline{l_{111}}, 64 : \overline{l_{222}}, 65 : \overline{l_{333}},$ $66 : \overline{l_{112}}, 67 : \overline{l_{113}}, 68 : \overline{l_{221}}, 69 : \overline{l_{223}},$ $70 : \overline{l_{331}}, 71 : \overline{l_{332}}, 72 : \overline{l_{123}}, 73 : \overline{l_{122}},$ $74 : \overline{l_{121}}, 75 : \overline{l_{133}}, 76 : \overline{l_{132}}, 77 : \overline{l_{131}},$ $78 : \overline{l_{231}}, 79 : \overline{l_{232}}, 80 : \overline{l_{233}}$	$\overline{\mu \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} s_{ik} + \mu \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} s_{jk}}$ d'après l'Eq.B.20 ( Md3W'Sg+, ... )

### B.3.9 calcul de (VIII)

On a besoin de calculer  $\overline{u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} + \overline{u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}}$ .

Que l'on peut exprimer sous la forme suivante :

$$\boxed{\overline{u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} + \overline{u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}} = (\bar{u}_j - \tilde{u}_j) \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + (\bar{u}_i - \tilde{u}_i) \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}}$$

Ainsi le calcul de (VIII) ne nécessite pas de stockage supplémentaire, car  $\tilde{u}$ ,  $\bar{u}$  et  $\bar{p}$  ont déjà été stockés. Les termes VIII sont notés ( **R'U'P1/R**,... )

## B.4 Équation de transport aux tension de Reynolds - version 2

Il faut extraire les termes

$$\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c = \left( \overline{u_j'' \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}} + \overline{u_i'' \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k}} \right) + \left( \frac{\partial \overline{u_j'' \tau'_{ik}}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i'' \tau'_{jk}}}{\partial x_k} \right) - \left( \overline{\tau'_{ik} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} + \overline{\tau'_{jk} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} \right)$$

### B.4.1 calcul de ( $\gamma_a$ )

On veut calculer  $\gamma_a = \overline{u_j'' \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}} + \overline{u_i'' \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k}}$  qui se développe sous la forme suivante :

$$\boxed{\gamma_a = (\bar{u}_j - \tilde{u}_j) \left( -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\mu s_{ik}}) \right) + (\bar{u}_i - \tilde{u}_i) \left( -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\mu s_{jk}}) \right)}$$

(B.22)

Tous les termes nécessaires au calcul de  $\gamma_a$  ont déjà été stockés, aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire. On extrait les variables **MuDivU** =  $\mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l}$  et **MuSij** =  $\overline{\mu s_{ij}}$ .

### B.4.2 calcul de ( $\gamma_b$ )

On veut calculer  $\gamma_b = \frac{\partial \overline{u_j'' \tau'_{ik}}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i'' \tau'_{jk}}}{\partial x_k}$ .

Afin de développer  $\gamma_b$ , il est nécessaire d'explicitier au préalable l'expression  $\overline{h(fg)'} :$

$$\begin{aligned} h(fg)' &= h[fg - \overline{fg}] \\ &= h\left[\left((\bar{f} + f')(\bar{g} + g')\right) - \left(\bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'}\right)\right] \\ &= h\left[\left(\cancel{\bar{f}g'} + f'g' + \bar{f}g' + f'\bar{g}\right) - \left(\cancel{\bar{f}g'} + \overline{f'g'}\right)\right] \\ &= h\left[f'g' + \bar{f}g' + f'\bar{g} - \overline{f'g'}\right] \\ \overline{h(fg)'} &= \overline{hf'g' + hf\bar{g}' + hf'g - hf'\bar{g}'} \\ &= \overline{hf'g' + \bar{f}hg' + hf'g - \bar{h}f'\bar{g}'} \\ &= \overline{h(f - \bar{f})(g - \bar{g}) + \bar{f}h(g - \bar{g}) + h(f - \bar{f})\bar{g} - \bar{h}(f - \bar{f})(g - \bar{g})} \\ &= \overline{(\cancel{hf\bar{g}} + \cancel{\bar{h}f'g} - \cancel{hg\bar{f}} - \cancel{hf'g}) + (\cancel{f\bar{h}g} - \cancel{\bar{f}h\bar{g}}) + (\cancel{\bar{h}f'g} - \cancel{\bar{h}f'\bar{g}})} \\ &\quad - \overline{(\cancel{\bar{h}f\bar{g}} - \cancel{\bar{h}f'g} - \cancel{\bar{h}g\bar{f}} + \cancel{\bar{h}f'\bar{g}})} \\ &= \overline{hf\bar{g} - \bar{h}f\bar{g}} \end{aligned}$$

(B.23)

Développons  $\gamma_b$  :

$$\begin{aligned}\gamma_b &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( (u_j - \tilde{u}_j) \left( -\frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik} + \mu s_{ik} \right)' + (u_i - \tilde{u}_i) \left( -\frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{jk} + \mu s_{jk} \right)' \right) \\ &= -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{u_j \left( \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)'} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u_j (\mu s_{ik})'} \right) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{\tilde{u}_j \left( \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)'} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\tilde{u}_j (\mu s_{ik})'} \right) \\ &\quad - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u_i \left( \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)'} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u_i (\mu s_{jk})'} \right) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\tilde{u}_i \left( \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)'} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\tilde{u}_i (\mu s_{jk})'} \right)\end{aligned}$$

Qui peut se réécrire en utilisant l'expression B.23 :

$$\begin{aligned}\gamma_b &= -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{\mu u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} - \overline{u_j \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\mu u_j s_{ik}} - \overline{u_j \mu s_{ik}} \right) \\ &\quad - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\mu u_i \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} - \overline{u_i \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\mu u_i s_{jk}} - \overline{u_i \mu s_{jk}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_b &= -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{\mu u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} - \overline{u_j \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\mu u_i \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} - \overline{u_i \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\mu u_j s_{ik}} + \overline{\mu u_i s_{jk}} - \overline{u_j \mu s_{ik}} - \overline{u_i \mu s_{jk}} \right)\end{aligned}$$

Tous les termes nécessaires au calcul de  $\gamma_b$  ont déjà été stockés, aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire. On extrait les variables  $\text{MuUdivU} = \mu u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_l}$  et  $\text{MuUSijk} = \mu u_i s_{jk} + \mu u_j s_{ik}$ .

### B.4.3 calcul de ( $\gamma_c$ )

On veut calculer  $\gamma_c = \tau'_{ik} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} + \tau'_{jk} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}$  qui se développe sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\gamma_c &= -\frac{2}{3} \overline{\left( \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)' \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} + \overline{(\mu s_{ik})' \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} \\ &\quad - \frac{2}{3} \overline{\left( \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \overline{(\mu s_{jk})' \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} \\ &= -\frac{2}{3} \overline{\left( \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)' \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} + \frac{2}{3} \overline{\left( \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)' \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}} + \overline{(\mu s_{ik})' \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} - \overline{(\mu s_{ik})' \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k}} \\ &\quad - \frac{2}{3} \overline{\left( \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)' \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \frac{2}{3} \overline{\left( \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{(\mu s_{jk})' \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} - \overline{(\mu s_{jk})' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}}\end{aligned}$$

Qui peut se réécrire en utilisant l'expression B.23 :

$$\begin{aligned}\gamma_c &= -\frac{2}{3} \left[ \overline{\mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} - \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} \right] + \left[ \overline{\mu s_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} - \overline{\mu s_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \right] \\ &\quad - \frac{2}{3} \left[ \overline{\mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} \right] + \left[ \overline{\mu s_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} - \overline{\mu s_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \right]\end{aligned}$$

$$\gamma_c = -\frac{2}{3} \left[ \overline{\mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} s_{ij}} - \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \overline{\mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l}} \right] + \left[ \overline{\mu s_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{\mu s_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} - \overline{\mu s_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}} - \overline{\mu s_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} \right] \quad (\text{B.24})$$

Ici encore, tous les termes nécessaires au calcul de  $\gamma_b$  ont déjà été stockés, aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire. On extrait les variables  $\text{GamCij} = \gamma_c + \overline{\mu s_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{\mu s_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}$ .

## Annexe C

# Modélisation RANS des équations de transport de $k$ et $\varepsilon$

La fermeture des équations RANS 4.6 nécessite la modélisation du tenseur de Reynolds  $\tilde{\tau}_{ij}^R = -\overline{\rho u_i'' u_j''}$  et du flux de chaleur turbulent  $\tilde{q}_{t_j} = \overline{(\rho e'' + p) u_j''}$ . Comme décrit section 4.2.2, les modèles de turbulence du premier ordre reposent sur l'hypothèse de Boussinesq qui exprime le tenseur de Reynolds et le flux de chaleur turbulent en fonction de la viscosité cinématique de la turbulence  $\nu_t$  :

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{ij}^R &= \rho \nu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ \tilde{q}_{t_j} &= - \frac{\rho \nu_t C_p}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}\end{aligned}$$

La viscosité cinématique de la turbulence dont l'origine est expliquée section 4.4.1 peut être exprimée en fonction de l'énergie cinétique  $k$  et de la dissipation  $\varepsilon$  :

$$\nu_t = C_{\mu}^{ste} \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Les équations de transport sont introduites pour modéliser les grandeurs  $k$  et  $\varepsilon$ . Les composants de ces équations de transport doivent être, pour la plus part, modélisés, faisant appel à des hypothèses reposant sur les propriétés habituelles des couches limites turbulentes.

Le contenu de ce chapitre s'appuie sur le travail de synthèse réalisé par Aupoix [9].

### C.1 Prérequis : propriétés des couches limites turbulentes

Les modèles de turbulence RANS reposent sur certaines hypothèses fortes, leurs origines sont décrites dans cette section, et les simplifications qui en découlent sont évoquées.

Pour des raisons de simplifications d'écriture on écrira ici les équations en incompressible et on se placera dans un repère où " $x$ " représente la direction de l'écoulement, " $y$ " représente la direction normale à la paroi et donc la distance à la paroi, et " $z$ " représente la direction transverse à l'écoulement.

#### C.1.1 Équations de la couche limite

Les écoulements mis en jeu au cours de l'étude du décrochage dynamique font intervenir des couches limites turbulentes, en équilibre ou non. Le rappel des propriétés des couches en équilibre sera utile par la suite puisque tous les modèles de turbulence reposent explicitement ou

implicitement sur cette hypothèse. Seuls les modèles multi-échelles [41] prennent en compte de façon simpliste le déséquilibre.

Considérons ici un écoulement incompressible 2D, le système 4.6 s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{u'u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \overline{u'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \overline{v'v'} \right) \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

L'approximation de couche limite (Cousteix [24] par exemple) consiste à considérer un écoulement de fluide à nombre de Reynolds relativement élevé et donc peu visqueux se développant sur une paroi dont le rayon de courbure est grand par rapport à l'épaisseur de la couche limite. Les variations de vitesse dans la direction normale à la paroi  $y$  sont importantes, tout particulièrement en proche paroi où les effets visqueux sont très loin d'être négligeables. Dans ce contexte, l'analyse dimensionnelle permet de simplifier les équations du système C.1. et d'en déduire le système d'équations de couche limite bidimensionnelle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

Un rapide rappel de la structure d'une couche limite turbulente a déjà été fait au début de ce mémoire section 1.1.1.3, une présentation plus détaillée des propriétés de chacune des régions qui la compose est nécessaire.

## C.1.2 Structure verticale et propriétés d'une couche limite turbulente

L'analyse de l'évolution de la tension totale  $\tau(y) = \nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'}$  somme des contraintes visqueuses et turbulentes (équation 2.1) permet de distinguer deux régions dans la couche limite, la région interne, où la somme des contraintes visqueuses et turbulentes est constante, et la région externe où la contrainte visqueuse est complètement négligeable devant la contrainte turbulente, la somme des deux diminuant avec la distance à la paroi.

### C.1.2.1 Région interne

Dans la région interne, le gradient de pression et les termes de convection sont négligeables ; la somme des contraintes visqueuses et turbulentes  $y$  est donc constante dans la direction verticale à la paroi, et égale à la contrainte visqueuse pariétale  $\tau_w = \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$  :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) = 0 \quad \implies \quad \nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} = C^{ste} = \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (\text{C.3})$$

Cette région est elle même divisée en trois couches :

#### C.1.2.1.a La sous-couche linéaire

( $0 < y^+ < 3$ ), où la contrainte visqueuse est prédominante sur la contrainte turbulente, menant à une loi de variation linéaire de la vitesse vis-à-vis de la distance à la paroi :

$$\nu \frac{\partial u}{\partial y} = C^{ste} = \frac{\tau_w}{\rho} = u_\tau^2 \quad \implies \quad \int \nu \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int u_\tau^2 dy \quad \implies \quad \nu u = u_\tau^2 y$$

dont la notation habituelle est

$$\boxed{u^+ = y^+} \quad (\text{C.4})$$

avec

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad \text{et} \quad y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} \quad \text{avec} \quad u_\tau = \sqrt{(\tau_w/\rho)} \quad (\text{C.5})$$

#### C.1.2.1.b La zone tampon

( $3 < y^+ < 40$ ), zone intermédiaire où la production de turbulence est maximale. C'est une région qui joue un rôle très important dans le processus d'auto-génération de la couche limite turbulente.

#### C.1.2.1.c La zone logarithmique

( $y^+ > 40$ ), où les contraintes visqueuses deviennent négligeables devant les contraintes turbulentes, menant à une loi de variation logarithmique de la vitesse vis-à-vis de la distance à la paroi :

En négligeant les contraintes visqueuses, l'équation C.3 devient  $-\overline{u'v'} = u_\tau^2$ . En considérant l'hypothèse de Boussinesq 4.9 (et la simplification  $\partial u/\partial y \gg \partial v/\partial x$ ), cette égalité peut s'écrire  $\nu_t \partial u/\partial y = u_\tau^2$  où  $\nu_t \sim C_{\mu_t}^{ste} \mathcal{U}_{\mu_t} \mathcal{L}_{\mu_t}$  (4.8). Dans la zone interne, l'échelle de longueur est la distance à la paroi  $\mathcal{L} = y$  et l'échelle de vitesse celle du cisaillement :  $\mathcal{U} = y \partial u/\partial y$ . En considérant  $\kappa = 0.41$  la constante de Von Kármán, la viscosité de la turbulence est alors donnée par l'expression  $\nu_t \sim \kappa^2 y^2 \partial u/\partial y$ , et l'équation C.3 devient :

$$\kappa^2 y^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = u_\tau^2 \quad \implies \quad \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1}{\kappa} \frac{1}{y^+} \quad \implies \quad \boxed{u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C_{Ulog}^{ste}} \quad (\text{C.6})$$

où la constante  $C_{Ulog}^{ste}$  est généralement égale à 5.2.

Remarquons au passage que l'hypothèse de Boussinesq qui permet d'écrire  $\nu_t \sim \kappa^2 y^2 \partial u/\partial y$  entraîne (par application de C.5 et C.6) une variation linéaire de la viscosité de la turbulence dans la zone logarithmique :

$$\nu_t = \kappa \nu y^+ \quad (\text{C.7})$$

Enfin, il est admis que dans la zone logarithmique, les bilans de production et de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence  $k$  sont égaux :  $P_k = \varepsilon$ . La relation de Bradshaw [14] en découle :

$$\boxed{-\overline{u'v'} = 2 a_1 k} \quad \text{où} \quad a_1 \sim 0.15 \text{ est la constante de Bradshaw} \quad (\text{C.8})$$

Cette relation stipule que, les bilans de production et dissipation étant égaux, l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  est constante dans la région logarithmique.

#### C.1.2.2 Région externe

Dans la région externe appelée aussi zone déficitaire de vitesse, la contrainte visqueuse est complètement négligeable devant la contrainte turbulente et diminue avec la distance à la paroi. Dans cette région le profil de vitesse est commandé par la loi :

$$\frac{u_e - u}{u_\tau} = \Phi\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (\text{C.9})$$

### C.1.3 Spectre d'énergie et énergie cinétique de la turbulence

La distribution spectrale d'énergie  $E(\mathbf{k})$  où on note  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{l}$  le module du vecteur d'onde, est une caractéristique fondamentale des écoulements turbulents. Son expression pour les échelles intermédiaires  $l$  peut être obtenue par analyse dimensionnelle :  $E(\mathbf{k}) = K_0 \varepsilon^{2/3} \mathbf{k}^{-5/3}$  où  $K_0 \sim 1.4$  est la constante de Kolmogorov.

En pratique, le spectre d'énergie est souvent représenté par les lois simplifiées suivantes :

$$E(\mathbf{k}) = \begin{cases} A \mathbf{k}^s & \text{pour } \mathbf{k} \leq \mathbf{k}_L \\ K_0 \varepsilon^{2/3} \mathbf{k}^{-5/3} & \text{pour } \mathbf{k}_L \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{k}_K \\ \rightarrow 0 & \text{pour } \mathbf{k} \geq \mathbf{k}_K \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

où  $s$  est une constante,  $\mathbf{k}_K$  est le nombre d'onde des petites structures dissipatives d'échelle  $\eta$  et  $\mathbf{k}_L$  est le nombre d'onde des structures grandes échelles contenant la plus grande partie de l'énergie de l'écoulement.

À ce stade, notons que l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  n'est autre que l'intégrale de l'énergie  $E(\mathbf{k})$  sur l'ensemble du spectre (ie  $\mathbf{k} = [0, \infty]$ ) :

$$\begin{aligned} k &= \int_0^\infty E(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \\ &\approx \int_0^{\mathbf{k}_L} A \mathbf{k}^s d\mathbf{k} + \int_{\mathbf{k}_L}^\infty K_0 \varepsilon^{2/3} \mathbf{k}^{-5/3} d\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{s+1} A \mathbf{k}_L^{s+1} + \frac{3}{2} K_0 \varepsilon^{2/3} \mathbf{k}_L^{-2/3} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

D'après C.10, on peut poser  $E(\mathbf{k}_L) = A \mathbf{k}_L^s = K_0 \varepsilon^{2/3} \mathbf{k}_L^{-5/3}$  et en déduire l'équivalence  $A \mathbf{k}_L^{s+1} = K_0 \varepsilon^{2/3} \mathbf{k}_L^{-2/3}$ . Ainsi l'expression C.11 devient :

$$k = \frac{3s+5}{2(s+1)} K_0 \varepsilon^{2/3} \mathbf{k}_L^{-2/3} \quad (\text{C.12})$$

ou encore la forme équivalente

$$k = \frac{3s+5}{2(s+1)} A \mathbf{k}_L^{s+1} \quad (\text{C.13})$$

L'équivalence qui vient d'être posée mène à l'expression  $\mathbf{k}_L = (K_0 \varepsilon^{2/3} / A)^{\frac{3}{3s+5}}$ , ce qui permet de réécrire l'équation C.13 en éliminant  $\mathbf{k}_L$  de la formulation :

$$k = \frac{3s+5}{2(s+1)} A \left( \left( \frac{K_0 \varepsilon^{2/3}}{A} \right)^{\frac{3}{3s+5}} \right)^{s+1} = \frac{3s+5}{2(s+1)} A^{1-\frac{3(s+1)}{3s+5}} K_0^{\frac{3(s+1)}{3s+5}} \varepsilon^{\frac{2(s+1)}{3s+5}} \quad (\text{C.14})$$

À ce point, il est utile de remarquer que, d'après l'équation C.12,  $\mathbf{k}_L$  peut aussi être exprimé sous la forme  $\mathbf{k}_L = \left( \frac{3s+5}{2(s+1)} K_0 \varepsilon^{2/3} / k \right)^{3/2}$ . Puisque  $\mathbf{k}_K$  est le nombre d'onde de Kolmogorov, il est donné par la relation  $\mathbf{k}_K = 2\pi/\eta$ , qui se réécrit à l'aide de l'expression 3.1 :  $\mathbf{k}_K = 2\pi \varepsilon^{1/4} \nu^{-3/4}$ . Le rapport de ces deux nombres d'onde s'écrit sous la forme suivante, où on note  $\Re_t$  le nombre de Reynolds de la turbulence :

$$\frac{\mathbf{k}_K}{\mathbf{k}_L} \propto \frac{\varepsilon^{1/4}}{\nu^{3/4}} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} = \left( \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \right)^{3/4} = \Re_t^{3/4} \quad (\text{C.15})$$

On constate donc que  $\mathbf{k}_K$  et  $\mathbf{k}_L$  s'écartent lorsque le nombre de Reynolds augmente.

## C.2 Équation de transport pour l'énergie cinétique de la turbulence $k$

### C.2.1 Équation exacte

L'équation de transport exacte de l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  peut être obtenue à partir des équations des fluctuations de vitesse. Pour un fluide incompressible, elle s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{Advection}} = \underbrace{-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}}_{\text{Production}} + \left( \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_i p'}}_{\text{Diff. par P}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_i u'_j}}_{\text{Diff. Turb.}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2}}_{\text{Diff. Visq.}} \right) - \underbrace{\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}_{\text{Dissipation}} \quad (\text{C.16})$$

Les termes de cette équation à modéliser sont la dissipation, la diffusion par la turbulence et la diffusion par la pression. Ces deux derniers termes sont directement modélisés alors que la dissipation (C.17), que l'on notera par la suite  $\varepsilon$ , sera résolue par une équation de transport (cf paragraphe suivant).

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad (\text{C.17})$$

### C.2.2 Première hypothèse pour la diffusion par la pression

Par manque de connaissances et de données de référence, le terme de diffusion par la pression est souvent négligé [75], ou du moins inclus dans la modélisation du terme de diffusion turbulente.

### C.2.3 Modélisation de la diffusion turbulente

Le terme de diffusion par la turbulence a pour rôle d'homogénéiser la répartition spatiale d'énergie cinétique de la turbulence, il est généralement modélisé par l'expression

$$-\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (\text{C.18})$$

où  $\sigma_k$  est un nombre de Prandtl-Schmidt à déterminer. Des études DNS ont montré qu'une valeur de 0.55 convient pour une couche limite à l'équilibre ([75],[117],[18]), et qu'une valeur de 0.8 est obtenue en présence de gradient de pression ([13],[17]), cette valeur diminuant à la frontière extérieure de la couche limite.

### C.2.4 Modélisation de la production

Le terme de production sera noté  $P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$ . Il fait intervenir le tenseur de Reynolds  $-\overline{u'_i u'_j}$  qui équivaut à  $\nu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$  dans le cadre de l'approximation de Boussinesq simplifiée 4.11.

Une hypothèse supplémentaire est communément appliquée, celle de la couche limite bidimensionnelle pour laquelle  $\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \gg \frac{\partial \overline{v}}{\partial y}$  et même  $\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \gg \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}$ . Cela permet de réduire le terme de production à la forme suivante :  $P_k = -\overline{u'v'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2$ . Cette hypothèse est sous-entendue dans les deux expressions ci-dessous, bien qu'elles conservent la notation  $i, j$  car il en va ainsi dans la littérature.

Finalement, en exprimant  $\nu_t$  à l'aide des expressions 4.18 on peut donner l'expression suivante pour le terme de production :

$$P_k = C_{\mu t}^{ste} \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right)^2 \quad (\text{C.19})$$

Ces expressions de la production font intervenir l'hypothèse de Boussinesq, l'approximation de couche limite bidimensionnelle et le choix des grandeurs  $k$  et  $\varepsilon$  pour la détermination des échelles de longueur et vitesse entrant dans l'expression de  $\nu_t$ .

### C.2.5 Équation modélisée standard de l'énergie cinétique $k$

Pour les modèles  $k - \varepsilon$ , l'expression standard de l'équation de transport de l'énergie cinétique de la turbulence est finalement la suivante :

$$\boxed{\frac{dk}{dt} = P_k - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad ; \quad \begin{cases} P_k = C_{\mu_t}^{ste} \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 \\ \nu_t = C_{\mu_t}^{ste} \frac{k^2}{\varepsilon} \end{cases}} \quad (\text{C.20})$$

### C.2.6 Détermination de la constante $C_{\mu_t}^{ste}$

On cherche à déterminer la constante  $C_{\mu_t}^{ste}$  qui apparaît dans l'expression 4.18 que l'on rappelle ci-dessous :

$$\nu_t = C_{\mu_t}^{ste} \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Dans la région logarithmique de la couche limite les termes d'advection et de diffusion visqueuse et turbulente peuvent être négligés, l'équation de conservation de  $k$  se présente alors sous la forme suivante :

$$0 = P_k - \varepsilon \quad (\text{C.21})$$

On a vu section C.1.2.1.c que dans la région logarithmique de la couche limite  $-\overline{u'v'} = 2a_1 k = u_\tau^2$  et  $\partial u / \partial y = u_\tau / \kappa y$ . Puisque, dans cette région  $P_k - \varepsilon = 0$ , la dissipation et la viscosité cinématique de turbulence peuvent donc adopter les expressions suivantes :

$$\varepsilon = P_k = -\overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y} = u_\tau^2 \frac{u_\tau}{\kappa y} = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} = \frac{(2a_1 k)^{3/2}}{\kappa y} \quad (\text{C.22})$$

et

$$\nu_t = \frac{-\overline{u'v'}}{\partial u / \partial y} = \frac{u_\tau^2}{u_\tau / (\kappa y)} = u_\tau \kappa y = (2a_1 k)^{1/2} \kappa y \quad (\text{C.23})$$

D'après la formulation C.22  $\kappa y = \frac{(2a_1 k)^{3/2}}{\varepsilon}$ , permettant de réécrire C.23 sous la forme :

$$\nu_t = (2a_1)^2 \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{C.24})$$

On reconnaît la forme de l'équation 4.18, on peut alors déterminer une expression de la constante  $C_{\mu_t}^{ste}$  :

$$\boxed{C_{\mu_t}^{ste} = (2a_1)^2 \simeq 0.09} \quad (\text{C.25})$$

L'expression de cette constante est établie pour la région logarithmique, et repose sur les hypothèses suivantes :

- hypothèse de Boussinesq simplifiée  $-\overline{u'v'} = \nu_t \partial \bar{u} / \partial y$
- choix des échelles de longueur et vitesse  $y$  et  $y \partial u / \partial y$  dans  $\nu_t = \kappa^2 y^2 \partial u / \partial y$
- contraintes turbulentes majoritaires dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement  $\rightarrow -\overline{u'v'} = u_\tau^2$
- advection et diffusion de  $k$  négligeables  $\rightarrow P_k = \varepsilon \rightarrow \varepsilon = u_\tau^3 / (\kappa y)$
- observation du fait que  $-\overline{u'v'} = 2a_1 k$

### C.3 Équation de transport pour la dissipation $\varepsilon$

#### C.3.1 Définition de la dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence

Le terme de dissipation apparaissant dans l'équation de transport de l'énergie cinétique de la turbulence est noté  $\varepsilon$ . Il représente la dissipation d'énergie de la turbulence en chaleur par des phénomènes visqueux agissant aux très petites échelles. Selon la théorie de la cascade d'énergie de Richardson-Kolmogorov, *les grosses structures anisotropes puisent leur énergie de l'écoulement moyen; cette énergie est transférée vers des échelles de plus en plus petites, avant d'être dissipée par les plus petites structures de l'écoulement.* En faisant l'hypothèse d'équilibre qui dit que la totalité de l'énergie produite par les grosses structures est dissipée en chaleur, le taux de dissipation de l'énergie cinétique est alors directement lié à la quantité d'énergie cinétique  $k$  contenue par les grandes échelles, c'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{\mathcal{L}_\varepsilon} \quad (\text{C.26})$$

où  $\mathcal{L}_\varepsilon$  est une échelle de longueur caractéristique de la dissipation d'énergie cinétique au niveau des petites échelles, à différencier de l'échelle de longueur  $\mathcal{L}_{\mu_t}$  qui caractérise la diffusion de la turbulence. Bien que ces deux actions soient en elles mêmes différentes, les modèles de turbulence à équation de transport se basent tous sur l'hypothèse de proportionnalité entre ces deux échelles, hypothèse qui est vérifiée à l'équilibre.

Preuve à l'appui, on a vu section C.1.2.1.c que dans la région logarithmique de la couche limite

$$-\overline{u'v'} = 2a_1 k = u_\tau^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y} \quad (\text{C.27})$$

Ce qui permet d'écrire  $\nu_t = \frac{-\overline{u'v'}}{\partial u / \partial y} = u_\tau \kappa y$ . Or comme  $\nu_t = C_{\mu_t}^{ste} \sqrt{k} \mathcal{L}_{\mu_t}$  (expression 4.16), et  $k = \frac{u_\tau^2}{2a_1}$  (section C.1.2.1.c), on peut écrire

$$\mathcal{L}_{\mu_t} = \sqrt{2a_1} \kappa y \quad (\text{C.28})$$

On a vu que dans la région logarithmique de la couche limite l'équation de transport de  $k$  se réduit à  $P_k - \varepsilon = 0$ , d'où :

$$\varepsilon = P_k = -\overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y} = u_\tau^2 \frac{u_\tau}{\kappa y} = \frac{(\sqrt{2a_1 k})^3}{\kappa y} \quad \text{or} \quad \varepsilon = \frac{k^{3/2}}{\mathcal{L}_\varepsilon} \implies \mathcal{L}_\varepsilon = \frac{\kappa y}{(2a_1)^{3/2}} \quad (\text{C.29})$$

Dans l'approximation de couche limite les échelles  $\mathcal{L}_\varepsilon$  et  $\mathcal{L}_{\mu_t}$  sont donc directement proportionnelles. L'échelle  $\mathcal{L}_{\mu_t}$  peut alors être directement reliée au taux de dissipation  $\varepsilon$ . On peut donc écrire :

$$\mathcal{L}_{\mu_t} \propto \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (\text{C.30})$$

### C.3.2 Équation de transport exacte

L'équation de transport pour le taux de dissipation d'énergie cinétique de la turbulence  $\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$  peut être déduite des équations des fluctuations de vitesse :

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{d\varepsilon}{dt}}_{\text{Advection}} &= -2\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left( \underbrace{\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_k}{\partial x_l}}}_{\text{Production par } \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} + \underbrace{\overline{\frac{\partial u'_l}{\partial x_i} \frac{\partial u'_l}{\partial x_k}}}_{\text{Production mixte}} \right) - \underbrace{2\nu \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}}}_{\text{Production turbulente}} - \underbrace{2\nu \overline{\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_l} u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}}}_{\text{Production par le gradient de vitesse}} \\
 &+ \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k^2}}_{\text{Diffusion visqueuse}} - \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}}}_{\text{Diffusion turbulente}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_l} \frac{\partial u'_k}{\partial x_l}}}_{\text{Diffusion par la pression}} - \underbrace{2\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u'}{\partial x_l \partial x_m} \frac{\partial^2 u'}{\partial x_l \partial x_m}}}_{\text{Dissipation visqueuse}}
 \end{aligned} \tag{C.31}$$

### C.3.3 Principales hypothèses de modélisation

Dans le cas d'une turbulence homogène isotrope en décroissance libre, c'est-à-dire sans gradient de vitesse moyenne ni gradient de pression, l'équation se réduit à la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{d\varepsilon}{dt}}_{\text{Advection}} &= \underbrace{-2\nu \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}}}_{\text{Production turbulente}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k^2}}_{\text{Diffusion visqueuse}} - \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}}}_{\text{Diffusion turbulente}} - \underbrace{2\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u'}{\partial x_l \partial x_m} \frac{\partial^2 u'}{\partial x_l \partial x_m}}}_{\text{Dissipation visqueuse}}
 \end{aligned} \tag{C.32}$$

Puisque  $\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$  on peut estimer le gradient des fluctuations de vitesse par :

$$\frac{\partial u'}{\partial x} \propto \sqrt{\frac{\varepsilon}{\nu}}$$

d'où l'expression suivante de la production de la turbulence

$$P_\varepsilon = -2\nu \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}} \propto \nu \sqrt{\frac{\varepsilon}{\nu}}^3 = \frac{\varepsilon^{3/2}}{\sqrt{\nu}}$$

D'autre part, rappelons que le nombre d'onde de Kolmogorov est défini par  $\kappa_K = \frac{2\pi}{\eta_K}$  où  $\eta_K$  est l'échelle de Kolmogorov qui caractérise la taille des plus petites structures, lesquelles sont, selon la théorie de Kolmogorov, responsables de la dissipation de l'écoulement. Cette notion permet d'approximer la dérivée  $\frac{\partial}{\partial x}$  de la quantité  $\frac{\partial u'}{\partial x}$  par  $\frac{1}{\eta_K}$ , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} \propto \frac{1}{\eta_K} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\nu}} \propto \kappa_K \sqrt{\frac{\varepsilon}{\nu}}$$

d'où l'expression suivante de la dissipation visqueuse :

$$-2\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u'}{\partial x_l \partial x_m} \frac{\partial^2 u'}{\partial x_l \partial x_m}} \propto \nu^2 \kappa_K^2 \frac{\varepsilon}{\nu} = \kappa_K^2 \nu \varepsilon = \frac{\varepsilon^{3/2}}{\sqrt{\nu}}$$

La production turbulente et la dissipation visqueuse sont donc du même ordre de grandeur ce qui exclut une modélisation terme à terme, les modèles font par conséquent appel à des

hypothèses reposant sur une analyse dimensionnelle. La production turbulente et la dissipation visqueuse sont généralement modélisées par :

$$P_\varepsilon \propto \frac{P_k \varepsilon}{k} \quad ; \quad -2\nu^2 \frac{\overline{\partial^2 u'} \partial^2 u'}}{\partial x_l \partial x_m \partial x_l \partial x_m} \propto \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{C.33})$$

Le terme de diffusion de la turbulence peut quant à lui être approximé par l'expression suivante (dans laquelle on peut considérer le terme de diffusion par la pression inclu car supposé négligeable)

$$-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}} = \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'_k \varepsilon'} \quad (\text{C.34})$$

cette expression justifie l'emploi d'une modélisation de même forme que celle de la diffusion visqueuse :

$$-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}} \propto \frac{\partial}{\partial x} (\nu_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}) \quad (\text{C.35})$$

On obtient ainsi la forme classique de l'équation de transport du taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence :

$$\boxed{\frac{d\varepsilon}{dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{P_k \varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right]} \quad ; \quad \begin{cases} P_k = C_{\mu_t}^{ste} \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right)^2 \\ \nu_t = C_{\mu_t}^{ste} \frac{k^2}{\varepsilon} \end{cases} \quad (\text{C.36})$$

### C.3.4 Calibration de $C_{\varepsilon 2}$

La constante  $C_{\varepsilon 2}$  est déterminée grâce aux équations régissant une turbulence homogène isotrope en décroissance libre :

$$\frac{dk}{dt} = -\varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{C.37})$$

Ces équations admettent comme solutions

$$k = k_0 \left[ 1 + (C_{\varepsilon 2} - 1) \frac{\varepsilon_0 t}{k_0} \right]^{\frac{1}{1-C_{\varepsilon 2}}} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \left[ 1 + (C_{\varepsilon 2} - 1) \frac{\varepsilon_0 t}{k_0} \right]^{\frac{C_{\varepsilon 2}}{1-C_{\varepsilon 2}}} \quad (\text{C.38})$$

Pour ce type d'écoulement, on a vu équation C.14 que l'énergie cinétique de turbulence  $k$  peut être exprimée sous la forme

$$k = \frac{3s+5}{2(s+1)} A^{1-\frac{3(s+1)}{3s+5}} K_0^{\frac{3(s+1)}{3s+5}} \varepsilon^{\frac{2(s+1)}{3s+5}} \quad (\text{C.39})$$

dont la dérivation en temps permet d'écrire :

$$\frac{1}{k} \frac{dk}{dt} = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{2(s+1)}{3s+5}}} \frac{d\varepsilon^{\frac{2(s+1)}{3s+5}}}{dt} = \frac{2(s+1)}{3s+5} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{C.40})$$

or puisque  $\frac{dk}{dt} = -\varepsilon$  alors  $\frac{1}{k} \frac{dk}{dt} = -\frac{\varepsilon}{k}$  d'où :

$$\frac{2(s+1)}{3s+5} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\varepsilon}{k} \implies \frac{d\varepsilon}{dt} = -\underbrace{\frac{3s+5}{2(s+1)}}_{C_{\varepsilon 2}} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{C.41})$$

Des études [70] ont montré que la valeur de  $s$  est comprise entre 1 et 4, indiquant que  $C_{\varepsilon 2}$  doit valoir entre 1.7 et 2.

On a vu équation C.15 que  $\frac{k_K}{k_L} \propto (\frac{k^2}{\nu \varepsilon})^{3/4}$ , cette expression implique que le rapport  $k^2/\varepsilon$  soit constant. Or, d'après les expressions C.38, le rapport  $k^2/\varepsilon$  vaut

$$\frac{k^2}{\varepsilon} = \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} \left[ 1 + (C_{\varepsilon 2} - 1) \frac{\varepsilon_0 t}{k_0} \right]^{\frac{2-C_{\varepsilon 2}}{1-C_{\varepsilon 2}}} \quad (\text{C.42})$$

qui est constant si  $\frac{2-C_{\varepsilon 2}}{1-C_{\varepsilon 2}} = 0$ , c'est-à-dire si  $C_{\varepsilon 2} = 2$ , c'est-à-dire si  $s = 1$ . Malgré ce résultat théorique, les auteurs préfèrent bien souvent utiliser des valeurs de  $C_{\varepsilon 2}$  plus faibles (et de  $s$  plus élevées), qui sont plus adaptées à des écoulements où la turbulence n'est pas homogène isotrope en décroissance libre.

### C.3.5 Calibration de $C_{\varepsilon 1}$

La constante  $C_{\varepsilon 1}$  est déterminée grâce aux équations régissant une turbulence homogène en présence d'un gradient de vitesse :

$$\frac{dk}{dt} = P_k - \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{C.43})$$

Une première information peut être obtenue en posant l'équation de conservation de l'échelle de longueur  $\mathcal{L}_{\mu t} = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{L}_{\mu t}} \frac{d\mathcal{L}_{\mu t}}{dt} &= \left( \frac{\varepsilon}{k^{3/2}} \right) \frac{d}{dt} \left( \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{k^{3/2}} \left( k^{3/2} \frac{d\varepsilon^{-1}}{dt} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dk^{3/2}}{dt} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{k^{3/2}} \left( -\frac{k^{3/2}}{\varepsilon^2} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{3}{2} \frac{k^{1/2}}{\varepsilon} \frac{dk}{dt} \right) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{3}{2} \frac{1}{k} \frac{dk}{dt} \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

$$= \left( \frac{3}{2} - C_{\varepsilon 1} \right) \frac{P_k}{k} - \left( \frac{3}{2} - C_{\varepsilon 2} \right) \frac{\varepsilon}{k} \quad (\text{C.45})$$

Or, comme l'ont fait remarquer Baumert et al [12], dans un écoulement homogène le gradient de vitesse n'est pas déterminant de la taille caractéristique des tourbillons. Par conséquent, le premier terme de l'équation C.45 est nul impliquant  $C_{\varepsilon 1} = 3/2$ . Si  $C_{\varepsilon 2} > 3/2$ , le second terme permet alors l'augmentation de taille de tourbillons au cours du temps.

Une autre information sur la calibration des constantes peut être tirée de l'observation d'écoulements fortement cisailés pour lesquels  $k$  augmente exponentiellement alors que  $P_k/\varepsilon$  tend vers une constante. D'après l'équation C.19 une expression du rapport production sur dissipation de  $k$  est donnée par

$$\frac{P_k}{\varepsilon} = C_{\mu t}^{ste} \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 \quad (\text{C.46})$$

Si  $P_k/\varepsilon$  est constant,  $k/\varepsilon$  l'est donc aussi, c'est-à-dire que  $\frac{d}{dt}(k/\varepsilon) = 0$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{k}{\varepsilon} \right) = k \frac{d\varepsilon^{-1}}{dt} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dk}{dt} = -\frac{k}{\varepsilon^2} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{dk}{dt} = 0 \quad (\text{C.47})$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varepsilon}{k} \frac{d}{dt} \left( \frac{k}{\varepsilon} \right) = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{k} \frac{dk}{dt} = 0 \quad (\text{C.48})$$

qui s'exprime à l'aide de l'équation C.43

$$-\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{k} \frac{dk}{dt} = \frac{P_k}{k} (1 - C_{\varepsilon 1}) - \frac{\varepsilon}{k} (1 - C_{\varepsilon 2}) = 0 \implies \frac{P_k}{\varepsilon} = \frac{1 - C_{\varepsilon 2}}{1 - C_{\varepsilon 1}} \quad (\text{C.49})$$

Des études expérimentales et numériques ont montré que ce rapport vaut entre 1.4 et 1.8, ce qui apporte une information complémentaire utile à la calibration de  $C_{\varepsilon 1}$  et  $C_{\varepsilon 2}$ .

En pratique, la constante  $C_{\varepsilon 1}$  est fréquemment déterminée grâce à l'équation de transport de la dissipation dans la région logarithmique de la couche limite, où les termes d'advection et de diffusion visqueuse peuvent être négligés :

$$0 = C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (\text{C.50})$$

On a vu équation C.8 dans la région logarithmique de la couche limite  $-\overline{u'v'} = 2 a_1 k = u_\tau^2$  et  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y}$ . En outre, dans cette région  $P_k - \varepsilon = 0$ , la dissipation et la viscosité cinématique de turbulence peuvent donc adopter les expressions suivantes :

$$\varepsilon = P_k = -\overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y} = u_\tau^2 \frac{u_\tau}{\kappa y} = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} = \frac{(2 a_1 k)^{3/2}}{\kappa y} \quad (\text{C.51})$$

$$\nu_t = \frac{-\overline{u'v'}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{u_\tau^2}{\frac{u_\tau}{\kappa y}} = u_\tau \kappa y = (2 a_1 k)^{1/2} \kappa y \quad (\text{C.52})$$

Grâce à ces deux expressions, l'équation de conservation de la dissipation C.50 devient :

$$0 = C_{\varepsilon 1} \frac{(2 a_1 k)^{3/2}}{\kappa y} \frac{(2 a_1 k)^{3/2}}{\kappa y} - C_{\varepsilon 2} \frac{((2 a_1 k)^{3/2})^2}{k} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{(2 a_1 k)^{1/2} \kappa y}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial ((2 a_1 k)^{3/2})}{\partial y} \right] \quad (\text{C.53})$$

$$= C_{\varepsilon 1} \frac{(2 a_1)^3}{(\kappa y)^2} k^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{(2 a_1)^3}{(\kappa y)^2} k^2 + \frac{(2 a_1)^2}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left[ k^{1/2} \frac{\partial k^{3/2}}{\partial y} \right] \quad (\text{C.54})$$

$$\implies (C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 2}) \frac{(2 a_1)^3}{\kappa^2} + \frac{(2 a_1)^2}{\sigma_\varepsilon} = 0 \quad (\text{C.55})$$

$$\implies C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 2} = -\frac{\kappa^2}{2 a_1 \sigma_\varepsilon} \quad (\text{C.56})$$

La constante  $\kappa$  est fréquemment fixée à des valeurs entre 0.40 et 0.41, ce qui permet, connaissant  $C_{\varepsilon 2}$ , de déterminer  $C_{\varepsilon 1}$ .

### C.3.6 Calibration de $\sigma_\varepsilon$

Les valeurs de ce coefficient sont déduites de simulations DNS, citons notamment celle de Cazalbou et Bradshaw [18] qui indique une valeur de proche de 1.3 dans la région logarithmique, cette valeur diminuant fortement vers la frontière extérieure de la couche limite.



## Annexe D

# Propriétés mathématiques

### D.1 Équation de conservation

Rappelons que l'on appelle équation de conservation une équation aux dérivées partielles qui, pour une quantité scalaire  $q$ , s'écrit :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{f}(q)) = A(q) + B(q) \quad (\text{D.1})$$

Où  $\vec{f}$  est le vecteur flux associé à la quantité  $q$  et  $A$  et  $B$  des termes sources supposés positifs.

### D.2 Dérivée particulaire

La dérivée particulaire est la dérivée en temps d'une grandeur physique  $q$  le long de la trajectoire parcourue par une particule fluide à la vitesse  $\vec{U}$ . Elle se note  $d/dt$  et est reliée à la dérivée eulérienne par la relation :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \vec{U} \cdot \operatorname{grad}(q) \quad (\text{D.2})$$

### D.3 Théorèmes de Green et Ostrogradsky

Le théorème de flux-divergence de Green s'écrit, pour la quantité vectorielle  $\vec{q}$  contenue dans un volume  $\Omega(t)$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la frontière est notée  $\partial\Omega(t)$  :

$$\int_{\Omega(t)} \operatorname{div}(\vec{q}) \, d\Omega(t) = \int_{\partial\Omega(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} \, \partial\Omega(t) \quad (\text{D.3})$$

où on note  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à  $\partial\Omega$  dirigé vers l'extérieur de  $\Omega(t)$ .

Son équivalent pour une quantité scalaire  $q$  est le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\int_{\Omega(t)} \operatorname{grad}(q) \, d\Omega(t) = \int_{\partial\Omega(t)} q \vec{n} \, \partial\Omega(t) \quad (\text{D.4})$$

## D.4 Théorème de transport

Rappelons aussi le théorème de transport pour une quantité scalaire  $q$  contenue dans un volume  $\Omega(t)$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la frontière est notée  $\partial\Omega(t)$  et où on note  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à  $\partial\Omega$  dirigé vers l'extérieur de  $\Omega(t)$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} q \, d\Omega(t) = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial q}{\partial t} \, d\Omega(t) + \int_{\partial\Omega(t)} q \, \vec{U} \cdot \vec{n} \, \partial\Omega(t) \quad (\text{D.5})$$

et l'utilisation du théorème de Green D.3 sur la quantité  $q\vec{U}$  mène à l'expression suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} q \, d\Omega(t) = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial q}{\partial t} \, d\Omega(t) + \int_{\Omega(t)} \operatorname{div}(q \vec{U}) \, d\Omega(t) \quad (\text{D.6})$$

Appliquons maintenant le théorème de transport D.5 à la grandeur  $\rho q$ ,  $\rho$  désignant la masse volumique et  $q$  une grandeur scalaire :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho q \, d\Omega(t) = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho q}{\partial t} \, d\Omega(t) + \int_{\partial\Omega(t)} \rho q \, \vec{U} \cdot \vec{n} \, \partial\Omega(t) \quad (\text{D.7})$$

où encore, en appliquant le théorème de Green D.3 à la quantité  $\rho q \vec{U}$  puis en simplifiant grâce à l'équation de conservation de la masse A.2 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho q \, d\Omega(t) &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho q}{\partial t} \, d\Omega(t) + \int_{\Omega(t)} \operatorname{div}(\rho q \vec{U}) \, d\Omega(t) & (\text{D.8}) \\ &= \int_{\Omega(t)} \left( \rho \frac{\partial q}{\partial t} + q \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \left( q \operatorname{div}(\rho \vec{U}) + \rho \vec{U} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(q) \right) \, d\Omega(t) \\ &= \int_{\Omega(t)} \left( \rho \frac{\partial q}{\partial t} + \rho \vec{U} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(q) \right) \, d\Omega(t) \\ &= \int_{\Omega(t)} \rho \frac{dq}{dt} \, d\Omega(t) & (\text{D.9}) \end{aligned}$$

Remarquons que les expressions D.9 et D.8 permettent respectivement d'écrire les équivalences D.10 et D.11, et que la définition de la dérivée particulaire D.2 permet d'écrire l'équivalence D.12

$$\frac{d\rho q}{dt} = \rho \frac{dq}{dt} \quad (\text{D.10})$$

$$= \frac{\partial \rho q}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho q \vec{U}) \quad (\text{D.11})$$

$$= \rho \left( \frac{\partial q}{\partial t} + \vec{U} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(q) \right) \quad (\text{D.12})$$

# Annexe E

## Résultats d'Analyse Spectrale

### E.1 Spectres de pression issus des calculs DNS 200Mp avec et sans forçage

#### E.1.1 Représentations longitudinales

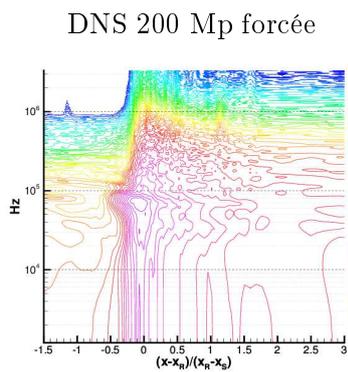


FIGURE E.1:  $y/\delta = 0.005$

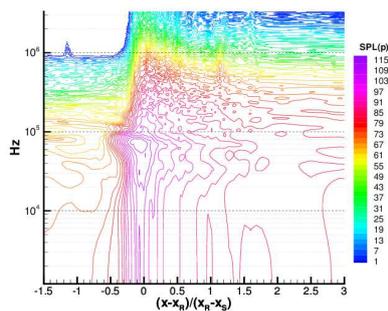
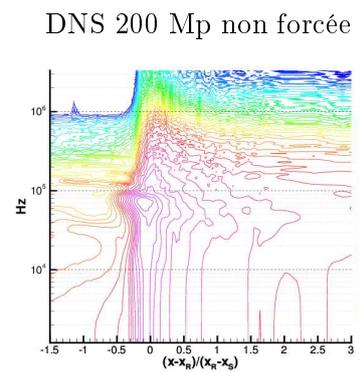


FIGURE E.2:  $y/\delta = 0.01$

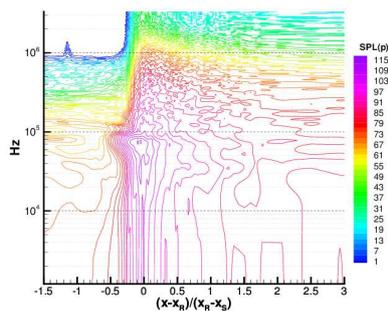
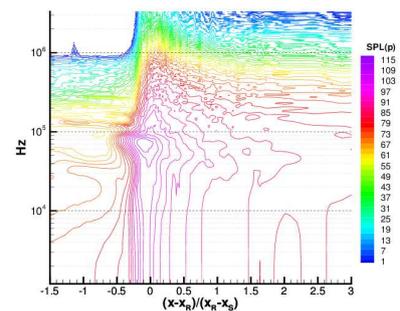
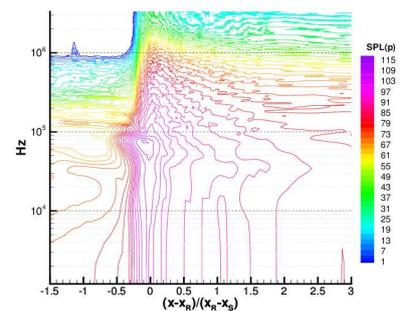


FIGURE E.3:  $y/\delta = 0.1$



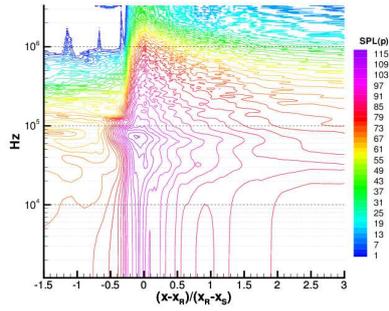


FIGURE E.4:  $y/\delta = 0.5$

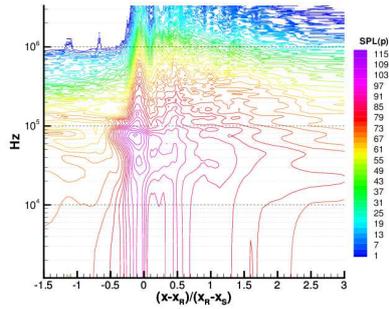
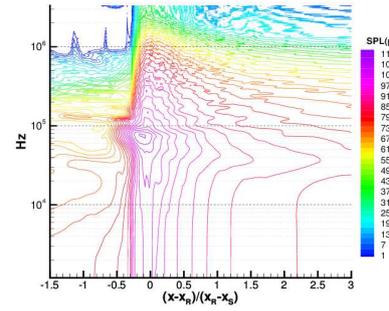


FIGURE E.5:  $y/\delta = 1.0$

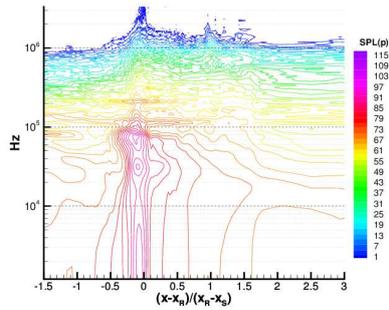
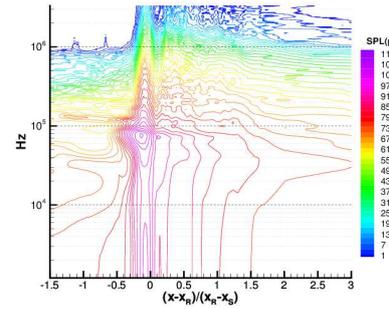
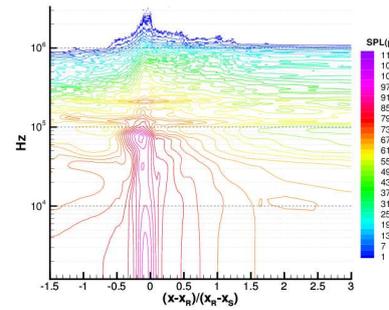


FIGURE E.6:  $y/\delta = 1.5$



E.1.2 Représentations verticales à différentes positions longitudinales

DNS 200 Mp forcée

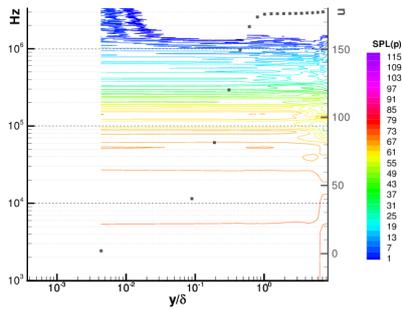


FIGURE E.7:  $\frac{x-x_R}{x_R-x_S} = -1.6$

DNS 200 Mp non forcée

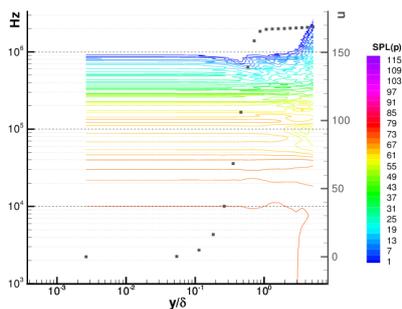
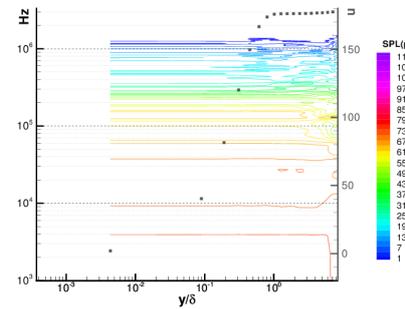
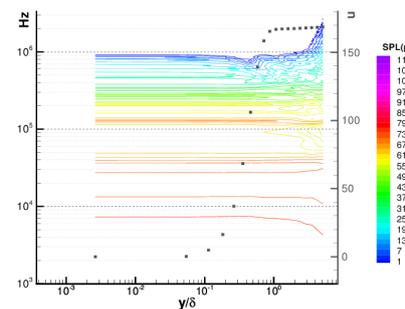


FIGURE E.8:  $\frac{x-x_R}{x_R-x_S} = -0.95$



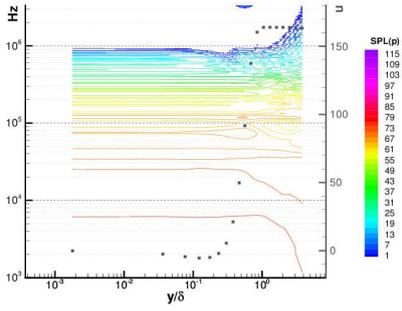


FIGURE E.9:  $\frac{x-x_R}{x_R-x_s} = -0.6$

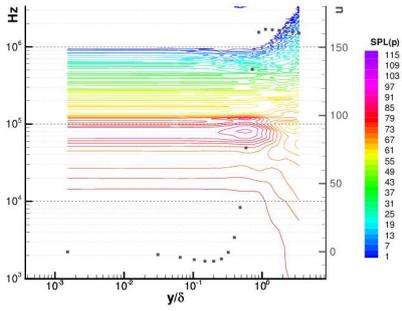
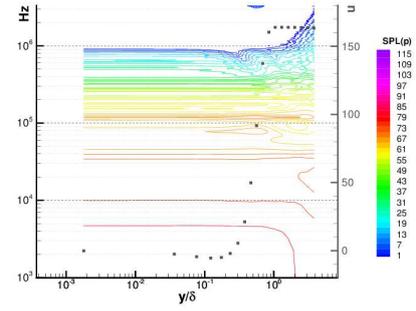


FIGURE E.10:  $\frac{x-x_R}{x_R-x_s} = -0.4$

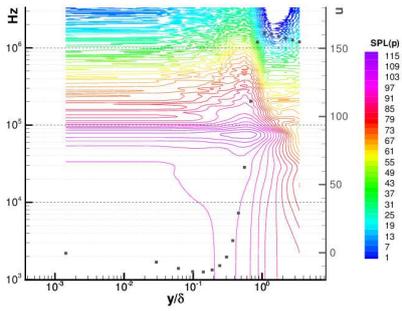
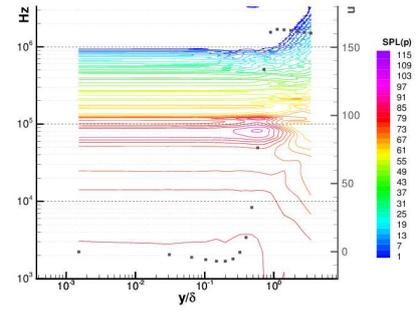


FIGURE E.11:  $\frac{x-x_R}{x_R-x_s} = -0.2$

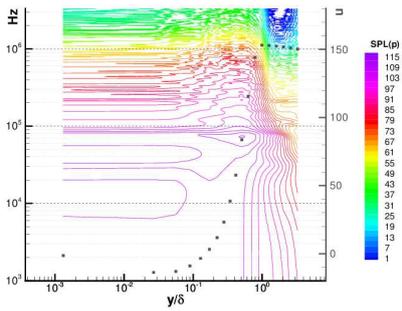
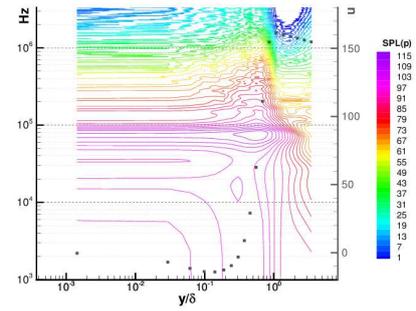


FIGURE E.12:  $\frac{x-x_R}{x_R-x_s} = -0.1$

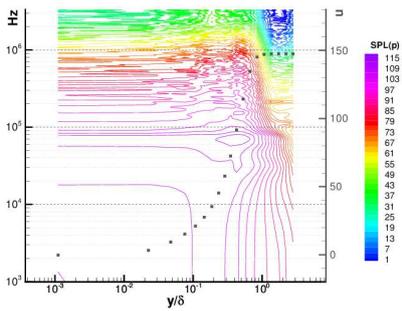
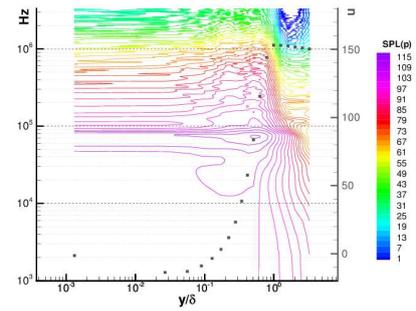
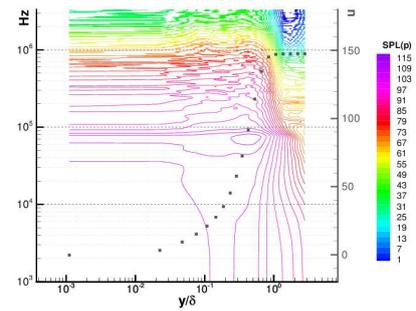


FIGURE E.13:  $\frac{x-x_R}{x_R-x_s} = 0$



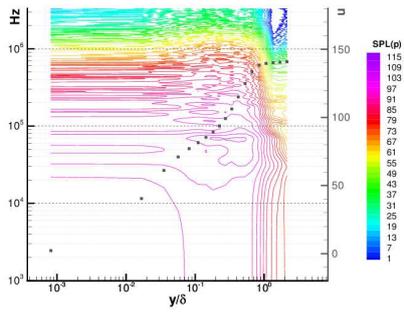


FIGURE E.14:  $\frac{x - x_R}{x_R - x_s} = 0.2$

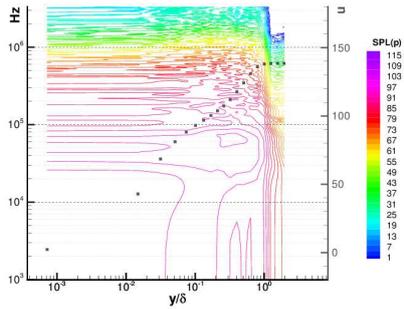
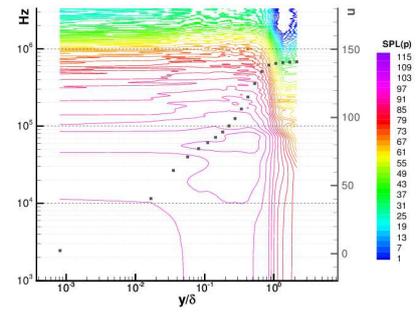


FIGURE E.15:  $\frac{x - x_R}{x_R - x_s} = 0.4$

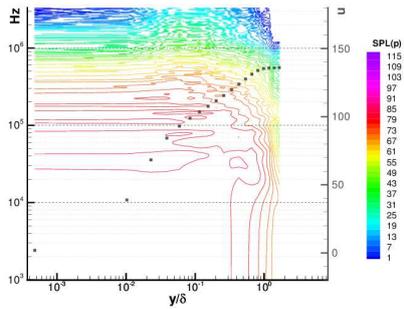
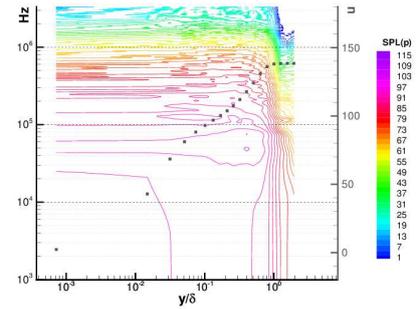


FIGURE E.16:  $\frac{x - x_R}{x_R - x_s} = 2.5$

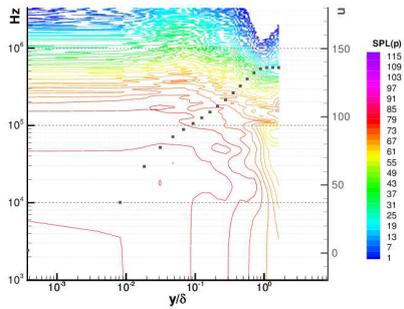
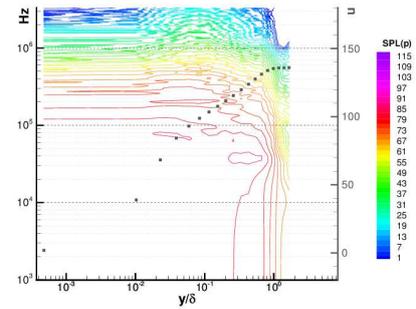
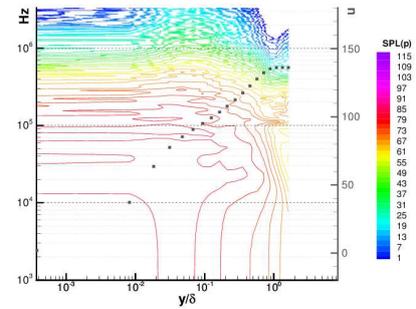
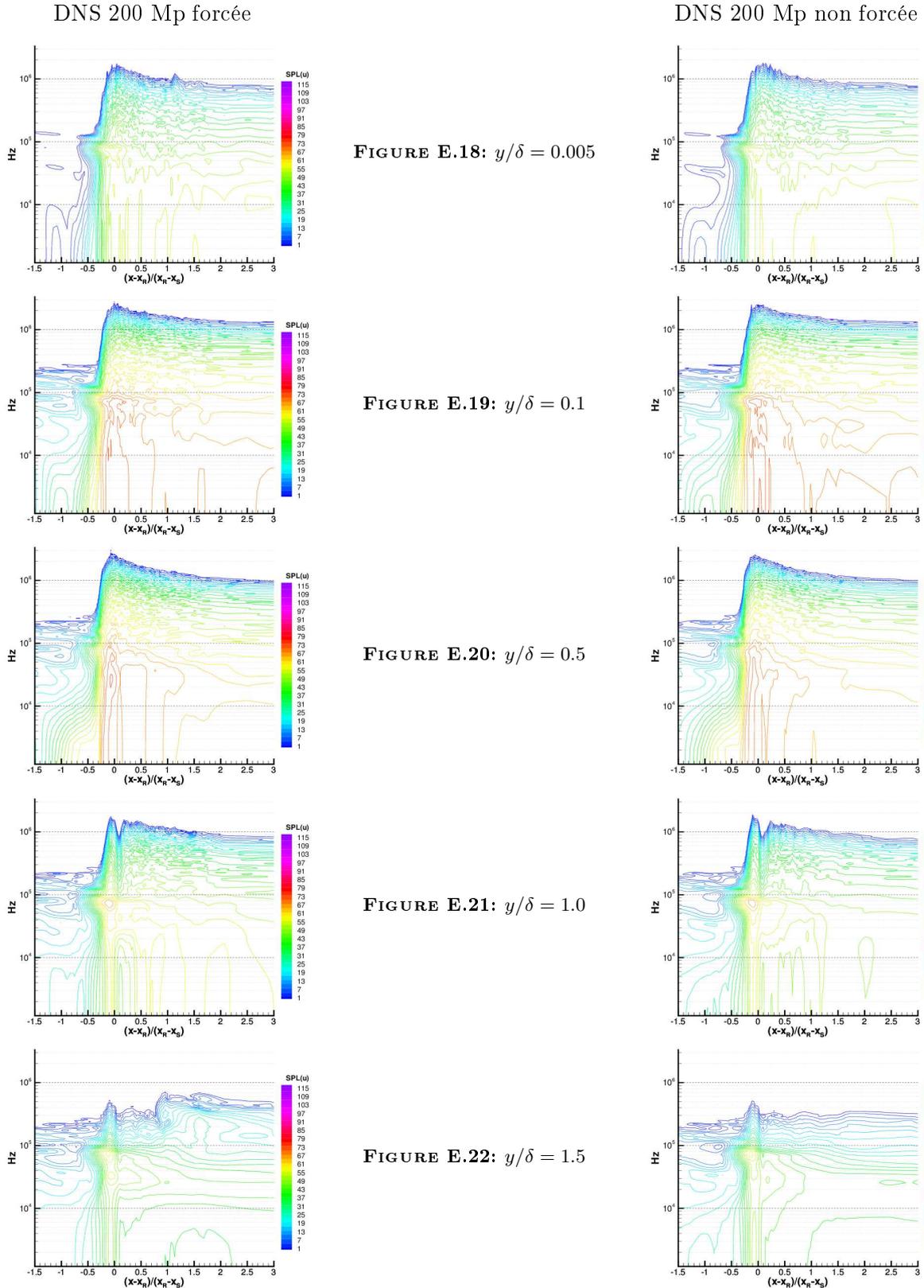


FIGURE E.17:  $\frac{x - x_R}{x_R - x_s} = 9$

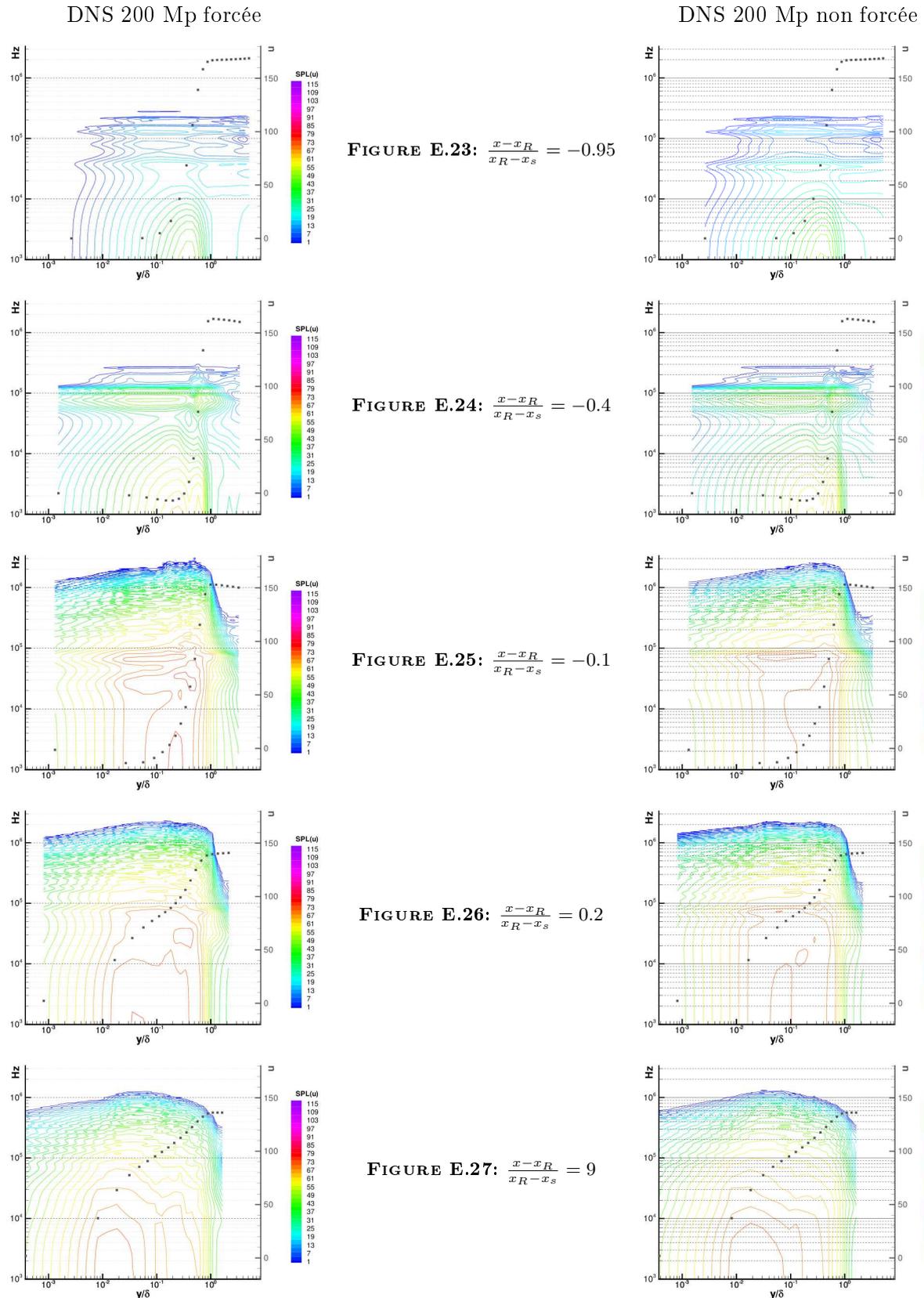


## E.2 Spectres de vitesse longitudinale issus des calculs DNS 200Mp

### E.2.1 Représentations longitudinales



E.2.2 Représentations verticales à différentes positions longitudinales



### E.3 Spectres de vitesse verticale issus des calculs DNS 200Mp

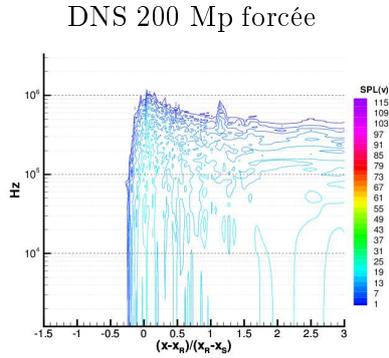


FIGURE E.28:  $y/\delta = 0.005$

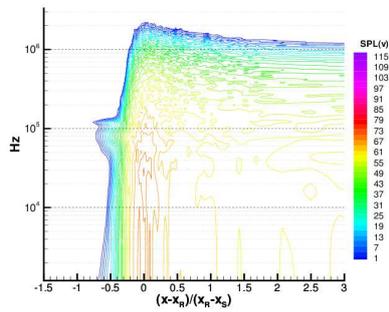
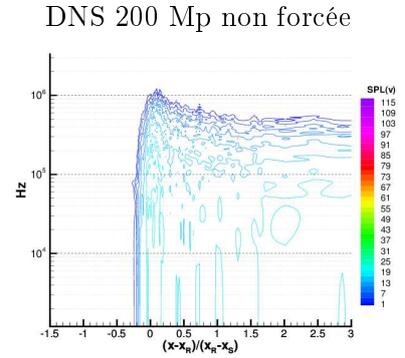


FIGURE E.29:  $y/\delta = 0.1$

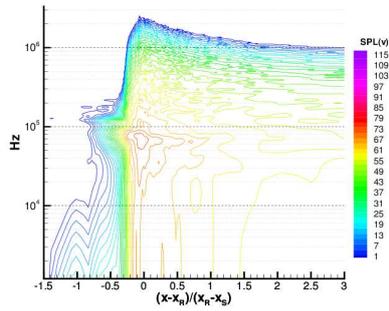
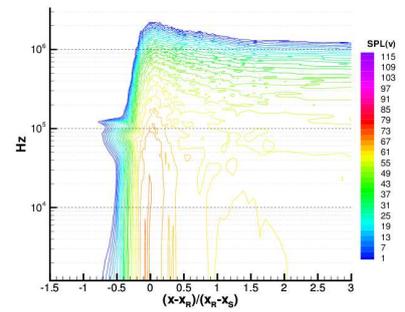


FIGURE E.30:  $y/\delta = 0.5$

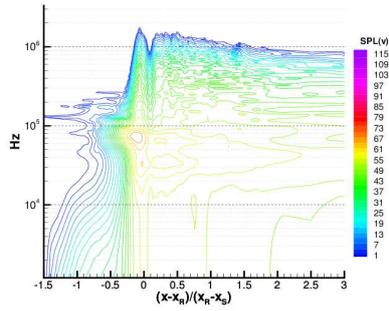
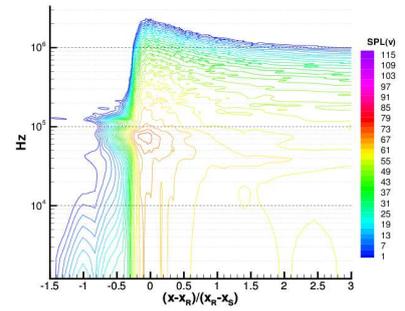


FIGURE E.31:  $y/\delta = 1.0$

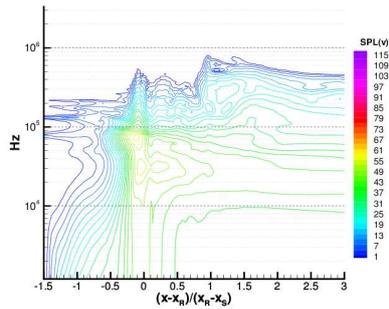
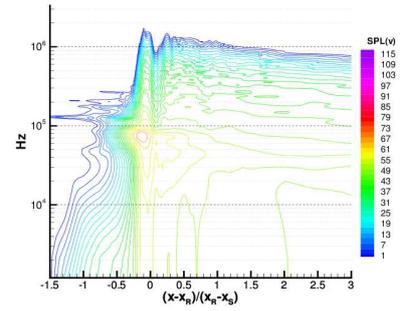
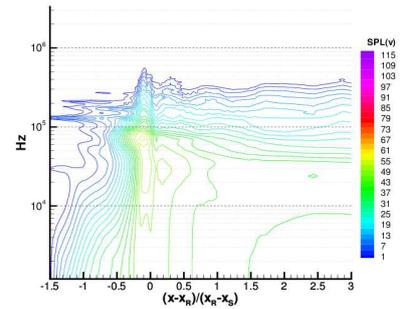


FIGURE E.32:  $y/\delta = 1.5$



E.3.1 Représentations verticales à différentes positions longitudinales

DNS 200 Mp forcée

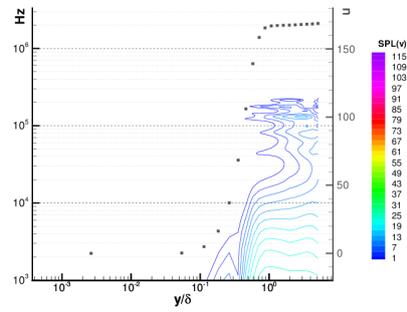


FIGURE E.33:  $\frac{x-x_R}{x_R-x_s} = -0.95$

DNS 200 Mp non forcée

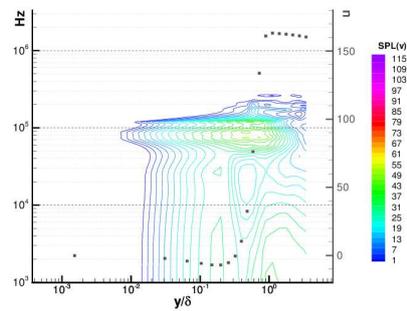
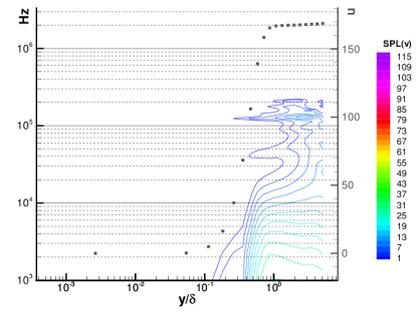


FIGURE E.34:  $\frac{x-x_R}{x_R-x_s} = -0.4$

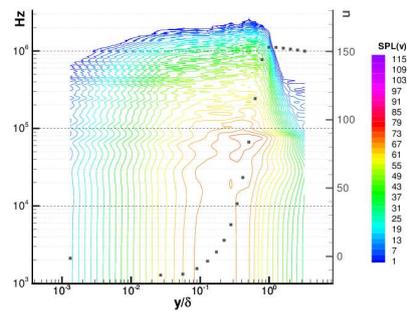
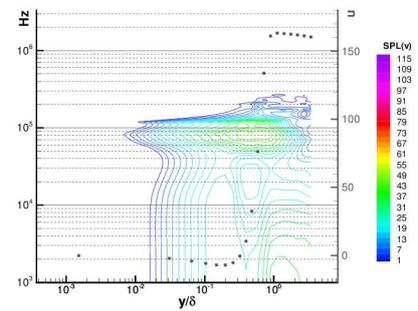


FIGURE E.35:  $\frac{x-x_R}{x_R-x_s} = -0.1$

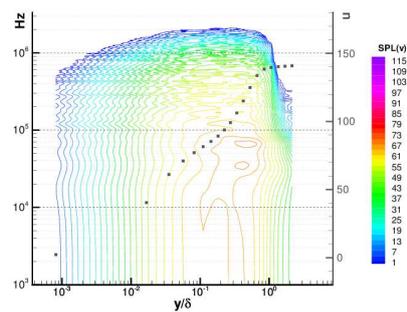
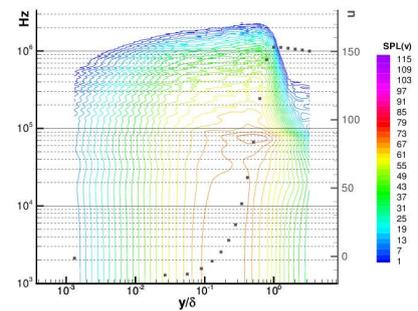


FIGURE E.36:  $\frac{x-x_R}{x_R-x_s} = 0.2$

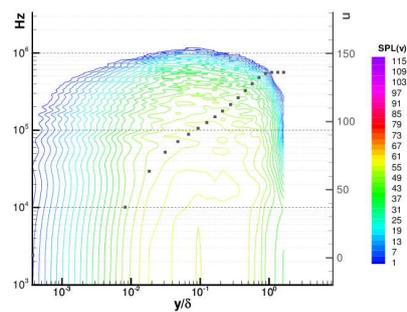
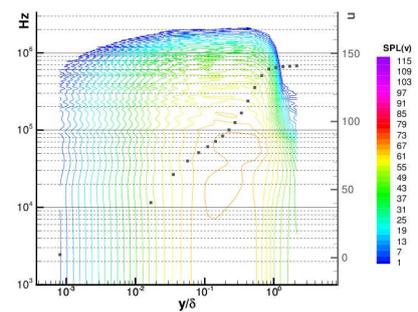
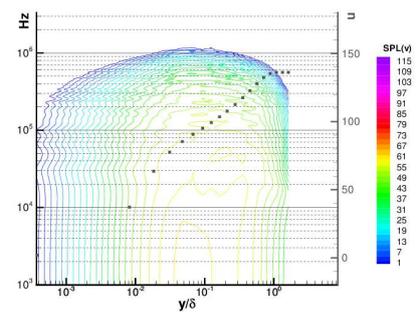
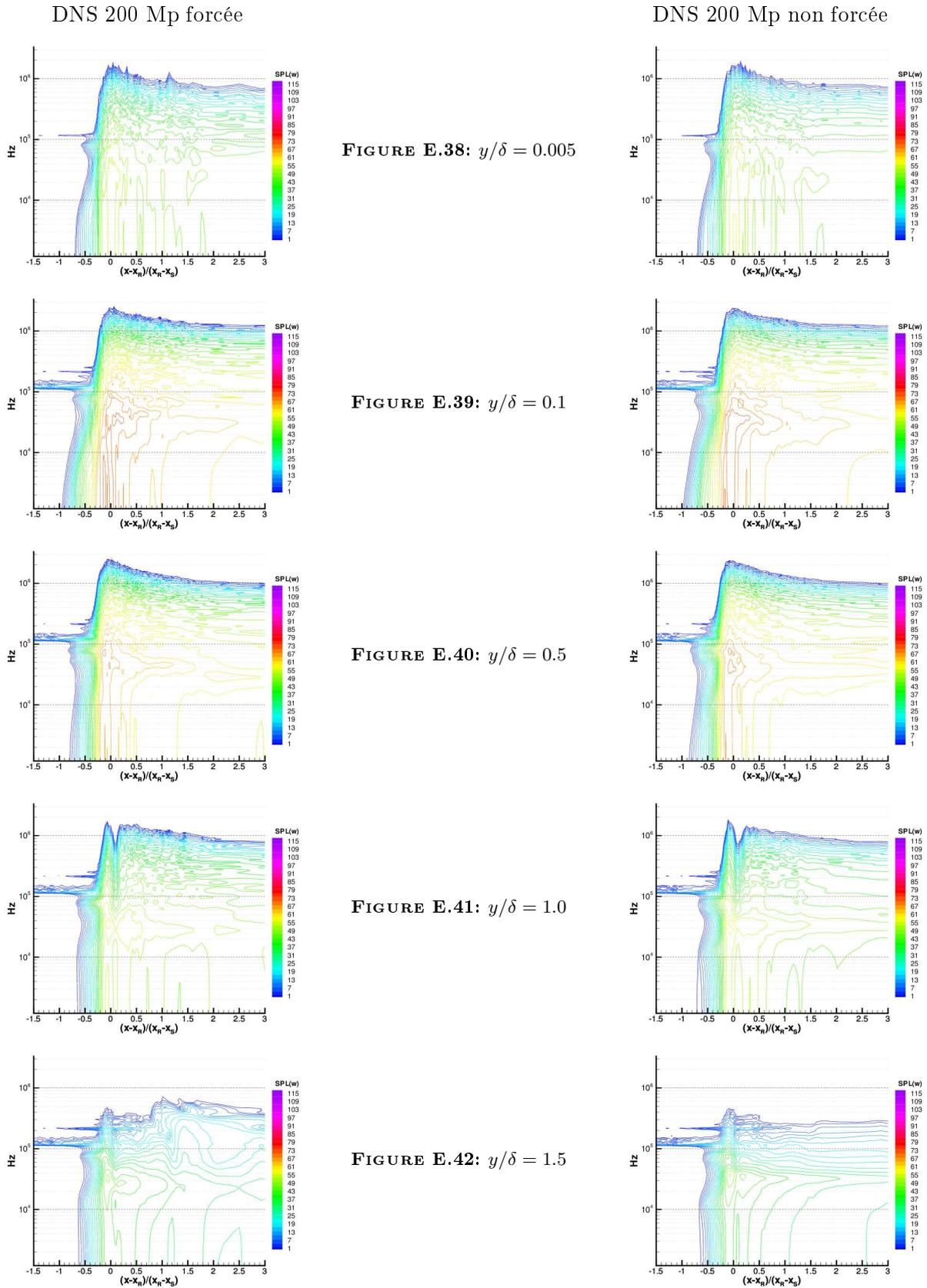


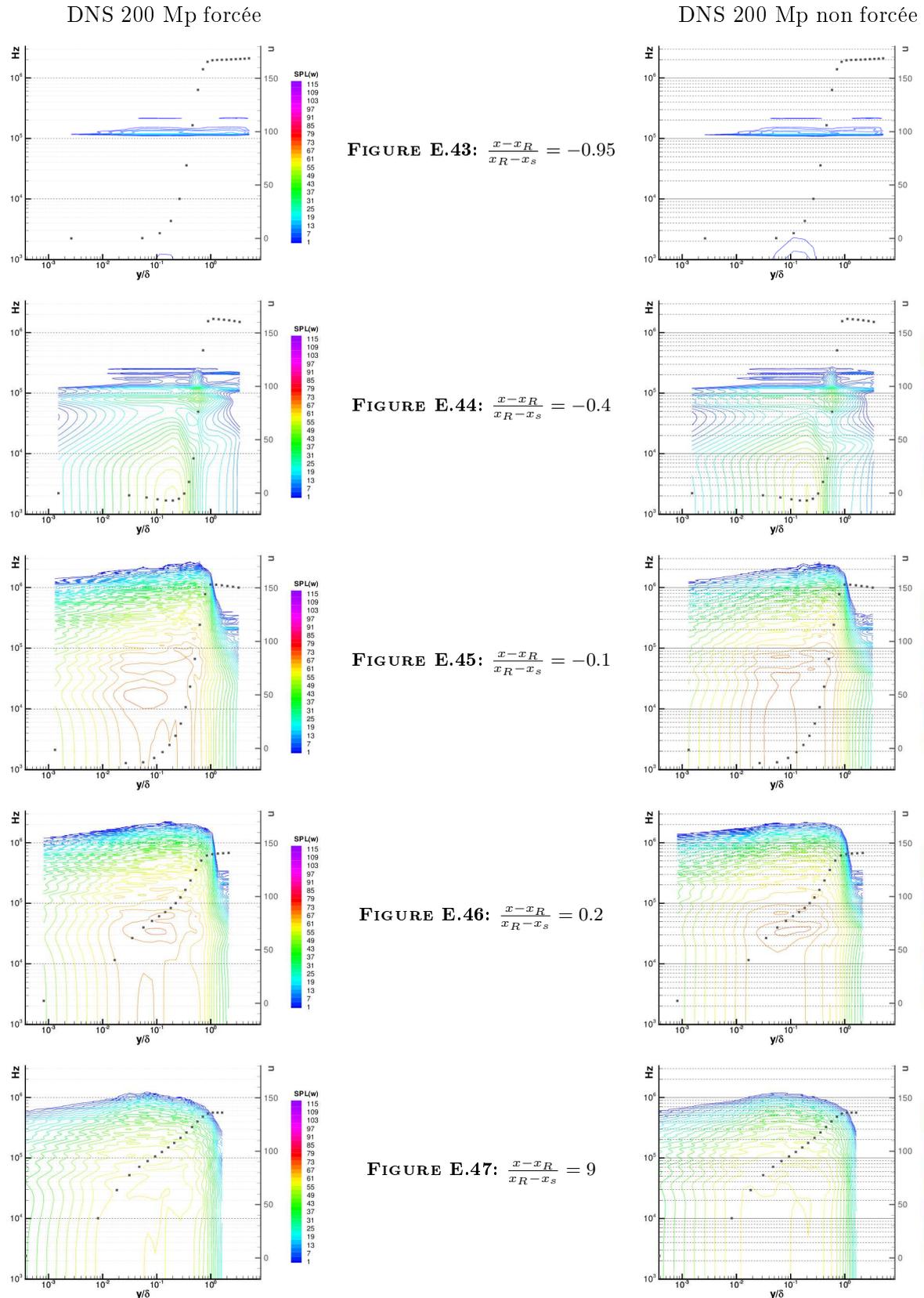
FIGURE E.37:  $\frac{x-x_R}{x_R-x_s} = 9$



E.4 Spectres de vitesse transversale issus des calculs DNS 200Mp



E.4.1 Représentations verticales à différentes positions longitudinales



# Annexe F

## Loi de paroi $h(x)$

### F.1 Loi de paroi

En utilisant la répartition de pression  $P(x)$ , la loi de Bernoulli et la loi de conservation du débit, on obtient la hauteur théorique  $h(x)$  d'une tuyère qui reproduirait  $P(x)$  pour un fluide parfait (non visqueux).

Rappelons la loi de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = C_1$$

Et la loi de conservation du débit devient pour un fluide parfait dans une tuyère de section  $S$ , de hauteur  $h$ , d'envergure constante et de vitesse  $v = cste$  dans une tranche :

$$\iint_S \rho \vec{v} d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho v h = C_2$$

Le long de l'écoulement, on a donc :

$$v(x) = \frac{C_2}{\rho(x)h(x)} \quad \Rightarrow \quad p + \frac{1}{2} \frac{C_2^2}{\rho(x)h(x)^2} = C_1 \quad \Rightarrow \quad h(x) = \frac{C_2}{\sqrt{2\rho(x)(C_1 - p(x))}}$$

avec  $C_1 = p(x_0) + \frac{1}{2}\rho(x_0)v(x_0)^2$  et  $C_2 = \rho(x_0)v(x_0)h(x_0)$ .

Les écoulements étudiés étant affectés par la viscosité, la perte de débit de la couche limite nécessite une adaptation de la hauteur de la paroi. Cette adaptation est réalisée de façon empirique à travers une succession de calculs qui ont permis de converger vers une loi  $h(x)$  optimale engendrant un gradient de pression satisfaisant.

### F.2 Coordonnées

Le tableau ci-dessous contient les coordonnées  $x$  et  $y$  de la paroi supérieure de la tuyère, pour le maillage 4Mp. Les dimension du domaine de calcul exprimées en mètres sont directement issues de l'aplanissement des champs de données de l'écoulement autour du profil OA209 de corde 1m.

Pour  $0 m \leq x_i \leq 6.634939e^{-2} m$ , les coordonnées  $y_i$  de la paroi ne sont pas renseignées dans le tableau car elles sont constantes et égales à  $1.763419e^{-2} m$ . Pour  $9.522751e^{-2} m < x_i \leq 1.0 m$ , la paroi n'existe plus car le domaine inférieur est raccordé au domaine supérieur. À la paroi inférieure, une condition d'adhérence est appliquée à partir de  $x = 6.45e^{-2} m$ .

$x$ (mètres)	$y$ (mètres)	$x$ (mètres)	$y$ (mètres)	$x$ (mètres)	$y$ (mètres)
$6.634939e^{-2}$	$1.763419e^{-2}$	$7.985496e^{-2}$	$5.236182e^{-3}$	$8.735662e^{-2}$	$6.066594e^{-3}$
$6.768632e^{-2}$	$1.763422e^{-2}$	$7.999353e^{-2}$	$5.225290e^{-3}$	$8.754838e^{-2}$	$6.108704e^{-3}$
$6.865657e^{-2}$	$1.763459e^{-2}$	$8.013584e^{-2}$	$5.216577e^{-3}$	$8.773914e^{-2}$	$6.155123e^{-3}$
$6.939681e^{-2}$	$1.764048e^{-2}$	$8.028334e^{-2}$	$5.209974e^{-3}$	$8.792986e^{-2}$	$6.201724e^{-3}$
$7.006326e^{-2}$	$1.752403e^{-2}$	$8.043599e^{-2}$	$5.205582e^{-3}$	$8.812093e^{-2}$	$6.246878e^{-3}$
$7.072163e^{-2}$	$1.731960e^{-2}$	$8.059169e^{-2}$	$5.203593e^{-3}$	$8.831212e^{-2}$	$6.291510e^{-3}$
$7.133842e^{-2}$	$1.701305e^{-2}$	$8.075485e^{-2}$	$5.204234e^{-3}$	$8.850325e^{-2}$	$6.336405e^{-3}$
$7.187507e^{-2}$	$1.658191e^{-2}$	$8.093846e^{-2}$	$5.207450e^{-3}$	$8.869431e^{-2}$	$6.381593e^{-3}$
$7.230649e^{-2}$	$1.604499e^{-2}$	$8.093846e^{-2}$	$5.207450e^{-3}$	$8.888536e^{-2}$	$6.426845e^{-3}$
$7.264884e^{-2}$	$1.544664e^{-2}$	$8.113501e^{-2}$	$5.213857e^{-3}$	$8.907783e^{-2}$	$6.471719e^{-3}$
$7.293325e^{-2}$	$1.481837e^{-2}$	$8.133111e^{-2}$	$5.223276e^{-3}$	$8.927205e^{-2}$	$6.514761e^{-3}$
$7.318117e^{-2}$	$1.417474e^{-2}$	$8.152705e^{-2}$	$5.235707e^{-3}$	$8.946700e^{-2}$	$6.554296e^{-3}$
$7.340496e^{-2}$	$1.352752e^{-2}$	$8.172277e^{-2}$	$5.251124e^{-3}$	$8.966305e^{-2}$	$6.587953e^{-3}$
$7.362964e^{-2}$	$1.283583e^{-2}$	$8.191826e^{-2}$	$5.269296e^{-3}$	$8.986042e^{-2}$	$6.612587e^{-3}$
$7.386732e^{-2}$	$1.209621e^{-2}$	$8.211351e^{-2}$	$5.289893e^{-3}$	$9.005877e^{-2}$	$6.627673e^{-3}$
$7.411894e^{-2}$	$1.135624e^{-2}$	$8.230851e^{-2}$	$5.312660e^{-3}$	$9.025742e^{-2}$	$6.638132e^{-3}$
$7.437378e^{-2}$	$1.068381e^{-2}$	$8.250327e^{-2}$	$5.337469e^{-3}$	$9.045605e^{-2}$	$6.649024e^{-3}$
$7.460680e^{-2}$	$1.012143e^{-2}$	$8.269777e^{-2}$	$5.364177e^{-3}$	$9.065463e^{-2}$	$6.660807e^{-3}$
$7.481085e^{-2}$	$9.671244e^{-3}$	$8.289206e^{-2}$	$5.392454e^{-3}$	$9.085323e^{-2}$	$6.672106e^{-3}$
$7.498892e^{-2}$	$9.294861e^{-3}$	$8.308617e^{-2}$	$5.421918e^{-3}$	$9.105190e^{-2}$	$6.682251e^{-3}$
$7.516839e^{-2}$	$8.938029e^{-3}$	$8.328013e^{-2}$	$5.452385e^{-3}$	$9.125061e^{-2}$	$6.691613e^{-3}$
$7.535096e^{-2}$	$8.589030e^{-3}$	$8.347391e^{-2}$	$5.483888e^{-3}$	$9.144934e^{-2}$	$6.700584e^{-3}$
$7.553582e^{-2}$	$8.251230e^{-3}$	$8.366753e^{-2}$	$5.516413e^{-3}$	$9.164807e^{-2}$	$6.709200e^{-3}$
$7.572291e^{-2}$	$7.923774e^{-3}$	$8.386103e^{-2}$	$5.549669e^{-3}$	$9.184683e^{-2}$	$6.717377e^{-3}$
$7.591656e^{-2}$	$7.605464e^{-3}$	$8.405446e^{-2}$	$5.583276e^{-3}$	$9.204562e^{-2}$	$6.725106e^{-3}$
$7.612042e^{-2}$	$7.293637e^{-3}$	$8.424797e^{-2}$	$5.616456e^{-3}$	$9.224440e^{-2}$	$6.732447e^{-3}$
$7.634392e^{-2}$	$6.989919e^{-3}$	$8.444175e^{-2}$	$5.647999e^{-3}$	$9.244321e^{-2}$	$6.739426e^{-3}$
$7.659420e^{-2}$	$6.697399e^{-3}$	$8.463592e^{-2}$	$5.677057e^{-3}$	$9.264203e^{-2}$	$6.746015e^{-3}$
$7.687571e^{-2}$	$6.422118e^{-3}$	$8.483032e^{-2}$	$5.704484e^{-3}$	$9.284086e^{-2}$	$6.752222e^{-3}$
$7.718648e^{-2}$	$6.171419e^{-3}$	$8.502478e^{-2}$	$5.731575e^{-3}$	$9.303970e^{-2}$	$6.758087e^{-3}$
$7.751820e^{-2}$	$5.951283e^{-3}$	$8.521921e^{-2}$	$5.758877e^{-3}$	$9.323855e^{-2}$	$6.763617e^{-3}$
$7.785206e^{-2}$	$5.771349e^{-3}$	$8.541363e^{-2}$	$5.786160e^{-3}$	$9.343741e^{-2}$	$6.768788e^{-3}$
$7.816646e^{-2}$	$5.631984e^{-3}$	$8.560809e^{-2}$	$5.813220e^{-3}$	$9.363628e^{-2}$	$6.773579e^{-3}$
$7.844978e^{-2}$	$5.526955e^{-3}$	$8.580256e^{-2}$	$5.840167e^{-3}$	$9.383516e^{-2}$	$6.777994e^{-3}$
$7.869933e^{-2}$	$5.449412e^{-3}$	$8.599703e^{-2}$	$5.867176e^{-3}$	$9.403405e^{-2}$	$6.782037e^{-3}$
$7.891713e^{-2}$	$5.391184e^{-3}$	$8.619150e^{-2}$	$5.894167e^{-3}$	$9.423294e^{-2}$	$6.785698e^{-3}$
$7.910826e^{-2}$	$5.347064e^{-3}$	$8.638601e^{-2}$	$5.920825e^{-3}$	$9.443184e^{-2}$	$6.788947e^{-3}$
$7.927850e^{-2}$	$5.313006e^{-3}$	$8.658059e^{-2}$	$5.946970e^{-3}$	$9.463075e^{-2}$	$6.791743e^{-3}$
$7.943353e^{-2}$	$5.286489e^{-3}$	$8.677515e^{-2}$	$5.973324e^{-3}$	$9.482967e^{-2}$	$6.794054e^{-3}$
$7.957845e^{-2}$	$5.265853e^{-3}$	$8.696953e^{-2}$	$6.000934e^{-3}$	$9.502859e^{-2}$	$6.795854e^{-3}$
$7.971768e^{-2}$	$5.249488e^{-3}$	$8.716350e^{-2}$	$6.031288e^{-3}$	$9.522751e^{-2}$	$6.797135e^{-3}$

# Bibliographie

- [1] B. J. ABU-GHANNAM et R. SHAW : Natural transition of boundary layers-the effects of turbulence, pressure gradient and flow history. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 22(5):213 – 228, 1980.
- [2] M. ALAM et N. D. SANDHAM : Direct Numerical Simulation of 'short' laminar separation bubbles with turbulent reattachment. *Journal of Fluid Mechanics*, 410:1 – 28, 2000.
- [3] D. ARNAL : Etablissement et résolution des équations de stabilité en écoulement compressible. Exemple de résultats. Rapport technique ONERA/DERAT N° 35/5018, 1986.
- [4] D. ARNAL, E. COUSTOLS et J. C. JUILLEN : Etude expérimentale et théorique de la transition sur une aile en flèche infinie. *La Recherche Aéospatiale*, 1984-4:275 – 290, 1984.
- [5] D. ARNAL, M. HABIBALLAH et E. COUSTOLS : Théorie de l'instabilité laminaire et critères de transition en écoulement bi et tridimensionnel. *La Recherche Aéospatiale*, 1984-2:125 – 143, 1984.
- [6] D. ARNAL et J. C. JUILLEN : Etude de l'intermittence dans une région de transition de la couche limite. *La Recherche Aéospatiale*, 1977-3:147–166, 1977.
- [7] D. ARNAL, J. C. JUILLEN et Michel R. : Analyse de la transition de la couche limite avec gradient de pression nul ou positif. *21e Conférence Annuelle sur l'Aviation et l'Astronautique, Tel Aviv et Haifa (Israël)*, 1979.
- [8] C. D. AUBERTINE et J. K. EATON : Turbulence development in a non-equilibrium turbulent boundary layer with mild adverse pressure gradient. *J. Fluid Mech.*, 532:345 – 364, 2005.
- [9] B. AUPOIX : Introduction to turbulence modelling, from mixing to Reynolds stress length models. *Von Karman Institute Lecture Series*, 2004.
- [10] B. S. BALDWIN et H. LOMAX : Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *AIAA Paper*, 78-257, 1978.
- [11] B.S. BALDWIN et T.J. BARTH : A one-equation turbulence transport model for high Reynolds number wall-bounded flows. *NASA, TM 102847*, 1990.
- [12] H. BAUMERT, BURCHARD et E. H., Kleine : On second momentum closure for marine turbulence. *29th International Liège Colloquium on Ocean Hydrodynamics : Marine turbulence revisited*, May 1997.
- [13] H. BÉZARD : Optimisation of two-equations turbulence models. *Advances in Turbulence*, page 978, 2000.
- [14] P. BRADSHAW : The turbulence structure of equilibrium boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 29:625 – 645, 1967.
- [15] J.P. BURG : *Maximum entropy spectral analysis*, pages 34–41. 1967. in *Modern spectrum analysis* éd. D.G. Childers, IEEE Press, New-York, 1978.
- [16] J.P. BURG : *A new analysis technique for time series data*, pages 42–48. 1968. in *Modern spectrum analysis* éd. D.G. Childers, IEEE Press, New-York, 1978.

- [17] S. CATRIS et B. AUPOIX : Towards a calibration of the length-scale equation. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21:606–613, 2000.
- [18] J.B. CAZALBOU et P. BRADSHAW : Turbulent transport in wall bounded flows. evaluation of model coefficients using Direct Numerical Simulation. *Physics of Fluids*, 5(12):3233–3239, December 1993.
- [19] S. R. CHAKRAVARTHY : High resolution upwind formulation for the Navier-Stokes equations. *Von Karman Institute Lecture Series*, March 1988.
- [20] P. CHASSAING : *Turbulence en mécanique des fluides ; Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l’usage de l’ingénieur*. Collection Polytech. Cépaduès édition, 2000.
- [21] P. Y. CHOU : On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuations. *Quart. of Appl. Math.*, 1945.
- [22] T.J. COAKLEY : Implicit upwind methods for the compressible Navier-Stokes equations. *AIAA journal*, 23(2), 1983.
- [23] G. N. COLEMAN, J. KIM et P. R. SPALART : Direct Numerical Simulation of a decelerated wall-bounded turbulent shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 495:1 – 18, 2003.
- [24] J. COUSTEIX : *Aérodynamique : Turbulence et couche limite*. Ed. Cépaduès - Collection : La Chevêche, 1989.
- [25] E. COUSTOLS : *Stabilité et transition en écoulement tridimensionnel : cas des ailes en flèche*. Thèse de doctorat, 1983.
- [26] L. F. CRABTREE : The formation of regions of separated flow on wing surfaces. *ARC, R&M*, 3122, 1959.
- [27] F. DAUDE : *Méthode d’intégration temporelle implicite pour la simulation des grandes échelles. Application à la réduction de bruit de cavité*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2007.
- [28] S. DECK : *Simulation numérique des charges latérales instationnaires sur des configurations de lanceur*. Thèse de doctorat, Université d’Orléans, 2002.
- [29] J. DELERY : Effets de la viscosité et couche limite. *Cours ENSTA/INSTN*, 2007.
- [30] S.S. DIWAN, S.J. CHETAN et O.N. RAMESH : On the bursting criterion for laminar separation bubbles. *IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition, Fluid Mechanics and Its Application*, 78:401–407, 2006.
- [31] D. M. DRIVER : Reynolds shear stress measurements in a separated boundary layer. *AIAA Paper 91-1787*, Moffett Field, US, 1991.
- [32] J. R. EDWARDS et M.-S. LIOU : Low-diffusion flux splitting methods for flows at all speeds. *AIAA Journal*, 36(9):1610 – 1617, 1998.
- [33] J. A. EKATERINARIS et F. R. MENTER : Computation of oscillating airfoil flows with one- and two-equation turbulence models. *AIAA Journal*, 32:2359–2365, 1994.
- [34] elsA (ONERA) : A cfd software package for compressible flows around complex various geometries, <http://elsa.onera.fr>.
- [35] H. FASEL et D. POSTL : Interaction of separation and transition in boundary layers : Direct Numerical Simulations. *IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition, Fluid Mechanics and Its Application*, 78:71–88, 2006.
- [36] E. GARNIER, M. MOSSI, P. SAGAUT, P. COMTE et M. DEVILLE : On the use of shock capturing schemes for Large-Eddy Simulation. *J. Comput. Phys.*, 153(2):273–311, 1999.
- [37] M. GASTER : The structure and the behaviour of laminar separation bubbles. *NPL Aero Report 1181*, ARC 28.226, 1966.

- [38] M. GASTER : Laminar separation bubbles. *In Sixth IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition*, pages 1–13, 2006.
- [39] C.W. GEAR : *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
- [40] V. GLEIZE : *Simulation numérique d'écoulements turbulents compressibles hors-équilibre à l'aide de schémas multi-échelles*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 1994.
- [41] V. GLEIZE, R SCHIESTEL et V COUAILLIER : Multiple scale modeling of turbulent nonequilibrium boundary layer flows. *Phys. Fluids*, (8):2716, 1996.
- [42] C. GLEYZES, J. COUSTEIX et J.L. BONNET : Flow visualisation of laminar leading edge separation bubble. *In International Symposium on flow visualisation, Bochum*, 1980.
- [43] C. GLEYZES, J. COUSTEIX et J.L. BONNET : Theoretical and experimental study of low Reynolds number transitional separation bubbles. *In Conference on Low Reynolds Number Airfoil Aerodynamics*, 1985.
- [44] A. HATMAN et T. WANG : Separated-Flow Transition, Part 1 - Experimental Methodology and Mode Classification, Part 2 - Experimental Results, Part 3 - Primary Modes and Vortex Dynamics. *ASME Paper Nos. 98-GT-461, 98-GT-462, 98-GT-463*, 1998.
- [45] H. P. HORTON : A semi-empirical theory for the growth and bursting of laminar separation bubbles. *ARC, Britain, Current Paper 1073*, 1969.
- [46] [HTTP ://WWW.PUBLIC.IASTATE.EDU/ ZJW/HIOCFD.HTML](http://www.public.iastate.edu/~zjw/hio CFD.html) : First international workshop on high-order cfd methods. *In 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting, Nashville, Tennessee*, January 2012.
- [47] P. G. HUANG et P. BRADSHAW : The law of the wall for turbulent flows in pressure gradients. *AIAA Journal*, 33:624–632, 1995.
- [48] P. HUERRE et P.A. MONKEWITZ : Absolute and convective instabilities in free shear layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 159:151 – 168, 1985.
- [49] P. HUERRE et P.A. MONKEWITZ : Local and Global Instabilities in Spatially Developing Flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22:473–537, 1990.
- [50] ONERA Note interne n°154 : Application of a mixing length scheme to the study of equilibrium turbulent boundary layers. - application d'un schéma de longueur de mélange à l'étude des couches limites turbulentes d'équilibre. 1969.
- [51] E.N. JACOBS et A. SHERMAN : Airfoil section characteristics as affected by variations of the Reynolds number. *NACA Rep. 586*, 1937.
- [52] J. JIMENEZ : Resolution requirements for velocity gradients in turbulence. *Annual Research Briefs*, (SEE N95-22437 06-34):357–364, 1994.
- [53] A. V. JOHANSSON et A. D. BURDEN : *Transition, Turbulence and Combustion Modelling : Lectures Notes from the 2nd ERCOFTAC Summerschool held in Stockholm 10-16 June*. ERCOFTAC Series. 1998.
- [54] D.A. JOHNSON et L.S. KING : A mathematically simple turbulence closure model for attached and separated turbulent boundary layers. *AIAA journal*, 23:1684–1692, 1985.
- [55] B.M JONES : An experimental study of the stalling of wings. *R.&M.*, (1588), 1933.
- [56] B.M JONES : Stalling. *Journal Roy. Aero. Soc.*, 38(285):753–770, Sept 1934.
- [57] L.E. JONES, R.D. SANDBERG et N.D. SANDHAM : Direct Numerical Simulations of forced and unforced separation bubbles on an airfoil at incidence. *Journal of Fluid Mechanics*, 602:175–207, 2008.

- [58] W. P. JONES et B. E. LAUNDER : The prediction of laminarization with two-equation model of turbulence. *Journal Heat Mass Transfer*, 15:301 – 314, 1972.
- [59] J. C. KOK : Resolving the dependence on freestream values for the  $k-\omega$  turbulence model. *AIAA Journal*, 38:1292–1295, July 2000.
- [60] L. LARCHEVÊQUE : *Simulation des grandes échelles de l'écoulement au dessus d'une cavité*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2003.
- [61] L. LARCHEVÊQUE, P. SAGAUT, I. MARY, O. LABBÉ et P. COMTE : Large-Eddy Simulation of a compressible flow past a deep cavity. *Physics of Fluids*, 15(1):193 – 210, January 2003.
- [62] S. LARDEAU, A. FADAI-GHOTBI et M. LESCHZINER : Modelling by-pass transition and separation-induced transition by reference to pre-transitional fluctuation energy. *ERCOTAC Bulletin 80*, pages 72–80, 2009.
- [63] S. LARDEAU, A. FADAI-GHOTBI et M. LESCHZINER : Modelling bypass and separation-induced transition by reference to pre-transitional fluctuation energy. *ERCOTAC bulletin*, 80, 72, 2009.
- [64] B. E. LAUNDER et B. SHARMA : Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near spinning disk. *Letter in Heat and Mass Transfer*, 1:131 – 138, 1989.
- [65] B.E. LAUNDER, G.J. REECE et W. RODI : Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.*, 68:537–566, 1975.
- [66] C. LAURENT, I. MARY, V. GLEIZE, D. ARNAL et A. LERAT : RANS modelling of a transitional laminar separation bubble on a flat plate with DNS database. AIAA 40th Fluid Dynamics Conf., Chicago, USA, 28 June-1 July 2010.
- [67] C. LAURENT, I. MARY, V. GLEIZE, A. LERAT et D. ARNAL : DNS and RANS modelling of a transitional separation bubble on a flat plate. 8th Intern. ERCOTAC Symp. on Eng. Turbulence Modelling and Measurements (ETMM8), Marseille, 9-11 June 2010.
- [68] C. LAURENT, I. MARY, V. GLEIZE, A. LERAT et D. ARNAL : DNS database of a transitional separation bubble on a flat plate and application to RANS modeling validation. *Computers & Fluids*, 61:21–30, 2012.
- [69] A. LE PAPE, M. COSTES, F. RICHEL, F. DAVID et J. M. DELUC : Experimental study of dynamic stall control using deployable leading-edge vortex generators. *In 67th AHS Forum*, 3-5 mai 2011. Virginia Beach, Virginia, USA.
- [70] M. LESIEUR et D. SCHERTZER : Amortissement autosimilaire d'une turbulence à grand nombre de Reynolds. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 17(4):609–646, 1978.
- [71] M. S. LIOU et C. J. STEFFEN : A new flux splitting scheme. *J. Comput. Phys.*, 107:23–29, 1993.
- [72] K. LODEFIER et E. DICK : Modelling of unsteady transition in low-pressure turbine blade flows with two dynamic intermittency equations. *Flow, Turbulence and Combustion*, 76(2): 103–132, 1993.
- [73] L.K. LOFTIN et W.J. BURSNALL : The effects of variations in Reynolds number between  $3.0 \cdot 10^8$  and  $25.0 \cdot 10^8$  upon the aerodynamic characteristics of a number of NACA 6-series airfoil sections. *NACA TN 639*, 1938.
- [74] J.L. MACCORMAK : Solution of the Navier-Stokes equations in the three dimensions. *AIAA Paper*, 90-1520, 1990.
- [75] N.N. MANSOUR, J. KIM et P. MOIN : Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in turbulent channel flows. *J. Fluid Mech.*, 1988.

- [76] O. MARXEN, M. LANG, U. RIST, O. LEVIN et D.S. HENNINGSON : Mechanisms for spatial steady three-dimensional disturbance growth in a non-parallel and separating boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 634:165–189, 2009.
- [77] O. MARXEN, U. RIST et S. WAGNER : The effect of spanwise-modulated disturbances on transition in a 2-D separated boundary layer. *AIAA Paper 2003-789*, Reno, US, 2003.
- [78] I. MARY : *Methode de Newton approchée pour le calcul d'écoulements instationnaires comportant des zones à très faible nombre de Mach*. Thèse de doctorat, Université Paris XI, 1999.
- [79] I. MARY et P. SAGAUT : LES of a flow around an airfoil near stall. *AIAA J.*, 40(6):1139–1145, 2002.
- [80] E. MASSON, V. GLEIZE et R. SCHIESTEL : New energy-frequency turbulence multiple scale model for simulation of non-equilibrium turbulent boundary layer flows. *36th AIAA Fluid Dynamics Conf. & Exhib.*, San Francisco, US, 2006.
- [81] U. MAUCHER, U. RIST et S. WAGNER : Secondary instabilities in a laminar separation bubble. *Note on numerical fluid mechanics*, 60:229 – 236, edited by H. Körner and R. Hilbig, 10<sup>th</sup> Stab Symposium 96, Braunschweig, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1997.
- [82] RE MAYLE et A SCHULZ : The path to predicting bypass transition. *Journal of Turbomachinery*, 119 (3):405–411, 1997.
- [83] G. B. MCCULLOUGH et D. E. GAULT : Examples of three representative types of airfoil-section stall at low speed. *NACA TN2502*, 1951.
- [84] F. R. MENTER : Influence of freestream values on  $k-\omega$  turbulence prediction. *AIAA Journal*, 30(8):1651–1659, 1992.
- [85] F. R. MENTER : Performance of popular turbulence models for attached and separated adverse pressure gradient flows. *AIAA Journal*, 30(8):2066–2072, August 1992.
- [86] F. R. MENTER : Two-equation eddy-viscosity transport turbulence model for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, August 1994.
- [87] F. R. MENTER : A correlation-based transition model using local variables-Part 1 : Model formulation. *Journal of Turbomachinery*, 128:413–422, July 2006.
- [88] F. R. MENTER, R. LANGTRY et S. VÖLKER : Transition modeling for general CFD applications in aeronautics. *Flow Turbulence Combust*, 77:277–303, 2006.
- [89] F. R. MENTER, R. B. LANGTRY, S. R. LIKKI, Y. B. SUZEN, P. G. HUANG et S. VÖLKER : A correlation-based transition model using local variables. *Journal of Turbomachinery*, 128:413–422, 2006.
- [90] C.B. MILLIKAN et A.L. KLEIN : The effect of turbulence. *Aircraft Engineering*, 5(8):169–174, August 1933.
- [91] Y. NAGANO, T TSUJI et T. HOURA : Structure of turbulent boundary layer subjected to adverse pressure gradient. *Eleventh Symp. on Turbulent Shear Flows, Grenoble, France*, September, 8-10, 1997.
- [92] T.R. NIEW : The stability of the flow in a laminar separation bubble. *PhD Dissertation, University Of Cambridge*, 1993.
- [93] P. R. OWEN et L. KLANFER : On the laminar boundary layer separation from the leading edge of a thin airfoil. *ARC Conf. Proc. 220*, 1953.
- [94] G. PAILHAS, R. HOUEVILLE, P. BARRICAU, A. LE PAPE, A. FAUBERT, P. LOIRET et F. DAVID : Experimental investigation of dynamic stall. *In 31th European Rotorcraft Forum*, 2005. Florence, Italy.

- [95] M. PAMIÈS, E. GARNIER, A. MERLEN et P. SAGAUT : Response of a spatially developing turbulent boundary layer to active control strategies in the framework of opposition control. *Phys. Fluids*, 19(10):102–108, 2007.
- [96] L. PAULEY : Response of two-dimensional separation to three-dimensional disturbances. *ASME I : J. Fluids Engng*, 116:433 – 438, 1994.
- [97] L. PAULEY, P. MOIN et W. C. REYNOLDS : The structure of two-dimensional separation. *J. Fluid Mech.*, 220:397 – 411, 1990.
- [98] M. PECHIER : *Prévisions numériques de l'effet Magnus pour des configurations de munitions*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 1999.
- [99] J. PERRAUD : Calculs de stabilité linéaire de couches limites compressibles. description et mode d'emploi du code castet. Rapport technique ONERA/DERAT N° 124/5118.032, 1997.
- [100] P. QUÉMÉRÉ : *Une méthode multi-domaine/multi-résolution avec applications au couplage LES/LES et RANS/LES*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2001.
- [101] B. RAVERDY : *Simulation des grandes échelles de l'écoulement se développant dans un étage complet de turbines basse pression*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2004.
- [102] B RAVERDY, I. MARY, P. SAGAUT et L. LIAMIS : High-resolution Large-Eddy Simulation of the flow around a low pressure turbine blade. *AIAA Journal*, 41(3):390 – 397, 2003.
- [103] F. RICHEZ : *Simulation et modélisation de la transition par bulbe de décollement laminaire. Application au décrochage dynamique*. Thèse de doctorat, Université Paris 13, 2008.
- [104] F. RICHEZ, I. MARY, V. GLEIZE et C. BASDEVANT : Near stall simulation of the flow around an airfoil using zonal RANS/LES coupling method. *Computers and Fluids*, 10:1016, 2007.
- [105] K. RICHTER, A. LE PAPE, T. KNOPP, M. COSTES, V. GLEIZE et A.D. GARDNER : Improved two-dimensional dynamic stall prediction with structured and hybrid numerical methods. *AHS Journal*.
- [106] U. RIST : On instabilities and transition in laminar separation bubbles. *In CEAS Aerospace Aerodynamics Research Conference*, 2002. 10 - 12 June, Cambridge, UK.
- [107] U. RIST : Nonlinear effects of 2D and 3D disturbances on laminar separation bubbles. *Proceedings of IUTAM Symposium on Non Linear Instability of Nonparallel flows*, pages 324 – 333, edited by S. Lin, Springer, New York, 1994.
- [108] U. RIST et U. MAUCHER : Direct Numerical Simulation of 2-D and 3-D instability waves in a laminar separation bubble. *Application of Direct and Large Eddy Simulation to Transition and Turbulence*, April 18-21 1994. Chania, Crete, Greece.
- [109] W. B. ROBERTS : Calculation of laminar separation bubbles and their effect on airfoil performance. *AIAA Journal*, 18(1):25 – 30, 1980.
- [110] R. SCHIESTEL : *Sur un nouveau modèle de turbulence appliqué aux transferts de quantités de mouvement et de chaleur*. Thèse de doctorat, Université de Nancy I, 1974.
- [111] F. G. SCHMITT : About Boussinesq's turbulent viscosity hypothesis : historical remarks and a direct evaluation of its validity. *Comptes Rendus Mécanique*, 335:617–627, September-October 2007.
- [112] C. SHU et S. OSHER : Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *J. Comput. Phys.*, 77:439–471, 1988.
- [113] M. SKOTE et D.S. HENNINGSON : Direct Numerical Simulation of a separated turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 471:107–136, 2002.

- [114] A.M.O. SMITH et T. CEBECI : Numerical solution of the turbulent boundary layer equations. *Douglas aircraft division report DAC 33735*, 1967.
- [115] A.M.O. SMITH et N. GAMBERONI : Transition, pressure gradient and stability theory. *Douglas Aircraft Co. Report ES 26388, El Segundo, California*, 1956.
- [116] P. SPALART et M. Kh. STRELETS : Mechanisms of transition and heat transfer in a separation bubble. *J. Fluid Mech.*, 403:229 – 249, 2000.
- [117] P. R. SPALART : Direct Numerical Simulation of a turbulent boundary layer up to  $Re_\theta = 1410$ . *Journal of Fluid Mechanics*, 187:61–98, 1988.
- [118] P. R. SPALART et S. R. ALLMARAS : A one-equation turbulence model for aerodynamics flows. *La Recherche Aéospatiale*, 1:5 – 21, 1994.
- [119] P. R. SPALART et J. H. WATMUFF : Experimental and numerical study of a turbulent boundary layer with pressure gradients. *Journal of Fluid Mechanics*, 249:337 – 371, 1993.
- [120] G. R. SRINIVASAN, J. A. EKATERINARIS et W. J. MCCROSKEY : Dynamic stall of an oscillating wing. *AIAA Paper 93-3403*, 1993.
- [121] J.L. THOMAS et R.W. WALTERS : Upwind relaxation algorithms for the Navier-Stokes equations. *AIAA journal*, 25(4):527–534, 1987.
- [122] K. W. THOMPSON : Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems, i. *J. Comput. Phys.*, 68:1–24, 1987.
- [123] K. W. THOMPSON : Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems, ii. *J. Comput. Phys.*, 89:439–461, 1990.
- [124] J.L. VAN INGEN : A suggested semi-empirical method for the calculation of the boundary layer transition region. *Delft University of Technology, Report VTH-74*, 1956.
- [125] A.E. VON DOENHOFF et N. TETERVIN : Investigation of the variation of lift coefficient with Reynolds number at a moderate angle of attack on a low-drag airfoil. *NACA CB 19*, November 1942.
- [126] S. WALLIN : *Engineering turbulence modelling for CFD with a focus on explicit algebraic Reynolds stress models*. Thèse de doctorat, 2000.
- [127] D.K. WALTERS et D. COKLJAT : A three-equation eddy-viscosity model for Reynolds-Averaged-Navier-Stokes simulations of transitional flow. *Journal of Fluids Engineering*, 130, 121401, 2008.
- [128] D.K. WALTERS et J.H. LEYLEK : A new model for boundary layer transition using a single-point RANS approach. *Journal of Turbomachinery*, 126, 193, 2004.
- [129] D. C. WILCOX : A half century historical review of the k-omega model. 1991, *AIAA, 29th Aerospace Sciences Meeting, Reno, US.*, Report 91-615.
- [130] D. C. WILCOX : Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26(11):1299–1310, November 1988.
- [131] J. WISSINK et W. RODI : DNS of separation-induced transition influenced by free-stream fluctuations. In *Sixth IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition*, pages 389–394, 2006.
- [132] D.S. WOODWARD : *An Investigation of the Flow in Separation Bubbles*. Thèse de doctorat, Queen Mary College, University of London, 1970.
- [133] X. WU et P. MOIN : Direct Numerical Simulation of turbulence in a nominally zero-pressure-gradient flat-plate boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 630:5–41, 2009.
- [134] Z. YANG et P. R. VOKE : Large-Eddy Simulation of boundary-layer separation and transition at a change of surface curvature. *J. Fluid Mech.*, 439:305–333, 2001.

- [135] S. YOON et A. JAMESON : A multigrid LU-SSOR scheme for approximate Newton iteration applied to Euler equations. *NASA, CR-179524*, 1986.



## ETUDE D'ÉCOULEMENTS TRANSITIONNELS ET HORS ÉQUILIBRE PAR DES APPROCHES DNS ET RANS

**RESUME :** Le décrochage est un phénomène aérodynamique instationnaire susceptible d'apparaître sur de nombreux profils aérodynamiques. Il résulte d'un décollement important de l'écoulement vis-à-vis de la paroi de l'aile et dégrade considérablement les performances de vol. Sur certains profils de pales d'hélicoptères, d'éoliennes ou de rotors, ce phénomène se produit dans des conditions d'utilisation normales et justifie la recherche de méthodes de modélisation accessibles industriellement. Le décrochage est initié au bord d'attaque par l'apparition d'une petite région de recirculation de fluide appelée bulbe de décollement laminaire où l'écoulement transitionne de l'état laminaire vers l'état turbulent. Ce phénomène encore mal connu met en jeu transition et écoulements hors équilibre auxquels les outils de modélisation RANS habituellement employés ne sont pas adaptés. Dans cette étude, un bulbe transitionnel typique d'un écoulement de bord d'attaque de pale d'hélicoptère (profil OA209 à un nombre de Reynolds  $Re_{\infty}=1.8 \times 10^6$  et  $15^\circ$  d'incidence) est isolé sur une plaque plane. Une simulation DNS de cet écoulement est réalisée à l'aide du logiciel FUNK de l'ONERA afin de servir de base de données pour l'amélioration des modèles RANS. L'évolution des bilans de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente ainsi que les principales hypothèses RANS (isotropie de la turbulence, Boussinesq, équilibre production/dissipation) sont analysées. Une étude des principaux modèles RANS développés dans le logiciel elsA de l'ONERA est ensuite réalisée en pondérant les grandeurs turbulentes par une fonction de transition reproduisant l'intermittence de la turbulence. Le modèle k- $\omega$  de Wilcox couplé à une fonction de transition optimisée a donné les résultats les plus proches de la DNS et a donc été l'objet d'une analyse plus approfondie, notamment une évaluation des principales équations bilans et une application de ce modèle et de sa méthode de transition à un cas de transition naturelle de plaque plane.

**MOTS CLEFS :** DNS, RANS, décrochage, décollement, BDL, bulbe de décollement laminaire, transition, intermittence, plaque plane, modélisation, énergie cinétique turbulente.

## STUDY OF TRANSITIONNAL NON-EQUILIBRIUM FLOWS THROUGH DNS AND RANS APPROACHES

**ABSTRACT :** The stall is an unsteady aerodynamic phenomenon that may occur on many aerodynamic profiles. It consists in a large separation of the flow from the wall of the wing and significantly deteriorates the flight performances. On some blade profiles such as helicopters, turbines or rotors, this phenomenon occurs under normal conditions of use and justifies the research of industrially accessible modeling methods. The stall is initiated at the leading edge by the appearance of a small region of fluid recirculation called a "laminar separation bubble" where the flow transitions from the laminar to the turbulent state. This still poorly understood phenomenon involves transition and non-equilibrium flows for which commonly used RANS modeling tools are not suitable. In this study, a transitional bubble typical of an helicopter leading edge flow (OA209 profile at a Reynolds number  $Re_{\infty}=1.8 \times 10^6$  and  $15^\circ$  of incidence) is reproduced on a flat plate. A DNS simulation of this flow is performed using the ONERA FUNK software to serve as a database for RANS models improvements. The evolution of turbulent kinetic energy budgets as well as the main RANS assumptions (isotropy of turbulence, Boussinesq hypothesis, production/dissipation balance) are analyzed. The main RANS models developed in the ONERA elsA software are then studied by weighting the turbulent quantities with a transition function reproducing the intermittency of the turbulence. The k- $\omega$  Wilcox model coupled with an optimized transition function gave the best results and was therefore kept for a more in-depth analysis, including an assessment of the main budgets and an application of this model and its transition method to a natural transition test case on a flat plate.

**KEYWORDS :** DNS, RANS, stall, separation, LSB, laminar separation bubble, transition, intermittency, flat plate, modeling, turbulent kinetic energy.

